Les marches aléatoires quantiques

Hamon Ewan – Matthieu Laruelle – Marc Bertholat -- Raphaël Issartial

Sommaire

I. Les marches aléatoires classiques

- Historique
- Modèle mathématique de base
- Types de marches aléatoires (simple, biaisée, sur graphes)
- Finance, physique, science des données
- Exemple illustratif

II. Introduction aux marches aléatoires quantiques

- Superposition quantique et intrication
- Impact de la mécanique quantique sur le comportement
- Description du modèle mathématique

III. Propriétés des marches aléatoires quantiques

- Vitesse de propagation
    - *Comparaison avec les marches aléatoires classiques*
- Avantag*es des marches aléatoires quantiques*
    - *Capacité d'explorer des espaces plus vastes*
    - *Potentiel d'accélération des algorithmes quantiques*

IV. Applications des marches aléatoires quantiques

- Algorithmes quantiques
    - *Exemples d'algorithmes exploitant les marches aléatoires*
- Exploration de graphes quantiques
    - *Applications dans la recherche d'optimisation*
- Implications en physique théorique et informatique quantique

V. Comparaison entre marches aléatoires classiques et quantiques

- Différences fondamentales dans le comportement
- Avantages et inconvénients de chaque modèle
- Implications pour la recherche et les technologies futures

VI. Conclusion

- Synthèse des concepts abordés
- Importance de la recherche sur les marches aléatoires quantiques
- Perspectives dans le domaine

VII. Références

- Bibliographie des ouvrages et articles sur les marches aléatoires classiques et quantiques
- Articles de recherche récents sur les marches aléatoires quantiques

1. Les marches aléatoires classiques

- ***Historique***

L'idée de la marche aléatoire a été introduite en 1905 par le biostatisticien **Karl Pearson** pour étudier la dispersion de moustiques dans une forêt. Pearson pose alors la question suivante : « Après un certain nombre de pas aléatoires, quelle est la probabilité qu'un individu se trouve à une certaine distance de son point de départ ? » La réponse fut fournie par Lord Rayleigh, qui avait déjà travaillé sur des problèmes similaires liés aux ondes acoustiques. Pearson conclut que, dans un espace ouvert, un individu effectuant une marche aléatoire reste en moyenne à proximité de son point de départ.

Le terme **"marche aléatoire"** a été formellement introduit entre 1919 et 1921 par le mathématicien hongrois **George Pólya**, qui utilisa d'abord l'expression allemande « Irrfahrt » pour désigner ce concept.

Une marche aléatoire, ou **random walk**, est un modèle mathématique issu de la théorie des probabilités, dans lequel un objet (comme une particule) se déplace en effectuant une série de pas successifs aléatoires. À chaque étape, l'objet a une probabilité déterminée de se déplacer dans différentes directions, selon les règles définies pour la marche. Ce modèle peut être appliqué dans des espaces de dimensions variées : ligne (1D), plan (2D), ou espaces de dimensions supérieures.

Essentiellement, une marche aléatoire représente un chemin aléatoire où chaque pas est déterminé par le hasard, sans lien avec les pas précédents. Ce concept est fondamental pour la compréhension des processus stochastiques et trouve des applications importantes en analyse de données et en modélisation statistique. La marche est dite **symétrique** lorsque la probabilité de chaque direction est égale, par exemple $p=½$ lors du lancer d'une pièce équilibrée avant chaque pas.

- ***Modèle mathématique de base***

Définition : Soit $d \geq 1$ et soit ($e_1, \ldots, e_d$) la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soit (X_i une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans { ($\pm e_1, \ldots, \pm e_d$) }. On appelle marche aléatoire associée la suite de variables aléatoires :

$$(S_n)_{n \geq 1} \text{ où } S \text{ est défini par } S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

- ***Types de marches aléatoires***

Il existe plusieurs types de marches aléatoires :

- **Marche aléatoire simple** : probabilité égale pour chaque direction.
- **Marche aléatoire biaisée** : probabilités inégales, ce qui crée une tendance à dériver dans une direction.
- **Marche aléatoire sur graphes** : appliquée aux réseaux, où les étapes dépendent de la structure du graphe, utile pour l'analyse des réseaux sociaux et en informatique.

- ***Domaines d'application***

Finance : En finance, la théorie de la marche aléatoire est utilisée pour modéliser les mouvements de prix des actifs. Elle postule que les mouvements futurs des prix sont indépendants des mouvements passés, ce qui remet en question la prévisibilité des marchés. Ce modèle aide les investisseurs à évaluer la volatilité des actifs et à développer des stratégies quantitatives de gestion des risques.

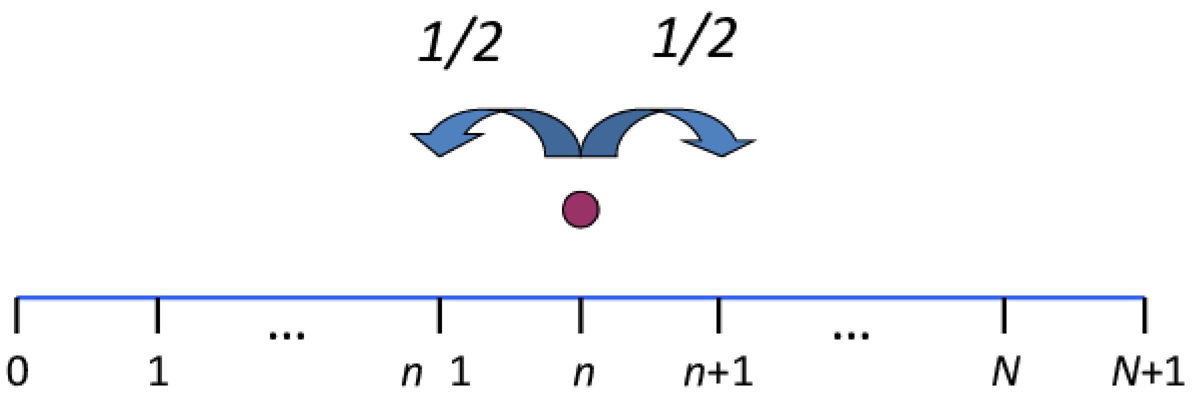
Physique et sciences naturelles : En physique, les marches aléatoires modélisent des phénomènes comme la diffusion des particules. Par exemple, une particule en suspension dans un fluide subit des collisions aléatoires avec les molécules, ce qui modifie sa trajectoire. Cette approche est également appliquée pour comprendre la conduction thermique et la propagation de polluants.

Science des données et apprentissage automatique : En science des données, les marches aléatoires sont utilisées dans des algorithmes d'apprentissage par renforcement et des processus décisionnels markoviens. Ces concepts permettent aux algorithmes de simuler des environnements dynamiques et d'optimiser leurs performances par l'expérience.

Propriétés statistiques : Les marches aléatoires obéissent à des lois statistiques importantes, comme la **loi des grands nombres** et le **théorème central limite**. La première stipule que la position moyenne converge vers une valeur attendue avec un grand nombre de pas, tandis que la seconde indique que la distribution de la position tend vers une distribution normale après un grand nombre de pas.

Exemple illustratif

Imaginez un jeu où un joueur se trouve au centre d'une ligne et lance une pièce de monnaie. Si la pièce tombe sur pile, il avance d'un pas ; si elle tombe sur face, il recule. La position finale du joueur après plusieurs lancers représente le résultat d'une marche aléatoire simple sur une dimension.



2. Introduction aux marches aléatoires quantiques

Une marche aléatoire quantique (quantum walk) est une version quantique de la marche aléatoire classique, exploitant les propriétés uniques de la mécanique quantique, notamment la superposition et l'intrication.

- ***Superposition Quantique***

Définition : Le principe de superposition quantique stipule qu'un système quantique peut exister dans plusieurs états simultanément jusqu'à ce qu'une mesure soit effectuée.

Caractéristiques :

Dans une marche aléatoire classique, l'objet choisit une direction à chaque étape. En revanche, dans une marche quantique, l'objet peut être dans un état de superposition, lui permettant de "se déplacer" simultanément dans plusieurs directions.

Mathématiquement, un état quantique peut être représenté comme une superposition linéaire d'états de base :

$$\psi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

où α et β sont des nombres complexes tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Exemple : Le célèbre chat de Schrödinger illustre la superposition. Tant que la boîte n'est pas ouverte, le chat est à la fois vivant et mort dans une superposition d'états, et l'état se "réduit" à l'un ou l'autre lorsque la mesure est effectuée.

- ***Intrication Quantique***

Définition :

L'intrication quantique est un phénomène où deux particules deviennent liées, de sorte qu'un changement d'état de l'une affecte instantanément l'état de l'autre, quelle que soit la distance qui les sépare.

Caractéristiques :

Les particules intriquées partagent un état quantique unique, même si elles sont spatialement séparées.

Par exemple, si on mesure le spin d'une particule intriquée, on obtient instantanément des informations sur l'état de l'autre particule.

Exemple : Si on a deux particules intriquées, A et B, et que l'on mesure le spin de A, si A a un spin vers le haut, alors B aura nécessairement un spin vers le bas, et vice versa.

Relation avec la Superposition : L'intrication est une forme particulière de superposition. Lorsque deux particules sont intriquées, elles existent dans une superposition d'états corrélés, illustrée par l'état intriqué :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B + |1\rangle_A|0\rangle_B)$$

Importance : Ces concepts sont à la base de nombreux domaines de recherche, notamment l'informatique quantique, la cryptographie quantique et la téléportation quantique. Ils remettent en question notre compréhension de la réalité et ouvrent des perspectives fascinantes pour le futur.

- ***Impact de la mécanique quantique sur le comportement***

1. <u>Vitesse de Dispersion</u> : Comparaison des Distributions de Probabilité

Marche aléatoire classique : Dans une marche aléatoire classique en une dimension, la probabilité *P(x,t)* de trouver le marcheur à la position x après t étapes suit une distribution gaussienne. La formule est :

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$$

Cette distribution gaussienne implique que la position du marcheur suit une croissance en $\sqrt{t}$ (c'est-à-dire diffusivement).

Marche aléatoire quantique : En revanche, dans une marche aléatoire quantique, la distribution de probabilité se propage linéairement avec le temps tt, ce qui entraîne une vitesse de dispersion beaucoup plus rapide :

$$\langle x^2 \rangle \propto t^2$$

Cette propriété de dispersion balistique signifie que la distribution de probabilité se déplace plus rapidement que dans une marche classique. Cette rapidité de dispersion s'explique par le fait que la particule quantique se trouve dans une superposition de multiples états positionnels, amplifiant ainsi son rayon de dispersion.

2. <u>Effets d'Interférence</u> : Influence de la Superposition sur les Chemins

Dans une marche quantique, le marcheur est dans une superposition d'états, ce qui permet à différentes trajectoires de produire des interférences constructives ou destructives. Cela peut être modélisé en utilisant une matrice de rotation unitaire pour chaque "coin quantique."

Fonction d'état dans la marche quantique : Soit $|\psi(t)\rangle$ l'état quantique du marcheur après t étapes. Chaque étape est décrite par une opération unitaire U appliquée à l'état initial $|\psi(0)\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = U^t |\psi(0)\rangle$$

Matrice de coin quantique (Hadamard) : Pour chaque étape, on utilise une transformation de Hadamard H qui met la particule en superposition d'aller à gauche ou à droite :

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Évolution de l'état quantique : L'état évolue de manière à créer des interférences entre les trajectoires. Les états de position gauche et droite se combinent, renforçant ou annulant des probabilités, ce qui entraîne des pics de probabilité distincts par rapport à une marche classique.

3. <u>Directionnalité</u> : Biais Induit par le Coin Quantique

La marche aléatoire quantique peut présenter une directionnalité influencée par le type de "quantum coin" utilisé (le coin quantique est la matrice de rotation appliquée à chaque étape).

Coin biaisé : Pour introduire une directionnalité dans la marche quantique, on peut utiliser une matrice de coin biaisée, par exemple :

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

- Si $\theta \neq \pi/4$, alors la marche quantique présente une probabilité accrue de se déplacer dans une direction spécifique, créant un biais.
- Dans une marche classique, un tel biais pourrait être introduit en utilisant des probabilités asymétriques, mais le biais dans une marche quantique est renforcé par la superposition et l'interférence.

- ***Description du modèle mathématique***

L'espace d'états d'une marche aléatoire quantique se compose de deux parties :

1. L'espace de position Hp, engendré par les états de base $|x\rangle$ où $x \in Z$ représente la position sur la ligne.
2. L'espace de pièce Hc, typiquement un espace bidimensionnel engendré par les états de base $|0\rangle$ et $|1\rangle$.

L'espace de Hilbert total est le produit tensoriel $H=Hp \otimes Hc$.

Opérateur d'Évolution

L'évolution de la marche quantique est régie par deux opérations :

1. Opération de pièce C : Agit sur l'espace de pièce
2. Opération de déplacement S : Déplace le marcheur selon l'état de la pièce

L'opérateur d'évolution global pour une étape est donné par : $U=S(I \otimes C)$ où II est l'opérateur identité sur l'espace de position.

$$U = S(I \otimes C)$$

Marche de Hadamard

Un choix courant pour l'opération de pièce est l'opérateur de Hadamard :

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'opérateur de déplacement *S* est défini comme :

$$S = \sum_x |x+1\rangle\langle x| \otimes |0\rangle\langle 0| + |x-1\rangle\langle x| \otimes |1\rangle\langle 1|$$

Cela déplace le marcheur d'un pas vers la droite si l'état de la pièce est $|0\rangle$, et d'un pas vers la gauche s'il est $|1\rangle$.

Distribution de Probabilité

Après *n* étapes, l'état de la marche quantique est :

$$|\psi_n\rangle = U^n|\psi_0\rangle$$

où $|\psi 0\rangle$ est l'état initial. La probabilité de trouver le marcheur à la position *x* après *n* étapes est :

$$P_n(x) = \langle x|\mathrm{Tr}_c(|\psi_n\rangle\langle\psi_n|)|x\rangle$$

où *Trc* désigne la trace partielle sur l'espace de pièce.

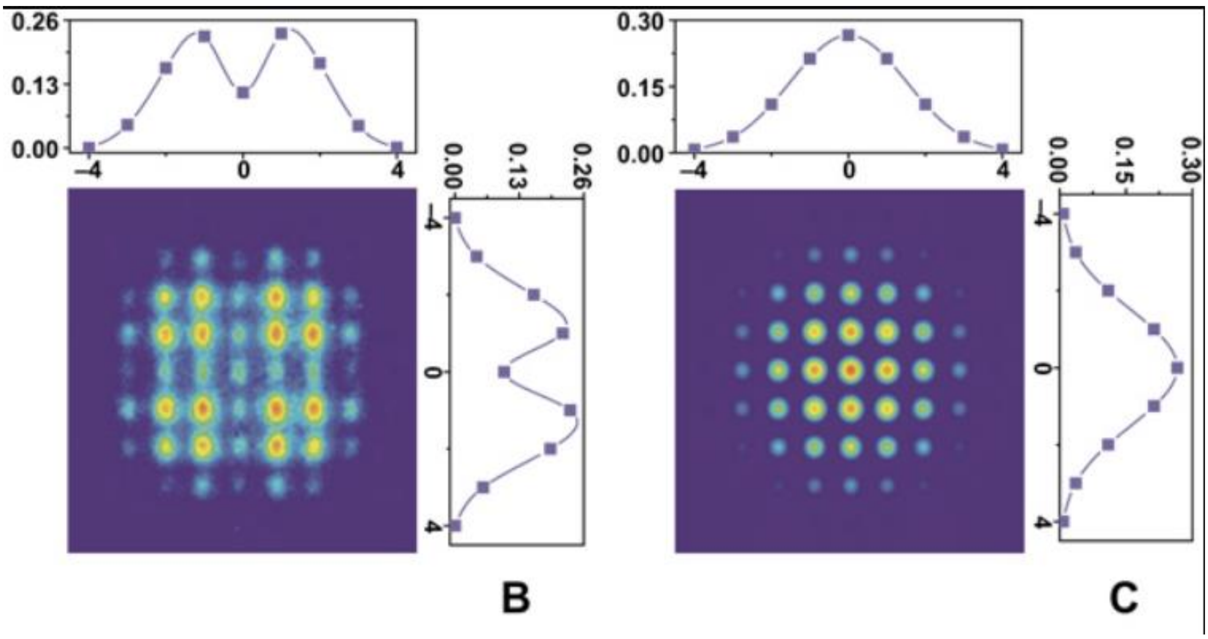
3. Propriétés des marches aléatoires quantiques

- ***Vitesse de propagation : comparaison***

La vitesse de propagation est une caractéristique fondamentale qui différencie les marches aléatoires classiques des marches aléatoires quantiques.

1. **Marches Aléatoires Classiques : Diffusion Lente**
   a. Dans une marche aléatoire classique, la position moyenne du marcheur évolue proportionnellement à la racine carrée du temps, selon une diffusion de type Brownien.
   b. La largeur de la distribution de probabilité (ou écart-type) suit la loi : $\sigma(t) \propto t$
   c. Cela signifie qu'au fur et à mesure que le temps passe, le marcheur classique s'éloigne lentement de son point de départ, la diffusion restant concentrée autour de la position initiale. Ce comportement est typique des processus de diffusion, comme le mouvement des molécules dans un fluide, et montre que l'exploration de l'espace de recherche est limitée à court terme.
2. **Marches Aléatoires Quantiques : Propagation Rapide**

    a. Dans une marche aléatoire quantique, le marcheur utilise la superposition et l'interférence pour se propager beaucoup plus rapidement. En effet, la distribution de probabilité d'une marche quantique s'étend linéairement avec le temps, ce qui est souvent qualifié de "ballistique" : $\sigma(t) \propto t$
    b. Cela signifie qu'en un temps donné, le marcheur quantique parcourt une distance beaucoup plus grande qu'un marcheur classique, avec une distribution qui s'étend plus rapidement. Ce phénomène est dû aux effets d'interférence quantique, qui renforcent certaines trajectoires tout en annulant d'autres, permettant ainsi une exploration plus efficace de l'espace.
3. **Visualisation des Différences de Propagation**
    a. Dans un graphe de la position en fonction du temps, la distribution d'un marcheur classique s'étalerait en une courbe gaussienne centrée sur la position de départ et s'élargissant lentement.
    b. Pour une marche quantique, en revanche, la distribution aurait une forme bien distincte avec deux pics principaux s'éloignant du point de départ, formant une courbe en "M". Ces deux pics traduisent une plus grande probabilité de trouver le marcheur à des positions extrêmes, ce qui contraste avec la répartition centrée et symétrique d'une marche classique.



(**B**) An evolution pattern of a 2D QW from heralded single-photon experiment at a propagation length *z* = 4.31 mm and its projection profile onto the *x* and *y* axes. (**C**) A theoretical evolution pattern of a 2D classical random walk in a 2D Gaussian distribution with a sigma of 1.5 spacing units and its projection profile onto the *x* and *y* axes.

- ***Avantages des marches aléatoires quantiques***

Capacité d'explorer des espaces plus vastes

- En mécanique quantique, la superposition permet à un marcheur quantique de prendre plusieurs chemins simultanément au lieu de suivre une seule trajectoire comme dans les marches classiques. Cette capacité se révèle particulièrement puissante pour des applications nécessitant une exploration exhaustive d'un espace de solutions.

Potentiel d’accélération des algorithmes quantiques

- La vitesse de propagation linéaire du marcheur quantique en fonction du temps permet de gagner en efficacité, comparativement à la diffusion quadratique des marches classiques. Cette accélération est particulièrement utile pour des algorithmes nécessitant de trouver une solution optimale en réduisant les chemins non pertinents grâce à des interférences constructives et destructives.

4. Applications des marches aléatoires quantiques

Voici les sources associées aux exemples d'algorithmes et applications des marches aléatoires quantiques mentionnés :

- ***Algorithmes quantiques***

Algorithme de recherche dans des graphes : L'algorithme quantique de recherche, basé sur les marches quantiques développées par Lov Grover, permet de rechercher des éléments marqués dans un graphe avec une efficacité supérieure à celle des méthodes classiques. Cet algorithme est détaillé dans l'article de G.A. Bezerra, P.H.G. Lugão, et R. Portugal, publié dans *Physical Review A* en 2021. Ce travail explore l'extension des méthodes analytiques à divers types de graphes, y compris les grilles bidimensionnelles et les hypercubes.

Optimisation et résolution de problèmes de décision : Les marches aléatoires quantiques sont utilisées dans l'algorithme de détection de collisions de L. Magniez, M. Santha, et M. Szegedy, qui améliore les temps de recherche dans des bases de données non structurées. Cette méthode est basée sur des extensions des marches quantiques pour explorer des structures de données complexes. Ces travaux ont été publiés dans des conférences sur l'informatique quantique et sont également référencés sur arXiv pour des versions révisées.

- ***Applications dans la recherche d’optimisation***

Problèmes de couverture minimale : Les QW aide à identifier les solutions optimales dans des espaces de solutions étendus.

Modèles d'optimisation dynamique : Intégration des QW pour résoudre des problèmes comme le "voyageur de commerce" ou le routage.

- ***Implications en physique théorique et informatique quantique***

Simulation des particules : Les marches aléatoires quantiques sont également utilisées pour modéliser des systèmes physiques, notamment dans la dynamique des particules. Par exemple, dans cet article, des chercheurs ont utilisé des marches aléatoires quantiques bidimensionnelles pour modéliser des interactions non linéaires, où deux particules interagissent uniquement lorsqu'elles occupent la même position dans l'espace. Cela a permis de simuler des phénomènes tels que des collisions de particules et la formation d'états moléculaires liés, prédits par la théorie quantique.

Cryptographie quantique : Amélioration des protocoles de communication sécurisée via l'exploration de chemins optimaux.

Informatique quantique : Utilisées dans les simulations pour la résolution des équations de Schrödinger discrètes.

5. Comparaison entre marches aléatoires classiques et quantiques

- ***Différences fondamentales***

Les marches aléatoires classiques se basent sur des transitions probabilistes entre états, modélisant des processus comme la diffusion de particules ou la prise de décisions aléatoires. Leur probabilité de position après plusieurs étapes suit souvent une distribution gaussienne. En revanche, les marches quantiques reposent sur des transitions unitaires, exploitant des superpositions d’états et l’interférence quantique. Cela leur confère une distribution de probabilité beaucoup plus large, augmentant ainsi la probabilité d’atteindre des zones éloignées plus rapidement que dans un modèle classique.

- ***Avantages et inconvénients de chaque modèle***

Classiques :

  - Avantages : Simples à implémenter, largement étudiées, adaptées aux systèmes où seules des probabilités classiques sont nécessaires.
  - Inconvénients : Leur convergence peut être lente, particulièrement dans des systèmes complexes où un grand nombre d’étapes est requis pour obtenir une distribution stationnaire (par exemple, pour l'échantillonnage dans des graphes de grande taille).

Quantiques :

- Avantages : Les marches quantiques permettent une accélération significative dans des tâches comme la recherche dans des bases de données (exemple : algorithme de Grover) ou l'échantillonnage rapide grâce à leur capacité à explorer plusieurs chemins simultanément grâce à la superposition.
- Inconvénients : Leur implémentation nécessite un contrôle précis des systèmes quantiques et reste limitée par les contraintes matérielles actuelles (comme la décohérence). Leur programmation nécessite une infrastructure avancée comme des ordinateurs quantiques

- ***Applications concrètes***

- Recherche dans des graphes :

Les marches aléatoires classiques sont utilisées pour des problèmes comme la navigation dans les réseaux ou l'échantillonnage statistique. Les marches quantiques, elles, trouvent des applications dans des algorithmes comme celui de Szegedy, où elles permettent une recherche plus rapide dans les bases de données non structurée

- Optimisation :

Les marches quantiques sont également utilisées pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire, en s'appuyant sur leur convergence rapide vers des états optimaux. Par exemple, l'algorithme QUBO peut être implémenté en tirant parti des avantages des interférences quantiques

- ***Implications théoriques et pratiques***

Théoriquement, les marches quantiques montrent que les principes fondamentaux de la mécanique quantique, comme la superposition et l’interférence, peuvent offrir des avantages computationnels significatifs. Pratiquement, elles révolutionnent des domaines comme la chimie quantique, où elles aident à simuler des systèmes complexes, ou les sciences des données, où elles améliorent des tâches de recherche et d'optimisation.

Cependant, leur impact est actuellement limité par les capacités des ordinateurs quantiques disponibles, nécessitant des efforts continus dans la recherche sur les qubits physiques et les algorithmes quantiques. Cela souligne l’importance d’investissements dans les technologies quantiques pour exploiter pleinement leur potentiel

6. Conclusion

- ***Synthèse des concepts abordés***

Les marches aléatoires, qu'elles soient classiques ou quantiques, sont des outils fondamentaux pour modéliser des systèmes dynamiques et résoudre des problèmes complexes. Les marches classiques, bien établies, servent des applications allant de la finance à la biologie. Les marches quantiques, en revanche, tirent parti des propriétés uniques de la mécanique quantique, comme la superposition et l'interférence, pour explorer de nouveaux paradigmes de calcul. Leur capacité à accélérer la recherche dans des graphes, à améliorer les performances des algorithmes et à ouvrir la voie à des applications en physique et informatique quantique en fait un sujet de recherche prometteur.

- ***Perspectives des marches aléatoires et quantiques***

1. **Avancées en algorithmes quantiques** :

L'intégration des marches quantiques dans des algorithmes plus complexes, comme les méthodes hybrides combinant classique et quantique, pourrait élargir leur champ d'application. Par exemple, des améliorations dans les algorithmes de recherche et d'optimisation pourraient révolutionner des secteurs tels que la logistique et l'intelligence artificielle.

2. **Développement matériel** :

Les progrès dans la fabrication des ordinateurs quantiques, notamment la réduction des erreurs et l'augmentation du nombre de qubits, seront cruciaux pour exploiter pleinement le potentiel des marches quantiques. Par exemple, les avancées des entreprises comme IBM et Google Quantum AI visent à rendre les marches quantiques utilisables pour des tâches industrielles.

3. **Applications interdisciplinaires** :

Les marches quantiques pourraient transformer des domaines comme la chimie quantique (simulations moléculaires complexes), les télécommunications (protocoles cryptographiques sécurisés), ou encore la biologie computationnelle (analyse des réseaux biologiques complexes).

- ***Importance de la recherche dans ces domaines***

Investir dans la recherche sur les marches aléatoires et quantiques est essentiel pour comprendre et exploiter des phénomènes fondamentaux. Cela a des implications pratiques majeures, comme :

  - **Amélioration des technologies existantes** : Meilleures performances des algorithmes classiques et quantiques.
  - **Développement de nouvelles industries** : Cryptographie quantique, matériaux innovants, et simulations complexes en physique.
  - **Avancées fondamentales** : Une meilleure compréhension de la mécanique quantique et de ses interactions avec les systèmes complexes.

Les marches aléatoires quantiques, bien que naissantes, symbolisent un tournant dans l'exploration scientifique et technologique, avec un impact potentiel sur des problématiques globales comme l'optimisation énergétique et la gestion des données massives. La collaboration entre théoriciens, ingénieurs, et entreprises sera décisive pour transformer ces promesses en réalité.

7. Bibliographie et références

- Marche aléatoire classique :

https://fr.statisticseasily.com/glossaire/qu%27est-ce-que-la-marche-al%C3%A9atoire/

https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Marche-aleatoire.html

https://culturemath.ens.fr/thematiques/superieur/a-propos-de-marches-aleatoires

https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./m/marchealea.html

- Modèle mathématique :

https://verga.cpt.univ-mrs.fr/L3-phys.html

https://www.studysmarter.fr/resumes/mathematiques/statistiques-et-probabilites/marche-aleatoire/

https://www.lptms.universite-paris-saclay.fr/christophe_texier/files/2012/06/coursic_Alain_Comtet.pdf

- Distribution de probabilité :

Experimental two-dimensional quantum walk on a photonic chip

- Application :

Quantum-walk-based search algorithms with multiple marked vertices

Quantum walks: a comprehensive review

A 2D Quantum Walk Simulation of Two-Particle Dynamics

- Comparaison modèle classique et quantique :

https://pages.cs.wisc.edu/~dieter/Courses/2022s-CS710/Scribes/scribe12.pdf

https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1840611/FULLTEXT01.pdf

Reste à faire :

Recherche sur le nombre de citations d’articles de recherches

Implémentation python marche aléatoire classique vs quantique (en 2d et 3d)