Computer Graphics
제7장 3차원 그래픽스의 기하변환과 뷰잉

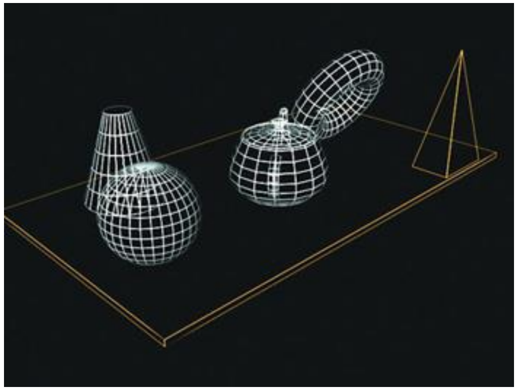
2015년 2학기

차례

- 3차원 그래픽스의 처리 과정
- 3차원 기하 변환
- 투영
- 좌표계 변환

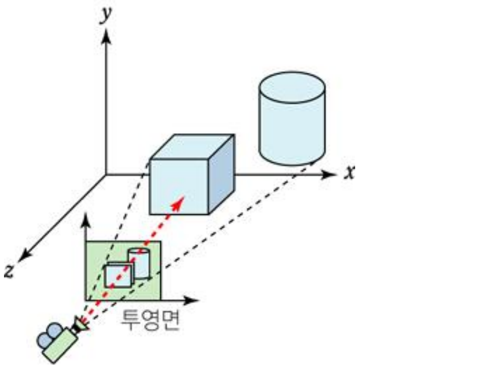
3차원 그래픽스의 처리과정

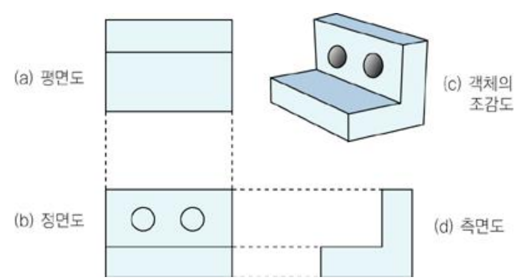
- 3차원 그래픽스
  - 모델링 과정 (Modeling): 3차원 객체들을 형상화
  - 투영 과정 (Projection): 모델링한 객체들을 모니터와 같은 2차원 평면에 투영
  - 렌더링 과정 (Rendering): 객체에 현실감을 부여
- 모델링 (Modeling, 3D Object Representation)
  - 다각형 표면 모델링 (Polygon Surface Modeling)
  - 매개변수를 이용한 곡면 모델링 (Parametric Surface Modeling)
  - 와이어 프레임 (Wire-frame)
  - 솔리드 모델링 (Solid Modeling)
  - 스위핑 (Sweeping)
  - 프랙털 기하학 (Fractal Geometry)
  - 입자 시스템 (Particle System)

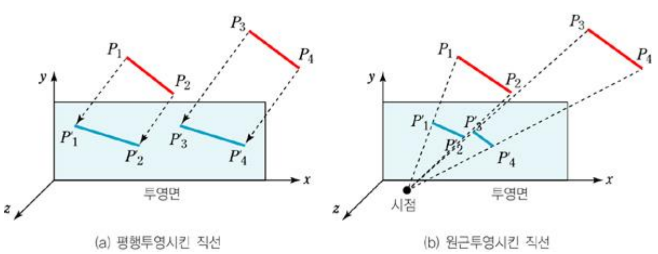


3차원 그래픽스의 처리과정

- Projection (투영)
  - 3차원 공간의 원뿔 -> 2차원의 삼각형 모양
  - Parallel Projection (평행투영)
    - 객체를 구성하는 각 요소들간의 상대적인 크기가 보존된다
    - 기계 설계, 건축 설계
  - Perspective Projection (원근투영)
    - 객체의 원근감이 잘 나타난다
    - 투영면에 보이는 2차원 객체의 크기는 3차원 객체와 투영면과의 거리에 반비례한다.
    - 건물의 조감도

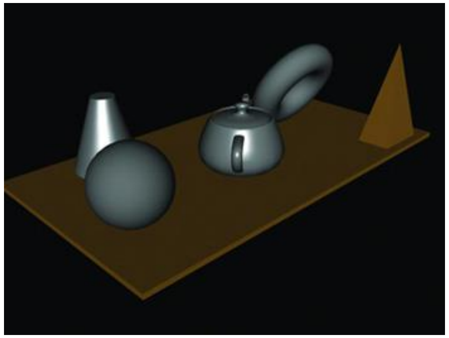
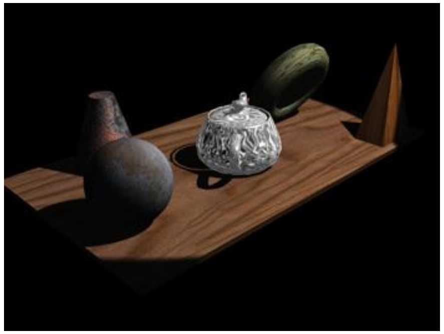


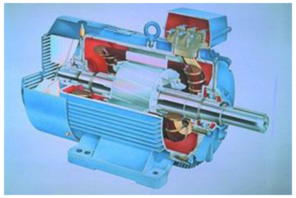




3차원 그래픽스의 처리과정

- Rendering (렌더링)
  - 투영된 그림을 렌더링하고 그림자나 색상의 변화를 표현하여 현실감 있는 그림을 만들어낸다.
    - Hidden Surface Removal (은면제거)
    - Shading (쉐이딩)
    - Texture Mapping (텍스쳐 매핑)
  - Depth Cueing (깊이 표시법)
    - 와이어프레임 객체를 현실감 있게 표시한다.
    - 시점에서 객체까지의 거리에 따라 와이어의 밝기를 다르게 나타내어 현실감을 추구한다.
    - 가까운 부분은 밝게, 먼 부분은 어둡게 표현
  - Exploded View (Cutaway View, 분해도, 단면도)
    - 3차원 객체를 표현할 때 객체의 내부 또는 절단면을 보여주면 객체의 내부구조를 정확하게 파악할 수 있다.

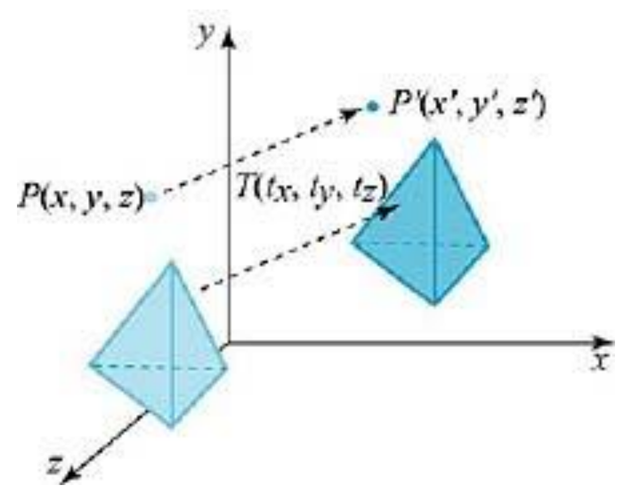






기본적인 3차원 기하변환

- Translation (이동)
  - 공간상의 한 점에 이동거리를 더하여 이동한다.
  - $x' = x + t_x$ $\quad$ $y' = y + t_y$ $\quad$ $z' = z + t_z$
  - $P' = T(t_x, t_y, t_z) \bullet P$

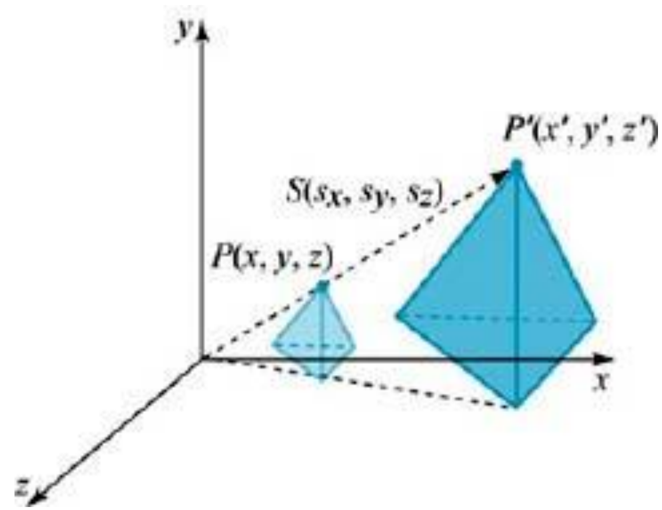
$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = T(t_x, t_y, t_z) \cdot P$$



기본적인 3차원 기하변환

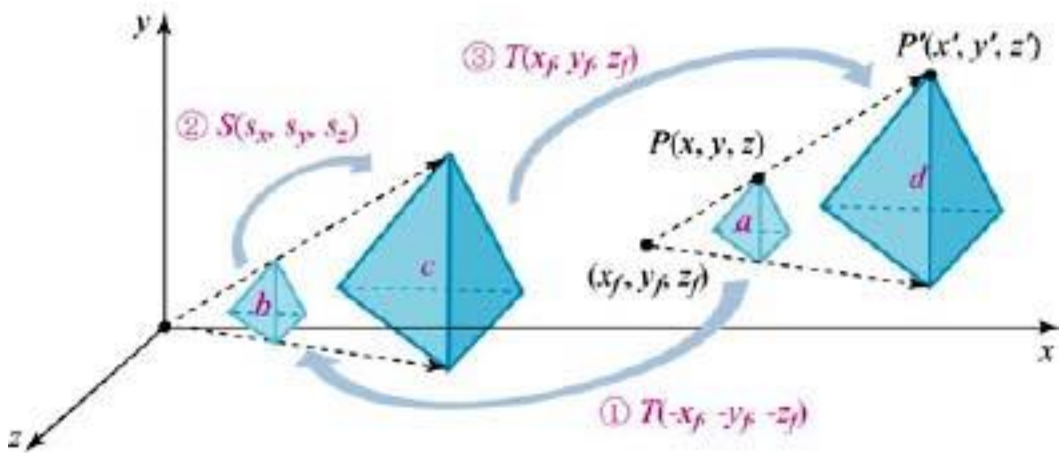
- Scaling (신축)
  - 객체의 크기를 확대 또는 축소, 비율 변화
  - $P' = S(s_x, s_y, s_z) \bullet P$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P$$



기본적인 3차원 기하변환

– 임의의 점에 대한 신축
  - Translation: $P' = (x_f, y_f, z_f) \bullet P$
  - Scaling: $P'' = (s_x, s_y, s_z) \bullet P'$
  - Translation: $P''' = (-x_f, -y_f, -z_f) \bullet P''$



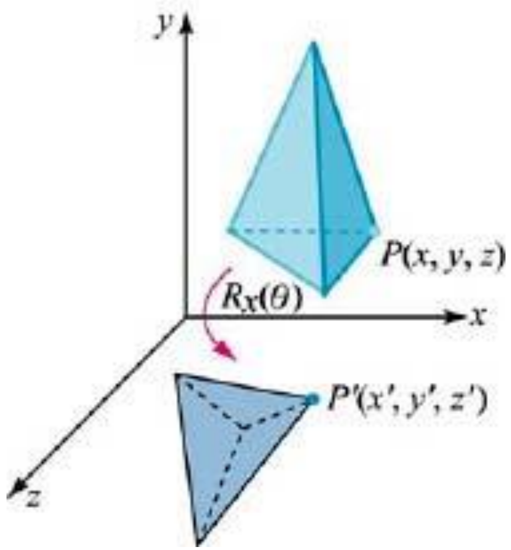
기본적인 3차원 기하변환

- Rotation
  - 객체를 기준 축 주위로 회전시킨다.
  - z-axis rotation: $P' = R_z(\theta) \bullet P$

    $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$

    $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$

    $z' = z$
  - x-axis rotation: $P' = R_x(\theta) \bullet P$



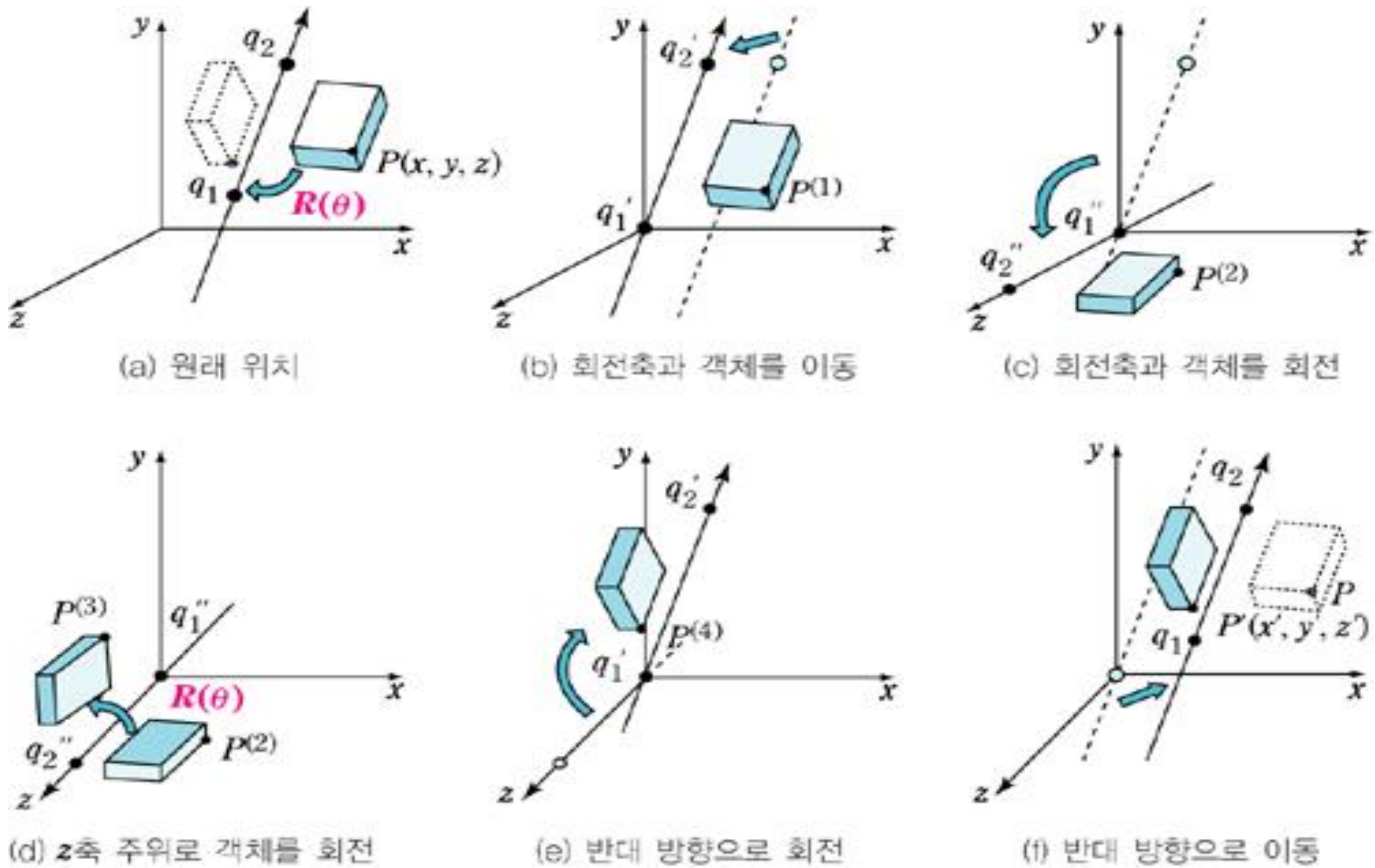
  - y-axis rotation: $P' = R_y(\theta) \bullet P$

기본적인 3차원 기하변환

- 임의의 축과 평행한 직선에 대한 회전
  - 회전축이 한 축이 되도록 이동
  - 그 축에 대해서 회전
  - 제자리로 역 이동

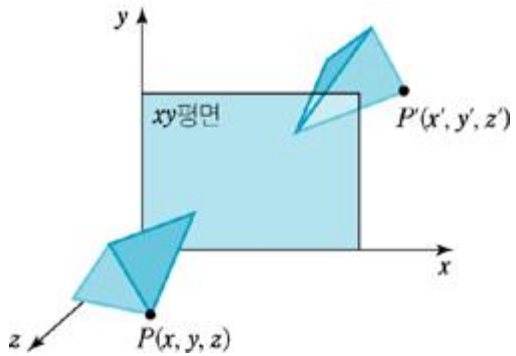
- 축과 평행하지 않은 일반적인 직선에 대한 회전
  - 회전축이 원점을 지나도록 이동시킨다.
  - 회전축을 좌표축 가운데 하나와 일치하도록 회전시킨다.
  - 일치된 좌표축을 중심으로 회전시킨다.
  - 2단계의 반대방향으로 회전한다.
  - 1단계의 반대방향으로 이동시킨다.

기본적인 3차원 기하변환



기타 3차원 기하변환

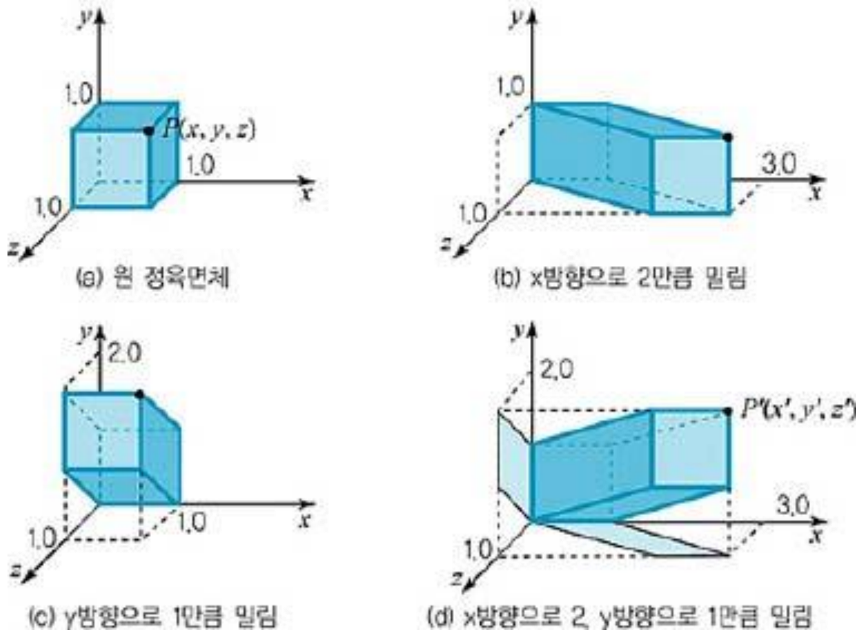
- Reflection (반사)
  - xy 평면에 반사
    - Z축 값의 부호가 바뀐다.



  - yz 평면에 반사
    - X축 값의 부호가 바뀐다.
  - xz 평면에 반사
    - Y축 값의 부호가 바뀐다.

기타 3차원 기하변환

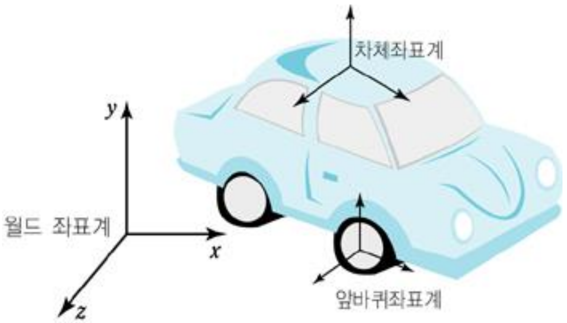
- Shearing (밀림)
  - z축을 기준으로 밀림 변환
    - x’ = x + az
    - y’ = y + bz
    - z’ = z
      - a, b: 각각 x축과 y축 방향으로 밀리는 정도
    - z축을 기준으로 한 밀림이므로 z값은 변함이 없다.



좌표계의 변환

- 객체를 고정시키고 좌표계를 변환시켜도 객체를 변환시킨 효과
  - 반대 방향으로 이동 또는 회전 시킨 효과
  - 좌표축을 확대/축소 하면 객체는 축소/확대 되는 효과
  - 여러 개의 객체를 묶어서 새로운 객체를 만드는 경우, 한번에 처리 가능
  - 뷰잉 과정에서 이용되며, 애니메이션 효과

- 자동차를 모델링한 예
  - 앞 바퀴를 표현하기 위한 좌표계와 차체를 표현하기 위한 좌표계가 상이
  - 자동차를 표현하기 위해서는 하나의 통합된 좌표계가 필요
  - 통합 좌표계와 앞 바퀴 좌표계간, 통합 좌표계와 차체 좌표계간에는 좌표변환이 필요

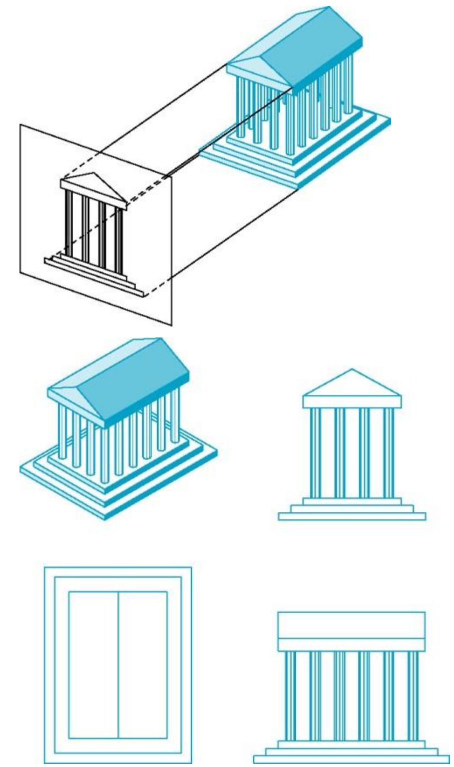


Projection (투영)

- 투영
  - 3차원 공간상의 그래픽 개체를 2차원 평면에 표현하여 그래픽 화면을 만들어 내는 과정
  - 평행 투영(Parallel Projection)
    - 출력면에 수평선의 선을 따라 물체 표면의 점들을 투영하는 방법
    - 객체들간의 상대적인 크기 정보가 보존된다.
    - 다른 view에 따라 물체의 다른 2차원 view를 얻을 수 있다.
  - 원근 투영 (Perspective Projection)
    - 공간상의 객체와 투영 중심점 (view point)를 연결하여 투영
    - 투영면과 시점이 먼 객체는 작게, 가까운 객체는 크게
    - 현실적인 결과

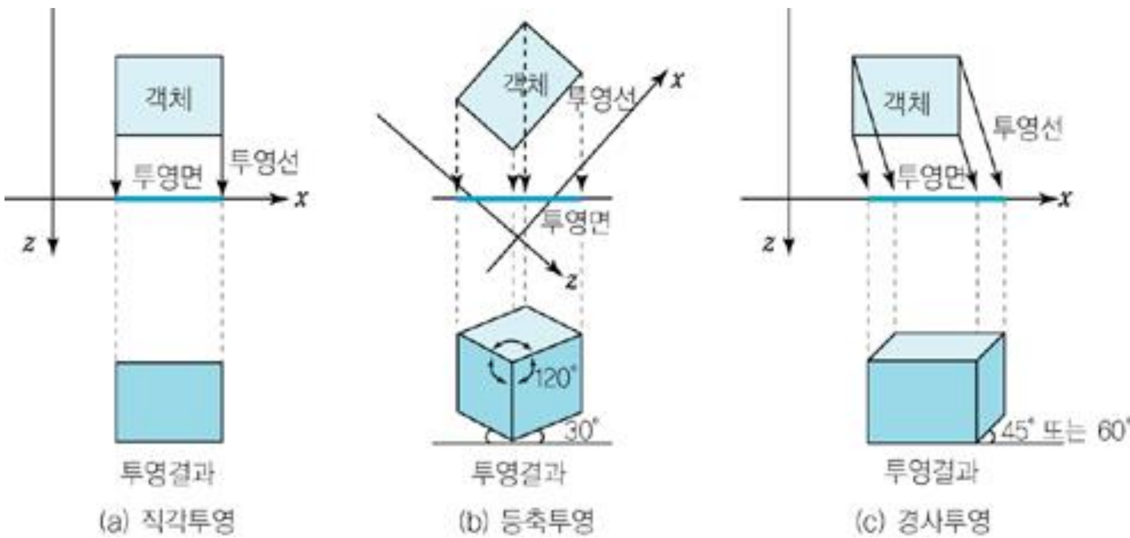
평행 투영

- 평행 투영 (Parallel Projection)
  - 직각 투영 (Orthographic Projection)
    - 투영방향과 투영면이 직각을 이루는 경우
    - 임의의 점 P(x, y, z) → P'(x_p , y_p , z_p)
      - $x_p = x$ $y_p = y$ $z_p = 0$
      - Front view (z 값 삭제): 입면도, 정면도
      - Side view (x 값 삭제): 측면도
      - Rear view (z 값 삭제)
      - Top view (y 값 삭제): 평면도
      - 엔지니어링, 건축에서 많이 사용한다 (길이와 각도가 정확하다)



평행 투영

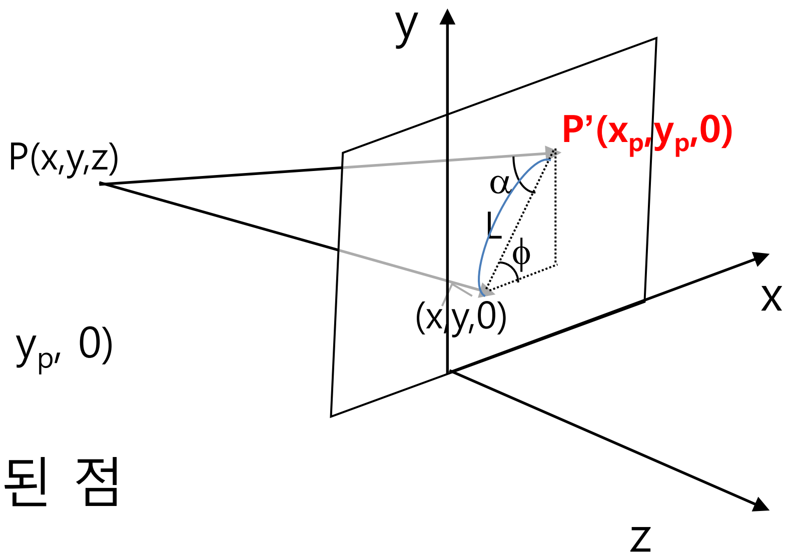
- 경사 투영(Oblique Projection)
  - 객체의 투영방향이 투영면과 수직이 아닌 일정한 각도를 이루는 경우
  - 2개의 각도로 정의
    - 각도 α (투영 각도): 점 (x, y, z)과 경사투영의 점 (x_p, y_p)의 선, 점 (x, y, z)과 직각투영의 점 (x, y)의 선이 만드는 각도
    - 각도 ϕ: 점 (x, y)와 점 (x_p, y_p)의 선과 투영면에 평행한 방향과의 각도



평행 투영

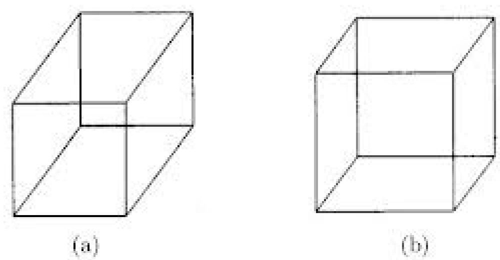
– 경사 투영에서
  - 투영면: $z = 0$
  - 공간상의 점: P (x, y, z)
  - 경사 투영된 점: $P'(x_p, y_p, z_p)$
    투영면이 z=0이므로 $P' = (x_p, y_p, 0)$
  - 투영선과 투영면의 각도: α
  - 점P가 직각투영된 점과 경사 투영된 점을 연결한 선분의 길이: L
  - L과 x축과 이루는 각도: ϕ
    – $\cos\phi = (x_p - x) / L \quad \rightarrow x_p = x + L\cos\phi$
    – $\sin\phi = (y_p - y) / L \quad \rightarrow y_p = y + L\sin\phi$
    – $\tan\alpha = z / L \quad \rightarrow L = z / \tan\alpha = zL_1$

  - $x_p = x + L\cos\phi = x + z(\cos\phi/\tan\alpha)$
  - $y_p = y + L\sin\phi = y + z(\sin\phi/\tan\alpha)$



평행 투영

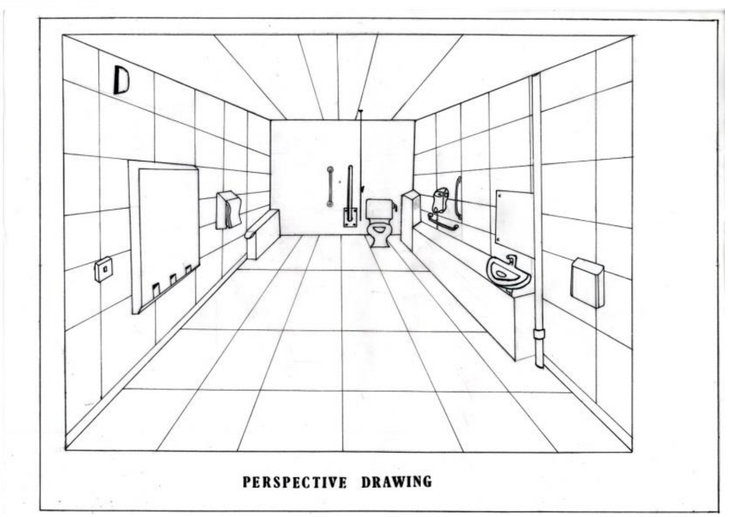
- 투영 각도 α에 대해서
  - α = 45' (tan α = 1) 인 경우: cavalier 투영
    - 투영면에 수직인 선들은 길이 변환이 없고, 정육면체의 깊이는 폭과 높이가 같은 길이로 투영된다.
  - α = 63.4' (tan α = 2)인 경우: cabinet 투영
    - 투영면과 수직인 선들은 그들 길이의 절반으로 투영되고 깊이가 폭과 높이의 절반으로 투영된다.

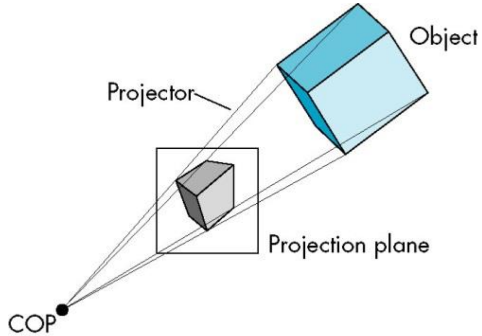


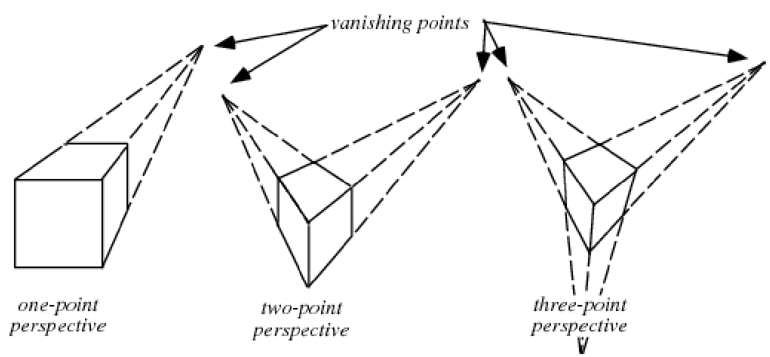
(a) Cavalier projection and (b) cabinet projection.

원근 투영

- Perspective Projection (원근 투영)
  - 객체와 투영중심점 (시점, view point)을 연결하여 투영 면에 2차원 객체를 만든다.
  - 투영면에서 멀리 떨어진 객체는 작게, 가까운 객체는 크게 나타나 현실감 있는 결과를 얻는다.

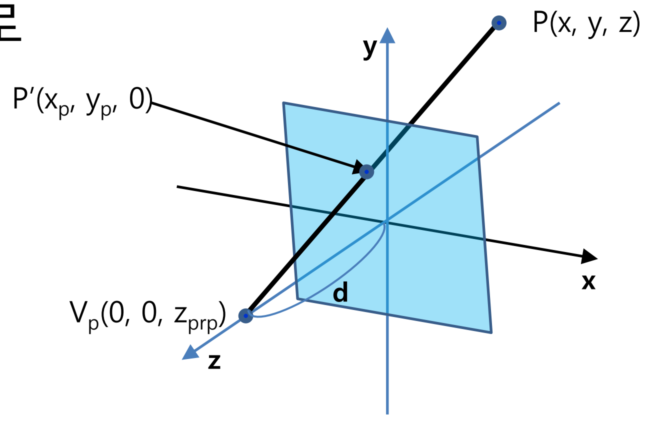






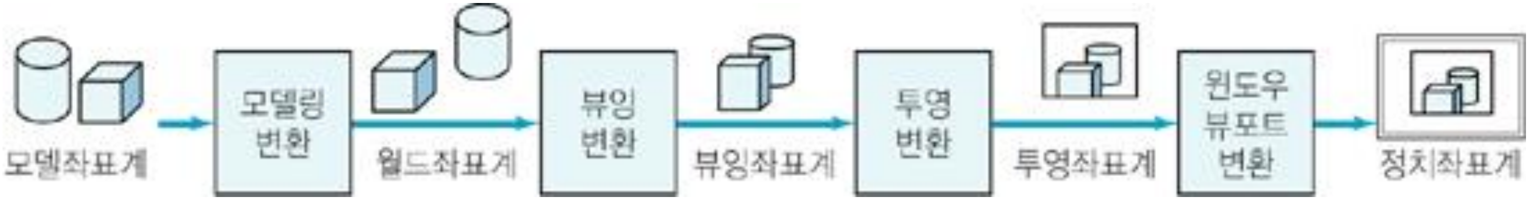
원근 투영

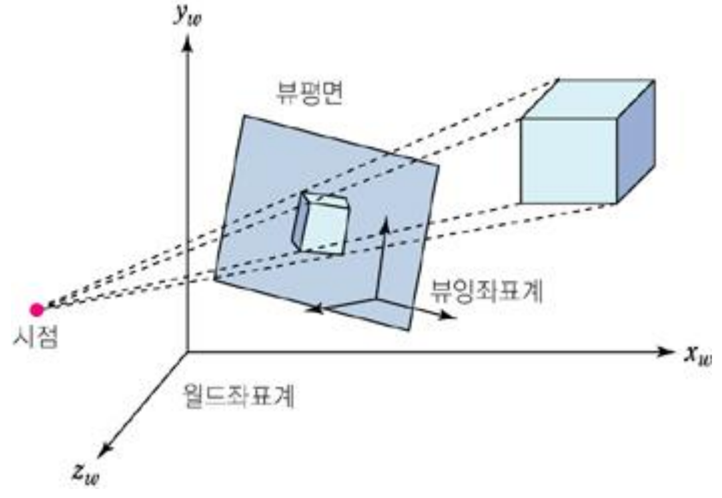
- Z축위의 임의의 점 로 투영할 때
  - 투영 참조점: z_{prp} 투영 면: z_{vp}
- 점 P(x, y, z)을 z축에 따라 투영면 (z = 0)에 원근 투영시키면,
  - 투영점 $P'(x_p, y_p, z_{vp})$, 투영참조점 좌표를 $(0, 0, z_{prp})$라 하면
  - $u = (z - z_{vp}) / (z - z_{prp}) = z / (z + d)$
    - z: (x, y, z)에서 투영면까지의 거리
    - d: 투영면에서 투영 참조점까지의 거리
  - 매개 변수 u : $0 \le u \le 1$ 의 값으로
    - $u = 0 \rightarrow P' = (x, y, z)$
    - $u = 1 \rightarrow P' = (0, 0, z_{prp})$
  - 매개변수 u를 사용하여
    - $x_p = x - xu = x - x\,(z/(z+d))$
    - $y_p = y - yu = y - y\,(z/(z+d))$



뷰잉 변환

- 뷰잉 과정
  - 3차원 객체들을 하나의 좌표계로 통합한 후 투영되어 출력 화면에 나타나게 되는 과정
  - 뷰잉 변환

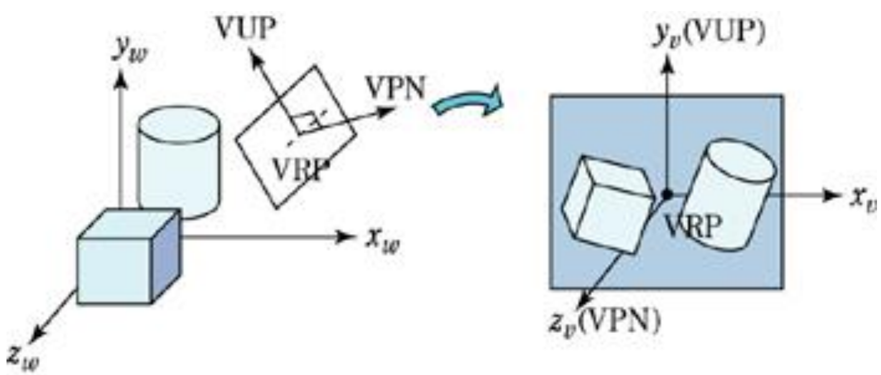




뷰잉 변환

- 투영 과정을 용이하게 처리하기 위해 월드좌표계를 뷰잉좌표계로 변환
  - 투영면이 z = 0 인 xy 평면으로 된다

- 뷰평면의 축 벡터와 법선벡터를 이용하여 설정
  - 원점: 뷰평면 상의 한점 (카메라 위치)
  - Normal Vector: z축에 해당 (바라보는 방향)
  - Up Vector: y축에 해당 (x축은 자동으로 결정) (카메라 각도)

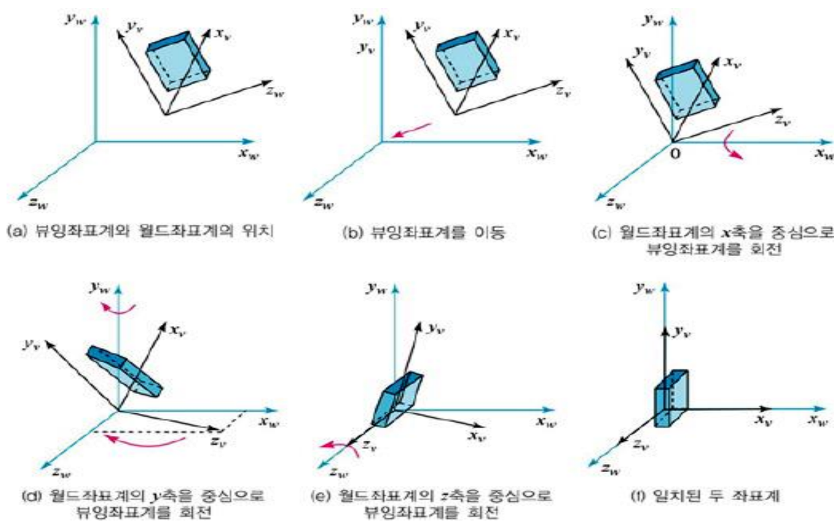


(a) 월드좌표계와 뷰평면 (b) 뷰평면에 나타난 객체

VRP: View Reference Point
VPN: View Plane Normal Vector
VUP: View Up Vector

좌표계 변환

- World Coordinate → Viewing Coordinate
  - 뷰잉좌표계가 주어짐
  - 뷰잉좌표계 원점을 월드좌표계 원점과 일치하도록 이동
  - 월드좌표계의 X축을 중심으로 뷰잉좌표계의 Z축을 회전
    - 뷰잉좌표계의 z축이 월드좌표계의 zx 평면에 위치
  - 월드좌표계의 Y 축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전- 두 좌표계의 z 축이 일치
  - 월드좌표계의 Z축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전- 뷰잉좌표계와 월드좌표계가 일치

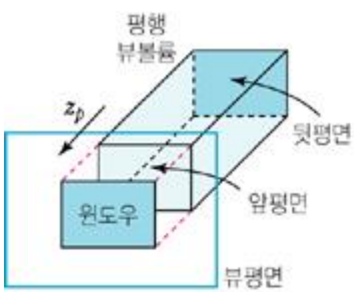


(a) 뷰잉좌표계와 월드좌표계의 위치
(b) 뷰잉좌표계를 이동
(c) 월드좌표계의 x축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전
(d) 월드좌표계의 y축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전
(e) 월드좌표계의 z축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전
(f) 일치된 두 좌표계

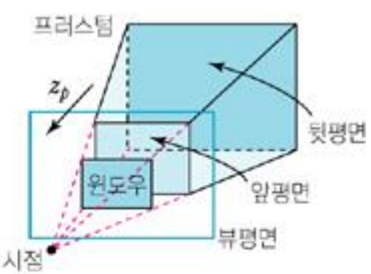
투영을 위한 변환

- 뷰평면의 윈도우 내에 투영되는 공간상의 일정영역
  - 투영 변환에서 뷰평면의 윈도우에 투영되는 객체들은 3차원 공간에서 일정한 영역 내에 존재: 뷰볼륨
    - 평행 투영의 경우: 평행 뷰볼륨
    - 원근 투영의 경우: 프러스텀(Frustum) 뷰볼륨

  - 뷰볼륨을 직육면체 형태로 변환하여 직각투영을 이용하면, 투영과 클리핑이 간단해진다
  - 정규화된 뷰볼륨
    - 모든 좌표를 0과 1사이의 값으로 표현, 정육면체 형태
    - 장치 좌표계로의 변환 용이, 클리핑 과정이 매우 단순화



(a) 평행투영



(b) 원근투영

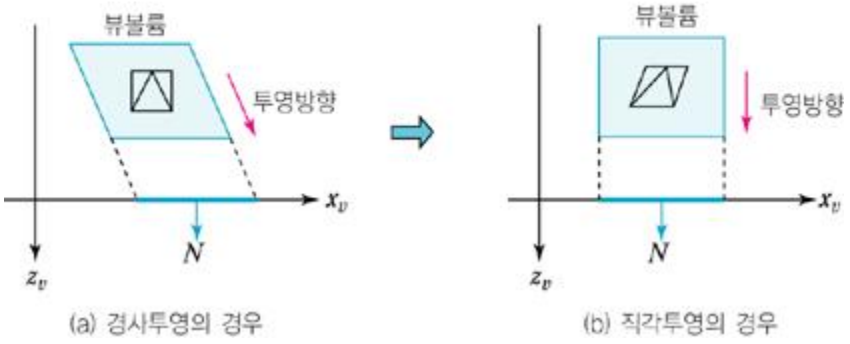
투영을 위한 변환

- 평행 투영의 변환 행렬
  - 직각 투영
    - 투영면이 xy평면(z=0)인 경우
    - 공간상의 점 P(x, y, z)가 직각 투영된 점은 (x, y, 0)이 된다 즉,

$$P' = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{ortho} \cdot P$$

투영을 위한 변환

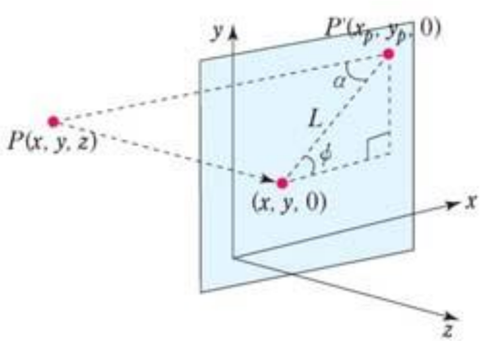
- 평행 투영의 변환 행렬
  - 경사 투영
    - 기울어진 형태의 뷰볼륨을 직육면체 형태로 밀림 변환



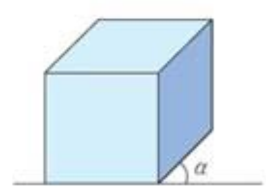
투영을 위한 변환

– 공간상의 점 P(x, y, z)가 경사 투영된 점 P′(x_p, y_p, 0)을 구하려면

– 경사 각도 α와 투영길이 L로 정의
- L: 경사 투영점과 직각 투영점간의 거리
- ϕ : L과 x축과 이루는 각도
- $\tan\alpha = z / L \quad \rightarrow \quad L = z / \tan\alpha \quad = z\cot\alpha$
- $x_p = x + zL\cos\alpha$
- $y_p = y + zL\sin\alpha$



(a) 공간상의 한 점이 경사투영된 경우

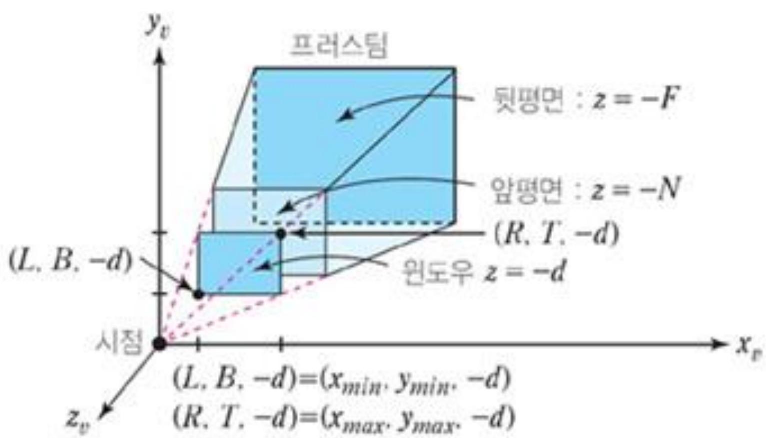


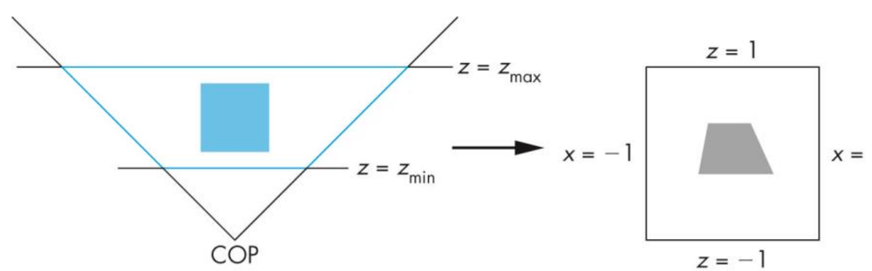
(b) 경사투영의 경우

$$P' = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cot\alpha\cos\phi & 0 \\ 0 & 1 & \cot\alpha\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{obliq} \cdot P$$

투영을 위한 변환

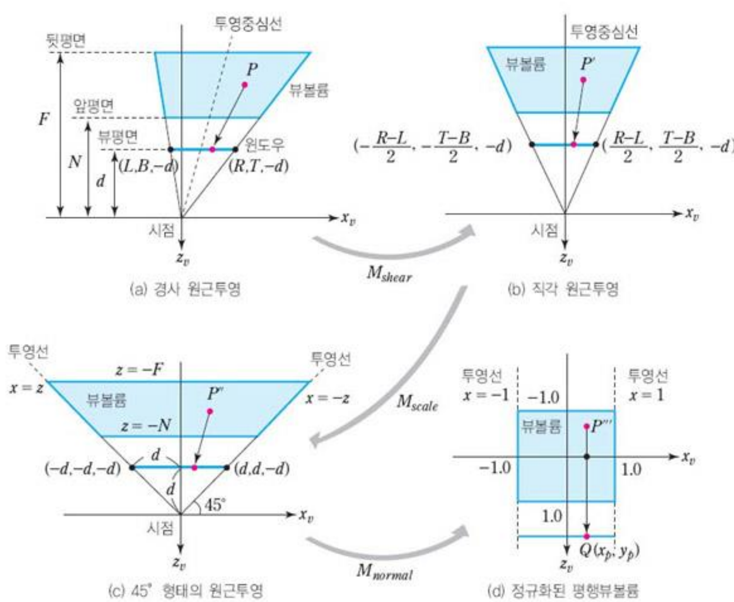
- 원근 투영의 변환 행렬
  - 프러스텀을 직육면체 형태로 변환하여 직각투영 이용
    - 시점: 뷰잉 좌표계의 원점
    - 윈도우: 법선벡터는 z축 방향
    - 뷰평면 기준: left, right, top, bottom
      - d: 뷰 평면이 놓여진 z 값
    - 프러스텀 뒷 평면과 앞 평면: -F, -N





투영을 위한 변환

- 밀림변환과 신축변환을 수행
  - 과정 1: [경사원근투영]을 [직각원근투영]의 뷰볼륨으로 변환
  - 과정 2: [직각원근투영]의 뷰볼륨을 [정육면체] 형태로 변환
    - 45도 각도의 피라미드 형태의 뷰볼륨으로 변환
    - 피라미드 뷰볼륨을 정육면체 뷰볼륨으로 변환



투영을 위한 변환

– 과정 1: 밀림변환 적용 P 가 P' 으로 변환

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{R+L}{2d} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{T+B}{2d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{shear} \cdot P$$

– 과정 2: 신축변환 적용 P’가 P”로 변환

$$P'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2d}{R-L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2d}{T-B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = M_{scale} \cdot P'$$

투영을 위한 변환

– 과정 3: 정규화 적용, P'' 이 P''' 으로 변환

$$P''' = \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F+N}{F-N} & -\frac{2FN}{F-N} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix} = M_{normal\ell} \cdot P''$$

– 따라서, 원근 투영 뷰볼륨의 전체 변환 과정은,

$$\begin{aligned} P''' &= M_{persp} \bullet P \\ &= M_{normal} \bullet M_{scale} \bullet M_{shear} \bullet P \end{aligned}$$