

1. Найти приближенно минимальное значение определенного интеграла

$$J(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t)) dt \text{ и функцию } x(t) \in C^1[a, b], \text{ которая его обеспечивает.}$$

Для этого разбить промежуток $[a, b]$ на несколько частей

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b,$$

значения функции $x_i = x(t_i)$, $i = \overline{1, n}$ при этом принять за неизвестные параметры.

Определенный интеграл J вычислять приближенно с помощью какой-нибудь формулы численного интегрирования, для вычисления которого и также для приближенного вычисления производной $x'(t)$ в функции $F(t, x(t), x'(t))$ могут быть использованы не только точки x_i , $i = \overline{1, n}$, но и промежуточные значения, полученные приближенно в результате решения задачи интерполяции по узлам, определяемым значениями $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ и соответствующими значениями x_i , $i = \overline{1, n}$.

Таким образом перейти к оптимизационной задаче о поиске минимума функции

$$\tilde{J}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{X}) \rightarrow \min_{\mathbf{X} \in E^n}, \quad \text{где} \quad \mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad \tilde{J}$$

приближенное значение рассматриваемого интеграла, соответствующее конкретному набору x_1, x_2, \dots, x_n ,

которую решить с помощью самостоятельно реализованного алгоритма (возможно потребуется его модификация), для проверки результата можно использовать алгоритмы, реализованные в MATLAB. По возможности обосновать выбор тех или иных алгоритмов, использованных при реализации решения задачи.

В качестве конкретного интеграла $J(x)$ принять интеграл, определяемый следующими значениями

$$F(t, x(t), x'(t)) = tx'^2 + \frac{x^2}{t}, \quad a = 1, \quad b = 2, \quad x(1) = 2, \quad x(2) = 2\frac{1}{2}.$$

Точное решение $x(t) = t + \frac{1}{t}$.