Exercice 1 :

On considère le circuit de la figure 1 alimenté par un générateur de tension e(t)=E.u(t), où u(t) est un échelon unité. Les conditions initiales sont nulles.

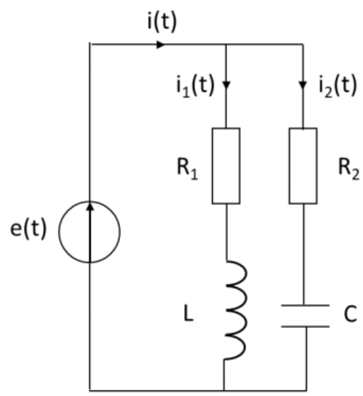
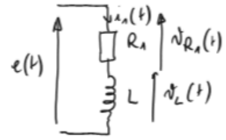


Figure 1

1) Déterminer les équations différentielles qui régissent $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
2) Résoudre « à la main » ces équations différentielles.
3) Calculer le courant i(t) débité par le générateur.
4) Quelles relations faut-il avoir entre L, R_1, R_2 et C pour que le courant i(t) soit indépendant du temps ?

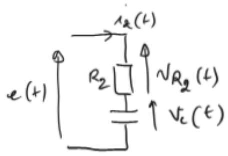
Les 2 branches sont en parallèle, soumises à la tension $e(t)$



$$e(t) = v_{R_1}(t) + v_L(t)$$
$$= R\, i_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt}$$

$$\boxed{L/R_1 \frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) = \frac{e(t)}{R}}$$

Pas d'énergie stockée dans l'inductance $\boxed{i_1(0^+) = 0}$



$$e(t) = v_{R_2}(t) + v_C(t)$$
$$= R_2\, i_2(t) + v_C(t) \quad (1)$$

$$i_2(t) = C\frac{dv_C}{dt} \Rightarrow v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_2(t')\,dt'$$

$\Rightarrow$

relation qui tient compte de la condition initiale $v_C(0) = 0$

avec cette relation, on obtient une équation intégro-différentielle, ce n'est pas ce qui est attendu.

On peut dériver (1) : $R_2 \frac{di_2}{dt}(t) + \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{de(t)}{dt}$

$$\Leftrightarrow R_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} i_2(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

Attention : $\frac{de(t)}{dt} = E\,\delta(t)$ distribution de Dirac

Si on résoud sur $]0,+\infty[$ $\frac{de(t)}{dt} = 0$
mais il faut une condition initiale sur $i_2(t)$

La capacité n'est pas chargée en $t = 0^+ \Rightarrow v_C(0^+) = 0$

$e(t=0^+) = E$ (V) $\quad e(0^+) = R_2\, i_2(0^+) + v_C(0^+)$

$$\Rightarrow i_2(0^+) = E/R_2$$

Pour $t \in]0,+\infty[$

$$\boxed{\begin{array}{l} R_2 C \frac{di_2}{dt} + i_2(t) = 0 \\ i_2(0^+) = E/R_2 \end{array}}$$

2) $L/R_1 \frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) = \frac{e(t)}{R} = E/R_1 \quad t \in]0,+\infty[$

$i_1(0^+) = 0$

$i_1(t) = K e^{-t/L/R_1} + E/R_1$

$i_1(0^+) = K + E/R$

$$\Rightarrow \boxed{i_1(t) = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-t/L/R_1}\right) \quad t \in]0,+\infty[}$$

$R_2 C \frac{di_2}{dt} + i_2(t) = 0$

$i_2(0^+) = E/R_2$

$i_2(t) = K e^{-t/R_2C}$

$i_2(0^+) = E/R_2$

$$\Rightarrow \boxed{i_2(t) = \frac{E}{R_2} e^{-t/R_2C} \quad t \in]0,+\infty[}$$

3) $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$

$= \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-t/L/R_1}\right) + \frac{E}{R_2} e^{-t/R_2C} \quad t > 0$

4) si $R_1 = R_2$

et $L/R_1 = R_2 C$

$i(t) = E/R_1$ independant de t

Résolution des équations différentielles avec Matlab :

```
syms R1 R2 C L E i1(t) i2(t) t
i1=dsolve(L/R1*diff(i1,t)+i1(t)==E/R1,i1(0)==0)
```

i1 =

$$\frac{E - E\,e^{-\frac{R_1 t}{L}}}{R_1}$$

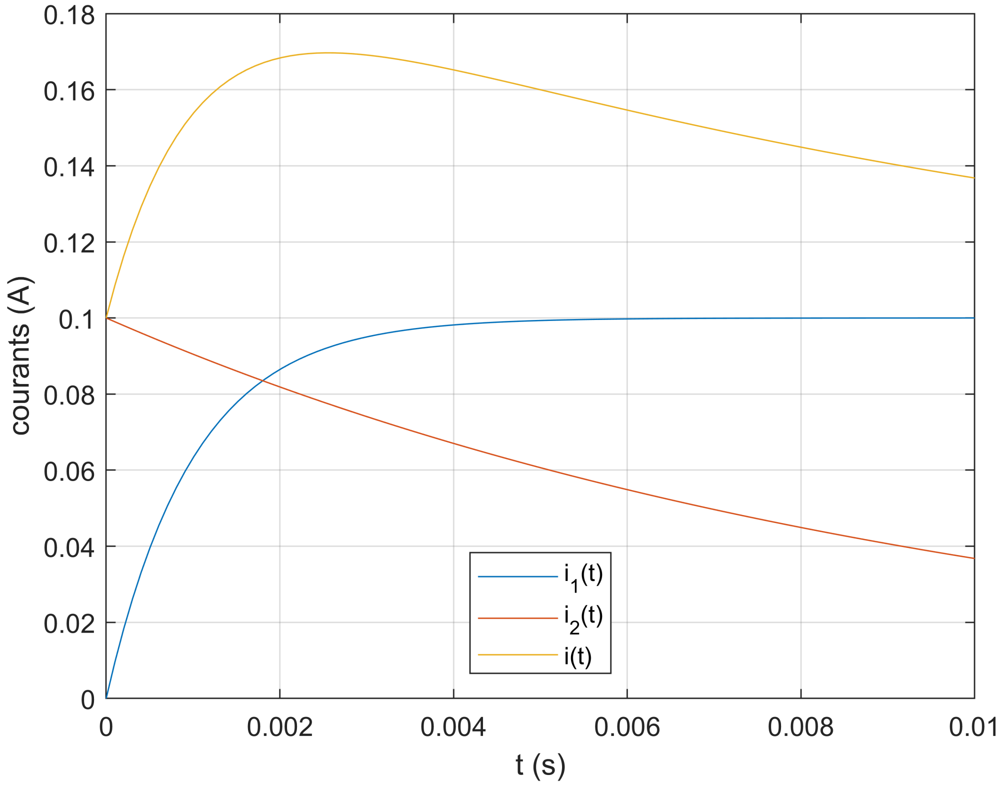
```
i2=dsolve(R2*C*diff(i2,t)+i2(t)==0,i2(0)==E/R2)
```

i2 =

$$\frac{E\,e^{-\frac{t}{C R_2}}}{R_2}$$

Tracé des courbes

```
R1=100;R2=100;C=100e-6;L=0.1;E=10;
t=linspace(0,10e-3,100);
figure
plot(t,subs(i1),t,subs(i2),t,subs(i1+i2))
xlabel('t (s)');ylabel('courants (A)');legend('i_1(t)','i_2(t)','i(t)','location','best');grid
```



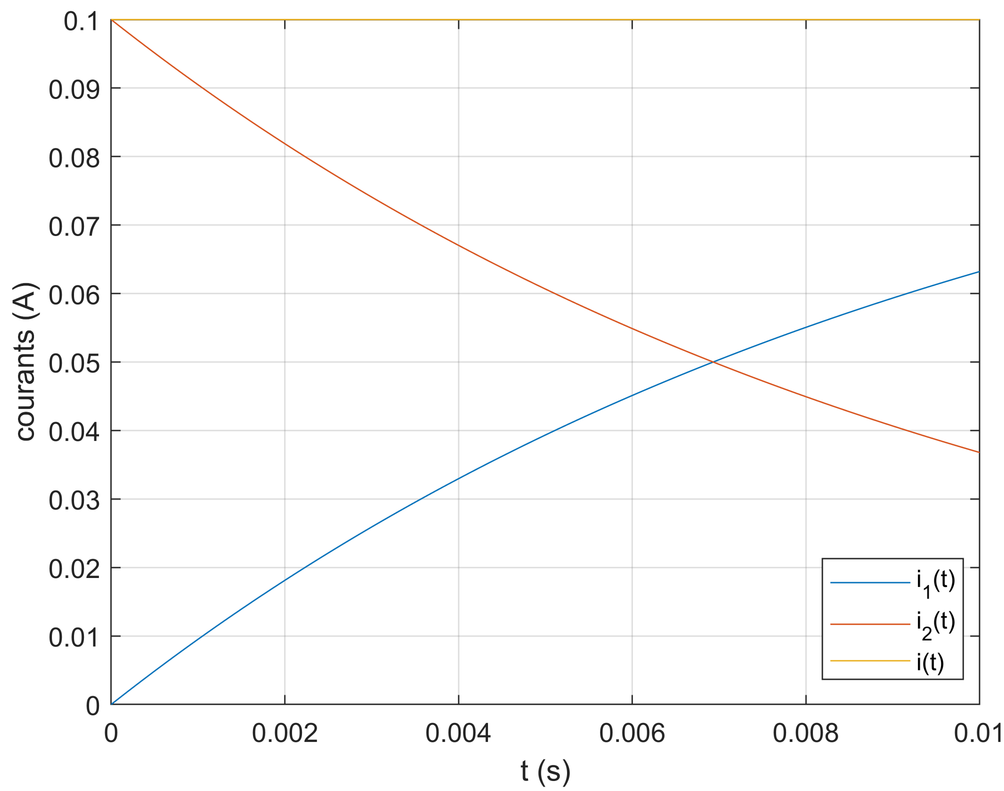
Le courant $i(t)$ est indépendant de t si $\frac{L}{R_1} = R_2 C$ et $R_1 = R_2$. Cette condition est réalisée avec

$L = R_1 R_2 C = 100^2 \times 100 \times 10^{-6} = 1 \text{ H}$

```
L=100^2*100e-6
```

```
L = 1
```

```
figure
plot(t,subs(i1),t,subs(i2),t,subs(i1+i2))
xlabel('t (s)');ylabel('courants (A)');legend('i_1(t)','i_2(t)','i(t)','location','best');grid
```



Exercice 2 :

On considère le circuit de la figure 2. A t=0-, l'interrupteur est dans la position 1, le condensateur est donc initialement chargé. A t=0, on bascule l'interrupteur en position 2.

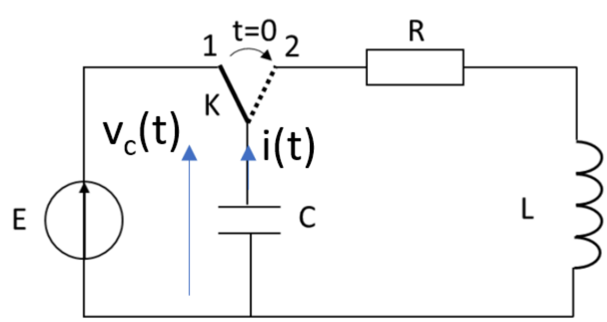


Figure 2

1) Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur C.
2) On donne E=10 V, R=100 Ω, C=10 µF, L=0.1 H. Calculer $u_C(t)$. Calculer la pseudo-période.

1 / A t=0 $v_c(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}(t)$

En utilisant $i(t) = -C\dfrac{dv_c}{dt}(t)$, on obtient :

$$LC\frac{d^2v_c}{dt^2}(t) + RC\frac{dv_c}{dt}(t) + v_c(t) = 0$$ avec $v_c(0) = E$ et $i(0) = -C\dfrac{dv_c}{dt}(0) = 0$

2 / Application numerique :

$LC = 10^{-6}\ s,\ RC = 10^{-3}\ s.$

$$10^{-6}\frac{d^2v_c}{dt^2}(t) + 10^{-3}\frac{dv_c}{dt}(t) + v_c(t) = 0$$

Solution homogène :

$10^{-6}r^2 + 10^{-3}r + 1 = 0$

$\Delta = (10^{-3})^2 - 4\times 10^{-6} = -3\ \ 10^{-6}$

$$r_{1,2} = \frac{-10^{-3} \pm \sqrt{-310^{-6}}}{2\times 10^{-6}} = -500 \pm j866$$

$v_c(t) = e^{-500t}(A\ \ cos(866t) + B\ \ sin(866t))$

$v_c(0) = E \Longrightarrow A = E = 10$

$$\frac{dv_c}{dt}(t) = -500\ \ e^{-500t}Ecos(866t) - 866e^{-500t}Esin(866t) + -500\ \ e^{-500t}Bsin(866t) + 866e^{-500t}Bcos(866t)$$

$$\frac{dv_c}{dt}(0) = 0 = -500E + 866B \Longrightarrow B = 5.77$$

$v_c(t) = 10\times e^{-500t}cos(866t) + 5.77e^{-500t}sin(866t)$

La pseudo période est $T = \dfrac{2\pi}{866} = 7.3\ \ \mathrm{ms}$

```
syms vc(t)
Dvc=diff(vc)
```

Dvc(t) =

$$\frac{\partial}{\partial t}\ \mathrm{vc}(t)$$

```
vc=dsolve(1e-6*diff(vc,t,2)+1e-3*diff(vc,t)+vc,vc(0)==10,Dvc(0)==0)
```

vc =

$$\frac{10\,\mathrm{e}^{-500\,t}\ (3\cos(500\ \sqrt{3}\ t) + \sqrt{3}\ \sin(500\ \sqrt{3}\ t))}{3}$$

```
vpa(vc,2)
```

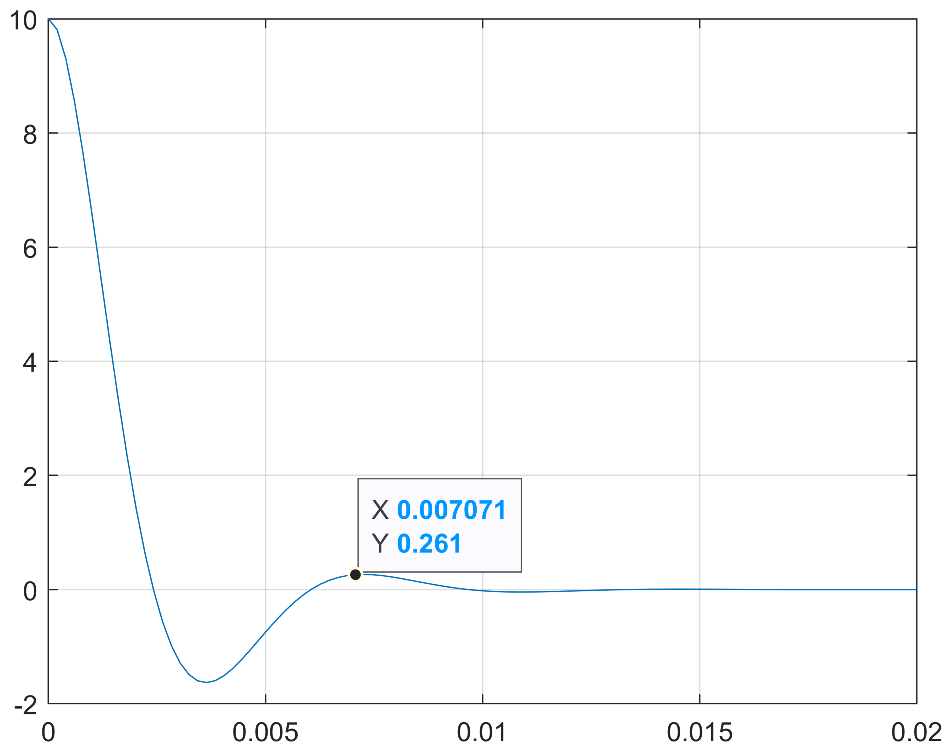
ans = $3.3\,e^{-500.0\,t}\,\left(3.0\cos(870.0\,t) + 1.7\sin(870.0\,t)\right)$

```
vpa(expand(ans),3)
```

ans = $10.0\,e^{-500.0\,t}\cos(866.0\,t) + 5.77\,e^{-500.0\,t}\sin(866.0\,t)$

```
figure
t=linspace(0,20e-3,100);
plot(t,subs(vc))
grid

ax = gca;
chart = ax.Children(1);
datatip(chart,0.007071,0.261);
```



Avec le curseur, on retrouve une pseudo période de 7 ms.