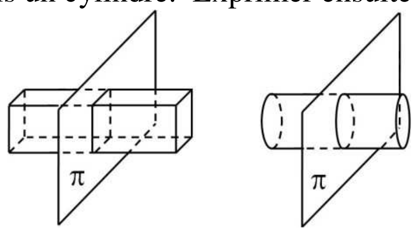
HAE302E - Circuits et Composants Capacitifs et Inductifs

TD 4 Flux d'un champ électrostatique et théorème de Gauss

1- Champ créé par une distribution de charge surfacique.

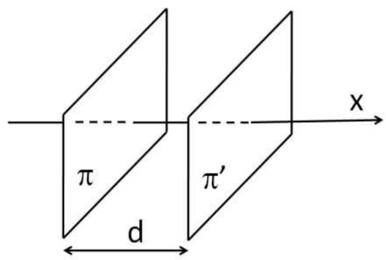
1- On part de l'hypothèse que l'on connait l'orientation du champ électrique créé par un plan infini portant une densité de charge surfacique σ, (dans le TD 3 exo 4 on a montré que dans ce cas $\overrightarrow{E(x)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\vec{u}$).

Montrer à partir de ce résultat que le théorème de Gauss est vérifié. On utilisera comme surface de Gauss un parallélépipède, puis un cylindre. Exprimer ensuite le potentiel V(x).



A.N. Une plaque conductrice de surface S supposée infinie possède une densité surfacique uniforme de charge négative $\sigma^- = -4.3\ \mu C/m^2$. Retrouver l'intensité du champ électrique $\|\vec{E}\|$ en appliquant le théorème de Gauss puis représenter l'orientation du vecteur champ électrique $\vec{E}$ dans tout l'espace.

2- Deux plans infinis parallèles, (π) et (π'), ont respectivement des densités de charge surfaciques de +σ et -σ et sont espacés d'une distance d.



Préciser la direction de champ électrique $\overrightarrow{E(x)}$ puis exprimer son intensité $\|\overrightarrow{E(x)}\|$ et le potentiel V(x).

A.N. La plaque conductrice précédente de densité surfacique négative $\sigma^- = -\ 4.3\ \mu C/m^2$ est mise en regard avec une autre plaque conductrice de densité surfacique $\sigma^+ = +6.8\ \mu C/m^2$ Exprimer l'intensité du champ électrique $\|\overrightarrow{E(x)}\|$ et préciser la direction de $\overrightarrow{E(x)}$.

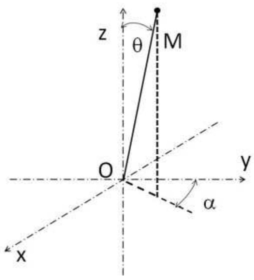
2- Champ et potentiel créés par une sphère chargée en surface.

Déterminer en tout point de l'espace le champ et le potentiel créé par une sphère uniformément chargée en surface +σ.

3- Champ et potentiel par une sphère chargée en volume.

31- On suppose qu'une sphère S de centre O et de rayon R possède une densité de charge volumique uniforme ρ. Exprimer la charge Q portée par cette sphère.
A.N. Calculer Q si $\rho = 2\ 10^{-7}\ C/m^3$ et R=5 mm

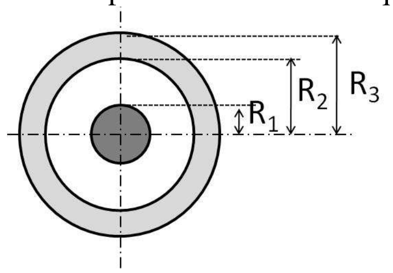
32- Quelle est la direction du champ électrique en tout point de l'espace ?
En prenant un repère cartésien centré sur la sphère, donner l'expression du vecteur unitaire allant du centre de la sphère O en un point M distant de *r* en fonction de $\theta et\ \alpha$.
Exprimer le vecteur champ électrostatique $\overrightarrow{E(r,\theta,\alpha)}$.
Montrer que son module $\left\|\overrightarrow{E(r,\theta,\alpha)}\right\| = \left\|\overrightarrow{E(r)}\right\|$, tracer cette fonction et calculer l'intensité du champ électrique au centre de la sphère et celle au niveau de sa surface



33- Exprimer le potentiel V en tout point de l'espace, tracer cette fonction en fonction de r et calculer sa valeur au centre de la sphère et sur sa surface.

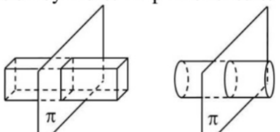
4- Sphères concentriques chargées en volume

Soit une distribution de charge volumique uniforme ρ à symétrie sphérique constituée d'une charge +Q uniformément répartie dans le volume $r \leq R_1$ et d'une charge -Q uniformément répartie dans le volume $R_2 \leq r \leq R_3$ avec $R_1 < R_2$.
Déterminer l'expression du champ électrique créé par cette distribution en tout point de l'espace. Vérifier la continuité du champ à la frontière de chaque domaine.



1- <u>Champ créé par une distribution de charge surfacique.</u>

1- On part de l'hypothèse que l'on connait l'orientation du champ électrique créé par un plan infini portant une densité de charge surfacique σ, (dans le TD 3 exo 4 on a montré que dans ce cas $\overrightarrow{E(x)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\vec{u}$).
Montrer à partir de ce résultat que le théorème de Gauss est vérifié. On utilisera comme surface de Gauss un parallélépipède, puis un cylindre. Exprimer ensuite le potentiel V(x).



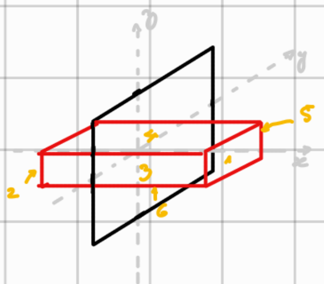
A.N. Une plaque conductrice de surface S supposée infinie possède une densité surfacique uniforme de charge négative $\sigma^- = -4.3\ \mu C/m^2$. Retrouver l'intensité du champ électrique $\|\vec{E}\|$ en appliquant le théorème de Gauss puis représenter l'orientation du vecteur champ électrique $\vec{E}$ dans tout l'espace.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\vec{u}$$

Via le thm de Gauss on a : $\oiint_S E.dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

On sait que la somme des flux sur les surfac d'un objet fermer est egale a le flux total dans l'objet

1. Surface paralepipede.



Soit Gauss : $\oiint E.dS = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

Surface ①: $\vec{dS_1} = dy\,dz\,\vec{u_x}$

② $\vec{dS_2} = -dy\,dz\,\vec{u_x}$

③ $\vec{dS_3} = -dx\,dz\,\vec{u_y}$

④ $\vec{dS_4} = dx\,dz\,\vec{u_y}$

⑤ $\vec{dS_5} = dx\,dy\,\vec{u_z}$

⑥ $\vec{dS_6} = -dx\,dy\,\vec{u_y}$

$$\oiint E\,dS = \iint_{S_1} \overbrace{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}}^{E} \cdot \overbrace{\vec{u_x}\,dy\,dz}^{dS} +$$

$$\iint_{S_2} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}\,(-\vec{u_x})\,dy\,dz +$$

$$\underbrace{\iint_{S_3} sgn(x)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}\,(-u_y)\,dx\,dy}_{0} +$$

$$+\underset{S_4}{0}+\underset{S_5}{0}+\underset{S_6}{0}$$

Soit $\oiint E \cdot dS = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} S_1$

$S_1 = \int_0^a \int_0^a dy\,dy$ → si un carré $= a^2$

$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} a^2 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} a^2$

$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} a^2$ et $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ ⇒

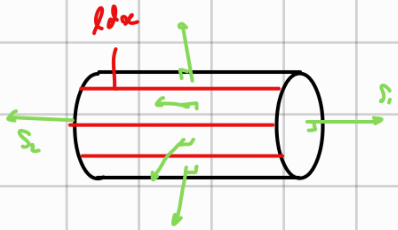
Δ pour un carré

Soit $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \times S_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}$

Soit on a vérifié $\oiint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Cylindre

dx l'épaisseur



E et les vecteurs surface des génératrice sont ⊥ $E \cdot dS = 0$
il reste donc que S_1 et S_2

$\oiint E \cdot dS = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$

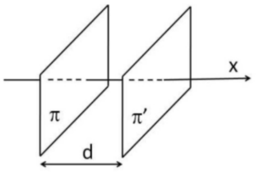
$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \cdot \pi r^2 \vec{u}_x + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \cdot \pi r^2 (-\vec{u}_x)$

$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \pi r^2$

$= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0}$

Faire attention au sens de E que l'on det intuitivement. en generale la 1° etape

2- Deux plans infinis parallèles, (π) et (π'), ont respectivement des densités de charge surfaciques de $+\sigma$ et $-\sigma$ et sont espacés d'une distance d.



Préciser la direction de champ électrique $\overrightarrow{E(x)}$ puis exprimer son intensité $\|\overrightarrow{E(x)}\|$ et le potentiel V(x).

A.N. La plaque conductrice précédente de densité surfacique négative $\sigma^- = -4.3\ \mu C/m^2$ est mise en regard avec une autre plaque conductrice de densité surfacique $\sigma^+ = +6.8\ \mu C/m^2$
Exprimer l'intensité du champ électrique $\|\overrightarrow{E(x)}\|$ et préciser la direction de $\overrightarrow{E(x)}$.

2/ Soit E → orienté du ⊕ → ⊖

En fonction du point où l'on se trouve l'on change la norme de

Ex soit : Pour un point P entre π et π' ⇒

$E_{tot} = E_{\pi} + E_{\pi'}$

| Soit pour une plaque infinie : Thm de Gauss

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$ → Sachant $\vec{E} // \vec{S}$

$$E \cdot 2S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

2 car On a les 2 surface

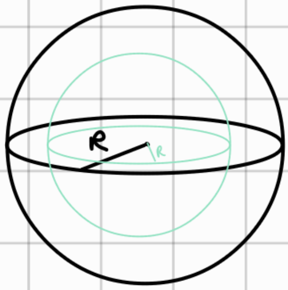
$$E = \frac{\sigma \cancel{S}}{\varepsilon_0 2 \cancel{S}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\left(\frac{+\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_y}\right) + \left(-\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_y}\right)$$

$$E_T \quad \frac{\sigma + \sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

2- Champ et potentiel créés par une sphère chargée en surface.

Déterminer en tout point de l'espace le champ et le potentiel créé par une sphère uniformément chargée en surface $+\sigma$.



Soit Thm de Gauss : $\oiint E \cdot dS = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

Soit

$\Rightarrow E_{ext} \times 4\pi r^2 = \frac{4\pi R^2 \times \sigma}{\varepsilon_0}$

$E_{ext} = \frac{4\pi R^2 \times \sigma}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{4\pi r^2}$

$E_{ext} = \frac{R^2 \times \sigma}{\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow$ a : $r = R \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$\lim_{r \to +\infty} \Rightarrow 0$

$\to E_{int}$: $E_{int} \times 4\pi r^2 = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$ | Pas de charge

$E_{int} = 0$

Soit $E(r; \sigma; \alpha) = \frac{\sigma \times R^2}{\varepsilon_0 \times r^2} + 0$

Le potentiel :

Soit $E = -\mathrm{grad}\,\vec{V}$, donc :

pour $r \geq R$

$V = -\int E\, dr$

On le met dans la parenthèse pour faciliter son calcul

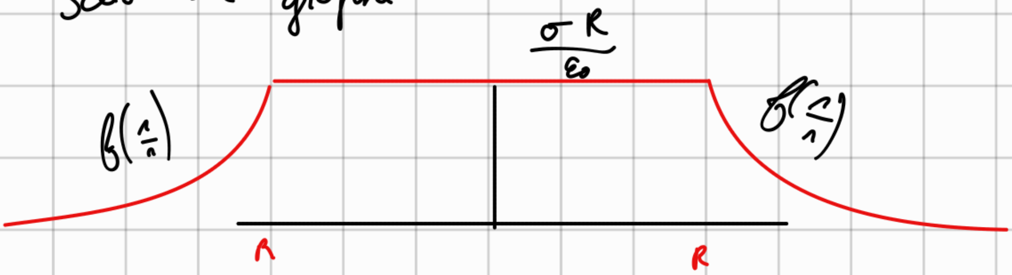
$V = \frac{-\sigma R^2}{\varepsilon_0} \times \int \frac{1}{r^2} \iff \frac{-\sigma R^2}{\varepsilon_0} \times -\frac{1}{r} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \text{cte}\right)$

Soit la cte nul car on hypothèse que à l'infini on a $V = 0$

En $r = R$: $V = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

Pour $0 \leq r \leq R \to U(r) = \text{cte}$ Soit $V(R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

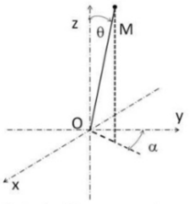
Soit le graphe :



3- Champ et potentiel par une sphère chargée en volume.

31- On suppose qu'une sphère S de centre O et de rayon R possède une densité de charge volumique uniforme ρ. Exprimer la charge Q portée par cette sphère.
A.N. Calculer Q si $\rho = 2\ 10^{-7}\ C/m^3$ et R=5 mm

32- Quelle est la direction du champ électrique en tout point de l'espace ?
En prenant un repère cartésien centré sur la sphère, donner l'expression du vecteur unitaire allant du centre de la sphère O en un point M distant de r en fonction de θ et α.
Exprimer le vecteur champ électrostatique $\overrightarrow{E(r,\theta,\alpha)}$.
Montrer que son module $\|\overrightarrow{E(r,\theta,\alpha)}\| = \|\overrightarrow{E(r)}\|$, tracer cette fonction et calculer l'intensité du champ électrique au centre de la sphère et celle au niveau de sa surface

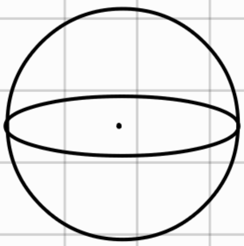


33- Exprimer le potentiel V en tout point de l'espace, tracer cette fonction en fonction de r et calculer sa valeur au centre de la sphère et sur sa surface.

Soit $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho$

$Q = 1{,}047 \times 10^{-13}\ C$

3)



Soit $\oiint E \cdot dS = \Sigma \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

Pour $r < R$

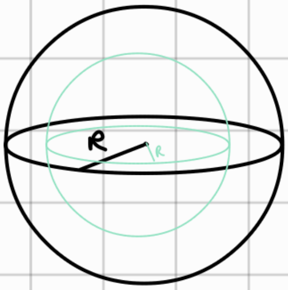
$$E_{int} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \times \rho}{\varepsilon_0}$$

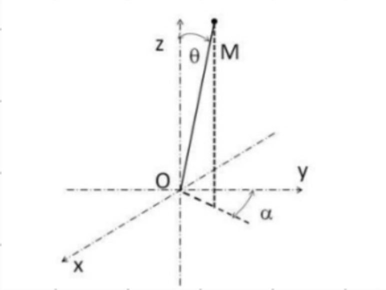
$$E_{int} = \frac{4}{3}\pi \frac{r^3}{\varepsilon_0} \times \rho \times \frac{1}{4\pi r^2}$$

$$E_{int} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \times r$$

-> Pour E_{ext} : $E_{ext}\ 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{\varepsilon_0} \times \rho$

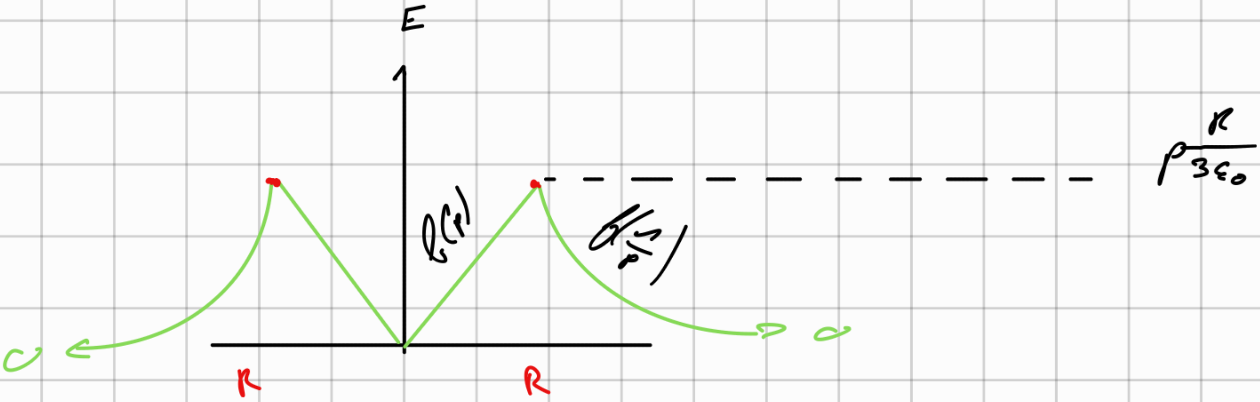
$$E_{ext} = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \times \rho$$





$$\vec{u}\begin{pmatrix}\sin\theta\sin\alpha\\ \sin\theta\cos\alpha\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

La direction du champ E varie en fonction de la charge
- si elle est ⊕ alors champ centripète
- si elle est ⊖ alors champ centrifuge.



Courbe symétrique de rayon R centrée en O.

- Potentiel

$E = -\overrightarrow{grad}\, V$ Soit $V = -\int E\,dr$

$r \geq R$

$V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + cte\right)$

$\lim_{r \to +\infty} V(r) = 0 \Rightarrow cte = 0\ m^{-1}$

→ $V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$

$V(R) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$

$0 \leq r \leq R$

$V(r) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{r^2}{2} + cte\right)$

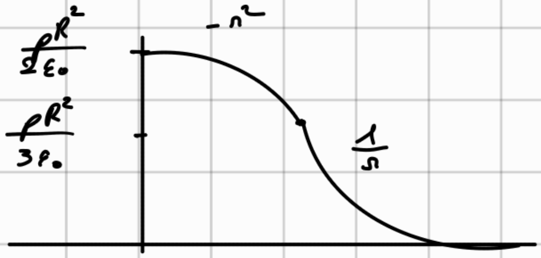
$V(R) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{2} + cte\right) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$

donc $-\frac{R^2}{2} - cte = R^2$

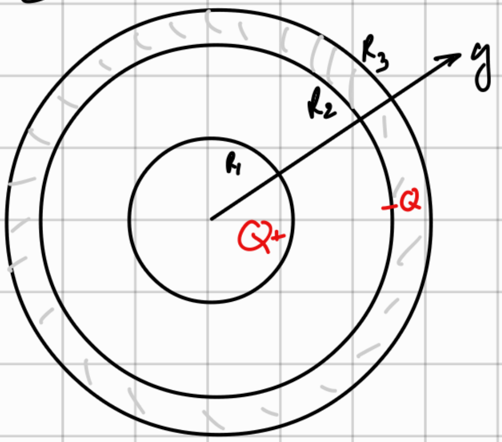
$cte = -\frac{3}{2}R^2$

→ $V(r) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{3}{2}R^2\right)$

$$U(0) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$



Ex 4



- $\rho_1 = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3}$

- $\rho_2 = \dfrac{-Q}{\frac{4}{3}\pi \left(R_3^3 - R_2^3\right)}$

2) Thm de Gauss surface fermé de Gauss,

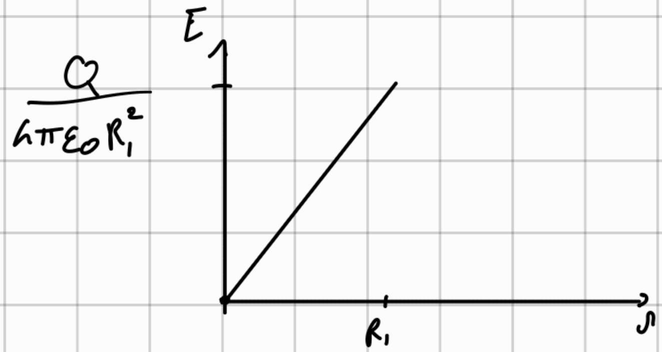
$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

. $r \leq R_1$

$$. E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \Bigg\} E = \frac{Q r}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}$$

Tracer de la 1° pt de $\vec{E}$

$$E(0) = 0$$
$$E(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$$



- $R_1 \leq r \leq R_2$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{4\pi \, r^2}$$

$$E(R_1) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{4\pi R_1^2}$$

$$E(R_2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{4\pi R_2^2}$$

- $R_2 \leq r \leq R_3$

$$E \, 4\pi r^2 = \frac{Q + \frac{-Q}{\frac{4\pi}{3}(R_3^3 - R_2^2)} \times \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_2^3)}{\varepsilon_0}$$

meme denominateur

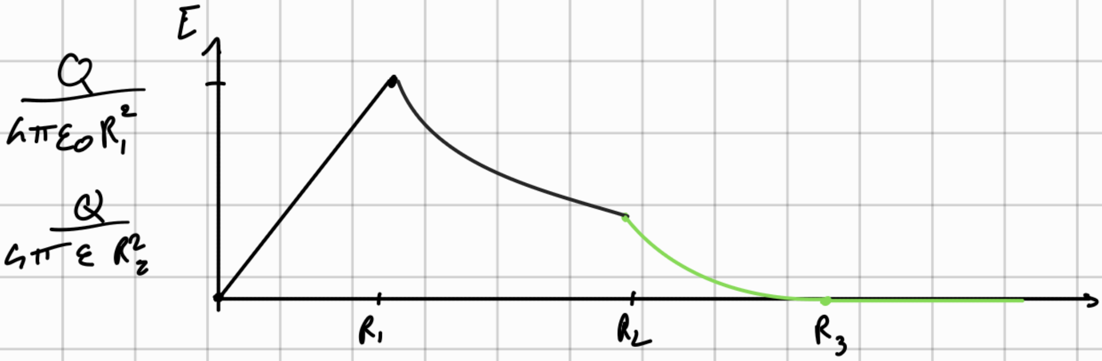
$$= Q\left(1 - \frac{r^3 - R_2^3}{R_3^3 - R_2^3}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{R_3^3 - r^3}{R_3^3 - R_2^3}\right)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\frac{R_3^3}{r^2} - r}{R_3^3 - R_2^3}\right)$$

$$E(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{1}{R_3^3 - R_2^3} \times \left(\frac{R_3^3}{R_2^2} - R_2\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{1}{R_2^2}$$

$$E(R_3) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \times \left(\frac{R_3 - R_3}{R_3^3 - R_2^3}\right) = 0 \ \frac{V}{m}$$



$- \ r \geq R_3$

$$E \, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \times \frac{\frac{R_3^3}{r^2} - r}{R_3^3 - R_2^3}$$

$$E \, 4\pi r^2 = \frac{Q - Q}{\varepsilon_0} = 0 \qquad E = 0 \ \frac{V}{m}$$

Soit pour le potentielle : $E = -\text{grad} V$

$$V = -\int E \, dr$$

pour $r \geqslant R_3$

$V(r) = cte$ → On estime que $\lim_{r \to +\infty} (V(r)) = 0$

$V(R_3) = 0V$

$R_2 \leq r \leq R_3$

$V(r) = -\int$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_3^3 - R_2^3} \left(\frac{R_3^3}{r} + \frac{r^2}{2} + cte \right)$$

Par continuité en R_3

$$\frac{R_3^3}{R_3} + \frac{R_3^2}{2} + cte = 0$$

$$R_3^2 + \frac{R_3^2}{2} + cte = 0$$

$$cte = -\frac{3}{2} R_3^2$$

Soit $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_3^2 - R_2^3} \left(\frac{R_3^3}{r} + \frac{r^2}{2} - \frac{3}{2} R_3^2 \right)$

et $V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_3^2 - R_2^3} \left(\frac{R_3^3}{R_2} + \frac{R_2^2}{2} - \frac{3}{2} R_3^2 \right)$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_3^3 - R_3^2} \left(\frac{2R_3^3 + R_2^3 - 3R_3^2 R_2}{2R_2} \right)$$

$R_1 \leq r \leq R_2$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} + cte \right)$$

$$V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} + cte \right)$$

$$\frac{2R_3^3 + R_2^3 - 3R_3^2 R_2}{2R_2(R_3^3 - R_2^3)} = \frac{1}{R_2} + cte$$

$$\frac{2R_3^3 + R_2^3 - 3R_3^2 R_2}{2R_2(R_3^3 - R_2^3)} - \frac{1}{R_2} = cte$$

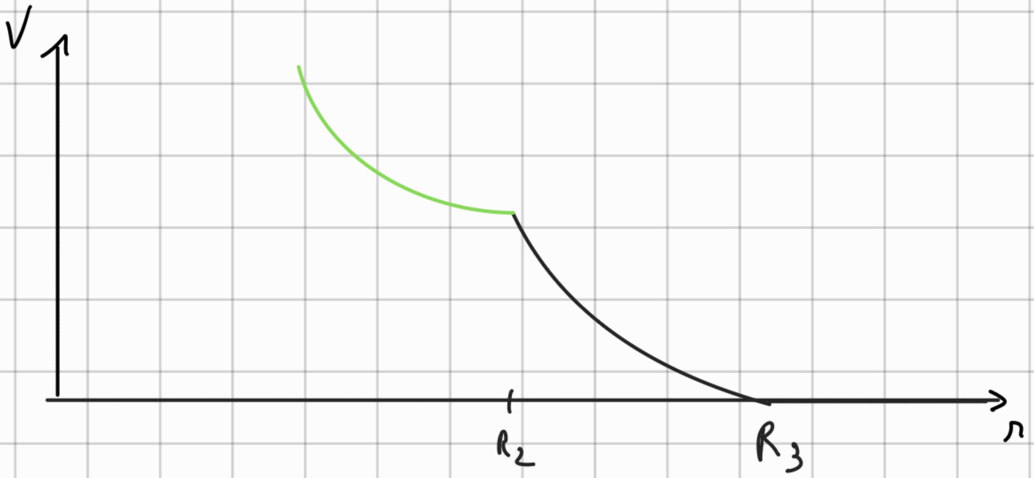
$$cte = \frac{\cancel{2R_3^3} + R_2^3 - 3R_3^2 R_2 - \cancel{2R_3^3} + 2R_2^3}{2R_2(R_3^3 - R_2^3)}$$

$$= \frac{3(R_2^3 - R_3^2 R_2)}{2R_2(R_3^3 - R_2^3)} = \frac{3}{2} \frac{R_2^2 - R_3^2}{R_3^3 - R_2^3}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{3}{2}\,\frac{R_2^2 - R_3^2}{R_3^3 - R_2^3}\right)$$

et

$$V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{3}{2}\,\frac{R_3^2 - R_2^2}{R_3^3 - R_2^3}\right)$$



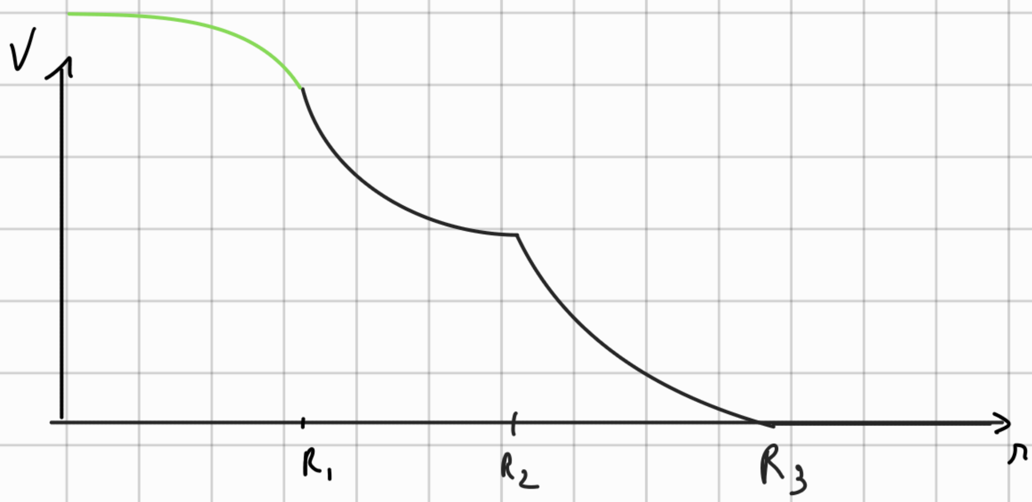
$r \leq R_1$

$$V(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}\left(\frac{r^2}{2} + cte\right)$$

$$\text{et } V(R_1) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}\left(\frac{R_1}{2} + cte\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{R_2^2 - R_3^2}{R_3^3 - R_2^3}\right)$$

$$\frac{R_1}{2} + cte = R_1^3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{R_2^2 - R_3^2}{R_3^3 - R_2^3}\right)$$

$$cte = R_1^3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{R_2^2 - R_3^2}{R_3^3 - R_2^3}\right) - \frac{R_1}{2}$$


V
R1
R2
R3
r