MATHEMATIQUES POUR EEA - HAE304X

PLAN DU COURS

1. LIMITES ET DÉRIVÉES. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1.1 LIMITES

Dans les rappels qui suivent on considère des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), sans préciser leur domaine de définition.
Afin d'alléger les résultats, on appelle x_0, à la fois un point de $\mathbb{R}$, mais aussi les valeurs $+\infty$ ou $-\infty$.
On fait de même pour les limites, notées l.

THÉORÈME (Opérations sur les limites)

Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, deux fonctions admettant une limite en x_0 : $l = \lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x)$ et $l' = \lim_{x \mapsto x_0} g(x)$.
On suppose que x_0, l et l' peuvent valoir $+\infty$ ou $-\infty$.

Alors on a, *si ces formes sont déterminées,* les propriétés suivantes :

i) Somme : $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) + g(x) = l + l'$

ii) Multiplication par un nombre : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \lambda f(x) = \lambda l$

iii) Produit : $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x)\, g(x) = l\, l'$

iv) Quotient : $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$

v) Composition : $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{y \mapsto l} g(y) = L \implies \lim\limits_{x \mapsto x_0} g \circ f(x) := \lim\limits_{x \mapsto x_0} g\left(f(x)\right) = \lim\limits_{y \mapsto l} g(y) = L$

Exemple :

$f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 4x + 2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)) = \sqrt{h(x)}$ avec $h(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 2$

$\lim h(x) = +\infty \to \lim \sqrt{h(x)} = +\infty$

CAS PROBLÉMATIQUES : LES FORMES INDÉTERMINÉES

(Plus haut ° et Croissance comparées)

i) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) + g(x) = +\infty - \infty$

Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 4x = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \;\Big|\; \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x) = \lim \left(x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) \right) = +\infty \;\Big|\; \lim\limits_{+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$ → voir le conjugué

ii) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x)g(x) = 0 \times \infty$

Exemples : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x e^x) = 0 \;\Big|\; \lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0 \;\Big|\; \lim\limits_{+\infty} e^{-x} x^2 = \frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0 \;\Big|\; \lim\limits_{\to 0} x \ln(x) = 0$ ⚠

iii) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \;\Big|\; \lim\limits_{\to \infty} \frac{x^3 + 2 - x}{x - 3} = \frac{x^3}{x} = +\infty \;\Big|\; \lim\limits_{\to +\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = +\infty$

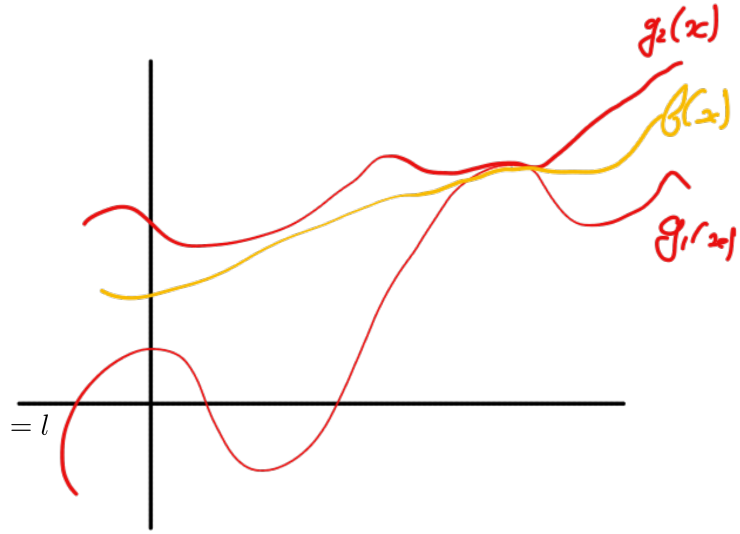
iv) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$

Exemples : $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1 \;\Big|\; \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^x = 1$

COMMENT Y REMÉDIER ?

- Règles de croissances comparées
- Théorème du "sandwich" (gendarmes)
- Définition d'une dérivée / Théorème de l'Hôpital
- Développements limités
- Transformer l'expression pour supprimer l'indétermination (algèbre, trigonométrie,...)

THÉORÈME ("du sandwich" ou "des gendarmes") - Version 1



Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $g_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, trois fonctions vérifiant, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$$

Alors :

$$\lim_{x \mapsto x_0} g_1(x) = \lim_{x \mapsto x_0} g_2(x) = l \implies \lim_{x \mapsto x_0} f(x) = l$$

NB : x_0 et l peuvent, comme dans tout ce qui précède, valoir $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \frac{\emptyset}{\infty}$ soit $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ ⚠ $x > 0$

$\lim\limits_{\to +\infty} -\frac{1}{x} \leq \lim \frac{\sin x}{x} \leq \lim \frac{1}{x} \to 0 \leq \lim \frac{\sin x}{x} \leq 0$.

$\lim \frac{\sin x}{x} = 0$

Variante a l'∞

si $f(x) \leq g(x)$

si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

de même pour $-\infty$

THÉORÈME ("du sandwich" ou "des gendarmes") - Version 2

Le produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction bornée (comprise entre deux valeurs) tend vers 0.

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \Rightarrow 0 \times \emptyset$

$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$

$-x^2 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^2 \leq x^2$

$\downarrow 0 \qquad \searrow 0$

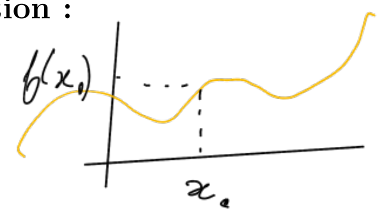
$\to 0$

$\lim x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$

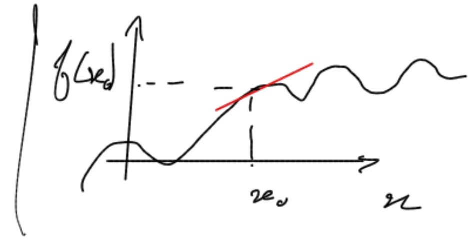
1.2 CONTINUITÉ ET DÉRIVATION

• **Définition :** une fonction f est dite **continue** en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ si, étant définie $f(x_0) \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$.

• **Illustration :**



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$



• **Propriétés :** somme, produit, quotient et composée de fonctions continues sont continues.
(Comme pour les limites, et sous réserve d'être bien définis).

• **Définition :** une fonction f est dite **dérivable** en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ si son taux de variation en x_0 existe (et est fini). fxuLa valeur de cette limite est appelée "dérivée de f en x_0" :

$$f'(x_0) := \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\longrightarrow$ taux d'accroissement
pente de la tangente

NB : Si f est dérivable en x_0, on a forcément $\lim\limits_{x \mapsto x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, soit $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$: la fonction f est donc continue en x_0.

Remarque : La plupart des fonctions classiques sont dérivables sur leur ensemble de définition (et même infiniment dérivables).

Ilustration et exemples :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} \longrightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{x} = 1$$

Savoir faire l'équation de la tangente d'une dérivé

THÉORÈME (Propriétés de la dérivée)

Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, deux fonctions dérivables et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors on a :

i) $(f+g)' = f' + g'$

ii) $(\lambda f)' = \lambda f'$

iii) $(fg)' = f'g + fg'$

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

v) $(f \circ u)' = u'.\, f' \circ u$, i.e. $f(u(x))' = u'(x)\, f'(u(x))$

vi) $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\,(f^{-1}(x))}$! fonction reciproque de $f(x)$

$y = f(x)$ ex : e^x est la fonction reciproque de $\ln(x)$

$x = f^{-1}(y)$

THÉORÈME (de l'Hôpital)

Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, deux fonctions dérivables telles que :

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = \lim_{x \mapsto x_0} g(x) = 0$$

Alors on a :

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

NB :

i) La preuve vient du fait que $\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \cdots = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ii) Si $\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$, on réapplique la règle de l'Hôpital (autant de fois que nécessaire).

Exemples :

$$\lim_{\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$\lim_{\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} \to \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} \to \frac{1}{2}\sqrt{x} = \infty$$

DÉRIVÉES USUELLES

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \ , \quad \left(\frac{1}{x}\right)' v = \frac{-1}{x^2} \ , \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \ , \quad (e^x)' = e^x \ , \quad (a^x)' = \ln(a)\, a^x$$

$$(\sin x)' = \cos x \ , \quad (\cos x)' = -\sin x \ , \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \ , \quad (\cosh x)' = \sinh x \ , \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \ , \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarques :

$$a^x = e^{x\ln(a)}$$

$$(a^x)' = \ln(a)\, e^{x\ln a}$$

$$= \ln(a)\, a^x$$

DÉRIVÉES USUELLES POUR LES FONCTIONS COMPOSÉES

$$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1} \ , \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2} \ , \quad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$$

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u} \ , \quad (e^u)' = u'e^u \ , \quad (a^u)' = \ln(a)\, u'a^u$$

$$(\sin u)' = u' \cos u \ , \quad (\cos u)' = -u' \sin u \ , \quad (\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \left(1 + \tan^2 u\right)$$

$$(\sinh u)' = u' \cosh u \ , \quad (\cosh u)' = u' \sinh u \ , \quad (\tanh u)' = \frac{u'}{\cosh^2 u} = u' \left(1 - \tanh^2 u\right)$$

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2} \ , \quad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \ , \quad (\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

NB : Attention au cas simple : $(f(ax+b))' = a\, f'(ax+b)$. Exemple : $I(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \ \Rightarrow \ I'(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$.

Remarques :

UN EXEMPLE DE CALCUL DE LIMITE PAR 3 MÉTHODES

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} =$$

Méthode 1 : par la définition la dérivée **:**

$$\lim_{\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \frac{\cos(0)-\cos(x)}{x-0} = \frac{-[\cos(x)-\cos(0)]}{x-0} = -\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = -\cos(0)' = -(-\sin(0))$$

Méthode 2 : par le théorème de l'Hôpital :

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{\sin x}{1} = 0$$

Méthode 3 : par transformation de l'expression :

$$= \frac{1-\cos x}{x}$$

$$= \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \qquad y = \frac{x}{2}$$

$$= \frac{2\sin^2(y)}{2y} = \frac{\sin^2 y}{y} = \sin y \cdot \overbrace{\frac{\sin y}{y}}^{\to 1} = 0$$

1. 3 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

(Approcher une fonction compliquée au voisinage d'un point)

Définition. Une fonction f admet un **développement limité à l'ordre** n en un point $x = a$, noté $DL_n(a)$, si on peut l'écrire :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + \underbrace{(x-a)^n\varepsilon(x-a)}_{\text{reste}}$$

où ε est une fonction telle que $\lim_{x\mapsto a} \varepsilon(x-a) = 0 = \lim_{t\mapsto 0} \varepsilon(t) = 0$.

Interprétation. Près du point $x = a$, on a approché la fonction f par un polynôme de degré n, et le terme $(x-a)^n\varepsilon(x-a)$ correspond à l'erreur commise lors de cette approximation.

THÉORÈME (Formule de Taylor). Soit une fonction f, définie sur un intervalle I.
On a alors, en un point $a \in I$, on obtient le **développement limité à l'ordre** n, noté $DL_n(a)$ de f.

1) Si f est continue au point $a \in I$, on a le $DL_0(a)$ de f :

$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x-a)$$

2) Si f est dérivable au point $a \in I$, on le $DL_1(a)$ de f :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$$

3) Si f est n fois dérivable au point $a \in I$, on le $DL_n(a)$ de f :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x-a)$$

soit, en notation sommative :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x-a)$$

Très souvent, on essaie de se ramener au **développement limité** en $a = 0$ **à l'ordre** n, noté $DL_n(0)$ de f :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + x^n\varepsilon(x)$$

Interprétation de 2) : Près du point $x = a$, on a approché la fonction f par une droite : la tangente à f en a, d'équation $y = f(a) + (x-a)f'(a)$. Le terme $(x-a)\varepsilon(x-a)$ est la difference entre la fonction et sa tangente.

$DL_3(0)$ de $f(x) = e^x$

$f(x) = 1 + x \times 1 + \frac{x^2}{2} \times 1 + \frac{x^3}{3!} \times 1 + x^3\varepsilon(x)$

$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$

$f(0) = e^0 = 1$

$f'(0) = e^0 = 1$

$f''(0) = e^0 = 1$

$f'''(0) = e^0 = 1$

$\cos x + i\sin x = e^{ix}$

$ch(x) + sh(x) = e^x$

$ch x = e^x + e^{-x}$

$sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Illustation de la formule générale 3) :

• **Développements limités en 0 de quelques fonctions usuelles ($DL_n(0)$) :**

1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n\varepsilon(x)$$

2)

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p}\varepsilon(x) \ , \quad (n = 2p)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x) \ , \quad (n = 2p+1)$$

3)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p}\varepsilon(x) \ , \quad (n = 2p)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x) \ , \quad (n = 2p+1)$$

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

4)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n\varepsilon(x)$$

5)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

6)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + x^n\varepsilon(x)$$

NB : dans 2) et 3) on peut remplacer $x^{2p}\varepsilon(x)$ par $x^{2p+1}\varepsilon(x)$ et $x^{2p+1}\varepsilon(x)$ par $x^{2p+2}\varepsilon(x)$.

• **Utilité des DL pour les calculs de limites. Quelques exemples.**

1) $\lim_{x\mapsto 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} 1-\frac{x^2}{3!}+x^2\varepsilon(x) \to 0$

$= \underline{1}$

2) $\lim_{x\mapsto 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x)\right]$

$\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}-x^4\varepsilon(x)}{x^2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}-x^2\varepsilon(x) \to 0$

$\underline{\frac{1}{2}}$

3) $\lim_{x\mapsto 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin(x)-\cos(x)}{x^2}$

$= \frac{1}{x^2}\left(\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)\right)-\left(\cancel{x}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\dots\right)-\left(\cancel{1}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x)\right)$

$\frac{1}{x^2}\left(x^2+\frac{2x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)\right) \to \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}+x\varepsilon(x)\right)=\underline{1}$

4)

$DL_3(0)$ de $\sin(x)+\cos(x)$

$f(x)=\left(x-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)\right)+\left(1-\frac{x^2}{2!}+x^3\varepsilon(x)\right)$

$1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)$

- **Opérations sur les DL.**

i) Somme : le $DL_n(a)$ de $f+g$ est la somme des $DL_n(a)$ de f et de g.

ii) Produit : le $DL_n(a)$ de fg est le produit des $DL_n(a)$ de f et de g, tronqué à l'ordre n (cf. TD).

iii) Quotient : le $DL_n(a)$ de $\frac{f}{g}$ se calcule en mettant $\frac{1}{g(x)}$ sous la forme

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{(1-u(x))} = \frac{1}{\alpha}(1+u(x)+u(x)^2+...+u(x)^n+u(x)^n\,\varepsilon\left(u(x)^n\right))$$

où $u(x)$ est une fonction vérifiant $\lim_{x\mapsto a} u(x)=0$. On multiplie ensuite cett expression par par le $DL_n(a)$ de f, en on tronque à l'ordre n. (cf. TD).

Exemple : $DL_3(0)$ de $\tan(x)$

1° methode : $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

avec : $\sin(x) = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+x^5\varepsilon(x)$

$\cos(x) = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x)$

$$\begin{array}{l|l}
x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \\
\hline
-x+\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{24} & x+\frac{x^3}{3} \\
\hline
0+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30} & \\
-\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{72} & \\
\hline
-\frac{x^5}{30}-\frac{x^7}{72} &
\end{array}$$

Soit $\tan(x) = x+\dfrac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)$

iv) Composition : un exemple permet de comprendre :

2° methode

$\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+x^5\varepsilon(x)$

$\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^5\varepsilon(x)}$

$\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1\underbrace{\left[-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^5\varepsilon(x)\right]}_{u(x)}}$

$= \dfrac{1}{1+u(x)}$ avec $u(x)\to 0$

$1-u(x)+u^2(x)-u^3(x)\dots$

Donc :

$\dfrac{1}{\cos(x)} = 1-\left[-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+x^5\varepsilon(x)\right]+\left(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}\dots\right)^2$

$= 1+\dfrac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$

et

$\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \left(x-\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\right)\times\left(1+\dfrac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)$

$= x+x^3\left(-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\right)+x^3\varepsilon(x)$

$= x+\dfrac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)$

$DL_4(0)$ de $f(x)=\ln(\cos x)$

$\cos(x) = 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x)$

$f(x) = \ln(\cos x)$

$= \ln\Big(1\underbrace{\left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x)\right]}_{u(x)}$

$\ln(1+u(x)) = u(x)-\dfrac{(u(x))^2}{2}$

$= \left(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x)\right)-\dfrac{1}{2}\left(\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2+x^4\varepsilon(x)\right)$

$= -\dfrac{x^2}{2}+x^4\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\right)+x^4\varepsilon(x)$

$= -\dfrac{x^2}{2}+x^4\left(\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{8}\right)+x^4\varepsilon(x)$

$\ln(\cos(x)) = -\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+x^4\varepsilon(x)$

v) Dérivation et intégration : on peut dériver ou intégrer les DL terme à terme.

Soit le $DL_n(a)$ de f :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x-a)$$

Alors f' admet le $DL_{n-1}(a)$:

$$f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + 3\alpha_3(x-a)^2 + \cdots + n\alpha_n(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}\varepsilon(x-a)$$

Et la primitive $F(x) = \int f(x)\,dx$ admet le $DL_{n+1}(a)$:

$$F(x) = C + \alpha_0(x-a) + \alpha_1\frac{1}{2}(x-a)^2 + \alpha_2\frac{1}{3}(x-a)^3 + \cdots + \alpha_n\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1}\varepsilon(x-a)$$

Remarques :

1) F est donnée à une constante C près, sauf cette fonction nous est donnée. Alors on a $C = F(a)$.
2) L'unique primitive de f qui s'annule pour $x = a$, $F_a(x) := \int_a^x f(t)dt$ est alors donnée par :

$$\int_a^x f(t)dt = \alpha_0(x-a) + \alpha_1\frac{1}{2}(x-a)^2 + \alpha_2\frac{1}{3}(x-a)^3 + \cdots + \alpha_n\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1}\varepsilon(x-a)$$

Exemples :

DL de $\ln(1+x)$ en $x=0$

$\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$

on integre cette expression pour deduire le DL de $\ln(1+x)$

$\Rightarrow \ln(1+x) = \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots$

2. PRIMITIVES ET INTÉGRALES

2.1 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

□ DÉFINITIONS

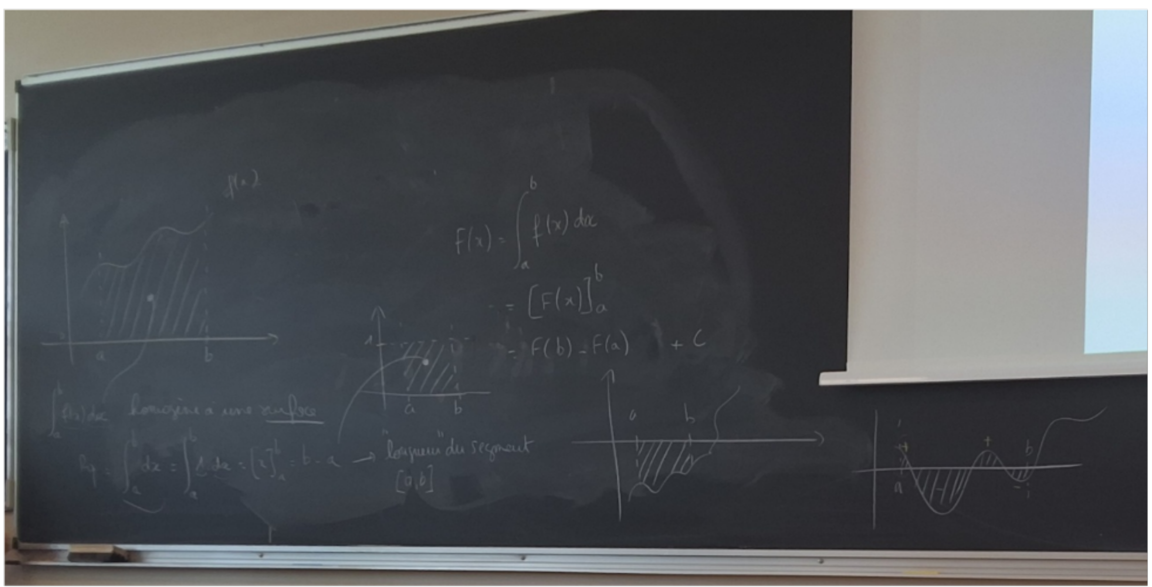
• Primitives et intégrales

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, une fonction. Une primitive F de f est définie par $F' = f$.
Elle est définie à une constante additive près.
On notera $F = \int f$, ou bien $F(x) = \int f(x)\,dx$.

L'intégrale de f entre les bornes a et b est définie par :
$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = [F]_a^b = F(b) - F(a)$, où F est ***une*** primitive de f .

NB : $F_a(x) := \int_a^x f(t)dt$ est ***la*** primitive de f qui s'annule en $x = a$.

Interprétation géométrique :
La quantité $\int_a^b f(x)dx$ correspond à l'*aire comptée algébriquement (positivement ou négativement)* du domaine délimité par le graphe de f , l'axe Ox , et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



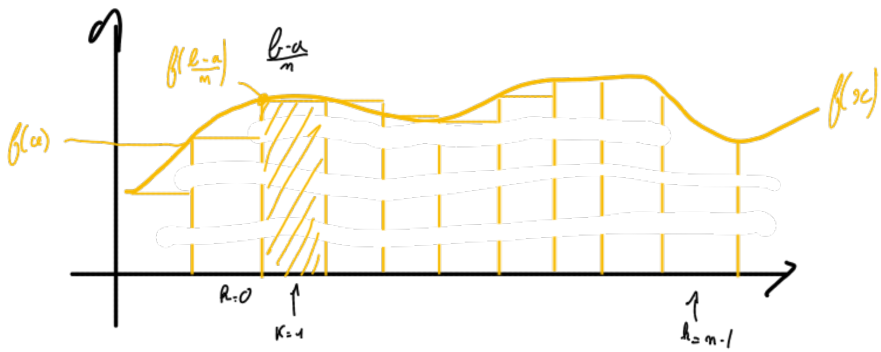
Théorème (Sommes de Riemann). Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, une fonction continue. On a :

$$\int_a^b f = \lim_{n \mapsto \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

et, pour $[a,b] = [0,1]$:

$$\int_0^1 f = \lim_{n \mapsto \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Illustration et exemples :



- Intervalle entre a et b
- Disperser en n rectangles

→ la l d'un rectangle ⇒ $\frac{b-a}{n}$

1° terme, $k=0$ aire $f(a) \times \frac{b-a}{n}$

2° terme, $k=1$ aire $f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) \times \frac{b-a}{n}$

⋮

La somme de tous ces termes est une valeur approché de l'intégrale

- Plus on a de rectangle plus on approche l'intégrale
- $n \to \infty$ → on passe d'une somme discrète à $\int$

Interêt : Calcule de somme discret.

ex : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$

$= \int_0^1 (x)^p$

$= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$

□ PROPRIÉTÉS DE L'INTEGRALE

i) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ (linéarité)

ii) $\int_b^a f = -\int_a^b f$

iii) $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ (Chasles)

iv) f est paire $\Rightarrow \int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$; f est impaire $\Rightarrow \int_{-a}^a f = 0$

v) f est T-périodique $\Rightarrow \int_\alpha^{T+\alpha} f = \int_0^T f$

NB :
1) Les bornes a et b de l'intégrale peuvent être infinies. Exemple :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

2) La fonction f peut tendre vers l'infini. Exemple :

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx \ , \ \int_0^1 \ln(x)\,dx$$

NB : $\int_a^b fg \neq \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right)$!

Exemples de calcul :

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (2\sin x + \cos x)\, dx$

$= \int 2\sin x + \int \cos x$

$[-2\cos x]_0^{\pi/2} + [\sin x]_0^{\pi/2}$

$2 + 1 \qquad = \underline{3}$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$\displaystyle 2\int_0^{+\infty} \frac{d}{1+x^2}$

$2[\arctan]_0^{+\infty}$

$2\times\left(0+\frac{\pi}{2}\right|$

$= \underline{\pi}$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4}}$

$\displaystyle\int_0^1 x^{-1/4}$

$\displaystyle\left[\frac{x^{3/4}}{3/4}\right]_0^1$

$= 0 + \frac{4}{3}$

PRIMITIVES USUELLES

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ (\alpha \neq\text{-}1)\ , \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|)$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x\ , \quad \int \cos x\, dx = \sin x\ , \quad \int \tan x\, dx = \ln|\sin x|\ , \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1+\tan^2 x\right) dx = \tan x$$

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x\ , \quad \int \cosh x\, dx = \sinh x\ , \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \int \left(1-\tanh^2 x\right) dx = \tanh x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x\ , \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \quad (\text{ou } \ -\arccos x)$$

Remarques :

PRIMITIVES USUELLES POUR LES FONCTIONS COMPOSÉES

$$\int u'u^\alpha = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ , \quad \int \frac{u'}{u} = \ln(|u|)$$

$$\int u'e^u = e^u$$

$$\int u'\cos u = \sin u\ , \quad \int u'\sin u = -\cos u\ , \quad \int u'\tan u = \ln|\sin u|\ , \quad \int \frac{u'}{\cos^2 u} = \int u'\left(1+\tan^2 u\right) = \tan u$$

$$\int u'\sinh u\ = \cosh u\ , \quad \int u'\cosh u\ = \sinh u\ , \quad \int \frac{u'}{\cosh^2 u} = \int u'\left(1-\tanh^2 u\right) = \tanh u$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} = \arctan u\ , \quad \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u \quad (\text{ou} \ -\arccos u)$$

NB : Attention au cas simple : $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$, avec $F' = f$.

Remarques :

• TECHNIQUES ISSUES DE LA DÉRIVATION

PRIMITIVES DE DÉRIVÉES “REMARQUABLES” (DR)

Dans l’expression $\int f(x)\,dx$, on remarque que la fonction f correspond à une **dérivée classique** modulo quelques petites modifications (en général, une multiplication par une constante).

On peut alors trouver F telle que $F' = f$, et on intègre directement.

Exemple.

$$\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2}$$

$$\left[\frac{e^{-x^2}}{-2} \right]_0^{+\infty}$$

$$I = \frac{1}{2}(0 \cdot 1) = \frac{1}{2}$$

INTÉGRATION PAR PARTIES (IPP)

Comme $(uv)' = u'v + uv'$, on a $\int (uv)' = \int u'v + \int uv'$, soit :

$$\boxed{\int uv' = uv - \int u'v}$$

et donc

$$\boxed{\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v}$$

Exemples.

1) $\int x e^{2x} \, dx$

$x \times \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}$

$\frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

D	I
x	e^{2x}
$-\ 1$	$\frac{e^{2x}}{2}$
0	$\frac{e^{2x}}{4}$

2) $\int_0^{\pi} x \sin x$

$\left[-x\cos x + \sin x\right]_0^{\pi}$

π

D	I
$+x$	$\sin x$
-1	$-\cos x$
$+0$	$-\sin x$

3) $\int_1^e 1 \times \ln(x) \, dx$

$\ln x \cdot x - \int 1$

$\left[\ln x \cdot x - x\right]_1^e$

$(e - e - (-1))$

1

D	I
$\ln x$	1
$-\frac{1}{x}$	x

4) $\int_0^1 \arcsin(x) \, dx$

$\arcsin(x) \cdot x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x^2$

$u - \arcsin(x) \cdot \frac{x^3}{3}$

D	I
$\arcsin$	1
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	x
$+$	x^2

CHANGEMENT DE VARIABLE (CV)

Soit $I = \int_a^b f(x)dx$ .Si on pose $x = u(t)$, on a $t = u^{-1}(x)$ et $dx = u'(t)\,dt$. Cela donne donc :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\,u'(t)\,dt}$$

Une deuxième formulation (CV $\Leftrightarrow$ DR) :

Lorsqu'on a déjà la forme $I = \int_a^b f(v(x))v'(x)\,dx$, il s'agit, en fait, de la "dérivée remarquable" de $F(v(x))$.
En effet, $f(v(x))v'(x) = F'(v(x))v'(x) = F(v(x))'$, où F est une primitive de f.
Si on ne le "remarque" pas, on passe par un CV : on pose $y = v(x)$, et donc $dy = v'(x)dx$. D'où la formule :

$$\boxed{\int_a^b f(v(x))\,v'(x)\,dx = \int_{v(a)}^{v(b)} f(y)\,dy}$$

Exemples et remarques.

$I = \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,dx$

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$dx = du \times 2u$

$I = \int_0^{\pi} \sin(u) \cdot du \times 2u$

$I = \int_0^{\pi} \sin(u) \times 2u\,du$

$I = 2\int_0^{\pi} u \times \sin(u)\,du \to$ IPP

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x\,dx$

$u = \sin x$

$du = \cos x\,dx$

$dx = \frac{du}{\cos x}$

$I = \int_0^1 \frac{u}{1+u^2}\,du$

$I = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\ln(2)$

$\frac{d}{dx}\sin^2 x = 2\sin x \cos$

$\int \frac{\sin \cos x}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x)$

$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$

$u = 2x$

$du = 2\,dx$

$dx = \frac{du}{2}$

$\frac{1}{2}\int_0 \frac{1}{1+u^2}\,du$

$\frac{1}{2}\arctan(u) = \left[\frac{1}{2}\arctan(2x)\right]_0^1$

$\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$u = 1-x^2$

$du = -2x\,dx$

$dx = \frac{du}{-2x}$

$-\frac{1}{2}\int_1^{3/4} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$

$-\frac{1}{2}\;2\sqrt{u} = -\left[\sqrt{u}\right]_1^{3/4}$

$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

2° méthode

$= \left[-(1-x^2)^{1/2}\right]_0^{1/2}$

$= \left[-(1-\frac{1}{4})^{1/2} + (1-0)^{1/2}\right]$

$= -\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} + 1$

$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

3° méthode $x = \sin t$

$dx = \cos t\,dt$

$= \int_0^{1/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2}} \Leftrightarrow \frac{\sin t}{\sqrt{\cos t^2}} = \frac{\sin t}{\cos t}$

$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \cos t \cdot dt = \int_0^{\pi/6} \sin t \cdot dt$

$\left[-\cos t\right]_0^{\pi/6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

• TECHNIQUES DE DÉCOMPOSITION DE LA FONCTION

LINÉARISATION DES POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES

• **But :** la **linéarisation** a pour but de **supprimer les puissances ou produits** dans un polynôme en sin et cos, afin de pouvoir en calculer l'intégrale. Par exemple, $I = \int_0^{\pi/3} \cos^3 x\, dx$, $J(x) = \int \sin^4 x\, dx$, $K = \int_0^{\pi/2} \sin x\, \cos^4 x\, dx$.

• **Méthode 1 :** Utilisation des formules d'Euler.

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad ; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$$

Exemple. $\int_0^{\pi/3} \cos^3(x)\, dx$

$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}$

$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$

$\frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3 e^{2ix} e^{-ix} + 3 e^{ix} e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)$

$\frac{1}{8}(2\cos(3x) + 3 \times 2\cos(x))$

$\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$

$I = \int_0^{\pi/3} \left[\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x\right] dx$

$I = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi/3} + \frac{3}{4}\left[\sin x\right]_0^{\pi/3}$

$= \frac{1}{4}\frac{1}{3}(0-0) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} \cdot 0\right) = \frac{3}{8}$

• **Méthode 2 :** Utilisation des formules trigonométriques de linéarisation.

$$\boxed{\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \quad ; \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad ; \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)}$$

Exemple.

$= \int \sin^4(x)\, dx$

$= \int \sin^2(x) \sin(x)^2\, dx$

$\int \frac{1}{2^2}(1 - \cos(2x))^2\, dx$

$\frac{1}{4}\int (1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x))\, dx$

$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos(2x) + \frac{1}{2}(1 + 2\cos(4x)))\, dx$

$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \frac{2\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(4x)}{4}\right.$

• **Méthode 3 :** Eviter la linéarisation !

Exemple. $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^4(x)\, dx$

$\left[-\frac{\cos^5(x)}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5}$

$\int \cos^3(x)\, dx$

$\int \cos(x)\cos^2(x)$

$\int \cos(x)(1 - \sin^2(x))$

$\int \cos(x) - \int \cos(x) \cdot \sin^2(x)$

$[\sin x] - \left[\frac{\sin^3(x)}{3}\right]$

• DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN ÉLÉMENTS SIMPLES (DANS $\mathbb{R}$)

But : décomposer une **fraction rationnelle** en la somme d'un **polynôme** et de fractions rationnelles de primitives connues : les "**éléments simples**". Pour $A(x)$ et $B(x)$, deux polynômes, et $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, la "fraction rationnelle", on veut calculer :

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$$

Etape 1. Si degré(A)$\geq$degré(B) on fait la **division euclidienne** de $A(x)$ par $B(x)$

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

On a donc $f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$, avec degré($R$) $<$degré(B). On s'intéresse alors à la fraction rationnelle $\frac{R(x)}{B(x)}$. Exemple.

Etape 2. On **factorise le dénominateur** $B(x)$ dans $\mathbb{R}$, si c'est possible. Exemples.

Etape 3. On **décompose** $\frac{R(x)}{B(x)}$ en **éléments simples :** $h(x) = E_1(x) + E_2(x) + \cdots + E_n(x)$.
Par définition, un "élément simple" est une fraction rationnelle que l'on sait intégrer facilement. Exemples : voir plus loin.

Etape 4. On **intègre** : $\int f(x)dx = \int Q(x)dx + \left(\int E_1(x)dx + \cdots + \int E_n(x)dx\right)$

Un exemple simple

$$\int \frac{x^4}{x^2+1} \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^2+1 \\ \hline -\;\cancel{x^4} - \cancel{x^2} & x^2-1 \\ +\cancel{x^2}+1 & \\ +1 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ Soit $\quad \dfrac{x^4}{x^2+1} = x^2-1 + \dfrac{1}{x^2+1}$

$$\int \frac{x^3-x-1}{x^2-1} = x - \frac{1}{x^2-1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x-1 & x^2-1 \\ \hline -x^3+x & x \\ -1 & \end{array}$$

Decompose $\quad x - \dfrac{1}{x^2-1}$

$\downarrow$

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \qquad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$x - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x+1)} \right)$$

$$\int \left(x - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \right) dx$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x+1)}{(x-1)} + C = \frac{x^2}{2} + \ln\sqrt{\frac{|x+1|}{|x-1|}} + C$$

Quelques exemples pour la décomposition (Etape 3).
Après la factorisation du dénominateur (plus éventuellement un CV) on se ramène à 4 cas standards (avec degré(R) <degré(B)).
On décompose en “éléments simples” (que l’on sait intégrer) :

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{R(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} + \frac{c}{x-\gamma}$$

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{R(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^3} = \left(\frac{a}{(x-\alpha)^2} + \frac{a'}{x-\alpha}\right) + \left(\frac{b}{(x-\beta)^3} + \frac{b'}{(x-\beta)^2} + \frac{b''}{x-\beta}\right)$$

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{R(x)}{(x-\alpha)^2(x^2+1)} = \left(\frac{a}{(x-\alpha)^2} + \frac{a'}{x-\alpha}\right) + \frac{bx+b'}{x^2+1}$$

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{R(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x^2+1)^n} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} + \frac{cx+c'}{(x^2+1)^n}$$

FRACTIONS RATIONNELLES TRIGONOMÉTRIQUES

Pour P et Q polynômes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$, une fraction rationnelle trigonométrique s'écrit $f(\theta) = \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{Q(\cos\theta, \sin\theta)}$. Pour calculer

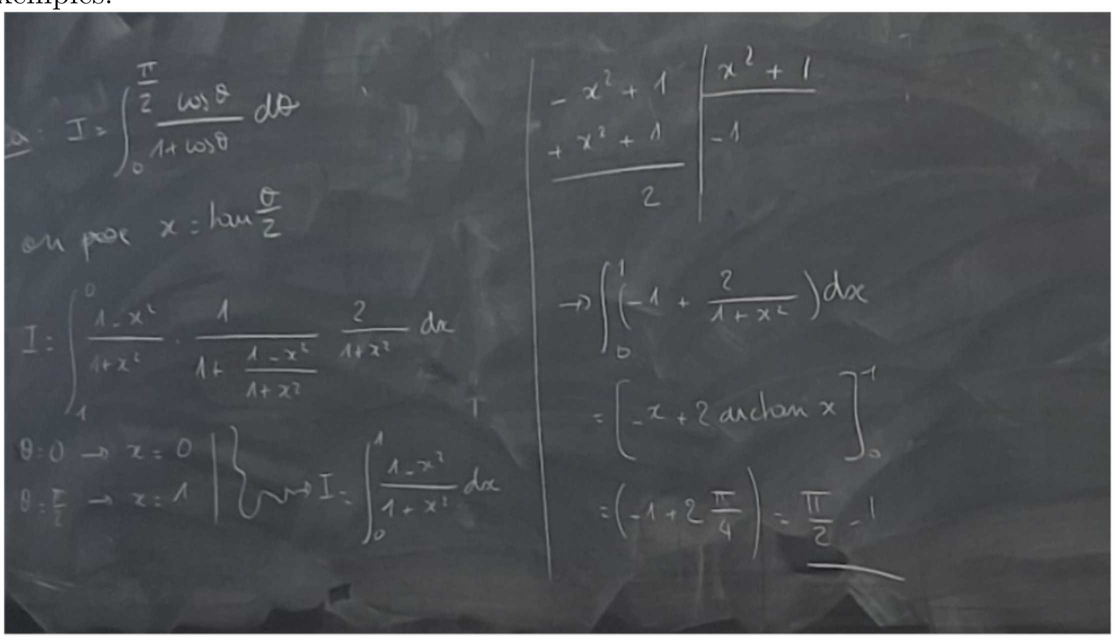
$$I = \int_a^b f(\theta)\, d\theta$$

Pas a l'exam

on utilise la **"Règle de Bioche"** : On pose $H(\theta) = f(\theta)\, d\theta$.
- si $H(-\theta) = H(\theta)$, on pose $x = \cos\theta$.
- si $H(\pi - \theta) = H(\theta)$, on pose $x = \sin\theta$.
- si $H(\theta + \pi) = H(\theta)$, on pose $x = \tan\theta$.
- sinon, on pose $x = \tan\frac{\theta}{2} \;\Leftrightarrow\; \theta = 2\arctan x$, et on a : $d\theta = \frac{2}{1+x^2}\, dx\,, \quad \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Dans les 4 cas , $H(\theta) = \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{Q(\cos\theta, \sin\theta)}\, d\theta$ devient une fraction rationnelle en x : $\frac{A(x)}{B(x)} dx$. On se ramène donc au **cas précédent**.

Exemples.



2.3 DÉRIVÉES PARTIELLES

Définition (dérivées partielles premières pour 2 variables).
Les dérivées partielles premières d'une fonction $f = f(x, y)$ se notent $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
Elles remplacent la notation $f'(x) = \frac{df}{dx}$ pour une seule variable, et on les calcule de la même manière.
La variable suivant laquelle on ne dérive pas est considérée lors de la dérivation comme une simple constante.

Exemple. $f(x,y) = x^2\ln(y) + x + y^3$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\ln(y) + 1 + 0 \quad \Big| \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\frac{1}{y} + 0 + 3y^2$

Définition (gradient). Il est noté et défini ainsi : $\nabla f = \overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Pour $f(x,y)\ x^2 + y^2$ $\quad$ $\text{grad}\, f = \begin{vmatrix} 2x \\ 2y \end{vmatrix}$

Définition (dérivées partielles secondes). Il y en a 4 :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$

ex : $f(x,y) = x^3 \sin y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \sin y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \sin y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 \cos y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \cos y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^3 \sin y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 \cos y$

• Pour les fonctions de 3 variables, comme $f(x, y, z)$, (voire n variables) , les définitions sont analogues :

Dérivées partielles premières : ce sont $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Dérivées partielles secondes. Il y en a 9 pour 3 variables (et n^2 pour n variables) :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} , \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \ \ldots$

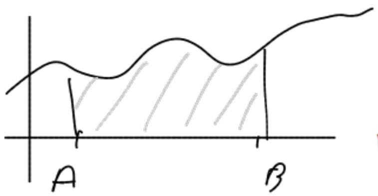
2.4 INTÉGRALES DOUBLES

• **Définition et notation.** Une intégrale double correspond à un ***volume.*** (alors que l'intégrale simple correspond à une aire). On la note

$$I = \int\int_D f = \int\int_D f(x,y)dxdy$$

C'est le volume compris entre le graphe de f, le plan $x0y$, et délimité par le domaine D. Il est compté positivement si $f \geq 0$, négativement sinon.

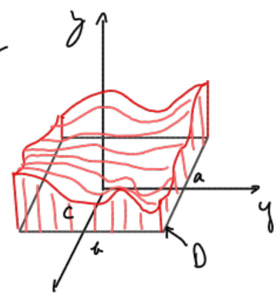
intégral simple



homogène à une surface

Valeur de la ligne

intégrale double



homogène à un volume

Valeur d'une surface

$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$

$\rightarrow$ homogène à L^3

$\iint_D dx\,dy =$ "surface de D"

ici $D[a,b]\times[c,d]$

c'est un rectangle

⚠ pas toujours le cas.

$\int_a^b 1.dx = (b-a)$

• **Calcul d'aire.** L'aire du domaine D est donnée par la formule :

$$\text{Aire}(D) = \int\int_D 1 = \int\int_D dxdy$$

• **Intégrale double sur un rectangle .** Sur le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ on peut écrire

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx$$

Dans le cas particulier des **"variables séparées"** : $f(x, y) = g(x)h(y)$, on a

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)\, dxdy = (\int_a^b g(x)dx)\,(\int_c^d h(y)dy)$$

Sur 1 rectangle :

l'intégrale de $f(x,y) = x, y\, e^{(-x^2 y)}$

sur $[0,1] \times [0,2]$ (x ↑, y ↑)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left[\int_0^1 x y\, e^{(-x^2 y)}\, dx\right] dy$$

y ↑ x ↑

$$I = \int_0^2 \left[\frac{-1}{2}\; e^{(-x^2 y)}\right]_0^1 dy$$

$$\int_0^2 -\frac{1}{2}\left(e^{(-y)} - 1\right) dy$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{(-y)} - 1\, dy$$

$$-\frac{1}{2}\left[-e^{-y} - y\right]_0^2$$

$$-\frac{1}{2}\left[e^{-2} - 2 + 1\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^2} + 1\right)$$

Ex 2 : (Variable séparée)

$f(x,y) = x y^2$

à intégrer sur $D = [0,1] \times [-1,1]$

$$\int_{-1}^1\int_0^1 x y^2\, dx\, dy = \int_{-1}^1 y^2 dx \int_0^1 x dx$$

$$\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

⚠ Que quand elle sont imbriquées $(x \cdot y)$

- **Calcul d'une intégrale double par tranches**.

Suivant la forme du domaine il peut être intéressant de calculer $I = \int\int_D f(x, y)dxdy$ en découpant D en "tranches" verticales ou horizontales :

i) Tranches verticales.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} \implies$$

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

ii) Tranches horizontales.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\} \implies$$

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)dx \right) dy$$

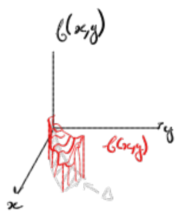
ex) Intégrer la fonction $x^2y = f(x,y)$

sur Δ définie par

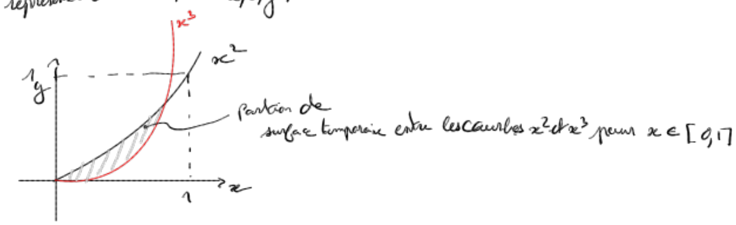
$$\Delta = \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 \leq y \leq x^2 \end{array} \right.$$

① Représenter Δ

② Calculer l'intégration.



On représente dans le plan $(x,0,y)$



2) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} x^2 y \, dy \, dx$ Bien poser les bornes et intégrer dans le bon ordre.

$$\int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} \right]_{x^3}^{x^2} dx$$

$$\int_0^1 x^2 \cdot \frac{x^{2^2}}{2} - x^2 \frac{x^{3^2}}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2} x^6 - \frac{1}{2} x^8 \, dx$$

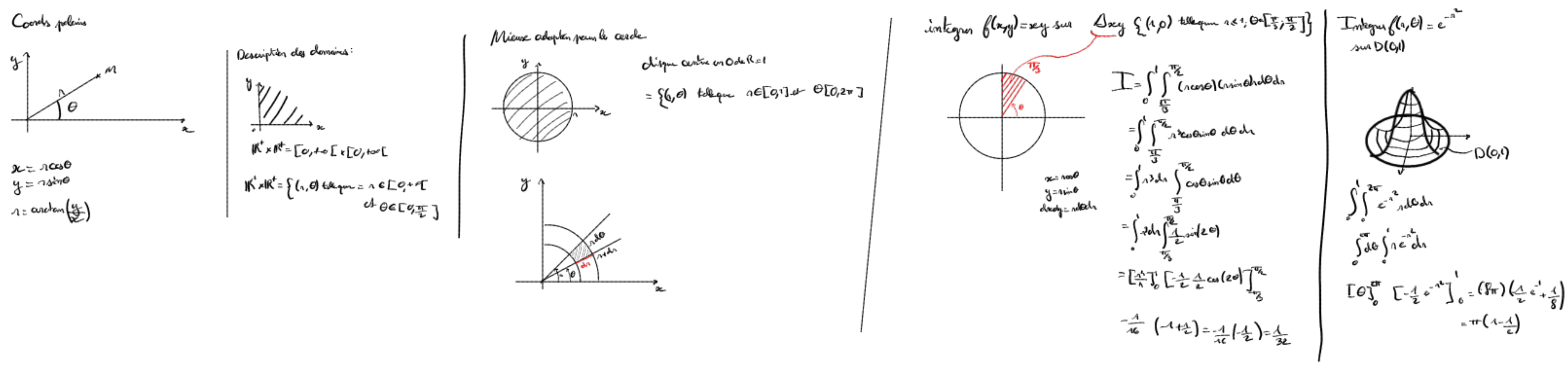
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right)$$

• Changement de variables en coordonnées polaires.

Pour un point $M = (x, y)$ on fait la transformation $(x, y) \mapsto (r, \theta)$, avec :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = y/x \end{cases}$$

La variable $r \in [0, +\infty[$ représente la distance de (x, y) à l'origine : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
La variable $\theta \in [0, 2\pi[$ est la valeur de l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe Ox.



On a alors la formule (où D_p est la réécriture de D en coordonnées polaires) :

$$\int\int_D f(x, y) dx dy = \int\int_{D_p} f(rcos\theta, rsin\theta)\, r\, dr d\theta$$

Interprétation : l'élement infinitésimal de surface $dxdy$ est remplacé par $r\, dr d\theta$, élément de surface radial.

3. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

3.1 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

• Notion d'équation différentielle (ED)

- Une équation différentielle du **premier ordre** est une équation qui relie une fonction inconnue $y(x)$ à sa **première dérivée**, $y'(x)$.

- Pour abréger, on omet souvent la variable x dans la fonction y : on écrit y et y'. Exemple : $y' = e^x y + e^{-x}$.

- L'équation est dite **linéaire** si y et y' ne sont pas multipliées entre elles, ni composées par une fonction.
Exemples. $y' - e^x y = e^{-x}$ est linéaire.
Mais $y'y = \cos x$, $y' = xy^2 + 1$ et $y' = \tan y + 2x$ sont non linéaires.

- $y'(x+1) = y(x)$ n'est pas une équation différentielle.

• Définition : ED du premier ordre linéaire
Elle est de la forme

$$\boxed{(E) : \quad y' + a(x)y = c(x)}$$

où a et c sont des **fonctions** (à valeurs réelles ou complexes).

• **Résolution en 3 étapes :**

i) On considère l'**ED homogène**, i.e. sans second membre, associée à (E) :

$$\boxed{(H): \quad y' + a(x)y = 0}$$

Ses solutions sont, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (formule facile à retrouver) :

$$\boxed{y_H(x) = \lambda e^{-\int a(x)\,dx}}$$

ii) On cherche ensuite une **solution particulière** de (E), notée y_0. On la trouve

- soit par une analogie, car elle souvent presque de la même forme que les fonctions a et c.

- soit par la **méthode de Lagrange**, **(**dite de **"la variation de la constante")** qui marche toujours, même si parfois longue.
Elle consiste à poser $y_0(x) = \lambda(x)e^{-\int a(x)\,dx}$ et à injecter cette fonction dans (E).
On trouve alors $\lambda'(x) = c(x)\,e^{+\int a(x)\,dx}$. On peut ainsi calculer $\lambda(x)$, et donc $y_0(x)$.

iii) La solution de (E) est (grâce à la linéarité de l'ED) **la somme** :

$$\boxed{y = y_H + y_0}$$

c'est à dire :

$$\boxed{y(x) = \lambda e^{-\int a(x)\,dx} + y_0(x)\,, \ \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

NB : y est déterminée à **la constante** multiplicative λ près.
La donnée d'**une condition initiale** (par exemple $y(0) = 1$) permet de calculer λ. La solution y est donc **unique**.

Justifications et exemple :

ex 1

$$xy' - 2y = 0$$

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$

ici $a(x) = -\frac{2}{x}$

Donc

$y(h) = \lambda e^{\left(\int \frac{2}{x}\,dx\right)}$

$= \lambda e^{2\ln(x)}$

$= \lambda e^{(\ln x^2)}$

$y_h = \lambda x^2$

ex 2

$y' + 2y = 4$

$y' + 2y = 0$

$y' = -2y$

$\frac{y'}{y} = -2$

$\int \frac{y'}{y}\,dx = -2\int dx$

$\ln y = -2x + C$

$y_h = \lambda e^{(-2x)}$

y_p :

$y' + 2y = 4$

Les coef sont constant les solution particulier aussi $y_0(x) = B$, $y_0'(x) = 0$ $\rightarrow$ $0 + 2B = 4$, $B = 2$

$y_0 = 2$

$y(x) = y_h + y_p = \lambda e^{-2x} + 2$

ex 3

$y' + xy = x^2 + x + 1$

$(H) : y' + xy = 0$ $\quad a(x) = x$

$y_h = \lambda \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ $\quad \int a(x)\,dx = \frac{x^2}{2}$

solution particulière $\rightarrow a(x)$ et $c(x)$ $\rightarrow$ polynome.

– Soit $y_p(x) = \alpha x + \beta$

On introduit $y_p(x)$ d'ou l'ED complété

$(E) = \begin{cases} y_p = \alpha x + \beta \\ y_p' = \alpha \end{cases}$

E devient

$\alpha + x(\alpha x + \beta) = x^2 + x + 1$

On trouve α et β par identification

$\alpha = 1$

$\beta = 1$

$y_p = x + 1$

Solution générale :

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$y(x) = \lambda e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} + x + 1$

---

ex 4 $\quad xy' - 2y = x^3$

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2$$

* homogene

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$

ici $a(x) = -\frac{2}{x}$

$y_h(x) = \lambda e^{\left(\int \frac{2}{x}\,dx\right)}$

$y_h(x) = \lambda x^2$

* Solution Particulière

Variation de la constante

$\lambda \rightarrow \lambda(x)$

On pose $y(x) = \lambda(x)x^2$ $\rightarrow$ que l'on injecte dans E

$y(x) = \lambda(x)x^2$

$y'(x) = \lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x)$

$y'(x) = \lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x) - \frac{2}{x}\lambda(x)x^2 = x^2$

$\Leftrightarrow \lambda' = 1$

$\lambda(x) = x + C$

La solution generale est directement cette solution

$y(x) = [x + C]x^2$

cela reviendrait a la meme chose d'ajt y_h et cette solution :

$y(x) = y_h + y_c$

$= \lambda x^2 + (x + c)x^2$

$= x^2(\lambda + c) + x^3$

$= x^2(x + K)$

3.2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

• **Définition : ED du second ordre linéaire à coefficients constants**

Pour des **constantes** a et b, et c une **fonction** (à valeurs réelles ou complexes), elle est de la forme :

$$\boxed{(E): \quad y'' + ay' + by = c(x)}$$

• **Résolution en 3 étapes :**

i) On considère l'**ED homogène**, i.e. sans second membre, associée à (E) :

$$\boxed{(H): \quad y'' + ay' + by = 0}$$

Pour trouver ses solutions, notées y_H, on commence par résoudre l'**équation caractéristique** associée :

$$\boxed{(C): \quad r^2 + ar + b = 0}$$

Suivant la nature de ses racines, r_1 et r_2 , il y a trois cas possibles :

a) Elles sont réelles et différentes $(\Delta > 0)$: alors $\boxed{y_H(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}\,;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

b) Elles sont égales, $r_1 = r_2 := r_0$ $(\Delta = 0)$: alors $\boxed{y_H(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}\,;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

c) Elles sont complexes conjuguées $(\Delta < 0)$, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.
On a alors : $y_H(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On l'écrira toujours sous la forme :

$$\boxed{y_H(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))\,;\ A, B \in \mathbb{R}}$$

ii) On cherche ensuite une **solution particulière** y_0 de (E) :

- soit par une analogie, car elle souvent presque de la même forme que les fonctions a et c.

- par la **méthode de la "variation de la constante" d'ordre 2**, qui nécessite de longs calculs (hors programme).

iii) La solution de (E) est (toujours grâce à la linéarité de l'ED) **la somme** :

$$\boxed{y = y_H + y_0}$$

NB : y comporte à présent **deux constantes** inconnues, λ et μ, ou bien A et B.
La donnée de **2 conditions initiales ou limites** (par exemple $y(0) = 1$, $y(1) = 3$; ou $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$) permet de les calculer.
La solution y est donc **unique**.

Exemple. $y'' + 4y' + 3 = 0$

$r^2 + 4r + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 3 = 4$ | $r_\pm = \dfrac{-4 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -2 \pm 1$ | $r_1 = -1$, $r_2 = -3$

$y_h = A e^{(-1x)} + B e^{(-3x)}$

$y'' + y' + y = 0$

$r^2 + r + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

$r_\pm = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{\Delta}}{2}$ | $r_1 = \underbrace{\dfrac{-1}{2}}_{\alpha} \pm i \underbrace{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}_{\beta}$

$y_h(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(A \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + B \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} x\right) \right)$

3.3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE À VARIABLES SÉPARABLES

Définition. C'est une équation différentielle où l'on peut séparer les "variables" x et $y = y(x)$, i.e. la mettre sous la forme :

$$\boxed{y'(x)f(y(x)) = g(x)}$$

Elle est souvent notée :

$$\boxed{y'f(y) = g(x)}$$

On intégre alors de part et d'autre :

$\int y'f(y)\,dx = \int y'(x)f(y(x))\,dx = F(y(x))$, et $\int g(x)\,dx = G(x)$. D'où $F(y(x)) = G(x) \Leftrightarrow y(x) = F^{-1}(G(x))$.

Exemple.

$\frac{1}{x}y' + y^2\cos(x) = 0$

$\frac{1}{x}y' = -y^2\cos(x)$

$-\frac{y'}{y^2} = x \times \cos(x)$

$-\int \frac{y'}{y^2} = \int x\cdot\cos(x)$

$\frac{1}{y} = x\sin(x) + \cos(x) + C$

$y = \frac{1}{x\sin(x)+\cos(x)} + C$

x	$\cos x$
-1	$\sin x$
0	$-\cos x$

$y' = 1+y^2$

$\frac{y'}{1+y^2} = 1$

$\int \frac{y'}{1+y^2} = \int 1\,dx$

$\arctan(y) = x + C$

$y = \tan(x+C)$

Rq : $y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 1+y^2$

$\frac{dy}{1+y^2} = dx$

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$

$\arctan(y) = x+C$

$y = \tan(x+C)$

ex 3

$y' = \frac{1+y^2}{2y}\cdot\frac{1}{x}$

$y'\frac{2y}{1+y^2} = \frac{1}{x}$ ici $g(x) = \frac{1}{x}$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{2y}{1+y^2}dy = \frac{1}{x}dx$

$\int \frac{2y}{1+y^2}dy = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln(1+y^2) = \ln(x) + C$

$1+y^2 = e^{\ln(x)+C}$

$1+y^2 = x\lambda$

$y^2 = \lambda x - 1$

$y = \sqrt{\lambda x - 1}$

4. MATRICES ET APPLICATIONS

Les matrices sont souvent employées en physique et en électronique pour décrire des systèmes d'équations reliant des éléments entre eux. On les retrouve en optique pour décrire les cordonnées et angles des faisceaux lumineux, elles décrivent la propagation et les interfaces (dioptres, L1), on aura la même chose pour décrire la transmission sonore (matrice de transfert L3 pro) ou celle de la lumière à travers des couches multiples (M1). On les retrouve dans les résolutions de circuits électriques (i inconnues, L1) ou le traitement des quadripôles en série (L2). Elles permettent aussi de résoudre des systèmes d'équations différentielles.

4.1. DÉFINITIONS ET RÈGLES DE CALCUL

Définition (Matrice)

Une *matrice* A est un tableau de nombres réels ou complexes.
Soient n le nombre de lignes et p le nombre de colonnes.
On dit que "A est une matrice $n \times p$", et on note $A \in M_{np}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ a_{31} & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & a_{ij} & & \\ & & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \dots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les lignes sont notées généralement L_i et les colonnes C_j.
Les éléments de la matrice sont notées a_{ij} ou $(A)_{ij}$. On écrit $A = (a_{ij})$.

Si $n = p$, on dit que A est **"carrée"** d'ordre n. On écrit alors simplement : $A \in M_n$.

Si $n = 1$, on dit que A est une **"matrice ligne"** : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix}$

Si $p = 1$, on dit que A est une **"matrice colonne"**, et on peut l'associer à un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$) : $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

Définition (4 matrices carrées fondamentales)
Il existe 4 cas particuliers importants pour les matrices carrées $n \times n$ de M_n :

1) La **matrice nulle** :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2) La **matrice identité** :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

On a $(I)_{ij} = 1$ si $i = j$ et $I_{ij} = 0$ si $i \neq j$. On note $(I)_{ij} = \delta_{ij}$.

3) Les **matrices diagonales :**

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 16 \end{matrix}$

produit des diagonal

On les note : $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$.
On a $(D)_{ij} = d_i$ si $i = j$ et $D_{ij} = 0$ si $i \neq j$. (Ainsi, $(D)_{ij} = d_i\delta_{ij}$.)

4) Les **matrices triangulaires :**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & (0) & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice A est dite “triangulaire supérieure”. Elle est définie par $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

Pour une matrice triangulaire inférieure, les zéros sont au-dessus de la diagonale. Elle est définie par $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

Définition (Somme et multiplication)

i) Somme de deux matrices : soient deux matrices de même taille, $A = (a_{ij}) \in M_{np}$ et $B = (b_{ij}) \in M_{np}$. La somme des deux matrices, $A + B$, vérifie :

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

ii) Produit d'une matrice par un nombre : soient une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{np}$ et λ, un nombre réel ou complexe. La matrice λA vérifie :

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Exemples :

Définition (Produit matrice-vecteur)

Soient une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{np}$ et un vecteur $u = (u_j) \in \mathbb{R}^p$ (ou $\mathbb{C}^p$).

Le produit de A par u est le vecteur Au, vecteur de taille n, ayant pour éléments :

$$(Au)_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} u_j \ , \ \forall i = 1 \dots n$$

On pourra retenir que : $(n \times p) * (p \times 1) \mapsto (n \times 1)$ → autant de collone que de ligne dans les 2 M

Exemples :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

On a : $Au = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 \end{pmatrix}$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $Au = \begin{pmatrix} x+z \\ 2x+y \\ x+y+z \end{pmatrix}$

Définition (Produit de deux matrices)
Soient deux matrices $A = (a_{ij}) \in M_{np}$ et $B = (b_{ij}) \in M_{pr}$.
Le produit de A par B est la matrice $AB \in M_{nr}$ telle que :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \ , \ \forall i = 1 \dots n \ , \ \forall j = 1 \dots r$$

On pourra retenir que : $(n \times p) * (p \times r) \mapsto (n \times r)$

Exemples

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$.

Cas de la matrice identité. Soit $A \in M_n$ et I_n la matrice identité de M_n. On a :

$$AI_n = I_nA = A$$

Preuve :

* On a $(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(I_n)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$, $\forall i, j = 1 \ldots n$. Donc $AI_n = A$.

** De même, $(I_nA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (I_n)_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}a_{kj} = a_{ij}$, $\forall i, j = 1 \ldots n$. Donc $I_nA = A$.

Exemples

Cas des matrices diagonales.

Soit $A \in M_n$ et $B \in M_n$, deux matrices diagonales : $A = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $B = diag(\beta_1, \dots, \beta_n)$. On a :

$$AB = BA = diag(\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n)$$

Preuve :

* On a $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i\delta_{ik}\beta_j\delta_{kj} = \alpha_i\beta_j\delta_{ij} = \alpha_i\beta_i\delta_{ij}$, $\forall i, j = 1 \dots n$. Donc $AB = diag(\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n)$.

** De même, $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \beta_i\delta_{ik}\alpha_j\delta_{kj} = \beta_i\alpha_j\delta_{ij} = \alpha_i\beta_i\delta_{ij}$, $\forall i, j = 1 \dots n$. Donc $BA = AB = diag(\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n)$.

Exemple

Cas des matrices triangulaires.

i) Soit $A \in M_n$ et $B \in M_n$, deux matrices triangulaires supérieures ($a_{ij} = 0$ et $b_{ij} = 0$ si $i > j$). Alors AB est aussi triangulaire supérieure.

ii) Soit $A \in M_n$ et $B \in M_n$, deux matrices triangulaires inférieures ($a_{ij} = 0$ et $b_{ij} = 0$ si $i < j$). Alors AB est aussi triangulaire inférieure.

Exemples

THÉORÈME (Associativité mais non-commutativité du produit matriciel).

i) Soient $A \in M_{np}$, $B \in M_{pr}$, et $C \in M_{rm}$.
Alors leur produit est une matrice de M_{nm}, notée ABC, avec :

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

ii) Soit $A \in M_{np}$ et $B \in M_{pn}$, deux matrices.
En général, A et B ne commutent pas :

$$AB \neq BA$$

Remarques.
Deux matrices diagonales commutent toujours (cf. avant).
Deux matrices triangulaires (supérieures) ne commutent en général pas, mais on peut citer, par exemple : $A = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \beta & \mu \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Exemples : voir TD.

4.2 SYSTÈMES LINÉAIRES ET MATRICE INVERSE

□ DÉFINITION (Matrice inverse)
Soit $A \in M_n$, une matrice carrée de taille n. Sa matrice inverse est l'unique matrice $B \in M_n$ vérifiant $AB = BA = I_n$.
On la note A^{-1}. On a donc $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

NB : on peut montrer que si B vérifie $AB = I_n$, alors on a forcément $BA = I_n$, et réciproquement.
On n'a donc pas besoin de calculer les deux produits AB et BA pour vérifier que $B = A^{-1}$.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

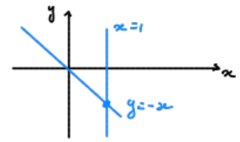
$$A^{-1} = B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Lien entre systèmes linéaires et matrices. Quelques exemples.

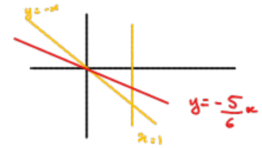
On veut résoudre un sytème linéaire de n équations à p inconnues : (S) : $Au = v$, où $A \in M_{np}$, $v \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^p$.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} 2x & & = 2 \\ x & +y & = 0 \end{array} \right.$:



il y a une unique solution (les 2 droites se coupent).

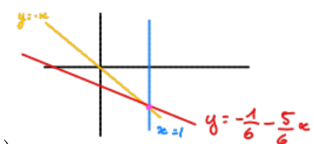
2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} 2x & & = & 2 \\ x & +y & = & 0 \\ 5x & +6y & = & 0 \end{array} \right.$:



pas de solution pas de coupe en 1 seul point

il n' y a pas de solution (les 3 droites ne passent pas par un même point).

3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} 2x & & = & 2 \\ x & +y & = & 0 \\ 5x & +6y & = & -1 \end{array} \right.$:



une solution

il y a une unique solution (les 3 droites passent par un même point).

4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} 2x & & = & 2 \\ x & +y & = & 0 \\ 5x & +5y & = & 0 \end{array} \right.$:

il y a une unique solution (la troisième équation est la même que la seconde).

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} 2x & +y & +3z & = 0 \\ & y & +4z & = 2 \end{array} \right.$:

2 plan qui se coupe

il y a une infinité de solutions : la droite intersection de ces deux plans.

6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} 2x & +y & +3z & = 0 \\ 4x & +2y & +6z & = 2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} 2x & +y & +3z & = 0 \\ 2x & +y & +3z & = 1 \end{array} \right.$:

2 plan // distance de 1

il n'y a pas de solution (les deux plans sont parallèles).

DÉFINITION (Inversion matricielle d'un système linéaire)

Résoudre le sytème linéaire $n \times n$, (S) : $Au = v$, avec $A \in M_n$ et $v \in \mathbb{R}^n$ donnés, et $u \in \mathbb{R}^n$ inconnu, peut se faire si on connait A^{-1}, la matrice inverse de A.

On aura alors $u = A^{-1}v$.

Exemple : Reprenons la matrice précédente, avec $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On veut résoudre le sytème linéaire 3×3 , (S) : $Au = v$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (S) : \begin{cases} x \quad +2y \quad\quad\quad = -5 \\ \quad\quad -y \quad\quad\quad = 1 \\ \quad\quad 6y \quad -3z \quad = 4 \end{cases}$$

Pour cela, on utilise directement A^{-1} (que l'on connait) :

$$u = A^{-1}v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

En général, trouver la solution u de (S) se fait directement en résolvant le système de 3 équations à trois inconnues. Mais si le second membre v change, il faut refaire tous les calculs : d'où **l'intérêt de posséder** A^{-1} !

NB : Si A est inversible, la solution du système $Au = 0$, est $u = 0$.

THÉORÈME (Calcul d'une matrice inverse grâce à un système linéaire)

Soit $A \in M_n$, une matrice. Pour trouver son inverse A^{-1}, on résout le système

$$(S): \ Au = v$$

dans lequel le second membre v est *aussi* un vecteur inconnu.

On fera ainsi apparaître l'expression de A^{-1} car $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$

$$Au = v \iff u = A^{-1}v$$

Exemple : Prenons $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$Au = v \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{cccl} x & +2y & & = a \\ & -y & & = b \\ & 6y & -3z & = c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lccc} x = & a & +2b & \\ y = & & -b & \\ z = & & -2b & -\frac{1}{3}c \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff u = A^{-1}v$$

THÉORÈME (Inverse d'une matrice 2×2 avec le déterminant)
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a, quand A est inversible :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Remarque : cette formule se vérifie facilement et est facile à retenir.
En fait, $ad - bc = \det(A)$, le déterminant de A. C'est l'objet du paragraphe suivant.

Exemple :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\quad v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$Au = v \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$x + 2y = a$ (1)
$3x + 4x = b$ (2)

$(2) - 2(1) \Rightarrow x + 0 = b - 2a$

$(1) \Rightarrow 2y = a - x$
$y = \frac{1}{2}(a - x) = \frac{1}{2}(b - 2a)$
$= \frac{3}{2}a - \frac{b}{2}$

Donc
$x = -2a + b = \frac{1}{2}(-4a + 2b)$
$y = \frac{3a}{2} - \frac{b}{2}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$

$A^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

4.3 DÉTERMINANT ET MATRICE INVERSE

☐ **Le déterminant est un outil pratique et rapide pour savoir si $Au = v$ a une solution unique (i.e si A est inversible).**

Se lancer dans la résolution d'un système d'ordre ≥ 3 sans savoir si la matrice est inversible peut prendre du temps pour rien...

THÉORÈME (Inversibilité et déterminant)
Soit $A \in M_n$. On a :

$$Au = v \text{ a une solution unique} \iff A \text{ inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

Définition 2.1 : déterminant d'ordre 2.

Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. On définit le déterminant de A par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Remarque : $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ signifie que les deux colonnes (ou lignes) A ne sont pas colinéaires : le système $Au = v$ a donc une unique solution.

Exemples :

THÉORÈME ET DÉFINITION (Déterminant d'ordre 3)

Soit $A \in M_3 : A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Pour calculer $\det(A)$ on peut faire un développement **par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne** et se ramener au calcul de 3 déterminants d'ordre 2.

Pour cela, on utilise la **"matrice des signes"** $S = \begin{Bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{Bmatrix}$, et on raye la ligne L_i et la colonne C_j correspondant à l'élement a_{ij} rencontré.

Par exemple :

On développe par rapport à la première colonne (C_1):

$$\det(A) := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la deuxième ligne (L_2) :

$$\det(A) := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemples :

Soit $A = \begin{matrix} 1^{+} & 0^{-} & 1^{+} \\ 2^{-} & 1^{+} & 0^{-} \\ 0^{+} & -3^{-} & 4^{+} \end{matrix}$

Dev sur la 1° ligne

$\det A = +1[1\times 4 - (0\times -3)) - 0(2\times 4 - 0\times 0) + 1(2\times -3 - 0\times 1$

$$\begin{matrix} 1^{+} & 0^{-} & 1^{+} \\ 2^{-} & 1^{+} & 0^{-} \\ 0^{+} & -3^{-} & 4^{+} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1^{+} & 0^{-} & 1^{+} \\ 2^{-} & 1^{+} & 0^{-} \\ 0^{+} & -3^{-} & 4^{+} \end{matrix}$$

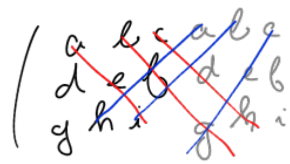
$$\begin{matrix} 1^{+} & 0^{-} & 1^{+} \\ 2^{-} & 1^{+} & 0^{-} \\ 0^{+} & -3^{-} & 4^{+} \end{matrix}$$

2 Sarrus

Méthode utile : Calcul d'un déterminant 3×3 avec la méthode de Sarrus.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a, $\det(A) = (\underline{aei} + \underline{bfg} + \underline{cdh}) - (\underline{ceg} + \underline{afh} + \underline{bdi})$

Illustration et exemple :



Remarque : cette formule se est facile à retenir visuellement.
On vérifie aisément qu'elle est équivalente au calcul du déterminant en développant par rapport à la première colonne, par exemple.

Exemple de système linéaire 3×3 :

Soit le système linéaire (S) : $\left\{\begin{array}{cccc} x & +2y & -z & = 3 \\ & -3y & +4z & = -2 \\ 5x & & -2z & = 6 \end{array}\right.$

Il est associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme $\det(A) = 1.((-3).(-2) - 0) + 5.(2.4 - (-1).(-3)) = 31 \neq 0$, le système (S) admet une solution unique.

DÉFINITION (Transposée d'une matrice)

Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Sa transposée M^T vérifie : $M^T = (m_{ji})$. On a donc échangé lignes et colonnes.
Exemples :

4.4 VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES, DIAGONALISATION

Les vecteurs propres sont importants dans les applications : ils correspondent aux directions “privilégiées” de l’évolution d’un système. On se limitera dans ce cours au cas des matrices 2×2 ou 3×3 ($n = 2$ ou $n = 3$).

DÉFINITION (Valeurs propres et vecteurs propres)
Soit $A \in M_n$. On dit que le vecteur **non nul** $u \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si

$$Au = \lambda u$$

NB : un vecteur propre associé à λ est défini à une **constante multiplicative près**. En effet, on a $A(\alpha u) = \lambda(\alpha u)$.
On pourra cependant normaliser le vecteur u en le choisissant de norme 1 : $\|u\| = 1$.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ a pour vecteurs propres $u_1 = (1, 0)$ associé à $\lambda_1 = 2$, et $u_2 = (3, 1)$ associé à $\lambda_2 = 4$. (Ou encore $u_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, vérifiant $\|u_2\| = 1$.)

THÉORÈME (Calcul des valeurs propres et vecteurs propres)

Soit $A \in M_n$.
i) Pour trouver ses valeurs propres, on résoud l'équation d'inconnue X :

$$\det(A - XI) = 0$$

$P_A(X) := \det(A - XI)$ est appelé **"polynôme caractérisque"**. Il est de degré n, et les valeurs propres λ_i en sont donc les **racines**.

ii) Pour trouver le (ou les) **vecteur(s) propre(s)** u **associé(s)** à une valeur propre λ, **on résout le système** $Au = \lambda u$.

Preuve :

Soit λ une racine de P_A. Alors $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ signifie que $A - \lambda I$ n'est pas inversible, donc que le sytème $(A - \lambda I)u = 0$ admet d'autres solutions que $u = 0$. Elles vérifient $Au = \lambda u$: ce sont donc des vecteurs propres associés à la valeur propre λ, par définition.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} 2-X & 6 \\ 0 & 4-X \end{vmatrix} = (2-X)(4-X)$.

Ainsi $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$.

$\star$ On a $Au = 2u \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x & +6y & = 2x \\ & 4y & = 2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6y & = 0 \\ 2y & = 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow (y = 0,\, x \in \mathbb{R}) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient (toujours à une constante multiplicative près).

Remarque : ce vecteur propre v_1 correspond à la **droite** D_1 d'équation $D_1 = \{\alpha(1,0),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$, ou encore $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 0\}$.

$\star\star$ De même, $Au = 4u \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x & +6y & = 4x \\ & 4y & = 4y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = & 3y \\ y \in \mathbb{R} & \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

Remarque : ce vecteur propre v_2 correspond à la **droite** D_2 d'équation $D_2 = \{\alpha(3,1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$, ou encore $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x - 3y = 0\}$.

DÉFINITION (Diagonalisation)

Diagonaliser une matrice $A \in M_n$ consiste à **trouver ses valeurs propres** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **et ses vecteurs propres** associés $u_1, \ldots, u_n$. Si on considère la **matrice diagonale**

$$D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $P = [u_1, \ldots, u_n]$, la matrice ayant pour colonnes les vecteurs propres de A, on a la **"formule de diagonalisation"**

$$A = PDP^{-1}$$

Exemple : Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, on a trouvé $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$. Donc $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs propres correpondant donnent la matrice $P = [u_1, u_2] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule ensuite son inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors la formule de diagonalisation $A = PDP^{-1}$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$