Exercice 1
Déterminer les limites suivantes :
(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+3x-2$; (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-6x+7}{3x^2-5}$; (c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x}$;
(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+2x-1}-2x+3$; (d) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1}$. (e) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos(x)}$ (f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$

FACULTÉ DES SCIENCES

EEA - HAE304X

Feuille de TD n° 1

Limites, continuité et dérivabilité

Exercice 1
Déterminer les limites suivantes :
(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+3x-2$; (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-6x+7}{3x^2-5}$; (c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x}$;
(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+2x-1}-2x+3$; (d) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1}$. (e) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos(x)}$ (f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$

Exercice 2
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
$(a)\ f(x)=x\ln x$; $(b)\ f(x)=\dfrac{x^2}{\cos x}$; $(c)\ f(x)=\sin x^2$; $(d)\ f(x)=x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ et $g(x)=\sqrt{x}\left(x^2+\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\right)$; $(e)\ f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$; $(f)\ f(x)=\ln\left(\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{1/3}\right)$; $(g)\ f(x)=x\,2^x$.

Exercice 3
(*) Calculer les dérivées successives de la fonction $f :]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\ln(x+1)$.

Exercice 4
Une application
On considère un filtre RLC série en régime permanent, avec en entrée un tension V_e sinusoïdale. La sortie V_s est mesurée sur la résistance R. Le courant parcourant ce circuit est I. La fonction de transfert associée est $H=V_s/V_e$.

1. Déterminer l'impédance Z associée à ce circuit, telle que $V_e=ZI$.
2. Ce circuit est résonant en courant lorsque $|I|$ est maximal, c'est à dire lorsque $|Z|$ est minimum. Déterminer la fréquence associée.
3. Tracer l'allure du diagramme de Bode de ce circuit, en déterminant les limites
   (a) du module de H
   (b) de l'argument de H

Développements limités

Exercice 5
Ecrire les expressions suivantes sous la forme de développements limités.

1. $(1+3x-x^2+o(x^3))+(-2+5x^2-x^4+o(x^4))$
2. $(2x+5x^2-4x^3+o(x^5))(-1+3x-x^2+x^3+2x^4+x^5+o(x^5))$

Exercice 6
Déterminer les développement limités suivants.

1. $DL_5(0)$ de $f(x)=\cos 3x$
2. $DL_3(0)$ de $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$
3. $DL_4(0)$ de $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, puis de $g(x)=\dfrac{x}{\sin x}$
4. (*) $DL_5(0)$ de $f(x)=\tan x$

Exercice 7

Déterminer les développement limités suivants.

1. $DL_5(0)$ de $f(x) = e^{\cos x}$
2. $DL_7(0)$ de $f(x) = \arctan(x)$
3. $DL_3(0)$ de $f(x) = \sqrt{2+x}$
4. $DL_2(1)$ de $f(x) = \sqrt{3+x}$
5. (*) $DL_1(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$
6. $DL_{15}(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Exercice 8

A l'aide des développements limités, calculer la limite en 0 de

1. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, 1) $f(x) = \dfrac{x - \sin(x)}{x^3}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$. 2) $f(x) = \dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+3x-2$; (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-6x+7}{3x^2-5}$; (c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+2x-1}-2x+3$; (d) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1}$. (e) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos(x)}$ (f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$

(+∞°)

a) $\lim\limits_{\to+\infty} -x^2+3x-2 \quad = -\infty$

(+∞°)

b) $\lim\limits_{\to-\infty} \dfrac{x^2-6x+7}{3x^2-5} = \dfrac{\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = \dfrac{1}{3}$

(HP)

c) $\lim\limits_{\to0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = \dfrac{\sin x}{1} = 0$

(factorisation)

g) $\lim\limits_{\to+\infty} \sqrt{4x^2+2x-1}-2x+3 = \dfrac{\cancel{4x^2}+2x-1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+2x-1}+2x}+3 = \dfrac{x(2-\frac{1}{x})}{\cancel{|x|}\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+2\right)} = \dfrac{2-0}{\sqrt{4+0-0}+2}$

$= \dfrac{2}{4}+3 = \dfrac{2}{4}+\dfrac{12}{4} = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$

(HP)

d) $\lim\limits_{\to1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

(HP)

e) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin(x)^2}{1+\cos(x)} = \dfrac{2\cos(x)\sin(x)}{-\sin(x)} = -2\cos(x) = -2\times-1 = 2$

(HP) (HP) (HP)

f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-\sin x}{x^3} = \dfrac{1-\cos(x)}{3x^2} = \dfrac{\sin(x)}{6x} = \dfrac{\cos(x)}{6} = \dfrac{1}{6}$

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x\ln x$; (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos x}$; (c) $f(x) = \sin x^2$; (d) $f(x) = x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ et $g(x) = \sqrt{x}\left(x^2+\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\right)$; (e) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$; (f) $f(x) = \ln\left(\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{1/3}\right)$; (g) $f(x) = x\,2^x$.

a) $f(x) = x\ln x$

$f(x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x}$

$= \ln x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos x}$

$f(x)' = \dfrac{2x\times\cos x + x^2\cdot\sin x}{\cos x^2}$

$= \dfrac{x\left(2\cos x + x\sin x\right)}{\cos x^2}$

c) $f(x) = \sin x^2$

$f(x)' = 2x\cos x^2$

d) $f(x) = x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$f(x)' = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\left(1+\frac{2x}{\dots}\right.$

$g(x) = \sqrt{x}\left(x^2+\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\right)$

$= \sqrt{x}\cdot x^2 + e^x$

$= x^{1/2+\frac{4}{2}} + e^x$

e) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

$f(x)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\, e^{\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{x}{\dots}\, e^{\sqrt{x^2+1}}$

$$f(x)' = (x+1)\sqrt{1+x^2} + x\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= x\sqrt{1+x^2} + x + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= 2x + \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x^{5/2} + e^x$$

$$g(x)' = \frac{3}{2}x^{3/2} + e^x$$

$$\sqrt{x^2+1}$$

f) $f(x) = \ln\left(\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{1/3}\right)$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)\right)$$

$$f(x)' = \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2x^3+2x - 2x^3+2x}{x^4+x^2-x^2-1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4x}{x^4-1}$$

$$= \frac{4x}{3x^4-3}$$

g) $f(x) = x\cdot 2^x$

$$f(x)' = 2^x + x\ln(2)2^x$$

$$= 2^x(1+x\ln(2))$$

ou $\left(x\cdot e^{x\ln(2)}\right.$

$$e^{x\ln(2)} + x\ln(2)e^{x\ln(2)}$$

$$2^x + x\ln(2)2^x$$

$$\left.2^x(1+x\ln(2))\right)$$

Exercice 3

(*) Calculer les dérivées successives de la fonction $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x+1)$.

$$f(x) = \ln(x+1)$$

$$f(x)' = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x)'' = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f(x)''' = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$$

$$f(x)^n = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$$

Développements limités

Exercice 4

Ecrire les expressions suivantes sous la forme de développements limités.

1. $(1+3x-x^2+o(x^3)) + (-2+5x^2-x^4+o(x^4))$
2. $(2x+5x^2-4x^3+o(x^5))(-1+3x-x^2+x^3+2x^4+x^5+o(x^5))$

1) $(1+3x-x^2+o(x^3)) + (-2+5x^2-x^4+o(x^4))$

$$-1+3x+4x^2-x^4+o(x^4)$$

2) $((2x+5x^2-4x^3+o(x^5)) \times (-1+3x-x^2+x^3+2x^4+x^5+x^5\varepsilon(x))$

$$-2x+6x^2-2x^3+2x^4+4x^5-5x^2+15x^3-5x^4+5x^5+4x^3-12x^4+4x^5+$$

$$-2x+x^2+17x^3-15x^4+13x^5+x^5\varepsilon(x)$$

Exercice ~~4~~ 5

Déterminer les développement limités suivants

Déterminer les développement limités suivants:

1. $DL_5(0)$ de $f(x) = \cos 3x$
2. $DL_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$
3. $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, puis de $g(x) = \dfrac{x}{\sin x}$
4. (*) $DL_5(0)$ de $f(x) = \tan x$

1) $DL_5(0) \Rightarrow f(x) = \cos 3x$

$$= 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)$$

$$= 1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{81x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)$$

$$= 1 - 9x^2 + \frac{27}{8}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

2) $DL_3(0) \Rightarrow f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$

$$= e^x \times \frac{1}{1+x}$$

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - x + x^2 - x^3\right) + x^3\varepsilon(x)$$

$$1 - \cancel{x} + \cancel{x^2} - x^3 + \cancel{x} - \cancel{x^2} + x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

$$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

$DL_4(0)$ de $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)}{x}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4\varepsilon(x)$$

$$g(x) = \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} \times x \Rightarrow \frac{x}{x\cdot\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)\right.}$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right.} = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^2\varepsilon(x)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + x^4\varepsilon(x)$$

$$1 + \frac{x^2}{6} - \frac{3x^4}{360} + \frac{10x^4}{360} + x^4\varepsilon(x)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + x^4\varepsilon(x)$$

$DL_5 \Rightarrow f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$1-u(x)+u^2(x)-u^3(x)\dots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)$

$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)}$

$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 \underbrace{\left[-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)\right]}_{u(x)}}$

$= \frac{1}{1+u(x)}$ avec $u(x) \to 0$

Donc :

$\frac{1}{\cos(x)} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \dots\right)^2$

$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4}$

et $= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{24} + \frac{6x^4}{24}$

$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)$

$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)\right)$

$= \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)\right)$

$= x + \frac{3x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + \frac{25x^3}{120} - \frac{10}{120} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)$

$= x + \frac{2x^3}{6} + \frac{16x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)$

$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

Déterminer les développement limités suivants.

1. $DL_5(0)$ de $f(x) = e^{\cos x}$
2. $DL_7(0)$ de $f(x) = \arctan(x)$
3. $DL_3(0)$ de $f(x) = \sqrt{2+x}$
4. $DL_2(1)$ de $f(x) = \sqrt{3+x}$
5. (*) $DL_1(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$
6. $DL_{15}(0)$ de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

1.] $DL_5(0)$ de $f(x) = e^{\cos x}$

$e^X : 1 + X + \frac{X^2}{2}$ pour $X = 0$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots$

$e^{u(x)}$? ⚠ $u(x) \to 1$ quand $x = 0$

Donc on Decompose $e^x \Rightarrow e^1 \times e^{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)}$ $= X$

$e \times \left(1 + X + \frac{X^2}{2}\right)$

$e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{\frac{x^4}{4}}{2}\right)$

$e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8}\right)$

$e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{3x^4}{24}\right)$

$e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{4x^4}{24}\right) \Leftrightarrow e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}\right)$

$e-\frac{ex^2}{2}+\frac{ex^4}{6}+x^4\varepsilon(x)$

2) $DL_7(0)$ de $f(x)=\arctan(x)$ soit $\frac{d}{dx}\arctan=\frac{1}{1+x^2}$

DL_6 de $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6$

↳ on intègre $=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+x^7\varepsilon(x)$

3) $DL_3(0)$ de $f(x)=\sqrt{2+x}$

$=\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{2}}$ $X=\frac{x}{2}$

$=\sqrt{2}\cdot(1+X)^{1/2}$

$=\sqrt{2}\cdot\left(1+aX+\frac{a(a-1)}{2}X^2+\frac{a(a-2)(a-1)}{6}X^3\right)$

$\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}X+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}X^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-1)}{6}X^3\right)$

$\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+\frac{3}{48}X^3\right)$

$48 \div 3 = 16$; -3, 18, 18, 0

$\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\frac{x^2}{4}+\frac{1}{16}\frac{x^3}{8}\right)$

$16 \times 8 = 128$

$\sqrt{2}\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{32}+\frac{x^3}{128}\right)$

$\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{32}\cdot x^2+\frac{\sqrt{2}}{128}x^3+x^3\varepsilon(x)$

$DL_2(1)$ de $f(x)=\sqrt{3+x}$

$x=h+1$ $h=x-1$

$=\sqrt{3+h+1}$

$=\sqrt{4+h}=\sqrt{4}\sqrt{1+\frac{h}{4}}$ $\frac{h}{4}=X$

$=2\sqrt{1+\frac{h}{4}}$

$=2\sqrt{1+X}$

Soit : $2(1+X)^{1/2} \Rightarrow 2\left(1+aX+\frac{a(a-1)}{2}X^2\right)$ $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$2\left(1+\frac{1}{2}X+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{}X^2\right)$

$$2\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{\ldots}{2}\ldots\right)$$

$$2\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{4}-\frac{1}{8}\frac{h^2}{16}\right)$$

$$\times \frac{16}{\frac{4}{64}}$$

$$2+\frac{h}{4}-\frac{h^2}{64}$$

$$2+\frac{x-1}{4}-\frac{(x-1)^2}{64}+(x-1)^2\varepsilon(x)$$

5)

$$u=\frac{x}{2}$$

$$DL_1(0)=\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{1+(1+x+x\varepsilon(x))}=\frac{1}{2+x}\Rightarrow\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2(1+u)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{x}\right)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+x\varepsilon(x)$$

Via Taylor : $f(0)+f(0)'(x-0)$
prem 0

$$f(a)=\frac{1}{1+e^x}$$

$$f'(a)=\frac{-1}{(1+e^x)^2}\times e^x$$

DL $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+x\varepsilon(x)$

6)

$$DL_{15}(0)\ f(x)\ \frac{1}{(1-x)^2}\to(1-x)^{-2}$$

$\to$ on a $f(x)=(1-x)^{-2}$

on a $f(x)=g'(x)$ avec

$$g(x)=\frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\ldots$$

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6\ldots 16x^{15}+x^{15}\varepsilon(x)$$

Soit $\frac{f^{(10)}(0)}{10!}=f^{(10)}(0)=11!$

Ex 7

1) $f(x)=\frac{x-\sin(x)}{x^3}$

2) $f(x)=\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$

1) $\frac{x-\overbrace{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)}^{\sin(x)}}{x^3}=\frac{x-x}{x^3}+\frac{\frac{x^3}{6}}{x^3}$

$$\frac{x-x}{x^3}+\frac{x^3}{6}\times\frac{1}{x^3}$$

$$\overrightarrow{0} \qquad 0+\underline{\frac{1}{6}}$$

2) $f(x)=\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$

$$=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4\right)}{x^4}$$

$\sqrt{1-x^2}$ $\qquad$ $X=-x^2$

$1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2$

$1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4$

$x=0$

$\hookrightarrow \quad \frac{1}{24}+\frac{1}{8}=\frac{1}{24}+\frac{3}{24}=\frac{4}{24}=\underline{\frac{1}{6}}$