UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **FACULTÉ DES SCIENCES**

L2 - Techniques mathématiques EEA - HAE304X

Feuille de TD n° 2

Primitives, intégrales

Exercice 1
Déterminer les primitives suivantes

1. $\int xe^{x^2}dx$ 2. $\int \frac{\ln|x|}{x}dx$ 3. $\int \frac{dx}{x\ln|x|}$ 4. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$
5. $\int \ln|x|dx$ 6. $\int x\ln|x|dx$; 7. $\int xe^{3x}dx$ 8. $\int \frac{dx}{(2x+3)^2}$ 9. $\int \frac{dx}{x^2+4}$
10. $\int \frac{dx}{2x^2+8x+10}$ 11. $\int \frac{2x+4}{2x^2+8x+10}dx$ 12. $\int \frac{2x+5}{2x^2+8x+10}dx$ 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Exercice 2
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 2. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ 3. $\int_0^1 x^2 \arctan x\,dx$

Exercice 3
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos^2 x\,dx$ 2. $\int_0^{\pi/4} \sin^4 x\,dx$ 3. $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

Exercice 4
Calculer de deux manières différentes les intégrales
$I = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\ dt$ et $J = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\ dt.$

Exercice 5
Déterminer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{1}{x(x+1)}$ 2. $\frac{1}{x^2(x^2+1)}$ 3. $\frac{x}{x^2-4}$ 4. $\frac{x^3}{x^2-4}$ 5. $\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}$ 6. $\frac{x^4}{x^3-x^2+x-1}$

Exercice 6
Calculer $I = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos x}dx$, $J = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$ et $K = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}dx$.

Exercice 7
Calculer $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ et $J = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx.$

Exercice 8
Calculer la limite de la somme de Riemann : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}.$

Exercice 9

Une application

Calculer la valeur efficace sur l'intervalle $[0,1]$ du signal $s(t) = \dfrac{1}{2t+3}$.

On rappelle que la valeur efficace d'un signal $s(t)$ sur l'intervalle $[0,T]$ est Veff $= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt}$.

Dérivées partielles

Exercice 10

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xe^{y^2}$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Intégrales doubles

Exercice 11

Calculer $I = \displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{1+x+y}\,dx\,dy$.

Exercice 12

Soit le domaine $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \leq x \leq 2\,,\ 0 \leq y \leq x\}$.

a) Représenter Δ et calculer son aire avec et sans calcul intégral.

b) Intégrer la fonction $f(x,y) = x+y$ sur le domaine Δ.

Exercice 13

Soit Δ, le domaine du plan délimitée par les paraboles d'équations $y = x^2$ et $x = y^2$.

a) Calculer $I = \displaystyle\iint_\Delta xy\,dx\,dy$.

b) Calculer l'aire de Δ.

Exercice 14

On considère le disque centré en O et de rayon R : $D(O,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2+y^2 \leq R^2\}$.

Retrouver le fait que son aire vaut πR^2 :

a) en réalisant un découpage par tranches verticales de ce disque.

b) en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 15

Calculer $I = \displaystyle\iint_{D(O,1)} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy \quad (D(O,1)$ est le disque unité).

Exercice 16

Soit Δ, le domaine s'écrivant en polaires : $\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[; \quad 0 \leq r \leq 2\,,\ \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}$.

a) Calculer l'aire de Δ.

b) Calculer $I = \displaystyle\iint_\Delta x^3 y\,dx\,dy$.

Exercice 1 $\qquad$ B $\int \arcsin x$

Déterminer les primitives suivantes

1. $\int xe^{x^2}dx$ 2. $\int \frac{\ln|x|}{x}dx$ 3. $\int \frac{dx}{x\ln|x|}$ 4. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

5. $\int \ln|x|dx$ 6. $\int x\ln|x|dx$; 7. $\int xe^{3x}dx$ 8. $\int \frac{dx}{(2x+3)^2}$ 9. $\int \frac{dx}{x^2+4}$

10. $\int \frac{dx}{2x^2+8x+10}$ 11. $\int \frac{2x+4}{2x^2+8x+10}dx$ 12. $\int \frac{2x+5}{2x^2+8x+10}dx$ 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

1) $\int x e^{x^2}$

$u = e^{x^2}$

$du = 2x e^{x^2} dx$

$dx = \frac{du}{2x u}$

$\int \frac{\cancel{x} \times u}{2\cancel{x} \times u} \cdot du$

$\frac{1}{2}\int 1 du$

$\frac{1}{2} u = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

$\int \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2} dx$

$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

2) $\int \frac{\ln(x)}{x}$

$u = \ln(x)$

$du = \frac{1}{x} dx$

$dx = du \times x$

$\int \frac{u}{\cancel{x}} \times \cancel{x} du$

$\frac{u^2}{2} = \frac{\ln(x)^2}{2} + C$

$= \int \frac{1}{x} \ln(x) dx = \frac{\ln(x)^2}{2} + C$

3) $\int \frac{dx}{x \ln(x)}$

$u = \ln(x)$

$du = \frac{1}{x} dx$

$dx = du \times x$

$\int \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \times u} \cdot du$

$\int \frac{1}{u} du$

$\ln(u) = \ln(\ln(x)) + C$

4) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \Rightarrow -\int \frac{\cancel{\sin x}}{1+u^2} \frac{du}{\cancel{\sin x}}$

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

$dx = -\frac{du}{\sin x}$

$$-\int \frac{1}{1+u^2}\,du \Rightarrow -\arctan(u)$$
$$\Rightarrow -\arctan(\cos x)+C$$

5) $\int \ln(x)\,dx$

D	I
$\ln(x)$	1
$\frac{1}{x}$	x

$\ln(x)\times x - \int 1$

$\ln(x)\times x - x$

6) $\int x\ln(x)\,dx$

D	I
$\ln(x)$	x
$-\ \frac{1}{x}$	$\frac{x^2}{2}$

$\ln(x)\times\frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\,dx$

$\ln(x)\times\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx$

$\ln(x)\times\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}$

7) $\int x e^{3x}\,dx$

D	I
x	e^{3x}
$-\ 1$	$\frac{e^{3x}}{3}$
0	$\frac{e^{3x}}{9}$

$x\times\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}$

$= \frac{e^{3x}}{9}(3x-1)+C$

---

8) $\int \frac{dx}{(2x+3)^2}$

$u = 2x+3$

$du = 2\,dx$

$dx = \frac{du}{2}$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}\,du$

$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x+3}\right)$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x+3}\right)+C$

9) $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$

$u = \frac{x}{2}$

$du = \frac{1}{2}\, dx$

$dx = 2\,du$

$\frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}$

$\frac{1}{2}\arctan(u) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$

10) $\int \frac{dx}{2x^2+8x+10} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+4+1}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1}$

$u = (x+2)$

$du = dx$

$\frac{1}{2}\arctan(u) = \frac{1}{2}\arctan(x+2) + C$

11) $\int \frac{2x+4}{2x^2+8x+10} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + C$

12) $\int \frac{2x+5}{2x^2+8x+10}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} + \int \frac{1}{x^2+4x+5}\right)$

$\frac{1}{2}\left(\ln(x^2+4x+5 + \int \frac{1}{(x^2+4x+4)+1}\right.$

$\frac{1}{2}\left(\ln(x^2+4x+5 + \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\right.$

$u = x+2$

$du = dx$

$\int \frac{1}{u^2+1} = \arctan(x+2)$

$\frac{1}{2}\left(\ln|x^2+4x+5\right) + \arctan(x+2) + C$

$$13)\ \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{4} \times \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{dx}{2 \times \sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$u = \frac{x}{2}$

$du = \frac{1}{2}\, dt$

$dx = du \times 2$

Exc 2

$$1)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$2)\ \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$x = \sin u$

$dx = \cos u \, du$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin u^2} \cdot \cos u \, du$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos u^2 \, du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

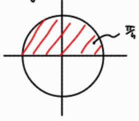
On pourrait remarquer que

$y = \sqrt{1-x^2}$ entre -1 et 1

$y^2 = 1 - x^2$

$y^2 + x^2 = 1$ equation du cercle trigo de rayon 1

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$ = surface superieur du disque



$I = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx = ?$

$y = \sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow y^2 + x^2 = 9$

$y^2 + x^2 = 3^2$

$\Rightarrow \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2} = \frac{1}{2}\pi 3^2 = \frac{9\pi}{2}$

$$3)\ \int_0^1 x^2 \arctan(x)$$

D	I
arctan(x	x^2
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{x^3}{3}$
$-2x$	$\frac{x^4}{3}$

$$\arctan(x) \times \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^3}{3} = \arctan(x) \times \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}$$

$t = x^2$

$dt = 2x\, dx$

$dx = \frac{dt}{2x}$

a $\quad -\frac{1}{3}\int \frac{x \times t}{1+t} \times \frac{dt}{2x}$

$-\frac{1}{6}\int \frac{t}{1+t}$

$$\begin{array}{r|l} t & 1+t \\ -t-1 & 1 \\ -1 & \end{array}$$

$-\frac{1}{6}\int 1 - \frac{1}{1+t}$

$-\frac{1}{6}\int 1 - \int \frac{1}{1+t}$

$-\frac{1}{6}\left[t - \ln(1+t)\right]_0^1$

$-\frac{1}{6}(1 - \ln(2))$

$= \arctan(x) \times \frac{x^3}{3} -$

$= \left[\arctan(x) \times \frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{6} + \frac{\ln(2)}{6}$

$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{\ln(2)}{6}$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ 2. $\int_0^{\pi/4} \sin^4 x \, dx$ 3. $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

1) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^2(x) \, dx$

1) $\int_0^{\pi/2} (\sin(x) \cos(x))^2 \, dx$

$\int_0^{\pi/2} (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right)^2$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{2}^2$

$= \frac{1}{4} \int \sin(2x)^2$

$\frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos(4x)) \, dx$

$\frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(4x)) \, dx$

$\frac{1}{8} \left[x - \frac{\sin(4x)}{4} \right]_0^{\pi/2}$

$\frac{1}{8} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi}{16}$

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

2) $\int_0^{\pi/4} \sin^4(x) = \frac{1}{2^4 (i)^4} \left(e^{ix} - e^{-ix} \right)^4$

$= \frac{1}{16} \left(e^{4ix} - 4 e^{2ix} + 6 . - 4 e^{-2ix} + e^{-4ix} \right)$

$= \frac{1}{8} \left(\cos(4x) - 4 \cos(2x) + 3 \right)$

$= \int \left(\frac{\cos(4x)}{8} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8} \right)$

$= \frac{1}{8} \int \cos(4x) - \frac{1}{2} \int \cos(2x) + \frac{3}{8} \int 1$

$\frac{1}{8} \left[\frac{\sin(4x)}{4} \right]_0^{\pi/4} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi/4} + \frac{3}{8} [x]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{32}(0 - 0) - \frac{1}{4}(1 - 0) + \frac{3\pi}{32}$

$\boxed{= \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}}$

$$\int_0^{\pi/3} \sin(x)^3 \cos(x)^2$$

$u = \cos(x)$

$du = -\sin(x)\,dx$

$dx = \dfrac{du}{-\sin x}$

$$\int \sin(x) \times (1 - \cos^2(x)) \times \cos^2(x)$$

$$\int \sin x \times (1-u^2) \times u^2 \times \frac{du}{-\sin}$$

$$-\int u^2 \times (1-u^2)$$

$$-\int u^2 - u^4 \, du = -\int u^2 + \int u^n = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}$$

$$\left[-\frac{\cos(x)^3}{3} + \frac{\cos(x)^5}{5} \right]_0^{\pi/3} = \frac{-17}{480} - \frac{-2}{15}$$

Exercice 4

Calculer de deux manières différentes les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t \, dt.$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt$$

D	I
$\cos(t)$	e^{-t}
$+\sin t$	$-e^{-t}$

$$\left[-e^{-t} \times \cos(t) \right]_0^{+\infty} - \int e^{-t} \times \sin(t)$$

$=$

Exercice 5

Déterminer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{1}{x(x+1)}$ 2. $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$ 3. $\dfrac{x}{x^2-4}$ 4. $\dfrac{x^3}{x^2-4}$ 5. $\dfrac{1}{(x-1)^2(x+2)}$ 6. $\dfrac{x^4}{x^3-x^2+x-1}$

1) $\int \frac{1}{x(x+1)} \Rightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)}$ au $A=1$ et $B=-1$

$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

$\int \frac{1}{x} - \int \frac{1}{x+1}$

$\ln(x) - \ln(x+1) + cte$

2) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}$ Via l'eq 1 on a $x = x^2$

$\int \frac{1}{x^2} - \int \frac{1}{x^2+1}$

$-\frac{1}{x} - \arctan(x) + Cte$

3) $\int \frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-2)}$ au $A = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$B = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+2)}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}dx$

$\ln(a - \ln b = \ln(\frac{a}{b}$

$\frac{1}{2}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(x-2)$

$\frac{1}{2}\ln((x+2)(x-2))$

$\frac{1}{2}\ln((x-4)^2)$

4) $\frac{x^3}{x^2-4} \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-4 \\ \cline{2-2} -x^3+4x & x \\ \hline 0+4x & \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4}$ d'ou on utilise le resultat precedent :

$\int x + 4\int \frac{x}{x^2-4}$

$\frac{x^2}{2} + 2 \times \int \frac{2x}{x^2-4}$

$\frac{x^2}{2} + 2\ln(x^2-4)$

$\frac{x^2 + 4\ln((x^2-4))}{2}$

5) $\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)}$

ou $B = \frac{1}{3}$

$C = \frac{1}{9}$

en $x=0$

$\frac{1}{2} = \frac{A}{-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$

$A = \frac{6}{18} + \frac{1}{18} - \frac{9}{18} = \frac{-2}{18} = -\frac{1}{9}$

$A = -\frac{1}{9}$

$= -\frac{1}{9} \times \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{9} \frac{1}{(x+2)}$

$-\frac{1}{9} \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{9} \int \frac{1}{(x+2)}$

$-\frac{1}{9} \ln(x-1) + \frac{1}{3} \frac{-1}{(x-1)} + \frac{1}{9} \ln(x+2) \quad + Cte$

6) $\frac{x^4}{x^3 - x^2 + x - 1} \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^3-x^2+x-1 \\ \hline -x^4+x^3-x^2+x & x+1 \\ \hline 0 + x^3 - x^2 + x & \\ -x^3+x^2-x+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow x+1 + \frac{1}{x^3-x^2+x-1} \Rightarrow \frac{1}{x^3-x^2+x-1} \Rightarrow \frac{1}{x^2(x-1)+(x-1)} = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$

$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} =$

$1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx - Bx - C$

$1 = x^2(A+B) + x(B-C) + (A-C)$

$A+B = 0$, $A = -B$ | $A-C=1$, $C = A-1$ } Sachant $A = \frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{2}$

$B = -\frac{1}{2}$

$C = -\frac{1}{2}$

d'où :

$\int x+1 \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-1)} \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{x^2+1}$

$\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \left(\int \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1} \right)$

" $- \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan(x) \right]$

$\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \arctan(x) + \underline{Cte}$

Exe 6

$I = \frac{1}{2}\ln(6)$

$J = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$K = 1$

Exercice 7
Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$

$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x) \cdot \cos(x)}$ $\qquad \frac{1}{\tan(x)}$ $\qquad u = \tan$

$du = 1 + \tan(x)^2$

$dx = \frac{du}{1+u^2}$

$\frac{1}{u}$

Bornes

$x = 0 \Rightarrow 0$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cdot 1$

Soit $I = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sin(x) + \cos x} \cdot \frac{du}{1+u^2}$

$\int \frac{1}{u+1} \cdot \frac{du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{du}{(u+1)(1+u^2)}$

$= \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2+1}$

$1 = A + Au^2 + Bu^2 + Bu + Cu + C$

$A+B = 0 \qquad A = -B$

$B+C = 0 \qquad C = A$

$A+C = 1 \qquad A = \frac{1}{2} \to C = \frac{1}{2} \to B = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u+1} + \frac{1}{2}\int \frac{-u+1}{u^2+1}$

$\frac{1}{2}[\ln(u+1)]_0^1 + \frac{1}{2}\int \frac{-u}{u^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}$

$\frac{1}{2}[\ln(u+1)]_0^1 - \frac{1}{4}[\ln(u^2+1)]_0^1 + \frac{1}{2}[\arctan(u)]_0^1$

$\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{4}\ln(2) + \frac{\pi}{8}$

$\boxed{\frac{\ln(2)}{4} + \frac{\pi}{8}}$

Exercice 8

Calculer la limite de la somme de Riemann : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}}$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

$x = \frac{k}{n}$

$dx = \frac{1}{n}$

$d\,n = dx \times n$

$$\lim_{x\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\arcsin(x)\right]_0^1 = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 9

Une application

Calculer la valeur efficace sur l'intervalle $[0,1]$ du signal $s(t) = \frac{1}{2t+3}$.

On rappelle que la valeur efficace d'un signal $s(t)$ sur l'intervalle $[0,T]$ est Veff $= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt}$.

Soit $s(t) = \frac{1}{2t+3}$ et $V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt}$

d'ou

$$\sqrt{\frac{1}{1}\int_0^1 s(t)^2} = \sqrt{\left[\frac{s^3}{3}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3} - 0} = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0{,}58 \text{ V}$$

$V_{eff} = 0{,}58$

Dérivées partielles

Exercice 10
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xe^{y^2}$. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Soit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \times e^{y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \times x\,2y\,e^{y^2} = 2xe^{y^2} + 4y^2 e^{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \times e^{y^2} = 2y e^{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot x\,2y e^{y^2} = 2y e^{y^2}$$

Intégrales doubles

Exercice 11
Calculer $I = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{1+x+y}\, dx\, dy$.

$$\int_0^1 \left[\log(x+y+1) \right]_0^1 dy$$

$$\int_0^1 \log(2+y) - \log(1+y)\, dy$$

$$\int_0^1 \log(2+y)\, dy - \int_0^1 \log(1+y)\, dy$$

Soit $\int \ln(x) = x\ln|x| - x$

$$\left[(2+y)\ln|2+y| - (2+y)\right]_0^1 - \left[(1+y)\times\ln(1+y) - (1+y)\right]_0^1$$

$$\left(3\ln(3) - 3 - 2\ln(2) + 2\right) - \left(2\times\ln(2) - (2) - 1\ln(1) + 1\right)$$

$$3\ln(3) - 2\ln(2) - 1 \quad - 2\ln(2) + 1$$

$$\rightarrow 3\ln(3) - 4\ln(2)$$

$$\ln(3)^3 + \ln(2)^{-4}$$

$$\ln(3^3 \times 2^{-4})$$

$$\ln\left(27 \times \frac{1}{16}\right) = \ln\left(\frac{27}{16}\right)$$

Exercice 12

Soit le domaine $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le x\}$.

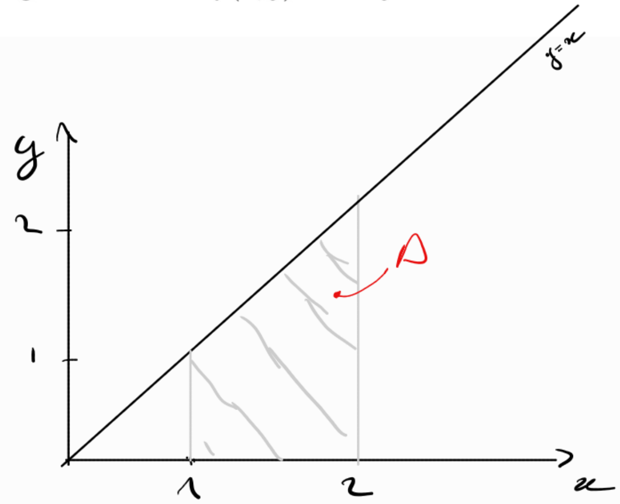
a) Représenter Δ et calculer son aire avec et sans calcul intégral.

b) Intégrer la fonction $f(x,y) = x + y$ sur le domaine Δ.

$y > 0$

$y = x$ (en dessous de $y=x$)

a)



$$\Delta = \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

$$A = \iint_\Delta dx\,dy$$

$$\int_1^2 \int_0^x dy\,dx$$

$$\int_1^2 [y]_0^x\,dx$$

$$\int_1^2 (x-0)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(y+2)\ln(y+2) - y$$

b)

$$\iint_\Delta x+y\,dy\,dx = \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^x$$

$$= \int_1^2 x^2 + \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6}\right]_1^2 = \left[\frac{8}{3} + \frac{8}{6}\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right]$$

$$4 - \frac{1}{2}$$

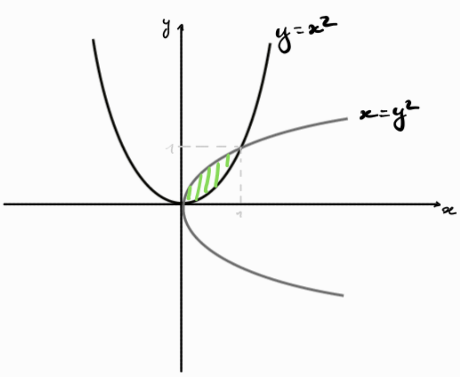
$$= \frac{8}{2} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

Exercice 13

Soit Δ, le domaine du plan délimitée par les paraboles d'équations $y = x^2$ et $x = y^2$.

a) Calculer $I = \iint_\Delta xy\,dx\,dy$.

b) Calculer l'aire de Δ.



$$\Delta = \frac{1}{12}$$

$$I = \iint_\Delta xy\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{x^6}{6}\right]_0^1$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

→ La région s'étend de $x=0$ à $x=1$ sur l'axe des x

Pour chaque une de ces valeurs y varie de la courbe inférieur à la courbe sup

les borne pour x : 0 à 1

pour y : x^2 à $\sqrt{x}$

Pour mieux comprendre, pensons à la région verticalement, tranche par tranche :

1. Pour chaque valeur de x entre 0 et 1, nous avons une "tranche" verticale de la région.
2. Dans chaque tranche, y varie du point le plus bas au point le plus haut de la région hachurée.
3. Le point le plus bas est toujours sur la courbe y = x^2. C'est pourquoi la borne inférieure de y est x^2.
4. Le point le plus haut est sur la courbe x = y^2. Pour exprimer cela en termes de y, on résout cette équation : x = y^2 y = √x Donc, la borne supérieure de y est √x.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\, dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \, dx$$

$$= \left[2 \times \frac{x^{3/2}}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \cdot - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Exercice 14

On considère le disque centré en O et de rayon R : $D(O,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2+y^2 \leq R^2\}$.

Retrouver le fait que son aire vaut πR^2 :

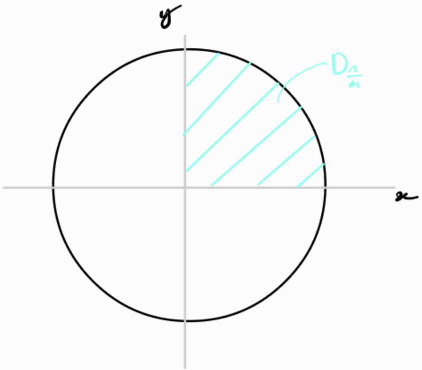
a) en réalisant un découpage par tranches verticales de ce disque.

b) en utilisant les coordonnées polaires.

– Tranche vertical

x dans un intervalle cte et y dans un intervalle en fonction de x

– Tranche horizontal – l'inverse



a) Considerons une tranche verticale :

$\Delta = x^2+y^2=R^2$ → $\Delta = 1/4$ du cercle → le cercle $= 4 \times$ l'aire

$y = \sqrt{R^2-x^2}$

$$4 \times \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\, dx$$

$$4 \times \int^R \sqrt{R^2-x^2}\, dx$$

$$4 \int_0^R R\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\, dx$$

$$4R \int \sqrt{1-\sin t^2} \times \cos t \times R$$

$$4R^2 \int \cos t^2\, dt$$

$$4R^2 \int_0 \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt$$

$$2R^2 \int_0 1 + \int \cos(2t)$$

$$2R^2 [t]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$2R^2 \frac{\pi}{2}$$

$$R^2\pi$$

$\frac{x}{R} = \sin(t)$

$dx = \cos(t) \times R$

Borne

pour

$R =$ t doit valoir $\frac{\pi}{2}$

$0 =$ t doit valoir 0

b) en utilisant les coordonées polaires

$$A = \iint dx\, dy$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^R r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\, dr$$

$$= 2\pi \times \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

Exercice 15

Calculer $I = \iint_{D(O,1)} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy \quad (D(O,1)$ est le disque unité).

$$I = \iint \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r\, dr\, d\theta}{1+r^2} = \int_0^1 \frac{r\, dr}{1+r^2} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\left[\frac{1}{2}\ln(1+R^2)\right]_0^1 \times 2\pi$$

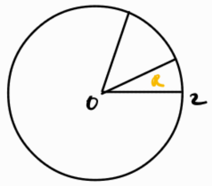
$$\frac{1}{2}\ln(2) \times 2\pi = \ln(2) \times \pi$$

Exercice 16

Soit Δ, le domaine s'écrivant en polaires : $\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[; \quad 0 \leq r \leq 2\,,\ \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}$.

a) Calculer l'aire de Δ.

b) Calculer $I = \iint_\Delta x^3 y \, dx\, dy$.



a) Soit $\Delta = R \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$

$= R \times \left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\pi}{3}$

Via une integrale on aurait

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{r} r\,d\theta\,dr$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2} r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^2 \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\ r\,dr$$

$$\int_0^2 \frac{\pi}{6}\,r\,dr \Rightarrow \frac{\pi}{6}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 \Rightarrow \frac{\pi}{6}\,\frac{4}{2} = \frac{\pi}{3}$$

b) On transphorme l'integrale donnée

$$I = \iint_\Delta x^3 y\, dx\, dy$$

Soit $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$dx\,dy = r\,d\theta\,dr$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3}\int_0^2 (r\cos(\theta))^3 \times r\sin(\theta) \cdot r\,d\theta\,dr$$

$u = \cos\theta$

$du = \sin\theta$

$d\theta = -\frac{du}{\sin\theta}$

$$\iint r^5 \cos\theta^3 \times \sin\theta \cdot d\theta\,dr$$

$$\int_0^2 r^5 \times \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} \cos\theta^3 \times \sin\theta \Rightarrow \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^2 \times \left[\frac{u^4}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{32}{3} \times \left(\frac{9}{64} - \frac{1}{64}\right)$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1/2} u^3 - du \Rightarrow \left[\frac{u^4}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{32}{3} \times \frac{8}{64} = \frac{4}{3}$$