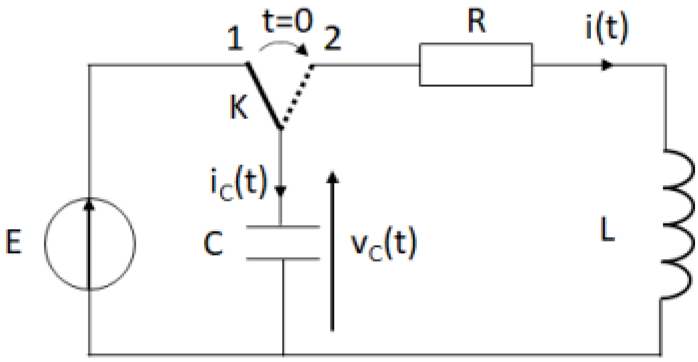
Exercice 3 : Mise en équation et résolution de circuits linéaires en régime variable - Conditions initiales non nulles ⭐⭐

On considère le circuit de la figure ci-dessous.

A $t = 0^-$, l'interrupteur K est en position 1, le condensateur est donc initialement chargé.

A $t = 0$, on bascule l'interrupteur K en position 2, le condensateur se décharge alors dans le reste du circuit (composé d'une résistance et d'une bobine).



Partie : 1 - Résolution temporelle

Question

1) Donner les conditions initiales $v_C(0^+)$ et $\frac{dv_C}{dt}(0^+)$.

Solution

- A $t = 0^-$, le condensateur est initialement chargé avec une tension $v_C(0^-) = E$. La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité, par conséquent $v_C(0^-) = v_C(0^+) = E$.
- A $t = 0^-$, la branche qui contient la bobine n'est pas alimentée, le courant qui la traverse est donc nul $i(0^-) = 0$. Par ailleurs, le courant qui traverse une bobine ne peut pas subir de discontinuité donc $i_C(0^-) = i_C(0^+) = 0$

  On applique la relation courant-tension pour le condensateur :

  $$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt}$$

  Par conséquent, $\frac{dv_C}{dt}(0^+) = 0$

Question

2) Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension $v_c(t)$ aux bornes du condensateur C.

Indice

Il faut commencer par flécher toutes les tensions et tous les courants en respectant les conventions.

Solution

On applique la loi des nœuds :

$$i_C(t) = -i(t)$$

Par ailleurs, $i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C}{dt}$

Soit : $i(t) = -C \cdot \frac{dv_C}{dt}$ eq.(1)

On applique la loi des mailles :

$v_C(t) - R \cdot i(t) - L\frac{di}{dt} = 0$ eq.(2)

On remplace l'équation (1) dans l'équation (2) :

$$v_C(t) + RC \cdot \frac{dv_C}{dt} + LC \cdot \frac{d^2 v_C}{dt^2} = 0$$

Il suffit à présent de réorganiser l'équation différentielle :

$LC\frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = 0$ avec les contions initiales : $v_C(0^+) = E$ et $\frac{dv_C}{dt}(0^+) = 0$

On remarque que $v_C(t)$ est régi par une équation différentielle d'ordre 2.

Question

3) Résoudre l'équation différentielle pour trouver l'expression de $v_C(t)$.

On donne les valeurs suivantes : $E = 10\,V$, $R = 100\,\Omega$, $C = 10\,\mu F$ et $L = 0,1\,H$.

Indice

Relire le complément de cours sur la résolution d'équation différentielle du 2nd ordre.

Solution

L'équation différentielle qui régit $v_C(t)$ est une équation homogène (second membre nul). La solution particulière est donc nulle.

On définit l'équation caractéristique en r :

$$LCr^2 + RCr + 1 = 0$$

L'application numérique donne :

$$10^{-6}r^2 + 10^{-3}r + 1 = 0$$

Le discriminant vaut : $\Delta = 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-6} = -3 \cdot 10^{-6} < 0$

Le discriminent est négatif, les solutions de l'équation caractéristique sont donc complexes.

$$r_1 = \frac{-10^{-3} - j\sqrt{3} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} = -\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^{-3}$$

$$r_2 = \frac{-10^{-3} + j\sqrt{3} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} = -\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^{-3}$$

Pour simplifier les calculs, on note :

$r_1 = r_0 - jw$ et $r_2 = r_0 + jw$ avec $r_0 = -\frac{1}{2} \cdot 10^3 = -500$ et $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^3 \simeq 866\, rad/s$

On trouve donc :

$v_C(t) = \exp(r_0 t)\,[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]$ eq. (3)

Il faut à présent déterminer les constantes A et B à partir des conditions initiales.

A $t = 0^+$, $v_C(0^+) = E$.

On applique l'équation (3) à $t = 0^+$:

$v_C(0^+) = \exp(r_0 \times 0)\,[A\cos(\omega \times 0) + B\sin(\omega \times 0)] = E$

Soit : $A = E = 10V$

Pour déterminer B, il faut utiliser la deuxième condition initiale : $\frac{dv_C}{dt}(0^+) = 0$

On dérive l'équation (3) :

$$\frac{dv_C}{dt} = r_0 \cdot \exp(r_0 t)\,[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] + \exp(r_0 t)\,[-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)]$$

A $t = 0^+$, on a :

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = r_0 \cdot A + B \cdot \omega = 0$$

$$\Leftrightarrow B = -\frac{r_0 \cdot A}{\omega} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Au final, on obtient :

$v_C(t) = \exp(-500 \cdot t)\left[10 \cdot \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^3 \cdot t) + \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^3 \cdot t)\right]$ pour $t > 0$ eq.(4)

Question

4) Déterminer la pseudo-période de $v_C(t)$.

Indice

Il suffit d'analyser le résultat obtenu dans la question précédente.

Solution

A partir de l'expression de $v_C(t)$ (équation (4)) trouvée dans la question précédente, on observe que ce signal est composé d'une somme de deux sinusoïdes de même pulsation ω, le tout multiplié par une exponentielle décroissante.

Le signal $v_C(t)$ a donc une allure pseudo-périodique amortie.

La pseudo-période correspond donc à la période du cosinus et du sinus :

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^3$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{4\pi}{\sqrt{3} \cdot 10^3}$$

L'application numérique donne :

$$T \simeq 7,25 \cdot 10^{-3}\, s = 7,25\, ms$$

Partie : 2- Résolution avec le formalisme de la transformée de Laplace

L'objectif de cette partie est de redémontrer les résultats obtenus précédemment en utilisant cette fois-ci le formalisme de la transformée de Laplace.

Question

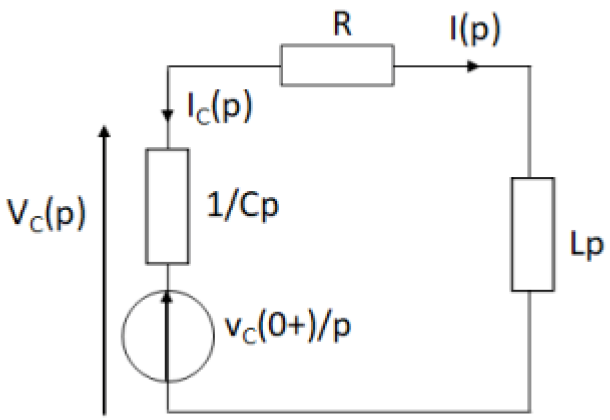
5) Faire le schéma équivalent du circuit avec le formalisme de la transformée de Laplace pour $t > 0$ en précisant les notations utilisées pour chaque grandeur électrique.

Indice

Revoir le cours sur les impédances opérationnelles lorsque les conditions initiales ne sont pas nulles.

Solution

Pour $t > 0$, le schéma équivalent avec le formalisme de Laplace est le suivant :



Avec $I(p)$, $I_C(p)$ et $V_C(p)$ les transformées de Laplace respectives de $i(t)$, $i_C(t)$ et $v_C(t)$.

Question

6) Utiliser les théorèmes généraux pour établir l'expression de $V_C(p)$ en fonction de R, L, C et E.

Méthode ?

Il faut appliquer la loi des mailles (loi de Kirchhoff) avec le formalisme de la transformée de Laplace ainsi que les relations courant-tension avec le formalisme de Laplace pour les différents composants.

Solution

On applique la loi des mailles avec le formalisme de la transformée de Laplace :

$$V_C(p) - R \cdot I(p) - L \cdot p \cdot I(p) = 0$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) = (R + L \cdot p) \cdot I(p)$$

Soit : $\Leftrightarrow I(p) = \dfrac{V_C(p)}{R + L \cdot p}$ eq. (5)

Par ailleurs, $V_C(p) = \dfrac{v_C(0^+)}{p} + \dfrac{1}{C \cdot p} \cdot I_C(p)$ eq. (6)

et $I_C(p) = -I(p)$ eq.(7)

En combinant les équations (6) et (7), on obtient : $V_C(p) = \dfrac{v_C(0^+)}{p} - \dfrac{1}{C \cdot p} \cdot I(p)$ eq. (8)

On remplace à présent l'équaiton (5) dans l'équation (8) :

$$V_C(p) = \frac{v_C(0^+)}{p} - \frac{1}{C \cdot p} \cdot \frac{V_C(p)}{R + L \cdot p}$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) \left[1 + \frac{1}{(C \cdot p)(R + L \cdot p)}\right] = \frac{v_C(0^+)}{p}$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) \frac{(C \cdot p)(R + L \cdot p) + 1}{(C \cdot p)(R + L \cdot p)} = \frac{v_C(0^+)}{p}$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) = \frac{v_C(0^+)}{p} \cdot \frac{(C \cdot p)(R + L \cdot p)}{(C \cdot p)(R + L \cdot p) + 1}$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) = \frac{v_C(0^+) \cdot C \cdot (R + L \cdot p)}{(C \cdot p)(R + L \cdot p) + 1}$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) = \frac{v_C(0^+) \cdot C \cdot (R + L \cdot p)}{L \cdot C \cdot p^2 + R \cdot C \cdot p + 1}$$

Pour finir $v_C(0^+) = E$, soit :

$$\Leftrightarrow V_C(p) = \frac{E \cdot C \cdot (R + L \cdot p)}{L \cdot C \cdot p^2 + R \cdot C \cdot p + 1}$$

Question ⭐⭐

7) Retrouver l'expression de $V_C(p)$ à partir de l'équation différentielle obtenue à la question 2) avec les conditions initiales déterminées à la question 1).

Méthode ?

Il faut calculer la transformée de Laplace de l'équation différentielle qui régi $v_C(t)$.

Revoir le complément de cours sur la transformée de Laplace et un exemple d'application.

Attention, ici les conditions initiales ne sont pas nulles.

Solution

On calcule la transformée de Laplace de l'équation différentielle qui régi $v_C(t)$:

$$TL\left\{L \cdot C\frac{d^2 v_C}{dt^2} + R \cdot C\frac{dv_C}{dt} + v_C(t)\right\} = TL\left\{0\right\}$$

En utilisant la propriété de linéarité de la transformée de Laplace, on obtient :

$$\Leftrightarrow L \cdot C \cdot TL\left\{\frac{d^2 v_C}{dt^2}\right\} + R \cdot C \cdot TL\left\{\frac{dv_C}{dt}\right\} + TL\left\{v_C(t)\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow L \cdot C \cdot \left[p^2 \cdot V_C(p) - p \cdot v_C(0^+) - \frac{dv_C}{dt}(0^+)\right] + R \cdot C \cdot \left[p \cdot V_C(p) - v_C(0^+)\right] + V_C($$

On applique les conditions initiales déterminées à la questions 1) : $v_C(0^+) = E$ et $\frac{dv_C}{dt}(0^+) = 0$

$$\Leftrightarrow L \cdot C \cdot \left[p^2 \cdot V_C(p) - p \cdot E - 0\right] + R \cdot C \cdot \left[p \cdot V_C(p) - E\right] + V_C(p) = 0$$

On regroupe les termes et on isole V_C(p) d'un côté du signe égal :

$$\Leftrightarrow V_C(p)\left[L \cdot C \cdot p^2 + R \cdot C \cdot p + 1\right] = E\left[L \cdot C \cdot p + R \cdot C\right]$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) = \frac{E\left[L \cdot C \cdot p + R \cdot C\right]}{L \cdot C \cdot p^2 + R \cdot C \cdot p + 1}$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) = \frac{E \cdot C \cdot (R + L \cdot p)}{L \cdot C \cdot p^2 + R \cdot C \cdot p + 1}$$

On retrouve bien le même résultat qu'à la question précédente.

Question

8) L'objectif de cette question est de déterminer $v_C(t)$ à partir de l'expression de $V_C(p)$, en calculant sa transformée de Laplace inverse. Pour cela, on se propose de suivre les questions intermédiaires.

8) a) Est-ce que l'expression de $V_C(p)$ est écrite sous la forme d'une somme d'éléments simples ? Si non, effectuer une décomposition en éléments simples.

8) b) Réécrire l'expression de $V_C(p)$ pour la mettre sous la forme suivante :

$V_C(p) = A \cdot \dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2} + B \cdot \dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$ où $p_1 = -\alpha - j \cdot \omega$ et $p_2 = -\alpha + j \cdot \omega$ sont les racines du dénominateur et A et B sont deux constantes à déterminer.

8) c) Calculer la transformée de Laplace inverse de $V_C(p)$. Comparer le résultat obtenu avec celui de la question 3).

Solution 8) a)

8) a) $V_C(p)$ est une fraction rationnelle composée d'un polynôme de degré 1 au numérateur et d'un polynôme de degré 2 au dénominateur.

Il faut donc déterminer les racines du polynôme du dénominateur :
$L \cdot C \cdot p^2 + R \cdot C \cdot p + 1$

On calcule donc son discriminant :

$$\Delta = 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-6} = -3 \cdot 10^{-6} < 0$$

Le discriminant est négatif, les racines du polynôme sont donc des complexes conjugués.

Par conséquent, la fraction rationnelle est déjà une fraction simple, il est inutile de faire une décomposition en éléments simples.

Pour la suite, on note les racines du polynôme :

$$p_1 = \frac{-R \cdot C - j\sqrt{-(R \cdot C)^2 + 4 \cdot L \cdot C}}{2 \cdot L \cdot C} = -\frac{R}{2 \cdot L} - j\frac{\sqrt{-(R \cdot C)^2 + 4 \cdot L \cdot C}}{2 \cdot L \cdot C} = -$$

$$p_2 = \frac{-R \cdot C + j\sqrt{-(R \cdot C)^2 + 4 \cdot L \cdot C}}{2 \cdot L \cdot C} = -\frac{R}{2 \cdot L} + j\frac{\sqrt{-(R \cdot C)^2 + 4 \cdot L \cdot C}}{2 \cdot L \cdot C} = -$$

avec $\alpha = \frac{R}{2 \cdot L}$ et $\omega = \frac{\sqrt{-(R \cdot C)^2 + 4 \cdot L \cdot C}}{2 \cdot L \cdot C}$

Solution 8) b)

Pour pouvoir utiliser la table des transformées de Laplace, on se rend compte qu'il faut que le dénominateur de la fraction rationnelle soit sous la forme : $(p + \alpha)^2 + \omega^2$

$$L \cdot C \cdot p^2 + R \cdot C \cdot p + 1 = L \cdot C \cdot \left[p^2 + \frac{R}{L} \cdot p + \frac{1}{L \cdot C}\right] = L \cdot C \cdot (p + \alpha + j \cdot \omega)\,(p -$$

$$= L \cdot C \cdot \left[p^2 + p\,(\alpha + j \cdot \omega) + p\,(\alpha - j \cdot \omega) + (\alpha + j \cdot \omega)\,(\alpha - j \cdot \omega)\right]$$

$$= L \cdot C \cdot \left[p^2 + 2 \cdot \alpha \cdot p + j \cdot \omega \cdot p - j \cdot \omega \cdot p + \alpha^2 + j \cdot \omega \cdot \alpha - j \cdot \omega \cdot \alpha + \omega^2\right]$$

$$= L \cdot C \cdot \left[p^2 + 2 \cdot \alpha \cdot p + \alpha^2 + \omega^2\right]$$

$$= L \cdot C \cdot \left[(p + \alpha)^2 + \omega^2\right]$$

Par conséquent :

$$V_C(p) = \frac{E \cdot C \cdot (R + L \cdot p)}{L \cdot C \cdot p^2 + R \cdot C \cdot p + 1} = \frac{E \cdot C \cdot (R + L \cdot p)}{L \cdot C \cdot \left[(p + \alpha)^2 + \omega^2\right]}$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) = \frac{E \cdot \frac{R}{L} + E \cdot p}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$$

Par ailleurs, $\alpha = \dfrac{R}{2 \cdot L}$, soit :

$$\Leftrightarrow V_C(p) = \frac{E \cdot 2 \cdot \alpha + E \cdot p}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) = \frac{E\,(p+\alpha) + E \cdot \alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) = \frac{E\,(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 + \omega^2} + \frac{E \cdot \alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) = E \cdot \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2} + \frac{E \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\Leftrightarrow V_C(p) = E \cdot \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2} + \frac{E \cdot \alpha}{\omega} \cdot \frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$$

On peut à présent identifier avec l'expression
$V_C(p) = A \cdot \dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2} + B \cdot \dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$:

On trouve que $A = E$ et $B = \dfrac{E \cdot \alpha}{\omega}$

Solution 8) c)

On peut à présent utiliser la table des transformées de Laplace pour déterminer $v_C(t)$:

$$v_C(t) = TL^{-1}\left\{V_C(p)\right\} = A \cdot \exp(-\alpha \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \exp(-\alpha \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

En remplaçant A et B, on trouve :

$$v_C(t) = E \cdot \exp(-\alpha \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{E \cdot \alpha}{\omega} \cdot \exp(-\alpha \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{ pour } t > 0$$

Pour comparer avec le résultat obtenu à la question 3), il faut faire l'application numérique :

$$v_C(t) = \exp(-500 \cdot t)\left[10 \cdot \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^3 \cdot t) + \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^3 \cdot t)\right] \text{ pour } t > 0$$

On constate qu'on retrouve bien le même résultat.

Partie : 3- Simulation

Question

9) A l'aide d'Octave, résoudre l'équation différentielle obtenue à la question 2) avec les conditions initiales obtenues à la question 1).

Résolution d'équation différentielle avec Octave ?

Revoir l'exemple d'utilisation d'Octave donné dans le complément de cours sur la résolution d'équation différentielle d'ordre 2.

Solution

Simulation

```
>> syms v_c(t)
>> R=100; L=0.1; C=10e-6;
>> eqn = diff(v_c,2)+R/L*diff(v_c)+ 1/(L*C)*v_c == 0 ;
>> Dv_c=diff(v_c,t);
>> cond = [v_c(0) == 10, Dv_c(0)==1];
>> v_c=dsolve(eqn, cond)

v_c =

(exp(-500*t)*(5000*cos(500*3^(1/2)*t) + 1667*3^(1/2)*sin(500*3^(1/2)*t)))/500
```

On obtient bien le même résultat qu'à la question 3).

Question

10) A l'aide d'Octave, tracer $v_C(t)$. Pour cela, on complétera le script réalisé à la question précédente.

Indice

On veillera à tracer le graphique sur une gamme de temps suffisamment grande pour observer plusieurs pseudo-périodes.

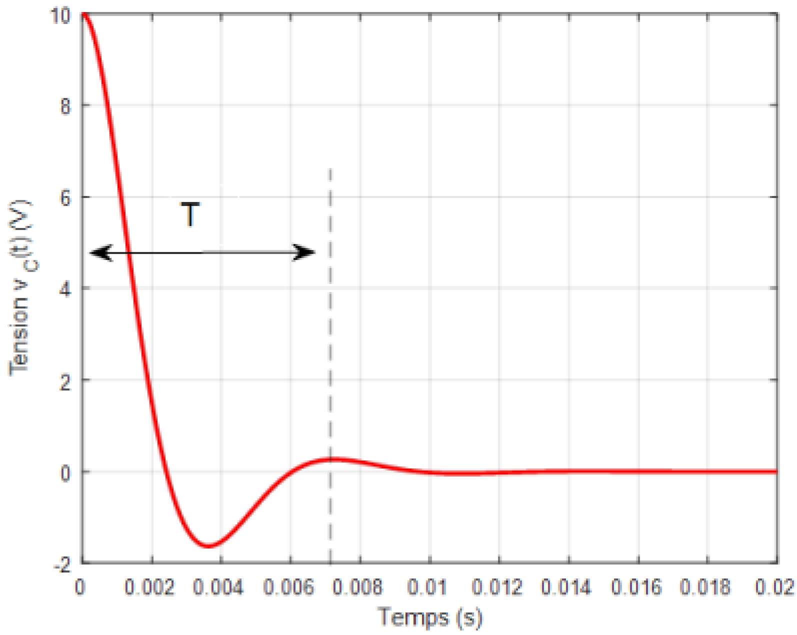
Solution

Simulation

Le code Octave est donné ci-dessous.

```
>> syms v_c(t)
>> R=100; L=0.1; C=10e-6;
>> eqn = diff(v_c,2)+R/L*diff(v_c)+ 1/(L*C)*v_c == 0 ;
>> Dv_c=diff(v_c,t);
>> cond = [v_c(0) == 10, Dv_c(0)==1];
>> v_c=dsolve(eqn, cond);
>> t=linspace(0,20e-3, 1000);
>> v_c=subs(v_c);
>> plot(t,v_c,'r', 'linewidth', 2)
>> xlabel('Temps (s)')
>> ylabel('Tension v_C(t) (V)')
>> grid on
```

On obtient la figure suivante :



Question

11) Utiliser Octave pour calculer les transformées de Laplace inverse de $V_C(p)$ en utilisant l'expression obtenue à la question 6).

On utilisera la fonction *pretty* pour mettre en forme l'affichage de l'expression.

Tracer $v_C(t)$, on comparera au résultat obtenu à la question précédente.

Calcul de la transformée de Laplace inverse avec Octave ?

Revoir l'exemple d'utilisation d'Octave donné dans le complément de cours sur la transformée de Laplace.

Syntaxe de pretty ?

La syntaxe pour la fonction *pretty* est la suivante :

expr correspond à l'expression symbolique que l'on souhaite afficher

pretty(expr)

Solution

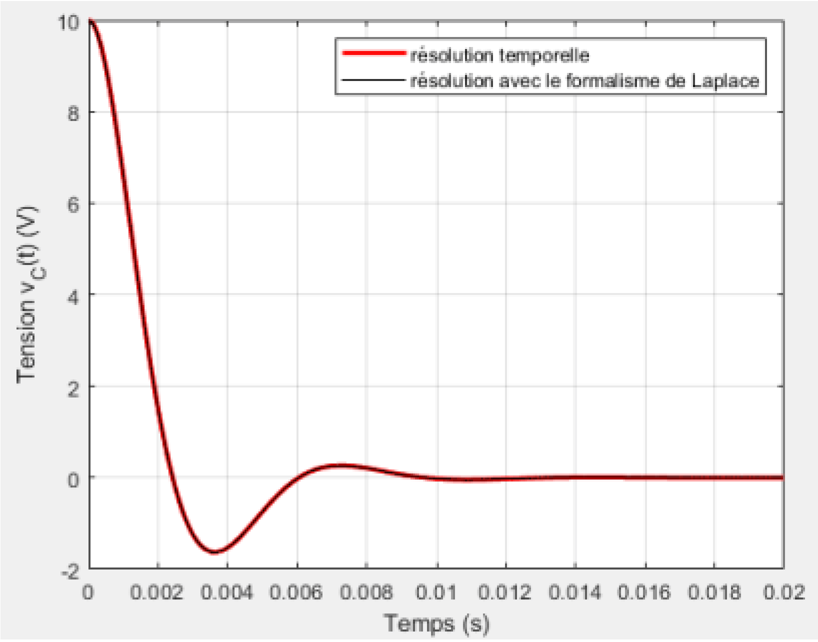
```
>> syms p t E R C L
>> V_C= E*C*(R+L*p)/(1+R*C*p+L*C*p^2);
>> v_C=ilaplace(V_C,p,t);
>> pretty(v_C)

               /                                            /       /    2     \ \ \
               |                                            |       | C R      | | |
               |     /       /    2     \ \                 | t sqrt| ---- - L | | |
               |     |       | C R      | |                 |       \    4     / | |
               |     | t sqrt| ---- - L | |   sqrt(C) R sinh| ------------------ | |
     /   R t \ |     |       \   4      / |                 \      sqrt(C) L     / |
E exp| - --- | | cosh| ------------------ | + ------------------------------------ |
     \   2 L / |     \      sqrt(C) L     /                  /    2     \          |
               |                                             | C R      |          |
               |                                       2 sqrt| ---- - L |          |
               \                                             \   4      /          /
```

Le résultat obtenu est égal au résultat trouvé à la main, il suffit d'écrire quelques lignes de calcul pour s'en assurer.

Pour le tracé de la courbe, on complète le script précédent avec les lignes de commande suivantes :

```
>> t=linspace(0,20e-3, 1000);
>> R=100; L=0.1; C=10e-6; E=10;
>> v_C=subs(v_C);
>> hold on
>> plot(t,v_C,'k')
>> legend('résolution temporelle','résolution avec le formalisme de Laplace')
```

On obtient la figure suivante :



On obtient bien des résultats identiques.