Session : ......1....../...........   Durée de l'épreuve :......3..........heures

Date : 9 / 01 / 2024   Documents autorisés : **Aucun, calculatrice oui**

Licence ■ Master □   Mention :............................**EEA** ......

Parcours **2°année** Libellé + Code de l'UE : **Circuits et composants CAPACITIFS et INDUCTIFS, HAE302E**

Examen sur la partie du cours "diélectrique et condensateur" de J. Castellon.

Durée conseillée 1h – 10 pts

On rappelle : Permittivité du vide $\varepsilon_0 = 1/(36\pi 10^9) = 8.84\text{x}10^{-12}$ F/m.

Exercice 1 : Condensateur Sphérique (5 pts)

1- On considère un conducteur sphérique A chargé en surface de rayon R_1 = 5cm. Ce conducteur est isolé et porté au potentiel V_1 positif. La permittivité diélectrique est celle du vide ε_0.

- **Calculer** la charge Q portée par cette sphère si V_1 = 100V.
- **En déduire** la valeur de la capacité de ce conducteur C_1.

2- On entoure complètement le conducteur sphérique A par un autre conducteur sphérique creux B d'épaisseur négligeable (figure 1 ci-dessous) initialement neutre de rayon interne R_2 = 10 cm.

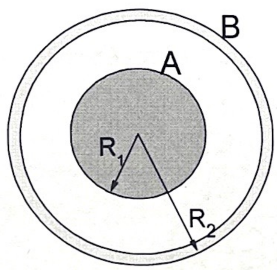


Figure 1

Représenter sur un schéma la nouvelle répartition de charges et les vecteurs champs électriques $\vec{E}$. En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrique du centre O à l'infini et représenter E = f(r).

3- Afin de former un condensateur sphérique, par rapport à la situation précédente, le conducteur B est relié au sol (potentiel zéro) par son armature extérieure et on place entre les 2 conducteurs un milieu diélectrique de constante diélectrique relative ε_r = 3.5.

- **Représenter** sur un schéma la nouvelle répartition de charges et les vecteurs champs électriques $\vec{E}$.
- **Démontrer** que la capacité de ce condensateur est égale à $C = 4\pi\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$
- **Calculer** cette capacité C
- **Calculer** le nouveau potentiel de la sphère centrale V'_1.

Exercice 2 : Energie d'un système capacitif (5 pts)

A- Les caractéristiques d'un condensateur sont les suivantes : $C=0{,}12\mu F$; épaisseur du diélectrique $e=0{,}2mm$; permittivité relative de l'isolant : $\varepsilon_r=5$; tension de service : $Us=100V$; constante diélectrique du vide $\varepsilon_0=8{,}84pF/m$.

Calculer :

1- La surface des armatures.

2- La charge du condensateur soumis à la tension de service.

3- L'énergie emmagasinée dans ces conditions.

B- Le condensateur étant chargé, on l'isole, puis on l'associe en parallèle à un condensateur de capacité $C1=150nF$ initialement déchargé.

Calculer :

1- La charge totale de l'ensemble formé par les deux condensateurs ainsi que la charge de chaque condensateur.

2- La tension commune aux deux condensateurs en régime permanent.

3- L'énergie emmagasinée par le montage, interprétez la différence d'énergie avec la question A-3.

Examen sur la partie du cours "Théorème de Gauss et Circuit Capacitifs".

Durée conseillée 1h – 10 pts

Exercice 3 : Champ électrique et potentiel d'une distribution volumique cylindrique

On considère un cylindre creux de longueur infinie dont le rayon intérieur est R_1 et le rayon extérieur est R_2 (Figure 3a) . Ce cylindre possède une densité de charge volumique uniforme ρ en C/m^3. Cette densité est supposée positive.

Le repère cartésien orthonormé choisi est tel que l'axe Oz est confondu avec l'axe du cylindre.

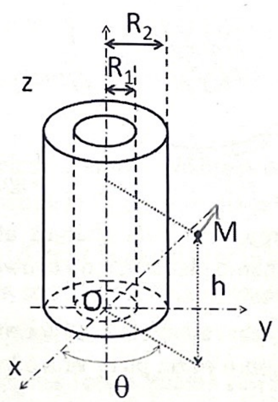


Figure 3a

1) On considère un point M de coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ h \end{pmatrix}$ situé à l'extérieur du cylindre. Comme le montre la Figure 3a, r , θ et h correspondent aux coordonnées cylindriques de ce point. Quelle est la direction du vecteur champ électrique, $\vec{E}$, en ce point M. Donner les coordonnées du vecteur unitaire de $\vec{E}$.

Que peut-on dire sur les modules des champs électriques pour les points à équidistance de l'axe du cylindre creux ? Quel type de symétrie a-t-on ?

On souhaite utiliser le théorème de Gauss pour exprimer le vecteur champ électrique, $\vec{E}$, en tout point de l'espace.

2) Expliquez succinctement pourquoi le choix d'une surface fermée de type cylindrique positionnée sur l'axe du cylindre creux est le plus approprié. On appellera L la longueur de ce cylindre (Figure 3b) et S sa surface.
Cette surface fermée est appelée surface de Gauss.

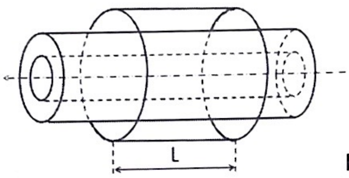


Figure 3b

3) En utilisant le théorème de Gauss
3.1) Calculer les produits scalaires $\vec{E}.\overrightarrow{dS}$ pour les vecteurs surfaces élémentaires liés aux surfaces latérales associées aux génératrices du cylindre. On donne $\overrightarrow{dS} = |dz.r.d\theta| \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$.
3.2) Donner les coordonnées des deux vecteurs surfaces associés aux deux bases du cylindre et montrer que pour ces vecteurs $\iint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0$

4) En vous appuyant sur les résultats des questions 3.1) et 3.2) donner l'expression du module de vecteur champ électrique $|\overrightarrow{E(r)}|$ en tout point de l'espace.
On considèrera 3 zones : $r < R_1$; $R_1 < r < R_2$; $R_2 < r$
et on montrera la continuité du champ électrique en R_1 et R_2.

5) Donner les coordonnées du vecteur champ électrique $\vec{E}$ au point M de la question 1).
On donne $\theta=\pi/3$; $r=10$ cm ; $\rho=(1/(18.\pi.10^9))$ C/m^3 et $\varepsilon_0= 1/(36\pi 10^9)$ F/m
$R_2=5$ cm et $R_1=3$ cm

6) Donner l'expression du potentiel V(r) à l'extérieur du cylindre creux infini. Pour quelle raison ne peut-on pas considérer le potentiel comme nul lorsque l'on est infiniment loin de ce cylindre ?

Examen sur la partie du cours "Théorème d'Ampère et Circuit Inductifs".

Durée conseillée 1h – 10 pts

On rappelle : Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m.

Exercice 4 : Bobine carrée

Une spire carrée de coté h = 3 cm de coté est parcouru par un courant continu i=2 A. Sachant que la norme du champ $\vec{B}$ créé par un fil fini de coté h est égal à $\frac{\mu_0 i}{2\pi h\sqrt{2}}$, (Figure 4 ci après)

1°/ déterminer les caractéristiques (direction, sens , norme) du champ $\vec{B}$ créé par la spire carrée en son centre (on considèrera la partie gauche de la spire comme continue). Représenter le champ $\vec{B}$ au sein de la figure 4

2°/ Calculer la valeur de l'inductance L de la spire carrée puis l'énergie magnétique E_{mag}.

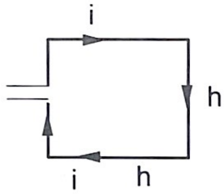
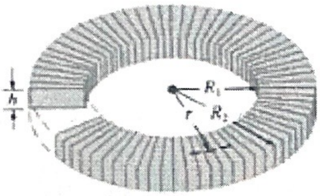


Figure 4

Exercice 5 : Bobine Torique

Soit une bobine torique, ou Tore, solénoïde considéré comme infini refermé sur lui-même, de section S carrée comportant N spires de hauteur h, de rayons interne R_1 et externe R_2 (Figure 5) parcourue par un courant i = 2A.



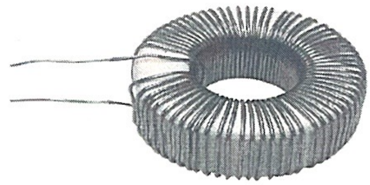


Figure 5

1°/ En utilisant le théorème d'Ampère, établir l'expression du champ B créé par ce Tore en tout point r (du centre à l'infini). Faire un choix de sens de courant dans le bobinage torique et représenter le champ $\vec{B}$.

2°/ Etablir l'expression de l'inductance L de ce Tore.

Calculer l'inductance L puis le flux Φ pour N = 1000 spires, R_1 = 2cm, R_2 = 5cm, h = 3cm.

En déduire la valeur de la fem moyenne induite lorsque le courant dans le Tore est annulée en 25 ms.

Exercice 6 : Inductance Mutuelle. ***Cet exercice utilise les résultats des exercices 4 et 5***

La Bobine carrée de l'exercice 4 comportant N' = 10 spires est enroulée sur une partie du Tore de l'exercice 5 (figure 6).

1°/ En utilisant les résultats de l'exercice 5, établir l'expression puis calculer l'inductance mutuelle M_{TB} de la combinaison Tore - Bobine carrée pour laquelle l'inducteur est le Tore et l'induit est la Bobine carrée.

2°/ En utilisant les résultats de l'exercice 4 pour lequel on fera l'hypothèse que le champ magnétique de la bobine carrée est constant et égal à sa valeur en son centre, établir l'expression puis calculer l'inductance mutuelle M_{BT} de la combinaison Bobine carrée - Tore pour laquelle l'inducteur est la bobine carrée et l'induit est le Tore.

3°/ Calculer l'énergie magnétique du système Tore + Bobine carrée en mutuelle induction.

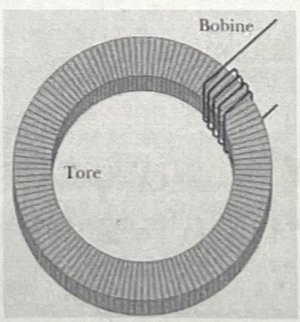


Figure 6

Ex 1

1) Soit $Q = CV$

$$V = \frac{Q}{C}$$

Soit $\oiint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{4\pi r^2}$$

Soit $V = -\int E \, dr$

$$V = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{4\pi r}$$

$Q_{int} = V \times \varepsilon_0 \times 4\pi r$

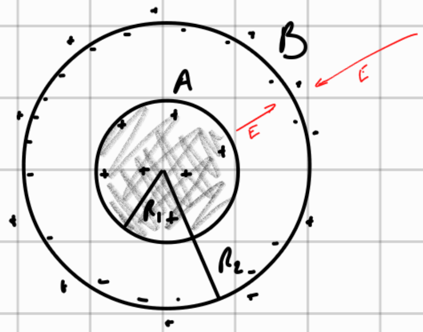
$Q_{int} = 5{,}5 \times 10^{-9}$ C

Soit $Q = CV$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5{,}5 \times 10^{-9}}{1000} = 5{,}5 \times 10^{-12}$$

$= 5{,}5$ pico Farade

2)



Thm de Gauss

$$\oiint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

pour $r < R_1$

$E = 0 \Rightarrow Q_{int} = 0$

$R_1 < r < R_2 \Rightarrow$

$$E = \frac{Q_{int}}{4\pi R^2 \cdot \varepsilon_0}$$

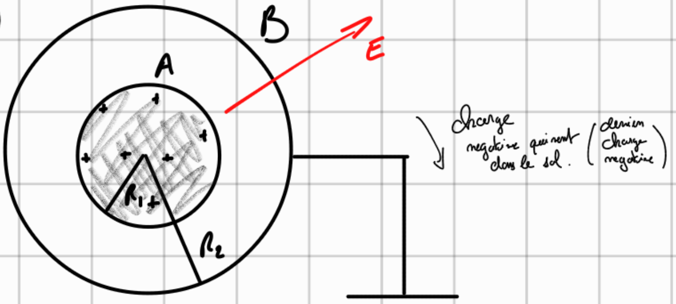
$r > R_2$

$$E = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0}$$

$$E = 0$$

$Q_2 = -Q_1$

3) a)



b) Démontrer la capacité d'un condo sphérique.

Soit thm de Gauss : $\iint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

avec $dS = 4\pi r^2$

$$E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 \cdot S}$$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \times \varepsilon_r$

Soit $E = \frac{Q}{\varepsilon \times 4\pi r^2}$

Sachant $\vec{E} = -\text{grad}\, V$.

E ne dépend que de r

$$dV = -E \cdot dr$$

$$\Big[V \Big]_{V_A}^{V_B} = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{\varepsilon \times 4\pi r^2}\, dr$$

$$V_B - V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_{R_1}^{R_2} -\frac{1}{r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}\right)$$

$$Q = CU$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon \cdot \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

c) Soit A.N. $C = 4\pi\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}\right) = \boxed{3{,}8 \cdot 10^{-11}\,F}$

d) Calcule le potentielle de la sphere centrale: V_1

Sachant V_B connecter a la terre on a:

$$V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \times \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}\right)$$

$$V_A = \frac{3{,}8 \cdot 10^{-11}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}\right) = \boxed{1\,V}$$

Exercice 2 : Energie d'un système capacitif (5 pts)

A- Les caractéristiques d'un condensateur sont les suivantes : $C=0,12\mu F$; épaisseur du diélectrique $e=0,2mm$; permittivité relative de l'isolant : $\varepsilon_r=5$; tension de service : $U_s=100V$; constante diélectrique du vide $\varepsilon_0=8,84pF/m$.

Calculer :

1- La surface des armatures.

2- La charge du condensateur soumis à la tension de service.

3- L'énergie emmagasinée dans ces conditions.

B- Le condensateur étant chargé, on l'isole, puis on l'associe en parallèle à un condensateur de capacité $C1=150nF$ initialement déchargé.

Calculer :

1- La charge totale de l'ensemble formé par les deux condensateurs ainsi que la charge de chaque condensateur.

2- La tension commune aux deux condensateurs en régime permanent.

3- L'énergie emmagasinée par le montage, interprétez la différence d'énergie avec la question A-3.

1) Soit on suppose un Condensateur plan composé de 2 aramature egale.

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{S}{e}$$

$$S = \frac{C \times e}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1}$$

$$S = \frac{0,12 \cdot 10^{-6} \times 0,2 \cdot 10^{-3}}{5 \times 8,84 \cdot 10^{-12}}$$

$$S = 0,54 \ m^2$$

2) Charge des plaque

$$Q = CV$$

$$Q = 0,12 \cdot 10^{-6} \times 100$$

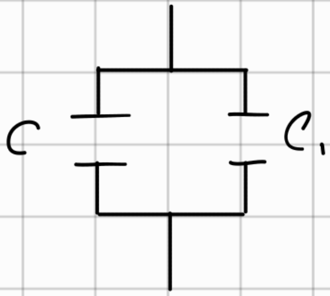
$$Q = 1,2 \times 10^{-5}$$

3) l'energie emogasinee dans ses condition.

$$W = \frac{1}{2} C u^2 \rightarrow \frac{1}{2} \, 0,12 \cdot 10^{-6} \times 1000^2$$

$$W = 0,06 \ J$$

B)



1) Soit la charge tot $= Q_1 + Q_0 = Q_1 = 100 \cdot 0{,}12 \cdot 10^{-6} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,C$

2) La tension Commune.

On a la tension d'origine soit 1V

Soit On charge $V_i = V_f$

$C_i = 120\,mF$

$C_f = 270\,mF$

$Q_{Tot} = Q\ fin$

$Q\ fin = C_T \cdot V_{fin}$

$Q_{tot} = Q_{ini}$ $\rightarrow$ $Q_{ini} = C_T \cdot V_{ini} = 120\,\mu C$

$Q_T = C_T \cdot V_{fin}$

$V_{fin} = \dfrac{Q_T}{C_T} = \dfrac{120}{270} \cdot 10^3 = \boxed{444V}$

3) $E_f = \dfrac{1}{2}\ 270 \cdot 10^{-9} \cdot (444)^2$

$= 26.6\ mJ$

$\Delta E = E_i - E_f = 60 - 26{,}6 = 33{,}4$ mJ

Perte d'énergie de 33,4 mJ soit plus de la moitié de E_i

Via effet Joule / non conversion en charge utile.

Exercice 3 : Champ électrique et potentiel d'une distribution volumique cylindrique

On considère un cylindre creux de longueur infinie dont le rayon intérieur est R_1 et le rayon extérieur est R_2 (Figure 3a) . Ce cylindre possède une densité de charge volumique uniforme ρ en C/m^3. Cette densité est supposée positive.

Le repère cartésien orthonormé choisi est tel que l'axe Oz est confondu avec l'axe du cylindre.

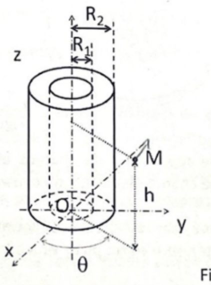


Figure 3a

1) On considère un point M de coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ h \end{pmatrix}$ situé à l'extérieur du cylindre. Comme le montre la Figure 3a, r , θ et h correspondent aux coordonnées cylindriques de ce point. Quelle est la direction du vecteur champ électrique, $\vec{E}$, en ce point M. Donner les coordonnées du vecteur unitaire de $\vec{E}$.

Que peut-on dire sur les modules des champs électriques pour les points à équidistance de l'axe du cylindre creux ? Quel type de symétrie a-t-on ?

1) Soit longueur infinie d'axe

Le vecteur unitaire $\vec{E} \cdot \vec{u}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$

- Les modules des champ électrique sont égaux a équidistance de l'axe.

On a une symétrie axial centrée en z

On souhaite utiliser le théorème de Gauss pour exprimer le vecteur champ électrique, $\vec{E}$, en tout point de l'espace.

2) Expliquez succinctement pourquoi le choix d'une surface fermée de type cylindrique positionnée sur l'axe du cylindre creux est le plus approprié. On appellera L la longueur de ce cylindre (Figure 3b) et S sa surface.
Cette surface fermée est appelée surface de Gauss.

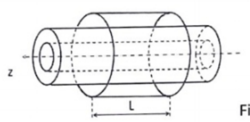


Figure 3b

2) Soit le choix d'une surface fermée cilindrique de façon a ce que le champ produit par les charges d'un objet cilindrique, varie de façon égale sur notre surface de Gauss. Cela rend l'intégrale simple.

3) En utilisant le théorème de Gauss
3.1) Calculer les produits scalaires $\vec{E}.\vec{dS}$ pour les vecteurs surfaces élémentaires liés aux surfaces latérales associées aux génératrices du cylindre. On donne $\vec{dS} = |dz.r.d\theta| \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$.
3.2) Donner les coordonnées des deux vecteurs surfaces associés aux deux bases du cylindre et montrer que pour ces vecteurs $\iint_S \vec{E}.\vec{dS} = 0$

4) En vous appuyant sur les résultats des questions 3.1) et 3.2) donner l'expression du module de vecteur champ électrique $|\overrightarrow{E(r)}|$ en tout point de l'espace.
On considèrera 3 zones : $r < R_1$; $R_1 < r < R_2$; $R_2 < r$
et on montrera la continuité du champ électrique en R_1 et R_2.

5) Donner les coordonnées du vecteur champ électrique $\vec{E}$ au point M de la question 1).
On donne $\theta=\pi/3$; r=10 cm ; $\rho=(1/(18.\pi.10^9))$ C/m^3 et $\varepsilon_0= 1/(36\pi 10^9)$ F/m
R_2=5 cm et R_1=3 cm

6) Donner l'expression du potentiel V(r) à l'extérieur du cylindre creux infini. Pour quelle raison ne peut-on pas considérer le potentiel comme nul lorsque l'on est infiniment loin de ce cylindre ?

3) Thm de Gauss.

3.1)

$$\iint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi (R_2^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0}$$

3.2) Soit Pour les surface de la base on a

$$\vec{S}_1 = S_1 (\vec{e_z}) \qquad \vec{S}_2 = S_2 \cdot (-\vec{e_z})$$

Or $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$ sont $\perp$ avec le Champ $\vec{E}$ d'ou

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint |E| \cdot |S| \cdot \cos(\theta) = \iint 0 = \underline{0}$$

Soit E des base $= \underline{0}$

4) Soit Pour $r < R_1$

$$\iint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow Q_{int} = 0$$

Pour $R_1 < r < R_2$

$$\iint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E(r) = \frac{\rho \cdot \cancel{\pi h} (r^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi \cdot hr} = \frac{\rho (r^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0 \cdot 2 r}$$

- $E(R_1) = \dfrac{\rho (R_1^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0 \, 2 R_1} = 0$

- $E(R_2) = \dfrac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{\varepsilon \, 2 R_2}$

$r =$

Pour $r > R_2$

$$\iint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot \pi \cancel{h}(R_2^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi \cancel{h} \cdot r} = \frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0 \, 2r}$$

– $$E(R_2) = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{\varepsilon \, 2 R_2}$$

$$M = \frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0 \, 2r} \cdot \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

On donne $\theta=\pi/3$; $r=10$ cm ; $\rho=(1/(18.\pi.10^9))$ C/m^3 et $\varepsilon_0= 1/(36\pi 10^9)$ F/m
$R_2=5$ cm et $R_1=3$ cm

$$-\int E \cdot dr = V =$$

$$\frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0 \, 2} \cdot \ln(r) + Cte \qquad cte =$$