Université de Montpellier - 2023/2024 L2 EEA - HAE304X

**Devoir surveillé n° 2 du 06/11/2023 - Durée : 1h10**

**NOM, Prénom :**

- Documents et calculatrices non autorisés. Barème indicatif sur 21 points
- **Toutes les réponses doivent être justifiées et les résultats soulignés.**

Répondez **uniquement dans les cases** de cet énoncé. Si vous manquez de place, continuez au verso.

**Exercice 1.** (4 points : 1+3) Déterminer les primitive et intégrale suivantes :

$(a)$ $F(x) = \int \frac{dx}{x\left(1+\ln^2|x|\right)}$ $(b)$ $G = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$

a) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2|x|)}$ $X = \ln|x|$ $\frac{dX}{dx} = \frac{1}{x}$

$\hookrightarrow \int \frac{dX}{1+X^2} = \arctan X = \arctan(\ln|x|)$. 1

b) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ $U = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2U}$

$\rightarrow dx = 2U dU$ 1,5

si $x \to +\infty$ $U \to +\infty$
$x \to 0$ $U = 0$

$\rightarrow I = \int_0^{+\infty} 2U e^{-U} dU$ IPP $u' = e^{-U} \to u = -e^{-U}$
1 $v = 2U \to v' = 2$

$I = \left[-2U e^{-U}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2e^{-U} dU$

$= \_\_\_\_ + 2 \left[-e^{-U}\right]_0^{+\infty}$

$= \left[-2e^{-U}(1+U)\right]_0^{+\infty} = 2$ 0,5

**Exercice 2.** (4 points) Déterminer la primitive $H(x) = \int \frac{x^4}{x^2-4}\,dx$

$$\frac{x^4}{x^2-4}$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^2-4 \\ \hline -x^4+4x^2 & x^2+4 \\ \hline -4x^2+16 & \end{array}$$

~~0,5~~ 1,5

$$\frac{x^4}{x^2-4} = x^2+4+\frac{16}{x^2-4} \overset{0,5}{=} x^2+4+\underbrace{\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}}_{1}$$

$$A = 4$$
$$B = -4.$$

~~1,5~~ 0,5

$$\Rightarrow \frac{x^4}{x^2-4} = x^2+4+\frac{4}{x-2}-\frac{4}{x+2}.$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{x^3}{3}+4x+4\ln|x-2|-4\ln|x+2|$$ 0,5

**Exercice 3.** (4 points) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/4} \cos^4 x \, dx$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \, dx \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos^2 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos(2x) + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right).$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x).$$

3

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x).$$

$$\rightarrow I = \left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{3}{8}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{32}(0) = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$$

1

24 **Exercice 4.** (3 points) Calculer l'intégrale double $J = \iint_{[1,2]\times[-4,4]} (2x + 5y^5)\, dxdy$

$$\iint_{[1,2]\times[-4,4]} (2x + 5y^5)\, dx\, dy$$

$$\int_{\underset{y}{[-4,4]}} \int_{\underset{x}{[1,2]}} 2x + 5y^5\, dx\, dy = \int_{[-4,4]} \left[\frac{2x^2}{2} + 5y^5 x\right]_1^2 dy$$

$$= \int_{-4}^{4} \left[x^2 + 5y^5 x\right]_1^2 dy =$$ 1,5

$$= \int_{-4}^{4} \left(4 + 10y^5 - (1 + 5y^5)\right) dy = \int_{-4}^{4} (3 + 5y^5)\, dy$$ 1

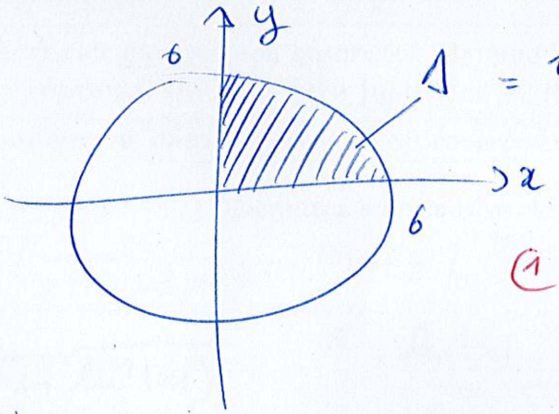
$$= \left[3y + 5\frac{y^6}{6}\right]_{-4}^{4} = 3(4+4) = 3\times 8 = \underline{24}$$ 0,5

paire

**Exercice 5.** (6 points : 1+2+3) Soit $\boldsymbol{\Delta} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \leq 36\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\right\}$.

1. Décrire et dessiner ce domaine $\boldsymbol{\Delta}$.
2. Calculer son aire en utilisant les coordonnées polaires.
3. Calculer son aire en utilisant un découpage par tranches.

1)




$\Delta$ = 1/4 supérieur ~~gauche~~ droit du disque de rayon 6 centré en (0,0)

1

2) Polaires –

$$\mathcal{A}_\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^6 r\, d\theta\, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^6 r\, dr = [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^6$$

$\theta$, $r$

0,5   1

$$= \frac{\pi}{2} \frac{36}{2} = \frac{36\pi}{4} = 9\pi$$

0,5

3) En tranches.

$$x^2 + y^2 \leq 36 \iff y^2 \leq 36 - x^2$$

$$y \leq \sqrt{36 - x^2}$$

$$\mathcal{A}_\Delta = \int_0^6 \int_0^{\sqrt{36 - x^2}} dy\, dx = \int_0^6 \sqrt{36 - x^2}\, dx = \int_0^6 \sqrt{36\left(1 - \frac{x^2}{6^2}\right)}\, dx.$$

$x$, $y$

On pose $U = \frac{x}{6}$ $\quad dU = \frac{1}{6} dx$

qd $x = 6 \to U = 1$
$x = 0 \quad U = 0$

2

$$\to \mathcal{A}_\Delta = 6 \int_0^1 6\sqrt{1 - U^2}\, dU \qquad \sin t = U \qquad \frac{dU}{dt} = \cos t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 36\sqrt{1 - \sin^2 t}\, \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 36\cos^2 t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 36\, \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = 18\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 18\frac{\pi}{2} = 9\pi$$

1