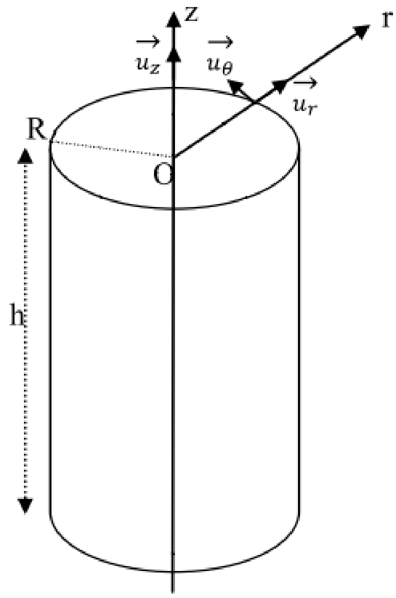
Exercice supplémentaire TD n°4, HLEE204

Champ et potentiel d'un cylindre considéré comme infini chargé en volume (extrait examen 2020)

Soit un cylindre considéré, compte tenu de ses dimensions, comme infini suivant l'axe Oz, de rayon R, de hauteur h, uniformément chargé en volume (charges positives, densité volumique de charge ρ). On se placera dans un repère cylindrique ($\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}$).

On donne $\rho = 2 \times 10^{-1} C/m^3$; R = 5 mm ; h = 10 cm



1- Calculer la charge Q du cylindre.

2- En considérant les symétries du système, montrer que le champ électrique en un point M de tout l'espace $\overrightarrow{E(M)}$ est radial donc dirigé selon $\overrightarrow{u_r}$. Représenter les vecteurs champs électriques dans tout l'espace de permittivité ε_0

3- En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrique radial $\overrightarrow{E(r)}$ dans tout l'espace, pour r variant de 0 à l'infini, en fonction de (ρ, r, ε_0, R, $\overrightarrow{u_r}$), puis en en fonction de (Q, r, ε_0, R, $\overrightarrow{u_r}$).
On notera E_1 pour r < R et E_2 pour r > R.

4- Tracer approximativement E=f(r), vérifier la continuité du champ électrique en r = R.

5- A partir de l'expression $\overrightarrow{E(M)} = -\overrightarrow{grad}(V)$, établir les expressions du potentiel V_1 pour r < R et V_2 pour r > R en fonction de (ρ, r, ε_0, R).

Afin de calculer V_1, on prendra comme origine des potentiels l'axe du cylindre V(r= 0) =0

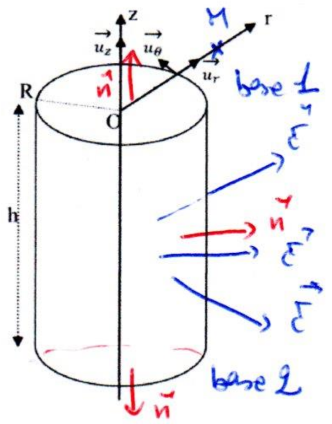
Afin de calculer V_2, on vérifiera la continuité du potentiel en r = R : $V_1(R) = V_2(R)$

6- Tracer approximativement V=f(r)

Exercice 2 – Champ et potentiel d'un cylindre considéré comme infini chargé en volume (10 pts)

Soit un cylindre considéré, compte tenu de ses dimensions, comme infini suivant l'axe Oz, de rayon R, de hauteur h, uniformément chargé en volume (charges positives, densité volumique de charge ρ). On se placera dans un repère cylindrique $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$.

On donne $\rho = 2\times10^{-1} C/m^3$; R = 5 mm ; h = 10 cm



1- Calculer la charge Q du cylindre. $Q = \rho V = \rho \pi R^2 h$ → $Q = 1{,}57 \cdot 10^{-6}\,C$; $\rho = \dfrac{Q}{\pi R^2 h}$

2- En considérant les symétries du système, montrer que le champ électrique en un point M de tout l'espace $\overrightarrow{E(M)}$ est radial donc dirigé selon $\vec{u_r}$. Représenter les vecteurs champs électriques dans tout l'espace de permittivité ε_0

3- En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrique radial $\overrightarrow{E(r)}$ dans tout l'espace, pour r variant de 0 à l'infini, en fonction de (ρ, r, ε_0, R, $\vec{u_r}$), puis en en fonction de (Q, r, ε_0, R, $\vec{u_r}$).

$surf = 2\pi r h$.

On notera E_1 pour r < R et E_2 pour r > R.

4- Tracer approximativement E=f(r), vérifier la continuité du champ électrique en r = R

5- A partir de l'expression $\overrightarrow{E(M)} = -\overrightarrow{grad}(V)$, établir les expressions du potentiel V_1 pour r < R et V_2 pour r > R en fonction de (ρ, r, ε_0, R).
- Afin de calculer V_1, on prendra comme origine des potentiels l'axe du cylindre V(r= 0) =0
- Afin de calculer V_2, on vérifiera la continuité du potentiel en r = R : $V_1(R) = V_2(R)$

6- Tracer approximativement V=f(r)

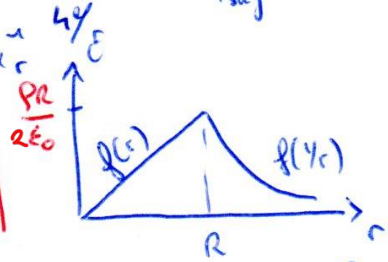
2/ $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est 1 plan de symétrie → $\vec{E} \in$ à ce plan.
$(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ est 1 plan de symétrie → $\vec{E} \in$ à ce plan
$\vec{E}$ suivant $\vec{u_r}$; $\vec{E}(M) = E(r,\theta,z)\,\vec{u_r}$.

3/ $\iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$. Pour les bases 1 et 2 → $d\vec{S} \perp \vec{E}$ donc $\Phi_E = 0$ → $\Phi_{E/surf} = \iint \vec{E}(r)\,d\vec{S}$

* r<R : $E\,2\pi r h = \dfrac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$ → $\vec{E_1} = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{u_r} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2 h}\, r\,\vec{u_r}$ (r<R)

* r>R : $E\,2\pi r h = \dfrac{\rho \pi R^2 h}{\varepsilon_0}$ → $\vec{E_2} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{u_r} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h r}\vec{u_r}$ (r>R)

4/



→ $E(R) = \dfrac{\rho R}{\varepsilon_0}$

5/ pour r<R $E = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}$; $E = -\dfrac{dV}{dr}$ → $dV = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0} r\,dr$ → $V_1 = -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + K$

pour r=0 V(0)=0 → K=0 donc $V_1 = -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2$ (r<R)

pour r>R $dV = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}\,dr$ → $V_2 = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln r + K$ (continuité $V_1(R) = V_2(R)$)

d'où $-\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln R + K$ → $K = -\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}(1 - 2\ln R)$

donc $V_2 = -\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}(1 - 2\ln R + 2\ln r) = -\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}\left(1 + 2\ln\dfrac{r}{R}\right)$ (r>R)

6/