Résolution d'équations différentielles du 1er ordre

Méthode

On considère une équation différentielle de la forme :

$\frac{dy}{dt} + a(t) \cdot y(t) = b(t)$ où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions qui dépendent du temps.

1) On commence par résoudre l'équation homogène (sans second membre) : On note $y_h(t)$ la solution de l'équation homogène

$$\frac{dy_h}{dt} + a(t) \cdot y_h(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy_h}{dt} = -a(t) \times y_h(t)$$

Une méthode (peu rigoureuse mais qui fonctionne) consiste à regrouper les termes qui dépendent de y d'un côté du signe égal et ceux qui dépendent de t de l'autre côté du signe égal.

$$\Rightarrow \frac{dy_h}{y_h} = -a(t) \times dt$$

On intègre de part et d'autre du signe égal :

$ln(|y_h(t)|) = -\int a(t)dt \times t + k$ où k est une constante

On note $A(t) = \int a(t)dt$

Soit :

$$\Leftrightarrow y_h(t) = \exp(-A(t) + k) = \exp(k) \cdot \exp(-A(t))$$

$\Leftrightarrow y_h(t) = K \times \exp(-A(t))$ où $K = \exp(k)$ est une constante à déterminer.

2) Il faut ensuite trouver une solution particulière de l'équation différentielle complète.

En général, cette solution particulière est de la même forme que le seconde membre. On note $y_p(t)$ la solution particulière.

Le tableau ci-dessous donne la forme des solutions particulières en fonction de la forme du second membre pour les fonctions les plus couramment utilisées.

Forme du second membre	Forme de la solution particulière
constante	constante
polynôme de degré n	polynôme de degré n
$\exp(\lambda t) \cdot f(t)$	$\exp(\lambda t) \cdot g(t)$
$M \cdot \sin(\omega t) + N \cdot \cos(\omega t)$	$P \cdot \sin(\omega t) + Q \cdot \cos(\omega t)$

Il faut ensuite déterminer les différentes constantes en réinjectant la solution particulière dans l'équation différentielle complète.

3) La solution de l'équation complète est la somme des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Pour finir, on détermine les constantes issues de l'équation homogène en se servant des conditions initiales du problème.

Fondamental

La solution d'une équation différentielle d'ordre 1 sans second membre est à connaître par cœur, il n'est pas nécessaire de redémontrer systématiquement sa solution.

A retenir :

La solution de l'équation différentielle suivante :

$\frac{dy}{dt} + a \times y(t) = 0$ où a est une constante

est :

$y(t) = K \times \exp(-at)$ où K est une constante.

Simulation

Afin de vérifier vos calculs, il est possible de résoudre une équation différentielle à l'aide d'Octave.

Le script suivant donne la syntaxe pour résoudre l'équation différentielle d'ordre 1 suivante avec une condition initiale.

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = 1 + y^2 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

```
>> syms y(t)
>> eqn = diff(y,t)== 1+y^2;
>> cond = y(0)== 1;
>> sol=dsolve(eqn, cond)

sol=

tan(t + pi/4)
```