UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **FACULTÉ DES SCIENCES**

L2 - Techniques mathématiques EEA - HAE304X

Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 3

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles :

1. $y'(x) + 3y(x) = 5$, avec $y(0) = 1$.
2. $y'(x) - (1 + x)\,y(x) = -2x - x^2$, avec $y(0) = 2$.
3. $y'(x) - 2y(x) = e^{2x}x^2$, avec $y(0) = 0$.
4. $(1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = 3x^2 + 1$, avec $y(0) = 3$.
5. $(1 + x)y'(x) - y(x) = 2x^2(1 + x)$, avec $y(0) = -3$; et ceci pour $x > 0$.
6. $y'(x) + y(x) = 2\sin x$.
7. $y'(x) + 3y(x) = e^{-3x}\cos x$.

Exercice 2

Une application

La vitesse de déplacement des ions entre deux électrodes immergées dans un électrolyte vérifie

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = \frac{F}{m}\,,$$

équation différentielle où m, F, R sont des constantes. Calculer v en fonction de t.

Equations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles :

1. $y'' - 3y' + y = x$
2. $y'' - 6y' - 7y = -7x^2 - 5x + 1$
3. $y'' - 2y' + y = 0$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
4. $y'' + y' - y = xe^x$ *Indication : on cherchera y_0 sous la forme* $y_0(x) = (ax + b)e^x$
5. $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x$ *Ind. : on cherchera y_0 sous la forme* $y_0(x) = a\cos x + b\sin x$
6. $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x$ *Ind. : on cherchera y_0 de la forme* $y_0(x) = e^x(a\cos x + b\sin x)$

Equations différentielles à variables séparables

Exercice 4

a. Montrer que l'équation (E) : $2y' + e^{y-x} = 0$ est une équation à variables séparables.
b. La résoudre, et trouver la solution qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 5

Une application

La variation de la pression en fonction de l'altitude vérifie l'équation différentielle $\frac{dp}{dh} = -\frac{gM}{RT}\,p$ où p est la pression, h l'altitude, M le poids moléculaire de l'air, g la constante de gravité, R la constante des gaz parfaits et T la température. Sachant que pour $h = 0$, $p = p_0$, exprimer la pression en fonction de l'altitude et de la température (supposée constante).

Exercice 6

Une application

Le refroidissement d'un corps dans un courant d'air est proportionnel à la différence de température entre le corps (T) et l'air (θ) : $T'(t) = -\lambda(T(t) - \theta)$. Si $\theta = 30^oC$ et si T passe de 100 à 70^oC en 15 mn, au bout de combien de temps T vaudra-t-elle 40^oC ?

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles :

1. $y'(x) + 3y(x) = 5$, avec $y(0) = 1$.
2. $y'(x) - (1+x)\,y(x) = -2x - x^2$, avec $y(0) = 2$.
3. $y'(x) - 2y(x) = e^{2x}x^2$, avec $y(0) = 0$.
4. $(1+x^2)y'(x) + 2xy(x) = 3x^2 + 1$, avec $y(0) = 3$.
5. $(1+x)y'(x) - y(x) = 2x^2(1+x)$, avec $y(0) = -3$; et ceci pour $x > 0$.
6. $y'(x) + y(x) = 2\sin x$.
7. $y'(x) + 3y(x) = e^{-3x}\cos x$.

1) $y' + 3y = 5$

$y_h = \lambda e^{-3x} = 0$

| $y_p \to$ cte

$y_p(x) = 0 + 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$

$\to y(0) = 1 \iff y = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$ ← solution via CI

Soit la solution general : $-\frac{2}{3}e^{-3x} + \frac{5}{3}$

2) $y'(x) - (1+x)\,y(x) = -2x - x^2$ avec $y(0) = 2$ | y_p est sous la forme polynome

$-\ y_H(x) = \lambda e^{-\int(1+x)\,dx} = \lambda e^{x + \frac{x^2}{2}}$

$y_p \quad ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2ax + b$

Soit on injecte dans l'equation :

Soit $(2ax + b) - ax^2 - bx - c - ax^3 - bx^2 - cx = -2x - x^2$

$\hookrightarrow x^3(-a) \Rightarrow a = 0$

$x^2(-a-b) \Rightarrow b = 1$

$x(2a - b - c) \Rightarrow c = 1$

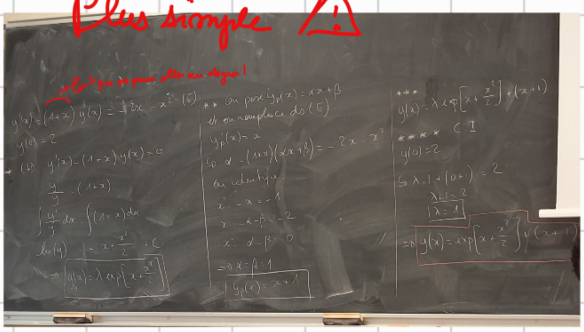
$-c + b = 0$

} $(0 + x + 1)$ est la solution particulier.

Soit la solution generale

$y(x) = (x+1) + e^{x + \frac{x^2}{2}}$

Plus simple ⚠



3) $y' - 2y = e^{2x} x^2$ avec $y(0) = 0$

$y_h = \lambda \times e^{+2x}$

Solution particulière sous la forme

$y_p = A(x) e^{2x}$

$y'_p = A'(x) \exp(2x) + 2A(x) \exp(2x)$

$x^2 e^{2x} = A'(x) \exp(2x) + 2A \exp(2x) - 2A(x) e^{2x}$

$A'(x) = x^2 \Rightarrow A(x) = \frac{x^3}{3} + C$

Solution generale

$\left(\frac{x^3}{3} + C\right) \exp(2x)$

CI : $y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\frac{x^3}{3} e^{(2x)}$

ajoute un degerer a la solution particuliere si les exp de la s_p et s_h sont les meme

https://youtu.be/aFS_Z30s_RY?si=o5lKIZPmPi4czZ8i&t=724

4) $(1 + x^2) y'(x) + 2x y(x) = 3x^2 + 1 \qquad y(0) = 3$

Pas Bon Vrai
Photo plus bas

On rearange

$y'(x) + \frac{2x}{(1+x^2)} y(x) = \frac{3x^2+1}{(1+x^2)}$

Solution homogène

$\rightarrow \lambda \times e^{-\ln(1+x^2)}$

Solution particulière : -> sous la forme polynome : $ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2x + b$

$y_p(x)$ = On cherche y_0 sous la forme de $ax+b$. (E) donne

$$(1+x^2)a + 2x(ax+b) - 3x^2 + 1 \iff x^2(3a) + x(2b) + a$$
$$= 3x^2 + 1$$

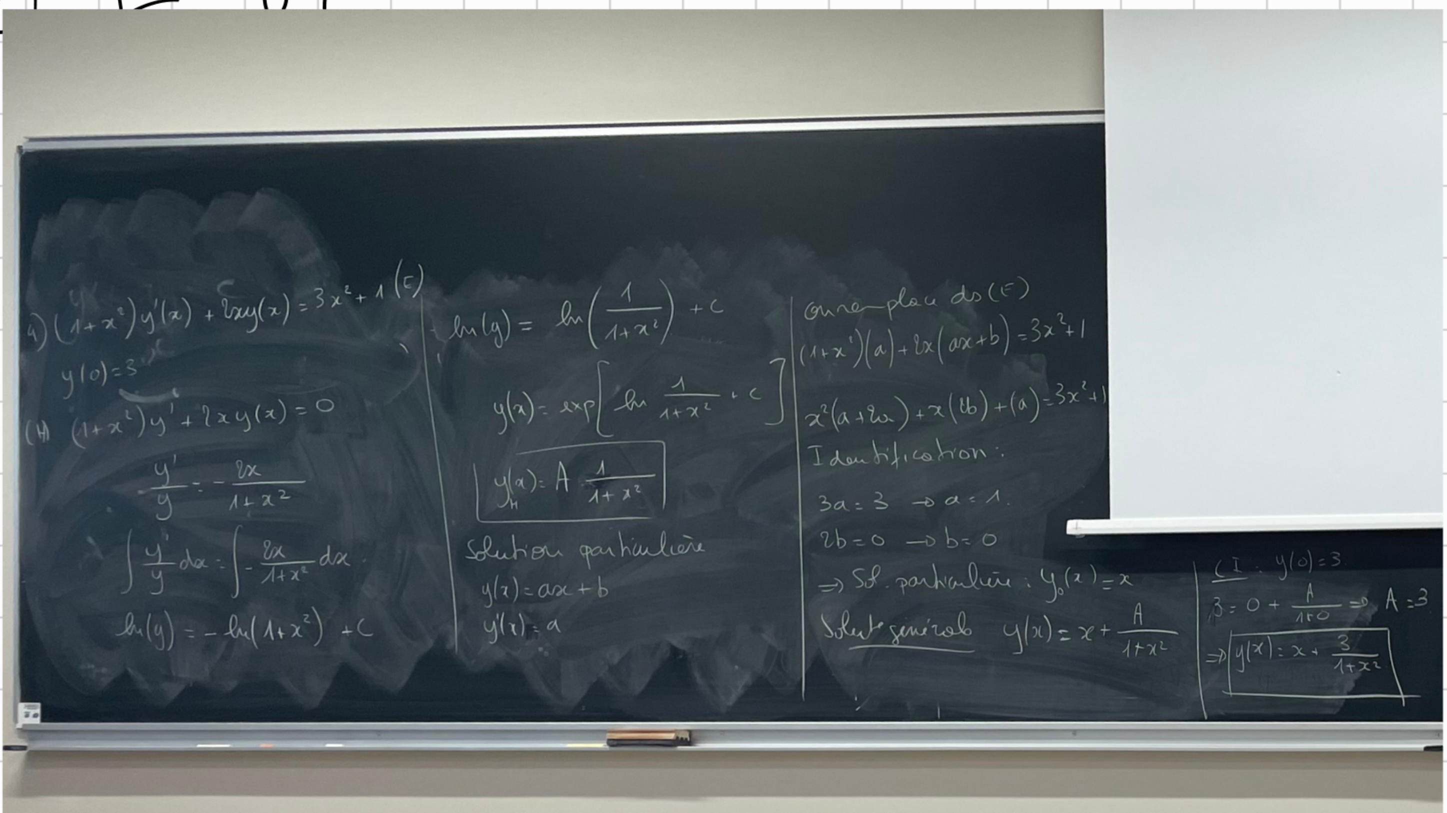
$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 2b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = 0 \end{matrix} \Rightarrow y_0(x) = x$$

Soit $\lambda \times e^{-\ln(1+x^2)} + x$

Solution via les CI $y(0) = 3$

$$3 = \lambda \times e^{-\ln(1)}$$
$$\lambda = 3$$

Soit
$$y(x) = 3 \times e^{-\ln(1+x^2)} + x$$



5) $(1+x)y' - y = 2x^2(1+x)$ | $y(0) = -3$ pour $x>0$

$$y' - \frac{1}{1+x}y = 2x^2$$

$(H) \to \lambda \times e^{\ln(1+x)} \Rightarrow \lambda \times (1+x)$

$(P) \to$ V.C.

$y = A(x)(1+x)$

$y' = A'(x)(1+x) + A(x)$

$\to A'(x)(1+x) + A - \frac{1}{1+x} A(1+x) = 2x^2 \Rightarrow A'(x)(1+x) + A - A = 2x^2$

$A'(x)(1+x) = 2x^2 \Rightarrow A(x)' = \frac{2x^2}{1+x}$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & 1+x \\ \hline -2x^2 - 2x & 2x-2 \\ \hline -2x & \\ +2x+2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$A'(x) = 2x - 2 + \frac{2}{1+x}$

$A(x) = \frac{2x^2}{2} - 2x + 2\ln(1+x)$

$y(x) = (x^2 - 2x + 2\ln(1+x))(1+x)$

$(1+x)y'(x) - y(x) = 2x^2(1+x)$

$y(0) = -3$ pour $x>0$

C_I : pour det C : $-3 = [0 - 0 + 0 + c]$

$C = -3$

$$y(x) = [x^2 - 2x + 2\ln(1+x) - 3](1+x)$$

6) $y'(x) + y(x) = 2\sin(x)$

$y' + y = 0 \Rightarrow \lambda \times e^{-x}$

Solution particulière.

de forme : $A\sin(x) + B\cos(x)$

On injecte :

$y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$

$y_p'(x) = A\cos(x) - B\sin(x)$

$\Rightarrow$ On remplace dans (E)

$$A\cos(x) - B\sin(x) + A\sin(x) + B\cos(x) = 2\sin(x)$$

Identi

$A + B = 0 \qquad A = -B$

$A - B = 2 \qquad 2A = 2$

$A = 1$

$B = -1$ $\Rightarrow y_p(x) = \sin(x) - \cos(x)$

Solution : $y(x) = \lambda\exp(-x) + \sin(x) - \cos(x)$

7) $y'(x) + 3y = e^{-3x}\cos(x)$

$y_h(x) = \lambda\exp(-3x)$

$\rightarrow$ Solution particulière sous la forme $y(x) = e^{-3x}[A\cos(x) + B\sin(x)]$

$y_p'(x) = e^{-3}[-A\sin + B\cos(x)] - 3e^{3x}[A\cos(x) + B\sin(x)]$

$\Rightarrow e^{-3}[-A\sin(x) + B\cos(x)] - 3e^{x}[A\cos(x) + B\sin(x)] + 3e^{-3x}(A\cos(x) + B\sin(x)$

$= A\sin(x) + B\cos(x) = \cos(x)$

$A = 0 \; ; \; B = 1$

$y_p(x) = e^{-3x}\sin(x)$

sol general $y(x) = \lambda e^{-3x} + e^{-3x}\sin(x)$

$y(x) = e^{-3x}(\sin(x) + \lambda)$

Equations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles :

1. $y'' - 3y' + y = x$
2. $y'' - 6y' - 7y = -7x^2 - 5x + 1$
3. $y'' - 2y' + y = 0$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
4. $y'' + y' - y = xe^x$ *Indication : on cherchera y_0 sous la forme* $y_0(x) = (ax + b)e^x$
5. $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x$ *Ind. : on cherchera y_0 sous la forme* $y_0(x) = a\cos x + b\sin x$
6. $y'' - 3y' + 2y = e^x\sin x$ *Ind. : on cherchera y_0 de la forme* $y_0(x) = e^x(a\cos x + b\sin x)$

1) $y'' - 3y' + y = x$

$r^2 - 3r + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4$ | $r = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ $r_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

$\Delta = 5$ | $r_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Soit $A \times e^{r_1} + B e^{r_2}$ $\Rightarrow -3b + a + bx = x$

$a = 3$ $b = 1$ $\Rightarrow y_p = x + 3$

Solution particulière : sous la forme $ax + b$

d'ou $A = 1$ $B = -1$

Solution generale

$y = e^{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} - e^{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} + 3 + x$

2) $y'' - 6y' - 7y = -7x^2 - 5x + 1$

$r^2 - 6r - 7$

$\Delta = 36 + 28$ | $r_1 = \frac{6 + \sqrt{64}}{2} = -1$

$\Delta = 64$ | $r_2 = \frac{6 + \sqrt{64}}{2} = 7$

$y_h(x) = A + B e^{6}$

Solution particulière sous la forme $ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2xa + b$

$y_p'' = 2a$

$\}$ Dans l'equation : $2a - 6(2xa + b) - 7(ax^2 + bx + c) = -7x^2 - 5x + 1$

$= 2a - 12xa - 6b - 7ax^2 - 7bx - 7c = -7x^2 - 5x + 1$

$x^2(-7a) + x(-12a - 7b) + 2a - 6b - 7c =$

$-7a = -7$ | $-12a - 7b = -5$ | $2a - 6b - 7c = 1$

$\underline{a = 1}$ $\underline{b = -1}$ $\underline{c = 1}$

$y_p = x^2 - x + 1$

$y(x) = Ae^{-x} + Be^{7x} + x^2 - x + 1$

→ 3) $y'' - 2y' + y = 0$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$

$r^2 - 2r + 1$

$\Delta = 4 - 4$

$\Delta = 0$ | $r_0 = \frac{2 - 0}{2} = 1$ Soit une racine reel et unique. $\Rightarrow e^{r_0 x}(Ax + B)$

avec A et B cte

CI

$y(0) = 1$

$y'(0) = 0$

$1 = B$

$y'(x) = \lambda e^{rx} + (\lambda x + B) r e^{rx}$

$0 = A + B$

$A = -B = -1$

4) $y'' + y' - y = x e^{x}$

$\Delta = 1 + 4$

$\Delta = 5$ | $r = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ | $r_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

$r_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$$A e^{(r_1 x)} + B e^{(r_2 x)} = 0$$

Solution particulière sous la forme : $e^{x}(ax + b)$

soit $y' = e^x(ax+b) + e^x a \Rightarrow e^x(ax+b+a)$

$y'' = e^x(ax+b) + e^x a + e^x a \Rightarrow e^x(ax+b+2a)$

Soit quand on réintègre dans l'equation.

$e^x(ax+b+2a) + e^x(ax+b+a) \quad e^x(-ax-b) = x e^x$

$e^x(ax+b+3a)$

d'ou $\quad ax = x \Rightarrow a=1$
$\quad\quad b+3a = 0 \Rightarrow b=-3$

Soit la solution :

$y(x) = \left(A e^{(r_1 x)} + B e^{(r_2 x)}\right) + e^x(x-3)$

$= A e^{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} x\right)} + B e^{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} x\right)} + e^x(x-3)$

5) $y'' - 2y' + 5y = 10\cos(x)$

$\Delta = 4 - 4\times 5$
$= -16$

$r_1 = \frac{2+i\sqrt{16}}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$

$r_2 = \frac{2-i\sqrt{16}}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$

Solution homogène : $e^{1x}(A\cos(2x) + B\sin(2x))$

Solution particulière : sous la forme $y_p = a\cos(x) + b\sin(x)$

$y_p' = -a \sin(x) + b \cos(x)$

$y_p'' = -a \cos(x) - b \sin(x)$ $\Rightarrow$ Injecte dans l'equation

$$-a \cos(x) - b \sin(x) + 2a \sin(x) - 2b \cos(x) + 5a \cos(x) + 5b \sin(x) = 10\cos(x)$$

Soit : $\cos(x)(-a - 2b + 5a) \Rightarrow 4a - 2b = 10$

$\sin(x)(-b + 2a + 5b) \qquad 2a + 4b = 0$

$4a - 2b = 10 \Rightarrow 4a = 10 + 2b \qquad a = \dfrac{10 + 2b}{2} = 5 + b$

$2a + 4b = 0 \Rightarrow 10 + 2b + 4b = 0$

$10 + b(6) = 0$

$b = -\dfrac{10}{6}$

d'où $a = 5 - \dfrac{10}{6} = \dfrac{10}{3}$

Soit solution general :

$$e^{1x}\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right) + \frac{10}{3}\cos(x) - \frac{10}{6}\sin(x)$$

Correction : $\rightarrow \quad + 2\cos(x) - \sin(x)$

6. $y'' - 3y' + 2y = e^{x}\sin(x)$

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^{x}\sin(x) + \frac{1}{2} e^{x}\cos(x)$$

$\Delta = 9 - 4 \times 2$

$\Delta = 1$

$r_1 = \dfrac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1$

$r_2 = \dfrac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2$

Soit solution homogène : $Ae^{x} + Be^{2x}$

Solution particulière, sous la forme : $e^{x}(a\sin(x) + b\cos(x))$

$yp' = e^{x}(a\sin(x) + b\cos(x)) + e^{x}(a\cos(x) - b\sin(x))$

$yp' = e^{x}(\sin(x)(a-b) + \cos(x)(a+b))$

$yp'' = e^{x}(\sin(x)(a-b) + \cos(a+b)) + e^{x}(\cos(a-b) - \sin(a-b))$

$yp'' = e^{x}(\sin(x)(-2b) + \cos x(2a))$

Soit on injecte dans l'équation

$y'' - 3y' + 2y$

$e^{x}(\sin(x)(-2b) + \cos(x)(2a)) + e^{x}(\sin(x)(-3a+3b) + \cos(x)(-3a-3b))$
$+ e^{x}(\sin(x)(2a) + \cos(x)(2b)) = e^{x}\sin(x)$

$e^{x}(\sin(x)(-2b-3a+3b+2a)\cos(2a-3a-3b+2b))$

$\Downarrow$ 1 $\qquad$ $\Downarrow$ 0

$-a+b = 1$ $\qquad$ $-a-b = 0$

$-a = b$

$-a-a = 1$

$a = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $b = \frac{1}{2}$

Soit Solution final

$\rightarrow Ae^{x} + Be^{2x} - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$

Ex 2

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m} v = \frac{F}{m}$$

$$\Rightarrow v' + \frac{R}{m} v = \frac{F}{m}$$

- Solution Homogène

$$v + \frac{R}{m} v = 0$$

$$v_h(t) = \lambda \exp\left[-\frac{R}{m} t\right]$$

Solution particulière

C'est une cte

On pose $v_p(t) = B$

On remplace dans E

$$0 + \frac{R}{m} B = \frac{F}{m}$$

$$B = \frac{F}{R} \qquad v_p = \frac{F}{R}$$

Solution Complète

$$v(t) = \frac{F}{R} + \lambda \exp\left[-\frac{R}{m} t\right]$$

Exercice 4

a. Montrer que l'équation $(E) : 2y' + e^{y-x} = 0$ est une équation à variables séparables.

b. La résoudre, et trouver la solution qui vérifie $y(0) = 1$.

a)

$$2y' + e^{y-x} = 0$$

$$2y' = -e^{y-x} = -e^{y}e^{-x}$$

$$-2y'e^{-y} = e^{-x}$$

$$\int -y'e^{-y} = \int \frac{e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{-x} + C$$

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

$$\ln e^{-(y)} = \ln\left(-\frac{1}{2}e^{-x} + C\right)$$

$$-y = \ln\left(-\frac{1}{2}e^{-x} + C\right)$$

$$y = -\ln\left(-\frac{1}{2}e^{-x} + C\right)$$

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad -\ln\left(-\frac{1}{2} + C\right) = 1$$

$$\rightarrow \quad -\frac{1}{2} + C = e^{-1} \qquad\qquad y(x) = -\ln\left(-\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2e}\right)$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$$

Exe 5)

$$\frac{dp}{dh} = g\frac{M}{RT}p$$

$$\frac{dp}{dh} = -g\frac{M}{RT}dh \quad \text{Var separable}$$

$$p'(h) + \frac{gM}{RT}p(h) = 0$$

C'est une equation homogène

$$p(h) = \lambda \exp\left(\frac{-gM}{RT}h\right)$$

Det λ avec les CI

$h = 0 \Rightarrow p = p_0$

$p(0) = p_0 \Rightarrow p_0 = \lambda$

$$\boxed{p(h) = p_0 \exp\left[\frac{-gM}{RT}h\right]}$$