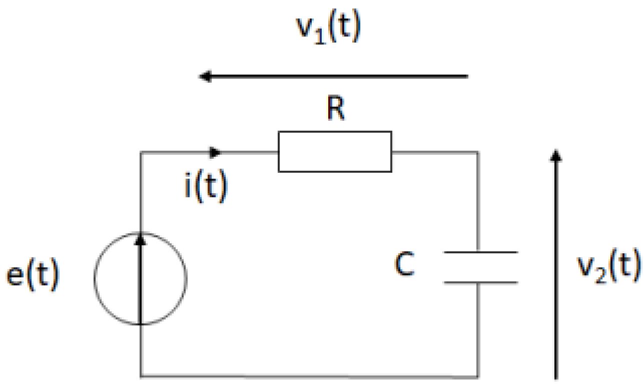
# Le circuit RC - Conditions initiales nulles

## Le circuit RC - Réponse à un échelon de tension - Résolution avec le formalisme de Laplace - Conditions initiales nulles

On considère le circuit illustré sur la figure ci-dessous. Les conditions initiales sont nulles (le condensateur est initialement déchargé). Le circuit est alimenté par une source de tension $e(t)$ où $e(t) = E \cdot u(t)$ avec $u(t)$ un échelon unité.

Nous cherchons à établir la relation entre la tension de sortie $v_2(t)$ en fonction de la tension d'entrée $e(t)$ et des composants du circuit $R$ et $C$.




## Mise en équations du circuit avec le formalisme de Laplace

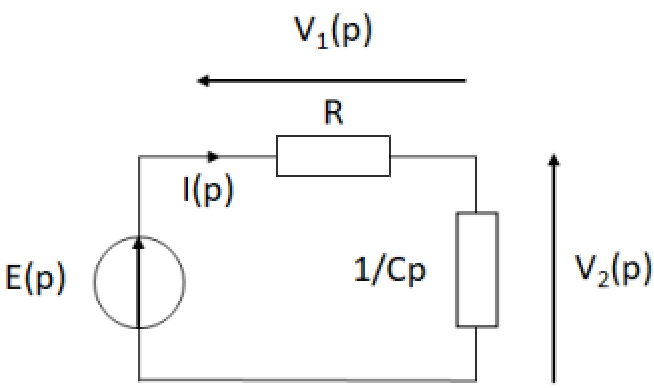
On commence par faire le schéma équivalent avec les impédances opérationnelles du circuit.

Les conditions initiales étant nulles, le condensateur est déchargé donc la tension à ses bornes est nulle, soit : $v_2(0^-) = 0\,V$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on a : $v_2(0^+) = 0\,V$

Le schéma équivalent du condensateur se réduit donc à une impédance opérationnelle $\frac{1}{C \cdot p}$ (car $v_2(0^+) = 0\,V$)

On obtient alors le schéma équivalent suivant :



avec $E(p)$, $V_1(p)$, $V_2(p)$ et $I(p)$ les transformées de Laplace respectives de $e(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $i(t)$.

On applique la loi des mailles :

$E(p) - V_1(p) - V_2(p) = 0$ eq. (1)

On utilise les relations courant-tension avec les impédances opérationnelles :

$V_1(p) = R \cdot I(p)$ eq. (2)

et

$V_2(p) = \dfrac{1}{Cp} \cdot I(p)$ Soit, $I(p) = Cp \cdot V_2(p)$ eq. (3)

On remplace l'équation (3) dans l'équation (2) :

$V_1(p) = RCp \cdot V_2(p)$ eq. (4)

Puis on remplace l'équation (4) dans l'équation (1) :

$$E(p) - RCp \cdot V_2(p) - V_2(p) = 0$$

On isole $V_2(p)$ :

$$E(p) - (1 + RCp) \cdot V_2(p) = 0$$

$$\Leftrightarrow V_2(p) = \frac{E(p)}{1 + RCp}$$

### *Remarque*

On peut arriver plus rapidement à ce résultat en reconnaissant un pont diviseur d'impédances opérationnelles :

$$V_2(p) = \frac{\frac{1}{Cp}}{R + \frac{1}{Cp}} \cdot E(p)$$

On réorganise pour éliminer les fractions au numérateur et dénominateur :

$$\Leftrightarrow V_2(p) = \frac{1}{RCp + 1} \cdot E(p)$$

On retrouve le même résultat que précédemment.

### *Remarque*

On constate que lorsque les conditions initiales sont nulles, la résolution du circuit est beaucoup plus rapide (le nombre de calculs est considérablement réduit).

Par ailleurs, $E(p)$ est la transformée de Laplace d'un échelon d'amplitude $E$, en utilisant la table des transformées de Laplace ⇧, on obtient :

$$E(p) = \frac{E}{p}$$

$$\Leftrightarrow V_2(p) = \frac{E}{p\,(1 + RCp)}$$

Pour revenir dans le domaine temporel, il faut que $V_2(p)$ soit sous la forme d'une somme d'éléments simples. Ce n'est pas le cas ici, il faut donc procéder à une décomposition en éléments simples :

La décomposition en éléments simples de $V_2(p)$ est la suivante :

$V_2(p) = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{\dfrac{1}{RC} + p}$ où $A$ et $B$ sont des constantes à déterminer.

Le détail du calcul se trouve ici. Au final, on obtient :

$$V_2(p) = E\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \dfrac{1}{RC}}\right]$$

On repasse ensuite dans le domaine temporel, en utilisant la table des transformées de Laplace :

$v_2(t) = E\left[1 - \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)\right]$ pour $t > 0$

On retrouve exactement le même résultat qu'avec le calcul de l'équation différentielle (voir résultat précédent).

### *Simulation*

A l'aide d'Octave, nous allons calculer la transformée de Laplace inverse de $V_2(p) = \dfrac{E}{p\,(1 + RCp)}$ et vérifier le résultat $v_2(t)$ obtenu avec le calcul à la main. Pour cela, on utilise la fonction *ilaplace* qui permet de calculer la transformée de Laplace inverse.

```
>> syms p E R C t
>> V2=E/(p*(1+R*C*p));
>> v2=ilaplace(V2,p,t)

v2 =

E - E*exp(-t/(C*R))
```

On obtient effectivement le même résultat.

Stéphanie Parola - HILISIT - Université Montpellier 