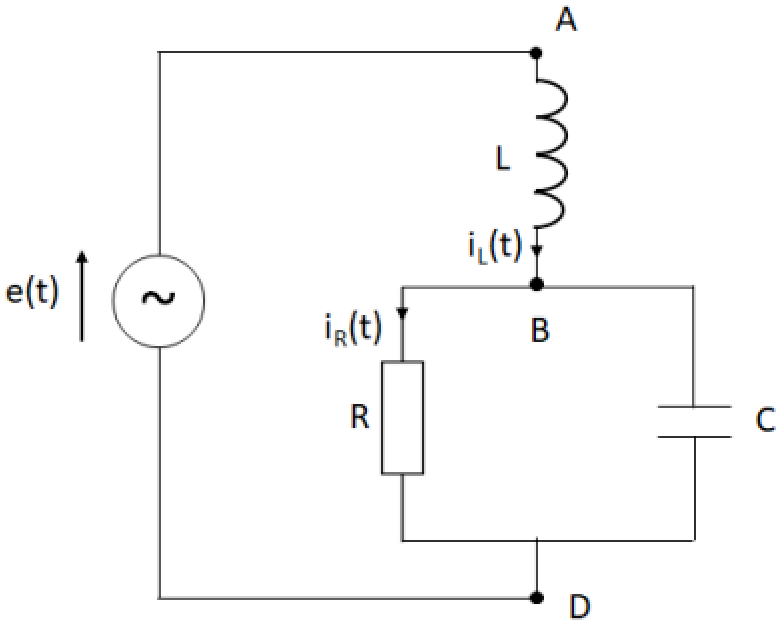
Exercice 1

On considère le circuit suivant alimenté par une source de tension :
$e(t) = E_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t)$



Question

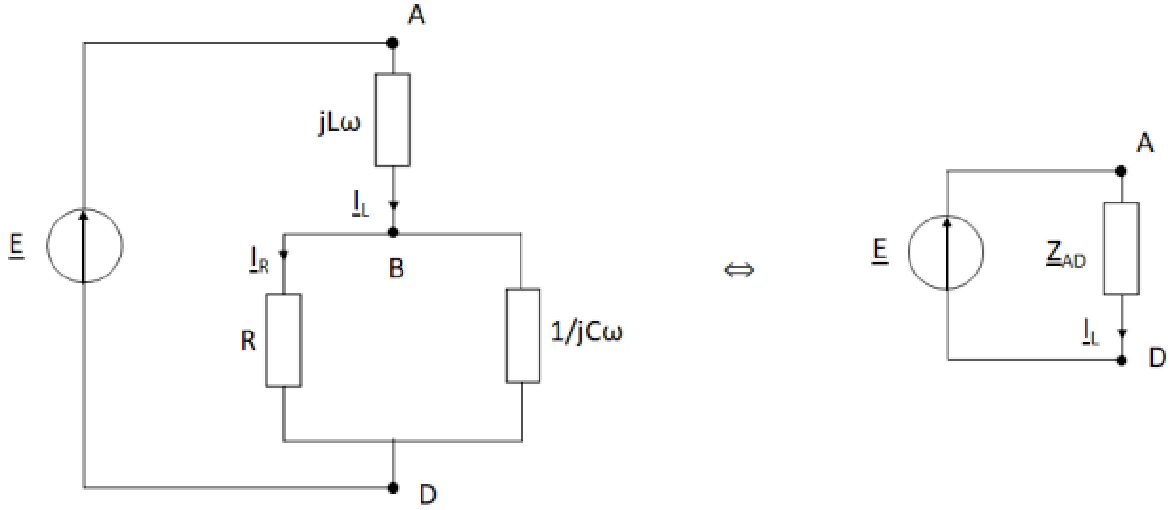
1) Calculer l'impédance complexe équivalente $\underline{Z_{AD}}$.

Indice

Il faut utiliser les lois d'association pour des impédances complexes.

Solution

On commence par refaire le schéma équivalent en notation complexe :



où $\underline{E}$ et $\underline{I_R}$ et $\underline{I_L}$ représentent respectivement les amplitudes complexes de $e(t)$, $i_R(t)$ et $i_L(t)$.

On utilise les lois d'association pour des impédances complexes :

$$\underline{Z_{AD}} = jL\omega + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z_{AD}} = jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z_{AD}} = \frac{jL\omega - RLC\omega^2 + R}{1 + jRC\omega}$$

Question

2) Quelle relation doit-il exister en L, R, C et ω pour que le dipôle AD soit équivalent à une résistance (impédance purement réelle) R_{eq} telle que $\underline{Z_{AD}} = R_{eq} + jX$

Indice

Il faut reprendre l'expression de trouvée à la question précédente et dire que la partie imaginaire est nulle. Cela permet d'avoir une équation qui donne la relation demandée.

Solution

Si $\underline{Z_{AD}}$ est purement réelle, cela signifie que sa partie imaginaire est nulle. Il faut donc mettre l'expression de $\underline{Z_{AD}}$ sous la forme suivante : $R_{eq} + jX$:

$$\underline{Z_{AD}} = \frac{jL\omega - RLC\omega^2 + R}{1 + jRC\omega}$$

Pour éliminer le complexe au dénominateur, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur :

$$\Leftrightarrow \underline{Z_{AD}} = \frac{\left(jL\omega - RLC\omega^2 + R\right)(1 + jRC\omega)}{1 + (RC\omega)^2} = \frac{N}{D}$$

Pour simplifier les calculs on nomme N le numérateur et D le dénominateur de $\underline{Z_{AD}}$.

$$N = \left(jL\omega - RLC\omega^2 + R\right)(1 + jRC\omega)$$

$$\Leftrightarrow N = jL\omega - RLC\omega^2 + R + RLC\omega^2 + jR^2LC^2\omega^3 - jR^2C\omega$$

$$\Leftrightarrow N = R + j\left(L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega\right)$$

La partie imaginaire est nulle $\Rightarrow L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega = 0$

$$\Leftrightarrow L + R^2LC^2\omega^2 - R^2C = 0$$

$$\Leftrightarrow L\left(1 + R^2C^2\omega^2\right) = R^2C$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{R^2C}{1 + (RC\omega)^2}$$

Question

3) On donne $R = 1\,k\Omega$, $C = \frac{100}{3}\,\mu F$, $\omega = 400\,rad/s$. Calculer la valeur de L.

Solution

L'application numérique de l'expression trouvée dans la question précédente donne :
$L = 0,12\,H = 120\,mH$

Question

4) Calculer le courant circulant dans la bobine $i_L(t)$. Pour cela, on prendra : $E_{eff} = 180\,V$.

Indice

Il faut appliquer la loi des mailles en notation complexe.

Solution

L'application de la loi des mailles, en notation complexe, dans le circuit équivalent comportant l'impédance complexe $\underline{Z_{AD}}$ donne :

$$\underline{E} = \underline{Z_{AD}} \cdot \underline{I_L} = R_{eq} \cdot \underline{I_L}$$

$$\underline{I_L} = \frac{\underline{E}}{R_{eq}} = \frac{E_{eff} \cdot \sqrt{2}}{R_{eq}}$$

En reprenant les résultats de la question 2), on a :

$$R_{eq} = \frac{N}{D} = \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} = 36\,\Omega$$

Soit : $\underline{I_L} = \frac{180 \cdot \sqrt{2}}{36} = 5\sqrt{2}$

Il suffit maintenant de calculer la partie réelle de $\underline{I_L}$:

$$i_L(t) = \Re\left(\underline{I_L}\exp(j\omega t)\right) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t)$$

On remarque qu'il n'y a pas de déphasage entre $i_L(t)$ et $e(t)$, ces deux signaux sont donc en phase.

Question

5) Calculer le courant circulant dans la résistance $i_R(t)$.

Indice

Il faut trouver la relation entre $\underline{I_R}$ et $\underline{I_L}$.

Solution

On note $\underline{Z_{BD}}$ l'impédance équivalente entre les nœuds B et D du circuit équivalent.

On peut écrire : $\underline{V_{BD}} = \underline{Z_{BD}} \cdot \underline{I_L}$

Soit : $\underline{V_{BD}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + jC\omega} \cdot \underline{I_L}$

$$\Leftrightarrow \underline{V_{BD}} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \cdot \underline{I_L}$$

Par ailleurs, $\underline{I_R} = \dfrac{\underline{V_{BD}}}{R} = \dfrac{\dfrac{R}{1 + jRC\omega} \cdot \underline{I_L}}{R}$

$$\Leftrightarrow \underline{I_R} = \frac{\underline{I_L}}{1 + jRC\omega}$$

Il faut à présent déterminer le module et l'argument de $\underline{I_R}$ à partir de l'expression précédente :

- Module :

$$\left|\underline{I_R}\right| = \left|\frac{\underline{I_L}}{1 + jRC\omega}\right| = \frac{\left|\underline{I_L}\right|}{|1 + jRC\omega|}$$

$$\Leftrightarrow \left|\underline{I_R}\right| = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left|\underline{I_R}\right| = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \left(100 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-6}}{3} \cdot 400\right)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \left(\cdot \frac{4 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-6}}{3}\right)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left|\underline{I_R}\right| = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{5}{3}} = 3\sqrt{2}$$

- Argument :

$$\arg\left(\underline{I_R}\right) = \arg\left(\frac{\underline{I_L}}{1 + jRC\omega}\right)$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\underline{I_R}\right) = \arg\left(\underline{I_L}\right) - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \arg(1 + jRC\omega)$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\underline{I_R}\right) = -\arctan\left(\frac{RC\omega}{1}\right) = -\arctan(RC\omega)$$

Par conséquent :

$$\underline{I_R} = \left|\underline{I_R}\right| \exp\left(j \cdot \arg\left(\underline{I_R}\right)\right) = 3\sqrt{2}\exp(-j\arctan(RC\omega))$$

On en déduit $i_R(t)$:

$$i_R(t) = \Re\left[\underline{I_L}\exp(j\omega t)\right) = \Re\left(3\sqrt{2}\exp[-j\arctan(RC\omega)]\exp(j\omega t)\right]$$

$$i_R(t) = \Re\left[3\sqrt{2}\exp(j\left[\omega t - \arctan(RC\omega)\right])\right]$$

Soit :

$$i_R(t) = 3\sqrt{2}\cos[\omega t - \arctan(RC\omega)]$$

Question

6) Calculer la puissance consommée par la résistance R.

Indice

Utiliser l'expression donnée dans le cours.

Solution

Il suffit d'appliquer l'expression donnée dans le cours pour une résistance :

$P = R \cdot I_{R,eff}^2$ avec $I_{R,eff} = \frac{\left|\underline{I_R}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\,A$ (d'après la question précédente)

$$P = 100 \times 3^2 = 900\,W$$