## Détail de l'étude des limites du circuit RLC quand m>1

La fonction de transfert isochrone est la suivante :

$$egin{aligned} \underline{H} &= \dfrac{1}{1+j\dfrac{2m\omega}{\omega_0}-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}
ight)^2} = \dfrac{1}{\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}
ight)\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_2}
ight)} \ & ext{avec} \ \omega_1 &= \omega_0 \left(m-\sqrt{m^2-1}
ight) ext{et} \ \omega_2 &= \omega_0 \left(m+\sqrt{m^2-1}
ight) \ & ext{par ailleurs} : \omega_0 &= \sqrt{\omega_1\cdot\omega_2} \end{aligned}$$

a. Diagramme du gain

$$G_{dB} = 20 \log[|\underline{H}|] = 20 \log\left[\left|rac{1}{\left(1+jrac{\omega}{\omega_1}
ight)\left(1+jrac{\omega}{\omega_2}
ight)}
ight]
ight] \ \Leftrightarrow G_{dB} = 20 \log\left[\left|rac{1}{\left(1+jrac{\omega}{\omega_1}
ight)}
ight]
ight] + 20 \log\left[\left|rac{1}{\left(1+jrac{\omega}{\omega_2}
ight)}
ight]
ight] \ \Leftrightarrow G_{dB} = 20 \log\left[rac{1}{\sqrt{1+\left(rac{\omega}{\omega_1}
ight)^2}}
ight] + 20 \log\left[rac{1}{\sqrt{1+\left(rac{\omega}{\omega_2}
ight)^2}}
ight] \ \Leftrightarrow G_{dB} = -20 \log\left[\sqrt{1+\left(rac{\omega}{\omega_1}
ight)^2}
ight] - 20 \log\left[\sqrt{1+\left(rac{\omega}{\omega_2}
ight)^2}
ight] \ \Leftrightarrow G_{dB} = -10 \log\left[1+\left(rac{\omega}{\omega_1}
ight)^2
ight] - 10 \log\left[1+\left(rac{\omega}{\omega_2}
ight)^2
ight]$$

Pour tracer  $G_{dB}$  en fonction de  $\omega$ , il faut faire une étude des limites.

• lorsque  $\omega$  tend vers 0 :

$$egin{aligned} &\lim_{\omega o 0} G_{dB} = \lim_{\omega o 0} -10 \log \left[ 1 + \left( rac{\omega}{\omega_1} 
ight)^2 
ight] - 10 \log \left[ 1 + \left( rac{\omega}{\omega_2} 
ight)^2 
ight] \ &\Leftrightarrow \lim_{\omega o 0} G_{dB} = \lim_{\omega o 0} -10 \log(1) - 10 \log(1) = 0 \, dB \end{aligned}$$

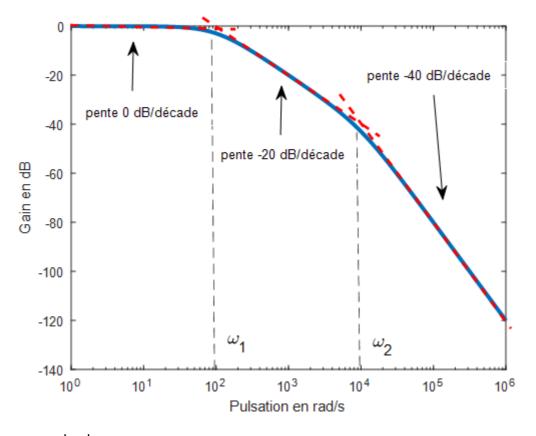
La première asymptote quand  $\omega \to 0$  vaut 0 dB avec une pente nulle.

lorsque ω tend vers +∞ :

$$egin{aligned} &\lim_{\omega o +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega o +\infty} -10 \log \left[ 1 + \left( rac{\omega}{\omega_1} 
ight)^2 
ight] - 10 \log \left[ 1 + \left( rac{\omega}{\omega_2} 
ight)^2 
ight] \ &\Leftrightarrow \lim_{\omega o +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega o +\infty} -10 \log \left[ \left( rac{\omega}{\omega_1} 
ight)^2 
ight] - 10 \log \left[ \left( rac{\omega}{\omega_2} 
ight)^2 
ight] \ &\Leftrightarrow \lim_{\omega o +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega o +\infty} -20 \log \left[ rac{\omega}{\omega_1} 
ight] - 20 \log \left[ rac{\omega}{\omega_2} 
ight] = -\infty \end{aligned}$$

Dans note exemple,  $\omega_1 < \omega_2$ , on a donc une asymptote entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  qui est une droite de pente -20 dB/décade. Puis à partir de  $\omega_2$ , on a une autre asymptote qui est une droite de pente -40 dB/décade.

Nous pouvons à présent tracer le diagramme de Bode du gain (figure ci-dessous).



## 2.b. Diagramme de phase

$$egin{aligned} arphi &= rg(\underline{H}) \ \Leftrightarrow arphi &= rg \Biggl( rac{1}{\left( 1 + j rac{\omega}{\omega_1} 
ight) \left( 1 + j rac{\omega}{\omega_2} 
ight)} \Biggr) \ \Leftrightarrow arphi &= -rg \Biggl( 1 + j rac{\omega}{\omega_1} \Biggr) - rg \Biggl( 1 + j rac{\omega}{\omega_2} \Biggr) \ \Leftrightarrow arphi &= -rctan \Biggl( rac{\omega}{\omega_1} \Biggr) - rctan \Biggl( rac{\omega}{\omega_2} \Biggr) \end{aligned}$$

Pour tracer  $\varphi$  en fonction de  $\omega$ , il faut faire une étude des limites.

• lorsque  $\omega$  tend vers 0 :

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega \to 0} \varphi = \lim_{\omega \to 0} -\arctan\bigg(\frac{\omega}{\omega_1}\bigg) -\arctan\bigg(\frac{\omega}{\omega_2}\bigg) = -2\arctan(0) = 0 \, rad = 0^\circ$$

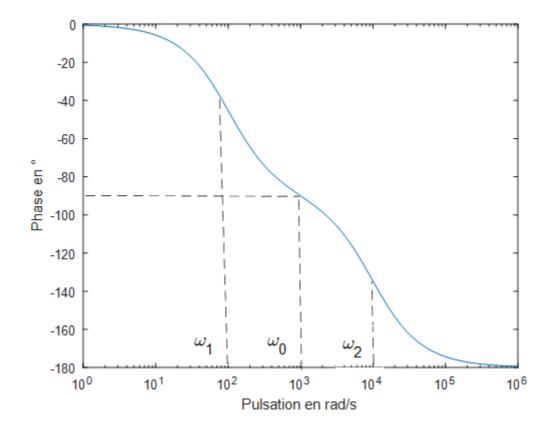
• lorsque  $\omega$  tend vers  $+\infty$ :

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega o + infty} arphi = \lim_{\omega o + \infty} - rctanigg(rac{\omega}{\omega_1}igg) - rctanigg(rac{\omega}{\omega_2}igg) = -2rctan(+\infty) = -2\cdotrac{\pi}{2}\,rac$$

• lorsque  $\omega = \omega_0$  :

$$egin{align*} arphi(\omega_0) &= rg(\underline{H}(\omega_0)) = rgigg(rac{1}{1+jrac{2m\omega_0}{\omega_0}-\left(rac{\omega_0}{\omega_0}
ight)^2}igg) \ & \ arphi(\omega_0) &= rgigg(rac{1}{1+j2m-1}igg) = rgigg(rac{1}{j2m}igg) = -rgigg(rac{j}{2m}igg) = -rac{\pi}{2}\,rad = -90^\circ \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent tracer le diagramme de Bode de phase (figure ci-dessous).



## Simulation

Le code Octave qui permet de tracer les deux courbes est donné ci-dessous. On prendra les valeurs de composants suivantes :  $R=1k\Omega$ ,  $C=10\mu F$  et L=0.1H. Avec ces valeurs, m vaut 5 (m>1),  $\omega_0=10^{-3}~rad/s$ ,  $\omega_1=99~rad/s$  et  $\omega_2=10^{-4}~rad/s$ .

```
1 >> R=1e3; C=10e-6;L=0.1;
2 >> m=R/2*sqrt(C/L)
3 >> w0=1\sqrt(L*C)
4 >> w1=w0*(m-sqrt(m^2-1))
5 >> w2=w0*(m+sqrt(m^2-1))
6 >> w=logspace(0,6,1000); %définit un vecteur pulsation contenant des valeurs réparties régul
```

```
7 >> H=1./(1+j*R*C*w -L*C*w.^2); % définition de la fonction de transfert isochrone (complexe 🖪
 8 >> GdB= 20*log10(abs(H)); % calcul du gain en dB. log10 est utilisé pour calculer le log en
9 >> Phi=phase(H); % calcul de la phase en rad. phase permet de calculer l'argument d'un nomb
11 >> % Tracé du diagramme de Bode
12 >> figure(1)
13 >> semilogx(w,GdB) %diagramme du gain
14 >> xlabel('Pulsation en rad/s')
15 >> ylabel('Gain en dB')
16
17 >> figure(2)
18 >> semilogx(w,Phi*180/pi) %diagramme de phase
19 >> xlabel('Pulsation en rad/s')
20 >> ylabel('Phase en °')
21
22
23 \, \text{m} =
24
25
27 \text{ w0} =
28
29
     1.0000e-03
30
31 w1 =
32
33
     1.0102e-04
34
35
36 \text{ w2} =
37
38
      a aagg
```

Stéphanie Parola - HILISIT - Université Montpellier (cc) BY-NC-SA