Unité d'enseignement HLEE 204 : Energie Electrostatique

Contrôle Continu n°1 de mars 2021 : Durée 1h30mn

On rappelle : permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 1/(36\pi 10^9)$ F/m et $1/(4\pi\varepsilon_0)=9.10^9$ SI

Exercice 1 – Produit Scalaire et Produit Vectoriel (4 points)

Dans un repère orthonormé $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs : $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

a- Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$

b- En déduire l'angle α entre les deux vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$

c- Calculer le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$

d- Montrer que $\vec{w}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

$$\begin{array}{cc} u & v \\ 1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \qquad w : \begin{pmatrix} -1+4+ \\ -2-1 \\ -2-1 \end{pmatrix} \qquad w \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

si u et $\vec{w}$ sont ⊥ alors leur produit scalaire est $=0$

$\vec{u}.\vec{w}$: $3+3-6=0$

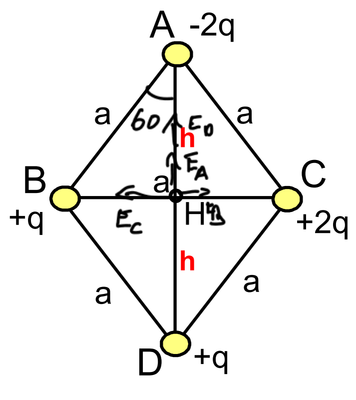
$\vec{v}.\vec{w}$: $-3+6-3 : 0$

Exercice 2 (8 points) : Champ et potentiel créé par une distribution de charges ponctuelles

Soit 4 charges ponctuelles placées au sommet d'un losange ABCD de coté a, selon la distribution de charge ci-dessous.

On rappelle que le losange est constitué de triangles équilatéraux d'angles au sommet de 60° et que la hauteur h des 2 triangles est égale à $a\sqrt{3}/2$.

On donne q=1x10^{-8} C et a = 5 cm.



On se place au point H, centre du losange

a- Représenter les 4 champs électriques ($\vec{E}_A$, $\vec{E}_B$, $\vec{E}_C$, $\vec{E}_D$) créés par les 4 charges ponctuelles au point H.

b- En utilisant les symétries du système, calculer la direction et la grandeur du vecteur champ électrique total $\vec{E}$ (norme du vecteur)

c- Calculer le potentiel V_H au point H.

d- Calculer le potentiel V_D au point D.

Soit E selon 2 vecteurs

en x

$E_x : E_B - E_C = \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (a)^2}$

En y $= E_D + E_A$

$= \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (h)^2}$

Exercice 3 : Potentiel et champ créé par une distribution de charge surfacique (8 pts).

Un disque de surface S, de rayon R = 0.1m et de densité surfacique de charge σ positive égale à 1×10^{-5} C/m² possède une charge totale Q.

On veut calculer le potentiel électrique V puis le champ créé au point P par cette distribution de charge suivant l'axe central à une distance z = 0.03m (Fig 3a).
On suppose que V = 0 à l'infini.

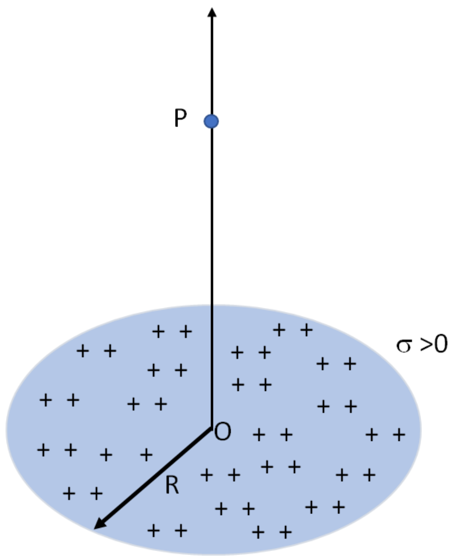


Fig. 3a

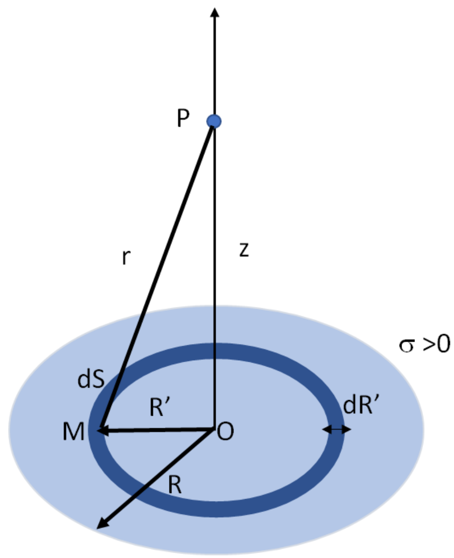


Fig. 3b

On va considérer un élément de surface dS qui est un anneau de rayon R' et d'épaisseur dR' (Fig 3b).

Cet élément de la tige porte une charge infinitésimale dq. Elle engendre un potentiel élémentaire dV au point P.

La distance de P à l'anneau est PM = r ; OP = z ; OM = R' ; le triangle OPM est rectangle en O.

a- Calculer la charge totale Q portée par le disque

b- Exprimer la surface élémentaire dS de l'anneau de rayon R' et d'épaisseur dR' puis établir l'expression de la charge élémentaire dq engendrée par la surface dS

c- En déduire l'expression du potentiel élémentaire dV au point P.

On exprimera dV = f(σ, ε_0, z, R')

d- En intégrant sur tout le disque de rayon R, établir l'expression du potentiel V au point P engendré par le disque

On donne $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$ où a est une constante

Calculez le potentiel V

e- A partir de $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, établir l'expression du champ électrique

Représenter le vecteur champ électrique $\vec{E}$ créé par la totalité du disque.

Exercice 1 – Produit Scalaire et Produit Vectoriel (4 points)

Dans un repère orthonormé $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs : $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

a- Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$

b- En déduire l'angle α entre les deux vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$

c- Calculer le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$

d- Montrer que $\vec{w}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ $\quad \vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

a- $\vec{u}.\vec{v} = -1 + 2 + 2 = 3$.

b- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \alpha$ avec $\begin{cases} \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6} \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6} \end{cases}$

$\hookrightarrow \cos\alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \underline{\alpha = 60°}$

c- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$

$\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \vec{v} \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \vec{w} \begin{cases} w_x = -1 + 4 = 3 \\ w_y = -2 - 1 = -3 \\ w_z = -2 - 1 = -3 \end{cases}$

d- $\vec{w}.\vec{u} = 3 + 3 - 6 = 0$

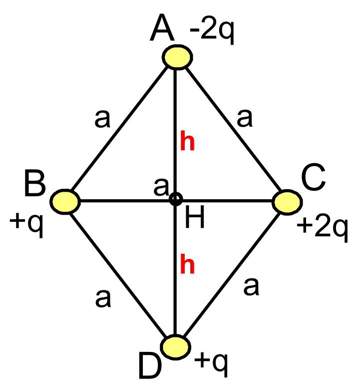
$\vec{w}.\vec{v} = -3 + 6 - 3 = 0$.

Exercice 2 (8 points) : Champ et potentiel créé par une distribution de charges ponctuelles

Soit 4 charges ponctuelles placées au sommet d'un losange ABCD de coté a, selon la distribution de charge ci-dessous.

On rappelle que le losange est constitué de triangles équilatéraux d'angles au sommet de 60° et que la hauteur h des 2 triangles est égale à $a\sqrt{3}/2$.

On donne $q = 1\times10^{-8}$ C et a = 5 cm.



On se place au point H, centre du losange

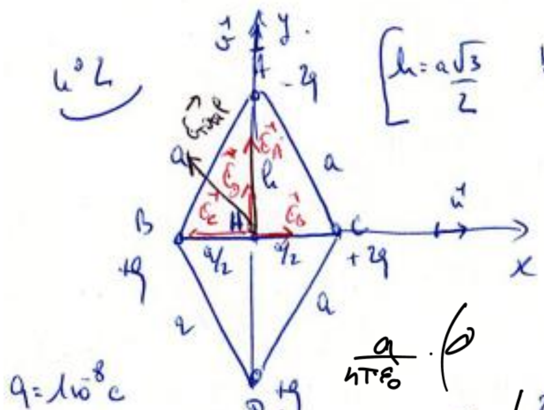
a- Représenter les 4 champs électriques ($\vec{E}_A$, $\vec{E}_B$, $\vec{E}_C$, $\vec{E}_D$) créés par les 4 charges ponctuelles au point H.

b- En utilisant les symétries du système, calculer la direction et la grandeur du vecteur champ électrique total $\vec{E}$ (norme du vecteur)

c- Calculer le potentiel V_H au point H.

d- Calculer le potentiel V_D au point D.

n°2



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

b) Suivant (Hx) : $(\mathcal{E}_B - \mathcal{E}_C)\,\vec{u}$.

$$\mathcal{E}_B = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_C = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\mathcal{E}_B - \mathcal{E}_C = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 \frac{a^2}{4}} = \frac{-q}{\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \varphi$

$\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}$

Suivant (Hy) : $(\mathcal{E}_A + \mathcal{E}_D)\,\vec{v}$.

$$\mathcal{E}_A = -\frac{(-2q)}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_D = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \longrightarrow \mathcal{E}_A + \mathcal{E}_D = \frac{\cancel{3}q}{\pi\varepsilon_0 \cancel{3}a^2}$$

$q = 1 \cdot 10^{-8}\,C$

$a = 5 \cdot 10^{-2}\,m$.

$\varepsilon_0 = 8{,}84 \cdot 10^{-12}\,F/m$.

donc $|\mathcal{E}_B - \mathcal{E}_C| = |\mathcal{E}_A + \mathcal{E}_D| \longrightarrow$ $[\alpha = 45°$.

$\vec{\mathcal{E}}_{total} \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_x = -144\ kV/m. \\ \mathcal{E}_y = +144\ kV/m. \end{array} \right.$ $\quad [\mathcal{E}_{total} = 203\ kV/m$.

c) $$V_H = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 h}\left[-2q + q\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\, a/2}\left[+2q + q\right].$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2}{a\sqrt{3}}\left[-q\right] + \frac{2}{a}\left[3q\right]\right\}.$$

$$= 9 \cdot 10^9 \left\{-\frac{2q}{a\sqrt{3}} + \frac{6q}{a}\right\} = 9 \cdot 10^9 \left[-\frac{2}{a\sqrt{3}} + \frac{6}{a}\right] \times 10^{-8}$$

$$= 9 \cdot 10^1 \left[-23 + 120\right] = \underline{+8730\,V}$$

d) $$V_D = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[2q + q\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 2h}\left(-2q\right).$$

autre que D.

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3q}{a} - \frac{2q}{2h}\right] = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{9 \cdot 10^9}\left[\frac{3}{a} - \frac{1}{h}\right] \times 10^{-8}$$

$$= 9 \cdot 10^1 (60 - 23) = \underline{3322\,V}$$

Exercice 3 : Potentiel et champ créé par une distribution de charge surfacique (8 pts).

Un disque de surface S, de rayon R = 0.1m et de densité surfacique de charge σ positive égale à 1×10^{-5} C/m² possède une charge totale Q.

On veut calculer le potentiel électrique V puis le champ créé au point P par cette distribution de charge suivant l'axe central à une distance z = 0.03m (Fig 3a).
On suppose que V = 0 à l'infini.

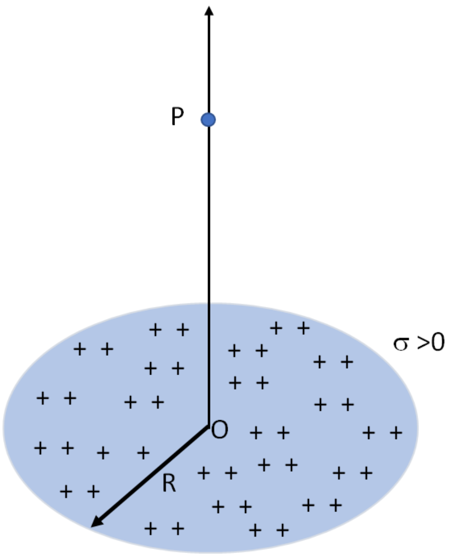


Fig. 3a

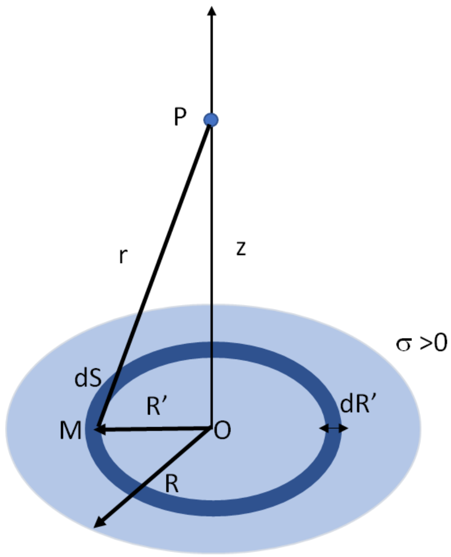


Fig. 3b

On va considérer un élément de surface dS qui est un anneau de rayon R' et d'épaisseur dR' (Fig 3b).

Cet élément de la tige porte une charge infinitésimale dq. Elle engendre un potentiel élémentaire dV au point P.

La distance de P à l'anneau est PM = r ; OP = z ; OM = R' ; le triangle OPM est rectangle en O.

a- Calculer la charge totale Q portée par le disque

b- Exprimer la surface élémentaire dS de l'anneau de rayon R' et d'épaisseur dR' puis établir l'expression de la charge élémentaire dq engendrée par la surface dS

c- En déduire l'expression du potentiel élémentaire dV au point P.

On exprimera dV = f(σ, ε_0, z, R')

d- En intégrant sur tout le disque de rayon R, établir l'expression du potentiel V au point P engendré par le disque

On donne $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$ où a est une constante

Calculez le potentiel V

e- A partir de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$, établir l'expression du champ électrique

Représenter le vecteur champ électrique $\vec{E}$ créé par la totalité du disque.

n°3 Potentiel et champ créé par 1 distribut surfacique de charge.

a. $Q = \sigma S = \sigma \pi R^2 = 0{,}31\,\mu C$. avec $\sigma = 1\,10^{-5}\,C/m^2$
et $R = 0{,}1\,m$.

b. $dS = 2\pi R'\,dR'$: 1 anneau de rayon R' et d'épaisseur dR'

$\hookrightarrow dq = \sigma\, 2\pi R'\,dR'$

c. $dV = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{dq}{r}$ avec $dq = \sigma\, 2\pi R'\,dR'$ et $r = \sqrt{R'^2 + z^2}$

donc $dV = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\sigma\, 2\pi R'\,dR'}{\sqrt{R'^2+z^2}} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \dfrac{R'\,dR'}{(R'^2+z^2)^{1/2}}$

d. $V = \int dV$ pour la contribut de tous les anneaux de $0 \to R$.

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{R'\,dR'}{(R'^2+z^2)^{1/2}} \quad \text{or} \quad \boxed{\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\hookrightarrow \boxed{V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R'^2+z^2}\right]_{R'=0}^{R'=R} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right)}$$

avec $\sigma = 1\,10^{-5}\,C/m^2$; $R = 0{,}1\,m$; $z = 0{,}03\,m$; $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi\,10^9}$

$V = 42\,kV$.

e. $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V \to E = -\dfrac{dV}{dz} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \dfrac{\partial}{\partial z}\left((R^2+z^2)^{1/2} - z\right)$

donc $\boxed{E = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{\cancel{2}}(R^2+z^2)^{-1/2} \times \cancel{2}z - 1\right) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)}$

$E = 403\,kV/m$.