B- Electrostatique

I- La force électrique

Charge positive et charge négative ; électrisation par contact et par influence ; Force d'attraction et de répulsion.

I-1 Charges ponctuelles et distributions continues de charges

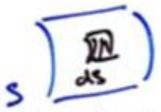
- Charge ponctuelle : dimension du volume chargé infiniment petit vis-à-vis des dimensions auxquelles on se place.

- Distribution de charge suivant des dimensions non infiniment petites. 3 cas se présentent :

1- Pour un volume chargé τ, on aura pour un volume élémentaire dτ, la charge ponctuelle $dq = \rho\, d\tau$

$dq = \rho\, d\tau$ densité volumique de charge $\qquad \rho = \frac{dq}{d\tau} \Rightarrow Q_{totale} = \iiint_{vol} \rho\, d\tau$

2- Pour une surface chargés S, on aura pour une surface élémentaire dS, la charge ponctuelle $dq = \sigma\, dS$



$dq = \sigma\, dS$ densité surfacique de charge $\qquad \sigma = \frac{dq}{dS} \Rightarrow Q_{totale} = \iint_{surf} \sigma\, dS$

3- Pour une ligne chargée, on aura pour une longueur élémentaire dℓ, la charge ponctuelle $dq = \lambda\, d\ell$

Rq : 1 fil conducteur pour lequel on peut négliger la section devant la longueur

$dq = \lambda\, d\ell$ densité linéique de charge $\qquad \lambda = \frac{dq}{d\ell} \Rightarrow Q_{totale} = \int_{ligne} \lambda\, d\ell$

Rq : la charge s'exprime en coulomb (C) : 1 coulomb est la quantité de charge électrique transportée en 1s à travers une section de câble dans lequel circule un courant de 1A : dq = i dt

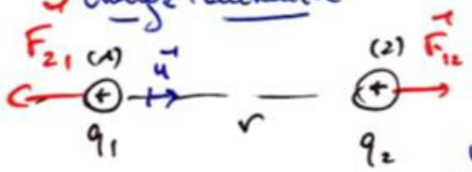
La charge élémentaire $q = 1.6\ 10^{-19}$ c $\qquad i = \frac{dq}{dt}$

I-2 **Force Electrostatique : loi de Coulomb**

Soit 2 charges ponctuelles q_1 et q_2 séparées de r, il existe une force électrostatique d'attraction ou de répulsion :

avec la permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} = 8.85\ 10^{-12}$ en F/m ou $C^2/(N.m^2)$

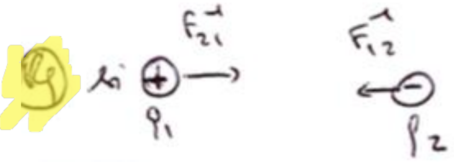
Charge Ponctuelle



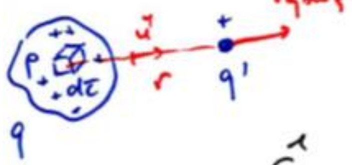
$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ vecteur unitaire

$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, \vec{u}$ en N = C^2/m^2

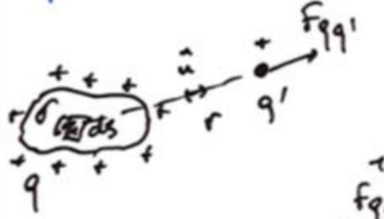
$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$



Distribution de charge



$\vec{F}_{qq'} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{vol} \frac{\rho\, d\tau}{r^2}\, \vec{u}_r$



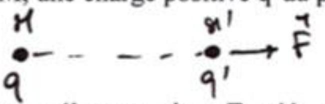
$\vec{F}_{qq'} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{surf} \frac{\sigma\, dS}{r^2}\, \vec{u}_r$

$\vec{F}_{qq'} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \int_{ligne} \frac{\lambda\, d\ell}{r^2}\, \vec{u}_r$

II- Le champ électrostatique *(vecteurs notés en gras)*

II-1 Définition : Soit une charge ponctuelle positive q au point M, une charge positive q' au point M' et MM' = r.

q exerce une force **F** sur la charge q' : $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\vec{u}$



On attribue la présence de la force **F** à l'existence d'un vecteur champ électrostatique **E** créé par la charge q

$\vec{F} = q'\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}q'\vec{u}$ donc $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$ en V/m

$E \to 0$ qd $r \to \infty$ $\quad$ $E \to \infty$ qd $r \to 0$ Impossible $\quad$ E n'est pas défini au point où se trouve la charge.

Pour une charge non ponctuelle, à la charge élémentaire dq correspondra le champ élémentaire $d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$

$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$

Pour une distribution de charge en volume τ : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{vol}\frac{\rho d\tau}{r^2}\vec{u}$

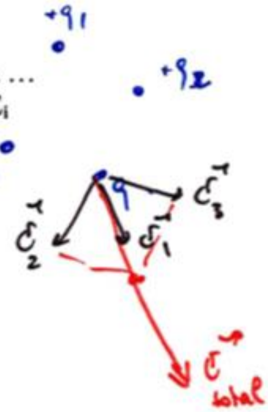
Pour une distribution de charge en surface S : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{surf}\frac{\sigma dS}{r^2}\vec{u}$

Pour une distribution de charge en ligne ℓ : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{ligne}\frac{\lambda d\ell}{r^2}\vec{u}$

II-2 Principe de superposition :

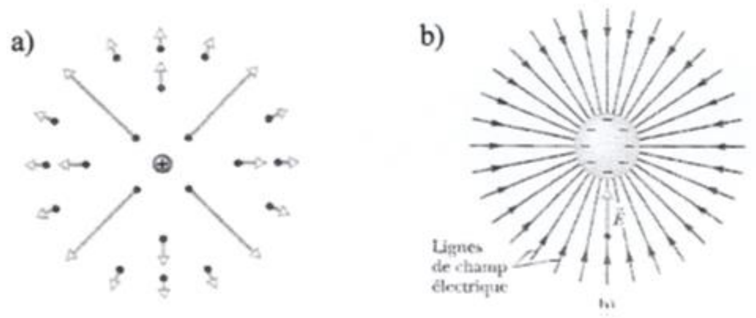
Soit une distribution de charge dans l'espace q, q_1, q_2, q_3 … q_1 créé $\mathbf{E_1}$, q_2 créé $\mathbf{E_2}$, q_3 créé $\mathbf{E_3}$ …
Au niveau de la charge q, chaque champ électrostatique $\mathbf{E_i}$ induit la force de Coulomb $\mathbf{F_i} = q\,\mathbf{E_i}$
La force totale au niveau de la charge q : $\vec{F}_{totale} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q\vec{E}_i = q\sum_i \vec{E}_i$

$\vec{F}_{totale} = q\,\vec{E}_{totale}$ et $\vec{E}_{totale} = \sum_i \vec{E}_i$



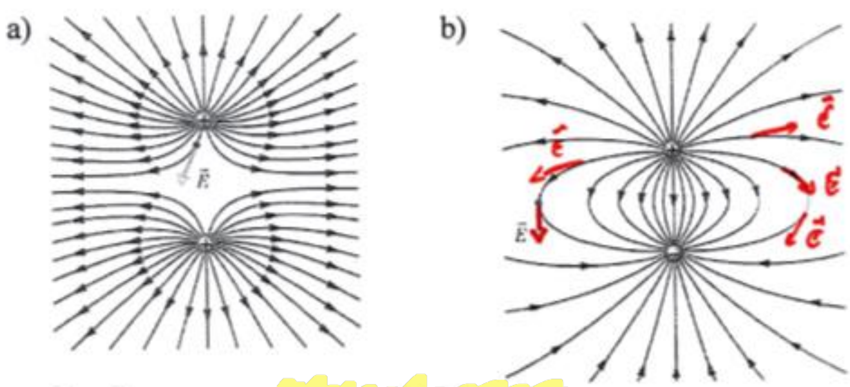
II-3 Topographie du champ **E** :

Dans le cas d'une charge positive, le vecteur champ électrostatique est radial et centrifuge.
Dans le cas d'une charge négative, le vecteur champ électrostatique est radial et centripète.
Le vecteur champ électrique est porté (tangent) par des lignes de champ



Les vecteurs champ électrique en plusieurs points autour d'une charge ponctuelle positive (a) et négative (b)

Les lignes de champs s'éloignent d'une charge positive et elles s'approchent d'une charge négative



Lignes de champ électrique :
2 charge ponctuelles positives identiques (a) : les lignes se repoussent.
1 charge ponctuelle positive et une négative de même grandeur(b) : Les lignes de champ vont de la charge positive vers la charge négative

Le vecteur champ électrique en un point est le vecteur tangent à la ligne de champ en ce point.

Rq: $\vec{F} = q'\vec{E}$ $\quad$ *si q'>0 →* $\vec{F}$ et $\vec{E}$ *de même sens*
si q'<0 → $\vec{F}$ et $\vec{E}$ *de sens opposés*

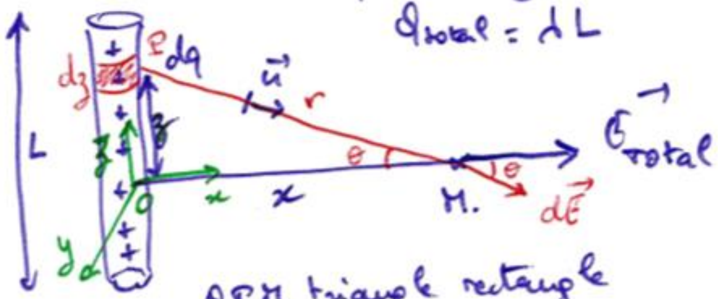
II-4 Calcul du champ électrostatique E en un point M :

- à partir des distributions discrètes de charges (voir TD)
- à partir de distributions volumiques, surfaciques et linéiques de charges (Cours et TD)
- construction vectorielle en utilisant la symétrie du système
- en utilisant le principe de superposition du champ électrique : $\vec{E}_{total} = \sum_i \vec{E}_i$

II-4-1 Champ électrique en un point M créé par un fil rectiligne L

λ : densité linéique de charge

$Q_{total} = \lambda L$



pt M à la distance x du fil : $OM = x$

pt P :

↳ $OP = z$ et $PM = r$

↳ longueur élémentaire $dz \Rightarrow dq = \lambda\, dz$

$dq \rightarrow d\vec{E}$

Par symétrie $\vec{E}_{total}$ suivant Ox.

OPM triangle rectangle

$\begin{cases} OM = x \\ PM = r \\ OP = z \end{cases}$ $\quad r^2 = x^2 + z^2$

↓

variable d'intégrale θ

donc $\boxed{E_{total} = \int dE_x = \int dE \cos\theta}$

avec $d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{dq}{r^2} \vec{u}$ et $dq = \lambda\, dz$

soit $\boxed{d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2} \lambda\, dz\, \vec{u}}$.

$tg\,\theta = \dfrac{z}{x} \rightarrow z = x\, tg\,\theta$

$\Rightarrow dz = \dfrac{x}{\cos^2\theta} d\theta \quad (1)$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r} \Rightarrow r = \dfrac{x}{\cos\theta} \quad (2)$

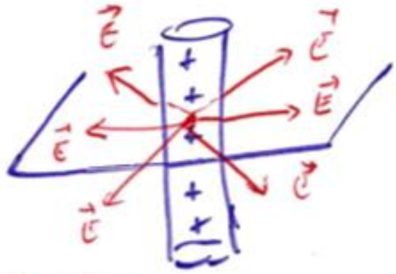
En utilisant (1) et (2) dans l'expression de $d\vec{E}$

$\Rightarrow d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\cancel{\cos^2\theta}}{x^{\cancel{2}}} \lambda \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{\cos^2\theta}} d\theta\, \vec{u} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{x} \lambda\, d\theta\, \vec{u}$.

et $\boxed{E_{total} = \int dE \cos\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\lambda}{x} \int_{-\theta_{max}}^{+\theta_{max}} \cos\theta\, d\theta}$ Expression pour 1 fil de longueur L

* Fil infini : pour $x \ll L \Rightarrow \theta$ varie de $-\pi/2$ à $+\pi/2$

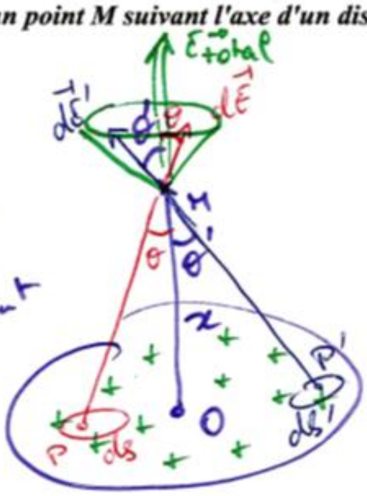
donc $E_{total} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\lambda}{x} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta\, d\theta$



$E_{fil\ infini} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} \left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \boxed{\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}}$ Fil infini

II-4-2 Champ électrique en un point M suivant l'axe d'un disque uniformément chargé

Le point M à la distance x du disque uniformément chargé



σ : densité surfacique de charge

$dq = \sigma dS$ en P $\qquad dq' = \sigma dS'$ en P'

$Q_{total} = \sigma S$

charge + en surface.

Au pt M, champ $d\vec{E}$ engendré par $dq = \sigma dS$ en P.

champ $d\vec{E}'$ engendré par $dq' = \sigma dS'$ en P'

} Pour des raisons de symétrie $\rightarrow \vec{E}_{total}$ suivant Ox

$$E_{total} = \int dE_x = \int dE_M \cos\theta$$

$$\text{avec } dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{r^2}$$

$$\text{donc } E_{total} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma dS}{r^2}\cos\theta$$

$d\Omega$ angle solide sous lequel depuis M on voit dS : $d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2}$ (outils maths)

$$\text{donc } E_{total} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma\int d\Omega$$

Ω : angle solide sous lequel de M on voit le disque.

$$\text{donc } \boxed{E_{total} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Omega}$$

* Plan infini : $x \rightarrow 0$ le pt M se rapproche du centre O

$\Rightarrow$ le disque devient 1 plan infini

on a alors $\Omega = \frac{1}{2}$ espace donc

$$\Omega = 2\pi \quad \text{et} \quad \boxed{E_{total} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \text{ plan infini}$$

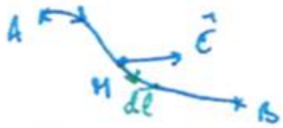
III- Le potentiel électrostatique *(vecteurs notés en gras)*

Introduction de la notion de potentiel électrostatique V à partir de la circulation du champ électrique **E**.

III-1 Circulation du champ électrique **E** : existence d'un potentiel électrostatique V

Soit une courbe $\mathcal{C}$ orientée (sens de parcours choisi) entre les points A et B.

Le point M, siège d'un champ **E**, parcours la courbe $\mathcal{C}$.



La circulation élémentaire $d\mathcal{C}$ du champ **E** pour un élément de trajectoire **dl** : $d\mathcal{C} = \vec{E}\cdot\vec{dl}$

La circulation $\mathcal{C}$ du champ **E** entre les points A et B :

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

Rq $\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl}$

La circulation $\mathcal{C}$ du champ **E** entre les points A et B ne dépend que de la position de ces points et non du trajet suivi entre A et B. On dit alors que le champ électrostatique dérive d'un potentiel.

L'existence d'un potentiel se traduit donc par la relation :

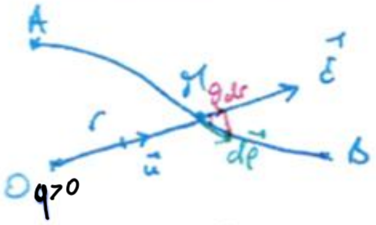
$$\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = \Delta V$$ — différence de potentiel entre A et B.

Rq1 : *la circulation d'une force est le travail de cette force le long du trajet défini par la courbe* $\mathcal{C}$

Rq2 : *la circulation du champ électrostatique le long de toute courbe fermée est nulle :* car pts A et B : idem ⇒ $\Delta V = 0$
point d'arrivé = point de depart

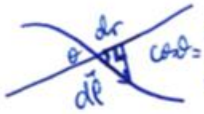
$$\oint_{\text{fermée}} \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$$

III-2 Expression du potentiel V quand la source du champ est une charge ponctuelle q



$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$ et $d\mathcal{C} = \vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}\cdot\vec{dl}$

or $\vec{u}\cdot\vec{dl} = \underset{1}{u}\,dl\cos\theta = dr$



$\cos\theta = \frac{dr}{dl}$

donc $d\mathcal{C} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\left(-\frac{1}{r}\right) = -dV$ → $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte$

potentiel électrostatique

qd $r \to \infty \Rightarrow V \to 0 \Rightarrow cte = 0$

donc $\vec{E}\cdot\vec{dl} = -dV$ et $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ Volt et $\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = -(V_B - V_A) = V_A - V_B$.

A B
$V_{AB} > 0$
si $V_A > V_B$

III-3 Expression du potentiel V quand la source du champ est un ensemble de charges ponctuelles q_i

Chaque charge q_i créé en un point P à une distance r_i de q_i, un champ $\mathbf{E}_i$ et un potentiel $V_i = q_i/4\pi\varepsilon_0 r_i$

L'addition vectorielle des champs $\mathbf{E}_i$ entraîne l'addition scalaire des circulations élémentaires $\mathbf{E}_i.\mathbf{dl}$.

Le potentiel total V est donc la somme scalaire des potentiels V_i :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q_i}{r_i}$$

III-4 Expression du potentiel V quand la source du champ est une distribution continue de charges

Pour une distribution de charge en volume τ : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{vol}\frac{\rho d\tau}{r}$

Pour une distribution de charge en surface S : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{surf}\frac{\sigma dS}{r}$

Pour une distribution de charge en ligne ℓ : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{ligne}\frac{\lambda d\ell}{r}$

***Rq** : Le potentiel V est __continu__ dans une répartition volumique de charge, à la traversée d'une répartition surfacique. Le potentiel V est __discontinu__ à la traversée d'une répartition linéique.*

III-5 Travail d'une force électrostatique

soit 1 charge q qui se déplace dans 1 champ $\vec{E}$ entre A et B.

$\vec{F} = q\vec{E} \rightarrow W_A^B(\vec{F}) = q\int_A^B \vec{E}.d\vec{\ell} = -q(V_B - V_A)$

$= q(V_A - V_B)$.

$= qU_{AB}$

Rq $q = 1{,}6\,10^{-19}$ C pour l'é

$\rightarrow 1\,eV = 1{,}6\,10^{-19}$ J.

III-6 Relation entre champ et potentiel

$\vec{E}.d\vec{\ell} = -dV \rightarrow \vec{E} = -\frac{dV}{d\vec{\ell}}$

Pour $d\vec{\ell}\begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \rightarrow \vec{E}\begin{vmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix}$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}.V \rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V. \rightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$

donc $\vec{E}.d\vec{\ell} = -dV$

$\vec{E}$ dirigé suivant les potentiels décroissants. $\Leftrightarrow \overrightarrow{grad}\,V.d\vec{\ell} = dV$.

III-7 Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle est une surface telle qu'en tous ses points le potentiel a même valeur V=Cte.

→ pour V = cte → dV = 0 → $\vec{E}.d\vec{\ell} = 0 \rightarrow \vec{E} \perp d\vec{\ell}$ $\vec{E}$ orthogonal à tout déplacement.

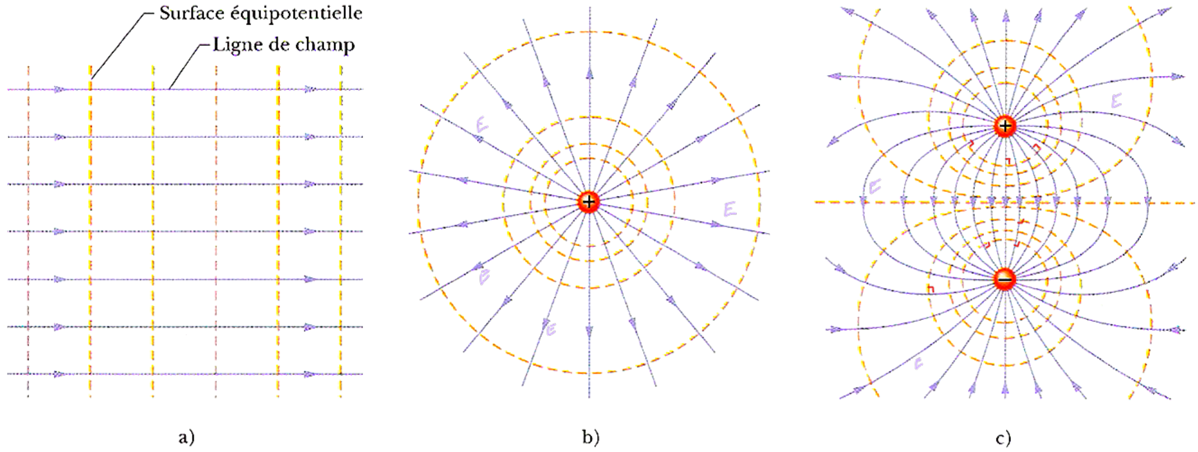


Figure 4.3 Les lignes de champ électrique (en mauve) et les coupes transversales des surfaces équipotentielles (en jaune) a) d'un champ uniforme, b) du champ d'une charge ponctuelle et c) du champ d'un dipôle électrique.

Les lignes de champs sont les trajectoires orthogonales aux surfaces équipotentielles.
Les lignes de champs sont dirigées suivant les potentiels décroissants.

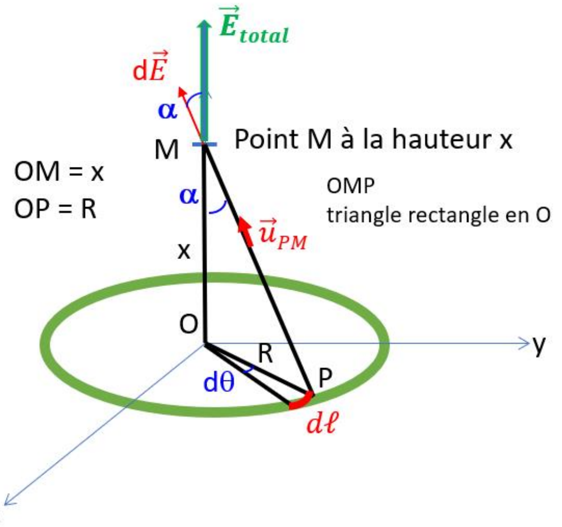
- **Exercice de Cours : Champ et potentiel créé par un anneau**

On considère un anneau extrêmement fin, de centre O et de rayon R, d'axe Ox, uniformément chargé avec une densité linéaire de charge λ.

1- Déterminer directement en un point M de l'axe Ox :

a- Le champ électrique E(x)

b- Le potentiel électrostatique V(x)



Charge élémentaire

$dq = \lambda\, d\ell.$

λ densité linéique de charge

$s = r\theta.$

$\to d\ell = r\,d\theta.$

$d\ell = R\,d\theta.$

$\hookrightarrow dq = \lambda R\,d\theta.$

Au pt P, arc de cercle $d\ell \Rightarrow dq \Rightarrow d\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,d\theta}{PM^2}\vec{u}_{P\to M}$

or $PM^2 = x^2+R^2$

$\to d\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,d\theta}{(x^2+R^2)}\vec{u}_{P\to M}$

Projection suivant $\vec{Ox}$ $\to$ $d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,d\theta}{(x^2+R^2)}\cos\alpha\,\vec{u}_x.$

avec $\cos\alpha = \frac{x}{PM} = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$ d'où $\boxed{d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R x\,d\theta}{(x^2+R^2)^{3/2}}\vec{u}_x}$

Tous les $d\ell \to d\vec{E}_x$ suivant Ox pour $\int_0^{2\pi} d\theta.$

$\Rightarrow \vec{E}_{Total} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda R\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\theta\,\vec{u}_x = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}2\pi\,\vec{u}_x.$

donc $\boxed{\vec{E}_{Total} = \frac{\lambda R x}{2\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}}$ $\to x\to\infty \Rightarrow E\to 0$

b) $dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM} = \frac{\lambda R\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}} \Rightarrow V = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}2\pi$

$V \stackrel{?}{=} \int dV$

d'où $\boxed{V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}}$ $x\to\infty \Rightarrow V\to 0$

2- Vérifier que : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$
3- Représenter E(x) et V(x)

2) Vérifier que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Rightarrow \vec{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$

$$V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{1/2}} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}(x^2+R^2)^{-1/2}$$

$(f^n)' = n f' f^{n-1} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}(x^2+R^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(x^2+R^2)^{-3/2}\, 2x$

$$\text{d'où } \left[E_x = +\frac{\lambda R x}{2\varepsilon_0}(x^2+R^2)^{-3/2} \right. \quad /\!\!/$$

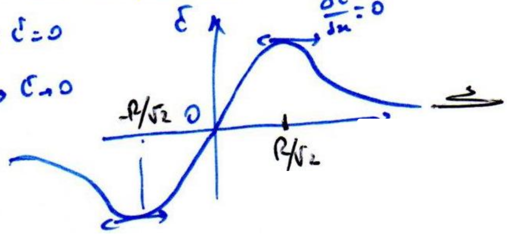
x max est la dérivé de E en fonct de x

3) Représenter $E = f(x)$ avec x positif suivant l'axe Ox.

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda R x}{2\varepsilon_0}(x^2+R^2)^{-3/2}\, \vec{e}_x$$

$x = 0 \Rightarrow E = 0$

$x \rightarrow \infty \Rightarrow E \rightarrow 0$



$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}(x^2+R^2)^{-3/2} + \frac{\lambda R x}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{3}{2}(x^2+R^2)^{-5/2}\, 2x\right]$$

https://imgur.com/a/iThW0dh

$$= \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}(x^2+R^2)^{-5/2}\left[(x^2+R^2) + (-3x^2)\right]$$

$$= \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}(x^2+R^2)^{-5/2}\left[R^2 - 2x^2\right] \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = \mp \frac{R}{\sqrt{2}} \quad /\!\!/$$

Représenter $V = f(x)$

$$V(x) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}(x^2+R^2)^{-1/2}$$

$x \rightarrow \infty \Rightarrow V \rightarrow 0$

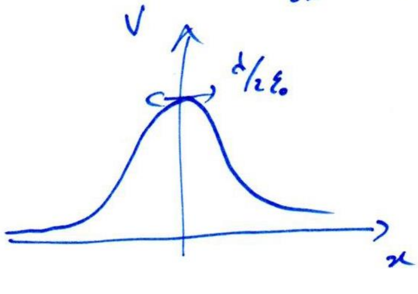
$x = 0 \rightarrow V(x=0) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2}} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$

$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\lambda R x}{2\varepsilon_0}(x^2+R^2)^{-3/2} \longrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0$ pour $x = 0$.

$\frac{dV}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}(2x)(x^2+R^2)^{-3/2}$

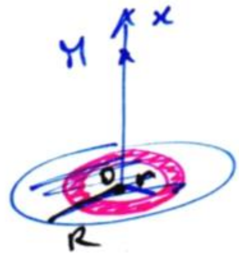
$\frac{dV}{dx} = 0$ pour $x = 0$ et $V(x \to \infty) = 0$

Pas de V négatif



4- A partir des expressions du potentiel électrique créé par un anneau, en déduire le potentiel puis le champ électrique créés par un disque de rayon R portant une densité surfacique de charges uniforme σ

$$\sigma = \frac{dq}{dS}.$$



le disque ≡ engendré par 1 fil circulaire de rayon r et d'épaisseur dr quand r varie de 0 à R

→ Au rayon R : charge portée par la ligne : $Q = l\lambda = 2\pi R\lambda$.

→ Au rayon r : charge élémentaire portée par l'anneau d'épaisseur dr : $dQ = dS\,\sigma$

avec $dS = l\,dr = 2\pi r\,dr$

donc $dQ = 2\pi r\,dr\,\sigma$.

On a donc la correspondance

Q # dQ

$2\pi r\lambda \longleftrightarrow 2\pi r\,dr\,\sigma$

soit $\lambda \longleftrightarrow \sigma dr$.

$R \longleftrightarrow r$

d'où :

$$* \; V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{1/2}} \longleftrightarrow dV = \frac{\sigma r\,dr}{2\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{1/2}}$$

$(f^n)' = n f' f^{n-1}$

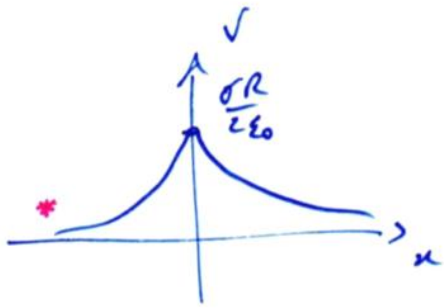
$$\text{et } V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{1/2}}$$

dérivée de $(x^2+r^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\, 2r\,(x^2+r^2)^{-1/2}$

donc $\frac{r}{(x^2+r^2)^{1/2}}$ a pour primitive $(x^2+r^2)^{1/2}$

$$\text{soit } V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(x^2+r^2)^{1/2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(x^2+R^2)^{1/2} - x\right]$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(x^2+R^2)^{1/2} - |x|\right].$$



pour $x = 0 \rightarrow V = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$

pour $x \rightarrow \infty \rightarrow V \rightarrow 0$

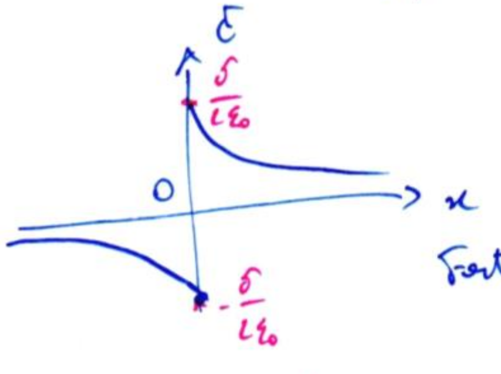
* champ électrique : $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{u_x}$.

$$E = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left((x^2+R^2)^{1/2} - |x|\right)\right].$$

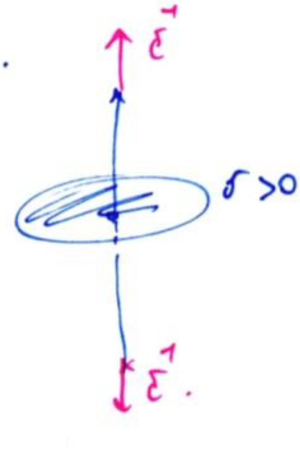
$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[2x\,\frac{1}{2}(x^2+R^2)^{-1/2} - 1\right]$$

$$= -\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left((x^2+R^2)^{-1/2} - \frac{1}{|x|}\right] = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|x|} - \frac{1}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right]$$

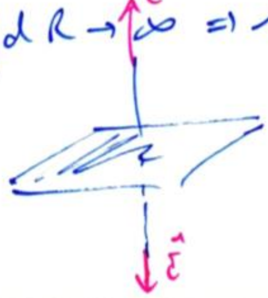
pour $x = 0 \Rightarrow E = \frac{\sigma \cancel{x}}{2\varepsilon_0 \cancel{x}} - \frac{\sigma x}{(x^2+R^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



forte discontinuité en $x = 0$.



Plan infini : qd $R \rightarrow \infty \Rightarrow 1$ plan



$E = \text{cte} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$!!