Exercice 1 :

On considère le circuit de la figure 1, alimenté par une source de tension : $E = E_0\sqrt{2}\,cos(\omega t)$.

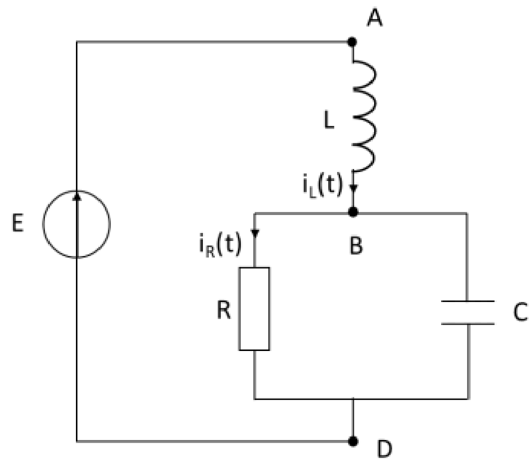


Figure 1

1) Calculer l'impédance équivalente $Z_{AD}(j\omega)$.

1) L'impédance $Z_{AD} = jL\omega + \dfrac{R}{1+jRC\omega}$

```
syms R L C w positive
ZAD=i*L*w+R/(1+R*C*i*w)
```

ZAD =

$$L\,w\,\mathrm{i} + \frac{R}{1 + C\,R\,w\,\mathrm{i}}$$

2) $Z_{AD} = R_{eq} + jX$

$$Z_{AD} = jL\omega + R\,\frac{1 - jRC\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}$$

$$= \frac{R}{1+R^2C^2\omega^2} + j\left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{1+R^2C^2\omega^2}\right)$$

$$R_{eq} = \frac{R}{1+R^2C^2\omega^2} \qquad X = L\omega - \frac{R^2C\omega}{1+R^2C^2\omega^2}$$

Z_{AD} est équivalent à une résistance si $X = 0$

$$L\omega = \frac{R^2C\omega}{1+R^2C^2\omega^2} \Rightarrow L\omega + R^2C^2L\omega^3 = R^2C\omega$$

$\omega \neq 0$ ($\omega = 0$ est solution mais si $\omega = 0$, ce n'est plus le régime harmonique...)

$$L(1 + R^2C^2\omega^2) = R^2C$$

$$\boxed{L = \frac{R^2C}{1 + R^2C^2\omega^2}}$$

Si cette condition est réalisée

$$R_{eq} = \frac{R}{1+R^2C^2\omega^2} = \frac{R}{R^2C}L = L/RC$$

(nb: $v = L\frac{di}{dt} \Rightarrow V \equiv H\frac{A}{s} \rightarrow H \equiv VA^{-1}s \equiv \Omega s$

$\Rightarrow \frac{L}{RC} \equiv \frac{H}{s} \equiv \Omega \longrightarrow$ résultat homogène

```
Req=real(ZAD)
```

Req =

$$\frac{R}{C^2\,R^2\,w^2+1}$$

```
X=imag(ZAD)
```

X =

$$L\,w - \frac{C\,R^2\,w}{C^2\,R^2\,w^2+1}$$

```
solve(X,L)  % valeur de L qui annule X
```

ans =

$$\frac{C\,R^2}{C^2\,R^2\,w^2+1}$$

```
simplify(subs(Req,w,solve(X,w))) % Req avec X=0, expression de Req sans w
```

ans =

$$\frac{L}{C\,R}$$

3) On donne R=100 Ω, C=100/3 µF, ω=400 rad/s. Calculer la valeur de L.

```
L=solve(X,L)
```

L =

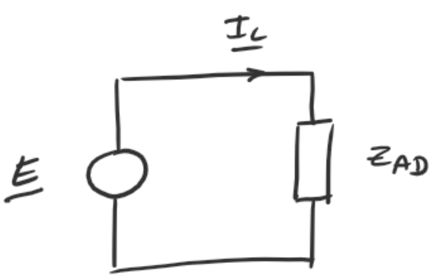
$$\frac{C\,R^2}{C^2\,R^2\,w^2+1}$$

```
R=100;C=100/3*1e-6;w=400;
double(subs(L))
```

ans = 0.1200

Pour $R = 100\ \Omega$ $C = 100/3\ \mu\mathrm{F}$ et $\omega = 400\ \mathrm{rd/s}$, $L = 0.12\ \mathrm{H}$ annule la partie imaginaire de Z_{AD}.

4) Calculer le courant circulant dans la bobine $i_L(t)$. Pour cela, on prendra E



$$\underline{I_L} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z_{AD}}} = \frac{E_0\sqrt{2}}{R_{eq} + jX}$$

Si on est dans les conditions précédentes

$R = 100\,\Omega$ $C = \frac{100}{3}\,\mu F$ $\omega = 400$ rd/s et $L = 0,12$ H

alors $X = 0$ $R_{eq} = \frac{0,12}{100 \times \frac{100}{3} \cdot 10^{-6}} = \frac{0,36}{10^{-2}} = 36\,\Omega$

$$\underline{I_L} = \frac{180\sqrt{2}}{36} = 5\sqrt{2} \simeq 7,07\ A$$

$$\Rightarrow \boxed{i_L(t) = 7,07\cos(400t)}$$

```
L=0.12
```

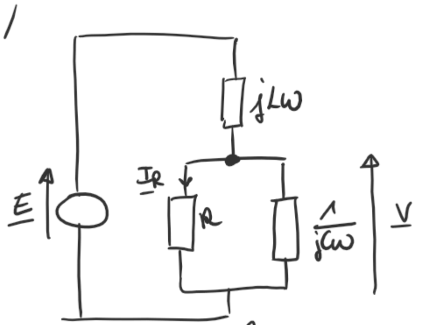
L = 0.1200

```
IL=180*2^.5/subs(ZAD) % amplitude complexe associée à i_L(t)
```

IL = $5\,\sqrt{2}$

5) Calculer le courant circulant dans la résistance $i_R(t)$.

5/



$$\underline{V} = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{R}{1+jRC\omega} + jL\omega}\,\underline{E} = \frac{R}{R+jL\omega(1+jRC\omega)}\,\underline{E}$$

$$= \frac{R}{R - RLC\omega^2 + jL\omega}\,\underline{E}$$

$$\underline{I_R} = \frac{\underline{V}}{R} = \frac{\underline{E}}{R(1-LC\omega^2)+jL\omega}$$

$R = 100\,\Omega$ $C = \frac{100}{3}\,\mu F$ $\omega = 400\,rd/s$ $L = 0{,}12\,H$ $\underline{E} = 180\sqrt{2}$

$\underline{I_R} = 2{,}55 - j\,3{,}39$ $|\underline{I_R}| = 4{,}24$ $\mathrm{Arg}(\underline{I_R}) = -0{,}92\,rd$

$\Rightarrow i_R(t) = 4{,}24\cos(400t - 0{,}92)$

On mène le calcul sur le circuit équivalent comme en continu, avec les impédances complexes équivalentes à des resistances. On peut de ce fait utiliser fspice pour calculer $\underline{I_R}$:

```
netlist={
    'V1 A 0 180*2^.5'
    'RA A B i*.12*400'
    'RB B 0 100'
    'RC B 0 1/(100/3*1e-6)/i/400'
    };
[X name]=fspice(netlist)
```

```
** fspice 2.46  ** (c) Frederic Martinez
X =
```

$$\begin{pmatrix} 254.55844122715710878430397035775 \\ 254.55844122715710878430397035775 - 339.41125496954281171240529381033\,i \\ -7.0710678118654752440084436210485 - 4.4081038155835781548827620145834e\text{-}39\,i \end{pmatrix}$$

```
name = 1×3 cell
'V(A)'      'V(B)'      'I(V1)'
```

```
IR=X(2)/100
```

IR = $2.5455844122715710878430397035775 - 3.3941125496954281171240529381033\,i$

6) Calculer la puissance consommée par la résistance.

Par définition la puissance consommée par la résistance est la moyenne de la puissance instantanée

$P = \frac{1}{T}\int_{(T)} p(t)dt$ avec $p(t) = u_R(t) \times i_R(t) = Ri_R^2(t)$

$i_R(t) = I_R cos(\omega t + \varphi)$

$$\Longrightarrow P = \frac{1}{T}\int_{(T)} RI_R^2 cos^2(\omega t + \varphi)dt = R\left(\frac{I_R}{\sqrt{2}}\right)^2 = RI_{R_{eff}}^2$$

Application numérique :

$i_R(t) = 4.24cos(400t - 0.92)$, d'où $P = 100\left(\frac{4.24}{\sqrt{2}}\right)^2 = 898.9 \text{ W}$

Exercice 2 :

On considère le circuit de la figure 2.

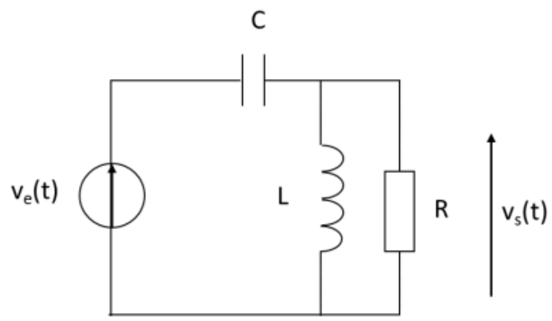


Figure 2

1) Calculer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}$.
2) Mettre la fonction de transfert sous la forme canonique :

$$H(j\omega) = \frac{A\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j\frac{2m}{\omega_0}\omega + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Identifier m et ω_0.

3) A l'aide de Matlab, tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) de ce circuit. Pour cela, on s'aidera de l'annexe. On prendra : R= 1 kΩ, C= 10 µF et L=0.1 H.
4) Vérifier graphiquement que la pulsation de résonnance est égale à $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et que la surtension Q vaut : $Q = \frac{R}{L\omega}$.

Remarque sur les notations :

$v_s(t)$ est la fonction décrivant l'évolution de la tension de sortie en fonction du temps t

$V_s(p)$ est la transformée de Laplace de $v_s(t)$

En régime harmonique, on note $\underline{V_s}$ l'amplitude complexe associée à $v_s(t)$ par la relation $v_s(t) = \mathcal{Re}(\underline{V_s}\, e^{j\omega t})$

On montre que $\underline{V_s} = V_s(p=j\omega) = V_s(j\omega)$

↑ transformée de Laplace

$H(p) = \dfrac{V_s(p)}{V_e(p)}$ fonction de transfert, rapport de la transformée de Laplace de $v_s(t)$ sur la transformée de Laplace de $v_e(t)$

$\underline{H}(\omega) = \dfrac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$ fonction de transfert isochrone, rapport des amplitudes complexes.

On montre que $\underline{H}(\omega) = H(p=j\omega) = H(j\omega)$

1) Calcul de la fonction de transfert

$$\underline{V_s} = \underline{V_e}\,\frac{\dfrac{R\,jL\omega}{R+jL\omega}}{\dfrac{R\,jL\omega}{R+jL\omega} + \dfrac{1}{jC\omega}}$$

$$\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{jRL\omega}{jRL\omega + (R+jL\omega)\dfrac{1}{jC\omega}}$$

$$= \frac{-RLC\omega^2}{-RLC\omega^2 + R + jL\omega}$$

$$= \frac{-LC\omega^2}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}$$

2) Forme canonique

$$\underline{H}(\omega) = \frac{A\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j\frac{2m}{\omega_0}\omega + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \boxed{A = 1}$$

$$\frac{2m}{\omega_0} = L/R \Rightarrow m = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{L}{R}$$

$$\boxed{m = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Utilisation de fspice pour obtenir ce résultat :

La netlist correspond au schéma équivalent complexe, où chaque impédance est traitée comme un résistance en continu.

```
netlist={
    'Ve 1 0 ve'
    'R1 1 2 1/C/1i/w'
    'R2 2 0 R'
    'R3 2 0 1i*L*w'
    };
[X,name]=fspice(netlist)
```

```
** fspice 2.46  ** (c) Frederic Martinez
X =
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ve} \\ -\frac{C\,L\,R\,\mathrm{ve}\,w^2}{-C\,L\,R\,w^2 + \mathrm{i}\,L\,w + R} \\ -\frac{C\,\mathrm{ve}\,w\,(R + L\,w\,\mathrm{i})\,\mathrm{i}}{-C\,L\,R\,w^2 + \mathrm{i}\,L\,w + R} \end{pmatrix}$$

```
name = 1×3 cell
'V(1)'      'V(2)'      'I(Ve)'
```

La fonction de transfert est X(2)/X(1) :

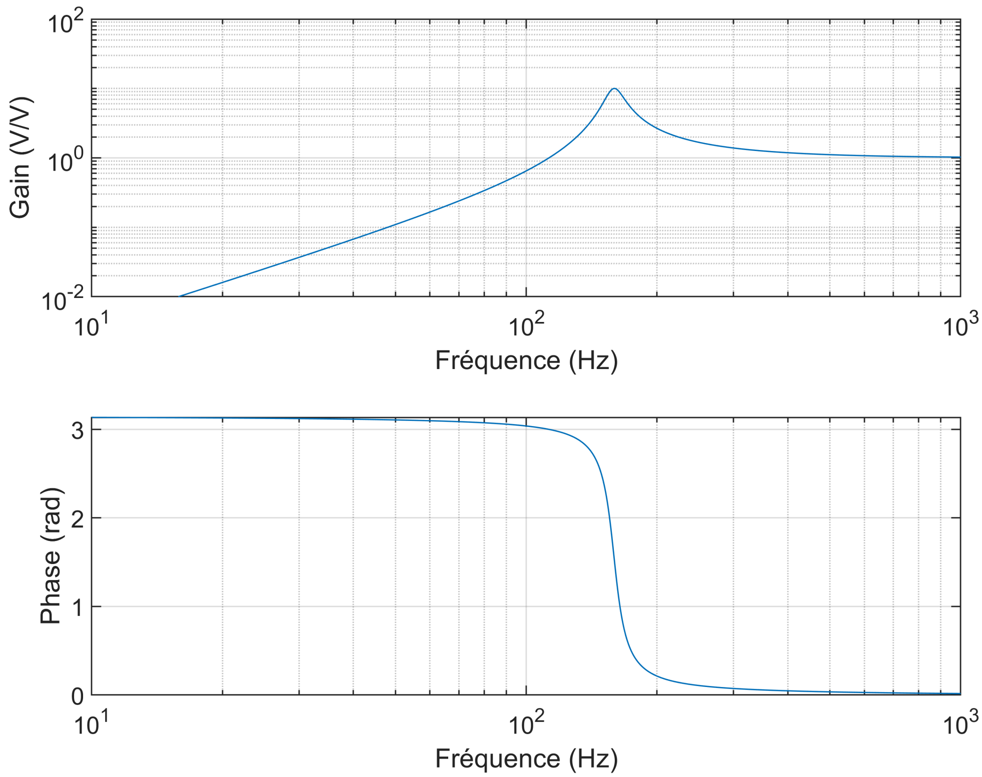
```
H=X(2)/X(1)
```

```
H =
```

$$-\frac{C\,L\,R\,w^2}{-C\,L\,R\,w^2 + \mathrm{i}\,L\,w + R}$$

On retrouve le résultat précedent avant mise sous forme canonique.

```
R=1e3;C=10e-6;L=0.1;
f=logspace(1,3,1000);
w=2*pi*f;
figure
subplot(2,1,1)
loglog(f,abs(subs(H)))
xlabel('Fréquence (Hz)');ylabel('Gain (V/V)');grid;ylim([1e-2,100])
subplot(2,1,2)
semilogx(f,angle(subs(H)))
xlabel('Fréquence (Hz)');ylabel('Phase (rad)');grid
```




```
[Hmax id]=max(double(abs(subs(H))))
```

```
Hmax = 10.0116
id = 602
```

La fréquence de la résonnace est f(id)

```
f(id)
```

```
ans = 159.6626
```

On retrouve les valeur théoriques : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1000 \text{ rd/s} \Longrightarrow f_0 = 159 \text{ Hz}$

$$Q = \frac{R}{L\omega_0} = 10$$

Hmax=Q