

L2 - Techniques mathématiques EEA - HAX304X

Feuille de TD n° 4

Calcul matriciel**Exercice 1**

- 1) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA . Que peut-on en déduire ?
- 2) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB . Que peut-on en déduire ?
- 3) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer AB et AC . Conclusion ?
- 4) Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Conclusion ?

Exercice 2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 3. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant les deux méthodes vues en cours (système linéaire et déterminant).

Exercice 4. On considère le système linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcl} 2x & +2y & +3z = a \\ x & -y & = b \\ -x & +2y & +z = c \end{array} \right.$$

- 1) Le résoudre, i.e. trouver x, y, z en fonction de a, b, c .

Montrer que cela correspond à l'inversion d'une matrice $A \in M_3$. Expliciter A ainsi que son inverse A^{-1} .

- 2) En déduire directement la solution du système $Au = v$, pour $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, puis pour $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ par la méthode de votre choix.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer $\det(A)$.
- 2) En déduire à quelles conditions sur m la matrice A est inversible.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Diagonaliser A (donner ses valeurs propres et vecteurs propres, et expliciter la relation $A = PDP^{-1}$).
- 2) Vérifier que $\det(A)$ est le produit des valeurs propres.

Exercice 8

Soient les matrices :

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Diagonaliser ces matrices (donner leurs valeurs propres, vecteurs propres, et expliciter $A = PDP^{-1}$).
- 2) Vérifier que leur déterminant est bien le produit de leurs valeurs propres.

1) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA . Que peut-on en déduire ?

$$AB = \begin{pmatrix} 5 \times 2 + 1 \times 4 & 5 \times 0 + 1 \times 3 \\ 3 \times 2 - 2 \times 4 & 3 \times 0 - 2 \times 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 0 \times 3 & 2 \times 1 + 0 \\ 4 \times 5 + 3 \times 3 & 4 \times 1 - 3 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$$

Les matrice ne sont pas interchangables dans la multiplication.

$$AB \neq BA$$

2) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB . Que peut-on en déduire ?

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \times 0 - 1 \times 0 & 0 \times -3 - 1 \times 0 \\ 0 \times 2 + 5 \times 0 & 0 \times 3 + 5 \times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S'agit d'une matrice nulle

3) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer AB et AC . Conclusion ?

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \times 4 - 1 \times 5 & 0 \times -1 - 1 \times 4 \\ 0 \times 4 + 3 \times 5 & 0 \times -1 + 3 \times 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 0 \times 2 - 1 \times 5 & 0 \times 5 - 1 \times 4 \\ 0 \times 2 + 3 \times 5 & 0 \times 5 + 3 \times 4 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ +15 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= AC \\ B &\neq C \end{aligned}$$

4) Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Conclusion ?

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 3+0 & -1+1 \\ -2+3 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 0 & 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2AB = 2 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$AB \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$BC \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix}$$

$$c = 0$$

$$a+c = a$$

$$c+d = d$$

$$a+b = b+d$$

$$a = d$$

$$\text{Soit } B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Exercice 3. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant les deux méthodes vues en cours (système linéaire et déterminant).

Via \det : $\frac{1}{\det} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det = 2 \times 1 - 3 \times 4$$

$$\det = 2 - 12$$

$$\det = -10$$

$$\frac{-1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Via résolution linéaire:

On sait que $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résol:

$$\begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 4a+c & 4b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ 4a+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b+3d=0 \\ 4b+d=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
c = 1 - 2a & \rightarrow C = 2 & 2b + 3d = 0 & b = \left(\frac{5}{5} + \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{4} \\
4a + 1 - 2a = 0 & & 2b = -3d & b = \frac{6}{20} \quad b = \frac{3}{10} \\
2a = -1 & & -6d + d = 1 & \\
\rightarrow a = -\frac{1}{2} & & \rightarrow d = -\frac{1}{5} &
\end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ 2 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Exercice 4. On considère le système linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ x - y = b \\ -x + 2y + z = c \end{cases}$$

$$A \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Le résoudre, i.e. trouver x, y, z en fonction de a, b, c .

Montrer que cela correspond à l'inversion d'une matrice $A \in M_3$. Expliciter A ainsi que son inverse A^{-1} .

2) En déduire directement la solution du système $Au = v$, pour $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, puis pour $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y + 3z = a \\ x - y = b \\ -x + 2y + z = c \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z = a &\Rightarrow 2b + 2y + 3z = a \Rightarrow z = \frac{-2b - 4y + a}{3} \\ x = b + y & \\ C = -b - y + 2y + \frac{a}{3} - \frac{2}{3}b - \frac{4}{3}y & \\ C + b + \frac{2}{3}b - \frac{a}{3} = -y + 2y - \frac{4}{3}y & \\ -\frac{1}{3}y = C + \frac{5b}{3} - \frac{a}{3} & \\ y = -3C - 5b + a & \end{aligned}$$

$$\text{Saut } x = b + a - 5b - 3c$$

$$\rightarrow x = a - 4b - 3c$$

$$\rightarrow y = a - 5b - 3c$$

$$\rightarrow z = \frac{a}{3} - \frac{2}{3}b + 4c + \frac{20}{3}b - \frac{4}{3}a = -a + 6b + 4c$$

$$\text{Saut } A^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Exercice 5. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ par la méthode de votre choix.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{-4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer $\det(A)$.
- 2) En déduire à quelles conditions sur m la matrice A est inversible.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (m-1)(1-m) + mn(1-m^2)$$

$$= m - 1 - m + m + m^3$$

$$= (m-1)(-m^2 + m + 2)$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$n_1 = 1 \quad n_2 = \frac{c}{a}$$

$$n_2 = -2$$

$\det(A) = 0$ quand non inversible

La matrice est inversible quand le $\det A$ est pas nul.

Soit les valeurs propres : 1 et -2

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Diagonaliser A (donner ses valeurs propres et vecteurs propres, et expliciter la relation $A = PDP^{-1}$).
- 2) Vérifier que $\det(A)$ est le produit des valeurs propres.

1) Déterminer les valeurs propres

$$\Rightarrow \text{On calcule } \det(A - \lambda I) = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Valeurs propres en calculant $\det(A - \lambda I)$

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 \times 1 = (2-\lambda)^2 - 1$$

Developpement

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\alpha\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
$$\alpha + b + c$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{c}{\alpha} = 3$$

Calc des vecteurs propres

$$\lambda_1 = 1$$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre

$$A_u = \lambda_1 u \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x + 1y &= 1x \\ x + 2y &= 1y \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\det} \text{adj}(A)$$

$$x + y = 0$$

$$x = -y$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres sont à une constante près

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pour $\lambda_2 = 3$

$$\lambda_1 u = \lambda_2 u$$

$$\lambda_2 u \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 3x \\ x + 2y = 3y \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 3x - 2x - x \\ x = y \end{array} \right.$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

$$\text{avec } u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1^o Colonne associée à λ_1
2^o Colonne associée à λ_2

$$PDP^{-1}$$

$$\text{Saut } P^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \det &= 1 - (-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Saut } \det(A) = 4 - 1 = \underline{3} \quad \text{au le prod des V propres et } 3 \times 1 = 3$$

Exercice 8

Soient les matrices :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Diagonaliser ces matrices (donner leurs valeurs propres, vecteurs propres, et expliciter $A = PDP^{-1}$).
- 2) Vérifier que leur déterminant est bien le produit de leurs valeurs propres.

1) Valeur propre $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 2 & 0 & + \\ 0 & 3-\lambda & 0 & - \\ 2 & -4 & 2-\lambda & + \end{array}$$

$$\det(A - \lambda I) = \cancel{(2-\lambda)} \left[(1-\lambda)(3-\lambda) - \cancel{0} \right]$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & \lambda_3 &= 3 \\ \lambda_2 &= 2 \end{aligned}$$

Vektoren proppne

Punkt λ_1

$$A_u = \lambda_1 u \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+ \\ 3y \\ 2x-4y+2z = \end{cases} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -2x \end{cases} u_1 \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix}$$

$$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Punkt λ_2 =

$$A_u = \lambda_2 u_2 \Rightarrow \begin{cases} x+2y = 2x \\ 3y = 2y \\ 2x-4y+2z = 2z \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=z \end{cases} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt λ_3 =

$$A_u = \lambda_3 u_3 \Rightarrow \begin{cases} x+2y = 3x \\ 3y = 3y \\ 2x-4y+2z = 3z \end{cases} \begin{cases} x=y \\ y=y \\ z=-2y \end{cases}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Satz } P^{-1} \Rightarrow \frac{1}{-1} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 2[(1)(5) - (0)(2)] = 1 \times 2 \times 3 = 6 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalisation:

$$1) \det(A - \lambda I)$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 2 - \lambda \left(-1, (-1-\lambda) - 3 \times 2 \right) \\ 2 - \lambda (\lambda^2 + \lambda - 6)$$

Scrit les racines propres pour $\det = 0$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -3 \end{array} \right\} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{array} \right.$$

Vecteur propre ou:

Pour λ_1 :

$$A_u = \lambda u : \begin{cases} 3y - z \\ 2x - y + z \\ + 2z \end{cases} = \begin{cases} 2x \\ 2y \\ 2z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y - \frac{z}{2} \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Sait 2 mechan spezial la doppelte rechnen:

$$y \Rightarrow u_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y \ u_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z \Rightarrow u_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{pam } \lambda = 3$$

$$A_u = \lambda_u : \begin{cases} 3y - z & -3x \\ 2x - y + z & -3y \\ + 2z & -3y \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

→ Sait $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Sait } D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sait } P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Sau'L PDP⁻¹

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$P.D.P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

