DEPARTEMENT D'ENSEIGNEMENT EEA - ELECTRONIQUE - ELECTROTECHNIQUE - AUTOMATIQUE

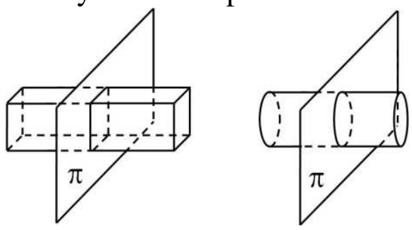
HAE302E - Circuits et Composants Capacitifs et Inductifs

TD 3 Flux d'un champ électrostatique et théorème de Gauss

1- Champ créé par une distribution de charge surfacique.

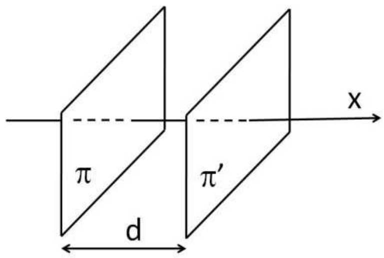
1- On part de l'hypothèse que l'on connait l'orientation du champ électrique créé par un plan infini portant une densité de charge surfacique σ, (dans le TD 3 exo 4 on a montré que dans ce cas $\overrightarrow{E(x)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\vec{u}$).

Montrer à partir de ce résultat que le théorème de Gauss est vérifié. On utilisera comme surface de Gauss un parallélépipède, puis un cylindre. Exprimer ensuite le potentiel V(x).



A.N. Une plaque conductrice de surface S supposée infinie possède une densité surfacique uniforme de charge négative $\sigma^- = -4.3\ \mu C/m^2$. Retrouver l'intensité du champ électrique $\|\vec{E}\|$ en appliquant le théorème de Gauss puis représenter l'orientation du vecteur champ électrique $\vec{E}$ dans tout l'espace.

2- Deux plans infinis parallèles, (π) et (π'), ont respectivement des densités de charge surfaciques de +σ et -σ et sont espacés d'une distance d.



Préciser la direction de champ électrique $\overrightarrow{E(x)}$ puis exprimer son intensité $\|\overrightarrow{E(x)}\|$ et le potentiel V(x).

A.N. La plaque conductrice précédente de densité surfacique négative $\sigma^- = -\ 4.3\ \mu C/m^2$ est mise en regard avec une autre plaque conductrice de densité surfacique $\sigma^+ = +6.8\ \mu C/m^2$
Exprimer l'intensité du champ électrique $\|\overrightarrow{E(x)}\|$ et préciser la direction de $\overrightarrow{E(x)}$.

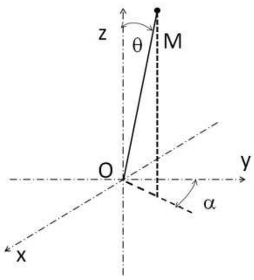
2- Champ et potentiel créés par une sphère chargée en surface.

Déterminer en tout point de l'espace le champ et le potentiel créé par une sphère uniformément chargée en surface +σ.

3- Champ et potentiel par une sphère chargée en volume.

31- On suppose qu'une sphère S de centre O et de rayon R possède une densité de charge volumique uniforme ρ. Exprimer la charge Q portée par cette sphère.
A.N. Calculer Q si $\rho = 2\ 10^{-7}\ C/m^3$ et R=5 mm

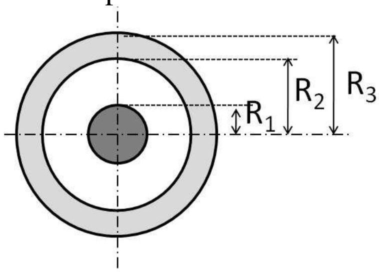
32- Quelle est la direction du champ électrique en tout point de l'espace ?
En prenant un repère cartésien centré sur la sphère, donner l'expression du vecteur unitaire allant du centre de la sphère O en un point M distant de *r* en fonction de $\theta et\ \alpha$.
Exprimer le vecteur champ électrostatique $\overrightarrow{E(r,\theta,\alpha)}$.
Montrer que son module $\left\|\overrightarrow{E(r,\theta,\alpha)}\right\| = \left\|\overrightarrow{E(r)}\right\|$, tracer cette fonction et calculer l'intensité du champ électrique au centre de la sphère et celle au niveau de sa surface



33- Exprimer le potentiel V en tout point de l'espace, tracer cette fonction en fonction de r et calculer sa valeur au centre de la sphère et sur sa surface.

4- Sphères concentriques chargées en volume

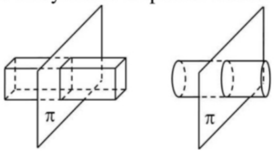
Soit une distribution de charge volumique uniforme ρ à symétrie sphérique constituée d'une charge +Q uniformément répartie dans le volume $r \leq R_1$ et d'une charge -Q uniformément répartie dans le volume $R_2 \leq r \leq R_3$ avec $R_1 < R_2$.
Déterminer l'expression du champ électrique créé par cette distribution en tout point de l'espace. Vérifier la continuité du champ à la frontière de chaque domaine.



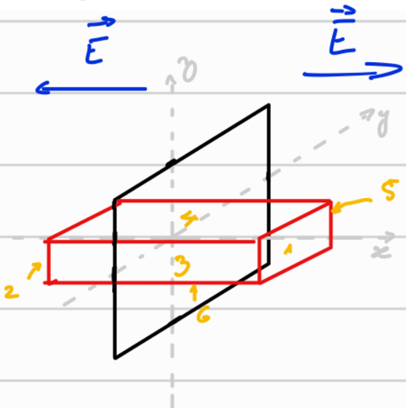
1- <u>Champ créé par une distribution de charge surfacique.</u>

1- On part de l'hypothèse que l'on connait l'orientation du champ électrique créé par un plan infini portant une densité de charge surfacique σ, (dans le TD 3 exo 4 on a montré que dans ce cas $\overrightarrow{E(x)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\vec{u}$).

Montrer à partir de ce résultat que le théorème de Gauss est vérifié. On utilisera comme surface de Gauss un parallélépipède, puis un cylindre. Exprimer ensuite le potentiel V(x).



A.N. Une plaque conductrice de surface S supposée infinie possède une densité surfacique uniforme de charge négative $\sigma^- = -4.3\ \mu C/m^2$. Retrouver l'intensité du champ électrique $\|\vec{E}\|$ en appliquant le théorème de Gauss puis représenter l'orientation du vecteur champ électrique $\vec{E}$ dans tout l'espace.



Soit Gauss : $\oiint E.dS = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

Surface ①: $\vec{dS_1} = dy\,dz\,\vec{u_x}$

② $\vec{dS_2} = -dy\,dz\,\vec{u_x}$

③ $\vec{dS_3} = -dx\,dz\,\vec{u_z}$

④ $\vec{dS_4} = dx\,dy\,\vec{u_y}$

⑤ $\vec{dS_5} = dx\,dz\,\vec{u_z}$

⑥ $\vec{dS_6} = -dx\,dy\,\vec{u_y}$

$$\oiint E\,dS = \iint_{S_1} \overbrace{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}}^{E} \cdot \overbrace{\vec{u_x}\,dy\,dz}^{dS_1} +$$

$$\iint_{S_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}\,(-\vec{u_x})\,dy\,dz +$$

$$\underbrace{\iint_{S_3} \operatorname{sgn}(x)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}\,(-u_y)\,dx\,dy}_{0} +$$

$$+ \underset{S_4}{0} + \underset{S_5}{0} + \underset{S_6}{0}$$

Soit $\oiint_T E.dS = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.S_1 u_x - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.S_2 - \vec{u_x}$

$S_1 = S_2 = \int_0^a\int_0^a dy\,dz$ → si un carré = a^2

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}a^2 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}a^2$$

$\sigma . S = Q$

$\oiint E.dS = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}a^2$ et $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ =>

⚠ pour un carré

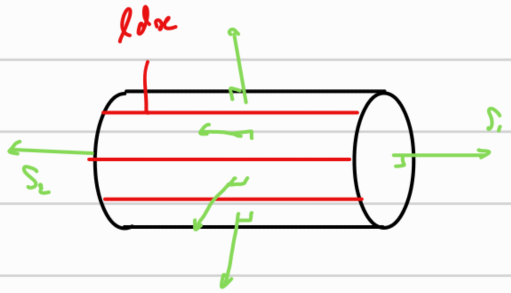
Soit $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \times S_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}$

On a bien retrouvé la solution de base.

Soit on a vérifié $\oiint E.dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Cylindre

dx l'épaisseur



E et les vecteurs surface des generatrice sont $\perp$ $E.dS = 0$
il reste donc que S_1 et S_2

$$\oiint E \cdot dS = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

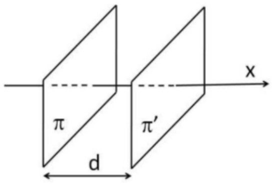
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x \cdot \pi r^2 \vec{u}_x + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x \cdot \pi r^2 (-\vec{u}_x)$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\pi r^2$$

$$= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0}$$

Faire attention au sens de E que l'on det intuitivement. en generale la 1° etape

2- Deux plans infinis parallèles, (π) et (π'), ont respectivement des densités de charge surfaciques de +σ et -σ et sont espacés d'une distance d.



Préciser la direction de champ électrique $\overrightarrow{E(x)}$ puis exprimer son intensité $\|\overrightarrow{E(x)}\|$ et le potentiel V(x).

A.N. La plaque conductrice précédente de densité surfacique négative $\sigma^- = -4.3\ \mu C/m^2$ est mise en regard avec une autre plaque conductrice de densité surfacique $\sigma^+ = +6.8\ \mu C/m^2$
Exprimer l'intensité du champ électrique $\|\overrightarrow{E(x)}\|$ et préciser la direction de $\overrightarrow{E(x)}$.

2/ Soit E → orientés du ⊕ → ⊖

En fonction du point où l'on se trouve l'on change la norme de

Ex soit : Pour un point P entre π et π' =>

$E_{tot} = E_{\pi} + E_{\pi'}$

Soit pour une plaque infinie : Thm de Gauss

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$ → Sachant $\vec{E} // \vec{S}$

$$E\cdot 2S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

2 car On a les 2 surface → $E = \frac{\sigma \cancel{S}}{\varepsilon_0 2\cancel{S}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$$\left(\frac{+\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_y}\right) + \left(-\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_y}\right)$$

Exe 2

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{u}_E$: Vecteur unitaire de $\vec{E}$

$$E\cdot\vec{u}_E\cdot\vec{dS} \qquad \vec{u}_E \parallel \vec{dS} = \cos(0) \qquad \vec{u}_E = \begin{vmatrix} x & \sin\alpha\cos\theta \\ y & \sin\alpha\sin\theta \\ z & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$E\oiint dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E\cdot 4\pi\varepsilon_0 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

– Pour $r \leq R \rightarrow Q_{int} = 0$

$$\hookrightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0$$

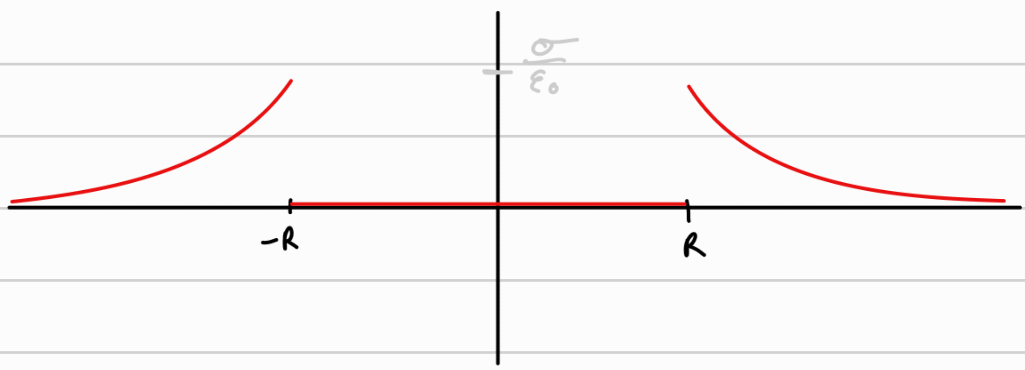
– Pour $r \geq R$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\sigma R^2}{r^2\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Etude de la courbe



⚠ A $r = R$

$E(R) = 0$ car on travaille avec surface sans epaisseur.

Soit $E = -\overrightarrow{grad}(V)$.   Suivant l'orientation $\vec{u_E}$

On a : $E(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$

$$V = -\int E(r)\,dr$$

$$V = -\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$V = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\int -\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} + cte$$

$$= \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + cte$$

$cte = 0$

l'on fait l'hypothèse que a l'infine l'on a pas de V

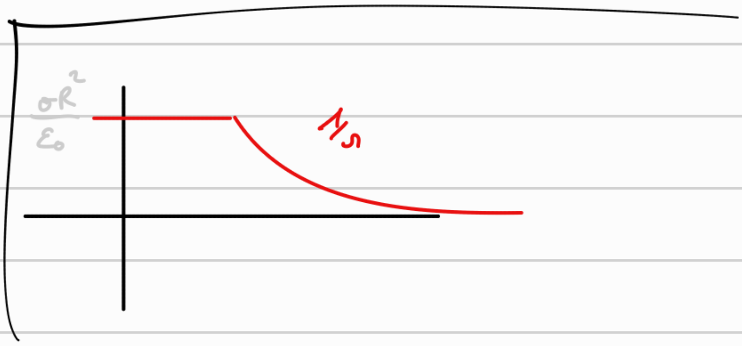
Soit pour $r \leq R \Rightarrow E = 0 \rightarrow V(r) = cte$

Sachant que le potentille sur le point R est egale au potentille sur le point $r = R$

$$V(r) = cte \Rightarrow V(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

Pour $r \geq R$, l'on a : $\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$

Soit la courbe



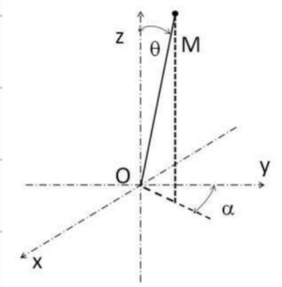
Ex 3 une sphère chargé en Volume

1) Soit la charge volumie de la sphere s'exprime :

$$Q = V \times \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \rho$$

$$= \frac{4}{3}\pi \times 2 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}005^3$$

$$= 1{,}05 \cdot 10^{-13}\ C$$



2) Soit la direction du champ E en tout point de l'espace, orienté par le vecteur surface u_E

$$u_E = \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\alpha \\ \sin\theta \cdot \cos\alpha \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Soit Thm de Gauss

$$\oiint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

Si $r < R$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho 4\pi r^3}{3 \cdot 4\pi r^2 \varepsilon_0} = \underline{\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$$

Pour $r > R$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\rho\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

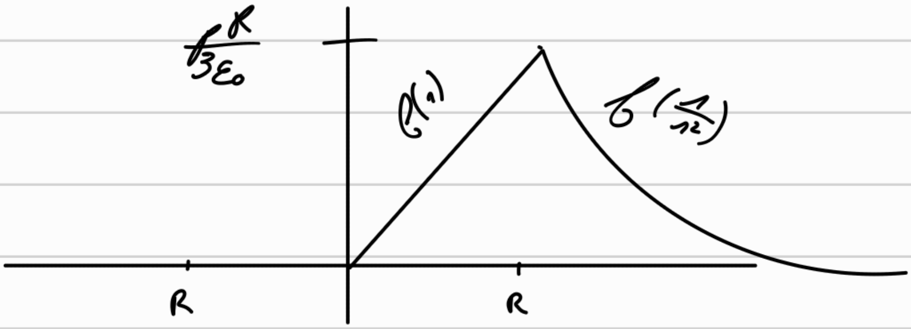
$$E = \frac{4\pi R^3 \rho}{3 \times 4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Soit la Continuité du champ E :

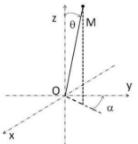
En $r = R$: $\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R$

Soit $E(r)$: il n'est déf que par (r)

Soit le tracer de la courbe E



32- Quelle est la direction du champ électrique en tout point de l'espace ?
En prenant un repère cartésien centré sur la sphère, donner l'expression du vecteur unitaire allant du centre de la sphère O en un point M distant de r en fonction de θ et α.
Exprimer le vecteur champ électrostatique $\overrightarrow{E(r,\theta,\alpha)}$.
Montrer que son module $\|\overrightarrow{E(r,\theta,\alpha)}\| = \|\overrightarrow{E(r)}\|$, tracer cette fonction et calculer l'intensité du champ électrique au centre de la sphère et celle au niveau de sa surface



33- Exprimer le potentiel V en tout point de l'espace, tracer cette fonction en fonction de r et calculer sa valeur au centre de la sphère et sur sa surface.

Pour V on sait que $E = -\mathrm{Grad}\,\vec{V}$

Soit $V = -\int E(r)\,dr$

Soit pour $r \leq R$ $\quad V(r) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \int r$

$$= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{r^2}{2} + cte$$

pour $r \geq R$ $\quad V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \int -\frac{1}{r^2}$

$$V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{R} + cte'$$

Hypothèse.
$\Rightarrow cte' = 0$
$\lim_{r \to +\infty} = 0$

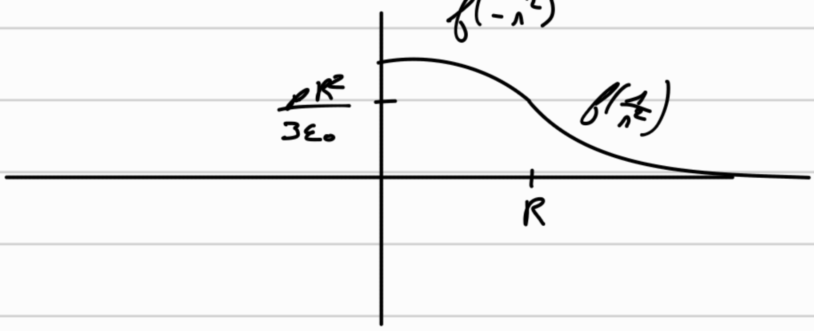
Soit Continuité du potentielle.

Soit def cte.

$$\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2} + cte = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

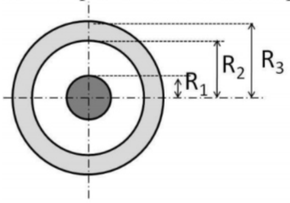
$$\frac{-R^2}{2} + cte = R^2$$

$$cte = \frac{R^2}{2} + \frac{2R^2}{2} = \frac{3R^2}{2}$$



4- <u>Sphères concentriques chargées en volume</u>

Soit une distribution de charge volumique uniforme ρ à symétrie sphérique constituée d'une charge $+Q$ uniformément répartie dans le volume $r \leq R_1$ et d'une charge $-Q$ uniformément répartie dans le volume $R_2 \leq r \leq R_3$ avec $R_1 < R_2$.
Déterminer l'expression du champ électrique créé par cette distribution en tout point de l'espace. Vérifier la continuité du champ à la frontière de chaque domaine.



Soit pour resoudre l'equation du Champ E
On utilisera le thm de Gauss. On verifia la continuite en fixant les bonne constante.

Soit $r_1 < R$

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0} + cte \qquad \rightarrow \rho = \frac{Q\,3}{4\pi R_1^3} \qquad \left| E(r) = \frac{r\,Q}{4\pi R_1^3 \varepsilon_0}\right.$$

Pour $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\oiint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi R_1^3 \rho}{3\,\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{R_1^3 \rho}{3\varepsilon_0 r^2} \qquad \rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R_1^3} \qquad \left| E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right.$$

$R_2 \leq r < R_3$

$$\oiint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad \rho = \frac{-Q}{\frac{4}{3}\pi(R_3^3 - R_2^3)}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{int} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_2^3)$$

$$Q_{int} = \frac{-Q}{\frac{4}{3}\pi(R_3^3 - R_2^3)} \cdot \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_2^3)$$

$$E = \frac{-Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\left(\frac{r^3 - R_2^3}{R_3^3 - R_2^3}\right)$$

$$Q_{int} = -Q\left(\frac{r^3 - R_2^3}{R_3^3 - R_2^3}\right)$$

Simplification:

$$\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_3^3 - R_2^3)} \times \left(\frac{r^3 - R_2^3}{r^2}\right)$$

$$\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_3^3 - R_2^3)} \cdot \left(r - \frac{R_2^3}{r^2}\right)$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_3^3 - R_2^3)}\left(\frac{R_2^3}{r^2} - r\right)$$

Pour $r \geq R_3$

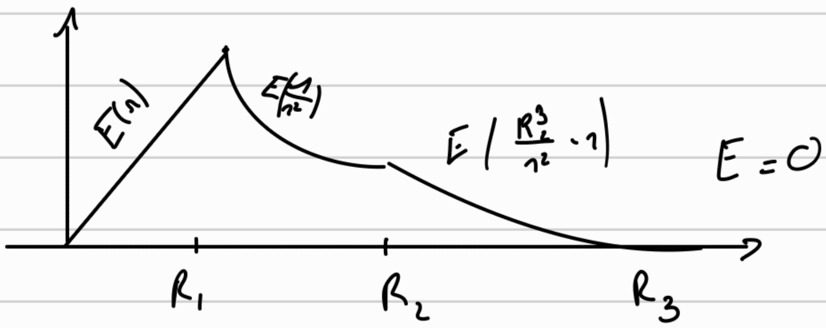
$$\oiint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \quad Q_2 = -Q_1$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

$$\underline{E = 0}$$

Graphe de E



Calcul du Potentielle.

Soit $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

d'où $V = -\int E(r)\, dr$

⚠ On fait l'hypothèse que en $\lim_{r \to +\infty} V = 0$

On étudiera le l'extérieur vers l'intérieur

pour calculer les constante directement.

Pour $r \geq R_3$

$$V = -\int E(r)\, dr \Rightarrow V = -\int cte \quad \Rightarrow \underline{V = 0}$$

Pour $R_2 \leq r < R_3$

$$V(r) = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_3^3 - R_2^3)} \left(\frac{R_2^3}{r^2} - r \right) dr$$

$$V(r) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_3^3 - R_2^3)} \int \frac{R_2^3}{r^2} - r \, dr$$

$$r^{-2} = -\frac{1}{r}$$

$$V(r) = 4\left[\frac{-R_2^3}{r} - \frac{r^2}{2} \right] + cte$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_3^3 - R_2^3)} \left(\frac{R_2^3}{r} + \frac{r^2}{2} + cte \right)$$

la cte determiner par continuité du champ :

$$\frac{R_2^3}{r} + \frac{r^2}{2} + cte = 0 \quad \text{pour } r = R_3$$

$$cte = \frac{-2R_2^3}{2} - \frac{R_3^2}{2} = \frac{-2R_2^3 - R_3^2}{2}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_3^3 - R_2^3)} \left(\frac{R_2^3}{r} + \frac{r^2}{2} - \frac{2R_2^3 - R_3^2}{2} \right)}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{\cancel{2R_2^3} + r^2 - \cancel{2R_2^3} - R_3^2}{2} \right)$$

Pour $R_1 \leq r < R_2$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$V(r) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{r^2}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} + cte \right)$$

cte . det par continuité

$$cte = \frac{R_2^2 - R_3^2}{2R_3^3 - 2R_2^3} - \frac{1}{R_2}$$

$$cte = \frac{1}{2} - \frac{1}{R_2}$$

$$= \frac{R_2 - 2}{2R_2}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{R_2 - 2}{2R_2} \right)}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{2R_2 + R_2 \times r - 2r}{2R_2 \times r} \right)$$

Pour $r \leq R_1$

$E(r) = \frac{r Q}{4\pi R_1^3 \varepsilon_0}$ $\longrightarrow$ $V = -\frac{Q}{4\pi R_1^3 \varepsilon_0} \cdot \int r$

$V = \frac{-Q}{4\pi R_1^3 \varepsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + cte \right)$

$V = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left(-\frac{r^2}{2R_1^3} + cte \right)$

cte def par continuité en R_1

$cte = \frac{2R_2 + R_2 \times R_1 - 2R_1}{2R_2 \times R_1} + \frac{1}{2R_1}$

$cte = \frac{4R_1R_2 + 2R_1^2R_2 - 4R_1^2 + 2R_2R_1}{4R_2R_1^2}$

$cte = \frac{6R_1R_2 + 2R_1^2R_2 - 4R_1^2}{4R_2R_1^2}$