Université de Montpellier - Faculté des Sciences - Département EEA – L2
HAE304X Outils mathématiques pour l'EEA
Contrôle continu n°1 - 11 octobre 2021 – durée 1h

Exercice 1 (1-2-2-1 points)
Déterminez en justifiant les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2+4x}{-x^2-2x+8}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

Exercice 2 (1 – 1 - 1 points)
Déterminez les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \arctan(\sin x)$

2) $f(x) = \frac{8^{2x}}{2x}$

3) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}\right)$

Exercice 3 (1 – 2 – 2 – 2 points)
Déterminez en justifiant les développements limités suivants :

1) $DL_6(0)$ de $f(x) = (\sin x)(\ln(1+x))$

2) $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$

3) $DL_2(1)$ de $f(x) = \ln(2+x)$

4) $DL_3(0)$ de $f(x) = \tan x$

Exercice 4 (2 - 2 points)
Déterminez les limites suivantes en utilisant les développements limités :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x}$

Formulaire de développement limités

Les développements limités ci-dessous sont valables quand **x tend vers 0** et uniquement dans ce cas.

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

....

$$(1+x)^a \underset{x\to 0}{=} 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (a \text{ réel donné})$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + o(x^n) \text{ et en particulier } (1+x)^a \underset{x\to 0}{=} 1 + ax + o(x) \text{ et donc } \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

....

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

L2 - CC1 - Oct 2021 Corrigé

Exo1 /6

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2+4x}{-x^2-2x+8} \quad FI\ \frac{0}{0} \quad \text{Hôpital} : \lim_{x\to -4} \frac{2x+4}{-2x-2} \to -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} \quad fi\ \frac{0}{0} \quad \frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+2)}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = -(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+2)$$

$$\lim_{x\to 2} = -(\sqrt{2}+\sqrt{2})(2+2) = -8\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1} \quad fi\ \frac{0}{0} \quad \lim_{x\to 1} = f'(1) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \quad fi\ \frac{0}{0} \quad \lim_{x\to 0} = f'(0) = 1 \quad (1)$$

Exo2 /3

$$f(x) = \arctan(\sin x) \quad f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{8^{2x}}{2x} = \frac{e^{2x\ln 8}}{2x} \quad f'(x) = \frac{8^{2x}(2x\ln 8 - 1)}{2x^2} \quad (1)$$

$$\rightarrow \frac{8^{2x}(4x\ln 8 - 2)}{(2x)^2}$$

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2+\frac{1}{x}} = \ln\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \quad f'(x) = \frac{1}{2x}\left(\frac{2x^3-1}{x^3+1}\right) \quad (1)$$

$$\frac{2x^3-1}{2x^4+2x}$$

Exo3 /7

$$\ln(1+x)\sin x \sim \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ldots\right) = x^2-\frac{x^3}{2}+x^4\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3}\right)+x^5\left(\frac{1}{2\times 3!}+\frac{1}{4}\right)$$

$$+x^6\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{3}\frac{1}{3!}\right)+o(x^6) \quad (1)$$

$$\approx x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{6}+\frac{11}{72}x^6+o(x^6)$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} \quad \text{soit } u = x+x^2 \rightarrow \frac{1}{1+u} \sim 1-u+u^2-u^3 \ldots$$

$$\text{donc } \frac{1}{1+x+x^2} \sim 1-x+x^3-x^4+o(x^4) \quad (2)$$

$\ln(2+x)$ au (1)

$$\ln(2+x) = \ln(2+x+1-1) = \ln(3+x-1) \qquad x-1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0$$

$$= \ln\left(3\left(1+\frac{x-1}{3}\right)\right)$$

$$= \ln 3 + \ln\left(1+\frac{x-1}{3}\right) \qquad u = \frac{x-1}{3}$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

$$\rightarrow \ln(2+x) \sim \ln 3 + \left(\frac{x-1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + o(x-1)^2 \quad (2)$$

$$\tan(x) \sim x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad (2)$$

Exo4 /4

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \lim_{x\to} \frac{2x}{\ln(1+x)-\ln(1-x)}$$

$$= \frac{2x}{\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} \to \frac{2x}{2x} = 1$$

2

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x} = \frac{1+\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\dots\right)}{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\dots\right)}$$

$$\to \frac{0-x^2+o(x^2)}{+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \to -2$$

2