Équations différentielles

Fiche de Léa Blanc-Centi.

1 Ordre 1

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes:

1. $y' + 2y = x^2$ (E_1)
2. $y' + y = 2\sin x$ (E_2)
3. $y' - y = (x+1)e^x$ (E_3)
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$ (E_4)

Correction ▼ Vidéo ■ [006991]

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in [0;1],\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006992]

Exercice 3

1. Résoudre l'équation différentielle $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$ sur $]0;\pi[$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006993]

Exercice 4 Variation de la constante

Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0;+\infty[$
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$
3. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0;+\infty[$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006994]

Exercice 5

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

1. $a = 0$
2. $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$)

Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006995]

Exercice 6

Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $x^2y' - y = 0$ (E_1)
2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006996]

2 Second ordre

Exercice 7

Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$
4. $y'' + y = 2\cos^2 x$

Correction ▼ Vidéo ■ [006997]

Exercice 8

On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006998]

Exercice 9

Résoudre sur $]0;\pi[$ l'équation différentielle $y'' + y = \operatorname{cotan} x$, où $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006999]

Exercice 10

Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1. $x^2y'' + xy' + y = 0$, sur $]0;+\infty[$, en posant $x = e^t$;
2. $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).

Correction ▼ Vidéo ■ [007000]

3 Pour aller plus loin

Exercice 11 Équations de Bernoulli et Riccati

1. **Équation de Bernoulli**

   (a) Montrer que l'équation de Bernoulli

   $$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$

   se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.

   (b) Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

2. **Équation de Riccati**

   (a) Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

   $$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

   alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

   (b) Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [007001]

Exercice 12

1. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + e^{x^2}y = 0$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + e^{x^2}y = 0$ est bornée. (*Indication :* étudier la fonction auxiliaire $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2}y'(x)^2$.)

Correction ▼ Vidéo ■ [007002]

Exercice 13

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle $x^2y'' + y = 0$ (utiliser le changement de variable $x = e^t$).
2. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \neq 0, \ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Correction ▼ Vidéo ■ [007003]

Indication pour **l'exercice 2 ▲**

Une telle fonction f est solution d'une équation différentielle $y' + y = c$.

Indication pour **l'exercice 3 ▲**

1. x est solution particulière
2. cos est solution particulière

Indication pour **l'exercice 4 ▲**

Solution particulière :

1. $-\frac{1}{2x}$
2. $\frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x)$
3. $\frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$

Indication pour **l'exercice 5 ▲**

1. C'est une équation à variables séparées.

Indication pour **l'exercice 6 ▲**

1. une infinité de solutions
2. une solution

Indication pour **l'exercice 8 ▲**

Pour la fin: principe de superposition.

Indication pour **l'exercice 9 ▲**

Utiliser la méthode de variation de la constante.

Indication pour **l'exercice 11 ▲**

1. (a) Se ramener à $\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$.
   (b) $y = \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}}$ ou $y = 0$.
2. (a) Remplacer y par $u + y_0$.
   (b) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln|x|+\lambda x}$ ou $y = \frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

   On commence par résoudre l'équation homogène associée $y'+2y=0$: les solutions sont les $y(x)=\lambda e^{-2x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

   Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_1). Le second membre étant polynomial de degré 2, on cherche une solution particulière de la même forme:
   $y_0(x)=ax^2+bx+c$ est solution de (E_1)
   $\iff \forall x\in\mathbb{R},\ y_0'(x)+2y_0(x)=x^2$
   $\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 2ax^2+(2a+2b)x+b+2c=x^2$
   Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ convient.
   Les solutions de (E_1) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène:
   $$y(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\lambda e^{-2x}\quad (x\in\mathbb{R})$$
   où λ est un paramètre réel.

2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

   Les solutions de l'équation homogène associée $y'+y=0$ sont les $y(x)=\lambda e^{-x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

   Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_2). Le second membre est cette fois une fonction trigonométrique, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de cos et sin:
   $y_0(x)=a\cos x+b\sin x$ est solution de (E_2)
   $\iff \forall x\in\mathbb{R},\ y_0'(x)+y_0(x)=2\sin x$
   $\iff \forall x\in\mathbb{R},\ (a+b)\cos x+(-a+b)\sin x=2\sin x$
   Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x)=-\cos x+\sin x$ convient.
   Les solutions de (E_2) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène:
   $$y(x)=-\cos x+\sin x+\lambda e^{-x}\quad (x\in\mathbb{R})$$
   où λ est un paramètre réel.

3. Les solutions de l'équation homogène associée $y'-y=0$ sont les $y(x)=\lambda e^x$, $\lambda\in\mathbb{R}$. On remarque que le second membre est le produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynomiale de degré $d=1$: or la fonction exponentielle du second membre est la même (e^x) que celle qui apparaît dans les solutions de l'équation homogène. On cherche donc une solution particulière sous la forme d'un produit de e^x par une fonction polynomiale de degré $d+1=2$:
   $y_0(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ est solution de (E_3)
   $\iff \forall x\in\mathbb{R},\ y_0'(x)-y_0(x)=(x+1)e^x$
   $\iff \forall x\in\mathbb{R},\ (2ax+b)e^x=(x+1)e^x$
   Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x)=(\frac{1}{2}x^2+x)e^x$ convient.
   Les solutions de (E_3) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène:
   $$y(x)=(\frac{1}{2}x^2+x+\lambda)e^x\quad (x\in\mathbb{R})$$
   où λ est un paramètre réel.

4. Les solutions de l'équation homogène associée $y'+y=0$ sont les $y(x)=\lambda e^{-x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. On remarque que le second membre est la somme d'une fonction polynomiale de degré 1, d'une fonction exponentielle (différente de e^{-x}) et d'une fonction trigonométrique. D'après le principe de superposition, on cherche donc une solution particulière sous la forme d'une telle somme:
$y_0(x)=ax+b+\mu e^x+\alpha\cos x+\beta\sin x$ est solution de (E_4)
$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ y_0'(x)+y_0(x)=x-e^x+\cos x$
$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ ax+a+b+2\mu e^x+(\alpha+\beta)\cos x+(-\alpha+\beta)\sin x=x-e^x+\cos x$
Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que
$$y_0(x)=x-1-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$$
convient.
Les solutions de (E_4) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène:
$$y(x)=x-1-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+\lambda e^{-x}\quad (x\in\mathbb{R})$$
où λ est un paramètre réel.

Correction de l'exercice 2 ▲

Une fonction $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ convient si et seulement si

- f est dérivable
- f est solution de $y'+y=c$
- f vérifie $f(0)+f(1)=c$ (où c est un réel quelconque)

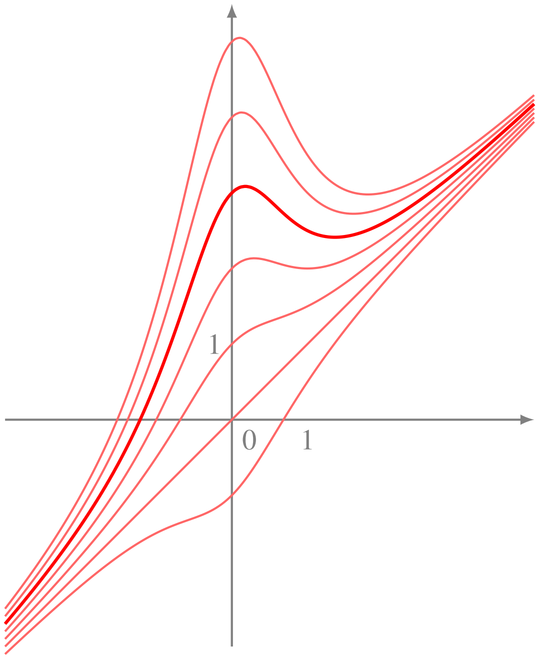
Or les solutions de l'équation différentielle $y'+y=c$ sont exactement les $f:x\mapsto\lambda e^{-x}+c$, où $\lambda\in\mathbb{R}$ (en effet, on voit facilement que la fonction constante égale à c est une solution particulière de $y'+y=c$). Évidemment ces fonctions sont dérivables, et $f(0)+f(1)=\lambda(1+e^{-1})+2c$, donc la troisième condition est satisfaite si et seulement si $-\lambda(1+e^{-1})=c$.
Ainsi les solutions du problème sont exactement les
$$f(x)=\lambda(e^{-x}-1-e^{-1})$$
pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Comme le coefficient de y' ne s'annule pas, on peut réécrire l'équation sous la forme
$$y'+\frac{2x}{x^2+1}y=\frac{3x^2+1}{x^2+1}$$
   (a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x)=\lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x)=-\frac{2x}{x^2+1}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u>0$, on peut choisir $A(x)=-\ln(u(x))$ où $u(x)=x^2+1$. Les solutions sont donc les $y(x)=\lambda e^{-\ln(x^2+1)}=\dfrac{\lambda}{x^2+1}$.
   (b) Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre: on remarque que $y_0(x)=x$ convient.
   (c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme:
$$y(x)=x+\frac{\lambda}{x^2+1}\quad (x\in\mathbb{R})$$
   où λ est un paramètre réel.

(d) $y(0)=3$ si et seulement si $\lambda=3$. La solution cherchée est donc $y(x)=x+\frac{3}{x^2+1}$.

Voici les courbes intégrales pour $\lambda=-1,0,\ldots,5$.



2. On commence par remarquer que $y_0(x)=\cos x$ est une solution particulière. Pour l'équation homogène: sur l'intervalle considéré, le coefficient de y' ne s'annule pas, et l'équation se réécrit

$$y'-\frac{\cos x}{\sin x}y=0$$

Les solutions sont les $y(x)=\lambda e^{A(x)}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$ et A est une primitive de $a(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u>0$, on peut choisir $A(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=\sin x$. Les solutions de l'équation sont donc les $y(x)=\lambda e^{\ln(\sin x)}=\lambda\sin x$.

Finalement, les solutions de l'équation sont les

$$y(x)=\cos x+\lambda\sin x$$

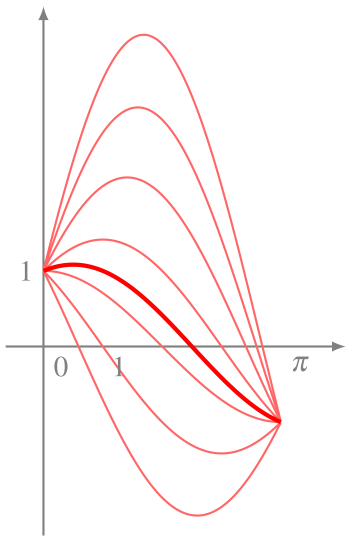
où λ est un paramètre réel.

3. On a

$$y(\frac{\pi}{4})=1\iff\cos\frac{\pi}{4}+\lambda\sin\frac{\pi}{4}=1\iff\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\lambda)=1\iff\lambda=\frac{2}{\sqrt{2}}-1$$

La solution cherchée est $y(x)=\cos x+\left(\frac{2}{\sqrt{2}}-1\right)\sin x$

Voici les courbes intégrales pour $\lambda=-2,-1,0,\ldots,4$ et $\frac{2}{\sqrt{2}}-1$ (en gras).



Correction de l'exercice 4 ▲

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0;+\infty[$

   (a) **Résolution de l'équation homogène** $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0$**.**
   Une primitive de $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$ est $A(x) = x^2 - \ln x$, donc les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x^2 - \ln x) = \lambda \frac{1}{x}\exp(x^2)$, pour λ une constante réelle quelconque.

   (b) **Recherche d'une solution particulière.**
   Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$. On cherche une telle solution sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.
   On calcule d'abord

   $$y_0'(x) = \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2)$$

   Maintenant :

   $$\begin{aligned}
   & y_0 \quad \text{est solution de } y' - (2x + \frac{1}{x})y = 1 \\
   \iff & y_0' - (2x - \frac{1}{x})y_0 = 1 \\
   \iff & \lambda'(x)x\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2) - (2x - \frac{1}{x})\lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \\
   \iff & \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \qquad \text{cela doit se simplifier !} \\
   \iff & \lambda'(x) = x\exp(-x^2)
   \end{aligned}$$

   Ainsi on peut prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{2}\exp(x^2)$, ce qui fournit la solution particulière :

   $$y_0(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2x}$$

   Pour se rassurer, on n'oublie pas de vérifier que c'est bien une solution !

   (c) **Solution générale.**
   L'ensemble des solutions s'obtient par la somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène. Autrement dit, les solutions sont les :

   $$y(x) = -\frac{1}{2x} + \lambda\frac{1}{x}\exp(x^2) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$

   (a) **Résolution de l'équation homogène $y' - y = 0$.**
   Les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) **Recherche d'une solution particulière.**
   On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)\exp(x)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.
   Comme $y_0'(x) = \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x)$ alors

$$\begin{aligned}
& y_0 \quad \text{est solution de } y' - y = x^k \exp(x) \\
\iff & \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x) - \lambda(x)\exp(x) = x^k \exp(x) \\
\iff & \lambda'(x)\exp(x) = x^k \exp(x) \\
\iff & \lambda'(x) = x^k
\end{aligned}$$

   On fixe $\lambda(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, ce qui conduit à la solution particulière :

$$y_0(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x)$$

   (c) **Solution générale.**
   L'ensemble des solutions est formé des

$$y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x) + \lambda \exp(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0;+\infty[$
   Le coefficient de y' ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, l'équation peut donc se mettre sous la forme

$$y' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}y = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$$

   (a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ avec $u(x) = 1+\ln^2(x)$. Les solutions de l'équation sont les $y(x) = \lambda e^{-\ln(1+\ln^2(x))} = \dfrac{\lambda}{1+\ln^2(x)}$.

   (b) Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{1+\ln^2(x)}$, avec λ une fonction dérivable. Or $z(x) = \frac{1}{1+\ln^2(x)}$ est solution de l'équation homogène et $y_0(x) = \lambda(x)z(x)$:

$$\begin{aligned}
& y_0 \quad \text{est solution} \\
\iff & y_0' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}y_0 = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \lambda'(x)z(x) + \lambda(x)\underbrace{\left[z'(x) + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}z(x)\right]}_{=0} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \frac{\lambda'(x)}{1+\ln^2(x)} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \lambda'(x) = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

   On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln x$, ce qui donne la solution particulière $y_0(x) = \frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$.

(c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène: ce sont les

$$y(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1 + \ln^2(x)} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Remarque: le choix d'une primitive de λ' se fait à constante additive près. Si on avait choisi par exemple $\lambda(x) = \ln x + 1$, la solution particulière aurait été différente, mais les solutions de l'équation avec second membre auraient été les

$$y(x) = \frac{\ln x + 1 + \lambda}{1 + \ln^2(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Quitte à poser $\lambda_0' = 1 + \lambda$, ce sont évidemment les mêmes que celles trouvées précédemment!

Correction de l'exercice 5 ▲

1. L'équation différentielle $y' - e^x e^y = 0$ est à variables séparées: en effet, en divisant par e^y, on obtient $-y'e^{-y} = -e^x$. Le terme de gauche est la dérivée de e^{-y} (y est une fonction de x), celui de droite est la dérivée de $x \mapsto -e^x$:

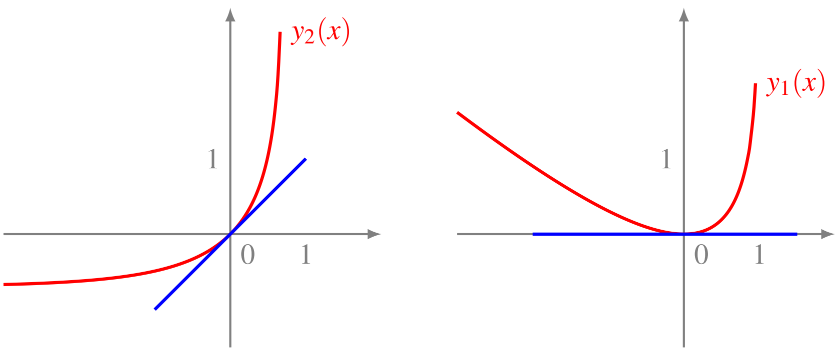
$$\frac{\mathrm{d}e^{-y}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(-e^x)}{\mathrm{d}x}$$

Les dérivées étant égales, cela implique que les deux fonctions sont égales à une constante additive près: ainsi y est solution sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $e^{-y} = -e^x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $-e^x + c > 0$, c'est-à-dire si $c > 0$ et $x < \ln c$. On obtient ainsi les solutions:

$$y_c(x) = -\ln(c - e^x) \quad (\text{pour } x \in I_c =]-\infty; \ln c[)$$

où c est un paramètre réel strictement positif.

Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c > 0$ tel que $0 \in I_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 1$ et $c - 1 = 1$. Il s'agit donc de $y_2 : x \mapsto -\ln(2 - e^x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $I_2 =]-\infty; \ln 2[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_2'(0) = e^0 e^{y(0)} = 1$, c'est la première bissectrice. Comme par construction y_2' est à valeurs strictement positives, la fonction y_2 est strictement croissante.



2. Posons $z(x) = x + y(x)$: z a le même domaine de définition que y et est dérivable si et seulement si y l'est. En remplaçant $y(x)$ par $z(x) - x$ dans l'équation différentielle $y' - e^x e^y = -1$, on obtient $z' - e^z = 0$, c'est-à-dire $z'e^{-z} = 1$. Il s'agit de nouveau d'une équation à variables séparées: en intégrant cette égalité, on obtient que z est solution sur J si et seulement si elle est dérivable sur J et $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in J$, $e^{-z} = -x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $c > x$. On obtient ainsi les solutions:

$$y_c(x) = z_c(x) - x = -x - \ln(c - x) \quad (\text{pour } x \in J_c =]-\infty; c[)$$

où c est un paramètre réel.

Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $0 \in J_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 0$ et $c = 1$. Il s'agit donc de $y_1 : x \mapsto -x - \ln(1-x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $J_1 =]-\infty; 1[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_1'(0) = e^0 e^{y(0)} - 1 = 0$: elle est horizontale.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $x^2y' - y = 0$ (E_1)

   Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas: on se place donc sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.

   (a) **Résolution sur** $]-\infty; 0[$ **ou** $]0; +\infty[$**.**
   Sur chacun de ces intervalles, l'équation différentielle se réécrit
   $$y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$
   qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients non constants. Ses solutions sont de la forme $y(x) = \lambda e^{-1/x}$ (en effet, sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$, une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $\frac{-1}{x}$).

   (b) **Recollement en** 0**.**
   Une solution y de (E_1) sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, il existe donc $\lambda_+,\ \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que
   $$y(x) = \begin{cases} \lambda_+ e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ \lambda_- e^{-1/x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$
   Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$: autrement dit, pour quels choix de $\lambda_+,\ \lambda_-$ la fonction y se prolonge-t-elle en 0 en une fonction dérivable vérifiant (E_1)?

   - $e^{-1/x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} +\infty$ et $e^{-1/x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$, donc y est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\boxed{\lambda_- = 0}$. On peut alors poser $\boxed{y(0) = 0}$, quel que soit le choix de λ_+.
   - Pour voir si la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, on étudie son taux d'accroissement:
   $$\begin{cases} \text{pour } x > 0,\ \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{\lambda_+ e^{-1/x}}{x} = -\lambda_+(\frac{-1}{x})e^{-1/x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \\ \\ \text{pour } x < 0,\ \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0 \end{cases}$$
   Ainsi la fonction y est dérivable en 0 et $\boxed{y'(0) = 0}$.
   - Par construction, l'équation différentielle (E_1) est satisfaite sur $\mathbb{R}^*$. Vérifions qu'elle est également satisfaite au point $x = 0$: $0^2 \cdot y'(0) - y(0) = -y(0) = 0$.

   (c) **Conclusion.**
   Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions suivantes:
   $$y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

   Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas: on se place donc sur $I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$.

(a) **Résolution sur I.**
Sur l'intervalle I, l'équation différentielle se réécrit

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

- Pour l'équation homogène $y' + \frac{1}{x} y = 0$ une primitive de $-\frac{1}{x}$ sur I, est $-\ln|x|$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $\lambda e^{-\ln|x|} = \lambda \frac{1}{|x|}$. Quitte à changer λ en $-\lambda$ si $I =]-\infty; 0[$, on peut écrire les solutions de l'équation homogène sous la forme $y(x) = \lambda \frac{1}{x}$.
- Pour trouver les solutions de l'équation avec second membre, on applique la méthode de variation de la constante en cherchant $y(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}$: en remplaçant, on voit que y est solution sur I si et seulement si $\lambda'(x) = 1$. En intégrant, on obtient $\lambda(x) = x$. Une solution particulière en donc $y_0(x) = 1$.
- Sur I les solutions de (E_2) sont les $y(x) = 1 + \frac{\lambda}{x}$ où λ est un paramètre réel.

(b) **Recollement en** 0.
Une solution y de (E_2) sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, il existe donc $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda_+}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \frac{\lambda_-}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$. On voit tout de suite que y a une limite (finie) en 0 si et seulement si $\boxed{\lambda_+ = \lambda_- = 0}$. Dans ce cas, on peut alors poser $\boxed{y(0) = 1}$ et y est la fonction constante égale à 1, qui est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, (E_2) est bien satisfaite au point $x = 0$.

(c) **Conclusion.**
Finalement, (E_2) admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution, qui est la fonction constante égale à 1.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Il s'agit d'une équation homogène du second ordre. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$, qui admet deux solutions: $r = 2$ et $r = 1$. Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^x$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

2. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$, qui admet deux solutions: $r = -1 + i$ et $r = -1 - i$. On sait alors que les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$ $(A, B \in \mathbb{R})$. Remarquons que, en utilisant l'expression des fonctions cos et sin à l'aide d'exponentielles, ces solutions peuvent aussi s'écrire sous la forme $\lambda e^{(-1+i)x} + \mu e^{(-1-i)x}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

3. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $(\lambda x + \mu)e^x$.

4. Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda \cos x + \mu \sin x$. Le second membre peut en fait se réécrire $\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$: d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme $a + b\cos(2x) + c\sin(2x)$. En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si $a = 1$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = 0$. Les solutions générales sont donc les $\lambda \cos x + \mu \sin x - \frac{1}{3}\cos(2x) + 1$.

Correction de l'exercice 8 ▲

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2 - 4r + 4 = 0$, pour laquelle $r = 2$ est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $(\lambda x + \mu)e^{2x}$.
Lorsque $d(x) = e^{-2x}$, on cherche une solution particulière sous la forme ae^{-2x}, qui convient si $a = \frac{1}{16}$.

Lorsque $d(x) = e^{2x}$, comme 2 est la racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution comme le produit de e^{2x} par un polynôme de degré 2. Comme on sait déjà que $(\lambda x+\mu)e^{2x}$ est solution de l'équation homogène, il est inutile de faire intervenir des termes de degré 1 et 0: on cherche donc une solution de la forme ax^2e^{2x}, qui convient si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.
Puisque $\frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x) = \frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x})$, les solutions générales sont obtenues sous la forme $y(x) = \frac{1}{64}e^{-2x}+\frac{1}{8}x^2e^{2x}+(\lambda x+\mu)e^{2x}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda\cos x+\mu\sin x$. En posant $y_1(x) = \cos x$ et $y_2(x) = \sin x$, on va chercher les solutions sous la forme $\lambda y_1+\mu y_2$, vérifiant

$$\begin{cases} \lambda' y_1+\mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1'+\mu' y_2' = \operatorname{cotan} x \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda'\cos x+\mu'\sin x = 0 \\ \lambda'(-\sin x)+\mu'\cos x = \operatorname{cotan} x \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{cotan} x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} \\[2ex] \mu'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{cotan} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} \end{cases}$$

d'après les formules de Cramer, où $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$. On obtient donc

$$\begin{cases} \lambda'(x) = -\cos x \\ \mu'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x} \end{cases}$$

ce qui donne une primitive $\lambda(x) = -\sin x$.
Pour μ, on cherche à primitiver $\frac{\cos^2 x}{\sin x}$ à l'aide du changement de variable $t = \cos x$ (et donc $\mathrm{d}t = -\sin t\,\mathrm{d}x$), on calcule une primitive

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = t-\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= t+\frac{1}{2}\ln(1-t)-\frac{1}{2}\ln(1-t) = \cos x+\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1-\cos x) \end{aligned}$$

En remplaçant, les solutions générales sont les

$$y(x) = c_1\cos x+c_2\sin x+(-\sin x)\cos x+\left(\cos x+\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)\right)\sin x$$

qui se simplifie $y(x) = c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}\sin x\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Puisqu'on cherche y fonction de $x\in]0;+\infty[$, et que l'application $t\mapsto e^t$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$, on peut poser $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$. On a alors $t = \ln x$ et $y(x) = z(\ln x)$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\ln x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{x}z'(\ln x) = e^{-t}z'(t) \\ y''(x) &= -\frac{1}{x^2}z'(\ln x)+\frac{1}{x^2}z''(\ln x) = -e^{-2t}z'(t)+e^{-2t}z''(t) \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient donc que

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ x^2y''+xy'+y=0 \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t)+z(t)=0$$

autrement dit, $z(t)=\lambda\cos t+\mu\sin t$ où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Finalement, les solutions de l'équation de départ sont de la forme

$$y(x)=z(\ln x)=\lambda\cos(\ln x)+\mu\sin(\ln x)$$

où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

2. L'application $t\mapsto\tan t$ étant bijective de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, on peut poser $x=\tan t$ et $z(t)=y(\tan t)$. On a alors $t=\arctan x$ et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & z(\arctan x)=z(t) \\ y'(x) & = & \dfrac{1}{1+x^2}z'(\arctan x) \\ y''(x) & = & \dfrac{1}{(1+x^2)^2}\big(z''(\arctan x)-2xz'(\arctan x)\big) \end{array}$$

En remplaçant, on obtient que z est solution de l'équation différentielle $z''+mz=0$. Pour résoudre cette équation, on doit distinguer trois cas:

- $m<0$: alors $z(t)=\lambda e^{\sqrt{-m}t}+\mu e^{-\sqrt{-m}t}$ et donc
$$y(x)=\lambda e^{\sqrt{-m}\arctan x}+\mu e^{-\sqrt{-m}\arctan x},$$
- $m=0$: $z''=0$ et donc $z(t)=\lambda t+\mu$ et $y(x)=\lambda\arctan x+\mu$,
- $m>0$: alors $z(t)=\lambda\cos(\sqrt{m}t)+\mu\sin(\sqrt{m}t)$ et donc
$$y(x)=\lambda\cos(\sqrt{m}\arctan x)+\mu\sin(\sqrt{m}\arctan x)$$

où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. **Équation de Bernoulli**

(a) On suppose qu'une solution y ne s'annule pas. On divise l'équation $y'+a(x)y+b(x)y^n=0$ par y^n, ce qui donne
$$\frac{y'}{y^n}+a(x)\frac{1}{y^{n-1}}+b(x)=0.$$
On pose $z(x)=\frac{1}{y^{n-1}}$ et donc $z'(x)=(1-n)\frac{y'}{y^n}$. L'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire :
$$\tfrac{1}{1-n}z'+a(x)z+b(x)=0$$

(b) Équation $xy'+y-xy^3=0$.
Cherchons les solutions y qui ne s'annulent pas. On peut alors diviser par y^3 pour obtenir :
$$x\frac{y'}{y^3}+\frac{1}{y^2}-x=0$$
On pose $z(x)=\frac{1}{y^2(x)}$, et donc $z'(x)=-2\frac{y'(x)}{y(x)^3}$. L'équation différentielle s'exprime alors $\frac{-1}{2}xz'+z-x=0$, c'est-à-dire :
$$xz'-2z=-2x.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette dernière équation sont les

$$z(x) = \begin{cases} \lambda_+ x^2 + 2x \text{ si } x \geqslant 0 \\ \lambda_- x^2 + 2x \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad , \quad \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$$

Comme on a posé $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, on se retreint à un intervalle I sur lequel $z(x) > 0$: nécessairement $0 \notin I$, donc on considère $z(x) = \lambda x^2 + 2x$, qui est strictement positif sur I_λ où

$$I_\lambda = \begin{cases}]0; +\infty[\quad \text{si } \lambda = 0 \\ ]0; -\frac{2}{\lambda}[\quad \text{si } \lambda < 0 \\ ]-\infty; -\frac{2}{\lambda}[\text{ ou }]0; +\infty[\quad \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

On a $(y(x))^2 = \frac{1}{z(x)}$ pour tout $x \in I_\lambda$ et donc $y(x) = \varepsilon(x) \frac{1}{\sqrt{z(x)}}$, où $\varepsilon(x) = \pm 1$. Or y est continue sur l'intervalle I_λ, et ne s'annule pas par hypothèse: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, y ne peut pas prendre à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, donc $\varepsilon(x)$ est soit constant égal à 1, soit constant égal à -1. Ainsi les solutions cherchées sont les :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \text{ ou } y(x) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \quad \text{sur } I_\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Noter que la solution nulle est aussi solution.

2. **Équation de Riccati**

   (a) Soit y_0 une solution de $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$. Posons $u(x) = y(x) - y_0(x)$, donc $y = u + y_0$. L'équation devient :

   $$u' + y_0' + a(x)(u + y_0) + b(x)(u^2 + 2uy_0 + y_0^2) = c(x)$$

   Comme y_0 est une solution particulière alors

   $$y_0' + a(x)y_0 + b(x)y_0^2 = c(x)$$

   Et donc l'équation se simplifie en :

   $$u' + \big(a(x) + 2y_0(x)b(x)\big)u + b(x)u^2 = 0$$

   qui est une équation du type Bernoulli.

   (b) Équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$.

   - Après division par x^2 c'est bien une équation de Riccati sur $I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$.
   - $y_0 = \frac{1}{x}$ est bien une solution particulière.
   - On a $u(x) = y(x) - y_0(x)$ et donc $y = u + \frac{1}{x}$. L'équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ devient

     $$x^2 \left(u' - \frac{1}{x^2} + u^2 + 2\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x \left(u + \frac{1}{x} \right) - 1$$

     qui se simplifie en

     $$x^2 \left(u' + u^2 + 2\frac{u}{x} \right) = xu$$

     ce qui correspond à l'équation de Bernoulli :

     $$u' + \frac{1}{x}u + u^2 = 0.$$

   - Si u ne s'annule pas, en divisant par u^2, cette équation devient $\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{u} + 1 = 0$. On pose $z(x) = \frac{1}{u}$, l'équation devient $-z' + \frac{1}{x}z + 1 = 0$. Ses solutions sur I sont les $z(x) = \lambda x + x \ln|x|$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi $u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\lambda x + x \ln|x|}$ mais il y a aussi la solution nulle $u(x) = 0$.

- Conclusion. Comme $y = u + \frac{1}{x}$, on obtient alors des solutions de l'équation de départ sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$:

$$y(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{ou} \qquad y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda x + x\ln|x|} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Notons $A(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$, une primitive de e^{x^2}. On ne sait pas expliciter cette primitive. Les solutions de $y' + e^{x^2}y = 0$ s'écrivent $f(x) = \lambda e^{-A(x)}$.
   Si $x \geqslant 1$, on a par positivité de l'intégrale $A(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt \geqslant 0$ et comme $e^{t^2} \geqslant 1$ alors
   $$A(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt \geqslant \int_0^x 1\,dt = x$$
   En conséquence :
   $$0 \leqslant e^{-A(x)} \leqslant e^{-x}$$
   Ainsi,
   $$0 \leqslant |f(x)| \leqslant |\lambda| e^{-x}$$
   et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. Supposons que y vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation, et posons $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2}y'(x)^2$. La fonction u est à valeurs positives, dérivable, et
   $$u'(x) = 2y'(x)y(x) + e^{-x^2}2y''(x)y'(x) - 2xe^{-x^2}y'(x)^2$$
   en utilisant que $e^{-x^2}y''(x) = -y(x)$ (car y est solution de l'équation différentielle) on obtient :
   $$u'(x) = -2xe^{-x^2}y'^2.$$
   Ainsi la fonction u est croissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant u(x) \leqslant u(0)$. Or $y^2(x) \leqslant u(x)$ par construction, donc
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |y(x)| \leqslant \sqrt{u(0)} = \sqrt{y(0)^2 + y'(0)^2}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. En faisant le changement de variable $x = e^t$ (donc $t = \ln x$) et en posant $z(t) = y(e^t)$ (donc $y(x) = z(\ln x)$, l'équation $x^2y'' + y = 0$ devient $z'' - z' + z = 0$, dont les solutions sont les $z(t) = e^{t/2} \cdot \left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Autrement dit,
   $$y(x) = \sqrt{x}\left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$$
2. Supposons que f convienne: par hypothèse, f est de classe $\mathscr{C}^1$, donc $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et par conséquent f' aussi. Ainsi f est nécessairement de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ (en fait, en itérant le raisonnement, on montrerait facilement que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$).
   En dérivant l'équation $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, on obtient
   $$f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

et en réutilisant l'équation :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

Ainsi on obtient que f est solution de $x^2y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^*$. Nécessairement, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0,\ f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$$

Par hypothèse, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en particulier elle se prolonge en 0 de façon $\mathscr{C}^1$. Cherchons à quelle condition sur λ, μ cela est possible. Déjà, $f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ pour tous λ, μ ; donc $f(0) = 0$. Mais

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$$

n'a pas de limite en 0 si $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$. En effet, pour $x_n = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi)}$, on a $x_n \to 0$ mais $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_n}}$ qui admet une limite finie seulement si $\lambda = 0$. De même avec $x'_n = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi+\frac{\pi}{2})}$ qui donne $\frac{f(x'_n)-f(0)}{x'_n-0} = \frac{\mu}{\sqrt{x'_n}}$ et implique donc $\mu = 0$.

Par conséquent, la seule possibilité est $\lambda = \mu = 0$. Ainsi f est la fonction nulle, sur $[0, +\infty[$. Le même raisonnement s'applique sur $]-\infty, 0]$. La fonction est donc nécessairement nulle sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, la fonction constante nulle est bien solution du problème initial.
