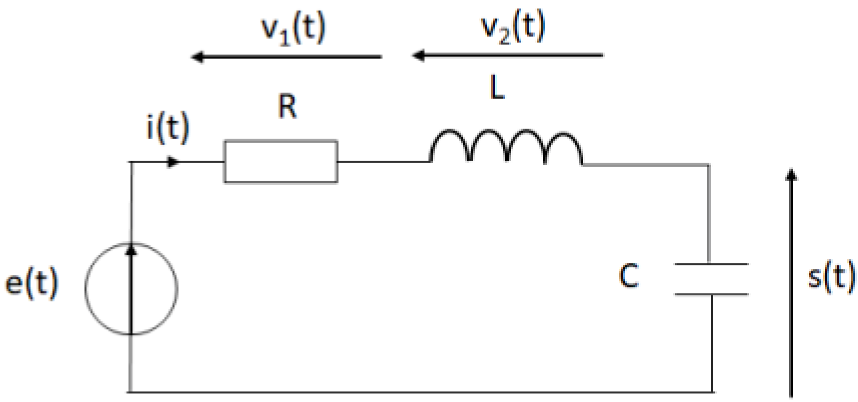
Le circuit RLC - Conditions initiales nulles

Le circuit RLC - Réponse à un échelon de tension - Résolution

avec le formalisme de Laplace - Conditions initiales nulles

On considère le circuit illustré sur la figure ci-dessous. Les conditions initiales sont nulles (le condensateur est initialement déchargé). Le circuit est alimenté par une source de tension $e(t)$ où $e(t) = E \cdot u(t)$ avec $u(t)$ un échelon unité.

Nous cherchons à établir la relation entre la tension de sortie $s(t)$ en fonction de la tension d'entrée $e(t)$ et des composants du circuit R, L et C.



Conditions initiales

Les conditions initiales étant nulles, le condensateur est déchargé donc la tension à ses bornes est nulle, soit : $s(0^-) = 0\,V$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on a : $s(0^+) = 0\,V$

Les conditions initiales sont nulles donc le courant qui circule dans le circuit est nul à $t = 0^-$: $i(0^-) = 0\,A$

Par continuité du courant qui circule dans une bobine, on a : $i(0^+) = 0\,A$

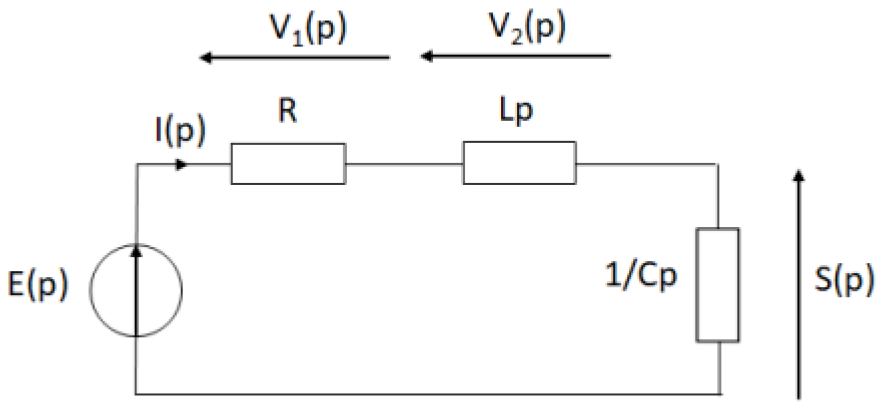
Par ailleurs, $i(t) = C \cdot \dfrac{ds}{dt}$. On en déduit la deuxième condition initiale : $\dfrac{ds}{dt}(0^+) = 0$

Mise en équations du circuit avec le formalisme de Laplace

On commence par faire le schéma équivalent avec les impédances opérationnelles du circuit.

Le schéma équivalent du condensateur se réduit donc à une impédance opérationnelle $\dfrac{1}{C \cdot p}$ (car $s(0^+) = 0\,V$)

On obtient alors le schéma équivalent suivant :



On applique la loi des mailles :

$E(p) - V_1(p) - V_2(p) - S(p) = 0$ eq. (1)

On utilise les relations courant-tension avec les impédances opérationnelles :

$V_1(p) = R \cdot I(p)$ eq. (2)

$V_2(p) = Lp \cdot I(p)$ eq. (3)

$S(p) = \frac{1}{Cp} \cdot I(p)$ Soit, $I(p) = Cp \cdot S(p)$ eq. (4)

On remplace l'équation (4) dans l'équation (2) et (3) :

$V_1(p) = RCp \cdot S(p)$ eq. (2')

$V_2(p) = LCp^2 \cdot S(p)$ eq. (3')

On remplace à présent les équation (2') et (3') dans l'équation (1) :

$$E(p) - RCp \cdot S(p) - LCp^2 \cdot S(p) - S(p) = 0$$

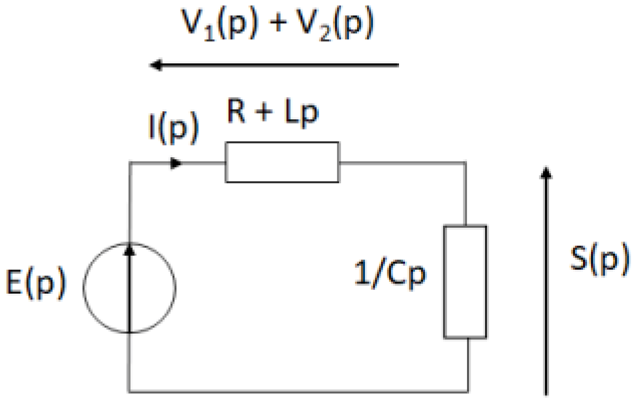
On réarrange l'expression pour isoler $S(p)$:

$$\Leftrightarrow E(p) - \left(RCp + LCp^2 + 1\right) S(p) = 0$$

$\Leftrightarrow S(p) = \dfrac{E(p)}{1 + RCp + LCp^2}$ eq. (5)

Remarque

On peut arriver plus rapidement à ce résultat en utilisant les lois d'associations des impédances opérationnelles et en reconnaissant un pont diviseur d'impédances opérationnelles, voir schéma suivant :



On peut donc directement écrire :

$$S(p) = \frac{\frac{1}{Cp}}{R + Lp + \frac{1}{Cp}} \cdot E(p)$$

On réorganise pour éliminer les fractions au numérateur et dénominateur :

$$\Leftrightarrow S(p) = \frac{1}{RCp + LCp^2 + 1} \cdot E(p)$$

On retrouve le même résultat que l'équation (5).

Par ailleurs, $E(p)$ est la transformée de Laplace d'un échelon d'amplitude E, en utilisant la table des transformées de Laplace, on obtient :

$$E(p) = \frac{E}{p}$$

$$\Leftrightarrow S(p) = \frac{E}{p\,(1 + RCp + LCp^2)}$$

On pose : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, ω_0 est la pulsation propre du circuit (en rad/s).

et $m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$, m est le coefficient d'amortissement (sans unité).

$$\Leftrightarrow S(p) = \frac{E}{p\left(1 + \frac{2mp}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Pour revenir dans le domaine temporel, il faut que $S(p)$ soit sous la forme d'une somme d'éléments simples. Ce n'est pas le cas ici, il faut donc procéder à une décomposition en éléments simples :

La décomposition en éléments simples de $S(p)$ dépend des racines du polynôme $1 + \frac{2mp}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}$.

Il faut calculer le discriminent du polynôme : $\Delta = \frac{4}{\omega_0^2}\left(m^2 - 1\right)$

- Si $\Delta > 0$, soit $m > 1$, les racines, notées r_1 et r_2, sont réelles, la décomposition en éléments simples est la suivante :

  $S(p) = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p - r_1} + \dfrac{C}{p - r_2}$ où A, B et C sont des constantes à déterminer

- Si $\Delta < 0$, soit $m < 1$, les racines sont complexes conjuguées, la décomposition en éléments simples est la suivante :

  $S(p) = \dfrac{A}{p} + \dfrac{Bp + C}{\omega_0^2\left(1 + \dfrac{2mp}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}\right)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{Bp + C}{\omega_0^2 + 2m\omega_0 p + p^2}$ où A, B et C sont des constantes à déterminer

- Si $\Delta = 0$, soit $m = 1$, il y a une racine double, notée r_0, la décomposition en éléments simples est la suivante :

  $S(p) = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p - r_0} + \dfrac{C}{(p - r_0)^2}$ où A, B et C sont des constantes à déterminer

Nous allons traiter ici uniquement le troisième cas ($m = 1$), la méthode est exactement la même pour les autres cas.

La racine r_0 vaut : $r_0 = -\dfrac{\dfrac{2m}{\omega_0}}{\dfrac{2}{\omega_0^2}} = -m\omega_0 = -\omega_0$ (car $m = 1$)

Il faut déterminer les constantes A, B et C, pour cela on procède par identification, voir le détail du calcul.

Au final, on obtient la décomposition en éléments simples suivante :

$$S(p) = E\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_0} - \frac{\omega_0}{(p + \omega_0)^2}\right]$$

Il suffit à présent de calculer la transformée de Laplace inverse de $S(p)$. Pour cela, on utilise la table des transformées de Laplace et on obtient :

$s(t) = E\left[1 - \exp(-\omega_0 \cdot t) - \omega_0 t \exp(-\omega_0 \cdot t)\right]$ pour $t > 0$

On retrouve exactement le même résultat qu'avec le calcul de l'équation différentielle (voir résultat précédent).

Simulation

A l'aide d'Octave, nous allons calculer la transformée de Laplace inverse de $S(p) = \dfrac{E}{p\left(1 + \dfrac{2mp}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$ dans le cas où $m = 1$ et vérifier le résultat $s(t)$ obtenu avec le calcul à la main.

Pour cela, on utilise la fonction *ilaplace* qui permet de calculer la transformée de Laplace inverse.

```
>> syms p E t w0
>> m=1;
```

```
>> S=E/(p*(1+2*m*p/w0+(p/w0)^2));
>> s=ilaplace(S,p,t)

s =

E - E*exp(-t*w0) - E*t*w0*exp(-t*w0)
```

On obtient effectivement le même résultat.