Notation complexe et impédances complexes

Généralisation des notations complexes à tous les circuits linéaires en régime harmonique

Fondamental

En régime harmonique, il est conseillé de travailler avec les notations complexes que nous allons présenter.

Notation complexe

On considère une tension sinusoïdale : $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

En utilisant la notation complexe, **on associe à toute sinusoïde un nombre complexe** (transformée cissoïdale):

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{u}(t) = U_0 \exp(j(\omega t + \varphi)) = U_0 \exp(j\varphi) \exp(j\omega t) = \underline{U} \exp(j\omega t)$$

$\underline{U}$ est appelée amplitude complexe.

Dans ce modèle, les deux paramètres $U_0 = |\underline{u}(t)| = |\underline{U}|$ et $\varphi = \arg(\underline{u}(t)) = \arg(\underline{U})$ sont respectivement le module et l'argument du complexe $\underline{U}$, ce qui va grandement simplifier les calculs.

On définit l'**impédance complexe** $\underline{Z}$ d'un dipôle comme $\underline{Z} = R + jX$ où R est la résistance (partie réelle de l'impédance complexe) et X est la réactance (partie imaginaire de l'impédance complexe).

On définit également l'**admittance complexe** $\underline{Y}$ comme l'inverse de l'impédance complexe : $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$

Dans ce modèle tous les courants s'écrivent sous la forme : $\underline{i}(t) = I_0 \exp(j(\omega t + \varphi_1)) = \underline{I} \exp(j\omega t)$

et toutes les tensions sous la forme : $\underline{u}(t) = U_0 \exp(j(\omega t + \varphi_2)) = \underline{U} \exp(j\omega t)$.

Impédances complexes

Fondamental

Dans ce modèle, on définit les **impédances complexes des trois dipôles passifs** déjà rencontrés :

- pour une résistance R : $\underline{Z} = R$
- pour un condensateur C : $\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}$
- pour une bobine L : $\underline{Z} = jL\omega$

Chargement de [MathJax]/localization/fr/MathMenu.js

Remarque

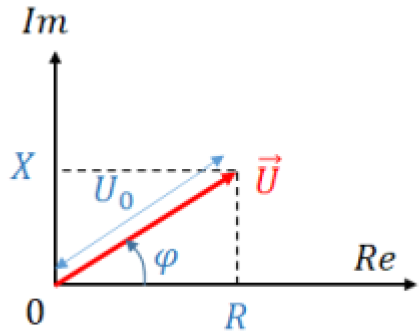
Le régime harmonique étant un cas particulier du régime variable, il est possible de passer des impédances opérationnelles $Z(p)$ aux impédances complexes $\underline{Z}$ en faisant un changement de variable $p \to j\omega$ où p est la variable de Laplace et ω est la pulsation du régime harmonique.

Représentation de Fresnel

Définition

Le tracé des sinusoïdes n'étant pas aisé, on utilise plutôt la représentation de Fresnel qui correspond à une représentation vectorielle des nombres complexes.

Par exemple, pour une sinusoïde $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, on associe la notation complexe : $\underline{u}(t) = U_0 \exp(j(\omega t + \varphi)) = \underline{U} \exp(j\omega t) = R + jX$ puis le vecteur $\vec{U}$ dont la norme est U_0 et la position angulaire est φ. Cette représentation est illustrée ci-dessous :



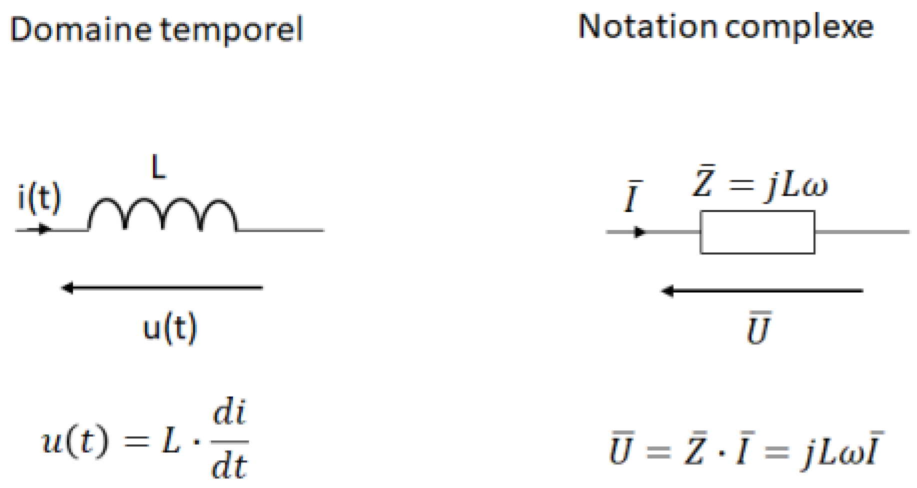
Avec : $U_0 = |\underline{u}(t)| = |\underline{U}|$, $\varphi = \arg(\underline{u}(t)) = \arg(\underline{U})$ et $\tan(\varphi) = \dfrac{X}{R}$

Exemple d'utilisation de la notation complexe

Exemple

En pratique , on remplace le schéma électrique par un schéma équivalent en notation complexe qui fait apparaître toutes les grandeurs physiques (courants et tensions) en notation complexe, ainsi que les impédances complexes des composants.

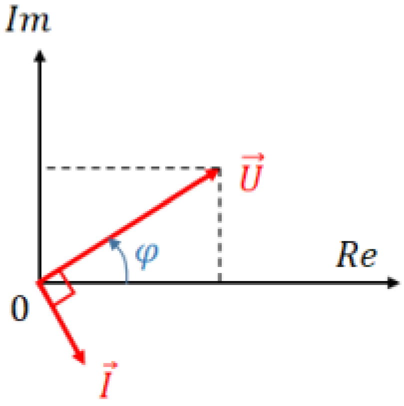
Prenons le cas d'une bobine, où u(t) est la tension à ses bornes et dont la notation complexe est : $\underline{U} = U_0 \exp(j\varphi)$



$$\underline{U} = jL\omega\underline{I} = \exp\left(\frac{j\pi}{2}\right)L\omega\underline{I}$$

On en déduit donc que $u(t)$ est en avance de phase par rapport à $i(t)$ de $+\pi/2$.

La représentation de Fresnel de ces deux grandeurs est la suivante :



Au moment de la mise sous tension d'une bobine, le courant met un certain temps à s'établir. Le courant $i(t)$ est donc en retard de phase par rapport à la tension $u(t)$. Le déphasage est de $+\pi/2$, la tension $u(t)$ est donc en quadrature avance par rapport au courant $i(t)$.