Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil mathématique qui permet notamment de résoudre plus rapidement les équations différentielles car il les transforme en équations algébriques. C'est pourquoi, cet outil est très utilisé en électrocinétique pour l'étude du comportement des circuits.

Définition

A toute fonction causale, c'est-à-dire définie pour $t > 0$ et nulle pour $t \leqslant 0$, notée $f(t)$, on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable p :

$$F(p) = TL\left[f(t))\right] = \int_{0+}^{+\infty} f(t)\exp(-pt)dt$$

où $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$.

A l'inverse, la transformée de Laplace inverse de $F(p)$ est $f(t)$:

$$TL^{-1}\left[F(p))\right] = f(t)$$

Propriétés de la transformée de Laplace

Fondamental

a) Linéarité

- On considère $F(p)$, la transformée de Laplace de $f(t)$, pour tout k nombre complexe, on a : $TL\left[k \cdot f(t))\right] = k \cdot F(p)$
- On considère $F_1(p)$ et $F_2(p)$, les transformées de Laplace respectives de $f_1(t)$ et $f_2(t)$, on a : $TL\left[f_1(t) + f_2(t)\right] = F_1(p) + F_2(p)$

b) Dérivation

On considère $F(p)$, la transformée de Laplace de $f(t)$, on a :

- $TL\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot F(p) - f(0^+)$ où $f(0^+) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$ (condition initiale du système)
- $TL\left[\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0^+) - f'(0+)$ où $f(0^+) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$ et $f'(0^+) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{df}{dt}$ (conditions initiales du système)

c) Intégration

On considère $F(p)$, la transformée de Laplace de $f(t)$, on a :

$TL\left[\int_{0^+}^{t} f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{G(0^+)}{p}$ où $G(0^+)$ est la valeur limite de l'intégrale $\int_{0^+}^{t} f(t)dt$ lorsque $t \to 0^+$(condition initiale)

d) Théorème des valeurs initiales et finales

On considère $F(p)$, la transformée de Laplace de $f(t)$. Connaissant $F(p)$, on peut en déduire les valeurs de $f(0^+)$ et $f(+\infty)$:

- valeur initiale : $\lim_{t\to\ 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{p\to\ +\infty} p \cdot F(p)$
- valeur finale : $\lim_{t\to\ +\infty} f(t) = \lim_{p\to\ 0} p \cdot F(p)$

e) Retard

On considère $F(p)$, la transformée de Laplace de $f(t)$, quelque soit $\tau \in \Re$, on a :

$$TL\left[f(t-\tau)\right] = \exp(-\tau p) \cdot F(p)$$

f) Produit de deux fonctions

$$TL\left[f(t) \times g(t)\right] \neq TL\left[f(t)\right\} \times TL\left\{g(t)\right]$$

Remarque

Les calculs obtenus dans le domaine de Laplace n'ont pas de signification physique. Il est donc nécessaire de revenir à la fonction temporelle en effectuant une transformée de Laplace inverse.

Le calcul de la transformée de Laplace inverse est beaucoup moins aisé. En général, on utilise des tables qui donnent la correspondance entre les fonctions temporelles et leurs transformées de Laplace.

Table des transformées de Laplace pour les fonctions usuelles en électrocinétique

Complément

$f(t)$pour t>0	$F(p)$
δ (distribution Dirac, impulsion)	1
1 (fonction échelon unité)	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\exp(-\alpha \cdot t)$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\frac{1}{T} \cdot \exp(-t/T))$	$\frac{1}{1+T \cdot p}$
$t^n \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

$\cos(\omega \cdot t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega \cdot t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\exp(-\alpha \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$\exp(-\alpha \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$\exp(-\alpha \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$	$\dfrac{(p+\alpha)\cos\varphi - \omega \sin\varphi}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$\exp(-\alpha \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$	$\dfrac{\omega\cos\varphi + (p+\alpha) \sin\varphi}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

Application à la résolution des équations différentielles *Exemple*

Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 5 \cdot x(t)) = \exp(-3t) \\ x(0^+) = 2 \end{cases}$$

1) On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle :

$$TL\left[\frac{dx}{dt} + 5 \cdot x(t)\right] = TL\left[\exp(-3t)\right]$$

$$\Leftrightarrow TL\left[\frac{dx}{dt}\right] + 5 \cdot TL\left[x(t)\right] = TL\left[\exp(-3t)\right]$$

$\Leftrightarrow p \cdot X(p) - x(0^+) + \cdot X(p) = \dfrac{1}{p+3}$ (le second membre est déterminé à partir de la table des transformées de Laplace)

$$\Leftrightarrow X(p) \cdot (p+5) - 2 = \frac{1}{p+3}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \frac{1}{(p+3)(p+5)} + \frac{2}{p+5}$$

2) Il faut réécrire l'expression de $X(p)$ sous la forme d'une somme d'éléments simples afin de pouvoir utiliser directement la table des transformées de Laplace. Pour cela, il faut procéder à une décomposition en éléments simples si nécessaire.

C'est le cas ici. Le calcul a déjà été fait dans la section sur la décomposition en éléments simples, on obtient le résultat suivant :

$$\Leftrightarrow X(p) = -\frac{1}{2(p+5)} + \frac{1}{2(p+3)} + \frac{2}{p+5}$$

3) Pour retourner dans le domaine temporel, il suffit de calculer la transformée de Laplace inverse :

$$\Leftrightarrow TL^{-1}\left[X(p)\right] = TL^{-1}\left[\frac{1}{-2(p+5)} + \frac{1}{2(p+3)} + \frac{2}{p+5}\right]$$

On utilise les propriétés de linéarité de la transformée de Laplace :

$$\Leftrightarrow TL^{-1}\left[X(p)\right] = -\frac{1}{2}\cdot TL^{-1}\left[\frac{1}{(p+5)}\right] + \frac{1}{2}\cdot TL^{-1}\left[\frac{1}{2(p+3)}\right] + 2\cdot TL^{-1}\left[\frac{1}{p+5}\right]$$

Pour finir, on utilise la table des transformées de Laplace :

$$\Leftrightarrow x(t) = -\frac{1}{2}\cdot \exp(-5t) + \frac{1}{2}\cdot \exp(-3t) + 2\cdot \exp(-5t)$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{3}{2}\cdot \exp(-5t) + \frac{1}{2}\cdot \exp(-3t)$$

Simulation

Afin de vérifier vos calculs, il est possible de calculer la transformée de Laplace à l'aide d'Octave.

Le script suivant permet de calculer la transformée de Laplace inverse de $X(p) = \frac{1}{(p+3)(p+5)} + \frac{2}{p+5}$:

```
>> syms p t
>> X=1/((p+3)*(p+5))+2/(p+5);
>> ilaplace(X,p,t)

ans =

exp(-3*t)/2 + (3*exp(-5*t))/2
```

On constate qu'on obtient le même résultat qu'en faisant le calcul "à la main".