Université de Montpellier - 2020/2021
L2 EEA - HLMA306

Devoir surveillé n° 1 du 12/10/2020 - Corrigé rapide

Exercice 1. (5 pts)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+2x+3}{5x^3+x^2-7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{5x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{5}=-\infty$. (Termes de plus haut degrés.)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+6x+1}-3x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(9x^2+6x+1)-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+6x+1}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+1}{\sqrt{9x^2}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{3x+3x}=1$. (Quantité conjuguée et termes de plus haut degrés.)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^{\sin 0}}{x-0}:=\left(e^{\sin x}\right)'(0)=\left(\cos x\, e^{\sin x}\right)(0)=1$.

Exercice 2. (5 pts) Calculer les dérivés des fonctions suivantes :

(1) $\displaystyle f(x)=\sqrt{x}\left(x+\frac{e^x}{\sqrt{x}}\right)=x^{3/2}+e^x$. Donc $\displaystyle f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}+e^x$.

(2) $g(x)=x^4\,4^x=x^4\,e^{x\ln 4}$. Donc $g'(x)=4x^3\,e^{x\ln 4}+x^4\,\ln(4)\,e^{x\ln 4}=4x^3\,4^x+x^4\,\ln(4)\,4^x$.

(3) $h(x)=\tan\left(\ln\left(x^2\right)\right)=\tan(2\ln x)$. Donc $\displaystyle h'(x)=\frac{2}{x}\left(1+\tan^2(2\ln x)\right)$.

Exercice 3. (7 pts)
Déterminer les développements limités suivants :
(1) $DL_5(0)$ de $f(x) = \tan x$ $\quad x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{x - x^3/6 + o(x^3)}{1 - x^2/2 + o(x^3)} = (x - x^3/6 + o(x^3))(1 + x^2/2 + o(x^3)) = x + x^3/3 + o(x^3)$.

(2) $DL_3(0)$ de $g(x) = e^{\sin x}$

$g(x) = e^{x - x^3/6 + o(x^3)} = 1 + (x - x^3/6 + o(x^3)) + (x - x^3/6 + o(x^3))^2/2 + (x - x^3/6 + o(x^3))^3/6 = 1 + (x - x^3/6 + o(x^3)) + (x)^2/2 + (x)^3/6 = 1 + x + x^2/2 + 0 + o(x^3)$.

(3) $DL_6(0)$ de $h(x) = \arctan(x^2)$

$\arctan'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$. Donc $\arctan t = t - t^3/3 + o(t^3)$ et ainsi $\arctan(x^2) = x^2 - x^6/3 + o(x^6)$.

Exercice 4. (4 pts) Calculer :
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^5(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 \sin x = 1 \times 0 = 0$, car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (Cf. cours et TD : dérivée de $\sin x$ en 0, ou $DL_1(0)$ de $\frac{\sin(x)}{x}$.)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1} = 1$. (Ou par la définition de la dérivée, ou la règle de l'Hôpital, ou un DL.)

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}{y} = 1$ (en posant $y = x^2$).