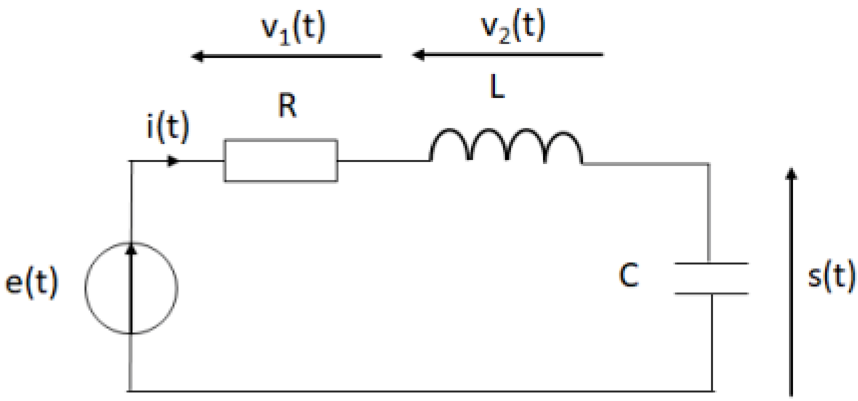
Le circuit RLC - Réponse à un échelon de tension

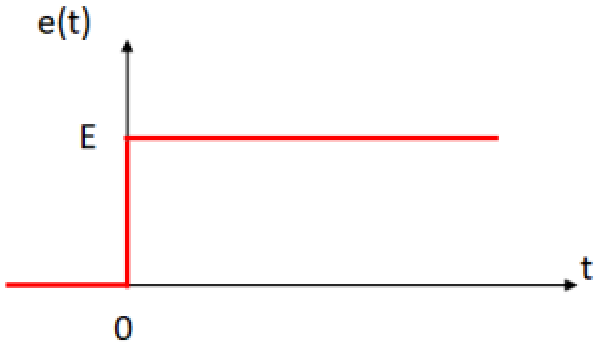
Mise en équation d'un circuit comportant une bobine

On considère le circuit illustré sur la figure ci-dessous. Nous cherchons à établir la relation entre la tension de sortie $s(t)$ en fonction de la tension d'entrée $e(t)$ et des composants du circuit R, C et L.

Les conditions initiales sont nulles (le condensateur est déchargé).



Ce circuit est alimenté par une tension variable $e(t)$. Dans cet exemple, le signal d'entrée est un échelon de tension d'amplitude $E = 5V$, comme illustré sur la figure ci-dessous.



Le circuit est composé d'une seule maille, le courant qui circule est donc le même dans toutes les branches, il est noté $i(t)$.

- Conditions initiales :

  Les conditions initiales sont nulles, le condensateur est donc déchargé, soit $s(0^-) = 0$.

  Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on a : $s(0^+) = 0\,V$

  Le courant qui traverse la bobine est nul à $t = 0^-$ donc $i(0^-) = 0\,A$.

  Par continuité du courant qui circule dans une bobine, on a : $i(0^+) = 0\,A$

  Par ailleurs, $i(t) = C \cdot \dfrac{ds(t)}{dt}$. On en déduit la deuxième condition initiale : $\dfrac{ds}{dt}(0^+) = 0$

- Mise en équation du circuit :

  En appliquant la loi des mailles, on obtient l'équation suivante :

  $e(t) - v_1(t) - v_2(t) - s(t) = 0$ eq. (1)

  Ensuite, on utilise les relations courant-tension pour les différents composants du circuit :

  $v_1(t) = R \times i(t)$ eq.(2)

  $i(t) = C\dfrac{ds}{dt}$ eq.(3)

  $v_2(t) = L\dfrac{di}{dt}$ eq.(4)

  On remplace l'expression de $i(t)$ dans l'equation (3) par celle obtenue dans l'équation (2) et (4):

  $v_1(t) = RC\dfrac{ds}{dt}$ eq. (5)

  $v_2(t) = LC\dfrac{d^2s}{dt^2}$ eq.(6)

  On remplace ensuite les équations (5) et (6) dans l'équation (1) :

  $$e(t) - RC\frac{ds}{dt} - LC\frac{d^2s}{dt^2} - s(t) = 0$$

  Soit :

  $$LC\frac{d^2s}{dt^2} + RC\frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

  On obtient une équation différentielle du second ordre avec second membre. Pour obtenir l'expression de $s(t)$, il faut résoudre l'équation différentielle.

  Le complément de cours sur la résolution d'équation différentielle d'ordre 2 se trouve ici.

  On pose : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, ω_0 est appelée la pulsation propre du circuit (en rad/s).

  et $m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$, m est appelé coefficient d'amortissement (sans unité).

  L'équation différentielle devient :

  $\dfrac{1}{\omega_0^2} \cdot \dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{2m}{\omega_0} \cdot \dfrac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$ avec les conditions initiales : $s(0) = 0$ et $\dfrac{ds}{dt}(0) = 0$

  La solution particulière est de la même forme que le second membre, soit une constante $s_p = K$ pour $t > 0$. En réinjectant cette solution particulière dans l'équation différentielle, on obtient : $K = E$

  On résout l'équation homogène (sans second membre). L'équation caractéristique est $\dfrac{r^2}{\omega_0^2} + \dfrac{2m}{\omega_0} \cdot r + 1 = 0$

La résolution de cette équation dépend de la valeur du discriminant $\Delta = \left(\frac{2m}{\omega_0}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2}\left(m^2 - 1\right)$ et donc de celle du coefficient d'amortissement m.

- Si $m > 1$ alors $\Delta > 0$: la solution de l'équation différentielle est : $s(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t) + E$ pour $t > 0$ avec A et B des constantes réelles et r_1 et r_2 les deux racines réelles de l'équation caractéristique.

  Après détermination des constantes à l'aide des conditions initiales, on obtient (voir le détail du calcul) :

  $$s(t) = \frac{E\left(m - \sqrt{m^2-1}\right)}{2\sqrt{m^2-1}}\exp\left[\omega_0\left(-m - \sqrt{m^2-1}\right)t\right] - \frac{E\left(m + \sqrt{m^2-1}\right)}{2\sqrt{m^2-1}}\exp\left[\omega_0\right.$$

  pour $t > 0$

- Si $m = 1$ alors $\Delta = 0$: la solution de l'équation différentielle est : $s(t) = (A + B \cdot t)\exp(r_0 t) + E$ pour $t > 0$ avec A et B des constantes réelles et r_0 la racine unique de l'équation caractéristique.

  Après détermination des constantes à l'aide des conditions initiales, on obtient (voir le détail du calcul) :

  $s(t) = E\left[1 - (1 + \omega_0 \cdot t) \cdot \exp(-\omega_0 t)\right]$ pour $t > 0$.

- Si $m < 1$ alors $\Delta < 0$: la solution de l'équation différentielle est : $s(t) = A\exp(r_0 t)\cos(\omega t) + B\exp(r_0 t)\sin(\omega t) + E$ pour $t > 0$ avec A et B des constantes réelles et $r_1 = r_0 + j\omega$ et $r_2 = r_0 - j\omega$ les deux racines complexes de l'équation caractéristique.

  Après détermination des constantes à l'aide des conditions initiales, on obtient (voir le détail du calcul) :

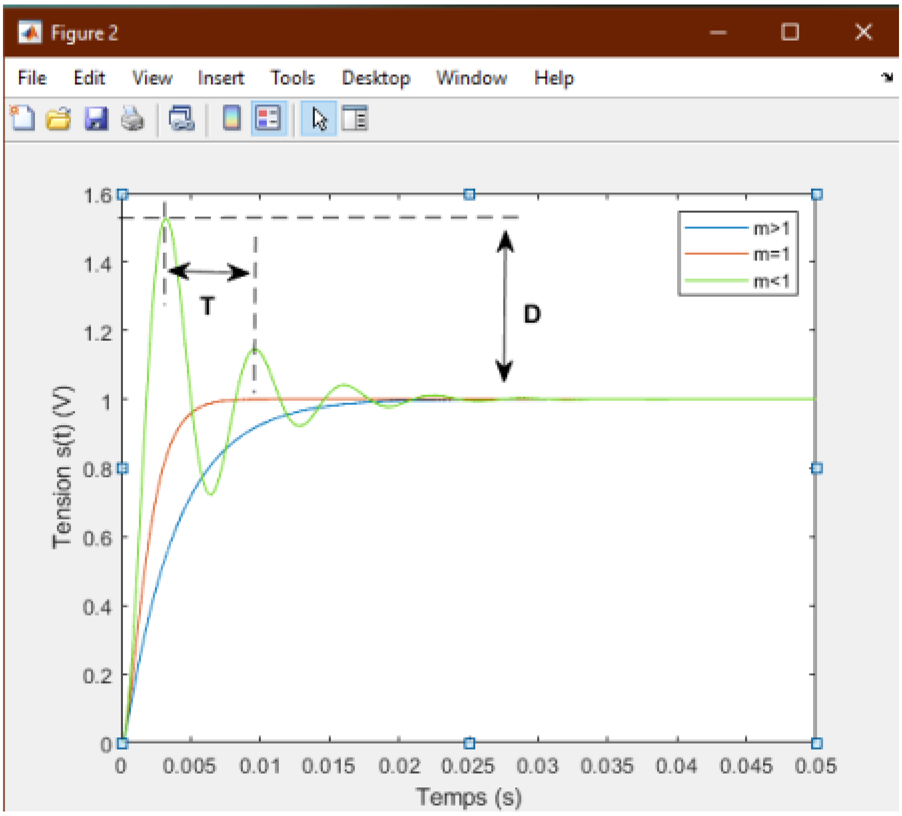
  $$s(t) = E\left[1 - \exp(-m \cdot \omega_0 \cdot t)\left[\cos\left(\omega_0 \cdot \sqrt{1-m^2} \cdot t\right) + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\sin\left(\omega_0 \cdot \sqrt{1-m^2} \cdot\right.\right.\right.$$

  pour $t > 0$

Analyse temporelle :

En fonction de la valeur du coefficient d'amortissement m, la solution de l'équation différentielle a une allure différente.

La figure ci-dessous illustre le signal $s(t)$ pour $E = 1\,V$, $\omega_0 = 1000\,rad/s$ et différentes valeurs de m.



- Lorsque $m > 1$, on est en **régime apériodique**.
- Lorsque $m = 1$, on est en **régime critique**.
- Lorsque $m < 1$, on est en **régime pseudo-périodique**. On observe des oscillations qui s'amortissent.

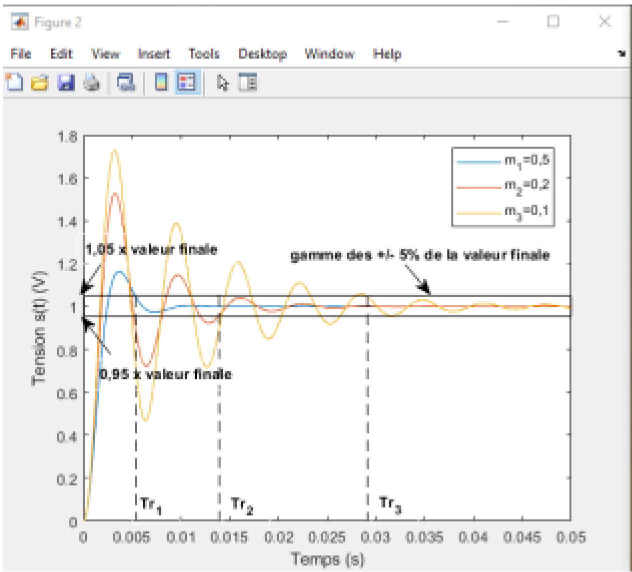
  Dans ce cas, la réponse indicielle est caractérisée par :

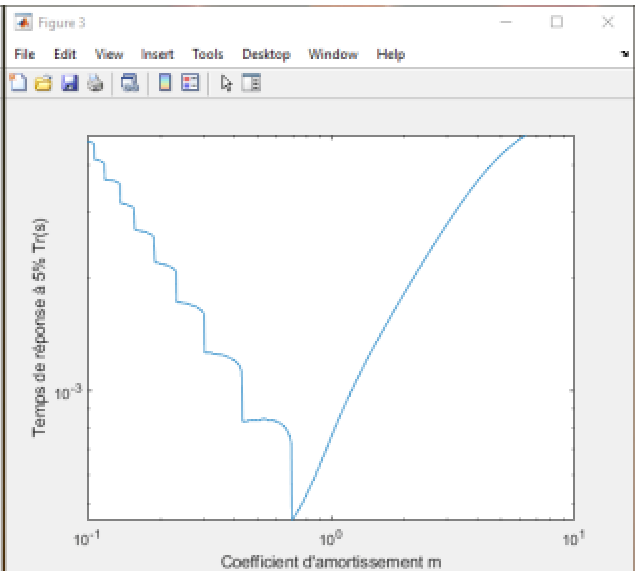
  - une pseudo-période : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$

  - un dépassement : $D = \exp\left(-\dfrac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}\right)$

Quelque soit la valeur du coefficient d'amortissement m, on définit le temps de réponse à 5% T_r, comme le temps à partir duquel la courbe reste comprise dans la gamme des +/-5% de la valeur finale. La figure ci-dessous à gauche illustre la définition du temps de réponse à 5%.

Si l'on souhaite dimensionner un système rapide, il faut choisir la valeur de m en fonction de ce critère. La figure ci-dessous à droite illustre l'évolution du temps de réponse à 5% en fonction du coefficient d'amortissement m. Le temps de réponse à 5% est minimum pour $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$.





En analysant la courbe du temps de réponse à 5% en fonction du coefficient d'amortissement m, on peut donner des expressions approximatives du temps de réponse :

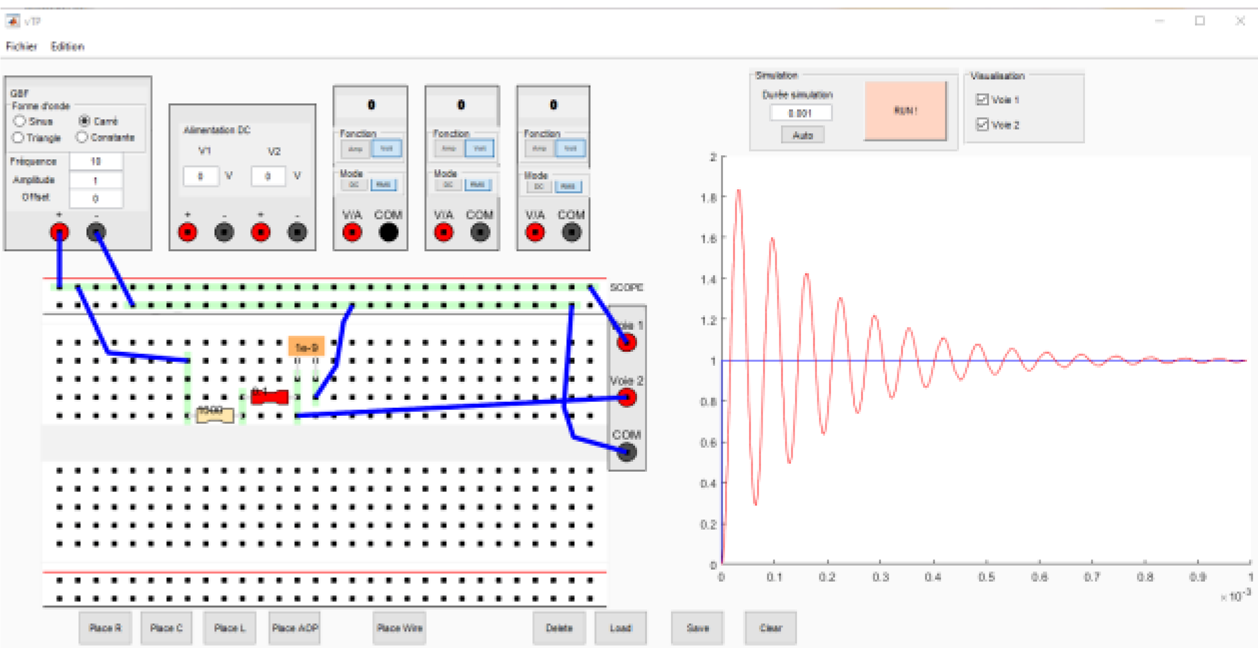
- si $m < 1$, $T_r \sim \dfrac{3}{m\omega_0}$
- si $m > 1$, $T_r \sim \dfrac{6m}{\omega_0}$

Simulation

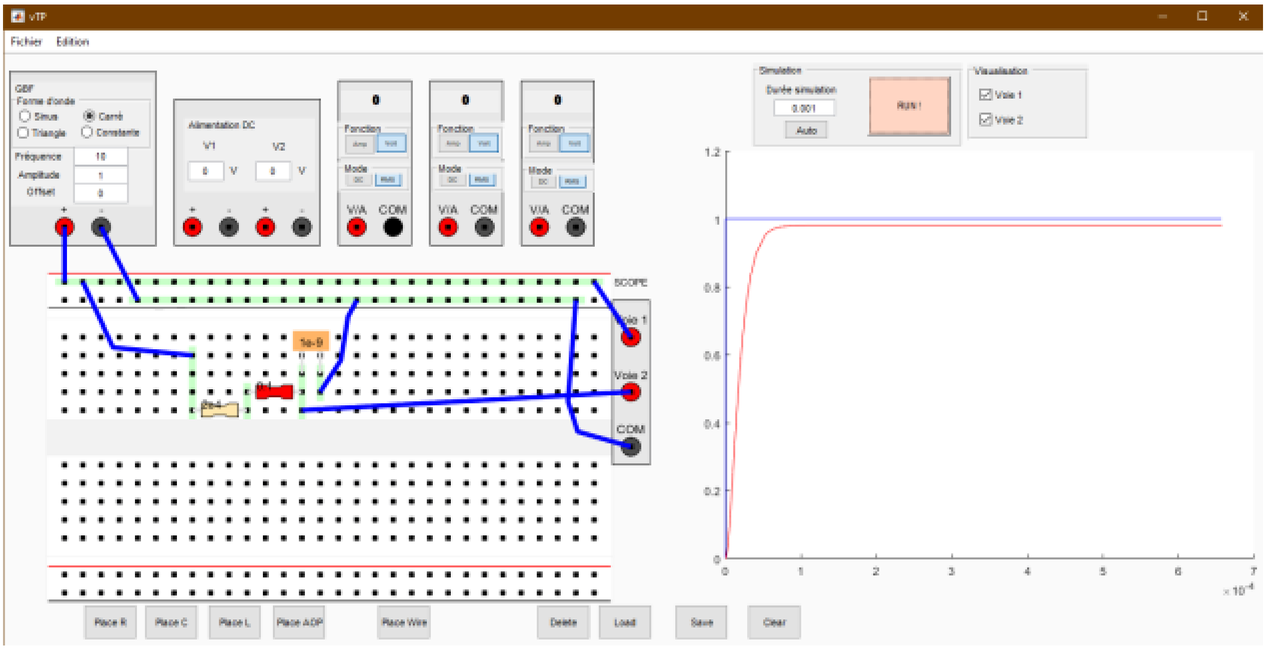
Pour compléter cet exemple, nous pouvons faire ce circuit avec vTP. La maquette virtuelle est illustrée sur la figure ci-dessous. Le signal d'entrée carré est généré à l'aide du générateur basses fréquences (GBF) en choisissant une forme d'onde carrée, une amplitude de 1 V, une tension d'offset de 0 V et une fréquence $10\,Hz$. La tension d'entrée $e(t)$ et la tension $s(t)$ se mesurent à l'aide d'un oscilloscope et sont reliées respectivement aux voies 1 (courbe bleue) et 2 (courbe rouge). La durée de simulation est choisie à 1 ms afin d'observer correctement la tension $s(t)$.

Concernant les valeurs des composants, on fixe les valeurs : $L = 0,1\,H$, $C = 1\,nF$. Puis, on va faire trois simulations pour trois valeurs de la résistance R :

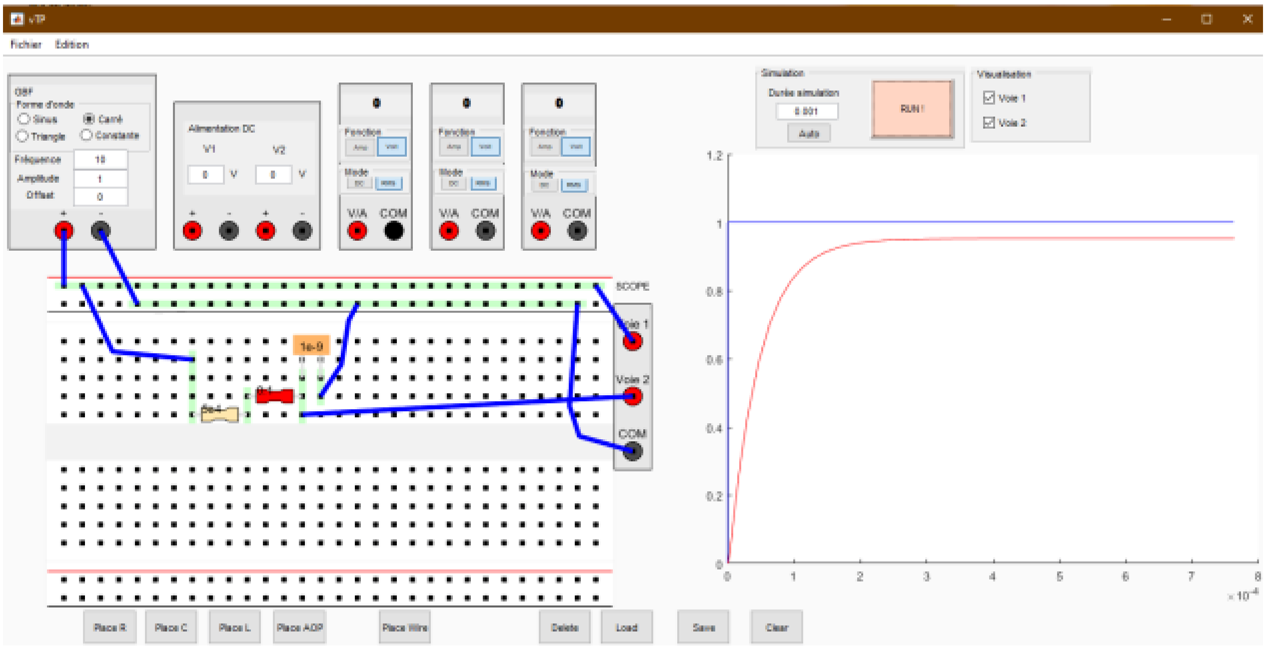
- $1\,k\Omega$ (ce qui correspond à $m = 0,05 < 1$)



- $20\ k\Omega$ (ce qui correspond à $m = 1$)



- $50\ k\Omega$ (ce qui correspond à $m = 2,5$)



On retrouve bien les trois régimes en simulation.