Méthode de résolution à partir des équations différentielles

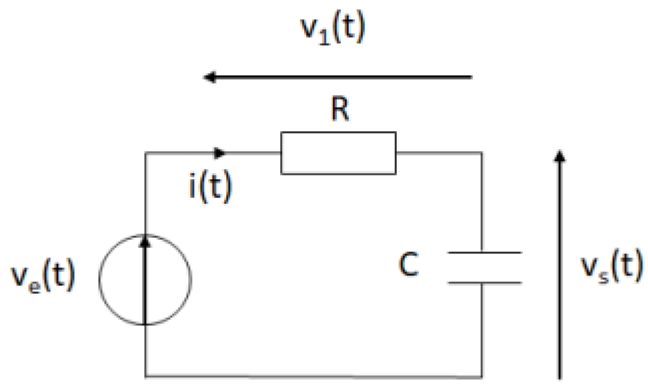
Fondamental

Tous les théorèmes fondamentaux et lois présentés dans le chapitre sur le régime continu s'appliquent également en régime harmonique.

Résolution à partir des équations différentielles

Exemple

Prenons l'exemple du circuit RC dont le schéma est illustré ci-dessous. Le générateur délivre une tension sinusoïdale : $v_e(t) = V_0 \cos(\omega t)$. On cherche à déterminer la tension de sortie $v_s(t)$.



En utilisant la loi des mailles et les relations courant-tension des deux composants, on obtient l'équation différentielle suivante (le calcul a déjà été fait dans le chapitre sur le régime variable, le revoir ici) :

$$RC\frac{dv_s}{dt} + v_s(t) = v_e(t)$$ eq. (1)

Ici $v_e(t) = V_0 \cos(\omega t)$, la solution complète de l'équation différentielle est donc sous la forme :

$$v_s(t) = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + B\cos(\omega t + \varphi)$$

En régime harmonique, on ne s'intéresse qu'au régime permanent, donc on cherche la solution sous la forme :

$v_s(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$ eq. (2) (l'autre partie étant la partie transitoire du signal)

Les inconnues sont la constante B et le déphasage φ.

Une méthode consiste à injecter la solution dans l'équation différentielle et à identifier B et φ.

Pour cela, il faut calculer $\dfrac{dv_s}{dt}$ en dérivant l'équation (2) :

$$\frac{dv_s}{dt} = -B\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

L'équation différentielle (1) devient alors :

$$V_0 \cos(\omega t) = -RC\omega \sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Leftrightarrow V_0 \cos(\omega t) = B\sqrt{1 + (RC\omega)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\cos(\omega t + \varphi) - \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\sin(\omega t + \varphi)\right]$$

$$\Leftrightarrow V_0 \cos(\omega t) = B\sqrt{1 + (RC\omega)^2}\left[\cos(\theta)\cos(\omega t + \varphi) - \sin(\theta)\sin(\omega t + \varphi)\right]$$

$$\Leftrightarrow V_0 \cos(\omega t) = B\sqrt{1 + (RC\omega)^2}\left[\cos(\omega t + \varphi + \theta)\right]$$

Par identification , on obtient :

$$\begin{cases} V_0 = B\sqrt{1 + (RC\omega)^2} \\ \varphi + \theta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{V_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \varphi = -\theta \end{cases}$$

avec $\tan(\theta) = RC\omega \Leftrightarrow \theta = \arctan(RC\omega)$

Soit : $v_s(t) = \dfrac{V_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\cos[\omega t - \arctan(RC\omega)]$

Remarque

Cette méthode est difficile à mettre en œuvre sur les circuits compliqués car elle nécessite la connaissance de l'équation différentielle, puis la simplification d'expressions trigonométriques.

En pratique, on ne procède jamais de cette façon en régime harmonique.