Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

1. Les dipôles élémentaires
2. Association de dipôles - lois de KIRCHOFF
3. Théorèmes généraux relatifs aux circuits linéaires

Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

1. Les dipôles élémentaires

1.1 Linéarité

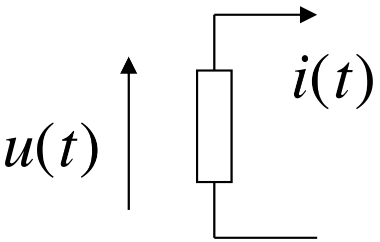
Principe de superposition

$$f(\alpha i_1 + \beta i_2) = \alpha f(i_1) + \beta f(i_2)$$

$$ou$$

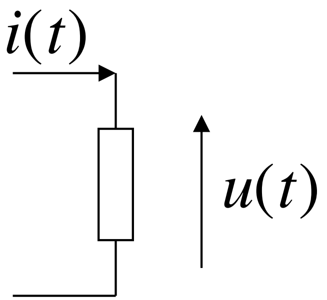
$$g(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha g(u_1) + \beta g(u_2)$$

1.2 Convention générateur et récepteur



Générateur

$p > 0$



Récepteur

$p < 0$

Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

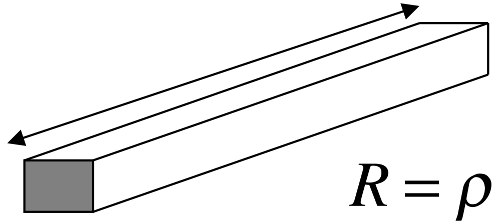
1.3 Les dipôles linéaires passifs élémentaires

1.3.1 Les résistances électrique (R, Ohms : Ω)

$$u(t) = Ri(t) = \frac{i(t)}{G}$$

G = conductance (Siemens S)

$l : longueur, (m)$



$$R = \rho \frac{l}{S} = cte$$

$S : \text{sec}\,tion, (m^2)$

$\rho : résistivité, (\Omega.m)$

1.3.1.1 Puissance et énergie consommé

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri(t)^2 = \frac{u(t)^2}{R}$$

$$P_{moy} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} Ri(t)^2 dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{u(t)^2}{R} dt$$

$$E = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} Ri(t)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{u(t)^2}{R} dt$$

Chapitre 2

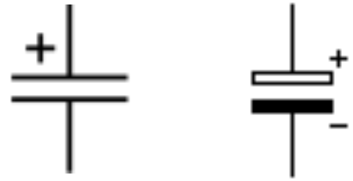
MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

1.3.1.2 Comportement en régime continue

$$u(t) = U : i(t) = I : U = RI$$

$$p(t) = P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} \longrightarrow E = UI(t_2 - t_1) = RI^2 \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t$$

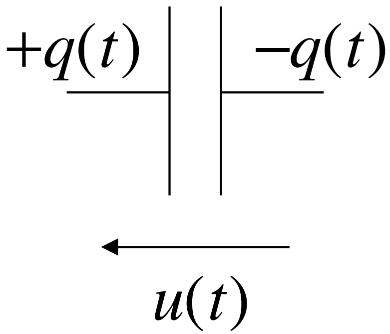
1.3.1.3 Comportement en régime sinusoïdal cf cours électrocinétique 2



Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

1.3.2 Les condensateurs (C, Farade : F)



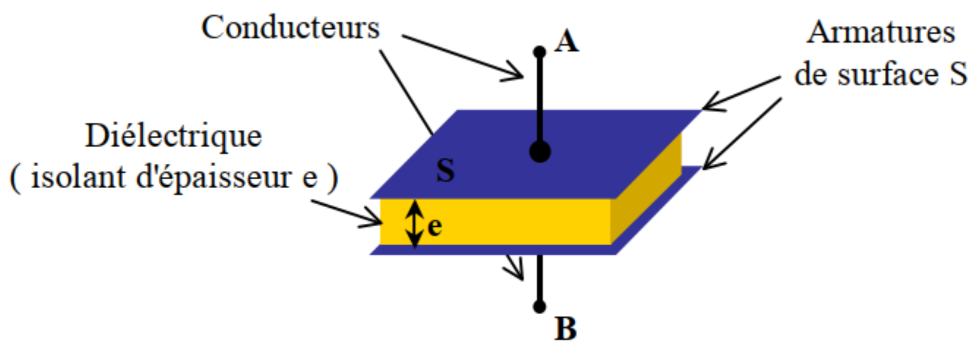
$$\left|+q(t)\right| = \left|-q(t)\right| = Cu(t)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \boxed{C\frac{du(t)}{dt} = i(t)}$$

- cas d'un condensateur plan

$$C = \varepsilon\frac{S}{e}$$

S : *surface des armatures* m^2
e : *épaisseur du diélectrique* m
ε : *constante diélectrique* F/m)



Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

1.3.2.1 Relations tension – courant (u(t) non constant)

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \; et\; donc\; u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

1.3.2.2 Puissance et énergie

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t)C\frac{du(t)}{dt}$$

$$dE = p(t)dt = Cu(t)du(t) = d\left(\frac{1}{2}Cu(t)^2\right) \xrightarrow{\text{donc}} \boxed{E = \frac{1}{2}Cu(t)^2}$$

Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

1.3.2.3 Comportement en régime continu « régime permanent »

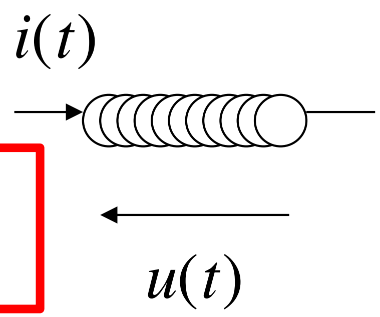
$$u(t) = U \longrightarrow Q = CU \longrightarrow i(t) = \frac{dQ}{dt} = 0 \qquad E = \frac{1}{2}CU^2$$

1.3.2.4 Comportement en régime sinusoïdal : cf cours électrocinétique 2

Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

1.3.3 Les inductances (L, Henri : H)



$$\phi(t) = L\,i(t) \longrightarrow e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \longrightarrow \boxed{u(t) = L\frac{di}{dt}}$$

$L : coefficient\_d'auto-induction$

1.3.3.1 Relations tension – courant (i(t) non constant)

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \text{ et donc } \mathrm{i(t)} = \frac{1}{L}\int u(t)dt$$

1.3.3.2 Puissance et énergie : $p(t) = u(t)i(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt}$

$$dE = p(t)dt = Li(t)di(t) = d\left(\frac{1}{2}Li(t)^2\right) \qquad \boxed{E = \frac{1}{2}Li(t)^2}$$

Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

1.3.3.3 Comportement en régime continu « régime permanent »

$$i(t) = I \longrightarrow \phi = LI \longrightarrow u(t) = L\frac{di}{dt} = 0 \qquad E = \frac{1}{2}LI^2$$

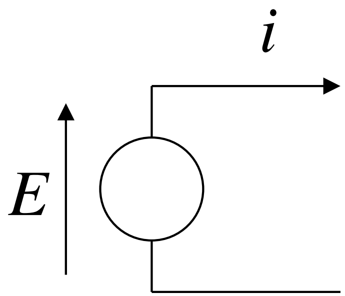
1.3.3.4 Comportement en régime sinusoïdal : cf cours électrocinétique 2

Chapitre 2

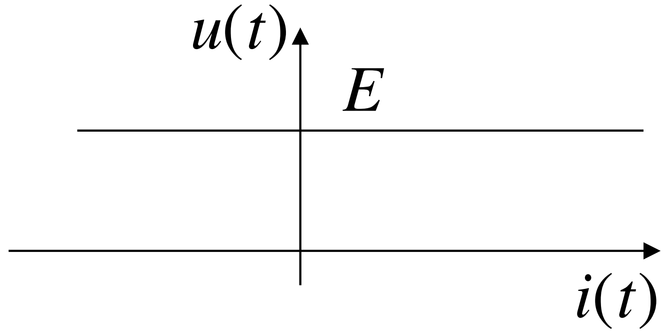
MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

1.5 Les dipôles linéaires actifs élémentaires

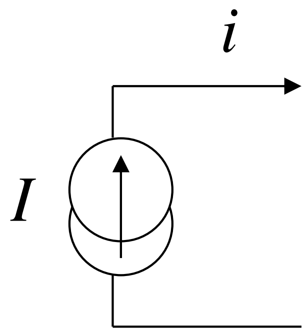
1.5.1 Sources de tension idéale



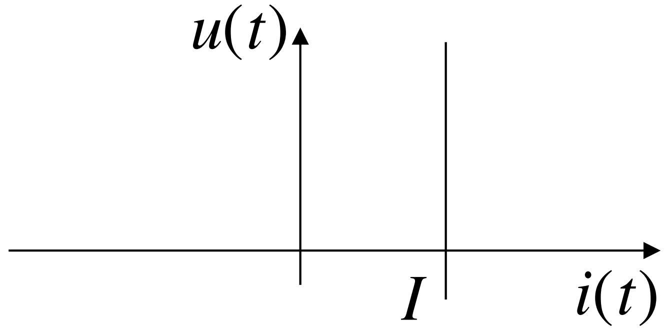
$$u(t) = E$$



1.5.2 Sources de courant idéale



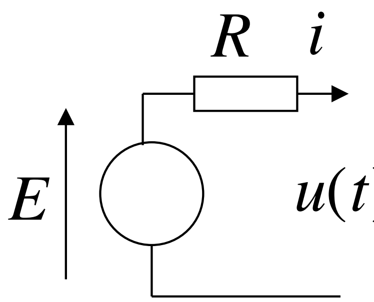
$$i(t) = I$$



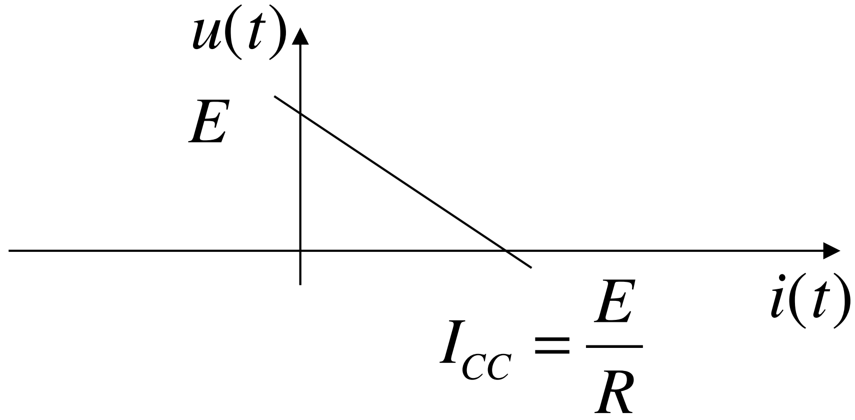
Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

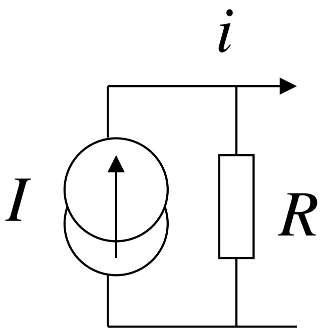
1.5.3 Sources de tension réelles



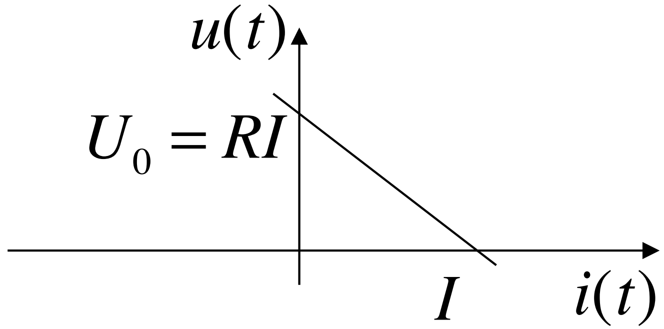
$$u(t) = E - Ri(t)$$



1.5.4 Sources de courant réelles



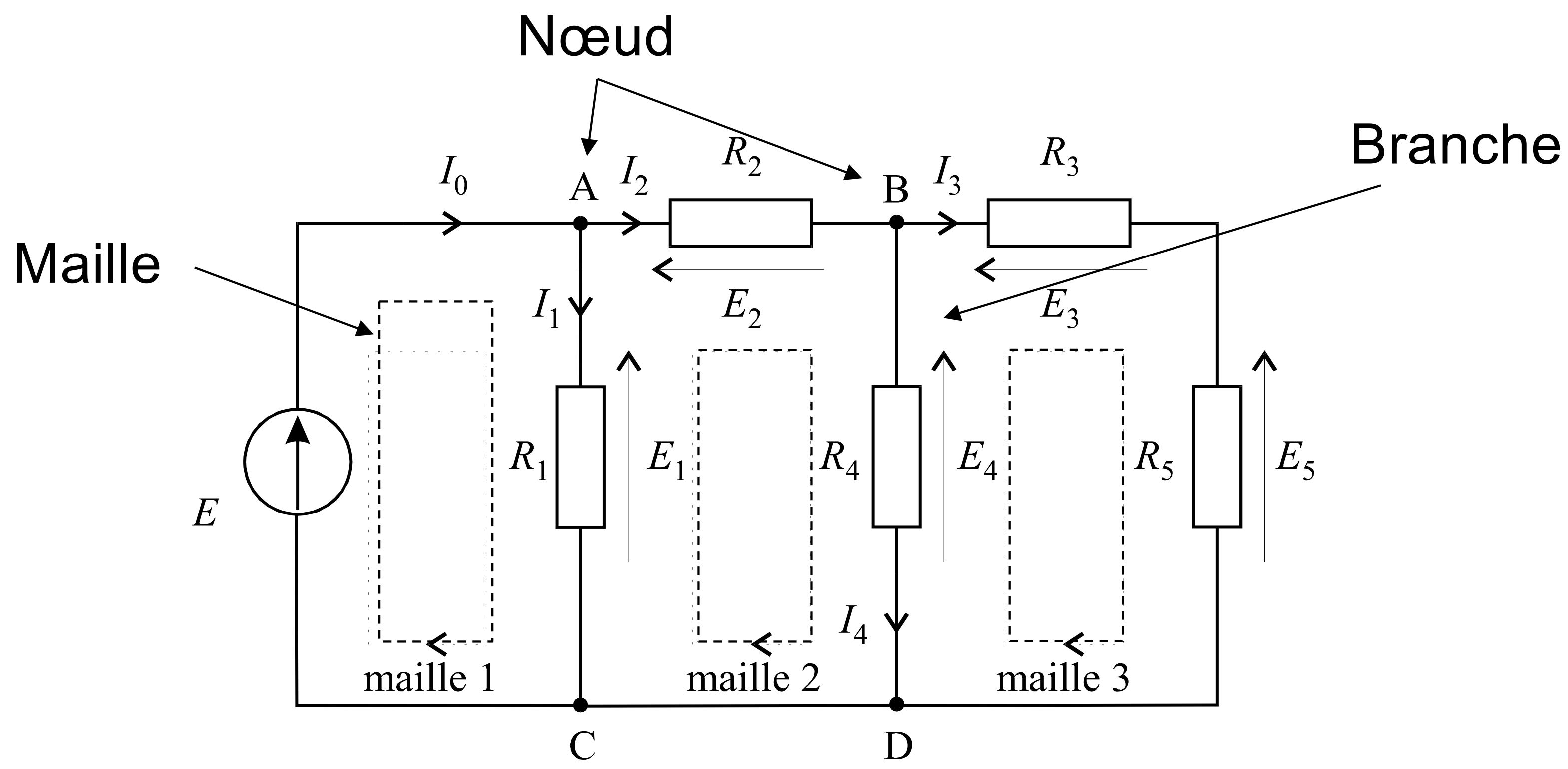
$$i(t) = I - \frac{u(t)}{R}$$



Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

2. Composition d'un réseau / circuit électrique

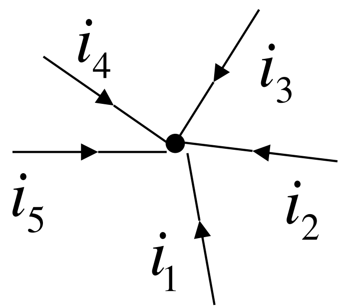


Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

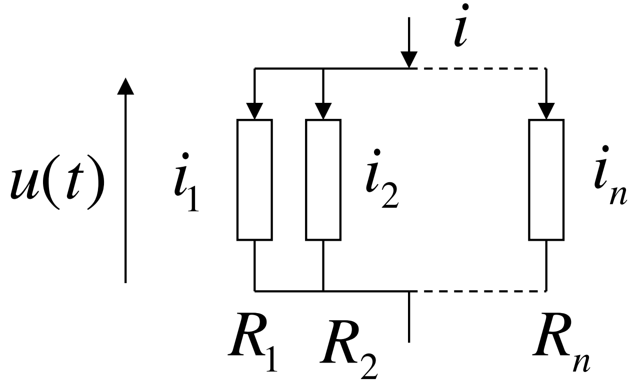
2. Lois de Kirchoff - Associations de dipôles

2.1 Lois des noeuds



$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0$$

2.1.1 Association parallèle



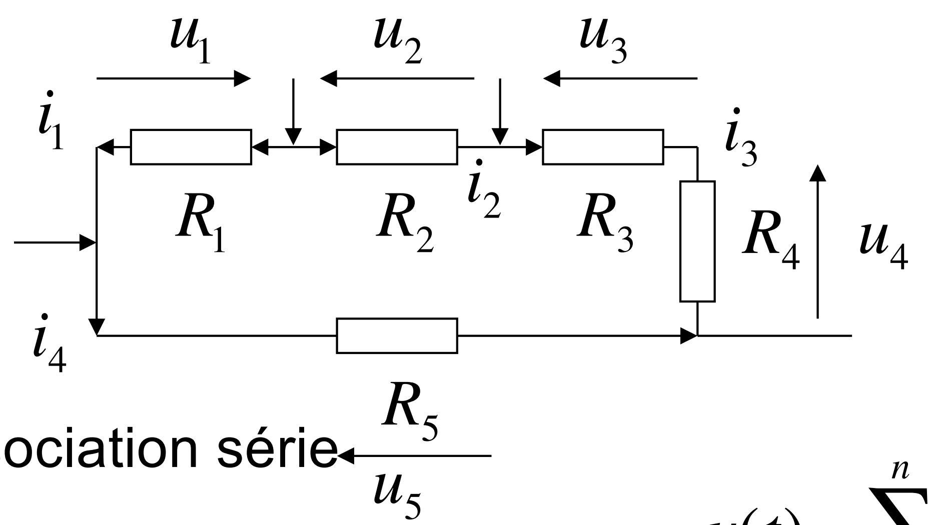
$$i(t) = \sum_{k=1}^{n} i_k(t) = \sum_{k=1}^{n} G_k u(t) = G_{eq} u(t)$$

$$G_{eq} = \sum_{k=1}^{n} G_k \longrightarrow R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} G_k}$$

Chapitre 2

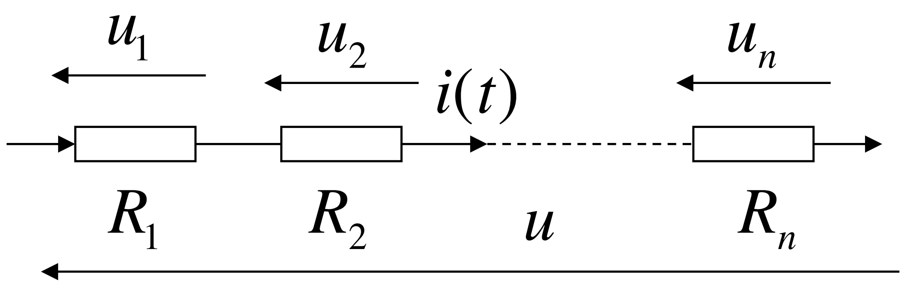
MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

2.2 Lois des mailles



$$\sum_{k=1}^{n} u_k(t) = 0$$

2.2.1 Association série



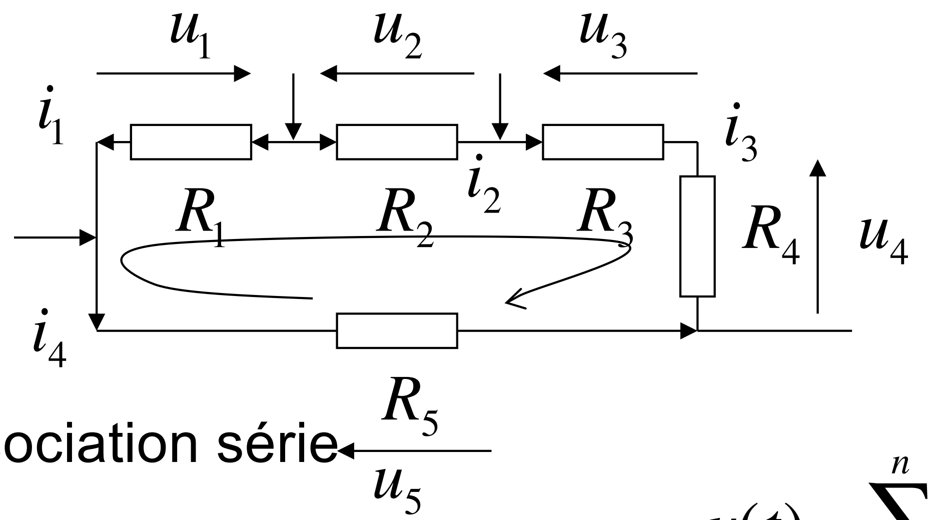
$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) = \sum_{k=1}^{n} R_k i(t) = R_{eq} i(t)$$

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

Chapitre 2

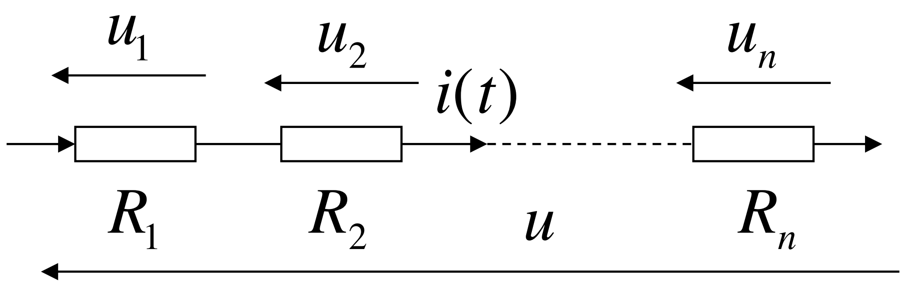
MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

2.2 Lois des mailles



$$\sum_{k=1}^{n} u_k(t) = 0$$

2.2.1 Association série



$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) = \sum_{k=1}^{n} R_k i(t) = R_{eq} i(t)$$

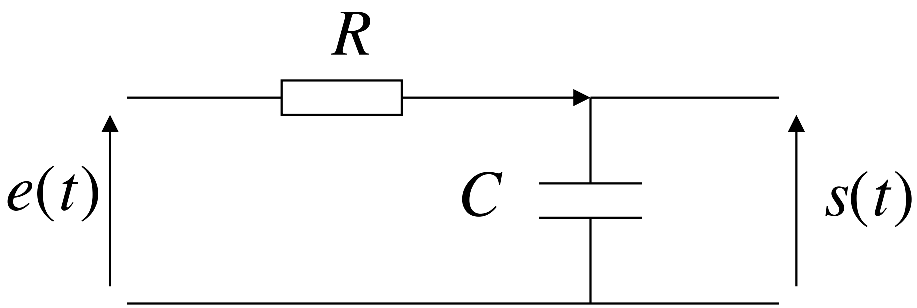
$$R_{eq} = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

2.3 Exemple de mise en équation

2.3.1 Circuit RC



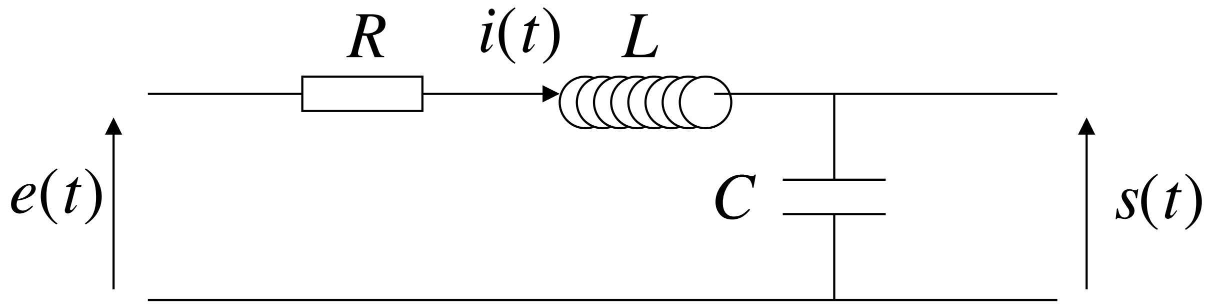
$$\left.\begin{array}{l} e(t) = Ri(t) + s(t) \\ i(t) = C\dfrac{ds(t)}{dt} \end{array}\right\} \longrightarrow s(t) + \tau\frac{ds(t)}{dt} = e(t)$$

$$avec\ \ \tau = RC$$

Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

2.3.2 Circuit RLC série



$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + s(t)$$

$$i(t) = C\frac{ds(t)}{dt}$$

$$e(t) = s(t) + RC\frac{ds(t)}{dt} + LC\frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

3 Théorèmes généraux relatifs aux circuits linéaires

3.1 Théorème de superposition

3.1.1 Enoncé

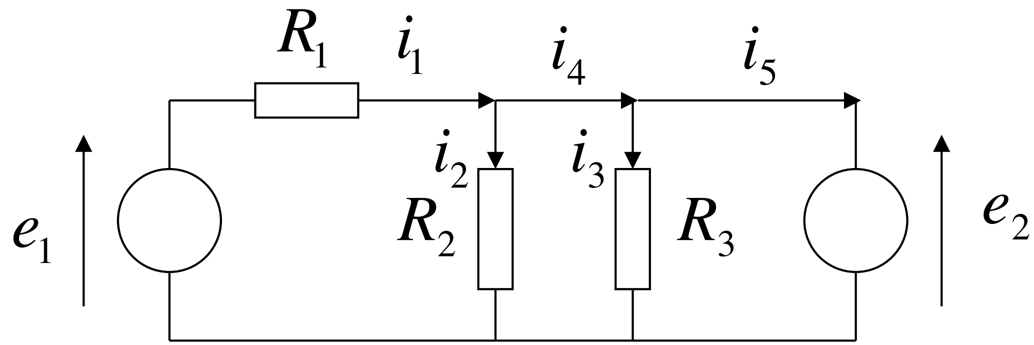
Le courant qui traverse une branche d'un réseau (ou la différence de potentiel entre deux points d'un réseau) est la somme algébrique des courants (ou des tensions) que l'on obtiendrait en faisant agir séparément chacune des sources indépendantes du circuit. Les autres sources indépendantes sont alors annulées, mais les sources commandées restent actives.

Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

3.1.1 Exemple

Calcul de i_1



Th de superposition : $i_1 = i_1^{'} + i_1^{''}$

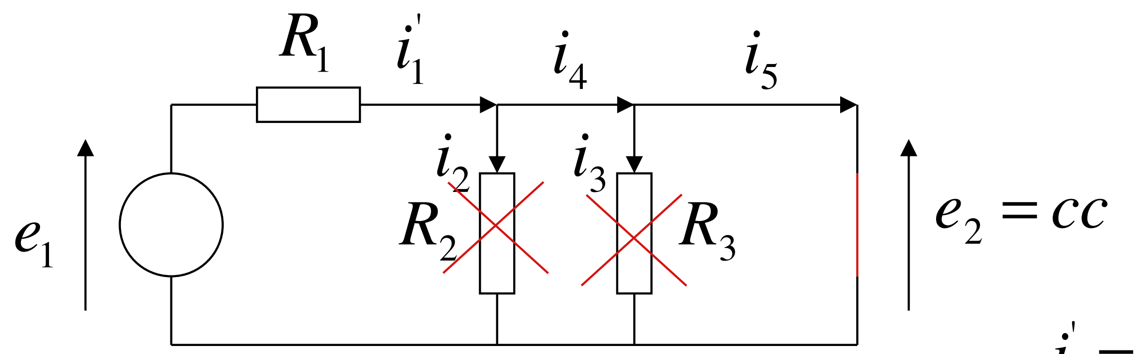
i_1' = courant i_1 quand $e_2 = 0$

i_1'' = courant i_1 quand $e_1 = 0$

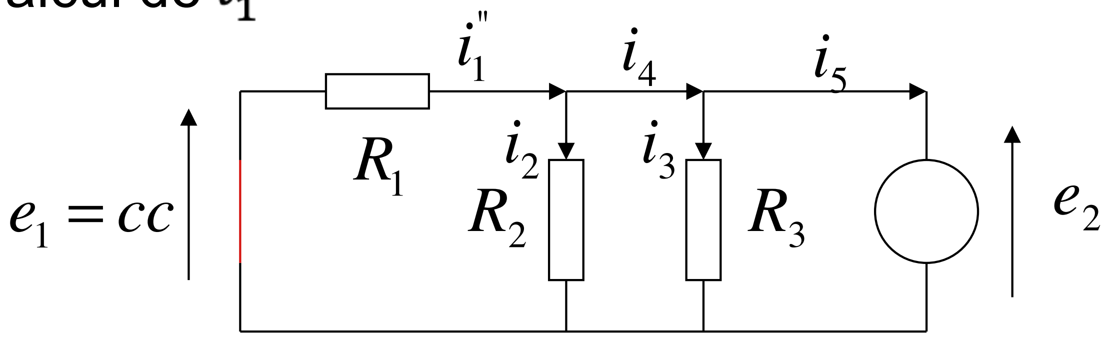
Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

Calcul de i_1'



Calcul de i_1''



$$\left.\begin{aligned} i_1' &= \frac{e_1}{R_1} \\ i_1'' &= -\frac{e_2}{R_1} \end{aligned}\right\} \longrightarrow i_1 = \frac{e_1 - e_2}{R_1}$$

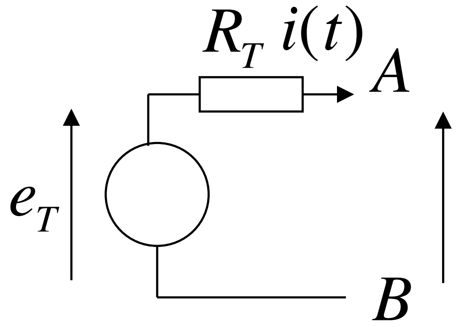
Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

3.2 Théorème de Thévenin

3.2.1 Enoncé

Tout dipôle linéaire peut toujours se réduire à un générateur de tension en série avec une résistance.



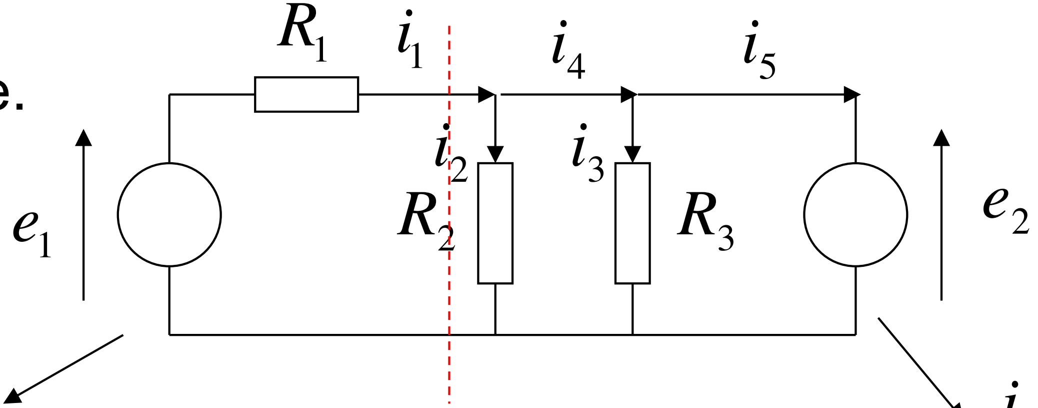
$$u(t) = e_T - R_T i(t)$$

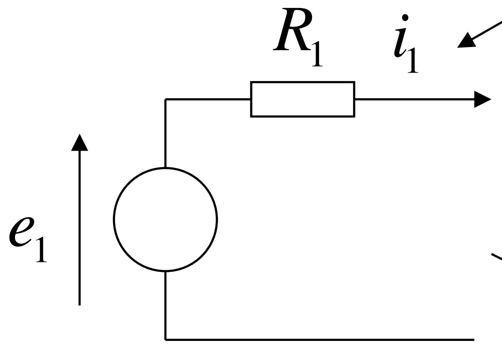
- e_T est la tension « à vide »
- R_T est obtenue en éteignant les sources du montage, soit :
    - Pour les sources de tension : en les remplaçant par un cc
    - Pour les sources de courant : en les remplaçant par un co

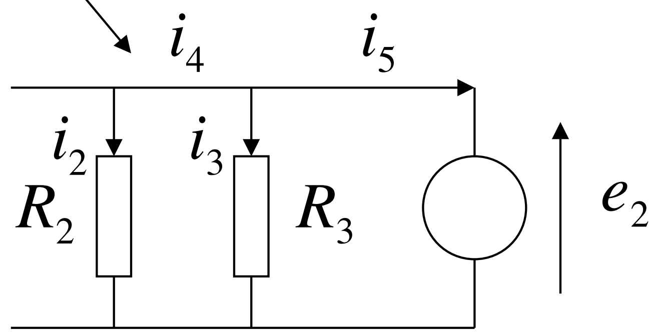
MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

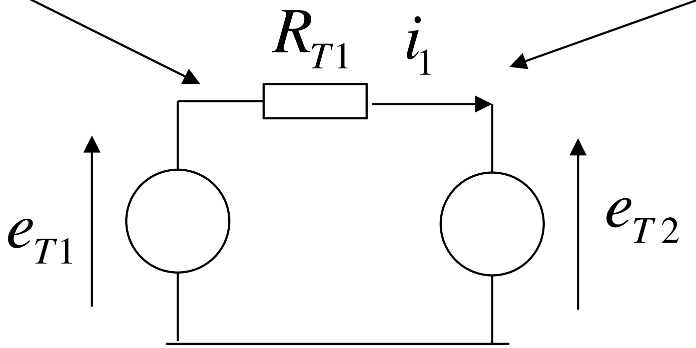
3.2.2 Exemple.

Calcul de i_1









$$e_{T2} = e_2$$

$$R_{T2} = 0$$

$$e_{T1} = e_1$$

$$R_{T1} = R_1$$

$$i_1 = \frac{e_{T1} - e_{T2}}{R_{T1}} = \frac{e_1 - e_2}{R_1}$$

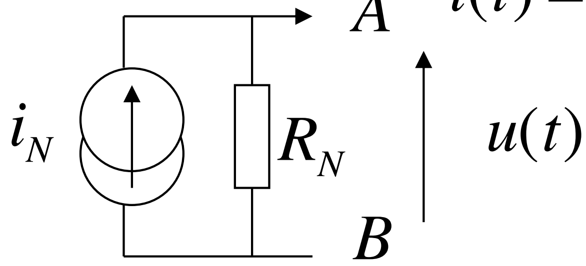
MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

3.3 Théorème de Norton

3.3.1 Enoncé

Tout dipôle linéaire peut toujours se réduire à un générateur de courant en parallèle avec une résistance.

$$i(t) = i_N - \frac{u(t)}{R_N}$$



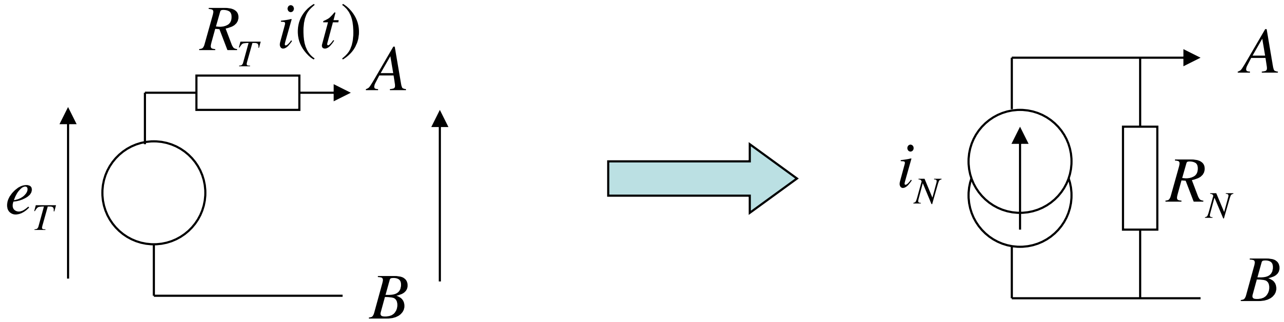
- I_N est le courant de court-circuit
- R_T est obtenue en éteignant les sources du montage, soit :
    - Pour les sources de tension : en les remplaçant par un cc
    - Pour les sources de courant : en les remplaçant par un co

Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

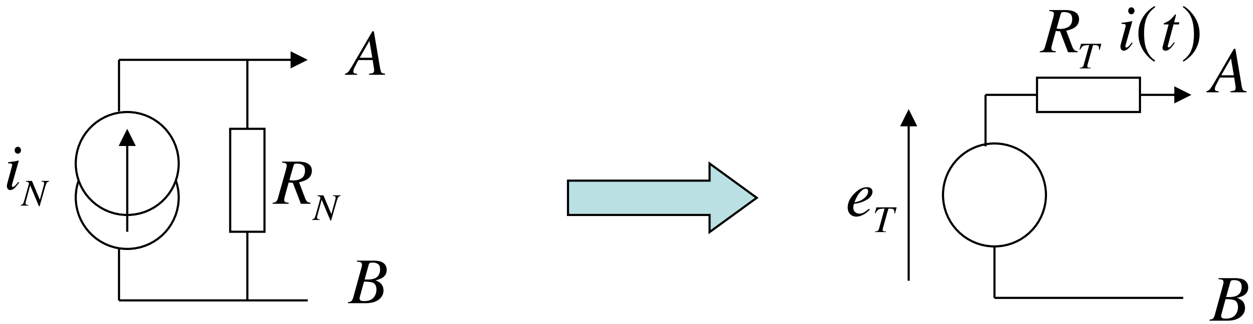
3.3.2 Passage Norton-Thévenin

On passe d'une représentation de Norton (source de courant à une représentation de Thévenin (source de tension) en appliquant le théorème de Thévenin ou Norton respectivement.



$$R_N = R_T$$

$$i_N = \frac{e_T}{R_T}$$



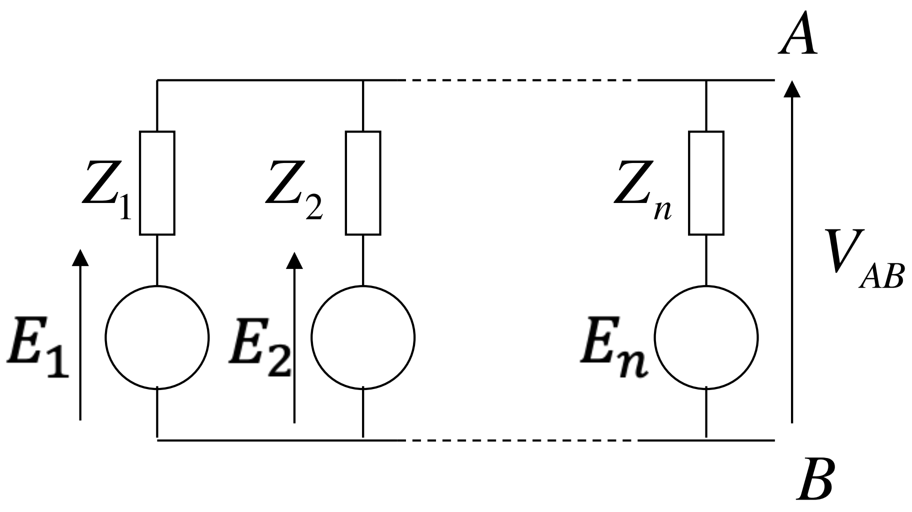
$$R_T = R_N$$

$$e_T = R_N i_N$$

Chapitre 2

MISE EN EQUATION DE DIPOLES ELEMENTAIRES

3.4 Théorème de Millman



$$V_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i . E_i}{\sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

$$avec\ \_Y_i = \frac{1}{Z_i}$$

Rm : E_i peut être égale à zéro