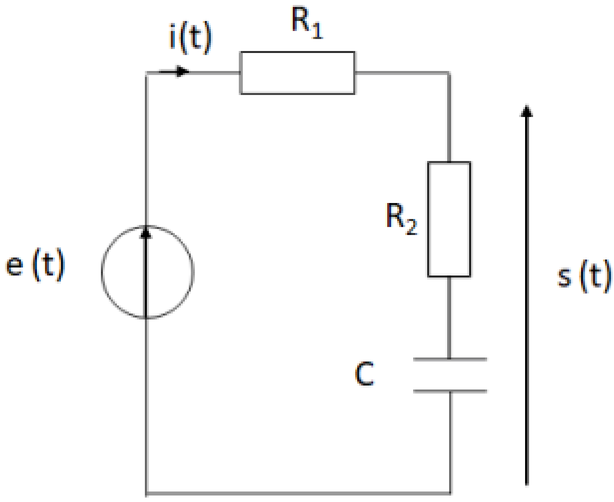
Exercice 4 : Analyse de circuits linéaires à l'aide du formalisme de Laplace - Réponse d'un circuit du 1er ordre ⭐⭐⭐

On considère le circuit de la figure ci-dessous.



Les conditions initiales sont nulles (c'est-à-dire qu'à $t = 0^-$, le condensateur est déchargé).

Le circuit est alimenté par un échelon de tension d'amplitude E : $e(t) = E \cdot u(t)$, où $u(t)$ est l'échelon unité.

Partie : 1- Résolution avec le formalisme de la transformée de Laplace

Question

1) Faire le schéma équivalent avec les impédances opérationnelles du circuit.

Indice

Revoir le cours sur les impédances opérationnelles.

Indice

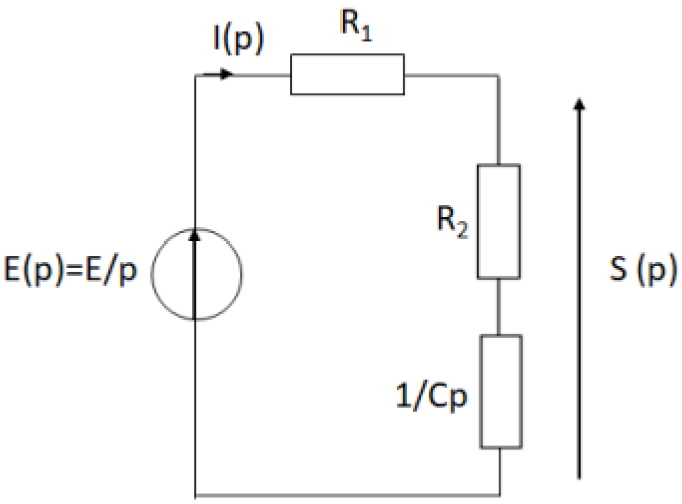
On veillera à faire apparaître toutes les grandeurs électriques dans le domaine de Laplace.

Solution

La transformée de Laplace du signal d'entrée $e(t)$ est notée $E(p)$. En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace et la table des transformées, on peut écrire :

$$E(p) = TL\{e(t)\} = TL\{E \cdot u(t)\} = E \cdot TL\{u(t)\} = \frac{E}{p}$$

Le schéma équivalent avec les impédances opérationnelles du circuit est donné ci-dessous.



Question

2) Calculer $S(p)$ et $I(p)$ les transformées de Laplace respectives de $s(t)$ et $i(t)$.

Indice

Appliquez les théorèmes fondamentaux avec le formalisme des impédances opérationnelles.

Solution

- Pour le calcul de $I(p)$, on applique la loi des mailles :

  $\frac{E}{p} - R_1 \cdot I(p) - S(p) = 0$ eq. (1)

  On applique la relation courant/tension avec le formalisme des impédances opérationnelles pour exprimer $S(p)$:

  $S(p) = R_2 \cdot I(p) + \frac{1}{Cp} \cdot I(p) = (R_2 + \frac{1}{Cp})I(p)$ eq. (2)

  On injecte l'équation (2) dans l'équation (1) :

  $$\frac{E}{p} - R_1 \cdot I(p) - (R_2 + \frac{1}{Cp})I(p) = 0$$

  $$\Leftrightarrow \frac{E}{p} - (R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp})I(p) = 0$$

  $$\Leftrightarrow \frac{E}{p} = (R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp})I(p)$$

  $$\Leftrightarrow I(p) = \frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp}}$$

  $$\Leftrightarrow I(p) = \frac{E}{p} \cdot \frac{Cp}{1 + (R_1 + R_2)Cp}$$

  $\Leftrightarrow I(p) = \frac{EC}{1 + (R_1 + R_2)Cp}$ eq. (3)

- Pour le calcul de $S(p)$, on repart de l'équation (2) et on injecte le résultat de l'équation (3) :

$$\Leftrightarrow S(p) = (R_2 + \frac{1}{Cp}) \cdot \frac{EC}{1 + (R_1 + R_2)Cp}$$

$$\Leftrightarrow S(p) = (R_2 + \frac{1}{Cp}) \cdot \frac{ECp}{[1 + (R_1 + R_2)Cp]\, p}$$

$$\Leftrightarrow S(p) = \frac{E\,[1 + R_2 Cp]}{[1 + (R_1 + R_2)Cp]\, p}$$

Question ⭐⭐

3) Mettre les expressions de $S(p)$ et $I(p)$ sous la forme d'une somme d'éléments simples.

Indice

Revoir le cours sur la décomposition en éléments simples

Solution

- La fraction $I(p)$ est composée d'un polynôme de degré 0 au numérateur et d'un polynôme de degré 1 au dénominateur donc c'est une fraction irréductible. Le pôle de cette fraction est $-\frac{1}{(R_1 + R_2)C}$.

  Par conséquent, sa décomposition en éléments simples est sous la forme : $I(p) = \frac{A}{p + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}}$ où A est une constante à déterminer.

  On procède par identification :

$$I(p) = \frac{EC}{1 + (R_1 + R_2)Cp} = \frac{A}{p + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EC}{1 + (R_1 + R_2)Cp} = \frac{A(R_1 + R_2)C}{[(R_1 + R_2)C]\left[p + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}\right]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EC}{1 + (R_1 + R_2)Cp} = \frac{A(R_1 + R_2)C}{1 + (R_1 + R_2)Cp}$$

$$\Leftrightarrow EC = A(R_1 + R_2)C$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{E}{(R_1 + R_2)}$$

La décomposition en éléments simples de $I(p)$ est donc :

$I(p) = \dfrac{E}{(R_1 + R_2)} \cdot \dfrac{1}{p + \dfrac{1}{(R_1 + R_2)C}}$ eq. (4)

- La fraction $S(p)$ est composée d'un polynôme de degré 1 au numérateur et d'un polynôme de degré 2 au dénominateur donc c'est une fraction irréductible.

  Cette fraction a deux pôles 0 et $-\dfrac{1}{(R_1 + R_2)C}$.

  Par conséquent, sa décomposition en éléments simples est sous la forme :

  $S(p) = \dfrac{B}{p} + \dfrac{D}{p + \dfrac{1}{(R_1 + R_2)C}}$ où B et D sont des constantes à déterminer.

  On procède par identification :

$$S(p) = \frac{E\left[1 + R_2Cp\right]}{\left[1 + (R_1 + R_2)Cp\right]p} = \frac{B}{p} + \frac{D}{p + \dfrac{1}{(R_1 + R_2)C}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{E\left[1 + R_2Cp\right]}{\left[1 + (R_1 + R_2)Cp\right]p} = \frac{B(p + \dfrac{1}{(R_1 + R_2)C}) + Dp}{\left[p + \dfrac{1}{(R_1 + R_2)C}\right]p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{E\left[1 + R_2Cp\right]}{\left[1 + (R_1 + R_2)Cp\right]p} = \frac{B\left[(R_1 + R_2)Cp + 1\right] + D(R_1 + R_2)Cp}{\left[(R_1 + R_2)Cp + 1\right]p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{E\left[1 + R_2Cp\right]}{\left[1 + (R_1 + R_2)Cp\right]p} = \frac{B(R_1 + R_2)Cp + B + D(R_1 + R_2)Cp}{\left[1 + (R_1 + R_2)Cp\right]p}$$

  On identifie terme à terme :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = B \\ ER_2C = B(R_1 + R_2)C + D(R_1 + R_2)C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = E \\ ER_2C = E(R_1 + R_2)C + D(R_1 + R_2)C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = E \\ D(R_1 + R_2)C = ER_2C - E(R_1 + R_2)C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = E \\ D(R_1 + R_2)C = -ER_1C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = E \\ D = -E\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

La décomposition en éléments simples de $I(p)$ est donc :

$$S(p) = \frac{E}{p} - \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}} \text{ eq. (5)}$$

Question

4) Calculer $s(t)$ et $i(t)$ en utilisant la table de transformées de Laplace.

Solution

- $i(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $I(p)$.

  Donc $i(t) = TL^{-1}\{I(p)\}$

  En utilisant le résultat de $I(p)$ obtenu à la question précédente (eq. (4)), on obtient :

  $$i(t) = TL^{-1}\left\{\frac{E}{(R_1 + R_2)} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{(R_1+R_2)C}}\right\}$$

  On utilise les propriétés de la transformée de Laplace :

  $$\Leftrightarrow i(t) = \frac{E}{(R_1 + R_2)} \cdot TL^{-1}\left\{\frac{1}{p + \frac{1}{(R_1+R_2)C}}\right\}$$

  On utilise la table de transformée de Laplace :

  $$\Leftrightarrow i(t) = \frac{E}{(R_1 + R_2)} \cdot \exp\left[-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}\right] \text{ pour } t > 0$$

- $s(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $S(p)$.

  Donc $s(t) = TL^{-1}\{S(p)\}$

  En utilisant le résultat de $S(p)$ obtenu à la question précédente (eq. (5)), on obtient :

  $$s(t) = TL^{-1}\left\{\frac{E}{p} - \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}}\right\}$$

  On utilise les propriétés de la transformée de Laplace :

  $$\Leftrightarrow s(t) = E \cdot TL^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \cdot TL^{-1}\left\{\frac{1}{p + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}}\right\}$$

  On utilise la table de transformée de Laplace :

  $$\Leftrightarrow s(t) = E - \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \cdot \exp\left[-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}\right] \text{ pour } t > 0$$

Soit : $\Leftrightarrow s(t) = E\left[1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}\right)\right]$ pour $t > 0$

Partie : 2 - Résolution temporelle

Question ⭐⭐⭐

5) Mettre en équation le circuit pour déterminer la ou les équations différentielles qui régissent le circuit et la ou les résoudre pour déterminer $s(t)$.

Méthode ?

Ici, il n'est pas possible de déterminer l'équation différentielle qui régi $s(t)$. Il faut déterminer le système d'équations et d'équations différentielles qui permettent de résoudre $s(t)$.

Solution

On applique la loi des mailles :

$e(t) - R_1 \cdot i(t) - s(t) = 0$ eq. (6)

On note $v_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur. La relation courant/tension pour le condensateur donne :

$i(t) = C \cdot \frac{dv_C}{dt}$ eq. (7)

Et pour finir :

$v_C(t) + R_2 \cdot i(t) = s(t)$ eq. (8)

On remplace l'équation (8) dans l'équation (6) :

$e(t) - R_1 \cdot i(t) - v_C(t) - R_2 \cdot i(t) = 0$

$\Leftrightarrow (R_1 + R_2) \cdot i(t) + v_C(t) = e(t)$ eq. (9)

On remplace l'équation (7) dans l'équation (9) :

$(R_1 + R_2) \cdot C \cdot \frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = e(t)$ eq. (10)

On obtient donc le systèmes d'équations suivant :

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) \cdot C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = e(t) \\ i(t) = C \cdot \frac{dv_C}{dt} \\ s(t) = v_C(t) + R_2 \cdot i(t) \end{cases}$$

- Résolution de l'équation différentielle (10) qui régi $v_C(t)$:

  a) On résout l'équation homogène :

  $$(R_1 + R_2) \cdot C \cdot \frac{dv_{C,h}(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv_{C,h}(t)}{dt} + \frac{1}{(R_1 + R_2) \cdot C} \cdot v_{C,h}(t) = 0$$

La solution est : $v_{C,h}(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2) \cdot C}\right)$ avec K une constante qui sera à déterminer

b) On détermine la solution particulière :

Pour $t > 0$, $e(t) = E = constante$, la solution particulière est donc sous la forme d'une constante $v_{C,p} = A = constante$ (donc $\frac{dv_{C,p}}{dt} = 0$)

On réinjecte cette solution dans l'équation différentielle générale :

$$(R_1 + R_2) \cdot C \cdot \frac{dv_{C,p}(t)}{dt} + v_{C,p}(t) = e(t)$$

Pour $t > 0$: $0 + A = E$

Donc $v_{C,p} = E$

c) On détermine la solution complète :

$$v_C(t) = v_{C,h}(t) + v_{C,p} = K \cdot \exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2) \cdot C}\right) + E \text{ eq. (11)}$$

K est à déterminer à l'aide de la condition initiale $v_C(0^+)$

A $t = 0^-$, le condensateur est déchargé, la tension à ses bornes est nulles $\Rightarrow v_C(0^-) = 0$

Par ailleurs, la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité donc $v_C(0^-) = v_C(0^+) = 0$

On applique alors l'équation (11) en $t = 0^+$:

$v_C(0) = K \cdot \exp(0) + E = 0$ (condition initiale)

$\Leftrightarrow K + E = 0 \Leftrightarrow K = -E$

Par conséquent, $v_C(t) = -E \cdot \exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2) \cdot C}\right) + E$

$$\Leftrightarrow v_C(t) = E\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2) \cdot C}\right)\right] \text{ pour } t > 0$$

- Détermination de $i(t)$ à l'aide de l'équation (7) et du résultat de $v_C(t)$:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv_C}{dt} \text{ eq. (7)}$$

Il faut donc calculer $\frac{dv_C}{dt}$:

$$\frac{dv_C}{dt} = E\left[0 - \left(-\frac{1}{(R_1 + R_2) \cdot C}\right) \exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2) \cdot C}\right)\right] \text{ pour } t > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv_C}{dt} = \frac{E}{(R_1+R_2)\cdot C}\exp\left(-\frac{t}{(R_1+R_2)\cdot C}\right) \text{ pour } t>0$$

Par conséquent :

$$i(t) = C\cdot\frac{dv_C}{dt} = \frac{C\cdot E}{(R_1+R_2)\cdot C}\exp\left(-\frac{t}{(R_1+R_2)\cdot C}\right) \text{ pour } t>0$$

$$\Leftrightarrow i(t) = \frac{E}{R_1+R_2}\exp\left(-\frac{t}{(R_1+R_2)\cdot C}\right) \text{ pour } t>0$$

On constate qu'on obtient la même expression pour $i(t)$ qu'à la question 4).

- Détermination de $s(t)$ à l'aide de l'équation (8) et des résultats précédents :

  $s(t) = v_C(t) + R_2\cdot i(t)$ eq. (8)

  On remplace dans l'équation (8) les expressions de $v_C(t)$ et $i(t)$ obtenues précédemment :

  $$s(t) = E\left[1-\exp\left(-\frac{t}{(R_1+R_2)\cdot C}\right)\right] + R_2\cdot\frac{E}{R_1+R_2}\exp\left(-\frac{t}{(R_1+R_2)\cdot C}\right)$$

  pour $t>0$

  $$\Leftrightarrow s(t) = E\left[1-\frac{R_1+R_2-R_2}{R_1+R_2}\exp\left(-\frac{t}{(R_1+R_2)\cdot C}\right)\right] \text{ pour } t>0$$

  $$\Leftrightarrow s(t) = E\left[1-\frac{R_1}{R_1+R_2}\exp\left(-\frac{t}{(R_1+R_2)\cdot C}\right)\right] \text{ pour } t>0$$

  On constate qu'on obtient la même expression pour $s(t)$ qu'à la question 4).

Partie : 3- Simulation

Question

6) Tracer le courant $i(t)$ et la tension $s(t)$. Pour cela, on utilise Octave.

On prendra : $E = 5\,V$, $R_1 = 1\,k\Omega$, $R_2 = 2\,k\Omega$ et $C = 1\,\mu F$

Note : On veillera à choisir une gamme de temps adaptée pour le tracé des courbes.

Indice

Gamme de temps : [0, 50 ms]

Solution

Simulation

Le code Octave est donné ci-dessous.

```
E=5; R1=1e3; R2=2e3; C=1e-6;
```

```
t=linspace(0,50e-3, 1000);
i=E/(R1+R2)*exp(-t/((R1+R2)*C));
s=E*(1-R1/(R1+R2)*exp(-t/((R1+R2)*C)));

plot(t,i,'r','linewidth',2)
xlabel('Temps (s)')
ylabel('Courant i(t) (A)')
figure
plot(t,s,'r','linewidth',2)
xlabel('Temps (s)')
ylabel('Tension s(t) (V)')
ylim([0 5])
```

On obtient les courbes suivantes :