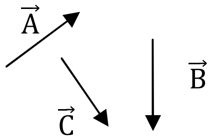
HAE302E - Circuits et Composants Capacitifs et Inductifs

TD1 Outils Mathématiques

1- Addition vectorielle :

Construire le vecteur $\vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C}$.



2- Produit scalaire

Démontrer que la projection d'un vecteur $\vec{A}$ sur un vecteur $\vec{B}$ est $\vec{A}.\vec{b}$ où $\vec{b}$ est le vecteur unitaire de $\vec{B}$.

3- Produit vectoriel

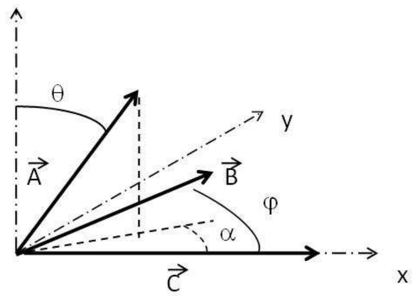
31- Démontrer que $\vec{A}\wedge\vec{B} = -\vec{B}\wedge\vec{A}$.

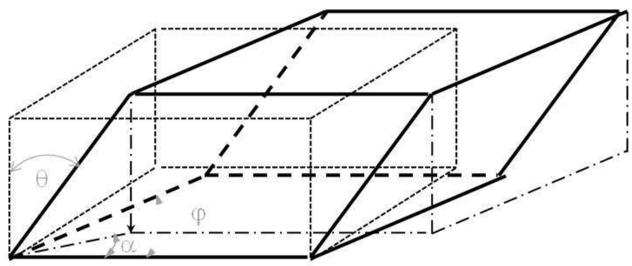
32- Si $\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ calculer $\vec{A}\wedge\vec{B}$.

33- Montrer que la surface d'un parallélogramme de cotés $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est $\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|$.

4- Produit mixte et double produit vectoriel

41- Montrer que $|\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})|$ est égal au volume du parallélépipède dont les arrêtes sont les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.





42- Donner une interprétation géométrique de $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C}) = 0$

43- Si $\vec{A} = \vec{i} = \vec{j}$ et $\vec{B} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{C} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$ calculer $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$ et $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$

5- Champ vectoriel ou champ de vecteurs

On considère le champ vectoriel : $\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e_x} - 14yz\,\vec{e_y} + 20xz^2\vec{e_z}$

Calculer la circulation du vecteur $\vec{A}$ entre les points (0, 0, 0) et (1, 1, 1) le long des chemins suivants :

51- le segment d'une droite joignant ces deux points,

52- les segments de droites allant de (0, 0, 0) à (1, 0, 0) puis de (1, 0, 0) à (1, 1, 0) et de (1, 1, 0) jusqu'à (1, 1, 1).

6- . Champ électrique dérivant d'un potentiel

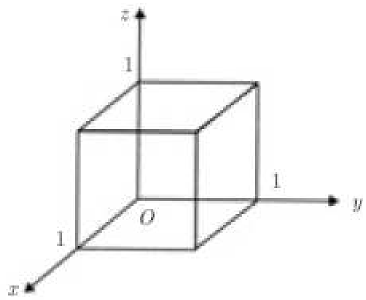
Considérons un champ de vecteurs $\overrightarrow{E} = yz\,\overrightarrow{e_x} + zx\overrightarrow{e_y}, + f(x,y)\,\overrightarrow{e_z}$, dans l'espace orthonormé $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ dans lequel f(x,y) ne dépend que de x et y.

Une propriété des opérateurs différentiels permet de dire que si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E(x,y,z)} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{E(x,y,z)} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}(V(x,y,z)}$. Autrement dit $\overrightarrow{E\,(x,y,z)}$ dérive du potentiel V(x,y,z).

Déterminer la fonction f(x,y) pour que le champ $\overrightarrow{E(x,y,z)}$ dérive d'un potentiel V(x,y,z).

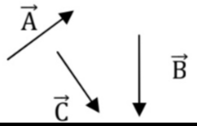
7- Flux d'un champ de vecteurs

Calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{E(x,y,z)} = 4xy\overrightarrow{e_x} - y^2\overrightarrow{e_y} + yz\overrightarrow{e_z}$ à travers le cube limité par x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z= 1.

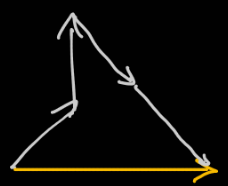


1- Addition vectorielle :

Construire le vecteur $\vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C}$.



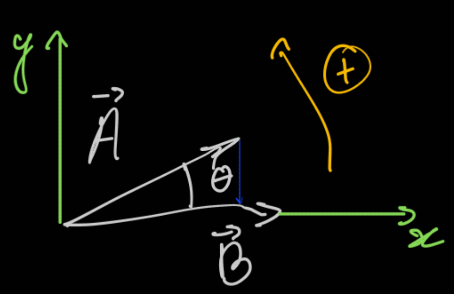
faire attention au repère



2- Produit scalaire

Démontrer que la projection d'un vecteur $\vec{A}$ sur un vecteur $\vec{B}$ est $\vec{A}.\vec{b}$ où $\vec{b}$ est le vecteur unitaire de $\vec{B}$.

La projection de A sur B est le produit scalaire de A par B : Par définition



$$\vec{A}\left|\begin{matrix} A.\cos\theta \\ A.\sin\theta \end{matrix}\right.$$

$$\vec{B}\left|\begin{matrix} B \\ 0 \end{matrix}\right.$$

$$A.B = A.\cos\theta.B + 0.$$
$$= A.B.\cos\theta$$

uniquement la projection : $A.\cos\theta$

direction $\vec{b} = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$

ex : cadre de la porte avec le vent qui change d'axe

: // → tout le vent

⊥ → pas de vent.

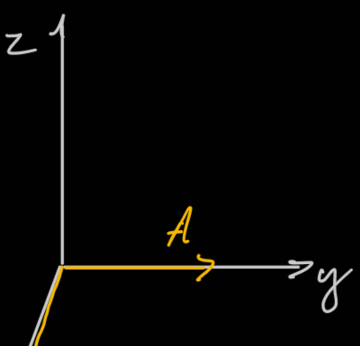
3- Produit vectoriel

31- Démontrer que $\vec{A}\wedge\vec{B} = -\vec{B}\wedge\vec{A}$.

32- Si $\vec{A} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\vec{B} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$ calculer $\vec{A}\wedge\vec{B}$.

33- Montrer que la surface d'un parallélogramme de cotés $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est $\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|$.

$$A\left|\begin{matrix} 0 \\ A \\ 0 \end{matrix}\right. \qquad \vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -A.B \end{pmatrix}$$



$$B\left|\begin{matrix} B \end{matrix}\right.$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$C = B \wedge A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ AB \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

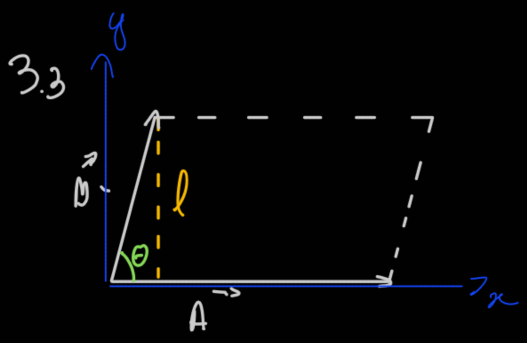
$\vec{C}'' = -B \wedge A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -AB \end{pmatrix}$

3.2 $A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A \wedge B \left| \begin{matrix} 1-6 & = -5 \\ 4+3 & = 7 \\ 9+2 & = 11 \end{matrix} \right.$

$\vec{A} \wedge \vec{B} : \vec{C} = -5\vec{i} + 7j + 11k$

3.3



formule d'un parallélogramme : base × h

Or $l = ||\vec{A}|| \times \sin\theta$

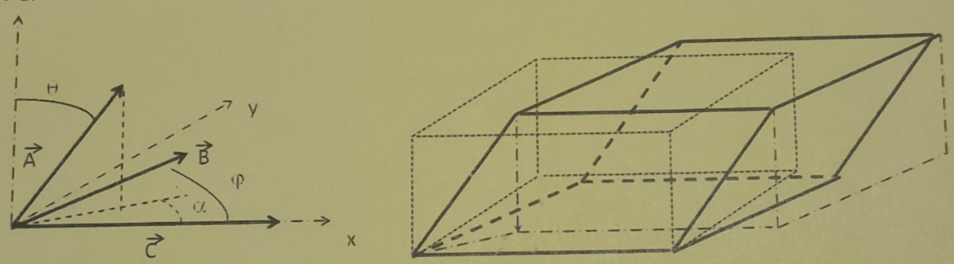
Donc $l \times ||\vec{B}||$ = hauteur × base

$||\vec{A}|| \times ||\vec{B}|| \cdot \sin\theta \rightarrow = ||\vec{A} \wedge B||$

$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

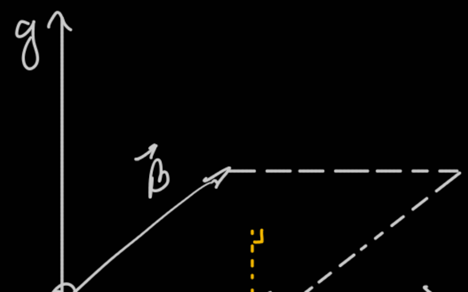
4- Produit mixte et double produit vectoriel

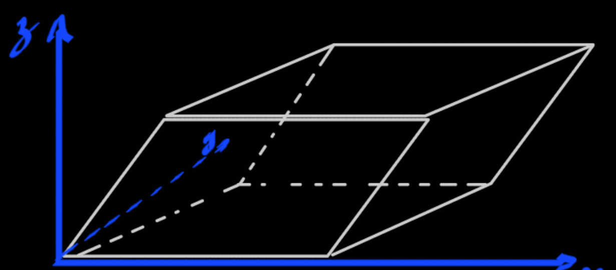
41- Montrer que $|\vec{A}.(\overrightarrow{B \wedge C})|$ est égal au volume du parallélépipède dont les arrêtes sont les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.



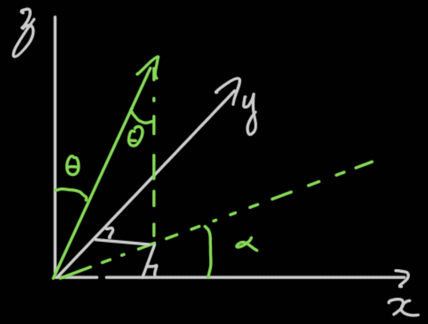
42- Donner une interprétation géométrique de $\vec{A}.(\overrightarrow{B \wedge C}) = 0$

43- Si $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{B} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{C} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$ calculer $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$ et $\vec{A} \wedge (\overrightarrow{B \wedge C})$





$$\vec B \wedge \vec C \begin{pmatrix} B\cos\varphi \\ B\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -BC\sin\varphi \end{pmatrix} = \vec S$$



$$\vec A \begin{pmatrix} A\sin\theta\cos\alpha \\ A\sin\theta\sin\alpha \\ A\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec A \cdot \vec S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\cdot B\cdot C\cdot\sin\varphi\cos\theta \end{pmatrix}$$

Digression sur Produit Mixte

$\vec A \cdot (\vec B \wedge \vec C) = 0$

Soit $(\underbrace{B \wedge C}_{S}) = 0$ → surface nul

Soit $(\vec A \cdot \vec S) = 0$ $\vec A \perp \vec S$ car $\vec S$ est dans le plan de la surface

4.3)

42- Donner une interprétation géométrique de $\vec A.(\vec B\wedge\vec C) = 0$

43- Si $\vec A = \vec\imath = \vec\jmath$ et $\vec B = 2\vec\imath - 3\vec\jmath + \vec k$ et $\vec C = 4\vec\jmath - 3\vec k$ calculer $(\vec A\wedge\vec B)\wedge\vec C$ et $\vec A\wedge(\vec B\wedge\vec C)$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

1 2 0

$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(\vec{B} \wedge \vec{C}) \begin{pmatrix} 5 \\ +6 \\ 8 \end{pmatrix}$

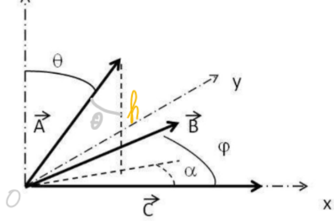
1 0

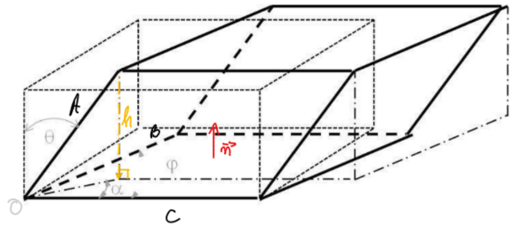
$(A \wedge B) \wedge C \begin{pmatrix} .23 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Rq : si θ est droit alors $\sin\theta = 0$ donc $S = A \times B$.

4- Produit mixte et double produit vectoriel

41- Montrer que $|\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})|$ est égal au volume du parallélépipède dont les arrêtes sont les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.





42- Donner une interprétation géométrique de $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C}) = 0$

43- Si $\vec{A} = \vec{\imath} = \vec{\jmath}$ et $\vec{B} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{C} = 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ calculer $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$ et $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$

Soit $\vec{m}$ vecteur unitaire $\|\vec{m}\|=1$

Volume du parallepipede est : Surface × h / or la surface et déf par le vecteur $\vec{B}\wedge\vec{C}$. La hauteur correspond au vect A soit

h : $\cos\theta = \frac{h}{A}$ ⟺ h : $A\cos\theta$

$A.(\vec{B}\wedge\vec{C})$

1) Si $A.(\vec{B}\wedge\vec{C})$ → $A=0$ / $B=0$ / $C=0$ soit 1 parallelogram. <u>pas de volume</u>.

c) $A = i + j$ $B = 2i - 3j + k$ $C = 4j - 3k$

$(A\wedge B)\wedge C$

$$A\wedge B \left|\begin{matrix} 1 & & 2 \\ 1 & \wedge & -3 \\ 0 & & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{matrix}$$

$$(A\wedge B)\wedge C \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ -5 & -3 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 23 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$(A\wedge B)\wedge C = 23i + 3j + 4k$

$A\wedge(B\wedge C)$

$$B\wedge C \left|\begin{matrix} 2 & & 0 \\ -3 & \wedge & 4 \\ 1 & & -3 \\ 2 & & 0 \end{matrix}\right|$$

Circulation

Pour la circulation l'analogie est de faire le chemin dans un champs en additionnant les different vecteur de cle (vecteur)

Soit une integrale.

5- <u>Champ vectoriel ou champ de vecteurs</u>

On considère le champ vectoriel : $\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e_x} - 14yz\,\vec{e_y} + 20xz^2\vec{e_z}$

Calculer la circulation du vecteur $\vec{A}$ entre les points (0, 0, 0) et (1, 1, 1) le long des chemins suivants :

51- le segment d'une droite joignant ces deux points,

52- les segments de droites allant de (0, 0, 0) à (1, 0, 0) puis de (1, 0, 0) à (1, 1, 0) et de (1, 1, 0) jusqu'à (1, 1, 1).

51 Soit la circulation sur la circulation entre (0,0,0) et (1,1,1) soit le vecteur $\vec{A}$. sur le chemin x, y, z varie de facon egale. soit avec la circulat $C = \int A\, d\vec{R}$

$$A = \int (3x^2 + 6x)\,dx - \int 14x^2\,dx + \int 20x^3\,dx$$

$$A = \left[x^3 + 3x^2 - \frac{14}{3}x^3 + 5x^4\right]_0^1$$

Sinon

$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2+6y \\ -14yz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ax \\ Ay \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \\ 20xy^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{dl} = A_x \, dx + A_y \, dy + A_z \, dz$$

$$A = \left[5x^4 - \frac{11}{3} \cdot x^3 + 3x^2\right]_0^1$$

$$A = 5 - \frac{11}{3} + 3$$

$$A = \frac{15 - 11 + 9}{3} = \underline{\frac{13}{3}}$$

S,2) C de $(0,0,0) \rightarrow (1,0,0)$

soit $y = 0 \rightarrow dy = 0$

$z = 0 \rightarrow dz = 0$

$$C_1 = \int_0^1 3x^2 + 6y \, dx$$

$$C = \left[\frac{3}{3} x^3\right]_0^1 = \underline{1}$$

C_2 de $(1,0,0) \rightarrow (1,1,0)$

soit $x = 1 \quad dx = 0$

$z = 0 \quad dz = 0$

$$C = -\int_0^1 14y \cdot \cancel{z} \, dy \rightarrow \underline{0}$$

C de $(1,1,0) \rightarrow (1,1,1)$

soit $x = 1 \quad dx = 0$

$y = 1 \quad dy = 0$

$$C_3 = \int_0^1 20 z^2$$

$$\left[20 \ 3\right]^1 = 20$$

$= \left[\frac{20}{3} z^3\right]_0 = \frac{20}{3}$

$\mathcal{C}_{tot} = 1 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$

Soit $\vec{A}$ n'est pas un gradient car sa circulation varie en fonction du chemin

C'est quoi un gradient

Un gradient est une variation d'une quantité physique (pression, champ électrique...)

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On observe les variation sur chaque axe par portion infinitésimal.

différentielle

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} . dx + \frac{\partial f}{\partial y} . dy + \frac{\partial f}{\partial z} . dz}$$

tangente au point

6- . Champ électrique dérivant d'un potentiel

Considérons un champ de vecteurs $\vec{E} = yz\,\vec{e_x} + zx\vec{e_y}, + f(x,y)\,\vec{e_z}$, dans l'espace orthonormé $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ dans lequel f(x,y) ne dépend que de x et y.

Une propriété des opérateurs différentiels permet de dire que si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E(x,y,z)} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{E(x,y,z)} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}(V(x,y,z)}$. Autrement dit $\overrightarrow{E\,(x,y,z)}$ dérive du potentiel V(x,y,z).

Déterminer la fonction f(x,y) pour que le champ $\overrightarrow{E(x,y,z)}$ dérive d'un potentiel V(x,y,z).

a) Méthode ... le $\overrightarrow{Rot}$

8) Méthode pour retrouver le rot

$$\begin{pmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \end{pmatrix}$$

2^{eme}
$$\begin{pmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

3^{em}
$$\begin{pmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$ si E dérive d'énergie potentielle

$$\vec{E}\begin{pmatrix} yz \\ zx \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}}_{E_z}\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(\underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}}_{E_y}\Big) \\ \frac{\partial}{\partial z}\Big(\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{E_x}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}}_{E_z}\Big) \\ \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}}_{E_y}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{E_x}\Big) \end{pmatrix}$$

$$E = -\vec{\mathrm{grad}}(V) = \begin{pmatrix} \partial V/\partial x \\ \partial V/\partial y \\ \partial V/\partial z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) - \frac{\partial}{\partial z}(zx) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(yz) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(zx) - \frac{\partial}{\partial y}(yz) = 0 \} \; z - z = 0$$

dépend de x

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x \Rightarrow f(x,y) = xy + cte$$

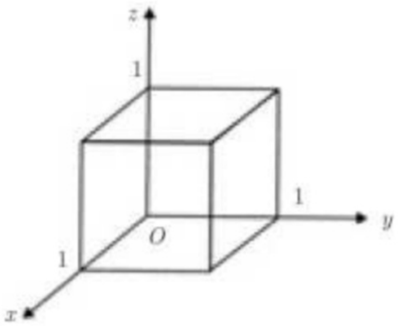
dépend de y

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y \rightarrow f(x,y) = xy + cte$$

Pourquoi = 0 ?

7- Flux d'un champ de vecteurs

Calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{E(x,y,z)} = 4xy\overrightarrow{e_x} - y^2\overrightarrow{e_y} + yz\overrightarrow{e_z}$ à travers le cube limité par x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z= 1.



7)

$\Phi_1 = \iint_S V.dS$

$\Phi_1 = \int_0^1\int_0^1 -yz$

$\Phi_1 = 0 \rightarrow$ car $z=0$

Surface S_1 $z=0$

$dS_1 = dx.dy.(-\vec{e_z})$ $\|\vec{e_z}\|=1$

$\int_0^1\int_0^1 \vec{E}.\vec{e_z}.dx.dy$

$\int_0^1\int_0^1 \begin{pmatrix}4xy\\-y^2\\yz\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} dx\,dy$

$\Phi_6 = \iint V.dS$

$= \int_0^1\int_0^1 yz\;dx\,dy$

$= \int_0^1\int_0^1 y\,dx\,dy$

$= \int_0^1 y\,dy$

$= \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1$

$z=1$

$dS_6 = dx.dy\;\vec{e_x}$

$\int_0^1\int_0^1 \begin{pmatrix}4xy\\-y^2\\yz\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} dx\,dy$

$= \frac{1}{2}$

$\Phi_5 = \iint V \cdot dS$

$= \int_0^1\int_0^1 -4xy \, dx \, dy \quad \rightarrow x=0$

$= 0$

$x = 0$

$dS = dz \, dy \, (-\vec{e_x})$

$\int_0^1\int_0^1 \begin{pmatrix} 4xy \\ -y^2 \\ yz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Phi_3 \iint V \cdot dS$

$= \int_0^1\int_0^1 4xy \, dz \, dy$

$= \int_0^1 4y \, dy \int_0^1 dz$

$= 2$

$x = 1$

$dS = dz \cdot dy \, (\vec{e_x})$

$\int_0^1\int_0^1 \begin{pmatrix} 4xy \\ -y^2 \\ yz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Phi_2 = \iint V \cdot dS$

$\int_0^1\int_0^1 y^2 \, dx \, dz \quad \rightarrow y=0$

$\Phi_2 = 0$

$y = 0$

$dS = dx \cdot dz \, (-\vec{e_y})$

$\int_0^1\int_0^1 y^2$

$\Phi_4 = \iint V dS$

$y = 1$

$dS = dx \cdot dz \, (\vec{e_y})$

$\Phi = \int_0^1\int_0^1 -y^2 \, dx \cdot dz$

$\Phi = -\int^1 dx \int^1 dz$

Φ : -1 $\rightarrow$ flux entrant

$$\Phi_{Total} = 0 + \frac{1}{2} + 0 + 2 + 0 - 1 = 3/2 \text{ globalement}$$

sort qqch crée le flux dans le Volume.