Détail de l'étude des limites du circuit RLC quand m<1

Etude de la résonance

Démontrons que le gain présente un maximum lorsque $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour cela, il faut regarder quand la dérivée du gain s'annule.

On calcule donc : $\frac{d\left|\underline{H}\right|}{d\omega}$

$$\left|\underline{H}\right| = \left|\frac{1}{1 + j\frac{2m\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\underline{H}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2m\omega}{\omega_0}\right]^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left|\underline{H}\right| = \left(\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2m\omega}{\omega_0}\right]^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\left|\underline{H}\right|}{d\omega} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2m\omega}{\omega_0}\right]^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left[2\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) \cdot \left(-\frac{2\omega}{\omega_0^2}\right) + 2\left(\frac{4m^2}{\omega_0^2}\right.\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\left|\underline{H}\right|}{d\omega} = \frac{\frac{2\omega}{\omega_0^2}\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 2m^2\right]}{\left(\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2m\omega}{\omega_0}\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d\left|\underline{H}(\omega_r)\right|}{d\omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2\omega_r}{\omega_0^2}\left[1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2 - 2m^2\right]}{\left(\left[1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2m\omega_r}{\omega_0}\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-\left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2-2m^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2=1-2m^2$$

$$\Leftrightarrow \omega_r^2=\omega_0^2\left(1-2m^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \omega_r=\omega_0\sqrt{1-2m^2}$$

On remarque que ω_r existe uniquement lorsque $1-2m^2>0$, soit $m<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Calculons à présent $|\underline{H}(\omega_r)|$:

$$|\underline{H}(\omega_r)|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[\frac{2m\omega_r}{\omega_0}\right]^2}}$$

On remplace ω_r:

$$|\underline{H}(\omega_r)|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega_0\sqrt{1-2m^2}}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[\frac{2m\omega_0\sqrt{1-2m^2}}{\omega_0}\right]^2}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\sqrt{1-2m^2}\right)^2\right]^2+\left[2m\sqrt{1-2m^2}\right]^2}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-(1-2m^2)\right]^2+4m^2(1-2m^2)}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)|=\frac{1}{\sqrt{4m^4+4m^2-8m^4)}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)|=\frac{1}{\sqrt{4m^2(1-m^2)}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)|=\frac{1}{2m\sqrt{(1-m^2)}}$$

Etude des limites

La fonction de transfert isochrone est la suivante :

$$\underline{H}=\frac{1}{1+j\frac{2m\omega}{\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

a. Diagramme du gain

$$G_{dB} = 20\log[|\underline{H}|] = 20\log\left[\left|\frac{1}{1 + j\frac{2m\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right|\right]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20\log[|\underline{H}|] = 20\log\left[\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2m\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20\log[|\underline{H}|] = 20\log\left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + \left(\frac{2m\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20\log[|\underline{H}|] = 20\log\left[\frac{1}{\sqrt{1 + (4m^2 - 2)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}\right]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20\log[|\underline{H}|] = -10\log\left[1 + (4m^2 - 2)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4\right]$$

Pour tracer G_{dB} en fonction de ω, il faut faire une étude des limites.

- lorsque ω tend vers 0 :

  $$\lim_{\omega\to 0} G_{dB} = \lim_{\omega\to 0} -10\log\left[1 + (4m^2 - 2)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4\right] = -10\log(1) = 0\,dB$$

  La première asymptote quand $\omega \to 0$ vaut 0 dB avec une pente nulle.

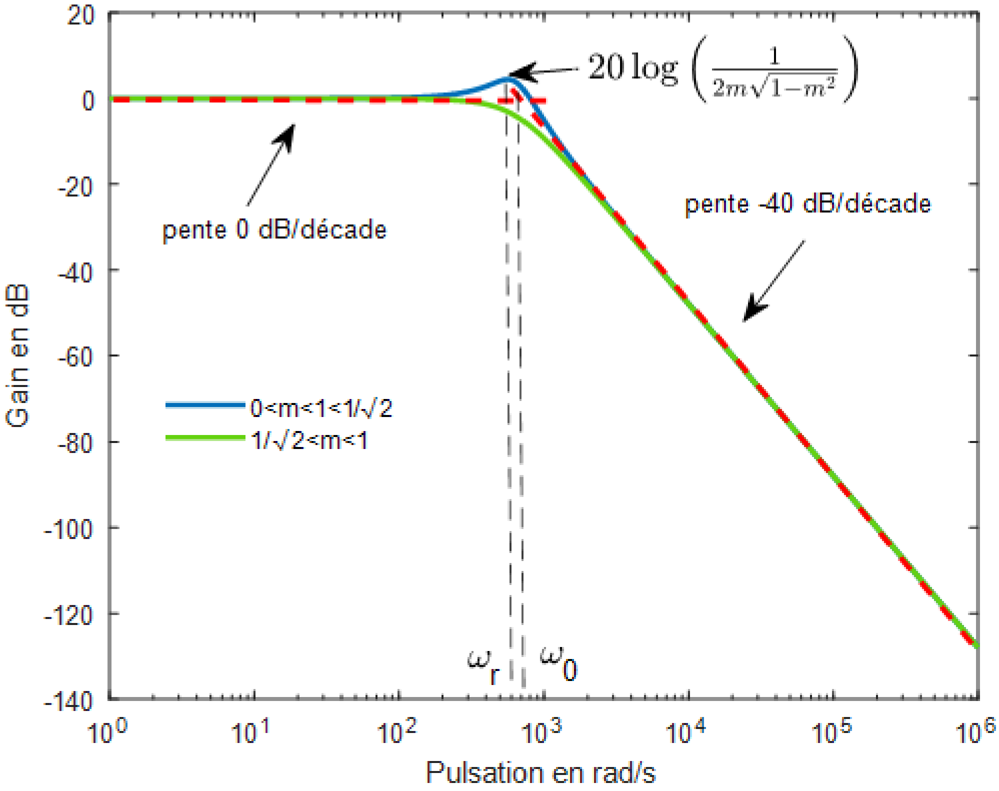
- lorsque ω tend vers $+\infty$:

  $$\lim_{\omega\to +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega\to +\infty} -10\log\left[1 + (4m^2 - 2)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4\right]$$

  $$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega\to +\infty} -10\log\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4\right]$$

  $$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega\to +\infty} -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\infty$$

  La deuxième asymptote est donc une droite de pente -40 dB/décade.



b. Diagramme de phase

$$\varphi = \arg(\underline{H})$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arg\left(\frac{1}{1 + j\frac{2m\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = -\arg\left(1 + j\frac{2m\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = -\arctan\left(\frac{\frac{2m\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

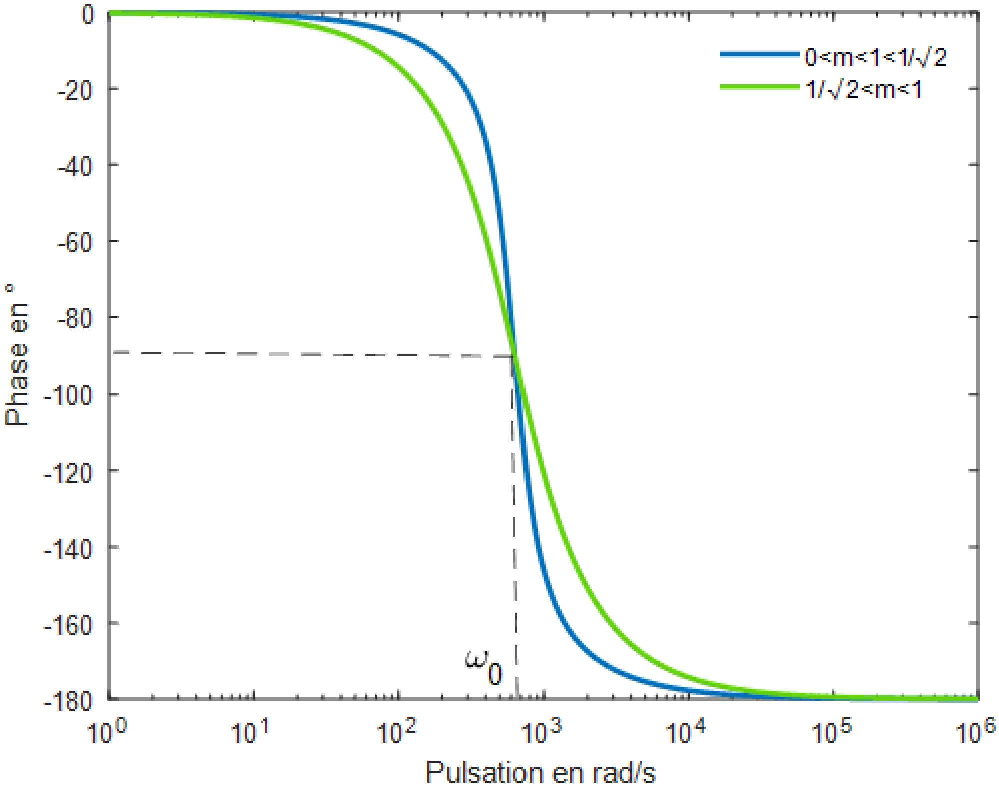
Pour tracer φ en fonction de ω, il faut faire une étude des limites.

- lorsque ω tend vers 0 :

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega \to 0} \varphi = \lim_{\omega \to 0} -\arctan\left(\frac{\frac{2m\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = -2 \cdot \arctan(0) = 0\, rad = 0°$$

- lorsque ω tend vers $+\infty$:

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega \to +infty} \varphi = \lim_{\omega \to +\infty} -\arctan\left(\frac{\frac{2m\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = -2\arctan(+\infty) = -2 \cdot \frac{\pi}{2}\, rad = -\pi$$


0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
Phase en °
0<m<1<1/√2
1/√2<m<1
ω0
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
Pulsation en rad/s