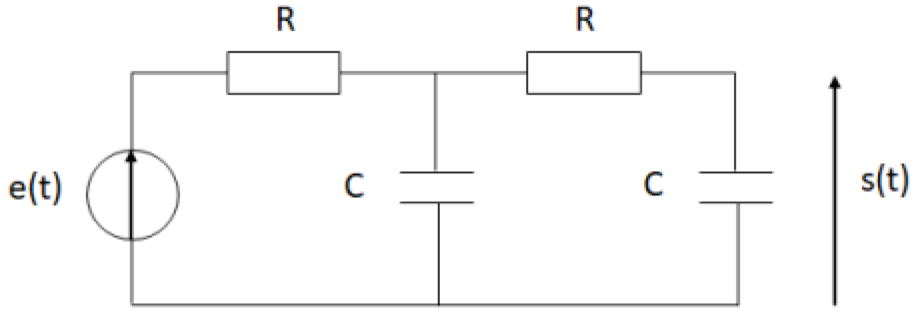
Exercice 2 : Mise en équation et résolution de circuits linéaires en régime variable - Conditions initiales nulles

On considère le circuit suivant.



A t=0, les conditions initiales sont nulles (les condensateurs sont déchargés).

Le circuit est alimenté par une générateur de tension $e(t) = E_0 \cdot u(t)$ où $u(t)$ est un échelon unité.

On prendra les valeurs des composants suivantes : $E_0 = 10\,V$, $R = 1\,k\Omega$ et $C = 100\,\mu F$.

Partie : 1 - Résolution temporelle

Question

1) Déterminer l'équation différentielle qui régit $s(t)$.

Indice

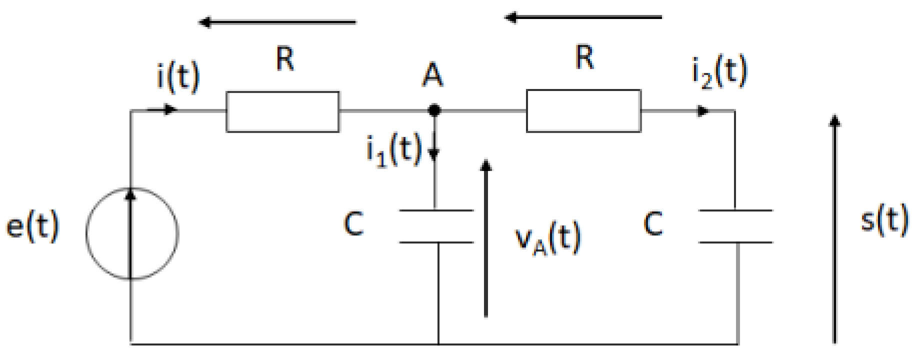
Méthode :

1) Flécher tous les courants et toutes les tensions du circuits.

2) Appliquer les lois de Kirchhoff et les relations courant-tension des différents composants.

Solution

Dans un premier temps, il faut flécher tous les courants et toutes les tensions du circuit. En respectant les conventions, on obtient le schéma suivant :



Le circuit est composé deux mailles.

On applique la loi des mailles à la maille de gauche :

$e(t) - R \cdot i(t) - v_A(t) = 0$ eq. (1)

On applique la loi des mailles à la maille de droite :

$v_A(t) - R \cdot i_2(t) - s(t) = 0$ eq. (2)

En combinant les équations (1) et (2), on obtient :

$e(t) = R \cdot i(t) + R \cdot i_2(t) + s(t)$ eq. (3)

On applique la loi des nœuds :

$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ eq. (4)

On remplace l'équation (4) dans l'équation (3) :

$e(t) = R \cdot i_1(t) + 2 \cdot R \cdot i_2(t) + s(t)$ eq. (5)

Les relations courant-tension pour les deux condensateurs donnent :

$i_1(t) = C \cdot \dfrac{dv_A(t)}{dt}$ eq. (6)

et

$i_2(t) = C \cdot \dfrac{ds(t)}{dt}$ eq. (7)

On remplace les équations (6) et (7) dans l'équation (5) :

$e(t) = R \cdot C \cdot \dfrac{dv_A(t)}{dt} + 2 \cdot R \cdot C \cdot \dfrac{ds(t)}{dt} + s(t)$ eq. (8)

A présent, il faut remplacer $\dfrac{dv_A(t)}{dt}$ par une expression qui dépende de $s(t)$. Pour trouver cette relation, on dérive l'équation (2) :

$$\frac{dv_A(t)}{dt} - R \cdot \frac{di_2(t)}{dt} - \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

Soit : $\dfrac{dv_A(t)}{dt} = R \cdot \dfrac{di_2(t)}{dt} + \dfrac{ds(t)}{dt}$ eq. (9)

Puis, il faut déterminer $\dfrac{di_2(t)}{dt}$, pour cela, on dérive l'équation (7) :

$\dfrac{di_2(t)}{dt} = C \cdot \dfrac{d^2 s(t)}{dt^2}$ eq. (10)

On remplace l'équation (10) dans l'équation (9) :

$\dfrac{dv_A(t)}{dt} = R \cdot C \cdot \dfrac{d^2 s(t)}{dt^2} + \dfrac{ds(t)}{dt}$ eq. (11)

On remplace à présent l'équation (11) dans l'équation (8) :

$$e(t) = (R \cdot C)^2 \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{ds(t)}{dt} + 2 \cdot R \cdot C \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

$$\Leftrightarrow e(t) = (R \cdot C)^2 \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 3 \cdot R \cdot C \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{3}{R \cdot C} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{(R \cdot C)^2} \cdot s(t) = \frac{1}{(R \cdot C)^2} \cdot e(t)$$

Question

2) Donner les conditions initiales $s(0^+)$ et $\frac{ds}{dt}(0^+)$.

Solution

Les conditions initiales sont nulles, les condensateurs sont donc déchargés à $t = 0^-$.

La tension aux bornes d'un condensateur déchargé est nulle donc : $v_A(0^-) = 0$ et $s(0^-) = 0$

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité donc $v_A(0^-) = v_A(0^+) = 0$ et $s(0^-) = s(0^+) = 0$

On applique l'équation (2) : $v_A(0^+) - R \cdot i_2(0^+) - s(0^+) = 0 \Rightarrow i_2(0^+) = 0$

En appliquant l'équation (7) en $t = 0^+$, on a : $i_2(0^+) = C \cdot \frac{ds}{dt}(0^+) \Rightarrow \frac{ds}{dt}(0^+) = 0$

Question

3) Résoudre "à la main" l'équation différentielle pour déterminer l'expression de $s(t)$.

Indice

Revoir le complément de cours sur la résolution des équations différentielles d'ordre 2.

Solution

- On résout l'équation homogène : $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{3}{R \cdot C} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{(R \cdot C)^2} \cdot s(t) = 0$

  Il faut définir l'équation caractéristique : $x^2 + \frac{3}{R \cdot C} + \frac{1}{(R \cdot C)^2} = 0$

  On calcule ensuite le discriminant :
  $$\Delta = \left(\frac{3}{R \cdot C}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{(R \cdot C)^2} = \frac{9-4}{(R \cdot C)^2} = \frac{5}{(R \cdot C)^2} > 0$$

  Le discriminant est positif, les solutions de l'équation caractéristique sont donc sous la forme :

  $$x_1 = \frac{-\frac{3}{R \cdot C} + \frac{-\sqrt{5}}{R \cdot C}}{2} = \frac{-3-\sqrt{5}}{2 \cdot R \cdot C} \approx -\frac{2,6180}{R \cdot C}$$

$$x_2 = \frac{-\frac{3}{R \cdot C} + \frac{\sqrt{5}}{R \cdot C}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2 \cdot R \cdot C} \approx -\frac{0,3820}{R \cdot C}$$

La solution de l'équation homogène, notée $s_h(t)$, est sous la forme :

$s_h(t) = A \cdot \exp(x_1 \cdot t) + B \cdot \exp(x_2 \cdot t)$ avec A et B deux constantes à déterminer

Soit :

$$\Leftrightarrow s_h(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{2,6180}{R \cdot C} \cdot t\right) + B \cdot \exp\left(-\frac{0,3820}{R \cdot C} \cdot t\right)$$

- La solution particulière, notée $s_p(t)$ est de la même forme que le second membre.

  Ici $e(t)$ est un échelon de tension, soit une constante pour $t > 0$

  Par conséquent : $s_p(t) = K$ avec K une constante. Par conséquent : $\frac{ds_p(t)}{dt} = 0$ et $\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = 0$

  On réinjecte $s_p(t)$ dans l'équation différentielle générale :

  $$\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} + \frac{3}{R \cdot C} \cdot \frac{ds_p(t)}{dt} + \frac{1}{(R \cdot C)^2} \cdot s_p(t) = \frac{1}{(R \cdot C)^2} \cdot e(t)$$

  Pour t> 0 : $e(t) = E_0$, on obtient donc :

  $$\frac{1}{(R \cdot C)^2} \cdot K = \frac{1}{(R \cdot C)^2} \cdot E_0$$

  $$\Leftrightarrow K = E_0$$

- La solution de l'équation différentielle générale s'écrit donc :

  $$s(t) = s_h(t) + s_p(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{2,6180}{R \cdot C} \cdot t\right) + B \cdot \exp\left(-\frac{0,3820}{R \cdot C} \cdot t\right) + E_0$$

  eq. (12)

  Il faut à présent déterminer A et B à l'aide des conditions initiales $s(0^+) = 0$ et $\frac{ds}{dt}(0^+) = 0$.

  On applique l'équation (12) en $t = 0^+$:

  $$s(0^+) = A \cdot \exp(0) + B \cdot \exp(0) + E_0 = 0$$

  $\Leftrightarrow A + B + E_0 = 0$ eq. (13)

  On dérive l'équation (12) pour pouvoir utiliser la deuxième condition initiale :

  $$\frac{ds(t)}{dt} = -\frac{2,6180}{R \cdot C} \cdot A \cdot \exp\left(-\frac{2,6180}{R \cdot C} \cdot t\right) - \frac{0,3820}{R \cdot C} \cdot B \cdot \exp\left(-\frac{0,3820}{R \cdot C} \cdot t\right)$$

  On applique ensuite cette expression en $t = 0^+$:

$$\frac{ds}{dt}(0^+) = -\frac{2,6180}{R \cdot C} \cdot A \cdot \exp(0) - \frac{0,3820}{R \cdot C} \cdot B \cdot \exp(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ds}{dt}(0^+) = -\frac{2,6180}{R \cdot C} \cdot A - \frac{0,3820}{R \cdot C} \cdot B = 0 \text{ eq. (14)}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système d'équations composé des équations (13) et (14) :

$$\begin{cases} A + B + E_0 = 0 \\ -\dfrac{2,6180}{R \cdot C} \cdot A - \dfrac{0,3820}{R \cdot C} \cdot B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -A - E_0 \\ -2,6180 \cdot A = 0,3820 \cdot B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -A - E_0 \\ A = -\dfrac{0,3820}{2,6180} \cdot B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{0,3820}{2,6180} \cdot B - E_0 \\ A = -\dfrac{0,3820}{2,6180} \cdot B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B\left(1 - \dfrac{0,3820}{2,6180}\right) = -E_0 \\ A = -\dfrac{0,3820}{2,6180} \cdot B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{E_0}{\dfrac{0,3820}{2,6180} - 1} \\ A = -\dfrac{0,3820}{2,6180} \cdot \dfrac{E_0}{\dfrac{0,3820}{2,6180} - 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B \approx -11,71 \\ A \approx 1,708 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$s(t) \approx 1,708 \cdot \exp\left(-\frac{2,6180}{R \cdot C} \cdot t\right) - 11,71 \cdot \exp\left(-\frac{0,3820}{R \cdot C} \cdot t\right) + E_0$$

$$s(t) \approx 1,708 \cdot \exp(-26,18 \cdot t) - 11,71 \cdot \exp(-3,82 \cdot t) + 10 \text{ pour } t > 0$$

Partie : 2- Résolution avec le formalisme de la transformée de Laplace ⭐⭐

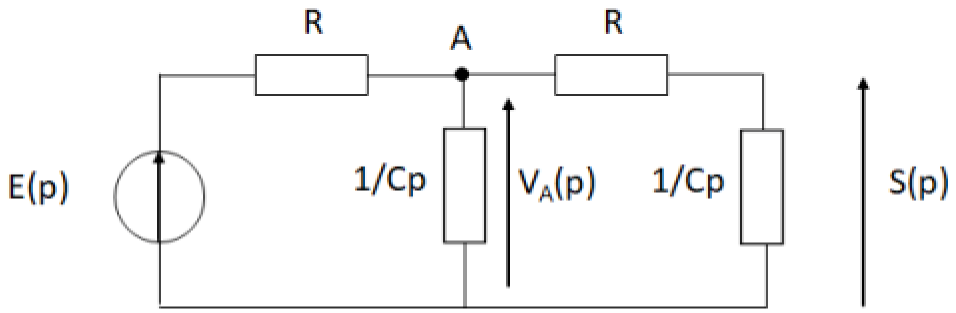
L'objectif de cette partie est de redémontrer les résultats obtenus précédemment en utilisant cette fois-ci le formalisme de la transformée de Laplace.

Question

4) Faire le schéma équivalent du circuit avec le formalisme de la transformée de Laplace en précisant les notations utilisées pour chaque grandeur électrique.

Solution

Le schéma équivalent avec le formalisme de Laplace est le suivant :



Avec $E(p)$ et $S(p)$ les transformées de Laplace respectives de $e(t)$ et $s(t)$.

Question

5) On note $S(p)$, la transformée de Laplace $s(t)$. Donner la relation entre $S(p)$ en fonction de E_0, R et C.

Méthode ?

Appliquer les théorèmes généraux de l'électrocinétique avec le formalisme de la transformée de Laplace ainsi que les relations courant-tension avec le formalisme de Laplace pour les différents composants.

Solution

On peut appliquer le pont diviseur de tension pour déterminer $S(p)$ en fonction de $V_A(p)$:

$$S(p) = \frac{\frac{1}{C \cdot p}}{\frac{1}{C \cdot p} + R} \cdot V_A(p) = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p} \cdot V_A(p) \text{ eq. (15)}$$

On applique le théorème de Millman en A :

$$V_A(p) = \frac{\frac{E(p)}{R} + \frac{S(p)}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + C \cdot p} = \frac{E(p) + S(p)}{2 + R \cdot C \cdot p} \text{ eq. (16)}$$

On remplace l'équation (16) dans l'équation (15) :

$$S(p) = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p} \cdot \frac{E(p) + S(p)}{2 + R \cdot C \cdot p}$$

$$\Leftrightarrow S(p)\,(1+R\cdot C\cdot p)\,(2+R\cdot C\cdot p)=E(p)+S(p)$$

$$\Leftrightarrow S(p)\left[2+R\cdot C\cdot p+2\cdot R\cdot C\cdot p+(R\cdot C\cdot p)^2\right]=E(p)+S(p)$$

$$\Leftrightarrow S(p)\left[2+3\cdot R\cdot C\cdot p+(R\cdot C\cdot p)^2-1\right]=E(p)$$

$$\Leftrightarrow S(p)\left[1+3\cdot R\cdot C\cdot p+(R\cdot C\cdot p)^2\right]=E(p)$$

$$\Leftrightarrow S(p)=\frac{E(p)}{1+3\cdot R\cdot C\cdot p+(R\cdot C\cdot p)^2}$$

$e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E_0. Par lecture de la table des transformées de Laplace, on en déduit que : $E(p)=\dfrac{E_0}{p}$

$$\Leftrightarrow S(p)=\frac{E_0}{p\left[1+3\cdot R\cdot C\cdot p+(R\cdot C\cdot p)^2\right]}$$

Question

6) A partir du résultat obtenu à la question précédente, calculer $s(t)$. Vérifier que le résultat obtenu est le même qu'à la question 3).

Indice

Pour déterminer $s(t)$, il faut calculer la transformée de Laplace inverse de $S(p)$. Pour cela, on se servira de la table des transformées de Laplace.

Revoir le complément de cours sur la décomposition en éléments simples.

Solution

$S(p)$ n'est pas écrit sous la forme d'une somme d'éléments simples, il faut donc procéder à une décomposition en éléments simples.

$$\Leftrightarrow S(p)=\frac{\dfrac{E_0}{(R\cdot C)^2}}{p\left[\dfrac{1}{(R\cdot C)^2}+\dfrac{3}{R\cdot C}\cdot p+p^2\right]}\quad \text{eq. (17)}$$

Au dénominateur, on a le produit de deux polynôme p et $\dfrac{1}{(R\cdot C)^2}+\dfrac{3}{R\cdot C}\cdot p+p^2$

Il faut déterminer si les racines du polynôme $\dfrac{1}{(R\cdot C)^2}+\dfrac{3}{R\cdot C}\cdot p+p^2$ sont réelles ou complexes. Pour cela, on détermine le discriminant :

$$\Delta==\left(\frac{3}{R\cdot C}\right)^2-4\cdot\frac{1}{(R\cdot C)^2}=\frac{9-4}{(R\cdot C)^2}=\frac{5}{(R\cdot C)^2}>0$$

Le discriminant est positif les deux racines sont réelles et sont :

$$p_1 = \frac{-\frac{3}{R\cdot C}+\frac{-\sqrt{5}}{R\cdot C}}{2} = \frac{-3-\sqrt{5}}{2\cdot R\cdot C} \approx -\frac{2,6180}{R\cdot C}$$

$$p_2 = \frac{-\frac{3}{R\cdot C}+\frac{\sqrt{5}}{R\cdot C}}{2} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\cdot R\cdot C} \approx -\frac{0,3820}{R\cdot C}$$

Par conséquent : $\frac{1}{(R\cdot C)^2}+\frac{3}{R\cdot C}\cdot p+p^2=(p-p_1)(p-p_2)$

La décomposition en éléments simples de $S(p)$ s'écrit alors :

$S(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-p_1}+\frac{D}{p-p_2}$ où A, B et D sont des constantes à déterminer par identification avec l'équation (17) :

$$S(p)=\frac{\frac{E_0}{(R\cdot C)^2}}{p\left[\frac{1}{(R\cdot C)^2}+\frac{3}{R\cdot C}\cdot p+p^2\right]}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-p_1}+\frac{D}{p-p_2}$$

$$\Leftrightarrow S(p)=\frac{\frac{E_0}{(R\cdot C)^2}}{p(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{A(p-p_1)(p-p_2)+B\cdot p(p-p_2)+D\cdot p(p-p1)}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

On identifie les deux numérateurs :

$$\Rightarrow \frac{E_0}{(R\cdot C)^2}=A(p-p_1)(p-p_2)+B\cdot p(p-p_2)+D\cdot p(p-p1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{E_0}{(R\cdot C)^2}=A\cdot p^2-A\cdot p_2\cdot p-A\cdot p_1\cdot p+A\cdot p_1\cdot p_2+B\cdot p^2-B\cdot p_2\cdot p+D\cdot p$$

$$\Leftrightarrow \frac{E_0}{(R\cdot C)^2}=p^2(A+B+D)-p\left[A(p_1+p_2)+B\cdot p_2+D\cdot p_1\right]+A\cdot p_1\cdot p_2$$

En identifiant terme à terme, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}\frac{E_0}{(R\cdot C)^2}=A\cdot p_1\cdot p_2\\ A(p_1+p_2)+B\cdot p_2+D\cdot p_1=0\\ A+B+D=0\end{cases}$$

Par ailleurs :

$$p_1\cdot p_2=\frac{(-3-\sqrt{5})(-3+\sqrt{5})}{(2\cdot R\cdot C)^2}=\frac{9-3\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{5}-5}{4(R\cdot C)^2}=\frac{4}{4(R\cdot C)^2}=\frac{1}{(R\cdot C)}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{E_0}{p_1 \cdot p_2 (R \cdot C)^2} = \dfrac{E_0 (R \cdot C)^2}{(R \cdot C)^2} = E_0 \\ \\ B = -A - D = -E_0 - D \\ \\ E_0\,(p_1 + p_2) + (-E_0 - D) \cdot p_2 + D \cdot p_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = E_0 \\ \\ B = -E_0 - D \\ \\ E_0 \cdot p_1 = D\,(p_2 - p_1) \Rightarrow D = \dfrac{E_0 \cdot p_1}{p_2 - p_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = E_0 \\ \\ B = -E_0 - \dfrac{E_0 \cdot p_1}{p_2 - p_1} = -\dfrac{E_0 \cdot p_2}{p_2 - p_1} \\ \\ D = \dfrac{E_0 \cdot p_1}{p_2 - p_1} \end{cases}$$

La décomposition en éléments simples de $S(p)$ est s'écrit donc :

$$S(p) = \frac{E_0}{p} - \frac{\dfrac{E_0 \cdot p_2}{p_2 - p_1}}{p - p_1} + \frac{\dfrac{E_0 \cdot p_1}{p_2 - p_1}}{p - p_2}$$

On peut donc calculer la transformée de Laplace inverse de $S(p)$ en utilisant la table des transformées de Laplace :

$$s(t) = TL^{-1}\,[S(p)] = \left[E_0 - \frac{E_0 \cdot p_2}{p_2 - p_1} \cdot \exp(p_1 \cdot t) + \frac{E_0 \cdot p_1}{p_2 - p_1} \cdot \exp(p_2 \cdot t)\right] \cdot u(t)$$

avec $u(t)$ l'échelon unité.

L'application numérique donne :

$s(t) \approx [10 + 1,708 \cdot \exp(-26,18 \cdot t) - 11,71 \cdot \exp(-3,82 \cdot t)]$ pour $t > 0$

On constate qu'on obtient le même résultat qu'en faisant le calcul en temporel à la question 3).

Partie : 3- Simulation

Question

7) Utiliser Octave pour calculer la transformée de Laplace inverse de $S(p)$ en utilisant l'expression de $S(p)$ obtenue à la question 5).

On utilisera la fonction *pretty* pour mettre en forme l'affichage de l'expression et la fonction *simplify* pour simplifier l'expression afin qu'elle se rapproche au plus du résultat trouvé à la main.

Calcul de la transformée de Laplace inverse avec Octave ?

Revoir l'exemple d'utilisation d'Octave donné dans le complément de cours sur la transformée de Laplace.

Syntaxe de pretty et simplify ?

La syntaxe pour la fonction *pretty* est la suivante :

expr correspond à l'expression symbolique que l'on souhaite afficher

pretty(expr)

La syntaxe pour la fonction *simplify* est la suivante :

expr correspond à l'expression symbolique que l'on souhaite afficher

simplify(expr)

Solution

```
>> syms E0 R C s(t)
>> eqn = diff(s,2)+3/(R*C)*diff(s)+ 1/((R*C)^2)*s == E0/((R*C)^2);
>> Ds=diff(s,t);
>> cond = [s(0) == 0, Ds(0)==0];
>> s=dsolve(eqn, cond) ;
>> pretty(simplify(s)) % pretty sert à mettre en forme l'affichage d'une équation et si

            / t (sqrt(5) - 3) \                       /   t (sqrt(5) + 3) \
      E0 exp| --------------- | (3 sqrt(5) + 5)   E0 exp| - --------------- | (3 sqrt(5)
            \      2 C R      /                       \        2 C R      /
E0 - ----------------------------------------- + -----------------------------------
                           10                                          10
```

On constate que l'on obtient bien le même résultat qu'aux questions 3) et 6).

Question

8) Utiliser Octave pour résoudre l'équation différentielle obtenue à la question 1) avec les conditions initiales obtenues à la question 2).

On utilisera la fonction *pretty* pour mettre en forme l'affichage de l'expression et la fonction *rewrite* pour réécrire l'expression afin qu'elle se rapproche au plus du résultat trouvé à la main.

Résolution d'équation différentielle avec Octave ?

Revoir l'exemple d'utilisation d'Octave donné dans le complément de cours sur la résolution d'équation différentielle d'ordre 2.

Syntaxe de pretty et rewrite ?

La syntaxe pour la fonction *pretty* est la suivante :

expr correspond à l'expression symbolique que l'on souhaite afficher

pretty(expr)

La syntaxe pour la fonction *rewrite* est la suivante :

expr correspond à l'expression symbolique que l'on souhaite afficher

rewrite(expr,'exp')

Solution

```
>> S=E0/(p*(1+3*R*C*p+(R*C*p)^2));
>> s=ilaplace(S,p,t);
>> pretty(rewrite(s,'exp')) % pretty sert à mettre en forme l'affichage d'une équation

                       /
                       |
                       |    /   sqrt(5) t \      / sqrt(5) t \
                       | exp| - --------- |   exp| --------- |
           /    3 t  \ |    \     2 C R   /      \   2 C R   /
E0 - E0 exp| - ----- | | ------------------ + ----------------
           \   2 C R / \          2                   2

             /    /   sqrt(5) t \      / sqrt(5) t \ \   \
             | exp| - --------- |   exp| --------- | |   |
             |    \     2 C R   /      \   2 C R   / |   |
     sqrt(5) | ------------------ - ---------------- | 3 |
             \          2                   2        /   |
   - --------------------------------------------------- |
                              5                          /
```

Le résultat obtenu est égal au résultat trouvé à la main, il suffit d'écrire quelques lignes de calcul pour s'en assurer.