UNIVERSITE DE MONTPELLIER

FACULTE DES SCIENCES

Session : **1**	Durée de l'épreuve : **2** heures
Date : 9 / 01 / 2023	Documents autorisés : **Aucun**
Licence ☒ Master	
Mention : L2 EEA	Matériels autorisés : aucun
Parcours : Portail Curie	
Libellé + Code de l'UE : **HAE304X Outils Mathématiques pour l'EEA**	

Exercice 1 (1-1-1-2 points)
Déterminer les limites suivantes avec la méthode de votre choix :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x}$ 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+2}-x$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(\sin x)^2}\right)$

Exercice 2 (3 points)
Déterminer la primitive suivante :

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh} x}\, dx$$

Indication : on rappelle que $sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et on posera le changement de variable u = e^x

Exercice 3 (4 points = 3 + 1 bonus)
Déterminer la primitive suivante :

$$\int \ln(x^2+x+1)\, dx$$

Indication : on commencera par poser une IPP puis il faudra effectuer une division euclidienne.

Exercice 4 (1-2 points)

1) Représenter le domaine :
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1\ et\ x^2 \leq y \leq 4 - x^3\}$$
2) Calculer son aire en posant une intégrale double.

Exercice 5 (1,5-1,5 points)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - (1+x)y = -2x - x^2$
2. $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x$
indication : on posera la solution particulière sous la forme y_p = A cos(x) + B sin(x)

Exercice 6 (3 points)

Soit la matrice suivante : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. On rappelle : I_3= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et I_2= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1) Déterminer, si elle existe, une matrice B telle que AB = I_3
2) Déterminer, si elle existe, une matrice C telle que CA = I_2

Formulaire de développement limités

Les développements limités ci-dessous sont valables quand **x tend vers 0** et uniquement dans ce cas.

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right)$$

$$\mathrm{ch}x \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n}\right)$$

$$\mathrm{sh}x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n}\right)$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

....

$$(1+x)^a \underset{x\to 0}{=} 1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right) \quad (a \text{ réel donné})$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k+o\left(x^n\right) \text{ et en particulier } (1+x)^a \underset{x\to 0}{=} 1+ax+o(x) \text{ et donc } \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x+o(x)$$

....

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+\ldots+x^n+o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}x^k+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2+\ldots+(-1)^nx^n+o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x-\frac{x^2}{2}+\ldots-\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)$$

$$\mathrm{Arctan}x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$$