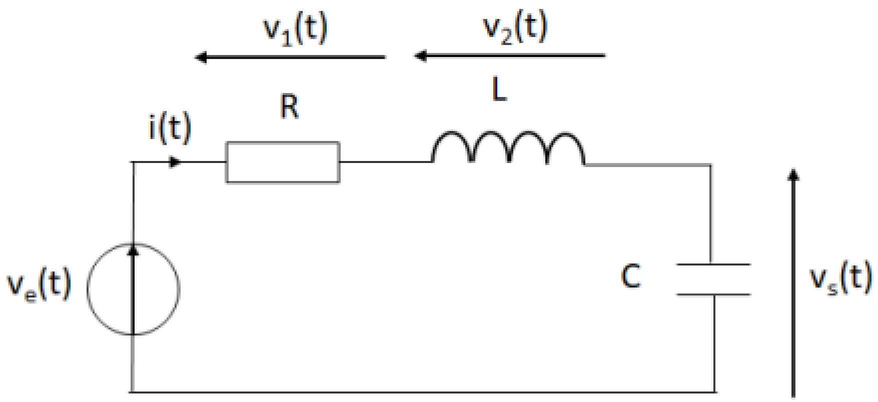
Analyse harmonique du circuit RLC

Prenons l'exemple du circuit RLC, dont le schéma est donné dans le figure ci-dessous. Le générateur de tension délivre une tension sinusoïdale : $v_e(t) = V_0 \cos(\omega t)$.

On cherche à :

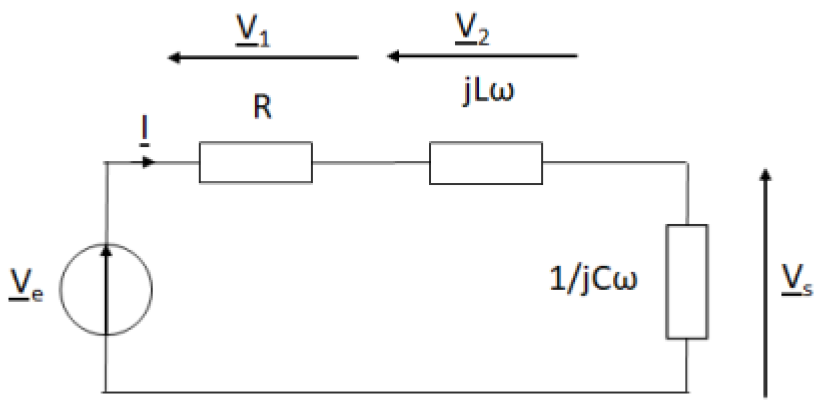
1. établir la fonction de transfert isochrone $\underline{H}$
2. tracer le diagramme de Bode (gain et phase)
3. analyser le diagramme de Bode pour comprendre le comportement harmonique du circuit



On note $\underline{V_e}$ et $\underline{V_s}$ les amplitudes complexes des tensions d'entrée et de sortie, correspondant respectivement aux tensions réelles $v_e(t)$ et $v_s(t)$.

On note $\underline{I}$ le courant complexe circulant dans le circuit, correspondant au courant $i(t)$.

Le schéma équivalent avec la notation complexe est illustré ci-dessous.

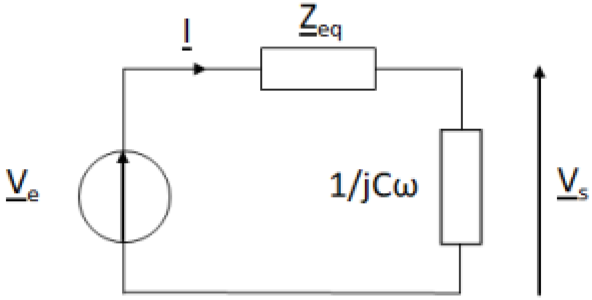


1. A partir du schéma équivalent, nous allons déterminer la relation entre $\underline{V_s}$ et $\underline{V_e}$:

On applique les lois d'associations d'impédances complexes pour la résistance en série avec la bobine :

$$\underline{Z_{eq}} = R + jL\omega$$

On obtient donc le schéma équivalent suivant :



On reconnaît ensuite un pont diviseur :

$$\underline{V_s} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \cdot \underline{V_e}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V_s} = \frac{1}{jRC\omega + j^2 LC\omega^2 + 1} \cdot \underline{V_e}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V_s} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \cdot \underline{V_e}$$

La fonction de transfert isochrone est donc :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

On pose :

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, ω_0 est appelée **pulsation propre** du circuit

et $m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$, m est appelé **coefficient d'amortissement**.

La fonction de transfert isochrone s'écrit alors :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{2m\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On obtient une **fonction de transfert du 2nd ordre** car on a polynôme d'ordre 2 (en ω) au dénominateur.

Il faut à présent considérer trois cas : $m > 1$, $m < 1$ et $m = 1$

- Lorsque $m < 1$, la fonction de transfert du 2nd ordre se décompose en deux fonctions de transfert du 1er ordre de la façon suivante :

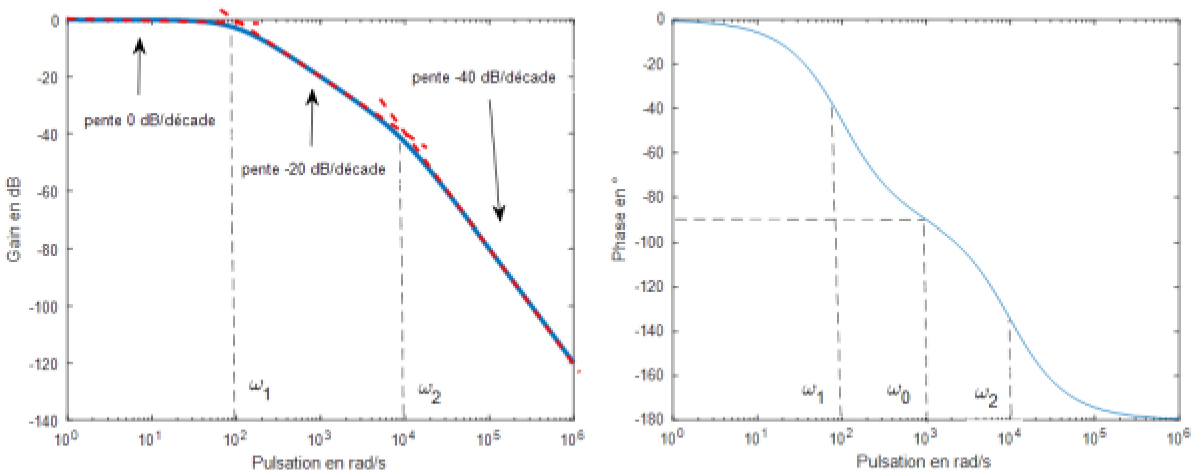
  $$\underline{H} = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

  avec $\omega_1 = \omega_0\left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right)$ et $\omega_2 = \omega_0\left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)$

  Le diagramme de Bode en gain présente donc deux cassures en ω_1 et ω_2.

On obtient le digramme de Bode suivant :

Le détail de l'étude des limites se trouve ici.



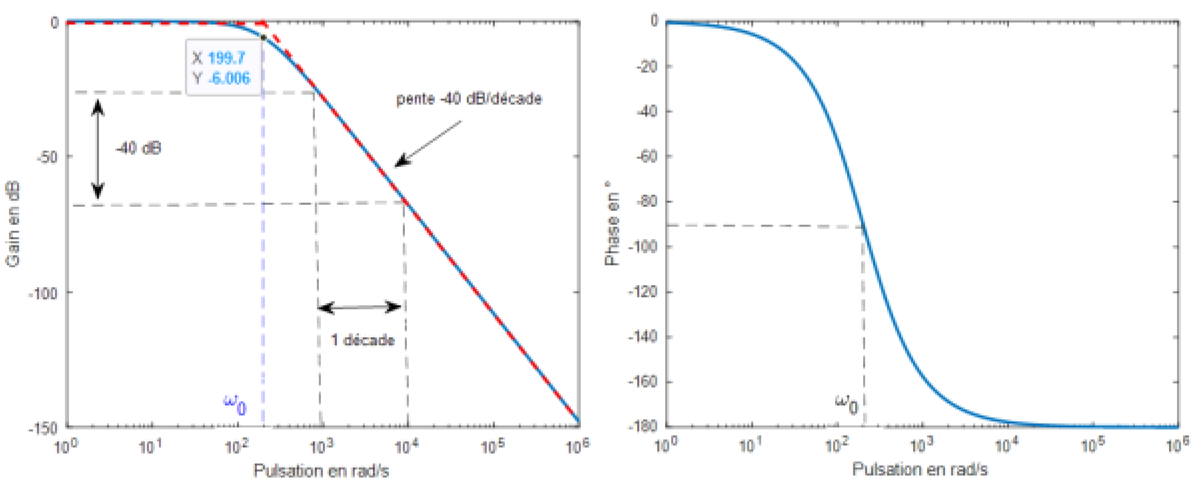
- Lorsque $m = 1$ alors la fonction de transfert isochrone s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\dfrac{2\omega}{\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Le diagramme de Bode en gain présente donc une seule cassure en ω_0.

On obtient le digramme de Bode suivant :

Le détail de l'étude des limites se trouve ici.



- Lorsque $m < 1$, la fonction de transfert du 2nd ordre ne se décompose pas en deux fonctions de transfert du 1er ordre. On conserve donc l'expression suivante :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\dfrac{2m\omega}{\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Les deux pôles de la fonction de transfert sont donc complexes :
$\omega_1 = \omega_0 \left(m - j\sqrt{1 - m^2}\right)$ et $\omega_2 = \omega_0 \left(m + j\sqrt{1 - m^2}\right)$

Le diagramme de Bode en gain présente une seule cassure en ω_0.

- On montre que pour $0 < m < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, le gain présente un maximum à la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$

  Cette pulsation ω_r est appelée **pulsation de résonance**.

  En ω_r, la module de la fonction de transfert isochrone vaut : $|\underline{H}(\omega_r)| = \dfrac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$

  Le détail du calcul se trouve ici.

- Pour $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < m < 1$, il n'existe pas de résonance.

  Le détail des calculs pour ce cas se trouve ici.

  On obtient le digramme de Bode suivant :