*Licence EEA 2ème année* **Unité d'enseignement HAE302E**

# *TD n°5 : Condensateurs*

On rappelle que pour un conducteur, la permittivité diélectrique est celle du vide $\varepsilon_0 = 1/(36\pi 10^9)$ F/m

## Exercice 1 : Condensateur Sphérique - Calcul de Capacités

**1-** On considère une sphère conductrice A de rayon $R_1$ = 3cm. La sphère A est isolée et portée au potentiel V. calculer la charge portée par cette sphère si V = 1000V. En déduire sa capacité $C_1$.

**2-** On entoure la sphère conductrice A de deux hémisphères conducteurs B de rayon intérieur $R_2$ = 5 cm, de rayon extérieur $R_3$ = 7 cm. Que deviennent le potentiel de A et sa capacité quand

**a-** La sphère neutre B est isolée **b-** La sphère neutre B est reliée au sol

## Exercice 2 : Condensateur plan

Les électrodes (A et B) d'un condensateur plans sont des conducteurs parfaits, rectangulaires et parallèles, de surface S, situées à une distance e et portées aux potentiels $V_A$ et $V_B$ avec $V_A > V_B$.

**1-** Comment est dirigé le champ électrostatique **E** entre les armatures ? Que deviennent les lignes de champ en dehors du condensateur, à partir du bord des armatures (effet de bord) ?

**2-** Si on néglige les effets de bord, la valeur de **E** trouvée dans l'exercice 1 du TD n°4 est valable. Exprimer alors **E** en fonction de Q, charge d'une armature. E

**3-** Calculer la circulation de **E** d'une armature à l'autre et en déduire l'expression de la capacité du condensateur.

**4-** La surface du condensateur S = 115 cm$^2$ et e = 1.24 cm. On applique une différence de potentiel V= 85.5V puis on débranche la pile. Quelle charge libre apparait sur les plaques ?

## Exercice 3 : Capacité d'un condensateur cylindrique

Soient 2 cylindres concentriques de rayons $R_1$ = 2cm et $R_2$ = 4cm de hauteur h = 5cm formant un condensateur cylindrique. Le cylindre intérieur porte des charges positives en surface. Le milieu considéré est tout d'abord le vide entre les 2 armatures.

**1-** Représenter le vecteur champ électrique **E**.

**2-** En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ **E** dans tout l'espace, de r = 0 à l'infini.

**3-** A partir des expressions du champ électrique, établir l'expression de la capacité de ce condensateur et calculer cette capacité.
On remplace le vide par un diélectrique de constante diélectrique relative $\varepsilon_r = 4$. Calculer la nouvelle capacité C'.

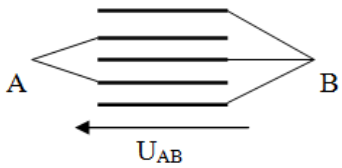
**Exercice 4 : Association de condensateurs.** On rappelle les lois d'association de condensateurs $C_i$ :

$$\text{Condensateurs en série : } \frac{1}{C_{\text{éq série}}} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad ; \quad \text{Condensateur en parallèle : } C_{\text{éq //}} = \sum_i C_i$$

**Application 1 :**

**1-** Un condensateur C, plan à air a une capacité de 4. $10^{-6}$ F. Ce condensateur est formé de deux lames circulaires de rayon R = 2cm. De quel nombre de lames, identiques aux précédentes, ayant entre elles le même écartement, faut-il disposer pour réaliser une capacité équivalente de 16 µF ? Faire le schéma du montage.

**2-** On propose le montage suivant avec 5 lames. Commentaires




**3-** Pour déterminer la capacité C' d'un condensateur, on charge le condensateur C sous une tension de 3000 Volts. Une fois chargé on l'isole et on branche C' en parallèle avec C. la différence de potentiel entre les armatures du condensateur équivalent est alors de 1000 volts. Déterminer la valeur de C'.

**<u>Application 2</u> :**

On rappelle que lorsque l'espace entre deux armatures est rempli d'un diélectrique linéaire, homogène et isotrope, de permittivité $\varepsilon_r$ , la capacité $C = \varepsilon_r C_0$ où $C_0$ est la capacité quand le diélectrique est le vide (ou l'air).

On considère un condensateur plan :

Fig 1: le diélectrique remplit le ½ espace horizontal ; Fig 2: le diélectrique remplit le ½ espace vertical. Dans les deux cas le condensateur est à potentiel constant. Calculer la capacité du condensateur équivalent.

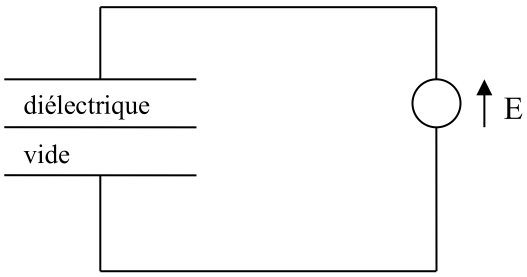



Figure 1

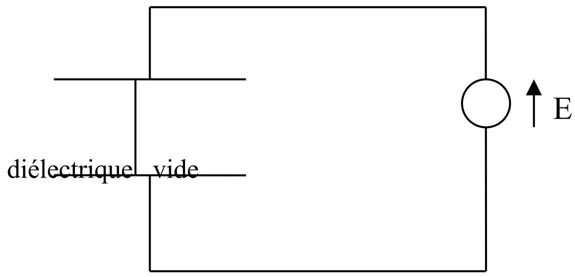



Figure 2

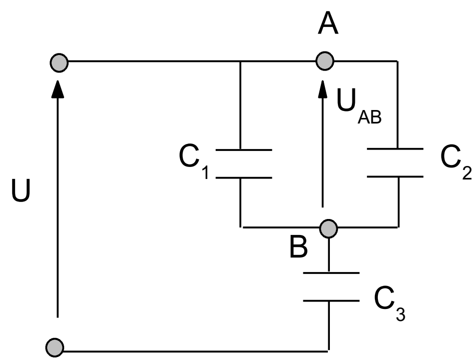
**Exercice 5 : Association de condensateurs plans**

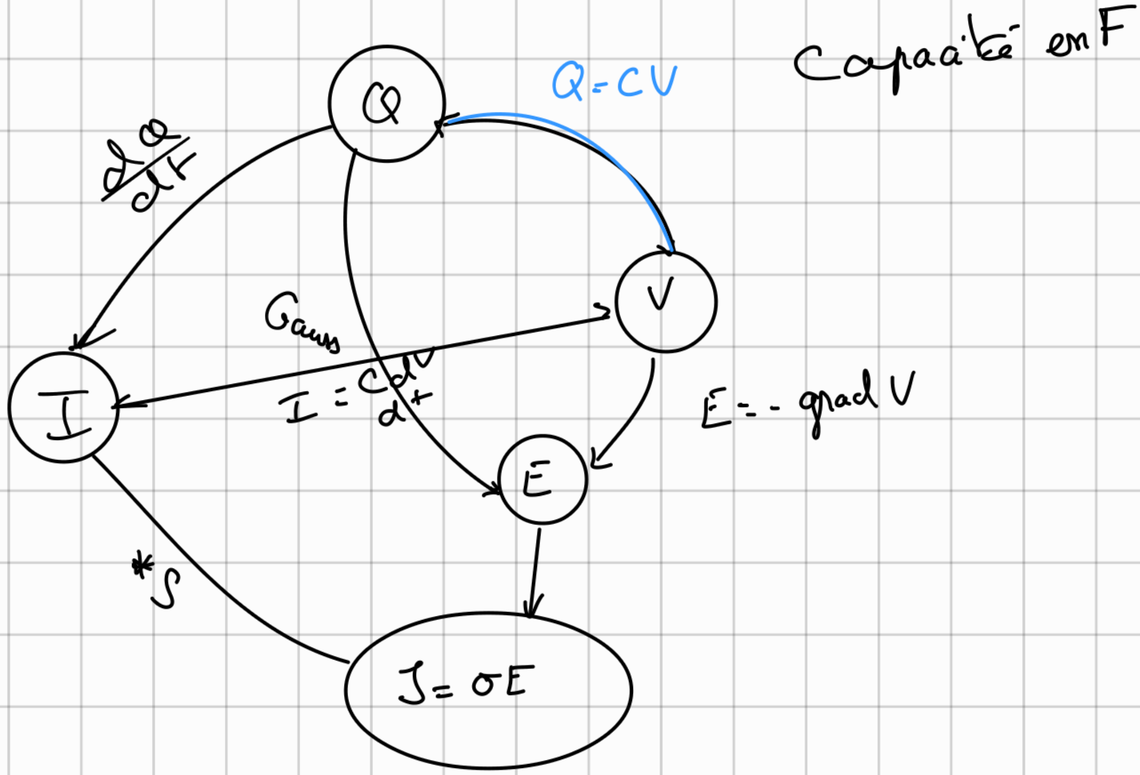
On applique la tension U au circuit ci-contre associant les condensateurs de capacités $C_1$, $C_2$ et $C_3$.

Déterminer la tension $U_{AB}$.

*Il est conseillé de calculer la capacité équivalente du circuit $C_{123}$.*

On donne : U = 12.5 V
$C_1$=12µF $C_2$=5.3µF $C_3$=4.5µF



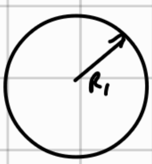



**Exercice 1 : Condensateur Sphérique - Calcul de Capacités**

**1-** On considère une sphère conductrice A de rayon $R_1$ = 3cm. La sphère A est isolée et portée au potentiel V. calculer la charge portée par cette sphère si V = 1000V. En déduire sa capacité $C_1$.

**2-** On entoure la sphère conductrice A de deux hémisphères conducteurs B de rayon intérieur $R_2$ = 5 cm, de rayon extérieur $R_3$ = 7 cm. Que deviennent le potentiel de A et sa capacité quand

**a-** La sphère neutre B est isolée          **b-** La sphère neutre B est reliée au sol




$$\oiint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

surf de Gauss -> sphère $r > R_1$

$$E \, 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

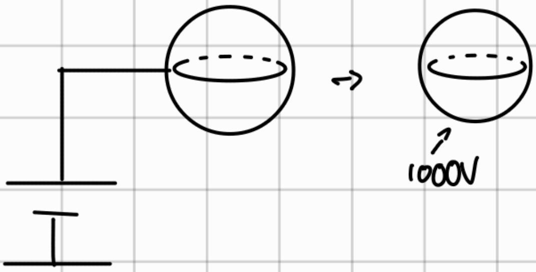
$$E = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$$V(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + Cte$$ et $\lim\limits_{r \to +\infty} (V(r)) = 0V$

$$V(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Un metale est une equipotentielle : si on a cree un desequilibre alors les charge peuvent se placer a l'extremité

- Ex 1



$Q = CV$

$Q = ?$

$C = ?$

$V =$ connue

Trouver la charge :

si $r \geq R_1$

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + cte\right)$$

Soit $\lim_{r \to +\infty} (V(r)) = 0$

$cte = 0$

$$V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_1}$$

$$1000 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1} = V_1$$

$$Q = V_1 \times 4\pi\varepsilon_0 \times R_1$$

$$Q = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \times 3 \times 10^{-2} \cdot 10^3$$

$$Q = 3{,}33 \cdot 10^{-9}$$

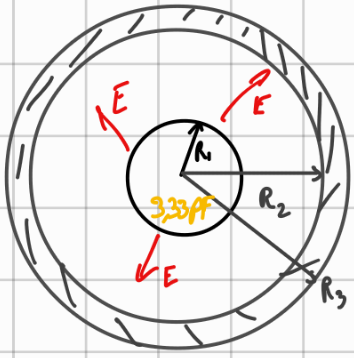
Soit C :

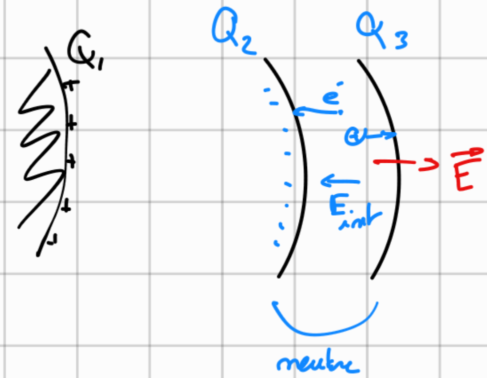
$Q = CV$ d'ou

$C = \frac{Q}{V}$

$C = \frac{3{,}33 \cdot 10^{-9}}{10^{3}} = 3{,}33 \cdot 10^{-12}\ F \Rightarrow 3{,}33\ pF$

2)




$$Q_1 = -Q_2 = Q_3$$

$R_1 \leq r \leq R_2$

$$\oiint E\, dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 V_1}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{R_1 V_1}{r^2}$$

$R_2 \leq r \leq R_3$

$E(r) = 0$ : Pas de charge dans le metale de par les force induite

$r \geq R_3$

$$E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q - Q + Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V_1$$

$$E(r) = \frac{R_1 V_1}{r^2}$$

$\rightarrow$ V) $r \geq R_3$

$$V(r) = \frac{R_1 V_1}{r} + cte \qquad cte = 0 \quad \lim (V(r)) \text{ à } + \infty = 0$$

$$= \frac{R_1 V_1}{r}$$

$$V(R_3) = \frac{R_1}{R_3} \cdot V_1$$

$R_2 \leq r \leq R_3$

$$V(R_2) = V(r) = V(R_3) = \frac{R_1}{R_3} V_1$$

$R_1 \leq r \leq R_2$

$$V(r) = \frac{R_1 V_1}{r} + cte$$

$$V(R_2) = \frac{R_1 V_1}{R_2} + cte = \frac{R_1 V_1}{R_3} \Rightarrow cte = V_1 \left( \frac{R_1}{R_3} - \frac{R_1}{R_2} \right)$$

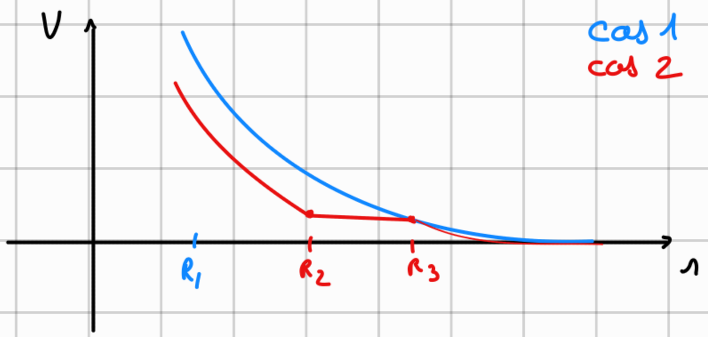
$$V(r) = \frac{R_1 V_1}{r} + V_1 \left( \frac{R_1}{R_3} - \frac{R_1}{R_2} \right)$$

donc $V(R_1) = V_1 \left( 1 + \frac{R_1}{R_3} - \frac{R_1}{R_2} \right)$

$$= 1000 \left( 1 + \frac{3}{7} - \frac{3}{5} \right) = 829\,V$$

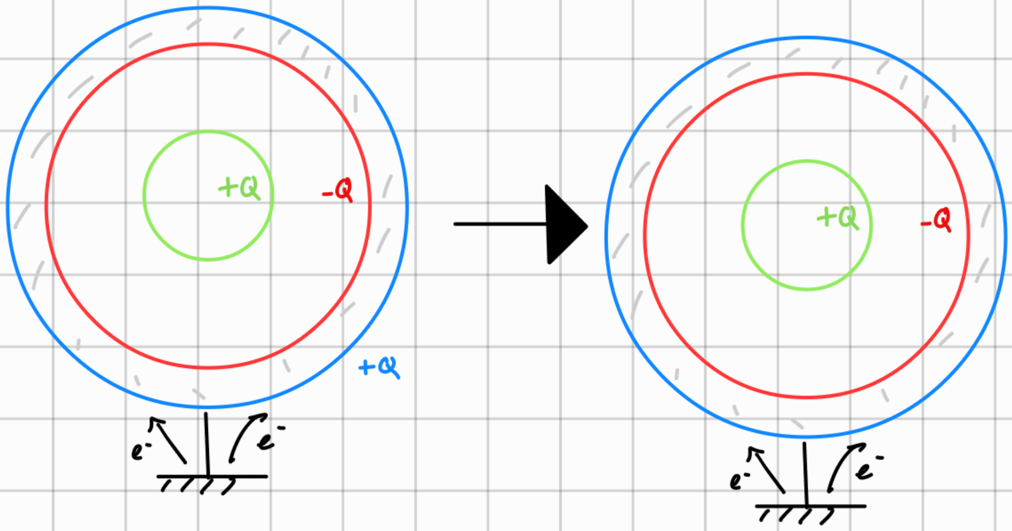
$$Q = CV$$

$$C = \frac{3{,}33 \cdot 10^{-9}}{829} = 4\,pF$$




cas 1 $C = 3{,}33\,pF$ → Sphere seul

cas 2 $C = 4\,pF$ → Pseudo condo




Connecter a la terre
supprime +Q car le remplie
en $e^-$ remplie les trous

On refait Gauss mais cette fois $Q^+$ de $R_3$ a disparu

On va donc jusqu'à $R_2$

$R_1 < r < R_2$

$$\oiint E \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi \varepsilon_0 R_1 V_1}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{R_1 V_1}{r^2}$$

- $r \geq R_2$

$$E \; 4\pi r^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \text{Les charges s'annulent soit } Q_2 = -Q_1$$

$\Rightarrow$ Pas au delà plus de variation de charge.

$V(R_2) = 0$

$V(r) = cte$

$V(r) = 0$

$$\lim_{r \to +\infty} = 0$$

$cte = 0$

pour $R_1 < r \leq R_2$

$$V(r) = \frac{R_1 V_1}{r} + cte$$

$$V(R_2) = \frac{R_1 V_1}{R_2} + cte = 0$$

$Cte = -\frac{R_1 V_1}{R_2}$

$V(r) = \frac{R_1 V_1}{r} - \frac{R_1 V_1}{R_2}$

et $V(R_1) = V_1\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) = 1000\left(1 - \frac{3}{5}\right) = 400V$

400 V entre $R_1$ et $R_2$

**Exercice 2 : Condensateur plan**

Les électrodes (A et B) d'un condensateur plans sont des conducteurs parfaits, rectangulaires et parallèles, de surface S, situées à une distance e et portées aux potentiels $V_A$ et $V_B$ avec $V_A > V_B$.

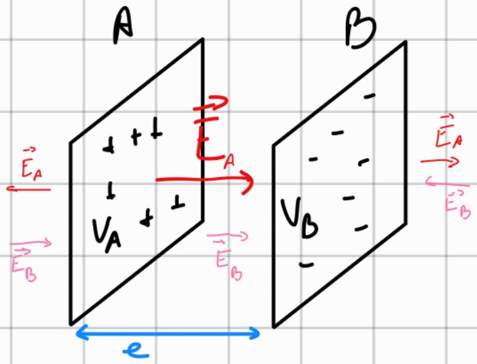
**1-** Comment est dirigé le champ électrostatique **E** entre les armatures ? Que deviennent les lignes de champ en dehors du condensateur, à partir du bord des armatures (effet de bord) ?

**2-** Si on néglige les effets de bord, la valeur de **E** trouvée dans l'exercice 1 du TD n°4 est valable. Exprimer alors **E** en fonction de Q, charge d'une armature.

**3-** Calculer la circulation de **E** d'une armature à l'autre et en déduire l'expression de la capacité du condensateur.

**4-** La surface du condensateur S = 115 cm$^2$ et e = 1.24 cm. On applique une différence de potentiel V= 85.5V puis on débranche la pile. Quelle charge libre apparait sur les plaques ?

1)




Car $V_A > V_B$

En dehors des armatures les lignes de champ faiblissent. et ne sont plus uniforme

2) $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ où $\sigma = \frac{Q}{S}$

$\boxed{E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot S}}$ sur un plan $\infty$ => Entre les 2 armatures
$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$

3) $$\int_0^e \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\overrightarrow{grad}\, V$$
$$= -\Delta V$$
$$= -(V_B - V_A) = V_A - V_B$$

$$E \cdot e = V_A - V_B = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\cdot e$$

Sachant :

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{\frac{Qe}{\varepsilon_0 S}} = \boxed{\varepsilon_0 \frac{S}{e}}$$

$$C = \frac{1}{36\pi \cdot 10^{9}} \times \frac{115 \times 10^{-4}}{1{,}24 \cdot 10^{-2}} = \boxed{8{,}21\,pF}$$

$$Q = CV = 8{,}21 \times 10^{-12} \times 85{,}5 = \boxed{702\,pC}$$

**Exercice 3 : Capacité d'un condensateur cylindrique**

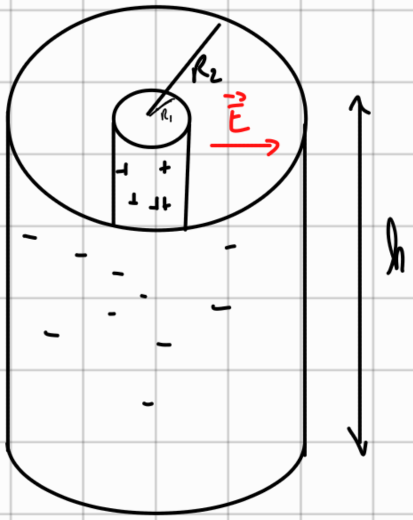
Soient 2 cylindres concentriques de rayons $R_1 = 2cm$ et $R_2 = 4cm$ de hauteur $h = 5cm$ formant un condensateur cylindrique. Le cylindre intérieur porte des charges positives en surface. Le milieu considéré est tout d'abord le vide entre les 2 armatures.

**1-** Représenter le vecteur champ électrique **E**.

**2-** En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ **E** dans tout l'espace, de r = 0 à l'infini.

**3-** A partir des expressions du champ électrique, établir l'expression de la capacité de ce condensateur et calculer cette capacité.
On remplace le vide par un diélectrique de constante diélectrique relative $\varepsilon_r = 4$. Calculer la nouvelle capacité C'.

1)




2) $\oiint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

pour $r < R_1$

$E = 0$ => Pas de charge

pour $R_1 \leq r \leq R_2$

$E = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 \times 2\pi r \times h}$

pour $R_2 < r$

$E = \frac{Q_1 + Q_2}{\dots} = 0$

3) Soit : $\oint E \cdot dl = -\text{grad} V = -\Delta V = V_1 - V_2 = U$

$V = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 \times 2\pi h} \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 2\pi h} \times \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{Q}{C}$

Ou $C = \frac{Q}{V} = 2\pi\varepsilon_0 \times \frac{h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = 4\ pF$

Soit la nouvelle capacité : via le nouvelle isolant.

$$C = 2\pi \times \varepsilon_r \times \varepsilon_0 \times \frac{h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$C : 16 \text{ pF}$

**Exercice 4 : Association de condensateurs.** On rappelle les lois d'association de condensateurs $C_i$ :

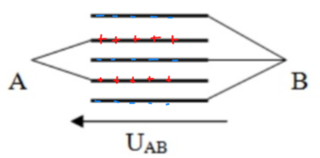
$$\text{Condensateurs en série : } \frac{1}{C_{\text{éq série}}} = \sum_i \frac{1}{C_i} \; ; \quad \text{Condensateur en parallèle : } C_{\text{éq //}} = \sum_i C_i$$

**Application 1 :**

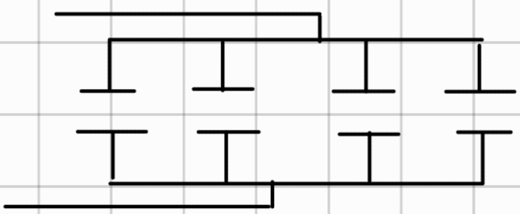
**1-** Un condensateur C, plan à air a une capacité de $4.\ 10^{-6}$ F. Ce condensateur est formé de deux lames circulaires de rayon R = 2cm. De quel nombre de lames, identiques aux précédentes, ayant entre elles le même écartement, faut-il disposer pour réaliser une capacité équivalente de 16 µF ? Faire le schéma du montage.

1)

**2-** On propose le montage suivant avec 5 lames. Commentaires




**3-** Pour déterminer la capacité C' d'un condensateur, on charge le condensateur C sous une tension de 3000 Volts. Une fois chargé on l'isole et on branche C' en parallèle avec C. la différence de potentiel entre les armatures du condensateur équivalent est alors de 1000 volts. Déterminer la valeur de C'.



a) Representation Condo a 5 lame

b) On peut faire avec 5 lame ce que l'on faisait a 8

## 3) Condo en parallèle : $C_{eq} = \Sigma_i C_i$

$$C_c = \frac{Q}{V_{initial}}$$

$$C_{eq} = \frac{Q}{V_{final}}$$

$$Q = C_c \cdot V_{init} = C_{eq} \cdot V_{final}$$

$$C_c \cdot V_{init} = (C_c + C_{c'}) \cdot V_{final}$$

$$C_c \cdot \frac{V_{init}}{V_{final}} = C_c + C_{c'}$$

$$\frac{V_{init}}{V_f} = 1 + \frac{C_{c'}}{C_c}$$

$$C_{c'} = \left(\frac{V_{init}}{V_f} - 1\right) \times C_c$$

$$C_{c'} = \left(\frac{3000}{1000} - 1\right) \cdot 4 \times 10^{-6}$$

$$\boxed{C_{c'} = 8\mu F}$$

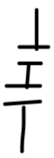
$$Q_0 = Q + Q_V$$
$$CV_0 = CV' + C'V'$$
$$C(V_0 - V') = C'V'$$
$$C' = \frac{C(V_0 - V')}{V'}$$
$$C' = 2C = 8\mu F$$

**Application 2 :**

On rappelle que lorsque l'espace entre deux armatures est rempli d'un diélectrique linéaire, homogène et isotrope, de permittivité $\varepsilon_r$ , la capacité $C = \varepsilon_r C_0$ où $C_0$ est la capacité quand le diélectrique est le vide (ou l'air).

On considère un condensateur plan :

Fig 1: le diélectrique remplit le ½ espace horizontal ; Fig 2: le diélectrique remplit le ½ espace vertical. Dans les deux cas le condensateur est à potentiel constant. Calculer la capacité du condensateur équivalent.



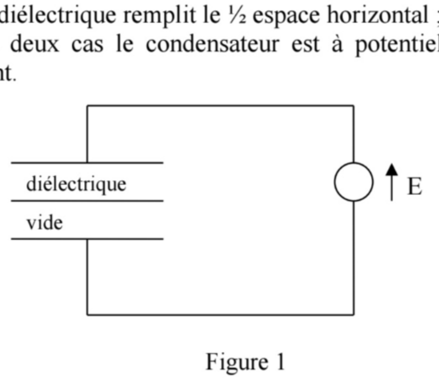



Figure 1

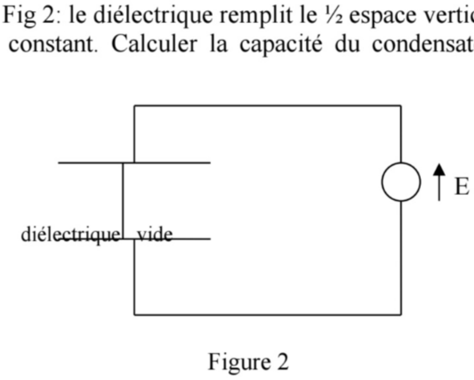
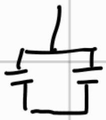



Figure 2



$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$

$$C = \varepsilon_r C_0 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$

$$C_{0\frac{e}{2}} = \varepsilon_0 \frac{S}{e/2} = 2\varepsilon_0 \frac{S}{e} = 2C_0$$

$$C_{\frac{e}{2}} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{e/2} = 2\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{e} = 2\varepsilon_r C_0$$

$$C_{0\frac{e}{2}} = \varepsilon_0 \frac{S/2}{e} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{e} = \frac{1}{2} C_0$$

$$C_{\frac{e}{2}} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S/2}{e} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{e} = \frac{1}{2}\varepsilon_r C_0$$

$$C_1 = \left(\Sigma \frac{1}{C}\right)^{-1}$$

$$C_1 = \left(\frac{1}{C_{0\frac{e}{2}}} + \frac{1}{C_{e/2}}\right)^{-1}$$

$$C_1 = \left(\frac{1}{2C_0} + \frac{1}{2\varepsilon_r C_0}\right)^{-1}$$

$$C_1 = \left(\frac{\varepsilon_r + 1}{2C_0\varepsilon_r}\right)^{-1}$$

$$C_1 = \left(\frac{\varepsilon_r + 1}{2C_0\varepsilon_r}\right)^{-1}$$

$$\boxed{C_1 = \frac{2\varepsilon_r C_0}{\varepsilon_r + 1}}$$

$$C_0' = \varepsilon_0 \frac{S}{e/2} = 2\varepsilon_0 \frac{S}{e} = 2C_0$$

$$C' = \varepsilon_r C_0' = 2\varepsilon_r C_0$$

$$C_{eq} = \frac{C_0 C'}{C_0' + C'} = \frac{2C_0 \times 2\varepsilon_r C_0}{2C_0 + 2\varepsilon_r C_0}$$

$$= \frac{2C_0 \varepsilon_r C_0}{\varepsilon_r + 1}$$

$$C_2 = \sum_i C_i$$

$$C_2 = C_{0\,S/2} + C_{S/2}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} C_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_r C_0$$

$$\boxed{C_2 = \frac{C_0}{2}(1+\varepsilon_r)}$$

**Exercice 5 : Association de condensateurs plans**

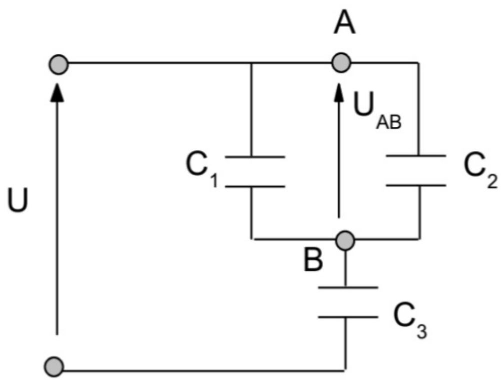
On applique la tension U au circuit ci-contre associant les condensateurs de capacités $C_1$, $C_2$ et $C_3$.

Déterminer la tension $U_{AB}$.

*Il est conseillé de calculer la capacité équivalente du circuit $C_{123}$.*

On donne : U = 12.5 V

$C_1$=12µF $C_2$=5.3µF $C_3$=4.5µF




$$C_{12} = C_1 + C_2$$

$$C_{12} = (12 + 5,3)\,\mu F$$

$$C_{12} = 17,3\,\mu F$$

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_3 + C_{12}}{C_{12} \cdot C_3}$$

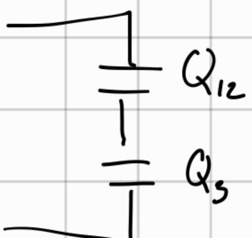
$$C_{123} = \frac{C_{12} \cdot C_3}{C_{12} + C_3}$$

$$C_{123} = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = C_{123} \cdot U$$

$$Q_{123} = \frac{C_{12} \cdot C_3}{C_{12} + C_3} \times U \qquad Q_{12} = (C_1 + C_2)\,U_{AB}$$

Le meme courant parcour le circuit

Meme courant : meme charge



Soit $Q_{123} = Q_{12} = Q_3$

$C_{12} U_{AB} = C_{123} \cdot U \rightarrow U_{AB} = \frac{C_{123}}{C_{12}} \cdot U$

$U_{AB} = \frac{3,57}{17,3} \times 12,5$

$\boxed{U_{AB} = 12,58 V}$

Verifier $Q_{123} = 44,6 \mu C$

$Q_1 = 21 \mu C$

$Q_2 = 13,6 \mu C$