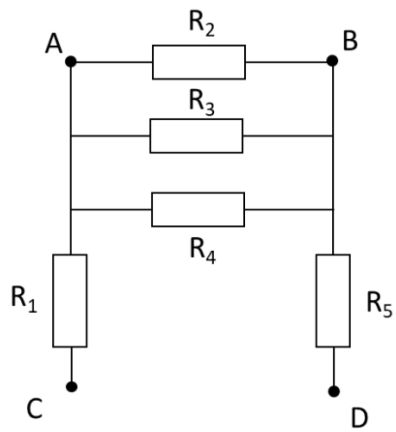
Exercice 1 :

Calculer la résistance équivalente R_{CD}.



La résistance R_{CD} est la mise en série de la résistance $R_{AC}=R_1$, R_{AB} et $R_{BD}=R_5$

R_{AB} est la mise en parallèle de R_2, R_3 et R_4

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \Rightarrow \frac{1}{R_{AB}} = \frac{R_3R_4+R_2R_4+R_2R_3}{R_2R_3R_4}$$

$$\Rightarrow R_{CD} = R_1+R_5+\frac{R_2R_3R_4}{R_3R_4+R_2R_4+R_2R_3}$$

$$= \frac{R_1R_2R_3+R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_2R_3R_5+R_2R_4R_5+R_3R_4R_5+R_2R_3R_4}{R_2R_3+R_2R_4+R_3R_4}$$

```
syms R1 R2 R3 R4 R5
RAB=1/(1/R2+1/R3+1/R4)
```

RAB =

$$\frac{1}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}}$$

```
RCD=R1+R5+RAB
```

RCD =

$$R_1+R_5+\frac{1}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}}$$

```
simplify(RCD)
```

ans =

$$R_1 + R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

Cette forme est la plus simple pour matlab (le critère de "simplicité" est simplement le nombre de caractère minimum de l'expression)

On peut forcer matlab à ecrire R_{CD} sous forme d'un fraction rationnelle :

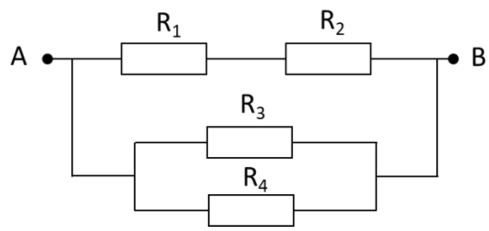
```
simplifyFraction(RCD)
```

ans =

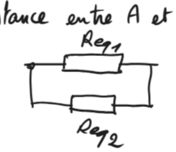
$$\frac{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_5 + R_2 R_4 R_5 + R_3 R_4 R_5}{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}$$

Exercice 2 :

Calculer la résistance équivalente R_{AB}.



La résistance entre A et B est :



avec $Req_1 = R_1 + R_2$

$Req_2 = R_3 // R_4 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$

$$R_{AB} = \frac{Req_1 Req_2}{Req_1 + Req_2} = \frac{(R_1+R_2)\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}}{R_1+R_2 + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}}$$

$$= \frac{(R_1+R_2)R_3R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4) + R_3R_4} = \frac{(R_1+R_2)R_3R_4}{R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4}$$

```
syms R1 R2 R3 R4
Req1=R1+R2
```

Req1 = $R_1 + R_2$

```
Req2=R3*R4/(R3+R4)
```

Req2 =

$$\frac{R_3\,R_4}{R_3+R_4}$$

```
RAB=Req1*Req2/(Req1+Req2)
```

RAB =

$$\frac{R_3\,R_4\,\left(R_1+R_2\right)}{\left(R_3+R_4\right)\,\left(R_1+R_2+\frac{R_3\,R_4}{R_3+R_4}\right)}$$

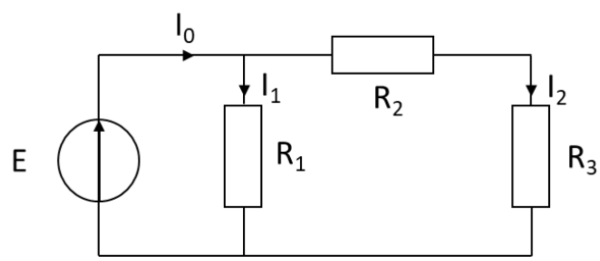
```
simplifyFraction(RAB)
```

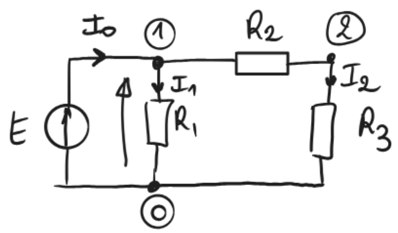
ans =

$$\frac{R_3\,R_4\,\left(R_1+R_2\right)}{R_1\,R_3+R_1\,R_4+R_2\,R_3+R_2\,R_4+R_3\,R_4}$$

Exercice 3 :

Déterminer les courants I_0, I_1 et I_2 en fonction de R_1, R_2, R_3 et E.





Les potentiels aux noeuds 1, 2 et 0 sont notés e_1, e_2 et e_0.

On fixe une référence de potentiel : $e_0 = 0\,V$

$$e_1 - e_0 = E \Rightarrow I_1 = \frac{e_1 - e_0}{R_1} = \frac{E}{R_1}$$

le courant I_2 traverse les résistances R_2 et R_3 qui sont en série

$$e_1 - e_0 = E = (R_2 + R_3) I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E}{R_2 + R_3}$$

Loi des noeuds au noeud 1 : $I_0 = I_1 + I_2$

$$\Rightarrow I_0 = E \times \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} \right) = \frac{R_2 + R_3 + R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3}$$

Utilisation de fspice :

Definition du circuit par la variable netlist :

```
netlist={
    'V1 1 0 E'
    'R1 1 0 R1'
    'R2 1 2 R2'
    'R3 2 0 R3'
    };
[X,name]=fspice(netlist)
```

```
** fspice 2.46  ** (c) Frederic Martinez
X =
```

$$\begin{pmatrix} E \\ \dfrac{E\, R_3}{R_2 + R_3} \\ -\dfrac{E\;(R_1 + R_2 + R_3)}{R_1\;(R_2 + R_3)} \end{pmatrix}$$

```
name = 1×3 cell
'V(1)'      'V(2)'      'I(V1)'
```

Par convention, le courant débité par la source de tension $I(V1) = -I_0$

On obtient donc :

```
I0=-X(3)
```

I0 =

$$\frac{E\ (R_1+R_2+R_3)}{R_1\ (R_2+R_3)}$$

Pour obtenir les courants I_1 et I_2, il faut utiliser les potentiels calculés au noeud 1 et 2.

$I_1 = V(1)/R_1$:

```
syms R1
I_1=X(1)/R1
```

I_1 =

$$\frac{E}{R_1}$$

$I_2 = V(2)/R_3$ car I_2 le courant tranversant la résistance R_3:

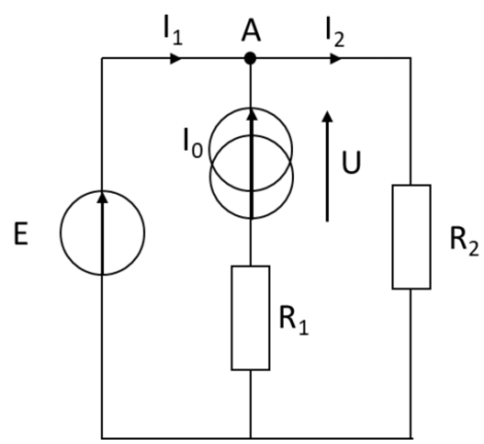
```
syms R3
I_2=X(2)/R3
```

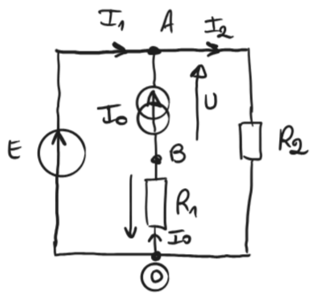
I_2 =

$$\frac{E}{R_2+R_3}$$

Exercice 4 :

Déterminer la tension U et le courant I_1.





On fixe une référence de potentiel $e_0 = 0$
La tension $U = e_A - e_B$

Le courant I_0 traverse la résistance R_1

$$R_1 I_0 = e_0 - e_B \Rightarrow e_B = -R_1 I_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U = e_A - e_B \\ E = e_A - e_0 \end{cases} \Rightarrow U = E - (-R_1 I_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{U = E + R_1 I_0}$$

$$e_A - e_0 = R_2 \times I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E}{R_2}$$

Loi des nœuds en (A) : $I_1 = I_2 - I_0$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{E}{R_2} - I_0}$$

Utilisation de fspice :

```
netlist={
    'V1 A 0 E'
    'I1 B A I0'
    'R1 B 0 R1'
    'R2 A 0 R2'
    };
[X,name]=fspice(netlist)
```

```
** fspice 2.46  ** (c) Frederic Martinez
X =
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E} \\ -I_0 R_1 \\ -\dfrac{\mathrm{E} - I_0 R_2}{R_2} \end{pmatrix}$$

```
name = 1×3 cell
'V(A)'        'V(B)'        'I(V1)'
```

La tension U est $U = V(A) - V(B)$

```
U=X(1)-X(2)
```

U = $\mathrm{E} + I_0 R_1$

Par convention, le courant débité par la source de tension $I(V1) = -I_1$

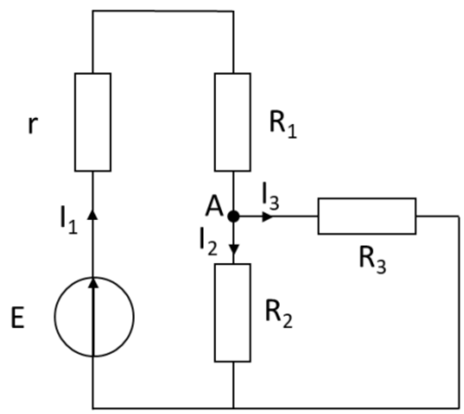
```
I1=-X(3)
```

I1 =

$$\frac{E - I_0 R_2}{R_2}$$

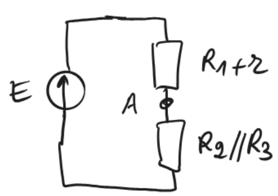
Exercice 5 :

1) Déterminer le potentiel au point A.
2) En déduire les courants dans les différentes branches.
3) Vérifier la loi des nœuds au point A.



$$\begin{cases} E = 20\ V \\ r = 5\ \Omega \\ R_1 = 20\ \Omega \\ R_2 = 40\ \Omega \\ R_3 = 10\ \Omega \end{cases}$$

1) En regroupant les résistances, on obtient le schéma suivant :

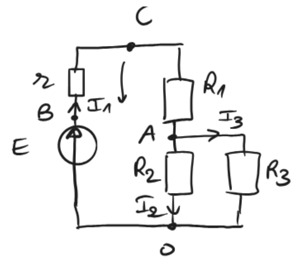


En appliquant la formule du pont diviseur

$$V_A = \frac{R_2 // R_3}{R_2 // R_3 + R_1 + r}$$

$$= \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1 + r} = \frac{R_2 R_3}{R_2 R_3 + (R_1 + r)(R_2 + R_3)}$$

2/



$e_0 = 0 \Rightarrow E = e_B - e_0 \Rightarrow e_B = E$

$-(e_A - e_B) = (R_1 + r) I_1$

$$I_1 = \frac{-\frac{R_2 R_3}{R_2+R_3+(R_1+r)(R_2+R_3)} + E}{R_1 + r}$$

$$I_1 = \frac{-4,85 + 20}{20 + 5} = \boxed{0,6\ A}$$

$$I_2 = \frac{e_A}{R_2} = \frac{4,85}{40} = \boxed{0,12\ A}$$

$$I_3 = \frac{e_A}{R_3} = \frac{4,85}{10} = \boxed{0,485\ A}$$

3/ $I_2 + I_3 = 0,48 + 0,12 = 0,6 = I_1$ (Attention aux erreurs d'arrondi !)

Utilisation de fspice :

```
netlist={
    'V1 B 0 E'
    'R1 B C r'
    'R2 C A R1'
    'R3 A 0 R2'
    'R4 A 0 R3'
    };
[X,name]=fspice(netlist)
```

```
** fspice 2.46  ** (c) Frederic Martinez
X =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{E\, R_2\, R_3}{\sigma_1} \\ E \\ \frac{E\ (R_1\, R_2 + R_1\, R_3 + R_2\, R_3)}{\sigma_1} \\ -\frac{E\ (R_2 + R_3)}{\sigma_1} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = R_1\, R_2 + R_1\, R_3 + R_2\, R_3 + R_2\, r + R_3\, r$$

```
name = 1×4 cell
'V(A)'       'V(B)'       'V(C)'       'I(V1)'
```

Le courant I_1 est, au signe près, le courant débité par la source de tension :

```
I1=-X(4)
```

```
I1 =
```

$$\frac{\mathrm{E}\ (R_2 + R_3)}{R_1\,R_2 + R_1\,R_3 + R_2\,R_3 + R_2\,r + R_3\,r}$$

Pour obtenir les courants I_2 et I_3, il faut utiliser les potentiels calculés au noeud A:

```
syms R2 R3
I2=X(1)/R2
```

```
I2 =
```

$$\frac{\mathrm{E}\,R_3}{R_1\,R_2 + R_1\,R_3 + R_2\,R_3 + R_2\,r + R_3\,r}$$

```
I3=X(1)/R3
```

```
I3 =
```

$$\frac{\mathrm{E}\,R_2}{R_1\,R_2 + R_1\,R_3 + R_2\,R_3 + R_2\,r + R_3\,r}$$

Application numérique :

```
R1=20;R2=40;R3=10;r=5;E=20;
```

V_A

```
double(subs(X(1)))
```

```
ans = 4.8485
```

I_1

```
double(subs(I1))
```

```
ans = 0.6061
```

I_2

```
double(subs(I2))
```

```
ans = 0.1212
```

I_3

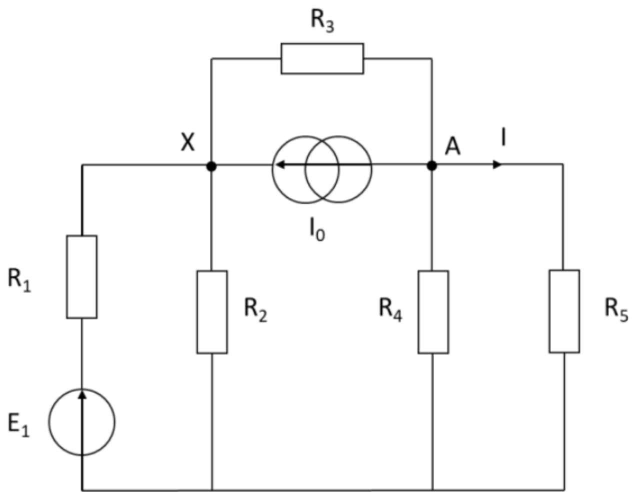
```
double(subs(I3))
```

```
ans = 0.4848
```

Exercice 6 :

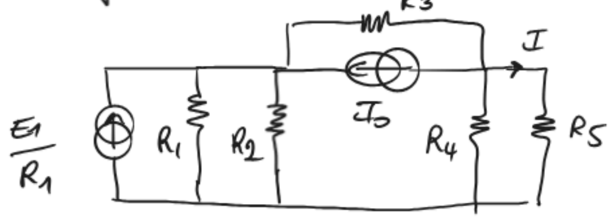
Déterminer le courant I :

1) A l'aide de transformations Norton/Thévenin successives
2) En utilisant la loi des nœuds en termes de potentiel.

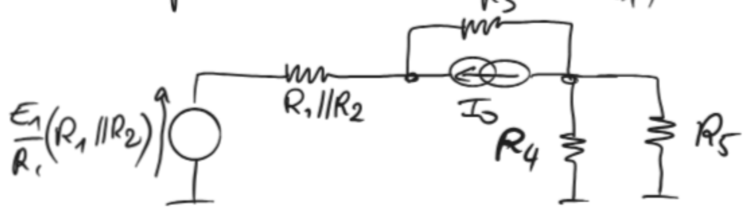


$$\begin{cases} E_1 = 10\ V \\ R_1 = 10\ \Omega \\ R_2 = 15\ \Omega \\ R_3 = 8\ \Omega \\ R_4 = 15\ \Omega \\ R_5 = 5\ \Omega \\ I_0 = 0{,}1\ A \end{cases}$$

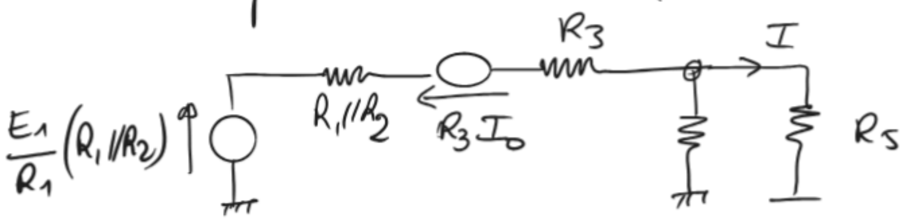
Transformation $T \rightarrow N$ (E_1, R_1)



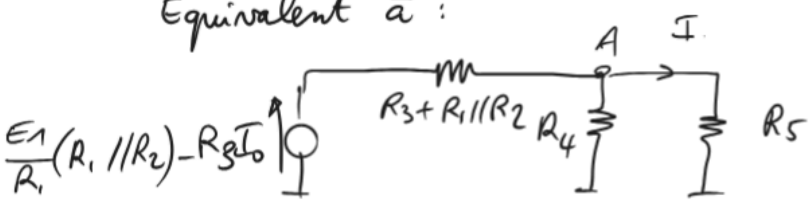
Transformation $N \rightarrow T$ $\left(\frac{E_1}{R_1}\right)$, $R_1 // R_2$



Transformation $N \rightarrow T$ (I_0, R_3)

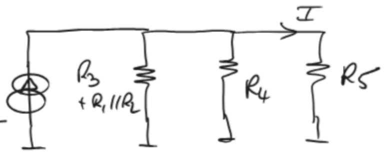


Equivalent à :



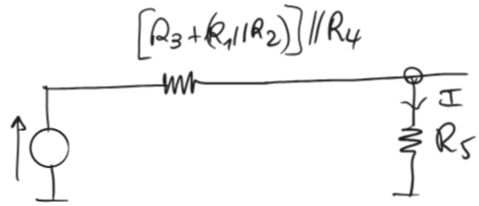
T → N

$$\frac{\frac{E_1}{R_1}(R_1//R_2)-R_3I_0}{R_3+R_1//R_2}$$



N → T

$$\left[R_4//(R_3+R_1//R_2)\right]\frac{\frac{E_1}{R_1}(R_1//R_2)-R_3I_0}{R_3+R_1//R_2}$$



$$I=\frac{\left[R_4//(R_3+R_1//R_2)\right]\dfrac{\frac{E_1}{R_1}(R_1//R_2)-R_3I_0}{R_3+R_1//R_2}}{[R_3+(R_1//R_2)]//R_4+R_5}$$

AN $\quad R_1//R_2=\dfrac{10\times 15}{10+15}=6\,\Omega$

$$I=\frac{(15//(8+6))\times\dfrac{\frac{10\times 6}{10}-8\times 0{,}1}{8+6}}{(8+6)//15+5}=\frac{7{,}24\times 0{,}37}{7{,}24+5}$$

$$\boxed{I=0{,}22\ A}$$

```
netlist={
    'V1 1 0 E1'
    'R1 1 XX R1'
    'R2 XX 0 R2'
    'R3 XX A R3'
    'R4 A 0 R4'
    'R5 A 0 R5'
    'I1 A XX I0'
    };
[X,name]=fspice(netlist)
```

```
** fspice 2.46  ** (c) Frederic Martinez
X =
```

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ -\frac{R_4\,R_5\,\left(I_0\,R_1\,R_3 - E_1\,R_2 + I_0\,R_2\,R_3\right)}{\sigma_1} \\ \frac{R_2\,\left(E_1\,R_3\,R_4 + E_1\,R_3\,R_5 + E_1\,R_4\,R_5 + I_0\,R_1\,R_3\,R_4 + I_0\,R_1\,R_3\,R_5\right)}{\sigma_1} \\ -\frac{E_1\,R_2\,R_4 + E_1\,R_2\,R_5 + E_1\,R_3\,R_4 + E_1\,R_3\,R_5 + E_1\,R_4\,R_5 - I_0\,R_2\,R_3\,R_4 - I_0\,R_2\,R_3\,R_5}{\sigma_1} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = R_1\,R_2\,R_4 + R_1\,R_2\,R_5 + R_1\,R_3\,R_4 + R_1\,R_3\,R_5 + R_2\,R_3\,R_4 + R_1\,R_4\,R_5 + R_2\,R_3\,R_5 + R_2\,R_4\,R_5$$

```
name = 1×4 cell
'V(1)'       'V(A)'       'V(XX)'      'I(V1)'
```

```
syms R5
I=X(2)/R5
```

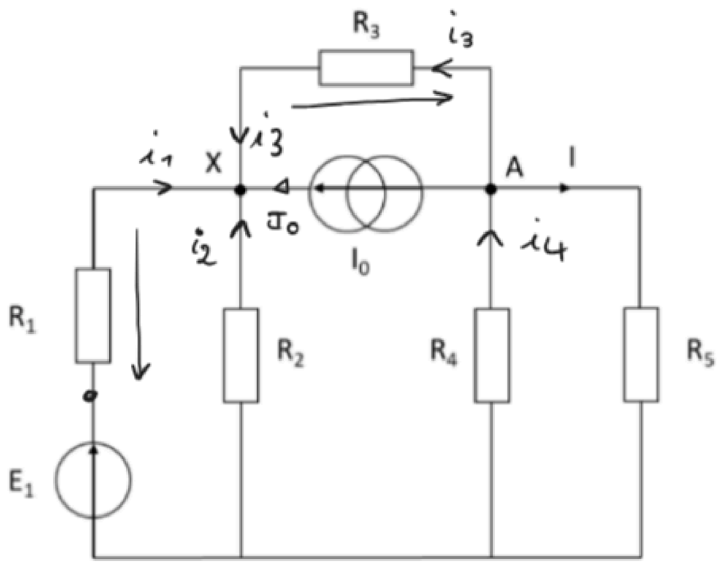
```
I =
```

$$-\frac{R_4\,\left(I_0\,R_1\,R_3 - E_1\,R_2 + I_0\,R_2\,R_3\right)}{R_1\,R_2\,R_4 + R_1\,R_2\,R_5 + R_1\,R_3\,R_4 + R_1\,R_3\,R_5 + R_2\,R_3\,R_4 + R_1\,R_4\,R_5 + R_2\,R_3\,R_5 + R_2\,R_4\,R_5}$$

```
E1=10;R1=10;R2=15;R3=8;R4=15;R5=5;I0=0.1;
double(subs(I))
```

```
ans = 0.2197
```

loi des noeuds en termes de potentiels



au noeud X

$$i_1 + i_2 + i_3 + I_0 = 0$$

$$\frac{E_1 - e_X}{R_1} + \frac{-e_X}{R_2} + \frac{e_A - e_X}{R_3} = -I_0$$

$$\left[-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right] e_X + \frac{1}{R_3} e_A = -I_0 - \frac{E_1}{R_1}$$

au noeud A

$$-I_0 - i_3 - I + i_4 = 0$$

$$-I_0 - \frac{e_A - e_X}{R_3} - \frac{e_A}{R_5} - \frac{e_A}{R_4} = 0$$

$$+\frac{1}{R_3} e_X + \left[-\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_5} - \frac{1}{R_4} \right] e_A = I_0$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \left[-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right] e_X + \frac{1}{R_3} e_A = -I_0 - \frac{E_1}{R_1} \\ +\frac{1}{R_3} e_X + \left[-\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_5} - \frac{1}{R_4} \right] e_A = I_0 \end{cases}$$

A.N $\begin{cases} -0{,}29\ e_X + 0{,}125\ e_A = -1{,}1 \\ 0{,}125\ e_X + (-0{,}39) e_A = 0{,}1 \end{cases}$

$$-0{,}29\ e_X + 0{,}125\ e_A = -1{,}1$$

$$-0{,}336\ e_A = -0{,}37$$

$$e_A = 1{,}1 \text{ V} \Rightarrow \boxed{I = \frac{e_A}{R_5} = \frac{1{,}1}{5} = 0{,}22 \text{ A}}$$

Résolution avec matlab du système d'équation AX=B:

```
A=[-0.29 0.125;.125 -.39]
```

```
A = 2×2
   -0.2900    0.1250
    0.1250   -0.3900
```

```
B=[-1.1;0.1]
```

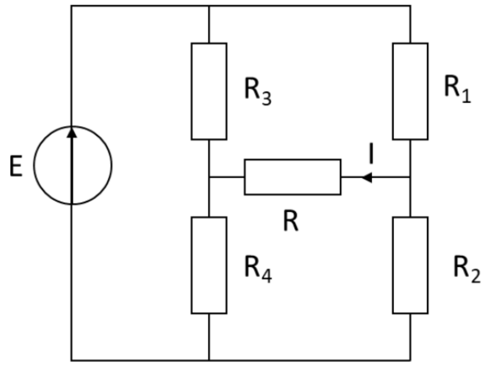
```
B = 2×1
   -1.1000
    0.1000
```

```
X=A^-1*B
```

```
X = 2×1
    4.2729
    1.1131
```

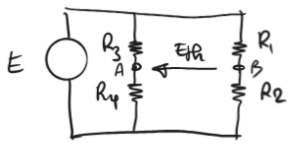
Exercice 7 :

Déterminer le courant I.



$$\left\{\begin{array}{l} E=100\ V \\ R_1=100\ \Omega \\ R_2=200\ \Omega \\ R_3=400\ \Omega \\ R_4=300\ \Omega \\ R=500\ \Omega \end{array}\right.$$

On remplace l'ensemble E, R_1, R_2, R_3, R_4 par un générateur de thevenin.



$$E_{th} = E\frac{R_4}{R_3+R_4} - E\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

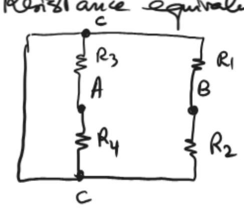
$$= E\frac{R_4(R_1+R_2) - R_2(R_3+R_4)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}$$

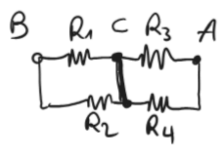
$$= E\frac{R_1R_4 + R_2R_4 - R_2R_3 - R_2R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}$$

$$= E\frac{R_1R_4 - R_2R_3}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} = 100\,\frac{100\times300 - 200\times400}{(100+200)(400+300)}$$

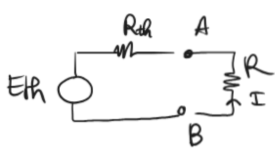
$$= -23{,}81\ V$$

Résistance équivalente





$$R_{th} = R_1 /\!/ R_2 + R_3 /\!/ R_4 = 738{,}1\ \Omega$$



$$I = -\frac{E_{th}}{R_{th}+R} = -\frac{\frac{100\times300 - 200\times400}{(100+200)\times(400+300)}\,100}{(100/\!/200)+(300/\!/400)+500}$$

$$\boxed{I = -\frac{-23{,}81}{738{,}1} = 0{,}032\,A}$$

```
netlist={
    'V1 1 0 E'
    'R1 1 B R1'
    'R2 B 0 R2'
    'R3 1 A R3'
    'R4 A 0 R4'
    'R5 A B R'};
[X,name]=fspice(netlist)
```

```
** fspice 2.46  ** (c) Frederic Martinez
X =
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E} \\ \dfrac{\mathrm{E}\,R_4\,\left(R\,R_1+R\,R_2+R_1\,R_2+R_2\,R_3\right)}{\sigma_1} \\ \dfrac{\mathrm{E}\,R_2\,\left(R\,R_3+R\,R_4+R_1\,R_4+R_3\,R_4\right)}{\sigma_1} \\ -\dfrac{\mathrm{E}\,\left(R\,R_1+R\,R_2+R\,R_3+R_1\,R_2+R\,R_4+R_1\,R_4+R_2\,R_3+R_3\,R_4\right)}{\sigma_1} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = R\,R_1\,R_3+R\,R_1\,R_4+R\,R_2\,R_3+R\,R_2\,R_4+R_1\,R_2\,R_3+R_1\,R_2\,R_4+R_1\,R_3\,R_4+R_2\,R_3\,R_4$$

```
name = 1×4 cell
'V(1)'       'V(A)'       'V(B)'       'I(V1)'
```

```
syms R
I=(X(3)-X(2))/R;
E=100;R1=100;R2=200;R3=400;R4=300;R=500;
double(subs(I))
```

```
ans = 0.0323
```