Détail de l'étude des limites du circuit RLC quand m=1

La fonction de transfert isochrone est la suivante :

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{2m\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

a. Diagramme du gain

$$G_{dB} = 20\log[|\underline{H}|] = 20\log\left[\left|\frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right|\right]$$

$$G_{dB} = 20\log\left[\frac{1}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)^2}\right]$$

$$G_{dB} = 20\log\left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right]$$

$$G_{dB} = -20\log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

Pour tracer G_{dB} en fonction de ω, il faut faire une étude des limites.

- lorsque ω tend vers 0 :

  $$\lim_{\omega \to 0} G_{dB} = \lim_{\omega \to 0} -20\log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] = -20\log(1) = 0\,dB$$

  La première asymptote quand $\omega \to 0$ vaut 0 dB avec une pente nulle.

- lorsque ω tend vers $+\infty$:

  $$\lim_{\omega \to +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega \to +\infty} -20\log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

  $$\Leftrightarrow \lim_{\omega \to +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega \to +\infty} -20\log\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

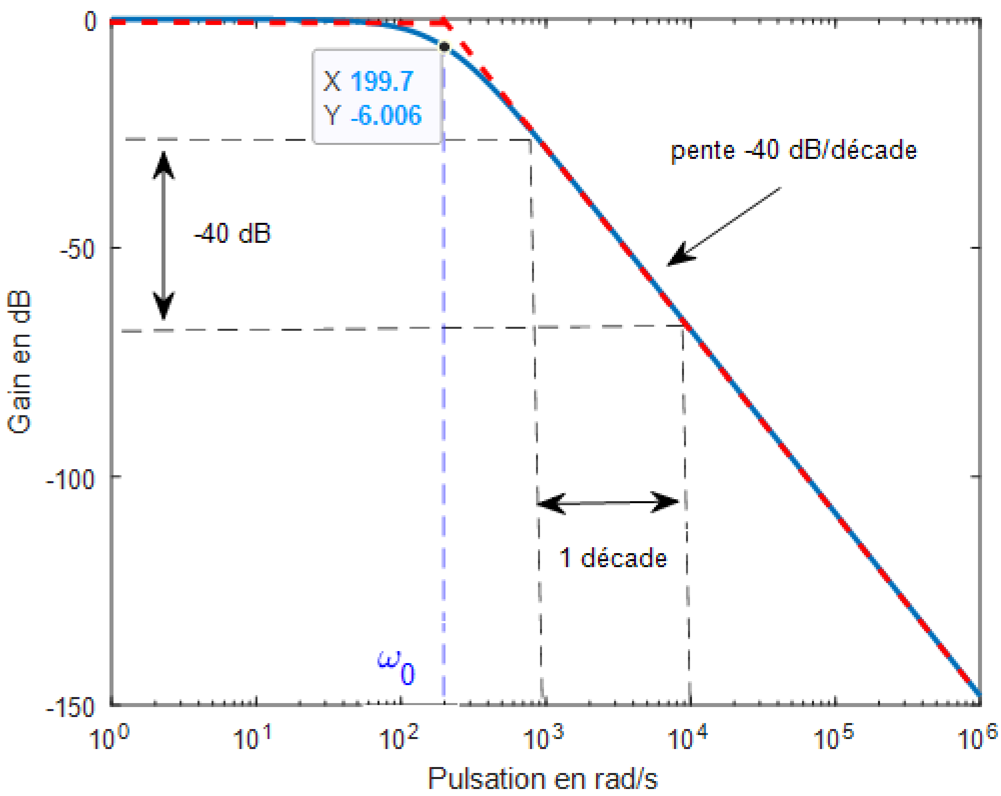
$$\Leftrightarrow \lim_{\omega \to +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega \to +\infty} -40 \log\left[\frac{\omega}{\omega_0}\right]$$

La deuxième asymptote est donc une droite de pente -40 dB/décade.

- lorsque $\omega = \omega_0$:

$$G_{dB}(\omega_0) = -20 \log\left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2\right] = -20 \log(2) \approx -6\, dB$$

Nous pouvons à présent tracer le diagramme de Bode du gain (figure ci-dessous).



2.b. Diagramme de phase

$$\varphi = \arg(\underline{H})$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arg\left(\frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = -\arg\left(\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = -2 \cdot \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = -2 \cdot \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Pour tracer φ en fonction de ω, il faut faire une étude des limites.

- lorsque ω tend vers 0 :

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega \to 0} \varphi = \lim_{\omega \to 0} -2 \cdot \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -2 \cdot \arctan(0) = 0\,rad = 0°$$

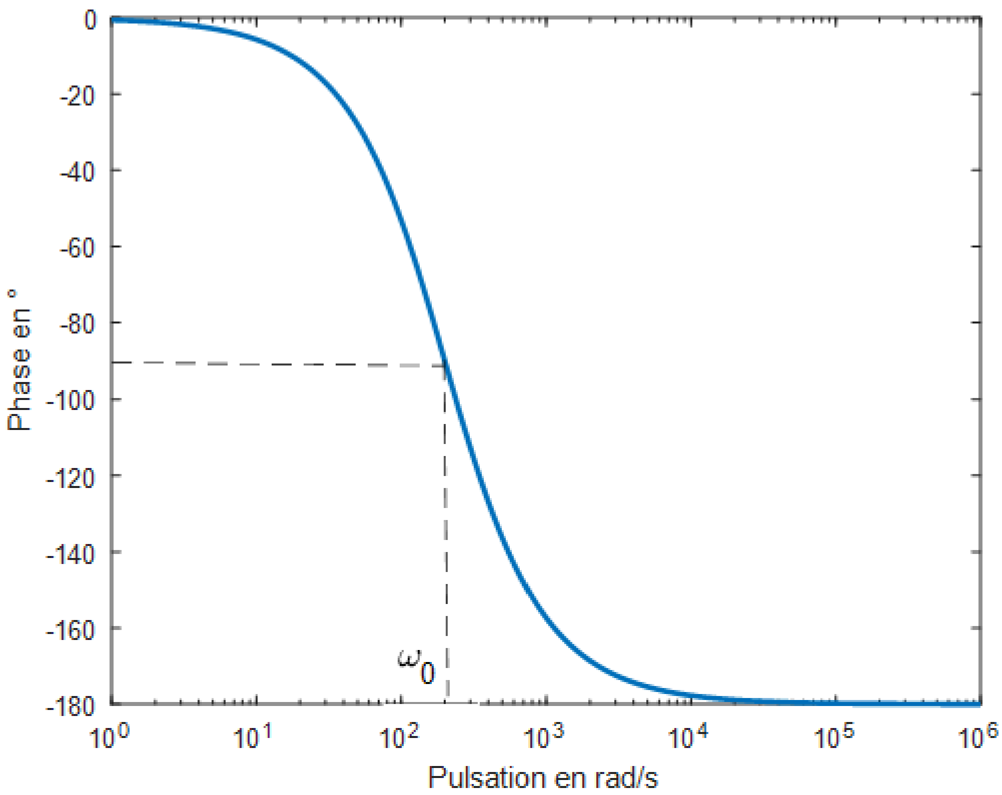
- lorsque ω tend vers $+\infty$:

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega \to +infty} \varphi = \lim_{\omega \to +\infty} -2 \cdot \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -2 \arctan(+\infty) = -2 \cdot \frac{\pi}{2}\,rad = -180°$$

- lorsque $\omega = \omega_0$:

$$\varphi(\omega_0) = -2 \cdot \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right) = -2 \cdot \arctan(1) = -\frac{\pi}{2}\,rad = -90°$$

Nous pouvons à présent tracer le diagramme de Bode de phase (figure ci-dessous).



Simulation

Le code Octave qui permet de tracer les deux courbes est donné ci-dessous. On prendra les valeurs de composants suivantes : $R = 1k\Omega$, $C = 10\mu F$ et $L = 2.5H$. Avec ces valeurs, $m = 1$ et $\omega_0 = 200\,rad/s$.

```
>> R=1e3; C=10e-6;L=2.5;
>> m=R/2*sqrt(C/L)
>> w0=1/sqrt(L*C)
>> w=logspace(0,6,1000); %définit un vecteur pulsation contenant des valeurs réparties réguliè
>> H=1./(1+j*R*C*w -L*C*w.^2); % définition de la fonction de transfert isochrone (complexe)
>> GdB= 20*log10(abs(H)); % calcul du gain en dB. log10 est utilisé pour calculer le log en ba
>> Phi=phase(H); % calcul de la phase en rad. phase permet de calculer l'argument d'un nombre

>> % Tracé du diagramme de Bode
>> figure(1)
>> semilogx(w,GdB) %diagramme du gain
>> xlabel('Pulsation en rad/s')
```

```
>> ylabel('Gain en dB')

>> figure(2)
>> semilogx(w,Phi*180/pi) %diagramme de phase
>> xlabel('Pulsation en rad/s')
>> ylabel('Phase en °')

m =

     1


w0 =

```