

Partie Circuits et Composants Capacitifs

P. CHRISTOL

VII- Energie Electrostatique

Soit 2 charges q_1 en M_1 et q_2 en M_2 séparées par une distance r_{12} .

Au point M_2 règne le potentiel $V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$ induit par la charge q_1 en M_1 .

Le travail (ou l'énergie) $W = q_2 V_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$

De même au point M_1 on a, avec V_1 le potentiel au point M_1 induit par q_2 :

$$W = q_1 V_1 = q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r}$$

On a donc $W = q_2 V_2 = q_1 V_1$;

et l'énergie totale $q_2 V_2 + q_1 V_1 = 2W$

d'où

$$W = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2)$$

→ Si N charges ponctuelles :

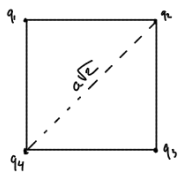
→ - Energie de la charge q_j : $W = \sum_j q_j V_j^*$

avec V_j^* le potentiel créé par les autres charges que q_j

→ - Energie totale : $W = \frac{1}{2} \sum_j \sum_i q_j V_i$ avec V_i le potentiel créé en j par toutes les autres charges que q_j

VII-1. Calcul de l'Energie Electrostatique d'une répartition de charges

Trouver l'énergie d'un système de quatre charges ponctuelles identiques $Q = 4nC$, placées aux quatre coins d'un carré de 1m de coté.



$$\text{Soit } W = \frac{1}{2} \sum_j \sum_i q_j V_i$$

$$W = \frac{1}{2} \left[q_1 \times \left(\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0 a} \right) + q_2 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0 2\sqrt{2}a} \right) + q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 2\sqrt{2}a} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0 a} \right) + q_4 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 a} \right) \right]$$

$$\text{car } q_1 = q_2 = q_3 = q_4 \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} \times \left(\frac{8Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0 2\sqrt{2}a} \right)$$

VII-2 Energie dans le cas d'un conducteur unique de capacité $C = Q/V$: $W = \frac{1}{2} VQ = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

VII-3 Densité d'énergie dans le cas d'un condensateur plan isolé dans le vide

VII Energie Electrostatique



en M_2 : $U_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

Travail W (ou l'énergie)

$$W = q_2 U_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

de même

en M_1 : $V_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

et $U = q_1 V_1 = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$W = \int q\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

avec $E = \frac{\Delta V}{\Delta \ell}$

$$W = q \Delta V$$

donc $W = q_1 V_1 = q_2 V_2 \rightarrow W_T = 2W = 2 \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

$2W = q_1 V_1 + q_2 V_2 \rightarrow W = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2)$
 (énergie en point)

N charge ponctuelle

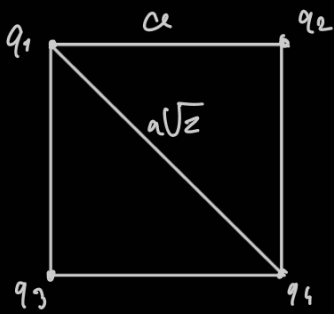
Energie chargi q_j : $V = \sum_j q_j r_j^*$

Par contre que q_j

$$E_{total} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_j V_i$$

VIII -1 Repartition de la charge

$$Q = hmc = 4\pi\epsilon_0^{-1} C$$



$$a = 1 \text{ m}$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = Q$$

E_{tot} du système

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i V_j$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = Q$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} Q \left[\frac{8Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \right]$$

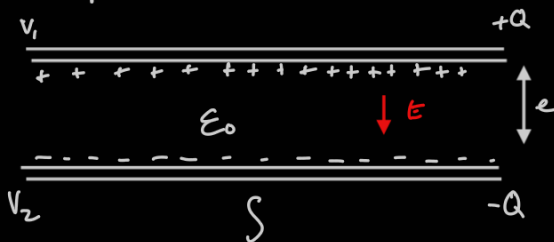
$$E_{\text{totale}} = \frac{1}{2} \left\{ q_1 \left[\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \right] + q_2 \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \right] + q_3 \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \right] + q_4 \left[\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \right] \right\}$$

VII-2

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

VII-3 densité d'énergie dans W

condensateur plan



$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{totale}} \quad W &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i V_j \\ &= \frac{1}{2} [Q V_1 + (-Q) V_2] \\ &= \frac{1}{2} Q [V_1 - V_2] \text{ avec } V_1 - V_2 = \frac{Q}{C} \end{aligned}$$

$$\text{et } U_1 - U_2 = \int E \cdot dl = Ee$$

$$W = \frac{1}{2} Q (U_1 - U_2) = \frac{1}{2} (U_1 - U_2)^2 \\ = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} E^2 e^2$$

$$\text{Soit } W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{S e}_{\text{Volume}}$$

$$\text{donc } W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \text{ Vol}$$

$$\text{et } W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

J/m³

densité d'Énergie électrique
en énergie par unité de Volume