UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **FACULTÉ DES SCIENCES**

L2 - Techniques mathématiques EEA - HAE304X

Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 1

Limites, continuité et dérivabilité

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to+\infty} -x^2+3x-2$; (b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-6x+7}{3x^2-5}$; (c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$;

(d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+2x-1}-2x+3$; (e) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f(x)=x\ln x$; (b) $f(x)=\dfrac{x^2}{\cos x}$; (c) $f(x)=\sin x^2$; (d) $f(x)=x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ et $g(x)=\sqrt{x}\left(x^2+\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\right)$; (e) $f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$; (f) $f(x)=\ln\left(\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{1/3}\right)$; (g) $f(x)=x\,2^x$.

Exercice 3

(*) Calculer les dérivées successives de la fonction $f:\,]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\ln(x+1)$.

Exercice 4

Une application

On considère un filtre RLC série en régime permanent, avec en entrée un tension V_e sinusoïdale. La sortie V_s est mesurée sur la résistance R. Le courant parcourant ce circuit est I. La fonction de transfert associée est $H=V_s/V_e$.

1. Déterminer l'impédance Z associée à ce circuit, telle que $V_e=ZI$.
2. Ce circuit est résonant en courant lorsque $|I|$ est maximal, c'est à dire lorsque $|Z|$ est minimum. Déterminer la fréquence associée.
3. Tracer l'allure du diagramme de Bode de ce circuit, en déterminant les limites
   (a) du module de H
   (b) de l'argument de H

Développements limités

Exercice 5

Ecrire les expressions suivantes sous la forme de développements limités.

1. $(1+3x-x^2+o(x^3))+(-2+5x^2-x^4+o(x^4))$
2. $(2x+5x^2-4x^3+o(x^5))(-1+3x-x^2+x^3+2x^4+x^5+o(x^5))$

Exercice 6

Déterminer les développement limités suivants.

1. $DL_5(0)$ de $f(x)=\cos 3x$
2. $DL_3(0)$ de $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$
3. $DL_4(0)$ de $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, puis de $g(x)=\dfrac{x}{\sin x}$
4. (*) $DL_5(0)$ de $f(x)=\tan x$

Exercice 7

Déterminer les développement limités suivants.

1. $DL_5(0)$ de $f(x) = e^{\cos x}$
2. $DL_7(0)$ de $f(x) = \arctan(x)$
3. $DL_3(0)$ de $f(x) = \sqrt{2+x}$
4. $DL_2(1)$ de $f(x) = \sqrt{3+x}$
5. (*) $DL_1(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

Exercice 8

A l'aide des développements limités, calculer la limite en 0 de

1. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$,
2. $f(x) = \dfrac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$.

Ex 1

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 + 3x - 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-6x+7}{3x^2-5}$;

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$;

HP

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2+2x-1} - 2x + 3$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x-1} - 2x\right) + 3$

forme $(+\infty - \infty)$ $+3$

on développe

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2+2x-1-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x-1}+2x}$

$\Rightarrow \frac{2x-1}{x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+2\right)}$

$\Rightarrow \frac{\cancel{x}\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+2\right)}$

$\frac{2-0}{\sqrt{4+0-0}+2}$

$\frac{2}{4} + 3$

$\frac{1}{2} + \frac{6}{2}$

$\frac{7}{2}$

(e) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

HP $\Rightarrow \frac{0}{0}$

$\Rightarrow \frac{\frac{1}{x}}{1-0} \Rightarrow \frac{1}{1} = 1$

Ex 2

(a) $f(x) = x \ln x$

$= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$

$= \frac{2x \times \cos x - x^2 \times -\sin x}{\cos x^2}$

(c) $f(x) = \sin x^2$

$= 2x \cos x^2$

$= \ln x + 1$

$$= \frac{2x \times \cos x + x^2 \times \sin x}{\cos x^2}$$

⚠ application de la formule u×v de la dérivé

(d) $f(x) = x\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$$= 1 \times \left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + x \times \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$x + \sqrt{1+x^2} + x + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}$$

$$2x + \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

(e) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} e^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{x \times e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$$

⚠

(g) $f(x) = x\,2^x$

$$= 1 \times 2^x + x \times \ln(2)\, 2^x$$

$$= 2^x + x \ln(2)\, 2^x$$

$$= 2^x (1 + x \ln(2))$$

⚠ Multiplication avant la formule ici

$g(x) = \sqrt{x}\left(x^2 + \frac{e^x}{\sqrt{x}}\right)$

$$= \sqrt{x} \times x^2 + \cancel{\sqrt{x}} \times \frac{e^x}{\cancel{\sqrt{x}}}$$

$$= \sqrt{x} \times x^2 + e^x$$

$$= x^{\frac{1}{2}} \times x^2 + e^x$$

$$= x^{\frac{5}{2}} + e^x$$

$$= \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} + e^x$$

$$\frac{5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$$

⚠ Règle des ln à connaître

(f) $f(x) = \ln\left(\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{1/3}\right)$

$$\frac{1}{3}\left(\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1}\right) = \frac{2x}{3}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{2x}{3}\left(\frac{x^2+1-(x^2-1)}{(x^2-1)\times(x^2+1)}\right)$$

$$\frac{2x}{3}\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1}{(x^2-1)\times(x^2+1)}\right)$$

$$\frac{2x}{3}\left(\frac{2}{x^4+x^2-x^2-1}\right)$$

$$\frac{2x}{3}\left(\frac{2}{x^4-1}\right)$$

$$\frac{4x}{3x^4-3}$$

Exc 3

Soit la fonction definie sur l'intervalle $(-1;+\infty)$ ce qui signifie que la derivé est definie pour tous x dans cette intervalle.

$$f(x) = \ln(x+1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{-1}{x^2+1}$

$f'''(x) = \frac{2(x+1)}{((x+1)^2)^2} = \frac{2}{(x+1)^3}$

Ex 5

Ecrire les expressions suivantes sous la forme de développements limités.

1. $(1+3x-x^2+o(x^3))+(-2+5x^2-x^4+o(x^4))$
2. $(2x+5x^2-4x^3+o(x^5))(-1+3x-x^2+x^3+2x^4+x^5+o(x^5))$

1. =

$= -1 + 3x + 4x^2 - x^4$

2. $= (-2x + 6x^2 - 2x^3 + 2x^4 + 4x^5 - 5x^2 + 15x^3 - 5x^4 + 5x^5 + 4x^3 - 12x^4 + 4x^5$

$-2x + x^2 + 17x^3 - 15x^4 + 13x^5 + o(x^5)$

2. $(2x+5x^2-4x^3+o(x^5))(-1+3x-x^2+x^3+2x^4+x^5+o(x^5))$

$= -2x + 6x^2 - 2x^3 + 2x^4 + 4x^5 + o(x^5) - 5x^2 + 15x^3 - 5x^4 + 5x^5 + 4x^3 - 12x^4 + 4x^5$

$= -2x + x^2 + 17x^3 - 15x^4 + 13x^5 + o(x^5)$

Ex 6.

1. $DL_5(0)$ de $f(x) = \cos 3x$

$1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x^4}{4!} + o(x^5)$

$84 \,/\, 3 = 27$; 6, 21, 27

$1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{81x^4}{24} + o(x^5)$

$1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{27}{8}x^4 + o(x^5)$

2. $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$

$\frac{1}{1+x} \times e^x \Rightarrow$

$$\left(1-x+x^2-x^3\right)\times\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+o(x^3)$$

$$1+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\cancel{x}-\cancel{x^2}-\frac{x^3}{2}+\cancel{x^2}+\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+o(x^3)$$

$$1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{2}+o(x^3) \Rightarrow 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{6}$$

$$1+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{6} = 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$$

3. $DL_4(0)$ de $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, puis de $g(x)=\frac{x}{\sin x}$

$$f(x)\ \frac{\sin x}{x} = \frac{1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}}{x} = 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$$

$$g(x) = \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1-\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}\right)+o(x^4)} = \frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+o(u^2)$$

$$= 1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\frac{x^4}{36}+o(x^4)$$

$$1+\frac{x^2}{6}-\frac{3x^4}{360}+\frac{10}{360}+o(x^5)$$

$$1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}$$

Avec Division Longue

$$\begin{array}{l|l} x & x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5 \\ \hline 0+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5 & 1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4 \\ -\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{36}x^5 & \\ 0+\frac{7}{360}x^5 & \\ +\frac{7}{360}x^5 & \\ 0 & \end{array}$$

$$DL_4(0) = 1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+o(x^4)$$

4. (*) $DL_5(0)$ de $f(x)=\tan x$

$$\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}$$

https://www.youtube.com/watch?v=ET3qjWs7g7w

Exercice 7

Déterminer les développement limités suivants.

1. $DL_5(0)$ de $f(x)=e^{\cos x}$
2. $DL_7(0)$ de $f(x)=\arctan(x)$
3. $DL_3(0)$ de $f(x)=\sqrt{2+x}$
4. $DL_2(1)$ de $f(x)=\sqrt{3+x}$
5. (*) $DL_1(0)$ de $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$

1)
$$e^{\cos x} = e^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)}$$
$$= e^1\times e^{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)}=X$$
$$= e\left(1+X+\frac{X^2}{2}+\cancel{\frac{X^4}{4!}}+o(X^4)\right)$$
$$= e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{4}+o(x^5)\right)$$

$$e^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}} = e^1\, e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}$$

On dit $X=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

$$\Rightarrow e\left(1 + X + \frac{X^2}{2}\right)$$

$$X^2 = \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$e\left(1 + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{\frac{x^4}{4}}{2}\right)\right)$$

$$e\left(1 + \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{3x^4}{3 \times 8}\right)$$

$$e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{4x^4}{24}\right)$$

$$e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}\right)$$

$$e - \frac{e x^2}{2} + \frac{e x^4}{6} + o(x^4)$$

2) $\arctan(x) \rightarrow \arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6$

On primitive $\rightarrow$: $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$

3) $DL_3(0)$ $f(x) = \sqrt{2+x}$

$$= \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{x}{2}}$$

$$X = \frac{x}{2}$$

$$-\frac{1}{4} \qquad -\frac{3}{2}$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{8} \times \frac{1}{6}x^3\right.$$

$$\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\right)$$

$$\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{128}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 8 \\ \hline 128 \end{array}$$

4) $DL_2(1)$ de $f(x) = \sqrt{3+x} = \sqrt{3+1+h}$

$x = 1+h$

$h = x-1$

$u = \dfrac{x-1}{4}$

$$= \sqrt{4+h}$$

$$= \sqrt{4}\,\sqrt{\frac{h}{4}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{h}{4}+1}$$

$$= 2\sqrt{1+u}$$

Donc $f(x) = 2 \times \left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{(x-1)}{4} - \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\left(\dfrac{x-1}{4}\right)^2\right.$

$$2\times\left(\frac{7+x}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{4}\right)^2 + o\left((x-1)^2\right)\right)$$

$$= 2\left(1 + \frac{(x-1)}{8} - \frac{(x-1)^2}{64}\right)$$

5) $DL_1(0)$: $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+\underbrace{(1+x+o(x))}_{X}} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right)} \times \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - x\ \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + O(x^1)$$

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + o(X)$$

$$= 1 - 1 - x + o(x)$$

$$= -x + o(x) \quad ?$$