# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

1. Systèmes du 1er ordre
2. Systèmes du 2e ordre

# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

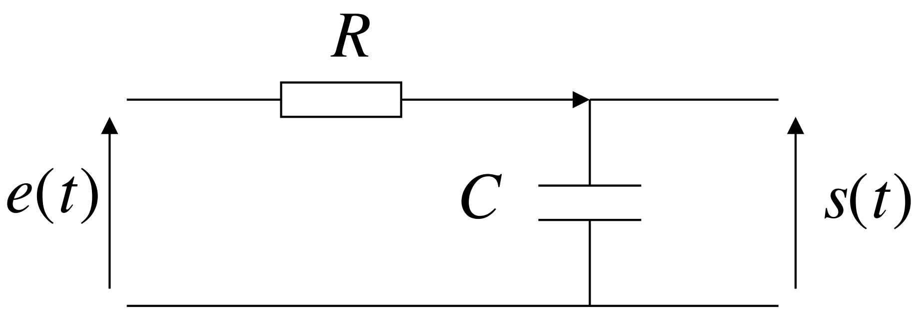
1. Systèmes linéaire du 1er ordre

1.1 Forme générale de l'ED (équation différentiel)

$$\alpha \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

avec $\alpha = cte$

1.2 Exemple : circuit RC série




$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

$$\tau \overset{\circ}{s}(t) + s(t) = e(t)$$

Avec $\tau$=*RC* : constante de temps du circuit RC série (unité : s)

# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

### 1.2.1 Résolution

La résolution de cette équation consiste a trouver *s(t) = f(e(t))*

La solution de l'ED est la somme de :

⇨ La solution générale de l'équation sans second membre : $s_g(t)$

⇨ La solution particulière de l'équation avec second membre : $s_p(t)$

$$s(t) = s_g(t) + s_p(t)$$

+ calcul des constantes d'intégration a partir des conditions initiales

# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

### 1.2.1.1 Résolution de l'équation générale : $s_g(t)$

$$\tau \frac{ds_g(t)}{dt} + s_g(t) = 0 \longrightarrow \tau \frac{ds(t)}{dt} = -s_g(t)$$

$$\frac{ds(t)}{s_g(t)} = -\frac{1}{\tau} dt \longrightarrow \int \frac{ds_g(t)}{s_g(t)} = -\frac{1}{\tau} \int dt$$

$$\ln(s_g(t)) = -\frac{1}{\tau} t + k \longrightarrow s_g(t) = \exp\left(-\frac{1}{\tau} t + k\right)$$

$$s_g(t) = \exp\left(-\frac{1}{\tau} t\right) \exp(k) = K \exp\left(-\frac{1}{\tau} t\right) = K e^{-\frac{1}{\tau} t}$$

$$\text{avec } K = \exp(k)$$

# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

1.2.1 Résolution de l'équation particulière : $s_p(t)$

Pour un système linéaire $s_p(t)$ est de la même forme que $e(t)$.

Les signaux usuels en électronique sont de la forme :

- Polynomiale : $e(t) = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + ......+ e_n t^n$
- Sinusoïdale : $e(t) = E_1 Sin(\omega t) + E_1 Sin(\omega t) = E_0 Sin(\omega t + \varphi)$

alors

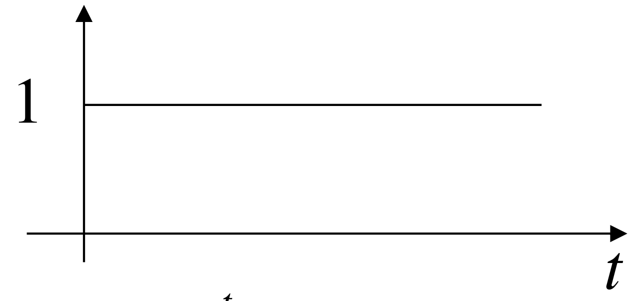
$$s_p(t) = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + ......+ e_n t^n$$

$$s_p(t) = E_0 Sin(\omega t + \varphi)$$

# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

1.3 Réponse indicielle e(t)=cte= $H_0$h(t) (charge) $h(t) = 1 \text{ pour } t > 0$




$$\tau . \overset{\circ}{s}(t) + s(t) = H_0 h(t)$$

$$\tau = RC = \text{constante de temps (s)}$$

*$H_0$ : amplitude de l'échelon de tension*

⇨ Solution général (sans second membre) : $s_g(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}}$

⇨ Solution particulière (avec second membre) : $s_p(t) = cte = C$

⇨ Solution complète :

$$s(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + H_0$$

$$\text{avec pour } t = 0 \rightarrow s(t) = 0 = k + H_0 \longrightarrow k = -H_0$$

$$s(t) = H_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

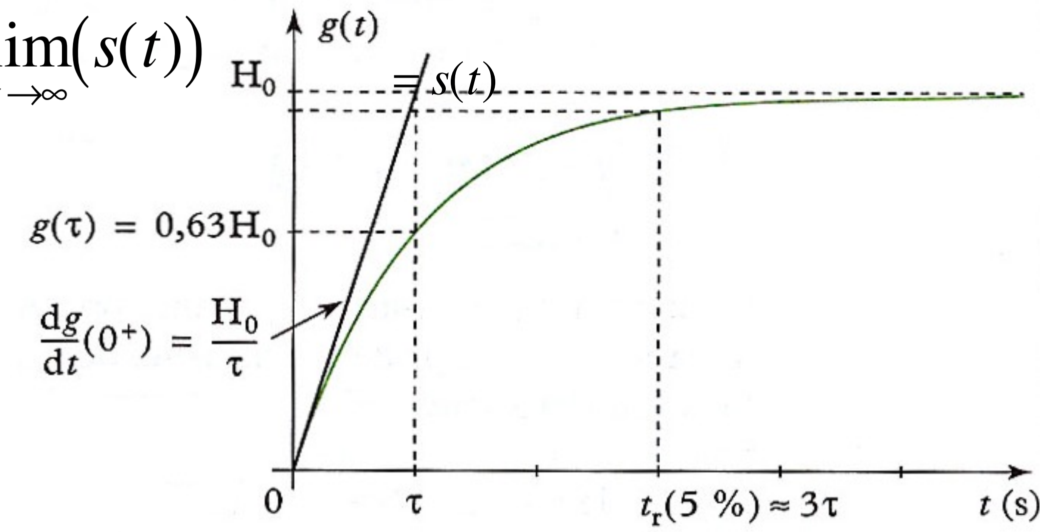
# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

### 1.3.1 Caractéristique d'un système du premier ordre

Temps de réponse : temps pour lequel on à : $\dfrac{|H_0 - s(t)|}{H_0} \leq \varepsilon$

$$H_0 = \lim_{t \to \infty}(s(t))$$




$$\text{pour } \varepsilon = 5\% \rightarrow t_r = 3\tau$$

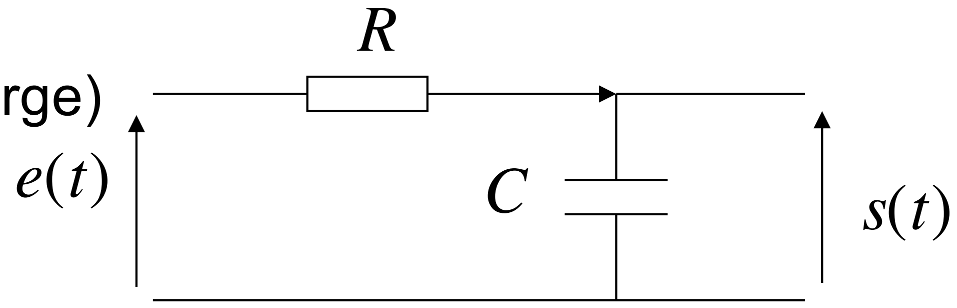
$$\text{pour } \varepsilon = 10\% \rightarrow t_r = 2{,}3\tau$$

$$pour\_t = \tau \rightarrow s(t) = H_0(1 - e^{-1}) = 0{,}63 H_0$$

# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

1.4 Rupture de la source (décharge)



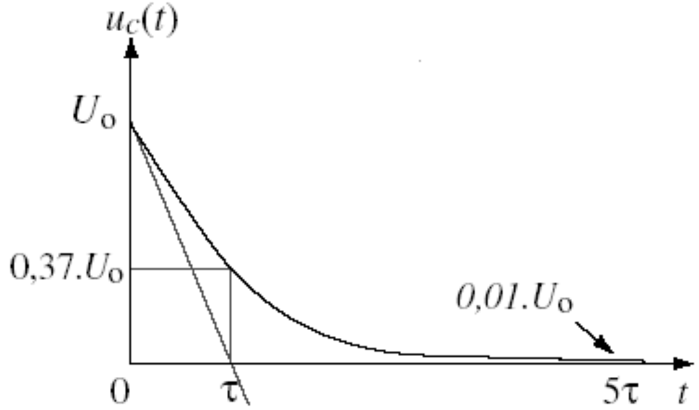

$$\tau . \overset{\circ}{s}(t) + s(t) = 0$$

- Solution général (sans second membre) : $s_g(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}}$
- Solution particulière (avec second membre) : $s_p(t) = 0$
- Solution complet :

$$s(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec pour $\mathrm{t} = 0 \;\; s(t) = U_0 = k$

$$s(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



## Chapitre 3

### INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

1.5 Implications pratiques

Forme général : $s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$

$$\text{pour t} \rightarrow \infty \; s(t) = B = U_{finale}$$

$$\text{pour t=0 s(t)=} A + B = U_{init} \rightarrow A = U_{init} - U_{finale}$$

⇒ Charge :

$$U_{init} = 0$$
$$U_{finale} = H_0$$

⇒ Décharge :

$$U_{init} = H_0$$
$$U_{finale} = 0$$

⇒ On considéra que à $t$ = $5\tau$ le condensateur est complètement chargé ou déchargé : $(1 - e^{-5}) = 0,99$

# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

2. Système linéaire du deuxième ordre

2.1 Forme générale de l'ED (Equation Différentiel)

$$\alpha \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \beta \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

$$\alpha \ et \ \beta = cte$$

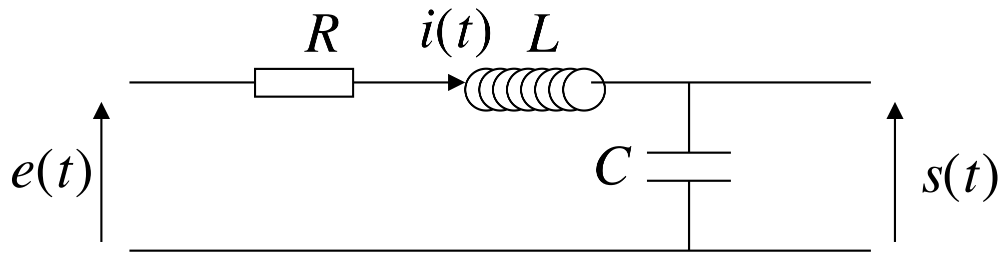
# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

Exemple du circuit RLC série

$$LC\frac{d^2s(t)}{dt^2}+RC\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2m}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)$$




$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\text{pulsation propre du circuit (s}^{-1}\text{)}$$

$$m=\frac{1}{2}RC\omega_0=\text{céfficient d'amortissement du circuit (sans unité)}$$

# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

### 2.2 Résolution

La résolution de cette équation consiste a trouver $s(t) = f(e(t))$

La solution de l'ED est la somme de :

- ⇨ La solution générale de l'équation sans second membre : $s_g(t)$
- ⇨ La solution particulière de l'équation avec second membre : $s_p(t)$

$$s(t) = s_g(t) + s_p(t)$$

+ calcul des constantes d'intégration a partir des conditions initiales

# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

### 2.2.1 Résolution de l'équation générale : $s_g(t)$

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2 s_g(t)}{dt^2}+\frac{2m}{\omega_0}\frac{ds_g(t)}{dt}+s_g(t)=0 \longrightarrow \overset{\circ\circ}{s}_g(t)+2m\omega_0\overset{\circ}{s}_g(t)+\omega_0^2 s_g(t)=0$$

*Equation caractéristique :* $r^2+2m\omega_0 r+\omega_0^2=0 \longrightarrow \Delta' = \omega_0^2(m^2-1)$

$$\Delta' > 0\_(m>1, r_{1,2}\,réelles) : s_g(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$$

$$\Delta' < 0\_(m<1, r_{1,2}\,complexes) : s_g(t) = e^{\alpha t}(K_1\cos\beta t + K_2\sin\beta t)$$

$$\Delta' = 0\_(m=1, r_1 = r_2\,réelles) : s_g(t) = e^{rt}(K_1 t + K_2)$$

# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

2.2.1 Résolution de l'équation particulière : $s_p(t)$

Pour un système linéaire $s_p(t)$ est de la même forme que $e(t)$.

Les signaux usuels en électronique sont de la forme :

- Polynomiale : $e(t) = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + ......+ e_n t^n$
- Sinusoïdale : $e(t) = E_1 Sin(\omega t) + E_1 Sin(\omega t) = E_0 Sin(\omega t + \varphi)$

$alors$

$$s_p(t) = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + ......+ e_n t^n$$

$$s_p(t) = E_0 Sin(\omega t + \varphi)$$

# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

2.3 Cas générale : $\frac{1}{\omega_0^2}\overset{\circ\circ}{s}(t)+\frac{2m}{\omega_0}\overset{\circ}{s}(t)+s(t)=H_0.h(t)$

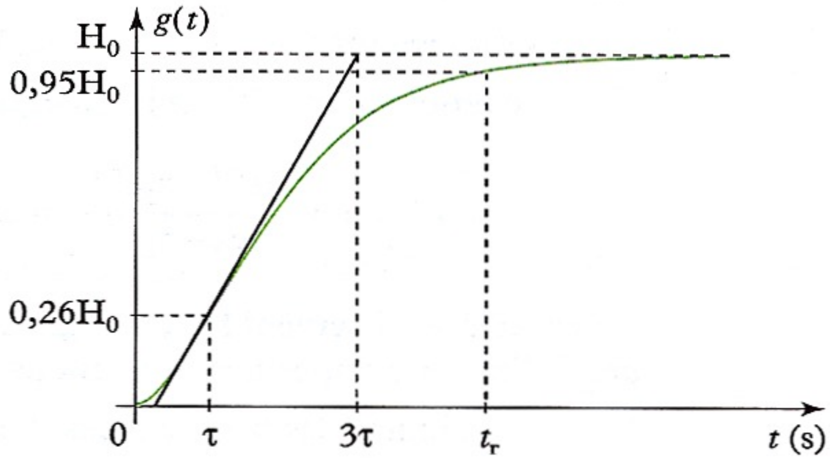
$$si\ s_P(t)=\text{cte} \qquad \text{alors } s_P(t)=H_0$$

⇨ Conditions initiales $s(0)=0, \overset{\circ}{s}(0)=0\ et\ i(0)=0$

### 2.3.1 Régime critique

$$\Delta'=0 \rightarrow m=1 \rightarrow r=-\omega_0 \longrightarrow s(t)=e^{-\omega_0 t}(K_1 t+K_2)+H_0$$

$$s(t)=H_0(1-(1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t})$$




Existence d'un point d'inflecxion à $t=\tau$

2.3.2 Régime pseudo-périodique $(\Delta^{'} < 0 \rightarrow m < 1 \rightarrow r = -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-m^2})$

$$r = \alpha \pm j\beta$$

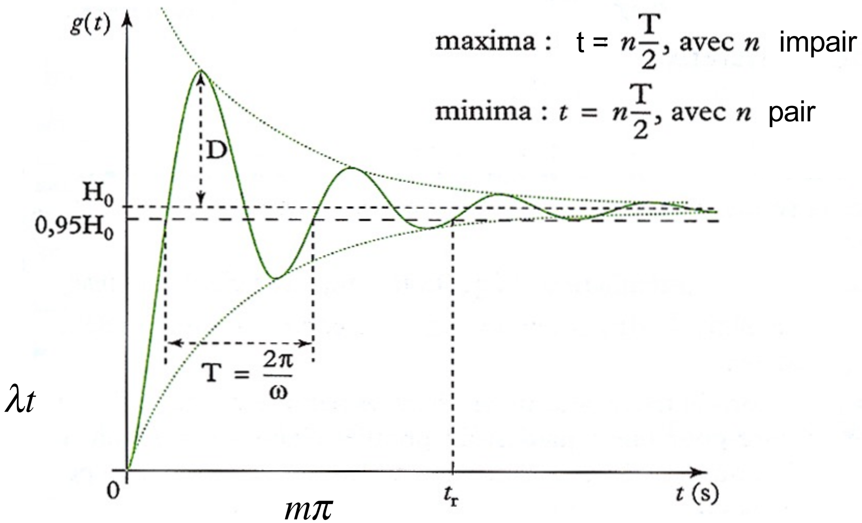
$$s(t) = H_0(1-(\cos(\omega t)+\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\sin(\omega t))e^{-\lambda t})$$

$\lambda = m\omega_0$ : facteur d'amortissement

$\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$ : pseudo-pulsation

$s_{\max}(t) = H_0(1+e^{-\lambda t})$

$\text{amplitude} = H_0(1+e^{-\lambda t}) - H_0 = H_0 e^{-\lambda t}$




$$D = \text{amplitude du premier dépassement} = H_0 e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$$

# Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

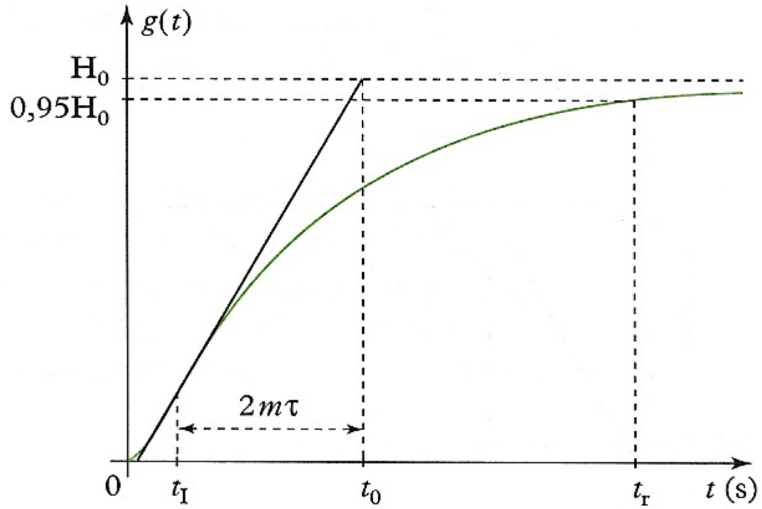
2.3.3 Régime apériodique $(\Delta' > 0 \rightarrow m > 1 \rightarrow r = -\omega_0(m \pm \sqrt{m^2 - 1})$

$$s(t) = H_0\left(1 + \frac{r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}}{r_2 - r_1}\right)$$

Au point d'inflection :

$$t_I = \frac{k}{\omega_0}$$

$$\text{avec k} = \frac{\ln(m + \sqrt{m^2 - 1})}{\sqrt{m^2 - 1}} \leq 1$$

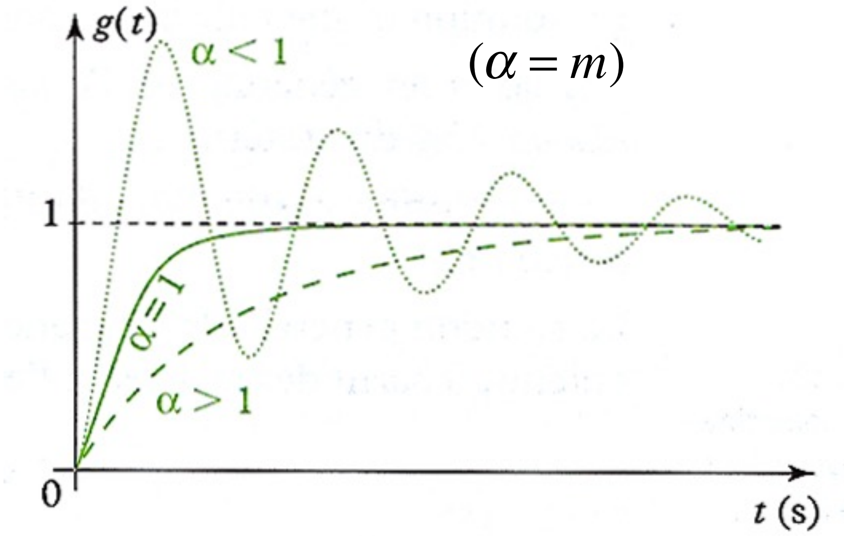


INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

## 2.4 Réponse indicielle

$$\frac{1}{\omega_0^2}\overset{\circ\circ}{s}(t)+\frac{2m}{\omega_0}\overset{\circ}{s}(t)+s(t)=1 \text{ pour } t>0$$

$$s(0)=0 \rightarrow \overset{\circ}{s}(t)=0 \text{ et } i(0)=0$$




$(\alpha = m)$

$m=1 \rightarrow$ Régime critique

$m<1 \rightarrow$ Régime pseudo - périodique

$m>1 \rightarrow$ Régime apériodique

## Chapitre 3

## INTRODUCTION A L'ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

### 2.5 Régime transitoire et régime permanent

⇨ L'étude de la solution particulière conduit à la détermination de ce l'on nomme : le régime permanent (ou réponse forcé)

$$s_p(t) \text{ pour t} \rightarrow \infty$$

*Ce régime dépend directement de l'excitation du système et est atteint théoriquement pour un temps t infini*

⇨ L'étude de la solution générale qui ne dépend pas de l'exitation du système conduit à la détermination de ce l'on nomme :

le régime transitoire (ou réponse libre) $s_g(t) \text{ avec } \lim_{t \to \infty}\left(s_g(t)\right) = 0$

*Le régime transitoire est la manière dont le système passe d'un régime peramnent à un autre*