Impédances opérationnelles

L'outil mathématique de la transformée de Laplace permet une résolution plus aisée des équations différentielles. Le formalisme des impédances opérationnelles permet de mettre en équations le comportement un circuit en régime variable directement dans le domaine de Laplace (voir complément de cours sur la transformée de Laplace). On gagne ainsi deux étapes : l'écriture des équations différentielles dans le domaine temporelle et la conversion des équations différentielles en équations algébriques dans le domaine de Laplace.

Impédances opérationnelles *Définition*

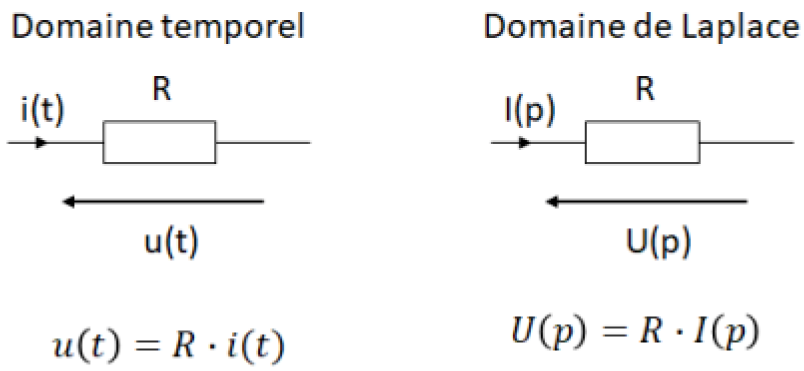
On donne ci-dessous les schémas équivalents avec les impédances opérationnelles pour les trois composants passif usuels. Ce schéma équivalent illustre les grandeurs électriques dans le domaine de Laplace. Cette notation permet une mise en équations directe dans le formalisme de Laplace.

- **Résistance :**

En temporel, on a $u(t) = R \cdot i(t)$. En appliquant la transformée de Laplace, on obtient :

$U(p) = R \cdot I(p)$ où $U(p)$ est la transformée de Laplace de la tension $u(t)$ aux bornes de la résistance et $I(p)$ est la transformée de Laplace du courant $i(t)$ qui circule dans la résistance.

Le schéma équivalent avec l'impédance opérationnelle de la résistance est donné ci-dessous.



- **Condensateur :**

En temporel, on a $i(t) = C \cdot \dfrac{du}{dt}$. En appliquant la transformée de Laplace, on obtient :

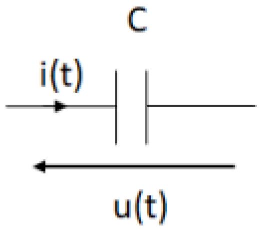
$I(p) = C\left[p \cdot U(p) - u(0^+)\right]$ où $I(p)$est la transformée de Laplace du courant $i(t)$ qui circule dans le condensateur, $U(p)$ est la transformée de Laplace de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur et $u(0^+)$ est la tension initiale à ses bornes.

Soit : $U(p) = \dfrac{I(p)}{Cp} + \dfrac{u(0^+)}{p}$

Les conditions initiales sont modélisées par un échelon de tension d'amplitude $u(0^+)$.

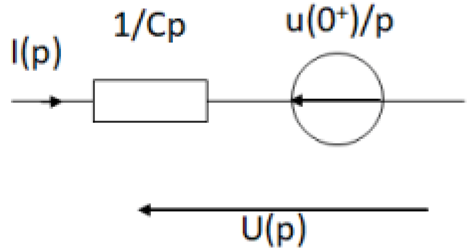
Le schéma équivalent avec l'impédance opérationnelle du condensateur est donné ci-dessous.

Domaine temporel



$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Domaine de Laplace



$$U(p) = \frac{1}{C \cdot p} \cdot I(p) + \frac{u(0^+)}{p}$$

- **Bobine :**

En temporel, on a $u(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$. En appliquant la transformée de Laplace, on obtient :

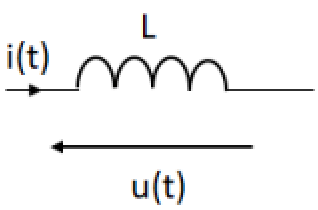
$U(p) = L\left[p \cdot I(p) - i(0^+)\right]$ où $U(p)$ est la transformée de Laplace de la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine, $I(p)$ est la transformée de Laplace du courant $i(t)$ qui circule dans la bobine,et $i(0^+)$ est le courant initial qui la traverse.

Soit : $I(p) = \frac{U(p)}{Lp} + \frac{i(0^+)}{p}$

Les conditions initiales sont modélisées par un échelon de courant d'amplitude $i(0^+)$.

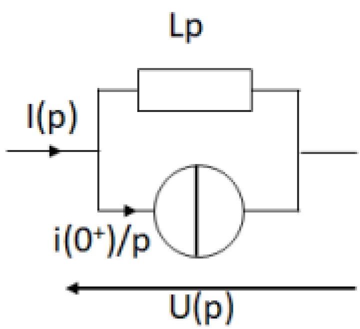
Le schéma équivalent avec l'impédance opérationnelle de la bobine est donné ci-dessous.

Domaine temporel



$$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Domaine de Laplace



$$I(p) = \frac{U(p)}{L \cdot p} + \frac{i(0^+)}{p}$$

Impédance opérationnelle *Définition*

La notion d'impédance a été généralisée pour pouvoir utiliser le formalisme de la transformée de Laplace directement à la résolution des circuits.

Dans le cas où les conditions initiales sont nulles ($u(0^+) = 0$ dans le cas du condensateur et $i(0^+) = 0$ dans le cas de la bobine), on définit **l'impédance opérationnelle** $Z(p)$ d'un composant de la manière suivante :

$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)}$ où $U(p)$ est la transformée de Laplace de la tension $u(t)$ aux bornes du composant et $I(p)$ est la transformée de Laplace du courant $i(t)$ qui circule dans le composant.

Pour les composants passifs déjà étudiés, on a :

- **Résistance :** $Z(p) = R$
- **Condensateur :** $Z(p) = \frac{1}{C \cdot p}$
- **Bobine :** $Z(p) = L \cdot p$

Si les conditions initiales ne sont pas nulles, un terme supplémentaire apparaît :

$$U(p) = Z(p) \cdot I(p) + U_0(p)$$

Fondamental

Les lois et théorèmes généraux présentés précédemment s'appliquent également avec le formalisme de Laplace. En régime variable, en utilisant le formalisme de Laplace et les impédances opérationnelles, on peut écrire :

- les lois de Kirchhoff,
- le théorème de Millman,
- le principe de superposition,
- les équivalences Norton/Thévenin,
- la loi d'Ohm,
- les lois d'associations des dipôles.

Il n'est donc plus nécessaire d'établir l'équation différentielle qui régit le circuit et la résoudre, on peut résoudre le circuit en utilisant directement le formalisme de Laplace.