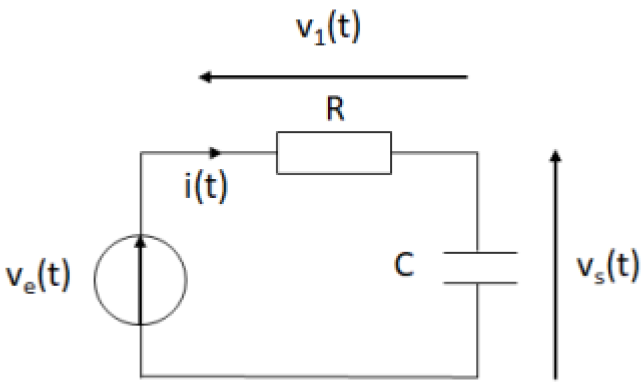
Analyse harmonique du circuit RC

Reprenons l'exemple du circuit RC, dont le schéma est donné dans le figure ci-dessous. Le générateur de tension délivre une tension sinusoïdale : $v_e(t) = v_0 \cos(\omega t)$.

On cherche à :

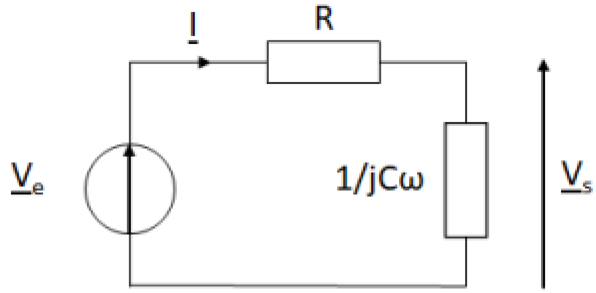
1. établir la fonction de transfert isochrone $\underline{H}$
2. tracer le diagramme de Bode (gain et phase)
3. analyser le diagramme de Bode pour comprendre le comportement harmonique du circuit

Pour le tracé nous prendrons les valeurs suivantes : $R = 1\,k\Omega$ et $C = 1\,\mu F$, la pulsation de coupure vaut alors $\omega_c = \dfrac{1}{RC} = 10^3\ rad/s$



On note $\underline{V_e}$ et $\underline{V_s}$ les amplitudes complexes des tensions d'entrée et de sortie, correspondant respectivement aux tensions réelles $v_e(t)$ et $v_s(t)$.

Le schéma équivalent avec la notation complexe est illustré ci-dessous :



1. A partir de ce schéma, nous avons déjà déterminé la relation entre $\underline{V_s}$ et $\underline{V_e}$:

$$\underline{V_s} = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{V_e}$$

Nous pouvons désormais établir la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

On obtient une **fonction de transfert du 1er ordre** car on a polynôme d'ordre 1 (en ω) au dénominateur.

2. Pour tracer le diagramme de Bode, il faut calculer le gain en dB de la fonction de transfert et son argument.

2.a. Diagramme du gain

$$G_{dB} = 20\log[|\underline{H}|] = 20\log\left[\left|\frac{1}{1+jRC\omega}\right|\right]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20\log\left[\frac{|1|}{|1+jRC\omega|}\right]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20\log\left[\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\right]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 10\log\left[\frac{1}{1+(RC\omega)^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = -10\log\left[1+(RC\omega)^2\right]$$

Pour tracer G_{dB} en fonction de ω, il faut faire une étude des limites :

- lorsque ω tend vers 0 :

  $$\lim_{\omega\to 0} G_{dB} = \lim_{\omega\to 0} -10\log\left[1+(RC\omega)^2\right] = -10\log(1) = 0\,dB$$

  La première asymptote quand $\omega \to 0$ vaut 0 dB avec une pente nulle.

- lorsque ω tend vers $+\infty$:

  $$\lim_{\omega\to +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega\to +\infty} -10\log\left[1+(RC\omega)^2\right] = \lim_{\omega\to +\infty} -10\log\left[(RC\omega)^2\right] = \lim_{\omega\to +\infty} -20\log[R$$

  G_{dB} tend vers $-\infty$ quand $\omega \to +\infty$ avec une pente de -20 dB/décade.

  La deuxième asymptote quand $\omega \to +\infty$ est donc une droite de pente -20 dB/décade.

- On détermine également la pulsation de coupure à -3 dB, notée ω_c :

  $$G_{dB}(\omega_c) = G_{max} - 3dB = 0 - 3\,dB = -3\,dB$$

  $$\Leftrightarrow G_{dB}(\omega_c) = -10\log\left[1+(RC\omega_c)^2\right] = -3\,dB$$

  Pour simplifier les calculs, on fait l'approximation suivante : $-3\,dB \approx -10\log(2)\,dB$

  $$\Leftrightarrow G_{dB}(\omega_c) = -10\log\left[1+(RC\omega_c)^2\right] = -10\log(2)$$

  $$\Leftrightarrow 1+(RC\omega_c)^2 = 2$$

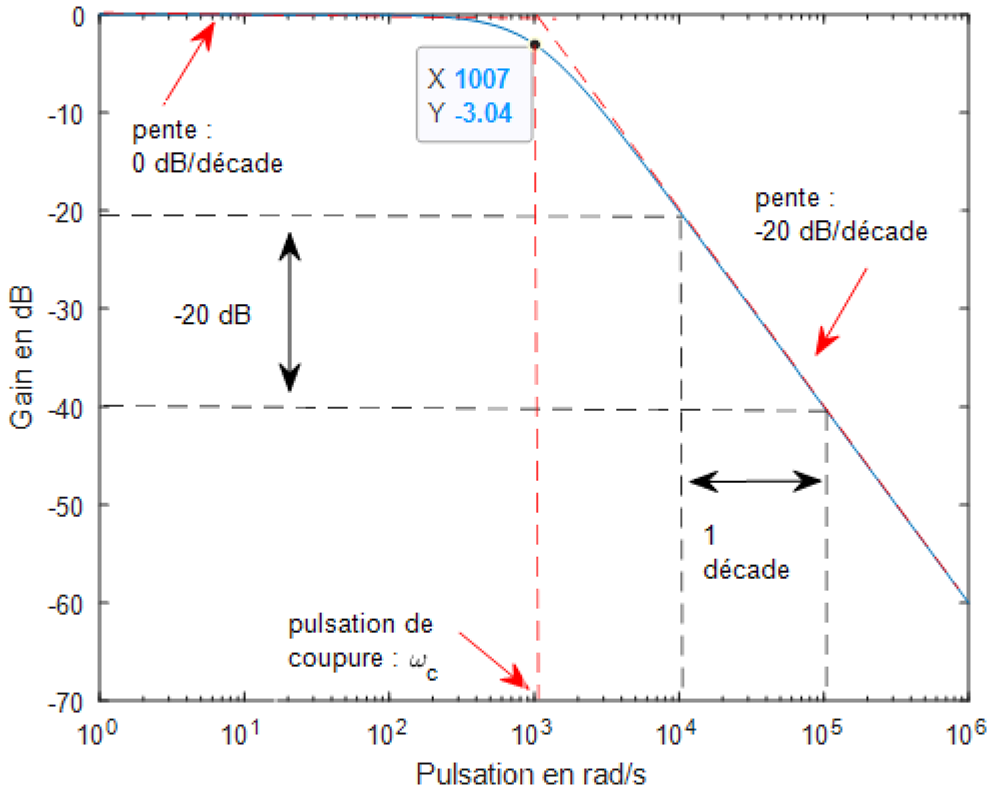
  $$\Leftrightarrow (RC\omega_c)^2 = 1$$

  $\Rightarrow RC\omega_c = 1$ car ω_c est une pulsation (nombre positif)

  $$\Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$$

  La fréquence de coupure à -3 dB est donc : $f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi RC}$

Nous pouvons à présent tracer le diagramme de Bode du gain (figure ci-dessous).



2.b. Diagramme de phase

$$\varphi = \arg(\underline{H})$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arg\left(\frac{1}{1 + jRC\omega}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = -\arg(1 + jRC\omega)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = -\arctan(RC\omega)$$

Pour tracer φ en fonction de ω, il faut faire une étude des limites :

- lorsque ω tend vers 0 :

  $$\Leftrightarrow \lim_{\omega \to 0} \varphi = \lim_{\omega \to 0} -\arctan(RC\omega) = -\arctan(0) = 0\,rad = 0°$$

- lorsque ω tend vers $+\infty$:

  $$\Leftrightarrow \lim_{\omega \to +\infty} \varphi = \lim_{\omega \to +\infty} -\arctan(RC\omega) = -\arctan(+\infty) = -\frac{\pi}{2}\,rad = -90°$$

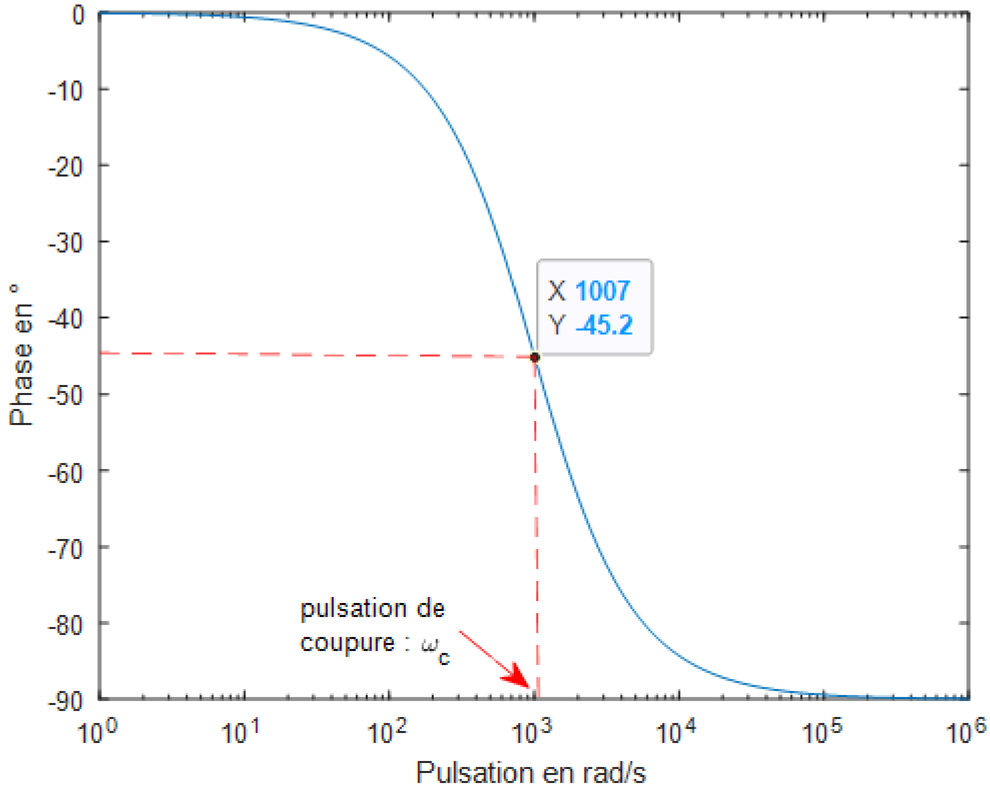
- A la pulsation de coupure :

  $$\varphi(\omega_c) = -\arctan(RC\omega_c)$$

  On remplace l'expression de ω_c trouvée précédemment :

  $$\Leftrightarrow \varphi(\omega_c) = -\arctan\left(RC \cdot \frac{1}{RC}\right) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}\,rad = -45°$$

  Nous pouvons à présent tracer le diagramme de Bode de phase (figure ci-dessous à droite) :



3. Analyse du comportement harmonique du circuit

On note les tensions réelles : $v_e(t) = V_{e,0}\cos(\omega t)$ et $v_s(t) = V_{s,0}\cos(\omega t + \varphi)$

- Une lecture visuelle du diagramme de Bode du gain permet de déterminer l'atténuation en dB entre les amplitudes du signal de sortie et de signal d'entrée : $G_{dB} = 20\log\left(\frac{V_{s,0}}{V_{e,0}}\right)$ à la pulsation ω

  On détermine aisément l'amplitude du signal de sortie V_s.

- Une lecture visuelle du diagramme de Bode de phase permet de déterminer le déphasage φ du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

Le diagramme de Bode permet donc de prédire le comportement harmonique de n'importe quel circuit.

Simulation

Le code Octave qui permet de tracer deux courbes est donnée ci-dessous.

```
>> R=1e3; C=1e-6;
>> wc=1/(R*C);
>> w=logspace(0,6,1000); %définit un vecteur pulsation contenant des valeurs réparties régulié
>> H=1./(1+j*R*C*w); % définition de la fonction de transfert isochrone (complexe)
>> GdB= 20*log10(abs(H)); % calcul du gain en dB. log10 est utilisé pour calculer le log en ba
>> Phi=phase(H); % calcul de la phase en rad. phase permet de calculer l'argument d'un nombre

>> % Tracé du diagramme de Bode
>> figure(1)
>> semilogx(w,GdB) %tracé de GdB en fonction de w avec une échelle semilogarithmique pour l'ax
>> xlabel('Pulsation en rad/s')
>> ylabel('Gain en dB')

>> figure(2)
```

```
>> semilogx(w,Phi*180/pi) %tracé de Phi en fonction de w avec une échelle semilogarithmique po
>> xlabel('Pulsation en rad/s')
```