Résolution d'équations différentielles d'ordre 2

Méthode

On considère une équation différentielle de la forme :

$a \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} + b \cdot \dfrac{dy}{dt} + c \cdot y(t) = e(t)$ où a, b et c sont des constantes et $e(t)$ est une fonction qui dépend du temps.

1) On commence par résoudre l'équation homogène (sans second membre) : On note $y_h(t)$ la solution de l'équation homogène.

Pour cela, on définit l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène :

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

La solution de l'équation homogène dépend du discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$) de l'équation caractéristique.

- Si $\Delta > 0$, les deux racines r_1 et r_2 de l'équation sont réelles et la solution de l'équation différentielle homogène est :

  $$y_h(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)$$

  avec A et B des constantes réelles, $r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, les deux racines r_1 et r_2 de l'équation sont complexes et la solution de l'équation différentielle homogène est :

  $$y_h(t) = A\exp(r_0 t)\cos(\phi t) + B\exp(r_0 t)\sin(\phi t)$$

  avec A et B des constantes réelles, $r_0 = \dfrac{-b}{2a}$, $\phi = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

  où r_0 et ϕ sont respectivement la partie réelle et la valeur absolue de la partie imaginaire de r_1 et r_2 : $r_1 = \dfrac{-b - j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b + j\sqrt{-\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta = 0$, il y a une racine unique r_0 et la solution de l'équation différentielle homogène est :

  $$y_h(t) = (A + B \cdot t)\exp(r_0 t)$$

  avec A et B des constantes réelles et $r_0 = \dfrac{-b}{2a}$

Note : La forme de la solution de l'équation homogène correspond au régime transitoire. Elle dépend du système et non des conditions initiales.

2) Il faut ensuite trouver une solution particulière de l'équation différentielle complète.

En général, cette solution particulière est de la même forme que le seconde membre. On note $y_p(t)$ la solution particulière.

Le tableau ci-dessous donne la forme des solutions particulières en fonction de la forme du second membre pour les fonctions les plus couramment utilisées.

Forme du second membre	Forme de la solution particulière
constante	constante
polynôme de degré n	polynôme de degré n
$\exp(\lambda t) \cdot f(t)$	$\exp(\lambda t) \cdot g(t)$
$M \cdot \sin(\omega t) + N \cdot \cos(\omega t)$	$P \cdot \sin(\omega t) + Q \cdot \cos(\omega t)$

Note : La solution particulière correspond au régime permanent. Elle dépend de l'excitation du système.

Il faut ensuite déterminer les différentes constantes en réinjectant la solution particulière dans l'équation différentielle complète.

3) La solution de l'équation complète est la somme des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Pour finir, on détermine les constantes issues de l'équation homogène en se servant des conditions initiales du problème.

Simulation

Afin de vérifier vos calculs, il est possible de résoudre une équation différentielle à l'aide d'Octave.

Le script suivant donne la syntaxe pour résoudre l'équation différentielle d'ordre 2 suivante avec deux conditions initiales.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = a^2 * y(t) \\ \\ y(0) = b \\ \\ \dfrac{dy}{dt}(0) = 1 \end{cases}$$

```
>> syms y(t) a b
>> eqn= diff(y,t,2)== a^2*y;
>> Dy=diff(y,t);
>> cond=[y(0)== b, Dy(0)== 1];
>> sol=dsolve(eqn,cond)

sol=

(exp(a*t)*(a*b + 1))/(2*a) + (exp(-a*t)*(a*b - 1))/(2*a)

```