LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Sommaire

Introduction

La décomposition en éléments simples est une méthode de calcul utilisée dans de nombreux chapitres. C'est une technique qui permet de séparer une fraction en une somme de fractions. Cela permet de simplifier des calculs, notamment d'intégrales comme nous le verrons dans les exemples d'application.
La décomposition en éléments simples sera parfois abrégée DES dans la suite du cours.
Par exemple , la DES de $1/(x^2-1)$ est :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

Il est fortement conseillé de maîtriser le chapitre sur les polynômes avant d'étudier ce qui suit (ou en tout cas les grands principes des polynômes).

Principe général

Haut de page

La décomposition en éléments n'est valable que pour les fractions rationnelles, c'est à dire composées d'un polynôme au numérateur et d'un autre polynôme au dénominateur (et rien d'autre !). Les coefficients peuvent être éventuellement complexes mais ils sont la plupart du temps réels, ce pourquoi tout le cours sera fait avec des coefficients réels.

Pour pouvoir faire la DES, **il faut que le degré du polynôme du numérateur soit strictement inférieur à celui du dénominateur**.
Si ce n'est pas le cas, il faut d'abord faire la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. Cette étape sera détaillée dans la partie suivante donc nous allons d'abord voir le cas où la condition est vérifiée.

On cherche donc la DES d'une fraction que l'on notera A(x)/B(x), avec deg(A) < deg(B). La 1ère étape consiste à **factoriser au maximum le dénominateur** B(x). Cette étape est détaillée dans un autre chapitre.
A l'issue de cette étape, le dénominateur sera uniquement composé de produits de degré 1 ou 2, éventuellement à une certaine puissance.
Par exemple : $(x+6)^4(x-5)^2(x+7)^3(x^2-5x+2)^3$
Remarque : Les coefficients dominants de chaque facteur sont 1 pour plus de simplicité, si ce n'est pas le cas on peut toujours factoriser pour le mettre devant. Dans la suite, tous les facteurs seront de coefficient dominant 1 pour plus de simplicité.

Les polynômes de degré 2 pourraient se factoriser avec des complexes mais il ne faut pas le faire !

Une fois le dénominateur factorisé, le principe sera différent pour les facteurs de degré 1 et ceux de degré 2.

Pour les facteurs de degré 1 :
Si l'on note $(x+a)^n$ un des facteurs de degré 1 (avec n entier, la puissance de ce facteur), celui-ci se décomposera en :

$$\frac{a_1}{(x+a)^1}+\frac{a_2}{(x+a)^2}+\frac{a_3}{(x+a)^3}+\frac{a_4}{(x+a)^4}+\ldots+\frac{a_n}{(x+a)^n}$$

Les réels $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ sont des réels qu'il faudra déterminer (nous verrons plus loin comment).
On peut évidemment les appeler comme on veut, par exemple a, b, c, d, e… (c'est d'ailleurs ce que l'on fera concrètement dans les exercices).

Dans notre exemple précédent, on avait $(x+6)^4$, il se décomposera donc en :

$$\frac{a_1}{(x+6)^1}+\frac{a_2}{(x+6)^2}+\frac{a_3}{(x+6)^3}+\frac{a_4}{(x+6)^4}$$

et $(x-5)^2$ se décomposera en :

$$\frac{b_1}{(x-5)^1} + \frac{b_2}{(x-5)^2}$$

(les coefficients ont été notés b_1 et b_2 car ils seront évidemment différents de ceux de $(x + 2)^4$).

Pour les facteurs de degré 2 :
C'est presque le même principe, sauf qu'à la place d'avoir des réels au numérateur de chaque fraction, il y a des polynômes de degré 1.
Ainsi, $(x^2 - 5x + 2)^3$ se décomposera en :

$$\frac{m_1x+p_1}{(x^2-5x+2)^1} + \frac{m_2x+p_2}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{m_3x+p_3}{(x^2-5x+2)^3}$$

Evidemment il faudra déterminer les réels, m_1, m_2, m_3, et p_1, p_2, p_3.

De manière générale, les facteurs de degré 2 sont de la forme $(x^2 + bx + c)n$ (on rappelle que l'on a pris comme coefficient dominant 1 pour tous les facteurs pour plus de simplicité).
Ils se décomposeront en :

$$\frac{m_1x+p_1}{(x^2+bx+c)^1} + \frac{m_2x+p_2}{(x^2+bx+c)^2} + \frac{m_3x+p_3}{(x^2+bx+c)^3} + \dots \frac{m_nx+p_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

Comme tu le vois le principe est quasiment le même !
Il faudra bien sûr faire plusieurs exercices d'application pour bien maîtriser la DES.

Reste à voir comment calculer les coefficients, mais voyons d'abord comment faire si le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur.

Division euclidienne

Haut de page

Quand on cherche la DES d'une fraction A(x)/B(x), la méthode précédente ne fonctionne que si deg(A) < deg(B). Si ce n'est pas le cas, il faut d'abord effectuer la **division euclidienne de A par B.**.
Cette méthode est développée dans d'autres chapitres donc nous ne reviendrons pas dessus.
A la fin, on aura 2 polynômes Q et R tels que A = BQ + R avec deg(R) < deg(B). On a donc :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

Q(x) est ce que l'on appelle **la partie entière.**
Concernant la fraction R(x)/B(x), par hypothèse de la division euclidienne, deg(R) < deg(B) : on peut donc appliquer la méthode précédente pour calculer la DES de R(x)/B(x) ! **La DES de A(x)/B(x) sera donc égale à Q(x) + la DES de R(x)/B(x).**

—
Ainsi, si deg(A) ≥ deg(B), il suffit de rajouter une étape (division euclidienne de A par B) avant d'appliquer la méthode précédente à R(x)/B(x).
—

On récapitule les différentes étapes vues jusqu'à présent :
– faire la division euclidienne de A(x) par B(x) (uniquement si si deg(A) ≥ deg(B))
– factoriser au maximum le dénominateur B(x)
– séparer la fraction en 1 somme de plusieurs fractions
– calculer les coefficients des fractions

C'est cette dernière étape que nous allons voir désormais !

Calcul des coefficients

Haut de page

Le calcul des coefficients peut se révéler la partie la plus compliquée, ou la plus longue, du processus de calcul de la DES d'une fonction.
Le but va être de choisir la plus efficace parmi 4 méthodes différentes que nous allons détailler.
Dans tous les exemples que nous prendrons, le degré du numérateur sera strictement inférieur à celui du dénominateur afin de ne pas avoir à faire de division euclidienne, qui n'a aucun intérêt dans cette partie.

1ère méthode : par identification
Cette technique est la plus simple, elle est bien adaptée pour des calculs simples avec peu de coefficients.
L'idée est de remettre les différentes fractions au même dénominateur et d'identifier les coefficients.
Exemple : on cherche la DES de :

$$\frac{5x-3}{x^2-4}$$

On factorise d'abord le dénominateur :

$$\frac{5x-3}{(x-2)(x+2)}$$

Puis on applique le processus vu précédemment :

$$\frac{5x-3}{(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

On remet maintenant les 2 fractions de droite sur le même dénominateur :

$$\frac{5x-3}{(x-2)(x+2)} = \frac{a(x+2)}{x-2} + \frac{b(x-2)}{x+2}$$

$$\frac{5x-3}{(x-2)(x+2)} = \frac{ax+2a}{(x-2)(x+2)} + \frac{bx-2b}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{5x-3}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(a+b)+2a-2b}{(x-2)(x+2)}$$

–

Bien noter qu'il faut toujours regrouper les mêmes puissances de x au numérateur : les constantes ensemble, les x ensemble, les x^2 ensemble, les x^3 ensemble etc…

–

Il ne reste plus qu'à identifier les numérateurs, puisque les dénominateurs sont les mêmes.
On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-2b=-3 \end{cases}$$

Une résolution simple donne a = 7/4 et b = 13/4

$$\frac{5x-3}{(x-2)(x+2)} = \frac{7}{4} \times \frac{1}{x-2} + \frac{13}{4} \times \frac{1}{x+2}$$

Et voilà !
Cette technique est simple mais parfois un peu longue, surtout s'il y a beaucoup de coefficients, nous allons donc voir d'autres techniques plus rapides.

2ème méthode : multiplier par un des facteurs

Si on reprend l'exemple précédent, on a :

$$\frac{5x-3}{(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

Pour trouver le coefficient a, on va multiplier l'égalité par (x – 2) puis remplacer x par 2 :

$$\frac{5x-3}{x+2} = a + \frac{b(x-2)}{x+2}$$

On remplace x par 2 :

$$\frac{5\times2-3}{2+2} = a + \frac{b(2-2)}{2+2}$$

$$\frac{7}{4} = a$$

Et voilà, tout simplement !

En fait, comme x – 2 vaut 0 quand x vaut 2, la méthode précédente permet d'annuler tous les termes sauf ceux ayant x – 2 au dénominateur, c'est-à-dire la fraction de base et le coefficient a.
De même, pour trouver b, on multiplie par x + 2 et on remplace x par -2 (car x + 2 = 0 pour x = -2), ce qui donne :

$$\frac{5x-3}{(x-2)} = \frac{a(x+2)}{x-2} + b$$

$$\frac{5\times(-2)-3}{-2-2} = \frac{a(-2+2)}{-2-2} + b$$

$$\frac{-13}{-4} = b$$

$$\frac{13}{4} = b$$

On retrouve donc les valeurs de a et b trouvées avec la 1ère méthode (heureusement ! 😁

Cependant, cette technique a une limite.
En effet, si un des facteurs est à une certaine puissance, on ne pourra multiplier que par la plus grosse puissance.
Exemple, on cherche la DES de :

$$\frac{2x-5}{(x-6)^3(x-9)}$$

Cela donne :

$$\frac{2x-5}{(x-6)^3(x-9)} = \frac{a}{(x-6)} + \frac{b}{(x-6)^2} + \frac{c}{(x-6)^3} + \frac{d}{(x-9)}$$

Les coefficients a et b ne pourront pas être trouvés avec la 2ème méthode
En effet, si on multiplie par (x – 6), on obtient :

$$\frac{2x-5}{(x-6)^2(x-9)} = a + \frac{b}{x-6} + \frac{c}{(x-6)^2} + \frac{d}{(x-9)}$$

Et là on ne peut pas remplacer x par 6, sinon on divise par 0…
Idem si on multiplie par $(x - 6)^2$

En revanche, si on multiplie par $(x - 6)^3$, on pourra trouver c, car cela donne :

$$\frac{2x-5}{x-9} = a(x-6)^2 + b(x-6) + c + \frac{d(x-6)^3}{(x-9)}$$

En remplaçant x par 6, on trouve :

$$\frac{7}{-3} = a(6-6)^2 + b(6-6) + c + \frac{d(6-6)^3}{(x-9)}$$

$$-\frac{7}{3} = c$$

Ainsi, si on a $(x + a)^n$ au dénominateur de la fonction de base, cette technique ne fonctionne que pour calculer le coefficient de $(x + a)^n$, mais celui de $(x + a)^{n-1}$, $(x + a)^{n-2}$ etc…

Enfin, cette technique ne fonctionne pas non plus pour calculer les coefficients correspondant au dénominateur de degré 2.
En effet, imaginons que l'on cherche la DES de :

$$\frac{2x-7}{(x^2-x+3)(x-6)}$$

$x^2 - x + 3$ n'ayant pas de racine, la DES sera de la forme :

$$\frac{2x–7}{(x^2–x+3)(x–6)} = \frac{ax+b}{x^2–x+3} + \frac{c}{x–6}$$

a et b ne pourront pas être trouvés avec la 2ème méthode. En effet, par quoi multiplier l'égalité, puisqu'il n'y a pas de racine pour $x^2 – x + 3$!
Pour cela il faudra utiliser d'autres méthodes

–

En définitive, cette 2ème méthode ne peut être appliquée que pour les dénominateurs de degré 1 (du style (x + a)) et avec la plus grande puissance du (x + a).

–

Pour trouver les autres coefficients, on pourra utiliser la 3ème méthode que nous allons voir.

3ème méthode : multiplier par x et faire la limite en +∞

Il s'agit cette fois-ci de multiplier par x l'égalité, et de faire la limite en +∞.
Exemple : on cherche la DES de :

$$\frac{2x–7}{(x^2–x+3)^2(x–6)^2}$$

Cela donne :

$$\frac{2x–7}{(x^2–x+3)(x–6)} = \frac{ax+b}{x^2–x+3} + \frac{cx+d}{(x^2–x+3)^2} + \frac{e}{x–6} + \frac{f}{(x–6)^2}$$

Comme on a l'a vu précédemment, a et b ne peuvent être trouvés avec la 2ème méthode, on va donc faire la 3ème.
On multiplie par x :

$$\frac{2x^2–7x}{(x^2–x+3)(x–6)} = \frac{ax^2+bx}{x^2–x+3} + \frac{cx^2+dx}{(x^2–x+3)^2} + \frac{ex}{x–6} + \frac{fx}{(x–6)^2}$$

On fait maintenant tendre x vers vers +∞ **en appliquant le théorème du plus haut degré.**
Ce théorème ayant été détaillé dans le chapitre sur les limites et dans les exercices, on donnera directement le résultat sans détailler le calcul, et on trouve au final :

$$0 = a + e$$

On trouve ainsi une égalité avec le coefficient a, il suffit donc de calculer e et on aura a (puisque a = -e)

En fait, quand on multiplie par x et que l'on fait tendre vers +∞, tous les termes dont le dénominateur est à une puissance supérieure ou égale à 2 vont s'annuler : c'est le cas dans notre exemple pour $(cx + d)/(x^2 - x + 3)^2$ et $e/(x - 6)^2$.
Par ailleurs, toutes les constantes au numérateur des polynômes de degré 1 correspondant au dénominateur de degré 2 vont s'annuler aussi, c'est le cas du b de $(ax + b)/(x^2 - x + 3)$: cela est dû au fait que b est négligeable devant ax en +∞.
En revanche, le coefficient a va rester, de même que les coefficients des termes du style constante/(x + a), comme c'est le cas pour e/(x – 6).

On obtient ainsi une égalité entre certains coefficients.

Cette méthode est assez rapide à mettre en oeuvre. Cependant, cette méthode ne permet de trouver qu'une seule égalité et ne permet donc pas de trouver tous les coefficients, ce pourquoi il faudra la combiner avec d'autres méthodes. Voyons la dernière.

4ème méthode : évaluer l'égalité en un point

Il s'agit tout simplement de remplacer x par une valeur dans l'égalité, ce qui donne une relation entre les différents coefficients.
Cette méthode fonctionne à tous les coups et est très simple à faire. Cependant, nous allons voir qu'elle peut donner des égalités complexes et il faut donc bien choisir par quelle valeur on remplace x.

Reprenons un exemple simple vu précédemment :

$$\frac{5x-3}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

On va remplacer par une valeur quelconque, par exemple 1, ce qui donne :

$$\frac{5-3}{1-4} = \frac{a}{1-2} + \frac{b}{1+2}$$

$$\frac{2}{-3} = -a + \frac{b}{3}$$

Cela nous donne une première relation, mais comme il y a 2 inconnues (a et b) il faut une 2ème égalité, on recommence en remplaçant x par une autre valeur, par exemple 0, ce qui donne :

$$\frac{-3}{0-4} = \frac{a}{0-2} + \frac{b}{0+2}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{a}{-2} + \frac{b}{2}$$

On a ainsi une 2ème équation : on peut donc résoudre le système et trouver a et b.
Sauf qu'ici on a trouvé des équations peu intéressantes car il y a des fractions… c'est tout à fait faisable mais moins pratique que ce que l'on avait trouvé avec la 1ère méthode, et donc tu peux faire des erreurs de calcul…

Cette méthode est donc à utiliser avec parcimonie, elle est complémentaire des autres et permet de trouver des équations supplémentaires si les méthodes précédentes ne suffisent pas.

—
Attention, on ne remplace évidemment pas x par une valeur qui annulerait le dénominateur, car on ne divise pas par 0…
Dans notre exemple, on ne pouvait pas remplacer x par 2 ou -2.
De manière générale, remplacer x par 0 et 1 est une bonne idée car les calculs sont simples à réaliser, ce qui diminue la probabilité de se tromper…
—

En résumé :
La 1ère méthode peut être utilisée seule, mais peut se révéler assez longue, car il faudra résoudre un système

La 2ème méthode peut parfois se suffire à elle-même mais uniquement si on a des polynômes de degré 1 au dénominateur, chacun à la puissance 1. Si ce n'est pas le cas, cette méthode ne permettra pas de trouver tous les coefficients.

La 3ème méthode ne donne qu'une seule égalité, elle est donc complémentaire des autres techniques.

La 4ème méthode donne autant d'égalité que l'on veut mais souvent avec des fractions, elle peut suffire pour trouver une DES mais est souvent utilisée en complément des autres.

En combinant intelligemment toutes ces méthodes, tu réussiras à gagner du temps dans le calcul des décompositions en éléments simples.
N'hésite pas à vérifier à la fin que tu as trouvé le bon résultat en remettant la DES au même dénominateur et voir si tu retrouves la fraction initiale 😉

Voyons maintenant quelques exemples d'application avant de passer aux exercices en vidéo.

Exemple d'application

Haut de page

Nous allons d'abord voir un exemple simple, avant de passer à un exemple plus complet faisant intervenir plusieurs méthodes.

1er exemple : cherchons la DES de :

$$\frac{2x^3+3x^2–44x–97}{x^2–3x–10}$$

On remarque tout d'abord que le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur : il faut donc commencer par la division euclidienne de $2x^3 + 3x^2 – 44x – 97$ par $x^2 – 3x – 10$.
On trouve après calcul que : $2x^3 + 3x^2 – 44x – 97 = (2x + 9)(x^2 – 3x – 10) + 3x – 7$

On peut donc écrire (après division par $x^2 – 3x – 10$) que :

$$\frac{2x^3+3x^2–44x–97}{x^2–3x–10} = 2x + 9 + \frac{3x–7}{x^2–3x–10}$$

Il faut donc maintenant calculer la DES de

$$\frac{3x–7}{x^2–3x–10}$$

Le degré du numérateur étant inférieur à celui du dénominateur, on peut passer à la 2ème étape : factoriser le dénominateur.
On trouve que : $x^2 – 3x – 10 = (x – 5)(x + 2)$
On écrit donc que :

$$\frac{3x–7}{x^2–3x–10} = \frac{3x–7}{(x–5)(x+2)}$$

D'où :

$$\frac{3x–7}{(x–5)(x+2)} = \frac{a}{x–5} + \frac{b}{x+2}$$

Le plus simple pour trouver a est de multiplier par (x – 5) et de remplacer x par 5 :

$$\frac{3x–7}{x+2} = a + \frac{b(x–5)}{x+2}$$

$$\frac{3\times5–7}{5+2} = a + \frac{b(5–5)}{5+2}$$

$$\frac{8}{7} = a$$

De même pour trouver b, on multiplie par (x + 2) et on remplace x par -2 :

$$\frac{3x-7}{x-5} = \frac{a(x+2)}{x-5} + b$$

$$\frac{3\times(-2)-7}{-2-5} = \frac{a(-2+2)}{-2-5} + b$$

$$\frac{13}{7} = b$$

On a donc :

$$\frac{3x-7}{x^2-3x-10} = \frac{8}{7}\left(\frac{1}{x-5}\right) + \frac{13}{7}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

Il ne faut pas oublier maintenant de reprendre la fonction de départ :

$$\frac{2x^3+3x^2-44x-97}{x^2-3x-10} = 2x + 9 + \frac{8}{7}\left(\frac{1}{x-5}\right) + \frac{13}{7}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

Quel est l'intérêt d'une telle DES ?
L'application la plus courante est le calcul de primitive. En effet, si on demande de donner une primitive de la fonction de base (que l'on va appeler f(x)), il suffit de primitiver la DES, ce qui est beaucoup plus simple !
On a ainsi :

$$f(x) = \frac{2x^3+3x^2-44x-97}{x^2-3x-10} = 2x + 9 + \frac{8}{7}\left(\frac{1}{x-5}\right) + \frac{13}{7}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

Une primitive de f est :

$$F(x) = x^2 + 9x + \frac{8}{7}ln(|x-5|) + \frac{13}{7}ln(|x+2|)$$

<u>2ème exemple</u> : cherchons la DES de :

$$\frac{2x+5}{(x^2-2x+3)(x-3)^2}$$

Le numérateur est de degré inférieur à celui du dénominateur donc pas besoin de faire de division euclidienne.
Il faut ensuite factoriser au maximum le dénominateur : c'est déjà le cas, car $x^2 - 2x + 3$ n'a pas de racine réelle.
On peut donc écrire :

$$\frac{2x+5}{(x^2-2x+3)(x-3)^2} = \frac{ax+b}{x^2-2x+3} + \frac{c}{x-3} + \frac{d}{(x-3)^2}$$

Pour trouver d, on utilise la 2ème méthode : on multiplie par (x – 3)^2 et en remplace x par 3 :

$$\frac{2x+5}{x^2-2x+3} = \frac{(ax+b)(x-3)^2}{x^2-2x+3} + c(x-3) + d$$

$$\frac{6+5}{9-6+3} = \frac{(3a+b)(3-3)^2}{9-6+3} + c(3-3) + d$$

$$\frac{11}{6} = d$$

On peut ensuite utiliser la 3ème méthode : on multiplie par x et on fait la limite en +∞ :

$$\frac{2x^2+5x}{(x^2-2x+3)(x-3)^2} = \frac{ax^2+bx}{x^2-2x+3} + \frac{cx}{x-3} + \frac{dx}{(x-3)^2}$$

En faisant tendre x vers +∞ et en utilisant le théorème du plus haut degré, on trouve :

$$0 = a + c$$

On a désormais d, et une relation entre a et c.
Il y a encore 3 inconnues (a, b et c) mais nous n'avons qu'une seule équation entre elles : a + c = 0.
Il en faut encore 2 autres, que l'on trouve avec la 4ème méthode.
On remplace x par 0 par exemple (car le calcul est plus simple), ce qui donne :

$$\frac{5}{3(-3)^2} = \frac{b}{3} + \frac{c}{-3} + \frac{d}{(-3)^2}$$

Soit :

$$\frac{5}{27} = \frac{b}{3} - \frac{c}{3} + \frac{d}{9}$$

Pour se débarasser des fractions, on multiplie tout par 27 :

$$5 = 9b - 9c + 3d$$

Remarque : on pourrait remplacer d mais cela n'a aucun intérêt ici.

On remplace encore x par une autre valeur pour trouver la 3ème équation, par exemple 1 (encore une fois car le calcul est plus simple) :

$$\frac{2+5}{(1-2+3)(1-3)^2} = \frac{a+b}{1-2+3} + \frac{c}{1-3} + \frac{d}{(1-3)^2}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{a+b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{d}{4}$$

On multiplie par 8 pour se débarrasser des fractions :

$$7 = 4a + 4b - 4c + 2d$$

On doit maintenant résoudre le système :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 5 = 9b - 9c + 3d \\ 7 = 4a + 4b - 4c + 2d \end{cases}$$

Remarque : d n'est pas une inconnue car on l'a calculé auparavant.

Une fois le système résolu (nous le ferons pas ici), il n'y a plus qu'à remplacer !

Tu auras remarqué que nous n'avons pas utilisé la 1ère méthode, car ici les calculs auraient été trop longs, et on serait arrivé également à un système à résoudre, d'où le choix d'utiliser les autres méthodes.

Exercices

Haut de page

Pour accéder aux exercices en vidéo disponibles sur ce chapitre, clique ici !

Retour au sommaire | Haut de la page