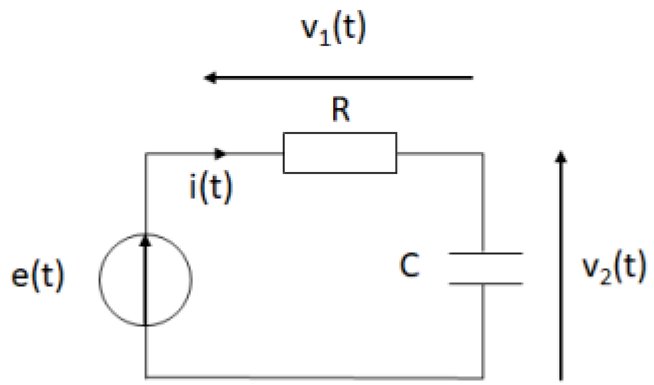
Le circuit RC - Conditions initiales non nulles

Le circuit RC - Réponse à un échelon de tension - Résolution

avec le formalisme de Laplace - Conditions initiales non nulles

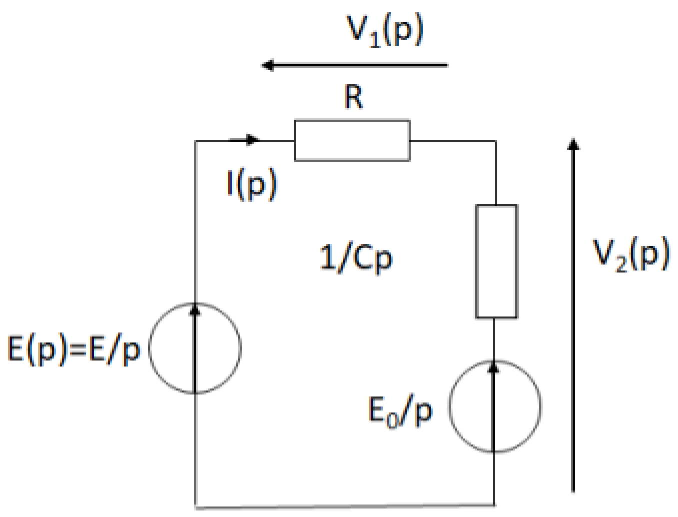
On considère le circuit illustré sur la figure ci-dessous. Le circuit est alimenté par une source de tension $e(t)$ où $e(t) = E \cdot u(t)$ avec $u(t)$ un échelon unité. Les conditions initiales sont non nulles, le condensateur est initialement chargé par une tension E_0 (avec $E_0 < E$).

Nous cherchons à établir la relation entre la tension de sortie $v_2(t)$ en fonction de la tension d'entrée $e(t)$ et des composants du circuit R et C.



Mise en équations du circuit avec le formalisme de Laplace

On commence par faire le schéma équivalent avec les impédances opérationnelles du circuit. Les conditions initiales n'étant pas nulles, il faut rajouter un échelon de tension ($\frac{E_0}{p}$) en série avec le condensateur. On obtient le schéma suivant :



avec $E(p)$, $V_1(p)$, $V_2(p)$ et $I(p)$ les transformées de Laplace respectives de $e(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $i(t)$. La tension d'entrée $e(t)$ est un échelon de tension, par conséquent : $E(p) = \frac{E}{p}$.

On applique la loi des mailles :

$E(p) - V_1(p) - V_2(p) = 0$, soit $V_2(p) = E(p) - V_1(p) = \frac{E}{p} - V_1(p)$ eq. (1)

On utilise les relations courant-tension avec les impédances opérationnelles :

$V_2(p) = \frac{1}{Cp} \cdot I(p) + \frac{E_0}{p} \Rightarrow I(p) = C \cdot p \left[V_2(p) - \frac{E_0}{p}\right]$ eq. (2)

et

$V_1(p) = R \cdot I(p)$

Soit en utilisant l'équation (2) :

$V_1(p) = R \cdot C \cdot p \left[V_2(p) - \frac{E_0}{p}\right]$ eq. (3)

En remplaçant l'équation (3) dans l'équation (1), on a :

$$V_2(p) = \frac{E}{p} - R \cdot C \cdot p \left[V_2(p) - \frac{E_0}{p}\right]$$

$$\Leftrightarrow V_2(p) = \frac{E}{p} - R \cdot C \cdot p \cdot V_2(p) + R \cdot C \cdot E_0$$

$$\Leftrightarrow V_2(p)\left[1 + R \cdot C \cdot p\right] = \frac{E}{p} + R \cdot C \cdot E_0$$

$$\Leftrightarrow V_2(p) = \frac{\frac{E}{p} + R \cdot C \cdot E_0}{\left[1 + R \cdot C \cdot p\right]}$$

$$\Leftrightarrow V_2(p) = \frac{E + R \cdot C \cdot p \cdot E_0}{p\left[1 + R \cdot C \cdot p\right]}$$

$\Leftrightarrow V_2(p) = \dfrac{\frac{E}{R \cdot C} + p \cdot E_0}{p\left[\frac{1}{R \cdot C} + p\right]}$ eq. (4)

Pour revenir dans le domaine temporel, il faut que $V_2(p)$ soit sous la forme d'une somme d'éléments simples. Ce n'est pas le cas ici, il faut donc procéder à une décomposition en éléments simples :

Les racines du dénominateur de $V_2(p)$ sont 0 et $-\frac{1}{R \cdot C}$, la décomposition en éléments simples de $V_2(p)$ est donc sous la forme :

$V_2(p) = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{\frac{1}{R \cdot C} + p}$ où A et B sont des constantes à déterminer.

Le détail du calcul est donné ici, on trouve :

$$V_2(p) = \frac{E}{p} + \frac{E_0 - E}{\frac{1}{R \cdot C} + p} \text{ eq. (5)}$$

Pour repasser dans le domaine temporel, il faut calculer la transformée de Laplace inverse de $V_2(p)$:

$$v_2(t) = TL^{-1}\left[V_2(p)\right] = TL^{-1}\left[\frac{E}{p} + \frac{E_0 - E}{\frac{1}{R \cdot C} + p}\right]$$

En utilisant les propriété de linéarité de la transformée de Laplace, on obtient :

$$\Leftrightarrow v_2(t) = E \cdot TL^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] + (E_0 - E) \cdot TL^{-1}\left[\frac{1}{\frac{1}{R \cdot C} + p}\right]$$

Il suffit à présent d'utiliser la table des transformées de Laplace :

$$\Leftrightarrow v_2(t) = E \times 1 + (E_0 - E) \cdot \exp\left[-\frac{t}{R \cdot C}\right] \text{ pour } t > 0 \text{ eq. (6)}$$

Soit :

$$\Leftrightarrow v_2(t) = E \cdot \left(1 - \exp\left[-\frac{t}{R \cdot C}\right]\right) + E_0 \cdot \exp\left[-\frac{t}{R \cdot C}\right] \text{ pour } t > 0$$

Simulation

A l'aide d'Octave, nous allons calculer la transformée de Laplace inverse de $V_2(p) = \frac{\frac{E}{R \cdot C} + p \cdot E_0}{p\left[\frac{1}{R \cdot C} + p\right]}$ et vérifier le résultat $v_2(t)$ obtenu avec le calcul à la main. Pour cela, on utilise la fonction *ilaplace* qui permet de calculer la transformée de Laplace inverse.

```
>> syms p E E0 R C t
>> V2=(E/(R*C)+p*E0)/(p*(1/(R*C)+p));
>> v2=ilaplace(V2,p,t)

v2 =

E + exp(-t/(C*R))*(E0 - E)
```

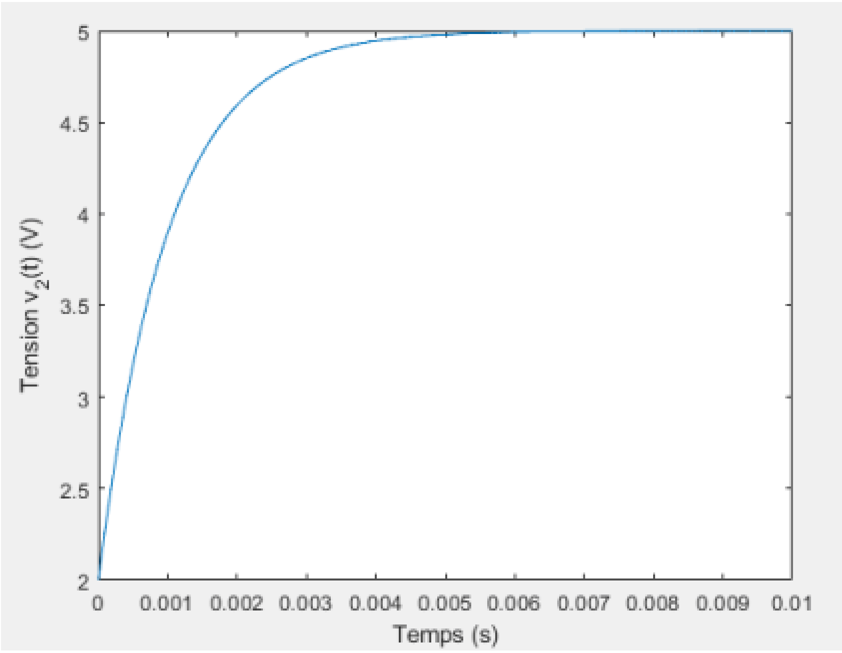
On obtient effectivement le même résultat que l'équation (6).

Simulation

A l'aide d'Octave, nous allons tracer l'allure de $v_2(t)$ pour $E = 5V$, $E_0 = 2V$,$R = 1k\Omega$ et $C = 1\mu F$. On repart du script précédent :

```
>> t=linspace (0,10e-3, 1000);
>> E=5; E0=2; R=1e3; C=1e-6;
>> v2=subs(v2);
>> plot(t,v2)
>> xlabel('Temps (s)')
>> ylabel('Tension v_2(t) (V)')
```

On obtient la courbe suivante.



On observe la charge du condensateur au cours du temps. On remarque que la tension initiale à ses bornes est bien de $E_0 = 2V$ et que la tension finale est la valeur du générateur $E = 5V$.

Remarque

Ici on a considéré que $E_0 < E$, si c'est l'inverse, on observe la décharge du condensateur de E_0 à E.