Licence EEA $2^{ème}$ année **Unité d'enseignement HAE302**
Circuits et Composants Capacitifs et Inductifs

Partie Circuits et Composants Inductifs : *TD n°5 : Energie Magnétique*

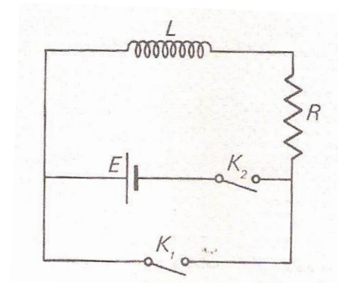
<u>A savoir</u> : - Energie magnétique $\varepsilon_m = 1/2\ I\Phi$ avec Φ, le flux du champ magnétique $\Phi(\vec{B}) = \iint_S \vec{B}.\vec{dS} = L\ I$

Pour un circuit inductif, l'énergie magnétique $\varepsilon_m = 1/2\ LI^2$

- Densité d'énergie d'un champ magnétique : $\omega_m = B^2/2\mu_0$

<u>Exercice 1 : Energie magnétique d'une bobine</u>

Une bobine a une inductance L = 53mH et une résistance R= 0.35Ω. On applique une fem E = 12V aux bornes de la bobine en fermant K_2 et en ouvrant K_1.



1. Etablir l'expression du courant en fonction du temps dans un circuit RL.
2. Calculer l'énergie magnétique emmagasinée (mise en réserve, stockée) dans la bobine lorsque le régime permanent est atteint.
3. Au bout de combien de temps la moitié de cette énergie sera-t-elle emmagasinée ?

4

<u>Exercice 2 : Energie magnétique dans un cable coaxial</u>

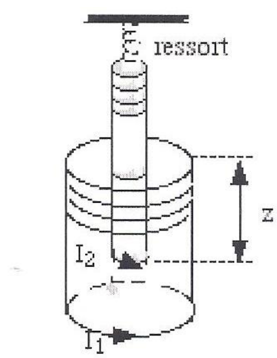
Un long cable coaxial se compose de deux cylindres concentriques à paroi minces ayant des rayons a et b. Le cylindre intérieur est parcouru par un courant constant i, et le trajet de retour du courant est assuré par le cylindre extérieur.
Le courant produit un champ magnétique exclusivement entre les deux cylindres.

1- Calculer la quantité d'énergie magnétique emmagasinée dans le champ magnétique pour une longueur l de câble. On utilisera l'expression de la densité d'énergie magnétique. En déduire l'expression de l'inductance L.

2- AN: a = 1.2 mm ; b = 3.5 mm ; i = 2.7A. Calculer l'énergie magnétique et l'inductance du câble coaxial

<u>Exercice 3 : Energie magnétique de 2 solénoïdes en mutuelle induction</u>

Soit 2 solénoïdes (1) et (2) considérés comme infinis, circulaires, coaxiaux et disposés comme indiqué sur la figure ci-contre. Le premier, de longueur l_1 =30cm comportant n_1 = 2000 spires par mètre et de rayon R_1 = 5 cm, est fixe ; le second, de longueur l_2 = 20cm présentant n_2 = 1000 spires par mètre et de rayon R_2 =2 cm peut se déplacer suivant son axe. Ils sont tous les 2 parcourus par des courants de même sens, d'intensités constantes I_1 = 3A et I_2 =2A.

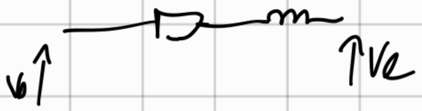


Le solénoïde (2) plonge d'une longueur z = 15cm à l'intérieur de (1).

1- Calculer l'énergie magnétique de ce système

2- En déduire la force magnétique **F**(z) qui s'exerce sur (2)

Exo 1)



$$Ve = RI + L\frac{di}{dt}$$

soit $\frac{Ve}{L} = \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i$

Soit l'energie d'une bobine : $E = U \times I : L\frac{di}{dt} \cdot \int i \, dt = \int L \, i \, dt$
$= \frac{1}{2} L i^2$

par regime permanent : bobine = fil , $i = \frac{Ve}{R} = \frac{12}{0{,}35}$.

$\frac{E}{L} = \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i \quad \Rightarrow \quad i_h = \lambda e^{-\frac{R}{L}t}$

$i_p = \frac{R}{L} \cdot a = \frac{E}{L} \mid a = \frac{E}{R}$

$i(t) = \lambda e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} \rightarrow CI \; i(0) = 0$

$\lambda = -\frac{E}{R}$

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Soit $i(t_\infty) = I = \frac{E}{R} \qquad \tau = \frac{L}{R}$

I stable $\simeq I \times 0{,}999 = I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$0{,}999 = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

$e^{-t/\tau} = 1 - 0{,}999$

$-\frac{t}{\tau} = \ln(0{,}001)$

$t = -\tau \cdot \ln(0{,}001)$

$t = 6{,}91 \tau$

$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-6{,}91}\right)$

On $\quad I_\infty = \frac{E}{R} = \frac{12}{0{,}35} = 34{,}29 A \mid \tau = \frac{L}{R} = 0{,}151 s$

$$i(t) = 34{,}29\left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}151}}\right)$$

2) $W = \frac{1}{2} L i^2$ avec i en regime permanent

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

$$W = \frac{1}{2}\, 0{,}053 \cdot (34{,}29)^2 = 31{,}18\ J$$

---

3) Def de $\tau \Rightarrow 0{,}151\ s$

Verif : $W_{max} = \frac{1}{2} L I^2$

$$\frac{W_{max}}{2} = W$$

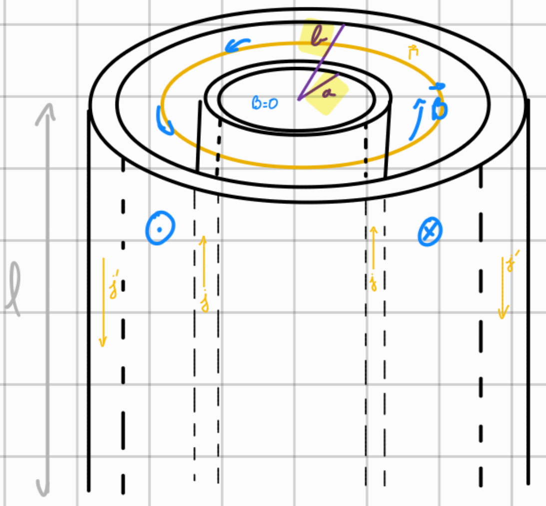
$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L\, i(t)^2$$

$$i(t)^2 = \frac{1}{2} I^2$$

$$i(t) = \frac{I}{\sqrt{2}} \rightarrow I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = -\tau \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$t = 0{,}105\ s$$

Exo2 : Cable coaxial



Dans le cable coaxial

Thm d'Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma i$$

$$B\, 2\pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

W_m equivalent a E_m

densité volumique

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \rightarrow \vec{E}_m = \iiint_{vol} w_m\, dV$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2 i^2}{(2\pi r)^2}$$ et $dV = S \cdot dr$

$S = 2\pi r l \rightarrow dV = 2\pi r\, l\, dr$

$$E_m = \int_a^b \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 i^2}{(2\pi r)^2} 2\pi r \, l \, dr$$

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 i^2 l}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

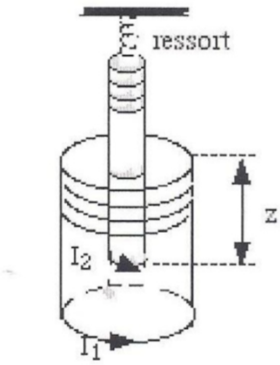
$$\boxed{E_m = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2 \quad \text{soit} \quad L = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \times \frac{2}{i^2}$$

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Exercice 3 : Energie magnétique de 2 solénoïdes en mutuelle induction

Soit 2 solénoïdes (1) et (2) considérés comme infinis, circulaires, coaxiaux et disposés comme indiqué sur la figure ci-contre. Le premier, de longueur l_1 =30cm comportant n_1 = 2000 spires par mètre et de rayon R_1 = 5 cm, est fixe ; le second, de longueur l_2 = 20cm présentant n_2 = 1000 spires par mètre et de rayon R_2 =2 cm peut se déplacer suivant son axe. Ils sont tous les 2 parcourus par des courants de même sens, d'intensités constantes I_1 = 3A et I_2 =2A.

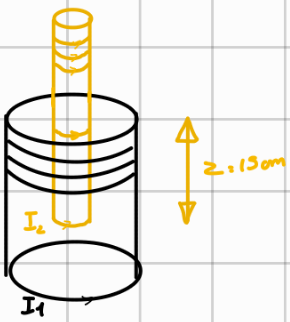


Le solénoïde (2) plonge d'une longueur z = 15cm à l'intérieur de (1).

1- Calculer l'énergie magnétique de ce système

2- En déduire la force magnétique **F**(z) qui s'exerce sur (2)

$$Sol_\infty \Rightarrow B_{int} = \mu_0 i n \quad \text{et} \quad B_{ext} = 0$$



$l_2 = 20$
$R_2 = 2cm$
$I_2 = 2A$
$n_2 = 1000 s/m$

$l_1 = 30$
$R_1 = 5cm$
$I_1 = 3A$
$n_1 = 2000 s/m$

1 système magnétique $E_m = \frac{1}{2} I \Phi$

ou $\Phi = LI \rightarrow E_m = \frac{1}{2} L I^2$

Pour 2 système mag (sol1 et sol2)

$$E_m = \frac{1}{2}(I_1 \Phi_1 + I_2 \Phi_2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Phi_1 = L_1 I_1 + M_{21} I_2 \\ \Phi_2 = L_2 I_2 + M_{12} I_1 \end{cases}$$

$$\Phi_1 = \underbrace{L_1 I_1}_{\text{auto induction}} + \underbrace{M_{21} I_1}_{\text{Mutuelle induction}}$$

sol2 inducteur -> sol1 induit

et $\Phi_2 = \underbrace{L_2 I_2}_{\text{auto induct}} + \underbrace{M_{12}}_{\text{mutuelle } sol_1 \to sol_2} I_1$

Soit calcul de L_1, L_2, M_{12}, M_{21}

Soit $\Phi_{sol \to sol} = \iint B_1 . dS_1 = L_1 I_1 \Rightarrow L_1 = \dfrac{\mu_0 n i . \pi r^2 \times N_1}{i} = \mu_0 n^2 . l_1 \times \pi \times R^2$

Pour $L_2 \Rightarrow \Phi_{sol \to sol} = \iint B_2 \, dS_2 = L_2 I_2 \Rightarrow L_2 = \dfrac{\mu_0 n i \pi r^2 \times N_2}{i} = \mu_0 n^2 . l_2 \times \pi \times R_2^2$

Soit pour M_{12}:

$\Phi_{1\to 2} = \iint \vec{B_1} . \vec{dS_2} = M_{12} I_1$ ou $N_2 = n_2 \times z$

$$M_{12} = \frac{\mu_0 \times n_1 \times I_1 \times N_2}{I_1} = \mu_0 n_1 \times n_2 \times z \times \pi R_2^2$$

$\Phi_{2 \to 1} = \iint B_2 . dS_1 = M_{21} I_2$

$$M_{21} = \frac{\mu_0 n_2 I_2 \times \pi R_2^2}{I_2} = \mu_0 n_1 \times n_2 \times z . R_2^2$$

Au final $M_{12} = M_{21} = M$ soit.

$$E_m = \frac{1}{2}\left(L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + L_2 I_2^2 + M I_2 I_1\right)$$
$$= 56\, mJ$$

2) Force magnetic sur sol 2 suivant z

$$E_m = W_m = \oint \vec{F_m} . \vec{dz}$$

$F_m = \dfrac{dW}{dz} = \dfrac{dEm}{dz}$ avec : $\vec{E_m} = \underbrace{\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2}_{\text{indep de } z} + \underbrace{M I_1 I_2}_{f(z)}$

$$F_m = \frac{d}{dz}\left[M I_1 I_2\right] = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_2^2 I_1 I_2$$