L2 - Techniques mathématiques EEA - HAX304X

Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 4

Calcul matriciel

Exercice 1

1) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA. Que peut-on en déduire ?

2) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB. Que peut-on en déduire ?

3) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer AB et AC. Conclusion ?

4) Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Conclusion ?

Exercice 2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 3. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant les deux méthodes vues en cours (système linéaire et déterminant).

Exercice 4. On considère le système linéaire suivant :

$$(S)\ :\ \left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & +2y & +3z & = a \\ x & -y & & = b \\ -x & +2y & +z & = c \end{array} \right.$$

1) Le résoudre, i.e. trouver x, y, z en fonction de a, b, c.

Montrer que cela correspond à l'inversion d'une matrice $A \in M_3$. Expliciter A ainsi que son inverse A^{-1}.

2) En déduire directement la solution du système $Au = v$, pour $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, puis pour $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ par la méthode de votre choix.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\det(A)$.

2) En déduire à quelles conditions sur m la matrice A est inversible.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Diagonaliser A (donner ses valeurs propres et vecteurs propres, et expliciter la relation $A = PDP^{-1}$).

2) Vérifier que $\det(A)$ est le produit des valeurs propres.

Exercice 8

Soient les matrices :

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Diagonaliser ces matrices (donner leurs valeurs propres, vecteurs propres, et expliciter $A = PDP^{-1}$).

2) Vérifier que leur déterminant est bien le produit de leurs valeurs propres.

1) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA. Que peut-on en déduire ?

$$AB = \begin{pmatrix} 5\times2 + 1\times4 & 5\times0 + 1\times3 \\ 3\times2 - 2\times4 & 3\times0 - 2\times3 \end{pmatrix}$$

$$AB \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$BA \begin{pmatrix} 2\times5 + 0\times3 & 2\times1 + 0 \\ 4\times5 + 3\times3 & 4\times1 - 3\times2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$$

Les matrice ne sont pas interchangable dans la multiplication. $AB \neq BA$

2) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB. Que peut-on en déduire ?

$$AB = \begin{pmatrix} 2\times0 - 1\times0 & 0\times-3 - 1\times0 \\ 0\times2 + 5\times0 & 0\times3 + 5\times0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit une matrice nulle

3) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer AB et AC. Conclusion ?

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \times 4 - 1 \times 5 & 0 \times -1 - 1 \times 4 \\ 0 \times 4 + 3 \times 5 & 0 \times -1 + 3 \times 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 0 \times 2 - 1 \times 5 & 0 \times 5 - 1 \times 4 \\ 0 \times 2 + 3 \times 5 & 0 \times 5 + 3 \times 4 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ +15 & 12 \end{pmatrix}$$

$AB = AC$

$B \neq C$

4) Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Conclusion ?

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 3+0 & -1+1 \\ -2+3 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 0 & 0 + 0 \\ 3 + 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2AB = 2\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^2+2AB+B^2 = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$AB \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$BC \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix}$$

$c = 0$

$a+c = a$

$c+d = d$

$a+b = b+d$

$a = d$

Soit $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$

Exercice 3. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant les deux méthodes vues en cours (système linéaire et déterminant).

Via det: $\frac{1}{det}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$det = 2\times 1 - 3\times 4$

$det = 2 - 12$

$det = -10$

$-\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Via resoletion linecaire:

On Sait que $A . A^{-1} = I$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resol:

$\begin{pmatrix} 2a + 3c & 2b + 3d \\ 4a + c & 4b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2a + C = 1 \\ 4a + C = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2b + 3d = 0 \\ 4b + d = 1 \end{cases}$

$c = 1 - 2a$

$4a + 1 - 2a = 0$

$2a = -1$

$\rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow C = 2$

$2b + 3d = 0$

$2b = -3d$

$-6d + d = 1$

$\rightarrow d = -\frac{1}{5}$

$b = \left(\frac{5}{5} + \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{4}$

$b = \frac{6}{20}$ $b = \frac{3}{10}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ 2 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Exercice 4. On considère le système linéaire suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} 2x & +2y & +3z & = a \\ x & -y & & = b \\ -x & +2y & +z & = c \end{cases}$$

$$A \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Le résoudre, i.e. trouver x, y, z en fonction de a, b, c.

Montrer que cela correspond à l'inversion d'une matrice $A \in M_3$. Expliciter A ainsi que son inverse A^{-1}.

2) En déduire directement la solution du système $Au = v$, pour $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, puis pour $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) $\left.\begin{array}{l} 2x + 2y + 3z = a \\ x - y = b \\ -x + 2y + z = c \end{array}\right\}$

$2x + 2y + 3z = a \Rightarrow \overbrace{2b + 2y + 2y}^{4y} + 3z = a \Rightarrow z = \frac{-2b - 4y + a}{3}$

$x = b + y$

$c = -b - y + 2y + \frac{a}{3} - \frac{2}{3}b - \frac{4}{3}y$

$c + b + \frac{2}{3}b - \frac{a}{3} = -y + 2y - \frac{4}{3}y$

$-\frac{1}{3}y = c + \frac{5b}{3} - \frac{a}{3}$

$y = -3c - 5b + a$

Soit $x = b + a - 5b - 3c$

$\rightarrow x = a - 4b - 3c$

$\rightarrow y = a - 5b - 3c$

$\rightarrow z = \frac{a}{3} - \frac{2}{3}b + 4c + \frac{20}{3}b - \frac{4}{3}a = -a + 6b + 4c$

Soit $A^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & +6 & +4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Exercice 5. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ par la méthode de votre choix.

$A^{-1} = \frac{1}{det} \Big($

$$A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{-4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\det(A)$.

2) En déduire à quelles conditions sur m la matrice A est inversible.

1) $\begin{matrix} 1^{+} & 1^{-} & m^{+} \\ 1^{-} & m^{+} & 1^{-} \\ m^{+} & 1^{-} & 1^{+} \end{matrix}$

$det(A)\ (m-1) - (1-m) + m\ (1-m^2)$

$= m - 1 - 1 + m + m - m^3$

$= (m-1)\ (-m^2 + m + 2)$

$a x^2 + b x + c = 0$

$r_1 = 1 \quad r_2 = \frac{c}{a}$

$r_2 = -2$

$det(A) = 0$ quand non inversible

La matrice est inversible quand le det n'est pas nul.

Soit les valeur interdite : 1 et -2

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Diagonaliser A (donner ses valeurs propres et vecteurs propres, et expliciter la relation $A = PDP^{-1}$).

2) Vérifier que $\det(A)$ est le produit des valeurs propres.

1) Det les valeurs propre

$\Rightarrow$ On calcul $\det(A - \lambda I) = 0$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Valeur propre en calculant det(A)

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 \times 1 = (2-\lambda)^2 - 1$$

developement

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
$$a + b + c$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = ?$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{c}{a} = 3$$

Calc des Vecteur propre

$\lambda_1 = 1$ Soit $u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre

$$Au = \lambda_1 u \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$2x + 1y = 1x$$
$$x + 2y = 1y$$

$x + y = 0$ $\qquad$ $x = -y$

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Les vecteur propre est a une constante pres

pour $\lambda_2 = 3$

$\lambda u = \lambda_2 u$

$\lambda_2 u$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 3x \\ y + 2x = 3y \end{array} \right\}$ $\begin{array}{l} y = 3x - 2x - x \\ x = y \end{array}$

$-x + y = 0$
$y = x$ $\qquad$ ou $u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ 1° Colonne associée a λ_1
2° Colonne associée a λ_2

PDP^{-1}

Soit $P^{-1} = \frac{1}{\det}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det = 1-(-1)$
$= 2$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Soit $\det(A) = 4-1 = \underline{3}$ car le prod des V propre et $3 \times 1 = 3$

Exercice 8
Soient les matrices :

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Diagonaliser ces matrices (donner leurs valeurs propres, vecteurs propres, et expliciter $A = PDP^{-1}$).

2) Vérifier que leur déterminant est bien le produit de leurs valeurs propres.

1) Valeur propre $\det(A-\lambda I) = 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1-\lambda^{+} & 2^{-} & 0^{+} \\ 0 & 3-\lambda & 0^{-} \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{matrix}$ +

$\det(A-\lambda I) = +(2-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)-0\right]$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_3 = 3$
$\lambda_2 = 2$

Vecteur propre

Pour λ_1

$$Au = \lambda_1 u \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + \quad = x \\ 3y = y \\ 2x - 4y + 2z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -2x \end{cases} \quad u_1 \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix}$$

$$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 =$

$$Au = \lambda_2 u_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 2x \\ 3y = 2y \\ 2x - 4y + 2z = 2z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_3 =$

$$Au = \lambda_3 u_3 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 3y = 3y \\ 2x - 4y + 2z = 3z \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = -2y \end{cases}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit } P^{-1} \Rightarrow \frac{1}{-1} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{matrix}$$

$$\det(A) = 2\left[(1)(3) - (0)(2)\right] = 1 \times 2 \times 3 = 6 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Diagonalisation:

1) $\det(A - \lambda I)$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 3 & -1 \\ 2-0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 2-\lambda\left(-\lambda \times (-1-\lambda) - 3 \times 2\right|$$
$$2-\lambda\left(\lambda^2 + \lambda - 6\right)$$

Soit les valeurs propre pour det $= 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$

$$\left.\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}\right\} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}$$

Vecteur propre ass:

Pour λ_1:

$Au = \lambda u$:
$$\begin{cases} 3y - z = 2x \\ 2x - y + z = 2y \\ +2z = 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y - \frac{z}{2} \\ y = y \\ z = y \end{cases}$$

Soit 2 vecteurs pour la double racine :

$y \Rightarrow u_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y\ u_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad z \Rightarrow u_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

pour $\lambda = -3$

$Au = \lambda u$: $\begin{cases} 3y - z = -3x \\ 2x - y + z = -3y \\ +2z = -3z \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$

$\rightarrow$ Soit $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Soit $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

Soit PDP^{-1}

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$P.D.P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$