Partie Circuits et Composants Capacitifs **P. CHRISTOL**

V- Flux de champ électrostatique – Théorème de Gauss

V-1 Définition d'un flux

Soit une surface S situé dans un champ $\vec{\mathbf{E}}$ en un point P de S. Autour de P considérons une surface élémentaire dS. Introduisons le vecteur $\vec{\mathbf{dS}}$ porté par la normale à la surface dS. Soit $\vec{\mathbf{n}}$ le vecteur unitaire et de façon arbitraire, la normale à la surface sera prise positive.

On appelle "Flux élémentaire" du champ $\vec{\mathbf{E}}$ à travers dS le produit scalaire :

$$d\Phi = \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{dS}} = \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{n}}\, dS = E\, dS \cos\alpha$$

On appelle "Flux" du champ $\vec{\mathbf{E}}$ à travers S la somme algébrique des flux élémentaires :

$$\Phi = \iint \vec{E}.\vec{dS}$$

Rq. 1 Dans le cas d'une surface fermée, on orientera les normales vers l'extérieur. Φ est alors le "flux sortant" de S.

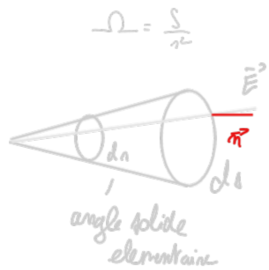
Choix d'une convention : Pour une surface fermée s'appuyant sur un contour orienté C.
On orientera le contour suivant un sens de parcours dit direct pour donner
une normale à la surface $\vec{\mathbf{n}}$ positive c'est-à-dire sortante
(loi du tire bouchon ou de face nord) loi de la main droite

Rq. 2 Le principe de superposition s'applique aussi au flux :

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = \iint \vec{E}.\vec{dS} = \iint \sum_i \vec{E}_i.\vec{dS} = \sum_i \iint \vec{E}_i.\vec{dS} = \sum_i \Phi_i$$

V-2 **Flux du champ électrostatique à travers une surface non fermée.**

Soit une charge q placée en O.
Soit un élément de surface dS en M
Soit $\vec{\mathbf{n}}$ la normale à dS en M
Soit $\vec{\mathbf{E}}$ le champ électrostatique créé par q en M



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u} \qquad \text{avec } r = OM$$

Le flux élémentaire $d\Phi = \vec{E}\cdot\vec{dS} = \vec{E}\cdot\vec{n}\,ds \Rightarrow d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} r^2 d\Omega \Rightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$

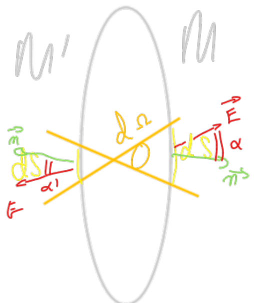
Pour une surface S ouverte d'étendue finie $\quad \Phi = \iint d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$

V-3 **Flux du champ électrostatique à travers une surface fermée S.**

2 cas sont à considérer

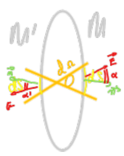
Charge ponctuelle est à l'exterieur de S

Vecteur unitaire $\|\vec{n}\| = 1$
$\|\vec{n}'\| = 1$



Surface élémentaire ds et dS' aux pt M et M'
$d\Phi_M = \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \|\vec{E}\|\|\vec{n}\|\,ds\cos\alpha$
$d\Phi_{M'} = \vec{E}'\cdot\vec{n}'\,dS' = \|\vec{E}'\|\|\vec{n}'\|\,ds'\cos\alpha'$
On a $E < E'$ et $dS > dS'$
on a $\alpha' > \pi/2 \Rightarrow \cos\alpha' < 0$
Par symétrie $\Rightarrow d\Phi_{M'} = -d\Phi_M \Rightarrow$ flux total
$\Phi_{\text{tot}} = \int d\Phi = 0$
Pour une charge à l'extérieur

Charge ponctuelle est à l'intérieur de S



$E < E'$ et $ds > dS'$
$\alpha > 0$ et $\alpha' > 0$
$d\Phi_M = E\,\vec{n}\,dS = E\,ds\cos\alpha$
$d\Phi_{M'} = E'\,\vec{n}'\,dS' = E'dS\cos\alpha'$
donc $d\Phi_M = d\Phi_{M'}$, $\Phi_{\text{totale}} = \int d\Phi$
on $d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$ donc $\Phi_{\text{total}} = \frac{q_{\text{total}}}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega$
$= \frac{q_{\text{total}}}{4\pi\varepsilon_0}\Omega_{\text{surface fermée}} = \frac{q_{\text{total}}}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q_{\text{total}}}{\varepsilon_0}$
Si $q_{\text{int}} \Rightarrow \Phi = 0$
Si $q_{\text{int}} \Rightarrow \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$
$\to$ Thm de Gauss $\Phi = \iint_{\text{surface fermée}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

V-4 **Généralisation : Théorème de Gauss.**

Soit une distribution quelconque de charge et une surface fermée S
Pour les charges q_{ext} situées à l'extérieur de S, on aura $\Phi = 0$
Pour les charges q_{int} situées à l'intérieur de S, on aura $\Phi = q_{int} / \varepsilon_0$ d'où au total pour l'ensemble des charges

$$\Phi = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = \oiint_{\substack{\text{surface}\\ \text{fermée}}} \vec{E}.\vec{dS} \qquad \textbf{Théorème de Gauss}$$

Le **Théorème de Gauss** fait intervenir le champ $\vec{\mathbf{E}}$ total à l'intérieur d'une surface fermée et la somme des charges à l'intérieur de cette surface fermée.

Le théorème de Gauss permet donc de calculer le champ électrique $\vec{E}$ d'une distribution de charges puis le potentiel V se calculera suivant la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$

1) Pour 1 distribution volumique de charges
Volumique $\sum q_{\text{int}} = \iiint \rho\, dv$
Surfacique $\sum q_{\text{int}} = \iint \sigma\, ds$
Linéique $\sum q_{\text{int}} = \int \lambda\, dl$

2) Choix de la surface de Gauss fermé
$\Rightarrow$ la symétrie de la distributions de charge

3) La surface de Gauss fermé doit contenir les charges sans coupé la distribution

V-5 <u>Forme locale du théorème de Gauss : Equation de Poisson</u>

Relation locale entre le champ $\vec{E}$ en un point P de l'espace et la densité volumique de charge ρ en ce point.
Au point P, le champ $\vec{E}$ a pour composantes E_x, E_y, E_z.
Plaçons P sur une des face d'un parallélépipède élémentaire de cotés dx, dy, dz.
Soit P' le point sur la face opposée.

Au point P, la composante selon Ox a pour valeur E_x

Au point P', la composante du champ a pour valeur : $E_x + dE_x = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$

Le flux sortant par l'ensemble de ces deux faces est :

Pour les deux autres paires de faces, les valeurs du flux s'obtiennent par permutation circulaire

$\frac{\partial E_y}{\partial y} dx dy dz$ et $\frac{\partial E_z}{\partial z} dx dy dz$

Le flux total sortant a donc pour valeur : $d\Phi = (\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z})\ dx dy dz$

Or on appelle divergence du vecteur $\vec{E}$ le scalaire $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{E}$ *(outils Maths)*

Donc $d\Phi =$

Or d'après le théorème de Gauss $d\Phi = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\rho dV}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} dx dy dz$

D'où l'**équation de Poisson** :
(ou forme locale du Théorème de Gauss car cette équation ne fait intervenir que les variations de $\vec{E}$ au voisinage d'un point)

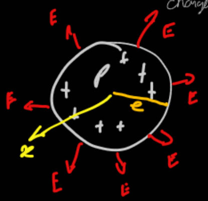
Sachant que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ Et que pour une fonction f, le laplacien $\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, f)$ *(outils Maths),*

on a : donc $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

<u>Remarque</u> : Dans un espace dépourvu de charge (mais où règne un champ) :
ρ = 0 donc div $\vec{E} = 0$ et $\Delta V = 0$

V-4 Gauss

Ex



1 champs et Potentiel crée par 1 sphère de Rayon R chargé en volume $E = f(x)$ et $V = f(x)$

$Q_{totale} = \iiint \rho \, dv = \rho \iiint dv$

$Q_{total} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$

Thm de Gauss

$\Phi_E = \iint E \, d\vec{s} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

on trouve une surface fermée

* $x < R$

surface fermée = surface de rayon $\underline{x}$

Thm de Gauss

$\Phi_{E/surf} = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = E \iint dS$

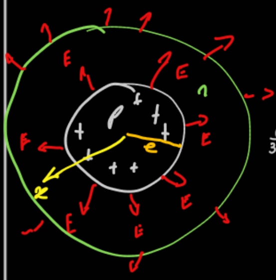
$\Phi_{E/surf} = E\, 4\pi x^2 = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

soit $\sum q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi x^3$

donc

$\Phi_{E/surf} = E\, 4\pi x^2 = \frac{\rho 4\pi x^3}{3\varepsilon_0}$

donc pour $x < R$ $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} x$



* $x > R$

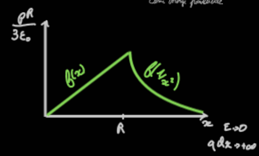
$\Phi_{E/surf} = ES = E 4\pi x^2 = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_0}$

$= \rho \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} R^3$

Soit : $E 4\pi x^2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} 4\pi R^3$

→ d'où $\left[E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x^2} \right.$ $E = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$

comme charge ponctuelle



Continuité des champs électrique

$E(x = R) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$

→ Potentiel de V avec $\vec{E} = -\vec{grad}\, V \Leftrightarrow E = \frac{dV}{dr}$

ou bien $dV = -E\, dr$ et $V = -\int E \cdot d\vec{r}$

* Pour $x < R$

$V = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} x \, dx = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} x^2 + K$

* Pour $x > R$

$V = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{x^2} dx = + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{x} + K$

* Pour $x \to \infty \Rightarrow V = 0 \Rightarrow K' = 0$

Continuité en $x = R$ pour déterminé K

$-\frac{\rho}{6\varepsilon_0} R^2 + K = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R}$ donc $K = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}$

donc $K = \frac{3\rho R^2}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$

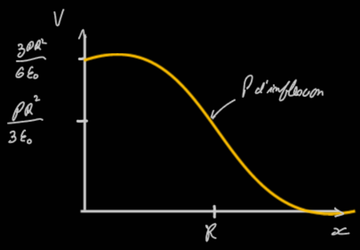
d'où pour $x < R$

$V = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} x^2 + \frac{3\rho R^2}{6\varepsilon_0}$

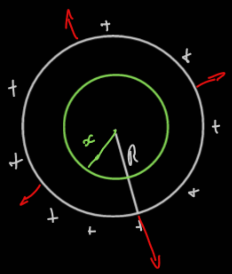
$= \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (3R^2 - x^2)$

et pour $x > R$

$V = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{x}$



2 Sphère chargé en surface



densité surfacique σ

$Q_{tot} = \iint \sigma \, ds$

$ds = \sigma S$

$Q_{total} = \sigma 4\pi r^2$

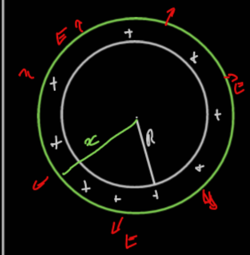
$Q > 0$

Thm de Gauss $\Phi_{E/surf\ fermé} = \iint E \, d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

* $x < R$

$\iint E \, dS = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$ $\sum q_{int} = 0 \Rightarrow E = 0$

+ $x > R$



$\iint E\, dS = \iint E\, dS = E \iint dS = ES$

$= E 4\pi x^2$

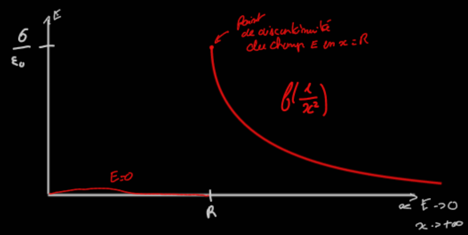
$\frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_0}$

donc $E 4\pi x^2 = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_0}$

$\boxed{E = \frac{Q_{total}}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}$

or $Q_{total} = \sigma 4\pi R^2$

donc $E = \frac{\sigma 4\pi r^2}{4\pi \varepsilon_0 x^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 x^2}$



* Potentiel

$\vec{E} = -\vec{grad}\, V$

$V = -\int E \cdot \vec{dr}$

pour $x < R$

$E = 0 \to V = K$

pour $x > R$

$V = -\int \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{x^2} + K'$

$V = 0$ qd $x \to \infty$ donc $K' = 0$

On détermine K avec la continuité du scalaire V en $x = R$

$K = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

donc

pour $x < R$: $V = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} = cte$

pour $x > R$: $V = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 x}$