

**TOUT EN  
FICHES**

**Yves Granjon**

L'ESSENTIEL D'

**ÉLECTRICITÉ**

**LICENCE, IUT**

**DUNOD**

Direction artistique : Nicolas Wiel  
Conception graphique de la couverture : Pierre André Gualino  
Illustration de couverture : EpicStockMedia/shutterstock.com

Cet ouvrage existe en deux versions : L'Essentiel BTS  
et l'Essentiel Licence / IUT

© Dunod, 2021  
11, rue Paul Bert 92240 Malakoff  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)  
ISBN 978-2-10-083114-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> al, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>Fiche 1</b>	Sources d'alimentation en régime sinusoïdal	1
<b>Fiche 2</b>	Modélisation complexe des grandeurs électriques	7
<b>Fiche 3</b>	Impédance réelle et impédance complexe	10
<b>Fiche 4</b>	Dipôles passifs linéaires usuels	16
<b>Fiche 5</b>	Calcul de l'impédance d'un dipôle passif linéaire	22
<b>Fiche 6</b>	Diagramme de Fresnel	27
<b>Fiche 7</b>	Équivalence triangle-étoile	31
<b>Fiche 8</b>	Retour sur les nombres complexes	36
<b>Fiche 9</b>	Circuits possédant plusieurs générateurs	46
<b>Fiche 10</b>	Calcul du courant débité par un générateur	51
<b>Fiche 11</b>	Lois de Kirchhoff	57
<b>Fiche 12</b>	Théorème de Millman	61
<b>Fiche 13</b>	Montage diviseur de tension	66
<b>Fiche 14</b>	Pont d'impédances	70
<b>Fiche 15</b>	Théorème de Thévenin	74
<b>Fiche 16</b>	Théorème de Norton	81
<b>Fiche 17</b>	Puissances et énergie électriques	86
<b>Fiche 18</b>	Puissance en régime sinusoïdal	91
<b>Fiche 19</b>	Adaptation du facteur de puissance	97
<b>Fiche 20</b>	Quadripôles électriques	103
<b>Fiche 21</b>	Caractéristiques électriques des quadripôles	108
<b>Fiche 22</b>	Schémas équivalents des quadripôles	113

<b>Fiche 23</b>	Notion de spectre	121
<b>Fiche 24</b>	Spectre des signaux périodiques	125
<b>Fiche 25</b>	Circuits à diodes	129
<b>Fiche 26</b>	Caractéristiques électriques de la diode	135
<b>Fiche 27</b>	Applications des diodes	142
<b>Fiche 28</b>	Redressement double alternance	148
<b>Fiche 29</b>	Transformateur monophasé parfait	152
<b>Fiche 30</b>	Transformateur monophasé réel	159
<b>Index</b>		169

# Sources d'alimentation en régime sinusoïdal

Fiche  
**1**

Tout circuit électrique nécessite, pour fonctionner, une source d'alimentation. D'une manière générale, tout montage peut être représenté sous la forme d'un générateur d'énergie alimentant un récepteur chargé de transformer cette énergie électrique en une autre forme exploitable (mécanique, thermique, par exemple).

Générateur et récepteur sont en général des dipôles (deux bornes) et sont reliés par des conducteurs (figure 1.1). Les dipôles générateurs sont qualifiés d'actifs et les dipôles récepteurs sont dits passifs.

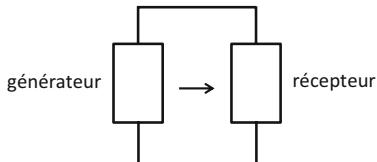


Figure 1.1

## 1. Générateur de tension parfait

Un générateur de tension sinusoïdale monophasé parfait est un dipôle délivrant à ses bornes, une tension  $e(t) = E_0 \cos \omega t$  indépendante du dipôle auquel il est relié (figure 1.2). C'est cette indépendance qui permet de le qualifier de parfait.

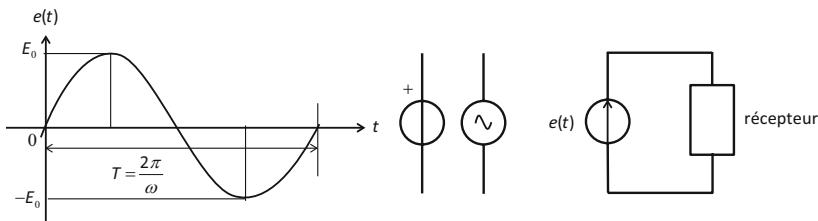


Figure 1.2

$E_0$  est l'amplitude de la tension et est naturellement exprimée en volts (V), tout comme  $e(t)$ .  $\omega$  est la pulsation de la tension et s'exprime en radians par seconde (rad/s).  $f = \omega/2\pi$  est la fréquence du générateur

en hertz (Hz) et  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$  en est la période. Sur la figure 1.2, on

trouvera également les différents symboles utilisés classiquement pour représenter un générateur de tension sinusoïdal parfait. Nous privilierons celui de droite dans cet ouvrage.

Lorsque l'on relie un tel générateur à un dipôle passif, ou encore à un circuit dipolaire, la tension délivrée par le générateur est imposée aux bornes du dipôle et un courant s'établit dans le circuit comme indiqué sur la figure 1.3. Le sens du courant, conventionnellement, est dirigé comme sortant de la borne supérieure du générateur. Sa deuxième borne est en général considérée comme la référence des potentiels et appelée la masse (i.e. 0 V).

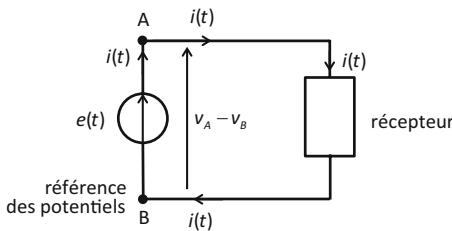


Figure 1.3

La tension  $e(t)$  correspond à la différence de potentiels entre le point A et le point B (attention au sens) :  $e(t) = v_A - v_B$  et est représentée par une flèche allant dans le sens des potentiels croissants. Si on postule que le point B sert de référence aux potentiels (rappelons qu'en électricité, ce sont les différences de potentiels qui sont importantes), on a alors  $v_B = 0 \text{ V}$  et  $v_A(t) = e(t)$ .

## 2. Générateur de courant parfait

À la différence d'un générateur de tension, un générateur de courant sinusoïdal parfait impose un courant  $i(t) = I_0 \cos \omega t$  indépendant du dipôle auquel il est relié (figure 1.4). C'est cette indépendance qui permet de le qualifier de parfait.  $I_0$  est l'amplitude du courant et est naturellement exprimé en ampères (A), tout comme  $i(t)$ .

Lorsque l'on relie un tel générateur à un dipôle passif, ou encore à un circuit dipolaire, le courant délivré par le générateur est imposé au travers du dipôle et une tension apparaît dans le circuit comme indiqué sur la figure 1.4.

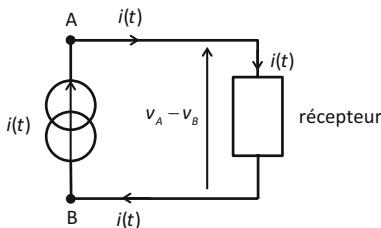


Figure 1.4

On notera sur la figure 1.4 le symbole utilisé pour représenter un générateur de courant parfait. Il existe d'autres symboles parfois utilisés.

### 3. Conventions

Un rapide coup d'œil au schéma de la figure 1.3 nous montre que les flèches représentant les tensions et les courants sont dirigées dans le même sens au niveau du générateur tandis qu'elles sont dirigées en sens contraire pour le dipôle récepteur. Nous retiendrons cela comme étant deux conventions fondamentales en électricité. Il est important de toujours respecter ces conventions, car toutes les équations que nous étudierons sont censées être exprimées en accord avec ces conventions.

La convention générateur consiste, pour un générateur de tension, à orienter la différence de potentiels et le courant débité dans le même sens.

La convention récepteur consiste, pour tout dipôle passif, à orienter la tension à ses bornes et le courant qui le traverse, dans des directions opposées.

**REMARQUE**

Le non-respect de ces conventions fait courir le risque de commettre des erreurs de signes dans les calculs.

**EXEMPLE**

Le schéma de la figure 1.5 représente un générateur de tension sinusoïdale alimentant un dipôle formé de trois résistances et au sein duquel on notera que la convention générateur est respectée pour le générateur tandis que pour chacune des résistances, nous avons respecté la convention récepteur.

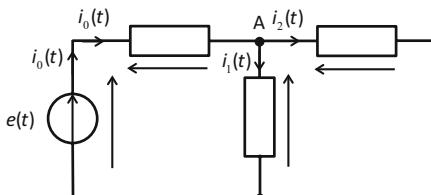


Figure 1.5

**REMARQUE**

Nous justifierons plus tard (fiche 11) le fait que le courant  $i_0(t)$  se « sépare » au point A dans les deux branches du circuit.

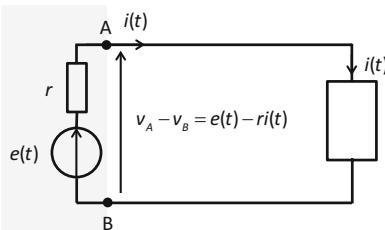
**4. Générateurs réels**

Figure 1.6

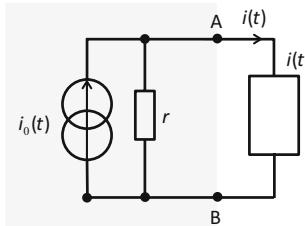
Qu'il s'agisse de générateur de tension ou de courant, le caractère parfait n'est que théorique. Ainsi, par exemple, lorsque l'on relie un générateur de tension à un dipôle, on remarque que la tension à ses bornes diminue en fonction du courant qu'il débite. Autrement dit, l'amplitude de la tension délivrée chute d'autant plus que le courant soutiré est important.

On représente ce caractère imparfait (ou réel) par une résistance  $r$  placée en série avec un générateur parfait  $e(t)$ . La figure 1.6 montre qu'aux bornes AB d'un générateur réel, la tension  $v_A - v_B$  dépend du courant  $i(t)$  car une chute de tension apparaît aux bornes de la résistance.

Dans un générateur de tension réel en fonctionnement, de bornes AB, dans lequel le caractère imparfait est modélisé par une résistance série  $r$ , la différence de potentiel délivrée à ses bornes est égale à :

$$v_A - v_B = e(t) - ri(t)$$

Dans le cas d'un générateur de courant, le caractère réel est représenté par une résistance placée en parallèle avec un générateur de courant parfait (figure 1.7).



**Figure 1.7**

Dans les deux cas, la résistance  $r$  est appelée résistance interne du générateur et permet de tenir compte du caractère imparfait du générateur, qu'il soit de tension ou de courant. Elle permet de tenir compte d'un phénomène selon lequel le générateur consomme une petite partie de l'énergie qu'il est censé produire. Plus  $r$  est faible, meilleur est le générateur.

**EXERCICE 1 Conventions générateur et récepteur**

Dans le schéma de la figure 1.8, placer les flèches des tensions aux bornes de tous les dipôles ainsi que les courants qui circulent dans chacun d'entre eux.

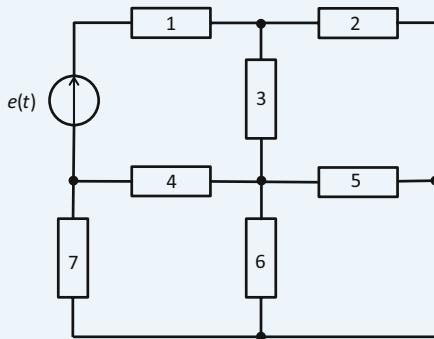


Figure 1.8

**Solution**

En ce qui concerne le générateur de tension, le sens de la tension est sans ambiguïté indiqué sur le générateur et le sens du courant est dicté par la convention générateur. Le courant  $i_1(t)$  se sépare ensuite en un courant  $i_2(t)$  et  $i_3(t)$ . L'idée consiste ensuite à placer le reste des courants, relativement intuitivement.

Connaissant les courants qui traversent chacune des résistances, il suffit de placer les tensions aux bornes de chacune d'entre elles en respectant la convention récepteur (figure 1.9).

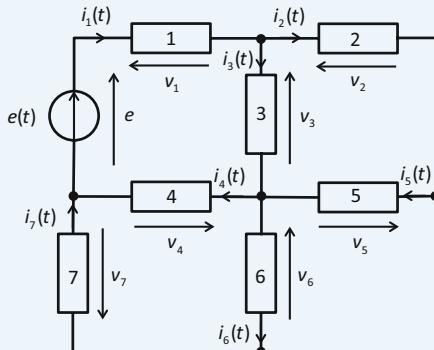


Figure 1.9

Afin d'appréhender le fonctionnement des circuits électriques en régime sinusoïdal, il est d'usage d'associer une représentation complexe à ces circuits. Il s'agit d'une modélisation théorique dans laquelle les lois simples de l'électricité qui sont déjà connues en régime continu, peuvent toujours être appliquées. Résoudre un problème d'électricité en régime sinusoïdal passe en général par cette transposition vers le modèle complexe où les calculs sont beaucoup plus simples.

## 1. Principes de base

En considérant une grandeur électrique sinusoïdale  $u(t)$  (il peut s'agir d'une tension ou d'un courant), on peut écrire, en règle générale :

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Dans une telle expression,  $U_0$  correspond à l'amplitude de la grandeur (en ampères ou en volts selon qu'il s'agit d'un courant ou d'une tension). On introduit souvent la notion de valeur efficace  $U_{\text{eff}}$  de cette grandeur en posant  $U_0 = U_{\text{eff}} \sqrt{2}$ . Nous justifierons l'introduction de cette notion dans la [fiche 18](#) relative aux calculs de puissance.

Le paramètre  $\varphi$  représente un éventuel déphasage entre  $u(t)$  et une référence des phases qui est en général la source principale d'alimentation du circuit. C'est par rapport à elle que l'on évalue alors les avances ou retards de phase de chaque grandeur, tension ou courant, à l'intérieur du circuit. On peut considérer que cette grandeur réelle  $u(t)$  est la partie réelle d'un nombre complexe qui peut s'écrire :

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} [U_0 \cos(\omega t + \varphi) + jU_0 \sin(\omega t + \varphi)]$$

$$\text{Soit : } u(t) = \operatorname{Re} [U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}] \text{ ou encore } u(t) = \operatorname{Re} [U_{\text{eff}} \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi)}]$$

L'idée consiste à associer à une grandeur réelle, la grandeur complexe  $U_{\text{eff}} \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi)}$ .

On transpose alors la plupart du temps les grandeurs électriques réelles  $u(t)$  sous la forme d'expressions complexes associées que l'on note en général  $\overline{U}$  ou parfois  $\underline{U}$ . Comme dans un circuit, toutes les grandeurs, tensions et courants sont sinusoïdaux de mêmes pulsations que la source d'alimentation, on retiendra essentiellement dans cette forme complexe, ce qui est susceptible d'être différenciant, c'est-à-dire la valeur efficace  $U_{\text{eff}}$  et l'éventuel déphasage  $\varphi$  par rapport à la source servant de référence.

À toute grandeur électrique sinusoïdale  $u(t) = U_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ , on associe sa forme complexe :

$$u(t) = U_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \overline{U} = U_{\text{eff}} e^{j\varphi}$$

## 2. Modèle complexe d'un générateur de tension sinusoïdal

En règle générale, un circuit électrique simple se compose d'une source d'alimentation alimentant un dipôle (pouvant lui-même être formé de plusieurs éléments).

Dans le schéma de la figure 2.1, supposons que  $e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t)$ . Cette source va servir de référence en ce qui concerne d'éventuels déphasages des autres grandeurs électriques, par exemple le courant  $i(t)$ .

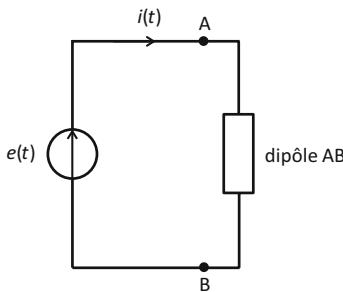


Figure 2.1

D'après les notations présentées ci-dessus, considérant que  $\varphi = 0$ , la forme complexe de  $e(t)$  se limite à  $\bar{E} = E_{\text{eff}} e^{j0} = E_{\text{eff}}$ .

La forme complexe associée à un générateur de tension sinusoïdale parfait servant de référence de phase se limite à sa valeur efficace.

$$e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t) \rightarrow \bar{E} = E_{\text{eff}}$$

### REMARQUE

En Europe, les réseaux de distribution domestiques fournissent, au niveau des prises électriques, une tension sinusoïdale d'environ 230 V. Il s'agit là de la tension efficace qui correspond à une amplitude du signal sinusoïdal égale à 325 V ( $230 \times \sqrt{2}$ ). Rappelons également que la pulsation de cette tension est égale à 314 rad/s, soit une fréquence de 50 Hz.

### **EXERCICE 1 Forme complexe d'une tension délivrée par une prise électrique domestique**

Quelles sont l'expression réelle  $e(t)$  et la forme complexe  $\bar{E}$  associée à la tension sinusoïdale délivrée par une prise de courant domestique ?

#### Solution

En se basant simplement sur la remarque ci-dessus, on peut écrire :

$$e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t = 325 \cos 314t \text{ (V)}$$

S'agissant d'une source de tension constituant une alimentation, nous n'introduisons aucun déphasage et considérons cette alimentation comme référence au regard d'éventuels déphasages dans le circuit qu'elle alimente. On a donc  $\varphi = 0$ .

La forme complexe associée est donc tout simplement :

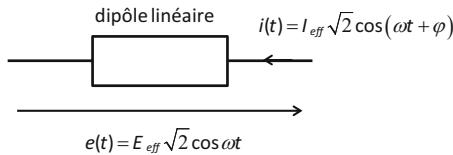
$$\bar{E} = E_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$$

Pour disposer d'un modèle complet permettant d'étudier les circuits en régime sinusoïdal, il convient, en plus de disposer de modèles complexes pour les générateurs, d'avoir une modélisation similaire pour les dipôles récepteurs passifs. Nous nous limitons ici aux dipôles passifs linéaires. Un dipôle linéaire est un dipôle dont le fonctionnement électrique peut être décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Nous étudierons, dans la fiche 4, les trois dipôles passifs linéaires les plus courants (résistance, bobine et condensateur). Tous les dipôles ne sont pas linéaires. La diode par exemple (que nous étudierons à partir de la [fiche 25](#)) ne l'est pas et par conséquent, les concepts abordés ici ne s'appliquent pas à elle.

## 1. Impédance réelle d'un dipôle linéaire

Sur le schéma de la figure 3.1, on alimente un dipôle linéaire quelconque (autrement dit on impose la tension à ses bornes) à l'aide d'un générateur de tension parfait  $e(t)$  tel que :

$$e(t) = E_0 \cos \omega t = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t$$



**Figure 3.1**

Il apparaît alors un courant  $i(t)$  tel que :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Ce courant est toujours de forme sinusoïdale, de même pulsation  $\omega$  que la tension d'alimentation et possède sa propre amplitude  $I_0$  (ou encore

sa propre valeur efficace  $I_{\text{eff}}$ ) et présente un éventuel déphasage  $\varphi$  par rapport à  $e(t)$ .

#### REMARQUE

Le déphasage  $\varphi$  étant précédé d'un signe positif, il est appelé avance algébrique de phase de  $i(t)$  par rapport à  $e(t)$ .

L'amplitude  $I_0$  de  $i(t)$  dépend naturellement :

- Des caractéristiques de la tension d'alimentation (amplitude  $E_0$  et pulsation  $\omega$ ).
- Du dipôle alimenté.

On définit l'impédance réelle du dipôle alimenté et on note  $Z$  le rapport entre les amplitudes (ou les valeurs efficaces) de la tension et du courant :

$$Z = \frac{E_0}{I_0} = \frac{E_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$$

Cette impédance s'exprime en ohms ( $\Omega$ ) et est une caractéristique du dipôle pour une pulsation donnée.

#### REMARQUE

On notera l'analogie avec la loi d'Ohm qui concerne les résistances. Attention toutefois, l'impédance dépend de la pulsation utilisée et n'est donc pas une caractéristique intrinsèque du dipôle.

## 2. Impédance complexe

Le seul paramètre  $Z$  ne suffit pas à caractériser entièrement un dipôle car il donne uniquement accès à  $I_{\text{eff}}$  si on connaît  $E_{\text{eff}}$ . Or, il est en général important de pouvoir déterminer l'avance algébrique de phase du courant par rapport à la tension,  $\varphi$ .

Si on se réfère à la représentation complexe des grandeurs électriques présentées dans la [fiche 2](#), il existe une représentation complexe de l'expression du courant :

$$i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \bar{I} = I_{\text{eff}} e^{j\varphi}$$

Rappelons ici que la représentation complexe de la tension est :

$$e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t \rightarrow \bar{E} = E_{\text{eff}}$$

En écrivant le rapport  $\frac{\bar{E}}{\bar{I}}$ , on obtient :

$$\frac{\bar{E}}{\bar{I}} = \frac{E_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}} e^{j\varphi}} = \frac{E_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} e^{-j\varphi} = Z e^{-j\varphi}$$

Cette expression  $Z e^{-j\varphi}$  contient deux informations : l'impédance réelle  $Z$  et l'avance algébrique de phase  $\varphi$ . Elle permet donc de caractériser entièrement le dipôle au sens où elle donne accès à la fois à  $I_{\text{eff}}$  et à  $\varphi$  et permet donc de déterminer le courant qui traverse le dipôle lorsqu'il est alimenté par  $e(t)$ .

#### REMARQUE

La relation  $\bar{E} = \bar{Z} \bar{I}$  s'apparente aussi à la loi d'Ohm, d'où son nom, souvent utilisé, de loi d'Ohm généralisée au modèle complexe.

$Z e^{-j\varphi}$  est notée  $\bar{Z}$  et est appelée impédance complexe du dipôle. La forme  $\bar{Z} = Z e^{-j\varphi}$  est un nombre complexe écrit sous forme exponentielle, ou encore sous forme module et argument :

$$|\bar{Z}| = Z \text{ et } \arg \bar{Z} = -\varphi$$

#### REMARQUE

La [fiche 8](#) de ce livre est consacrée à une révision des notions fondamentales liées aux nombres complexes.

S'agissant d'un nombre complexe, on peut aussi écrire  $\bar{Z}$  sous sa forme algébrique (partie réelle et partie imaginaire) :

$$\bar{Z} = R + jX$$

Les paramètres  $R$  et  $X$  sont appelés respectivement les parties résistives et réactives du dipôle ou encore sa résistance et sa réactance. Elles s'expriment toutes deux en ohms. On a alors :

$$\begin{cases} R = \operatorname{Re}(\bar{Z}) \\ X = \operatorname{Im}(\bar{Z}) \\ Z = |\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ -\varphi = \arg \bar{Z} \Leftrightarrow -\tan \varphi = \frac{X}{R} \end{cases}$$

### REMARQUE

Il arrive parfois que l'on considère les déphasages non plus comme des avances algébriques de phase mais comme des retards de phase et ce, en introduisant un signe négatif dans les expressions temporelles,  $i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$ . Dans ce cas, on aurait  $\varphi = \arg \bar{Z}$ . Dans cet ouvrage, nous prenons le parti de toujours considérer par défaut et *a priori*, des avances algébriques de phase. S'il s'avère qu'une grandeur est en retard par rapport à une autre, cette avance sera alors négative.

On peut facilement déterminer  $R$  et  $X$  à partir de la notation exponentielle.

En effet :

$$\bar{Z} = Ze^{-j\varphi} = Z(\cos \varphi - j \sin \varphi)$$

Ainsi :

$$\begin{cases} R = \operatorname{Re}(\bar{Z}) = Z \cos \varphi \\ X = \operatorname{Im}(\bar{Z}) = -Z \sin \varphi \end{cases}$$

**REMARQUE**

Dans certains cas, on utilise la notion d'admittance complexe qui est, tout simplement, l'inverse de l'impédance complexe :

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}$$

**EXERCICE 1 Détermination d'une impédance**

Un dipôle alimenté par une tension  $e(t) = E_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t$  est traversé par un courant  $i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$  avec les valeurs numériques suivantes :

$$E_{eff} = 230 \text{ V}, \omega = 314 \text{ rad/s}, I_{eff} = 2 \text{ A} \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Calculer l'impédance réelle et l'impédance complexe de ce dipôle.

**Solution**

Exprimons les grandeurs complexes associées à la tension et au courant :

$$\bar{E} = E_{eff} \text{ et } \bar{i} = I_{eff} e^{j\varphi}$$

On peut alors immédiatement exprimer l'impédance complexe du dipôle :

$$\bar{Z} = \frac{\bar{E}}{\bar{i}} = \frac{E_{eff}}{I_{eff} e^{j\varphi}} = \frac{E_{eff}}{I_{eff}} e^{-j\varphi} = Z e^{-j\varphi}$$

Application numérique :

$$\bar{Z} = \frac{230}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} = 115 e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Le module de cette impédance complexe se lit immédiatement dans l'expression :

$$Z = |\bar{Z}| = 115 \Omega$$

On peut aussi exprimer les parties résistive et réactive du dipôle :

$$\begin{cases} R = Z \cos \varphi = 115 \cos \frac{\pi}{4} = 115 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 81 \Omega \\ X = Z \sin \varphi = -115 \sin \frac{\pi}{4} = -115 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -81 \Omega \end{cases}$$

$$\bar{Z} = 81 \Omega - j81 \Omega$$

**EXERCICE 2 Calcul d'un courant**

Un dipôle d'impédance complexe  $\bar{Z}$  est alimenté par une tension  $e(t) = E_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t$ .

On donne :  $E_{eff} = 230 \text{ V}$ ,  $\omega = 314 \text{ rad/s}$ ,  $\bar{Z} = R + jX$  avec  $R = 10 \Omega$  et  $X = 10 \Omega$ .

Déterminer l'expression du courant  $i(t)$  qui traverse le dipôle.

**Solution**

On sait que le courant  $i(t)$  est de la forme  $i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ .

On a d'une part :

$$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{\bar{Z}} = \frac{E_{eff}}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{230}{\sqrt{10^2 + 10^2}} \approx 16 \text{ A}$$

Et d'autre part :

$$\varphi = -\arg \bar{Z} = -\arctan \frac{X}{R} = -\arctan 1 \approx -0,79 \text{ rad}$$

Par conséquent, le courant, exprimé en ampères, est :

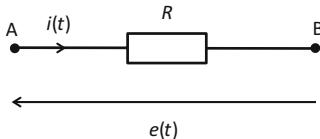
$$i(t) = 16\sqrt{2} \cos(\omega t - 0,79)$$

Les trois dipôles passifs linéaires usuels sont la résistance, le condensateur et la bobine. Ils sont linéaires au sens où leur fonctionnement est régi par une équation différentielle linéaire. La plupart des circuits sont constitués ou modélisés par des associations composées de ces trois dipôles élémentaires. L'objectif de cette fiche consiste à connaître leur fonctionnement et la manière dont on les modélise en régime sinusoïdal.

## 1. La résistance ou résistor

Le résistor est un dipôle pour lequel la loi de fonctionnement est une simple relation de proportionnalité qui est appelée la loi d'Ohm. Caractérisé par sa résistance  $R$  mesurée en ohms ( $\Omega$ ), ce dipôle, s'il présente à ses bornes une tension quelconque  $e(t)$ , (figure 4.1), est parcouru par un courant  $i(t)$  tel que :

$$e(t) = R i(t)$$



**Figure 4.1**

En régime sinusoïdal, si on pose  $e(t) = E_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t$ , on aura donc :

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{E_{eff} \sqrt{2}}{R} \cos \omega t$$

On notera en particulier que le courant n'est pas déphasé par rapport à la tension.

Si on considère le modèle complexe associé à cette loi de fonctionnement, on aura :

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R} = \frac{E_{eff}}{R} = I_{eff}$$

L'impédance complexe d'une résistance est réelle et n'est rien d'autre que sa valeur  $R$ . Il en est de même pour son impédance réelle.

Pour une résistance, on a :

$$\overline{Z} = Z = R$$

### REMARQUE

Le terme de résistor reste assez peu usité et bien souvent, on l'appelle tout simplement « résistance ». Ce terme de résistance correspond donc souvent au dipôle lui-même et à sa caractéristique électrique.

## 2. Le condensateur

Un condensateur (figure 4.2) est caractérisé par sa capacité exprimée en farads (F) et est régi par l'équation de fonctionnement suivante :

$$e(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \text{ ou encore } i(t) = C \frac{de}{dt}$$

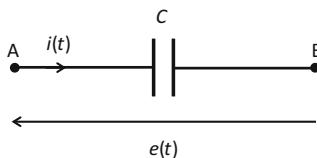


Figure 4.2

Si on suppose qu'une tension sinusoïdale  $e(t) = E_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t$  est appliquée aux bornes du condensateur, on aura donc :

$$i(t) = C \frac{de}{dt} = -C\omega E_{eff} \sqrt{2} \sin \omega t = -C\omega E_{eff} \sqrt{2} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

En représentation complexe, on aura :

$$\overline{I} = -C\omega \overline{E} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Or :  $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

$$\text{D'où : } \bar{I} = jC\omega \bar{E} \Leftrightarrow \bar{E} = \frac{1}{jC\omega} \bar{I}$$

L'impédance complexe  $\bar{Z}$  d'un condensateur de capacité  $C$ , soumis à un régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$  est égale à  $\frac{1}{jC\omega}$ . Son impédance réelle est égale au module de  $\bar{Z}$ , soit  $Z = \frac{1}{C\omega}$ .

Pour un condensateur de capacité  $C$ , on a :

$$\bar{Z} = \frac{1}{jC\omega} \text{ et } Z = \frac{1}{C\omega}$$

#### REMARQUE

Par abus de langage, certes moins souvent employé que celui qui assimile un résistor à une résistance, on appelle parfois un condensateur, une capacité, voire, en langage plus familier, une « capa ».

### 3. La bobine

Une bobine (figure 4.3) est caractérisée par son inductance propre ou auto-inductance en henrys (H) et est régie par l'équation de fonctionnement suivante :

$$e(t) = L \frac{di}{dt} \text{ ou encore } i(t) = \frac{1}{L} \int e(t) dt$$

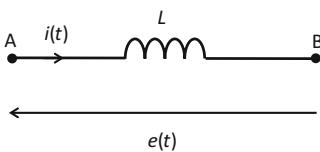


Figure 4.3

Si on suppose qu'une tension sinusoïdale  $e(t) = E_{eff}\sqrt{2} \cos \omega t$  est appliquée aux bornes de la bobine, on aura donc :

$$i(t) = \frac{1}{L} \int E_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t \, dt = \frac{E_{eff} \sqrt{2}}{L\omega} \sin \omega t = \frac{E_{eff} \sqrt{2}}{L\omega} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

En représentation complexe, on aura :

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{L\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Or : } e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j = \frac{1}{j}$$

$$\text{D'où : } \bar{I} = \frac{\bar{E}}{jL\omega} \Leftrightarrow \bar{E} = jL\omega \bar{I}$$

L'impédance complexe  $\bar{Z}$  d'une bobine d'inductance propre soumise à un régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$  est égale à  $jL\omega$ . Son impédance réelle est égale au module de  $\bar{Z}$ , soit  $Z = L\omega$ .

Pour une bobine d'auto-inductance  $L$ , on a :

$$\bar{Z} = jL\omega \text{ et } Z = L\omega$$

### REMARQUE

Par abus de langage, certes moins souvent employé que celui qui assimile un résistor à une résistance, on appelle parfois une bobine, une inductance, voire, en langage plus familier, une « self » qui correspond au terme anglais « self-inductance » pour auto-inductance.

### EXERCICE 1 Calcul du courant dans une bobine

Une bobine d'auto-inductance  $L = 5 \text{ mH}$  est soumise à une différence de potentiel  $e(t) = E_{eff}\sqrt{2} \cos \omega t$  avec  $E_{eff} = 100 \text{ V}$  et  $\omega = 314 \text{ rad/s}$  (figure 4.3). Déterminer l'expression du courant qui la traverse en précisant, notamment, son amplitude et son déphasage par rapport à la tension.

## Solution

Il s'agit bien ici de déterminer l'expression du courant dont on sait déjà qu'il est de la forme  $i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ . Ce sont bien l'amplitude et le déphasage par rapport à  $e(t)$  qu'il faut calculer.

La représentation complexe se prête très bien à ce type de calcul.

L'impédance complexe de la bobine est  $\bar{Z} = jL\omega$ . On a donc :

$$\bar{E} = \bar{Z}\bar{i} = jL\omega\bar{i} \Rightarrow \bar{i} = \frac{\bar{E}}{jL\omega} \text{ avec, rappelons-le : } \bar{E} = E_{\text{eff}} \text{ et } \bar{i} = I_{\text{eff}} e^{i\varphi}$$

$$\text{On a donc : } \bar{i} = I_{\text{eff}} e^{i\varphi} = \frac{E_{\text{eff}}}{jL\omega}$$

Rappelons que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments le sont aussi.

Par conséquent :

$$I_{\text{eff}} = \left| \frac{E_{\text{eff}}}{jL\omega} \right| = \frac{E_{\text{eff}}}{|jL\omega|} = \frac{E_{\text{eff}}}{L\omega} \text{ et } \varphi = \arg \frac{E_{\text{eff}} \sqrt{2}}{jL\omega} = \arg E_{\text{eff}} \sqrt{2} - \arg jL\omega = 0 - \frac{\pi}{2}$$

Au final, on a :

$$i(t) = \frac{E_{\text{eff}}}{L\omega} \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

On retiendra que dans la bobine, le courant est en retard de phase de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à la tension.

Application numérique :

$$I_{\text{eff}} = \frac{100}{5 \times 10^{-3} \times 314} = 64,7 \text{ A}$$

## EXERCICE 2 Calcul de la tension aux bornes d'un condensateur

Un condensateur de capacité  $C = 100 \mu\text{F}$  est soumis à un courant  $i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t$  avec  $I_{\text{eff}} = 4 \text{ A}$  et  $\omega = 314 \text{ rad/s}$  (figure 4.2). Déterminer l'expression de la tension à ses bornes, notamment, son amplitude et son déphasage par rapport au courant.

## Solution

Il s'agit bien ici de déterminer l'expression de la tension dont on sait déjà qu'elle est de la forme  $e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ . Ce sont bien l'amplitude et le déphasage par rapport à  $i(t)$  qu'il faut calculer.

Tout comme pour l'exercice précédent, la représentation complexe se prête très bien à ce type de calcul.

L'impédance complexe du condensateur est  $\bar{Z} = \frac{1}{jC\omega}$ . On a donc :

$$\bar{E} = \bar{Z}\bar{I} = \frac{\bar{I}}{jC\omega}$$

Ici, il convient de faire attention : c'est le courant qui est imposé et sert de référence pour les déphasages. On a donc  $\bar{E} = E_{eff}e^{i\varphi}$  et  $\bar{I} = I_{eff}$ .

$$\text{D'où : } \bar{E} = E_{eff}e^{i\varphi} = \frac{I_{eff}}{jC\omega}$$

Rappelons que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments le sont aussi.

Par conséquent :

$$E_{eff} = \frac{I_{eff}}{C\omega} \text{ et } \varphi = \arg \frac{I_{eff}}{jC\omega} = \arg I_{eff} - \arg jC\omega = 0 - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Au final, on a : } e(t) = \frac{I_{eff}}{C\omega} \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

On retiendra que dans le condensateur, c'est la tension qui est en retard de phase de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport au courant. Ou encore que le courant est en avance de phase par rapport à la tension.

$$\text{Application numérique : } E_{eff} = \frac{4}{100 \times 10^{-6} \times 314} = 127 \text{ V}$$

L'objectif de cette fiche consiste à maîtriser les règles d'association de dipôles linéaires passifs simples. Rappelons que les trois dipôles linéaires passifs usuels sont la résistance  $R$ , le condensateur de capacité  $C$  et la bobine d'auto-inductance  $L$ .

## 1. Association en série

Deux dipôles sont dits associés en série s'ils sont susceptibles d'être parcourus par le même courant (figure 5.1). Dans ces conditions, l'impédance complexe équivalente de l'ensemble est égale à la somme des impédances complexes des deux dipôles. La règle est la même pour trois dipôles ou plus.

$$\overline{Z_{eq}} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

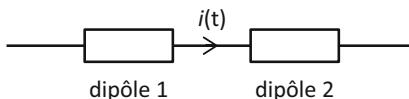


Figure 5.1

### EXEMPLE

Si l'on considère un dipôle formé de la mise en série d'une résistance  $R$  et d'un condensateur de capacité  $C$ , l'impédance complexe équivalente du dipôle ainsi constitué est égale à  $\overline{Z_{eq}} = R + \frac{1}{jC\omega}$ .

### REMARQUE

L'introduction de la pulsation  $\omega$  dans les expressions complexes suppose que les dipôles impliqués sont inclus dans un circuit alimenté par un générateur de pulsation  $\omega$ .

## 2. Association en parallèle

Deux dipôles sont dits associés en parallèle s'ils sont susceptibles de présenter la même différence de potentiels à leurs bornes (figure 5.2). Dans ces conditions, l'impédance complexe équivalente de l'ensemble est telle que son inverse est égal à la somme des inverses des impédances des deux dipôles.

$$\frac{1}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2}$$

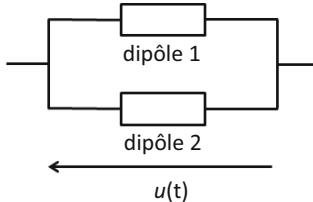


Figure 5.2

$$\text{Ou encore : } \overline{Z}_{eq} = \frac{\overline{Z}_1 \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}$$

On pourra retenir que l'impédance complexe équivalente d'une association en parallèle de deux dipôles est égale au produit des impédances complexes de chacun des deux dipôles, divisé par leur somme. Pour des associations en parallèles de trois dipôles ou plus, la règle de la somme des inverses reste valable.

On peut aussi considérer que ce sont les admittances qui s'ajoutent pour une association en parallèle :

$$\overline{Y}_{eq} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2$$

### EXEMPLE

Si on considère un dipôle formé de la mise en parallèle d'une résistance  $R$  et d'un condensateur de capacité  $C$ , l'impédance complexe équivalente du dipôle ainsi constitué est égale à :

$$\overline{Z}_{eq} = \frac{R \times \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

### 3. Impédance réelle d'un dipôle

La règle de calcul de l'impédance réelle telle que présentée dans la [fiche 4](#) reste valable lorsqu'il s'agit de la calculer pour une association de dipôles.

L'impédance réelle d'un dipôle est égale au module de son impédance complexe.

#### EXERCICE 1 Calcul d'une impédance équivalente simple

Calculer l'impédance complexe équivalente  $\overline{Z}_{eq}$  du dipôle représenté sur la figure 5.3.

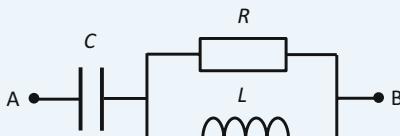


Figure 5.3

#### Solution

La figure 5.4 représente le modèle complexe du dipôle. L'association en parallèle de la résistance et de la bobine présente une impédance complexe que l'on peut noter  $\overline{Z}_1$  et qui vaut :

$$\overline{Z}_1 = \frac{R \cdot jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

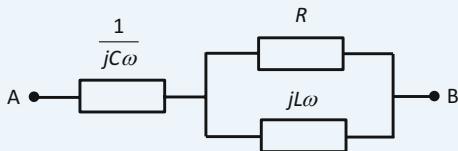


Figure 5.4

Cette impédance  $\overline{Z}_1$  se trouve associée en série avec l'impédance complexe du condensateur. On a donc :

$$\overline{Z_{eq}} = \frac{1}{jC\omega} + \overline{Z}_1 = \frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

Une réduction au même dénominateur s'impose si on veut présenter une expression normalisée sous la forme d'une fraction de deux nombres complexes.

$$\overline{Z_{eq}} = \frac{R + jL\omega - RLC\omega^2}{jC\omega(R + jL\omega)} = \frac{(R - RLC\omega^2) + jL\omega}{-LC\omega^2 + jRC\omega}$$

## EXERCICE 2 Calcul d'une impédance RLC parallèle

Calculer l'impédance complexe équivalente  $\overline{Z}_{eq}$  du dipôle représenté sur la figure 5.5. Calculer ensuite son impédance réelle. Quelle est la valeur de cette impédance réelle lorsque  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ?

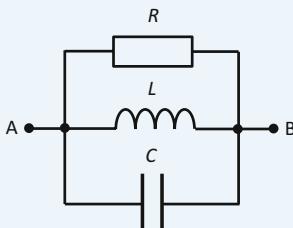


Figure 5.5

### Solution

L'impédance complexe du dipôle AB se détermine à partir des règles d'association de dipôles. On a :

$$\frac{1}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$$

Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{1}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{jL\omega + R - RLC\omega^2}{jRL\omega}$$

Par conséquent :

$$\overline{Z}_{eq} = \frac{jRL\omega}{R - RLC\omega^2 + jL\omega}$$

On en déduit alors l'impédance réelle :

$$Z_{eq} = \left| Z_{ea} \right| = \frac{RL\omega}{\sqrt{(R - RLC\omega^2)^2 + L^2\omega^2}}$$

Pour  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , l'expression entre parenthèses située sous la racine, au dénominateur, est nulle et on a :

$$Z_{eq} = \frac{RL\omega}{\sqrt{L^2\omega^2}} = R$$

L'impédance constituée de l'association du condensateur et de la bobine tend en fait vers l'infini et cette impédance  $Z_{eq} = R$  est en fait maximale.

# Diagramme de Fresnel

Le diagramme de Fresnel propose un modèle graphique de la représentation complexe d'un dipôle. Il est basé, tout simplement, sur la représentation graphique des nombres complexes dans un plan où l'axe des abscisses constitue l'axe réel et l'axe des ordonnées l'axe imaginaire. Le diagramme de Fresnel peut, dans certains cas, aider à la résolution de problèmes simples d'électricité en régime sinusoïdal.

## 1. Représentation d'une impédance quelconque dans le plan complexe

Considérons un dipôle quelconque d'impédance  $\bar{Z} = R + jX$ . Dans le plan complexe, ce nombre complexe est représenté par le point M de coordonnées  $(R, X)$  comme indiqué sur la figure 6.1. On peut aussi considérer qu'il est représenté par le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

Le schéma de la figure 6.1 représente le diagramme de Fresnel du dipôle qui permet d'obtenir un certain nombre de relations très utiles.

Ainsi, le module de  $\bar{Z}$  n'est rien d'autre, ici, que l'hypoténuse du triangle  $(OPM)$ , soit  $Z = |\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$ .

De même, l'argument de  $\bar{Z}$  est l'angle formé par l'axe des abscisses et le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , repéré dans le sens trigonométrique, soit  $\psi = \arg \bar{Z} = \arctan \frac{X}{R}$ .

On a aussi :  $\cos \psi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$  et  $\sin \psi = \frac{X}{Z} = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

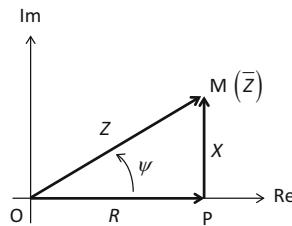


Figure 6.1

## 2. Diagramme de Fresnel d'une association en série de deux impédances quelconques

Considérons deux dipôles d'impédances  $\overline{Z}_1$  et  $\overline{Z}_2$  associés en série avec  $\overline{Z}_1 = R_1 + jX_1$  représenté sur la figure 6.2 par le vecteur  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overline{Z}_2 = R_2 + jX_2$  représenté par le vecteur  $\overrightarrow{OM_2}$ .

La représentation de Fresnel de la somme  $\overline{Z}_{eq} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2$  des deux impédances  $\overline{Z}_1$  et  $\overline{Z}_2$  associées en série correspond au vecteur  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ .

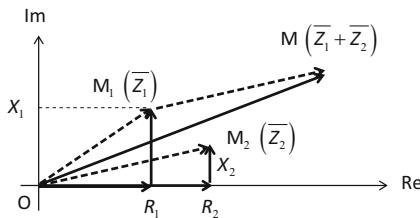


Figure 6.2

## 3. Diagramme de Fresnel d'un dipôle RLC série

On considère un dipôle formé de l'association en série d'une résistance  $R$ , d'une bobine d'inductance  $L$  et d'un condensateur de capacité  $C$ . L'impédance complexe totale du dipôle, soumis à un régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$  est donc :

$$\overline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

Soit encore :

$$\overline{Z} = R + jL\omega - \frac{j}{C\omega}$$

Sur le diagramme de la figure 6.3 sont représentés ces trois termes qui, ajoutés les uns aux autres, forment l'impédance totale du dipôle.

On notera en particulier que les deux termes  $jL\omega$  et  $-\frac{j}{C\omega}$  correspondent à des vecteurs parallèles à l'axe imaginaire (puisque ce sont des nombres imaginaires purs) et que l'angle  $\psi$  est susceptible d'être positif ou négatif selon le signe de  $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ .

Si  $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = 0$ , on a  $\bar{Z} = R$ .

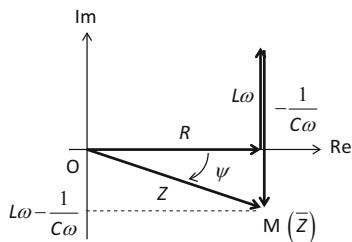


Figure 6.3

### REMARQUE

Évidemment, les informations issues du diagramme de Fresnel peuvent toutes être retrouvées mathématiquement sans effectuer de tracé mais cet outil graphique peut s'avérer d'une aide précieuse pour aborder la notion d'impédance complexe.

### EXERCICE 1 Dipôle RL série

On considère un dipôle formé de l'association en série d'une résistance  $R$  et d'une bobine d'inductance  $L$ . On suppose que ce dipôle est alimenté par une source de tension  $e(t) = E_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t$  et qu'un courant  $i(t)$  circule dans le dipôle. Tracer le diagramme de Fresnel de ce dipôle et en déduire l'avance algébrique de phase  $\varphi$  entre  $i(t)$  et  $e(t)$ .

Toujours à partir du diagramme de Fresnel, montrer que pour diminuer ce déphasage de moitié, il convient de placer en série avec le dipôle d'origine, une résistance supplémentaire  $R'$  et que  $R' > R$ . Il est recommandé de faire un diagramme dans lequel on aura  $L\omega > R$ .

### Solution

La figure 6.4 représente le diagramme de Fresnel du dipôle RL série. Sur ce diagramme, on obtient  $\psi = \arg \bar{Z} = \arctan \frac{L\omega}{R}$ .

Or on sait que  $\bar{Z} = \frac{\bar{E}}{\bar{I}}$  ou encore que  $\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{E_{eff}}{\bar{Z}}$ .

Par conséquent,  $\varphi = \arg \bar{I} = \arg \frac{E_{eff}}{\bar{Z}} = -\arg \bar{Z} = -\psi$

On notera bien que l'avance algébrique de phase du courant sur la tension est égale à l'opposé de l'argument de l'impédance complexe du dipôle.

Si on souhaite à présent diviser par deux cet angle  $\psi$ , il faut diviser par deux l'angle  $\psi$ . En traçant cet angle  $\psi/2$  sur le diagramme de Fresnel (figure 6.5), on remarque que si on laisse la partie imaginaire  $L\omega$  inchangée, il faut augmenter la partie réelle, donc ajouter une résistance au dipôle initial.

En traçant un angle  $\psi$  approximativement divisé par deux, on remarque que l'impédance complexe du nouveau dipôle correspond à une partie résistive supérieure à  $2R$ . La résistance  $R'$  qu'il faut ajouter en série au dipôle RL d'origine est donc bien supérieure à  $R$ .

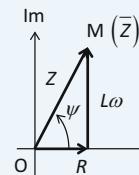


Figure 6.4

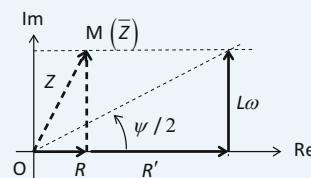


Figure 6.5

# Équivalence triangle-étoile

L'équivalence ou transformation triangle-étoile, également connue sous le nom de théorème de Kenelly permet de déterminer un circuit équivalent à une configuration formée de trois impédances disposées en triangle, cet équivalent étant composé de trois autres impédances disposées en étoile que l'on peut déterminer en fonction des impédances du circuit initial.

## 1. Principe de l'équivalence

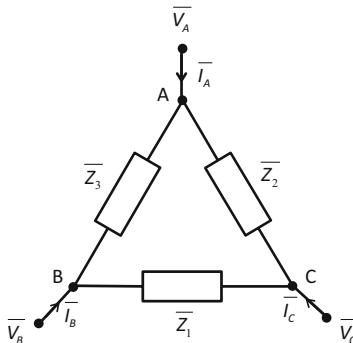


Figure 7.1

La figure 7.1 représente trois impédances complexes  $\overline{Z}_1$ ,  $\overline{Z}_2$  et  $\overline{Z}_3$  associées en un triangle ABC et qui forment, par conséquent, un élément d'un circuit plus complexe. Soit  $\overline{I}_A$ ,  $\overline{I}_B$  et  $\overline{I}_C$  les courants entrant respectivement aux points A, B et C et  $\overline{V}_A$ ,  $\overline{V}_B$  et  $\overline{V}_C$  les tensions en ces mêmes points.

Sur la figure 7.2 est représentée une association de trois impédances  $\overline{Z}_A$ ,  $\overline{Z}_B$  et  $\overline{Z}_C$  disposées en étoile. Il s'agit de déterminer les expressions de ces impédances en fonction de  $\overline{Z}_1$ ,  $\overline{Z}_2$  et  $\overline{Z}_3$  de manière à ce que les deux circuits soient équivalents.

On considérera que les deux circuits sont équivalents si, soumis aux mêmes tensions  $\overline{V_A}$ ,  $\overline{V_B}$  et  $\overline{V_C}$ , les courants  $\overline{I_A}$ ,  $\overline{I_B}$  et  $\overline{I_C}$  restent inchangés.

### REMARQUE

C'est surtout le passage de la configuration triangle vers la configuration étoile qui est utile même si la transformation inverse peut parfois être intéressante. Dans l'exemple qui est développé ci-dessous, on voit en effet que la présence d'une association en triangle dans un circuit peut être problématique pour déterminer l'impédance équivalente à un dipôle qui contient une telle configuration.

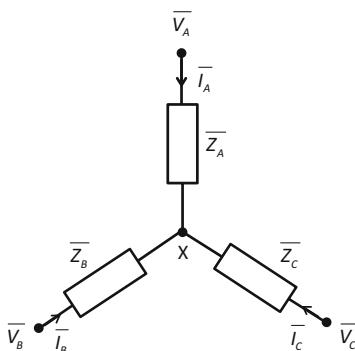


Figure 7.2

### EXEMPLE

Considérons le schéma de la figure 7.3 qui représente une association d'impédances dont on cherche l'impédance équivalente. Avec les seules règles de calcul d'impédances série ou parallèle, il est impossible de déterminer cette impédance équivalente. En effet, aucun couple d'impédances ne se trouve en série ou en parallèle. En revanche, en remplaçant le triangle formé par  $\overline{Z_1}$ ,  $\overline{Z_2}$  et  $\overline{Z_3}$  par une association équivalente en étoile (figure 7.4), on pallie ce problème puisqu'on met en évidence facilement que  $\overline{Z_B}$  et  $\overline{Z_4}$  sont en série, tout comme  $\overline{Z_C}$  et  $\overline{Z_5}$ . Les impédances  $\overline{Z_B} + \overline{Z_4}$  et  $\overline{Z_C} + \overline{Z_5}$  se trouvent alors associées en parallèle et l'ensemble est ensuite placé en série avec  $\overline{Z_A}$ .

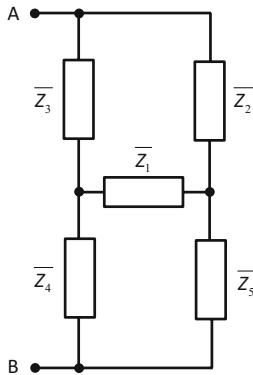


Figure 7.3

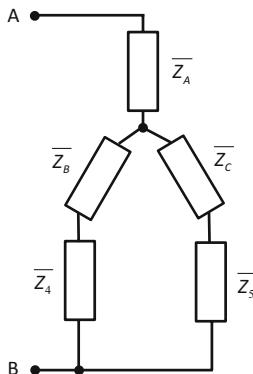


Figure 7.4

## 2. Expressions des impédances équivalentes

Le circuit étoile de la figure 7.2 est équivalent à la configuration triangle de la figure 7.1 si et seulement si :

$$\overline{Z_A} = \frac{\overline{Z_2}\overline{Z_3}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3}} \quad \overline{Z_B} = \frac{\overline{Z_1}\overline{Z_3}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3}} \quad \overline{Z_C} = \frac{\overline{Z_1}\overline{Z_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3}}$$

**REMARQUE**

Les notations ayant été choisies de manière à respecter la symétrie des dispositifs, les deux dernières expressions s'obtiennent par permutation des indices dans la première.

La transformation inverse (étoile vers triangle) est obtenue par les expressions suivantes :

$$\overline{Z}_1 = \frac{\overline{Z}_A \overline{Z}_B + \overline{Z}_B \overline{Z}_C + \overline{Z}_C \overline{Z}_A}{\overline{Z}_A} \quad \overline{Z}_2 = \frac{\overline{Z}_A \overline{Z}_B + \overline{Z}_B \overline{Z}_C + \overline{Z}_C \overline{Z}_A}{\overline{Z}_B}$$

$$\overline{Z}_3 = \frac{\overline{Z}_A \overline{Z}_B + \overline{Z}_B \overline{Z}_C + \overline{Z}_C \overline{Z}_A}{\overline{Z}_C}$$

**EXERCICE 1 Calcul d'une résistance équivalente**

La figure 7.5 représente un dipôle AB formé d'une association de cinq résistances. Calculer la résistance  $R_{eq}$  équivalente du dipôle.

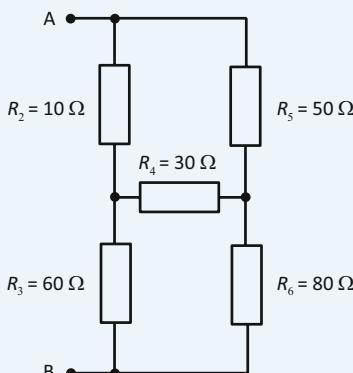


Figure 7.5

## Solution

Les résistances  $R_2$ ,  $R_4$  et  $R_5$  forment une association en triangle que nous pouvons transformer en une étoile (figure 7.6). En appliquant les expressions *ad hoc*, on a :

$$R_A = \frac{R_5 R_2}{R_2 + R_4 + R_5} = 5,6 \Omega$$

$$R_B = \frac{R_4 R_2}{R_2 + R_4 + R_5} = 3,3 \Omega$$

$$R_C = \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = 16,7 \Omega$$

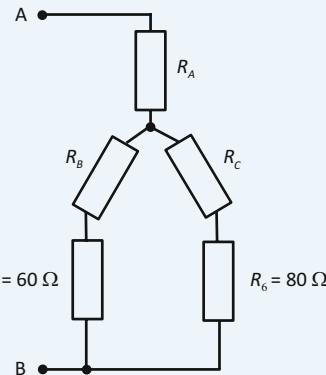


Figure 7.6

Dans ce nouveau schéma, les résistances  $R_B$  et  $R_3$  sont en série et forment une résistance équivalente de  $63,3 \Omega$ . Par ailleurs,  $R_C$  et  $R_6$  sont également en série et forment une résistance équivalente de  $96,7 \Omega$ . Ces deux résistances de  $63,3 \Omega$  et de  $96,7 \Omega$  se trouvent associées en parallèle et forment une résistance équivalente

$$r = \frac{63,3 \times 96,7}{63,3 + 96,7} = 38,3 \Omega.$$

Cette résistance  $r$  se trouve finalement associée en série avec  $R_A$ . On a donc :

$$R_{eq} = r + R_A = 38,3 + 5,6 = 43,9 \Omega$$

Dans l'étude des circuits électriques en régime sinusoïdal, la modélisation complexe des différents dispositifs revêt un caractère essentiel comme nous pouvons nous en rendre compte à la lecture des [fiches 1 à 7](#). Ce chapitre a pour objectif de rassembler ce qu'il est fondamental de savoir sur les nombres complexes et leur manipulation, afin que l'outil mathématique ne soit pas un obstacle à la résolution des problèmes d'électricité.

## 1. Différentes écritures et représentations

### ■ Notation algébrique classique

Mathématiquement, un nombre complexe est un nombre formé d'une partie réelle  $a$  et d'une partie imaginaire  $b$  et qui s'écrit sous la forme :

$$\bar{z} = a + jb$$

Où le nombre  $j$  est le nombre imaginaire  $\sqrt{-1}$ .

Soit encore :  $j^2 = -1$ .

#### REMARQUE

En mathématiques, le nombre imaginaire  $\sqrt{-1}$  est en général noté  $i$  mais les électriciens préfèrent utiliser la lettre  $j$  afin qu'il n'y ait aucune confusion possible avec un courant.

### ■ Représentation graphique

La représentation la plus simple d'un nombre complexe consiste à considérer que les parties réelle et imaginaire ( $a, b$ ) sont les coordonnées d'un point M appartenant à un plan (que l'on nomme le plan complexe) où l'axe des abscisses, appelé axe réel, porte la partie réelle  $a$  et où l'axe des ordonnées, appelé axe imaginaire, porte la partie imaginaire  $b$ . Le nombre complexe  $\bar{z} = a + jb$  est appelé affixe du point M (voir figure 8.1).

Dans le plan complexe, le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  peut être repéré par son module  $\rho$  et par son argument qui est l'angle  $\theta$  qu'il forme avec l'axe réel :

Soit :  $\rho = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $\tan \theta = \frac{b}{a}$ .

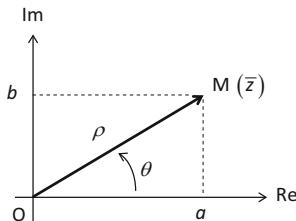


Figure 8.1

### REMARQUE

L'équation  $\tan \theta = \frac{b}{a}$  conduit à considérer le signe de  $a$  :

- Si  $a > 0$  on a :  $\theta = \arg \bar{z} = \arctan \frac{b}{a}$ .
- Si  $a < 0$  on a :  $\theta = \arg \bar{z} = \pi + \arctan \frac{b}{a}$ .

### Notation exponentielle et formule d'Euler

Tout nombre complexe  $\bar{z} = a + jb$  peut ainsi être également défini par son module et son argument  $(\rho, \theta)$  qui ne sont rien d'autre que les coordonnées polaires du point M d'affixe  $\bar{z}$  dans le plan complexe.

Sur la figure 8.1, on notera que l'on a :

$$a = \rho \cos \theta \text{ et } b = \rho \sin \theta$$

On peut donc écrire :  $\bar{z} = a + jb = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$ .

On doit au mathématicien suisse Euler l'égalité qui porte son nom et qui permet d'écrire un nombre complexe sous la forme d'une exponentielle :

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$$

On peut donc écrire tout nombre complexe sous cette forme, qui fait apparaître le module et l'argument en une seule expression :

$$\bar{z} = a + jb = \rho e^{j\theta}$$

**REMARQUE**

Un nombre complexe de la forme  $jb$  est qualifié d'imaginaire pur, son module est égal à la valeur absolue de  $b$  et son argument est égal à  $\pi/2$  si  $b > 0$  ou à  $-\pi/2$  si  $b < 0$ .

De même, un nombre réel  $a$  n'est rien d'autre qu'un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle. Son module est égal à sa valeur absolue et son argument est égal à 0 si  $a > 0$  ou à  $\pi$  si  $a < 0$ .

## 2. Propriétés fondamentales

### ■ Nombre complexe conjugué

Si on considère un nombre complexe quelconque  $\bar{z} = a + jb$ , son conjugué est défini par :

$$\bar{z}^* = a - jb$$

**REMARQUE**

Les mathématiciens ont l'habitude d'utiliser la barre supérieure du type  $\bar{z}$  pour exprimer le conjugué d'un nombre complexe qu'ils notent souvent simplement  $z$ . En électricité, comme nous avons l'usage de placer systématiquement une barre supérieure sur les grandeurs complexes pour bien les différencier des grandeurs réelles, nous utilisons l'étoile pour désigner le nombre complexe conjugué de  $\bar{z}$ .

Dans le plan complexe, l'image du conjugué d'un nombre complexe est son symétrique par rapport à l'axe réel.

En notation exponentielle, on a :

$$\bar{z} = \rho e^{j\theta} \Rightarrow \bar{z}^* = \rho e^{-j\theta}$$

On retiendra que l'argument du conjugué d'un nombre complexe est l'opposé de l'argument de ce nombre et que le module du conjugué est égal au module du nombre complexe considéré :

$$|\bar{z}^*| = |\bar{z}| \text{ et } \arg \bar{z}^* = -\arg \bar{z}$$

## Propriétés du conjugué d'un nombre complexe

$$|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z} \cdot \bar{z}^*}$$

$$(\bar{z}^*)^* = \bar{z}$$

$$(\bar{z} + \bar{z}')^* = \bar{z}^* + \bar{z}'^*$$

$$(\bar{z} \cdot \bar{z}')^* = \bar{z}^* \cdot \bar{z}'^*$$

$$\bar{z} + \bar{z}^* = 2 \operatorname{Re}(\bar{z})$$

$$\bar{z}^* = \bar{z} \iff \bar{z} \in \mathbb{R}$$

## Propriétés des modules et arguments

Soit  $\bar{z}$  et  $\bar{z}'$  deux nombres complexes quelconques.

$$|\bar{z} \cdot \bar{z}'| = |\bar{z}| \cdot |\bar{z}'|$$

$$\left| \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \right| = \frac{|\bar{z}|}{|\bar{z}'|}$$

$$\arg(\bar{z} \cdot \bar{z}') = \arg \bar{z} + \arg \bar{z}'$$

$$\arg\left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}\right) = \arg \bar{z} - \arg \bar{z}'$$

### REMARQUE

Ces quatre propriétés sont très importantes dans la manipulation des grandeurs complexes associées aux grandeurs électriques.

## EXERCICE 1 Manipulations simples

Calculer les modules et arguments des nombres complexes suivants et en déduire leurs représentations sous forme exponentielle ainsi que leur représentation graphique dans le plan complexe.

$$\bar{z}_1 = 1+j, \bar{z}_2 = 3j, \bar{z}_3 = -4+4j, \bar{z}_4 = (1+j)(-2+2j), \bar{z}_5 = \frac{2}{1+j}$$

## Solution

Pour chacun des cinq nombres, on s'attachera, si ce n'est déjà fait, à l'exprimer sous la forme partie réelle et partie imaginaire, à partir de quoi le calcul du module et de l'argument ne pose pas de problème. Pour la représentation graphique, il suffit de porter les parties réelles et imaginaires sur les axes et de vérifier que le module et l'argument correspondent bien.

**Premier cas :**  $\bar{z}_1 = 1 + j$

Ce nombre correspond à  $a + jb$  avec  $a = 1$  et  $b = 1$ . Il est déjà placé sous la forme partie réelle et partie imaginaire.

On a donc :  $|\bar{z}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .

Comme la partie réelle est positive, on a :  $\arg \bar{z}_1 = \arctan \frac{b}{a} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ .

D'où :

$$\bar{z}_1 = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Placer le point  $M_1$  d'affixe  $\bar{z}_1 = 1 + j$  dans le plan complexe ne pose aucun souci (figure 8.2) et on vérifie sans peine que le module et l'argument correspondent bien au point que l'on a placé.

**Deuxième cas :**  $\bar{z}_2 = 3j$

Ce nombre est un imaginaire pur dont la partie réelle est positive. On a donc :

$$|\bar{z}_2| = 3 \text{ et } \arg \bar{z}_2 = \frac{\pi}{2}$$

Soit :

$$\bar{z}_2 = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Le point  $M_2$  est le point de coordonnées  $(0, 3)$  (figure 8.3) et on vérifie sans peine que le module et l'argument correspondent bien au point que l'on a placé.

**Troisième cas :**  $\bar{z}_3 = -4 + 4j$

Ce nombre correspond à  $a + jb$  avec  $a = -4$  et  $b = 4$ . Il est déjà placé sous la forme partie réelle et partie imaginaire.

On a donc :  $|\bar{z}_3| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

Comme la partie réelle est négative, on a :

$$\arg \bar{z}_3 = \pi + \arctan \frac{b}{a} = \pi + \arctan (-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

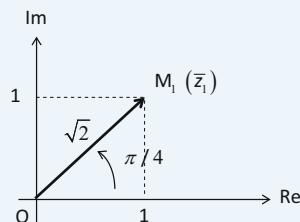


Figure 8.2

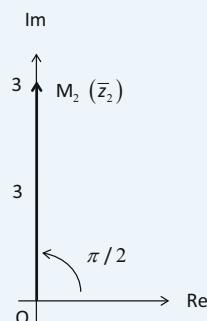


Figure 8.3

Soit :

$$\bar{z}_3 = 4\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

Placer le point  $M_3$  d'affixe  $\bar{z}_3 = -4 + 4j$  dans le plan complexe ne pose aucun souci (figure 8.4) et on vérifie sans peine que le module et l'argument correspondent bien au point que l'on a placé.

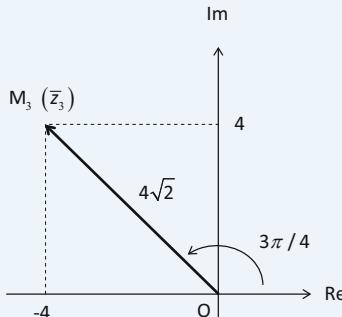


Figure 8.4

**Quatrième cas :**  $\bar{z}_4 = (1+j)(-2+2j)$

Ce nombre est écrit sous la forme d'un produit que nous allons développer afin de mettre en évidence parties réelle et imaginaire.

$$\bar{z}_4 = -2 + 2j + j(-2 + 2j)$$

$$\bar{z}_4 = -2 + 2j - 2j - 2 = -4$$

Nous avons à faire avec un nombre réel négatif. Par conséquent :

$$|\bar{z}_4| = 4 \text{ et } \arg \bar{z}_4 = \pi$$

On peut donc écrire :

$$\bar{z}_4 = 4 \cdot e^{i\pi}$$

Le point  $M_4$  d'affixe  $\bar{z}_4 = -4$  a pour coordonnées  $(-4, 0)$  (figure 8.5) et on vérifie sans peine que le module et l'argument correspondent bien au point que l'on a placé.

**Cinquième cas :**  $\bar{z}_5 = \frac{2}{1+j}$

Ce nombre est écrit sous la forme d'une fraction rationnelle de deux nombres complexes.

Pour mettre en évidence sa partie réelle et sa partie imaginaire, il faut multiplier le

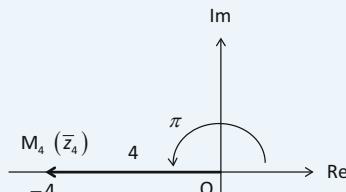


Figure 8.5

dénominateur par son conjugué, autrement dit par  $1-j$  (et donc, son numérateur également).

$$\text{On a donc : } \bar{z}_5 = \frac{2(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{2(1-j)}{1-j^2} = 1-j.$$

$$\text{Par conséquent : } |\bar{z}_5| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Comme la partie réelle est positive, on a :

$$\arg \bar{z}_5 = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \left( \frac{-1}{1} \right) = -\frac{\pi}{4}$$

On peut donc écrire :

$$\bar{z}_5 = \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Placer le point  $M_5$  d'affixe  $\bar{z}_5$  dans le plan complexe ne pose aucun souci (figure 8.6) et on vérifie sans peine que le module et l'argument correspondent bien au point que l'on a placé.

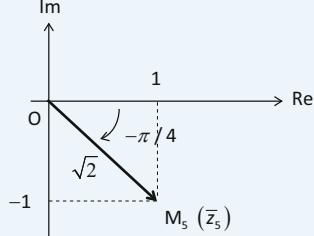


Figure 8.6

## EXERCICE 2 Résolutions d'équations

Résoudre les équations suivantes dont les solutions sont des nombres complexes. Exprimer chaque solution sous la forme partie réelle et partie imaginaire. Pour les deux premières, calculer les modules et arguments des solutions.

$$(3+j)\bar{z} + 4 = 2\bar{z}, (1+j)(\bar{z}+2) = -1+3j, (2+j)\bar{z}^* = 2(\bar{z}+j)+1.$$

### Solution

Commençons par la **première équation** :  $(3+j)\bar{z} + 4 = 2\bar{z}$  et développons :

$$3\bar{z} + j\bar{z} + 4 = 2\bar{z} \Rightarrow \bar{z}(3+j-2) = -4$$

$$\text{Soit : } \bar{z} = \frac{-4}{1+j}.$$

Pour faire apparaître la forme algébrique  $\bar{z} = a + jb$ , la méthode consiste à multiplier le dénominateur et le numérateur de ce nombre complexe par le conjugué du dénominateur, c'est-à-dire par  $1-j$  :

$$\bar{z} = \frac{-4(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{-4+4j}{1-j^2} = -2+2j$$

On en déduit alors module et argument :

$$|\bar{z}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Comme la partie réelle est négative, on a :

$$\arg \bar{z} = \pi + \arctan \frac{b}{a} = \pi + \arctan(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

On peut donc écrire :  $\bar{z} = 2\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$ .

### Deuxième équation :

$$(1+j)(\bar{z}+2) = -1+3j \Rightarrow \bar{z}(1+j) = -1+3j-2-2j$$

$$\bar{z} = \frac{-3+j}{1+j}$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de  $1+j$  :

$$\bar{z} = \frac{(-3+j)(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{-3+j+3j+1}{1-j^2} = \frac{-2+4j}{2} = -1+2j$$

On en déduit alors module et argument :

$$|\bar{z}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Comme la partie réelle est négative, on a :

$$\arg \bar{z} = \pi + \arctan \frac{b}{a} = \pi + \arctan(-2) = \pi - \arctan(2)$$

**Troisième équation :** posons  $\bar{z} = a+jb$ .

Par conséquent,  $\bar{z}^* = a-jb$  et l'équation devient :

$$(2+j)(a-jb) = 2(a+jb+j)+1$$

Développons et exprimons chaque membre sous la forme partie réelle et partie imaginaire :

$$2a - 2jb + aj + b = 2a + 2jb + 2j + 1$$

$$(2a+b)+(a-2b)j = (2a+1)+(2b+2)j$$

Pour que deux nombres complexes soient égaux, il faut que leurs parties réelles d'une part et leurs parties imaginaires d'autre part soient égales. Nous obtenons alors un système de deux équations :

$$\begin{cases} 2a+b=2a+1 \\ a-2b=2b+2 \end{cases}$$

La première équation nous donne  $b = 1$ , que nous remplaçons dans la seconde pour obtenir :

$$a - 2 = 2 + 2 \Rightarrow a = 6$$

Par conséquent, la solution de l'équation est :

$$\bar{z} = 6 + j$$

### EXERCICE 3 Inégalité triangulaire

On considère deux nombres complexes quelconques  $\bar{z}_1$  et  $\bar{z}_2$ . Démontrer l'inégalité suivante appelée inégalité triangulaire :

$$|\bar{z}_1 + \bar{z}_2| \leq |\bar{z}_1| + |\bar{z}_2|$$

#### Solution

Calculons  $|\bar{z}_1 + \bar{z}_2|^2$  en rappelant que le module d'un nombre complexe au carré est le produit de ce nombre par son conjugué :

$$|\bar{z}_1 + \bar{z}_2|^2 = (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)^*$$

Développons :

$$|\bar{z}_1 + \bar{z}_2|^2 = |\bar{z}_1|^2 + |\bar{z}_2|^2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2^* + \bar{z}_2 \bar{z}_1^*$$

Remarquons que  $\bar{z}_1 \bar{z}_2^*$  est le conjugué de  $\bar{z}_2 \bar{z}_1^*$ . Or la somme d'un nombre complexe et de son conjugué est égale à deux fois la partie réelle de ce nombre :

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2^* + \bar{z}_2 \bar{z}_1^* = 2 \operatorname{Re}(\bar{z}_1 \bar{z}_2^*)$$

Or la partie réelle d'un nombre complexe est inférieure ou égale à son module. Donc :

$$2 \operatorname{Re}(\bar{z}_1 \bar{z}_2^*) \leq 2 |\bar{z}_1 \bar{z}_2^*|$$

Soit :

$$2 \operatorname{Re}(\bar{z}_1 \bar{z}_2^*) \leq 2 |\bar{z}_1| |\bar{z}_2|$$

Il en résulte :

$$|\bar{z}_1 + \bar{z}_2|^2 \leq |\bar{z}_1|^2 + |\bar{z}_2|^2 + 2|\bar{z}_1| \cdot |\bar{z}_2|$$

$$|\bar{z}_1 + \bar{z}_2|^2 \leq (|\bar{z}_1| + |\bar{z}_2|)^2$$

En prenant la racine carrée des deux membres de cette inégalité, on obtient bien l'inégalité triangulaire :

$$|\bar{z}_1 + \bar{z}_2| \leq |\bar{z}_1| + |\bar{z}_2|$$

Il n'est pas rare qu'un circuit électrique soit pourvu de plusieurs dipôles actifs, donc de plusieurs sources. Il peut s'agir de plusieurs générateurs de tension ou de courant, de générateurs de pulsations différentes voire d'une combinaison de générateurs sinusoïdaux et continus. Dans cette fiche, nous étudierons plusieurs cas en nous limitant, pour chacun d'entre eux, à des circuits possédant deux sources.

## 1. Sources indépendantes ou non

### Sources indépendantes

Deux sources (qu'il s'agisse de sources de tension ou de courant) sont indépendantes si on peut considérer que la grandeur électrique délivrée par l'une ne dépend pas de celle délivrée par l'autre. Dans la pratique, il s'agira de dispositifs physiquement différents.

Dans ces conditions, l'extinction d'une des sources n'a aucune influence sur le fonctionnement de l'autre qui continue à délivrer la tension ou le courant prédéfini.

On éteint une source de tension en la remplaçant par une tension nulle, autrement dit en la remplaçant par un court-circuit. On éteint une source de courant en la remplaçant par un courant nul, autrement dit en la remplaçant par un circuit ouvert.

### Sources dépendantes

Deux sources (qu'il s'agisse de sources de tension ou de courant) sont dépendantes si on peut considérer que la grandeur électrique délivrée par l'une est une fonction de celle délivrée par l'autre. Dans la pratique, il est rare qu'un dispositif physique réel soit pourvu de telles sources dépendantes. En revanche, il est fréquent de faire apparaître de telles sources dépendantes lorsque l'on construit des schémas équivalents de circuits plus ou moins compliqués comme nous le verrons dans les fiches consacrées aux quadripôles.

Dans ces conditions, l'extinction d'une source entraîne l'extinction de toutes les autres sources qui lui sont dépendantes.

## 2. Principe de superposition

Le principe de superposition est un moyen simple et rapide de déterminer une tension ou un courant à un endroit donné d'un circuit possédant plusieurs sources indépendantes.

Dans un circuit possédant plusieurs sources indépendantes et composé uniquement de dipôles passifs linéaires (résistances, bobines ou condensateurs), toute tension ou tout courant en un endroit donné du circuit est égal à la somme des tensions ou courants générés indépendamment par chacune des sources, les autres sources étant éteintes.

### EXEMPLE

Considérons le schéma de la figure 9.1 représentant le modèle complexe d'un circuit dans lequel on cherche la tension  $\overline{V_A}$ .

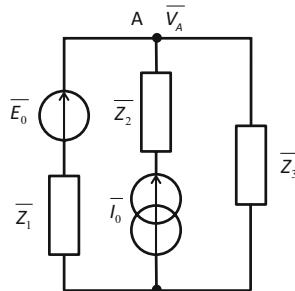


Figure 9.1

Selon le principe de superposition,  $\overline{V_A}$  est la somme de deux tensions : une tension  $\overline{V_{A_{E_0}}}$  qui apparaît en A lorsque le générateur de courant est éteint (donc produite par le seul générateur de tension  $\overline{E_0}$ ) et une tension  $\overline{V_{A_{I_0}}}$  qui apparaît en A lorsque le générateur de tension est éteint (donc produite par le seul générateur de courant  $\overline{I_0}$ ).

Dans un premier temps, éteignons le générateur de tension  $\overline{E_0}$ . On obtient alors le schéma de la figure 9.2 que l'on peut aménager en remarquant que les impédances

$\overline{Z_1}$  et  $\overline{Z_3}$  sont en parallèle. Il apparaît clairement que  $\overline{V_{A_{I_0}}}$  n'est autre que la tension aux bornes de  $\frac{\overline{Z_1}\overline{Z_3}}{\overline{Z_1}+\overline{Z_3}}$  et comme elle est traversée par le courant  $\overline{I_0}$ , on a :

$$\overline{V_{A_{I_0}}} = \frac{\overline{Z_1}\overline{Z_3}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_3}} \overline{I_0}$$

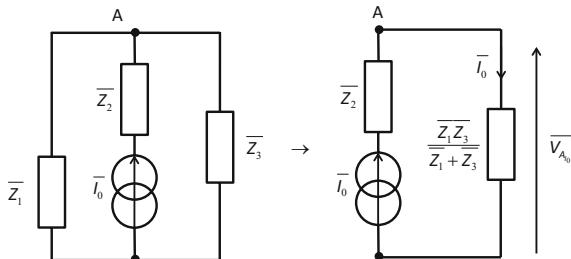


Figure 9.2

Dans un second temps, nous éteignons la source de courant en la remplaçant par un circuit ouvert (figure 9.3). Le circuit est alors parcouru par le courant  $\overline{I} = \frac{\overline{E}_0}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_3}$  et comme la tension  $\overline{V_{A_{E_0}}}$  règne aux bornes de  $\overline{Z_3}$ , on a :

$$\overline{V_{A_{E_0}}} = \frac{\overline{Z_3}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_3}} \overline{E}_0$$

Il n'y a plus qu'à appliquer le principe de superposition : lorsque les deux sources sont actives, on a :

$$\overline{V_A} = \overline{V_{A_{E_0}}} + \overline{V_{A_{I_0}}} = \frac{\overline{Z_3}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_3}} \overline{E}_0 + \frac{\overline{Z_1}\overline{Z_3}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_3}} \overline{I_0} = \frac{\overline{Z_3}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_3}} (\overline{E}_0 + \overline{Z_1} \overline{I_0})$$

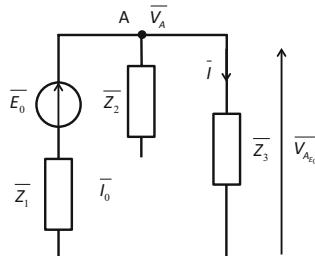


Figure 9.3

## EXERCICE 1 Tension dans un circuit à deux générateurs

On considère le schéma de la figure 9.4. Déterminer la tension  $\overline{V_3}$  aux bornes de l'impédance  $\overline{Z_3}$ .

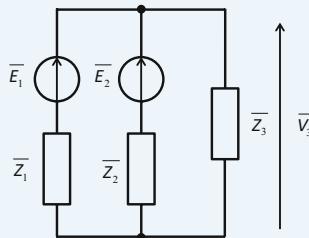


Figure 9.4

### Solution

La tension  $\overline{V_3}$  résulte de la superposition de deux tensions. La première est la tension  $\overline{V_{3E_1}}$  présente aux bornes de  $\overline{Z_3}$  lorsque la source  $\overline{E_2}$  est éteinte (figure 9.5), tandis que la seconde est la tension  $\overline{V_{3E_2}}$  présente aux bornes de  $\overline{Z_3}$  lorsque la source  $\overline{E_1}$  est éteinte (figure 9.6).

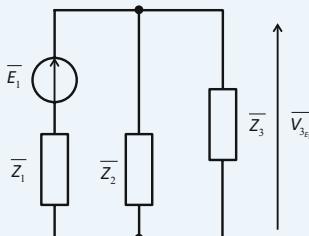


Figure 9.5

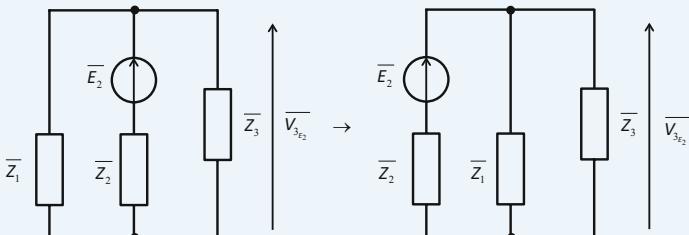


Figure 9.6

Dans le schéma de la figure 9.5, les deux impédances  $\overline{Z_2}$  et  $\overline{Z_3}$  sont en parallèle et forment donc une impédance équivalente  $\frac{\overline{Z_2}\overline{Z_3}}{\overline{Z_2}+\overline{Z_3}}$ . Le courant qui circule dans le circuit est donc égal à  $\frac{\overline{E}_1}{\overline{Z}_1 + \frac{\overline{Z_2}\overline{Z_3}}{\overline{Z_2}+\overline{Z_3}}}$ . La tension aux bornes de  $\overline{Z_3}$  est celle que l'on retrouve aux bornes de la résistance équivalente  $\frac{\overline{Z_2}\overline{Z_3}}{\overline{Z_2}+\overline{Z_3}}$  :

$$\overline{V_{3E_1}} = \frac{\overline{Z_2}\overline{Z_3}}{\overline{Z_2}+\overline{Z_3}} \cdot \frac{\overline{E}_1}{\overline{Z}_1 + \frac{\overline{Z_2}\overline{Z_3}}{\overline{Z_2}+\overline{Z_3}}} = \frac{\overline{Z_2}\overline{Z_3}\overline{E}_1}{\overline{Z_1}\overline{Z_2} + \overline{Z_1}\overline{Z_3} + \overline{Z_2}\overline{Z_3}}$$

Dans le schéma de la figure 9.6, ce sont à présent les deux impédances  $\overline{Z_1}$  et  $\overline{Z_3}$  qui sont en parallèle et forment donc une impédance équivalente  $\frac{\overline{Z_1}\overline{Z_3}}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_3}$ . Le courant qui circule dans le circuit est donc égal à  $\frac{\overline{E}_2}{\overline{Z}_2 + \frac{\overline{Z_1}\overline{Z_3}}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_3}}$ . La tension aux bornes de  $\overline{Z_3}$  est celle que l'on retrouve aux bornes de la résistance équivalente  $\frac{\overline{Z_1}\overline{Z_3}}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_3}$  :

$$\overline{V_{3E_2}} = \frac{\overline{Z_1}\overline{Z_3}}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_3} \cdot \frac{\overline{E}_2}{\overline{Z}_2 + \frac{\overline{Z_1}\overline{Z_3}}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_3}} = \frac{\overline{Z_1}\overline{Z_3}\overline{E}_2}{\overline{Z_1}\overline{Z_2} + \overline{Z_1}\overline{Z_3} + \overline{Z_2}\overline{Z_3}}$$

En appliquant le principe de superposition, on obtient la tension  $\overline{V_3}$  recherchée :

$$\overline{V_3} = \overline{V_{3E_1}} + \overline{V_{3E_2}} = \frac{\overline{Z_2}\overline{Z_3}\overline{E}_1 + \overline{Z_1}\overline{Z_3}\overline{E}_2}{\overline{Z_1}\overline{Z_2} + \overline{Z_1}\overline{Z_3} + \overline{Z_2}\overline{Z_3}}$$

Une des problématiques souvent rencontrée en électricité consiste à déterminer le courant débité par un générateur de tension dans un dipôle ou un circuit quelconque. Bien souvent, cette étape est nécessaire pour dimensionner l'alimentation d'un circuit, notamment en termes de puissance, comme nous le verrons dans les [fiches 17 à 19](#).

## 1. Principe de base

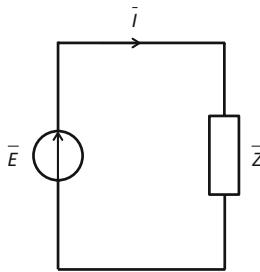


Figure 10.1

La figure 10.1 représente le modèle complexe d'un générateur de tension sinusoïdale au bornes duquel on relie un dipôle AB possédant une impédance complexe  $\bar{Z}$ . Le générateur, caractérisé par une tension  $e(t)$ , impose cette tension au dipôle. Un courant  $i(t)$  circule alors dans le circuit. Il est la conséquence de la mise sous tension du dipôle. On dit que ce courant est débité par le générateur. On notera que la convention générateur est respectée pour le générateur tout comme la convention récepteur l'est pour le dipôle.

Si on a  $e(t) = E_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t$ , la forme complexe associée à cette tension est :  $\bar{E} = E_{eff}$ . Le courant, quant à lui, est sinusoïdal, de même pulsation. Si on note  $I_{eff}$  sa valeur efficace et  $\varphi$  son avance de phase par rapport à  $e(t)$ , on aura :

$$i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

La forme complexe associée à ce courant  $i(t)$  est :

$$\bar{I} = I_{\text{eff}} e^{j\varphi}$$

Dans cette écriture complexe,  $I_{\text{eff}}$  est aussi le module de  $\bar{I}$  et  $\varphi$  est son argument.

La loi d'Ohm généralisée au modèle complexe du circuit nous permet alors d'écrire :

$$\bar{E} = \bar{Z} \bar{I} \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}}$$

$$\text{Soit encore : } E_{\text{eff}} = \bar{Z} I_{\text{eff}} e^{j\varphi} \Rightarrow I_{\text{eff}} e^{j\varphi} = \frac{E_{\text{eff}}}{\bar{Z}}.$$

Rappelons que l'égalité de deux nombres complexes est équivalente à l'égalité des modules et à l'égalité des arguments.

On a donc :

$$I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{|\bar{Z}|} = \frac{E_{\text{eff}}}{Z} \text{ et } \varphi = \arg(E_{\text{eff}}) - \arg(\bar{Z}) = -\arg(\bar{Z})$$

Nous retiendrons que la valeur efficace du courant débité dans un dipôle par un générateur de tension sinusoïdale de valeur efficace  $E_{\text{eff}}$  est égale au quotient de  $E_{\text{eff}}$  par l'impédance réelle du dipôle. L'avance de phase du courant sur la tension  $e(t)$  est égale à l'opposé de l'argument de l'impédance complexe du dipôle.

### EXEMPLE

La figure 10.2 représente un générateur  $e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t$  relié à une bobine d'inductance propre  $L$ . On cherche à déterminer l'expression du courant  $i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ . Autrement dit, on cherche  $I_{\text{eff}}$  et  $\varphi$ .

L'impédance complexe de la bobine a pour expression :

$$\bar{Z} = jL\omega$$

On a donc :

$$\bar{I} = I_{\text{eff}} e^{j\varphi} = \frac{E_{\text{eff}}}{\bar{Z}} = \frac{E_{\text{eff}}}{jL\omega}$$

On en déduit :

$$I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{|jL\omega|} = \frac{E_{\text{eff}}}{L\omega} \text{ et } \varphi = -\arg(jL\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Soit :

$$i(t) = I_{\text{eff}} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_{\text{eff}}}{L\omega} \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

I\_effsqrt(2)cos(wt+phi)

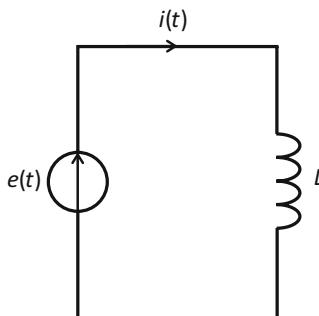


Figure 10.2

## 2. Méthode

Pour calculer l'expression du courant débité par un générateur sinusoïdal dans un dipôle quelconque formé d'une association de dipôles simples linéaires, il faut :

1. Calculer l'impédance complexe du dipôle en utilisant les règles qui régissent les associations de dipôles simples (série, parallèle, transformation triangle-étoile).
2. Calculer le module de cette impédance complexe pour déterminer la valeur efficace du courant.
3. Calculer l'argument de l'impédance complexe pour déterminer l'avance de phase du courant (qui lui est opposé).

## EXERCICE 1 Calcul du courant dans un circuit RC parallèle

La figure 10.3 représente un générateur de tension sinusoïdale  $e(t) = E_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t$  relié à un dipôle formé d'un condensateur et d'une résistance placés en parallèle. Calculer l'expression du courant  $i(t)$  qui circule dans le circuit.

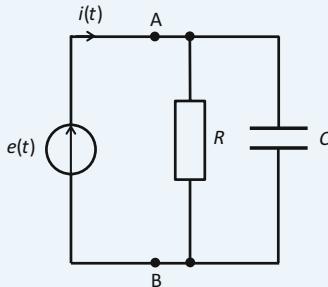


Figure 10.3

### Solution

L'impédance complexe du dipôle AB se détermine à partir des règles d'association de dipôles. La résistance  $R$  se trouvant en parallèle avec le condensateur  $C$ , ils forment une impédance complexe équivalente  $\bar{Z}$  telle que :

$$\bar{Z} = \frac{R \cdot \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Il nous reste à calculer le module et l'argument de cette impédance complexe :

$$Z = |\bar{Z}| = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

$$\arg \bar{Z} = 0 - \arctan(R_2 C \omega)$$

On en déduit alors, en posant  $i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$  :

$$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{Z} = E_{eff} \frac{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}{R}$$

$$\varphi = \arctan(RC\omega)$$

## EXERCICE 2 Calcul du courant débité dans un dipôle

La figure 10.4 représente un générateur de tension sinusoïdale  $e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t$  relié à un dipôle formé de deux résistances et d'un condensateur. Calculer l'expression du courant  $i(t)$  qui circule dans le circuit.

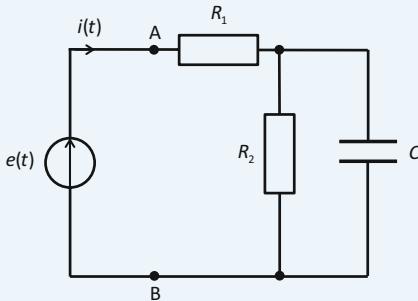


Figure 10.4

### Solution

L'impédance complexe du dipôle AB se détermine à partir des règles d'association de dipôles. La résistance  $R_2$  se trouvant en parallèle avec le condensateur  $C$ , ils forment une impédance complexe  $\bar{Z}_{eq}$  telle que :

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{jC\omega}}{R_2 + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega}$$

Cette impédance  $\bar{Z}_{eq}$  étant en série avec  $R_1$ , on en déduit l'impédance complexe équivalente  $\bar{Z}$  du dipôle AB :

$$\bar{Z} = R_1 + \bar{Z}_{eq} = R_1 + \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega} = \frac{R_1(1 + jR_2C\omega) + R_2}{1 + jR_2C\omega} = \frac{R_1 + R_2 + jR_1R_2C\omega}{1 + jR_2C\omega}$$

Il nous reste à calculer le module et l'argument de cette impédance complexe :

$$Z = |\bar{Z}| = \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)^2 + R_1^2 R_2^2 C^2 \omega^2}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}}$$

$$\arg \bar{Z} = \arctan \left( \frac{R_1 R_2 C \omega}{R_1 + R_2} \right) - \arctan(R_2 C \omega)$$

On en déduit alors, en posant  $i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$  :

$$I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{Z} = E_{\text{eff}} \sqrt{\frac{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}{(R_1 + R_2)^2 + R_1^2 R_2^2 C^2 \omega^2}}$$

$$\varphi = \arctan(R_2 C \omega) - \arctan\left(\frac{R_1 R_2 C \omega}{R_1 + R_2}\right)$$

# Lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff bien connues en régime continu s'appliquent également au modèle complexe d'un circuit en régime sinusoïdal.

## 1. Définitions

**Réseau électrique.** Toute association simple ou complexe de dipôles interconnectés, alimentée par un générateur.

**Branche.** Partie dipolaire d'un réseau, parcourue par un même courant.

**Noeud d'un réseau.** Tout point du réseau commun à plus de deux branches.

**Maille d'un réseau.** Tout chemin constituant une boucle et formé de plusieurs branches.

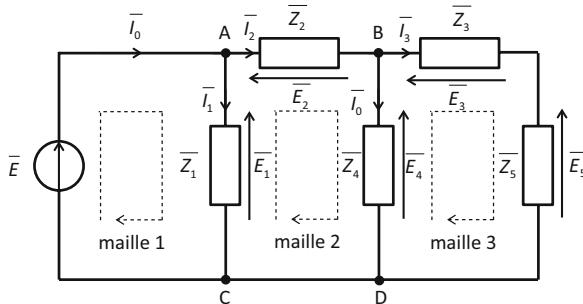


Figure 11.1

### EXEMPLE

La figure 11.1 représente le modèle complexe d'un circuit constitué d'un générateur  $e(t) = E_0 \cos \omega t$  relié à un réseau dipolaire AC formé de cinq dipôles d'impédances complexes  $\bar{Z}_1$  à  $\bar{Z}_5$ . Le circuit possède quatre noeuds, A, B, C et D. On note la présence de trois mailles. Il en existe d'autres, par exemple en partant du point A, on peut définir une maille qui comprend  $\bar{Z}_2$ ,  $\bar{Z}_3$  et  $\bar{Z}_5$ , qui passe par D, puis C et qui rejoint A en passant par  $\bar{Z}_1$ . Sur le schéma, on a placé les tensions ou du moins leur représentation complexe aux bornes des différentes impédances complexes ainsi que les courants dans les branches du circuit.

## 2. Loi des nœuds

La somme des formes complexes des courants se dirigeant vers un nœud est égale à la somme des formes complexes des courants qui sortent de ce nœud. Ou encore, la somme algébrique des formes complexes des courants dirigés vers un nœud est nulle (en comptant positivement les courants dirigés vers le nœud et négativement ceux qui en sortent).

### EXEMPLE

En reprenant l'exemple de la figure 11.1, on peut écrire :

$$\overline{I_0} = \overline{I_1} + \overline{I_2} \text{ et } \overline{I_2} = \overline{I_3} + \overline{I_4}$$

## 3. Loi des mailles

La somme algébrique des formes complexes des différences de potentiels le long d'une maille, obtenue en parcourant la maille dans un sens donné, est nulle. Les différences de potentiels orientées dans le sens de parcours de la maille sont comptées positivement. Les différences de potentiels orientées dans le sens opposé au sens de parcours de la maille sont comptées négativement.

### EXEMPLE

En reprenant l'exemple de la figure 11.1, on peut écrire :

- Maille 1 :  $\overline{E} - \overline{E_1} = 0$ .
- Maille 2 :  $\overline{E_1} - \overline{E_2} - \overline{E_4} = 0$ .
- Maille 3 :  $\overline{E_4} - \overline{E_3} - \overline{E_5} = 0$ .

### EXERCICE 1 Calcul des courants dans un circuit

La figure 11.2 représente un générateur de tension  $e(t) = E_0 \cos \omega t$  relié à un dipôle formé d'une bobine et d'une résistance placées en parallèle. Écrire trois équations différentes reliant les formes complexes des courants circulant dans les différentes branches du circuit et calculer la forme complexe  $\overline{I_0}$  du courant  $i_0(t)$ . Dans un second temps, calculer l'impédance complexe du dipôle AB formé par les deux résistances et la bobine. Retrouver alors l'expression de  $\overline{I_0}$ . Conclure.

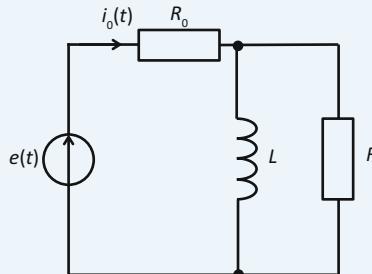


Figure 11.2

## Solution

Transposons le schéma dans son modèle complexe (figure 11.3) et appliquons les lois de Kirchhoff.

La loi des nœuds appliquée au point A nous donne une première équation :

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_R + \bar{I}_L$$

Appliquons à présent la loi des mailles dans chacune des mailles identifiées sur le schéma :

- Maille 1 :  $\bar{E} - R_0 \bar{I}_0 - R \bar{I}_R = 0$ .
- Maille 2 :  $R \bar{I}_R - jL\omega \bar{I}_L = 0$ .

Comme nous cherchons  $\bar{I}_0$ , il suffit d'exprimer  $\bar{I}_R$  et  $\bar{I}_L$  en fonction de  $\bar{I}_0$  (à partir des équations issues des lois des mailles) et de remplacer ces deux courants par leur expression, dans l'équation tirée de la loi des nœuds.

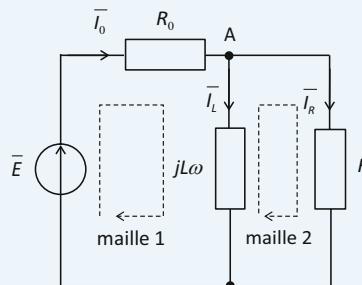


Figure 11.3

On a :

$$\overline{I_R} = \frac{\overline{E} - R_0 \overline{I_0}}{R} \text{ et } \overline{I_L} = \frac{R}{jL\omega} \times \frac{\overline{E} - R_0 \overline{I_0}}{R} = \frac{\overline{E} - R_0 \overline{I_0}}{jL\omega}$$

D'où :

$$\overline{I_0} = \frac{\overline{E} - R_0 \overline{I_0}}{R} + \frac{\overline{E} - R_0 \overline{I_0}}{jL\omega}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\overline{I_0} &= \frac{\overline{E} - R_0 \overline{I_0}}{R} + \frac{\overline{E} - R_0 \overline{I_0}}{jL\omega} \\ \overline{I_0} &= \frac{\overline{E}(R + jL\omega)}{R_0 R + jR_0 L\omega + jRL\omega}\end{aligned}$$

Intéressons-nous à présent au calcul de l'impédance équivalente  $\overline{Z}$  du dipôle AB. Il s'agit de l'association en série d'une résistance  $R_0$  avec une association parallèle de  $R$  et de  $jL\omega$ .

$$\text{Soit : } \overline{Z} = R_0 + \frac{jRL\omega}{R + jL\omega} = \frac{RR_0 + jR_0 L\omega + jRL\omega}{R + jL\omega}$$

Ainsi, considérant que le générateur de tension alimente ce dipôle AB, on a :

$$\overline{I_0} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}} = \frac{\overline{E}(R + jL\omega)}{RR_0 + jR_0 L\omega + jRL\omega}$$

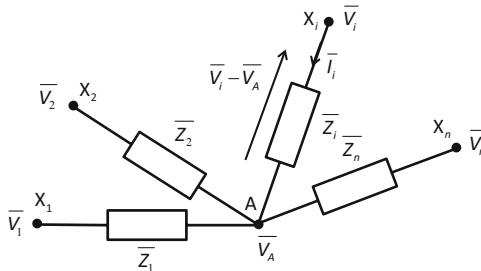
On retrouve bien le même résultat et on peut noter que l'utilisation des lois de Kirchhoff ne constitue pas obligatoirement un outil rapide et pratique pour calculer un courant spécifique dans un circuit.

# Théorème de Millman

Le théorème de Millman, qui est une conséquence de la loi des nœuds, permet de déterminer le potentiel en un nœud particulier d'un circuit quand on connaît les potentiels aux nœuds voisins.

## 1. Principe

La figure 12.1 représente le modèle complexe d'une portion de circuit focalisée sur un point A auquel sont reliées  $n$  impédances  $\bar{Z}_i$  elles-mêmes reliées à des points  $X_i$  caractérisés par des potentiels  $\bar{V}_i$ . Le théorème de Millman permet de calculer  $\bar{V}_A$ , le potentiel au point A, en fonction des potentiels  $\bar{V}_i$  et des impédances  $\bar{Z}_i$ .



**Figure 12.1**

Dans le modèle complexe d'un circuit, le potentiel en un point donné A (un nœud) d'un circuit est égal à la moyenne des potentiels des nœuds voisins, pondérée par les inverses des impédances complexes :

$$\bar{V}_A = \frac{\sum_i \frac{\bar{V}_i}{\bar{Z}_i}}{\sum_i \frac{1}{\bar{Z}_i}}$$

⋮

En utilisant les admittances  $\overline{G_i}$  qui sont les inverses des impédances, on peut aussi écrire :

$$\overline{V_A} = \frac{\sum_i \overline{G_i} \overline{V_i}}{\sum_i \overline{G_i}}$$

## 2. Démonstration

Le théorème de Millman se démontre tout simplement à partir de la loi des nœuds appliquée au point A. Soit  $\overline{I}_i$  le courant circulant dans la branche  $i$ , dirigé du point  $X_i$  vers le point A.

On a (loi d'Ohm généralisée) :  $\overline{I}_i = \frac{\overline{V}_i - \overline{V}_A}{\overline{Z}_i}$ .

En appliquant la loi des nœuds en A, on a alors :  $\sum_i \overline{I}_i = 0$ .  
Soit :

$$\sum_i \overline{I}_i = \sum_i \frac{\overline{V}_i - \overline{V}_A}{\overline{Z}_i} = \sum_i \frac{\overline{V}_i}{\overline{Z}_i} - \sum_i \frac{\overline{V}_A}{\overline{Z}_i} = \sum_i \frac{\overline{V}_i}{\overline{Z}_i} - \overline{V}_A \sum_i \frac{1}{\overline{Z}_i} = 0$$

$$\text{D'où : } \overline{V_A} = \frac{\sum_i \frac{\overline{V}_i}{\overline{Z}_i}}{\sum_i \frac{1}{\overline{Z}_i}}$$

## 3. Exemple

La figure 12.2 représente le modèle complexe d'un circuit alimenté par un générateur sinusoïdal. On cherche le potentiel au point A.

Il suffit d'appliquer le théorème de Millman au point A en prenant soin de ne pas oublier, au dénominateur, les termes correspondant aux potentiels voisins qui sont nuls :

$$\overline{V_A} = \frac{\overline{E}}{R + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R}} = \frac{\overline{E}}{\frac{R}{R} + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{\overline{E}}{\frac{R+2}{R} + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{\overline{E} jL\omega}{R+2jL\omega}$$

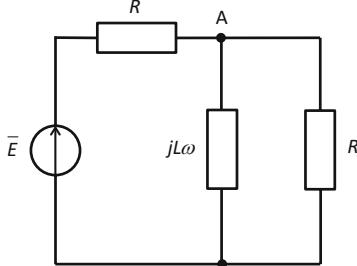


Figure 12.2

On en déduit alors la tension réelle  $v_A(t) = V_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$  en calculant le module et l'argument de cette forme complexe :

$$V_{eff} = |\overline{V_A}| = \left| \frac{\overline{E} jL\omega}{R+2jL\omega} \right| = \frac{|\overline{E} jL\omega|}{|R+2jL\omega|} = \frac{|\overline{E}| |jL\omega|}{\sqrt{R^2 + 4L^2\omega^2}} = \frac{E_0 L \omega}{\sqrt{R^2 + 4L^2\omega^2}}$$

De même :

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg \overline{V_A} = \arg \overline{E} + \arg jL\omega - \arg (R + 2jL\omega) = 0 + \frac{\pi}{2} - \\ &\quad \arctan \left( \frac{2L\omega}{R} \right) \end{aligned}$$

*In fine :*

$$v_A(t) = \frac{E_0 L \omega \sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + 4L^2\omega^2}} \cos \left[ \omega t + \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{2L\omega}{R} \right) \right]$$

**EXERCICE 1 Calcul d'un courant dans un circuit**

La figure 12.3 représente un générateur de tension  $e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t$  relié à un dipôle formé de deux condensateurs identiques et d'une résistance. Calculer le courant dans la résistance.

**Solution**

Le théorème de Millman peut constituer aussi une bonne alternative dans le cas de la recherche d'un courant particulier dans un circuit. En effet, la connaissance du courant dans la résistance découle de celle du potentiel au point A que nous allons déterminer grâce au théorème de Millman.

La figure 12.4 représente le modèle complexe du circuit dans lequel on peut appliquer le théorème :

$$\frac{\bar{E}jC\omega + \frac{0}{R} + (0 \cdot jC\omega)}{jC\omega + \frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{\bar{E}jC\omega}{\frac{1}{R} + 2jC\omega} = \frac{\bar{E}jRC\omega}{1 + 2jRC\omega}$$

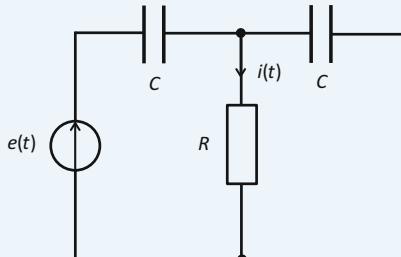


Figure 12.3

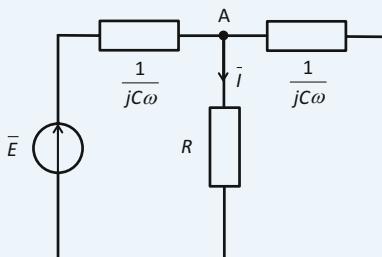


Figure 12.4

$$\text{Par conséquent : } \bar{I} = \frac{\bar{V}_A}{R} = \frac{\bar{E}jC\omega}{1+2jRC\omega}$$

En posant  $i(t) = I_{eff}\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ , on a :

$$I_{eff} = |\bar{I}| = \left| \frac{\bar{E}jC\omega}{1+2jRC\omega} \right| = \frac{|\bar{E}| |jC\omega|}{|1+2jRC\omega|} = \frac{E_0 C \omega}{\sqrt{1+4R^2C^2\omega^2}}$$

$$\text{Et : } \varphi = \arg \bar{I} = \arg(\bar{E}) + \arg(jC\omega) - \arg(1+2jRC\omega) = 0 + \frac{\pi}{2} - \arctan(2RC\omega)$$

$$\text{D'où : } i(t) = \frac{E_0 C \omega \sqrt{2}}{\sqrt{1+4R^2C^2\omega^2}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \arctan(2RC\omega)\right)$$

Le montage diviseur de tension, encore appelé pont diviseur de tension, permet de générer une fraction déterminée d'une tension sinusoïdale donnée.

## 1. Principe

Un pont diviseur de tension est composé de deux dipôles d'impédances complexes respectives  $\bar{Z}_1$  et  $\bar{Z}_2$  placées en série, l'ensemble étant alimenté par un générateur délivrant une tension sinusoïdale  $e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t$  dont la forme complexe est notée  $\bar{E}$  (figure 13.1). On note A le point commun aux deux impédances et on s'intéresse à la tension  $v_A(t) = V_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ , ou encore à sa forme complexe  $\bar{V}_A = V_{\text{eff}} e^{j\varphi}$ .

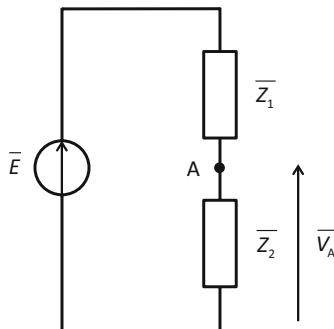


Figure 13.1

La tension au point A commun aux deux impédances est donnée par la relation :

$$\bar{V}_A = \bar{E} \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

**REMARQUE**

Pour être valable, cette expression nécessite que ce soit le même courant qui circule dans les deux impédances. Il ne doit pas y avoir de dérivation au point A. Autrement dit, le point A ne doit pas être un nœud d'où sort ou entre un troisième courant.

## 2. Démonstration

Appelons  $\bar{I}$  le courant circulant dans le circuit. Comme il s'agit du courant débité par  $\bar{E}$  dans la résistance équivalente  $\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$  (voir fiche 10), on a :

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

La tension  $v_A(t)$  correspond à la différence de potentiels aux bornes de l'impédance  $\bar{Z}_2$ . On a donc :

$$\bar{V}_A = \bar{Z}_2 \bar{I} = \bar{E} \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

## 3. Exemple

La figure 13.2 représente un générateur sinusoïdal  $e(t) = E_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t$  qui alimente un dipôle formé de l'association en série d'une résistance  $R$  et d'un condensateur de capacité  $C$ . On cherche la tension  $v_A(t)$  aux bornes du condensateur. La figure 13.3 représente le modèle complexe du circuit et en appliquant simplement le principe du pont diviseur de tension, on obtient :

$$\bar{V}_A = \bar{E} \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\bar{E}}{1 + jRC\omega}$$

On a donc, en notant  $v_A(t) = V_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$  :

$$V_{eff} = |\overline{V_A}| = \left| \frac{\overline{E}}{1 + jRC\omega} \right| = \frac{|\overline{E}|}{|1 + jRC\omega|} = \frac{E_0}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$$

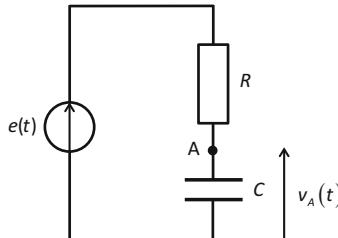


Figure 13.2

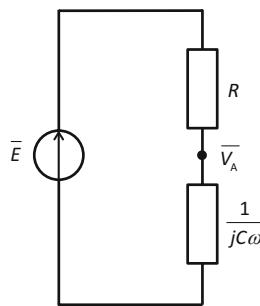


Figure 13.3

Et :

$$\varphi = \arg \overline{V_A} = \arg \overline{E} - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \arctan(RC\omega)$$

*In fine :*

$$v_A(t) = \frac{E_{eff} \sqrt{2}}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} \cos(\omega t - \arctan RC\omega)$$

## EXERCICE 1 Calcul d'une tension dans un circuit RL

La figure 13.4 représente un générateur de tension sinusoïdale  $e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t$  relié à un dipôle formé d'une bobine et d'une résistance placés en série. Calculer la tension aux bornes de la résistance.

### Solution

Transposons le schéma dans son modèle complexe (figure 13.5) et appliquons le principe du pont diviseur de tension.

$$\overline{V_A} = \bar{E} \frac{R}{R + jL\omega}$$

En posant  $v_A(t) = V_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ , on a :

$$V_{\text{eff}} = |\overline{V_A}| = \left| \frac{\bar{E}R}{R + jL\omega} \right| = \frac{|\bar{E}R|}{|R + jL\omega|} = \frac{E_0 R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

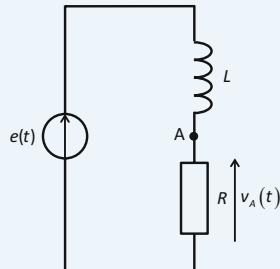


Figure 13.4

Et :

$$\varphi = \arg \overline{V_A} = \arg (\bar{E} \bar{R}) - \arg (R + jL\omega) = 0 - \arctan \left( \frac{jL\omega}{R} \right)$$

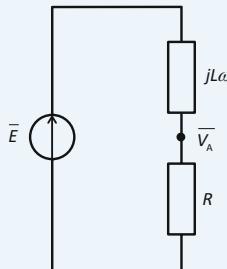


Figure 13.5

Par conséquent :

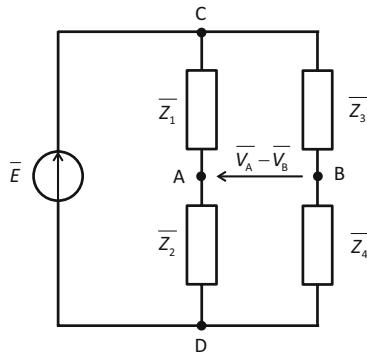
$$v_A(t) = \frac{E_0 R \sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos \left( \omega t - \arctan \frac{jL\omega}{R} \right)$$

# Pont d'impédances

Très utile en électricité et en instrumentation, le pont d'impédances, également appelé pont de Wheatstone pour certaines applications, est un montage composé de quatre dipôles.

## 1. Schéma général

Sur le schéma de la figure 14.1, un générateur alimente un dipôle CD composé de quatre impédances montées en pont, c'est-à-dire sous la forme de l'association en parallèle de deux montages en série. Le schéma est directement proposé dans sa forme complexe. On s'intéresse à la tension  $\overline{V_A} - \overline{V_B}$  en supposant qu'aucun courant ne circule entre les points A et B.



**Figure 14.1**

## 2. Expression de la tension entre A et B

Les impédances  $\bar{Z}_1$  et  $\bar{Z}_2$  d'une part et les impédances  $\bar{Z}_3$  et  $\bar{Z}_4$  forment deux diviseurs de tension indépendants alimentés tous deux par la tension  $\bar{E}$ .

On a donc :

$$\overline{V_A} = \frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}} \overline{E} \text{ et } \overline{V_B} = \frac{\overline{Z_4}}{\overline{Z_3} + \overline{Z_4}} \overline{E}$$

La différence de potentiels entre les points A et B est égale à :

$$\overline{V_A} - \overline{V_B} = \left[ \frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}} - \frac{\overline{Z_4}}{\overline{Z_3} + \overline{Z_4}} \right] \overline{E} = \left[ \frac{\overline{Z_2}\overline{Z_3} - \overline{Z_1}\overline{Z_4}}{(\overline{Z_1} + \overline{Z_2})(\overline{Z_3} + \overline{Z_4})} \right] \overline{E}$$

#### REMARQUE

Attention, cette relation n'est vraie que si aucun courant ne circule entre les points A et B. Dans le cas contraire, il est impossible de considérer que nous sommes en présence de deux diviseurs de tension.

### 3. Pont d'impédance à l'équilibre

On dit qu'un pont de quatre impédances est à l'équilibre si  $\overline{V_A} - \overline{V_B} = 0$ . Dans ces conditions, le numérateur de l'expression ci-dessus doit être nul.

Un pont d'impédances est à l'équilibre si et seulement si :

$$\overline{Z_2}\overline{Z_3} - \overline{Z_1}\overline{Z_4} = 0$$

### 4. Application à la mesure de résistance

Dans le schéma de la figure 14.1, on suppose que  $\overline{Z_1}$  et  $\overline{Z_2}$  sont deux résistances connues avec précision :  $R_1$  et  $R_2$ .  $\overline{Z_3}$  est une résistance variable notée  $R_v$  dont on peut afficher la valeur. Le dipôle d'impédance  $\overline{Z_4}$  est une résistance inconnue que l'on notera  $R_x$  et que l'on cherche à déterminer.

Le principe de mesure est le suivant : on règle la résistance variable  $R_v$  jusqu'à obtenir l'équilibre du pont, autrement dit  $\overline{V_A} - \overline{V_B} = 0$ . Lorsque l'équilibre est constaté, on a, d'après la condition d'équilibre présentée au paragraphe précédent :

$$R_2 R_v = R_1 R_x$$

On en déduit alors la valeur de  $R_x$  :

$$R_x = \frac{R_2 R_v}{R_1}$$

### EXERCICE 1 Mesure d'une inductance propre

Dans le schéma de la figure 14.1, on suppose que  $\overline{Z_1}$  et  $\overline{Z_2}$  sont deux résistances connues avec précision :  $R_1$  et  $R_2$ . Le dipôle d'impédance  $\overline{Z_4}$  est une bobine d'auto-inductance  $L_x$  inconnue que l'on cherche à déterminer.

Montrer dans un premier temps que si  $\overline{Z_3}$  est un condensateur de capacité  $C_v$  variable, l'équilibre du pont est impossible à atteindre, quelle que soit la valeur de  $C_v$ .

Dans un second temps, l'impédance  $\overline{Z_3}$  est une bobine d'auto-inductance  $L_3$  dont la valeur est connue avec précision et la résistance  $R_2$  est une résistance variable notée  $R_v$  dont on peut afficher la valeur. Montrer dans ce cas que l'équilibre du pont peut être atteint en faisant varier  $R_v$  et déterminer la valeur de  $L_x$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_v$  et  $L_3$ .

### Solution

Dans le premier cas, l'équilibre du pont suppose l'égalité :

$$R_2 \times \frac{1}{jC\omega} - R_1 \times jL_x\omega = 0$$

D'où :  $jR_1 L_x \omega = \frac{R_2}{jC\omega}$

Soit :  $L_x = \frac{R_2}{-R_1 C}$

Ce qui, évidemment, n'est pas possible, une auto-inductance étant positive.

Dans le deuxième cas, l'équilibre du pont suppose l'égalité :

$$R_v \times jL_3\omega - R_1 \times jL_x\omega = 0$$

D'où :  $jR_1L_x\omega = R_v \times jL_3\omega$

Soit :  $L_x = \frac{R_v}{R_1}L_3$

# Théorème de Thévenin

Le théorème de Thévenin est un outil puissant permettant de déterminer un dipôle équivalent simple à tout circuit dipolaire comportant des générateurs et des récepteurs.

## 1. Contexte

On considère un circuit dipolaire AB constitué de différents éléments passifs et actifs (résistances, condensateurs, bobines, générateurs de tension ou de courant) comme cela est symbolisé sur la figure 15.1.

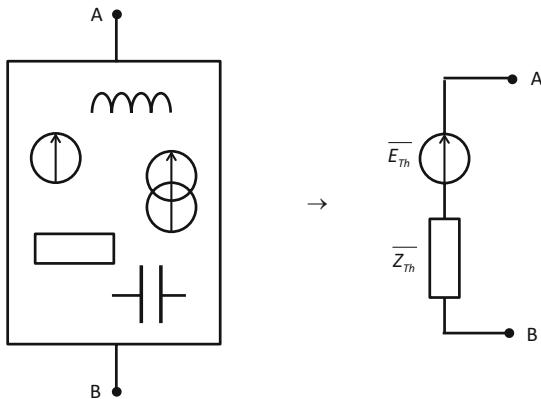


Figure 15.1

Le théorème de Thévenin permet de mettre en évidence que tout circuit dipolaire ainsi constitué est équivalent, en représentation complexe, à un dipôle très simple constitué de l'association série d'un générateur de tension parfait  $\overline{E_{Th}}$  et d'une impédance  $\overline{Z_{Th}}$  (voir figure 15.1). Ce dipôle s'appelle dipôle de Thévenin ou encore générateur de Thévenin équivalent. L'impédance  $\overline{Z_{Th}}$  est appelée impédance de Thévenin et  $\overline{E_{Th}}$  est appelée tension de Thévenin.

**REMARQUE**

Rappelons que pour être équivalents, deux circuits doivent être tels que s'ils sont alimentés par un même générateur (par exemple de tension), ce générateur doit débiter le même courant.

## 2. Calcul de l'impédance de Thévenin

L'impédance équivalente de Thévenin  $\overline{Z}_{Th}$  est égale à l'impédance équivalente du circuit AB dans lequel on a éteint tous les générateurs. On éteint un générateur de tension en le remplaçant par un court-circuit (tension nulle) tandis que l'on éteint un générateur de courant en le remplaçant par un circuit ouvert (courant nul).

**EXEMPLE**

La figure 15.2 représente un dipôle composé d'une source de tension parfaite et de deux impédances.

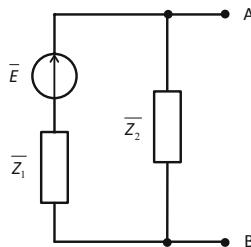


Figure 15.2

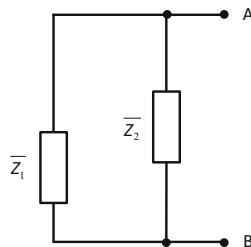


Figure 15.3

Pour calculer  $\overline{Z_{Tb}}$ , on éteint le générateur  $\overline{E}$ . Autrement dit, on le remplace par un court-circuit (figure 15.3).

Le dipôle est ainsi réduit à deux impédances en parallèle et on en déduit immédiatement :

$$\overline{Z_{Tb}} = \frac{\overline{Z_1} \overline{Z_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}}$$

### 3. Calcul de la tension de Thévenin

La tension de Thévenin d'un dipôle AB est égale à la tension à vide présente à ses bornes, autrement dit la tension  $\overline{V_A} - \overline{V_B}$  lorsqu'aucun courant n'entre ou sort par les points A et B.

#### EXEMPLE

Si on reprend le dipôle de la figure 15.2, il nous faut juste calculer la tension  $\overline{V_A} - \overline{V_B}$ , autrement dit la tension aux bornes de  $\overline{Z_2}$ . Il suffit d'écrire la loi des mailles dans l'unique maille du circuit en supposant qu'elle est parcourue par un courant  $\overline{I}$  (figure 15.4).

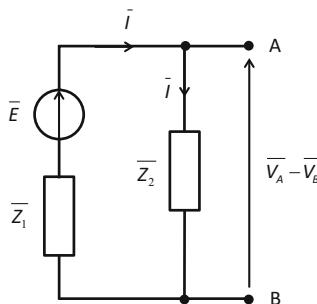


Figure 15.4

On a :  $\overline{E} - \overline{Z_2} \overline{I} - \overline{Z_1} \overline{I} = 0$ .

Soit :  $\overline{I} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}}$ .

La tension à vide étant égale à la tension aux bornes de  $\overline{Z_2}$  qui est parcourue par le courant  $\overline{I}$ , on a :

$$\overline{E_{Tb}} = \overline{E} \frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}}$$

## 4. Conclusion

En rassemblant les résultats des deux paragraphes précédents, toujours sur notre exemple, on en déduit (figure 15.5), le dipôle équivalent de Thévenin au circuit proposé.

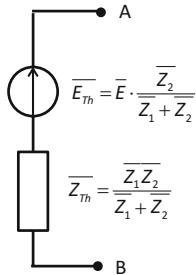


Figure 15.5

### EXERCICE 1 Calcul d'un dipôle de Thévenin

Déterminer le dipôle équivalent de Thévenin au dipôle représenté sur la figure 15.6.

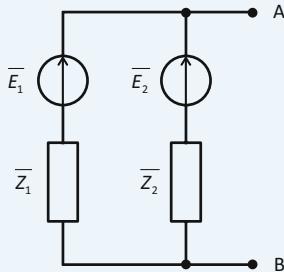


Figure 15.6

### Solution

L'impédance équivalente de Thévenin s'obtient en court-circuitant les générateurs de tension et en évaluant l'impédance équivalente du circuit ainsi simplifié qui se résume aux deux impédances en parallèle.

On a donc :

$$\overline{Z_{Th}} = \frac{\overline{Z_1} \overline{Z_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}}$$

Déterminons à présent la tension à vide présente aux bornes du dipôle afin de calculer  $\overline{E_{Th}}$ . Appelons  $\bar{I}$  le courant circulant dans l'unique maille du circuit et appliquons la loi des mailles (figure 15.7).

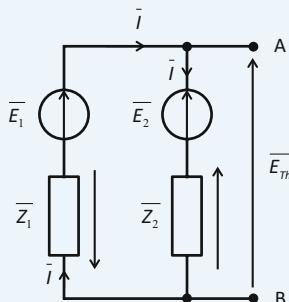


Figure 15.7

On obtient :  $\overline{E_1} - \overline{Z_1}\bar{I} - \overline{Z_2}\bar{I} - \overline{E_2} = 0$ .

$$\text{Soit : } \bar{I} = \frac{\overline{E_1} - \overline{E_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}}$$

La tension à vide, c'est-à-dire la tension de Thévenin, est telle que :

$$\overline{E_{Th}} = \overline{E_2} + \overline{Z_2}\bar{I} = \overline{E_2} + \overline{Z_2} \frac{\overline{E_1} - \overline{E_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}}$$

Soit encore :

$$\overline{E_{Th}} = \frac{\overline{E_2}(\overline{Z_1} + \overline{Z_2}) + \overline{Z_2}\overline{E_1} - \overline{Z_2}\overline{E_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}} = \frac{\overline{E_2}\overline{Z_1} + \overline{Z_2}\overline{E_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}}$$

## EXERCICE 2 Calcul d'un dipôle de Thévenin

Déterminer le dipôle équivalent de Thévenin au dipôle représenté sur la figure 15.8.

### Solution

L'impédance équivalente de Thévenin s'obtient en court-circuitant le générateur de tension, en remplaçant le générateur de courant par un circuit ouvert et en

évaluant l'impédance équivalente du circuit ainsi simplifié qui se résume aux trois impédances en parallèle.

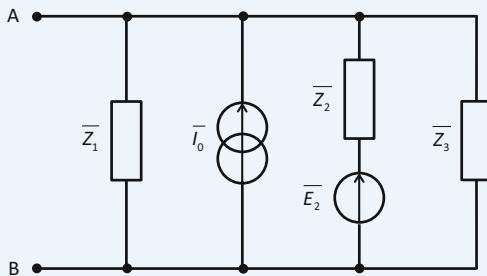


Figure 15.8

$$\text{On a donc : } \frac{1}{Z_{Th}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}.$$

$$\text{Soit : } Z_{Th} = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}.$$

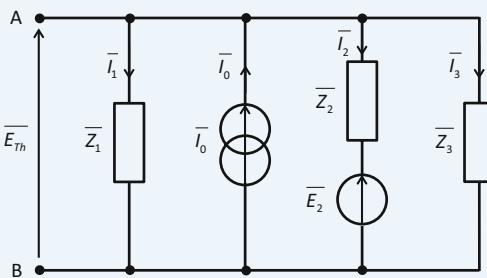


Figure 15.9

Déterminons à présent la tension à vide présente aux bornes du dipôle afin de calculer  $\overline{E_{Th}}$ . Plaçons les différents courants dans le circuit (figure 15.9) et appliquons la loi des nœuds :

$$\overline{I_0} = \overline{I_1} + \overline{I_2} + \overline{I_3}$$

La tension à vide que nous cherchons n'est autre que la tension aux bornes de  $\overline{Z_1}$ , mais aussi du dipôle série ( $\overline{Z_2}, \overline{E_2}$ ) ainsi que de  $\overline{Z_3}$ . On peut donc écrire :

$$\overline{E_{Th}} = \overline{Z_1} \overline{I_1} = \overline{E_2} + \overline{Z_2} \overline{I_2} = \overline{Z_3} \overline{I_3}$$

Nous pouvons alors exprimer, par exemple, les courants  $\overline{I_2}$  et  $\overline{I_3}$  en fonction de  $\overline{I_1}$  (qui est une inconnue) et en fonction de  $\overline{I_0}$  et  $\overline{E_2}$  (qui sont des données du problème).

En remplaçant le tout dans la loi des nœuds précédemment exprimée, nous en déduirons  $\bar{I}_1$  puis  $\overline{E_{Th}}$ .

$$\text{On a : } \bar{I}_2 = \frac{\overline{Z_1} \bar{I}_1 - \overline{E_2}}{\overline{Z_2}} \text{ et } \bar{I}_3 = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_3}} \bar{I}_1$$

$$\text{D'où : } \bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}_1 + \frac{\overline{Z_1} \bar{I}_1 - \overline{E_2}}{\overline{Z_2}} + \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_3}} \bar{I}_1$$

$$\text{On en extrait } \bar{I}_1 : \bar{I}_1 \left( 1 + \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_3}} + \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \right) = \bar{I}_0 + \frac{\overline{E_2}}{\overline{Z_2}}$$

$$\text{D'où : } \overline{E_{Th}} = \overline{Z_1} \bar{I}_1 = \frac{\overline{Z_1} \overline{Z_2} \overline{Z_3} \bar{I}_0 + \overline{Z_1} \overline{Z_3} \overline{E_2}}{\overline{Z_2} \overline{Z_3} + \overline{Z_2} \overline{Z_1} + \overline{Z_1} \overline{Z_3}}$$

# Théorème de Norton

À l'instar du théorème de Thévenin, le théorème de Norton est un outil puissant permettant de déterminer un dipôle équivalent simple à tout circuit dipolaire comportant des générateurs et des récepteurs. Dans le cas du théorème de Norton, le dipôle équivalent sera formé de l'association en parallèle d'un générateur de courant parfait et d'une impédance.

## 1. Contexte

On considère un circuit dipolaire AB constitué de différents éléments passifs et actifs (résistances, condensateurs, bobines, générateurs de tension ou de courant), comme cela est schématisé sur la figure 16.1.

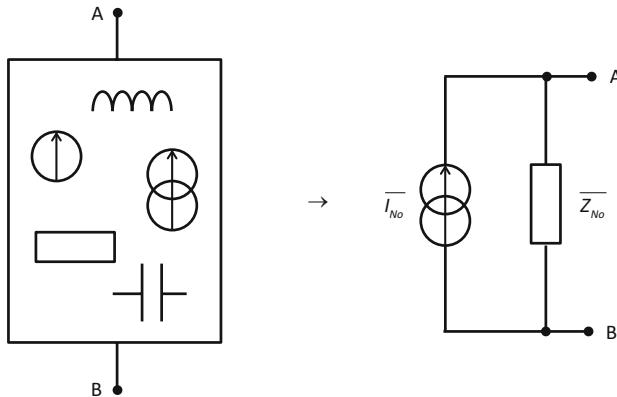


Figure 16.1

Le théorème de Norton permet de mettre en évidence que tout circuit dipolaire ainsi constitué est équivalent à un dipôle très simple constitué de l'association en parallèle d'un générateur de courant parfait  $\bar{I}_{No}$  et d'une impédance  $\bar{Z}_{No}$  (voir figure 16.1). Ce dipôle s'appelle le dipôle de Norton ou encore le générateur de Norton équivalent. L'impédance  $\bar{Z}_{No}$  est appelée impédance de Norton et  $\bar{I}_{No}$  est appelée courant de Norton.

## REMARQUE

Rappelons que pour être équivalents, deux circuits doivent être tels que s'ils sont alimentés par un même générateur (par exemple de tension), ce générateur doit débiter le même courant.

## 2. Calcul de l'impédance de Norton

L'impédance équivalente de Norton  $\overline{Z_{No}}$  est égale à l'impédance équivalente du circuit AB dans lequel on a éteint tous les générateurs. On éteint un générateur de tension en le remplaçant par un court-circuit (tension nulle) tandis que l'on éteint un générateur de courant en le remplaçant par un circuit ouvert (courant nul). L'impédance de Norton est donc la même que l'impédance de Thévenin que nous avons vue dans la [fiche 15](#).

## 3. Calcul du courant de Norton

Le courant de Norton d'un dipôle AB est égal au courant de court-circuit du dipôle, c'est-à-dire le courant circulant dans le dipôle lorsque l'on court-circuite ses deux bornes (figure 16.2).

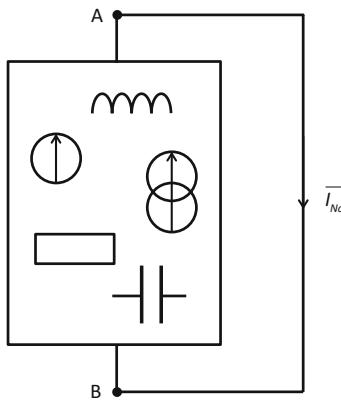


Figure 16.2

## 4. Équivalence Thévenin-Norton

Comme tout dipôle possède un équivalent de Thévenin et un équivalent de Norton, on peut en déduire qu'un dipôle de Thévenin est équivalent à un dipôle de Norton (figure 16.3).

Un dipôle série  $(\overline{E_{Th}}, \overline{Z_{Th}})$  est équivalent à un dipôle parallèle  $(\overline{I_{No}}, \overline{Z_{No}})$  avec :

$$\overline{I_{No}} = \frac{\overline{E_{Th}}}{\overline{Z_{Th}}} \text{ ou encore } \overline{E_{Th}} = \overline{Z_{No}} \cdot \overline{I_{No}}$$

et  $\overline{Z_{Th}} = \overline{Z_{No}}$

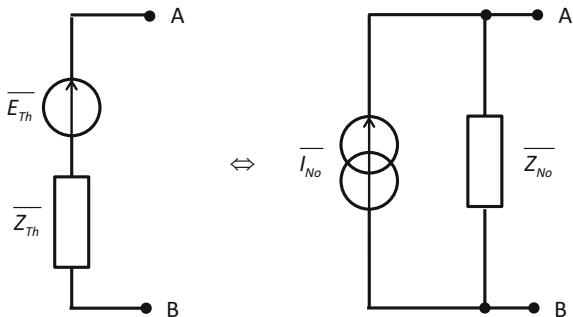


Figure 16.3

### REMARQUE

L'équivalence Thévenin-Norton est très utile pour résoudre élégamment certains problèmes d'électricité en effectuant des transformations successives qui consistent à transformer des dipôles série en dipôles parallèle et réciproquement en simplifiant de proche en proche, comme cela est suggéré dans l'exercice qui suit.

**EXERCICE 1 Résolution par transformations successives**

On considère le circuit représenté sur la figure 16.4 dans lequel on cherche à déterminer la tension  $\overline{V}_3$  aux bornes de  $\overline{Z}_3$ . On notera qu'il s'agit du même exercice que celui proposé dans la [fiche 9](#) avec, ici, une méthode de résolution très différente.

1. Transformer chaque dipôle formé de l'association série d'un générateur de tension et d'une impédance en leur générateur de Norton équivalent.
2. Regrouper les générateurs de courant d'une part et les impédances de Norton d'autre part.
3. En déduire l'expression de la tension  $\overline{V}_3$ .

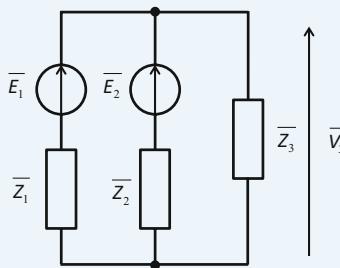


Figure 16.4

**Solution**

1. Chacun des deux dipôles série  $(\overline{E}_1, \overline{Z}_1)$  et  $(\overline{E}_2, \overline{Z}_2)$  est un dipôle de Thévenin que l'on peut transformer en dipôle de Norton en utilisant les règles présentées dans le paragraphe 4 cette fiche. On obtient alors le schéma de la figure 16.5.

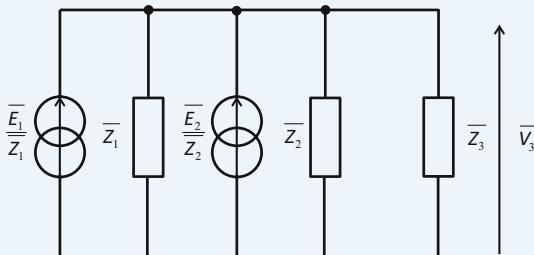


Figure 16.5

**2.** Nous pouvons ensuite regrouper les deux générateurs de courant placés en parallèle qui sont équivalents à un seul générateur de courant égal à la somme des deux courants. De même, les deux impédances  $\overline{Z_1}$  et  $\overline{Z_2}$  se trouvent en parallèle et forment une résistance équivalente  $\frac{\overline{Z_1}\overline{Z_2}}{\overline{Z_1}+\overline{Z_2}}$  (figure 16.6).

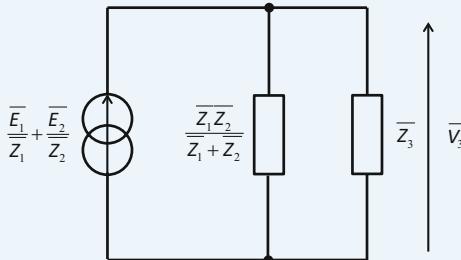


Figure 16.6

**3.** La tension  $\overline{V_3}$  que l'on cherche est la tension aux bornes de  $\overline{Z_3}$ , tout comme elle est la tension aux bornes de  $\frac{\overline{Z_1}\overline{Z_2}}{\overline{Z_1}+\overline{Z_2}}$ , tout comme elle est la tension aux bornes de l'impédance équivalente de  $\frac{\overline{Z_1}\overline{Z_2}}{\overline{Z_1}+\overline{Z_2}}$  en parallèle avec  $\overline{Z_3}$  que l'on va appeler  $\overline{Z_{eq}}$ , avec :

$$\overline{Z_{eq}} = \frac{\frac{\overline{Z_1}\overline{Z_2}}{\overline{Z_1}+\overline{Z_2}} \cdot \overline{Z_3}}{\frac{\overline{Z_1}\overline{Z_2}}{\overline{Z_1}+\overline{Z_2}} + \overline{Z_3}} = \frac{\overline{Z_1}\overline{Z_2}\overline{Z_3}}{\overline{Z_1}\overline{Z_2} + \overline{Z_1}\overline{Z_3} + \overline{Z_3}\overline{Z_2}}$$

Cette impédance équivalente est parcourue par le courant  $\frac{\overline{E_1}}{\overline{Z_1}} + \frac{\overline{E_2}}{\overline{Z_2}}$ . On a donc :

$$\overline{V_3} = \frac{\overline{Z_1}\overline{Z_2}\overline{Z_3}}{\overline{Z_1}\overline{Z_2} + \overline{Z_1}\overline{Z_3} + \overline{Z_3}\overline{Z_2}} \cdot \left( \frac{\overline{E_1}}{\overline{Z_1}} + \frac{\overline{E_2}}{\overline{Z_2}} \right)$$

$$\overline{V_3} = \frac{\overline{Z_1}\overline{Z_2}\overline{Z_3}}{\overline{Z_1}\overline{Z_2} + \overline{Z_1}\overline{Z_3} + \overline{Z_3}\overline{Z_2}} \cdot \left( \frac{\overline{Z_2}\overline{E_1} + \overline{Z_1}\overline{E_2}}{\overline{Z_1}\overline{Z_2}} \right)$$

$$\overline{V_3} = \frac{\overline{Z_3}\overline{Z_2}\overline{E_1} + \overline{Z_3}\overline{Z_1}\overline{E_2}}{\overline{Z_1}\overline{Z_2} + \overline{Z_1}\overline{Z_3} + \overline{Z_3}\overline{Z_2}}$$

On obtient bien le même résultat que dans l'exercice de la [fiche 9](#).

Avant d'aborder dans la [fiche 18](#) la notion de puissance électrique en régime sinusoïdal, nous allons expliciter les concepts fondamentaux de cette notion à partir de ses définitions générales.

Les systèmes électriques produisent, transportent ou consomment de l'énergie. Cette énergie électrique a en général vocation à être convertie en une autre forme d'énergie, thermique ou mécanique, entre autres, qu'il s'agisse par exemple de se chauffer ou d'entraîner des moteurs possédant des tas d'applications pratiques.

La notion de puissance, intimement liée à celle d'énergie, revêt donc un aspect fondamental dans l'étude des circuits. Il s'agit souvent de dimensionner correctement les dispositifs qui alimentent les circuits ou encore les éléments mêmes de ces circuits.

## 1. Définitions

### Puissance instantanée

La figure 17.1 représente un générateur de tension quelconque variant en fonction du temps  $e(t)$  et alimentant un dipôle récepteur. Un courant  $i(t)$  apparaît dans le circuit, dont on peut dire qu'il est débité par le générateur ou encore qu'il traverse le dipôle.

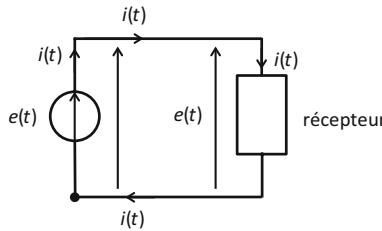


Figure 17.1

La puissance instantanée délivrée par le dipôle générateur est définie par :

$$p(t) = e(t)i(t)$$

De même, la puissance instantanée absorbée ou consommée par le dipôle récepteur est définie par la même expression :

$$p(t) = e(t)i(t)$$

L'unité internationale de puissance est le watt (W). Nous verrons dans la [fiche 18](#) qu'il existe d'autres unités d'usage.

#### REMARQUE

On qualifie cette notion d'instantanée au sens où elle varie au cours du temps et est donc susceptible d'être différente à chaque instant.

### Énergie consommée par un dipôle

La notion d'énergie ne correspond pas à une grandeur instantanée. Elle représente, en quelque sorte, sur un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  donné, la sommation de toutes les puissances instantanées. Ainsi, l'énergie, en joules (J) consommée par un dipôle récepteur (ou délivrée par un générateur) sur un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  est définie par :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} e(t)i(t) dt$$

Si le joule est bien l'unité internationale d'énergie, on utilise parfois le kilowatt heure (kWh) :

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

#### REMARQUE

Si le dipôle est une résistance, la puissance ou l'énergie consommée est en général dissipée sous forme de chaleur.

## Puissance moyenne

La puissance moyenne consommée sur un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  par un dipôle récepteur ou délivrée par un dipôle générateur est définie par :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{E}{t_2 - t_1}$$

Cette puissance moyenne s'exprime, comme la puissance instantanée, en watts. La puissance moyenne consommée sur une durée infinie (de  $-\infty$  à  $+\infty$ ) se calcule ainsi :

$$\langle P \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e(t)i(t) dt$$

Pour le calcul de la puissance moyenne consommée entre les instants 0 et  $+\infty$ , on utilisera l'expression :

$$\langle P \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e(t)i(t) dt$$

## 2. Principe de la conservation de l'énergie

Dans un circuit électrique formé de  $n$  dipôles récepteurs et de  $p$  dipôles générateurs, quel que soit le régime de fonctionnement, la somme des puissances instantanées fournies par l'ensemble des générateurs est égale à la somme des puissances instantanées consommées par l'ensemble des dipôles récepteurs. Il en est de même pour l'énergie sur une durée donnée ainsi que pour la puissance moyenne.

### REMARQUE

Il faut faire très attention : dans un circuit alimenté par plusieurs générateurs, le principe de superposition ne s'applique pas au calcul des puissances ou des énergies mises en jeu. Ainsi, il n'est pas possible de considérer que la puissance consommée par un dipôle est la somme des puissances qu'il consommerait si le circuit était alimenté par chaque générateur pris indépendamment. On utilise le principe de superposition pour calculer séparément les courants et les tensions et on calcule ensuite les puissances à partir de ces grandeurs.

### 3. Puissance en régime continu

Même si cet ouvrage est consacré au régime sinusoïdal, il est indispensable de savoir exprimer les puissances mises en jeu en régime continu. Rappelons qu'alors, les tensions et les courants sont constants, donc ne varient pas en fonction du temps.

Un circuit linéaire en régime continu ne comporte en général que des générateurs de tension ou de courant et des résistances. Dans ce régime de fonctionnement, les tensions et courants dans tout le circuit sont constants.

Ainsi, la puissance instantanée consommée par une résistance en régime continu (figure 17.2) est constante et égale à sa valeur moyenne :

$$p(t) = UI = C^{\text{te}} = \langle P \rangle$$

Comme  $I = \frac{U}{R}$ , on a :  $p(t) = \langle P \rangle = \frac{U^2}{R} = RI^2$

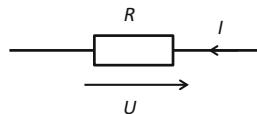


Figure 17.2

#### EXERCICE 1 Puissance consommée par une résistance

Le montage de la figure 17.3 représente un générateur réel de tension continue (tension  $E$  constante et résistance interne  $r$ ) qui alimente une résistance  $R$  variable. Calculer la puissance moyenne  $P$  consommée par la résistance  $R$ . Pour quelle valeur de  $R$  cette puissance est-elle maximale ?

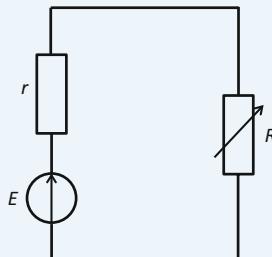


Figure 17.3

**Solution**

Soit  $I$  le courant qui circule dans le circuit. On a évidemment :  $I = \frac{E}{r+R}$ .

La puissance dissipée dans la résistance  $r$  est donc :  $P = RI^2 = \frac{RE^2}{(r+R)^2}$ .

Pour calculer la valeur de  $R$  pour laquelle cette puissance  $P$  est maximale, dérivons l'expression de  $P$  par rapport à  $R$  :

$$\frac{dP}{dR} = E^2 \frac{d}{dR} \left[ \frac{R}{(r+R)^2} \right] = E^2 \frac{(r+R)^2 - 2R(r+R)}{(r+R)^4}$$

$$\frac{dP}{dR} = E^2 \frac{r^2 + 2rR + R^2 - 2Rr - 2R^2}{(r+R)^4}$$

$$\text{Soit : } \frac{dP}{dR} = E^2 \frac{r^2 - R^2}{(r+R)^4} = E^2 \frac{r - R}{(r+R)^3}$$

La puissance  $P$  sera maximale pour  $\frac{dP}{dR} = 0$ , soit  $R = r$ .

Il ne peut s'agir que d'un maximum, et non d'un minimum, puisque la dérivée de  $P$  est positive pour  $R < r$  (fonction  $P$  croissante) et négative pour  $R > r$  (fonction  $P$  décroissante).

*On retiendra que dans un circuit résistif alimenté par une source réelle, la puissance fournie par la source est maximale lorsque la résistance du circuit est égale à la résistance interne de la source.*

En régime sinusoïdal, la notion de puissance est très particulière. En effet, les différents dipôles linéaires que nous avons côtoyés jusqu'à présent ne se comportent pas de la même manière : si les résistances consomment effectivement de l'énergie et la dissipent sous forme de chaleur, les condensateurs et les bobines ne font qu'emmagasiner temporairement de l'énergie électrique (en général au cours d'un demi-cycle sinusoïdal) pour la restituer ensuite sous la même forme (au cours du demi-cycle suivant).

De plus, comme nous avons l'habitude de modéliser le fonctionnement des circuits sous la forme complexe, cela va nécessiter un modèle de puissance compatible avec cette représentation

## 1. Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

Une tension sinusoïdale d'expression  $e(t) = E_0 \cos \omega t$ , débitant dans une résistance  $R$  (figure 18.1), délivre une puissance instantanée :

$$p(t) = \frac{(E_0 \cos \omega t)^2}{R}, \text{ soit la puissance moyenne :}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(E_0 \cos \omega t)^2}{R} dt = \frac{E_0^2}{2R}$$

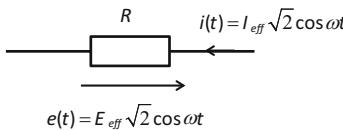


Figure 18.1

La source de tension continue qui délivrerait la même puissance moyenne aurait pour valeur  $\frac{E_0}{\sqrt{2}}$ . On décide d'appeler valeur efficace d'une tension sinusoïdale, et on note  $E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ , la valeur de la tension

continue correspondant à la même puissance moyenne délivrée. Il en est de même pour un courant sinusoïdal. Ainsi, pour notre résistance, on peut écrire :

$$e(t) = E_0 \cos \omega t = E_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t$$

$$i(t) = I_0 \cos \omega t = I_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t$$

Pour un dipôle quelconque, le courant serait susceptible de présenter un déphasage et on aurait :

$$i(t) = I_0 \cos \omega t = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

## 2. Puissance consommée par un dipôle

Pour un dipôle électrique récepteur fonctionnant en régime sinusoïdal présentant à ses bornes une tension  $e(t) = E_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t$  et parcouru par un courant  $i(t) = I_{eff} \sqrt{2} (\cos \omega t + \varphi)$ , la puissance instantanée consommée par le dipôle a pour expression :  $p(t) = E_{eff} I_{eff} \cos \varphi + E_{eff} I_{eff} \cos(2\omega t + \varphi)$ .

Sur une période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , la puissance moyenne est :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = E_{eff} I_{eff} \cos \varphi$$

La quantité  $E_{eff} I_{eff}$  s'appelle puissance apparente consommée par le dipôle. L'expression  $\cos \varphi$  s'appelle facteur de puissance. Comme le déphasage entre le courant et la tension dépend à la fois de la pulsation  $\omega$  et du dipôle, on remarquera que la valeur de la puissance moyenne consommée peut être fortement influencée par le type de dipôle alimenté, ainsi que par le choix de la pulsation d'alimentation.

### REMARQUE

On se souviendra que ce déphasage  $\varphi$  est l'opposé de l'argument de l'impédance complexe du dipôle.

Ainsi, pour une résistance  $R$  :  $\varphi = 0$ . On a alors :  $\langle P \rangle = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = R I_{\text{eff}}^2$ .

Pour une inductance pure ou pour un condensateur, on a  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ .

D'où :  $\langle P \rangle = 0$ .

### 3. Puissance complexe

Afin de disposer d'un modèle de puissance en relation avec les modèles complexes des circuits, on définit une notion de puissance complexe :

$$\bar{P} = \bar{E} \cdot \bar{I}^*$$

avec :

$$\bar{E} = E_{\text{eff}} \quad \text{et} \quad \bar{I}^* = I_{\text{eff}} e^{-j\varphi}, \text{ conjugué de } \bar{I} = I_{\text{eff}} e^{j\varphi}$$

On montre facilement que :

$$\bar{P} = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{-j\varphi} = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi - j E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \varphi = P_a - j P_r.$$

où  $P_a$ , dite puissance active, correspond à la puissance moyenne consommée dans le dipôle :  $P_a = \langle P \rangle$ , et où  $P_r$ , dite puissance réactive, correspond à la puissance échangée entre la source et les éléments non résistifs du dipôle, sans qu'il y ait, en moyenne, de consommation de puissance.

Lorsqu'un circuit composé d'éléments résistifs, capacitifs et inductifs est alimenté par une source de tension sinusoïdale, la puissance active fournie par le générateur (ou consommée par l'ensemble du circuit) correspond à la somme des puissances dissipées par les éléments résistifs du circuit.

On ne peut toutefois pas considérer que le dimensionnement d'un générateur sinusoïdal puisse être calculé uniquement en se basant sur la puissance consommée par les dipôles résistifs. En effet, même si l'énergie captée par les condensateurs et les bobines finit toujours par être restituée, le générateur doit fournir, même temporairement, cette énergie.

En régime sinusoïdal, les unités de mesure des différents types de puissance sont les suivantes :

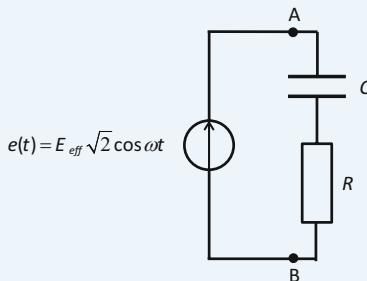
- Puissance active : le watt (W).
- Puissance apparente : le volt ampère (VA).
- Puissance réactive : le volt ampère réactif (VAR).

Le volt ampère et le volt ampère réactif sont homogènes à des watts.

La [fiche 19](#) illustre cette problématique en abordant la question de l'adaptation du facteur de puissance d'une installation électrique.

### EXERCICE 1 Puissance dissipée dans un circuit RC

Dans le schéma de la figure 18.2, calculer l'expression du courant  $i(t)$  débité par le générateur puis déterminer la puissance moyenne  $\langle P \rangle$  dissipée dans la résistance  $R$ . Calculer la puissance complexe et montrer que la puissance active consommée par le dipôle AB correspond bien à la puissance moyenne  $\langle P \rangle$ .



**Figure 18.2**

### Solution

Le calcul de la puissance dissipée dans la résistance  $R$  nécessite la connaissance du courant  $i(t)$  circulant dans le circuit. Représentons le modèle complexe du circuit (figure 18.3).

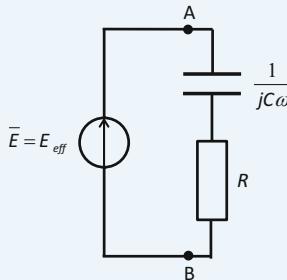


Figure 18.3

Soit  $\bar{I}$  la représentation complexe du courant  $i(t)$  circulant dans le circuit. Comme nous sommes en régime sinusoïdal, on a :

$$i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \bar{I} = I_{\text{eff}} e^{j\varphi}$$

Soit  $\bar{Z}$  l'impédance complexe équivalente du dipôle AB :

$$\bar{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} = R - j \frac{1}{C\omega}$$

La loi d'Ohm généralisée au modèle complexe nous donne :

$$\bar{E} = \bar{Z} \cdot \bar{I} \Rightarrow E_{\text{eff}} = \left( R - j \frac{1}{C\omega} \right) \times I_{\text{eff}} e^{j\varphi}$$

D'où :

$$E_{\text{eff}} = \left| R - j \frac{1}{C\omega} \right| \times I_{\text{eff}} \Rightarrow I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}$$

Et :

$$0 = \arg \left( R - j \frac{1}{C\omega} \right) + \varphi \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{1}{RC\omega}$$

On peut donc écrire l'expression de  $i(t)$  :

$$i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_{\text{eff}} \sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \cos \left( \omega t + \arctan \frac{1}{RC\omega} \right)$$

Calculons à présent la puissance instantanée  $p(t)$  dissipée dans la résistance, avant d'en évaluer la valeur moyenne :

$$p(t) = R i^2(t) = 2R I_{\text{eff}}^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = R I_{\text{eff}}^2 [\cos 2(\omega t + \varphi) + 1]$$

On remarque que l'expression de  $p(t)$  est formée d'une composante sinusoïdale, donc à valeur moyenne nulle, ainsi que d'une composante constante (continue) égale à sa propre valeur moyenne. Le calcul est donc immédiat :  $\langle P \rangle = RI_{\text{eff}}^2$ .

En remplaçant  $I_{\text{eff}}$  par son expression, on obtient :

$$\langle P \rangle = \frac{RE_{\text{eff}}^2}{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$$

Calculons à présent la puissance complexe, puis la puissance active dissipée dans le dipôle AB. Par définition, on a :

$$\bar{P} = \bar{E} \cdot \bar{I}^* = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{-j\varphi}$$

$$\text{Soit : } \bar{P} = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi - jE_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin\varphi = P_a - jP_r.$$

La puissance active est donc égale à :

$$P_a = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = \frac{E_{\text{eff}}^2}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \cos\varphi$$

Le diagramme de Fresnel peut nous aider à trouver facilement l'expression de  $\cos\varphi$ . Attention, l'argument de l'impédance complexe est l'opposé de l'avance algébrique de phase  $\varphi$  du courant par rapport à la tension.

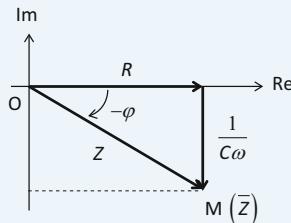


Figure 18.4

$$\text{On lit : } \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}$$

$$\text{D'où : } P_a = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = \frac{RE_{\text{eff}}^2}{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} = \langle P \rangle$$

Ce résultat apporte la preuve que la puissance moyenne dissipée dans un dipôle alimenté par un générateur sinusoïdal est strictement égale à la puissance dissipée dans sa composante résistive.

Très souvent, les installations électriques domestiques ou industrielles sont principalement constituées d'éléments résistifs et inductifs. Un modèle très simple de toute installation de ce type consommant de l'énergie est le circuit RL série. Nous allons nous intéresser ici à l'optimisation du facteur de puissance d'une telle installation, problématique cruciale dans le domaine du transport électrique.

## 1. Alimentation d'un dipôle RL série

Le schéma de la figure 19.1 représente le modèle complexe d'un circuit RL alimenté par un générateur de tension parfait  $e(t) = E_0 \cos \omega t$ . Étudions dans un premier temps les puissances mises en jeu.

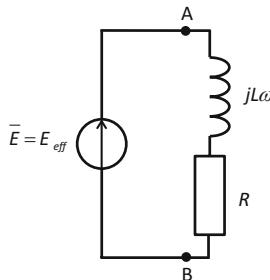


Figure 19.1

Nous savons déjà que le circuit va être le siège de l'apparition d'un courant  $i(t)$  tel que :

$$i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Nous savons également (voir [fiche 18](#)) que la puissance complexe consommée par le dipôle ou délivrée par le générateur a pour expression :

$$\bar{P} = E_{eff} I_{eff} e^{-j\varphi} = E_{eff} I_{eff} \cos \varphi - j E_{eff} I_{eff} \sin \varphi = P_a - j P_r.$$

Rappelons que  $P_a$ , dite puissance active, correspond à la puissance moyenne consommée dans le dipôle :  $P_a = \langle P \rangle$  et c'est elle qui est dissipée dans la résistance  $R$ .

Rappelons aussi que  $P_r$ , dite puissance réactive, correspond à la puissance échangée entre le générateur et l'inductance  $L$ , sans qu'il y ait, en moyenne, de consommation de puissance.

## 2. Calcul des puissances active et réactive

On sait déjà que :

$$I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{|\bar{Z}|} = \frac{E_{\text{eff}}}{|R + jL\omega|} = \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

Par ailleurs, les expressions de  $\cos \varphi$  et de  $\sin \varphi$  s'obtiennent aisément à partir de la représentation de Fresnel.

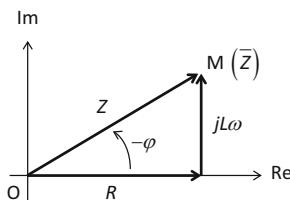


Figure 19.2

### REMARQUE

Attention, l'argument de l'impédance complexe est l'opposé de l'avance algébrique de phase  $\varphi$  du courant par rapport à la tension.

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{-L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

On en déduit immédiatement les expressions des puissances active et réactive :

$$P_a = E_{eff} \cdot \frac{E_{eff}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cdot \cos \varphi$$

$$P_a = E_{eff} \cdot \frac{E_{eff}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{RE_{eff}^2}{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$P_r = E_{eff} \cdot \frac{E_{eff}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cdot \sin \varphi$$

$$P_r = E_{eff} \cdot \frac{E_{eff}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cdot \frac{-L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = -\frac{L\omega E_{eff}^2}{R^2 + L^2\omega^2}$$

La puissance réactive est la puissance qui est échangée en permanence entre la bobine et le reste du circuit. Par conséquent, c'est une puissance que doit fournir temporairement le générateur alimentant le dipôle AB. À un instant donné, elle n'est pas nulle en valeur instantanée. La présence de cette puissance réactive pose un premier problème : celui du dimensionnement du générateur qui doit être capable de fournir la puissance moyenne dissipée dans la résistance, mais aussi fournir aux instants nécessaires la puissance réactive qu'utilise la bobine, même si cette énergie est restituée ensuite au générateur. Le second problème concerne le transport de l'énergie électrique entre le générateur et l'installation à alimenter. Les câbles qui acheminent cette énergie doivent eux aussi pouvoir supporter plus que la puissance active « utile ». De plus, ils peuvent être, sur de longues distances, le siège d'une dissipation de cette puissance. Pour un fournisseur d'électricité, ces deux problèmes sont très importants. Suffisamment pour qu'ils obligent les consommateurs d'énergie à minimiser voire annuler si possible la puissance réactive induite par leur installation. Cela est possible grâce à l'adaptation du facteur de puissance.

### 3. Annulation de la puissance réactive

On voit bien, d'après l'expression de la puissance réactive, que si  $\sin \varphi$  est nul, autrement dit si  $\varphi = 0$ , la puissance réactive sera nulle également. Dans ce cas, le facteur de puissance  $\cos \varphi$  sera égal à 1.

On considère qu'une installation électrique ne consomme pas de puissance réactive si son facteur de puissance est égal à 1 :  $\cos \varphi = 1$ .

Voilà pourquoi on parle d'adaptation du facteur de puissance. Dans le diagramme de Fresnel de la figure 19.2, il est facile de voir que cela est possible en ramenant le point M sur l'axe réel. Pour ce faire, on place un condensateur de capacité  $C$  en parallèle avec le dipôle RL (figure 19.3).

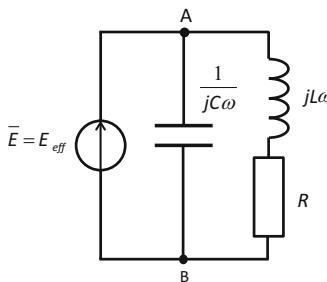


Figure 19.3

Soit  $\bar{Z}$  l'impédance complexe du nouveau dipôle AB.

$$\text{On a : } \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega, \text{ soit : } \bar{Z} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

L'annulation de la puissance réactive consommée par le dipôle est équivalente à  $\sin \varphi = 0$ .

Or :  $\sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \tan \varphi = 0$

Comme  $\varphi$  est l'opposé de l'argument de  $\bar{Z}$ , il vient :

$$\arg \bar{Z} = \arg(R + jL\omega) - \arg(1 - LC\omega^2 + jRC\omega) = 0$$

$$\text{Soit : } \arctan \frac{L\omega}{R} = \arctan \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$$

On en déduit que la condition pour laquelle la puissance réactive consommée par le dipôle est nulle est :

$$\frac{L\omega}{R} = \frac{RC\omega}{1-LC\omega^2} \Rightarrow L\omega(1-LC\omega^2) = R^2C\omega$$

$$\text{D'où : } C(R^2\omega + L^2\omega^3) = L\omega \Rightarrow C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2}$$

### REMARQUE

La mise en parallèle d'un condensateur aux bornes d'une installation électrique ne change rien à la consommation du client puisque la puissance absorbée par ce condensateur est en moyenne nulle.

## EXERCICE 1 Adaptation d'un facteur de puissance

On suppose qu'une installation électrique est modélisée par un circuit RL série avec  $R = 12 \Omega$  et  $L = 20 \text{ mH}$ . Cette installation est alimentée par une tension  $e(t)$  telle que :

$$e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t = 325 \cos 314t (\text{V})$$

Déterminer la valeur de la puissance active ainsi que celle de la puissance réactive consommées par le dipôle.

Quelle est la valeur de la capacité du condensateur qu'il faut placer en parallèle sur le dipôle RL pour ramener le facteur de puissance de l'installation à 1 ?

Que valent alors les puissances active et réactive ?

### Solution

Il s'agit simplement d'appliquer les expressions démontrées dans cette fiche.

$$P_a = \frac{RE_{\text{eff}}^2}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{12 \times 230^2}{12 + (0,02 \times 314)^2} = 3461 \text{ W}$$

$$P_r = -\frac{L\omega E_{\text{eff}}^2}{R^2 + L^2\omega^2} = -\frac{0,02 \times 314 \times 230^2}{12 + (0,02 \times 314)^2} = 1811 \text{ VAR}$$

Si on place un condensateur en parallèle sur le dipôle AB, on sait qu'on obtient un facteur de puissance égal à 1 lorsque :

$$C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2}$$

Soit :

$$C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{0,02}{12^2 + (0,02 \times 314^2)} = 109 \mu F$$

Enfin, comme la puissance active correspond à la puissance moyenne uniquement consommée par la résistance, elle reste inchangée. Quant à la puissance réactive, elle devient nulle.

# Quadripôles électriques

Bon nombre de dispositifs électriques, particulièrement en régime sinusoïdal, sont chargés de transformer des signaux. Autrement dit, ils peuvent être considérés comme des systèmes possédant une entrée (le signal original) et une sortie (le signal transformé).

La modélisation de ces systèmes sous forme de quadripôles est alors essentielle pour disposer d'outils adaptés à cette représentation. Elle est associée à un certain nombre de méthodes que nous allons étudier dans les [fiches 20 à 22](#).

## 1. Définition

Un quadripôle est un circuit électrique possédant quatre bornes dont deux seront définies comme bornes d'entrée, les deux autres étant les bornes de sortie (figure 20.1).

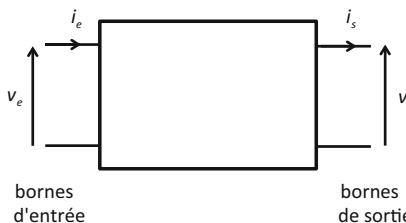


Figure 20.1

Quatre grandeurs sont définies : tension d'entrée  $v_e$ , courant d'entrée  $i_e$ , tension de sortie  $v_s$  et courant de sortie  $i_s$ . Les tensions  $v_e$  et  $v_s$  sont mesurées par rapport à des bornes de référence : une à l'entrée et une en sortie. Souvent, ces deux bornes n'en forment qu'une seule et constituent la masse du circuit (potentiel 0 V).

L'orientation des courants découle du choix de la convention récepteur pour l'entrée du quadripôle et de la convention générateur pour la sortie. Ce choix est pertinent car les quadripôles interviennent dans des circuits comme celui de la figure 20.2, l'entrée du quadripôle étant alimentée

par un circuit amont, tandis que sa sortie alimente un circuit de charge. Ce circuit de charge est parfois une simple impédance. Il peut s'agir également d'un deuxième quadripôle.

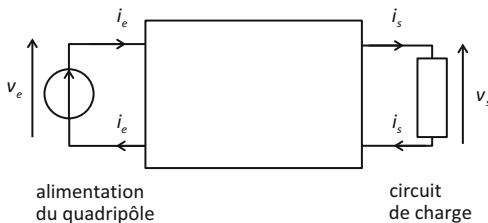


Figure 20.2

## REMARQUE

Attention : on ne peut parler de quadripôle qu'à la condition expresse que le port d'entrée d'une part et le port de sortie d'autre part, puissent être considérés comme des dipôles, autrement dit, le courant sortant de la borne inférieure gauche doit être égal à  $i_e$  et le courant entrant par la borne inférieure droite doit être égal à  $i_s$  (figure 20.2).

## 2. Quadripôles en régime sinusoïdal

Dans le cadre de cet ouvrage, nous nous limiterons à l'étude des quadripôles en régime sinusoïdal, composés uniquement d'éléments passifs linéaires (résistances, condensateurs et auto-inductances). D'une manière générale, on supposera que les quadripôles étudiés sont alimentés, à leur entrée, par une source de tension sinusoïdale, par exemple :

$$v_e(t) = V_{e,eff} \sqrt{2} \cos \omega t.$$

Ainsi, comme cela est la règle en régime sinusoïdal, tous les courants et tensions dans le circuit, en particulier les courants  $i_e$  et  $i_s$ , ainsi que la tension  $v_s$ , seront sinusoïdaux, de même pulsation  $\omega$  et le modèle

complexe, par conséquent, s'impose : les grandeurs  $v_e$ ,  $v_s$ ,  $i_e$  et  $i_s$  seront associées à leur forme complexe (figure 20.3). Les problèmes liés aux quadripôles nécessitant la connaissance de relations entre  $\bar{V}_e$ ,  $\bar{I}_e$ ,  $\bar{V}_s$  et  $\bar{I}_s$  nous devrons, en général, à partir de deux de ces grandeurs, déterminer les deux autres.

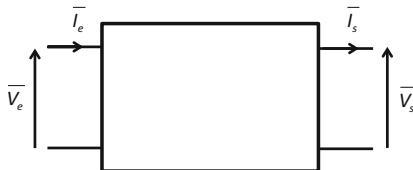


Figure 20.3

### 3. Matrice de transfert

On peut ainsi chercher à exprimer les deux grandeurs de sortie en fonction des deux grandeurs d'entrée. Si le circuit est linéaire, cette linéarité se retrouve dans les équations qui expriment  $\bar{V}_s$  et  $\bar{I}_s$  en fonction de  $\bar{V}_e$  et  $\bar{I}_e$  :

$$\begin{aligned}\bar{V}_s &= \bar{T}_{11}\bar{V}_e + \bar{T}_{12}\bar{I}_e \\ \bar{I}_s &= \bar{T}_{21}\bar{V}_e + \bar{T}_{22}\bar{I}_e\end{aligned}$$

Ces deux équations peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle et on définit ainsi la matrice de transfert ( $\bar{T}$ ) du quadripôle :

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_s \\ \bar{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} \\ \bar{T}_{21} & \bar{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ \bar{I}_e \end{pmatrix} = (\bar{T}) \begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ \bar{I}_e \end{pmatrix}$$

Les coefficients  $\bar{T}_{ij}$  sont évidemment complexes, dans le cas le plus général. Par ailleurs, ils ne correspondent pas tous à la même grandeur. Ainsi,  $\bar{T}_{11}$  est sans dimension, puisque reliant  $\bar{V}_s$  à  $\bar{V}_e$ , tandis que  $\bar{T}_{12}$  est homogène à une impédance complexe.

#### EXEMPLE

Le schéma de la figure 20.4 représente un quadripôle très simple formé d'une impédance reliant l'entrée et la sortie. On cherche à déterminer sa matrice de transfert.

Pour ce faire, il faut identifier les quatre coefficients  $\bar{T}_{ij}$ .

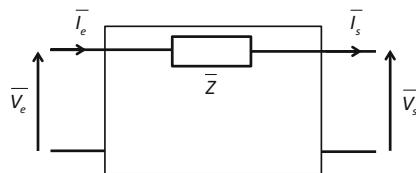


Figure 20.4

Le meilleur moyen d'y parvenir consiste à écrire, à partir du schéma électrique, les équations qui lient les grandeurs de sortie aux grandeurs d'entrée.

L'équation qui lie les deux courants est on ne peut plus simple :

$$\bar{I}_s = \bar{I}_e$$

Pour établir la seconde équation, il suffit d'écrire la loi d'Ohm aux bornes de  $\bar{Z}$  :

$$\bar{V}_s - \bar{V}_e = \bar{Z} \bar{I}_e \Rightarrow \bar{V}_s = \bar{V}_e - \bar{Z} \bar{I}_e$$

Le système d'équation :

$$\begin{cases} \bar{V}_s = \bar{V}_e - \bar{Z} \bar{I}_e \\ \bar{I}_s = 0 \cdot \bar{V}_e + \bar{I}_e \end{cases}$$

nous conduit immédiatement à la matrice de transfert du quadripôle. Il suffit pour cela d'identifier les quatre coefficients :

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_s \\ \bar{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} \\ \bar{T}_{21} & \bar{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ \bar{I}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ \bar{I}_e \end{pmatrix} \Rightarrow (T) = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### EXERCICE 1 Calcul d'une matrice de transfert

On considère le schéma de la figure 20.5 représentant un quadripôle constitué d'une admittance en parallèle.

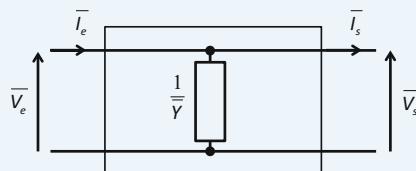


Figure 20.5

L'admittance  $\bar{Y}$  est représentée par son impédance  $1/\bar{Y}$ .

Établir les relations qui lient  $(\bar{V}_s, \bar{I}_s)$  à  $(\bar{V}_e, \bar{I}_e)$  et en déduire la matrice de transfert de ce quadripôle.

## Solution

La figure 20.5 nous montre immédiatement que  $\bar{V}_s = \bar{V}_e$ . De plus, le courant  $\bar{I}$  circulant dans l'admittance (figure 20.6) se détermine aisément à partir de l'une ou l'autre de ces tensions :

$$\bar{I} = \bar{Y} \bar{V}_e = \bar{Y} \bar{V}_s$$

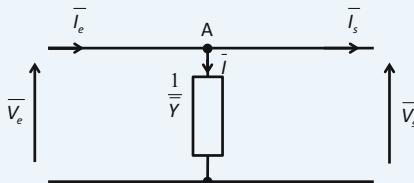


Figure 20.6

De plus, la loi des nœuds appliquée au point A nous donne :

$$\bar{I} = \bar{I}_e - \bar{I}_s$$

Comme nous cherchons à déterminer les coefficients d'une matrice de transfert, organisons ces équations de manière à les faire apparaître (grandeur de sortie en fonction des grandeurs d'entrée).

$$\begin{cases} \bar{V}_s = \bar{V}_e + 0 \cdot \bar{I}_e \\ \bar{I}_s = \bar{I}_e - \bar{I} = -\bar{Y} \bar{V}_e + \bar{I}_e \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_s \\ \bar{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} \\ \bar{T}_{21} & \bar{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ \bar{I}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\bar{Y} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ \bar{I}_e \end{pmatrix}$$

Au final :

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\bar{Y} & 1 \end{pmatrix}$$

Au-delà de la matrice de transfert introduite dans la [fiche 20](#), il est possible de caractériser le fonctionnement d'un quadripôle en régime sinusoïdal de multiples façons. Plusieurs autres matrices caractéristiques peuvent être définies : matrice impédance, matrice admittance et les deux matrices hybrides. D'autres existent, mais nous nous limiterons à ces quatre modèles.

Par ailleurs, à côté de ces matrices qui traduisent les équations de fonctionnement du quadripôle, deux grandeurs absolument fondamentales doivent être définies : son impédance d'entrée et son impédance de sortie qui sont d'un intérêt capital pour placer le quadripôle dans son environnement externe.

## 1. Matrice impédance

En exprimant les tensions  $\bar{V}_e$  et  $\bar{V}_s$  en fonction des courants  $\bar{I}_e$  et  $\bar{I}_s$ , on obtient les relations suivantes dans lesquelles les  $\bar{Z}_{ij}$  sont homogènes à des impédances :

$$\begin{aligned}\bar{V}_e &= \bar{Z}_{11}\bar{I}_e - \bar{Z}_{12}\bar{I}_s \\ \bar{V}_s &= \bar{Z}_{21}\bar{I}_e - \bar{Z}_{22}\bar{I}_s\end{aligned}$$

On définit alors la matrice impédance ( $\bar{Z}$ ) du quadripôle :

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ \bar{V}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_e \\ -\bar{I}_s \end{pmatrix} = (\bar{Z}) \begin{pmatrix} \bar{I}_e \\ -\bar{I}_s \end{pmatrix}$$

### REMARQUE

Le signe moins devant  $\bar{I}_s$  est introduit de manière à pouvoir rendre compte d'une éventuelle symétrie dans le quadripôle. Ce signe négatif permettra alors de retrouver cette symétrie dans la matrice.

## 2. Matrice admittance

La matrice admittance est définie comme la matrice inverse de la matrice impédance :

$$\begin{cases} \bar{I}_e = \bar{Y}_{11}\bar{V}_e + \bar{Y}_{12}\bar{V}_s \\ -\bar{I}_s = \bar{Y}_{21}\bar{V}_e + \bar{Y}_{22}\bar{V}_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{I}_e \\ -\bar{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ \bar{V}_s \end{pmatrix} = (\bar{Y}) \begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ \bar{V}_s \end{pmatrix}$$

## 3. Matrices hybrides

Les matrices hybrides  $(\bar{G})$  et  $(\bar{H})$  sont définies par :

$$\begin{cases} \bar{I}_e = \bar{G}_{11}\bar{V}_e - \bar{G}_{12}\bar{I}_s \\ \bar{V}_s = \bar{G}_{21}\bar{V}_e - \bar{G}_{22}\bar{I}_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{I}_e \\ \bar{V}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ -\bar{I}_s \end{pmatrix} = (\bar{G}) \begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ -\bar{I}_s \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \bar{V}_e = \bar{H}_{11}\bar{I}_e + \bar{H}_{12}\bar{V}_s \\ -\bar{I}_s = \bar{H}_{21}\bar{I}_e + \bar{H}_{22}\bar{V}_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ -\bar{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_e \\ \bar{V}_s \end{pmatrix} = (\bar{H}) \begin{pmatrix} \bar{I}_e \\ \bar{V}_s \end{pmatrix}$$

On a évidemment :  $(\bar{H}) = (\bar{G})^{-1}$ .

## 4. Impédance d'entrée

Depuis sa porte d'entrée, le quadripôle apparaît toujours comme une impédance équivalente au circuit composé du quadripôle lui-même et de la charge  $\bar{Z}_c$  qu'il alimente (figure 21.1). Cette impédance équivalente  $\bar{Z}_e$  est appelée *impédance d'entrée*.

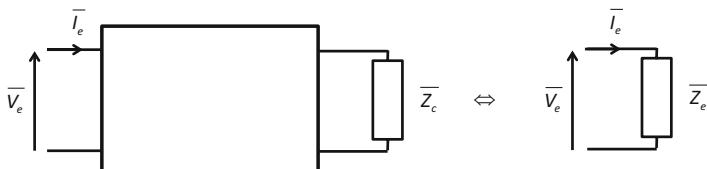


Figure 21.1

Cette définition implique évidemment la relation :  $\frac{\bar{V}_e}{\bar{I}_e} = \bar{Z}_e$ .

#### REMARQUE

Contrairement à une idée reçue, l'impédance d'entrée n'est pas une caractéristique intrinsèque du quadripôle : elle dépend toujours de l'impédance de la charge connectée à la sortie du quadripôle. En revanche, les matrices caractéristiques définies plus haut ne dépendent que du quadripôle et non de la charge qui lui est connectée.

## 5. Impédance de sortie

Si un quadripôle est alimenté à son entrée, l'ensemble du circuit, au niveau de la porte de sortie, peut être modélisé par un générateur de Thévenin (figure 21.2).

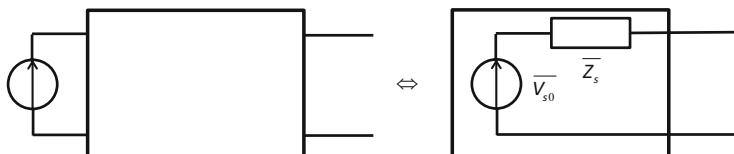


Figure 21.2

Ce générateur est constitué d'un générateur de tension parfait  $\bar{V}_{s0}$  placé en série avec une impédance  $\bar{Z}_s$ .  $\bar{V}_{s0}$  est appelée *tension de sortie à vide* du quadripôle puisqu'on a  $\bar{V}_s = \bar{V}_{s0}$  lorsque  $\bar{I}_s = 0$ .  $\bar{Z}_s$  est appelée *impédance de sortie* du quadripôle.

#### REMARQUE

Si le générateur qui alimente le quadripôle est considéré comme parfait, l'impédance de sortie du quadripôle ne dépend que de ses éléments constitutifs et est donc une caractéristique intrinsèque du quadripôle. En revanche, si le générateur possède une résistance interne, celle-ci interviendra dans le calcul de l'impédance de sortie  $\bar{Z}_s$ .

## EXERCICE 1 Mesure d'une impédance de sortie

Un quadripôle quelconque possédant une impédance de sortie purement résistive  $\bar{Z}_s = R_s$  est alimenté par une source de tension sinusoïdale. On effectue une mesure de la valeur efficace de la tension de sortie à vide : soit  $V_{s0\text{eff}}$ . On relie ensuite les bornes de sortie de ce quadripôle à une résistance de charge  $R_c$  variable. On ajuste  $R_c$  de manière à mesurer une valeur efficace de la tension de sortie égale à  $\frac{V_{s0\text{eff}}}{2}$ . Montrer que cette valeur de  $R_c$  est égale à l'impédance de sortie  $R_s$  du quadripôle.

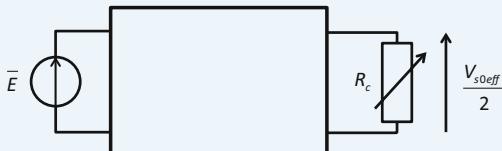


Figure 21.3

### Solution

Le schéma équivalent du circuit est représenté sur la figure 21.4.

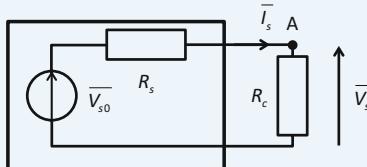


Figure 21.4

Appliquons le principe du diviseur de tension au point A :  $\bar{V}_s = \frac{R_c}{R_c + R_s} \bar{V}_{s0}$ .

$$\text{D'où : } |\bar{V}_s| = \frac{R_c}{R_c + R_s} |\bar{V}_{s0}|$$

$$\text{Soit : } V_{s\text{eff}} = \frac{R_c}{R_c + R_s} V_{s0\text{eff}}$$

$$\text{En mesurant } V_{s\text{eff}} = \frac{V_{s0\text{eff}}}{2}, \text{ on a : } \frac{V_{s0\text{eff}}}{2} = \frac{R_c}{R_c + R_s} V_{s0\text{eff}} \Rightarrow \frac{R_c}{R_c + R_s} = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où : } 2R_c = R_c + R_s \Rightarrow R_c = R_s$$

*Cet exercice décrit une méthode classique de mesure de la résistance de sortie d'un dispositif électrique quelconque : on effectue une mesure de la tension de sortie à vide, puis en charge et on règle cette charge de manière à mesurer une tension de sortie égale à la moitié de la tension à vide. Il est question ici de valeurs efficaces car les voltmètres utilisés en régime sinusoïdal ne mesurent que les valeurs efficaces des tensions.*

Les différents modèles de quadripôles (matrices impédances, admittances, etc., impédances d'entrée et de sortie) permettent de construire plusieurs types de schémas équivalents. Rappelons qu'un schéma équivalent est un circuit qui possède les mêmes équations de fonctionnement que le circuit d'origine, sans obligatoirement lui correspondre physiquement. Ce que l'on recherche, en général, est le circuit équivalent le plus simple possible qui conserve les équations de fonctionnement. En un mot, il s'agit de « dessiner » les équations.

Nous nous limiterons ici à deux schémas équivalents : celui obtenu à partir de la matrice impédance et celui obtenu en considérant les deux paramètres que sont les impédances d'entrée et de sortie.

## 1. Schéma équivalent à partir de la matrice impédance

Les équations  $\begin{cases} \bar{V}_e = \bar{Z}_{11}\bar{I}_e - \bar{Z}_{12}\bar{I}_s \\ \bar{V}_s = \bar{Z}_{21}\bar{I}_e - \bar{Z}_{22}\bar{I}_s \end{cases}$  se traduisent par le schéma de la figure 22.1.

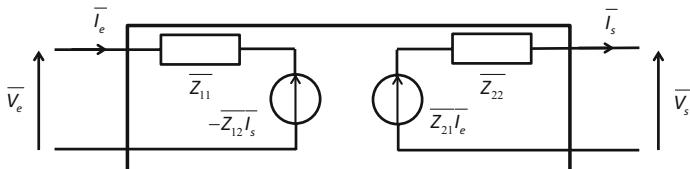


Figure 22.1

### REMARQUE

On notera bien que dans ce schéma, les sources de tension présentes n'existent pas, dans la réalité physique. Ce ne sont que des modèles censés matérialiser les équations. De plus, ces sources sont dépendantes d'autres grandeurs électriques.

## 2. Schéma équivalent à partir des impédances d'entrée et de sortie

Bien que les impédances d'entrée et de sortie dépendent de la charge connectée à la sortie et du générateur connecté à l'entrée, il est possible de proposer un schéma équivalent faisant intervenir ces deux paramètres (figure 22.2).

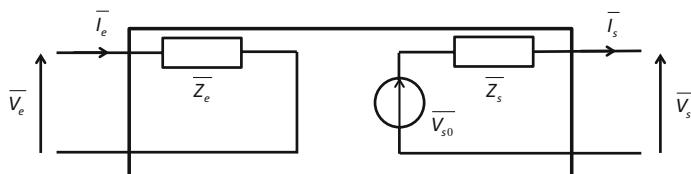


Figure 22.2

## 3. Association de quadripôles

L'association en parallèle consiste à relier les bornes des deux quadripôles deux à deux afin de constituer un nouveau quadripôle (figure 22.3). Dans ces conditions, les matrices admittances s'ajoutent et le nouveau quadripôle est tel que  $(Y) = (Y') + (Y'')$ .

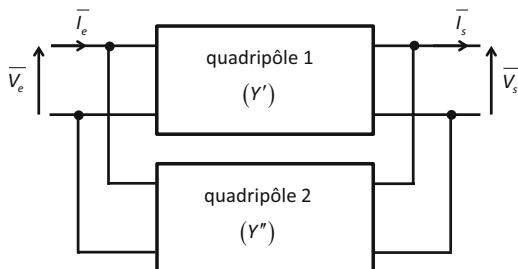


Figure 22.3

Dans l'association série (figure 22.4), les matrices impédances s'ajoutent :

$$(Z) = (Z') + (Z'')$$

Lorsque deux quadripôles sont associés en cascade (figure 22.5), la matrice de transfert équivalente ( $T$ ) est égale au produit de la matrice de transfert du second, soit ( $T''$ ), par celle du premier, soit ( $T'$ ) :  $(T) = (T'') \cdot (T')$ .

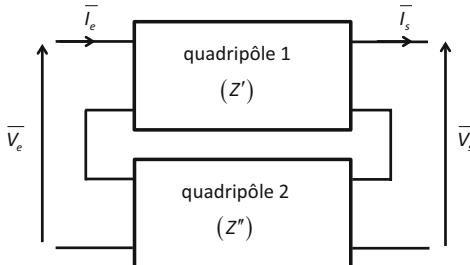


Figure 22.4

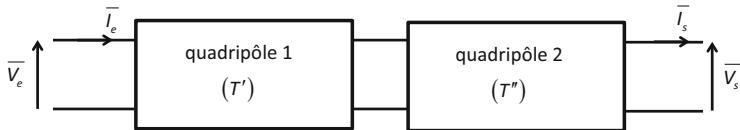


Figure 22.5

### REMARQUE

La multiplication matricielle n'est pas commutative et le quadripôle résultant de la mise en cascade de deux quadripôles dépend de l'ordre dans lequel ils sont placés. Par ailleurs, les règles d'association ne sont valables que si le système résultant reste modélisable en tant que quadripôle (voir remarque de la [fiche 20](#)).

## 4. Étude de cas

On considère deux quadripôles très simples placés en cascade comme indiqué sur la figure 22.6 et on cherche à déterminer la matrice de transfert de l'ensemble. Il nous faut pour cela, déterminer la matrice de transfert de chaque quadripôle élémentaire. Concernant le quadripôle

de droite, cela a été fait à titre d'exercice dans la [fiche 20](#). Nous reprenons donc uniquement le résultat en posant  $\overline{Z}_2 = \frac{1}{\overline{Y}}$  :

$$(T_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\overline{Z}_2} & 1 \end{pmatrix}$$

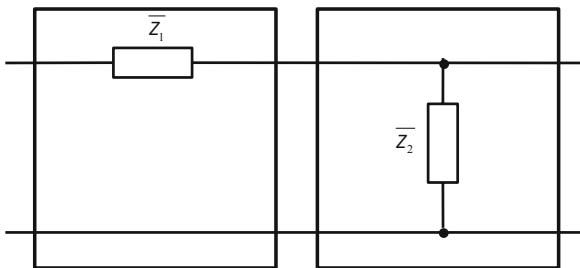


Figure 22.6

Concernant le quadripôle de gauche, l'analyse immédiate du schéma nous permet d'écrire que  $\overline{I}_s = \overline{I}_e$ .

Par ailleurs, la différence de potentiels entre la borne d'entrée et la borne de sortie, c'est-à-dire aux bornes de  $\overline{Z}_1$  nous donne :

$$\overline{V}_e - \overline{V}_s = \overline{Z}_1 \overline{I}_e$$

Soit :  $\overline{V}_s = \overline{V}_e - \overline{Z}_1 \overline{I}_e$ .

Le système d'équations :  $\begin{cases} \overline{V}_s = \overline{V}_e - \overline{Z}_1 \overline{I}_e \\ \overline{I}_s = 0 \cdot \overline{V}_e + \overline{I}_e \end{cases}$  nous conduit immédiatement

à l'écriture matricielle qui met en évidence la matrice de transfert du quadripôle de gauche :

$$\begin{pmatrix} \overline{V}_s \\ \overline{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{I}_e \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où : } (T_1) = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour finir, on obtient la matrice de transfert de l'ensemble en multipliant les deux matrices de transfert élémentaires obtenues :

$$(T) = (T_2)(T_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\bar{Z}_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{Z}_1 \\ -\frac{1}{\bar{Z}_2} & \left(\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} + 1\right) \end{pmatrix}$$

### REMARQUE

La meilleure technique pour déterminer une matrice caractéristique d'un quadripôle consiste à « forcer » l'apparition des deux équations attendues en écrivant quelques lois simples de l'électricité.

Par ailleurs, toujours chercher à décomposer un quadripôle en quadripôles plus simples et utiliser les règles d'association, notamment en cascade (la plus fréquemment utilisée).

### EXERCICE 1 Influence de la charge de sortie sur l'impédance d'entrée

On considère un quadripôle caractérisé par sa matrice impédance ( $Z$ ). Ce quadripôle est relié à une charge  $\bar{Z}_c$ , comme indiqué sur la figure 22.7.

Déterminer l'expression de l'impédance d'entrée  $\bar{Z}_e$  de ce quadripôle en fonction de  $\bar{Z}_c$  et des éléments de la matrice ( $\bar{Z}$ ) après avoir dessiné le schéma équivalent le plus approprié.

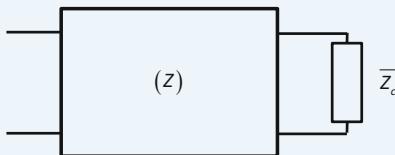


Figure 22.7

## Solution

Nous allons opter pour un schéma équivalent basé sur la matrice impédance (figure 22.8).

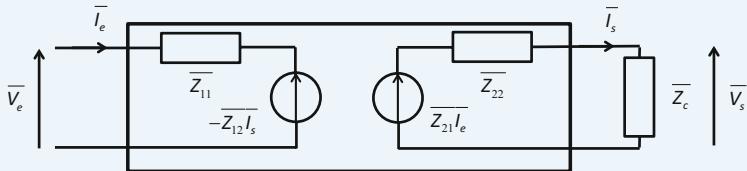


Figure 22.8

Rappelons juste que ce schéma équivalent traduit l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ \bar{V}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_e \\ -\bar{I}_s \end{pmatrix} = (\bar{Z}) \begin{pmatrix} \bar{I}_e \\ -\bar{I}_s \end{pmatrix}$$

Dans la partie gauche du schéma, on a :

$$\bar{V}_e = \bar{Z}_{11} \bar{I}_e - \bar{Z}_{12} \bar{I}_s$$

Afin de déterminer l'impédance d'entrée, c'est-à-dire  $\frac{\bar{V}_e}{\bar{I}_e}$ , il nous faut exprimer  $\bar{I}_s$  en fonction de  $\bar{I}_e$ .

Dans la partie droite du schéma, on tire :

$$\bar{Z}_{21} \bar{I}_e - \bar{Z}_{22} \bar{I}_s - \bar{Z}_c \bar{I}_s = 0$$

$$\text{D'où : } \bar{I}_s = \frac{\bar{Z}_{21}}{\bar{Z}_{22} + \bar{Z}_c} \bar{I}_e$$

On en déduit alors :

$$\bar{V}_e = \bar{Z}_{11} \bar{I}_e - \frac{\bar{Z}_{12} \bar{Z}_{21}}{\bar{Z}_{22} + \bar{Z}_c} \bar{I}_e$$

D'où l'expression de l'impédance d'entrée :

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{V}_e}{\bar{I}_e} = \bar{Z}_{11} - \frac{\bar{Z}_{12} \bar{Z}_{21}}{\bar{Z}_{22} + \bar{Z}_c}$$

## EXERCICE 2 Étude d'un double quadripôle LC

Déterminer la matrice de transfert ( $T$ ) du quadripôle représenté sur la figure 22.9. En supposant que ce quadripôle est alimenté par un générateur parfait de tension

sinusoïdale  $\bar{V}_e = \underline{E}_{eff}$  et qu'aucune charge n'est connectée à sa sortie, déterminer l'expression de  $\bar{V}_s / \bar{V}_e$  en fonction de  $\omega$ .

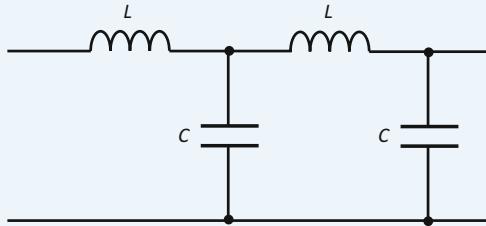


Figure 22.9

## Solution

Établissons le modèle complexe du quadripôle et remarquons qu'il est formé de la mise en cascade de deux quadripôles  $O'$  identiques (figure 22.10).

Chacun de ces deux quadripôles possède une forme relativement simple dont nous avons déjà déterminé la matrice de transfert dans le cas général au cours de l'étude de cas du paragraphe 4 de la présente fiche.

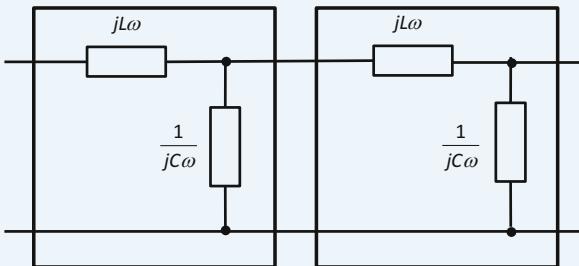


Figure 22.10

Nous avons ainsi montré que la matrice de transfert ( $T'$ ) de l'un de ces quadripôles avait pour expression :

$$(T') = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{Z}_1 \\ -\frac{1}{\bar{Z}_2} & \left(\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} + 1\right) \end{pmatrix}$$

Avec, ici :  $\bar{Z}_1 = jL\omega$  et  $\bar{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega}$ .

Par conséquent :  $(T') = \begin{pmatrix} 1 & -jL\omega \\ -jC\omega & -LC\omega^2 \end{pmatrix}$

Comme les deux quadripôles sont associés en cascade, la matrice  $(T)$  du quadripôle résultant est égale au produit de leurs matrices de transfert.

Soit :

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & -jL\omega \\ -jC\omega & -LC\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -jL\omega \\ -jC\omega & -LC\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$(T) = \begin{pmatrix} 1-LC\omega^2 & -2jL\omega + jL^2C\omega^3 \\ -2jC\omega + jLC^2\omega^3 & -LC\omega^2 + (1-LC\omega^2)^2 \end{pmatrix}$$

Rappelons que la matrice de transfert correspond aux équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_s \\ \bar{I}_s \end{pmatrix} = (\bar{T}) \begin{pmatrix} \bar{V}_e \\ \bar{I}_e \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{V}_s = \bar{T}_{11}\bar{V}_e + \bar{T}_{12}\bar{I}_e \\ \bar{I}_s = \bar{T}_{21}\bar{V}_e + \bar{T}_{22}\bar{I}_e \end{cases}$$

De plus, on suppose que :  $\bar{T}_s = 0$ .

Par conséquent :

$$\bar{T}_{21}\bar{V}_e + \bar{T}_{22}\bar{I}_e = 0 \Rightarrow \bar{I}_e = -\frac{\bar{T}_{21}}{\bar{T}_{22}}\bar{V}_e$$

$$\text{D'où : } \bar{V}_s = \bar{T}_{11}\bar{V}_e - \frac{\bar{T}_{12}\bar{T}_{21}}{\bar{T}_{22}}\bar{V}_e.$$

$$\text{Soit : } \frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} = \bar{T}_{11} - \frac{\bar{T}_{12}\bar{T}_{21}}{\bar{T}_{22}}.$$

Remplaçons les coefficients  $\bar{T}_{ij}$  par leurs expressions :

$$\frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} = 1-LC\omega^2 - \frac{(-2jL\omega + jL^2C\omega^3)(-2jC\omega + jLC^2\omega^3)}{-LC\omega^2 + (1-LC\omega^2)^2}$$

Après réduction au même dénominateur puis simplification, on obtient :

$$\frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} = \frac{1}{1-3LC\omega^2+L^2C^2\omega^4}$$

On retiendra de cet exercice que la matrice de transfert permet d'obtenir l'expression de ce qu'on appelle la fonction de transfert du quadripôle, autrement dit l'expression du rapport entre la tension de sortie et la tension d'entrée. Attention, ne pas croire que cette expression se limite au seul paramètre  $\bar{T}_{11}$ .

# Notion de spectre

La représentation temporelle (c'est-à-dire sous la forme de fonction du temps) n'est pas le seul mode de représentation d'une grandeur électrique. Dans un certain nombre d'applications, il est nécessaire de pouvoir décrire cette grandeur d'un point de vue fréquentiel. La présente fiche est consacrée à la présentation de ce concept tandis que la [fiche 24](#) élargira ces notions. Nous verrons un peu plus loin que cette approche peut être très précieuse.

## 1. Représentation fréquentielle d'une sinusoïde

On peut décrire naturellement un signal sinusoïdal, notamment une tension, par son équation temporelle, par exemple  $e(t) = A \cos \omega t$ . On peut tout aussi bien évoquer les mêmes informations en disant simplement qu'il s'agit d'une sinusoïde d'amplitude  $A$  et de fréquence  $\omega / 2\pi$ . Dans ces conditions, on peut, au lieu de représenter l'évolution temporelle du signal, représenter un unique point de coordonnées  $[A, \omega / 2\pi]$ .

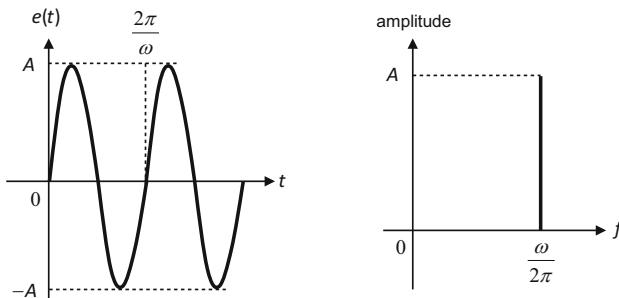


Figure 23.1

La figure 23.1 représente, à gauche, le graphe temporel du signal et à droite, son graphe fréquentiel qui se résume en un unique point. En fait, on trace une raie pour mieux matérialiser l'information.

## 2. Représentation fréquentielle d'un signal composé

Le signal  $s(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$  composé de la somme de deux sinusoïdes peut être représenté en portant uniquement, dans le graphe amplitude-fréquence, les deux points (ou plutôt les deux raies) de chacune des deux sinusoïdes (figure 23.2).

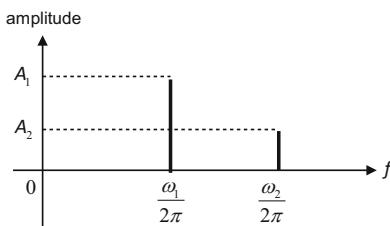


Figure 23.2

### REMARQUE

Nous perdons l'information de déphasage à l'origine entre les deux sinusoïdes. Toutefois, les applications pour lesquelles nous avons besoin d'introduire cette représentation fréquentielle ne nécessiteront pas obligatoirement cette information. Par conséquent, sa perte ne doit pas susciter d'inquiétude.

## 3. Spectre d'un signal quelconque

Par analogie avec les spectres lumineux composés de raies de lumière, la représentation fréquentielle est appelée spectre du signal. Le spectre d'un signal est la description de la manière dont il se décompose en signaux élémentaires (ci-dessus des sinusoïdes). En règle générale, on utilise plutôt une décomposition du signal selon une base de fonctions élémentaires  $e^{j\omega t} = e^{j2\pi ft}$ .

Ainsi, le spectre du signal sinusoïdal  $s(t) = A \cos \omega t$  correspond au graphe de la figure 23.3, puisque  $s(t) = A \cos \omega t = A \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ . On

parle alors de spectre bilatéral, tandis que le schéma de la figure 23.2 représente un spectre unilatéral.

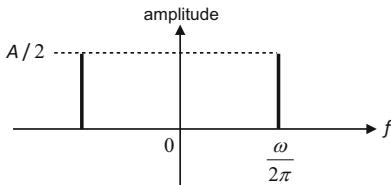


Figure 23.3

### REMARQUE

Pourquoi avoir choisi une telle base de décomposition ? Pour une raison très simple : le mathématicien français Joseph Fourier a démontré que presque tous les signaux pouvaient se décomposer en une somme de signaux de ce type. Désormais, nous n'envisagerons plus aucun spectre sans qu'il ne corresponde à une décomposition selon une base de fonctions élémentaires  $e^{j\omega t} = e^{j2\pi ft}$ .

La notion de spectre d'une grandeur électrique est indissociablement liée au fait que l'on décrit souvent le fonctionnement de certains dispositifs électriques selon leur comportement fréquentiel. Pour bien comprendre l'intérêt d'une telle représentation, imaginons simplement un système capable de filtrer les signaux qu'on injecte à son entrée, par exemple en laissant passer la partie utile d'une tension tandis qu'il élimine les signaux parasites.

La connaissance combinée du spectre du signal d'entrée et du comportement fréquentiel du système permet de déterminer immédiatement ce qu'il restera de ses composantes fréquentielles une fois traité par le filtre.

### EXERCICE 1 Tracé de spectre

On considère un générateur qui est supposé délivrer la tension  $e(t) = 230\sqrt{2} \cos 314t$ . Il s'avère qu'à cette tension sinusoïdale s'ajoutent des signaux parasites, de sorte que :

$$e(t) = 230\sqrt{2} \cos 314t + 30\sqrt{2} \cos 3140t + 15\sqrt{2} \cos 6280t$$

Tracer le spectre unilatéral de la tension  $e(t)$  et expliquer par un raisonnement qualitatif comment il est possible d'éliminer les deux composantes de hautes fréquences du signal.

### Solution

Le signal  $e(t)$  est composé de la somme de trois sinusoïdes d'amplitudes égales à 325 V, 42 V et 21 V et dont les fréquences respectives sont 50 Hz, 500 Hz et 1 000 Hz (on divise la pulsation par  $2\pi$ ). La figure 23.4 présente le spectre de cette tension. Les échelles ne sont pas respectées, mais on notera que très souvent, on effectue les tracés des spectres sur des échelles logarithmiques.

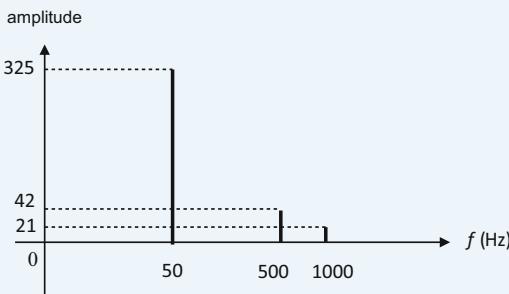


Figure 23.4

Si on souhaite éliminer (ou *a minima* atténuer) les deux raies de hautes fréquences, il conviendra de traiter ce signal par un filtre laissant passer les basses fréquences (autour de 50 Hz) et atténuant les hautes fréquences (à partir de 500 Hz).

Tous les signaux périodiques, quelle que soit leur forme, possèdent un spectre composé d'un certain nombre de raies. Cette fiche se propose d'aborder les principes fondamentaux permettant d'appréhender le spectre de ces signaux.

## 1. Décomposition en série de Fourier

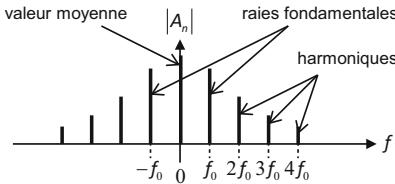
Joseph Fourier a démontré que tout signal périodique de période  $T$ , donc de fréquence  $f_0 = \frac{1}{T}$ , ou encore de pulsation  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ , possédait une décomposition en une somme finie ou infinie de sinusoides dont les fréquences sont des multiples de la fréquence  $f_0$  (dite fondamentale) du signal.

On démontre en effet que si  $s(t)$  est périodique, on a :

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \sin n\omega_0 t$$

Cet énoncé de la décomposition en série de Fourier se traduit également dans la base de fonctions élémentaires  $e^{j\omega t} = e^{j2\pi ft}$ :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\omega_0 t}, \text{ avec } A_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$



**Figure 24.1**

On trace alors le spectre d'un signal périodique quelconque en reportant, dans le graphe amplitude-fréquence, les modules des coefficients  $A_n$  qui

sont, en général, complexes, en fonction des fréquences  $nf_0$  (figure 24.1). Les deux raies correspondant à  $n = 1$  ou  $n = -1$  sont appelées composantes ou raies fondamentales du signal. Les autres sont ses harmoniques.

D'une manière générale, on a  $|A_n| = |A_{-n}|$  ce qui se traduit par la symétrie du spectre par rapport à l'axe des ordonnées. Si le signal périodique possède une composante continue, autrement dit une valeur moyenne non nulle, il s'agit évidemment de  $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$ , que l'on trace, sur le spectre, à la fréquence nulle (voir figure 24.1).

## 2. Le signal en dents de scie

Soit un signal en dents de scie, de période  $T$  (figure 24.2).

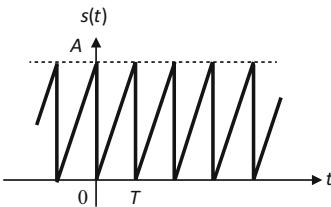


Figure 24.2

Soit  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Pour tracer son spectre, il faut calculer sa décomposition en série de Fourier, c'est-à-dire la suite des coefficients  $A_n$ , puis tracer les  $|A_n|$  en fonction de la fréquence.

On a :  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{j n \omega_0 t}$  avec  $A_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-j n \omega_0 t} dt$ .

Soit :  $A_n = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{At}{T} e^{-j n \omega_0 t} dt = j \frac{A}{2\pi n}$  pour  $n \neq 0$

La valeur moyenne se calcule ou se remarque de manière évidente sur le graphe de la figure 24.2 :  $A_0 = \frac{A}{2}$  et il suffit de porter l'ensemble des

informations sur le graphe de la figure 24.3 pour disposer du spectre recherché.

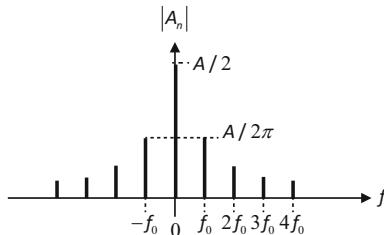


Figure 24.3

### EXERCICE 1 Spectre d'un signal carré

La figure 24.4 représente un signal carré de période  $T$ . Les coefficients de Fourier du spectre bilatéral sont donnés par les relations ci-après.

Pour  $n$  pair :  $A_n = 0$ .

Et pour  $n$  impair :  $A_n = \frac{4A}{nT\omega} \sin(n\pi/2) = \frac{2A}{\pi n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ .

Calculer les modules des coefficients  $A_n$  pour  $-7 \leq n \leq 7$  et tracer le spectre du signal.

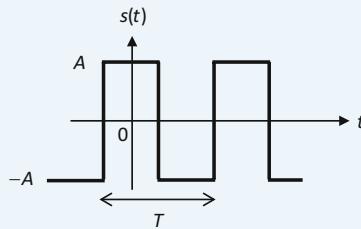


Figure 24.4

### Solution

Calculons les premiers termes de cette série.

On a :

$$|A_1| = |A_{-1}| = \frac{2A}{\pi} \approx 0,64A$$

$$|A_3| = |A_{-3}| = \frac{2A}{3\pi} \approx 0,21A$$

$$|A_5| = |A_{-5}| = \frac{2A}{5\pi} \approx 0,13A$$

$$|A_7| = |A_{-7}| = \frac{2A}{7\pi} \approx 0,09A$$

Tous les harmoniques pairs sont, bien évidemment, nuls, ce qui caractérise une propriété fondamentale du signal carré : il ne possède que des harmoniques impairs. La valeur moyenne du signal, par ailleurs, est nulle.

La figure 24.5 représente le spectre du signal pour les harmoniques que nous avons calculées.

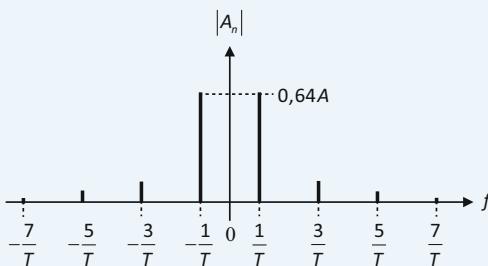


Figure 24.5

#### REMARQUE

Tous les signaux présentant à la fois une symétrie par rapport à un point et par rapport à un axe vertical possèdent cette même propriété de nullité des harmoniques pairs.

# Circuits à diodes

La diode est un dipôle non linéaire conçu à base de semi-conducteurs dopés et constitue la base de nombreux montages électriques ou électroniques. Traditionnellement, on a l'habitude de considérer qu'une diode laisse passer le courant dans un sens et pas dans l'autre.

## 1. Jonction PN

En dopant respectivement N et P deux parties d'un même cristal semi-conducteur (souvent en silicium, quadrivalent), c'est-à-dire par exemple en introduisant des atomes pentavalents dans une zone (N) et des atomes trivalents dans l'autre zone (P), on forme un dipôle appelé diode à jonction (figure 25.1). La jonction est la surface de contact située entre les deux parties du cristal dopées différemment. Dans la zone dopée N se trouve un excès d'électrons mobiles tandis que dans la zone P se trouvent des manques d'électrons que l'on appelle des trous. Bien qu'au départ chacune des deux zones soit électriquement neutre, la mise en contact des deux parties induit un phénomène de migration de charges de part et d'autre de la jonction : certains trous de la zone P se déplacent vers la zone N qui contient des donneurs d'électrons, tandis que certains électrons de la zone N migrent vers la zone P qui contient des accepteurs d'électrons.

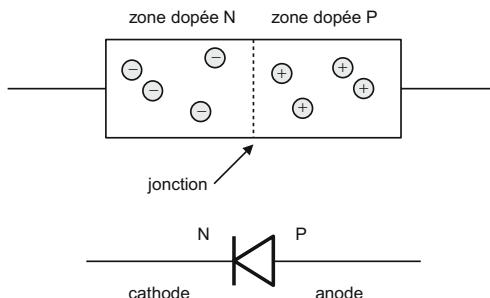


Figure 25.1

La zone dopée N est appelée cathode, tandis que la zone dopée P est appelée anode.

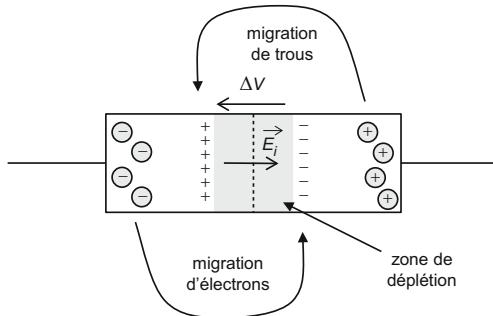


Figure 25.2

Un équilibre s'instaure autour de la jonction, créant ainsi un champ électrique interne  $E_i$ . La zone située autour de la jonction correspondant à ce champ électrique est appelée zone de déplétion (figure 25.2). La présence de ce champ électrique se traduit également par la présence d'une différence de potentiel de part et d'autre de la zone de déplétion. Cette différence de potentiel est appelée barrière de potentiel. La zone de déplétion se comporte *a priori* comme un isolant et il devient très difficile, pour un électron libre, de franchir cette zone.

C'est cette structure interne très particulière qui confère à la diode des propriétés électriques remarquables. En effet, selon la manière dont on la polarise (c'est-à-dire dont on l'insère dans un circuit de manière à présenter à ses bornes une différence de potentiels donnée), elle se comporte tantôt comme un circuit ouvert, tantôt comme un circuit fermé. C'est la présence de cette barrière de potentiel interne qui gouverne ce comportement et qui permet, avec une ou plusieurs diodes, de construire des circuits fort intéressants.

## 2. Diode passante et diode bloquée

L'application d'une tension  $V$  dirigée comme indiqué sur la figure 25.3 crée un champ électrique qui s'ajoute au champ électrique interne (dans

le même sens) poussant ainsi les électrons de la zone N à s'éloigner de la jonction, tandis que les trous de la zone P subissent le même phénomène : la zone de déplétion s'élargit ; la jonction devient pratiquement isolante. On dit que la diode est bloquée.

zone de déplétion élargie : diode bloquée

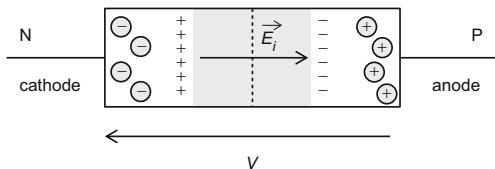


Figure 25.3

zone de déplétion neutralisée : diode passante

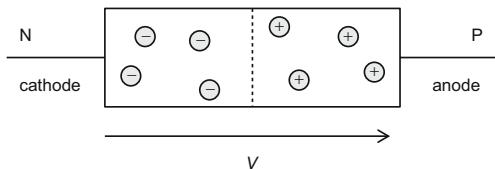


Figure 25.4

Si au contraire on applique une tension  $V$  orientée comme indiqué sur la figure 25.4, le champ électrique externe ainsi créé s'oppose au champ interne. La barrière de potentiel est ainsi diminuée : des électrons peuvent franchir la zone de déplétion (de la zone N vers la zone P compte tenu de l'orientation de  $V$ ) qui devient donc conductrice ; la diode est dite passante. La propriété essentielle de cette diode réside donc dans le fait que la circulation des électrons au travers de la jonction ne peut s'effectuer que dans un sens : de la zone N vers la zone P (de la cathode vers l'anode). Soit  $V$  la tension aux bornes de la diode et  $I$  le courant qui la traverse. Comme le courant circule de l'anode vers la cathode (sens inverse des électrons), on représentera tension et courant comme cela est indiqué sur la figure 25.5 (convention récepteur).

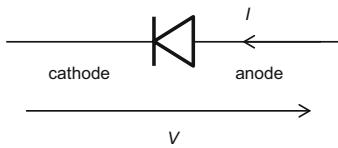


Figure 25.5

Lorsqu'une diode est passante, la tension entre l'anode est la cathode est en général voisine de 0,7 V comme nous le verrons dans la [fiche 26](#). Cette différence de potentiels est appelée tension de seuil.

### 3. Détermination de l'état d'une diode

La technique la plus efficace pour démontrer qu'une diode est passante ou bloquée consiste à supposer *a priori* qu'elle est dans un de ces deux états, par exemple qu'elle est bloquée. Si tel est le cas, ceci est très facile à vérifier ; dans le cas contraire, si elle est passante, on aboutit très vite à une absurdité qui montre qu'elle ne peut être bloquée.

#### EXEMPLE

Considérons le circuit de la figure 25.6 et vérifions que la diode est bloquée.

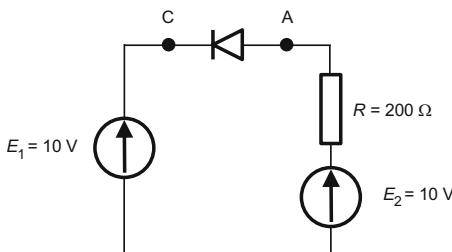


Figure 25.6

En supposant que la diode soit passante, on a  $V_A = 10,7$  V, puisque  $V_C = 10$  V. La chute de potentiel aux bornes de la résistance (dirigée positivement vers le haut) impose donc un courant dirigé vers le bas (convention récepteur), qui ne peut en aucun cas traverser la diode. Celle-ci ne peut donc pas être passante.

Il est extrêmement important de savoir déterminer si une diode est passante ou bloquée si on souhaite analyser le fonctionnement d'un circuit qui en comporte. Dans certains montages, les diodes peuvent être tantôt passantes, tantôt bloquées, selon l'évolution des courants et tensions dans le circuit.

### EXERCICE 1 Détermination de l'état d'une diode

Dans le circuit représenté sur la figure 25.7, déterminer l'état (passant ou bloqué) de la diode. Si elle est passante, déterminer la valeur du courant qui la traverse. On supposera que la diode possède une tension de seuil égale à 0,7 V.

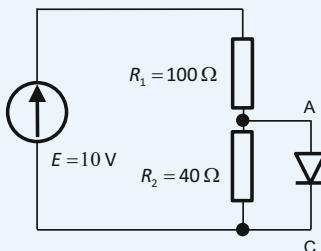


Figure 25.7

### Solution

La technique la plus efficace pour démontrer qu'une diode est passante ou bloquée consiste à supposer *a priori* qu'elle est dans un de ces deux états, par exemple qu'elle est bloquée. Si tel est le cas, ceci est très facile à vérifier ; dans le cas contraire, si elle est passante, on aboutit très vite à une absurdité qui montre qu'elle ne peut être bloquée. Dans cet exercice, on supposera que la diode est bloquée et on cherchera la différence de potentiels à ses bornes.

Supposons que la diode soit bloquée. Dans ce cas, aucun courant ne circule dans la diode et les deux résistances forment un diviseur de tension.

$$\text{On a donc : } V_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = \frac{40}{140} \times 10 \text{ V} = 2,8 \text{ V.}$$

La diode présenterait donc une différence de potentiel à ses bornes de 2,8 V, ce qui est impossible. La diode est donc passante et présente à ses bornes une différence de potentiel de 0,7 V.

## EXERCICE 2 Détermination de l'état d'une diode

Dans le circuit représenté sur la figure 25.8, déterminer l'état (passant ou bloqué) de la diode. Si elle est passante, déterminer la valeur du courant qui la traverse. On supposera que la diode possède une tension de seuil égale à 0,7 V.

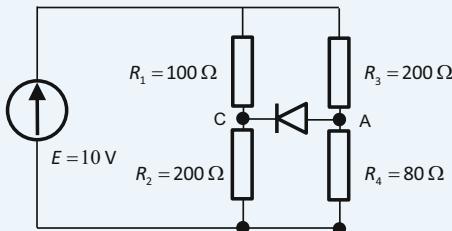


Figure 25.8

### Solution

En supposant que la diode soit bloquée, on a affaire à deux diviseurs de tension.

$$\text{On a donc : } \begin{cases} V_A = \frac{R_4}{R_3 + R_4} E = 2,9 \text{ V} \\ V_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 6,7 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow V_A - V_C = -3,8 \text{ V}$$

La diode est bien bloquée. Le lecteur pourra vérifier que l'hypothèse diode passante conduit bien à une absurdité.

# Caractéristiques électriques de la diode

Fiche  
**26**

## 1. Caractéristique électrique réelle

Considérons (figure 26.1) une diode présentant à ses bornes une tension orientée comme cela est indiqué sur le schéma. Si  $V$  est effectivement positif, on dit que la diode est polarisée en sens direct. Un courant  $I$  peut effectivement circuler dans la diode. Si  $V$  est négatif, la diode est polarisée en sens inverse et aucun courant ne peut y circuler. La figure 26.2 montre la caractéristique  $I = f(V)$  d'une diode courante (que l'on appelle en général diode réelle).

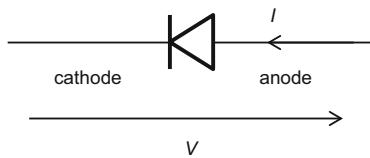


Figure 26.1

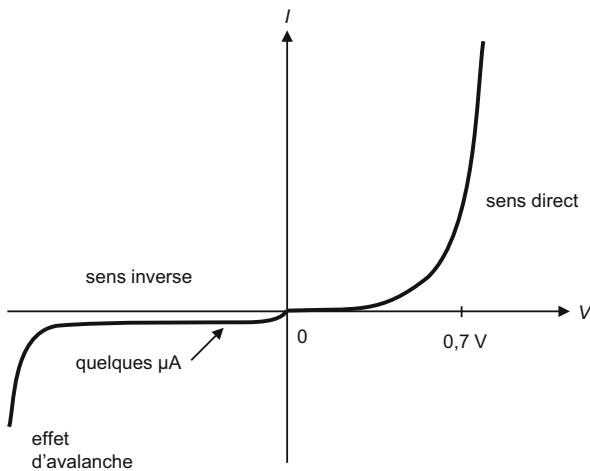


Figure 26.2

**REMARQUE**

Pour la diode réelle, on admet, en sens direct, que :

$$I = I_s e^{\frac{V_e}{kT}} = I_s e^{\frac{V}{V_0}} \text{ avec } V_0 = \frac{kT}{e} = 25 \text{ mV à température ambiante.}$$

$I_s$  est de l'ordre du milliampère,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , charge de l'électron,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ , constante de Boltzmann.

Sauf pour de très faibles valeurs de  $I$  ou des valeurs très importantes, la tension  $V$  varie peu et est de l'ordre de 0,6 à 0,7 V pour des diodes au silicium. Cette tension est appelée tension de seuil et se note souvent  $V_s$ . En sens inverse, on admet que le courant est nul (en réalité quelques  $\mu\text{A}$  subsistent). Pour des tensions inverses importantes (quelques dizaines de volts en valeur absolue), on observe un effet de conduction forcée au travers de la jonction, effet immédiat et en général destructeur : l'effet d'avalanche.

Il existe une catégorie de diodes pour lesquelles l'effet d'avalanche est maîtrisé et même exploité : les diodes Zener.

## 2. Modèles simplifiés

### ■ Diode parfaite

Macroscopiquement parlant et hormis certaines applications particulières, on admet en général le fonctionnement suivant, que nous avons déjà évoqué dans la [fiche 25](#) (voir encadré ci-dessous).

Diode polarisée en sens direct :  $V = 0,7 \text{ V}, \forall I$  ; la diode est dite passante.

Diode polarisée en sens inverse :  $I = 0, \forall V$  ; la diode est dite bloquée.

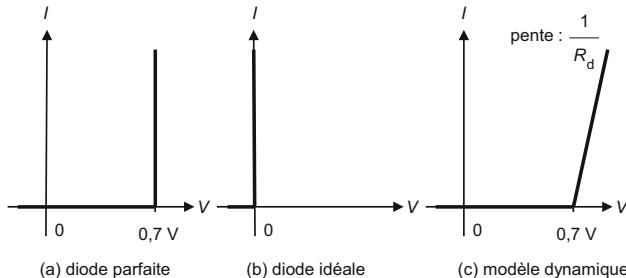
Ce modèle de diode parfaite est représenté sur la figure 26.3 (a).

## ■ Diode idéale

On peut encore simplifier le modèle en considérant que la tension de 0,7 V est négligeable devant les autres tensions du circuit. On obtient alors le modèle de diode dite idéale dont la caractéristique est schématisée sur la figure 26.3 (b).

## ■ Modèle dynamique de la diode

Si au contraire on souhaite un modèle plus fin et plus proche de la caractéristique de la diode réelle, on peut adopter le modèle représenté sur la figure 26.3 (c) : on considère que cette caractéristique est formée de deux segments de droites.



**Figure 26.3**

Modèle dynamique de la diode :

- Diode bloquée :  $V < 0,7 \text{ V} \Leftrightarrow I = 0$ .
- Diode passante :  $V > 0,7 \text{ V} \Leftrightarrow I = \frac{V - 0,7 \text{ V}}{R_d}$  ; avec  $R_d$  résistance dynamique de la diode passante.

## 3. Polarisation de la diode

### ■ Polarisation simple et point de fonctionnement

On polarise une diode en sens direct en l'incluant dans un circuit de sorte qu'elle soit parcourue par un courant  $I$ . Sur le schéma de la figure 26.4,

un générateur parfait de tension  $E$  continue alimente un dipôle formé d'une résistance  $R$  et d'une diode en série.

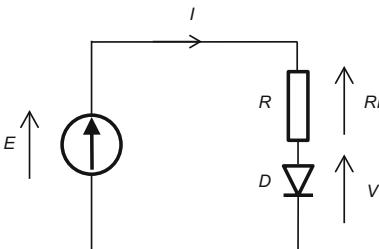


Figure 26.4

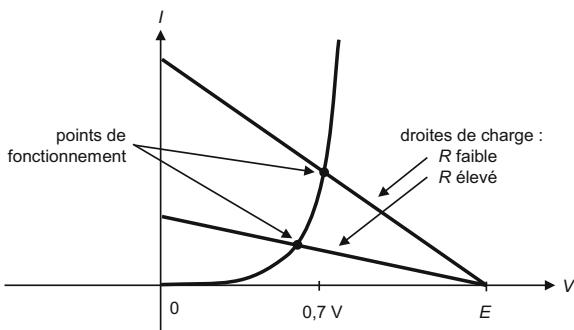


Figure 26.5

On a évidemment :  $I = I_s e^{\frac{V}{V_0}}$  et  $E = RI + V$

soit encore : 
$$\begin{cases} I = I_s e^{\frac{V}{V_0}} \rightarrow \text{caractéristique de la diode} \\ I = \frac{E - V}{R} \rightarrow \text{droite de charge} \end{cases}$$

Le point d'intersection de ces deux courbes donne le point de fonctionnement du circuit (figure 26.5). On voit bien que pour diverses valeurs de  $R$ , la tension  $V$  varie peu.

## Choix du modèle de diode

Le circuit de la figure 26.6 présente une diode polarisée en sens direct alimentée par un générateur de tension  $E$  au travers d'une résistance  $R$ . On souhaite polariser la diode de sorte qu'elle soit parcourue par un courant déterminé, par exemple  $I = 20 \text{ mA}$ . L'objectif consiste à chercher la valeur de  $R$  qui permet de fixer ce courant.

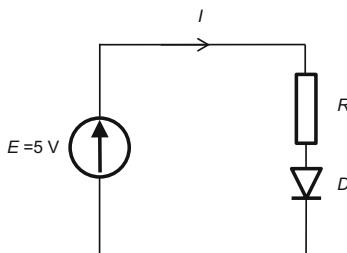


Figure 26.6

Si l'on choisit le modèle de diode dynamique, figure 26.3 (c) avec par exemple une tension de seuil  $V_s = 0,7 \text{ V}$  et de résistance dynamique  $r_d = 10 \Omega$ , la tension  $V$  aux bornes de la diode a pour expression :  $V = V_s + r_d I$ .

La loi des mailles nous donne par ailleurs l'équation :  $E = RI + V_s + r_d I$ .

$$\text{On a donc : } R = \frac{E - V_s}{I} - r_d = \frac{5 - 0,7}{20 \times 10^{-3}} - 10 = 205 \Omega.$$

Si on utilise le modèle de diode parfaite, on a :  $V = 0,7 \text{ V}$  et la loi des mailles s'écrit à présent :

$$E = RI + 0,7 \text{ V}$$

$$\text{On a donc : } R = \frac{E - 0,7}{I} = \frac{5 - 0,7}{20 \times 10^{-3}} = 215 \Omega$$

**REMARQUE**

On retiendra d'une part que le modèle dynamique de la diode, figure 26.3 (c) est très facile à utiliser et, d'autre part, qu'on ne commet pas une erreur très importante en négligeant  $r_d$  c'est-à-dire en choisissant le modèle de la diode parfaite, surtout lorsque la diode est placée, comme ici, en série avec une résistance  $R \gg r_d$ .

**EXERCICE 1 Polarisation d'une diode**

Dans le circuit représenté sur la figure 26.7, déterminer l'état (passant ou bloqué) de la diode. Si elle est passante, déterminer la valeur du courant qui la traverse. On supposera que la diode possède une tension de seuil égale à 0,7 V.

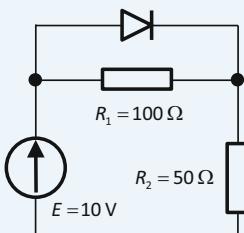


Figure 26.7

**Solution**

Supposons que la diode soit bloquée. N'étant parcourue par aucun courant, elle est équivalente à un circuit ouvert. Le générateur débite donc dans une résistance de  $150\ \Omega$  et un courant  $I = \frac{10}{150} = 67\ \text{mA}$  parcourt l'unique maille du circuit. La résistance  $R_1$  présentera donc à ses bornes une différence de potentiels  $V = 100 \times 0,067 = 6,7\ \text{V}$ , dirigée vers la gauche. Cette même tension se trouvant aux bornes de la diode, celle-ci ne saurait être bloquée. La diode est donc passante.

Elle présente donc à ses bornes (et donc aux bornes de  $R_1$ ), une différence de potentiels de 0,7 V dirigée vers la gauche. Un courant  $I_1$ , dirigé vers la droite, traverse  $R_1$  :

$$I_1 = \frac{0,7}{100} = 7 \text{ mA}$$

Par ailleurs, la résistance  $R_2$  présente à ses bornes une tension de 9,3 V, conformément à la loi des mailles. Elle est donc parcourue par un courant  $I_2$ , dirigé vers le bas, tel que :

$$I_2 = \frac{9,3}{50} = 186 \text{ mA}$$

Il suffit d'appliquer la loi des nœuds pour déterminer le courant  $I_3$  qui circule dans la diode et vers la droite :

$$I_3 = I_2 - I_1 = 179 \text{ mA}$$

En électricité, les diodes sont utilisées pour de multiples usages. Les deux propriétés intéressantes de ces composants sont d'une part la tension quasi constante à leurs bornes lorsqu'elles sont polarisées en sens direct et d'autre part le fait qu'elles peuvent alternativement être bloquées ou passantes. Les applications les plus simples qui se basent sur ces propriétés concernent le redressement des signaux sinusoïdaux.

## 1. Redressement simple alternance

Redresser un signal sinusoïdal revient à modifier sa forme, par exemple en éliminant certaines demi-alternances du signal et ce, afin de lui conférer une valeur moyenne non nulle.

Dans le montage de la figure 27.1, la diode est supposée idéale, possédant la caractéristique de la figure 26.3 (b).

Le circuit est alimenté par une tension sinusoïdale  $e(t) = E_0 \sin \omega t$  et on s'intéresse à la tension  $u(t)$  aux bornes de  $R$ .

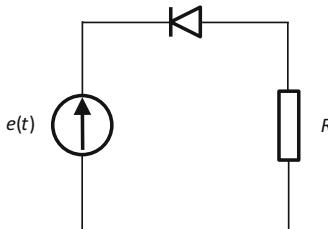


Figure 27.1

La diode est bloquée si et seulement si sa différence de potentiel en sens direct est négative : soit  $u(t) - e(t) < 0$ . Dans ce cas, aucun courant ne circulant dans le circuit, on a  $u(t) = 0$ . Dans le cas contraire,  $e(t) < 0$ , la diode est passante et on a alors  $u(t) = e(t)$ . Soit le tracé de la figure 27.2.

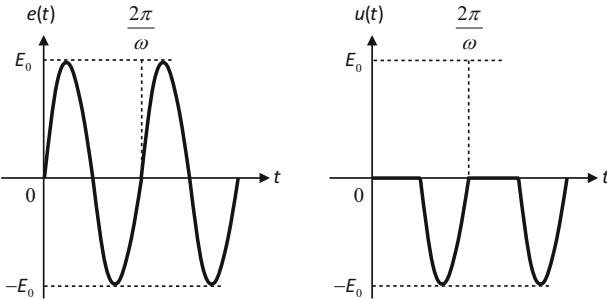


Figure 27.2

## 2. Écrêtage d'une tension sinusoïdale

Le schéma de la figure 27.3 représente un circuit écrêteur dont la fonction consiste à tronquer un signal, par exemple sinusoïdal  $e(t) = E_0 \sin \omega t$ , en éliminant sa ou ses parties dont la valeur dépasse certains seuils.  $E_1$  et  $E_2$  sont deux sources continues parfaites inférieures à  $E_0$ . Les diodes sont idéales : tension de seuil nulle.

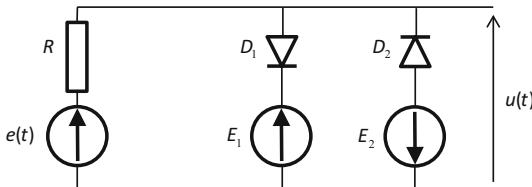


Figure 27.3

Les conditions pour lesquelles les diodes sont bloquées sont :

$$\begin{cases} u(t) > -E_2 \Leftrightarrow D_2 \text{ bloquée} \\ u(t) < E_1 \Leftrightarrow D_1 \text{ bloquée} \end{cases}$$

Par conséquent, lorsque ces deux diodes sont bloquées simultanément, et seulement dans ce cas, on a :  $u(t) = e(t)$ .

On en déduit donc :  $-E_2 < e(t) < E_1 \Leftrightarrow u(t) = e(t)$

Si  $e(t) > E_1$ , la diode  $D_1$  devient passante. Comme elle supposée idéale, la tension à ses bornes est nulle, on a donc :  $e(t) > E_1 \Leftrightarrow u(t) = E_1$ .

Si  $e(t) < -E_2$ , la diode  $D_2$  devient passante et on a :  $e(t) < -E_2 \Leftrightarrow u(t) = -E_2$ .

Cela revient à dire que lorsqu'une diode bascule de l'état bloqué dans l'état passant, elle court-circuite la sortie sur le générateur de tension continue auquel elle est connectée. La figure 27.4 présente la forme de la tension  $u(t)$ .

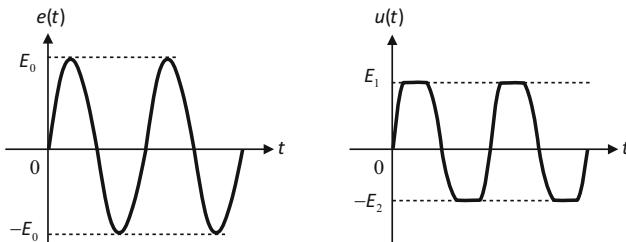


Figure 27.4

### 3. Puissance dissipée dans une diode

Comme n'importe quel dipôle, une diode présentant à ses bornes une tension  $v(t)$  et parcourue par un courant  $i(t)$  consomme une puissance instantanée définie par  $p(t) = v(t)i(t)$ , soit une puissance moyenne, sur un intervalle de temps défini :

$$\langle P \rangle = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t) dt$$

En règle générale, cette puissance consommée est dissipée sous forme de chaleur mais peut également être transformée en une autre forme de puissance, par exemple, concernant les diodes électroluminescentes, en puissance lumineuse.

Chaque diode possède une puissance maximale admissible au-delà de laquelle elle est susceptible d'être détruite.

## EXERCICE 1 Limitation de puissance

Deux diodes supposées parfaites supportent chacune une puissance maximale  $P_{\max} = 200 \text{ mW}$ . Ces diodes sont placées dans le circuit représenté sur la figure 27.5 et on se propose d'ajuster la valeur de la résistance  $R$  pour qu'aucune des deux diodes ne consomme une puissance supérieure à  $P_{\max}$ .

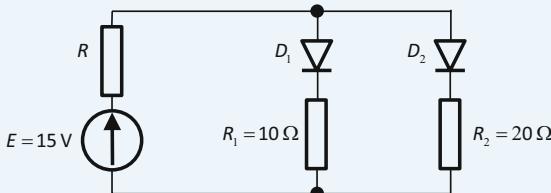


Figure 27.5

Montrer que les deux diodes sont passantes et calculer l'expression des courants qui traversent chacune d'entre elles. En déduire que la puissance consommée par  $D_1$  est la plus importante. Déterminer la condition sur  $R$  pour que la puissance consommée dans chaque diode soit inférieure à  $P_{\max}$ .

### Solution

Chacune des deux diodes est passante. En effet, supposons que  $D_1$  soit bloquée : aucun courant ne circule dans  $R_1$ . La cathode de la diode se trouve donc à la masse. Pour que la diode soit effectivement bloquée, il faudrait donc que son anode soit à un potentiel négatif, ce qui est impossible.  $D_1$  est donc passante. Le raisonnement est exactement le même pour  $D_2$ .

En formulant comme hypothèse qu'une différence de potentiel de 0,7 V règne aux bornes de chaque diode, nous aurons accès aux puissances dissipées dans chacune d'elles en calculant les courants  $I_1$  et  $I_2$  respectivement dans  $R_1$  et  $R_2$  (dirigés tous deux vers le bas). Soit  $I$  le courant débité par le générateur et dirigé vers la droite.

La loi des mailles nous donne deux équations :

$$E - RI - 0,7V - R_1 I_1 = 0 \text{ et } R_1 I_1 + 0,7V - 0,7V - R_2 I_2 = 0$$

La loi des nœuds en A nous donne  $I = I_1 + I_2$ . On obtient donc  $I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1$ .

$$\text{Puis : } E - RI_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - 0,7V - R_1 I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{E - 0,7V}{R \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R_1}$$

$$\text{ainsi : } I_2 = \frac{E - 0,7 \text{ V}}{R \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + R_1} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

Comme  $R_2 > R_1$ , on aura  $I_2 < I_1$ . C'est donc dans  $D_1$  que la puissance dissipée sera la plus importante, quoiqu'il arrive.

Nous allons donc calculer  $R$  pour avoir une puissance dissipée maximale  $P_{\max}$  dans  $D_1$ :

$$I_1 \times 0,7 \text{ V} < P_{\max} \Rightarrow \frac{E - 0,7 \text{ V}}{R \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + R_1} \times 0,7 \text{ V} < P_{\max}$$

$$\frac{(E - 0,7 \text{ V}) \times 0,7 \text{ V}}{P_{\max}} < R \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + R$$

$$\text{D'où : } R > \frac{\frac{(E - 0,7 \text{ V}) \times 0,7 \text{ V}}{P_{\max}} - R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \Rightarrow R > 26,7 \Omega$$

Les diodes sont des composants fragiles qui ne peuvent pas dissiper de puissance au-delà d'une certaine limite pour laquelle elles ont été conçues. Dans un circuit comportant plusieurs diodes, il convient de chercher les conditions qui permettent de faire en sorte qu'aucune diode ne soit susceptible d'être soumise à une puissance supérieure à cette limite.

## EXERCICE 2 Analyse spectrale d'une tension sinusoïdale écrêtée

On considère une tension sinusoïdale  $e(t)$  ayant subi un écrêtage (figure 27.4). À partir d'un simple raisonnement qualitatif, montrer que la nouvelle tension présente un spectre présentant de multiples harmoniques. Tracer ce spectre de manière intuitive en prenant soin de ne pas omettre, le cas échéant, la valeur moyenne de la tension.

### Solution

Le signal écrêté  $u(t)$  est un signal périodique non sinusoïdal. En vertu de la décomposition en série de Fourier (voir fiche 24), cette tension  $u(t)$  a pour expression :

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\omega_0 t} \text{ avec } A_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Dans le cas présent, nous avons à faire à un signal qui, à l'instar du signal carré étudié à titre d'exercice dans la [fiche 24](#), possède une symétrie par rapport à un point et par rapport à un axe. Par conséquent, ses harmoniques pairs seront nuls. Par ailleurs, le signal  $u(t)$  oscille de manière symétrique autour de l'axe temporel. Cela signifie que sa valeur moyenne est nulle.

Sans présumer des valeurs exactes des différentes harmoniques, nous pouvons intuitivement considérer que le spectre du signal  $u(t)$  ressemble à celui qui est présenté sur la figure 27.6. La fréquence  $1/T$  correspond à la fréquence du signal d'origine, soit  $1/T = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ .

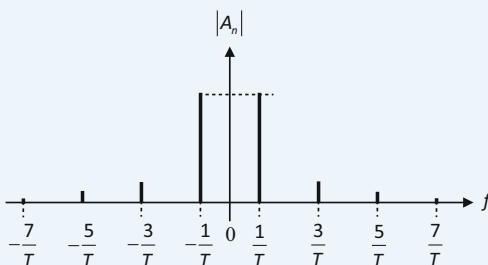


Figure 27.6

Le redressement double alternance est à la base de ce que l'on appelle la conversion d'une tension sinusoïdale en une tension continue.

## 1. Montage en pont de Graetz

La figure 28.1 représente un pont de quatre diodes appelé pont de Graetz. Il est alimenté par une tension  $e(t) = E_0 \sin \omega t$  et on s'intéresse à la tension  $s(t)$  aux bornes de  $R$ . Les diodes sont supposées idéales (tension de seuil nulle, caractéristique de la figure 26.3 (b)).

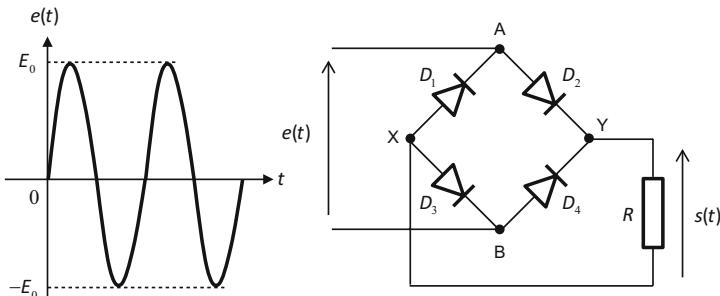


Figure 28.1

## 2. Analyse du fonctionnement

### Demi-alternance positive

Pendant la demi-alternance positive (figure 28.2), on a  $V_A > V_B$ . La tension  $V_A$  se trouve être la plus élevée dans le circuit.  $D_2$  ne peut être bloquée car cela impliquerait  $V_Y > V_A$ . Donc  $D_2$  est passante et  $V_Y = V_A$ .  $D_3$  ne peut être bloquée car cela impliquerait  $V_X < V_B$ .  $V_B$  étant la tension la plus faible du circuit, imposée par l'alimentation, ceci est impossible.  $D_3$  est donc passante et on a  $V_X = V_B$ .

$$\left. \begin{aligned} &V_A > V_B \\ \text{Par ailleurs : } &V_X = V_B \\ &V_Y > V_A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_A > V_X \Rightarrow D_1 \text{ bloquée} \\ V_Y > V_B \Rightarrow D_4 \text{ bloquée} \end{array} \right.$$

On a alors :  $s(t) = e(t)$ .

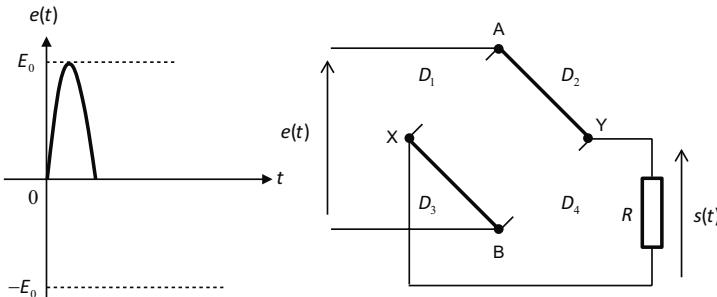


Figure 28.2

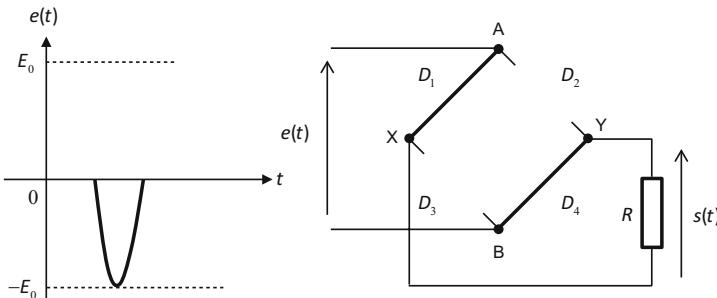


Figure 28.3

### Demi-alternance négative

Pendant la demi-alternance négative, on a :  $V_A < V_B$ . La tension  $V_A$  se trouve être la plus basse dans le circuit, tandis que  $V_B$  est la tension la plus élevée. Cette fois-ci, ce sont les diodes  $D_1$  et  $D_4$  qui sont passantes et les diodes  $D_2$  et  $D_3$  sont bloquées (figure 28.3). On a :  $s(t) = -e(t)$ .

### Conclusion

En rassemblant les deux cas sur un seul graphe (figure 28.4), on constate que toutes les demi-alternances sont à présent positives et que le signal  $s(t)$  possède une composante continue (*i.e.* valeur moyenne) alors que celle du signal  $e(t)$  était nulle.

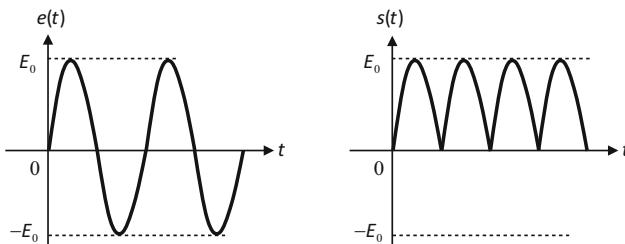


Figure 28.4

Le montage porte bien son nom de redresseur double alternance puisque chaque demi-alternance de la tension d'entrée  $e(t)$  se trouve à présent positive. Le signal  $s(t)$  obtenu possède bien une valeur moyenne non nulle qui vaut :

$$\langle S \rangle = \frac{2E_0}{\pi}$$

Toutefois, le signal d'entrée n'est pas véritablement converti en tension continue comme cela est visible sur le tracé de la figure 28.4. Pour transformer véritablement le signal  $s(t)$  en tension continue, il faut éliminer les variations du signal autour de cette composante continue. On y parvient en plaçant en parallèle sur la sortie un condensateur dit de filtrage ou de lissage dont l'objectif est d'amortir ces variations.

Les ponts de Graetz sont utilisés pour construire des générateurs de tension continue à partir de tensions sinusoïdales et l'élimination des variations du signal de sortie est donc une condition essentielle à l'obtention d'un signal constant de qualité. Bien souvent, on ne se contente pas d'un simple condensateur de filtrage mais on construit une véritable régulation de tension en aval du redressement double-alternance.

### EXERCICE 1 Analyse du spectre après redressement double-alternance

On considère une tension sinusoïdale  $e(t)$  que l'on injecte dans un pont de Graetz (figure 28.1). On donne :  $e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t$  avec  $E_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$  et  $\omega = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Par un raisonnement intuitif, dessiner sommairement l'allure du spectre de la tension de sortie du pont de diodes.

Déterminer en particulier la valeur moyenne du signal de sortie.

Discuter qualitativement de ce que devient le spectre de la tension de sortie si on place un condensateur en parallèle sur cette sortie.

## Solution

Le signal de sortie  $s(t)$  est un signal périodique non sinusoïdal (voir figure 28.4). En vertu de la décomposition en série de Fourier (voir fiche 24), cette tension  $s(t)$  a pour expression :

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\omega_0 t} \text{ avec } A_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Dans le cas présent, le signal ne présentant pas les symétries possibles sur un signal carré, nous avons à faire à un signal qui, sans aucun doute, possède des harmoniques pairs et impairs. Il possède en outre une valeur moyenne non nulle :

$$\langle S \rangle = \frac{2E_0}{\pi} = \frac{2E_{eff}\sqrt{2}}{\pi} = \frac{2 \times 230 \times 1,414}{3,14} = 207 \text{ V}$$

Le spectre du signal  $s(t)$  possède donc l'allure générale évoquée dans la [fiche 24](#) et représentée sur la figure 28.5. On notera la présence d'une raie à l'abscisse 0 correspondant à la valeur moyenne (ou composante continue) de la tension.

Enfin, la présence d'un condensateur en parallèle sur la sortie joue évidemment le rôle d'un filtre pour les hautes fréquences. En effet, rappelons que l'impédance réelle d'un condensateur a pour expression  $\frac{1}{C\omega}$ . Par conséquent, plus la fréquence d'une raie est importante, plus cette impédance sera faible et aura donc tendance à court-circuiter cette partie du signal.

*In fine*, les composantes spectrales de fréquences élevées vont être atténuées, privilégiant donc, relativement, la composante continue pour laquelle ce condensateur est équivalent à un circuit ouvert.

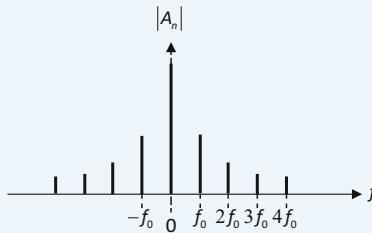


Figure 28.5

Un transformateur est un dispositif permettant de modifier l'amplitude d'une grandeur électrique (souvent une tension sinusoïdale) sans en changer la pulsation. Il permet également d'isoler électriquement deux parties d'un même circuit.

## 1. Description

Un transformateur monophasé est constitué de deux enroulements (deux bobines), possédant la particularité d'être traversés par le même flux magnétique. La figure 29.1 en présente un schéma de principe simple. Un des deux enroulements sera appelé enroulement primaire ; l'autre sera appelé enroulement secondaire. En règle générale, l'enroulement primaire est dessiné à gauche et constitue l'entrée du transformateur, tandis que l'enroulement secondaire en constitue la sortie. Nous supposerons que les grandeurs électriques, tensions et courants, sont sinusoïdaux de pulsation  $\omega$  et nous emploierons systématiquement le modèle complexe.

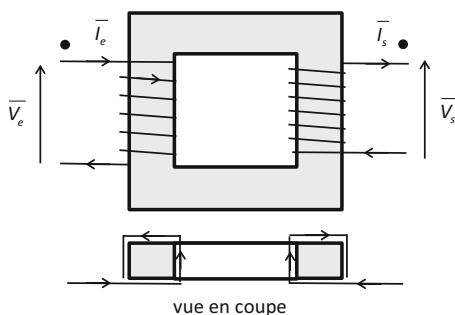


Figure 29.1

Le fonctionnement du transformateur repose sur le couplage magnétique des deux enroulements. Ceux-ci sont bobinés autour du même noyau de fer doux qui, en quelque sorte, canalise le flux magnétique entre les deux bobines.

Lorsqu'une tension sinusoïdale est placée à l'entrée de l'enroulement primaire, un courant traverse cet enroulement et induit un flux magnétique alternatif qui traverse la bobine secondaire et y crée un courant induit dont il résulte l'apparition d'une tension aux bornes de cette bobine.

Dans le schéma représentant un transformateur, on définit la notion de bornes homologues. Après avoir défini un sens positif pour le parcours du flux dans le noyau, on marque d'un point la borne d'entrée et la borne de sortie, qui, en cas de courant entrant, génère un flux dans ce même sens. Cela dépend en fait du sens des bobinages. Ainsi, on peut repérer les bornes à considérer comme étant en phase en cours d'utilisation.

## 2. Équations électriques

La figure 29.2 présente les deux schémas habituellement utilisés pour symboliser un transformateur au sein d'un circuit fonctionnant en régime sinusoïdal. On notera que, tout comme n'importe quel quadripôle, la convention récepteur est utilisée à l'entrée tandis que c'est la convention générateur qui est utilisée en sortie.

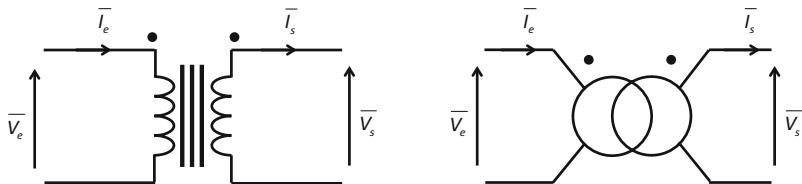


Figure 29.2

### REMARQUE

Le transformateur parfait, de toute évidence, apparaît comme un quadripôle et l'ensemble des notions abordées dans les fiches 20 à 22 peuvent lui être appliquées.

La figure 29.3 correspond à un modèle électrique plus détaillé et plus général où l'on peut voir apparaître l'inductance propre  $L_1$  de la bobine primaire, celle de la bobine secondaire,  $L_2$  et un troisième paramètre  $M$  appelé inductance mutuelle.

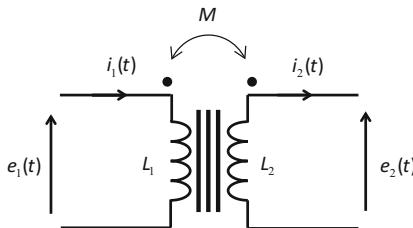


Figure 29.3

Les équations de fonctionnement peuvent alors s'écrire, en régime quelconque :

$$\begin{cases} e_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ e_2(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Un transformateur parfait est caractérisé par le fait qu'il y a un couplage parfait entre les deux enroulements, par le fait qu'il n'y a aucune perte par effet Joule (on néglige donc la composante résistive des enroulements) et qu'il n'y a aucune perte magnétique.

En régime sinusoïdal, un transformateur parfait fonctionne selon les équations simples décrites dans l'encadré ci-après.

Soit  $N_1$  le nombre de spires de l'enroulement primaire et  $N_2$  le nombre de spires de l'enroulement secondaire.

Soit  $U_{1\text{eff}}$  et  $U_{2\text{eff}}$  les valeurs efficaces des tensions d'entrée et de sortie et soit  $I_{1\text{eff}}$  et  $I_{2\text{eff}}$  les valeurs efficaces des courants d'entrée et de sortie.

On définit le rapport de transformation du transformateur,  $m$  par :

$$m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_{2\text{eff}}}{U_{1\text{eff}}} = \frac{I_{1\text{eff}}}{I_{2\text{eff}}}$$

### 3. Puissances mises en jeu

Raisonnons à présent sur une approche énergétique du fonctionnement d'un transformateur parfait. La figure 29.4 représente un transformateur alimenté par une tension d'entrée  $\bar{U}_1$  de valeur efficace  $U_{1\text{eff}}$ . Le rapport de transformation  $m$  est indiqué sur le schéma.

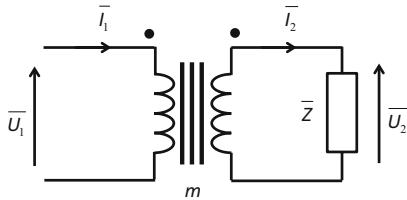


Figure 29.4

Une charge  $\bar{Z}$  est connectée au secondaire du transformateur.

La tension  $\bar{U}_1$ , la charge  $\bar{Z}$  et le rapport de transformation  $m$  déterminent entièrement les autres grandeurs :  $\bar{U}_2$ ,  $\bar{I}_2$  et  $\bar{I}_1$ .

La charge  $\bar{Z}$  est responsable du déphasage entre  $\bar{U}_2$  et  $\bar{I}_2$ . Soit  $\varphi_2$  ce déphasage. En effet, si on considère que  $\bar{U}_2$  constitue l'origine des phases :

$$\bar{U}_2 = \bar{Z} \bar{I}_2 \Rightarrow \varphi_2 = \arg \bar{I}_2 = -\arg \bar{Z}$$

Dans un transformateur parfait, le déphasage  $\varphi_2$  entre  $\bar{U}_2$  et  $\bar{I}_2$  est égal au déphasage  $\varphi_1$  entre  $\bar{U}_1$  et  $\bar{I}_1$ .

Examinons à présent les différentes puissances mises en jeu.

Dans un transformateur parfait, la puissance active au primaire est égale à la puissance active au secondaire. Cela est une conséquence directe du fait que l'on a à la fois  $\varphi_1 = \varphi_2$  et  $\frac{U_{2\text{eff}}}{U_{1\text{eff}}} = \frac{I_{1\text{eff}}}{I_{2\text{eff}}}$ .

$$P_{1a} = U_{1\text{eff}} I_{1\text{eff}} \cos \varphi_1 = P_{2a} = U_{2\text{eff}} I_{2\text{eff}} \cos \varphi_2$$

Il en est de même pour les puissances réactives :

$$P_{1r} = U_{1\text{eff}} I_{1\text{eff}} \sin \varphi_1 = P_{2r} = U_{2\text{eff}} I_{2\text{eff}} \sin \varphi_2$$

Enfin, du simple fait que  $\frac{U_{2\text{eff}}}{U_{1\text{eff}}} = \frac{I_{1\text{eff}}}{I_{2\text{eff}}}$ , les puissances apparentes au primaire et au secondaire sont égales :

$$U_{1\text{eff}} I_{1\text{eff}} = U_{2\text{eff}} I_{2\text{eff}}$$

### **EXERCICE 1 Analyse simple du fonctionnement d'un transformateur en charge**

On considère le circuit représenté sur la figure 29.4 dans lequel on relie une source sinusoïdale d'entrée  $e(t)$  au primaire d'un transformateur parfait de rapport de transformation  $m$  tandis que sa sortie est connectée à un circuit de charge composé d'une impédance  $\bar{Z}$  formée de la mise en série d'une résistance  $R$  et d'une bobine d'inductance  $L$ .

On donne :  $e(t) = U_{1\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t$  avec  $U_{1\text{eff}} = 230 \text{ V}$  et  $\omega = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

$$m = 0,1, R = 20 \Omega \text{ et } L = 0,05 \text{ H.}$$

Calculer la valeur efficace de toutes les grandeurs électriques du circuit et calculer la puissance active consommée par le circuit de charge ainsi que celle consommée à l'entrée du transformateur.

### **Solution**

La puissance active consommée par la charge a pour expression :

$$P_{2a} = U_{2\text{eff}} I_{2\text{eff}} \cos \varphi_2$$

$$\text{On a par ailleurs : } \cos \varphi_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = \frac{20}{\sqrt{20^2 + (0,05 \times 314)^2}} = 0,79$$

La valeur efficace de la tension de sortie est directement liée à celle de l'entrée par la relation :

$$m = \frac{U_{2\text{eff}}}{U_{1\text{eff}}}$$

$$\text{On a donc : } U_{2\text{eff}} = m U_{1\text{eff}} = 0,1 \times 230 \text{ V} = 23 \text{ V}$$

La valeur efficace du courant au secondaire est tout naturellement telle que :

$$I_{2\text{eff}} = \frac{U_{2\text{eff}}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{23}{\sqrt{20^2 + (0,05 \times 314)^2}} = 0,036 \text{ A}$$

Par conséquent, la puissance active consommée par la charge, au secondaire, et égale à :

$$P_{2a} = U_{2\text{eff}} I_{2\text{eff}} \cos\varphi_2 = 23 \times 0,036 \times 0,79 = 0,66 \text{ W}$$

C'est aussi la valeur de la puissance active consommée à l'entrée du montage :

$$P_{1a} = P_{2a} = 0,66 \text{ W}$$

Il nous reste à calculer la valeur efficace du courant d'entrée qui, de manière évidente, vaut :

$$I_{1\text{eff}} = m I_{2\text{eff}} = 0,1 \times 0,036 \text{ A} = 3,6 \text{ mA}$$

## EXERCICE 2 Alimentation d'un moteur électrique par un transformateur

Un transformateur 230 V / 36 V alimente un moteur monophasé consommant une puissance électrique  $P = 300 \text{ W}$  et caractérisé par un facteur de puissance de 0,7.

Calculer : le rapport de transformation, la puissance active consommée à l'entrée du transformateur, la valeur efficace du courant qui traverse le moteur et la puissance réactive consommée par le moteur.

### Solution

Le rapport de transformation se déduit de la caractéristique affichée du transformateur :

$$m = \frac{U_{2\text{eff}}}{U_{1\text{eff}}} = \frac{36}{230} = 0,16$$

La puissance active consommée au secondaire est sans ambiguïté celle que consomme le moteur et plus précisément ses éléments résistifs.

On a donc :

$$P_{2a} = P = 300 \text{ W}$$

La valeur efficace du courant du secondaire est telle que :

$$P_{2a} = U_{2\text{eff}} I_{2\text{eff}} \cos\varphi_2$$

On en déduit :

$$I_{2\text{eff}} = \frac{P_{2a}}{U_{2\text{eff}} \cos\varphi_2}$$

Le terme  $\cos\varphi_2$  n'est autre que le facteur de puissance dont il est question dans l'énoncé. Par conséquent :

$$I_{2\text{eff}} = \frac{300}{36 \times 0,7} = 12 \text{ A}$$

La puissance réactive consommée par le moteur a pour expression :

$$P_{2r} = U_{2\text{eff}} I_{2\text{eff}} \sin\varphi_2$$

Or :  $\sin\varphi_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_2} = 0,71$

D'où :  $P_{2r} = 36 \times 12 \times 0,71 \approx 300 \text{ W}$

Le fonctionnement du transformateur décrit dans la [fiche 29](#) est un fonctionnement idéal pour lequel on néglige deux phénomènes dont il est le siège : des pertes magnétiques et des pertes par effet Joule. Dans un transformateur réel, ces phénomènes occasionnent des diminutions du rendement au sens où la puissance disponible en sortie est inférieure à la puissance injectée à l'entrée.

## 1. Pertes magnétiques

Les pertes magnétiques sont liées à la présence du circuit magnétique constitué du noyau qui canalise le flux. On a l'habitude de considérer, sous ce vocable, plusieurs phénomènes.

### Fuite de flux

L'un d'entre eux concerne la fuite de flux en dehors du circuit magnétique. Le flux créé par la bobine primaire ne circule pas entièrement dans la bobine secondaire et réciproquement, certaines lignes de champ magnétique circulant en dehors du noyau en fer doux.

### Pertes par courant de Foucault

Le phénomène d'induction magnétique crée des courants électriques dits de Foucault, qui circulent dans la masse du noyau de fer, causant ainsi, par effet Joule, une dissipation de chaleur qui se traduit par une perte de puissance. Il est possible de minimiser ces pertes en utilisant des tôles feuilletées isolées les unes des autres par du vernis, au lieu d'utiliser un noyau massif. Ces pertes dépendent de la fréquence des tensions utilisées.

### Pertes par hystéresis

Comme un transformateur fonctionne en général en régime sinusoïdal, le flux, à l'intérieur du circuit magnétique, change de sens alternativement,

causant également un changement alternatif de l'orientation magnétique des particules de fer. Il existe un décalage temporel entre le phénomène électrique et le phénomène magnétique, induisant lui aussi une perte d'énergie. Ces pertes dépendent également de la fréquence des tensions utilisées.

#### REMARQUE

Les pertes magnétiques par courants de Foucault et par hystérésis sont également appelées pertes fer au sens où leur siège est constitué du noyau de fer du transformateur.

### Courant magnétisant

Dans un transformateur, le flux est créé par une partie du courant injecté à l'entrée qui est réellement consommé pour cela. Il est appelé courant magnétisant. Il est consommé à l'entrée du circuit, même si aucun courant n'est présent en sortie.

## 2. Pertes par effet Joule

Sans surprise, les bobinages du primaire et du secondaire sont constitués de fils, en général de cuivre, qui présentent une certaine résistance. Ils sont donc le siège d'un effet Joule et une partie de la puissance injectée à l'entrée du transformateur se trouve ainsi dissipée sous forme de chaleur.

#### REMARQUE

Les pertes par effet Joule sont également appelées pertes cuivre.

## 3. Modèle électrique du transformateur réel

Pour tenir compte à présent, dans le cas du transformateur réel, de tous les phénomènes de pertes que nous avons négligés dans la [fiche 29](#) en

considérant les transformateurs comme parfaits, nous allons introduire, dans le schéma de fonctionnement, des éléments (résistances et bobines) permettant de les modéliser.

### REMARQUE

Il s'agit bien de proposer un schéma équivalent tenant compte des pertes. Les dipôles ainsi introduits dans le schéma de fonctionnement n'existent pas en tant que dipôles mais ils sont placés pour approcher les équations réelles. Par exemple, une bobine caractérisée par son inductance possède aussi une résistance. Cette résistance, qui est celle du fil de bobinage, est entièrement imbriquée dans la bobine et est donc indissociable, physiquement, de l'inductance. Cela ne nous empêche pas de modéliser l'ensemble par une association série d'une inductance pure avec une résistance.

Plusieurs modèles électriques existent pour représenter le fonctionnement d'un transformateur réel. Nous avons choisi de présenter le modèle de Kapp, relativement simple à utiliser. Il est présenté sur la figure 30.1.

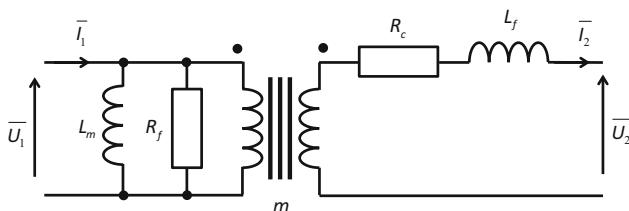


Figure 30.1

### Interprétation de la présence des deux résistances et des deux inductances dans ce schéma.

L'inductance  $L_m$  représente le phénomène de courant magnétisant. La résistance  $R_f$  représente les pertes fer. On notera que les phénomènes de pertes fer (courants de Foucault et hystéresis) n'ont rien à voir avec un quelconque élément résistif réel mais cette résistance a uniquement pour objectif de modéliser les pertes de puissance qui seront observées.

Le fait de placer  $L_m$  et  $R_f$  au primaire du transformateur, une fois de plus, n'est qu'un choix. On dit alors que ces éléments sont « ramenés à l'entrée ».

La résistance  $R_c$  représente les pertes cuivre « ramenées à la sortie ». Une fois encore, ce n'est qu'un choix de modèle, les pertes cuivre étant présentes physiquement au sein des enroulements.

Enfin, l'inductance  $L_f$  correspond aux fuites de flux, ramenés à la sortie.

Le fait d'avoir placé les quatre éléments caractérisant le transformateur réel, soit au primaire, soit au secondaire, n'est pas un choix tout à fait arbitraire comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant. En attendant, mentionnons un exemple très simple.

#### EXEMPLE

Lorsqu'aucune charge n'est reliée à la sortie du transformateur, aucun courant ne circule dans l'enroulement secondaire. Par conséquent, normalement, aucun courant ne peut non plus circuler dans l'enroulement primaire. Néanmoins, un courant magnétisant est bien présent à l'entrée et des pertes fer existent bel et bien dans le noyau. Dans ces conditions et conformément au schéma de la figure 30.1, la modélisation de ces deux phénomènes à l'entrée du transformateur est donc bien choisie. Un courant  $\bar{I}_1$  sera bien présent à l'entrée, bien que  $\bar{I}_2$  soit nul. Ce courant va circuler dans l'association en parallèle de  $L_m$  et  $R_f$ .

Pour négliger l'un ou l'autre des phénomènes, il suffit de faire disparaître la résistance ou l'inductance correspondante du schéma. Ainsi, si on envisage de ne pas tenir compte des phénomènes de courant magnétisant, on retire  $L_m$  qui se trouve donc remplacée par un circuit ouvert, d'où l'intérêt d'avoir placé ce dipôle en parallèle sur l'entrée. Même chose pour  $R_f$ . En revanche, si on souhaite négliger les pertes cuivre ou les fuites de flux, on retirera les dipôles de la sortie en les remplaçant par des courts-circuits.

## 4. Mesure des pertes dans un transformateur réel

En règle générale, un transformateur est conçu pour fonctionner avec des valeurs optimales des tensions, que l'on appelle ses valeurs nominales.

Sur la plaque signalétique d'un transformateur, on lit, en règle générale la tension nominale d'entrée, la tension nominale de sortie, la puissance apparente nominale (en kVA ou en VA) et la fréquence normale d'utilisation (souvent égale à 50 Hz).

### ■ Essai à vide

L'essai à vide (à courant de sortie nul) d'un transformateur consiste à réaliser un certain nombre de mesures sans connecter de charge en sortie. Il permet de mesurer le rapport de transformation et les pertes fer. On alimente le transformateur avec une tension sinusoïdale de valeur efficace correspondant à la valeur nominale d'entrée.

Le schéma de la figure 30.2 représente une des manières de procéder à un essai à vide, à l'aide de deux voltmètres et d'un wattmètre. Les voltmètres sont placés, l'un à l'entrée et l'autre en sortie. Les grandeurs électriques sont toutes affectées d'un indice 0 supplémentaire afin de matérialiser le fait que cet essai se fait à vide. On se souviendra qu'un voltmètre parfait possède, en théorie, une impédance infinie et ne perturbe donc pas le fonctionnement du circuit. Ces voltmètres permettent la lecture des valeurs efficaces des tensions, soit  $U_{20\text{eff}}$  et  $U_{10\text{eff}}$ . On a par ailleurs  $I_{20\text{eff}} = 0$ . En revanche, il existe bel et bien un courant au primaire du transformateur, dû aux pertes modélisées par  $L_m$  et  $R_f$ . Soit  $I_{10\text{eff}}$  la valeur efficace de ce courant.

#### REMARQUE

Le simple rapport entre  $U_{20\text{eff}}$  et  $U_{10\text{eff}}$  nous donne le rapport de transformation :

$$m = \frac{U_{20\text{eff}}}{U_{10\text{eff}}}$$

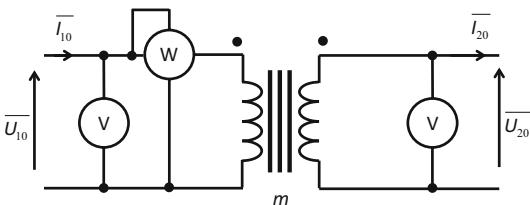


Figure 30.2

Le wattmètre possède deux paires de bornes. La première fonctionne comme un ampèremètre tandis que la seconde fonctionne comme un voltmètre. L'appareil mesure alors la puissance active correspondant aux deux grandeurs électriques qu'il mesure, soit  $U_{10\text{eff}} I_{10\text{eff}} \cos \varphi_{10}$ . Un facteur de puissance  $\cos \varphi_{10}$  est en effet susceptible d'apparaître car, en règle générale, le courant et la tension d'entrée ne sont pas obligatoirement en phase. Cette puissance mesurée par le wattmètre est une estimation de la puissance consommée par les pertes fer du transformateur, soit :

$$P_f = U_{10\text{eff}} I_{10\text{eff}} \cos \varphi_{10}$$

#### REMARQUE

Lorsque l'on procède à un essai à vide, les pertes cuivre sont négligeables devant les pertes fer.

### ■ Essai en court-circuit

L'essai en court-circuit (à tension de sortie nulle) d'un transformateur consiste à réaliser un certain nombre de mesures en court-circuitant ses bornes de sortie (charge d'impédance nulle). Il permet de mesurer les pertes cuivre.

Le schéma de la figure 30.3 représente une des manières de procéder à un essai en court-circuit, à l'aide d'un voltmètre, d'un ampèremètre et d'un wattmètre. Le voltmètre est placé à l'entrée et l'ampèremètre (dont on supposera l'impédance nulle s'il est considéré comme parfait) réalisé lui-même le court-circuit.

Les grandeurs électriques sont toutes affectées d'un indice CC supplémentaire afin de matérialiser le fait que cet essai se fait en court-circuit. Le voltmètre permet la lecture de la valeur efficace de la tension d'entrée, soit  $U_{1CC\text{eff}}$ . On a par ailleurs  $U_{2CC\text{eff}} = 0$ .

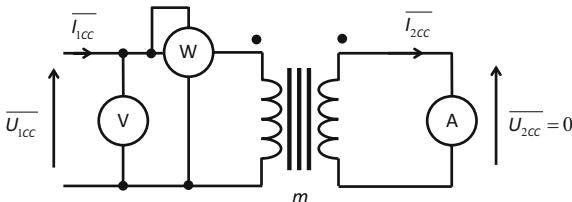


Figure 30.3

On alimente le transformateur avec une tension sinusoïdale de valeur efficace  $U_{1CC_{eff}}$  très réduite par rapport à la valeur nominale d'entrée et ce, afin de ne pas engendrer un courant de sortie trop important. Dans la pratique, on s'arrange pour que la valeur efficace du courant de court-circuit,  $I_{2CC_{eff}}$ , soit égale à la valeur nominale du courant de sortie.

Tout comme dans le cas de l'essai à vide, le wattmètre mesure la puissance active correspondant aux deux grandeurs électriques d'entrée. Cette puissance  $P_1$  mesurée par le wattmètre est une estimation de la puissance consommée par les pertes cuivre du transformateur.

#### REMARQUE

Dans un essai en court-circuit, les pertes fer sont négligeables devant les pertes cuivre.

### Rendement du transformateur

Dans des conditions normales d'utilisation où une charge  $\bar{Z}$  est reliée à la sortie du transformateur, on définit le rendement de ce transformateur comme le rapport entre la puissance active disponible en sortie (i.e. consommée effectivement par la charge) et la puissance active fournie à l'entrée.

$$\text{On a alors : } \eta = \frac{P_{2a}}{P_{1a}}$$

Ce rendement ne peut être qu'inférieur à 1 (ou à 100 %) étant donné que la puissance  $P_{1a}$  correspond à  $P_{2a} + P_f + P_c$  puisqu'il faut fournir à l'entrée, non seulement la puissance active nécessaire au secondaire mais aussi la puissance qui sera perdue sous forme de pertes magnétiques ou de pertes par effet Joule.

$$\eta = \frac{P_{2a}}{P_{2a} + P_f + P_c}$$

### **EXERCICE 1 Détermination des caractéristiques nominales d'un transformateur**

On considère un transformateur dont la plaque signalétique indique les valeurs suivantes : 230 V / 50 V, 1 kVA.

Calculer les courants nominaux d'entrée et de sortie de ce transformateur.

Quelle est la puissance active maximale disponible en sortie ?

#### **Solution**

La mention 1 kVA sur la plaque du transformateur correspond à sa puissance apparente maximale et nominale. Cette puissance apparente correspond à  $U_{1\text{eff}} I_{1\text{eff}}$ .

La valeur efficace de la tension nominale d'entrée étant connue, on en déduit la valeur du courant nominal d'entrée :

$$I_{1\text{eff}} = \frac{U_{1\text{eff}} I_{1\text{eff}}}{U_{1\text{eff}}} = \frac{1000}{230} = 4,35 \text{ A}$$

Le courant nominal de sortie se détermine de la même manière, en supposant que nous disposons de la même puissance apparente nominale en sortie :

$$I_{2\text{eff}} = \frac{U_{2\text{eff}} I_{2\text{eff}}}{U_{2\text{eff}}} = \frac{1000}{50} = 20 \text{ A}$$

Quant à la puissance active maximale disponible en sortie, considérant que cette puissance active a pour expression  $P_{2a} = U_{1\text{eff}} I_{1\text{eff}} \cos\varphi_2$  et que la valeur maximale de la puissance apparente  $U_{1\text{eff}} I_{1\text{eff}}$  est égale à 1 kVA, on aura nécessairement  $P_{2a} \leq U_{1\text{eff}} I_{1\text{eff}}$ .

Par conséquent, la puissance active maximale disponible est égale à 1 kVA.

## EXERCICE 2 Détermination des pertes dans un transformateur

On considère un transformateur dont la plaque signalétique indique les valeurs suivantes : 230 V / 50 V, 1 kVA.

On réalise dans un premier temps un essai à vide (schéma de la figure 30.2) à la valeur nominale de la tension d'entrée. Le wattmètre indique une puissance de 60 W. On réalise ensuite un essai en court-circuit (schéma de la figure 30.3) en plaçant à l'entrée une tension de valeur efficace égale à 23 V. On mesure un courant de court-circuit de valeur efficace correspondant à sa valeur nominale. Le wattmètre indique une puissance de 30 W. On connecte ensuite une charge à la sortie du transformateur dont le facteur de puissance est égal à 0,8.

Quel est le rendement du transformateur ?

### Solution

L'essai à vide permet d'estimer les pertes fer :  $P_f = 60 \text{ W}$ .

Les pertes cuivre sont estimées à partir de l'essai en court-circuit :  $P_c = 30 \text{ W}$

La puissance active consommée par la charge a pour expression :

$$P_{2a} = U_{2\text{eff}} I_{2\text{eff}} \cos\varphi_2 \text{ avec } U_{2\text{eff}} = 50 \text{ V et } \cos\varphi_2 = 0,8.$$

Quant à  $I_{2\text{eff}}$ , il correspond au courant nominal :  $I_{2\text{eff}} = \frac{1\text{kVA}}{50 \text{ V}} = 20 \text{ A}$ .

On a donc :  $P_{2a} = 50 \times 20 \times 0,8 = 800 \text{ W}$ .

Par conséquent :

$$\eta = \frac{P_{2a}}{P_{2a} + P_f + P_c} = \frac{800}{800 + 60 + 30} \approx 0,9 = 90 \%$$



## A

adaptation du facteur de puissance 97  
admittance complexe 14  
alimentation d'un moteur électrique  
    par un transformateur 157  
amplitude 1  
annulation de la puissance réactive 100  
anode 130  
argument 37  
association  
    de quadripôle 114  
    en parallèle 23  
    en série 22

## B

bobine 10, 18  
borne homologue 153  
branche 57

## C

capacité 17  
caractéristique d'une diode 135  
cathode 130  
circuit  
    de charge 104  
    équivalent 32  
condensateur 10, 17  
conservation de l'énergie 88  
convention  
    générateur 3  
    récepteur 3  
couplage  
    magnétique 152  
    parfait 154  
courant  
    débité par un générateur de tension 51  
    de Norton 81  
    d'entrée 103  
    de sortie 103  
    magnétisant 160

## D

décomposition en série de Fourier 125  
déphasage 7  
diagramme de Fresnel 27  
diode 129  
    bloquée 130  
    idéale 137  
    parfaite 136  
    passante 130  
dipôle 1  
    de Norton 81  
    de Thévenin 74  
    passif 1  
    passif linéaire 10  
diviseur de tension 66

## E

écrêtage 143  
énergie 86  
    consommée 87  
enroulement  
     primaire 152  
    secondaire 152  
équivalence  
    Thévenin-Norton 83  
    triangle-étoile 31  
essai en court circuit 164

## F

facteur de puissance 92  
farads 17  
flux magnétique 152  
forme complexe 8  
formule d'Euler 37  
fréquence 1  
fuite de flux 159

## G

générateur  
    de courant parfait 2  
    de tension parfait 1

- réel 4
  - grandeur complexe 7
- H**
- harmoniques 126
  - henrys 18
- I**
- impédance
    - complexe 11
    - de Norton 81
    - d'entrée 109
    - de sortie 110
    - de Thévenin 74
  - inductance
    - mutuelle 154
    - propre 18
- J**
- jonction PN 129
  - joule 87
- K**
- kilowatt heure 87
- L**
- limitation de puissance 145
  - loi
    - de Kirchhoff 57
    - des mailles 58
    - des nœuds 58
    - d'Ohm 11, 16
- M**
- maille d'un réseau 57
  - matrice
    - admittance 109
    - de transfert 105
    - hybride 109
  - mesure
    - de résistance 71
    - d'une impédance de sortie 111
  - modèle
    - complexe 8
- de diode 139
  - de Kapp 161
  - dynamique de la diode 137
  - module 37
- N**
- nœud d'un réseau 57
  - nombre
    - complexe 36
    - complexe conjugué 38
    - imaginaire 36
    - noyau de fer doux 152
- O**
- ohms 16
- P**
- partie
    - imaginaire 13, 36
    - réelle 13, 36
  - perte
    - cuivre 160
    - magnétique 159
    - par courant de Foucault 159
    - par effet Joule 160
    - par hystérésis 159
  - plan complexe 37
  - point de fonctionnement 137
  - polarisation de la diode 137
  - pont
    - de Graetz 148
    - de Wheatstone 70
    - d'impédance à l'équilibre 71
    - d'impédances 70
  - principe de superposition 47
  - prise de courant domestique 9
  - puissance
    - active 93
    - apparente nominale 163
    - complexe 93
    - consommée 92
    - dissipée dans une diode 144
    - électrique 86
    - instantanée 86

- moyenne 88
- réactive 93
- pulsion 1
  
- Q**
- quadripôles 103
  
- R**
- raie fondamentale 126
- rapport de transformation du transformateur 154
- réactance 13
- redressement
  - double alternance 148
  - simple alternance 142
- rendement du transformateur 165
- représentation fréquentielle 121
- réseau
  - de distribution 9
  - électrique 57
- résistance 10, 13, 16
  - dynamique 137
  - interne 5
- résistor 16
  
- S**
- schémas équivalents des quadripôles 113
- signal
  - en dent de scie 126
  - périodique 125
- spectre 122
  - bilatéral 123
  - unilatéral 123

- T**
- tension
  - d'entrée 103
  - de seuil 132
  - de sortie 103
  - de Thévenin 74
  - nominale d'entrée 163
  - nominale de sortie 163
- théorème
  - de Millman 61
  - de Norton 81
  - de Thévenin 74
- transformateur 152
  - en charge 156
  - monophasé parfait 152
  - monophasé réel 159

- V**
- valeur
  - efficace 7, 91
  - moyenne 126
  - nominale 162
- volt ampère 94
- réactif 94

- W**
- watt 87, 94
- wattmètre 163

- Z**
- zone de déplétion 130