Détail de l'étude des limites du circuit RLC quand m>1

La fonction de transfert isochrone est la suivante :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{2m\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

avec $\omega_1 = \omega_0\left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right)$ et $\omega_2 = \omega_0\left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)$

par ailleurs : $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$

a. Diagramme du gain

$$G_{dB} = 20\log[|\underline{H}|] = 20\log\left[\left|\frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}\right|\right]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20\log\left[\left|\frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)}\right|\right] + 20\log\left[\left|\frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}\right|\right]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20\log\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}\right] + 20\log\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}\right]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = -20\log\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\right] - 20\log\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = -10\log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] - 10\log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]$$

Pour tracer G_{dB} en fonction de ω, il faut faire une étude des limites.

- lorsque ω tend vers 0 :

  $$\lim_{\omega\to 0} G_{dB} = \lim_{\omega\to 0} -10\log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] - 10\log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]$$

  $$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to 0} G_{dB} = \lim_{\omega\to 0} -10\log(1) - 10\log(1) = 0\,dB$$

  La première asymptote quand $\omega \to 0$ vaut 0 dB avec une pente nulle.

- lorsque ω tend vers $+\infty$:

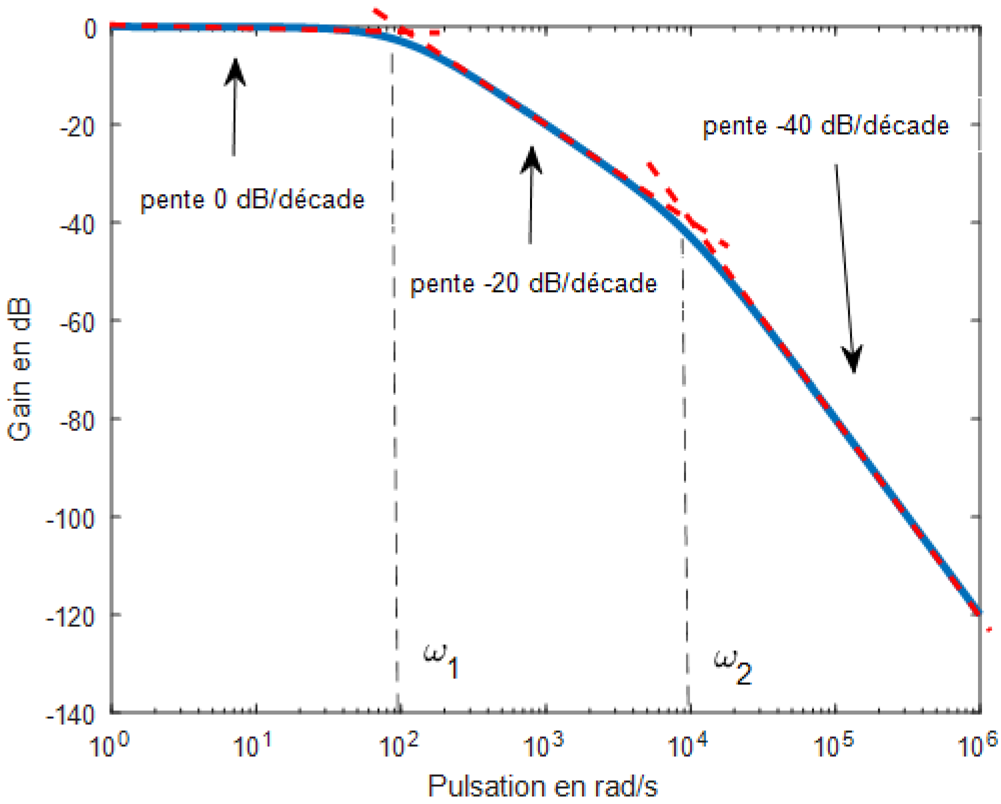
$$\lim_{\omega\to+\infty} G_{dB} = \lim_{\omega\to+\infty} -10\log\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] - 10\log\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to+\infty} G_{dB} = \lim_{\omega\to+\infty} -10\log\left[\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] - 10\log\left[\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to+\infty} G_{dB} = \lim_{\omega\to+\infty} -20\log\left[\frac{\omega}{\omega_1}\right] - 20\log\left[\frac{\omega}{\omega_2}\right] = -\infty$$

Dans note exemple, $\omega_1 < \omega_2$, on a donc une asymptote entre ω_1 et ω_2 qui est une droite de pente -20 dB/décade. Puis à partir de ω_2, on a une autre asymptote qui est une droite de pente -40 dB/décade.

Nous pouvons à présent tracer le diagramme de Bode du gain (figure ci-dessous).



2.b. Diagramme de phase

$$\varphi = \arg(\underline{H})$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arg\left(\frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = -\arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

Pour tracer φ en fonction de ω, il faut faire une étude des limites.

- lorsque ω tend vers 0 :

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to 0}\varphi = \lim_{\omega\to 0} -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) = -2\arctan(0) = 0\,rad = 0°$$

- lorsque ω tend vers $+\infty$:

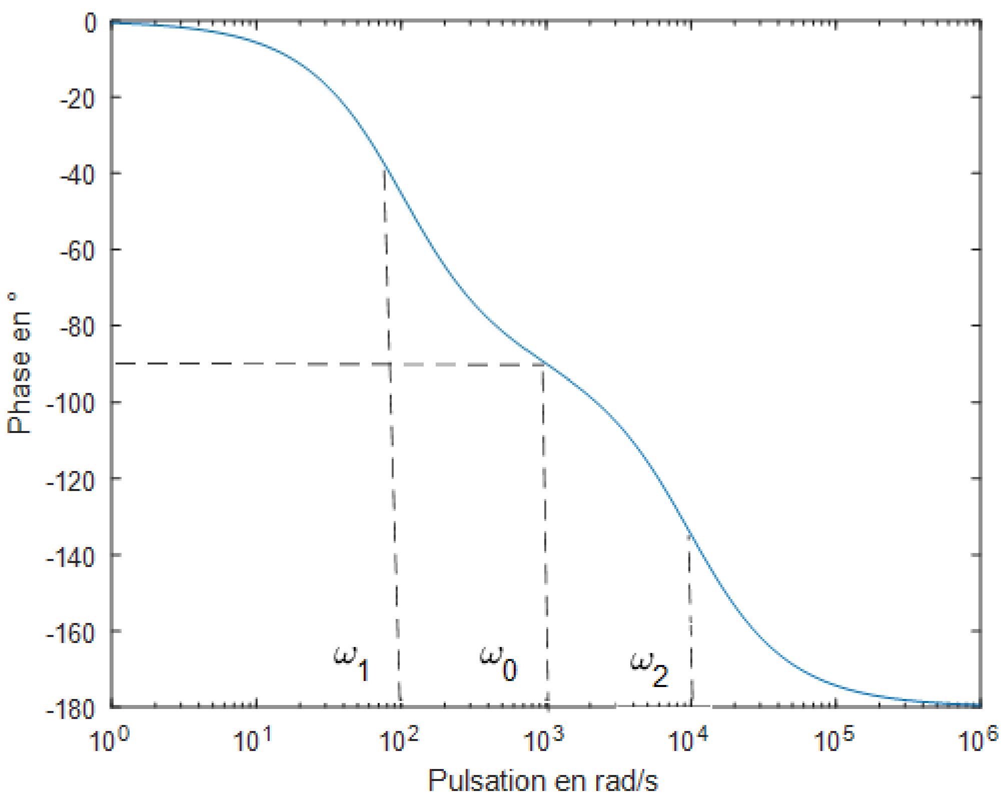
$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to +infty}\varphi = \lim_{\omega\to +\infty} -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) = -2\arctan(+\infty) = -2\cdot\frac{\pi}{2}\,rad$$

- lorsque $\omega = \omega_0$:

$$\varphi(\omega_0) = \arg(\underline{H}(\omega_0)) = \arg\left(\frac{1}{1 + j\frac{2m\omega_0}{\omega_0} - \left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$$\varphi(\omega_0) = \arg\left(\frac{1}{1 + j2m - 1}\right) = \arg\left(\frac{1}{j2m}\right) = -\arg\left(\frac{j}{2m}\right) = -\frac{\pi}{2}\,rad = -90°$$

Nous pouvons à présent tracer le diagramme de Bode de phase (figure ci-dessous).



Simulation

Le code Octave qui permet de tracer les deux courbes est donné ci-dessous. On prendra les valeurs de composants suivantes : $R = 1k\Omega$, $C = 10\mu F$ et $L = 0.1H$. Avec ces valeurs, m vaut 5 ($m > 1$), $\omega_0 = 10^{-3}\,rad/s$, $\omega_1 = 99\,rad/s$ et $\omega_2 = 10^{-4}\,rad/s$.

```
>> R=1e3; C=10e-6;L=0.1;
>> m=R/2*sqrt(C/L)
>> w0=1\sqrt(L*C)
>> w1=w0*(m-sqrt(m^2-1))
>> w2=w0*(m+sqrt(m^2-1))
>> w=logspace(0,6,1000); %définit un vecteur pulsation contenant des valeurs réparties régu
```

```
>> H=1./(1+j*R*C*w -L*C*w.^2); % définition de la fonction de transfert isochrone (complexe
>> GdB= 20*log10(abs(H)); % calcul du gain en dB. log10 est utilisé pour calculer le log en
>> Phi=phase(H); % calcul de la phase en rad. phase permet de calculer l'argument d'un nomb

>> % Tracé du diagramme de Bode
>> figure(1)
>> semilogx(w,GdB) %diagramme du gain
>> xlabel('Pulsation en rad/s')
>> ylabel('Gain en dB')

>> figure(2)
>> semilogx(w,Phi*180/pi) %diagramme de phase
>> xlabel('Pulsation en rad/s')
>> ylabel('Phase en °')


m =

     5

w0 =

   1.0000e-03

w1 =

   1.0102e-04


w2 =

    0.0099
```