Détail de l'étude des limites du circuit RLC quand m<1

Etude de la résonance

Démontrons que le gain présente un maximum lorsque $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour cela, il faut regarder quand la dérivée du gain s'annule.

On calcule donc : $rac{d\left| \underline{H}
ight|}{d\omega}$

$$|\underline{H}| = \left| rac{1}{1 + j rac{2m\omega}{\omega_0} - \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2}
ight|$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}| = rac{1}{\sqrt{\left[1-\left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2
ight]^2+\left[rac{2m\omega}{\omega_0}
ight]^2}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}| = \left(\left[1 - \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2
ight]^2 + \left[rac{2m\omega}{\omega_0}
ight]^2
ight)^{-rac{1}{2}}$$

$$rac{d\left|\underline{H}
ight|}{d\omega} = -rac{1}{2}\cdot\left(\left[1-\left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2
ight]^2 + \left[rac{2m\omega}{\omega_0}
ight]^2
ight)^{-rac{3}{2}}\cdot\left[2\left(1-\left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2
ight)\cdot\left(-rac{2\omega}{\omega_0^2}
ight) + 2\left(rac{4m^2}{\omega_0^2}
ight)^2
ight)^2$$

$$\Leftrightarrow rac{d\left| \underline{H}
ight|}{d\omega} = rac{rac{2\omega}{\omega_0^2} iggl[1 - \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2 - 2m^2 iggr]}{ \left(iggl[1 - \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2 iggr]^2 + iggl[rac{2m\omega}{\omega_0} iggr]^2
ight)^{rac{3}{2}}}$$

$$rac{d\left|\underline{H}(\omega_r)
ight|}{d\omega}=0$$

$$\Leftrightarrow rac{rac{2\omega_r}{\omega_0^2}iggl[1-iggl(rac{\omega_r}{\omega_0}iggr)^2-2m^2iggr]}{iggl(iggl[1-iggl(rac{\omega_r}{\omega_0}iggr)^2iggr]^2+iggl[rac{2m\omega_r}{\omega_0}iggr]^2iggr)^{rac{3}{2}}}=0$$

1/5

$$\Leftrightarrow 1 - \left(rac{\omega_r}{\omega_0}
ight)^2 - 2m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(rac{\omega_r}{\omega_0}
ight)^2 = 1 - 2m^2$$

$$\Leftrightarrow \omega_r^2 = \omega_0^2 \left(1 - 2m^2
ight)$$

$$\Leftrightarrow \omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2m^2}$$

On remarque que ω_r existe uniquement lorsque $1-2m^2>0$, soit $m<rac{1}{\sqrt{2}}$

Calculons à présent $|\underline{H}(\omega_r)|$:

$$|\underline{H}(\omega_r)| = rac{1}{\sqrt{\left[1-\left(rac{\omega_r}{\omega_0}
ight)^2
ight]^2+\left[rac{2m\omega_r}{\omega_0}
ight]^2}}$$

On remplace ω_r :

$$|\underline{H}(\omega_r)| = rac{1}{\sqrt{\left[1-\left(rac{\omega_0\sqrt{1-2m^2}}{\omega_0}
ight)^2
ight]^2+\left[rac{2m\omega_0\sqrt{1-2m^2}}{\omega_0}
ight]^2}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)| = rac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\sqrt{1-2m^2}
ight)^2
ight]^2+\left[2m\sqrt{1-2m^2}
ight]^2}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)| = rac{1}{\sqrt{\left[1-(1-2m^2)
ight]^2+4m^2(1-2m^2)}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)| = rac{1}{\sqrt{4m^4 + 4m^2 - 8m^4)}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)| = rac{1}{\sqrt{4m^2(1-m^2)}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)| = rac{1}{2m\sqrt{(1-m^2)}}$$

Etude des limites

La fonction de transfert isochrone est la suivante :

$$\underline{H} = rac{1}{1 + jrac{2m\omega}{\omega_0} - \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2}$$

a. Diagramme du gain

$$G_{dB} = 20 \log[|\underline{H}|] = 20 \log \left[\left| rac{1}{1 + j rac{2m\omega}{\omega_0} - \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2}
ight|
ight]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20 \log[|\underline{H}|] = 20 \log \left[rac{1}{\sqrt{\left(1-\left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2
ight)^2+\left(rac{2m\omega}{\omega_0}
ight)^2}}
ight]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20 \log[|\underline{H}|] = 20 \log \left[rac{1}{\sqrt{1 - 2 \Big(rac{\omega}{\omega_0}\Big)^2 + \Big(rac{\omega}{\omega_0}\Big)^4 + \Big(rac{2m\omega}{\omega_0}\Big)^2}}
ight]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20 \log[|\underline{H}|] = 20 \log \left[rac{1}{\sqrt{1 + (4m^2 - 2) {\left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)}^2 + {\left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)}^4}}
ight]$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20 \log[|\underline{H}|] = -10 \log \Bigg[1 + (4m^2 - 2) igg(rac{\omega}{\omega_0} igg)^2 + igg(rac{\omega}{\omega_0} igg)^4 \Bigg]$$

Pour tracer G_{dB} en fonction de ω , il faut faire une étude des limites.

• lorsque ω tend vers 0 :

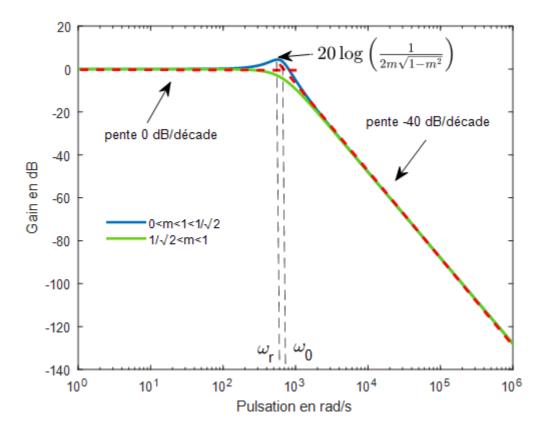
$$\lim_{\omega o 0} G_{dB} = \lim_{\omega o 0} -10 \log \left[1 + (4m^2-2) \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2 + \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^4
ight] = -10 \log(1) = 0 \, dB$$

La première asymptote quand $\omega \to 0$ vaut 0 dB avec une pente nulle.

• lorsque ω tend vers $+\infty$:

$$egin{aligned} &\lim_{\omega o +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega o +\infty} -10 \log \left[1 + (4m^2 - 2) \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2 + \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^4
ight] \ &\Leftrightarrow \lim_{\omega o +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega o +\infty} -10 \log \left[\left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^4
ight] \ &\Leftrightarrow \lim_{\omega o +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega o +\infty} -40 \log \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight) = -\infty \end{aligned}$$

La deuxième asymptote est donc une droite de pente -40 dB/décade.



b. Diagramme de phase

$$arphi = rg(\underline{H}) \ \Leftrightarrow arphi = rg \Bigg(rac{1}{1 + j rac{2m\omega}{\omega_0} - \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2} \Bigg)$$

$$\Leftrightarrow arphi = -rgiggl(1+jrac{2m\omega}{\omega_0}-iggl(rac{\omega}{\omega_0}iggr)^2iggr)$$

$$\Leftrightarrow arphi = -rctan \Biggl(rac{rac{2m\omega}{\omega_0}}{1-\left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2} \Biggr)$$

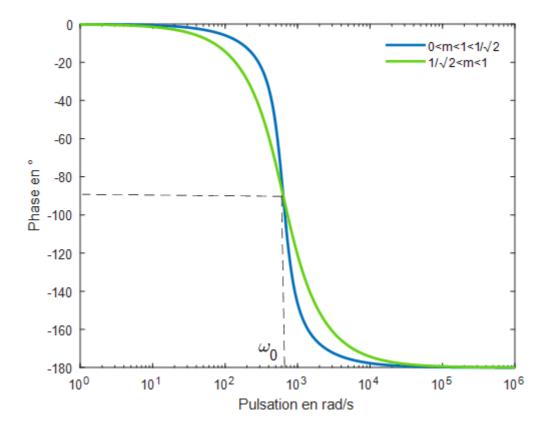
Pour tracer φ en fonction de ω , il faut faire une étude des limites.

• lorsque ω tend vers 0 :

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega o 0} arphi = \lim_{\omega o 0} - rctan \Biggl(rac{rac{2m\omega}{\omega_0}}{1 - \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2} \Biggr) = -2 \cdot rctan(0) = 0 \, rad = 0^\circ$$

• lorsque ω tend vers $+\infty$:

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega o + infty} arphi = \lim_{\omega o + \infty} - rctan \Biggl(rac{rac{2m\omega}{\omega_0}}{1 - \left(rac{\omega}{\omega_0}
ight)^2} \Biggr) = -2 rctan (+\infty) = -2 \cdot rac{\pi}{2} \ rad = -\pi \cdot rac{\pi}{2}$$



Stéphanie Parola - HILISIT - Université Montpellier (cc) BY-NC-SA