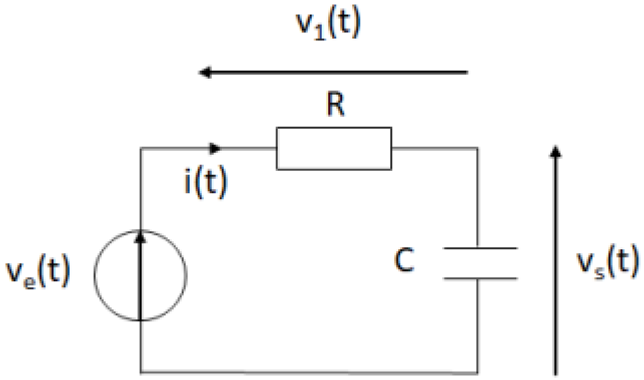
Introduction aux notations complexes

Exemple

Reprenons l'exemple du circuit RC dont le schéma est illustré ci-dessous. Le générateur délivre une tension sinusoïdale : $v_e(t) = V_0 \cos(\omega t)$. On cherche à déterminer la tension de sortie $v_s(t)$.



On note $v_{sr}(t)$ la solution de l'équation différentielle : $RC\dfrac{dv_{sr}}{dt} + v_{sr}(t) = V_0 \cos(\omega t)$ eq. (1)

On définit également $v_{si}(t)$ la solution de l'équation différentielle :

$RC\dfrac{dv_{si}}{dt} + v_{si}(t) = V_0 \sin(\omega t)$ eq. (2)

Compte tenu des propriétés de linéarité de l'équation différentielle, on peut faire une combinaison linéaire des deux équations différentielles précédentes, plus particulièrement eq. (1) + j eq.(2) :

$RC\dfrac{d\left[v_{sr} + jv_{si}\right]}{dt} + \left[v_{sr}(t) + jv_{si}(t)\right] = V_0\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right]$ eq. (3)

On définit les fonctions complexes :

$\underline{v_s}(t) = V_{s,0}\exp(j(\omega t + \varphi)) = V_{s,0}\ exp(j\varphi)\exp(j\omega t) = \underline{V_s}\exp(j\omega t)$ eq. (4)

et $\underline{v_e}(t) = V_{e,0}\exp(j\omega t) = \underline{V_e}\exp(j\omega t)$ eq. (5)

Dans notre exemple, $\underline{V_e} = V_{e,0} = V_0$

$\underline{V_e}$ et $\underline{V_s}$ sont appelées amplitudes complexes.

L'équation différentielle (3) s'écrit donc :

$$RC\frac{d\underline{v_s}(t)}{dt} + \underline{v_s}(t) = \underline{v_e}(t)$$

On utilise à présent les équations (4) et (5) :

$\Leftrightarrow RCj\omega\underline{V_s}\exp(j\omega t) + \underline{V_s}\exp(j\omega t) = V_0\exp(j\omega t)$

Les termes en $\exp(j\omega t)$ se simplifient :

$\Leftrightarrow jRC\omega\underline{V_s} + \underline{V_s} = V_0$ eq. (6)

$\Leftrightarrow (1 + jRC\omega) \cdot \underline{V_s} = V_0$

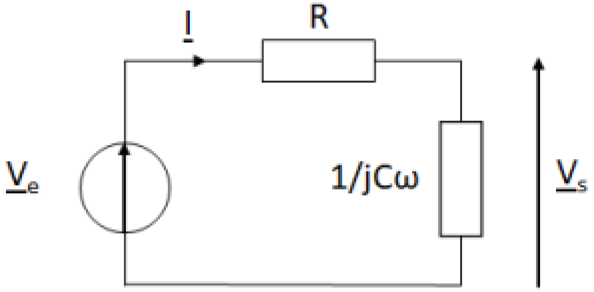
$$\Leftrightarrow \underline{V_s} = \frac{V_0}{1 + jRC\omega}$$

Remarque

On notera bien les différences entre les fonctions :

- les tensions complexes $\underline{v_s}(t)$ et $\underline{v_e}(t)$ dépendant du temps et de la fréquence (pulsation) de la source de tension. Leurs modules correspondent aux amplitudes des tensions réelles sinusoïdales observables à l'oscilloscope et leurs arguments au déphasage.
- Les parties réelles de $\underline{v_s}(t)$ et $\underline{v_e}(t)$ correspondant aux tensions $v_s(t)$ et $v_e(t)$, observables à l'oscilloscope :$v_s(t) = \Re\left[\underline{v_s}(t)\right]$ et $v_e(t) = \Re\left[\underline{v_e}(t)\right]$

A partir de l'équation (6) on définit le schéma électrique équivalent, donné ci-dessous :



Ce nouveau schéma équivalent fait apparaître des complexes (pour les grandeurs électriques : les amplitudes complexes $\underline{V_e}$, $\underline{V_s}$ et $\underline{I}$) et pour les impédances (R et $\frac{1}{jC\omega}$).

Le courant complexe $\underline{I}$ correspond au courant réel $i(t)$: $i(t) = \Re\left[\underline{I}\,\exp(j\omega t)\right]$