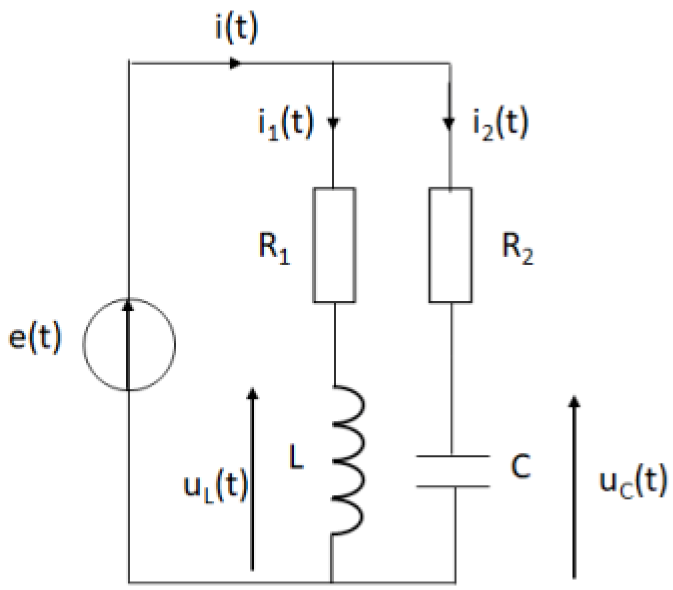
Exercice 1 : Mise en équation et résolution de circuits linéaires en régime variable - Conditions initiales nulles

Partie : 1 - Résolution temporelle

On considère le circuit suivant :



Ce circuit est alimenté par un générateur de tension $e(t) = E \cdot u(t)$ où $u(t)$ est un échelon unité. On considère que les conditions initiales sont nulles.

Question

1) Donner les valeurs de $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$, $u_L(0^+)$ et $u_C(0^+)$ en fonction de E et des valeurs des composants.

Solution

Les conditions initiales sont nulles, par conséquent :

- La bobine se comporte comme un interrupteur ouvert donc le courant qui la traverse est nul : $i_1(0^-) = 0$.

  Le courant qui traverse une bobine ne peut pas subir de discontinuité donc $i_1(0^-) = i_1(0^+) = 0$
- Le condensateur est déchargé, il se comporte comme un interrupteur fermé donc la tension à ses bornes est nulle : $u_C(0^-) = 0$.

  La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité, par conséquent $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0$

On applique la loi des mailles :

- maille 1 : $e(0^+) - R_1 \cdot i_1(0^+) - u_L(0^+) = 0$

  $e(0^+) = E$ et $i_1(0^+) = 0$

  donc $u_L(0^+) = E$
- maille 2 : $e(0^+) - R_2 \cdot i_2(0^+) - u_C(0^+) = 0$

  $e(0^+) = E$ et $u_C(0^+) = 0$ donc $E - R_2 \cdot i_2(0^+) = 0$

  soit $i_2(0^+) = \dfrac{E}{R_2}$

Question

2) a) Établir l'équation différentielle qui régit $i_1(t)$.

Indice

Il faut appliquer la loi des mailles (loi de Kirchhoff) et appliquer les relations courant-tension pour les différents composants.

Solution

On applique la loi des mailles sur la 1ère maille :

$e(t) - R_1 \cdot i_1(t) - u_L(t) = 0$ avec $u_L(t) = L \cdot \dfrac{di_1}{dt}$

$\Rightarrow e(t) - R_1 \cdot i_1(t) - L \cdot \dfrac{di_1}{dt} = 0$

$\Rightarrow L \cdot \dfrac{di_1}{dt} + R_1 \cdot i_1(t) = e(t)$

$\Rightarrow \dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{R_1}{L} \cdot i_1(t) = \dfrac{e(t)}{L}$ avec la condition initiale : $i_1(0^+) = 0$

Question

2) b) Résoudre l'équation différentielle qui régit $i_1(t)$.

Indice

Relire le complément de cours sur la résolution d'équations différentielles du 1er ordre

Solution

- Solution de l'équation homogène : $i_{1,h}(t) = K \cdot \exp\left(-\dfrac{R_1 \cdot t}{L}\right)$ avec K une constante à déterminer
- Solution particulière : le second membre $\dfrac{e(t)}{L} = \dfrac{E}{L}$ est une constante pour $t > 0$

  Par conséquent $i_{1,p}(t) = A$ où A est une constante à déterminer et $\dfrac{di_{1,p}}{dt} = 0$

On réinjecte la solution particulière dans l'équation différentielle générale :

$$\frac{di_{1,p}}{dt} + \frac{R_1}{L} \cdot i_{1,p}(t) = \frac{e(t)}{L}$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{R_1}{L} \cdot A = \frac{E}{L} \text{ pour } t > 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{E}{R_1}$$

$$\Rightarrow i_{1,p} = \frac{E}{R_1}$$

- Solution générale : $i_1(t) = i_{1,h}(t) + i_{1,p}$

$$\Rightarrow i_1(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{R_1 \cdot t}{L}\right) + \frac{E}{R_1}$$

On détermine la constante K à l'aide des conditions initiales :

$$i_1(0^+) = K \cdot \exp\left(-\frac{R_1 \cdot 0}{L}\right) + \frac{E}{R_1} \text{ et d'après la question 1) : } i_1(0^+) = 0$$

$$\Rightarrow K + \frac{E}{R_1} = 0$$

$$\Rightarrow K = -\frac{E}{R_1}$$

Au final, on obtient : $i_1(t) = -\frac{E}{R_1} \cdot \exp\left(-\frac{R_1 \cdot t}{L}\right) + \frac{E}{R_1}$

$$\Rightarrow i_1(t) = \frac{E}{R_1}\left[1 - \exp\left(-\frac{R_1 \cdot t}{L}\right)\right] \text{ pour } t > 0$$

Question

3) a) Établir l'équation différentielle qui régit $i_2(t)$.

Indice

Il faut appliquer la loi des mailles (loi de Kirchhoff) et appliquer les relations courant-tension pour les différents composants.

Solution

On applique la loi des mailles sur la 2ème maille :

$$e(t) - R_2 \cdot i_2(t) - u_C(t) = 0 \text{ eq. (1) et } i_2(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} \text{ eq.(2)}$$

On dérive l'équation (1) :

$$\Rightarrow \frac{de(t)}{dt} - R_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} - \frac{du_C(t)}{dt} = 0$$

On remplace l'expression de $\frac{du_C(t)}{dt}$ à partir de l'équation (2) :

$$\Rightarrow \frac{de(t)}{dt} - R_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} - \frac{1}{C} \cdot i_2(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{R_2 \cdot C} \cdot i_2(t) = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{de(t)}{dt}$$ avec la condition initiale : $i_2(0^+) = \frac{E}{R_2}$

Question

3) b) Résoudre l'équation différentielle qui régit $i_2(t)$.

Solution

- Solution de l'équation homogène : $i_{2,h}(t) = K' \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_2 \cdot C}\right)$ avec K' une constante à déterminer
- Solution particulière :

  Ici $e(t) = E = constante$ pour $t > 0 \Rightarrow \frac{de(t)}{dt} = 0$

  Le second membre est donc une constante pour $t > 0$ donc $i_{2,p}(t) = B$ où B est une constante à déterminer

  $$\Rightarrow \frac{di_{2,p}}{dt} = 0$$

  On réinjecte la solution particulière dans l'équation différentielle générale :

  $$\frac{di_{2,p}(t)}{dt} + \frac{1}{R_2 \cdot C} \cdot i_{2,p}(t) = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

  $$\Rightarrow 0 + \frac{1}{R_2 \cdot C} \cdot B = \frac{1}{R_2} \cdot 0$$ pour $t > 0$

  $$\Rightarrow B = 0$$

  $$\Rightarrow i_{2,p} = 0$$

- Solution générale : $i_2(t) = i_{2,h}(t) + i_{2,p}$

  $$\Rightarrow i_2(t) = K' \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_2 \cdot C}\right)$$

  On détermine la constante K' à l'aide des conditions initiales :

  $i_2(0^+) = K' \cdot \exp\left(-\frac{0}{R_2 \cdot C}\right)$ et d'après la question 1) : $i_2(0^+) = \frac{E}{R_2}$

  $$\Rightarrow K' = \frac{E}{R_2}$$

  Au final, on obtient : $i_2(t) = \frac{E}{R_2} \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_2 \cdot C}\right)$ pour $t > 0$

Question

4) Calculer le courant $i(t)$.

Indice

Il faut appliquer la loi des nœuds (loi de Kirchhoff).

Solution

On applique la loi des nœuds :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

En réutilisant les résultats obtenus aux questions 2) b) et 3) b), on obtient :

$$i(t) = \frac{E}{R_1}\left[1 - \exp\left(-\frac{R_1 \cdot t}{L}\right)\right] + \frac{E}{R_2} \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_2 \cdot C}\right) \text{ pour } t > 0$$

Question

5) Quelles relations doit-il exister entre L, R_1, R_2 et C pour que le courant $i(t)$ soit indépendant du temps ?

Solution

$$i(t) = constante \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0$$

On dérive l'équation (3) et on détermine les conditions sur les valeurs des composants pour lesquelles la dérivée de $i(t)$ est nulle :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{E}{R_1} \times \left(-\frac{R_1}{L}\right) \times \exp\left(-\frac{R_1 \cdot t}{L}\right) + \frac{E}{R_2} \times \left(-\frac{1}{R_2 \cdot C}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_2 \cdot C}\right) =$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} \cdot \exp\left(-\frac{R_1 \cdot t}{L}\right) - \frac{E}{R_2^2 \cdot C} \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_2 \cdot C}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{E}{L} \cdot \exp\left(-\frac{R_1 \cdot t}{L}\right) = \frac{E}{R_2^2 \cdot C} \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_2 \cdot C}\right)$$

Il faut donc que :

$$\begin{cases} \dfrac{E}{L} = \dfrac{E}{R_2^2 \cdot C} \\ \dfrac{R_1}{L} = \dfrac{1}{R_2 \cdot C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L = R_2^2 \cdot C \\ \dfrac{R_1}{L} = \dfrac{1}{R_2 \cdot C} \end{cases}$$

En combinant les deux équations, on obtient :

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2^2 \cdot C} = \frac{1}{R_2 \cdot C}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{R_2^2}{R_2}$$

$$\Rightarrow R_1 = R_2$$

Au final, pour que $i(t)$ soit indépendant du temps, il faut que :

$$\begin{cases} L = R_2^2 \cdot C \\ R_1 = R_2 \end{cases}$$

Partie : 2- Résolution avec le formalisme de la transformée de Laplace ⭐⭐

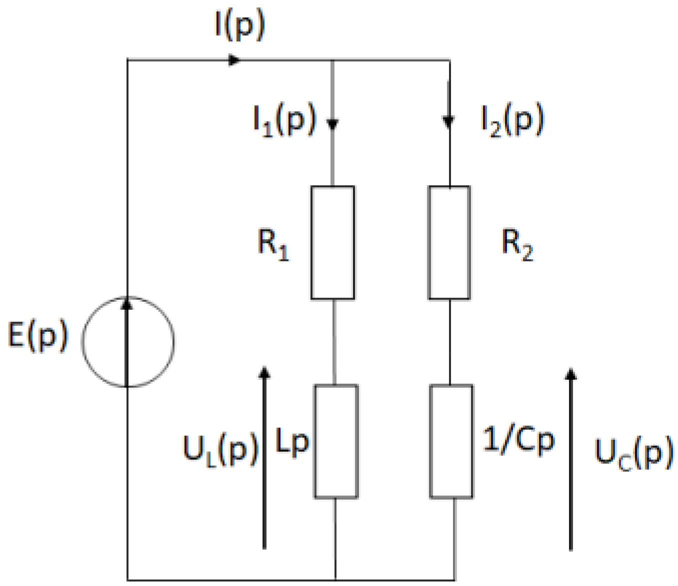
L'objectif de cette partie est de redémontrer les résultats obtenus précédemment en utilisant cette fois-ci le formalisme de la transformée de Laplace.

Question

6) Faire le schéma équivalent du circuit avec le formalisme de la transformée de Laplace en précisant les notations utilisées pour chaque grandeur électrique.

Solution

Le schéma équivalent avec le formalisme de Laplace est le suivant :



Avec $I(p)$, $I_1(p)$, $I_2(p)$, $E(p)$, $U_L(p)$ et $U_C(p)$ les transformées de Laplace respectives de $i(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$, $e(t)$, $u_L(t)$ et $u_C(t)$.

Question

7) a) Établir l'expression de $I_1(p)$ en fonction de E, R_1 et L.

Méthode ?

Il faut appliquer la loi des mailles (loi de Kirchhoff) avec le formalisme de la transformée de Laplace ainsi que les relations courant-tension avec le formalisme de Laplace pour les différents composants.

Solution

On applique la loi des mailles pour la première maille du circuit avec le formalisme de la transformée de Laplace :

$E(p) - R_1 \cdot I_1(p) - U_L(p) = 0$ et $U_L(p) = L \cdot p \cdot I_1(p)$

$\Leftrightarrow E(p) = R_1 \cdot I_1(p) + L \cdot p \cdot I_1(p) = (R_1 + L \cdot p)I_1(p)$

Soit : $I_1(p) = \dfrac{E(p)}{R_1 + L \cdot p}$

$e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E. En utilisant la table des transformées de Laplace, on a : $E(p) = \dfrac{E}{p}$

Par conséquent :

$$I_1(p) = \frac{E}{p\,(R_1 + L \cdot p)}$$

Question

7) b) A partir du résultat de la question précédente, déterminer $i_1(t)$.

Indice

Pour déterminer $i_1(t)$, il faut calculer la transformée de Laplace inverse de $I_1(p)$. Pour cela, on se servira de la table des transformées de Laplace.

Solution

$$i_1(t) = TL^{-1}\left[I_1(p)\right]$$

Avant de pouvoir utiliser la table des transformée de Laplace, il faut s'assurer que $I_1(p)$ est sous la forme d'une somme d'éléments simples.

Ce n'est pas le cas ici, il faut donc faire une décomposition en éléments simples.

La décomposition en éléments simples de $I_1(p)$ est la suivante :

$I_1(p) = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{\dfrac{R_1}{L} + p}$ où A et B sont des constantes à déterminer.

Pour cela, on va procéder par identification :

$$I_1(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{\dfrac{R_1}{L} + p} = \frac{E}{p\,(R_1 + L \cdot p)}$$

$$\Leftrightarrow I_1(p) = \frac{A\left(\dfrac{R_1}{L} + p\right) + B \cdot p}{p\left(\dfrac{R_1}{L} + p\right)} = \frac{\dfrac{E}{L}}{p\left(\dfrac{R_1}{L} + p\right)}$$

$$\Leftrightarrow I_1(p) = \frac{A \cdot \dfrac{R_1}{L} + A \cdot p + B \cdot p}{p\left(\dfrac{R_1}{L} + p\right)} = \frac{\dfrac{E}{L}}{p\left(\dfrac{R_1}{L} + p\right)}$$

Les dénominateurs sont identiques, il faut donc identifier les numérateurs terme à terme :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A \cdot \dfrac{R_1}{L} = \dfrac{E}{L} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ A = \dfrac{E}{R_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{E}{R_1} \\ B = -\dfrac{E}{R_1} \end{cases}$$

Soit : $I_1(p) = \dfrac{\frac{E}{R_1}}{p} - \dfrac{\frac{E}{R_1}}{\frac{R_1}{L} + p} = \dfrac{E}{R_1}\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{\frac{R_1}{L} + p}\right]$

On utilise à présent la table des transformées de Laplace :

$i_1(t) = \dfrac{E}{R_1}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{R_1}{L} \cdot t\right)\right]$ pour $t > 0$

On remarque qu'on obtient le même résultat qu'à la question 2) b).

Question

8) a) Établir l'expression de $I_2(p)$ en fonction de E, R_2 et C.

Indice

Il faut appliquer la loi des mailles (loi de Kirchhoff) avec le formalisme de la transformée de Laplace.

Solution

On applique la loi des mailles pour la seconde maille du circuit avec le formalisme de la transformée de Laplace :

$E(p) - R_2 \cdot I_2(p) - U_C(p) = 0$ et $U_C(p) = \dfrac{1}{C \cdot p} \cdot I_2(p)$

$$\Leftrightarrow E(p) = R_2 \cdot I_2(p) + \frac{1}{C \cdot p} \cdot I_2(p) = \left(R_2 + \frac{1}{C \cdot p}\right) \cdot I_2(p)$$

$$\Leftrightarrow I_2(p) = \frac{E(p)}{R_2 + \dfrac{1}{C \cdot p}}$$

$e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E. En utilisant la table des transformées de Laplace, on a : $E(p) = \frac{E}{p}$

Par conséquent :

$$I_2(p) = \frac{E}{p\left(R_2 + \frac{1}{C \cdot p}\right)}$$

$$\Leftrightarrow I_2(p) = \frac{E}{R_2 \cdot p + \frac{1}{C}}$$

$$\Leftrightarrow I_2(p) = \frac{\frac{E}{R_2}}{p + \frac{1}{R_2 \cdot C}}$$

Question

8) b) A partir du résultat de la question précédente, déterminer $i_2(t)$.

Indice

Pour déterminer $i_2(t)$, il faut calculer la transformée de Laplace inverse de $I_2(p)$. Pour cela, on se servira de la table des transformées de Laplace.

Solution

$$i_2(t) = TL^{-1}\left[I_2(p)\right]$$

$I_2(p)$ est déjà écrit sous la forme d'un élément simple, on peut donc utiliser directement la table des transformées de Laplace :

$$i_2(t) = \frac{E}{R_2}\left[\exp\left(-\frac{t}{R_2 \cdot C}\right)\right] \text{ pour } t > 0$$

On remarque qu'on obtient le même résultat qu'à la question 3) b).

Question

9) Déterminer l'expression de $i(t)$.

Indice

Il faut appliquer la loi des nœuds (loi de Kirchhoff) avec le formalisme de la transformée de Laplace.

Solution

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p)$$

On calcule à présent la transformée de Laplace inverse :

$$i(t) = TL^{-1}\left[I(p)\right] = TL^{-1}\left[I_1(p) + I_2(p)\right]$$

En utilisant la propriété de linéarité de la transformée de Laplace, on obtient :

$$i(t) = TL^{-1}\left[I_1(p)\right] + TL^{-1}\left[I_2(p)\right]$$

$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ (on remarque qu'on retrouve la loi des nœuds formulée en temporel)

En utilisant les résultats des questions 7) b) et 8) b), on obtient :

$$i(t) = \left[\frac{E}{R_1}\left[1 - \exp\left(-\frac{R_1}{L}\cdot t\right)\right] + \frac{E}{R_2}\exp\left(-\frac{t}{R_2\cdot C}\right)\right] \text{ pour } t > 0$$

On remarque qu'on obtient le même résultat qu'à la question 4).

Partie : 3- Simulation

Question

10) Tracer les courants $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$. Pour cela, on utilise Octave.

On prendra $R_1 = R_2 = 100\,\Omega$, $C = 100\,\mu F$ et $E = 10\,V$.

Note : On utilisera l'expression trouvée dans la question précédente pour calculer la valeur de L.

Note 2 : On veillera à choisir une gamme de temps adaptée pour le tracé des courbes.

Indice

Consultez l'aide sur la représentation graphique à l'aide d'un outil numérique.

Indice

Gamme de temps : [0, 100 ms]

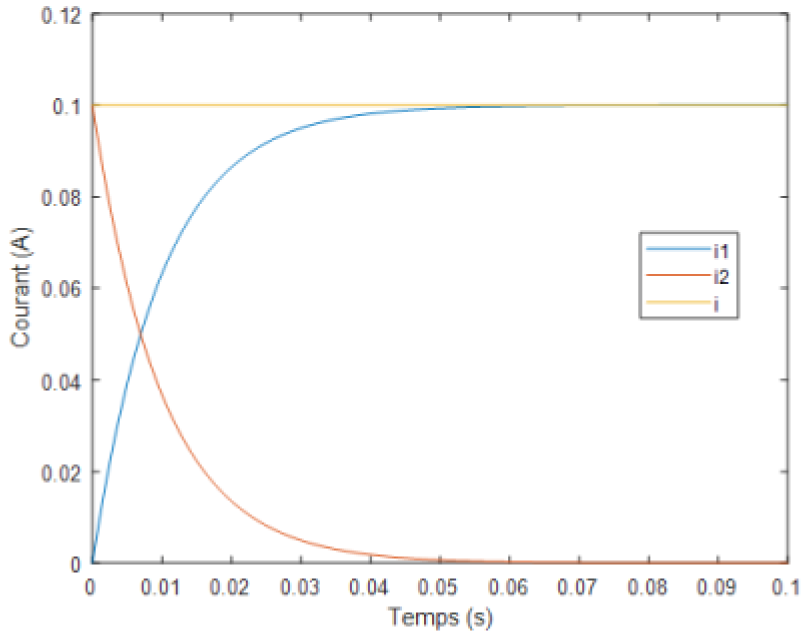
Solution

Simulation

Le code Octave est donné ci-dessous.

```
>> R1=100;
>> R2=R1;
>> C=100e-6;
>> L=R1^2*C;
>> E=10;
>> t=linspace(0,100e-3,200);
>> i1=E/R1*(1-exp(-R1*t/L));
>> i2=E/R2*exp(-t/(R2*C));
>> i=i1+i2;
>> plot(t,i1,t,i2,t,i)
>> xlabel('Temps (s)')
>> ylabel('Courant (A)')
>> legend('i1','i2','i')
```

On obtient la figure suivante :



On remarque que le courant $i(t)$ est bien constant.

Question

11) Utiliser Octave pour résoudre les équations différentielles qui régissent les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ (obtenues aux questions 2)a) et 3)a)) avec les conditions initiales déterminées dans la question 1).

On utilisera la fonction *pretty* pour mettre en forme l'affichage de l'expression.

Résolution d'équation différentielle avec Octave ?

Revoir l'exemple d'utilisation d'Octave donné dans le complément de cours sur la résolution d'équation différentielle d'ordre 1.

Syntaxe de pretty ?

La syntaxe pour la fonction *pretty* est la suivante :

expr correspond à l'expression symbolique que l'on souhaite afficher

pretty(expr)

Solution

Simulation

```
>> % Résolution de l'équation différentielle qui régi i1(t)
>> syms R1 L E i1(t)
>> eqn1 = diff(i1)+R1/L*i1 == E/L;
>> cond1 = i1(0) == 0;
>> i1=dsolve(eqn1,cond1);
>> pretty(i1)

           /   R1 t \
E - E exp| - ---- |
           \     L   /
```

```
-------------------
         R1
```

On obtient bien le même résultat qu'à la question 2)b).

```
>> % Résolution de l'équation différentielle qui régi i2(t)
>> syms R2 C E i2(t)
>> eqn2 = diff(i2)+1/(R2*C)*i2 == 0;
>> cond2 = i2(0) == E/R2;
>> i2=dsolve(eqn2, cond2);
>> pretty(i2)
     /     t  \
E exp| - ---- |
     \   C R2 /
---------------
       R2
```

On obtient bien le même résultat qu'à la question 3)b).

Question

12) Utiliser Octave pour calculer les transformées de Laplace inverse de $I_1(p)$ et $I_2(p)$en utilisant les expressions obtenues aux questions 7)a) et 8)a).

On utilisera la fonction *pretty* pour mettre en forme l'affichage de l'expression.

Calcul de la transformée de Laplace inverse avec Octave ?

Revoir l'exemple d'utilisation d'Octave donné dans le complément de cours sur la transformée de Laplace.

Syntaxe de pretty ?

La syntaxe pour la fonction *pretty* est la suivante :

expr correspond à l'expression symbolique que l'on souhaite afficher

pretty(expr)

Solution

Simulation

```
>> syms R1 E L p t
>> I1=E/(p*(R1+L*p));
>> i1=ilaplace(I1,p,t);
>> pretty(i1)

          /   R1 t \
     E exp| - ---- |
 E        \     L  /
-- - ---------------
R1          R1
```

On obtient bien le même résultat qu'à la question 7)b).

```
>> syms R2 E C p t
```

```
>> I2=E/(R2*(p+1/(R2*C)));
>> i2=ilaplace(I2,p,t);
>> pretty(i2)

     /     t  \
E exp| - ---- |
     \   C R2 /
---------------
       R2
```

On obtient bien le même résultat qu'à la question 8)b).