Unité d’enseignement HLEE 204 : Energie Electrostatique

TD n°1 : Outils Mathématiques

Les vecteurs sont notés en ***gras***

1- Addition vectorielle : Les vecteurs **A, B, C** sont données (figure 1). Construire **A-B+2C**

Geometriquement

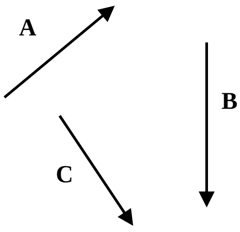


Figure 1

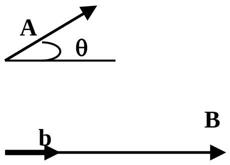


Figure 2

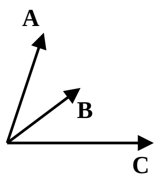
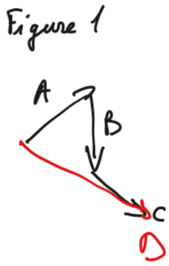


Figure 3

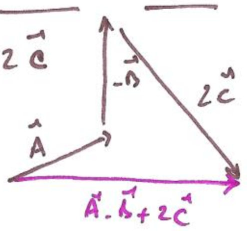


2- Produit scalaire

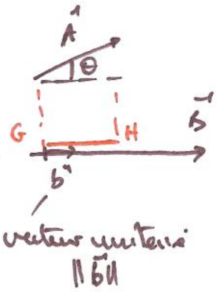
Démontrer que la projection de **A** sur **B** est égale à **A.b**, où **b** est un vecteur unitaire dirigé suivant **B** (Figure 2)

1. Addition vectorielle

$\vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C}$



2. Produit scalaire



Projection de $\vec{A}$ sur $\vec{B}$

$= \overline{GH} = A\cos\theta$

or $A\cos\theta = \vec{A}\cdot\vec{b}$

$= \|\vec{A}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$

$= A\cos\theta$

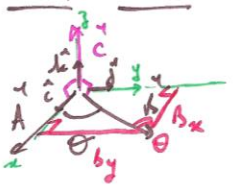
donc projection de $\vec{A}$ sur $\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{b}$ //

3- Produit vectoriel

a- Démontrer que **A**∧**B** = - **B**∧**A**

3- Produit vectoriel : 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

a)



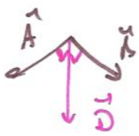
$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{C} \perp \vec{A}$ et $\vec{C} \perp \vec{B}$ $\Rightarrow (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ trièdre direct.

$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = AB\sin\theta$.

$\vec{A} \begin{vmatrix} A \\ 0 \\ 0 \\ A \end{vmatrix} \quad \vec{B} \begin{vmatrix} b_x = b\cos\theta \\ b_y = b\sin\theta \\ 0 \\ b\cos\theta \end{vmatrix} \qquad \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ AB\sin\theta . \end{vmatrix}$

$\vec{D} = \vec{B} \wedge \vec{A} \Rightarrow \begin{vmatrix} b\cos\theta \\ b\sin\theta \\ 0 \\ b\cos\theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A \\ 0 \\ 0 \\ A \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{B} \wedge \vec{A} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -AB\sin\theta \end{vmatrix} \Rightarrow \|\vec{B} \wedge \vec{A}\| = -AB\sin\theta$

donc $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$



$\vec{D} \perp \vec{A}$ et $\vec{D} \perp \vec{B}$.

$\vec{D} = -\vec{C}$.

3- <u>Produit vectoriel</u>

a- Démontrer que $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = -\,\mathbf{B}\wedge\mathbf{A}$

➔b- si $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ et $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Trouver $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$

➔c- Montrer que la surface d'un parallélogramme de coté **A** et **B** est $|\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}|$

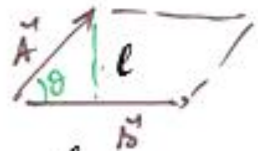
b) $\vec A = 3\vec i - \vec j + 2\vec k$; $\vec B = 2\vec i + 3\vec j - \vec k$ $\quad\vec A \wedge \vec B \Rightarrow$

$$\vec A \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \wedge \vec B \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec A \wedge \vec B \begin{vmatrix} 1-6=-5 \\ 4-(-3)=7 \\ 9-(-2)=11 \end{vmatrix}$$

donc $\vec A \wedge \vec B = -5\vec i + 7\vec j + 11\vec k$ /.

c) surface d'1 parallélogramme : $A \times B$? NON !!



S = base × longueur = $\ell \times \|\vec B\|$

$= A\sin\theta \times B = AB\sin\theta$

$\sin\theta = \dfrac{\ell}{A}$

$S = |\vec A \wedge \vec B|$

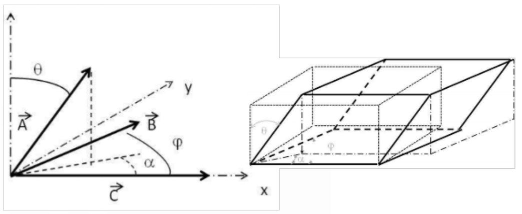
Rq : si carré $\theta = \pi/2 \Rightarrow \sin\theta = 1$ et $S = A \times B$!!

4- <u>Produit mixte et double produit vectoriel</u>

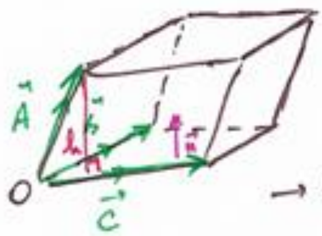
a- Montrer que $\mathbf{A}.(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})$ est égal en valeur absolue au volume du parallélépipède de cotés **A, B, C** (figure 3)

b- Donner une interprétation géométrique de $\mathbf{A}.(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}) = 0$

c- Si $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{C} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ Trouver $(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\wedge\mathbf{C}$ et $\mathbf{A}\wedge(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})$



4/ Produit Mixte → parallélépipède = parallélogramme 3D.



$\vec n$ vecteur unitaire $\|\vec n\| = 1$

→ $\vec n$ normal au plan $(\vec B O \vec C)$ dirigé suivant $\vec B \wedge \vec C$.

→ h est la distance de l'extrémité de $\vec A$ au parallélogramme $(\vec B O \vec C)$.

$\vec h = h\vec n$

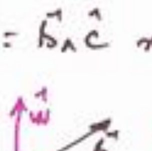
Vol = (hauteur h) × (surface du parallélogramme)

hauteur h ?

$\cos\theta = \dfrac{h}{A} \rightarrow h = A\cos\theta = \vec A . \vec n = \|\vec A\| . \|\vec n\| \cos\theta$.

donc $Vol = (\vec A . \vec n) . |\vec B \wedge \vec C| = \vec A . |\vec B \wedge \vec C|$ car $\vec w = \vec B \wedge \vec C$ suivant $\vec n$

et $Vol = \vec A . \vec w = \vec A . \vec n\, W = A\, W \cos\theta$. /.



$\vec w // \vec n$

d'où $Vol = \vec A . |\vec B \wedge \vec C| \rightarrow$ 1 scalaire !!

b) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = 0$ si $\vec{A} = \vec{0}$ → 1 parallélogramme $(\vec{B}O\vec{C})$ pas de volume !

si $\vec{A} \in$ plan $(\vec{B}O\vec{C})$

$\vec{W} = \vec{B}\wedge\vec{C}$.

soit $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ coplanaires ($\in$ au même plan).

car $\vec{W} \perp \vec{B}$ et $\vec{W} \perp \vec{C}$ et $\vec{A}\cdot\vec{W} = 0$ car $\vec{A} \perp \vec{W}$.

c) $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$ $\quad B = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ $\quad C = 4\vec{j} - 3\vec{k}$

$\vec{A}\begin{vmatrix}1\\1\\0\\1\end{vmatrix}$ $\quad \vec{B}\begin{vmatrix}2\\-3\\+1\\2\end{vmatrix}$ $\quad \vec{C}\begin{vmatrix}0\\4\\-3\\0\end{vmatrix}$

Calculer $(A\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$ et $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$

$\vec{A}\wedge\vec{B}\begin{vmatrix}1\\-1\\-5\end{vmatrix}$ $\quad (\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{B}\wedge\vec{C}\begin{vmatrix}5\\+6\\8\end{vmatrix}$ $\quad (\vec{B}\wedge\vec{C}) = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}$

$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C} \longrightarrow (\vec{A}\wedge\vec{B})\begin{vmatrix}1\\-1\\-5\\1\end{vmatrix} \wedge \vec{C}\begin{vmatrix}0\\4\\-3\\0\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}23\\+3\\4\end{vmatrix} \Rightarrow (\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C} = 23\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) \longrightarrow \vec{A}\begin{vmatrix}1\\1\\0\\1\end{vmatrix} \wedge (\vec{B}\wedge\vec{C})\begin{vmatrix}5\\6\\8\\5\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}8\\-8\\1\end{vmatrix} \Rightarrow \vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = 8\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k}$.

conclusion : $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C} \neq \vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$.

5. On considère le champ vectoriel : **A** = ($3x^2 + 6y$) $\mathbf{e_x}$ $-14yz$ $\mathbf{e_y}$ $+20xz^2$ $\mathbf{e_z}$

Calculer la circulation de **A** entre les points (0, 0, 0) et (1, 1, 1) le long des chemins suivants :

➔a) le segment de droite joignant ces deux points;

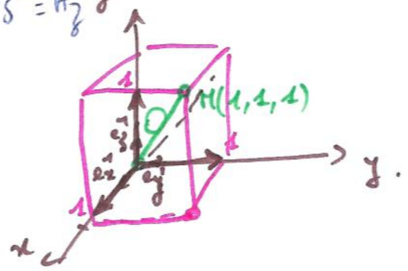
b) les segments de droite allant de (0, 0, 0) à (1, 0, 0) puis de (1, 0, 0) à (1, 1, 0) et de (1, 1, 0) jusqu'à (1, 1, 1).

n°5 Soit 1 vecteur $\vec{A} = (3x^2+6y)\vec{e_x} - 14yz\,\vec{e_y} + 20xz^2\vec{e_z}$

$$\vec{A}\left|\begin{array}{l} 3x^2+6y = A_x \\ -14yz = A_y \\ 20xz^2 = A_z \end{array}\right.$$

$(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ repère orthonormé.

$\vec{e_x}\,;\ \vec{e_y}\,;\ \vec{e_z}$ → vecteurs unitaires.



Calculer la circulat° de $\vec{A}$ entre les pts $O(0,0,0)$ et $M(1,1,1)$

a) circulat° sur le segm^t de droite joignant O et M.

$\mathcal{C} = \int_O^M \vec{A}\cdot\vec{dl}$ sur $[OM]$ → ou ~~x~~ sur A $x = y = z$ pour $x \in [0,1]$ en tout point de la droite.

avec $\vec{dl}\left|\begin{array}{l} dx \\ dy \\ dz \end{array}\right.$ et $\left[\vec{A}\left|\begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array}\right.\right.$ (*) $\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{dl} = A_x dx + A_y dy + A_z dz$

donc $dx = dy = dz$.

$\Rightarrow$ pour $x \in [0,1]$.

d'où $$\mathcal{C} = \int_0^1 (3x^2+6x)\,dx - \int_0^1 14x^2\,dx + \int_0^1 20x^3\,dx.$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \int_0^1 (3x^2+6x-14x^2+20x^3)\,dx = \int_0^1 (6x-11x^2+20x^3)\,dx$$

$$= \left\{\left[\frac{1}{2}6x^2\right]_0^1 - \left[\frac{11}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}20x^4\right]_0^1\right\}.$$

$$= \left\{3 - \frac{11}{3} + 5\right\} = \frac{9-11+15}{3} = 13/3.$$

(*) $\vec{A}\cdot\vec{dl} = A_x dx + A_y dy + A_z dz \rightarrow \vec{A}\cdot\vec{dl} = (3x^2+6y)\,dx - 14yz\,dy + 20xz^2\,dz.$

5. On considère le champ vectoriel : **A** = ($3x^2 + 6y$) $\mathbf{e_x}$ $-14yz$ $\mathbf{e_y}$ $+20xz^2$ $\mathbf{e_z}$

Calculer la circulation de **A** entre les points (0, 0, 0) et (1, 1, 1) le long des chemins suivants :

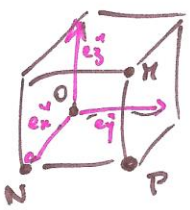
a) le segment de droite joignant ces deux points,

➔b) les segments de droite allant de (0, 0, 0) à (1, 0, 0) puis de (1, 0, 0) à (1, 1, 0) et de (1, 1, 0) jusqu'à (1, 1, 1).

Differents Circulat° $\mathcal{C}$ pour differents chemins.

$\vec{A} = (3x^2+6y)\vec{e_x} - 14yz\vec{e_y} + 20xz^2\vec{e_z}$ $M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $N\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $P\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\mathcal{C} = \int \vec{A}.\vec{dl}$ avec $\vec{dl}\left|\begin{matrix}dx\\dy\\dz\end{matrix}\right.$



$\vec{A}.\vec{dl} = (3x^2+6y)dx - 14yz\,dy + 20xz^2dz$

* $\mathcal{C}_2$ de $O(0,0,0) \to N(1,0,0)$ $y=0$ $z=0 \Rightarrow dy=0$ $dz=0$. pour $x\in[0,1]$.

d'où $\mathcal{C}_2 = \int_0^1 3x^2dx = \left[\frac{1}{3}3x^3\right]_0^1 = 1$.

* $\mathcal{C}_3$ de $N(1,0,0) \to P(1,1,0)$ $x = cte = 1 \Rightarrow dx=0$

$z=0 \Rightarrow dz=0$ et $y\in[0,1]$.

d'où $\mathcal{C}_3 = 0$

(car $dx=0$, $z=0$ et $dz=0$).

* $\mathcal{C}_4$ de $P(1,1,0)$ à $M(1,1,1)$ $\Rightarrow$ $x = cte = 1 \Rightarrow dx = 0$

$y = cte = 1 \Rightarrow dy=0$

et $z\in[0,1]$.

d'où $\mathcal{C}_4 = \int_0^1 20z^2dz = \left[\frac{1}{3}20z^3\right]_0^1 = 20/3$.

Conclusion $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 = 1 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$. $\neq \mathcal{C}_1 = 13/3$.

de $O(0,0,0)$ à $M(1,1,1)$

Comme la circulat° depend du chemin suivi sur le parcours $O\to M$

$\Rightarrow \vec{A}$ n'est pas 1 gradient !.

Si la circulat° ne depend que des extremités d'intégrat° $\Rightarrow \vec{A}$ est 1 gradient.

6. Un champ de vecteur **E**, dans l'espace orthonormé (e_x, e_y, e_z) est caractérisé par ses composantes

E (yz, zx, f(x,y)) où f ne dépend que de x et y.

Sachant que si $\overrightarrow{rot}\,\vec{U} = \vec{0}\ alors\ \vec{U} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{f}$ (propriété des opérateurs différentiels)

Déterminer la fonction f pour que le champ **E** dérive d'un potentiel V tel que : **E = - grad** V

n°6 1 vecteur $\vec{E}\,(yz, zx, f(x,y))$

1) Déterminer f pour que $\vec{E}$ dérive d'1 potentiel V tel que

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ scalaire.

vecteur

opérateur gradient $\vec{\nabla}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}$

$$\vec{E} = yz\,\vec{e_x} + zx\,\vec{e_y} + f(x,y)\,\vec{e_z}.$$

$$\vec{E}\begin{vmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{E}\begin{vmatrix}yz\\zx\\f(x,y)\end{vmatrix}$$

→ hypothèse : Pour que $\vec{E}$ soit le résultat d'1 gradient, il faut que les dérivés croisés de ses composants soit égales.

$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{U} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{U} = -\overrightarrow{grad}\, f.$] propriétés cours 1.

$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

Démonstration :

⊛ $\overrightarrow{rot}\,(-\overrightarrow{grad}\, f) = \vec{\nabla}\wedge(-\overrightarrow{grad}\, f) = \vec{\nabla}\wedge(-\vec{\nabla} f)$

$$\vec{\nabla}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial x}\end{vmatrix} \wedge (-\vec{\nabla} f)\begin{vmatrix}-\frac{\partial f}{\partial x}\\ -\frac{\partial f}{\partial y}\\ -\frac{\partial f}{\partial z}\\ -\frac{\partial f}{\partial x}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0\end{vmatrix}$$

donc si $\overrightarrow{rot}\,\vec{U} = \vec{0}$ alors $\vec{U} = -\overrightarrow{grad}\, f$.

$\overrightarrow{grad}$

donc

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\varepsilon} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right. \wedge \ \vec{\varepsilon} \left| \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_x . \end{array} \right. \longrightarrow \left| \begin{array}{lll} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = 0 & \longrightarrow & \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} . \quad (1) \\ \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} = 0 & \longrightarrow & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} . \quad (2) \\ \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = 0 & \longrightarrow & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} . \quad (3) \end{array} \right.$$

$f(x, y)$

$$(1) \longrightarrow \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = x \ \text{ et } \ \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow x = \frac{\partial f}{\partial y} . \quad (a)$$

$$(2) \longrightarrow \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = y \ \text{ et } \ \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow y = \frac{\partial f}{\partial x} . \quad (b)$$

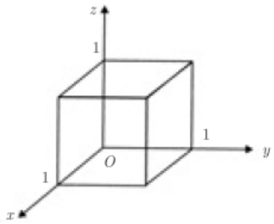
$$(3) \longrightarrow \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = z \ \text{ et } \ \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = z \Rightarrow z = z \ \text{ OK.}$$

$$(a) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow f = xy + g(x) \ \text{— 1 fonct° indép}^{\text{te}} \text{ de } y.$$

$$(b) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow y = \frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{\partial g}{\partial x} \Rightarrow \frac{dg}{dx} = 0 \Rightarrow g = \text{cte} = C$$

donc $\left[f = xy + C \right.$

7. Calculer le flux du champ de vecteurs : **V(M)** = 4xz $\mathbf{e_x}$ -y^2 $\mathbf{e_y}$ + yz $\mathbf{e_z}$ à travers le cube.
Pour cela on calculera les flux à travers la surface du cube limité par x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z= 1

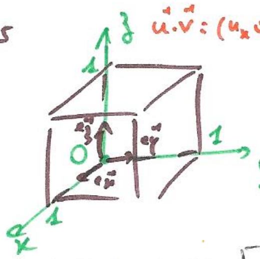


$$\Phi = \oiint_S V \cdot dS$$

· Flux du vecteur $\vec{V}(\vec{M}) = 4xz\,\vec{e_x} - y^2\,\vec{e_y} + yz\,\vec{e_z}$ à travers la surface du cube limité par

Soit $\vec{u}\begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix}$ $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_x v_x) + (u_y v_y) + (u_z v_z)$



a) $x = 0$ → <u>Face arrière</u> $dS = dy\,dz$.

$\Phi_1 = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS}$ avec $\vec{dS} = \vec{n}\,dS$
avec $\vec{n}$ suivant $\vec{e_x}$

$\vec{n}\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ car sortant du cube

$\vec{V}\begin{vmatrix} 4xz \\ -y^2 \\ yz \end{vmatrix}$ $\vec{dS}\begin{vmatrix} dS \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ → $\vec{V}\cdot\vec{dS} = 4xz\,dS = 0$ car $\underline{\underline{x = 0}}$

$\vec{n} \perp$ Surface ! donc $\Phi_1 = 0$.

b) $x = 1$ → <u>Face avant</u> $dS = dy\,dz$

$\Phi_2 = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS}$ avec $\vec{dS} = \vec{n}\,dS$ et $\vec{n} \parallel \vec{e_x}$. $\vec{n}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ car sortant du cube

$\Phi_2 = \iint_S 4xz\,dS$ avec $x = 1$ $= \iint_S 4z\,dS = \iint_S 4z\,dz\,dy$.
avec $z \in [0,1]$ et $y \in [0,1]$.

d'où $\Phi_2 = \int_0^1 4z\,dz \int_0^1 dy = \left[\frac{1}{2}4z^2\right]_0^1 [y]_0^1 = \boxed{2}$.

c) $y = 0$ → <u>Face à gauche</u> ⇒ $dS = dx\,dz$.

$\Phi_3 = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS}$ avec $\vec{dS} = \vec{n}\,dS$ et $\vec{n} \parallel \vec{e_y}$. $\vec{dS}\begin{vmatrix} 0 \\ dS \\ 0 \end{vmatrix}$ et $y = 0$. $\vec{n}\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$

donc $\vec{V}\cdot\vec{dS} = -y^2\,dS = 0$ car $y = 0$. donc $\Phi_3 = 0$

d) $y = 1$ → <u>Face à droite</u> ⇒ $dS = dx\,dz$.

$\vec{n}\begin{vmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\Phi_4 = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS}$ avec $\vec{V}\cdot\vec{dS} = -y^2\,dS = -y^2\,dx\,dz$ avec $x \in (0,1)$ et $z \in (0,1)$ et $y = 1$.

d'où $\Phi_4 = -\int_0^1 dx \int_0^1 dz = -1$.

donc $\Phi_4 = \boxed{-1}$.

e) $z=0$ → Face du bas ⇒ $dS = dx\,dy$.

$\Phi_5 = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS}$ avec $\vec{dS} = \vec{n}\,dS$ et $\vec{n} \parallel \vec{e_z}$ $\quad \vec{dS}\begin{vmatrix}0\\0\\dS\end{vmatrix}$

$\vec{n}\begin{vmatrix}0\\0\\-1\end{vmatrix}$ $\qquad$ et $z=0$.

donc $\vec{V}\cdot\vec{dS} = yz\,dS = 0$ car $z=0$.

donc $\left[\Phi_5 = 0\right.$

f) $z=1$ → Face du haut ⇒ $dS = dx\,dy$ $\qquad \vec{n}\begin{vmatrix}0\\0\\+1\end{vmatrix}$

$\Phi_6 = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS}$ avec $\vec{V}\cdot\vec{dS} = yz\,dS = yz\,dx\,dy$ pour $z=1$.

$\left[\Phi_6 = \int_0^1 dx \int_0^1 y\,dy = [x]_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = 1/2\right|$ p. $\quad$ et $x\in[0,1]$ $\quad y\in[0,1]$.

Conclusion. Φ_{total} $\vec{V}$ à travers le cube $= \Phi_{/\text{surface du cube (6)}} = 2-1+1/2 = 3/2$.

scalaire.

(résultat d'1 PS)