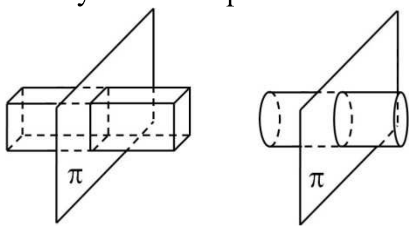
HAE302E - Circuits et Composants Capacitifs et Inductifs

TD 3 Flux d'un champ électrostatique et théorème de Gauss

1- Champ créé par une distribution de charge surfacique.

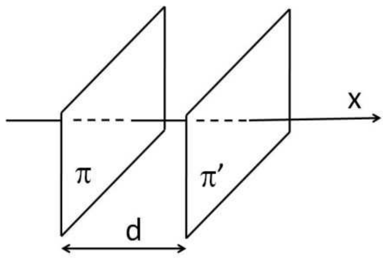
1- On part de l'hypothèse que l'on connait l'orientation du champ électrique créé par un plan infini portant une densité de charge surfacique σ, (dans le TD 3 exo 4 on a montré que dans ce cas $\overrightarrow{E(x)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\vec{u}$).

Montrer à partir de ce résultat que le théorème de Gauss est vérifié. On utilisera comme surface de Gauss un parallélépipède, puis un cylindre. Exprimer ensuite le potentiel V(x).



A.N. Une plaque conductrice de surface S supposée infinie possède une densité surfacique uniforme de charge négative $\sigma^- = -4.3\ \mu C/m^2$. Retrouver l'intensité du champ électrique $\|\vec{E}\|$ en appliquant le théorème de Gauss puis représenter l'orientation du vecteur champ électrique $\vec{E}$ dans tout l'espace.

2- Deux plans infinis parallèles, (π) et (π'), ont respectivement des densités de charge surfaciques de +σ et -σ et sont espacés d'une distance d.



Préciser la direction de champ électrique $\overrightarrow{E(x)}$ puis exprimer son intensité $\|\overrightarrow{E(x)}\|$ et le potentiel V(x).

A.N. La plaque conductrice précédente de densité surfacique négative $\sigma^- = -\ 4.3\ \mu C/m^2$ est mise en regard avec une autre plaque conductrice de densité surfacique $\sigma^+ = +6.8\ \mu C/m^2$

Exprimer l'intensité du champ électrique $\|\overrightarrow{E(x)}\|$ et préciser la direction de $\overrightarrow{E(x)}$.

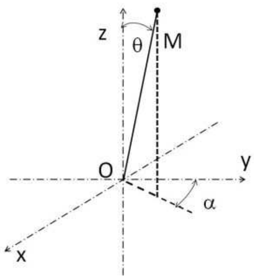
2- Champ et potentiel créés par une sphère chargée en surface.

Déterminer en tout point de l'espace le champ et le potentiel créé par une sphère uniformément chargée en surface +σ.

3- <u>Champ et potentiel par une sphère chargée en volume.</u>

31- On suppose qu'une sphère S de centre O et de rayon R possède une densité de charge volumique uniforme ρ. Exprimer la charge Q portée par cette sphère.
A.N. Calculer Q si $\rho = 2\ 10^{-7}\ C/m^3$ et R=5 mm

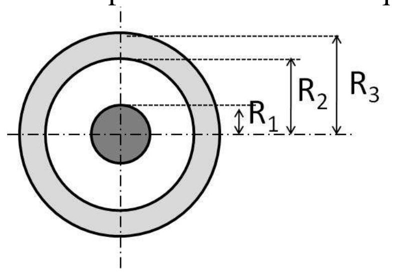
32- Quelle est la direction du champ électrique en tout point de l'espace ?
En prenant un repère cartésien centré sur la sphère, donner l'expression du vecteur unitaire allant du centre de la sphère O en un point M distant de *r* en fonction de $\theta et\ \alpha$.
Exprimer le vecteur champ électrostatique $\overrightarrow{E(r,\theta,\alpha)}$.
Montrer que son module $\left\|\overrightarrow{E(r,\theta,\alpha)}\right\| = \left\|\overrightarrow{E(r)}\right\|$, tracer cette fonction et calculer l'intensité du champ électrique au centre de la sphère et celle au niveau de sa surface



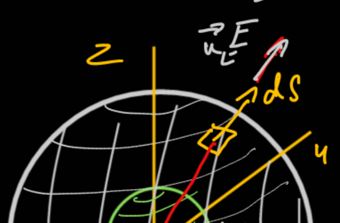
33- Exprimer le potentiel V en tout point de l'espace, tracer cette fonction en fonction de r et calculer sa valeur au centre de la sphère et sur sa surface.

4- <u>Sphères concentriques chargées en volume</u>

Soit une distribution de charge volumique uniforme ρ à symétrie sphérique constituée d'une charge +Q uniformément répartie dans le volume r ≤ R_1 et d'une charge -Q uniformément répartie dans le volume $R_2 \leq r \leq R_3$ avec $R_1 < R_2$.
Déterminer l'expression du champ électrique créé par cette distribution en tout point de l'espace. Vérifier la continuité du champ à la frontière de chaque domaine.

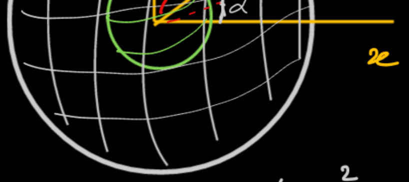


Ex 2



$$\oiint \vec{E}\cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

sphere
de centre O



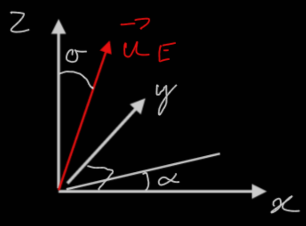
$\sigma = 4\,m^2$

$\vec{E} = E \cdot u_E$

$dS = ds \cdot \vec{u}_E$

$\cos(E, ds) = \cos 0 = 1$

$$\vec{U}_E \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\alpha \\ \sin\theta \sin\alpha \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



On suppose que $\|E(\vec{r})\|$ est le même quelque soit la direction

donc $E(r)\cdot \oiint dS = E \cdot 4\pi r^2$

$$-\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = ?$$

si $r \leq R$ $\quad Q_{int} = 0$

$$E(r)\, 4\pi\, r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \underline{E(R^-) = 0}$$

$r \geq R$

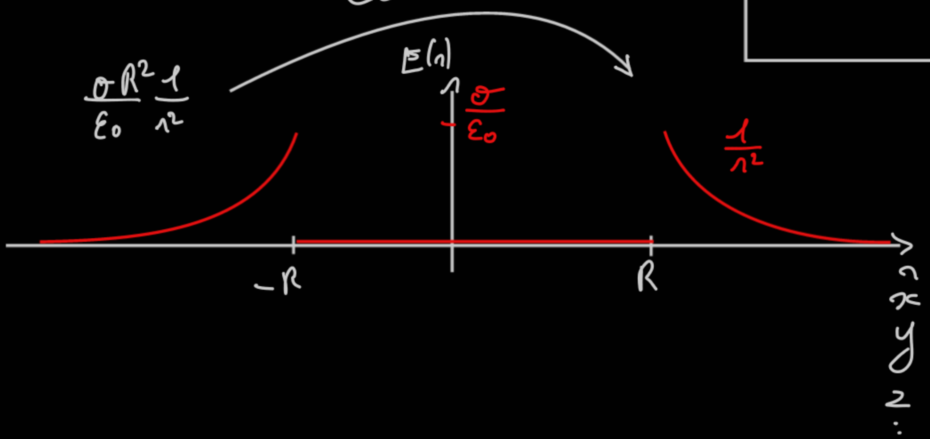
$$E(r) \times 4\pi\, r^2 = \frac{\sigma\, 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}$$

$$E(R^+) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}$$

Le pb venant des R^- et R^+ vient du fait que l'on n'ait pas d'épaisseur dans le cercle (on ignore ce problème).

$$\boxed{\vec{E}(r,\theta,\alpha) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} \sin\theta \cos\alpha \\ \sin\theta \sin\alpha \\ \cos\theta \end{pmatrix}}$$



$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}(V(r))$

on peut travailler sur l seul direction soit celle de $\vec{u}_E$

alors $E(r) = -\dfrac{\partial V(r)}{\partial r}$

$V(r) = -\int E(r)\,dr$

ou $r \geq R$ car on fait l'hypothèse que il n'y a pas de potentielle à l'infinie

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \int \frac{-1}{r^2}\,dr = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} + cte \right\}$$

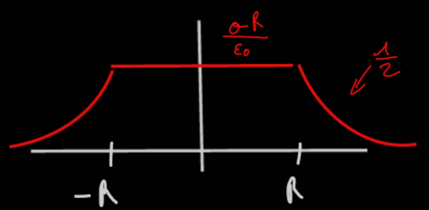
donc on pose $V(\infty) = 0\,V \Rightarrow cte = 0\,(m^{-1})$

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

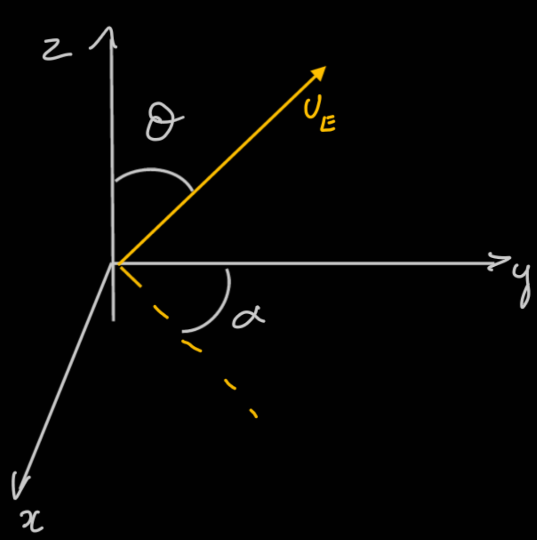
$$V(R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

$V(r) = cte$

$V(R) = cte = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}$



3)



$$U_E = \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\alpha \\ \sin\theta \cos\alpha \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\iint_S \ldots dS = \frac{Q_{int}}{}$

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot dS \cos\theta = E\cdot dS$$

$\|\vec{E}(r)\| \longrightarrow$ meme quelque soit la direction

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

si $r \geqslant R$

$$E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{\rho\cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2} = E(r)$$

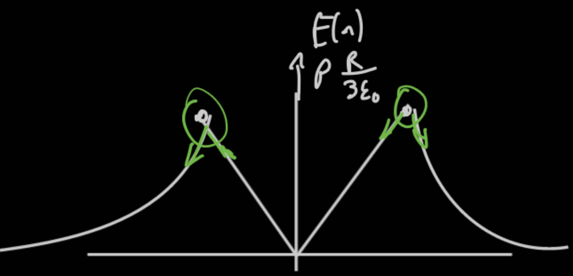
$$E(R) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$$

$\rho\,\frac{4}{3}\pi R^3$

si $r \leqslant R$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\, r \qquad \vec{E}(r) = E(r)\cdot \vec{u}_E$$



si $r \leqslant R \rightarrow \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\, r = E(r)$

si $r \geqslant R$ $\quad E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}$

On pose $V(\infty) = 0V$

$r \geqslant R$

$$V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr$$

$$= \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r} + cte\right\}$$

Comme $V(\infty) = 0V$ $\quad cte = 0\ m^{-1}$

$$V(r) = \frac{\rho r^{3}}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{r} \quad \text{et} \quad V(R) = \frac{\rho R^{2}}{3\varepsilon_0}$$

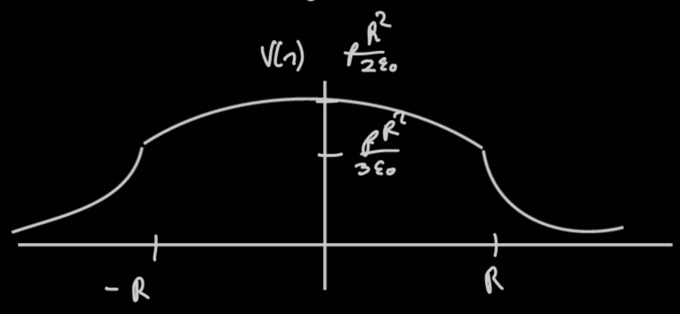
$r \leq R$

$$V(r) = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{r^2}{2} + \text{cte}\right\}$$

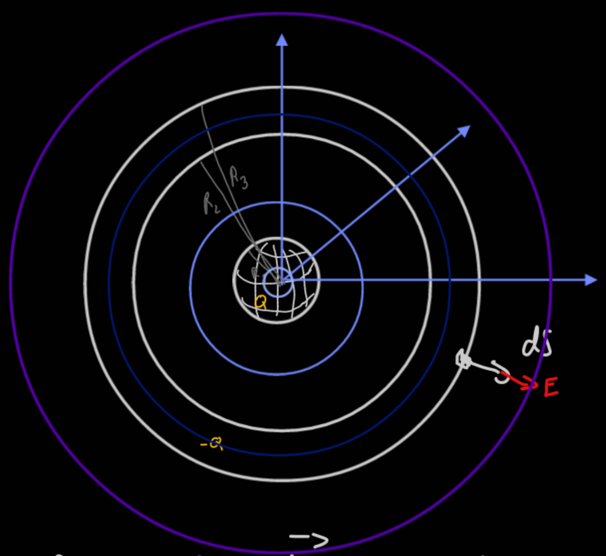
$$V(R) = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{R^2}{2} + \text{cte}\right\} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{R^2}{2} - \text{cte} = R^2 \Rightarrow \text{cte} = -\frac{3}{2}R^2$$ (côté négatif de la courbe).

$$V(r) = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{r^2}{2} - \frac{3}{2}R^2\right\}$$



Ex 4



densité de charge par unité de volume C/m^3

$$\rho_1 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3}$$

$$\rho_2 = \frac{-Q}{\frac{4}{3}\pi\left(R_3^3 - R_2^3\right)}$$

Soit $\oiint E \cdot d\vec{S} = \dfrac{Q\ int}{\varepsilon_0}$ - - - → $E(r) \cdot S = \dfrac{Q\ int}{\varepsilon_0}$

→ Surface fermé de Gauss → sphère de centre O

→ ici par symétrie $\oiint E \cdot dS = \oiint E \cdot \cos\theta \, dS$

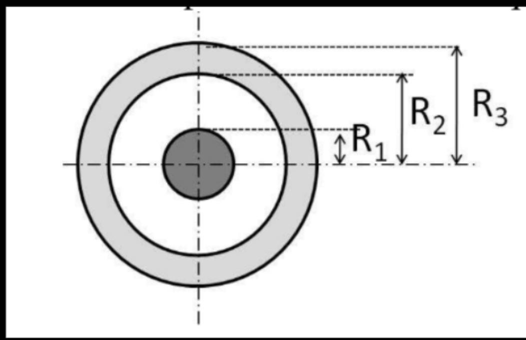
$\|E\|$ est le meme a une distance r

• - $r \le R_1$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_1 \times \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R_1^3}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R_1^3}} \quad \text{et } E(0) = 0\,V/m \qquad E(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$$

• - $R_1 \le r \le R_2$



$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$E(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1^2} \qquad \Big|\ E(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$$

• - $R_2 \le r \le R_3$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{R_3^3 - r^3}{R_3^3 - R_2^3}\right)$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\frac{R_3^3}{r^2} - r}{R_3^3 - R_2^3}\right)$$

$$\hookrightarrow Q_{int} = Q = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi(R_3^3 - R_2^3)}\,\frac{4}{3}\pi(r^3 - R_2^3) = Q\left(1 - \frac{r^3 - R_2^3}{R_3^3 - R_2^3}\right) = Q\left(\frac{R_3^3 - R_2^3 - r^3 + R_2^3}{R_3^3 - R_2^3}\right) = \frac{R_3^3 - r^3}{R_3^3 - R_2^3}$$

$$E(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\frac{R_3^3}{R_2^2} - R_2}{R_3^3 - R_2^3}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\underbrace{\frac{R_3^3 - R_2^3}{R_3^3 - R_2^3}}_{1}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}$$

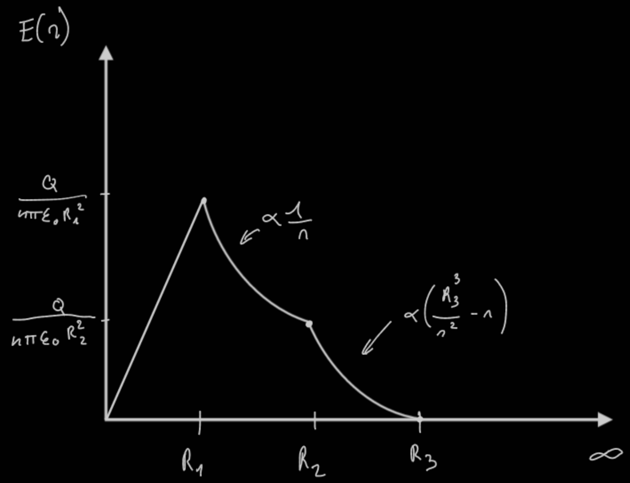
$$E(R_3) = 0 \ V/m$$

- $r \geq R_3$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q - Q}{\varepsilon_0} = 0$$

$$E(r) = 0\,V/m$$

Graph du champ electrique



Calcule des Potentille

$$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}\,(V(r))$$

(Blabla de supression des Vecteur ...)

symetrie → direction suivant $\vec{u}_E$

des lors $V(r) = -\int E(r)\,dr$ On fait l'hypothese que $V(\infty) = 0V$

$r \geq R_3$

$$V(r) = -\int E(r)\,dr$$

$$V(r) = cte = 0V$$

$R_2 \leq r \leq R_3$

$$V(r) = -\int \frac{Q}{4\varepsilon_0} \left\{ \frac{R_3^3/r^2 - r}{R_3^3 - R_2^3} \right\} dr$$

$$V(r) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 \{R_3^3 - R_2^3\}} \int \left(\frac{R_3^3}{r^2} - r \right) dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \{R_3^3 - R_2^3\}} \left\{ \frac{R_3^3}{r} + \frac{r^2}{2} + cte \right\}$$

et $V(R_3) = 0 = R_3^2 + \frac{R_3}{\dots} + cte \longrightarrow cte = -3\,R^2$

$$V(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,(R_3^3-R_2^3)}\left\{\frac{R_3^3}{r}+\frac{r^2}{2}-\frac{3}{2}R_3^2\right\}$$

$$V(R_3)=0$$

$$V(R_2)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_3^3-R_2^3)}\left\{\frac{R_3^3}{R_2}+\frac{R_2^2}{2}-\frac{3}{2}R_3^2\right\}$$

$$V(R_2)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_3^3-R_2^3)}\left\{\frac{2R_3^3+R_2^3-3R_3^2R_2}{2R_2}\right\}$$

$$R_1\leq r\leq R_2$$

$$V(r)=-\int E(r)\,dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int -\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$V(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}+cte\right\}$$

$$V(R_2)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{R_2}+cte\right\}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2R_3^3+R_2^3-3R_3^2R_2}{2R_2(R_3^3-R_2^3)}\right\}$$

$$cte=-\frac{1}{R_2}+\frac{2R_3^3+R_2^3-3R_3^2R_2}{2R_2\{R_3^3-R_2^3\}}$$

$$=\frac{-2R_3^3+2R_2^3+2R_3^3+R_2^3-3R_3^2R_2}{2R_2\{R_3^3-R_2^3\}}$$

$$cte=\frac{3R_2^3-3R_3^2R_2}{2R_2\{R_3^3-R_2^3\}}$$

$$\boxed{cte=\frac{3}{2}\,\frac{R_2^2-R_3^2}{R_3^3-R_2^3}}$$

$$V(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}-\frac{3}{2}\,\frac{R_3^2-R_2^2}{R_3^3-R_2^3}\right\}$$

$$\rightarrow\ V(R_1)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{R_1}-\frac{3}{2}\,\frac{R_3-R_2}{R_3^3-R_2^3}\right\}$$

Pour avoir R_3 positif

$\rightarrow \qquad 0 \leq r \leq R_1$

$$V(r) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} \int r \, dr$$

$$= \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} \left\{ \frac{r^2}{2} + cte \right\}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{-r^2}{2R_1^3} + cte \right\}$$

$$-\frac{1}{2R_1} + cte = \frac{1}{R_1} - \frac{3}{2} \frac{R_3^2 - R_2^2}{R_3^3 - R_2^3}$$

$$cte = \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{R_3^2 - R_2^2}{R_3^3 - R_2^3} \right.$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{-r^2}{2R_1^3} + \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{R_3^2 - R_2^2}{R_3^3 - R_2^3} \right) \right.$$

$$V(0) = cte = \frac{3}{2} \frac{1}{R_1} - \left(\frac{R_3^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^3} \right)$$