LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 1 ET 2, ET NON LINÉAIRES

Sommaire

- Vocabulaire et définition
- Résolution d'une équation différentielle : principe général
- Équations différentielles d'ordre 1 : solution générale
- Équations différentielles d'ordre 2 : solution générale
- Solution particulière : introduction
- Solution particulière pour les ED d'ordre 2
- Méthode de variation de la constante
- Principe de superposition
- Équations différentielles non linéaires : changement de variable
- Équations à variables séparées
- Exercice détaillé
- Exercices et sujets de bac

Intérêt des équations différentielles

Introduction

Les équations différentielles étaient auparavant au programme du lycée, ce qui n'est plus le cas actuellement.
Nous verrons dans ce chapitre les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 car ce sont celles que tu rencontreras le plus, notamment en physique. Plusieurs phénomènes physiques sont en effet régis par des équations différentielles, ce pourquoi ce chapitre est primordial si tu fais de la physique après le bac.
Il existe évidemment des équations différentielles d'ordre supérieur mais il n'y a pas de formule à connaître.
Nous verrons également comment résoudre des équations différentielles non linéaires.
Commençons par voir ce qu'est une équation différentielle.

Vocabulaire et définition

Une équation différentielle, que nous abrégerons parfois équa diff ou ED, est une égalité où il y a une fonction avec ses dérivées.
Par exemple :

$$f''(x)+2f'(x)=3f(x)-4$$

On voit qu'il y a une fonction f, avec sa dérivée première f ', et sa dérivée seconde f ''.
Souvent pour simplifier on écrit y, y', y''…au lieu de f(x), f '(x)…c'est plus simple et plus court à écrire 🙂
On note y mais c'est sous-entendu y(x), y est une fonction, pas une variable.
La variable x peut parfois être notée différemment, par exemple t, ce qui sera souvent le cas en physique car la variable est le temps t.

Il s'agit donc d'une équation où l'inconnue n'est pas la variable x mais la fonction y. Résoudre une équation différentielle revient à trouver la ou les fonctions y solutions de cette équation.

Nous avons parlé en introduction des équations différentielles d'ordre 1 et 2 : une équation différentielle est dite d'ordre 1 quand l'équation comporte uniquement sa dérivée première, pas ses dérivées supérieures.
Par exemple :

$$y'+3y=5x-4$$

$$2y' = 8x^3 - 6x + 7$$

$$-y' = 8\sqrt{x} - 2y - 9$$

Comme tu le vois il y a y’ à chaque fois, mais pas y" ou y"’ par exemple.
En revanche, il peut y avoir la fonction y mais ce n’est pas une obligation.

Pour une équation différentielle d’ordre 2, il faut y".
La présence de y’ et y n’est pas obligatoire dans l’équation :

$$y'' + 3y' - 4y = 5x - 4$$

$$2y'' - 5y = 4 - 6x$$

$$4y' + 7y'' = 3x$$

Ces équations sont dites linéaires car il n’y a que y, y’, y", pas y^2, √y, 1/y ou autre.
Les équations suivantes par exemple ne sont pas linéaires :

$$(y')^2 - 2y = 4x$$

$$y' - 5\sqrt{y} = 2 - 7x$$

$$y' - \frac{1}{y} = e^{5x}$$

Nous étudierons d’abord les ED linéaires d’ordre 1 et 2 car il y a des formules à connaître.
Pour que la résolution soit plus simple, on va commencer par mettre l’équation sous forme canonique.
Pour cela, on va mettre à gauche de l’égalité les y, y’ et y" en les rangeant dans l’ordre (y" puis y’ puis y), et à droite de l’équation on va mettre ce qui reste.

Exemple :

$$3x - 2y + 4y' = 4 - 8y''$$

Première étape : on passe tous les y à gauche, tout le reste à droite :

$$-2y+4y'+8y''=4-3x$$

Deuxième étape : on range dans l'ordre y" puis y' puis y :

$$8y''+4y'-2y=4-3x$$

Pour les équations différentielles d'ordre 2 on s'arrête là, **mais pour celles d'ordre 1, on va en plus diviser par le coefficient dominant** (celui de y').
Exemple :

$$4y+6x=2-3y'$$

$$3y'+4y=2-6x$$

Et pour terminer on divise par 3 :

$$y'+\frac{4}{3}y=\frac{2}{3}-2x$$

Cette dernière étape sert à avoir un coefficient dominant égal à 1, ce qui simplifiera les calculs par la suite.

La partie à droite de l'égalité est ce que l'on appelle **le second membre.**
Ce second membre sera une fonction, que l'on peut noter g, qui dépendra uniquement de la variable x (ou t si elle est notée ainsi par exemple).

La forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sera donc :

$$y'+ay=g(x)$$

Le coefficient a est un réel mais peut également être une fonction, on peut donc noter :

$$y'+a(x)y=g(x)$$

Tu noteras que le coefficient de y' est 1, car on a dit que l'on divisait par le coefficient dominant pour que ce soit le cas.

La forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sera quant à elle :

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Remarque : contrairement au coefficient a d'une équa diff d'ordre 1 qui peut être une fonction, les formules que nous verrons s'appliqueront uniquement aux équations telles que les coefficients a, b et c soient des constantes réelles, ce pourquoi ces équations sont appelées **équations différentielles à coefficients constants.**
Il existe des équa diff d'ordre 2 où ces coefficients ne sont pas des constantes mais des fonctions, cela sera abordé en fin de chapitre (sachant que dans ce cas on cherchera à se ramener à une équation à coefficients constants par changement de variable).
Ainsi, pour les équa diff d'ordre 1, nous étudierons celles où a peut être une fonction, contrairement aux équa diff d'ordre 2 où les coefficients a, b et c seront nécessairement réels.

Cela étant dit, on définit ce que l'on appelle **l'équation homogène, aussi appelée équation sans second membre, parfois abrégée ESSM.**
C'est tout simplement l'équation générale en remplaçant le second membre par 0, c'est-à-dire g(x) = 0.
L'ESSM sera alors :

$$y' + ay = 0$$

ou :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

—

L'équation homogène, aussi appelée équation sans second membre, correspond à l'équation différentielle où l'on a remplacé le second membre par 0.

—

Quel est l'intérêt de définir l'équation homogène ?
C'est ce que l'on va voir avec le principe général de résolution d'une équation différentielle.

Résolution d'une équation différentielle : principe général

Haut de page

La résolution des équations différentielles d'ordre 1 et 2 est basée sur le principe suivant :
– 1ère étape : **résoudre l'équation homogène** en appliquant les formules (que l'on verra ci-dessous) : la solution de l'équation homogène est souvent notée $\mathbf{y_H}$ (H signifiant homogène).
A noter que y_H comporte des constantes qu'il faudra déterminer.
– 2ème étape : **trouver une solution particulière de l'équation totale** (c'est-à-dire avec second membre) : cette solution est notée $\mathbf{y_p}$ (p signifiant particulière). **N'importe quelle solution particulière de l'équation totale convient** : nous verrons les différentes méthodes pour trouver une solution particulière.
– 3ème étape : la solution y cherchée est tout simplement $\mathbf{y = y_H + y_p}$
– 4ème étape : **trouver les constantes** si on dispose de conditions particulières.

On peut résumer cette méthode avec une formule :

$$y = y_H + y_p$$

Il est impératif de bien connaître ces étapes car tu devras les suivre à chaque fois que tu résoudras une équation différentielle, que ce soit en maths ou en physique !!
Attention notamment à bien attendre la 4ème étape pour trouver les constantes, ne surtout pas les déterminer à la fin de la première étape (c'est une erreur souvent commise par les élèves).
En physique, les constantes seront déterminées grâce aux conditions initiales.
En maths, les constantes ne sont pas toujours à déterminer, l'énoncé est alors du style « trouver LES solutions de l'équation différentielle ». S'il faut déterminer les constantes, l'énoncé sera plutôt « trouver LA solution de l'équation différentielle telle que y(2) = 4 » par exemple.

Pour les équa diff d'ordre 1, il n'y aura qu'une constante, donc une condition suffit, pour les équa diff d'ordre 2, il y aura deux constantes et il faudra donc deux conditions.

La méthode décrite précédemment ne s'applique cependant pas pour les équations à variables séparées dont on parlera en fin de chapitre.

Remarque : si g(x) = 0, c'est-à-dire si l'équation différentielle à résoudre est directement une équation homogène, on prend $y_p = 0$, et alors la solution de l'équa diff est uniquement la solution homogène.

Voyons maintenant comment trouver la solution homogène des équa diff linéaires d'ordre 1.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 : solution générale

Haut de page

Les équa diff linéaires d'ordre 1 sont de la forme y' + a(x)y = g(x), où a(x) est une fonction (éventuellement constante).
Par exemple y' + 3y = 4x – 7. Ici a est constant.
Autre exemple : $y' + 5x^2y = 6 - 5x$. Ici a est la fonction $a(x) = 5x^2$.

Comme on l'a vu ci-dessus, la première étape consiste à résoudre l'équation homogène, qui est donc y' + a(x)y = 0.
Il ne faut pas résoudre ce type d'équation comme une équation normale, en essayant d'isoler y, il faut directement donner la solution.
Cette solution est :

$$y_H(x) = ke^{-A(x)},\ k \in \mathbb{R}$$

solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1

k est la constante réelle que l'on déterminera éventuellement (à la 4ème étape du processus vu précédemment).
<u>A(x) est une primitive de a(x) : on la prend toujours avec constante nulle.</u>
Exemple : y' + 3y = 0.
Ici a = 3, une primitive est A(x) = 3x
On applique alors la formule :
$y = ke^{-3x}$, avec k constante.
Bien sûr il ne faut pas perdre de vue que quand on marque y, c'est sous-entendu y(x), mais on écrit toujours y.
Ce y correspond au y_H dont on a parlé dans l'introduction.

Autre exemple : $7x^3y - 5y' = 0$
On commence par mettre sous la bonne forme comme vu dans l'introduction :

$$y' - \frac{7x^3}{5}y = 0$$

On a donc :

$$a(x) = -\frac{7x^3}{5}$$

Une primitive est :

$$A(x) = -\frac{7x^4}{20}$$

En appliquant la formule :

$$y_H = ke^{\frac{7x4}{20}}$$

Dans cet exemple, il fallait bien penser à transformer d'abord l'équation donnée dans l'énoncé pour la mettre sous forme y' + ay = 0, sinon on n'aurait pas pu déterminer ce que valait a(x).

—

ATTENTION à bien transformer au préalable l'équation sous forme y' + ay = 0 afin de déterminer correctement la fonction a.

—

A noter que pour A(x), on prend toujours la constante égale à 0, cela n'a aucune utilité de la prendre non nulle.

<u>Remarque</u> : ici g(x) = 0, donc la solution de l'équa diff est uniquement la solution de l'équation homogène : y = y_H.

<u>Cas particulier</u> : quand a est une constante.
Si a est une constante, A(x) = ax.
Donc la solution est :

$$y = ke^{-ax}$$

Cette formule est valable **uniquement quand a est une constante**, ce pourquoi il n'est pas indispensable de l'apprendre par cœur, mais cela peut te faire gagner du temps.

Une fois l'équation homogène trouvée, il faut trouver une solution particulière de l'équation totale, et additionner cette solution particulière à la solution générale trouvée ci-dessus.
La recherche d'une solution particulière sera abordée plus loin.

Tu trouveras sur cette page les exercices sur les ED d'ordre 1.

Voyons maintenant les équations différentielles d'ordre 2.

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 : solution générale

Haut de page

Pour l'ordre 2, c'est un peu plus complexe que pour l'ordre 1.
Comme précédemment, il faut mettre l'équation sous la forme :

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

On résout d'abord l'équation homogène :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

On va alors poser ce que l'on appelle **<u>l'équation caractéristique</u> : on remplace y" par r^2, y' par r et y par 1**, ce qui donne :

$$ar^2 + br + c = 0$$

équation caractéristique associée

Cela doit te faire penser à une équation du second degré !
Le r est une variable, on l'appelle r car on va chercher… les racines de cette équation !
On calcule donc Δ comme on sait le faire : $\Delta = b^2 - 4ac$.
La solution de l'équation homogène va alors dépendra du signe de Δ, comme quand on résout une équation du second degré :

– **<u>Si Δ > 0</u>** : il y a deux racines réelles r_1 et r_2.
La solution est alors :

$$y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

Si Δ > 0

λ et μ sont les constantes à déterminer éventuellement à la 4ème étape.

– **<u>Si Δ = 0</u>** : il y a une racine double r_0.
La solution est alors :

$$y = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$$

Si Δ = 0

λ et μ sont les constantes à déterminer éventuellement à la 4ème étape.

– **<u>Si Δ < 0</u>** : il y a deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2.
Les racines sont conjuguées car les coefficients a, b et c sont réels.
En appelant **α leur partie réelle, et β leur partie imaginaire**, on a :
$r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.
La solution est alors :

$$y = e^{\alpha x}(\lambda cos(\beta x) + \mu sin(\beta x))$$

Si Δ < 0

λ et μ sont les constantes à déterminer éventuellement à la 4ème étape.

—

Attention, **dans l'exponentielle il y a la partie réelle** des racines, et **dans le cos et le sin la partie imaginaire** (souvent les élèves mélangent les 2).

—

Ce dernier cas (Δ < 0) est le plus compliqué donc attention à bien appliquer la formule.

Voyons un exemple pour chaque cas. Nous prendrons des équations déjà mises sous la bonne forme pour simplifier.
<u>1er exemple</u> : y" – 10y' + 21y = 0.

L'équation caractéristique est :
$r^2 - 10r + 21 = 0$.
On calcule Δ :
$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 21$
$\Delta = 16$
$\Delta > 0$, on a donc 2 racines réelles.
Après calcul, on trouve :
$r_1 = 3$ et $r_2 = 7$.
La solution de l'équation est donc :

Le discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times (-6)$
$= 16 + 48 = 64$

Les deux racines sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{64}}{2\times 2} = \frac{-4+8}{4} = 1$

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{64}}{2\times 2} = \frac{-4-8}{4} = -3$

$$y = \lambda e^{3x} + \mu e^{7x}$$

<u>2ème exemple</u> : y" – 10y' + 25y = 0.
L'équation caractéristique est :
$r^2 - 10r + 25 = 0$.
On calcule Δ :
$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 25$
$\Delta = 0$
$\Delta > 0$, on a donc une racine double.
Après calcul, on trouve :
$r_0 = 5$.
La solution de l'équation est donc :

$$y = (\lambda x + \mu)e^{5x}$$

<u>3ème exemple</u> : y" – 6y' + 73y = 0.
L'équation caractéristique est :
$r^2 - 6r + 73 = 0$.
On calcule Δ :
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 73$
$\Delta = -256$
$\Delta < 0$, on a donc 2 racines complexes conjuguées.
Après calcul, on trouve :
$r_1 = 3 + 8i$ et $r_2 = 3 - 8i$.
On a donc α = 3, et β = 8.
La solution de l'équation est donc :

$$y = e^{3x}(\lambda cos(8x) + \mu sin(8x))$$

Comme tu le vois, il suffit d'appliquer les formules vues précédemment en respectant les étapes (équation caractéristique, calcul du Δ, calcul des solutions, application de la formule).

Tu trouveras sur cette page les exercices sur les ED d'ordre 2.

Voyons maintenant comme trouver la solution particulière.

Solution particulière : introduction

Haut de page

Comme on l'a vu en introduction, pour résoudre une équa diff il faut trouver la solution de l'équation homogène (on vient de voir les formules) puis trouver une solution particulière de l'équation totale.

Il existe des cas que nous allons donner avant de les étudier en détail.
Les différents cas dépendent du second membre g(x), qui peut être :
– une constante (cas le plus simple)
– une fonction trigonométrique (cos, sin)
– une fonction exponentielle (e^{mx} avec m constante)
– un polynôme
– une somme ou un produit des fonctions énoncées ci-dessus
– une autre fonction

Il existe des formules pour tous les cas sauf le dernier évidemment.
Dans le cas où c'est une autre fonction que celles énoncées ci-dessus, tu dois soit deviner la forme de la solution (ce n'est pas évident donc assez rare), soit simplement vérifier qu'une fonction donnée dans l'énoncé est solution particulière (cas le plus simple), soit appliquer la méthode de variation de la constante (cas fréquent), qui sera étudiée à part : elle est surtout utilisée pour les équa diff d'ordre 1.

S'il s'agit simplement de vérifier qu'une solution convient c'est facile.
Voyons un exemple.
On a l'équation $y'' + 3y' + y = x^2 + 5$
On demande de vérifier que $f(x) = x^2 - 6x + 21$ est une solution particulière de l'équation.
L'idée est de calculer f' et f'', puis de remplacer dans l'équation et vérifier que l'on a bien g(x), c'est-à-dire $x^2 + 5$.
On commence par calculer f', puis f'' :
$f' = 2x - 6$
$f'' = 2$
On remplace :

$f'' + 3f' + f = 2 + 3(2x - 6) + (x^2 - 6x + 21)$
$f'' + 3f' + f = 2 + 6x - 18 + x^2 - 6x + 21$
$f'' + 3f' + f = x^2 + 5$
On retrouve bien $x^2 + 5$, donc $x^2 - 6x + 21$ est bien solution particulière de l'équation.

Attention surtout à ne pas dire dès le début que $f'' + 3f' + f = x^2 + 5$, il faut VÉRIFIER que c'est le cas en calculant $f'' + 3f' + f$.

Autre cas particulier : **si g(x) est une constante**.
Alors il suffit de prendre **une solution particulière constante** !
En effet, imaginons que g(x) = m, avec m constante réelle, pour une ED d'ordre 1 :

$$y' + ay = m$$

Supposons de plus que a est une constante non nulle, et posons la fonction constante f = m/a.
Alors f' = 0.
Et f' + af = 0 + a × (m/a) = m.
Donc la fonction constante égale à m/a est une solution particulière de l'équation différentielle.
Tu peux retenir que :

—
Une solution particulière de l'équation y' + ay = m, avec a et m constantes, est :
$y_p = m/a$
En supposant bien sûr que a est non nul.
—

Si a est nul, on te laisse deviner une solution particulière simple 😉

De même, pour une équation différentielle d'ordre 2, on montre facilement que :

—
Une solution particulière de l'équation ay'' + by' + cy = m, avec a, b, c et m constantes, est :
$y_p = m/c$
En supposant bien sûr que c est non nul.
—

Si c est nul, on te laisse là aussi deviner une solution simple !

Voyons maintenant les formules pour les équa diff d'ordre 2

Solution particulière pour les ED d'ordre 2

Haut de page

Les formules suivantes ne sont valables que dans le cas des équations linéaires du second ordre.
On considère donc une équation du style :

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

La solution particulière recherchée sera notée y_p dans la suite.
Nous avons des formules différentes selon g(x).
On considère d'abord que :

$$g(x) = e^{\alpha x} P(x)$$

P(x) est ici un polynôme, α est un réel.
Ce cas comprend également **le cas où il y a uniquement un polynôme, il suffit alors de prendre α = 0.**
La forme de la solution particulière dépendra du α.
Dans les formules qui suivent, **Q(x) est un polynôme de même degré que P(x).**
Trois cas se présentent :
– si α **n'est pas racine de l'équation caractéristique**, on cherche y_p sous la forme :

$$y_p = e^{\alpha x} Q(x)$$

– si α **est racine simple de l'équation caractéristique**, on cherche y_p sous la forme :

$$y_p = x e^{\alpha x} Q(x)$$

On peut aussi dire $y_p = e^{\alpha x} Q(x)$ avec deg(Q) = deg(P) + 1 et le coefficient constant de Q est nul.

– si α **est racine double de l'équation caractéristique**, on cherche y_p sous la forme :

$$y_p = x^2 e^{\alpha x} Q(x)$$

On peut aussi dire $y_p = e^{\alpha x}Q(x)$ avec deg(Q) = deg(P) + 2 et le coefficient constant de Q est nul ainsi que celui de x.

—

Autrement dit, y_p a la même forme que g(x), c'est-à-dire $e^{\alpha x}Q(x)$ avec deg(Q) = deg(P), mais on multiplie par x si α est racine simple de l'équation caractéristique, et par x^2 si α est racine double.

—

Il faudra ensuite calculer les coefficients de Q en injectant dans l'équation différentielle et en faisant par identification.

Voyons tout de suite des exemples afin que cela soit plus parlant.

Tout d'abord le cas particulier où l'on a uniquement un polynôme, c'est-à-dire α = 0.
On a l'équation $y'' - 5y' + 6y = x^2 - 3x + 2$.
On a ici $P(x) = x^2 - 3x + 2$.
L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6$.
Après calcul, on trouve que les racines sont 2 et 3.
α (qui vaut 0) n'est donc pas racine de l'équation caractéristique, on cherche donc y_p sous la forme :
$y_p = e^{\alpha x}Q(x)$ avec Q de degré 2 car P est de degré 2, et comme α = 0, $e^{\alpha x} = 1$, donc :
$y_p = a^2 + bx + c$
Ensuite on calcule y_p' et y_p'' et on injecte dans l'équation afin de trouver a, b et c par identification avec g(x).
Nous ne détaillerons pas la suite du calcul qui est assez longue, mais nous le ferons dans les exercices en vidéo rassure-toi !!

Autre exemple plus compliqué :
$y'' + 2y' - 15 = e^{3x}(2x^5 - 6x + 8)$
Ici α = 3, $P(x) = 2x^5 - 6x + 8$, et l'équation caractéristique est $r^2 + 2r - 15$.
Après calcul, on trouve que les racines 3 et -5.
α (qui vaut 3) est donc racine simple de l'équation.
Donc on cherche une solution sous la forme :
$y_p = xe^{\alpha x}Q(x)$ avec Q(x) de degré 5 car P(x) est de degré 5, soit :
$y_p = xe^{3x}(ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f)$
$y_p = e^{3x}(ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx)$

Et comme précédemment on calcule y_p' et y_p" et on injecte dans l'équation afin de trouver a, b, c, d, e et f par identification avec g(x).

L'autre cas est si g(x) est de la forme :

$$g(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)cos(\beta x) + P_2(x)sin(\beta x))$$

α est toujours un réel, tout comme β.
P_1 et P_2 sont des polynômes.
Attention, la formule se complique !
Dans les formules qui suivent, **Q_1 et Q_2 sont des polynômes <u>avec :</u>**
<u>deg(Q_1) = deg(Q_2) = max(deg(P_1) ; deg(P_2))</u>.
On considère le complexe α + iβ.
Si **α + iβ n'est pas solution de l'équation caractéristique**, on cherche y_p sous la forme :

$$y_p = e^{\alpha x}(Q_1(x)cos(\beta x) + Q_2(x)sin(\beta x))$$

Si **α + iβ est solution de l'équation caractéristique**, on cherche y_p sous la forme :

$$y_p = xe^{\alpha x}(Q_1(x)cos(\beta x) + Q_2(x)sin(\beta x))$$

—
Autrement dit, y_p a plus ou moins la même forme que g(x), mais le degré des polynômes devant le cos et le sin a le degré du polynôme de plus haut degré entre P_1 et P_2.
On multiplie par x si α + iβ est racine de l'équation caractéristique.
—

Cela peut paraître compliqué, mais en réalité tu n'as jamais l'exponentielle, le polynôme et le cos ou le sin en même temps.
S'il n'y a pas d'exponentielle, α = 0 et les formules se simplifient.
S'il n'y a pas de polynôme mais des constantes, c'est plus simple pour Q_1 et Q_2.

Voyons un exemple :
y" – 6y' + 8 = (3x + 1)cos(2x) – 4sin(2x)
α = 0 et β = 2.
On vérifie facilement que 0 + 2i n'est pas racine de l'équation caractéristique.
De plus, max(deg(P_1) ; deg(P_2)) = 1, car P_1 est de degré 1 et P_2 est de degré 0, donc on cherche une solution sous la forme :

$y_p = Q_1(x)\cos(2x) + Q_2(x)\sin(2x)$, avec Q_1 et Q_2 de degré 1
$y_p = (ax + b)\cos(2x) + (cx + d)\sin(2x)$
Comme précédemment on calcule y_p' et y_p'' et on injecte dans l'équation afin de trouver a, b, c, et d par identification avec g(x).

Méthode de variation de la constante

Haut de page

La méthode de variation de la constante est généralement la méthode que tu dois choisir en dernier car c'est la plus longue.
Elle est surtout utilisée pour les ED d'ordre 1. On peut l'appliquer pour les ED d'ordre 2 mais c'est assez rare et compliqué donc nous ne l'aborderons pas.

Cette méthode est valable pour toutes les équations, même les équations non linéaires.
Le principe est le suivant : on résout d'abord l'équation homogène.
On trouve alors y_H, qui s'écrit comme produit d'une fonction h avec une constante k :
$y_H = kh(x)$.
Par exemple pour une ED d'ordre 1 : $y_H = ke^{-A(x)}$.

—

On cherche alors une solution sous la forme $y_p = k(x)h(x)$, c'est-à-dire que l'on va considérer que **k n'est plus une constante mais une fonction variable** : d'où le terme de **méthode de variation de la constante** !
On va alors injecter y_p dans l'équa diff afin de trouver l'expression de k(x).
Une fois k(x) trouvé, il suffira de dire que $y_p = k(x)h(x)$ est une solution particulière de l'équation.

—

Voyons tout de suite un exemple.
$y' + (2x + 5)y = 3x - 8$.

On résout d'abord l'équation homogène, on trouve :

$$y_H = ke^{-x2-5x}$$

On cherche donc une solution particulière sous la forme :

$$y_p = k(x)e^{-x2-5x}$$

Pour réinjecter y_p, il fait d'abord calculer y_p' :

$$y'_p = k'(x)e^{-x2-5x} + k(x)(-2x-5)e^{-x2-5x}$$

$$y'_p = k'(x)e^{-x2-5x} - k(x)(2x+5)e^{-x2-5x}$$

On réinjecte dans l'équation :

$$y'_p + (2x+5)y_p = 3x-8$$

$$k'(x)e^{-x2-5x} - k(x)(2x+5)e^{-x2-5x} + (2x+5)e^{-x2-5x} = 3x-8$$

$$k'(x)e^{-x2-5x} = 3x-8$$

$$k'(x) = (3x-8)e^{x2+5x}$$

Il s'agit alors d'intégrer cette expression pour trouver k (en faisant une IPP par exemple).
Nous ne détaillerons pas la suite du calcul car cela n'a pas d'intérêt pour la méthode, c'est juste un calcul de primitive.
Une fois que l'on a trouvé k(x), on remplace dans l'expression de y_p :

$$y_p = k(x)e^{-x2-5x}$$

Tu as sans doute remarqué que k(x) s'était annulé dans le calcul pour ne plus laisser que k'(x): ce n'est pas un cas particulier, ce sera toujours ainsi pour les linéaires d'ordre 1 !
En effet, prenons la solution homogène générale d'une ED linéaire d'ordre 1 y' + a(x)y = 0 :

$$y_H = ke^{-A(x)}$$

On cherche y_p sous la forme :

$$y_p = k(x)e^{-A(x)}$$

D'où :

$$y'_p = k'(x)e^{-A(x)} - k(x)A'(x)e^{-A(x)}$$

N'oublions pas que A est la primitive de a, donc A'(x) = a(x) :

$$y'_p = k'(x)e^{-A(x)} - k(x)a(x)e^{-A(x)}$$

Réinjectons dans l'équation générale :

$$y'_p + a(x)y = g(x)$$

$$k'(x)e^{-A(x)} - k(x)a(x)e^{-A(x)} + k(x)a(x)e^{-A(x)} = g(x)$$

$$k'(x)e^{-A(x)} = g(x)$$

$$k'(x) = g(x)e^{A(x)}$$

Comme tu le vois, le k s'est simplifié, il n'y a plus que k'(x) !!
Tu peux retenir la formule $k'(x) = g(x)e^{A(x)}$ pour aller plus vite mais c'est mieux de la redémontrer à chaque fois.
Il faudra donc de toute manière calculer k(x) en faisant la primitive de k'(x).

—

A noter que comme on cherche UNE solution particulière, on peut prendre une constante nulle quand on calcule la primitive de k.

—

Dans cette méthode, c'est souvent le calcul de la primitive de k' qui est le plus long et le plus dur, ce pourquoi cette méthode n'est pas nécessairement celle que tu dois privilégier, tu dois au contraire l'utiliser si toutes les méthodes vues précédemment ne peuvent être appliquées.

Remarque : pour une ED d'ordre 2, l'équation homogène a 2 constantes, il faut donc faire varier les 2 constantes que l'on déterminera par primitive avec un système !! C'est donc encore plus long et compliqué que pour l'ordre 1, ce pourquoi il est très rare d'appliquer cette méthode. Pour les ED d'ordre 2, on privilégiera les formules vues précédemment.

Tu trouveras sur cette page les exercices sur la méthode de variation de la constante.

Principe de superposition

Haut de page

Le principe de superposition est extrêmement simple. Il s'applique uniquement pour les équations différentielles **linéaires**.
Nous allons l'expliquer pour une ED d'ordre 1, le principe sera le même pour une ED d'ordre 2.
Soit donc l'équation y' + ay = g(x).
On suppose que le second membre g(x) s'écrit comme la somme de deux fonctions :
$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$
Si y_1 est une solution particulière de $y' + ay = g_1(x)$ et y_2 est une solution particulière de $y' + ay = g_2(x)$, alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $y' + ay = g(x)$.

—

Autrement dit, si le second membre est la somme de 2 (ou plusieurs) fonctions, on trouve une solution particulière pour chacune de ces fonctions, et alors une solution particulière de l'équation totale est la somme des solutions particulières.

—

Exemple : on cherche une solution particulière de l'équation :

$$y' - 5y = e^{-4x} + 7x$$

On cherche d'abord une solution particulière que l'on note y_1 de :

$$y' - 5y = e^{-4x}$$

On trouve :

$$y_1 = -\frac{1}{9}e^{-4x}$$

Puis on cherche une solution particulière que l'on note y_2 de :

$$y' - 5y = 7x$$

On trouve :

$$y_2 = -\frac{7}{5}x - \frac{7}{25}$$

Une solution particulière de l'équation totale est alors $y_1 + y_2$:

$$y_p = -\frac{1}{9}e^{-4x} - \frac{7}{5}x - \frac{7}{25}$$

Cela peut être pratique si le second est sous la forme d'une somme de fonctions dont la forme est différente (comme ici par exemple, une exponentielle avec un polynôme).

Équations différentielles non linéaires : changement de variable

Haut de page

On rappelle qu'une équation différentielle n'est pas linéaire si elle n'est pas sous une des formes précédentes, c'est-à-dire qu'elle ne contient pas que y, y' et y" mais par exemple y^2, 1/y', √y etc…

Dans ce cas, on fait généralement un changement de variable permettant de se ramener à une ED linéaire, que l'on sait résoudre.

<u>Exemple</u> : on cherche les solutions ne s'annulant pas de l'équation différentielle :

$$y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0$$

Cette équation n'est pas linéaire à cause du √y. On note (E) cette équation.
On pose alors la fonction :

$$z(x) = \sqrt{y(x)}$$

z est bien définie et dérivable car y non nulle par hypothèse.
Calculons z' :

$$z'(x) = \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}}$$

On cherche alors une équation linéaire vérifiée par z.
On peut par exemple tout diviser dans (E) par √y(x) (car y non nulle par hypothèse) :

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + 2\frac{y}{\sqrt{y}} - (x+1)\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = 0$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + 2\sqrt{y} - (x+1) = 0$$

On remarque que l'on a fait apparaître z' et z :

$$2z' + 2z - (x+1) = 0$$

On vient de trouver l'équation linéaire vérifiée par z !! On note (E') cette équation.
En fait, en raisonnant par équivalence, on montre que y est solution de l'équation de (E) si et seulement si z est solution de (E'), ce qui permet de dire que résoudre (E) revient à résoudre (E').

Après résolution, on trouve :

$$z(x) = ke^{-x} + \frac{x}{2}$$

Or y(x) = z^2(x), puisque z(x) = √y(x), d'où :

$$y(x) = (ke^{-x} + \frac{x}{2})^2$$

Mais comment trouver le changement de variable ??
Soit il est donné dans l'énoncé, et alors il suffit d'appliquer la méthode précédente, soit il n'est pas donné et alors… il n'y a pas de règle !!
A toi de deviner le changement de variable par rapport à l'équation. Il faudra peut-être que tu fasses plusieurs essais avant de trouver le bon changement de variable.
Néanmoins, il est possible de deviner facilement. En effet, dans l'exemple ci-dessus, c'est le $\sqrt{y}$ qui était gênant, on peut donc se dire qu'il faut poser $z = \sqrt{y}$.
Si au contraire on avait eu y^2, on aurait posé $z = y^2$. Attention, si ça se trouve cela ne marchera pas et il faudra alors trouver autre chose. Mais dis-toi que si tu dois deviner le changement de variable ce n'est pas quelque chose de compliqué 🙂

Tu trouveras sur cette page les exercices sur le changement de variable dans une équation différentielle.

Il est également possible de résoudre les équations différentielles non linéaires en faisant à variables séparées.

Équations à variables séparées

Haut de page

Une équation à variables séparées est une équation où de part et d'autre de l'égalité on a des fonctions que l'on peut intégrer, mais qui ont des variables différentes.
On aura à gauche y et ses dérivées, et à droite une fonction dépendant de x.
Prenons par exemple une ED linéaire d'ordre 1 :

$$y' + 2xy = 0$$

On va séparer les variables de la manière suivante :

$$y' = -2xy$$

Si on suppose y non nulle :

$$\frac{y'}{y} = -2x$$

Et voilà, maintenant on a à gauche y et ses dérivées et à droite du x.
On n'a plus qu'à intégrer :

$$ln(|y|) = -x^2 + C$$

avec C constante

$$|y| = e^{-x^2+C}$$

Si on suppose y > 0 :

$$y = e^C e^{-x^2}$$

Comme C est constant, e^C est une constante que l'on peut appeler k, ce qui donne :

$$y = ke^{-x^2}$$

On retrouve l'expression que l'on aurait trouvée en appliquant les formules vues précédemment.

–

Attention à ne pas oublier la constante C quand tu fais la primitive.
Attention également à ne pas en mettre de chaque côté de l'égalité, ça ne sert à rien (sinon on les regroupe).
On a mis la constante à droite de l'égalité car on cherche à isoler y qui se trouve à gauche

–

A noter qu'à droite on a uniquement du x, il s'agit donc d'une primitive classique..
A gauche on a y et ses dérivées, il s'agit donc d'une primitive composée.
Tu peux te référer au cours sur les primitives pour plus de détails à ce sujet.

Dans notre exemple, séparer les variables n'a aucune utilité car on peut résoudre l'ED autrement, on utilise donc plutôt cela quand on a une ED non linéaire.
Exemple :

$$xy' - y^2 = 0$$

On transforme de la façon suivante :

$$xy' = y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x}$$

On intègre :

$$\frac{-1}{y} = ln(|x|) + C$$

$$y = \frac{-1}{ln(|x|) + C}$$

Comme tu le vois la résolution est assez simple une fois les variables séparées !

Rien n'empêche de combiner un changement de variable et de faire une équation à variables séparées pour résoudre une ED non linéaire. Nous verrons des exemples en exercice.

<u>Remarque</u> : dans cette méthode, il ne faut pas résoudre l'équation homogène puis trouver une solution particulière, intégrer l'équation comme précédemment suffit pour trouver les solutions de l'équation différentielles.

Exercice corrigé détaillé

Haut de page

Nous allons corriger l'exercice du bac de France métropolitaine 2010 sur les équations différentielles, qui est un exercice TYPIQUE sur ce chapitre. C'est un exercice niveau lycée qui n'utilise que peu de choses par rapport à tout ce que l'on a vu précédemment. Cet

exercice s'applique donc plutôt aux élèves du lycée.
Si tu veux des exercices plus compliqués, tu peux aller voir les exercices en vidéo sur le 1er ordre et les exercices en vidéo sur le 2ème ordre.

Nous ne corrigerons que la partie A qui est la plus représentative, la partie B n'est pas particulièrement liée aux équations différentielles.
Regardons d'abord l'énoncé :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$
1) Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des réels R par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2) On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').

3) Soit v une fonction définie et dérivable sur R. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction v-u est solution de l'équation différentielle (E).

4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

A première vue il n'y a pas de remarque particulière à faire sur l'énoncé, nous verrons les questions au fur et à mesure.

1) La première question est très simple : il suffit de vérifier que u est solution de E, c'est-à-dire qu'il faut montrer que $u' + u = e^{-x}$
En effet, dire que u est solution de (E) veut dire que l'égalité (E) est vérifiée si on remplace y par u.

—

Mais ATTENTION !!! Il ne faut surtout pas dire dès le départ que $u' + u = e^{-x}$, ça c'est ce qu'on veut montrer !!!
Comme pour l'initialisation pour les suites, il faut calculer d'abord $u' + u$, et montrer que ça vaut e^{-x} !!

—

Calculons donc $u' + u$. Il est recommandé de calculer d'abord u' :
u est un produit de fonction, on applique donc la formule $u'v + uv'$.

—

ATTENTION ! Ici la fonction s'appelle u, donc si on dit u'v + uv' ça peut porter à confusion… on va plutôt dire p'q + qp'.

—

$p = x$, $p' = 1$
$q = e^{-x}$, $q' = -e^{-x}$

$u' = p'q + qp'$
$u' = e^{-x} – xe^{-x}$

Et maintenant on peut calculer u' + u :

$u' + u = e^{-x} – xe^{-x} + xe^{-x}$
$u' + u = e^{-x}$

Et voilà, on a bien prouvé que $u' + u = e^{-x}$, donc u est bien solution de (E).

2) Là non plus il n'y a aucune difficulté, il suffit d'appliquer la formule vue dans le cours.
On trouve :
$y = ke^{-x}$, avec k constante réelle.

3) Ahhh c'est là que ça devient TRÈS intéressant . Beaucoup d'élèves ont peur de ces questions longues auxquelles ils ne comprennent rien alors qu'avec un peu de méthode ça passe tout seul^^
C'est là qu'il faut regarder attentivement la question : on voit qu'il y a SI ET SEULEMENT SI.
Ceci « coupe » la question en 2 parties :
a) la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E)
b) la fonction v-u est une solution de l'équation différentielle (E')

La méthode est la suivante : il faut supposer a) et montrer b), puis faire l'inverse : suppose b)et montrer a).

On doit faire dans les 2 sens à cause du SI ET SEULEMENT SI. Le a) est ce qui est avant le « si et seulement si », le b) est ce qui est après le « si et seulement si ».

C'est parti : supposons a), c'est-à-dire supposons que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E).
Cela signifie que $v' + v = e^{-x}$

Il faut alors montrer b), donc il faut montrer que $(v-u)' + (v-u) = 0$.
En effet, il suffit de remplacer y par v-u dans l'équation (E').

Pour cela c'est comme d'habitude : on va calculer $(v-u)' + (v-u)$ et montrer que c'est égal à 0.
Bien sûr il ne faut SURTOUT PAS DIRE DES LE DÉBUT QUE CA VAUT 0 !!!!

$(v-u)' + (v-u) = v' - u' + v - u$

on regroupe alors les v et les u :

$(v-u)' + (v-u) = v' + v - u' - u$
$(v-u)' + (v-u) = (v' + v) - (u' + u)$

or par hypothèse $v' + v = e^{-x}$, et on a vu plus haut que $u' + u = e^{-x}$, d'où :

$(v-u)' + (v-u) = e^{-x} - e^{-x} = 0$

Et voilà, on a montré que $(v-u)' + (v-u) = 0$, donc que v-u est solution de l'équation différentielle (E').

Maintenant on fait l'inverse : on suppose b), donc on suppose que v-u est solution de l'équation différentielle (E') :
$(v-u)' + (v-u) = 0$
Et il faut montrer a), donc il faut montrer que $v' + v = e^{-x}$

On part de ce qu'on a supposé :
$(v-u)' + (v-u) = 0$
$v' - u' + v - u = 0$
$v' + v = u' + u$

or on a vu que $u' + u = e^{-x}$

donc $v' + v = u' + u = e^{-x}$

Et voilà, on a montré que $v' + v = e^{-x}$, donc que v est solution de (E) !!

Il ne reste plus qu'à conclure : on a montré que a) ⇒ b) et b) ⇒ a), donc a) ⇔ b).

4) Une fois qu'on a fait la question 3) qui est un peu longue mais pas très dure, les 2 dernières questions sont très simples et très rapides.

Il faut trouver toutes les solutions de (E). Or dans la question 3 on avait v qui était solution de (E).

On dit donc : soit v une solution de (E).
D'après la question 3, on sait alors que v-u est solution de (E').

Et d'après la question 2, les solutions de (E') sont ke^{-x}.

Du coup, $v - u = ke^{-x}$, puisque $v - u$ est solution de (E').

donc
$v = ke^{-x} + u$
$v = ke^{-x} + xe^{-x}$

Et c'est tout !! On a bien trouvé toutes les solutions v de l'équation (E) :
$v = ke^{-x} + xe^{-x}$, avec k constante réelle.

5) Cette question n'est que du calcul avec un petit détail néanmoins.
Il faut trouver LA solution g de (E) qui vérifie g(0) = 2.

g est solution de (E), or on a vu à la question 4 que les solutions de (E) étaient $ke^{-x} + xe^{-x}$

donc $g(x) = ke^{-x} + xe^{-x}$

Et il suffit de trouver la constante k grâce à g(0) = 2 :

$g(0) = 2$
$ke^{-0} + 0 \times e^{-0} = 2$
$k = 2$ car $e^{-0} = 1$

Ainsi, $g(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$
On peut éventuellement factoriser par e^{-x} :
$g(x) = e^{-x}(2 + x)$

Ce qu'il faut retenir c'est surtout la question 3 où il faut supposer a) et montrer b) puis faire l'inverse. Il faut bien retenir que c'est le « si et seulement si » qui te permet d'identifier le a) et le b).
Il faut aussi que tu saches impérativement traduire sous forme d'équation les phrases du style « v-u est solution de l'équation différentielle (E') », car la question est une phrase mais toi tu dois montrer des égalités !!

Enfin, n'oublie pas que quand tu as une égalité à montrer, il ne faut pas partir de l'égalité !! Il faut partir de ce que tu as supposé ou d'une partie de l'égalité pour arriver à la fin du calcul à l'égalité que tu veux montrer.

Exercices et sujets de bac

Haut de page

Les exercices sur les équations différentielles du 1er ordre sont disponibles en cliquant sur ce lien !
Ceux sur le second ordre sont disponibles ici.
Enfin, tu trouveras sur cette page des exercices sur les systèmes d'équations différentielles.

Les sujets de bac sur les équations différentielles sont du même style que l'exercice détaillé, donc tu ne devrais pas avoir de surprise en les voyant 😉
Clique ici pour accéder aux sujets avec la correction en vidéo !

Intérêt des équations différentielles

Les équations différentielles sont utilisées dans beaucoup de chapitres de physique.
En électricité, l'évolution des tensions et de l'intensité dans un circuit RL, RC ou RLC est régie par une équation différentielle, parfois avec des dérivées secondes.
En mécanique, la 2ème loi de Newton comporte l'accélération, qui est la dérivée seconde de la position. Cette loi nous donne souvent des équations différentielles.
En radioactivité, la loi de décroissance radioactive provient d'une équation différentielle.
Bien d'autres domaines de la physique comportent des équa diff, il est alors indispensable de savoir les résoudre afin de connaître l'évolution du système.

Sommaire des cours Haut de la page

20 RÉFLEXIONS SUR “ LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D’ORDRE 1 ET 2, ET NON LINÉAIRES ”

Flo

1 OCTOBRE 2015 À 15 H 23 MIN

Bonjour

Pour l’exercice bac où est il marqué dans le cours qu’on soit censé utiliser la formule u’vxuv’ pour calculer u+u’ ? En lisant l’énoncé jamais jaurais pensé avoir recours à cette formule mais plutot à celle du cours y=ke(ax) non ?

---

florent

13 NOVEMBRE 2015 À 15 H 15 MIN

tu dois te reporter au chapitre traitant des dérivées de fonction composée qui est un cours de 1ere.

une fonction composée (dans ce cas un produit) noté u*v se dérive avec la formule: u’.v+u.v’.

BARBEREAU

20 AOÛT 2016 À 8 H 35 MIN

Bonjour,

j'utilise vos cours et vos vidéos pour apprendre les maths….Vraiment top! Bref j'ai un problème, le raccourci « exemples d'équations différentielles » ne fonctionpas, pouvez-vous y jeter un oeil? Merci par avance, Bonne journee et encore merci!!!!!!!

Hélène

22 NOVEMBRE 2016 À 10 H 46 MIN

Bjr,
Il y a une petite erreur d'apostrophe dans la correction de l'exercice ici :

u' = p'q + qp'
Qui revient à p'q + p'q
Or c'est p'q+pq'.

A part ca, merci pr ton site fantastique !

JOSE

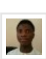
25 JANVIER 2017 À 18 H 33 MIN

bonjour,
dans la troisième question de l'exercice, il manque l'apostrophe de (E') pour si et seulement si la fonction v-u est solution de l'équation différentielle (E').
Merci pour votre site

David

6 JUIN 2017 À 9 H 13 MIN

C'est intéressant


Richard

15 JUIN 2017 À 21 H 18 MIN

J'ai vraiment aimé le détail et votre pédagogie.
Merci bien…

Hania

25 NOVEMBRE 2017 À 11 H 53 MIN

Vraiment merci beaucoup ça ma aider énormément

Moha

14 FÉVRIER 2018 À 13 H 23 MIN

Y'=a Est-elle une équation différentielle ?

★ Méthode Maths

15 FÉVRIER 2018 À 12 H 31 MIN

Oui en effet car c'est une équation avec la dérivée d'une fonction !

Michael Diogo

1 JUILLET 2018 À 14 H 57 MIN

Salut Merci pour le site fabuleux.

Nenewe Daouda

21 SEPTEMBRE 2018 À 17 H 07 MIN

Je Suis Vraiment Très Satisfait De Votre Detail Du Cours Sur Les Integrales Et Primitives Je Vous Remerçi

★ Méthode Maths

21 SEPTEMBRE 2018 À 22 H 35 MIN

Merci beaucoup !

Valerie

9 OCTOBRE 2018 À 10 H 55 MIN

Super. Belle aide pour ma reprise d 'étude !

★ Méthode Maths

9 OCTOBRE 2018 À 15 H 34 MIN

Merci beaucoup !

EMMANUEL

5 NOVEMBRE 2018 À 17 H 59 MIN

c'est vraiment super et suis ravis de trouver ce site

★ **Méthode Maths**

7 NOVEMBRE 2018 À 20 H 15 MIN

Merci beaucoup !

HALIFA

6 AOÛT 2020 À 20 H 12 MIN

votre article m'a été d'une grande utilité car ça ma permis de m'améliorer au niveau des équations différentielles d'ordre 2. Grand merci à vous!

PapyAlain

3 JANVIER 2021 À 17 H 53 MIN

Bonjour. Dans le paragraphe « Équations différentielles linéaires d'ordre 2 : solution générale », le premier exemple donne r1 = 3 et r2 = 7 et l'équation est y = λe3x + μe7x. Rien n'interdit d'inverser le nom des racines, on aurait alors r1 = 7 et r2 = 3 et l'équation serait y = λe7x + μe3x.
λe3x + μe7x équivaut-il à λe7x + μe3x ? Cordialement.

★ **Méthode Maths**

3 JANVIER 2021 À 23 H 41 MIN

Oui en effet car λ et μ sont des constantes donc peu importe l'ordre.