HAE302 : Partie Circuits et composants INDUCTIFS

Contrôle Continu du 14/11/2024 : Durée 45 mn, noté sur 10 pts

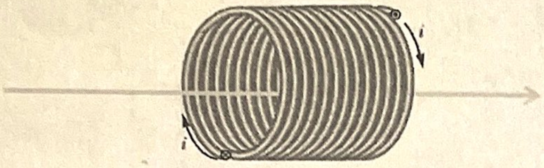
Tous documents interdits – Calculatrices autorisées - A composer sur 1 copie séparée

<u>On rappelle</u> : Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m.

Exercice 1 - Champ magnétique créé par un solénoïde (5 pts) :

Un solénoïde est une bobine longue pour lequel le fil électrique est enroulé régulièrement en hélice. Parcouru par un courant, il créé un champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur.

1°/ Représenter sur la figure ci-dessous les lignes de champ et les vecteurs champ magnétique $\vec{B}$



2°/ A partir de l'expression du champ magnétique suivant l'axe d'une bobine plate de rayon R comportant N spires :

$$B = N\frac{\mu_0 i}{2R}\sin^3\theta$$

avec θ l'angle sous lequel, d'un point P sur l'axe de la bobine, on voit le rayon de la bobine plate.

a- Montrer que l'expression du champ B en un point de son axe, à l'extérieur du solénoïde fini est :

$$B_{ext} = n\frac{\mu_0 i}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

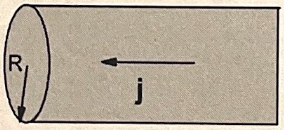
où θ_2 et θ_1 sont les angles qui permettent de repérer les extrémités du solénoïde fini et n le nombre de spires par unité de longueur.

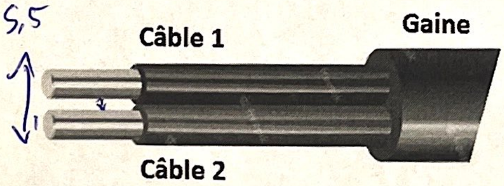
b- En déduire l'expression du champ B en un point de l'axe à l'intérieur du solénoïde fini. Que devient cette expression pour un fil considéré comme infini

c- Calculer l'intensité du champ B à l'intérieur d'un solénoïde de longueur 1m, de rayon intérieur 5 cm possédant 350 spires parcouru par un courant de 1 ampère. On utilisera l'approximation du solénoïde infini <u>que l'on justifiera</u>.

Exercice 2 – Champ magnétique créé par un câble conducteur (5 pts)

Un câble conducteur cylindrique plein pouvant supporter de fort courant, de rayon R = 1cm et de longueur pouvant être considérée comme infinie, est parcouru par un courant i de 50A. La densité de courant $\vec{J}$ est supposée uniforme dans toute la section du conducteur.





1°/ A l'aide du théorème d'Ampère <u>que l'on énoncera</u>, déterminer l'expression du champ magnétique B, en fonction du courant i, de μ_0, du rayon R, de la position r par rapport au centre du câble :

- **a)** à l'intérieur du conducteur ($r < R$) ;
- **b)** à l'extérieur du conducteur ($r > R$).
- **c)** Vérifier la continuité du champ B en r = R et représenter B=f(r)
- **d)** calculer le champ B en r = R.

2°/ Le câble précédent est associé à un autre câble identique dans une gaine isolante de diamètre 5.5 cm. Ils sont tous les deux séparés de 0.5 cm et parcourus par le même courant dans le même sens. Calculer la valeur du champ B

- **a)** au centre de la gaine
- **b)** au bord de la gaine

HAE302 : Partie Circuits et composants CAPACITIFS

Contrôle Continu du 14/11/2024 : Durée 45 mn, noté sur 10 pts

Tous documents interdits – Calculatrices autorisées - A composer sur 1 copie séparée

Exercice 3 (6pts)

On suppose un potentiel défini en tout point de l'espace par la fonction :

$$V(x,y,z) = -3\,x^2 - 5xy + 10yz.$$

1) Calculer l'expression du vecteur champ électrique $\overrightarrow{E(x,y,z)}$ en tout point de l'espace.

2) Calculer la circulation de ce vecteur allant du point (0,0,0) au point (2,2,2) le long des deux chemins suivants :

a) Le segment de droite allant de (0,0,0) à (2,2,2)

b) Les segments de droite allant de [(0,0,0) à (2,0,0)] puis de [(2,0,0) à (2,2,0)] et enfin de [(2,2,0) à (2 ,2,2)].

3) On considère un cube limité par x=0, x=2, y=0, y=2, z=0 et z=2 (Figure 1) Les surfaces élémentaires liées aux 6 surfaces définissant ce cube sont :

$dS_1 = dx\,dz$ pour y=0
$dS_6 = dx\,dz$ pour y=2
$dS_3 = dy\,dz$ pour x=0
$dS_5 = dy\,dz$ pour x=2
$dS_2 = dx\,dy$ pour z=0
$dS_4 = dx\,dy$ pour z=2

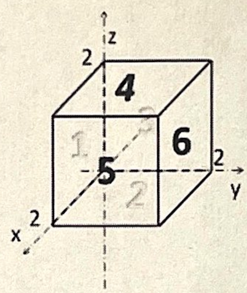


Figure 1

a) Exprimez les coordonnées des vecteurs unitaires associés à chacune de ces 6 surfaces.

b) Calculez le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{E(x,y,z)}$ à travers ce cube.

c) Conclure sur le résultat obtenu.

Exercice 4 (4pts)

On considère trois charges ponctuelles Q_0, Q_1 et Q_2 positionnées dans le plan x,y (Figure 2). Les coordonnées sont en mètre.

Q_0 est une charge négative valant -1 µC placée au point de coordonnées (0,0).

Q_1 est une charge positive valant 2 µC placée au point de coordonnées $(\sqrt{2}/_2, \sqrt{2}/_2)$.

Q_2 est une charge positive valant 4 µC placée au point de coordonnées $(-1/_2, -\sqrt{3}/_2)$.

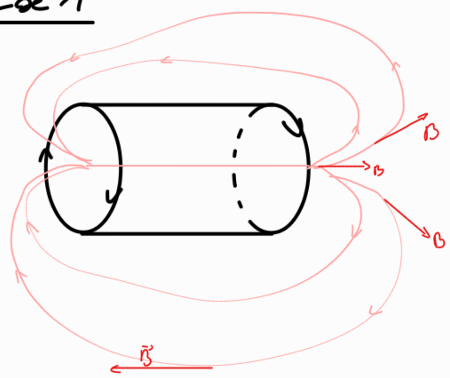
Rappel : $\epsilon_0 = \frac{1}{4\,\pi 10^9}$ en $\frac{F}{m}$

$\cos(45) = \sin(45) = \sqrt{2}/_2$

$\cos(60) = \sin(30) = 1/2$

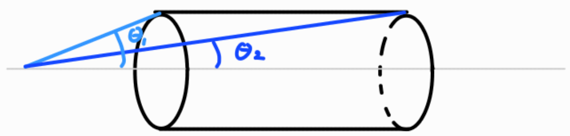
$\sin(60) = \cos(30) = \sqrt{3}/_2$

Exo 1



2)

D'apres $B = N\dfrac{\mu_0 i}{2R}\sin\theta^3$ pour une bobine plate



Soit

$\tan\theta = \dfrac{R}{\ell}$

$\ell = \dfrac{R}{\tan\theta}$

$d\ell = \dfrac{-R}{\sin^2\theta}\,d\theta$

Via l'expression on tire $d\vec{B}$

$d\vec{B} = \dfrac{n.d\ell.\mu_0 i}{2R}\sin\theta^3$

$\Leftrightarrow \dfrac{-n.\cancel{R}\mu_0 i \sin\theta^3}{2\cancel{R}\sin\theta^2}$

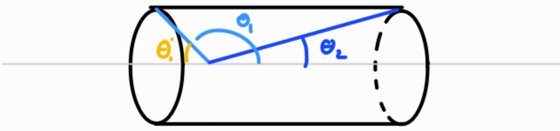
$dB = \dfrac{-n\mu_0 i\sin\theta}{2}$

Soit pour $B = \dfrac{-n\mu_0 i}{2}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta$

$B = \dfrac{-n\mu_0 i}{2}\left[-\cos\theta_2 + \cos\theta_1\right]$

$B = \dfrac{n\mu_0 i}{2}\left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right]$

b) Pour l'intérieur du solénoïde fini on a :



$B = \frac{n\mu_0 i}{2}[\cos\theta_2 - \cos\theta_1]$ → Via l'expression on veut l'exprimer avec θ_1'

$B = \frac{n\mu_0 i}{2}[\cos\theta_2 - \cos(\pi - \theta_1')]$

$\Leftrightarrow B = \frac{n\mu_0 i}{2}[\cos\theta_2 - (-\cos(\theta_1'))]$

$B = \frac{n\mu_0 i}{2}[\cos\theta_2 + \cos\theta_1']$

c) Soit pour les valeurs indiquées on a :

$l \gg R$

d'où l'approximation du solénoïde infini car θ_1' et $\theta_2 \simeq 0°$

$B = \frac{n\mu_0 i}{\cancel{2}}(\cancel{2}) = \frac{N}{l} \times \mu_0 \times i$

$= \frac{350}{1} \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 1$

$\simeq 4{,}34 \text{ mT}$

Exo 2

1°)

a) Pour $r < R$

$\oint_\Gamma B \cdot dl = \mu_0 \sum_\Gamma i$

$B\, 2\pi r = \mu_0 j \cdot \pi r^2$

$B = \frac{\mu_0 j \cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}{2\cancel{\pi}\cancel{r}}$

$B = \frac{\mu_0 j r}{2}$

$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

b) Pour $r > R$

$\oint_\Gamma B \cdot dl = \mu_0 \sum_\Gamma i$

$B\, 2\pi r = \mu_0 j \pi R^2$

$B = \frac{\mu_0 j \pi R^2}{2\pi r}$

$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2 r \times \pi R^2}$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times \frac{1}{r}$

c) La continuité du champ est en :

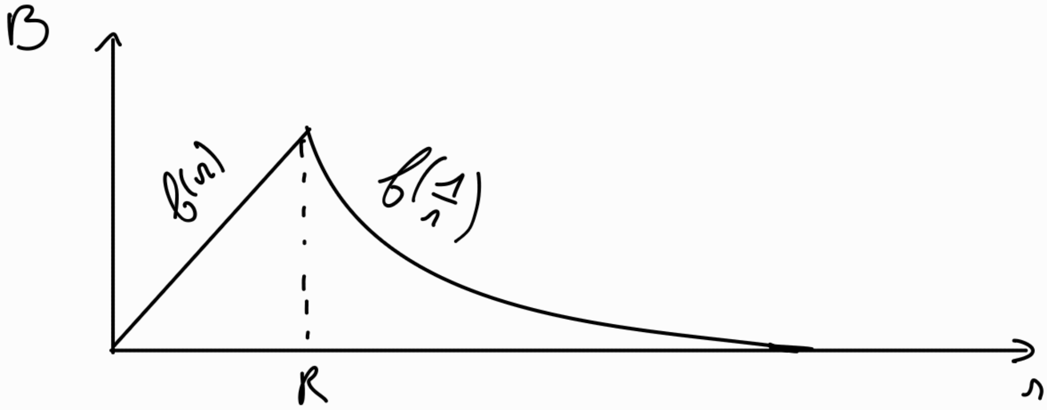
$\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times \frac{1}{r}$

$\frac{r}{R^2} = \frac{1}{r}$

$\frac{r^2}{R^2} = 1$

$r = R$

d)



2)

a) Au centre de la gaine, par symetrie on observe que B_1 et B_2 sont s'opposer.
Etant de valeur egale car les cable les generant sont en tout point identique:

$$\underline{B = 0}$$

b) Soit au bord de la gaine,

$$\oint_{\Gamma} B \cdot dl = \mu_0 \sum_{\Gamma} i$$

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 j \, \pi r_c^2 \times 2$$

$$B = \frac{\mu_0 j \pi r_c^2 \times 2}{2\pi R}$$

$$= \frac{\mu_0 j \, r_c^2}{R}$$

$$= \frac{\mu_0 I \, r_c^2}{R \times \pi r_c^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{R \times \pi}$$

$$= \frac{4\pi 10^{-7} \times 50}{0{,}1 \times \pi}$$

$$= 2 \times 10^{-4}$$

$$\underline{B = 0{,}2 \text{ mT}}$$

Partie Capacitif

Exe 3

1) d'Apres $V(x,y,z) = -3x^2 - 5xy + 10yz$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

$$-\vec{E} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -6x - 5y$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -5x + 10z$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = +10y$$

$-E = -6x - 5y, -5x + 10z, 10y$

$\vec{E} = 6x + 5y, 5x - 10z, -10y$

2)
a) Soit x, y, z → Varie de la facon homogene en x,y,z

Soit on peux faire varier tout en dx

$$C = \int_0^2 6x + 5x\, dx + \int_0^2 5x - 10x\, dx - \int_0^2 10x\, dx$$

$$C = \int_0^2 9x - 5x - 10x$$

$$= \int_0^2 -6x\, dx$$

$$= \frac{-6}{2}[x^2]_0^2$$

$$= -\frac{6}{2} 4$$

$$C = -12$$

b) Pour le segment de $(0,0,0)$ a $(2,0,0)$

$\vec{E} = 6x + 5y, 5x - 10z, -10y$

ou y et $z = 0$

dy et $dz = 0$

$$C_1 = \int_0^2 6x + 5y\, dx$$

$$= 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= 24$$

Pour $(2,0,0)$ à $(2,2,0)$

$x=1 \quad dx=0$
$z=0 \quad dz=0$

$$C_2 = \int_0^2 5x - 10z \, dy$$

$$= \int_0^2 5 \, dy$$

$$= 5[y]_0^2$$

$$= 10$$

Pour $(2,2,0)$ à $(2,2,2)$

$x=1 \quad dx=0$
$y=1 \quad dy=0$

$$C_3 = \int_0^2 -10z \, dz$$

$$-10 \times [z]_0^2$$

$$C_3 = -20$$

$$C_{Tot} = C_1 + C_2 + C_3$$

$$= 24 + 10 - 20$$

$$\underline{= 14}$$

3) $\vec{dS_1} = dS_1 \cdot -\vec{u_y}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{dS_2} = dS_2 \cdot -\vec{u_z}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{dS_3} = dS_3 - \vec{u_x}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{dS_4} = dS_4 \cdot \vec{u_z}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{dS_5} : dS_5 \cdot \vec{u_x}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{dS_6} : dS_6 \cdot \vec{u_y}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b)

$$\Phi_1 = \iint_S E \cdot dS_1$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 6x+5y \\ 5x-10z \\ -10y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^2\!\!\int -5x+10z \, dx\, dz \quad \text{au } y=0$$

$$\int_0^2 -10+20z \, dz$$

$$[-10z+10z^2]_0^2 \quad = -20+40$$
$$\underline{=20}$$

$$\Phi_2 = \iint_0^2 E \cdot dV$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 6x+5y \\ 5x-10z \\ -10y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^2\!\!\int_0^2 10y \, dx\, dy$$

$$= \int [10yx]_0^2 \, dy$$

$$= \int 20y \, dy$$

$$= \left[\frac{20}{2}y^2\right]_0^2$$

$$= 10 \times 4$$

$$\underline{= 40}$$

$$\Phi_3 = \iint_0^2 E \cdot dV$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 6x+5y \\ 5x-10z \\ -10y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^2\!\!\int_0^2 -6x-5y \, dy\, dz \quad \text{au } x=0$$

$$= \iint_0^2 -5y \, dy \, dz$$

$$= \int_0^2 \left[-\frac{5}{2}y^2\right]^2$$

$$= \int_0^2 -\frac{20}{2} \, dz$$

$$= \int -10 \, dz$$

$$= [-10z]_0^2$$

$$\underline{= -20}$$

$$\Phi_4 = \iint_0^2 E \cdot dV$$

$$= \iint -10y \, dx \, dy$$

$$= \int \left[-10yx\right]_0^2 dy$$

$$\int_0^2 -20y$$

$$\left[\frac{-20}{2} y^2\right]_0^2$$

$$= \underline{-40}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 6x+5y \\ 5x-10z \\ -10y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_5 = \iint E \cdot dV$$

$$= \iint_0^2 6x+5y \qquad \text{avec } x=2$$

$$= \iint_0^2 12+5y \, dy \, dz$$

$$= \int \left[12y + \frac{5y^2}{2}\right]_0^2 dz$$

$$\int_0^2 24+10 \, dz$$

$$\int_0^2 34 \, dz$$

$$\underline{= 68}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 6x+5y \\ 5x-10z \\ -10y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_6 = \iint_0^2 E \cdot dV$$

$$\iint_0^2 5x-10z \, dx \, dz$$

$$\int_0^2 \left[\frac{5x^2}{2} - 10zx\right]^2 dz$$

$$\int_0^2 10 - 20z \, dz$$

$$\left[10z - \frac{20z^2}{2}\right]_0^2$$

$$20 - 40$$

$$\underline{= -20}$$

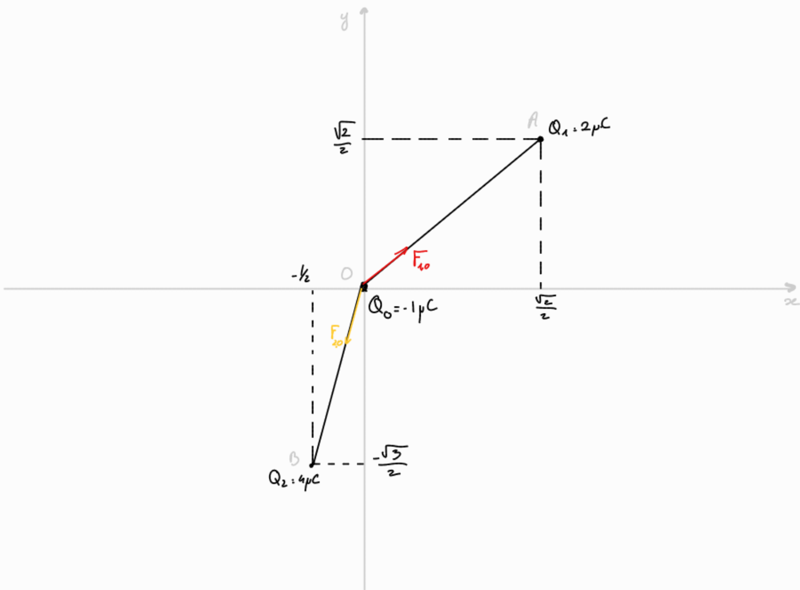
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 6x+5y \\ 5x-10z \\ -10y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Soit $\Phi_T = \Phi_1 + \Phi_2 \dots \Phi_6$

$= 48$

c) Soit un flux globalement sortant : un générateur de flux se trouve dans le volume du cube.

Ex 4)



a) Soit $\overrightarrow{F(x,y)_{1,0}}$:

$$F_{el} = q \cdot E$$

$$= \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_0 \cdot Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \left(\frac{\vec{AO}}{|\vec{AO}|}\right)$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= 1$$

$$\frac{Q_0 \cdot Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$F_1 = -18 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

en x $F_1 = 12728 \frac{V}{m}$

en y $F_1 = 12728 \frac{V}{m}$

Pour $F(x,y)_{20}$

$F_{el} = q \cdot E$

$F_{el} = \dfrac{q \cdot q'}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{u}$

ou $r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{Q_0 \cdot Q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \cdot \left(\dfrac{\vec{BO}}{|\vec{BO}|}\right)$

$\dfrac{Q_0 \cdot Q_1}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$-36 \cdot 10^3 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$

en x $F_2 = -18000 \frac{V}{m}$

en y $F_2 = -31177 \frac{V}{m}$

c) Soit $\vec{F_T} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$\vec{F_T} = \begin{pmatrix} 12728 - 18000 \\ 12728 - 31177 \end{pmatrix}$

$\vec{F_T} = \begin{pmatrix} -5272 \cdot \vec{u_x} \\ -18449 \cdot \vec{u_y} \end{pmatrix}$

$|\vec{F_T}| = 19187 \frac{V}{m}$

d) si Q_1 et Q_2 sont fixe :

alors Q_0 sera rapprocher de Q_2 car il exerche une force plus grande que $Q_{1 \to 0}$

jusqu'a un point d'equilibre ou $F_{1 \to 0} = F_{2 \to 0}$ ou Q_0 serait stable dans l'espace.