Unité d'enseignement HLEE 204 : Energie Electrostatique

Contrôle Continu n°1 de mars 2020 : Durée 1h15mn

On rappelle : permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 1/(36\pi 10^9)$ F/m et $1/(4\pi\varepsilon_0)=9.10^9$ SI

Exercice 1 – Produit Scalaire et Produit Vectoriel (6 points)

Dans un repère orthonormé $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{CA} = \vec{\imath} - 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{CB} = 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$.

1- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

2- En déduire l'angle au point C : $\widehat{ACB}$

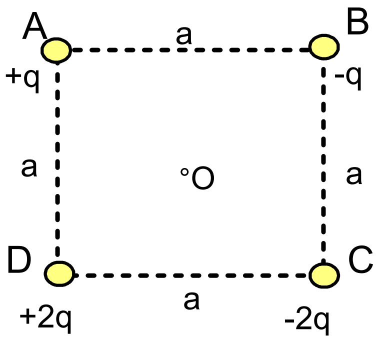
3- Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{W}$

4- Montrer que $\overrightarrow{W}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{CA}$ et à $\overrightarrow{CB}$

Exercice 2 (7 points) : Champ et potentiel électrostatique créé par une distribution de charges ponctuelles

Soit 4 charges ponctuelles placées au coin d'un carré ABCD de coté a. On rappelle que la diagonale du carré est égale à $a\sqrt{2}$.

On donne $q=1\times10^{-8}$ C et a = 5 cm.

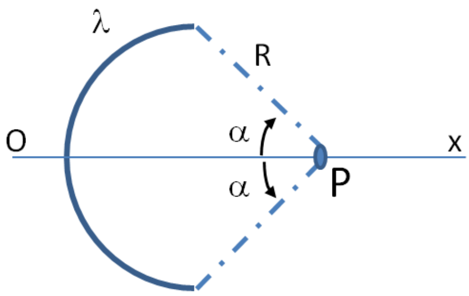


1- Représenter au point O, centre du carré, les 4 champs électriques créés par les 4 charges ponctuelles.
2- En utilisant les symétries du système, calculer la direction et la grandeur du vecteur champ électrique total $\vec{E}$ (norme du vecteur) au point O, centre du carré
3- Calculer le potentiel V_O au point O, centre du carré.
4- Calculer le potentiel V_A au point A.

Exercice 3 : Champ créé en 1 point par un arc de cercle (7 pts).

On veut calculer le champ électrique créé par un arc de cercle de rayon R vu du centre au point P sous un angle 2α et portant une densité linéïque de charge λ constante et positive.

1- Pour une charge élémentaire dq de l'arc de cercle, représenter le vecteur champ électrique $d\vec{E}$ au point P



2- Suivant des considérations de symétrie, représenter le champ total $\vec{E}$ au point P engendré par la totalité de l'arc de cercle chargé.

3- Déterminer l'expression du champ électrique total E en fonction de α, λ et R.

4- Calculer E pour $\alpha = 45°$, R = 20cm et $\lambda = q=1\times10^{-8}$ C/m.

5- En déduire la valeur du champ électrique au centre d'un cercle de rayon R portant une densité linéïque de charge λ constante et positive.

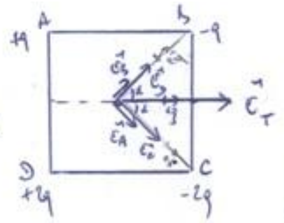
Exercice 1 – Produit Scalaire et Produit Vectoriel (5 points)

Dans un repère orthonormé $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{CA} = \vec{\imath} - 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{CB} = 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$.

1°/ $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ = 9 2°/ $\|\overrightarrow{CA}\| \, \|\overrightarrow{CB}\| \cos\alpha \ = \sqrt{10}\ \sqrt{13} \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = 0.79 \ \rightarrow\ \alpha\ = 37.9°$

3°/ $\vec{W} = 6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ 4°/ $\vec{W}.\overrightarrow{CA} = 0\ ;\ \vec{W}.\overrightarrow{CB} = 0$

Exercice 2 (7 points) : Champ et potentiel créé par une distribution de charges ponctuelles



$q = 1 \cdot 10^{-6}$ C

$a = 5$ cm

$8{,}84 \cdot 10^{-12}$ F/m.

$\vec{E}_{T\,en\,O} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$

$\begin{cases} \vec{E}_A = \dfrac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_x = \dfrac{+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_x \text{ avec } r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ \vec{E}_C = \dfrac{q_C}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_x = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_x \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{E}_B = \dfrac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_y = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_y \\ \vec{E}_D = \dfrac{q_D}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_y = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_y \end{cases}$

$\Rightarrow$ Projection de tous les vecteurs suivant $\vec{e}_3$.
soit $\alpha = 45°$ et $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc suivant $\vec{e}_3$ $\begin{cases} E_A = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ E_B = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ E_C = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ E_D = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{E}_T = \dfrac{6q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_3$

$\vec{E}_T = \dfrac{6q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sqrt{2}}{a^2}\vec{e}_3 = 30{,}55 \cdot 10^4$ V/m.

Potentiel en O : $V_0 = \sum_i V_i \rightarrow V_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}[q_A + q_B + q_C + q_D] = 0$ V.

Potentiel en A : $V_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}(-q + 2q] + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r'}(-2q) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[q - \dfrac{2\sqrt{2}q}{2}\right] = -\dfrac{0{,}41q}{4\pi\varepsilon_0 a} = -745$ V
$r' = a\sqrt{2}$

Exercice 3 : Champ créé en 1 point par un arc de cercle (8 pts).

Un élément de longueur dl de l'arc chargé portant une charge $dq = \lambda dl$ créé en O un champ $d\vec{E}$ de module

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R^2} .$$

Un élément identique dl' symétrique de dl par rapport à la bissectrice de l'angle créé en O un champ $d\vec{E}'$ symétrique de $d\vec{E}$. La résultante est donc portée par la bissectrice. Le champ résultant est donc porté par la bissectrice.

Soit dE_1 la composante intéressante de dE (projection de $d\vec{E}$ sur la bissectrice) :

$$dE_1 = dE\cos\theta$$

soit
$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R^2}\cos\theta$$

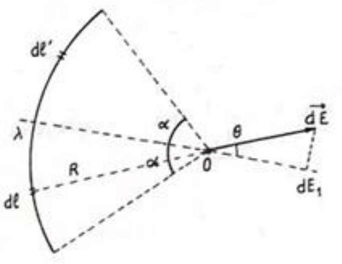
Or $dl = R d\theta$

$$dE_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta d\theta$$

Le champ total $\vec{E}$ a donc pour module

$$E = \int_{-\alpha}^{+\alpha} dE_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\theta d\theta$$

d'où
$$\boxed{E = \frac{\lambda\sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0 R}}$$



pour $\alpha = 45°$, $E = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R}$ = 565 V/m

pour $\alpha = 90°$, $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$ = 800 V/m Au centre d'un cercle pour $\alpha = 180°$, $E = 0$