LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Sommaire

Introduction

Ce chapitre aborde les développements limités de fonctions, qui permettent d'exprimer n'importe quelle fonction avec des polynômes. On peut ainsi approcher une fonction quelconque avec des polynômes, qui ont l'avantage de se calculer facilement.

Ce chapitre est essentiellement calculatoire, il y a peu de propriétés ou théorèmes à savoir, par contre les développement limités usuels sont à connaître par cœur ! Il y en a beaucoup mais rassure-toi, nous allons te donner des moyens mnémotechniques pour t'en souvenir 😉

Dans la suite, développement limité sera parfois abrégé en DL (tous les professeurs font cette abréviation, elle se retrouve même dans les livres).
Le DL à l'ordre 1 s'écrit même DL1, celui à l'ordre 2 s'écrit DL2, etc…

Prérequis : à propos du petit o

Avant d'étudier les développements limités à proprement parler, il faut faire quelques rappels sur le petit o de x^n, noté $o(x^n)$.
On considère 2 fonctions f et g, et un réel a, tels que :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Alors on peut dire que f est négligeable devant g au voisinage de a (il est important de préciser au voisinage de quel point !).

En effet, au voisinage de 0 par exemple, x est négligeable devant 1/x, mais au voisinage de 100, c'est 1/x qui est négligeable devant x ! Donc juste dire 1/x est négligeable devant n'a pas de sens si on ne précise pas au voisinage de quel point.

Quand f es négligeable devant g au voisinage de a, on écrit alors :

$$f(x) = \circ(g(x))$$

Dans la quasi totalité du chapitre, le a vaudra 0 car nous ferons les DL au voisinage de 0.
Nous ne préciserons donc pas à chaque fois au voisinage de 0, ce sera sous-entendu.
Voyons alors les particularités des petit o au voisinage de 0.

Le plus important est la propriété suivante :

$$\forall p > n, x^p = \circ(x^n) au\ voisinage\ de\ 0$$

Ainsi, $x^5 = o(x^3)$, $x^9 = o(x^6)$ etc… au voisinage de 0 évidemment.

En effet, $x^5/x^3 = x^2$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0.
De même, $x^9/x^6 = x^3$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

L'idée est que le $o(x^n)$ va « absorber » toutes les puissances de x supérieures à n.
Ainsi par exemple : $x^5 + 3x^7 – 8x^4 + o(x^2) = o(x^2)$ au voisinage de 0.

$$\forall p > n, x^p + \circ(x^n) = \circ(x^n)$$

Nous verrons que cela simplifie grandement les développements limités.

Après ce petit préambule, voyons maintenant comment trouver les développements limités.

Formule de Taylor-Young

Haut de page

Les développements limités sont basés sur la formule de Taylor.
Oui mais laquelle, car il existe plusieurs formules de Taylor !!
En effet, il y a celle avec reste intégral, celle avec reste $f^{(n+1)}(c)$, et la formule de Taylor-Young.

Dans les 3 cas, cela permet d'écrire f(x) sous la forme d'une somme d'un polynôme appelé $P_n(x)$ et d'un reste appelé $R_n(x)$: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

$P_n(x)$ est appelé la partie polynomiale de la formule de Taylor.

Pour les 3 formules, **la partie polynomiale est la même**, seul le reste change.

Pour les DL, seule la formule de Taylor-Young sera utile donc nous ne donnerons que cette formule.

On considère alors une fonction f définie sur un intervalle I et un entier naturel n.
Pour pouvoir appliquer cette formule, il faut que la fonction f soit de **classe C^n sur I, c'est-à-dire qu'elle soit n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ soit continue.**
Remarque : si f est de classe C^∞, cela signifie qu'elle est de classe C^n pour tout n. Autrement dit elle est dérivable une infinité de fois. C'est le cas des polynômes, de cosinus, sinus et exponentielle notamment.

On peut alors écrire que **pour tout réel a appartenant à l'intervalle I**, on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \circ((x-a)^n)$$

On peut aussi écrire cette formule sous forme de somme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \circ((x-a)^n)$$

Il s'agit du développement limité de f à l'ordre n au voisinage de a.

On voit bien la partie polynomiale jusqu'à $(x-a)^n$, le reste est simplement $o((x-a)^n)$.
On peut aussi écrire le reste sous la forme $(x-a)^n\varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers a mais cela n'a pas d'intérêt ici.

La plupart du temps, on prend a = 0, ce qui simplifiera les calculs.
Tous les DL usuels à apprendre par cœur sont d'ailleurs les DL en 0.

Voyons tout de suite l'exemple d'application le plus simple que l'on puisse avoir.
On prend $f(x) = e^x$.
f est évidemment de classe C^∞, on peut donc prendre n = 4 par exemple.
On cherche le DL à l'ordre 4 de f en 0 (donc a = 0).
D'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f''''(0)}{4!}x^4+\circ(x^4)$$

Or f(x) = e^x donc f '(x) = f ' '(x) = f ' ' '(x) = f ' ' ' '(x) = e^x

Donc f '(0) = f ''(0) = f '''(0) = f ''''(0) = e^0 = 1

Ainsi, au voisinage de 0, en remplaçant les factorielles :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)$$

Il s'agit d'une formule extrêmement simple à retenir !

Attention cela n'est vrai qu'au voisinage de 0, c'est-à-dire pour x proche de 0.

Maintenant que tu as compris le principe général des développements limités, voyons les DL usuels que tu dois retenir par cœur.

Développements limités usuels

Haut de page

Nous allons donner les formules des développements limités usuels que tu rencontreras le plus souvent, et qui serviront à calculer des DL moins usuels non présents ci-dessous.

Par exemple, à partir du DL de cos(x) et de sin(x), tu pourras trouver celui de tan(x).

Comme dit précédemment, **tous les DL ci-dessous sont au voisinage de 0** car cela simplifie la formule (puisque a = 0).

Nous ne ferons pas les démonstrations de ces formules dans le cours (sauf quelques-unes en exemple), mais nous en ferons dans les exercices en vidéo. Il s'agit tout simplement d'appliquer la formule de Taylor-Young.

Il est conseillé évidemment de t'entraîner à les trouver tout seul, car si jamais tu oublies une formule (ce qui peut arriver), tu dois être en mesure de la redémontrer en utilisant la formule de Taylor-Young.

Après avoir donné les formules, nous verrons quelques moyens mnémotechniques pour s'en souvenir.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\circ(x^n)$$

$$cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\circ(x^{2n+1})$$

$$sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\circ(x^{2n+2})$$

$$ch(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots$$

$$+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\circ(x^{2n+1})$$

$$sh(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots$$

$$+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\circ(x^{2n+2})$$

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\circ(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4\dots$$

$$+(-1)^nx^n+\circ(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4\dots+x^n+\circ(x^n)$$

Plusieurs remarques : le DL de $(1 + x)^{\alpha}$ permet de trouver celui de $1/(1 + x)$ en prenant $\alpha = -1$.
Le DL de 1/(1+x) permet de trouver celui de 1/(1-x) en remplaçant x par (-x), c'es-à-dire en faisant un changement de variable.
L'intérêt du 1/(1-x) par rapport au 1/(1+x) est que l'on n'a pas d'alternance de signe + et -.

Le changement de variable peut également être fait pour cos et ch, ainsi que pour sin et sh.
En effet, on sait que cos(x) = ch(ix) et sin(x) = sh(ix)/i : pour trouver le DL de cos(x), on peut donc prendre celui de ch(x) et remplacer x par ix.

Mais pour les DL des fonctions trigonométriques comme cos, sin, sh ou ch, il est préférable d'utiliser les moyens mnémotechniques que nous allons donner ci-dessous.

En effet, tu as dû remarquer que plusieurs formules se ressemblaient, mais il existe des moyens simples pour les retenir.
Tout d'abord :

—

Quand une fonction est paire, son DL ne comporte que des puissances de x paires.
De même, le DL d'une fonction impaire ne comporte que des puissances de x impaires.
Quand elle n'est ni paire ni impaire, elle comporte à priori toutes les puissances de x (sauf exception).

—

Ce principe est vrai pour les DL usuels mais aussi pour les DL de n'importe quelle fonction.
Ainsi, le DL de cos(x) ne comporte que des puissances paires (x^2, x^4, x^6 etc…) car cos est une fonction paire.
De même, le DL de sin(x) ne comporte que des puissances impaires (x^3, x^5, x^7 etc…) car sin est une fonction impaire.
En revanche, ln(1+x) n'est ni paire ni impaire, donc son DL comporte toutes les puissances de x (x, x^2, x^3, x^4 etc…), comme e^x par exemple.

Par ailleurs, pour e^x, ch(x), sh(x), cos(x) et sin(x), tu as peut-être remarqué une particularité :

—

Le DL de ch(x) est la partie paire de e^x.
Le DL de sh(x) est la partie impaire de e^x.

—

Cela est plutôt logique car e^x = ch(x) + sh(x) : cette égalité traduit la décomposition de e^x en une fonction paire + une fonction impaire. Si on additionne le DL de ch(x) et celui de sh(x), on retrouve d'ailleurs celui de e^x.

Le DL de cos(x) est le même que celui de ch(x) mais avec une alternance de signe (+ et -).
De même, Le DL de sin(x) est le même que celui de sh(x) mais avec une alternance de signe.
Cela est dû au fait que cos(x) = ch(ix) et sin(x) = sh(ix)/i.
En effet, prenons le terme général du DL de ch(x) :

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Remplaçons x par ix :

$$\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}$$

On a :

$$\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} = \frac{i^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} = \frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!}$$

On retrouve le terme général du DL de cos(x) : l'alternance des signes + et – de ce DL vient du $(-1)^n$, qui vient du i^{2n} comme on vient de le voir dans le calcul ci-dessus.

De plus, **le terme constant du DL est obtenu en remplaçant x par 0, ce qui est normal car dans la formule de Taylor le terme constant est f(0)**.

—

Attention cela n'est vrai que pour les DL au voisinage de 0.
De manière générale, pour les DL au voisinage de a, le terme constant est f(a).

—

Ainsi, cos(0) = 1 donc le terme constant est 1.
sin(0) = 0 donc le terme constant est 0.
Cela est important car c'est le premier terme du DL. Nous verrons dans les vidéos que c'est une technique rapide permettant de vérifier la cohérence du résultat obtenu.

Terminons par une petite remarque qui a son importance.
Tu as peut-être remarqué que le DL de cos(x) s'arrête à x^{2n} mais on a $o(x^{2n+1})$: cela est dû au fait que, comme on vient de le voir, le DL de cos(x) ne comporte que des puissances paires : la puissance suivante serait donc x^{2n+2} : il n'y a pas de x^{2n+1}, donc on peut très bien mettre $o(x^{2n+1})$.

—

Il en est de même pour toutes les fonctions paires ou impaires : la précision du $o(x^n)$ est plus importante que celle issue de la simple application de la formule de Taylor : on peut aller à une puissance de x supérieure (1 de plus).

—

Ainsi, si on fait le DL de cos(x) à l'ordre 6, la plus grande puissance de x sera x^6 mais on pourra mettre $o(x^7)$.

Les DL des fonctions non usuelles, comme tan(x), th(x) etc… vont généralement se déduire des DL ci-dessus en utilisant plusieurs principes que l'on va détailler.

Produit de DL

Haut de page

Remarque : dans tout ce qui suit nous ferons les DL au voisinage de 0, sauf dans la dernière partie spécifique aux DL au voisinage d'un nombre différent de 0. Nous ne préciserons donc pas à chaque fois qu'il s'agit du DL au voisinage de 0, ce sera sous-entendu.

Commençons par le plus simple, à savoir les produit de DL.
Le principe est le suivant : on a deux fonctions f et g dont on connaît le DL à l'ordre n, on cherche le DL de f × g à l'ordre n.
Pour cela, il suffit de multiplier les DL mais avec une particularité : **on ne garde que les puissances inférieures ou égales à n**. Les puissances supérieures à n seront en effet absorbées par le $o(x^n)$ comme on l'a vu dans le prérequis.

Ainsi, si l'on cherche le DL à l'ordre 4, et qu'en multipliant on arrive à un terme en x^5, ce terme disparaîtra.
En effet, $2x^5 - 7x^6 + o(x^4) = o(x^4)$ par exemple : le $o(x^4)$ absorbe les termes de puissance supérieure à 4.

Quand on multiplie, il est donc inutile d'écrire les termes qui vont être absorbés.
De même, si on fait un DL à l'ordre 4, on écrira uniquement $o(x^4)$: les autres petit o du calcul ne seront pas écrits car absorbés par le $o(x^4)$.

Voyons un exemple où l'on va d'abord tout écrire pour que tu puisses bien comprendre, puis nous ferons le même exemple en simplifiant.
On cherche le DL à l'ordre 3 de cos(x) × e^x.
On écrit alors le DL à l'ordre 3 de cos(x) et celui de :e^x :

$$cos(x) \times e^x =$$

$$(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)) =$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{12} + o(x^3)$$

Le $o(x^3)$ absorbe les termes de puissance 4 et 5, d'où :

$$cos(x) \times e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Il ne reste plus qu'à regrouper les puissances de x.
Dans cet exemple il n'y a que 2 termes qui s'annulent, donc tu peux très bien les écrire et les simplifier après comme on vient de le faire (et encore, on n'a pas écrit tous les petit o…)
Mais s'il y a beaucoup de termes, mieux vaut simplifier dès le début et ne pas écrire les termes qui s'annulent.
Reprenons notre exemple, mais cette fois-ci à l'ordre 5 :

$$cos(x) \times e^x =$$

$$(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5))(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))$$

Si on développait tout on aurait 28 termes à écrire, alors qu'en réalité il n'y en a que 12 (ce qui est déjà beaucoup) qui ne seront pas absorbés.
En effet, quand on va multiplier $-x^2/2$ par x^4, x^5 et x^6, on aura une puissance supérieure à 5.
De même, quand on multipliera $x^4/24$ par x^2, x^3, x^4 et x^5 on aura une puissance supérieure à 5. Il n'y a donc pas d'intérêt à écrire ces termes qui seront absorbés par $o(x^5)$.

Nous verrons dans les exercices en vidéo d'autres exemples similaires.

Composition

Haut de page

Outre les produits de DL, on peut également composer les DL, en faisant des changements de variable.
Voyons un exemple simple : on cherche le DL à l'ordre 4 en 0 de ln(cos(x)).

On va d'abord faire le DL de cos(x) puis l'injecter dans la formule pour trouver le changement de variable.
A l'ordre 4 :

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$$

On a donc :

$$ln(cos(x)) = ln(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4))$$

Or on connaît le DL de ln(1 + u).
Ici on a bien ln(1 + u) en posant :

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$$

<u>Remarque</u> : comme on est au voisinage de 0, x est proche de 0, donc u est bien proche de 0 d'après l'expression de u. On peut donc bien faire le DL de ln(1 + u) au voisinage de 0.

On applique donc le DL de ln(1+u) à l'ordre 4 :

$$ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4)$$

Sauf que la puissance minimale de u est x^2, donc $u^2 = o(x^4)$.
Ainsi u^3 et u^4 vont être absorbés par $o(x^4)$, donc on fait le DL à l'ordre 2 en u :

$$ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \circ(u^2)$$

Pour u^2, tous les termes seront de puissance supérieure à 4, sauf $(-x^2/2)^2 = x^4/4$.
On aura donc :

$$ln(1+u) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4) - \frac{x^4}{8}$$

$$ln(cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^4)$$

–

Il est important de retenir ici que quand on fait un changement de variable, et que l'on fait un DL avec la nouvelle variable (ici ln(1+u)), ce DL n'est pas forcément à faire à l'ordre n que l'on cherche.

–

Dans notre exemple, on fait le DL à l'ordre 4, et pourtant on ne fait le DL de ln(1+u) qu'à l'ordre 2, car u^3 et u^4 donnent des puissances supérieures à 4.

Dans les exercices en vidéo ce principe sera très souvent utilisé.

Nous verrons d'ailleurs en exercice que la composition de DL est très souvent utilisée, notamment dans les divisions de DL.
Voyons justement la division de développements limités.

Division de DL

Haut de page

On pourra te demander de trouver le DL de f(x)/g(x), où f et g sont deux fonctions dont on connaît les DL.
Par exemple, comme tan(x) = sin(x)/cos(x), il faut faire le DL de ce quotient afin de trouver le DL de tan(x).

En réalité, comme on a :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$$

cela revient à faire un produit de DL.
Par hypothèse on a le DL de f(x). Par contre on a celui de g(x), mais pas celui de 1/g(x).

La question est donc de trouver le DL de 1/g(x) à partir de celui de g(x).
Pour ce faire, **nous allons utiliser le DL de 1/(1+x) ou 1/(1-x) selon les cas, et effectuer un changement de variable.**

Commençons par un cas simple, celui de 1/cos(x) (qui servira à calculer le DL de tan(x)).
On va chercher le DL à l'ordre 4 en 0 de 1/cos(x).
On rappelle que le DL4 de cos(x) est :

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$$

On a donc :

$$\frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)}$$

On fait alors apparaître 1/(1+u), en posant :

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$$

On a ainsi:

$$\frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{1+u}$$

1/(1+u) est une fonction dont on connaît le DL, d'où à l'ordre 4 :

$$\frac{1}{cos(x)} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + \circ(x^4)$$

Il s'agit alors de remplacer u par l'expression ci-dessus.
Mais attention, comme on est à l'ordre 4, on ne conserve que les puissances de x inférieures ou égales à 4, les autres étant absorbées par o(x^4)
On a ainsi :

$$u^2 = \frac{x^4}{4} + \circ(x^4)$$

$$u^3 = \circ(x^4)$$

$$u^4 = \circ(x^4)$$

Autrement dit, comme vu précédemment dans les changements de variable, le u^3 et le u^4 seront absorbés par le o(u^4).
Les détails de ce calcul seront vus dans une vidéo en exercice, ici le but est uniquement de comprendre la division de DL.

En regroupant tout cela, on obtient :

$$\frac{1}{cos(x)} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{x^4}{4} + \circ(x^4)$$

$$\frac{1}{cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \circ(x^4)$$

On remarque que l'on obtient uniquement des puissances paires : normal car 1/cos(x) est une fonction paire.

A noter que l'on a utilisé le DL de 1/(1+u), mais on aurait aussi pu utiliser celui de 1/(1-u).
En effet, on a vu que :

$$\frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)}$$

On peut faire apparaître 1/(1-u) en factorisant par -1 au dénominateur :

$$\frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{1-(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\circ(x^4))}$$

<u>Remarque</u> : normalement on aurait dû avoir -o(x^4) puisque l'on a factorisé par -1, mais -o(x^4) = o(x^4) donc on peut laisser le + devant o(x^4).
On a bien 1/(1-u) en posant :

$$u = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$$

Et là tu vas dire : quel est l'intérêt de faire cela puisque l'on doit factoriser par -1, ce qui augmente les erreurs de calcul ?? 😳
L'intérêt réside dans le DL de 1/(1-u) qui est :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \dots$$

Contrairement à 1/(1+u), il n'y a pas d'alternance de signe + et -, ce qui diminue les erreurs de calcul ! (par contre il faut avoir factorisé correctement par -1 au préalable pour avoir le bon u…).

Les deux méthodes se valent, à toi de voir ce que tu préfères ! 😏

Voyons maintenant un exemple légèrement plus compliqué : le DL à l'ordre 4 en 0 de 1/sin(x).
Le principe de départ est le même :

$$sin(x) = x-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \circ(x^6)$$

<u>Remarque</u> : on a mis o(x^6) car on avait vu que l'on peut aller à une puissance au-dessus pour le sinus, ici cela va avoir toute son importance !
Mais pourquoi aller à l'ordre 5 alors que l'on cherche le DL à l'ordre 4 ? C'est ce que l'on va voir ci-dessous !
On a donc :

$$\frac{1}{sin(x)} = \frac{1}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\circ(x^6)}$$

Le problème ici est que l'on n'a pas de 1 au dénominateur pour faire apparaître 1+u.
Il faut donc d'abord factoriser par x au dénominateur :

$$\frac{1}{sin(x)} = \frac{1}{x(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\circ(x^5))}$$

Et là on voit l'intérêt d'avoir mis o(x^6) et non o(x^5) : quand on factorise par x, le petit o est également factorisé ! On obtient o(x^5), ce qui est bon puisque l'on cherche le DL à l'ordre 4.
Le x peut alors être mis de côté, et on fait le même principe que précédemment en posant :

$$u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \circ(x^5)$$

On a ainsi :

$$\frac{1}{sin(x)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+u}$$

$$\frac{1}{sin(x)} = \frac{1}{x}(1-u + u^2-u^3 + u^4-u^5 + \circ(x^5))$$

En abrégeant le calcul de u, u^2, u^3 etc… (tu peux t'entraîner à le faire ! 😉), on trouve :

$$\frac{1}{sin(x)} = \frac{1}{x}(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \circ(x^5))$$

On simplifie maintenant en développant le 1/x :

$$\frac{1}{sin(x)} = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \circ(x^4))$$

<u>Remarque</u> : quand on développe le 1/x, le o(x^5) est également impacté et devient o(x^4).

On obtient o(x^4), ce qui est correct puisque l'on cherchait le DL à l'ordre 4 !
Si l'on n'avait pas fait le DL à l'ordre 5 de sin(x) au début, on n'aurait pas obtenu le même résultat (cela vient du fait que l'on doit factoriser par x au dénominateur pour faire apparaître 1+u).

Tu vois donc que le principe ressemble fortement à 1/cos(x), avec l'étape supplémentaire consistant à factoriser le dénominateur.
Ne pas oublier à la fin de simplifier en développant.

<u>Remarques</u> : on obtient ici uniquement des puissances impaires : normal car 1/sin(x) est impaire.
De plus, le premier terme est 1/x : c'est tout à fait logique, car si on fait l'équivalent en 0 du DL trouvé, on trouve 1/sin(x) ~ 1/x.
Or si on fait directement l'équivalent de 1/sin(x), on a également 1/x puisque sin(x) ~ x.
On retrouve donc bien le même équivalent en 0, que ce soit avec ou sans le DL.
Il est toujours bon de vérifier cette cohérence car cela permet de détecter une erreur éventuelle dans le résultat final.

Primitive de DL

Haut de page

Si on a le DL à l'ordre n d'une fonction f, on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \circ((x-a)^n)$$

On peut alors faire la primitive et ainsi obtenir le DL de la primitive de f, notée F, à l'ordre n+1 puisque l'on intègre aussi le o(x^n) :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \circ((x-a)^{n+1})$$

–

Attention surtout à ne pas oublier F(a), qui est la constante due à la primitive.
Si on remplace x par a dans la partie polynomiale, on démontre très facilement que la constante est F(a).

–

Cette méthode permet notamment de trouver les DL de fonctions dont la dérivée est une fonction usuelle.
L'exemple le plus classique est arctan.
En effet :

$$arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1/(1+x^2) correspond à 1/(1+u) avec u = x^2 : on retrouve une fonction usuelle. D'où :

$$arctan'(x) = 1 – u + u^2 – u^3 + u^4 \, etc\ldots$$

$$arctan'(x) = 1 – x^2 + x^4 – x^6 + x^8 \, etc\ldots$$

Ainsi, pour trouver le DL en 0 de arctan, il suffit de faire la primitive :

$$arctan(x) = arctan(0) + x – \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} – \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \, etc\ldots$$

Arctan(0) = 0, donc :

$$arctan(x) =$$

$$x – \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} – \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \circ(x^n)$$

Ce résultat n'est pas à apprendre par cœur, c'est la démonstration qui est importante.
On remarque que le résultat final ne comporte que des puissances impaires, ce qui est cohérent puisque arctan est une fonction impaire

Nous verrons évidemment plusieurs exemples en vidéo afin de bien maîtriser cette technique de primitive.

DL en un point différent de 0

Haut de page

Avant de passer aux exercices, voyons les développements limités en un point différent de 0.
En effet, depuis le début nous avons vu des méthodes pour calculer les DL au voisinage de 0 (c'est-à-dire a = 0 dans la formule de Taylor-Young), et les DL usuels sont tous donnés au voisinage de 0.
Mais si on cherche un DL au voisinage d'un autre réel, comment fait-on ?
On va voir que cela revient, après changement de variable, à se ramener à un DL en 0 (d'où l'intérêt de toute l'étude faite précédemment !).

Cherchons par exemple le DL à l'ordre 3 au voisinage de 5 de e^x.
Comme on veut calculer le DL au voisinage de 5, x est proche de 5.
On peut donc poser x = 5 + h, **avec h proche de 0.**
Ainsi :

$$e^x = e^{5+h}$$

$$e^x = e^5 \times e^h$$

Comme h est proche de 0, on peut faire le DL3 de e^h en 0 :

$$e^x = e^5 \times \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \circ(h^3)\right)$$

Il ne reste plus qu'à remplacer h par x – 5 car x = 5 + h donc h = x – 5.
On obtient alors :

$$e^x = e^5 \times \left(1 + x-5 + \frac{(x-5)^2}{2} + \frac{(x-5)^3}{6} + \circ((x-5)^3)\right)$$

Si on veut on peut développer le e^5 :

$$e^x = -4e^5 + xe^5 + e^5\frac{(x-5)^2}{2} + e^5\frac{(x-5)^3}{6} + \circ((x-5)^3)$$

Comme on le voit, grâce au changement de variable avec le h proche de 0, cela revient à faire un DL en 0.

Autre exemple : on cherche le DL à l'ordre 3 de cos(x) au voisinage de π/6
Comme précédemment, on pose x = π/6 + h.
On a alors :

$$cos(x) = cos(\frac{\pi}{6} + h)$$

$$cos(x) = cos(\frac{\pi}{6})cos(h) - sin(\frac{\pi}{6})sin(h)$$

$$cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}cos(h) - \frac{1}{2}sin(h)$$

Comme h est proche de 0, on peut faire le DL de cos(h) et sin(h) au voisinage de 0 à l'ordre 3 :

$$cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \frac{h^2}{2} + \circ(h^3)) - \frac{1}{2}(h - \frac{h^3}{6} + \circ(h^3))$$

$$cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{2} - \sqrt{3}\frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{12} + \circ(h^3)$$

Et de la même manière que précédemment, on remplace h par x – π/6 :

$$cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x - \pi/6}{2} - \sqrt{3}\frac{(x - \pi/6)^2}{4} + \frac{(x - \pi/6)^3}{12} + \circ((x - \pi/6)^3)$$

Là encore cela revient à faire un DL en 0, sauf qu'ici il y en avait 2 à faire à cause de la formule d'addition du cosinus qui faisait apparaître du cos(h) et du sin(h).

Nous verrons évidemment d'autres exemples dans les exercices.

Il est temps justement de passer aux exercices !

Exercices

Haut de page

Clique ici pour accéder aux exercices sur ce chapitre !

Retour au sommaire Haut de la page