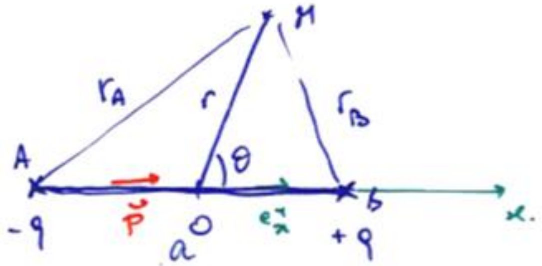
➢ **III-8** Dipôle électrostatique *(vecteurs notés en **gras**)*

8-1 **Définitions**

- On appelle dipôle électrostatique l'ensemble de 2 charges ponctuelles opposées +q et –q situées à une distance a l'une de l'autre, cette distance étant petite par rapport à la distance r à laquelle on étudie les effets électriques (champ et potentiel créés par ces 2 charges).



$a \ll r$

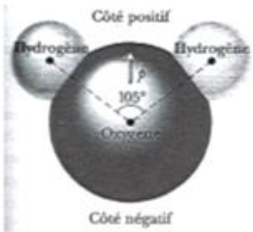
- On appelle Moment dipôlaire, un vecteur dirigé de la charge négative vers la charge positive.

$\vec{P} = q\,\vec{AB} = qa\,\vec{e_x}$ $\quad \|\vec{P}\| = qa$

- Dipôle permanent : un dipôle dont la distance a est invariable

$\Rightarrow \vec{\mathbf{p}}$ est un vecteur constant.

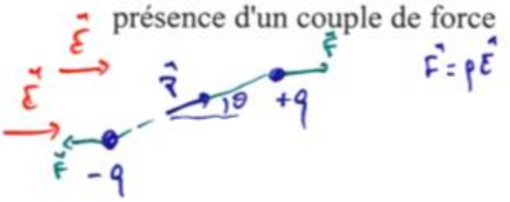
C'est le cas de nombreuses molécules comme celles de l'eau :



$\vec{P}$ s'oriente de la charge négative (oxygène + dé) vers la charge / coté positif (hydrogène moins dé !)

$\vec{\mathbf{p}}$ s'oriente du coté négatif vers le coté positif

- Dipôle à l'intérieur d'un champ électrique externe quelconque et uniforme $\vec{\mathbf{E}}$: présence d'un couple de force



$\vec{F} = q\vec{E}$

1 couple de force $\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ Mt dipolaire

$\|\vec{\tau}\| = pE \sin\theta$

$= qEa \sin\theta = Fa \sin\theta$

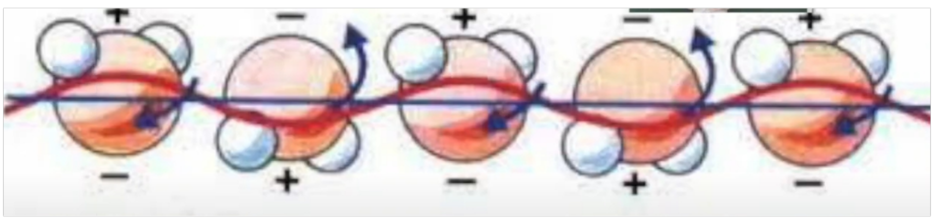
$\vec{\tau} \perp \vec{p}$

$\vec{\tau} \perp \vec{E}$

- Dipôle induit: certaines molécules dites apolaires présentent un centre de charges + en coïncidence avec celui des charges -. Aucun moment dipolaire n'est établi.

  Si l'on place une molécule apolaire dans un champ électrique externe, le champ électrique sépare le centre des charges positives et négatives et engendre un moment dipolaire **p** qui s'oriente avec le champ **E.**

$\vec{\tau}$ tend à aligner $\vec{P}$ et $\vec{E}$: orientation du dipôle suivant les lignes de champ.



Principe du micro-onde qui fait subir des rotation via la ligne de champ

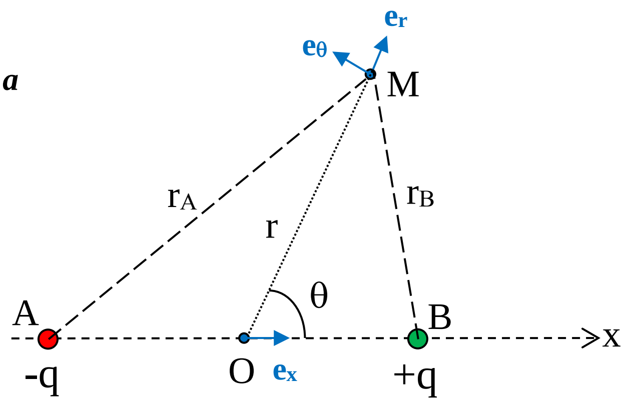
8-2 Calcul du potentiel et du champ électrique créé à grande distance par un dipôle

(vecteurs notés en gras)

1- Evaluer l'expression du potentiel V créé par un dipôle électrostatique en un point M de l'espace, en fonction de son moment dipolaire **p** = a.q $\mathbf{e_x}$ et du vecteur **r = OM**.
2- Etablir l'expression du champ électrique **E** à partir des coordonnées polaires ($\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$)
3- Etudier le cas où le champ électrique **E** est parallèle au moment dipolaire **p.** En déduire les lignes de champs et les directions des vecteurs champs électriques

a = AB

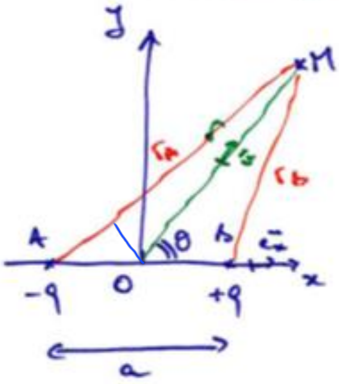
On suppose que r >> a



$$\mathbf{V_M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q_i}{r_i}$$

1- Evaluer l'expression du potentiel V créé par un dipôle électrostatique en un point M de l'espace, en fonction de son moment dipolaire **p** = a.q $\mathbf{e_x}$ et du vecteur **r = OM**.

Dipôle électrostatique



$OM = r$

$\vec{p} = aq\,\vec{e_x}$

$AM = r_A$

$BM = r_B$

M très loin par rapport à a. donc $r \gg a$

1) expression du pot V. $V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$

→ Dipôle ⇒ $V_M = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$

Soit $V_M = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$

↳ exprimer V en $f(a, r)$

méthode des vecteurs / règles des Cos

BM ? → $\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM} \Rightarrow \vec{BM} = \vec{OM} - \vec{OB} \rightarrow BM^2 = (\vec{OM} - \vec{OB})^2$

$= OM^2 + OB^2 - 2\,OB\,OM\cos\theta$ PS !

donc $\left[r_B^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} - 2\frac{a}{2}r\cos\theta = r^2\left(1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{a}{r}\cos\theta\right)\right]$

↳ $\left[r_B = r\left(1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{a}{r}\cos\theta\right)^{1/2}\right|$.

AM ? → $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} \Rightarrow \vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA} \rightarrow AM^2 = (\vec{OM} - \vec{OA})^2 = OM^2 + OA^2 - 2\,OM\,OA\cos\alpha$

avec α angle entre $\vec{OM}$ et $\vec{OA}$

$\alpha = \pi - \theta \Rightarrow \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$.

donc $AM^2 = OM^2 + OA^2 + 2\,OM\,OA\cos\theta = r^2 + \frac{a^2}{4} + a\,r\cos\theta$

d'où $\left[r_A = r\left(1 + \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a}{r}\cos\theta\right)^{1/2}\right|$.

donc $V_M = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2}\right]$

or $r \gg a \rightarrow \frac{a}{r} \rightarrow 0$ et $\frac{a^2}{r^2} \rightarrow 0$ donc termes $\frac{a^2}{4r^2} \Rightarrow 0$ devant $\frac{a}{r}$

$\Rightarrow$ DL ! $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x$. $\leftarrow$ pour approximer les terme surligner en jaune, en effet a a encore une contribution en cet(a) que l'on ne peux pas negliger.

Donc $\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} = 1 + \frac{a}{2r}\cos\theta$

et $\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} = 1 - \frac{a}{2r}\cos\theta$

d'où $V_M = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[1 + \frac{a}{2r}\cos\theta - \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(2\frac{a}{2r}\cos\theta\right)$

$\Rightarrow \left[V_M = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right.$

or M^t dipolaire $\vec{p} = q\vec{AB} = qa\vec{e_x}$

$\vec{r} = r\vec{u}_{OM} = r\vec{e_r}$

$\hookrightarrow \vec{p}\cdot\vec{r} = qar\,\vec{e_x}\cdot\vec{u}_{OM}$

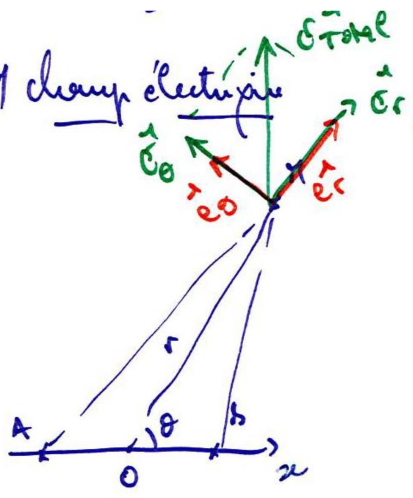
$= qar\cos\theta$

soit $\left[V_M = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right.$

donc $\left[V_M = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \right|$ p.

2- Etablir l'expression du champ électrique **E** à partir des coordonnées polaires ($\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$)

2°) champ électrique



coordonnés polaires $(r,\theta) \rightarrow$ vecteurs unitaires $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$

axe radial — axe tangentiel

$\Rightarrow$ le champ total $\vec{\mathcal{E}}_{total}$ peut être décomposé en une composante radiale $\vec{\mathcal{E}}_r$ et une composante tangentielle $\vec{\mathcal{E}}_\theta$.

$\vec{\mathcal{E}}_{total} \begin{vmatrix} \mathcal{E}_r \\ \mathcal{E}_\theta \end{vmatrix}$

$\left[\vec{E} = \vec{E_r} + \vec{E_\theta} \right|$ p.

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V \longrightarrow$ en coordonnées polaires $\vec{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e_\theta}$

d'où $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial r}}_{E_r}\vec{e_r} \underbrace{- \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}}_{E_\theta}\vec{e_\theta} = E_r \vec{e_r} + E_\theta \vec{e_\theta}$

$$V_M = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0} r^{-2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -2\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0} r^{-3} \longrightarrow E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

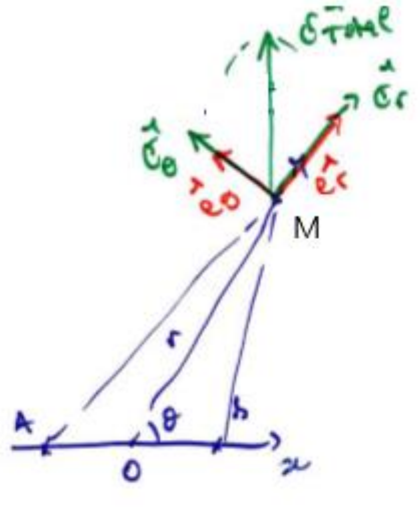
$\cos' = -\sin$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \longrightarrow E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

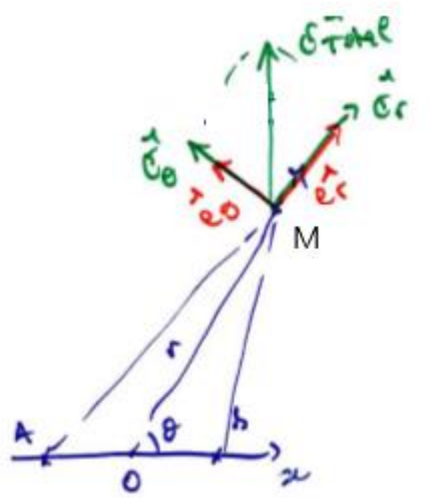
d'où $$\boxed{\vec{E} = \underbrace{\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}_{E_r}\vec{e_r} + \underbrace{\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}_{E_\theta}\vec{e_\theta}}$$

$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}$

norme.



3- Etudier le cas où le champ électrique **E** est parallèle au moment dipolaire **p.** En déduire les lignes de champs et les directions des vecteurs champs électriques



3°) $\vec{E} \parallel \vec{p}$ avec $\vec{E} = E_r \vec{e_r} + E_\theta \vec{e_\theta}$ et $\vec{p} = p\,\vec{e_x}$

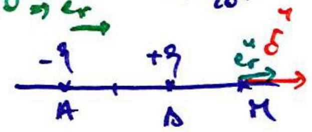
les 2 cas

⊛ donc $\vec{E_r}$ suivant $\vec{e_x}$ $\Rightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$. alors $\sin\theta = 0$ et $E_\theta = 0$.

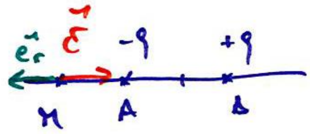
1° position ($E_\theta = 0$) $E_\theta = 0$

dans l'axe

$\hookrightarrow E_r = \dfrac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ $\theta = 0 \Rightarrow \vec{e_r}$ →



$\hookrightarrow E_r = \dfrac{-2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ $\theta = \pi \Rightarrow \vec{e_r}$ ←



2° position

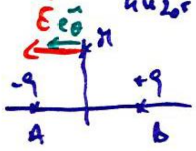
⊛ $E_r = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$ $(-\pi/2)$

lignes de champ des ⊕ → ⊖

2° position $E_r = 0$

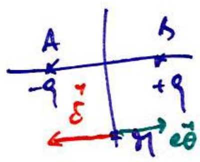
$\theta = \pi/2 \Rightarrow \vec{e_\theta}$ ←

$\hookrightarrow E_\theta = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$



$\hookrightarrow E_\theta = \dfrac{-p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

$\theta = -\pi/2 \Rightarrow \vec{e_\theta}$ →



Conclusion : lignes de champ électrique d'1 dipôle électrostatique

⚠ faire att au sens trigo pour les vecteurs unitaires