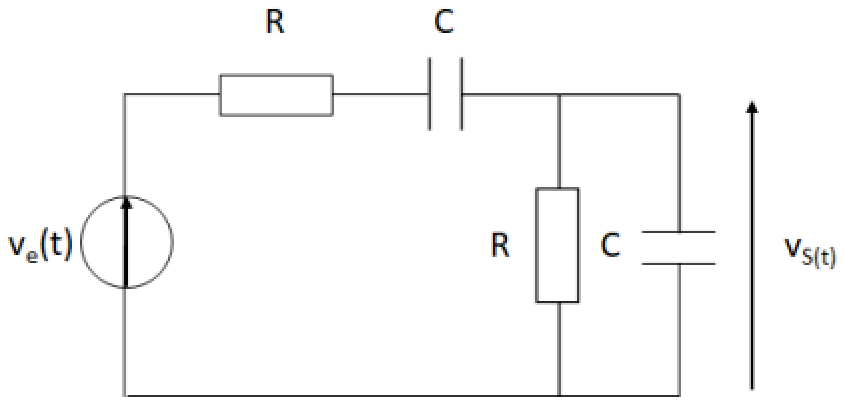
Exercice 2 - Pont de Wien - Filtre passe-bande

On considère le circuit suivant :

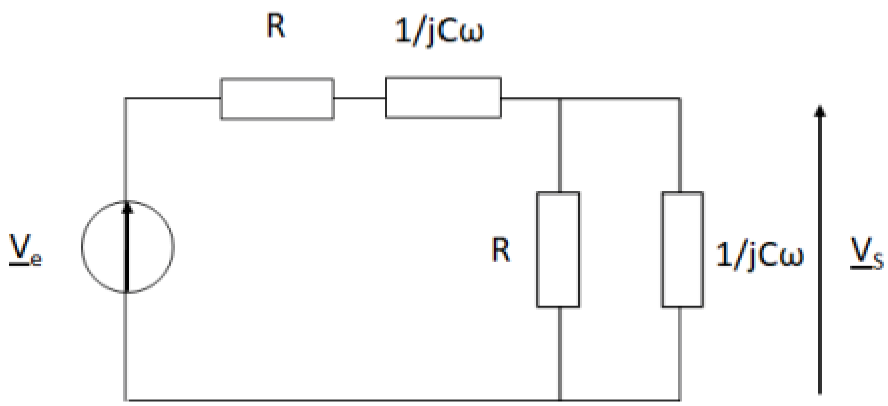


Le générateur de tension délivre une tension d'entrée sinusoïdale.

Question

1) Faire le schéma équivalent du circuit avec les notations complexes.

Solution



où $\underline{V_e}$ et $\underline{V_s}$ représentent respectivement les amplitudes complexes de $v_e(t)$ et $v_s(t)$.

Question

2) Établir la fonction de transfert isochrone $\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$

Indice

Il faut dans un premier temps exprimer $\underline{V_s}$ en fonction de $\underline{V_e}$.

Indice

Le circuit peut être simplifié en regroupant des composants et en utilisant les lois d'associations des impédances complexes.

Solution

La première chose à faire est de toujours commencer par analyser le circuit afin d'essayer de le simplifier en utilisant les lois d'associations des composants ou en utilisant les équivalences Norton/Thévenin.

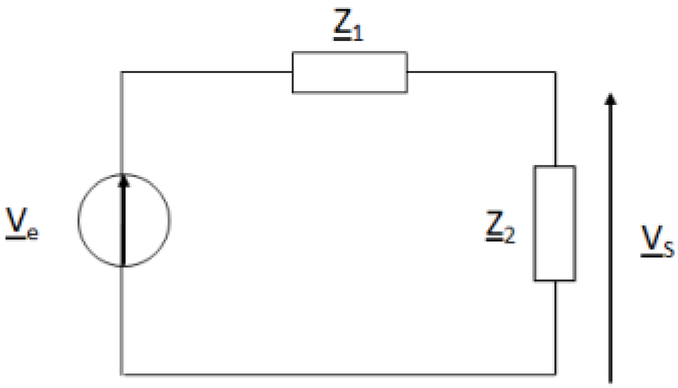
Dans cet exercice, on peut simplifier le circuit en définissant deux impédances complexes équivalentes. La première regroupe la résistance et le condensateur en série, notée $\underline{Z_1}$ et la seconde regroupe la résistance et le condensateur en parallèle, notée $\underline{Z_2}$.

Les lois d'associations donnent :

$$\underline{Z_1} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

$$\frac{1}{\underline{Z_2}} = \frac{1}{R} + jC\omega \Rightarrow \underline{Z_2} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} \Rightarrow \underline{Z_2} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Le schéma équivalent du circuit avec ces deux impédances complexes équivalentes est le suivant :



On reconnaît à présent un pont diviseur de tension. on peut donc écrire la relation suivante :

$$\underline{V_s} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} \cdot \underline{V_e}$$

On peut écrire la fonction de transfert isochrone :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

Il suffit à présent de remplacer dans les expressions des impédances équivalentes :

$$\underline{H} = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{1 + jRC\omega}}$$

On réorganise l'expression de la fonction de transfert :

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{R}{\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)(1 + jRC\omega) + R}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{R}{R + jR^2C\omega + \frac{1}{jC\omega} + R + R}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2}$$

Question

3) Mettre la fonction de transfert isochrone sous la forme canonique suivante :

$$\underline{H} = \frac{A\dfrac{j\omega}{\omega_0}}{1 + j2m\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\dfrac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On identifiera ω_0, m et A.

Indice

Il suffit de réorganiser les deux expressions pour pouvoir faire une identification terme à terme.

Solution

$$\underline{H} = \frac{A\dfrac{j\omega}{\omega_0}}{1 + j2m\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\dfrac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{jRC\omega}{1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{A\dfrac{j\omega}{\omega_0}}{1 + j2m\dfrac{\omega}{\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{jRC\omega}{1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2}$$

- En identifiant les termes en ω^2 au dénominateur, on a :

  $\dfrac{1}{\omega_0^2} = (RC)^2 \Leftrightarrow \omega_0^2 = \dfrac{1}{(RC)^2} \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ car ω_0 est une pulsation (forcément positive).

- En identifiant les termes en ω, on a :

  $$\frac{2m}{\omega_0} = 3RC$$

  En remplaçant ω_0 par son expression, on obtient :

  $$\Leftrightarrow 2mRC = 3RC \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} = 1,5$$

- En identifiant les numérateurs, on a :

  $$\frac{A}{\omega_0} = RC$$

  En remplaçant ω_0 par son expression, on obtient :

$$\Leftrightarrow ARC = RC \Leftrightarrow A = 1$$

Question

4) Faire une étude des limites pour tracer le diagramme de Bode (gain et phase) asymptotique. on étudiera les limites quand ω tend vers 0, $+\infty$ ainsi que le point caractéristique en $\omega = \omega_0$.

Indice

Il faut dans un premier temps calculer le gain en dB (G_{dB}) ainsi que la phase (φ). Puis,il faut étudier leurs limites quand ω tend vers 0 et vers $+\infty$ et déterminer les pentes des asymptotes.

Indice

Voir le rappel de cours sur les nombres complexes.

Solution

Calcul du gain en dB G_{dB} :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log(|\underline{H}|) = 20 \cdot \log\left(\left|\frac{jRC\omega}{1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2}\right|\right)$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{|jRC\omega|}{|1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2|}\right)$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20 \cdot \log(|jRC\omega|) - 20 \cdot \log\left(\left|1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2\right|\right)$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20 \cdot \log(RC\omega) - 20 \cdot \log\left(\sqrt{\left[1 - (RC\omega)^2\right]^2 + (3RC\omega)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20 \cdot \log(RC\omega) - 10 \cdot \log\left(\left[1 - (RC\omega)^2\right]^2 + (3RC\omega)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20 \cdot \log(RC\omega) - 10 \cdot \log\left(1 + (RC\omega)^4 - 2(RC\omega)^2 + 9(RC\omega)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow G_{dB} = 20 \cdot \log(RC\omega) - 10 \cdot \log\left(1 + 7(RC\omega)^2 + (RC\omega)^4\right)$$

Étude des limites de G_{dB} :

- lorsque ω tend vers 0 :

  $$\lim_{\omega \to 0} G_{dB} = \lim_{\omega \to 0} \left[20 \cdot \log(RC\omega) - 10 \cdot \log\left(1 + 7(RC\omega)^2 + (RC\omega)^4\right)\right]$$

  $$\lim_{\omega \to 0} G_{dB} = \lim_{\omega \to 0} [20 \cdot \log(RC\omega) - 10 \cdot \log(1)] = \lim_{\omega \to 0} [20 \cdot \log(RC\omega)] = -\infty$$

  La première asymptote quand $\omega \to 0$ vaut +20 dB/décade avec une limite en 0 qui vaut $-\infty$.

- lorsque ω tend vers $+\infty$:

  $$\lim_{\omega \to +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega \to +\infty} \left[20 \cdot \log(RC\omega) - 10 \cdot \log\left(1 + 7(RC\omega)^2 + (RC\omega)^4\right)\right]$$

  $$\lim_{\omega \to +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega \to +\infty} \left[20 \cdot \log(RC\omega) - 10 \cdot \log\left((RC\omega)^4\right)\right]$$

  $$\lim_{\omega \to +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega \to +\infty} [20 \cdot \log(RC\omega) - 40 \cdot \log(RC\omega)]$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} G_{dB} = \lim_{\omega \to +\infty} [-20 \cdot \log(RC\omega)] = -\infty$$

La première asymptote quand $\omega \to 0$ vaut -20 dB/décade avec une limite en $+\infty$ qui vaut $-\infty$.

- lorsque $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$:

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \cdot \log(RC\omega_0) - 10 \cdot \log\left(1 + 7(RC\omega_0)^2 + (RC\omega_0)^4\right)$$

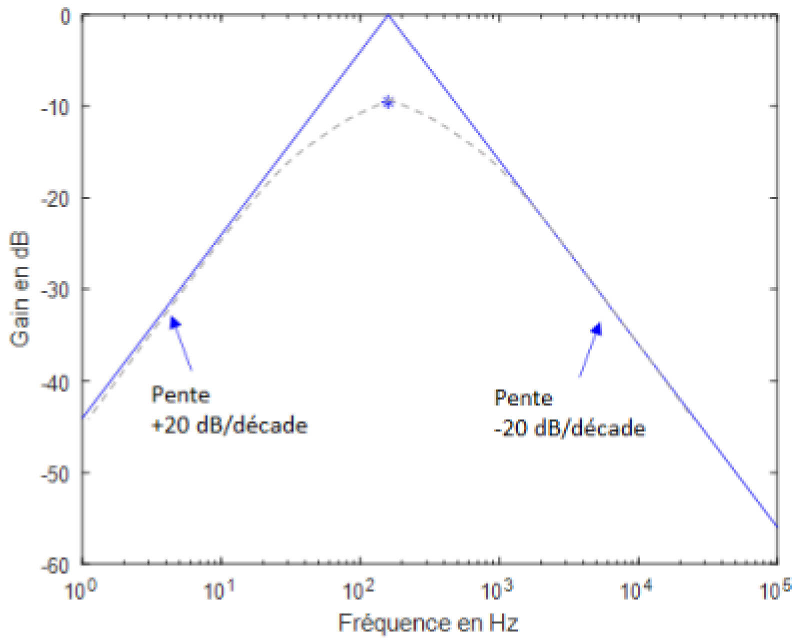
En remplaçant ω_0 par son expression, on obtient :

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \cdot \log\left(\frac{RC}{RC}\right) - 10 \cdot \log\left(1 + 7(\frac{RC}{RC})^2 + (\frac{RC}{RC})^4\right)$$

$$\Leftrightarrow G_{dB}(\omega_0) = 20 \cdot \log(1) - 10 \cdot \log(1 + 7 + 1)$$

$$\Leftrightarrow G_{dB}(\omega_0) = -10 \cdot \log(9) \sim -9,54\, dB$$

Le tracé asymptotique du diagramme de Bode de gain est donc le suivant :



Calcul de la phase φ :

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{jRC\omega}{1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arg(jRC\omega) - \arg(1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \arg(1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2)$$

Étude des limites de φ :

- lorsque ω tend vers 0 :

$$\lim_{\omega \to 0} \varphi = \lim_{\omega \to 0} \left[\frac{\pi}{2} - \arg(1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2)\right]$$

quand ω tend vers 0, on peut considérer que : $(RC\omega)^2 << 1$ donc $0 << 1 - (RC\omega)^2$

Par conséquent :

$$\lim_{\omega\to 0}\varphi = \lim_{\omega\to 0}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3RC\omega}{1-(RC\omega)^2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to 0}\varphi = \lim_{\omega\to 0}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3RC\omega}{1}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to 0}\varphi = \lim_{\omega\to 0}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan(0)\right]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to 0}\varphi = \frac{\pi}{2}\,rad = 90^\circ$$

- lorsque ω tend vers $+\infty$:

$$\lim_{\omega\to +\infty}\varphi = \lim_{\omega\to +\infty}\left[\frac{\pi}{2} - \arg(1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2)\right]$$

quand ω tend vers 0, on peut considérer que : $1 << (RC\omega)^2$ donc $1-(RC\omega)^2 << 0$

Par conséquent :

$$\lim_{\omega\to +\infty}\varphi = \frac{\pi}{2} - \lim_{\omega\to +\infty}\left[2\arctan\left[\frac{3RC\omega}{1-(RC\omega)^2 + \sqrt{((1-(RC\omega)^2)^2 + (3RC\omega)^2}}\right.\right.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to +\infty}\varphi = \frac{\pi}{2} - \lim_{\omega\to +\infty}\left[2\arctan\left[\frac{3RC\omega}{1-(RC\omega)^2 + \sqrt{(RC\omega)^4}}\right]\right]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to +\infty}\varphi = \frac{\pi}{2} - \lim_{\omega\to +\infty}\left[2\arctan\left[\frac{3RC\omega}{1-(RC\omega)^2 + (RC\omega)^2}\right]\right]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to +\infty}\varphi = \frac{\pi}{2} - \lim_{\omega\to +\infty}\left[2\arctan(3RC\omega)\right]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\omega\to +\infty}\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\,rad = -90^\circ$$

- lorsque $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$:

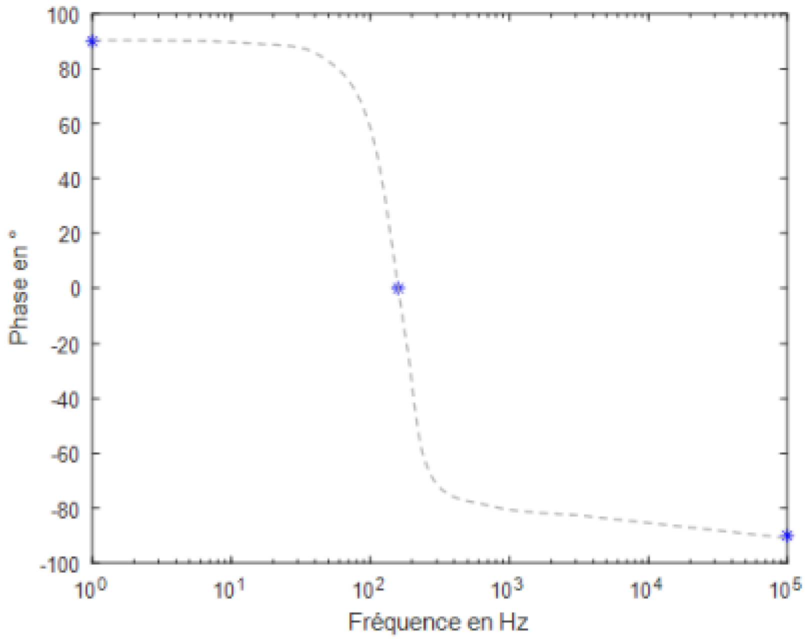
$$\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2} - \arg(1 + j3RC\omega_0 - (RC\omega_0)^2)$$

En remplaçant ω_0 par son expression, on obtient :

$$\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2} - \arg(1 + j3\frac{RC}{RC} - (\frac{RC}{RC})^2)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2} - \arg(1+3j-1) = \frac{\pi}{2} - \arg(3j) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0\,rad = 0^\circ$$

Le tracé asymptotique du diagramme de Bode de phase est donc le suivant :



Question

5) A l'aide d'Octave, tracer le diagramme de Bode théorique de ce circuit. On prendra les valeurs de composants suivantes : $R = 1\,k\Omega$ et $C = 1\,\mu F$.

Indice

Un exemple du tracé du diagramme de Bode à l'aide d'Octave a été donné dans le cours sur le circuit RC.

Solution

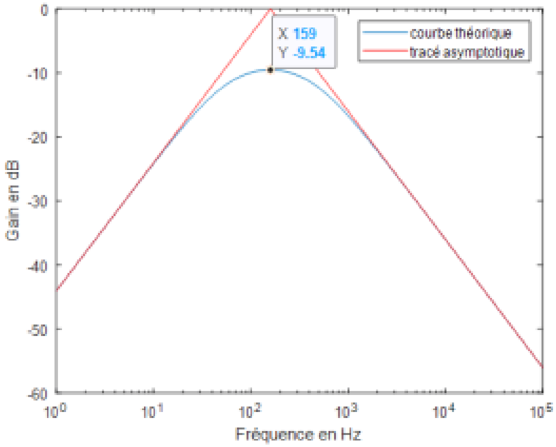
Simulation

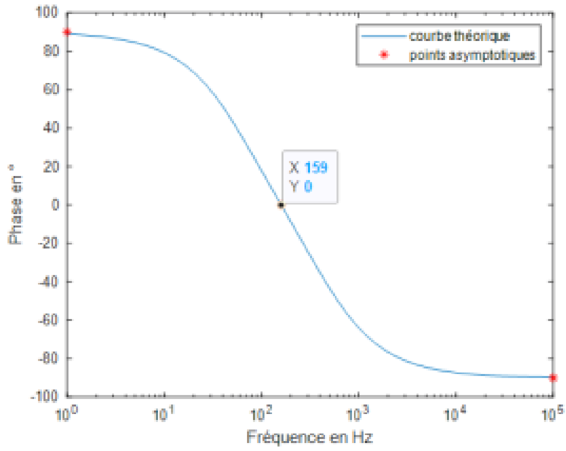
```
>> R=1e3; C=1e-6;
>> f=logspace(0,5,1000);%définit un vecteur fréquence contenant des valeurs réparties
>> w=2*pi*f;
>> H=j*R*C*w./(1+j*3*R*C*w-(R*C*w).^2);% définition de la fonction de transfert ischr
>> GdB=20*log10(abs(H)); % calcul du gain en dB. log10 est utilisé pour calculer le l
>> Phi=angle(H); % calcul de la phase en rad. phase permet de calculer l'argument d'u

>> % Tracé du diagramme de Bode théorique
>> figure(1)
>> semilogx(f,GdB) %diagramme du gain
>> xlabel('Fréquence en Hz')
>> ylabel('Gain en dB')

>> figure(2)
>> semilogx(f,Phi*180/pi) %diagramme de phase
>> xlabel('Fréquence en Hz')
>> ylabel('Phase en °')
```

En superposant avec les diagrammes asymptotiques, on obtient les deux figures suivantes :





On constate que le diagramme de Bode théorique est en accord avec le tracé asymptotique. Les limites en 0 et $+\infty$ sont bien celles attendues pour le gain et la phase. Par ailleurs, à l'aide des curseurs on retrouve également les bonnes valeurs en $\omega = \omega_0$, c'est-à-dire en $f = f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi RC} = 159\,Hz$.