Résolution d'équations différentielles avec la transformée de Laplace

Equation différentielle du 1er ordre *Méthode*

L'utilisation du formalisme de la transformée de Laplace permet de linéariser les équations différentielles et donc de faciliter leur résolution.

Le complément du cours sur la transformée de Laplace se trouve **ici**

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 3 \cdot y(t) = \exp(-t) \\ \\ y(0^+) = 2 \end{cases}$$

On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle :

$$TL\left\{\frac{dy}{dt} + 3 \cdot y(t)\right\} = TL\left\{\exp(-t)\right\}$$

En utilisant la propriété de linéarité de la transformée de Laplace, on obtient :

$$TL\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 3 \cdot TL\left\{y(t)\right\} = TL\left\{\exp(-t)\right\}$$ eq. (1)

On note : $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(t)$: $Y(p) = TL\left\{y(t)\right\}$ où p est la variable de Laplace

Par ailleurs, on obtient le résultat du second membre en utilisant la table des transformées de Laplace : $TL\left\{\exp(-t)\right\} = \frac{1}{p+1}$

D'après les propriétés de la transformée de Laplace :

$TL\left\{\dfrac{dy}{dt}\right\} = p \cdot Y(p) - y(0^+)$ où $y(0^+)$ correspond à la condition initiale : $y(0^+) = 2$

L'équation (1) devient :

$$p \cdot Y(p) - 2 + 3 \cdot Y(p) = \frac{1}{p+1}$$

$$\Leftrightarrow (p+3) \cdot Y(p) = \frac{1}{p+1} + 2$$

Soit :

$$\Leftrightarrow Y(p) = \frac{1}{(p+3)(p+1)} + \frac{2}{(p+3)}$$

Pour retourner dans le domaine temporel, il faut utiliser la table de transformées de Laplace. Pour cela, il faut que le résultat soit écrit sous la forme d'une somme d'éléments simples. Si ce n'est pas le cas (comme dans cet exemple), il faut procéder à une décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{(p+3)(p+1)}$ (voir le complément de cours sur la décomposition en éléments simples). Le dénominateur de cette fraction possède deux racines distinctes (-3 et -1). Par conséquent, on peut écrire :

$$\frac{1}{(p+3)(p+1)} = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+1}$$

Il suffit à présent de déterminer les deux constantes A et B. Pour cela, on peut procéder par identification :

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(p+3)(p+1)} = \frac{A(p+1)+B(p+3)}{(p+3)(p+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(p+3)(p+1)} = \frac{(A+B)p+A+3B}{(p+3)(p+1)}$$

On identifie les numérateurs termes à termes :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A+3B=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ -B+3B=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2B=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ B=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{2} \\ B=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On obtient donc : $\frac{1}{(p+3)(p+1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+3)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)}$

La décomposition en éléments simples de $Y(p)$ est donc :

$$Y(p) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+3)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)} + \frac{2}{(p+3)}$$

Soit :

$$Y(p) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p+3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}$$

Il suffit maintenant d'utiliser la table des transformées de Laplace inverse pour repasser dans le domaine temporel.

$$y(t) = \frac{3}{2}\cdot\exp(-3t) + \frac{1}{2}\cdot\exp(-t)$$

Il faut noter que ce résultat est donné pour $t < 0$. Si on veut être rigoureux du point de vue de la notation, il faut plutôt écrire :

$y(t) = \left(\frac{3}{2} \cdot \exp(-3t) + \frac{1}{2} \cdot \exp(-t)\right) \cdot u(t)$ où $u(t)$ est la fonction échelon unité.

Vérification de la résolution de l'équation différentielle *Simulation*

Le script suivant permet de résoudre directement une équation différentielle avec la fonction *dsolve*.

```
>> syms y(t)
>> eqn = diff(y)+3*y == exp(-t); % définition de l'équation différentielle
>> cond = y(0) == 2; % définition de la condition initiale
>> y=dsolve(eqn,cond) % résolution de l'équation différentielle pour la condition initiale déf

y =

exp(-t)/2 + (3*exp(-3*t))/2
```

On obtient bien le même résultat qu'en faisant le calcul à la main.

Par ailleurs, on peut vérifier le calcul de la transformée de Laplace inverse (fonction *ilaplace*) à partir de l'expression de $Y(p)$:

```
>> syms  p t
>> Y=1/((p+3)*(p+1))+2/(p+3); % définition de l'expression de Y(p)
>> y=ilaplace(Y,p,t) % calcul de la transformée de Laplace inverse

y =

exp(-t)/2 + (3*exp(-3*t))/2
```

On retrouve également le même résultat.

Equation différentielle du 2nd ordre *Méthode*

On considère l'équation différentielle suivante :

$$10^{-7} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + 10^{-3} \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$$

avec $u(t)$ la fonction échelon unité.

On considère que les conditions initiales sont nulles, soit : $y(0^+) = 0$ et $y'(0^+) = 0$

On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle :

$$TL\left\{10^{-7} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + 10^{-3} \cdot \frac{dy}{dt} + y(t)\right\} = TL\left\{u(t)\right\}$$

En utilisant la propriété de linéarité de la transformée de Laplace, on obtient :

$10^{-7} \cdot TL\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + 10^{-3} \cdot TL\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + TL\left\{y(t)\right\} = TL\left\{u(t)\right\}$ eq. (1)

On note : $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(t)$: $Y(p) = TL\{y(t)\}$ où p est la variable de Laplace.

Par ailleurs, on obtient le résultat du second membre en utilisant la table des transformées de Laplace :

$$TL\{u(t)\} = \frac{1}{p}$$

D'après les propriétés de la transformée de Laplace :

$$TL\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = p \cdot Y(p) - y(0^+) \text{ et } TL\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0^+) - y'(0^+)$$

Les conditions initiales étant nulles, on a :

$$TL\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = p \cdot Y(p) \text{ et } TL\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = p^2 \cdot Y(p)$$

L'équation (1) devient :

$$10^7\left[p^2 \cdot Y(p)\right] + 10^{-3}\left[p \cdot Y(p)\right] + Y(p) = \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow Y(p)\left[10^{-7} \cdot p^2 + 10^{-3} \cdot p + 1\right] = \frac{1}{p}$$

Soit :

$$\Leftrightarrow Y(p) = \frac{1}{p \cdot (10^{-7} \cdot p^2 + 10^{-3} \cdot p + 1)}$$

Pour retourner dans le domaine temporel, il faut utiliser la table de transformées de Laplace. Pour cela, il faut que le résultat soit écrit sous la forme d'une somme d'éléments simples. Si ce n'est pas le cas (comme dans cet exemple), il faut procéder à une décomposition en élément simple (voir le complément de cours sur la décomposition en éléments simples).

Le dénominateur de $Y(p)$ possède trois racines réelles distinctes ($r_1 \approx -1,13 \cdot 10^3$, $r_2 \approx -8,87 \cdot 10^3$ et $r_3 = 0$). Par conséquent la décomposition en éléments simples de $Y(p)$ s'écrit :

$$Y(p) = \frac{1}{p \cdot (10^{-7} \cdot p^2 + 10^{-3} \cdot p + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p - r_1} + \frac{C}{p - r_2}$$

Il reste à déterminer les coefficients A, B et C. Le calcul est détaillé se trouve ici.

$$Y(p) = \frac{1}{p \cdot (10^{-7} \cdot p^2 + 10^{-3} \cdot p + 1)} \approx \frac{1}{p} - \frac{1,15}{p + 1,13 \cdot 10^3} + \frac{0,15}{p + 8,87 \cdot 10^3}$$

Il suffit maintenant de calculer la transformée de Laplace inverse en utilisant la table :

$y(t) \approx \left[1 - 1,15 \cdot \exp(-1,13 \cdot 10^3 \cdot t) + 0,15 \cdot \exp(8,87 \cdot 10^3 \cdot t)\right] \cdot u(t)$ avec $u(t)$ la fonction échelon unité

Vérification de la résolution de l'équation différentielle *Simulation*

Le script suivant permet de résoudre directement une équation différentielle avec la fonction *dsolve*.

```
>> syms y(t) t
>> eqn = 1e-7*diff(y,t,2)+1e-3*diff(y)+y == 1; % définition de l'équation différentielle
>> Dy=diff(y,t); % définition de la dérivée de y par rapport à t
>> cond = [ y(0) == 0, Dy(0)==0]; % définition des conditions initiales
>> y=dsolve(eqn, cond); % résolution de l'équation différentielle pour les conditions initiale
>> vpa(y,4) % force à calculer l'application numérique avec 4 chiffres significatifs

ans =

0.1455*exp(-8873.0*t) - 1.145*exp(-1127.0*t) + 1.0
```

On obtient bien le même résultat qu'en faisant le calcul à la main.

Par ailleurs, on peut vérifier le calcul de la transformée de Laplace inverse (fonction *ilaplace*) à partir de l'expression de $Y(p)$:

```
>> syms  p t
>> Y=1/(p*(1e-7*p^2+1e-3*p+1)); % définition de l'expression de Y(p)
>> y=ilaplace(Y,p,t); % calcul de la transformée de Laplace inverse
>> y=rewrite(y, 'exp'); % force à réécrire l'expression avec des exponentielles
>> vpa(y,4) % force à calculer l'application numérique avec 4 chiffres significatifs

ans =

1.0*exp(-5000.0*t)*(0.1455*exp(-3873.0*t) - 1.145*exp(3873.0*t)) + 1.0
```

En simplifiant le résultat obtenu, on retrouve également le même résultat.