HAE302 : Circuits et composants CAPACITIFS et INDUCTIFS

Contrôle Continu du 04/12/2023 : Durée 1h30 mn

Tous documents interdits – Calculatrices autorisées

<u>On rappelle</u> :

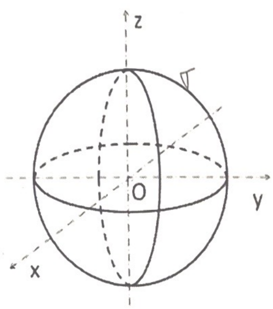
Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m.

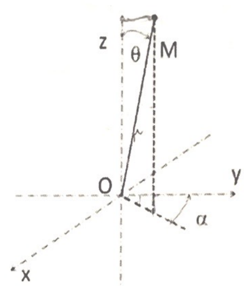
Permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 1/(36\pi 10^9)$ F/m

$\sin(\pi/4)=\cos(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 1 : Champ et potentiel créés par une sphère chargé en surface (10 pts):

On considère le repère cartésien (O,x,y,z) centré sur une sphère de rayon R. Cette sphère possède une densité de charge en surface σ.





1- Donner l'expression du vecteur unitaire allant du centre de la sphère O en un point M distant de r en fonction de θ et α .

θ est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et l'axe z, α est l'angle entre la projection de $\overrightarrow{OM}$ dans le plan (xOy) et l'axe des y.

A .N. Donner les coordonnées de ce vecteur pour $\theta=\alpha=\pi/4$

2- Exprimer la charge Q portée par cette sphère.

A.N. Calculer Q si $\sigma = 2\ 10^{-10}\ C/m^2$ et R=2 mm

3- Quelle est la direction du champ électrique en tout point M situé à l'extérieur de cette sphère ?

4- En utilisant le théorème de Gauss exprimez le module du champ électrostatique $\|\overrightarrow{E(r)}\|$ en tous points M de l'espace en fonction de la distance *r* et représenter cette fonction.

A.N. Quelle est le module du champ électrique d'un point M situé à une distance r=5 mm du centre de la sphère

5- Donner les coordonnées du vecteur champ électrique $\overrightarrow{E(r,\theta,\alpha)}$ pour tous points M situés dans la sphère puis pour tous ceux situés en dehors de la sphère.

A.N. Donner les coordonnées du vecteur champ électrique au point M situé à une distance r=5 mm et ayant $\theta=\alpha=\pi/4$

6- Donner l'expression du potentiel V(*r*) en supposant que le potentiel loin de la sphère est nul. Tracer cette fonction.

A.N. Que vaut le potentiel pour un point M situé à une distance r=5 mm du centre de la sphère.

Exercice 2 : Bobine plate et inductance (3 pts) :

L'expression du champ B en un point P suivant l'axe d'une bobine plate de rayon R comportant N spires est donnée par la relation suivante où α est l'angle au point P permettant de repérer la bobine plate :

$$B = \frac{\mu_0 \, N\, i}{2R} \sin^3 \alpha$$

a- Que devient cette expression pour un champ au centre de la bobine plate ?

b- Etablir l'expression de l'inductance L_B de cette bobine plate.

c- Calculer L_B pour N = 1000 spires et R = 2cm

d- Calculer l'énergie magnétique Em lorsque la bobine est parcourue par un courant i = 2A.

$\Phi : \iint B \cdot dS =$

Exercice 3 : Solénoïdes et Inductances (7 pts) :

La figure 3a représente une section transversale d'un solénoïde S, considéré comme infini, de rayon R = 2cm, de longueur ℓ = 25cm, possédant N = 1000 spires.

1- Le solénoïde S est parcouru par un courant i = 2A. Calculer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde et représenter le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ compte tenu du sens du courant i , tel qu'indiqué sur la figure.

2- Etablir l'expression de l'inductance L_S de ce solénoïde. Calculer cette inductance.

3- On place en son centre et suivant l'axe un autre solénoïde C (considéré comme infini) de longueur ℓ' = 5cm avec N' = 130 spires pour un rayon R' de 1cm (figure 3b). Le solénoïde C est parcouru par un courant i' = 1A dans le même sens que le courant i.

Etablir les expressions puis calculer les inductances mutuelles de la combinaison Solénoïde S - Solénoïde C.

3a- inductance mutuelle M_{SC} (le solénoïde S est l'inducteur et le solénoïde C est l'induit)

3b- inductance mutuelle M_{CS} (le solénoïde C est l'inducteur et le solénoïde S est l'induit)

4- Etablir l'expression puis calculer l'énergie magnétique E_{mag} du système des 2 solénoïdes.

On appellera L_C l'inductance du solénoïde C.

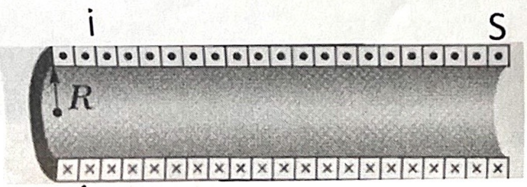


Fig. 3a

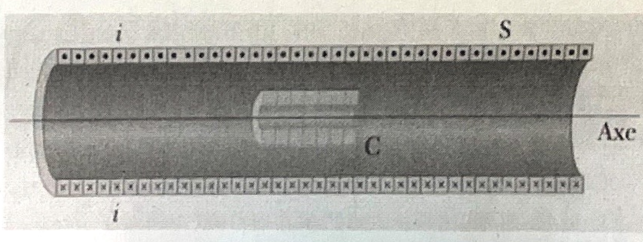
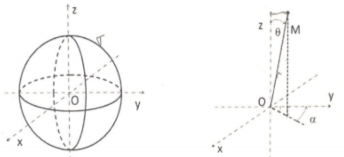


Fig. 3b

Exercice 1 : Champ et potentiel créés par une sphère chargé en surface (10 pts):

On considère le repère cartésien (O,x,y,z) centré sur une sphère de rayon R. Cette sphère possède une densité de charge en surface σ.



1- Donner l'expression du vecteur unitaire allant du centre de la sphère O en un point M distant de r en fonction de θ et α .

θ est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et l'axe z, α est l'angle entre la projection de $\overrightarrow{OM}$ dans le plan (xOy) et l'axe des y.

A .N. Donner les coordonnées de ce vecteur pour $\theta=\alpha=\pi/4$

2- Exprimer la charge Q portée par cette sphère.

A.N. Calculer Q si $\sigma = 2\ 10^{-10}\ C/m^2$ et R=2 mm

3- Quelle est la direction du champ électrique en tout point M situé à l'extérieur de cette sphère ?

4- En utilisant le théorème de Gauss exprimez le module du champ électrostatique $\|\overrightarrow{E(r)}\|$ en tous points M de l'espace en fonction de la distance r et représenter cette fonction.

A.N. Quelle est le module du champ électrique d'un point M situé à une distance r=5 mm du centre de la sphère

5- Donner les coordonnées du vecteur champ électrique $\overrightarrow{E(r,\theta,\alpha)}$ pour tous points M situés dans la sphère puis pour tous ceux situés en dehors de la sphère.

A.N. Donner les coordonnées du vecteur champ électrique au point M situé à une distance r=5 mm et ayant

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sin\theta\sin\alpha\\ \sin\theta\cos\alpha\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

Soit $\theta = \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\\ \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

2) $Q = \sigma \times S$

$Q = 2\cdot10^{-10}\times4\pi\times(2\times10^{-3})^2$

$Q = 1,28\cdot10^{-14}\ C$

3) Sachant la sphère chargée positivement, le champ est centripète à l'extérieur.

4) Soit Thm de Gauss : $\oiint E\cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$:

pour $r<R = 0$

pour $R>r$ = $E : \frac{\sigma\cdot4\pi R^2}{\varepsilon_0\times4\pi r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\times\frac{R^2}{r^2}$

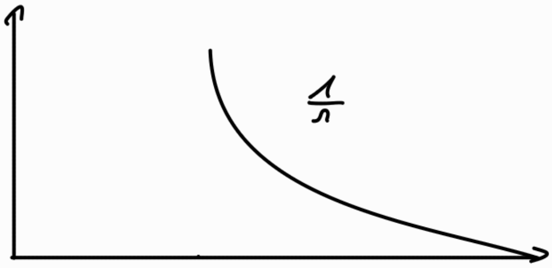
Soit pour $r = 5m$:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\times\frac{(2\times10^{-3})^2}{(5\times10^{-3})^2} = \dots \simeq 3,6\ \frac{V}{m}$$

Soit le vecteur : sachant $E\cdot\vec{u}$ uniquement dépendant de $\vec{u_r}$

on a : le même résultat : $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\times\frac{(2\times10^{-3})^2}{(5\times10^{-3})^2}\cdot\vec{u_r}$

Soit le graphe



5) Soit :

$$E : \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0 \times 4\pi r^2} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\alpha \\ \sin\theta \cos\alpha \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Soit $E : -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ d'où $V = -\int E\, dr$:

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \times R^2 \int -\frac{1}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \times \frac{R^2}{r}$$ pour S mm :

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \times \frac{(2\times10^{-3})^2}{(8\times10^{-3})}$$

$r < R$

$V = cte$

$$cte = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \times R$$

Exercice 3 : Solénoïdes et Inductances (7 pts) :

La figure 3a représente une section transversale d'un solénoïde S, <u>considéré comme infini</u>, de rayon R = 2cm, de longueur ℓ = 25cm, possédant N = 1000 spires.

1- Le solénoïde S est parcouru par un courant i = 2A. Calculer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde et représenter le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ compte tenu du sens du courant i , tel qu'indiqué sur la figure.

2- Etablir l'expression de l'inductance L_S de ce solénoïde. Calculer cette inductance.

1) $\oint B \cdot dl = \mu_0 \Sigma i$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \times N$$

3- On place en son centre et suivant l'axe un autre solénoïde C (<u>considéré comme infini</u>) de longueur ℓ' = 5cm avec N' = 130 spires pour un rayon R' de 1cm (figure 3b). Le solénoïde C est parcouru par un courant i' = 1A dans le même sens que le courant i.

Etablir les expressions puis calculer les inductances mutuelles de la combinaison Solénoïde S - Solénoïde C.

3a- inductance mutuelle M_{SC} (le solénoïde S est l'inducteur et le solénoïde C est l'induit)

3b- inductance mutuelle M_{CS} (le solénoïde C est l'inducteur et le solénoïde S est l'induit)

4- Etablir l'expression puis calculer l'énergie magnétique E_{mag} du système des 2 solénoïdes.

On appellera L_C l'inductance du solénoïde C.

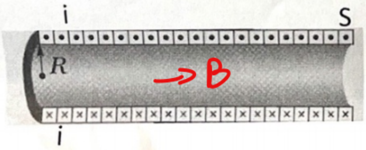


Fig. 3a

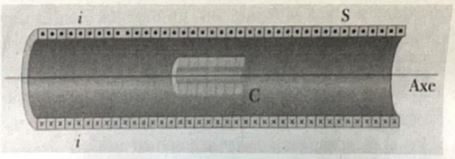


Fig. 3b

$B = \mu_0 n i$

$B = 10 mT$

2) $\Phi = \mu_0 n i \times \pi r^2 \times N$

$\frac{\mu_0 N \times i \times \cancel{\pi} r^2 \times N}{\ell}$

$= \frac{\mu_0 N^2 \times \pi r^2}{0,25}$

$= 63 \times 10^{-4}$ H

3) $B' = \mu_0 i n$ → sol ∞

sol ∞ donc $B = cte$

$\Phi = \int B \, dS$

$\Phi = B \times 2\pi r \times N$

$= \frac{\mu_0 i N^2 \times 2\pi r}{\ell}$

$M_{sC} = \mu_0 \frac{N}{\ell} \times 2\pi r' \times N'$

$M_{sC} = 2,05 \times 10^{-4}$ H

$M_{Cs} = \mu_0 \frac{N'}{\ell'} \times 2\pi r \times N$

$M_{Cs} =$