Détail du calcul de la partie réelle de la tension de sortie complexe

$$v_s(t) = \Re\left[\underline{v_s}(t)\right] = \Re\left[\underline{V_s}\exp(j\omega t)\right] = \Re\left[\frac{V_0}{1+jRC\omega}\exp(j\omega t)\right]$$

$$\Leftrightarrow v_s(t) = \Re\left[\frac{V_0(1-jRC\omega)}{(1+jRC\omega)(1-jRC\omega)}\exp(j\omega t)\right]$$

$$\Leftrightarrow v_s(t) = \Re\left[\frac{V_0(1-jRC\omega)}{1+(RC\omega)^2}\exp(j\omega t)\right]$$

$$\Leftrightarrow v_s(t) = \frac{V_0}{1+(RC\omega)^2}\cdot\Re\left[(1-jRC\omega)\exp(j\omega t)\right]$$

$$\Leftrightarrow v_s(t) = \frac{V_0}{1+(RC\omega)^2}\cdot\Re\left[\left(1+\exp\left(-\frac{j\pi}{2}\right)RC\omega\right)\exp(j\omega t)\right]$$

$$\Leftrightarrow v_s(t) = \frac{V_0}{1+(RC\omega)^2}\cdot\Re\left[\exp(j\omega t) + RC\omega\exp\left(j\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow v_s(t) = \frac{V_0}{1+(RC\omega)^2}\cdot\left[\cos(\omega t) + RC\omega\cdot\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow v_s(t) = \frac{V_0}{1+(RC\omega)^2}\cdot\left[\cos(\omega t) + RC\omega\cdot\sin(\omega t)\right]$$

On cherche à présent à mettre $v_s(t)$ sous la forme : $v_s(t) = B\cos(\omega t+\varphi)$

Pour cela, il faut connaître la formule trigonométrique suivante :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

On va modifier $v_s(t)$ afin de reconnaître cette formule :

$$\Leftrightarrow v_s(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cdot\cos(\omega t) + \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cdot\sin(\omega t)\right]$$

On pose alors : $\cos(a) = \cos(\omega t)$, $\sin(a) = \sin(\omega t)$, $\cos(b) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ et

$$\sin(b) = -\frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

on a alors : $\tan(b) = \dfrac{\sin(b)}{\cos(b)} = -\dfrac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cdot\sqrt{1+(RC\omega)^2} = -RC\omega$

Par conséquent : $b = -\arctan(RC\omega)$

Soit :

$$v_s(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \cdot \cos(\omega t - \arctan(RC\omega))$$