Sprawozadanie

z Laboratorium Metod numerycznych

Ćwiczenie 2:

Numeryczne zagadnienia algebry liniowej

Autor: Dominik Gajda, 240661

Maksym Dmytruk, 240353

Data wykonania ćwiczenia: 26.10.2022

Data sporządzenia i oddania sprawozdania: 01.11.2022

Część 1.

Ćwiczenia wprowadzające

Wykonano eliminację Gaussa bez wyboru elementu głównego "krok po kroku" w trybie interaktywnym.

$Ax = B$

Wygenerowano przykładowy układ równań:

```
format long % ustawienie "długiego" formatu wyników, t.j. 15 cyfr po kropce dziesiętnej
format compact % wyłączenie niektóryk znaków nowej linii przy wyprowadzaniu wyników
[A,b,x0]=tstelgN(240661,4) % Tu należy wpisać jako argument swój numer indeksu
```

```
A = 4×4
    -2     9   -10    -3
     4   -24    17    12
    22   -51   140   -23
   -22   117  -137   -15
b = 4×1
     5
    29
  -401
   118
x0 = 4×1
    -4
    -3
    -3
     2
```

Sprawdzenie, że rozwiązanie dostarczone przez generator jest poprawne:

```
A*x0-b
```

```
ans = 4×1
     0
     0
     0
     0
```

Dla rozwiązywania układu równań wygodnie jest "zblokować" macierz układu równań z wektorem prawych stron. Współczynniki, użyte do eliminacji należy zapisywać w dodatkowej macierzy L, która na końcu będzie macierzą trójkątną dolną (z jedynkami na przekątnej - dlatego jest inicjowana macierzą jednostkową)

```
AB=[A,b],L=eye(4) % "Zblokowanie" macierzy układu i wektora prawych stron,
```

```
AB = 4×5
    -2     9   -10    -3     5
     4   -24    17    12    29
    22   -51   140   -23  -401
   -22   117  -137   -15   118
L = 4×4
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

```
                        % zainicjowanie zmiennej L
```

Pierwszy etap eliminacji

```
L(2:4,1)=AB(2:4,1)/AB(1,1) % Obliczenie współczynników eliminacji dla
```

```
L = 4×4
     1     0     0     0
    -2     1     0     0
   -11     0     1     0
    11     0     0     1
```

```
                                   % wszystkich wierszy
AB(2:4,:)=AB(2:4,:)-L(2:4,1)*AB(1,:) % Eliminacja wyrazów
```

```
AB = 4×5
    -2     9   -10    -3     5
     0    -6    -3     6    39
     0    48    30   -56  -346
     0    18   -27    18    63
```

```
                                               %  poddiagonalnych w pierwszej kolumnie
```

Drugi etap eliminacji

```
L(3:4,2)=AB(3:4,2)/AB(2,2)    % Obliczenie współczynników
```

```
L = 4×4
     1     0     0     0
    -2     1     0     0
   -11    -8     1     0
    11    -3     0     1
```

```
AB(3:4,:)=AB(3:4,:)-L(3:4,2)*AB(2,:)    % Eliminacja wyrazów poddiagonalnych
```

```
AB = 4×5
    -2     9   -10    -3     5
     0    -6    -3     6    39
     0     0     6    -8   -34
     0     0   -36    36   180
```

```
                                        % w drugiej kolumnie
```

Trzeci etap eliminacji

```
L(4:end,3)=AB(4:end,3)/AB(3,3)   % Obliczenie współczynników
```

```
L = 4×4
     1     0     0     0
    -2     1     0     0
   -11    -8     1     0
    11    -3    -6     1
```

```
AB(4:end,:)=AB(4:end,:)-L(4:end,3)*AB(3,:)     % Eliminacja wyrazów poddiagonalnych
```

```
AB = 4×5
    -2     9   -10    -3     5
     0    -6    -3     6    39
     0     0     6    -8   -34
     0     0     0   -12   -24
```

```
% w trzeciej kolumnie
```

Układ równań został sprowadzony do postaci trójkątnej (górnej). Aby dokończyć rozwiązywanie układu równań, trzeba wykonać **podstawienie wstecz.**

Inicjujemy zmienną przeznaczoną na rozwiązanie:

```
x=nan(size(b))
```

```
x = 4×1
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
```

Obliczenie ostatniej niewiadomej

```
x(4)=AB(4,5)/AB(4,4)
```

```
x = 4×1
   NaN
   NaN
   NaN
     2
```

Obliczenie trzeciej niewiadomej

```
x(3)=(AB(3,5)-AB(3,4)*x(4))/AB(3,3)
```

```
x = 4×1
   NaN
   NaN
    -3
     2
```

Obliczenie drugiej niewiadomej (uzupełnić)

```
x(2)= (AB(2,5)-AB(2,4)*x(4)-AB(2,3)*x(3))/AB(2,2)
```

```
x = 4×1
   NaN
    -3
    -3
     2
```

Obliczenie pierwszej niewiadomej (uzupełnić)

```
x(1)= (AB(1,5)-AB(1,4)*x(4)-AB(1,3)*x(3)-AB(1,2)*x(2))/AB(1,1)
```

```
x = 4×1
    -4
    -3
    -3
     2
```

Sprawdzenie poprawności wyniku

```
A*x-b
```

```
ans = 4×1
     0
     0
     0
     0
```

Funkcja do eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego

Należy uogólnić użyty wcześniej kod, tak, aby działał dla układów n równań z n niewiadomymi. Należy tak napisać kod, aby prawa strona mogła być macierzą, a niekoniecznie wektorem.

```
[A,b,x0]=tstelgN(240661,7); % Należy wygenerować
                            % większy testowy układ równań

[x, L, U] = elgauss(A, b);
```

Należy skopiować kod z poprzedniej sekcji (po jego uruchomieniu) i przy pomocy opcji "Convert to local function" stworzyć funkcję lokalną o nazwie elgauss i listach parametrów wejściowych i wyjściowych jak w kolejnej sekcji. Użyć w/w nasępnej sekcji do przetestowania poprawności utworzenia funkcji.

```
A*x-b
```

```
ans = 7×1
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
```

```
L*U-A
```

```
ans = 7×7
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
```

Uruchomienie funkcji

```
[A,b,x0]=tstelgN(654321,7); % Można wygenerować nowy przykład
[x, L, U]=elgauss(A, b);
A*x-b
```

```
ans = 7×1
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
```

```
L*U-A
```

```
ans = 7×7
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
```

Zmodyfikować napisaną funkcję tak, by mnożniki służące do eliminacji (elementy macierzy `L`) nie były przechowywane w oddzielnej zmiennej, tylko w miejscu niepotrzebnych już ("wyzerowanych") elementów tablicy `Ab` zawierającej macierz układu i prawą stronę (poniżej głównej przekątnej).

W efekcie powinna powstać funkcja `elgauss2` o takiej samej składni wywołania, co `elgauss`.

```
[x, L, U] = elgauss2(A, b);
A*x-b
```

```
ans = 7×1
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
```

```
L*U-A
```

```
ans = 7×7
   -75   119    96    -9   -25    30     0
   439    50    69  -204    20   -30   150
  -339   130  -166   438  -117   -17  -160
  -171   278    33    83   -51   138  -211
  -273   550   210  -250    90   145   -71
   126  -219  -133   155   -69    50   -38
   -85     9  -112   132   -46  -116   -32
```

Skopiowano przetestowany kod z poprzedniej sekcji i przekształć do funkcji `elgauss2`

Przetestuj stworzoną funkcję:

```
[A,b,x0]=tstelgN(654321,7); % Można wygenerować nowy przykład
x=elgauss2(A,b)
```

```
x = 7×1
     5
    -7
    -6
     2
    -6
     1
    -2
```

```
b-A*x
```

```
ans = 7×1
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
```

Zapoznano się z dokumentacją funkcji max

```
A
```

```
A = 7×7
   -14    -2     2   -14   -17    10     1
   -70    -7    21   -50   -89    30    19
   182    74   165   515   176  -463   195
  -294   -42  -108  -429  -544   326   169
  -280   -13    34  -246  -491   -29   121
```

```
   -238   -61   160  -283   233  -157  -432
   -224    -2   232    89  -309    84   106
```

```
[mx,idx]=max(abs(A(:,1)))
```

```
mx = 
   294
idx = 
     4
```

Przećwiczyczono operacje indeksowania pozwalające na zamianę dwóch wierszy

```
M=A
```

```
M = 7×7
   -14    -2     2   -14   -17    10     1
   -70    -7    21   -50   -89    30    19
   182    74   165   515   176  -463   195
  -294   -42  -108  -429  -544   326   169
  -280   -13    34  -246  -491   -29   121
  -238   -61   160  -283   233  -157  -432
  -224    -2   232    89  -309    84   106
```

```
M([2,4],:)=M([4,2],:)
```

```
M = 7×7
   -14    -2     2   -14   -17    10     1
  -294   -42  -108  -429  -544   326   169
   182    74   165   515   176  -463   195
   -70    -7    21   -50   -89    30    19
  -280   -13    34  -246  -491   -29   121
  -238   -61   160  -283   233  -157  -432
  -224    -2   232    89  -309    84   106
```

```
[~,idx]=max(abs(M(2:end,2)))
```

```
idx = 
     2
```

Eliminacja Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego w kolumnie

Skopiowano kod eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego i zmodyfikowano tak, aby wykonywany był częściowy wybór elementu głównego w kolumnie. W efekcie powinien powstać kod obliczający rozwiązanie układu równań i rozkład trójkątny macierzy z poprzestawianymi wierszami, a także macierz permutacji. [x, U, L, P] = elgwegk(A, b);

```
[x, U, L, P]=elgwegk(A,b);
```

Skopiowano do tej sekcji kod przetestowany w sekcji poprzedniej i przekształć go w funkcję `elgwegk`

Skorygowano listy parametrów funkcji utworzonej w poprzedniej sekcji i sprawdzono jej działanie przy pomocy poniższego kodu:

```
[A,b,x0]=tstelgN(654321,7); % Można wygenerować nowy przykład
[x,L,U,P]=elgwegk(A, b)
```

```
x = 7×1
  -4.999999988336723
  -2.999999998509828
   4.999999999509247
  -0.999999999982317
   2.000000000109955
   2.999999999902131
   2.000000000056680
L = 7×7
10^2 ×
   0.380000000000000  -4.120000000000000  -2.660000000000000   1.440000000000000 ...
                   0   1.328947368421053   4.330000000000000   0.644736842105263
                   0                   0  -0.253188118811881   4.220099009900991
                   0                   0                   0   1.088947286094167
                   0                   0                   0                   0
                   0                   0                   0                   0
                   0                   0                   0                   0
U = 7×7
   1.000000000000000                   0                   0                   0 ...
   0.684210526315789   1.000000000000000                   0                   0
  -0.315789473684211  -0.768316831683168   1.000000000000000                   0
   0.421052631578947   0.899009900990099  -0.344752072579384   1.000000000000000
  -0.052631578947368  -0.215841584158416   0.060847802283748   0.365643727627397
  -0.421052631578947  -0.184158415841584  -0.029250743000155   0.283292442585360
   0.052631578947368   0.027722772277228   0.000156421085562  -0.040703052728954
P = 7×7
     0     0     0     0     1     0     0
     0     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     1
     0     0     0     0     0     0     1
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0
```

```
A*x-b % Sprawdzenie poprawności rozwiązania
```

```
ans = 7×1
10^-12 ×
   0.014210854715202
  -0.113686837721616
  -0.113686837721616
  -0.454747350886464
                   0
   0.454747350886464
                   0
```

```
x-x0 % Błąd rozwiązania
```

```
ans = 7×1
10^-7 ×
   0.116632765667646
   0.014901724298966
  -0.004907532158427
   0.000176834102916
   0.001099551560912
  -0.000978692682452
   0.000566804381208
```

```
L*U-P*A % Sprawdzenie poprawności rozkładu
```

```
ans = 7×7
10^2 ×
   0.996842105263158   4.144297029702970  -0.241770686688577  -1.218371475686719 ···
  -1.479418282548476  -0.312743095362167   1.486596771139492  -0.381269133800616
   2.003155810317874   4.319268150181355   0.826163777522753  -0.083834878102297
  -0.753179382054385   0.604060790499511  -3.153727642189589   1.751995186272090
   0.382096943884062   1.027546545564743  -2.907449731583672  -1.611749878891071
  -0.006396589093449  -0.002640333294179  -0.000561497638296   0.004126672631627
   0.000000063916714   0.000000033667022   0.000000000189961  -0.000000049430502
```

Na skutek występowania błędów zaokrągleń, możemy zaobserwować wyniki różne od zera.

Generator przykładów tstelgN jest tak napisany, że domyślnie dostarcza przykładów, w których brak wyboru elementu głównego prowadzi do dokładniejszych wyników. Spróbuj wywoływać ten sam generator z drugim argumentem ujemnym i porównaj błędy rozwiązania w tym przypadku.

```
[A,b,x0]=tstelgN(654321,-10)
```

```
A = 10×10
          -7        -105        -133         203        -210           7 ···
         -27        -423        -531         891        -414         423
         -19        -313        -385         835         -14         647
          15         236         322         276         -90         304
          16         220         257       -1132        1296         436
         -14        -228        -256        1311        -486        -214
           0         -16         -45        -729         821        1279
           9         146         164        -850         306        -575
           1         -10         -35        -714        1067         -35
         -28        -419        -523        1034       -1026         545
b = 10×1
       -1743
       -4365
       -1967
       -9240
       12136
        -826
      -12158
        4660
        3637
      -22901
x0 = 10×1
     5
    -5
    -7
     1
     5
    -6
     6
     5
    -6
    -9
```

```
elgauss2(A,b)-x0
```

```
ans = 10×1
10^-4 ×
  -0.776995877913578
  -0.183366652084516
   0.175545380329822
```

```
  -0.005495425601243
   0.001095121051620
   0.000048781503281
  -0.000003722675501
   0.000000141495704
   0.000000008268941
   0.000000000284217
```

```
elgwegk(A,b)-x0
```

```
ans = 10×1
  -0.163965072930686
  -0.038694836867365
   0.037044357124270
  -0.001159668859521
   0.000231097232779
   0.000010294083928
  -0.000000785579497
   0.000000029861922
   0.000000001746356
   0.000000000059345
```

```
A\b-x0
```

```
ans = 10×1
  -0.163965084770227
  -0.038694839661695
   0.037044359799376
  -0.001159668943256
   0.000231097249464
   0.000010294084673
  -0.000000785579546
   0.000000029861922
   0.000000001746356
   0.000000000059345
```

Metoda eliminacji Gaussa bez przestawiania wierszy dostarcza dokładniejszych wyników od metody z częściowym wyborem elementu głównego w kolumnie oraz od operatora dzielenia macierzy, ponieważ wynik pozostałych metod zawiera błąd rzędu e-13 dla macierzy 4x4. Wraz ze wzrostem wielkości macierzy, dla danego generatora przykładów, błąd dla funkcji `elgauss2` jest wciąż najmniejszy.

Porównano błąd rozwiązań uzyskanych przy pomocy eliminacji gaussa bez wyboru i z częściowym wyborem elementu głównego dla przykładów wygenerowanych przez funkcję `tstcndS.` Jej trzeci argument to przybliżona liczba uwarunkowania macierzy

```
[A,b,x0]=tstcndS(654321,20,10);
cond(A) % Sprawdzenie liczby uwarunkowania macierzy
```

```
ans =
   9.999999999999998
```

```
norm(elgauss2(A,b)-x0) % Norma błędu rozwiązania bez wyboru elementu głównego
```

```
ans =
     1.082574936035485e-12
```

```
norm(elgwegk(A,b)-x0) % Norma rozwiązania z wyborem elementu głównego
```

```
ans =
     5.136290570329300e-14
```

```
norm(A\b-x0) % Norma rozwiązania przez wbudowany operator Matlab-a
```

```
ans =
     3.375443180046173e-14
```

Błąd rozwiązań osiąga najmniejszą wartość dla wbudowanego operatora Matlab-a. Wraz ze wzrostem wielkości macierzy, błąd ten pozostaje najmniejszy i staje się o ponad rząd wielkości mniejszy od funkcji `elgauss2`.

```
[Am,bm,x0m]=tstcndS(654321,10,1e10);
cond(Am) % Sprawdzenie liczby uwarunkowania macierzy
```

```
ans =
     1.001150197134363e+10
```

```
norm(elgauss2(Am,bm)-x0m) % Norma błędu rozwiązania bez wyboru elementu głównego
```

```
ans =
     1.999087898342973e-07
```

```
norm(elgwegk(Am,bm)-x0m) % Norma rozwiązania z wyborem elementu głównego
```

```
ans =
     8.899291653550927e-07
```

```
norm(Am\bm-x0m) % Norma rozwiązania przez wbudowany operator Matlab-a
```

```
ans =
     8.899291648511292e-07
```

Dla bardzo wysokiego współczynnika uwarunkowania macierzy, najmniejszym błędem charakteryzuje się funkcja `elgauss2`, podczas gdy wbudowany operator osiąga bardzo zbliżony wynik do funkcji `elgwegk.`

```
cond(Am)
```

```
ans =
     1.001211604299074e+10
```

Część 2.

Liczba uwarunkowania macierzy a wpływ zaburzeń na błąd rozwiązania

Wskaźnik (liczba) uwarunkowania macierzy wskazuje, jak bardzo błąd danych wejściowych jest „wzmacniany" w procesie rozwiązywania układu równań i przenosi się na błąd wyniku.

Poniższy kod przykładowy dodaje do wybranego elementu wektora prawych stron zaburzenie multiplikatywne:

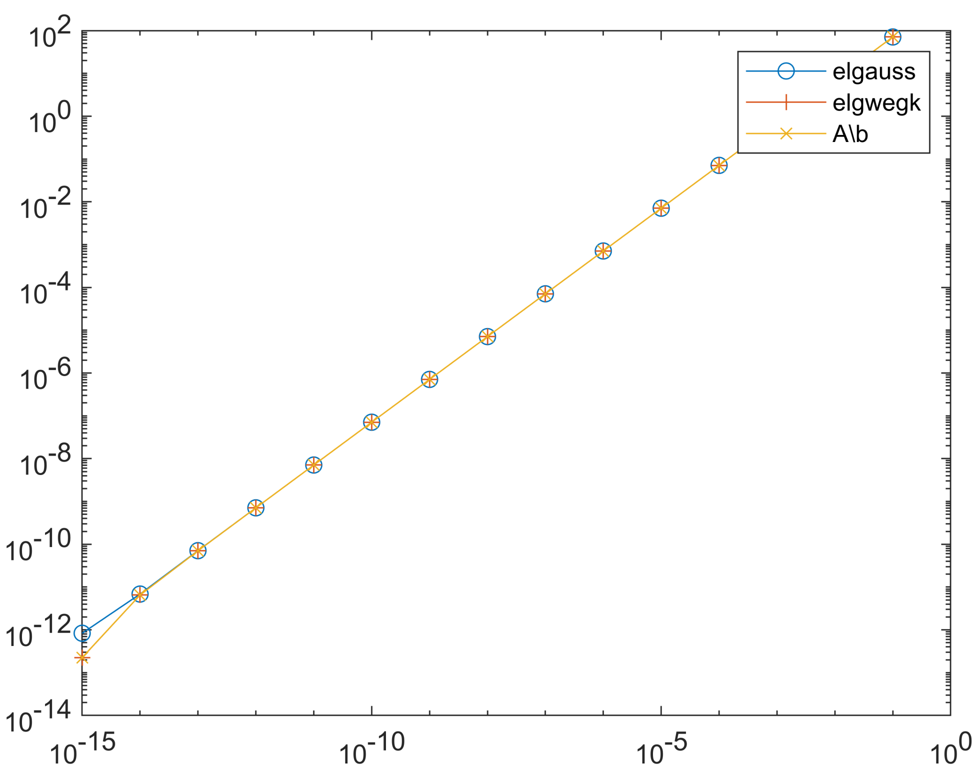
```
[A,b,x0,bmax,bmin]=tstcndS(654321,12,1e5); % Wygenerowanie przykładowego
                                           % układu równań 12x12 o
                                           % liczbie uwarunkowania ok. 1e5
C=cond(A)
```

```
C =
     1.000000000704706e+05
```

```
r=7 % Wybór elementu wektora prawych stron, który będzie modyfikowany
```

```
r =
     7
```

```
epc=10.^(-15:-1); % wektor mnożników (małych liczb) do skalowania zaburzeń
eelgc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu eliminacji bez wyboru elementu głównego
egzwc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu eliminacji z częściowym wyborem elementu głównego
eopMc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu wbudowanego operatora Ma
for k=1:length(epc)
    bm=b; % Skopiowanie wektora prawych stron do późniejszej modyfikacji
    bm(r)=bm(r)*(1+epc(k)); % Modyfikacja pojedynczego elementu prawej strony
    eelgc(k)=norm(elgauss2(A,bm)-x0)/norm(x0);
    egzwc(k)=norm(elgwegk(A,bm)-x0)/norm(x0);
    eopMc(k)=norm(A\bm-x0)/norm(x0);
end
loglog(epc,eelgc,'o-',epc,egzwc,'+-',epc,eopMc,'x-');hold on
legend('elgauss','elgwegk','A\\b');hold off
```



Z wykresu wynika, że metoda rozwiązywania równania nie wpływa na normę dla wybranej wartości zaburzenia multiplikatywnego.

Zmodyfikowano ten kod przykładowy tak, aby zbadać tylko eliminację Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego, ale modyfikować układ równań na inne sposoby:

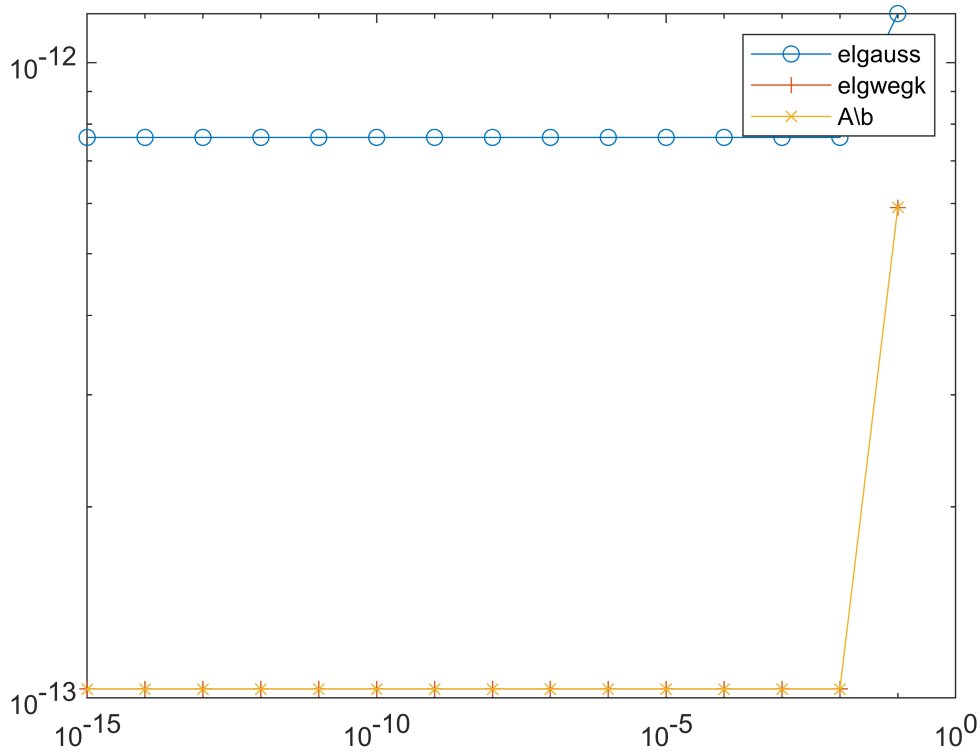
```
n=12;
[A,b,x0,bmax,bmin]=tstcndS(654321,n,1e5); % Wygenerowanie przykładowego
                                            % układu równań 12x12 o
                                            % liczbie uwarunkowania ok. 1e5
C=cond(A)
```

```
C =
    1.000000002186461e+05
```

```
epc=10.^(-15:-1); % wektor mnożników (małych liczb) do skalowania zaburzeń
```

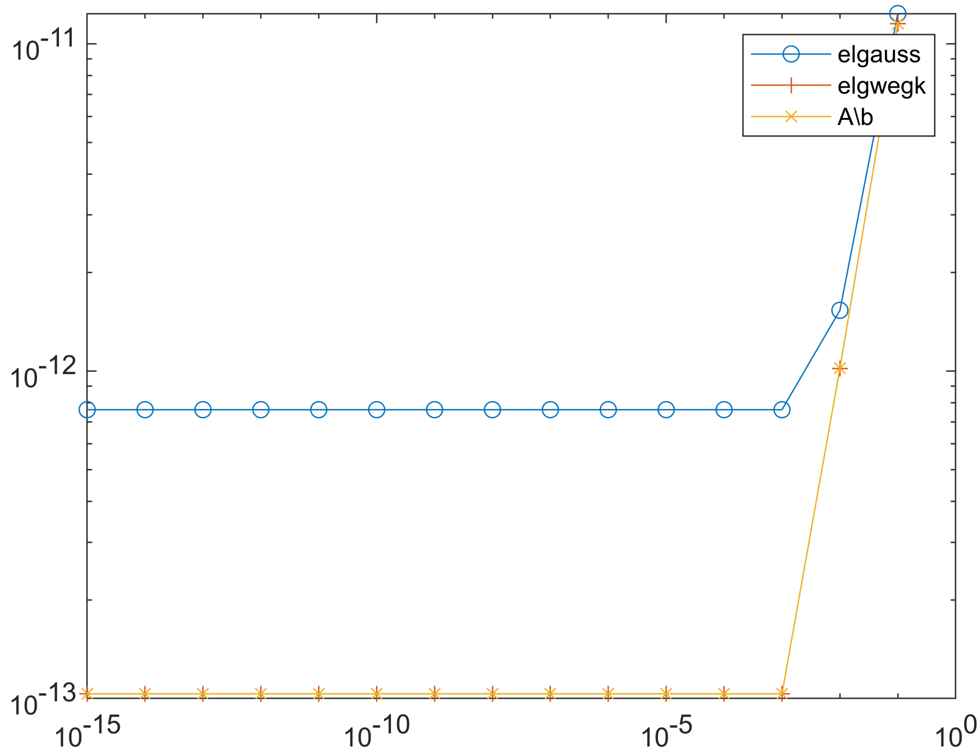
1. Dodawać do wektora prawych stron pomnożony przez niewielką liczbę (epc) zwrócony przez `tstcndS` wektor b_{max}

```
eelgc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu eliminacji bez wyboru elementu głównego
egzwc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu eliminacji z częściowym wyborem elementu głównego
eopMc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu wbudowanego operatora Ma
for k=1:length(epc)
    bm=b; % Skopiowanie wektora prawych stron do późniejszej modyfikacji
    bm=bm + bmax * epc(k); % Modyfikacja pojedynczego elementu prawej strony
    eelgc(k)=norm(elgauss2(A,bm)-x0)/norm(x0);
    egzwc(k)=norm(elgwegk(A,bm)-x0)/norm(x0);
    eopMc(k)=norm(A\bm-x0)/norm(x0);
end
loglog(epc,eelgc,'o-',epc,egzwc,'+-',epc,eopMc,'x-');hold on
legend('elgauss','elgwegk','A\\b');hold off
```



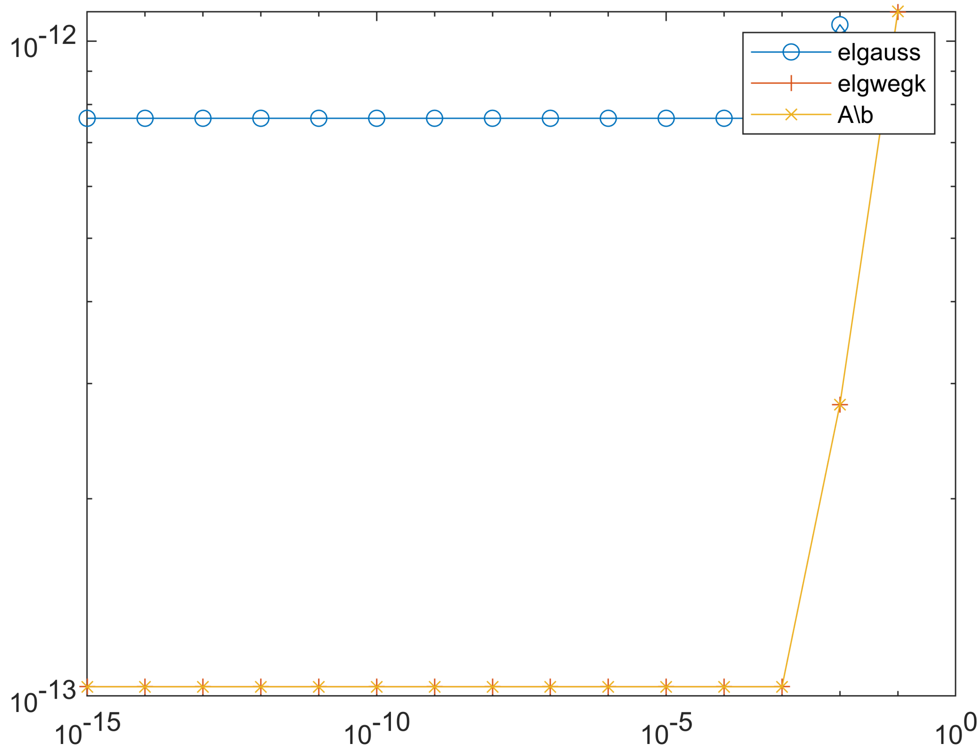
2. Dodawać do wektora prawych stron pomnożony przez niewielką liczbę (epc) zwrócony przez `tstcndS` wektor b_{min}

```
eelgc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu eliminacji bez wyboru elementu głównego
egzwc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu eliminacji z częściowym wyborem elementu głównego
eopMc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu wbudowanego operatora Ma
for k=1:length(epc)
    bm=b; % Skopiowanie wektora prawych stron do późniejszej modyfikacji
    bm=bm + bmin * epc(k); % Modyfikacja pojedynczego elementu prawej strony
    eelgc(k)=norm(elgauss2(A,bm)-x0)/norm(x0);
    egzwc(k)=norm(elgwegk(A,bm)-x0)/norm(x0);
    eopMc(k)=norm(A\bm-x0)/norm(x0);
end
loglog(epc,eelgc,'o-',epc,egzwc,'+-',epc,eopMc,'x-');hold on
legend('elgauss','elgwegk','A\\b');hold off
```



3. Dodawać do wektora prawych stron pomnożony przez niewielką liczbę (epc) wektor losowy v_{rnd}

```
eelgc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu eliminacji bez wyboru elementu głównego
egzwc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu eliminacji z częściowym wyborem elementu głównego
eopMc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu wbudowanego operatora Ma
for k=1:length(epc)
    v=randn(n,1);v=v/norm(v);
    bm=b; % Skopiowanie wektora prawych stron do późniejszej modyfikacji
    bm=bm + v * epc(k); % Modyfikacja pojedynczego elementu prawej strony
    eelgc(k)=norm(elgauss2(A,bm)-x0)/norm(x0);
    egzwc(k)=norm(elgwegk(A,bm)-x0)/norm(x0);
    eopMc(k)=norm(A\bm-x0)/norm(x0);
end
loglog(epc,eelgc,'o-',epc,egzwc,'+-',epc,eopMc,'x-');hold on
legend('elgauss','elgwegk','A\\b');hold off
```



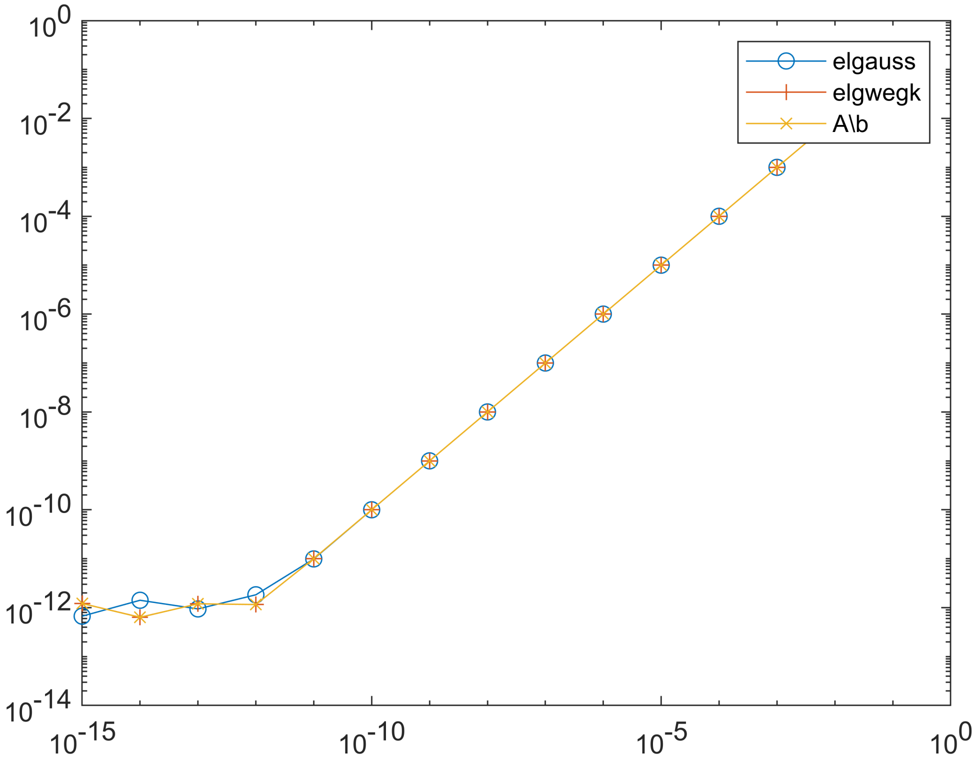
Wykresy zrobiono w skali logarytmicznej, używając jako odciętej względnej wartości zaburzenia, czyli $\frac{\|\varepsilon v\|}{\|b\|}$

gdzie v jest jednym z wektorów $b_{min}, b_{max}, v_{rnd}$

Przeprowadzono podobny eksperyment, gdzie modyfikacji podlegał będzie nie wektor prawych stron, ale macierz A

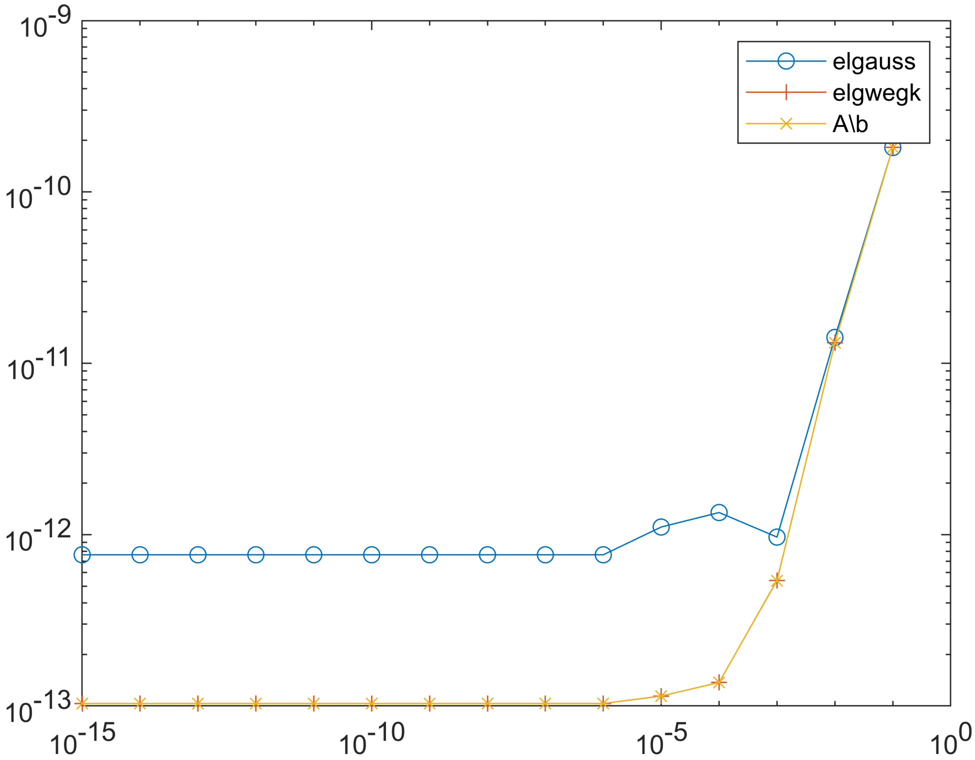
1. Pomnożenie macierzy A pomnożony przez niewielką liczbę (epc)

```
eelgc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu eliminacji bez wyboru elementu głównego
egzwc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie błędu
                        % eliminacji z częściowym wyborem elementu głównego
eopMc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu wbudowanego operatora Ma
for k=1:length(epc)
    Am=A; % Skopiowanie wektora prawych stron do późniejszej modyfikacji
    Am=Am * (1 + epc(k)); % Modyfikacja pojedynczego elementu prawej strony
    eelgc(k)=norm(elgauss2(Am,b)-x0)/norm(x0);
    egzwc(k)=norm(elgwegk(Am,b)-x0)/norm(x0);
    eopMc(k)=norm(Am\b-x0)/norm(x0);
end
loglog(epc,eelgc,'o-',epc,egzwc,'+-',epc,eopMc,'x-');hold on
legend('elgauss','elgwegk','A\\b');hold off
```



2. Dodawać do macierzy A pomnożony przez niewielką liczbę (epc) macierz losową V_{rnd}

```
eelgc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu eliminacji bez wyboru elementu głównego
egzwc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu eliminacji z częściowym wyborem elementu głównego
eopMc=zeros(size(epc)); % Zarezerwowanie tablicy na zapisanie
                        % błędu wbudowanego operatora Ma
for k=1:length(epc)
    V=randn(n,n);V=V/norm(V);
    Am=A; % Skopiowanie wektora prawych stron do późniejszej modyfikacji
    Am=Am + V * epc(k); % Modyfikacja pojedynczego elementu prawej strony
    eelgc(k)=norm(elgauss2(Am,b)-x0)/norm(x0);
    egzwc(k)=norm(elgwegk(Am,b)-x0)/norm(x0);
    eopMc(k)=norm(Am\b-x0)/norm(x0);
end
loglog(epc,eelgc,'o-',epc,egzwc,'+-',epc,eopMc,'x-');hold on
legend('elgauss','elgwegk','A\\b');hold off
```



Wykresy przedstawiają, że niezależnie od rodzaju zaburzenia, metoda eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego jest gorsza lub równa, ze względu na błąd, metodzie z częściowym wyborem elementu głównego. Wykresy również pokazują zbieżność błędów dla metody eliminacji z częściowym wyboruem elementu głównego oraz metody, z której korzysta wbudowany operator Matlab-a.

Wykorzystane w ćwiczeniu funkcje:

```
function [x, L, U] = elgauss(A, b)
[n,m]=size(A); % Odczytanie wymiarów macierzy A
[nb,~]=size(b); % Odczytanie liczby wierszy prawej strony
if n~=m, error("Macierz A musi być kwadratowa"); end % Test czy macierz jest kwadratowa
% Test kompatybilności prawej strony
if n~=nb, error("Macierz A i b muszą mieć tyle samo wierszy"); end
AB=[A,b]; % "Zblokowanie" macierzy układu i prawych stron
L=eye(n);
for k=1:n-1
    L(k+1:end,k)=AB(k+1:end,k)/AB(k,k);
    AB(k+1:end,:)=AB(k+1:end,:)-L(k+1:end,k)*AB(k,:);
end
x=zeros(size(b)); % Zaincjowanie zmiennej wyjściowej
x(n,:)=AB(n,n+1:end)/AB(n,n); % Obliczenie ostatniej (ostatnich) niewiadomych
```

```
for k=n-1:-1:1
    x(k,:)=(AB(k,n+1:end)-AB(k,k+1:n)*x(k+1:end,:))/AB(k,k); % Podstawienie wstecz
end
U=triu(AB(1:end,1:n)); % Wydzielenie czynnika trójkątnego górnego
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [x, U, L] = elgauss2(A, b)
[n,m]=size(A); % Odczytanie wymiarów macierzy A
[nb,~]=size(b); % Odczytanie liczby wierszy prawej strony
% Test czy macierz jest kwadratowa
if n~=m, error("Macierz A musi być kwadratowa"); end
% Test kompatybilności prawej strony
if n~=nb, error("Macierz A i b muszą mieć tyle samo wierszy"); end
AB=[A,b]; % "Zblokowanie" macierzy układu i prawych stron
for k=1:n-1
    AB(k+1:end,k)=AB(k+1:end,k)/AB(k,k);
    AB(k+1:end,k+1:end)=AB(k+1:end,k+1:end)-AB(k+1:end,k)*AB(k,k+1:end);
end
x=nan(size(b)); % Zaincjowanie zmiennej wyjściowej
x(n,:)=AB(n,n+1:end)/AB(n,n); % Obliczenie ostatniej (ostatnich) niewiadomych
for k=n-1:-1:1
    x(k,:)=(AB(k,n+1:end)-AB(k,k+1:n)*x(k+1:end,:))/AB(k,k); % Podstawienie wstecz
end

U=triu(AB(1:end,1:n)); % Wydzielenie czynnika trójkątnego górnego
L=tril(AB(1:end,1:n),-1)+eye(n); % Wydzielenie czynnika trójkątnego dolnego
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [x, U, L, P] = elgwegk(A, b)
[n,m]=size(A); % Odczytanie wymiarów macierzy A
[nb,~]=size(b); % Odczytanie liczby wierszy prawej strony
% Test czy macierz jest kwadratowa
if n~=m, error("Macierz A musi być kwadratowa"); end
% Test kompatybilności prawej strony
if n~=nb, error("Macierz A i b muszą mieć tyle samo wierszy"); end
AB=[A,b]; % "Zblokowanie" macierzy układu i prawych stron
P=zeros(n,n); % wektor zapamiętujący zamiany wierszów macierzy
for k=1:n-1
    [~,idx]=max(abs(AB(k:end,k)));
    if idx > 1
        AB([k,k+idx-1],:)=AB([k+idx-1,k],:);
        P(k,k+idx-1) = 1;
    end
    AB(k+1:end,k)=AB(k+1:end,k)/AB(k,k);
    AB(k+1:end,k+1:end)=AB(k+1:end,k+1:end)-AB(k+1:end,k)*AB(k,k+1:end);
end
```

```
x=nan(size(b)); % Zaincjowanie zmiennej wyjściowej
x(n,:)=AB(n,n+1:end)/AB(n,n); % Obliczenie ostatniej (ostatnich) niewiadomych
for k=n-1:-1:1
    x(k,:)=(AB(k,n+1:end)-AB(k,k+1:n)*x(k+1:end,:))/AB(k,k); % Podstawienie wstecz
end
U=triu(AB(1:end,1:n)); % Wydzielenie czynnika trójkątnego górnego
L=tril(AB(1:end,1:n),-1)+eye(n); % Wydzielenie czynnika trójkątnego dolnego
end
```