Apellido y Nombre: [redacted]

Carrera: [redacted]

Importante: Para aprobar se deben sumar al menos la mitad de los puntos de cada parte: práctica (33 puntos) y teórica (17 puntos). Justificar adecuadamente todas las respuestas.

Parte Práctica

1. (20 pts.) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal dada por

$$T(a, b, c) = (a + 2b + c)x^2 + (2a + b - c)x + (-a + b + 2c.)$$

   (a) Hallar el núcleo de T, encontrar una base y calcular su dimensión.

   (b) Hallar explícitamente la imagen de T y dar una base.

   (c) Calcular la matriz de T respecto de las bases ordenadas

$$\mathcal{B} = \{(1, -2, 1), (2, -3, 3), (-2, 2, -3)\} \qquad \text{y} \qquad \tilde{\mathcal{B}} = \{x^2 + x, -x + 1, x^2\}$$

   (d) Hallar las coordenadas de $T(0, 1, 0)$ respecto de la base $\tilde{\mathcal{B}}$ y encontrar el polinomio $q(x)$ tal que $[q(x)]_{\tilde{\mathcal{B}}} = (1, -1, -1)$.

2. (15 pts)

   (a) Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
   - el núcleo de T sea el plano $x - y - z = 0$.
   - el subespacio generado por el vector $(1, 1, 1)$ sea la imagen de T,
   - y además se cumpla que $T(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$.

   (b) Dar una fórmula explícita para $T(x, y, z)$.

3. (15 pts) Sean los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+z-w = 0 \text{ y } 2x+y+z = 0\}, \quad W_2 = \langle (0, 3, 1, 1), (-1, 0, 0, 1), (2, -1, 0, 0) \rangle.$$

   (a) Hallar una base de W_1, describir W_2 explícitamente y obtener una base de W_2.

   (b) Hallar $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$, expresándolos con generadores.

   (c) Determinar la dimensión de $W_1 + W_2$.

   (d) ¿Es $W_1 + W_2$ una suma directa? Justificar.

4. (15 pts) Sea $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y definimos la transformación lineal $T : V \to V$ dada por

$$T(B) = AB - BA,$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4/6 ~~(a)~~ Probar que T es una transformación lineal y hallar la matriz de T en la base $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

2/6 ~~(b)~~ Hallar los autovalores de T y los autoespacios asociados a ellos.

-/3 ~~(c)~~ Determinar si T es diagonalizable. Justificar.

Parte Teórica

5. (10 pts.) Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $T : V \longrightarrow W$ es una transforamación lineal probar que

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Nu}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

6. (15 pts.) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.
   (a) (10 pts.) Probar que si V esta generado por r elementos entonces todo conjunto linealmente independiente en V es finito y no contiene mas de r elementos.
   (b) (5 pts.) Deducir que dos bases de V tienen la misma cantidad de elementos.

7. (10 pts.) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar o dar un contraejemplo según el caso.
   0 (a) Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $n > m$ entonces el espacio de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$ tiene dimensión mayor que 0.
   1 (b) Si v es un autovector de una transformación lineal T inversible entonces v es autovector de T^{-1}.
   2 (c) Si $T : V \to W$ una transformación lineal y $v_1, \ldots, v_m \in V$ tales que $\{T(v_1), \ldots, T(v_m)\}$ es un conjunto L.I. entonces $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es L.I.