1	2	3a	3b	Suma	4	5	6a	6b	6c	7a	7b	Suma	Total

Calificación

Apellido y Nombre:

Condición: Libre Regular

Año de regularidad (en caso de ser regular):

Álgebra / Álgebra II / Álgebra Lineal - Final

24 de febrero de 2025

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos.
Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica para los regulares. Los alumnos libres deberán obtener al menos 40 puntos en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (12 pts) Sea $\Bbbk$ un cuerpo y sean V, W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales, donde V es de dimensión finita. Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Probar que $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim V - \dim(\mathrm{Nu} f)$.

2. (12 pts) Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Enunciar y demostrar el Teorema de ortogonalización de Gram-Schmidt.

3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

   (a) (3 pts) Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita, $V \neq 0$. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal nilpotente (es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m = 0$), entonces no es un epimorfismo.

   (b) (3 pts) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Si $u, v, w \in V$ son autovectores no nulos de T asociados a autovalores distintos, entonces el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno $\langle , \rangle$. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Definimos una función

$$\{,\} : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \{v, w\} = \langle T(v), T(w)\rangle, \qquad v, w \in V.$$

Probar que $\{,\}$ es un producto interno para V si y sólo si T es un isomorfismo.

5. (15 pts) Sean $a_1, \cdots, a_n$ números reales. Probar que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible si y sólo si alguno de los a_i's no es cero.

6. (25 pts) Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ la transformación lineal dada por $f(A) = B^t AB$.

   (a) Sean $\mathcal{S}$ (respectivamente, $\mathcal{A}$) los subespacios de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ de todas las matrices simétricas (respectivamente, antisimétricas). Probar que $f(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ y $f(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$.

   (b) Consideremos la restricción de f a $\mathcal{A}$, es decir $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Dar la matriz de esta transformación en la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

   (c) Hallar todos los valores de α tales que la intersección del autoespacio asociado a -1 con $\mathcal{A}$ tiene dimensión 2.

7. (15 pts) Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo.

   (a) Sea $f : \mathbb{k}^{n\times n} \to \mathbb{k}$ una transformación lineal tal que $f(AB) = f(BA)$ para todo par $A, B \in \mathbb{k}^{n\times n}$. Probar que existe $c \in \mathbb{k}$ tal que $f = c\ \mathrm{Tr}$.

   Ayuda: Si E_{ij} denota la matriz $n \times n$ con un 1 en la entrada (i, j) y ceros en cualquier otra entrada, y O denota la matriz nula $n \times n$, mostrar primero que

$$E_{ik}E_{lj} = \begin{cases} O, & \text{si } k \neq l \\ E_{ij}, & \text{si } k = l. \end{cases}$$

   (b) Sea S el subespacio de $\mathbb{k}^{n\times n}$ generado por $AB - BA$, $A, B \in \mathbb{k}^{n\times n}$, es decir,

$$S = \langle AB - BA \mid A, B \in \mathbb{k}^{n\times n} \rangle.$$

   Probar que $S = \ker \mathrm{Tr}$.

Justificar debidamente todas las respuestas

Solución del Problema 7

(a) Sea $c = f(E_{11})$. Tenemos que:

- $f(E_{ii}) = f(E_{i1}E_{1i}) = f(E_{1i}E_{i1}) = f(E_{11}) = c$ para todo $i \neq 1$.
- $f(E_{ij}) = f(E_{ij}E_{jj}) = f(E_{jj}E_{ij}) = f(0) = 0$ para todo $i \neq j$.

Como $B = \{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ es base de $\mathbb{K}^{n\times n}$ y hemos probado que $f(E) = c\,\mathrm{Tr}(E)$ para todo $E \in B$, se sigue que $f = c\,\mathrm{Tr}$.

(b) Dado que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ para todo $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, es inmediato que $S \subset \ker(\mathrm{Tr})$. Por otro lado, notemos que:

- $E_{11} - E_{ii} = E_{1i}E_{i1} - E_{i1}E_{1i} \in S$ para todo $i \neq 1$.
- $E_{ij} = E_{ii}E_{ij} - E_{ij}E_{ii} \in S$ para todo $i \neq j$.

Luego, el conjunto $B' = \{E_{11} - E_{ii} | i \neq 1\} \cup \{E_{ij} | i \neq j\}$ tiene $n^2 - 1$ elementos, está contenido en S y es linealmente independiente (esto último es tarea para el lector). Además, como Tr es sobreyectiva, entonces $\dim \ker(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1$. Finalmente como $S \subset \ker(\mathrm{Tr})$ y $\dim S \geq n^2 - 1$, obtenemos que $S = \ker(\mathrm{Tr})$.