2do parcial - 2C - 2019 ①

1) a) Derivar:

$$f(x) = \cos(\ln(x)) \cdot \sqrt{x+1}$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x+1} + \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Cuentas aux

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

(b) Ecuación de la recta tangente en el punto $(1, \sqrt{2})$

$$y = ax + b$$

La pendiente de la recta tangente a la función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$a = f'(1) = -\operatorname{sen}(\underbrace{\ln(1)}_{0}) \cdot \frac{1}{1} \cdot \underbrace{\sqrt{1+1}}_{2} + \cos(\underbrace{\ln(1)}_{0}) \cdot \frac{1}{2\underbrace{\sqrt{1+1}}_{2}}$$

$$= \underbrace{-\cancel{\operatorname{sen}(0)}}_{=0} \sqrt{2} + \frac{\overbrace{\cos(0)}^{1}}{2\sqrt{2}}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2\sqrt{2}}} \rightsquigarrow y = \frac{1}{2\sqrt{2}} x + b$$

La recta pasa por el punto $(1, \sqrt{2})$

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 1 + b \rightsquigarrow b = \underbrace{\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\overbrace{2\sqrt{2}\sqrt{2}}^{2} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\boxed{b = \frac{3}{2\sqrt{2}}}$$

La recta que es tangente a la función en el punto $(1, \sqrt{2})$ es:

$$\boxed{y = \frac{1}{2\sqrt{2}} x + \frac{3}{2\sqrt{2}}}$$

2) Calcular.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+x^2}{e^{3x}}$ = Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ es válido aplicar regla de L'Hopital

L'Hopital
Si $\to \frac{\infty}{\infty}$ ó $\frac{0}{0}$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'}{g'}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+x^2}{e^{3x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{5+2x}{3.e^{3x}}$$

$\to$ Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ $\Rightarrow$ vuelvo a aplicar regla de L'Hopital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{9e^{3x}} = \boxed{0}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln(\sqrt{x})$ = Indeterminación del tipo $0.(-\infty)$

$\boxed{\text{NO}}$ es válido aplicar L'Hopital.

Reescribimos: $x.\ln(\sqrt{x}) \equiv \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0^+} x.\ln(\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\frac{1}{x}}$$

$\to$ Indeterminación del tipo $-\frac{\infty}{\infty} \to$ es válido aplicar L'Hópital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$(\ln(\sqrt{x}))' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(x^{-1})' = -1.x^{-2}$

$\frac{1}{2\sqrt{x}.\sqrt{x}} = \frac{1}{2(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^{\cancel{2}}}{2.\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{2} = \boxed{0}$$

(3) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

a) Dominio y Paridad

- La función $f(x)$ es el cociente de dos funciones $\Rightarrow$ su dominio será

$$\operatorname{dom}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) = \{\operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} h\} - \{x / h(x)=0\}$$

– El dominio del numerador $(2x)$ son todos los Reales ya que es un polinomio

– El dominio del denominador (x^2+3) son todos los Reales ya que es un polinomio.

– El denominador NO se anula nunca porque no existe ningún número real tal que $x^2+3=0$

$$\underbrace{x^2}_{\text{positivo}} = \underbrace{-3}_{\text{negativo}}$$

$\Rightarrow$ El dominio de f:

$$\boxed{\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}}$$

- Una función es par si $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in \operatorname{Dom} f$
- Una función es impar si $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \operatorname{Dom} f$

$$f(-x) = \frac{2.(-x)}{(-x)^2+3} = -\frac{2x}{x^2+3} = -f(x)$$

$\boxed{\text{Por lo tanto } f(x) \text{ es impar}}$

b) Asíntotas verticales y horizontales.

A.V: No tiene ya que el $Dom\, f = \mathbb{R}$

A.H:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{2x}^{\to+\infty}}{\underbrace{x^2+3}_{\to+\infty}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{2}^{\to 2}}{\underbrace{\underbrace{x}_{\to\infty}\underbrace{\left(1+\underbrace{\tfrac{3}{x^2}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}}_{\to+\infty}} = \boxed{0^+}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{2}^{\to 2}}{\underbrace{\underbrace{x}_{\to-\infty}\underbrace{\left(1+\underbrace{\tfrac{3}{x^2}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}}_{\to-\infty}} = \boxed{0^-}$$

la función tiene asíntotas horizontales en $\boxed{y=0}$

c) Puntos críticos.

Son aquellos valores de $x \in Dom\, f$ / $f'(x)=0$ ó $f'(x)$ no existe

$$f'(x) = \frac{2.(x^2+3) - 2x.2x}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^2+6-4x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$$

- $f'(x)$ está bien definida $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}}$ ya que el denominador NO se anula nunca porque no existe $x\in\mathbb{R}$ / $\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-3}_{<0}$.
- $f'(x) = 0 = \frac{2(3-x^2)}{(x^2+3)^2}$ Para que el cociente de dos números sea cero, el numerador debe ser cero: $\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$

$0 = 2(3-x^2) \rightarrow$ dif. de cuadr.

$0 = 2.(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$

Para que el producto de dos números sea cero, alguno de ellos debe ser cero $\quad a \cdot b = 0 \iff a = 0$ ó $b = 0$

$$2 \cdot (\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) = 0 \iff \sqrt{3} - x = 0 \text{ ó } \sqrt{3} + x = 0$$

$$\boxed{x_1 = \sqrt{3} \qquad x_2 = -\sqrt{3}}$$

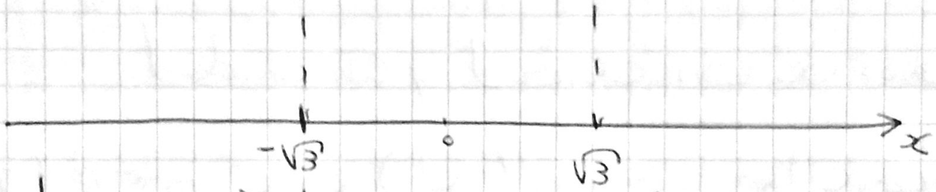
Son puntos críticos de $f(x)$

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$f(x)$ es creciente en aquellos intervalos en los que su derivada es $+$

$f(x)$ es decreciente en los intervalos en los que su derivada es $-$

$\Rightarrow$ Vemos los signos de la derivada: $f'(x) = \dfrac{2(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)}{(x^2+3)^2}$

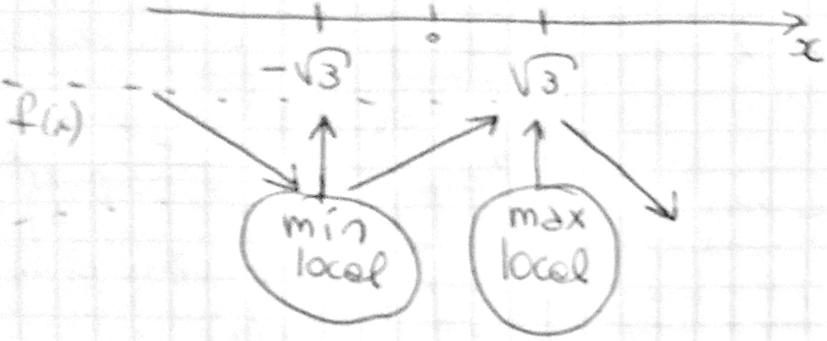


	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$(\sqrt{3} - x)$	$+$	$+$	$-$
$(\sqrt{3} + x)$	$-$	$+$	$+$
$(x^2+3)^2$	$+$	$+$	$+$
$f' = \dfrac{2(\ )(\ )}{(\ )^2}$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

e) Máx y Min locales.



– Ya que f(x) decrece hasta $x=-\sqrt{3}$ y luego crece, entonces $x=-\sqrt{3}$ es un mínimo local.

– Ya que f(x) crece hasta $x=\sqrt{3}$ y luego decrece, entonces $x=\sqrt{3}$ es un máximo local.

f) Intervalos de concavidad y convexidad.

f(x) es cóncava hacia arriba ($\cup$) en los intervalos que $f''(x)>0$

f(x) es cóncava hacia abajo ($\cap$) en los intervalos que $f''(x)<0$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x\cdot(x^2+3)^2 - (-2x^2+6)\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{\cancel{(x^2+3)}\cdot[-4x\cdot(x^2+3) - 4x(6-2x^2)]}{(x^2+3)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f''(x) = \frac{-4x\,[\,x^2+3+6-2x^2\,]}{(x^2+3)^3} = \frac{-4x\,[9-x^2]}{(x^2+3)^3}$$

Buscamos los puntos donde la f'' se anula para definir los intervalos en los que analizaremos sus signos:

$$f''(x) = 0 = \frac{-4x(9-x^2)}{(x^2+3)^3}$$

el cociente será cero cuando se anule el numerador.

$$0 = -4x \cdot (9-x^2)$$

el producto será cero cuando alguno de los dos sea cero

$\boxed{x = 0}$ ó $9 - x^2 = 0$ dif. cuad.

$(3-x)(3+x) = 0$

$3 - x = 0$ ó $3 + x = 0$

$x = 3$ $\qquad$ $x = -3$

$-3 \qquad 0 \qquad 3 \qquad x$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
$-4x$	+	+	−	−
$(3-x)$	+	+	+	−
$(3+x)$	−	+	+	+
$(x^2+3)^3$	+	+	+	+
f''	−	+	−	+
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

elijo un número dentro de cada intervalo.

f es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-3) \cup (0,3)$
f es cóncava hacia arriba en $(-3,0) \cup (3,+\infty)$

g) Puntos de inflexión: son los puntos del dominio de f en los que cambia la concavidad de la función

$x = -3$, $x = 0$ y $x = 3$ son P.I.

h) Esbozar el gráfico.

Resumen: A. H en $y = 0$ $\begin{matrix} x \to +\infty \to 0^+ \\ x \to -\infty \to 0^- \end{matrix}$

mín. local en $x = -\sqrt{3}$ $\longrightarrow$ $f(-\sqrt{3}) = \dfrac{2.(-\sqrt{3})}{(-\sqrt{3})^2+3} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3+3}$

max local en $x = \sqrt{3}$

$= -\dfrac{2\sqrt{3}}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx -0.58$

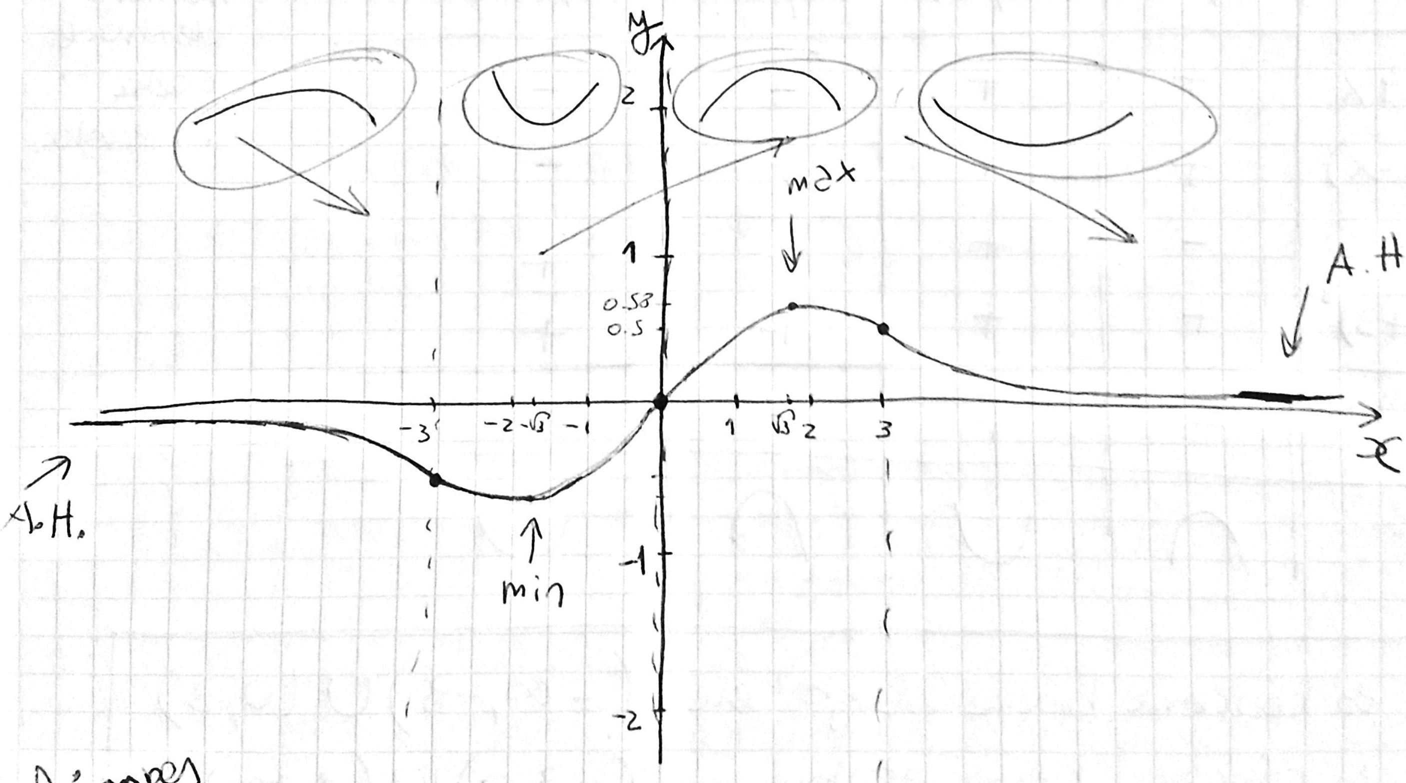
$\longrightarrow f(\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \sim 0{,}58.$

cambios de concavidad

en $x = -3 \rightarrow f(-3) = \dfrac{2.(-3)}{(-3)^2+3} = \dfrac{-6}{9+3} = -\dfrac{6}{12} = -\dfrac{1}{2}$

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0$

$x = 3 \rightarrow f(3) = \dfrac{1}{2}$



f impar

4)

a) $\int x \cdot \operatorname{sen}(3x^2)\,dx$

Por sustitución: defino $u = 3x^2$

$$du = 6x\,dx \rightsquigarrow \frac{du}{6} = x \cdot dx$$

reemplazamos:

$$\int x \cdot \operatorname{sen}(3x^2)\,dx = \int \operatorname{sen}(u) \cdot \frac{du}{6} = \frac{1}{6} \cdot \int \operatorname{sen}(u)\,du$$

(la función cuya derivada es sen(u) es −cos(u))

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(-\cos(u)\right) + C = \boxed{-\frac{1}{6}\cos(3x^2) + C}$$

b) Obtener la primitiva F / $F(0)=0$

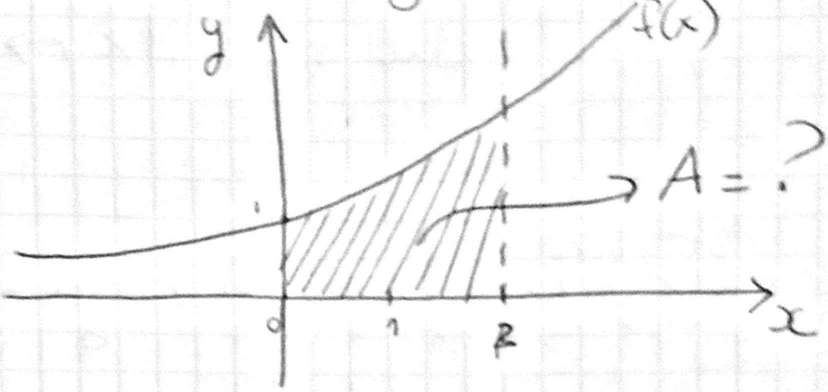
$$F(x) = -\frac{\cos(3x^2)}{6} + C$$

$$F(0) = 0 = -\frac{\overset{\to 1}{\cos(0)}}{6} + C$$

$$0 = -\frac{1}{6} + C \rightsquigarrow C = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{\cos(3x^2)}{6} + \frac{1}{6}}$$

5) Determinar el área de la región encerrada por la gráfica de $f(x)=e^{2x}$, el eje x y las rectas verticals $x=0$ y $x=2$



$$A=\int_0^2 e^{2x}\,dx=\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^2=\frac{e^4}{2}-\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$$

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)}$$