Ejercicio 1.

a) $\int \operatorname{sen}(3x)\, e^{\cos(3x)}\, dx$

$u = \cos(3x) \qquad du = -3 \operatorname{sen}(3x)\, dx \qquad -\frac{du}{3} = \operatorname{sen}(3x)\, dx$

$$\int \operatorname{sen}(3x)\, e^{\cos(3x)} dx = -\frac{1}{3}\int e^{u}\, du = -\frac{1}{3} e^{u} + cte = -\frac{1}{3} e^{\cos(3x)} + cte$$

b) $\int \frac{4x}{(x+2)(x^2-1)}\, dx$

$$\frac{4x}{(x+2)(x^2-1)} = \frac{4x}{(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x^2-1) + B(x+2)(x+1) + C(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{A(x^2-1) + B(x^2+3x+2) + C(x^2+x-2)}{(x+2)(x^2-1)}$$

$$= \frac{x^2(A+B+C) + x(3B+C) - A + 2B - 2C}{(x+2)(x^2-1)}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B+C=0 \\ 3B+C=4 \\ 2B-A-2C=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C=4-3B \\ 2B-A-2(4-3B)=0 \\ 2B-A-8+6B=0 \\ 8B-A=8 \end{array} \left.\right\} \begin{array}{l} C=-A-B \\ -A-B=4-3B \\ 2B-A=4 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} 6B=4 \\ \boxed{B=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}} \end{array}$$

$\ominus$

$$\rightarrow 2\frac{2}{3} - 4 = A = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3} \quad \boxed{A = -\frac{8}{3}} \qquad C = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad \boxed{C=2}$$

$$\Rightarrow \frac{4x}{(x+2)(x^2-1)} = -\frac{8}{3}\frac{1}{x+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{4x}{(x+2)(x^2-1)} dx = -\frac{8}{3}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1} + 2\int\frac{dx}{x+1} = -\frac{8}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1|$$

$$+ 2\ln|x+1| + cte$$

Ejercicio 2. Determine si la siguiente integral converge y en tal caso calcularla.

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln 4x}{x^3} dx$$

Solución.

Calculamos primero la integral indefinida $\int \frac{\ln 4x}{x^3} dx$. Para calcular esta integral, usamos la fórmula de integración por partes

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)\, dx - \int f'(x)\, g(x)\, dx.$$

En nuestro caso, elegimos $f(x) = \ln 4x$ y $g'(x) = \frac{1}{x^3}$. Entonces

$$f'(x) = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}, \quad g(x) = -\frac{1}{2x^2}, \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\int \frac{\ln 4x}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \ln 4x - \int \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) dx =$$
$$-\frac{1}{2x^2} \ln 4x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \ln 4x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) =$$
$$-\frac{1}{2x^2} \ln 4x - \frac{1}{4x^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} \ln 4x + \frac{1}{2x^2}\right).$$

Ahora, usamos la definición de integral impropia, y calculamos

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln 4x}{x^3} dx = \lim_{M\to\infty} \int_2^{M} \frac{\ln 4x}{x^3} dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} \ln 4x + \frac{1}{2x^2}\right) |_2^M =$$
$$-\frac{1}{2} \lim_{M\to\infty} \left[\frac{1}{M^2} \ln 4M + \frac{1}{2M^2} - \left(\frac{1}{4} \ln 8 + \frac{1}{8}\right)\right].$$

Como

$$\lim_{M\to\infty} \left(\frac{1}{M^2} \ln 4M + \frac{1}{2M^2}\right) = 0,$$

nos queda

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln 4x}{x^3} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \ln 8 + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} \ln 8 + \frac{1}{16}.$$

Ejercicio 3. Determine si la siguiente sucesión converge o no y calcule el límite si es posible.

$$a_n = \cos\left(\frac{2}{n}\right)$$

Solución.

Notamos primero que la sucesión $\left\{\frac{2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y su límite es 0. Entonces, usando un teorema del teórico, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{2}{n}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\right) = \cos 0 = 1.$$

Parcial de regularización Junio 2020

Ej. 4 El ejercicio resueto lo pueden encontrar en la página 726 (Ejemplo 5) del libro Cálculo de varias variables de Stewart

---

Ej. 5 Encontrar la representacion en serie de Taylor, centrado en $a=0$ de $f(x)=\cos(\pi x)$. ¿Para que valores de x converge la serie?

En el caso $a=0$, la serie de Taylor se expresa como:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots$$

En nuestro caso, $f(x)=\cos(\pi x)$

Veamos cada término:

$f(0)=\cos(0)=1$; $f'(x)=-\pi\,\mathrm{sen}(\pi x)$, $f'(0)=0$

$f''(x)=-\pi^2\cos(\pi x)$, $f''(0)=-\pi^2$

$f'''(x)=+\pi^3\,\mathrm{sen}(\pi x)$, $f'''(0)=0$

$f^{iv}(x)=+\pi^4\cos(\pi x)$, $f^{iv}(0)=\pi^4$ . . . .

entonces $f(x)=1-\frac{\pi^2}{2!}x^2+\frac{\pi^4x^4}{4!}-\frac{\pi^6x^6}{6!}+\dots$

o lo que es lo mismo : $f(x)=\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$

Para la convergencia podemos aplicar el criterio del cociente o de la razón : Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L<1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es abolutamente convergente

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\dfrac{\pi^{2(n+1)}x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{\dfrac{\pi^{2n}x^{2n}}{(2n)!}}=\frac{\pi^2x^2}{2(n+1)}$$

ent.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2x^2}{2(n+1)}=\pi^2x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=0$$

Converge $\forall$ x.

Análisis Matemático II

Lic. en Ciencias de la Computación - 2020

Ejercicio 6

Tomamos como punto $\mathbf{P_0}$= (1,2,3)

Ahora calculemos los vectores que generan el plano:
$(0,-1,1)$-$\mathbf{P_0}$= $(0,-1,1)$-$(1,2,3)$=$(-1,-3,-2)$
$(1,-1,0)$-$\mathbf{P_0}$= $(1,-1,0)$-$(1,2,3)$=$(0,-3,-3)$

Así, la ecuación vectorial es:
S=$(1,2,3)$+$(-1,-3,-2)$t+$(0,-3,-3)$r

Calculemos ahora el vector normal al plano. Tenemos que hacer el producto vectorial entre los vectores generadores:
$(-1,-3,-2)$X$(0,-3,-3) = (3,-3,3)$

Así la ecuación normal queda: $\langle (x,y,z) - \mathbf{P_0}, \mathbf{N} \rangle = \mathbf{0}$
$\langle (x,y,z) - (1,2,3), (3,-3,3) \rangle = 0$

¿Pertenece (0,0,0) al plano?
Basta con ver con si ese punto cumple con la ecuación normal. Al evaluar (0,0,0) en la ecuación de arriba vemos que no se cumple:
$\langle (0,0,0) - (1,2,3), (3,-3,3) \rangle = 0$, entonces $-6 = 0$, por lo cual (0,0,0) no pertenece al plano.

Ejercicio 7

$f(x) = \frac{xz^2}{(y+z)}$

f_x=$\frac{z^2}{y+z}$

f_y=$-\frac{xz^2}{(y+z)^2}$

f_z=$\frac{2zx(y+z)-xz^2}{(y+z)^2}$=$\frac{xz(2y+z)}{(y+z)^2}$

f_{xx}=0

f_{yy}=$\frac{2xz^2}{(y+z)^3}$

EJERCICIO 8

$$f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{en } (3, \pi)$$

Ecuación recta normal al plano

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$$

$$F_x(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0)$$

$$F_y(x_0,y_0,z_0) = f_y(x_0,y_0)$$

$$F_z(x_0,y_0,z_0) = -1$$

$$z = f(x,y) \,, \quad z_0 = f(x_0,y_0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (3, \pi, \operatorname{sen}(\pi/3)) = (3, \pi, \sqrt{3}/2)$$

$$f_x(x,y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right) \qquad f_x(3,\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{-\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\pi}{9}\right) = -\frac{\pi}{18}$$

$$f_y(x,y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} \qquad f_y(3\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{x-3}{-\pi/18} = \frac{y-\pi}{1/6} = \frac{z-\sqrt{3}/2}{-1} \quad \leftarrow \text{Ec. recta normal al plano}$$

Ecuación plano tangente

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\pi}{18}(x-3) + \frac{1}{6}(y-\pi) \quad \leftarrow \text{Ec. plano tangente.}$$

ϑ recta normal al plano.

$$\vec{X} = \vec{X_0} + t\,\vec{n} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$X = (x_0, y_0, z_0) + t\,(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1) \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) = (3, \pi, \sqrt{3}/2) + t\,(-\pi/18, 1/6, -1) \qquad t \in \mathbb{R}$$