EXAMEN ANÁLISIS NUMÉRICO

03 DE DICIEMBRE DE 2008 (PRACTICO)

1) Considere la sucesión

$$x_{n+1} = (x_n^2 - 3(1-a)x_n + 2)/3a$$

donde a es una constante a determinar.

(1) Demuestre que si la sucesión converge, lo hace a una de las raíces de la ecuación $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$.

(2) Para cada una de las raíces de $f(x)$, encuentre un intervalo de valores para la constante a tal que la sucesión converge a dicha raíz. ① → (0, 2) ② → [2]

(3) Para cada raíz encuentre un valor de a tal que la sucesión converge en forma cuadrática.

(4) Encuentre un intervalo de valores de a tal que la sucesión no converge a ninguna de las dos raíces.

2) Sea f una función cuatro veces derivable y sean $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ números reales. Sea S el spline cúbico natural que interpola a f en los puntos $x_i, i = 1...4$.

Sea P un polinomio de grado tres que interpola a f en los puntos $x_i, i = 1...4$ y que además satisface $P"(x_1) = P"(x_4) = 0$.

¿Se cumple necesariamente que para todo $x \in [x_1, x_4]$, $P(x) = S(x)$? Justifique su respuesta.

3) Aproximar la función $f(x) = e^x$ con un polinomio de grado 2, en el intervalo $[0, 1]$ considerando el espacio de las funciones continuas en $[0, 1]$ equipado con el producto interno

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

4) Sea p un polinomio de grado menor o igual que $n-1$ que interpola a la función $f(x) = \cos(x)$ en cualquier conjunto de n nodos en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$. Demostrar que:

$$\frac{|p(x) - f(x)|}{|f(x)|} \leq \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2}n!}.$$

5) **Ejercicio para libres:**

Sean T y M las aproximaciones a $\int_a^b f(x)dx$ dadas por la regla del trapecio y la regla del punto medio correspondientes a la partición $p = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$. Sea τ la partición del intervalo $[a, b]$ que se obtiene al agregar a p los puntos medios de los intervalos $[x_i, x_{i+1}], i = 0, \cdots, n-1$. Sea S la aproximación de $\int_a^b f(x)dx$ asociada a la partición τ por la regla de Simpson. Mostrar que $S = \frac{1}{3}T + \frac{2}{3}M$.

Ejercicios teóricos (Los alumnos regulares deben hacer 2 problemas y los alumnos libres deben hacer los 3 problemas):

T1) a) Enunciar y demostrar el teorema de existencia de un punto fijo.

b) Enunciar y demostrar el teorema de convergencia de la sucesión generada por el método de punto fijo ($x_{n+1} = \varphi(x_n)$).

T2) Enunciar y demostrar el teorema del error en el polinomio interpolante.

T3) Deducir la regla del punto medio compuesta dando las expresiones de la fórmula y su error.

abarreal@famaf.unc.edu.ar

T1) ⇒ Sea $F: C \subset \mathbb{R} \to C$ contractiva, entonces existe un único punto fijo de F. Ese punto fijo es el límite de toda sucesión generada por $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$ con $x^{(0)} \in C$

T2) $f \in C^{n+1}[a,b]$ y sea p un polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $n+1$ puntos distintos $x_0, \ldots, x_n$ en el intervalo $[a,b]$. Para cada x en $[a,b]$ corresponde un punto ξ_x en (a,b) tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

T3) ?