Modelos Matemáticos en Finanzas Cuantitativas

Parcial N° 2 - Noviembre 16, 2023

Problema 1: Responder el siguiente cuestionario:

a) Teniendo e cuenta el modelo binomial de precios de un activo. ¿Puede calcularse la prima de una opción *call* americana sobre ese subyacente directamente desde el payoff a su madurez? ¿Es este procedimiento de cálculo válido para una opción *put* americana? Justificar la respuesta.

b) ¿A qué se le llama mercado completo?

c) El modelo trinomial, ¿es un modelo de mercado libre de arbitraje?, ¿es completo? ¿Por qué?

d) ¿Cuál es la relación entre la tendencia de los precios del activo en el modelo de Black-Scholes y la tasa de interés continua? Explicar el origen de la relación.

Problema 2: Suponer que el precio de la acción, subyacente a una cierta opción put, es al inicio \$60 y se estima que mensualmente aumentará a razón del 10 % o bien disminuirá un 10 % en los próximos meses, siendo la tasa de interés efectiva mensual libre de riesgo, i, igual al 5 %. Considerar una opción *put* con strike $K = 55$ y madurez en $T = 3$ meses.

a) Calcular las probabilidades de riesgo neutral y la prima de la opción *put* **europea**.

b) Construir el árbol de precios correspondiente a la opción *put* **americana**.

c) Determinar cuál es el *stopping time* óptimo.

d) Considerar la trayectoria de precios XXX. Determinar la composición de la cartera de cobertura que necesita el inversor que está en *short* en la *put* americana en el nodo XX del árbol binomial.

e) Si el tenedor de la put decide no ejercer en XX, calcular el excedente en la cartera del emisor de la *put*. Interpretar ese excedente desde la posición del tenedor de la opción al no ejercer.

Problema 3: Considerar una acción cuyo precio se modela según un modelo binomial con los mismos parámetros dados en el problema anterior, **excepto** que ahora la tasa de interés mensual efectiva es del 9 %. Una *range option* es un derivado de strike flotante, el cual viene dado por la expresión:

$$\text{payoff} = \max_{0\leq t\leq T} S(t) - \min_{0\leq t\leq T} S(t)\,.$$

a) Construir las trayectorias de precios de la acción para los tres primeros meses y el correspondiente proceso de payoff

b) Construir el árbol de precios de la opción *range* americana con madurez en $T = 3$ meses.

c) Indicar cuál es el *stopping time* óptimo de ejercicio y calcular el payoff alternativo de esta opción americana.

d) Calcular la prima de esta opción americana directamente desde el payoff alternativo. Explicar el procedimiento.

Problema 4: Considerar un activo sin dividendos, cuyo precio sigue un movimiento Browniano geométrico bajo las probabilidades de riesgo neutral, de forma que $S(t) = S(0)\,\exp(W(t))$, donde $W(t)$ es un movimiento browniano con tendencia $(r - \sigma^2/2)$ y volatilidad anual σ, siendo r la tasa de interés anual libre de riesgo con capitalización continua.

a) Calcular la prima y la probabilidad de ejercer una opción call europea en el modelo de precios propuesto si $\sigma = 0{,}4$ y $r = 0{,}25$, siendo $S(0) = 60$ y el strike fijo igual a 50, si se ejerce al término de cinco meses.
b) ¿Cuál es la prima y probabilidad de ejercer una opción put europea con los mismos parámetros?
c) Suponer que al cabo del primer mes el precio de la acción resulta igual a 55. ¿Qué valor tendrá la opción call europea en ese momento?

Nota:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}\,, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}\,.$$