Optimización
PARCIAL 1

24 de Septiembre de 2024

1. En cada uno de los siguientes problemas justifique su respuesta usando condiciones de optimalidad:

   a) Mostrar que la función $f(x,y) = (x^2-4)^2 + y^2$ tiene dos mínimos globales y un punto estacionario, que no es ni máximo local ni mínimo local.

   b) Encontrar todos los mínimos locales de la función $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\cos(y)$.

   c) Encontrar todos los mínimos y máximos locales de la función $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$ en el cojunto $\{(x,y) \,|\, 0 < x < 2\pi,\, 0 < y < 2\pi\}$

   d) Mostrar que la función $f(x,y) = (y-x^2)^2 - x^2$ tiene sólo un punto estacionario que no es ni máximo ni mínimo local.

   e) Considere la función $f(x,y) = (y-x^2)^2 - x^2$ en el conjunto $\{(x,y) \,|\, -1 \leq y \leq 1\}$. Mostrar que existe al menos un mínimo global y encontrarlos todos los mínimos globales.

2. Considere el problema irrestricto

$$\text{minimizar} f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{(x_1+x_2)}$$

   a) Escriba las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden. ¿Para esta función también son condiciones suficientes? Justificar.

   b) ¿Es el punto $\bar{x} = (0,0)$ un mínimo?

   c) Halle una dirección $d \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$.

   d) Minimice la función f a partir de $\bar{x}$ con la dirección obtenida en (c).

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   a) Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con derivadas continuas. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|F(x)\|^2$. Sea $\tilde{x}$ minimizador local de f tal que $J_F(\tilde{x})$ es no singular. Entonces $\tilde{x}$ es solución del sistema $F(x) = 0$.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, $f'(0) < 0$ y $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Entonces para todo $x > 0$ vale que $f(x) \leq f(0) + \alpha\, x\, f'(0)$.

   c) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Suponga que para $k = 0,1,2,\ldots$, sea $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k)$, donde $\lambda^k \geq \bar{\lambda} > 0$ para todo $k \geq 0$. Entonces, si $x^k \to x^*$ vale que $\nabla f(x^*) = 0$.

4. Encontrar el paralelepípedo rectangular de volumen unitario que tiene la superficie de menor área. Sugerencia, despejando de una de las dimensiones, mostrar que el problema es equivalente a minimizar sobre $x > 0$ e $y > 0$ la función $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un función dos veces continuamente diferenciable que satisface

$$m\|y\|^2 \leq y^T \nabla^2 f(x) y \leq M\|y\|^2, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

   donde m y M son escalares positivos. Mostrar que f tiene un único mínimo global x^* que satisface

$$\frac{1}{2M}\|\nabla f(x)\|^2 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2m}\|\nabla f(x)\|^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

   y

$$\frac{m}{2}\|x - x^*\|^2 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{M}{2}\|x - x^*\|^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

6. Considere el método de descenso $x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$ donde α^k es una suceción de números reales y asuma que la función $f(x)$ es convexa.

   a) Usar la convexidad de f para probar que para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\|x^{k+1} - y\|^2 \leq \|x^k - y\|^2 - 2\alpha^k(f(x^k) - f(y)) + (\alpha^k \|\nabla f(x^k)\|)^2.$$

   b) Asuma que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \infty, \quad \alpha^k \|\nabla f(x^k)\|^1 \to 0.$$

   Mostrar que $\liminf_{k\to\infty} f(x^k) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$. Sugerencia, asumir que para algún $\delta > 0$, existe y con $f(y) < f(x^k) - \delta$ para todo k suficientemente grande y probar por contradicción.

7. Resolver computacionalmente con el método que considere apropiado el problema $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T = 0$, con $f_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f_i(x) = x_3 \exp(-t_i x_1) - x_4 \exp(-t_i x_2) + x_6 \exp(-t_i x_5) - y_i \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, 6$$

   donde

$$t_i = i/10, \quad \text{y} \quad y_i = \exp(-t_i) - 5\exp(-10t_i) + 3\exp(-4t_i)$$

   con $x^0 = (1, 2, 1, 1, 1, 1)$.