

**Optimización
PARCIAL 1**

24 de Septiembre de 2024

1. En cada uno de los siguientes problemas justifique su respuesta usando condiciones de optimalidad:

- a) Mostrar que la función $f(x, y) = (x^2 - 4)^2 + y^2$ tiene dos mínimos globales y un punto estacionario, que no es ni máximo local ni mínimo local.
- b) Encontrar todos los mínimos locales de la función $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x \cos(y)$.
- c) Encontrar todos los mínimos y máximos locales de la función $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$ en el conjunto $\{(x, y) \mid 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi\}$
- d) Mostrar que la función $f(x, y) = (y - x^2)^2 - x^2$ tiene sólo un punto estacionario que no es ni máximo ni mínimo local.
- e) Considere la función $f(x, y) = (y - x^2)^2 - x^2$ en el conjunto $\{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$. Mostrar que existe al menos un mínimo global y encontrarlos todos los mínimos globales.

2. Considere el problema irrestricto

$$\text{minimizar } f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{(x_1+x_2)}$$

- a) Escriba las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden. ¿Para esta función también son condiciones suficientes? Justificar.
- b) ¿Es el punto $\bar{x} = (0, 0)$ un mínimo?
- c) Halle una dirección $d \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$.
- d) Minimice la función f a partir de \bar{x} con la dirección obtenida en (c).

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

- a) Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con derivadas continuas. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|F(x)\|^2$. Sea \tilde{x} minimizador local de f tal que $J_F(\tilde{x})$ es no singular. Entonces \tilde{x} es solución del sistema $F(x) = 0$.
- b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$, $f'(0) < 0$ y $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $\alpha \in (0, 1)$. Entonces para todo $x > 0$ vale que $f(x) \leq f(0) + \alpha x f'(0)$.
- c) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Suponga que para $k = 0, 1, 2, \dots$, sea $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k)$, donde $\lambda^k \geq \bar{\lambda} > 0$ para todo $k \geq 0$. Entonces, si $x^k \rightarrow x^*$ vale que $\nabla f(x^*) = 0$.

4. Sean p y q dos puntos en el plano que se encuentran en lados opuestos de un eje horizontal. Asuma que la velocidad de la luz desde p y desde q hacia el eje es v y w respectivamente y la luz desde p hacia q llega por el camino de menor tiempo de recorrido. Encontrar el camino que realizará el luz desde p a q .

5. Mostrar que si x^* es un mínimo local estricto no singular de una función dos veces continuamente diferenciable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, entonces x^* es un punto estacionario aislado, esto es, existe una esfera centrada en x^* tal que x^* es el único punto estacionario de f en el interior de la esfera. Mostrar con la siguiente función que esto no es necesariamente verdadero si x^* es un mínimo local estricto singular,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(\sqrt{2} - \sin \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \ln(x^2) \right) \right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En particular, probar que x^* es el único mínimo global, mientras que la sucesión $\{x^k\}$ de mínimos locales no singulares,

$$x^K = e^{\frac{(1-8K)\pi}{8\sqrt{(3)}}},$$

converge a x^* .

6. Considere el método de Newton con longitud de paso constante para minimizar la función $f(x) = \|x\|^3$. Identificar cual es el rango de valores para la longitud de paso para los cuales se consigue la convergencia y mostrar que incluye al paso de longitud unitaria. Mostrar que para cualquier paso con longitud en este rango, el método converge linealmente a $x^* = 0$.
7. Resolver computacionalmente con el método que considere apropiado el problema $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T = 0$, con $f_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$f_i(x) = y_i - x_1(1 - x_2^i), \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

donde

$$y_1 = 1,5, \quad y_2 = 2,25, \quad y_3 = 2,625$$

con $x^0 = (1, 1)$.