Optimización
PARCIAL 2

12 de Noviembre de 2024

1. Considere el método del gradiente con $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica definida positiva, $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Sea $\tilde{x}$ una solución de $x^0 = \tilde{x}` + \mu v$, donde v es un autovector de A asociado al autovalor λ y $\mu \in \mathbb{R}$.

   a) Probar que $\nabla f(x^0) = \mu\lambda v$ y que la búsqueda lineal exacta a partir de x^0 converge en un sólo paso.

   b) Usando lo anterior probar que el método del gradiente converge en una iteración, cualquiera sea el x^0 si $A = \alpha I,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

2. Sea $f(x) = 10(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$. Considerar el subproblema de región de confianza

$$q_k(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \frac{1}{2}p^T H_k p, \text{ sujeto a, } \|p\| = \Delta_k,$$

   donde H_K es la Hessiana de f en x_k. Dibujar las curvas de nivel del subproblema y hacer una iteración del método con $x_0 = (0, 0)$ y $\Delta_0 = 1$.

3. Considerar el problema

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = -2x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \le 8, \\ & -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0. \end{array}$$

   a) Escribir las condiciones de KKT.

   b) Para cada punto extremo verifique si las condiciones se satisfacen. Encontrar una solución.

4. Considerar el problema de encontrar una esfera de radio mínimo que contiene un conjunto de vectores dados $y_1, y_2, \ldots, y_p \in \mathbb{R}^n$, este problema puede ser escrito como el problema de minimax

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \max\{\|x - y_1\|^2, \ldots, \|x - y_p\|^2\} \\ \text{sujeto a} & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

   a) Interpretar por qué este problema es equivalente al problema

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & r^2 \\ \text{sujeto a} & \|x - y_j\|^2 \le r^2, \quad \text{para } j \in \{1, \ldots, p\}. \end{array}$$

   y escribir las condiciones KKT de este último problema

   b) Considerar el caso con $p = 3$ y caracterizar la solución optimal en función de los vectores y_1, y_2 y y_3.

5. Resolver el problema

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \\ \text{sujeto a} & 2 \le x_1, \end{array}$$

   usando el método de barrera logarítmica.

6. Considerar el problema unidimensional

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & f(x) = -\frac{1}{2}x^2 \\ \text{sujeto a} & x = 1. \end{array}$$

Mostrar que la función de Lagrangiano aumentado $L_\rho(x, \lambda)$ no está acotada inferiormente si $\rho < 1$ y es estrictamente convexa si $\rho > 1$.