Optimización
PARCIAL 1

24 de Septiembre de 2024

1. En cada uno de los siguientes problemas justifique su respuesta usando condiciones de optimalidad:

   a) Mostrar que la función $f(x,y) = (x^2-4)^2 + y^2$ tiene dos mínimos globales y un punto estacionario, que no es ni máximo local ni mínimo local.

   b) Encontrar todos los mínimos locales de la función $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\cos(y)$.

   c) Encontrar todos los mínimos y máximos locales de la función $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$ en el cojunto $\{(x,y) \,|\, 0 < x < 2\pi,\, 0 < y < 2\pi\}$

   d) Mostrar que la función $f(x,y) = (y-x^2)^2 - x^2$ tiene sólo un punto estacionario que no es ni máxmo ni mínimo local.

   e) Considere la función $f(x,y) = (y-x^2)^2 - x^2$ en el conjunto $\{(x,y) \,|\, -1 \leq y \leq 1\}$. Mostrar que existe al menos un mínimo global y encontrarlos todos los mínimos globales.

2. Considere el problema irrestricto

$$\text{minimizar} f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{(x_1+x_2)}$$

   a) Escriba las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden. ¿Para esta función también son condiciones suficientes? Justificar.

   b) ¿Es el punto $\bar{x} = (0,0)$ un mínimo?

   c) Halle una dirección $d \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$.

   d) Minimice la función f a partir de $\bar{x}$ con la dirección obtenida en (c).

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   a) Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con derivadas continuas. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|F(x)\|^2$. Sea $\tilde{x}$ minimizador local de f tal que $J_F(\tilde{x})$ es no singular. Entonces $\tilde{x}$ es solución del sistema $F(x) = 0$.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, $f'(0) < 0$ y $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Entonces para todo $x > 0$ vale que $f(x) \leq f(0) + \alpha\, x\, f'(0)$.

   c) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Suponga que para $k = 0,1,2,\ldots$, sea $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k)$, donde $\lambda^k \geq \bar{\lambda} > 0$ para todo $k \geq 0$. Entonces, si $x^k \to x^*$ vale que $\nabla f(x^*) = 0$.

4. Se desea encontrar un punto x en el plano cuya suma de las distancias pesadas aun conjunto de puntos $y_1, \ldots, y_n$ es minimizada. Matemáticamente esto es

$$\text{minimizar} \sum_{i=1}^{n} w_i \|x - y_i\|,$$

   donde $w_1, \ldots, w_n$ son escalares dados.

   a) Probar que existe un mínimo global para este problema.

   b) ¿Es la solución óptima siempre única? Justificar

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = x_2^2 - ax_2\|x\|^2 + \|x\|^4,$$

donde $0 < a < 2$. Mostrar que $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, y consecuentemente el $x = (0, 0)$ es el único mínimo global. Mostrar que existe $\bar{\gamma} > 0$ tal que para todo $\gamma \in (0, \bar{\gamma}]$, el conjunto de nivel $L_\gamma = \{x \mid f(x) \leq \gamma\}$ no es convexo.

6. Considere el método de Newton clásico para el caso de la función $f(x) = \|x\|^\beta$, con $\beta > 1$. Para que valores iniciales $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y para que valores de β el método converge a la solución óptima. ¿Qué sucede con $\beta \leq 1$?

7. Resolver computacionalmente con el método que considere apropiado el problema $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T = 0$, con $f_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f_i(x) = (x_1 + t_i x_2 - \exp(t_i))^2 + (x_3 + x_4 \sin(t_i) - \cos(t_i))^2 \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, 4$$

donde

$$t_i = i/5,$$

con $x^0 = (25, 5, -5, -1)$.