Ejercicio 1 (25 pts).
Un ingeniero mide la cantidad (por peso) de cierto contaminante en muestras de aire recogidas sobre la chimenea de una central de energía eléctrica, que funciona con carbón. Sea X la cantidad de contaminante obtenido cuando no está en funcionamiento el dispositivo de limpieza en la chimenea e Y la cantidad de contaminante por muestra recogida cuando el dispositivo de limpieza esta trabajando. Considere la siguiente función de (X,Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{, si } 0 \leq x \leq 2\text{, } 0 \leq y \leq 1 \text{ y } 2y \leq x \\ 0 & \text{, en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea función densidad conjunta de (X,Y)?

b) Calcular $P(Y \geq X/3)$.

c) Hallar las funciones de densidad marginal de X e Y. ¿Son estas variables independientes? Justifique su respuesta.

d) Hallar la covarianza entre X e Y ($cov(X,Y)$).

Ejercicio 2 (25 pts).
Se efectuaron 21 observaciones de resistencia a la fractura de placas base de 18 % de acero maragizado al níquel obteniendose un promedio y desviación estándar muestral de $\bar{x} = 77{,}53$ y $s_{n-1} = 5{,}07$ respectivamente. Suponga que la resistencia esta normalmente distribuida.

a) Dar la estimación por máxima verosimilitud para:

5pts i) la resistencia media de las placas (μ) y el desvío estándar poblacional (σ), para estas placas.

3pts ii) El percentil 30 para la variable resistencia a la fractura de placas base de 18 % de acero maragizado al níquel.

7 b) Calcule un intervalo de confianza de 99 % para la media poblacional (μ) de la distribución de resistencia a la fractura.

c) Suponga ahora que el desvío poblacional es conocido con $\sigma = 5$. Para las siguientes hipótesis

$$H_0 : \mu = 80 \qquad , \qquad H_a : \mu < 80$$

4 i) dar el estadístico de prueba y su distribución bajo H_0.

4 ii) definir la región de rechazo de nivel $\alpha = 0{,}05$ y tomar una decisión concluyendo en el contexto del problema.

Ejercicio 3 (25 pts).
Se desea realizar una obra donde ciertas líneas telefónicas sean subterráneas. Para su realización una compañía telefónica requiere que más del 75 % de estos clientes estén a favor de dicha obra, pues se efectuará con un cargo adicional en sus cuentas. De una muestra aleatoria de 200 personas resultaron 162 a favor de dicha obra. Considerando p la proporción verdadera de clientes a favor de dicha obra, entonces

a) Dar un intervalo de confianza del 95 % para p.

confianza de longitud a lo sumo 0.05 y de nivel de confianza 0.95, independientemente del valor de $\hat{p}$.

b) Determinar el menor tamaño de muestra necesario que deben seleccionarse para conseguir un intervalo de confianza de longitud a lo sumo 0.05 y de nivel de confianza 0.95, independientemente del valor de $\hat{p}$.

Ejercicio 4 (25 pts).

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ($n \geq 2$) una muestra aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ, cuya función densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & , \quad \text{si } x > 0 \\ 0 & , \quad \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

a) Hallar los Estimadores por el Método de los Momentos y de Máxima Verosimilitud para $\theta = 1/\lambda$.

b) Considere los siguientes estimadores para $\theta = 1/\lambda$

$$\widehat{\theta_1} = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad \widehat{\theta_2} = \frac{X_1 + 2X_n}{2}$$

¿Cuáles de estos estimadores son insesgados para θ? Justifique su respuesta.