Probabilidad y Estadística - Introducción a la Probabilidad y Estadística Parcial I - 2024

1,a)	1,b)	1,c)	1,d)	1,e)	2,a)	2,b)	3,a)	3,b)	3,c)	4,a)	4,b)

▶ **1.** **(2.5 puntos)** Supongamos que elegimos al azar un auto de una playa de estacionamiento y registramos X, el número de neumáticos con baja presión que tiene el auto seleccionado e Y si tiene el ITV vencido o no.
a) ¿Cuál de las siguientes tres funciones $p(.)$ es una función de probabilidad de masa para X? Justifique.

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.3	0.2	0.1	0.05	0.05
$p(x)$	0.4	0.1	0.1	0.1	0.3
$p(x)$	0.4	0.1	0.2	0.1	0.3

b) Con la función de probabilidad de masa obtenida en (a), Obtenga la función de distribución acumulada de X.
c) Si la probabilidad de tener el ITV vencido o no es independiente de la presión de los neumáticos, y un 73 % de los autos cumple con la reglamentación que exige una ITV anual, calcule la tabla de doble entrada asociada a la distribución conjunta de X e Y.
d) Encuentre la covarianza entre X e Y
e) Si el auto tiene el ITV vencido, encuentre la probabilidad de que el auto tenga las cuatro ruedas bajas.

▶ **2.** **(2 puntos)** El número de accidentes diarios en la Panamericana sentido Buenos Aires puede modelarse como una distribución Poisson con parámetro $\lambda = 1{,}3$.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya accidentes en una semana?.
b) Suponga que un año tiene 365 días, aproxime la probabilidad de que haya a lo sumo 420 accidentes en un año.

▶ **3.** **(2.5 puntos)** Dos componentes de una microcomputadora tienen la siguiente función densidad conjunta para sus tiempos de vida X e Y :

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & x > 0; y > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar las funciones densidades marginales de X y de Y .
b) ¿Son independientes los tiempos de vida? Justifique.
c) ¿Cual es la probabilidad que el tiempo de vida Y sea mayor que 3?
d) Calcule la probabilidad de que la duración mínima del lote sea mayor que 3.

▶ **4.** **(3 puntos)** Un mayorista recibe 40 % de los cajones de huevos del proveedor A y el 60 % del proveedor B. El cajón de huevos se considera de grado aceptable si tiene entre 67 y 75 huevos sanos y se sabe que el promedio de huevos sanos por cajón entregado por el proveedor A puede considerarse normal con media 70 y varianza 9 y el promedio de huevos sanos por cajón entregado por el proveedor B puede considerarse normalmente distribuida con media de 71 y desviación estándar de 1.2.

a) Si se selecciona un cajón al azar, ¿cual es la probabilidad de que sea aceptable?
b) Si el cajón elegido al azar resulta aceptable, calcule la probabilidad de que haya sido entregado por el proveedor A.

Soluciones

Solución ejercicio 1

a) ¿Cuál es una función de probabilidad de masa para X?

Una función de probabilidad de masa (PMF) debe cumplir: $\sum p(x) = 1$ y $p(x) \geq 0$ para todo x.

- **Primera PMF**: $0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}7 \neq 1$. No válida.
- **Segunda PMF**: $0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 = 1$. Válida.
- **Tercera PMF**: $0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 1{,}1 \neq 1$. No válida.

Respuesta: La segunda PMF ($p(x) = \{0{,}4, 0{,}1, 0{,}1, 0{,}1, 0{,}3\}$) es válida.

b) Función de distribución acumulada (CDF) de X

La CDF $F(x) = P(X \leq x)$ se calcula sumando las probabilidades hasta x:

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0,4	0,1	0,1	0,1	0,3
$F(x)$	0,4	0,5	0,6	0,7	1,0

Respuesta:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 0{,}4 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0{,}5 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 0{,}6 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 0{,}7 & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ 1{,}0 & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

c) Tabla de distribución conjunta de X e Y

Dado que X (número de neumáticos con baja presión) e Y (ITV vencido: 0 = no, 1 = sí) son independientes, y $P(Y = 0) = 0{,}73$, $P(Y = 1) = 0{,}27$, la probabilidad conjunta es $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$.

Usando la PMF de X del inciso a):

$X \backslash Y$	$Y = 0(0{,}73)$	$Y = 1(0{,}27)$
0	$0{,}4 \cdot 0{,}73 = 0{,}292$	$0{,}4 \cdot 0{,}27 = 0{,}108$
1	$0{,}1 \cdot 0{,}73 = 0{,}073$	$0{,}1 \cdot 0{,}27 = 0{,}027$
2	$0{,}1 \cdot 0{,}73 = 0{,}073$	$0{,}1 \cdot 0{,}27 = 0{,}027$
3	$0{,}1 \cdot 0{,}73 = 0{,}073$	$0{,}1 \cdot 0{,}27 = 0{,}027$
4	$0{,}3 \cdot 0{,}73 = 0{,}219$	$0{,}3 \cdot 0{,}27 = 0{,}081$

Respuesta: Tabla conjunta:

$X \backslash Y$	0	1
0	0,292	0,108
1	0,073	0,027
2	0,073	0,027
3	0,073	0,027
4	0,219	0,081

d) Covarianza entre X e Y

La covarianza es $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$. Como X e Y son independientes, $E[XY] = E[X]E[Y]$, por lo que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Para confirmar: - $E[X] = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 = 0 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 1{,}2 = 1{,}8$. - $E[Y] = 0 \cdot 0{,}73 + 1 \cdot 0{,}27 = 0{,}27$. - $E[XY] = \sum_{x,y} x \cdot y \cdot P(X = x, Y = y)$.

Calculamos $E[XY]$: - Solo $Y = 1$ contribuye ($y = 0$ da $x \cdot 0 = 0$). - $E[XY] = (0 \cdot 1 \cdot 0{,}108) + (1 \cdot 1 \cdot 0{,}027) + (2 \cdot 1 \cdot 0{,}027) + (3 \cdot 1 \cdot 0{,}027) + (4 \cdot 1 \cdot 0{,}081) = 0 + 0{,}027 + 0{,}054 + 0{,}081 + 0{,}324 = 0{,}486$. - $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0{,}486 - (1{,}8 \cdot 0{,}27) = 0{,}486 - 0{,}486 = 0$.

Respuesta: $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

e) Probabilidad de $X = 4$ dado $Y = 1$

Por independencia, $P(X = 4|Y = 1) = P(X = 4) = 0{,}3$.

Respuesta: $P(X = 4|Y = 1) = 0{,}3$.

Solución ejercicio 2

El número de accidentes diarios sigue una distribución Poisson con $\lambda = 1{,}3$.

a) Probabilidad de que no haya accidentes en una semana

Una semana tiene 7 días, por lo que el número de accidentes en una semana sigue una Poisson con $\lambda_{\text{semana}} = 7 \cdot 1{,}3 = 9{,}1$.

$$P(X = 0) = e^{-\lambda_{\text{semana}}} = e^{-9{,}1} \approx 0{,}000112.$$

Respuesta: $P(\text{no accidentes en una semana}) \approx 0{,}000112$.

b) Probabilidad de que haya a lo sumo 420 accidentes en un año (sin corrección por continuidad)

En un año (365 días), el número de accidentes sigue una Poisson con $\lambda_{\text{año}} = 365 \cdot 1{,}3 = 474{,}5$. Como λ es grande, aproximamos a una normal $N(\mu = 474{,}5, \sigma^2 = 474{,}5)$, con $\sigma = \sqrt{474{,}5} \approx 21{,}78$. Sin corrección por continuidad:

$$P(X \leq 420) \approx P\left(Z \leq \frac{420 - 474{,}5}{21{,}78}\right) = P(Z \leq -2{,}50).$$

Consultando la tabla de la normal estándar, $P(Z \leq -2{,}50) \approx 0{,}0062$.

Respuesta: $P(\text{a lo sumo 420 accidentes en un año}) \approx 0{,}0062$.

Solución ejercicio 3

La densidad conjunta es $f(x, y) = xe^{-(x+y)}$ para $x > 0, y > 0$, y 0 en cualquier otro caso.

a) Densidades marginales de X y Y

\- Para $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \int_0^\infty f(x, y)\, dy = \int_0^\infty xe^{-(x+y)}\, dy = xe^{-x} \int_0^\infty e^{-y}\, dy = xe^{-x} \cdot 1 = xe^{-x}, \quad x > 0.$$

\- Para $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f(x, y)\, dx = \int_0^\infty xe^{-(x+y)}\, dx = e^{-y} \int_0^\infty xe^{-x}\, dx.$$

La integral $\int_0^\infty xe^{-x}\, dx = 1$ (por integración por partes). Luego:

$$f_Y(y) = e^{-y} \cdot 1 = e^{-y}, \quad y > 0.$$

Respuesta:

$$f_X(x) = xe^{-x}, \quad x > 0; \quad f_Y(y) = e^{-y}, \quad y > 0.$$

b) ¿Son independientes X e Y?

Para que X e Y sean independientes, debe cumplirse $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Comprobamos:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = (xe^{-x}) \cdot (e^{-y}) = xe^{-(x+y)} = f(x, y).$$

Como se cumple la igualdad, X e Y son independientes.

Respuesta: Sí, son independientes.

c) Probabilidad de que $Y > 3$

Usamos la densidad marginal $f_Y(y) = e^{-y}$:

$$P(Y > 3) = \int_3^\infty e^{-y}\, dy = [-e^{-y}]_3^\infty = 0 - (-e^{-3}) = e^{-3} \approx 0{,}0498.$$

Respuesta: $P(Y > 3) \approx 0{,}0498$.

d) Probabilidad de que la duración mínima sea mayor que 3:**

La duración mínima es $\min(X, Y)$. Queremos $P(\min(X, Y) > 3)$. Como X e Y son independientes:

$$P(\min(X, Y) > 3) = P(X > 3, Y > 3) = P(X > 3) \cdot P(Y > 3).$$

Ya tenemos $P(Y > 3) = e^{-3}$. Para $P(X > 3)$:

$$P(X > 3) = \int_3^\infty xe^{-x}\, dx.$$

Por integración por partes ($u = x$, $dv = e^{-x}\, dx$):

$$\int xe^{-x}\, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -xe^{-x} - e^{-x}.$$

Evaluamos:

$$\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_3^\infty = (0 - 0) - (-3e^{-3} - e^{-3}) = 4e^{-3}.$$

Entonces:

$$P(\min(X, Y) > 3) = P(X > 3) \cdot P(Y > 3) = 4e^{-3} \cdot e^{-3} = 4e^{-6} \approx 0{,}00995.$$

Solución ejercicio 4

Un mayorista recibe 40 % de los cajones del proveedor A ($P(A) = 0{,}4$) y 60 % del proveedor B ($P(B) = 0{,}6$). Un cajón es aceptable si tiene entre 67 y 75 huevos sanos. Para A, el número de huevos sanos sigue $N(\mu_A = 70, \sigma_A^2 = 9)$, es decir, $\sigma_A = 3$. Para B, sigue $N(\mu_B = 71, \sigma_B = 1{,}2)$.

a) Probabilidad de que un cajón sea aceptable

Un cajón es aceptable si $67 \leq X \leq 75$. Usamos la probabilidad total:

$$P(\text{Aceptable}) = P(\text{Aceptable}|A) \cdot P(A) + P(\text{Aceptable}|B) \cdot P(B).$$

- **Para A**: $X_A \sim N(70, 3^2)$.

$$P(67 \leq X_A \leq 75) = P\left(\frac{67 - 70}{3} \leq Z \leq \frac{75 - 70}{3}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1{,}67).$$

$$P(Z \leq 1{,}67) \approx 0{,}9525, \quad P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) \approx 0{,}1587.$$

$$P(-1 \leq Z \leq 1{,}67) \approx 0{,}9525 - 0{,}1587 = 0{,}7938.$$

- **Para B**: $X_B \sim N(71, 1{,}2^2)$.

$$P(67 \leq X_B \leq 75) = P\left(\frac{67 - 71}{1{,}2} \leq Z \leq \frac{75 - 71}{1{,}2}\right) = P(-3{,}33 \leq Z \leq 3{,}33).$$

$$P(Z \leq 3{,}33) \approx 0{,}9996, \quad P(Z \leq -3{,}33) \approx 0{,}0004.$$

$$P(-3{,}33 \leq Z \leq 3{,}33) \approx 0{,}9996 - 0{,}0004 = 0{,}9992.$$

- Probabilidad total:

$$P(\text{Aceptable}) = (0{,}7938 \cdot 0{,}4) + (0{,}9992 \cdot 0{,}6) = 0{,}31752 + 0{,}59952 = 0{,}91704.$$

Respuesta: $P(\text{Aceptable}) \approx 0{,}917$.

b) Probabilidad de que un cajón aceptable sea del proveedor A

Usamos el teorema de Bayes:

$$P(A|\text{Aceptable}) = \frac{P(\text{Aceptable}|A) \cdot P(A)}{P(\text{Aceptable})}.$$

Sustituyendo:

$$P(A|\text{Aceptable}) = \frac{0{,}7938 \cdot 0{,}4}{0{,}91704} = \frac{0{,}31752}{0{,}91704} \approx 0{,}346.$$

Respuesta: $P(A|\text{Aceptable}) \approx 0{,}346$.