

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA -
INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

1	2	3	4	Total
24	25	25	25	99

10 (diez)

Apellido y Nombre: AGUIAR BENITO TOMÁSCarrera: LCC

Justifique claramente todas sus respuestas.

Ejercicio 1. Para el siguiente conjunto de datos

248 261 242 249 264 259 244 257 288
231 209 255 267 261 246 262 263 261

- Hallar el promedio, mediana, desvío estándar muestral, cuartil inferior, cuartil superior y rango intercuartil para este conjunto de datos.
- Clasificar cada uno de los valores obtenidos en el ítem a) como medida de posición o medida de dispersión.
- ¿Hay datos atípicos en la muestra? Justifique su respuesta.
- Construya un boxplot con los datos dados.

Ejercicio 2. Supongamos que las condiciones económicas de un determinado año se pueden clasificar en buenas y malas. Supongamos que, si un año es bueno, el siguiente será también bueno con probabilidad 0.7. De igual forma, si un año es malo, la probabilidad de que el siguiente sea bueno es 0.4. La probabilidad de que este año sea bueno es 0.6. Encuentre las probabilidades de que las sentencias siguientes sean ciertas.

- a) Las condiciones económicas serán buenas tanto este año como el siguiente.
- b) Las condiciones económicas serán buenas este año y serán malas el siguiente.
- c) Las condiciones económicas serán malas los dos años.
- d) Las condiciones económicas serán buenas el año próximo.
- e) Si las condiciones económicas son buenas el año próximo, ¿cuál es la probabilidad condicionada de que las condiciones económicas sean buenas este año?

Ejercicio 3. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad de masa dada por:

$$p(x) = \begin{cases} 0,2, & \text{si } x = -1 \\ a, & \text{si } x = 0 \\ c, & \text{si } x = 2 \\ 0,4, & \text{si } x = 3 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

donde a y c son constantes.

- Determinar los valores de las constantes a y c tal que la esperanza de X sea 1.6. Justifique sus respuestas.
- Calcular la varianza de X .
- Calcular la esperanza de $Z = 3X^2 - 1$.

Ejercicio 4. Las velocidades de los autos que circulan por la Ruta Nacional Nro 9, a la altura de Las Talitas (Tucumán), se distribuyen según una normal con media 98 km por hora y desviación estándar de 8 km por hora.

- a) Si la policía de ese pueblo sigue la política de multar solamente al 5% de los conductores que circulan a mayor velocidad, ¿a partir de qué umbral de velocidad se comenzará a multar?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la velocidad de un auto elegido al azar que pase por la ruta en Las Talitas esté entre 95 y 110 kilómetros por hora?

Ejercicio N° 7

ORDENO LOS DATOS

 $X_1 = 209 / 237 / 242 / 244 / 246 / 248 / 249 / 255 / 257$ $259 / 261 / 261 / 261 / 262 / 263 / 264 / 267 / 288 = X_{18}$

$$a) \text{ PROMEDIO} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{18} X_i}{18} = 253.7222 \quad \checkmark$$

Fórmula

$$\text{MEDIANA}(\{X_i\}_{i=1}^n) = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})} & \text{si } n \text{ es IMPAR} \\ \frac{X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} & \text{si } n \text{ es PAR} \end{cases}$$

$$\text{MEDIANA} = \bar{X} = \frac{X_9 + X_{10}}{2} = \frac{257 + 259}{2} = 258 \quad \checkmark$$

Donde (i) es el VALOR EN EL CONJUNTO ORDENADO.

 $n=18$ ES PAR Y POR LO TANTO SU MEDIANA ES EL PROMEDIO DE LOS VALORES CENTRALES.

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{18} (X_i - \bar{X})^2}{n}} = 16.5807 \quad \checkmark$$

$$16.1135$$

$$D_1 = \text{MEDIANA}\{X_1, \dots, X_9\} = X_5 = 246 \quad \checkmark$$

CANTIDAD IMPAR DE ELEMENTOS \Rightarrow MEDIANA = $X_{(\frac{n+1}{2})}$ (VALOR CENTRAL)

$$Q_3 = \text{MEDIANA}\{X_{10}, \dots, X_{18}\} = X_{14} = 262 \quad \checkmark$$

$$Q_1 = \begin{cases} \text{MEDIANA}\{X_{(n+1)} - X_{(\frac{n}{2})}\} & \text{si } n \text{ es PAR} \\ \text{MEDIANA}\{X_{(n)}, \dots, X_{(\frac{n+1}{2})}\} & \text{si } n \text{ es IMPAR} \end{cases}$$

$$RIC = Q_3 - Q_1 = 16 \quad \checkmark$$

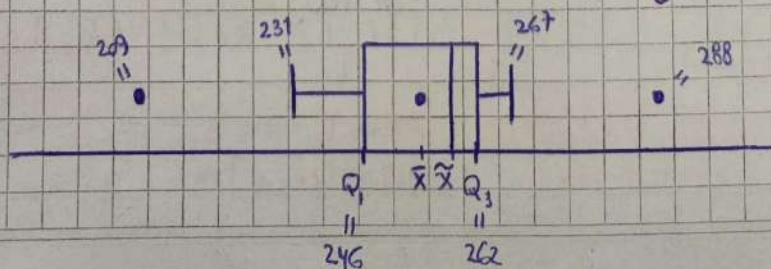
$$Q_3 = \begin{cases} \text{MEDIANA}\{X_{(\frac{n+1}{2})} - X_{(n)}\} & \text{si } n \text{ es PAR} \\ \text{MEDIANA}\{X_{(\frac{n+1}{2})}, \dots, X_{(n)}\} & \text{si } n \text{ es IMPAR} \end{cases}$$

b) S_n y RIC SON MEDIDAS DE DISPERSION. \checkmark \bar{X}, \bar{X}, Q_1 y Q_3 SON MEDIDAS DE POSICIÓN. \checkmark c) HAY DATOS ATÍPICOS? $\{\text{DATOS ATÍPICOS}\} = \{X_i : X_i \notin [Q_1 - 1.5 \cdot RIC, Q_3 + 1.5 \cdot RIC]\}$

$$= \{X_i : X_i \notin [222, 286]\}$$

$$= \{209, 288\} \rightarrow \text{DATOS ATÍPICOS.} \quad \checkmark$$

d) BOX PLOT ESCALA



Donde 231 y 267 SON SIGNETES
DADO QUE SON EL MENOR Y MAYOR
DATO EN $[Q_1 - 1.5 \cdot RIC, Q_3 + 1.5 \cdot RIC]$

EJERCICIO N° 2:

TENEMOS:

$$\bullet P(\overbrace{\text{ESTE AÑO ES BUENO}}^A) = 0.6 \quad \therefore P(\overbrace{\text{ESTE AÑO ES MALO}}^{\bar{A}}) = 0.4$$

$$\bullet P(\text{AÑO SIGUIENTE ES BUENO} | A) = 0.7$$

$$\bullet P(\underbrace{\text{AÑO SIGUIENTE ES BUENO}}_B | \bar{A}) = 0.4$$

a) $P(\text{ESTE AÑO Y EL PRÓXIMO SON BUENOS}) = P(A \cap B)$

SABEMOS QUE $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.7 = \frac{P(A \cap B)}{0.6} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$

b) $P(\text{ESTE AÑO BUENO Y EL SIGUIENTE MALO}) = P(A \cap \bar{B})$

SABEMOS QUE $P(\bar{B}|A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} \Rightarrow 1 - P(B|A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{0.6} \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0.6 \cdot (1 - 0.7) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18$

c) $P(\text{ESTE AÑO Y EL SIGUIENTE SON MALOS}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

SABEMOS QUE $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} \Rightarrow 1 - P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{0.4} \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.4 \cdot (1 - 0.4) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$

d) $P(\text{EL AÑO SIGUIENTE SERÁ BUENO}) = P(B)$

$= P(\underbrace{\text{ESTE AÑO BUENO Y EL SIGUIENTE BUENO}}_{A \cap B} \cup \underbrace{\text{ESTE AÑO MALO Y EL SIGUIENTE BUENO}}_{\bar{A} \cap B})$

$A \cap B$

SON EVENTOS

$\bar{A} \cap B$

NOTABLEMENTE DISJUNTOS

$= P((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

$= 0.42 + P(\bar{A} \cap B) = 0.42 + 0.16 = 0.58$


NOTAR QUE $P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})}$

$\Rightarrow 0.4 = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{0.4}$

$\Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0.4^2 = 0.16$

e) $P(\text{ESTE AÑO ES BUENO} | \text{EL PRÓXIMO ES BUENO})$

$= P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0.58} = \frac{0.42}{0.58} = 0.7241$

* CADA EJERCICIO UTILIZA RESULTADOS OBTENIDOS EN LOS ANTERIORES. 
 → muy bien

Ejercicio N°3

TOMÁS ADRIÁN BENKEO
45083746 - LCC
X.

X UNA V.V. D. C.W. F.P.M. DADA POR

$$P(X) = \begin{cases} 0,2 & X = -1 \\ a & X = 0 \\ c & X = 2 \\ 0,4 & X = 3 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad a, c \text{ CONSTANTES.}$$

a) DETERMINAR LOS VALORES DE a Y c TAL QUE $E(X) = 1,6$

NOTAMOS QUE $\sum_{i \in \mathbb{N}} P(X_i) = 1 \Rightarrow 0,2 + a + c + 0,4 = 1$

$$a + c = 1 - 0,6$$

$$\boxed{a + c = 0,4}$$

Y TAMBIÉN QUE

$$E(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} X_i \cdot P(X_i) = 1,6 \Rightarrow (-1) \cdot 0,2 + 0 \cdot a + 2 \cdot c + 3 \cdot 0,4 = 1,6$$

$$-0,2 + 2c + 1,2 = 1,6$$

$$c = 0,3 \Rightarrow a + 0,3 = 0,4 \Rightarrow \boxed{a = 0,1} \quad \checkmark$$

$$\boxed{c = \frac{0,6}{2} = 0,3} \quad \checkmark$$

b) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, SI $E(X^2) < \infty$

VEAMOS

$$E(X^2) = \sum_{i \in \mathbb{N}} X_i^2 \cdot P(X_i) = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,4$$

$$= 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,4$$

$$\boxed{= 5 < \infty}$$

$$\therefore V(X) = 5 - (1,6)^2 = \boxed{2,44} \quad \checkmark$$

c) SABIENDO QUE X^2 ES UNA V.V. Y QUE $E(X^2) = 5$, ENTONCES

$$E(Z) = E(3X^2 - 1) = 3E(X^2) - 1 = 3 \cdot 5 - 1 = \boxed{14} \quad \checkmark$$

PROPIEDAD Y UNA V.V.

$$\Rightarrow E(aY + b) = aE(Y) + b$$

Ejercicio N° 4:

$X =$ "VELOCIDAD DE LOS AUTOS EN LA R9"

• $X \sim N(98, 8^2)$

a) LA POLICIA MULTA AL 5% POR CUMPLIR A MAYOR VELOCIDAD.

¿A PARTIR DE QUÉ VELOCIDAD SE COMIENZA A MULTAR?

SEA v DICHA VELOCIDAD, PUNTUAMOS POR

$$P(X \geq v) = 0.05 \Rightarrow P(X \leq v) = 1 - 0.05$$

$$\boxed{P(X \leq v) = 0.95}$$

DE AQUÍ SE OBTIENE POR $v = \eta(0.95)$ O "v ES EL PERCENIL 95"

NOTAMOS POR

$$P(X \leq \eta(0.95)) = P\left(Z \leq \frac{\eta(0.95) - 98}{8}\right), \text{ DONDE } \boxed{Z = \frac{X - 98}{8} \sim N(0,1)}$$

LUEGO POR LA TABLA DE VALORES,

LO MISMO PARA EL EJ. 6)

SI $P\left(Z \leq \frac{\eta(0.95) - 98}{8}\right) = 0.95$ Y $P(Z \leq 1.645) = 0.95 \rightarrow$ PROMEDIO DE $\Phi(1.64)$ Y $\Phi(1.65)$

ENTONCES

$$\frac{\eta(0.95) - 98}{8} \approx 1.645 \Rightarrow \eta(0.95) = 8 * 1.645 + 98$$

$$= 111.16 = v$$

Muy bien explicado y justificado

∴ EL UMbral DE VELOCIDAD PARA SER MULTADO SERÁ DE $v = 111.16 \text{ km/h}$.

$$b) P(95 \leq X \leq 110) = P\left(\frac{95 - 98}{8} \leq Z \leq \frac{110 - 98}{8}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{110 - 98}{8}\right) - \Phi\left(\frac{95 - 98}{8}\right)$$

$$= \Phi(1.5) - \Phi(-0.375)$$

$$= 0.9332 - (1 - \Phi(0.375))$$

$$\approx 0.9332 - 1 + \frac{\Phi(0.37) + \Phi(0.38)}{2}$$

$$\approx 0.9332 - 1 + \frac{0.6443 + 0.6480}{2}$$

$$\approx \boxed{0.57935}$$

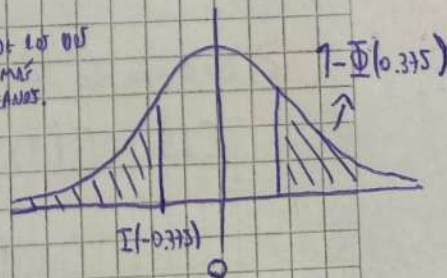
$$\Phi(-0.375) = P(Z \leq -0.375) \xrightarrow{\text{SIMETRÍA RESP. AL 0}} = P(Z \geq 0.375)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.375)$$

$$= 1 - \Phi(0.375)$$

$$\approx 1 - \Phi(0.375)$$

PROMEDIO DE LOS DOS VALORES MÁS CERCANOS.



$$\Phi(-0.375) = 1 - \Phi(0.375)$$

POR SIMETRÍA CON RESPECTO AL 0.