Probabilidad y Estadística -
Introducción a la Probabilidad y Estadística
Parcial I - 2024

1)	2,a)	2,b)	2,c)	3,a)	3,b)	4,a)	4,b)

Nombre y apellido:

Carrera:

▶ **1.** **(3 puntos)** El Gobierno Metropolitano de Seoul realizó un estudio de contaminación del aire aislando tres clases de contaminantes, PM10,PM2.5 y PM05 que se presentan en las proporciones 0,6 ; 0,3 y 0,1 respectivamente. Se observó que de las muestras que contienen PM10, solo el 15 % reacciona a un testeo, mientras que si el contaminante es PM2.5, reacciona el 80 % y si es PM05, reacciona el 60 %.

a) Calcule la probabilidad de que el testeo de una muestra resulte reactivo.
b) Calcule la probabilidad de que la muestra contenga PM10 dado que reacciona al testeo.

▶ **2.** **(3 puntos)** Se supone que el diámetro de un cable eléctrico es una variable aleatoria Y con función densidad

$$f(y) = \begin{cases} cy(1-y) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar el valor de c.

b) ¿ Cual es la probabilidad de que el diámetro sea a lo sumo $\frac{1}{2}$?.

c) Calcular $P(Y \leq \frac{1}{2} | 0 \leq Y \leq 1)$.

▶ **3.** **(3 puntos)** Una unidad de radar es utilizada para medir la velocidad de los automóviles en una vía rápida, durante la hora de mayor congestionamiento. Suponga que el número de automóviles que sobrepasan el límite de velocidad de 55 millas por hora tiene distribución de Poisson con media $\lambda = 7$.

a) ¿Cual es la probabilidad de que el número de infractores esté entre 2 y 5?
b) Si considera la hora pico de 10 días, ¿Cual es la probabilidad de que al menos uno de esos días tenga menos de 5 infractores?

▶ **4.** **(1 punto)** Un peaje cobra 2000 pesos por cada automóvil de uso particular y 4000 por vehículos de mayor porte. Suponga que durante el día el 60 % de los vehículos son de uso particular. Si 25 vehículos pasan el peaje durante una hora determinada del día, cual es la expectativa de los ingresos resultantes del día?

0.1. Resolución

0.1.1. ejercicio 1

Sean los eventos: - T_1: la muestra contiene PM10 $\rightarrow P(T_1) = 0,6$

- T_2: la muestra contiene PM2.5 $\rightarrow P(T_2) = 0,3$

- T_3: la muestra contiene PM05 $\rightarrow P(T_3) = 0,1$

Sea R: "la muestra resulta reactiva al testeo".

Del enunciado se tiene directamente: $P(R|T_1) = 0,15$

$P(R|T_2) = 0,80$

$P(R|T_3) = 0,60$

b)Probabilidad total de que la muestra resulte reactiva:

$$\begin{aligned}
P(R) &= P(R|T_1)P(T_1) + P(R|T_2)P(T_2) + P(R|T_3)P(T_3) \\
&= (0,15)(0,6) + (0,80)(0,3) + (0,60)(0,1) \\
&= 0,09 + 0,24 + 0,06 \\
&= \mathbf{0,39}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que una muestra resulte reactiva es 0,39.

a) Queremos calcular la probabilidad de que la muestra contenga PM10 dado que el testeo resultó reactivo, es decir:

$$P(T_1|R)$$

Usamos el teorema de Bayes:

$$P(T_1|R) = \frac{P(R|T_1) \cdot P(T_1)}{P(R)}$$

Ya conocemos todos los valores:

- $P(R|T_1) = 0,15$

- $P(T_1) = 0,6$

- Del inciso anterior: $P(R) = 0,39$

Entonces:

$$P(T_1|R) = \frac{0,15 \times 0,6}{0,39} = \frac{0,09}{0,39} = \frac{9}{39} = \frac{3}{13} \approx 0,230769$$

0.1.2. ejercicio 2

La función de densidad es:

$$f(y) = \begin{cases} c\,y(1-y) & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar c

$$\int_0^1 c\,y(1-y)\,dy = 1 \quad \Rightarrow \quad c\int_0^1 (y-y^2)\,dy = 1$$

$$\int_0^1 (y-y^2)\,dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad c \cdot \frac{1}{6} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 6}$$

La densidad queda: $f(y) = 6y(1-y)$, $0 \le y \le 1$.

b) $P\left(Y \le \frac{1}{2}\right)$

$$P\left(Y \le \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} 6y(1-y)\,dy = 6\int_0^{1/2} (y - y^2)\,dy = 6\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^{1/2}$$

En $y = \frac{1}{2}$: $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} = \frac{1/4}{2} - \frac{1/8}{3} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{3-1}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

$$P\left(Y \le \frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

c) La probabilidad pedida es:

$$P\left(Y \le \frac{1}{2} \,\middle|\, 0 \le Y \le 1\right)$$

El evento condicionante $0 \le Y \le 1$ es **todo el soporte** de la variable aleatoria Y, es decir, es el espacio muestral completo. Por lo tanto, la probabilidad de cualquier evento condicionado a que Y esté en $[0,1]$ es exactamente la misma que la probabilidad **sin condicionar**.

En otras palabras:

$$P\left(Y \le \frac{1}{2} \,\middle|\, 0 \le Y \le 1\right) = P\left(Y \le \frac{1}{2}\right)$$

Del inciso **b)** anterior ya calculamos que:

$$P\left(Y \le \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

(Nota: condicionar a que Y esté entre 0 y 1 no cambia nada, porque esa es la región donde Y siempre toma valores.)

0.1.3. ejercicio 3

Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 7)$ el número de automóviles que exceden 55 mph en una hora.

a) Probabilidad de que el número de infractores esté entre 2 y 5 (inclusive)

$$P(2 \le X \le 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

La fórmula de Poisson es:

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-7}\cdot 7^k}{k!}$$

Calculamos cada término:

- $P(X=2) = \frac{e^{-7}\cdot 7^2}{2!} = \frac{0{,}000911882\cdot 49}{2} = 0,022351$
- $P(X=3) = \frac{e^{-7}\cdot 7^3}{6} = \frac{0{,}000911882\cdot 343}{6} = 0,052118$
- $P(X=4) = \frac{e^{-7}\cdot 7^4}{24} = \frac{0{,}000911882\cdot 2401}{24} = 0,091206$

- $P(X=5) = \frac{e^{-7} \cdot 7^5}{120} = \frac{0{,}000911882 \cdot 16807}{120} = 0,127689$

Sumamos:

$$P(2 \leq X \leq 5) = 0,022351 + 0,052118 + 0,091206 + 0,127689 = \boxed{0,2934}$$

b) Probabilidad de que en 10 días independientes,al menos uno tenga menos de 5 infractores

Sea el evento: - A: "un día tiene menos de 5 infractores"

- $A = \{X < 5\} = \{X \leq 4\}$

Primero calculamos $P(A) = P(X \leq 4)$:

$$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

Usando los valores anteriores y completando:

- $P(X=0) = e^{-7} \approx 0,000912$
- $P(X=1) = 7 \cdot e^{-7} \approx 0,006384$
- $P(X=2) \approx 0,022351$
- $P(X=3) \approx 0,052118$
- $P(X=4) \approx 0,091206$

Suma: $P(X \leq 4) \approx 0,000912 + 0,006384 + 0,022351 + 0,052118 + 0,091206 = 0,172971$

Entonces:

$$P(A) = P(X < 5) = P(X \leq 4) \approx 0,1730$$

Complemento: $P(\text{no } A) = P(X \geq 5) = 1 - 0,1730 = 0,8270$

Ahora, en 10 días independientes, la probabilidad de que ningún día tenga menos de 5 infractores es:

$$P(\text{ningún día con } X < 5) = [P(X \geq 5)]^{10} = (0,8270)^{10} \approx 0,1496$$

Por lo tanto, la probabilidad de que **al menos un día** tenga menos de 5 infractores es:

$$P(\text{al menos uno}) = 1 - (0,8270)^{10} \approx 1 - 0,1496 = \boxed{0,8504}$$

Respuestas finales

a) $\boxed{0,2934}$ (29,34 %)

b) $\boxed{0,8504}$ (85,04 %)

0.1.4. ejercicio 4

Planteamiento

- Probabilidad de que un vehículo sea automóvil particular =0,60 y recauda 2000 pesos
- Probabilidad de que un vehículo sea de mayor porte = 0,40 y recauda 4000 pesos

Durante una hora pasan 25 vehículos.

Queremos el valor esperado (esperanza matemática) del ingreso en esa hora.

Sea X = ingreso total en la hora. Cada uno de los 25 vehículos aporta una variable aleatoria independiente X_i (ingreso por el i-ésimo vehículo):

$$X_i = \begin{cases} 2000 & \text{con probabilidad } 0,60 \\ 4000 & \text{con probabilidad } 0,40 \end{cases}$$

Valor esperado del ingreso por vehículo:

$$\begin{aligned} E(X_i) &= (2000)(0,60) + (4000)(0,40) \\ &= 1200 + 1600 \\ &= \boxed{2800} \text{ pesos} \end{aligned}$$

Como el ingreso total es la suma de 25 vehículos independientes:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{25} \qquad \Rightarrow \qquad E(X) = 25 \cdot E(X_i) = 25 \cdot 2800 = \boxed{70\,000}$$

Respuesta final

La expectativa (valor esperado) de los ingresos en esa hora es: 70.000 pesos.

En el día, 1.680.000 = 24 *70000, si es que en todas las horas del día pasan 25 autos por hora.

¿Es esto razonable?

En realidad, el número de autos debería ser aleatorio, N, entonces $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ es una suma aleatoria $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, donde los X_i son i.i.d., independientes de N, y N es una variable aleatoria discreta no negativa (Poisson, binomial negativa, etc.).

$$\begin{aligned} E[S] &= E\big[E[S \mid N]\big] \qquad \text{(ley de la esperanza total)} \\ &= E\left[E[X_1 + \cdots + X_N \mid N]\right] \\ &= E\left[N \cdot E[X_1 \mid N]\right] \qquad \text{(porque los } X_i \text{ son i.i.d. y } N \text{ términos)} \\ &= E\left[N \cdot E[X_1]\right] \qquad \text{(porque los } X_i \text{ son independientes de } N\text{)} \\ &= E[N] \cdot E[X_1] \qquad \text{(porque } E[X_1] \text{ es constante)} \end{aligned}$$

En nuestro caso, si suponemos que N es Poisson de parámetro 25,

$$E(S) = E[N] \cdot E[X_1] = 25{,}2800 = 70000$$

Y ahora consideramos 24 variables independientes S_i, cada una de ellas una suma aleatoria, y nos queda que la esperanza de la ganancia diaria es 1.680.000. Por lo cual la simplificación que hicimos es mas que razonable.