IEE352 - Procesamiento Digital de Señales

# Clase 09: Variable Aleatoria

Dr. Marco A. Milla
Sección Electricidad y Electrónica (SEE)
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

email: milla.ma@pucp.edu.pe

# Señales determinísticas y aleatorias

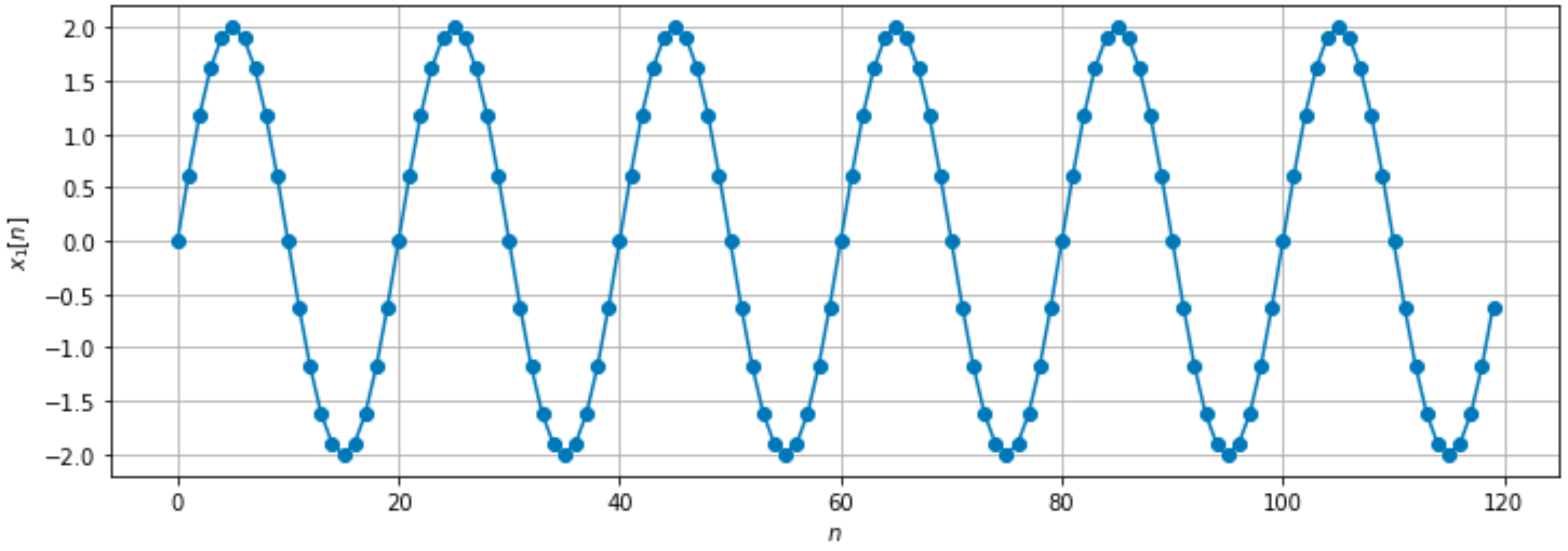
## Introducción

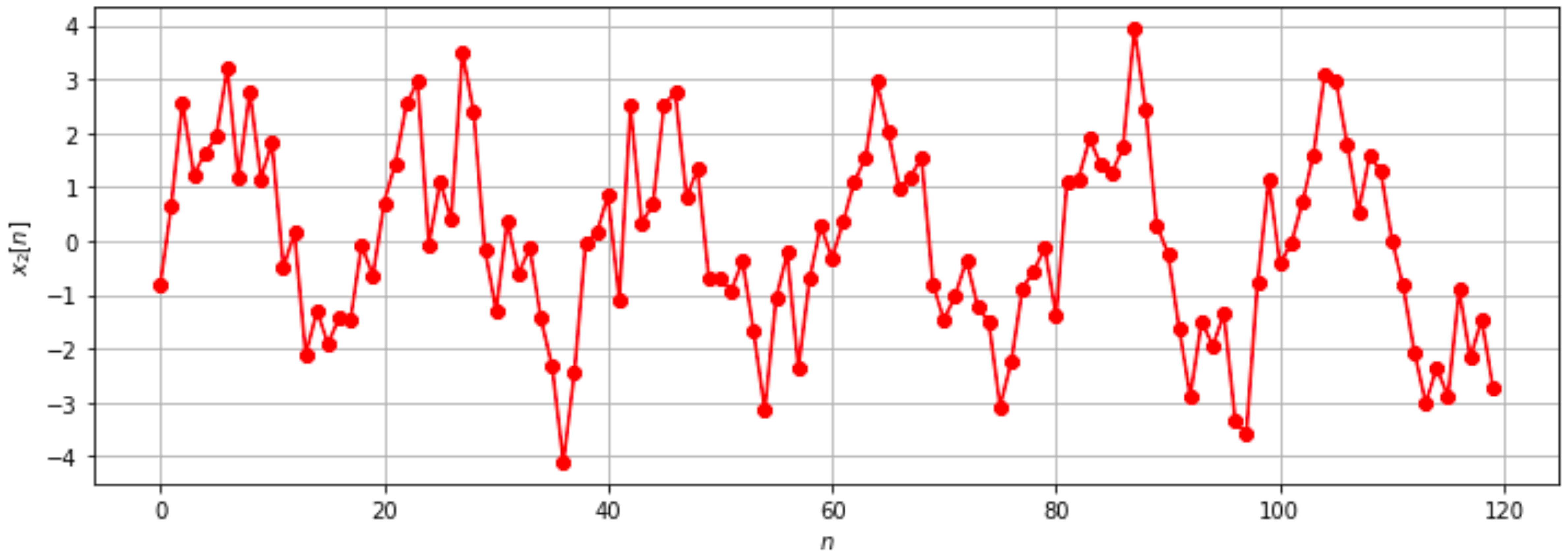
- ¿Se puede determinar todas las muestras de una señal por medio de una expresión matemática o de una regla?
- ¿Se pueden utilizar observaciones o muestras pasadas de una señal para predecir observaciones futuras?
- Predicción exacta: señal o serie determinística.
- Por lo general la predicción no es exacta, en estos casos la señal es llamada aleatoria o estocástica.
- Nota: Cuando todas las muestras son estadísticamente independientes (peor caso) tenemos ruido blanco.

# Señales determinísticas y aleatorias

## Ejemplo - Dominio del tiempo

- Señal determinística (ideal)
  $x[n] = A\sin(\omega n)$
  Ejemplo: $x[n] = 2\sin(0.1\pi n)$
- Señal aleatoria (real)
  $x[n] = A\sin(\omega n)$+r[n]
  donde $r[n]$ es ruido (componente aleatoria).
  Ejemplo: $x[n] = 2\sin(0.1\pi n) + r[n]$
  donde r[n] es ruido gaussiano con media 0 y varianza 1.

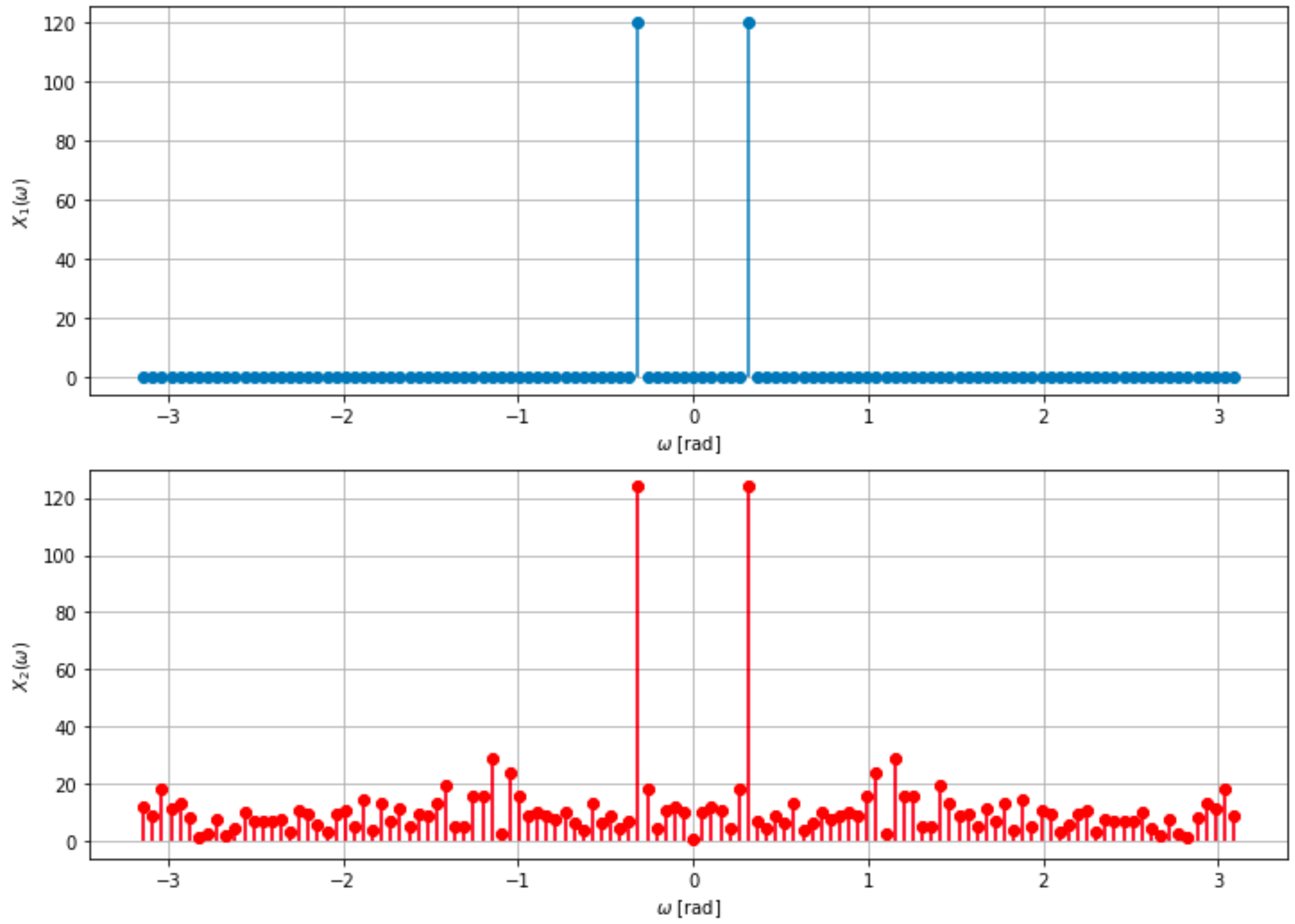


# Señales determinísticas y aleatorias

## Ejemplo - Dominio de la frecuencia

- Señal determinística:
  - Componentes frecuenciales definidas.
- Señal aleatoria:
  - Todas las componentes frecuenciales están contaminadas con ruido.
  - Cuando el espectro del ruido es plano en frecuencia se le conoce como ruido blanco.



# Señales determinísticas y aleatorias

## Herramientas estadísticas

Las señales aleatorias se analizan utilizando herramientas estadísticas:

- Función de densidad de probabilidad
- Función de distribución de probabilidad
- Media
- Varianza
- Valor esperado
- etc.

# Teoría de probabilidad

## Definiciones

- **Experimento:** Un procedimiento que genera un resultado, p.e., lanzar un dado.
- **Ensayo (realización):** cada repetición de un experimento.
- **Espacio muestral ($\Omega$):** Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento, p.e.,

$$\Omega = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6\}, \text{ donde Cara 1: } C1, \text{ Cara 2: } C2, \ldots$$

- **Evento:** Un subconjunto de todos los resultados, p.e.,

$$A = \{\text{todos los resultados pares}\} = \{C2, C4, C6\}.$$

# Teoría de probabilidad

## Experimento, espacio muestral, evento — Ejemplos

- **Experimento: Lanzar un dado**
  - Posibles resultados: Cara 1 ($C1$), Cara 2 ($C2$), …, Cara 6 ($C6$)
  - Espacio muestral: $\Omega = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6\}$
  - Evento: $\omega_1 = \{C1\}, \omega_2 = \{C2\}, \ldots, \omega_6 = \{C6\}$ (eventos elementales).
- **Experimento: Lanzar una moneda**
  - Posibles resultados: Cara ($C$) o Sello ($S$)
  - Espacio muestral: $\Omega = \{C, S\}$
  - Evento: $\omega_1 = \{C\}, \omega_2 = \{S\}$ (eventos elementales).

# Teoría de probabilidad

## Experimento, espacio muestral, evento — Ejemplos

- **Experimento: Lanzar dos dados**
  - Posibles resultados: $R_1 = \{1, 1\}$, $R_2 = \{1, 2\}$, ..., $R_{36} = \{6, 6\}$
  - Espacio muestral: $\Omega =$ 36 resultados
  - Eventos: $A = \{R_k : R_k(1) + R_k(2) = 7, k \in [1, 36]\}$, $B = \{R_k : R_k(1) < R_k(2), k \in [1, 36]\}$.
- **Experimento: Lanzar una moneda hasta obtener un sello ($S$)**
  - Posibles resultados: $R_1 = \{S\}$, $R_2 = \{C, S\}$, $R_3 = \{C, C, S\}$, ...
  - Espacio muestral: $\Omega =$ conjunto con un número infinito pero contable de elementos.
- **Experimento: Generador de números aleatorios**
  - $\Omega \in [0, 1[$ donde $\Omega$ es un conjunto semi-cerrado de elementos $x \in \Omega \rightarrow 0 \leq x < 1$
  - Evento: $A = \{x : x < 0.5\}$

# Teoría de probabilidad

## Axiomas

- Dado un conjunto $\Omega$ de eventos elementales, se define una función real $Pr[\,\cdot\,]$ como la función de probabilidad de ocurrencia de los diferentes posibles eventos. La función $Pr[\,\cdot\,]$ debe cumplir con los siguientes axiomas.
    - $Pr[\Omega] = 1$
    - $0 \leq Pr[A] \leq 1, \; \forall A \in \Omega$
    - Si $A \subseteq B$, entonces $Pr[A] \leq Pr[B]$
    - Si $A_k$ son eventos mutuamente excluyentes ($A_k \cap A_l = \varnothing, \; k \neq l$) $\implies Pr\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} Pr[A_k]$ .
- Dado un evento $A \in \Omega$, donde cada elemento (resultado) es igualmente probable, entonces,

$$Pr[A] = \frac{\#\text{ de elementos en } A}{\#\text{ de elementos en } \Omega} \, .$$

# Teoría de probabilidad

## Axiomas - Ejemplo

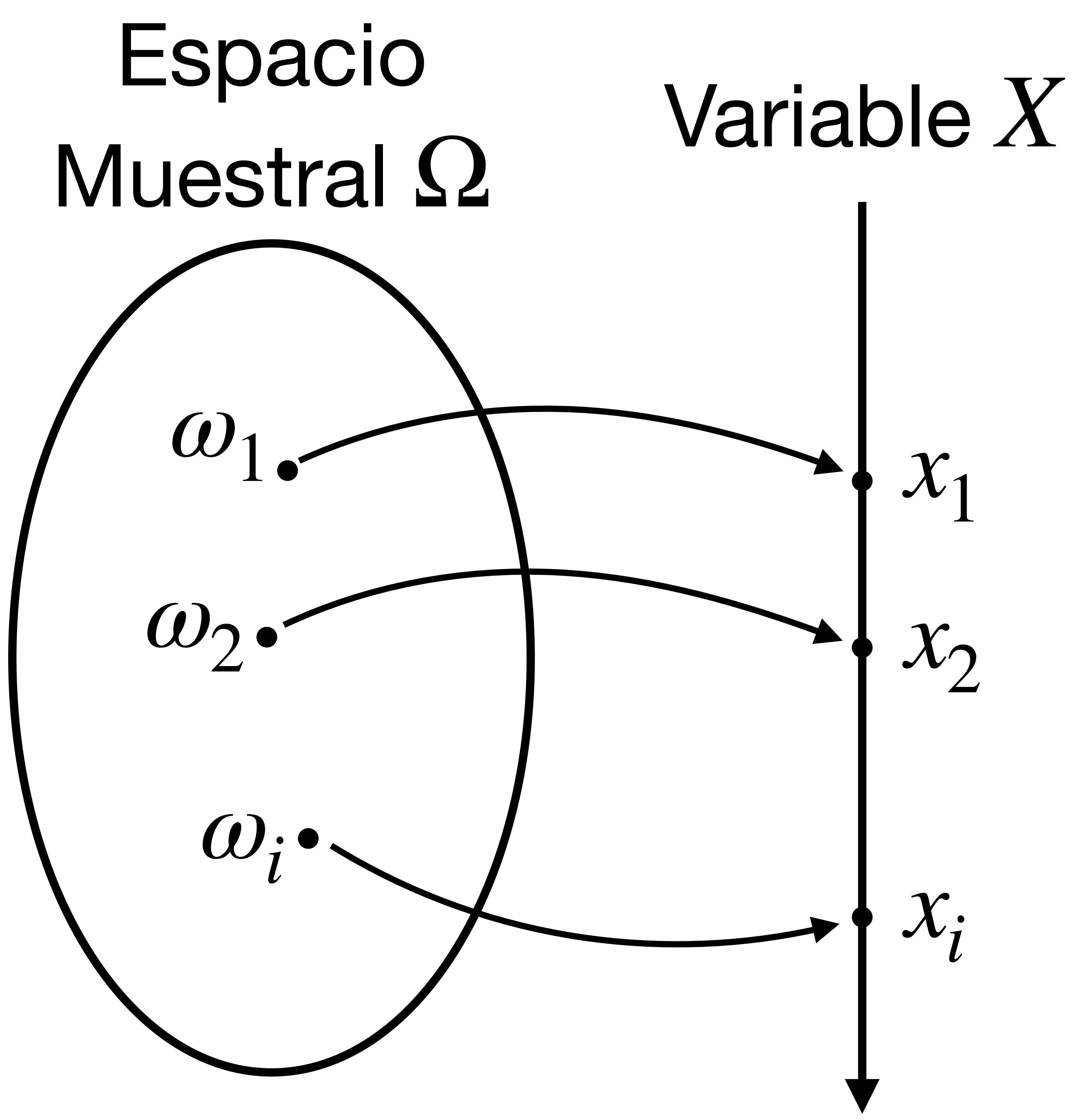
- **Experimento: Lanzar una moneda**
  - Posibles resultados: Cara ($C$) o Sello ($S$)
  - Espacio muestral: $\Omega = \{C, S\}$
  - Evento: $\omega_1 = \{C\}, \omega_2 = \{S\}$ (eventos elementales)
  - Probabilidad: $Pr[C] = 0.5 \quad Pr[S] = 0.5$ (asumiendo moneda justa)
- **Nota:** Un espacio de probabilidad $(\Omega, \omega, Pr)$ permite modelar un proceso aleatorio.

# Variables aleatorias

## Definición

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, Pr)$, una variable aleatoria $X$ puede ser interpretada como una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que,

$$X(\omega_i) = x_i \,.$$




**Ejemplo: Lanzar una moneda** $\Omega = \{C, S\}$

- $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = C, \\ -1, & \omega = S\,. \end{cases}$
- $Pr[X = 1] = 0.5 \quad Pr[X = -1] = 0.5$
- $Pr[X = \alpha] = 0$ para todo $\alpha \neq \pm 1.$

# Variables aleatorias

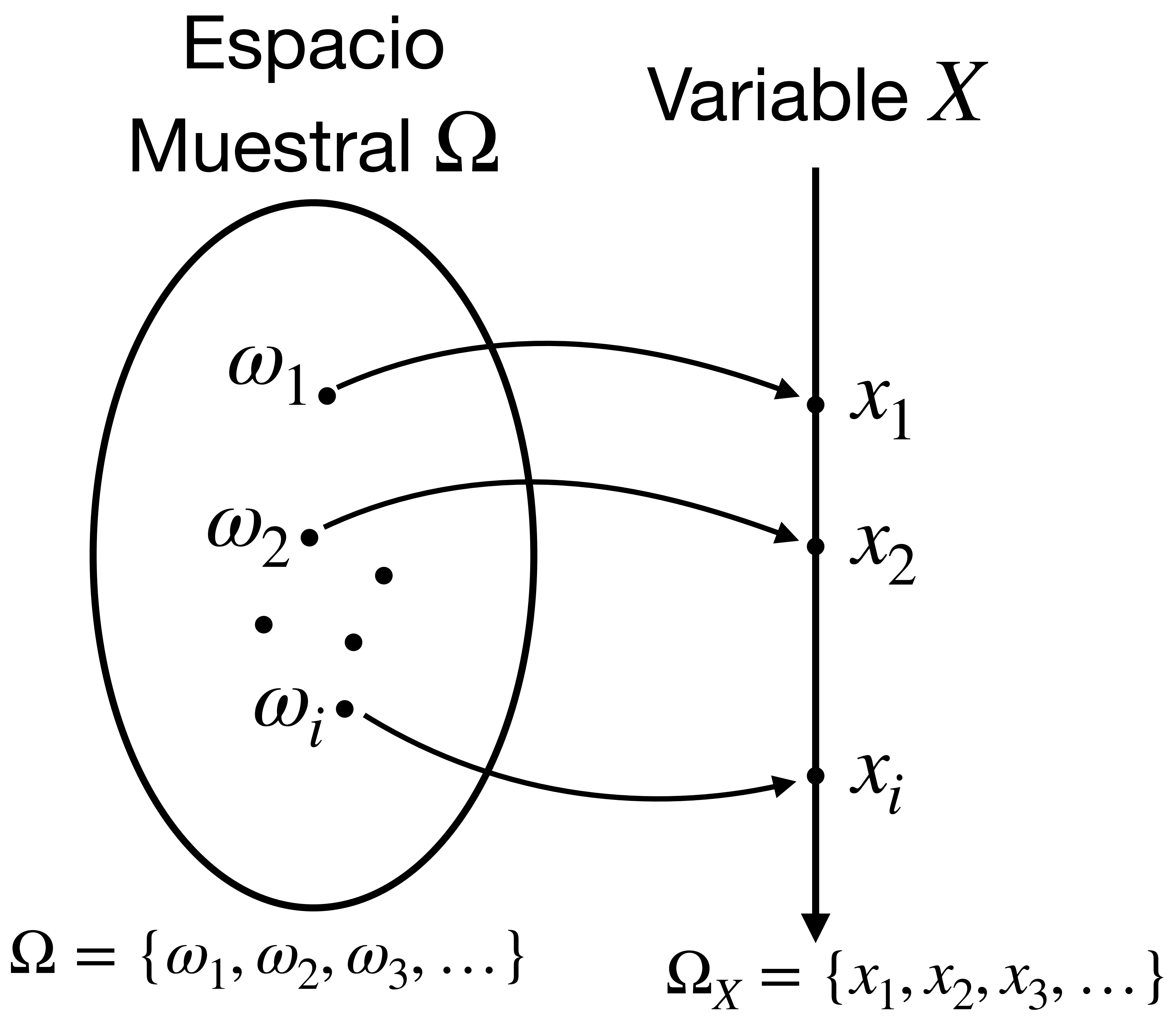
## Definición

**Variable aleatoria (VA) :** representa un atributo numérico del estado de un proceso físico.

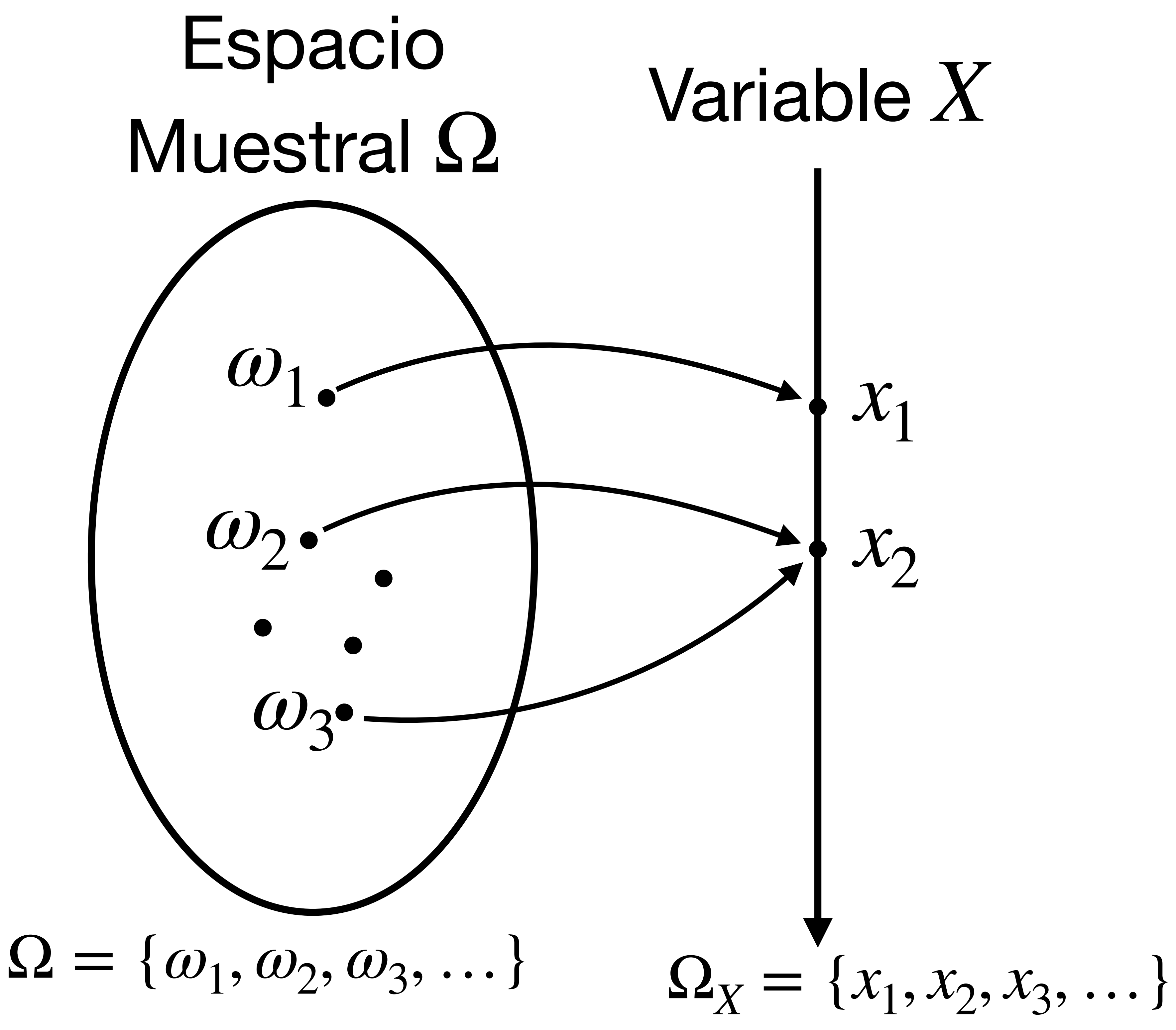
**Ejemplo: Lanzar un dado**

- Cada vez que se lanza un dado se obtiene un resultado que corresponde a cada una de las caras del dado.
- $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$
- $X(\omega) = k,$ si $\omega = r_k$
- $Pr[X = k]$

# Variables aleatorias
## Definición




(a) VA como un mapeo unívoco.




(b) VA como un mapeo de muchos a uno.

# Variables aleatorias

## Frecuencia relativa

Si $\Omega$ es un conjunto finito con $K$ elementos, el evento $A$ es un subconjunto de $\Omega$ con $R$ elementos, y cada resultado es igualmente probable, entonces:

$$Pr[A] = \frac{\text{Número de elementos en } A}{\text{Número de elementos en } \Omega} = \frac{R}{K} \, .$$

**Frecuencia relativa:**

La probabilidad $Pr[A]$ de un evento $A$ está limitada por

$$Pr[A] = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} \, ,$$

donde $n_A$ es el número de ocurrencias de $A$ y $n$ el número de ensayos.

# Variables aleatorias

## Categorías

Existen dos criterios generales para clasificar variables aleatorias.

- En base a la resolución del rango de la variable:
  - Variables aleatorias discretas: $\Omega_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$
  - Variables aleatorias continuas: $\Omega_X = \{x : a \leq x \leq b\}$
- En base a la naturaleza de los valores de destino:
  - Variables aleatorias reales $X \in \mathbb{R}$.
  - Variables aleatorias complejas $Z = X + jY$, $Z \in \mathbb{C}$.

# Variables aleatorias

## Caracterización

Una variable aleatoria puede ser estadísticamente caracterizada en base a dos funciones que permiten describir su comportamiento probabilístico.

- La función densidad de probabilidad $f_X(x)$ .
- La función de distribución de probabilidad $F_X(x)$ .

# Función de densidad de probabilidad

## Definición

La función de densidad de probabilidad (PDF) es una función continua o discreta que describe la probabilidad relativa de que una variable aleatoria tome un determinado valor.

**Ejemplo caso discreto:**

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/6, & x = \{1,2,3,4,5,6\}, \\ 0, & \text{otros valores.} \end{cases}$$

**Observaciones:**

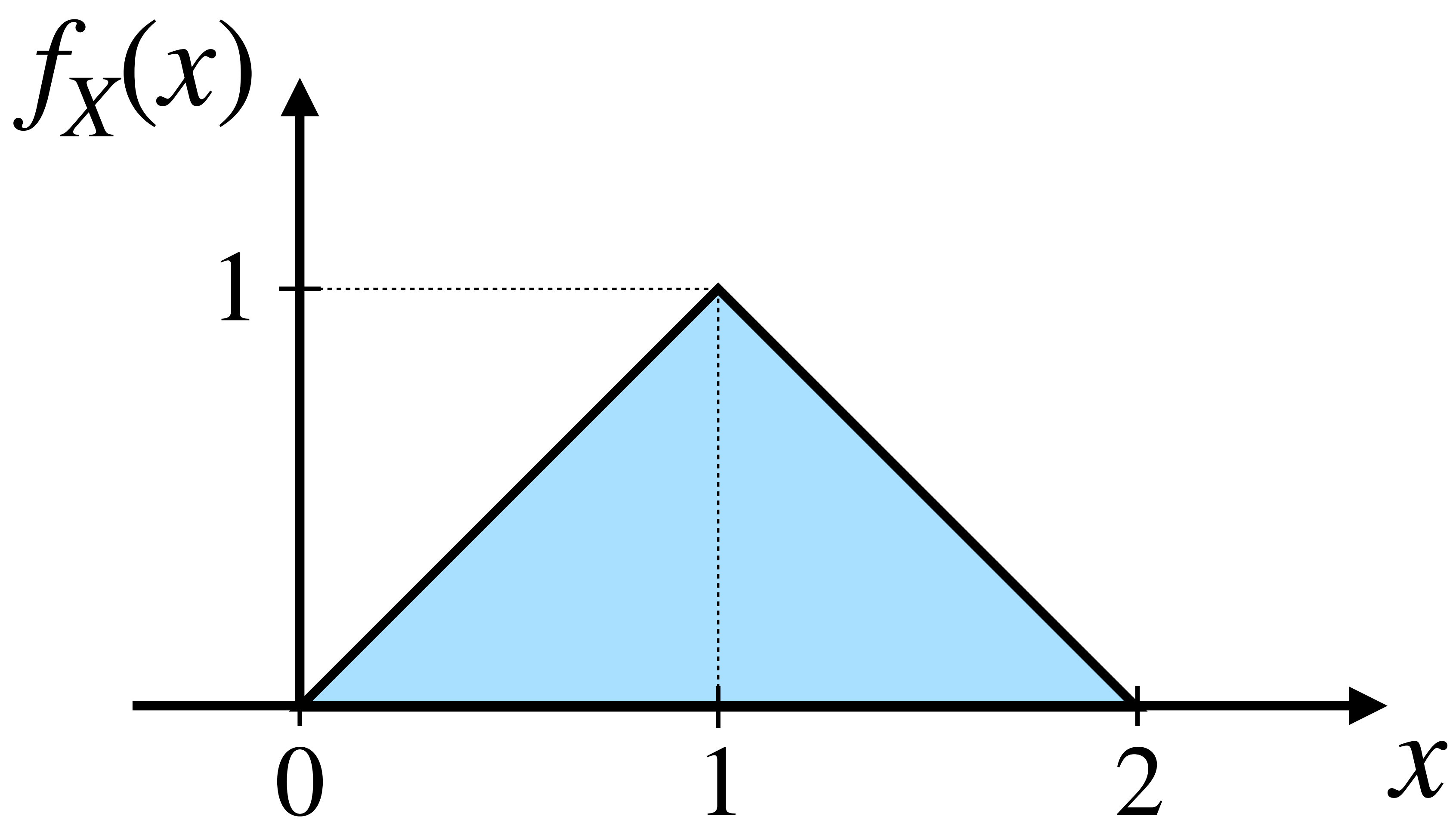
- Si $X$ es una variable aleatoria discreta: $f_X(x) = Pr[X = x]$.

# Función de densidad de probabilidad

## Definición

**Ejemplo caso continuo:**

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{otros valores.} \end{cases}$$




**Observaciones:**

- Si $X$ es una variable aleatoria continua: $f_X(x) = \dfrac{\partial}{\partial x} F_X(x)$
- El área bajo la curva de $f_X(x)$ es siempre 1.

# Función de distribución de probabilidad

## Definición

Una función de distribución de una variable aleatoria $X$ es una función no decreciente definida como

$$F_X(x) = Pr[X \leq x] \, .$$

**Observaciones:**

- Si $X$ es una VA discreta: $F_X(x) = \sum_{u=x_o}^{x} Pr[X = u] = \sum_{u=x_o}^{x} f_X(u)$
- Si $X$ es una VA continua: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$
- Como $0 \leq F_X(x) \leq 1$, una función de distribución válida debe cumplir:

  a) $F_X(-\infty) = 0 \, ,$ b) $F_X(+\infty) = 1 \, ,$ c) $F_X(x_1) \leq F_X(x_2), \quad x_1 \leq x_2 \, .$

# Función de distribución de probabilidad

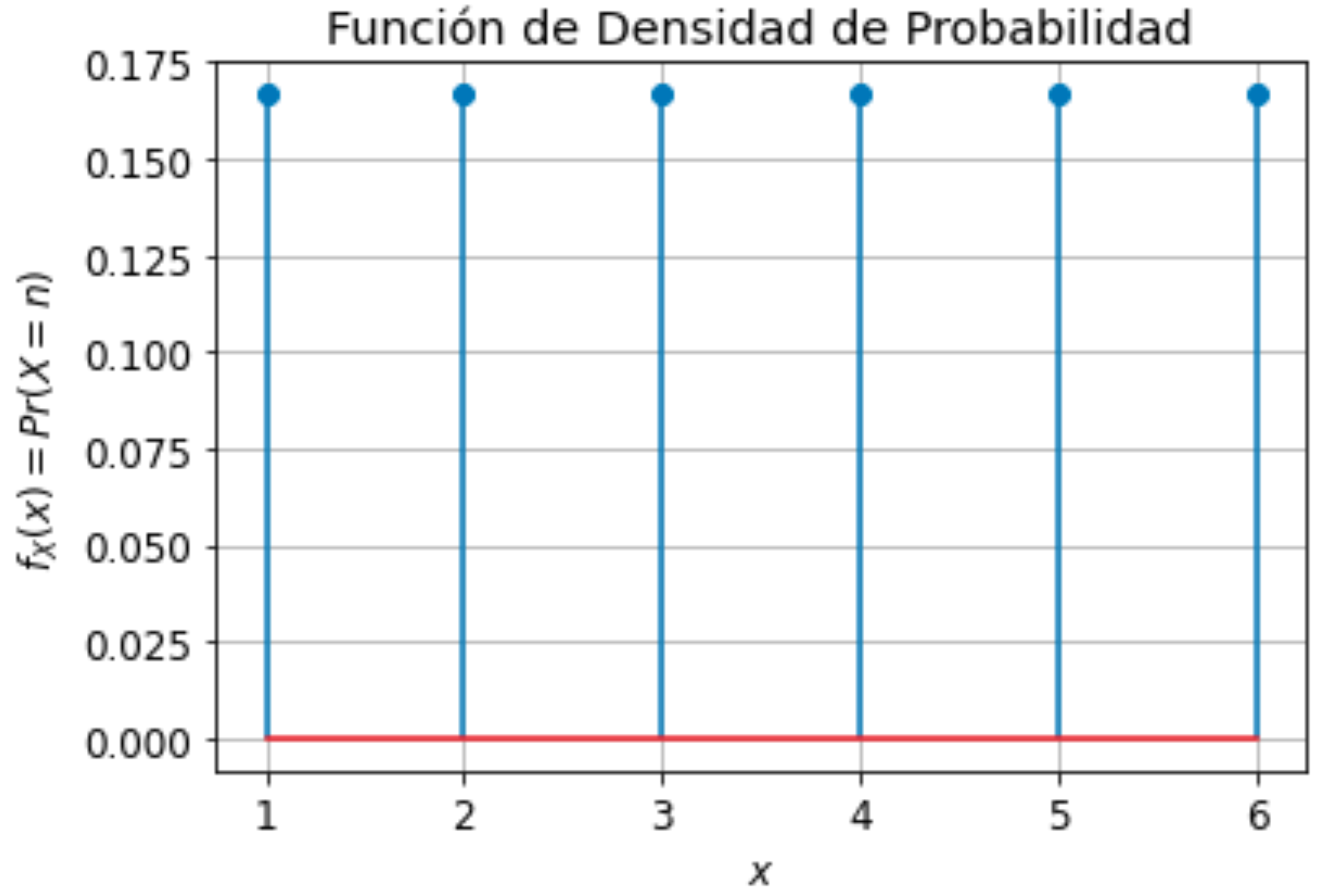
## Ejemplo - Lanzar un dado

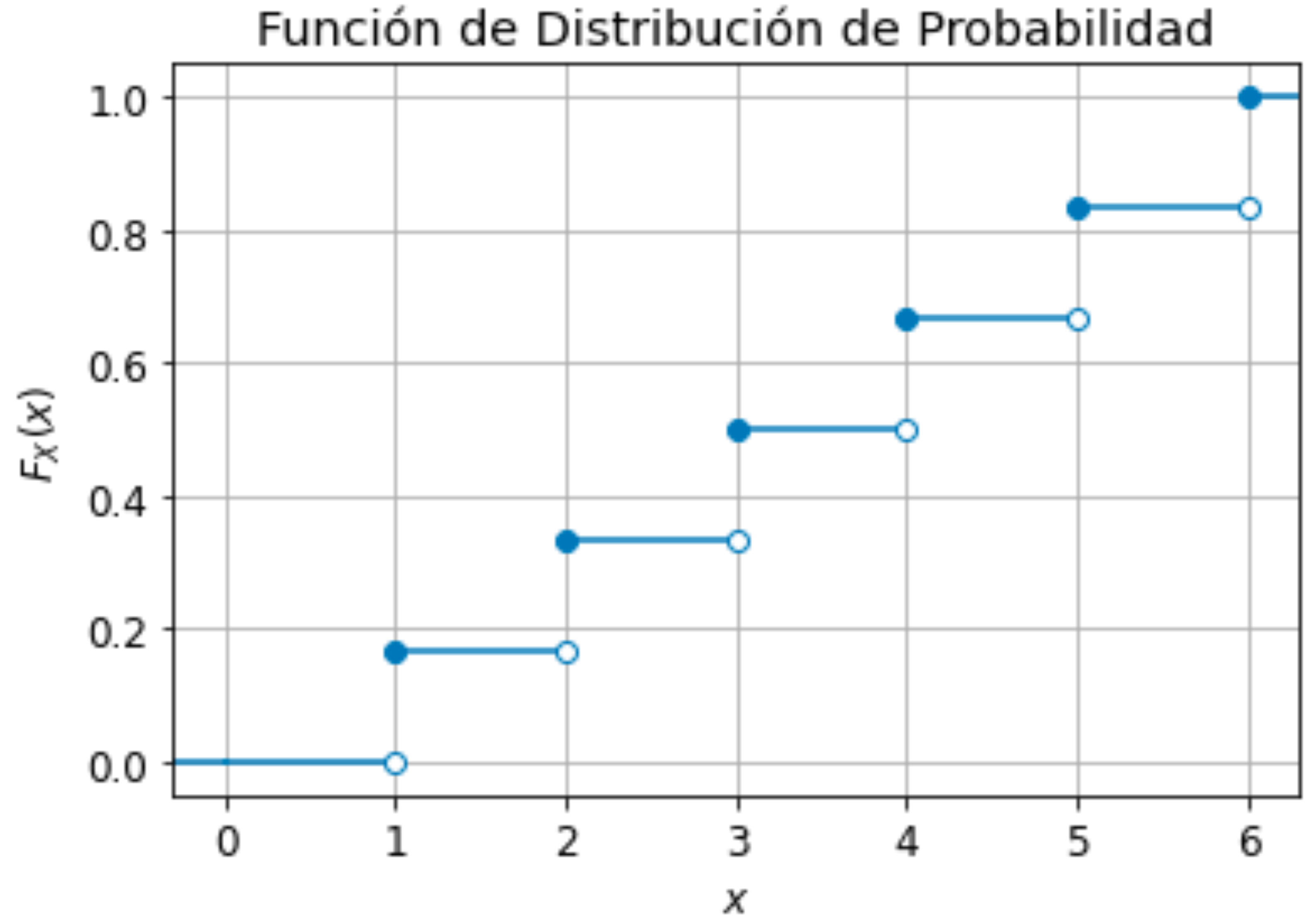
Posibles valores: $X = \{1,2,3,4,5,6\}$

Probabilidad: $Pr[X=1] = \cdots = Pr[X=6] = \frac{1}{6}$

Función de distribución: $F_X(x) = Pr[X \le x] = \sum_{u=x_o}^{x} Pr[X=u]$

- $F_X(1) = \sum_{u=1}^{1} Pr[X=u] = 1/6$
- $F_X(2) = \sum_{u=1}^{2} Pr[X=u] = 2/6$
- $F_X(3) = \sum_{u=1}^{3} Pr[X=u] = 3/6$
- $F_X(4) = \sum_{u=1}^{4} Pr[X=u] = 4/6$
- $F_X(5) = \sum_{u=1}^{5} Pr[X=u] = 5/6$
- $F_X(6) = 1$



# Función de distribución de probabilidad

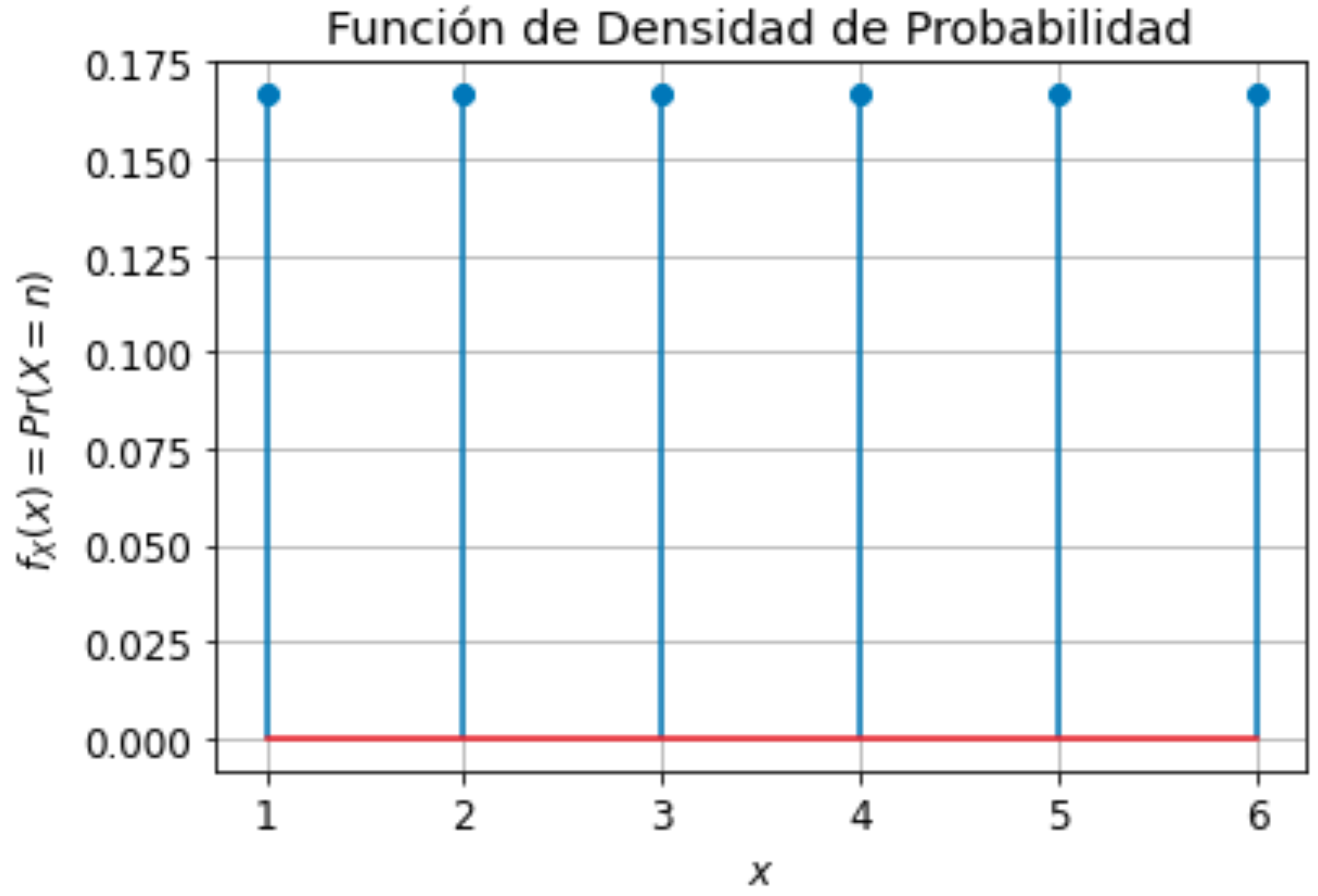
## Ejemplo - Lanzar un dado

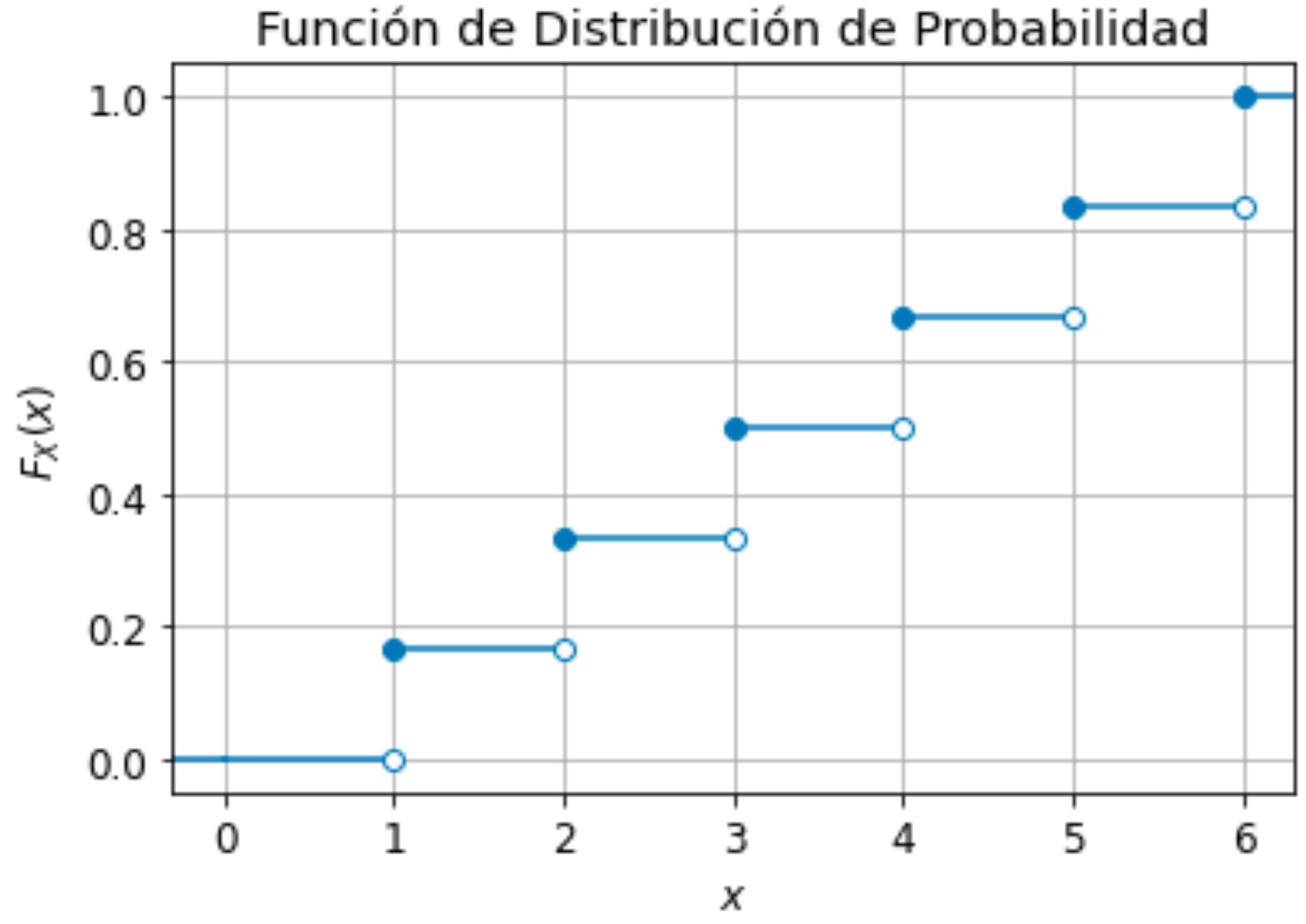
Posibles valores: $X = \{1,2,3,4,5,6\}$

Probabilidad: $Pr[X=1] = \cdots = Pr[X=6] = \frac{1}{6}$

Función de distribución: $F_X(x) = Pr[X \leq x] = \sum_{u=x_o}^{x} Pr[X=u]$

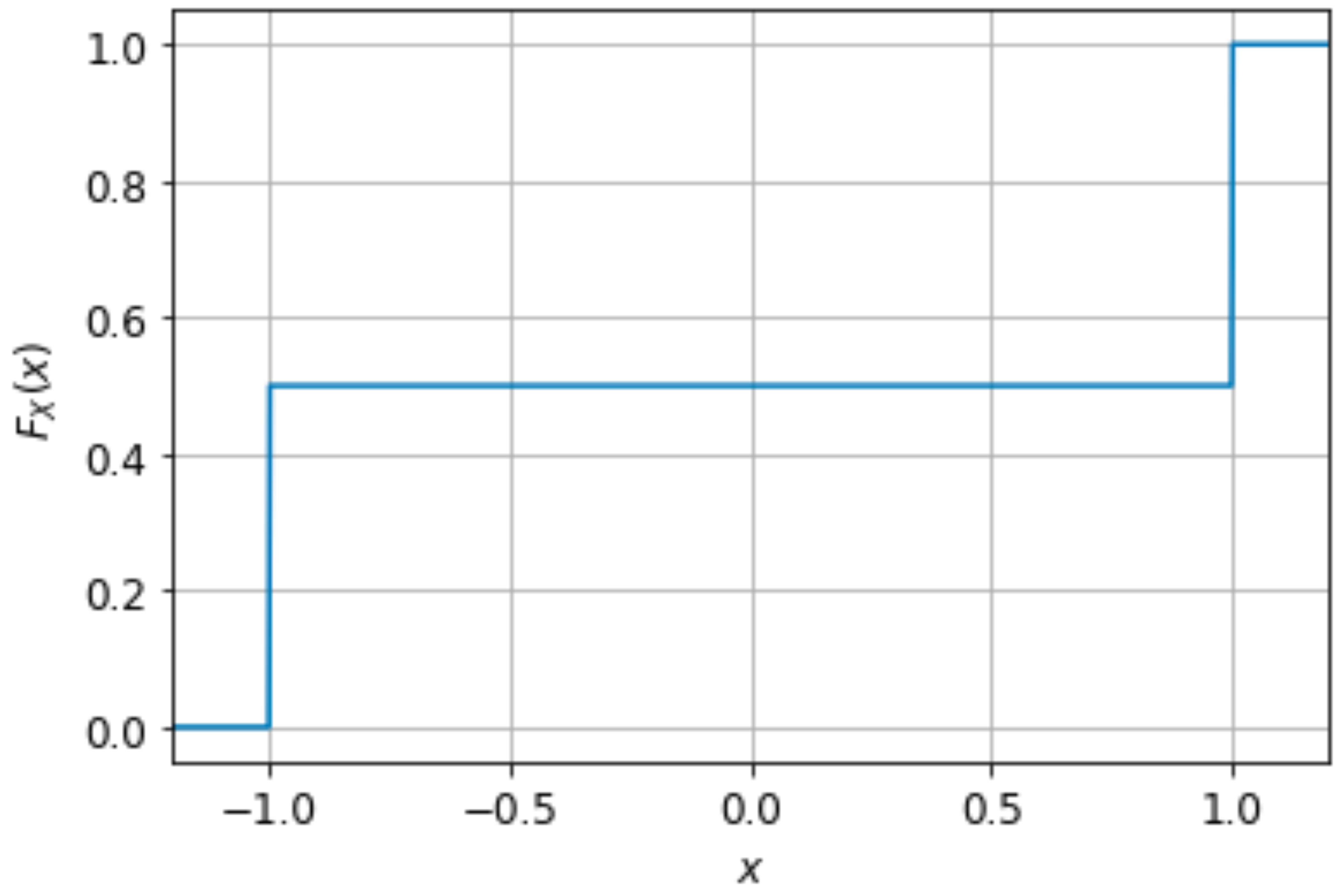
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1/6, & 1 \leq x < 2, \\ 2/6, & 2 \leq x < 3, \\ 3/6, & 3 \leq x < 4, \\ 4/6, & 4 \leq x < 5, \\ 5/6, & 5 \leq x < 6, \\ 1, & 6 \leq x\,. \end{cases}$$



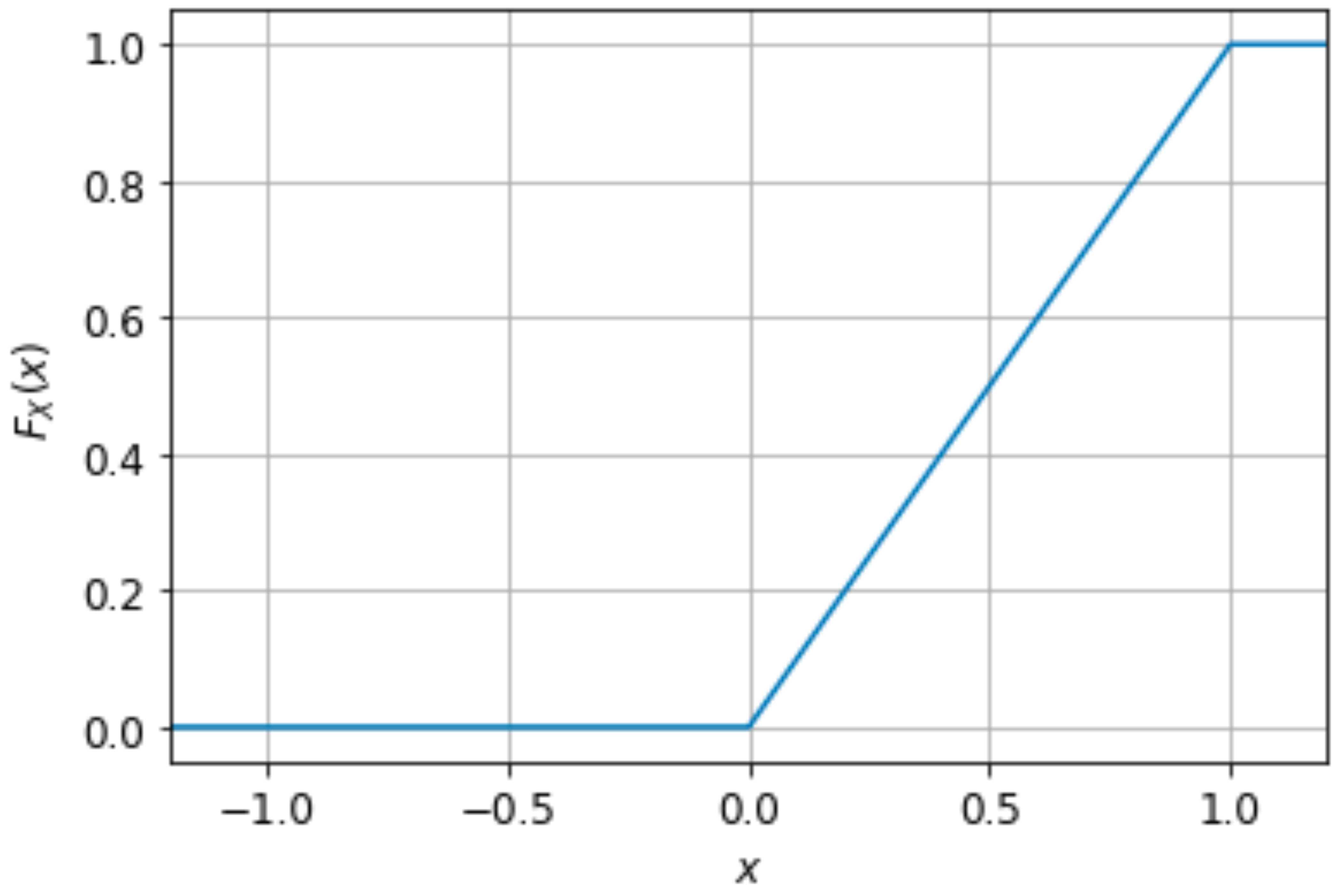
# Función de distribución de probabilidad

## Otros ejemplos




Lanzar una moneda (VA discreta)

$$Pr[X = -1] = Pr[X = 1] = \frac{1}{2}$$




Ruleta infinita (VA continua)

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0, x > 1. \end{cases}$$

# Función de distribución de probabilidad

## Distribuciones más comunes

- Distribución Gaussian (normal), $\mathcal{N}(m, \sigma)$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

- Distribución Uniforme, $\mathcal{U}(a, b)$:

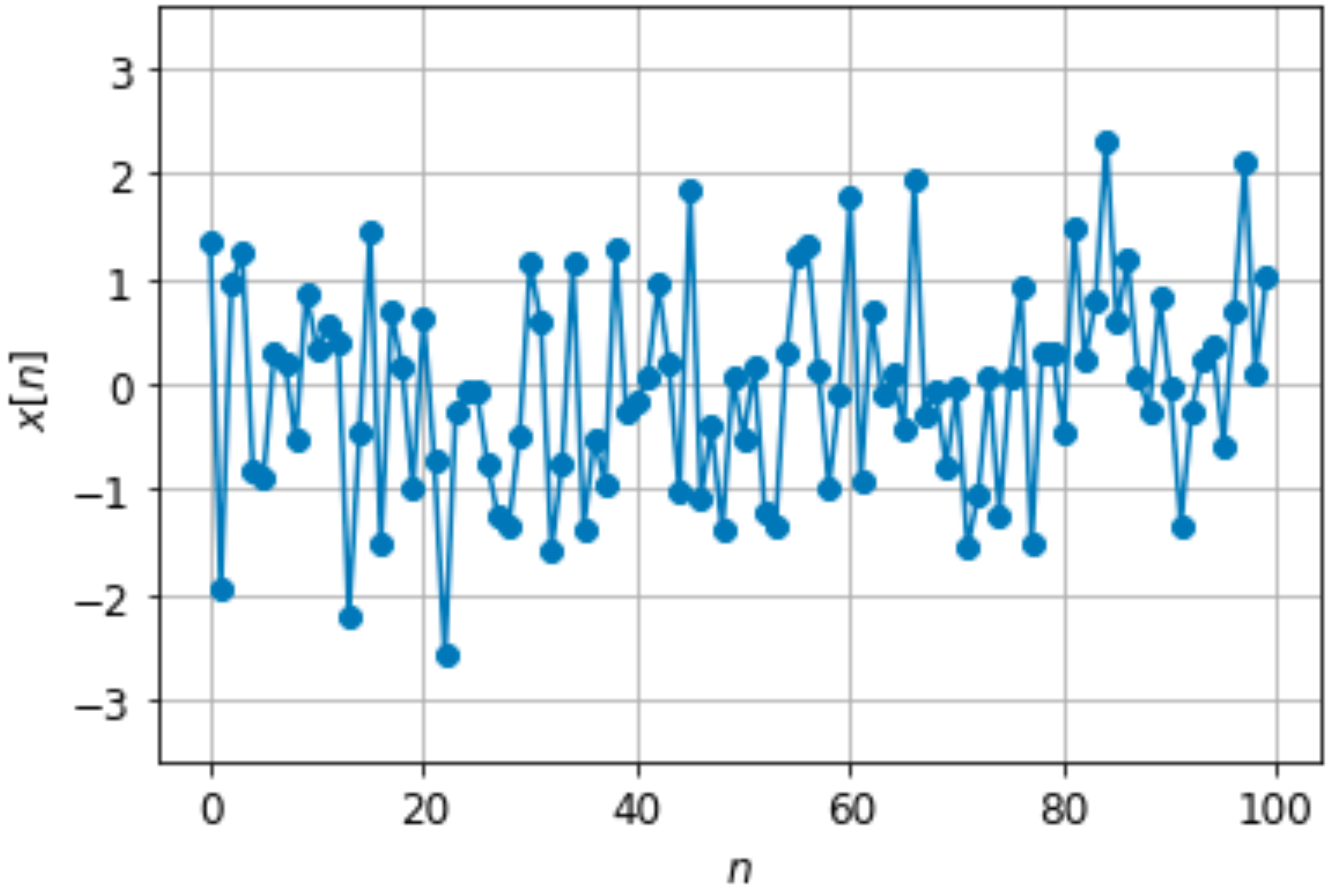
$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a, b] \\ 0, & \text{otros casos.} \end{cases}$$

- Distribución Bernoulli (binomial), $\mathcal{B}(N, p)$:

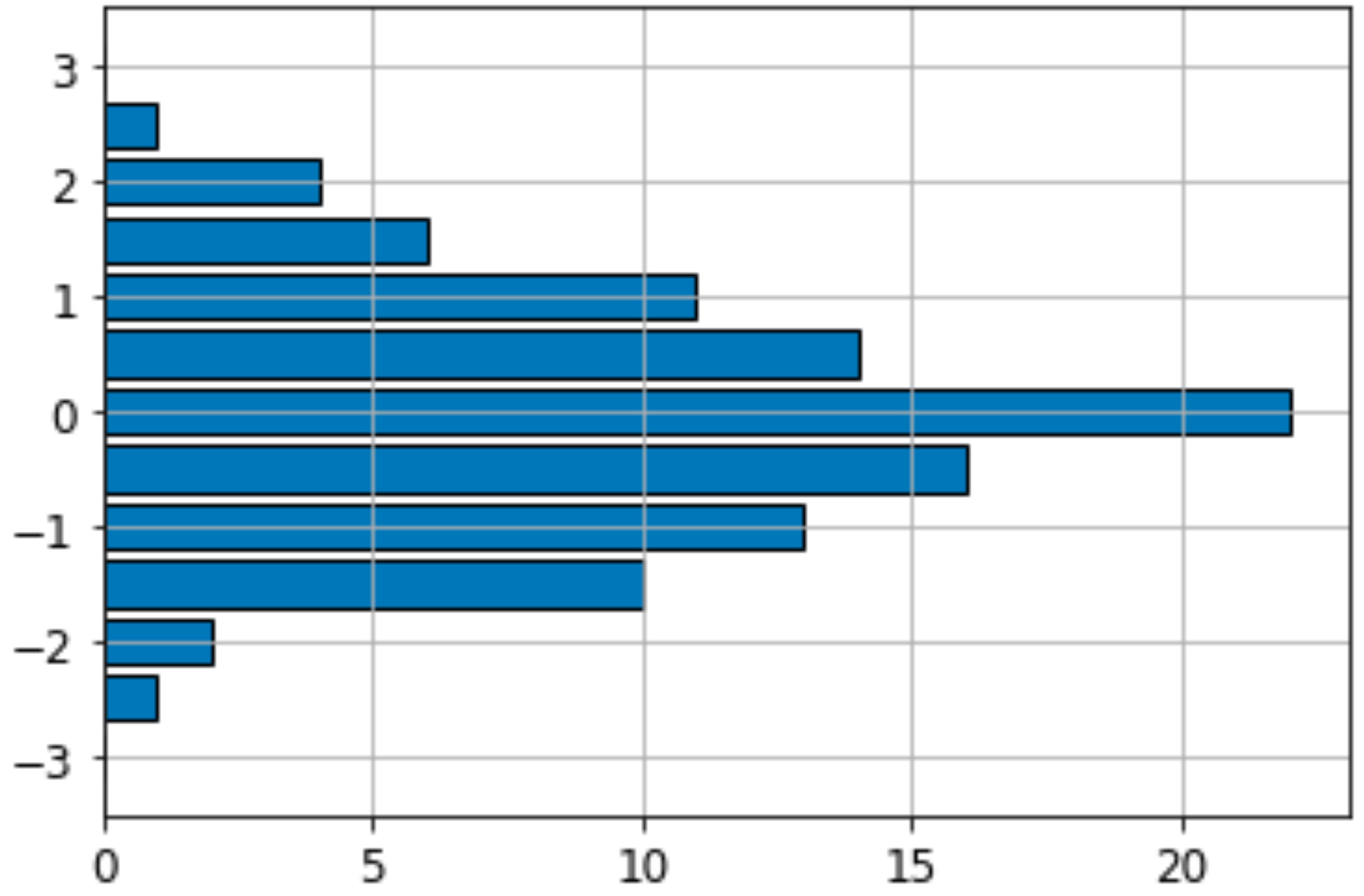
$$f_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

# Histograma

Dada una secuencia de datos (p.e., muestras de una variable aleatoria), el histograma permite visualizar la distribución de los datos a una resolución determinada (bins).



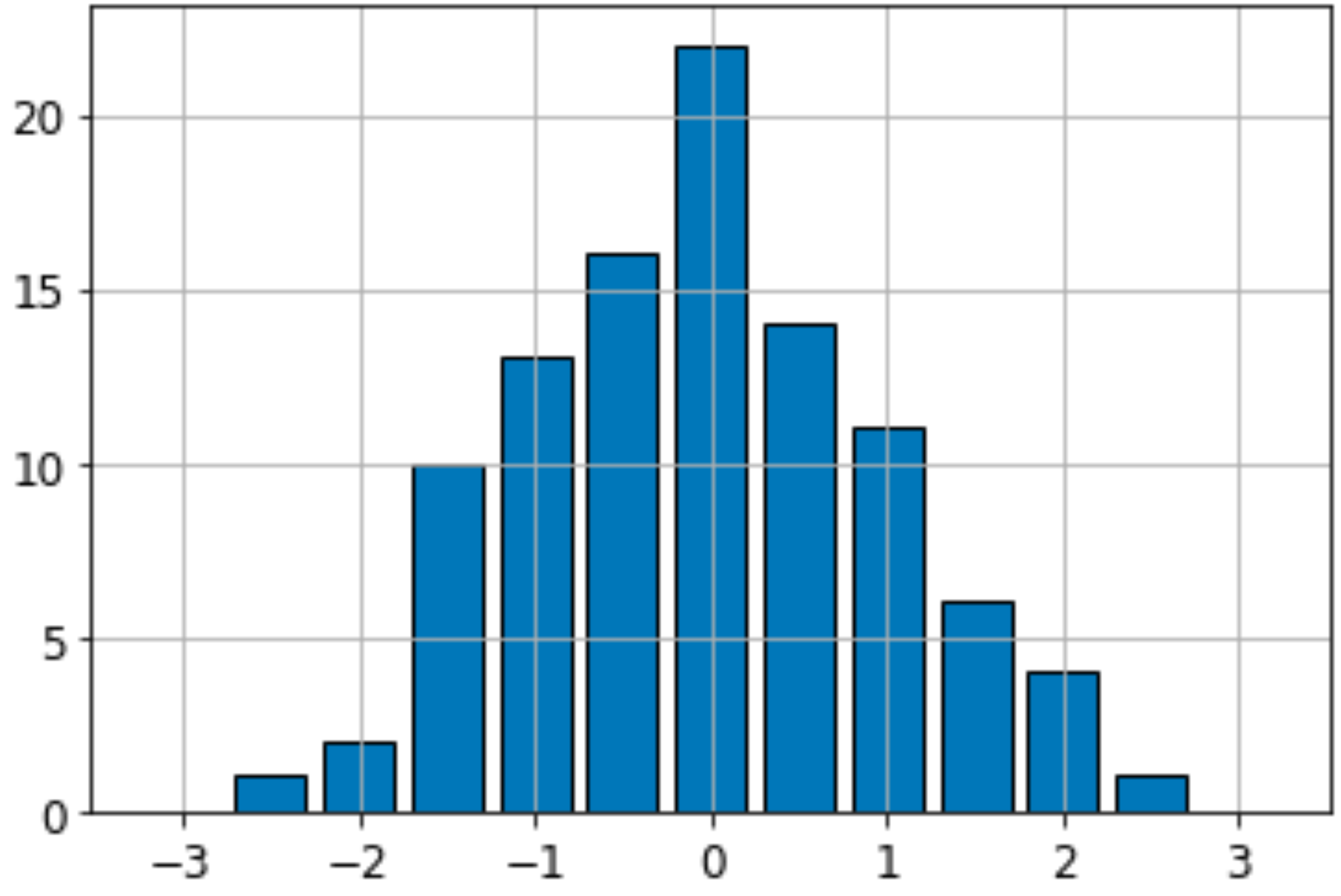

(a) Valores de una secuencia de ensayos



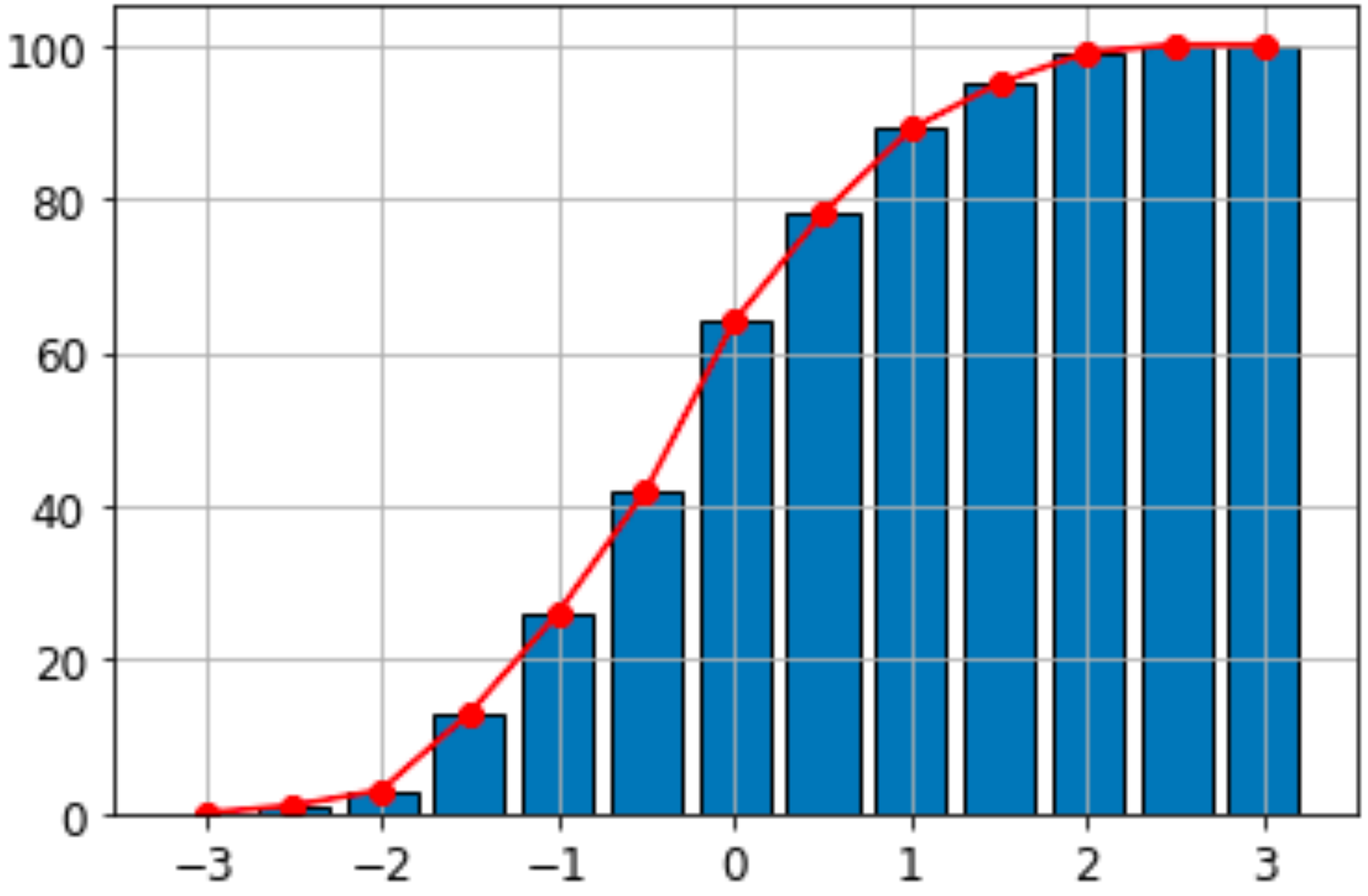

(b) Histograma

# Histograma

## Histograma y Histograma Acumulado



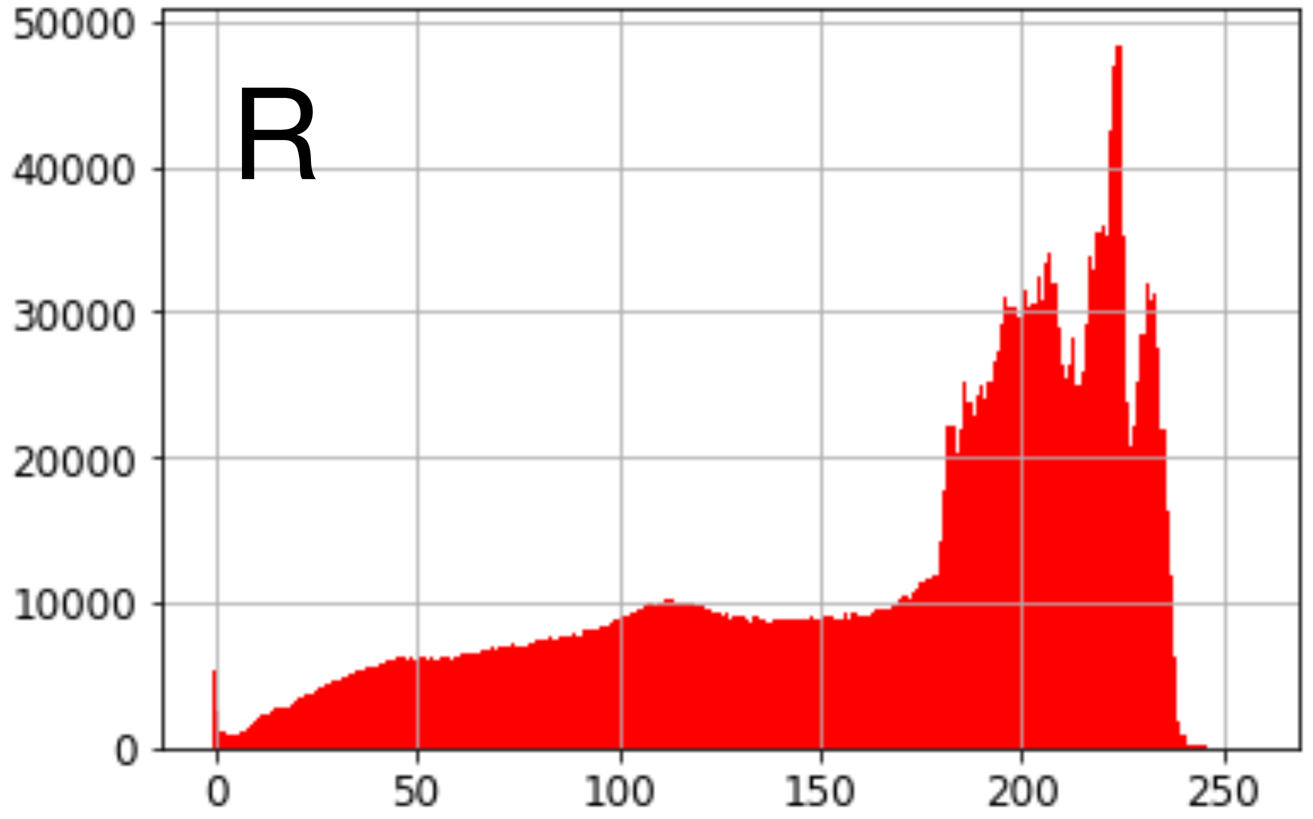

(c) Histograma (aproximación de la función de densidad de probabilidad)

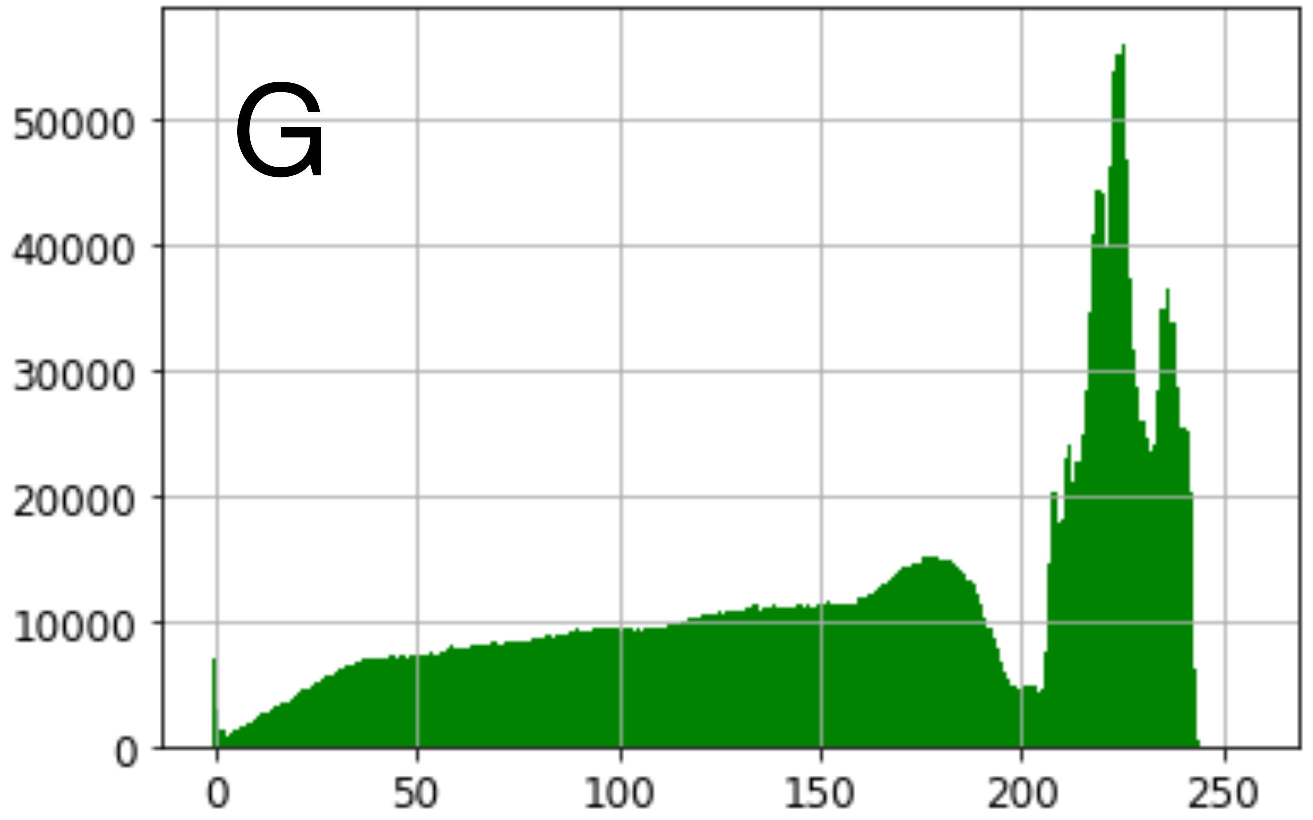


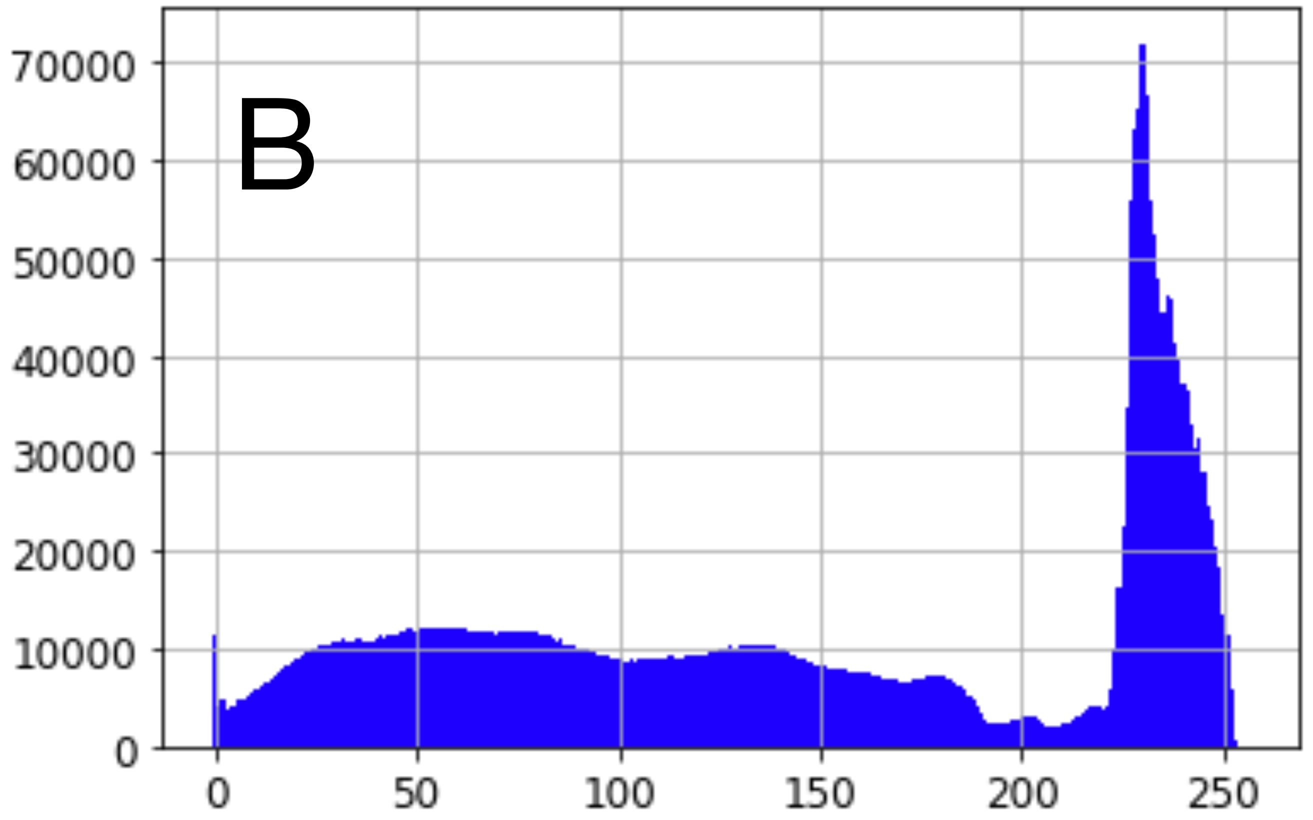

(d) Histograma acumulado (aproximación de la función de distribución de probabilidad)

# Histograma

## Histograma de una imagen



# Definiciones adicionales

## Norma-p de una secuencia de datos

Dado $\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}$, una secuencia de datos discreta, se define la norma-$p$ de $\boldsymbol{x}$ de la siguiente forma:

$$\| \boldsymbol{x} \|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^p} \ .$$

Algunos casos especiales:

- Norma cero: $\| \boldsymbol{x} \|_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \mathscr{I}_{[|x_k|>0]}$ (número de elementos de $x$ ).
- Norma infinito: $\| \boldsymbol{x} \|_\infty = \lim_{p\to\infty} \| \boldsymbol{x} \|_p = \max_{k\in[0,N-1]} \{ |x_k| \}$ (máximo valor de la secuencia $x$ ).

Nota: $\mathscr{I}_{\text{[expresión]}} = \begin{cases} 1, & \text{expresión es verdadera,} \\ 0, & \text{expresión es falsa}\,. \end{cases}$

# Momentos estadísticos

## Media, varianza, valor esperado

- Valor esperado de $X$ o media estadística $m_X = E\{X\}$.
  - Caso discreto: $E\{X\} = \sum_k x_k Pr(X = x_k)$.
  - Caso continuo: $E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$.
- Varianza de $X$,

$$\sigma_X^2 = E\{[X - E\{X\}]^2\} = E\{X^2\} - E^2\{X\} \ .$$

- Valor esperado de una función $Y = g(X)$,

$$E\{Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx \ .$$

# Momentos estadísticos

## Generalización

- Momento (n-ésimo):

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx\,.$$

- Momento central (n-ésimo):

$$E\{[X - E\{X\}]^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^n\, f_X(x)\, dx\,.$$

# Momentos estadísticos

## Ejercicios

- Calcular media y varianza de una VA $X$ asociada al lanzamiento de un dado justo.

  * Media: $m_x = \sum_{k=1}^{6} k \, Pr(X=k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{6} = 3.5$ .

  * Varianza: $\sigma_x^2 = \sum_{k=1}^{6} (k - m_X)^2 \, Pr(X=k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{(k-3.5)^2}{6} = \frac{35}{12} = 2.91\overline{6}$ .

- Calcular media y varianza de una VA $X$ asociada al resultado de una ruleta infinita con valores igualmente probables $x \in [0,1]$.

  * Media: $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) \, dx = \int_0^1 x \, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$ .

  * Varianza: $\sigma_x^2 = E\{X^2\} - E^2\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) \, dx - m_X^2 = \int_0^1 x^2 \, dx - \frac{1}{4} = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ .

# Distribuciones conjuntas

## Motivación

- Dadas dos o más variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ se desea determinar probabilidades de eventos conjuntos es decir eventos que ocurren simultáneamente.
- **Ejemplo: Lanzar dos dados.**
    - Existen un total de 36 posibles resultados: $\{1{,}1\}$, $\{1{,}2\}$, $\{2{,}1\}$, ..., $\{6{,}6\}$.
    - Definiendo dos variables aleatorias $X_1$ y $X_2$, donde

$$Pr[X_i = 1] = \frac{1}{6}\,, Pr[X_i = 2] = \frac{1}{6}\,, \ldots\,, Pr[X_i = 6] = \frac{1}{6}$$

    para $i = 1, 2.$

    - Probabilidades conjuntas: $Pr[X_1 = x_1, X_2 = x_2]$,

$$Pr[X_1 = 2, X_2 = 2] \text{ o } Pr[X_1 \leq 4, X_2 \leq 3]\,.$$

# Distribuciones conjuntas

## Definición

Dado un conjunto de variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ su compartimiento y dependencias probabilísticas se rigen por:

- Función de distribución conjunta:

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = Pr[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_N \leq x_N] \,.$$

- Función de densidad conjunta:

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} F_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N) \,.$$

# Distribuciones conjuntas

## Ejemplo

Dadas dos variables aleatorias $X_1$ y $X_2$ , calcular la función de densidad conjunta

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \ .$$

Dados los sets de posibles valores de

- $X_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $X_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ya que la combinación $X_1 = x_1$ y $X_2 = x_2$ es única en un total de 36 eventos, tenemos que

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = Pr[X_1 = x_1, X_2 = x_2] = \frac{1}{36} \ .$$

# Momentos conjuntos

## Definición

- La correlación es el momento de segundo orden dado por :

$$r_{XY} = E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y f_{X,Y}(x,y)\, dxdy\,.$$

- La covarianza está dada por :

$$c_{XY} = E\{x - m_x, y - m_y\} = E\{XY\} - m_x m_y\,.$$

- Coeficiente de correlación o covarianza normalizada métrica invariante al escalamiento

$$\rho_{XY} = \frac{E\{XY\} - m_x m_y}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{c_{XY}}{\sigma_X \sigma_y}\,.$$

# Cambio de variable continua

## Teorema

- Sea $X$ una variable aleatoria de tipo continuo con valores en el intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ con función de densidad $f_X(x)$. Si la función $g(\,\cdot\,)$ es derivable y estrictamente monótona, tal que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria de tipo continuo cuya función de densidad puede obtenerse a partir de $f_X(x)$ mediante la siguiente relación:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|, \quad \forall y \in [g(a), g(b)]\,.$$

# Cambio de variable continua
## Ejemplo

- Sea $X$ una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

  Calcular la función de densidad de la variable $Y = X^2$.

- **Solución:**

  Considerando $y = g(x) = x^2$ tenemos que $x = g^{-1}(y) = \sqrt{y}$ entonces

$$f_X(g^{-1}(y)) = \lambda e^{-\lambda\sqrt{y}} \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

- Finalmente, agrupando términos, tenemos

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{\lambda}{2\sqrt{y}}e^{-\lambda\sqrt{y}}, \quad y > 0.$$

# Independencia estadística

## Independencia de variables aleatorias

- Independencia de eventos:

  Sean los eventos $A$ y $B$, se dice $A$ y $B$ son independientes si

$$Pr[A, B] = Pr[A \cap B] = Pr[A]Pr[B] \ .$$

- Independencia de variables aleatorias:

  Dos variables aleatorias $X$ y $Y$ son estadísticamente independientes si su función de densidad conjunta es separable:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \ .$$

  En el caso de variables aleatorias discretas, $X$ y $Y$ son independientes si:

$$Pr[X = x, Y = y] = Pr[X = x] \cdot Pr[Y = y] \quad \forall x, y \ .$$

# Independencia estadística

## Independencia de variables aleatorias

- Independencia de variables aleatorias

  Dos variables aleatorias $X$ y $Y$ son débilmente independientes si

  $$E\{XY\} = E\{X\} \cdot E\{Y\} \text{ es decir } r_{XY} = m_X \cdot m_Y \,.$$

  Por tanto, si la correlación es separable, las variables $X$ y $Y$ son no correlacionadas.

# Independencia estadística

## Correlación entre variables aleatorias

- Si dos variables aleatorias son estadísticamente independientes, entonces, también son variables no correlacionadas,

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \implies r_{XY} = m_x \cdot m_y \implies c_{XY} = 0 \,.$$

- Dos variables aleatorias $X$ y $Y$ son ortogonales si su correlación es cero,

$$r_{XY} = 0 \,.$$

# Variables aleatorias gaussianas

## Definición

- Una variable aleatoria continua $X$ sigue una distribución de probabilidad gaussiana o normal, si su función de densidad tiene la siguiente forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

  donde $m_X$ es la media y $\sigma^2$ es la varianza.

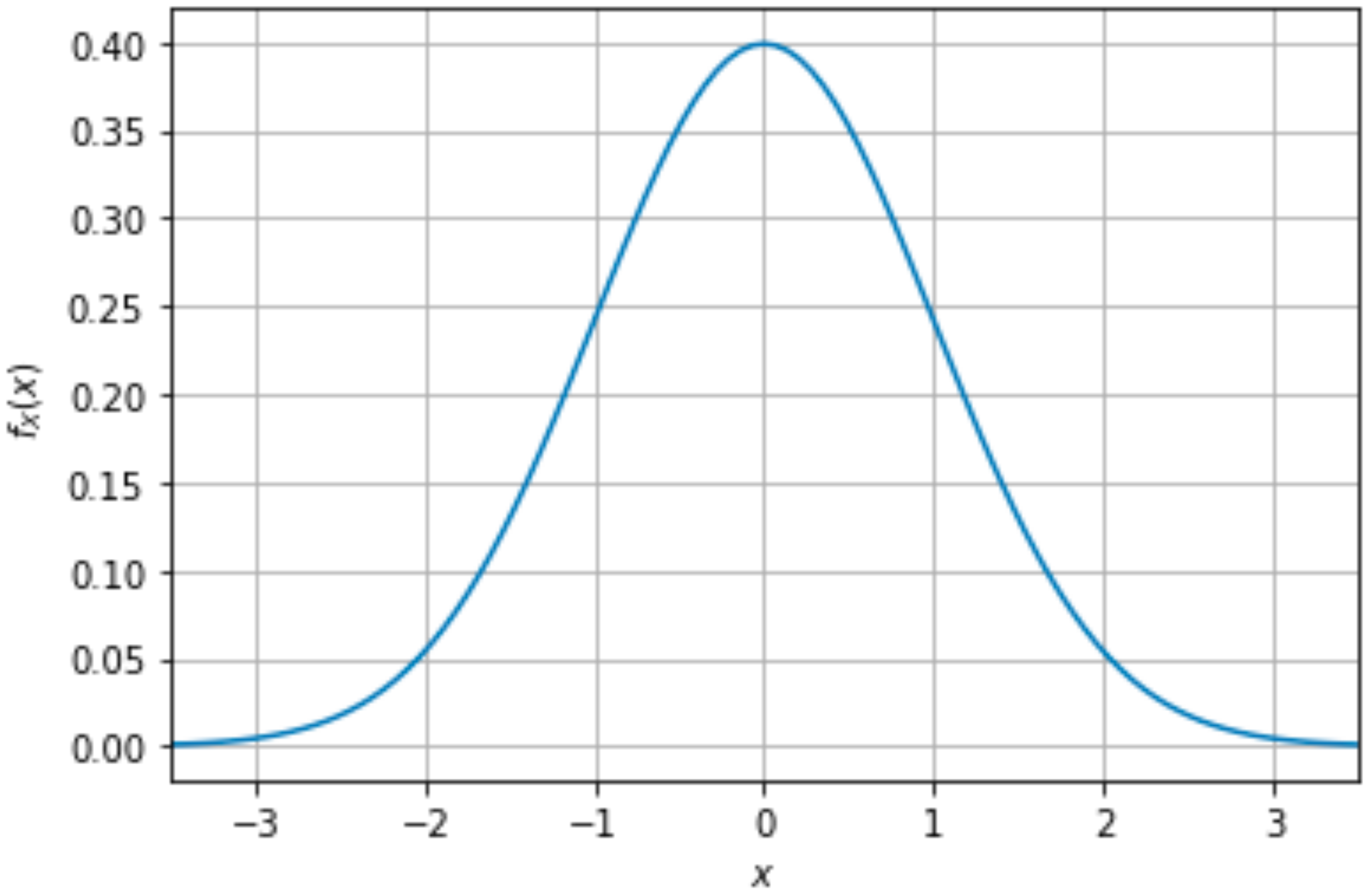
- Dos variables aleatorias continuas $X$ y $Y$ siguen una distribución gaussiana conjunta si su función de densidad tiene la siguiente forma

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)} \left[ \frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} - 2\rho_{XY}\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \right\}$$

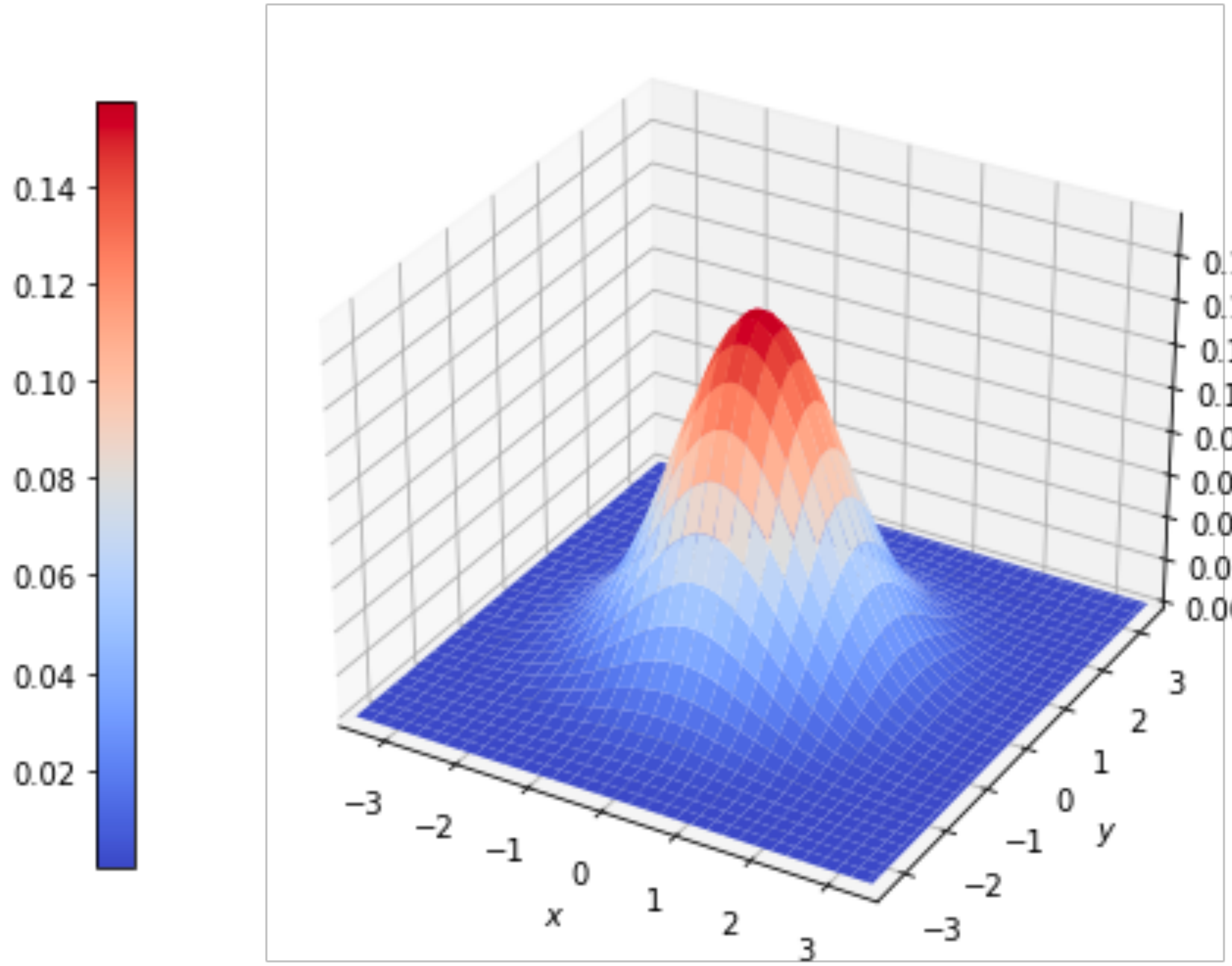
  donde $m_X$, $m_Y$, $\sigma_X^2$ y $\sigma_Y^2$ son las medias y varianzas de las variables $X$ y $Y$ respectivamente, y además $\rho_{XY}$ es el coeficiente de correlación o covarianza normalizada ente ambas variables.

# Variables aleatorias gaussianas

## Ejemplos




(a) Función de densidad gaussiana
$(\sigma_X = 1, m_X = 0)$




(b) Función de densidad gaussiana conjunta
$(\sigma_X = \sigma_Y = 1, m_X = m_Y = 0, \rho_{XY} = 0)$

# Variables aleatorias gaussianas

## Propiedades

- **Propiedad 1:** Si dos variables aleatorias conjuntamente gaussianas están descorrelacionadas ($\rho_{XY} = 0$), entonces las variables son estadísticamente independientes $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.
- **Propiedad 2:** Si las variables aleatorias $X$ y $Y$ son conjuntamente gaussianas, entonces $Z = aX + bY$, donde $a$ y $b$ son constantes, es una variable aleatoria gaussiana con media y varianza denotadas de la siguiente forma.

$$m_Z = am_X + bm_Y$$

$$\sigma_Z^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY}$$

- **Propiedad 3:** Si la variable $X$ es gaussiana con media cero ($m_X = 0$) entonces

$$E\{X^n\} = \begin{cases} 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (n-1)\,\sigma_X^n, & : n \text{ par}, \\ 0 & : n \text{ impar}. \end{cases}$$

# Variables aleatorias gaussianas

## Ejercicios

- Dada la variable $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, encuentre el valor esperado de $|X|$.
- Solución:

$$E\{|X|\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{\infty} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

# Ley de los números grandes

## Definición

Dado un conjunto $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (IID) tal que $E\{X_k\} = m_X$ y $\operatorname{var}(X_k) = \sigma_X^2 < \infty$ para todo $k$, entonces se cumple que en el límite:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k = m_X\,.$$

# Teorema del límite central

## Definición

Dado un conjunto $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (IID) tal que $E\{X_k\} = m_X$ y $\mathrm{var}(X_k) = \sigma_X^2 < \infty$ para todo $k$, definiendo una variable aleatoria $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$ , se cumple en el límite $N \to \infty$:

$$Z = \frac{S_N - E\{S_N\}}{\sqrt{\mathrm{var(S_N)}}} \to \mathcal{N}(0,1) \; .$$

Es decir, para un valor de $N$ lo suficientemente grande, la variable aleatoria resultante se podrá aproximar a una distribución normal (gaussiana) de media 0 y desviación estándar 1.

$$F_Z(z) = Pr\left[\frac{S_N - E\{S_N\}}{\sqrt{\mathrm{var}(S_N)}} \leq z\right] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \; .$$

# ¡Muchas gracias!