IEE352 - Procesamiento Digital de Señales

Clase 02 - Muestreo de Señales 2

Dr. Marco A. Milla
Sección Electricidad y Electrónica (SEE)
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

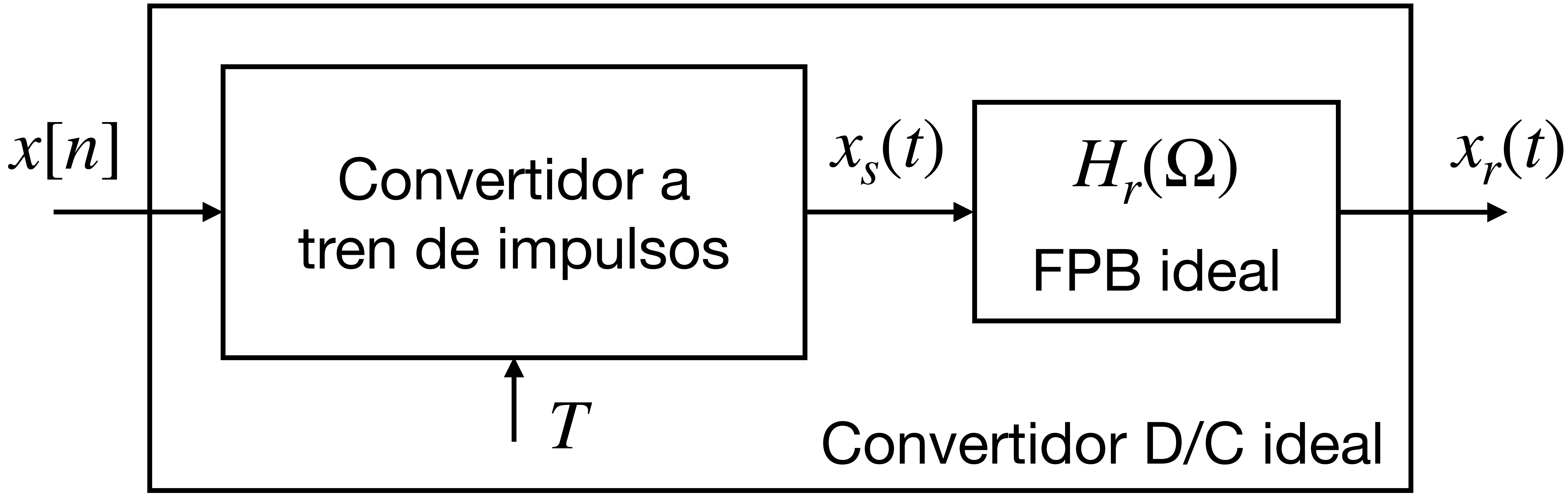
email: milla.ma@pucp.edu.pe

Contenido

- Muestreo de señales continuas en el tiempo (Reconstrucción)
- Oversampling & Undersampling
- Upsampling & Interpolation
- Downsampling & Decimation

Muestreo de señales continuas en el tiempo

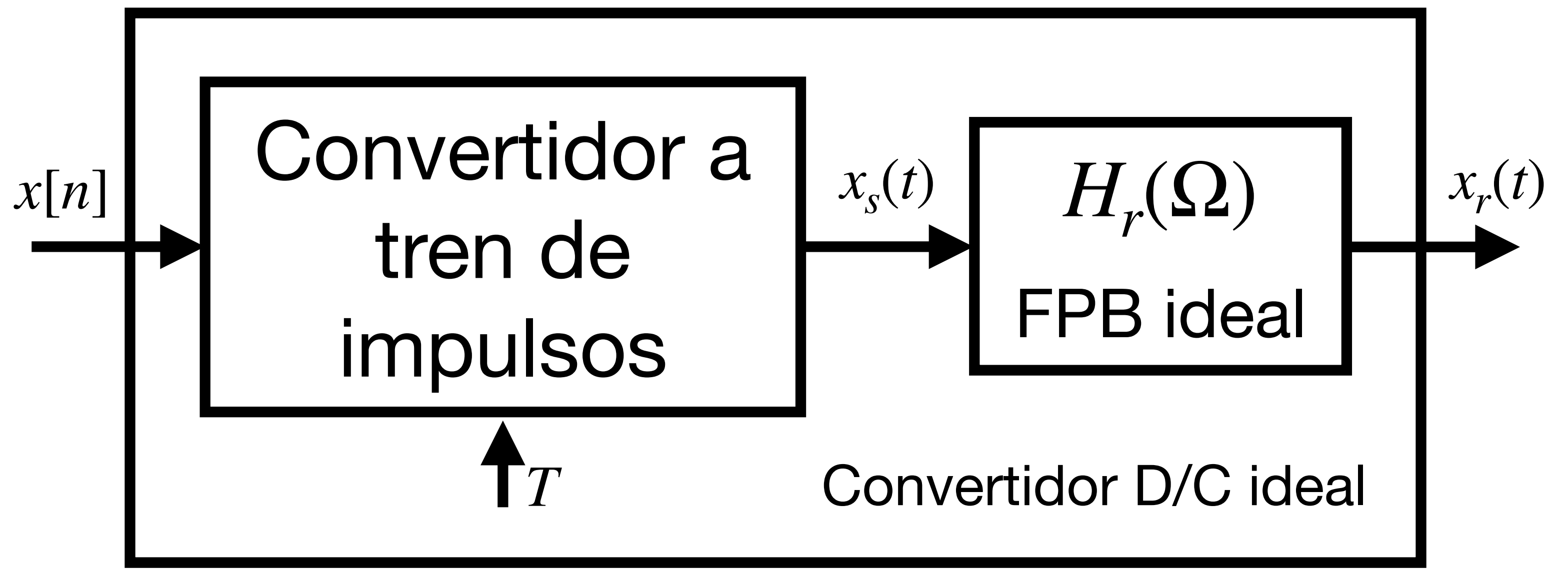
Reconstrucción de señales de banda limitada



Las señales continuas en el tiempo que son de banda limitada pueden ser reconstruidas exactamente a partir de sus muestras si se cumple el criterio de Nyquist.

Muestreo de señales continuas en el tiempo

Reconstrucción de señales de banda limitada

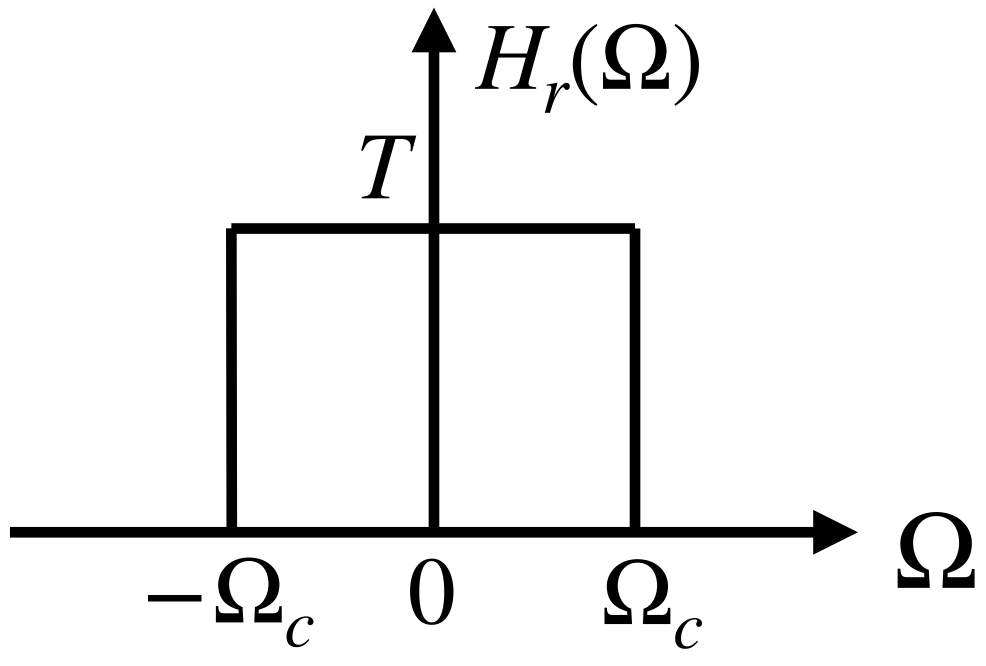


- Dadas las muestras $x[n]$, tenemos que

$$x_s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)\,.$$

- Dado el filtro ideal pasabajos $H_r(\Omega)$ con respuesta impulsiva $h_r(t)$, tenemos que

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_s(t) * h_r(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT)\,. \end{aligned}$$



Debe cumplirse que:

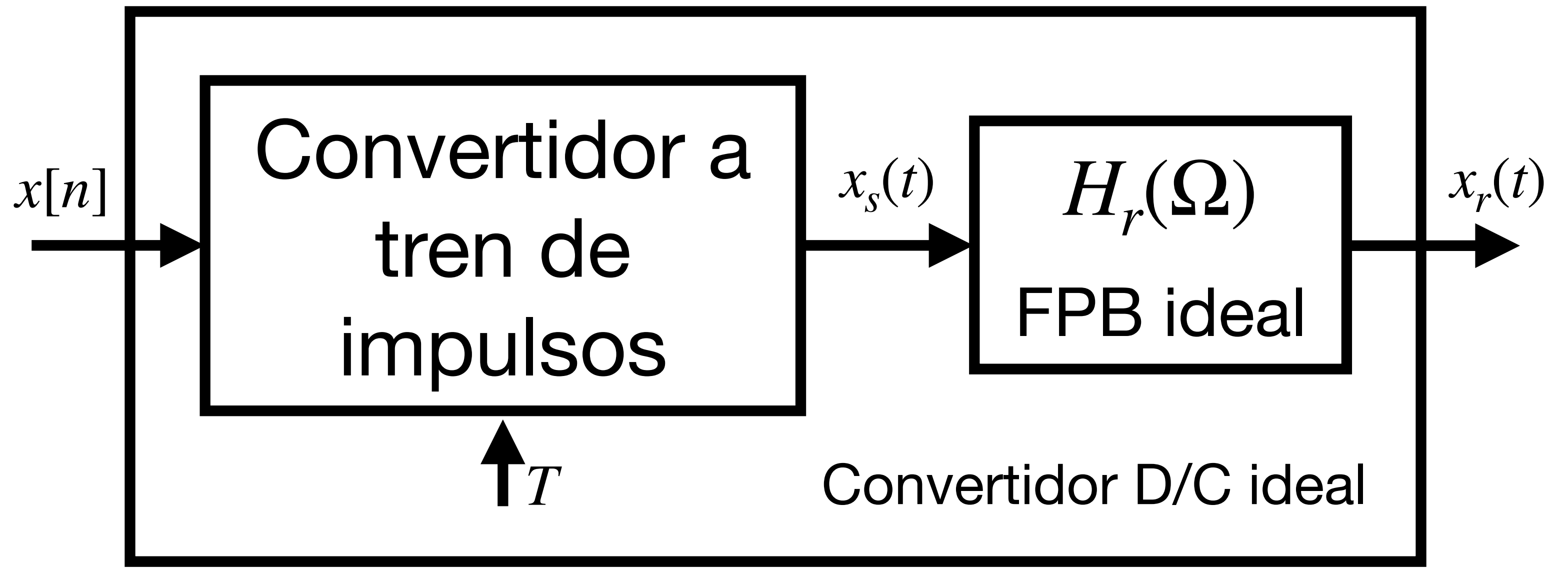
$$\Omega_N < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_N$$

Muestreo de señales continuas en el tiempo

Reconstrucción de señales de banda limitada

- Escogiendo $\Omega_c = \Omega_s/2 = \pi/T$, tenemos que

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} = \text{sinc}(\pi t/T)\,.$$



- Reemplazando en $x_r(t)$ tenemos que

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\text{sinc}\left(\pi(t-nT)/T\right)\,.$$

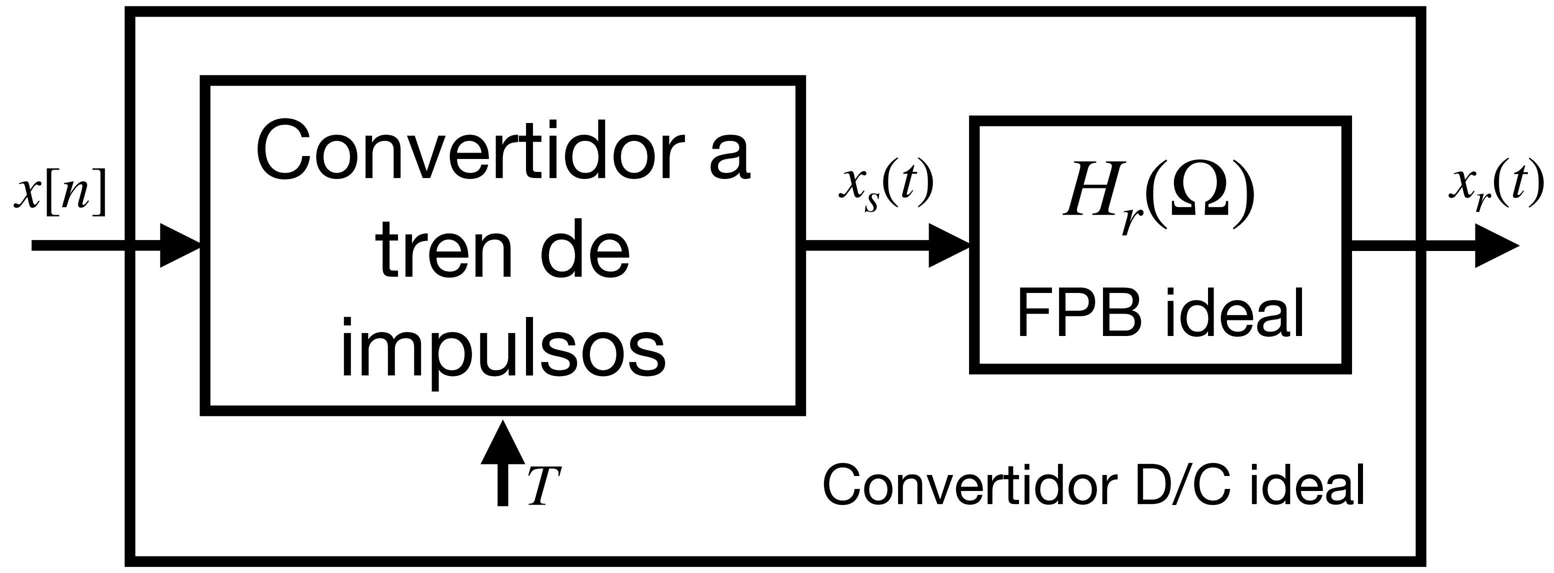
- De acuerdo con lo visto antes, si $x[n] = x_c(nT)$ y $X_c(\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$ (es decir $x_c(t)$ es de banda limitada), podemos concluir que

$$x_r(t) = x_c(t)\,.$$

Muestreo de señales continuas en el tiempo

Reconstrucción de señales de banda limitada

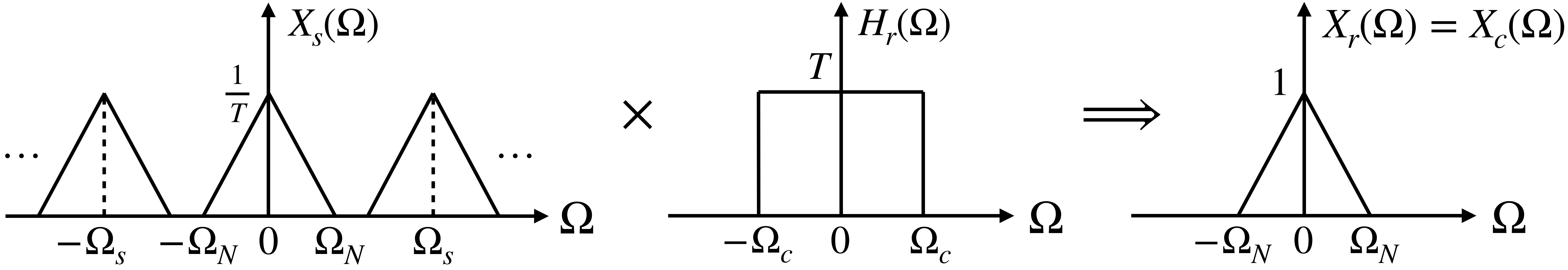
- Analizando en frecuencia las señales, tenemos que



$$X_r(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] H_r(\Omega) e^{-j\Omega T n}$$
$$= H_r(\Omega) X(e^{j\Omega T}) \, .$$

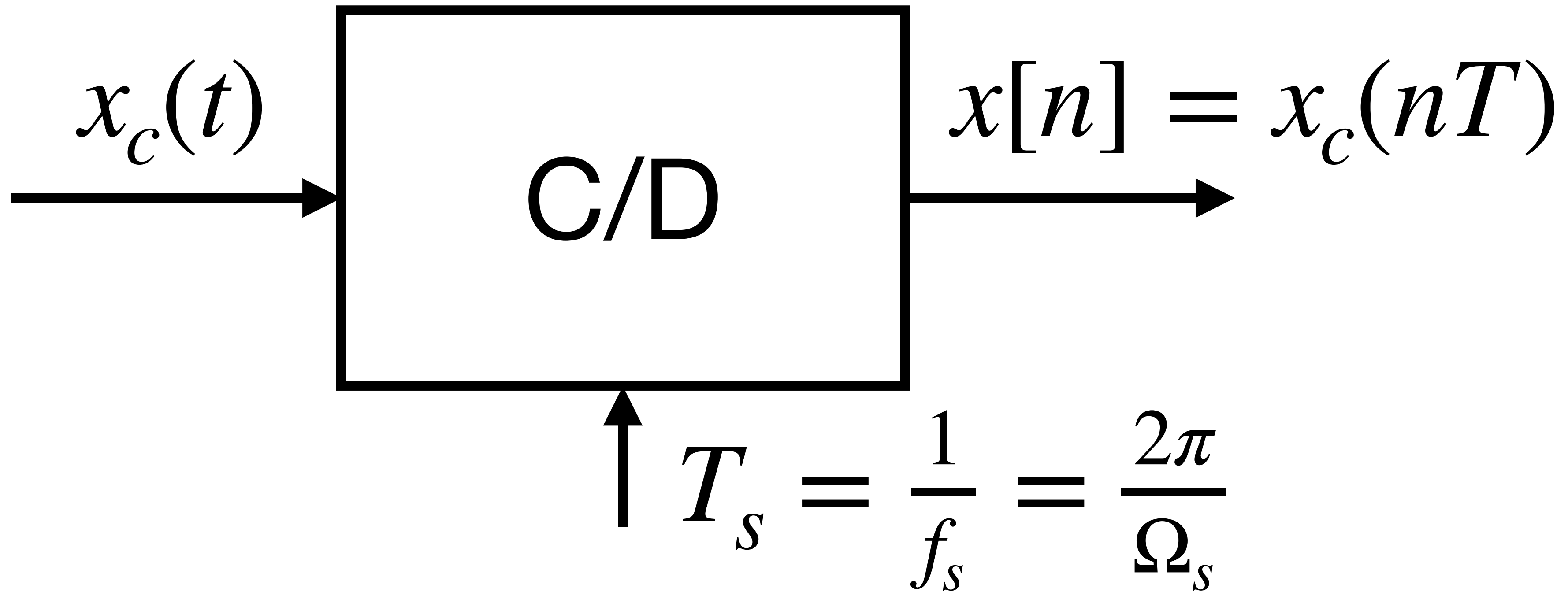
- Si se cumple el criterio de Nyquist, la señal reconstruida es igual a la señal original

$$X_r(\Omega) = X_c(\Omega) \, .$$



Oversampling & Undersampling

Definición



- Sea $x_c(t)$, una señal limitada en banda, tal que

$$\mathcal{F}\{x_c(t)\} = \begin{cases} X_c(\Omega) & |\Omega| \leq \Omega_o, \\ 0 & |\Omega| > \Omega_o\,. \end{cases}$$

- Oversampling o sobremuestreo ocurre cuando la señal $x_c(t)$ es muestreada a una frecuencia Ω_s mucho mayor que el doble de su máxima frecuencia Ω_o (frecuencia de Nyquist).

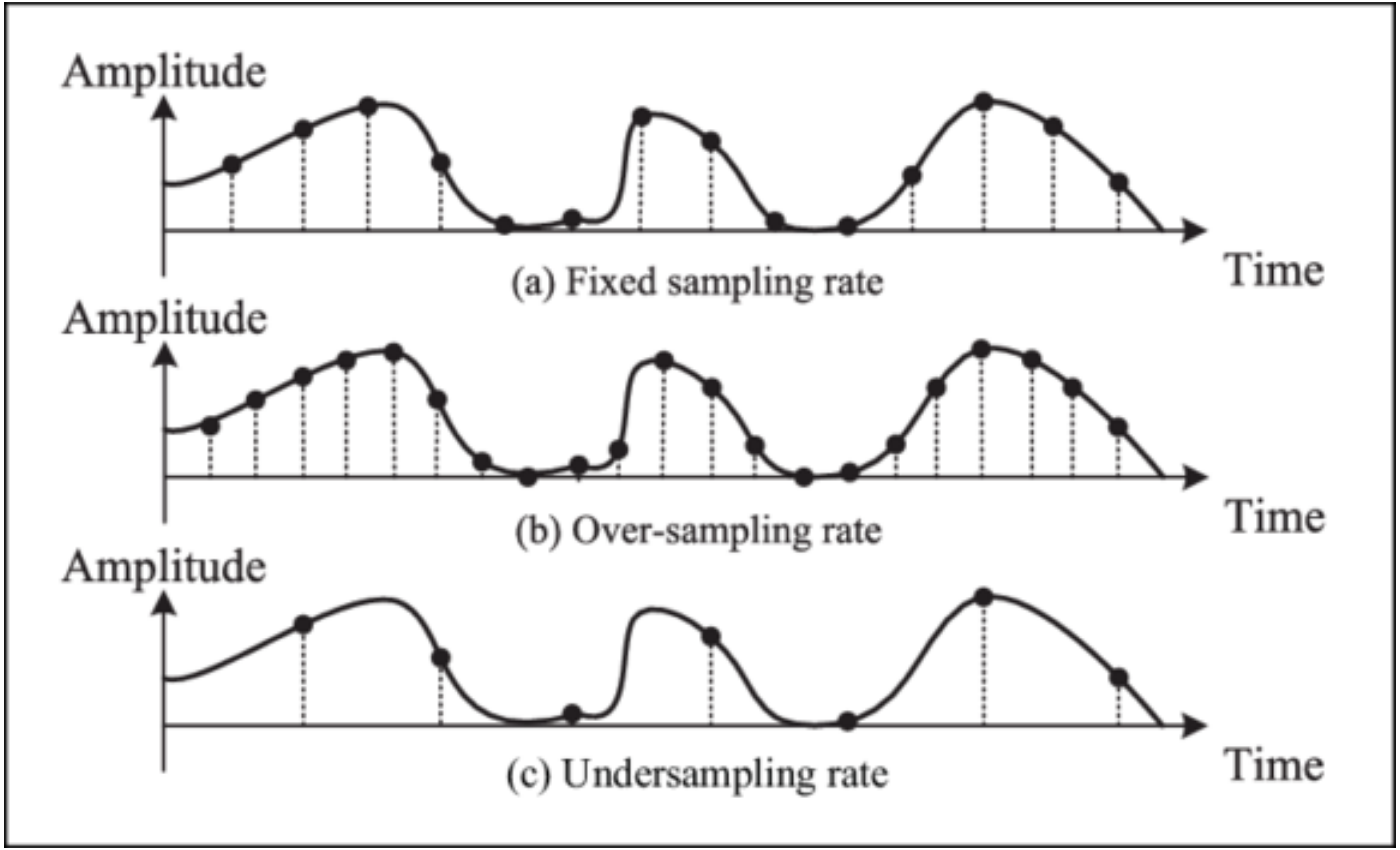
$$\Omega_s \gg 2\Omega_o$$

- Undersampling o submuestreo ocurre cuando la señal $x_c(t)$ es muestreada a una frecuencia Ω_s menor que el doble de la frecuencia de Nyquist Ω_o (se produce aliasing).

$$\Omega_s < 2\Omega_o$$

Oversampling & Undersampling

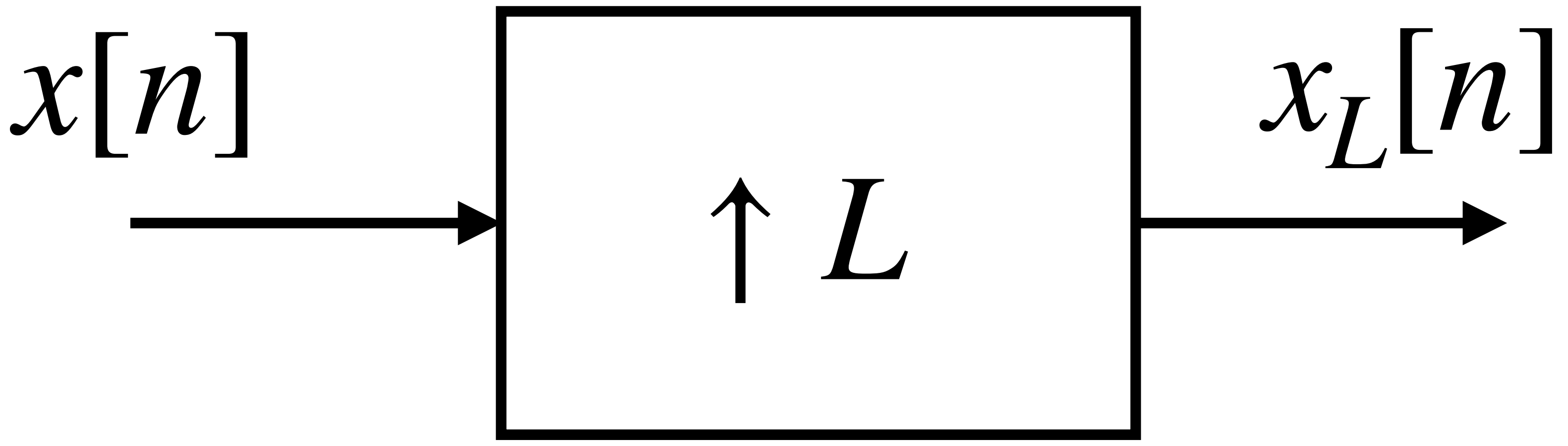
Ejemplo



Upsampling

Definición

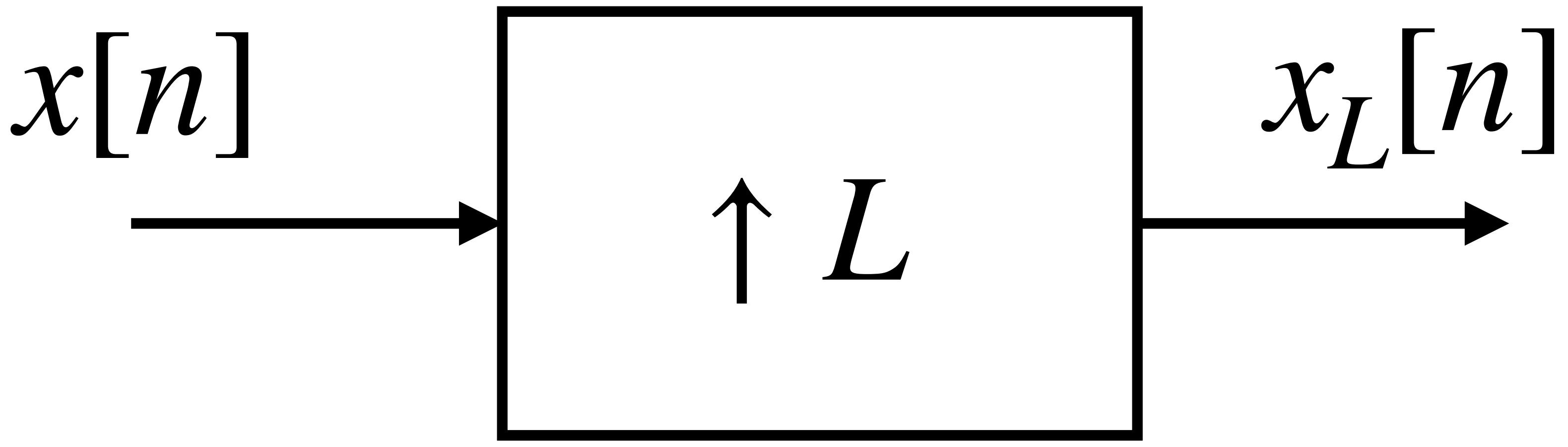
Es el proceso mediante el cual se incrementa el número de muestras de una señal discreta intercalando $L-1$ ceros entre las muestras de la señal original. También se le conoce como expansor.

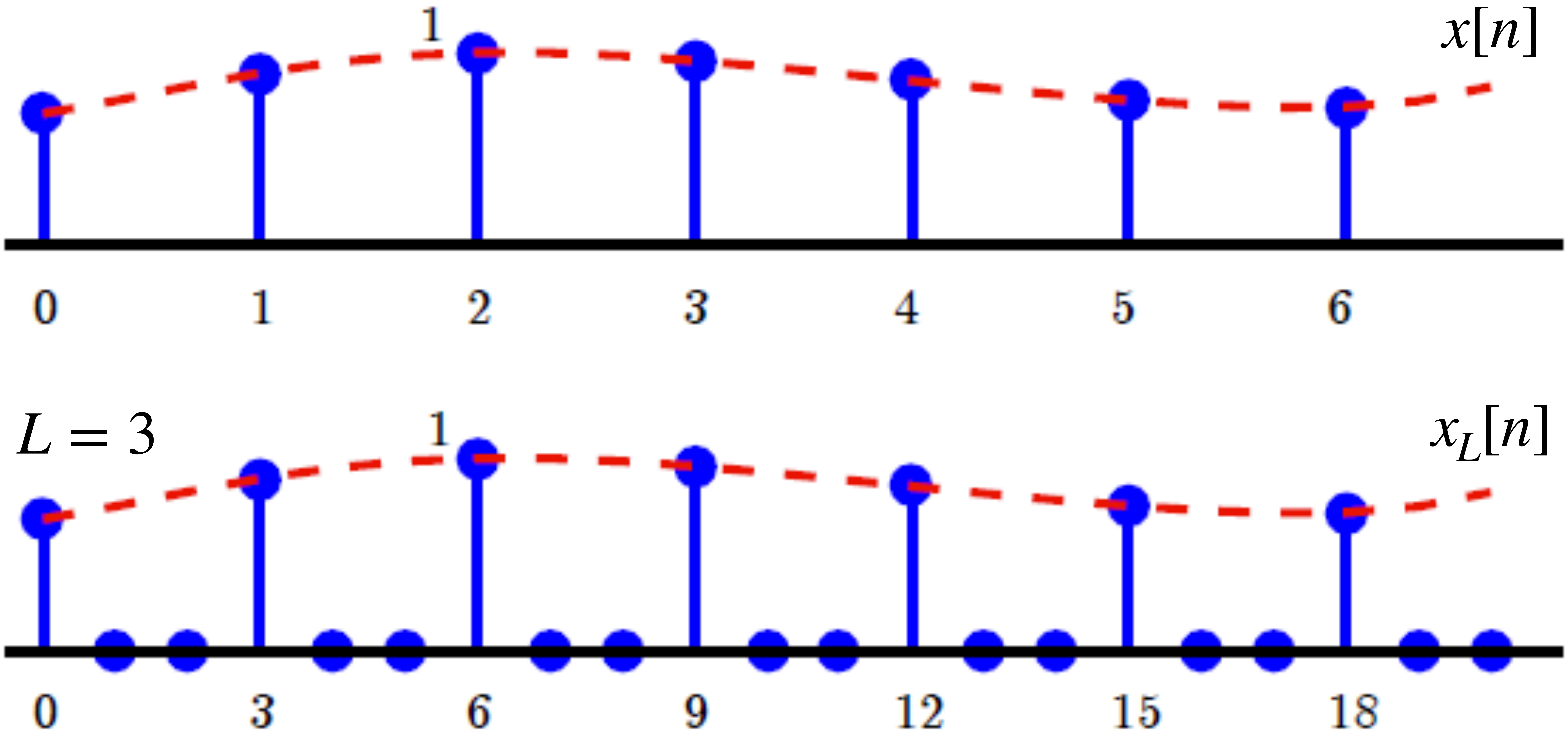


$$x_L[n] = \begin{cases} x[n/L] & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL]\,.$$

Upsampling

Ejemplo





Upsampling

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT) de $x_L[n]$

Dadas las secuencias discretas $x[n]$ y $x_L[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL]$, tenemos

que sus DTFTs están dadas por

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n},$$

$$\mathcal{F}\{x_L[n]\} = X_L(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_L[n]e^{-j\omega n}.$$

Upsampling

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT) de $x_L[n]$

Reemplazando $x_L[n]$ en $X_L(\omega)$ tenemos

$$X_L(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL] \right) e^{-j\omega n} .$$

Intercambiando las sumatorias tenemos

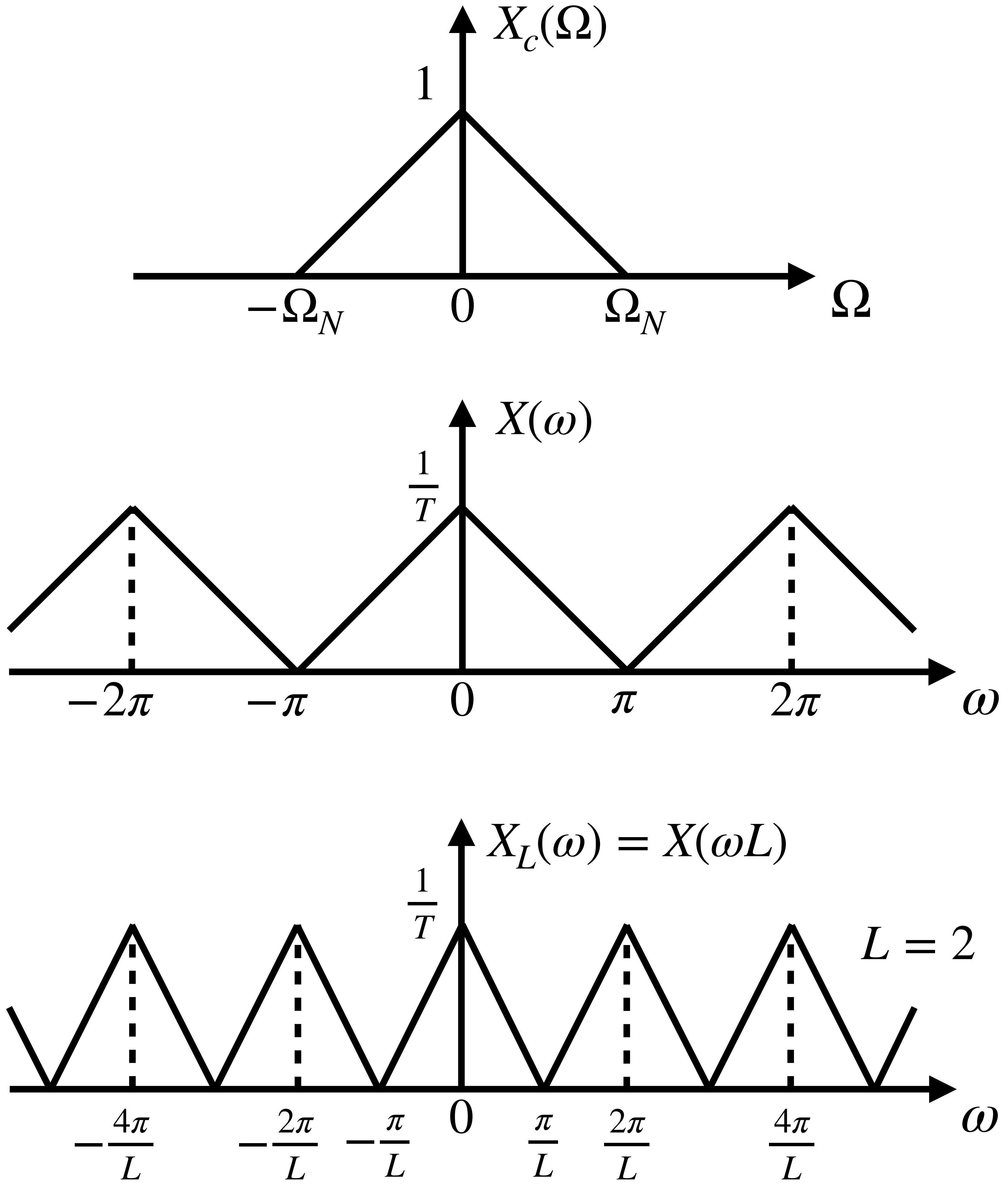
$$\begin{aligned} X_L(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-kL] e^{-j\omega n} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega kL} = X(\omega L) . \end{aligned}$$

Upsampling

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT) de $x_L[n]$

En consecuencia, la transformada de Fourier de la señal a la salida del upsampler es una versión escalada en frecuencia de la transformada de la señal original,

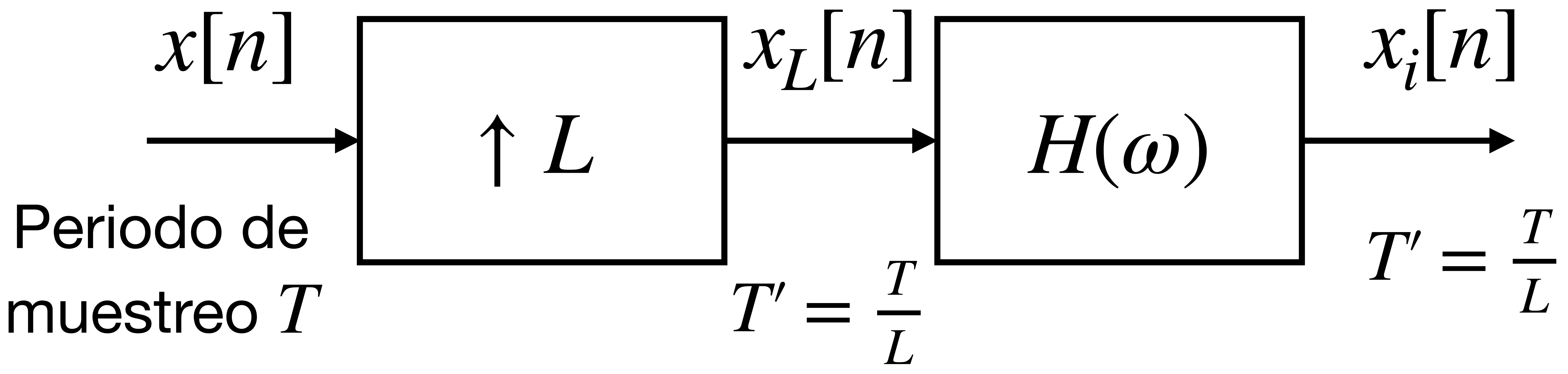
$$X_L(\omega) = X(\omega L)\,.$$



Interpolation

Upsampling + Filtering

Interpolación es el proceso mediante el cual se incrementa la tasa o frecuencia de muestreo de una señal por un factor entero L seguido por un filtro interpolador buscando no distorsionar la señal original.

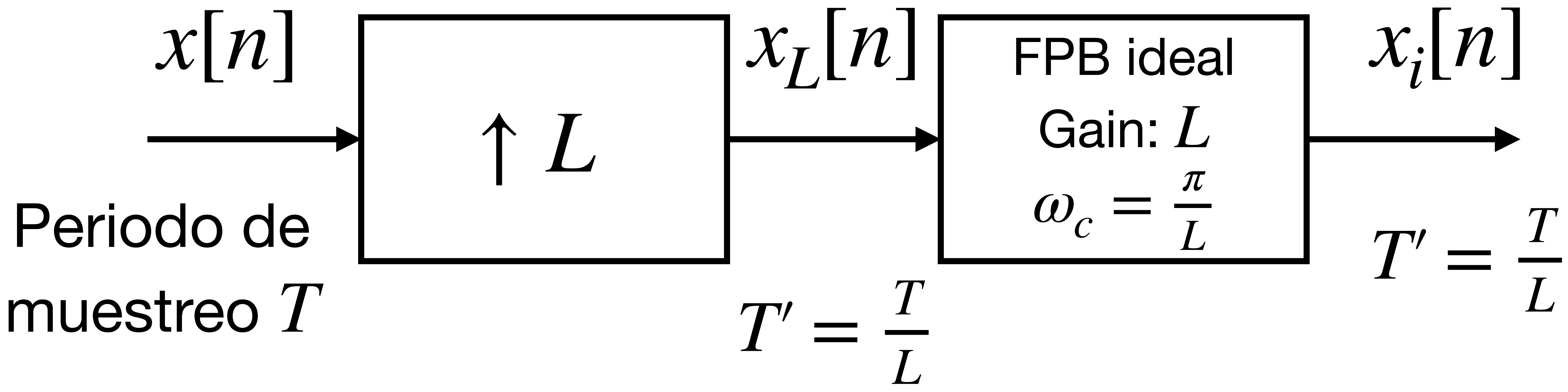


$$x_i[n] = h[n] * x_L[n] = h[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-kL]\,.$$

Interpolation

Upsampling + Filtering (ideal)

- Sistema ideal para el incremento de la tasa de muestreo por un factor entero L (interpolador ideal).



- Dado $x[n] = x_c(nT)$ donde $x_c(t)$ es una señal de banda limitada que ha sido muestreada siguiendo el criterio de Nyquist, y considerando el sistema interpolador descrito arriba, se puede verificar que

$$x_i[n] = x_c(nT'), \text{ donde } T' = T/L\,.$$

Interpolation

Upsampling + Filtering (ideal)

Dado que la respuesta impulsiva del filtro pasabajos ideal es

$$h[n] = \frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n/L} = \mathrm{sinc}\,(\pi n/L),$$

podemos encontrar que la salida del sistema de interpolación ideal es

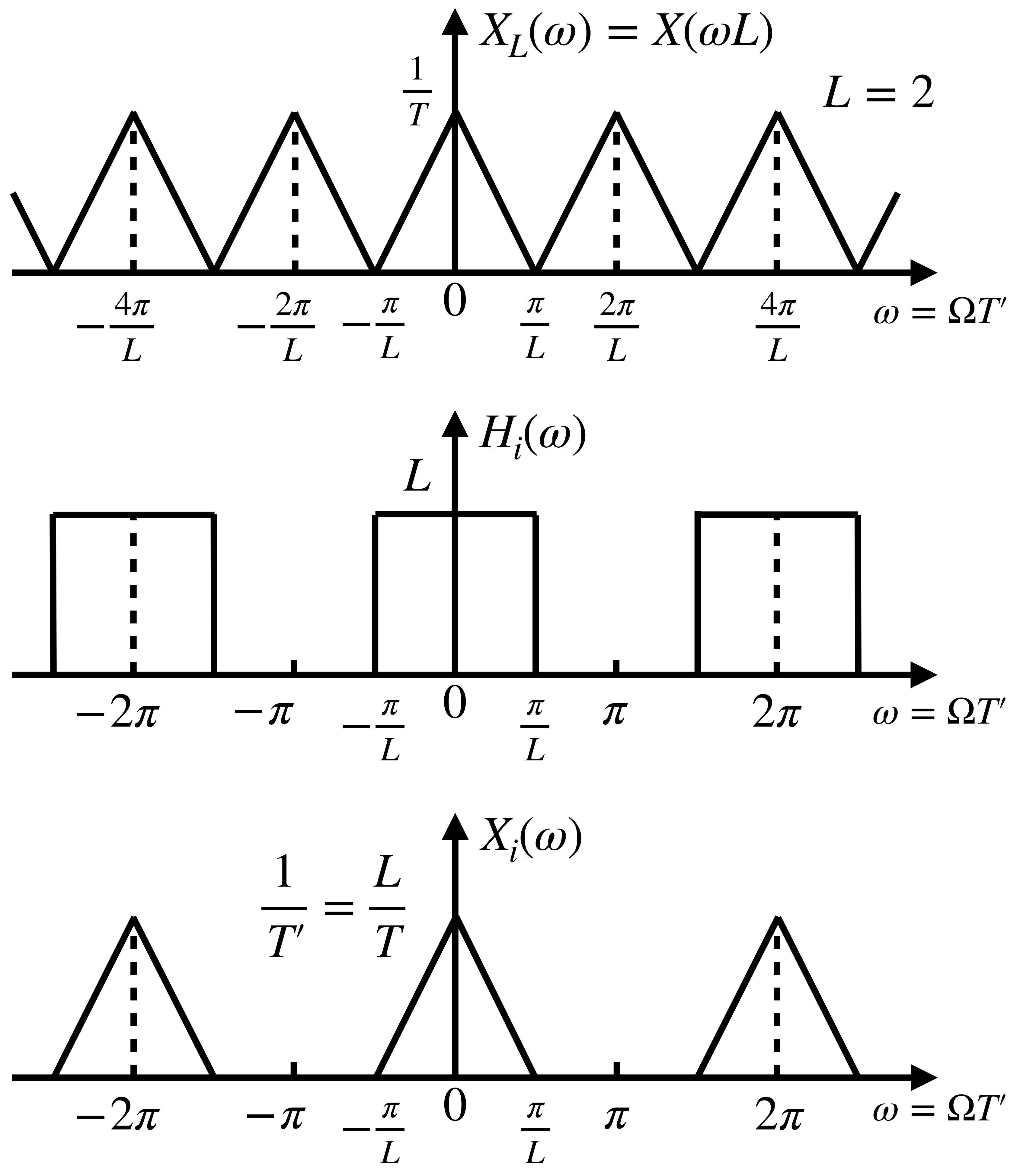
$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin[\pi(n-kL)/L]}{\pi(n-kL)/L}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\mathrm{sinc}\left(\pi(n-kL)/L\right).$$

De este modo podemos verificar que

$x_i[n] = x[n/L] = x_c(nT/L) = x_c(nT'), \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots$

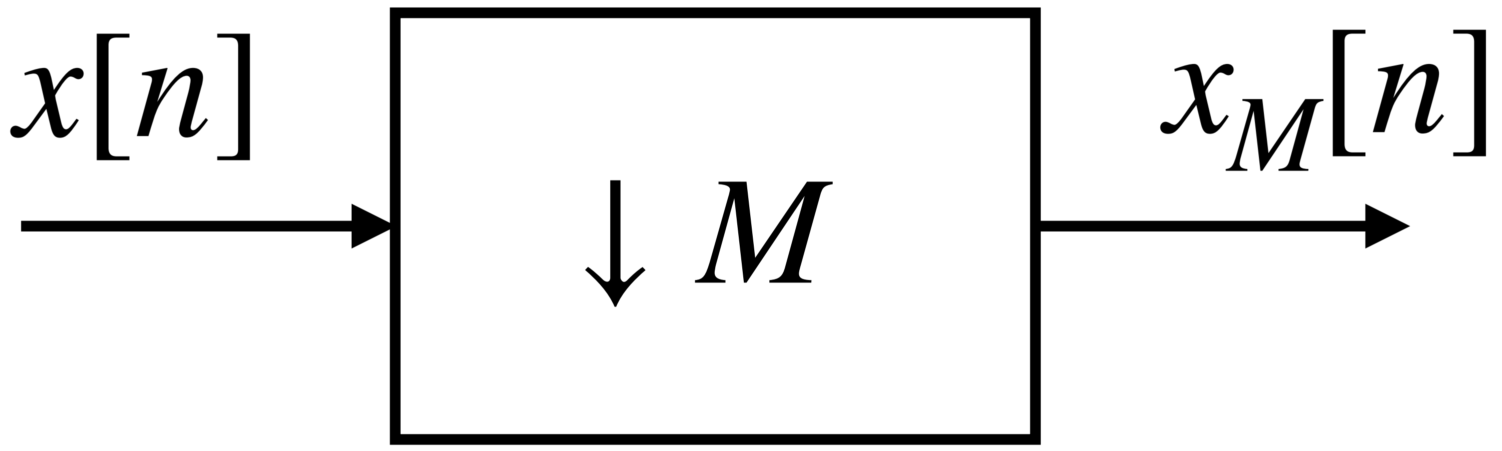
así también, a partir de la respuesta en frecuencia se puede verificar que $x_i[n] = x_c(nT')$ para todo n.



Downsampling

Definición

Es el proceso mediante el cual se reducen las muestras de una señal discreta en un factor M. También se le conoce como compresor.

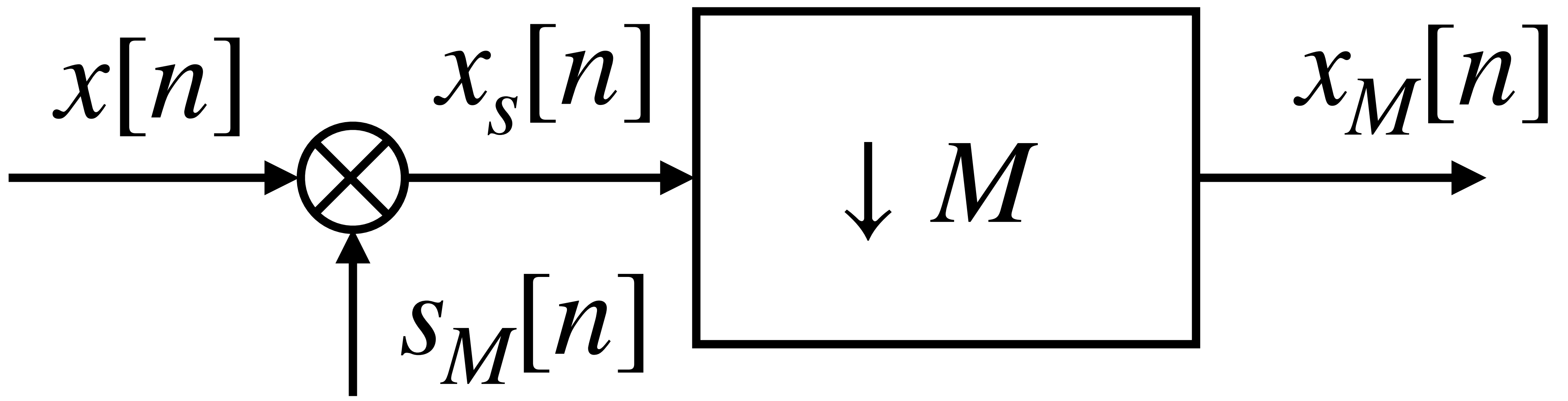


$$x_M[n] = x[nM] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[nM - k]\,.$$

Downsampling

Definición

- El proceso de downsampling también se puede entender como una operación que consta de dos etapas.



- Sub-muestreo:

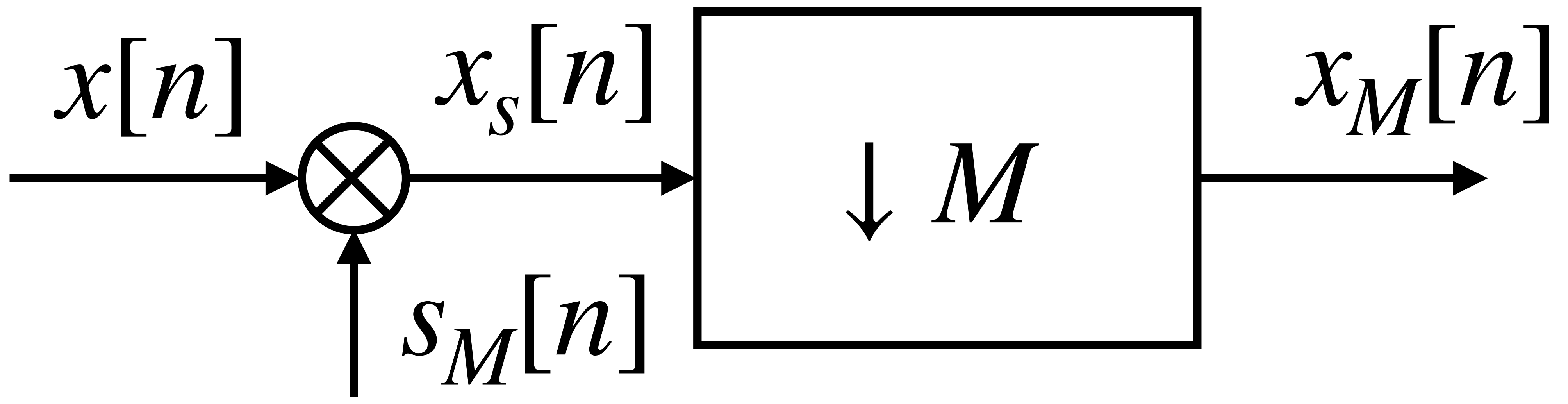
$$x_s[n] = x[n] \cdot s_M[n]$$

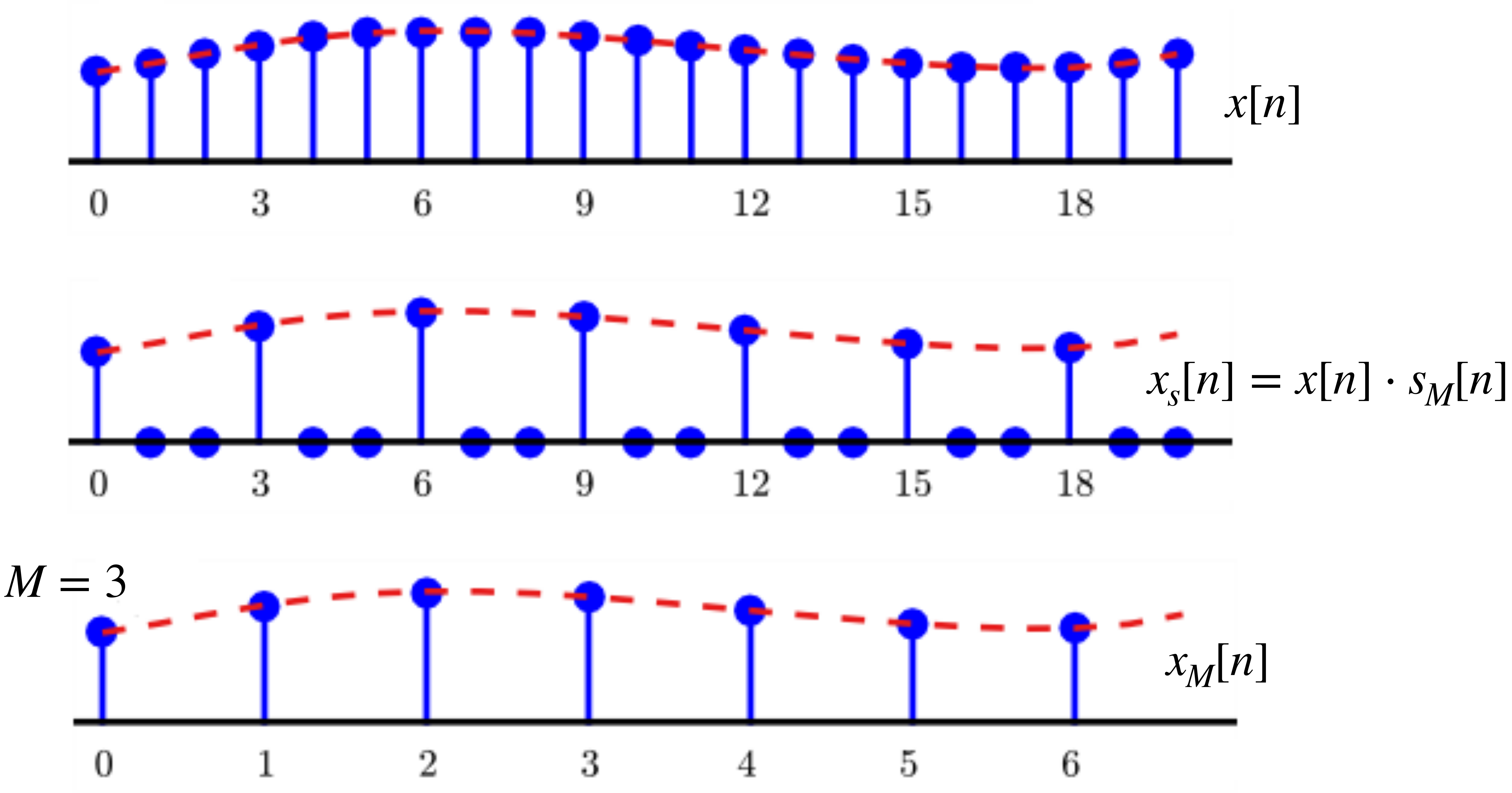
$$x_M[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k]\delta[nM - k],$$

donde $s_M[n]$ es la función de tren de impulsos discreta:

$$s_M[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi nk/M}.$$

Downsampling
Ejemplo





Downsampling

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de $x_M[n]$

Dadas las secuencias discretas $x[n]$ y $x_M[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k]\delta[nM - k]$, las DTFTs de estas señales están dadas por

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n},$$

$$\mathcal{F}\{x_M[n]\} = X_M(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_M[n]e^{-j\omega n}.$$

Downsampling

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de $x_M[n]$

Reemplazando $x_M[n]$ en $X_M(\omega)$ tenemos

$$X_M(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[nM - k] \right) e^{-j\omega n}.$$

Intercambiando las sumatorias tenemos

$$\begin{aligned}
X_M(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[nM - k] e^{-j\omega n} \right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[nM - k] \right) e^{-j\omega k/M} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{j2\pi kn/M} \right) e^{-j\omega k/M}
\end{aligned}$$

Downsampling

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de $x_M[n]$

Intercambiando las sumatorias nuevamente

$$X_M(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, e^{j2\pi kn/M}\, e^{-j\omega k/M} \right)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, e^{-j\frac{\omega - 2\pi n}{M}k} \right)$$

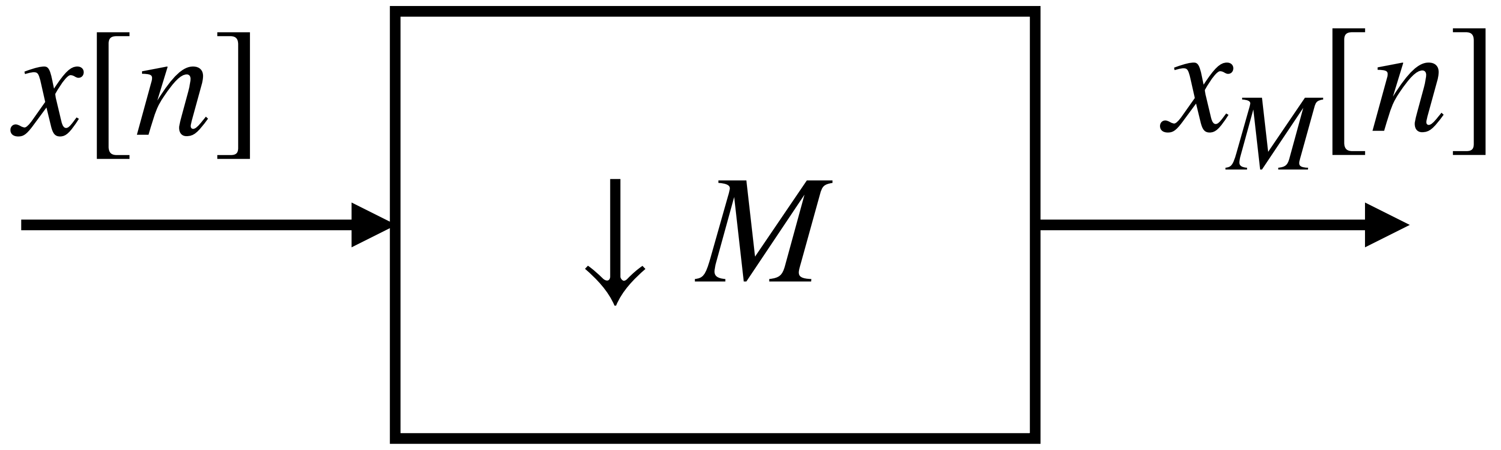
$$= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} X\left(\frac{\omega - 2\pi n}{M} \right)$$

Downsampling

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de $x_M[n]$

Finalmente tenemos

$$X_M(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} X\left(\frac{\omega - 2\pi n}{M}\right).$$



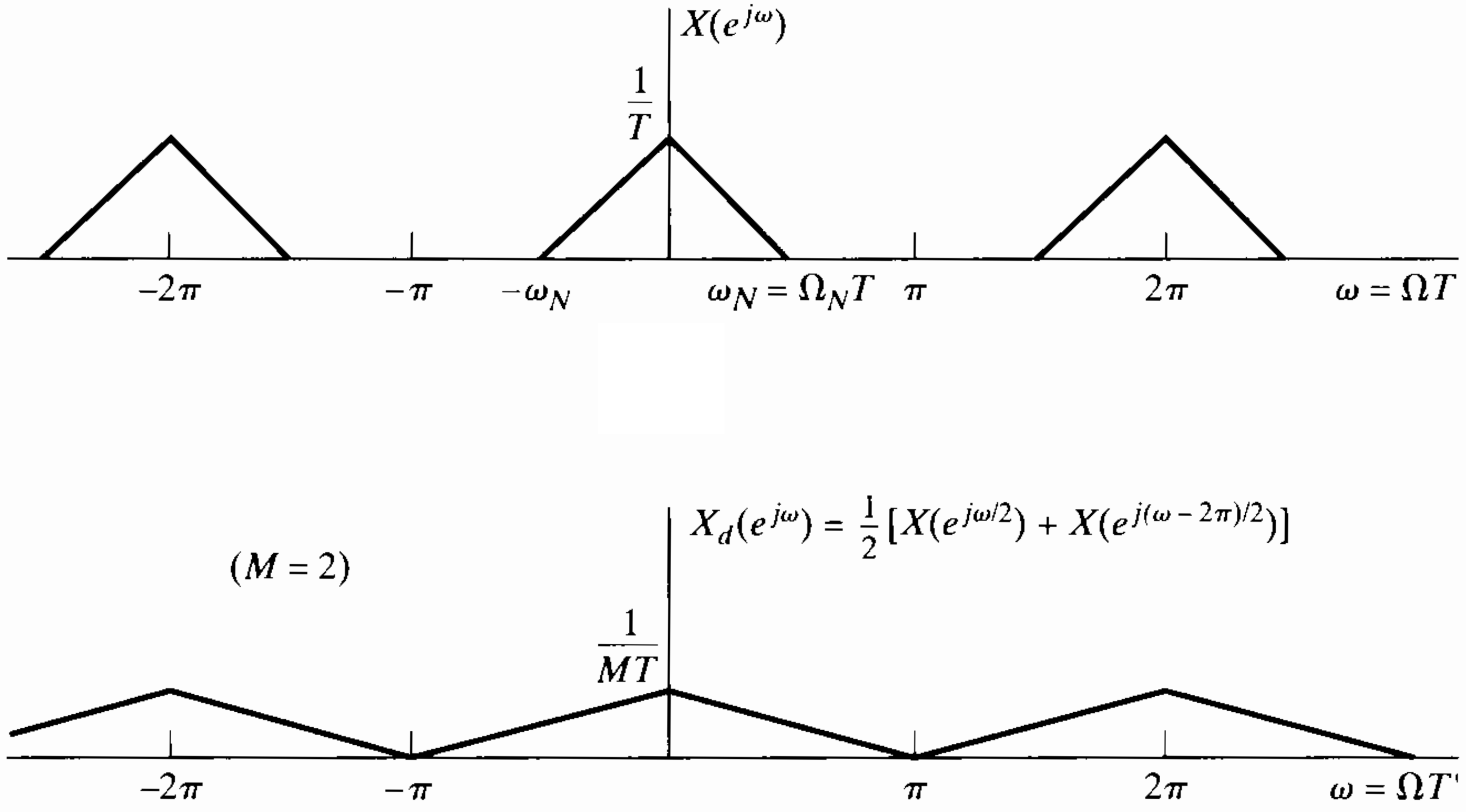
Pasos:

- Expandir $X(\omega)$ en frecuencia por un factor M para obtener $X(\omega/M)$.
- Generar $M - 1$ copias de $X(\omega/M)$.
- Desplazar cada copia en frecuencia en múltiplos de 2π y sumar.
- Finalmente dividir por M.

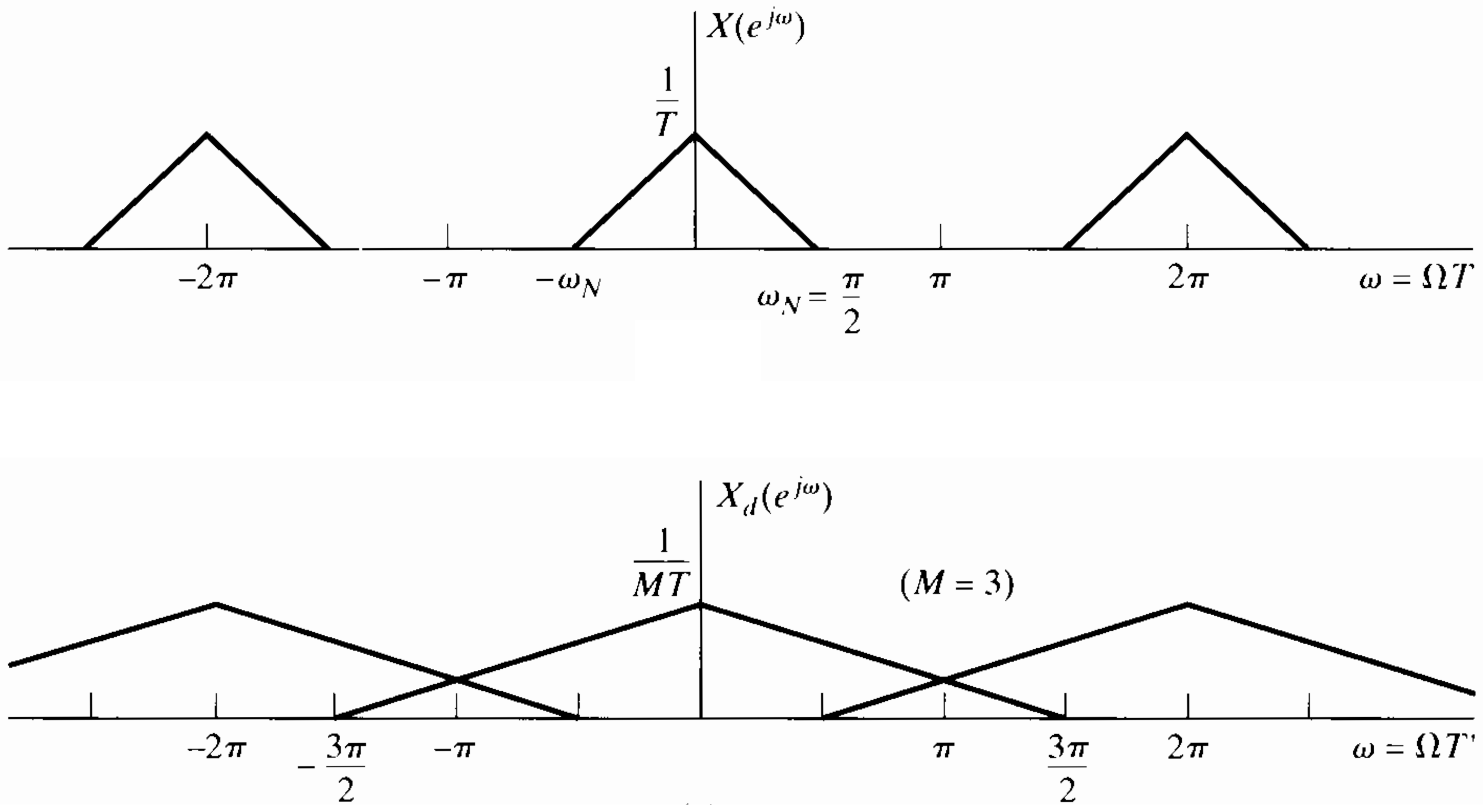
Downsampling

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de $x_M[n]$

Downsampling sin aliasing



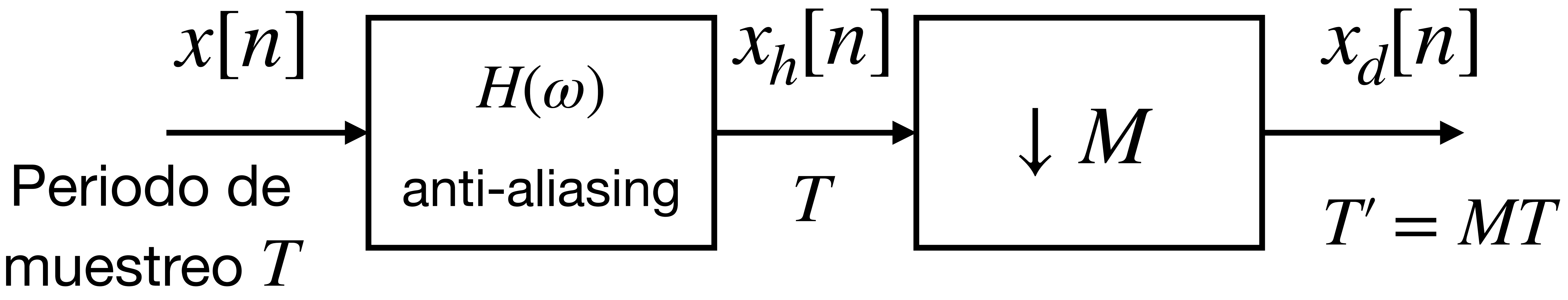
Downsampling con aliasing



Decimation

Filtering + Downsampling

Decimación es el proceso mediante el cual se reduce la tasa o frecuencia de muestreo de una señal discreta en un factor entero M evitando Aliasing (filtro anti-aliasing seguido del downsampler).



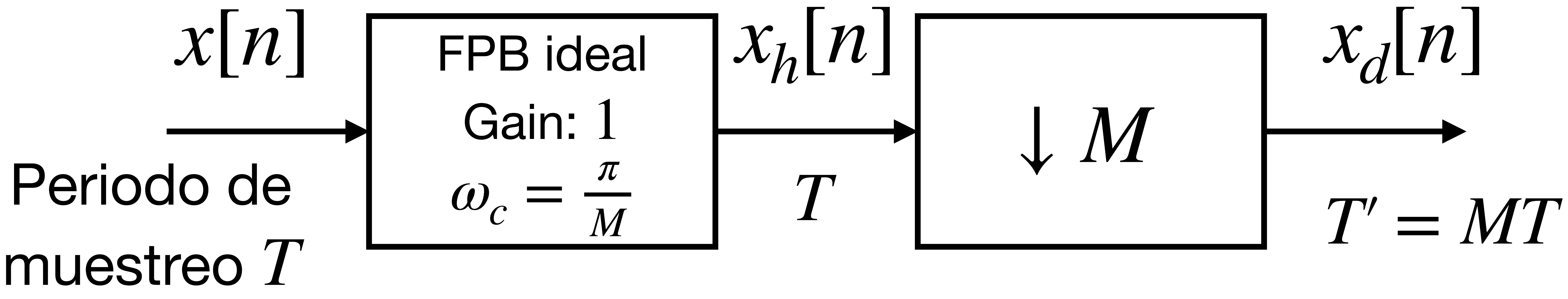
$$x_h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$x_d[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_h[k]\delta(nM-k) = x_h[nM]\,.$$

Decimation

Filtering + Downsampling (anti-aliasing ideal)

Sistema para la reducción de la tasa de muestreo por un factor entero M utilizando un filtro anti-aliasing ideal.



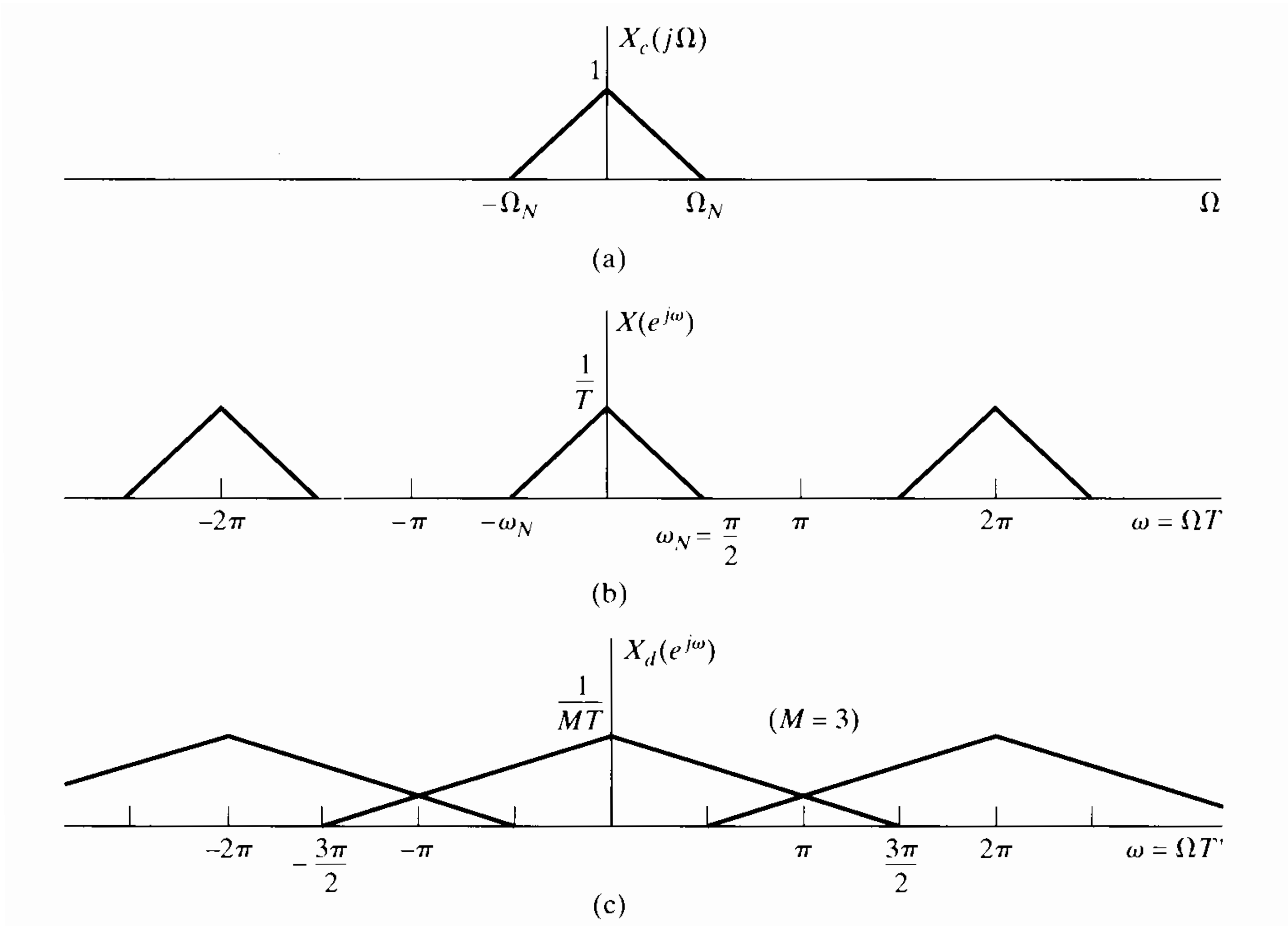
Dado $h[n] = \dfrac{\sin(\pi n/M)}{\pi n} = \frac{1}{M}\operatorname{sinc}(\pi n/M),$ tenemos que

$$x_h[n] = h[n] * x[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \operatorname{sinc}\left(\pi(n-k)/M\right)$$

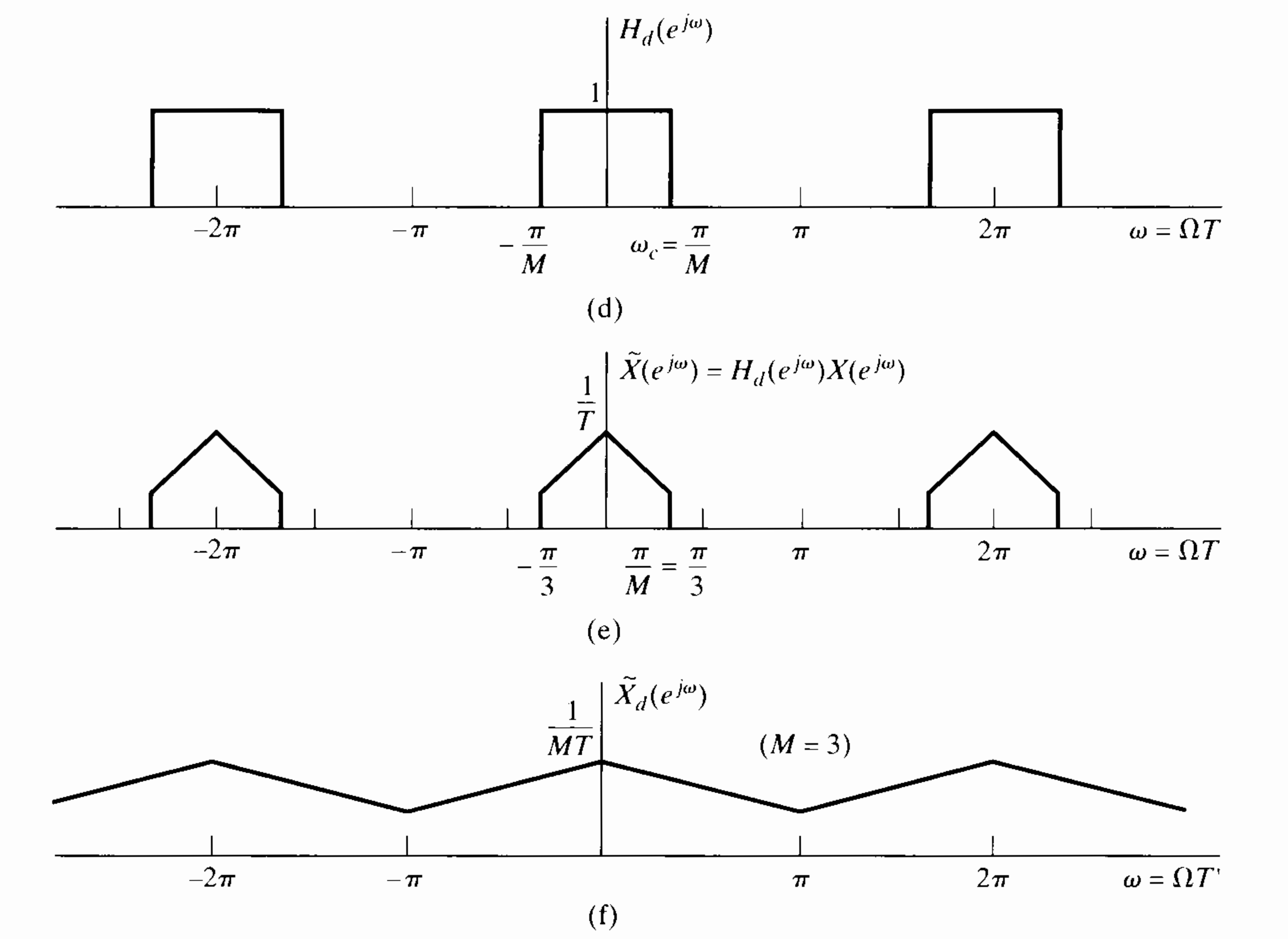
$$x_d[n] = x_h[nM] \,.$$

Decimation

Filtering + Downsampling (anti-aliasing ideal)



Downsampling con aliasing



Removiendo componentes de alta frecuencia para evitar aliasing.

¡Muchas gracias!