IEE352 - Procesamiento Digital de Señales

Clase 10: Procesos Aleatorios

Dr. Marco A. Milla
Sección Electricidad y Electrónica (SEE)
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

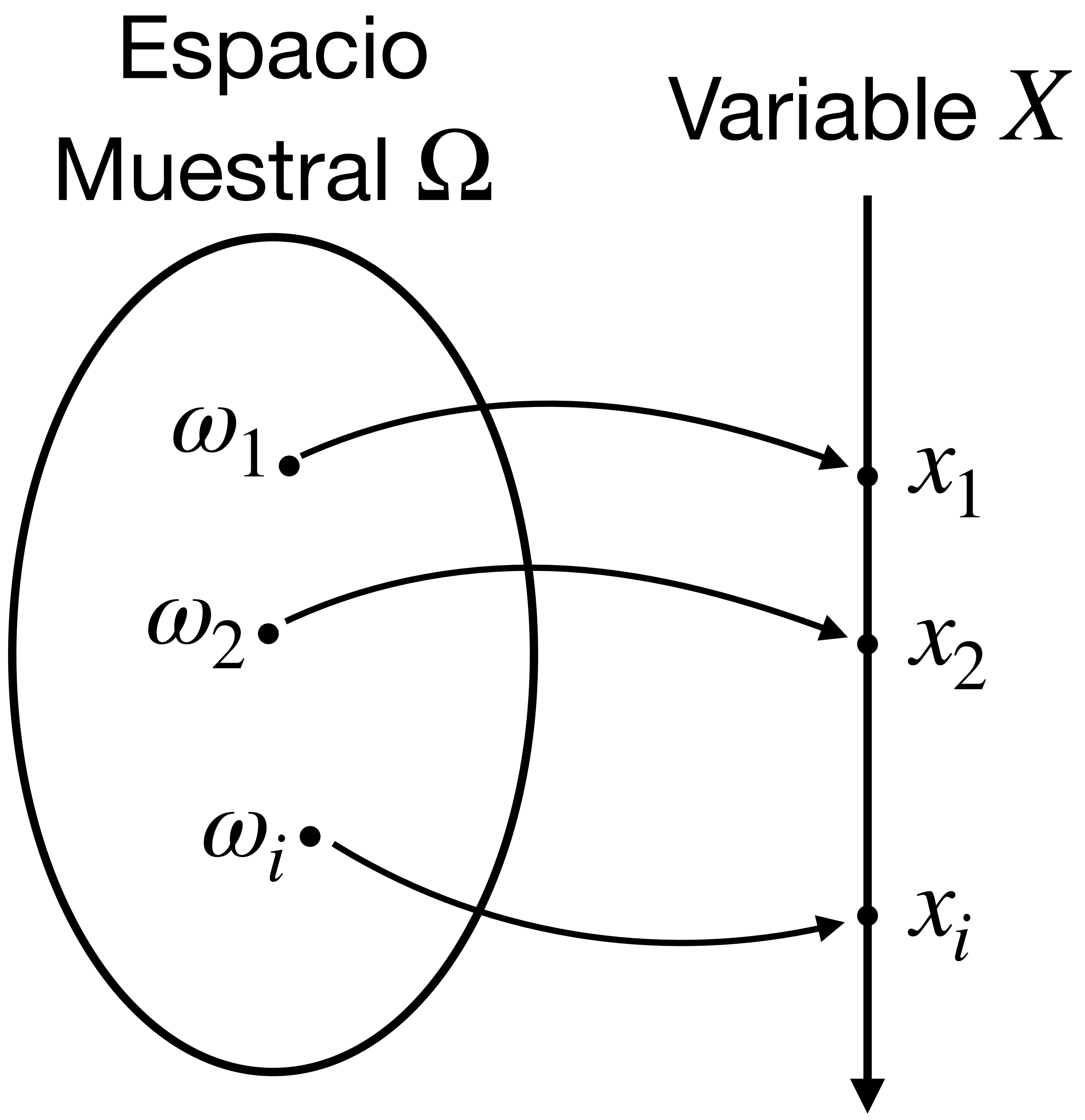
email: milla.ma@pucp.edu.pe

Variable aleatoria

Definición

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, Pr)$, una variable aleatoria X puede ser interpretada como una función que permite mapear cada elemento ω_i del espacio muestral Ω a una variable real $\mathbb{R}$, es decir, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que,

$$X(\omega_i) = x_i \, .$$



Características:

- Cada ensayo es una realización instantánea.
- Notación usada:

$$Pr\{X(\omega_i) = x_i\} = Pr\{X = x_i\} \, .$$

Proceso aleatorio o estocástico

Definición

- Un proceso aleatorio X es una colección o familia de variables aleatorias indexadas definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, Pr)$.
  - Proceso aleatorio de tiempo discreto: $\{X[n],\ n \in \mathbb{Z}\}$
  - Proceso aleatorio de tiempo continuo: $\{X(t),\ t \in \mathscr{T}\}$ donde $\mathscr{T} \subseteq \mathbb{R}$.
- Los parámetros t o n son típicamente tiempo, pero pueden representar espacio.
- Los procesos aleatorios permiten modelar experimentos aleatorios que evolucionan en el tiempo.
  - Señal a la salida de un canal de comunicación.
  - Ruido térmico de un resistor.
  - Variación diaria del precio de un determinado producto.
- Cada ensayo de un proceso aleatorio es una realización en el tiempo (serie de tiempo).

Proceso aleatorio o estocástico

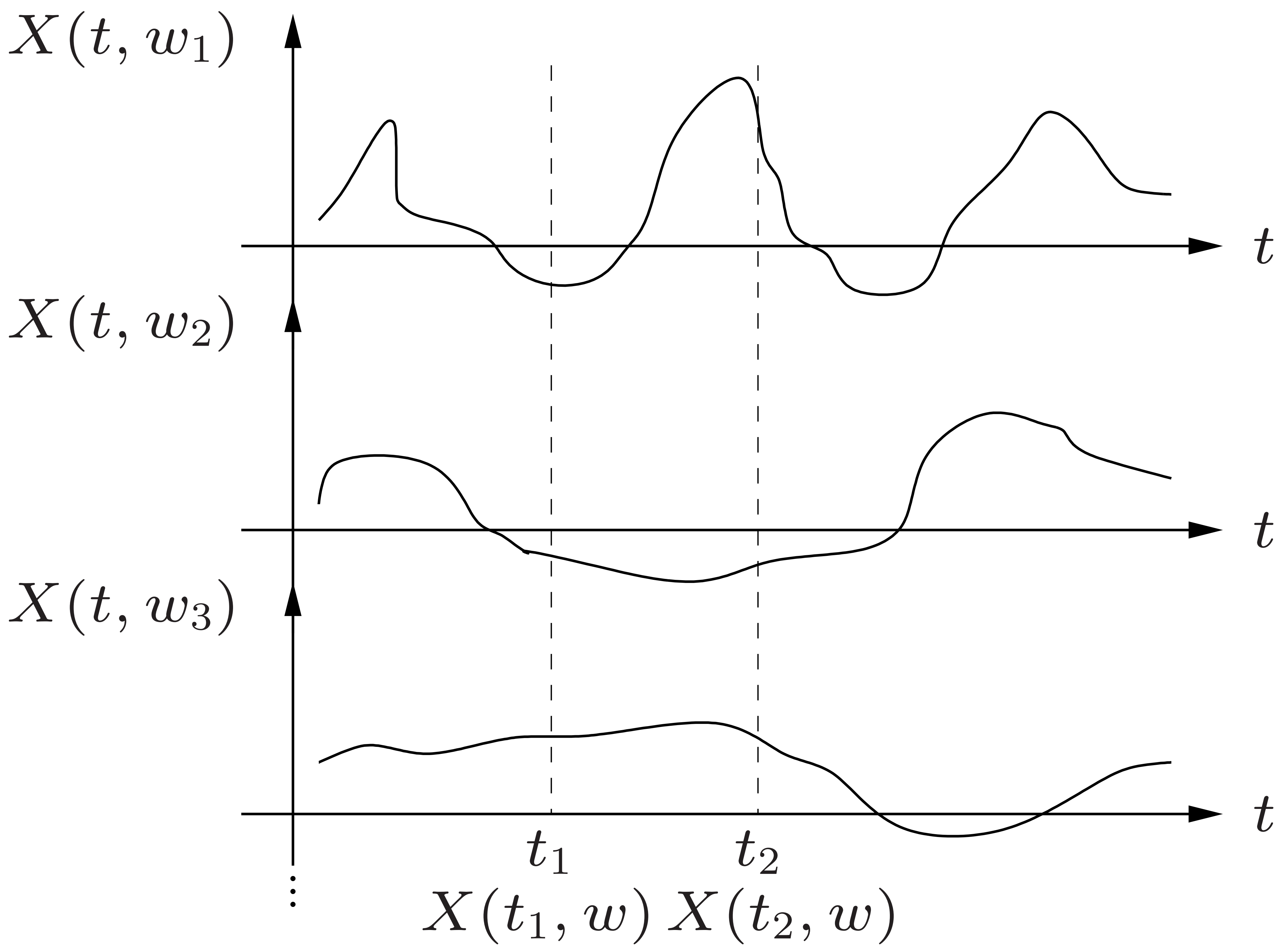
Preguntas relacionadas a procesos aleatorios

- Dependencias de las variables aleatorias del proceso.
  - ¿Cómo los valores futuros dependen de los valores pasados del proceso?
  - ¿Cómo el precio futuro de un producto depende de sus precios pasados?
- Promedios a largo plazo.
  - ¿Cuál es la proporción de tiempo que una fila de atención esté vacía?
  - ¿Cuál es la potencia promedio del ruido a la salida de un circuito?
- Eventos extremos o límites.
  - ¿Cuál es la probabilidad que un enlace en una red de comunicaciones esté congestionada?
  - ¿Cuál es la probabilidad que la máxima potencia de una linea de distribución eléctrica se exceda?
  - ¿Cuál es la probabilidad que un jugador pierda todo su capital?
- Estimación y detección de señales dentro de un entorno con ruido.

Proceso aleatorio o estocástico

Formas alternas de ver un proceso aleatorio

- Un proceso aleatorio (PA) puede ser visto como una función $X(t, \omega)$ de dos variables, tiempo $t \in \mathscr{T}$ y el resultado del experimento aleatorio $\omega \in \Omega$.
  - Para t fijo, $X(t, \omega)$ es una variable aleatoria en Ω .
  - Para ω fijo, $X(t, \omega)$ es una función determinística de t (función de muestra).



Proceso aleatorio de tiempo discreto

Definición

- Un proceso aleatorio se dice que es de tiempo discreto si la variable temporal solo toma valores discretos los cuales conforman un conjunto contable infinito, por ejemplo, los números naturales, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2,\ldots\}$ o los números enteros, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2,\ldots\}$.
- En este caso el proceso $X = \{X[n],\ n \in \mathbb{Z}\}$ se puede entender como una secuencia infinita de variables aleatorias $X[n]$.
- Una función de muestra para un proceso en el tiempo discreto también se conoce como secuencia muestral (sample sequence) o camino muestral (sample path).
- Un proceso aleatorio de tiempo discreto puede comprender variables aleatorias discretas o continuas.

Proceso aleatorio de tiempo discreto

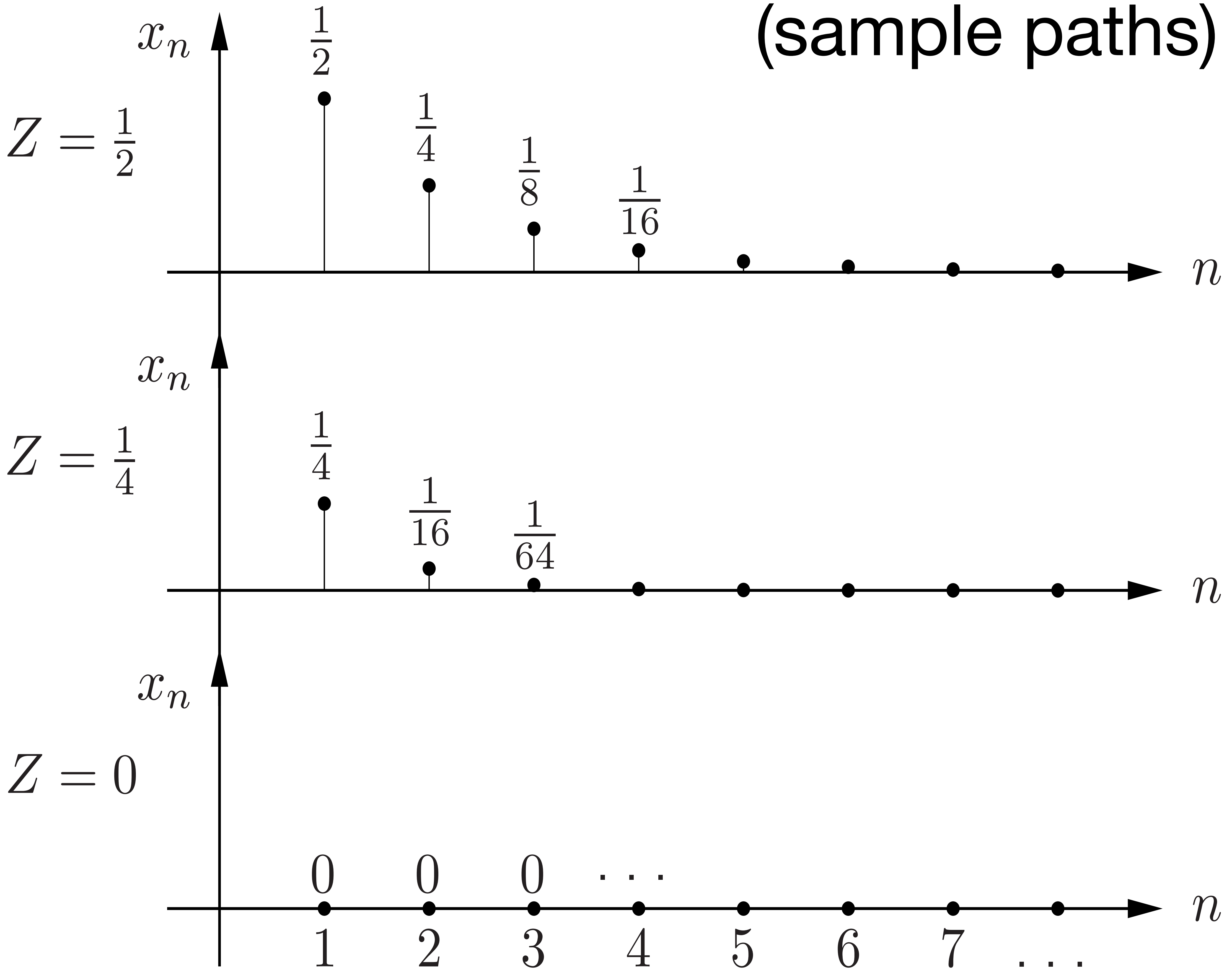
Ejemplo

- Sea Z una variable aleatoria uniformemente distribuida $\mathscr{U}[0,1]$, definimos el proceso $X[n] = Z^n$ para $n \geq 1$.
- La función de densidad de probabilidad (pdf) de primer orden del proceso está dada por

$$f_{X_n}(x,n) = \frac{1}{nx^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}$$

para $0 \leq x \leq 1$.

Caminos muestrales (sample paths)



Caracterización de procesos aleatorios

Funciones de probabilidad

Sea un proceso aleatorio $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$, donde $X_n = X[n]$ representa una variable aleatoria para un tiempo fijo n, las características estadísticas de este proceso están dadas por:

- **Función de distribución de probabilidad**

$$F_{X_n}(x, n) = Pr\{X_n \leq x\} \ ,$$

- **Función de densidad de probabilidad**

$$f_{X_n}(x, n) = \frac{\partial F_{X_n}(x, n)}{\partial x} \ .$$

Caracterización de procesos aleatorios

Funciones de probabilidad conjuntas

Para los instantes de tiempo $n = n_1$ y $n = n_2$ (muestras discretas), $X_{n_1} = X[n_1]$ y $X_{n_2} = X[n_2]$ representan dos variables aleatorias de un proceso aleatorio con funciones estadísticas conjuntas dadas por:

- **Función de distribución conjunta**

$$F_{X_{n_1},X_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2) = Pr\{X_{n_1} \leq x_1, X_{n_2} \leq x_2\} \ ,$$

- **Función de densidad conjunta**

$$f_{X_{n_1},X_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2) = \frac{\partial F_{X_{n_1},X_{n_2}}(x_1, n_1; x_2, n_2)}{\partial x_1, x_2} \ .$$

Caracterización de procesos aleatorios

Funciones de probabilidad conjunta de orden n

Un proceso aleatorio se caracteriza, directa o indirectamente, a partir de definir todas las funciones de distribución o de densidad de probabilidad conjuntas de orden n, de las variables

$$X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n) \ ,$$

para cada posible conjunto de n puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, luego tenemos que

$$F_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) = Pr\{X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\} \ .$$

Promedios estadísticos

Media y varianza

- **Media del proceso:**

$$m_X[n] = E\{X[n]\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_n}(x, n)\, dx \; .$$

- **Varianza del proceso:**

$$\sigma_X^2[n] = E\{\, |X[n] - m_X[n]|^2 \,\} \; .$$

- La media y la varianza de un proceso aleatorio también se conocen como estadísticas de primer orden.

Promedios estadísticos

Autocorrelación y autocovarianza

Autocorrelación:

$$r_X[k,l] = E\{X[k]X[l]\}\ .$$

Autocovarianza:

$$\begin{aligned} c_X[k,l] &= E\left\{ \big(X[k] - m_X[k]\big) \big(X[l] - m_X[l]\big) \right\} \\ &= r_X[k,l] - m_X[k]m_X[l]\,. \end{aligned}$$

Notas:

- Si los instantes de tiempo son iguales ($n = m$), la autocovarianza se transforma en la varianza,

$$\sigma_X^2[n] = c_X[n,n] = E\{\,|X[n] - m_X[n]|^2\,\}\ .$$

- En el caso de PA con media cero, la autocovarianza y la autocorrelación son iguales.

Promedios estadísticos

Correlación y covarianza cruzadas

De forma análoga para el análisis de la relación entre dos procesos aleatorios distintos $X = \{X[n]\}$ e $Y = \{Y[n]\}$, se definen los siguientes valores esperados.

Correlación cruzada:

$$r_{XY}[k, l] = E\{X[k]Y[l]\} \, .$$

Covarianza cruzada:

$$\begin{aligned} c_{XY}[k, l] &= E\left\{\left(X[k] - m_X[k]\right)\left(Y[l] - m_Y[l]\right)\right\} \\ &= r_{XY}[k, l] - m_X[k]m_Y[l] \, . \end{aligned} \, .$$

Notas:

- Dos procesos aleatorios son no correlacionados si $c_{XY}[k, l] = 0$ para todo valor de k y l .
- Dos procesos aleatorios son ortogonales si $r_{XY}[k, l] = 0$ para todo valor de k y l .

Promedios estadísticos

Caso particular

Propiedad: Si dos procesos aleatorios $X = \{X[n]\}$ y $Y = \{Y[n]\}$ con media cero son no correlacionados, la autocorrelación de la suma de dichos procesos

$$Z[n] = X[n] + Y[n]$$

será igual a la suma de las autocorrelaciones de los procesos que la componen

$$r_Z[k, l] = r_X[k, l] + r_Y[k, l] \ .$$

Proceso Gaussiano

Definición

Un proceso aleatorio discreto $X = \{X[n]\}$ es un proceso gaussiano si toda agrupación finita de sus muestras es conjuntamente gaussiana.

Dado un vector $\mathbf{X}$ compuesto de N variables aleatorias de la forma $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_N]^T$ donde $X_i = X[n_i]$. Se dice que las variables X_i son conjuntamente gaussianas (o que $\mathbf{X}$ es un vector aleatorio gaussiano) si la función de densidad conjunta de sus N variables aleatorias está dada por

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}|\mathbf{C}_{\mathbf{X}}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_{\mathbf{X}})^T \mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_{\mathbf{X}})\right\}$$

donde $\mathbf{m}_{\mathbf{X}}$ es un vector que contiene las medias de las variables X_i y $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$ es una matriz cuyas componentes $c_{i,j}$ corresponden a la covarianza de las variables X_i y X_j .

Procesos aleatorios estacionarios

Estacionario en el sentido estricto

- Un proceso estacionario se caracteriza porque algunas o todas sus propiedades estadísticas son invariantes en el tiempo.
- Un proceso aleatorio X se denomina estacionario en el sentido estricto (SSS - strict sense stationary), si todas sus distribuciones de probabilidad de orden finito son invariantes en el tiempo, es decir, si las funciones probabilidad conjunta de los vectores

$$\left[X[n_1], X[n_2], \ldots, X[n_k]\right] \quad \text{y} \quad \left[X[n_1-\tau], X[n_2-\tau], \ldots, X[n_k-\tau]\right]$$

son iguales para todo k y tiempos $n_1, n_2, \ldots, n_k$, independientemente del retardo τ .

- Para un proceso SSS, las distribuciones de primer orden son independientes del tiempo n y la distribución de segundo orden (que depende de las variables $X[n_1]$ y $X[n_2]$) depende solamente del retardo $n_1 - n_2$.

Procesos aleatorios estacionarios

Estacionario en el sentido amplio

- Un proceso aleatorio X se denomina estacionario en el sentido amplio (WSS - wide sense stationary) si su media y autocorrelación son invariantes en el tiempo, es decir, si satisface las siguientes condiciones,
  - La media del proceso es constante, $m_X[n] = E\{X[n]\} = m_X$.
  - La autocorrelación $r_X[k, l]$ depende únicamente de la diferencia $k - l$, es decir $r_x[k, l] = r_x[k - l]$.
  - La varianza del proceso es constante y finita, $\sigma_X^2[n] = \sigma_X^2 < \infty$.
- Dado que $r_X[k, l] = r_X[l, k]$, entonces para un proceso WSS, se cumple que $r_X[k, l]$ es solo función de $|k - l|$, es decir $r_X[n]$ es una función simétrica.
- Si X es SSS, entonces X es WSS, sin embargo, lo contrario no es necesariamente verdadero.

Ruido blanco

Definición

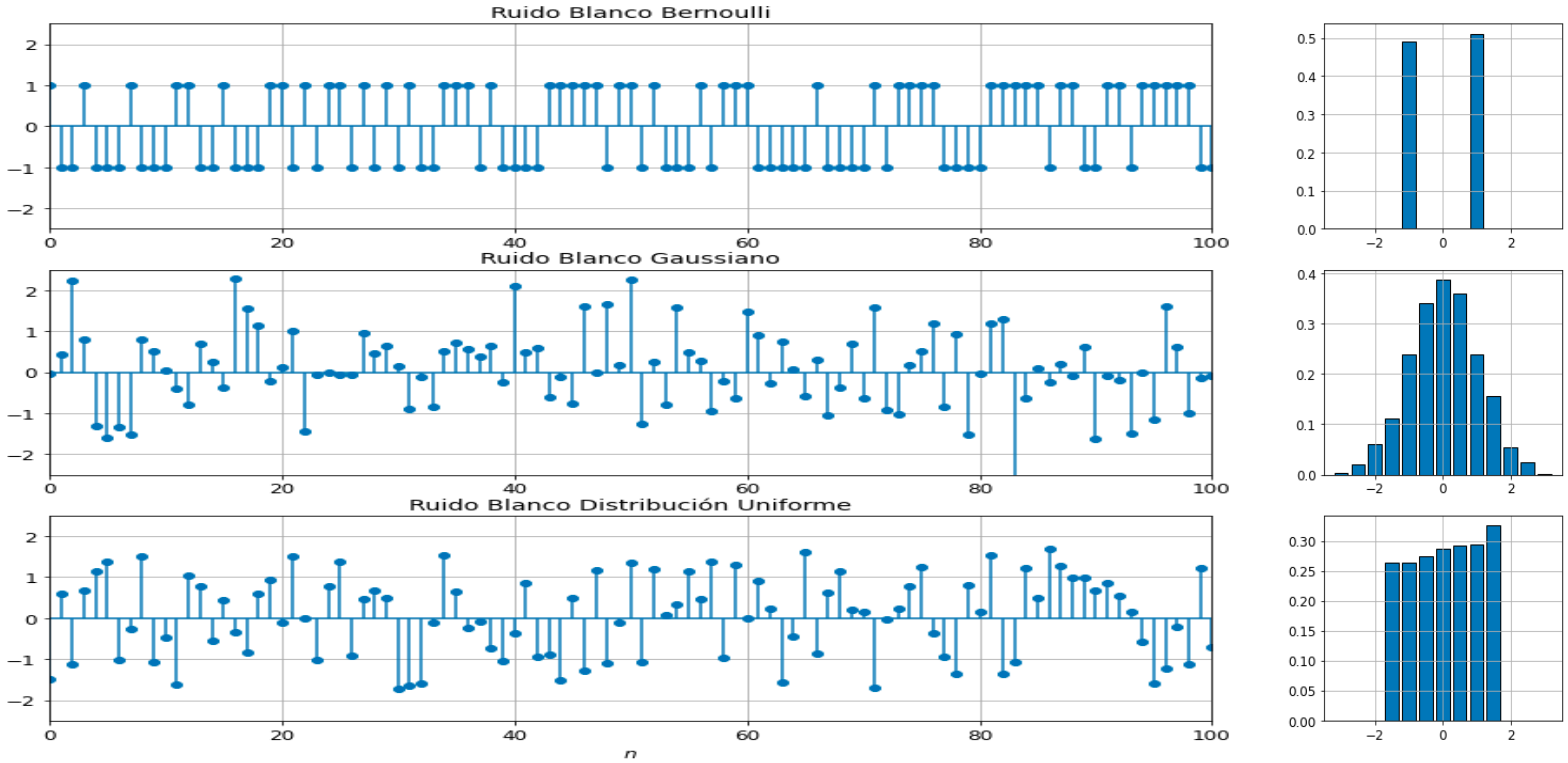
- Un proceso aleatorio WSS $V = \{V[n]\}$ se llama ruido blanco (white noise) si se cumple lo siguiente,
  - $m_V[n] = E\{V[n]\} = 0$
  - La autocovarianza es cero para todo $k \neq 0$, es decir,

$$c_V[k] = \sigma_V^2 \delta[k] = \begin{cases} \sigma_V^2, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

- Ruido blanco gaussiano (WGN - White Gaussian Noise) está compuesto por una secuencia de variables aleatorias gaussianas con media igual a cero y varianza constante.

Ruido blanco

Ejemplo



Densidad espectral de potencia

Definición

Sea X un proceso WSS, donde la secuencia de autocorrelación $r_X[k]$ es única, tenemos que,

- Densidad Espectral de Potencia (PSD)

$$S_X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_X[k]e^{-j\omega k} \quad (\,\mathrm{DTFT}\{r_X[k]\}\,)$$

- En algunos casos es preferible trabajar con la Transformada Z,

$$S_X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_X[k]z^{-k} \quad (\,\mathcal{Z}\{r_X[k]\}\,).$$

- La inversa de la densidad espectral de potencia es la función de autocorrelación $r_X[k]$,

$$r_X[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_X(e^{j\omega})\, e^{j\omega k} d\omega.$$

Procesos ergódicos

Definiciones

- Ergodicidad se refiere a que ciertos promedios temporales (time average) de un proceso aleatorio son iguales asintóticamente o en el límite a sus respectivos promedios estadísticos (ensamble average) o valor esperado.
- Un proceso aleatorio se denomina “ergódico" si sus propiedades estadísticas pueden ser estimadas a partir de una única realización.
- Ergodicidad implica estacionariedad.
- La calidad de “estacionario" de un proceso aleatorio es condición necesaria pero no suficiente de ergodicidad.

Procesos ergódicos

Ergodicidad en la media

- Sea $X[n],\, n = 1,2,\ldots,$ un proceso discreto WSS con media m_X y autocorrelación $r_X[n]$.
- Para estimar la media de $X[n]$, definimos el promedio de N muestras de $X[n]$ (sample mean),

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X[n]\ .$$

- El proceso $X[n]$ es ergódico en la media si

$$\bar{X}_N \to m_X \ \text{ en la media cuadrática,}$$

es decir, si $\lim_{N\to\infty} E\{(\bar{X}_N - m_X)^2\} = 0.$

- Dado que $E\{\bar{X}_N\} = m_X$, la condición anterior equivale a decir que

$$\operatorname{var}(\bar{X}_N) \to 0 \ \text{ conforme } N \to \infty.$$

Procesos ergódicos

Ejemplo

- Sea $X[n] = A$
  - $A = \begin{cases} 1, & Pr\{A = 1\} = 0.5, \\ -1, & Pr\{A = -1\} = 0.5, \end{cases}$
  - $E\{X[n]\} = m_X[n] = 0.$
- Notar que A es constante con respecto a n .
- Dado esto tenemos que $\bar{m}_X = \{-1,1\}$ con probabilidad 0.5 para cada caso.
- Claramente, $\bar{m}_X \nrightarrow E\{X[n]\}$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Procesos ergódicos

Ejemplo

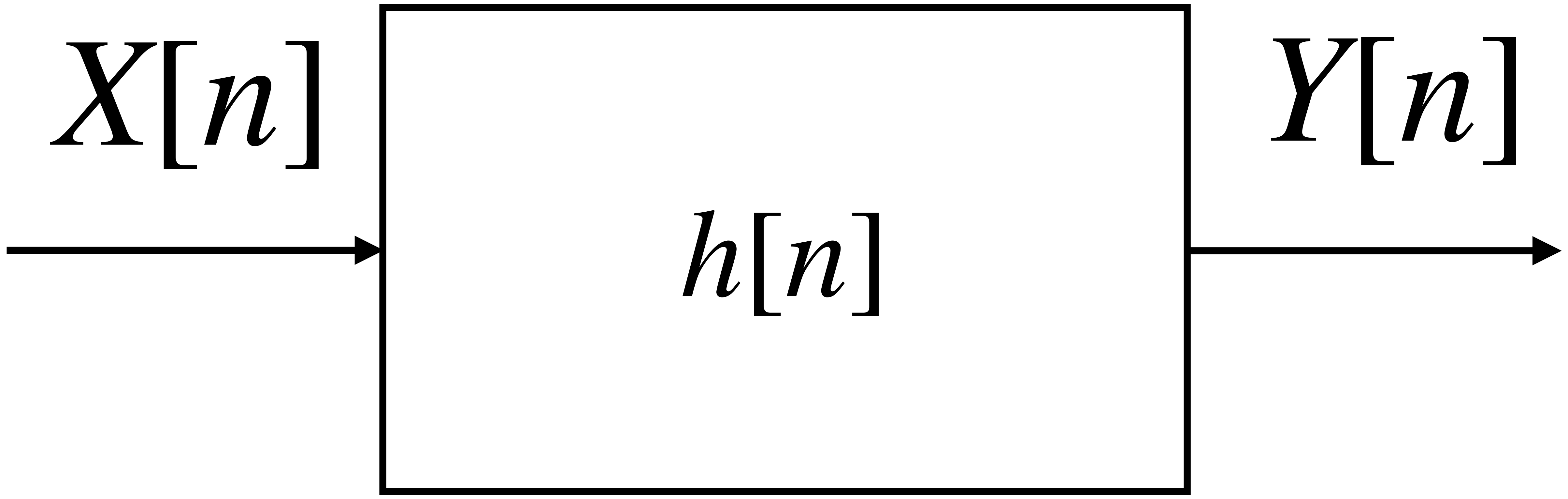
- Sea $X[n]$ un proceso de Bernoulli.
  - $X[n] = \begin{cases} 1, & \text{si se obtiene } C, \quad Pr\{\omega = C\} = 0.5, \\ -1, & \text{si se obtiene } S, \quad Pr\{\omega = S\} = 0.5, \end{cases}$
  - $E\{X[n]\} = m_X[n] = 0.$
- Dada una única realización, tenemos que

$$\bar{m}_X[N] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n] = \frac{n_1}{N} - \frac{n_{-1}}{N}.$$

- En este caso, $\bar{m}_X \to E\{X[n]\} = 0$ cuando $N \to \infty$.

Filtrado de procesos aleatorios

- Sea $X = \{X[n]\}$ un proceso aleatorio WSS con media $E\{X[n]\} = m_X$ y autocorrelación $r_X[k]$ conocidas.

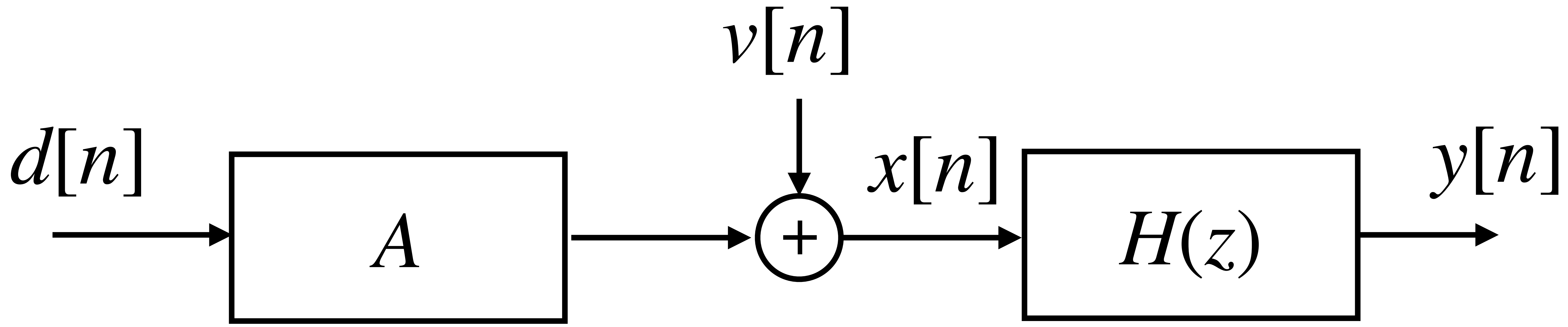


- Se desea conocer $E\{Y[n]\}$ y la correlación $r_Y[k]$.

Filtrado de procesos aleatorios

Modelo de señales observadas

Una señal en general se puede modelar como una superposición de la señal original deseada más ruido, por ejemplo, la voz, señales de radar, señales médicas, imágenes, etc.



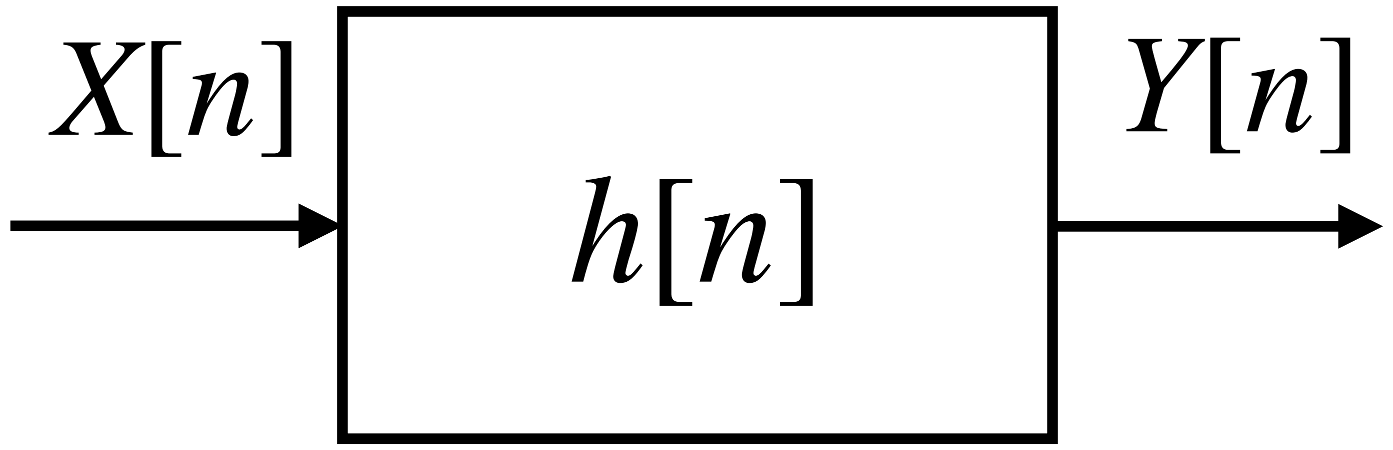
Sea la señal medida u observada $x[n] = A \cdot d[n] + v[n]$, donde $d[n]$ es la señal original, A es un operador lineal, $v[n]$ es ruido (proceso aleatorio).

Filtrado de procesos aleatorios

Valor medio de $Y[n]$

- Dado un sistema LTI con respuesta impulsiva $h[n]$, la salida del sistema $Y[n]$ para una entrada $X[n]$ está dada por la fórmula de convolución

$$Y[n] = X[n] * h[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]X[n-l]\,.$$



- Tomando el valor esperado tenemos,

$$E\{Y[n]\} = E\left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]X[n-l] \right\}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l] \cdot E\{X[n-l]\} = m_X \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l] = m_X \cdot H(e^{j0})\,.$$

Filtrado de procesos aleatorios

Correlación cruzada de $X[n]$ e $Y[n]$

- La correlación entre $X[n]$ e $Y[n]$ está dada por

$$
\begin{aligned}
r_{XY}[n+k,n] &= E\{Y[n+k]X[n]\} \\
&= E\left\{\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]X[n+k-l]\right)X[n]\right\} \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]\cdot E\{X[n+k-l]X[n]\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]\cdot r_X[k-l]\,.
\end{aligned}
$$

En conclusión,

$$r_{XY}[k] = r_X[k] * h[k]\,.$$

Filtrado de procesos aleatorios

Propiedades estadísticas

Sea $X = \{X[n]\}$ un PA WSS con media $E\{X[n]\} = m_X$ y autocorrelación $r_X[k]$ conocidas.

- **Valor medio / media:** $m_Y = E\{Y[n]\} = m_X \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] = m_X \cdot H(e^{j0})$
- **Correlación cruzada:** $r_{XY}[k] = E\{Y[n+k]X[n]\} = r_X[k] * h[k]$
- **Autocorrelación:** $r_Y[k] = E\{Y[n+k]Y[n]\} = r_X[k] * h[k] * h[-k]$
- **Covarianza:** $c_Y[k] = E\{(Y[n+k] - m_Y)(Y[n] - m_Y)\} = r_Y[k] - m_Y^2$
- **Varianza:** $\sigma_Y^2 = c_Y[0] = r_Y[0] - m_Y^2$

Filtrado de procesos aleatorios

Propiedades estadísticas en la frecuencia

En base a las expresiones de la autocorrelación de $Y[n]$ y de la correlación cruzada entre $X[n]$ e $Y[n]$ tenemos,

- **Densidad espectral de potencia**

$$S_Y(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}\{r_Y[k]\} = |H(e^{j\omega})|^2 S_X(e^{j\omega})$$

- **Transformada Z de $r_Y[k]$**

$$S_Y(z) = \mathscr{Z}\{r_Y[k]\} = S_X(z)\, H(z)\, H(1/z)$$

dado que $\mathscr{Z}\{h[-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[-k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k](1/z)^{-k} = H(1/z)\,.$

- **Densidad espectral de potencia cruzada**

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}\{r_{XY}[k]\} = H(e^{j\omega})\, S_X(e^{j\omega})\,.$$

Filtrado de procesos aleatorios

Conclusiones

Si un sistema estable LTI recibe como entrada un proceso aleatorio WSS $X[n]$, la salida $Y[n]$ también será WSS.

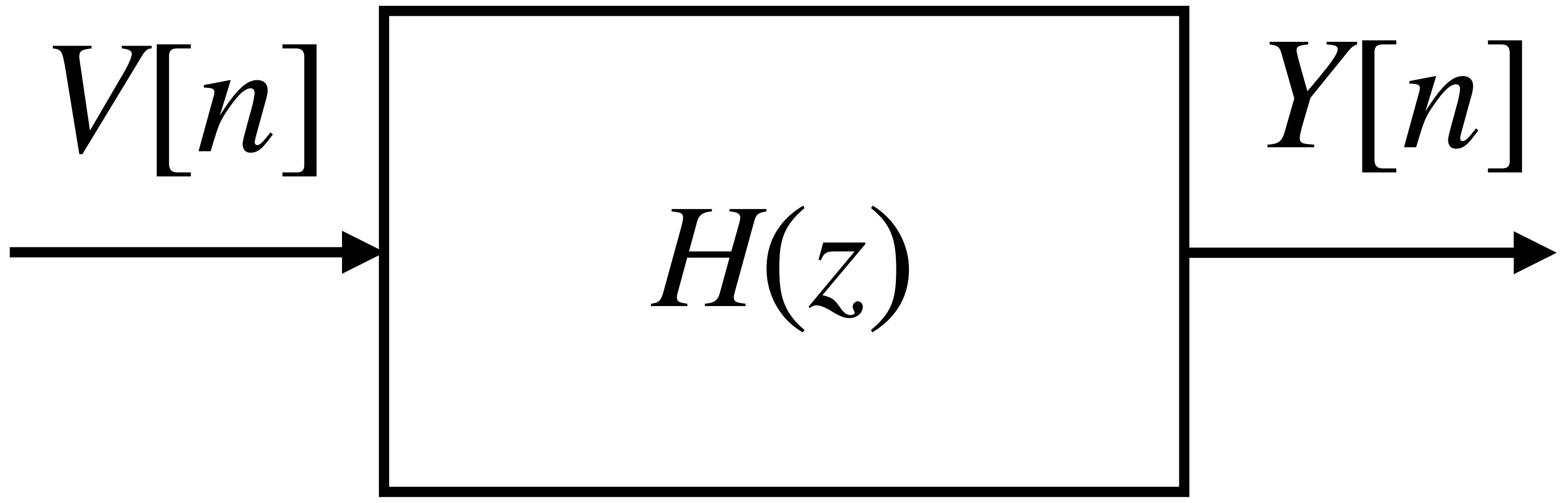
- La media del proceso $Y[n]$ es constante.
- La autocorrelación de $Y[n]$ solo depende del retardo k entre las muestras $Y[n+k]$ y $Y[n]$.
- La varianza de $Y[n]$ es constante y finita.

Filtrado de procesos aleatorios

Ejemplo

Sea $Y = \{Y[n]\}$ un proceso aleatorio generado al filtrar ruido blanco $V = \{V[n]\}$, de varianza $\sigma_V^2 = 1$, a través de un filtro LTI de primer orden, que se puede expresar mediante la siguiente ecuación de diferencias

$$y[n] = 0.25y[n-1] + v[n] \, ,$$



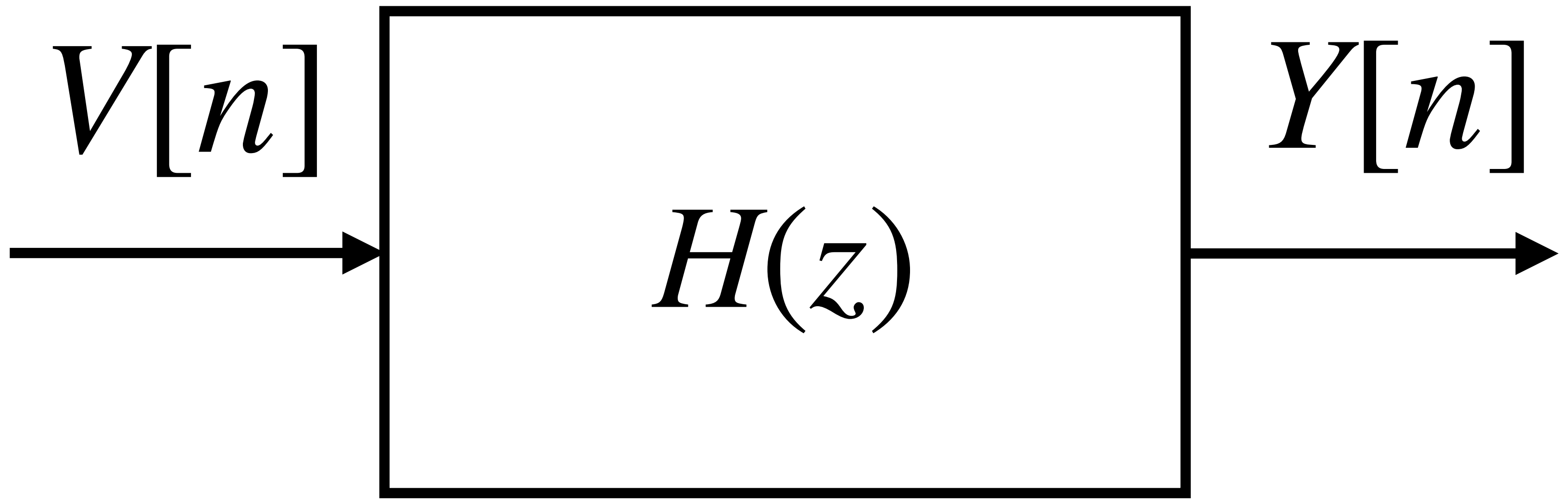
con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.25z^{-1}} \, .$$

Calcular las características estadísticas del proceso $Y[n]$.

Filtrado de procesos aleatorios

Ejemplo



- **Media:** Dado que $V[n]$ es ruido blanco con media cero, tenemos

$$m_Y = E\{Y[n]\} = m_V \cdot H(e^{j0}) = 0.$$

- **Autocorrelación:** Dado $r_v[k] = \delta[k]$, tenemos

$$r_Y[k] = r_V[k] * h[k] * h[-k] = h[k] * h[-k]\ ,$$

ya que $h[k] = \left(\frac{1}{4}\right)^k u[k]$ podemos demostrar que

$$r_Y[k] = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^k u[k] + \frac{16}{15}(4)^k u[-k-1] = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|}.$$

- **Varianza:** Dado que $\mathrm{var}(Y[n]) = c_Y[0] = r_Y[0] = \sum_k |h[k]|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k} = \frac{16}{15}$.

Tipos especiales de procesos aleatorios

Procesos Media Móvil y ARMA

- Sea un proceso WSS de ruido blanco $V[n]$ con media cero y varianza σ_V^2.
- **Proceso de Media Móvil (proceso MA(q)):** se denomina a un proceso aleatorio WSS $Y[n]$ de media móvil si sigue el siguiente modelo:

$$Y[n] = b_0 V[n] + b_1 V[n-1] + \cdots + b_q V[n-q] \,.$$

- **Proceso Autoregresivo de Media Móvil (ARMA(p,q)):** se denomina a un proceso WSS $Y[n]$ autoregresivo de media móvil si sigue el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} Y[n] = {} & b_0 V[n] + b_1 V[n-1] + \cdots + b_q V[n-q] \\ & - a_1 Y[n-1] - a_2 Y[n-1] - \cdots - a_p Y[n-p] \,. \end{aligned}$$

Tipos especiales de procesos aleatorios

Proceso ARMA (Autoregressive moving average)

- Un proceso aleatorio de especial interés es aquel que resulta de filtrar un proceso de ruido blanco $V[n]$ con media cero y varianza σ_V^2 con un filtro causal FIR o IIR, denotado como

$$H(z) = \frac{B_q(z)}{A_p(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_q[k] z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_p[k] z^{-k}} .$$

- La densidad espectral de potencia del proceso $Y[n]$ resultante del filtrado estará dado por

$$S_Y(e^{j\omega}) = \sigma_v^2 \left| \frac{B_q(e^{j\omega})}{A_p(e^{j\omega})} \right|^2 \quad \text{o} \quad S_Y(z) = \sigma_v^2 \frac{B_q(z)\, B_q(1/z)}{A_p(z)\, A_p(1/z)} .$$

- Un proceso cuya densidad espectral de potencia tenga esta forma se denomina proceso autoregresivo de media móvil de orden (p,q) o proceso ARMA(p,q)

Tipos especiales de procesos aleatorios

Proceso ARMA (Autoregressive moving average)

Dado un proceso ARMA(p,q) $Y[n]$ asociado al filtro $H(z)$ descrito, la secuencia de autocorrelación del proceso estará descrita por el siguiente sistema de ecuaciones

$$r_Y[k] + \sum_{l=1}^{p} a_p[l]\, r_Y[k-l] = \begin{cases} \sigma_V^2\, C_q[k], & 0 \leq k \leq q, \\ 0, & k > q, \end{cases}$$

donde $C_q[k] = \sum_{l=0}^{q-k} b_q[l+k]\, h[l]$.

Este sistema de ecuaciones se conoce como las ecuaciones de Yule-Walker y permite extrapolar la secuencia de autocorrelación $r_Y[k]$ a partir de un conjunto finito de valores de la misma.

¡Muchas gracias!