

Laboratorio 01 – Parte Teórica

Entrega:

Horario 0791 - 09 de setiembre del 2024 - 08:00 AM

Horario 0792 - 13 de setiembre del 2024 - 08:00 AM

Problemas:

1. (1.5 p) La señal

$$x_c(t) = 2 \cos(20\pi t) - 3 \cos(30\pi t) + \sin(70\pi t)$$

es muestreada con una frecuencia de muestreo F_s para obtener la señal discreta $x[n]$.

- Considerando la frecuencia de muestreo $F_s = 50$ Hz, determine la DTFT $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$ y grafique su magnitud en función de frecuencia normalizada ω en radianes y en función de frecuencia F en Hz.
- Repita la parte (a) para la frecuencia de muestreo $F_s = 100$ Hz.
- Explique si la señal $x_c(t)$ se puede recuperar a partir de las muestras $x[n]$.

2. (1.5 p) Considere la señal $x_c(t)$ cuya transformada de Fourier continua está dada por

$$X_c(j\Omega) = \frac{100}{100 + \Omega^2}.$$

Esta señal es discretizada con una frecuencia de muestreo F_s para obtener la señal en el tiempo discreto $x[n]$.

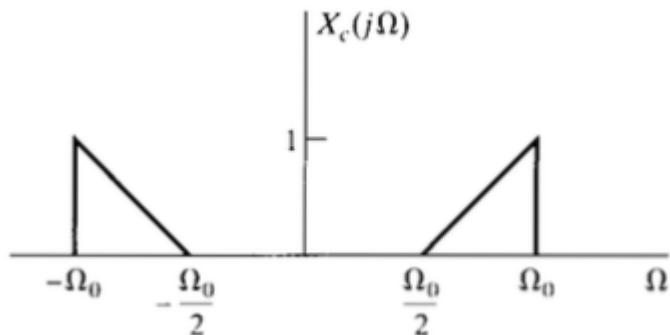
- Considerando $F_s = 100$ Hz, determine $X(e^{j\omega})$ (DTFT de $x[n]$) y grafique su magnitud en función de frecuencia F en Hz para el intervalo $-150 \leq F \leq 150$.
 - Repita la parte (a) considerando que $F_s = 25$ Hz.
 - ¿Para qué frecuencia de muestreo F_s se puede recuperar la señal $x_c(t)$ razonablemente bien a partir de sus muestras? Justifique su respuesta.
3. (1.5 p) En este problema vamos a estudiar los efectos en la reconstrucción ideal de una señal sinusoidal cuando sus muestras fueron adquiridas en el límite del criterio de Nyquist. Para ello vamos a considerar que la señal continua en el tiempo $x_c(t) = \sin(2\pi F_o t + \theta_o)$ ha sido muestreada con una frecuencia de muestreo $F_s = 100$ Hz. Considere que las muestras han ingresado a un DAC ideal para obtener la señal reconstruida $y_r(t)$.
 - Determine $y_r(t)$ para los siguientes casos $F_o = 10, 20, 40$ Hz y $\theta_o = 0$ rad. ¿Cómo compara $y_r(t)$ con respecto a $x_c(t)$?
 - Determine $y_r(t)$ para los siguientes casos $F_o = 50$ Hz y $\theta_o = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi$, rad. ¿Cómo compara $y_r(t)$ con respecto a $x_c(t)$?
 - A partir de los resultados en la parte b) determine una expresión para $y_r(t)$ en función de θ_o .
 4. (1 p) Calcule la DTFT directa de las siguientes señales discretas.

$$a) x[n] = \begin{cases} 1, & n_o \leq n < N + n_o \\ 0, & n < n_o, n \geq N + n_o \end{cases} \quad (\text{ventana rectangular desplazada en el tiempo})$$

Además, calcule la DTFT inversa de las siguientes respuestas en frecuencia

$$a) X(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c, \\ 1, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (\text{filtro pasa-altos ideal con frecuencia de corte } \omega_c)$$

5. (1.5 p) Una señal continua en el tiempo $x_c(t)$, con transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$ mostrada en la siguiente figura, es muestreada con un periodo de muestreo $T = 2\pi/\Omega_0$ para formar la secuencia $x[n] = x_c(nT)$.

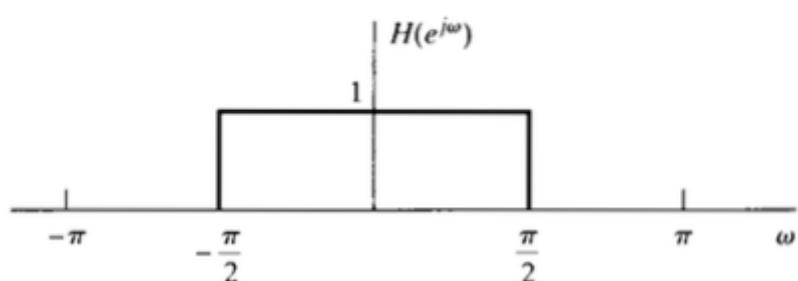
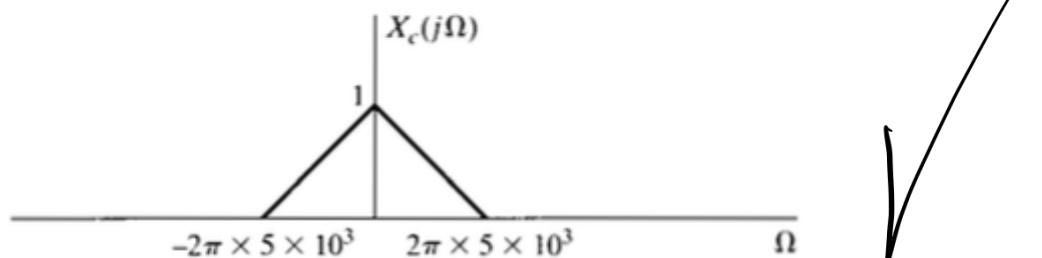
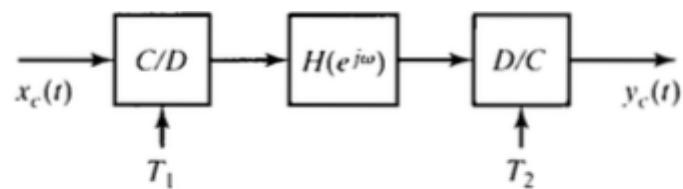


✓

- a) Diagramar la forma de la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ para $|\omega| < \pi$.
- b) La señal $x[n]$ será transmitida a través de un canal digital. En el receptor, la señal original debe ser recuperada. Dibuje un diagrama del sistema de recuperación y especifique sus características. Puede utilizar filtros ideales en la reconstrucción.
- c) En términos de Ω_0 . ¿Para qué rangos de T la señal $x_c(t)$ se puede recuperar a partir de $x[n]$?
6. (1p) En el sistema de la figura se muestra $X_c(j\Omega)$ y $H(e^{j\omega})$. Diagrama y etique la transformada de Fourier de $y_c(t)$ para cada uno de los siguientes casos.

- a) $1/T_1 = 1/T_2 = 10^4$
- b) $1/T_1 = 2 \times 10^4$, $1/T_2 = 10^4$

✓



Laboratorio 2 - Parte teórica

20213704

Hineill David Céspedes Espinoza

1. (1.5 p) La señal

$$x_c(t) = 2 \cos(20\pi t) - 3 \cos(30\pi t) + \sin(70\pi t)$$

es muestreada con una frecuencia de muestreo F_s para obtener la señal discreta $x[n]$.

- Considerando la frecuencia de muestreo $F_s = 50$ Hz, determine la DTFT $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$ y grafique su magnitud en función de frecuencia normalizada ω en radianes y en función de frecuencia F en Hz.
- Repita la parte (a) para la frecuencia de muestreo $F_s = 100$ Hz.
- Explique si la señal $x_c(t)$ se puede recuperar a partir de las muestras $x[n]$.

a)

De acuerdo a la teoría del muestreo, obtenemos este resultado final:

$$\text{DTFT}(x[n]) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{w - 2\pi k}{T_s}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{FT}\{x_c(t)\}$$

→ Opcionalmente también tenemos esta expresión

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - \Omega_s k)$$

Se puede interpretar como infinitas copias periódicas cada $2\pi/\Omega_s$ (Ω_s (muestreo))

Ojo:

$$\Omega = \frac{\Omega_s}{T_s}$$

La expresión en función del Ω , es el que siempre calculamos así que lo usaremos para hallar $X_c(\Omega)$ y luego $X(e^{j\omega})$, $X(e^{j\Omega T})$

Por Propiedad

$$\cos(\Omega_s t) \leftrightarrow \frac{1}{2} (\delta(\Omega + \Omega_s) + \delta(\Omega - \Omega_s))$$

$$\sin(\Omega_s t) \leftrightarrow \frac{1}{j} (\delta(\Omega + \Omega_s) - \delta(\Omega - \Omega_s))$$

\Rightarrow Usamos las propiedades

y tenemos

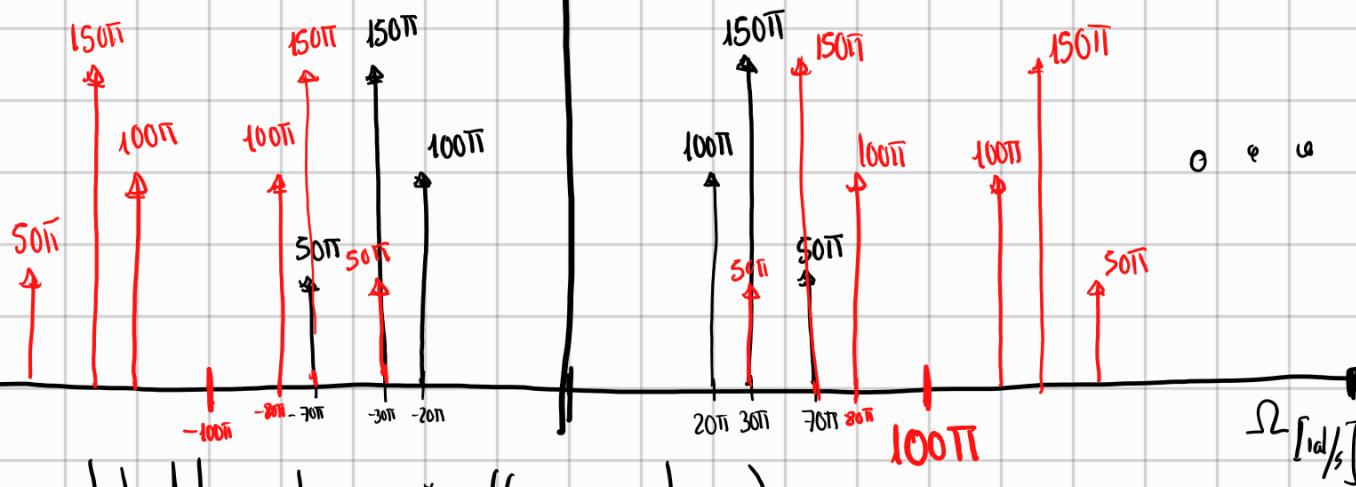
$$X_c(\Omega) = \begin{cases} 2\pi & , |\Omega| = 20\pi \\ -3\pi & , |\Omega| = 30\pi \\ j\pi & , \Omega = 70\pi \\ -j\pi & , \Omega = -70\pi \\ 0 & , \text{C.C.} \end{cases}$$

$X(e^{j\Omega T})$ son repeticiones de $X_c(\Omega)$

$\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 100\pi \text{ rad/s}$, entonces podemos graficar

$$|X(e^{j\Omega})|$$

Ojo: las magnitudes se multiplican $\times F_s$



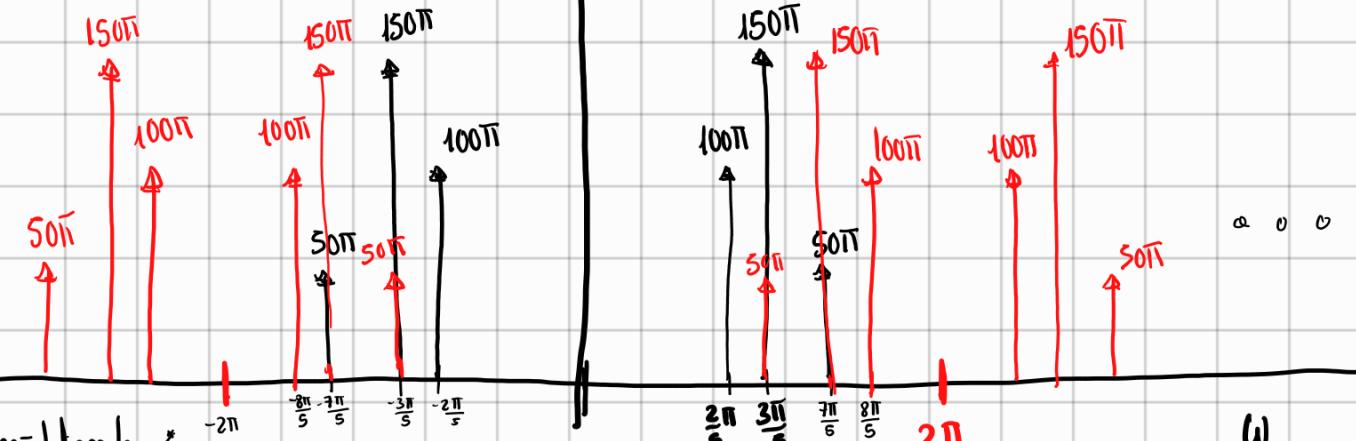
Espectro de magnitud de la señal
discreta (sin normalizar)

(sin normalizar)

Ahora normalizamos usando T_s . El resultado es un escalamiento en frecuencia.

$$\omega = \Omega T_s$$

$$|X(e^{j\omega})|$$



Espectro de la señal discreta

Normalizado

Observación: Debido a que cada copia del espectro está demasiado juntas la una de la otra, se nota un traslapeamiento o también conocido como "Aliasing".

Es congruentes que sucediera eso porque

$$\mathcal{L}_S = (2\pi) (F_S)$$

Ω_N : frecuencia de Nyquist (Máxima frecuencia o también representada)

$$\angle \Omega_N = 70\pi \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \Omega_S = 100\pi \text{ rad/s}$$

o fmb reprezenterde)

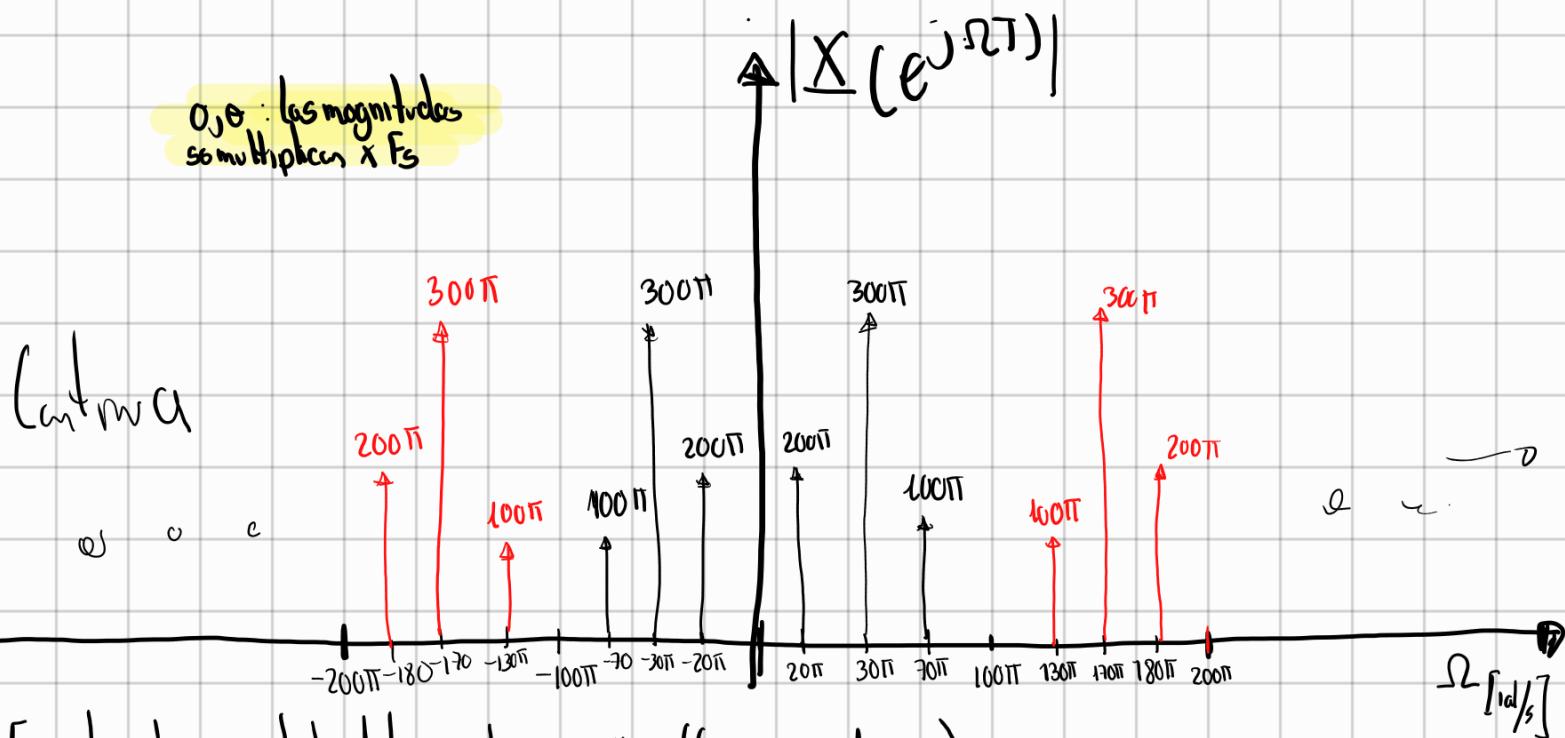
como Bw
(En este curso)
PDS

No compl can $\Omega_S \geq 2\Omega_N$

→ Hay Aliasing → No se recupera la señal.

b) Igual que a) pero con $F_s = 100\text{Hz} \rightarrow \Omega_s = 200\pi\text{rad/s}_{69}$

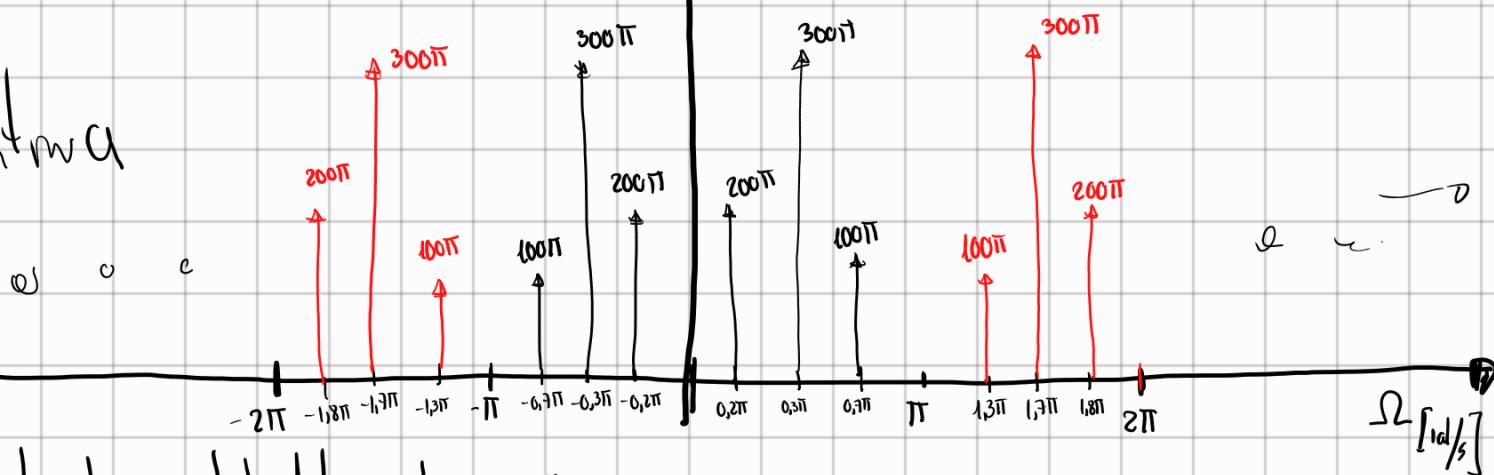
Usando los resultados anteriores, X_{CL} , solo restamos gráfica pero con diferentes períodos



Espectro de magnitud de la señal
discreta (sin normalizar)

$$|X(e^{j\omega})|$$

Centro de



Espectro de magnitud de la señal
discreta (Normalizada)

Observación: En esta ocasión no hay traslapamiento o Aliasing,
porque

Sí se cumple $\Omega_s \geq 2\Omega_N$; Si se podrá recuperar la
señal.

c) Como se explica en los otros incisos, cuando hay "Aliasing"
no se puede recuperar la señal original, porque los espectros quedan
estos tan cerca que se traslapan. De tal forma, los LPF no son capaces de
recuperar el espectro central y se pierde la información.

El "aliasing" está presente en a) pero no en b)
porque se usa un f_s mucho mayor

⇒ Sí se podrá reconstruir la señal usando $f_s = 100 \text{ Hz}$ (caso b)) pero
no se podrá con $f_s = 50 \text{ Hz}$ (caso a))

2. (1.5 p) Considere la señal $x_c(t)$ cuya transformada de Fourier continua está dada por

$$X_c(j\Omega) = \frac{100}{100 + \Omega^2}.$$

Esta señal es discretizada con una frecuencia de muestreo F_s para obtener la señal en el tiempo discreto $x[n]$.

- Considerando $F_s = 100$ Hz, determine $X(e^{j\omega})$ (DTFT de $x[n]$) y grafique su magnitud en función de frecuencia F en Hz para el intervalo $-150 \leq F \leq 150$.
- Repita la parte (a) considerando que $F_s = 25$ Hz.
- ¿Para qué frecuencia de muestreo F_s se puede recuperar la señal $x_c(t)$ razonablemente bien a partir de sus muestras? Justifique su respuesta.

a) Sea $x_c(t)$ / $X_c(j\Omega) = \frac{100}{100 + \Omega^2}$

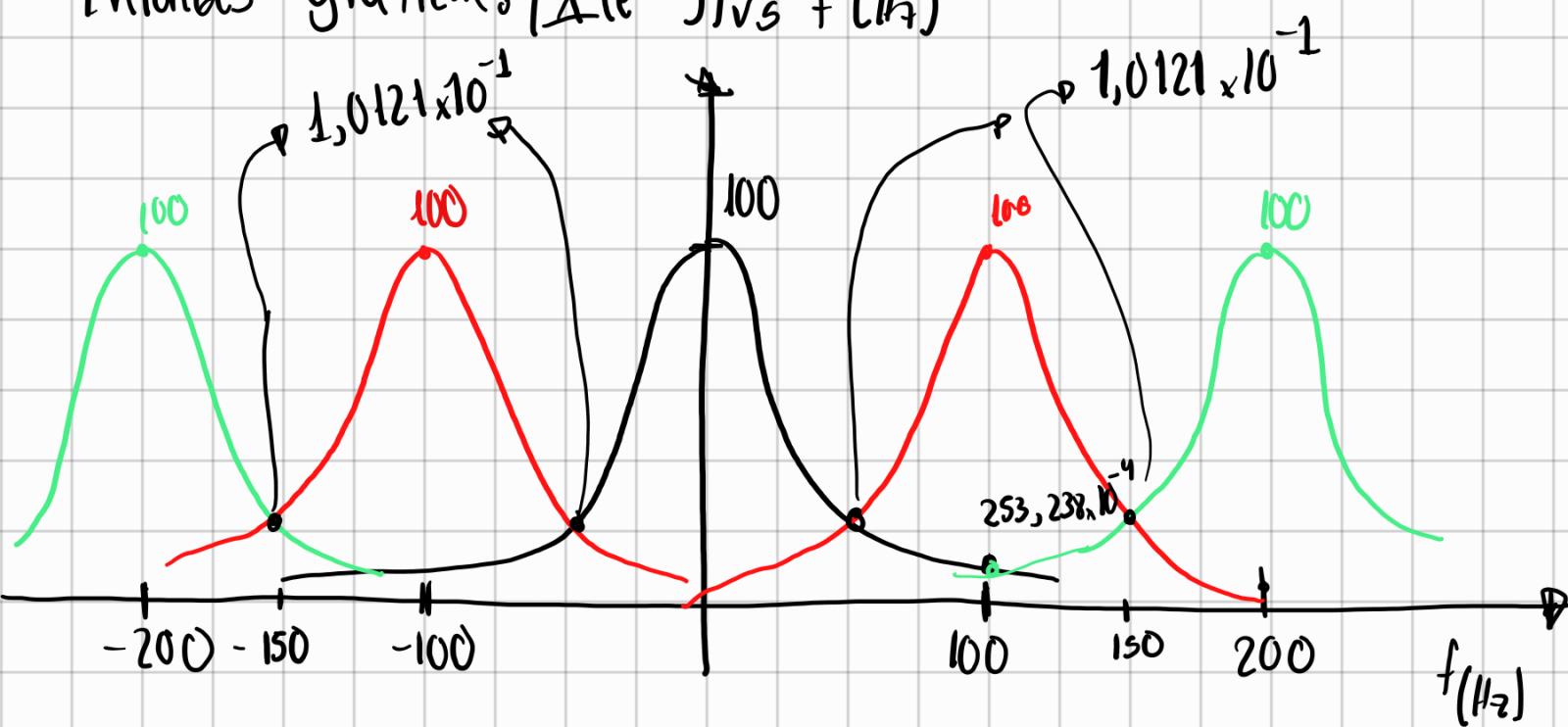
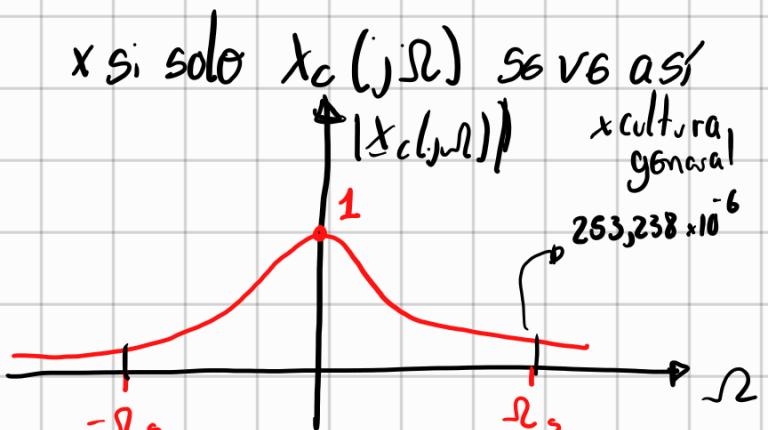
Como se expuso en la anterior pregunta

$$x(t) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(-\Omega - \Omega_0 k)$$

$$F_s = 100 \text{ Hz}$$

$$\Omega_s = 200\pi \text{ rad/s}$$

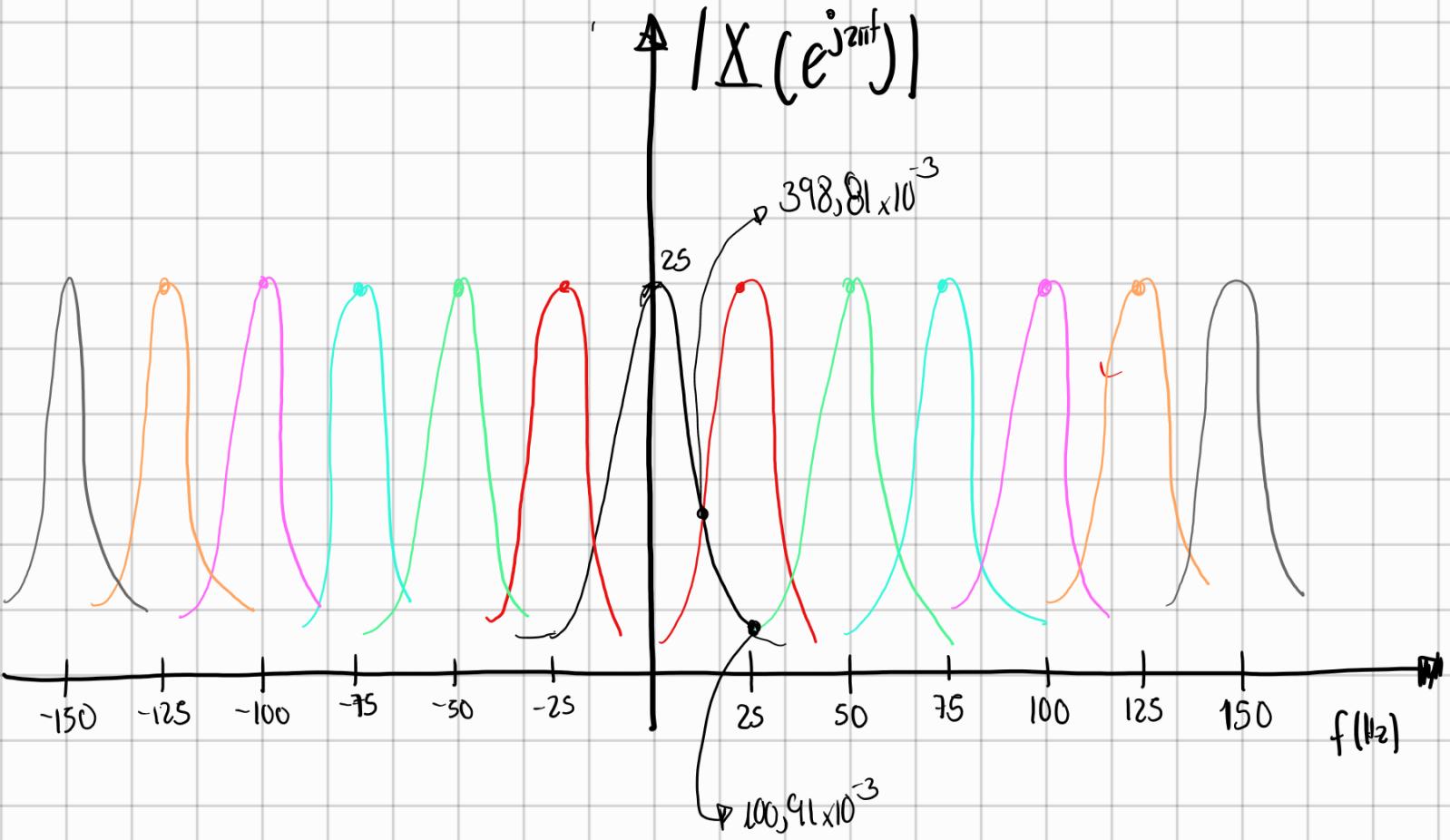
Entonces graficamos $|X(e^{j\omega})|$ vs $f(Hz)$



b)

Graficamos similarmente: (en $F_s = 25$

$$\Omega_s = 50\pi \text{ rad/s}$$



c) Para poder recuperar la señal original se requiere usar un **D/C**, en el cual se aplicará un LPF. Todo el proceso de muestreo y reconstrucción requiere que la señal tenga una banda limitada, sin embargo dado el espectro se tiene un B_w infinito. Al tener un B_w infinito, cada copia del espectro afectaría a sus contiguas generando Aliasing. Lo que se hace comúnmente para evitar eso es usar un Filtro Antialiasing (para limitar la banda). Como se nos pide doctor minor el caso en el que se recupera mejor la señal, debemos observar en que caso hay menor efecto de Aliasing. A partir de los gráficos presentados se puede afirmar que el caso con $F_s = 100\text{Hz}$ es el mejor porque el espectro descae más hasta llegar a su copia en comparación al caso con $F_s = 25\text{Hz}$.

Rpta: Para un $F_s = 100\text{Hz}$ se puede recuperar una mejor señal que 25Hz

Pregunta 4

4. (1 p) Calcule la DTFT directa de las siguientes señales discretas.

a) $x[n] = \begin{cases} 1, & n_0 \leq n < N + n_0 \\ 0, & n < n_0, n \geq N + n_0 \end{cases}$ (ventana rectangular desplazada en el tiempo)

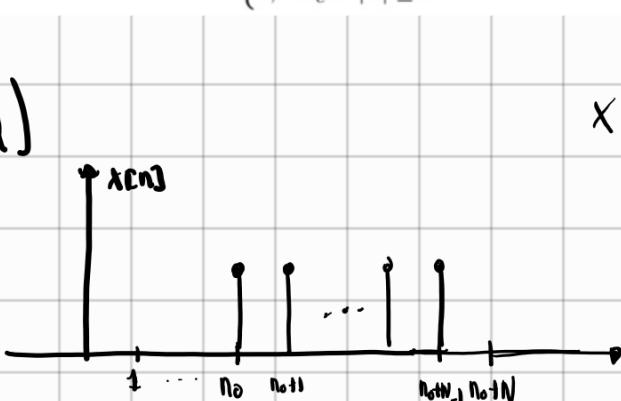
Además, calcule la DTFT inversa de las siguientes respuestas en frecuencia

1

IEE352 2024-2: Procesamiento Digital de Señales
Facultad de Ciencias e Ingeniería - Pontificia Universidad Católica del Perú

a) $X(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c, \\ 1, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$ (filtro pasa-altos ideal con frecuencia de corte ω_c)

a)



$x[n]$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega n} x[n]$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} e^{-j\Omega n}$$

$n = n_0$

$$S_x = e^{-j\Omega n_0} + (e^{-j\Omega})^{(n_0+1)} + \dots + (e^{-j\Omega})^{(n_0+N-1)}$$

$$(S_x)(e^{-j\Omega}) = (e^{-j\Omega})^{(n_0+1)} + \dots + (e^{-j\Omega})^{(n_0+N)}$$

$$(S_x)(1 - e^{-j\Omega}) = e^{-j\Omega n_0} - (e^{-j\Omega})^{(n_0+N)}$$

$$X(j\Omega) = \frac{e^{-j\Omega n_0} - e^{-j\Omega(n_0+N)}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

$$X(j\Omega) = e^{-j\Omega n_0} \left(\frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} \right)$$

$$X(j\Omega) = e^{-j\Omega n_0} \frac{e^{-j\Omega N/2} (e^{j\Omega N/2} - e^{-j\Omega N/2})}{e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})}$$

$$\boxed{X(j\Omega) = e^{-j\Omega n_0} \frac{e^{-j\Omega N/2}}{e^{-j\Omega/2}} \frac{2 \sin(\Omega N/2)}{2 \sin(\Omega/2)}}$$

$$X(j\Omega) = e^{-j\Omega n_0} e^{j\Omega (\frac{1}{2} - \frac{N}{2})} \frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)} R_p q$$

b)

hallar la DTFT inversa de

$$X(w) = \begin{cases} 0, & |w| < w_c \\ 1, & w_c \leq |w| \leq \pi \end{cases}$$

X Definición

$$X[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w) e^{jwn} dw$$

↳ integramos solo en un período

$$\rightarrow X[n] = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-w_c} e^{jwn} dw + \int_{w_c}^{\pi} e^{jwn} dw \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\left. \frac{e^{jwn}}{jn} \right|_{-\pi}^{-w_c} + \left. \frac{e^{jwn}}{jn} \right|_{w_c}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{\frac{e^{-jw_c n} - e^{+j\pi n}}{jn} + \frac{e^{j\pi n} - e^{jw_c n}}{jn}}_{\text{cancelar}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi j n} \left(\cancel{2j \sin(\pi n)} - 2j \sin(w_c n) \right)$$

s. $n \in \mathbb{Z}$

↳ $\sin(n\pi) = 0$

$$= - \frac{\sin(w_c n)}{\pi n} = - \frac{w_c}{\pi} \frac{\sin(w_c n)}{w_c n} = - \frac{w_c}{\pi} \operatorname{sinc}(w_c n)$$

$$\rightarrow X[n] = - \frac{w_c}{\pi} \operatorname{sinc}(w_c n)$$

Rpta.

Pregunta 3

3. (1.5 p) En este problema vamos a estudiar los efectos en la reconstrucción ideal de una señal sinusoidal cuando sus muestras fueron adquiridas en el límite del criterio de Nyquist. Para ello vamos a considerar que la señal continua en el tiempo $x_c(t) = \sin(2\pi F_o t + \theta_o)$ ha sido muestreada con una frecuencia de muestreo $F_s = 100$ Hz. Considera que las muestras han ingresado a un DAC ideal para obtener la señal reconstruida $y_r(t)$.

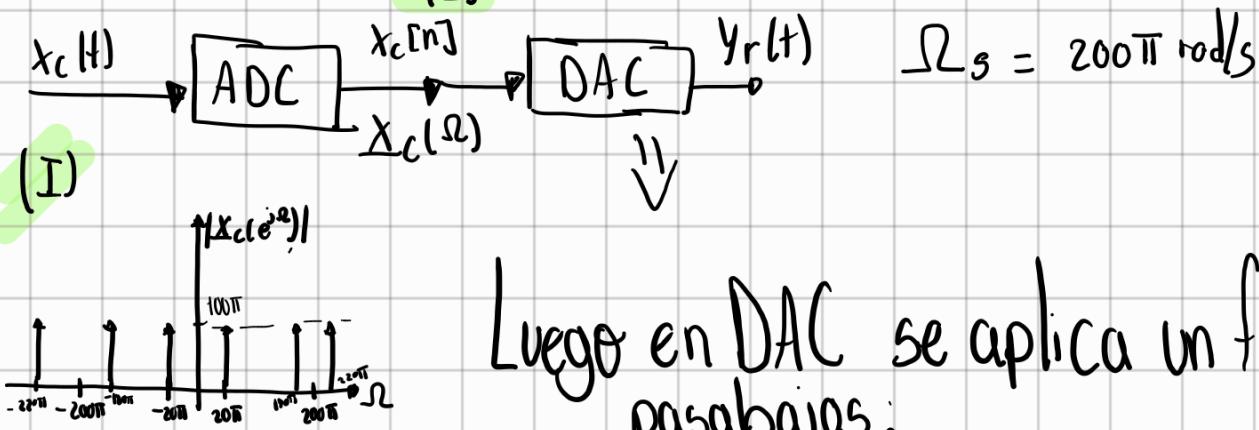
- Determine $y_r(t)$ para los siguientes casos $F_o = 10, 20, 40$ Hz y $\theta_o = 0$ rad. ¿Cómo compara $y_r(t)$ con respecto a $x_c(t)$?
- Determine $y_r(t)$ para los siguientes casos $F_o = 50$ Hz y $\theta_o = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi$, rad. ¿Cómo compara $y_r(t)$ con respecto a $x_c(t)$?
- A partir de los resultados en la parte b) determine una expresión para $y_r(t)$ en función de θ_o .

$$a) \quad x_c(t) = \sin(2\pi F_o t + \theta_o) = \sin(2\pi F_o t) \cos(\theta_o) + \sin(\theta_o) \cos(2\pi F_o t)$$

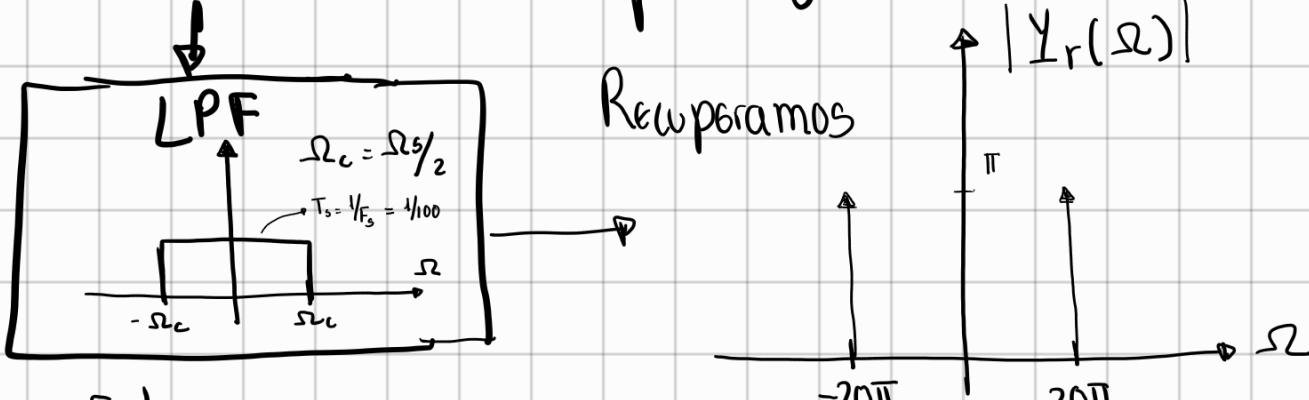
$$F_s = 100 \text{ Hz}$$

Como se assume que se muestre al límite Entonces
en DAC, habrá un LPF de $\Omega_c = \pi/2$

\Rightarrow Con $\theta_o = 0$ y $F_o = 10$ Hz $\rightarrow x_c(t) = \sin(20\pi t)$

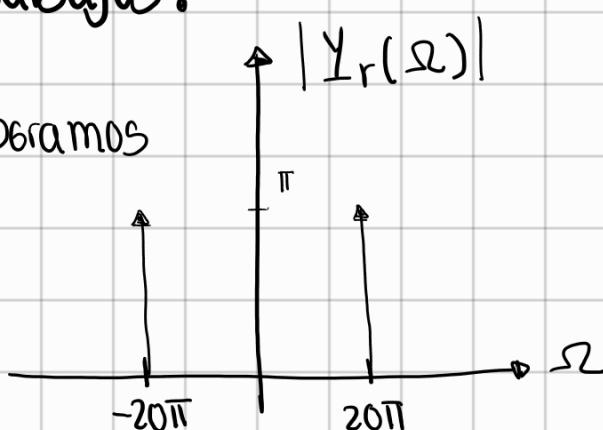


Luego en DAC se aplica un filtro pasabajos.



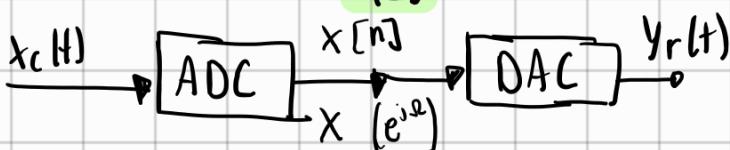
Entonces

$$Y_r(\Omega) = \frac{1}{2} (\delta(\Omega + 20\pi) - \delta(\Omega - 20\pi))$$



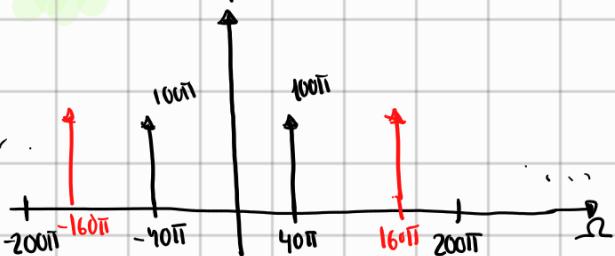
→ $y_r(t) = \sin(20\pi t)$ (Como $x_c(t)$ y $y_r(t)$ son iguales, sí se pudo reconstruir la señal exitosamente)

⇒ $F_0 = 20\text{Hz}$ y $\theta_0 = 0$



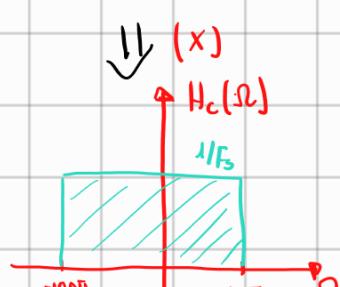
Similarmente
 $x_c(t) = \sin(40\pi t)$

(I) El espectro se ve así



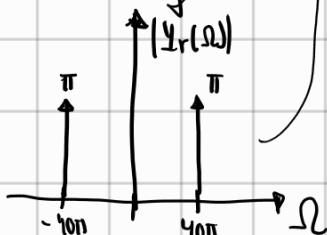
Dentro del DAC pasa un LPF con

$$H(\Omega) = \frac{1}{F_s} G_{2\Omega_C}(\Omega)$$



Al pasar x por el LPF

nos queda



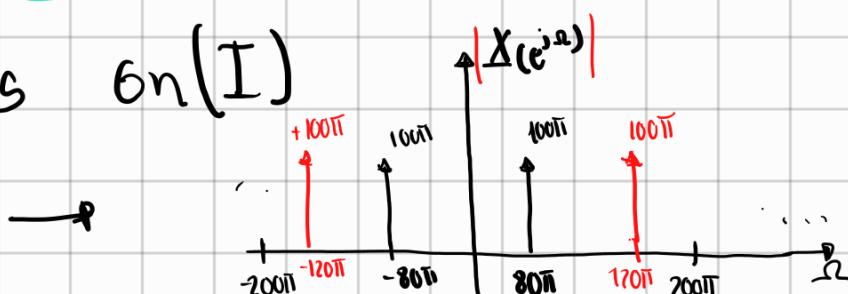
$$\begin{aligned} Y_r(\Omega) &= j\pi (\delta(\Omega + 40\pi) - \delta(\Omega - 40\pi)) \\ Y_r(t) &= \sin(40\pi t) \end{aligned}$$

$y_r(t) = x_c(t)$, si se pudo recuperar la señal inicial a partir de las muestras. Porque se uso una $\Omega_s \geq 2\Omega_N$
 $(2\pi)(100) \geq 2x(40\pi)$, sí cumple con criterio de Nyquist

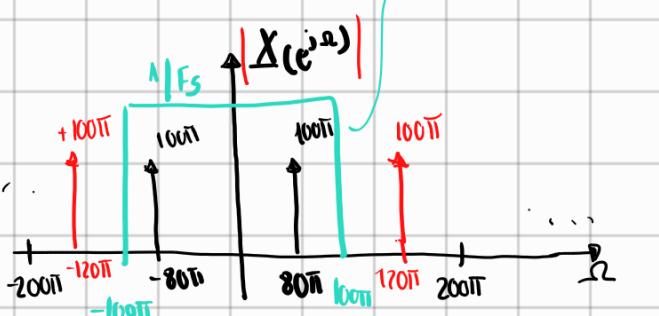
⇒ $F_0 = 40\text{Hz}$ y $\theta_0 = 0$

Igual que los otros casos en (I)

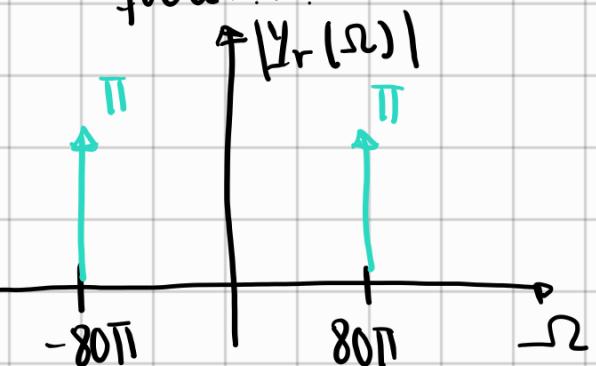
$$x_c(t) = \sin(80\pi t)$$



Aplicamos LPF



Ala salida del DAC
quedan



$$Y_r(\Omega) = \pi J (\delta(\Omega + 80\pi) - \delta(\Omega - 80\pi))$$

$$\text{L } y_r(t) = \sin(80\pi t)$$

Sí se reconstruye
la señal.
Porque $f_s \geq 2f_Ny$

En general, para todos los f_s se logró reconstruir bien la señal porque en todos los casos se cumplió el criterio de Nyquist

$$f_s \geq 2f_{Ny} \Rightarrow y_r(t) = x_c(t) \text{ Si se reconstruye}$$

- b) Determine $y_r(t)$ para los siguientes casos $F_o = 50$ Hz y $\theta_o = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi$, rad.
¿Cómo compara $y_r(t)$ con respecto a $x_c(t)$?

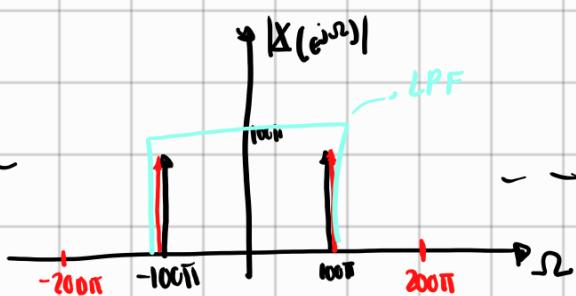
$$\Rightarrow F_o = 50 \text{ Hz} \quad \theta_o = 0$$

$$x_c(t) = \sin(2\pi F_o t + \theta_o) = \sin(2\pi F_o t) \cos(\theta_o) + \sin(\theta_o) \cos(2\pi F_o t)$$

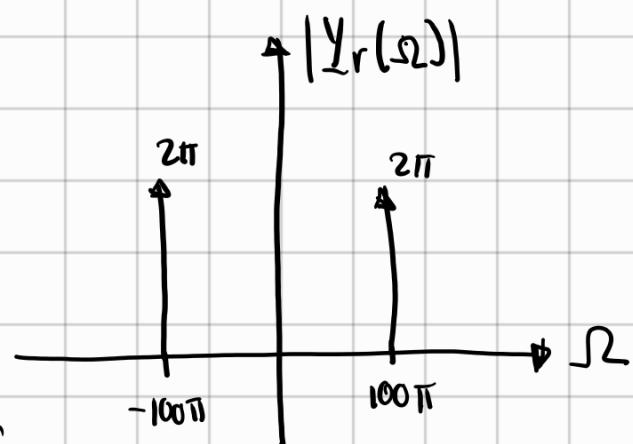
$$\rightarrow X_c(t) = \sin(2\pi F_o t)$$



Al aplicar el LPF del DAC



\Rightarrow



$$Y_r(\omega) = 2\pi (\delta(\omega + 100\pi) - \delta(\omega - 100\pi))$$

$$y_r(t) = 25m \sin(100\pi t)$$

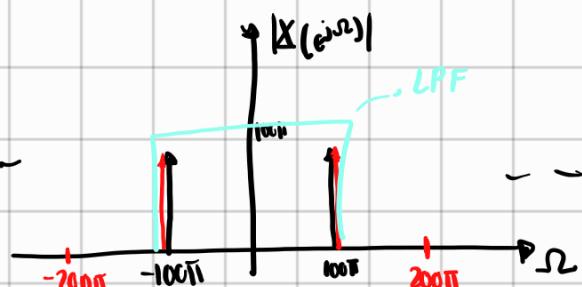
$$Y_r(t) = 2 X_c(t)$$

\hookrightarrow Sí se recupera

$$\Rightarrow F_o = 50\text{Hz} \quad \gamma \quad \theta = \pi/2 \quad \rightarrow X_c(t) = \cos(100\pi t)$$



Al aplicar
LPF en DAC



$$Y_r(\omega) = 2\pi (\delta(\omega + 100\pi) + \delta(\omega - 100\pi))$$

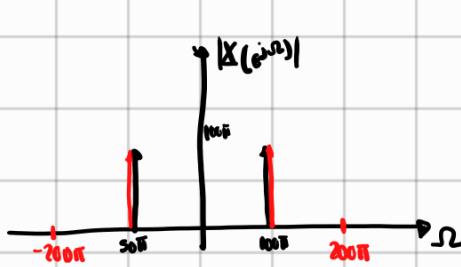
$$\hookrightarrow y_r(t) = 2 \cos(100\pi t)$$

$$\Rightarrow y_r(t) = 2 x_c(t)$$

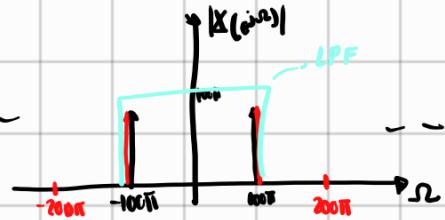
(✓) Sí se recupera la señal.

El factor 2 aparece cuando los impulsos están tan juntos que se suman justo en el límite $f_s/2$, donde f_{DV} se divide para recuperar la señal usando LPF ideal.

$$\Rightarrow F_o = 50\text{Hz} \quad y \quad \theta = \pi \quad \rightarrow X_c(t) = -\sin(100\pi t)$$

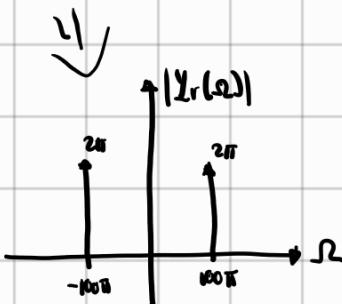


Al aplicar LPF en DAC -



$$Y_r(\omega) = 2i(\delta(\omega + 100\pi) + \delta(\omega - 100\pi))$$

$$\therefore y_r(t) = -2\sin(100\pi t)$$



$$\Rightarrow Y_r(t) = 2 X_c(t)$$

(✓) Si se recupera la señal.

$$\Rightarrow F_o = 50\text{Hz} \quad y \quad \theta = \pi/3 \quad \rightarrow X_c(t) = \sin(100\pi t) \cos(\pi/3) + \cos(100\pi t) \sin(\pi/3)$$

$$X_c(t) = \frac{\sin(100\pi t)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(100\pi t)$$

Como este caso es una superposición de los anteriores

de igual forma se podrán recuperar la señal original.

Observación
(*)

También al estar al límite de f_s $\Rightarrow Y_r(t) = 2 X_c(t)$

$$\Rightarrow F_o = 50\text{Hz} \quad y \quad \theta = 2\pi/3 \quad \rightarrow X_c(t) = \sin(100\pi t) \cos(2\pi/3) + \cos(100\pi t) \sin(2\pi/3)$$

$$X_c(t) = -\frac{\sin(100\pi t)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(100\pi t)$$

Como este caso es una superposición de los anteriores

de igual forma se podrán recuperar la señal original.

También al estar al límite de f_s $\Rightarrow Y_r(t) = 2 X_c(t)$

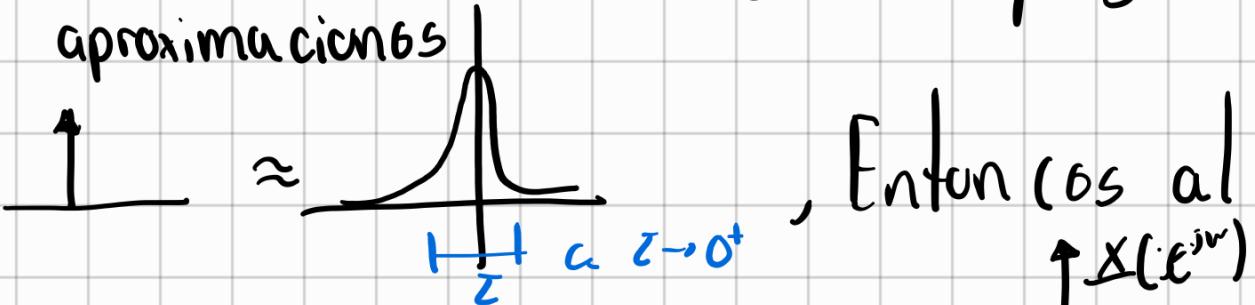
c) En general, $x_c(t) = \sin(2\pi f_0 t + \theta_0) = \sin(2\pi f_0 t) \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0) \cos(2\pi f_0 t)$

y al reconstruir se obtendrá esto

$$y_r(t) = 2 \left(\cos \theta_0 \sin(100\pi t) + \sin \theta_0 \cos(100\pi t) \right)$$

(*) Observación

En caso consideráramos los impulsos como aproximaciones



aplicar los LPF en DAC



Nos libraremos la mitad del impulso. $x_2 \rightarrow$ Al reconstruir recuperaríamos una señal sin la magnitud x_2

En un escenario más realista, sería así

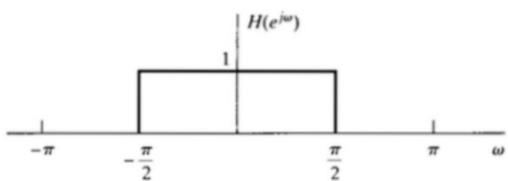
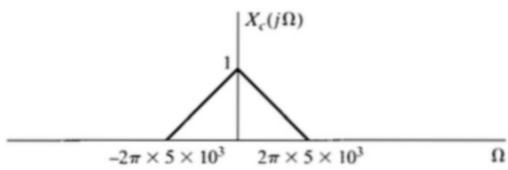
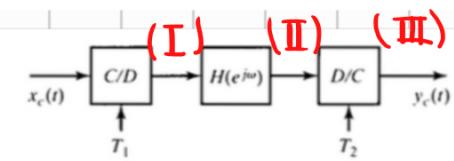
b) $y_r(t) = x_c(t)$

c) $y_r(t) = \cos \theta_0 \sin(100\pi t) + \sin \theta_0 \cos(100\pi t)$

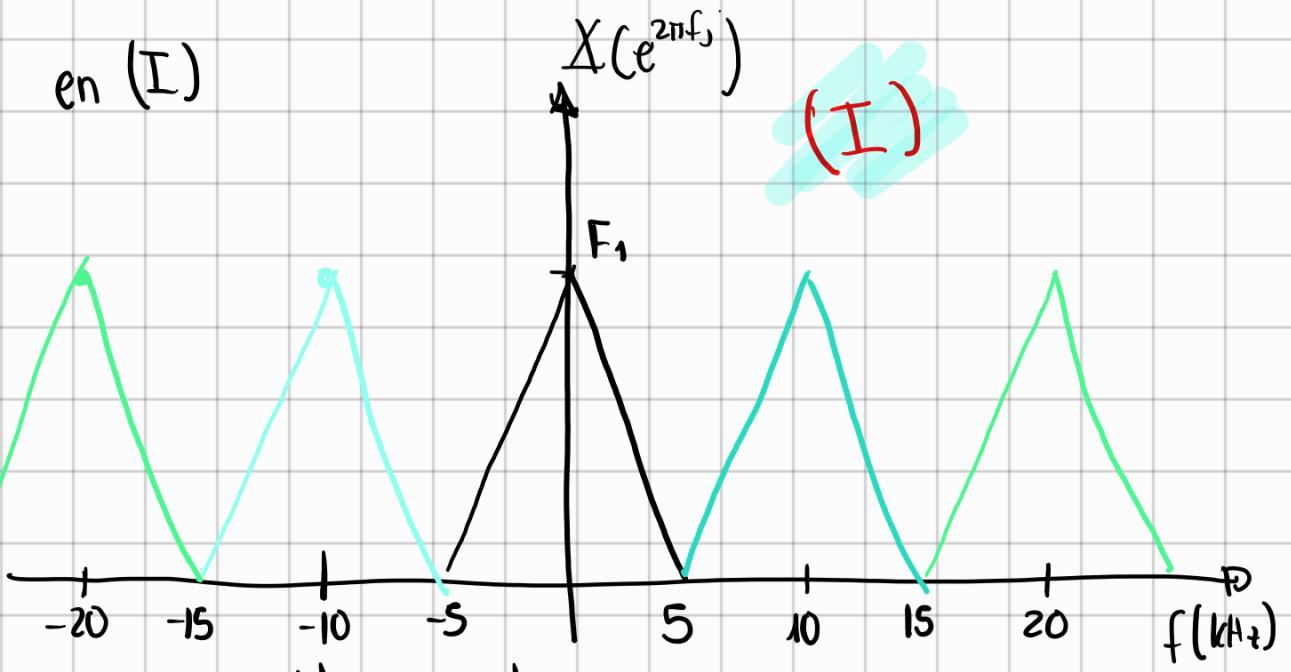
6. (1p) En el sistema de la figura se muestra $X_c(j\Omega)$ y $H(e^{j\omega})$. Diagrama y etiquete la transformada de Fourier de $y_c(t)$ para cada uno de los siguientes casos.

a) $1/T_1 = 1/T_2 = 10^4$

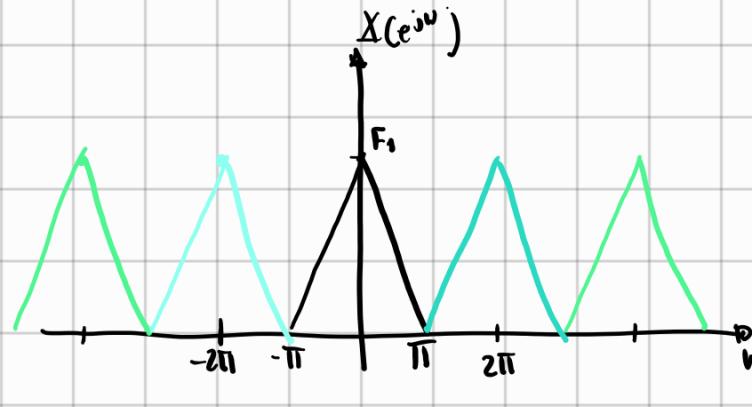
b) $1/T_1 = 2 \times 10^4, 1/T_2 = 10^4$



en (I)



↓ Normalizamos



a) $F_1 = F_2 = 10 \text{ kHz}$

Al aplicar C/D

$$X_c(e^{j\Omega}) = F_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - k\Omega_s)$$

\uparrow
 $\delta_r(I)$

(I)

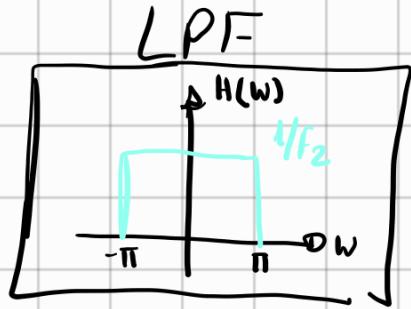
En (II)

Aplicando

Filtro

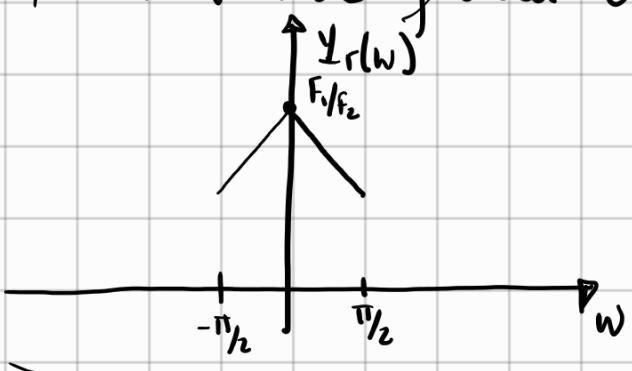
\Rightarrow

Luego aplicamos un LPF dentro del DAC

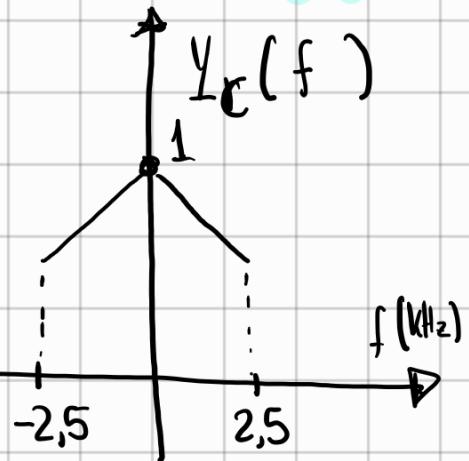


(III)

Al final nos queda en (III)

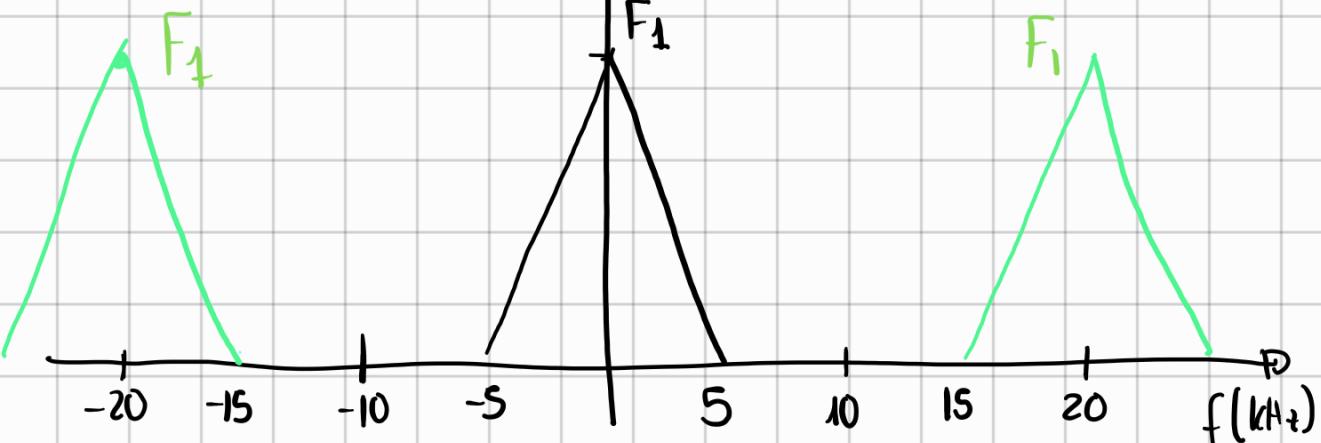


Sin Normalizar
=>



b)

En (I)

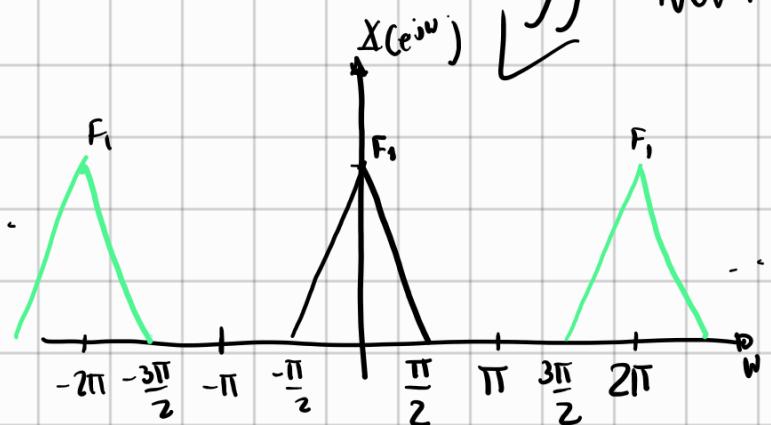


$$F_1 = 20 \text{ kHz}$$

$$F_2 = 10 \text{ kHz}$$

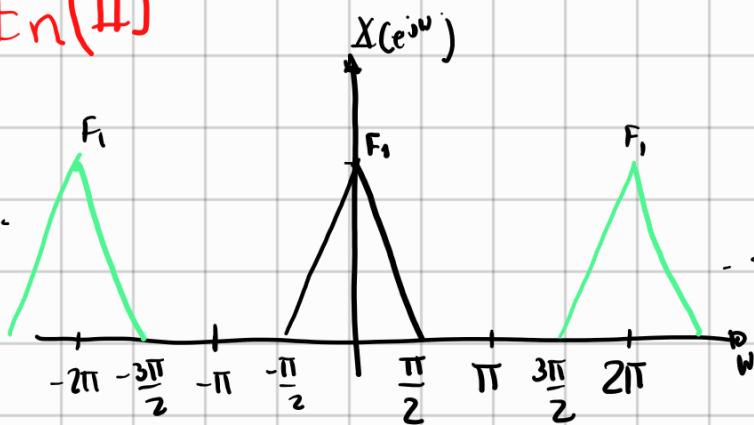
(I)

)) Normalizamos

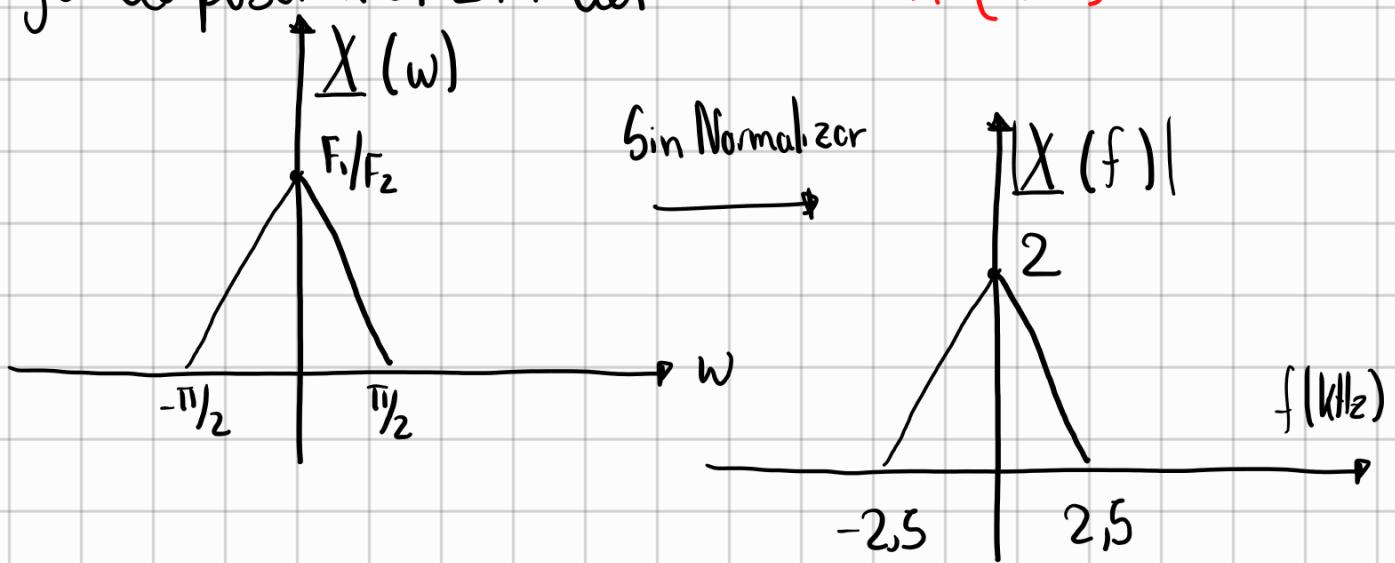


Luego al pasar x LPF

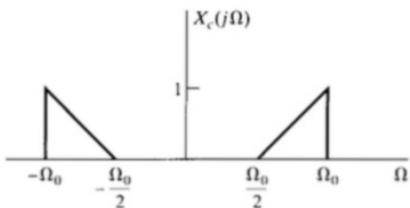
$E_n(II)$



Luego de pasar x el LPF del D/LC $E_n(III)$



5. (1.5 p) Una señal continua en el tiempo $x_c(t)$, con transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$ mostrada en la siguiente figura, es muestreada con un periodo de muestreo $T = 2\pi/\Omega_0$ para formar la secuencia $x[n] = x_c(nT)$.



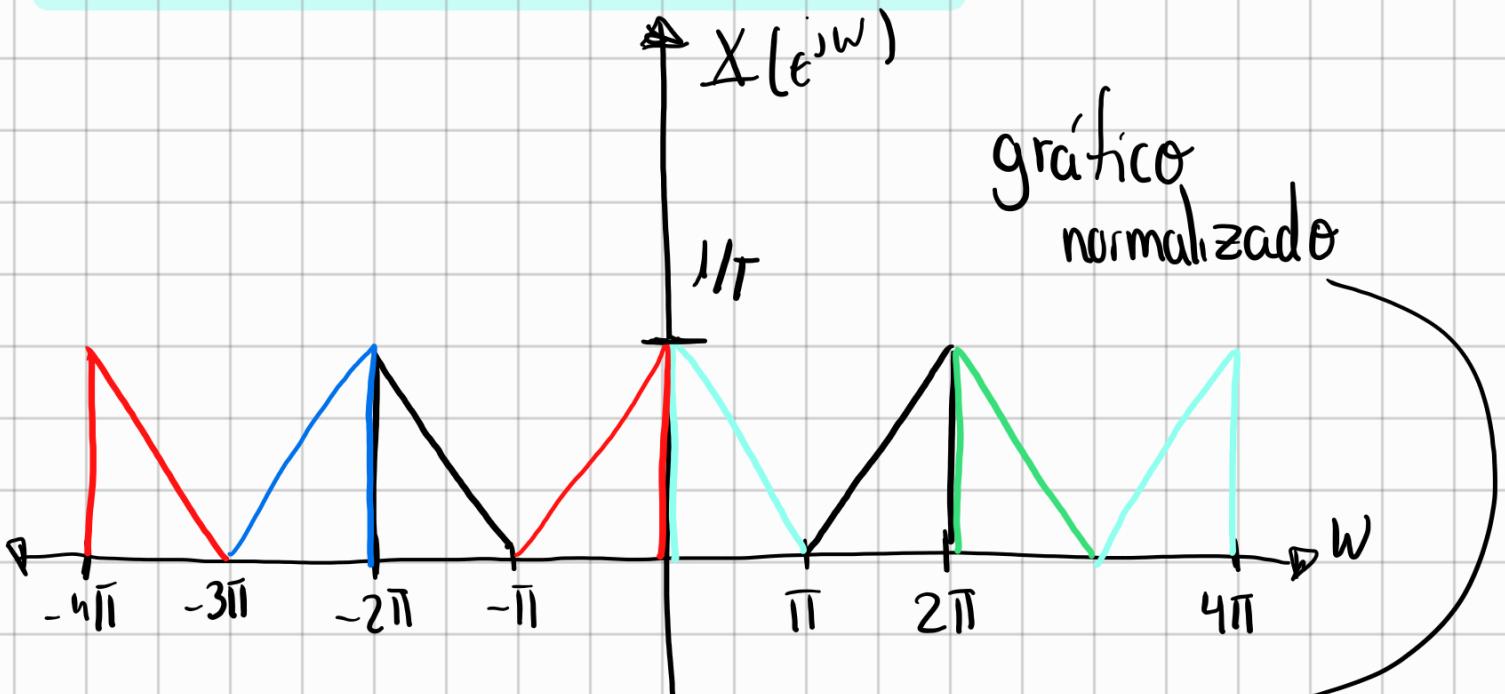
Pregunta (5)

- Diagramar la forma de la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ para $|\omega| < \pi$.
- La señal $x[n]$ será transmitida a través de un canal digital. En el receptor, la señal original debe ser recuperada. Dibuja un diagrama del sistema de recuperación y especifique sus características. Puede utilizar filtros ideales en la reconstrucción.
- En términos de Ω_0 . ¿Para qué rangos de T la señal $x_c(t)$ se puede recuperar a partir de $x[n]$?

a) $T = 2\pi/\Omega_0 \rightarrow \Omega_s = \frac{2\pi}{T} = \Omega_0$ (frecuencia de muestreo)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right)$$

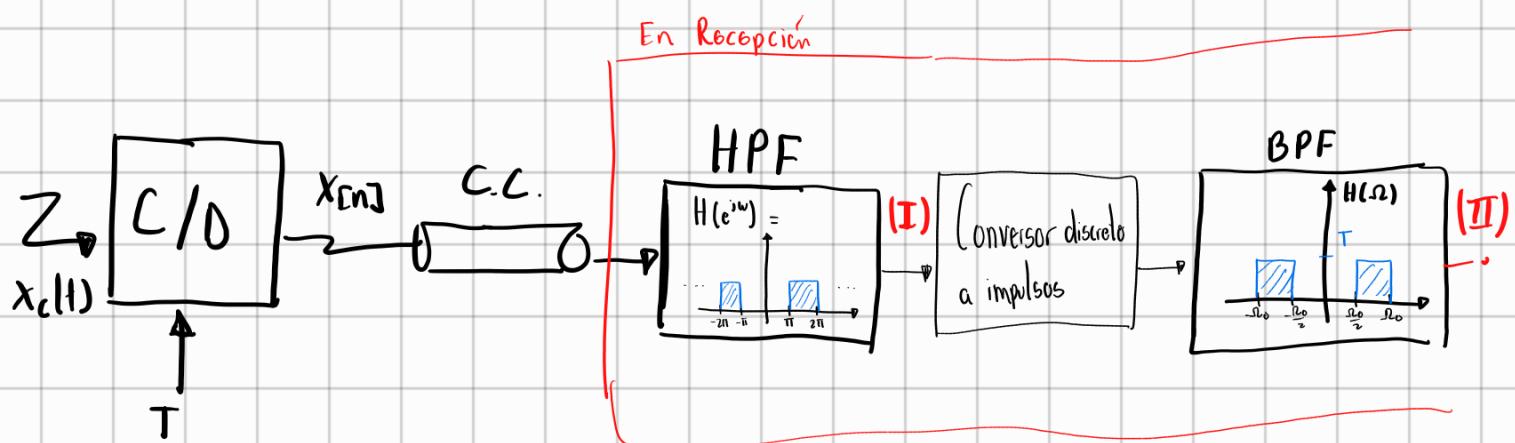
Espectro de señal
discreta muestreada



Se escala usando Ω_0

b) Consideraremos un canal digital que no implique un proceso de cuantización a las muestras (sin ruido de cuantización)

El esquema sería el siguiente:



Explicación:

HPF: Aplicamos un High Pass filter a $X[n]$ de tal forma, en cada copia del espectro nos quedamos solo con la información necesaria.

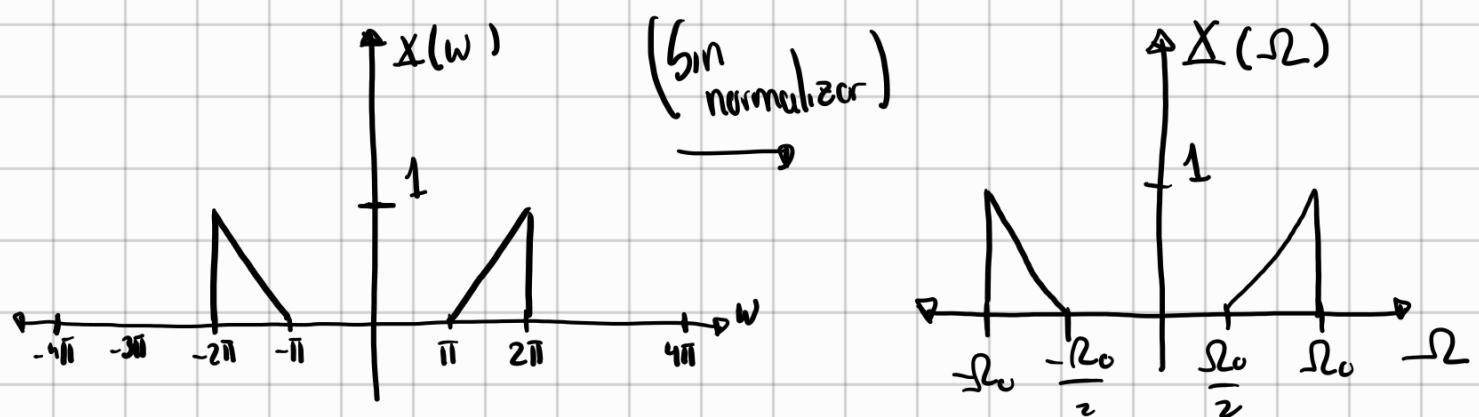
en (I) tendríamos



Se comprende que el HPF opera considerando un T como período

BPF : Aplicamos un filtro pasabanda y resulta lo siguiente:

En II)



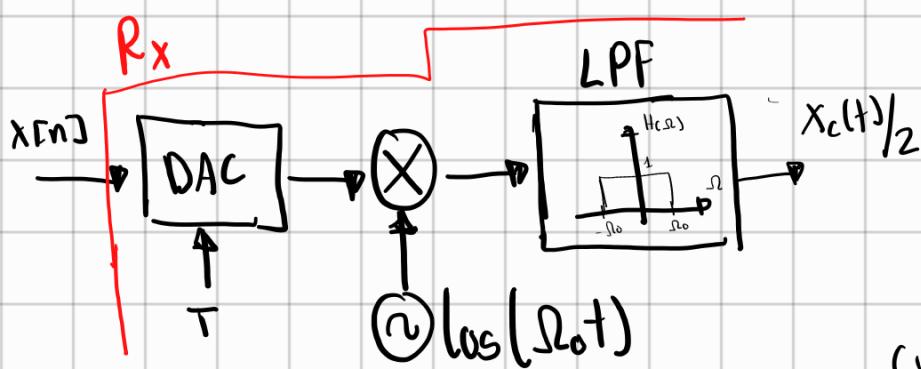
Finalmente, sí se pudo recuperar la señal original.

Esto es congruente con la teoría puesto que se cumplió con el criterio de Nyquist: $|\Omega_s| \geq 2|\Omega_N|$

En este contexto, como el espectro no estaba en banda base $\Omega_N = B_w$ (Ancho d. Banda) $\therefore \Omega_N = \Omega_0/2$

y $\Omega_s = \Omega_0$. De porsi como la señal no estaba en banda base se debería usar BPF en Rx.

Otra posible solución sería usar el DAC clásico con LPF y usar técnicas de modulación para recuperar la forma del espectro original juntón LPF. Así:



En cualquier caso
si es posible
recuperar la señal
siempre y cuando se
cumpla $\Omega_s \geq 2\Omega_N$

c) En general, (Aún cuando el espectro no esté en banda base) es necesario que se cumpla el criterio de Nyquist para que se pueda reconstruir la señal.

$$\Omega_S \geq 2\Omega_N, \text{ para esto cosa } \Omega_N = \text{Bandwidth}$$
$$\Omega_N = \Omega_0/2$$

$$\text{y } \Omega_S = 2\pi/T$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} \geq 2(\Omega_0/2) \rightarrow \frac{2\pi}{\Omega_0} \geq T, \text{ y } T > 0$$

Entonces $0 < T \leq \frac{2\pi}{\Omega_0}$