IEE352 - Procesamiento Digital de Señales

Clase 08: Diseño de Filtros Digitales 2

Dr. Marco A. Milla
Sección Electricidad y Electrónica (SEE)
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

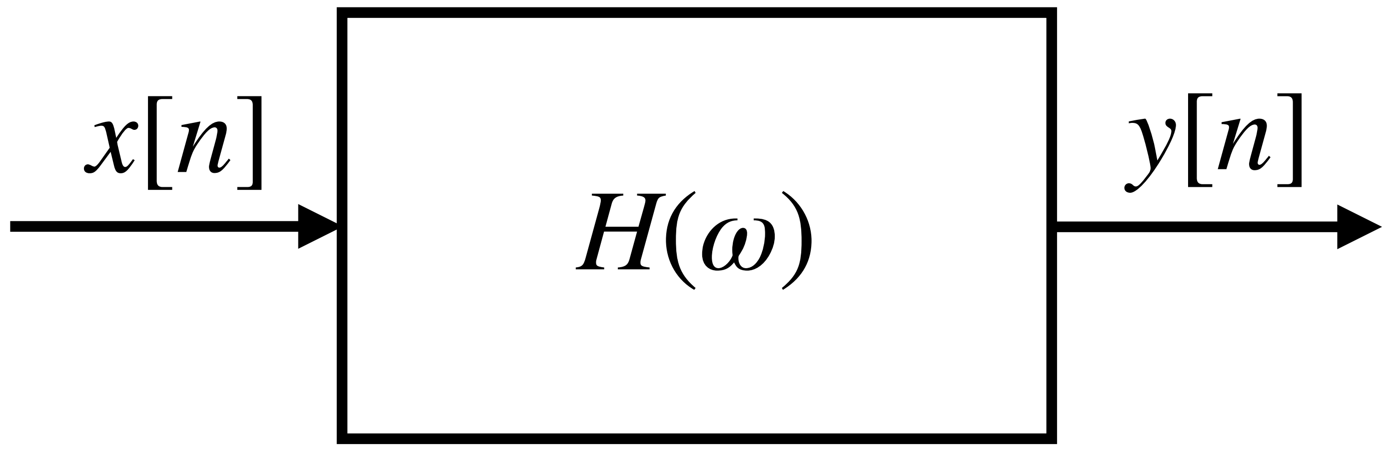
email: milla.ma@pucp.edu.pe

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Introducción

Respuesta en frecuencia de un sistema



$$y[n] = h[n] * x[n]$$

$$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega)$$

Un sistema LTI puede generar distorsión en magnitud o distorsión en fase.

Magnitud: $|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|\,|X(e^{j\omega})|$

Fase: $\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega})$

En diferentes aplicaciones es aceptable diseñar sistemas con distorsión lineal en fase.

Fase lineal $\Longrightarrow$ Retardo de la señal

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Retardo de Grupo

Dado un sistema $H(\omega)$, el retardo de grupo se define de la siguiente forma:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle H(\omega) \ ,$$

donde $\tau(\omega)$ se puede interpretar como el número de muestras retardadas.

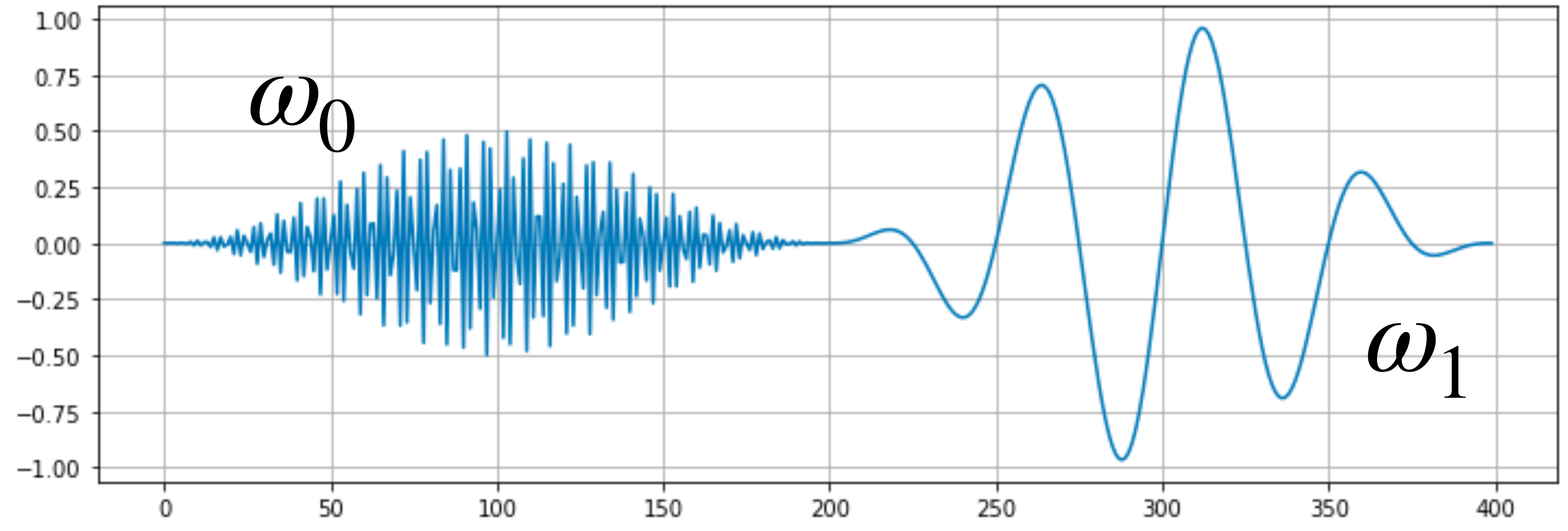
Si $\tau(\omega)$ es constante, es decir si $\angle H(\omega)$ es lineal, implica que todas las componentes frecuenciales de una señal de entrada $x[n]$ van a experimentar el mismo retardo τ.

Si $\tau(\omega)$ no es constante, es decir si $\angle H(\omega)$ no es lineal, las componentes de una señal pueden desordenarse a la salida de $H(\omega)$ generando efectos no deseados.

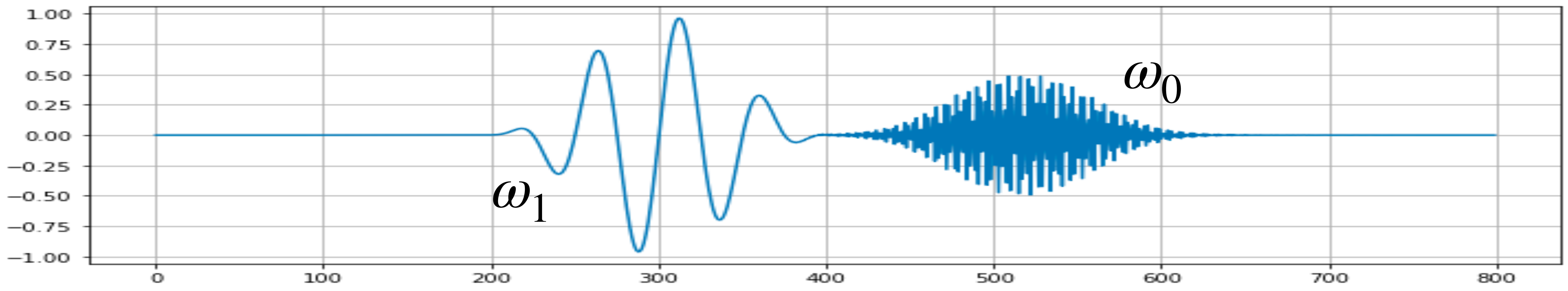
Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Retardo de Grupo - Ejemplo

Consideremos dos señales una con frecuencias ω_0 y ω_1, tal que $\omega_0 > \omega_1$.



La señal es filtrada por $H(\omega)$ con magnitud constante y fase proporcional a ω^3, es decir $\angle H(\omega) = -K\omega^3$. Podemos encontrar que para ciertos valores de K, la señal con frecuencia ω_0 se retarda mucho más que la señal con frecuencia ω_1 .



Efecto no deseado, la señal se distorsiona, la información llega de forma desordenada.

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Sistema con Fase Lineal

En general un sistema con fase lineal se define de la siguiente forma

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-j\omega\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

Ejemplo: Sea el filtro pasabajos ideal con retardo,

$$H_{PB}(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que $h_{PB}[n] = \dfrac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}$.

Si $\omega_c = \pi$ y $\alpha = n_d$, es decir si $\alpha \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$h_{PB}[n] = \delta[n - n_d] \quad \text{retardo ideal.}$$

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Sistema con Fase Lineal

En el caso del filtro ideal pasabajos, si $\alpha \in \mathbb{Z}$ ($\alpha = n_d$) tenemos que $h_{PB}[n]$ es simétrica alrededor de n_d, es decir

$$h_{PB}[n + n_d] = h_{PB}[n_d - n].$$

Aplicando un cambio de variables también se cumple que

$$h_{PB}[2n_d - n] = h_{PB}[n],$$

Demostración:

$$\begin{aligned} h_{PB}[2n_d - n] &= \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\omega_c(2n_d - n - n_d)\right) \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\omega_c(n_d - n)\right) = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\omega_c(n - n_d)\right) \\ &= h_{PB}[n]\,. \end{aligned}$$

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Sistema con Fase Lineal

Notar que en el sistema ideal pasabajos con fase cero

$$\hat{H}_{PB}(\omega) = H_{PB}(\omega)e^{j\omega\alpha} = |\,H_{PB}(\omega)\,|\ ,$$

se cumple con lo siguiente

$$\hat{h}_{PB}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \hat{h}_{PB}[-n]\ .$$

También podemos demostrar que si 2α es entero, entonces

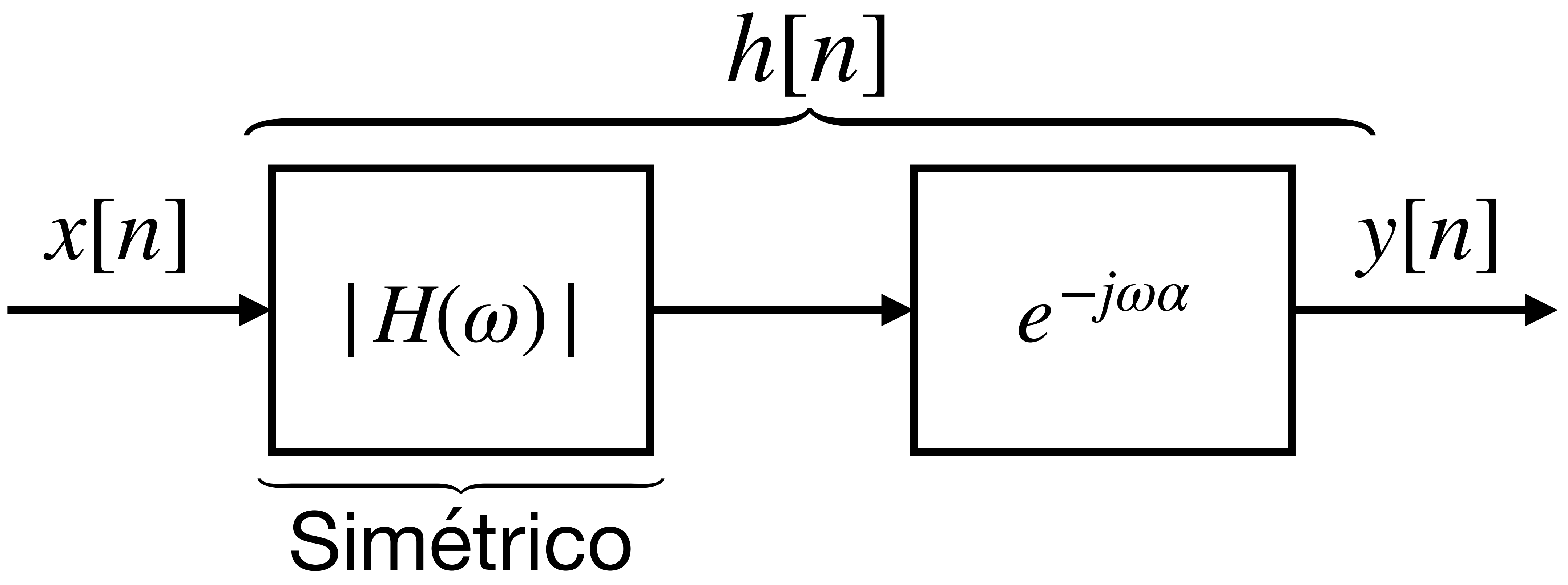
$$h_{PB}[2\alpha - n] = h_{PB}[n]\ .$$

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Sistema con Fase Lineal

Generalizando, dado un sistema de fase lineal con magnitud $|H(\omega)|$ simétrica, si $2\alpha \in \mathbb{Z}$, se puede demostrar que $h[n]$ es simétrica alrededor de α, tal que,

$$h[2\alpha - n] = h[n].$$



$$\alpha = n_d \text{ o } \alpha = n_d + \frac{1}{2}.$$

Nota: Si $2\alpha \notin \mathbb{Z} \Longrightarrow h[n]$ no tiene simetría. Sin embargo, la fase es lineal (retardo de grupo constante).

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Fase lineal generalizada

Un sistema de fase lineal generalizada se define de la siguiente forma,

$$H(\omega) = A(\omega)e^{-j\omega\alpha + j\beta} \,,$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes y $A(\omega)$ es una función real (valores positivos o negativos).

Nota: $\angle H(\omega) = \beta - \omega\,\alpha$ + discontinuidades en 0 o π .

$$\implies \tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle H(\omega) = +\,\alpha \;\; \text{(ignorando las discontinuidades)} \,.$$

Si el retardo de grupo $\tau(\omega)$ es constante $\implies$ el sistema es de fase lineal generalizada.

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Fase lineal generalizada

Ejemplo: Sea el filtro rectangular,

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & n < 0, n \geq N. \end{cases}$$

Tiene la siguiente respuesta en frecuencia,

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{e^{-j\omega N/2}\left(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}\right)}{e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right)} = \underbrace{\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}}_{A(\omega)} e^{-j\omega \underbrace{\frac{N-1}{2}}_{\alpha} + \underbrace{0}_{\beta}}$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \text{ y } \beta = 0$$

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Relación entre $h[n]$, α y β

Dados,

$$H(\omega) = A(\omega)e^{-j\omega\alpha + j\beta} = A(\omega)\ \cos(\beta - \omega\alpha) + jA(\omega)\ \sin(\beta - \omega\alpha)\ ,$$

$$H(\omega) = \sum_n h[n]e^{-j\omega n} = \sum_n h[n]\cos(\omega n) - j\sum_n h[n]\sin(\omega n)\ .$$

Combinando ambas expresiones tenemos que

$$\tan(\angle H(\omega)) = \tan(\beta - \omega\alpha) \quad \Longrightarrow \quad \frac{-\sum_n h[n]\sin(\omega n)}{\sum_n h[n]\cos(\omega n)} = \frac{\sin(\beta - \omega\alpha)}{\cos(\beta - \omega\alpha)}\ ,$$

$$\sum_n h[n]\cos(\omega n)\sin(\beta - \omega\alpha) + \sum_n h[n]\sin(\omega n)\cos(\beta - \omega\alpha) = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_n h[n]\sin\big(\omega(n - \alpha) + \beta\big) = 0, \quad \forall\omega, \quad \text{condición necesaria para fase lineal generalizada.}$$

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Relación entre $h[n]$, α y β - Algunos sets de condiciones

- Si $\beta = 0, \pi$ y $2\alpha = M$ es un entero,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin(\omega(n-\alpha)) = 0\,,$$

$$\implies h[2\alpha - n] = h[n] \text{ (simétrico alrededor de } \alpha) \,.$$

- Si $\beta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ y $2\alpha = M$ es un entero, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos(\omega(n-\alpha)) = 0\,,$$

$$\implies h[2\alpha - n] = -\,h[n] \text{ (antisimétrico alrededor de } \alpha).$$

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Relación entre $h[n]$, α y β - Ejemplo

Si $\beta = 0, \pi$ y $\alpha = n_d \in \mathbb{Z}$, entonces $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin(\omega(n - n_d)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n + n_d]\sin(\omega n) = 0,$

Descomponiendo la sumatoria tenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} h[n + n_d]\sin(\omega n) + h[n_d]\sin(0) + \sum_{n=1}^{\infty} h[n + n_d]\sin(\omega n) = 0\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(h[n + n_d] - h[n_d - n]\right) \sin(\omega n) = \sum_{n=n_d+1}^{\infty} \underbrace{\left(h[n] - h[2n_d - n]\right)}_{=0} \sin(\omega n) = 0\,,$$

$$\implies h[n] = h[2n_d - n]\,.$$

Nota: Lo mismo se puede demostrar para $\alpha = n_d + \frac{1}{2}$.

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Sistemas Causales

Si el sistema de fase lineal generalizada es causal entonces

$$h[n] = 0, \quad n < 0,$$

aplicando la condición

$$\sum_n h[n] \sin\left(\omega(n-\alpha)+\beta\right) = 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

y las condiciones de simetría anteriores, tenemos que,

$$h[n] = 0, \quad n > M\,.$$

Nota: Los sistemas causales con fase lineal generalizada son de tipo FIR.

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Sistemas FIR Causales

- Si $\beta = 0, \pi$

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & n < 0, n > M, \end{cases}$$

$\Longrightarrow \; H(\omega) = A_e(\omega)e^{-j\omega\frac{M}{2}}$, donde $A_e(\omega)$ es real y simétrico.

- Si $\beta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & n < 0, n > M, \end{cases}$$

$\Longrightarrow \; H(\omega) = A_o(\omega)e^{-j\omega\frac{M}{2}+j\frac{\pi}{2}}$, donde $A_o(\omega)$ es real y antisimétrico.

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Sistemas FIR Causales - Tipos I y II

Dado $h[n] = h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M,$ (respuesta impulsiva simétrica)

- Tipo I: M par, $M+1$ coeficientes, $M/2+1$ coeficientes independientes,

$$H(\omega) = \left(\sum_{k=0}^{M/2} a[k]\, \cos(\omega k) \right) e^{-j\omega \frac{M}{2}}$$

  donde $a[0] = h[M/2]$ y $a[k] = 2h[M/2-k]$ para $k = 1,\ldots,M/2$.

- Tipo II: M impar, $M+1$ coeficientes, $(M+1)/2$ coeficientes independientes,

$$H(\omega) = \left(\sum_{k=1}^{(M+1)/2} b[k]\, \cos\left(\omega(k - \tfrac{1}{2})\right) \right) e^{-j\omega \frac{M}{2}}$$

  donde $b[k] = 2h[(M+1)/2-k]$ para $k = 1,\ldots,(M+1)/2$.

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Sistemas FIR Causales - Tipos III y IV

Dado $h[n] = -h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M,$ (respuesta impulsiva antisimétrica)

- Tipo III: M par, $M+1$ coeficientes, $M/2$ coeficientes independientes,

$$H(\omega) = \left(\sum_{k=0}^{M/2} c[k] \, \sin(\omega k) \right) e^{-j\omega \frac{M}{2} + j\frac{\pi}{2}}$$

  donde $h[M/2] = 0$ y $c[k] = 2h[M/2 - k]$ para $k = 1, \ldots, M/2$.

- Tipo IV: M impar, $M+1$ coeficientes, $(M+1)/2$ coeficientes independientes,

$$H(\omega) = \left(\sum_{k=1}^{(M+1)/2} d[k] \, \sin\left(\omega (k - \tfrac{1}{2}) \right) \right) e^{-j\omega \frac{M}{2} + j\frac{\pi}{2}}$$

  donde $d[k] = 2h[(M+1)/2 - k]$ para $k = 1, \ldots, (M+1)/2$.

Sistemas de Fase Lineal Generalizada

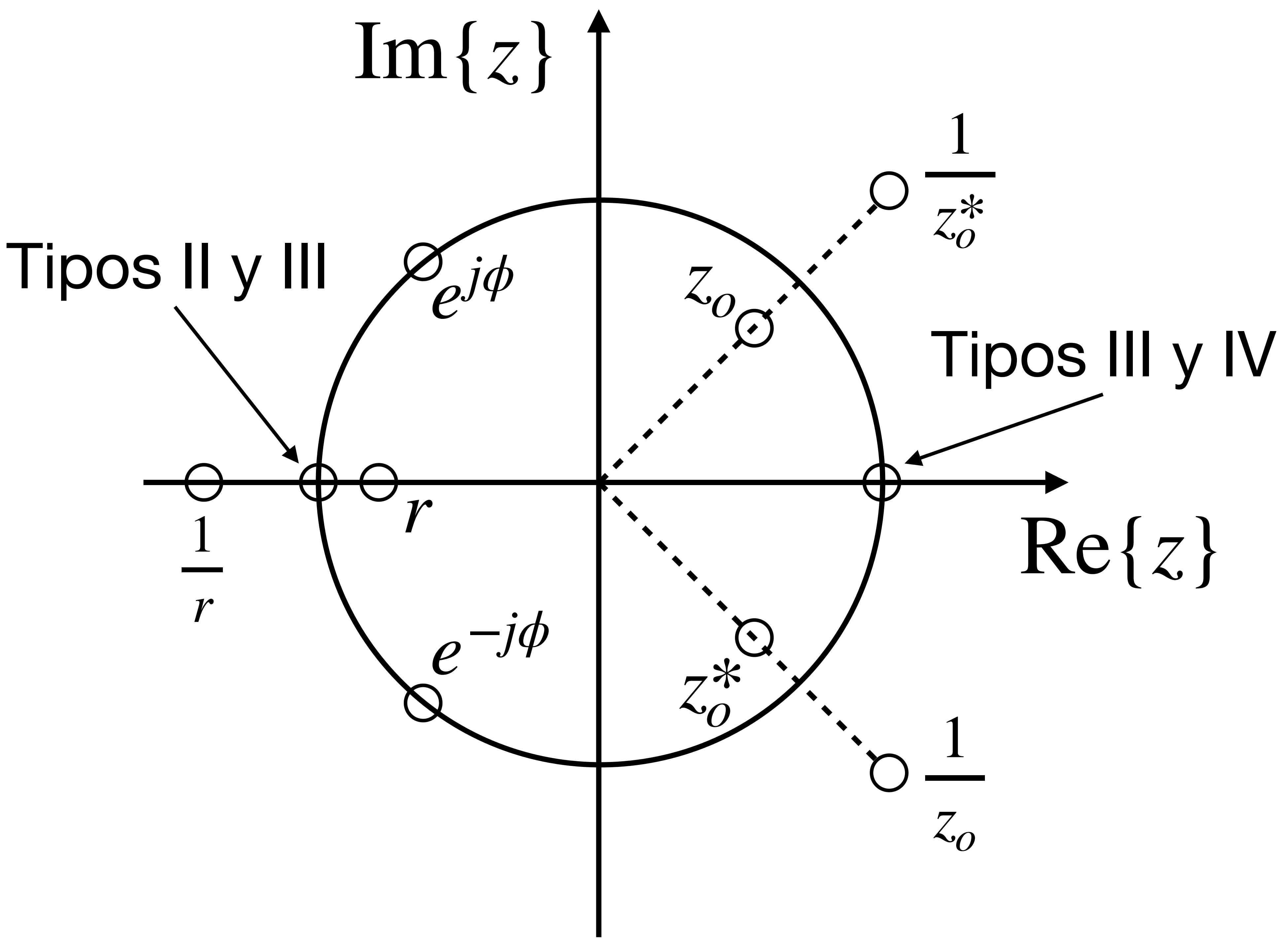
Sistemas FIR Tipos I-IV - Ubicación de ceros

Filtros Tipo I y II:

- Si $h[n] = h[M-n]$ entonces $H(z) = z^{-M}H(z^{-1})$.
- Ceros recíprocos y conjugados: Si $z_o = \rho e^{j\phi}$ es un cero, entonces $1/z_o = \frac{1}{\rho}e^{-j\phi}$ también es un cero, además si $h[n]$ es real entonces $z_o^* = \rho e^{-j\phi}$ y $1/z_o^* = \frac{1}{\rho}e^{j\phi}$ también son ceros.
- Si M es impar (tipo II) entonces $z = -1$ es un cero.

Filtros Tipos III y IV:

- Si $h[n] = -h[M-n]$, entonces $H(z) = -z^{-M}H(z^{-1})$
- Ceros recíprocos y conjugados en z_o, $1/z_o$, z_o^* y $1/z_o^*$.
- En ambos casos, M par o impar, se tiene un cero en $z = 1$.
- Si M es par (tipo III) entonces $z = -1$ es un cero.



Sistemas de Fase Lineal Generalizada

Estructuras para Sistemas FIR Tipos I-IV

- Tipo I: M par, $h[n]$ simétrico, $M/2+1$ coeficientes.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]\big(x[n-k] + x[n-M+k]\big) + h[\tfrac{M}{2}]x[n-\tfrac{M}{2}]$$

- Tipo II: M impar, $h[n]$ simétrico, $(M+1)/2$ coeficientes.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k]\big(x[n-k] + x[n-M+k]\big)\,.$$

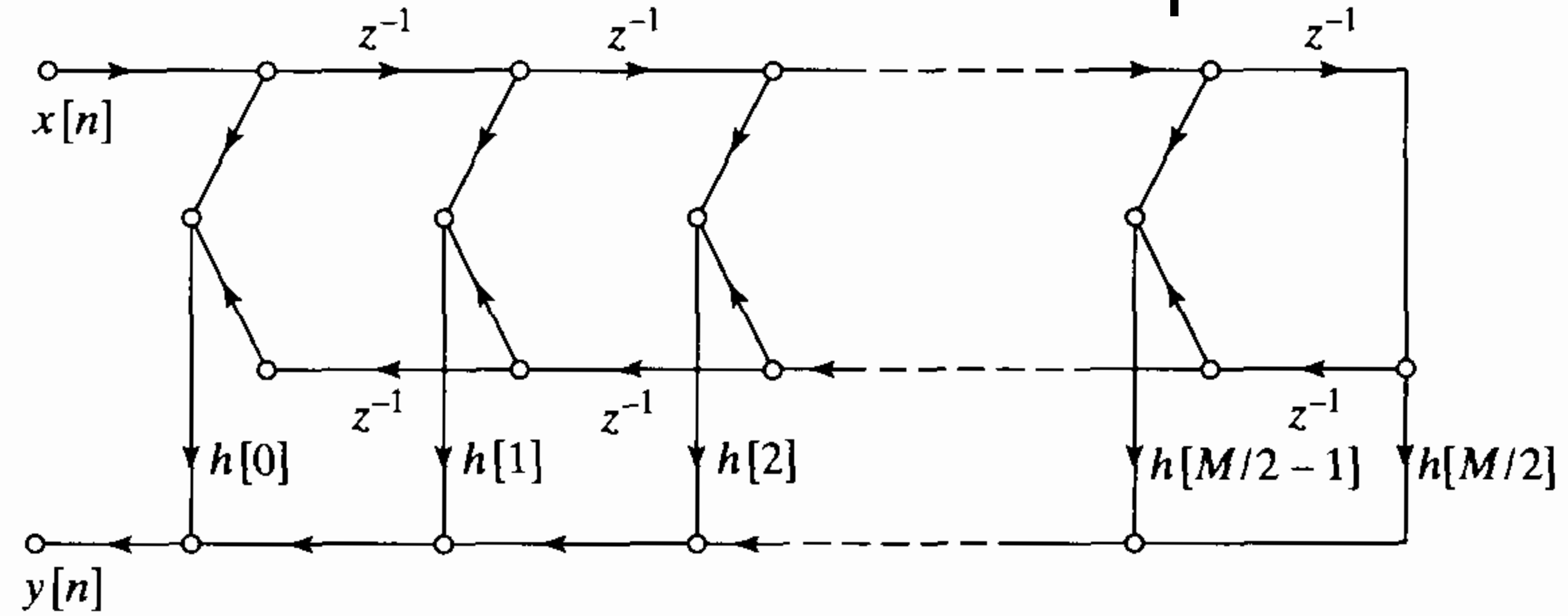
- Tipo III: M par, $h[n]$ antisimétrico, $M/2$ coeficientes.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]\big(x[n-k] - x[n-M+k]\big)\,.$$

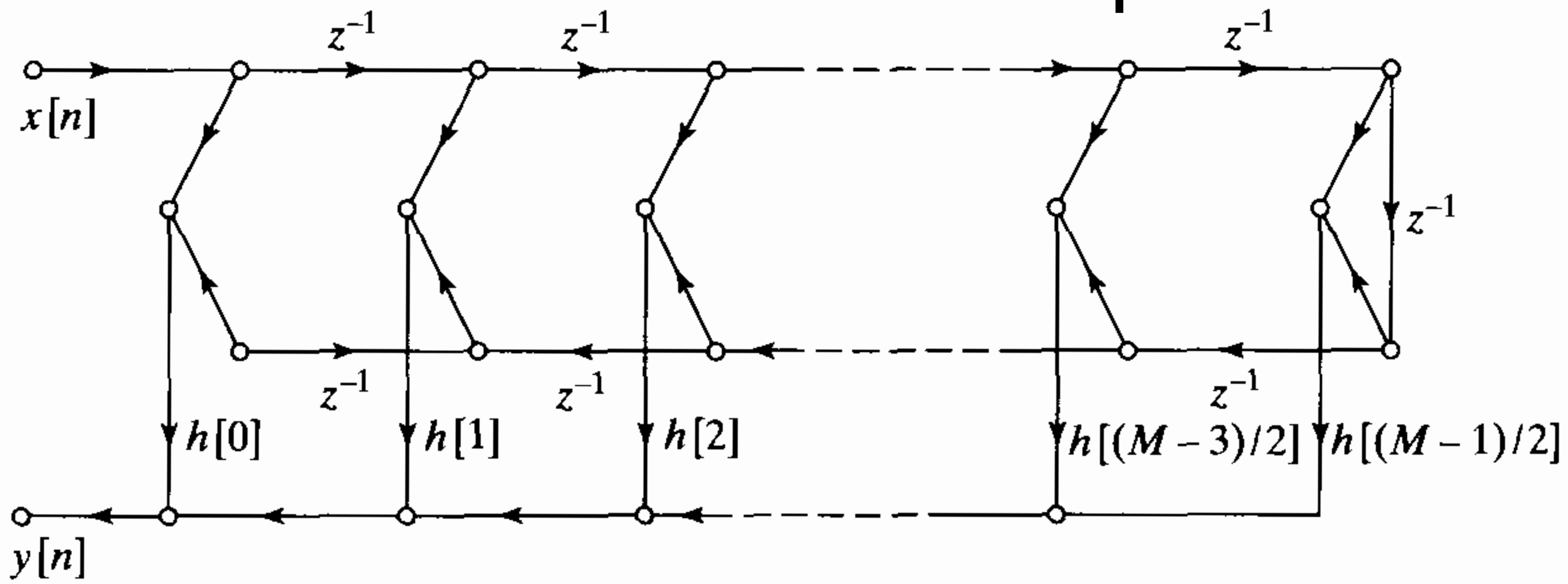
- Tipo IV: M impar, $h[n]$ antisimétrico, $(M+1)/2$ coeficientes.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k]\big(x[n-k] - x[n-M+k]\big)\,.$$

FIR Tipo I



FIR Tipo II



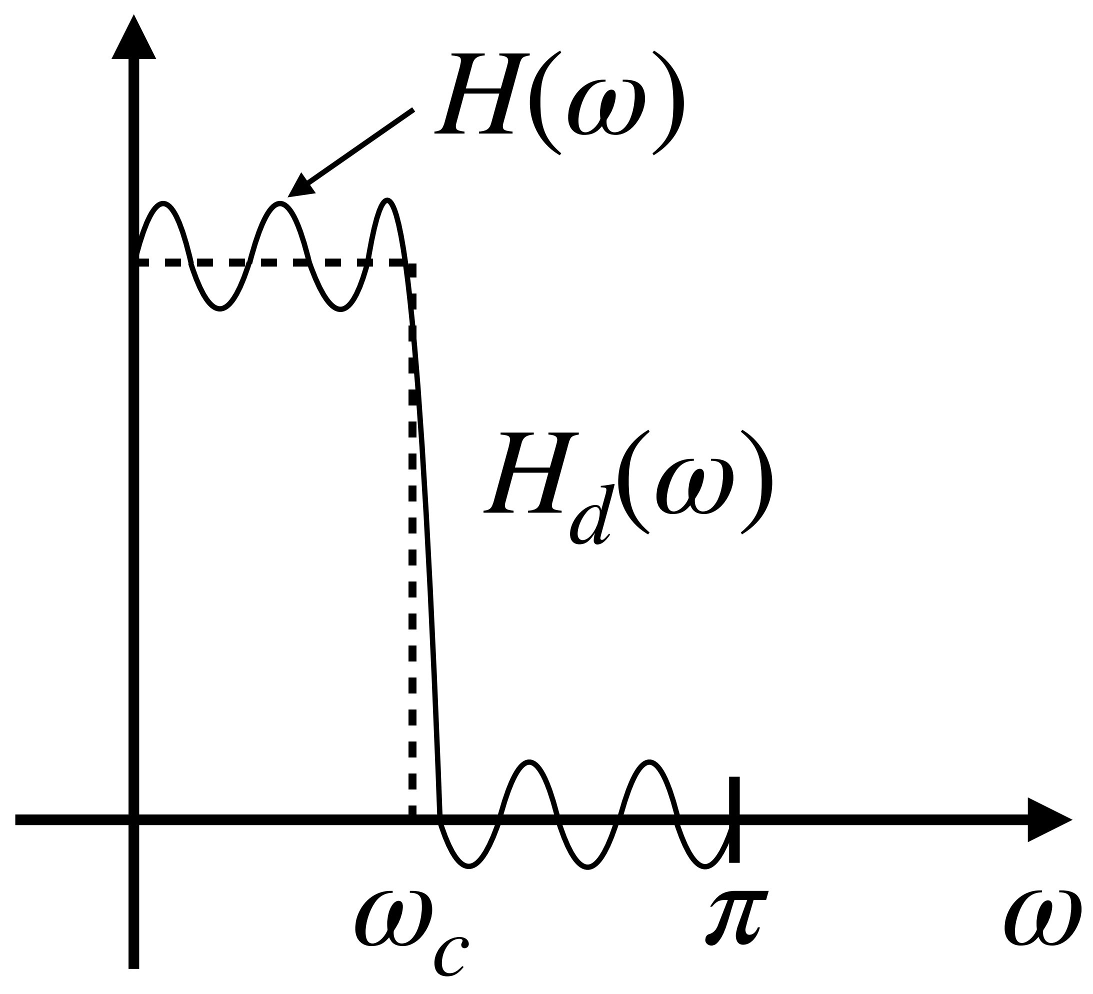
Diseño de Filtros IIR

Diseño de Filtros IIR

Introducción

Dada la respuesta en frecuencia deseada $H_d(\omega)$ o la respuesta impulsiva deseada $h_d[n]$ encontrar la mejor aproximación

$$H(\omega) \rightarrow H_d(\omega) \,.$$



Diseño de filtros IIR (respuesta impulsiva infinita) utilizando ecuaciones de diferencias tal que

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (M + N + 1 \text{ parámetros})$$

Ventaja: Computacionalmente eficiente.

Desventajas: No son simples de diseñar, no siempre son estables, si son causales y estables no tienen fase lineal.

Diseño de Filtros IIR

Transformación del plano-S al plano-Z

- Las técnicas más comunes empleadas se basan en la conversión de filtros análogicos (tiempo-continuo) en filtros discretos tipo IIR.
- Para ello se aplica una función de transformación $s = f(z)$ que mapea el plano-S al plano-Z, para lo cual se debe cumplir con las siguientes condiciones.
  - Un filtro $H_c(s)$ racional (fracción de polinomios en S) debe ser mapeado a un filtro $H(z)$ racional (fracción de polinomios en Z).
  - El eje imaginario del plano-S es mapeado al círculo unitario del plano-Z
    $$\{s = j\Omega \mid -\infty < \Omega < \infty\} \longrightarrow \{z = e^{j\omega} \mid -\pi < \omega < \pi\}.$$
  - El lado izquierdo del plano-S es mapeado al interior del círculo unitario del plano-Z
    $$\{s \mid \mathbf{Re}\{s\} < 0\} \longrightarrow \{z \mid |z| < 1\}.$$
- Los métodos que vamos a revisar son: Impulso Invariante y Transformación Bilineal.

Diseño de Filtros IIR

Filtros analógicos

Idea: Utilizar las herramientas matemáticas existentes para diseñar filtros analógicos IIR.

Filtros analógicos en el dominio de la frecuencia:

* Butterworth: $|H(\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1 + (\Omega/\Omega_p)^{2n}}$ (polos)

* Chebyshev Tipo 1: $|H(\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1 + \varepsilon^2\, T_n^2(\Omega/\Omega_p)}$ (polos)

* Chebyshev Tipo 2: $|H(\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1 + \varepsilon^2\, T_n^2(\Omega_r/\Omega_p)/T_n^2(\Omega_r/\Omega)}$ (ceros + polos)

* Elíptico: $|H(\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1 + \varepsilon^2\, U_n^2(\Omega/\Omega_p)}$ (ceros + polos)

Diseño de Filtros IIR

Impulso invariante

1. Construir $H_c(\Omega)$ usando las técnicas de diseño de filtros para señales continuas.
2. Definir $h[n] = h_c(nT)$ donde $n \in \mathbb{Z}$ y T es el periodo de muestreo.
3. Expresar $H_c(s)$ en fracciones parciales tal que

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{K} \frac{A_k}{s - s_k} \text{ lo cual implica } h_c(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k e^{s_k t} u(t) \,.$$

Tomando muestras tenemos que $h[n] = h_c(nT) = \sum_{k=1}^{K} A_k e^{s_k T n} u[n]$, entonces

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{k=1}^{K} A_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{s_k T} z^{-1})^n = \sum_{k=1}^{K} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \,.$$

Diseño de Filtros IIR

Impulso invariante - Consideraciones

- Aliasing:

  En general se pueden tener efectos de aliasing, por ello este método no es adecuado para el diseño de filtros pasa altos ya que $H(\omega)$ va a estar aliased.

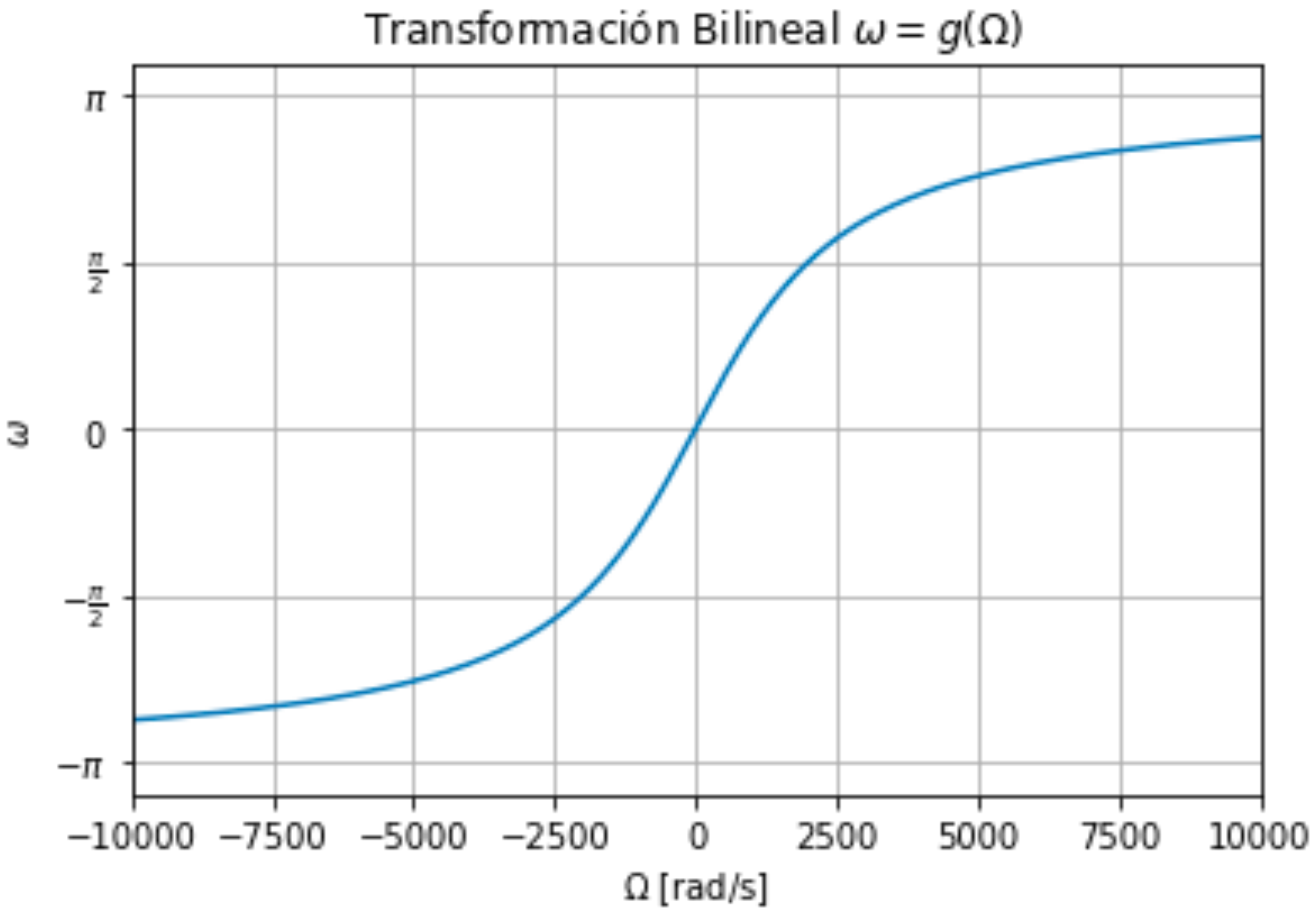
- Estabilidad:

  $H_c(s)$ es estable si los polos $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$ tienen parte real negativa ($\sigma_k < 0$). Dado que los polos de $H(z)$ estarían ubicados en $z_k = e^{s_k T} = e^{\sigma_k T} e^{j\Omega_k T}$, entonces, si $\sigma_k < 0$ los polos tendrían magnitud menor que uno ($|z_k| < 1$) . Por ende, si $H_c(s)$ es estable, entonces $H(z)$ también es estable.

Diseño de Filtros IIR

Transformación Bilineal

Transformación o mapeo no-lineal de la frecuencia continua Ω a la frecuencia normalizada ω.



$$\omega = g(\Omega)$$

Transformación algebraica entre el plano-s y el plano-z.

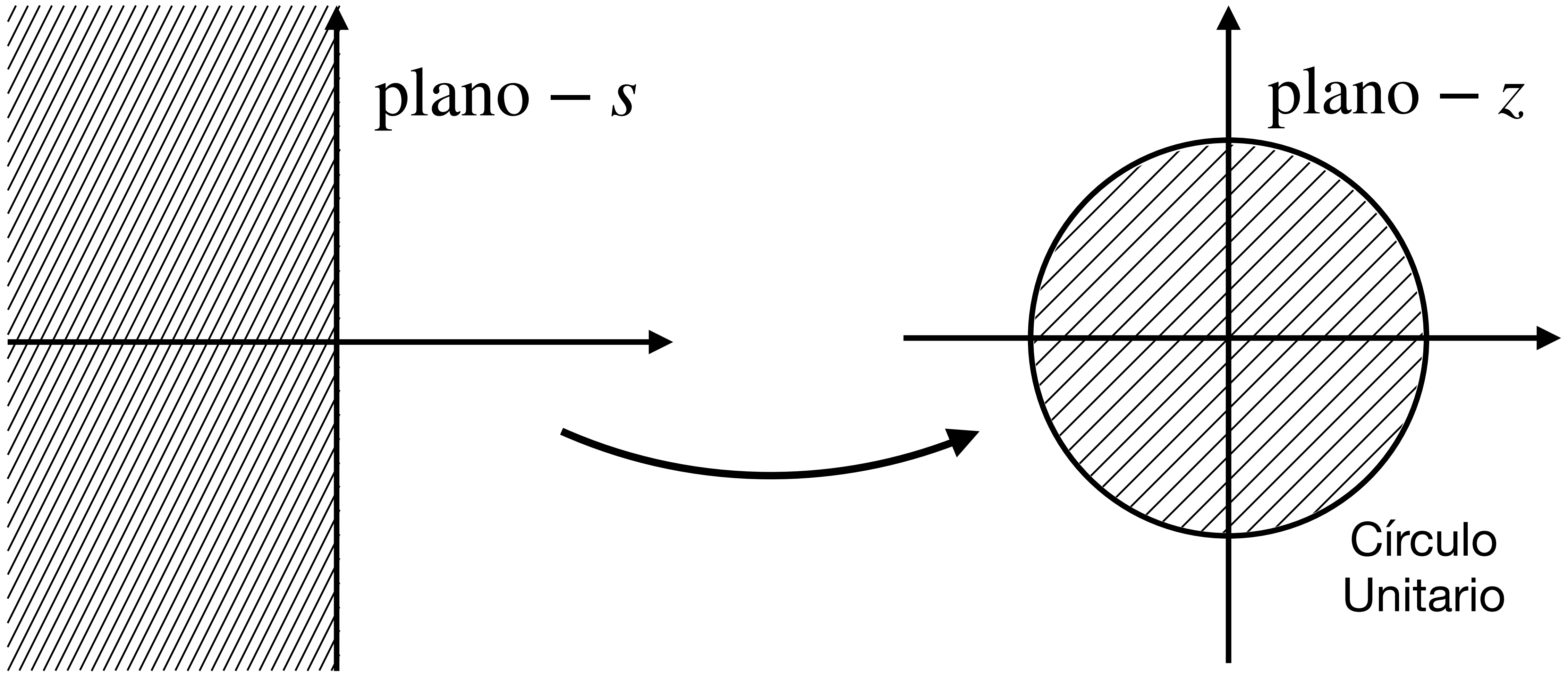
Diseño de Filtros IIR

Transformación Bilineal

Dado $z = \dfrac{1 + s/\alpha}{1 - s/\alpha}$, tenemos que $s = \alpha \dfrac{z-1}{z+1}$, donde α es un parámetro de escala.

Considerando $z = e^{j\omega}$, tenemos que

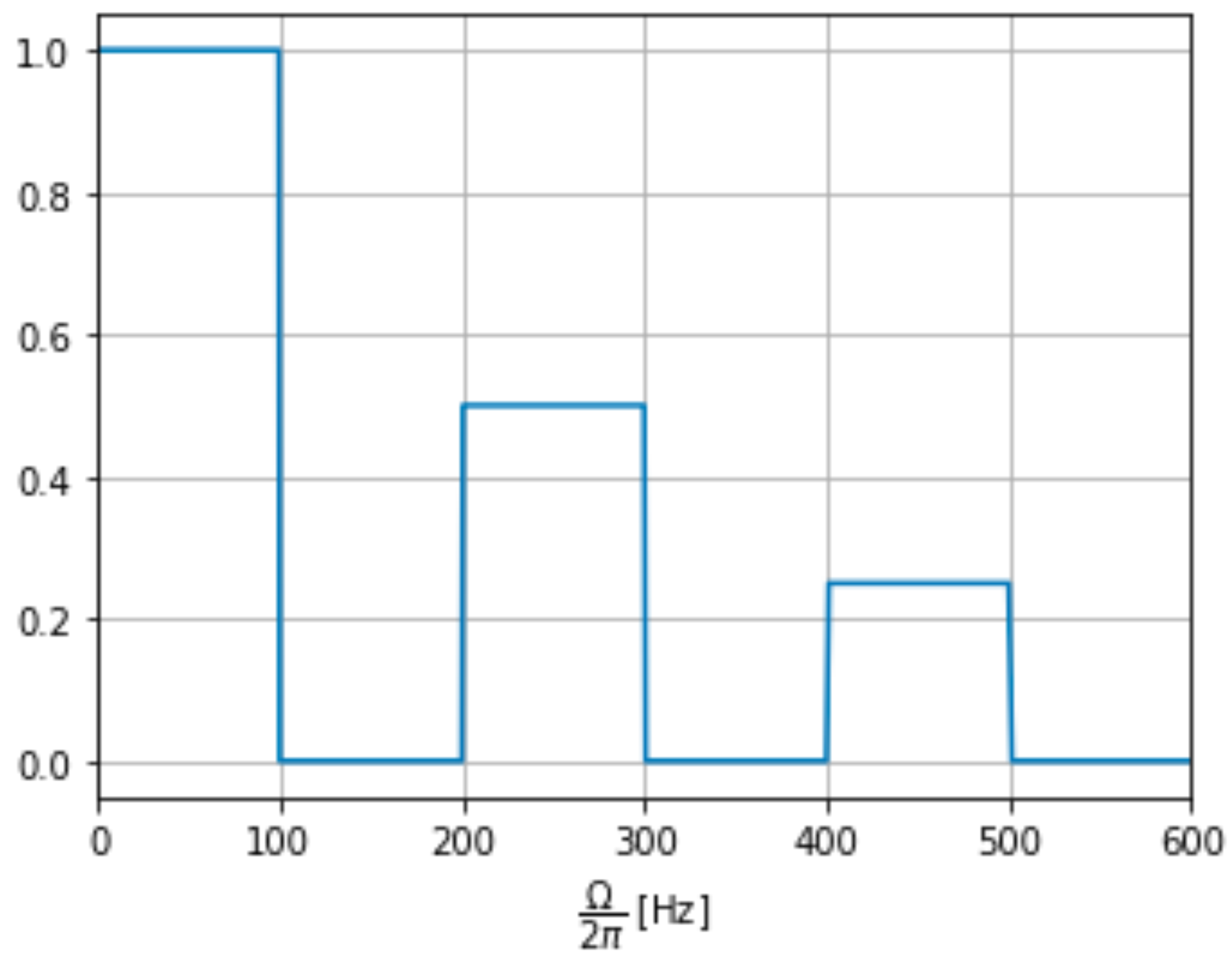
$$s = \alpha \frac{e^{j\omega} - 1}{e^{j\omega} + 1} = \alpha \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}} = \alpha \frac{2j \sin(\omega/2)}{2\cos(\omega/2)} \implies s = j \underbrace{\alpha \tan(\omega/2)}_{\Omega} \text{ luego } \omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right).$$

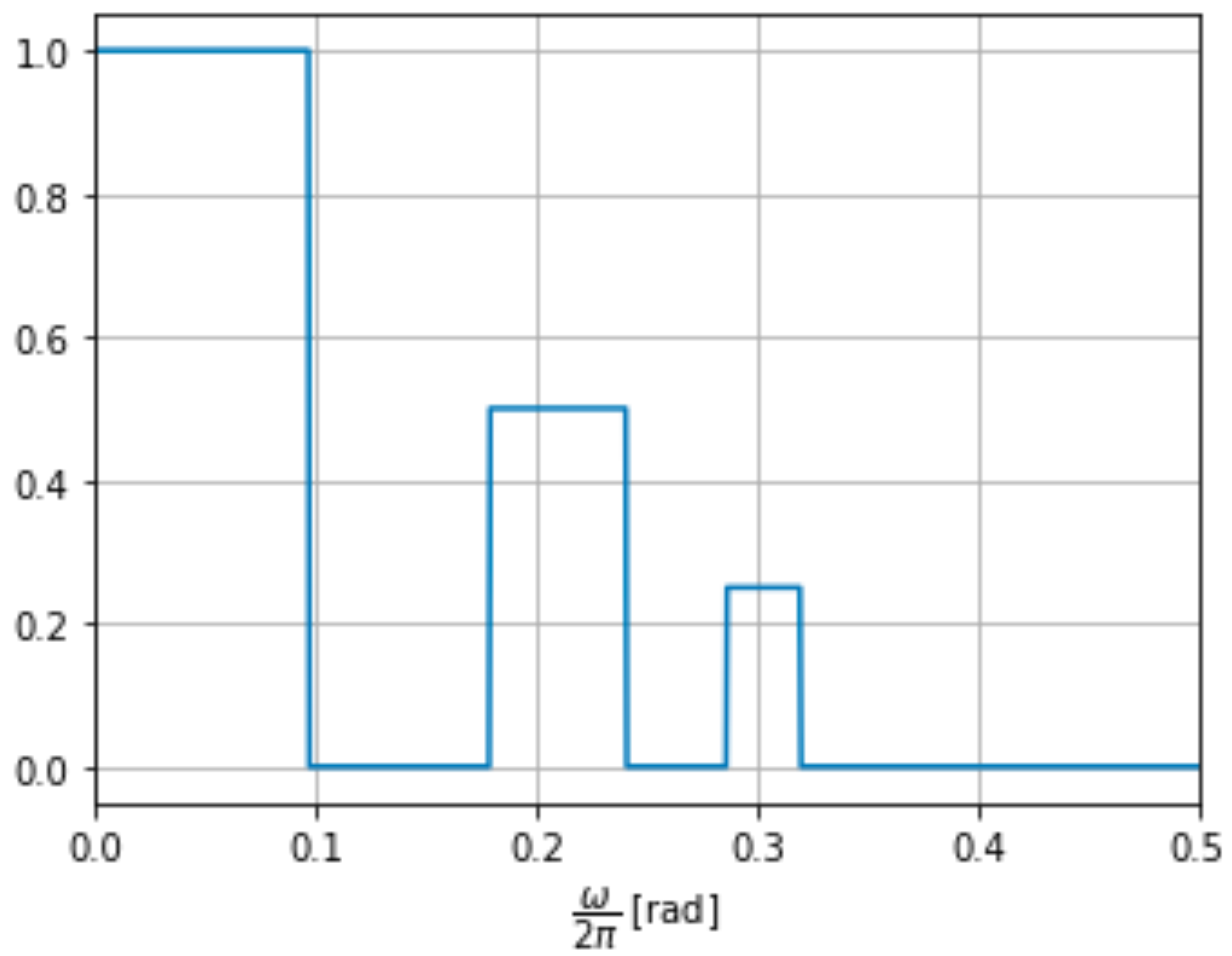


Diseño de Filtros IIR

Transformación Bilineal - Ejemplos

Suma de filtros rectangulares.



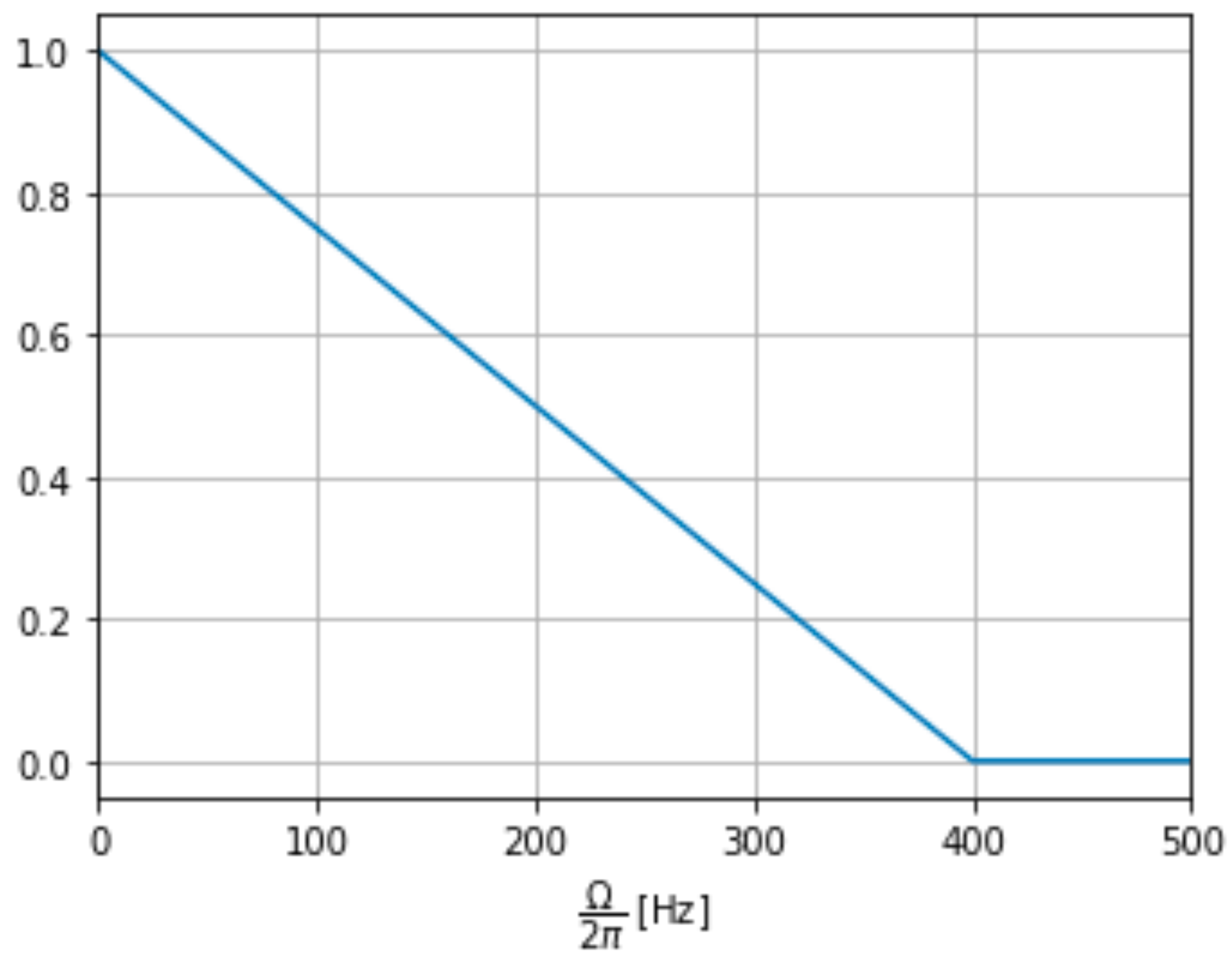


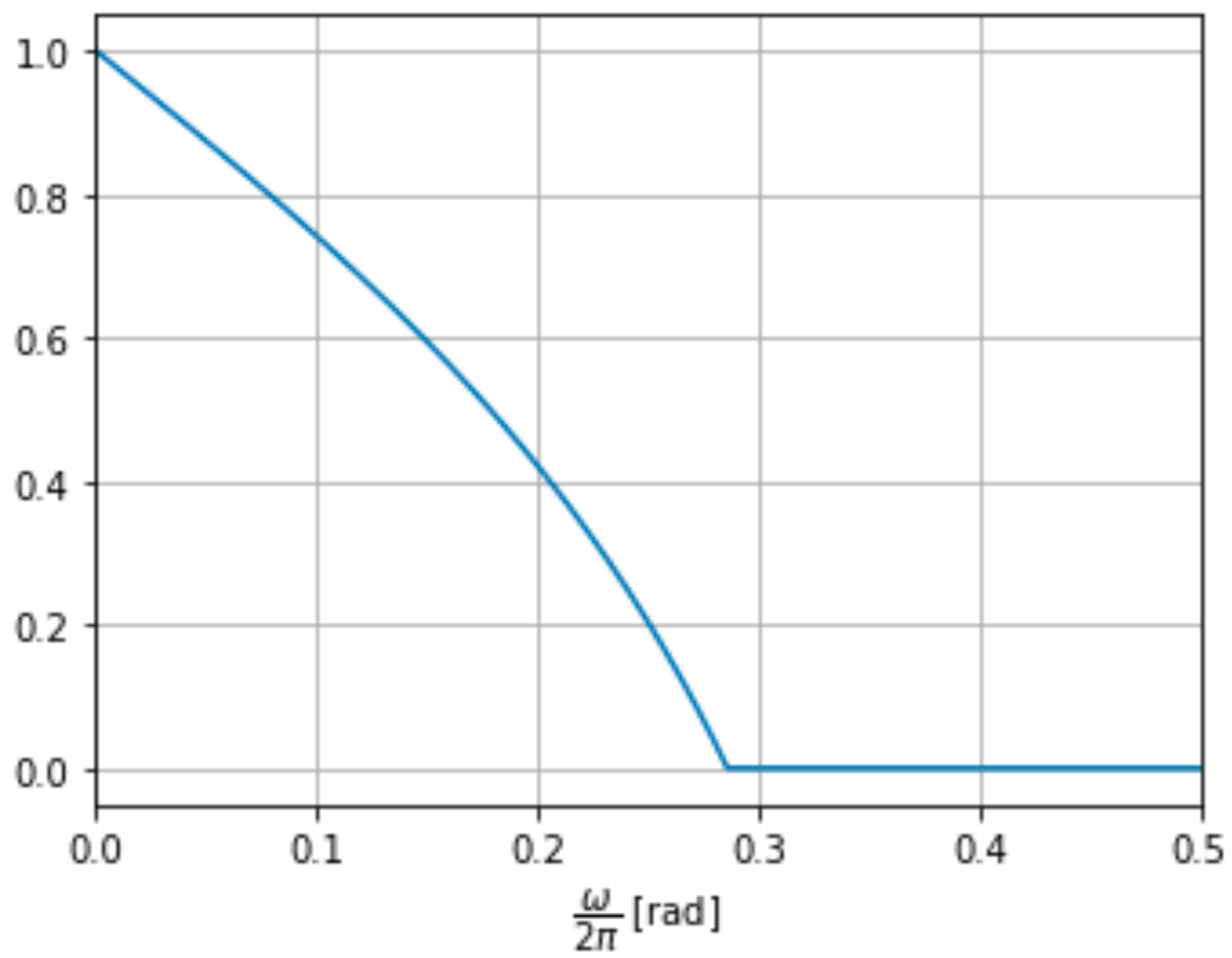
El ancho y ubicación de las frecuencias de corte varía de forma no-lineal de la frecuencia continua Ω a la frecuencia discreta ω.

Diseño de Filtros IIR

Transformación Bilineal - Ejemplos

Filtro triangular





La forma del filtro analógico es distorsionada debido a la transformación no-lineal de la frecuencia continua Ω a la frecuencia discreta ω.

Diseño de Filtros IIR

Transformación Bilineal - Filtros racionales

- Para diseñar el filtro se debe aplicar la siguiente transformación

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s=\alpha\frac{z-1}{z+1}} = H_c(s)\Big|_{s=\alpha\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}.$$

- De este modo los polos (o ceros) de $H_c(s)$ son transformados a polos (o ceros) de $H(z)$, de la siguiente forma

$$s - s_k = \frac{\alpha - s_k}{1+z^{-1}}\left[1 - \frac{\alpha + s_k}{\alpha - s_k} z^{-1}\right],$$

es decir,

$s_k \longrightarrow z_k = \dfrac{\alpha + s_k}{\alpha - s_k}$, sin embargo, es posible que se añadan ceros en $z = -1$.

Diseño de Filtros IIR

Transformación Bilineal - Método

Dado

$$H_c(s) = \beta_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}(s - \zeta_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s - s_k)},$$

aplicando la transformación bilineal tenemos que:

$$H_z(s) = G \frac{(1 + z^{-1})^{N-M} \prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k z^{-1})}$$

donde

$$c_k = \frac{1 + \zeta_k/\alpha}{1 - \zeta_k/\alpha}, \qquad p_k = \frac{1 + s_k/\alpha}{1 - s_k/\alpha} \qquad \text{y} \qquad G = \beta_0 \alpha^{M-N} \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - \zeta_k/\alpha)}{\prod_{k=1}^{N}(1 - s_k/\alpha)}.$$

Nota: La transformación bilineal preserva el orden del sistema (número de polos N) pero puede incrementar el número de ceros de M a N (cuando $N > M$) añadiendo $(N - M)$ ceros en $z = -1$.

Diseño de Filtros IIR

Transformación Bilineal - Ejercicio

Considere el siguiente filtro analógico

$$H_c(s) = \frac{5(s+2)}{(s+3)(s+4)}.$$

Aplicando la transformación bilineal encuentre $H(z)$ asumiendo que $\alpha = 1$.

Solución: El filtro discreto resultante está dado por

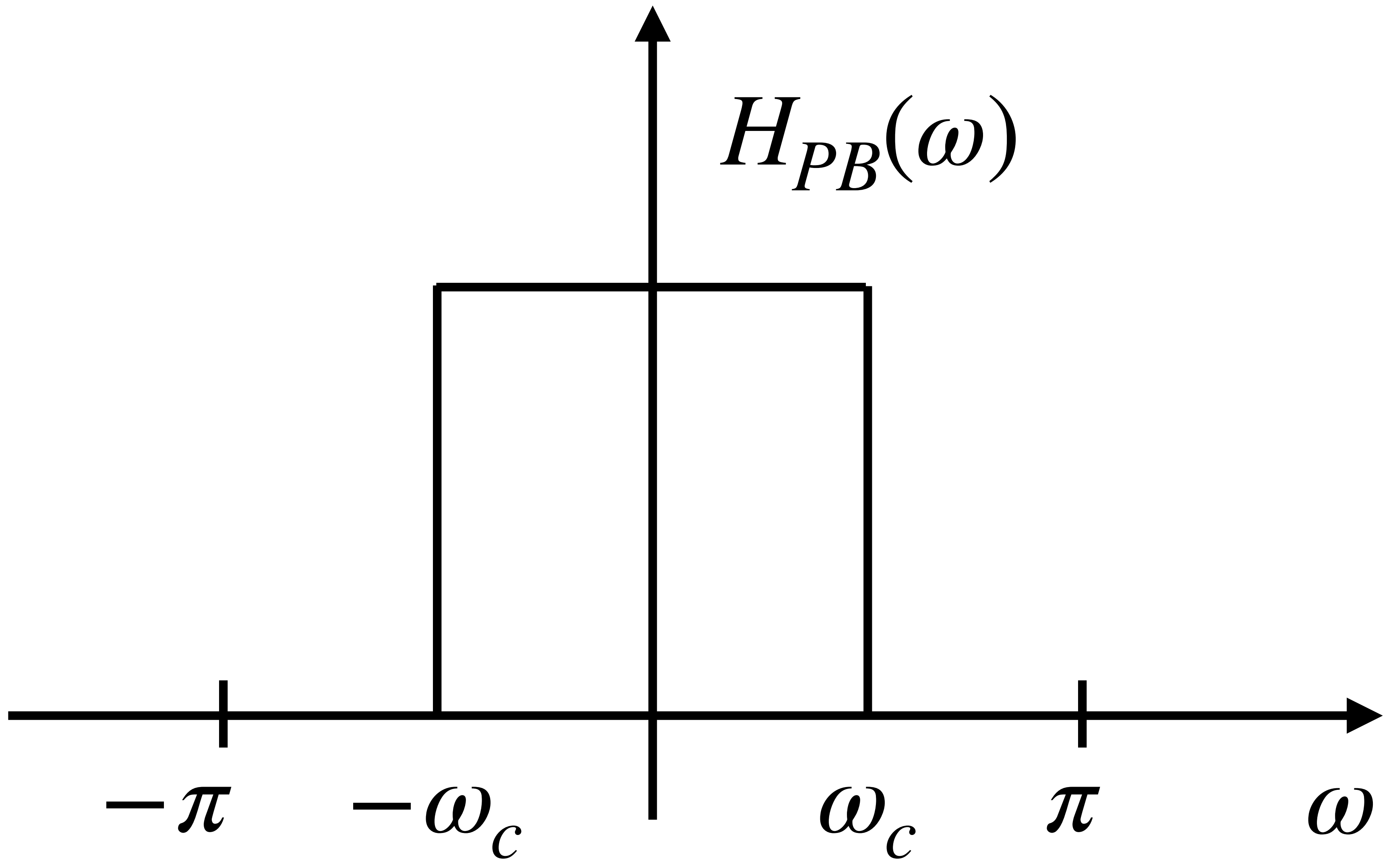
$$H(z) = \frac{3(1+z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}{4(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{3}{5}z^{-1})}.$$

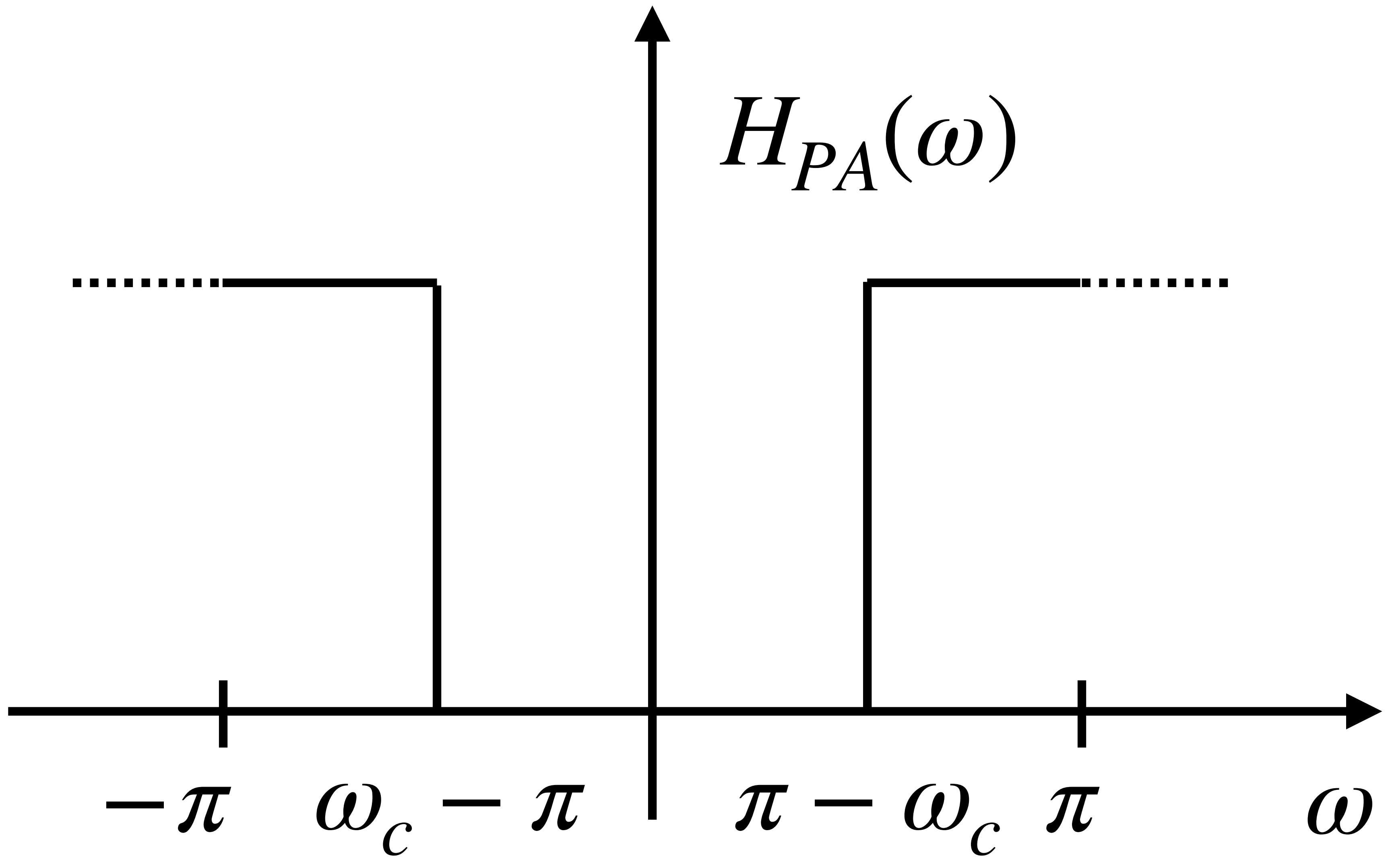
Diseño de Filtros IIR

Transformación del eje ω

Dado un filtro pasa bajos $H_{PB}(z)$, se puede obtener un filtro pasa altos $H_{PA}(z)$, aplicando la siguiente transformación,

$$H_{PA}(z) = H_{PB}(-z) \quad \Longrightarrow \quad H_{PA}(\omega) = H_{PB}(\omega + \pi)\ .$$





¡Muchas gracias!