

IEE352 - Procesamiento Digital de Señales

Clase 07: Diseño de Filtros Digitales 1

Dr. Marco A. Milla

Sección Electricidad y Electrónica (SEE)

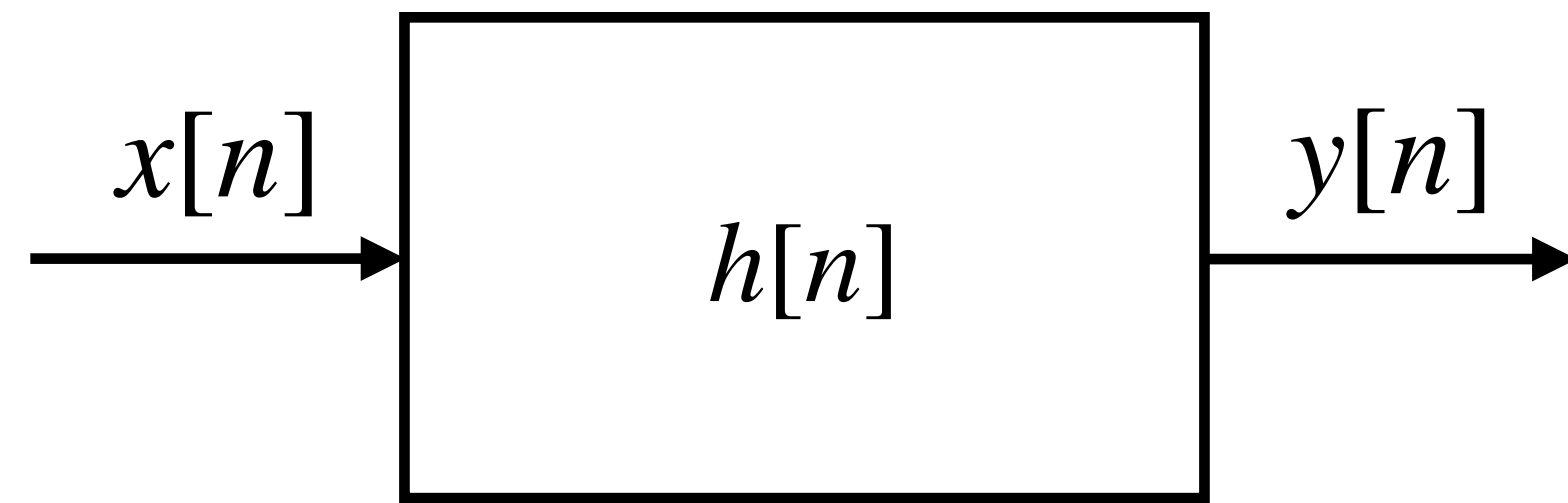
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

email: milla.ma@pucp.edu.pe

Respuesta en Frecuencia de Sistemas LTI

Respuesta en Frecuencia de Sistemas LTI

Distorsión en Magnitud y Fase



$$y[n] = h[n] * x[n]$$

En la frecuencia: DTFT $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$ (respuesta en frecuencia).

En el plano Z: Transf. Z $Y(z) = H(z) X(z)$ (función de transferencia).

Los efectos de un sistema LTI en una señal pueden clasificarse como distorsión en magnitud o distorsión en fase.

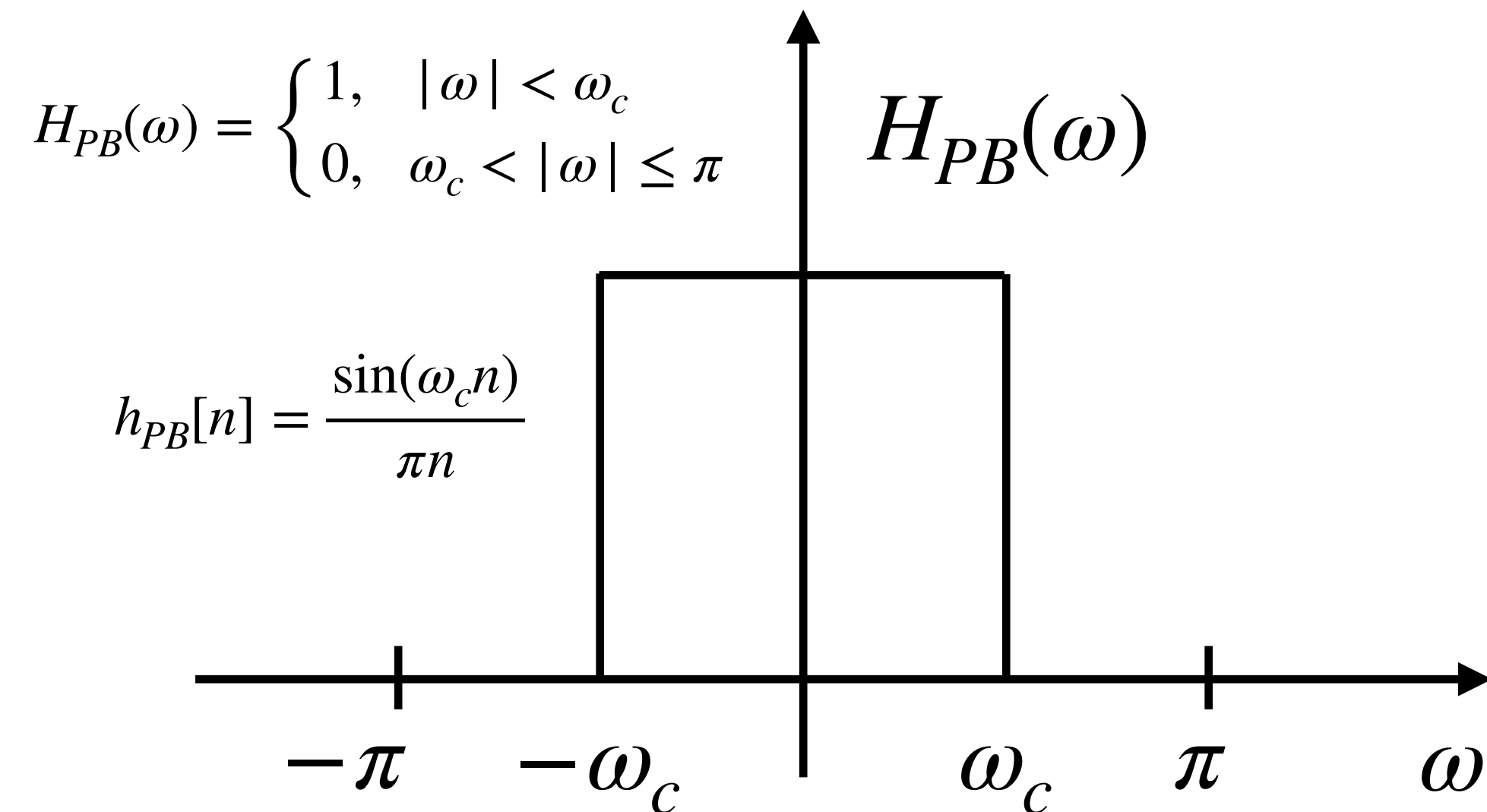
$$\text{Magnitud: } |Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| |X(e^{j\omega})|$$

$$\text{Fase: } \angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega})$$

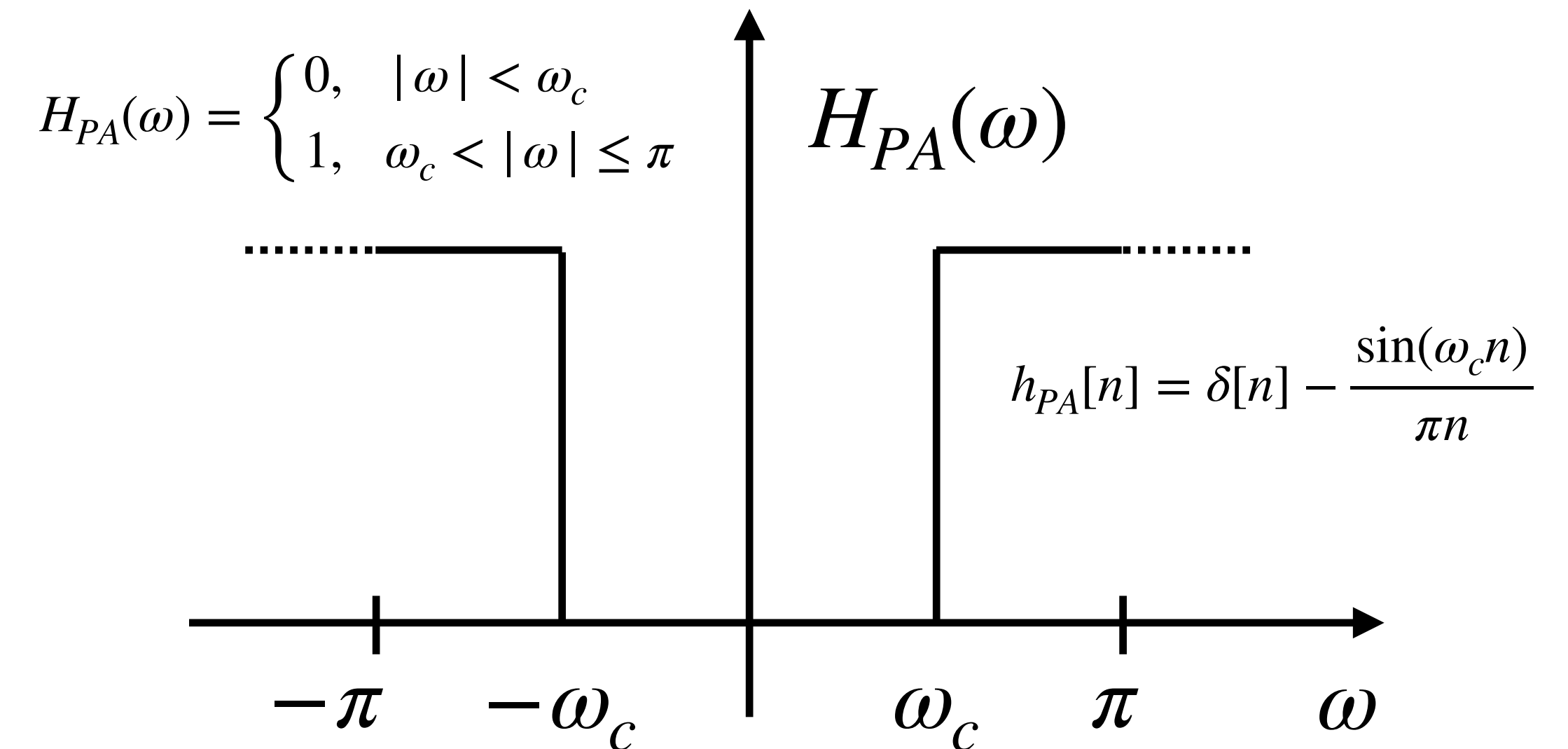
Respuesta en Frecuencia de Sistemas LTI

Filtros ideales selectivos

Filtro Pasa Bajos



Filtro Pasa Altos



Los filtros ideales tienen $h[n]$ de duración infinita, por ende, no son computacionalmente realizables.

Los filtros ideales no producen distorsión en fase, pero, los filtros causales tienen $\angle H(\omega) \neq 0$.

Respuesta en Frecuencia de Sistemas LTI

Filtros ideales - Retardo Ideal

Sea $h_d[n] = \delta[n - n_d]$ para $n_d \in \mathbb{Z}$, entonces,

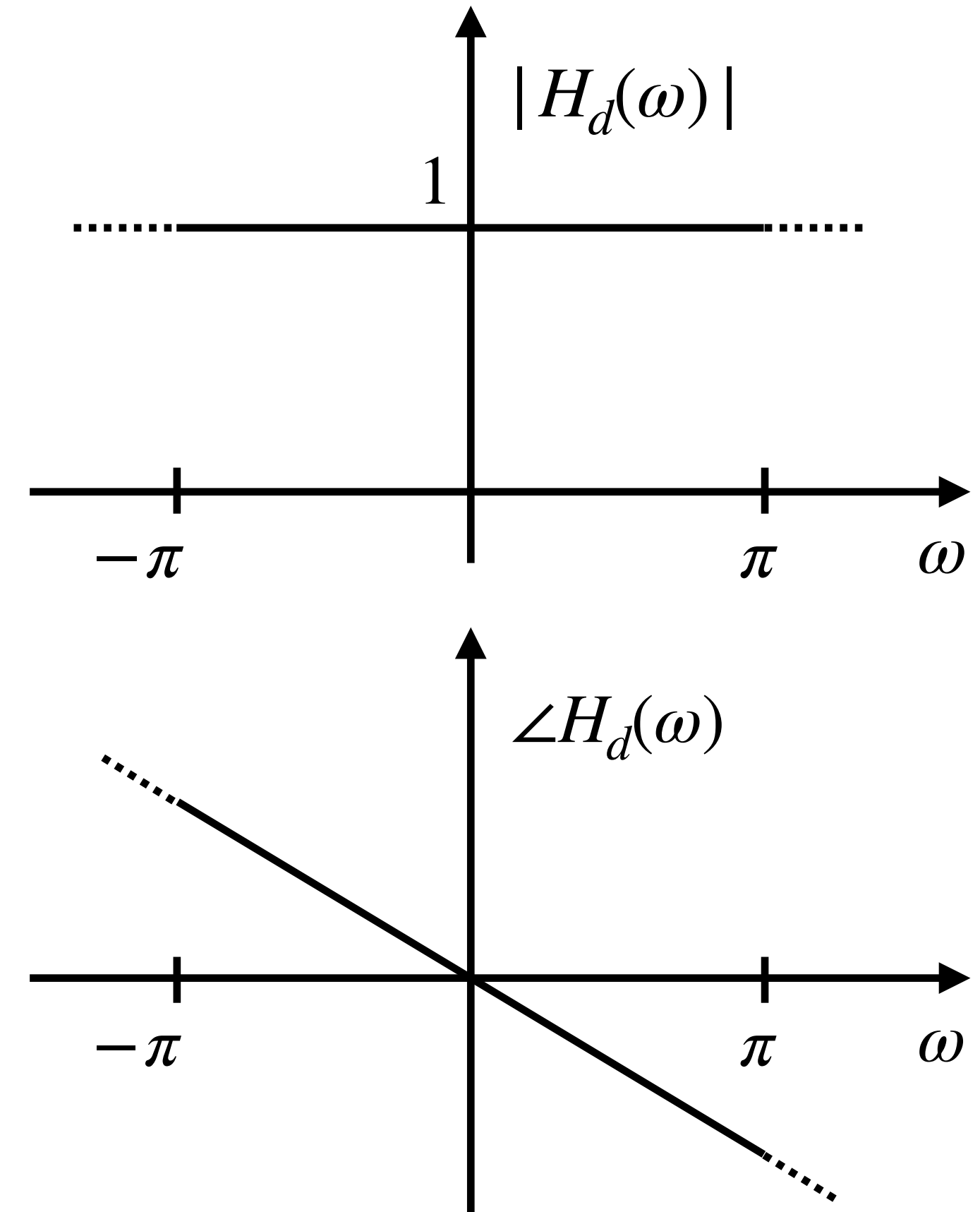
$$H_d(\omega) = e^{-j\omega n_d}.$$

Magnitud: $|H_d(\omega)| = 1$,

Fase: $\angle H_d(\omega) = -\omega n_d$, $|\omega| < \pi$.

Un retardo ideal produce distorsión en fase, pero no en magnitud.

En varias aplicaciones es aceptable que existan retardos en la señal, por ello se busca que un filtro tenga respuesta en frecuencia con fase lineal.



Respuesta en Frecuencia de Sistemas LTI

Filtro ideal Pasa Bajos con fase lineal

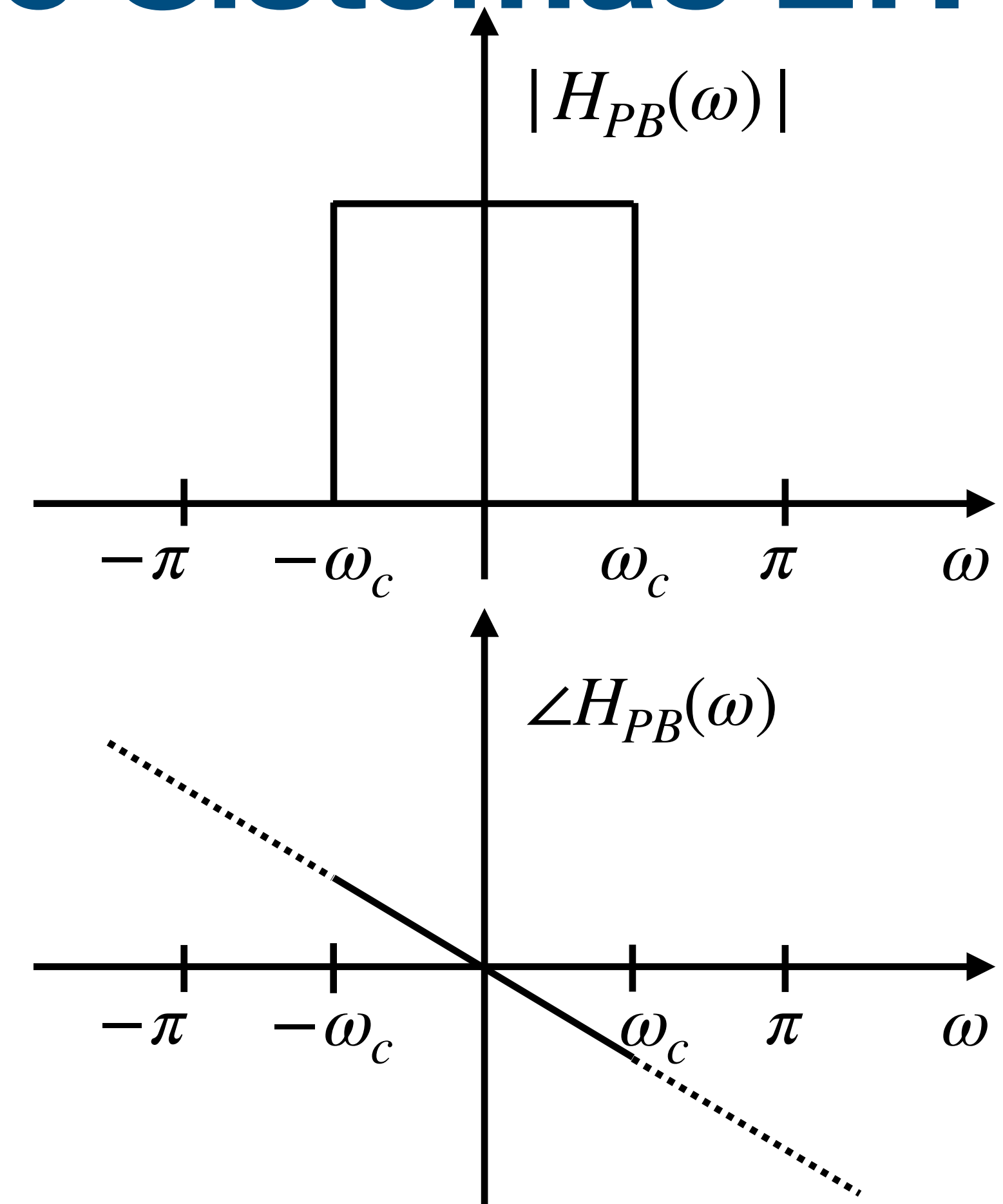
$$\text{Sea } H_{PB}(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

$$\text{donde } n_d \in \mathbb{Z}, \text{ tenemos que } h_{PB}[n] = \frac{\sin(\omega_c(n - n_d))}{\pi(n - n_d)}.$$

Este filtro no es realizable, sin embargo, si consideramos n_d suficientemente largo y truncamos, tenemos que

$$h_{PB}[n] = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_c(n - n_d))}{\pi(n - n_d)}, & 0 \leq n \leq 2n_d, \\ 0, & n < 0, n > 2n_d. \end{cases}$$

Filtro causal con características similares al filtro ideal y además tiene fase lineal. El efecto de distorsión de fase lineal equivale a un retardo en el tiempo.



Respuesta en Frecuencia de Sistemas LTI

Sistemas caracterizados por ecuaciones de diferencias

Los filtros ideales no se pueden implementar computacionalmente, sin embargo, usando sistemas que se pueden representar por ecuaciones de diferencias podemos obtener respuestas que se aproximan a los filtros ideales.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] ,$$

Las ecuaciones de diferencias permiten calcular la salida de un sistema de forma recursiva.

* Causal:
$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k] , \text{ para } n \geq 0,$$

* No causal:
$$y[n-N] = - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_N} x[n-k] , \text{ para } n < N.$$

Respuesta en Frecuencia de Sistemas LTI

Sistemas caracterizados por ecuaciones de diferencias

Tomando la transformada Z, de un sistema que está inicialmente en reposo tenemos que

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \implies H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}.$$

$H(z)$ es la Transformada Z de la respuesta impulsiva $h[n]$, también conocida como la función de transferencia, y puede tomar la siguiente forma,

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \text{ donde } c_k \text{ son ceros y } d_k \text{ son polos de } H(z).$$

Notas:

- El filtro es causal si el ROC de $H(z)$ se extiende hacia fuera del polo de mayor magnitud.
- Si el filtro es causal, para que además sea estable, se requiere que los polos estén dentro del círculo unitario.

Estructuras de Sistemas Discretos

Estructuras de Sistemas Discretos

Representación de sistemas LTI

Sistemas IIR (Infinite Impulse Response)

$$\text{Ec. Dif.: } y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad \text{Func. Transf.: } H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}.$$

Sistemas FIR (Finite Impulse Response)

$$\text{Ec. Dif.: } y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad \text{Func. Transf.: } H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}.$$

Adicionalmente, para ambos tipos de sistemas se cumple la ecuación de convolución,

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k], \text{ donde } h[n] \text{ es la respuesta impulsiva del sistema.}$$

Estructuras de Sistemas Discretos

Representación de sistemas LTI - Ejemplo

Dado $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a z^{-1}}$, $|z| > |a|$, se puede representar en las siguientes formas,

* Resp. Impulsiva: $h[n] = b_0 a^n u[n] + b_1 a^{n-1} u[n-1]$.

* Ec. Dif.: $y[n] - a y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$.

Representando como una fórmula recursiva tenemos

$$y[n] = a y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] .$$

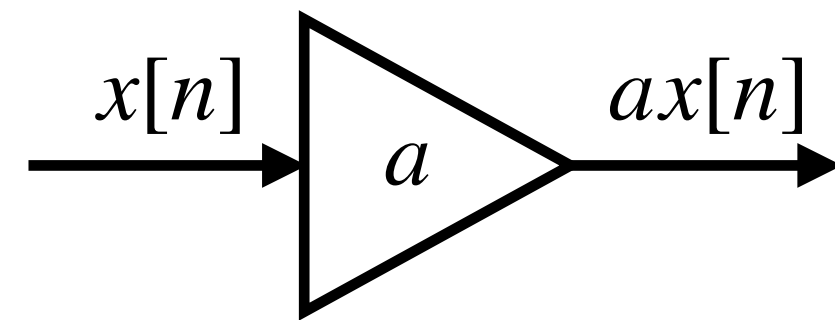
Esta expresión es mucho más fácil de implementar que la convolución discreta (particularmente para sistemas de respuesta impulsiva infinita). Sin embargo, esta no es la única representación, ni la más eficiente para el cálculo de $y[n]$.

Estructuras de Sistemas Discretos

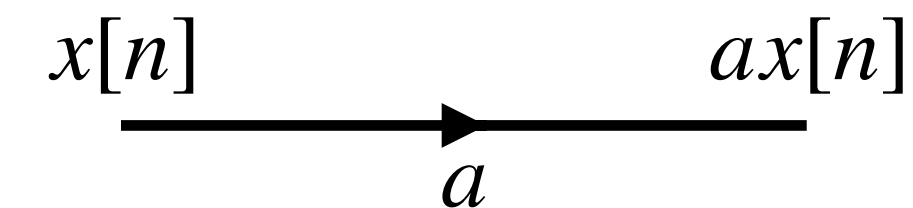
Representación gráfica

Un sistema se puede representar gráficamente por medio de diagramas de bloques o por diagramas de flujos de señal. Existen múltiples alternativas para representar un sistema.

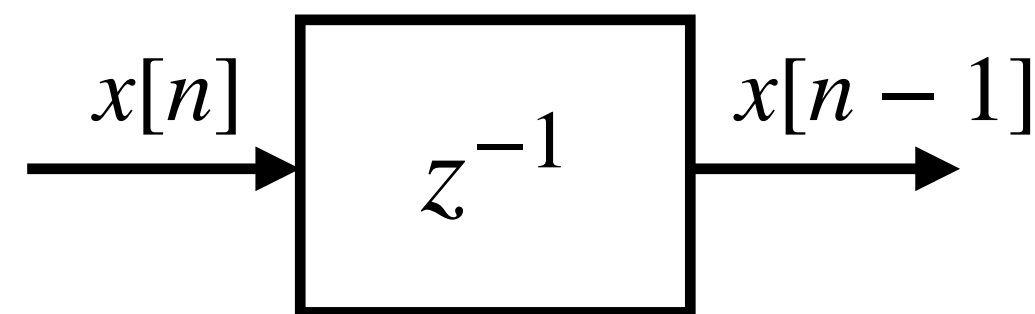
* Multiplicador



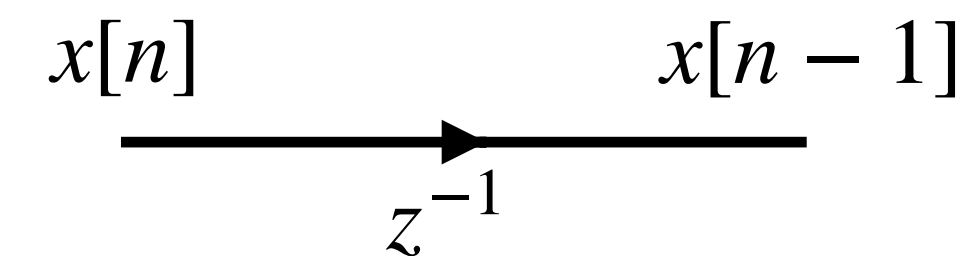
\equiv



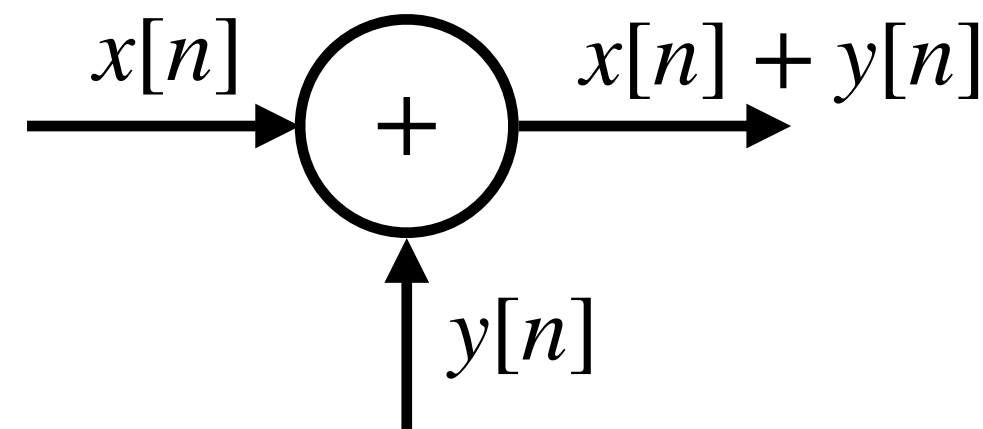
* Retardo Unitario



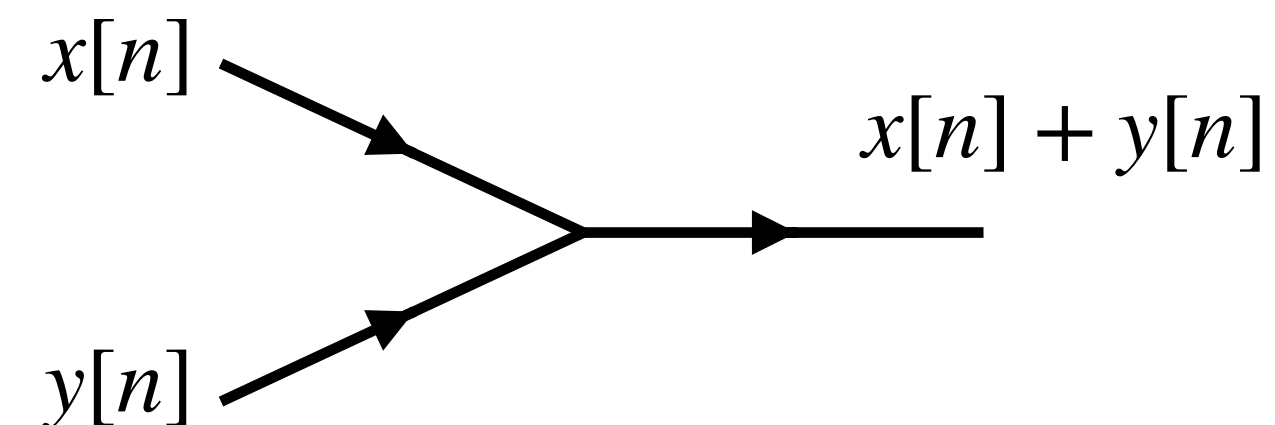
\equiv



* Sumador



\equiv



Estructuras de Sistemas Discretos

Forma Directa I

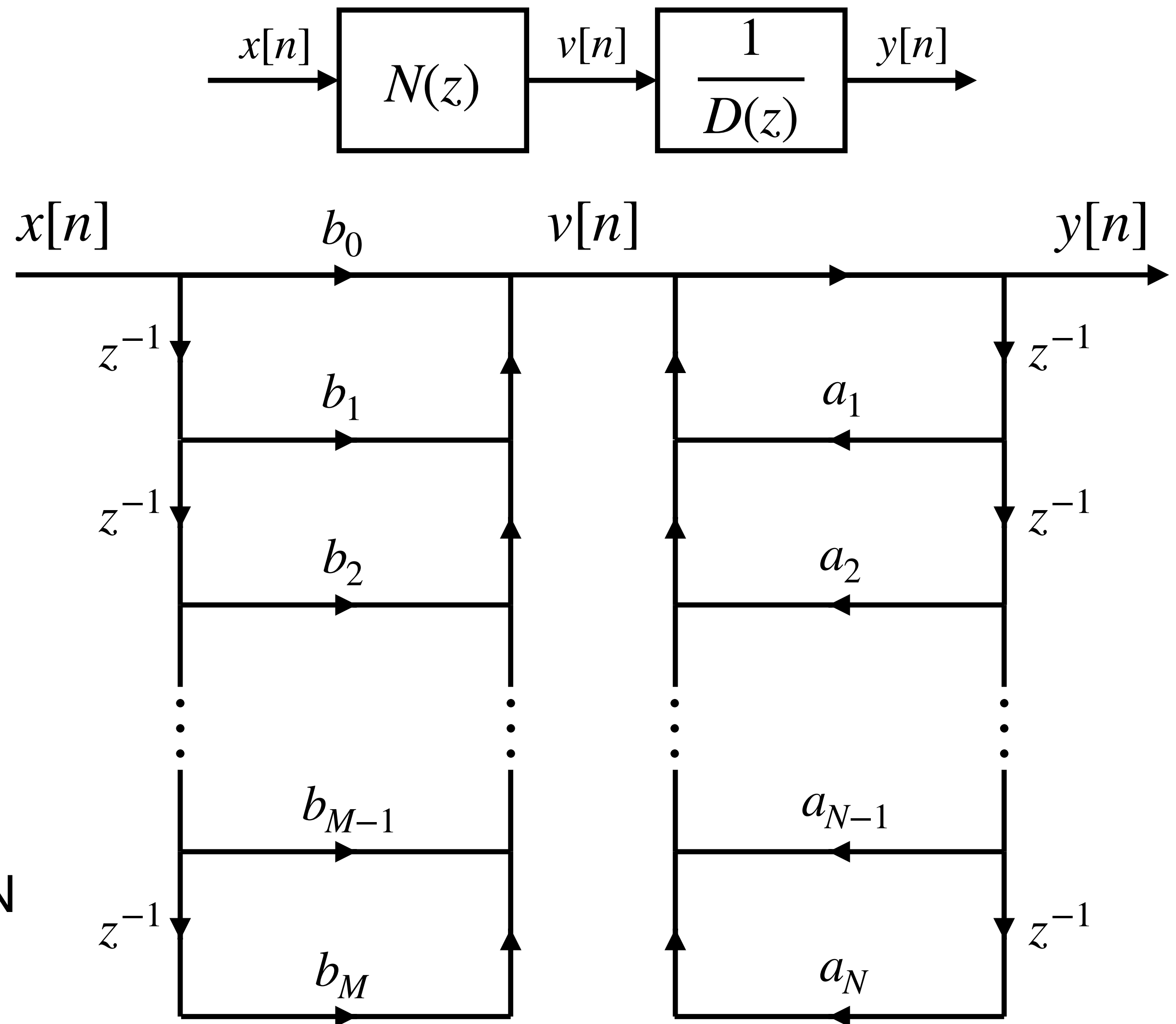
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n - k] + v[n]$$

Coeficientes: $M+N+1$ Retardos: $M+N$

No es la forma más eficiente.



Estructuras de Sistemas Discretos

Forma Directa II

Dado $W(z) = \frac{1}{D(z)}X(z)$ y $Y(z) = N(z)W(z)$,

$$* W(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} X(z)$$

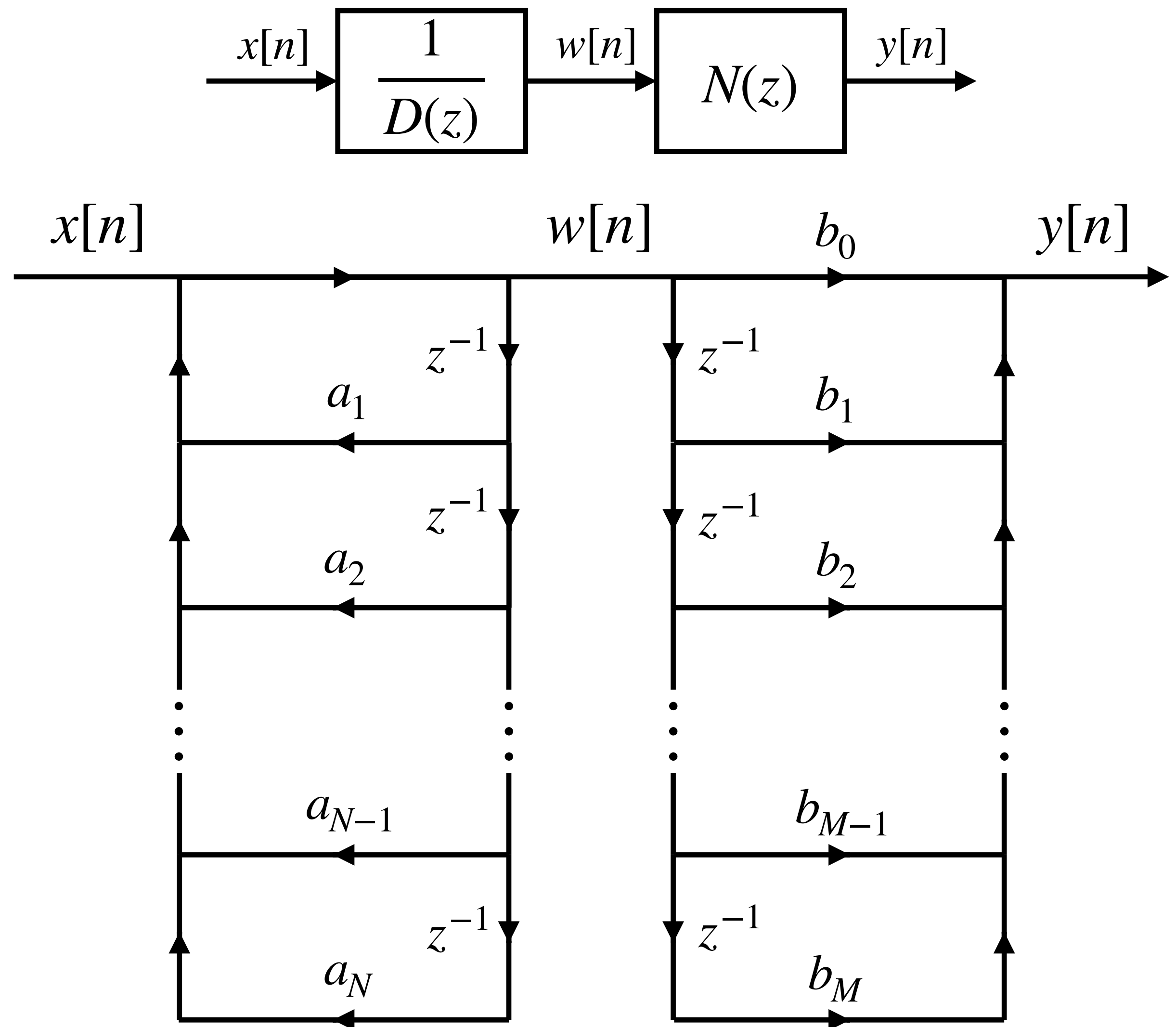
$$\Rightarrow w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n]$$

$$* Y(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) W(z)$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k]$$

Coeficientes: $M+N+1$

Retardos: $M+N$



Estructuras de Sistemas Discretos

Forma Directa II - Canónica

Implementación:

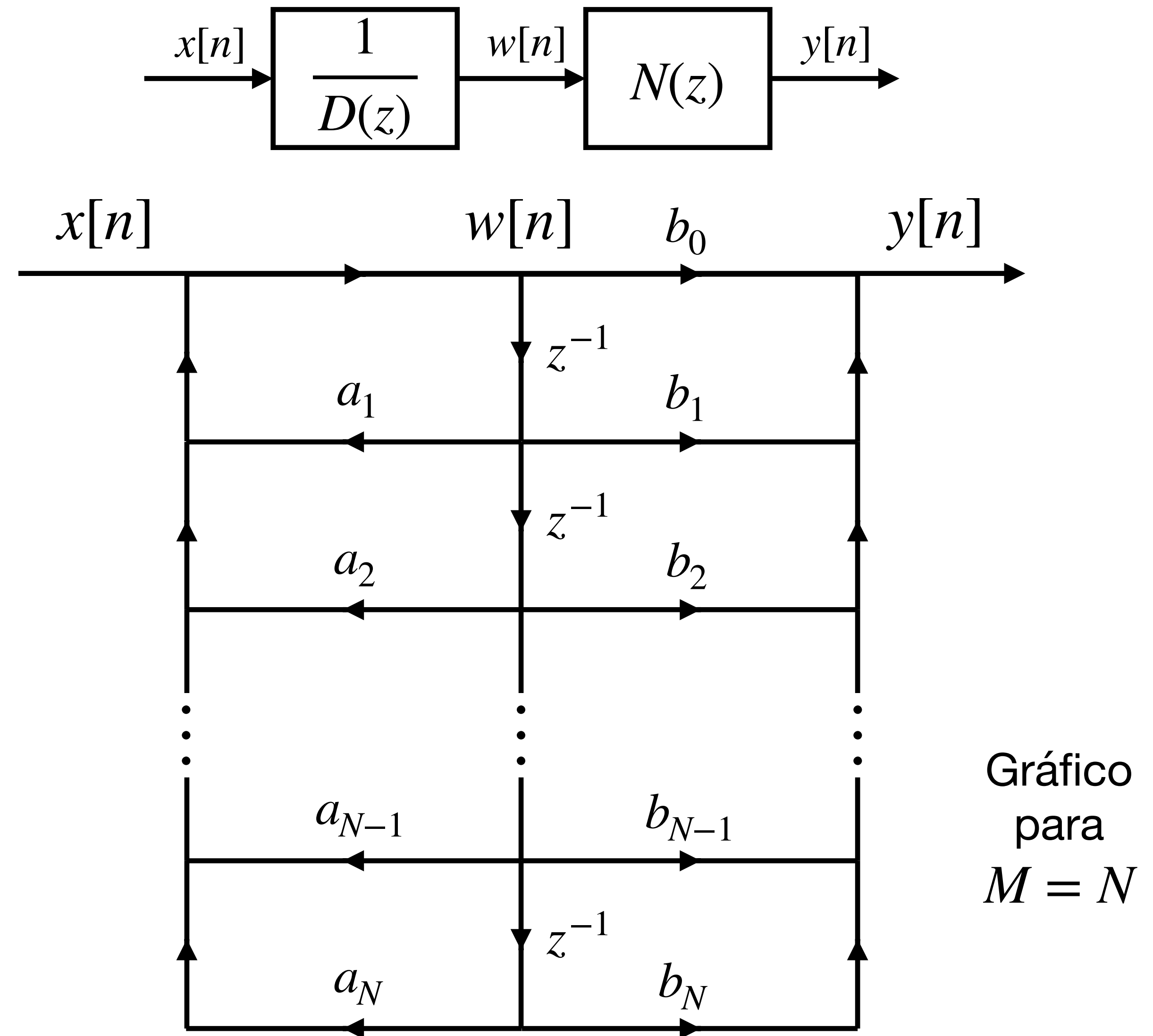
$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k]$$

Coeficientes: $M+N+1$ Retardos: $\max(M,N)$

En la forma Directa II se optimiza el número de retardos por ello recibe el nombre de canónica.

Nota: Las formas directas son sensibles a ruidos de cuantización y no son recomendables en aplicaciones prácticas.



Estructuras de Sistemas Discretos

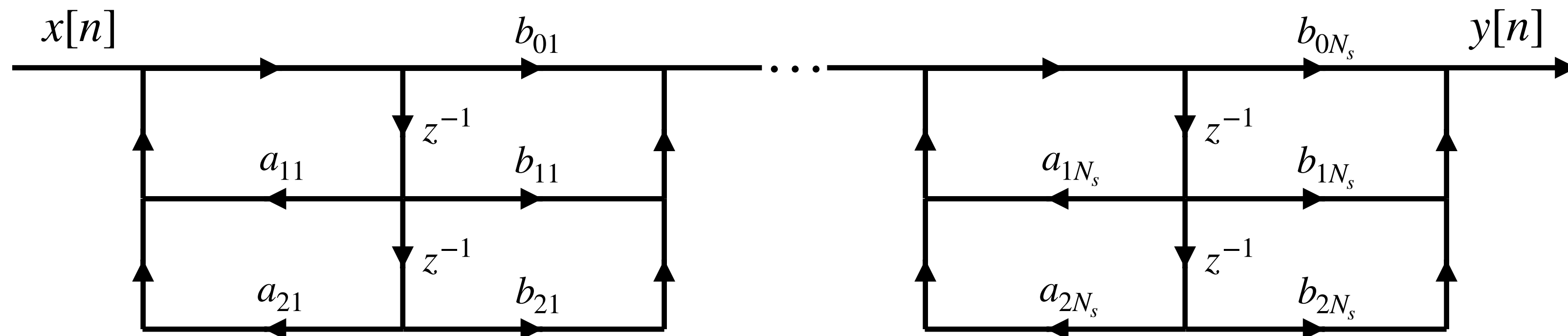
Forma en Cascada

Dado $H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$, los polos y ceros pueden agruparse en polinomios de 2do orden, tal que

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}},$$

donde N_s es el número de etapas.

Nota: Forma robusta al ruido de cuantización. La ganancia del sistema está distribuida en las diferentes etapas.



Estructuras de Sistemas Discretos

Forma en Paralelo

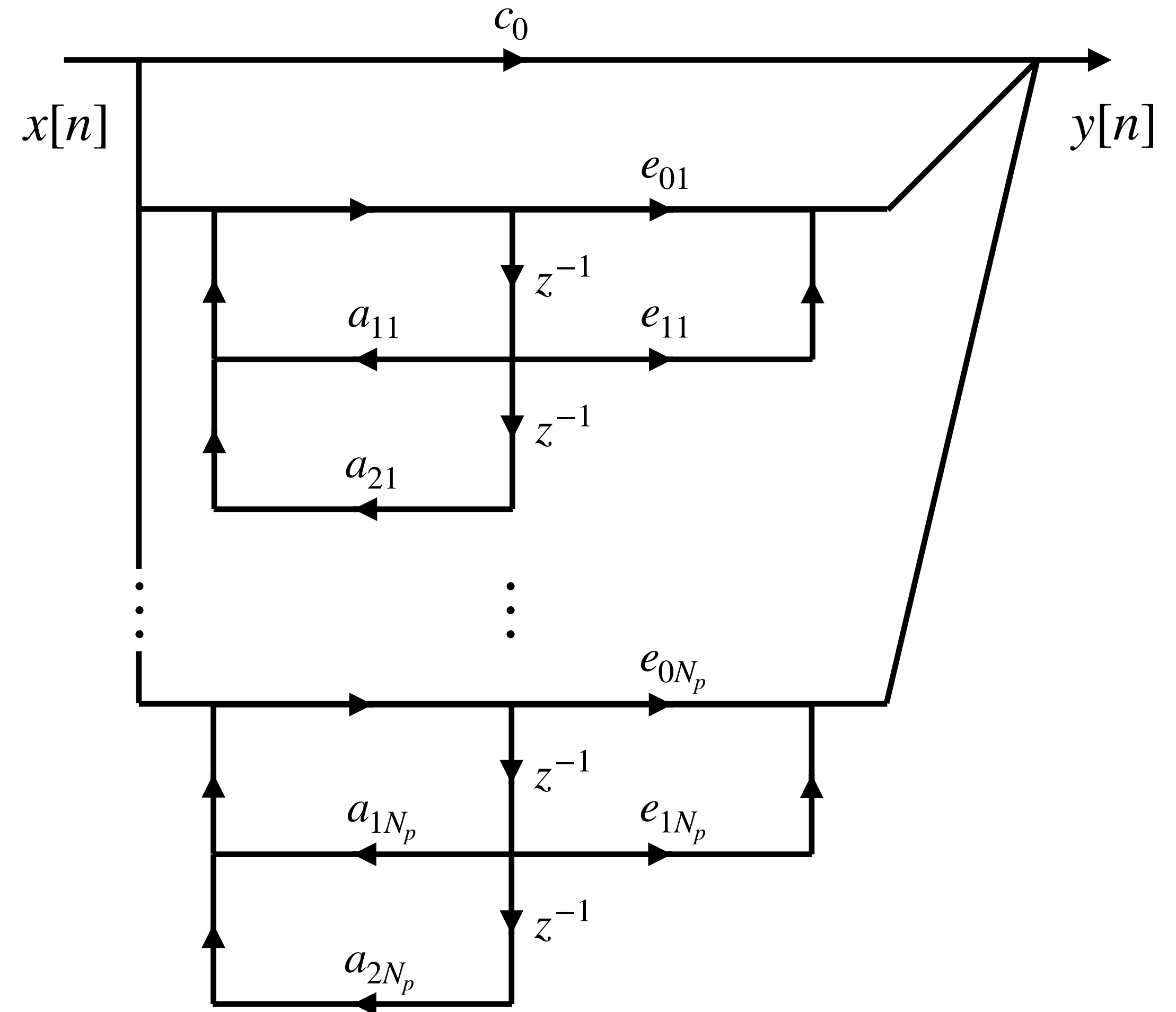
Dado $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$, aplicando

expansión en fracciones parciales y agrupando en polinomios de segundo orden, tenemos que

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_o} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_p} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{0k} z^{-1} - a_{1k} z^{-2}},$$

donde $N_o = M - N$, en el caso que $M \geq N$, y N_p es el número de etapas.

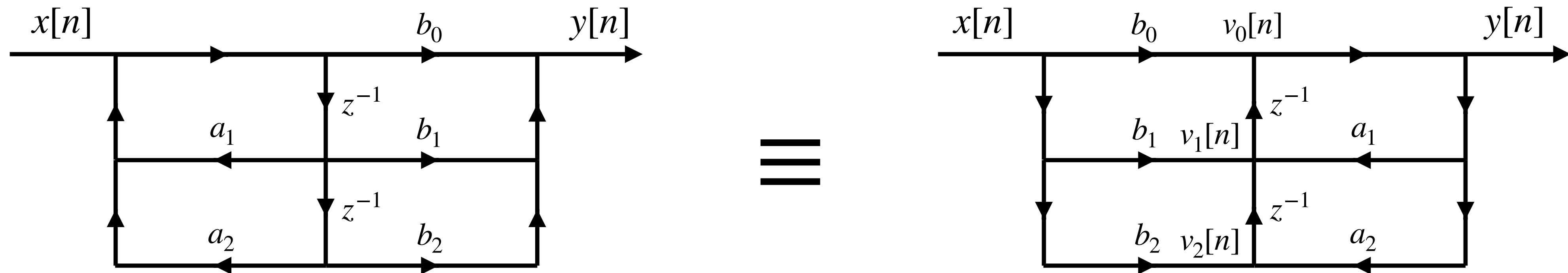
Nota: Tanto las formas en cascada y en paralelo pueden minimizar el número de retardos.



Estructuras de Sistemas Discretos

Forma Transpuesta

Invirtiendo la dirección de las ramas e intercambiando la entrada y salida obtenemos la misma función de transferencia.



Forma Directa II

$$\begin{cases} w[n] = a_1 w[n-1] + a_2 w[n-2] + x[n] \\ y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2] \end{cases}$$

Forma Transpuesta

$$\begin{cases} y[n] = v_0[n] = b_0 x[n] + v_1[n-1] \\ v_1[n] = a_1 y[n] + b_1 x[n] + v_2[n-1] \\ v_2[n] = a_2 y[n] + b_2 x[n] \end{cases}$$

Ambas formas representan la misma ecuación de diferencias

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] .$$

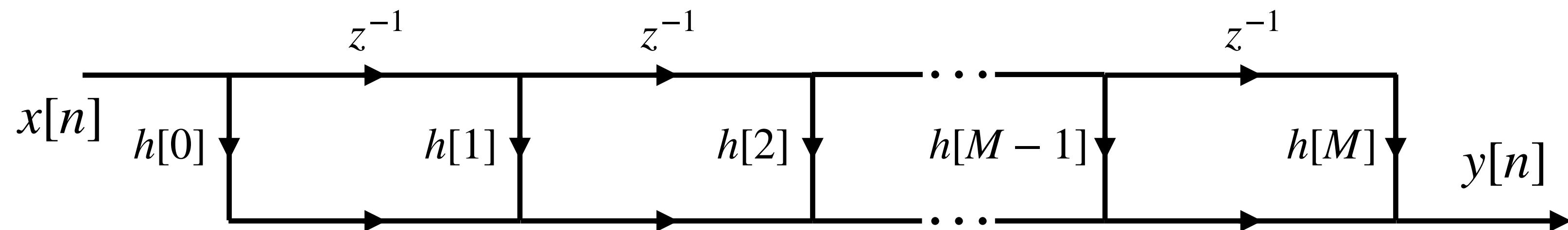
Estructuras de Sistemas Discretos

Forma Directa para filtros FIR

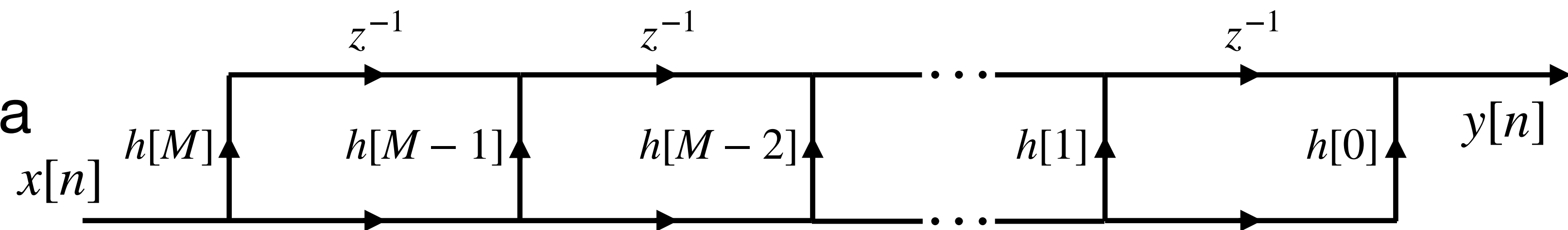
Dado $y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]$, tenemos que $h[n] = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & n < 0, \quad n > M. \end{cases}$

Coeficientes: $M+1$ Retardos: M

Forma Directa



Forma Transpuesta

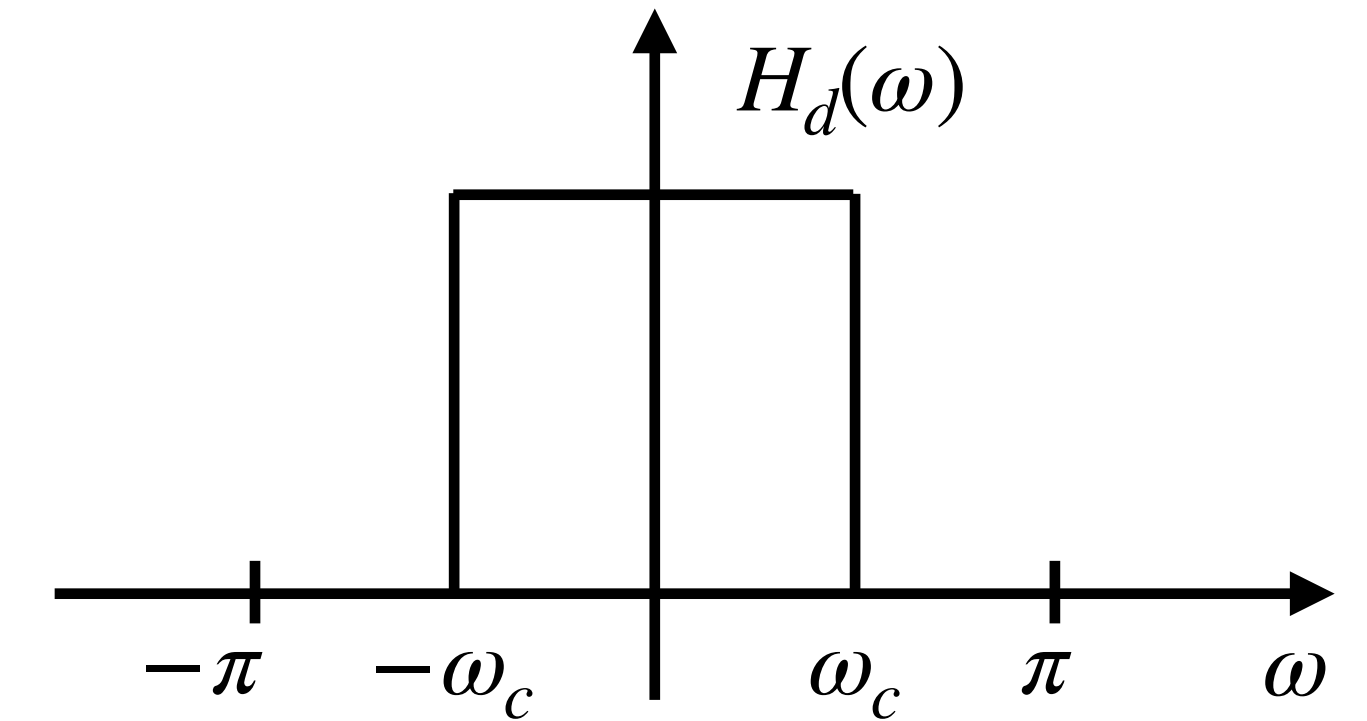


Diseño de Filtros FIR

Diseño de filtros FIR

Metodo de enventanado

$$\text{Diseñar } H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega n}, \text{ dado } H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases}$$



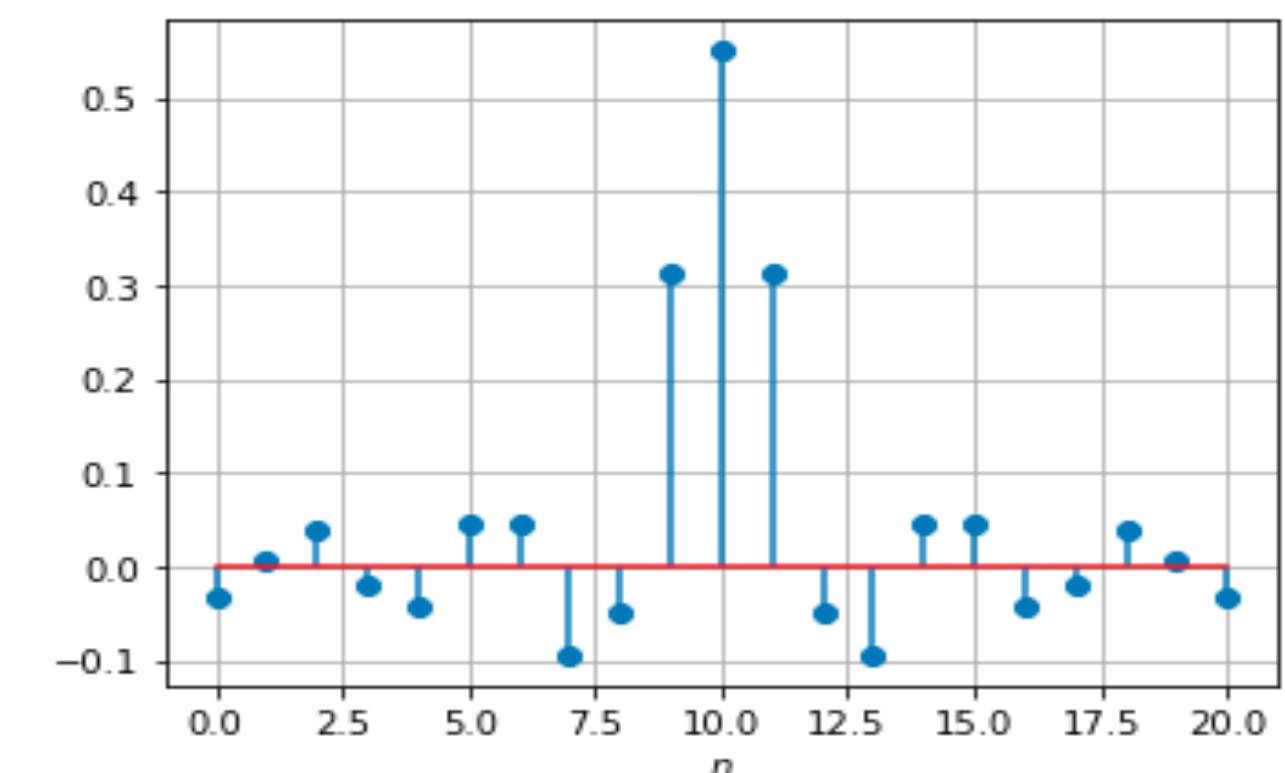
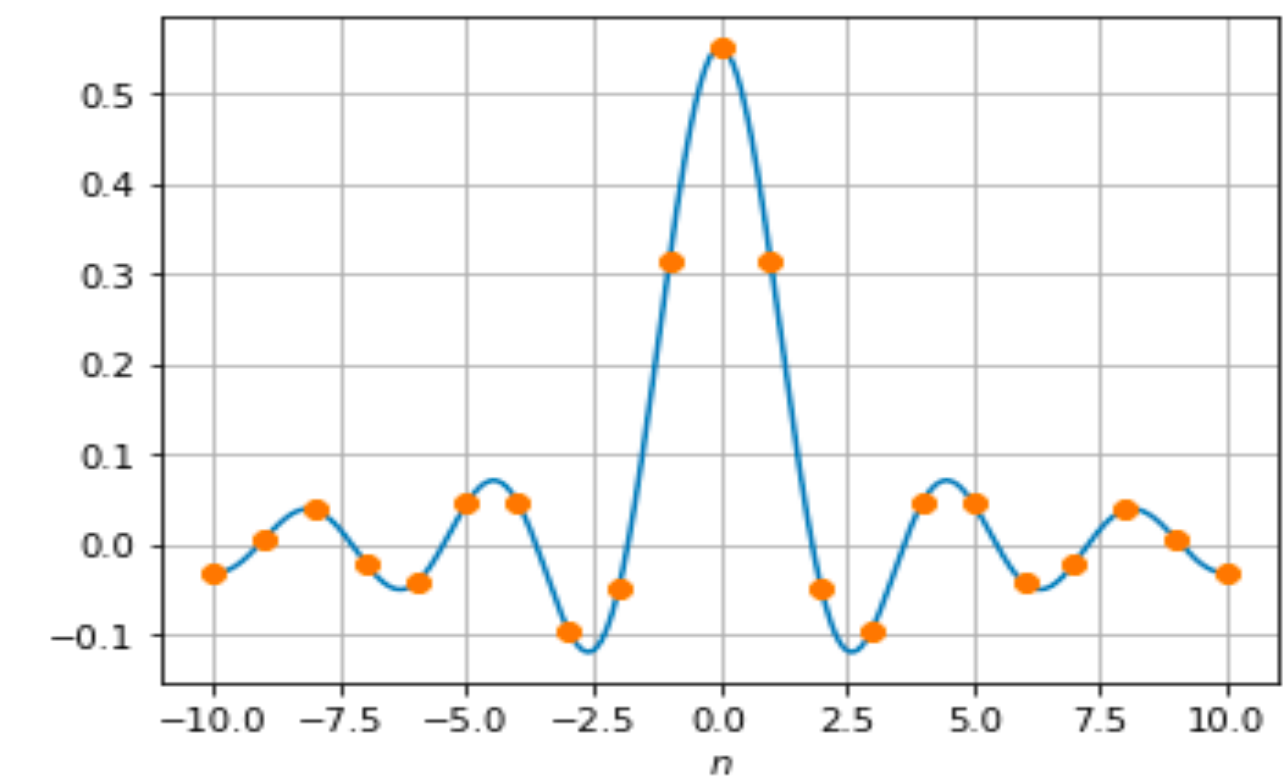
La respuesta impulsiva deseada es $h_d[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c n)$.

Paso 1: Truncar $h_d[n]$ usando una ventana $w[n]$ (e.g., rectangular)

$$w[n] = \text{rect}[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq \frac{M-1}{2}, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (M \text{ impar}).$$

Paso 2: Retardo $\frac{M-1}{2}$ muestras para obtener filtro causal

$$h[n] = h_d\left[n - \frac{M-1}{2}\right] w\left[n - \frac{M-1}{2}\right].$$



Diseño de filtros FIR

Metodo de enventanado

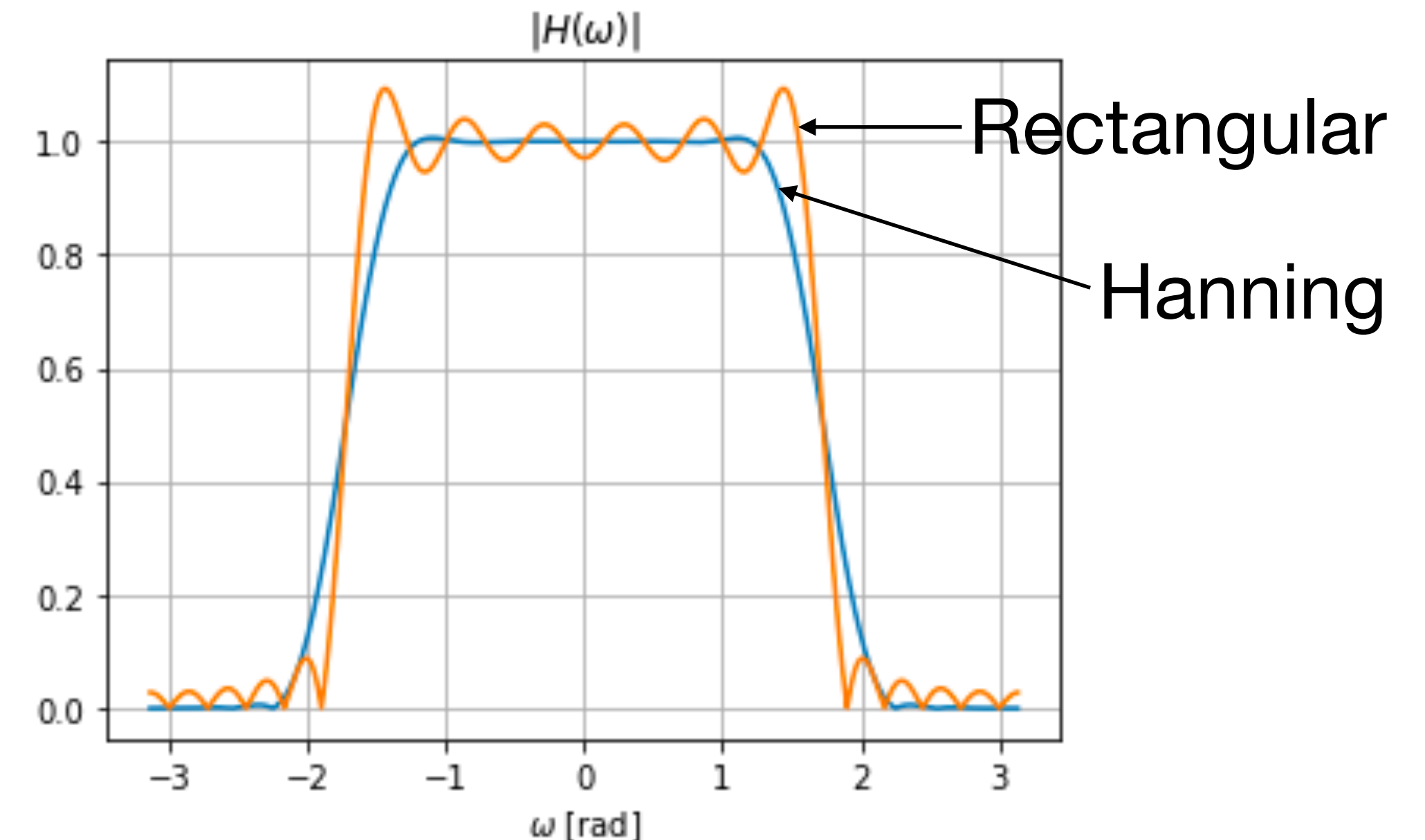
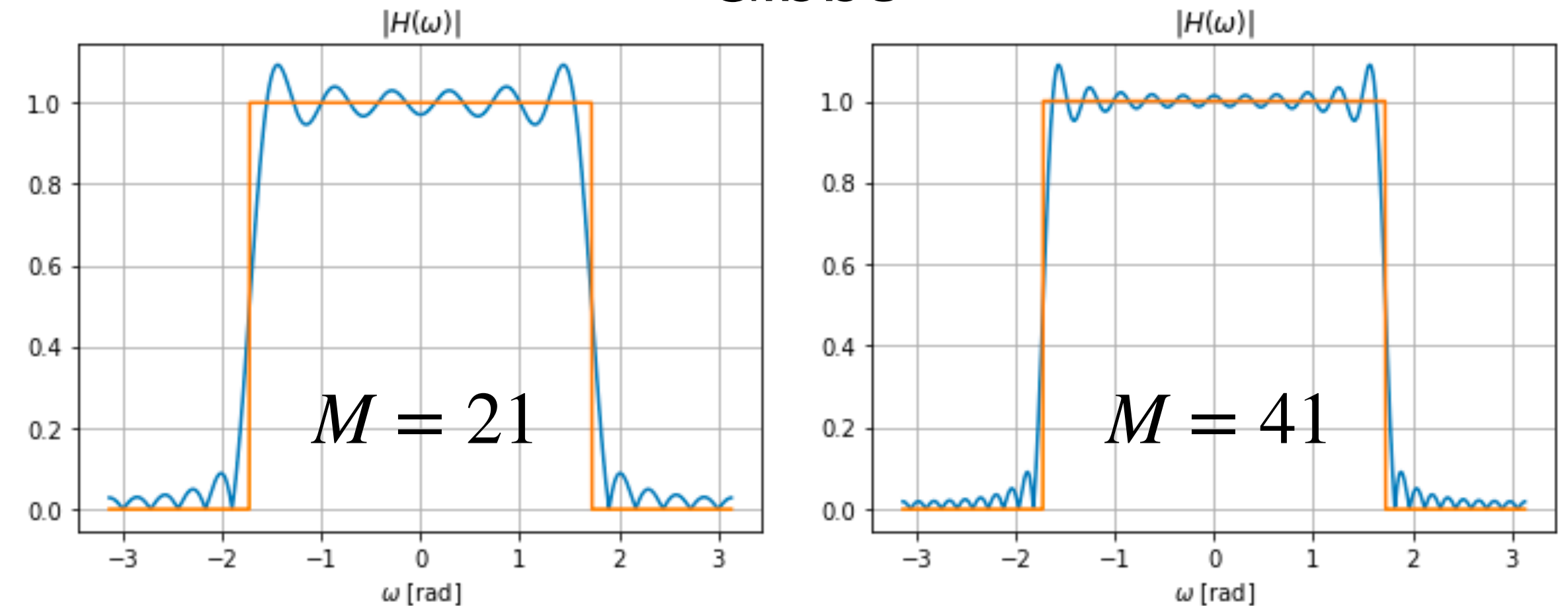
¿Es esta una buena aproximación?

Fenómeno de Gibbs, sobre-impulsos alrededor de las transiciones rápidas de la respuesta en frecuencia del filtro. El efecto no desaparece cuando M aumenta.

Potencial mejora: Utilizar ventanas diferentes a la función rectangular.

- Triangular
- Hanning: $w[n] = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right)$
- Hamming: $w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right)$

Gibbs



Diseño de filtros FIR

Muestreo en frecuencia

Dado la respuesta en frecuencia deseada $H_d(\omega)$, se selecciona un número finito de muestras M , es decir escogemos

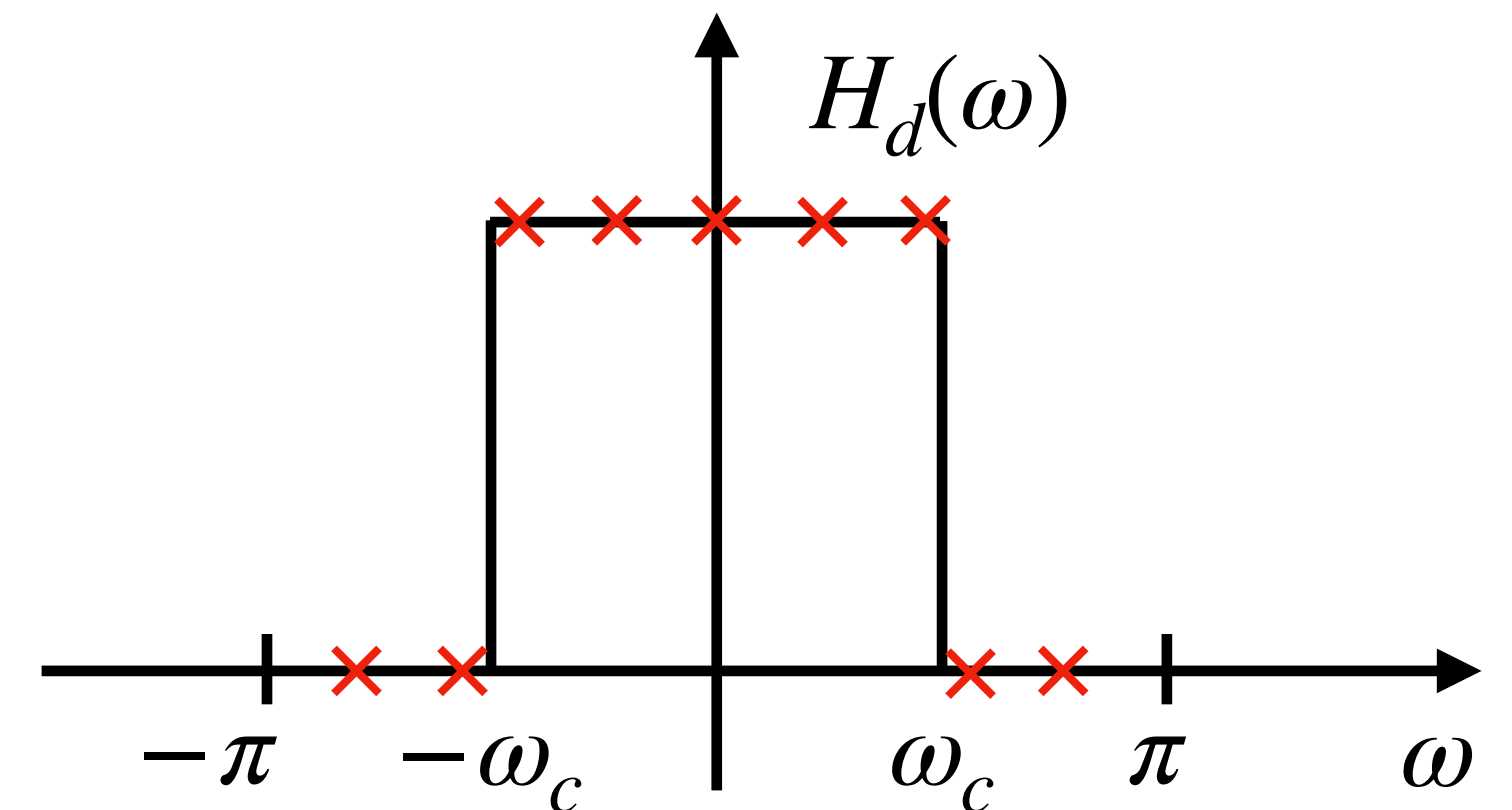
$$H_d(\omega_k) \text{ para } 0 \leq k < M.$$

Luego se establece el siguiente sistema de ecuaciones

$$H_d(\omega_k) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega_k n}, \text{ para } 0 \leq k < M.$$

En forma matricial tenemos,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega_0} & e^{-j2\omega_0} & \dots & e^{-j(M-1)\omega_0} \\ 1 & e^{-j\omega_1} & e^{-j2\omega_1} & \dots & e^{-j(M-1)\omega_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\omega_{M-1}} & e^{-j2\omega_{M-1}} & \dots & e^{-j(M-1)\omega_{M-1}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{M-1} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{h}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_d(\omega_0) \\ H_d(\omega_1) \\ \vdots \\ H_d(\omega_{M-1}) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{H}}_d}$$



entonces $\mathbf{V}\bar{\mathbf{h}} = \bar{\mathbf{H}}_d$.

Solución: $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{H}}_d$.

Diseño de filtros FIR

Muestreo en frecuencia - Muestras uniformemente espaciadas

Dado $\omega_k = k\frac{2\pi}{M} + \alpha$, $0 \leq k < M$, donde α es un offset.

- Si $\alpha = 0$, tenemos que $\mathbf{V} = \left\{ e^{-j2\pi\frac{kn}{M}} \right\}$ es decir es la matriz de la DFT, entonces

$$\bar{h} = \text{IDFT}\{\bar{H}_d\}.$$

- Si $\alpha \neq 0$, tenemos que

$$H_d(\omega_k) = \sum_{n=0}^{M-1} \underbrace{h[n]e^{-j\alpha n}}_{h'[n]} e^{-j2\pi\frac{kn}{M}},$$

$$\text{luego } h'[n] = \text{IDFT}\{H_d(\omega_k)\} \implies h[n] = e^{j\alpha n} h'[n].$$

Nota: Las muestras deben ser tomadas simétricas alrededor de frecuencia cero.

Diseño de filtros FIR

Least squares (Minimos cuadrados)

Seleccionamos N muestras de la respuesta en frecuencia deseada $H_d(\omega_k)$ para $0 \leq k < N$.

Luego para encontrar los coeficientes del filtro de longitud M construimos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$H(\omega_k) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega_k n}, \text{ para } 0 \leq k < N, \text{ que puede expresarse matricialmente de la siguiente forma,}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega_0} & e^{-j2\omega_0} & \dots & e^{-j(M-1)\omega_0} \\ 1 & e^{-j\omega_1} & e^{-j2\omega_1} & \dots & e^{-j(M-1)\omega_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\omega_{N-1}} & e^{-j2\omega_{N-1}} & \dots & e^{-j(M-1)\omega_{N-1}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{M-1} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{h}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_d(\omega_0) \\ H_d(\omega_1) \\ \vdots \\ H_d(\omega_{N-1}) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{H}}_d} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{V}\bar{\mathbf{h}} = \bar{\mathbf{H}}_d.$$

Asumiendo $N > M$, el problema se formula como mínimos cuadrados y aplicamos la pseudo-inversa para encontrar su solución,

$$\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{V}^+ \bar{\mathbf{H}}_d = (\mathbf{V}^H \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^H \bar{\mathbf{H}}_d.$$

¡Muchas gracias!