IEE352 - Procesamiento Digital de Señales

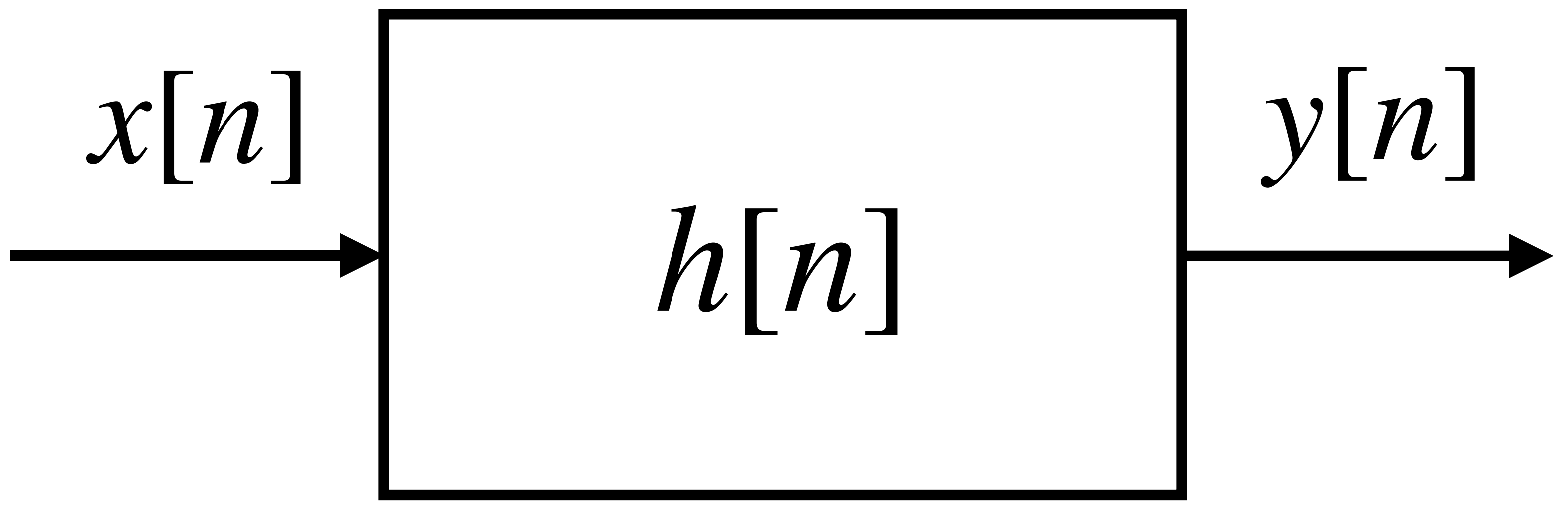
Clase 06: Transformada Z

Dr. Marco A. Milla
Sección Electricidad y Electrónica (SEE)
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

email: milla.ma@pucp.edu.pe

Transformada Z

Definición



Dado un sistema LTI, tenemos que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k],$$

si consideramos $x[n] = z^n$, secuencia de exponenciales complejos, tenemos que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{n-k} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{-k}}_{H(z)}\ z^n\ ,$$

donde z^n es función propia de los sistemas LTI y $H(z)$ es la transformada Z de $h[n]$.

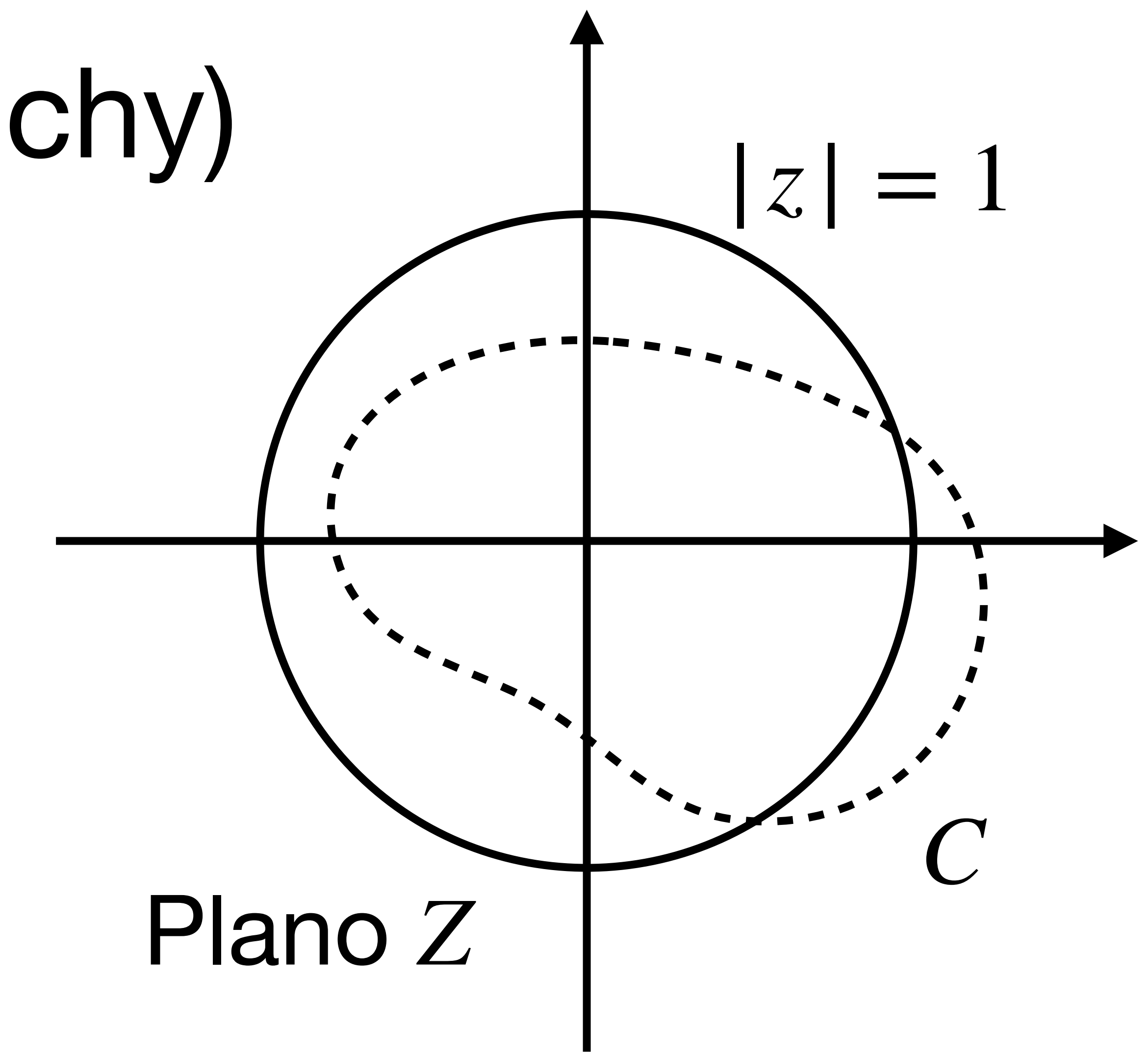
Transformada Z

Definición

La transformada Z bilateral está definida de la siguiente forma,

Directa: $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$ (bilateral)

Inversa: $$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)\, z^{n-1} dz$$ (Integral de Cauchy)



Nota: Versión discreta de la transformada de Laplace.

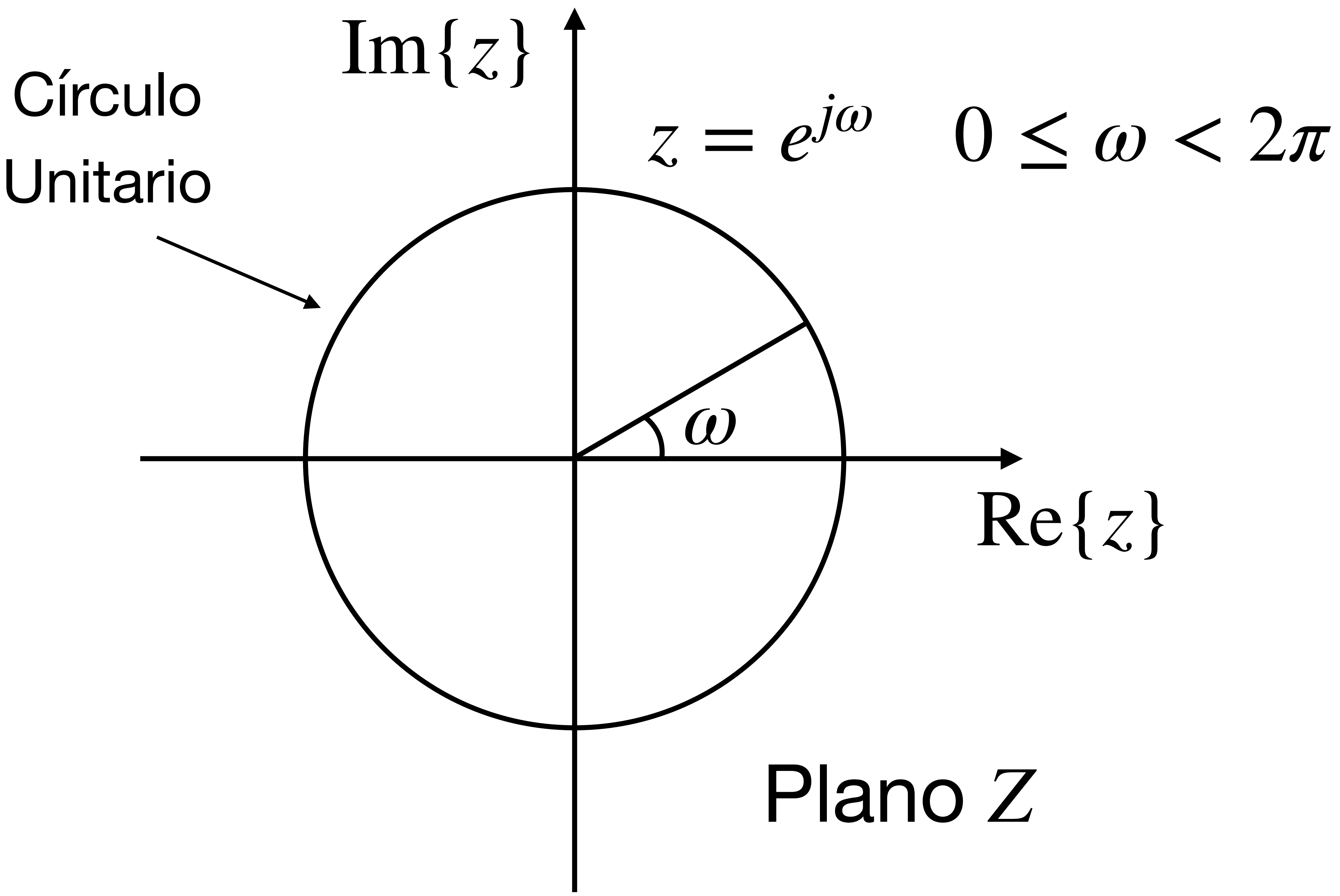
Transformada Z

Relación con la DTFT

Para $z = e^{j\omega}$ tenemos que

$$X(z = e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} = X(\omega)$$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\}_{z=e^{j\omega}} = \mathrm{DTFT}\{x[n]\}\,.$$



La DTFT es la transformada Z evaluada en el círculo unitario ($|z| = 1$).

Transformada Z

Región de convergencia y existencia de la Transformada Z

Dado $z = re^{j\omega}$, tal que $r = |z|$ y $\omega = \angle z$, tenemos que

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, r^{-n}\, e^{-j\omega n} = \mathrm{DTFT}\{x[n]r^{-n}\}\ .$$

$X(z)$ existe si la secuencia $x[n]r^{-n}$ es absolutamente integrable (o sumable),

$$\implies |X(z)| \leq \sum_{n} |x[n]r^{-n}| < \infty\ .$$

La región de convergencia está definida por los valores de $r = |z|$ para los cuales $X(z)$ converge o existe.

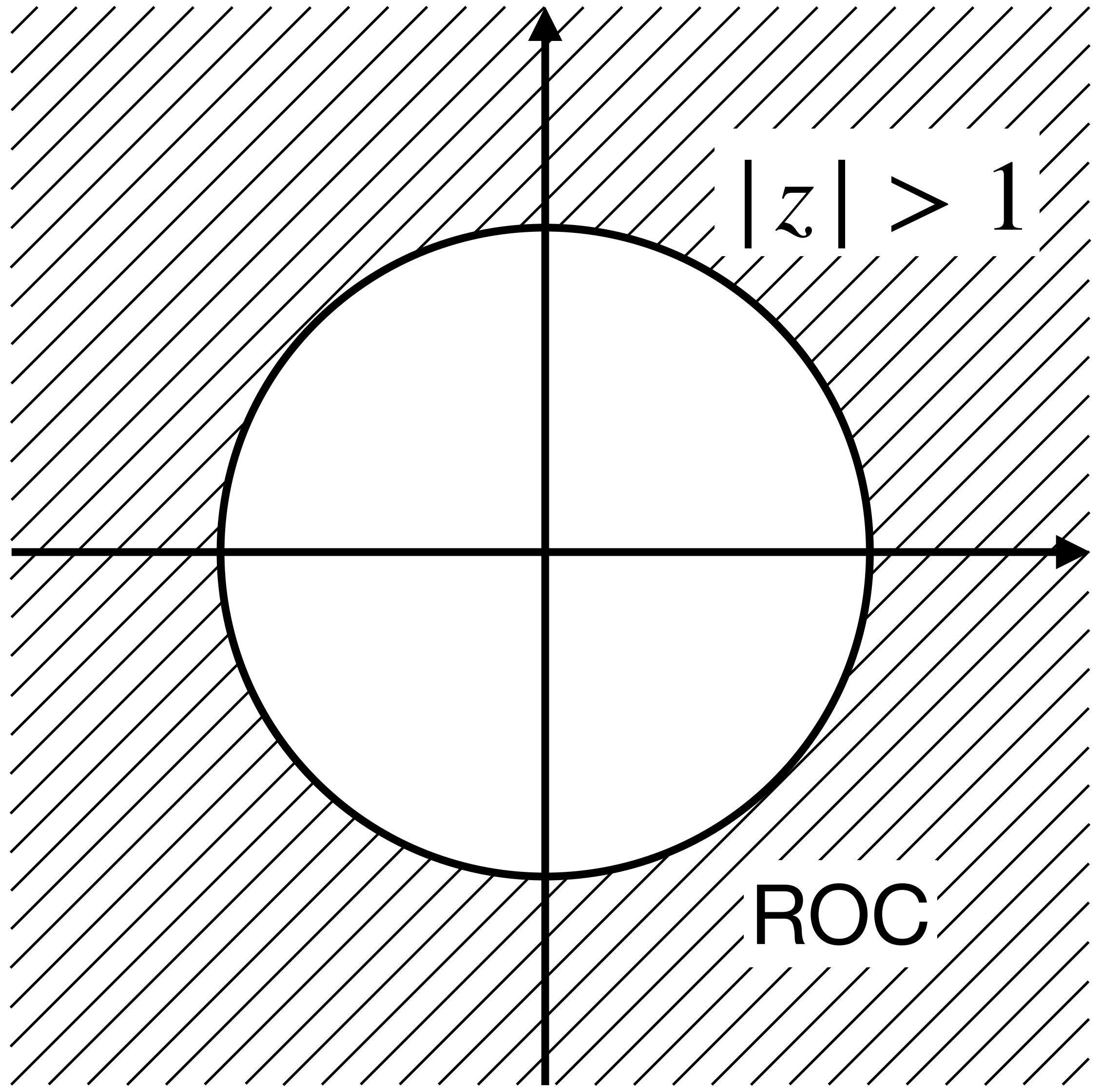
Transformada Z

Ejemplo: Escalón unitario

El escalón unitario $x[n] = u[n]$ no es absolutamente integrable sin embargo tiene transformada Z que se puede calcular de la siguiente forma,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \qquad |z| > 1.$$

Notar que $\sum_{n=0}^{\infty} |z^{-n}| < \infty$, cuando $|z| > 1$.



Transformada Z

Fracciones de polinomios

Para una clase importante de funciones, la transformada Z se pude expresar como una fracción de polinomios.

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)} ,$$

donde las raíces de $B(z)$ son los ceros de $X(z)$, mientras que las raíces de $A(z)$ corresponden a los polos de $X(z)$.

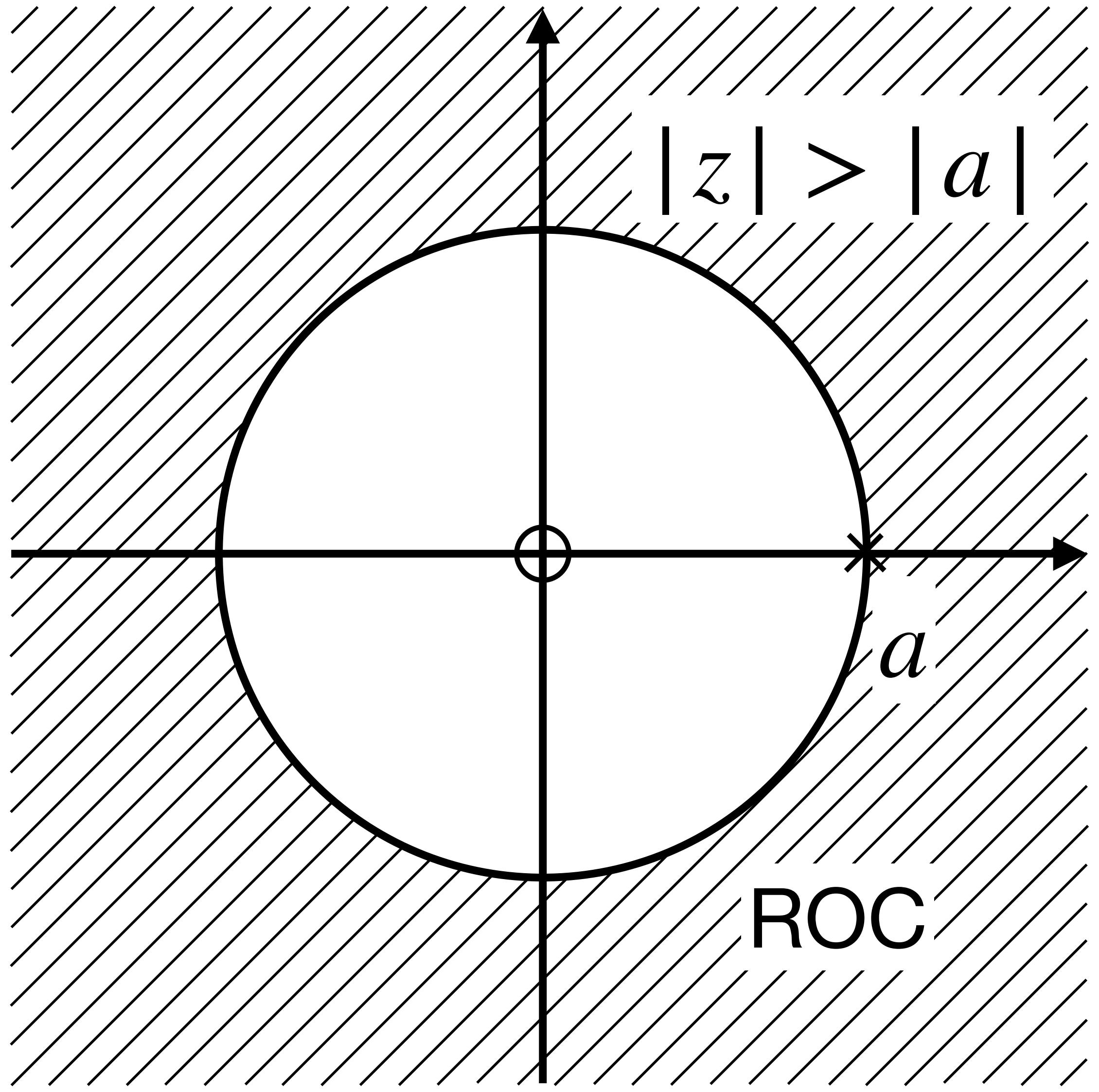
Transformada Z

Ejemplo: Exponencial causal

Dado $x[n] = a^n u[n]$ una señal exponencial causal (secuencia de lado derecho), tenemos que,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z-a}, \qquad |az^{-1}| < 1 \implies |z| > |a|.$$



donde $z = 0$ es un cero y $z = a$ es un polo de $X(z)$.

Nota: Si $|a| < 1$ entonces, $\mathrm{DTFT}\{x[n]\}$ converge o existe.

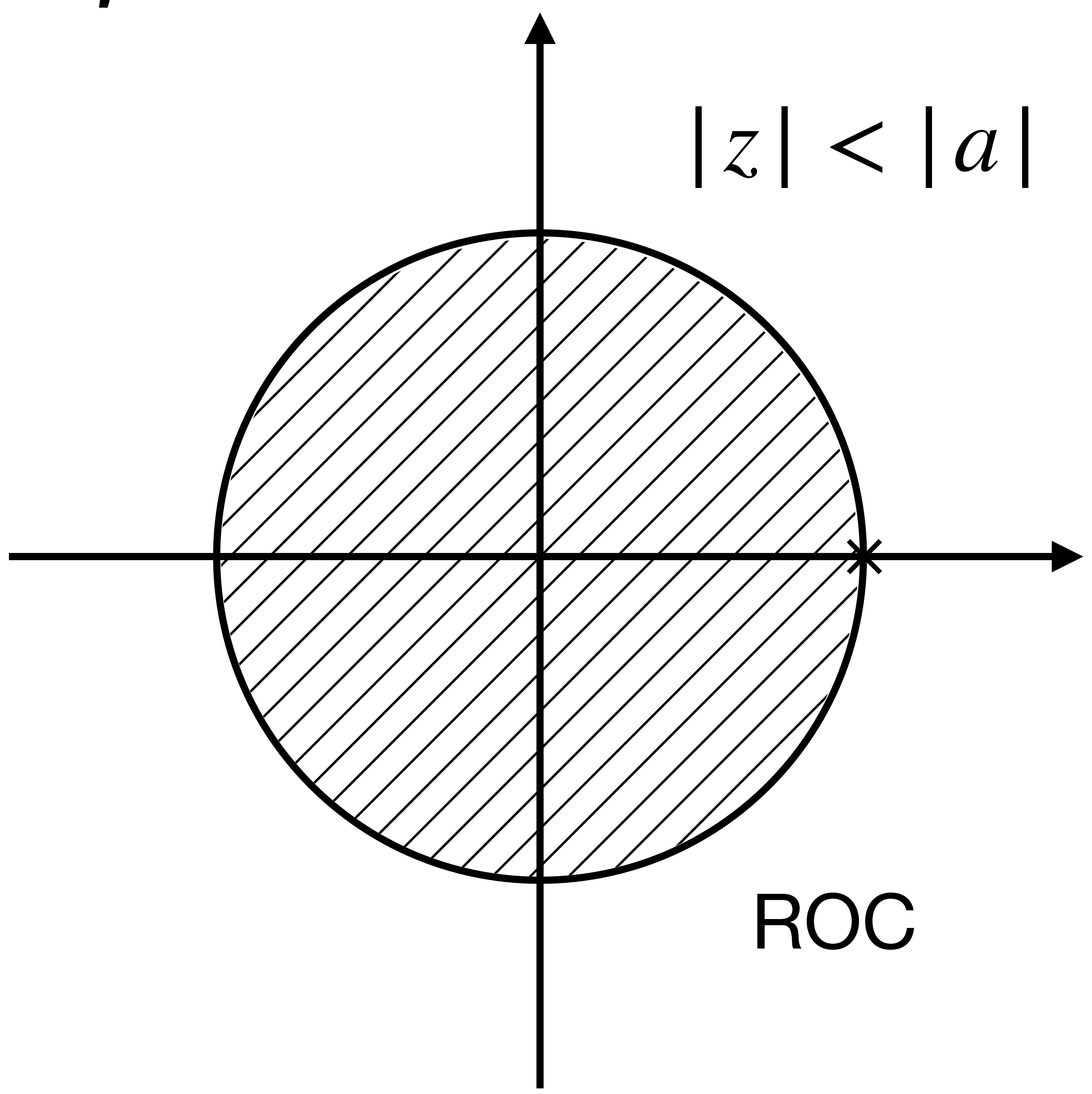
Transformada Z

Ejemplo: Exponencial anticausal

Dado $x[n] = -a^n u[-n-1]$ una señal exponencial anticausal (secuencia de lado izquierdo), tenemos que,

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (a z^{-1})^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (a z^{-1})^{-n}$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}},$$



ROC: $|a^{-1}z| < 1 \implies |z| < |a|$.

Cero $z = 0$ y Polo $z = a$.

Nota: Si $|a| > 1$ entonces, $\mathrm{DTFT}\{x[n]\}$ converge o existe.

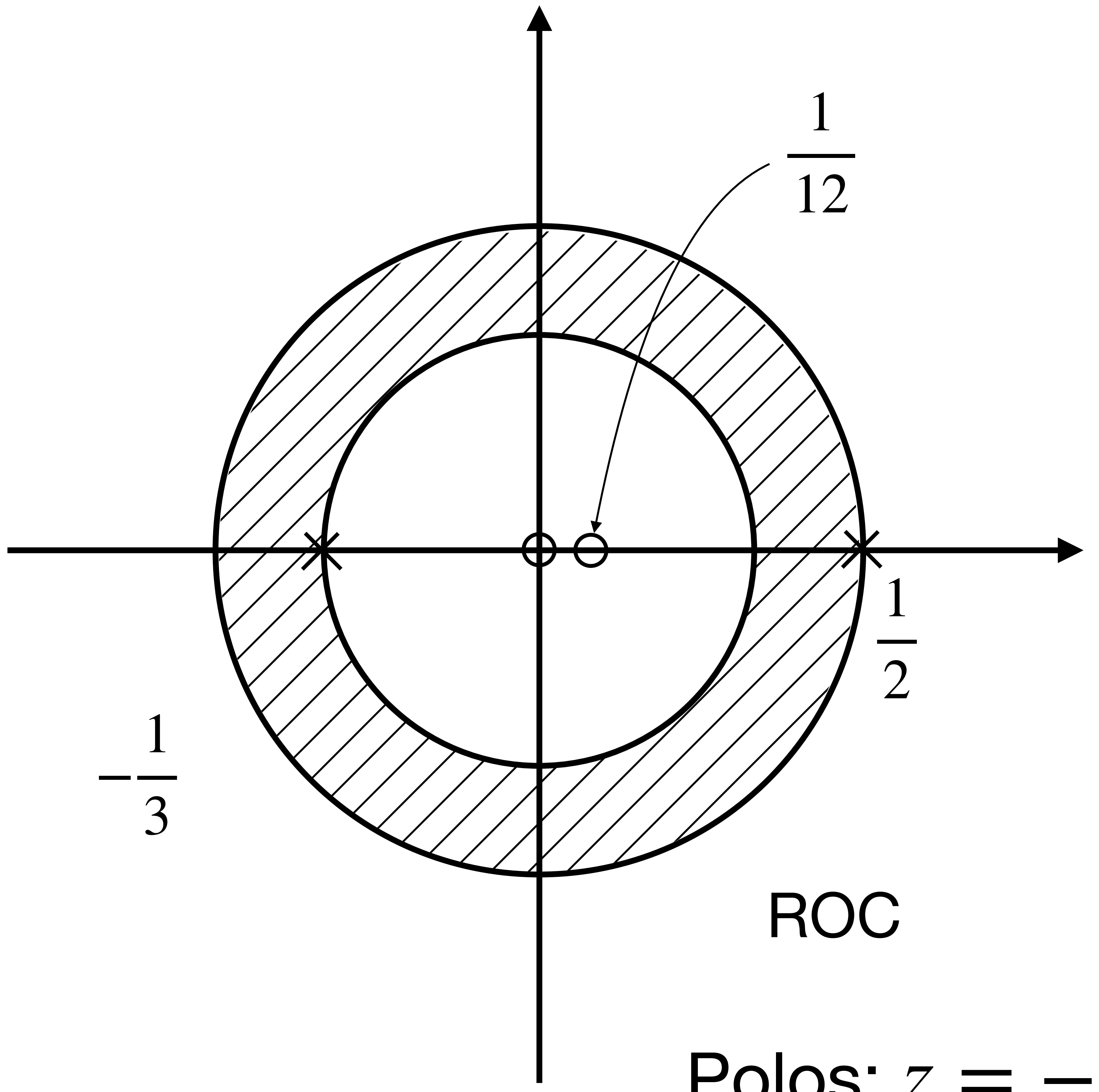
Transformada Z

Ejemplo: Suma de exponenciales

Dado $x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$, tenemos que

$$\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$



Por linealidad,

$$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2z(z-\frac{1}{12})}{(z+\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}.$$

Polos: $z = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{2}$,

Ceros: $z = 0$, $z = \frac{1}{12}$.

ROC: Intersección de dos regiones, $|z| > \frac{1}{3}$ y $|z| < \frac{1}{2}$, entonces $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$.

Transformada Z

Secuencias de longitud finita

Si $x[n]$ es de longitud finita ($N_1 \leq n \leq N_2$), entonces

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n}$$ no tiene problemas de convergencia.

Ejemplo: Dado $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0,\ n \geq N \end{cases}$, tenemos que

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a}.$$

$X(z)$ converge para a finito y $z \neq 0$.

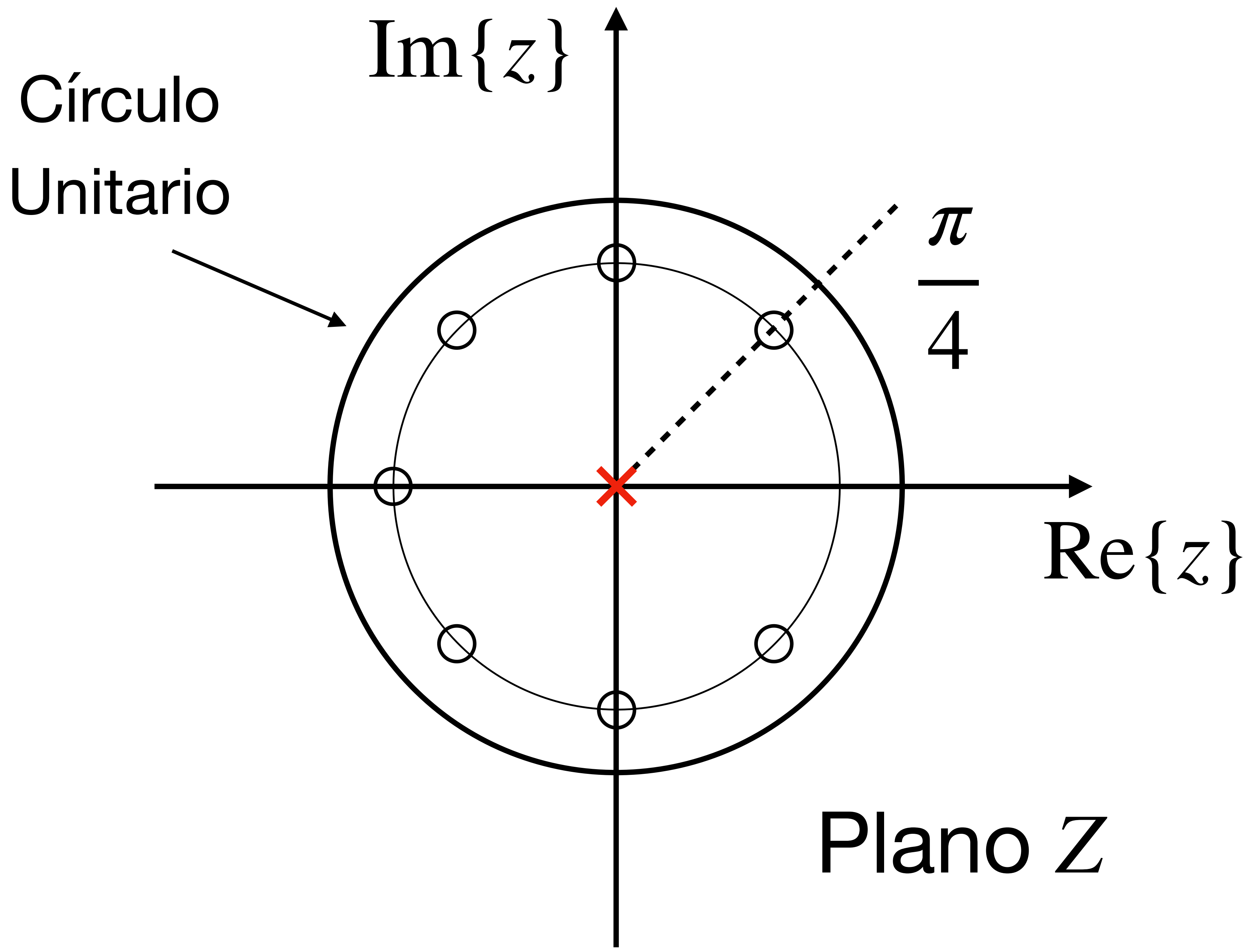
N-1 ceros: $z_k = ae^{j2\pi k/N}$, $k = 1,\ldots,N-1$

N-1 polos: $z = 0$.

Transformada Z

Secuencias de longitud finita

Dado $X(z) = \dfrac{1}{z^{N-1}} \dfrac{z^N - a^N}{z - a}$, si consideramos $N = 8$ y $0 < a < 1$,



7 ceros: $z_k = ae^{j\pi k/4}, k = 1,\ldots,7$

7 polos: $z = 0$.

ROC: $|z| > 0$

Transformada Z

Propiedades de la región de convergencia

1. El ROC es un anillo o disco en el plano Z centrado en el origen,

$$0 \leq r_R < |z| < z_L \leq \infty \,.$$

2. La DTFT de $x[n]$ converge si y solo si el ROC de $X(z)$ incluye el círculo unitario.

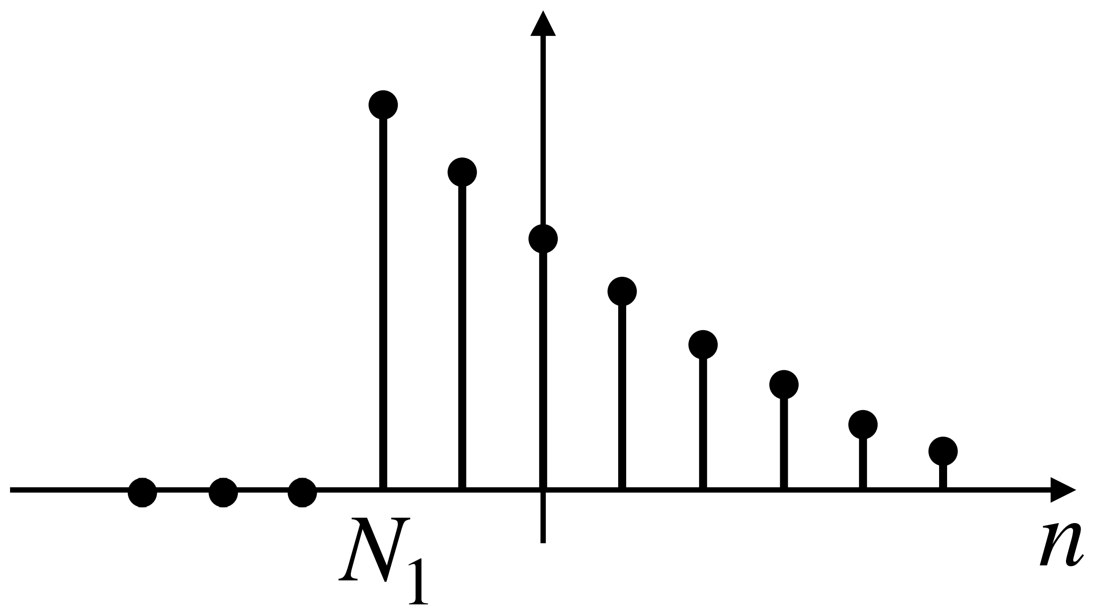
3. El ROC no contiene polos.

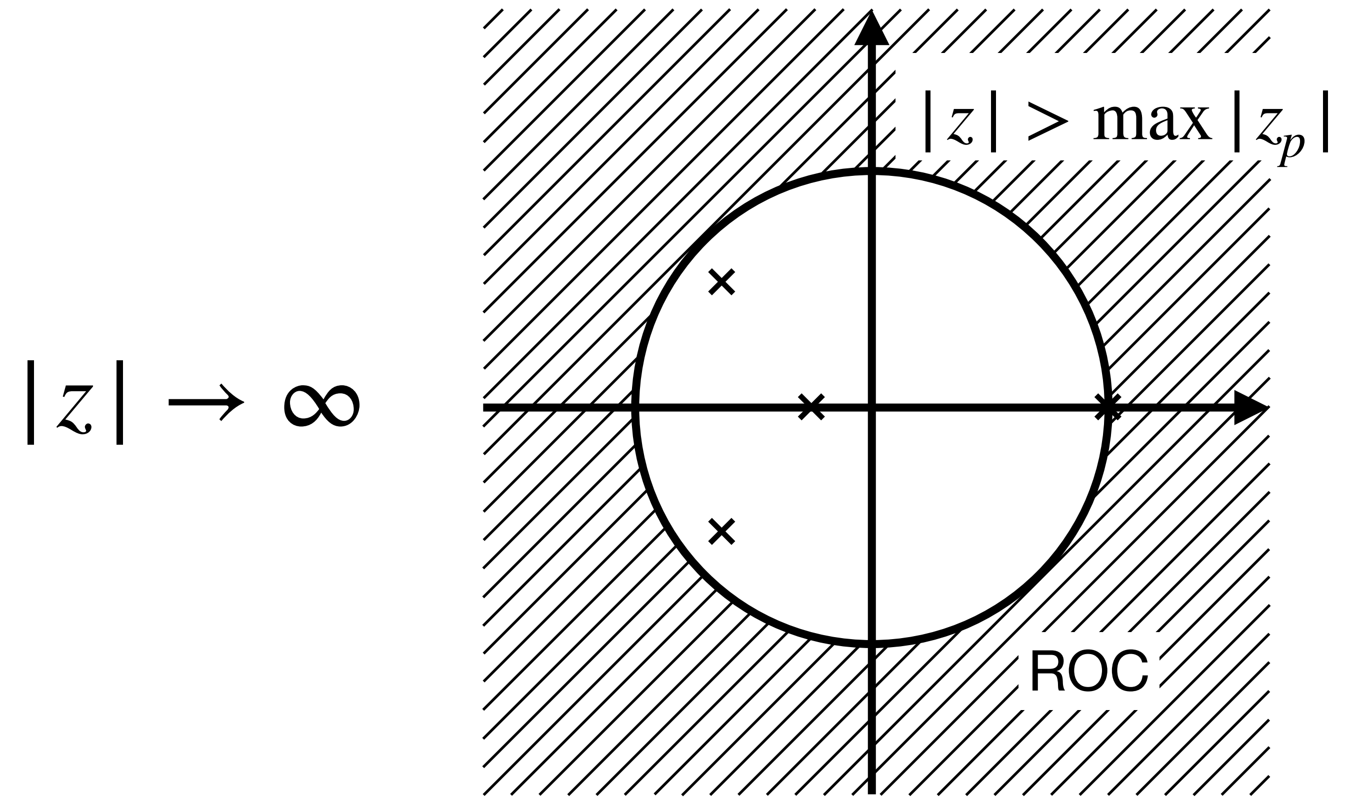
4. Si $x[n]$ es una secuencia de duración finita, es decir que vale cero fuera del intervalo finito $N_1 \leq n \leq N_2$, entonces el ROC es el plano Z, excepto posiblemente en $z = 0$ o $z = \infty$.

Transformada Z

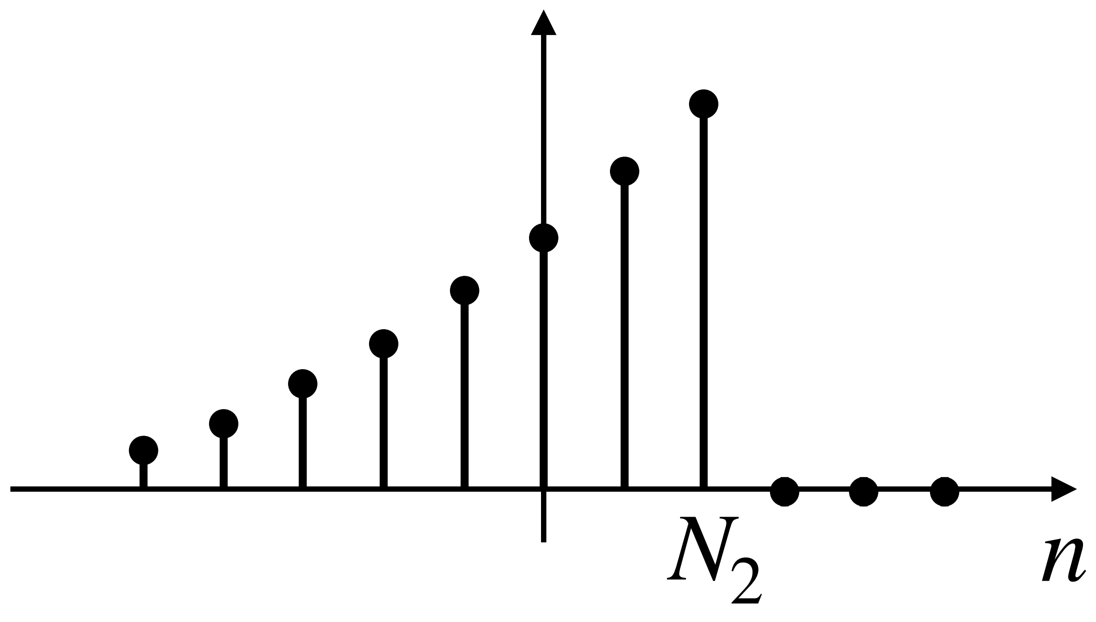
Propiedades de la región de convergencia

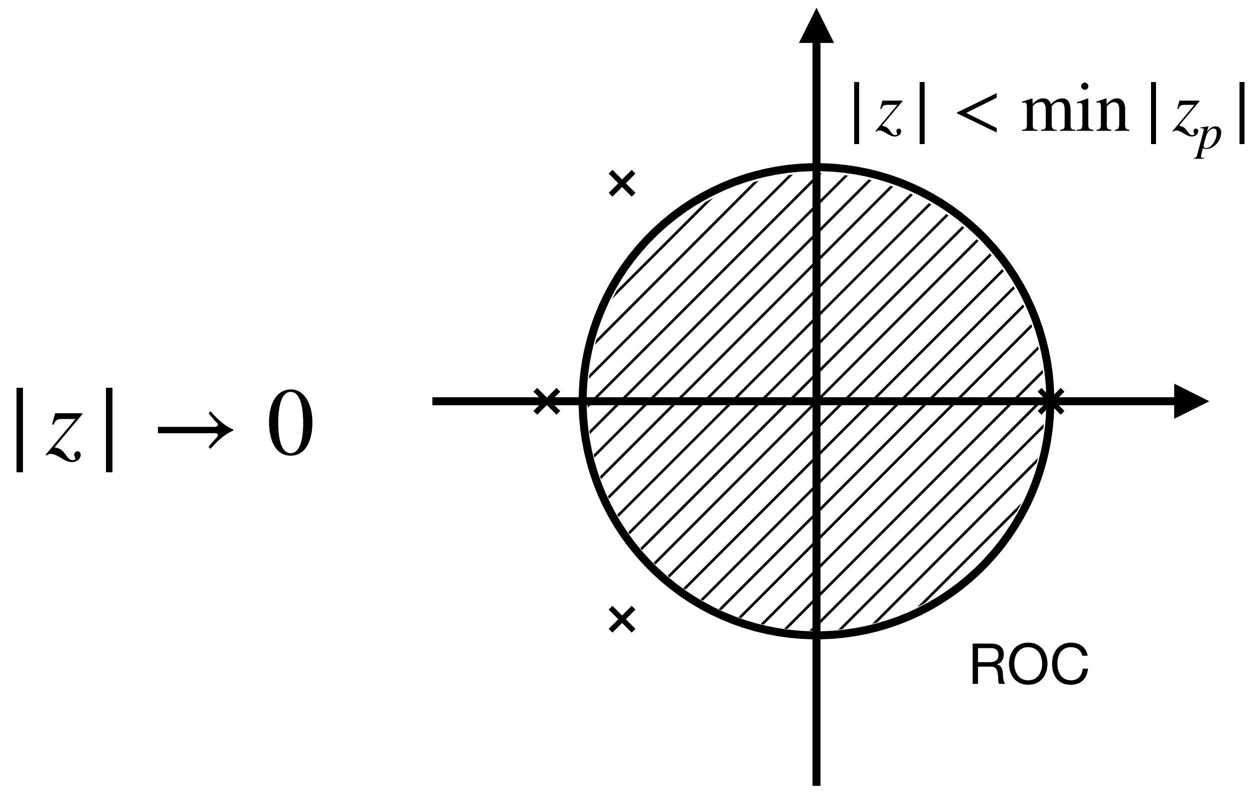
5. Si $x[n]$ es una secuencia de lado derecho ($x[n] = 0,\ n < N_1$), el ROC se extiende hacia afuera desde el polo de mayor magnitud hacia (e incluyendo posiblemente) $z = \infty$.





6. Si $x[n]$ es una secuencia de lado izquierdo ($x[n] = 0,\ n > N_2$), el ROC se extiende hacia adentro desde el polo de menor magnitud hacia (e incluyendo posiblemente) $z = 0$.

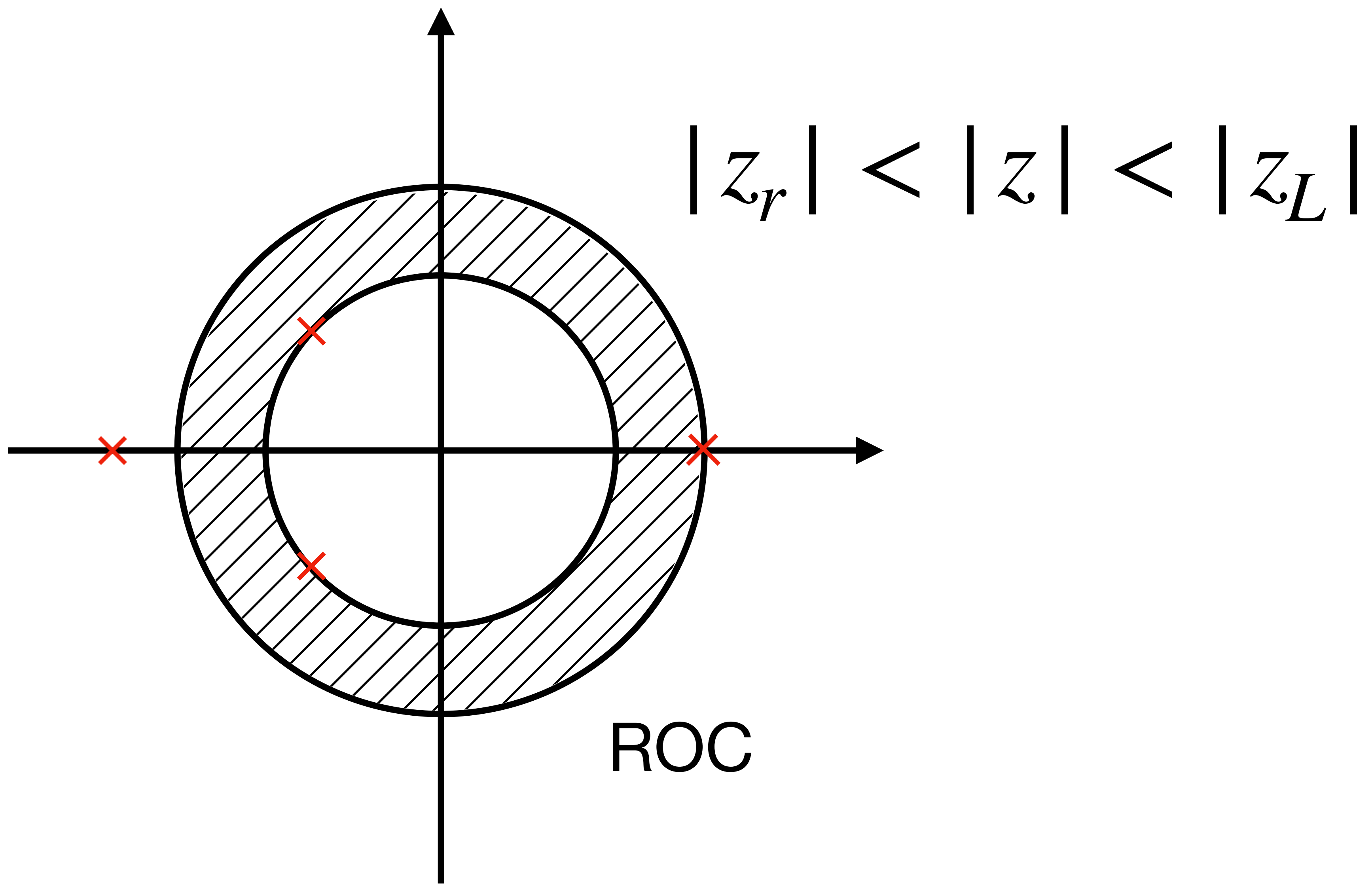




Transformada Z

Propiedades de la región de convergencia

7. Una secuencia de dos lados es de duración infinita. Si $x[n]$ es una secuencia de 2 lados, el ROC es un anillo en el plano Z limitado por 2 polos y no contiene ningún polo.



8. El ROC es una región conectada no pueden haber regiones separadas.

Transformada Z

Propiedades de la Transformada Z

- **Linealidad**

$$\left.\begin{array}{ll} x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z), & \text{ROC} = R_{x_1} \\ x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_2(z), & \text{ROC} = R_{x_2} \end{array}\right\} \implies ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} aX_1(z) + bX_2(z)$$

El nuevo ROC incluye $R_{x_1} \cap R_{x_2}$.

Nota: Si $R_{x_1} \cap R_{x_2} = \emptyset$ entonces la transformada de la suma no existe.

- **Desplazamiento en el tiempo**

$$x[n - n_o] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-n_o}X(z)$$

El ROC resultante puede añadir o eliminar polos en $z = 0$ o $z = \infty$.

Transformada Z

Propiedades de la Transformada Z

- **Multiplicación por una secuencia exponencial**

$$z_o^n x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z/z_o), \text{ ROC} = |z_o| R_x .$$

- **Diferenciación en el dominio Z**

$$nx[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}, \text{ el ROC se mantiene igual al original.}$$

- **Conjugación de una secuencia compleja**

$$x^*[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(z^*), \text{ROC} = R_x .$$

- **Inversión temporal**

$$x[-n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(1/z), \text{ROC} = \frac{1}{R_x} .$$

Transformada Z

Propiedades de la Transformada Z

- **Convolución**

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z), \text{ cuyo ROC contiene } R_{x_1} \cap R_{x_2}\,.$$

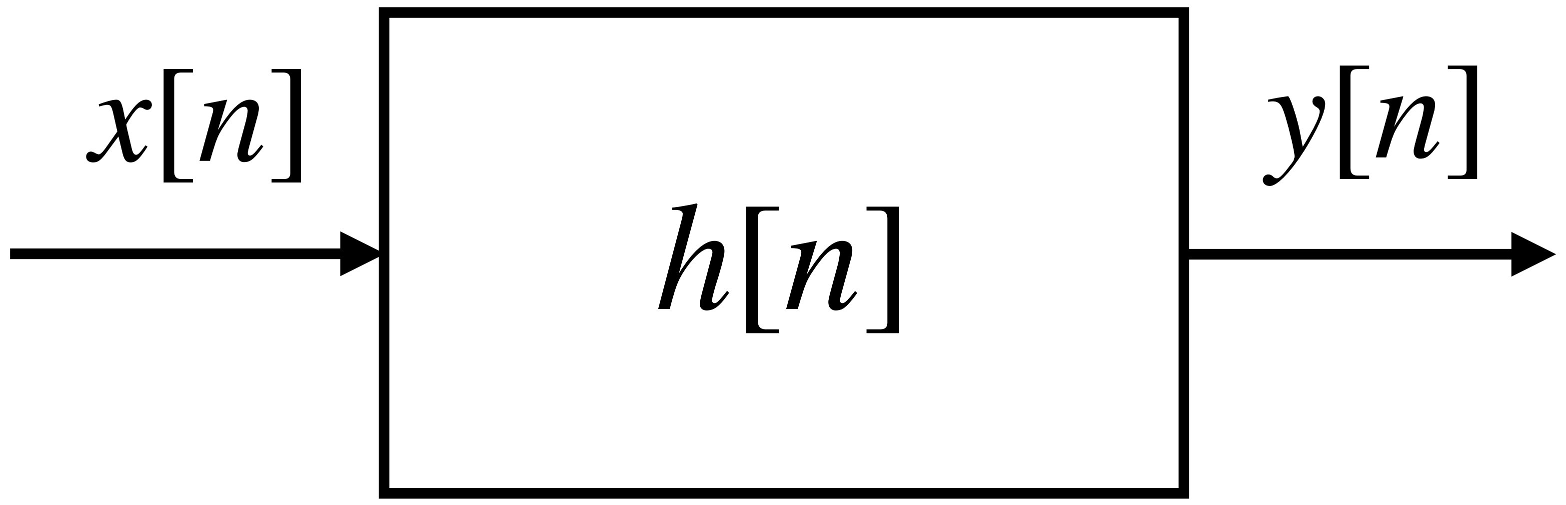
Demostración:

Dado $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$ tenemos que

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right\} z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]z^{-(m+k)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]z^{-m} = X_1(z)X_2(z)\,. \end{aligned}$$

Transformada Z

Representación de un Sistema LTI



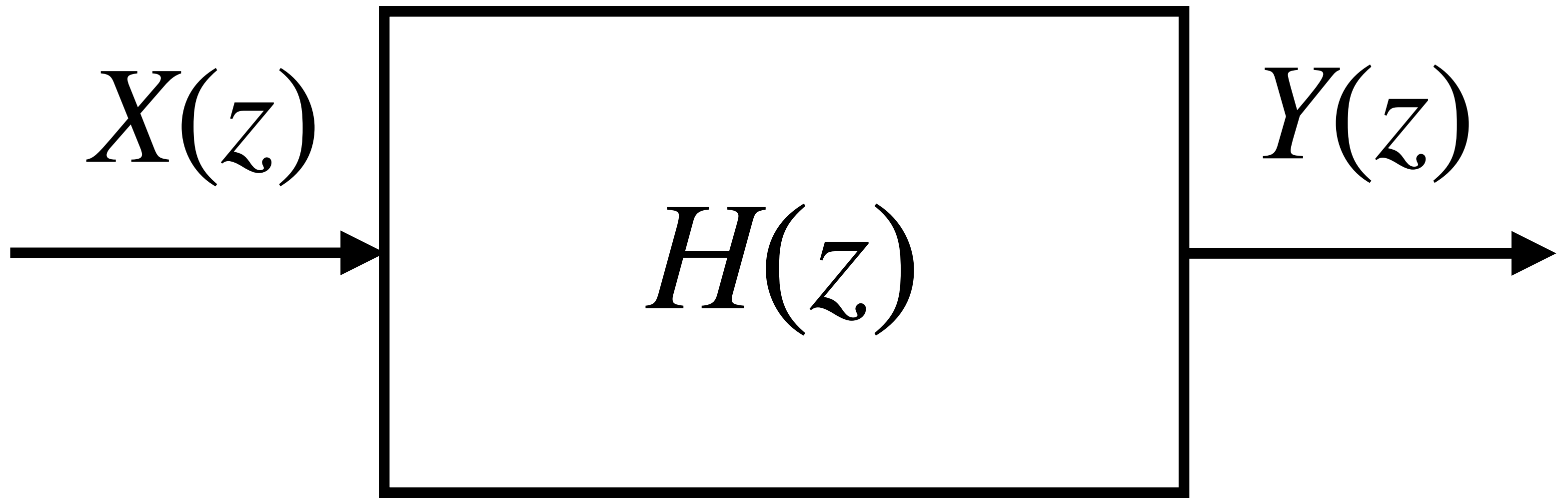
Un sistema LTI queda completamente caracterizado por su respuesta impulsiva $h[n]$ tal que su salida $y[n]$ para una entrada $x[n]$ está dada por

$$y[n] = h[n] * x[n] \,.$$

Aplicando la propiedad de convolución de la transformada Z podemos escribir

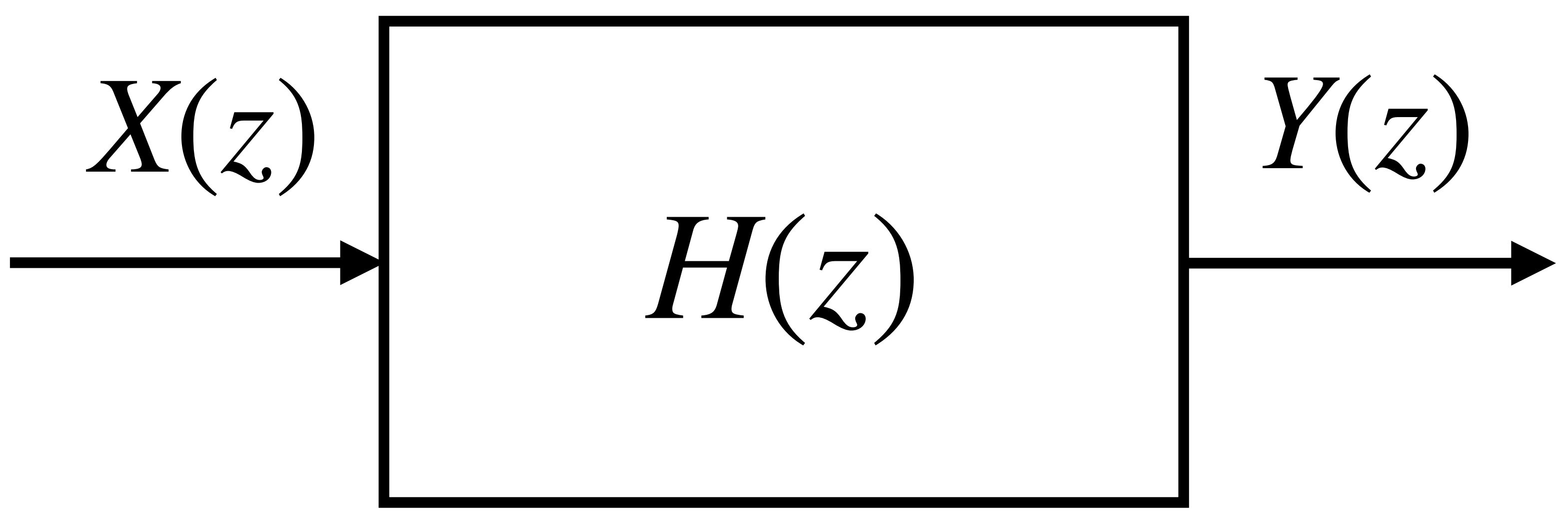
$$Y(z) = H(z)X(z)$$

donde $H(z)$ es la transformada Z de la respuesta impulsiva $h[n]$ y se le conoce como la función de transferencia del sistema.



Transformada Z

Representación de un Sistema LTI



Dado un sistema LTI caracterizado por una ecuación de diferencias,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]\,,$$

podemos tomar la la transformada Z de ambos lados de la ecuación y obtener que

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k}\, Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}\, X(z) \quad \Longrightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k}}\,.$$

En este caso, la función de transferencia $H(z)$ tiene la forma de un quebrado de polinomios y se puede calcular su correspondiente respuesta impulsiva $h[n]$ aplicando la transformada inversa.

Nota: $Y(z) = H(z)\,X(z)$ es la transformada Z de la salida $y[n]$ del sistema cuando este se encontraba inicialmente en reposo.

Transformada Z

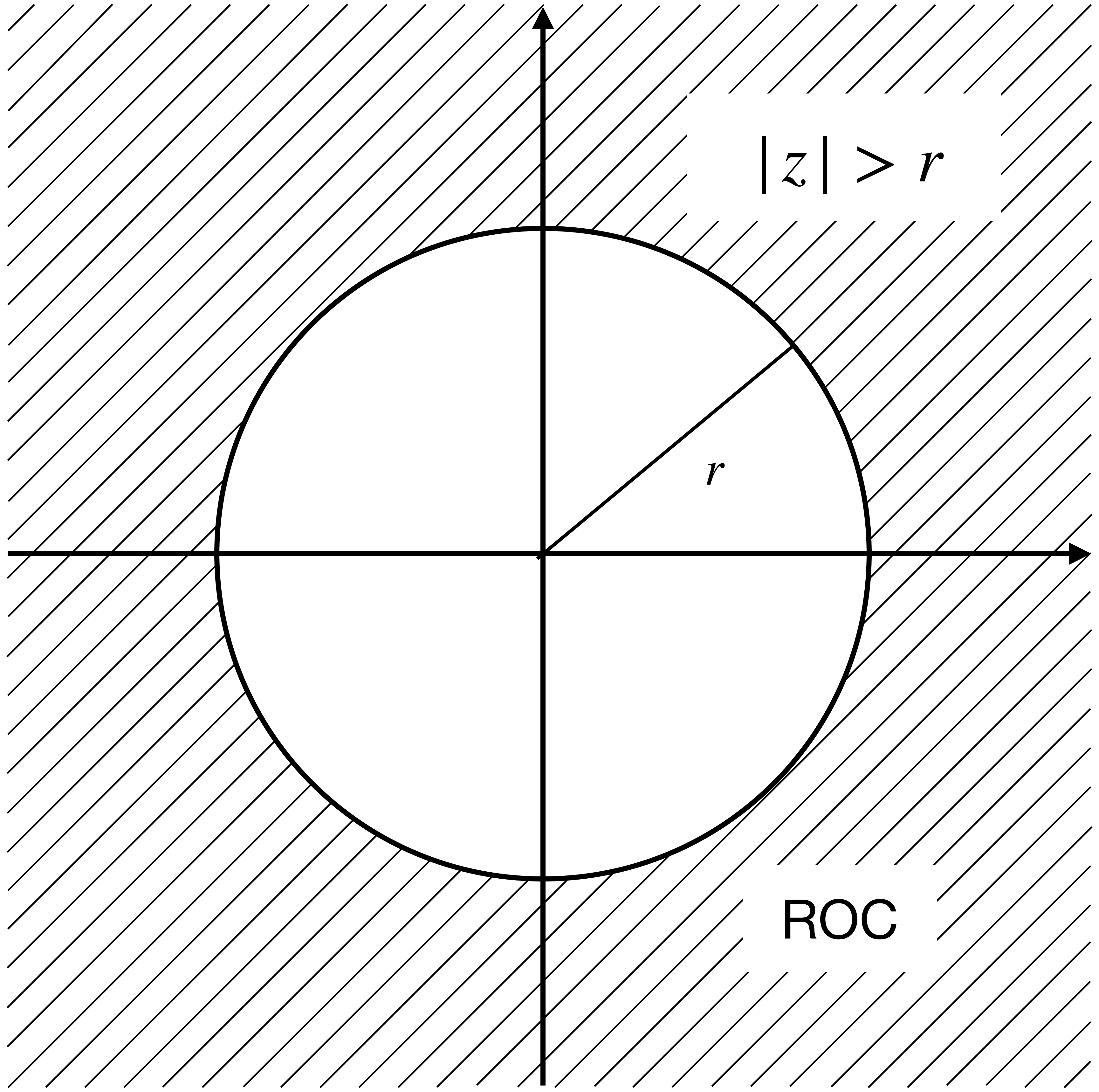
Causalidad y estabilidad

Un sistema LTI es causal si la respuesta impulsiva $h[n]$ satisface la condición

$$h[n] = 0, \qquad n < 0 \,.$$

Un sistema LTI es causal $\Longleftrightarrow$ el ROC de la función de transferencia $H(z)$ es el exterior de un círculo (de radio r) que incluye $z = \infty$.

Nota: $\lim_{z \to \infty} H(z) < \infty$.



Transformada Z

Causalidad y estabilidad

Teorema de valor inicial

Si $x[n]$ es causal entonces

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) \,.$$

Prueba: Dado que $x[n]$ es causal, tenemos que

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} + \ldots$$

Obviamente, si $z \to \infty$ entonces $z^{-n} \to 0$ para $n > 0$,

$$\implies \lim_{z \to \infty} X(z) = x[0] \,.$$

Transformada Z

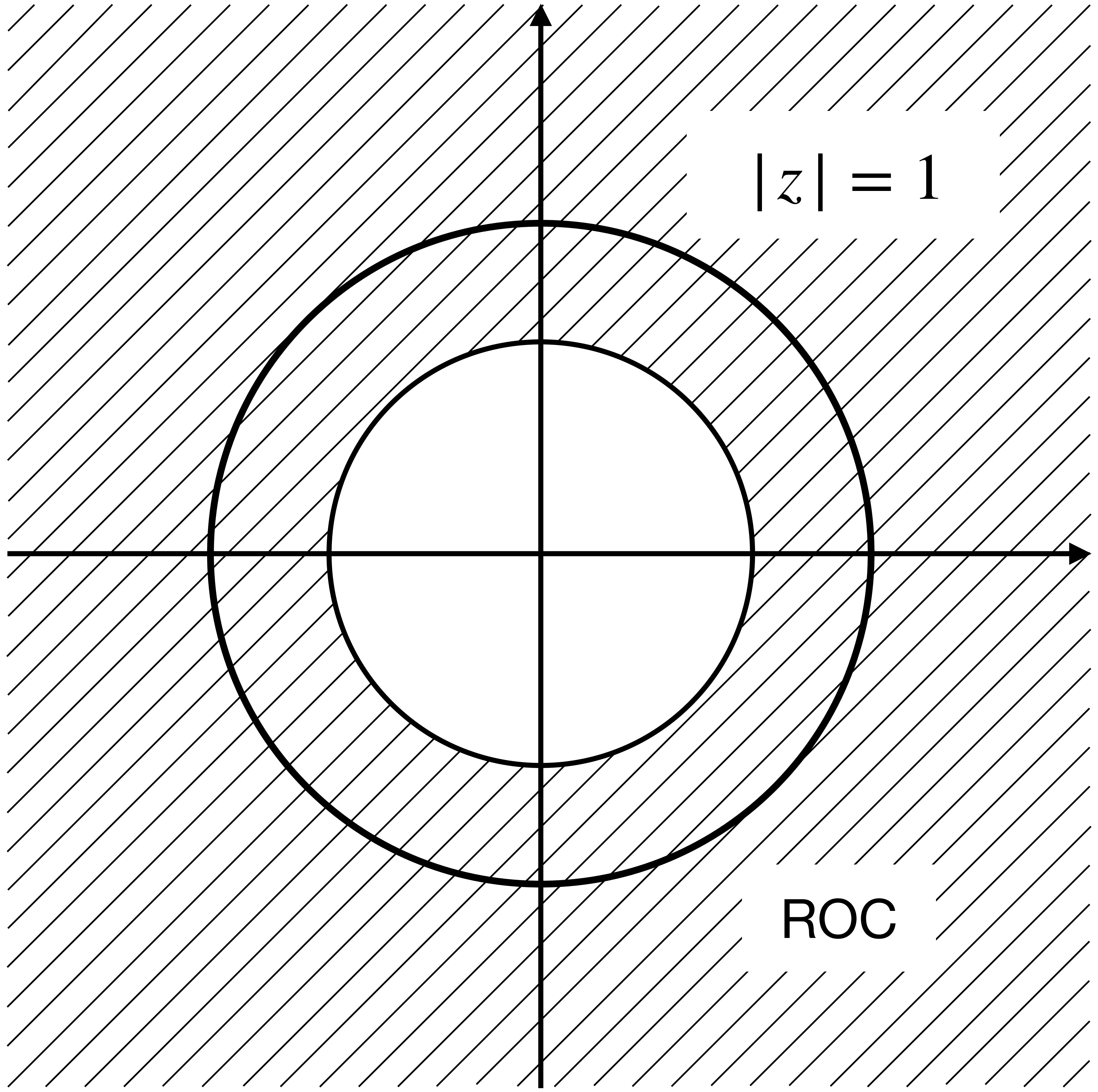
Causalidad y estabilidad

Un sistema LTI es BIBO estable $\Longleftrightarrow$ el ROC de la función de transferencia $H(z)$ incluye el círculo unitario.

Es decir si y solo si la $\mathrm{DTFT}\{h[n]\}$ existe, ya que

$$H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \mathrm{DTFT}\{h[n]\} .$$

Nota: $|H(\omega)| < \infty$ implica que $\sum_n |h[n]| < \infty$.

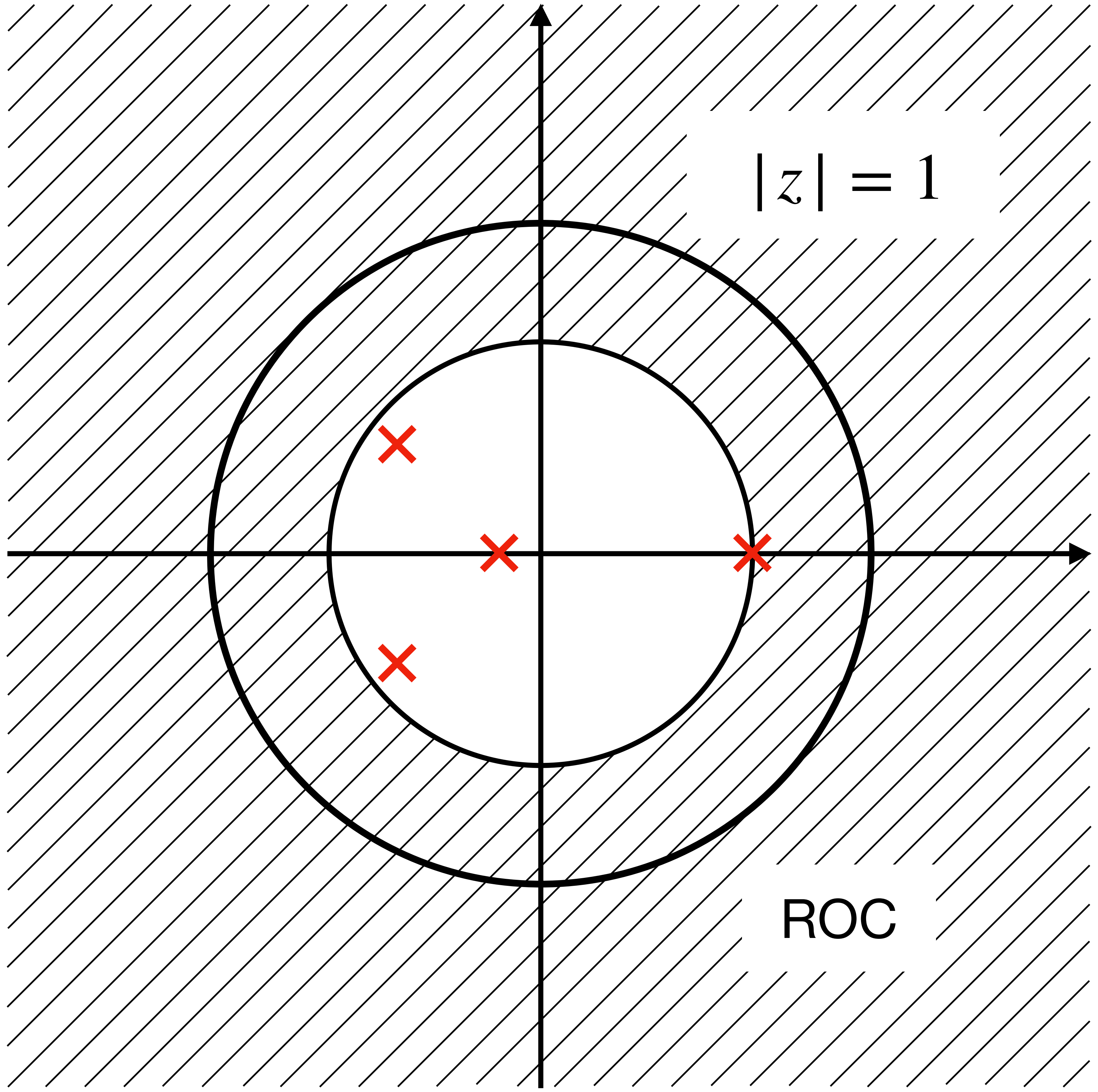


Transformada Z

Causalidad y estabilidad - Notas

1. Estabilidad no implica causalidad o viceversa.
2. Si el sistema es causal, la condición de BIBO estabilidad puede expresar de la siguiente forma.

   Un sistema LTI causal es BIBO estable $\iff$ Todos los polos de $H(z)$ están dentro del círculo unitario.



Transformada Z

Respuesta de un sistema que no está inicialmente en reposo

Dado un sistema discreto caracterizado por

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]\,,$$

que no se encuentra inicialmente en reposo (condiciones iniciales diferentes de cero), consideremos que la transformada Z de lado derecho de la salida toma la siguiente forma

$$Y^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n]\, z^{-n}\,.$$

Además, asumiendo que $x[n]$ es causal tal que $X^{+}(z) = X(z)$, tenemos que

$$\mathcal{Z}^{+}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k]\right\} = \mathcal{Z}^{+}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]\right\}.$$

Transformada Z

Respuesta de un sistema que no está inicialmente en reposo

Operando, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{n=0}^{\infty} y[n-k]z^{-n} = \sum_{k=0}^{M} b_k \sum_{n=0}^{\infty} x[n-k]z^{-n} \,.$$

En esta expresión tenemos que

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} y[n-k]z^{-n} = z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty} y[n-k]z^{-(n-k)} = z^{-k}\sum_{n=-k}^{\infty} y[n]z^{-n} = z^{-k}\left\{Y^{+}(z) + \sum_{n=-k}^{-1} y[n]z^{-n}\right\}$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x[n-k]z^{-n} = z^{-k}X(z).$

Reemplazando términos tenemos que

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left\{Y^{+}(z) + \sum_{n=1}^{k} y[-n]z^{n}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}X(z) \,.$$

Transformada Z

Respuesta de un sistema que no está inicialmente en reposo

Agrupando términos finalmente tenemos que

$$Y^+(z) = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k}}}_{H(z)} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \left\{ \sum_{n=1}^{k} y[-n] z^n \right\}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k}} = H(z)X(z) + \frac{N_o(z)}{A(z)}\,.$$

$H(z)\,X(z)$ corresponde a la respuesta de estado cero o inicialmente en reposo (respuesta particular o forzada).

$N_o(z)/A(z)$ corresponde a la respuesta de entrada cero (respuesta característica u homogénea).

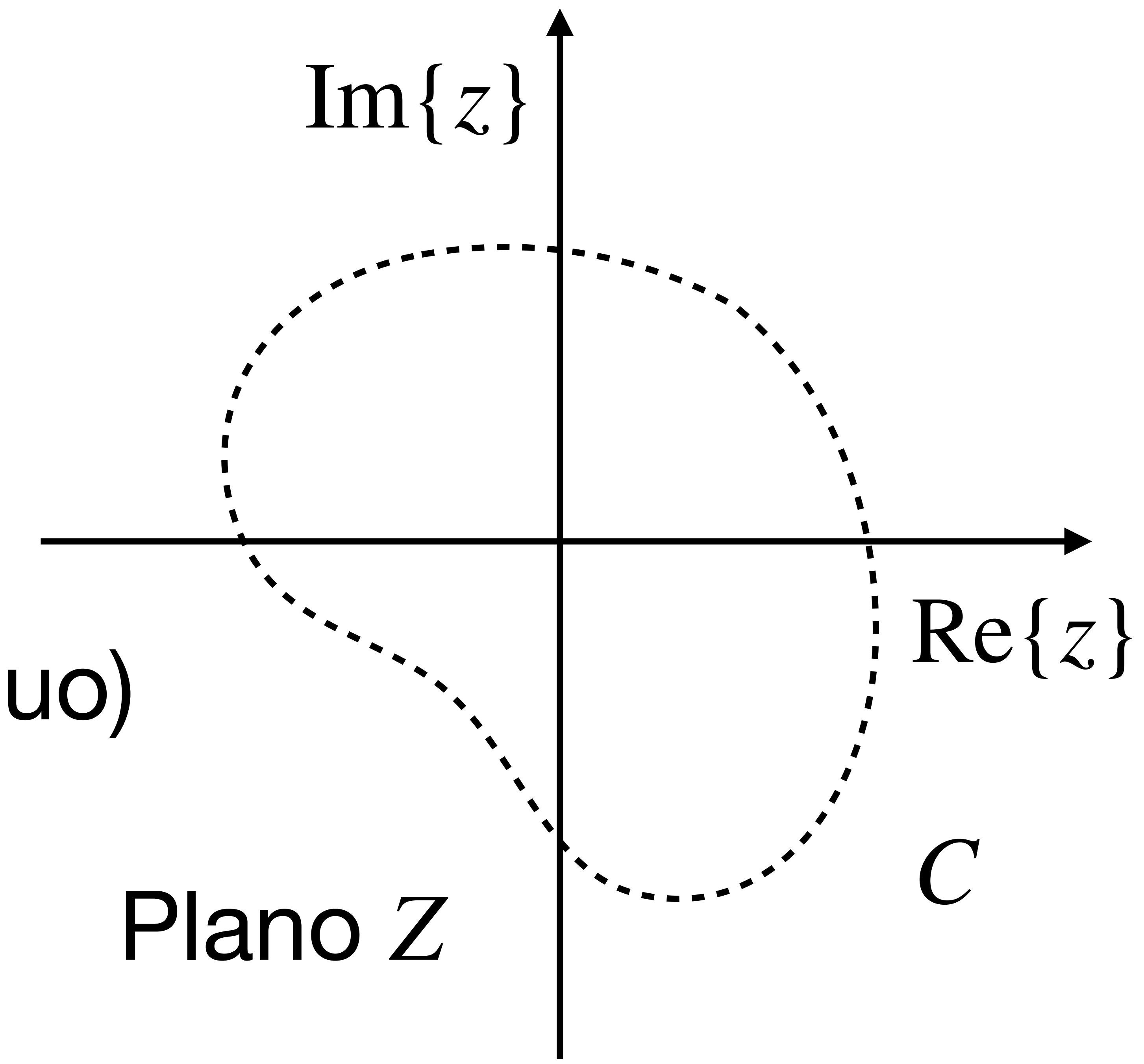
Para obtener $y[n]$, para $n \geq 0$, debemos tomar la transformada inversa de $Y^+(z)$.

Transformada Z

Métodos para el cálculo de la transformada Z inversa

La transformada Z inversa está definida como una integral de Cauchy,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)\, z^{n-1} dz \, ,$$



donde la curva cerrada C debe estar dentro del ROC.

Métodos para el cálculo de la transformada Z inversa:

1. Evaluación de la integral de Cauchy (teorema del residuo)
2. Por inspección simple
3. Expansión en fracciones parciales
4. Expansión en series de potencia

Transformada Z

Expansión en fracciones parciales

Dado

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \, z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \, z^{-k}} \,,$$

podemos reescribir $X(z)$ de la siguiente forma

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})} \,,$$

donde c_k son ceros de $X(z)$ y d_k son polos de $X(z)$.

Transformada Z

Expansión en fracciones parciales

Si $M < N$ y los polos son de primer orden, entonces

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}, \text{ donde } A_k = (1 - d_k z^{-1})X(z)\Big|_{z=d_k}.$$

Para determinar $x[n]$ debemos definir el ROC de $X(z)$.

Recordar que $X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ tiene dos posibles inversas según el ROC,

$$|z| > |a| \implies x[n] = a^n u[n],$$

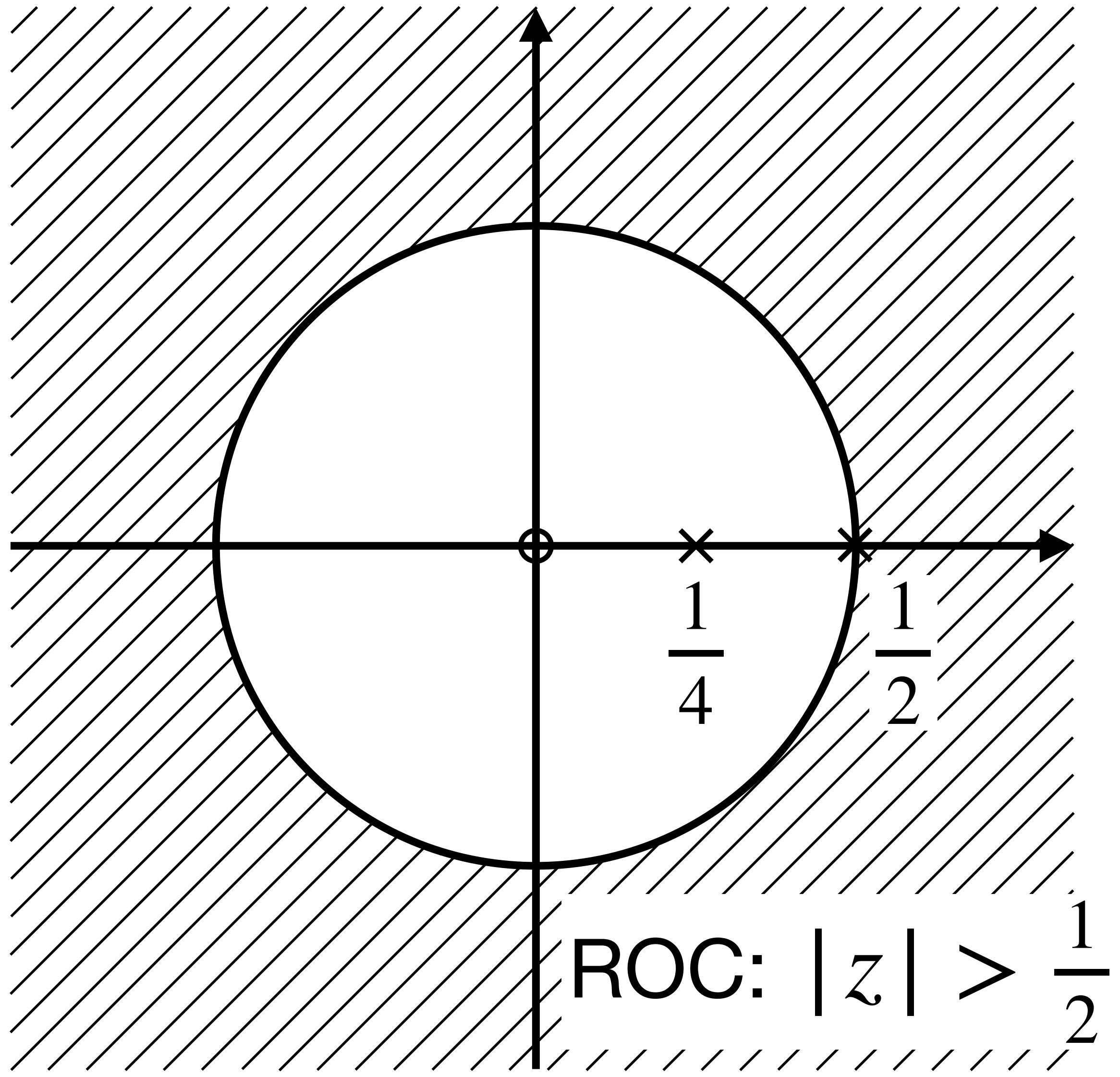
$$|z| < |a| \implies x[n] = -a^n u[-n-1].$$

Transformada Z

Expansión en fracciones parciales - Ejemplo

Dado

$$X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$



tenemos que

$$X(z) = \frac{A_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Calculando los coeficientes A_1 y A_2 obtenemos

$$A_1 = (1-\tfrac{1}{4}z^{-1})X(z)\Big|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot 4} = -1 \quad \text{y} \quad A_2 = (1-\tfrac{1}{2}z^{-1})X(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}\cdot 2} = 2.$$

Transformada Z

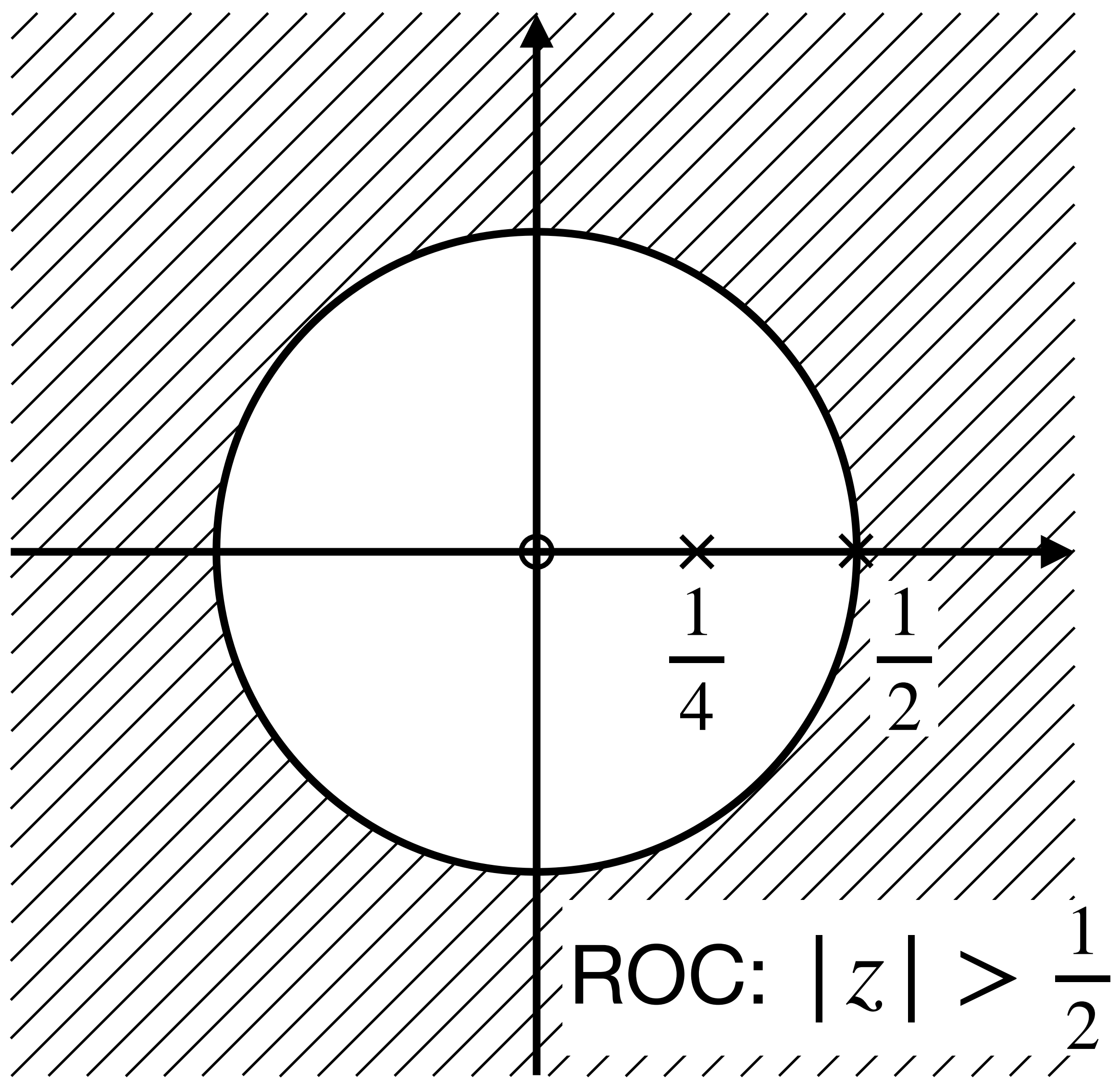
Expansión en fracciones parciales - Ejemplo

Entonces

$$X(z) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}},$$

luego

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$



Transformada Z

Expansión en fracciones parciales

- Si $M \geq N$ y los polos son de primer orden, entonces

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}, \text{ donde } A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k}.$$

  B_r se obtiene a partir de divisiones sucesivas del numerador y denominador, el proceso termina cuando el residuo es de grado menor que el denominador. Nota: $B_r z^{-r} \overset{\mathscr{Z}^{-1}}{\Longleftrightarrow} B_r \delta[n-r]$.

- Si $M \geq N$ y hay un polo $z = d_i$ de orden s, entonces

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1,\, k \neq i}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^{s} \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m},$$

  donde $C_m = \dfrac{1}{(s-m)!(-d_i)^{s-m}} \left\{ \dfrac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} (1 - d_i z^{-1})^s X(w^{-1}) \right\}_{w=d_i^{-1}}$.

  B_r y A_k son calculados de misma forma que arriba. Nota: $nx[n] \overset{\mathscr{Z}}{\Longleftrightarrow} -z \dfrac{d}{dz} X(z)$.

Transformada Z

Expansión en fracciones parciales - Ejemplo

Dado $X(z) = \dfrac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \dfrac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1$, expandir $X(z)$ en fracciones parciales

$$X(z) = B_o + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}} \,.$$

Calculando B_o :

$$\begin{array}{r|l} z^{-2} + 2z^{-1} + 1 & \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ \cline{2-2} -(z^{-2} - 3z^{-1} + 2) & 2 \\ \hline 5z^{-1} - 1 & \end{array}$$

$$X(z) = 2 + \frac{5z^{-1} - 1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} = 2 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}} \,,$$

Transformada Z

Expansión en fracciones parciales - Ejemplo

Calculando A_1 y A_2:

$$A_1 = \left. \frac{5z^{-1} - 1}{1 - z^{-1}} \right|_{z=1/2} = -9, \quad \text{y} \quad A_2 = \left. \frac{5z^{-1} - 1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right|_{z=1} = 8\,.$$

Entonces

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}.$$

Considerando $|z| > 1$, entonces $x[n] = 2\,\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8\,u[n]$.

Transformada Z

Expansión por series de potencia

Dada la transformada Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

tenemos que

$$X(z) = \ldots + x[-2]z^{2} + x[-1]z^{1} + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \ldots$$

Los valores de $x[n]$ se pueden encontrar a partir de expresar $X(z)$ como una serie de potencias de z.

Transformada Z

Expansión por series de potencia

Ejemplo: Dada la función logarítmica

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a| \ .$$

Usando la expansión de $\log(1 + x)$ para $|x| < 1$ tenemos que

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n} z^{-n}.$$

Luego,

$$x[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^n a^n}{n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases}$$

Transformada Z

Expansión por series de potencia

Ejemplo: Fracciones de polinomios

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}.$$

* ROC: $|z| > 1$ (causal)

$$1 \div \left(1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right) = \underbrace{1}_{x[0]} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{x[1]} z^{-1} + \underbrace{\frac{7}{4}}_{x[2]} z^{-2} + \ldots$$

* ROC: $|z| < \frac{1}{2}$ (no causal)

$$1 \div \left(\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1\right) = \underbrace{2}_{x[-2]} z^{2} + \underbrace{6}_{x[-3]} z^{3} + \underbrace{14}_{x[-4]} z^{4} + \ldots$$

Transformada Z

Expansión por series de potencia

* ROC: $|z| > 1$ (causal)

$$1 \div \left(1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right) = \underbrace{1}_{x[0]} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{x[1]} z^{-1} + \underbrace{\frac{7}{4}}_{x[2]} z^{-2} + \ldots$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
+1 & & & & 1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \\ \cline{5-5}
-1 & +\frac{3}{2}z^{-1} & -\frac{1}{2}z^{-2} & & 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \ldots \\ \cline{1-3}
 & +\frac{3}{2}z^{-1} & -\frac{1}{2}z^{-2} & & \\
 & -\frac{3}{2}z^{-1} & +\frac{9}{4}z^{-2} & -\frac{3}{4}z^{-3} & \\ \cline{2-4}
 & & +\frac{7}{4}z^{-2} & -\frac{3}{4}z^{-3} & \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

Transformada Z

Expansión por series de potencia

* ROC: $|z| < \frac{1}{2}$ (no causal)

$$1 \div \left(\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1\right) = \underbrace{2}_{x[-2]} z^2 + \underbrace{6}_{x[-3]} z^3 + \underbrace{14}_{x[-4]} z^4 + \ldots$$

$$\begin{array}{ccccc}
+1 & & & & \\
-1 & +3z^1 & -2z^2 & & \\
\hline
 & +3z & -2z^2 & & \\
 & -3z & +9z^2 & -6z^3 & \\
\hline
 & & +7z^2 & -6z^3 & \\
 & & -7z^2 & +21z^3 & -14z^4 \\
\hline
 & & & +15z^3 & -14z^4 \\
 & & & \vdots &
\end{array}
\quad
\begin{array}{|l}
\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\
\hline
2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + \ldots
\end{array}$$

¡Muchas gracias!