

## Laboratorio 05 – Parte Teórica

Entrega:

Horario 0791 - 11 de noviembre del 2024

Horario 0792 - 29 de noviembre del 2024

Problemas:

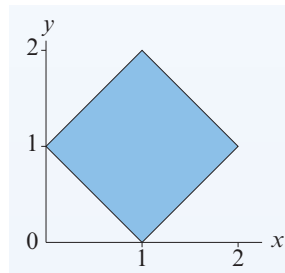
1. (1 pto.) Sea la variable aleatoria  $X$  con función de densidad de probabilidad  $f_X(x)$ .
  - a) Demuestre que la variable aleatoria  $Y = aX + b$  tiene función de densidad de probabilidad

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

- b) Demuestre que si  $X$  es una variable aleatoria gaussiana con media  $m$  y varianza  $\sigma^2$ , tal que  $X \sim N(m, \sigma^2)$  entonces se cumple que

$$Y = aX + b \sim N(am + b, a^2\sigma^2).$$

2. (1 pto.) Dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$  tienen una función de densidad conjunta  $f(x, y)$  que es igual a  $1/2$  en la región sombreada que se muestra en la siguiente figura.



- a) Determine las funciones de densidad de probabilidad marginales  $f(x)$  y  $f(y)$ .
  - b) Demuestra que  $X$  y  $Y$  no son independientes y que no están correlacionadas.
3. (1 pto.) Un proceso auto-regresivo AR(2) se define por la siguiente ecuación de diferencias

$$y[n] = \frac{5}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] + x[n]$$

donde  $x[n]$  es ruido blanco gaussiano con media cero y varianza 2. Utilizar las ecuaciones de Yule-Walker para determinar la función de autocorrelación  $r_x[l]$  para  $l \geq 0$ .

Nota: Recuerde que  $r_x[k] = E\{x[n]x[n-k]\}$ .

4. (1 pto.) La función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  está dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = K_1(x+y)e^{-(x+y)}u(x)u(y)$$

donde  $u(\cdot)$  es la función escalón unitario

- a) Determine  $K_1$  para que  $f_{X,Y}(x, y)$  represente una función de densidad de probabilidad.
  - b) ¿Son las variables  $X$  e  $Y$  independientes? Justifique su respuesta.

5. (2 pts.) Un filtro con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 - 0,1z^{-1} - 0,72z^{-2}}{1 - 0,9z^{-1} + 0,81z^{-2}}$$

es excitado por un proceso aleatorio tipo ruido blanco gaussiano  $x[n] \sim N(0, 1)$ .

- a) Determine si el proceso aleatorio de salida  $y[n]$  es estacionario en el sentido amplio.
  - b) Determine los valores teóricos de la media, varianza y autorrelación del proceso de salida.
6. (2 pts.) Un proceso auto-regresivo de primer orden AR(1) está dado por la ecuación de diferencias

$$x[n] = \rho x[n-1] + w[n]$$

donde  $w[n]$  es ruido blanco con varianza  $\sigma_w^2$ .

- a) Calcule la función de auto correlación de  $x[n]$ .
- b) Calcule la densidad espectral de potencia  $S_X(e^{j\omega})$ .