Laboratorio 4 - Parte teórica

Hineill David, Céspedes Espinoza - 20213704

Preg (4) Se tiene un LPF - Analógico tal que

$$H_a(s) = \frac{1}{s+\alpha} \leftrightarrow h_a(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

a) Ganancia en DC = ? DC se interpreta como $\Omega = 0$ $\boxed{s = j\Omega}$

$\angle\ s = 0$

$$\rightarrow H_a(0) = 1/\alpha \rightarrow \boxed{\text{Ganancia DC} = 1/\alpha}$$

$\Omega_0 = ?$ para la que $H_a(\Omega_0 j)$ es 3dB menor que Ganancia DC

$$|H_a(j\Omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{\Omega_0^2 + \alpha^2}} \qquad 3dB \approx 10\log_{10}(2)$$

$$20\log_{10}|H_a(j\Omega_0)| + 3dB = 20\log_{10}(1/\alpha) \quad \text{(Escala logarítmica)}$$

$$10\log_{10}\left(\frac{1}{\Omega_0^2+\alpha^2}\right) + 10\log(2) = 10\log_{10}\left(1/\alpha^2\right)$$

$$= 10\log_{10}\left(\frac{2}{\Omega_0^2+\alpha^2}\right) = 10\log\left(1/\alpha^2\right)$$

$$2\alpha^2 = \Omega_0^2 + \alpha^2 \rightarrow \boxed{\alpha = \pm\Omega_0}$$

$\rightarrow$ Con $\boxed{\Omega_0 = \pm\alpha}$ se alcanzan 3dB por debajo de $H_a|_{DC}$

En que Ω_0, $H_a(j\Omega) = 0$?

$\frac{1}{j\Omega_0 + \alpha} = 0$, no puede ocurrir ya que no existe un Ω_0 real que anule la parte Im del denominador

$\boxed{\text{No hay } \Omega_0 \,/\, H_a(j\Omega) = 0}$

Para que t_0, $h_a(t_0) = \frac{1}{e}(h_a(0))$?

$\rightarrow e^{-\alpha t_0} = \frac{1}{e}(1) \rightarrow -\alpha t_0 = -1$

$\boxed{t_0 = 1/\alpha}$

Después de $t_0 = 1/\alpha$ seg, se decae en $1/e$

b) → Diseñar $H(z)$ a partir de $H_a(s)$, usando invarianza

1°) Consideramos un muestreo tal que $\boxed{t = nT_s}$

$\rightarrow h_a(t) = e^{-\alpha t} u(t)$

$h_a[n] = \left(e^{-\alpha T_s}\right)^n u[n]$

2°) Aplicamos Z{h} } x tabla

$\rightarrow H_a(z) = \frac{1}{1 - \left(e^{-\alpha T_s}\right) z^{-1}}$

tenemos $\boxed{H(z) = \dfrac{z}{z - (e^{-\alpha T_s})}}$ Con Método de invarianza

→ Ganancia DC = ? DC se interpreta como $\Omega = 0$, y $z = e^{jw}$

$w = \Omega T_s$

→ $z = e^{0}$ → $\boxed{z = 1}$

DC → $\boxed{z = 1}$

→ $H(1) = \dfrac{1}{1 - e^{-\alpha T_s}}$

Finalmente, la ganancia de DC del sistema discreto: $\dfrac{1}{1 - e^{-\alpha T_s}}$

→ $w_0 = ?$ tal que $H(e^{jw_0})$ es 3dB menor a $H(1)$

→ Planteamos de manera similar que en a)

$$20\log_{10}(|H(e^{jw_0})|) + 3\,dB = 20\log_{10}\left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha T_s}}\right)$$

$$20\log_{10}\left(\frac{1}{|1 - e^{-\alpha T_s} e^{-jw_0}|}\right) + 20\log_{10}(\sqrt{2}) = 20\log_{10}\left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha T_s}}\right)$$

→ Es fácil notar que

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{|1 - e^{-\alpha T_s} e^{-jw_0}|} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T_s}}}$$

$$\to (\sqrt{2})(1-e^{-\alpha T_s}) = \left\| 1 - e^{-\alpha T_s}\left(\cos(w_0) - j\sin(w_0)\right) \right\|$$

$$2(1-e^{-\alpha T_s})^2 = \left(1-e^{-\alpha T_s}\cos(w_0)\right)^2 + \left(\sin(w_0)e^{-\alpha T_s}\right)^2$$

$$2(1-2e^{-\alpha T_s}+e^{-2\alpha T_s}) = 1 + e^{-2\alpha T_s}\cos^2(w_0) - 2e^{-\alpha T_s}\cos(w_0) + \sin^2(w_0)e^{-2\alpha T_s}$$

$$2-4e^{-\alpha T_s}+2e^{-2\alpha T_s} = 1 + e^{-2\alpha T_s} - 2e^{-\alpha T_s}\cos(w_0)$$

$$\cos(w_0) = \frac{1-4e^{-\alpha T_s}+e^{-2\alpha T_s}}{-2e^{-\alpha T_s}}$$

$$\cos(w_0) = \frac{1}{2}\left(-e^{\alpha T_s} + 4 - e^{-\alpha T_s}\right)$$

$$\to w_0 = \arccos\left(\frac{4-e^{\alpha T_s}-e^{-\alpha T_s}}{2}\right)$$

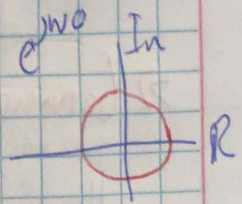
Se alcanza -3dB con

$$\boxed{w_0 = \arccos\left(\frac{4-e^{-\alpha T_s}-e^{\alpha T_s}}{2}\right)}$$

⇒ Hallar w_0 / $H(e^{jw_0})=0$

$$\frac{e^{jw_0}}{e^{jw_0}-e^{-\alpha T_s}} = 0$$

, No puede ocurrir porque e^{jw_0} → Nunca se hace '0'



∴ No existe w_0 / $H(e^{jw_0})=0$

$\Rightarrow$ $n_0 = ?$ hasta $h[n_0] = \frac{1}{e} h[0]$

$$\left(e^{-\alpha T_s}\right)^{n_0} = 1/e \quad \rightarrow \quad -\alpha T_s n_0 = -1$$

$$n_0 = \frac{1}{\alpha T_s} \quad (\text{Sample})$$

$\rightarrow$ Se necesitan $\boxed{n_0 = \frac{1}{\alpha T_s}}$ muestras hasta que decaiga en $1/e$ //

c) $\Rightarrow$ Diseñar $H(z)$ con trans. bilineal:

Tomamos $s = m\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$

$$\rightarrow H(z) = H_a(s)\Big|_{s = m\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

$$H(z) = \frac{1}{m\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \alpha} \Rightarrow H(z) = \frac{(z+1)}{m(z-1) + \alpha(z+1)}$$

$$\rightarrow \boxed{H(z) = \frac{z+1}{(m+\alpha)z + \alpha - m}}$$ Método bilineal

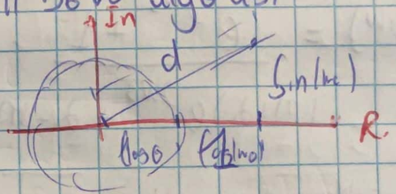
$\Rightarrow$ Ganancia DC = ?

$$H(1) = \frac{2}{(m+\alpha) + \alpha - m} \rightarrow \boxed{H(1) = \frac{1}{\alpha}}$$ $\rightarrow$ Ganancia DC //

⇒ w_o Para -3dB de la DC

$$20\log_{10}\left(\frac{\|e^{-jw_o}+1\|}{\|(m+\alpha)e^{-jw_o}+(\alpha-m)\|}\right)+20\log_{10}(\sqrt{2})=20\log_{10}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$d=\|e^{-jw_o}+1\|$ se ve algo así



$$\rightarrow \frac{\sqrt{\sin^2(w_o)+(1+\cos(w_o))^2}\;\sqrt{2}}{\sqrt{(\alpha-m+(m+\alpha)\cos(w_o))^2+\sin^2(w_o)(m+\alpha)^2}}=\frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{2(1+1+2\cos(w_o))}{(\alpha-m)^2+(m+\alpha)^2\cos^2(w_o)+2(\alpha-m)(m+\alpha)\cos(w_o)+\sin^2(w_o)(m+\alpha)^2}=\frac{1}{\alpha^2}$$

$$\frac{4(1+\cos(w_o))}{(\alpha-m)^2+2(\alpha-m)(m+\alpha)\cos(w_o)+(m+\alpha)^2}=\frac{1}{\alpha^2}$$

$$\frac{2(1+\cos(w_o))2}{2(\alpha^2+m^2)+2(\alpha^2-m^2)\cos(w_o)}=\frac{1}{\alpha^2}$$

$$2(\alpha^2)(1+\cos(w_o))=(\alpha^2+m^2)+(\alpha^2-m^2)\cos(w_o)$$

$$2\alpha^2+2\alpha^2\cos(w_o)=\alpha^2+m^2+(\alpha^2-m^2)\cos(w_o)$$

$$(\alpha^2+m^2)\cos(w_o)=m^2-\alpha^2$$

$$W_o = \arccos\left(\frac{m^2 - \lambda^2}{\lambda^2 + m^2}\right) //$$

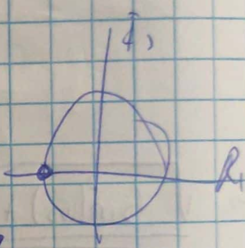
frecuencia para la que se llega a -3dB

$\Rightarrow W_o = ? \;/\; H(e^{jw_o}) = 0$

$$H(e^{jw}) = \frac{e^{-jw_o} + 1}{(m+\lambda)e^{-jw_o} + \lambda - m}$$

~~Nunca pued~~

$\rightarrow e^{-jw_o} + 1 = 0 \rightarrow e^{-jw_o} = -1$



$\cancel{W_o = 2m+1), m \in \mathbb{Z}}$

$\rightarrow W_o = (2m+1)\pi, \; m \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow W_o = \{\pi, 3\pi, 5\pi \ldots\}$

$\angle$ hacen q $H(e^{jw_o}) = 0$ //

$\Rightarrow n_o = ? \;/\; h[n_o] = h[0]/e$

$$H(z) = \frac{z + 1}{(m+\lambda)z + (\lambda - m)} \rightarrow H(z) = \frac{1}{(m+\lambda) + (\lambda - m)z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{(m+\lambda) + (\lambda - m)z^{-1}}$$

Acomodam.

indica un desfase

$$H(z) = \frac{(1/m+\lambda)}{1 - \frac{(m-\lambda)}{m+\lambda}z^{-1}} + \frac{(z^{-1})(1/m+\lambda)}{1 - \frac{(m-\lambda)}{m+\lambda}z^{-1}}$$

SURCO

Tenemos en cuenta que $H(z)$ debe ser estable y causal

$\left|\frac{m-\alpha}{m+\alpha}\right| < |z|$ Usamos tabla y aplicamos datos

$$h[n] = \left(\frac{1}{m+\alpha}\right)\left(\frac{m-\alpha}{m+\alpha}\right)^{n} u[n] + \left(\frac{1}{m+\alpha}\right)\left(\frac{m-\alpha}{m+\alpha}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$h[0] = 1/\alpha+m$

$$h[n_0] = \left(\frac{1}{\alpha+m}\right)\frac{1}{e}$$

$$\left(\frac{m-\alpha}{m+\alpha}\right)^{n_0} + \left(\frac{m-\alpha}{m+\alpha}\right)^{n_0-1} = \frac{1}{e}$$

$$\left(\frac{m-\alpha}{m+\alpha}\right)^{n_0}\left(1 + \frac{m+\alpha}{m-\alpha}\right) = \frac{1}{e}$$

$$\left(\frac{m-\alpha}{m+\alpha}\right)^{n_0} = \left(\frac{m-\alpha}{e}\right)\left(\frac{1}{2m}\right)$$

$$n_0 = \log_{\left(\frac{m-\alpha}{m+\alpha}\right)}\left(\frac{m-\alpha}{2em}\right)$$

$\therefore$ $n_0 = \log_{\left(\frac{m-\alpha}{m+\alpha}\right)}\left(\frac{m-\alpha}{2me}\right)$ muestras

Preg (3) $H_c(s) = \dfrac{5(s+2)}{(s+3)(s+4)}$

a) Método pulso invariante , $H_{(z)} = ?$ $T_s = 0{,}02$

Hallar polos

1°) Hallamos $\mathcal{L}^{-1}\{\}$ de $H_c(s)$

$$H_c(s) = \frac{5(s+2)}{(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+4}$$

$$A(s+4) + B(s+3) = 5(s+2)$$

$$B(-1) = -10 \rightarrow \boxed{B = 10}$$

$$A(1) = 5(-1) \rightarrow \boxed{A = -5}$$

$$\rightarrow H_c(s) = (-5)\left(\frac{1}{s+3}\right) + 10\left(\frac{1}{s+4}\right)$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}\{\}$$

$$h_c(t) = (-5)\left(e^{-3t}\right)u(t) + (10)\left(e^{-4t}\right)u(t)$$

$$\downarrow \text{Muestreamos}$$

$$h_c[n] = (-5)\left(e^{-3T_s}\right)^n u[n] + (10)\left(e^{-4T_s}\right)^n u[n]$$

$$\downarrow Z\{\}$$

$$\boxed{H_c(z) = \frac{-5}{1-\left(e^{-3T_s}\right)z^{-1}} + \frac{10}{1-\left(e^{-4T_s}\right)z^{-1}}}$$ función transformada

Como grafico x, d

Con $T_s = 0{,}02$ Seg

$$H_c(z) = \left(\frac{-5}{1-\left(e^{-0{,}06}\right)z^{-1}}\right) + \left(\frac{10}{1-\left(e^{-0{,}08}\right)z^{-1}}\right)$$ (Función de transferencia)

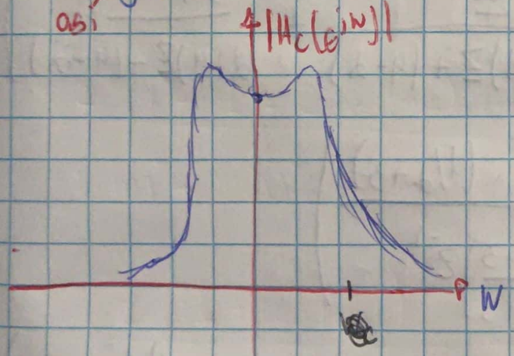
⇒ los polos son

$\boxed{z_1 = e^{-0{,}06}}$ y $\boxed{z_2 = e^{-0{,}08}}$

Grafica

$$\rightarrow H_c(e^{jw}) = \frac{-5}{1-(e^{-0{,}06})e^{-jw}} + \frac{10}{1-(e^{-0{,}08})e^{-jw}}$$ (Respuesta en frecuencia)

Para graficarlo tomamos encuenta python → obtenemos una grafica así



El código necesario para generarlo está al final de la sección computacional

b) Método bilineal

$$H_c(z) = (-5)\left(\frac{1}{\alpha\frac{z-1}{z+1}+3}\right) + (10)\left(\frac{1}{\alpha\frac{z-1}{z+1}+4}\right)$$

Reemplazamos →

$$= (-5)\left(\frac{z+1}{\alpha(z-1)+3(z+1)}\right) + (10)\left(\frac{z+1}{\alpha(z-1)+4(z+1)}\right)$$

$$= (-5)\left(\frac{z+1}{(\alpha+3)z+(3-\alpha)}\right) + (10)\left(\frac{z+1}{(\alpha+4)z+(4-\alpha)}\right)$$

$$= (-5)\left(\frac{z}{(\alpha+3)z+(3-\alpha)} + \frac{1}{(\alpha+3)z+(3-\alpha)}\right)$$

$$+ (10)\left(\frac{z}{(\alpha+4)z+(4-\alpha)} + \frac{1}{(\alpha+4)z+(4-\alpha)}\right)$$

$$= (-5)\left(\frac{(1/\alpha+3)}{1-\left(\frac{\alpha-3}{\alpha+3}\right)z^{-1}} + \frac{z^{-1}\cdot(1/\alpha+3)}{1-\left(\frac{\alpha-3}{\alpha+3}\right)z^{-1}}\right)$$

$$+ 10\left(\frac{1/\alpha+4}{1-\left(\frac{\alpha-4}{\alpha+4}\right)z^{-1}} + \frac{z^{-1}/\alpha+4}{1-\left(\frac{\alpha-4}{\alpha+4}\right)z^{-1}}\right)$$

Aplicamos ~~tabla~~ $Z^{-1}\{\}$

$$h_c[n] = \left(\frac{-5}{\alpha+3}\right)\left(\left(\frac{\alpha-3}{\alpha+3}\right)^n u[n] + \left(\frac{\alpha-3}{\alpha+3}\right)^{n-1} u[n-1]\right) +$$

$$\left(\frac{10}{\alpha+4}\right)\left(\left(\frac{\alpha-4}{\alpha+4}\right)^n u[n] + \left(\frac{\alpha-4}{\alpha+4}\right)^{n-1} u[n-1]\right)$$

Gráfica y cómo

$\alpha = 2/T \rightarrow \boxed{\alpha = 100}$

Remplazando en lo hallado antes:

$$H_c(z) = (-5)\left(\frac{z+1}{(103)z-97}\right) + (10)\left(\frac{z+1}{(104)z-96}\right)$$

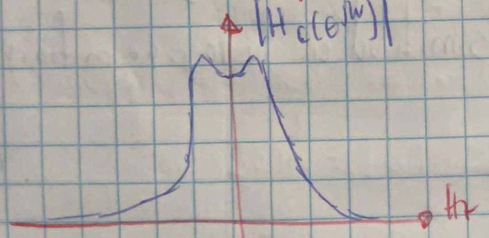
Función de transferencia

Polos: $\boxed{z_1 = \frac{97}{103}}$ y $\boxed{z_2 = \frac{96}{104}}$

$$H_d(e^{jw}) = (-5)\left(\frac{e^{jw}+1}{103e^{jw}-97}\right) + (10)\left(\frac{e^{jw}+1}{104e^{jw}-96}\right)$$

(Respuesta en frecuencia)

Ploteamos usando python



el código está al final del IP computacional

→ Comparación polos:

Polos - bilineal	$z_1 = 97/103$	$z_2 = 96/104$
Polos - invariante	$z_1 = e^{-0,06}$	$z_2 = e^{-0,08}$

Son cercanos

Son cercanos

Los polos generados en ambos métodos son cercanos porque ambos métodos buscan aproximarse a la respuesta del LPF partiendo →

de la respuesta en tiempo (Invarianza) o en frecuencia (transformación bilineal)

→ Comparación gráficos

A simple vista, las gráficas son similares ya que ambos deben parecerse lo más posible a la respuesta en frecuencia del LPF analógico. Sin embargo dado que existe una mínima diferencia en los polos de ambos $H_{c-a}(z)$, esto indica una mínima diferencia en los gráficos. Dado que estos métodos trabajan bajo conversiones, deben escoger los polos de tal forma que logré la similitud en la respuesta en frecuencia del LPF analógico

$$\left(\frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/2}\right)\frac{1}{2} = \frac{-1}{3\pi}$$

$$\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}$$

Preg 2

a) FIR, $\boxed{M=8}$, con ventana rectangular

tenemos $h_d[n] = \frac{w_c}{\pi}\,\text{Sinc}(w_c n)$

$$h_d[n] = \frac{\text{Sinc}(n\pi/2)}{2}$$

Ahora truncamos $h_d[n]$ a n = np.arange(-4, 5)

$\to n = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$\to \text{rect}[n] = u[n] - u[n-M-1]$

Ahora tenemos

$$h[n] = \text{rect}[n]\cdot h_d\left[n - \frac{M-1}{2}\right]$$

Como hay fase lineal, hay simetría

$\to h[0] = \frac{\text{Sinc}(-2\pi)}{2} = 0$ $\qquad h[8] = h[0]$

$h[1] = \frac{\text{Sinc}(-3\pi/2)}{2} = \frac{-1}{3\pi}$ $\qquad h[7] = h[1]$

$h[2] = \frac{\text{Sinc}(-\pi)}{2} = 0$ $\qquad h[6] = h[2]$

$h[3] = \frac{\text{Sinc}(-\pi/2)}{2} = \frac{1}{\pi}$ $\qquad h[5] = h[3]$

Coeficientes del filtro $\qquad \boxed{h[4] = 1/2}$

$\hookrightarrow h[n] = [\underset{\uparrow}{0}, \frac{-1}{3\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, 1/2, \frac{1}{\pi}, 0, \frac{-1}{3\pi}, 0]$

0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8

$$\rightarrow H(w) = \sum_{n=0}^{M} h[n] e^{-jwn}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n] z^{-n}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^{M} h[n] z^{-n}$$

$$z^{-1}\Big\{ \rightarrow \cancel{y[n] = (x[n])\,0} + \left(\frac{-1}{3\pi}\right) x[n-1] \cancel{+ \frac{x[n-3]}{\pi}}$$

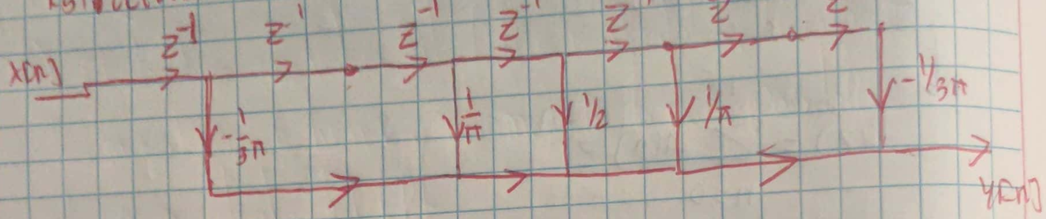
$$\rightarrow y[n] = \left(\frac{-1}{3\pi}\right) x[n-1] + \left(\frac{1}{\pi}\right) x[n-3] + \frac{1}{2} x[n-4]$$

$$\left(-\frac{1}{3\pi}\right) x[n-7] + \left(\frac{1}{\pi}\right) x[n-5]$$

Ecuación en diferencias //

Estructura

Estructura FIR



b)

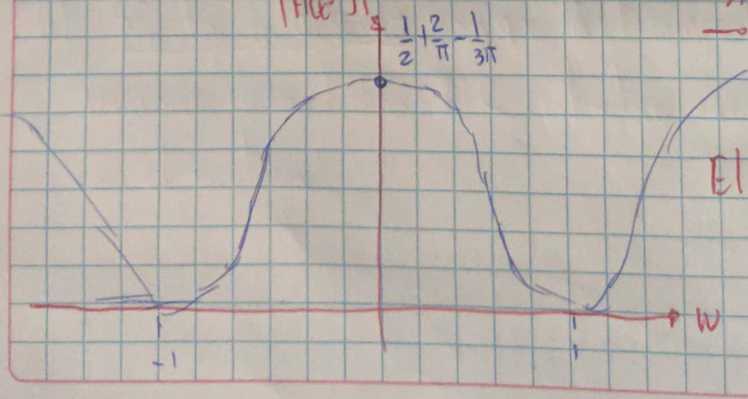
$$H(e^{jw}) = H(z)\Big|_{z=e^{-jw}}$$

$$H(e^{jw}) = -\frac{1}{3\pi} e^{jw} + \frac{1}{\pi} e^{-j3w} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} e^{+3jw} - \frac{1}{3\pi} e^{-jw}$$

$$H(e^{jw}) = \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\, 2 \cos(3w) - \frac{1}{3\pi} \cos(w)$$

$H(e^{jw})$ es puramente real $\rightarrow \angle |H(e^{jw})| = 0$ fase

$$|H(e^{jw})| = \left| \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(3w) - \frac{1}{3\pi} \cos(w) \right|$$ Magnitud



→ tmb se gráfico usando python

El código está al final del Tp computacional

Para reducir el rizado, comunmente se emplean ventanas que suavizan mejor el comportamiento de la respuesta en frecuencia en comparación a solo aplicar un ventana rectangular (solo truncar).

Preg (1)

a) El objetivo es volver al filtro realizable, truncando los muestras de h[n] y asemejarlo lo más posible al caso ideal del LPF.

→ Para ello se toman muestras de Sinc desfasando de acuerdo a la cantidad de coeficientes que queramos.

→ Luego de acuerdo a las características que se requieren podemos emplear ventanas (hamming, hanning o blackman) para lograr mayor o menor rizado o ancho espectral.

→ De tal forma, la ventana nos permite ajustar mejor los parámetros de acuerdo a la necesidad.

→ En resumen, la filosofía ~~se~~ consiste en truncar sinc para reconstruir LPF ~~lineal~~ ideal y aplicar ventana para mejorar características del filtro.

b) Sí estoy de acuerdo, ya que el comportamiento recursivo de los filtros IIR introduce fase no lineal en el sistema.