IEE352 - Procesamiento Digital de Señales

Clase 05a
Análisis Espectral de Señales

Dr. Marco A. Milla
Sección Electricidad y Electrónica (SEE)
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

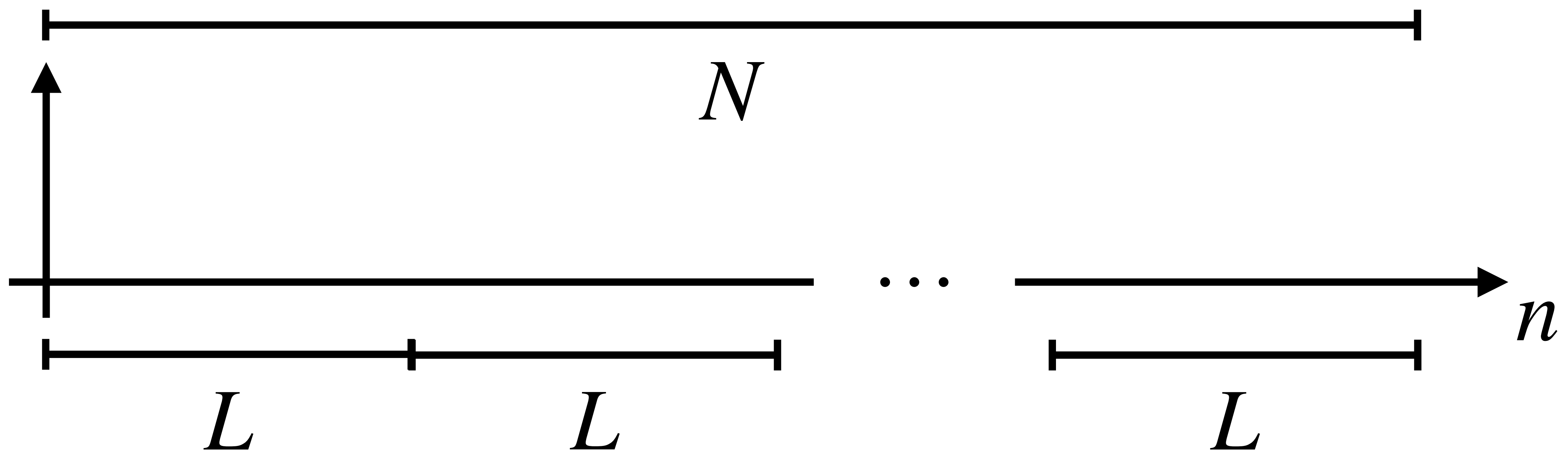
email: milla.ma@pucp.edu.pe

Análisis espectral de señales

Short-time FFT

Dada la señal $x[n]$, donde $n \in [0, N-1]$, se define

$$\mathrm{STFT}_L\{x\} = \bar{X}[m,k] = \mathrm{FFT}_L\{x[mL : (m+1)L-1]\}.$$



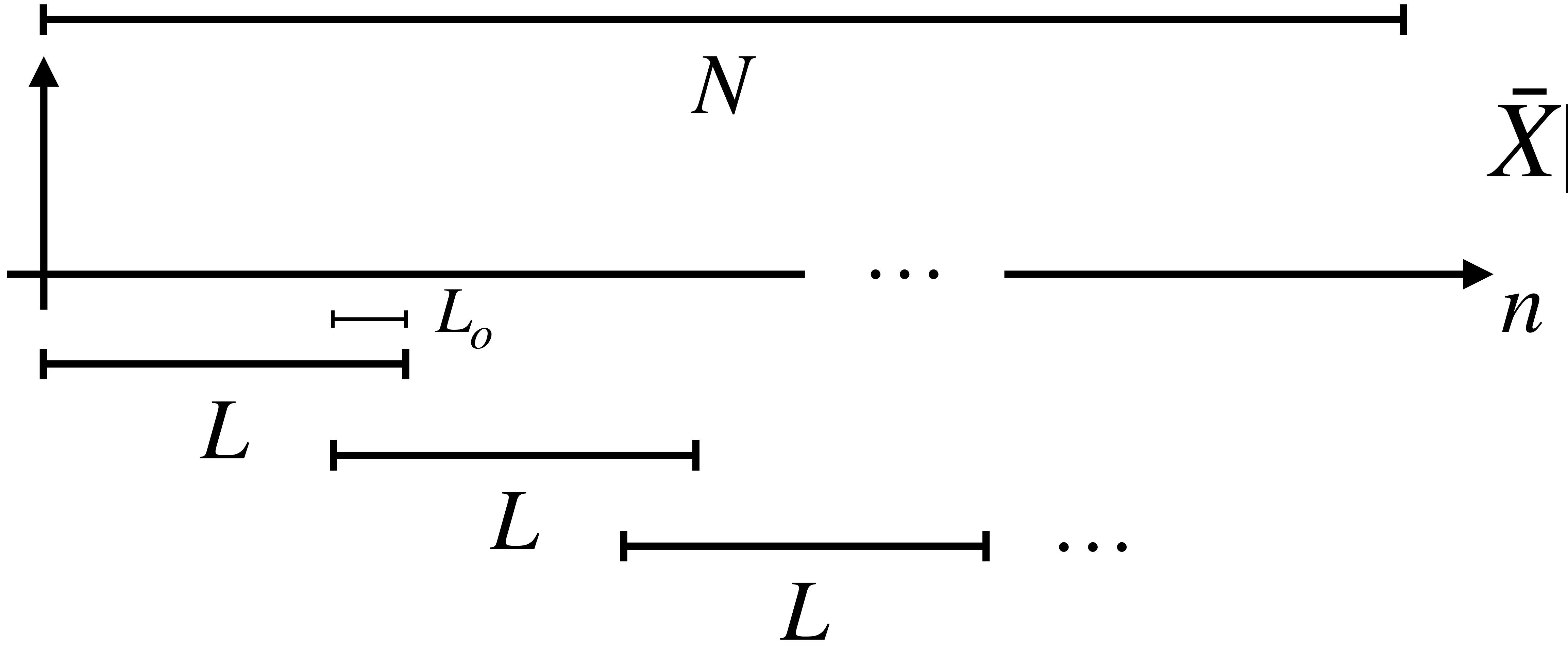
$$\bar{X}[m,k] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n+mL]\, e^{-j2\pi\frac{nk}{L}}$$

Análisis espectral de señales

Short-time FFT

También se puede considerar un traslape (overlapping) entre los grupos de datos analizados.

$$\mathrm{STFT}_{L,L_o}\{x\} = \bar{X}[m,k] = \mathrm{FFT}_L\{x[m(L-L_o) : m(L-L_o)+L-1]\}.$$



$$\bar{X}[m,k] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n+m(L-L_o)]\, e^{-j2\pi\frac{nk}{L}}$$

Análisis espectral de señales

Definiciones

Energía de una señal

Definida como la integral del módulo al cuadrado de una señal continua $x(t)$,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

En general, no tiene sentido físico, pero coincide con la expresión de energía para algunos sistemas físicos.

Potencia de una señal

Si la amplitud de una señal no decae entonces $E = \infty$. En estos casos se utiliza la potencia como una medida para analizar la señal. La potencia es el promedio de la energía por unidad de tiempo.

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt.$$

Análisis espectral de señales

Teorema de Parseval

Sea $x(t)$ una señal de energía finita $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$, cuya transformada de Fourier está dada por $X(\Omega) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t} dt$, se cumple que

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega.$$

Interpretación: $S_{xx}(\Omega) = |X(\Omega)|^2$ describe como la energía de una señal $x(t)$ se distribuye en frecuencia, y se le conoce como la densidad espectral de energía (energy density spectrum).

Análisis espectral de señales

Relación con la función de autocorrelación

La función de autocorrelación (ACF) de una señal $x(t) \in \mathbb{R}$ se define como

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, dt.$$

La transformada de Fourier de $R_{xx}(\tau)$ está dada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{R_{xx}(\tau)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)\, dt \right) e^{-j\Omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \right) dt\,.
\end{aligned}$$

Análisis espectral de señales

Relación con la función de autocorrelación

Aplicando un cambio de variables $\xi = t + \tau$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{R_{xx}(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) e^{-j\Omega(\xi - t)} d\xi \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) e^{-j\Omega\xi} d\xi \right) e^{j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\Omega t} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) e^{-j\Omega\xi} d\xi \\
&= X^*(\Omega)\, X(\Omega) = |\, X(\Omega) \,|^2
\end{aligned}$$

entonces

$$S_{xx}(\Omega) = |\, X(\Omega) \,|^2 = \mathscr{F}\{R_{xx}(\tau)\}.$$

Análisis espectral de señales

Cálculo de $S_{xx}(\Omega)$

Se tienen dos opciones.

- Calcular $\mathcal{F}\{x(t)\}$, luego tomar el módulo y elevar al cuadrado.
- Calcular $R_{xx}(\tau)$ (auto-correlación) y luego hallar la transformada de Fourier $\mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\}$.

Nota: En la práctica tenemos señales de duración finita, por ejemplo, dado $x_d[n] = x(nT)w[n]$ donde $w[n]$ es una ventana rectangular de duración N, tenemos que

$$x_d[n] = x(nT)w[n] = \begin{cases} x(nT), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & n < 0, n \geq N. \end{cases}$$

La ventana $w[n]$ va a modificar el cálculo de la densidad espectral de energía. El efecto equivale a la convolución en la frecuencia de la transformada de Fourier de la señal original $x[n]$ y la ventana $w[n]$.

Análisis espectral de señales

Densidad espectral de potencia

La señales provenientes de procesos aleatorios (ruido, voz, señales físicas, etc.) son típicamente de energía infinita, por ende su transformada de Fourier no existe.

Esta clase de señales son caracterizadas por la densidad espectral de potencia. En la práctica se observa el proceso aleatorio por un determinado tiempo, de este modo se tiene que

$$R(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,x(t+\tau)\,dt,$$

entonces $P_{xx} = \mathscr{F}\{R(\tau)\}$ es la densidad espectral de potencia.

Análisis espectral de señales

Densidad espectral de potencia - Caso discreto

Sea $x[n]$, para $n \in [0, N-1]$, entonces

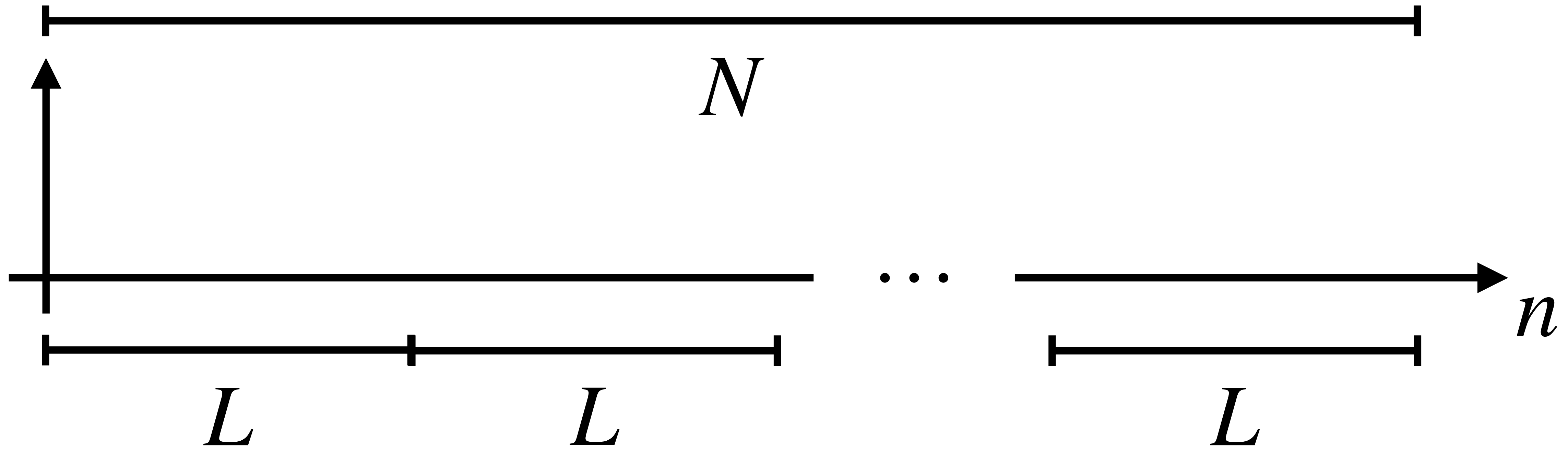
$$P_{xx}[k] = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{n \cdot k}{N}} \right|^2 = \frac{1}{N} |X[k]|^2 .$$

$P_{xx}[k]$ es la estimación de la densidad espectral de potencia y es conocido como el periodograma.

Análisis espectral de señales

Periodograma - Método Barlett

Sea la señal $x[n]$ para $n \in [0,N-1]$.



Si dividimos la señal en M segmentos x_m de longitud L, tal que $x_m = x[mL : (m+1)L-1]$ para $m \in [0,M-1]$ y considerando que $N = LM$ entonces podemos calcular

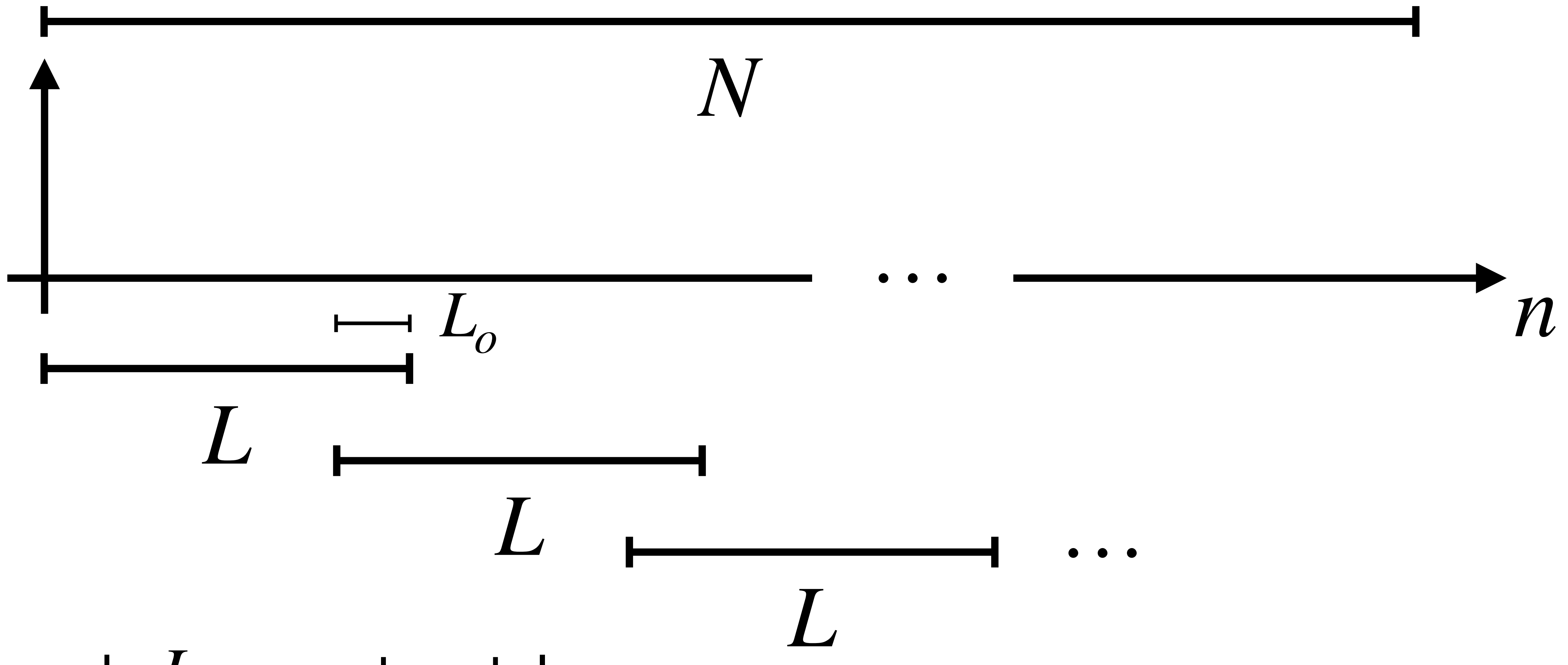
$$P_{xx}^m[k] = \frac{1}{L}\left|\sum_{n=0}^{L-1} x[n+mL]e^{-j2\pi\frac{n\cdot k}{N}}\right|^2 = \frac{1}{L}\,|\,\mathrm{DFT}_L\{x_m\}\,|^2.$$

El periodograma del método Barlett es $P_{xx}[k] = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{m=0}^{M-1} P_{xx}^m[k].$

Análisis espectral de señales

Periodograma - Método Welch

Sea la señal $x[n]$ para $n \in [0,N-1]$.



Si consideramos segmentos x_m de longitud L con traslape de L_o muestras tal que $x_m = x[m(L-L_o) : m(L-L_o)+L-1]$ para $m \in [0,M-1]$ entonces podemos calcular

$$P_{xx}^m[k] = \frac{1}{UL}\left|\sum_{n=0}^{L-1} x[n+m(L-L_o)]w[n]e^{-j2\pi\frac{n\cdot k}{N}}\right|^2 = \frac{1}{UL}\,|\,\mathrm{DFT}_L\{x_m\cdot w\}\,|^2 \text{ donde } U = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}|\,w[n]\,|^2.$$

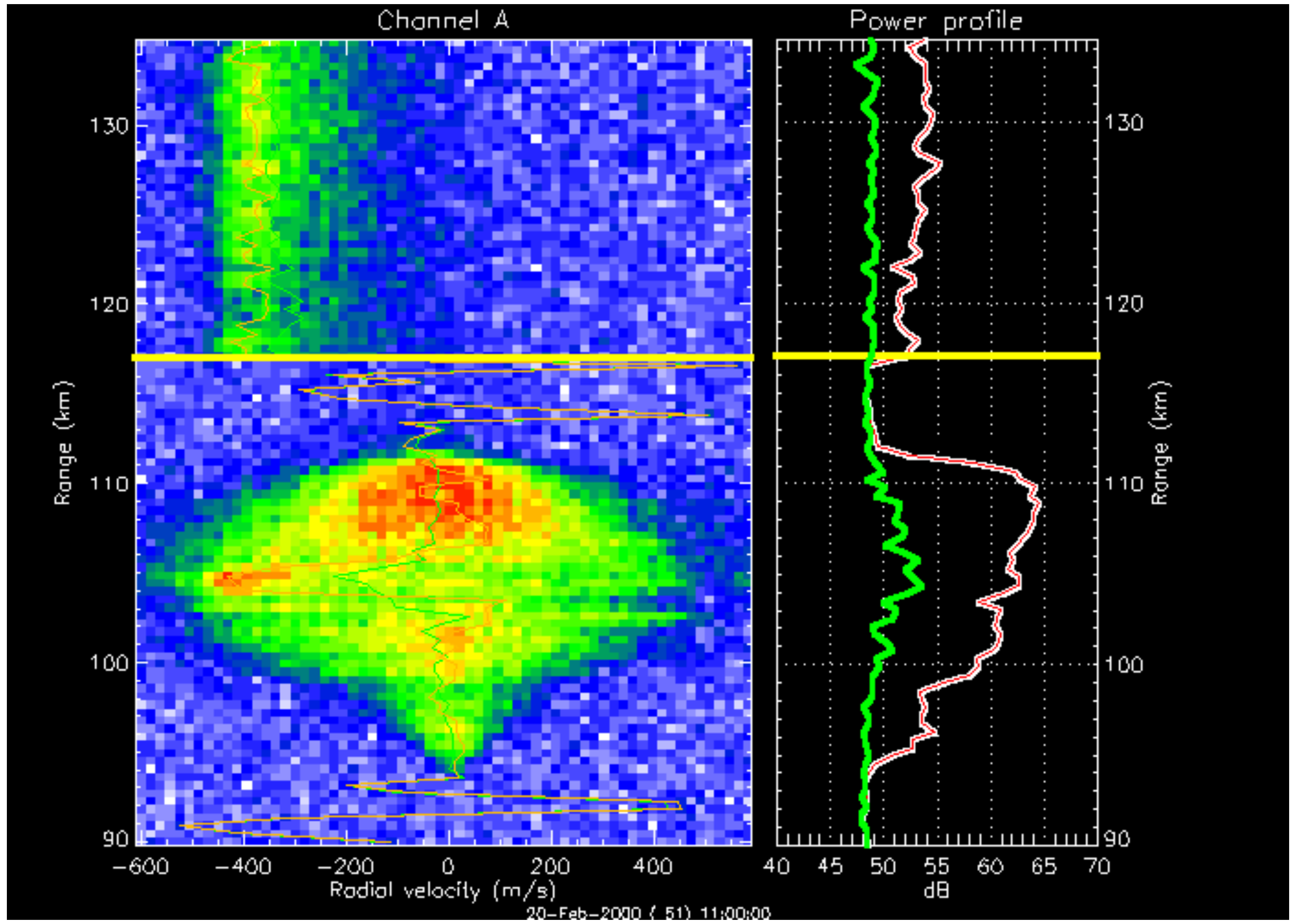
El periodograma del método Welch es $P_{xx}[k] = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{m=0}^{M-1} P_{xx}^m[k]$.

Análisis espectral de señales

Espectrograma

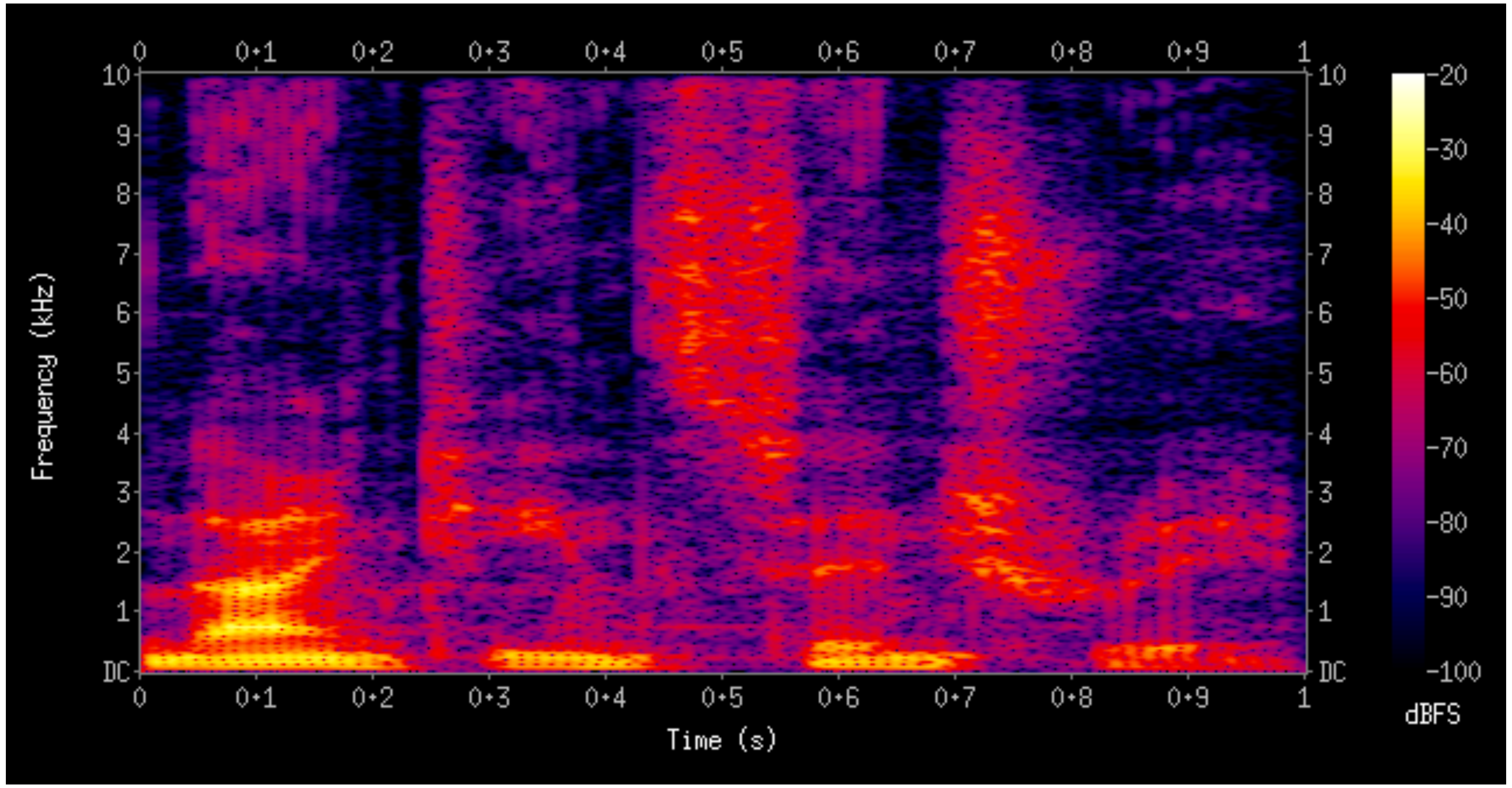
El espectrograma es la la representación en función del tiempo de las estimaciones del espectro de potencia de una señal.

Tiempo



Frecuencia

Señal de radar



Señal de audio

Análisis espectral de señales

Métodos paramétricos

- La principal diferencia entre los métodos paramétricos y no paramétricos es que en el primer caso, la densidad espectral que se quiere estimar está caracterizada por algunos parámetros.
- Por el contrario los métodos no paramétricos tratan de estimar la densidad espectral de una señal sin asumir que esta tenga alguna estructura en particular, por ejemplo, el periodograma.
- En general se busca estimar la amplitud, frecuencia y fase de las componentes senoidales que conforman una señal.
- Ejemplos de métodos paramétricos: ARMA, Capon, Máxima entropía, compressed sensing.

Análisis espectral de señales

Mínimos cuadrados - Amplitud y fase de componentes frecuenciales

Dada una señal $x[n] = x_c(nT)$, queremos conocer la amplitud y fase de la componente frecuencial ω_o de la señal. Para ello podemos aplicar la técnica de mínimos cuadrados.

Dada la suma de diferencias cuadráticas,

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} |\, x[n] - C_o \cos(\omega_o nT - \phi_o)\, |^2 \ ,$$

minimizamos S en función de los parámetros C_o y ϕ_o para encontrar los valores que mejor se ajusten al set de datos $x[n]$. Alternativamente, podemos expresar el problema de la siguiente forma

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} |\, x[n] - (A_o \cos(\omega_o nT) + B_o \sin(\omega_o nT))\, |^2 \ ,$$

donde $A_o = C_o \cos(\phi_o)$ y $B_o = C_o \sin(\phi_o)$. Esta expresión es equivalente a la anterior pero es más fácil de minimizar ya que es lineal para A_o y B_o.

Análisis espectral de señales

Mínimos cuadrados - Amplitud y fase de componentes frecuenciales

Tomando derivadas parciales de S con respecto a los parámetros A_o y B_o, e igualando a cero, tenemos

$$\frac{\partial S}{\partial A_o} = -2\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n] - A_o\cos(\omega_o nT) - B_o\sin(\omega_o nT)\right)\,\cos(\omega_o nT) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B_o} = -2\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n] - A_o\cos(\omega_o nT) - B_o\sin(\omega_o nT)\right)\,\sin(\omega_o nT) = 0$$

Este sistema de ecuaciones se puede expresar en forma matricial,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum_n \cos^2(\omega_o nT) & \sum_n \cos(\omega_o nT)\sin(\omega_o nT) \\ \sum_n \cos(\omega_o nT)\sin(\omega_o nT) & \sum_n \sin^2(\omega_o nT) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_o \\ B_o \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_n x[n]\cos(\omega_o nT) \\ \sum_n x[n]\sin(\omega_o nT) \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

entonces el vector de parámetros $\mathbf{p} = [A_o\, B_o]^T$ se obtiene de la siguiente forma

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{b}.$$

Análisis espectral de señales

Mínimos cuadrados - Amplitud y fase de componentes frecuenciales

Generalizando para un set de componentes frecuenciales ω_k para $k \in [0, M-1]$, tenemos,

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} \left| x[n] - \sum_{k=0}^{M-1} \left(A_k \cos(\omega_k nT) + B_k \sin(\omega_k nT) \right) \right|^2 .$$

Minimizando esta expresión con respecto a los parámetros A_k y B_k, también podemos llegar a un sistema de ecuaciones de la forma $\mathbf{G}\,\mathbf{p} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{p} = [A_o\, B_o\ \dots\ A_{M-1}\, B_{M-1}]^T$ y cuya solución se obtiene de la siguiente forma

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{b}.$$

Debemos tener en cuenta que la matriz $\mathbf{G}$ debe ser no singular para que su inversa exista.

¡Muchas gracias!