IEE352 - Procesamiento Digital de Señales

Clase 03 - Sistemas LTI

Dr. Marco A. Milla
Sección Electricidad y Electrónica (SEE)
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

email: milla.ma@pucp.edu.pe

Contenido

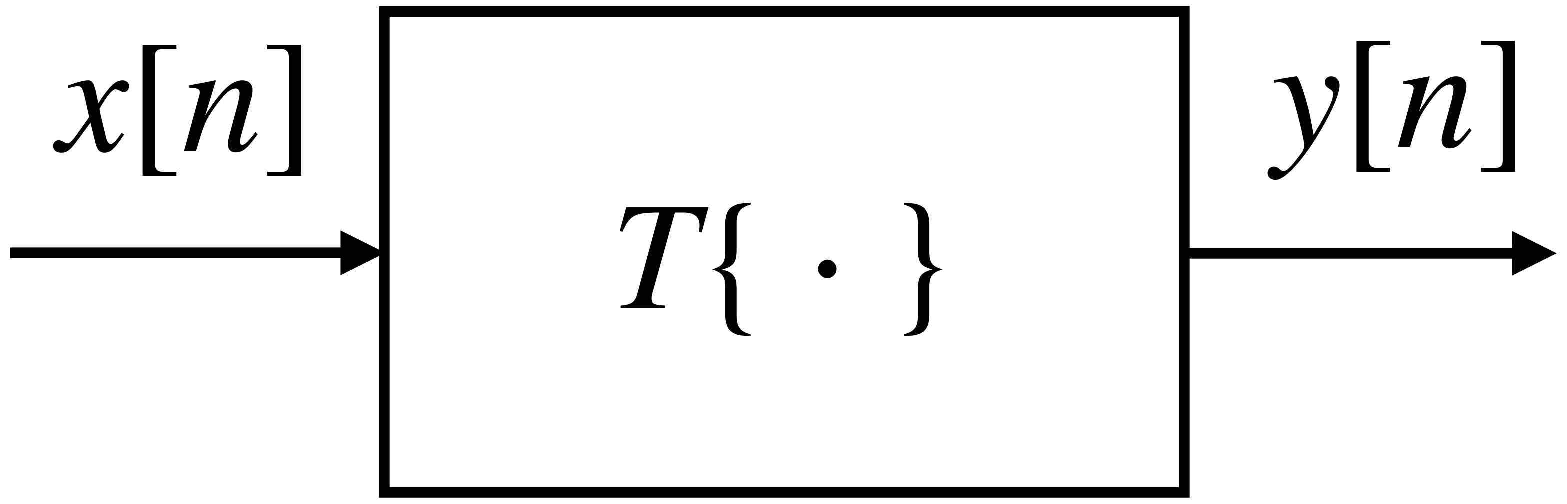
- Sistemas discretos en el tiempo
- Sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo

Sistemas discretos en el tiempo

Sistemas discretos en el tiempo

Definición

- Un sistema discreto se representa matemáticamente por una transformación u operador T que mapea la secuencia de entrada $x[n]$ a la salida $y[n]$.



$$y[n] = T\{x[n]\}$$

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n]$$

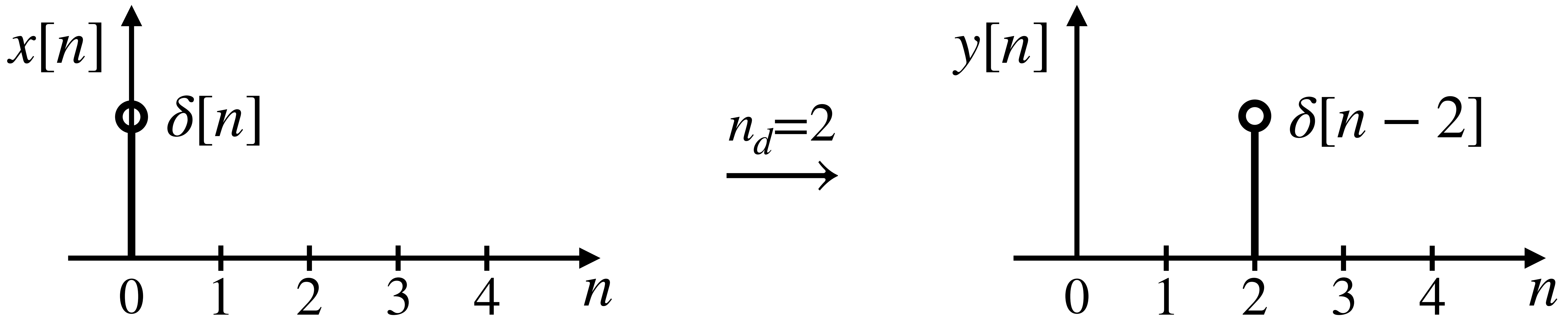
- La salida $y[n]$ puede depender de todos los valores de la secuencia $x[n]$.

Sistemas discretos en el tiempo

Ejemplo 1

Sistema con retardo ideal

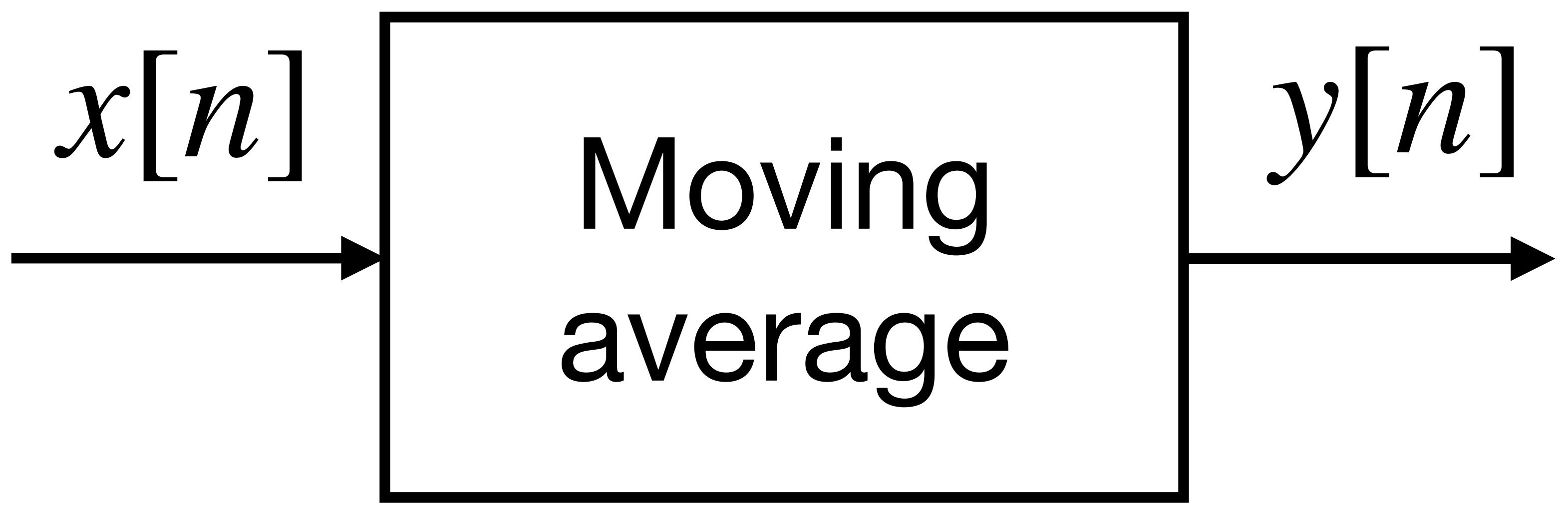
$$y[n] = x[n - n_d], \qquad -\infty < n < \infty, \quad n_d \in \mathbb{Z}$$



Sistemas discretos en el tiempo

Ejemplo 2

Sistema "moving-average" (promediación)



$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \ldots + x[n] + \ldots + x[n - M_2 + 1] + x[n - M_2]\}$$

$y[n]$ es la promediación de las $(M_1 + M_2 + 1)$ muestras alrededor de la muestra $x[n]$.

Sistemas discretos en el tiempo

Clasificación - Sistemas sin/con memoria

- Sistemas sin memoria o estáticos

  $y[n]$ solo depende de $x[n]$ para cada valor de n.

  Ejemplo:

$$y[n] = nx[n] + b\,(x[n])^3.$$

- Sistemas con memoria o dinámicos

  $y[n]$ depende de valores pasados o presentes de $x[n]$.

  Ejemplo:

$$y[n] = x[n] + 3x[n-1].$$

Sistemas discretos en el tiempo

Clasificación - Sistemas lineales

- Principio de superposición

  Dado $y_1[n] = T\{x_1[n]\}$ y $y_2[n] = T\{x_2[n]\}$, el sistema es lineal sí y solo si se cumplen las siguientes propiedades.

  i. Propiedad Aditiva:

  $$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n].$$

  ii. Propiedad de Escalamiento:

  $$T\{ax_1[n]\} = a\,T\{x_1[n]\} = a\,y_1[n].$$

Sistemas discretos en el tiempo

Clasificación - Sistemas lineales

- El principio de superposición se puede expresar de la siguiente forma

$$T\{a\,x_1[n] + b\,x_2[n]\} = a\,T\{x_1[n]\} + b\,T\{x_2[n]\} = a\,y_1[n] + b\,y_2[n].$$

- Principio generalizado de superposición

$$T\left\{\sum_k a_k x_k[n]\right\} = \sum_k a_k T\{x_k[n]\}$$
$$= \sum_k a_k\, y_k[n],$$

donde $y_k[n] = T\{x_k[n]\}$.

Sistemas discretos en el tiempo

Clasificación - Sistemas lineales

Ejemplo: Sistema integrador o acumulador.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \,.$$

¿Es este sistema lineal?

Dadas $y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k]$ y $y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]$, definimos $x_3[n] = a\, x_1[n] + b\, x_2[n]$

$$\begin{aligned} y_3[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x_3[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} a\, x_1[k] + b\, x_2[k] \\ &= a \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] \\ &= a\, y_1[n] + b\, y_2[n] \qquad \Longrightarrow \qquad \text{El sistema es lineal.} \end{aligned}$$

Sistemas discretos en el tiempo

Clasificación - Sistemas lineales

Ejemplo: Sistema no-lineal

$$y[n] = (x[n])^2.$$

Prueba: Dado $x_2[n] = a\,x[n]$ tenemos que

$$y_2[n] = \left(x_2[n]\right)^2 = a^2\,(x[n])^2 = a^2 y[n]$$

$$\implies \ y_2[n] \neq ay[n] \qquad \implies$$ El sistema es no lineal.

No cumple con la propiedad de escalamiento.

Sistemas discretos en el tiempo

Clasificación - Sistemas invariantes en el tiempo (TI)

Dado $y[n] = T\{x[n]\}$, el sistema es invariante en el tiempo (TI, Time Invariant) si

$$y[n - n_o] = T\left\{x[n - n_o]\right\},$$

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n] \qquad \Longrightarrow \qquad x[n - n_o] \xrightarrow{T} y[n - n_o]\,.$$

Para probar que un sistema es TI se debe demostrar que la respuesta del sistema a la entrada retardada $x[n - k]$,

$$y[n, k] = T\{x[n - k]\},$$

es igual a la salida retardada, es decir

$$y[n, k] = y[n - k].$$

Sistemas discretos en el tiempo

Clasificación - Sistemas invariantes en el tiempo (TI)

Ejemplo 1:

Dado $y[n] = T\{x[n]\} = x[n] - x[n-1]$, ¿es el sistema TI?

Prueba:

Si la señal de entrada es retrasada k muestras

$$y[n,k] = T\{x[n-k]\} = x[n-k] - x[n-k-1] \,.$$

Por otro lado, reemplazando "n" por "$n-k$" en la definición del sistema tenemos

$$y[n-k] = x[n-k] - x[n-k-1],$$

$$\implies \; y[n,k] = y[n-k] \qquad \implies \qquad \text{El sistema es TI.}$$

Sistemas discretos en el tiempo

Clasificación - Sistemas invariantes en el tiempo (TI)

Ejemplo 2:

Dado $y[n] = T\{x[n]\} = n \cdot x[n]$, ¿es el sistema TI?

Prueba:

La respuesta del sistema a $x[n-k]$ es

$$y[n,k] = T\{x[n-k]\} = n \cdot x[n-k]\ .$$

Por otro lado, reemplazando "n" por "$n-k$" en la definición del sistema tenemos

$$y[n-k] = (n-k) \cdot x[n-k] = n \cdot x[n-k] - k \cdot x[n-k],$$

$$\implies y[n,k] \neq y[n-k] \qquad \implies \qquad \text{El sistema no es TI.}$$

Sistemas discretos en el tiempo

Causalidad

Definición: La salida $y[n]$ para $n = n_o$, solo depende de las muestras $x[n]$ para $n \leq n_o$, es decir la salida solo depende de la entrada actual y las pasadas del sistema,

$$y[n] = F(x[n], x[n-1], x[n-2], \ldots), \quad \text{para cualquier función } F.$$

Causalidad implica lo siguiente.

$$\text{Si } x_1[n] = x_2[n], \text{ para } n \leq n_o \implies y_1[n] = y_2[n], \text{ para } n \leq n_o$$

$$\implies \text{El sistema no se anticipa.}$$

Sistemas discretos en el tiempo

Causalidad - Ejemplos

- Sistema no causal:

  La salida del sistema $y[n]$ depende de muestras en el futuro de la entrada $x[n]$,

$$y[n] = x[n+1] - x[n].$$

- Sistema causal:

  La salida del sistema $y[n]$ solo depende de muestras en el presente y pasado de la entrada $x[n]$,

$$y[n] = x[n] - x[n-1].$$

Sistemas discretos en el tiempo
Estabilidad BIBO

BIBO: Bounded input, bounded output.

Definición: El sistema es BIBO estable si una entrada acotada produce una salida acotada.

La entrada es acotada si $\exists B_x \in \mathbb{R}^+$ tal que,

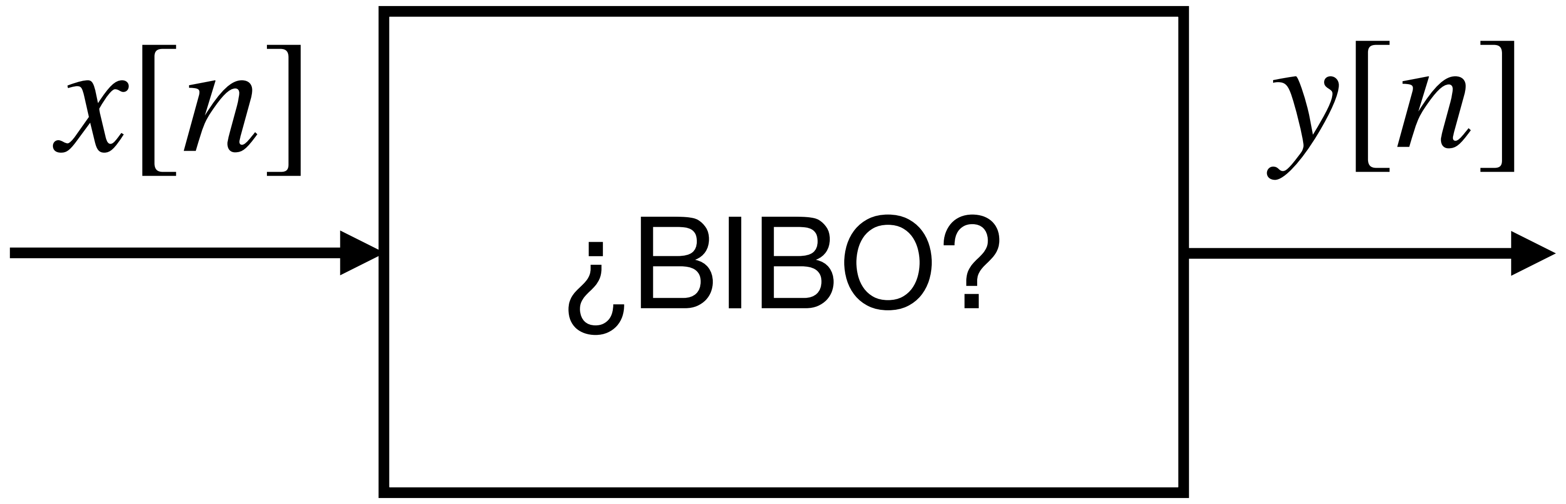
$$|x[n]| \leq B_x < \infty, \text{ es decir } \|x[n]\|_\infty \text{ es finita.}$$

La BIBO estabilidad requiere que para una entrada acotada $\exists B_y \in \mathbb{R}^+$ tal que,

$$|y[n]| \leq B_y < \infty, \text{ es decir } \|y[n]\|_\infty \text{ es finita.}$$

Sistemas discretos en el tiempo

Estabilidad BIBO - Ejemplos



- Dado $y[n] = (x[n])^2$, ¿es el sistema estable?

  Si $|x[n]| \leq B_x \quad \Longrightarrow \quad |y[n]| = |x[n]|^2 \leq B_x^2$

  Si escogemos $B_y = B_x^2$, probamos que la salida es acotada,

  $$|y[n]| \leq B_y \quad \Longrightarrow \quad \text{El sistema es BIBO estable.}$$

- Dado $y[n] = y[n-1]^2 + x[n]$, ¿es el sistema estable?

  Si consideramos $x[n] = C\delta[n]$ y $y[-1] = 0$, donde $\delta[n]$ es el impulso unitario, tenemos que

  $$y[0] = C, \quad y[1] = C^2, \quad y[2] = C^4, \quad \ldots$$

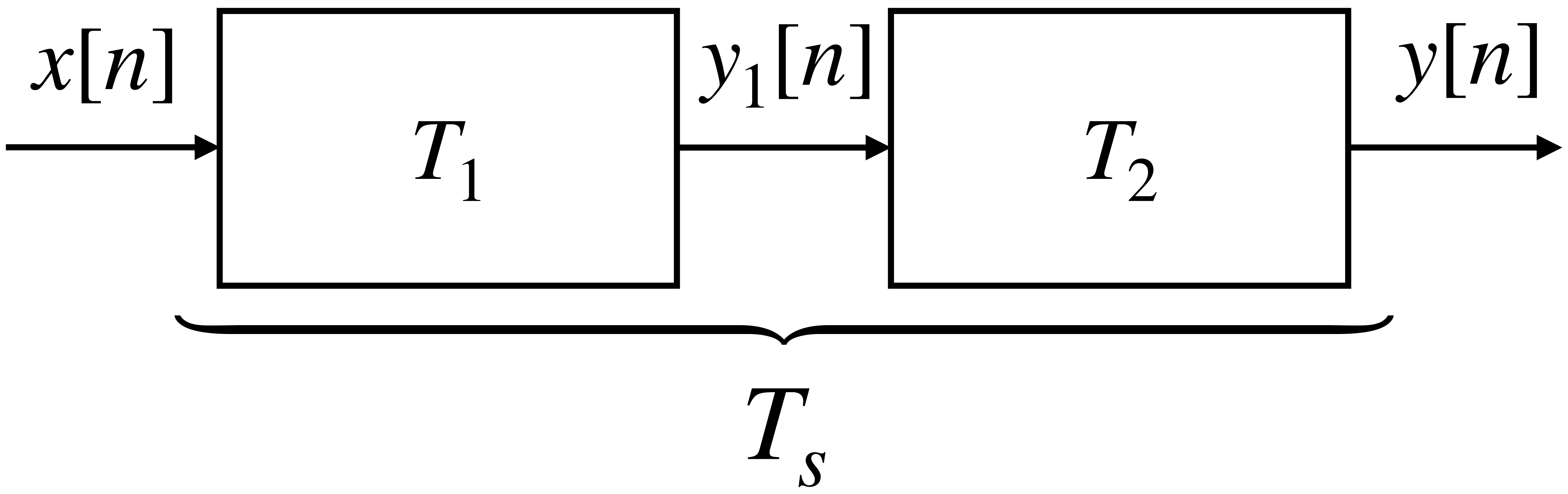
  Claramente, para $1 < |C| < \infty$, la salida $y[n]$ no es acotada,

  $$\Longrightarrow \text{El sistema es inestable.}$$

Sistemas discretos en el tiempo

Interconexión de sistemas discretos

Sistemas en serie o en cascada.



$$y_1[n] = T_1\{x[n]\}$$
$$y[n] = T_2\{y_1[n]\}$$

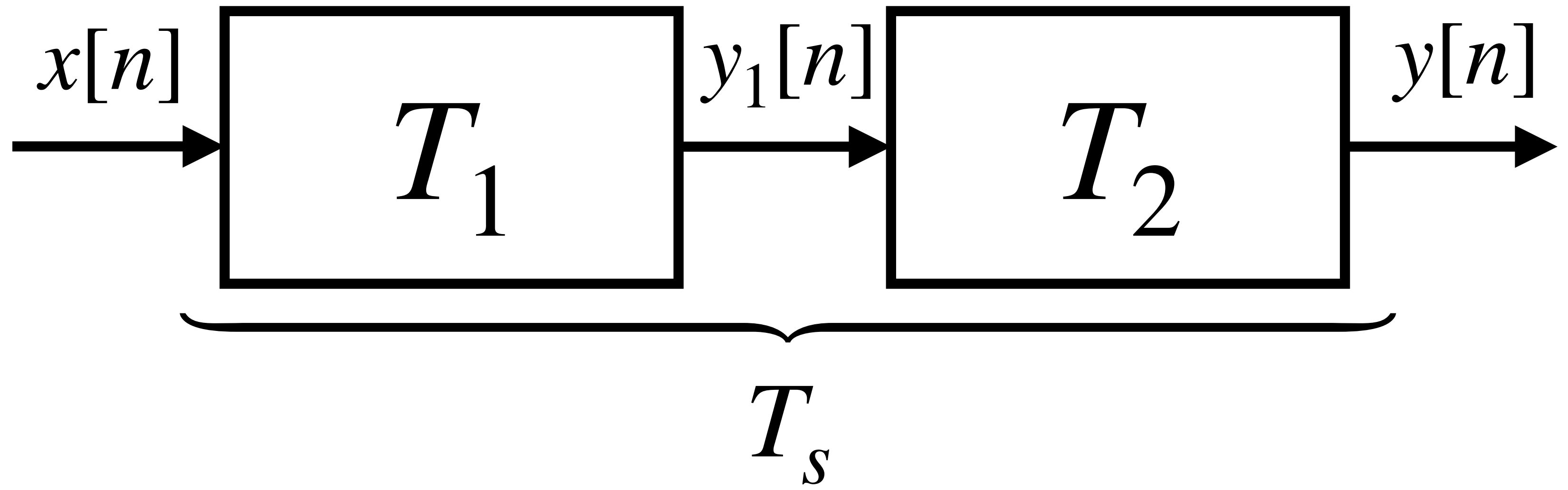
$$y[n] = T_2\left\{T_1\{x[n]\}\right\}$$

Podemos definir $T_s = T_2\,T_1$, entonces

$$y[n] = T_s\{x[n]\}.$$

Sistemas discretos en el tiempo

Interconexión de sistemas discretos



Algunas propiedades de sistemas en cascada.

- Si T_1 y T_2 son sistemas invariantes en el tiempo (TI) entonces T_s también es invariante en el tiempo (TI).

  Prueba: Dados $x[n-k] \xrightarrow{T_1} y_1[n-k]$ y $y_1[n-k] \xrightarrow{T_2} y[n-k]$,

  entonces $x[n-k] \xrightarrow{T_s = T_2 T_1} y[n-k]$, es decir T_s es invariante en el tiempo.

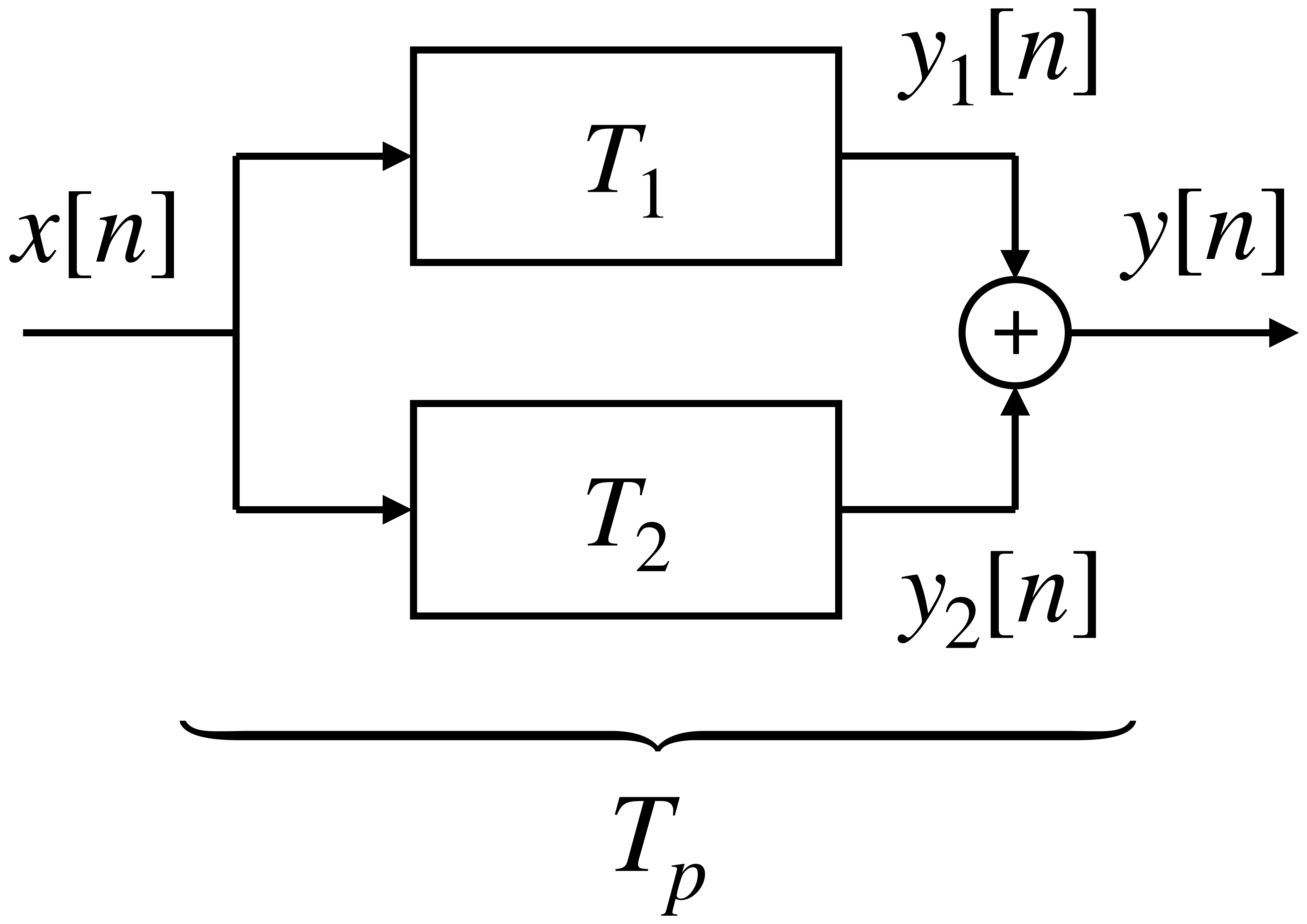
- En general $T_2 T_1 \neq T_1 T_2$, sin embargo, si T_1 y T_2 son sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI) podemos demostrar que

$$T_2 T_1 = T_1 T_2.$$

Sistemas discretos en el tiempo

Interconexión de sistemas discretos

Sistemas en paralelo.



$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$
$$y[n] = T_1\{x[n]\} + T_2\{x[n]\}$$

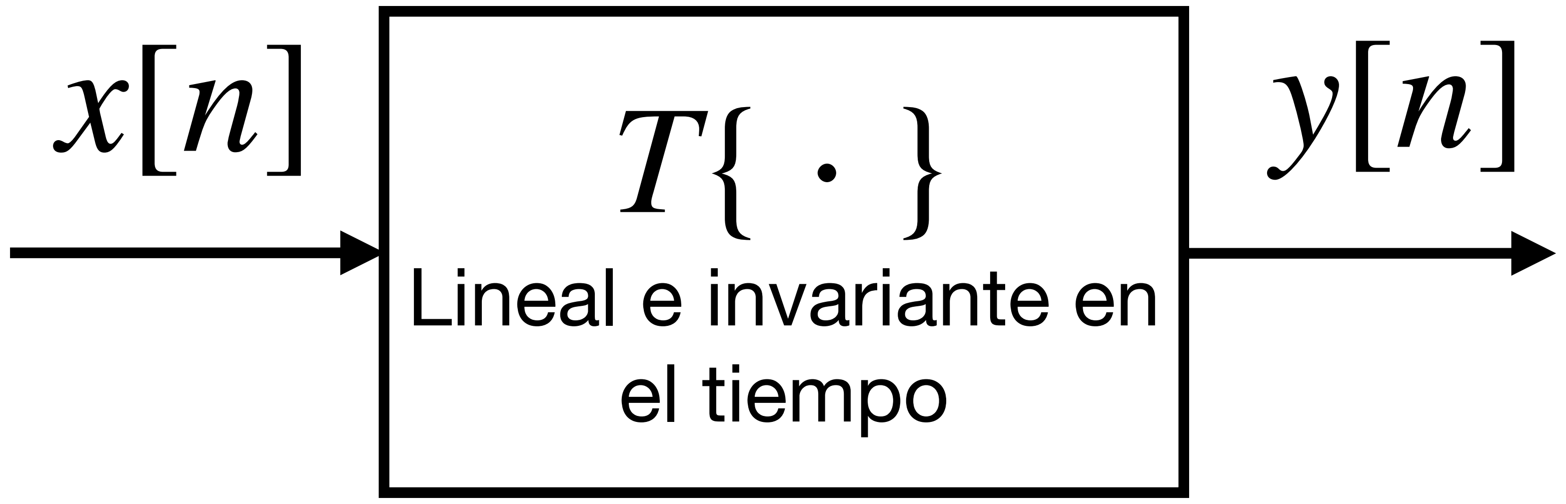
Definiendo $T_p = T_1 + T_2$, entonces

$$y[n] = (T_1 + T_2)\{x[n]\} = T_p\{x[n]\}.$$

Sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo (LTI)

Sistemas discretos LTI

Definición



Un sistema discreto T que es Lineal e Invariante en el Tiempo (LTI) está completamente caracterizado por su respuesta impulsiva.

Prueba:

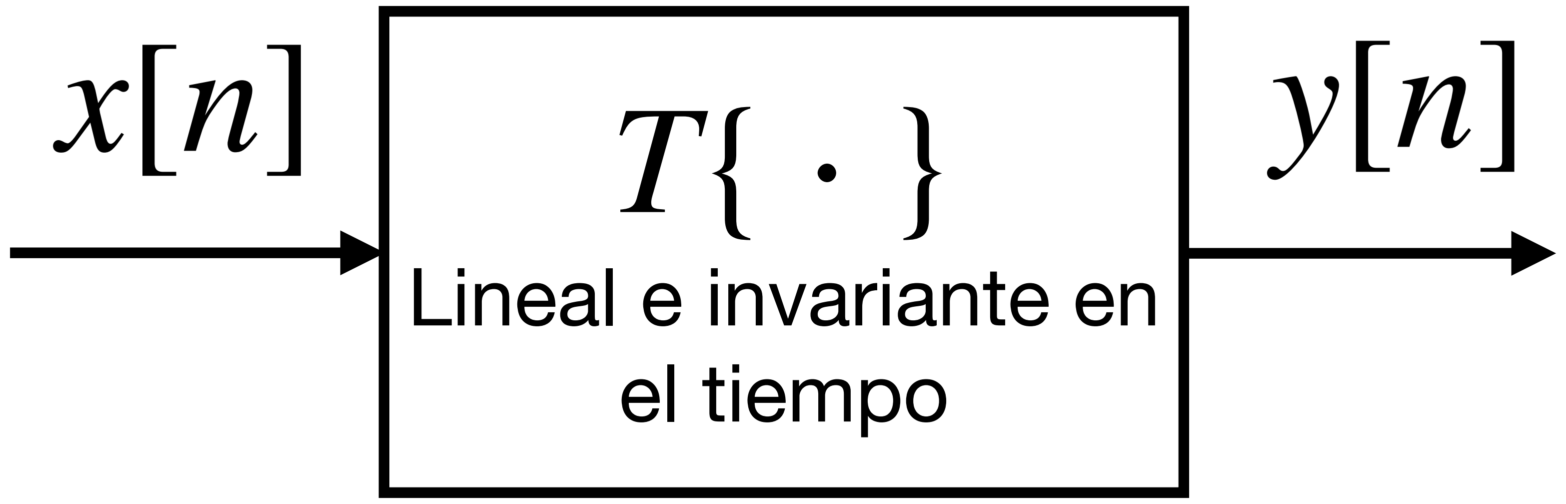
Dado un sistema $y[n] = T\{x[n]\}$, podemos escribir $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$

donde $\delta[n]$ es el impulso unitario. Entonces, tenemos que

$$y[n] = T\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \right\}.$$

Sistemas discretos LTI

Definición



Si el sistema T es lineal (principio de superposición), tenemos que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \, \underbrace{T\{\delta[n-k]\}}_{h[n,k]}$$

donde $h[n,k]$ es la respuesta del sistema al impulso unitario $\delta[n-k]$.

Si además, el sistema es invariante en el tiempo, tenemos que

$$h[n,k] = h[n-k] \, .$$

En consecuencia, tenemos que

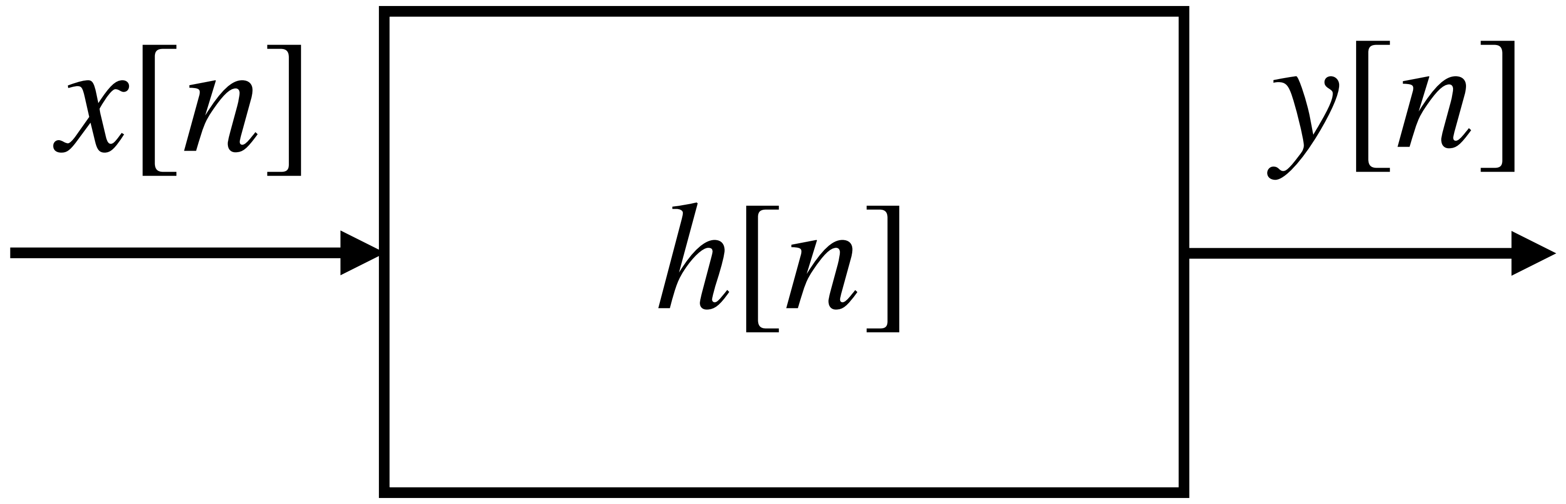
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \, h[n-k]$$

Convolución discreta

donde $h[n]$ es la respuesta a $\delta[n]$, respuesta impulsiva del sistema.

Sistemas discretos LTI
Definición

Un sistema LTI está completamente caracterizado por su respuesta impulsiva $h[n]$.



Dado $h[n]$ es posible calcular $y[n]$, para toda entrada $x[n]$, aplicando la función de convolución discreta,

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]\,.$$

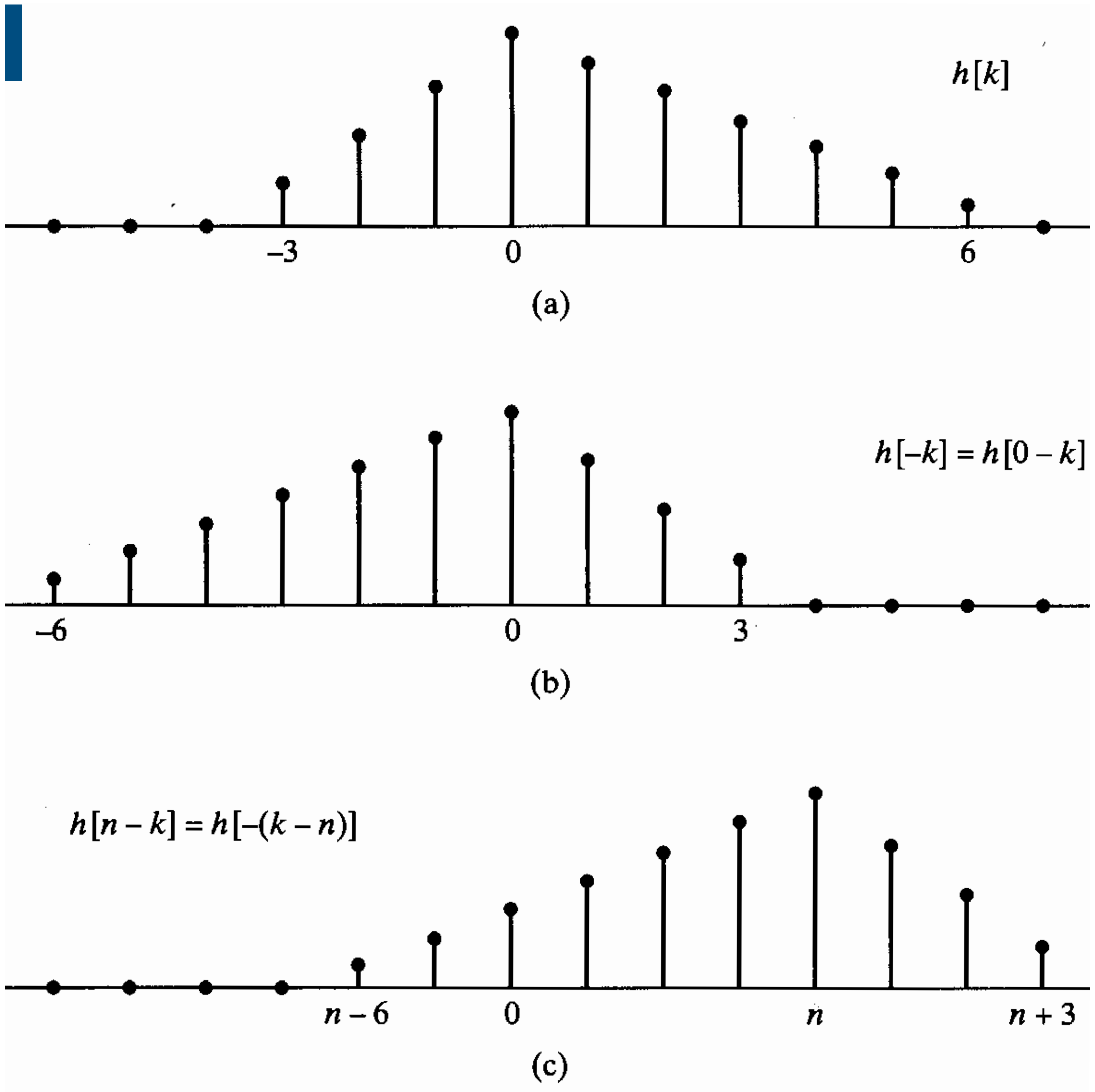
Sistemas discretos LTI

Convolución

Pasos para el cálculo de la convolución,

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]\,.$$

1. Reflejar $h[k]$ alrededor del origen para obtener $h[-k]$.
2. Desplazar $h[-k]$, n muestras para obtener $h[n-k]$.
3. Multiplicación $x[k] \cdot h[n-k]$ y suma de todos los valores resultantes para obtener $y[n]$.

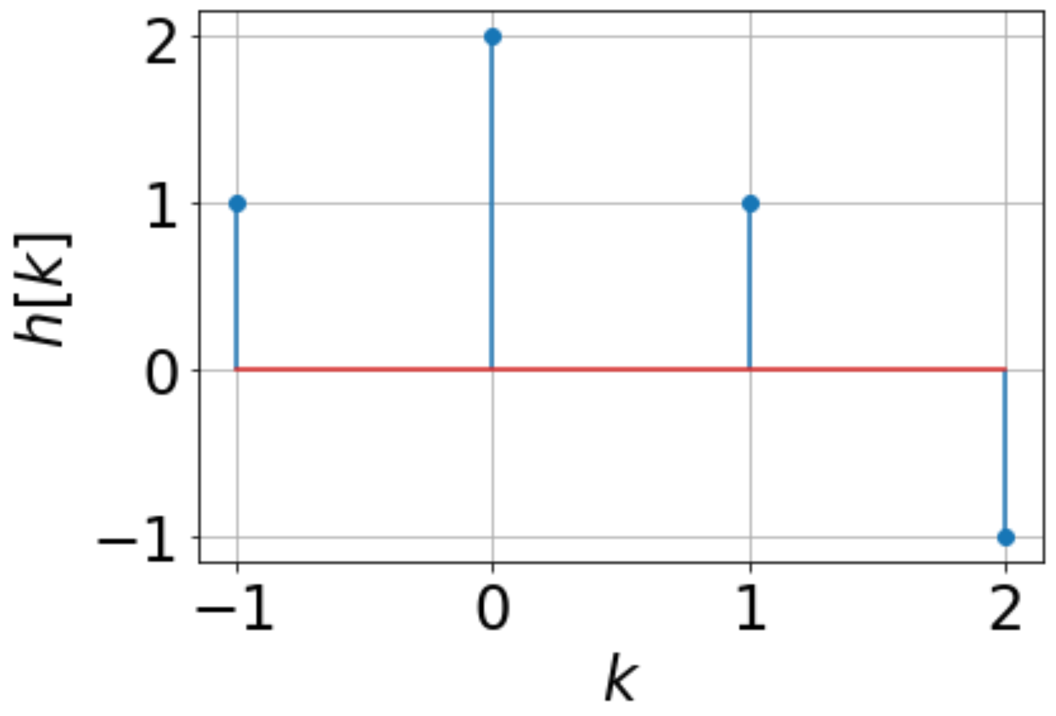


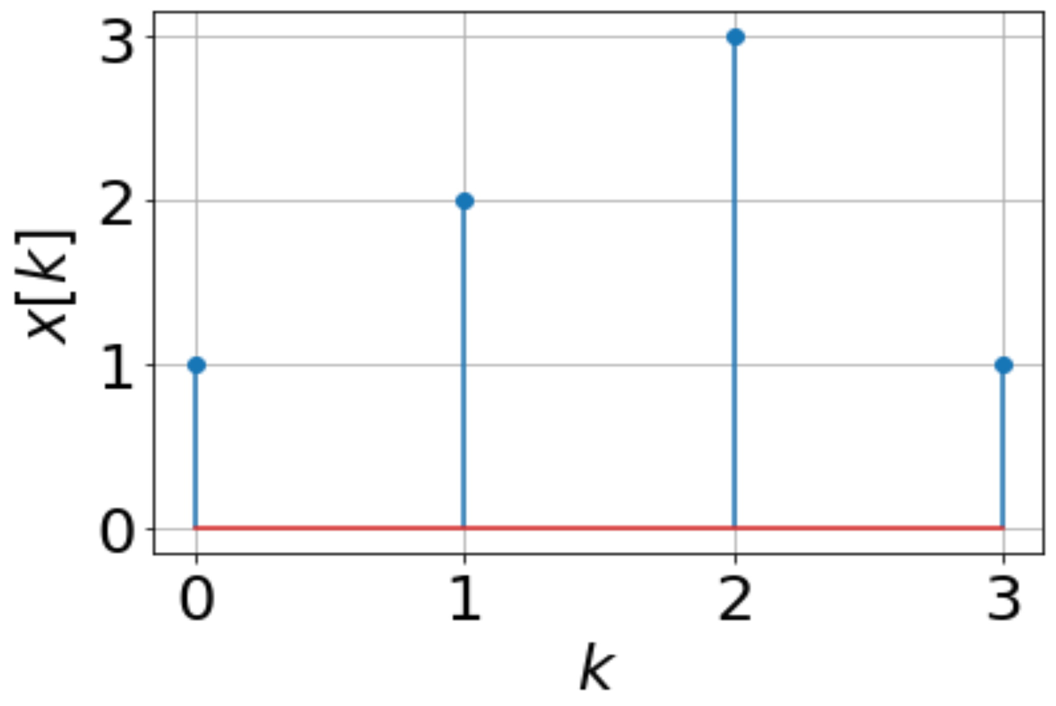
Sistemas discretos LTI

Convolución - Ejemplo 1

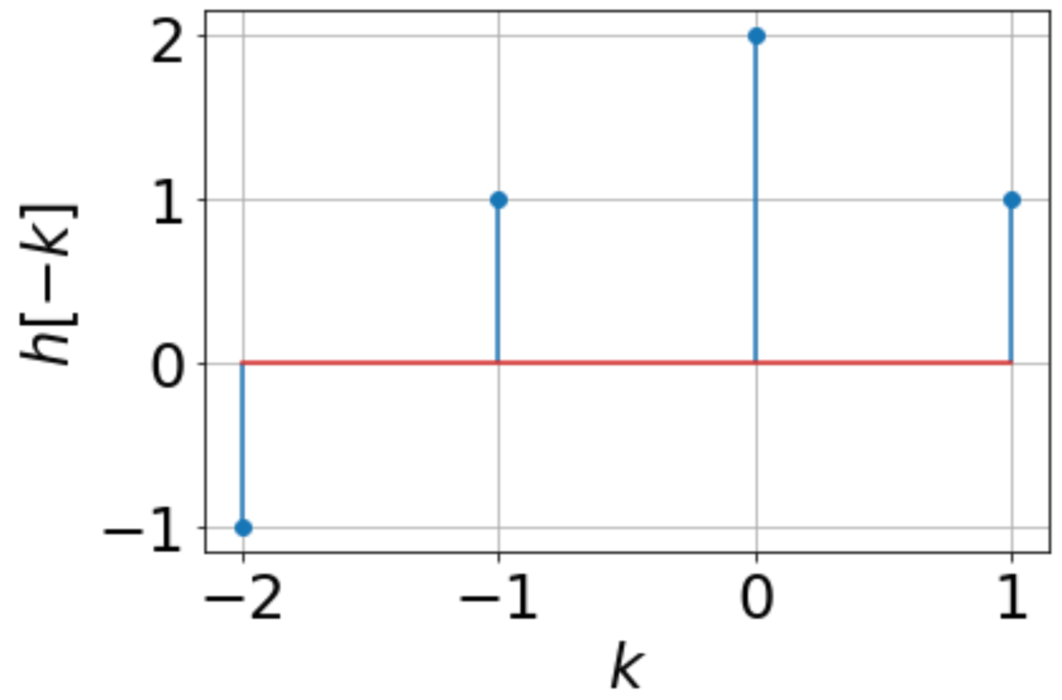
Dados: $h[n] = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\}$ y $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\}$ podemos encontrar que

$$y[n] = \{1, \underset{\uparrow}{4}, 8, 8, 3, -2, -1\}.$$

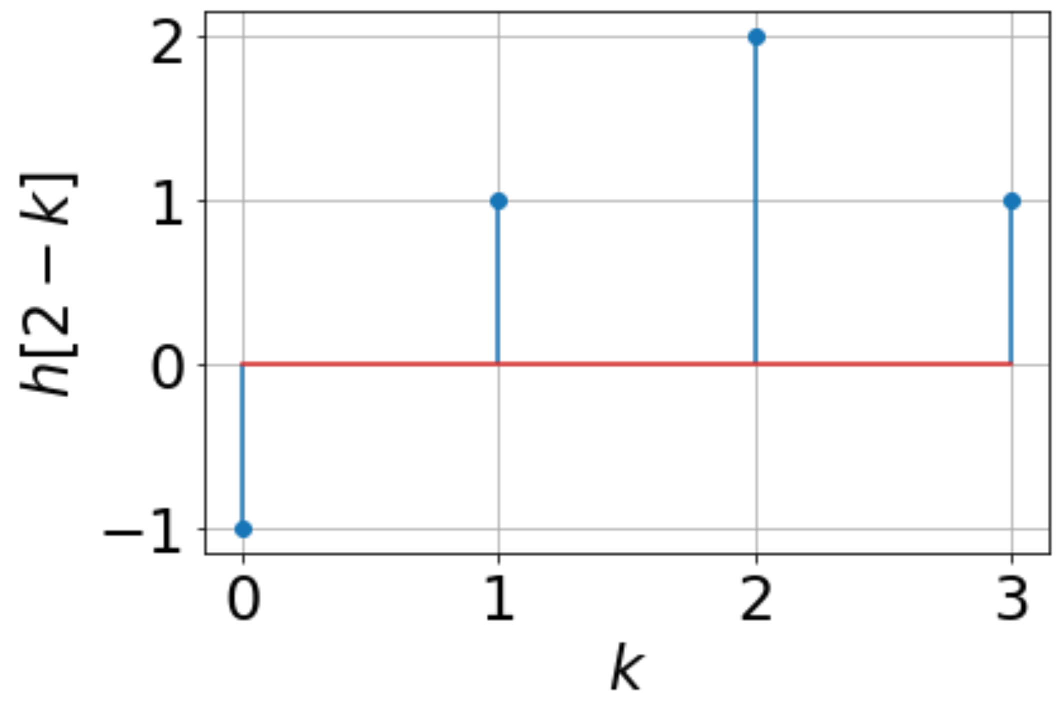




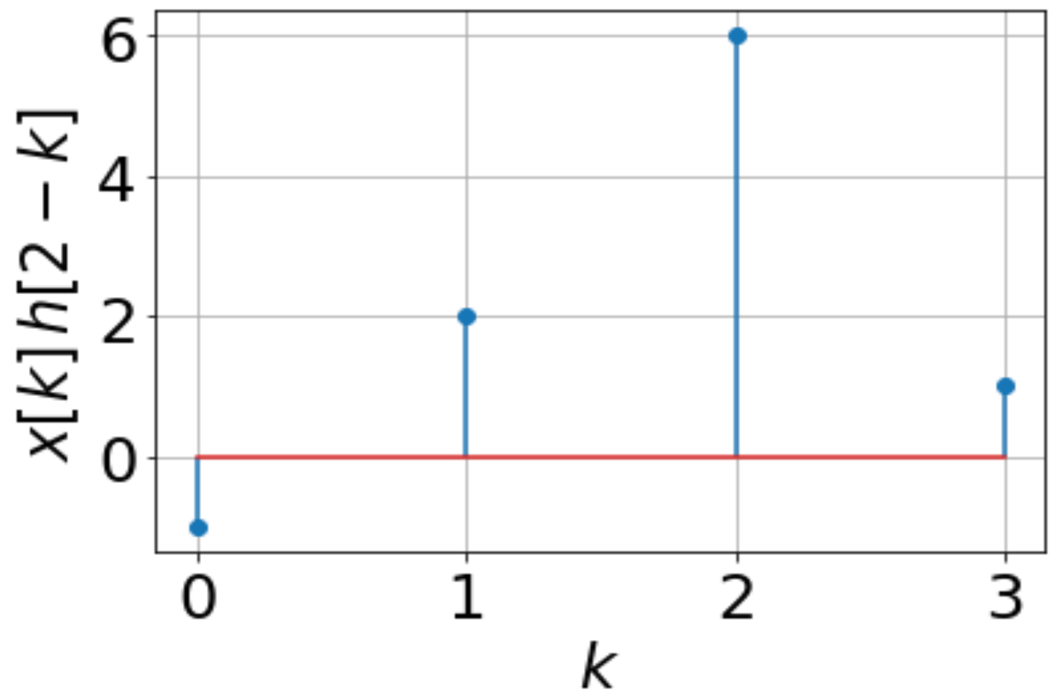
1.



2.



3.



$$\begin{aligned} y[2] &= -1 + 2 + 6 + 1 \\ &= 8. \end{aligned}$$

Sistemas discretos LTI

Convolución - Ejemplo 2

Dado $x[n] = a^n u[n]$ y $h[n] = u[n] - u[n-N]$ donde $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$

Calcular $y[n] = \sum_k x[k]h[n-k], \quad n \in \mathbb{Z}^+$.

1. Para $n < 0,\ y[n] = 0$.
2. Para $0 \leq n \leq N-1,\ y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k$,
$$y[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$
3. Para $n > N-1,\ y[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k$,
$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a^{k+(n-N+1)} = a^{n-N+1}\sum_{k=0}^{N-1} a^k = a^{n-N+1}\frac{1-a^N}{1-a}.$$

Sistemas discretos LTI

Propiedades de sistemas LTI

- Propiedad conmutativa de la convolución

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \,.$$

Prueba:

Dado $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$, aplicando una conversión de indices $m = n - k$, tenemos

$$y[n] = \sum_{m=+\infty}^{-\infty} x[n-m]\, h[m]$$

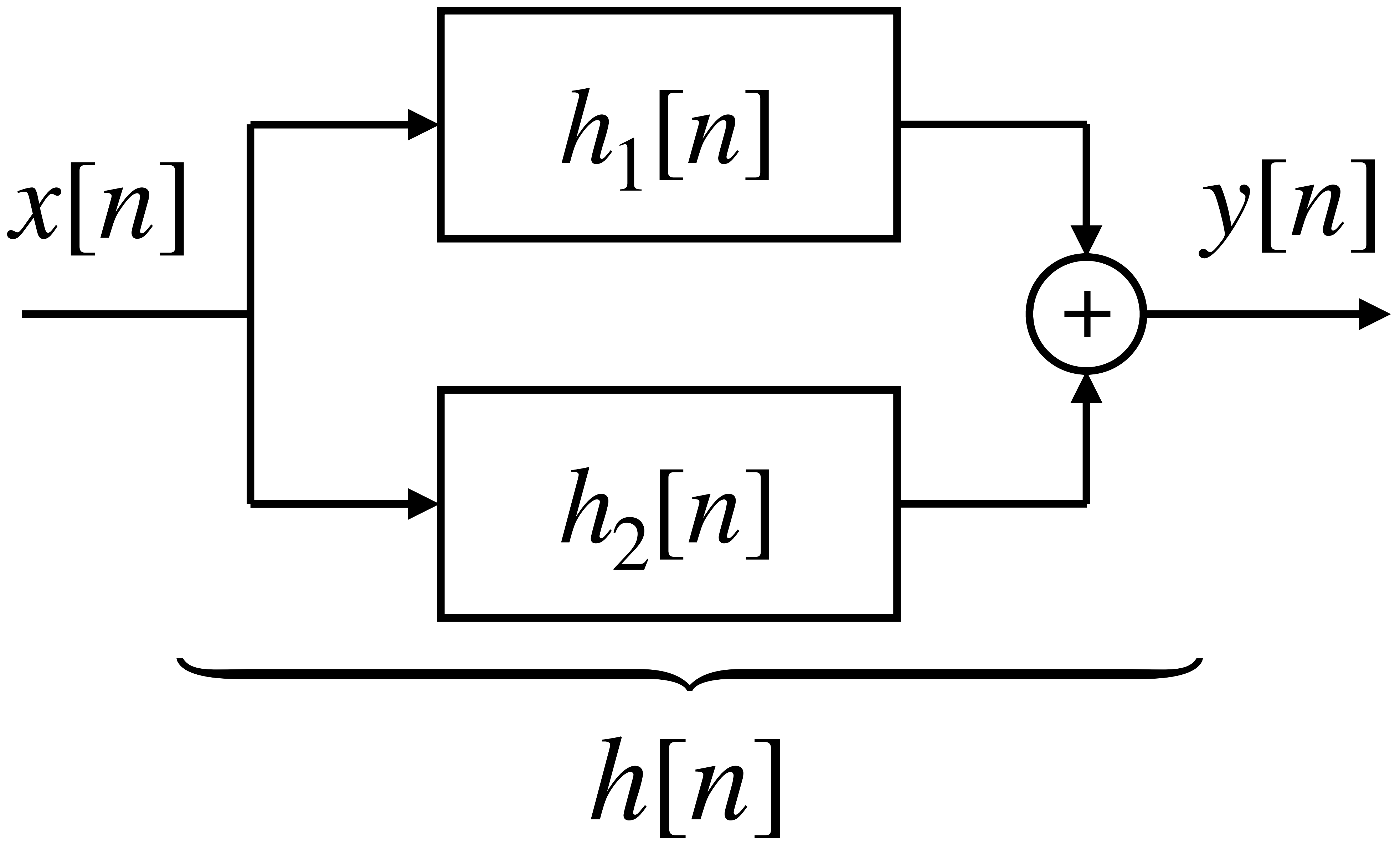
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\, x[n-m] = h[n] * x[n] \,.$$

Sistemas discretos LTI

Propiedades de sistemas LTI

- Propiedad distributiva (conexión en paralelo)

$$y[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = x[n] * \left(h_1[n] + h_2[n]\right).$$



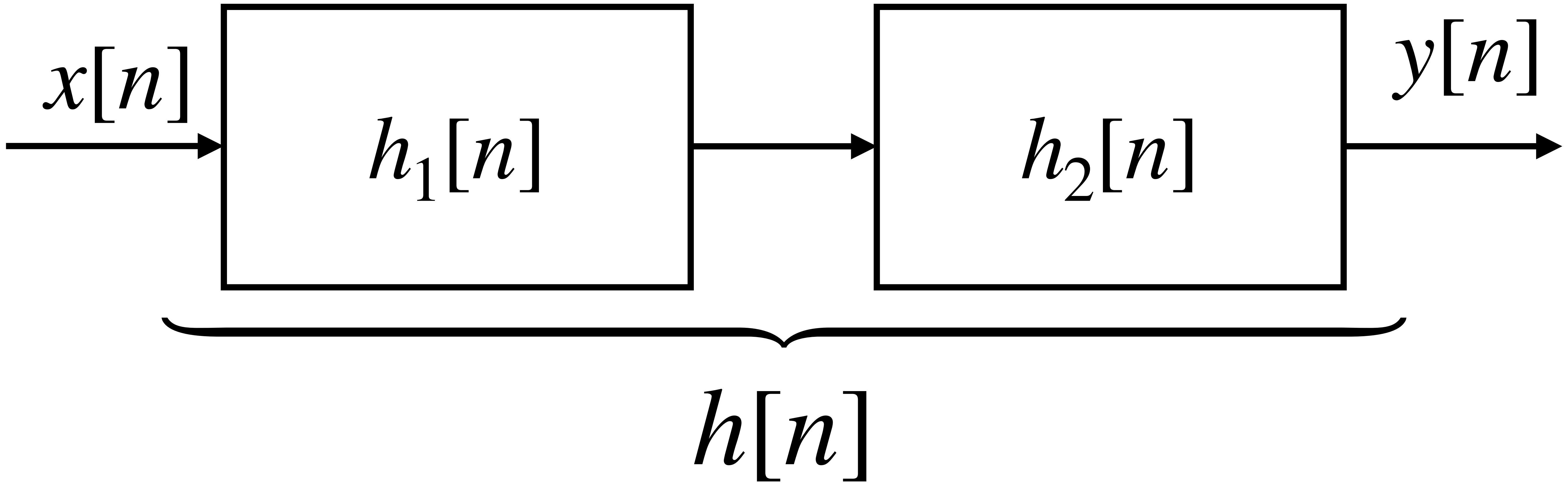
$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

Sistemas discretos LTI

Propiedades de sistemas LTI

- Propiedad asociativa (conexión en serie)

$$y[n] = \left(x[n] * h_1[n]\right) * h_2[n] = x[n] * \left(h_1[n] * h_2[n]\right).$$



$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

Sistemas discretos LTI

BIBO estabilidad

Sistemas LTI son BIBO estables, si y solo si, $h[n]$ es absolutamente integrable (sumable),

$$\sum_k |h[k]| < \infty.$$

Prueba:

a) Si $\sum_k |h[k]| < \infty \implies$ El sistema LTI es BIBO estable.

Dado $|y[n]| = \left| \sum_k h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_k |h[k]| \cdot |x[n-k]|$, y considerando que $x[n]$ es acotada, $|x[n]| \leq B_x$, tenemos que

$$|y[n]| \leq B_x \sum_k |h[k]|,$$

entonces $|y[n]|$ es acotada si $\sum_k |h[k]| < \infty$, es decir, si $h[n]$ es absolutamente integrable.

Sistemas discretos LTI

BIBO estabilidad

b) Si el sistema LTI es BIBO estable $\implies \sum_k |h[k]| < \infty$, o si $\sum_k |h[k]| = \infty \implies$ El sistema LTI es inestable.

Demostrar que para cualquier sistema $h[n]$, $\exists$ una señal de entrada acotada que produce una salida inestable.

Dada la señal de entrada acotada

$$x[n] = \begin{cases} h^*[-n]/|h[-n]|, & h[n] \neq 0, \\ 0, & h[n] = 0, \end{cases} \qquad (|x[n]| \leq 1),$$

tenemos que

$$y[n] = \sum_k h[k]\, x[n-k] = \sum_k h[k] \frac{h^*[k-n]}{|h[k-n]|} \,,$$

así, para $y[0] = \sum_k |h[k]|^2/|h[k]| = \sum_k |h[k]| = \infty$.

Ya que $h[n]$ no es absolutamente integrable, es posible para una secuencia de entrada acotada producir una secuencia de salida inestable.

Sistemas discretos LTI

Causalidad

Un sistema LTI es causal si

$$h[n] = 0, \qquad n < 0.$$

Prueba:

Dado $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$, si el sistema es causal, $y[n]$ solo depende de los valores de $x[k]$ para $k \leq n$, entonces

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\, h[n-k]\,,$$

lo que implica que $h[n-k]$ debe ser cero para $k > n$, entonces

$$h[n] = 0 \text{ para } n < 0.$$

Sistemas discretos LTI

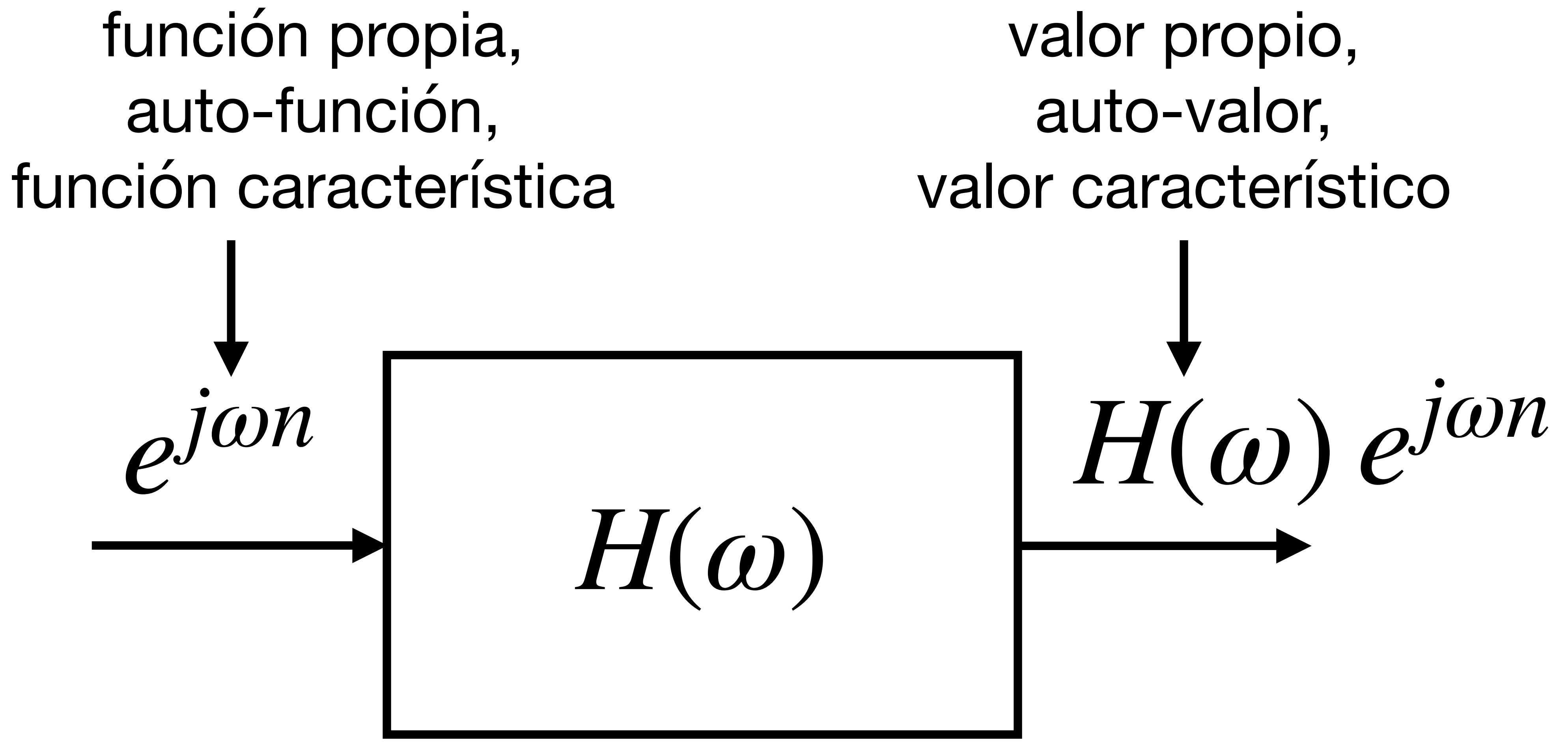
Representación en frecuencia de sistemas LTI

Autofunciones (eigenfunctions) de sistemas LTI.

Dado $x[n] = e^{j\omega n}$ para $-\infty < n < \infty,$ tenemos que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right)}_{H(\omega)} e^{j\omega n} = H(\omega)\, e^{j\omega n}\,.$$



Entonces $H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$ es la DTFT de $h[n]$ o la respuesta en frecuencia del sistema.

Sistemas discretos LTI

Representación en frecuencia de sistemas LTI

La respuesta en frecuencia $H(\omega)$ es compleja y puede expresarse como

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) = |H(\omega)|\, e^{j\angle H(\omega)}.$$

Ejemplo: Dado el sistema retardo ideal $y[n] = x[n - n_o]$,

si consideramos $x[n] = e^{j\omega n}$ entonces $y[n] = \underbrace{e^{-j\omega n_o}}_{H(\omega)} e^{j\omega n}$.

Alternativamente, podemos encontrar $H(\omega)$ a partir de la respuesta impulsiva.

Si $x[n] = \delta[n]$ tenemos que $h[n] = \delta[n - n_o]$, entonces

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k - n_o]e^{-j\omega k} = e^{-j\omega n_o}.$$

Sistemas discretos LTI

Representación en frecuencia de sistemas LTI

Condición suficiente para la existencia de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$.

Si $h[n]$ es BIBO estable, es decir, si $\sum_k |h[k]| < \infty$, entonces

$$H(\omega) = \mathrm{DTFT}\{h[k]\} = \sum_k h[k]e^{-j\omega k} \text{ existe.}$$

Prueba: Dado que $h[n]$ es absolutamente integrable tenemos que

$$|H(\omega)| = \left| \sum_k h[k]e^{-j\omega k} \right| \leq \sum_k |h[k]| \cdot |e^{-j\omega k}| = \sum_k |h[k]| < \infty,$$

entonces $H(\omega)$ existe (es finito).

Sistemas discretos LTI

Superposición de secuencias de exponenciales complejas

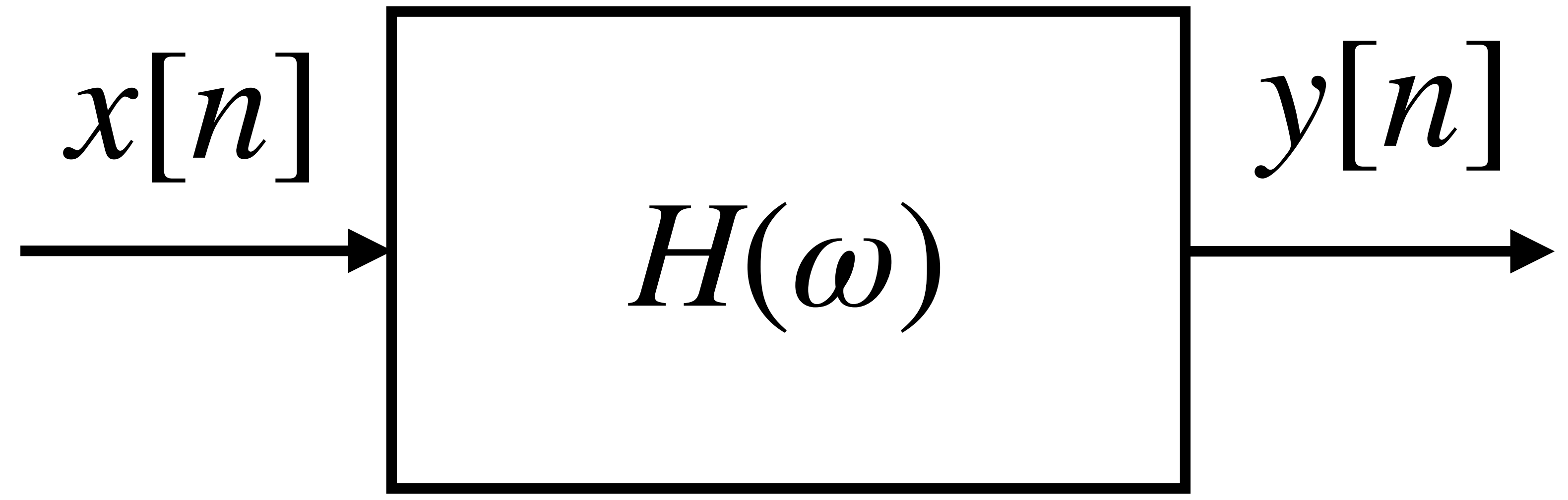
Sea $x[n] = \sum_k \alpha_k \, e^{j\omega_k n}$, la superposición de secuencias de exponenciales complejas, entonces

$$y[n] = \sum_k \alpha_k \, H(\omega_k) \, e^{j\omega_k n}.$$

La salida del sistema es también la superposición de exponenciales complejas pesadas por la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ evaluada en las frecuencias correspondientes.

Sistemas discretos LTI

Superposición de secuencias de exponenciales complejas



Ejemplo: Señal cosenoidal discreta.

$$\begin{aligned} x[n] = A\cos(\omega_o n + \phi) &= \tfrac{A}{2}\left(e^{j\phi}e^{j\omega_o n} + e^{-j\phi}e^{-j\omega_o n}\right) \\ &= x_1[n] + x_2[n]\,. \end{aligned}$$

Considerando $x_1[n] = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_o n}$ tenemos que $y_1[n] = \frac{A}{2}e^{j\phi}H(\omega_o)e^{j\omega_o n}$,

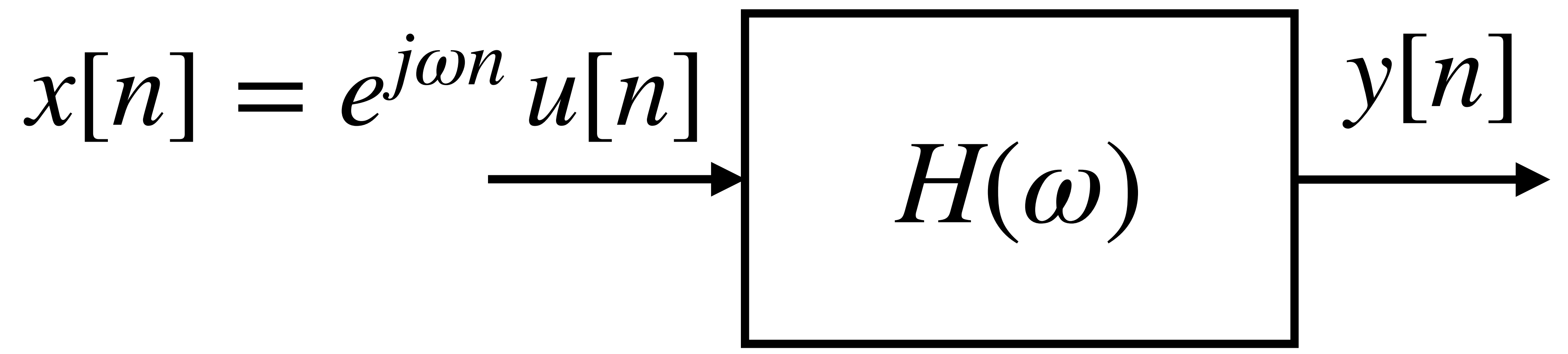
así también, para $x_2[n] = \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_o n}$ tenemos que $y_2[n] = \frac{A}{2}e^{-j\phi}H(-\omega_o)e^{-j\omega_o n}$.

Dado que $H(-\omega_o) = H^*(\omega_o)$, podemos encontrar que

$$\begin{aligned} y[n] &= y_1[n] + y_2[n] \\ &= \tfrac{A}{2}\left(e^{j\phi}\,H(\omega_o)\,e^{j\omega_o n}\right) + \tfrac{A}{2}\left(e^{-j\phi}\,H(-\omega_o)\,e^{-j\omega_o n}\right) \\ &= A\,\mathfrak{Re}\left\{e^{j\phi}\,H(\omega_o)\,e^{j\omega_o n}\right\} = A\,|\,H(\omega_o)\,|\cos\left(\omega_o n + \phi + \angle H(\omega_o)\right)\,. \end{aligned}$$

Sistemas discretos LTI

Funciones exponenciales causales



Dado $x[n] = e^{j\omega n}\, u[n]$ tenemos que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{j\omega(n-k)}\, u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]\, e^{-j\omega k}\, e^{j\omega n}\,.$$

Si el sistema es causal, es decir $h[n] = 0,\ n < 0$, tenemos que

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \sum_{k=0}^{n} h[k]\, e^{-j\omega k}\, e^{j\omega n}, & n \geq 0. \end{cases}$$

Para $n \geq 0$,

$$y[n] = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}\, e^{j\omega n}}_{H(\omega)\, e^{j\omega n}} - \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}\, e^{j\omega n}\,.$$

Sistemas discretos LTI

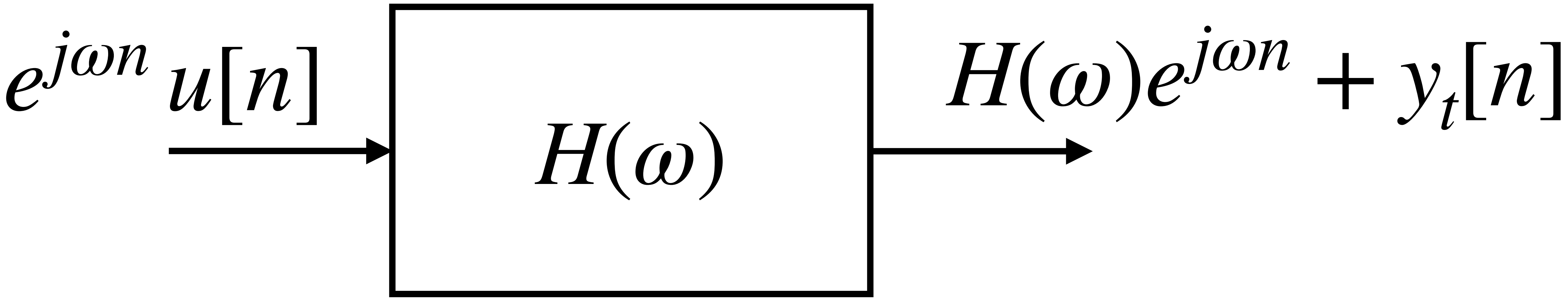
Funciones exponenciales causales

Respuesta estacionaria: $y_s[n] = H(\omega)\, e^{j\omega n}$ (steady-state response)

Respuesta transitoria: $y_t[n] = -\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}\, e^{j\omega n}$

La respuesta total del sistema es

$$y[n] = y_s[n] + y_t[n]\,.$$



Sistemas discretos LTI

Funciones exponenciales causales

Duración del transitorio

- Si $h[n]$ es FIR, tal que $h[n] = 0$ para $n < 0,\ n \geq M$, tenemos que

$$y_t[n] = 0 \text{ para } n \geq M - 1, \text{ entonces}$$

$$y[n] = y_s[n] = H(\omega)e^{j\omega n},\ n \geq M - 1.$$

- Si $h[n]$ es IIR, tenemos que

$$|\,y_t[n]\,| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}\, e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\,h[k]\,| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\,h[k]\,|,$$

si el sistema es BIBO estable, entonces

$$y_t[n] \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Sistemas discretos LTI

Correlación

La función de correlación se puede utilizar para medir la similitud entre dos señales o para medir la distribución de la energía de una señal en función del tiempo.

Dadas las señales discretas $x[n]$ y $y[n]$ podemos definir

- Auto-correlación

$$r_x[n] = \mathrm{corr}(x[n], x[n]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot x^*[k-n]\,, \quad \text{para } -\infty < n < \infty.$$

- Correlación cruzada

$$r_{xy}[n] = \mathrm{corr}(x[n], y[n]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot y^*[k-n]\,, \quad \text{para } -\infty < n < \infty.$$

Matemáticamente, la función de correlación está relacionada a la función de convolución aunque sus interpretaciones son diferentes.

Sistemas discretos LTI

Correlación - Transformada de Fourier

Dados los pares de transformadas $x[n] \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ y $y[n] \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} Y(\omega)$ se puede demostrar que

$$\mathrm{corr}(x[n], y[n]) \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\omega)\, Y^*(\omega)\,.$$

Prueba: Considerando la convolución de las secuencias $x[n]$ y $g[n]$ tenemos que

$$x[n] * g[n] = \sum_k x[k]g[n-k] \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\omega)\, G(\omega)\,.$$

Asumiendo que $g[n] = y^*[-n]$ tenemos que

$$x[n] * g[n] = x[n] * (y^*[-n]) = \sum_k x[k]y^*[k-n] = \mathrm{corr}(x[n], y[n])\,.$$

Por otro lado, en el dominio de la frecuencia tenemos que

$$G(\omega) = \sum_n g[n]e^{-j\omega n} = \sum_n y^*[-n]e^{-j\omega n} = \left(\sum_n y[-n]e^{j\omega n}\right)^* = \left(\sum_n y[n]e^{-j\omega n}\right)^* = Y^*(\omega)\,.$$

En consecuencia

$$\mathrm{corr}(x[n], y[n]) \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\omega)\, Y^*(\omega).$$

Nota: El teorema de Parseval se puede demostrar como un caso particular de la esta relación.

Sistemas discretos LTI

Correlación normalizada

La correlación normalizada se puede definir de la siguiente forma:

- Auto-correlación normalizada

$$\rho_x[n] = \frac{\mathrm{corr}(x[n], x[n])}{\|x[n]\|_2^2} = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot x^*[k-n]}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2}, \quad -\infty < n < \infty.$$

- Correlación cruzada normalizada

$$\rho_{xy}[n] = \frac{\mathrm{corr}(x[n], y[n])}{\|x[n]\|_2 \cdot \|y[n]\|_2} = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot y^*[k-n]}{\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |y[k]|^2}}, \quad -\infty < n < \infty.$$

Nota: Medida relativa de la similitud de dos secuencias, alternativamente es una medida de la ortogonalidad o de la independencia de dos secuencias.

¡Muchas gracias!