IEE352 - Procesamiento Digital de Señales

Clase 05b
Ecuaciones de diferencias

Dr. Marco A. Milla
Sección Electricidad y Electrónica (SEE)
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

email: milla.ma@pucp.edu.pe

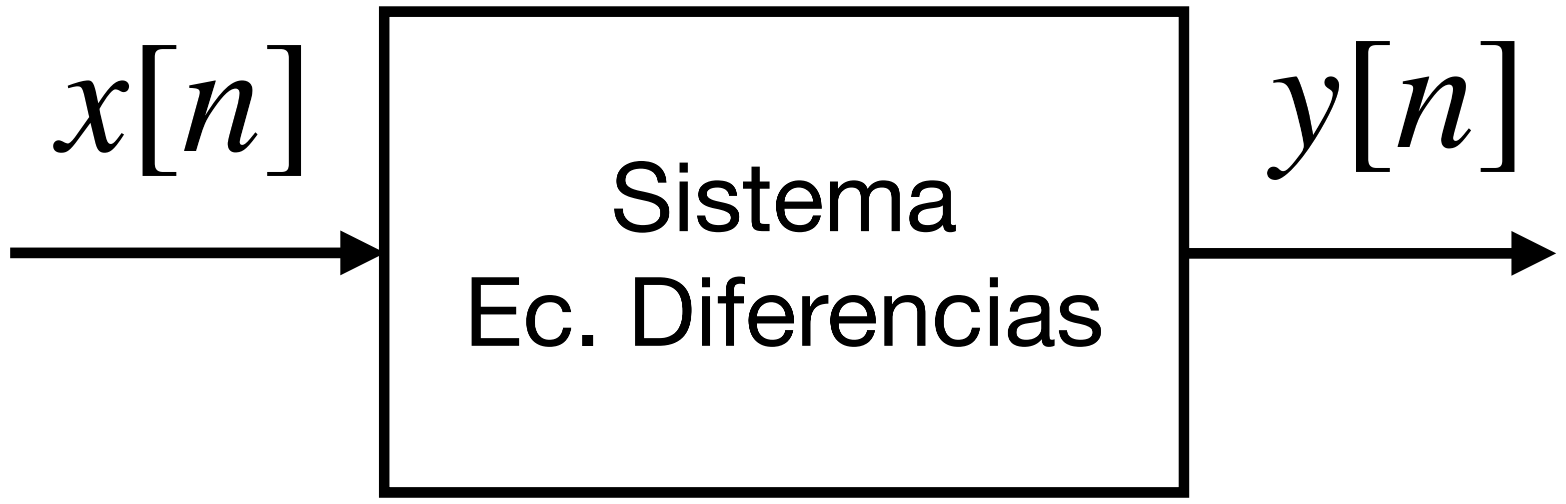
Ecuaciones de diferencias

Definición

Las ecuaciones de diferencias permiten representar un tipo especial de sistemas discretos, los cuales, bajo ciertas condiciones, también pueden ser lineales e invariantes en el tiempo (LTI).

La siguiente ecuación de diferencias

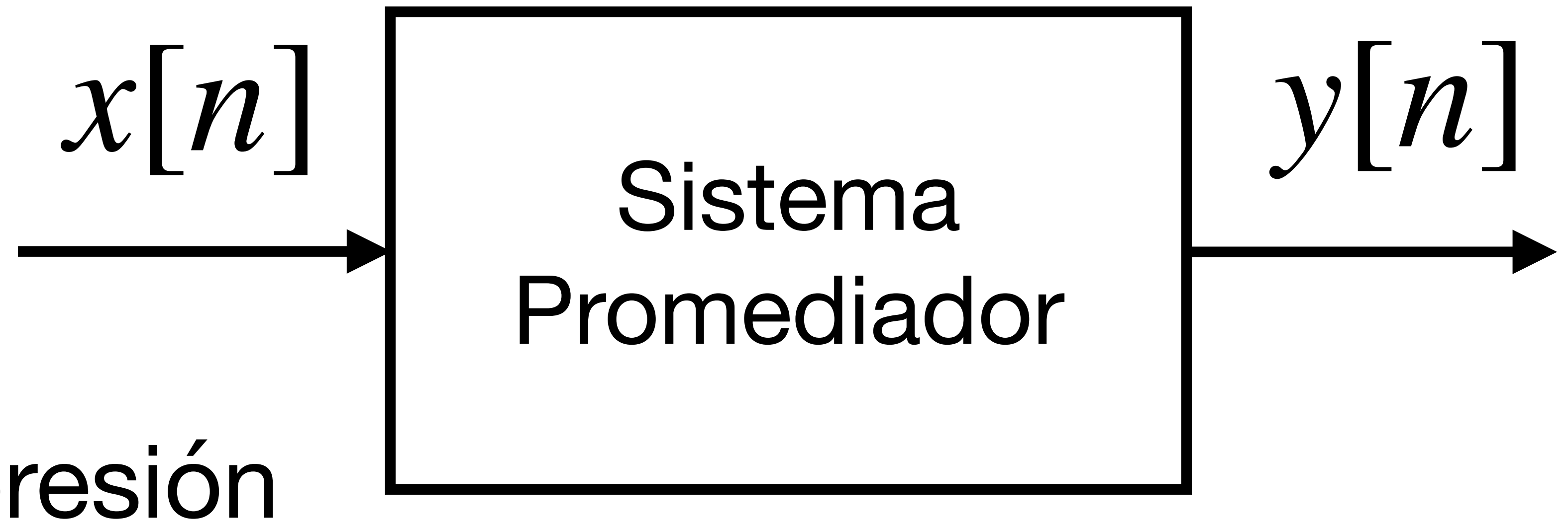
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m \, x[n-m],$$



en general, puede representar un sistema discreto, donde $x[n]$ es la entrada del sistema, $y[n]$ es la salida del sistema y los coeficientes a_k y b_m son constantes que caracterizan el comportamiento del sistema.

Ecuaciones de diferencias

Ejemplo sistema promediador



Un sistema promediador se puede representar por la siguiente expresión

$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]\,.$$

Si $x[n] = \delta[n]$, queremos encontrar la respuesta impulsiva del sistema

$$\begin{aligned} y[n] = h[n] &= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} \delta[n-k] \\ &= \frac{1}{M}(u[n] - u[n-M]) \end{aligned}$$

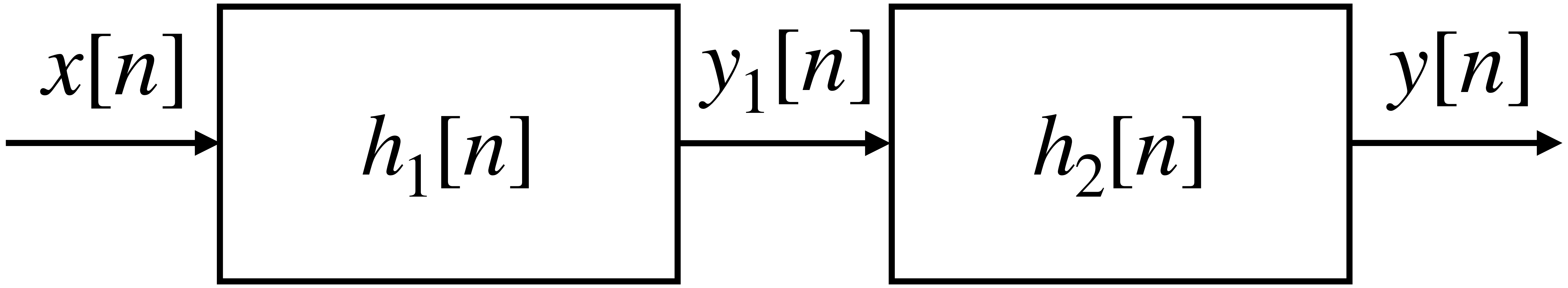
donde $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$ es la función escalón unitario.

Ecuaciones de diferencias

Ejemplo sistema promediador

Este sistema se puede representar como dos sistemas en cascada, tal que

$$h[n] = \underbrace{\frac{1}{M}(\delta[n] - \delta[n-M])}_{h_1[n]} * \underbrace{u[n]}_{h_2[n]} .$$



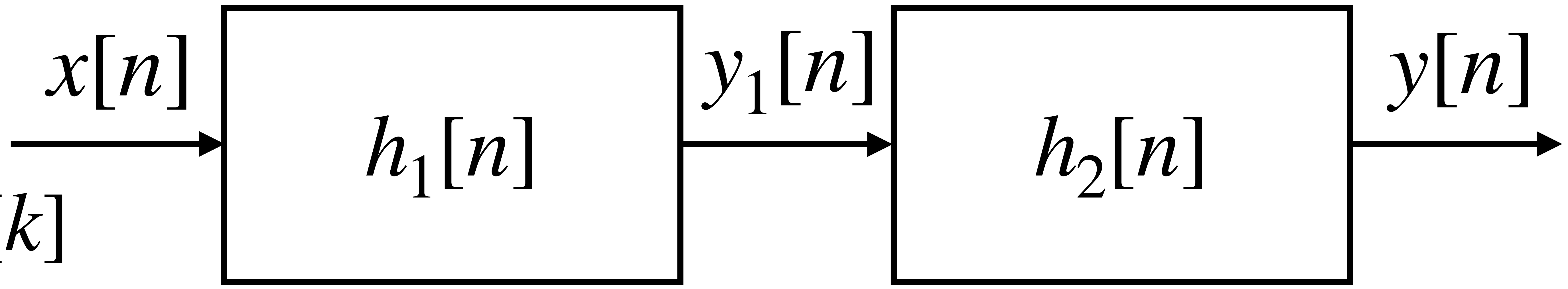
Primer sistema:

$$y_1[n] = \frac{1}{M}(\delta[n] - \delta[n-M]) * x[n] = \frac{1}{M}(x[n] - x[n-M]) .$$

Ecuaciones de diferencias

Ejemplo sistema promediador

Segundo sistema:



$$y[n] = u[n] * y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} y_1[k]$$

$$= y_1[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} y_1[k] .$$

Dado que $y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} y_1[k]$ tenemos que

$$y[n] = y_1[n] + y[n-1] .$$

Ecuaciones de diferencias

Ejemplo sistema promediador

En conclusión, el sistema promediador representado por

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] \,,$$

también puede ser representado usando la siguiente ecuación

$$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{M}(x[n] - x[n-M]).$$

Nota: Un número ilimitado de ecuaciones de diferencias se pueden utilizar para representar el mismo sistema LTI.

Ecuaciones de diferencias

Soluciones particulares y homogéneas

En general, dada una entrada cualquiera $x[n]$ para determinar de forma única la salida $y[n]$ de un sistema representado por una ecuación de diferencias, se requiere información adicional del sistema, por ejemplo, los valores que definen las condiciones iniciales del sistema.

Dada una solución particular $y_p[n]$ para una entrada dada $x_p[n]$, tenemos que la misma entrada $x_p[n]$ para la misma ecuación puede generar la siguiente salida

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n] \,,$$

donde $y_h[n]$ es la solución homogénea de la ecuación de diferencias.

Ecuaciones de diferencias

Solución homogénea o característica

La solución homogénea o característica $y_h[n]$ es la solución de la ecuación de diferencias con $x[n] = 0$, tal que,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y_h[n-k] = 0\,.$$

En general la solución $y_h[n]$ tiene la forma $y_h[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k\, z_k^n$ donde z_k son las raíces del polinomio característico,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k} = 0.$$

Ya que la solución homogénea tiene N coeficientes no determinados, se necesitan N condiciones para especificar de forma única $y[n]$ dada una entrada $x[n]$. Estas N condiciones pueden ser valores de $y[n]$ a ciertas posiciones de n, como $y[-1], \ldots, y[-N]$.

Ecuaciones de diferencias

Fórmulas de recurrencia

La ecuación de diferencias se puede expresar de la siguiente forma

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k] \ ,$$

para calcular valores $y[n]$ en función de valores de $x[n]$ del presente y pasado y de valores de $y[n]$ del pasado.

De forma similar, para calcular valores del pasado tenemos

$$y[n-N] = -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_N} x[n-k] \ ,$$

para calcular $n < -N$ dados valores $y[-1], \ldots, y[-N]$.

Ecuaciones de diferencias

Ejemplo de fórmula de recurrencia

Dado $y[n] = ay[n-1] + x[n]$, y considerando, $x[n] = k\,\delta[n]$ y $y[-1] = c$, tenemos que

$$y[0] = ac + k,$$
$$y[1] = ay[0] + 0 = a^2c + ak,$$
$$y[2] = ay[1] + 0 = a^3c + a^2k,$$
$$y[3] = ay[2] + 0 = a^4c + a^3k,$$

entonces,

$$y[n] = a^{n+1}c + a^n k \ \text{ para } n \geq 0\,.$$

Ecuaciones de diferencias

Ejemplo de fórmula de recurrencia

Por otro lado, para valores $n < 0$, tenemos que $y[n-1] = \frac{1}{a}(y[n] - x[n])$,

evaluando tenemos que,

$$
\begin{aligned}
y[-1] &= c, \\
y[-2] &= a^{-1}(y[-1] - 0) = a^{-1}c, \\
y[-3] &= a^{-1}(y[-2] - 0) = a^{-2}c, \\
y[-4] &= a^{-1}(y[-3] - 0) = a^{-3}c,
\end{aligned}
$$

entonces

$$y[n] = a^{n+1}c \ \text{ para } n \leq -1.$$

Ecuaciones de diferencias

Ejemplo - Algunas observaciones

Entonces, en nuestro ejemplo, tenemos que

$$y[n] = a^{n+1}c + ka^n u[n] \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

Notas:

- El sistema no es causal, el sistema se anticipa a la entrada.
- No es lineal, cuando la entrada es cero ($k = 0$), la salida es $y[n] = a^{n+1}c \neq 0$, no está de acuerdo con el principio de superposición.
- No es invariante en el tiempo, dado $x_1[n] = k\,\delta[n - n_o]$ tenemos que

$$y_1[n] = a^{n+1}c + ka^{n-n_o}u[n - n_o] \neq y[n - n_o]\,.$$

- Para que el sistema sea LTI, las condiciones iniciales deben indicar que el sistema estaba inicialmente en reposo, es decir, si $x[n] = 0$ para $n < n_o$ entonces $y[n] = 0$ para $n < n_o$.

Ecuaciones de diferencias

Resumen

Dado un sistema caracterizado con Ecuaciones de Diferencias podemos verificar lo siguiente.

- La salida para una entrada dada no se puede especificar de forma única, se necesita información adicional.
- Si la información adicional se especifica como N valores consecutivos de $y[n]$, se puede escribir la ecuación de diferencias como una fórmula de recurrencia para obtener los valores hacia el futuro y hacia el pasado de $y[n]$.
- El sistema es lineal e invariante en el tiempo (LTI) y causal, si la información adicional implica que el sistema está inicialmente en reposo.

Ecuaciones de diferencias

Ejemplo - Sistema en reposo

Dado $y[n] = a\,y[n-1] + x[n]$, si $x[n] = k\delta[n]$ y además $y[-1] = 0$ entonces

$$y[n] = ka^n u[n] \text{ (respuesta impulsiva infinita - IIR).}$$

Notar que para $k = 1$, entonces $h[n] = a^n u[n]$ (sistema causal).

Además, si $x_1[n] = k\,\delta[n - n_o]$ entonces $y_1[n] = ka^{n-n_o}\,u[n-n_o] = y[n-n_o]$ (sistema TI).

Es decir, si consideramos la condición de reposo,

$$x[n] = 0 \text{ para } n < n_o \implies y[n] = 0 \text{ para } n < n_o\,,$$

tenemos que la ecuación de diferencias representa un sistema LTI causal.

Ecuaciones de diferencias

Representación de sistemas FIR

Sistemas de respuesta impulsiva finita (FIR) se pueden representar de la siguiente forma

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_o} x[n-k] \ ,$$

es decir no necesitan de información adicional sobre el sistema.

Dado $x[n] = \delta[n]$ tenemos que

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} \delta[n-k] = \begin{cases} b_n/a_o, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & n < 0, n > M, \end{cases}$$

por ende, no se requiere de fórmulas recursivas.

¡Muchas gracias!