IEE352 - Procesamiento Digital de Señales

Clase 01 - Muestreo de Señales 1

Dr. Marco A. Milla
Sección Electricidad y Electrónica (SEE)
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

email: milla.ma@pucp.edu.pe

Contenido

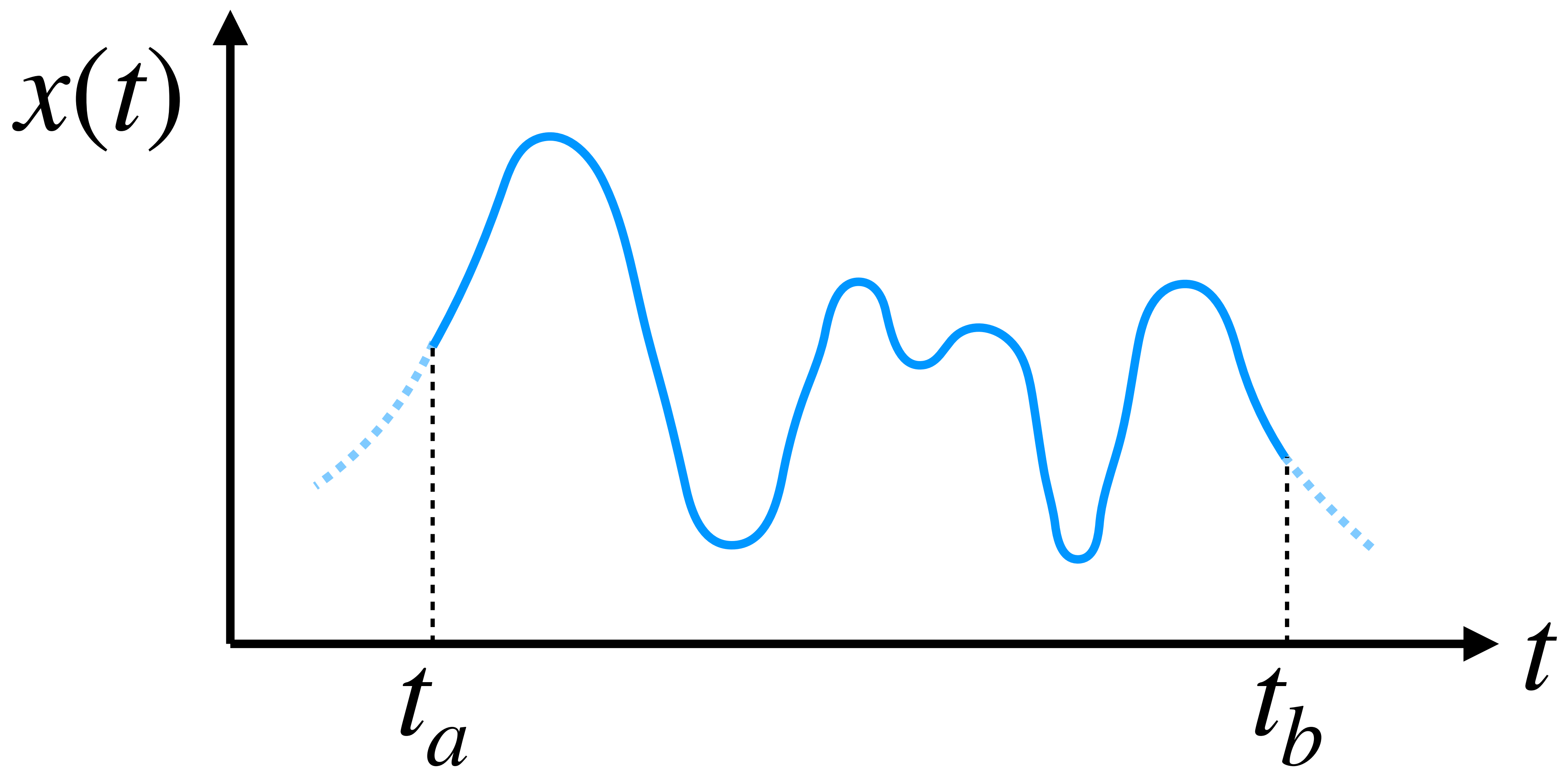
- Señales continuas en el tiempo
- Señales discretas en el tiempo
- Muestreo de señales continuas en el tiempo

Señales continuas en el tiempo

Definición

- Una señal en el tiempo-continuo es una cantidad variable que puede expresarse como una función cuyo dominio, el tiempo, se encuentra en el conjunto de los números reales.

- De esta forma para cada instante de tiempo t existe una valor $x(t)$.



$\{x(t), -\infty < t < \infty\}$, definida $\forall t \in \mathbb{R}$

$\{x(t), t_a \leq t < t_b\}$, definida para $t \in [t_a, t_b[$

Señales continuas en el tiempo

Clasificación de las señales

- La norma p de la señal $x(t)$ se define como:

$$\|x(t)\|_p = \left(\int_\tau |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

Si $\|x(t)\|_p$ es finita entonces $x(t)$ es integrable en la potencia p.

- Casos de señales según su norma.

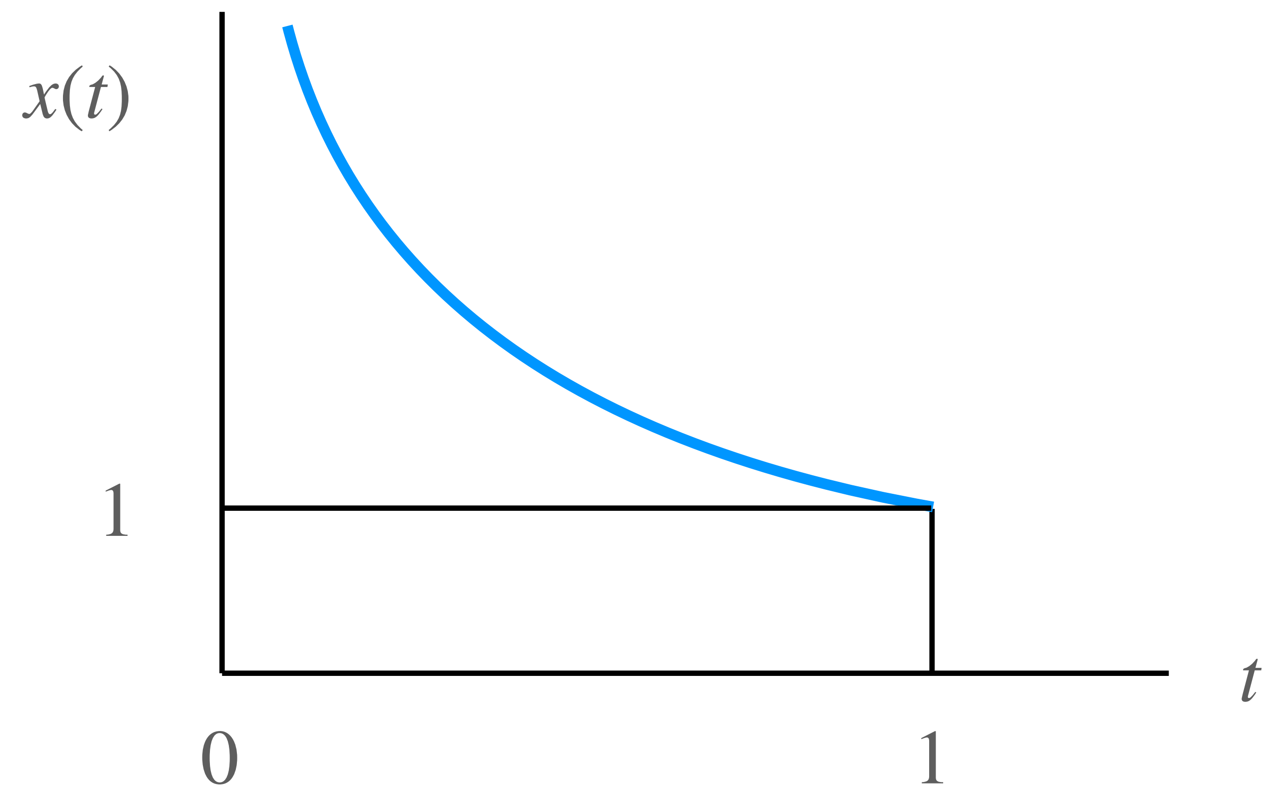
$$p = 2 : \text{Energía finita} \int_\tau |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

$$p = 1 : \text{Absolutamente integrable} \int_\tau |x(t)| \, dt < \infty$$

$$p = \infty : \text{Señal acotada} \lim_{p\to\infty} \|x(t)\|_p = \sup_{t\in\tau} |x(t)| < \infty$$

Señales continuas en el tiempo

Clasificación de las señales



- Ejemplo: Señal exponencial

$$x(t) = \frac{1}{t^a} \qquad 0 < t < 1 \quad (a > 0)\,.$$

Norma 1: $\|x(t)\|_1 = \displaystyle\int_0^1 t^{-a}dt = \left.\frac{t^{1-a}}{1-a}\right|_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & 0 < a < 1 \\ \infty & a \geq 1 \end{cases}$

Norma 2: $\|x(t)\|_2^2 = \displaystyle\int_0^1 t^{-2a}dt = \left.\frac{t^{1-2a}}{1-2a}\right|_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-2a} & 0 < a < \frac{1}{2} \\ \infty & a \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

En este ejemplo, si $x(t)$ tiene norma 2 entonces también tiene norma 1.

Señales continuas en el tiempo

Delta de Dirac o señal de impulso unitario

- Definiciones incompletas

1. $$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$ no bien definida.

2. $$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} p_\epsilon(t)$$ donde $$p_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & -\frac{\epsilon}{2} < t < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & t < -\frac{\epsilon}{2}, t > \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

Tampoco es una buena definición porque $p_\epsilon(t)$ diverge cuando $\epsilon \to 0$.

Sin embargo si satisface la relación

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int p_\epsilon(t) x(t) dt = x(0).$$

Señales continuas en el tiempo

Delta de Dirac o señal de impulso unitario

- Definición matemáticamente correcta en base a su propiedad.
  La función delta de Dirac es una distribución o una función generalizada que está definida por la siguiente formula integral:

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)x(t)dt = x(a), \quad \text{e.g.,} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

  Esta definición es importante para la abstracción matemática de funciones como el escalón unitario $u(t)$ o la señal senoidal $\sin(\omega t)$.

- Propiedades

  $$\delta(\alpha t) = \frac{\delta(t)}{|\alpha|} \text{ (escalado)} \qquad \delta(-t) = \delta(t) \text{ (simetría)}$$

  $$x(t)\delta(t-a) = x(a)\delta(t-a) \qquad t^n\delta(t) = 0 \quad \forall n > 0,\ t \in \mathbb{R}$$

Señales continuas en el tiempo

Transformada de Fourier continua

- Para la representación en frecuencia de las señales continuas en el tiempo se utiliza la transformada de Fourier continua.
- Definición: $x(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$

F.T. Directa: $$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt, \qquad \Omega \in \mathbb{R}, \ -\infty < x(t) < \infty$$

F.T. Inversa: $$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega,$$

donde t es tiempo, Ω es frecuencia, y $e^{j\Omega t}$ es una función exponencial compleja definida como:

$$e^{j\Omega t} = \cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t) \quad \text{(funciones senoidales).}$$

Señales continuas en el tiempo

Transformada de Fourier continua

- Ejemplo: Transformada de Fourier de función rectangular

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{B}\right)\right\} \qquad \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{B}\right) e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \int_{-B/2}^{B/2} e^{-j\Omega t} dt = \left.\frac{e^{-j\Omega t}}{-j\Omega}\right|_{-B/2}^{B/2}$$

$$= \frac{e^{-j\Omega B/2} - e^{j\Omega B/2}}{-j\Omega} = \frac{2j\sin(\Omega B/2)}{j\Omega} = B\,\mathrm{sinc}(\Omega B/2)$$

donde $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Señales continuas en el tiempo

Existencia de la Transformada de Fourier continua

- Condiciones de Dirichlet: condiciones suficientes para le existencia de la transformada de Fourier.
    1. $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades.
    2. $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos.
    3. $x(t)$ es absolutamente integrable (norma 1 finita).

$$|X(\Omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-j\Omega t}|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt = \|x(t)\|_1 < \infty$$

- Notas:
    - Condiciones 1 y 2 aseguran la existencia de la integral de Riemann.
    - Las condiciones de Dirichlet son condiciones suficientes pero no necesarias. Por ejemplo $x(t) = \operatorname{sinc}(t)$ no cumple con condiciones 2 y 3 pero tiene una transformada de Fourier válida.
    - Algunas funciones como $\cos(\Omega_o t)$ no son integrables pero sus transformadas pueden definirse usando funciones generalizadas.

$$x(t) = \cos(\Omega_o t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) = \frac{1}{2}\left(\delta(\Omega - \Omega_o) + \delta(\Omega + \Omega_o)\right)$$

$$y(t)\,\cos(\Omega_o t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left(Y(\Omega - \Omega_o) + Y(\Omega + \Omega_o)\right)$$

Señales continuas en el tiempo

Propiedades de la transformada de Fourier 1

- Linealidad

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega) \\ y(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} Y(\Omega) \end{array}\right\} \implies a\,x(t) + b\,y(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} a\,X(\Omega) + b\,Y(\Omega)$$

- Simetría conjugada o Hermitiana

$$x(t) \text{ es real} \iff X(\Omega) = X^*(-\Omega)$$

- Desplazamiento en el tiempo

$$x(t - t_o) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega)e^{-j\Omega t_o}$$

- Desplazamiento en frecuencia (modulación)

$$e^{j\Omega_o t}x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega - \Omega_o).$$

Señales continuas en el tiempo

Propiedades de la transformada de Fourier 2

- Escalamiento

$$x(at) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{|a|}\right) \qquad \forall a \neq 0$$

- Convolución

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)\, Y(\Omega)$$

$$x(t)\, y(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\theta)\, Y(\Omega - \theta)\, d\theta$$

- Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2\, d\Omega$$

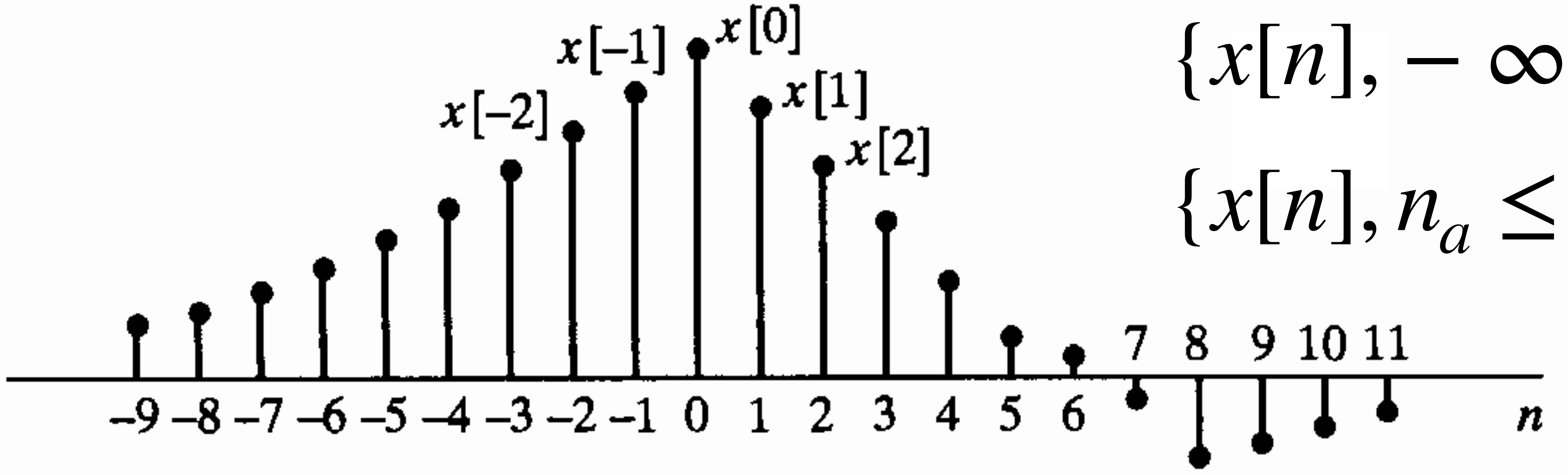
- Teorema de Potencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, Y^*(\Omega)\, d\Omega$$

Señales discretas en el tiempo

Definición

- Una señal en tiempo-discreto $x[n]$ es una cantidad variable que puede expresarse como una función de una variable independiente entera $n \in \mathbb{Z}$.
- Una señal en tiempo discreto no está definida para instantes entre dos muestras sucesivas. Es incorrecto pensar que $x[n]$ es igual a cero si n no es un entero, la señal $x[n]$ no está definida para valores no enteros de n.



$\{x[n], -\infty < n < \infty\}$, definida $\forall n \in \mathbb{Z}$

$\{x[n], n_a \leq n < n_b\}$, definida para $n \in [n_a, n_b[$

Señales discretas en el tiempo

Clases de señales

- La norma p de la señal $x[n]$ se define como:

$$\|x[n]\|_p = \left(\sum_n |x[n]|^p \right)^{1/p}$$

Si $\|x[n]\|_p$ es finita entonces $x[n]$ es sumable en la potencia p.

- Casos de señales según su norma.

$p = 2$: Energía finita $\sum_n |x[n]|^2 < \infty$

$p = 1$: Absolutamente sumable $\sum_n |x[n]| < \infty$

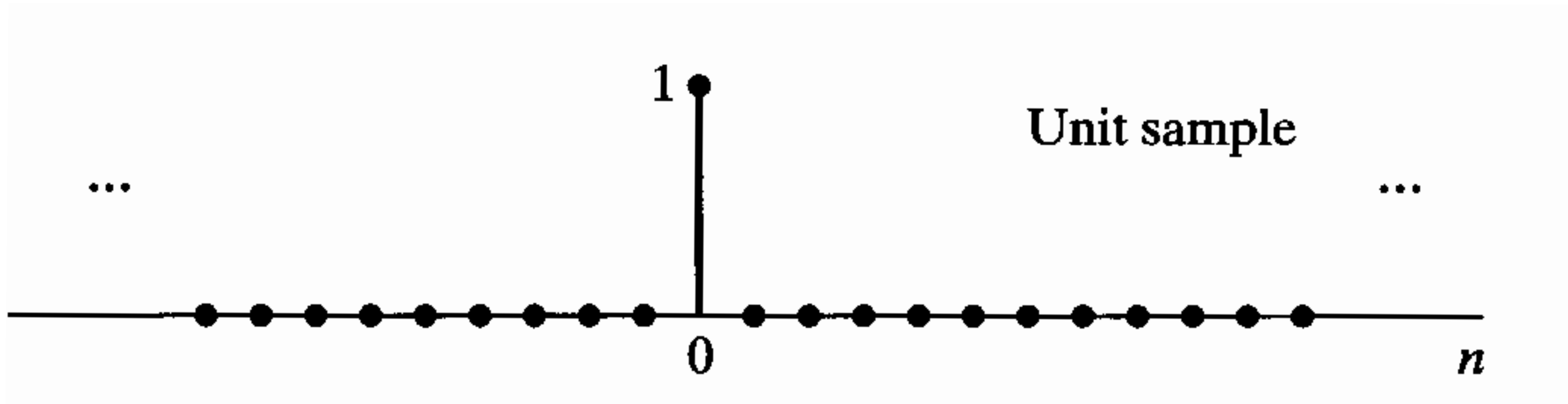
$p = \infty$: Señal acotada $\lim_{p \to \infty} \|x[n]\|_p = \sup_n |x[n]| < \infty$

Señales discretas en el tiempo

Ejemplos de señales en tiempo discreto

- El impulso unitario es una señal que vale 1 solo para $n = 0$, para los demás casos vale 0.

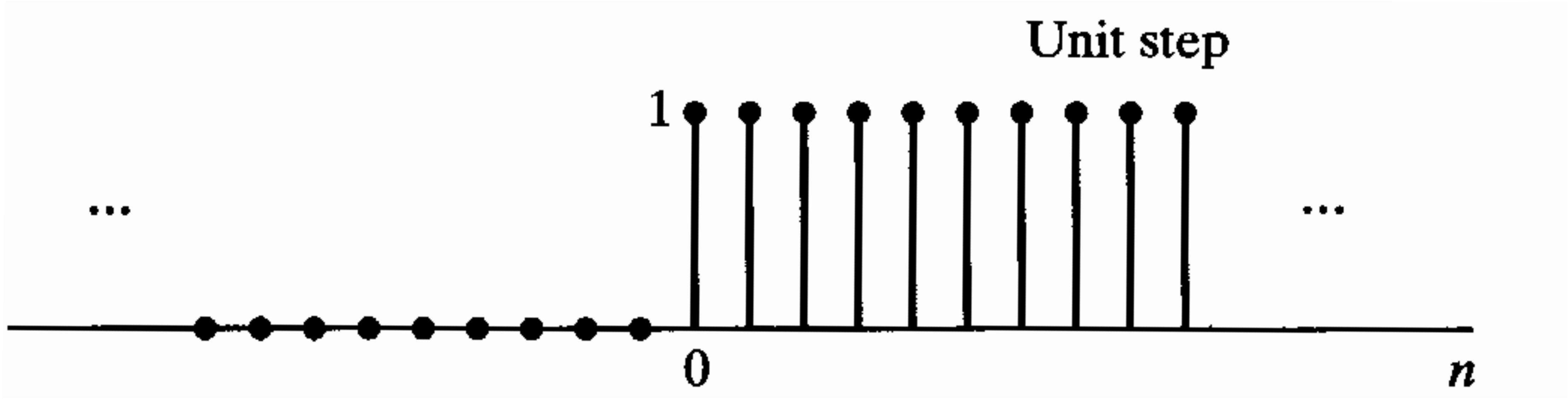
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



Está bien definida, mucho menos compleja matemáticamente que el delta de Dirac.

- La señal escalón unitario es una señal que vale 1 para todo $n \geq 0$, para n negativo vale 0.

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Señales discretas en el tiempo

Transformada de Fourier en tiempo discreto

- Para el análisis en frecuencia de las señales discretas en el tiempo se utiliza la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT).
- Definición:

$$\text{DTFT directa:} \qquad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

$$\text{DTFT inversa:} \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

donde n es una variable independiente entera (tiempo discreto) y ω es la frecuencia normalizada.

Señales discretas en el tiempo

Transformada de Fourier en tiempo discreto

- Ejemplo 1: Señal exponencial.

  Dado $x[n] = a^n u[n]$, la DTFT de esta secuencia es:

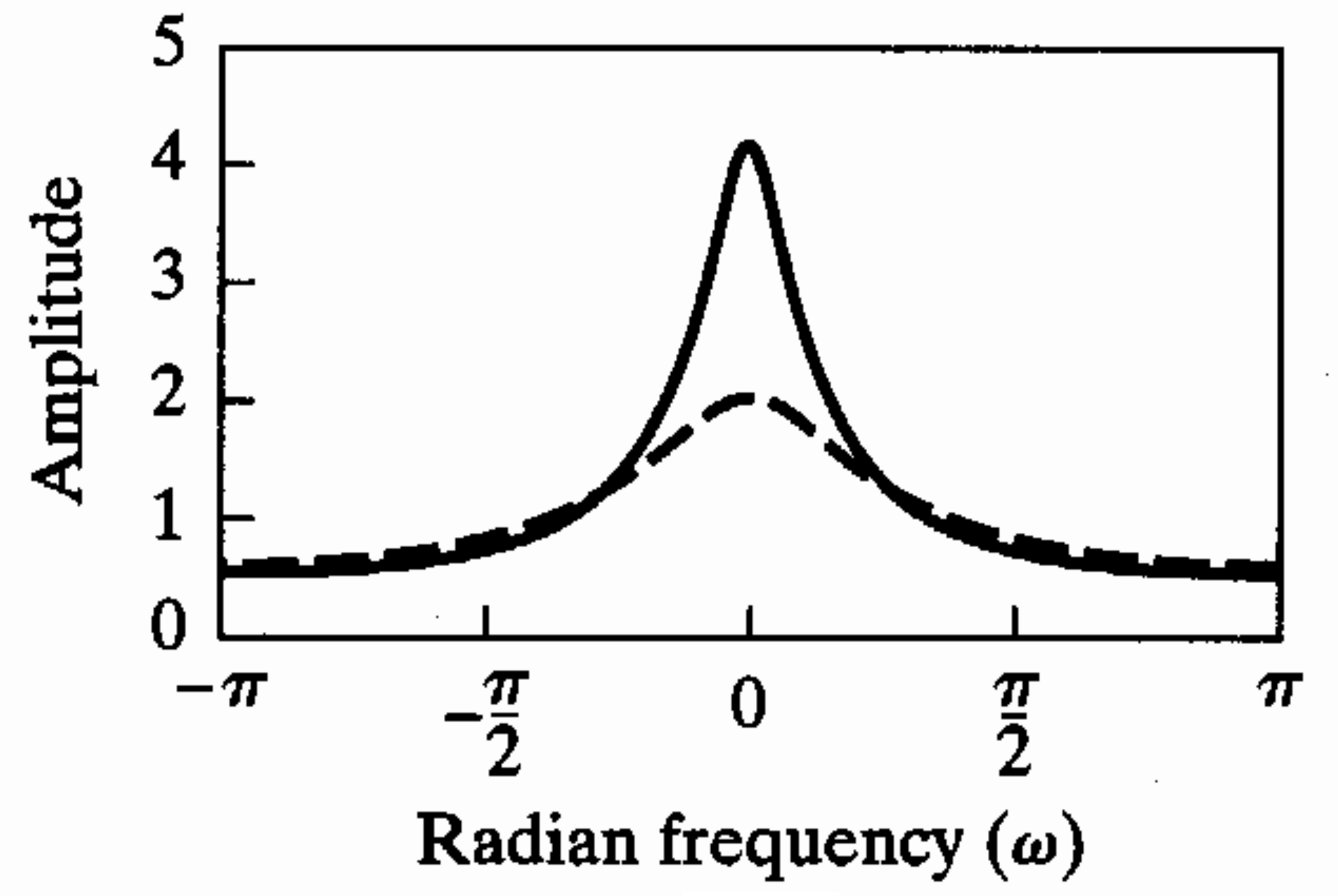
$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n$$

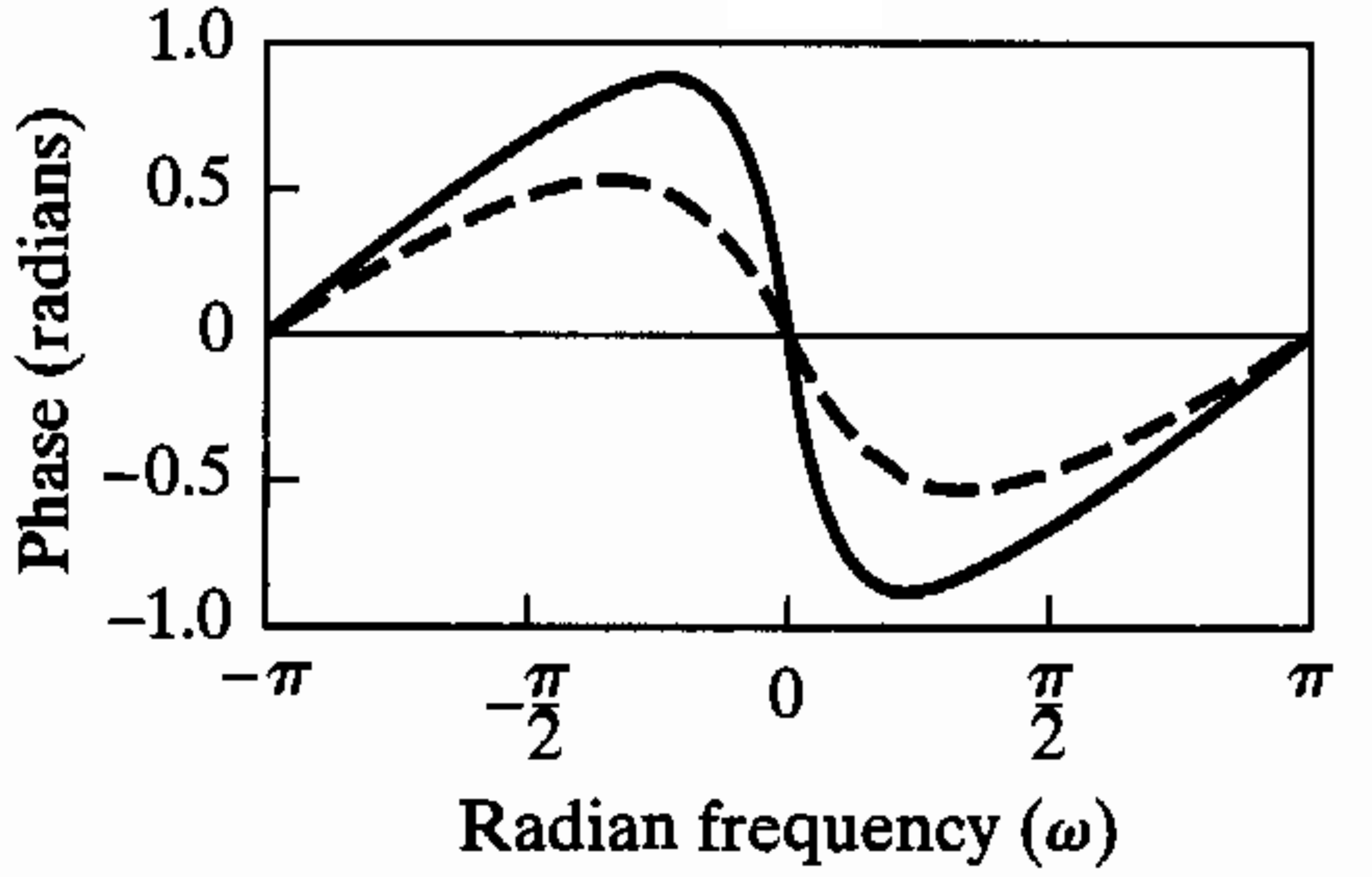
$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad |a| < 1.$$

- Podemos calcular la magnitude y fase de $X(\omega)$.

$$|X(\omega)| = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a\cos\omega)^{1/2}},$$

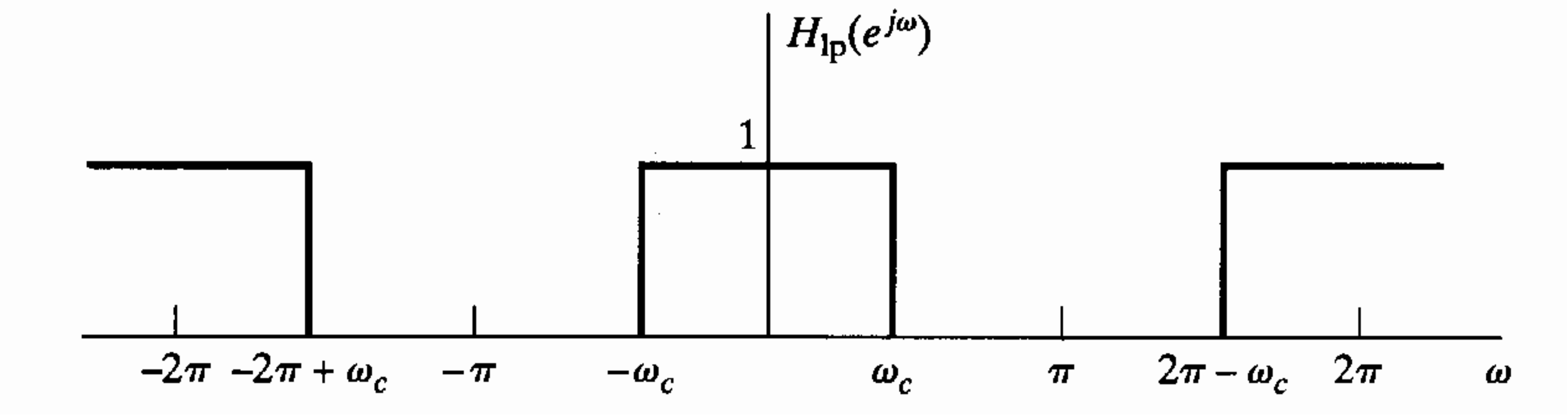
$$\angle X(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{-a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}\right).$$





Señales discretas en el tiempo

Transformada de Fourier en tiempo discreto



- Ejemplo 2: Filtro ideal pasa bajos

Dado $H_{lp}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$

con periodicidad 2π, la DTFT inversa de este filtro (respuesta impulsiva) es:

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi jn} e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi jn}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right),$$

$$= \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}(\omega_c n), \qquad -\infty < n < \infty\,.$$

Señales discretas en el tiempo

Existencia de la Transformada de Fourier en tiempo discreto

- La existencia de la DTFT implica que $|X(\omega)| < \infty, \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi]$
- Condición suficiente para la existencia de la DTFT es que $x[n]$ sea absolutamente sumable (norma 1 finita).

$$|X(\omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right|$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n]e^{-j\omega n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = \|x[n]\|_1 < \infty$$

Si $x[n]$ tiene norma 1 finita entonces $X(\omega)$ existe.

Señales discretas en el tiempo

Propiedades de la DTFT 1

- Periodicidad

$$X(\omega) = X(\omega - 2\pi k), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Linealidad

$$\left.\begin{array}{l} x[n] \stackrel{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\omega) \\ y[n] \stackrel{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} Y(\omega) \end{array}\right\} \Longrightarrow a\,x[n] + b\,y[n] \stackrel{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} a\,X(\omega) + b\,Y(\omega)$$

- Desplazamiento en el tiempo

$$x[n - n_o] \stackrel{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\omega)e^{-j\omega n_o}$$

- Desplazamiento en frecuencia (modulación)

$$e^{j\omega_o n}x[n] \stackrel{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\omega - \omega_o)$$

Señales discretas en el tiempo

Propiedades de la DTFT 2

- Simetría conjugada o Hermitiana

$$x[n] \text{ es real} \iff X(\omega) = X^*(-\omega)$$

- Convolución (discreta en el tiempo y periódica en la frecuencia)

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[n-k] \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\omega)Y(\omega)$$

$$x[n]\, y[n] \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\omega) * Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)\, Y(\omega - \theta)\, d\theta$$

- Teorema de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2\, d\omega$$

- Teorema de Potencia

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\, Y^*(\omega)\, d\omega$$

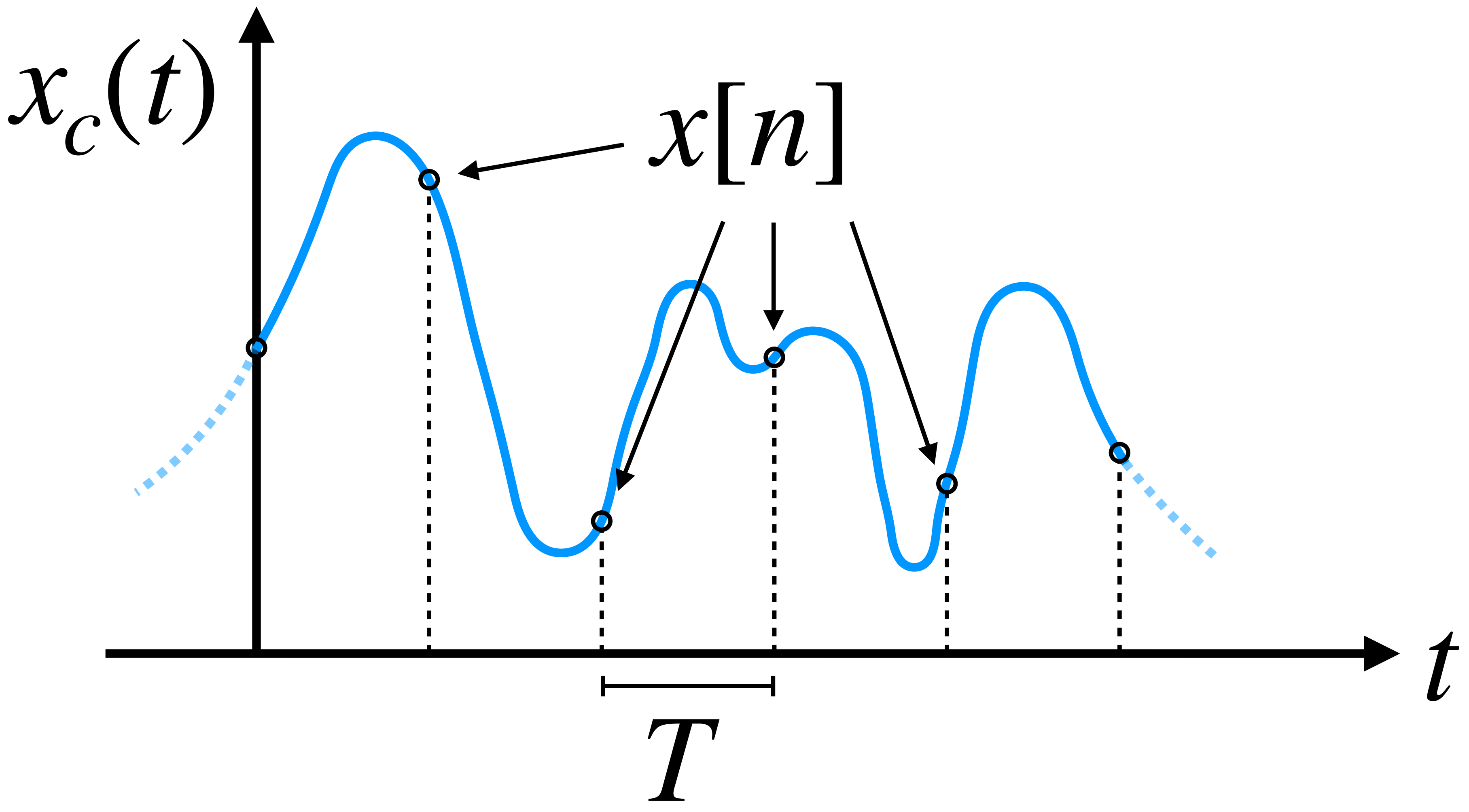
Muestreo de señales continuas en el tiempo

Muestreo periódico

- Muestreo periódico: método típico de muestreo.

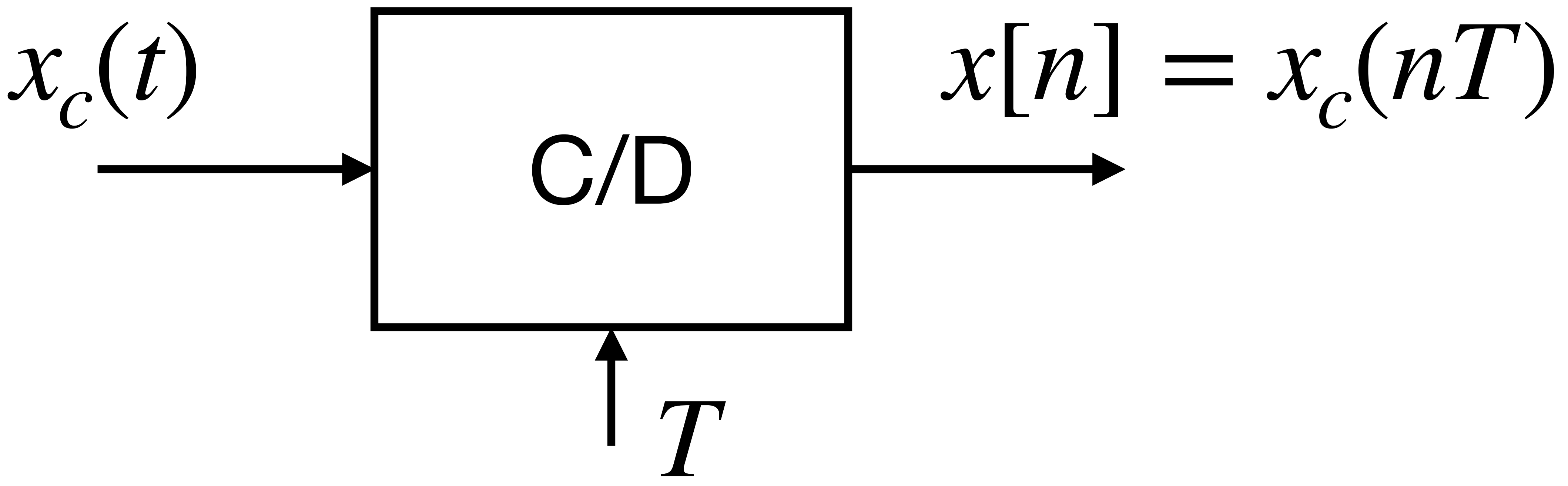
$$x[n] = x_c(nT), \qquad n \in \mathbb{Z}, t = nT$$

donde T es el periodo y $f_s = \frac{1}{T}$ es la frecuencia de muestreo ($\Omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$).



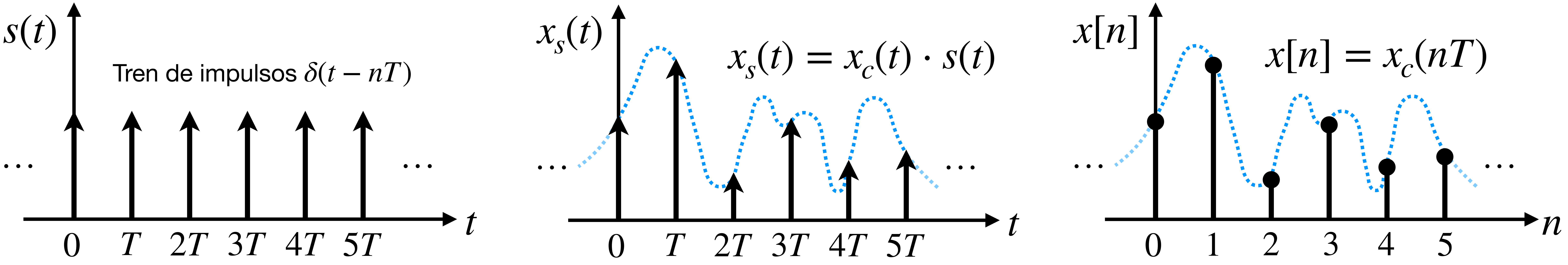
- En general, la operación de muestreo no es invertible. Sin embargo, para un tipo especial de señales se puede reconstruir la señal original a partir de sus muestras.

- Modelo matemático: Convertidor ideal de tiempo continuo a discreto (C/D)



Muestreo de señales continuas en el tiempo

Convertidor ideal de tiempo continuo a discreto



Muestreo de señales continuas en el tiempo

Representación en frecuencia del muestreo

- Tren de impulsos

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \text{ donde } \delta(t) \text{ es el Delta de Dirac.}$$

- Impulsos modulados por la señal $x_c(t)$

$$x_s(t) = x_c(t) \cdot s(t) = x_c(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\, \delta(t - nT)$$

- En el dominio de la frecuencia

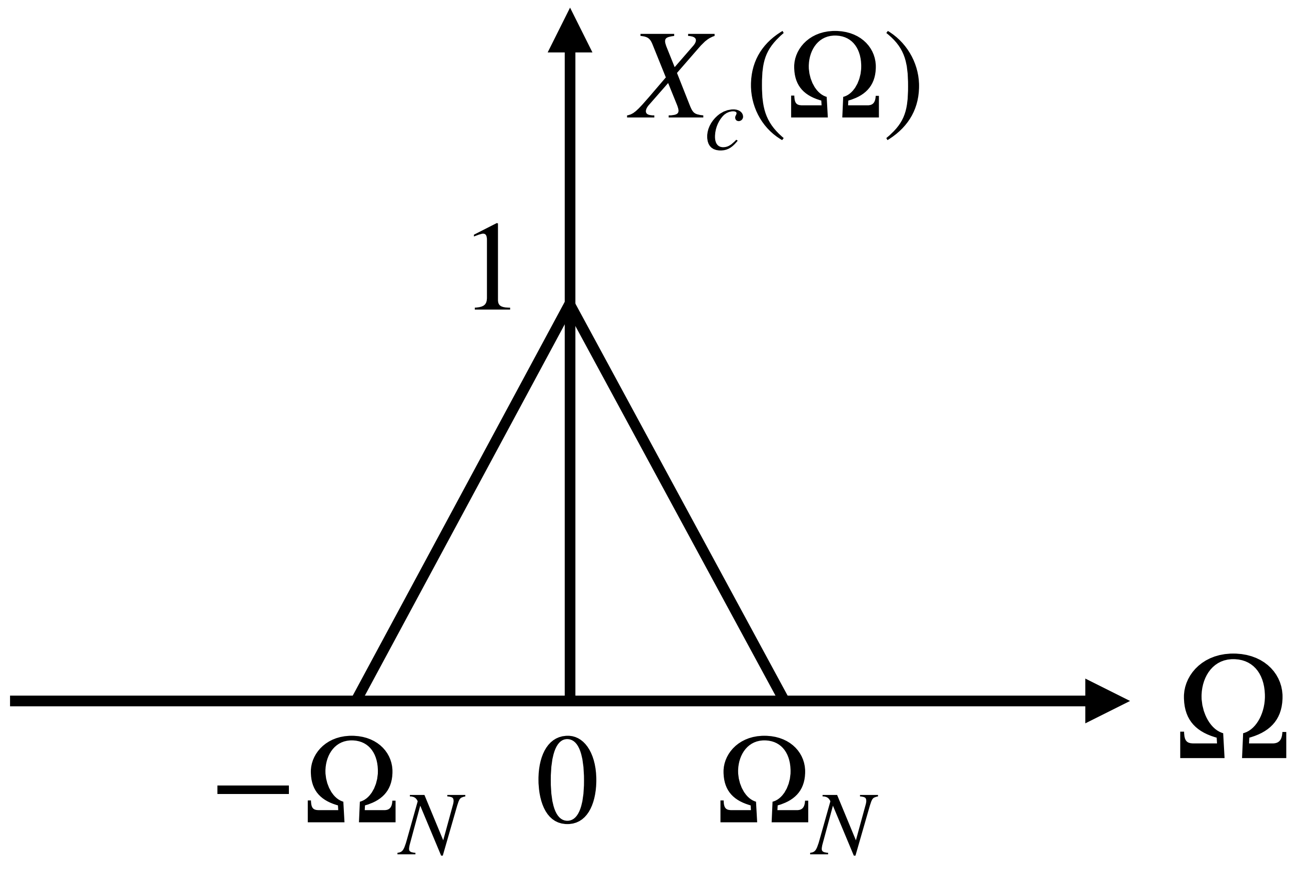
$$X_s(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(\Omega) * S(\Omega),$$

dado $S(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$, $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ (frecuencia de muestreo) podemos encontrar

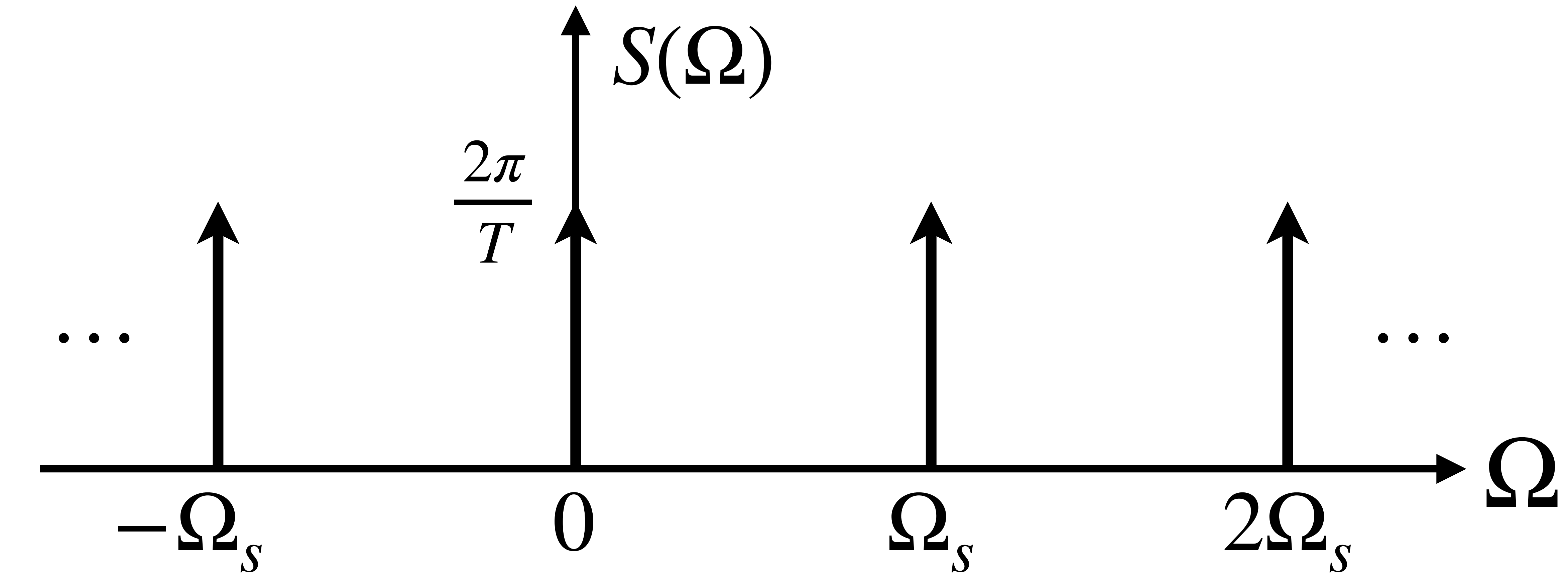
$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - k\Omega_s).$$

Muestreo de señales continuas en el tiempo

Representación en frecuencia del muestreo



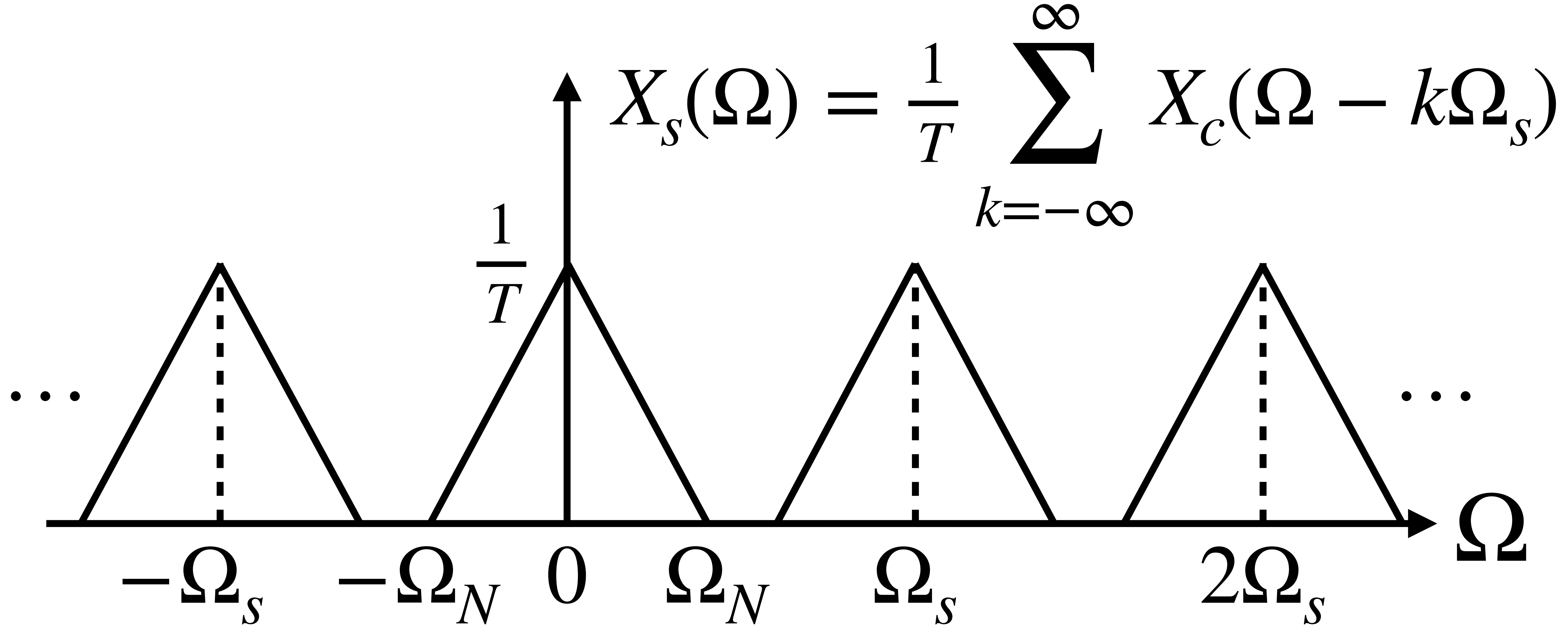
$*$



Para evitar overlape (aliasing) necesitamos $\Omega_N < \Omega_s - \Omega_N$

$$\Longrightarrow \quad \Omega_s > 2\Omega_N$$

donde Ω_N es la frecuencia máxima de $X_c(\Omega)$.



Muestreo de señales continuas en el tiempo

Teorema de Nyquist o del muestreo & Aliasing

- Si $x_c(t)$ es una señal de banda limitada con $X_c(\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \Omega_N$,

  $\Longrightarrow x_c(t)$ puede ser determinado a partir de sus muestras

  $$x[n] = x_c(nT),\ n \in \mathbb{Z},$$

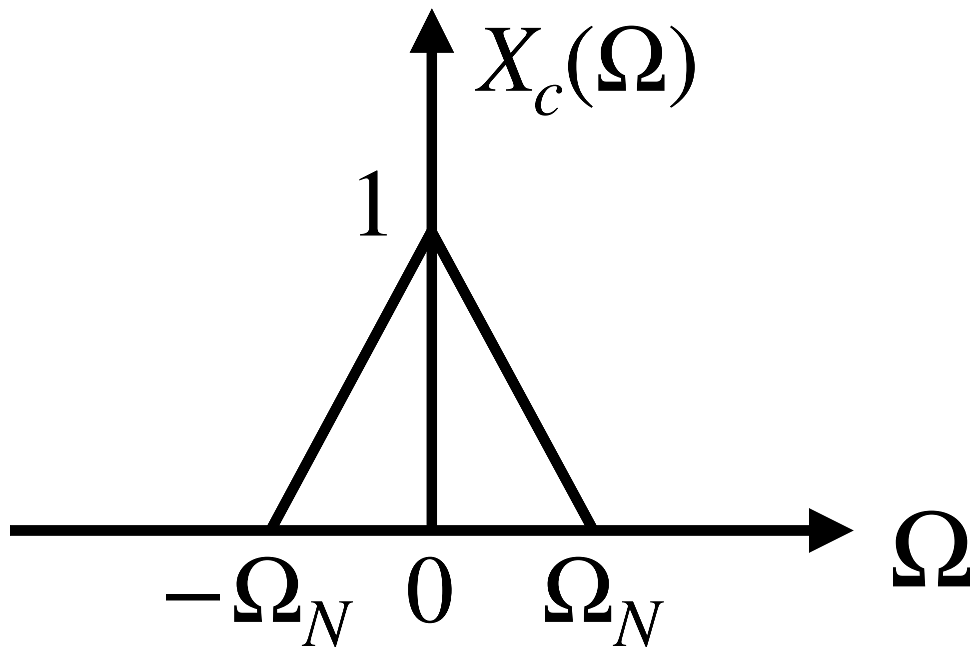
  si la frecuencia de muestreo $\Omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$ es mayor que el doble de la frecuencia de Nyquist Ω_N,

  $$\Omega_s \geq 2\Omega_N, \qquad \text{Criterio de Nyquist.}$$

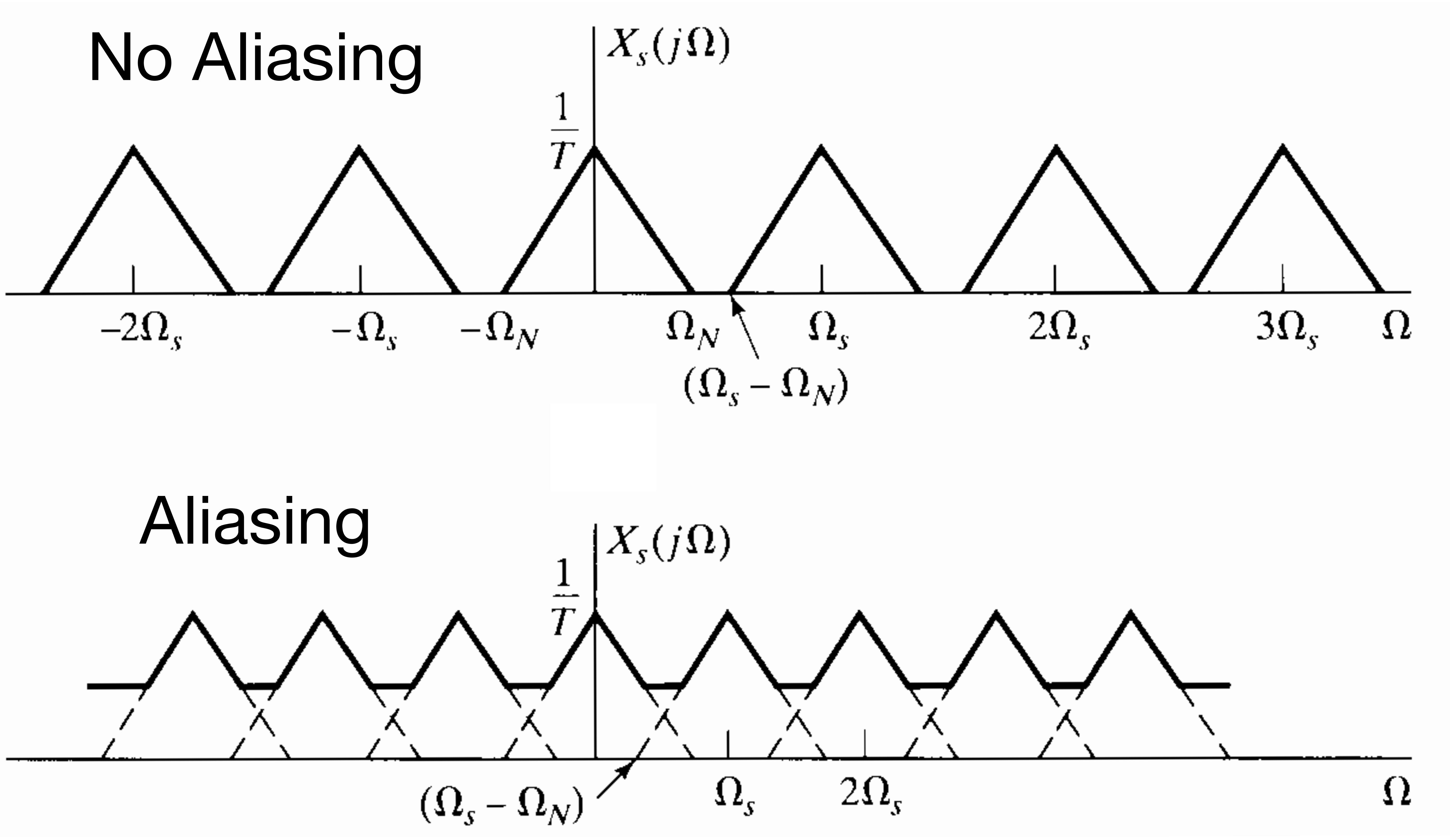
- Si $\Omega_N > \dfrac{\Omega_s}{2} \Longrightarrow$ se produce Aliasing.

Muestreo de señales continuas en el tiempo

Teorema de Nyquist o del muestreo & Aliasing



$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - k\Omega_s)$$



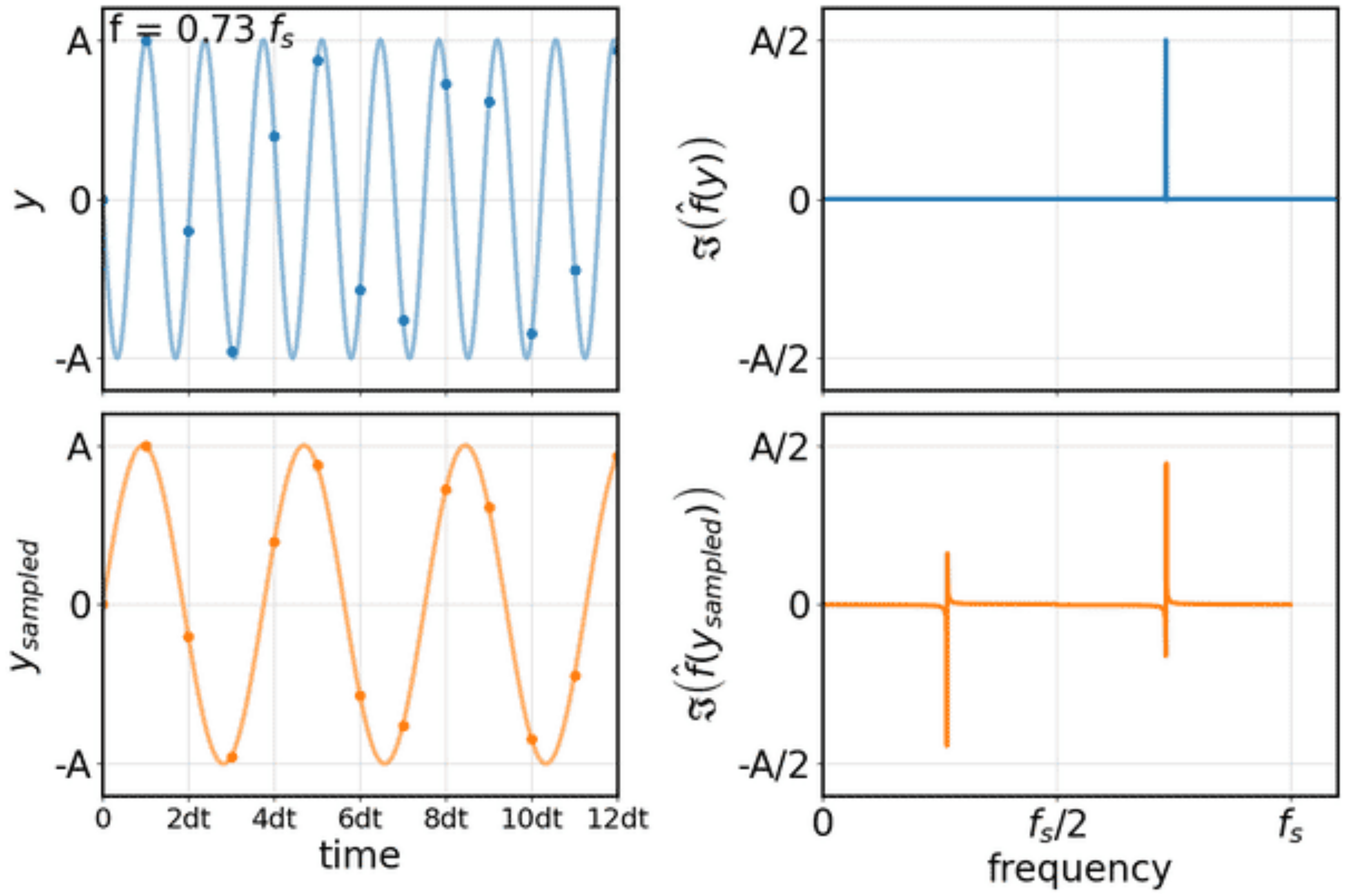
$\Omega_s \geq 2\Omega_N,$

$\Omega_s < 2\Omega_N,$

Muestreo de señales continuas en el tiempo

Teorema de Nyquist o del muestreo & Aliasing

- Aliasing es el efecto por el cual señales continuas en el tiempo, una vez muestreadas pueden llegar a ser indistinguibles. Aliasing puede generar distorsión de las señales y pérdida de la información que contienen.
- Aliasing se produce cuando muestreamos a una frecuencia menor que el doble de la máxima frecuencia de la señal (frecuencia de Nyquist) y, por tanto, no se puede recuperar (matemáticamente) la señal.



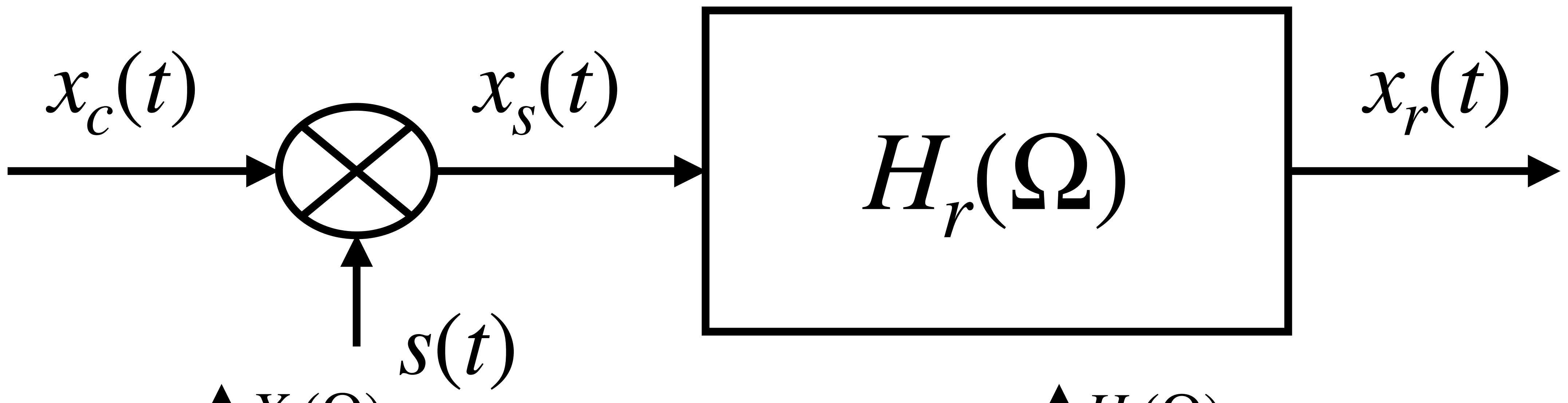
Muestreo de señales continuas en el tiempo

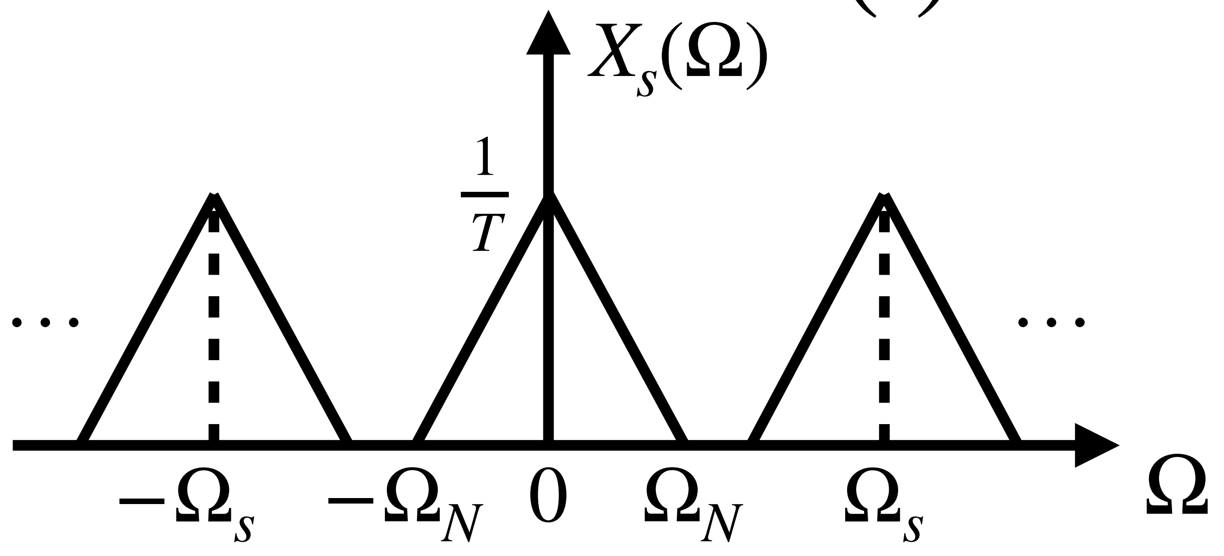
Teorema de Nyquist o del muestreo & Aliasing

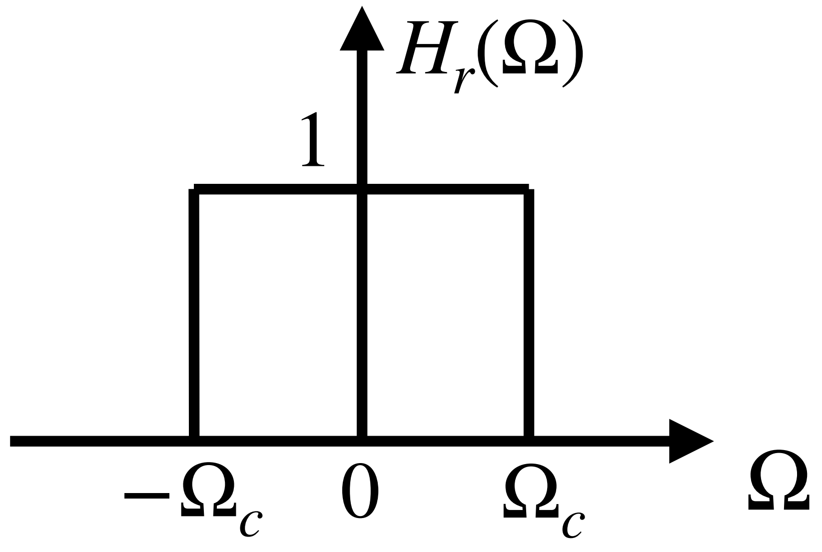
- Para recuperar $x_c(t)$ debemos utilizar un filtro ideal pasabajos definido como

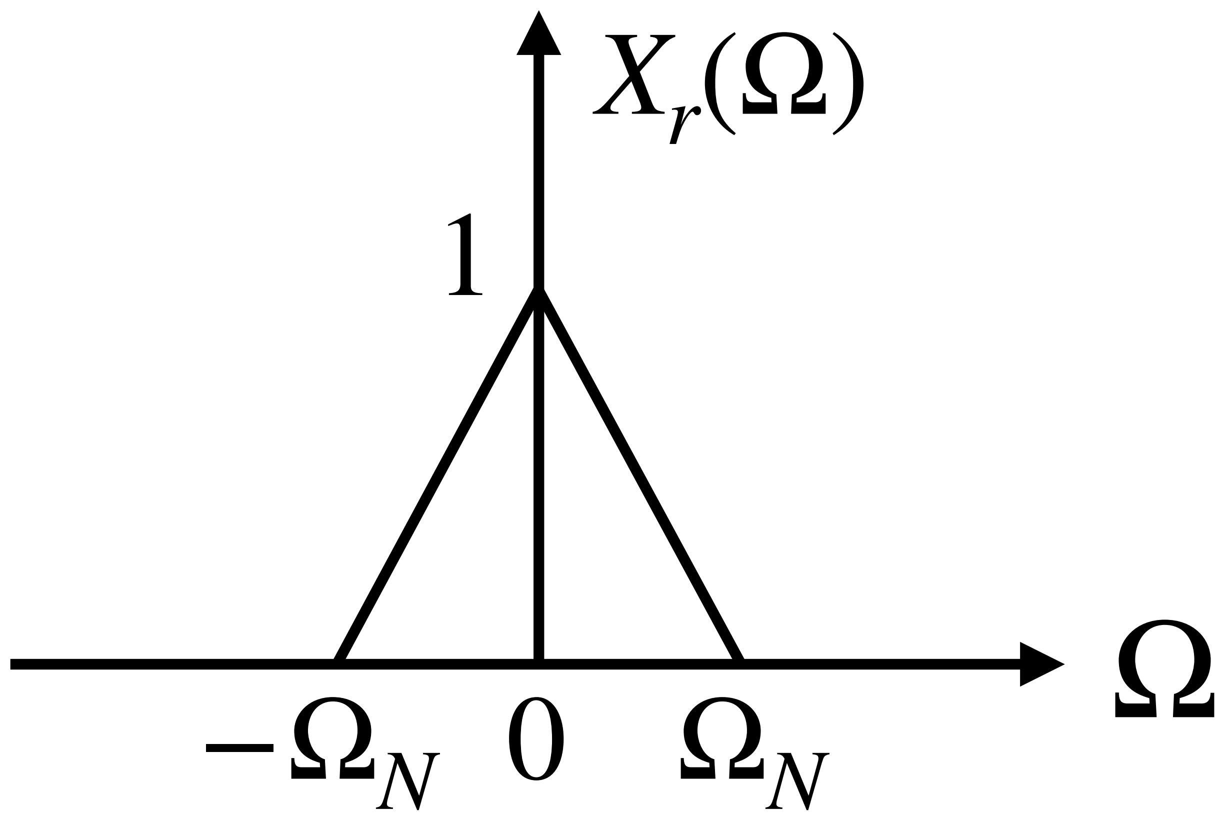
$$H_r(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$ con frecuencia de corte Ω_c

tal que $\Omega_N < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_N$.









Si se cumple el criterio de Nyquist

$$\Longrightarrow \; X_r(\Omega) = X_c(\Omega)\,.$$

Muestreo de señales continuas en el tiempo

Relación con la DTFT de x[n]

- Dado $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\,\delta(t-nT)$, tomamos la Transformada de Fourier,

$$X_s(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\,e^{-j\Omega nT},$$

ya que $x[n] = x_c(nT)$ y $X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]e^{-j\omega n}$ tenemos que:

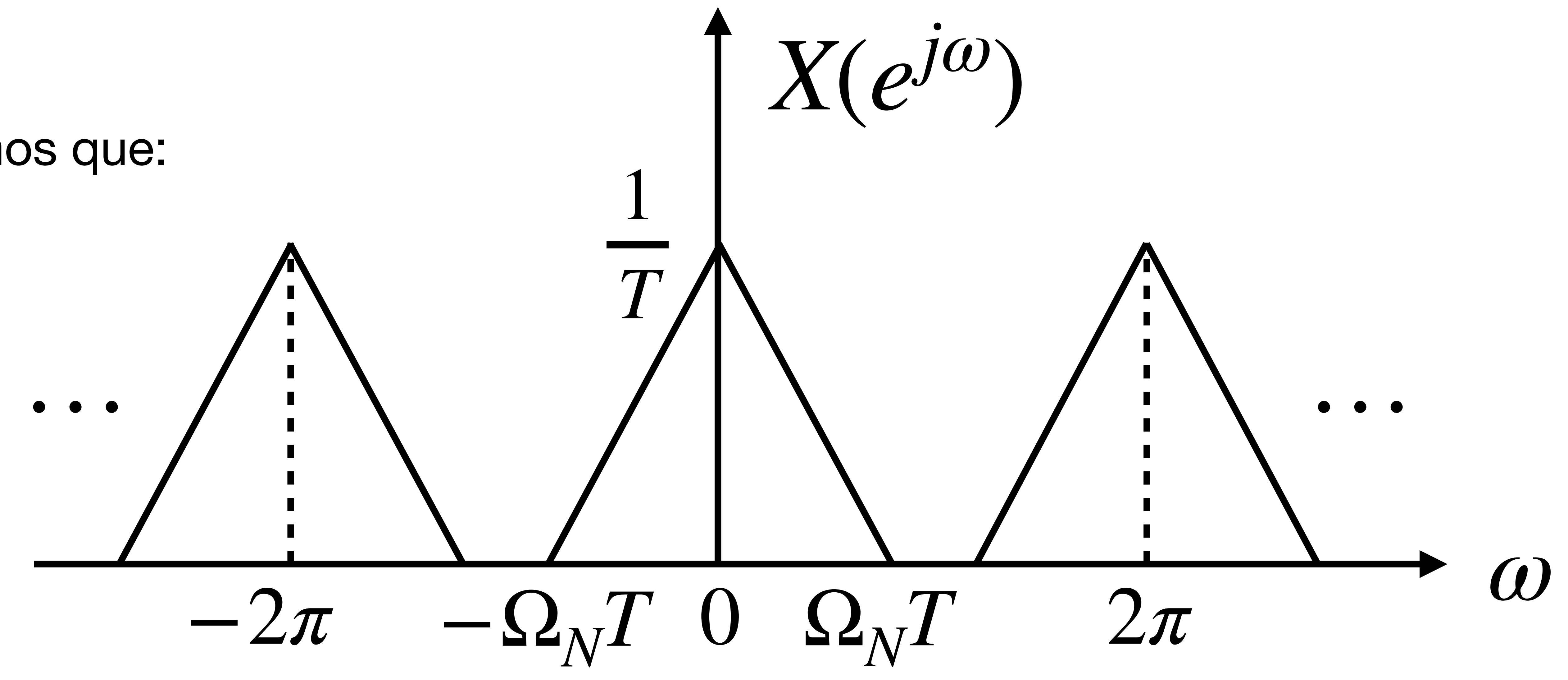
$$X_s(\Omega) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T}),$$

entonces

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - k\Omega_s),$$

o equivalentemente (describe el convertidor C/D ideal)

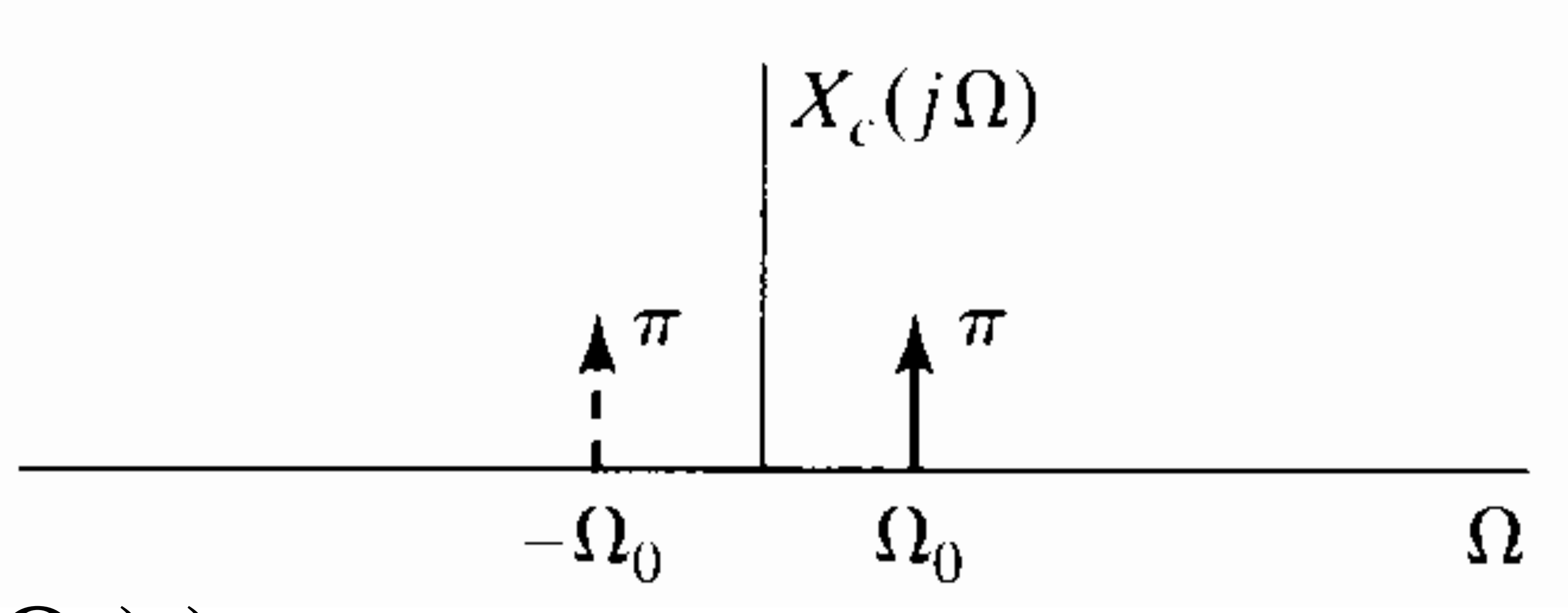
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right).$$



Espectro con periodo 2π

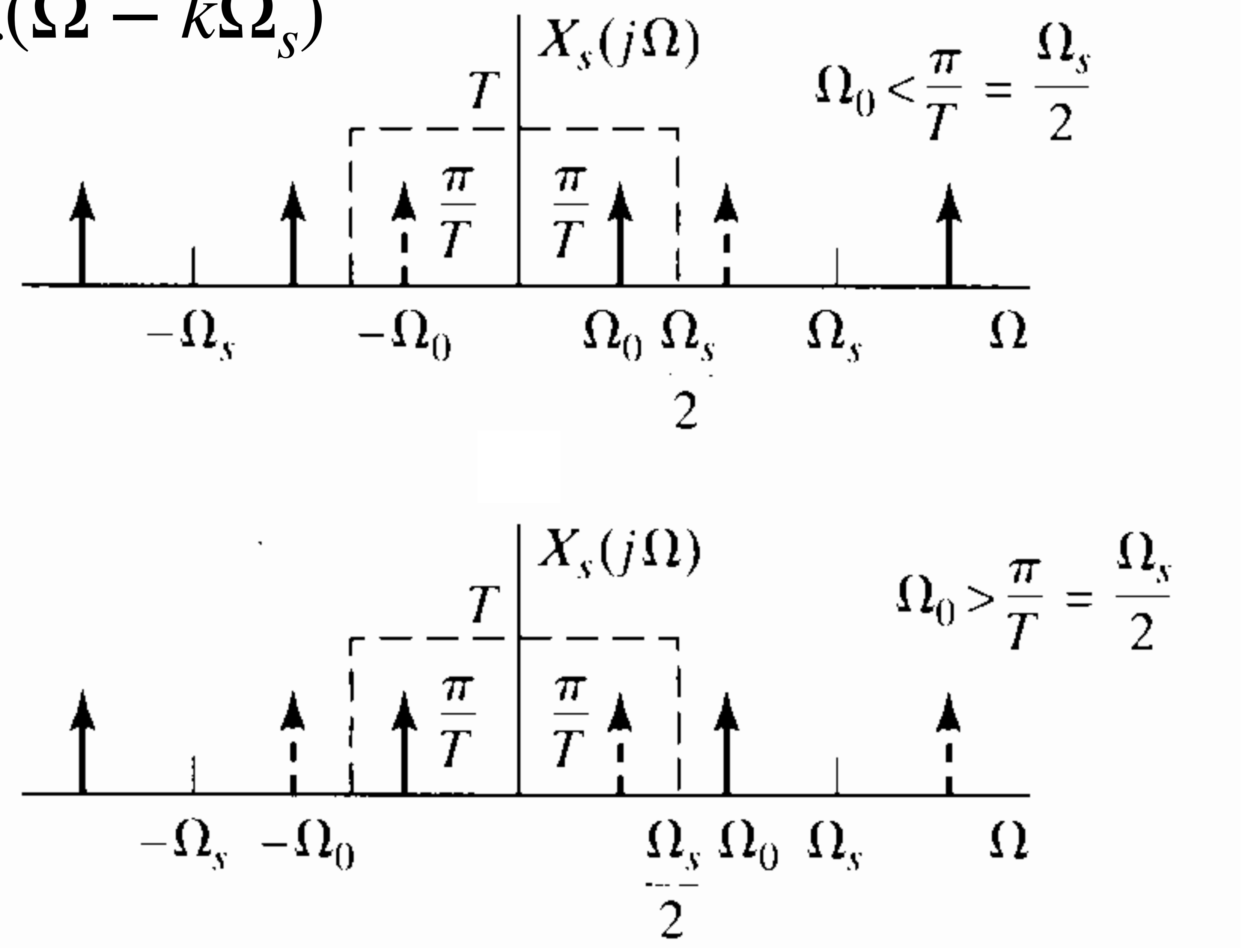
Muestreo de señales continuas en el tiempo

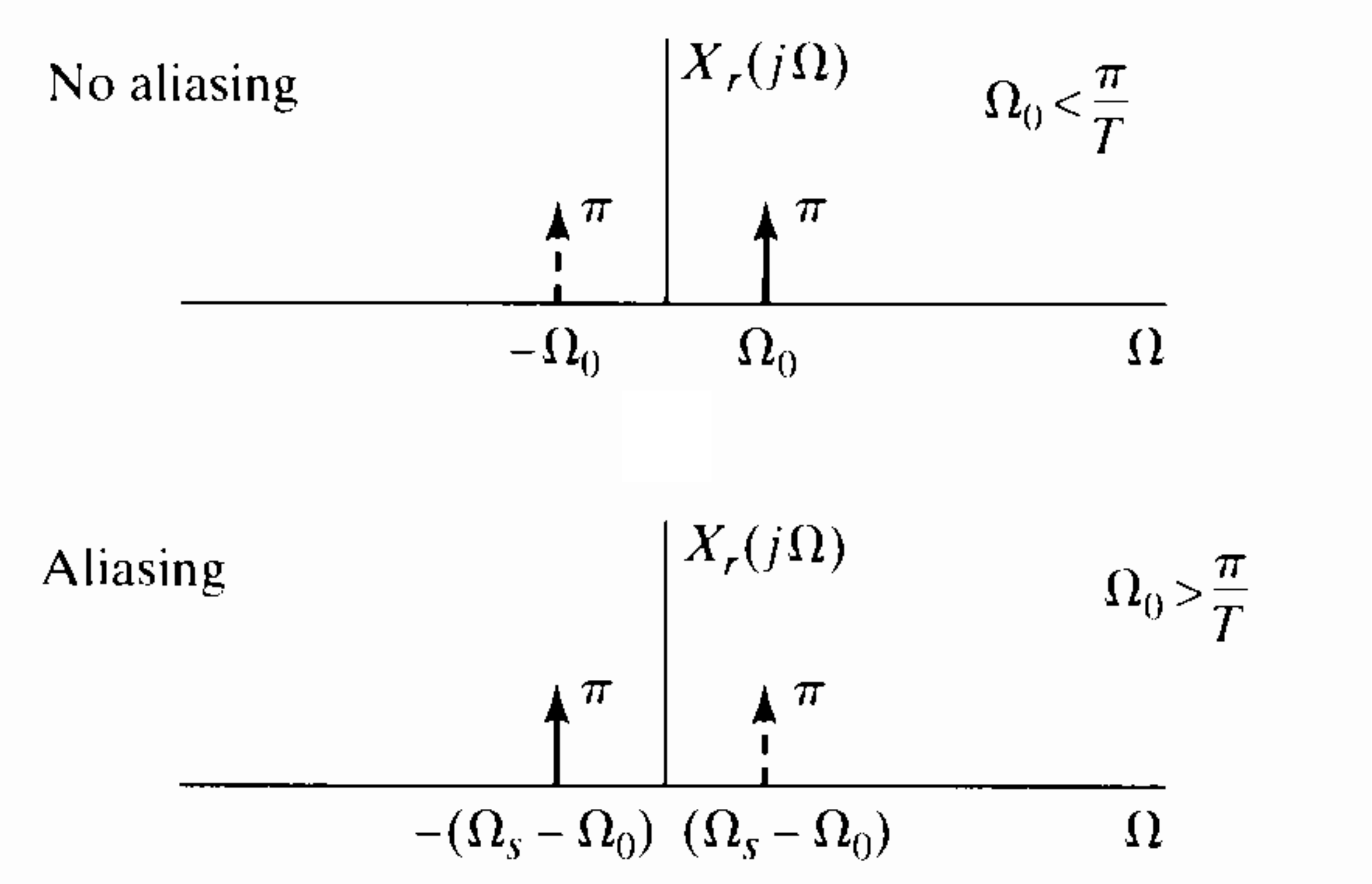
Aliasing en señales sinusoidales



- Ejemplo: Consideremos $x_c(t) = \cos(\Omega_o t)$.
- Si $\Omega_s \geq 2\Omega_o$, señal reconstruida sin aliasing, $\implies x_r(t) = \cos(\Omega_o t)$.
- Si $\Omega_s < 2\Omega_o$, señal reconstruida tiene aliasing, $\implies x_r(t) = \cos((\Omega_s - \Omega_o)t)$.

$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - k\Omega_s)$$





¡Muchas gracias!