IEE352 - Procesamiento Digital de Señales

Clase 11: Filtro Wiener

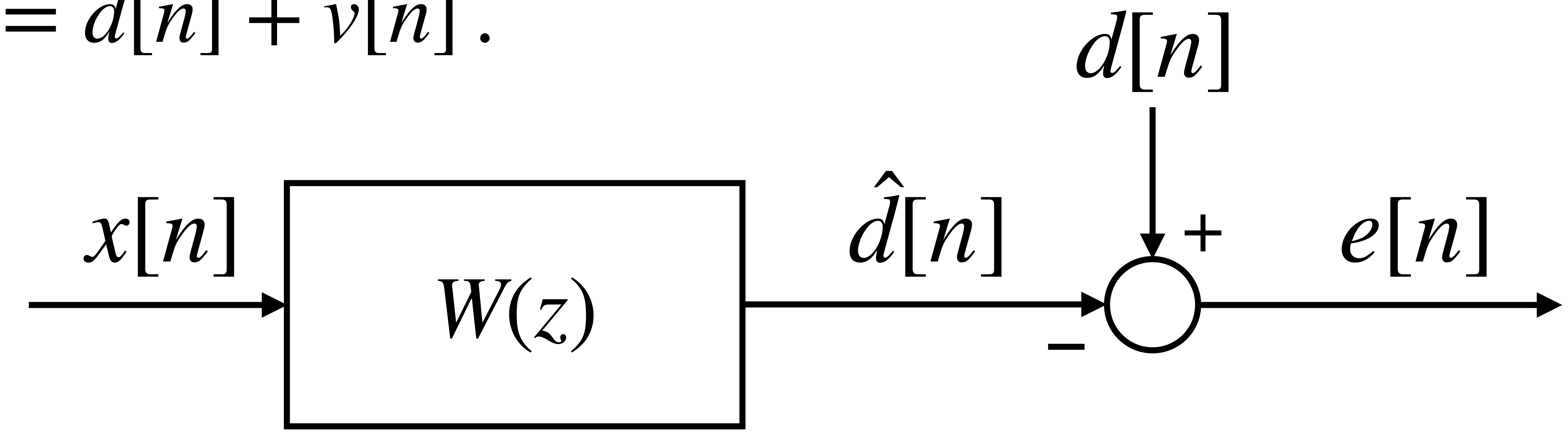
Dr. Marco A. Milla
Sección Electricidad y Electrónica (SEE)
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

email: milla.ma@pucp.edu.pe

Filtro Wiener

Definición

Diseñar un filtro $W(z)$ que permita recuperar una señal $d[n]$ a partir de una señal observada $x[n] = d[n] + v[n]$.



- Error cuadrático medio:

$$\xi = E\{\,|e[n]|^2\,\},$$

donde la señal de error es la diferencia entre el valor real y el estimado

$$e[n] = d[n] - \hat{d}[n].$$

Filtro Wiener

Forma geométrica de los errores medios.

Error cuadrático medio

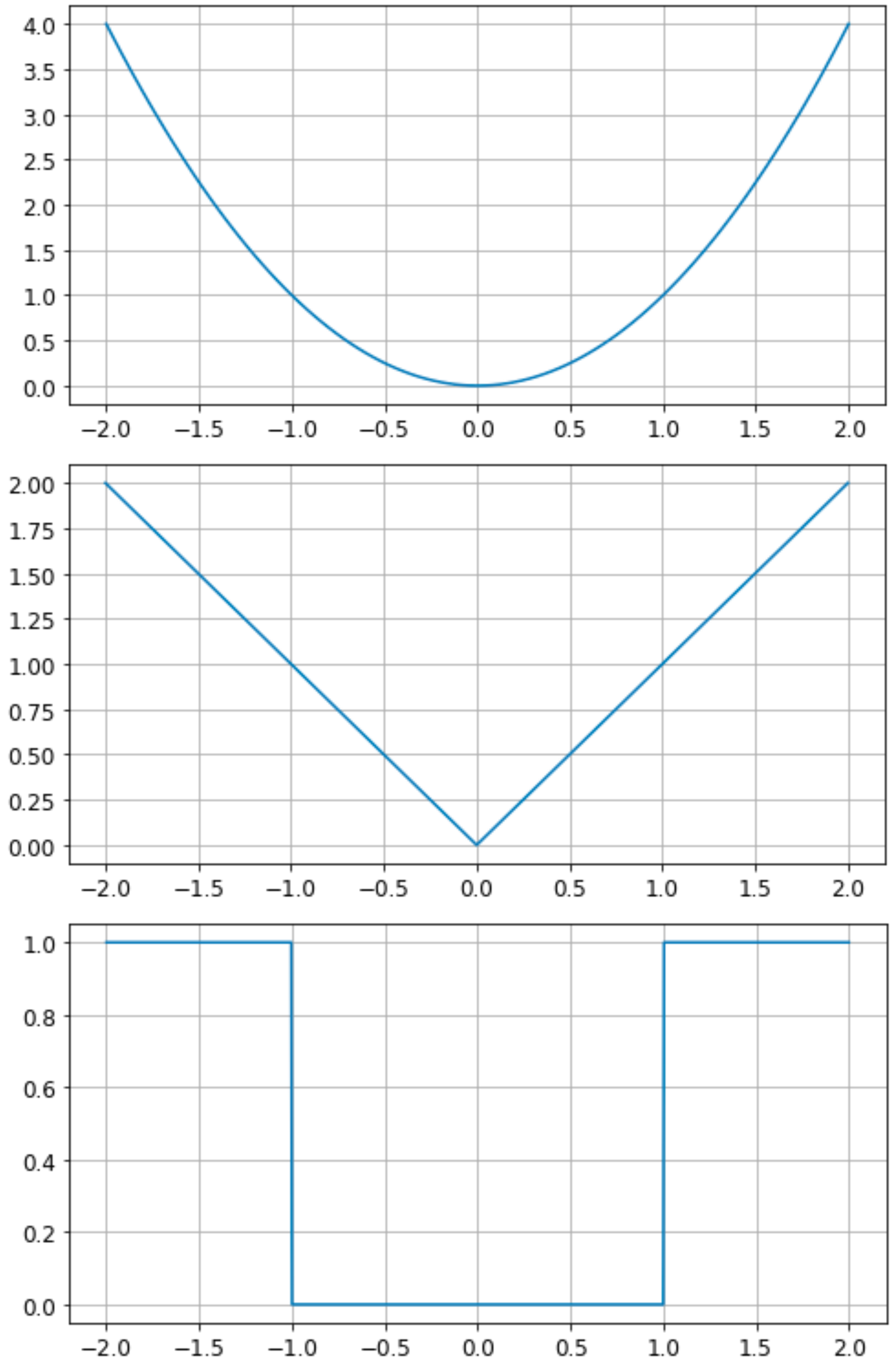
$$\epsilon = E\{\,|e[n]|^2\,\}$$

Error absoluto medio

$$\epsilon = E\{\,|e[n]|\,\}$$

Error umbral medio

$$\epsilon = E\{u[\,|e[n]| - k]\}$$



Filtro Wiener

Aplicaciones

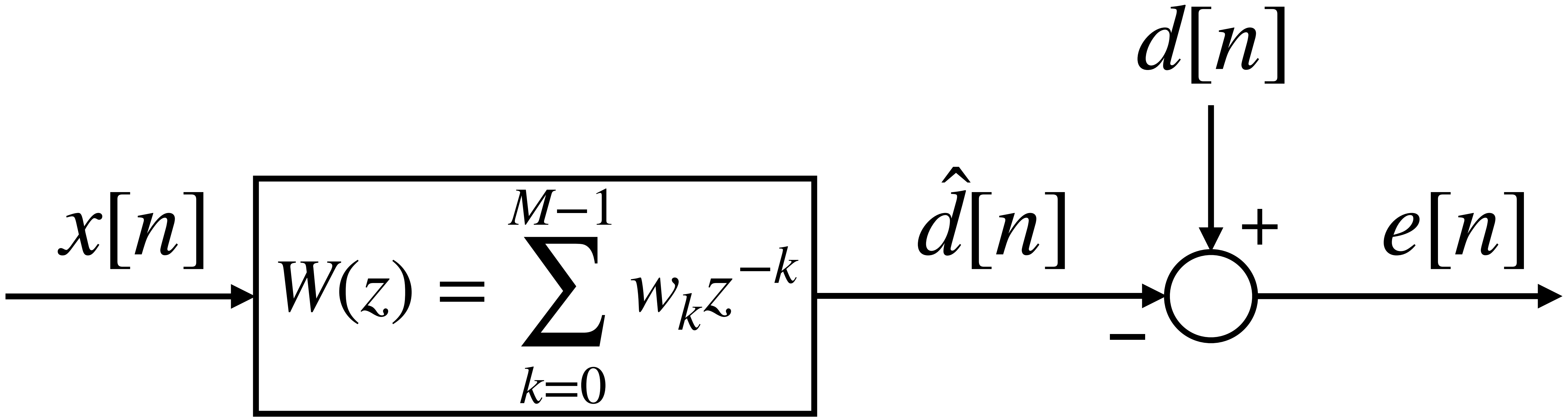
Los filtros Wiener pueden ser utilizados para las siguientes aplicaciones.

- **Filtrado:** Dada una señal observada $x[n] = d[n] + v[n]$, el objetivo es estimar $d[n]$ usando un filtro causal (estimar $d[n]$ a partir de valores actuales y pasados de $x[n]$).
- **Suavizado:** Similar al filtrado, excepto que el filtro Wiener puede ser no causal y puede ser diseñado para estimar $d[n]$ a partir de todos los datos disponibles de $x[n]$.
- **Predicción:** Si $d[n] = x[n+1]$ y $W(z)$ es un filtro causal, entonces el filtro Wiener se convierte en un predictor lineal, el cual produce una estimación de $x[n+1]$ (predicción) considerando valores pasados de $x[n]$.
- **Deconvolución:** Dado $x[n] = h[n] * d[n] + v[n]$, donde $h[n]$ es la respuesta impulsiva de un filtro LTI, el filtro Wiener se convierte en un filtro de deconvolución.

Filtro Wiener FIR

Planteamiento teórico

Dado el esquema general de Filtros Wiener, consideramos que $W(z)$ es de tipo FIR.



- Se asume que $x[n]$ (señal observada) y $d[n]$ (señal deseada) son procesos aleatorios estacionarios en sentido amplio (WSS).
- Señal estimada: $\hat{d}[n] = w[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{M-1} w[k]x[n-k]$
- Señal de error: $e[n] = d[n] - \hat{d}[n]$

Filtro Wiener FIR

Planteamiento teórico

El problema de diseño del filtro Wiener consiste en encontrar los coeficientes del filtro, $w[k]$, que minimizan el error cuadrático medio

$$\xi = E\{\,|e[n]|^2\,\} = E\left\{\,|d[n] - \hat{d}[n]|^2\,\right\}.$$

Para encontrar el conjunto de coeficientes del filtro $W(z)$ que minimice ξ, es necesario y suficiente igualar a cero la primera derivada de ξ con respecto a cada uno de los coeficientes $w[k]$, es decir,

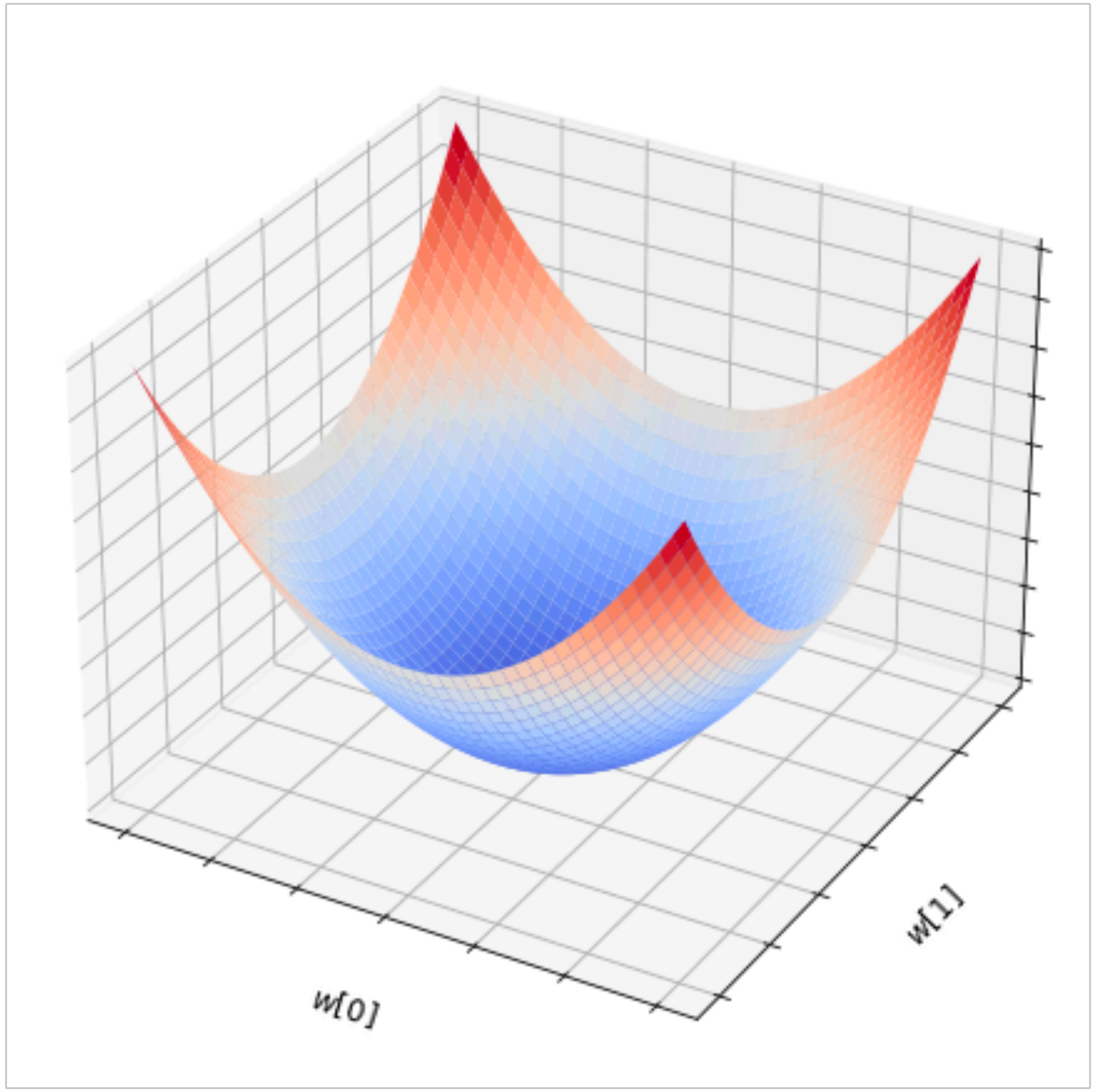
$$\frac{\partial \xi}{\partial w[k]} = 0, \qquad k = 0,1,\ldots,M-1\,.$$

Filtro Wiener FIR

Planteamiento teórico

Dado que el error cuadrático medio es una función convexa, minimizar $\xi = E\{\,|\,e[n]\,|^2\,\}$ equivale a igualar a cero la gradiente de ξ con respecto a los coeficientes del filtro $W(z)$.

$$\min\{E\{e[n]^2\}\} \iff \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial w[0]} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial w[1]} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial w[M-1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$



Filtro Wiener FIR

Planteamiento teórico

Calculando $\dfrac{\partial \xi}{\partial w[k]} = 0$, para $k = 0,1,\ldots, M-1$, tenemos que,

$$\frac{\partial \xi}{\partial w[k]} = \frac{\partial}{\partial w[k]} E\left\{\left(d[n] - \sum_{l=0}^{M-1} w[l]x[n-l]\right)^2\right\} = E\left\{\frac{\partial}{\partial w[k]}\left(d[n] - \sum_{l=0}^{M-1} w[l]x[n-l]\right)^2\right\}$$

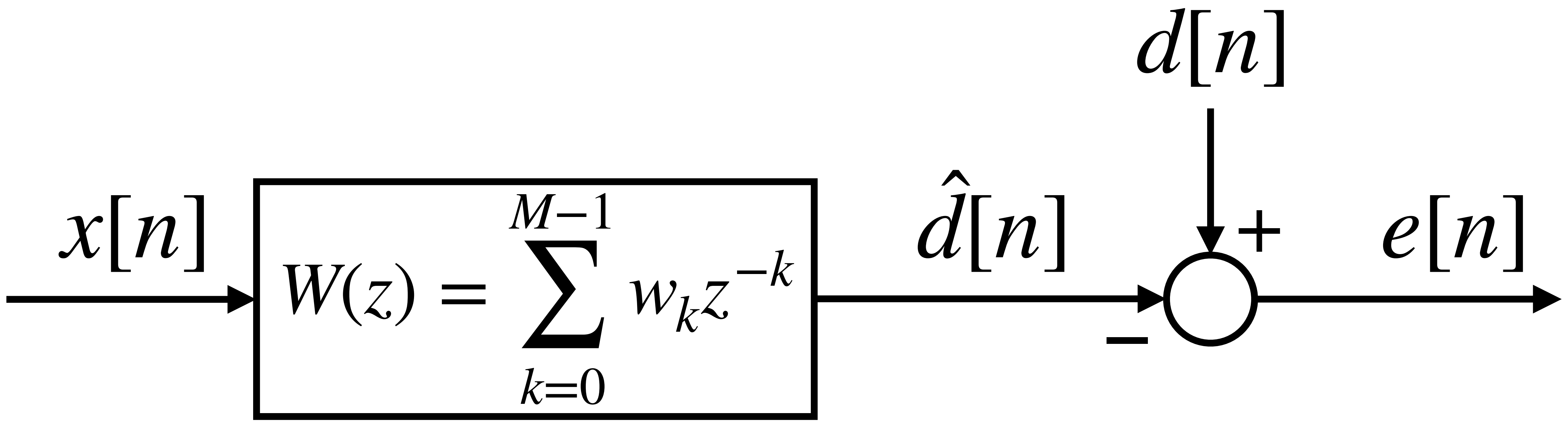
$$= -2E\left\{\left(d[n] - \sum_{l=0}^{M-1} w[l]x[n-l]\right)x[n-k]\right\} = 0,$$

Luego, agrupando los valores esperados, podemos encontrar que,

$$\underbrace{E\{d[n]x[n-k]\}}_{r_{dx}[k]} - \sum_{l=0}^{M-1} w[l]\underbrace{E\{x[n-k]x[n-l]\}}_{r_x[k-l]} = 0\,.$$

Filtro Wiener FIR

Ecuaciones Wiener-Hopf



- Ecuaciones Wiener-Hopf

$$\sum_{l=0}^{M-1} w[l] r_x[k-l] = r_{dx}[k], \qquad k = 0,1,\ldots,M-1 \,.$$

- Matricialmente tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & \cdots & r_x[M-1] \\ r_x[1] & r_x[0] & \cdots & r_x[M-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x[M-1] & r_x[M-2] & \cdots & r_x[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{R_x}} \underbrace{\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[M-1] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{w}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \\ \vdots \\ r_{dx}[M-1] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{dx}}}$$

en consecuencia,

$$\mathbf{R}_x \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{r}}_{dx} \implies \bar{\mathbf{w}}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_x^{-1} \bar{\mathbf{r}}_{dx} \,.$$

Filtro Wiener FIR

Error cuadrático medio mínimo

- El error medio cuadrático se puede expresar de la siguiente forma

$$\xi = E\{\,|e[n]|^2\,\} = E\left\{ e[n]\left(d[n] - \sum_{l=0}^{M-1} w[l]x[n-l] \right)\right\}$$

$$= E\{e[n]d[n]\} - \sum_{l=0}^{M-1} w[l]\,E\,\{e[n]x[n-l]\}\,.$$

- Evaluando ξ para el filtro óptimo Wienner $\bar{\mathbf{w}}_{\mathrm{opt}} = \mathbf{R_x}^{-1}\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{dx}}$ tenemos que $E\{e[n]x[n-l]\} = 0$, lo cual viene a partir de tomar la derivada con respecto a los coeficientes del filtro. Luego el error mínimo está dado por

$$\xi_{\min} = E\{e[n]d[n]\} = E\left\{ \left(d[n] - \sum_{l=0}^{M-1} w_{\mathrm{opt}}[l]\,x[n-l] \right) d[n] \right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \xi_{\min} = r_d[0] - \sum_{l=0}^{M-1} w_{\mathrm{opt}}[l]\,r_{dx}[l] = r_d[0] - \bar{\mathbf{r}}_{dx}^T \mathbf{R}_x^{-1} \bar{\mathbf{r}}_{dx}\,.$$

Filtro Wiener FIR

Algoritmo

Objetivo: Implementar un filtro FIR basado en las ecuaciones de Wiener-Hopf.

Problema frecuente:

- En la mayoría de aplicaciones de procesamiento de señales, no se dispone de todo el conjunto de señales (posibles ensayos) que definen un proceso aleatorio.
- El cálculo estadístico de la autocorrelación $r_x[k]$ y de la correlación cruzada $r_{dx}[k]$ no puede ser realizado directamente.

Solución:

- Se puede considerar como métrica alternativa para un proceso WSS las correlaciones temporales

$$\hat{r}_x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n-k],$$

$$\hat{r}_{dx}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} d[n]x[n-k]\,.$$

Aplicaciones de Filtros Wiener FIR

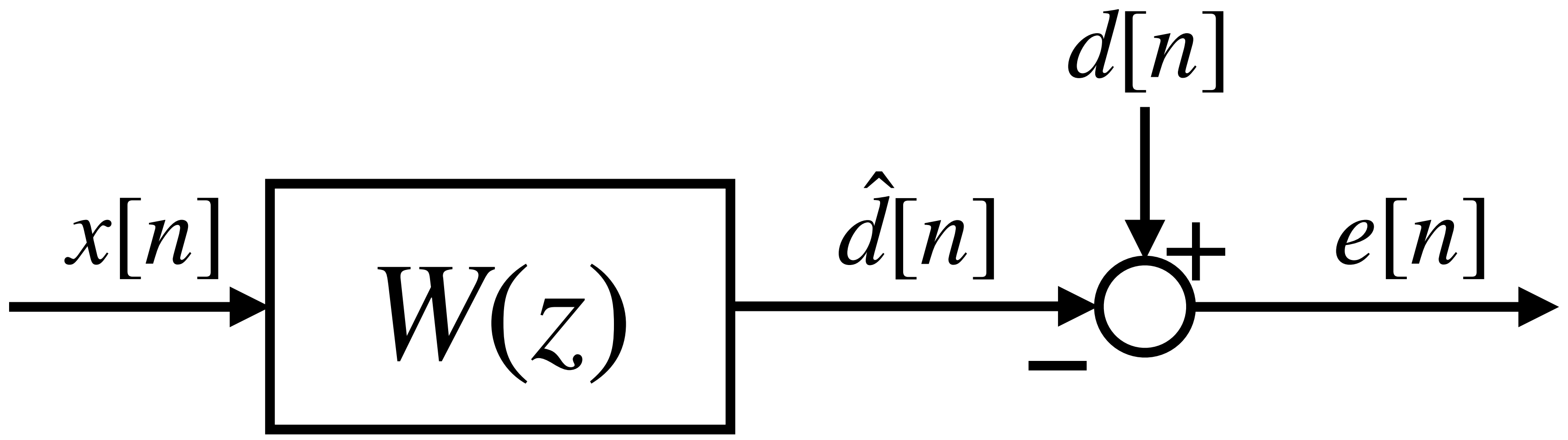
Algunos casos particulares de Filtros Wiener FIR son los siguientes,

- Filtrado de ruido descorrelacionado
- Predictor lineal
- Cancelación de ruido
- Identificación de sistemas

Filtrado de ruido descorrelacionado

En este caso una señal $d[n]$ puede ser recuperada a partir de una observación con ruido

$$x[n] = d[n] + v[n]\ .$$



Asumiendo que el ruido $v[n]$ tiene media cero y que no está correlacionado con respecto a $d[n]$, en base a los resultados anteriores para el filtro Wiener FIR, vamos a calcular las siguientes correlaciones

$$r_x[k] = E\{x[n]x[n-k]\},$$

$$r_{dx}[k] = E\{d[n]x[n-k]\}.$$

Filtrado de ruido descorrelacionado

- Calculando $r_x[k] = E\{x[n]x[n-k]\}$,

$$
\begin{aligned}
r_x[k] &= E\{(d[n] + v[n])(d[n-k] + v[n-k])\} \\
&= E\{d[n]d[n-k]\} + \cancel{E\{v[n]d[n-k]\}} + \cancel{E\{d[n]v[n-k]\}} + E\{v[n]v[n-k])\} \\
&= E\{d[n]d[n-k]\} + E\{v[n]v[n-k])\}
\end{aligned}
$$

entonces $r_x[k] = r_d[k] + r_v[k]$.

- Calculando $r_{dx}[k] = E\{d[n]x[n-k]\}$,

$$
\begin{aligned}
r_{dx}[k] &= E\{d[n](d[n-k] + v[n-k])\} \\
&= E\{d[n]d[n-k]\} + \cancel{E\{d[n]v[n-k])\}} = r_d[k]
\end{aligned}
$$

entonces $r_{dx}[k] = r_d[k]$.

Filtrado de ruido descorrelacionado

Entonces tenemos que $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_d + \mathbf{R}_v$ y además $\bar{\mathbf{r}}_{dx} = \bar{\mathbf{r}}_d$

Luego la nueva expresión para los filtros óptimos sería

$$\left[\mathbf{R}_d + \mathbf{R}_v\right] \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{r}}_d \,,$$

entonces

$$\bar{\mathbf{w}}_{\text{opt}} = \left(\mathbf{R}_d + \mathbf{R}_v\right)^{-1} \bar{\mathbf{r}}_d \,.$$

Filtrado de ruido descorrelacionado

Ejemplo: Sea un proceso AR $d[n]$ cuya autocorrelación está dada por

$$r_d[k] = \alpha^{|k|}\ .$$

Suponiendo que la señal observada presenta un ruido blanco $v[n]$ el cual está descorrelacionado de $d[n]$ y tiene una varianza σ_v^2 ,

$$x[n] = d[n] + v[n]\ ,$$

diseñar un filtro Wiener FIR de primer orden que reduzca el ruido en $x[n]$ tal que

$$W(z) = w[0] + w[1]z^{-1}.$$

Filtrado de ruido descorrelacionado

- Solución: Utilizando las ecuaciones Wiener-Hopf, tenemos que

$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \end{bmatrix}$$

- En este caso particular esta ecuación se puede expresar de al siguiente forma

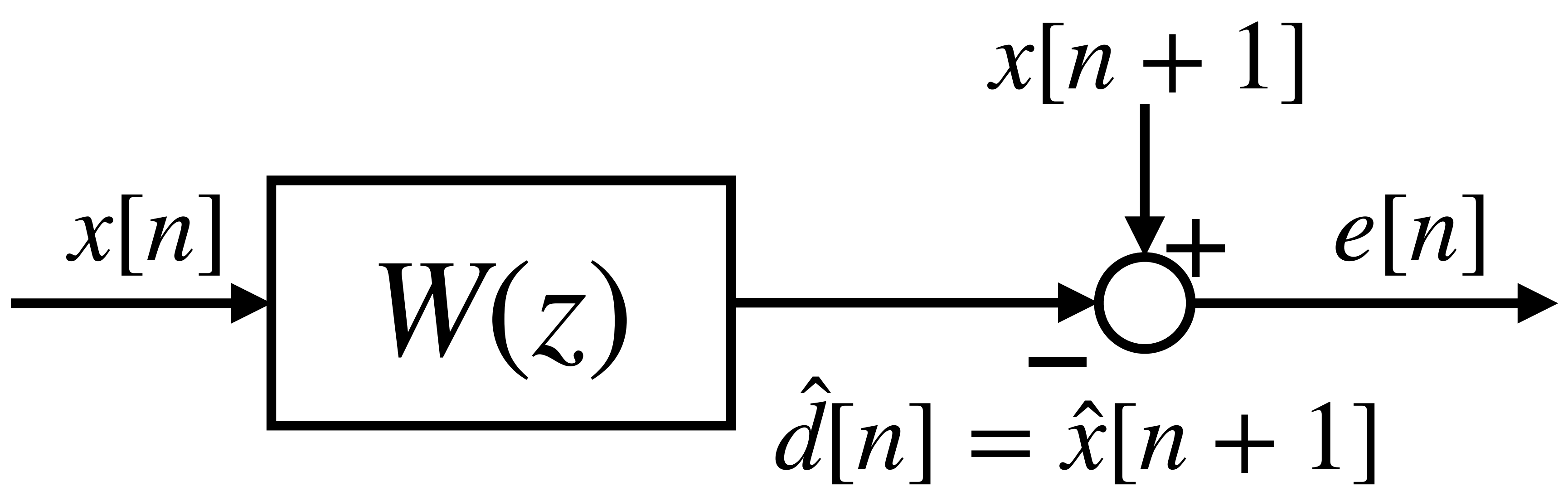
$$\left(\begin{bmatrix} r_d[0] & r_d[1] \\ r_d[1] & r_d[0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_v[0] & r_v[1] \\ r_v[1] & r_v[0] \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d[0] \\ r_d[1] \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 + \sigma_v^2 & \alpha \\ \alpha & 1 + \sigma_v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- Resolviendo el sistema ecuaciones tenemos que

$$w[0] = \frac{1 + \sigma_v^2 - \alpha^2}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2} \quad \text{y} \quad w[1] = \frac{\alpha\sigma_v^2}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2}.$$

Predictor Lineal



Dada la señal observada $x[n]$ (un proceso aleatorio), la predicción lineal consiste en la estimación de $x[n+1]$ a partir de una combinación lineal de valores pasados y presentes de $x[n]$, un predictor lineal tiene la siguiente forma

$$\hat{d}[n] = \hat{x}[n+1] = \sum_{k=0}^{M-1} w[k]x[n-k] \,.$$

Si definimos $d[n] = x[n+1]$, entonces, el problema de predictor lineal se convierte en un problema de filtrado. Para reconfigurar las ecuaciones básicas solo es necesario evaluar la correlación cruzada entre $d[n]$ y $x[n]$ tal que

$$r_{dx}[k] = E\{d[n]x[n-k]\} = E\{x[n+1]x[n-k]\} = r_x[k+1] \,.$$

Predictor Lineal

Expresión matricial correspondiente al predictor lineal, donde $r_{dx}[k] = r_x[k+1]$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & \cdots & r_x[M-1] \\ r_x[1] & r_x[0] & \cdots & r_x[M-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x[M-1] & r_x[M-2] & \cdots & r_x[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{R_x}} \underbrace{\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[M-1] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{w}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_x[1] \\ r_x[2] \\ \vdots \\ r_x[M] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{dx}}}$$

Predictor Lineal

Ejemplo

Dado un proceso autorregresivo de segundo orden AR(2), cuya ecuación de diferencia está dada por

$$x[n] = 1.2728\,x[n-1] - 0.81\,x[n-2] + v[n],$$

donde $v[n]$ es ruido blanco gaussiano con varianza igual a uno. Queremos encontrar el predictor lineal

$$\hat{d}[n] = \hat{x}[n+1] = w_0 x[n] + w_1 x[n-1]\,.$$

Para encontrar los coeficientes del filtro, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x[1] \\ r_x[2] \end{bmatrix}.$$

Predictor Lineal

Ejemplo

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior debemos primer encontrar las correlaciones $r_x[0]$, $r_x[1]$ y $r_x[2]$. Para encontrar estos valores podemos utilizar las ecuaciones Yule-Walker,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.2728 & +0.81 \\ -1.2728 & 1.81 & 0 \\ +0.81 & -1.2728 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x[0] \\ r_x[1] \\ r_x[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} r_x[0] \\ r_x[1] \\ r_x[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.7523 \\ 4.0450 \\ 0.4891 \end{bmatrix}.$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de Wiener-Hopf, tenemos que

$$\begin{bmatrix} 5.7523 & 4.0450 \\ 4.0450 & 5.7523 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0450 \\ 0.4891 \end{bmatrix},$$

luego, resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos que

$$w[0] = 1.2728 \quad \text{y} \quad w[1] = -0.81$$

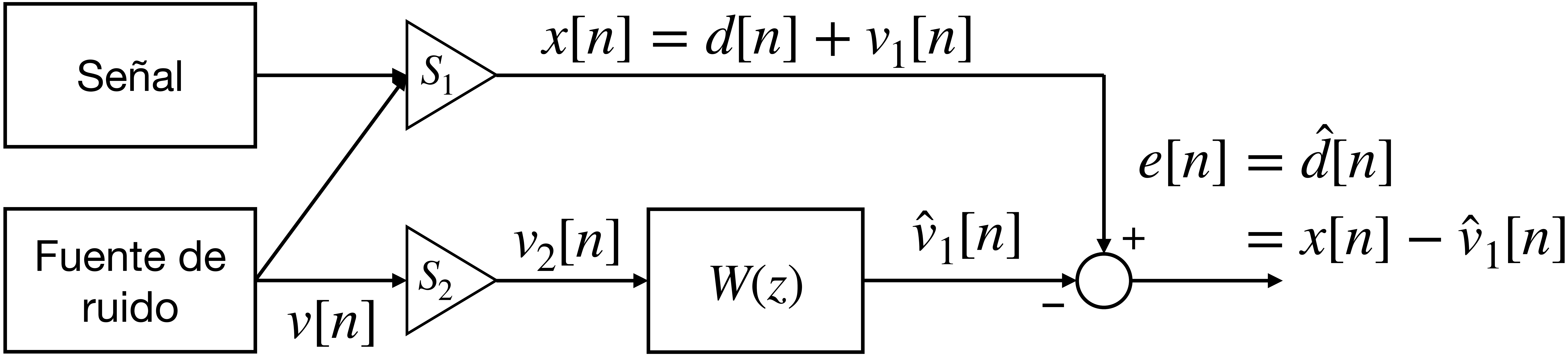
finalmente, el filtro predictor se puede expresar de la siguiente forma

$$\hat{x}[n+1] = 1.2728\, x[n] - 0.81\, x[n-1]\,.$$

Cancelación de Ruido

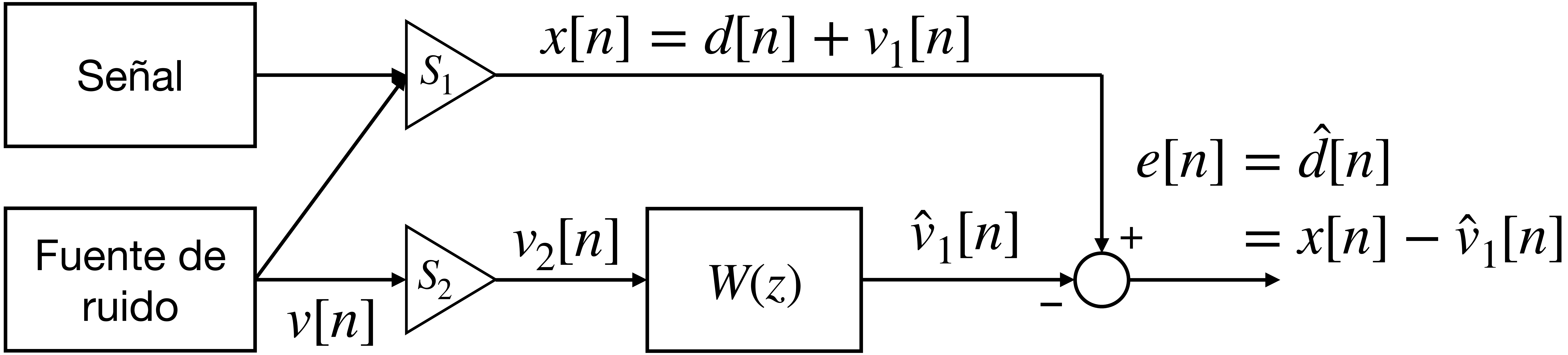
El objetivo de un cancelador de ruido es estimar $d[n]$ a partir de una señal observada con ruido (obtenida a partir de un sensor S_1),

$$x[n] = d[n] + v_1[n]\,.$$



Cancelación de Ruido

En el problema de filtrado se requiere conocer la autocorrelación del ruido en $x[n]$. En el caso del cancelador de ruido, la información estadística se obtiene a partir de un segundo sensor.



Cancelación de Ruido

Las ecuaciones Wiener-Hopf correspondientes serían

$$\mathbf{R}_{v_2}\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{r}}_{xv_2} \implies \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_{v_2}^{-1}\,\bar{\mathbf{r}}_{xv_2}$$

La expresión matricial correspondiente es la siguiente,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_{v_2}[0] & r_{v_2}[1] & \cdots & r_{v_2}[M-1] \\ r_{v_2}[1] & r_{v_2}[0] & \cdots & r_{v_2}[M-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{v_2}[M-1] & r_{v_2}[M-2] & \cdots & r_{v_2}[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{R_{v_2}}} \underbrace{\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[M-1] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{w}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{xv_2}[0] \\ r_{xv_2}[1] \\ \vdots \\ r_{xv_2}[M-1] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{xv_2}}}$$

Cancelación de Ruido

Ejemplo

Consideremos que la señal deseada $d[n]$ es una sinusoidal de la forma

$$d[n] = \sin(\omega_o n + \phi)$$

y que la secuencia de ruido $v_1[n]$ y $v_2[n]$ son procesos autoregresivos AR(1) cuyas ecuaciones de diferencias son

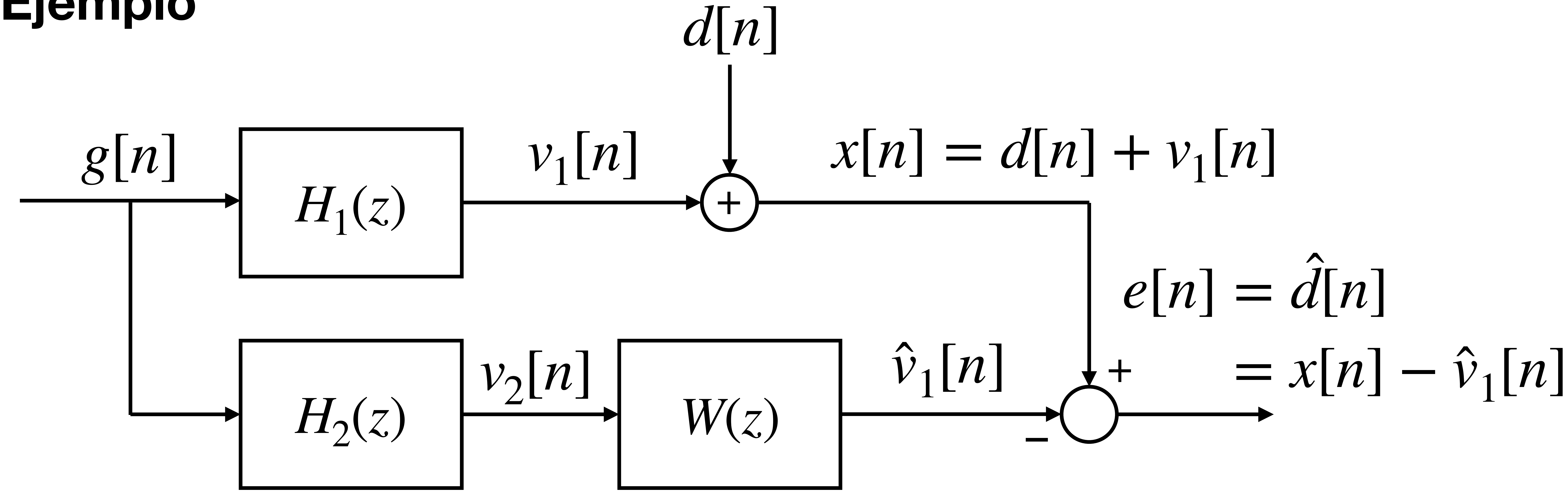
$$v_1[n] = 0.8\, v_1[n-1] + g[n] \implies H_1(z) = \frac{1}{1 - 0.8\, z^{-1}}$$

$$v_2[n] = -\,0.6\, v_2[n-1] + g[n] \implies H_2(z) = \frac{1}{1 + 0.6\, z^{-1}}$$

donde $g[n]$ es ruido blanco gaussiano con varianza igual a uno.

Cancelación de ruido

Ejemplo



$$V_1(z) = H_1(z)G(z) = \frac{G(z)}{1 - 0.8\, z^{-1}}$$

$$V_2(z) = H_2(z)G(z) = \frac{G(z)}{1 + 0.6\, z^{-1}}$$

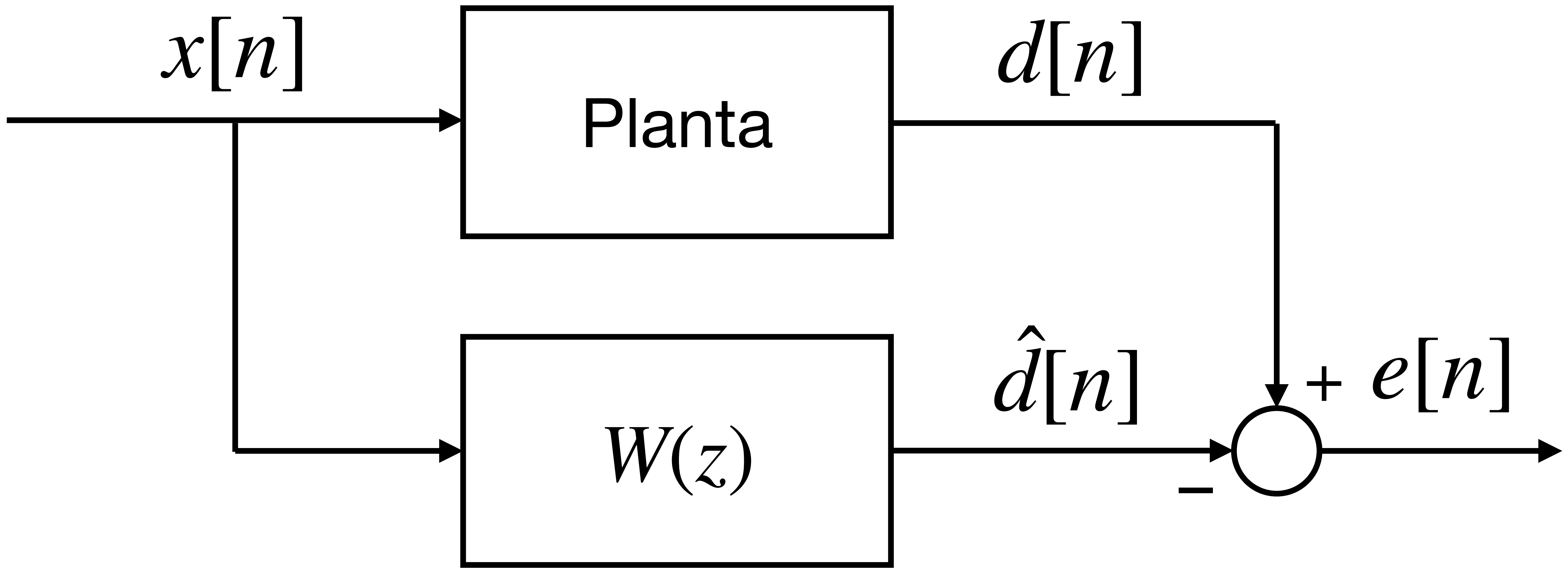
$$\hat{V}_1(z) = W(z)V_2(z)$$

$$\hat{V}_1(z) = [H_1(z)H_2^{-1}(z)]V_2(z)$$

$$\hat{V}_1(z) = [H_1(z)H_2^{-1}(z)]H_2(z)G(z)$$

Identificador de Sistemas

Esquema



¡Muchas gracias!