L2 MIDO Dauphine
Année 2023-2024

Analyse 3

Feuille d'exercices : Intégrales généralisées

Les exercices avec des étoiles sont à préparer en priorité .

***Exercice 1.** Déterminer la nature des intégrales suivantes, où α est un paramètre réel.

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ (ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ (iii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3+25t^2+4}{2t^4+t+3}dt$

(iv) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)\,dt}{1+\cos(t)+e^t}$, (v) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3-5t^2+1}{2t^5+t^4+2t^3+t^2+1}\,dt$ (vi) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}}\,dt$

(vii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ (viii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t}\,dt$ (ix) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-t^2}{1-t}dt$

(x) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$ (xi) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{\sqrt{|t^2-1|}(\sqrt{t}+2)}\,dt$ (xii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}})\,dt$

(xiii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1-e^{-t})}$ (xiv) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ (xv) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t\sqrt{t})}{t^2}dt$

Exercice 2. Convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}.\ln(x)}{e^x-1}\,dx$$

***Exercice 3.** Intégrales de Bertrand.

Nature de

$$\int_2^{+\infty} t^\alpha(\ln(t)^\beta$$

en fonction des réels α et β.

Indication 1 : de nombreux cas se déduisent immédiatement de la nature des intégrales de Riemann $\int_2^{+\infty} t^\gamma$.

Indication 2 : dériver $(ln(t))^\delta$ et $\ln(\ln(t)$.

***Exercice 4.** Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définie par :
- pour chaque $n\in\mathbb{N}$, $f(x)=2^{n+1}(x-n)$ sur $\left[n, n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]$,
- pour chaque $n\in\mathbb{N}$, $f(x)=2^{n+1}(n+\frac{1}{2^n}-x)$ sur $\left[n+\frac{1}{2^{n+1}}, n+\frac{1}{2^n}\right]$,
- $f(x)=0$ en dehors des intervalles $\left[n, n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]$ et $\left[n+\frac{1}{2^{n+1}}, n+\frac{1}{2^n}\right]$, pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Dessinez rapidement f sur $[0, 3]$.
2. Vérifiez que f est une fonction positive.
3. Calculer $\int_0^{n+1} f$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.
4. La fonction f tend-elle vers 0 en $+\infty$?

Exercice 5. Soit $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} \, dt.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.$$

3. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Exercice 6. Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-t} dt$$

Indication : on pourra soit penser aux nombres complexes pour deviner une primitive potentielle, soit faire des intégrations par partie.

Exercice 7. $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Nature de

$$\int_0^{+\infty} x^\beta (e^{\alpha x} - 1) \, dx$$

Exercice 8. 1. Quelle est la nature de $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$? $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$?

2. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Quelle est la limite de F en 0 ?

3. Equivalent simple de F en 0.

Exercice 9. Calculer $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$ à l'aide d'une intégration par parties

***Exercice 10.** On définit pour un réel x

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Montrer que le domaine de définition de Γ est $]0, +\infty[$.

2. A l'aide d'une intégration par partie trouver une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$, pour tout $x > 0$.

3. Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de Γ sur les entiers.

Exercice 11. Nature puis (plus difficile) calcul de $\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx$

Exercice 12. **1.** Trouver la limite lorsque ϵ tend vers 0^+ de $J(\epsilon) = \displaystyle\int_\epsilon^{3\epsilon} \frac{\sin t}{t^2}\,dt.$

2. Établir la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$, puis déduire sa valeur de la question précédente. Indication : $sin^3 t = 3/4 sin(t) - 1/4 sin(3t)$.

Exercice 13. **1.** Grâce à une intégration par parties, montrer que $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

2. On va montrer que f n'est pas intégrable sur $[\pi, +\infty[$. Soit $n \geq 2$, montrer que

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\sin u|}{u + k\pi} du.$$

En déduire que

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \left(\int_0^\pi |\sin u| du \right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \right).$$

Conclure.

***Exercice 14.** Etude de l'intégrabilité (convergence absolue) des fonctions suivantes sur l'intervalle I spécifié.

1. $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \frac{ln(x)}{x+e^x}$

2. $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \frac{ln(1+x^p)}{x^q}$

3. $f : x \in]0,1[\mapsto \frac{ln(x)}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$

4. $f : x \in]0,1] \mapsto -\frac{ln(x)}{\sqrt{x}}$

5. $f : x \in]0,+\infty[\mapsto \frac{ln(x)}{a^2+x^2}$

6. $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{ch(x)}$

7. $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}$

8. $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right)$

Exercice 15. Soient, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$I(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,dt, \qquad J(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{(1+t)^2}\,dt.$$

1. (a) Déterminer la valeur de $I(x)$ en fonction de x.
   (b) En déduire l'existence et la valeur de la limite de la fonction I en $+\infty$.
2. (a) Déterminer la valeur de $J(x)$ en fonction de x.
   (b) En déduire l'existence et la valeur de la limite de la fonction J en $+\infty$.

Exercice 16. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}\,dt$.
2. On suppose que $f(b) \neq 0$. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{f(t)^2\ln(t-a)}{(b-t)^2}\,dt$.

Exercice 17. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est dérivable en 0.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ est convergente.
2. On suppose que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt$ est divergente.

Exercice 18.

1. Montrer que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ sont convergentes.
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ est convergente, et que sa valeur est égale à
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt = 0.$$
3. Soit $a > 0$. A l'aide d'un changement de variables approprié, en déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2a}\ln(a).$$

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et que l'intégrale $\int_0^\infty |f'(x)|\,dx$ converge. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\sin(x)\,dx$ converge.

Exercice 20. Déterminer la nature de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\,dx.$$

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt \text{ converge.}$$

Montrer que

$$J(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(t)|\,dt$$

est bien défini pour tout x réel, et déterminer sa limite lorsque x tend vers 0.