Cours de Mr Even
Microéconomie
MIE 2

Université Paris-Dauphine
Année 2022-2023
Travaux dirigés – MM. Even et Mahmoudi

TD Fiche n°5 – L'optimum de Pareto

Exercice n°1

On considère une économie définie par :

- deux biens X et Y dont les fonctions de production sont $\boxed{X = L_X^{1/4} K_X^{1/4}}$ et $\boxed{Y = L_Y^{1/4} K_Y^{1/4}}$, où (L_X, K_X) et (L_Y, K_Y) désignent les quantités de facteurs K et L respectivement utilisées dans la production des biens X et Y ; les quantités disponibles de facteurs K et L dans cette économie sont respectivement $\boxed{L_0 = 2700}$ et $\boxed{K_0 = 2700}$.
- deux individus A et B dont les fonctions d'utilité sont respectivement $\boxed{U_A = X_A^{1/3} Y_A^{2/3}}$ et $\boxed{U_B = 2X_B^{1/3} Y_B^{2/3}}$;

La totalité de la production de chaque bien, respectivement notée X et Y, est entièrement consommée.

1ère question

- Calculez l'équation de la courbe de contrats des producteurs entre facteurs de production.
- Calculez l'équation de la courbe de contrats des consommateurs entre biens.

2ème question

- Quelle est l'équation de la courbe de transformation des deux biens?

3ème question

- Donnez la condition générale d'optimalité au sens de Pareto de cette économie.

4ème question

- Quelles sont les quantités optimales de biens X et Y globalement produites par cette économie a l'OP ?

5ème question

- L'économie fonctionne en concurrence pure et parfaite. Peut-il exister un système de prix d'équilibre général différent de $\boxed{\dfrac{p_X}{p_Y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$?

$X = L_x^{\frac{1}{4}} K_x^{\frac{1}{4}}$ $\quad Y = L_y^{\frac{1}{4}} K_y^{\frac{1}{4}}$ $\quad L_0 = 2700$ $\quad K_0 = 2700$

$U_A = X_A^{\frac{1}{3}} Y_A^{\frac{2}{3}}$ $\quad U_B = 2X^{\frac{1}{3}} Y_B^{\frac{2}{3}}$

Question 1 :

Résoudre $TMST_x = TMST_y$ et $L_x + L_y = L_0$ et $K_x + K_y = K_0$

- CC prod° :

Résoudre $TMST_x = TMST_y$ et $L_x + L_y = L$; $K_x + K_y = K$

$$\begin{cases} TMST_{x,\,K \to L} = \dfrac{\frac{1}{4} K^{\frac{1}{4}} L^{-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{4} L^{\frac{1}{4}} K^{-\frac{3}{4}}} = \dfrac{K_x}{L_x} \\ TMST_{y,\,K \to L} = \cdots\cdots \dfrac{K_y}{L_y} \end{cases}$$

$TMST_x = TMST_y \iff \dfrac{K_x}{L_x} = \dfrac{K_y}{L_y} \iff K_x L_y = K_y L_x$

trouver K_x en fct° de L_x

Or $K_0 = L_0 = 2700$.

D'où $K_0(2700 - L_x) = (2700 - K_x) L_x \iff K_x = L_x$

- CC consommateur :

Résoudre $TMS_A = TMS_B$ et $X_A + X_B = X$ et $Y_A + Y_B = Y$.

On résout $TMS_A = TMS_B$

$$\begin{cases} TMS_{A,\,X \to Y} = \dfrac{\frac{2}{3} Y_A^{-\frac{1}{3}} X_A^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} X_A^{-\frac{2}{3}} Y_A^{\frac{2}{3}}} = 2\dfrac{X_A}{Y_A} \\ TMS_{B,\,X \to Y} = \dfrac{\frac{4}{3} Y_B^{-\frac{1}{3}} X_B^{\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3} X_B^{-\frac{2}{3}} Y_B^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{2X_B}{Y_B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_A + X_B = X \\ Y_A + Y_B = Y \end{cases} \iff \begin{cases} X_B = X - X_A \\ Y_B = Y - Y_A \end{cases}$$

$TMS_{A,\,X \to Y} = TMS_{B,\,X \to Y} \iff 2\dfrac{X_A}{Y_A} = 2\dfrac{X_B}{Y_B} \iff \dfrac{X_A}{Y_A} = \dfrac{X - X_A}{Y - Y_A}$

trouver Y_A en fct° de X_A

$\iff X_A(Y - Y_A) = Y_A(X - X_A) \iff Y_A X = X_A Y \iff Y_A = X_A \dfrac{Y}{X}$

Question 2:

On cherche à exprimer Y en fct° de X grâce aux dotations initiales

$K_x = L_x$ et $X = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ $Y = \sqrt{K_y}$

$X = \sqrt{K_x}$ donc $X^2 = K_x$ $\qquad$ $Y^2 = K_y$

$K_x + K_y = K_0$

$X^2 + Y^2 = 2700 \Rightarrow Y = \sqrt{2700 - X^2}$

La courbe de transformation des deux biens ou la courbe de frontière de prod° est la courbe qui relie tous les ensembles des optimum de Pareto entre entreprise dans l'espace des biens

la transpo de courbe contrat entre entreprise

Question 3:

c'est du cours
les choix collectifs de conso° sont compatibles avec les choix collectifs de prod° : $TMS = TTP$ ↳ $\frac{\partial q_2}{\partial q_1}$

$TMS_A = TMS_B$ $\quad$ cc conso

$TMST_x = TMST_y$ $\quad$ cc entreprise

$TMS = TTP$ $\quad$ condition liaison

Calculer le TTP

$$TTP = \left|\frac{\partial Y}{\partial X}\right| = \left|\frac{-2X}{2\sqrt{2700 - X^2}}\right| = \frac{X}{Y} = \frac{Y_A}{2X_A} = \frac{Y_B}{2X_B}$$

Question 4:

reprendre résultat trouvé par TTP et Y_A en fct° de X_A et intégrer une équat° dans l'autre pour exprimer Y_A en fct° de X_A sans paramètre inconnue

qté optimales de bien X, Y

$$\frac{X}{Y} = \frac{Y_A}{2X_A} = \frac{Y_B}{2X_B} \qquad Y_A = \frac{Y}{X} X_A$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{Y_A}{2X_A} \text{ et } Y_A = \frac{Y}{X} X_A \Leftrightarrow Y_A = \frac{2X_A}{Y_A} X_A \Leftrightarrow Y_A^2 = 2X_A^2$$

1) remplacer Y_A et X_A par leur valeur en fct° du même paramètre sans inconnue.

$\Leftrightarrow Y_A = \sqrt{2}\, X_A$ $\qquad$ de même $Y_B = \sqrt{2}\, X_B$

exprimer en valeur réelle K_x et K_y

$\sqrt{K_y} = \sqrt{2}\sqrt{K_x} \Leftrightarrow \sqrt{K_y} = \sqrt{2K_x}$ $\qquad$ $K_x + K_y = 2700$

$$\begin{cases} 2700 - K_x = 2K_x \Leftrightarrow 2700 = 3K_x \Leftrightarrow K_x = 900 \\ K_y = 1800 \end{cases}$$

Puis remplacer K_x et K_y par leur valeur pour trouver X et Y

$X = \sqrt{900} = 30$ et $Y = \sqrt{1800} = \sqrt{2}\,30$

4) remplacer les valeur $R_x + R_y = R_0$ par leur valeur en fx° de x et y.
Remplacer y par sa valeur en fx° de x.
trouver X puis trouver Y en fx° de X (en val réelle)

ou juste $x^2 + y^2 = 2700$ donc $x^2 + 2x^2 = 2700$

$\Rightarrow x = 30$ et $y = \sqrt{2}\,30$

Question 5 :

Résoudre
$TMS = \frac{\partial CB_x}{\partial CB_y}$

$X = 30 \quad Y = \sqrt{2}\,30$

$$\frac{\frac{\partial(p_x x + p_y y)}{\partial x}}{\frac{\partial(p_x x + p_y y)}{\partial y}}$$

$TMS = \frac{X}{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{P_x}{P_y}$ donc $\frac{P_x}{P_y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Conclure.

Donc l'EG est définie par un unique niveau de prix donc ≠ d'autre niveau de prix.