Nom : Bouin Prénom : Emeric TD : SENIOR Note : ?

Les questions suivantes sont indépendantes.

Montrer que si une suite de fonctions continues converge uniformément, alors sa limite est continue.

cf cours

Montrer que si une série $\sum_n u_n(x)$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a,b]$ alors $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t)\,dt$ (*On pourra utiliser sans preuve un et un seul théorème sur les suites de fonctions*).

cf cours

Pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x \in [0,1]$, on pose

$$u_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}.$$

Etudier la convergence simple sur $[0,1]$ de cette suite de fonctions.

$u_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $|u_n(x)| \leq \frac{1}{nx} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ sinon donc u_n CVS vers la fonction nulle.

Calculer $I_n = \int_0^1 u_n(t)\,dt = \int_0^1 \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}dx = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{n 2^n \cdot 2x}{1+2^n n x^2}dx = \frac{1}{2n}\ln(1+2^n n)$.

Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$. Si u_n CVU vers 0, alors

$0 = \int_0^1 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} u_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\ln(1+2^n n) = \frac{\ln 2}{2}$

par le théorème du cours. Absurde.

Donner un argument indépendant du précédent qui montre que la convergence n'est pas uniforme.

On a $u_n\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{1+\frac{n}{2^n}} \to 1$ donc pas de CVU.

Soit α un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.
Lorsqu'elle existe, on note S_α la somme de la série, c'est à dire $S_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? C'est pour $\alpha > 0$, en effet :

Pour $x=0$, $u_n(0) = 0$ qui est le TG d'une série cv.

Sinon $u_n(x) \sim \frac{1}{n^{\alpha+1}x}$ qui est le TG d'une série CV ssi $\alpha > 0$.

On supposera dans toute la suite de l'exercice que cette condition est remplie.

Montrer que S_α est impaire.

$\forall n \quad S_{\alpha,n}(-x) = \sum_1^n \frac{-x}{1+k(-x)^2}\cdot\frac{1}{k^\alpha} = -\sum_1^n \frac{x}{1+kx^2}\cdot\frac{1}{k^\alpha} = S_{\alpha,n}(x)$. Par passage à la limite, $S_\alpha(-x) = -S_\alpha(x)$.

Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{|x|}{1+nx^2} = \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{\sqrt{n}\,|x|}{1+(\sqrt{n}x)^2} = \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}\sup_u \frac{|u|}{1+u^2}$$

donc il y'a CN ssi $\alpha > \frac12$.

Calculer $S_1(1)$.

$$S_1(1) = \sum_{n\geq1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+n}\right) = \sum_{n\geq1}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$$ par télescopage.

Quelle est la limite de S_α en $+\infty$?

$$\forall x>0, \quad S_\alpha(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{nx} \leq \Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}}_{\text{existe car } \alpha>0}\Big)\cdot\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Montrer que S_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et préciser sa dérivée S'_α (sous forme d'une série de fonctions).

On calcule $u_n'(x) = \frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$. On a $\|u_n'\|_{\infty,\mathbb{R}\setminus]-\varepsilon,\varepsilon[} \leq \frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{n\varepsilon^2}$ car $\forall x>0.\ \left|\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}\right| \leq \frac{1+nx^2}{(1+nx^2)^2} \leq \frac{1}{nx^2}$. Par CVN sur $\mathbb{R}\setminus]-\varepsilon,\varepsilon[$, et le caractère C^1 de u_n, S_α est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $S_\alpha'(x) = \sum_{n\geq1}\frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$.

Montrer que S_α est décroissante pour $x \geq 1$. $\forall x\geq1, \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} \leq \frac{1-n}{(1+nx^2)^2} \leq 0$ donc $S_\alpha'(x) \leq 0$.

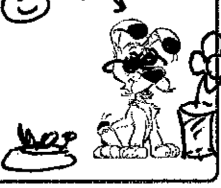
Montrer que S_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour $\alpha > 1$.

Pour $\alpha>1$, $\|u_n'\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ qui est le TG d'une série convergente, donc par CVN donc CVU sur $\mathbb{R}$, S_α est C^1 sur $\mathbb{R}$.

La convergence de S'_α est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^*$ lorsque $\alpha \in]0,1]$? Vous savez quoi ? Et bien non !

En effet, si $R_n(x) = \sum_{n+1}^{+\infty} u_n'(x)$ alors $|R_{2N}^{(x)} - R_N^{(x)}| = \left|\sum_{N+1}^{2N}\frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}\right|$. Ainsi, en prenant $x_N = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}$, comme $\frac{1-nx_N^2}{(1+nx_N^2)^2} \geq \frac{1/2}{(3/2)^2}$, on a $|R_{2N}(x_N) - R_N(x_N)| \geq \frac{2}{9}\sum_{N+1}^{2N}\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$ et donc R_n n'est pas uniformément de Cauchy.

Montrer que S_α n'est pas dérivable en 0 pour $\alpha \in]0,1]$. J'ai de la place pour cette question, j'en profite pour remercier mes parents, mes frères et soeurs, et donner à manger et boire à Idefix ! Je lui offre aussi des « gafas magnificas »



Sinon, $\forall N\in\mathbb{N}, \forall x>0, \frac{S_\alpha(x)}{x} \geq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha(1+nx)}$ et donc

$\forall N, \liminf_{x\to0^+}\frac{S_\alpha(x)}{x} \geq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$, donc S_α n'est pas dérivable en 0.