Contrôle continu du 28 septembre 2021

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 1h

Exercice 1 (2 points). Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 2 (6 points). Réduire (c'est-à-dire diagonaliser ou, si cela n'est pas possible, trigonaliser) les matrice suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (4 points). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et f l'application définie sur E par

$$\forall P \in E,\ f(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X - 1)P'.$$

1. Montrer f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 4 (4 points). Soit m un nombre réel et M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les valeurs propres de M sont 1 et -1.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice M est-elle diagonalisable ? On justifiera la réponse.

Exercice 5 (4 points). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de f alors $P(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de f.
2. Montrer que si l'endomorphisme est tel que

$$f^3 + 2f^2 - f - 2\,id_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

alors il est bijectif.