

Algèbre linéaire 3 (L2 - 2023/2024)

Feuille de TD n° 5 — Produits scalaires, Inégalité de Cauchy-Schwarz, Orthogonalité.

Cette feuille est tirée en partie des feuilles de TD proposées par Guillaume Legendre (2020 à 2022), disponibles ici : <https://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/alglin3/>

Exercice 1. Dire si les formes suivantes sont linéaires en la première variable, en la deuxième, bilinéaires, symétriques, positives, non dégénérées et si elles définissent un produit scalaire sur l'espace vectoriel considéré. Dans le dernier cas, écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée.

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $b(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2 - x_3y_3$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $b(x, y) = 2x_1^2 + y_3^2 + 3x_1y_2 + 5x_2y_3$.
3. $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $b(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
4. $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$, lorsque $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2$ et $Q(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$:

$$b(P, Q) = (\alpha_0 + \alpha_1)\beta_0 + (\alpha_0 + 3\alpha_1)\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2.$$

Exercice 2. Soit n un entier strictement positif. On pose

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}), \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B).$$

1. Montrer que la forme ainsi définie est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour toutes matrices réelles symétriques A et B , on a

$$(\text{tr}(AB))^2 \leq \text{tr}(A^2)\text{tr}(B^2).$$

Exercice 3. Montrer que chacune des formes suivantes définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel E considéré.

1. $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$.
2. $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t) dt$, où $w \in E$ satisfait $w > 0$ sur $]a, b[$.

Exercice 4. Soit E un espace préhilbertien réel de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, a un vecteur unitaire de E et k un réel. On définit l'application b par

$$\forall (x, y) \in E \times E, b(x, y) = \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que b soit un produit scalaire sur E .

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul et a_1, \dots, a_n des réels.

1. Montrer que l'on a

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2$$

et étudier les cas d'égalité.

2. On suppose maintenant que les réels a_1, \dots, a_n sont strictement positifs et tels que $a_1 + \dots + a_n = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq n^2,$$

en étudiant les cas d'égalité.

Exercice 6. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n . Pour toute matrice colonne X , on suppose que $\|AX\|_2 \leq \|X\|_2$. Pour toute matrice colonne X , montrer que $\|A^\top X\|_2 \leq \|X\|_2$.

Exercice 7. Soit x, y et z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + y + z)^2 \leq \frac{17}{10}$.

Exercice 8. Soit u une fonction continue strictement positive sur $[0, 1]$. Pour tout entier naturel k , on pose $I_k = \int_0^1 u^k(t) dt$. Montrer que la suite $\left(\frac{I_{k+1}}{I_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est définie et croissante.

Exercice 9. Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^*)$. Déterminer $\inf_{u \in E} \left(\int_a^b u(t) dt \int_a^b \frac{1}{u(t)} dt\right)$. Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel euclidien et x et y deux éléments de E . Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

Exercice 11. Soit E un espace préhilbertien et A et B deux parties de E . Prouver les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.
4. $\text{Vect}(A) \subset (A^\perp)^\perp$.

Exercice 12. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E . Montrer que :

1. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$,
2. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

Exercices supplémentaires

Exercice 13. \diamond (théorème de Fréchet–Jordan–von Neumann).

Soit E un espace vectoriel réel. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

On se propose de démontrer que $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire. Pour cela, on définit la forme b suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, b(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

1. Montrer que pour tout (x, y, z) de E^3 , on a $b(x + z, y) + b(x - z, y) = 2b(x, y)$.
2. Montrer que pour tout (x, y) de E^2 , on a $b(2x, y) = 2b(x, y)$.
3. Montrer que pour tout (x, y) de E^2 et tout rationnel r , on a $b(rx, y) = rb(x, y)$.
4. Montrer que pour tout (u, v, w) de E^3 , $b(u, w) + b(v, w) = b(u + v, w)$.
5. Montrer que b est symétrique et définie positive.
6. Dédurre des questions précédentes que b est bilinéaire et conclure.

Exercice 14. \diamond Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n . On suppose qu'il existe $n + 1$ vecteurs e_1, \dots, e_{n+1} tels que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n + 1\}^2, i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle < 0.$$

1. Montrer, en notant $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, et en utilisant la norme de x , que si $x = 0$ alors $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| e_i = 0$.
2. Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E .

Exercice 15. Étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{k^2(\sqrt{2})^k} \sum_{j=0}^k \sqrt{\binom{k}{j}}$.