Contrôle continu du 25 septembre 2019

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 1h

Exercice 1 (5 points). Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée.

1. Toute matrice admet au moins une valeur propre, réelle ou complexe.
2. Toute matrice réelle d'ordre 3 admet un vecteur propre à coordonnées réelles.
3. Si une matrice d'ordre 2 n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, alors elle admet une seule valeur propre.
4. Toute matrice possède au moins deux valeurs propres distinctes.
5. Les valeurs propres du produit de deux matrices sont les produits des valeurs propres de chacunes des deux matrices.
6. Si un vecteur est vecteur propre pour deux matrices, il est vecteur propre de leur produit.
7. Les vecteurs propres d'une matrice et ceux de sa transposée sont les mêmes.
8. Le produit d'une matrice par un de ses vecteurs propres ne peut pas être le vecteur nul.
9. Si une matrice a toutes ses valeurs propres réelles, alors elle est diagonalisable.
10. La somme des valeurs propres d'une matrice est égale au produit de ses éléments diagonaux.

Exercice 2 (4 points).

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A une matrice d'ordre n telle que la somme des coefficients par ligne est constante et égale à S. Montrer que S est une valeur propre de A.
2. Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (4 points). Trouver des réels a, b, c, a', b' et c' pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$ admette $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteurs propres.

Exercice 4 (5 points). Dans chacun des cas suivants, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les six réels a, b, c, d, e et f pour que la matrice A soit diagonalisable :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (5 points). Soit n un entier naturel non nul et A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{ij} = i$ si $i = j$, $1 \leq i, j \leq n$. Montrer qu'un réel λ est valeur propre de A si et seulement si

$$\lambda \notin \{0, \ldots, n-1\} \text{ et } \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda - 1} + \cdots + \frac{1}{\lambda - (n-1)} = 1.$$