Corrigé (succinct) du contrôle continu du 28 septembre 2021

Exercice 1. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Les matrices A et B ont toutes deux le même polynôme caractéristique, que l'on peut écrire sous la forme du même polynôme scindé à racines simples $\chi_A(X) = \chi_B(X) = (X-1)(X-5)$. Il en résulte que les matrices sont diagonalisables et semblables à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. On en déduit qu'elles sont semblables, la relation de similitude étant transitive.

Exercice 2. Réduire (c'est-à-dire diagonaliser ou, si cela n'est pas possible, trigonaliser) les matrice suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-4 & -2 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-4)(X^2-6X+8) = (X-2)(X-4)^2$$

et la matrice A possède donc deux valeurs propres, 2 et 4 (d'ordre de multiplicité algébrique égal à 2 pour cette dernière). Le polynôme caractéristique de A est donc scindé et, pour savoir si A diagonalisable, il faut caractériser le sous-espace propre E_4 afin de déterminer sa dimension.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On a

$$AX = 4X \iff \begin{cases} -x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 = -x_3.$$

On en déduit que $\dim(E_4) = 2$, d'où A est diagonalisable : il existe une matrice inversible P, dont les colonnes sont formées de vecteurs propres de A, et une matrice diagonale D, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, telles que $A = PDP^{-1}$. Une base de ce sous-espace est donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. On a d'autre part

$$AX = 2X \iff \begin{cases} x_1 & & -x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & & +2x_3 = 0 \\ -x_1 & & +x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 = -\frac{1}{2}x_2 = x_3,$$

d'où $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$, et donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-4 & -1 & 1 \\ 0 & X-1 & -1 \\ -X & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-4)(X-1)(X-2) + X(X-2) = (X-2)^3,$$

et la matrice B possède donc une unique valeur propre. Caractérisons le sous-espace propre E_2.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On a

$$BX = 2X \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ 2\,x_1 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}.$$

L'espace E_2 est donc engendré par le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la matrice B n'est pas diagonalisable (ceci était prévisible puisque, si B était diagonalisable, elle serait semblable, et donc égale, à $2\,I_3$). Elle est en revanche trigonalisable, puisque le polynôme χ_B est scindé.

Déterminons une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $B = PTP^{-1}$. La première colonne de P peut être formée par V_1. Pour obtenir la seconde colonne, on complète la famille formée par V_1 en une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on cherche V_2 telle que $V_2 = \alpha_2\,U_2 + \alpha_3\,U_3$ et $BV_2 = t_{12}V_1 + 2\,V_2$, avec α_2, α_3 et t_{12} des réels à déterminer. On obtient le système linéaire

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 & & = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 & -t_{12} & = 0 \\ 2\,\alpha_2 & -t_{12} & = 0 \end{cases},$$

que $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$ et $t_{12} = 2$ vérifient. On trouve alors $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'on complète ensuite la famille $\{V_1, V_2\}$ par le vecteur U_3 afin d'obtenir une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On cherche alors V_3 telle que $V_3 = \alpha_3\,U_3$ et $BV_3 = t_{13}V_1 + t_{23}V_2 + 2\,V_3$, où α_3, t_{13} et t_{23} sont des réels à déterminer. On a le système linéaire

$$\begin{cases} \alpha_3 - t_{13} & -t_{23} & = 0 \\ -\alpha_3 - t_{13} & +t_{23} & = 0 \\ -\,t_{13} & & = 0 \end{cases},$$

que $\alpha_3 = 1$, $t_{13} = 0$ et $t_{23} = 1$ vérifient, d'où $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et f l'application définie sur E par

$$\forall P \in E,\ f(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X - 1)P'.$$

1. Montrer f est un endomorphisme de E.

On observe tout d'abord que pour tout polynôme P de E de degré égal à k, $f(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à k. L'application f est donc bien à valeurs dans E. Montrons à présent qu'elle est linéaire. Par linéarité de la dérivation, on a

$$\begin{aligned} \forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda P + Q) &= (X^2-1)(\lambda P + Q)'' + (2X-1)(\lambda P + Q)' = (X^2-1)(\lambda P'' + Q'') + (2X-1)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda((X^2-1)P'' + (2X-1)P') + ((X^2-1)Q'' + (2X-1)Q') = \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

2. Montrer que f est diagonalisable.

Déterminons la matrice de l'endomorphisme dans la base canonique de E. On a

$$f(1) = 0,\ f(X) = 2X - 1, \forall k \in \{2, \dots, n\},\ f(X^k) = k(k+1)X^k - kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2},$$

la matrice est donc triangulaire supérieure et ses valeurs propres sont données par ses coefficients diagonaux. Il en résulte que f possède $n+1$ valeurs propres distinctes et qu'il est donc diagonalisable.

Exercice 4. Soit m un nombre réel et M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les valeurs propres de M sont 1 et -1.

Le calcul du polynôme caractéristique de M donne $\chi_M(X) = (X+1)(X-1)^2$. Les valeurs propres de M sont donc -1, avec ordre de multiplicité algébrique égal à 1, et 1, avec ordre de multiplicité algébrique égal à 2.

2. Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice M est-elle diagonalisable ? On justifiera la réponse.

La matrice M est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre $E_1 = \ker(M - I_3)$ associé à la valeur propre 1 est de dimension égale à 2.

Caractérisons ce sous-espace. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On a

$$MX = X \iff \begin{cases} m\,x_1 + (1+m)\,x_2 + x_3 = 0 \\ -m\,x_1 - (1+m)\,x_2 - x_3 = 0 \\ m\,x_1 + (m-1)\,x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m\,x_1 + (1+m)\,x_2 + x_3 = 0 \\ m\,x_1 + (m-1)\,x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ m\,(x_1 + x_2) = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, E_1 est un sous-espace de dimension 2 si et seulement si $m = 0$, car c'est alors le plan d'équation $x_2 + x_3 = 0$. Si m est non nul, E_1 est une droite, intersection des plans d'équations respectives $x_2 + x_3 = 0$ et $x_1 + x_2 = 0$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de f alors $P(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de f.

Si x est un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ, on a $f(x) = \lambda\,x$. En raisonnant par récurrence, on montre que, pour tout entier naturel k, $f^k(x) = \lambda^k x$ et, plus généralement que, pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, $P(f)(x) = P(\lambda)x$. En particulier, si P est un polynôme annulateur de f, on a que $P(\lambda)x = 0_E$, ce qui implique que $P(\lambda) = 0$, puisque le vecteur x est par définition non nul.

2. Montrer que si l'endomorphisme est tel que

$$f^3 + 2f^2 - f - 2\,id_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

alors il est bijectif.

On observe que 0 n'est pas racine du polynôme $X^3 + 2X^2 - X - 2$, ce qui suffit pour conclure si l'espace E est dimension finie (le spectre de f étant inclus dans l'ensemble des racines du polynôme annulateur, on en déduit que 0 n'est pas valeur propre de f, l'endomorphisme est donc injectif et par conséquent bijectif). Dans le cas général, il suffit d'écrire

$$f^3 + 2f^2 - f = 2\,id_E \iff f \circ \frac{1}{2}(f^2 + 2f - id_E) = \frac{1}{2}(f^2 + 2f - id_E) \circ f = id_E,$$

pour établir le résultat.