Feuille 1 : Séries Numériques

II. Séries à termes constants

Exercice 2:

$$U_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \quad ; \quad W_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{2}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha}$$

1. $$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = 1 + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}} - \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}} - \frac{1}{n^\alpha} = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$$

$$S_n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ 1 & \text{si } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Par $\alpha > 1$, on peut écrire $\sum_{k=1}^{+\infty} U_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha}$

2. $$W_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{2}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha}$$

$$\sum_{k=1}^{n} W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)^\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)^\alpha}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \cancel{\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{(k+2)^\alpha}} - 2 \sum_{k=1}^{n-2} \cancel{\frac{1}{(k+2)^\alpha}} - \frac{2}{2^\alpha} - \frac{2}{(n-1)^\alpha} + \cancel{\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{(k+2)^\alpha}} + \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n-1)^\alpha}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^\alpha} - \frac{2}{2^\alpha} - \frac{2}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n-1)^\alpha}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n-1)^\alpha}$$

- si $\alpha > 0$: $\sum W_k \to 1 - \frac{1}{2^\alpha}$
- si $\alpha < 0$: on a une forme indéterminé
- si $\alpha = 0$: $\sum W_k \to 0$

Exercice 3:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k \quad \text{et } V_n = \frac{U_n}{S_n}$$

1. Mq si S_n CV, alors $\sum_{k=0}^{n} V_n$ CV

On peut utiliser le critère de comparaison en majorant V_n par une suite dont la série CV.

↳ minorer S_n, puis par passage à l'inverse on majore $\frac{1}{S_n}$
or $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ et $U_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k=0}^{n} U_k > U_0 > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{S_n} < \frac{1}{U_0} \iff \frac{U_n}{S_n} < \frac{U_n}{U_0} \iff V_n < \frac{U_n}{U_0}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ V_n < C U_n$ avec $C = \frac{1}{U_0} > 0$ or $\sum_{k=0}^{n} C U_k = C \sum_{k=0}^{n} U_k$

et comme on a supposé $\sum_{k=0}^{n} U_k$ CV, alors $\sum_{k=0}^{n} C U_k$ CV.
Et par comparaison ($U_n > 0\ \forall n$), $\left(\sum_{k=0}^{n} V_n\right)_n$ CV.

On a donc mq $\sum U_n$ CV $\Rightarrow \sum V_n$ CV

2. On veut mq $\prod_{k=1}^{n} (1 - V_k) = \frac{U_0}{S_0}$

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - V_k) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{U_k}{S_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{S_k - U_k}{S_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \frac{S_0}{S_n} = \frac{U_0}{S_n}$$

3. On suppose que $\sum_{k=1}^{n} V_k$ CV

a) $\ln(1 - V_n) = -V_n + o(V_n)$
Comme $\sum V_k$ CV, alors $V_n \to 0$
Donc $\ln(1 - V_n) \sim -V_n$
Montrons que $-V_n$ et $\ln(1 - V_n)$ sont de même signe constant :

$V_n = \frac{U_n}{S_n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n > 0$ Donc forcément $S_n > 0 \Rightarrow V_n > 0$
$\iff -V_n < 0$
$\iff 1 - V_n < 1 \iff \ln(1 - V_n) < \ln(1)$ comme $\ln(x)$ est croissant.
Donc $\ln(1 - V_n) < 0$. Donc $\ln(1 - V_n)$ et $-V_n$ sont de même signe constant. Donc $\ln(1 - V_n)$ et $-V_n$ sont de même nature :
$\sum_{k=1}^{n} V_k$ CV donc $-\sum_{k=1}^{n} V_k$ CV donc par critère d'équivalence de suites à signe constant, $\sum_{k=1}^{n} \ln(1 - V_k)$ CV.

b) $\sum_{k=1}^{n} \ln(1 - V_k) \longrightarrow l \in \mathbb{R}$ (d'après 3.a))

donc $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} (1 - V_k)\right) = \ln\left(\frac{U_0}{S_n}\right) = \ln(U_0) - \ln(S_n) \to l$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1-V_k) = \ln(U_0) - \ln(S_n) \iff \ln(S_n) = \ln(U_0) - \sum_{k=1}^{n} \ln(1-V_k)$$

Donc $\ln(S_n)$ CV car $\ln(U_0)$ est une constante et $\sum_{k=1}^{n} \ln(1-V_k)$ CV.
Donc S_n CV.

Exercice 4 :

- $U_n = \dfrac{1+\ln(n)}{n^2} \sim \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ On utilise le critère de n^α :

$n^\alpha U_n \longrightarrow 0$ si $\alpha > 1$ or si $\alpha = 2$ on a $n^\alpha U_n \to +\infty$. Donc on pose $\alpha = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$. Et on a bien $n^\alpha U_n \to 0$

Donc la STG U_n CV

- $V_n = \dfrac{2^n+5}{3^n+11}$; $2^n+5 \underset{+\infty}{\sim} 2^n$; $3^n+11 \underset{+\infty}{\sim} 3^n$ Donc $V_n \sim \dfrac{2^n}{3^n} > 0$

Donc en appliquant le critère de Cauchy : $(V_n)^{\frac{1}{n}} \sim \frac{2}{3} < 1$
Donc par critère d'équivalence et de Cauchy, la STG V_n CV.

- $W_n = e^{-\sqrt{n}}$, $W_n \geq 0$ donc $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} = \dfrac{e^{-\sqrt{n+1}}}{e^{-\sqrt{n}}} = \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}}$

et comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \iff e^{\sqrt{n}} < e^{\sqrt{n+1}}$ comme e^x est $C^\nearrow$ alors $\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}} < 1$.

Donc d'après le critère d'Alembert, la STG W_n CV.

- $y_n = \dfrac{(n+1)^4}{n!+1}$

  - $(n+1)^4 \sim n^4$ et $n!+1 \sim n!$ Donc $y_n \sim \dfrac{n^4}{n!} = \dfrac{n^3}{(n-1)!} \to 0$ comme $n^3 = o(n!)$ → ça me paraît pas très rigoureux

  - $\dfrac{(n+1)^4}{n!+1} = \dfrac{n^4(1+\frac{1}{n})^4}{n(n-1)!+1} = \dfrac{n^3(1+\frac{1}{n})^4}{n(1-\frac{1}{n})(n-2)!+1} = \dfrac{n^2(1+\frac{1}{n})^4}{n(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(n-3)!+1}$

$$= \frac{n(1+\frac{1}{n})^4}{n(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})(n-4)!+1} = \frac{(1+\frac{1}{n})^4}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})(n-4)!+1}$$

et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)(n-4)!+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc par quotient $y_n \to 0$; $y_n \sim \dfrac{1}{n!}$ et $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{n^2}$

Donc par critère d'équivalence et de comparaison, STG y_n CV.

- $a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$; $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. On applique le critère de Cauchy :
$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

Donc la STG a_n est CV.

- $b_n = \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n}$; On applique le critère de Cauchy : $(b_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{\ln(n)}{n}}}{\ln(n)}$ et $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée. Donc $n^{\frac{\ln(n)}{n}} \to 1$ et $\frac{n^{\frac{\ln(n)}{n}}}{\ln(n)} \to 0 < 1$

Donc la STG b_n CV.

- $c_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$; $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $c_n \sim \frac{n^2}{2^n}$

$$d_n = \frac{-6a}{n^{2-6a}} + O\left(\frac{1}{n^{2-6a}}\right)$$