L2 MIDO Dauphine
Année 2023-2024

Analyse 3

Feuille d'exercices : Suites et séries de fonctions

Les exercices avec des étoiles sont à préparer en priorité.

1 Suites de fonctions

***Exercice 1.** Pour chaque suite de fonctions, montrer qu'elle converge simplement sur l'intervalle considéré et calculer la fonction limite. Puis, déterminer si la convergence est uniforme.

1. $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$.

2. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ sur $[0, 1]$.

3. $f_n(x) = x^n(1 - x)^n$ sur $[0, 1]$.

4. $f_n(x) = x^n(1 - x)$ sur $[0, 1]$.

5. $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$ sur $\mathbb{R}$.

6. $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$ sur $[1, 2]$.

7. $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ (pour $n \geq 1$) sur $\mathbb{R}$.

8. $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ (pour $n \geq 1$) sur $\mathbb{R}^+$.

9. $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ (pour $n \geq 1$) sur $[0, A]$, $A \geq 0$ fixé.

Exercice 2. Considérons la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = (1 + x^n)^{1/n}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.

2. On va rechercher si la convergence est uniforme.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$ et $x \geq 0$ on a $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$

b) En déduire que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

c) Montrer que $f_n(x) = x f_n(1/x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

d) En utilisant une nouvelle fois la question a), en déduire que la convergence est uniforme sur $[1,+\infty[$.

e) Conclure.

***Exercice 3.** Considérons la suite de fonctions $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = n^\alpha t^n \sin(\pi t)$, où $\alpha \geq 0$ est un paramètre réel fixé.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.

2. On va rechercher si la convergence est uniforme.

a) Montrer qu'il existe un unique $t_n \in [0,1]$ tel que $\sup\limits_{[0,1]} |f_n| = f_n(t_n)$.

b) Montrer que $t_n = 1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.

c) En déduire les valeurs de α pour lesquelles la convergence est uniforme.

3. Déterminer la convergence et la limite de la suite $u_n = \sqrt{n}\left(\cos\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right)^{2n} \sin\left(\pi \cos^2\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right)$.

Exercice 4. Considérons la suite de fonctions $f_n : [0,+\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.

2. On va montrer que la convergence est uniforme.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) - f(x) = e^{-x^2}.g_n(x)$, où g_n est une fonction croissante que l'on déterminera. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq f_n(x) - f(x) \leq \; min\,(f_n(x), g_n(x))$.

b) Soit $a_n > 0$. Montrer que $\forall x \leq a_n, |f_n(x) - f(x)| \leq g_n(a_n)$ et $\forall x \geq a_n, |f_n(x) - f(x)| \leq f_n(a_n)$.

Conclure en posant $a_n = n^\alpha$ avec un choix judicieux de α.

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, \text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x, \text{ si } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n}, \\ 0 \text{ si } x > \frac{2}{n}. \end{cases}$$

1. Montrer que les f_n sont continues.
2. Montrer que la suite converge simplement vers une fonction f à déterminer.
3. La convergence est elle uniforme ?
4. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$ pour tout n, ainsi que $\int_0^1 f(t)dt$. Commenter.

***Exercice 6.** Soit $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Montrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas partout dérivable.

***Exercice 7.** Soit $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. La suite f_n converge t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$? La suite f_n^2 converge t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$? Commenter.

Exercice 8. Soit f_n une suite de fonctions convergeant simplement vers f sur un segment $[a, b]$. On suppose que les f_n sont équilipschitziennes : il existe un réél K tel que pour tout n et tous x et y dans $[a, b]$ on a

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|.$$

Montrer que la convergence de la suite f_n est uniforme.

***Exercice 9.**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre fixé. Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1+n^\alpha e^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
3. Calculer
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})dx$$

Exercice 10. Soit $f_n(x) = \frac{e^{nx}+2}{e^{nx}+1}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Expliciter sa limite simple.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. La convergence est-elle uniforme sur $[1, +\infty[$?

Exercice 11. Premier théorème de Dini

Soit f_n une suite de fonctions convergeant simplement vers f sur un segment $[a, b]$. On suppose que les f_n sont continues et que f l'est également. On suppose aussi que pour tout x fixé la suite numérique de terme général $f_n(x)$ est croissante en n. Montrer que la convergence de la suite f_n est uniforme.

Exercice 12. Deuxième théorème de Dini

Soit f_n une suite de fonctions convergeant simplement vers f sur un segment $[a, b]$. On suppose que f est continue (mais pas forcément les f_n). On suppose aussi que pour tout n fixé la fonction $f_n(x)$ est croissante en x. Montrer que la convergence de la suite f_n est uniforme.

Exercice 13. On note $I = [0, \frac{1}{2}]$. Le but de l'exercice est de construire une application continue $f : I \to \mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(f(t) + f(t^2)\right) dt.$$

On considère les applications $f_n : I \to \mathbb{R}$ définies par récurrence :

$$\begin{cases} f_0(x) = 1, \quad \forall x \in I, \\ f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(f_n(t) + f_n(t^2)\right) dt. \end{cases}$$

1. Calculer f_1 et f_2. Montrer que, pour tout entier n, f_n est un polynôme.
2. On note, pour $n \geq 1$,

$$D_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

   Calculer D_1 et D_2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in I, \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} D_n,$$

   et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

3. En déduire que f_n vérifie le critère de Cauchy uniforme et converge donc uniformément sur $[0, 1]$.
4. Soit f la fonction limite. Montrer qu'elle vérifie la propriété demandée.

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{n}$ sur $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ pour tout entier n.

1. Montrer que f est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues par morceaux à déterminer.

2. f est elle continue par morceaux ?

2 Séries de fonctions

***Exercice 15. 1.** a) Montrer que la série de fonction $x \to \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ converge simplement vers sin pour tout réel.

b) La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}$? Uniforme ?

c) La convergence est-elle normale sur tout segment de $\mathbb{R}$? Uniforme ?

2. Etablir un résultat similaire pour cos.

***Exercice 16.** Soit, pour n entier, et pour $x \in]-1,1[$, $u_n(x) = nx^n$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ et uniformément sur tout intervalle de la forme $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ vers une fonction u à déterminer.

***Exercice 17.** Soit $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$.

1. Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général u_n sur $\mathbb{R}$.
2. Soit u sa fonction somme. En déduire la continuité de la fonction u sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = -2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+x^2)^2}.$$

Exercice 18. Soit $\alpha > 0$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha}$.

Indication : introduire une fonction $x \to f_k(x)$ telle que $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$ et appliquer le théorème de la double limite.

Exercice 19. 1. Posons $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(\frac{x}{2^k})$.

a) Domaine de définition de S ? Continuité de S ? S est-elle C^∞ ?

b) La convergence de S est-elle normale sur $\mathbb{R}$?

2. Posons $T(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \sin(2^k x)$.

a) Domaine de définition et Continuité de T ? Peut-on appliquer le Th. de dérivation terme à terme ?

b) Dérivabilité de T en 0 ?

Exercice 20. Considérons la série de fonctions $S(x) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{sh(kx)}$. sur $\mathbb{R}_*^+$

Etudier la convergence et la continuité de S. Trouver un équivalent pour S en $+\infty$.

Exercice 21. Pour $x > 0$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

1. Montrer que S est définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

2. Préciser le sens de variation de S.

3. Montrer que : $\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$.

4. Donner un équivalent de S en 0.

5. Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 22. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que
$$\forall x > 0, \qquad \frac{\pi}{2} \leq S(x) \leq \frac{\pi}{2} + x.$$
En déduire que S admet des limites à droite et à gauche en 0, mais n'y est pas continue.
4. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 23. Soit $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général u_n sur $\mathbb{R}$.
2. Soit u sa limite. Calculer la limite de $u(x)$ lorsque x tend vers 0.
3. Prouver que
$$\int_0^{\pi} u(x)\,dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$
On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$. En déduire $\int_0^{\pi} u(x)\,dx$.
4. Montrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$