Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2021 - 2022)

Probabilités 1 - CC1 - Lundi 27 septembre 2021 - Éléments de correction

Exercice 1. Les questions sont indépendantes.

1. Donner la définition d'une probabilité.
2. Donner la définition d'une variable aléatoire.
3. On considère une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'événements dans un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ telle que pour tout $n \geq 1$ $\mathrm{P}(A_n) = 0$. Montrer que $\cup_{n\geq 1} A_n$ est un événement négligeable.

Correction Les question 1 et 2 sont du cours. La troisième aussi : comme l'union est dénombrable

$$\mathrm{P}(\cup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_n) = 0.$$

Exercice 2. On considère une première urne contenant n billes rouges numérotées de 1 à n et une seconde urne contenant p billes bleues numérotées de 1 à p. On suppose que $n \geq p$. On tire une boule dans chaque urne.

1. Proposer un espace probabilisé pour modéliser cette expérience.
2. Donner une écriture mathématique de l'événement A : ≪ la boule rouge a un numéro inférieur ou égal à la boule bleue ≫.
3. Calculer la probabilité de A.

Correction

1. On peut considérer $\Omega = \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, p\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme sur Ω. Comme $Card(\Omega) = np$, on en déduit $\mathrm{P}(B) = Card(B)/(np)$ pour toute partie $B \subset \Omega$.
2. L'événement correspondant est
$$A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega,\ \omega_1 \leq \omega_2\}.$$
3. On remarque tout d'abord qu'il n'y a aucun couple dans A tel que $\omega_1 > p$. Si $k \leq p$, il y a $p - (k-1)$ couples dans A tels que $\omega_1 = k$. On en déduit que $Card(A) = \sum_{k=1}^{p}(p - k + 1) = \sum_{k=1}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}$. Et on obtient donc $\mathrm{P}(A) = \frac{p(p+1)}{2np} = \frac{p+1}{2n}$

Exercice 3. On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé. Les questions sont indépendantes.

1. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints. Montrer que la suite $(\mathrm{P}(A_n))_{n\geq 1}$ converge vers 0.
2. Soit A, B et C trois événements de $\mathcal{F}$. Montrer que
$$\mathrm{P}(A\Delta C) \leq \mathrm{P}(A\Delta B) + \mathrm{P}(B\Delta C).$$
On rappelle que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

3. L'ensemble $\{A \subset \mathbb{N},\ A \text{ fini ou } A^c \text{ fini}\}$ forme-t-il une tribu sur $\mathbb{N}$?

Correction

1. D'après la définition d'une probabilité
$$\mathrm{P}(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_n).$$
On en déduit que la série de terme général $(\mathrm{P}(A_n))$ est convergente et donc que la suite $(\mathrm{P}(A_n))_{n\geq 1}$ tend vers 0.
2. On vérifie tout d'abord que $A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$. Soit $x \in A \setminus C$. Si $x \in B^c$ alors $x \in A\Delta B$ et si $x \in B$ alors $x \in B\Delta C$. Et on raisonne de la même façon si $x \in C \setminus A$. On en déduit
$$\mathrm{P}(A\Delta C) \leq \mathrm{P}((A\Delta B) \cup (B\Delta C)) \leq \mathrm{P}(A\Delta B) + \mathrm{P}(B\Delta C).$$
3. Pour tout $n \geq 1$, $\{2n\}$ est une partie finie donc appartient à $\mathcal{G}$. Or $\cup_{n\geq 1}\{2n\} = \{2n, n \geq 1\}$ n'est pas dans $\mathcal{G}$ puisqu'il n'est pas fini et son complémentaire non plus. On en déduit que $\mathcal{G}$ n'est pas une tribu puisqu'elle n'est pas stable par union dénombrable.