Feuilles de travaux dirigés

Version du 3 octobre 2022.
Le symbole $\diamond$ indique un exercice difficile.

0 Révisions

Les exercices de cette section portent sur des notions et résultats de base introduits durant la première année de licence. Ils ne seront pas traités en séance. Il est essentiel de parfaitement maîtriser l'ensemble des concepts sous-jacents.

Exercice 1. (sous-espaces vectoriels) Pour chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants, indiquer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel et, le cas échéant, en donner la dimension et une base, préciser s'il s'agit de l'espace entier ou en donner un supplémentaire.

1. $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.
2. $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 x_2 = 0\}$.
3. $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 - x_2 = 1\}$.
4. $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 = {x_1}^2\}$.
5. $E_5 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 0\}$.
6. $E_6 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$.
7. $E_7 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
8. $E_8 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

Exercice 2. (sous-espaces vectoriels) Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(0) = P(2)\}$.
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P'(0) = 2\}$.
3. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables.
4. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées.
5. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont majorées.
6. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont paires.
7. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont paires ou impaires.
8. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'(x)+a(x)y(x) = 0$, où a est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue.

Exercice 3. (sous-espaces vectoriels engendrés) Dans chacun des cas suivants, donner la dimension et un système d'équations du sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs.

1. $\{(9,2),(8,-3),(\frac{3}{2},\frac{7}{3})\}$.
2. $\{(6,0,-5),(-1,2,1),(0,1,-1)\}$.
3. $\{(5,-4,7,8),(-\frac{5}{2},3,1,-2)\}$.
4. $\{(-1,2,1,4),(0,3,-1,2),(-2,1,3,6)\}$.

Exercice 4. (intersection de sous-espaces vectoriels) Déterminer l'intersection des plans P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^3$ dans chacun des cas suivants.

1. P_1 a pour équation cartésienne $x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 0$ et P_2 a pour base $\{(1,0,2),(0,1,3)\}$.
2. P_1 et P_2 ont pour équation cartésienne $x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 0$ et $a\,x_1 + b\,x_2 + x_3 = 0$ respectivement.
3. P_1 et P_2 ont pour base $\{(1,1,1),(1,2,0)\}$ et $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ respectivement.

Exercice 5. (sous-espaces supplémentaires) Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F le sous-espace vectoriel des fonctions périodiques de période 1 et G le sous-espace vectoriel des fonctions tendant vers 0 en $+\infty$. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 6. (sous-espaces supplémentaires) On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que le plan P d'équation cartésienne $x_1+x_2+x_3=0$ et la droite D de vecteur directeur $u=(a,1,1)$ dans la base canonique, soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. On suppose à présent que $a=1$. Vérifier que $P\oplus D=\mathbb{R}^3$. Déterminer une base $\{e_1,e_2\}$ de P. Pourquoi la famille $\{e_1,e_2,u\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Déterminer les coordonnées dans cette nouvelle base du vecteur ayant pour coordonnées $(1,2,3)$ dans la base canonique.

Exercice 7. On note $E=\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à trois. On considère les sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$H=\{P\in E\,|\,P(2)=0\} \text{ et } D=\left\{P\in E\,|\,P(1)=P'(1)=P''(1)=P'''(1)\right\}.$$

1. Rappeler quelle est la dimension de E et donner sa base canonique.
2. Donner une équation et trouver une famille génératrice de H. Quelle est la dimension de ce sous-espace ?
3. Écrire la formule de Taylor pour un polynôme P appartenant à D et en déduire la forme générale des éléments de D. Quelle est la dimension de ce sous-espace ?

Exercice 8. (base des polynômes de Lagrange) On note $E=\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à trois.

1. Déterminer les quatre polynômes L_k, $k=0,1,2,3$, de E tels que

$$\forall k\in\{0,1,2,3\},\ L_k(k)=1 \text{ et },\ \forall i\in\{0,1,2,3\}\setminus\{k\},\ L_k(i)=0.$$

2. Montrer que la famille $\{L_0,L_1,L_2,L_3\}$ est une base de E et donner les coordonnées d'un polynôme quelconque de E dans cette base.

Exercice 9. Soient f_1 et f_2 les deux éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ définis par

$$f_1(x_1,x_2)=x_1+x_2 \text{ et } f_2(x_1,x_2)=x_1-x_2.$$

1. Montrer que (f_1,f_2) forme une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
2. Exprimer les formes linéaires suivantes dans cette base :

$$g(x_1,x_2)=x_1,\ h(x_1,x_2)=2x_1-6x_2.$$

Exercice 10. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ ayant pour noyau le plan P défini dans l'exercice 6 et telle que $f((1,1,1))=(1,2,3)$. Écrire la matrice de f dans la base $\{e_1,e_2,u\}$ déterminée dans l'exercice 6, puis dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. On note $E=\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux.

1. Montrer que $\{1,X,X^2\}$ et $\{1,X-1,X^2\}$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de passage de $\{1,X,X^2\}$ vers $\{1,X-1,X^2\}$.
3. Déterminer la matrice de l'endomorphisme de E défini par $P\mapsto P'$ dans ces deux bases.

Exercice 12. (forme linéaire) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et une base du noyau de la forme linéaire f $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}^4,\ f(x)=2\,x_2-x_3+x_4.$$

Exercice 13. (forme linéaire) Déterminer la forme linéaire f et donner une base de son noyau de l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(1,1,1)=0,\ f(2,0,1)=1 \text{ et } f(1,2,3)=4,$$

Exercice 14. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires ?

Exercice 15. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 8 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f n'est pas bijectif.
2. Montrer que $\{f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$ est une base de l'image de f.
3. Calculer $f((1, -2, 1, 0))$
4. Déduire des questions précédentes la dimension du noyau de f et la forme générale de ses éléments.

Exercice 16. (produits matriciels possibles) On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles entre ces matrices ?

Exercice 17. (calcul d'inverses de matrices) Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. (rang d'une matrice à paramètre) Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. (trace et produit de matrices) Soit n un entier naturel non nul, A et B deux matrics de $M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\mathrm{tr}(AA^\top) = 0$. Que dire de la matrice A ?
2. On suppose que, pour tout X de $M_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 20. (changement de bases) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques respectives de ces espaces est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose alors

$$e_1' = e_2 + e_3,\ e_2' = e_3 + e_1,\ e_3' = e_1 + e_2 \text{ et } f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$, puis que (f_1', f_2') est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice de f dans ces nouvelles bases ?

Exercice 21. (Union et intersection de sous-espaces vectoriels) Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $E_1, \cdots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $\cap_{i=1}^n E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $\cup_{i=1}^n E_i$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si l'un des E_i contient les autres.

Exercice 22. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(f \circ g) \leq \mathrm{rg}(g)$ avec égalité si et seulement si $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(f \circ g) \leq \mathrm{rg}(f)$ avec égalité si et seulement si $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(f) + dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g))$.

1 Réduction des endomorphismes

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne un corps qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 23. Soit E un $\mathbb{K}$—espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$ si et seulement si $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$.
2. Montrer $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$ si et seulement si $E = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Ker}(u)$.
3. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

   (i) $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$, (ii) $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$, (iii) $E = \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u)$.

Exercice 24. (Caractérisations des homothéties) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est une homothétie si $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$ on a $f(x) = \lambda x$.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.
2. En déduire que si $g \in \mathscr{L}(E)$ n'est pas une homothétie, il existe deux vecteurs e_1 et e_2 qui sont linéairement indépendants et tels que $e_2 = g(e_1)$.
3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$, on a $f \circ g = g \circ f$. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 25. (Changement de corps de base) Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblable sur $\mathbb{C}$, c'est à dire qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Montrer qu'il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$. On pourra remarquer que $P = U + iV$ avec U et V des éléments de $M_n(\mathbb{R})$ et s'intéresser à la fonction $x \mapsto \det(U + xV)$.

Exercice 26. (Noyaux et des images itérés) Soit E un $\mathbb{K}$—espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On rappelle que par convention $u^0 = Id_E$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\operatorname{Ker}(u^k) \subset \operatorname{Ker}(u^{k+1})$ et que $\operatorname{Im}(u^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(u^k)$.
2. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ker}(u^q) = \operatorname{Ker}(u^{q+1})$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k \geq q$, on a $\operatorname{Ker}(u^k) = \operatorname{Ker}(u^q)$ (on pourra raisonner par récurrence).
3. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Im}(u^q) = \operatorname{Im}(u^{q+1})$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k \geq q$, on a $\operatorname{Im}(u^k) = \operatorname{Im}(u^q)$ (on pourra raisonner par récurrence).

Exercice 27. (Noyaux et des images itérés en dimension finie) Soit E un $\mathbb{K}$—espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On rappelle que par convention $u^0 = Id_E$. On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_k = dim(\operatorname{Ker}(u^k))$ et $i_k = dim(\operatorname{Im}(u^k))$.

1. En utilisant l'exercice précèdent montrer que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et stationnaire au pire à partir du rang n.
2. Montrer que la suite $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et stationnaire au pire à partir du rang n.
3. Montrer que l'indice de stationnement des suites $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est le même.
4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $d_{k+1} - d_k = i_k - i_{k+1}$.
5. Montrer enfin que les suites $(i_k - i_{k+1})_{k\in\mathbb{N}} = (d_{k+1} - d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes. On pourra introduire le supplémentaire S_k de $\operatorname{Im}(u^{k+1})$ dans $\operatorname{Im}(u^k)$ et remarquer que $u(\operatorname{Im}(u^k)) = \operatorname{Im}(u^{k+1})$.

1.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 28. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices à coefficients réels suivantes :

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Que dire si l'on considère que ces matrices sont à coefficients complexes ? Dans ce dernier cas, vérifier que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres et que son déterminant est le produit de ses valeurs propres.

Exercice 29. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice de $GL_n(\mathbb{K})$, λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ. Montrer que $\lambda \neq 0$, puis que $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1} ayant X pour vecteur propre associé.

Exercice 30. Soit n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer que $A + I_n$ ou $A - I_n$ est inversible.

Exercice 31. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$. Les matrices A et $A^\top$ ont-elles les mêmes vecteurs propres ?

Exercice 32. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Exercice 33. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où $f_a(x) = e^{ax}$ est une famille libre dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables.

Exercice 34. Déterminer le spectre et les vecteurs propres de l'endomorphisme f lorsque :
- f est une projection de l'espace sur un plan parallèlement à une droite,
- si $\theta \in \mathbb{R}$ et e_1, e_2 est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, f est définie par

$$f(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \text{ , } f(e_2) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2.$$

Exercice 35. (matrice stochastique) Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est dite stochastique si ses coefficients sont des réels positifs ou nuls et la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1. Soit M une telle matrice.
1. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de M, alors $|\lambda| \leq 1$.
2. Montrer que 1 est valeur propre de M et donner un vecteur propre associé.
3. Montrer que si tous les coefficients diagonaux de M sont strictement positifs et que λ est une valeur propre complexe de M, alors $|\lambda| = 1$ implique que $\lambda = 1$.

Exercice 36. ⋄ Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{K}_{2n}[X]$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(P) = X(X-1)P' - 2nXP$. Chercher le spectre et les vecteurs propres de f.

Exercice 37. Soit $E = \mathbb{C}^\mathbb{N}$ l'espace des suites à coefficients complexes et f l'endomorphisme de E qui à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = u_0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer le spectre et les vecteurs propres de f.

Exercice 38. Soit n un entier naturel non nul, A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.
1. Montrer que, pour tout entier naturel k, on a $A^kB - BA^k = kA^k$.
2. On considère l'application f_B de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par $f_B(M) = MB - BM$. Vérifier que f_B est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Justifier qu'un entier naturel k est une valeur propre de f_B si $A^k \neq 0$.
4. En déduire l'existence d'un entier naturel m tel que $A^m = 0$.

Exercice 39. Soit m et n deux entiers naturels non nuls, f une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.
1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles (s'il y en a).
2. Lorsque $m = n$, montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercices supplémentaires

Exercice 40. Soit θ un réel. Déterminer le spectre de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 41. ⋄ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Chercher le spectre de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

en distinguant les cas $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ et $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (0, \dots, 0)$.
En déduire le spectre de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 42. $\diamond$ Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et T l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = T(f)$ définie par

$$F(0) = f(0) \text{ et, } \forall x \in]0, +\infty[, \; F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?
2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

1.3 Polynômes annulateurs

Exercice 43. Soit $J \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice ne comportant que des 1.

1. Déterminer le polynôme minimal de J.
2. Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 44. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et I_4.
2. En déduire un polynôme annulateur de A.
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Exercice 45. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme minimal de A.
2. En déduire A^{-1} et A^3.

Exercice 46. Soit A une matrice diagonale. Déterminer le polynôme minimal de A.

Exercice 47. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ de polynôme minimal $\mu_f = (X-2)^2(X-1)$. Déterminer le polynôme minimal de $f + Id_E$.

Exercice 48. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égale à 2. Soit $P_1, \cdots P_k$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux tels que $P = P_1 \cdots P_k$ annule u. On note pour tout $j \in [\![1, k]\!]$ le polynôme $Q_j = \prod_{l \neq j} P_l$ et on introduit U_j tels que $1 = \sum_{j=1}^{k} U_j Q_j$. Notons enfin, pour $j \in [\![1, k]\!]$, p_j la projection sur $\mathrm{Ker}(P_j(u))$ parallèlement à $\oplus_{l \neq j} \mathrm{Ker}(P_l(u))$.

1. Montrer que $p_j = U_j(u) \circ Q_j(u)$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E qui est stable par u. Montrer que

$$F = \bigoplus_{l=1}^{k} (F \cap \mathrm{Ker}(P_l(u)).$$

Exercice 49. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. On suppose que P annule f. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 50. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q premiers entre eux tels que PQ annule f.

1. Montrer que si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Ker}(Q(f)) \oplus \mathrm{Im}(Q(f)) = E$.
2. Montrer que si E est de dimension infinie, on a aussi $\mathrm{Ker}(Q(f)) \oplus \mathrm{Im}(Q(f)) = E$. (on pourra utiliser la relation de Bézout).

Exercice 51. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires F et G qui sont stables par u. Montrer que $\mu_u = ppcm(\mu_{u_{|F}}, \mu_{u_{|G}})$.

Exercice 52. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de polynôme minimal μ_A. On définit par bloc $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X]$, P annule B si et seulement si P annule A et P' annule A.
3. En déduire le polynôme minimal μ_B de B.
4. Peut-on avoir μ_B scindé à racine simple ?

Exercices supplémentaires

Exercice 53. Soit p et q deux entiers naturels non nuls et M la matrice triangulaire par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où A appartient à $M_p(\mathbb{K})$ et B appartient à $M_q(\mathbb{K})$. On suppose que P est un polynôme annulateur de A et que Q est un polynôme annulateur de B. Déterminer un polynôme annulateur de M.

Exercice 54. ⋄ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Existe-t-il toujours un polynôme annulateur de f autre que le polynôme nul ?

1.4 Polynôme caractéristique

Exercice 55. Soit A et B deux matrices carrées de même ordre. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 56. Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$. Vérifier que

$$\chi_A(X) = X^3 - \operatorname{tr}(A)X^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) X - \det(A).$$

Exercice 57. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A(X) = X^n - 1$. Déterminer A^{-1} en fonction de A.

Exercice 58. Soit n un entier naturel strictement plus grand que 2. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

de $M_n(\mathbb{C})$. À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice A est-elle inversible ?

Exercice 59. Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit M et N deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que MN est inversible si et seulement si M et N sont inversibles.
2. Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) = \emptyset.$$

Exercice 60. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la matrice A^k est triangulaire supérieure. Ce résultat reste-t-il vrai si on ne suppose pas que A est inversible ?

Exercice 61. Déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Exercice 62.

1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que u admet une droite stable.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et impaire et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que u admet une droite stable.
3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et paire et $u \in \mathscr{L}(E)$ ne possédant pas de valeurs propres. Montrer que u admet un plan stable.
4. ⋄ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On veut montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E différent de $\{0\}$ et de E qui est stable par u. Soit $x \in E$ non nul.
   (a) Montrer que le sous-espace $F = \{P(u)(u(x))\ ,\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ est stable par u.
   (b) Montrer que si $F = E$, existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(1 - XP)(u)(x) = O_E$.
   (c) Conclure.

1.5 Diagonalisation

Exercice 63. Diagonaliser les matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 64. Expliquer sans calcul pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 65. (matrices élémentaires) Parmi les matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{R})$, lesquelles sont diagonalisables ?

Exercice 66. Soit a, b et c trois nombres réels. La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 67. (diagonalisation d'une matrice de rang 1) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, sans calculer son polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 68. (diagonalisation d'une matrice circulante) Soit a, b et c des nombres complexes. On pose

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

et $J = M(0,1,0)$.

1. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I_3, J et J^2.
2. Montrer que J est diagonalisable et donner son spectre.
3. En déduire que $M(a,b,c)$ est diagonalisable et donner son spectre.

Exercice 69. (diagonalisation par le polynôme minimal) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et en déduire une relation simple liant A^2, A et I_4.
2. En déduire que A est diagonalisable et donner son spectre.
3. Diagonaliser A.

Exercice 70. (Diagonalisation simultanée) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. On suppose que u et v sont diagonalisables.

1. Soit λ une valeur propre de u et E_λ le sous-espace propre associé. Montrer que E_λ est stable par v.
2. On note $v_\lambda = v_{|E_\lambda}$. Montrer que v_λ est diagonalisable.
3. En déduire que u et v ont une base de diagonalisation commune.

Exercice 71. Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(P) = P - (X+1)P'$. Justifier que f est diagonalisable et donner son spectre.

Exercice 72. Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 73. (transposition) Soit n un entier naturel non nul, $E = M_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(M) = M^\top$. Déterminer le spectre de f et montrer que cet endomorphisme est diagonalisable. Déterminer aussi les sous-espaces propres.

Exercices supplémentaires

Exercice 74. Les matrices de l'exercice 28 sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?

Exercice 75. ⋄ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Diagonaliser la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 76. À quelle(s) condition(s) sur les réels a, b et c la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 77. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont valeurs propres. Montrer que f est diagonalisable.

1.6 Applications de la diagonalisation

Exercice 78. (matrices semblables ?) Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Exercice 79. (commutant d'une matrice) Diagonaliser la matrice suivante et et en déduire toutes les matrices qui commutent avec elle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 80. Soit n un entier naturel non nul et A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes et que tout vecteur propre de A est également vecteur propre de B. Montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.

1.7 Trigonalisation

Exercice 81. (trigonalisation et puissances de matrice) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension égale à 1. Montrer que $u = (1, 1, 0)$ est un vecteur non nul de ce sous-espace.
3. Montrer que $v = (0, 0, 1)$ est tel que $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.
4. Chercher un vecteur propre w associé à la valeur propre 2. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice T de f dans cette base.
5. Calculer $f^k(v)$ pour tout entier naturel k. En déduire T^k.
6. Calculer A^k pour tout entier naturel k.

Exercice 82. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$. Est-il vrai que si $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$, alors A est nilpotente ?
2. Montrer que $\det(I_n + A) = \det(I_n)$.
3. $\diamond$ Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que B est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{tr}(B^k) = 0$.

Exercice 83. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice qui n'est pas trigonalisable.

1. Donner un exemple d'une telle matrice.
2. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $T = Q^{-1}AQ$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ telle que $\lambda \in \{T_{11}, \cdots, T_{nn}\}$. On suppose que λ apparaît k fois sur la diagonale de T. Montrer que $\overline{\lambda}$ apparaît aussi k fois sur la diagonale de T.

Exercice 84. (Trigonalisation simultanée) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n munit d'une base $\mathscr{B}$ et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. On suppose que u et v sont trigonalisables et on note $A = Mat_{\mathscr{B}}(u)$ et $B = Mat_{\mathscr{B}}(v)$. Le but de l'exercice est de montrer que u et v ont une base de trigonalisation commune. On raisonne par récurrence sur n.

1. Traiter le cas $n = 1$.
2. On suppose le résultat vrai au rang $n - 1$ pour $n \geq 2$.
   (a) Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$, des matrices $A', B' \in M_{n-1}(\mathbb{K})$, $C_A, C_B \in M_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et des scalaires $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{K}$ tels que
   $$A = P\begin{pmatrix} \lambda_A & C_A \\ 0 & A' \end{pmatrix}P^{-1} \text{ et } B = P\begin{pmatrix} \lambda_B & C_B \\ 0 & B' \end{pmatrix}P^{-1}.$$
   (c) Montrer qu'il existe une matrice inversible $Q \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ et des matrices $T_{A'}, T_{B'} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ triangulaires supérieures telles que
   $$A' = QT_{A'}Q^{-1} \text{ et } B' = QT_{B'}Q^{-1}.$$
   (d) On définit $R \in M_n(\mathbb{K})$ de la manière suivante
   $$R = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$
   Montrer que $R \in GL_n(\mathbb{K})$ et que RAR^{-1} et RBR^{-1} sont des matrices triangulaires supérieures.
3. Application : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. On suppose que f est nilpotent. Montrer que $\det(f + g) = \det(g)$ et $\mathrm{tr}(f + g) = \mathrm{tr}(g)$.

Exercice 85. $\diamond$ Soit n un entier naturel non nul et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On note χ_A le polynôme caractéristique de A vu comme matrice dans $M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $\omega \in \mathbb{C}$ est de multiplicité k dans χ_A alors $\overline{\omega} \in \mathbb{C}$ est aussi de multiplicité k dans χ_A.
2. On suppose que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que A est de déterminant strictement positif.
3. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.
4. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

1.8 Compléments sur la trigonalisation

Exercice 86. Déterminer les sous-espaces caractéristiques des matrices suivantes

1. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 87. (matrice de taille 2 non diagonalisable avec un seul sous-espace caractéristique) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\chi_u(X) = (X-\lambda)^2$. On suppose que $\dim E_\lambda < 2$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur non nul $y \in E$ tel que $u(y) - \lambda y \neq 0$.
2. On pose $x = u(y) - \lambda y$. En déduire que la famille (x, y) est une base de E.
3. Déterminer la matrice A de u dans la base (x, y).
4. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 88. (matrice de taille 3 non diagonalisable avec un seul sous-espace caractéristique) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\chi_u(X) = (X-\lambda)^3$. On suppose que $\dim E_\lambda < 3$.

1. On suppose que $\dim E_\lambda = 2$.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur non nul $y \in E$ tel que $u(y) - \lambda y \neq 0$.
   (b) On pose $x = u(y) - \lambda y$. Montrer qu'il existe un vecteur $z \in E_\lambda \setminus \mathrm{Vect}(x, y)$.
   (c) En déduire que la famille (x, y, z) est une base de E.
   (d) Déterminer la matrice A de u dans la base (x, y, z).
   (e) Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.
2. On suppose que $\dim E_\lambda = 1$.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur non nul $z \in E$ tel que $(u - \lambda Id_E)^2(z) \neq 0$.
   (b) On pose $y = u(z) - \lambda z$ et $x = u(y) - \lambda y$. En déduire que la famille (x, y, z) est une base de E.
   (c) Déterminer la matrice B de u dans la base (x, y, z).
   (d) Calculer B^k pour $k \in \mathbb{N}$.

1.9 Calcul de puissances et suites récurrentes

Exercice 89. (Matrices de rang 1) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que χ_A est scindé et déterminer ses valeurs propres et sous-espaces caractéristiques.
2. Calculer le polynôme minimal μ_A de A.
3. En déduire A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 90. (puissance n^{e} d'une matrice) Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et en déduire la valeur de A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 91. (Une suite récurrente) On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de leur premiers termes respectifs u_0, v_0 et w_0 et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}.$$

Déterminer les termes u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Exercice 92. (Une suite récurrente) On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de leur premiers termes respectifs u_0 et v_0 et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases}.$$

Déterminer les termes u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 93. (Une suite récurrente d'ordre 2) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence d'ordre 2 suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0.$$

Déterminer la suite u en fonction de n, u_0 et u_1.

2 Formes bilinéaires

Exercice 94. Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels d'ordre 2. On considère l'application b de $M_2(\mathbb{R})\times M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (A,B)\in M_2(\mathbb{R})\times M_2(\mathbb{R}),\ b(A,B)=\operatorname{tr}(A^\top B).$$

1. Vérifier que b est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. Montrer que pour tout A de E, $b(A,A)\geq 0$ avec égalité si et seulement si $A=0_{M_2(\mathbb{R})}$.
3. Déterminer la matrice de b relativement à la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 95. Soit

$$\forall x\in\mathbb{R}^3,\ \forall y\in\mathbb{R}^3,\ b_1(x,y)=b_2(y,x)=x_1y_1+2x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+x_2y_3.$$

1. Montrer que b_1 et b_2 sont des forme bilinéaires sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$. Déterminer les matrices respectives B_1 et B_2 de b_1 et b_2 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Quelle relation a-t-on entre ces matrices ?
2. Déterminer les matrices de b_1 et b_2 en considérant la base $\{(1,0,1),(1,1,1),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 96. Donner l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices suivantes relativement à la base canonique

1. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&1\\4&1&0\end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix}2&4&0&1\\4&1&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

Exercice 97. On définit l'application b de $M_2(\mathbb{R})\times M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par

$$b(A,B)=\det(A+B)-\det(A-B).$$

Montrer que b est une forme bilinéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 98. Dans $E=\mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application b de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (P,Q)\in E^2,\ b(P,Q)=\int_0^1 P(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que b est une forme bilinéaire sur E.
2. Déterminer la matrice de b relativement à la base canonique $\mathscr{B}=\{1,X,X^2\}$ de E.
3. Quel est le rang de b ?
4. La forme b est-elle symétrique ? Antisymétrique ? Déterminer sa partie symétrique et sa partie antisymétrique.
5. A-t-on $b(P,P)\geq 0$ pour tout polynôme P de E ? À quelle condition sur P a-t-on $b(P,P)=0$?

Répondre aux mêmes questions avec $b(P,Q)=\int_0^1 P(t)Q(1-t)\,\mathrm{d}t$ et $b_k(P,Q)=\sum_{i=1}^k P(i)Q(i)$ avec $k\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 99. ⋄ (forme bilinéaire réflexive) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et b une forme bilinéaire sur $E\times E$ telle que

$$\forall (x,y)\in E\times E,\ b(x,y)=0\Longleftrightarrow b(y,x)=0.$$

Montrer que b est symétrique ou antisymétrique.

Exercices supplémentaires

Exercice 100. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ de la forme

$$\forall x\in\mathbb{R}^3,\ \forall y\in\mathbb{R}^3,\ b(x,y)=\lambda_1x_1y_1+\lambda_2x_2y_2+\lambda_3x_3y_3+\lambda_4x_1y_2+\lambda_5x_2y_1,$$

où $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\in\mathbb{R}^5$.

1. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $\mathscr{F}_1=\mathscr{F}\cap\mathscr{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ et $\mathscr{F}_2=\mathscr{F}\cap\mathscr{A}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$, où $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{A}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des formes bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques) sur $\mathbb{R}^3$. Quelles sont leurs dimensions respectives ?
3. Montrer que $\mathscr{F}=\mathscr{F}_1\oplus\mathscr{F}_2$.

Exercice 101. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, supposé de dimension finie. On considère l'application f de $\mathscr{L}(E,E;\mathbb{R})$ dans $\mathscr{L}(E,E;\mathbb{R})$ telle que

$$\forall b\in\mathscr{L}(E,E;\mathbb{R}),\ \forall (x,y)\in E^2,\ f(b)(x,y)=b(y,x).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E,E;\mathbb{R})$.
2. Déterminer le spectre de f, ainsi que les sous-espaces propres associés.

3 Formes quadratiques

Exercice 102. Déterminer lesquelles des applications suivantes définissent une forme quadratique et, le cas échéant, donner leur forme polaire.

1. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = P(0)P(1)P(2)$. 2. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = 2\,P(1)P'(1)$. 3. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = |P(0)P(1)|$.

Exercice 103. Soit q l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in M_2(\mathbb{R}),\ q(A) = \det(A).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et écrire la matrice qui lui est associée relativement à la base canonique.
2. Déterminer la signature, le rang et le noyau de q.

Exercice 104. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et b une forme bilinéaire sur E. On note q la forme quadratique associée à b. Établir que

1. $\forall (x,y,z) \in E^3$, $q(x+y) + q(y+z) + q(x+z) - q(x+y+z) = q(x) + q(y) + q(z)$.
2. $\forall (x,y) \in E^2$, $q(x+y) + q(x-y) = 2\,q(x) + 2\,q(y)$ et $q(x+y) - q(x-y) = 2\,(b(x,y) + b(y,x))$.

Exercice 105. (cône isotrope) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q une forme quadratique sur E. On rappelle qu'un vecteur x de E est dit isotrope pour q si $q(x) = 0$ et qu'un couple de vecteurs (x,y) de E sont orthogonaux pour q si $b(x,y) = 0$, où b est la forme polaire de q.

1. Soit x un vecteur de E. Montrer que

$$x \text{ est isotrope pour } q \implies \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\,x \text{ est isotrope pour } q.$$

2. Soit x et y deux vecteurs de E qu'on suppose isotropes pour q. Montrer que

$$x+y \text{ est isotrope pour } q \implies x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux pour } q.$$

Exercice 106. On considère la forme quadratique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ q(x) = {x_1}^2 + 4\,{x_2}^2 - 3\,x_1x_2.$$

1. Déterminer la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la forme polaire de q.
3. Réduire q sous la forme d'une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

Exercice 107. Effectuer une réduction de Gauss, puis déterminer la signature, le rang et le noyau des formes quadratiques suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = {x_1}^2 + 5\,{x_2}^2 + 3\,{x_3}^2 + 4\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = 2\,{x_1}^2 - 2\,{x_2}^2 - 6\,{x_3}^2 + 3\,x_1x_2 - 4\,x_1x_3 + 7\,x_2x_3$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = {x_1}^2 + (1+a){x_2}^2 + (1+a+a^2){x_3}^2 + 2\,x_1x_2 - 2a\,x_2x_3$ (on discutera suivant la valeur du paramètre réel a).
4. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - a\,{x_3}^2 + 3\,x_1x_2 - b\,x_1x_3 + x_2x_3$ (on discutera suivant les valeurs des paramètres réels a et b).
5. $\forall x \in \mathbb{R}^4$, $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}^4$, $q(x) = {x_1}^2 + (1+2\alpha-\beta)\,{x_2}^2 + (1+\alpha)\,{x_3}^2 + (1+2\alpha+\beta)\,{x_4}^2 + 2\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3 - 2\,x_1x_4 + 2(1-\alpha)x_2x_3 - 2(1+\alpha)x_2x_4 + 2(\alpha-1)\,x_3x_4$ (on discutera suivant les valeurs des paramètres réels α et β).
7. $\forall x \in \mathbb{R}^5$, $q(x) = x_1x_2 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 - x_3x_5 + 2\,x_4x_5$.

Exercice 108. Soit q la forme quadratique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = 4\,{x_1}^2 + 2\,{x_2}^2 + 10\,{x_3}^2 + 2\,x_1x_2 + 10\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3.$$

1. Écrire la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la forme q est définie positive en utilisant le critère de Sylvester.
3. De la même façon, étudier la forme $q(x) = 4\,{x_1}^2 + 2\,{x_2}^2 + 9\,{x_3}^2 + 2\,x_1x_2 + 10\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3$.

Exercice 109. Soit λ et μ deux nombres réels. On définit sur $E = M_2(\mathbb{R})$ la forme q suivante

$$\forall A \in E,\ q(A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A^2) + \mu\,\det(A).$$

1. Vérifier que q est une forme quadratique.
2. Déterminer en fonction de λ et de μ le rang et la signature de q, en séparant les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.

Exercice 110. Soit q la forme définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in E,\ q(P) = P(0)P(1).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.
2. Déterminer la matrice de q relativement à la base canonique de E.
3. Donner la signature de q. La forme q est-elle positive ? Négative ?
4. Déterminer une base (P_1, P_2, P_3) de E pour laquelle $q\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i P_i\right) = {\alpha_1}^2 - {\alpha_2}^2$.

Exercice 111. Soit n un entier naturel non nul. Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$b(P,Q) = \int_0^1 t\,P(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } q(P) = b(P,P).$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
2. Montrer que q est une forme quadratique. Est-elle définie ? Si ce n'est pas le cas, exhiber un vecteur isotrope non nul.
3. Calculer la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n = 2$, déterminer la signature de q. La forme q est-elle positive ? Négative ?
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit orthogonale par rapport à q.

Exercice 112. Soit n un entier naturel non nul. On considère la forme q définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ q(P) = \int_{-1}^1 P(t)P(-t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire comme la somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair.
2. Montrer que q est une forme quadratique et déterminer sa signature.

Exercice 113. Soit n un entier naturel non nul, q_1 et q_2 deux applications respectivement définies par

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ q_1(A) = (\mathrm{tr}(A))^2 \text{ et } q_2(A) = \mathrm{tr}(A^\top A).$$

Montrer que q_1 et q_2 sont des formes quadratiques. Sont-elles positives ? Définies positives ?

Exercice 114. Déterminer la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la signature et le rang des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ suivantes.

1. $q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j$.
2. $q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j^2 x_i x_j$.

Exercice 115. ⋄ Soit n un entier naturel non nul. La matrice d'ordre n $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? Si oui, est-elle définie ?

Exercice 116. Soit une forme quadratique sur un espace vectoriel réel, que l'on suppose définie. Montrer qu'elle garde un signe constant.

Exercice 117. Soit

$$E = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid a_{11} - a_{22} = 0\} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour toutes matrices A et B de E, on pose

$$b(A,B) = \mathrm{tr}(AJB).$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?
2. Montrer que la famille $\mathscr{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice de la forme quadratique q associée à b relativement à la base $\mathscr{B}$.
4. Déterminer la signature de q, son rang et son noyau.

Exercices supplémentaires

Exercice 118. Soit n un entier naturel non nul et q l'application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ q(A) = \mathrm{tr}\left(A^2\right).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et donner son noyau.
2. Montrer que la restriction de q au sous-espace des matrices symétriques est définie positive.
3. Donner une base de $M_n(\mathbb{R})$ relativement à laquelle la matrice associée à q est diagonale. Expliciter cette matrice et donner la signature de q.

Exercice 119. (produit de Schur de deux matrices) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$. On définit le *produit de Schur de A et de B* comme étant la matrice $A \circ B = (a_{ij} b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

1. Si A est positive et de rang 1, montrer en utilisant la réduction de Gauss de la forme quadratique associée à A qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $a_{ij} = \lambda_i \lambda_j$.
2. Si A et B sont positives et de rang 1, montrer que la matrice $A \circ B$ est positive.
3. De manière plus générale, si A et B sont positives, montrer que la matrice $A \circ B$ est positive.
4. Si A est positive, montrer que la matrice $E = (e^{a_{ij}})_{1\leq i,j\leq n}$ est positive.

4 Espaces euclidiens

4.1 Produits scalaires

Exercice 120. Dire si les formes suivantes sont linéaires en la première variable, en la deuxième, bilinéaires, symétriques, positives, non dégénérées et si elles définissent un produit scalaire sur l'espace vectoriel considéré. Dans le dernier cas, écrire l'inégalité de Cauchy–Schwarz associée.

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $b(x,y) = 2\,x_1 y_1 - 3\,x_2 y_2 - x_3 y_3$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $b(x,y) = 2\,{x_1}^2 + {y_3}^2 + 3\,x_1 y_2 + 5\,x_2 y_3$.
3. $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $b(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
4. $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$, $b(P,Q) = (\alpha_0 + \alpha_1)\beta_0 + (\alpha_0 + 3\,\alpha_1)\beta_1 + 3\,\alpha_2\beta_2$, avec $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2$ et $Q(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$.

Exercice 121. Soit α et β deux nombres réels et la forme b définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ b(x,y) = x_1 y_1 + \beta\, x_1 y_2 + \beta\, x_2 y_1 + \alpha\, x_2 y_2.$$

Donner, lorsqu'il y en a, les valeurs de α et β pour lesquelles b est

1. linéaire en la première variable,
2. linéaire en la deuxième variable,
3. symétrique,
4. positive,
5. non dégénérée,
6. un produit scalaire.

Exercice 122. (produit scalaire pour des matrices) Soit n un entier strictement positif. On pose

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}),\ \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B).$$

1. Montrer que la forme ainsi définie est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour toutes matrices réelles symétriques A et B, on a

$$\left(\mathrm{tr}(AB)\right)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

Exercice 123. Montrer que chacune des formes suivantes définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel E considéré.

1. $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ sur .
2. $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)\,\mathrm{d}t$, où $w \in E$ satisfait $w > 0$ sur $]a,b[$.

Exercice 124. (condition nécessaire et suffisante pour avoir un produit scalaire) Soit E un espace préhilbertien réel de produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, a un vecteur unitaire de E et k un réel. On définit l'application b par

$$\forall (x,y)\in E\times E,\ b(x,y)=\langle x,y\rangle + k\,\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que b soit un produit scalaire sur E.

Exercice 125. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère deux vecteurs non nuls u et v d'un espace euclidien E de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et la norme associée est notée $\|\cdot\|$, et la forme quadratique q définie par

$$\forall x\in E,\ q(x)=\langle u,v\rangle\langle x,x\rangle-\langle u,x\rangle\langle v,x\rangle.$$

1. Vérifier que la forme polaire b de q est donnée par

$$\forall (x,y)\in E^2,\ b(x,y)=\langle u,v\rangle\langle x,y\rangle-\frac{1}{2}\left(\langle u,x\rangle\langle v,y\rangle+\langle u,y\rangle\langle v,x\rangle\right).$$

2. On suppose dans cette question que les vecteurs u et v sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que $v=\lambda u$. Exprimer la forme q en fonction du vecteur u et du réel λ. En déduire le rang et la signature de q en fonction de la valeur de λ.

On suppose dans suite de l'exercice que les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires et l'on pose $v=\lambda u+w$, où $\lambda\in\mathbb{R}$ et $w\in(\mathrm{Vect}\{u\})^{\perp}$, $w\neq 0_E$.

3. Écrire la forme polaire de q en fonction de u, w et λ.
4. Soit $\mathscr{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$ une base orthonormée de E telle que $e_1=\frac{u}{\|u\|}$ et $e_2=\frac{w}{\|w\|}$. Exprimer la matrice de q relativement à la base $\mathscr{B}$, en fonction de λ, $\|u\|$ et $\|w\|$.
5. Quels sont le rang et la signature de q lorsque $\lambda=0$? Quel est le rang de q lorsque $\lambda\neq 0$?

Exercice 126. ⋄ (théorème de Fréchet–Jordan–von Neumann) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E vérifiant l'*identité du parallélogramme* [1],

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

On se propose de démontrer que $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire. Pour cela, on définit la forme b suivante :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ b(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right).$$

1. Montrer que pour tout (x,y,z) de E^3, on a $b(x+z,y)+b(x-z,y)=2\,b(x,y)$.
2. Montrer que pour tout (x,y) de E^2, on a $b(2\,x,y)=2\,b(x,y)$.
3. Montrer que pour tout (x,y) de E^2 et tout rationnel r, on a $b(r\,x,y)=r\,b(x,y)$.
4. Montrer que pour tout (u,v,w) de E^3, $b(u,w)+b(v,w)=b(u+v,w)$.
5. Montrer que b est symétrique et définie positive.
6. Déduire des questions précédentes que b est bilinéaire et conclure.

Exercices supplémentaires

Exercice 127. ⋄ On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels muni du produit scalaire $\langle P,Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Existe-t-il un polynôme R tel que $\langle P,R\rangle=P(0)$ pour tout polynôme P ?

Exercice 128. ⋄ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n. On suppose qu'il existe $n+1$ vecteurs $e_1,\dots,e_{n+1}$ tels que

$$\forall (i,j)\in\{1,\dots,n+1\}^2,\ i\neq j\Rightarrow \left\langle e_i,e_j\right\rangle<0.$$

1. Montrer, en utilisant la norme de x, que, si $x=\sum_{i=1}^n\lambda_i e_i$, alors $\sum_{i=1}^n|\lambda_i|e_i=0$.
2. Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E.

1. En géométrie, la règle du parallélogramme dit que la somme des carrés des longueurs des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses deux diagonales.

4.2 Inégalité de Cauchy–Schwarz et applications

Exercice 129. Soit n un entier naturel non nul et $a_1, \dots, a_n$ des réels.

1. Montrer que l'on a
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2$$
et étudier les cas d'égalité.
2. On suppose maintenant que les réels $a_1, \dots, a_n$ sont strictement positifs et tels que $a_1 + \dots + a_n = 1$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq n^2,$$
en étudiant les cas d'égalité.

Exercice 130. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Pour toute matrice colonne X, on suppose que $\|AX\|_2 \leq \|X\|_2$. Pour toute matrice colonne X, montrer que $\|A^\top X\|_2 \leq \|X\|_2$.

Exercice 131. Soit x, y et z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$. Montrer que $(x+y+z)^2 \leq \frac{17}{10}$.

Exercice 132. Soit u une fonction continue strictement positive sur $[0,1]$. Pour tout entier naturel k, on pose $I_k = \int_0^1 u^k(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite $\left(\frac{I_{k+1}}{I_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie et croissante.

Exercice 133. (nature d'une série) Étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{k^2(\sqrt{2})^k} \sum_{j=0}^{k} \sqrt{\binom{k}{j}}$.

Exercice 134. (calcul de borne inférieure) Soit $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}^*)$. Déterminer $\inf_{u\in E} \left(\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{u(t)}\,\mathrm{d}t\right)$. Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

Exercice supplémentaire

Exercice 135. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) \geq 4.$$
Montrer que
$$36 \leq \left(\int_{-2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-2}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

4.3 Orthogonalité dans un espace euclidien

Exercice 136. (condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité) Soit E un espace vectoriel euclidien et x et y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

Exercice 137. Soit E un espace préhilbertien et A et B deux parties de E. Prouver les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.
4. $\mathrm{Vect}(A) \subset (A^\perp)^\perp$.
5. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Vect}(A) = (A^\perp)^\perp$.

Exercice 138. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. Montrer que :

1. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$,
2. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Que peut-on dire quand E est de dimension finie ?

4.4 Bases orthonormales

Exercice 139. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique, orthonormaliser la base $\{(1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,0)\}$ selon le procédé de Gram–Schmidt.

Exercice 140. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ par rapport au produit scalaire

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 141. (une caractérisation des bases orthonormales) Soit E un espace préhilbertien et $\{e_1,\dots,e_n\}$ une famille de n vecteurs de E de norme unitaire, tels que l'on a

$$\forall x\in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x,e_k\rangle^2.$$

Montrer que E est de dimension n et que la famille $\{e_1,\dots,e_n\}$ est une base orthonormale de E.

Exercice 142. (caractérisation des similitudes) Soit E un espace euclidien, f un endomorphisme de E et λ un réel strictement positif. On dit que f est une *similitude* de rapport λ si

$$\forall x\in E,\ \|f(x)\| = \lambda\,\|x\|.$$

1. Question préliminaire : soit u et v des vecteurs de E tels que $u+v\perp u-v$. Montrer que $\|u\|=\|v\|$.
2. Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x),f(y)\rangle = \lambda^2\,\langle x,y\rangle.$$

3. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement f est non nulle et conserve l'orthogonalité : pour tout couple (x,y) de E^2, si $x\perp y$, alors $f(x)\perp f(y)$.
   (a) Prouver le sens direct.
   (b) Soit $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base orthonormale de E. Montrer que, pour tout couple (i,j), $\|f(e_i)\|=\|f(e_j)\|$.
   (c) Démontrer le sens réciproque.

Exercice 143. (généralités sur les polynômes orthogonaux) Soit $w : [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive. Pour $E=\mathbb{R}[X]$, on pose

$$\forall (P,Q)\in E^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t,$$

dont on admet qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient de plus haut degré égal à 1.
2. Montrer que, pour tout $n\geq 1$, $P_{n+1}-XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
3. En déduire, pour tout $n\geq 1$, l'existence de a_n et b_n tels que

$$P_{n+1} = (X+a_n)P_n + b_nP_{n-1}.$$

Exercice 144. ⋄ (inégalité de Hadamard) Soit E un espace euclidien de dimension n, $n\in\mathbb{N}^*$, et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Montrer que

$$\forall (e_1,\dots,e_n)\in E^n,\ |\det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n)| \leq \|e_1\|\dots\|e_n\|,$$

en précisant les cas d'égalité.

Exercices supplémentaires

Exercice 145. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique, appliquer le procédé de Gram–Schmidt à la famille de vecteurs $\{(1,1,0),(0,\sqrt{2}/2,1),(\sqrt{2}/2,0,1)\}$.

Exercice 146. On munit $\mathbb{R}^4$ de la structure euclidienne canonique et on considère les vecteurs $u_1=(0,0,0,1)$, $u_2=(1,0,1,0)$, $u_3=(1,-3,0,2)$ et $u_4=(3,-3,-2,1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Orthonormaliser $\mathscr{B}$ selon le procédé de Gram–Schmidt.

Exercice 147. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique, on considère le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$, avec $v_1 = (1,2,-1,1)$ et $v_2 = (0,3,1,-1)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^\perp$.

Exercice 148. Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
2. On suppose de plus que
$$\forall x \in E,\ \langle f(x), x\rangle = 0.$$
Montrer que
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle f(y), x\rangle\,.$$
Que peut-on dire de f ?

4.5 Projections orthogonales

Exercice 149. Soit E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout x de E, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 150. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique. Soit D la droite de vecteur directeur $u = (1,2,0)$. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur D.

Exercice 151. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique, on considère le sous-espace vectoriel F défini par
$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

1. Quelles sont les dimensions de F et $F^\perp$? Donner un système d'équations cartésiennes de $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.
3. Déterminer la distance d'un élément x de $\mathbb{R}^4$ à F.

Exercice 152. On considère $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique et le plan P d'équations
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer les matrices de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P.
2. Calculer la distance d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ à P.

Exercice 153. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de :

— la projection orthogonale sur la droite d'équations $3x_1 = 6x_2 = 2x_3$,
— la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur unitaire $\boldsymbol{u} = (a,b,c)$,
— la projection orthogonale sur le plan d'équation $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$, où les réels a, b et c sont les coordonnées du vecteur u ci-dessus.

Exercice 154. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et p un endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
Démontrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation. Déterminer la distance du point de coordonnées $(1,1,1)$ à ce plan.

Exercice 155. (polynômes et projection) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni de la structure euclidienne canonique, et l'hyperplan $H = \{P \in E \,|\, P(1) = 0\}$ de E.

1. Déterminer une base orthonormale de H.
2. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Exercice 156. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire
$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que le sous-ensemble F de E formé des polynômes P tels que $P(1) = 0$ est un plan vectoriel de E.

2. Déterminer l'orthogonal de F.
3. Déterminer la projection orthogonale du polynôme constant égal à 1 sur F.

Exercice 157. Soit un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E = M_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}),\ \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

1. Soit D_0 le sous-espace vectoriel des matrices scalaires :

$$D_0 = \{\lambda I_n \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

   Déterminer ${D_0}^\perp$ et les projections orthogonales sur D_0 et ${D_0}^\perp$.
2. Faire de même pour le sous-espace D_1 des matrices diagonales.

Exercice 158. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles, muni du produit scalaire défini par

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto \cos(t)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Soit c un réel. On pose

$$I(a,b) = \int_0^\pi (a\ \sin(t) + b\ \cos(t) - c)^2\,\mathrm{d}t.$$

   Déterminer les réels a_0 et b_0 réalisant

$$I(a_0,b_0) = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I(a,b)$$

   et calculer $I(a_0,b_0)$.

Exercice 159. (méthode des moindres carrés) Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$. On munit $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. On considère une matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ dont le rang vaut p et une matrice B de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\| \,|\, X \in M_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

2. Montrer que X_0 est l'unique solution de

$$A^\top AX = A^\top B.$$

3. Application : déterminer

$$\inf\left\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2 \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 160. $\diamond$ **(déterminant de Gram)** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension p ($p > 2$) sur $\mathbb{R}$, de produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Pour toute famille de vecteurs $\{u_1,\dots,u_n\}$ donnée de E, on pose $G(u_1,\dots,u_n) = \left(\left\langle u_i,u_j\right\rangle\right)_{1\leq i,j\leq n}$ (*matrice de Gram*) et $\gamma(u_1,\dots,u_n) = \det(G(u_1,\dots,u_n))$ (*déterminant de Gram*).

1. Montrer que $\mathrm{rang}(G(u_1,\dots,u_n)) = \mathrm{rang}(\{u_1,\dots,u_n\})$.
2. Montrer que la famille $\{u_1,\dots,u_n\}$ est liée si et seulement si $\gamma(u_1,\dots,u_n) = 0$ et qu'elle est libre si et seulement si $\gamma(u_1,\dots,u_n) > 0$.
3. On suppose maintenant que $\{u_1,\dots,u_n\}$ est libre dans E (et donc que $n \leq p$). On pose $F = \mathrm{Vect}(\{u_1,\dots,u_n\})$. Pour x dans E, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d_F(x) = \|x - p_F(x)\|$ la distance de x à F. Montrer que $d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x,u_1,\dots,u_n)}{\gamma(u_1,\dots,u_n)}}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 161. Soit E un espace vectoriel euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux définis sur E. Montrer l'équivalence entre :

1. $\operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Im}(q)$.
2. Pour tout x de E, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Exercice 162. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, E un espace vectoriel de dimension n et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une famille de vecteurs unitaires de E. On suppose que

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ i \neq j \implies \|e_i - e_j\| = 1.$$

Montrer que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E.

Exercice 163. Soit n un entier naturel, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts. On pose

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P,Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

1. Vérifier que la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale de E.
3. Déterminer la distance d'un polynôme Q de E au sous-espace $H = \left\{P \in E \mid \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$.

Exercice 164. On considère l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique.

1. Déterminer l'orthogonal de $A_3(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ à $A_3(\mathbb{R})$.

Exercice 165. Prouver l'existence et l'unicité des réels a et b tels que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 \, dx$ soit minimum. Les calculer.

Exercice 166. (régression linéaire par la méthode des moindres carrés) Un médecin imagine que la taille des enfants doit, grossièrement, croître proportionnellement à leur masse. Il pense donc qu'il doit exister une relation mathématique du type

$$\text{taille en cm} \simeq a + b \times \text{masse en kg}.$$

Afin de calculer a et b, le médecin mesure 10 enfants volontaires agés de 6 ans et obtient le tableau suivant :

Enfant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taille (en cm)	121	123	108	118	111	109	114	103	110	115
Masse (en kg)	25	22	19	24	19	18	20	15	20	21

Le médecin, bien que peut-être reconnu en pédiatrie, est malheureusement un piètre mathématicien. Il a donc calculé, en désespoir de cause et sans trop comprendre pourquoi, les différentes moyennes suivantes :

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{10} M_i/10 = 20,3 \text{ kg}, \quad \overline{T} = \sum_{i=1}^{10} T_i/10 = 113,2 \text{ cm},$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{10} \left(M_i - \overline{M}\right)^2/10 = 7,61 \text{ kg}^2, \quad R = \sum_{i=1}^{10} T_i M_i/10 = 2312,6 \text{ kg.cm}.$$

Aider le médecin en donnant (et en la justifiant) une expression de a et b en fonction des différentes moyennes $\overline{M}$, $\overline{T}$, R et σ. Calculer (de manière approchée) a et b et commenter, si possible, les résultats en utilisant les ratios (approchés) suivants :

$$\frac{R}{\sigma} = 304, \quad \frac{R\overline{M}}{\sigma} = 6169, \quad \frac{\overline{TM}}{\sigma} = 302, \quad \frac{\overline{TM}^2}{\sigma} = 6130.$$

4.6 Endomorphismes des espaces euclidiens

4.6.1 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Exercice 167. (valeurs propres réelles d'une isométrie vectorielle) On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et Q une matrice orthogonale d'ordre n.

1. On suppose que Q admet une valeur propre réelle λ et on considère un vecteur propre X associé à cette valeur propre. En calculant de deux façons différentes $\|QX\|^2$, montrer que $\lambda^2\|X\|^2 = \|X\|^2$.
2. En déduire que $\mathrm{Sp}(Q)\cap\mathbb{R} \subset \{-1,1\}$.
3. Donner un exemple de matrice orthogonale d'ordre 2 qui ne possède pas de valeur propre réelle.

Exercice 168. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On considère l'endomorphisme u de E défini par $u(P)(X) = P(-X)$. Montrer que u est une symétrie orthogonale.

Exercice 169. (sur les coefficients d'une matrice orthogonale) Soit n un entier naturel non nul $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice orthogonale d'ordre n.

1. Montrer que $|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}| \le n$. Cette inégalité est-elle optimale ?
2. Montrer que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |m_{ij}| \le n^{3/2}$.
3. Montrer que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |m_{ij}| \ge n$.

Exercice 170. (matrices orthogonales triangulaires supérieures) Caractériser les matrices orthogonales qui sont triangulaires supérieures.

Exercice 171. Soit n un entier naturel non nul et $u_1,\dots,u_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 = 1$. On considère la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i,j)\in\{1,\dots,n\}^2,\ a_{ij} = u_i u_j,$$

et $B = 2A - I_n$.

Montrer que B est orthogonale. Quelles sont les valeurs propres de A ?

Exercice 172. (conditions nécessaires et suffisantes) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On pose $S = a+b+c$ et $\sigma = ab+bc+ca$, et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que M appartient à $O(3)$ si et seulement $\sigma = 0$ et $S = \pm 1$.
2. Démontrer que M appartient à $SO(3)$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = 1$.

Exercice 173. (matrice de Householder) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout élément u non nul de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, on désigne par $H(u)$ la matrice

$$H(u) = I_n - 2\frac{UU^\top}{U^\top U}$$

où la matrice colonne U représente le vecteur u dans la base canonique.

1. Montrer que la matrice $H(u)$ est symétrique et orthogonale.
2. Soit Q une matrice orthogonale d'ordre n. Montrer que si $V = QU$ alors $H(v) = QH(u)Q^\top$, où v est l'élément de $\mathbb{R}^n$ représenté par V dans la base canonique.
3. On désigne par $\mathscr{D}$ la droite vectorielle engendrée par u et par $\mathscr{D}^\perp$ l'hyperplan orthogonal de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathscr{D}$ est stable par $H(u)$ et que $H(u)W = W$ pour toute matrice colonne W représentant un élément w de $\mathscr{D}^\perp$.

Exercice 174. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales et décrire géométriquement les isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ qu'elles représentent dans la base canonique.

1. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$. 2. $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 175. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une rotation vectorielle et déterminer son axe.

Exercice 176. Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation vectorielle d'axe dirigé et orienté par le vecteur $u = e_1 - 2e_2$ et d'angle de mesure $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 177. Caractériser les endomorphismes symétriques et orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien.

Exercice 178. Préciser la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés aux matrices suivantes dans la base canonique.

1. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 179.

1. Trouver une matrice orthogonale U de $O(2)$ qui vérifie $U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\det(U) = 1$. Une telle matrice U est-elle unique ? Calculer $U\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.
2. Trouver une matrice orthogonale U de $O(2)$ qui vérifie $U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\det(U) = -1$. Une telle matrice U est-elle unique ?
3. Soit $V \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et U une matrice orthogonale U de $O(2)$ telle que $UV = V$. Montrer que soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, soit $\det(U) = -1$.

4.6.2 Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Exercice 180. (symétrique entraîne linéaire) Soit E un espace euclidien et f une application de E dans E telle que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 181. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E vérifiant, pour tout vecteur x de E, $\langle f(x), x\rangle = 0$. Que dire de f ?

Exercice 182. Soit E un espace vectoriel euclidien, f et g deux endomorphismes symétriques de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f) = E$.
2. Montrer que $f \circ g$ est symétrique si et seulement si $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 183. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n non nulle. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de f, comptées avec leur multiplicité. Montrer que

$$\forall x \in E,\ \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x\rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Exercice 184. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, E un espace euclidien de dimension n, a un vecteur unitaire de E et λ un réel.

1. Montrer que
$$f(x) = x + \lambda\langle x, a\rangle a$$
définit un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer le spectre de f et les sous-espaces propres associés.

Exercice 185. Soit E un espace euclidien de dimension n, f un endomorphisme symétrique de E, $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ et $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ deux bases orthonormales de E.

1. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n}\|f(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|f(f_i)\|^2.$$
2. Soit A une matrice réelle symétrique d'ordre n, de valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (comptées avec leur multiplicité). Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}{a_{ij}}^2 = \sum_{i=1}^{n}{\lambda_i}^2.$$

Exercice 186. Soit A une matrice réelle.

1. Montrer que $A^\top A$ est symétrique et positive.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^\top A)$, puis que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top A)$.

Exercice 187. (limite de suite) Soit
$$A = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac14 & \frac14 \\ \frac14 & \frac13 & \frac{5}{12} \\ \frac14 & \frac{5}{12} & \frac13 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la suite de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Soit $N = \lim_{k\to+\infty} A^k$. Caractériser géométriquement l'endomorphisme associé à N.
3. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et $X_{k+1} = AX_k$ pour tout entier naturel k. Prouver que cette suite converge et déterminer sa limite en fonction de u_0, v_0 et w_0.

Exercices supplémentaires

Exercice 188. Soit f et g deux endomorphismes d'un espace euclidien E qui commutent entre eux. On suppose que les matrices S et T de f et g dans une base orthonormale de E sont respectivement symétrique et antisymétrique.

Montrer qu'on a
$$\forall x \in E,\ f(x) \perp g(x) \text{ et } \|f(x)+g(x)\| = \|f(x)-g(x)\|.$$

Exercice 189. Soit n un entier naturel non nul, E un espace euclidien de dimension n et f et g deux endomorphismes de E symétriques, ayant des valeurs propres positives.

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme φ de E symétrique, ayant des valeurs propres positives et tel que $f = \varphi\circ\varphi$.
2. Montrer que $\ker(f+g) = \ker(f)\cap\ker(g)$.

Exercice 190. Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E. On suppose qu'il existe une constante réelle α positive ou nulle telle que
$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \alpha\,\|x\|.$$
Montrer que $f^2 = \alpha^2 Id_E$.

Exercice 191. Soit n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2 et A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall (i,j)\in\{1,\dots,n\}^2,\ a_{ii} > 1 \text{ et } i\neq j \Rightarrow a_{ij} = 1.$$
Montrer que A est symétrique définie positive.

Exercice 192. Déterminer les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ symétriques, orthogonales et dont la première ligne est $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Exercice 193. (matrice symétrique à puissance nulle) Soit A une matrice réelle symétrique. On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$. Que dire de A ?

4.7 Diagonalisation des matrices symétriques et applications

Exercice 194. Dans chacun des cas suivants, déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^\top$.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 195. Déterminer une base orthonormée formée de vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Interpréter géométriquement l'endomorphisme qui est représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 196. Soit n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2 et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $M_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que l'on a $a_{ij} = 1$ si $i = j+1$ ou $i = j-1$ et 0 sinon).

1. Soit λ un réel. Que peut-on dire du rang de $A - \lambda I_n$?
2. Montrer que A admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

Exercice 197. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer les matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AA^\top AA^\top A = I_n$.

Exercice 198. Soit n un entier naturel non nul, A une matrice réelle d'ordre n et p un entier naturel non nul. Montrer que $(A + A^\top)^p$ est nulle si et seulement si A est antisymétrique.

Exercice 199. Pour n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2, on considère $M_{n,1}(\mathbb{N})$ muni de la structure euclidienne canonique et A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les valeurs propres de $B = A^\top A$ sont strictement positives.
2. Montrer que si la famille $\{X_1, \dots, X_n\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale et que la famille $\{AX_1, \dots, AX_n\}$ est orthogonale, alors les vecteurs X_i, $1 \le i \le n$, sont des vecteurs propres de la matrice B.

Exercice 200. (forme quadratique de trace nulle) Soit n un entier naturel non nul et E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Si q est une forme quadratique sur E, on appelle *trace* de q la trace de toute matrice de q relativement à une base orthonormée.

1. Montrer que cette définition a bien un sens.

On souhaite démontrer que la trace de q est nulle si et seulement s'il existe une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que $q(e_i) = 0$ pour tout i de $\{1, \dots, n\}$.

2. Montrer l'implication réciproque.
3. On suppose maintenant que la trace de q est nulle.
   (a) Trouver un vecteur e_1 de norme unitaire tel que $q(e_1) = 0$.
   (b) En déduire la propriété voulue.

Exercice 201. (« réduction » simultanée) Soient M et N deux matrices symétriques de taille d'ordre n, telles que la matrice M soit définie positive. Montrer qu'il existe une matrice inversible C telle que

$$C^\top MC = I_n \text{ et } C^\top NC = D,$$

où D est une matrice diagonale réelle.

Exercice 202. (racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit M une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une matrice R symétrique positive telle que $M = R^2$. Que dire de l'unicité d'une telle matrice ?

Exercice 203. (décomposition polaire) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (U, H), U étant orthogonale et H symétrique définie positive, tel que $A = UH$.

Exercices supplémentaires

Exercice 204. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Soit q la forme quadratique de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Utiliser la question précédente pour trouver une base q-orthogonale et déterminer la signature de q.

Exercice 205. (factorisation de Cholesky et factorisation QR) Soit n un entier strictement positif et A une matrice réelle d'ordre n.

1. On suppose dans cette question que la matrice A est symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure R à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $A = R^\top R$.
2. On suppose dans cette question que la matrice A est inversible. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (Q, R), avec Q une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, tel que $A = QR$.

Exercice 206. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Donner l'expression de la forme quadratique associée à la matrice A.
2. Pourquoi la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser la matrice A.
4. Déterminer une base orthonormée formée de vecteurs propres de la matrice A.