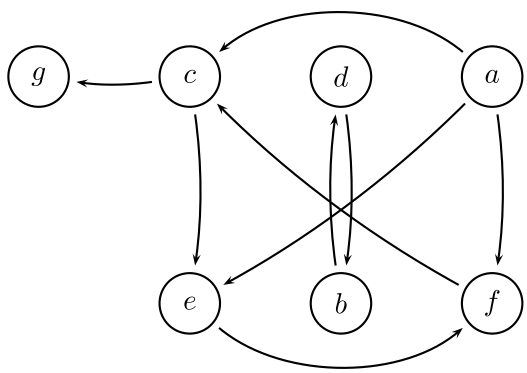
Université Paris Dauphine — **Algorithmes dans les graphes**
Licence Informatique des Organisations - 3ème année — **2021-2022**

NOM : **PRENOM :**
GROUPE :

Partiel
Durée : 1h30
Aucun document autorisé

Exercice 1 - 9 points

Après avoir exécuté DFS(G), sur le graphe ci-dessous :

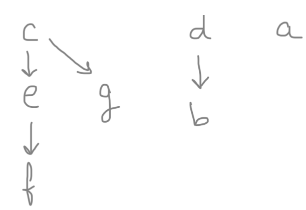


on a obtenu les numérotations suffixe et préfixe suivantes :

sommet	a	b	c	d	e	f	g
pref	7	6	1	5	2	3	4
suff	7	5	4	6	2	1	3

1. Donner la liste des arcs d'arbre.

   Correction
   En suivant les indications des numéros suffixes et préfixes, on obtient les trois arborescences ci-dessous décrivant l'exploration de G par DFS

   La liste des arcs d'arbre est $(c, e), (e, f), (c, g), (d, b)$.
   Pour trouver les arcs d'arbre, on ne peut pas utiliser les relations pref(i) $<$ pref(j) et suff(i) $>$ suff(j) car ces relations sont aussi vérifiées par les arcs avant.

2. Donner les listes des arcs avants, arrières et croisés.

Correction
Arcs avant = $\emptyset$
Arcs arrière = $(f, c), (b, d)$
Arcs croisé = $(a, c), (a, e), (a, f)$

3. Que peut-on dire d'un sommet i pour lequel pref(i)=suff(i) ? Justifier votre réponse.

Correction
Si pref(i) = suff(i) cela signifie que, dans l'arborescence à laquelle appartient i, son **nombre de descendants est égal à son nombre d'ascendants**.

Supposons que i appartient l'arborescence de racine r, notée $\mathcal{A}(r)$, et que pref$(r) = b$. Le suffixe du premier sommet fermé dans $\mathcal{A}(r)$ sera donc égal à b. On suppose que i est le kième sommet exploré dans $\mathcal{A}(r)$ (après r) donc pref$(i) = b + k$. Quand on explore i, le numéro suffixe est égal à $b + k - |\mu_{\mathcal{A}(r)}[r, i]|$ car on a fermé tous les sommets explorés avant i sauf ceux appartenant au chemin allant de r à i dans $\mathcal{A}(r)$. Puis avant de fermer i, il faut fermer $|\mathcal{A}(i)| - 1$ sommets. Donc, suff$(i) = b + k - |\mu_{\mathcal{A}(r)}[r, i]| + |\mathcal{A}(i)|$. En conséquence, si pref(i) = suff(i), cela implique que $|\mu_{\mathcal{A}(r)}[r, i]| = |\mathcal{A}(i)|$, avec $\mu_{\mathcal{A}(r)}[r, i]$ l'ensemble des ascendants de i dans $\mathcal{A}(r)$ et $\mathcal{A}(i)$ l'ensemble des descendants de i dans $\mathcal{A}(r)$.

4. Déterminer les composantes fortement connexes de G en appliquant l'algorithme de Kosaraju-Shamir (vous prendrez soin de bien détailler chacune des étapes). Représenter le graphe réduit G^r. Déterminer la fermeture transitive de G^r (sans appliquer l'algorithme).

Correction
Algo de Kosaraju-shamir
Etape 1 : Utiliser les numéros suffixes de la question 1.
Etape 2 : Définir G^{-1}
Etape 3 : Appliquer DFS(G^{-1}) en démarrant chaque nouvelle arborescence par le sommet non encore exploré de plus grand numéro suffixe

a ; $d \to b$; $c \to f \to e$; g

$X_1 = \{a\}$
$X_2 = \{d, b\}$
$X_3 = \{c, f, e\}$
$X_4 = \{g\}$

Conclusion : G admet 4 composantes fortement connexes : $CFC_1 = (X_1, U_1)$, $CFC_2 = (X_2, U_2)$, $CFC_3 = (X_3, U_3)$, $CFC_4 = (X_4, U_4)$

Le graphe reduit est :

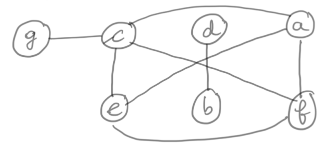
$X_1 \to X_3 \to X_4$; X_2

Pour realiser la fermeture transitive du graphe reduit, il suffit d'ajouter l'arc (X_1, X_4) :

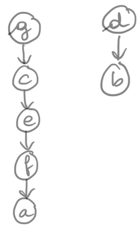
$X_1 \to X_3 \to X_4$, $X_1 \to X_4$; X_2

5. Déterminer les composantes connexes de G en appliquant l'algorithme vu en cours (vous prendrez soin de bien détailler chacune des étapes).

Etape 1 : Définir la version non orientée de G



Etape 2 : Appliquer DFS sur graphe non orienté (on explore les voisins des sommets)



Conclusion :

$\Rightarrow$ G a 2 composantes connexes cc1 et cc2

$X_1 = \{a, c, e, f, g\}$

$X_2 = \{b, d\}$.

$\boxed{CC_1 = (X_1, U_1)}$ et $\boxed{CC_2 = (X_2, U_2)}$

Exercice 2 - 8 points

Un tournoi de football rassemble cinq équipes A, B, C, D et E. Chaque équipe rencontre une seule fois les quatre autres. Chaque match se termine par la victoire d'une équipe (au bout du temps réglementaire, des prolongations sont jouées pour départager les équipes). Les résultats des matchs sont présentés dans le tableau suivant :

	B	C	D	E
A	3-1	4-2	2-0	1-2
B		0-1	1-0	3-2
C			2-1	5-0
D				0-2

Dans ce tableau, la valeur 1-2 ligne A colonne E indique le résultat du match de l'équipe A contre l'équipe E : 1 but pour l'équipe A et 2 buts pour l'équipe E. L'équipe E est donc déclarée gagnante.

1. Modéliser ce tournoi sous la forme d'un graphe, appelé graphe des victoires, permettant de représenter la relation binaire 'est vainqueur de'. Donner une représentation graphique de ce graphe des victoires. Donner la matrice d'adjacence A du graphe des victoires.
2. Que peut-on dire de ce graphe des victoires ? (Cochez la ou les bonnes réponses)
   - ☐ orienté
   - ☐ non orienté
   - ☐ connexe
   - ☐ clique
   - ☐ complet
   - ☐ plein
   - ☐ arbre
   - ☐ sans circuit

3. Si le gagnant du tournoi est l'équipe qui a réalisé le plus de victoires, que faut-il calculer dans le graphe des victoires pour déterminer l'équipe gagnante de ce tournoi ? Quelle est l'équipe qui gagne le tournois ?
4. Les règles du tournois évoluent. On affecte à chaque équipe un score calculé de la façon suivante :
   — 1 point par victoire directe,
   — 1 point par victoire indirecte : l'équipe X a une victoire indirecte sur l'équipe Y s'il existe une équipe Z telle que X a battu Z qui a elle-même battu Y.

   Par exemple, le score de l'équipe B est 4 car elle a deux victoires directes, sur D et E, et deux victoires indirectes, sur A et D.

   Le gagnant du tournoi est l'équipe qui a le score le plus élevé.

   (a) A quoi correspond une victoire indirecte dans le graphe des victoires (donner une formulation en termes de graphes) ?

   (b) Proposer un algorithme permettant le calcul des scores.

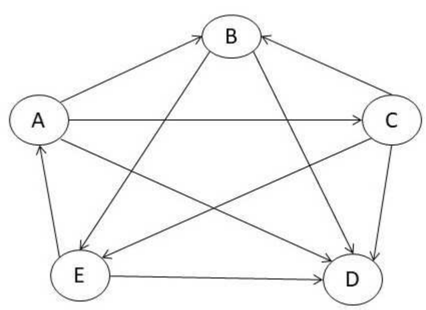
   (c) Appliquer votre algorithme et reporter les scores obtenus dans le tableau ci-dessous :

sommet	A	B	C	D	E
score					

   Donner le gagnant du tournoi.

Correction

1. Dans le graphe des victoires, les sommets sont les équipes et les arcs représentent la relation binaire 'est vainqueur de'.



La matrice d'adjacence est :

$$
\begin{matrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{matrix}
$$

2. Le graphe des victoires est orienté, connexe et complet.
3. Pour trouver le gagnant, on calcule les **demi-degré extérieurs**. A et C sont déclarés gagnant ex-aequos.
4. (a) Une victoire indirecte de l'équipe X sur l'équipe Y correspond à l'existence d'un chemin comportant 2 arcs exactement allant du sommet représentant l'équipe X vers le sommet représentant l'équipe Y dans le graphe des victoires.

(b) Voici un algorithme utilisant la matrice d'adjacence.
Etape 1 : faire le produit matriciel : A*A.

$$A*A = \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Etape 2 : faire la somme des valeurs en ligne dans A*A et ajouter les demi-degré extérieurs

On obtient le tableau des scores

sommet	A	B	C	D	E
score	8	4	7	0	5

Le gagnant est A.

Exercice 3 - 3 points

1. Soit $G = (X, E)$ un graphe simple connexe d'ordre n comportant $n - 1$ arêtes. Montrer que G possède nécessairement au moins un sommet de degré 1.

   Correction
   Comme G est connexe, $\forall i \in X, d(i) \geq 1$.
   Si tous les sommets sont de degré au moins 2, on a :

   $$\sum_{i \in X} d(i) \geq 2n$$

   Comme $\sum_{i \in X} d(i) = 2m$, on a : $2m \geq 2n$ ce qui contredit $m = n - 1$.
2. Etant donné un graphe simple $G = (X, E)$ dont le nombre de connexité est égal à 2, montrer que son graphe complémentaire, noté $\overline{G} = (X, \overline{E})$, est nécessairement connexe.

   Correction
   Définition du graphe complémentaire : $\overline{E} = \{(i, j) \in X \times X \ t.q. \ (i, j) \notin E\}$
   On note CC1 (respectivement CC2) l'ensemble de sommets appartenant à la première (respectivement à la seconde) composante connexe. Par définition des composantes connexes, il n'existe aucun arc dans G de la forme $\{i, j\}$ avec i appartenant à CC1 et j appartenant à CC2. En conséquence, dans le graphe complémentaire, il existe un arc entre i et j, $\forall i \in$ CC1 et $\forall i \in$ CC2.
   De plus, il existe une chaine entre n'importe quel sommet i et j de CC1, en passant par un sommet de CC2. Idem pour i et $j \in$ CC2.
   En conséquence, le graphe complémentaire est nécessairement connexe.