Contrôle continu du 7 octobre 2020

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 1h30

Exercice 1 (4 points). Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer le polynôme minimal de A.
3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 2 (3 points). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et u un endomorphisme de E vérifiant

$$u^3 - 3u^2 + 2u = 0_{\mathscr{L}(E)} \text{ et } u^8 + 16u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de u.
2. Que dire de u ?

Exercice 3 (10 points). Soit a, b, c et d quatre nombres réels tels que $bcd \neq 0$. On définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les matrices $A + A^\top$, $AA^\top$ et $(X I_4 - A)(X I_4 - A^\top)$, où X est un nombre réel.
2. En déduire le polynôme caractéristique de A.
3. Montrer que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $A^2 - 2aA + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) I_4$ et en déduire le polynôme minimal de A.
5. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

On suppose désormais que $a = 1$, $b = c = d = -1$.

6. Vérifier que $\begin{pmatrix} i\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ i\sqrt{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A.
7. En utilisant que la matrice A est réelle, en déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
8. Montrer que $A^3 = -8 I_4$ et, pour tout entier naturel n, donner l'expression de A^n en fonction de A et I_4.
9. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$$
et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de U_n en fonction de n.

Exercice 4 (3 points). Soit A, B et C trois matrices de $M_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe trois nombres complexes α, β et γ non tous nuls tels que la matrice $\alpha A + \beta B + \gamma C$ admette une unique valeur propre (*on pourra distinguer les cas pour lesquels la famille formée de A, B et C est respectivement liée et libre*).