Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2023 - 2024)

Partiel - Vendredi 3 novembre 2023.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace de probabilité tel que Ω soit infini dénombrable. Justifier qu'il n'existe pas de probabilité uniforme sur cette espace (i.e. de probabilité qui donne la même valeur à tous les singletons de Ω).
2. On lance un dé non pipé.
   (a) Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ pour cette expérience.
   (b) Rappeler la définition d'une variable aléatoire et donner la loi de la variable $X : \omega \in \Omega \to (\omega - 3)^2$.
3. On lance trois fois de suite un dé non pipé.
   (a) Proposer un espace de probabilité pour cette expérience.
   (b) Définir mathématiquement la variable aléatoire X correspondant au nombre de valeurs distinctes obtenues parmi les trois lancers.
   (c) Déterminer la loi de X.

Correction.

1. Par l'absurde : soit $p \in [0,1]$ la probabilité commune à tous les singletons. Par sigma additivité, $\sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\{\omega\}) = 1$. Or si $p = 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\{\omega\}) = 0$ et si $p > 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\{\omega\}) = +\infty$.
2. (a) On peut prendre $\Omega = \{1, \cdots, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme.
   (b) La variable X est discrète on peut donc la caractériser par son image $Im(X) = \{0, 1, 4, 9\}$ et sa fonction de poids q. On a $q(0) = \mathrm{P}(X = 0) = \mathrm{P}(\{3\}) = 1/6$; $q(1) = \mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(\{2, 4\}) = 2/6$; $q(4) = \mathrm{P}(X = 4) = \mathrm{P}(\{1, 5\}) = 2/6$ et $q(9) = \mathrm{P}(X = 9) = \mathrm{P}(\{6\}) = 1/6$.
3. (a) On peut prendre $\Omega = \{1, \cdots, 6\}^3$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme (on note que $Card(\Omega) = 6^3$).
   (b) On peut définir pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = Card(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 1 + 1_{\omega_1 \neq \omega_2} + 1_{\omega_3 \neq \omega_1} 1_{\omega_3 \neq \omega_2}$
   (c) La loi de X est discrète donc caractérisée par son image $\{1, 2, 3\}$ et sa fonction de poids q. On vérifie que $\{X = 1\} = \{(i, i, i), \imath = 1, \cdots, 6\}$ est de cardinal 6 donc $q(1) = 6/6^3 = 1/36$; puis que $\{X = 3\}$ est de cardinal $6 \times 5 \times 4$ donc $q(3) = 20/36$; enfin pour que les poids somment à 1, $q(1) = 1 - 1/36 - 20/36 = 15/36$.

Exercice 2. Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

1. On considère la fonction F suivante :

$$F : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 3/4 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

   (a) Montrer qu'il s'agit d'une fonction de répartition.

   (b) Décrire la probabilité P associée à F.

2. On considère la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto Ce^{-3x}1_{\mathbb{R}^+}(x)$$

   (a) Déterminer C pour que f soit une densité. On considère par la suite m la probabilité ayant f pour densité.

   (b) On considère la fonction P qui à tout borelien B associe

$$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}m(B) + \frac{1}{4}\delta_{-1}(B) + \frac{1}{4}\delta_1(B)$$

      i. Montrer que P est une probabilité.

      ii. Calculer sa fonction de répartition et dessiner son graphe.

      iii. Cette probabilité est elle à densité ? Discrète ?

Correction.

1. (a) On vérifie facilement les trois points qui caractérisent les fonctions de répartition : croissante, càd et limite nulle en $-\infty$ et égale 1 en $+\infty$.

   (b) On note P la loi associée à F. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(\{x\}) = F(x) - F(x-)$. On a donc $\mathrm{P}(\{0\}) = 1/2$, $\mathrm{P}(\{2\}) = 1/4$ et $\mathrm{P}(\{4\}) = 1/4$. On en déduit que $\mathrm{P} = 1/2\ \delta_0 + 1/4\ \delta_2 + 1/4\ \delta_4$.

2. (a) Pour que f soit une densité il faut que $\int f(x)dx = 1$ ce qui conduit à $C = 3$. On vérifie par ailleurs aisément que f est positive et c'est donc bien une densité !

   (b) i. On vérifie que $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ et pour toute suite (A_n) de boréliens :

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} m(A_n) + \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\delta_{-1}(A_n) + \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\delta_1(A_n) = \sum_{n\geq 1}\mathrm{P}(A_n).$$

      ii. On calcule et : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1/4 & \text{si } x \leq -1 < 0 \\ 1/4 + 1/2(1 - e^{-3x}) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 + 1/2(1 - e^{-3x}) & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

iii. La probabilité n'est pas à densité puisqu'elle charge des singletons. Elle n'est pas non plus discrète car la somme des probabilités des singletons est strictement inférieure à 1.

Exercice 3. On considère une espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

1. Montrer que $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements. Montrer que

$$\mathrm{P}(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i) \geq \sum_{1 \leq i \leq n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathrm{P}(A_i \cap A_j)$$

3. Soit $N \geq 1$ un entier. À partir de cette question on travaille sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ où l'univers Ω est l'ensemble des bijections de $\{1, \cdots, 2N\}$ dans $\{1, \cdots, 2N\}$; la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$; et P est la probabilité uniforme.
   (a) (Échauffement non nécessaire pour la suite !) Soit $1 \leq i \leq 2N$. On considère la variable $X_i : \omega \in \Omega \to \omega(i)$. Donner la loi de X_i.
   (b) Soit $1 \leq i \leq N$. On considère l'événement

   $$A_i = \{\omega \in \Omega \text{ tel qu'il existe } k \in \{1, \cdots, 2N\}, \text{ tel que } \{\omega(k), \omega(k+1)\} = \{i, i+N\}\},$$

   (pour bien comprendre la définition de l'événement ci-dessus, on rappelle que dans un ensemble l'ordre des éléments ne compte pas ; par exemple $\{a, b\} = \{b, a\}$*).*
   Calculer la probabilité de A_i.
   (c) Soit $1 \leq i < j \leq N$. Calculer la probabilité de $A_i \cap A_j$.
   (d) Écrire l'événement

   $$A = \text{“ il existe } i \text{ dans } \{1, \cdots, 2N-1\} \text{ tel que } |\omega(i) - \omega(i+1)| = N\text{”}$$

   en utilisant les $(A_i)_{1 \leq i \leq N}$ puis montrer que $\mathrm{P}(A) > 1/2$.

Correction.

1. Voir le cours.
2. Par récurrence. L'initialisation est faite à la question précédente. On suppose la propriété vraie au rang n et on obtient, toujours avec la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\cup_{1 \leq i \leq n+1} A_i) &= \mathrm{P}(\cup_{1 \leq i \leq n} A_i) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \mathrm{P}(A_{n+1} \cap (\cup_{1 \leq i \leq n} A_i)) \\ &\overset{HR_n}{\geq} \sum_{1 \leq i \leq n+1} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i<j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) - \mathrm{P}(\cup_{1 \leq i \leq n} A_{n+1} \cap A_i).\end{aligned}$$

   Comme $\mathrm{P}(\cup_{1 \leq i \leq n} A_{n+1} \cap A_i) \leq \sum_{i \leq n} \mathrm{P}(A_{n+1} \cap A_i)$ on conclut facilement.
   Sinon preuve directe : on remarque que les $(A_i \setminus (\cup_{j<i} A_j))_{i=1,\cdots,n}$ sont disjoints deux à deux et que leur union coïncide avec l'union des $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$ donc

$$\mathrm{P}(\cup_{1 \leq i \leq n} A_i) = \mathrm{P}(\cup_{1 \leq i \leq n} A_i \setminus (\cup_{j<i} A_j)) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathrm{P}(A_i \setminus (\cup_{j<i} A_j)).$$

Comme pour tout $i = 1, \cdots, n$, $A_i \setminus (\cup_{j<i} A_j) = A_i \setminus ((\cup_{j<i} A_j) \cap A_i)$,

$$\mathrm{P}(A_i \setminus (\cup_{j<i} A_j)) = \mathrm{P}(A_i) - \mathrm{P}(\cup_{j<i} A_j \cap A_i) \geq \mathrm{P}(A_i) - \sum_{j<i} \mathrm{P}(A_j \cap A_i)$$

et on conclut facilement.

3. (a) La variable X_i est discrète à valeurs dans $\{1, \cdots, 2N\}$. De plus pour $j \in \{1, \cdots, 2N\}$, ω est une bijection de $\{1, \cdots, 2N\} \setminus \{i\}$ dans $\{1, \cdots, 2N\} \setminus \{j\}$. On en déduit que $\{X_i = j\}$ est de cardinal $(2N-1)!$ et donc $\mathrm{P}(X_i = j) = (2N-1)!/(2N)! = 1/(2N)$. Donc la loi de X_i est la loi uniforme sur $\{1, \cdots, 2N\}$.

   (b) Pour dénombrer A_i on peut commencer par fixer k ($(2N-1)$ possibilités) puis décider si $\omega(k) = i$ ou $i+n$ (deux possibilités) et enfin fixer le reste de la bijection ($(2N-2)!$ possibilités qui correspondent au nombre de bijection d'un ensemble de $2N-2$ éléments dans lui-même). Finalement $Card(A_i) = 2(2N-1)(2N-2)!$ et on en déduit $\mathrm{P}(A_i) = 2(2N-1)!/(2N)! = 1/N$.

   (c) Soit $1 \leq i < j \leq N$. Pour dénombrer $A_i \cap A_j$, on commence par fixer l'ensemble des antécédents des i, $i+n$,j et $j+n$ en décomposant selon le plus petit élément de cet ensemble : cela donne $\sum_{k=1}^{2N-3} 2N-2-i = (2N-3)(2N-2)/2$ possibilités. On fixe ensuite l'image de ce plus petit élément (4 possibilités) ce qui détermine l'image du second plus petit puis il faut fixer l'image du troisième plus petit (2 possibilités). Enfin on fixe le reste de la bijection ($(2N-4)!$ possibilités qui correspondent au nombre de bijection d'un ensemble de $2N-4$ éléments dans lui-même. Finalement on a donc $Card(A_i \cap A_j) = 8(2N-3)(2N-2)/2\ (2N-4)! = 4(2N-2)!$ et on en déduit

$$\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \frac{4(2N-2)!}{(2N)!} = \frac{4}{2N(2N-1)}$$

   (d) On a

$$A = \cup_{i=1}^{N} A_i$$

   et on déduit donc de l'inégalité prouvée en question 2 que

$$\mathrm{P}(A) \geq \sum_{1 \leq i \leq N} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) \quad \geq 1 - \binom{N}{2} \frac{4}{2N(2N-1)}.$$

   Or $\binom{N}{2} \frac{4}{2N(2N-1)} = \frac{N-1}{2N-1} < \frac{1}{2}$ ce qui permet de conclure.