Corrigé du Partiel d'Analyse

Barème indicatif : $3 + 8 + 3,5 + 4 + 7 = 25,5$

QdC : 3 pts = $1 + 1 + 1$ cf TD

. Exo 1 8 pts = $1 + 1 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5$

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$. En 1^-, $\dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ est positive et $\sim$ à $\dfrac{1}{1-t}$ qui est le tg d'une intégrale de Riemann divergente. Par comparaison l'intégrale diverge. Rq : pas besoin du coup de regarder en 0.

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha + t^\beta}\,dt$. 1 seule singularité en $+\infty$.

* Si $\alpha < \beta$, $t^\alpha + t^\beta > 0$ et $\sim$ à t^β donc $\dfrac{1}{t^\alpha + t^\beta} \sim \dfrac{1}{t^\beta}$ et par comparaison il y a convergence ssi $\beta > 1$.
* De même si $\beta < \alpha$ convergence ssi $\alpha > 1$
* Si $\alpha = \beta$ $\dfrac{1}{t^\alpha + t^\beta} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{t^\alpha}$ donc, encore une fois par comparaison, convergence ssi $\alpha > 1$.

En définitive l'intégrale converge ssi $\max(\alpha, \beta) > 1$.

<u>Rq</u> : Ceux (nombreux) qui écrivent $2t^\alpha \sim t^\alpha$ écrivent très exactement $1 = 2$, ce qui est une erreur embêtante à votre niveau.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{t}}{t(1+t)}\,dt$. 2 singularités en 0 et $+\infty$.

. En 0^+ le sin est ≥ 0 près de 0 donc on peut raisonner par ②
équivalence et $\frac{\sin\sqrt{t}}{t(1+t)} \sim \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc convergence par comparaison avec une $\int$ de Riemann.

. En $+\infty$ $\left|\frac{\sin\sqrt{t}}{t(1+t)}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{t(1+t)}}_{\geq 0} \sim \frac{1}{t^2}$ donc convergence absolue

(et donc convergence) par comparaison avec une $\int$ de Riemann.

Au final l'$\int$ est donc convergente.

d) $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$. Singularité en $+\infty$.

$\sqrt{\ln t} \leq \ln t$ pour $t \geq e$, donc $e^{-\ln t} \leq e^{-\sqrt{\ln t}}$ par croissance de l'exponentielle. Donc $e^{-\sqrt{\ln t}} \geq \frac{1}{t}$ pour $t \geq e$ et l'intégrale est divergente par comparaison avec une $\int$ de Riemann

e) $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}$ 2 Singularités en 0 et $+\infty$

. En 0, $\frac{t-\sin t}{t^\alpha} = \frac{t^3/6 + o(t^4)}{t^\alpha} \sim \underbrace{\frac{1}{6}}_{>0} t^{3-\alpha}$. Par comparaison avec une $\int$ de Riemann, il y a donc convergence ssi $3-\alpha > -1$
ie $\underline{\alpha < 4}$

. En $+\infty$, $\frac{t-\sin t}{t^\alpha} > \frac{t-1}{t^\alpha} > 0$ dès que $t > 1$, et $\frac{t-\sin t}{t^\alpha} \sim \frac{t}{t^\alpha} = t^{1-\alpha}$.

Par comparaison avec une $\int$ de Riemann, convergence ssi $1-\alpha < -1$
ie $\alpha > 2$.

Au final convergence ssi $\alpha \in]2,4[$.

③

f) $\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$. Singularité en $+\infty$.

En posant $u = t^2$, on trouve $\int_1^T \cos t^2\,dt = \int_1^{\sqrt{T^2}} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,du$.

IPP $f'(u) = \cos u$ $\quad f(u) = \sin u$

$g(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ $\quad g'(u) = -\frac{1}{4u^{3/2}}$

$$\int_1^{\sqrt{T^2}} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} = \underbrace{\left[\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\right]_1^{T^2}}_{} + \int_1^{T^2} \frac{\sin u}{4u^{3/2}}$$

$= \frac{\sin T^2}{2T} - \sin 1 \underset{T\infty}{\longrightarrow} \sin 1$

converge abs car $\left|\frac{\sin u}{4u^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{4u^{3/2}}$

et $\int_1^T \frac{1}{4u^{3/2}}$ converge par Riemann.

Donc converge ie a une limite finie quand $T \to +\infty$.

En faisant la somme des deux termes on voit que $\int_1^T \cos t^2\,dt$ converge en $T\infty$, ie l'intégrale est convergente.

Exo 2 $\quad 3{,}5 = 1 + 0{,}5 + 1 + 1$

1) : à faire chez vous avant le 1er TD, puis corrigé en TD, puis donné au CC 1 (à une constante multiplicative près), puis à refaire chez vous, puis dans le corrigé du CC 1. Si vous ne savez

pas le faire, arrêtez de lire ce corrigé et faites le.

2) On trouvait $v_n \sim -\frac{1}{12n^2}$, v_n était donc de signe constant (négatif) pour n grand, et par comparaison avec une série de Riemann la série de tg v_n est convergente.

3) Beaucoup l'ont fait directement ce qui était faisable mais pas évident. La formule étant donnée il était beaucoup plus simple de raisonner par récurrence.

Pour $n = 2$, $v_2 = 1 + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{2}\ln 2 = \ln 2! - \frac{5}{2}\ln 2 + 1$ ok

. Supposons vrai à l'ordre n.

Alors $\sum_{k=2}^{n+1} v_k = \sum_{k=2}^{n} v_k + v_{n+1} = \ln n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n - 1$
$+ 1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$= \ln n! + n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n+1$

$= \ln\left((n+1)!\right) + n - \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln n+1$ cqfd.

4) On a montré que $\sum_{k=2}^{n} v_k = \ln n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n - 1$

Mais la série converge d'après 2), ie $\sum_{k=2}^{n} v_k = l + o(1)$ pour un certain réel l.

En passant à l'exp:

$e^{l} \times \underbrace{e^{o(1)}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 1} = n! \cdot \frac{e^n}{e\, n^n \times \sqrt{n}}$ ie $e^{l} \sim \frac{n!\, e^n}{e\, n^n \sqrt{n}}$ et

$n! \sim \underbrace{e^{l} \times e}_{\substack{\text{constante} \\ \text{que l'on note } K>0}} \times \sqrt{n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Exo 3 $4 = 1+1+1+1$.

L'exercice vous a laissé dans une grande perplexité, pour des raisons n'ayant je pense rien à voir avec séries et intégrales. Je vous suggère d'arrêter 5 min de lire le corrigé et de chercher le lien logique entre

"La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ converge quand $x \to +\infty$".

"La suite $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ converge quand $n \to +\infty$".

Vous devriez être capable de comprendre vite quelle assertion implique l'autre, écrire une preuve (qui ne soit pas "c'est évident") et trouver un contre exemple pour l'implication réciproque.

Un grand nombre de copie semble croire que tout est équivalent et n'utilise aucune hypothèse (ou de manière factice) dans les 2) et 3), ce qui n'a clairement aucune chance de fonctionner).

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_n = \int_0^{n+1} f(t)\,dt$ par Chasles.

Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge vers ℓ, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \hat{T} \in \mathbb{R}$ tq

$$\left| \int_0^{T} f(t)\,dt - \ell \right| \leq \varepsilon \qquad \forall T \in \mathbb{R}, T \geq \hat{T}.$$

C'est en particulier vrai $\forall T \in \mathbb{N}$, $T \geq \hat{T}$ et donc

$$\left| \int_0^{n+1} f(t)\,dt - \ell \right| \leq \varepsilon \qquad \forall n \text{ tq } n \geq \hat{T} - 1$$

et la série est convergente.

2) Si $f(t) \geq 0 \ \forall t$ alors $u_n \geq 0 \ \forall n$. Si $\sum u_n$ converge, ~~elle~~ les ~~est en part majorée par un $M > 0$,~~ les sommes partielles sont en part majorées par un $M > 0$.

Mais alors pour $T \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n+1 > T$, alors

$$\int_0^T f(t)\,dt \underset{\text{car } f \geq 0}{\leq} \int_0^{n+1} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M.$$

Donc $\exists M > 0$, $\int_0^T f(t)\,dt \leq M \ \forall T \in \mathbb{R}$. f étant positive, l'intégrale est convergente

3) Supposons $f(t) \xrightarrow[t\infty]{} 0$

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq $t \geq N_1 \Rightarrow |f(t)| \leq \varepsilon$.

Comme la série converge vers un certain $l \in \mathbb{R}$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N_2 \Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{n} u_k - l\right| \leq \varepsilon$

Soit maintenant t tel que $\underbrace{\lfloor t \rfloor}_{\text{partie entière}} \geq 1 + \max(N_1, N_2)$

Alors $$\left|\int_0^t f(t)\,dt - l\right| = \left|\int_0^{\lfloor t \rfloor} f(t)\,dt - l + \int_{\lfloor t \rfloor}^t f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \underbrace{\left|\int_0^{\lfloor t \rfloor} f(t)\,dt - l\right|}_{= \left|\sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} u_k - l\right| \leq \varepsilon \text{ car } \lfloor t \rfloor - 1 \geq N_2} + \underbrace{\left|\int_{\lfloor t \rfloor}^t f(t)\,dt\right|}_{\leq (t - \lfloor t \rfloor) \times \varepsilon \leq \varepsilon \text{ car } \lfloor t \rfloor \geq N_1} \leq 2\varepsilon$$

cqfd.

4) On pouvait prendre $f(t) = \cos 2\pi t$.

Alors $u_n = \int_n^{n+1} \cos 2\pi t \, dt = \frac{1}{2\pi} \left[\sin 2\pi t \right]_n^{n+1} = 0 \ \forall n$

donc $\sum u_n$ converge.

Mais $\int_0^T \cos 2\pi t \, dt = \frac{\sin 2\pi T}{2\pi}$ $\Rightarrow$ ne converge pas en $T\infty$.

Exo 4 $7 = 1 + 1 + 0{,}5 + 1 + 1 + 1 + 0{,}5 + 1$

Attention : beaucoup ont confondu bijection et extraction ce qui n'a <u>rien</u> à voir.

Exercice chez vous : si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est bijective et strictement croissante, alors φ est l'identité.

1) a) Soit $M = \max \underbrace{\{ u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(N)} \}}_{\text{ens fini noté } E}$. Alors $E \subset \{0, 1, \dots, M\}$.

Alors $\sum_{k=0}^{N} u_{\sigma(k)} = \sum_{k \in E} u_k \leq \sum_{k \in \{0, \dots, M\}} u_k$ car les u_k sont ≥ 0.

ie $\sum_{k=0}^{N} u_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=0}^{M} u_k$.

b) Si la $\sum u_k$ converge, comme les u_k sont ≥ 0 on a $\sum_{k=0}^{M} u_k \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{existe}}}{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}$

$\forall M \in \mathbb{N}$. D'après 1, $\forall N \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{N} u_{\sigma(k)} \leq M$ et la série de tg. $u_{\sigma(k)}$ a des sommes partielles majorées. Elle a aussi un tg ≥ 0, donc elle est convergente et sa limite $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)}$ est $\leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

c) En remplaçant u_k par $u_{\sigma(k)}$ et σ par la bij réciproque σ^{-1} on obtient l'inégalité inverse.

Autrement dit, l'ordre d'addition <u>ne compte pas</u> pour une série de tg ≥ 0

2) a) C'est une série alternée et $\frac{1}{n+1} \to 0$ en décroissant donc elle converge.

Elle ne converge pas absolument par comparaison avec $\sum \frac{1}{n}$.

b) σ est surjectif :

- si $n = 2k$ est pair $n = \sigma(3k)$.
- si n est impair alors soit $n = 4k+1$ et $n = \sigma(3k+1)$
  soit $n = 4k+3$ et $n = \sigma(3k+2)$.

. σ injectif. Supposons $\sigma(a) = \sigma(b)$ avec $a < b$

- Si $a \equiv b\,[3]$ on voit immédiatement que $\sigma(a) < \sigma(b)$ impossible
- Si $a \not\equiv b\,[3]$ alors soit un seul d'entre eux (p. ex a) est divisible par 3 et alors $\sigma(a)$ est pair et $\sigma(b)$ impair impossible.
  Soit l'un (p. ex a) est $= 3k+1$ et $b = 3k'+2$ mais alors $\sigma(a) \equiv 1\,[4]$ alors que $\sigma(b) \equiv 3\,[4]$ impossible.

c) $u_{\sigma(3k)} + u_{\sigma(3k+1)} + u_{\sigma(3k+2)} = u_{2k} + u_{4k+1} + u_{4k+3}$

$$= \underbrace{\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2}}_{1/4k+2} - \frac{1}{4k+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{2k} + u_{2k+1}\right)$$

d) On montre par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{3n+2} u_{\sigma(k)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} u_k$$

Pour $n=0$ c'est le c) avec $k=0$.

Si c'est vrai pour n alors

$$\sum_{k=0}^{3n+5} u_{\sigma(k)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{3n+2} u_{\sigma(k)}}_{\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} u_k} + \underbrace{u_{\sigma(3n+3)} + u_{\sigma(3n+4)} + u_{\sigma(3n+5)}}_{\frac{1}{2}\left[u_{2n+2} + u_{2n+3}\right] \text{ par c)}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+3} u_k. \qquad \underline{\text{OK}}$$

e) Notons $\hat{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$. d) $\Rightarrow \hat{S}_{3n+2} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{\ln 2}{2}$.

Mais $\hat{S}_{3n+1} = \hat{S}_{3n+2} - u_{\sigma(3n+2)} = \hat{S}_{3n+2} - \underbrace{u_{4n+3}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} \to \frac{\ln 2}{2}$

et $\hat{S}_{3n} = \hat{S}_{3n+2} - u_{\sigma(3n+2)} - u_{\sigma(3n+1)} = \hat{S}_{3n+2} - u_{4n+3} - u_{4n+1} \to \frac{\ln 2}{2}$.

Donc $\hat{S}_n \to \frac{\ln 2}{2} \neq \ln 2$

L'ordre d'addition $\underline{\text{change}}$ le résultat de la somme.