ÉPREUVE DU 02/10/2019 AVEC CORRIGÉ

Les notes de cours, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Durée de l'épreuve : 1 heure.

Question de cours (2 points)

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que l'ensemble $\{X = a\}$ est bien dans $\mathcal{F}$.
2. Exprimer $\mathbb{P}(X = a)$ à l'aide de la fonction de répartition F_X (sans justifier).
3. Que donne cette formule dans le cas où X admet une densité ?

Exercice 1 (4 points)

On lance trois fois de suite un dé. Proposer un espace probabilisé pour décrire cette expérience, puis déterminer lequel des événements suivants est le plus probable.

1. Les trois chiffres obtenus sont identiques.
2. La somme des trois chiffres obtenus vaut cinq.
3. Le chiffre six est obtenu exactement deux fois.

Exercice 2 (4 points)

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \{A \in \mathcal{F} \colon \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1\}. \\ \mathcal{C} &:= \{A \in \mathcal{F} \colon \mathbb{P}(A) = 0\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est une tribu sur Ω.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ n'est pas une tribu sur Ω, puis déterminer $\sigma(\mathcal{C})$.

Corrigé de l'épreuve du 02/10/2019

Question de cours (2 points)

1. On a $\{X = t\} = X^{-1}(B)$, avec $B = \{t\}$. Comme B est un intervalle (ou un fermé), il est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme X est une v.a.r., on conclut que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.
2. En notant $F_X(t-)$ la limite à gauche de F_X au point t, on a

$$\mathbb{P}(X = t) \;=\; F_X(t) - F_X(t-).$$

3. Si X admet une densité f, alors on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   En particulier, F_X est continue, et donc $\mathbb{P}(X = t) = 0$.

Exercice 1 (4 points)

On se place sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$, muni de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la loi uniforme :

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

1. L'événement correspondant à l'obtention de 3 chiffres identiques est

$$A \;=\; \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4), (5,5,5), (6,6,6)\}.$$

   On en déduit aussitôt que $\mathbb{P}(A) = 6/(6 \times 6 \times 6) = 1/36$.
2. L'événement correspondant à l'obtention d'une somme égale à 5 est

$$B \;=\; \{(1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)\}.$$

   On en déduit aussitôt que $\mathbb{P}(B) = 6/(6 \times 6 \times 6) = 1/36$.
3. L'événement correspondant à l'obtention d'exactement deux six s'écrit

$$C \;=\; \bigcup_{i=1}^{5} \{(6,6,i), (6,i,6), (i,6,6)\}.$$

   On en déduit que $\mathbb{P}(C) = (5 \times 3)/(6 \times 6 \times 6) = 5/72$.

C'est donc le dernier événement qui est le plus probable.

Exercice 2 (4 points)

1. Montrons que $\mathcal{E}$ vérifie les trois axiomes d'une tribu :
   (a) (Vide) On a bien $\emptyset \in \mathcal{E}$, puisque $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
   (b) (Stabilité par complémentaire) Si $A \in \mathcal{E}$, alors par définition, $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$. Par passage au complémentaire, on en déduit que $\mathbb{P}(A^c) = 1$ ou $\mathbb{P}(A^c) = 0$. Dans les deux cas, $A^c \in \mathcal{E}$.
   (c) (Stabilité par union dénombrable) Soit $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$. Si $\mathbb{P}(A_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on peut invoquer la sous-additivité dénombrable de $\mathbb{P}$ pour écrire

   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \ \leq \ \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \ = \ 0.$$

   Comme une probabilité est toujours positive, on conclut que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = 0$. Si au contraire il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}\left(A_{n_0}\right) \neq 0$, alors on a $\mathbb{P}(A_{n_0}) = 1$ par définition de $\mathcal{E}$, et comme $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \supseteq A_{n_0}$, la monotonie de $\mathbb{P}$ implique

   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \ \geq \ \mathbb{P}(A_{n_0}) \ = \ 1.$$

   Comme une probabilité est toujours au plus 1, on conclut que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = 1$. Dans les deux cas, on a bien $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$.
2. $\mathcal{C}$ n'est pas une tribu, puisque $\Omega \notin \mathcal{C}$ ($\mathbb{P}(\Omega) = 1$). Montrons que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$ par double inclusion.
   (a) On a déjà vu que $\mathcal{E}$ est une tribu, et il est clair qu'elle contient $\mathcal{C}$. Comme $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite tribu qui contient $\mathcal{C}$, on conclut que $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{E}$.
   (b) Réciproquement, considérons $A \in \mathcal{E}$, et montrons que $A \in \sigma(\mathcal{C})$. Si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors $A \in \mathcal{C}$, et comme $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$, on a bien $A \in \sigma(\mathcal{C})$. Si au contraire $\mathbb{P}(A) = 1$, alors $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0$, donc $A^c \in \mathcal{C}$, et donc $A^c \in \sigma(\mathcal{C})$. La stabilité d'une tribu par passage au complémentaire nous permet de conclure que $A \in \sigma(\mathcal{C})$.