Cours de Mr Even
Microéconomie
MIE 2

Université Paris-Dauphine
Année 2022-2023
Travaux dirigés – MM. Even et Mahmoudi

TD Fiche n°8 – Équilibre général et bien collectif pur

Exercice 1

Nous considérons une économie composée de deux entreprises notées X et Y produisant respectivement un bien marchand en quantité x et un bien collectif en quantité y, et deux facteurs de production notés K et L dont les quantités utilisées sont notées respectivement k et l. Les prix des facteurs sont notés respectivement r et s. Les quantités disponibles de chaque facteur sont égales à 50 et sont les dotations initiales des individus. Les techniques de production sont les suivantes :

$$x = Q_X(k_X, l_X) = k_{\mathrm{X}}^{0,25} l_{\mathrm{X}}^{0,25} \text{ et } y = Q_Y(k_Y, l_Y) = k_{\mathrm{Y}}^{0,25} l_{\mathrm{Y}}^{0,25}$$

Cette économie comprend également trois consommateurs dont les préférences sont définies par les fonctions d'utilité suivantes :

$$u_{\mathrm{i}} = x_{\mathrm{i}} + 10\mathrm{i} \ln y$$

avec $\mathrm{i} = 1,2,3$, le niveau d'utilité atteint par le consommateur i, x_{i} la quantité de bien marchand consommée et y la quantité de bien collectif consommée.
L'individu i dispose d'un revenu global R_{i} (revenus du capital et du travail) et le bien marchand est pris comme numéraire.

1) Calculer la frontière de production.
2) Caractériser l'allocation optimale au sens de Pareto pour deux biens marchands.
3) Caractériser l'allocation optimale au sens de Pareto pour le cadre de l'énoncé.
4) Expliquer la différence entre les deux situations.
5) Calculer l'équilibre de Lindahl.

Exercice 1 :

$x = Q_x(k_x, l_x) = k_x^{0,25} l_x^{0,25}$

$y = Q_y(k_y, l_y) = k_y^{0,25} l_y^{0,25}$

1. FP : $TMST_x = TMST_y$

$$\left\{\begin{array}{l} k_x + k_y = 50 \\ l_x + l_y = 50 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} k_y = 50 - k_x \\ l_y = 50 - l_y \end{array}\right.$$

$\underset{k \to l}{TMST_x} = \frac{k_x}{l_x}$; $\underset{k \to l}{TMST_y} = \frac{k_y}{l_y}$

Donc on a $\frac{k_x}{l_x} = \frac{k_y}{l_y} = \frac{50 - k_x}{50 - l_x} \iff k_x = l_x$

Donc $x = k_x^{0,25} l_x^{0,25} = k_x^{0,5} \iff x^2 = k_x$

Donc $x^2 + y^2 = 50$

2. y devient un bien marchand ; y devient y_i

$$\left\{\begin{array}{l} \underset{y \to x}{TMS^1} = \underset{y \to x}{TMS^2} = \underset{y \to x}{TMS^3} = \underset{y \to x}{TMT} \\ SC : x^2 + y^2 = 50 \ (FP) \\ x_1 + x_2 + x_3 = x \\ y_1 + y_2 + y_3 = y \end{array}\right.$$

$\underset{y \to x}{TMT} = \frac{\frac{\partial FP}{\partial x}}{\frac{\partial FP}{\partial y}} = \frac{x}{y}$

$\underset{y \to x}{TMS^i} = \frac{1}{\frac{10i}{y^i}} = \frac{y^i}{10i}$

$TMS^i = TMT$; $\frac{y^i}{10i} = \frac{x}{y}$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{y_1}{10} = \frac{y_2}{20} = \frac{y_3}{30} \\ x^2 + y^2 = 50 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x \\ y_1 + y_2 + y_3 = y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = 10 \frac{x}{y} \\ y_2 = 20 \frac{x}{y} \\ y_3 = 30 \frac{x}{y} \end{array}\right.$$

$y = 10 \frac{x}{y} + 20 \frac{x}{y} + 30 \frac{x}{y}$

$y = 60 \frac{x}{y}$

$y^2 = 60x \iff y = \sqrt{60x}$

$x^2 + 60x - 50 = 0 \qquad x^* = 0,822$

$y = \sqrt{60 \times 0,822} \iff y = 7,0231$

$\Delta = 3600 + 200 = 3800 \qquad x_+ = \dfrac{-60 + \sqrt{3800}}{2}$

BLS

3. $\begin{cases} \sum \underset{y \to x}{TMS} = \underset{y \to x}{TMT} \\ SC : \quad x^2 + y^2 = 50 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x \end{cases}$

$TMS = \dfrac{y}{10i}$

$\underset{y \to x}{TMT} = \dfrac{x}{y}$

$\sum TMS = \dfrac{y}{10} + \dfrac{y}{20} + \dfrac{y}{30} = \dfrac{x}{y}$

$y^2 = 60x$

FP : $x^2 + 60x - 50 = 0$, $x^* = 0,822$

$y = \sqrt{60x} = 7,0231$

4. Nous obtenons ici les mêmes valeurs de prod° car la fx° d'utilité est linéaire en x.

Par contre le niv d'utilité des agents est sup avec un bien collectif car ils consomment tous la même qté $y = 7,0321$.

Alors qu'avec un bien marchand la $\sum$ des consos en bien y est égale à cette même valeur.

$$\sum_{i=1}^{n} TMS_i = TTP$$ nb de conso

5. Equilibre de Lindhal

La prod° du BCP est financé par le versement de prix relatif aux préférences des agents Idéosyncratiques. C'est un modèle de pseudo-marché dans lequel les préférences des agents sont connus et qui permet d'atteindre la location BLS.

Le prix individualisé versé par un agent est sol° du programme de max° sous contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \max \quad x^i + 10i \ln(y) \\ \text{sc.} \quad R_i = P_x x^i + P_{y_i} y \qquad \text{avec } P_x = 1 \\ \qquad\quad = x^i + P_{y_i} y \end{cases}$$

$$TMS^i_{y \to x} = \frac{P_x}{P_{y_i}} = \frac{1}{P_{y_i}} = \frac{y}{10i} \quad \text{donc } P_{y_i} = \frac{10i}{y} = \frac{10i}{7{,}0231} = 1{,}4239\,i$$

Donc $P_{y_1} = 1{,}4239$

$P_{y_2} = 2{,}8477$

$P_{y_3} = 4{,}2716$

$$\sum_i P_{y_i} = 8{,}5434$$

$$TMT_{y \to x} = \frac{x}{y} = \frac{0{,}822}{7{,}0231} = \frac{1}{P_y} = \frac{1}{8{,}5434} \simeq 0{,}117$$

$$TMT_{x \to y} = P_y = 8{,}5434$$

Cette égalité implique le financement du BCP.

Exercice 2

Une économie comporte un seul bien marchand X qui est pris comme numéraire et qui peut être aussi bien consommé (quantité notée x) qu'utilisé en facteur de production dont la quantité est notée k pour produire un bien collectif G dont la quantité est notée g. La technologie de production s'énonce :

$$g = 2k$$

La production de bien collectif s'effectue à financement équilibré car les rendements d'échelle sont constants.

Les trois agents possèdent des dotations initiales, notées w^i avec $i = \{1,2,3\}$ dont les quantités sont respectivement :

$$w^1 = 10, w^2 = 20 \text{ et } w^3 = 30.$$

Leurs préférences sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$u^i = U^i(x^i, g) = x^i + 6i\ln(g)$$

avec u^i le niveau d'utilité atteint par le consommateur i et x^i la quantité de bien marchand consommée.
Le prix du bien marchand est pris comme numéraire.

1) Calculer la frontière de production

2) Caractériser la situation optimale au sens de Pareto.

3) Calculer l'équilibre de Lindahl. Calculer également les consommations de biens marchands.

4) Calculer l'équilibre de souscription volontaire.

5) Calculer l'équilibre d'un vote majoritaire pour lequel chaque individu est porteur d'un projet politique avec financement égalitaire. Commenter.

6) Un système de financement proportionnel aux dotations initiales est instauré. Caractériser l'équilibre d'un vote majoritaire. Commentez.

Exercice 2 :

$g = 2k \quad ; w^1 = 10 \; ; w^2 = 20 \; ; w^3 = 30$

$U_i = U_i(x_i, g) = x_i + 6_i \ln(g)$

On a 1 facteur donc pour calculer la fx° de prod°, on regarde l'é* sur le marché de facteur de prod°

↳ bien X : $\sum_{i=1}^{n} x_i^{dc} + k^{dc} = \sum_{i=1}^{n} w_i$

exprimer la qté de conso en fx° de la qté de conso de l'autre bien

1) FP : $\sum x_i + k = \sum w_i$

$x + \frac{g}{2} = 10 + 20 + 30$

$x + \frac{g}{2} = 60$

$\boxed{x = 60 - \frac{g}{2}}$

$\begin{cases} k = \frac{g}{2} \\ Sc : x + k = 10 + 20 + 30 = 60 \end{cases}$

$x + \frac{g}{2} = 60 \iff \boxed{x = 60 - \frac{g}{2}}$

Appliquer le thm BLS $\sum_{i=1}^{n} TMS_{i\, X \to G} = TTP_{X \to G}$

- calculer $\sum_{i=1}^{n} TMS_{i\, X\to G}$

- calculer $TTP_{X\to G} : \frac{\partial X}{\partial G}$

dérivé de X en fx° de G

trouver les qtés x et g → qté de biens

2. $\begin{cases} \sum_i TMS^i_{x-g} = TMT_{x-g} \\ Sc \quad x + \frac{g}{2} = 60 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x \end{cases}$

$TMS^i_{x-g} = \frac{6_i}{g}$

$TMT_{x-g} = \frac{\frac{\partial (FP)}{\partial g}}{\frac{\partial FP}{\partial x}} = \frac{1}{2} \qquad g = 72$

$\sum TMS^i_{x-g} = TMT_{x-g}$

$\sum \frac{6_i}{g} = \frac{1}{2} \iff \frac{6}{g} + \frac{12}{g} + \frac{18}{g} = \frac{1}{2} \iff g = 12 + 24 + 36 = 72$

$x = 60 - \frac{72}{2} \iff \boxed{x = 24}$

3. $\begin{cases} \max \; x_i + 6_i \ln(g) \\ x w_i = \frac{P_x}{1} x^i + P_{g^i} g \end{cases}$

$TMS^i_{x-g} = \frac{6_i}{g} = \frac{P_{g^i}}{P_x} = P_{g^i}$

$TMS^i_{x-g} = \frac{6_i}{g} = \frac{P_{g^i}}{P_x} = P_{g^i} \quad ; g = 72$

$P_{g^i} = \frac{6_i}{72} = \frac{i}{12} \; ; \; P_{g^i} = \frac{i}{12} \iff P_{g^1} = \frac{1}{12}$

$P_{g^2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$P_{g^3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$\sum P_{g^i} = \frac{1}{2}$

$= TMT_{x-g} = \frac{1}{2}$

14.12.22

4. Equilibre de souscription volontaire

$$\begin{cases} \max x_i + 6_i \ln(g) \\ sc.\ w^i = x_i + t_i \\ (CF)\ \Sigma t_i = \frac{g}{2} = t_i + \sum_{j \neq i} t_j \\ (CN)\ t_j = \bar{t}_j \quad \forall j \neq i \\ (CCP)\ t_i \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_i = (w^i - t_i) + 6_i \ln(2 \Sigma t_i) \\ CPO : \frac{\partial U_i}{\partial t_i} = 0 \end{cases}$$

16.12.22

5. Modèle de BOWEN.

g_i : projet politique du consommateur i

t_i : budget du conso i par le BCP

P_i : $\max U_i = x_i + 6_i \ln(g_i)$

sc : (CB) $w_i + x_i + t_i$

(F_i) $t_i = \frac{CT(g)}{3} = \frac{\frac{g}{2}}{3} = \frac{g}{6}$

(CB_i) : $x_i = w_i - t_i$

(F_i) : $g = 6t_i$

$\max : U_i = w_i' - t_i + 6_i \ln(6t_i)$

$\iff U_i' = 0$

$-1 + 6_i \cdot \frac{6}{6t_i} = 0 \iff t_i = 6_i$

Donc $t_1 = 6$; $t_2 = 12$; $t_3 = 18$ $\qquad g_1 = 36$; $g_2 = 72$; $g_3 = 108$.

$T = 18 \qquad T = 36 \qquad T = 54$

pour $g = 1$: 3 pour
⋮
$g = 37$: 2 pour 1 contre

$g = 72$: 2 pour 1 contre → on produit cette qté

$g = 73$: 1 pour 2 contre
⋮
$g = 108$ ———————

$\frac{38 + 72 + 108}{3} = 72$: électeur médiant = électeur moyen
↳ ok.

6) corso i :

P_i : $\begin{cases} \text{Max} : U_i = x_i + 6_i \ln(g) \\ SC : (CB_i) \ (1 - t_i) w_i = x_i \\ (F_i) \ t_i \sum w_i = CT(g) = \frac{g}{2} \end{cases}$

→ % de richesse donné

→ Σ (valeur) de richesse donnée

$U_i = (1 - t_i) w_i + 6_i \ln(2 t_i \sum w_i)$

Max $U_i \Leftrightarrow U'_i = 0$ donc $-w_i + 6_i \frac{2 \sum w_i}{2 t_i \sum w_i} = 0 \Leftrightarrow t_i = \frac{6_i}{w_i} = \frac{6_i}{10_i} = \frac{6}{10} = 60\%$

$g = 2 \times 0{,}6 \cdot \sum_{i=1}^{3} 10_i = 1{,}2 \cdot (10 + 20 + 30) = 72$