$\int_J f(t)dt$ bien déf si :

1) $f \geq 0$; $\int_J f(t)dt \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

2) $\int_J |f|(t)dt < +\infty$ ($\to f$ intégrable) ;

$\int_J f(t) \in \mathbb{R}$ ($\neq \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$)

$0 \leq f \leq g$, • si $\int_J g(t)dt < +\infty$, alors $\int_J f(t)dt < +\infty$

• si $\int_I f(t)dt = +\infty$; $\int_J (g(t))dt = +\infty$

$f \underset{0^+}{\sim} g$, f intégrable ssi g intégrable

$x \mapsto x^\alpha$

$f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, $\oplus$.

- si $\exists \alpha > 1$, $x \mapsto f(x)x^\alpha$ majorée au V_∞ $\to$ f intégrable sur $[1, +\infty[$.
- si $\exists \alpha \in]0,1]$, $x \mapsto f(x)x^\alpha$ minorée par une constante strict. $\oplus$, (surtout si $x \mapsto f(x)x^\alpha \underset{x \to b \in \mathbb{R}}{\to} +\infty$ ou $x \mapsto f(x)x^\alpha \underset{x \to +\infty}{\to} l > 0$)

  $\hookrightarrow$ f pas intégrable sur $[a, +\infty[$

$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$

$a > 0$, $f :]0, a] \to \mathbb{R}^+$ continue, $\oplus$.

- si $\alpha \in]0,1[$; $x \mapsto f(x)x^\alpha$ majorée,

  $\hookrightarrow$ f intégrable sur $]0, a]$

  $\hookrightarrow$ surtout si $f(x)x^\alpha \underset{x \to 0^+}{\to} l \in \mathbb{R}$
- si $\alpha \geq 1$, $x \mapsto f(x)x^\alpha$ minorée par constante > 0 (surtout si $f(x)x^\alpha \underset{x \to 0^+}{\to} l > 0$)

  $\hookrightarrow$ f pas intégrable sur $]0, a]$.

__Univers__ Ω $\to$ ensemble qui représente tous les résultats possible de l'expérience aléatoire

__Tribus__ $\mathcal{F}$: collection d'une partie de Ω si :

- $\emptyset \in \mathcal{F}$ $\to$ ensemble vide
- si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$ $\to$ stabilité par passage au complémentaire
- $(A_n)_{n \geq 1}$ suite d'élément dans $\mathcal{F}$ alors $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ $\to$ stabilité par union dén

__Dénombrabilité__ : A dén si A en bij avec une partie de $\mathbb{N}$.

(ou A injective dans $\mathbb{N}$)

- sous-ensemble d'un ensemble $\to$ dén.
- prod fini d'ensemble dén. $\to$ dén (ex : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$)
- Union dén d'ensemble dén $\to$ dén.
- si $\exists$ injection de E dans un ensemble dén, alors E dén.
- si $\exists$ surjection d'un ensemble dén dans E alors E dén.

Évènement $\to$ élément d'une partie de Ω

- $\Omega \in \mathcal{F}$ ($\Omega = \emptyset^c$ et $\emptyset \in \mathcal{F}$ $\to$ stabilité par passage au complémentaire)
- A et B dans $\mathcal{F}$, alors $A \cup B \in \mathcal{F}$
- A et B dans $\mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$ $\to$ stab par inter finie
- A et B dans $\mathcal{F}$, $A \setminus B \in \mathcal{F}$ $\to$ stab par dif
- ——— $A \Delta B \in \mathcal{F}$

  $\hookrightarrow = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ $\leftarrow$ dif sym.
- $(A_n)_{n \geq 1}$ suite d'évènement alors $\bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$

__Collection__ $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}$ collection partie de Ω, On appelle tribu engendrée par $\mathcal{E}$, et on note $\sigma(\mathcal{E})$ la + petite tribu qui contient $\mathcal{E}$ (au sens de l'inclusion)

__Tribu Borélienne__ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$: $\to$ + petite tribu qui contient tous les intervalles ouverts.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(]a,b[, a<b)$

$\hookrightarrow$ boréliens.

$\hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) =$
- $\sigma([a,b], a \leq b)$
- $\sigma(]-\infty ; a], a \in \mathbb{R})$
- $\sigma(O, O$ ouvert dans $\mathbb{R})$
- $\sigma(F, F$ fermé de $\mathbb{R})$

Pour mq $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{G}$ avec $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ 2 collections de partie Ω

1. Mq $\mathcal{G}$ est une tribu
2. Mq $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$

(mesure de)

__Probabilité__ $P : \mathcal{F} \to [0,1]$:

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall$ suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'évènements (élément de $\mathcal{F}$) 2 à 2 disjoints $P(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} P(A_n)$ $\to$ σ additivité

__fc° de poid__ p : $P(\Omega) \to [0,1]$

$A \mapsto \sum_{x \in A} p(x)$

P une proba sur $(\Omega, \mathcal{F})$:

- $P(\emptyset) = 0$
- $\forall A \in \mathcal{F}$ $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $\forall A, B \in \mathcal{F}$ $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
  - si $B \subset A$, $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
- $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
- ——— , $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $(A_n)_{n \geq 1}$ des évènements de $\mathcal{F}$, alors $P(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} P(A_n)$
- (continuité cr) ——— cr par inclusion

  $\forall n \geq 1$, $A_n \subset A_{n+1}$, alors $P(\bigcup_{n \geq 1} \uparrow A_n) = \lim \uparrow P(A_n)$
- (continuité dé) ——— au sens de l'inclusion de la

  Alors $P(\bigcap_{n \geq 1} \downarrow A_n) = \lim \downarrow P(A_n)$

P 25

Thm : $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$

$\mathcal{E}$ stable par intersection finie

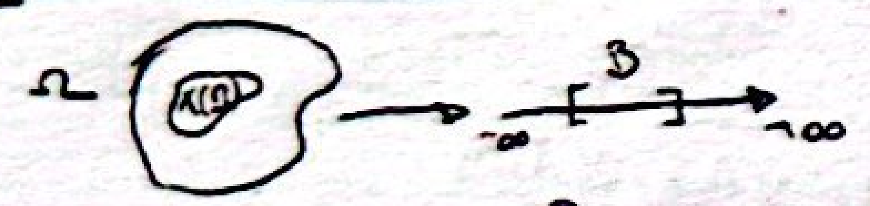
Toute proba sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est caractérisée par ses valeurs sur $\mathcal{E}$, i.e. si P et Q sont 2 probas sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tq $P(A) = Q(A)$ $\forall A \in \mathcal{E}$ alors $P = Q$ ie $P(A) = Q(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$

Corollaire (cas boréliens)

Une proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est entièrement caractérisée par ses valeurs sur les intervalles $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

Espace de probabilité : triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
proba qui est la fct° qui à tout évènement associe la proba qu'il se réalise

- Quand $A \in \mathcal{A}$ et $P(A) = 1$. On dit que A se réalise presque sûrement (p.s.)
- $P(A) = 0$, A négligeable
- $(\Omega, \mathcal{A})$ = espace mesurable s'il est "en attente" d'une mesure de proba.



$\underline{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Dire que "$X(\omega)$ tombe dans B" c'est dire que ω tombent dans $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}$

Variables aléatoires réels (var ou va) : fct° : $\Omega \to \mathbb{R}$, tq $\forall D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{X \in D\} \in \mathcal{A}$

Loi de X : $P_X : P_X(D) = P(X \in D) = P(X^{-1}(D))$ X var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$\forall D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ appelé loi de X

Fonction de répartition

Soit X var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$F(t) = P_X(]-\infty, t]) = P(X \leq t)$

La loi d'une var est caractérisée par sa fct° de répartition

↳ soit X et Y 2 va tq $F_Y = F_X$, alors $P_X = P_Y$

↳ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $P_X(B) = P_Y(B)$
$P(X \in B)$ $P(Y \in B)$

Thm : $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ est la f.d.r d'une va ssi elle vérifie :

- F ↗
- F continue à droite (cad)
- $\lim_{t \to -\infty} (F(t)) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$

Soit X une va et F sa f.d.r
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}$ $a < b$

- $P(X > a) = 1 - F(a)$
- $P(X < a) = F(a^-) = \lim_{u \to a^-} F(u)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$
- $P(a < X < b) = F(b^-) - F(a)$

Une va est dite discrète qd son image $\mathrm{Im}(X) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est dénombrable

Si $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}$ dont l'image est dénombrable, alors X est une var ssi

$\forall x \in \mathrm{Im}(X)$ $\{X = x\} \in \mathcal{A}$
↳ $= \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$

Loi discrète importante

$\mathcal{U}(\mathcal{X})$: uniforme sur $\mathcal{X}$ où $\#\mathcal{X} < +\infty$ et non vide

si
- $\mathrm{Im}(X) = \mathcal{X}$
- $\forall x \in \mathcal{X}$ $P(X = x) = \frac{1}{|\mathcal{X}|}$

$\mathcal{B}(p)$: Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$

si
- $\mathrm{Im}(X) = \{0, 1\}$
- $P(X = 1) = p$; $P(X = 0) = 1 - p$

$\mathcal{B}(n,p)$: Binomiale de paramètre $n \geq 1$ et $p \in [0,1]$

si :
- $\mathrm{Im}(X) = \{0, \dots, n\}$
- $\forall k \in \mathrm{Im}(X)$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\mathcal{G}(p)$: Géométrique de paramètre $p \in]0,1]$

si :
- $\mathrm{Im}(X) = \mathbb{N}^*$
- $\forall k \geq 1$ $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$

$\mathcal{P}(\lambda)$: Poisson de paramètre $\lambda > 0$

si :
- $\mathrm{Im}(X) = \mathbb{N}$
- $\forall k \geq 0$ $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Variable à densité :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ intégrable tel que $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$

Loi de la densité

- **Loi uniforme** sur $[a,b]$ $a<b$

  $\forall t\in\mathbb{R}$ $f(t) = \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\frac{1}{b-a}$

- **Exponentielle de paramètre $\lambda>0$**, $\mathcal{E}(\lambda)$

  $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$

- **Loi Normale ou Gaussienne de paramètre $m\in\mathbb{R}$ $\sigma^2>0$ notée $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$**

  $$\forall t\in\mathbb{R}\quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

- **Loi Gamma** $r,\lambda>0$

  $$f(t) = \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t)\,e^{-\lambda t}\,t^{r-1}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}$$

  $$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}\,dx$$

- **Loi de Cauchy** $\lambda>0$

  $$\forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = \frac{\lambda}{\pi(t^2+\lambda^2)}$$

  $$\int f(t)\,dt = 1$$

Lemme : Critère de mesurabilité

$\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, X mesurable (est une var) si

$\forall B\in\mathcal{E}$ $\{X\in B\}\in\mathcal{F}$

Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de var

Alors $\omega\in\Omega \to \sup_{n\geq1} X_n(\omega)$

$\omega\in\Omega \to \inf_{n\geq1} X_n(\omega)$

$\omega \to \limsup X_n(\omega)$

$\omega \to \liminf X_n(\omega) \in \Omega$

fonction borélienne

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ borélienne qd : $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\{h\in B\} = h^{-1}(B) = \{x\in\mathbb{R}, h(x)\in B\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$h:\mathcal{B}(\mathbb{R})\to\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable
est une var

$h: (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

prop. composition : Soit X une var $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ borélienne, alors $h(X)$ est une var

$F_x°$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- toute $f_x°$ $C°$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$
- toute $f_x°$ monotone est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$
- $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathbb{1}_B$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$
- la composée de 2 $f_x°$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$
- sup, inf, lim sup, lim inf, lim de $f_x°$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ biens définies, sont $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Continuité :

$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. F $C°$ en x si $\forall x\in\mathbb{R}^n$, si $\forall\varepsilon>0$ $\exists\alpha>0$ $\forall y\in\mathbb{R}^n$ $\|y-x\|<\alpha$ $\Rightarrow$ $|F(y)-F(x)|<\varepsilon$ où $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ est la norme euclidienne.

Soit $X_1,\dots,X_n$ des var, $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une $f_x°$ $C°$, Alors $F(X_1,\dots,X_n)$ est une var

$\sum_{i=1}^n X_i \to$ var

$\prod_{i=1}^n X_i \to$ var

var étagées :

des var qui ne prennent qu'un nb fini de valeurs

Donc X s'écrit $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$

indicatrice $\mathbb{1}_{A_i}(\omega) = 1$ seulement quand $\omega \in A_i$

var positives : Pour X positive

$E(X) = \sup\{E(Z), Z \text{ étagée } Z \leq X\}$

> Soit X une var ⊕, alors X est la limite d'une suite cr↑ de var ⊕ étagées

variables intégrables

$X_+ = \max(0, X)$; $X_- = \max(-X, 0)$

$X = X_+ - X_-$; $|X| = X_+ + X_-$

Une prop. P qui dépend de ω est vraie p.s qd l'ensemble des ω pour lesquelles $P(\omega)$ est vraie forment un événement de proba 1

ex : $X \geq 0$ p.s. si $P(\{\omega, X(\omega) \geq 0\}) = 1$

Espérance d'une indicatrice

Si $A \in \mathcal{F}$, alors $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$

Linéarité

Si X, Y sont des var intégrables et $\lambda \in \mathbb{R}$

$X + \lambda Y$ est intégrable et $E(X + \lambda Y) = E(X) + \lambda E(Y)$

Monotonie

Si X, Y var ⊕ avec $X \leq Y$ p.s, alors

$E(X) \leq E(Y)$, si $X \geq 0$ p.s, alors $E(X) \geq 0$

Valeur absolue

Soit X intégrable,

on a $|E(X)| \leq E(|X|)$

Thm de cv monotone

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de var ⊕ p.s cr↑ p.s vers une var X ($X = \lim \uparrow X_n$ p.s)

alors $E(X_n) \xrightarrow{\uparrow} E(X)$

Thm cv dominée

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des var.

On suppose que :

- $X_n \longrightarrow X$ p.s
- (Domination) :
  $\exists Y$ var intégrable tq
  $\forall n \geq 1$ $|X_n| \leq Y$ p.s

Alors (X_n) et X sont toutes intégrables et $E(X_n) \xrightarrow{\uparrow} E(X)$

Soit X, Y, 2 var les propositions suivantes sont "⇔" :

- $P_X = P_Y$ (X et Y ont m̂ loi)
- $E(h(X)) = E(h(Y))$ $\forall h$ borélienne ⊕
  ↳ Ensemble de fct° assez gros
- $E(h(X)) = E(h(Y))$ pour tout h continue bornée

- Soit X une var discrète. Alors
  $E(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x)$
- X intégrable si $E(|X|) < +\infty$
  dans ce cas : $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$
- h borélienne ⊕ ou $h(X)$ intégrable
  $E(h(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(x) P(X = x)$

Soit X une var ayant pour densité f. Alors

- $E|X| = \int |x| f(x) dx$
  (bien def car fct° ⊕)
- $E|X| < +\infty$ (→ X intégrable) on a
  $E(X) = \int x f(x) dx$
- h borélienne positive (ou continue bornée) ou intégrable
  $E(h(X)) = \int h(x) f(x) dx$

Lemme de Borel - Cantelli

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements.

Alors : 1. $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < +\infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$

2. Si de plus $(A_n)_{n \geq 1}$ sont indep.
   alors $\sum_{n \geq 1} P(A_n) = +\infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 1$

Rappel : $\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$

$= \{\omega, \forall n \geq 1, \exists k \geq n, \omega \in A_k\}$

$= \omega$ est dans une ∞ de A_n

Variables aléatoires indépendantes

2 var X et Y sont dites indep ($X \perp\!\!\!\perp Y$) quand $\forall (A, B) \in [\mathcal{B}(\mathbb{R})]^2$

$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$

$= \{X \in A\} \cap \{Y \in B\}$

Donc $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indep

Caractéristique de l'indep.

- $X \perp\!\!\!\perp Y$
- $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $P(X \leq s, Y \leq t) = F_X(s) F_Y(t)$
- $\forall f, g$ boréliennes, ⊕ ou bornées,
  $E(f(X) g(Y)) = E(f(X)) E(g(Y))$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des va indépendantes

Des var $X_1, \dots, X_n$ sont indep si $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i)$

Des var $(X_i)_{i \in I}$ sont indep si toute sous-famille finie $(X_i)_{i \in K}$, $K \subset I$ et $|K| < +\infty$ est indep

ie $\forall K \subset I$ fini, et $\forall (B_i)_{i \in K} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$P(\bigcap_{i \in K} X_i \in B_i) = \prod_{i \in K} P(X_i \in B_i)$

Var indépendantes identiquement distribuées

Quand des var $(X_i)_{i \in I}$ sont indep et ont la m̂ loi, on dit qu'elles sont indépendantes et identiquement distribuées, on note i.i.d.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de var indep. alors les fct° suivantes sont aussi indep :

- $(X_i)_{i \in J}$ où $J \subset I$
- Une famille $(Y_i)_{i \in I}$ où $\forall i \in I$, $Y_i = h_i(X_i)$ où $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fct° borélienne.
- Toute famille $(Y_j)_{j \in J}$ où $\forall j \in J$ $Y_j = h_j(X_i, i \in I_j)$ où $I_j \subset I$ et les (I_j) sont 2 à 2 disjoints et $h_j : \mathbb{R}^{|I_j|} \to \mathbb{R}$ continue.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des var, les prop suivantes sont "⇔".

- les var $X_1, \dots, X_n$ sont indep.
- $\forall t_i \in \mathbb{R}$, avec $i \in [\![1, n]\!]$, $P(X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq t_i)$
- $\forall h_i$ borélienne, bornées ou positives
  $E\left(\prod_{i=1}^{n} h_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} E(h_i(X_i))$