Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2020 - 2021)

Examen - Mercredi 13 janvier 2021.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ désigne un espace de probabilité.

Exercice 1.*(pts)*

1. Donner la définition d'une variable aléatoire discrète. Donner sans démonstration la condition pour qu'elle soit intégrable et donner son espérance dans ce cas.
2. Quand dit-on d'événements $(A_i)_{i\in I}$ qu'ils sont indépendants ?
3. Enoncer puis prouver l'inégalité de Markov.
4. Soit $A \subset \Omega$. Montrer que la fonction 1_A est une variable aléatoire *si et seulement si* $A \in \mathcal{F}$.

Exercice 2. *(pts)* Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire de densité $x \to e^{-x} 1_{[0,+\infty[}(x)$. On pose $Y = \min(X, 1)$.

1. Calculer $\mathrm{P}(Y = 1)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de Y et la dessiner.
3. La variable aléatoire Y est elle discrète ? à densité ?

Correction.

1. On a $\{Y = 1\} = \{X \geq 1\}$ donc $\mathrm{P}(Y = 1) = \int_1^{+\infty} e^{-u} 1_{\mathbb{R}^+}\, du = e^{-1}$.
2. Comme $0 \leq Y \leq 1$ p.s. on en déduit que pour tout $u < 0$, $F_Y(u) = \mathrm{P}(Y \leq u) = 0$ et pour tout $u \geq 1$, $F_Y(u) = 1$. Enfin pour $u \in [0, 1[$, $\{Y \leq u\} = \{X \leq u\}$ donc
$$F_Y(u) = \mathrm{P}(X \leq u) = \int_{-\infty}^{u} e^{-v} 1_{\mathbb{R}^+}(v)\, dv = [-e^{-v}]_0^u = 1 - e^{-u}.$$
3. On a $\mathrm{P}(Y = 1) = F_Y(1) - F_Y(1-) > 0$ donc Y n'est pas à densité. La variable Y n'est pas non plus discrète car pour tout $u \neq 1$, $\mathrm{P}(Y = u) = 0$ car F_Y est continue en u. Or $\mathrm{P}(Y = 1) < 1$. Le seul atome de P_Y est donc 1 et sa masse est inférieure strictement à 1.

Exercice 3. On considère les lancers successifs de deux pièces équilibrées : soit deux suites $(X_n)_{n\geq1}$ et $(Y_n)_{n\geq1}$ formant une famille i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On considère le premier instant où l'un des deux tirages est ≪ pile ≫ (c'est-à-dire 1) :
$$N = \inf\{n \geq 1 | X_n = 1 \text{ ou } Y_n = 1\},$$
avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

1. Pour tout $n \geq 1$, écrire l'événement $\{N > n\}$ à l'aide de $X_1, \dots, X_n$ et $Y_1, \dots, Y_n$ puis calculer $\mathbb{P}(N > n)$. Quelle est la loi de N ?
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, X_N est une variable aléatoire. (c'est une question un peu plus difficile : on pourra penser à utiliser la question 4 de l'exercice 1).
3. Pour tout $n \geq 1$ réécrire l'événement
$$\{N = n, X_N = 1, Y_N = 0\}$$
(on rappelle que les virgules se lisent « et ») en fonction de $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n$ et en déduire un calcul de sa probabilité. En déduire la valeur de $P(X_N = 1, Y_N = 0)$.
4. Que vaut $P(X_N = 0, Y_N = 0)$? Et $P(X_N = 0, Y_N = 1)$? Et $P(X_N = 1, Y_N = 1)$?
5. En déduire une méthode, à l'aide de pièces de monnaie équilibrées, pour tirer un nombre au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ de façon équiprobable.

Correction.

1. Pour tout $n \geq 1$, $\{N > n\} = \{X_1 = 0, Y_1 = 0, \cdots, X_n = 0, Y_n = 0\}$. En utilisant l'indépendance, on en déduit
$$\mathrm{P}(N > n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i = 0)\mathrm{P}(Y_i = 0) = (1-p)^{2n},$$
et on note que cette formule est encore vraie pour $n = 0$. On en déduit que pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{P}(N = n) = \mathrm{P}(N > n-1) - \mathrm{P}(N > n) = (1-p)^{2(n-1)} - (1-p)^{2n} = (1-p)^{2(n-1)}(1-(1-p)^2)$ et donc N suit une loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^2$.
2. Pour tout $n \geq 1$, $X_N = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n 1_{N=n}$. D'après la question 3 de l'exercice 1, pour tout $n \geq 1$, $1_{N=n}$ est une variable aléatoire car $\{N = n\} \in \mathcal{F}$. Donc $X_n 1_{N=n}$ est une variable aléatoire et X_N aussi comme limite (ou sup) de variables aléatoires.
3. Pour tout $n \geq 1$,
$$\{N = n, X_N = 1, Y_N = 0\} = \{X_1 = 0, Y_1 = 0, \cdots, X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0, X_n = 1, Y_n = 0\}.$$
On en déduit en utilisant l'indépendance
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_N = 1, Y_N = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_N = 1, Y_N = 0, N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1 = 0)\mathrm{P}(Y_1 = 0) \cdots \mathrm{P}(X_{n-1} = 0)\mathrm{P}(Y_{n-1} = 0)\mathrm{P}(X_n = 1)\mathrm{P}(Y_n = 0) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{2(n-1)} p(1-p) \\
&= \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2}.
\end{aligned}$$
4. Comme $\{X_N = 0, Y_N = 0\} = \emptyset$ on obtient $\mathrm{P}(X_N = 0, Y_N = 0) = 0$. Avec le même raisonnement que dans la question précédente, on obtient par ailleurs, $P(X_N = 0, Y_N = 1) = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2}$ et $P(X_N = 1, Y_N = 1) = \frac{p^2}{1-(1-p)^2}$.

5. Quand $p = 1/2$, on a $P(X_N = 1, Y_N = 1) = P(X_N = 0, Y_N = 1) = P(X_N = 1, Y_N = 0) = 1/3$. On peut donc prendre deux pièces équilibrées et réaliser une série de lancers indépendant (pour réaliser (X_n) et (Y_n)). Au premier pile d'une des deux pièces on décrète que
   — $Y = 0$ si la première pièce est pile et la seconde est face,
   — $Y = 1$ si la première pièce est face et la seconde est pile,
   — $Y = 2$ si la première pièce est pile et la seconde est pile.

Exercice 4. (Loi exponentielle et radioactivité) La durée de vie d'un atome d'un élément radioactif est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle dont le paramètre $\lambda > 0$ est la constante de désintégration. À $t = 0$, on considère n atomes et les comportements des différents atomes sont indépendants. On introduit donc les variables $(X_i)_{i\leq 1\leq n}$ i.i.d. de même loi exponentielle de paramètre λ où pour $1 \leq i \leq n$, la variable X_i représente le temps de désintégration de l'atome i.

1. Montrer que X_1 satisfait la propriété de non vieillissement : pour tous réels positifs s et t,
$$\mathbb{P}(X_1 > t + s | X_1 > t) = \mathbb{P}(X_1 > s)$$
2. Soit Y la variable aléatoire représentant le temps de la première désintégration. Exprimer Y comme fonction des $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ puis calculer la fonction de répartition de Y. Quelle loi reconnait on ?
3. Soit la variable aléatoire Z_t représentant le nombre de désintégrations observées sur $[0, t]$. Donner une expression mathématiques pour Z_t puis identifier sa loi.
4. Calculer $\mathbb{E}(Z_t)$.

Correction.

1. On commence par rappeler que pour tout $u \geq 0$
$$\mathbb{P}(X_1 > u) = \int_u^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} 1_{\mathbb{R}^+}(s)\ ds = \begin{cases} 1 \text{ si } u \leq 0 \\ e^{-\lambda u} \text{ si } u \geq 0. \end{cases}$$
On en déduit que
$$\mathbb{P}(X_1 > t+s | X_1 > t) = \frac{\mathbb{P}(X_1 > t + s, X_1 > t)}{\mathbb{P}(X_1 > t)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 > t + s)}{\mathbb{P}(X_1 > t)} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X_1 > s).$$
2. On a $Y = \min(X_1, \cdots, X_n)$. En utilisant le caractère i.i.d. des $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ on obtient pour tout $u \geq 0$
$$1 - F_Y(u) = \mathrm{P}(Y > u) = \mathrm{P}(X_i > u, 1 \leq i \leq n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i > u) = e^{-\lambda n u}$$
et $1 - F_Y(u) = 1$ pour $u < 0$. On en déduit que Y suit une exponentielle de paramètre $n\lambda$.

3. Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z_t = k) &= \mathrm{P}(|\{1 \leq i \leq n,\ X_i \leq t\}| = k) \\
&= \mathrm{P}(\exists I \subset \{1, \cdots, n\} \text{ t.q. } |I| = k,\ \forall i \in I\ X_i \leq t, \forall i \in I^c\ X_i > t) \\
&= \sum_{I \subset \{1, \cdots, n\} \text{ t.q. } |I| = k} \mathrm{P}(\ \forall i \in I\ X_i \leq t, \forall i \in I^c\ X_i > t) \\
&= \sum_{I \subset \{1, \cdots, n\} \text{ t.q. } |I| = k} \prod_{i \in I} \mathrm{P}(X_i \leq t) \prod_{i \in I^c} \mathrm{P}(X_i > t) \\
&= \binom{n}{k} (1 - e^{-\lambda t})^k (e^{-\lambda t})^{n-k}.
\end{aligned}$$

   On reconnait une loi binomiale de paramètres n et $1 - e^{-\lambda t}$. On aurait aussi pu écrire $Z_t = \sum_{i=1}^n 1_{X_i \leq t}$ et dire qu'une somme de Bernoulli indépendantes est une binomiale.

4. On pouvait soit recalculer la moyenne d'une binomiale soit utiliser

$$\mathrm{E}(Z_t) = \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n 1_{X_i \leq t}) = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}(1_{X_i \leq t}).$$

   Or pour tout $i \leq n$, $\mathrm{E}(1_{X_i \leq t}) = \mathrm{P}(X_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et on obtient

$$\mathrm{E}(Z_t) = n(1 - e^{-\lambda t}).$$