Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2021 - 2022)

Examen - Mardi 11 janvier 2022.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ désigne un espace de probabilité.

Exercice 1. *(3 pts)* Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Quand dit-on de variables aléatoires réelles $(X_i)_{i\in I}$ qu'elles sont indépendantes (I désigne un ensemble quelconque) ?
2. Soit $A \subset \Omega$.
   (a) Montrer que la fonction 1_A est une variable aléatoire réelle si et seulement si $A \in \mathcal{F}$.
   (b) On suppose dans cette question que $A \in \mathcal{F}$. Quelle est la loi de 1_A ?

Exercice 2. *(5 pts)* Soit X une variable aléatoire réelle de densité

$$f(x) = c\,\sqrt{x}\,1_{[0,2]}(x) \qquad x \in \mathbb{R},$$

où c désigne un certain réel.

1. Que vaut c ? Dessiner sans justification le graphe de f.
2. Donner la fonction de répartition de X.
3. Calculer son espérance et sa variance.
4. On pose $Y = X^2$. Donner la fonction de répartition de Y et en déduire que Y admet une densité que l'on explicitera.

Exercice 3. *(4 pts)* Soit X une variable aléatoire réelle que l'on suppose indépendante d'elle-même.

1. On suppose dans un premier temps que X est de carré intégrable. Calculer sa variance et montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $X = c$ p.s. (on rappelle que "p.s." signifie "presque sûrement").
2. On ne suppose plus que X est de carré intégrable. Retrouver le résultat de la question précédente en étudiant la fonction de répartition de X.

Exercice 4. *(8 pts)* Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Calculer la fonction de répartition F de X_1.

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie 1. Pour tout N entier strictement positif, on note

$$Y_N = \max\{X_1, \cdots, X_N\}.$$

2. Pour tout $N \geq 1$, exprimer la fonction de répartition G_N de Y_N à l'aide de F et en déduire une expression explicite de G_N.
3. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$.
   (a) Montrer que la suite $\Big(\mathrm{P}(Y_N < (1-\varepsilon)\ln N)\Big)_{N\geq 1}$ tend vers 0.
   (b) Montrer que la suite $\Big(\mathrm{P}(Y_N > (1+\varepsilon)\ln N)\Big)_{N\geq 1}$ tend vers 0.
   (c) En déduire que la suite de variables aléatoire $(Y_N/\ln N)_{N\geq 1}$ converge en probabilité vers 1.

Partie 2.

4. Étudier pour tout réel strictement positif a la nature de la série de terme générale $\mathrm{P}(X_n > a \ln n)$.
5. En déduire que p.s. $\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 1$.