Département MIDO

Algèbre linéaire 3
Année 2020/2021

Examen du 11 janvier 2021

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2h

Exercice 1 (4 points). Soit n un entier naturel non nul.

1. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on pose
$$N_\infty(A) = \max_{1\leq i,j\leq n} \left|a_{ij}\right|.$$
   (a) Montrer que l'application N_∞ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) Pour toute matrice M orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$, montrer que
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq N_\infty(M) \leq 1.$$
2. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on pose
$$N_1(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|.$$
   (a) Montrer que l'application N_1 est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) Pour toute matrice M orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$, montrer que
$$n \leq N_1(M) \leq n\sqrt{n}$$
   et discuter des cas d'égalité pour la seconde inégalité.

Exercice 2 (6 points). On considère l'espace $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire canonique, et l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Sans faire de calculs, dire pourquoi l'endomorphisme u est diagonalisable.
2. Montrer que u est une isométrie vectorielle. En déduire les seules valeurs propres possibles pour cet endomorphisme.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de u, déterminer à l'aide de la trace de A les ordres de multiplicité respectifs des valeurs propres de u. En déduire le polynôme caractéristique de l'endomorphisme.
4. Déterminer E_1, le sous-espace-propre de u associé à la valeur propre 1, et en donner une base.
5. Montrer que E_{-1}, le sous-espace-propre de u associé à la valeur propre -1, est tel que $E_{-1} = {E_1}^\perp$. En déduire une base de E_{-1}.
6. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
7. Donner une interprétation géométrique de u.

Exercice 3 (6 points). Soit n un entier naturel non nul et E un espace euclidien de dimension n, de produit scalaire noté $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Pour tout endomorphisme u de E, on rappelle que l'adjoint de u, noté u^*, est l'unique endomorphisme de E tel que
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle.$$

1. Montrer que $u^* \circ u$ est un endomorphisme auto-adjoint dont les valeurs propres sont positives ou nulles.
2. Montrer que si les vecteurs x et y sont deux vecteurs propres orthogonaux de $u^* \circ u$ alors les vecteurs $u(x)$ et $u(y)$ sont orthogonaux.

On suppose à partir de maintenant que $\mathrm{Ker}(u)$ n'est égal ni à E, ni à $\{0_E\}$.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$.
4. Justifier que le sous-espace $(\mathrm{Ker}(u^* \circ u))^\perp$ est stable par $u^* \circ u$. En déduire qu'il existe une base orthonormale de $(\mathrm{Ker}(u^* \circ u))^\perp$ constituée de vecteurs propres de $u^* \circ u$ (*on pourra pour cela considérer la restriction de* $u^* \circ u$ *à ce sous-espace*).
5. Montrer enfin qu'il existe une base orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que $\{u(e_1), \dots, u(e_r)\}$ est une base *orthogonale* de $\mathrm{Im}(u)$ et $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ est une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 4 (7 points). Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ possède la propriété (P) si et seulement s'il existe $2n+1$ réels $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1}$ tels que la matrice suivante, définie par blocs et d'ordre $n+1$,

$$U = \begin{pmatrix} & & & \alpha_{2n+1} \\ & A & & \vdots \\ & & & \alpha_{n+2} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n & \alpha_{n+1} \end{pmatrix}$$

soit orthogonale.

1. (question préliminaire) Soit B une matrice d'ordre n et la matrice suivante, définie par blocs et d'ordre $n+1$,

$$V = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Expliciter les produits $V^\top U V$ et $V^\top U$.
2. On suppose tout d'abord que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   est une matrice diagonale. Montrer dans ce cas que A a la propriété (P) si et seulement si les valeurs absolues des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont égales à 1, sauf peut-être une qui appartient à l'intervalle $[0, 1]$.
3. On suppose ensuite que A est une matrice symétrique. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A ait la propriété (P).
4. On suppose enfin que A est une matrice inversible.
   On va tout d'abord montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice symétrique définie positive S telles que $A = QS$.
   (a) Montrer que la matrice $A^\top A$ est symétrique définie positive.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice S symétrique définie positive telle que $A^\top A = S^2$.
   (c) Poser $Q = AS^{-1}$ et conclure.

   En déduire alors une condition portant sur $A^\top A$ pour que A ait la propriété (P).