Corrigé (succinct) du contrôle continu du 8 octobre 2018

Exercice 1. Soit b une forme bilinéaire définie sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On rappelle que b est dite *antisymétrique* si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ b(y,x) = -b(x,y),$$

et que b est dite *alternée* si

$$\forall x \in E,\ b(x,x) = 0.$$

Montrer que ces deux notions sont équivalentes.
On suppose que b est antisymétrique. Pour tout vecteur x de E, on a alors $b(x,x) = -b(x,x)$ et donc $b(x,x) = 0$. Réciproquement, on suppose que b est alternée. Pour tous vecteurs x et y de E, on alors

$$0 = b(x+y, x+y) = b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) = b(x,y) + b(y,x)$$

et donc $b(y,x) = -b(x,y)$.

Exercice 2. Montrer que l'application, appelée *produit vectoriel*, définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$(x,y) \mapsto x \wedge y = \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, est une application bilinéaire antisymétrique.
La bilinéarité de l'application découle de la linéarité du déterminant par rapport à chacune des colonnes. Le caractère antisymétrique de l'application découle du fait que la permutation de deux colonnes dans le déterminant entraîne la multiplication de ce dernier par -1.

Exercice 3. Pour chacune des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^2$ suivantes, donner la matrice de la forme dans la base canonique et déterminer son noyau :

1. $b_1(x,y) = x_1 y_1$,
2. $b_2(x,y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$,
3. $b_3(x,y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$,
4. $b_4(x,y) = x_1 y_1 - \frac{3}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 6 x_2 y_2$,

où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$.

1. La matrice de b_1 dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par définition, le noyau de b_1 est le noyau de cette matrice, c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(b_1) = \operatorname{Vect}\{(0,1)\}$.
2. La matrice de b_2 dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Par définition, le noyau de b_2 est le noyau de cette matrice, c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(b_2) = \{(0,0)\}$.
3. Par définition, la matrice de b_3 dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le noyau de b_3 est le noyau de cette matrice, c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(b_3) = \operatorname{Vect}\{(1,-1)\}$.
4. Par définition, la matrice de b_4 dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}$. Le noyau de b_4 est le noyau de cette matrice, c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(b_4) = \{(0,0)\}$.

Exercice 4. Soit b la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ représentée par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

1. La forme b est-elle symétrique ? Antisymétrique ? Quel est son rang ?

La matrice M n'étant ni symétrique, ni antisymétrique, la forme b n'est ni symétrique, ni antisymétrique. Par définition, le rang de b est celui de la matrice M. En appliquant le procédé d'élimination de Gauss après échange des deuxième et troisième lignes, on amène M à la matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

montrant ainsi que le rang de b est 3.

2. Justifier que la famille $\mathcal{B}' = \{e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer de deux façons la matrice représentant b dans la base $\mathcal{B}'$.

La famille contenant trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, il suffit de s'assurer qu'elle est libre pour qu'elle soit une base. On peut pour cela déterminer le rang de la matrice de passage P dont les colonnes ont pour coefficients les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le procédé d'élimination de Gauss, on amène cette matrice à la matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

qui est de rang 3. Pour déterminer la matrice M' de b dans cette nouvelle base, on peut soit utiliser la formule de changement de base pour les formes bilinéaires :

$$M' = P^\top M P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 & -1 \\ 5 & 9 & -3 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

soit calculer successivement ses coefficients $(M')_{ij} = b(e'_i, e'_j)$, $1 \leq i, j \leq 3$, en utilisant l'expression de $b(x, y)$ déduite de M,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3,\ x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3),\ b(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_1 y_3 + 2\, x_2 y_3 - x_3 y_1 + 4\, x_3 y_2 + 3\, x_3 y_3.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
b(e'_1, e'_1) &= b((1,1,1),(1,1,1)) = 1 + 1 + 1 + 2 - 1 + 3 + 4 = 11, \\
b(e'_1, e'_2) &= b((1,1,1),(-1,1,1)) = 1 + 1 - 1 + 2 + 1 + 3 + 4 = 11, \\
b(e'_1, e'_3) &= b((1,1,1),(1,1,-1)) = 1 + 1 - 1 - 2 - 1 + 4 - 3 = -1, \\
b(e'_2, e'_1) &= b((-1,1,1),(1,1,1)) = -1 - 1 - 1 + 2 - 1 + 4 + 3 = 5, \\
b(e'_2, e'_2) &= b((-1,1,1),(-1,1,1)) = 1 - 1 - 1 + 2 + 1 + 4 + 3 = 9, \\
b(e'_2, e'_3) &= b((-1,1,1),(1,1,-1)) = -1 - 1 + 1 - 2 - 1 + 4 - 3 = -3, \\
b(e'_3, e'_1) &= b((1,1,-1),(1,1,1)) = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 - 3 - 4 = -1, \\
b(e'_3, e'_2) &= b((1,1,-1),(-1,1,1)) = -1 + 1 + 1 + 2 - 1 - 4 - 3 = -5, \\
b(e'_3, e'_3) &= b((1,1,-1),(1,1,-1)) = 1 + 1 + -1 - 2 + 1 - 4 + 3 = -1.
\end{aligned}$$

3. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, donner l'expression de $q(x)$, où q est la forme quadratique associée à b.

En utilisant l'expression de b obtenue dans la question précédente, on trouve l'expression

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ x = (x_1, x_2, x_3),\ q(x) = b(x, x) = {x_1}^2 + x_1 x_2 + 6\, x_2 x_3 + 3\, {x_3}^2.$$

4. Déterminer la matrice de la forme polaire de q dans la base canonique.

La forme polaire de q est l'unique forme bilinéaire symétrique associée à q. Sa matrice dans la base canonique correspond par conséquent à la partie symétrique de la matrice M, c'est-à-dire

$$\frac{M + M^\top}{2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension trois et $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. On définit la forme bilinéaire symétrique b sur E par

$$b(e_1, e_1) = b(e_2, e_2) = -b(e_3, e_3) = 1 \text{ et } b(e_1, e_2) = b(e_1, e_3) = b(e_2, e_3) = 0.$$

1. Montrer que la forme b n'est pas dégénérée.

La matrice représentative de b dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui est de rang égal à 3. Ceci équivaut à la non dégénérescence de b puisque E est de dimension trois.

2. La restriction de b au sous-espace $F = \mathrm{Vect}\{e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ est-elle dégénérée ?

Les vecteurs $e_1 + e_3$ et $e_1 + e_2 + e_3$ sont linéairement indépendants et forment donc une base de F, qui est donc de dimension deux. La matrice symétrique de la restriction de b à F dans cette base a pour coefficients

$$b(e_1 + e_3, e_1 + e_3) = 0,\ b(e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3) = b(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_3) = 0,\ b(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3) = 1,$$

et est donc de rang égal à 1. La restriction de b à F est dégénérée.