$b : E \times F \to G$

b bilinéaire <u>ssi</u> $\forall (x, x') \in E^2 \; ; \; \forall (y, y') \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$b(x+x', y) = b(x,y) + b(x',y) \qquad b(x+x', \lambda y)$$
$$b(x, y+y') = b(x,y) + b(x,y') \qquad b(\lambda x, y+y')$$
$$b(\lambda x, y) = b(x, \lambda y) = \lambda b(x,y)$$

$b : E \times E \to G$

symétrique $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2 \quad b(x,y) = b(y,x)$

antisymétrique $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2 \quad b(x,y) = -b(y,x)$

<u>Rq</u>: Pour dem. que c'est bilinéaire

symétrie + linéarité à droite

ou

symétrie + ——— à gauche

<u>ex</u>: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto b(x,y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E ; $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ base de F

X coordonnées de x de E dans $\mathcal{B}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Y ——— y de F dans $\mathcal{C}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$M = (m_{ij}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(b)$$

on a $b(x,y) = X^T M Y \qquad m_{ij} = b(e_i, f_j)$

ex: $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$b(x,y) = x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 - x_1 y_1$

→ mq b est bilinéaire

→ $M_{\mathcal{B}}(b) = (m_{ij})$

$m_{ij} = b(e_i, e_j)$ $\qquad x_1 = y_1 = 1$ $\qquad b(e_1, e_1) = b\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -1$

$x_2 = y_2 = 0$ $\qquad b(e_1, e_2) = b\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$

$x_1 = 1 = y_2$

$x_2 = 0 = y_1$

$$\begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$b : E \times F \to G$; $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

$\mathcal{E} = (f_1, \dots, f_n)$ base de F

$\forall (x,y) \in E \times F$, $b(x,y) \in E \times F$

$b(x,y) = X^T M Y$ $\qquad M = M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(b)$

Changement de base $\mathcal{B}'$ de E, $\mathcal{E}'$ de F.

$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ $\qquad X_{\mathcal{B}} = P X'_{\mathcal{B}'}$

$Q_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$ $\qquad Y_{\mathcal{E}} = Q Y'_{\mathcal{E}'}$

$$\begin{aligned} b(x,y) &= (PX')^T M (QY') \\ &= (X')^T P^T M Q Y' \\ &= X'^T M Y' \end{aligned}$$

b non dégénéré ssi le $\det(M)$ de matrice dans nptq base est non nul.

<u>Def</u> : $s : E \times E \to \mathbb{C}$ forme sesquilinéaire à gauche si :

- linéarité à droite : $s(x, y+\lambda y') = s(x,y) + \lambda s(x,y')$
- semi-linéaire à gauche : $s(x+\lambda x', y) = s(x,y) + \bar{\lambda} s(x',y)$

$s(x,y) = \bar{X}^T M Y$

<u>Exemple</u> : $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall y \in \mathbb{R}^3$, $b(x,y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_2 y_3$

1. $b(x,y) = (x_1 \ \ x_2) \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 1 & 2 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$

2. $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ $\quad \mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$M = (m_{ij})$; $m_{ij} = b(e_i, f_j)$

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{B}}(b) = \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \begin{pmatrix} b(e_1, f_1) & b(e_1, f_2) & b(e_1, f_3) \\ b(e_2, f_1) & b(e_2, f_2) & b(e_2, f_3) \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

<u>Def</u> : Formes quadratique (F.Q) $q : E \to \mathbb{K}$

$\exists b : E \times E \to \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $q(x) = b(x,x)$

forme bilinéaire → une FQ

une FQ → plusieurs f.b. mais à une seule f.b. sym.

forme polaire $c(x,y) = \frac{1}{2}[b(x,y) + b(y,x)] = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$

Matrice de q = celle de sa forme polaire

noyau de q, rang de q.

FQ. non degeneré ssi $\ker(q) = \{0_E\}$; q defini ssi $(q(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$

$q(x) = \sum_{i,j} x_i x_j$

Si q est une FQ homogène de degré 2 ; $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$

en particulier $q(-x) = q(x)$.

<u>Remarque</u> : Si $q(x) = \sum_{i,j} x_i x_j$ et si q est homogène de d° 2, alors c'est un F.Q.

Exercice 1:

1. Soit $A, A', B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

linéarité à gauche: $b(\lambda A + A', B) = tr((\lambda A + A')^T B) = tr(\lambda A^T B + A'^T B)$

$= tr(\lambda A^T B) + tr(A'^T B)$ par linéarité de la trace

$= \lambda tr(A^T B) + tr(A'^T B)$

$= \lambda b(A, B) + b(A', B)$

Symétrie: Mq $b(A,B) = b(B,A)$

$b(B,A) = tr(B^T A) = tr((B^T A)^T)$ car une matrice et sa transposée ont la m̂ trace

$= tr(A^T B)$

$= b(A,B)$

Conclusion: b symétrique et linéaire à gauche $\Rightarrow$ b bilinéaire symétrique.

2. $b(A,B) = tr(A^T B) = \sum_{i=1}^{2} (A^T B)_{ii} = \sum_{i=1}^{2} \left[\sum_{j=1}^{2} (A^T)_{ij} (B)_{ji} \right] = \sum_{1 \le i,j \le 2} A_{ji} B_{ji}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ $b(A,B) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}$

$\forall A$, $b(A,A) = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \geq 0$ par somme de réels carrés.

Donc $b(A,A) = 0$ ssi $\forall i,j$ $A_{ij} = 0$ $\Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$; $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b(e_1, e_1) = tr(e_1^T e_1) = 1 = b(e_i, e_i)$ $\forall i \in [\![1,4]\!]$

$b(e_i, e_j) = 0$ $\forall i \neq j$.

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b) = I_4$

Exercice 2 :

$$\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \end{array}$$

$b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_2 + 2 x_3 y_3$

Rq : b symétrique <=> M sym.
antisym antisym

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $M^T = M$ donc sym.

$b(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 4 x_1 y_3 + 4 x_3 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2$

Rq b bil.
· $M_B(b)$ B base canonique
· $D = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$; $\mathcal{E} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ $M_{D\mathcal{E}}(b)$

$$M_D(b) = \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \end{array}$$

$m_{ij} = b(e_i, f_j)$

Exercice 3 : $\forall (P,Q) \in E^2$, $b(P,Q) = \int_0^1 P(t)\,Q'(t)\,dt$

1. - linéarité à gauche : Soit $P, \tilde{P}, Q \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$b(\lambda P + \tilde{P}, Q) = \int_0^1 (\lambda P + \tilde{P})(t)\, Q'(t)\,dt = \int_0^1 \lambda P(t) Q'(t) + \tilde{P}(t) Q'(t)\,dt$$

$= \int_0^1 \lambda P(t) Q'(t)\,dt + \int_0^1 \tilde{P}(t) Q'(t)\,dt$ par linéarité de l'intégrale

$$= \lambda \int_0^1 P(t) Q'(t)\,dt + \int_0^1 \tilde{P}(t) Q'(t)\,dt$$

$$= \lambda b(P,Q) + b(\tilde{P}, Q)$$

- linéarité à droite : Soit $P, Q, \tilde{Q} \in E$

$$b(P, Q + \tilde{Q}) = \int_0^1 P(t)\,(Q + \tilde{Q})'(t)\,dt = \int_0^1 P(t) Q'(t) + P(t) \tilde{Q}'(t)\,dt$$

$= \int_0^1 P(t) Q'(t)\,dt + \int_0^1 P(t) \tilde{Q}'(t)\,dt$ par linéarité de l'intégrale.

$$= b(P,Q) + b(P, \tilde{Q})$$

b est donc linéaire à gauche et à droite, donc b est bilinéaire.
(Rq : b pas sym.)

2.
- $b(1,1) = b(X,1) = b(X^2,1) = 0$
- $b(1,X) = \int_0^1 1\,dx = 1$
- $b(X,X) = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$
- $b(X^2,X) = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$
- $b(1,X^2) = \int_0^1 2x\,dx = [x^2]_0^1 = 1$
- $b(X,X^2) = \int_0^1 2x^2\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$
- $b(X^2,X^2) = \int_0^1 2x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

$$M_B(b) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & X & X^2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

3. Il est clair que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$ est libre, donc $\mathrm{Im}(M_B(b)) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] \Rightarrow rg(b) = 2$

4. $\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\quad M = \underbrace{\frac{M+M^T}{2}}_{\text{sym.}} + \underbrace{\frac{M-M^T}{2}}_{\text{antisym.}}$

$M_n(\mathbb{R}) = M_{sym} \oplus M_{antisym.}$

Donc $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$

5. $b(P,P) = \int_0^1 P(t)P'(t)\,dt = \left[\frac{1}{2}P^2(t)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(P^2(1) - P^2(0))$

$P(X) = 1 - X$

$b(1-X, 1-X) = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2} < 0$

$b(P,P) = 0 \iff P^2(1) = P^2(0)$

Exercice 4:

$b(x,y) = \bar{X}^T M Y$

1. $x = e_1 + ie_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$; $y = e_1 - ie_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$b(x,y) = (1 \quad i) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 0$

$b(x,x) = (1 \quad i) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 + 2i + 2i + 1 = 4i + 2$

$b(y,y) = (1 \quad -i) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 1 - 2i - 2i + 1 = 2 - 4i$

Exercice 5 :

(a) $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = P(0)P(1)P(2)$

$q(\alpha P) = (\alpha P)(0)(\alpha P)(1)(\alpha P)(2)$

$= \alpha^3 P(0)P(1)P(2)$

$= \alpha^3 q(P)$

· ex : $P(X) = X+1$; $q(P) = (X+1)' = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$q(2P) = q(2X+2) = 2 \times 4 \times 6$

$\left.\begin{array}{l} q(P) = 6 \\ q(2P) = 2\times4\times6 \end{array}\right\} q(2P) \neq 4q(P)$

(b) $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = 2P(1)P'(1)$

polarisation $c(x,y) = \frac{1}{2}\left[b(x,y) + b(y,x)\right]$

$= \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x-y)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[q(x) + q(y) - q(x-y)\right]$

Posons $b(P,Q) = \frac{1}{2}\left[q(P+Q) - q(P) - q(Q)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[2(P+Q)(1)(P+Q)'(1) - 2P(1)P'(1) - 2Q(1)Q'(1)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[2\left(P(1) + Q(1)\right)\left(P'(1) + Q'(1)\right) - 2P(1)P'(1) - 2Q(1)Q'(1)\right]$

$= \cancel{\frac{1}{2}}\Big[\cancel{2}\big(\cancel{P(1)P'(1)} + P(1)Q'(1) + Q(1)P'(1) + \cancel{Q(1)Q'(1)}\big) - \cancel{2P(1)P'(1)}$

$- \cancel{2Q(1)Q'(1)}\Big]$

$b(P,Q) = P(1)Q'(1) + Q(1)P'(1)$

b est bilinéaire symétrique tel que $b(P,P) = q(P)$. Donc q est une F.Q et b est sa forme polaire.

(c) $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = |P(0)P(1)|$

$|.|$ n'est pas un polynôme, donc ce n'est pas une forme quadratique.

Exercice 6 :

q. FQ $\Leftrightarrow$ b bilinéaire $q(x) = b(x,x)$

$$
\begin{aligned}
q(x+y) + q(x-y) &= b(x+y, x+y) + b(x-y, x-y) \\
&= b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) \\
&\quad + b(x,x) + b(x,-y) + b(-y,x) + b(-y,-y) \\
&= 2b(x,x) + \cancel{b(x,y)} + \cancel{b(y,x)} + b(y,y) \\
&\quad - \cancel{b(x,y)} + - \cancel{b(y,x)} + b(y,y) \\
&= 2b(x,x) + 2b(y,y) \\
&= 2q(x) + 2q(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q(x+y) - q(x-y) &= b(x+y, x+y) - b(x-y, x-y) \\
&= \cancel{b(x,x)} + b(x,y) + b(y,x) + \cancel{b(y,y)} - \cancel{b(x,x)} + b(x,y) + b(y,x) - \cancel{b(y,y)} \\
&= 2b(x,y) + 2b(y,x) \\
&= 2\big(b(x,y) + b(y,x)\big)
\end{aligned}
$$

Exercice 7 : $\forall x \in \mathbb{R}^2 ; \; q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 3x_1x_2$

1. $$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \end{array}$$

2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 , \; b(x,y) = x_1y_1 + 4x_2y_2 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1$

3. $$q(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2$$
$$= \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 4x_2^2$$
$$= \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{7}{4}x_2^2$$

Exercice 8 :

q definie (si $q(x)=0 \Rightarrow x=0$) , q. FQ ; b forme polaire

Supposons que q n'est ni positive ni négative

Alors $\left|\begin{array}{l} \exists x \quad q(x)>0 \\ \exists y \quad q(y)<0 \end{array}\right.$

Posons $g(t) = q(x+ty) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$= b(x+ty, x+ty)$

$= b(x,x) + b(x,ty) + b(ty,x) + b(ty,ty)$

$= q(x) + t(b(x,y) + b(y,x)) + t^2 q(y)$

$g(t) = q(x) + 2t\, b(x,y) + t^2 q(y)$

g est donc un polynôme de degré 2. $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = -\infty$ et $g(0) = q(x) > 0$

$\exists t_0 \quad g(t_0) = 0 = q(x + t_0 y)$.

Or q definie $\Rightarrow x + t_0 y = 0 \Rightarrow x = -t_0 y$

Alors $q(x_0) = q(-t_0 y) = \underbrace{t_0^2}_{\geq 0} \underbrace{q(y)}_{<0} < 0$ d'où $q(x)$ et $q(y)$ $\hat{m}$ signe or $q(x)$ et $q(y)$ sont de signe opposé.

Contradiction.

<u>Exercice 10</u> : $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $q_1(A) = tr^2(A)$; $q_2(A) = tr(A^T A)$

* <u>$q_1(A) = tr^2(A)$</u>

Soit $A = (a_{ij})_n$; $q_1(A) = tr^2(A) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^2$ comme $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$q_1(\alpha A) = tr(\alpha A)^2 = (\alpha \cdot tr(A))^2 = \alpha^2 \cdot tr(A)^2 = \alpha^2 q_1(A)$

$q_1(A) \geq 0$ (car carré)

<u>ex</u> : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $tr(A) = 0$ et $A \neq 0$.

q_1 est positive et non définie : non définie positive.

* <u>$q_2(A) = tr(A^T A)$</u>

$A = (a_{ij})_n$ $A^T = (a_{ji})_n$ $A^T A = (c_{ij})_n$; $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a^T_{ik} a_{kj}$

$tr(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a^T_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{ki}$

$= \sum \sum a_{ki}^2 \geq 0$

$\sum - = 0 \Rightarrow a_{ki} = 0$ car $\sum$ de carré de $\mathbb{R}$ déf pos.