__Rappel__ : Déf d'une tribus sur Ω.

Une tribu sur Ω est un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de Ω vérifiant :

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$
3. Si $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}$ (une suite d'élém.), alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

__Exercice 1 :__

1. Par la déf. de tribu, 1. $\emptyset \in \mathcal{F}$ et 2. Si $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

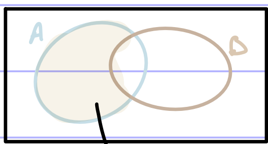
On a $\emptyset^c = \Omega \in \mathcal{F}$

2. Directement par la déf de tribu. 3.

3. $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

$A, B \in \mathcal{F} \xRightarrow{2.\text{ déf}} A^c, B^c \in \mathcal{F} \xRightarrow{3.\text{ déf}} A^c \cup B^c \in \mathcal{F} \xRightarrow{2.\text{ déf}} (A^c \cup B^c)^c = A \cap B \in \mathcal{F}$

4. Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{F}$



$A \setminus B$

$A \setminus B = A \cap B^c$. Or $B \in \mathcal{F} \underset{\text{déf. 2.}}{\Rightarrow} B^c \in \mathcal{F} \underset{\text{q. 3}}{\Rightarrow} A \cap B^c \in \mathcal{F}$

5. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Si $A, B \in \mathcal{F}$, par la q. 4. on a $A \setminus B \in \mathcal{F}$, $B \setminus A \in \mathcal{F}$.

$\underset{\text{déf. 3}}{\Rightarrow} (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{F}$

6. $\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)^c = \bigcup_{n\geq 1} A_n^c$ comme $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'élem. de $\mathcal{F}$.

$\forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{F} \underset{\text{déf tribu (2)}}{\Rightarrow} \forall n \geq 1 \; A_n^c \in \mathcal{F} \underset{\text{déf tribu (3)}}{\Rightarrow} \bigcup_{n\geq 1} A_n^c \in \mathcal{F} \underset{\text{déf tribu (2)}}{\Rightarrow} \underbrace{\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right)^c}_{= \bigcap_{n\geq 1} A_n} \in \mathcal{F}$

Exercice 2 :

Rappel : Def de tribu engendrée par une classe de partie de Ω
↳ famille / ensemble

Def : Soit $\mathcal{E}$ une classe quelconque de partie de Ω.
La tribu engendrée par $\mathcal{E}$, notée $\sigma(\mathcal{E})$, est définie par
$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{F} \text{ une tribus sur } \Omega} \mathcal{F}$

$\sigma(\mathcal{E})$ est la + ptite tribus (au sens de l'inclusion) contenant $\mathcal{E}$

Rq : 1, par la def de $\sigma(\mathcal{E})$, on a $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$
Rq : 2 Si $\mathcal{F}$ est déjà une tribu, alors $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$

1. $\Omega = \{1, \dots, 6\}$
$\mathcal{E} = \{\{1, 3, 5\}\}$
$\sigma(\mathcal{E}) = \{\phi, \Omega, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$

2. Ω quelconque, $\mathcal{E} = \{A\}$, $A \subseteq \Omega$, $\sigma(\mathcal{E}) = \{\phi, \Omega, A, A^c\}$

3. Ω qqlc. $\mathcal{E} = \{A, B\}$, $A, B \subseteq \Omega$, $\sigma(\mathcal{E}) = \{\phi, \Omega, A, A^c, B, B^c, A \cup B, A^c \cup B,$
$A \cup B^c, A^c \cup B^c, A \cap B, A^c \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B^c, \underbrace{(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)}_{= A \Delta B}, (A \Delta B)^c\}$

4. Ω est dénombrable $\mathcal{E} = \{\{w\}, w \in \Omega\}$, l'ensemble des singletons.
$\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$
↳ la tribu qui contient tous les ensembles de Ω.

"$\subseteq$" Mq $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. On a $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ car $\mathcal{E} = \{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$
↳ s.e de Ω
$\Rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu contenant $\mathcal{E}$. Or $\sigma(\mathcal{E})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{E} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

"$\supseteq$" Mq $\mathcal{P}(\Omega) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$.
Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. A est un sous-ensemble de Ω.
Comme Ω est dénombrable, A est également dénombrable.
On peut écrire A comme $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$
↳ c'est une union dénombrable car A est dénombrable.

Or par la déf de $\mathcal{E}$, $\forall \omega \in A$, $\{\omega\} \in \mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\} \in \sigma(\mathcal{E})$
↳ car $\sigma(\mathcal{E})$ est une tribu, $\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$ est union dén. par la déf de tribu 3.

$\Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{E})$. Comme A est qqc dans $\mathcal{P}(\Omega)$, on a $\mathcal{P}(\Omega) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$
En conclusion $\mathcal{P}(\Omega) = \sigma(\mathcal{E})$

5. Ω est quelconque et $\mathcal{E} = \{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$, l'ensemble des singletons $\sigma(\mathcal{E})$?

Si Ω est dénombrable, on se retrouve dans la q.4.
Si Ω n'est pas dén.

$$\sigma(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \Omega, A \text{ est dén ou codenombrable}\}$$

↳ déf : $A \subseteq \Omega$ est dit coden. si A^c est dén

Etape 1 Mq $\mathcal{A}$ est une tribu
Etape 2 $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$
Etape 3 $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

<u>Etape 1</u>: Mq $\mathcal{A}$ est une tribu (par la déf de tribu)

1. $\phi \in \mathcal{A}$ car ϕ est un ens. fini. donc dén.

2. Soit $A \in \mathcal{A}$, alors A est dén ou codén.

- si A dén, A^c est codén $\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- si A codén, A est dén $\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

3. Soient $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$,

car union dén. des ens. dén est dén

<u>cas 1:</u> Tous les A_n sont dén. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dén $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

<u>cas 2</u>: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, A_{n_0} est codén. alors $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c \subseteq (A_{n_0})^c$ ens. dén.

$\Rightarrow \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$ est dén.

$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est codén.

$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

cas 1 + cas 2 $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$; 1 + 2 + 3 $\Rightarrow \mathcal{A}$ est une tribu par la déf. de tribu.

<u>Etape 2</u>: Mq $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. $\forall \{\omega\} \in \mathcal{E}$, $\{\omega\}$ est dén. car il $\Rightarrow \{\omega\} \in \mathcal{A}$ par la déf de $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ i.e. $\mathcal{A}$ est une tribu contenant $\mathcal{E}$.
Or $\sigma(\mathcal{E})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{E}$.
$\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

Étape 3 : Mq $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors par la déf. de $\mathcal{A}$, A est dén ou codén.

- Si A est dén. $A = \bigcup_{w \in A} \{w\}$ → union de dén.

$\forall w \in A$, $\{w\} \in \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

↳ déf de $\mathcal{E}$ → par rq !

$\Rightarrow \bigcup_{w \in A} \{w\} \in \sigma(\mathcal{E})$ car c'est une union dén. et $\sigma(\mathcal{E})$ est une tribu

Donc $A \in \sigma(\mathcal{E})$

Si A codén., A^c dén et $A^c = \bigcup_{w \in A} \{w\} \in \sigma(\mathcal{E})$

$\Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{E})$ car $\sigma(\mathcal{E})$ est une tribu donc stable par complémentaire.

Comme A est qqc dans $\mathcal{A}$, on a $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

Étape 1+2+3 $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$

Exercice 3 : (LIU)

Rappel :

1) Def de "Tribu engendrée"

Soit $\mathcal{E}$ une classe de sous-ensemble de Ω.

La tribu engendrée par $\mathcal{E}$, notée $\sigma(\mathcal{E})$, est définie par

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \text{ tribu sur } \Omega \\ \mathcal{E} \subset \mathcal{F}}} \mathcal{F}$$

$\sigma(\mathcal{E})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{E}$
au sens de l'inclusion

2) Des remarques sur "Tribu engendrée"

Rq 1 : $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ par la def.

2 : Si $\mathcal{F}$ est déjà une tribu, alors $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$

3 : Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, deux classes de sous-ensemble de Ω, tq $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$

Alors on a $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$

Preuve : $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \overset{\text{Rq. 1}}{\subseteq} \sigma(\mathcal{B}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{B})$ est une tribu contenant la classe $\mathcal{A}$.

Or $\sigma(\mathcal{A})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$.

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$.

Def. de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\underbrace{\{]a,b[\,,\ a,b \in \mathbb{R}\,,\ a<b\}}_{I})$

1. Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\underbrace{\{[a,b],\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}}_{II})$

"$I \subseteq II$"

$\forall\,]a,b[\subset I$, $]a,b[= \bigcup_{n\geq 1} [a+\frac{1}{n} ; b-\frac{1}{n}]$ union dénombrable *

Or $\forall n \geq 1$, $[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] \subset II$

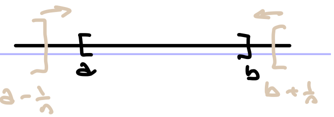
$\Rightarrow \,]a,b[\subset \mathrm{II}$ car $*$ est une union dén. et II est une tribu donc stable par union dén.

$\Rightarrow \{]a,b[, a,b \in \mathbb{R}, a<b \} \subseteq \mathrm{II}$

$\Rightarrow \sigma(\{]a,b[, a,b \in \mathbb{R}, a<b \}) \subseteq \mathrm{II}$ par rq 3.

Donc $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{II}$

" $\mathrm{II} \subseteq \mathrm{I}$ "



$\forall a,b \in \mathbb{R}, a<b, \ [a,b] = \bigcap_{n \geq 1}]a - \frac{1}{n} ; b + \frac{1}{n}[$

Or $\forall n \geq 1; \ ]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\ \in \mathrm{I}$ intersection dén.

Par exercice 1, q.6, on sait que $[a,b] \in \mathrm{I}$ on a démontré que la tribu est stable par l'intersection dén.

$\Rightarrow \{ [a,b], a,b \in \mathbb{R}, a<b \} \subseteq \mathrm{I}$

$\Rightarrow \sigma(\{ [a,b], a,b \in \mathbb{R}, a<b \}) \subseteq \mathrm{I}$ Rq. 2 et 3

Donc on a montré $\mathrm{II} \subseteq \mathrm{I}$.

Conclusion: $\mathrm{II} = \mathrm{I}$.

2. Mq $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \underbrace{\sigma(\{]-\infty, t], t \in \mathbb{R} \})}_{\mathrm{III}}$, comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathrm{II}$, alors Mq $\mathrm{III} = \mathrm{II}$.

" $\mathrm{III} \subseteq \mathrm{II}$ "

$\forall t \in \mathbb{R}, \ ]-\infty, t] = \bigcup_{n \geq 1} [t-n, t]$ union dénombrable

Or $\forall n \geq 1, \ [t-n, t] \in \mathrm{II}$

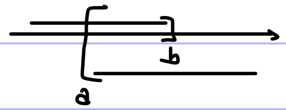
$\Rightarrow \,]-\infty, t] \subseteq \mathrm{II}$ car (II) est une tribu

$\Rightarrow \{]-\infty ; t], t \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathrm{II} \Rightarrow \sigma(\{]-\infty ; t], t \in \mathbb{R} \}) \subseteq \mathrm{II}$

Donc $\mathrm{III} \subseteq \mathrm{II}$

"$\mathrm{II} \subseteq \mathrm{III}$"

$\forall a,b \in \mathbb{R},\ a<b$



$[a,b] =]-\infty,b] \cap [a,+\infty[=]-\infty,b] \cap (]-\infty,a[^c)$

Or $]-\infty,a[= \bigcup_{n\geq 1}]-\infty, a-\frac{1}{n}]$

Or $]-\infty,b] \in (\mathrm{III})$, $\forall n\geq 1;\ ]-\infty; a-\frac{1}{n}] \in \mathrm{III}$

$\Rightarrow]-\infty,a[\in \mathrm{III}$ car la tribu est stable par union dén.

et $[a,b] \in \mathrm{III}$ car la tribu est stable par complémentaire et l'intersection.

Donc $\{[a,b],\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\} \subseteq \mathrm{III}$

Donc $\sigma(\{[a,b],\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}) \subseteq \mathrm{III} \Rightarrow \mathrm{II} \subseteq \mathrm{III}$

En conclusion $\mathrm{II} = \mathrm{III} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. Mq $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \underbrace{\sigma(\{]-\infty,t],\ t\in\mathbb{Q}\})}_{\mathrm{IV}}$

<u>Rappel</u>: Dans q.2, on a mq $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty,t],\ t\in\mathbb{R}\}) = \mathrm{III}$

Mq $\mathrm{IV} = \mathrm{III}$

"$\mathrm{IV} \subseteq \mathrm{III}$"

D'abord $\{]-\infty,t],\ t\in\mathbb{Q}\} \subseteq \{]-\infty,t],\ t\in\mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \sigma(\{]-\infty,t],\ t\in\mathbb{Q}\}) \subseteq \sigma(\{]-\infty,t],\ t\in\mathbb{R}\})$ par mq 3.

"$\mathrm{III} \subseteq \mathrm{IV}$"

$\forall t\in\mathbb{R},\ ]-\infty,t] = \bigcap_{\substack{s\geq t \\ s\in\mathbb{Q}}}]-\infty,s]$

Or $\forall s\in\mathbb{Q},\ s\geq t,\ ]-\infty,s] \in \mathrm{IV}$

$\Rightarrow]-\infty, t] \in \mathrm{IV}$ car la tribu est stable par intersection dén. (ex. 1 q.6)

$\Rightarrow \underbrace{\sigma(\{]-\infty, t], t \in \mathbb{R}\})}_{= \mathrm{III}} \subseteq \mathrm{IV}$

En conclusion, $\mathrm{III} = \mathrm{IV} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

4. Mq $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\})$

" $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{V}$ "

$\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $]a,b[$ est un ouvert par la def. d'un ouvert.

$\Rightarrow]a,b[\in \sigma(\{O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}) \Rightarrow \{]a,b[, a,b \in \mathbb{R}, a<b\} \subseteq \mathrm{V}$

$\Rightarrow \sigma(\{]a,b[, a,b \in \mathbb{R}, a<b\}) \subseteq \mathrm{V}$.

" $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{I}$ "

$$O = \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ a<b \\ ]a,b[\subseteq O}}]a,b[$$

preuve :

$\boxed{\subseteq}$ " $\supseteq$ " trivial, car tout $]a,b[\subseteq O$

$\boxed{\supseteq}$ $\forall x \in O$; par la def. d'un ouvert, $\exists \varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq O$

Or $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors $\exists a_0, b_0 \in \mathbb{Q}$, tq

$a_0 \in]x-\varepsilon, x[$; $b_0 \in]x, x+\varepsilon[$

Donc $x \in]a_0, b_0[\subseteq]x-\varepsilon ; x+\varepsilon[\subseteq O$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ a<b \\ ]a,b[\subseteq O}}]a,b[$ comme x est qlcq. dans O.

$\Rightarrow O \subseteq \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ a<b \\ ]a,b[\subseteq O}}]a,b[$

$\Rightarrow O \in \sigma(\{]a,b[, a,b \in \mathbb{R}, a<b\}) \Rightarrow \{O, \text{ ouvert de } \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{I}$

$\Rightarrow \underbrace{\sigma(\{O, \text{ ouvert de } \mathbb{R}\})}_{\mathrm{V}} \subseteq \mathrm{I}$

5. Mq $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{F, \text{ fermé de } \mathbb{R}\})$

$\Rightarrow O \in \underbrace{\sigma(\{]a,b[\,,\ a,b \in \mathbb{R},\ a<b\})}_{(I)}$

$\Rightarrow \{O,\ \text{ouvert de } \mathbb{R}\} \subseteq (I)$

$\Rightarrow \underbrace{\sigma(\{O,\ \text{ouvert de } \mathbb{R}\})}_{(V).} \subseteq (I)$

5. Montrer $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \underbrace{\sigma(\{F,\ \text{fermé de } \mathbb{R}\})}_{(VI)}$

$\boxed{\text{Rappel}}$ Q4 :

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \underbrace{\sigma(\{O,\ \text{ouvert de } \mathbb{R}\})}_{(V)}$

"$(V) \subseteq (VI)$"

$\forall O$ ouvert, O^c est un fermé
par la déf d'un fermé.

$\Rightarrow O^c \in \underbrace{\sigma(\{F,\ \text{fermé de } \mathbb{R}\})}_{(VI)}$

$\Rightarrow O \in (VI)$

$\Rightarrow \{O,\ \text{ouvert de } \mathbb{R}\} \subseteq (VI)$

$\Rightarrow (V) \subseteq (VI)$

"$(VI) \subseteq (V)$"

$\forall F$ fermé, F^c est un ouvert

$\Rightarrow F^c \in (V)$

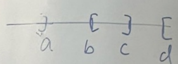
$\Rightarrow F \in (V)$

$\Rightarrow \{F,\ \text{fermé de } \mathbb{R}\} \subseteq (V)$

$\Rightarrow (VI) \subseteq (V).$

$]a,b[$ est un ouvert

$]a,b[\ \cup\ ]c,d[$



Exercice 4 (LIU)

1) Rq $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est une tribu sur Ω.

1. $\emptyset \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$? Oui car $\forall i \in I$, $\emptyset \in \mathcal{F}_i \Rightarrow \emptyset \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$

2. Soient $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$, $\Rightarrow \forall i \in I$, $A \in \mathcal{F}_i \Rightarrow \forall i \in I$, $A^c \in \mathcal{F}_i \Rightarrow A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$
   car $\mathcal{F}_i$ est une tribu

3. Soient $A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall i \in I$, $A_n \in \mathcal{F}_i$ $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall i \in I$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_i$

$$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$$

Donc $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est bien une tribu.

2) Faux.

Soit $\Omega = \{1, 2, 3\}$

Considérons deux tribus : $\mathcal{F}_1 = \sigma(\{1\}) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3\}\}$

$\mathcal{F}_2 = \sigma(\{2\}) = \{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{1,3\}\}$

$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ qui n'est pas une tribu car

$\{1\} \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ et $\{2\} \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ mais $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$

Donc $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ n'est pas une tribu et 2) est FAUX

Exercice 5 :

Mq $\mathcal{E} := \{A \,,\, \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1\}$ est une tribu.

1. $\phi \in \mathcal{E}$ car $\mathbb{P}(\phi) = 0$

2. Soit $A \in \mathcal{E}$. Alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$ $\Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{P}(A) = 1 \\ 1 & \text{si } \mathbb{P}(A) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{E}$

3. Soit $A_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$. Donc soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = 0$ (cas 1)

soit $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tq $\mathbb{P}(A_{n_0}) = 1$

Pour cas 1 : $0 \leq \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup A_n) = 0$

$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$

Pour cas 2 :

$A_{n_0} \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n$, donc $1 = \mathbb{P}(A_{n_0}) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq 1$

prop de $\mathbb{P}$ — def mesure de proba

$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = 1 \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{E}$