Nom : BOUIN Prénom : EMERIC TD : SENIOR 3 Note : WHO KNOWS ?

Les questions suivantes sont indépendantes.

Donner un exemple de suite de rationnels de Cauchy mais qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ (on justifiera intégralement mais de manière concise).

On définit, pour $x_0 = 2$, $x_{n+1} = x_n/2 + 1/x_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels strictement positifs par récurrence. De plus, comme $\forall z > 0$, $\frac{z}{2} + \frac{1}{z} \geq \sqrt{2}$, on a $\forall n$, $x_n \geq \sqrt{2}$. Puis $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n}\left(1 - \frac{x_n^2}{2}\right) \leq 0$. Ainsi, (x_n) est décroissante et minorée, elle est convergente, donc de Cauchy. Elle converge alors vers $l \in \mathbb{R}$ tq $l = \frac{l}{2} + \frac{1}{l}$ soit $l = \sqrt{2}$. Or $\sqrt{2}$ est irrationnel, en effet si $\sqrt{2} = p/q$ avec $PGCD(p,q) = 1$, alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair donc p aussi, mais alors $p = 2p' \Rightarrow 4p'^2 = 2q^2$ et donc q^2 est pair et q aussi, ce qui est impossible.

Prouver qu'une suite de Cauchy est bornée.

cf cours pour la preuve à reproduire.

Donner un équivalent simple des suites suivantes et conclure quand à la nature de la série de terme général associé.

$u_n = \ln\left(1 + \tan(\frac{1}{n})\right) \sim \tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc par équivalence de terme généraux positifs, la STG $\frac{1}{n}$ étant divergente par Rieman, la STG u_n aussi.

$v_n = 1 - \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{-\frac{1}{n}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$= 1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$

Si $\alpha > 0$: $v_n = 1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)\right)$

$= \frac{1}{n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ qui est le TG d'une série convergente.

Si $\alpha = 0$: $v_n = 1 - \exp\left(-\frac{\ln 2}{n}\right) \sim \frac{\ln 2}{n}$ qui est le TG d'une série divergente.

Si $\alpha < 0$: $v_n = 1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\left[\ln(n^{-\alpha}) + \ln(1 + n^\alpha)\right]\right) = 1 - \exp\left(\alpha\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \sim \alpha\frac{\ln n}{n}$ qui est le TG d'une série DV ($> \frac{1}{n}$).

$w_n = \ln\left(\cos(\frac{1}{n})\right)\ln\left(\sin(\frac{1}{n})\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\ln\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \ln n\right)$

$\sim + \frac{\ln n}{2n^2}$.

On $n^{3/2}\left(+\frac{\ln n}{2n^2}\right) = +\frac{\ln n}{2\sqrt{n}} \to 0$ donc par équivalence la STG w_n est convergente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, et $a \geq 0$ un réel, on définit

$$u_n = \frac{a^n n!}{n^n}.$$

Donner la nature de la série de terme général u_n lorsque $a \neq e$. Comme $u_n > 0$, let us use the D'Alembert criterion :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n n!} = \frac{a n^n}{(n+1)^n} = a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{a}{e}, \text{ puisque } \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \exp(-1 + o(1)).$$

Ainsi, si $a > e$, la STG u_n est divergente, si $a < e$ elle est convergente.

Lorsque $a = e$, montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un certain rang.

On écrit $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e \cdot \exp\left(-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = e \cdot \exp\left(-n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$

$= e \cdot \exp\left(-1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)\right) \geq 1$ pour n assez grand.

En déduire alors la nature de la série de terme général u_n.

Elle est divergente puisque ~~comme~~ u_n est croissante, elle ne tend pas vers 0.

Soient a_n et b_n deux suites strictement positives telles que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Montrer qu'il existe $M > 0$ telle que $a_n \leq M b_n$.

On a, $\forall n > 0$, $\frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_n}{b_0}$ donc $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_0}{b_0}$.

Montrer que si la série de terme général b_n converge, alors celle de terme général a_n aussi.

On écrit $\sum_{k=0}^{n} a_k \leq M \sum_{k=0}^{n} b_k$. La suite $\sum_{k=0}^{n} b_k$ est convergente donc majorée. La suite $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est alors croissante majorée, donc convergente.

Montrer que si la série de terme général a_n diverge, alors celle de terme général b_n aussi.

De même, si $\sum_{k=0}^{n} a_k$ diverge, alors comme $\sum_{0}^{n} b_k \geq M \sum_{k=0}^{n} a_k \to \infty$, $\sum_{0}^{n} b_k$ diverge aussi.