Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2020 - 2021)

CC2 - Lundi 30 novembre 2020.

durée : 1h30.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Dans tout le sujet on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Exercice 1. Questions de cours

1. Donner la définition d'une variable aléatoire réelle.
2. Montrer que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle est continue à droite.
3. Soit A un événement de $\mathcal{F}$ tel que $\mathrm{P}(A) > 0$. Rappeler la définition de $\mathrm{P}(\cdot|A)$ et montrer qu'il s'agit bien d'une probabilité.
4. Enoncer et prouver le premier lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire. On suppose qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\mathrm{E}(e^{\mu X}) < +\infty$. Montrer que pour tout $a > 0$

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq \mathrm{E}(e^{\mu X})e^{-\mu a}.$$

Exercice 3. On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y indépendantes et de même loi uniforme sur $\{-1, +1\}$. On note $Z = XY$. Montrer que les variables (X, Y, Z) sont indépendantes 2 à 2 mais ne sont pas mutuellement indépendantes.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètres $\lambda > 0$. Montrer que pour toute fonction ϕ continue bornée la variable aléatoire $X\phi(X)$ est intégrable puis montrer que $\mathrm{E}(X\phi(X)) = \lambda \mathrm{E}(\phi(X+1))$.

Exercice 5. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X = \frac{1}{1+U}$.

1. Determiner la fonction de répartition F de X et la dessiner son graphe.
2. Montrer que X admet une densité et la determiner.
3. La variable X est elle intégrable ? Si oui calculer son espérance

Exercice 6. (Bonus... seulement si vous avez encore un peu de temps) Un singe tape à la machine en appuyant de façon indépendante à chaque pas de temps sur une des 26 lettres de l'alphabet. Quelle est la probabilité qu'à un certain temps il écrive d'une traite *Les frères Karamazov* ?