Rappel:

A semblable à B : $\exists P$ inversible tq $A = PBP^{-1}$ $\Rightarrow$ $rg(A) = rg(B)$ et $\det(A) = \det(B)$
A diagonalisable : $\exists P$ ——— et D diagonale tq $A = PDP^{-1}$

λ val. p. de A (def) $AX = \lambda X$ $X \neq 0$

On résout $\det(A - \lambda I_n) = 0$
$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$
Si A admet n val p. distincts, alors A diagonalisable.

- Si A admet une val. p. A diagonalisable $\Leftrightarrow A = \lambda I_n$
- Si on a $\lambda_1 \dots \lambda_p$ val. p. : $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = n$.

Prop : A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
$\Leftrightarrow$ 0 n'est pas val p.

$A \in \mathcal{M}_n$, $a \in \mathbb{R}$, $\det(aA) = a^n \det(A)$

$\sum$ val. p $=$ Tr (matrice)

Exercice 1:

12.09.23

Pour λ donnée, on cherche X tq
- $AX = \lambda X$
- $X \in \underset{V_\lambda}{E_\lambda} = \ker(A - \lambda I_n)$

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

- $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) - 2 = \lambda(\lambda+3)$

$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$ ou $\lambda = -3$. Spectre $A = \{0, 3\}$

- On a 2 v.p. distinctes et $A \in \mathcal{M}_2$ donc diagonalisable.
- 0 est v.p donc A non inversible.

Pour $\lambda = 0$ $\quad AX = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff 2y = x$

Donc $X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_0 = \ker(A) = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Pour $\lambda = 3$ $\quad AX = 3X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + 2y = 3x \\ x - 2y = 3y \end{cases} \iff x = -y$

Donc $X = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad E_0 = \ker(A) = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ → non inversible car vect. col liés $\qquad B = A^T$

$\chi_B(\lambda) = \lambda(\lambda+3)$, $Sp(B) = \{0, -3\}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\chi_C(\lambda) = (\lambda-1)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

$\chi_C(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1+i$ ou $1-i$

4) $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\chi_D(\lambda) = \lambda(\lambda-2) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

$\chi_D(\lambda) = \det(\lambda I_2 - D) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \leftarrow L_1 = L_1 + L_2$

$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\left[(\lambda-2)+1\right] = (\lambda-1)^2(\lambda-1)$

$\chi_D(\lambda) = (\lambda-1)^2 = (\lambda-1)(\lambda-1)$

$Sp(D) = \{1\}$

On a une seule val. p. $D \neq 1 . I_2$

$Tr(D) = 0 + 2 = 2$

Σ val. p $= 1 + 1 = 2$

$E_1 = \text{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$

$\dim(E_1) = 1 \neq 2$ donc D pas diagonalisable

Exercice 2:

A inversible $\iff \det(A) \neq 0$

$\iff \det(-A) = (-1)^n \det(A) \neq 0$

$\iff \det(0 I_n - A) \neq 0$

$\iff 0$ pas val. p.

$X \neq 0$; $\lambda \neq 0$; $AX = \lambda X$

$\Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\lambda X$

$\Rightarrow X = \lambda A^{-1} X$

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} X = A^{-1} X$

D'où $\frac{1}{\lambda}$ est une val. p. de A^{-1}

Exercice 3 : $n \geq 2$ $\quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}\, A = 1$

On raisonne par l'absurde : On suppose que $A + I_n$ et $A - I_n$ ne sont pas inversible

$$\det(A + I_n) = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad \det(A - I_n) = 0$$

Donc 1 et -1 sont des val. p. de A.

A est semblable à une matrice B : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \boxed{} \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}\, B \geq 2$

or $\mathrm{rg}\, A = 1$

↳ contradiction

↳ absurde

__Exercice 5 :__

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & \sin(\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(\theta) & -\lambda & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \sin(\theta) & -\lambda \end{vmatrix} = |C_1 \quad C_2 \quad C_3|$$

$$= \begin{vmatrix} \sin(\theta) + \sin(2\theta) - \lambda & \sin(\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(\theta) + \sin(2\theta) - \lambda & -\lambda & \sin(2\theta) \\ \sin(\theta) + \sin(2\theta) - \lambda & \sin(\theta) & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\sin(\theta) + \sin(2\theta) - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & \sin(\theta) & \sin(2\theta) \\ 1 & -\lambda & \sin(2\theta) \\ 1 & \sin(\theta) & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\sin(\theta) + \sin(2\theta) - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & \sin(\theta) & \sin(2\theta) \\ 0 & \sin(\theta) + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \sin(2\theta) \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow -L_2 + L_1$$

$$= (\sin(\theta) + \sin(2\theta) - \lambda)(\lambda + \sin(2\theta)) \begin{vmatrix} 1 & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) + \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\sin(\theta) + \sin(2\theta) - \lambda)(\lambda + \sin(2\theta))(\sin(\theta) + \lambda)$$

Exercice 6 : Soit $M = (m_{i,j})_{\mathbb{R}}$, $m_{ij} \in \mathbb{R}_+$; $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$

1. λ valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. $X \neq 0$ vecteur associé.

$MX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & & & \\ & & & \\ & & & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{nj} x_j \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix}$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j = \lambda x_i$; $\forall i$, $|\lambda x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j\right|$ → module

On a alors $|\lambda||x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}||x_j|$ et $|\lambda||x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} m_{ij}|x_j|$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $|x_j| \leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$

Soit j_0 tq $|x_{j_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ donc $|\lambda||x_i| \leq |x_{j_0}| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} m_{ij}}_{= 1 \text{ par hyp.}}$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$ $|\lambda||x_i| \leq |x_{j_0}|$, en particulier pour $i = j_0$ $|\lambda||x_{j_0}| \leq |x_{j_0}|$
Et $|x_{j_0}| \neq 0$ car sinon $X = 0$ comme $\forall j \in [\![1,n]\!]$; $|x_j| \leq |x_{j_0}|$
Ainsi on a bien $|\lambda| \leq 1$

2. Mq $\chi_M(1) = 0$: $\det(I_n - M) = |C_1 \; C_2 \; \cdots \; C_n| = \left|\sum_{i=1}^{n} C_i \; C_2 \; C_3 \cdots C_n\right| = |0_{n,1} \; C_2 \; C_3 \cdots C_n| = 0$
car $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$.

On applique pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. $M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1j} \\ \\ \sum_{j=1}^{n} m_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $\lambda = 1$

3. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j = \lambda x_i$

$\overline{\qquad\qquad}$, $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_{ij} x_j + m_{ii} x_i = \lambda x_i \iff (\lambda - m_{ii}) x_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_{ij} x_j$

On a alors $|\lambda - m_{ii}||x_i| = \left| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_{ij} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |m_{ij}||x_j|$. Soit j_0 tq $|x_{j_0}| = \max_j |x_j|$

$|\lambda - m_{ii}||x_i| \leq |x_{j_0}| \cdot \underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_{ij}}_{1-m_{ii}}$

Donc $\forall i$ $|\lambda - m_{ii}| \cdot |x_i| \leq (1 - m_{ii})|x_{j_0}|$.

En particulier pour $i = j_0$, $|\lambda - m_{j_0 j_0}| \cdot |x_{j_0}| \leq (1 - m_{j_0 j_0})|x_{j_0}|$

$\iff |\lambda - m_{j_0 j_0}| \leq 1 - m_{j_0 j_0}$ comme $|x_{j_0}| \neq 0$

Soit k : $m_{kk} = \min_{1 \leq i,j \leq n} (m_{ij})$; $|\lambda - m_{kk}| = |\lambda - m_{j_0 j_0} + m_{j_0 j_0} - m_{kk}|$

On a alors $|\lambda - m_{kk}| \leq |\lambda - m_{j_0 j_0}| + \underbrace{|m_{j_0 j_0} - m_{kk}|}_{\geq 0}$

$\leq |\lambda - m_{j_0 j_0}| + m_{j_0 j_0} - m_{kk}$, comme $m_{j_0 j_0} \geq m_{kk}$, alors $m_{j_0 j_0} - m_{kk} \geq 0$

Par hypothèse, $|\lambda| = 1$ donc $\lambda = e^{i\theta}$. Posons $\tau = m_{kk}$

Mq $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$

$|e^{i\theta} - \tau| \leq 1 - \tau \Rightarrow |e^{i\theta} - \tau|^2 \leq (1-\tau)^2$

$e^{i\theta} - \tau = \cos(\theta) + i\sin(\theta) - \tau = \cos(\theta) - \tau + i\sin(\theta)$

$|e^{i\theta} - \tau| = \sqrt{(\cos(\theta) - \tau)^2 + \sin^2(\theta)}$

$(\cos(\theta) - \tau)^2 + \sin^2(\theta) \leq (1-\tau)^2$

$\iff \cos^2(\theta) - 2\cos(\theta)\tau + \tau^2 + \sin^2(\theta) \leq 1 - 2\tau + \tau^2$

$\iff \quad -2\cos(\theta)\tau \leq -2\tau$

$\iff 2\tau(1 - \cos(\theta)) \leq 0$ or par hyp $\tau > 0$

Donc $1 - \cos(\theta) \leq 0$ d'où $\cos(\theta) = 1$ $\left(\begin{array}{l} \lambda = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ \Rightarrow \sin(\theta) = 0 \end{array} \right)$

et on obtient $\lambda = 1$

Exercice 7 :

1. · Pour $k=0$, alors $\begin{cases} A^kB - BA^k = A^0B - BA^0 = B - B = 0 \\ kA^k = 0A^0 = 0 \end{cases}$

d'où $kA^k = A^kB - BA^k$

· Pour $k+1$: $A^{k+1}B - BA^{k+1} = A^kAB - BA^{k+1}$

$= A^k(A+BA) - BA^{k+1}$

$= A^{k+1} + A^kBA - BA^kA$

$= A^{k+1} + (A^kB - BA^k)A$

$= A^{k+1} + kA^kA$

$= (k+1)A^{k+1}$

2. $f_B : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n \\ M \mapsto MB - BM \end{array}$, f_B endo. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall M \in \mathcal{M}_n$ et $\forall N \in \mathcal{M}_n$, $f_B(\lambda M + N) = (\lambda M + N)B - B(\lambda M + N)$

$= \lambda MB + NB - \lambda BM - BN$

$= \lambda(MB - BM) + NB - BN$

$= \lambda f_B(M) + f_B(N)$

3. $f_B(A^k) = A^kB - BA^k = kA^k$ d'où k est val. p. si $A^k \neq 0$

4. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dim. n^2

Donc f_B admet au plus n^2 val. p. distinctes.

D'après q.3, k est val. p. k est val. p. dès que $A^k \neq 0$

Donc il n'existe qu'un nb fini d'entier tq $A^k \neq 0$.

Autrement dit, à partir d'un certain rang, la puissance du A est nulle : $\exists m \in \mathbb{N}$, $A^m = 0$

Donc A nilpotente.

Exercice 11 :

$n \in \mathbb{N}^*$; $E = \mathbb{K}_{2n}[X]$ pol. de deg. $\leq 2n$ à coef dans $\mathbb{K}$.

$\dim E = 2n+1$

$f : E \to E$

$f(P) = X(X-1)P' - 2nXP$ base canonique : $\{1, X, X^2, \dots, X^{2n}\}$

$$M_B(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(1) & f(X) & \dots & & & f(X^{2n}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ -2n & -1 & 0 & & 0 & \\ 0 & (1-2n) & -2 & & & \\ | & 0 & (2-2n) & \ddots & & \\ | & | & 0 & & -(2n-1) & \\ 0 & 0 & 0 & & & -2n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X^{2n} \end{array}$$

$f(1) = -2nX$

$f(X) = X(X-1) - 2nX^2$

$\vdots$

$f(X^{2n}) = X(X-1)2nX^{2n-1} - 2nX^{2n+1}$

On a donc une matrice triangulaire. Les valeurs propres sont les éléments de la diagonale.

- <u>Valeurs propres</u> : $\lambda_k = -k$ avec $k \in [\![0, 2n]\!]$

- <u>Vecteur propre</u> associé à λ_k. $f(P_k) = \lambda_k P_k$, $f(P_k)(X) = \lambda_k P_k(X)$

$\iff X(X-1)P_k'(X) - 2nXP_k(X) = -kP_k(X)$

$\iff X(X-1)P_k'(X) = (2nX - k)P_k(X)$

$$\frac{P_k'(X)}{P_k(X)} = \frac{2nX - k}{X(X-1)} = \frac{2n}{X-1} - \frac{k}{X(X-1)}$$

$$= \frac{2n}{X-1} - \frac{k}{X-1} + \frac{k}{X} = \frac{2n-k}{X-1} + \frac{k}{X}$$

$\frac{u'}{u} = A \to$ primitive de $\ln(A)$ + constante

$\ln(P_k(X)) = (2n-k)\ln(X-1) + k\ln|X| + \text{constante}$

Exercice 13 :

$E = C^\infty(\mathbb{R})$, $f : E \to E$, $v \mapsto f(v) = v'$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in E$ $(v \neq 0)$. On étudie $f(v) = \lambda v \Rightarrow v' = \lambda v \Rightarrow \frac{v'}{v} = \lambda$, $e^{\lambda x}$

$E_\lambda = \text{vect}\{x \mapsto e^{\lambda x}\}$

Réciproquement : On note $\forall x \in \mathbb{R}$ $v(x) = e^{\lambda x}$, alors on aura $v'(x) = \lambda e^{\lambda x}$

$f(v)(x) = \lambda v(x)$

Soit $f(v) = \lambda v$ $v \neq 0$ donc v est vect.p. associé à λ val.p. $v \in E_\lambda$

ccl : tous les réels λ sont val.p. de f.