Chapitre 1. Espaces probabilisés

Univers

Ensemble de tous les résultats possibles que l'on peut obtenir au cours d'une expérience aléatoire

Tribus $\to \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

Une tribu sur Ω est un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de Ω vérifiant :

1. (Ensemble vide) : $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. (Complémentaire) : si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$
3. (Union dénombrable) : Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'elem. de $\mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

Evènement

On appelle évènement les elem. de $\mathcal{F}$. Un event. est une partie de Ω.

Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur un univers Ω. Alors on a aussi :

* (Ensemble plein) $\Omega \in \mathcal{F}$
* (Union finie) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cup B \in \mathcal{F}$
* (Intersection finie) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$
* (Différence) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{F}$.
* (Différence symétrique) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \Delta B := (A\setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{F}$
* (Intersection dénombrable) Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'elem. de $\mathcal{F}$, alors $\bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

Tribu engendrée . Collection

Soit C un ensemble quelconque de parties de Ω. La tribu engendrée par C est la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu sur Ω qui contient toutes les parties $A \in C$. On la note $\sigma(C)$

Existence de $\sigma(C)$? $\to$ $\sigma(C) = \bigcup_{\substack{\mathcal{F} : \text{tribu de } \Omega \\ C \subseteq \mathcal{F}}} \mathcal{F}$

↳ Introduire $\mathcal{G}$: $\left.\begin{array}{l} - \mathcal{G} \text{ est une tribu} \\ - \mathcal{G} \text{ contien } C \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{G}$ contient $\sigma(C)$

Tribu borélienne

On appelle tribu borélienne, et on note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la tribu engendrée sur $\mathbb{R}$ par les intervalles de la forme $]a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $a<b$. Les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont appelés les boréliens.

Mesure de probabilité

On se donne Ω un univers et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω.
On appelle (mesure de) probabilité toute application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ tel que :

* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
* (σ-additivité) Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'event. (ie elem de $\mathcal{F}$) 2 à 2 disj. (ie si $n \neq m$, alors $A_n \cap A_m = \emptyset$)

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \sum_{n\geq 1} A_n$$

Règle de calcul : Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité.

- (vide) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- (passage au complementaire) $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- (différence) pour deux évènements A, B quelconques.
  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
  si $A \subset B$ $\mathbb{P}(B\setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
- (monotonie) pour deux évènements A, B quelconques.
  $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- (formule du crible) pour deux évènements A, B quelconques.
  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- (sous-additivité) Pour une suite quelconque d'évènements $(A_n)_{n\geq 1}$, $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$
- (continuité croissante) Pour une suite quelconque d'évènements $(A_n)_{n\geq 1}$, $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \uparrow \mathbb{P}(A_n)$
- (continuité décroissante) Pour une suite quelconque d'évènements $(A_n)_{n\geq 1}$, $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \downarrow \mathbb{P}(A_n)$

Théorème

Soit $C \subseteq \mathcal{F}$, une collection d'évènements telle que :

1. C engendre la tribu $\mathcal{F}$, ie $\sigma(C) = \mathcal{F}$
2. C est stable par intersection finie : si $A \in C$ et $B \in C$ alors $A \cap B \in C$.

Une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est entièrement determinée par ses valeurs sur les intervalles de la forme $]-\infty, t]$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Espace probabilisé

Un espace probabilisé (ou espace de probabilité) est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω est un univers, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω, et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$

Chapitre 2. Variables aléatoires réelles

Variable aléatoire réelle

On appelle variable aléatoire réelle (on écrira var sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui vérifie la propriété de mesurabilité suivante : $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

Fonction mesurable

On dit d'une fonction f d'un espace muni d'une tribu $(A, \mathcal{A})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qu'elle est mesurable, ou même si on veut préciser $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable si $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Loi d'une var

Soit X une var sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ definie pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B)$ est bien définie et est une mesure de probabilité sur l'espace d'arrivé $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, appelée loi de X.

Fonction de repartition

Soit X une var. On appelle fdr de X la fx° $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie comme suit : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) = \mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \leq t)$

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Les deux prop sont équivalentes :

- X et Y ont la même loi : $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(Y \in B)$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
- X et Y ont la même fdr : $F_X(t) = F_Y(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Soit $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, est la fdr d'une var ssi elle satisfait les 3 prop :

- $F \nearrow$
- F continue à droite (càd) : $\forall t \in \mathbb{R}$ $F(t+h) \xrightarrow[h\to 0]{} F(t)$, $h>0$
- $F(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$ et $F(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$

$\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$

$\mathbb{P}(X < a) = F_X(a^-)$, où $F_X(a^-)$ est la limite à gauche de F_X au point a.

$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

$\mathbb{P}(X = b) = F_X(b) - F_X(b^-)$

$\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$

Loi d'une var X discrète est caractérisé par :

- l'ensemble $Im(X)$ des valeurs qu'elle peut prendre (fini ou den)
- fx° de poids qui à toute valeur $x \in Im(X)$ associe la proba $\mathbb{P}(X=x)$ que cette valeur soit prise.

$$\sum_{x \in Im(X)} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

Loi discrète usuelle

Uniforme sur Ω $X \sim \mathcal{U}(\Omega)$

- $Im(X) = \Omega$
- $\forall k \in Im(X)$; $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \dfrac{1}{card(\Omega)}$

Bernoulli de param. $p \in [0,1]$ $X \sim \mathcal{B}(p)$

- $Im(X) = \{0, 1\}$
- $\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

Binomiale de param $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$ $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

- $Im(X) = \{1, \dots, n\}$
- $\forall k \in Im(X)$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Rappel : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Géométrique de param $p \in]0,1]$ $X \sim \mathcal{G}(p)$

- $Im(X) = \mathbb{N}^*$
- $\forall k \in Im(X)$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$

Poisson de param $\lambda \in]0, +\infty]$ $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- $Im(X) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}$

Densité

Une densité (de probabilité) est une fx° $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ intégrable, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Dans ce cas la fx° $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ se définie : $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$

Continuité

Si une var X admet une densité f au sens ci-dessus, alors la représentation intégrale $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$ implique que sa fdr F est continue et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$

Densités usuelles

Loi uniforme sur $]a,b[$, $a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$ $X \sim \mathcal{U}(]a,b[)$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{]a,b[}(x)$$

Loi exponentielle de param $\lambda > 0$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x)$$

Loi Gaussienne (ou normale) de moyenne $\mu \in \mathbb{R}$ et variance $\sigma^2 > 0$ $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$

Loi Gamma de param $r, \lambda > 0$ $X \sim \Gamma(r, \lambda)$

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x)$$

avec $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x}\,dx$

Loi de Cauchy de param $\lambda > 0$ $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + x^2)}$$

Critère de mesurabilité

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une fx° et C un ensemble de parties de $\mathbb{R}$ tq $\sigma(C) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour que X soit mesurable, il suffit que $\forall B \in C$

$$\{X \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. Alors les applications suivantes sont des variables aléatoires réelles dès lorsqu'elles sont bien définies :

$$\omega \mapsto \sup_{n\geq 1} X_n(\omega) \quad ; \quad \omega \mapsto \inf_{n\geq 1} X_n(\omega) \quad ; \quad \omega \mapsto \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)$$

$$\omega \mapsto \lim_{n\to+\infty} \sup_{n\geq 1} X_n(\omega) \quad ; \quad \omega \mapsto \lim_{n\to+\infty} \inf_{n\geq 1} X_n(\omega)$$

Fonction borélienne

Une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite borélienne si elle vérifie

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \{h \in B\} = h^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Composition

Si X est une var et h une fx° borélienne, alors $h(X)$ est une var.

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fx° et C un ensemble de parties de $\mathbb{R}$ tq $\sigma(C) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour que h soit borélienne, il suffit que pour tout $B \in C$, $\{h \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue

On dit d'une fx° $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qu'elle est continue si

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall z \in \mathbb{R}^n \; \|z - x\| < \alpha \Rightarrow |F(z) - F(x)| < \varepsilon$

norme euclidienne :

$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$

Fonctions de plusieurs variables

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Alors l'application :

$$\omega \mapsto F(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

est une var que nous noterons simplement $F(X_1, \dots, X_n)$

Chapitre 3. Espérance

L'espérance d'une var est définie en 3 étapes :

Variables étagées

Elle ne prend qu'un nb fini de valeurs, ie : $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n$ des réels 2 à 2 distincts et $A_1, \dots, A_n$ des évènements de la tribu $\mathcal{F}$. On définit l'espérance de X par $E(X) := \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbb{P}_X(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{P}(X = a_i)$

Variables positives

X var positive (ie $\mathrm{Im}(X) \subset [0 ; +\infty[$), alors $E(X) \in [0, +\infty[$

$E(X) := \sup\{E(Z),\ Z \text{ étagée},\ Z \leq X\}$

Variables intégrables

X var quelconque, $X = X^+ - X^-$; $X^+ = \max(X, 0)$; $X^- = \max(-X, 0)$

Comme X^+ et X^- sont des var positives, les qté $E(X^+)$ et $E(X^-)$ sont bien définies.

Si $E(X^+) < +\infty$ et $E(X^-) < +\infty$ ($\Leftrightarrow E(|X|) < +\infty$)

alors on a $E(X) = E(X^+) + E(X^-)$

presque-surement

On dit d'une propriété relative à $\omega \in \Omega$ qu'elle est vraie ps si l'ensemble des ω pour lesquels elle est vraie est de proba 1 (ou l'ensemble des ω pour lesquels elle est fausse est de proba 0).

A la prop. ps, $\rightarrow \mathbb{P}(A) = 1$ ou $\mathbb{P}(A^c) = 0$

- Espérance d'une indicatrice : Pour tout $A \in \mathcal{F}$, $E(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$
- Linéarité : Soient X et Y des var intégrables sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et λ un réel. Alors $X + \lambda Y$ est une var intégrable et on a

$$E(X + \lambda Y) = E(X) + \lambda E(Y)$$

identité reste vraie sans hypothèse d'intégrabilité lorsque $X, Y, \lambda \geq 0$

- Monotonie : Soient X, Y des var positives ou intégrables sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors $X \leq Y$ ps $\Rightarrow E(X) \leq E(Y)$.

  Ou $X \geq 0$ ps $\Rightarrow E(X) \geq 0$
- Valeur absolue : Une var X est intégrable ssi $E(|X|) < +\infty$ auquel cas $|E(X)| \leq E(|X|)$.
- Thm CV monotone : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de var positives p.s et CV ps. vers X. On suppose de plus que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante p.s. Alors $E(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(X)$
- Thm de CV dominée : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de var convergeant p.s vers X. On suppose de plus qu'il existe une var intégrable Y tq $|X_n| \leq Y$ ps pour tout $n \geq 1$. Alors X et les X_n ($n \geq 1$) sont intégrables et $E(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(X)$

Pour des var X et Y, les conditions suivantes sont équivalentes :

- X et Y ont même loi
- $E(h(X)) = E(h(Y))$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne positive
- $E(h(X)) = E(h(Y))$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée