Corrigé (succinct) du partiel du 23 octobre 2019

Exercice 1. Soit A une matrice carrée. On note respectivement I et 0 la matrice identité et la matrice nulle de même ordre que A.

1. On suppose que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (aucune justification n'est demandée).
   (a) A est une matrice d'ordre 3.
   (b) A est diagonalisable.
   (c) 1 et 2 sont des valeurs propres de A.
   (d) Les seules valeurs propres de A possibles sont 1 et 2.
   (e) La dimension de $\ker(A-I)$ est égale à 2 et celle de $\ker(A-2\,I)$ est égale à 1.
   (f) A est inversible.

(a) vrai (le degré du polynôme caractéristique d'une matrice est égal à l'ordre de cette matrice).
(b) faux (le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas à racines simples ; il n'est donc pas possible de conclure).
(c) vrai (les racines du polynôme caractéristique de A sont les valeurs propres de cette matrice).
(d) vrai (les racines du polynôme caractéristique de A sont les valeurs propres de cette matrice).
(e) faux (la dimension de $\ker(A-2\,I)$ est ici nécessairement égale à 1, mais on peut seulement affirmer que celle $\ker(A-I)$ est égale à 1 ou 2).
(f) vrai (les valeurs propres de A sont non nulles).

2. Reprendre la question précédente en supposant à présent que le polynôme minimal de A est $\mu_A(X) = (X-1)^2(X-2)$.

(a) faux (le degré du polynôme minimal d'une matrice est inférieur ou égal à l'ordre de cette matrice).
(b) faux (le polynôme minimal de A est scindé sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas à racines simples ; A n'est donc pas diagonalisable).
(c) vrai (les racines du polynôme minimal de A sont les valeurs propres de cette matrice).
(d) vrai (les racines du polynôme minimal de A sont les valeurs propres de cette matrice).
(e) faux (la dimension de $\ker(A-2\,I)$ est ici nécessairement égale à 1, mais on peut seulement affirmer que celle $\ker(A-I)$ est supérieure ou égale à 1).
(f) vrai (les valeurs propres de A sont non nulles).

3. Reprendre enfin la première question en supposant cette fois que $(A-I)(A-2\,I) = 0$.

(a) faux (le degré d'un polynôme annulateur d'une matrice ne donne aucune information sur l'ordre de cette matrice).
(b) vrai (la matrice A possède un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples, elle est donc diagonalisable).
(c) faux (l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de A contient celui des valeurs propres de cette matrice, mais ces ensembles ne sont pas nécessairement égaux).
(d) vrai (l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de A contient celui des valeurs propres de cette matrice).
(e) faux (on peut seulement affirmer qu'au moins un de ces sous-espaces est un sous-espace propre de A).
(f) vrai (les valeurs propres de A sont nécessairement non nulles).

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

On trouve $\chi_A(X) = (X-2)^3$. Le polynôme caractéristique de A étant scindé sur $\mathbb{R}$, on en déduit que l'endomorphisme représenté par A est trigonalisable. Il n'est en revanche pas diagonalisable, car cela impliquerait que $A = 2\,I_3$, ce qui n'est pas le cas.

2. Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PTP^{-1}$.

On commence par chercher une base de $\ker(A - 2\,I_3)$. On a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(A - 2\,I_3) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2\,x_1 + x_2 & = & 0 \\ -4\,x_1 + 2\,x_2 & = & 0 \\ -2\,x_1 + x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_2 = 2\,x_1.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est donc de dimension égale à 2 et une base de ce sous-espace est donnée par $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$. On connait donc les deux premières colonnes de matrices P et T répondant à la question. Pour obtenir la dernière colonne de P, il suffit de compléter la famille obtenue en une base, en choisissant par exemple le vecteur $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. On a alors

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui fournit la dernière colonne de la matrice T. On a trouvé

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a par ailleurs

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On cherche à calculer les puissances T^n pour tout entier naturel non nul positif n.

   (a) Montrer que la matrice T peut s'écrire sous la forme $T = \lambda(I_3 + N)$, où λ est un réel et N est une matrice vérifiant $N^2 = 0$.

   Compte tenu de la matrice trouvée dans la précédente question, il suffit de poser $\lambda = 2$ et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) On rappelle que la formule du binôme

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k},$$

   où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial donnant le nombre de parties de k éléments dans un ensemble de n éléments, est valide pour deux matrices carrées et de même ordre A et B qui *commutent*. En déduire une expression simple pour T^n pour tout entier naturel non nul n .

   La matrice identité I_3 commutant avec n'importe quelle matrice de même ordre, elle commute avec N et la formule du binôme s'applique. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; T^n = 2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {I_3}^k N^{n-k} = 2^n \left(I_3 + n\,N\right),$$

   en raison du caractère nilpotent de la matrice N.

4. En déduire une expression pour A^n pour tout entier naturel non nul n.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; A^n = PT^nP^{-1} = 2^n \left(I_3 + n\,PNP^{-1}\right) = 2^n \begin{pmatrix} 1-n & \frac{n}{2} & 0 \\ -2n & 1+n & 0 \\ -n & \frac{n}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. Chaque question est indépendante des autres.

1. Soit A une matrice réelle telle que $A^3 = 7\,A - 6\,I_n$. Montrer que A est diagonalisable.

Le polynôme $X^3 - 7\,X + 6$ est un polynôme annulateur de A, dont 1 est racine évidente. En effectuant la division euclidienne de ce polynôme par $X - 1$, on arrive facilement à sa forme scindée $(X-1)(X-2)(X+3)$. La matrice A possède un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples, elle est donc diagonalisable.

2. Soit A et B deux matrices réelles telles que $A^2 + B^2 = A + B = 2\,I_n$. En supposant que A ou B est diagonalisable, déterminer A et B.

On a $B = 2\,I_n - A$, d'où $A^2 + (2\,I_n - A)^2 = 2\,I_n$, soit encore $(A - I_n)^2 = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Un polynôme annulateur de A est donc $(X-1)^2$ et on en déduit que le spectre de A est inclus dans $\{1\}$. En supposant que la matrice A est diagonalisable, il vient alors que $A = I_n$ et donc $B = 2\,I_n - I_n = I_n$.

3. Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices à coefficients complexes inversibles d'ordre n. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable (on pourra considérer le polynôme minimal de A^2 pour montrer une des implications).

Supposons que la matrice A est diagonalisable. Il existe alors une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. On a dans ce cas $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. La matrice D^2 étant diagonale, la matrice A^2 est diagonalisable.
Supposons à présent que la matrice A^2 est diagonalisable. Il en résulte que son polynôme minimal est scindé sur $\mathbb{C}$ et à racines simples, c'est-à-dire que $\mu_{A^2}(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$, où l'entier naturel r est non nul et inférieur ou égal à n et où les nombres λ_i, $i = 1, \dots, r$, sont complexes et distincts deux à deux. Puisque le polynôme μ_{A^2} est un polynôme annulateur de A^2, on a $\prod_{i=1}^{r}(A^2 - \lambda_i\,I_n) = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ et le polynôme $\prod_{i=1}^{r}(X^2 - \lambda_i)$ est donc un polynôme annulateur de A. Les nombres λ_i, $i = 1, \dots, r$, étant les valeurs propres de A^2, ils sont par ailleurs non nuls, la matrice A étant inversible par hypothèse. Ainsi, chaque nombre λ_i possède deux racines carrées distinctes, $\sqrt{|\lambda_i|}e^{\frac{\mathrm{i}\arg(\lambda_i)}{2}} = \nu_i$ et $\sqrt{|\lambda_i|}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\arg(\lambda_i)}{2}+\pi\right)} = -\nu_i$, et l'on peut écrire $\prod_{i=1}^{r}(X^2 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{r}(X - \nu_i)(X + \nu_i)$. Il existe donc un polynôme annulateur de A scindé sur $\mathbb{C}$ et à racines simples, ce qui entraîne que A est diagonalisable.

4. On considère la matrice d'ordre n

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le polynôme minimal de A. En déduire A^p pour tout entier naturel p non nul.

On observe que $A^2 = n\,A$. La matrice A n'étant pas un multiple de la matrice identité, il en découle que le polynôme minimal de A est $X^2 - n\,X$. Un raisonnement par récurrence montre alors que $A^p = n^{p-1}A$ pour tout entier naturel p non nul.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 et l'application b de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (P,Q) \in E \times E,\ b(P,Q) = P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Montrer que l'application b est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?

La forme b est symétrique en vertu de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q,R) \in E^3,\ b(\lambda\,P + R, Q) &= (\lambda\,P + R)(1)Q(1) + (\lambda\,P + R)(-1)Q(-1) \\ &= (\lambda\,P(1) + R(1))Q(1) + (\lambda\,P(-1) + R(-1))Q(-1) \\ &= \lambda\,P(1)Q(1) + R(1)Q(1) + \lambda\,P(-1)Q(-1) + R(-1)Q(-1) \\ &= \lambda\,(P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)) + R(1)Q(1) + R(-1)Q(-1) \\ &= \lambda\,b(P,Q) + b(R,Q).\end{aligned}$$

La forme b est ainsi linéaire par rapport à son premier argument et donc, par symétrie, bilinéaire.

2. Montrer que $\mathscr{B} = \{1 - X^2, X, X^2\}$ est une base de E et déterminer la matrice de b relativement à la base $\mathscr{B}$.

On montre que la famille $\mathscr{B}$ est libre et on conclut que c'est une base en utilisant que son cardinal est égal à la dimension de E. La matrice de b relativement à la base $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Quel est le rang de b ?

Le rang de la forme b est égal au rang de sa matrice relativement à une base de E. On constate avec la matrice obtenue dans la précédente question qu'il est égal à 2.

Exercice 5. On considère l'espace vectoriel $E = M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels et l'application b de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (A,B) \in E \times E,\ b(A,B) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB)\right).$$

1. Montrer que l'application b est une forme bilinéaire symétrique.

La forme b est symétrique en vertu de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$ et de la propriété suivante de l'application trace :

$$\forall (A,B) \in E \times E,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Montrons maintenant que b est linéaire par rapport à son premier argument. Par linéarité de l'application trace et distributivité du produit de matrices par rapport à la somme de matrices, il vient

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (A,B,C) \in E^3,\ b(\lambda A + C, B) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(\lambda A + C)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}((\lambda A + C)B)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((\lambda\,\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(C))\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(\lambda AB + CB)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((\lambda\,\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) + \mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(B) - \lambda\,\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(CB)\right)\\ &= \frac{\lambda}{2}\left(\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB)\right) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(CB)\right)\\ &= \lambda\, b(A,B) + b(C,B).\end{aligned}$$

Étant symétrique, la forme b est alors bilinéaire.

2. Donner la matrice de b relativement à la base canonique $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ de E. En déduire que la forme b est non dégénérée.

On trouve la matrice

$$\begin{pmatrix}0&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Il est clair que cette matrice est inversible, la forme b est donc non dégénérée.

3. Justifier que

$$\forall A \in E,\ A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)\, I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}.$$

En déduire que la forme quadratique associée à b est $q(A) = \det(A)$.

On sait d'après le cours que le polynôme caractéristique associé à une matrice A de E est $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$ et que, en vertu du théorème de Cayley–Hamilton, toute matrice annule son polynôme caractéristique. Par ailleurs, en prenant la trace de de cette égalité matricielle, il vient

$$\forall A \in E,\ \mathrm{tr}(A^2) - \mathrm{tr}(A)^2 + 2\det(A) = 0,$$

dont découle le résultat, en utilisant la définition de la forme q,

$$\forall A \in E,\ q(A) = b(A,A) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)\right).$$

4. Montrer enfin que

$$\forall (A,B) \in E \times E,\ \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB) = \det(A+B) - \det(A) - \det(B).$$

En utilisant l'identité de polarisation vue en cours et le résultat de la question précédente, il vient

$$\forall (A,B) \in E \times E,\ b(A,B) = \frac{1}{2}\left(q(A+B) - q(A) - q(B)\right) = \frac{1}{2}\left(\det(A+B) - \det(A) - \det(B)\right),$$

dont se déduit immédiatement l'identité.