Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2022 - 2023)

Probabilités 1 - CC2 - Lundi 14 novembre 2022 - Éléments de correction

Si vous repérez une erreur, signalez-là sur votre copie et poursuivez votre épreuve.

Exercice 1

1. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ et h une fonction borélienne. Montrer que $h(X)$ est une variable aléatoire.
2. On considère la variable aléatoire Z définie sur l'espace de probabilité $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{P}_X)$ par $Z(x) = h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que Z et $h(X)$ ont même loi.
3. On considère la variable aléatoire $Y = aX + b$ où $a \geq 0$ et b sont deux réels. On note F et G les fonctions de répartitions de X et Y.
   (a) Determiner G en fonction de F.
   (b) On suppose désormais que X a une loi à densité f et que $a > 0$. Montrer que Y a aussi une loi à densité et la déterminer.

Correction 1

1. C'est du cours !
2. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathrm{P}_X(Z \in B) = \mathrm{P}_X(h^{-1}(B)) = \mathrm{P}(X \in h^{-1}(B)) = \mathrm{P}(h(X) \in B) = \mathrm{P}_{h(X)}(B)$.
3. (a) Si $a = 0$, $Y = 0$ donc $\mathrm{P}_Y = \delta_0$ et $G = 1_{]-\infty,0]}$. Si $a > 0$, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$G(u) = \mathrm{P}(Y \leq u) = \mathrm{P}(aX + b \leq u) = \mathrm{P}(X \leq \frac{u-b}{a}) = F(\frac{u-b}{a}).$$

   (b) On vérifie que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\frac{u-b}{a}} f(x)\, dx \overset{x=\frac{y-b}{a}}{=} \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{a} f(\frac{y-b}{a})\, dy.$$

   On en déduit que Y admet pour densité $\frac{1}{a} f(\frac{\cdot - b}{a})$.

Exercice 2 Soit α et β deux réels strictement positifs. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Weibull de paramètres réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ c'est-à-dire ayant pour densité

$$f(x) = C\, x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}} 1_{\mathbb{R}^+}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer C en fonction de α et β.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X et la dessiner.
3. Soit Y une variable aléatoire positive p.s. et $k \geq 1$ un entier. On suppose que Y^k suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de Y.

4. Justifier que l'on puisse considérer l'espérance de X et la calculer (*on pourra exprimer le résultat avec la fonction* Γ *définie pour tout* $z > 0$ *par* $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$). La variable aléatoire X est-elle intégrable ?

Correction 2

1. On vérifie que
$$\int f(x)dx = C\int x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta}1_{\mathbb{R}^+}(x)dx = \frac{C}{\alpha\beta}[e^{-\alpha x^\beta}]^0_{+\infty} = \frac{C}{\alpha\beta}.$$
On en déduit que $C = \alpha\beta$.
2. Pour tout $u \in \mathbb{R}$,
$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta}1_{\mathbb{R}^+}(x)dx = \begin{cases} 0 \text{ si } u \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha u^\beta} \text{ si } u \geq 0. \end{cases}$$
3. Pour tout $u \leq 0$, $F_Y(u) = 0$ et pour tout $u \geq 0$, comme $Y \geq 0$ p.s.
$$F_Y(u) = \mathrm{P}(Y \leq u) = \mathrm{P}(Y^k \leq u^k) = 1 - e^{-\lambda u^k},$$
et on en déduit, puisque la fonction de répartition caractérise la loi, que Y suit une loi de Weibull de paramètres λ et k.
4. La variable X étant positive p.s., son espérance est toujours bien définie. De plus
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \int xf(x)dx = \int \alpha\beta x^\beta e^{-\alpha x^\beta}1_{\mathbb{R}^+}(x)dx \\ &\overset{u=\alpha x^\beta}{=} \int_0^{+\infty} \alpha\beta\frac{u}{\alpha}e^{-u}\frac{1}{\alpha\beta}(\frac{u}{\alpha})^{1/\beta-1}du = \frac{1}{\alpha^{1/\beta}}\Gamma(1+\frac{1}{\beta}).\end{aligned}$$
Comme $\mathrm{E}(|X|) = \mathrm{E}(X) < +\infty$, on en déduit que X est intégrable.

Exercice 3 Soit $n \geq 1$ un entier. Une permutation de $\{1, \cdots, n\}$ est une bijection de $\{1, \cdots, n\}$ dans lui-même. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations et on considère l'espace de probabilité $(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}(\mathcal{S}_n), \mathrm{P})$ où P est la mesure uniforme.

1. Expliciter la définition de la probabilité P en donnant notamment le cardinal de $\mathcal{S}_n$.
2. Pour tout $i = 1, \cdots, n$, on note X_i la variable aléatoire définie sur $(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}(\mathcal{S}_n), \mathrm{P})$ comme l'indicatrice de l'évènement "i est un point fixe" : pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$,
$$X_i(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = i \\ 0 & \text{si } \sigma(i) \neq i. \end{cases}$$
Quelle est la loi de X_i ?
3. On considère maintenant la variable aléatoire N qui est le nombre de points fixes de σ. Exprimer N grâce aux X_i, $i = 1, \cdots, n$ et en déduire $\mathrm{E}(N)$.

Correction 3

1. La probabilité P est définie par $\mathrm{P}(A) = |A|/|\mathcal{S}_n|$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_n)$. Le cardinal de $\mathcal{S}_n$ est $n!$.
2. La variable X_i est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{P}(X_i = 1)$. On doit donc déterminer le cardinal de $A_i = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \text{ t.q. } \sigma(i) = i\}$. La fonction qui a $\sigma \in A_i$ associe sa restriction à $\{1, \cdots, n\} \setminus \{i\}$ est une bijection à valeurs dans l'ensemble des bijections de $\{1, \cdots, n\} \setminus \{i\}$ dans lui-même. Comme cet ensemble est de cardinal $(n-1)!$, on en déduit que
$$\mathrm{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$
3. On a
$$N = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$
On en déduit que
$$\mathrm{E}(N) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = 1.$$