Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Algèbre linéaire 3
Année 2020/2021

Partiel du 19 octobre 2020

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2h

Exercice 1 (2 points). Soit A une matrice de $M_2(\mathbb{C})$ de trace non nulle.

1. Montrer sans calcul que A^2 s'écrit comme une combinaison linéaire des matrices A et I_2.
2. En déduire que toute matrice de $M_2(\mathbb{C})$ commutant avec A^2 commute aussi avec A.

Exercice 2 (6 points). Réduire les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (5 points). On définit l'application u de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) = (X^2-1)P'' + XP'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour tout entier k dans $\{0, \dots, n\}$, déterminer $u(X^k)$. En déduire $\mathrm{Ker}(u)$.
3. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Calculer la trace de cette matrice.
5. Quelles sont les valeurs propres de u ? L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 4 (5 points). Pour toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ la matrice transposée de M.

On pose $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que $\mathscr{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$. On note u l'application qui à toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ associe $M + M^\top$:

$$u(M) = M + M^\top.$$

1. (a) Montrer que u est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Écrire la matrice A de u dans la base $\mathscr{B}$.
   (c) En déduire deux valeurs propres de u.
2. Calculer A^2 et en déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $A^n = 2^{n-1}A$.
3. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(\{E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}\})$. Établir alors que $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 3$.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$, puis déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
   (c) Établir que $\mathrm{Im}(u)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 2.
   (d) En déduire que u est diagonalisable et donner, pour résumer, les valeurs propres de u, ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres associés.

Exercice 5 (2 points). Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application b définie par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E,\ b(P,Q) = P'(0)Q(0) + P(0)Q'(0).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une forme bilineaire symétrique.
2. Calculer la matrice de b relativement à la base canonique de E.
3. Cette forme bilinéaire est-elle dégénérée ?