Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2021 - 2022)

CC1 - Lundi 27 septembre 2021

Exercice 1. Les questions sont indépendantes.

1. Donner la définition d'une probabilité.
2. Donner la définition d'une variable aléatoire.
3. On considère une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'événements dans un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{P}(A_n) = 0$. Montrer que $\cup_{n\geq 1} A_n$ est un événement négligeable.

Exercice 2. On considère une première urne contenant n billes rouges numérotées de 1 à n et une seconde urne contenant p billes bleues numérotées de 1 à p. On suppose que $n \geq p$. On tire une boule dans chaque urne.

1. Proposer un espace probabilisé pour modéliser cette expérience.
2. Donner une écriture mathématique de l'événement A : « la boule rouge a un numéro inférieur ou égal à la boule bleue ».
3. Calculer la probabilité de A.

Exercice 3. On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé. Les questions sont indépendantes.

1. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints. Montrer que la suite $(\mathrm{P}(A_n))_{n\geq 1}$ converge vers 0.
2. Soit A, B et C trois événements de $\mathcal{F}$. Montrer que
$$\mathrm{P}(A\Delta C) \leq \mathrm{P}(A\Delta B) + \mathrm{P}(B\Delta C).$$
On rappelle que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. L'ensemble $\{A \subset \mathbb{N},\ A \text{ fini ou } A^c \text{ fini}\}$ forme-t-il une tribu sur $\mathbb{N}$?