Université Paris-Dauphine,
L2 MIDO, Année 2023-2024

DS1 d'Analyse (Maths fondamentales)

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Sauf mention explicite du contraire dans l'énoncé, toute réponse doit être soigneusement justifiée et on apportera un soin particulier à la précision et la rigueur de la rédaction. Tout résultat du cours peut être utilisé à condition d'être clairement énoncé.

Durée : 2h

Question de cours.

1. Donner, sans démonstration, la nature (convergente, divergente), en fonction des paramètres réels α et β, de l'intégrale
$$\int_2^{+\infty} t^\alpha (\ln(t))^\beta$$
2. Déterminer, avec démonstration, la nature de
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}$$
3. Même question pour l'intégrale
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}$$
.

Exercice 1. Déterminer la nature (convergente, divergente) des intégrales :

a) $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}dt$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha+t^\beta}dt$, où α et β sont deux paramètres réels.

c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t(1+t)}dt$

d) $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}dt$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}dt$, où α est un paramètre réel.

f) $\int_1^{+\infty} \cos(t^2)dt$ (changement de variable et intégration par partie sont vos amis)

Exercice 2. On considère la série de terme général $v_n = 1 + (n - \frac{1}{2})\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

1. Déterminer un équivalent simple de v_n.
2. En déduire la nature (convergente, divergente) de la série de terme général v_n.
3. Montrer que $\sum_{k=2}^n v_k = ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln(n) + n - 1$

4. Montrer la formule de Stirling : $n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ pour une constante K que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Exercice 3. Soit f une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et $u_n := \int_n^{n+1} f(t)dt$, $n \geq 0$.

1. Montrer que si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, alors la série de terme général u_n est convergente.
2. On suppose dans cette question uniquement que $f(t) \geq 0$ pour tout t. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
3. On suppose dans cette question uniquement que $f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
4. Donner un exemple montrant qu'en général le fait que la série de terme général u_n soit convergente n'implique pas que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente. Si vous ne trouvez pas d'exemple explicite, vous pouvez déja essayer de dessiner le graphe d'une telle fonction.

Exercice 4. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de terme général u_n réel. Pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on appelle série réarrangée par σ la série $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$; autrement dit on additionne les termes dans un autre ordre. Il est bien connu que la somme d'un nombre fini de nombre ne dépend pas de l'ordre de sommation (commutativité et associativité de l'addition), cet exercice cherche à vérifier si cela s'étend à l'addition d'un nombre infini de termes. Les deux parties peuvent être faites indépendamment.

1. Dans toute cette partie on suppose que u_n est positif et que la série de terme général u_n est convergente. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection.
   (a) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\sum_{k=0}^{N} u_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=0}^{M} u_k.$$
   (b) En déduire que la série réarrangée converge également, ainsi qu'une relation entre $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$
   (c) Conclure.
2. Dans toute cette partie $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
   (a) Montrer que la série converge. La série converge t-elle absolument ? On rappelle (vu en TD) que sa somme est $\ln(2)$.
   (b) Soit σ définie sur les entiers naturels par $\sigma(3k) = 2k$; $\sigma(3k+1) = 4k+1$; $\sigma(3k+2) = 4k+3$. Vérifier que σ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui même.
   (c) Déterminer une relation simple entre $u_{\sigma(3k)} + u_{\sigma(3k+1)} + u_{\sigma(3k+2)}$ et $u_{2k} + u_{2k+1}$.
   (d) En déduire $\sum_{k=0}^{3n+2} u_{\sigma(k)}$ en fonction de $\sum_{k=0}^{2n+1} u_k$.
   (e) Montrer que la série réarrangée par σ converge et calculer sa somme. Commenter.