Correction CC Algèbre linéaire 2, 28 Novembre 2022

Exercice 1. — Lemme de décomposition des noyaux :

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et P et Q des polynômes premiers entre eux. On a

$$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u)).$$

Exercice 2. — 1. On calcule le déterminant $\det(XI_3 - A)$ où X est une indéterminée. On trouve que le polynôme caractéristique χ_A est

$$\chi_A(X) = X^2(X-1).$$

2. Par le cours, les racines du polynômes caractéristiques sont les valeurs propres de la matrice. Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$.

3. On commence par le sous-espace propre associé à 0. On résout pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $AX = 0$. On trouve le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - z = 0, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -z. \end{cases}$$

Ainsi le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $E_0 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

Passons maintenant au sous-espace propre associé à 1. On résout pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $AX = X$. On trouve le système

$$\begin{cases} x + y + z = x \\ y + z = y \\ -y - z = z, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Ainsi le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

4. On calcule et on trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons que la famille I_3, A et A^2 est libre. Soit α, β, γ des réels tels que $\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$. On regarde les coefficients $(1,1)$, $(1,3)$ et $(2,3)$ de l'égalité précédente de matrices on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

5. Notons μ_A le polynôme minimal de A. Par le théorème de Cayley-Hamilton, μ_A divise $\chi_A = X^2(X-1)$. De plus, par la question précédente, les matrices I_3, A et A^2 forment une famille libre, donc par le cours, $\deg \mu_A > 2$. Cela oblige $\mu_A(X) = X^2(X-1)$.

Exercice 3. — 1. Les matrices I_2 et B forment une famille libre. Donc $\deg \mu_B > 1$. De plus, après calcul, on détermine le polynôme caractéristique de B et on trouve $\chi_B(X) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, μ_B divise χ_B. Cela oblige $\mu_B(X) = (X-2)^2$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On effectue la division de X^k par $\mu_B(X)$. Comme $\deg \mu_B = 2$, il existe deux polynômes $Q_k, R_k \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg R_k < \deg \mu_B = 2$ tel que

$$X^k = Q_k \mu_B + R_k. \tag{1}$$

Comme $\deg R_k \leq 1$, il existe deux réels a_k et b_k tels que $R(X) = a_k X + b_k$.

Déterminons maintenant les coefficients a_k et b_k. La difficulté réside dans le fait que l'on ne connait pas Q_k. On va donc évaluer (1) en des réels où Q_k ne va pas apparaître. En évaluant (1) en $X = 2$ on obtient

$$2^k = Q_k(2)(2-2)^2 + 2a_k + b_k = 0 + 2a_k + b_k = 2a_k + b_k.$$

Ensuite, on dérive (1) et on évalue en $X = 2$ (noter que 2 est racine double de μ_B). On obtient alors

$$k2^{k-1} = Q'_k(2)(X-2)^2 + Q_k(2)2(2-2) + a_k = 0 + 0 + a_k.$$

On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} 2a_k + b_k = 2^k \\ a_k = k2^{k-1}, \end{cases}$$

d'où $a_k = k2^{k-1}$ et $b_k = (1-k)2^k$.

3. On évalue (1) en B. Cela donne, en utilisant que μ_B annule B

$$B^k = Q_k(B)\mu_B(B) + a_k B + b_k I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})} + k2^{k-1}B + (1-k)2^k I_2.$$

Ainsi

$$B^k = \begin{pmatrix} (1-k)2^k & -k2^{k-1} \\ k2^{k+1} & (1+k)2^k \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. — 1(a). Comme P et μ_u sont premiers entre eux, la relation de Bézout stipule qu'il existe deux polynômes $R, S \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$PR + \mu_u S = 1.$$

1(b). On évalue l'expression précédente en u. On obtient alors

$$P(u) \circ R(u) + \mu_u(u) \circ S(u) = Id_E.$$

Comme μ_u est annulateur, $\mu_u(u) = O_{\mathcal{L}(E)}$, et on obtient $P(u) \circ R(u) = Id_E$. En prenant le déterminant, il vient que $\det(P(u))\det(R(u)) = 1$, d'où $\det(P(u)) \neq 0$ et $P(u)$ est inversible.

2(a). Comme P et μ_u ne sont pas premiers entre eux et que ce sont deux polynômes complexes, P et μ_u ont une racine commune. Notons la a. Alors $(X-a)$ divise P et $(X-a)$ divise μ_u donc il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mu_u = (X-a)R$.

2(b). Supposons par l'absurde que $R(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors R est un polynôme annulateur de u. Or, $\mu_u = (X-a)R$ donc $\deg(R) < \deg \mu_u$ et R est non nul. Ceci est une contradiction au vu de la définition du polynôme annulateur. Donc $R(u) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2(c). Comme $(X-a)$ divise P, $(X-a)R$ divise PR. Or, $(X-a)R = \mu_u$ donc μ_u divise PR. Ainsi PR est un polynôme annulateur de u.

2(d). Au vu de la question précédente, nous avons $P(u) \circ R(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Supposons par l'absurde que $P(u)$ est inversible. Alors

$$0_{\mathcal{L}(E)} = P(u)^{-1} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = P(u)^{-1} \circ P(u) \circ R(u) = R(u).$$

Or, par la question 2(b), on a $R(u) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ceci est une contradiction, d'où le résultat.

3. Supposons que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $P(\lambda) \neq 0$. Alors P et μ_u n'ont pas de racines communes. Comme μ_u et P sont des polynômes de $\mathbb{C}[X]$, cela signifie que P et μ_u sont premiers entre eux (pas de diviseur non trivial en commun car sinon ils auraient une racine commune. Par la question 1, on voit que $P(u)$ est inversible.

Pour la réciproque on utilise la contraposée. Supposons que $\exists \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $P(\lambda) = 0$. Alors P et μ_u ont une racine commune et donc ne sont pas premiers entre eux ($(X - \lambda)$ divise P et μ_u). Par la question 2, il vient que $P(u)$ n'est pas inversible.