Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

MIDO – 3ème année – 2022-2023

Algorithmes dans les graphes

Partiel du 27 octobre 2022
(durée 2h)

N° de groupe de TD : ....

NOM : ....

PRÉNOM : ....

(lisiblement)

Aucun document ni calculatrice autorisé.

Exercice	Barème	Résultat
1	2	
2	2	
3	8	
4	8	
Total	20	

PARTIE À RABATTRE

Exercice 1 - 2 points

Rémi, Louise, Théo, Didier, Chloé, Jeanne et Grégoire se sont rendus une fois à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise « qui à rencontré qui dans la bibliothèque » (la bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement).

	Rémi	Louise	Théo	Didier	Chloé	Jeanne	Grégoire
a rencontré	Didier Chloé	Didier Chloé Jeanne Grégoire	Chloé Grégoire	Rémi Louise Chloé	Rémi Louise Théo Didier Jeanne Grégoire	Chloé Louise Grégoire	Louise Théo Chloé Jeanne

On souhaite savoir combien de personnes au maximum se sont retrouvées dans la bibliothèque au même moment.

Modéliser le problème sous la forme d'un graphe et en donner une représentation graphique. Quel problème doit-on résoudre dans ce graphe pour répondre à la question ? La bibliothèque dispose de 4 places : cela est-il suffisant ?

Correction
Le problème peut être modélisé sous la forme d'un graphe non orienté $G = (X, E)$ avec :
- $X = \{$Rémi, Louise, Théo, Didier, Chloé, Jeanne, Grégoire$\}$
- $\forall i, j \in X$, $\{i, j\} \in E$ si et seulement si i et j ont été présents à la bibliothèque au même moment

Le nombre maximal de personnes présentes au même moment à la bibliothèque est égal à la taille maximale d'une clique dans G. En effet, une clique est un ensemble de sommets tous reliés deux à deux qui représente donc un ensemble de personnes toutes présentes à un même moment dans la bibliothèque. On doit donc chercher dans G la taille de la clique maximum. La taille de la clique maximum est 4 : les sommets chloé, grégoire, louise et jeanne forment une clique. Donc 4 tables sont suffisantes.

Exercice 2 - 2 points

Considérez chacune des matrices suivantes et répondez aux questionx suivantes :
- est-ce une matrice d'adjacence ou d'incidence ou aucun des deux ? (justifier votre réponse)
- si cette matrice représente un graphe, s'agit-il d'un 1-graphe ou d'un graphe simple ? (justifier votre réponse)

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Correction
M_1 est une matrice carrée non symétrique ne comportant que des 0 ou des 1. Elle peut donc être la matrice d'adjacence d'un graphe orienté comportant une boucle (car coef 1 sur la diagonale principale). Elle peut également être la matrice d'incidence sommets-arêtes d'un multi-graphe (car 2 coef 1 par colonne et deux colonnes identiques). Donc ce n'est pas la matrice d'adjacence d'un 1-graphe (pas de boucle dans un 1-graphe) et ce n'est pas la matrice d'incidence sommets-arêtes d'un graphe simple.

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Correction
Ce n'est pas une matrice d'incidence sommets-arêtes car il existe une colonne avec 1 seul coefficient égal à 1. M_2 est une matrice carrée non symétrique ne comportant que des 0 ou des 1. Elle peut être une matrice d'adjacence d'un 1-graphe.

$$M_3 = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

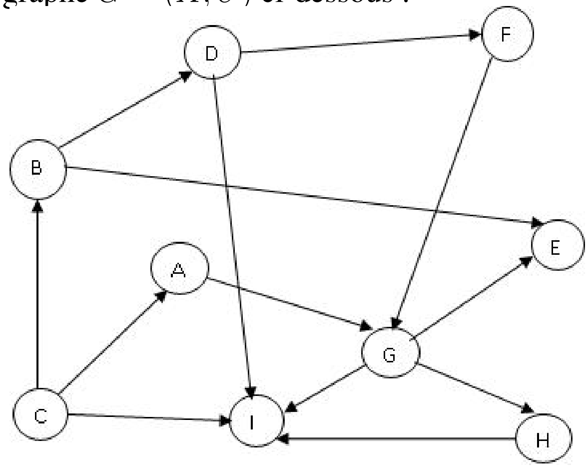
Correction
Cette matrice contient des coefficients égaux à -1 donc ce n'est pas une matrice d'adjacence. Dans M_3, il y a exactement deux coefficients non nuls par colonne (un +1 et un -1). En conséquence, elle peut être une matrice d'incidence sommets-arcs d'un 1-graphe (car toutes les colonnes sont différents).

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Correction
Ce n'est ni une matrice d'adjacence (évident car existence de coef négatifs) ni une matrice d'incidence car il existe une colonne avec un seul coefficient non nul.

Exercice 3 - 8 points

Considérer le graphe $G = (X, U)$ ci-dessous :



1. Appliquer l'algorithme DFS sur G en suivant l'**ordre alphabétique** pour explorer les sommets. Vous prendrez soin de reporter dans le tableau ci-dessous les numérotations préfixes et suffixes obtenues :

sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
num préfixe	1	6	9	7	3	8	2	4	5
num suffixe	5	8	9	7	1	6	4	3	2

2. Montrer que ce graphe est sans circuit (en justifiant votre réponse).

Correction
On peut partitionner l'ensemble des arcs du graphe en trois sous-ensembles :
- les arcs d'arbre : (A,G), (G,E), (G,H), (H,I), (B,D), (D,F)
- les arcs avant : (G,I)
- les arcs croisé : (D,I), (F,G), (B,E), (C,B), (C,A), (C,I)
On constate alors qu'il n'existe par d'arcs arrière ce qui, d'après le théorème vu en cours, signifie qu'il n'y a pas de circuit dans G.

3. En déduire un ordre topologique. Reporter vos résultats dans le tableau ci-dessous :

sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
ordre topologique	5	2	1	3	9	4	6	7	8

4. Calculer les valeurs sur la fonction `rang` de chacun des sommets et reporter vos résultats dans le tableau ci-dessous :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
rang	1	1	0	2	5	3	4	5	6

5. En raisonnant sur la base de la fonction `rang`, dans quel cas sait-on qu'un graphe admet un unique ordre topologique ?

Correction
Lorsque toutes les valeurs sur la fonction rang sont distinctes.

6. Déterminer la fermeture transitive de G (en détaillant le déroulement de l'algorithme).

Correction
La graphe G n'admet pas de circuit donc $G = G_r$. Pour définir la fermeture transitive de G_r on doit déterminer les listes d'ascendants en parcourant la liste des sommets dans l'ordre topologique. A l'initialisation, les listes d'ascendants L^v sont égales aux ensembles de prédécesseurs :

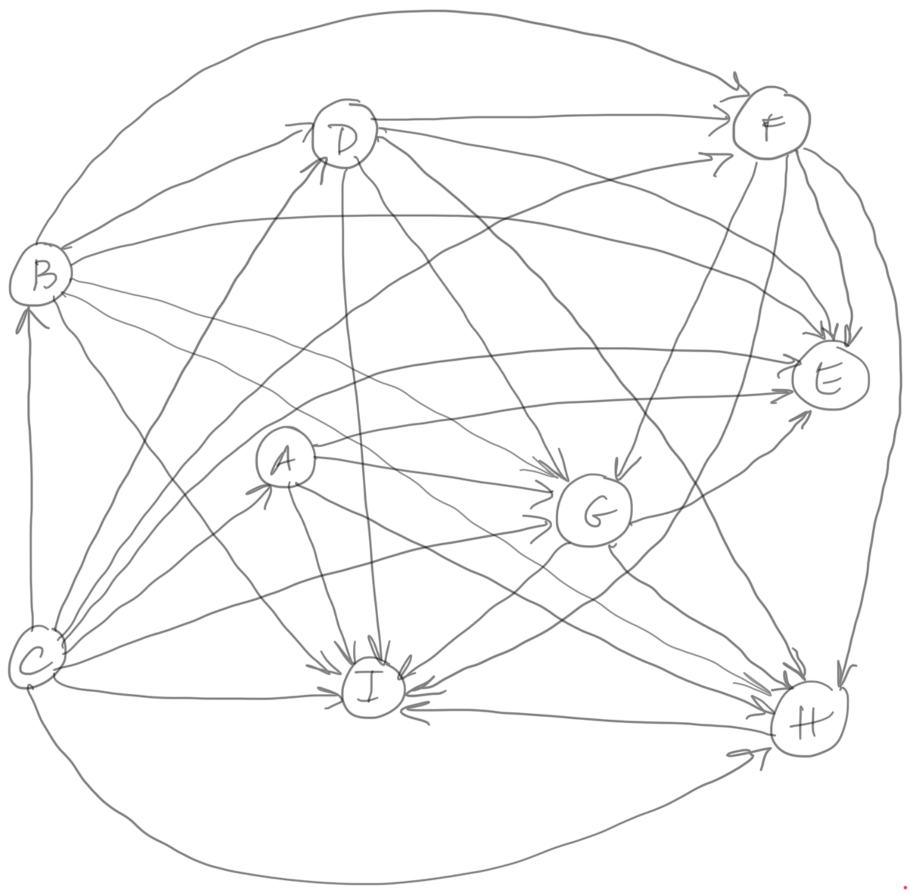
v	C	B	D	F	A	G	H	I	E
L^v	$\emptyset$	C	B	D	C	A,F	G	C,D,G,H	B,G

Puis on parcourt la liste des sommets dans l'ordre topologique pour constituer les listes d'ascendants L^v comme suit :

$$L^v \leftarrow L^v \bigcup_{i \in \Gamma^-(v)} L^i$$

v	C	B	D	F	A	G	H	I	E
L^v	$\emptyset$	C	B,C	D,B,C	C	A,F,C,D,B	G,A,F,C,D,B	C,D,G,H,B,A,F	B,G,C,A,F,D

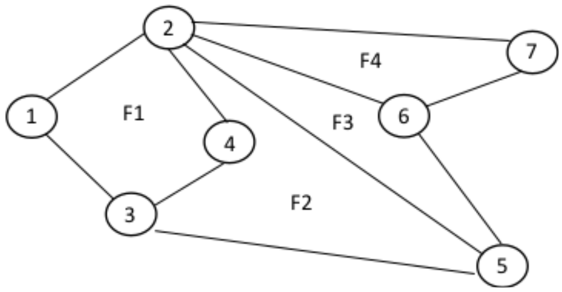
Dans la fermeture transitive, les arcs vont de chacun des sommets appartenant à L^v vers v :



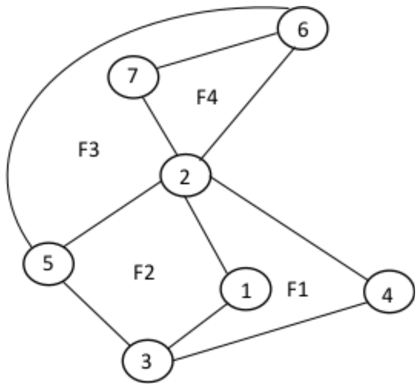
Exercice 4 - 8 points

Un graphe simple $G = (X, E)$ est **planaire** s'il est possible de le représenter dans le plan sans que ses arêtes ne se croisent. Dans une telle représentation, les **faces** d'un graphe planaire sont les parties du plan délimitées par les arêtes.

Par exemple, le graphe ci-dessous d'ordre 7 est planaire. Dans cette représentation, on identifie 4 faces :
- F1 est délimitée par les arêtes $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,3\}$, $\{3,4\}$
- F2 est délimitée par les arêtes $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{2,5\}$
- F3 est délimitée par les arêtes $\{2,6\}$, $\{2,5\}$, $\{5,6\}$
- F4 est délimitée par les arêtes $\{2,6\}$, $\{2,7\}$, $\{7,6\}$



Les faces dépendent de la représentation dans le plan. Ci-dessous vous trouverez une autre représentation planaire du même graphe d'ordre 7 avec les faces associées.

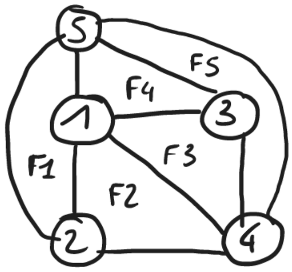


Dans cette nouvelle représentation planaire, on identifie toujours 4 faces :
- F1 est délimitée par les arêtes $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,3\}$, $\{3,4\}$
- F2 est délimitée par les arêtes $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,5\}$, $\{3,5\}$
- F3 est délimitée par les arêtes $\{2,5\}$, $\{6,5\}$, $\{2,7\}$, $\{6,7\}$
- F4 est délimitée par les arêtes $\{2,6\}$, $\{2,7\}$, $\{7,6\}$

Dans ces deux représentations, le nombre de faces reste le même (à savoir 4). En effet, la **formule d'Euler** stipule que, dans un graphe simple planaire connexe d'ordre n, comportant m arêtes, le nombre f de faces est :

$$f = m - n + 1$$

1. Soit le graphe simple $G = (X, E)$ d'ordre 5 définie par :
   $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   $E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$
   Ce graphe est planaire. Donner une représentation planaire de G et déterminer les faces. La formule d'Euler est-elle bien vérifiée par ce graphe ?



$n = 5$

$m = 9$

$f = m - n + 1$

$f = 5$ ok.!

2. Démontrer la formule d'Euler en raisonnant par récurrence sur le nombre d'arêtes.

   Correction
   — $m = 1$ => la formule est vérifiée : $n = 2, m = 1, f = 0$ => $1 = 1$
   — On admet que la formule est vérifiée pour un nombre m d'arêtes => $n - m + f = 1$
   — On ajoute une arête :
   - soit n est inchangé et, comme G est connexe, cette arête crée un cycle et donc une nouvelle face => m agmente de 1 et f de 1 => relation vérifiée
   - soit n est augmente de 1 et cette arête relie un sommet existant à un nouveau sommet (hyp de connexité tjs vérifiée) f inchangée => relation vérifiée.

3. En utilisant la formule d'Euler, montrer qu'une clique d'ordre 5, noté K_5, n'est pas un graphe planaire.
   Indication : Il faut utiliser les deux remarques suivantes :
   - il faut au moins 3 arêtes pour former une face et
   - une arête délimite au plus deux faces.

   Correction
   K_5 ne peut pas vérifier la formule d'Euler : $n = 5$, $m = 10$, donc le nombre de faces doit être égale à 6. Or une face est délimitée par au moins 3 arêtes, et chaque arête peut délimiter 2 faces sauf au moins 3 arêtes pour le contour => $(7 * 2 + 3)/3 = 5.66$ avec 10 arêtes, on a au max 5 faces !

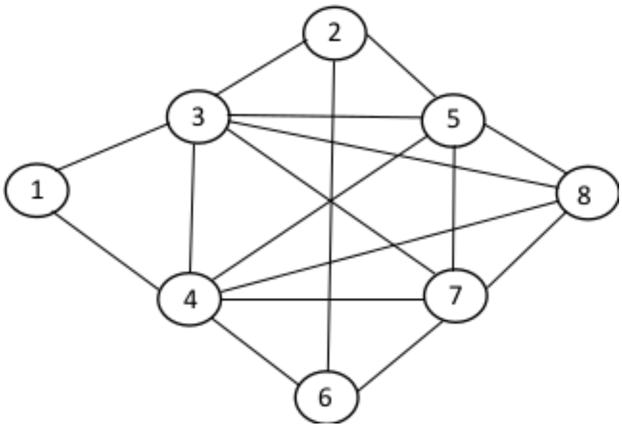
4. Le graphe biparti complet $G = (V_1 \cup V_2, E)$, avec $|V_1| = |V_2| = 3$, noté $K_{3,3}$ [1], n'est pas planaire. Le théorème fondamental suivant a été établi par Kuratowski en 1930 :

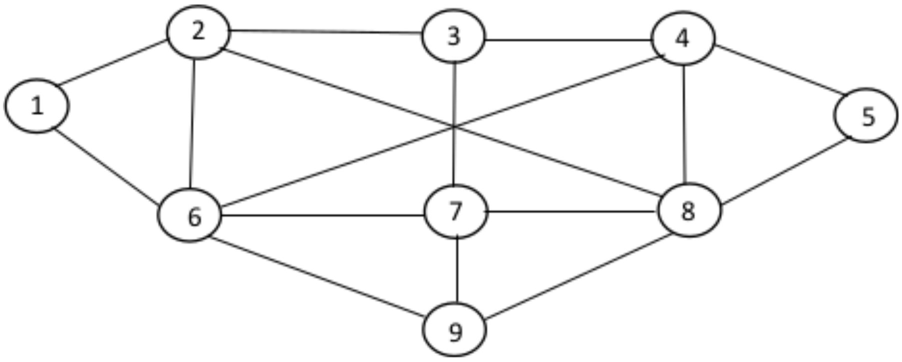
   Théorème. Un graphe qui admet un sous-graphe de type K_5 ou $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

   Grâce à ce théorème, montrer que les deux graphes qui suivent ne sont pas planaires (vous pouvez répondre directement sur l'énoncé).

   Correction Il existe un sous-graphe K_5 formé par 3,4,5,8,7

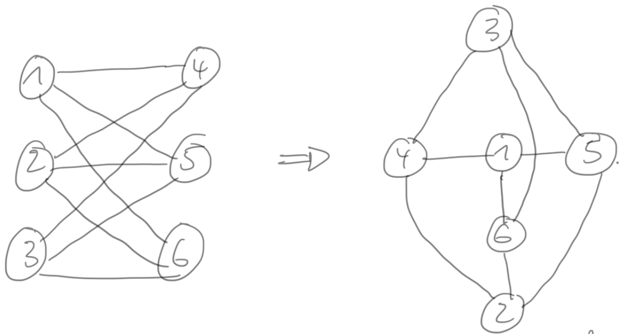
1. Dans $K_{3,3}$, $\forall i \in V_1$ et $\forall i \in V_2$, $\{i, j\} \in E$





Correction Il existe un sous-graphe $K_{3,3}$ formé par 2,4,7 et 3,6,8

5. Proposer ci-dessous une représentation graphique de $K_{3,3}$ dans laquelle deux arêtes seulement se croisent.



Seules $\{1,5\}$ et $\{3,6\}$ se croisent.