Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2022 - 2023)

Partiel - Mercredi 19 octobre 2022.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1.

1. Rappeler la définition d'une tribu.
2. On considère l'univers $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ et la collection de parties $\mathcal{C} = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}$. Donner $\sigma(\mathcal{C})$ (*indication : cette tribu a 8 éléments !*).
3. Donner la définition d'une variable aléatoire réelle.
4. Soit $X : \Omega \to \{0,1\}$ la fonction qui a $\omega \in \Omega$ associe 0 si ω est paire et 1 si ω est impair. Cette fonction est elle une variable aléatoire réelle quand on munit l'univers Ω de la tribu $\sigma(\mathcal{C})$?
5. Donner la définition d'une mesure de probabilité.
6. On considère une mesure de probabilité P sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{C}))$ telle que $\mathrm{P}(\{1,2,3\}) = \mathrm{P}(\{3,4,5\}) = 1/2$. Décrire complètement P en précisant la probabilité de chaque événement de $\sigma(\mathcal{C})$.

Correction.

1. Question de cours.
2. On vérifie facilement que $\sigma(\mathcal{C}) \supset \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{3\}, \{1,2\}, \{4,5\}, \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{1,2,4,5\}\}$. de plus $\mathcal{F}$ est une tribu et contient $\mathcal{C}$ donc $\mathcal{F} \supset \sigma(\mathcal{C})$.
3. Question de cours.
4. On a $\{X = 0\} = \{2,4\} \notin \sigma(\mathcal{C})$. Donc X n'est pas une variable aléatoire.
5. Question de cours.
6. On vérifie que $\mathrm{P}(\{3\}) = \mathrm{P}(\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\}) = \mathrm{P}(\{1,2,3\}) + \mathrm{P}(\{3,4,5\}) - \mathrm{P}(\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\}) = 0$. On en déduit par sigma additivité la probabilité de tous les autres évènements :

$$\mathrm{P}(\emptyset) = 0 \quad \mathrm{P}(\Omega) = 1 \quad \mathrm{P}(\{1,2\}) = 1/2 \quad \mathrm{P}(\{4,5\}) = 1/2 \quad \mathrm{P}(\{1,2,4,5\}) = 1$$

Exercice 2. On considère un marcheur évoluant sur la droite des entiers $\mathbb{Z}$. Il part de 0 et à chaque pas avance ou recule de 1. On fixe dans un premier temps un entier $n \geq 1$ (qu'il faut penser grand !) et on regarde uniquement les $2n$ premiers pas. Tous les chemins ont même probabilité. On définit l'univers

$$\Omega = \{-1, +1\}^{2n}.$$

1. Proposer une tribu $\mathcal{F}$ et une probabilité P pour former l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ correspondant à cette *marche aléatoire*. Calculer le cardinal de Ω.
2. À tout $\omega = (\omega_i)_{1 \leq i \leq 2n} \in \Omega$, on peut associer la trajectoire du marcheur $(S_k(\omega))_{0 \leq k \leq 2n}$ définie par $S_0(\omega) = 0$ et pour tout temps $1 \leq k \leq 2n$

$$S_k(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i.$$

Dessiner les trajectoires associées à $(1, \cdots, 1)$ et $(1, -1, 1, -1, \cdots, 1, -1)$ *(on pourra interpoler linéairement entre les points du graphe pour rendre le dessin plus facile)*. Pour tout $0 \leq k \leq 2n$, préciser l'image de la variable aléatoire S_k *(on prêtera bien attention à la question de la parité)*.
3. Donner la loi de S_1 ainsi que sa fonction de répartition.
4. Pour tout $b \in \{-n, \cdots, n\}$, montrer que

$$|\{S_{2n} = 2b\}| = \binom{2n}{n+b},$$

et en déduire $\mathrm{P}(S_{2n} = 2b)$.
5. Écrire mathématiquement l'événement

$$A_{2n} = \text{“\textit{Le marcheur est en} } 0 \text{ \textit{au temps} } 2n\text{”}.$$

Donner la probabilité de cet évènement puis, à l'aide de la formule de Stirling

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

en déduire un équivalent de $\mathrm{P}(A_{2n})$ en $+\infty$.

Correction.

1. Comme $|\Omega| < +\infty$ on considère la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Comme tous les chemins ont même probabilité on considère la probabilité uniforme que l'on note P. On rappelle que pour tout $A \subset \Omega$, $\mathrm{P}(A) = |A|/|\Omega|$. Par ailleurs $|\Omega| = 2^{2n}$.
2. La trajectoire associée à $(1, \cdots, 1)$ et la droite de pente 1 qui monte de $(0, 0)$ à $(2n, 2n)$. Celle associée à $(1, -1, 1, -1, \cdots, 1, -1)$ est la trajectoire en “zigzag” qui s'appuie sur l'axe des abscisses. Pour tout $0 \leq k \leq 2n$, $Im(S_k) = \{-k, \cdots, k\} \cap 2\mathbb{Z}$ si k est paire, c'est-à-dire tous les entiers pairs de $\{-k, \cdots, k\}$. Si k est impaire on obtient $Im(S_k) = \{-k, \cdots, k\} \cap 2\mathbb{Z} + 1$ c'est-à-dire tous les entiers impairs de $\{-k, \cdots, k\}$.
3. En particulier $Im(S_1) = \{-1, 1\}$. Comme $|\{S_1 = -1\}| = |\{S_1 = 1\}|$ (par symétrie) et $\Omega = \{S_1 = -1\} \cup \{S_1 = 1\}$ (et que ces deux évènement sont disjoints) on obtient

$$1 = \mathrm{P}(S_1 = -1) + \mathrm{P}(S_1 = -1) = 2\mathrm{P}(S_1 = -1).$$

On én déduit que $\mathrm{P}(S_1 = -1) = \mathrm{P}(S_1 = 1) = 1/2$. La fonction de répartition de S_1 est donc la fonction F qui vérifie $F(u) = 0$ si $u < -1$, $F(u) = 1/2$ si $-1 \leq u < 1$ et $F(u) = 1$ si $u \geq 1$.

4. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $N(\omega)$ le nombre de 1 dans ω i.e. $N(\omega) = |\{1 \leq i \leq 2n,\ \omega_i = 1\}|$. On déduit que $S_{2n}(\omega) = N(\omega) - (2n - N(\omega)) = 2N(\omega) - 2n$. On en déduit que pour tout $b \in \{-n, \cdots, n\}$,
$$|\{S_{2n} = 2b\}| = \{N = n + b\}.$$
L'évènement $\{N = n + b\}$ est facile à dénombrer puisqu'il s'agit de choisir une partie à $n + b$ éléments dans un ensemble à $2n$ éléments et on obtient donc $|\{N = n + b\}| = \binom{2n}{n+b}$. Finalement $\mathrm{P}(S_{2n} = 2b) = \binom{2n}{n+b}/2^{2n}$.
5. On a
$$A_{2n} = \text{“\textit{Le marcheur est en} } 0 \text{ \textit{au temps} } 2n\text{”} = \{S_{2n} = 0\}.$$
D'après la question précédente, en prenant $b = 0$, $\mathrm{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}/2^{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$. D'après la formule de Stirling et après simplification :
$$\mathrm{P}(S_{2n} = 0) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Exercice 3. On considère un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ (i.e. Ω est un univers et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω) et une fonction $m : \mathcal{F} \to [0, 1]$ qui vérifie

i. pour tout $A, B \in \mathcal{F}$ tels que $A \cap B = \emptyset$,
$$m(A \cup B) = m(A) + m(B);$$
ii. pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 1}$ d'évènements dans $\mathcal{F}$,
$$m(\cup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\geq 1} m(A_n).$$
iii. $m(\Omega) = 1$.

1. Montrer que pour toute famille **finie** $(A_n)_{1\leq n\leq N}$ d'évènements deux-à-deux disjoints
$$m(\bigcup_{1\leq n\leq N} A_n) = \sum_{1\leq n\leq N} m(A_n).$$
2. On considère maintenant une famille **dénombrable** $(A_n)_{n\geq 1}$ d'évènements deux-à-deux disjoints. Introduire une famille **dénombrable et croissante pour l'inclusion** $(B_n)_{n\geq 1}$ d'évènements telle que
$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n.$$
3. Montrer que m est une probabilité.

Correction.

1. On procède par récurrence sur le cardinal N de la famille. La proposition est vraie pour $N = 2$ d'après i. On suppose qu'elle est vraie pour un certain $N \geq 2$. On considère alors une famille **finie** $(A_n)_{1 \leq n \leq N+1}$ d'évènements deux-à-deux disjoints et on définit $E_1 = A_{N+1}$ et $E_2 = \cup_{n \leq N} A_n$. Clairement $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ donc d'après i.
$$m(\bigcup_{n \leq N+1} A_n) = m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$
Or $m(E_2) = m(\bigcup_{1 \leq n \leq N} A_n) \overset{HR_N}{=} \sum_{n=1}^{N} m(A_n)$. On en déduit que la proposition est vraie également pour une famille de cardinal $N + 1$.
2. On considère maintenant une famille dénombrable $(A_n)_{n \geq 1}$ d'évènements deux-à-deux disjoints. On définit pour tout $N \geq 1$ l'évènement
$$B_N = \bigcup_{1 \leq n \leq N} A_n.$$
Clairement $(B_N)_{N \geq 1}$ est une suite croissante pour l'inclusion et vérifie
$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \uparrow B_n.$$
3. D'après $iii.$, on a déjà $m(\Omega) = 1$. Il nous faut donc seulement vérifier la sigma additivité. On considère donc une famille dénombrable $(A_n)_{n \geq 1}$ d'évènements deux-à-deux disjoints et d'après la question précédente
$$m(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = m(\bigcup_{n \geq 1} \uparrow B_n).$$
En utilisant la propriété $ii.$ on obtient
$$m(\bigcup_{n \geq 1} \uparrow B_n) = \lim_{N \to +\infty} m(B_N),$$
et d'après la question 1., $m(B_N) = \sum_{n=1}^{N} m(A_n)$. Finalement
$$m(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} m(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n).$$