Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2022 - 2023)

Examen - Mardi 10 janvier 2023.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ désigne un espace de probabilité.

Exercice 1. Vrai ou Faux ? Justifier vos réponses.

1. Si f est la densité d'une mesure de probabilité alors $0 \leq f \leq 1$.
2. Une variable aléatoire réelle est soit discrète, soit sa loi admet une densité.
3. Si F est une fonction de répartition alors F admet une limite à gauche en tout point.

Correction. *Seules les réponses justifiées obtenaient des points*

1. FAUX : par exemple la fonction $x \to 2x 1_{[0,1](x)}$ est une densité.
2. FAUX : par exemple la variable ayant pour loi $m = 1/2\delta_0 + 1/2g$ où δ_0 est la mesure de Dirac en 0 et g est la loi d'une gaussienne centrée réduite n'est ni discrète (car son seul atome est 0 et $m(\{0\}) = 1/2$) ni à densité (car $m(\{0\}) > 0$). *Pour avoir la totalité des points il fallait donner un contre-exemple et justifier que la probabilité considérée n'était ni discrète ni continue.*
3. VRAI : c'est une *démonstration* du cours !

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier et $A_1, \cdots, A_n$ des évènements de $\mathcal{F}$.

1. Rappeler la définition de l'indépendance pour une famille d'évènements.
2. On veut montrer par un contre-exemple que l'égalité

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdots \mathrm{P}(A_n)$$

n'implique pas l'indépendance des $(A_i)_{i=1\cdots,n}$. On considère donc le contre-exemple suivant :

(a) Proposer un espace de probabilités pour modéliser deux lancers successifs et indépendants d'un dé à 6 faces. Décrire mathématiquement les évènements
$A =$ "le second jet vaut $1, 2$ ou 3" ;
$B =$ "le second jet vaut $3, 4$ ou 5" ;
$C =$ "la somme des deux jets vaut 9".

(b) Montrer que

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$

mais que A, B, C ne sont pas indépendants.

3. On suppose maintenant que la famille $A_1, \cdots, A_n$ satisfait la propriété suivante : pour toute famille $(B_i)_{i=1,\cdots,n}$ définie par

$$B_i = A_i \text{ ou } A_i^c, \quad 1 \le i \le n,$$

on a

$$\mathrm{P}(\bigcap_{i=1,\cdots,n} B_i) = \prod_{i=1,\cdots,n} \mathrm{P}(B_i).$$

En déduire que les évènements $A_1, \cdots, A_n$ sont indépendants.

Correction.

1. C'est du cours ! *Dans le cas général il faut bien préciser "Pour toute sous-famille finie..."*
2. (a) On peut prendre $\Omega = \{1, \cdots, 6\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme définie par $\mathrm{P}(A) = |A|/|\Omega|$ où $|\Omega| = 36$. On a alors
   $A = \{(\omega_1, \omega_2) \text{ tels que } \omega_2 \in \{1,2,3\}\}$;
   $B = \{(\omega_1, \omega_2) \text{ tels que } \omega_2 \in \{3,4,5\}\}$;
   $C = \{(\omega_1, \omega_2) \text{ tels que } \omega_1 + \omega_2 = 9\}$.
   Il fallait bien écrire ces événements comme des ensembles mathématiques afin de pouvoir les dénombrer proprement à la question suivante.

   (b) On vérifie que $A \cap B \cap C = \{(6,3)\}$ est de cardinal 1 donc

   $$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 1/36.$$

   Par ailleurs $|A| = |B| = 18$ donc $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 1/2$; tandis que $C = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ donc $\mathrm{P}(C) = 1/9$. On a donc bien $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$. Par contre $A \cap B = \{(\omega_1, 3), \omega_1 = 1, \cdots, 6\}$ donc $\mathrm{P}(A \cap B) = 1/6 \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = 1/4$
3. Soit $I \subset \{1, \cdots, n\}$. On note que

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \overset{disj.}{\bigcup_{\substack{(B_i)_{i=1,\cdots,n} \ t.q. \\ B_i = A_i \text{ pour tout } i \in I}}} \bigcap_{i=1,\cdots,n} B_i$$

et on déduit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) &= \sum_{\substack{(B_i)_{i=1,\cdots,n} \ t.q. \\ B_i = A_i \text{ pour tout } i \in I}} \mathrm{P}(\bigcap_{i=1,\cdots,n} B_i) \\
&= \sum_{\substack{(B_i)_{i=1,\cdots,n} \ t.q. \\ B_i = A_i \text{ pour tout } i \in I}} \prod_{i=1,\cdots,n} \mathrm{P}(B_i) \\
&= \prod_{i \in I} \mathrm{P}(A_i) \sum_{\substack{(B_i)_{i=1,\cdots,n} \ t.q. \\ B_i = A_i \text{ pour tout } i \in I}} \prod_{i \notin I} \mathrm{P}(B_i)
\end{aligned}$$

On conclut en notant que

$$\sum_{\substack{(B_i)_{i=1,\cdots,n} \ t.q. \\ B_i = A_i \text{ pour tout } i \in I}} \prod_{i \notin I} \mathrm{P}(B_i) = 1$$

puisque

$$\Omega = \bigcup_{\substack{(B_i)_{i=1,\cdots,n} \ t.q. \\ B_i=A_i \text{ pour tout } i\in I}}^{disj.} \bigcap_{i\notin I} B_i$$

Il s'agissait finalement d'une question difficile que l'on peut considérer hors-barème.

Exercice 3. On considère trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 indépendantes et de même loi $Unif([0,1])$.

1. Montrer que $\mathrm{P}(X_1 = X_2) = 0$ et en déduire que p.s. on peut classer X_1, X_2 et X_3 c'est-à-dire définir les variables aléatoires Y_1, Y_2 et Y_3 telles que $\{X_1, X_2, X_3\} = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ et $Y_1 < Y_2 < Y_3$. On appelle *statistique d'ordre* le triplet (Y_1, Y_2, Y_3).
2. En particulier $Y_3 = \max(X_1, X_2, X_3)$. Donner la fonction de répartition de Y_3 et en déduire qu'elle admet une densité que l'on déterminera. Calculer l'espérance de Y_3.
3. On définit $X_i' = 1 - X_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Montrer que X_1', X_2', X_3' sont indépendantes et de loi $Unif([0,1])$.
4. On définit $Y_3' = \max(X_1', X_2', X_3')$. Donner la relation entre Y_3' et Y_1 et en déduire la loi de Y_1 et son espérance.
5. Donner, *sans calculer*, l'espérance de Y_2.
6. Pour $x \in]0,1[$, on définit

$$N_x = \mathrm{Card}\{i = 1, 2, 3 \text{ tel que } X_i \leq x\}.$$

   Caractériser la loi de N_x.
7. En remarquant que $\{Y_2 \leq x\} = \{N_x \geq 2\}$, calculer la fonction de répartition de Y_2. En déduire sa densité et retrouver, cette fois par le calcul, son espérance.
8. Soit $n \geq 3$ un entier. On généralise ce que l'on vient de faire pour trois variables à n variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes et de même loi $Unif([0,1])$. On définit de façon analogue la statistique d'ordre $Y_1, \cdots, Y_n$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, adapter la méthode proposée aux deux questions précédentes pour donner la fonction de répartition de Y_i.

Correction.

1. Comme X_1 et X_2 sont à densité, $-X_2$ est également à densité et la variable $X_1 - X_2$ également donc $\mathrm{P}(X_1 = X_2) = \mathrm{P}(X_1 - X_2 = 0) = 0$. On déduit que $\mathrm{P}(\exists i \neq j \text{ tel que } X_i = X_j) \leq \sum_{i\neq j} \mathrm{P}(X_i \neq X_j) = 0$ (*ce dernier point était aussi hors-barème*). Nos trois variables X_1, X_2 et X_3 étant p.s. deux à deux distinctes on peut donc les classer et définir la statistique d'ordre.
2. La variable Y_3 est à valeurs dans $[0,1]$ donc pour tout $u < 0$, $F_{Y_3}(u) = 0$ tandis que pour $u \geq 1$, $F_{Y_3}(u) = 1$. Pour $u \in [0,1[$,

$$F_{Y_3}(u) = \mathrm{P}(X_1 \leq u, X_2 \leq u, X_3 \leq u) \overset{i.i.d.}{=} \mathrm{P}(X \leq u)^3 = u^3.$$

   On en déduit que Y_3 admet pour densité la fonction

$$u \in \mathbb{R} \mapsto f_{Y_3}(u) = 3u^2 1_{[0,1]}(u).$$

Enfin
$$\mathrm{E}(Y_3) = \int u f_{Y_3}(u)\, du = \int_0^1 3u^3\, du = 3/4.$$

3. Pour tout $i = 1,2,3$, X_i' est l'image par la fonction $x \to 1 - x$ de X_i. Comme les $(X_i)_{i=1,2,3}$ sont i.i.d. on en déduit que les $(X_i')_{i=1,2,3}$ le sont aussi *(moitié des points)*. De plus pour toute fonction h continue bornée
$$\mathrm{E}(h(X_1')) = \int h(1-x) 1_{[0,1]}(x) dx \overset{u=1-x}{=} \int h(u) 1_{[0,1]}(u) du.$$
On en déduit que X_1' suit également une uniforme *(autre moitié des points)*.
4. On a $Y_3' = 1 - Y_1$ et on en déduit que $3/4 = \mathrm{E}(Y_3') = 1 - \mathrm{E}(Y_1)$ donc $\mathrm{E}(Y_1) = 1/4$. Par ailleurs pour toute h continue bornée
$$\mathrm{E}(h(Y_1)) = \mathrm{E}(h(1-Y_3')) = \int_{[0,1]} h(1-x) 3x^2\, dx \overset{u=1-x}{=} \int_{[0,1]} h(u) 3(1-u)^2\, du$$
et on déduit que Y_1 admet pour densité $u \to 3(1-u)^2 1_{[0,1]}(u)$.
5. On note que $X_1 + X_2 + X_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$ donc $\mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \mathrm{E}(X_3) = \mathrm{E}(Y_1) + \mathrm{E}(Y_2) + \mathrm{E}(Y_3)$. Comme $\mathrm{E}(X_i) = 1/2$ $(i = 1,2,3)$, on en déduit que $\mathrm{E}(Y_2) = 1/2$.
6. La variable N_x est discrète et à valeurs dans $\{0,1,2,3\}$. De plus pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N_x = k) &= \mathrm{P}(\exists J \subset \{1,2,3\} \text{ tel que } |J| = k \text{ et } X_i \leq u \text{ ssi } i \in J) \\
&= \sum_{J \subset \{1,2,3\} \text{ tel que } |J|=k} \mathrm{P}(X_i \leq x \text{ ssi } i \in J) \\
&\overset{indep.}{=} \sum_{J \subset \{1,2,3\} \text{ tel que } |J|=k} F(x)^k (1 - F(x))^{3-k} \\
&= \binom{3}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{3-k}
\end{aligned}$$
On en déduit que N_x suit une $Bin(3, F(x))$.
7. On obtient donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$F_{Y_2}(x) = \mathrm{P}(N_x \geq 2) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 3x^2(1-x) + x^3 = 3x^2 - 2x^3 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_{Y_2}(x) = 6(x - x^2) 1_{[0,1]}(x)$$
et donc
$$\mathrm{E}(Y_2) = \int_0^1 6(x^2 - x^3)\, dx = 6(1/3 - 1/4) = 1/2.$$

8. On obtient avec la même méthode N_x est à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$ et pour tout k dans cet ensemble

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N_x = k) &= \mathrm{P}(\exists J \subset \{1, \cdots, n\} \text{ tel que } |J| = k \text{ et } X_i \leq u \text{ ssi } i \in J) \\
&= \sum_{J \subset \{1, \cdots, n\} \text{ tel que } |J|=k} \mathrm{P}(X_i \leq x \text{ ssi } i \in J) \\
&= \sum_{J \subset \{1, \cdots, n\} \text{ tel que } |J|=k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
F_{Y_i}(x) = \mathrm{P}(N_x \geq i) &= \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k} \\
&= \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0, \\ \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \text{ si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 \text{ si } x \geq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$