Eléments de correction de l'examen partiel.

Exercice 1 :

1.) a.) La suite de fonctions $u_n : x \to nxe^{-nx}$ converge simplement vers la fonction nulle, mais la convergence n'est pas uniforme puisque $\|u_n\|_\infty = \|ue^{-u}\|_\infty$.

b.) **NON** : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

c.) **NON** : $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré, et 0 sinon.

d.) **OUI!** : Comme $S_n = \sum_0^n u_k$ est de Cauchy, on a

$$0 \leq n u_{2n} \leq \sum_{n+1}^{2n} u_k = S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

et

$$0 \leq n u_{2n+1} \leq \sum_{n+2}^{2n+1} u_k = S_{2n+1} - S_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, les suites $2n u_{2n}$ et $(2n+1) u_{2n+1}$ tendent vers 0, donc la suite $n u_n$ aussi.

2.) a.) $u_n = \frac{1}{n \ln n}$ b.) $u_n = \frac{1}{n^2}$. c.) NON : $u_n = \frac{1}{n}$

Exercice 2 :

1.) $a_n^{1/n} = \frac{1}{\ln(n)} \longrightarrow 0$ par Cauchy la STG a_n converge.

2.) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \longrightarrow 0$ donc d'Alembert conclut que la STG b_n converge

3.) $\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc

$$c_n = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 - \frac{\beta}{n}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$ donc la STG c_n converge ssi $\beta = \frac{1}{2}$.

4.) $d_n = \frac{1}{n\cos(n)^2} \geq \frac{1}{n}$ donc la STG d_n diverge par comparaison positive.

5.) La suite $\ln(n+1) - \ln n$ est décroissante car $\ln$ est concave donc le CSSA conclut puisque $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$.

6.) $n \to \frac{1}{\sqrt{n}}$ est décroissante et $\sum w_k$ est bornée, donc Abel conclut.

Exercice 3

1.) a.) Pour chaque x, $u_n(x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente. La suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.

b.) Soit $\varepsilon > 0$ et N_ε donné par la Cauchy altitude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall n \geq N_\varepsilon$, $\forall p > 0$, $\forall x \in I$,

$$|u_{n+p}(x) - u_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Faisons $p \to \infty$: $|u_\infty(x) - u_n(x)| \leq \varepsilon$ donc u_n CVU vers u_∞.

2.) a.) u_n CVS vers 0. Comme $\|u_n\|_\infty = \sup_{u\in\mathbb{R}^+} \frac{u}{1+u^3}$, pas de CVU.

b) $v_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{nx}{1+n^2x^2}$ donc $\|v_n\|_\infty = \frac{1}{n} \sup_{u\in\mathbb{R}^+} \frac{u}{1+u^2}$

donc v_n CVU vers 0.

Exercice 4 :

1.) C'est le reste d'une série convergente.

2)a) Si $a_n = q^n$, alors $r_n = \sum_0^\infty a_k - \sum_0^n a_k$.

Or $\sum_0^n a_k = \sum_0^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ donc $\sum_0^\infty a_k = \frac{1}{1-q}$ et $r_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

b) On a $\sum_{k=0}^n r_k = \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^n q^{k+1} = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ donc $\sum_0^n r_k \longrightarrow \frac{q}{(1-q)^2}$.

3)a) On fait une comparaison avec une intégrale :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

donc $\sum_{n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \sum_{n+1}^N \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} = \int_n^N \frac{dt}{t^2}$ et $\sum_{n+1}^N \frac{1}{k^2} \geq \sum_{n+1}^N \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{n+1}^\infty \frac{dt}{t^2} \leq r_n \leq \int_n^\infty \frac{dt}{t^2}$$

qui donne $\frac{1}{n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow r_n \sim \frac{1}{n}$.

b) Elle est divergente par équivalence à $\frac{1}{n}$.

4)a) CSSA

b) i) $|I_n| = \left| \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$

ii) Comme $\sum_0^{n-1} (-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1+x}$ on a :

$$\sum_0^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \sum_0^{n-1} (-x)^k dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \int_0^1 (-1)^n \frac{x^n dx}{1+x} = \ln 2 - I_n$$

d'où $I_n - \ln 2 = -\sum_0^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

iii) $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$ car $I_n \to 0$.

iv) $r_n = \sum_{n+1}^\infty a_k = S - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = -I_n$.

c) i) $$\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^{n}(-x)^k}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx$$

ii) $$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx\right| \leq \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{1}{n+2} \to 0.$$

donc $$\sum_{k=0}^{\infty} I_k = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

d) i) $$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = (-1)^n\left(\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2}\,dx\right)$$

$$= (-1)^n\left(\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx\right)$$

Or $$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx = \left[\frac{x^{n+2}}{(n+2)(1+x)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{(1+x)^3}\,\frac{x^{n+2}}{n+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4(n+2)} + o\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

donc $$I_n = (-1)^n\left(\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

ii) $$I_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{2(n+1)}}_{\text{CSSA}} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{4(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{|\cdot| \sim \frac{1}{4n^2}}$$ donc convergente absolument.

La stg I_n converge