Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2021 - 2022)

Examen - Mardi 11 janvier 2022.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ désigne un espace de probabilité.

Exercice 1. *(pts)* Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Quand dit-on de variables aléatoires réelles $(X_i)_{i\in I}$ qu'elles sont indépendantes (I désigne un ensemble quelconque) ?
2. Soit $A \subset \Omega$.
   (a) Montrer que la fonction 1_A est une variable aléatoire réelle si et seulement si $A \in \mathcal{F}$.
   (b) On suppose dans cette question que $A \in \mathcal{F}$. Quelle est la loi de 1_A ?

Correction.

1. Voir le cours.
2. On suppose que 1_A est une variable aléatoire. Alors $\{1_A = 1\} \in \mathcal{F}$. Or $\{1_A = 1\} = A$ donc on a bien $A \in \mathcal{F}$. Réciproquement, on suppose $A \in \mathcal{F}$. Comme la fonction 1_A est à valeurs dans l'ensemble fini $\{0, 1\}$, pour vérifier que c'est une variable aléatoire, il suffit de vérifier que $\{1_A = 1\}$ et $\{1_A = 0\}$ sont dans $\mathcal{F}$. C'est vrai car $\{1_A = 1\} = A$ et $\{1_A = 0\} = A^c$ (et $A^c \in \mathcal{F}$ par stabilité de $\mathcal{F}$ par passage au complémentaire). Dans le cas où $A \in \mathcal{F}$, la variable aléatoire 1_A est à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{P}(1_A = 1) = \mathrm{P}(A)$.

Exercice 2. *(pts)* Soit X une variable aléatoire réelle de densité

$$f(x) = c\,\sqrt{x}\,1_{[0,2]}(x) \qquad x \in \mathbb{R},$$

où c désigne un certain réel.

1. Que vaut c ? Dessiner sans justification le graphe de f.
2. Donner la fonction de répartition de X.
3. Calculer son espérance et sa variance.
4. On pose $Y = X^2$. Donner la fonction de répartition de Y et en déduire que Y admet une densité que l'on explicitera.

Correction.

1. Pour être une densité la fonction f doit vérifier $\int f(x)\ dx = 1$. Or $\int f(x)\ dx = \int_0^2 c\sqrt{x}\ dx = c\frac{2}{3}2^{3/2}$. On en déduit que $c = \frac{3}{2}2^{-3/2}$.
2. Pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ 2^{-3/2}u^{3/2} & \text{si } 0 \leq u \leq 2 \\ 1 & \text{si } u \geq 2. \end{cases}$$

3. La variable X est positive donc $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}(X^2)$ sont bien définis. Comme X et X^2 sont bornées on sait de plus que ces espérances sont finies. On calcule alors

$$\mathrm{E}(X) = \int xf(x)dx = \int_0^2 x^{3/2}\frac{3}{2}2^{-3/2}dx = \frac{6}{5}$$

et

$$\mathrm{E}(X^2) = \int x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^{5/2}\frac{3}{2}2^{-3/2}dx = \frac{12}{7}$$

donc

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{12}{7} - (\frac{6}{5})^2 = \frac{48}{175}.$$

4. Pour $u < 0$, on a bien sûr $F_Y(u) = 0$. Pour $u \geq 0$

$$F_Y(u) = \mathrm{P}(-\sqrt{u} \leq X \leq \sqrt{u}) = \mathrm{P}(X \leq \sqrt{u}) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \geq 4 \\ 2^{-3/2}u^{3/4} & \text{si } 0 \leq u \leq 4 \end{cases}.$$

On en déduit que Y admet pour densité la fonction $u \to \frac{3}{4}2^{-3/2}u^{-1/4}1_{[0,4]}(u)$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire réelle que l'on suppose indépendante d'elle-même.

1. On suppose dans un premier temps que X est de carré intégrable. Calculer sa variance et montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $X = c$ p.s.
2. On ne suppose plus que X est de carré intégrable. Retrouver le résultat de la question précédente en étudiant la fonction de répartition de X.

Correction.

1. On a, en utilisant l'indépendance, $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^2] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))]^2 = 0$. On notera bien que $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))]$ a du sens puisque X est de carré intégrable et donc intégrable. La variable $(X - \mathrm{E}(X))^2$ est donc positive p.s. (et même partout) et d'espérance nulle. On en déduit qu'elle est nulle p.s.
2. On a, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$F(u) = \mathrm{P}(X \leq u) = \mathrm{P}(X \leq u, X \leq u) = \mathrm{P}(X \leq u)\mathrm{P}(X \leq u) = F(u)^2.$$

On en déduit que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $F(u) \in \{0, 1\}$. Comme F tend vers 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$ et est croissante et càdlàg, on en déduit qu'il existe a tel que $F = 1_{]-\infty,a]}$. On reconnait la fonction de répartition d'une v.a. égale à a p.s.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Calculer la fonction de répartition F de X_1.

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie 1. Pour tout N entier strictement positif, on note

$$Y_N = \max\{X_1, \cdots, X_N\}.$$

2. Pour tout $N \geq 1$, exprimer la fonction de répartition G_N de Y_N à l'aide de F et en déduire une expression explicite de G_N.
3. Soit $\varepsilon \in]0,1[$.
   (a) Montrer que la suite $\big(\mathrm{P}(Y_N < (1-\varepsilon)\ln N)\big)_{N\geq 1}$ tend vers 0.
   (b) Montrer que la suite $\big(\mathrm{P}(Y_N > (1+\varepsilon)\ln N)\big)_{N\geq 1}$ tend vers 0.
   (c) En déduire que la suite de variables aléatoire $(Y_N/\ln N)_{N\geq 1}$ converge en probabilité vers 1.

Partie 2.

4. Étudier pour tout réel strictement positif a la nature de la série de terme générale $\mathrm{P}(X_n > a\ln n)$.
5. En déduire que p.s. $\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 1$.

Correction.

1. Pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} e^{-x} 1_{[0,+\infty[}(x)dx = (1-e^{-u})1_{\mathbb{R}^+}(u).$$

2. Pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$G_N(u) = \mathrm{P}(Y_N \leq u) = \mathrm{P}(\cap_{i=1}^N \{X_i \leq u\}) = \prod_{i=1}^N \mathrm{P}(X_i \leq u)$$

où on utilisé l'indépendant dans la dernière égalité. En utilisant que les $(X_n)_{n\geq 1}$ ont même loi on obtient finalement

$$G_N(u) = F(u)^N = (1-e^{-u})^N \ 1_{\mathbb{R}^+}(u).$$

3. Soit $\varepsilon > 0$ (et strictement plus petit que 1 pour les besoins du calcul !). On doit montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} \mathrm{P}(\left|\frac{Y_N}{\ln N} - 1\right| > \varepsilon) = 0.$$

Or, pour tout $N \geq 1$,

$$\mathrm{P}(\left|\frac{Y_N}{\ln N} - 1\right| > \varepsilon) = \mathrm{P}(Y_N > (1+\varepsilon)\ln N) + \mathrm{P}(Y_N < (1-\varepsilon)\ln N).$$

Examinons d'abord le second terme. Comme G_N est continue,

$$\mathrm{P}(Y_N < (1-\varepsilon)\ln N) = G_N((1-\varepsilon)\ln N) = (1-e^{-(1-\varepsilon)\ln N})^N.$$

Or $N\ln((1-e^{-(1-\varepsilon)\ln N}))\sim -N^{\varepsilon}$ et on conclut que ce second terme tend vers 0. On passe au premier :

$$\mathrm{P}(Y_N>(1+\varepsilon)\ln N)=1-G_N((1+\varepsilon)\ln N)=1-(1-e^{-(1+\varepsilon)\ln N})^N.$$

Cette fois, $N\ln((1-e^{-(1+\varepsilon)\ln N}))\sim -N^{-\varepsilon}$, et on obtient que le premier terme tend également vers 0.

4. Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\mathrm{P}(X_n>a\ln n)=\mathrm{P}(X_1>a\ln n)=\exp(-a\ln n)=n^{-a}.$$

On en déduit que la série de terme générale $\mathrm{P}(X_n>a\ln n)$ converge si et seulement si $a>1$.

5. On prend $a=1$ dans la question précédente. Comme les événements $\{X_n>\ln n\}$ sont indépendants et que la série de leurs probabilités diverge, d'après le second lemme de Borel Cantelli, p.s. $X_n>\ln n$ une infinité de fois ce qui implique que p.s. $\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n}{\ln n}\geq 1$.
Par ailleurs pour tout $a>1$ et par le premier Lemme de Borel Cantelli, on obtient que p.s. $X_n\leq a\ln n$ à partir d'un certain rang (aléatoire) ce qui implique que p.s. $\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n}{\ln n}\leq a$. En prenant $a=1+1/k$ pour k entier supérieur à 1 on obtient $\mathrm{P}(\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n}{\ln n}\leq 1+1/k)=1$ et donc par sigma sous-additivité

$$\mathrm{P}(\cap_{k\geq 1}\{\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n}{\ln n}\leq 1+1/k\})=1.$$

On conclut facilement puisque

$$\bigcap_{k\geq 1}\{\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n}{\ln n}\leq 1+1/k\}=\{\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n}{\ln n}\leq 1\}.$$