Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2023 - 2024)

Probabilités 1 - CC2 - Lundi 20 novembre 2023

Si vous repérez une erreur, signalez-là sur votre copie et poursuivez votre épreuve.

Dans tout le sujet les variables aléatoires considérées sont construites sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Exercice 1 Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que toute variable étagée est intégrable.
2. Montrer que deux variables qui sont égales p.s. ont même loi mais que la réciproque est fausse.
3. Donner un exemple de deux variables qui ont même espérance mais pas même loi.
4. On considère une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et de fonction de poids

$$\mathrm{P}(X = k) = c/k^2 \qquad k \geq 1$$

   où c est une constante adapté qu'on ne cherchera pas à calculer. Pour tout $N \geq 1$, on définit $Y_N = X\ 1_{\{X \leq N\}}$ où $1_{\{X \leq N\}}$ est l'indicatrice de l'événement $\{X \leq N\}$ c'est-à-dire la fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ qui vaut 1 sur $\{X \leq N\}$ et 0 sur son complémentaire.

   (a) Montrer que pour tout $N \geq 1$ la variable Y_N est étagée et donner son espérance sous forme d'une somme.

   (b) Justifier que $\mathrm{E}(X)$ est bien définie, rappeler sa définition et utiliser la question précédente pour montrer (sans calculer) que $\mathrm{E}(X) = +\infty$.

Correction 1

1. Soit $X = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ une variable étagée (on peut supposer les A_i disjoints). On a $|X| = \sum_{i=1}^n |a_i| 1_{A_i}$ donc $\mathrm{E}|X| = \sum_{i=1}^n |a_i| \mathrm{P}(A_i) < +\infty$. On peut sinon rappeler qu'une variable étagée est bornée donc intégrable.
2. Soit X et Y tel que $X = Y$ p.s. et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a

$$\mathrm{P}(X \in B) = \mathrm{P}(X \in B, X = Y) + \mathrm{P}(X \in B, X \neq Y) = \mathrm{P}(Y \in B, X = Y) + \mathrm{P}(X \in B, X \neq Y).$$

   On note que $\mathrm{P}(X \in B, X \neq Y) \leq \mathrm{P}(X \neq Y) = 0$ et on conclut facilement. Réciproquement si X est une gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ alors $Y = -X$ aussi mais clairement $\mathrm{P}(X = Y) = 0$.
3. On peut prendre une uniforme sur $\{0, 2\}$ et la variable constante égale à 1 qui ont toutes deux espérances 1.
4. (a) Pour tout $N \geq 1$, Y_N est à valeurs dans $0, \cdots, N$ qui est un ensemble fini donc Y_N est étagée et

$$\mathrm{E}(Y_N) = \sum_{k=1}^N k \mathrm{P}(Y_N = k) = \sum_{k=1}^N k \frac{c}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{c}{k}.$$

(b) La variable X est positive donc son espérance est bien définie et $\mathrm{E}(X) = \sup\{\mathrm{E}(Z), Z$ étagée et $Z \leq X\}$. Comme pour tout $N \geq 1$, Y_N est étagée et inférieure à X on en déduit que $\mathrm{E}(X) \geq \sum_{k=0}^{N} \frac{c}{k}$. C'est une série divergente donc l'espérance est infinie.

Exercice 2 Soit X une variable de densité

$$f(x) = C\, x^2 e^{-x^3} 1_{\mathbb{R}^+}(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer la constante C.
2. On note $Y = \min(X, 1)$. Calculer la fonction de répartition de Y et la dessiner.
3. Y est elle une variable discrète ? à densité ?

Correction 2

1. Comme $\int f(x)\, dx = C/3$ on en déduit que $C = 3$.
2. Comme X est p.s. à valeurs dans $[0, 1]$ on en déduit $F(t) = 0$ pour $t < 0$ et $F(t) = 1$ pour $t \geq 1$. Enfin pour $t \in [0, 1[$

$$F_Y(t) = \mathrm{P}(\min(X, 1) \leq t) = \mathrm{P}(X \leq t) = F_X(t) = 1 - e^{-t^3}.$$

3. Y n'admet pas de densité car elle a un atome en 1. Par ailleurs le seul atome est 1 et $\mathrm{P}(Y = 1) = e^{-1} < 1$. On en déduit que Y n'est pas non plus discrète.

Exercice 3 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer sa fonction de répartition.

Soit ϕ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

3. Montrer que ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et déterminer sa bijection réciproque.
4. On définit la variable aléatoire $Y = \phi(X)$. Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y. Quelle est la loi de Y ?

Correction 3

1. La fonction f est positive et vérifie $\int f(x)\, dx = [1/(1 + e^{-x})]_{-\infty}^{+\infty} = 1$.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$F_X(t) = \int_{\infty}^{t} f(x)\, dx = \frac{1}{1 + e^{-t}}.$$

3. On note que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = 1 - 2/(1+e^x)$ donc ϕ est strictement croissant et continue. De plus ϕ a pour limite -1 en $-\infty$ et $+1$ en $+\infty$ donc ϕ réalise bien une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $]-1,1[$. De plus en résolvant $\phi(x) = y$ on obtient que pour tout $y \in]-1,1[$
$$\phi^{-1}(y) = \ln(\frac{1+y}{1-y}).$$

4. Puisque Y est à valeurs dans $]-1,1[$ on en déduit que pour $t \leq -1$, $F(t) = 0$ et que pour $t \geq 1$, $F(t = 1)$. Enfin pour $t \in]-1,1[$,
$$F_Y(t) = \mathrm{P}(Y \leq t) = \mathrm{P}(X \leq \phi^{-1}(t)) = F_X(\ln(\frac{1+y}{1-y})) = \frac{1+y}{2}.$$
En dérivant on obtient que Y admet pour densité $y \to y/2\ 1_{]-1,1[}$ et on reconnait la densité de l'uniforme sur $[-1,1]$.