Il faut d'abord une famille libre pour pouvoir construire une b.o.n

Rappel de cours :

$x \in E$, $(E = A \oplus A^{\perp})$; $x = u + v$, $u \in A$; $v \in A^{\perp}$

$p_A : x \in E \mapsto p_A(x) = u \in A$

$x - p_A(x) \in A^{\perp}$

$x = p_A(x) + p_{A^{\perp}}(x)$

· si $\{e_1, \dots, e_p\}$ b.o.n de A $\forall x \in E$ $p_A(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$

$\mathrm{dist}(x, A) = \|x - p_A(x)\| = \inf_{y \in A} \|x - y\|$ = min en dimension finie

symétrie orthogonale de x par rapport à A : $s_A : x \in E \mapsto s_A(x) = u - v$

$s_A(x) = 2p_A(x) - x$; $s_A = 2p_A - id_E$

Exercice 3 :

On montre p projecteur : on doit vérifier $p \circ p = p$ or $A^2 = A$.

C'est un projecteur de $\mathrm{Im}(p)$ // à $\ker(p)$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(p) \Leftrightarrow Ax = 0$
$= \ker(A)$

$$\frac{1}{6}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$; $\ker(p) = \mathrm{vect}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u} \right\}$ donc $\dim(\ker(p)) = 1$

D'après le thm du rg, $\dim(\mathrm{Im}(p)) = 2$

(On rq p projecte bien sur plan car dim $= 2$)

$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ peut mq $\mathrm{Im}(p) \perp \ker(p)$ donc $\mathrm{Im}(p)$ est bien un plan ($\dim(\mathrm{Im}(p)) = 2$)

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ et $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

Par définition, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{vect}\{u_1, u_2, u_3\}$, u_1 et u_2 sont non colinéaires

D'où (u_1, u_2) forment une base de $\mathrm{Im}(p)$

$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On calcule : $\begin{cases} \langle u, u_1 \rangle = 0 \\ \langle u, u_2 \rangle = 0 \end{cases}$

· Donc $u \in \mathrm{Im}(p)^{\perp}$ donc $\ker(p) \subset \mathrm{Im}(p)^{\perp}$

· $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\ker(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p))$

$= \dim(\ker(p)) + \dim(\ker(p)^{\perp})$ d'où $\dim(\ker(p)) = \dim(\mathrm{Im}(p)^{\perp})$

· On a $\ker(p) \subset \mathrm{Im}(p)^{\perp}$ et $\dim(\ker(p)) = \dim(\mathrm{Im}(p)^{\perp})$; donc $\ker(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$

Equation : $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(p)$; $X \in \mathrm{Im}(A) \Leftrightarrow X \in \ker(A^{\perp}) \Leftrightarrow \langle X, u \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

ou on calcule directement $\|x-p(x)\|$ avec $p(x) = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$ avec $\{e_1, \dots, e_p\}$

<u>Autre méthode</u> : $A^2 = A$ donc p projecteur

$\ker(p) = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$; $\text{Im}(p) = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

· On veut démontrer $\ker(p) \perp \text{Im}(p)$

$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0$; $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0$

<u>Conclusion</u> : $p^2 = p$ et $\text{Im}(p) \perp \ker(p)$. Donc p est une projection orthogonale.

$$\text{dist}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} ; \text{Im}(p)\right) = \left\| \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - p\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\|$$

$$\text{dist}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \text{Im}(A)\right) = \left\| \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - p_{\text{Im}(A)}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\| = \left\| p_{\text{Im}(A)^\perp}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\| = \left\| p_{\ker(A)}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\|$$

base orthonormée de $\ker(A)$; $v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$; v base de $\text{Im}(A)^\perp$

$$p_{\text{Im}(A^\perp)}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v \right\rangle v = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

On obtient $d\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \text{Im}(A)\right) = \left\| \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Exercice 4 : $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ $\quad rg(A) = p$

1. On cherche $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ $(=\mathbb{R}^p)$ qui minimise $\|AX - B\|^2$ $\quad AX \in Im(A)$

$\inf\limits_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\| = dist(B, Im(A))$

$\boxed{dist(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \inf\limits_{y \in F} \|x - y\|}$

Cet inf est atteint par $AX_0 = p_{Im(A)}(B)$

$rg(A) = p$, $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & Im(A) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ est injective (donc bijective)

D'où X_0 est bien défini de manière unique

2. $AX_0 = p_{Im(A)}(B)$ $\quad \forall y \in Im(A)$ $\quad B - AX_0 \perp Y$ $\quad y \in Im(A) \iff \exists X, Y, \; Y = AX$

$\iff \forall Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$; $B = AX_0 \perp AZ \iff \forall Z,\ \langle \underbrace{AZ}_{\substack{(n,p)(p,1) \\ \in \mathbb{R}^n}}, \underbrace{B - AX_0}_{\substack{(n,1)-(n,p)(p,1) \\ \in \mathbb{R}^n}} \rangle = 0$

$\iff \forall Z \quad (AZ)^T (B - AX_0) = 0$

$\iff \forall Z \quad \underbrace{Z^T A^T (B - AX_0)}_{\substack{(1,p)\ (p,n)\ (n,1) \\ \in \mathbb{R} \text{ (c'est un réel)}}} = 0$

D'où $A^T(B - AX_0) = 0$

$A^T B = A^T A X_0$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Soit } A \text{ qui vérifie} \\ A(A^2 + 2A + I) = 0 \\ A = 0 \text{ ou } A^2 + 2A + I = 0 \quad \text{FAUX !!!} \\ \hookrightarrow A(A^2 + 2A + I) \text{ inversible} \\ \quad \hookrightarrow \text{multiplier par } A^{-1} \end{array}}$

3. $(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2 = \left\| \begin{pmatrix} x+y-1 \\ x-y \\ 2x+y+2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x+y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \|\underset{(3,2)(2,1)}{AX} - \underset{(3,1)}{B}\|^2$

$AX = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$A^T A X_0 = A^T B$
$A^T A$ inversible
$X_0 = (A^T A)^{-1} A^T B$

$\det(A^T A) = 18 - 4 = 14$

$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$; $A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$X_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 : $E = \mathbb{R}_3[X]$

$\forall P \in E,\ u(P)(X) = P(-X)$ endo.

$\cdot (u \circ u)(P)(X) = u(P(-X)) = P(X)$

$\forall P\ (u \circ u)(P) = P$

$u \circ u = id_E \rightarrow$ c'est une symétrie

Rappel : $O(E)$

prop : u isométrie vectorielle ou endo. orthogonal si $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$

$\forall (x,y) \in E^2\ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

symétrie $u \circ u = id_E$

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad \langle u(P), u(Q) \rangle = \int_{-1}^{1} u(P(t)) \cdot u(Q(t))\, dt = \int_{-1}^{1} P(-t) Q(-t)\, dt$$

$$= \int_{1}^{-1} P(y) Q(y)\, (-dy) = \int_{-1}^{1} P(y) \cdot Q(y)\, dy$$

$$= \langle P, Q \rangle$$