CONTRÔLE CONTINU DU 25/09/2019

EXERCICE 1

1 _ Vrai 4 _ Faux 7 _ Faux 10 _ Faux
2 _ Vrai 5 _ Faux 8 _ Faux
3 _ Vrai 6 _ Vrai 9 _ Faux

EXERCICE 2

1_ $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}S\\ \vdots\\ S\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ S est donc une valeur propre de A et $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

2_ La matrice A est telle que la somme des coef. de chacune de ses lignes vaut 4. On a donc que 4 est une valeur propre de A, un vecteur propre associé étant $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On remarque également que la matrice est de rang 2 car sa première colonne est identique à sa dernière et linéairement indépendante de sa deuxième. 0 est donc valeur propre de A et on trouve facilement que $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé. On en déduit que le polynôme caractéristique de A est scindé et se factorise en $\chi_A(X) = X(X-4)(X-\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant que la trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres, on trouve que $\lambda = 4$. On voit alors facilement que $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, ce qui permet de dire que le sous-espace propre associé à 4 est de dimension égale à 2. A est donc diagonalisable et

$$A = PDP^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

EXERCICE 3

Si X, Y, Z sont des vecteurs propres pour A alors il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tq. $AX = \lambda_1 X$, $AY = \lambda_2 Y$, $AZ = \lambda_3 Z$

$\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$

$$\begin{cases}1+a+a' = \lambda_1\\ 1+b+b' = \lambda_1\\ 1+c+c' = \lambda_1\end{cases}, \quad \begin{cases}1-a' = \lambda_2\\ 1-b' = 0\\ 1-c' = \lambda_2\end{cases}, \quad \begin{cases}1-a = \lambda_3\\ 1-b = \lambda_3\\ 1-c = 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ $\begin{cases}1+a+a' = \lambda_1\\ 2+b = \lambda_1\\ 2+c' = \lambda_1\end{cases}, \quad \begin{cases}1-a' = \lambda_2\\ b' = 1\\ c' = 2-a'\end{cases}, \quad \begin{cases}1-a = \lambda_3\\ b = 2-a\\ c = 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$

$$\begin{cases} 1 + a + a' = 4 - a' \\ 1 + a + a' = 4 - a \\ b = c' \end{cases}, \quad \begin{cases} '' \\ \\ \end{cases}, \quad \begin{cases} '' \\ \\ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ a = 3 - 2a' = 1 \\ b = 2 - a = 1 \\ b' = 1 \\ c = 1 \\ c' = 2 - a' = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 4

La matrice A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont données par ses coefficients diagonaux.

1 - 1 est l'unique valeur propre de A. La matrice est diagonalisable ssi elle est semblable à I_4, ce qui implique que $A = \underbrace{P I_4 P^{-1}}_{= I_4}$ soit encore $a = b = c = d = e = f = 0$.

2 - Les valeurs propres de A sont 1 (ordre de multiplicité égal à 3) et 2. A est diagonalisable ssi $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_4)) = 3$. On a

$$X \in \mathrm{Ker}(A - I_4) \Leftrightarrow \begin{cases} a x_2 + b x_3 + c x_4 = 0 \\ d x_3 + e x_4 = 0 \\ f x_4 = 0 \\ 0 x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a x_2 + b x_3 = 0 \\ d x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Quelle que soit les valeurs des réels, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient au sous-espace propre. Si $d \neq 0$, on a $x_3 = 0$, d'où $a x_2 = 0$. Si $a \neq 0$, alors $x_2 = 0$, $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_4)) = 1$ et A n'est pas diagonalisable. Si $d \neq 0$ et $a \neq 0$, alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(A - I_4)$, $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_4)) = 2$ et A n'est pas diagonalisable. Si $d = 0$, alors $a x_2 = -b x_3$. Alors si $a = 0$, alors $b x_3 = 0$. Alors $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_4)) = 2$ si $b \neq 0$ (car $x_3 = 0$) et A n'est pas diagonalisable. Si $b = 0$, alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(A - I_4)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_4)) = 3$.

A est donc diagonalisable ssi $a = b = d = 0$ et $(c, e, f) \in \mathbb{R}^3$

EXERCICE 5

$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \dots + x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + n x_n = \lambda x_n \end{cases}$

$\iff \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = (\lambda - (k-1)) x_k$

$\iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_1 & (1) \\ \lambda x_1 = (\lambda - 1) x_2 = \dots = (\lambda - (n-1)) x_n & (2) \end{cases}$

Si $\lambda = k \in \{0, \dots, n-1\}$ alors $(\lambda - k) x_{k+1} = 0$ et $(2) \Rightarrow x_j = 0$ $\forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k+1\}$. En utilisant (1), on trouve que $x_{k+1} = 0$ d'où $X = 0$. λ n'est donc pas valeur propre dans ce cas.

Si $\lambda \notin \{0, \dots, n-1\}$ alors $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_1 \\ \forall k \in \{2, \dots, n\} \quad x_k = \frac{\lambda}{\lambda - (k-1)} x_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda - (i-1)} x_1 = \lambda x_1$

$\iff \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda - (i-1)} - 1 \right) x_1 = 0 \qquad (\text{car } \lambda \neq 0)$

Si $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda - (i-1)} \neq 1$ alors $x_1 = 0$ d'où $X = 0$ et λ n'est pas valeur propre de A.

Si $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda - (i-1)} = 1$, alors $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda / (\lambda - 1) \\ \vdots \\ \lambda / (\lambda - n + 1) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à λ.