Université Paris-Dauphine,
L2 MIDO, Année 2023-2024

CC1 d'Analyse 3

Durée : 1h

La calculatrice et documents de cours ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Question de cours

1. Donner la définition d'une suite de Cauchy (à valeurs réelles)
2. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
3. En utilisant la définition, déterminer si la suite $u_n = \ln n$ est de Cauchy.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{n\to\infty} 2n^2 + (2n^3 - n^2)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\ln(1+x)-x-x^2}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-e^{x^2}}{x^4}$

Exercice 3. Donner la nature (convergente absolument, semi-convergente, divergente) des séries de terme général suivant. Dans le cas où il y a une limite (finie ou infinie), petit bonus si vous la déterminez.

a) $\frac{(-2)^n}{n!}$, $n \geq 1$.

b) $(\frac{e}{\pi})^n$, $n \geq 0$.

c) $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, $n \geq 2$.

d) $\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) + a + \frac{b}{n}$, $n \geq 1$. (on discutera selon la valeur des paramètres réels a et b.)

Exercice 4. Le but de l'exercice est de déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$. Pour les petits malins : vous pouvez utiliser la formule de Stirling à condition de me la démontrer (bon courage).

1. Montrer que la série de terme général $\frac{n^n}{3^n*(n!)}$ converge.
2. Montrer que la série de terme général $\frac{n^n}{n!}$ diverge grossièrement.
3. En déduire l'existence de deux constantes C et D (qu'on ne cherchera pas à calculer) telles que
$$C(n/3)^n \leq n! \leq Dn^n$$
pour n suffisamment grand.
4. En déduire un équivalent le plus simple possible de $\ln(n!)$ lorsque n tend vers $+\infty$.