Université Paris-Dauphine
Analyse 3 (L2)
Date : 30 novembre 2020

Année universitaire 2020-2021
Responsable : Emeric Bouin
Durée : 1 h 30

Second contrôle continu

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées pour être considérées. Il est rappelé que la rédaction comptera de manière importante dans l'évaluation des copies. Aucun document n'est autorisé, aucune calculatrice. Le barême est donné à titre indicatif.

In bocca al lupo ... !

Exercice 1. (Déjà fait ! - 10 mins - 1+1+1 = 3 points) Etudier l'absolue convergence, la semi-convergence des séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}} + n\ln(n)^2}, \qquad v_n = (-1)^n\sqrt{n}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), \qquad w_n = e^{-\ln(n)^2}.$$

Exercice 2. (Questions de cours - 10 mins - 1,5+1+1+1 = 4,5 points)

1. Donner un exemple d'une suite de fonctions f_n, continues sur $[0,1]$, qui converge simplement sur $[0,1]$ et telle que $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt$.
2. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses, en le justifiant.
   (a) La limite simple d'une suite de fonctions continues est continue.
   (b) La limite simple d'une suite de fonctions croissantes est croissante.
   (c) La limite uniforme d'une suite de fonctions strictement croissantes est strictement croissante.

Exercice 3. (Suites de fonctions - 0,5+1+2+1,5 = 5 points)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0,1/n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Représenter graphiquement l'allure de f_1, f_2 et f_3.
2. Etudier la limite simple de la suite (f_n).
3. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?
4. Etudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1]$.

Exercice 4. (Séries de fonctions - 1+1+1,5+1,5+2+2 = 9 points)

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $u_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On appelle alors S la fonction somme.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
4. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que S n'est pas dérivable en 0.
6. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Fin du sujet
