Elements de correction du CC2

Exercice 1 :

1.) $|u_n| \leq \frac{1}{n(\ln n)^2}$ qui est une série de Bertrand convergente, donc par comparaison de séries positives, le STG u_n est absolument cv donc cv.

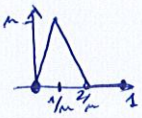
2.) $v_n = (-1)^n \sqrt{n} \left(\ln n + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n - \ln(1-\frac{1}{n}) \right)$

$= (-1)^n \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - (-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) \right) = (-1)^n \left(\frac{2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right) = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

Or a $|v_n| \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$ donc la série n'est pas abs. cv. Néanmoins, la STG $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est cv par le CSSA et par négligeabilité la STG $o(\frac{1}{n^{3/2}})$ converge. La STG v_n est donc CV.

3.) $n^2 w_n = \exp(2\ln n - (\ln n)^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc par Riemann la STG w_n converge.

Exercice 2

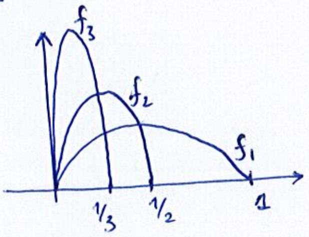
1.) Prendre une suite de triangles  : La limite simple est nulle mais $\int f_n = 1 \ \forall n$.

2.) a) FAUX : $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$.

b) VRAI : La relation $f_n(x) \leq f_n(y)$ passe à la limite simple.

c) FAUX : $f_n(x) = \frac{x}{n}$ sur $[0,1]$.

Exercice 3 :

1.) 

(Le max de chaque courbe était $\frac{n}{4}$).

2.) Si $x=0$, $f_n(0) = 0 \ \forall n$ donc $f_n(0) \to 0$. Si $x>0$, alors pour $n \geq \frac{1}{x}$, $f_n(x) = 0$. On déduit donc que f_n CVS vers 0 sur $[0,1]$.

3.) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f_n(t)\,dt = n \int_0^{1/n} nx(1-nx)\,dx = \int_0^1 u(1-u)\,du = \left(\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 \right) = 1/6$.

Par le théorème du cours, si f_n CVU vers f alors $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$, ce qui n'est pas le cas.

4.) On regarde $\|f_n - f\|_{\infty,[a,1]} = \sup_{x\in[a,1]} |f_n - 0| = 0$ dès que $n \geq \frac{1}{a}$, ce qui conclut.

Exercice 4

1.) Si $x=0$, $u_n(0) = 0$ donc la STG $u_n(0)$ est convergente. Si $x>0$, $n^2(nx^2 e^{-x\sqrt{n}}) \to 0$ par croissance comparée, donc par Riemann la STG $u_n(x)$ converge $\forall x>0$.

2.) On a $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |u_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} (x\sqrt{n})^2 e^{-x\sqrt{n}} = \sup_u u^2 e^{-u} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ donc pas de CVN.

3.) On fait la même chose qu'au 2 : $\forall a>0$, $\sup_{x\geq a} |u_n(x)| = \sup_{u \geq a\sqrt{n}} u^2 e^{-u}$. Une étude de $\varphi(u) = u^2 e^{-u}$ conduit à voir que φ est décroissante APCR, et donc $\sup_{x\geq a} |u_n(x)| = \varphi(a\sqrt{n})$ pour n grand. Or la STG $na^2 e^{-a\sqrt{n}}$ est CV, donc la STG u_n CVN.

4.) La STG $u_n'(x) = 2nxe^{-x\sqrt{n}} + nx^2(-\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}} = nxe^{-x\sqrt{n}}(2 - x\sqrt{n})$ converge normalement sur tout $[a,+\infty[$ en suivant les mêmes points qu'au 2. Par théorème du cours, S est C^1 sur $[a,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5.) On forme $\frac{S(\frac{1}{N})}{1/N} = N S(\frac{1}{N}) = N \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1}{N^2} e^{-\frac{\sqrt{n}}{N}} \geq \sum_{N}^{2N} \frac{n}{N} e^{-\frac{\sqrt{n}}{N}} \geq \sum_{N}^{2N} 1 \cdot e^{-\sqrt{\frac{2}{N}}} \geq N e^{-\sqrt{\frac{2}{N}}} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$ donc S n'est pas dérivable en 0.

6.) Si la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$, alors S est continue en 0^+. Or $S(0) = 0$ et par la question précédente $S(\frac{1}{N}) \geq \frac{1}{N}(N e^{-\sqrt{\frac{2}{N}}}) = e^{-\sqrt{\frac{2}{N}}} \to 1$. Donc S n'est pas continue en 0 et la CVU n'est pas vérifiée.