Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2021 - 2022)

Examen de seconde session - Vendredi 1er juillet 2022.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ désigne un espace de probabilité.

Exercice 1. *(pts)* Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Quand dit on d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ qu'ils sont indépendants (I désigne un ensemble quelconque pas nécessairement fini) ?
2. Soit $c \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle telle que $X = c$ p.s. Soit Y une variable aléatoire réelle. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Correction.

1. Voir le cours.
2. Pour toutes fonctions boreliennes bornées f et g
$$\mathrm{E}(f(X)g(Y)) = f(c)\mathrm{E}(g(Y)) = \mathrm{E}(f(X))\mathrm{E}(g(Y)).$$
On en déduit que X et Y sont indépendantes.

Exercice 2. *(pts)* Soit X une variable aléatoire réelle de densité
$$f(x) = \frac{c}{x^3}\, 1_{[1,+\infty]}(x) \qquad x \in \mathbb{R},$$
où c désigne un certain réel.

1. Que vaut c ? Dessiner sans justification le graphe de f.
2. Donner la fonction de répartition de X.
3. Justifier sans calcul que l'espérance de X soit bien défini et la calculer.
4. Que vaut $\mathrm{E}(X^2)$?
5. On pose $Y = X^2$. Donner la fonction de répartition de Y et en déduire que Y admet une densité que l'on explicitera.

Correction.

1. Pour être une densité la fonction f doit vérifier $\int f(x)\ dx = 1$. Or $\int f(x)\ dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^3}\ dx = \frac{c}{2}$. On en déduit que $c = 2$.

2. Pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 1 \\ 1 - 1/u^2 & \text{si } u \geq 1. \end{cases}$$

3. La variable X est positive donc $\mathrm{E}(X)$ est bien défini. On calcule

$$\mathrm{E}(X) = \int x f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}dx = 2.$$

4. La variable X^2 est positive donc $\mathrm{E}(X^2)$ est bien défini. On calcule

$$\mathrm{E}(X^2) = \int x^2 f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x}dx = +\infty.$$

5. Pour $u < 0$, on a bien sûr $F_Y(u) = 0$. Pour $u \geq 0$

$$F_Y(u) = \mathrm{P}(-\sqrt{u} \leq X \leq \sqrt{u}) = F(\sqrt{u}) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 1 \\ 1 - 1/u & \text{si } u \geq 1. \end{cases} .$$

   On en déduit que Y admet pour densité la fonction $u \to \frac{1}{u^2} 1_{[1,+\infty]}(u)$.

Exercice 3. Soit λ et μ deux réels strictement positifs. On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}xp(\lambda)$ et $\mathcal{E}xp(\mu)$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{M \leq a\} \in \mathcal{F}$ et en déduire que $M = \min(X, Y)$ est une variable aléatoire.
2. Donner la fonction de répartition de M et en déduire la loi de M.
3. Justifier de l'existence de l'espérance de M et la calculer.

Correction.

1. On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(]-\infty, a], a \in \mathbb{R})$ et que pour montrer que M est une variable aléatoire il suffit donc de vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{M \leq a\} \in \mathcal{F}$. Or $\{M \leq a\} = \{X \leq a\} \cup \{Y \leq a\}$ et comme X et Y sont deux v.a., les deux ensembles dans l'union sont dans $\mathcal{F}$. On conclut facilement puisque $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(M \leq a) = 1 - \mathrm{P}(M > a) = 1 - \mathrm{P}(X > a, Y > a).$$

   Or X et Y sont indépendants donc $\mathrm{P}(X > a, Y > a) = \mathrm{P}(X > a)\mathrm{P}(Y > a)$. De plus

$$\mathrm{P}(X > a) = \int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda a}.$$

   On obtient donc $\mathrm{P}(M \leq a) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)a}$. On en déduit que M suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

3. La v.a. M est positive donc on peut considérer son espérance. De plus

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(M) &= \int x(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)x}1_{[0,+\infty[}(x)\ dx \\
&\overset{IPP}{=} [xe^{-(\lambda+\mu)x}]_{+\infty}^{0} + \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)x}\ dx \\
&= \frac{1}{\lambda+\mu}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $i \geq 1$, la loi de X_i est une Bernoulli de paramètre $1/2$. On note pour tout $n \geq 1$

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^i}.$$

1. Montrer que la suite de variable $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. en croissant vers une variable que l'on notera Y et qui vérifie $Y \in [0,1]$ p.s.
2. Montrez par récurrence que pour tout $n \geq 1$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{k/2^n, k = 0, \cdots, 2^n - 1\}$.
3. Calculer, pour tout $n \geq 1$, la fonction de répartition F_n de Y_n et montrer qu'elle converge vers une fonction F.
4. Montrer que F est la fonction de répartition de Y et en déduire la loi de Y.

Correction.

1. Comme $0 \leq \frac{X_i}{2^i} \leq \frac{1}{2^i}$ presque sûrement la série de terme général $\frac{X_i}{2^i}$ converge p.s. Sa limite $Y \in [0,1]$ p.s. puisque le terme général est positif et $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{2^i} = 1$.
2. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{k/2^n, k = 0, \cdots, 2^n - 1\}$. C'est clair pour $n = 1$. Soit $n \geq 1$. Supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie pour n. Pour tout $k \in \{0, \cdots, 2^{n+1} - 1\}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y_{n+1} = \frac{k}{2^{n+1}}) &= \mathrm{P}(X_{n+1} = 1, Y_n = \frac{k-1}{2^{n+1}}) + \mathrm{P}(X_{n+1} = 0, Y_n = \frac{k}{2^{n+1}}) \\
&= \mathrm{P}(X_{n+1} = 1)\mathrm{P}(Y_n = \frac{k-1}{2^{n+1}}) + \mathrm{P}(X_{n+1} = 0)\mathrm{P}(Y_n = \frac{k}{2^{n+1}}) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{P}(Y_n = \frac{k-1}{2^{n+1}}) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(Y_n = \frac{k}{2^{n+1}}),
\end{aligned}$$

   où on a utilisé l'indépendance pour passer de la première à la deuxième ligne. Par hypothèse de récurrence, si k est impair seul le premier terme dans la somme ci-dessus est strictement positif et on obtient

$$\mathrm{P}(Y_{n+1} = \frac{k}{2^{n+1}}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

   Si k est pair, seul le second terme est strictement positif et on obtient le même résultat.

3. On en déduit que pour tout $u < 0$, $F_n(u) = 0$; pour tout $u \geq 1$, $F_n(u) = 1$ et enfin que pour tout $k = 0, \cdots, 2^n - 1$, F_n est constante sur $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ égale à $(k+1)/2^n$. On en déduit que F_n converge simplement vers F définie par $F(u) = 0$ si $u \leq 0$, u si $0 \leq u \leq 1$ et 1 si $u \geq 1$.
4. Pour tout $n \geq 1$, $F_n(u) = \mathrm{E}(1_{Y_n \leq u})$. Or la suite $1_{Y_n \leq u}$ converge p.s. vers $1_{Y \leq u}$ car la suite Y_n converge p.s. en croissant vers Y. Comme les Y_n, $n \geq 1$ sont dominées par 1 qui est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient que $(F_n(u))_{n \geq 1}$ converge vers $\mathrm{P}(Y \leq u)$. On en déduit que F est la fonction de répartition de Y. On reconnait la fonction de répartition d'une uniforme sur $[0, 1]$.