Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2020 - 2021)

CC1 - Lundi 5 octobre 2020.

durée : 1h30.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. On considère 5 lancers successifs d'une pièce non biaisée.

1. Proposer un espace de probabilité pour modéliser cette expérience.
2. Écrire explicitement (en langage mathématique) la partie A de Ω correspondant à l'événement ≪ il existe une séquence d'au moins 3 Piles successifs parmi les 5 lancers ≫. Donner la liste des éléments de A puis calculer sa probabilité.
3. Pierre et Paul choisissent lequel des deux paye l'addition en jouant un Pile ou Face. Pierre propose de modifier la règle : Paul réalise 5 lancers et paye s'il y a au moins une séries de 3 piles ou 3 faces successifs. Sinon c'est Pierre qui paye. Paul doit-il accepter ?

Exercice 2. On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ et A une partie de Ω. On considère la fonction $X = 1_A$, fonction indicatrice de A, définie par $X(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $X(\omega) = 0$ si $\omega \in A^c$.

1. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Expliciter l'ensemble $\{X \in B\}$, c'est-à-dire écrire $\{X \in B\}$ à l'aide de parties de Ω en distinguant plusieurs cas.
2. En déduire que X est une variable aléatoire si et seulement si $A \in \mathcal{F}$.

On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que $A \in \mathcal{F}$ et que $\mathrm{P}(A) = 1/2$.

3. Donner la loi de X ainsi que sa fonction de répartition et la dessiner.
4. Montrer que $Y = 1 - X$ a même loi que X puis calculer $\mathrm{P}(X = Y)$.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire réelle. Montrer que $\mathrm{P}(X = 0) = 1$ si et seulement si $\mathrm{P}(|X| > 1/n) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire admettant une densité f définie et continue sur $\mathbb{R}$ et paire. On note F la fonction de répartition de X.

1. Montrer que pour tout réel x, $F(x) + F(-x) = 1$.
2. On suppose que la variable X^2 suit la loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire admet pour densité la fonction $t \to 1_{[0,+\infty[}e^{-t}$. Donner la fonction de répartition de X^2 puis déterminer la fonction de répartition F de X et enfin de la densité f.