

Examen du 12 janvier 2022

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2h

Exercice 1 (caractérisation d'une isométrie vectorielle, 3 points). Soit E un espace préhilbertien. Montrer qu'une application u de E dans E est une isométrie vectorielle si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Exercice 2 (sous-multiplicativité de la norme de Frobenius, 6 points). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère le produit scalaire b sur $M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}), b(A, B) = \text{tr}(A^T B),$$

et on note N la norme associée à b . Le but de cette question est de montrer que cette norme est *sous-multiplicative*, c'est-à-dire que

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq N(A)N(B).$$

1. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, justifier l'existence d'une matrice orthogonale P de $M_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice diagonale D de $M_n(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux positifs et notés $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, telles que

$$P^T (A^T A) P = D.$$

2. Pour toute matrice B de $M_n(\mathbb{R})$, on pose $S = P^T (B B^T) P$. Montrer que

$$(N(A))^2 = \text{tr}(D), (N(B))^2 = \text{tr}(S), (N(AB))^2 = \text{tr}(SD).$$

3. Montrer que $\text{tr}(SD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii}$.

4. Pour i un entier compris entre 1 et n , on note E_i le i^{e} vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$E_i^T S E_i = \|B^T P E_i\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire le signe du i^{e} coefficient diagonal de S .

5. Montrer enfin que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^n s_{jj} \right),$$

et conclure.

Exercice 3 (4 points). Soit n un entier naturel non nul et J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On cherche à caractériser les matrices A de $O(n)$ telles que $J + A$ soit inversible.

1. Montrer que $J + A$ n'est pas inversible si et seulement si -1 appartient à $\text{Sp}(JA)$.
2. Calculer la matrice JA . Quel est son rang ?
3. En déduire que $\chi_{JA}(X) = X^{n-1}(X - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij})$.
4. Conclure en énonçant une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A .

Exercice 4 (matrice commutant avec sa transposée, 3 points). Soit n un entier naturel non nul et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On note $M = AA^T - A^T A$.

1. Montrer que la matrice M est diagonalisable et calculer sa trace.
2. Montrer alors que les matrices A et A^T commutent si et seulement si $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

Exercice 5 (polynômes de Laguerre, 6 points). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . On admet que l'application de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans \mathbb{R} définie par ¹

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X], \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

est un produit scalaire. On note $\|\cdot\|$ la norme qui lui est associée.

1. (a) Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation

$$\langle P', Q \rangle + \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q \rangle - P(0)Q(0).$$

- (b) En déduire que si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré inférieur, alors on a $\|P\| = |P(0)|$.

2. On se propose dans cette question de démontrer qu'il existe une unique famille de polynômes (L_0, L_1, \dots, L_n) vérifiant les propriétés suivantes

$$\begin{cases} L_0 = 1, \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, L_k \text{ est de degré } k, \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, L_k(0) = 1, \\ (L_0, L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X]. \end{cases} \quad (1)$$

- (a) On note (P_0, P_1, \dots, P_n) la famille obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- i. Justifier que, pour tout entier k de $\{0, \dots, n\}$, $P_k(0) \neq 0$.
- ii. En déduire une famille (L_0, L_1, \dots, L_n) vérifiant les propriétés (1).
- (b) On suppose qu'il existe deux familles de polynômes (L_0, L_1, \dots, L_n) et (M_0, M_1, \dots, M_n) vérifiant les propriétés (1). Montrer que, pour tout entier k de $\{0, \dots, n\}$, $L_k = M_k$.
- (c) Conclure et calculer L_1 et L_2 .

1. On admettra en particulier que, pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est convergente.