Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2022 - 2023)

Probabilités 1 - CC1 - Lundi 3 octobre 2022 - Éléments de correction

Si vous repérez une erreur, signalez-là sur votre copie et poursuivez votre épreuve.

Exercice 1 Les deux questions sont indépendantes.

1. Donner la définition de la loi d'une variable aléatoire.
2. On définit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1\}; \{1, 2\}\}$. Donner $\sigma(\mathcal{C})$.

Correction 1 C'est du cours pour la question 1. Pour la seconde, on note que $\sigma(\mathcal{C})$ doit contenir en plus de $\mathcal{C}$: $\emptyset, \Omega$ et $\{2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}$. On introduit donc $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$ et on a $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{C})$. De plus on vérifie facilement que $\mathcal{F}$ est une tribu et comme $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ on obtient $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

Exercice 2 Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables.

$$f_1 : t \in]0, +\infty[\to t^3 e^{-t} \qquad f_2 : t \in]0, +\infty[\to \frac{t \ln t}{(t^2 + 1)^2} \qquad f_3 : t \in]0, +\infty[\to \frac{1}{t\sqrt{t^2 + 1}}$$

Correction 2

La fonction f_1 est continue sur $]0, +\infty[$ et admet une limite finie en 0. On doit donc uniquement étudier son comportement en $+\infty$. Or $|t^2 f_1(t)| \to 0$ quand $t \to +\infty$ donc par comparaison on en déduit que f_1 est intégrable.

La fonction f_2 est continue sur $]0, +\infty[$ et admet une limite finie en 0. On doit donc uniquement étudier son comportement en $+\infty$. Or $|t^2 f_2(t)| \to 0$ quand $t \to +\infty$ donc par comparaison on en déduit que f_2 est intégrable.

La fonction f_3 est continue sur $]0, +\infty[$. Examinons son comportement en 0 : $|f_3(t)| \overset{0}{\sim} 1/t$ donc f_3 n'est pas intégrable. Remarque : f_3 est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 3 On lance une pièce de monnaie équilibrée *successivement* 5 fois.

1. Proposer un espace de probabilité pour modéliser cette expérience.
2. Expliciter soigneusement les événements puis calculer les probabilités correspondant à :
   (a) obtenir exactement une fois Face
   (b) obtenir au moins une fois Face
   (c) obtenir une série de longueur au moins 3 (i.e. avoir au moins 3 Piles consécutifs ou 3 Faces consécutifs parmi les 5 lancers)
   (d) obtenir plus de Face que de Pile

Correction 3

1. On propose comme univers $\Omega = \{0,1\}^5$ où 1 correspond à Pile et 0 à Face. On pouvait bien sûr faire d'autres choix. Comme Ω est fini on prend pour tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Enfin puisqu'on veut que tous les tirages aient même probabilité on prend pour probabilité P la probabilité uniforme définie pour tout $A \in \mathcal{F}$ par $\mathrm{P}(A) = |A|/|\Omega|$. On note que $|\Omega| = 2^5 = 32$.
2. (a) On introduit $A = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } \sum_{i=1}^5 \omega_i = 4\}$. On a $|A| = 5$ et donc $\mathrm{P}(A) = 5/32$.
   (b) On introduit $B = \{(1,1,1,1,1)\}$ et on s'intéresse donc à B^c. On a $|B| = 1$ et donc $\mathrm{P}(B^c) = 1 - \mathrm{P}(B) = 1 - 1/32$.
   (c) Ça n'est pas très élégant mais on peut décrire C en énumérant simplement tous les éléments de Ω qu'il contient :
      i. les séries de longueur 5 : $(1,1,1,1,1); (0,0,0,0,0)$
      ii. les séries de longueur 4 : $(1,1,1,1,0); (0,1,1,1,1); (1,0,0,0,0); (0,0,0,0,1)$
      iii. les séries de longueur 3 : $(1,1,1,0,1); (1,1,1,0,0); (0,1,1,1,0); (1,0,1,1,1); (0,0,1,1,1)$ et $(0,0,0,1,0); (0,0,0,1,1); (1,0,0,0,1); (0,1,0,0,0); (1,1,0,0,0)$.

      On a donc $|C| = 16$ et donc $\mathrm{P}(C) = 16/32 = 1/2$.
   (d) On introduit $D = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } \sum_{i=1}^5 \omega_i \leq 2\}$. On peut partitionner cet événement selon la valeur de la somme et on obtient facilement $|D| = 1 + 5 + 10 = 16$ et on obtient $\mathrm{P}(D) = 1/2$.

Exercice 4 Le but de l'exercice est de montrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $[0,1]$ est dénombrable.

1. Justifier qu'il existe une suite $(u_k)_{k\geq 0}$ telle que $[0,1] = \{u_k,\ k \geq 0\}$.
2. Que vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}}$?
3. Montrez que pour tout $n \geq 0$, il existe un réel x_n dans
$$[0,1] \setminus \bigcup_{k=0}^{n} [u_k - \frac{1}{2^{k+2}}, u_k + \frac{1}{2^{k+2}}].$$
4. Parvenir à une contradiction en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Correction 4

1. Si $[0,1]$ est dénombrable alors par définition il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ dans $[0,1]$. On note pour tout $k \geq 0$, $u_k = f(k)$. Comme f est bijective, $[0,1] = \{u_k,\ k \geq 0\}$.
2. C'est une somme géométrique ! $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1$.
3. En particulier, pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} < 1$ et donc $\cup_{k=0}^{n} [u_k - \frac{1}{2^{k+2}}, u_k + \frac{1}{2^{k+2}}]$ ne peut recouvrir $[0,1]$! On en déduit que pour tout $n \geq 0$, il existe un réel x_n dans
$$[0,1] \setminus \bigcup_{k=0}^{n} [u_k - \frac{1}{2^{k+2}}, u_k + \frac{1}{2^{k+2}}].$$
4. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(x_n)_{n\geq 0}$ étant bornée, elle admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ convergeant vers une limite $\ell \in [0,1]$. Comme $[0,1] = \{u_k,\ k \geq 0\}$, il existe $p \geq 0$ tel que $\ell = u_p$. Or pour tout $n \geq p$, $\phi(n) \geq n \geq p$ donc $x_{\phi(n)} \notin [u_p - \frac{1}{2^{p+2}}, u_p + \frac{1}{2^{p+2}}]$. On en déduit que $(x_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ ne converge pas vers ℓ et on tient notre contradiction.