Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2022 - 2023)

Examen de seconde session - Vendredi 28 juin 2023.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ désigne un espace de probabilité.

Exercice 1.

1. Rappeler la définition d'une variable aléatoire réelle.
2. Montrer que 1_A est une variable aléatoire si et seulement si $A \in \mathcal{F}$.
3. Que signifie : « les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont indépendants », où I est un ensemble d'indices quelconque.
4. Soit X une variable intégrable de densité f paire. Montrer que $\mathrm{E}(X) = 0$.
5. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité. On suppose que $P(X = Y) = 1$.
   (a) Montrer que X et Y ont la même loi.
   (b) Montrer que la réciproque est fausse.
   (c) Montrer que pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.
6. Vrai ou Faux
   (a) Soit X une variable aléatoire positive. Alors $\mathrm{E}(X)$ est bien défini et $\mathrm{E}(X) \geq 0$.
   (b) Soit X une variable aléatoire positive. Alors $\mathrm{E}(X) < +\infty$.
   (c) Soit X une variable aléatoire intégrable alors X^2 est également intégrable.
   (d) Soit X une variable aléatoire de carré intégrable alors X est également intégrable.
7. Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \pi]$. Déterminer la loi de $\sin(V)$.

Correction.

1. Cours
2. On a $\{1_A = 1\} = A$ et $\{1_A = 0\} = A^c$. Comme 1_A est à valeur dans $\{0, 1\}$ cela prouve que 1_A est une variable aléatoire si $A \in \mathcal{F}$. Réciproquement si 1_A est une variable alors $A = \{1_A = 1\} \in \mathcal{F}$.
3. Cours
4. On a $\mathrm{E}(X) = \int x f(x) dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x) dx + \int_{0}^{+\infty} x f(x) dx$. En faisant le changement de variable $u = -x$, on obtient $\int_{-\infty}^{0} x f(x) dx = -\int_{0}^{+\infty} x f(x) dx$ puis le résultat.
5. (a) Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P(X \in B) = P(X \in B, X = Y) = P(Y \in B, X = Y) = P(Y \in B)$.
   (b) On considère par exemple X une variable de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ et $Y = -X$.
   (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable et ϕ continue bornée, $\mathrm{E}(\phi(f(X))) = \mathrm{E}(\phi(f(Y)))$ puisque X et Y ont même loi donc $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.

6. Vrai ou Faux
   (a) Vrai. Dans ce cas
   $$\mathbb{E}[X] \quad := \quad \sup\left\{\mathbb{E}[Z] \colon Z \text{ étagée}, Z \le X\right\}. \tag{1}$$
   qui est toujours bien défini et positif (éventuellement infini).
   (b) Faux. Par exemple la variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi $\mathrm{P}(X=k) = c/k^2$ (avec c adapté) vérifie $\mathrm{E}(X) = \sum_{k\ge 1} k\mathrm{P}(X=k) = \sum_{k\ge 1} kc/k^2 = +\infty$.
   (c) Faux. Par exemple la variable à valeur dans $\mathbb{N}^*$ de loi $\mathrm{P}(X=k) = c'/k^3$ (avec c' adapté) vérifie $\mathrm{E}(X) = \sum_{k\ge 1} k\mathrm{P}(X=k) = \sum_{k\ge 1} kc/k^3 < +\infty$ et $\mathrm{E}(X^2) = \sum_{k\ge 1} k^2\mathrm{P}(X=k) = \sum_{k\ge 1} k^2c/k^3 = +\infty$.
   (d) Vrai. On a $\mathrm{E}(|X|) = \mathrm{E}(|X|1_{\mathrm{E}(|X|)\le 1}) + \mathrm{E}(|X|1_{\mathrm{E}(|X|)>1}) \le 1 + \mathrm{E}(|X|^2) < +\infty$.
7. Soit ϕ une fonction continue bornée. Alors
   $$\mathrm{E}(\phi(\sin(V))) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(\sin(v))dv = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \phi(\sin(v))dv + \int_{\pi/2}^{\pi} \phi(\sin(v))dv$$
   $$\overset{u=\pi-v}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \phi(\sin(u))du \overset{w=\sin(u)}{=} \int_0^1 \frac{2}{\pi\sqrt{1-w^2}}dw.\phi(u)$$
   On en déduit que $\sin(V)$ admet la densité $u \mapsto \frac{2}{\pi\sqrt{1-u^2}}1_{[0,1]}$.

Exercice 2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} ae^x & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + b & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs du couple (a,b), la fonction $F_{a,b}$ est elle une fonction de répartition ?
2. Pour quelles valeurs du couple (a,b) la loi associée à $F_{a,b}$ est une loi à densité ? Donner les densités correspondantes.
3. Pour toutes les valeurs obtenues à la question 2, préciser si la variable admet une espérance et si c'est le cas la calculer.

Correction.

1. La fonction F est une fonction de répartition **si et seulement si** elle vérifie les trois points suivants :
   (a) F croissante. C'est le cas ssi $a \ge 0$ et $a \le b - 1/2$.
   (b) $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$. C'est le cas ssi $b = 1$.
   (c) F càdlàg. C'est toujours le cas.

   Finalement F est une fonction de répartition ssi $b = 1$ et $0 \le a \le 1/2$.
2. Il est nécessaire que F soit continue ce qui implique $a = b = 1/2$. Dans ce cas F est $\mathcal{C}^1$ par morceau et est bien l'intégrale de $f : x \mapsto 1/2\ e^x 1_{\mathbb{R}^-} + 1/2\ e^{-x}1_{\mathbb{R}^+}$ qui est donc la densité correspondante à F.

3. La variable est bien intégrable car $\int |x|f(x) < +\infty$. De plus la densité est paire donc l'espérance est nulle par le même calcul que dans l'exercice 1.

Exercice 3. Soit N un entier. On considère N variables aléatoires indépendantes $(Y_i)_{1\leq i\leq N}$ de loi Unif($[0,N]$). On note

$$X_N = \min\{Y_i,\ 1 \leq i \leq N\}.$$

1. Calculer la fonction de répartition F_N de X_N.
2. Pour tout $t \geq 0$, calculer $F(t) = \lim_{N\to+\infty} F_N(t)$ et reconnaitre en F la fonction de répartition d'une loi connue.

Correction.

1. Comme p.s. $0 \leq X_N \leq N$, pour tout $t < 0$ $F_N(t) = 0$ et pour tout $t \geq N$ $F_N(t) = 1$. Pour $t \in [0,N]$ en utilisant l'indépendance des $(Y_i)_{1\leq i\leq N}$

$$F_N(t) = 1 - \mathrm{P}(X_n > t) = 1 - \mathrm{P}(Y_i > t,\ \text{pour tout } 1 \leq i \leq N) = 1 - \left(\frac{N-t}{N}\right)^N.$$

2. Pour tout $t < 0$ $\lim_{N\to+\infty} F_N(t) = 0$. Pour tout $t \geq 0$, pour $N \geq t$, $F_N(t) = 1 - \left(\frac{N-t}{N}\right)^N$. Or en passant au log on obtient $\lim_{N\to+\infty} \left(\frac{N-t}{N}\right)^N = e^{-t}$. Finalement $\lim_{N\to+\infty} F_N(t) = 1_{\mathbb{R}^+}(1 - e^{-t})$. On reconnait la fonction de répartition d'une exponentielle de paramètre 1.

Exercice 4. On considère une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires.

1. Rappeler l'énoncé du premier lemme de Borel Cantelli.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de probabilité 1. Montrer que $\cap_{n\geq 1} A_n$ est également de probabilité 1.
3. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(|Z_n| > \varepsilon) < +\infty$. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 p.s.

On suppose maintenant de plus que pour tout entier $n \geq 1$, Z_n est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre n.

4. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Montrer que presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Z_n < Z_1$.

On suppose maintenant de plus que les variable aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes.

6. (Bonus : utiliser les outils de *Probabilités 2*) Calculer $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(Z_n > Z_1)$. Faut-il s'étonner de ce résultat ?

Correction. On considère une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires.

1. Cours

2. Montrons que le complémentaire est de probabilité nulle :

$$P((\cap_{n\geq 1}A_n)^c) = P(\cup_{n\geq 1}A_n^c) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n^c) = 0,$$

   où l'avant dernière égalité vient de ce que l'on considère une union dénombrable.
3. Pour tout $\varepsilon > 0$ d'après le lemme de Borel Cantelli, p.s. il existe N (dépendant de ω) tel que pour tout $n \geq N$, $|Z_n| \leq \varepsilon$. On prend maintenant $\varepsilon = 1/k$ pour tout $k \geq 1$ et on a donc pour tout $k \geq 1$ p.s. il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|Z_n| \leq 1/k$ et en utilisant la question précédente p.s. pour tout $k \geq 1$ il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|Z_n| \leq 1/k$. Ce qui donne bien la convergence vers 0.
4. On utilise la question précédente et il suffit donc de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ $\sum_{n\geq 1} P(|Z_n| > \varepsilon) < +\infty$. Or

$$P(|Z_n| > \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} ne^{-nx}dx = e^{-n\varepsilon}$$

   qui est bien le terme général d'une série convergente.
5. p.s. Z_n tend vers 0 et $Z_1 > 0$ donc à partir d'un certain rang $Z_n < Z_1$.
6. Pour tout $n \geq 1$

$$P(Z_n > Z_1) = \int_0^{+\infty} P(Z_n > z)e^{-z}dz = \int_0^{+\infty} e^{-nz}e^{-z}dz = \frac{1}{n+1}$$

   donc $\sum_{n\geq 1} P(Z_n > Z_1) = +\infty$. Il ne faut pas s'en étonner car le second lemme de Borel Cantelli ne s'applique pas car les événements $(\{Z_n > Z_1\})_{n\geq 1}$ ne sont pas indépendants. On ne peut donc pas en déduire que *p.s.* $Z_n > Z_1$ une infinité de fois ce qui serait en contradiction avec la question précédente.