Cours de Mr Even
Microéconomie
MIE 2

Université Paris-Dauphine
Année 2022-2023
Travaux dirigés – MM. Even et Mahmoudi

TD Fiche n°1 – Révisions consommateur

Exercice n°1

Les préférences d'un individu sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$u = U(c_1, c_2) = c_1 \times c_2$$

avec u le niveau d'utilité atteint avec les quantités consommées de bien 1 et de 2 notées respectivement c_1 et c_2.

1) Calculer et définir l'expression $-\frac{dc_2}{dc_1}$.

Ce rapport définit le TMS du bien 2 au bien 1. Il mesure la quantité de bien 2 qu'il faut substituer à une unité de bien 1 tout en conservant le même niveau d'utilité.
Mathématiquement, il est égal au rapport inverse des utilités marginales :

$$TMS_{2-1} = -\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{Um_1}{Um_2} = \frac{c_2}{c_1}$$

Pour conserver le même niveau d'utilité, il faut remplacer une unité de bien 1 par $\frac{c_2}{c_1}$ unités de bien 2.

2) Expliciter l'évolution de ce terme par rapport à la variable c_1.

Lorsque c_1 augmente c_2 diminue pour conserver le même niveau d'utilité. Ainsi, ce rapport est décroissant car le numérateur diminue et le dénominateur augmente.
Le TMS_{2-1} est décroissant. Plus un bien devient abondant et plus il est facile à remplacer par l'autre bien et ce pour un même niveau d'utilité. Les biens sont donc imparfaitement substituables. Il existe alors une solution intérieure.
Faire représentation graphique des préférences convexes.

3) Les préférences d'un second individu sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$v = V(c_1, c_2) = \ln c_1 + \ln c_2$$

avec v le niveau d'utilité atteint avec les quantités consommées de bien 1 et de 2 notées respectivement c_1 et c_2.

Calculer l'expression $-\frac{dc_2}{dc_1}$. Commenter.

Ce rapport définit le TMS du bien 2 au bien 1. Il mesure la quantité de bien 2 qu'il faut substituer à une unité de bien 1 tout en conservant le même niveau d'utilité.
Mathématiquement, il est égal au rapport inverse des utilités marginales :

$$TMS_{2-1} = -\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{Um_1}{Um_2} = \frac{\frac{1}{c_1}}{\frac{1}{c_2}} = \frac{c_2}{c_1}$$

Ce TMS est identique à celui de la question 1. Ces deux individus présentent les mêmes préférences.
Toute transformation monotone et croissante près ne modifie pas les préférences des individus.

La fonction d'utilité est globalement concave et la courbe d'indifférence est convexe.

4) Les préférences d'un second individu sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$y = Y(c_1, c_2) = c_1 + c_2$$

avec y le niveau d'utilité atteint avec les quantités consommées de bien 1 et de 2 notées respectivement c_1 et c_2.

Calculer l'expression $-\frac{dc_2}{dc_1}$. Commenter.

Ce rapport définit le TMS du bien 2 au bien 1. Il mesure la quantité de bien 2 qu'il faut substituer à une unité de bien 1 tout en conservant le même niveau d'utilité.
Mathématiquement, il est égal au rapport inverse des utilités marginales :

$$TMS_{2-1} = -\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{Um_1}{Um_2} = \frac{1}{1} = 1$$

Pour conserver le même niveau d'utilité, il faut remplacer une unité de bien 1 par 1 unité de bien 2.
Ce TMS est constant. Peu importe l'abondance d'un bien, il est toujours remplacé par une quantité constante de l'autre bien et ce pour un même niveau d'utilité. Les biens sont parfaitement substituables. Il existe une solution en coin. La courbe d'indifférence est linéaire. Elle définit l'ensemble des paniers de consommation qui procure à l'individu le même niveau de satisfaction. La pente en valeurs absolues de la courbe d'indifférence est égale au TMS.

Exercice n°2

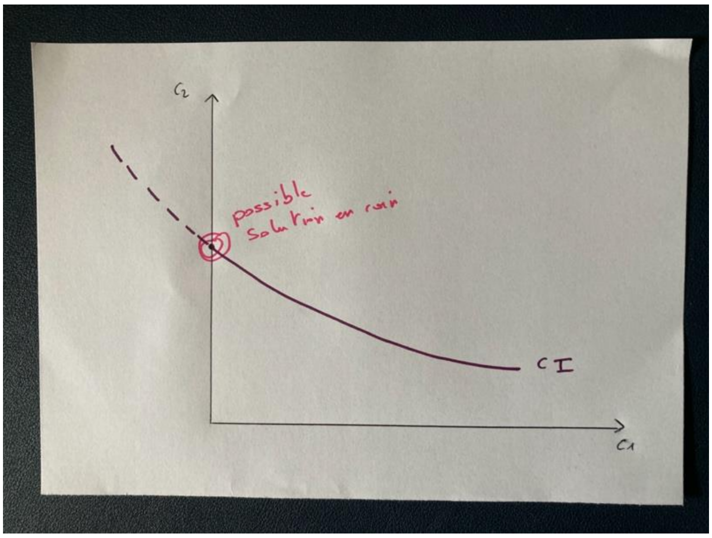
Les préférences d'un individu sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$u = U(c_1, c_2) = \ln c_1 + c_2$$

avec u le niveau d'utilité atteint avec les quantités consommées de bien 1 et de 2 notées respectivement c_1 et c_2.
Les prix de ces deux biens sont strictement positifs et notés respectivement p_1 et p_2. Ce consommateur dispose de dotations initiales notées w_1 et w_2.

1) Commenter la fonction d'utilité.

La fonction d'utilité est concave en c_1 et linéaire en c_2. Elle est dite hybride dans le sens qu'elle admet selon le rapport des prix deux types de solutions : intérieure ou en coin dans le plan des consommations non négative.
Mathématiquement, comme la fonction d'utilité est globalement concave elle admet toujours une solution intérieure mais celle-ci peut présenter des valeurs de consommation négatives. C'est pour cette raison que nous nous ramenons à une solution en coin.
Graphiquement, la courbe d'indifférence est convexe mais elle coupe un des axes du repère. Ce point d'intersection est la solution en coin quand elle existe.



2) Écrire la droite budgétaire en valeurs nominales et en valeurs réelles.

Pour maximiser leur utilité, les individus utilisent la totalité de leur revenu car les biens acquis sont désirables. Ainsi, nous n'étudions que la droite budgétaire.

En valeurs nominales (i.e. richesse monétaire), elle énonce que la somme des dépenses de consommation est égale à la somme des revenus. Cette expression est utilisée pour les exercices.

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 = p_1 w_1 + p_2 w_2$$

En valeurs réelles (i.e. richesse physique), elle énonce que la quantité de bien 1 consommée est égale à la quantité de bien 1 que la somme des revenus permet d'acquérir.

$$c_1 + \frac{p_2}{p_1} c_2 = w_1 + \frac{p_2}{p_1} w_2$$

3) Écrire le programme de ce consommateur.

L'agent maximise son niveau d'utilité tout en veillant au respect de sa droite budgétaire (DB) et de consommations non négatives (CP). Le programme s'énonce :

$$\begin{cases} \max \ln c_1 + c_2 \\ sc.\ (DB) :\ p_1 c_1 + p_2 c_2 = p_1 w_1 + p_2 w_2 \\ (CP) :\ c_1 \geq 0\ et\ c_2 \geq 0 \end{cases}$$

Pour la résolution de ce programme, nous occultons la contrainte (CP) et nous vérifierons que la solution du programme réduit satisfait bien cette contrainte.

4) Calculer les fonctions de demande marshallienne pour une solution intérieure et le niveau d'utilité atteint. Donner la condition qui assure l'existence d'une solution intérieure.

Les fonctions de demande relient les quantités maximales demandées à tout système de prix et à tout revenu. Elles sont solutions du programme suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{c_1, c_2} \ln c_1 + c_2 \\ sc.\ (DB) :\ p_1 c_1 + p_2 c_2 = p_1 w_1 + p_2 w_2 \end{cases}$$

Le type de solution est défini par l'évolution du TMS.

L'expression $-\frac{dc_2}{dc_1}$ définit le TMS du bien 2 au bien 1. Il mesure la quantité de bien 2 qu'il faut substituer à une unité de bien 1 tout en conservant le même niveau d'utilité.

Mathématiquement, il est égal au rapport inverse des utilités marginales :

$$TMS_{2-1} = -\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{Um_1}{Um_2} = \frac{\frac{1}{c_1}}{1} = \frac{1}{c_1}$$

Lorsque c_1 augmente le TMS_{2-1} est décroissant. Plus un bien devient abondant et plus il est facile à remplacer par l'autre bien et ce pour un même niveau d'utilité. Les biens sont donc imparfaitement substituables. Il existe alors une solution intérieure. Elle est définie par le système suivant :

$$\begin{cases} (CO) : \ TMS_{2-1} = \frac{p_1}{p_2} \\ (DB) : \ p_1 c_1 + p_2 c_2 = p_1 w_1 + p_2 w_2 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} (CO) : \ \frac{1}{c_1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow c_1^d = \frac{p_2}{p_1} \\ (DB) : \ p_1 \times \frac{p_2}{p_1} + p_2 c_2 = p_1 w_1 + p_2 w_2 \Leftrightarrow c_2^d = \frac{p_1}{p_2} w_1 + w_2 - 1 \end{cases}$$

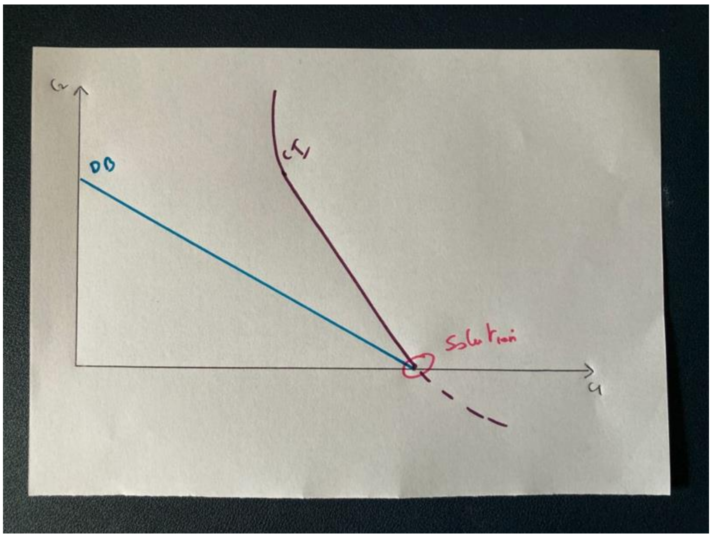
Il existe une solution intérieure si $c_1^d > 0$ et $c_2^d > 0$.
Comme $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$ alors $c_1^d > 0$
A contrario, $c_2^d > 0$ si $\frac{p_1}{p_2} w_1 + w_2 - 1 > 0$. Une condition suffisante est $w_2 - 1 > 0$.

5) Calculer les fonctions de demande pour une solution en coin et le niveau d'utilité atteint.

Il existe une solution en coin si $\frac{p_1}{p_2} w_1 + w_2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} > \frac{1-w_2}{w_1} \Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} > \frac{w_1}{1-w_2}$ avec $1 - w_2 > 0$. Si $\frac{p_2}{p_1}$ est suffisamment grand alors le bien 2 relativement élevé par rapport au bien 1 et comme le revenu de l'individu est limité, il n'est plus dans son intérêt de consommer du bien 2. Ainsi, $c_2^d = 0$.
La demande de bien 1 se déduit de la droite budgétaire :

$$p_1 c_1 = p_1 w_1 + p_2 w_2 \Leftrightarrow c_1^d = w_1 + \frac{p_2}{p_1} w_2 > 0$$

Graphiquement, la courbe d'indifférence est sécante à la droite de budget sur l'axe des abscisses.



Exercice n°3

Pour $p_1 > p_2 > 0$, calculer les fonctions de demande pour les préférences énoncées ci-dessous :

$$v = V(c_1, c_2) = c_1 + c_2$$

avec v le niveau d'utilité atteint avec les quantités consommées de bien 1 et de 2 notées respectivement c_1 et c_2.

Ce consommateur dispose de dotations initiales notées w_1 et w_2.

Calculez les fonctions de demande.

Les fonctions de demande relient les quantités maximales demandées à tout système de prix et à tout revenu. Elles sont solutions du programme suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{c_1, c_2} c_1 + c_2 \\ sc.\ (DB) : \ p_1 c_1 + p_2 c_2 = p_1 w_1 + p_2 w_2 \end{cases}$$

Le type de solution est défini par l'évolution du TMS.

L'expression $-\frac{dc_2}{dc_1}$ définit le TMS du bien 2 au bien 1. Il mesure la quantité de bien 2 qu'il faut substituer à une unité de bien 1 tout en conservant le même niveau d'utilité.

Mathématiquement, il est égal au rapport inverse des utilités marginales :

$$TMS_{2-1} = -\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{Um_1}{Um_2} = \frac{1}{1} = 1$$

Ce TMS est constant. Peu importe l'abondance d'un bien, il est toujours remplacé par une quantité constante de l'autre bien et ce pour un même niveau d'utilité. Les biens sont parfaitement substituables. Il existe une solution en coin.

Cette solution est donnée par la comparaison du TMS au rapport inverse des prix :

$$TMS_{2-1} = 1 < \frac{p_1}{p_2}$$

Soit

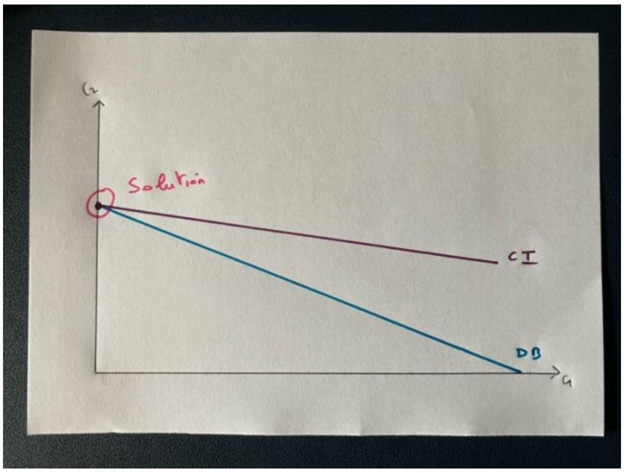
$$\frac{Um_1}{Um_2} < \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{Um_1}{p_1} < \frac{Um_2}{p_2}$$

Un euro supplémentaire dépensé en bien 2 procure un accroissement d'utilité que s'il était dépensé en bien 1. Le rapport satisfaction prix du bien 2 est supérieur à celui du bien 1. L'individu ne consomme pas de bien 1 et que du bien 2.

Nous avons $c_1^d = 0$.

De la contrainte budgétaire, nous obtenons $c_2^d = \frac{p_1}{p_2} w_1 + w_2 > 0$.

Graphiquement, la droite de budget est sécante avec la droite d'indifférence sur l'axe des ordonnées.



TD Fiche n°2 – Révisions entreprise

Exercice n°1

Le processus de production d'un bien par une entreprise est représenté par la fonction de production suivante :

$$q = F(k) = \sqrt{k}$$

avec q la quantité produite avec la quantité de capital k dont le prix de ce facteur est noté r. Le prix du bien vendu est noté p.

1) Calculer les rendements d'échelle.

Les rendements d'échelle mesurent l'accroissement de la production consécutive à un accroissement simultané et identique de tous les facteurs de production.

Soit $\lambda > 1$

$$F(\lambda k) = \sqrt{\lambda k} = \sqrt{\lambda}\sqrt{k} < \lambda\sqrt{k} = \lambda F(k)$$

Les rendements d'échelle sont décroissants. Une augmentation de 10% du facteur capital conduit à un accroissement de la production inférieur à 10%.

2) Écrire le programme de maximisation du profit de l'entreprise.

L'entreprise maximise sa production en tenant compte de sa contrainte technologique (T). Son programme s'écrit :

$$\begin{cases} \max\limits_{k,q} \pi = pq - rk \\ sc.(T) : \; q = \sqrt{k} \end{cases}$$

La contrainte technologique nous donne la demande conditionnelle de capital :

$$k^{dc} = q^2$$

Le programme réduit s'énonce :

$$\max_q \pi = pq - rq^2$$

3) Calculer les fonctions d'offre et de demande de la firme.

A l'optimalité, il n'existe aucune modification du niveau de production qui permettrait d'augmenter le profit. La CPO nous donne

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \Leftrightarrow p - 2rq = 0$$

Nous obtenons la fonction d'offre $q^s = \frac{p}{2r} > 0$ et la demande marshallienne de capital $k^{dm} = \left(\frac{p}{2r}\right)^2 > 0$.

4) Calculer et commenter le profit optimal.

$$\pi = p \times \frac{p}{2r} - r\left(\frac{p}{2r}\right)^2 = \frac{p^2}{4r} > 0$$

Des rendements d'échelle décroissants impliquent un profit strictement positif en CPP.

Le profit est une fonction homogène de degré 1.

Soit $\lambda > 1$

$$\pi(\lambda p, \lambda r) = \frac{(\lambda p)^2}{4\lambda r} = \lambda\frac{p^2}{4r}$$

Un accroissement de 10% des prix conduit à une augmentation de 10% du profit. La valeur monétaire augmente sans que la richesse réelle augmente (conservation du même niveau de production).

Exercice n°2

Le processus de production d'un bien par une entreprise est représenté par la fonction de production suivante :

$$q = \sqrt{k} + \sqrt{l}$$

avec q la quantité produite avec les quantités de capital et de travail notées respectivement k et l dont les prix sont notés r et s. Le prix du bien vendu est noté p.

1) Calculer les rendements d'échelle.

Les rendements d'échelle mesurent l'accroissement de la production consécutive à un accroissement simultané et identique de tous les facteurs de production.

Soit $\lambda > 1$

$$F(\lambda k, \lambda l) = \sqrt{\lambda k} + \sqrt{\lambda l} = \sqrt{\lambda}\sqrt{k} + \sqrt{\lambda}\sqrt{l} < \lambda\left(\sqrt{k} + \sqrt{l}\right) = \lambda F(k, l)$$

Les rendements d'échelle sont décroissants. Une augmentation de 10% des facteurs capital et travail conduit à un accroissement de la production inférieur à 10%.

2) Calculer et définir l'expression $-\frac{dk}{dl}$.

Le rapport $-\frac{dk}{dl}$ définit le taux marginal de substitution technique du capital au travail. Il mesure la quantité de capital qu'il faut substituer à une unité de travail tout en conservant un même niveau de production.

Mathématiquement, il est égal au rapport inverse des productivités marginales :

$$TMST_{k-l} = -\frac{dk}{dl} = \frac{Pm_l}{Pm_k} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{l}}}{\frac{1}{2\sqrt{k}}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}$$

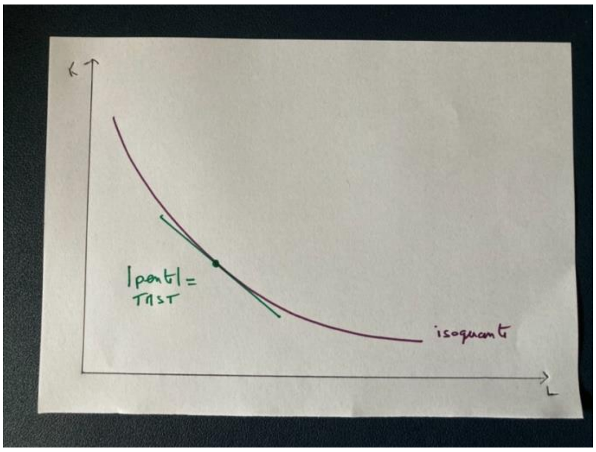
Pour conserver le même niveau de production, il faut remplacer une unité de travail par $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}$ unités de capital.

3) Expliciter l'évolution de ce terme par rapport à la variable l.

Lorsque l augmente k diminue pour conserver le même niveau de production. Ainsi, ce rapport est décroissant car le numérateur diminue et le dénominateur augmente.

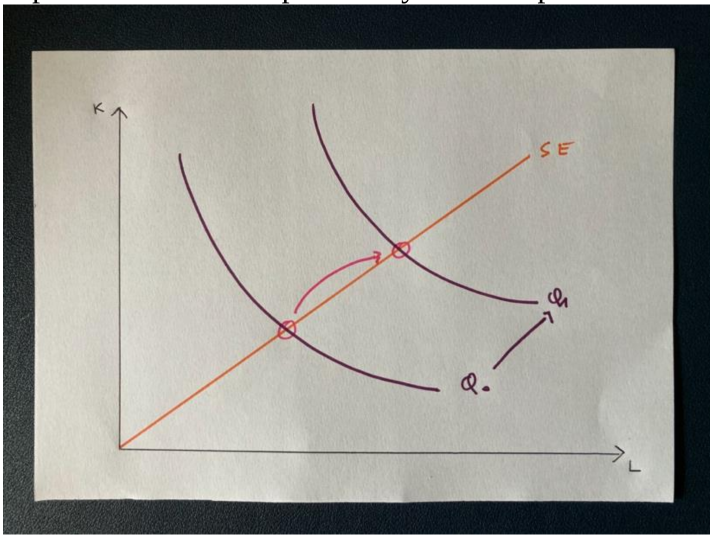
Le $TMST_{k-l}$ est décroissant. Plus un facteur devient abondant et plus il est facile à remplacer par l'autre facteur et ce pour un même niveau de production. Les facteurs sont donc imparfaitement substituables. Il existe alors une solution intérieure.

Le TMST est égal à la valeur absolue de la pente de l'isoquante pour une combinaison de facteurs de production.

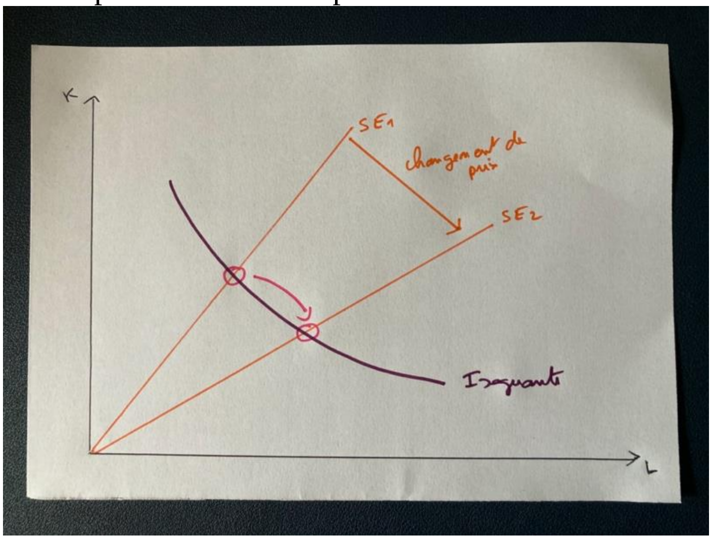


4) Définir et calculer le sentier d'expansion.

Le sentier d'expansion (SE) définit l'évolution de la combinaison optimale de facteurs de production lorsque la production varie et pour un système de prix donné.



Il définit également l'évolution de la combinaison optimale de facteurs de production lorsque le système de prix varie et pour un niveau de production donné.



Il s'obtient à partir de la CPO du programme de minimisation de la dépense sous contrainte technologique et sous contrainte de niveau de production.

A l'optimalité, il n'existe aucune modification de la combinaison de la fonction de production qui permettrait de réduire la dépense tout en augmentant le niveau de production. La CPO s'énonce :

$$TMST_{k-l} = \frac{s}{r}$$

Soit

$$\sqrt{\frac{k}{l}} = \frac{s}{r} \Leftrightarrow \frac{k}{l} = \left(\frac{s}{r}\right)^2 \Leftrightarrow k = \left(\frac{s}{r}\right)^2 l$$

A l'optimalité, le capital est proportionnel au travail ou le rapport capitalistique est constant si le système de prix est donné.

5) Calculer les demandes conditionnelles des facteurs.

Les demandes conditionnelles de facteurs de production définissent la quantité minimale de facteurs utilisée dans le processus de production pour tout système de prix des facteurs et pour tout niveau de production. Elles s'obtiennent en minimisant la dépense en facteurs de production sous contrainte technologique (T). Le programme s'énonce :

$$\begin{cases} \min\limits_{k,l} rk + sl \\ sc.\,(T) :\ q = \sqrt{k} + \sqrt{l} \end{cases}$$

Le type de solution de ce programme sous contrainte dépend de l'évolution du TMST. Comme il est décroissant, il existe une solution intérieure définie par le système suivant :

$$\begin{cases} (CO) :\ TMST_{k-l} = \dfrac{s}{r} \\ (T) : q = \sqrt{k} + \sqrt{l} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} (CO):\ \sqrt{\dfrac{k}{l}} = \dfrac{s}{r} \Leftrightarrow k = \left(\dfrac{s}{r}\right)^2 l\ (SE) \\ (T) : q = \sqrt{k} + \sqrt{l} \end{cases}$$

En incorporant (SE) dans (T), nous obtenons $q = \sqrt{\left(\frac{s}{r}\right)^2 l} + \sqrt{l} = \sqrt{l}\left(\frac{r+s}{r}\right) \Leftrightarrow l^{dc} = q^2\left(\frac{r}{r+s}\right)^2$.

Avec (SE), nous avons $k^{dc} = \left(\frac{s}{r}\right)^2 q^2 \left(\frac{r}{r+s}\right)^2 = q^2\left(\frac{s}{r+s}\right)^2$

6) Calculez l'offre de cette entreprise, et ce de deux manières.

L'offre relie la quantité maximale offerte au système de prix de l'économie. Elle s'obtient en maximisant le profit soit par rapport à la quantité produite, ce qui nécessite de connaître le coût total et par conséquent les demandes conditionnelles de facteurs ; soit en maximisant le profit par rapport aux facteurs de production.

<u>*1ère méthode : maximisation du profit par rapport à q.*</u>

Le coût mesure la dépense minimale pour tout niveau de production. Il est égal à la somme des demandes conditionnelles de facteurs pondérées par leur prix. Il s'énonce :

$$CT(q) = sl^{dc} + rk^{dc} = sq^2\left(\frac{r}{r+s}\right)^2 + rq^2\left(\frac{s}{r+s}\right)^2$$

Soit

$$CT(q) = rsq^2\frac{r}{(r+s)^2} + rsq^2\frac{s}{(r+s)^2} = rsq^2\frac{r+s}{(r+s)^2} = \frac{rs}{r+s}q^2$$

Dans ce contexte, la fonction d'offre s'obtient en maximisant le profit par rapport à la quantité produite. Le programme s'énonce :

$$\max_q \pi = pq - \frac{rs}{r+s}q^2$$

A l'optimalité, il n'existe aucune modification de la quantité produite qui permet d'augmenter le profit. La CPO énonce que le prix est égal au coût marginal. Ainsi, la dernière unité produite rapporte ce qu'elle coûte.

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \Leftrightarrow p - cm(q) = 0 \Leftrightarrow p - 2\frac{rs}{r+s}q = 0 \Leftrightarrow q^s = \frac{p(r+s)}{2rs} > 0$$

2ième méthode : maximisation du profit par rapport à k et l.

La fonction d'offre se déduit du programme de maximisation du profit qui dépend des quantités de facteurs incorporés dans le processus de production. Le programme s'énonce :

$$\max_{k,l} \pi = p\left(\sqrt{k} + \sqrt{l}\right) - rk - sl$$

A l'optimalité, il n'existe aucune modification de la combinaison des facteurs de production qui permet d'augmenter le profit. Les conditions du premier ordre (une par facteur) stipulent que la productivité marginale s'égalise au prix réel du facteur. Ainsi, chaque facteur est rémunéré à sa productivité marginale. Les CPO s'énoncent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial k} = 0 \Leftrightarrow pPm_k - r = 0 \Leftrightarrow \dfrac{p}{2\sqrt{k}} - r = 0 \Leftrightarrow k^{dm} = \left(\dfrac{p}{2r}\right)^2 > 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial l} = 0 \Leftrightarrow pPm_l - s = 0 \Leftrightarrow \dfrac{p}{2\sqrt{l}} - s = 0 \Leftrightarrow l^{dm} = \left(\dfrac{p}{2s}\right)^2 > 0 \end{cases}$$

Pour obtenir la fonction d'offre, nous intégrons les demandes marshalliennes de facteurs dans la fonction de production.

$$q^s = \sqrt{k^{dm}} + \sqrt{l^{dm}} = \frac{p}{2r} + \frac{p}{2s} = \frac{p(r+s)}{2rs} > 0$$

7) En déduire, les demandes marshalliennes des facteurs à partir des demandes conditionnelles de facteurs.

Les demandes marshalliennes s'obtiennent en intégrant la fonction d'offre dans les demandes conditionnelles.

$$\begin{cases} k^{dm} = k^{dc}(q^s) = \left(\dfrac{p(r+s)}{2rs}\right)^2 \left(\dfrac{s}{r+s}\right)^2 = \left(\dfrac{p}{2r}\right)^2 > 0 \\ l^{dm} = l^{dc}(q^s) = \left(\dfrac{p(r+s)}{2rs}\right)^2 \left(\dfrac{r}{r+s}\right)^2 = \left(\dfrac{p}{2s}\right)^2 > 0 \end{cases}$$

Exercice n°3

Pour $r > s$, calculez le profit optimal pour la fonction de production suivante :

$$q = k + l$$

avec avec q la quantité produite avec les quantités de capital et de travail notées respectivement k et l dont les prix sont notés r et s. Le prix du bien vendu est noté p. Les marchés des biens et des facteurs sont en concurrence pure et parfaite.

Pour résoudre cet exercice, il est nécessaire de maximiser le profit. Deux méthodes de maximisation sont possibles.

1ère méthode : maximisation du profit par rapport à q.

Le coût mesure la dépense minimale pour tout niveau de production. Il est égal à la somme des demandes conditionnelles de facteurs pondérées par leur prix. Pour caractériser le coût total, nous devons minimiser la dépense de production sous contrainte technologique (T). Le programme s'énonce :

$$\begin{cases} \min\limits_{k,l} rl + sl \\ sc.(T) :\ q = k + l \end{cases}$$

Le type de solution de ce programme sous contrainte dépend de l'évolution du TMST.

Le rapport $-\frac{dk}{dl}$ définit le taux marginal de substitution technique du capital au travail. Il mesure la quantité de capital qu'il faut substituer à une unité de travail tout en conservant un même niveau de production.
Mathématiquement, il est égal au rapport inverse des productivités marginales :

$$TMST_{k-l} = -\frac{dk}{dl} = \frac{Pm_l}{Um_k} = \frac{1}{1} = 1$$

Le TMST est constant, il existe une solution en coin définie par la comparaison du TMST au rapport inverse des prix.

$$TMST_{k-l} = 1 > \frac{s}{r}$$

Cette expression se réécrit :

$$\frac{Pm_l}{Pm_k} > \frac{s}{r} \Leftrightarrow \frac{Pm_l}{s} > \frac{Pm_k}{r}$$

Un euro supplémentaire investi dans le travail permet de produire davantage que s'il était investi dans le capital. Ainsi, le rapport productivité prix du travail est supérieur à celui du travail capital. L'entreprise n'utilise pas de capital $k^{dc} = 0$. La demande conditionnelle de travail se déduit de la contrainte technologique $q = l \Leftrightarrow l^{dc} = q$.

La fonction de coût total est égale à la somme des demandes conditionnelles de facteurs pondérées par leur prix. Il s'énonce :

$$CT(q) = sl^{dc} + rk^{dc} = sq$$

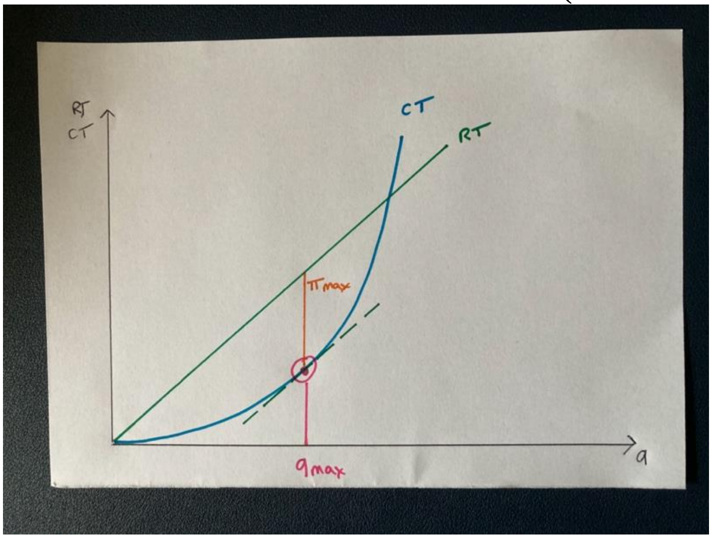
Dans ce contexte, la fonction d'offre s'obtient en maximisant le profit par rapport à la quantité produite. Le programme s'énonce :

$$\max_q \pi = pq - sq$$

A l'optimalité, il n'existe aucune modification de la quantité produite qui permet d'augmenter le profit. La CPO énonce que le prix est égal au coût marginal. Ainsi, la dernière unité produite rapporte ce qu'elle coûte.

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \Leftrightarrow p - cm(q) = 0 \Leftrightarrow p - s = 0 \Leftrightarrow p = s$$

Il n'existe pas d'optimum unique car le profit est une fonction linéaire de la quantité produite. (La CSO est nulle). Ainsi, dans une économie concurrentielle, le prix s'établit à la valeur la plus faible $p = s$. Pour un tel niveau de prix, l'entreprise est indifférente entre produire et ne pas produire. Il existe un maximum si le coût total est convexe (condition du second-ordre).



2ième méthode : maximisation du profit par rapport à k et l.

La fonction d'offre se déduit du programme de maximisation du profit qui dépend des quantités de facteurs incorporés dans le processus de production. Le programme s'énonce :

$$\max_{k,l} \pi = p(k+l) - rk - sl$$

A l'optimalité, il n'existe aucune modification de la combinaison des facteurs de production qui permet d'augmenter le profit. Les conditions du premier ordre (une par facteur) stipulent que la productivité marginale s'égalise au prix réel du facteur. Ainsi, chaque facteur est rémunéré à sa productivité marginale. Les CPO s'énoncent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial k} = 0 \Leftrightarrow pPm_k - r = 0 \Leftrightarrow p - r = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial l} = 0 \Leftrightarrow pPm_l - s = 0 \Leftrightarrow p - s = 0 \end{cases}$$

Ces deux CPO ne peuvent être vérifiées simultanément car $r > s$. A l'optimalité, nous avons nécessairement pour maximiser le profit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial k} < 0 \Leftrightarrow p = s < r \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial l} = 0 \Leftrightarrow p = s \end{cases}$$

L'entreprise n'utilise pas de capital et uniquement du travail. Il n'existe pas d'optimum unique car le profit est une fonction linéaire de la quantité produite. (La CSO est nulle). Ainsi, dans une économie concurrentielle, le prix s'établit à la valeur la plus faible $p = s$. Pour un tel niveau de prix, l'entreprise est indifférente entre produire et ne pas produire.

Faire représentation graphique.

TD Fiche n°3 – Équilibre général sans production et optimum de Pareto

Exercice

Une économie est composée de deux agents notés A et B dont les préférences sont identiques et représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$u^i = U^i(c_1^i, c_2^i) = \ln c_1^i + \ln c_2^i$$

avec u^i le niveau d'utilité atteint avec les quantités consommées de bien 1 et de 2 notées respectivement c_1^i et c_2^i, pour $i \in \{A, B\}$.

Leurs dotations initiales, notées w^i avec $i \in \{A, B\}$ s'élèvent respectivement à :

$$w^A = (10{,}30) \text{ et } w^B = (70{,}10)$$

Les prix des biens 1 et 2 sont notés respectivement p_1 et p_2.

1) Écrire le programme du consommateur A.

Le consommateur A maximise son utilité tout en veillant au respect de sa droite budgétaire (DB^A). Cette dernière énonce que la somme des dotations initiales valorisées aux prix de marché sont égales aux dépenses de consommation. Le programme s'énonce :

$$\begin{cases} \max\limits_{c_1^A, c_2^A} \ln c_1^A + \ln c_2^A \\ sc.\, (DB^A) : \; p_1 c_1^A + p_2 c_2^A = p_1 w_1^A + p_2 w_2^A \Leftrightarrow p_1 c_1^A + p_2 c_2^A = 10p_1 + 30p_2 \end{cases}$$

Comme la fonction d'utilité $U^A(c_1^A, c_2^A)$ est strictement concave, il existe une solution intérieure. Les conditions de positivité ne sont pas saturées.

2) Calculer les demandes individuelles marshalliennes.

Les fonctions de demande relient les quantités maximales demandées à tout système de prix et à tout revenu. Elles sont solution du programme suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{c_1^i, c_2^i} \ln c_1^i + \ln c_2^i \\ sc.\, (DB^i) : \; p_1 c_1^i + p_2 c_2^i = p_1 w_1^i + p_2 w_2^i \end{cases}$$

Le type de solution est défini par l'évolution du TMS. L'expression $-\frac{dc_2^i}{dc_1^i}$ définit le TMS du bien 2 au bien 1 de l'agent i. Il mesure la quantité de bien 2 qu'il faut substituer à une unité de bien 1 tout en conservant le même niveau d'utilité.

Mathématiquement, il est égal au rapport inverse des utilités marginales :

$$TMS_{2-1}^i = -\frac{dc_2^i}{dc_1^i} = \frac{Um_1^i}{Um_2^i} = \frac{\frac{1}{c_1^i}}{\frac{1}{c_2^i}} = \frac{c_2^i}{c_1^i}$$

Lorsque c_1^i augmente c_2^i diminue pour conserver le même niveau d'utilité. Ainsi, ce rapport est décroissant car le numérateur diminue et le dénominateur augmente.

Le TMS_{2-1}^i est décroissant. Plus un bien devient abondant et plus il est facile à remplacer par l'autre bien et ce pour un même niveau d'utilité. Les biens sont donc imparfaitement substituables. Il existe alors une solution intérieure définie par le système suivant :

$$\begin{cases} (CO^i) : \; TMS_{2-1}^i = \frac{p_1}{p_2} \\ (DB^i) : \; p_1 c_1^i + p_2 c_2^i = p_1 w_1^i + p_2 w_2^i \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} (CO) : \dfrac{c_2^i}{c_1^i} = \dfrac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow c_2^i = \dfrac{p_1}{p_2} c_1^i \\ (DB^i) : p_1 c_1^i + p_2 \left(\dfrac{p_1}{p_2} c_1^i\right) = p_1 w_1^i + p_2 w_2^i \end{cases}$$

Nous avons

$$\begin{cases} {c_2^i}^{dm} = \dfrac{p_1 w_1^i + p_2 w_2^i}{2p_2} > 0 \\ {c_1^i}^{dm} = \dfrac{p_1 w_1^i + p_2 w_2^i}{2p_1} > 0 \end{cases}$$

Avec les valeurs des dotations initiales, nous pouvons calculer les demandes conditionnelles des deux agents

$$\begin{cases} {c_1^A}^{dm} = 5 + 15\frac{p_2}{p_1} \\ {c_2^A}^{dm} = 5\frac{p_1}{p_2} + 15 \end{cases} \text{et} \begin{cases} {c_1^B}^{dm} = 35 + 5\frac{p_2}{p_1} \\ {c_2^B}^{dm} = 35\frac{p_1}{p_2} + 5 \end{cases}$$

3) Écrire les conditions d'équilibre de cette situation d'équilibre général.

A l'équilibre général, il existe un système de prix tel que tous les marchés des biens sont simultanément à l'équilibre.

L'équilibre sur le marché du bien 1 implique que la demande globale en bien 1 est égale à l'offre globale dudit bien. De même, pour le marché du bien 2. Les conditions d'équilibre général s'énoncent :

$$\begin{cases} bien\ 1 : {c_1^A}^{dm} + {c_1^B}^{dm} = w_1^A + w_1^B \\ bien\ 2 : {c_2^A}^{dm} + {c_2^B}^{dm} = w_2^A + w_2^B \end{cases}$$

4) Montrer que l'équilibre sur le marché du bien 1 implique l'équilibre sur le marché du bien 2.

Pour répondre à cette question, nous allons montrer que ces équations d'équilibre sont identiques.

$$\begin{cases} bien\ 1 : \left(5 + 15\dfrac{p_2}{p_1}\right) + \left(35 + 5\dfrac{p_2}{p_1}\right) = 10 + 70 \\ bien\ 2 : \left(5\dfrac{p_1}{p_2} + 15\right) + \left(35\dfrac{p_1}{p_2} + 5\right) = 30 + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bien\ 1 : 40 + 20\dfrac{p_2}{p_1} = 80\ \ (1) \\ bien\ 2 : 40\dfrac{p_1}{p_2} + 20 = 40\ (2) \end{cases}$$

Nous multiplions (1) par $\frac{p_1}{p_2}$. Nous obtenons

$$40\frac{p_1}{p_2} + 20 = 80\ \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow 40\ \frac{p_1}{p_2} = 20$$

En ajoutant 20 aux deux membres de cette égalité, nous obtenons (2).

5) Exprimer la loi de Walras à partir des droites budgétaires.

La loi de Walras énonce que la somme des demandes nettes de marché en valeur est égale à 0. Une des 3 conséquences de cette loi stipule que dans une économie à n marchés, si (n-1) marchés sont à l'équilibre alors le nième l'est également. Ainsi, nous obtenons des prix relatifs car nous avons n inconnues pour n-1 équations indépendantes. Les agents ne sont donc pas sensibles à l'illusion monétaire.

Notons e_j^i la demande nette de l'individu i en bien j, c'est-à-dire la quantité échangée sur le marché. Elle s'énonce $e_j^i = w_j^i - c_j^i$.

Notons également e_j la demande nette du marché en bien j. Elle s'énonce $e_j = w_j - c_j$ avec

$w_j = \sum_i w_j^i$ et $c_j = \sum_i c_j^i$. w_j représente l'offre globale d'un bien et c_j la demande globale d'un bien. Par conséquent, un marché est à l'équilibre si $w_j = c_j$, soit $e_j = 0$.

La loi de Walras s'écrit :

$$\sum_j p_j e_j = 0$$

Elle s'obtient en additionnant les termes des droites budgétaires de tous les agents.

$$(DB^A) : \ p_1 c_1^A + p_2 c_2^A = p_1 w_1^A + p_2 w_2^A$$
$$(DB^B) : \ p_1 c_1^B + p_2 c_2^B = p_1 w_1^B + p_2 w_2^B$$

En ajoutant les termes de droites et de gauche, nous obtenons

$$p_1 c_1^A + p_2 c_2^A + p_1 c_1^B + p_2 c_2^B = p_1 w_1^A + p_2 w_2^A + p_1 w_1^B + p_2 w_2^B$$

Cette expression se réécrit

$$\sum_j \sum_i p_j c_j^i = \sum_j \sum_i p_j w_j^i$$

Soit

$$\sum_j p_j c_j = \sum_j p_j w_j$$

Cette expression se réécrit

$$\sum_j p_j w_j - \sum_j p_j c_j = 0 \Leftrightarrow \sum_j p_j (w_j - c_j) = \sum_j p_j e_j = 0$$

6) Calculer le système de prix d'équilibre ainsi que les quantités.

La conséquence de la loi de Walras implique dans une économie à 2 marchés, 1 seul marché est nécessaire pour calculer le système de prix d'équilibre. Prenons le marché du bien 1.

$$40 + 20\frac{p_2}{p_1} = 80 \Leftrightarrow 20\frac{p_2}{p_1} = 40 \Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} = 2$$

Nous obtenons comme consommations optimales

$$\begin{cases} c_1^{A^*} = 5 + 15 \times 2 = 35 \\ c_2^{A^*} = 5 \times \frac{1}{2} + 15 = 17{,}5 \end{cases} \text{et} \begin{cases} c_1^{B^*} = 35 + 5 \times 2 = 45 \\ c_2^{B^*} = 35 \times \frac{1}{2} + 5 = 22{,}5 \end{cases}$$

7) Montrer que l'échange est Pareto-améliorant.

L'échange est Pareto-améliorant si tous les agents voient leur niveau d'utilité augmenter.

En autarcie, les niveaux d'utilité s'élèvent à

$$\begin{cases} u^A = \ln 10 + \ln 30 = \ln 300 \\ u^B = \ln 70 + \ln 10 = \ln 700 \end{cases}$$

Après échange, les niveaux d'utilité s'établissent à

$$\begin{cases} u^{A*} = \ln 35 + \ln 17{,}5 = \ln 612{,}5 \\ u^{B*} = \ln 45 + \ln 22{,}5 = \ln 1012{,}5 \end{cases}$$

Ainsi, $u^{A*} > u^A$ et $u^{B*} > u^B$. L'échange est bien Pareto-améliorant.

8) Caractériser la courbe des contrats de l'agent A.

La courbe des contrats d'un agent définit l'ensemble des allocations Pareto-optimales et réalisables exprimé dans le plan de ses consommations.

Des allocations sont dites Pareto-optimales, s'il n'est pas possible d'augmenter l'utilité d'un agent sans détériorer celle d'au moins un autre (CU^{-i}).

Des allocations sont dites réalisables, si la somme des consommations des agent sont égales à la somme des dotations disponibles dans l'économie (CR_j).

Le programme pour les obtenir s'énoncent :

$$\begin{cases} \max\limits_{c_j^i} U^i(c_j^i) \\ sc.\left(CU^{-i}\right) : \; U^{-i}(c_j^{-i}) \geq \widetilde{U}, \forall j \\ \left(CR_j\right) : \; \sum\limits_i c_j^i = \sum\limits_i w_j^i \end{cases}$$

Pour résoudre ce programme de maximisation sous contrainte, nous devons utiliser un Lagrangien (qui n'est pas au programme).
Ainsi, la courbe des contrats de l'agent A est solution du système suivant

$$\begin{cases} (CO) : \; TMS_{2-1}^{i} = TMS_{2-1}^{-i} \\ \left(CR_j\right) : \; \sum\limits_i c_j^i = \sum\limits_i w_j^i, \forall j \end{cases}$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} (CO) : \; \dfrac{c_2^A}{c_1^A} = \dfrac{c_2^B}{c_1^B} \\ (CR_1) : c_1^A + c_1^B = 80 \\ (CR_2) : \; c_2^A + c_2^B = 40 \end{cases}$$

Pour exprimer la courbe des contrats dans le repère de l'agent A, nous exprimons c_j^B en fonction de c_j^A.

Nous avons $\begin{cases} c_1^B = 80 - c_1^A \\ c_2^B = 40 - c_2^A \end{cases}$

La condition d'optimalité se réécrit

$$\frac{c_2^A}{c_1^A} = \frac{40 - c_2^A}{80 - c_1^A}$$

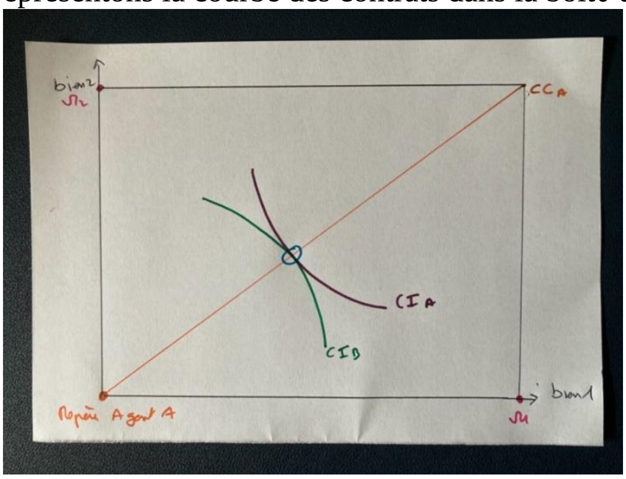
Nous avons

$$c_2^A(80 - c_1^A) = c_1^A(40 - c_2^A) \Leftrightarrow c_2^A = 0{,}5c_1^A$$

La courbe des contrats de l'agent A est définie par

$$\begin{cases} c_2^A = 0{,}5c_1^A \\ 0 \leq c_1^A \leq 80 \end{cases}$$

Graphiquement, nous représentons la courbe des contrats dans la boîte d'Edgeworth.



9) Calculer la frontière des utilités.

La frontière des utilités définit l'ensemble des niveaux d'utilité des agents A et B pour les quantités réalisables des biens. Elle s'obtient à partir des courbes des contrats des agents, des contraintes de réalisabilité des biens et des fonctions d'utilité des agents.

Dans un premier temps, nous calculons les demandes conditionnelles des agents A et B en bien 1.

Nous avons $c_2^A = 0{,}5c_1^A$ et par symétrie $c_2^B = 0{,}5c_1^B$. Nous incorporons les courbes des contrats dans les fonctions d'utilité

$$\begin{cases} u^A = \ln c_1^A + \ln(0{,}5c_1^A) \\ u^B = \ln c_1^B + \ln(0{,}5c_1^B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^A = 2\ln c_1^A - \ln 2 \\ u^B = 2\ln c_1^B - \ln 2 \end{cases}$$

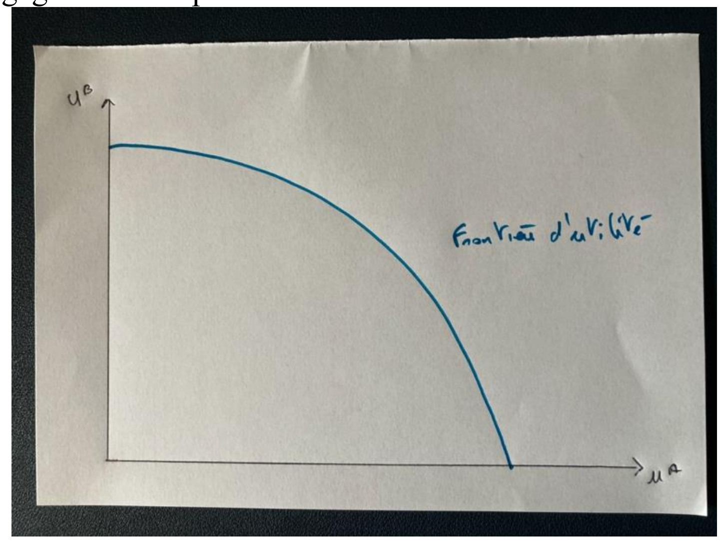
Soit

$$\begin{cases} c_1^{A^{dc}} = exp\left(\dfrac{u^A + \ln 2}{2}\right) \\ c_1^{B^{dc}} = exp\left(\dfrac{u^B + \ln 2}{2}\right) \end{cases}$$

Ces demandes conditionnelles de bien 1 vérifient la contrainte de réalisabilité dudit bien. Nous obtenons

$$exp\left(\frac{u^A + \ln 2}{2}\right) + xp\left(\frac{u^B + \ln 2}{2}\right) = 80$$

Nous remarquons qu'une augmentation de u^A s'accompagne d'une diminution de u^B. Elle permet de mesure le gain d'utilité pour un agent et la perte pour l'autre lorsque la situation économique est modifiée. En comparant les deux variations, l'Etat dispose d'un indicateur en termes de justice sociale. Il paraît concevable de changer une situation économique si l'un perd peu et l'autre gagne beaucoup.



10) Montrer le premier théorème du bien-être social. Représentez-le graphiquement.

Le premier théorème du bien-être social énonce que tout équilibre général est un optimum de Pareto. Ainsi, les conditions d'optimalité et les contraintes qui portent sur les biens de ces deux programmes sont identiques.

Caractérisons les conditions d'optimalité et les contraintes qui portent sur les biens d'un équilibre général.

L'équilibre général est caractérisé par des choix optimaux (CO^i) et par les conditions d'équilibre sur tous les marchés (CE_j). Nous avons

$$\begin{cases} (CO^A) : TMS^A_{2-1} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ (CO^B) : TMS^B_{2-1} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ (CE_1) : c_1^A + c_1^B = w_1 \\ (CE_2) : c_2^A + c_2^B = w_2 \end{cases}$$

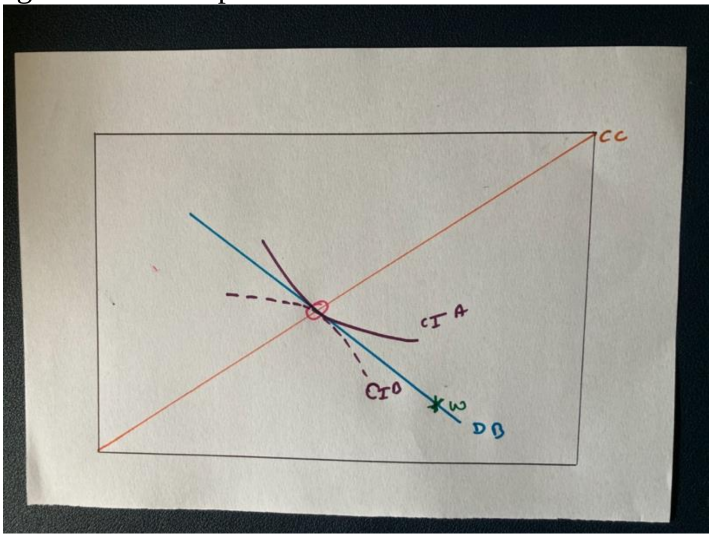
La courbe des contrats est caractérisée par les allocations Pareto-optimales (CO) et les contraintes de réalisabilité (CR_j).

$$\begin{cases} (CO) : TMS^A_{2-1} = TMS^B_{2-1} \\ (CR_1) : c_1^A + c_1^B = w_1 \\ (CR_2) : c_2^A + c_2^B = w_2 \end{cases}$$

Les conditions d'équilibre sur tous les marchés (CE_j) sont identiques aux contraintes de réalisabilité (CR_j).
Par transitivité, les conditions d'optimalité des agents A et B conduisent aux allocations Pareto-optimales (CO)

$$\begin{cases} (CO^A) : TMS^A_{2-1} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ (CO^B) : TMS^B_{2-1} = \dfrac{p_1}{p_2} \end{cases} \Rightarrow (CO) : TMS^A_{2-1} = TMS^B_{2-1}$$

Ainsi, tout équilibre général est un optimum de Pareto.



11) L'État souhaite que l'équilibre général devienne égalitaire. Cette volonté politique débouche sur l'instauration d'un **impôt proportionnel individualisé et indifférencié** sur les dotations initiales. Déterminer le système fiscal à budget équilibré qui doit être mis en place, pour que cet optimum de Pareto soit décentralisé par une économie de marché. Commenter.

L'équilibre général devient égalitaire si les agents consomment les mêmes quantités. Ainsi,

$$\begin{cases} c_1^A = c_1^B = \dfrac{w_1}{2} = 40 \\ c_2^A = c_2^B = \dfrac{w_2}{2} = 20 \end{cases}$$

Ces consommations vérifient les courbes des contrats des agents

$$\begin{cases} c_2^A = 0{,}5c_1^A \Leftrightarrow 20 = 0{,}5 \times 40 \\ c_2^B = 0{,}5c_1^B \Leftrightarrow 20 = 0{,}5 \times 40 \end{cases}$$

Par conséquent, ces consommations égalitaires vérifient les conditions d'équilibre sur les marchés car ces conditions sont identiques à celles de réalisabilité.
Pour que ces consommations soient atteintes, elles doivent vérifier les conditions du premier ordre de chaque agent en tenant compte de la fiscalité redistributive mise en place.
Posons t^i le taux d'imposition proportionnel qui s'applique à l'agent i sur ses dotations initiales. Si $t^i > 0$ alors l'agent est taxé et dans le cas contraire $t^i < 0$, il est subventionné.
Les conditions du premier ordre de l'agent A s'énonce :

$$\begin{cases} (CO^A) : \dfrac{c_2^A}{c_1^A} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ (DB^A) : p_1c_1^A + p_2c_2^A = (1 - t^A)[p_1w_1^A + p_2w_2^A] \end{cases}$$

Et celles de l'agent B

$$\begin{cases} (CO^B) : \dfrac{c_2^B}{c_1^B} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ (DB^B) : p_1c_1^B + p_2c_2^B = (1 - t_1^B)[p_1w_1^B + p_2w_2^B] \end{cases}$$

Pour des consommations égalitaires, elles se réécrivent

$$\begin{cases} (CO^A) : \dfrac{20}{40} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ (DB^A) : p_1 40 + p_2 20 = (1 - t^A)[p_1 10 + p_2 30] \end{cases}$$

$$\begin{cases} (CO^B) : \dfrac{20}{40} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ (DB^B) : p_1 40 + p_2 20 = \left(1 - t^B\right)[p_1 70 + p_2 10] \end{cases}$$

Le système de prix d'équilibre s'élève à $\frac{p_1}{p_2} = 0{,}5$.
Avec un tel système de prix, les droites de budget se réécrivent

$$\begin{cases} (DB^A) : 20 + 20 = (1 - t^A)35 \\ (DB^B) : 20 + 20 = \left(1 - t^B\right)45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (DB^A) : 5 = -35t^A \\ (DB^B) : -5 = -45t^B \end{cases}$$

Globalement l'agent A est subventionné et l'agent B est taxé.

Cette imposition s'effectuant à budget équilibré, nous avons $T^A + T^B = 0$. Soit

$$-35t^A - 45t^B = 0$$

Le système fiscal individualisé et différencié selon les dotations initiales est solution du système suivant :

$$\begin{cases} 5 = -35t^A \ (1) \\ -5 = -45t^B \ (2) \\ -35t^A - 45t^B = 0 \ (3) \end{cases}$$

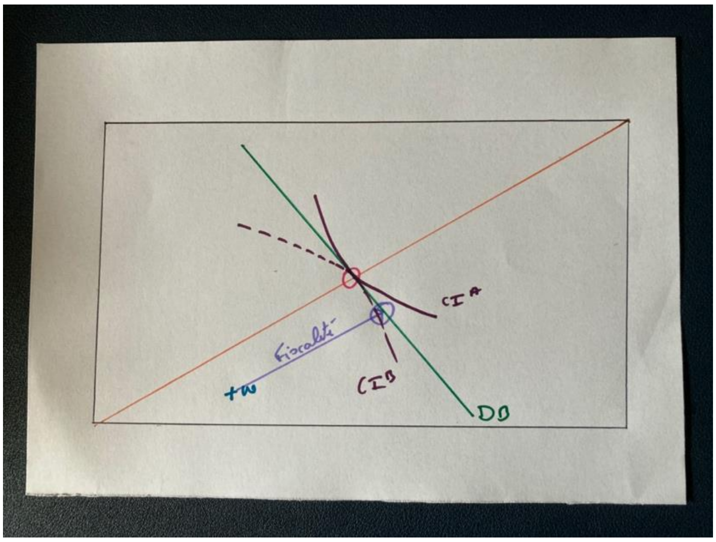
Nous remarquons (1) + (2) = (3).
Ainsi, le système fiscal est caractérisé par :

$$\begin{cases} t^A = -\dfrac{5}{35} = -\dfrac{1}{7} < 0 \\ t^B = \dfrac{5}{45} = \dfrac{1}{9} > 0 \end{cases}$$

Nous retrouvons ici le second théorème du bien-être social. Il énonce que tout optimum de Pareto peut être décentralisé par une économie de marché (sous certaines conditions techniques telles que les préférences convexes) et si la répartition des dotations initiales est appropriée.

12) A l'aide d'un graphique, expliciter le second théorème du bien-être social.

Graphiquement, il convient de tracer une droite de budget qui passe par l'allocation souhaitée et d'indiquer la modification des dotations initiales



TD Fiche n°4 – Équilibre général de production et optimum de Pareto

Exercice 1

Nous considérons une économie comprenant n consommateurs identiques, m entreprises identiques, un facteur de production et un bien : le travail, noté L, et un bien de consommation, noté C. Les m entreprises produisent ce bien de consommation avec la même technologie de production définie par :

$$q^i = \sqrt{l^i}$$

avec q^i la production d'une entreprise i, l^i la quantité de travail utilisée par l'entreprise avec $i \in [1, m]$.

Les profits de ces entreprises sont répartis équitablement entre les consommateurs. Chaque consommateur j reçoit donc comme dividendes $\frac{\Pi}{n}$, avec Π le niveau de profit sectoriel.

Les préférences d'un consommateur j sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$u^j = \ln c^j + \ln(1 - l^j)$$

avec $c_j > 0$ la consommation individuelle du bien, $0 \leq l^j < 1$ la quantité de travail offerte par un consommateur j avec $j \in [1, n]$.

Le prix du bien est noté p et le prix du salaire est noté s, avec $s > \frac{\Pi}{n}$.

1) Pour un niveau de profit sectoriel Π, calculer l'offre individuelle de travail et la demande individuelle de bien de consommation.

L'offre individuelle de travail et la demande individuelle de bien de consommation s'obtiennent en maximisant la fonction d'utilité du consommateur j tout en veillant au respect de sa droite budgétaire (DB^j) et de la contrainte légale de travail (LT). Le programme s'énonce :

$$\begin{cases} \max\limits_{c^j, l^j} \ln c^j + \ln(1 - l^j) \\ sc.\ (DB^j) :\ pc^j = \dfrac{\Pi}{n} + sl^j \\ (LT) :\ 0 \leq l^j < 1 \end{cases}$$

Nous occultons la contrainte légale de travail dans la résolution du programme de maximisation sous contrainte. Nous nous assurons par la suite que la valeur optimale de travail vérifie bien cette contrainte.

Le type de solution dépend de l'évolution du taux marginal de compensation de la consommation au travail. Le rapport $\frac{dc^j}{dc^j}$ mesure la quantité de bien de consommation que l'individu accepte pour travailler une heure supplémentaire tout en conservant un même niveau d'utilité. Mathématiquement, il est égal à l'opposé de l'inverse des utilités marginales.

$$TMC^j_{c^j - l^j} = \frac{dc^j}{dl^j} = -\frac{Um_{l^j}}{Um_{c^j}} = -\frac{-\frac{1}{1 - l^j}}{\frac{1}{c^j}} = \frac{c^j}{1 - l^j}$$

Le $TMC^j_{c^j - l^j}$ s'interprète également comme le salaire réel espéré par l'individu j.

Lorsque l^j augmente c^j augmente pour compenser la désutilité du travail et conserver le même niveau d'utilité. Ainsi, ce rapport est croissant car le numérateur augmente et le dénominateur diminue.

Le $TMC^{j}_{c^j-l^j}$ est croissant. Plus l'individu travaille et plus il faut le compenser par de la consommation pour le compenser de la désutilité croissante du travail. Il existe alors une solution intérieure définie par le système suivant :

$$\begin{cases}(CO^j) : TMC^{j}_{c^j-l^j} = \dfrac{s}{p} \\ (DB^j) : pc^j = \dfrac{\Pi}{n} + sl^j\end{cases}$$

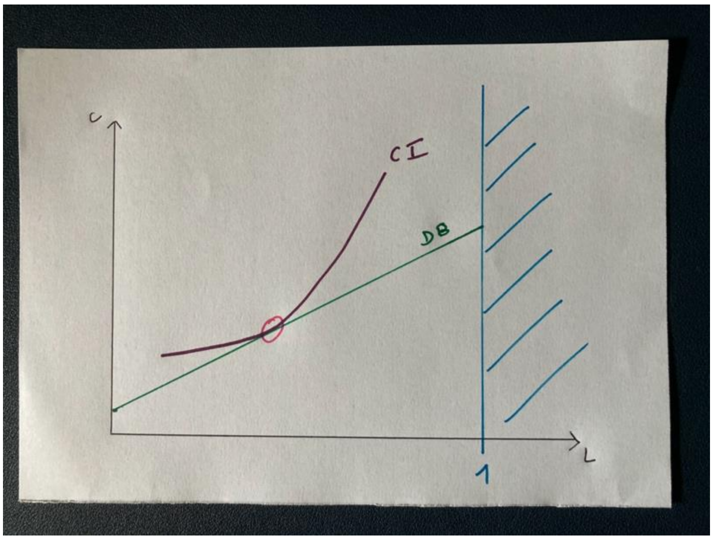
La (CO^j) stipule que le salaire réel escompté par l'individu j est égal au salaire réel offert par le marché du travail. Ainsi, il n'existe aucune modification de l'offre de travail qui permettrait d'augmenter le niveau d'utilité tout en veillant au respect de la droite budgétaire.
Ce système nous donne :

$$\begin{cases}(CO^j) : \dfrac{c^j}{1-l^j} = \dfrac{s}{p} \Leftrightarrow pc^j = s(1-l^j) \\ (DB^j) : pc^j = \dfrac{\Pi}{n} + sl^j \Leftrightarrow s(1-l^j) = \dfrac{\Pi}{n} + sl^j\end{cases}$$

Nous obtenons

$$\begin{cases}(CO^j) : \dfrac{c^j}{1-l^j} = \dfrac{s}{p} \Leftrightarrow c^j = \dfrac{s}{p}\left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\Pi}{2sn}\right) \Leftrightarrow c^{j^d} = \dfrac{s}{2p} + \dfrac{\Pi}{2pn} > 0 \\ (DB^j) : s(1-l^j) = \dfrac{\Pi}{n} + sl^j \Leftrightarrow l^{j^O} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\Pi}{2sn} < 1\end{cases}$$

Cette solution est intérieure car $s > \frac{\Pi}{n}$ implique $l^{j^d} > 0$.
Graphiquement, la droite de budget est croissante et la courbe d'indifférence croissante et convexe.



2) En déduire l'offre globale de travail et la demande globale de biens de consommation.
L'offre globale de travail ainsi que la demande globale de bien est égale à la somme des offres individuelles de travail et la somme des demandes individuelles de bien.

$$\begin{cases}c^d = \displaystyle\sum_j c^{j^d} = n\left(\dfrac{s}{2p} + \dfrac{\Pi}{2pn}\right) = \dfrac{sn}{2p} + \dfrac{\Pi}{2p} > 0 \\ l^O = \displaystyle\sum_j l^{j^O} = n\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\Pi}{2sn}\right) = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\Pi}{2s} > 0 \; car \; s > \dfrac{\Pi}{n}\end{cases}$$

3) Calculer, dans un second temps, l'offre individuelle de bien et la demande individuelle de travail. Déterminer également la valeur du profit.

La demande individuelle de travail et l'offre individuelle de bien de consommation s'obtiennent en maximisant la fonction de profit de l'entreprise i sous contrainte technologique (T^i). Le programme s'énonce :

$$\begin{cases} \max\limits_{q^i, l^i} pq^i - sl^i \\ sc.\ (T^i) : q^i = \sqrt{l^i} \end{cases}$$

La contrainte technologique définit la demande individuelle conditionnelle de travail :

$$l^{i^{dc}} = q^{i^2}$$

Le programme réduit s'énonce :

$$\max_{q^i} pq^i - sq^{i^2}$$

A l'optimalité, il n'existe aucune modification de la quantité produite qui permet d'augmenter le profit. La CPO énonce que le prix est égal au coût marginal. Ainsi, la dernière unité produite rapporte ce qu'elle coûte.

$$\frac{d\pi^i}{dq^i} = 0 \Leftrightarrow p - cm(q) = 0 \Leftrightarrow p - 2sq^i = 0 \Leftrightarrow q^{i^O} = \frac{p}{2s}$$

En incorporant la fonction d'offre individuelle de bien dans l'expression fonctionnelle de la demande individuelle conditionnelle, nous obtenons la demande individuelle de travail :

$$l^{i^d} = q^{i^{O^2}} = \left(\frac{p}{2s}\right)^2$$

Le profit de l'entreprise i s'établit à :

$$\pi^i = p \times \frac{p}{2s} - s\left(\frac{p}{2s}\right)^2 = \frac{p^2}{4s} > 0$$

En concurrence pure et parfaite, le profit est positif car l'entreprise présente des rendements d'échelle décroissants.

4) En déduire l'offre globale de biens, la demande globale de travail et le profit du secteur.

Ces expressions s'obtiennent en agrégeant les valeurs individuelles.

L'offre globale de biens est égale à la somme des offres individuelles de biens :

$$q^O = \sum_i q^{i^O} = \frac{mp}{2s}$$

La demande globale de travail est égale à la somme des demandes individuelles de travail :

$$l^d = \sum_i l^{i^d} = m\left(\frac{p}{2s}\right)^2$$

Le profit du secteur est égal à la somme des profits des entreprises

$$\Pi = \sum_i \pi^i = \frac{mp^2}{4s}$$

5) Écrire les conditions d'équilibre de cette situation d'équilibre général.

A l'équilibre général, il existe un système de prix tel que tous les marchés des biens sont simultanément à l'équilibre. Les conditions d'équilibre général s'énoncent :

$$\begin{cases} bien :\ c^d = q^O \\ travail :\ l^d = l^O \end{cases}$$

Elles se réécrivent avec simplifications :

$$\begin{cases} bien : \dfrac{sn}{2p} + \dfrac{\frac{mp^2}{4s}}{2p} = \dfrac{mp}{2s} \Leftrightarrow \dfrac{sn}{2p} = \dfrac{3mp}{8s} \ (1) \\ travail : m\left(\dfrac{p}{2s}\right)^2 = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\frac{mp^2}{4s}}{2s} \Leftrightarrow \dfrac{3mp^2}{8s^2} = \dfrac{n}{2} \ (2) \end{cases}$$

6) Montrer que l'équilibre sur le marché du bien de consommation implique l'équilibre sur le marché du travail. Commenter.

Si nous multiplions l'équation (1) par $\frac{p}{s}$, nous obtenons l'équation (2).

Nous retrouvons une des conséquences de la loi de Walras. Dans une économie à 2 marchés, si un marché est à l'équilibre, le second l'est nécessairement.

7) Calculer le système de prix d'équilibre ainsi que les quantités et le profit.

La conséquence de la loi de Walras implique dans une économie à 2 marchés, 1 seul marché est nécessaire pour calculer le système de prix d'équilibre. Le système de prix est relatif car les agents ne sont pas sensibles à l'illusion monétaire.

Prenons le marché du bien :

$$\frac{sn}{2p} = \frac{3mp}{8s} \Leftrightarrow \frac{s^2}{p^2} = \frac{3m}{4n} \Leftrightarrow \frac{s}{p} = \sqrt{\frac{3m}{4n}}$$

$$q = \frac{m}{2}\frac{p}{s} = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{4n}{3m}} = \sqrt{\frac{mn}{3}}$$

$$q^{i^O} = \frac{q}{m} = \sqrt{\frac{n}{3m}}$$

$$c^{j^d} = \frac{q}{n} = \sqrt{\frac{m}{3n}}$$

$$l = \frac{m}{4}\left(\frac{p}{s}\right)^2 = \frac{m}{4}\frac{4n}{3m} = \frac{n}{3}$$

$$l^{i^d} = \frac{l}{m} = \frac{n}{3m}$$

$$l^{j^O} = \frac{l}{n} = \frac{1}{3}$$

$$\Pi = \frac{mp}{4}\frac{p}{s} = \frac{mp}{4}\sqrt{\frac{4n}{3m}} = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{nm}{3}}$$

$$\pi^i = \frac{\Pi}{n} = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{m}{3n}}$$

Exercice 2

Une économie est composée de deux entreprises notées A et B dont les technologies de production sont représentées par la même fonction de production :

$$q^i = F^i(k^i, l^i) = k^{i^{0,5}} l^{i^{0,5}}$$

avec k^i et l^i les quantités respectives de capital et de travail utilisées par l'entreprise i avec $i \in \{A, B\}$ dont les prix sont notés respectivement r et s. Les prix des biens produits sont notés respectivement p_A et p_B.

Les dotations en facteurs de l'économie sont détenues par deux agents de l'économie notées 1 et 2 dont les vecteurs de dotations initiales sont :

$$w^1 = (20{,}80) \text{ et } w^2 = (80{,}20)$$

avec pour l'agent 1 (20,80) les quantités de capital et de travail détenues sous forme de dotations initiales. Les préférences d'un consommateur j sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$u^j = \sum_i \ln c_i^j$$

avec $c_i^j > 0$ la consommation individuelle du bien i par un consommateur j avec $j \in \{1,2\}$. Le consommateur 1 possède l'entreprise A et le consommateur 2 l'entreprise B.

1) Caractériser les rendements d'échelle des entreprises de cette économie.

Les rendements d'échelle mesurent l'accroissement de la production consécutive à un accroissement simultané et identique de tous les facteurs de production.

Soit $\lambda > 1$

$$F^i(\lambda k^i, \lambda l^i) = (\lambda k^i)^{0,5}(\lambda l^i)^{0,5} = \lambda {k^i}^{0,5}{l^i}^{0,5} = \lambda F^i(k^i, l^i)$$

Les rendements d'échelle sont contants. Une augmentation de 10% des facteurs capital et travail conduit à un accroissement de la production égal à 10%. En concurrence pure et parfaite, les entreprises sont parfaitement gérées en réalisant des profits nuls. En conséquence, l'intégralité du produit est répartie entre les facteurs de production. En conséquence, la fonction est indéterminée ainsi que les demandes marshalliennes des facteurs. Les entreprises répondent à la demande.

2) Écrire le programme de maximisation du profit de l'entreprise i.

L'entreprise i maximise sa fonction de profit en tenant compte de sa contrainte technologique (T^i). Son programme s'énonce :

$$\begin{cases} \max\limits_{q^i,k^i,l^i} \pi^i = p_i q^i - s l^i - r k^i \\ sc.\,(T^i) : \; q^i = {k^i}^{0,5}{l^i}^{0,5} \end{cases}$$

Le programme réduit s'énonce :

$$\max_{k^i,l^i} \pi^i = p_i {k^i}^{0,5}{l^i}^{0,5} - s l^i - r k^i$$

Avec $q^i = {k^i}^{0,5}{l^i}^{0,5}$

3) Calculer les demandes conditionnelles de facteurs de production, la fonction d'offre de cette entreprise ainsi que son profit de l'entreprise i.

Les demandes conditionnelles de facteurs de production définissent la quantité minimale de facteurs utilisée dans le processus de production pour tout système de prix des facteurs et pour tout niveau de production. Elles s'obtiennent en minimisant la dépense en facteurs de production sous contrainte technologique (T). Le programme s'énonce :

$$\begin{cases} \max\limits_{k^i,l^i} s l^i + r k^i \\ sc.c.\,(T^i) : \; q^i = {k^i}^{0,5}{l^i}^{0,5} \end{cases}$$

Le type de solution de ce programme sous contrainte dépend de l'évolution du TMST de l'entreprise i.

Le rapport $-\frac{dk^i}{dl^i}$ définit le taux marginal de substitution technique du capital au travail de l'entreprise i. Il mesure la quantité de capital qu'il faut substituer à une unité de travail tout en conservant un même niveau de production.
Mathématiquement, il est égal au rapport inverse des productivités marginales :

$$TMST^i_{k^i-l^i} = -\frac{dk^i}{dl^i} = \frac{Pm_{l^i}}{Pm_{k^i}} = \frac{0{,}5{k^i}^{0,5}{l^i}^{-0,5}}{0{,}5{k^i}^{-0,5}{l^i}^{0,5}} = \frac{k^i}{l^i}$$

Pour conserver le même niveau de production, il faut remplacer une unité de travail par $\frac{k^i}{l^i}$ unités de capital.
Lorsque l^i augmente k^i diminue pour conserver le même niveau de production. Ainsi, ce rapport est décroissant car le numérateur diminue et le dénominateur augmente.
Le $TMST^i_{k^i-l^i}$ est décroissant. Plus un facteur devient abondant et plus il est facile à remplacer par l'autre facteur et ce pour un même niveau de production. Les facteurs sont donc imparfaitement substituables. Il existe alors une solution intérieure définie par le système suivant :

$$\begin{cases} (CO^i) : \ TMST^i_{k^i-l^i} = \frac{s}{r} \\ (T^i) : \ q^i = {k^i}^{0,5}{l^i}^{0,5} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} (CO^i) : \frac{k^i}{l^i} = \frac{s}{r} \Leftrightarrow k^i = \frac{s}{r}\, l^i (SE) \\ (T^i) : \ q^i = {k^i}^{0,5}{l^i}^{0,5} \end{cases}$$

En intégrant (SE) dans (T^i), nous obtenons la demande individuelle conditionnelle de travail

$$q^i = \left(\frac{s}{r}\, l^i\right)^{0,5} {l^i}^{0,5} \Leftrightarrow q^i = \left(\frac{s}{r}\right)^{0,5} l^i \Leftrightarrow {l^i}^{dc} = q^i\sqrt{\frac{r}{s}}$$

En calculant (SE) avec ${l^i}^{dc}$, nous obtenons la demande individuelle conditionnelle de capital

$$k^i = \frac{s}{r} q^i \sqrt{\frac{r}{s}} \Leftrightarrow {k^i}^{dc} = q^i\sqrt{\frac{s}{r}}$$

L'offre relie la quantité maximale offerte au système de prix de l'économie. Elle s'obtient en maximisant le profit soit par rapport à la quantité produite, ce qui nécessite de connaître le coût total et par conséquent les demandes conditionnelles de facteurs.
Le coût mesure la dépense minimale pour tout niveau de production. Il est égal à la somme des demandes conditionnelles de facteurs pondérées par leur prix. Il s'énonce :

$$CT^i(q^i) = s{l^i}^{dc} + r{k^i}^{dc} = sq^i\sqrt{\frac{r}{s}} + rq^i\sqrt{\frac{s}{r}} = 2q^i\sqrt{rs}$$

Dans ce contexte, la fonction d'offre s'obtient en maximisant le profit par rapport à la quantité produite. Le programme s'énonce :

$$\max_{q^i} \pi^i = p_i q^i - 2q^i\sqrt{rs} = q^i\left(p_i - 2\sqrt{rs}\right)$$

A l'optimalité, il n'existe aucune modification de la quantité produite qui permet d'augmenter le profit. La CPO énonce que le prix est égal au coût marginal. Ainsi, la dernière unité produite rapporte ce qu'elle coûte.

$$\frac{d\pi^i}{dq^i} = 0 \Leftrightarrow p_i - 2\sqrt{rs} = 0 \Leftrightarrow p_i = 2\sqrt{rs} > 0$$

Il n'existe pas d'optimum unique car le profit est une fonction linéaire de la quantité produite. (La CSO est nulle). Ainsi, dans une économie concurrentielle, le prix s'établit à la valeur la plus faible $p_i = 2\sqrt{rs}$ qui permet la production. Pour un tel niveau de prix, l'entreprise est indifférente entre produire et ne pas produire. L'offre globale des firmes permet de répondre à la demande globale des consommateurs.
L'indétermination de la fonction de la fonction d'offre ne permet pas de calculer les fonctions de demandes individuelles marshalliennes de facteurs.

Le profit d'une entreprise i est nul pour le prix d'équilibre :

$$\pi^i = 2\sqrt{rs}q^i - 2q^i\sqrt{rs} = 0$$

4) Écrire le programme du consommateur j.

Le consommateur j maximise son utilité tout en veillant au respect de sa droite budgétaire (DB^j). Cette dernière énonce que la somme des dotations initiales valorisées aux prix de marché sont égales aux dépenses de consommation. Le programme s'énonce :

$$\begin{cases} \max\limits_{c_A^j, c_B^j} \ln c_A^j + \ln c_B^j \\ sc.\left(DB^j\right) : \ p_A c_A^j + p_B c_B^j = rw_A^j + sw_B^j + \pi_{h-j} \end{cases}$$

Avec π_{h-j} le profit de l'entreprise h qui appartient à l'individu j

Comme la fonction d'utilité $U^j(c_A^j, c_B^j)$ est strictement concave, il existe une solution intérieure. Les conditions de positivité ne sont pas saturées.

5) Calculer les demandes marshalliennes individuelles.

Les fonctions de demande relient les quantités maximales demandées à tout système de prix et à tout revenu. Elles sont solution du système suivant :

$$\begin{cases} \left(CO^j\right) : \ TMS_{B-A}^j = \dfrac{p_A}{p_B} \\ \left(DB^j\right) : \ p_A c_A^j + p_B c_B^j = rw_A^j + sw_B^j + \pi_{h-j} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \left(CO^j\right) : \dfrac{c_B^j}{c_A^j} = \dfrac{p_A}{p_B} \Leftrightarrow c_B^j = \dfrac{p_A}{p_B} c_A^j \\ \left(DB^j\right) : \ p_A c_A^j + p_B c_B^j = rw_A^j + sw_B^j + \pi_{h-j} \end{cases}$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} \left(CO^j\right) : \dfrac{c_B^j}{c_A^j} = \dfrac{p_A}{p_B} \Leftrightarrow c_B^j = \dfrac{p_A}{p_B} c_A^j \Leftrightarrow c_B^{j\,dm} = \dfrac{rw_A^j + sw_B^j + \pi_{h-j}}{2p_B} \\ \left(DB^j\right) : \ 2p_A c_A^j = p_A w_A^j + p_B w_B^j + \pi_{h-j} \Leftrightarrow c_A^{j\,dm} = \dfrac{rw_A^j + sw_B^j + \pi_{h-j}}{2p_A} \end{cases}$$

6) Écrire les conditions d'équilibre de cette situation d'équilibre général.

A l'équilibre général, il existe un système de prix tel que tous les marchés des biens sont simultanément à l'équilibre. Les conditions d'équilibre général énoncent que les offres globales sont égales aux demandes globales :

$$\begin{cases} bien\ A:\ {c_A^1}^{dm} + {c_A^2}^{dm} = q^A \\ bien\ B:\ {c_B^1}^{dm} + {c_B^2}^{dm} = q^B \\ capital:\ {k^A}^{dc} + {k^B}^{dc} = 20 + 80 \\ travail:\ {l^A}^{dc} + {l^B}^{dc} = 80 + 20 \end{cases}$$

Elles se réécrivent :

$$\begin{cases} bien\ A:\ \left(\frac{rw_A^1 + sw_B^1 + \pi_A}{2p_A}\right) + \left(\frac{rw_A^2 + sw_B^2 + \pi_B}{2p_A}\right) = q^A \\ bien\ B:\ \left(\frac{rw_A^1 + sw_B^1 + \pi_A}{2p_B}\right) + \left(\frac{rw_A^2 + sw_B^2 + \pi_B}{2p_B}\right) = q^B \\ capital:\ q^A\sqrt{\frac{s}{r}} + q^B\sqrt{\frac{s}{r}} = 20 + 80 \\ travail:\ q^A\sqrt{\frac{r}{s}} + q^B\sqrt{\frac{r}{s}} = 80 + 20 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} bien\ A:\ \left(\frac{20r + 80s}{2p_A}\right) + \left(\frac{80r + 20s}{2p_A}\right) = q^A \Leftrightarrow 50\left(\frac{r+s}{p_A}\right) = q^A \\ bien\ B:\ \left(\frac{20r + 80s}{2p_B}\right) + \left(\frac{80r + 20s}{2p_B}\right) = q^B \Leftrightarrow 50\left(\frac{r+s}{p_B}\right) = q^B \\ capital:\ (q^A + q^B)\sqrt{\frac{s}{r}} = 100 \\ travail:\ (q^A + q^B)\sqrt{\frac{r}{s}} = 100 \end{cases}$$

7) Montrer que, pour une économie à n marchés, l'équilibre sur $(n-1)$ marchés implique l'équilibre sur le $n^{ième}$ marché. Commenter.

La loi de Walras énonce que la somme des demandes nettes de marché en valeur est égale à 0. Soit

$$\sum_{h=1}^{n} p_h e_h = 0$$

Si $(n-1)$ marchés sont à l'équilibre alors $e_h = 0\ pour\ tout\ h \in \{1, n-1\}$

Comme $p_h > 0\ pour\ tout\ h \in \{1, n-1\}$ alors $p_n e_n = 0$ implique $e_n = 0$. Le marché n est donc à l'équilibre.

8) Calculer le système de prix d'équilibre ainsi que les quantités.

Attention, ici, les offres sont indéterminées. Nous devons raisonner par déduction.

Les rendements d'échelle constants impliquent que les profits sont nuls. Nous avons donc

$$p_A = p_B = 2\sqrt{rs} \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = 1\ (1)$$

Les marchés du capital et du travail impliquent

$$\sqrt{\frac{s}{r}} = \sqrt{\frac{r}{s}} \Leftrightarrow \frac{s}{r} = 1\ (2)$$

Les équations (1) et (2) nous donnent

$$\begin{cases} p_A = 2\sqrt{rs} \Leftrightarrow \frac{p_A}{r} = 2 \; et \; \frac{p_A}{s} = 2 \\ p_B = 2\sqrt{rs} \Leftrightarrow \frac{p_B}{r} = 2 \; et \; t \; \frac{p_B}{s} = 2 \end{cases}$$

Avec ces prix relatifs, nous pouvons donc calculer les quantités d'équilibre de cette économie :

$$c_A^1 = \frac{20r + 80s}{2p_A} = \frac{10r}{p_A} + \frac{40s}{p_A} = \frac{10}{2} + \frac{40}{2} = 25$$
$$c_B^1 = \frac{20r + 80s}{2p_B} = \frac{10r}{p_B} + \frac{40s}{p_B} = \frac{10}{2} + \frac{40}{2} = 25$$
$$c_A^2 = \frac{80r + 20s}{2p_A} = \frac{40r}{p_A} + \frac{10s}{p_A} = \frac{40}{2} + \frac{20}{2} = 25$$
$$c_B^2 = \frac{80r + 20s}{2p_B} = \frac{40r}{p_B} + \frac{10s}{p_B} = \frac{40}{2} + \frac{20}{2} = 25$$
$$q^A = c_A^{1\,dm} + c_A^{2\,dm} = 25 + 25 = 50$$
$$q^B = c_B^{1\,dm} + c_B^{2\,dm} = 25 + 25 = 50$$
$$k^A = q^A\sqrt{\frac{s}{r}} = 50 \times \sqrt{1} = 50$$
$$l^{A=}q^A\sqrt{\frac{r}{s}}50 \times \sqrt{1} = 50$$
$$k^B = q^B\sqrt{\frac{s}{r}}50 \times \sqrt{1} = 50$$
$$l^B = q^B\sqrt{\frac{r}{s}}50 \times \sqrt{1} = 50$$

9) Calculer la frontière de production.

La frontière de production définit l'ensemble des combinaisons de production qui utilise avec efficience l'intégralité des facteurs. C'est la transposition de l'optimalité des facteurs dans le plan de la production.

Calculons dans un premier temps la courbe des contrats des facteurs de l'entreprise *i*. Elle définit l'ensemble des allocations Pareto-optimales et réalisables exprimé dans le plan des facteurs

Des allocations sont dites Pareto-optimales, s'il n'est pas possible d'augmenter la production d'une entreprise sans réduire celle d'au moins un autre (CQ^{-i}).

Des allocations sont dites réalisables, si la somme des quantités de facteurs utilisées dans le processus de production sont égales à la somme des dotations disponibles dans l'économie (CR_j).

Le programme pour les obtenir s'énoncent :

$$\begin{cases} \max_{k^i,l^i} Q^i(k^i, l^i) \\ sc. (CQ^{-i}) : \; Q^{-i}(k^{-i}, l^{-i}) \geq \tilde{Q} \\ (CR_k) : \sum_i k^i = \sum_j w_k^j \\ (CR_l) : \sum_i l^i = \sum_j w_l^j \end{cases}$$

Pour résoudre ce programme de maximisation sous contrainte, nous devons utiliser un Lagrangien (qui n'est pas au programme).
Ainsi, la courbe des contrats de l'agent j est solution du système suivant

$$\begin{cases} (CO) : \ TMST^{i}_{k-l} = TMST^{-i}_{k-l} \\ (CR_k) : \sum_i k^i = \sum_j w^j_k \\ (CR_l) : \sum_i l^i = \sum_j w^j_l \end{cases}$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} (CO) : \dfrac{k^i}{l^i} = \dfrac{k^{-i}}{l^{-i}} \\ (CR_k) : k^i + k^{-i} = 20 + 80 = 100 \\ (CR_l) : \ l^i + l^{-i} = 80 + 20 = 100 \end{cases}$$

Pour exprimer la courbe des contrats dans le repère de l'entreprise i, nous exprimons k^i en fonction de l^i.
Nous avons

$$\begin{cases} k^{-i} = 100 - k^i \\ l^{-i} = 100 - l^i \end{cases}$$

La condition d'optimalité se réécrit

$$\frac{k^i}{l^i} = \frac{100 - k^i}{100 - l^i}$$

Nous avons

$$k^i(100 - l^i) = l^i(100 - k^i) \Leftrightarrow k^i = l^i$$

La courbe des contrats de l'entreprise est définie i par

$$\begin{cases} k^i = l^i \\ 0 \leq l^i \leq 100 \end{cases}$$

Les courbes des contrats et les fonctions de production des entreprises nous donnent les demandes conditionnelles du facteur travail :

$$q^i = (l^i)^{0,5} {l^i}^{0,5} \Leftrightarrow {l^i}^{dc} = q^i$$

En introduisant ces expressions dans la contrainte de réalisabilité du facteur travail, nous obtenons la frontière de production :

$$(CR_l) : \ {l^A}^{dc} + {l^B}^{dc} = 100$$

Soit

$$q^A + q^B = 100$$

10) Calculer la courbe des contrats de l'agent j.

La courbe des contrats d'un agent définit l'ensemble des allocations Pareto-optimales et réalisables exprimé dans le plan de ses consommations.
Des allocations sont dites Pareto-optimales, s'il n'est pas possible d'augmenter l'utilité d'un agent sans détériorer celle d'au moins un autre (CU^{-j}).
Des allocations sont dites réalisables, si la somme des consommations des agent sont égales à la somme des dotations disponibles dans l'économie (CR_i).

Le programme pour les obtenir s'énoncent :

$$\begin{cases} \max\limits_{c_i^j} U^j(c_i^j) \\ sc. \left(CU^{-j}\right) : \ U^{-j}(c_i^{-j}) \geq \widetilde{U}, \forall i \\ sc. \ (CR_i) : \sum\limits_j c_i^j = q^i \end{cases}$$

Pour résoudre ce programme de maximisation sous contrainte, nous devons utiliser un Lagrangien (qui n'est pas au programme).
Ainsi, la courbe des contrats de l'agent 1 est solution du système suivant

$$\begin{cases} (CO) : \ TMS_{B-A}^{j} = TMS_{B-A}^{-j} \\ (CR_i) : \sum\limits_j c_i^j = q^i, \forall i \end{cases}$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} (CO) : \dfrac{c_B^1}{c_A^1} = \dfrac{c_B^2}{c_A^2} \\ (CR_A) : c_A^1 + c_A^2 = 50 \\ (CR_B) : \ c_B^1 + c_B^2 = 50 \end{cases}$$

Pour exprimer la courbe des contrats dans le repère de l'agent A, nous exprimons c_B^1 en fonction de c_A^1.
Nous avons

$$\begin{cases} c_A^2 = 50 - c_A^1 \\ c_B^2 = 50 - c_B^1 \end{cases}$$

La condition d'optimalité se réécrit

$$\frac{c_B^1}{c_A^1} = \frac{50 - c_B^1}{50 - c_A^1}$$

Nous avons

$$c_B^1(50 - c_A^1) = c_A^1(50 - c_B^1) \Leftrightarrow c_B^1 = c_A^1$$

La courbe des contrats de l'agent A est définie par

$$\begin{cases} c_B^1 = c_A^1 \\ 0 \leq c_A^1 \leq 50 \end{cases}$$

11) Calculer la frontière des utilités.

La frontière des utilités définit l'ensemble des niveaux d'utilité des agents 1 et 2 pour les quantités réalisables des biens. Elle s'obtient à partir des courbes des contrats des agents, des contraintes de réalisabilité des biens et des fonctions d'utilité des agents.
Dans un premier temps, nous calculons les demandes conditionnelles des agents 1 et 2 en bien A.
Nous avons $c_B^1 = c_A^1$ et par symétrie $c_B^2 = c_A^2$. Nous incorporons les courbes des contrats dans les fonctions d'utilité

$$\begin{cases} u^1 = \ln c_A^1 + \ln(c_A^1) \\ u^2 = \ln c_A^2 + \ln(c_A^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^1 = 2\ln c_A^1 \\ u^2 = 2\ln c_A^2 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} {c_A^1}^{dc} = exp\left(\frac{u^1}{2}\right) \\ {c_A^2}^{dc} = exp\left(\frac{u^2}{2}\right) \end{cases}$$

Ces demandes conditionnelles de bien A vérifient la contrainte de réalisabilité dudit bien. Nous obtenons

$$exp\left(\frac{u^1}{2}\right) + exp\left(\frac{u^2}{2}\right) = 50$$

Nous remarquons qu'une augmentation de u^1 s'accompagne d'une diminution de u^2.

12) Retrouvez le niveau des productions optimales à partir des conditions d'optimalités.

A l'optimalité, il n'existe aucune modification du niveau des productions qui permettrait d'augmenter l'utilité des individus tout en utilisant avec efficience l'intégralité des facteurs de production disponible dans l'économie et tout en consommant avec optimalité l'intégralité des productions de l'économie. Les conditions du premier-ordre s'écrivent (elles s'obtiennent à l'aide d'un Lagrangien qui n'est pas au programme) :

$$\begin{cases} (CO) : \; TMS_{B-A}^1 = TMS_{B-A}^2 = TMT_{B-A} \\ (FP): q^A + q^B = 100 \\ (CR_A) : c_A^1 + c_A^2 = q^A \\ (CR_B) : c_B^1 + c_B^2 = q^B \end{cases}$$

Le TMT_{B-A} mesure la quantité de bien B que l'on produit lorsque l'économie renonce à produire une unité de bien A tout en utilisant avec efficience l'intégralité des facteurs disponibles dans l'économie. Mathématiquement, Il est égal au rapport inverse des dérivées partielles de la frontière de production par rapport aux productions considérés :

$$TMT_{B-A} = -\frac{dq^B}{dq^A} = \frac{\frac{\partial FP}{\partial q^A}}{\frac{\partial FP}{\partial q^B}}$$

Soit

$$TMT_{B-A} = \frac{1}{1} = 1$$

Lorsque l'économie renonce à produire une unité de bien A, elle libère des facteurs de production sont intégralement utilisés par l'entreprise B ce qui génère la production d'une unité de bien B.

Les conditions du premier-ordre se réécrivent :

$$\begin{cases} (CO) : \frac{c_B^1}{c_A^1} = \frac{c_B^2}{c_A^2} = 1 \\ (FP): q^A + q^B = 100 \\ (CR_A) : c_A^1 + c_A^2 = q^A \\ (CR_B) : c_B^1 + c_B^2 = q^B \end{cases}$$

(CO) nous donne $c_B^1 = c_A^1$ et $c_B^2 = c_A^2$.
En utilisant ces deux expressions dans (CR_B), nous obtenons $c_A^1 + c_A^2 = q^B$ (1).
De (1) et (CR_A), nous avons $q^A = q^B$ (2).
Avec (2) et (FP), nous obtenons $q^A = q^A = 50$.

13) Représenter graphiquement cette situation dans le plan des consommations.

Tracer la boîte d'Edgeworth avec la frontière de production linéaire la courbe des contrats de consommation linéaire. (NB : le point d'intersection de la droite des contrats et de la frontière de production nous donne le point de production optimale). En ce point, la pente de FP nous donne la pente de la droite de budget qui passe par le point des consommations optimales.