Nom : BOUIN Prénom : EMERIC TD : Veteran Note :

Les questions suivantes sont indépendantes.

Justifier qu'une suite réelle divergente n'est pas de Cauchy.

C'est la contraposée de l'énoncé du cours, qui affirme que toute suite réelle de Cauchy est convergente.

ooo (Oh, mais tiens, il me reste de la place !)

En utilisant uniquement les suites de Cauchy, montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Formons $S_{n+p} - S_n$, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, avec $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. On a $S_{n+p} - S_n = \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Nions le fait d'être de Cauchy :

$$|S_{2n} - S_n| = \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{2n-(n+1)+1}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$$

≥ 1 pour $n \geq 2$.

Par la négation du critère de Cauchy, la série de terme général u_n est divergente.

ooo (Whaoh, encore beaucoup de place !)

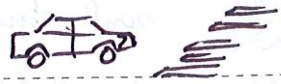
Soit u_n une suite telle que $n^2 u_n \geq 2$. Peut-on affirmer que la série de terme général u_n est divergente ? Peut-on affirmer que la série de terme général u_n est convergente ?

(i) Non, la STG $u_n = \frac{2}{n^2}$ est convergente par Riemann.

(ii) Non, la STG $u_n = \frac{2}{n}$ est divergente par Riemann.

Etudier la convergence, la semi-convergence des séries de terme général ...

$u_n = e^{-\sqrt{\ln(n)}}$ $\quad n \exp(-\sqrt{\ln n}) = \exp(\ln n - \sqrt{\ln n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ donc la STG u_n est divergente par Riemann.



$v_n = \left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)^n = \exp\left(-n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ donc la STG v_n diverge car son terme général ne tend pas vers 0.

$w_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln(n)^2}\right) = \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln n^4} + o\left(\frac{1}{\ln n^4}\right)$.

Comme $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln n^4} + o\left(\frac{1}{\ln n^4}\right) \sim -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln n^4}$ qui est de terme général d'une série divergente, la STG w_n est divergente. En effet $\frac{1}{\ln n^4}$ est de signe constant et $n \frac{1}{\ln n^4} \to \infty$ par croissances comparées.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, on définit

$$u_n = \frac{1}{n\ln(n)}, \qquad \text{et} \qquad S_n := \sum_{k=2}^{n} u_k.$$

En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $S_n \sim_{+\infty} \ln(\ln(n))$.

La fonction $x \to \frac{1}{x\ln x}$ est décroissante sur $]1, \infty[$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \le \int_k^{k+1} \frac{dt}{t\ln t} \le \frac{1}{k\ln k}.$$

Par conséquent, $S_n \ge \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\ln t} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$ et $S_n \le \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}$

Comme $\ln(\ln(n+1)) = \ln(\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})) = \ln(\ln n) + \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right) = \ln\ln n + o(\ln(\ln n))$

On déduit que $S_n \sim \ln(\ln n)$ par encadrement.

On définit $v_n := S_n - \ln(\ln(n))$. Montrer que $v_{n+1} - v_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{2n^2\ln(n)}$.

Formons $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln n) = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)$

⊙ $\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \frac{1}{n\ln n} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})\left(\ln(1+\frac{1}{n})/\ln n + 1\right)}$; mais $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$= \frac{1}{n\ln n} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})\left(1 + \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{2n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right)} = \frac{1}{n\ln n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

⊙ $\ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{2n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right) = \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{2n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)$

Finalement, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right) - \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{2n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2\ln(n)}$.

En déduire un développement asymptotique à deux termes de S_n.

La série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente par le critère de Bertrand. Par sommation des équivalents les restes de $v_{n+1} - v_n$ et $\frac{1}{2n^2\ln n}$ sont équivalents et la suite v_n est convergente. On déduit l'existence de $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell - v_n = o(1) \left(= \sum_n^{\infty} \frac{1}{2k^2\ln k}\right)$. Finalement,

$$S_n = \ln(\ln n) + \ell + o(1).$$

(On peut préciser le $o(1)$ par CSI : $\sum_n^{\infty} \frac{1}{2k^2\ln k} \sim \int_n^{\infty} \frac{dt}{2t^2\ln t}$)