Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Algèbre linéaire 3
année 2018/2019

Contrôle continu du 8 octobre 2018

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 1h

Exercice 1 (3 points). Soit b une forme bilinéaire définie sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On rappelle que b est dite *antisymétrique* si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ b(y,x) = -b(x,y),$$

et que b est dite *alternée* si

$$\forall x \in E,\ b(x,x) = 0.$$

Montrer que ces deux notions sont équivalentes.

Exercice 2 (3 points). Montrer que l'application, appelée *produit vectoriel*, définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$(x,y) \mapsto x \wedge y = \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, est une application bilinéaire antisymétrique.

Exercice 3 (6 points). Pour chacune des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^2$ suivantes, donner la matrice de la forme dans la base canonique et déterminer son noyau :

1. $b_1(x,y) = x_1 y_1$,
2. $b_2(x,y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$,
3. $b_3(x,y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$,
4. $b_4(x,y) = x_1 y_1 - \frac{3}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 6 x_2 y_2$,

où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$.

Exercice 4 (6 points). Soit b la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ représentée par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

1. La forme b est-elle symétrique ? Antisymétrique ? Quel est son rang ?
2. Justifier que la famille $\mathcal{B}' = \{e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer de deux façons la matrice représentant b dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, donner l'expression de $q(x)$, où q est la forme quadratique associée à b.
4. Déterminer la matrice de la forme polaire de q dans la base canonique.

Exercice 5 (2 points). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension trois et $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. On définit la forme bilinéaire symétrique b sur E par

$$b(e_1, e_1) = b(e_2, e_2) = -b(e_3, e_3) = 1 \text{ et } b(e_1, e_2) = b(e_1, e_3) = b(e_2, e_3) = 0.$$

1. Montrer que la forme b n'est pas dégénérée.
2. La restriction de b au sous-espace $F = \mathrm{Vect}\{e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ est-elle dégénérée ?