Algèbre linéaire 3, Examen du 12 Janvier 2023

Durée : 2h. Documents et appareils électroniques interdits. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées. La qualité de la rédaction sera un élément essentiel de l'appréciation des copies. Vous êtes vivement encouragés à lire l'ensemble du sujet avant de commencer. Le barème est sur 20 points. Il est à titre indicatif.

***Exercice 1* (Question de cours, 1 point).** — Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Donner la **définition** d'un endomorphisme trigonalisable. (0,5 point)
2. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. (0,5 point)

***Exercice 2* (Infinité de bases orthonormales dans $\mathbb{R}^3$, 4 points).** — Soit $a \geq 0$. On travaille dans $\mathbb{R}^3$ que l'on munit du produit scalaire canonique. On définit la famille $\mathcal{F}^a = \{f_1^a, f_2^a, f_3^a\}$ telle que

$$f_1^a = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} , \; f_2^a = \begin{pmatrix} -a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \; f_3^a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}^a$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (0,5 point)
2. Orthonormaliser $\mathcal{F}^a$ selon le procédé de Gram-Schmidt. Nous noterons cette nouvelle base $\mathcal{G}^a = \{e_1^a, e_2^a, e_3^a\}$. (2,5 points)
3. En déduire que $\mathbb{R}^3$ admet une infinité de bases orthonormales. (1 point)

***Exercice 3* (Composition de deux projecteurs orthogonaux, 8 points).** — Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et p et q deux projecteurs orthogonaux non nuls sur E. On note, pour $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et $\sigma(p \circ q)$ le spectre réel de $p \circ q$.

1. Soit $y \in E$. Montrer que $\|p(y)\| \leq \|y\|$. (0,75 point)
2. En déduire que si $\lambda \in \sigma(p \circ q)$, on a $|\lambda| \leq 1$. (0,5 point)
3. Montrer que pour tout $y \in E$, on a $\langle p(y), y \rangle \geq 0$. (0,5 point)
4. Soit $y \in E$. Montrer que si $\langle q(y), y \rangle = 0$ alors $q(y) = 0$. (0,75 point)
5. En déduire que si $\lambda \in \sigma(p \circ q)$, on a $\lambda \in [0, 1]$. (1 point)
6. Le but de cette question est de montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
   (a) Posons $f = p \circ q \circ p$. Montrer que f est un endomorphisme symétrique sur E et que $\operatorname{Im}(p)$ est stable par f. (0,75 point)
   (b) Montrer alors qu'il existe une base de $\operatorname{Im}(p)$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$. (0,75 point)
   (c) Soit G, H deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(G + H)^\perp = G^\perp \cap H^\perp$. (1 point)
   (d) Posons $F = (\ker(q) + \operatorname{Im}(p))^\perp$. En déduire que $F = \operatorname{Im}(q) \cap \ker(p)$. (0,5 point)
   (e) Soit $y \in \ker(q) + F$. Que vaut $p \circ q(y)$? (0,5 point)
   (f) Conclure. (1 point)

Exercice 4 **(Réduction simultanée, 7 points).** — Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie et non nul n et u et v deux endomorphismes symétriques sur E. On note f et g les applications de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in E$, on a

$$f(x, y) = \langle u(x), y\rangle \ , \ g(x, y) = \langle v(x), y\rangle$$

et on suppose que $f(x, x) > 0$ pour tout $x \in E$ non nul.

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, on a

$$f(e_i, e_j) = g(e_i, e_j) = 0 \text{ et } f(e_i, e_i) = 1.$$

(C'est une base de E à la fois f-orthonormale et g-orthogonale).

1. Montrer que g une forme bilinéaire symétrique réelle et que (E, f) est un espace euclidien. (0,5 point)
2. Notons $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E. Montrer que $\mathcal{Q}(E)$ est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. (0,75 point)
3. Notons $S_f(E)$ l'ensemble des endomorphismes sur E qui sont symétriques pour f, c'est à dire que $w \in S_f(E)$ lorsque w est un endomorphisme sur E tel que pour tout $x, y \in E$, on a
$$f(w(x), y) = f(x, w(y)).$$
Montrer que $S_f(E)$ est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. (0,75 point)
4. Si $w \in S_f(E)$ on note q_w l'application de E dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in E$, on a
$$q_w : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(w(x), x). \end{array}$$
Montrer que q est une forme quadratique réelle sur E et déterminer sa forme polaire. (0,75 point)
5. Considérons l'application
$$\Phi : \begin{array}{l} S_f(E) \longrightarrow \mathcal{Q}(E) \\ w \longrightarrow q_w \end{array}$$
Montrer que Φ est un isomorphisme. (0,75 point)
6. En déduire qu'il existe $w_f \in S_f(E)$ tel que $f(w_f(x), y) = g(x, y)$ pour tout $x, y \in E$. (1 point)
7. Montrer que u est inversible et que $w_f = u^{-1} \circ v$. (0,75 point)
8. En déduire que $u^{-1} \circ v$ est diagonalisable. (0,75 point)
9. Conclure. (1 point)