Chapitre · 6 Intégrales Généralisées

Intégrale généralisée à l'∞

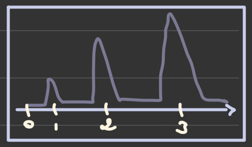
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$. On dit que $\int_a^{\infty} f(t)dt$ est CV si $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie. Quand elle existe, on écrit $\int_a^{\infty} f(t)dt$ par cette limite.

Intégrable généralisée en une borne finie

$f :]a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ existe si $\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$ est finie

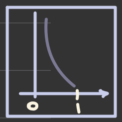
Il est possible que $\int_a^{\infty} \dots$ ou $\int_a^b \dots$ peuvent exister sans que $\lim_{x \to +\infty} f = 0$ ou $\lim_{x \to a^+}$ soit finie, contrairement aux suites numériques.

- $\lim_{x \to 0} \int_0^x f(t)\,dt \simeq \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < +\infty$



↳ $f \not\to 0$ mais son intégrale généralisée existe

- On cherche $f \in C^0(]0,1])$ tel que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ mais $\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 f(t)\,dt$ existe.



— Regardons $f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$; $f_2(t) = \ln(t)$

$$\int_x^1 \frac{2\,dt}{2\sqrt{t}} = 2\left[\sqrt{t}\right]_x^1 = 2(1-\sqrt{x})$$

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \; ; \; \int_x^1 \ln(u)du = \left[u\ln(u) - u\right]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x$$

Alors $\lim_{x \to 0^+} (-1 - x\ln(x) + x) = -1$

Convergence "Semi" / Absolue

On dit que f est intégrable sur $]a,b[$ (a,b pouvant être $\pm\infty$) si l'intégrale généralisée de $|f|$ est CV. Dans ce cas, l'intégrale de f est absolument CV.

- Si $\int_a^b |f|$ existe au sens généralisé, alors $\int_a^b f$ existe
- Si $\int_a^b f$ existe mais pas $\int_a^b |f|$, on parle d'intégrale SEMI-CV

⚠ On ne peut pas faire de IPP à l'∞
car on peut avoir : $\overset{\text{existe}}{\int_0^\infty u'v\,dx} = \overset{\infty}{[uv]_0^\infty} \overset{-}{-} \overset{\infty}{\int_0^\infty uv'\,dx}$

- $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

$\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \left[\frac{-\cos(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A (-\cos(x))\left(\frac{-1}{x^2}\right)dx$

En posant $u' = \sin(x)$; $u = -\cos(x)$; $v = \frac{1}{x}$; $v' = \frac{-1}{x^2}$

On a donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{-\cos(A)}{A} + \frac{\cos(1)}{1} = \cos(1)$

- $\int_1^A \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| dx \leq \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A} \leq 1$

On a donc mq $\int_1^\infty \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| dx$ existe au sens généralisé
donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}$ aussi.
Puis $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}$ aussi $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Relation de Chasles

Soient $a = x_1 < \dots < x_n = b$. On suppose f est cpm sur $]x_i, x_{i+1}[$. On dit que l'intégrale généralisée sur $]a,b[$ existe si elle existe sur chacun des $]x_i, x_{i+1}[$ et alors $\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt$

Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est CV et $b \in [a, +\infty[$, alors $\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ aussi et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_b^{+\infty} f(t)\,dt + \int_a^b f(t)\,dt$

Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ DV, alors $\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ aussi.

Linéarité

Soit $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions continues.
Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergent et si λ et μ sont deux nb réels, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx$ converge et vaut :

$$\lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)\,dx .$$

Par passage à la limite.

Reste d'une integrale CV

Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ CV, alors $R(T) = \int_T^{+\infty} f(t)\,dt$ est bien définie $\forall T \geq a$ (par Chasles)

Proposition

$$R(T) \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0$$

Par Chasles.

Convergence absolue

On dit que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ CV abs si $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ CV

Proposition

Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge absolument, alors elle CV.

Soit $F(T) = \int_a^T f(t)\,dt$ et $G(T) = \int_a^T |f(t)|\,dt$.
Par hyp. $G(T)$ CV quand $T \to +\infty$.
Soit (U_n), $U_n \to +\infty$. D'après le lemme (voir après) $G(U_n)$ CV qd $n \to +\infty$, donc est de Cauchy.
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq m \geq N \; |G(U_n) - G(U_m)| \leq \varepsilon$
Donc $\displaystyle\int_{\min(U_m, U_n)}^{\max(U_m, U_n)} |f(t)|\,dt \leq \varepsilon \Rightarrow \left| \int_{\min(U_m, U_n)}^{\max(U_m, U_n)} f(t)\,dt \right| \leq \varepsilon$

Donc $|F(U_m) - F(U_n)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$
La suite $(F(U_n))_{n \geq 0}$ est donc de Cauchy, donc elle CV. Ceci est vrai $\forall (U_n)$, $U_n \to +\infty$, donc d'après le lemme, $F(T)$ CV qd $T \to +\infty$ et donc $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est CV.

Lemme

Soit $F : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, $F(T)$ cv qd $T \to +\infty$

$\iff F(u_n)$ cv qd $n \to +\infty$ $\forall (u_n)_n$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow$ clair : caract. séq. de la lim.

$\Leftarrow$ Soit $(u_n), (v_n)$ $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Par hyp, $\exists l$ et $l' \in \mathbb{R}$, $F(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $F(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$

Soit w_n défini par $w_{2n} = u_n$; $w_{2n+1} = v_n$

$w_n \to +\infty$ car w_{2n} et $w_{2n+1} \to +\infty$

Donc $F(w_n)$ CV en $n \to +\infty$: $F(w_{2n}) \to l$, $F(w_{2n+1}) \to l'$ $\Rightarrow l = l'$

Donc $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $\forall u_n$ tq $u_n \to +\infty$, $F(u_n) \to l$

Par caractérisation seq. de la limite, $F(T)$ CV qd $T \to +\infty$.

Semi-convergence

Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est CV sans être abs. CV.

On dit qu'elle est semi-convergente.

Convergence sur]a,b]

Soit f_b continu et définie sur $]a,b]$, on dit $\int_a^b f(t)dt$ CV si $\int_{a+\varepsilon}^b f(t)dt$ existe qd $\varepsilon \to 0^+$.

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)dt := \lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(t)dt$

Sinon on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est DV

Proposition

Supposons f définie et continue sur $]a,b]$ et admet un prolongement par continuité en a.

Soit $\hat{f} : [a,b]$ le prolongement.

Alors $\int_a^b f(t)dt$ est cv et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \hat{f}(t)dt$

Soit F primitive de $\hat{f}$ sur $[a,b]$, $F'(t) = \hat{f}(t)$ $\forall t \in [a,b]$

$= f(t)$ $\forall t \in]a,b]$

F dérivable et continue.

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a+\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{} F(b) - F(a)$

$= \int_a^b \hat{f}(t)dt$

Proposition

Si $f(t) \geq 0$, $\forall t \in [a, +\infty[$, alors :

- Soit $\left\{ \int_a^T f(t)dt,\ T \in [a, +\infty[\right\}$ est majorée, et alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est CV.
- Soit $\left\{ \int_a^T f(t)dt,\ T \in [a, +\infty[\right\}$ n'est pas majoré, et alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$

Théorème de comparaison

Si $0 \leq f(t) \leq g(t)$ sur $[a, +\infty[$, alors

- Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ CV, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ CV
- Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ DV, alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ DV

Intégrale de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_1^T \frac{1}{t^\alpha}dt \overset{\alpha \neq 1}{=} \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^T = \frac{T^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} \xrightarrow[T \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\overset{\alpha = 1}{=} [\ln(t)]_1^T = \ln(T) \xrightarrow[T \to +\infty]{} +\infty$$

Intégrale exponentielle

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda \leq 0 \\ \frac{1}{\lambda} & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T e^{-\lambda t}dt = \begin{cases} \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^T \ (\text{si } \lambda \neq 0) = \frac{e^{-\lambda T} - 1}{\lambda} \xrightarrow[T \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda < 0 \\ \frac{1}{\lambda} & \text{si } \lambda > 0 \end{cases} \\ [t]_0^T \ (\text{si } \lambda = 0) = T \xrightarrow[T \to +\infty]{} +\infty \end{cases}$$