PARTIEL : Algorithme et Programmation Université Paris-Dauphine MIDO L2

Exercice 1 *1. Donnez la définition de* $\log_b x$ *en utilisant la notation puissance* b^x.

2. Combien valent $\lfloor \log_2(1025) \rfloor$, $\lfloor \log_3(72) \rfloor$ *?*

3. En utilisant uniquement la définition donnée au 1. donnez et démontrez le statut des propositions suivantes (vraies ou fausses):

(a) $\log_2 8 = 4$

(b) $\log_2 8 = 3$

(c) $\log_b n = \log_b a + \log_a n$.

(d) $\log_b n = \log_b a \times \log_a n$.

(e) $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$

(f) $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$.

(g) $a^{\log_n b} = n^{\log_b a}$.

(h) $(b^q)^{\log_b a} = a^q$.

Exercice 2 *Soit* `oracle(n)` *une fonction python que l'on peut appeler avec un entier* `n` *en entrée, et qui retourne 0 ou 1. Réécrire le programme suivant sans utiliser de boucle* `for`

```
def f(n):
        y=0
        for i in range(n):
                if oracle(n)==1:
                        y=y+1
        return y
```

Exercice 3 *Réécrire le programme suivant sans utiliser les opérateurs* `//` *ou* `/`

```
def f(x,y):
        return x//y
```

Exercice 4 *Réécrire le programme suivant sans utiliser l'opérateur* `%`

```
def f(x,y):
        return x%y
```

Exercice 5 *Quelle est la valeur de* `y` *après l'appel* `f(28)` *?*

```
y=0
def f(x):
        global y
        if x>0:
                f(x//3)
                f(x//3)
                f(x//3)
        else:
                y=y+1
```

Exercice 6 *Quelle est la valeur de* `y` *après l'appel* `f(33)` *?*

```
y=0
def f(x):
        global y
        if x>0:
                f(x//3)
                f(x//3)
                f(x//3)
                y=y+1
```

Exercice 7 *Soient deux entiers x, b tels que*

$$x = \sum_{i=0}^{k} x_i b^i$$

avec $k = \lfloor \log_b x \rfloor$.

1. *Donnez un code python qui prend x et b en entrée et retourne $\lfloor \log_b x \rfloor$.*
2. *Donnez un code python qui prend x et b en entrée et retourne le tableau $[x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1, x_0]$.*
3. *Démontrez que $\forall i$, x_i est défini de manière unique.*

Exercice 8 *Montrez que $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} = \Theta(\log n)$.*

Exercice 9 *Montrez que $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.*

Exercice 10 *Donnez la complexité de algorithmes élémentaires d'addition et de multiplication de deux entiers, et expliquez en détail le résultat. Montrez que la complexité de la multiplication ne peut pas être améliorée par un algorithme récursif naïf.*

$$p \sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-p)^k$$

$$\left(\frac{(k-1)!}{i!\,(k-1-i)!} \right) (-p)^i$$

$$= \left(\frac{k!}{i!\,(k-1-i)!} \right) (-p)^i$$

$$= \frac{1}{i} (1-p)^k$$

$$\sum_{k=1}^{N} k (1-p)^{k-1} - \sum_{k=1}^{N} k (1-p)^k = \sum_{k=1}^{N} (1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{N} (k-1)(1-p)^{k-1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} p (1-p)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (1-p)^{k-1} + 0 - N(1-p)^N$$

$$=$$