Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2021 - 2022)

**Partiel - Vendredi 22 octobre 2021.**

*durée : 2h00.*

*Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.*
*La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.*
*Le barème est donné à titre indicatif.*

**Questions de cours.** On considère un ensemble $\Omega$.

1. Donner la définition d'une tribu sur $\Omega$.
2. Donner la définition d'une mesure de probabilité.
3. Donner la définition d'une variable aléatoire réelle.

**Correction.** C'est du cours.

**Exercice 1.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $E$ et $F$ deux événements.

1. Montrer que si $\mathrm{P}(E) = 1$ alors $\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(E)$.
2. Montrer que si $\mathrm{P}(E) = 0$ alors $\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(F)$.

On définit

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mathrm{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathrm{P}(A) = 1\}.$$

3. Montrer que $\mathcal{G}$ est une tribu.

**Correction.**

1. On note $E \subset E \cup F$ donc $1 = \mathrm{P}(E) \leq \mathrm{P}(E \cup F)$.
2. On a $E \cup F = F \cup (E \setminus F)$ et l'union est disjointe donc $\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(F) + \mathrm{P}(E \setminus F)$. Or $(E \setminus F) \subset E$ donc $\mathrm{P}(E \setminus F) \leq \mathrm{P}(E) = 0$.
3. Nous avons trois points à vérifier :
   (a) On a $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ donc $\emptyset \in \mathcal{G}$
   (b) Soit $A \in \mathcal{G}$. Comme $\mathrm{P}(A) \in \{0, 1\}$, $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A) \in \{0, 1\}$ et donc $A^c \in \mathcal{G}$.
   (c) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de parties dans $\mathcal{G}$.
   - S'il existe $n_0$ tel que $\mathrm{P}(A_{n_0}) = 1$ alors $\cup_{n \geq 1} A_n \supset A_{n_0}$ donc $\mathrm{P}(\cup_{n \geq 1} A_n) \geq \mathrm{P}(A_{n_0}) = 1$. D'où $\mathrm{P}(\cup_{n \geq 1} A_n) = 1$. Donc $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{G}$. *On pouvait bien sûr utiliser directement la question* 1 *en écrivant* $\cup_{n \geq 1} A_n = A_{n_0} \cup (\cup_{n \neq n_0} A_n)$
   - Sinon pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{P}(A_n) = 0$. On a alors par sigma sous-additivité $\mathrm{P}(\cup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mathrm{P}(A_n) = 0$. Et à nouveau $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{G}$

**Exercice 2.**

1. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

2. En déduire les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction $F$ définie par

$$F(x) = \frac{a(x+4)}{b+|x|} 1_{]-4,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

soit une fonction de répartition.

**Correction.**

1. Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle **si et seulement si** elle est : croissante ; continue à droite ; vérifie $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
2. La fonction $F$ vérifie la troisième condition si et seulement si $a = 1$. On considère donc maintenant $a = 1$. On vérifie alors que $F$ est càd si et seulement si le dénominateur ne s'annule pas ce qui équivaut à $b > 0$ ce que l'on supposera désormais. Enfin, en dérivant, on vérifie que $F$ est croissante sur $]0, +\infty[$ et sur $[-\infty, 0[$ si et seulement si $b \geq 4$. On en déduit que la fonction $F$ est fonction de répartition d'une variable aléatoire si et seulement si $a = 1$ et $b \geq 4$.

**Exercice 3.** On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ et $X$ une variable aléatoire réelle sur cet espace de loi uniforme sur $[0, 1]$. On fixe également un réel $p$ dans $]0, 1[$.

1. Montrer que $Y = 1_{\{X\leq p\}}$ est une variable aléatoire.
2. Est elle-discrète ? À densité ? Donner sa loi.
3. On considère trois réels $a < b < c$ ainsi que trois réels $p, q$ et $r$ dans $]0, 1[$ tels que $p + r + q = 1$. Construire une variable $Z$ à l'aide de $X$ tel que $Z$ prenne la valeur $a$ (resp. $b$, $c$) avec probabilité $p$ (resp. $q$, $r$).
4. Donner et tracer la fonction de répartition de $Z$.

**Correction.**

1. Comme $Y$ est à valeur dans $\{0, 1\}$, il suffit de vérifier que $\{Y = 1\}$ et $\{Y = 0\}$ sont dans $\mathcal{F}$. Or $\{Y = 1\} = \{X \leq p\}$ et comme $X$ est une variable aléatoire ce dernier ensemble est bien un événement de $\mathcal{F}$. De la même façon $\{Y = 0\} = \{X > p\} \in \mathcal{F}$.
2. La variable $Y$ est discrète puisque elle prend un nombre fini de valeurs. Elle ne peut donc pas être à densité puisqu'elle prend au moins une de ces valeurs avec probabilité strictement positive. Sa loi est caractérisée par $Im(Y) = \{0, 1\}$ et $\mathrm{P}(Y = 1) = 1 - \mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{P}(X \leq p) = p$.
3. On définit $Z = a1_{X\leq p} + b1_{p<X\leq p+q} + c1_{p+q<X}$. En raisonnant de même on vérifie aisément que $Z$ est une variable aléatoire discrète dont la loi est caractérisée par $Im(Z) = \{a, b, c\}$ et $\mathrm{P}(Z = a) = \mathrm{P}(X \leq p) = p$, $\mathrm{P}(Z = b) = \mathrm{P}(p < X \leq p + q) = q$ et $\mathrm{P}(Z = c) = \mathrm{P}(p + q < X) = r$.
4. La fonction de répartition de $Z$ est définie par $F : u \to \mathrm{P}(Z \leq u)$ et vérifie donc $F(u) = 0$ si $u < a$, $F(u) = p$ si $a \leq u < b$, $F(u) = p + q$ si $b \leq u < c$ et $F(u) = 1$ si $c \leq u$.

**Exercice 4.** Soit $p \in ]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ satisfait la propriété $(\star)$ si

$$\mathrm{P}(X = n) = p\,\mathrm{P}(X \geq n) \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

1. Que vaut $\mathrm{P}(X = 1)$ ?
2. Montrer que si $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ alors $X$ satisfait $(\star)$.
3. Soit $X$ une variable satisfaisant $(\star)$. On note $G : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la fonction qui a tout $n \geq 1$ associe $G(n) = \mathrm{P}(X \geq n)$. Calculer $G$.
4. En déduire la loi de $X$.

**Correction.**

1. On a $\mathrm{P}(X = 1) = p\,\mathrm{P}(X \geq 1) = p$.
2. Supposons que $X \rightsquigarrow Geo(p)$. Pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{P}(X \geq n) = \sum_{k \geq n} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k \geq n} (1-p)^{k-1} p = (1-p)^{n-1}$ et $\mathrm{P}(X = n) = (1-p)^{n-1} p$. On en déduit que $X$ satisfait à $(\star)$.
3. Soit $X$ une variable satisfaisant $(\star)$. On note que pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{P}(X = n) = \mathrm{P}(X \geq n) - \mathrm{P}(X \geq n+1) = G(n) - G(n+1)$. On en déduit que $G$ satisfait la relation de récurrence :

   $$G(n+1) = (1-p)G(n) \quad n \geq 1,$$

   et comme $G(1) = 1$, on en déduit par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $G(n) = (1-p)^{n-1}$.
   *On notera la coquille dans le sujet : $G$ n'est bien sûr pas à valeur dans $\mathbb{N}^*$ mais dans $[0,1]$.*
4. On déduit que pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{P}(X = n) = G(n) - G(n+1) = (1-p)^{n-1} - (1-p)^n = (1-p)^{n-1} p$ et on reconnait une variable géométrique de paramètre $p$.