Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2022 - 2023)

Examen de seconde session - Vendredi 28 juin 2023.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ désigne un espace de probabilité.

Exercice 1.

1. Rappeler la définition d'une variable aléatoire réelle.
2. Montrer que 1_A est une variable aléatoire si et seulement si $A \in \mathcal{F}$.
3. Que signifie : « les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont indépendants », où I est un ensemble d'indices quelconque.
4. Soit X une variable intégrable de densité f paire. Montrer que $\mathrm{E}(X) = 0$.
5. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité. On suppose que $P(X = Y) = 1$.
   (a) Montrer que X et Y ont la même loi.
   (b) Montrer que la réciproque est fausse.
   (c) Montrer que pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.
6. Vrai ou Faux
   (a) Soit X une variable aléatoire positive. Alors $\mathrm{E}(X)$ est bien défini et $\mathrm{E}(X) \geq 0$.
   (b) Soit X une variable aléatoire positive. Alors $\mathrm{E}(X) < +\infty$.
   (c) Soit X une variable aléatoire intégrable alors X^2 est également intégrable.
   (d) Soit X une variable aléatoire de carré intégrable alors X est également intégrable.
7. Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \pi]$. Déterminer la loi de $\sin(V)$.

Exercice 2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} ae^{x} & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + b & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs du couple (a, b), la fonction $F_{a,b}$ est elle une fonction de répartition ?
2. Pour quelles valeurs du couple (a, b) la loi associée à $F_{a,b}$ est une loi à densité ? Donner les densités correspondantes.
3. Pour toutes les valeurs obtenues à la question 2, préciser si la variable admet une espérance et si c'est le cas la calculer.

Exercice 3. Soit N un entier. On considère N variables aléatoires indépendantes $(Y_i)_{1\leq i\leq N}$ de loi Unif$([0,N])$. On note

$$X_N = \min\{Y_i,\ 1 \leq i \leq N\}.$$

1. Calculer la fonction de répartition F_N de X_N.
2. Pour tout $t \geq 0$, calculer $F(t) = \lim_{N\to+\infty} F_N(t)$ et reconnaitre en F la fonction de répartition d'une loi connue.

Exercice 4. On considère une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires.

1. Rappeler l'énoncé du premier lemme de Borel Cantelli.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de probabilité 1. Montrer que $\cap_{n\geq 1} A_n$ est également de probabilité 1.
3. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(|Z_n| > \varepsilon) < +\infty$. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 p.s.

On suppose maintenant de plus que pour tout entier $n \geq 1$, Z_n est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre n.

4. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Montrer que presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Z_n < Z_1$.

On suppose maintenant de plus que les variable aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes.

6. (Bonus : utiliser les outils de *Probabilités 2*) Calculer $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(Z_n > Z_1)$. Faut-il s'étonner de ce résultat ?