Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Algèbre linéaire 3
Année 2020/2021

Corrigé (succinct) de l'examen d'appel du 29 juin 2021

Exercice 1. Pour tout nombre réel a, soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q_a(x) = a({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2) - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

1. Effectuer une réduction de Gauss de q_a en tenant compte de la valeur de a. Pour quelles valeurs de a la forme est-elle non dégénérée ? Montrer qu'elle est définie positive si et seulement si $a > 2$.

Pour $a = 0$, on a :

$$q_0(x) = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2{x_3}^2$$

et donc $\mathrm{sign}(q_0) = (2,1)$.
Pour $a \neq 0$, on a

$$q_a(x) = a\left(x_1 - \frac{x_2}{a} - \frac{x_3}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{a}\right){x_2}^2 + \left(a - \frac{1}{a}\right){x_3}^2 - 2\left(1 + \frac{1}{a}\right)x_2x_3.$$

Si $a = 1$, on trouve

$$q_1(x) = (x_1 - x_2 - x_3)^2 - 4x_2x_3 = (x_1 - x_2 - x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2,$$

d'où $\mathrm{sign}(q_1) = (2,1)$.
Si $a = -1$, on a

$$q_{-1}(x) = -(x_1 - x_2 - x_3)^2,$$

d'où $\mathrm{sign}(q_{-1}) = (0,1)$.
Enfin, si $a \notin \{-1,0,1\}$, on trouve

$$q_a(x) = a\left(x_1 - \frac{x_2}{a} - \frac{x_3}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(x_2 - \frac{1}{a-1}x_3\right)^2 + \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{(a-1)^2}\right){x_3}^2.$$

Une étude de signe des coefficients apparaissant dans cette forme réduite montre alors que

$$\mathrm{sign}(q_a) = \begin{cases} (0,3) & \text{si } a \in]-\infty,-1[\\ (2,1) & \text{si } a \in]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,2[\\ (2,0) & \text{si } a = 2 \\ (3,0) & \text{si } a \in]2,+\infty[\end{cases}.$$

En conclusion, on trouve

$$\mathrm{sign}(q_a) = \begin{cases} (0,3) & \text{si } a \in]-\infty,-1[\\ (0,1) & \text{si } a = -1 \\ (2,1) & \text{si } a \in]-1,2[\\ (2,0) & \text{si } a = 2 \\ (3,0) & \text{si } a \in]2,+\infty[\end{cases}.$$

La forme quadratique est donc non dégénérée pour tout a différent de -1 et 2 et définie positive pour tout a strictement plus grand que 2.

2. Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2,2,1)$. Trouver une base de l'orthogonal $D^\perp$ de D pour la forme q_0. Les sous-espaces D et $D^\perp$ sont-ils supplémentaires ?

La forme polaire de q_0 est

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ b(x,y) = -(x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2).$$

Par définition, l'orthogonal de D pour la forme q_0 est alors

$$D^\perp = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\right\},$$

et une base de ce sous-espace vectoriel est donnée par la famille $\{(-4,0,3),(0,-4,3)\}$.
La famille $\{(2,2,1),(-4,0,3),(0,-4,3)\}$ étant libre, on en déduit que D et $D^\perp$ sont supplémentaires.

Exercice 2. Soit n un entier naturel non nul et $x_0,\dots,x_n$ des réels distincts. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et l'application φ définie par

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On note tout d'abord que φ est une application de $(\mathbb{R}_n[X])^2$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i) = \sum_{i=0}^{n} Q(x_i)P(x_i) = \varphi(Q,P),$$

$$\begin{aligned}\forall (P,Q,R) \in (\mathbb{R}_n[X])^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda P + Q, R) &= \sum_{i=0}^{n} (\lambda P + Q)(x_i)R(x_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n} (\lambda P(x_i) + Q(x_i))R(x_i)\\ &= \lambda \sum_{i=0}^{n} P(x_i)R(x_i) + \sum_{i=0}^{n} Q(x_i)R(x_i)\\ &= \lambda\,\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)\end{aligned}$$

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P,P) = \sum_{i=0}^{n} (P(x_i))^2 \geq 0,$$

et

$$\varphi(P,P) = 0 \iff \forall i \in \{0,\dots,n\},\ (P(x_i))^2 = 0 \iff \forall i \in \{0,\dots,n\},\ P(x_i) = 0,$$

d'où P est de degré inférieur ou égal à n et admet au moins $n+1$ racines distinctes, ce qui implique que $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.
On peut donc conclure que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \varphi(XP,Q) = \varphi(P,XQ).$$

On a

$$\begin{aligned}\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \varphi(XP,Q) &= \sum_{i=0}^{n} (XP)(x_i)Q(x_i) = \sum_{i=0}^{n} x_iP(x_i)Q(x_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n} P(x_i)x_iQ(x_i) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)(XQ)(x_i) = \varphi(P,XQ).\end{aligned}$$

3. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire (on pourra considérer la famille des polynômes de Lagrange associés aux nœuds $x_0,\dots,x_n$).

Soit $(L_k)_{k=0,\dots,n}$ la famille des polynômes de Lagrange associés aux nœuds $x_0,\dots,x_n$. On a

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ \|L_k\|^2 = \varphi(L_k,L_k) = \sum_{i=0}^{n}(L_k(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{n}(\delta_{ik})^2 = 1,$$

$$\forall (k,l) \in \{0,\dots,n\}^2,\ k \neq l,\ \varphi(L_k,L_l) = \sum_{i=0}^{n} L_k(x_i)L_l(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\delta_{ik}\delta_{il} = \delta_{kl} = 0.$$

La famille des polynômes de Lagrange associés aux nœuds $x_0,\dots,x_n$ est donc une famille orthonormale de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$. C'est donc une base orthonormale de cet espace.

Exercice 3. Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0,1]$ et N l'application définie par

$$\forall f \in E,\ N(f) = \left((f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que N est une norme euclidienne sur E et déterminer le produit scalaire auquel elle est associée.
Soit b l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (f,g) \in E^2,\ b(f,g) = \frac{1}{2}\left((N(f+g))^2 - (N(f))^2 - (N(g))^2\right),$$

soit, après calculs,

$$\forall (f,g) \in E^2,\ b(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a

$$\forall (f,g) \in E^2,\ b(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = g(0)f(0) + \int_0^1 g'(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = b(g,f),$$

l'application est donc symétrique,

$$\begin{aligned}\forall (f,g,h) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ b(\lambda f+g,h) &= (\lambda f+g)(0)h(0) + \int_0^1 (\lambda f+g)'(t)h'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= (\lambda f(0)+g(0))h(0) + \int_0^1 (\lambda f'(t)+g'(t))h'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda f(0)h(0) + g(0)h(0) + \lambda\int_0^1 f'(t)h'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 g'(t)h'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda\left(f(0)h(0) + \int_0^1 f'(t)h'(t)\,\mathrm{d}t\right) + g(0)h(0) + \int_0^1 g'(t)h'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda\, b(f,h) + b(g,h),\end{aligned}$$

l'application est donc linéaire par rapport à son premier argument et donc, par symétrie, bilinéaire. Enfin, on a

$$\forall f \in E,\ b(f,f) = (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \geq 0,$$

par positivité de l'intégrale notamment. De plus, il vient

$$b(f,f) = 0 \iff (f(0))^2 = 0 \text{ et } \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t = 0 \implies (f(0))^2 = 0 \text{ et } \forall t \in [0,1],\ (f'(t))^2 = 0,$$

par continuité et positivité de $(f')^2$ sur $[0,1]$. On en déduit que

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall t \in [0,1],\ f'(t) = 0,$$

ce qui signifie encore que la fonction f est constante, de valeur égale à $f(0)$, sur l'intervalle $[0,1]$, d'où $f=0$. L'application b est donc un produit scalaire sur E et l'application $f \mapsto \sqrt{b(f,f)} = N(f)$ est une norme euclidienne sur E.

Exercice 4. On rappelle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

On considère le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et les vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ définis par

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ x_k = k \text{ et } y_k = \sqrt{k}.$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} = \langle x,y\rangle \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k}$$
$$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} = \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}}.$$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_k)_{k=1,\dots,n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right) \geq n^2.$$

On considère de nouveau le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et les vecteurs y et z de $\mathbb{R}^n$ définis par

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ y_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}} \text{ et } z_k = \sqrt{x_k}.$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a alors

$$\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)^2 = (\langle y,z\rangle)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(y_k)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right).$$

Exercice 5. Soit $E=\mathbb{R}^3$ et le produit scalaire sur E défini par

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2).$$

Déterminer une base orthonormale de E muni de ce produit scalaire.
On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt à la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ afin d'obtenir une base orthonormée (u_1,u_2,u_3). On trouve successivement

$$\|e_1\| = \sqrt{2},\ \text{d'où } u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\langle e_2,u_1\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}},\ e_2 - \langle e_2,u_1\rangle u_1 = \frac{1}{4}e_1 + e_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\1\\0\end{pmatrix},$$

d'où $u_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\langle e_3, u_1 \rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \langle e_3, u_2 \rangle = -\frac{5}{2\sqrt{30}},\ e_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle e_3, u_i \rangle\, u_i = \frac{1}{3}\, e_1 + \frac{1}{3}\, e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où $u_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Exercice 6. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que M est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec leurs multiplicités respectives et donner son polynôme minimal.

La matrice M est réelle symétrique, on sait donc qu'elle est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles. Le calcul de $M^\top M$ montre que la matrice est de plus orthogonale, ce qui réduit ses valeurs propres possibles à -1 ou 1. D'autre part, la trace de M vaut $\frac{1}{9}(1+1+7) = 1$ et on sait qu'elle est invariante par changement de base. Ainsi, la somme des valeurs propres de M (en tenant compte de leur multiplicité) est égale à 1, ce qui permet d'en déduire que -1 est une valeur propre simple et 1 est une valeur propre double. Enfin, la matrice M étant diagonalisable, on sait que son polynôme minimal est nécessairement scindé à racines simples, d'où $\mu_M(X) = (X+1)(X-1)$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel euclidien, de norme notée $\|\cdot\|$, et u une isométrie vectorielle de E. On pose $v = u - id_E$, où id_E désigne l'application identité de E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(v) = (\operatorname{Im}(v))^\perp$. En déduire que $(\operatorname{Ker}(v))^\perp = \operatorname{Im}(v)$.

On a d'une part

$$y \in \operatorname{Ker}(v) \iff v(y) = 0_E \iff u(y) = y,$$

et d'autre part

$$z \in \operatorname{Im}(v) \iff \exists x \in E,\ v(x) = z \iff \exists x \in E,\ u(x) - x = z,$$

et par conséquent

$$\langle y, x \rangle = \langle y, u(x) - x \rangle = \langle y, u(x) \rangle - \langle y, x \rangle = \langle u(y), u(x) \rangle - \langle y, x \rangle = \langle y, x \rangle - \langle y, x \rangle = 0,$$

car u est une isométrie vectorielle. On en déduit que $\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Im}(v)^\perp$. On conclut alors en utilisant que

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(v)) + \dim(\operatorname{Ker}(v)) = \dim(\operatorname{Im}(v)) + \dim(\operatorname{Im}(v)^\perp),$$

la seconde égalité s'obtenant par passage au complémentaire orthogonal, l'espace E étant de dimension finie.

2. Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k,$$

où $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$. On va montrer que, pour tout vecteur x de E, la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\operatorname{Ker}(v)$.

   (a) Soit y un vecteur de $\operatorname{Ker}(v)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(y) = y.$$

On a précédemment vu que $u(y) = y$ et on montre donc aisément que, pour tout entier naturel k non nul, on a $u^k(y) = y$. On en déduit que, pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y = y$.

(b) Soit à présent z un vecteur de $(\mathrm{Ker}(v))^{\perp}$. En se servant de la première question, montrer qu'il existe un vecteur z' de E tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(z) = \frac{1}{n}\left(u^{n+1}(z') - z'\right).$$

En déduire que la suite $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite le vecteur nul.

On a vu que $(\mathrm{Ker}(v))^{\perp} = \mathrm{Im}(v)$, il existe donc un vecteur z' de E tel que $z = v(z')$. On a donc $u(z) = u(v(z')) = u^2(z') - u(z')$, d'où, en raisonnant par récurrence, $u^k(z) = u^{k+1}(z') - u^k(z')$ pour tout entier naturel k non nul. Par conséquent, on trouve que

$$u_n(z) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=2}^{n+1} u^k(z') - \sum_{k=1}^{n} u^k(z')\right) = \frac{1}{n}(u^{n+1}(z') - u(z')).$$

Par passage à la limite, il vient enfin

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \|u_n(z)\| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\|u^{n+1}(z') - u(z')\| \leq \|z'\| \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0,$$

puisque, pour tout entier naturel n non nul, $\|u^{n+1}(z')\| = \|u(z')\| = \|z'\|$, u étant une isométrie vectorielle. On en déduit la conclusion.

(c) Conclure.

Tout vecteur x de E peut s'écrire comme la somme $y + z$, avec y dans $\mathrm{Ker}(v)$ et z dans $(\mathrm{Ker}(v))^{\perp}$, y étant par ailleurs le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(v)$. Les deux dernières questions permettent alors de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(y) + \lim_{n\to+\infty} u_n(z) = y + 0_E = y,$$

ce qui est le résultat attendu.