Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Algèbre linéaire 3
Année 2020/2021

Examen d'appel du 29 juin 2021

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2h

Exercice 1 (5 points). Pour tout nombre réel a, soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q_a(x) = a({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2) - 2\,x_1x_2 - 2\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3.$$

1. Effectuer une réduction de Gauss de q_a en tenant compte de la valeur de a. Pour quelles valeurs de a la forme est-elle non dégénérée ? Montrer qu'elle est définie positive si et seulement si $a > 2$.
2. Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2,2,1)$. Trouver une base de l'orthogonal $D^\perp$ de D pour la forme q_0. Les sous-espaces D et $D^\perp$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 2 (4 points). Soit n un entier naturel non nul et $x_0, \dots, x_n$ des réels distincts. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et l'application φ définie par

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que
$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \varphi(XP,Q) = \varphi(P,XQ).$$
3. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire (on pourra considérer la famille des polynômes de Lagrange associés aux nœuds $x_0, \dots, x_n$).

Exercice 3 (3 points). Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0,1]$ et N l'application définie par

$$\forall f \in E,\ N(f) = \left((f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que N est une norme euclidienne sur E et déterminer le produit scalaire auquel elle est associée.

Exercice 4 (4 points). On rappelle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_k)_{k=1,\dots,n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \geq n^2.$$

Exercice 5 (3 points). Soit $E = \mathbb{R}^3$ et le produit scalaire sur E défini par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2).$$

Déterminer une base orthonormale de E muni de ce produit scalaire.

Exercice 6 (4 points). On considère la matrice

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que M est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec leurs multiplicités respectives et donner son polynôme minimal.

Exercice 7 (6 points). Soit E un espace vectoriel euclidien, de norme notée $\|\cdot\|$, et u une isométrie vectorielle de E. On pose $v = u - id_E$, où id_E désigne l'application identité de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(v) = (\mathrm{Im}(v))^{\perp}$. En déduire que $(\mathrm{Ker}(v))^{\perp} = \mathrm{Im}(v)$.
2. Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k,$$

où $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$. On va montrer que, pour tout vecteur x de E, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(v)$.

(a) Soit y un vecteur de $\mathrm{Ker}(v)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(y) = y.$$

(b) Soit à présent z un vecteur de $(\mathrm{Ker}(v))^{\perp}$. En se servant de la première question, montrer qu'il existe un vecteur z' de E tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(z) = \frac{1}{n}\left(u^{n+1}(z') - z'\right).$$

En déduire que la suite $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite le vecteur nul.

(c) Conclure.