Elements de correction du CC1

Exercice 1 :

1.) Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$. On en déduit d'abord que $\ln(n!) \leq n \ln n$ puis, par comparaison avec une intégrale, on écrit

$$\forall k \geq 2, \quad \ln k \geq \int_{k-1}^{k} \ln t \, dt,$$

qui donne alors $\ln(n!) \geq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t \, dt = \int_{1}^{n} \ln(t)\, dt = [t \ln t - t]_1^n$
$= n \ln n - n - 1$.

Finalement, $\ln(n!) \sim n \ln n$.

2.) NON. En effet, elle n'est pas convergente puisque $u_{2n} \to 1$ et $u_{2n+1} \to -1$.

3.) OUI. On peut ~~écrit~~ écrire une tranche de Cauchy :

$$\forall p \leq q, \quad |u_p - u_q| = \left| \sum_{p}^{q-1} (u_{k+1} - u_k) \right| \leq \sum_{p}^{q-1} |u_{k+1} - u_k| \leq \sum_{p}^{q-1} \frac{1}{k^2}$$

Or comme la STG $\frac{1}{k^2}$ est convergente on a $\sum_{p}^{q-1} \frac{1}{k^2} < \sum_{p}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ qui tend vers 0 avec p.

Exercice 2 :

1.) $u_n = \left(\frac{n^3}{1+n^3}\right)^n$: Je fais une forme exponentielle : $u_n = \exp\left(n \ln\left(\frac{n^3}{1+n^3}\right)\right)$.

Donc $u_n = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \to 1$.

Comme $u_n \not\to 0$, la STG u_n est divergente.

2.) $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2 - \ln(n)}$: On a $|v_n| = \frac{1}{|n^2 - \ln n|} \sim \frac{1}{n^2}$ donc la STG v_n est absolument convergente, donc convergente.

3.) $w_n = \tan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ donc par CSSA la STG w_n est CV.

Or $|w_n| \sim \frac{1}{n}$ donc la STG w_n n'est pas absolument convergente.

4.) $z_n = \exp(-(\ln n)^{1/2})$: Je fais un test en n^α :

On a $n \exp(-\ln n^{1/2}) = \exp(\ln n - \ln n^{1/2}) \to \infty$ donc la STG z_n est divergente.

Exercice 3 :

1.) Par l'énoncé, $\forall y \in \mathbb{R}$, $|f(2y) - 2f(y)| \leq a$.

Ecrivons ensuite $|f(2^k y) - 2^k f(y)| = \left| \sum_{j=1}^{k} \left(f(2^j y) - 2f(2^{j-1} y)\right) 2^{k-j} \right|$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} |f(2^j y) - 2 f(2^{j-1} y)| \, 2^{k-j} \leq a \sum_{j=1}^{k} 2^{k-j} \leq 2^k a.$$

2.) On écrit, en prenant $y = 2^n x$:

$$\forall n, k, \quad |f(2^{n+k} x) - 2^k f(2^n x)| \leq 2^k a \iff \left| \frac{f(2^{n+k} x)}{2^{n+k}} - \frac{f(2^n x)}{2^n} \right| \leq \frac{a}{2^n}$$ donc

la suite en question est de Cauchy comme au Ex 1, Q 3.

3.) Pour chaque x, la suite $\left(\frac{f(2^n x)}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc elle est convergente car $\mathbb{R}$ est complet. Par ailleurs,

$$|f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)| \leq a$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n} \right| \leq a$$

On fait $n \to \infty$, pour trouver $|g(x+y) - g(x) - g(y)| \leq a$.

4.) On passe à la limite dans $\left| \frac{f(2^k y)}{2^k} - f(y) \right| \leq a$, on trouve que $\forall x, \quad |(f-g)(x)| \leq a$, donc $f-g$ est bornée.

Exercice 4 :

1.) On regarde $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Par comparaison avec une intégrale (à rédiger)

$S_n \sim \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \sim 2\sqrt{n}$. Donc $\alpha = 2$ convient.

2.) a.) On définit $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Alors

$$v_{n+1} - v_n = S_{n+1} - S_n - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+2}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2/n}}\right) - 2\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1\right)$$

Or $$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Finalement $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^{5/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$= -\frac{3}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \sim -\frac{3}{4n^{3/2}}.$$

b.) On déduit de la question précédente que la STG $v_{n+1} - v_n$ est convergente et que donc v_n converge. De plus, par le théorème de sommation des équivalents, les restes de $(v_{n+1} - v_n)$ et $\left(-\frac{3}{4n^{3/2}}\right)$ sont équivalents. On appelle β la limite de v_n, qui est la somme de la STG $v_{n+1} - v_n$. On a

$$\beta - v_n = \sum_{k=n}^{\infty}(v_{k+1} - v_k) \sim -\frac{3}{4}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}} \sim -\frac{3}{4}\int_n^{\infty}\frac{dt}{t^{3/2}} = -\frac{3}{4}\left(+2n^{-1/2}\right) = \frac{-3}{2n^{1/2}}$$

et donc $\beta - v_n = \frac{-3}{2n^{1/2}} + o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \Rightarrow v_n = \beta + \frac{3}{2n^{1/2}} + o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$ d'où $S_n = 2\sqrt{n} + \beta + \frac{3}{2n^{1/2}} + o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$.