Nom : Prénom : TD : Note :

Les questions suivantes sont indépendantes.

Montrer que si une suite de fonctions continues converge uniformément, alors sa limite est continue.

Montrer que si une série $\sum_n u_n(x)$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a,b]$ alors $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t)\,dt$ (*On pourra utiliser sans preuve un et un seul théorème sur les suites de fonctions*).

Pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x \in [0,1]$, on pose

$$u_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}.$$

Etudier la convergence simple sur $[0,1]$ de cette suite de fonctions.

Calculer $I_n = \int_0^1 u_n(t)\,dt$.

Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Donner un argument indépendant du précédent qui montre que la convergence n'est pas uniforme.

Soit α un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.
Lorsqu'elle existe, on note S_α la somme de la série, c'est à dire $S_\alpha \colon x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?

On supposera dans toute la suite de l'exercice que cette condition est remplie.

Montrer que S_α est impaire.

Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Calculer $S_1(1)$.

Quelle est la limite de S_α en $+\infty$?

Montrer que S_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et préciser sa dérivée S'_α (sous forme d'une série de fonctions).

Montrer que S_α est décroissante pour $x \geq 1$.

Montrer que S_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour $\alpha > 1$.

La convergence de S'_α est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^*$ lorsque $\alpha \in]0, 1]$?

Montrer que S_α n'est pas dérivable en 0 pour $\alpha \in]0, 1]$.