Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Algèbre linéaire 3
Année 2020/2021

Contrôle continu du 2 décembre 2020

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 1h30

Exercice 1 (6 points). Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse par une démonstration ou en donnant un contre-exemple, selon le cas.

1. La somme de deux vecteurs isotropes est un vecteur isotrope.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si f et g sont deux formes linéaires sur E, alors l'application $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire sur $E \times E$.
3. Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, alors l'application $(x,y) \mapsto f(x)f(y)$ est définie positive.
4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Si q et q' deux formes quadratiques sur E ayant la même signature, alors il existe deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ telles que la matrice de q relativement à la base $\mathscr{B}$ est égale à la matrice de q' relativement à la base $\mathscr{B}'$.
5. La signature de la forme quadratique $q(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$ sur $\mathbb{R}^3$ est $(3,0)$.
6. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Si u est un endomorphisme de E, alors l'application $x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ est une forme quadratique sur E.

Exercice 2 (5 points). Suivant la valeur du réel λ, déterminer la signature de la forme quadratique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ x = (x_1, x_2),\ q(x) = (1+\lambda)({x_1}^2 + {x_2}^2) + 2(1-\lambda)x_1x_2.$$

Exercice 3 (6 points). Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ sur lequel on considère la forme q définie par

$$\forall P \in E,\ P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2,\ q(P) = {a_1}^2 - 4a_0a_2.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur E.
2. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de E.
3. Déterminer la signature de q et une base q-orthogonale de E. La forme q est-elle dégénérée ?
4. Soit $H = \{P \in E \,|\, P(0) = 0\}$. Donner une base de $H^\perp$, l'orthogonal de H pour la forme q.
5. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

   (a) $H \oplus H^\perp = E$, (b) $\dim(H) + \dim(H^\perp) = \dim(E)$, (c) $(H^\perp)^\perp = H$.

   On justifiera la réponse donnée.

Exercice 4 (5 points). Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle, q une forme quadratique non nulle sur E, de forme polaire b. On définit l'application

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = q(a)q(x) - (b(a,x))^2,$$

où a est un vecteur de E.

1. Montrer que φ est une forme quadratique sur E et déterminer sa forme polaire.
2. Déterminer le noyau de φ en fonction de a et du noyau de q et en déduire dans chaque cas le rang de φ. On distinguera les cas pour lesquels le vecteur a appartient ou pas au noyau de q et au cône isotrope de q.