Nom : Prénom : TD : Note :

Les questions suivantes sont indépendantes.

Donner un exemple de suite de rationnels de Cauchy mais qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ (on justifiera intégralement mais de manière concise).

Prouver qu'une suite de Cauchy est bornée.

Donner un équivalent simple des suites suivantes et conclure quand à la nature de la série de terme général associé.

$u_n = \ln\left(1 + \tan(\frac{1}{n})\right)$

$v_n = 1 - \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{-\frac{1}{n}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$w_n = \ln\left(\cos(\frac{1}{n})\right) \ln\left(\sin(\frac{1}{n})\right)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, et $a \geq 0$ un réel, on définit

$$u_n = \frac{a^n n!}{n^n}.$$

Donner la nature de la série de terme général u_n lorsque $a \neq e$.

Lorsque $a = e$, montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un certain rang.

En déduire alors la nature de la série de terme général u_n.

Soient a_n et b_n deux suites strictement positives telles que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Montrer qu'il existe $M > 0$ telle que $a_n \leq M b_n$.

Montrer que si la série de terme général b_n converge, alors celle de terme général a_n aussi.

Montrer que si la série de terme général a_n diverge, alors celle de terme général b_n aussi.