EXERCICES PRÉPARATOIRES

Un peu d'analyse

Exercice 1 (Distributivités de l'union et de l'intersection) Soit E un ensemble quelconque et $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de parties de E indexées par les éléments d'un ensemble quelconque I.

1. Montrer que pour tout $C \subset E$ on a $C \cap (\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I}(C \cap A_i)$.
2. Montrer que pour tout $C \subset E$ on a $C \cup (\cap_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I}(C \cup A_i)$.
3. Montrer que si pour tout $i \in I$ on a $A_i \subset B_i$ alors $\cup_{i\in I} A_i \subset \cup_{i\in I} B_i$ et $\cap_{i\in I} A_i \subset \cap_{i\in I} B_i$.

Exercice 2 (Série géométrique)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel n on a
$$1 - x^{n+1} = (1-x)\left(\sum_{l=0}^{n} x^l\right).$$
2. En déduire que pour tout nombre réel $x \in]-1,1[$ on a
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l := \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n} x^l.$$

Exercice 3 (Série exponentielle) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$e^x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} := \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n} \frac{x^l}{l!}$$

Indication : utiliser la formule de Taylor-Lagrange.

Ensembles dénombrables

On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$ (ou, de façon équivalente, s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$). Quand un ensemble dénombrable n'est pas fini on dit qu'il est infini dénombrable et on peut montrer (le faire !) qu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exercice 4 (Exemples d'ensembles dénombrables)

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels non-nuls est infini dénombrable.
2. Montrer que l'ensemble noté $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs vérifie $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ et que $\mathbb{Z}$ est infini dénombrable.
3. Montrer que l'ensemble noté $2\mathbb{N}$ des entiers naturels pairs vérifie $2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$ et que $2\mathbb{N}$ est infini dénombrable.
4. Montrer que l'ensemble noté $2\mathbb{N}+1$ des entiers naturels impairs vérifie $2\mathbb{N}+1 \subsetneq \mathbb{N}$ et que $2\mathbb{N}+1$ est infini dénombrable.

5. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^2$ des couples d'entiers naturels est infini dénombrable.
   Indication : on peut penser à une numérotation diagonale par diagonale en partant de $(0,0)$ *; puis* $(1,0)$ *et* $(0,1)$*,* $(2,0),(1,1),(0,2)$ *;* $\cdots$*. Cela permet de construire la bijection de façon assez intuitive. On peut aussi considérer la fonction* φ *définie sur* $\mathbb{N}^2$ *par* $\varphi(p,q)=2^p3^q$*.*
6. En déduire qu'*un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable*.
7. Montrer que $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*
8. Montrer que si $E_1,\dots,E_n,\dots$ est une suite de parties dénombrables d'un ensemble E alors $\cup_{i=1}^{\infty}E_i$ est une partie dénombrable de E. On a donc montré qu'*une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable*

On rappelle en revanche que $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable. N'hésitez pas à relire la très belle preuve reposant sur l'argument de Cantor que vous trouverez par exemple sur wikipedia ou dans l'Annexe A du poly.*

Exercice 5 ($\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable - Preuve de Cantor) La clé de la preuve est le résultat suivant :

Lemme. *L'ensemble* E *des suites à valeurs dans* $\{0,1\}$ *n'est pas dénombrable.*

On raisonne par l'absurde en supposant que E est dénombrable et que ϕ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans E. On peut donc écrire
$$E=\{a^1,a^2,\cdots\}$$
où pour tout $p\in\mathbb{N}$, $a^p=\phi(p)$ est une suite $(a_n^p)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\{0,1\}$.

1. Obtenir une contradiction en considérant la suite $b\in E$ définie par
$$\forall n\geq 1,\quad b_n=\begin{cases}0 & \text{si } a_n^n=1\\ 1 & \text{si } a_n^n=0\end{cases}$$
2. Montrer que le sous-ensemble E' des suites de E constantes égales à 1 à partir d'un certain rang est dénombrable et en déduire que $E\setminus E'$ n'est pas dénombrable.
3. En déduire que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

Pour aller plus loin

Exercice 6 $(*)$($\limsup$ et $\liminf$ de suites de nombres réels) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels.

1. Montrer que les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par
$$v_n=\sup_{k\geq n}u_k \quad \text{et} \quad w_n=\inf_{k\geq n}u_k,$$
   et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, sont monotones.
2. En déduire que $\lim_{n\to\infty}v_n$ et $\lim_{n\to\infty}w_n$ sont définies et montrer que
$$\lim_{n\to\infty}w_n\leq\lim_{n\to\infty}v_n.$$

Les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ ne dépendant que de $(u_n)_{n\geq 1}$ il en va de même pour leurs limites et on note
$$\lim_{n\to\infty}v_n=\limsup_{n\to\infty}u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}w_n=\liminf_{n\to\infty}u_n.$$
Dans la suite on peut supposer dans un premier temps que $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée puis vérifier que tous les résultats restent vrais quand la $\limsup$ ou la $\liminf$ sont non finies.

3. Montrer que si $\limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n$ est bien définie et que dans ce cas
$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n.$$
4. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} u_n$ est bien définie alors
$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n.$$
5. Montrer que pour toutes suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels on a
   (a) $\limsup_{n\to\infty} -x_n = -\liminf_{n\to\infty} x_n$;
   (b) $\liminf_{n\to\infty} -x_n = -\limsup_{n\to\infty} x_n$;
   (c) $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$;
   (d) $\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \leq \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n)$.
6. Montrer que l'on peut extraire de $(u_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite $(x_n)_{n\geq 1}$ et une sous-suite $(y_n)_{n\geq 1}$ telles que
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \liminf_{n\to\infty} u_n.$$
7. Monter que si ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 1}$ alors $\liminf_{n\to\infty} u_n \leq \ell \leq \limsup_{n\to\infty} u_n$.

On a donc montré grâce aux deux dernières questions que la limsup et la liminf sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence.

Exercice 7 $(\star\star)$ Dans cet exercice nous allons montrer le théorème de Cantor-Bernstein :
Soit E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E. Alors il existe une bijection de E dans F.

1. On commence par établir le lemme suivant :
Soit A un ensemble et u une injection de A dans une partie B de A. Alors il existe une bijection de A dans B. Pour cela on note $C_0 = A \setminus B$ et pour tout $n \geq 1$, $C_n = u(C_{n-1})$. On note aussi $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. On définit enfin v par
$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in C \\ x & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$
   (a) Montrer que v est à valeur dans B.
   (b) Montrer que v est injective.
   (c) Montrer que v est surjective.
2. Déduire de ce lemme une preuve du théorème de Cantor-Bernstein.

Exercice 8 $(*)$ Montrer la proposition suivante (qui dit que $\mathbb{N}$ est le "plus petit infini") :

Soit E un ensemble infini. Montrer qu'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E.

On pourra construire par récurrence une injection ϕ de $\mathbb{N}$ dans E.

Exercice 9 $(*)$ Soit E un ensemble. Montrer les résultats suivants :

1. S'il existe une injection f de E dans un ensemble dénombrable alors E est dénombrable.
2. S'il existe une surjection g d'un ensemble dénombrable dans E alors E est dénombrable.

Exercice 10 ($\star$) Montrer le théorème de Cantor :

Soit E un ensemble. Il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

On pourra pour cela utiliser l'ensemble $A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin \phi(x)\}$. Déduire de ce théorème que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

PREMIÈRES EXPÉRIENCES ALÉATOIRES

Dans chaque exercice, on précisera soigneusement l'espace probabilisé sous-jacent.

Exercice 1 (Dés). On lance trois dés équilibrés. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. On obtient au moins un six.
2. On obtient exactement un six.
3. On obtient au moins deux chiffres identiques.
4. Les trois chiffres obtenus ont la même parité.
5. La somme des trois chiffres vaut dix.

Exercice 2 (Pièce). On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. *Face* est obtenu au moins un fois.
2. Les nombres de *face* et *pile* obtenus sont égaux.
3. *Face* est obtenu exactement k fois $(0 \leq k \leq n)$.

Exercice 3 (Tirages ordonnés). On tire successivement sans remise r objets parmi n objets numérotés de 1 à n $(r \leq n)$. Quelle est la probabilité d'obtenir une suite croissante de numéros ?

Exercice 4 (Parties aléatoires). Soit E un ensemble à n éléments, et soit (A, B) un couple de parties de E choisi uniformément au hasard. Quelle est la probabilité pour que

1. $A \cap B = \emptyset$?
2. $A \cup B = E$?
3. A et B forment une partition de E ?
4. $\mathrm{card(A)} = \mathrm{card(B)}$?

Exercice 5 (Urne). Une urne contient n boules noires et r boules rouges que l'on tire sans remise.

1. Quelle est la probabilité que la dernière boule tirée soit rouge ?
2. Calculer la probabilité que la première boule noire soit obtenue au k-ième tirage.
3. En déduire la formule
$$\binom{n+r}{n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n+r-1}{n-1}.$$
4. Calculer la probabilité que la boule obtenue juste après la première boule noire soit rouge.

Exercice 6 (Anniversaires). Sur une classe de 40 étudiants pris *au hasard*, quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour de l'année ?

Exercice 7 (Poker). Le poker se joue avec $4 \times 13 = 52$ cartes, chacune étant la donnée :

- d'une couleur parmi les 4 suivantes : Pique, Trèfle, Cœur, Carreau ;
- d'une valeur parmi les 13 suivantes : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.

Une main est un sous-ensemble constitué de 5 de ces 52 cartes. On tire une main au hasard, uniformément. Quelle est la probabilité d'obtenir les mains suivantes :

1. Quinte flush : 5 cartes de la même couleur et dont les valeurs sont consécutives.
2. Carré : 4 cartes de même valeur.
3. Full : 3 cartes de même valeur et 2 cartes d'une même autre valeur.
4. Couleur : 5 cartes de la même couleur, mais ne formant pas une quinte flush.
5. Suite : 5 cartes de valeurs consécutives, mais ne formant pas une quinte flush.
6. Brelan : 3 cartes d'une même valeur, sans tomber dans l'un des cas précédents.
7. Double-paire : deux cartes d'une même valeur et deux cartes d'une même autre valeur, sans tomber dans l'un des cas précédents.
8. Paire : deux cartes de même valeur, sans tomber dans l'un des cas précédents.

Exercice 8 (Bornes). Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 3/4$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$.

1. Montrer que $1/12 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1/3$.
2. Trouver des exemples où ces bornes sont atteintes.
   Indication : considérer un ensemble Ω à $4 \times 3 = 12$ éléments.
3. Donner un encadrement similaire pour $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 9 $(*)$ (Formule du crible). Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des évenements quelconques d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Démontrer la formule du crible de Poincaré :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ S \neq \emptyset}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right).$$

Indication : par récurrence.

Exercice 10 (Adresses). Vous écrivez une lettre pour chacun de vos n amis. Après avoir soigneusement refermé les enveloppes, vous réalisez que vous avez oublié d'inscrire les adresses des destinataires. Puisqu'il vous est désormais impossible de deviner le contenu des enveloppes sans les déchirer, vous décidez de tenter votre chance en attribuant les n adresses au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'aucun de vos amis ne reçoive la lettre qui lui était destinée.
   Indication : utiliser la formule du crible que l'on a prouvée à l'exercice précédent.
2. Quelle est la limite lorsque $n \to \infty$?
3. Calculer la probabilité que k lettres exactement soient correctement adressées.
4. Quelle est la limite lorsque $n \to \infty$?

ESPACES PROBABILISÉS

Dans toute cette feuille, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *désignera un espace probabilisé.*

Exercice 1 (Stabilité). Montrer que $\mathcal{F}$ vérifie les propriétés de stabilité suivantes :

1. (Ensemble plein) $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. (Union finie) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cup B \in \mathcal{F}$.
3. (Intersection finie) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$.
4. (Différence) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{F}$.
5. (Différence symétrique) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{F}$.
6. (Intersection dénombrable) Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors $\bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

Exercice 2 (Tribu engendrée). Déterminer la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ dans les cas particuliers suivants :

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 3, 5\}\}$;
2. Ω est quelconque, et $\mathcal{C} = \{A\}$, où $A \subseteq \Omega$ est une partie arbitraire.
3. Ω est quelconque, et $\mathcal{C} = \{A, B\}$, où $A, B \subseteq \Omega$ sont deux parties arbitraires.
4. Ω est dénombrable, et $\mathcal{C} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$ est l'ensemble des singletons.
5. Ω est quelconque, et $\mathcal{C} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$ est l'ensemble des singletons

Exercice 3 (Tribu borélienne). On a défini $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme la tribu engendrée par les intervalles $]a, b[$, avec a, b réels et $a < b$. Montrer qu'elle est aussi engendrée par les familles suivantes :

1. Les intervalles de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
2. Les intervalles de la forme $]-\infty, t]$ avec $t \in \mathbb{R}$.
3. Les intervalles de la forme $]-\infty, t]$ avec $t \in \mathbb{Q}$.
4. Les parties ouvertes de $\mathbb{R}$. On rappelle qu'un ouvert $O \subset \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in O$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O$.
5. Les parties fermées de $\mathbb{R}$. Une partie $F \subset \mathbb{R}$ est fermée si elle est le complémentaire d'un ouvert.

Exercice 4 (Vrai ou faux ?). Démontrer les affirmations suivantes, ou trouver un contre-exemple.

1. Une intersection quelconque de tribus sur Ω est encore une tribu sur Ω.
2. Une réunion quelconque de tribus sur Ω est encore une tribu sur Ω.

Exercice 5 (Événements triviaux). On dit qu'un événement $A \in \mathcal{F}$ est trivial (ou déterministe) si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$. Montrer que l'ensemble des événements triviaux est une tribu sur Ω.

Exercice 6 (Masse de Dirac). Soit $\omega \in \Omega$. Vérifier que l'application

$$\delta_\omega : A \quad \longmapsto \quad \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

définit une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Que dire de l'expérience aléatoire ainsi modélisée ?

Exercice 7 (Combinaisons convexes).

1. Soient $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ deux mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$, et $\theta \in [0,1]$. Montrer que l'application

$$A \quad \mapsto \quad \theta\mathbb{P}(A) + (1-\theta)\mathbb{Q}(A)$$

définit toujours une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

2. Soient $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$, et soient $(\theta_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres positifs. À quelle condition sur $(\theta_n)_{n\geq 1}$ est-ce que l'application

$$A \quad \mapsto \quad \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \mathbb{P}_n(A)$$

définit une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$?

Exercice 8 (Lemme de Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite quelconque d'événements. On pose

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

Il ne faut pas se laisser impressionner par « $\limsup_{n\to\infty} A_n$ », c'est juste une notation, le nom de l'ensemble donné à droite de l'égalité.

1. Justifier que $\limsup_{n\to\infty} A_n$ est un événement.
2. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \quad = \quad \{\omega \in \Omega \colon \text{il existe une infinité d'indices } n \geq 1 \text{ tels que } \omega \in A_n\}.$$

3. Montrer que $(\bigcup\limits_{k\geq n} A_k)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante.
4. En déduire l'implication suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

Exercice 9 $(*)$ (Tribu engendrée par une partition) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite formant une partition Ω.

1. Pour tout $J \subset \mathbb{N}$ on note

$$B_J = \cup_{j\in J} A_j,$$

Montrer que

$$\mathcal{G} = \{B_J,\ J \subset \mathbb{N}\}$$

est une tribu.

2. On note $\mathcal{F} = \sigma(A_n,\ n \geq 1)$ la tribu engendrée par les $(A_n)_{n\geq 1}$. Montrer que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.
3. Montrer que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Exercice 10 $(*)$ (Tribu engendrée par une partition : une autre présentation) Soit n un entier naturel non-nul et $A_1, \ldots, A_n$ des éléments de $\mathcal{F}$ formant une partition de Ω. On considère l'application φ définie sur $\{0,1\}^n$ par

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \{0,1\}^n & \to & \mathcal{P}(\Omega) \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\} \text{ t.q. } x_i = 1} A_i \end{array}$$

avec la convention $\bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset$.

1. Montrer que l'application φ est à valeurs dans $\mathcal{F}$.
2. Montrer que $\varphi(\{0,1\}^n)$ est une tribu.
3. Montrer que $\sigma(A_1, \ldots, A_n) = \varphi(\{0,1\}^n) = \{\cup_{j\in J} A_j,\ J \subset \{1, \cdots, n\}\}$.

Refaire les trois premières questions de l'exercice précédent en utilisant ce résultat.

Exercice 11 $(*)$ (Lemme de classe monotone - Hors programme). On appelle classe monotone un ensemble $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble Ω vérifiant

(i) $\Omega \in \mathcal{C}$,

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{C},\ A \subset B \implies B \setminus A \in \mathcal{C}$

(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$

1. On considère un sous ensemble I de $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que l'on peut définir la plus petite classe monotone contenant I.

Lemme de classe monotone. *Soit une classe $I \subset \mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersection finie. La plus petite classe monotone contenant I (que l'on notera $\mathcal{C}$) coïncide avec la plus petite tribu engendrée par I (que l'on notera $\mathcal{F}$).*

2. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$
3. Montrer que pour établir la réciproque il suffit de prouver que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.
4. Montrer que pour $A \in I$, la classe $\{B \subset \Omega,\ A \cap B \in \mathcal{C}\}$ contient $\mathcal{C}$.
5. Montrer que pour $A \in \mathcal{C}$, la classe $\{B \subset \Omega,\ A \cap B \in \mathcal{C}\}$ contient $\mathcal{C}$ et conclure.
6. *Application :* Soit μ et ν deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui coïncident sur tous les éléments d'une classe I stable par intersections finies et telle que $\sigma(I) = \mathcal{F}$. Montrer que $\mu = \nu$ sur $\mathcal{F}$.
7. En déduire que deux probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont égales si et seulement si elles ont même fonction de répartition.

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que les ensembles suivants sont des événements de $\mathcal{F}$:

$$\{X \leq 3\}, \quad \{X^2 > 6\}, \quad \{\min(X, 10) < 5\}.$$

Montrer que les fonctions suivantes sont des variables aléatoires :

$$1_{\{X\leq 3\}}, \quad X^{10}, \quad \lfloor X \rfloor.$$

Exercice 2 (Ecart entre deux dés). On lance deux fois un dé équilibré, et on s'intéresse à l'écart entre les deux valeurs obtenues (en valeur absolue). Construire explicitement, sur un espace probabilisé à préciser, une variable aléatoire réelle qui modélise cette expérience, puis déterminer sa loi.

Exercice 3 (Indistinguabilité). Soient X, Y deux v.a.r. définies sur le même espace probabilisé.

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \{X < Y\} &:= \{\omega \in \Omega : X(\omega) < Y(\omega)\} \\ &= \bigcup_{t\in\mathbb{Q}} \{\{X < t\} \cap \{Y > t\}\}. \end{aligned}$$

2. En déduire que $\{X = Y\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}$ est un événement.
3. On suppose que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. Montrer que X et Y ont la même loi.
4. Construire deux v.a.r. X et Y à valeurs dans $\{0, 1\}$ de même loi, mais telles que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

Exercice 4 (Parité). Déterminer la probabilité que X soit paire dans chacun des cas suivants :

1. $X \sim \mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.
3. $X \sim \mathcal{G}(p)$, $p \in]0, 1]$.
4. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Exercice 5 (Fonction de répartition). Déterminer F_X dans chacun des cas suivants.

1. $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0, 1]$.
2. $X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, \ldots, n\})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

3. $X \sim \mathcal{U}(]a, b[)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$.
4. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda \in]0, \infty[$.
5. $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ avec $\lambda \in]0, \infty[$.

Exercice 6 (Transformations linéaires).

1. Soit X une v.a.r. admettant une densité, et soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que la v.a.r. $aX + b$ admet une densité si et seulement si $a \neq 0$, et que dans ce cas, on a
$$f_{aX+b}(y) \quad = \quad \frac{1}{|a|} f_X \left(\frac{y-b}{a} \right).$$
2. Quelle est la loi de $aX + b$ lorsque $X \sim \mathcal{U}(]u, v[)$? Et lorsque $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$?
3. On suppose $a \neq 0$. Quelle est la loi de aX lorsque $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$?
4. On suppose $a > 0$. Quelle est la loi de aX lorsque $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$? Et lorsque $X \sim \Gamma(r, \lambda)$?

Exercice 7 (Changements de variable). Dans chaque cas, déterminer la fonction de répartition de Y et en déduire que Y suit une loi usuelle dont on précisera les paramètres.

1. $Y = \exp(-X)$ avec $X \sim \mathcal{E}(1)$.
2. $Y = \tan(X)$ avec $X \sim \mathcal{U}\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.
3. $Y = X^2$ avec $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
4. $Y = \frac{1}{X} \mathbf{1}_{X \neq 0} \mathbf{1}$ avec $X \sim \mathcal{C}(1)$.
5. $Y = \lceil X \rceil$ (partie entière supérieure de X) avec $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 8 (Loi de Paréto). Soit $\alpha > 0$ un paramètre, et soit X une v.a.r. de densité
$$f(x) \quad = \quad \frac{c}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x).$$

1. Retrouver la valeur de la constante c.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X.
3. Calculer $\mathbb{P}(0 < X < 2)$.
4. Quelle est la loi de $Y := \ln X$?

Exercice 9 (Loi de l'arcsinus). Soit X une v.a.r. dont la densité est donnée par
$$f(x) \quad = \quad \frac{c}{\sqrt{x(1-x)}} \mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$

1. Retrouver la valeur de la constante c. On pourra poser $x = \sin^2(u)$ avec $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X.
3. Quelle est la loi de $Y := \arcsin(\sqrt{X})$?

Exercice 10 (Une curiosité). Soit X une v.a.r. dont la densité est donnée par la formule
$$f(x) \quad = \quad \frac{c}{1+x} \mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$

1. Retrouver la valeur de la constante c.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X.
3. Déterminer la loi de la v.a.r. suivante :

$$Y \quad := \quad \frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor.$$

Exercice 11 (Atomes). Soit X une v.a.r.. On note F_X la fonction de répartition de X et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $F_X^-(x) = \lim_{u \to x^-} F_X(u)$. Pour tout entier naturel non-nul n on considère

$$D_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : F_X(x) - F_X^-(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

et on pose

$$\mathcal{A}_X := \{x \in \mathbb{R} \colon \mathbb{P}(X = x) > 0\}.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel non-nul n l'ensemble D_n est un ensemble fini.
2. Montrer que
$$\mathcal{A}_X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n.$$
3. En déduire que $\mathcal{A}_X$ est un ensemble au plus dénombrable.
4. On suppose dorénavant que $\mathcal{A}_X = \emptyset$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in]0,1[$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, F_X(x) \leq t\}$ est non-vide et majoré.
   (b) On définit la fonction G sur $]0,1[$ par
   $$G(t) = \sup\{x \in \mathbb{R}, F_X(x) \leq t\}.$$
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0,1[$, $F(x) \leq t$ est équivalent à $x \leq G(t)$. En déduire que si $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$ alors $F_X(U)$ a même loi que X.
   (c) Montrer, en utilisant que F_X est càdlàg, que $F(G(t)) = t$ pour tout $t \in]0,1[$ et en déduire que $F_X(X) \sim \mathcal{U}(]0,1[)$.

ESPÉRANCE

Exercice 1 (Lois usuelles). Dans chaque cas, calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathbb{E}[e^X]$ (si elles existent).

1. $X \sim \mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0,1]$.
3. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$.
4. $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1]$.
5. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in]0,\infty[$.
6. $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
7. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda \in]0,\infty[$.
8. $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$.
9. $X \sim \Gamma(r,\lambda)$ avec $\lambda, r \in]0,\infty[$.
10. $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ avec $\lambda \in]0,\infty[$.

Exercice 2 (Meilleure prédiction). Soit X une v.a.r. de carré intégrable. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$V(a) := \mathbb{E}\left[(X-a)^2\right].$$

Montrer que V atteint son minimum en un unique point $a^* \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera. Interpréter.

Exercice 3 (Moments). Dans chaque cas, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $I_n = \mathbb{E}[X^n]$.

1. $X \sim \mathcal{U}(]0,1[)$.
2. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. $X \sim \mathcal{E}(1)$.
4. $X \sim \Gamma(r,\lambda)$ avec $r, \lambda > 0$.

Indication : pour les questions 2, 3 et 4 on commencera par établir une relation de récurrence liant les termes de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 4 (Inégalité de Jensen). Soit $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$ et X une v.a.r. qui est intégrable ainsi que $\varphi(X)$. Montrer que

$$\varphi\left(\mathbb{E}[X]\right) \quad \leq \quad \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right].$$

Indication : on rappelle que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et convexe sur $\mathbb{R}$ alors le graphe de φ est au-dessus de toutes ses tangentes. On pourra utiliser cette propriété pour la tangente en $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 5 (Queue lourde). Soit $\alpha > 0$ un paramètre, et soit X une v.a.r. de densité

$$f(x) \quad = \quad \frac{\alpha}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x).$$

1. La variable aléatoire X est-elle intégrable ? Que vaut alors $\mathbb{E}[X]$?
2. La variable aléatoire X^2 est-elle intégrable ? Que vaut alors $\mathrm{Var}(X)$?

Exercice 6 (Une autre inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Soit X une v.a.r. de carré intégrable, d'espérance μ et de variance σ^2. Soit $a>0$. Le but est d'établir l'inégalité de déviation suivante :

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| \geq a\right) \quad \leq \quad \frac{2\sigma^2}{\sigma^2+a^2}.$$

1. Cette inégalité est-elle meilleure que celle de Bienaymé-Tchebychev ?
2. Pour $\lambda \geq 0$, exprimer $\mathbb{E}\left[(X-\mu+\lambda)^2\right]$ en fonction de λ et σ^2.
3. En utilisant la question précédente et l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $\lambda \geq 0$,
$$\mathbb{P}(X-\mu \geq a) \quad \leq \quad \frac{\lambda^2+\sigma^2}{(a+\lambda)^2}.$$
4. En déduire que
$$\mathbb{P}(X-\mu \geq a) \quad \leq \quad \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}.$$
5. Conclure.

Exercice 7 (Théorème de Stone-Weierstrass)($\star\star$). L'objectif de cet exercice est de donner une preuve « probabiliste » du théorème de Stone-Weierstrass. L'énoncé de ce théorème est le suivant :

> Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme P tel que
> $$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

1. On commence par supposer que $a = 0$ et $b = 1$. Soit donc $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   (a) Vérifier que pour toute v.a.r. X à valeurs dans $[0,1]$ on a
   $$|\mathbb{E}[f(X)] - f(\mathbb{E}[X])| \leq \mathbb{E}\left[|f(X) - f\left(\mathbb{E}[X]\right)|\right]$$
   (b) Vérifier que pour toute v.a.r. X à valeurs dans $[0,1]$ et tout $\delta > 0$,
   $$\mathbb{E}\left[|f(X) - f\left(\mathbb{E}[X]\right)|\right] \quad \leq \quad \frac{2\|f\|_\infty \mathrm{Var}(X)}{\delta^2} + \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x)-f(y)|\,.$$
   (c) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$.
      i. Justifier que la variable aléatoire $\frac{X}{n}$ est à valeurs dans $[0,1]$.
      ii. Calculer l'espérance et la variance de $\frac{X}{n}$ ainsi que $\mathbb{E}[f\left(\frac{X}{n}\right)]$.
   (d) On considère la suite de fonctions $(B_n)_{n\geq1}$ définies sur $[0,1]$ par
   $$B_n(t) \quad := \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k(1-t)^{n-k}.$$

i. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction B_n est une fonction polynomiale.

ii. Montrer que la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N_0 tel que pour tout entier $n \geq N_0$ on a

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - B_n(t)| < \varepsilon.$$

2. Étendre ce résultat au cas où $[0, 1]$ est remplacé par un segment $[a, b]$ quelconque.

INDÉPENDANCE ET CONDITIONNEMENT

Dans toute la feuille, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Fausse alarme). On considère une maladie affectant une personne sur 10000. Le test de dépistage n'est pas parfait : lorsque la maladie est présente, il y a 1% de risques qu'elle ne soit pas détectée et lorsque la maladie est absente, il y a 5% de risques de fausse alarme. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant un résultat positif au test soit effectivement malade ?

Exercice 2 (Absence de mémoire).

1. Soit X une v.a.r. qui suit une loi exponentielle. Vérifier que
$$\forall s, t \geq 0, \qquad \mathbb{P}(X > t + s | X > t) \quad = \quad \mathbb{P}(X > s).$$
2. Soit X une v.a.r. vérifiant $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ et
$$\forall s, t \geq 0, \qquad \mathbb{P}(X > t + s) \quad = \quad \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t).$$
Montrer que X suit une loi exponentielle.

Exercice 3 (Manipulation). Soient $A, B \in \mathcal{F}$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si l'identité suivante est vérifiée :
$$\mathbb{P}(A \cap B^c)\mathbb{P}(B \cap A^c) \quad = \quad \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(A^c \cap B^c).$$

Exercice 4 (Trivialité). Soit $A \in \mathcal{F}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est indépendant de B pour tout $B \in \mathcal{F}$.
2. $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Exercice 5 (Un et un seul). On considère trois évenements indépendants, de probabilités respectives $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité qu'exactement un de ces évenements se produise ?

Exercice 6 (Loi Zeta). Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$, et telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{c}{k^2}.$$

1. Quelle est la valeur de la constante c ? *C'est une question difficile si on n'a jamais vu ce résultat. Pour les plus motivés, le dernier exercice de cette feuille propose une méthjode probabiliste pour déterminer cette constante.*

2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer la probabilité de l'événement $A_n = \{X \text{ est un multiple de n}\}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on note $\mathcal{I}(n)$ l'ensemble des nombres entiers multiples de n. Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^\star$ on a $\mathcal{I}(mn) = \mathcal{I}(m) \cap \mathcal{I}(n)$ si et seulement si m et n sont premiers entre eux.
4. Soient $m, n \in \mathbb{N}^\star$. À quelle condition les événements A_n et A_m sont-ils indépendants ?

Exercice 7 (Pile ou face). On lance deux fois de suite et indépendamment, une pièce truquée qui tombe sur pile avec une certaine probabilité $p \in [0, 1]$. On considère les événements

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{le premier lancer donne pile}\} \\ B &:= \{\text{le deuxième lancer donne pile}\} \\ C &:= \{\text{les deux lancers donnent des résultats différents}\}. \end{aligned}$$

Déterminer l'ensemble des valeurs de p pour lesquelles :

1. A et B sont indépendants.
2. A et C sont indépendants.
3. A, B et C sont indépendants.

Exercice 8 (Pile ou face avec usure). On joue une infinité de fois à pile ou face. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{\text{le résultat du n-ème lancer est } \textit{pile}\}$. On suppose que les événements $(A_n)_{n \geq 1}$ sont indépendants, mais que la pièce devient de plus en plus biaisée au fur et à mesure qu'on l'utilise :

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n+1}.$$

On s'intéresse à l'événement $B_n = \{\text{aucun des } n \text{ premiers lancers ne donne } \textit{pile}\}$.

1. Exprimer B_n en fonction des $(A_k)_{k \geq 1}$, et en déduire $\mathbb{P}(B_n)$.
2. Décrire avec des mots l'événement $C = \bigcap_{n \geq 1} B_n$, puis calculer sa probabilité.
3. On recommence l'expérience avec une pièce qui se détraque plus violemment :

$$\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2.$$

   Que vaut maintenant $\mathbb{P}(C)$?

Exercice 9 (Minimum de v.a.r. indépendantes). Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. indépendantes, et

$$Z := \min(X_1, \ldots, X_n).$$

1. Exprimer l'événement $\{Z > t\}$ en fonction des événements $\{X_1 > t\}, \ldots, \{X_n > t\}$.
2. En déduire la fonction de répartition de Z en fonction de celles de $X_1, \ldots, X_n$.
3. On suppose que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ suivent des lois géométriques de paramètres de succès respectifs $p_1, \ldots, p_n$. Quelle est la loi de Z ?
4. On suppose que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Quelle est la loi de Z ?
5. On suppose que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ suivent toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que Z admet une densité que l'on explicitera.

Exercice 10 (Parties entière et fractionnaire). Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ sa partie entière et $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$ sa partie fractionnaire. Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$.

1. Calculer $\mathbb{P}\left(\lfloor X \rfloor = n, \{X\} \leq t\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$.
2. En déduire que les variables aléatoires $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ sont indépendantes.

Exercice 11 (Problème de Bâle).($\star$) Leonhard Euler a prouvé en 1741 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

donnant ainsi une solution à ce qui est connu sous le nom de « Problème de Bâle ». Le but de cet exercice est de donner une preuve « probabiliste » de ce résultat.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires continues : on note f_1 la densité de X_1, f_2 la densité de X_2 et on suppose que pour tout nombre réel $x \leq 0$ on a $f_1(x) = f_2(x) = 0$. On suppose aussi que X_1 et X_2 sont indépendantes. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \frac{X_1}{X_2}$.

1. Justifier que si X_1 et X_2 ont même loi alors $\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 1) = \frac{1}{2}$.
2. Montrer que Y admet
$$g(u) = \left(\int_0^{\infty} t f_1(tu) f_2(t) dt\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u)$$
pour densité.

On suppose à présent que pour tout nombre réel $x \geq 0$ on a

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}.$$

3. Montrer que pour tout nombre réel $u > 0$ on a
$$g(u) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln(u)}{u^2 - 1}.$$
4. Jusitifier que
$$\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u^2 - 1} = \frac{\pi^2}{8}.$$
5. En déduire que
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u^{2n} \ln(u)\, du = -\frac{\pi^2}{8}.$$
Indication : utiliser le fait que pour tout réel $x \in [0,1[$ *on a* $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
6. Déduire de l'égalité établie à la question précédente que
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$
7. Conclure.

Cet exercice est tiré de l'article de L. Pace « Probabilistically proving that $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ *» paru en 2011 dans la revue « American Mathematical Monthly ».*

SOMMES DE VARIABLES INDÉPENDANTES

Toutes les variables apparaissant dans cette feuille sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Lois usuelles). Soient X et Y des v.a.r. indépendantes. On pose

$$Z \quad := \quad X + Y.$$

Déterminer la loi de Z dans chacun des cas suivants :

1. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$, avec $n, m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$.
2. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec $\lambda, \mu \in]0, \infty[$.
3. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$ avec $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ et $\sigma, \tau \in]0, \infty[$.
4. Si $X \sim \Gamma(r, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(s, \lambda)$ avec $r, s, \lambda \in]0, \infty[$.

Exercice 2 (Covariance et indépendance).

1. Soient X, Y des v.a.r. de carré intégrable. Rappeler pourquoi on a toujours

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = 0.$$

2. On se propose à présent de construire un contre-exemple pour la réciproque. Soient X, U des v.a.r. indépendantes avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $U \sim \mathcal{U}\{-1,1\}$. On pose

$$Y := UX.$$

   (a) Vérifier que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.
   (b) Justifier que X et Y sont de carré intégrable, et calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
   (c) Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 (Chi-deux). Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose

$$Z \quad := \quad X_1^2 + \cdots + X_n^2.$$

Montrer que Z suit une loi Gamma dont on précisera les paramètres.

Exercice 4 (Intervalles de confiance).

1. On lance une pièce 1000 fois et l'on note Z la proportion de piles obtenus. À l'aide de l'inégalité de Chebichev, déterminer un intervalle aussi petit que possible dans lequel Z ait au moins 90% de chances de se trouver.
2. Même question pour 25000 lancers.

Exercice 5 (Processus de Poisson). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. On définit

$$S_n \quad := \quad X_1 + \cdots + X_n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et $S_0 = 0$. Étant donné un réel $t \in]0, \infty[$, on pose également

$$N_t \quad := \quad \sup \{n \geq 0 \colon S_n \leq t\} .$$

1. Montrer que S_n suit une loi Gamma dont on précisera les paramètres.
2. Exprimer l'événement $\{N_t = n\}$ à l'aide des événements $\{S_n \leq t\}$ et $\{S_{n+1} \leq t\}$.
3. En déduire que N_t suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Exercice 6 (Poisson filtré). Soient $p \in [0, 1]$ et $\lambda \in]0, \infty[$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, et soit N une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$. On pose

$$X(\omega) := \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \quad \text{ et } \quad Y := \sum_{k=1}^{N(\omega)} (1 - X_k(\omega)) .$$

1. Donner la loi du couple (X, Y) c'est-à-dire donner pour tout $k, \ell \geq 0$, $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$.
2. En déduire la loi de X et celle de Y.
3. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 7 (Le collectionneur)($\star$). Chaque œuf en chocolat contient une surprise choisie au hasard et uniformément parmi n surprises possibles, indépendamment des autres œufs. Un enfant décide de manger les œufs un à un, jusqu'à ce qu'il ait récolté un exemplaire de chacune des n surprises possibles. Pour tout entier k compris entre 1 et n on note T_k le nombre d'œufs qu'il faut manger pour disposer de k surprises différentes. Ainsi T_n est le nombre d'œufs qu'il faut manger pour compléter la collection. Dans cet exercice on cherche un ordre de grandeur typique de T_n quand $n \to \infty$.

1. Montrer que T_n est la somme de n v.a.r. géométriques indépendantes que l'on explicitera.
2. En déduire l'espérance et la variance de T_n.
3. Montrer que $\mathbb{E}[T_n] \sim n \ln(n)$ et qu'il existe un nombre réel strictement positif C tel que $\mathbf{Var}[T_n] \sim Cn^2$.
4. Montrer que $\frac{T_n}{n \ln(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ lorsque $n \to \infty$.
Indication : justifier que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier N_0 tel que pour tout entier $n \geq N_0$ on a
$$\left\{ \left| \frac{T_n}{n \ln(n)} - 1 \right| > \varepsilon \right\} \subset \left\{ \left| \frac{T_n}{n \ln(n)} - \frac{\mathbb{E}[T_n]}{n \ln(n)} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} .$$

Exercice 8 (Marche aléatoire)($\star$). Soit $p \in [0, 1]$, et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. On pose $S_0 := 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n.$$

On s'intéresse au nombre total (éventuellement infini) de visites en zéro du processus $(S_n)_{n\geq 0}$:

$$Z := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n = 0\}}.$$

1. Pour tout entier $n \geq 0$ déterminer la loi de S_n. On pourra séparer le cas où n est pair du cas n impair.
2. Trouver un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ lorsque $n \to \infty$.
Indication : utiliser la formule de Stirling : $n! \sim_{n\to+\infty} (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$.
3. En déduire que si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(Z < \infty) = 1$. Peut-on conclure dans le cas $p = \frac{1}{2}$?
4. On pose $A_n := \{S_n = 0\} \cap \bigcap_{k \geq n+1} \{S_k \neq 0\}$. Montrer que

$$\{Z < \infty\} = \cup_{n\geq 0} A_n$$

et qu'il s'agit-là d'une réunion d'événements deux à deux disjoints. En déduire que

$$\mathbb{P}(Z < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

5. Montrer que pour tout entier naturel **pair** $n \geq 0$ et tout entier naturel $m > 0$ la loi de $(X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$ sous $\mathbb{P}(\cdot | S_n = 0)$ est la même que la loi de $(X_1, \dots, X_m)$ sous $\mathbb{P}$.
6. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(S_n = 0)\mathbb{P}(A_0).$$

7. En déduire que si $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(Z < \infty) = 0$.