Algèbre linéaire 3, Contrôle continu du 28 Septembre 2022

Durée : 1h. Documents et appareils électroniques interdits.
Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera un élément essentiel de l'appréciation des copies.
Vous êtes vivement encouragés à lire l'ensemble du sujet avant de commencer.
Le barème est sur 20 points. Il est à titre indicatif.

***Exercice 1* (Question de cours, 1 point).** — Énoncer le lemme de décomposition des noyaux.

***Exercice 2* (Polynôme minimal, polynôme caractéristique, sous-espaces propres, 6 points)**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. (1,5 points)
2. Montrer que le spectre de A est $\{0, 1\}$. (0,5 point)
3. Déterminer les sous-espaces propres de A. (2 points)
4. Montrer que la famille $\{I_3, A, A^2\}$ est libre. (1 point)
5. En déduire le polynôme minimal de A. (1 point)

***Exercice 3* (Puissance d'une matrice, 5 points).** —

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le polynôme minimal de B est $\mu_B(X) = (X-2)^2$. (1 point)
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe deux réels a_k et b_k et un polynôme $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$X^k = Q_k(X)\mu_B(X) + a_k X + b_k.$$
On déterminera a_k et b_k. (2 points)
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, en déduire B^k. (2 points)

***Exercice 4* (Polynômes et endomorphismes, 8 points).** —

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et non nulle. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. On note μ_u le polynôme minimal de u. On cherche à savoir quand est-ce que $P(u)$ est un endomorphisme inversible.

1. On suppose dans cette question que P et μ_u sont premiers entre eux.
   (a) Rappeler l'identité de Bézout. (0,5 point)
   (b) En déduire que $P(u)$ est un endomorphisme inversible. (1,5 points)
2. On suppose maintenant que P et μ_u ne sont pas premiers entre eux.
   (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X-a)$ divise P et $\mu_u = (X-a)R$. (1 point)
   (b) Montrer que $R(u) \neq O_{\mathcal{L}(E)}$. (1,5 points)
   (c) Montrer que PR annule u. (1 point)
   (d) En déduire que $P(u)$ n'est pas un endomorphisme inversible. (1 point)
3. Déduire des questions précédentes que $P(u)$ est inversible si et seulement $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $P(\lambda) \neq 0$. (1,5 points)