UNIVERSITÉ DE PARIS-DAUPHINE

CYCLE

Le candidat inscrit ici très lisiblement ses

Nom : PIETTON

Prénoms : Tom

N° GROUPE : 5

Numéro de convocation : 22100695

ANNÉE : 2022 SESSION :

MATIÈRE : Algèbre linéaire 3

UV =

Il est interdit aussi bien de signer à la fin de la composition que d'indiquer son nom ou son numéro sur les feuilles intercalaires.

N° de groupe : 5

Nombre d'intercalaires : 4

	Note	Signature	Note finale
1er correcteur			
2e correcteur			

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE

$\frac{22}{20} \rightarrow 20/20$ TB

Ne pas écrire dans cette marge

Sujet :

Exercice 1)

$\frac{1}{1}$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dim finie $n \in \mathbb{N}^*$ et une base $\mathcal{C} = (f_1 - f_n)$ de E et $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire réelle.

La matrice de Φ dans $\mathcal{C}$ est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}\, \Phi = (\Phi(f_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$= \begin{pmatrix} \Phi(f_1, f_1) & \cdots & \Phi(f_1, f_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi(f_n, f_1) & \cdots & \Phi(f_n, f_n) \end{pmatrix}$$

Exercice 2)

Avis important : Tout candidat convaincu de fraude sera immédiatement expulsé et perdra les droits versés sans préjudice des peines prévues par le régime disciplinaire des Facultés, décret du 21 juillet 1897 (art. 33, 34 et 41) et par la loi du 23 décembre 1961.

PARTIE
A
RABATTRE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1) Le polynome caractéristique de A χ_A est telle que

$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A)$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ 0 & x & 0 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = x((x-1)^2 - 1)$$
$$= x(x^2 - 2x) = x^2(x-2)$$

4/4

On a donc $Sp(A) = \{0;2\}$. Déterminons $E_0(A)$ et $E_2(A)$

On sait que $\dim(E_0(A)) \in \{1;2\}$ mais on a $rg(A) = 2$ donc on sait d'avance qu'il faut trouver ~~deux vecteurs~~ un seul vecteur de $E_0(A)$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (i.e. / $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A) = E_0(A)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 & L_1 \\ x + y + z = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = 0 & L_1 - L_2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$ d'où $Ker(A) = Vect\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $Ker(A) = E_0(A)$.

Passons à $E_2(A)$.

Soit $X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A)$, on a ~~AX~~ $(AX = 2X) \Leftrightarrow (A-2I)X = 0$

$\Leftrightarrow$

$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on sait que $\dim(E_2(A)) = 1$ par encadrement par la multiplicité géo du poly caractéristique et on voit que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient car $(-1+1=0$ et $1-1=0)$ donc $\to (A-2I)X=0$

on a donc trouvé un vecteur propre non nul et on pose par le fait que E_2 soit de dimension 1 $E_2(A) = \text{vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

1,5

2) La matrice n'est pas diagonalisable car les sous-espaces propres ~~...~~ sont pas ~~sup~~ en somme directe ne font pas $\mathbb{R}^3$. D'après le cours, si $\dim(E_0(A)) \neq 2$ (différence entre mult algébrique et géométrique) alors A n'est pas diagonalisable !

On a $\mu_A | \chi_A$ dont racines de χ_A égale à racine de μ_A donc soit $\mu_A(x) = x(x-2)$ soit $\mu_A(x) = x^2(x-2)$. Or A non diagonalisable d'où μ_A non scindé simple. On en donc conclut $\mu_A(x) = x^2(x-2)$

1

3) Oui elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ par le cours car χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$

0,5

4) on a $\mu_A(x) = X^2(X-2)$ donc $A^2(A-2I_3) = 0$

si on pose $P(X) = X(X-2)^2$ on a

$P(2I_3 - A) = (2I_3 - A)(2I_3 - A - 2I_3)^2$

$= (2I_3 - A)(A)^2$

or $-(2I_3 - A)A^2 = A^2(A-2I_3) = 0$ donc

$P(2I_3 - A) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$ donc $X(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de $2I_3 - A$

on sait $\exists X \in \mathbb{R}^3 / X \neq 0$ et tq $AX = 2X$ donc $\to$ car $2 \in Sp(A)$

$(2I_3 - A)X = 2X - AX = 0 \times X$ donc $0 \in Sp(2I_3 - A)$

on sait $\exists X \in \mathbb{R}^3 / X \neq 0$ et $AX = 0$ d'où

$(2I_3 - A)X = 2X - AX = 2X$ d'où $2 \in Sp(2I_3 - A)$

3/12

En conclusion le polynome minimal de $2I_3 - A$ est soit $\underbrace{(X)(X-2)}_{\text{cas où } 2I_3 - A \text{ diagonalisable}}$ soit $\underbrace{X^2(X-2)}_{\text{cas où } 2I_3 - A \text{ non diago.}}$

Si on suppose $2I_3 - A$ diagonalisable alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que ~~$2I_3 - A$~~ $P(2I_3 - A)P^{-1} = D$ où D est diagonale et donc $2PP^{-1} - PAP^{-1} = D$ d'où $PAP^{-1} = 2I_3 - D$ or $2I_3 - D$ est la diff de 2 matrice diagonale donc c'est une matrice diagonale or A non diagonalisable donc il est absurde que A soit semblable à une matrice diagonale. oui

1

En conclusion le polynome minimal est $X^2(X-2)$ (non scindé simple car $2I_3 - A$ ne peut pas être diagonalisable !

Exercice 3)

Diagonalisons $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $\chi_B = \det(xI_3 - B) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ -1 & x-3 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$

$= (x-1)\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)\left((x-3)^2 - 1\right)$

$= (x-1)(x^2 - 6x + 8)$ or $2^2 - 6\times 2 + 8 = 12 - 12 = 0$ donc

$= (x-1)(x-2)(x-4)$

on a χ_B scindé simple donc B est evidemment diagonalisable.

Determinons une base de vecteur propre.

On a par encadrement avec la multiplicité algébrique que $\dim(E_1(B)) = \dim(E_2(B)) = \dim(E_4(B)) = 1$

Il suffit donc de trouver un vecteur non nul de chacun de ces espaces

On a $E_1(B) = \ker(B-I)$ et $B-I = \begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ alors et $X \in \ker(B-I)$ alors.

$$\begin{cases}2x+y=0\\x+2y+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2x\\-3x+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2x\\z=3x\end{cases}$$

donc $\ker(B-I) = E_1(B) = \text{vect}\left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right\rangle$

On a $E_2(B) = \ker(B-2I)$ et $B-2I = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$

on a $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ tel que $(B-2I)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

donc $(\dim(E_2(B))=1)$ $E_2(B) = \text{vect}\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

On a $E_4(B) = \ker(B-4I)$ et $B-4I = \begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&1\\0&0&-3\end{pmatrix}$

on voit que $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ convient car $(B-4I)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

donc

$E_4(B) = \text{vect}\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

3/3

on a donc en posant $\varepsilon = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ notre base des vecteurs propres

$P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\varepsilon} = \begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&1\\3&0&0\end{pmatrix}$ et donc $B = PDP^{-1}$ avec

$\mathcal{B}$ désigne la base canonique

$D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

Exercice 4)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

χ_C de C
χ_D de D

on peut verifier cela en calculant les poly caracteristique on a

$$\chi_C(x) = \det(xI_3 - C) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ 0 & x-3 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3)^2$$

$$\chi_D(x) = \det(xI_3 - D) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ -1 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= x-3\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)((x-2)^2-1)$$
$$= (x-3)(x^2-4x+3)$$
$$= (x-3)(x-1)(x-3)$$
$$= (x-3)^2(x-1)$$

Ils ont les meme poly caracteristique mais ce n'est pas suffisant pour conclure.

on a $C - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ donc $rg(C-3I) = 2$

et donc $\dim \operatorname{Ker}(C-3I) = \dim(E_3(C)) = 1$ donc C non diagonalisable (on a pas $E_1(C) \oplus E_3(C) = \mathbb{R}^3$)

et $D - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $rg(D-3I) = 1$ et donc dim (Ker (D − 3 I)) = dim(E_3(D)) = 2 donc

$E_3(D) \oplus E_1(D) = \mathbb{R}^3$ (car $E_3(D) \oplus E_1(D) \subset \mathbb{R}^3$ et on a $\dim(E_3(D) \oplus E_1(D)) = \dim(E_3(D)) + \dim(E_1(D)) = 3$)

Ainsi D est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et C n'est pas diagonalisable

2/2 il ne peut donc pas être semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ donc il ne peut (par la propriété transitivité des relations de similitude pour les matrices) pas être semblable à C

Oui

Exercice 5)

Soit $n \in \mathbb{N} / n \geq 2$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / A^3 + 2A^2 + A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. On note χ_A le poly caractéristique de A.

6/6

A vu comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ne change rien au raisonnement.

1) On sait que $X^3 + 2X^2 + X$ annule A par l'énoncé

or $X^3 + 2X^2 + X = X(X^2 + 2X + 1) = (X)(X+1)^2$

0,5 donc $Sp(A) \subset \{0; -1\}$ i.e. si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$ (on voit que le spectre complexe est composé de deux valeurs propres complexes qui sont aussi réels)

2) En conséquence comme {racine de χ_A} = Sp(A) dans $\mathbb{C}$ et

0,5 que le Sp(A) dans $\mathbb{C}$ est inclus dans {0; -1} alors χ_A n'admet que des racines réelles.

3) On sait que χ_A n'admet pas de racine complexe donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ (dans $\mathbb{R}[X]$, les seuls polynômes non

1 scindables sont ceux de degré 2 qui admettent en réalité deux racines complexes, ici ce n'est pas le cas donc on est scindé dans $\mathbb{R}[X]$!). Et donc par le cours, A est trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Oui

2/12

4) Montrons que $tr(A) \in \{0; -1; \dots; -m\}$

on sait que χ_A scindé dans $\mathbb{R}[X]$ avec comme éventuelles racines 0 ou -1 on a donc $\chi_A = (x-0)^{\alpha}(x+1)^{\beta}$ avec $\alpha + \beta = m$ et $\alpha ; \beta$ des entiers naturels éventuellements nuls. Par le cours, comme χ_A scindé (A trigonalisable) $Tr(A) = \alpha \times 0 + \beta \times (-1)$

1

or $0 \leq \alpha \leq m$ et β aussi (les couples $(\alpha;\beta)$ possibles sont $(0;m); (1;m-1); (2;m-2) \dots (m-2;2); (m-1;1); (m;0)$)

on a donc bien $0+0 \leq tr(A) \leq 0 - 1 \times m$

$(0 \leq \alpha \times 0 \leq 0$ et $0 \leq \beta \times (-1) \leq -m)$

donc $tr(A) \in \{0 \dots -m\}$

oui

5) a) On suppose que $tr(A) = 0$ donc avec $\chi_A = X^{\alpha}(X+1)^{\beta}$

1

on a donc $0 = \beta \times (-1) \Leftrightarrow \beta = 0$ et donc $\chi_A = X^m$, marque de la matrice nilpotente.

$\Leftrightarrow \alpha = m$

b) on a $\mu_A \mid \chi_A = X^m$ ~~donc~~ [illegible]

donc $\mu_A = X^k$ avec $1 \leq k \leq m$ (X^0 impossible car $I_m \neq 0$)

on a aussi $X^3 + 2X^2 + X$ qui annule A donc

$\mu_A \mid X^3 + 2X^2 + X$ et $X^3 + 2X^2 + X = X(X+1)^2$

donc ~~μ_A divise le plus grand~~ $\mu_A = \begin{cases} X \\ \text{ou} \\ X(X+1) \\ \text{ou} \\ X(X+1)^2 \end{cases}$

comme $\mu_A = X^k$ où $k \in \{1 \dots m\}$, il n'y a qu'une seule possibilité

1

et donc $\mu_A = X$

↳ car -1 ne peut pas être racine de μ_A

on a donc par ~~[illegible]~~ que ce polynome minimal que $\mu_A(A) = 0_{\mathcal{M}_m(\mathbb{R})} \Leftrightarrow A = 0_{\mathcal{M}_m(\mathbb{R})}$

oui

6) on suppose $tr(A) = -1$. Montrons que A est diagonalisable

on a donc en reprenant le cadre de la qt 4

$\chi_A = x^{\alpha}(x+1)^{\beta}$ avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{N}^2 / \alpha + \beta = n$ et comme

$T_r(A) = -\beta$ on a alors que $\beta = 1$ et que $\alpha = n-1$ donc

$\chi_A(X) = X^{n-1}(X+1)$

on a encore $X^3 + 2X^2 + X = X(X+1)^2$ qui ~~[illegible]~~ annule A

donc μ_A divise $X^{n-1}(X+1)$ et μ_A divise $X(X+1)^2$ donc μ_A divise le plus grand diviseur commun $X(X+1)$ et $\mu_A = X(X+1)$ car μ_A ne peut pas valoir x ou $X+1$ car ses racines sont

1 exactement les mêmes que celles de χ_A à savoir 0 ou -1.

Donc le polynome minimal est scindé simple donc A est diagonalisable par le cours.

Oui

6/6

Exercice 6)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$A \mapsto tr(A) I_n$

1) Montrons que Φ est une application linéaire.

Soit $(A; B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a bien

$\Phi(A + \lambda B) = tr(A + \lambda B) I_n$ et par linéarité de la trace on obtient

0,5 $= tr(A) I_n + \lambda tr(B) I_n = \Phi(A) + \lambda \Phi(B)$

donc Φ est bien une application linéaire qui plus est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2) Determinons Φ^2 en fonction de Φ

1 on a $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi^2(A) = \Phi(\Phi(A)) = \Phi(tr(A) I_n)$

$= tr(tr(A) I_n) I_n = n\, tr(A) I_n = n \Phi(A)$

9/12

3) On voit donc que $X^2 - nX$ annule Φ car

$\Phi^2 - n\Phi = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$

et $X^2 - nX = X(X-n)$ → on note μ_Φ polynome minimal de Φ

donc comme $\mu_\Phi \mid X^2 - nX$ alors μ_Φ peut soit valoir X soit valoir $X-n$ soit valoir $X(X-n)$

Mais on voit que ni X ni $X-n$ ne convient car et 0 et n sont valeurs propres :

En effet, $\Phi(I_n) = \mathrm{tr}(I_n) I_n = n I_n$ et $I_n \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $n \in Sp(\Phi)$

et si on pose $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a bien

1 $B \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\Phi(B) = \mathrm{tr}(B) I_n = 0 \times I_n = 0$ donc

$0 \in Sp(\Phi)$ donc comme $Sp(\Phi) = \{$racines de $\mu_\Phi\}$ alors

la seule option pour μ_Φ est $X(X-n)$ / oui

(et $n \neq 0$ car $n \geq 1$)

4) Le polynome minimal est scindé simple donc par le cours

0,5 on a bien Φ diagonalisable.

5) On veut determiner $E_0(\Phi)$ et $E_n(\Phi)$

on pose $(E_{ij})_{i \in [[1,n]],\, j \in [[1,n]]}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que E_{ij} est

la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des 0 partout sauf au coefficient ij qui vaut 1 (ex : $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & (0) & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

$E_0(\Phi) = \ker(\Phi) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{Tr}(M) I_n = 0\}$

$= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{Tr}(M) = 0\}$

Soit $M \in E_0(\Phi)$, on sait qu'il existe $(e_{ij})_{i \in [[1,n]],\, j \in [[1,n]]}$ tel que

$M = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} e_{ij} E_{ij}$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$

d'où comme $tr(M) = tr(\sum_{i=1}^{n} e_{ii} E_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} e_{ii} = 0$ on a

$e_{11} + e_{22} + \dots + e_{nn} = 0$. On voit donc que $\ker(\Phi)$ définit un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car

M est telle que $M = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} e_{ij} E_{ij}$ et $\begin{cases} e_{11} = -e_{22} - \dots - e_{nn} \\ e_{12} = e_{12} \\ \vdots \\ e_{nn} = e_{nn} \end{cases}$ $\forall (i;j)$ tel que $(i;j) \neq (1;1)$ $e_{ij} = e_{ij}$

on appelle cette famille $\mathcal{F}$

d'où $\ker \Phi = \text{vect} \langle \underbrace{E_{12} \dots E_{n-1,n}}_{\text{l'ensemble des } E_{ij} \text{ avec } i \neq j}, -E_{11} + E_{22}, -E_{11} + E_{33}, \dots, -E_{11} + E_{nn} \rangle$

comme $(E_{ij})_{\substack{i \in \{1-n\} \\ j \in \{1-n\}}}$ est une famille libre alors on a bien sur

$\mathcal{F}$ libre et donc $\mathcal{F}$ forme une base de $\ker \Phi$ et donc

$\dim(\ker \Phi) = n^2 - 1$ car $|\mathcal{F}| = n^2 - 1$

Non!

$E_n(\Phi) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;/\; tr(M) I_n = n I_n \}$

$\Leftrightarrow \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;/\; tr(M) = n \}$ car Φ diagonalisable

on a $E_0(\Phi) \oplus E_n(\Phi) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(E_n(\Phi)) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(E_0(\Phi)) = n^2 - (n^2 - 1) = 1$

2

donc $E_n(\Phi)$ est de dimension 1 et on a

$I_n \in E_n(\Phi)$ car $\Phi(I_n) = n I_n$ donc on peut conclure que $E_n(\Phi) = \text{vect} \langle I_n \rangle$

oui

6) Calculons la trace de Φ. Comme Φ diagonalisable et donc forcément trigonalisable on a donc que la trace de Φ

est la somme des valeurs propres multiplié par leur multiplicité ~~géométri~~ algébrique. Or comme A diagonalisable la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique

1 donc $\mathrm{Tr}(\Phi) = \underbrace{(n^2-1)}_{\dim(E_0(\Phi))} \times 0 + \underbrace{1}_{\dim(E_n(\Phi))} \times n = n$

oui

12/12