L2 Probabilités 1 : Corrections TD

Samuel Daudin

Premier semestre 2020/2021

Contents

1 TD2 - Tribus

Dans toute la feuille, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

1.1 Exercice 1

Question 1 $\varnothing \in \mathcal{F}$ par définition d'une tribu mais une tribu est aussi stable par passage au complémentaire donc

$$\Omega = \Omega \backslash \varnothing \in \mathcal{F}.$$

Question 2 En notant $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_i = \Omega$ pour $i \geqslant 3$, on a:

$$A \cup B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

Mais quelque soit $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable donc $A \cup B \in \mathcal{F}$. En particulier, $\mathcal{F}$ est stable par union finie.

Question 3 On remarque que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. En utilisant la stabilité de $\mathcal{F}$ par passage au complémentaire et par union dénombrable, on en déduit que $(A \cap B)^c \in \mathcal{F}$ et donc $A \cap B$.

Question 4 On note que $A \backslash B = A \cap B^c$. Par stabilité par passage au complémentaire, $B^c \in \mathcal{F}$, puis par le point prédédent $A \cap B^c \in \mathcal{F}$.

Question 5 En utilisant les points précédent (4 et 3) on montre facilement que $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{F}$.

Question 6 On a $(\bigcap_{n \geqslant 1} A_n)^c = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n^c$. Par stabilité par passage au complémentaire et par stabilité par union dénombrable on en déduit que $(\bigcap_{n \geqslant 1} A_n)^c \in \mathcal{F}$ et donc $\bigcap_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{F}$.

1.2 Exercice 2

Question 1 Prenons $A = \{1, 3, 5\}$, $\sigma(\mathcal{C})$ doit contenir A et son complémentaire A^c mais aussi (comme n'importe quelle tribu sur Ω), $\varnothing$ et son complémentaire Ω. On vérifie alors aisément que la tribu $\{A, A^c, \varnothing, \Omega\}$ est stable par complémentaire et par union dénombrable. Finalement : $\sigma(\mathcal{C}) = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \varnothing, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.

Question 2 Exactement comme dans la question précédente, à ceci près qu'on peut avoir $A = \Omega$ ou $A = \varnothing$ et dans ces cas, $\sigma(\mathcal{C})$ est réduite à $\{\varnothing, \Omega\}$ mais en général :

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{A, A^c, \varnothing, \Omega\}.$$

Question 3 On commence par utiliser la stabilité par passage au complémentaire, $\sigma(\mathcal{C})$ doit contenir A, B, A^c, B^c et comme toujours, $\varnothing, \Omega$. La stabilité par union dénombrable impose que $\sigma(\mathcal{C})$ doit alors contenir $A \cup B$, $A \cup A^c = \Omega$, $A \cup B^c$, $B \cup A^c$, $B \cup B^c = \Omega$, $A^c \cup B^c$. Si on s'arrête là on obtient une collection qui n'est pas stable par passage au complémentaire. Il faut rajouter les complémentaire manquant :

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c, \\
(A \cup B^c)^c &= A^c \cap B, \\
(B \cup A^c)^c &= B^c \cap A, \\
(A^c \cup B^c)^c &= A \cap B.
\end{aligned}
$$

Il manque alors les unions :

$$
\begin{aligned}
(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) &= A \bigtriangleup B, \\
(A^c \cap B^c) \cup (A \cap B) &= (A \bigtriangleup B)^c.
\end{aligned}
$$

On observe alors que

$$\left\{\varnothing, \Omega, A, B, A^c, B^c, A \cup B, A \cup B^c, B \cup A^c, A^c \cup B^c, A^c \cap B^c, A^c \cap B, B^c \cap A, A \cap B, A \bigtriangleup B, (A \bigtriangleup B)^c\right\}$$

est bien stable par passage au complémentaire et par union dénombrable donc

$$\sigma(\mathcal{C}) = \left\{\varnothing, \Omega, A, B, A^c, B^c, A \cup B, A \cup B^c, B \cup A^c, A^c \cup B^c, A^c \cap B^c, A^c \cap B, B^c \cap A, A \cap B, A \bigtriangleup B, (A \bigtriangleup B)^c\right\}.$$

Question 3 On a $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\Omega)$. En effet l'inclusion $\subset$ est toujours vérifiée et pour l'autre inclusion on remarque qu'une partie $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est dénombrable car Ω est dénombrable et donc :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}.$$

L'union est dénombrable et les singletons $\{\omega\}$ sont dans $\mathcal{F}$ donc $A \in \mathcal{F}$.

Question 4 On va montrer que

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega), A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$$

(ici fini compte comme dénombrable). L'inclusion $\supset$ découle de l'argument de la question précédente et de la stabilité par passage au complémentaire. Il suffit de montrer que $\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega), A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$ est un tribu pour conclure que $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C})$. La stabilité par passage au complémentaire est claire. Pour la stabilité par union dénombrable considérons $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}$. Si tous les (A_i) sont dénombrables alors leur union $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ est dénombrable (l'union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable). Si au moins pour un certain $j \in \mathbb{N}$, A_j, est de complémentaire dénombrable alors $(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)^c \in (A_j)^c$ et donc l'union est de complémentaire dénombrable. Dans tous les cas :

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}.$$

Ainsi $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C})$.

1.3 Exercice 3

On a défini $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme la tribu engendrée par les intervalles $]a, b[$, avec a, b réels et $a < b$. Montrer qu'elle est aussi engendrée par les familles suivantes:

1. Les intervalles de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
2. Les intervalles de la forme $]-\infty, t]$ avec $t \in \mathbb{R}$.
3. Les intervalles de la forme $]-\infty, t]$ avec $t \in \mathbb{Q}$.
4. Les parties ouvertes de $\mathbb{R}$.
5. Les parties fermées de $\mathbb{R}$.

En utilisant les propriétés élémentaires des tribus (entre autres stabilité par passage au complémentaire, par union et intersection dénombrable)

Question 1 On a $[a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car $[a, b] = \bigcap_{n \geqslant 1}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$. On conclut en observant que

$$]a, b[= \bigcup_{n \geqslant n_0} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$$

pour un certain $n_0 \geqslant 1$.

Question 2 On a $]-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car $]-\infty, a] = \bigcup_{n \geqslant 1}]a-n, a]$. Puis on observe que $[a, b] =]-\infty, a] \cap]-\infty, b]$.

Question 3 On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$]-\infty, t] = \bigcap_{t_i \in \mathbb{Q}, t_i \geqslant t}]-\infty, t_i].$$

Question 4 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, montrons que :

$$U = \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{\{r \in \mathbb{Q}^+ / B(x,r) \subset U\}} B(x, r).$$

On raisonne par double inclusion. Soit $y \in U$. U étant un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $r_0 > 0$ tel que $]y - r_0, y + r_0[\subset U$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $0 < 2r \leqslant r_0$ un rationnel tel que $]y - 2r, y + 2r[\subset U$. Encore par densité, il exitse $x \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - y| \leqslant \frac{r}{2}$. On a alors :

$$y \in]x - r, x + r[\subset]y - r_0, y + r_0[\subset U.$$

Donc $y \in \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{\{r \in \mathbb{Q}^+ / B(x,r) \subset U\}} B(x, r)$ et donc

$$U \subset \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{\{r \in \mathbb{Q}^+ / B(x,r) \subset U\}} B(x, r).$$

Soit maintenant $y \in \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{\{r \in \mathbb{Q}^+ / B(x,r) \subset U\}} B(x, r)$. Il existe donc $x \in \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{Q}^+$, $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset U$ et $y \in]x - r, x + r[$ donc $y \in U$. Ainsi $\bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{\{r \in \mathbb{Q}^+ / B(x,r) \subset U\}} B(x, r) \subset U$.

On va en déduire que la tribu engendrée sur $\mathbb{R}$ par les intervalles ouverts coincide avec la tribu engendrée par tous les ouverts. Soit $\mathcal{B}_1(\mathbb{R})$ la tribu engendrée par les intervalles ouverts et $\mathcal{B}_2(\mathbb{R})$ la tribu engendrée par tous les ouverts. Les intervalles ouverts étant en particulier des ouverts, on a directement $\mathcal{B}_1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}_2(\mathbb{R})$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$,

$$U = \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{\{r \in \mathbb{Q}^+ / B(x,r) \subset U\}} B(x, r).$$

Autrement dit,

$$U = \bigcup_{(x,r)\in U\cap\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^+/B(x,r)\subset U} B(x,r).$$

Mais $\{(x,r) \in U \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+/B(x,r) \subset U\}$ est une sous-partie de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ qui est dénombrable comme produit fini d'ensembles dénombrables. Une tribu étant stable par union dénombrable, on en déduit que $U \in \mathcal{B}_1(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathcal{B}_1(\mathbb{R})$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ qui contient tous les ouverts, $\mathcal{B}_1(\mathbb{R})$ contient donc la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$ (ie la plus petite tribu sur $\mathbb{R}$ qui contient les ouverts) et donc : $\mathcal{B}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}_1(\mathbb{R})$. Finalement, $\mathcal{B}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{B}_1(\mathbb{R})$.

Question 5 Si F est un fermé alors $\mathbb{R}\backslash F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc $\mathbb{R}\backslash F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et on conclut par passage au complémentaire.

1.4 Exercice 4

Question 1 L'intersection de deux tribus $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sur un même ensemble Ω forme toujours une tribu sur Ω. En effet, $\varnothing \in \mathcal{F}$ et $\varnothing \in \mathcal{G}$ donc $\varnothing \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Si maintenant $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$ et $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{G}$ donc $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est stable par complémentaire et stable par union dénombrable, c'est donc un tribu. Plus généralement, une intersection quelconque de tribus est une tribu (c'est d'ailleurs pour cela qu'on peut parler de tribu engendrée par une partie de Ω, ...).

Question 2 Soit A et B comme dans la troisième question du deuxième exercice et tels que $A, A^c, B, B^c, \Omega, \varnothing$ soient tous distincts. Alors $\sigma(\{A\}) = \{A, A^c, \varnothing, \Omega\}$ et $\sigma(\{B\}) = \{B, B^c, \varnothing, \Omega\}$ sont deux tribus sur Ω mais $\sigma(\{A\}) \cup \sigma(\{B\})$ n'est pas une tribu, elle ne contient pas $A \cup B$ and particulier.

1.5 Exercice 5

Par définition d'une mesure de probabilité, $\mathbb{P}(\varnothing) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0$ donc $\varnothing \in \mathcal{F}$. Soit maintenant $A \in \mathcal{F}$. Si $\mathbb{P}(A) = 1$ alors $\mathbb{P}(A^c) = 0$ donc $A^c \in \mathcal{F}$. De même si $\mathbb{P}(A) = 0$ alors $\mathbb{P}(A^c) = 1$ et $A^c \in \mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire. Soit maintenant $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'élements de A. Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_i) = 0$ alors par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 0.$$

Donc $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$. Si maintenant il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(A_j) = 1$, alors, par croissance de $\mathbb{P}$,

$$1 \leqslant \mathbb{P}(A_j) \leqslant \mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leqslant 1$$

Donc $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = 1$ et $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est bien une tribu.

2 TD3 - Variables aléatoires réelles

2.1 Exercice 1

On prend $\Omega = \{1, \ldots, 6\} \times \{1, \ldots, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et pour $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. Soit $\Omega_2 = \{0, \ldots, 5\}$, on définit $X : \Omega \to \Omega_2$ par :

$$X(x,y) = |x - y|$$

et on considère $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$ comme tribu sur Ω_2. Ω_2 est dénombrable donc pour montrer que X est une varibable aléatoire, il suffit de vérifier que pour tout $0 \leqslant i \leqslant 5$,

$$\{X = i\} = X^{-1}(\{i\}) \in \mathcal{A}.$$

Mais $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ donc ceci est vérifié immédiatement. X est donc bien une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$. Encore une fois, Ω_2 étant dénombrable, pour déterminer la loi de X il suffit de calculer pour $i \in \{0, \dots, 5\}$:

$$\mathbb{P}_X(\{i\}) = \mathbb{P}(X = i).$$

Mais $X = i$ est l'événement "$|x - y| = i$" et en comptant attentivement, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X(\{0\}) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6},\\
\mathbb{P}_X(\{1\}) &= \frac{10}{36} = \frac{5}{18},\\
\mathbb{P}_X(\{2\}) &= \frac{8}{36} = \frac{2}{9},\\
\mathbb{P}_X(\{3\}) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6},\\
\mathbb{P}_X(\{4\}) &= \frac{4}{36} = \frac{1}{9},\\
\mathbb{P}_X(\{5\}) &= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

2.2 Exercice 2

Question 1 Soit $Z = (X, Y)$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = x - y$. Alors $\{X - Y = 0\} = f(Z)^{-1}(\{0\})$. On rappelle que

$$\begin{aligned}
f(Z)^{-1}(\{0\}) &= \{\omega \in \Omega \text{ tels que } f(Z)(\omega) = 0\}\\
&= \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = Y(\omega)\}.
\end{aligned}$$

Mais $\{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc il suffit de montrer que $f(Z)$ est une variable aléatoire pour en déduire que $\{X - Y = 0\}$ est bien un événement. f étant continue, $f(Z)$ est une variable aléatoire (propriété du cours) donc $f(Z)^{-1}(\{0\})$ est bien un événement.
rappel: en général si $f : E \to F$ et $B \subset F$ alors l'image réciproque de B par f est l'ensemble :

$$f^{-1}(B) := \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Question 2 Soit A un borélien de $\mathbb{R}$, on doit vérifier que $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_Y(A)$. Les événements $(X = Y)$ et $X \neq Y$ forment une partition de Ω donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X(A) &= \mathbb{P}(X \in A)\\
&= \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{X = Y\}) + \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{X \neq Y\})
\end{aligned}$$

Mais par croissance d'une mesure de probabilité, $\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{X \neq Y\}) \leqslant \mathbb{P}(\{X \neq Y\}) = 0$. Et $\{X \in A\} \cap \{X = Y\} = \{Y \in A\} \cap \{X = Y\}$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X(A) &= \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{X = Y\})\\
&= \mathbb{P}(\{Y \in A\} \cap \{X = Y\})\\
&= \mathbb{P}_Y(A)
\end{aligned}$$

Question 3 On considère comme expérience "lancer une pièce équilibrée" et on prend pour X une variable aléatoire qui donne 1 si on a pile et -1 si on a face. Si on prend $Y = -X$ alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ mais $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

2.3 Exercice 3

Question 1 Dans tout l'exercice on note A l'évenement "X est paire". On observe que:

$$\{X \text{ est paire}\} = \bigcup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ pair}}} \{X = i\}$$

où l'union est disjointe. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ pair}}} \mathbb{P}(X = i) \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ pair}}} \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

donc $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ si n est pair et $\mathbb{P}(A) = \frac{n-1}{2n}$ si n est impaire.

Question 2 Attention aux cas de bord, ici on peut avoir $X = 0$ contrairement à la question précédente. Sinon on procède de la même manière et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ pair}}} \mathbb{P}(X = i) \\
&= \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ pair}}} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.
\end{aligned}$$

Pour calculer cette somme, on considère :

$$S_n = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ pair}}} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

et

$$T_n = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ impair}}} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

D'une part $S_n + T_n = \mathbb{P}(X \in \{0, ..., n\}) = 1$. D'autre part, en utilisant le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
S_n - T_n &= \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} (-1)^i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= (1 - p - p)^n = (1 - 2p)^n.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$S_n = \frac{S_n + T_n + S_n - T_n}{2} = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}.$$

Question 3 Ici, en reconnaissant une somme géométrique :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ pair}}}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k} \\
&= \frac{p}{1-p} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k} - 1 \right) = \frac{p}{1-p} \left(\frac{1}{1-(1-p)^2} - 1 \right) \\
&= \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}.
\end{aligned}$$

Question 4 Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{2k!} \\
&= e^{-\lambda} \cosh(\lambda)
\end{aligned}$$

Si on ne reconnaît pas le cosh on peut procéder comme dans la question 2, avec :

$$S = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{2k!},$$

$$T = S = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

On voit alors que $S + T = \exp(\lambda)$ et $S - T = \exp(-\lambda)$.

2.4 Exercice 4

Question 1 On a :

$$\{X \leqslant x\} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x < 0 \\ \{X = 0\} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ \Omega & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

donc

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-p) & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Question 2 On a :

$$\{X \leqslant x\} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x < 1 \\ \{X \in \{1, ..., \lfloor x \rfloor\}\} & \text{si } 1 \leqslant x < n \\ \Omega & \text{si } x \geqslant n \end{cases}$$

donc :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\lfloor x \rfloor}{n} & \text{si } 1 \leqslant x < n \\ 1 & \text{si } x \geqslant n. \end{cases}$$

Question 3 On a :

$$\{X \leqslant x\} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x \leqslant a \\ \{X \in]a, x]\} & \text{si } a < x < b \\ \Omega & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

donc :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x \geqslant b. \end{cases}$$

Question 4 Si $x < 0$ alors $\{X \leqslant x\} = \varnothing$ donc $F_X(x) = 0$. Soit maintenant $x \geqslant 0$, X admet une densité donc :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{u \geqslant 0} du \\ &= \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= [-e^{-\lambda u}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Question 5 Encore une fois X admet une densité donc :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + u^2} du \\ &= \frac{1}{\lambda \pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1 + (\frac{u}{\lambda})^2} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x \backslash \lambda} \frac{1}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} [\arctan(t)]_{-\infty}^{x \backslash \lambda} \\ &= \frac{1}{\pi} (\arctan(\frac{x}{\lambda}) + \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

2.5 Exercice 5

Question 1 Si $a = 0$, alors $Y = b$. Y est constante presque sûrement donc F_Y est discontinue et Y n'admet pas de densité. Supposons déjà $a > 0$. Si $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leqslant t) = \mathbb{P}(X \leqslant \frac{t-b}{a}) = F_X(\frac{t-b}{a}).$$

Mais X admet une densité f_X donc, par changement de variable $v = \frac{t-b}{a}$:

$$\begin{aligned}
F_Y(t) &= \int_{-\infty}^{\frac{t-b}{a}} f_X(v)dv \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{a} f_X(\frac{u-b}{a})du.
\end{aligned}$$

Ainsi Y admet un densité f_Y qui vérifie $f_Y(u) = \frac{1}{a} f_X(\frac{u-b}{a})$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. On suppose maintenant que $a < 0$. Dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F_X(t) &= \mathbb{P}(X \geqslant \frac{t-b}{a}) \\
&= 1 - F_X(\frac{t-b}{a}) \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{\frac{t-b}{a}} f_X(u)du \\
&= \int_{\frac{t-b}{a}}^{+\infty} f(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{-a} f_X(\frac{u-b}{a})du
\end{aligned}$$

(toujours par le même changement de variable). Finalement, Y admet une densité si et seulement si $a \neq 0$ et dans ce cas f_Y est donnée pour tout $u \in \mathbb{R}$ par :

$$f_Y(u) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{u-b}{a}).$$

Question 2 Si X suit une **loi uniforme** sur $]u, v[$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{v-u} \mathbf{1}_{]u,v[}(x)$ donc

$$f_Y(u) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{v-u} \mathbf{1}_{]u,v[}(\frac{u-b}{a}).$$

Mais $\frac{u-b}{a} \in]u, v[$ si et seulement si $u \in]|a|u + b, |a|v + b[$ donc

$$f_Y(u) = \frac{1}{|a|v - |a|u} \mathbf{1}_{]|a|u+b,|a|v+b[}(u)$$

et Y suit une loi uniforme sur $]|a|u + b, |a|v + b[$. Si maintenant X suit une **loi normale** de paramètres (μ, σ^2), alors pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$f_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

donc, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_Y(u) &= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-(\frac{u-b}{a} - \mu)^2}{2\sigma^2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(a\sigma)^2}} \exp(\frac{-(u-(a\mu+b)^2}{2(a\sigma)^2}).
\end{aligned}$$

Finalement Y suit une loi normale $\mathcal{N}(a\mu + b, (a\sigma)^2)$.

Questions 3 et 4 En procédant à l'identique on voit que si X suit une loi $\mathcal{C}(\lambda)$ alors aX suit une loi $\mathcal{C}(\lambda|a|)$. Si maintenant $a > 0$ et X suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ alors aX suit une loi $\mathcal{E}(\frac{\lambda}{a})$. Finalement, si $X \sim \Gamma(\lambda, n)$ et $a > 0$ alors $aX \sim \Gamma(\frac{\lambda}{a}, n)$.

2.6 Exercice 6

Question 1 Soit $X \sim \mathcal{E}(1)$. $X \geqslant 0$ donc, presque sûrement, $0 \exp(-X) \leqslant 1$, ainsi $\mathbb{P}(e^{-X} \leqslant x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et pour $x > 0$, $\mathbb{P}(e^{-X} \leqslant x) = \mathbb{P}(e^{-X} \leqslant x \wedge 1$. On prend donc $x \in]0,1]$ et on calcule $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$. Dans ce cas, $e^{-X} \leqslant x$ si et seulement si $-X \leqslant \log x$ si et seulement si $X \geqslant -\log x$, donc,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(e^{-X} \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(X \geqslant -\log x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X < -\log x) \\ &= 1 - F_X(-\log x). \end{aligned}$$

Mais pour $u \geqslant 0$, $F_X(u) = 1 - \exp(-u)$ donc pour $x \in]0,1]$,

$$F_Y(x) = 1 - \exp(\log x)) = x.$$

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Donc $Y \sim \mathcal{U}(]0,1[)$.

Question 2 On suppose que $X \sim \mathcal{U}(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on pose $Y = \tan X$. tan réalise une bijection croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $]-\infty, \infty[$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\tan X \leqslant x\} = \{X \leqslant \arctan x\}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(\{X \leqslant \arctan x\}) \\ &= F_X(\arctan x). \end{aligned}$$

Mais $X \sim \mathcal{U}(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leqslant -\frac{\pi}{2} \\ \frac{u+\frac{\pi}{2}}{\pi} & \text{si } -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } u \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Et comme $\arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$F_Y(x) = \frac{1}{\pi}(\arctan x + \frac{\pi}{2}).$$

Donc $Y \sim \mathcal{C}(1)$.

Question 3 On suppose que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et on pose $Y = X^2$.Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, $\{X^2 \leqslant x\} = \varnothing$ donc $F_Y(x) = 0$. On suppose donc $x \geqslant 0$. On a $\{Y \leqslant x\} = \{-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\}$ donc $F_Y(x) = \mathbb{P}(X \in [-\sqrt{x}, \sqrt{x}])$. Mais X est une variable à densité avec pour densité $f_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{u^2}{2}$ donc, avec le changement de variable $t = u^2$:

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}(X \in [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]) \\
&= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2}) du \\
&= 2\int_{0}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2}) du \\
&= 2\int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t}{2}) \frac{dt}{2\sqrt{t}}.
\end{aligned}$$

Si on reconnaît la valeur particulière $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(x) = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{x \geqslant 0} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^x t^{\frac{1}{2}-1} \exp(-\frac{t}{2}) dt.$$

Et donc $Y \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Question 4 On suppose que $X \sim \mathcal{C}(1)$ et on pose $Y = \frac{1}{X}\mathbf{1}_{X \neq 0}$. Soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\{Y \leqslant y\} = \{\frac{1}{X}\mathbf{1}_{X \neq 0} \leqslant y\} = \begin{cases} \{\frac{1}{y} \leqslant Y < 0\} & \text{si } y < 0 \\ \{X < 0\} & \text{si } y = 0 \\ \{X \in]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{y}, +\infty[\} & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

Ainsi, si $y = 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(X < 0) = F_X(0) = \frac{1}{2}$. On rappelle la formule de trigonométrie: pour $x > 0$,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

et pour $x < 0$:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Si $y < 0$,

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(\frac{1}{y} \leqslant X < 0) \\
&= F_X(0) - F_X(\frac{1}{y}) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}(\arctan \frac{1}{y} + \frac{\pi}{2}) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}(-\arctan y - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan y.
\end{aligned}$$

Si maintenant $y > 0$,

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X \geqslant \frac{1}{y}) \\
&= \frac{1}{2} + 1 - F_X(\frac{1}{y}) \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}(\arctan \frac{1}{y} + \frac{\pi}{2}) \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}(-\arctan y + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan y.
\end{aligned}
$$

Finalement on voit que $Y \sim \mathcal{C}(1)$ (comme X !).

2.7 Exercice 7

On prend $\alpha > 0$ et X une var à densité avec une densité f_X donnée par :

$$f_X(x) = \frac{c}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x).$$

Question 1 Pour que f_X soit une densité il faut en particulier que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$. Mais:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx &= \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{1+\alpha}} dx \\
&= \frac{c}{\alpha}\left[-\frac{1}{x^\alpha}\right]_1^{+\infty} \\
&= \frac{c}{\alpha}
\end{aligned}
$$

Donc, nécessairement, $c = \alpha$.

Question 2 Si $x \leqslant 1$, $F_X(x) = 0$ et pour $x > 1$,

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\alpha}{u^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(u)du \\
&= \left[-\frac{1}{u^\alpha}\right]_1^{x} \\
&= 1 - \frac{1}{x^\alpha}.
\end{aligned}
$$

Question 3 X admet une densité donc :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X \in]1, 2[\}) &= \int_1^2 \frac{\alpha}{u^{1+\alpha}} du \\
&= \left[-\frac{1}{u^\alpha}\right]_1^{2} \\
&= 1 - \frac{1}{2^\alpha}.
\end{aligned}
$$

Directement on aurait pu utiliser la question précédente en observant que, X admettant une densité,

$$\mathbb{P}(\{X \in]1, 2[\}) = F_X(2) - F_X(1) = 1 - \frac{1}{2^\alpha} - 0 = 1 - \frac{1}{2^\alpha}.$$

Question 4 Soit maintenant $Y := \log X$. $X \geqslant 1$ si et seulement si $Y \geqslant 0$ ainsi, pour $y < 0$, $F_Y(x) = 0$ et pour $y \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leqslant y) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant \exp(y)) \\ &= F_X(\exp(y)) \\ &= 1 - \frac{1}{(\exp(y))^\alpha} = 1 - \exp(-\alpha y). \end{aligned}$$

Donc $Y \sim \mathcal{E}(\alpha)$.

2.8 Exercice 8

Question 1 Soit X une variable aléatoire à densité dont la densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{x(1-x)}} \mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$

La condition de normalisation : $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ impose :

$$\frac{1}{c} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

On utilise le changement de variable $x = sin^2(u)$, qui donne :

$$\frac{dx}{du} = 2\cos u \sin u,$$

$$\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{\sin^2 u \cos^2 u} = \sin u \cos u.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos u \sin u}{\sin u \cos u} du \\ &= \pi \end{aligned}$$

donc $c = \frac{1}{\pi}$.

Question 2 On reprend le même calcul : pour $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\arcsin \sqrt{t}} \frac{2\cos u \sin u}{\sin u \cos u} du \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Question 3 On a $X(\Omega) = [0, 1]$ donc $\sqrt{X}(\Omega) = [0, 1]$ et donc $Y(\Omega) = [0, \frac{\pi}{2}]$. Soit maintenant $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, par croissance de $t \to \sin^2 t$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\arcsin\sqrt{X} \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant \sin^2(t)) \\ &= F_X(\sin^2(t)) \\ &= \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\sin^2(t)} \\ &= \frac{2}{\pi}t. \end{aligned}$$

Donc :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \frac{2}{\pi}t & \text{si } 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } t \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Finalement $Y \sim \mathcal{U}(]0, \frac{\pi}{2}[)$.

2.9 Exercice 9

Question 1 Soit X une variable aléatoire à densité dont la densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{c}{1+x}\mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$

La condition de normalisation : $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ impose :

$$\frac{1}{c} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

Mais :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$$

donc $c = \frac{1}{\ln 2}$.

Question 2 Soit $t \in [0, 1]$,

$$F_X(t) = \frac{1}{\ln 2}\int_0^t \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^t = \ln(1+t)$$

donc

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \frac{\ln(1+t)}{\ln 2} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Question 3 On a $Y(\Omega) \subset]0, 1[$. Soit $t \in]0, 1[$. On a la partition de Ω

$$\left\{\{\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k\}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

donc :

$$\{Y \leqslant t\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{Y \leqslant t\} \cap \left\{ \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k \right\}.$$

Mais pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\{Y \leqslant t\} \cap \left\{ \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k \right\} &= \{\frac{1}{X} - k \leqslant t\} \cap \left\{ \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k \right\} \\
&= \{\frac{1}{X} \leqslant t + k\} \cap \left\{ X \in]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}] \right\} \\
&= \left\{ X \geqslant \frac{1}{t+k} \right\} \cap \left\{ X \in]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}] \right\} \\
&= \left\{ X \in [\frac{1}{t+k}, \frac{1}{k}] \right\}
\end{aligned}$$

donc, pour $t \in]0, T[$,

$$\begin{aligned}
F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leqslant t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\{Y \leqslant t\} \cap \left\{ \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k \right\} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ X \in [\frac{1}{t+k}, \frac{1}{k}] \right\} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(F_X\left(\frac{1}{k}\right) - F_X\left(\frac{1}{t+k}\right) \right)
\end{aligned}$$

mais pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
&F_X\left(\frac{1}{k}\right) - F_X\left(\frac{1}{t+k}\right) \\
&= \frac{1}{\ln 2}\left(\ln(1 + \frac{1}{k}) - \ln(1 + \frac{1}{t+k}) \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2}\left(\ln(k+1) - \ln(k) - \ln(t+k+1) - \ln(t+k) \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2}\left(\ln \frac{k+1}{t+k+1} - \ln \frac{k}{t+k} \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, en reconnaissant une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
F_Y(t) &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln \frac{k+1}{t+k+1} - \ln \frac{k}{t+k} \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2}\left(\lim_{n \to +\infty} \left(\ln \frac{n+1}{t+n+1} \right) - \ln \frac{1}{t+1} \right) \\
&= \frac{\ln(t+1)}{\ln 2}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \frac{\ln(1+t)}{\ln 2} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

donc $Y \sim X$.

2.10 Exercice 10

Question 1 Soit X une variable aléatoire réelle, une atome de $\mathbb{P}_X$ est un point $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(\{X = x\}) > 0$. On note $\mathcal{A}_X$ l'ensemble des atomes de $\mathbb{P}_X$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{X = x\} = \{X \leqslant x\} \backslash \{X < x\}$ donc $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) - \mathbb{P}(X < x)$ mais $\mathbb{P}(X \leqslant x) = F_X(x)$ et $\mathbb{P}(X < x) = \lim_{y \to x^-} F_X(y)$ ainsi $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{y\to x^-} F_X(y)$. Mais F_X étant toujours continue à droite,

$$\begin{aligned} F_X \text{ continue en } x &\Leftrightarrow F_X \text{ continue à gauche en } x \\ &\Leftrightarrow \lim_{y \to x^-} F_X(y) = F_X(x) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi les atomes de $\mathbb{P}_X$ coïncident avec les points de discontinuités de F_X.

Question 2 On observe que $\mathcal{A}_X$ s'écrit de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_X = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \mathbb{P}_X(x) \geqslant \frac{1}{k}\}.$$

Supposons par l'absurde que $\mathcal{A}_X$ soit non déombrable, alors il y a au moins un des membres de l'union qui est infini. On peut donc trouver $k_0 \in \mathbb{N}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels deux-à-deux distincts tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_X(\{x_n\}) \geqslant \frac{1}{k_0}.$$

Mais alors:

$$1 \geqslant \mathbb{P}(\{X \in \{x_0, x_1, ...\}\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = x_0\}) = +\infty.$$

Et on obtient une absurdité. Ainsi $\mathcal{A}_X$ est au plus dénombrable.

Question 3 Soit $Y = F_X(X)$. Attention à ne pas dire de bêtise ! $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle (image d'une variable aléatoire réelle par une fonction continue). Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$Y(\omega) = F_X(X)(\omega) = F_X(X(\omega)) = \mathbb{P}(\{X \leqslant X(\omega)\}).$$

On va déterminer F_Y la fonction caractéristique de Y. On remarque déjà que $Y \in [0, 1]$ donc :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } y \geqslant 1. \end{cases}$$

Soit maintenant $y \in]0, 1[$. On suppose que X est sans atome et donc, d'après la question précédente, F_X est continue. Si F_X était strictement croissante, par le théorème de la bijection, il existerait une fonction continue strictement croissante $F_X^{-1} :]0, 1[\to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in]0, 1[$, $F_X \circ F_X^{-1}(t) = t$ et on aurait :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leqslant y) \\ &= \mathbb{P}(F_X(X) \leqslant y) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant F_X^{-1}(y)) \\ &= F_X(F_X^{-1}(y)) = y. \end{aligned}$$

Et donc $Y \sim \mathcal{U}(]0, 1[)$. Dans le cas où F_X n'est pas strictement croissante il faut travailler un peu plus. Admettons pour un temps que $F_X^{-1}(\{y\})$ (ie l'ensemble des antécédants de y par F_X) est de la forme $[m_y, M_y]$ pour deux réels $m_y \leqslant M_y$. Alors

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leqslant y) \\
&= \mathbb{P}(F_X(X) \leqslant y) \\
&= \mathbb{P}(X \leqslant M_y) \\
&= F_X(M_y) = y
\end{aligned}
$$

et donc $Y \sim \mathcal{U}(]0,1[)$. Reste à prouver que $F_X^{-1}(\{y\}) = [m_y, M_y]$ pour deux réels $m_y \leqslant M_y$. Par thèorème des valeurs intermédiaires, $F_X^{-1}(\{y\})$ est non vide. F_X est croissante donc si on prend $x_1 \leqslant x_2 \in F_X^{-1}(\{y\})$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$y = F_X(x_1) \leqslant F_X(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant F_X(x_2) = y.$$

Donc $F_X^{-1}(\{y\})$ est convexe. Mais les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles donc $F_X^{-1}(\{y\})$ est un intervalle. Si $F_X^{-1}(\{y\})$ n'était pas borné, il contiendrait ou bien un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ ou bien un intervalle de la forme $]b, +\infty[$. Dans le premier cas, on en déduirait par continuité de F_X que $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = y$ et dans le deuxième cas que $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = y$. Les deux cas sont impossibles car $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ et on a $y \in]0,1[$. Ainsi $F_X^{-1}(\{y\})$ est un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $F_X^1(\{y\})$ qui converge vers $\sup F_X^{-1}(\{y\})$ la borne supérieure de $F_X^{-1}(\{y\})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_X(x_n) = y$ et par continuité de F_X, $F_X(\sup F_X^{-1}(\{y\}) = y$. Donc $\sup F_X^{-1}(\{y\}) \in F_X^{-1}(\{y\})$. De même, $\inf F_X^{-1}(\{y\}) \in F_X^{-1}(\{y\})$. On aurait ausi directement pu dire que l'image réciproque d'une fonction continue par un fermé est un fermé... Finalement, $F_X^{-1}(\{y\})$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et il existe $m_y \leqslant M_y$ deux réels tels que :

$$F_X^{-1}(\{y\}) = [m_y, M_y].$$

3 TD4 - Espérance

3.1 Exercice 1

Question 1 Supposons que $X \sim \mathcal{U}(\{1, ..., n\})$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

Donc $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$. Soit maintenant $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(tX)) &= \sum_{k=1}^{n} e^{tk}\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp(t)^k\\ &= \frac{1}{n}\frac{e^t - e^{(n+1)t}}{1-e^t}.\end{aligned}$$

Question 2 Supposons que $X \sim \mathcal{B}(p)$ et notons $q = 1-p$.

$$\mathbb{E}(X) := 0 \times \mathbb{P}(X=0) + 1 \times \mathbb{P}(X=1) = p$$

On remarque que $X^2 = X$ donc $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X) = p$ et $\mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$. Soit maintenant $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(tX)) &= \exp(t\times 0)\mathbb{P}(X=0) + \exp(t)\mathbb{P}(X=1)\\ &= e^t p + (1-p) = 1 + p(e^t - 1).\end{aligned}$$

Question 3 On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= p\sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\\ &= np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}\\ &= np(p+(1-p))^{n-1} = np.\end{aligned}$$

On s'inspire de la question précédente où on a utilisé la formule : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$. Au lieu de calculuer $\mathbb{E}(X^2)$, on va calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= p^2\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n}{k}\frac{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-k}\\ &= n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^k(1-p)^{n-2-k}\\ &= n(n-1)p^2.\end{aligned}$$

Mais $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$ donc :

$$\mathrm{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(p-1) = npq.$$

Soit maintenant $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(pe^t\right)^k(1-p)^{n-k} \\
&= (pe^t+(1-p))^n = (1+p(e^t-1))^n
\end{aligned}$$

Question 4 On suppose ici que $X \sim \mathcal{G}(p)$. On rappelle que pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

En dérivant une première puis une seconde fois cette expression (pourquoi est-ce légal ?) on obtient les formules suivantes valables pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2}, \\
\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} &= \frac{2}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} \\
&= \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} \\
&= \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}.
\end{aligned}$$

Mais $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$ donc

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Soit maintenant $t \in \mathbb{R}$ tel que $qe^t < 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(tX)) &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk} p(1-p)^{k-1} \\
&= pe^t \sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^t(1-p)\right)^{k-1} \\
&= pe^t \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^t(1-p)\right)^{k} \\
&= pe^t \frac{1}{1-e^t(1-p)} = \frac{pe^t}{1-qe^t}.
\end{aligned}$$

Question 5 On suppose ici que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. X est une v.a.r. discrète positive donc, d'après le cours,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in Im(X)} x\mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.
\end{aligned}$$

Maintenant, en procédant de la même manière :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{x \in Im(X(X-1))} x\mathbb{P}(X(X-1) = x) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda^2
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}$$

Soit maintenat $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tX}) &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^t \lambda)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} e^{e^t \lambda} \\
&= e^{\lambda(e^t - 1)}
\end{aligned}$$

Question 6 Ici $X \sim \mathcal{U}(]a, b[)$. X est une variable à densité bornée donc elle admet une espérance et des moments de tout ordre et d'après le cours, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
E(X^n) &= \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(dx) \\
&= \int_a^b x^n \frac{dx}{b-a} \\
&= \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_a^b \\
&= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}
\end{aligned}$$

En particulier, $\mathbb{E}(X) = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$ et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$ donc :

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Soit maintenant $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tX}) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} dx \\
&= \frac{1}{b-a} [\frac{1}{t} e^{tx}]_a^b \\
&= \frac{e^{tb} - e^{\lambda a}}{t}
\end{aligned}$$

Question 7 Ici $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X^n est une variable aléatoire positive donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^n) &= \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(dx) \\
&= \int_0^{+\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx
\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0 x^n e^{-\lambda x} dx$. On remarque que pour $n \in \mathbb{N}^*$, en réalisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[x^n \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} n x^{n-1} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{n}{\lambda} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{n}{\lambda} I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi en observant que $I_0 = \frac{1}{\lambda}$,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n}{\lambda} I_{n-1} = \frac{n}{\lambda} \times \frac{n-1}{\lambda} \times \cdots \times \frac{1}{\lambda} I_0 \\
&= \frac{n!}{\lambda^{n+1}}
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

En particulier, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$ donc $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Soit maintenant $t \in \mathbb{R}$, $\lambda > t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tX}) &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t}.
\end{aligned}$$

Question 8 Ici $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Si on prend $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ alors $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}((\sigma Y + \mu)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma^k \mathbb{E}(Y^k) \mu^{n-k}.$$

Mais pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx < +\infty$, ainsi $\mathbb{E}(|Y|^k) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y)$ existe et il suffit de calculer $\mathbb{E}(Y^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour k impair, $x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^k e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une fonction impaire donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

et $\mathbb{E}(Y^k) = 0$. Si maintenant $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^{2p}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^{2p} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} x^{2p} e^{\frac{-x^2}{2}} dx.
\end{aligned}$$

Posons $I_p := \int_0^{+\infty} x^{2p} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$. En faisant une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
I_p &= \int_0^{+\infty} (-x^{2p-1})(-xe^{-\frac{x^2}{2}})dx \\
&= -\left(\left[x^{2p-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (2p-1)x^{2p-2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right) \\
&= (2p-1)\int_0^{+\infty} x^{2(p-1)}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= (2p-1)I_{p-1}.
\end{aligned}$$

En remarquant que $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, pour $p \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
I_p &= (2p-1)I_{p-1} \\
&= (2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 1 \times I_0 \\
&= \frac{(2p)!}{2p \times (2p-2) \times \cdots \times 2} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{(2p)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$E(Y^{2p}) = \frac{(2p)!}{2^p p!}$$

En particulier, $\mathbb{E}(X) = \mu$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}((\sigma Y + \mu)^2) \\
&= \sigma^2\mathbb{E}(Y^2) + 2\sigma\mu\mathbb{E}(Y) + \mu^2 \\
&= \sigma^2 + \mu^2.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \sigma^2 = \sigma^2$. On prend maintenant $t \in \mathbb{R}$ et on veut calculer $\mathbb{E}(e^{tX})$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tX}) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx
\end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned}
tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2\sigma^2 tx\right] \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + \mu^2\right] \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + (\mu + \sigma^2 t)^2 - (\mu + \sigma^2 t)^2 + \mu^2\right] \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x - \mu - \sigma^2 t)^2 - \sigma^2 t(2\mu + \sigma^2 t)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi on peut faire le changement de variable $y = x - \mu - \sigma^2 t$ qui donne :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tX}) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu-\sigma^2 t)^2-\sigma^2 t(2\mu+\sigma^2 t)\right]}dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y^2-\sigma^2 t(2\mu+\sigma^2 t)\right]}dx \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}t(2\mu+\sigma^2 t)}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy \\
&= e^{\frac{1}{2}t(2\mu+\sigma^2 t)} \\
&= e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2}.
\end{aligned}
$$

Question 9 Ici $X \sim \Gamma(r, \lambda)$ avec $\lambda, r > 0$, X admet une densité donnée par :

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Ainsi, X est une variable aléatoire positive et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^n) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty} x^n x^{r-1} e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty} x^{n+r-1} e^{-\lambda x}dx.
\end{aligned}
$$

Mais

$$\frac{\lambda^{n+r}}{\Gamma(n+r)}\int_0^{+\infty} x^{n+r-1} e^{-\lambda x}dx = 1$$

car on a reconnu la densité d'une loi Gamma de paramètres $n+r$, λ donc,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^n) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\frac{\Gamma(n+r)}{\lambda^{n+r}} \\
&= \frac{\Gamma(n+r)}{\lambda^n \Gamma(r)}.
\end{aligned}
$$

En particulier, $\mathbb{E}(X) = \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda\Gamma(r)} = \frac{r}{\lambda}$. Car on a, pour tout $p > 1$, $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$. On a de même, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{\Gamma(r+2)}{\lambda^2\Gamma(r)} = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}$ donc $\mathrm{Var}(X) = \frac{r(r+1)}{\lambda^2} - \frac{r^2}{\lambda^2} = \frac{r}{\lambda^2}$. Soit maintenant $t \in \mathbb{R}$, tel que $t < \lambda$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tX}) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty} e^{tx} x^{r-1} e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-(\lambda-t)x}dx
\end{aligned}
$$

Mais

$$\frac{(\lambda-t)^r}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-(\lambda-t)x}dx = 1$$

Car on a reconnu la densité d'une loi Gamma de paramètres r, $\lambda - t$. Donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tX}) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\frac{\Gamma(r)}{(\lambda-t)^r} \\
&= \left(\frac{1}{1-\frac{t}{\lambda}}\right)^r = \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-r}.
\end{aligned}
$$

Question 10 Ici $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. X admet une densité donnée par $f_X(x) = \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{\lambda^2+x^2}$. On a $\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\lambda^2+x^2}dx = +\infty$ donc X n'admet pas d'espérance. Elle n'admet donc pas de variance. De même, $\mathbb{E}(e^X) = +\infty$.

3.2 Exercice 2

On va étudier la fonction $a \to \mathbb{E}\left[(X-a)^2\right]$. En développant le carré, puis en utilisant la linéarité de l'espérance on obtient, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} V(a) &= \mathbb{E}\left[X^2 - 2aX + a^2\right] \\ &= a^2 - 2a\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X^2) \end{aligned}$$

Ainsi V est un trinôme, de coefficient dominant 1 donc il admet un minimum et ce minimum est atteint là où la dérivée de V s'annule. Mais $V'(a) = 2a - 2\mathbb{E}(X)$ et $V'(a) = 0 \iff a = \mathbb{E}(X)$ et donc le minimum de V est:

$$\begin{aligned} V(\mathbb{E}(X)) &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] \\ &= \mathrm{Var}(X). \end{aligned}$$

Si on veut bien croire que $(X, Y) \to \sqrt{\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right]}$ est une distance sur l'espace des variables aléatoires de carré intégrable (sur un même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) alors on vient de montrer que la variable aléaoire constante la plus proche de X pour cette distance est $\mathbb{E}(X)$ et que la distance de X au sous-espace vectoriel constitué des variables aléaoires constantes est $\sqrt{\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2\right]} = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

3.3 Exercice 3

Voir la correction de l'exercice 1.

3.4 Exercice 4

On rappelle qu'un fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $x, x_0 \in \mathbb{R}$, et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$\varphi((1-\lambda)x_0 + \lambda x) \leqslant (1-\lambda)\varphi(x_0) + \lambda\varphi(x).$$

Montrons que pour tout $(x, x_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x) \geqslant \varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x_0).$$

Pour tout $\lambda \in]0, 1]$,

$$\frac{\varphi(x_0 + \lambda(x - x_0)) - \varphi(x_0)}{\lambda} \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0). \tag{1}$$

Si on pose $\phi(\lambda) = \varphi(x_0 + \lambda(x - x_0))$, cela se réécrit, pour tout $\lambda \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(\lambda) - \phi(0)}{\lambda} &\leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0), \\ \frac{\phi(\lambda) - \phi(0)}{\lambda - 0} &\leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0). \end{aligned}$$

On va passer à la limite $\lambda \to 0$ dans le terme de gauche, où on reconnaît un taux d' acroissement. ϕ est une fonction $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ et donc :

$$\phi'(0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\phi(\lambda) - \phi(0)}{\lambda} \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

Mais, pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$\phi'(\lambda) = (x - x_0)\varphi'(x_0 + \lambda(x - x_0))$$

donc $\phi'(0) = (x - x_0)\varphi'(x_0)$ et on en déduit :

$$\varphi'(x_0)(x - x_0) \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

On a montré que si on a $x_0 \in \mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) \geqslant \varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x_0).$$

Ce qui s'interprète graphiquement en disant qu'une fonction convexe est toujours "au dessus" des ses tangentes (on a reconnu l'équation de la tangente à φ en x_0). Et on a montré que si on a $x_0 \in \mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) \geqslant \varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x_0).$$

On peut maintenant en déduire l'inégalité de Jensen. Pour cela on prend $\omega \in \Omega$, $x = X(\omega)$ et $x_0 = \mathbb{E}(X)$, alors on obtient :

$$\varphi(X(\omega)) \geqslant \varphi'(\mathbb{E}(X))(X(\omega) - \mathbb{E}(X)) + \varphi(\mathbb{E}(X)).$$

Mais cela est vrai pour tout $\omega \in \Omega$, ainsi, par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) \geqslant \varphi'(\mathbb{E}(X))\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) + \varphi(\mathbb{E}(X)).$$

Mais $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$ et finalement,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) \geqslant \varphi(\mathbb{E}(X)).$$

Si on prend $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = x^p$ pour $p \geqslant 1$, φ est convexe et l'inégalité de Jensen donne $\mathbb{E}(X^p) \geqslant (\mathbb{E}(X))^p$. De même, exp est convexe et $\mathbb{E}(\exp(X)) \geqslant \exp(\mathbb{E}(X))$.

3.5 Exercice 5

Il faut étudier les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^{\alpha-1}} dx$. Fixons $A > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 1$. On a :

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{1}{x^\beta} dx &= \left[\frac{1}{-\beta+1} \frac{1}{x^{\beta-1}}\right]_1^A \\ &= \frac{1}{-\beta+1}\left(\frac{1}{A^{\beta-1}} - 1\right).\end{aligned}$$

Si $\beta = 1$:

$$\int_1^A \frac{1}{x} dx = \ln(A).$$

Ainsi on voit que :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^\beta} dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta \leqslant 1 \\ \frac{1}{\beta-1} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

Question 1 D'après ce qui précède, on voit que $\mathbb{E}(X)$ est fini si et seulement si $\alpha > 1$ et dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$.

Question 2 De même, $\mathbb{E}(X^2) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^{\alpha-1}} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 2$ et dans ce cas $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{\alpha}{\alpha - 2}$.

3.6 Exercice 6

Question 1 Dans le cas discret on remarque déjà que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in [k, k+1[$, $\{X > k\} = \{X > u\}$ et donc $\mathbb{P}(X > k) = \int_k^{k+1} \mathbb{P}(X > u)du$ ainsi par la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > u)du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} \mathbb{P}(X > u)du = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Ainsi il faut montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$. On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'union disjointe : $\{X \geqslant k\} = \{X = k\} \cup \{X > k\}$ et donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X > k).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, en reconnaissant une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n} k\left[\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X > k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=0}^{n} (k+1)\mathbb{P}(X > k) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=0}^{n} (k+1)\mathbb{P}(X \geqslant k+1) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) - (n+1)\mathbb{P}(X \geqslant n+1).
\end{aligned}$$

Si $\mathbb{E}(X) < +\infty$:

$$\begin{aligned}
(n+1)\mathbb{P}(X > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)\mathbb{P}(X = k) \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k).
\end{aligned}$$

Mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n+1} k\mathbb{P}(X = k) = 0$ car $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) < +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\mathbb{P}(X > n) = 0$ et on en déduit que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$. Si $\mathbb{E}(X) = +\infty$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) + (n+1)\mathbb{P}(X \geqslant n+1) \geqslant \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X) = +\infty$ donc $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} = +\infty = \mathbb{E}(X)$. Dans tous les cas, $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

Question 2 Soit $n \in \mathbb{N}$, par changement de variable $u = 2^n t$ et en appliquant la question 1 à la v.a. $\lfloor X2^n \rfloor$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > t) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{\lfloor X2^n \rfloor}{2^n} > t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\lfloor X2^n \rfloor > 2^n t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\lfloor X2^n \rfloor > u)\frac{du}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n}\mathbb{E}(\lfloor X2^n \rfloor) = \mathbb{E}(X_n).\end{aligned}$$

Question 3 Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}X_{n+1} - X_n &= \frac{\lfloor X2^{n+1} \rfloor}{2^{n+1}} - \frac{\lfloor X2^n \rfloor}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\lfloor 2^{n+1}x \rfloor - 2\lfloor 2^n X \rfloor\right).\end{aligned}$$

Mais, par définition de la partie entière, $\lfloor 2^n X \rfloor \leqslant 2^n X$ donc $2\lfloor 2^n X \rfloor \leqslant 2^{n+1}X$ et en passant à la partie entière (le terme de gauche est un entier) : $2\lfloor 2^n X \rfloor \leqslant \lfloor 2^{n+1}X \rfloor$. Ainsi $X_{n+1} \geqslant X_n$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Par définition de la partie entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n X - 1 \leqslant \lfloor 2^n X \rfloor \leqslant 2^n X$ donc:

$$X - \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{\lfloor 2^n X \rfloor}{2^n} = X_n \leqslant X. \tag{2}$$

On conclut en passant à la limite quand $n \to +\infty$ que $\lim_{n+\infty} X_n = X$. En reprenant l'encadrement 2, on obtient:

$$-\frac{1}{2^n} \leqslant X_n - X \leqslant 0.$$

Et donc, par croissance de l'espérance, $-\frac{1}{2^n} \leqslant \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X) \leqslant 0$ et en passant à la limite quand $n \to +\infty$,

$$\lim_{n+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).$$

En reprennant l'encadrement 2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n \leqslant X \leqslant X_n + \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, si on prend $u \in \mathbb{R}^+$, on obtient les inclusions :

$$\{X_n > u\} \subset \{X > u\} \subset \{X_n + \frac{1}{2^n} > u\}$$

et donc $\mathbb{P}(X_n > u) \leqslant \mathbb{P}(X > u) \leqslant \mathbb{P}(X_n + \frac{1}{2^n} > u)$. On intègre ces expressions:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > u)du \leqslant \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > u)du \leqslant \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_n + \frac{1}{2^n} > u)du. \tag{3}$$

Mais $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > u)du = \mathbb{E}(X_n)$ et par changement de variable $v = u - \frac{1}{2^n}$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_n + \frac{1}{2^n} > u)du &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > u - \frac{1}{2^n})du \\
&= \int_{-\frac{1}{2^n}}^{0} \mathbb{P}(X_n > v)dv + \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > v)dv \\
&= \frac{1}{2^n} + \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > v)dv \\
&= \frac{1}{2^n} + \mathbb{E}(X_n).
\end{aligned}
$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'encadrement 3, on obtient le résultat voulu:

$$
\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > u)du.
$$

3.7 Exercice 7

Question 1 Sous les mêmes hypothèses, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$
\mathbb{P}(|X - \mu| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}.
$$

Une inégalité est meilleure qu'un autre si la borne supérieure est plus précise, ie plus basse. Ainsi l'inégalité de l'exercice est meilleure que celle de BT si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
\frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2} &\Leftrightarrow 2a^2 \leqslant a^2 + \sigma^2 \\
&\Leftrightarrow a \leqslant \sigma.
\end{aligned}
$$

Question 2 Soit $\lambda \geqslant 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[((X - \mu) + \lambda)^2\right] &= \mathbb{E}\left[(X - \mu)^2 + 2\lambda(X - \mu) + \lambda^2\right] \\
&= \sigma^2 + 2(\mu - \mu) + \lambda^2 \\
&= \sigma^2 + \lambda^2.
\end{aligned}
$$

Question 3 On a $\{X - \mu \geqslant a\} = \{X - \mu + \lambda \geqslant a + \lambda\} \subset \{(X - \mu + \lambda)^2 \geqslant (a + \lambda)^2$ et en utilisant l'inégalité de Markov (pour des variables positives)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X - \mu \geqslant a) &= \mathbb{P}(X - \mu + \lambda \geqslant a + \lambda) \\
&\leqslant \mathbb{P}((X - \mu + \lambda)^2 \geqslant (a + \lambda)^2) \\
&\leqslant \frac{\mathbb{E}((X - \mu + \lambda)^2 \geqslant (a + \lambda)^2)}{(a + \lambda)^2} \\
&\leqslant \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}.
\end{aligned}
$$

Question 4 Ceci étant vrai pour toute valeur de $\lambda \geqslant 0$, on a :

$$
\mathbb{P}(X - \mu \geqslant a) \leqslant \inf_{\lambda \geqslant 0} \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}.
$$

Pour calculer l'inf, on considère la fonction $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par $\phi(\lambda) = \frac{\sigma^2+\lambda^2}{(a+\lambda)^2}$. Cette fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\begin{aligned}\phi'(\lambda) &= \frac{2\lambda(a+\lambda)^2 - (\sigma^2+\lambda^2)2(\lambda+a)}{(a+\lambda)^4} \\ &= \frac{2(\lambda a - \sigma^2)}{(a+\lambda^3)}\end{aligned}$$

donc $\phi'(a) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sigma^2}{a}$ et on a :

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{\sigma^2}{a}\right) &= \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{a^2}}{(a+\frac{\sigma^2}{a})^2} \\ &= \frac{\sigma^2(1+\frac{\sigma^2}{a^2})}{a^2(1+\frac{\sigma^2}{a^2})^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}.\end{aligned}$$

Question 5 On a l'union disjointe : $\{|X-\mu| \geqslant a\} = \{X-\mu \geqslant a\} \cup \{X-\mu \leqslant -a\}$ mais $X-\mu \leqslant -a \Leftrightarrow -X+\mu \geqslant a$. En posant $Y = -X$, on a $\mathbb{E}(Y) = -\mu$ et $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$, et en aplliquant la question précédente à Y,

$$\mathbb{P}(-X+\mu \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant a) &= \mathbb{P}(X-\mu \geqslant a) + \mathbb{P}(-X+\mu \geqslant a) \\ &\leqslant 2\frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}.\end{aligned}$$

3.8 Exercice 8

Question 1 Soit $\delta > 0$ et A l'événement, "$|X-\mathbb{E}(X)| > \delta$". On a:

$$|f(X) - f(\mathbb{E}(X))| = |f(X) - f(\mathbb{E}(X))|\mathbb{1}_A + |f(X) - f(\mathbb{E}(X))|\mathbb{1}_{A^c} \tag{4}$$

Mais d'une part,

$$|f(X) - f(\mathbb{E}(X))|\mathbb{1}_A \leqslant 2||f||_\infty \mathbb{1}_A$$

et, en utilisant l'inégalité de BT:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|f(X) - f(\mathbb{E}(X))|\mathbb{1}_A) &\leqslant \mathbb{E}(2||f||_\infty \mathbb{1}_A) \\ &\leqslant 2||f||_\infty \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = 2||f||_\infty \mathbb{P}(A) \\ &\leqslant \frac{2||f||_\infty \mathrm{Var}(X)}{\delta^2}.\end{aligned}$$

Et d'autre part:

$$|f(X) - f(\mathbb{E}(X))|\mathbb{1}_{A^c} \leqslant \sup_{|x-y|\leqslant\delta} \{|f(x)-f(y)|\}\mathbb{1}_{A^c} \leqslant \sup_{|x-y|\leqslant\delta} \{|f(x)-f(y)|\}$$

donc

$$\mathbb{E}(|f(X) - f(\mathbb{E}(X))|\mathbb{1}_{A^c}) \leqslant \sup_{|x-y|\leqslant\delta} \{|f(x) - f(y)|\}.$$

Finalement, en passant à l'espérance dans 4, on obtient:

$$\mathbb{E}(|f(X) - f(\mathbb{E}(X))|) \leqslant \frac{2||f||_\infty \operatorname{Var}(X)}{\delta^2} + \sup_{|x-y|\leqslant\delta} \{|f(x) - f(y)|\}.$$

Question 2 Soit $\delta > 0$, $n \geqslant 1$, $t \in [0,1]$ et $Y_n = \frac{X_n}{n}$ où $X_n \sim \mathcal{B}(n,t)$. On a $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{\mathbb{E}(X_n)}{n} = t$ et $\operatorname{Var}(Y_n) = \dfrac{\operatorname{Var}(X_n)}{n^2} = \dfrac{t(1-t)}{n} \leqslant \dfrac{1}{4n}$.

$$\begin{aligned} |f(t) - B_n(t)| &= |\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f(t) - f(\frac{k}{n}))t^k(1-t)^{n-k}| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |f(t) - f(\frac{k}{n})| t^k(1-t)^{n-k} \end{aligned}$$

On reconnaît ici $\mathbb{E}\left(|f(t) - f(Y_n)|\right) = \mathbb{E}\left(|f(\mathbb{E}(Y_n)) - f(Y_n)|\right)$ et en utilisant la question 1:

$$\begin{aligned} |f(t) - B_n(t)| &\leqslant \mathbb{E}(|f(t) - f(Y_n)|) = \mathbb{E}(|f(\mathbb{E}(Y_n)) - f(Y_n)|) \\ &\leqslant \frac{2||f||_\infty \operatorname{Var}(Y_n)}{\delta^2} + \sup_{|x-y|\leqslant\delta} \{|f(x) - f(y)|\} \\ &\leqslant \frac{2||f||_\infty t(1-t)}{n\delta^2} + \sup_{|x-y|\leqslant\delta} \{|f(x) - f(y)|\} \\ &\leqslant \frac{||f||_\infty}{2n\delta^2} + \sup_{|x-y|\leqslant\delta} \{|f(x) - f(y)|\}. \end{aligned}$$

Prenons maintenant $\delta = n^{-\frac{1}{4}}$ et ω un module de continuité pour f, c'est-à-dire que:

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leqslant \omega(|x-y|) \\ \lim_{r\to 0} \omega(r) = 0. \end{cases}$$

On obtient:

$$|f(t) - B_n(t)| \leqslant \frac{||f||_\infty}{2\sqrt{n}} + \omega(n^{-\frac{1}{4}}).$$

Et ceci est vrai inépendamment de $t \in [0,1]$ donc :

$$||f - B_n||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - B_n(t)| \leqslant \frac{||f||_\infty}{2\sqrt{n}} + \omega(n^{-\frac{1}{4}}).$$

Finalement

$$\lim_{n\to+\infty} ||f - B_n||_\infty = 0.$$

4 TD5 - Indépendance et conditionnement

4.1 Exercice 1

On définit les événements

$$M := \text{"la personne testée est malade"} ,$$
$$P := \text{"le test est positif"}.$$

D'après lénoncé, $\mathbb{P}(M) = \frac{1}{10000}$, $\mathbb{P}_M(P^c) = \frac{1}{100}$ et $\mathbb{P}_{\bar{M}}(P) = \frac{5}{100}$. On chercher à calculer $\mathbb{P}_P(M)$. Puisque $\mathbb{P}(P) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_P(M) &= \frac{\mathbb{P}(P \cap M)}{\mathbb{P}(P)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(P)}{\mathbb{P}(P)}.\end{aligned}$$

Mais $\mathbb{P}_M(P) = 1 - \mathbb{P}_M(\bar{P})$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(M \cap P) + \mathbb{P}(\bar{M} \cap P) \\ &= \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(P) + \mathbb{P}(\bar{M}) \times \mathbb{P}_{\bar{M}}(P) \\ &= \mathbb{P}(M)(1 - \mathbb{P}_M(\bar{P})) + (1 - \mathbb{P}(M)) \times \mathbb{P}_{\bar{M}}(P).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_P(M) &= \frac{\mathbb{P}(M) \times (1 - \mathbb{P}_M(\bar{P}))}{(1 - \mathbb{P}_M(\bar{P}))\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\bar{M}}(P)(1 - \mathbb{P}(M))} \\ &\simeq 0,02.\end{aligned}$$

4.2 Exercice 2

Question 1 Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ pour un $\lambda > 0$. Soit $(s,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, étant donné que $\mathbb{P}(X > 0) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > t + s | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(\{X > t + s\} \cap \{X > t\})}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{1 - F_X(t + s)}{1 - F_X(t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s).\end{aligned}$$

Question 2 Soit X une v.a.r. vérifiant $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ et , pour tout $(s,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$. Soit $G(x) = 1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X > x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. G est donc continue à droite et on suppose que pour tout $(s,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $G(t + s) = G(t)G(s)$. On veut montrer que $G(x) = e^{-\lambda x}$ pour un certain $\lambda > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans l'ordre, on va calculer $G(x)$ pour: $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}^+$ et enfin $x \in \mathbb{R}^+$. Commencons par calculer $G(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$:

$$G(n) = G(1 + \cdots + 1) = G(1) \times \cdots \times G(1) = G(1)^n.$$

On calcule maintenant $G(\frac{1}{q})$ pour $q \in \mathbb{N}^*$. On remarque que:

$$G(1) = G(\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}) = G(\frac{1}{q}) \times \cdots \times G(\frac{1}{q}) = G(\frac{1}{q})^q.$$

Si $G(1) = 0$, on a donc pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $G(\frac{1}{q}) = 0$ et par continuité à droite de G et en passant à la limite quand $q \to +\infty$, on obtient $G(0) = \mathbb{P}(X > 0) = 0$, or on suppose justement $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ donc $G(1) \neq 0$ et $G(\frac{1}{q}) = G(1)^{\frac{1}{q}}$. Soit maintenant $p \in \mathbb{N}$, calculons $G(\frac{p}{q})$:

$$G(\frac{p}{q}) = G(\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}) = G(\frac{1}{q}) \times \cdots \times G(\frac{1}{q}) = G(\frac{1}{q})^p = G(1)^{\frac{p}{q}}.$$

Ainsi, pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}^+$, $G(r) = G(1)^r$. Par continuité à droite de G et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $G(x) = e^{-\lambda x}$ avec $\lambda = -\ln G(1) = -\ln \mathbb{P}(X > 1)$ et X suit une loi exponentielle.

4.3 Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{F}$.

$1 \Rightarrow 2$ En particulier, A est indépendant de A donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(A)$. Nécéssairement, $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

$2 \Rightarrow 1$ Soit $B \in \mathcal{F}$. Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on a $A \cap B \subset A$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) = 0$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Et si $\mathbb{P}(A) = 1$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Dans tous les cas, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et A et B sont indépendants.

4.4 Exercice 5

Notons respectivement A, B et C ces événements et notons D l'événement, "exactement un des trois se produit". On peut réécrire D de la façon suivante:

$$D = \{A \cap B^c \cap C^c\} \cup \{A^c \cap B \cap C^c\} \cup \{A^c \cap B^c \cap C\}.$$

Les événements A, B et C étant indépendants, les événements A, B^c et C^c aussi, et de même pour A^c, B, C^c et A^c, B^c, C.
remarque: si A, B et C indépendants, montrons que $\bar{A}, \bar{B}$ et C sont indépendants

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\bar{A}).$$

de même, $\mathbb{P}(\bar{B} \cap C) = \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(C)$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) &= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) \\
&= \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B}).
\end{aligned}$$

Enfin, $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B} \cap C)$ mais $A \cup B$ est indépendant de C et donc, d'après ce qui précède, $\overline{A \cup B}$ est aussi indépendant de C et:

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B})\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(\bar{C}).$$

On revient à nos moutons, les unions étant disjointes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C^c) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C) \\
&= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))(1 - \mathbb{P}(C)) + (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(C)) \\
&+ (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B))\mathbb{P}(C) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{11}{24}.
\end{aligned}$$

4.5 Exercice 6

Question 1 Il faut connaître la valeur de cette somme:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On a donc $c = \frac{6}{\pi^2}$.

Question 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $A_n = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X = kn\}$ et l'union est disjointe. Donc:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = kn) \\
&= \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 n^2} \\
&= \frac{1}{n^2} \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Question 3 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_m) = \frac{1}{n^2 m^2}$. Il faut calculer $\mathbb{P}(A_n \cap A_m)$. Mais $\{A_n \cap A_m\} = A_{\text{ppcm}(m,n)}$. En effet, on a directement l'inclusion $A_{\text{ppcm}(m,n)} \subset \{A_n \cap A_m\}$. Montrons l'autre inclusion. Notons I_n (resp I_m) l'ensemble des multiples positis ou nuls de n (resp de m). On remarque déjà que par définition, $\text{ppcm}(m,n)$ est le plus petit élément non nul de $I_n \cap I_m$. Soit maintenant $l \in I_n \cap I_m$. Par théorème de la division euclidienne, il existe $q, r \in \mathbb{N}$ avec $q > 0$ et $0 \leqslant r < \text{ppcm}(m,n)$ tels que:

$$l = q \times \text{ppcm}(m,n) + r.$$

Ainsi $r = l - q \times \text{ppcm}(m,n)$ mais l et $\text{ppcm}(m,n)$ sont des multiples de m et de n donc $r \in I_n \cap I_m$ et par minimalité de $\text{ppcm}(m,n)$, on en déduit que $r = 0$. Ainsi $l = q \times \text{ppcm}(m,n)$ et $l \in I_{\text{ppcm}(m,n)}$. Finalement, $I_n \cap I_m = I_{\text{ppcm}(m,n)}$ et $A_n \cap A_m = A_{\text{ppcm}(m,n)}$. Donc:

$$\begin{aligned}
A_n \text{ et } A_m \text{ sont indépendants } &\Leftrightarrow \mathbb{P}(A_n \cap A_m) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_m) \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}(A_{\text{ppcm}(m,n)}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_m) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\text{ppcm}(m,n)^2} = \frac{1}{m^2 n^2} \\
&\Leftrightarrow \text{ppcm}(m,n) = mn \\
&\Leftrightarrow \text{pgcd}(m,n) = 1 \\
&\Leftrightarrow \; m \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux.}
\end{aligned}$$

4.6 Exercice 7

Il faut déjà calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap C)$, $\mathbb{P}(B \cap C)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ en fonction de p. En utilisant l'indépendance des lancers on obtient:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A) = p\\
&\mathbb{P}(B) = p\\
&\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\{A \cap \bar{B}\} \cup \{\bar{A} \cap B\}) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)\\
&\mathbb{P}(A \cap B) = p^2\\
&\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = p(1-p)\\
&\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\bar{A} \cap C) = (1-p)p\\
&\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.
\end{aligned}
$$

Question 1 A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ ce qui est vrai pour tout $p \in [0,1]$.

Question 2 A et C sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ ie $p(1-p) = 2p^2(1-p)$ ce qui est vrai si et seulement si $p \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Question 3 A, B et C sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$. La troisième condition implique que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 0$ et donc $p \in \{0,1\}$. Et on vérifie que $p \in \{0,1\}$ est suffisant pour que les trois conditions soient vérifiées.

Remarque Qui est $\mathbb{P}$ dans les questions précédentes ??

On propose la modélisation suivante: $\Omega = \{P, F\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ est donnée par: $\mathbb{P}(\{(P,F)\}) = p(1-p)$, $\mathbb{P}(\{(P,P)\} = p^2$, $\mathbb{P}(\{F,P\}) = (1-p)p$, $\mathbb{P}(\{F,F\}) = (1-p)^2$. On note $X_i : \Omega \to \{P, F\}$ la variable aléatoire qui donne la valeur du lancer i, définie par $X_i(\{\omega_1, \omega_2\}) = \omega_i$. On vérifie que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont bien indépendantes.

4.7 Exercice 8

Question 1 On a

$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k},$$

et par indépendance des A_k (et donc des $\overline{A_k}$),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_k})\\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\\
&= \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Question 2 C est l'événement " Aucun des lancers ne donne pile ". Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{n+1} \subset B_n$ et on peut utiliser la continuité décroissante de $\mathbb{P}$ pour conclure que:

$$\mathbb{P}(C) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0.$$

Question 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \\
&= \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+2)!}{2(n+1)!} = \frac{n+2}{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

Et donc $\mathbb{P}(C) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{2}$.

4.8 Exercice 9

Question 1 Soit $t \in \mathbb{R}$, $Z > t$ si et seulement si $X_i > t$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Donc:

$$\{Z > t\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > t\}.$$

Question 2 En utilisant l'indépendance des variables aléatoires $X_1, \dots X_n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z > t) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > t\}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(1 - F_{X_i}(t)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_Z(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - F_{X_i}(t)\right)$.

Question 3 Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$F_{X_i}(t) = \mathbb{1}_{\{t \geqslant 1\}} \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} p_i (1-p_i)^{k-1} = \mathbb{1}_{\{t \geqslant 1\}} \left(1 - (1-p_i)^{\lfloor t \rfloor}\right).$$

En utilisant la question précédente,

$$F_Z(t) = \mathbb{1}_{\{t \geqslant 1\}} \left(1 - \left(\prod_{i=1}^{n} (1-p_i)\right)^{\lfloor t \rfloor}\right).$$

Donc Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$.

Question 4 On suppose maintenant que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$. Ainsi, pour $i \in [\![1, n]\!]$ et pour $t \in \mathbb{R}$, $F_{X_i}(t) = \mathbb{1}_{\{t \geqslant 0\}} \left(1 - e^{-\lambda_i t}\right)$. En utilisant la question 2:

$$F_Z(t) = \mathbb{1}_{\{t \geqslant 0\}} (1 - e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) t}).$$

Donc Z suit une loi exponentielle de paramètre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Question 5 On suppose ici que les X_i suivent une loi uniforme sur $[0,1]$. Ainsi, pour $i \in [\![1,n]\!]$ et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$F_{X_i}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ t & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

et en utilisant la question 2:

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= 1 - \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant 0 \\ (1-t)^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 1-(1-t)^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases} \end{aligned}$$

et Z admet une densité donnée par $f_Z(t) = n(1-t)^{n-1}\mathbb{1}_{[0,1]}$.

4.9 Exercice 10

Soit $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $\{\lfloor X \rfloor = n\} \cap \{\{X\} \leqslant t\} = \{X \in [n, n+t]\}$ donc:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n\} \cap \{\{X\} \leqslant t) &= \mathbb{P}(X \in [n, n+t]) \\ &= F_X(n+t) - F_X(n) \\ &= (1 - e^{-\lambda(n+t)}) - (1 - e^{-\lambda n}) = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda t}). \end{aligned}$$

Maintenant on a,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n) &= \mathbb{P}(X \in [n, n+1[) \\ &= F_X(n+1) - F_X(n) \\ &= e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}). \end{aligned}$$

Et on a l'union disjointe:

$$\{\{X\} \leqslant t\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{X \in [n, n+t[\},$$

donc:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X\} \leqslant t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (F_X(n+t) - F_X(n)) \\ &= (1 - e^{-\lambda t}) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda n} \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}}. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $t \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{\lfloor X \rfloor = n\} \cap \{\{X\} \leqslant t\}) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n)\mathbb{P}(\{X\} \leqslant t)$ et donc les variables aléatoires $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ sont indépendantes.
Remarque: a priori il faudrait vérifier que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor \leqslant s \cap \{X\} \leqslant t) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor \leqslant s)\mathbb{P}(\{X\} \leqslant t)$. Mais $\lfloor X \rfloor$ prend des valeurs entières donc, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ on a l'union disjointe:

$$\{\lfloor X \rfloor \leqslant s\} \cap \{\{X\} \leqslant t\} = \bigcup_{k=0}^{\lfloor s \rfloor} \{\lfloor X \rfloor = k\} \cap \{\{X\} \leqslant t\}$$

Donc:

$$\mathbb{P}(\lfloor X\rfloor \leqslant s \cap \{X\} \leqslant t) = \sum_{k=0}^{\lfloor s\rfloor} \mathbb{P}(\{\lfloor X\rfloor = k\} \cap \{\{X\} \leqslant t\}),$$

Donc il suffit de vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\lfloor X\rfloor = n \cap \{X\} \leqslant t) = \mathbb{P}(\lfloor X\rfloor = n)\mathbb{P}(\{X\} \leqslant t).$$

5 Sommes de variables indépendantes

5.1 Exercice 1

Question 1 $Z(\Omega) = [\![0, n+m]\!]$ et pour tout $l \in [\![0, n+m]\!]$ on a, par indépendance de X et Y et d'après le cours:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = l) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = l-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{m}{l-k} p^{l-k}(1-p)^{m+k-l} \\
&= p^l (1-p)^{m+n-l} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k} \\
&= \binom{n+m}{l} p^l (1-p)^{n+m-l}.
\end{aligned}$$

Donc $Z \sim \mathcal{B}(n+m, p)$. Par récurrence on peut donc montrer que la somme de n variables de Bernouilli indépendantes et de paramètre p et une loi binômiale de paramètres (n, p).

Question 2 $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, par indépendance de X et Y et d'après le cours:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\mu} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda^k \mu^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\
&= \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)}.
\end{aligned}$$

Et donc Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Question 4 Pour $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_Y(z-x) f_X(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{z-x>0} \frac{\lambda^s}{\Gamma(s)} (z-x)^{s-1} e^{-\lambda(z-x)} \mathbb{1}_{x>0} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} (x)^{r-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \mathbb{1}_{z>0} \frac{\lambda^{s+r}}{\Gamma(s)\Gamma(r)} e^{-\lambda z} \int_0^z (z-x)^{s-1} x^{r-1} dx.
\end{aligned}$$

Mais, en faisant le changement de variable $u = \frac{x}{z}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^z (z-x)^{s-1} x^{r-1} dx &= z \int_0^1 (z-zu)^{s-1} (zu)^{r-1} du \\
&= z^{s+r-1} \int_0^1 (1-u)^{s-1} u^{r-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi on voit qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $f_Z(z) = \mathbb{1}_{z>0} \gamma e^{-\lambda z} z^{s+r-1}$ ainsi Z suit une loi Gamma de paramètres $(\lambda, r+s)$ et par condition de normalisation, $\gamma = \frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(s+r)}$.

Remarque Par définition, $X \sim \Gamma(r, \lambda)$ si X a une densité donnée par $f_X(t) = \mathbb{1}_{t \geqslant 0} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-\lambda t}$. Dans l'exercice au dessus on montrait que Z suivait une loi de densité:

$$\mathbb{1}_{z>0} \frac{\lambda^{s+r}}{\Gamma(s)\Gamma(r)} e^{-\lambda z} z^{s+r-1} \int_0^1 (1-u)^{s-1} u^{r-1} du$$

On sait d'une part que $\int_{\mathbb{R}} f_Z(z) dz = 1$ et donc:

$$\frac{\lambda^{s+r}}{\Gamma(s)\Gamma(r)} \int_0^1 (1-u)^{s-1} u^{r-1} du \int_0^{+\infty} e^{-\lambda z} z^{s+r-1} dz = 1.$$

D'autre part on sait que si Z' suit une loi $\Gamma(r+s, \lambda)$, $f_{Z'}(z) = \mathbb{1}_{z \geqslant 0} \frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(r+s)} z^{r+s-1} e^{-\lambda z}$ dont on déduit que:

$$\frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(r+s)} \int_0^{+\infty} z^{r+s-1} e^{-\lambda z} dz = 1.$$

En mettant les deux dernières égalités ensemble on trouve:

$$\frac{\lambda^{s+r}}{\Gamma(s)\Gamma(r)} \int_0^1 (1-u)^{s-1} u^{r-1} du = \frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(r+s)}.$$

En particulier on a:

$$\int_0^1 (1-u)^{s-1} u^{r-1} du = \frac{\Gamma(s)\Gamma(r)}{\Gamma(s+r)}$$

et Z suit une loi $\Gamma(r+s, \lambda)$. En particulier on a jamais eu besoin de connaitre la définition de $\Gamma(r)$!
Par définition, la fonction Gamma d'Euler (étudiée bien avant la loi Gamma), $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est donnée par:

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx.$$

5.2 Exercice 2

Question 1 Si X et Y sont indépendantes et toutes les deux de carré intégrable alors $\mathbb{E}(XY)$ existe et vaut $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Ainsi

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.$$

Question 2

a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a l'union disjointe

$$\begin{aligned}\{Y \leqslant x\} &= \{\{Y \leqslant x\} \cap \{U = 1\}\} \cup \{\{Y \leqslant x\} \cap \{U = -1\}\} \\ &= \{\{X \leqslant x\} \cap \{U = 1\}\} \cup \{\{-X \leqslant x\} \cap \{U = -1\}\}.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'indépendance de X et U,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leqslant x) &= \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(U = 1) + \mathbb{P}(-X \leqslant x)\mathbb{P}(U = -1) \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathbb{P}(X \leqslant x) + \mathbb{P}(-X \leqslant x)\right]\end{aligned}$$

Mais $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc $-X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\mathbb{P}(-X \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$. Finalement, $\mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

b) On a montré dans le TD 4 que X admet un moment d'ordre 2 et $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = 1$ ($\mathbb{E}(X) = 0$). Et comme $Y \sim X$, Y est de carré intégrable avec $\mathbb{E}(Y^2) = 1$. Ainsi $\mathrm{Cov}(X,Y)$ existe et est fini. En utilisant l'indépendance de U et X (et donc de U et X^2), on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(UX^2) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(X^2) = 0$ car $\mathbb{E}(U) = 0$. Mais $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(UX) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(X) = 0$ donc $\mathrm{Cov}(X,Y)\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$.

c) On exploite le fait que $|X| = |Y|$. On a $\{|X| \leqslant 1\} \cap \{|Y| \geqslant 2\} = \varnothing$ et donc $\mathbb{P}(\{|X| \leqslant 1\} \cap \{|Y| \geqslant 2\}) = 0$ mais $\mathbb{P}(\{|X| \leqslant 1\})\mathbb{P}(\{|Y| \geqslant 2\}) \neq 0$. Ainsi $|X|$ et $|Y|$ ne sont pas indépendantes et donc X et Y ne le sont pas non plus.

5.3 Exercice 3

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. $X^2(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geqslant 0$, $\{X^2 \leqslant x\} = \{-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{X}\}$. Ainsi, en utilisant la parité de X, et en faisant le changement de variable $u = t^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X^2 \leqslant x) &= 2\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x} e^{-\frac{u}{2}} \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x} u^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}\, du.\end{aligned}$$

On en déduit que X^2 suit une loi Gamma de paramètres $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Maintenant on utilise la question 4 de l'exercice 1 et une récurrence pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1^2 + ... + X_n^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

5.4 Exercice 5

Question 1 On remarque qu'une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ n'est rien d'autre qu'une loi Gamma $\Gamma(1,1)$. On peut utiliser l'exercice 1 et une récurrence immédiate pour conclure, les X_i étant indépendantes, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n \sim \Gamma(n, 1).$$

Question 2 On a $\{N_t \geqslant n\} = \{S_n \leqslant t\}$ et $\{N_t \geqslant n+1\} = \{S_{n+1} \leqslant t\}$ donc

$$\begin{aligned}\{N_t = n\} &= \{N_t \geqslant n\} \backslash \{N_t \geqslant n+1\} \\ &= \{S_n \leqslant t\} \backslash \{S_{n+1} \leqslant t\}.\end{aligned}$$

Question 3 On déduit de la quesiton précédente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t u^{n-1} e^{-u} du - \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^t u^n e^{-u} du.\end{aligned}$$

Un intégration par parties donne:

$$\begin{aligned}\int_0^t u^n e^{-u} du &= \left[-u^n e^{-u}\right]_0^t + \int_0^t n u^{n-1} e^{-u} du \\ &= -t^n e^{-t} + \int_0^t n u^{n-1} e^{-u} du\end{aligned}$$

On se souvient maintenant (ou on montre tout seul par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ et on en déduit que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t = n) &= \frac{1}{n!} t^n e^{-t} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t u^{n-1} e^{-u} du - \frac{n}{n!} \int_0^t u^{n-1} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{n!} t^n e^{-t}.\end{aligned}$$

Finalement, N_t suit une loi de Poisson de paramètre t.

5.5 Exercice 7

Question 1 On a (on admet que) $T_n = \sum_{k=1}^n X_k^n$ où X_k^n suit une loi gémométrique de paramètre $\mathcal{G}(\frac{n-k+1}{n})$ et avec les variables $(X_k^n)_{k \in [\![1,n]\!]}$ indépendantes.

Question 2 Par linéarité de l'espérence et en se souvenant que l'espérence d'une loi géométrique de paramètre p est $\frac{1}{p}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^n) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n-k+1} \\ &= n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} /\end{aligned}$$

Pour la variance on sait que la variance de la somme de variables aléatoires indépendantes est la somme des variances et que pour une loi gémétrique de paramètre p, la variance vaut $\frac{q}{p^2}$ avec $q = p - 1$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(T_n) &= \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k^n) = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k-1}{n}}{\frac{n^2}{(n-k+1)^2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)(n-k+1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)(n-k+1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n (n-j) j^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j^2 - \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^3 /\end{aligned}$$

Soit maintenant $\epsilon > 0$, par l'inégalité Markov

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n\ln n}-1\right|\geqslant\epsilon\right)\leqslant\frac{\mathbb{E}\left(\left|\frac{T_n}{n\ln(n)}-1\right|^2\right)}{\epsilon^2}$$
$$\leqslant\frac{\mathbb{E}(|T_n-n\ln(n)|^2)}{n^2\ln(n)^2\epsilon^2}.$$

Il faut donc estimer le terme $\mathbb{E}(|T_n-n\ln(n)|^2)$; en utilisant l'inégalité $(a+b)^2\leqslant 2a^2+2b^2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|T_n-n\ln(n)|^2)&=\mathbb{E}(|T_n-\mathbb{E}(T_n)+\mathbb{E}(T_n)-n\ln(n)|^2)\\&\leqslant 2\mathbb{E}(|T_n-\mathbb{E}(T_n)|^2)+2\mathbb{E}((\mathbb{E}(T_n)-n\ln(n))^2)\\&\leqslant 2\operatorname{Var}(T_n)+(\mathbb{E}(T_n)-n\ln(n))^2.\end{aligned}$$

En reconnaissant des sommes de Riemann, on voit que

$$\frac{1}{n}\operatorname{Var}(T_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{k^2}{n^2}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{k^3}{n^3}\to\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Ainsi, $\frac{\operatorname{Var}(T_n)}{n^2\ln(n)^2}\to 0$ quand n tend vers $+\infty$. Pour l'autre terme, on sait (ou on redémontre en faisant une comparaison série intégrale), que $\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\sim\ln(n)$. Et donc $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(\frac{T_n}{n\ln(n)})=1$. Ainsi,

$$\frac{(\mathbb{E}(T_n)-n\ln(n))^2}{n^2\ln(n)^2}=\left(\frac{\mathbb{E}(T_n)}{n\ln(n)}-1\right)^2\to 0.$$

Finalement, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|\frac{T_n}{n\ln n}-1|\geqslant\epsilon)=0$ pour tout $\epsilon>0$ donc $\frac{T_n}{n\ln(n)}$ converge en probabilité vers 1.

5.6 Exercice 8

Question 1 On remarque que pour tout $i\in\mathbb{N}$, $Y_i:=\frac{X_i+1}{2}\sim\mathcal{B}(p)$ et les Y_i sont indépendantes. Si on pose $T_n=\sum_{i=1}^n Y_i$, on a donc $T_n\sim\mathcal{B}(n,p)$. Mais $S_n=2T_n-n$ donc $S_n(\Omega)=\{2k-n,\ 0\leqslant k\leqslant n\}$ et pour tout k, $0\leqslant k\leqslant n$,

$$\mathbb{P}(S_n=2k-n)=\mathbb{P}(T_n=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Question 2 D'après ce qui précède,

$$\mathbb{P}(S_n=0)=\begin{cases}(p(1-p))^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Mais, pour $m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(p(1-p))^m\binom{2m}{m}&=(p(1-p))^m\frac{(2m)!}{m!m!}\\&\sim(p(1-p))^m\frac{(2m)^{2m}e^{-2m}\sqrt{2\pi 2m}}{m^me^{-m}\sqrt{2\pi m}m^me^{-m}\sqrt{2\pi m}}\\&\sim\frac{(4p(1-p))^m}{\sqrt{\pi m}}.\end{aligned}$$

où on a utilisé la formule de Stirling: $m!\sim m^me^{-m}\sqrt{2\pi m}$. Finalement,

$$\mathbb{P}(S_{2m}=0)\sim\frac{(4p(1-p))^m}{\sqrt{\pi m}}$$

et

$$\mathbb{P}(S_{2m+1} = 0) = 0.$$

En particulier,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) \begin{cases} = +\infty & \text{si } p = \frac{1}{2}, \\ < +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Question 3 On peut réécrire l'événement

$$\{Z < +\infty\} = \{S_n \neq 0 \text{ pour tout } n \text{ à partir d'un certain rang }\} = \liminf_{n \to +\infty} \{S_n \neq 0\}.$$

Mais $\mathbb{P}(\liminf_{n\to+\infty}\{S_n \neq 0\}) = 1 - \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\{S_n = 0\}\right)$. Mais pour $p \neq \frac{1}{2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) < +\infty$ donc par le premier lemme de Borel Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\{S_n = 0\}\right) = 0$$

et donc $\mathbb{P}(Z < +\infty) = 1$. On ne peut pas conclure dans le cas $p = \frac{1}{2}$ car la série diverge mais les événements ne sont pas indépendants.

Question 4 $Z < +\infty$ si et seulement si $\#\{n$ tels que $S_n = 0\}$ est fini, si et seulement si il exite $n \geqslant 0$ tel que $S_n = 0$ et pour tout $k \geqslant n+1$, $S_k \neq 0$. On a donc l'union disjointe

$$\{Z < +\infty\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{S_n = 0\} \cap \bigcap_{k \geqslant n+1} \{S_k \neq 0\}$$

et donc $\{Z < +\infty\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Maintenant, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} A_n &= \{S_n = 0\} \cap \bigcap_{k\geqslant n+1} \{S_k \neq 0\} \\ &= \{S_n = 0\} \cap \bigcap_{k\geqslant n+1} \{S_k - S_n \neq 0\} \\ &= \{S_n = 0\} \cap \bigcap_{k\geqslant n+1} \{X_{n+1} + \cdots + X_k \neq 0\}. \end{aligned}$$

Mais $S_n = X_1 + ... + X_n$ et les X_i sont indépendantes donc $\{S_n = 0\}$ est indépendant de $\bigcap_{k\geqslant n+1}\{S_k - S_n \neq 0\} = \bigcap_{k\geqslant n+1}\{X_{n+1} + \cdots + X_k \neq 0\}$ qui est un événement qui ne fait intervenir que les X_i pour $i \geqslant n+1$. Donc:

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(S_n = 0) \times \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant n+1} \{S_k - S_n \neq 0\}\right).$$

Mais on a $S_k - S_n \sim S_{n-k}$ (en procédant comme à la première question par exemple) et donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant n+1} \{S_k - S_n \neq 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant 1} \{S_k - S_0 \neq 0\}\right) = \mathbb{P}(A_0).$$

Finalement, $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(S_n = 0)\mathbb{P}(A_0)$.

Question 5 Si $\mathbb{P}(A_0) \neq 0$, on a

$$\mathbb{P}(Z < +\infty) = \mathbb{P}(A_0) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty > 1$$

ce qui est absurde. Donc $\mathbb{P}(A_0) = 0$ et $\mathbb{P}(Z < +\infty) = 0$.