Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Contrôle continu du 2 décembre 2019

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 1h

Exercice 1 (3 points). Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$, $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Soit $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs non nuls de E, orthogonaux deux à deux.

1. Montrer que ces vecteurs forment une famille libre de E.
2. Montrer que $\|u_1 + \cdots + u_p\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_p\|^2$.

Exercice 2 (2 points). Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \ \left(\int_{-1}^{1} tP(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} (P(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 (4 points). Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique
$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \ q(x) = {x_1}^2 - {x_2}^2.$$
Montrer qu'il existe une base formée de vecteurs isotropes pour q. Quel est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ isotropes pour q ?
2. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et q une forme quadratique sur E. On suppose qu'il existe deux vecteurs u et v de E non colinéaires et isotropes pour q. On note F le sous-espace vectoriel engendré par u et v. Montrer que s'il existe un vecteur w de F isotrope pour q et non colinéaire à u et à v, alors tous les vecteurs de F sont isotropes pour q.

Exercice 4 (3 points). Soit n un entier naturel non nul. On définit l'application b de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \ b(x, y) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j).$$

1. L'application b définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?
2. Sa restriction à $F \times F$, où $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$, est-elle un produit scalaire ?

Exercice 5 (3 points). On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire défini par

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2, \ \langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\}$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la dimension et une base de $F^\perp$.

Exercice 6 (5 points). Pour tout nombre réel a, soit q_a la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q_a(x) = a({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2) - 2\,x_1x_2 - 2\,x_2x_3 - 2\,x_1x_3.$$

1. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique q_a est-elle non dégénérée ?
2. Montrer que la forme quadratique q_a est définie positive si et seulement si $a > 2$.
3. Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2, 2, 1)$. Trouver une base de l'orthogonal $D^\perp$ de D pour q_0. Les sous-espaces D et $D^\perp$ sont-ils supplémentaires ?