Partiel du 23 octobre 2019

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2h

Exercice 1 (vrai ou faux, 4,5 points). Soit A une matrice carrée. On note respectivement I et 0 la matrice identité et la matrice nulle de même ordre que A.

1. On suppose que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (aucune justification n'est demandée).
   (a) A est une matrice d'ordre 3.
   (b) A est diagonalisable.
   (c) 1 et 2 sont des valeurs propres de A.
   (d) Les seules valeurs propres de A possibles sont 1 et 2.
   (e) La dimension de $\ker(A-I)$ est égale à 2 et celle de $\ker(A-2\,I)$ est égale à 1.
   (f) A est inversible.
2. Reprendre la question précédente en supposant à présent que le polynôme minimal de A est $\mu_A(X) = (X-1)^2(X-2)$.
3. Reprendre enfin la première question en supposant cette fois que $(A-I)(A-2\,I) = 0$.

Exercice 2 (trigonalisation, 5 points). Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
2. Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PTP^{-1}$.
3. On cherche à calculer les puissances T^n pour tout entier naturel non nul positif n.
   (a) Montrer que la matrice T peut s'écrire sous la forme $T = \lambda(I_3 + N)$, où λ est un réel et N est une matrice vérifiant $N^2 = 0$.
   (b) On rappelle que la formule du binôme
   $$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k},$$
   où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial donnant le nombre de parties de k éléments dans un ensemble de n éléments, est valide pour deux matrices carrées et de même ordre A et B qui *commutent*. En déduire une expression simple pour T^n pour tout entier naturel non nul n .
4. En déduire une expression pour A^n pour tout entier naturel non nul n.

Exercice 3 (polynômes annulateurs, 5 points). Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. Chaque question est indépendante des autres.

1. Soit A une matrice réelle telle que $A^3 = 7\,A - 6\,I_n$. Montrer que A est diagonalisable.
2. Soit A et B deux matrices réelles telles que $A^2 + B^2 = A + B = 2\,I_n$. En supposant que A ou B est diagonalisable, déterminer A et B.
3. Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices à coefficients complexes inversibles d'ordre n. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable (on pourra considérer le polynôme minimal de A^2 pour montrer une des implications).

4. On considère la matrice d'ordre n
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$
Déterminer le polynôme minimal de A. En déduire A^p pour tout entier naturel p non nul.

Exercice 4 (forme bilinéaire, 2 points). On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 et l'application b de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall (P, Q) \in E \times E,\ b(P, Q) = P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Montrer que l'application b est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?
2. Montrer que $\mathscr{B} = \{1 - X^2, X, X^2\}$ est une base de E et déterminer la matrice de b relativement à la base $\mathscr{B}$.
3. Quel est le rang de b ?

Exercice 5 (forme quadratique, 4,5 points). On considère l'espace vectoriel $E = M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels et l'application b de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall (A, B) \in E \times E,\ b(A, B) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB) \right).$$

1. Montrer que l'application b est une forme bilinéaire symétrique.
2. Donner la matrice de b relativement à la base canonique $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de E. En déduire que la forme b est non dégénérée.
3. Justifier que
$$\forall A \in E,\ A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)\, I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}.$$
En déduire que la forme quadratique associée à b est $q(A) = \det(A)$.
4. Montrer enfin que
$$\forall (A, B) \in E \times E,\ \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB) = \det(A + B) - \det(A) - \det(B).$$