Corrigé (succinct) de l'examen d'appel du 29 juin 2022

Exercice 1 (polynôme annulateur). Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E, admettant un polynôme annulateur de degré p non nul. Montrer que, pour tout entier naturel m, l'endomorphisme u^m appartient à $\text{Vect}(\{u^k\}_{k\in\{0,\ldots,p-1\}})$.

Notons $\mathbb{K}$ le corps sur lequel E est défini et P le polynôme annulateur de degré p dont on parle dans l'énoncé. Soit m un entier naturel. En réalisant la division euclidienne de X^m dans $\mathbb{K}[X]$, on obtient l'existence de deux polynômes Q_m et R_m, le degré de R_m étant strictement inférieur à p, tels que

$$X^m = P(X)Q_m(X) + R_m(X).$$

On trouve alors que $u^m = R_m(u)$, d'où le résultat.

Exercice 2 (positivité de formes quadratiques). Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives (α, λ et μ étant des paramètres réels, on discutera en fonction de leurs valeurs respectives).

1. $\forall x \in \mathbb{R}^4,\ q(x) = {x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 4{x_3}^2 + {x_4}^2 + 2x_1x_2 + x_1x_4.$

On peut effectuer une réduction de Gauss de la forme quadratique pour trouver

$$q(x) = \left(x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 2\left(x_2 - \frac{1}{4}x_4\right)^2 + 4{x_3}^2 + \frac{5}{8}{x_4}^2.$$

La forme quadratique est définie positive, donc positive.

2. $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_3(\cos(\alpha)x_1 + \sin(\alpha)x_2).$

On peut effectuer une réduction de Gauss de la forme quadratique pour trouver

$$q(x) = (x_1 + \cos(\alpha)x_3)^2 + (x_2 - \sin(\alpha)x_3)^2 - {x_3}^2.$$

La forme quadratique est a pour signature $(2,1)$ quelle que soit la valeur du paramètre α. La forme n'est donc pas positive.

3. $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ q(x) = (1-\lambda){x_1}^2 + (1+\lambda){x_2}^2 + 2\mu x_1x_2$

La matrice de la forme quadratique est

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & \mu \\ \mu & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

et a pour polynôme caractéristique associé $X^2 - 2X + 1 - \lambda^2 - \mu^2$. On en déduit que la somme des valeurs propres de la matrice vaut 2 et que leur produit vaut $1 - \lambda^2 - \mu^2$. Les valeurs propres, et par suite la forme quadratique, sont donc positives pour $\lambda^2 + \mu^2 \leq 1$.

Exercice 3 (pseudo-solutions d'un système linéaire). Soit m et n deux entiers naturels non nuls et A une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

1. Donner les dimensions de la matrice $A^\top A$ et établir que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top A)$.

La matrice A appartient à $M_{m,n}(\mathbb{R})$, d'où $A^\top$ appartient à $M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $A^\top A$ est alors une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Soit X un élement de $\text{Ker}(A)$. On a $AX = 0_{M_{m,1}(\mathbb{R})}$, d'où $A^\top AX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Réciproquement, si X un élement de $\text{Ker}(A^\top A)$, on a $A^\top AX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$, d'où $\|AX\|^2 = X^\top A^\top AX = 0$, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $M_{m,1}(\mathbb{R})$. Par propriété de la norme, on en déduit que $AX = 0_{M_{m,1}(\mathbb{R})}$.

2. Justifier alors que $\text{Im}(A^\top) = \text{Im}(A^\top A)$.

Soit Y appartenant à $\mathrm{Im}\,(A^\top A)$. Par définition, il existe X dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^\top AX = Y$. Posons alors $Z = AX$. On a que Z appartient à $M_{m,1}(\mathbb{R})$ et $A^\top Z = Y$, donc Y appartient à $\mathrm{Im}\,(A^\top)$ et $\mathrm{Im}\,(A^\top A) \subset \mathrm{Im}\,(A^\top)$. Par le théorème du rang, on a de plus que

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(A)) + \mathrm{rang}(A) = n = \dim(\mathrm{Ker}\,(A^\top A)) + \mathrm{rang}(A^\top A).$$

Le résultat de la question précédente impliquant que $\dim(\mathrm{Ker}\,(A)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(A^\top A))$, on a obtenu que $\mathrm{rang}(A^\top A) = \mathrm{rang}(A)$ et l'on conclut en utilisant que $\mathrm{rang}(A^\top) = \mathrm{rang}(A)$.

3. Établir que la matrice $A^\top A$ est diagonalisable et montrer que ses valeurs propres sont des réels positifs.

On a $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$, la matrice est donc réelle symétrique, ce qui implique qu'elle est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles. Soit X un vecteur propre de $A^\top A$ et λ une valeur propre associée. Par définition, on a $A^\top AX = \lambda X$, d'où $0 \leq \|AX\|^2 = X^\top A^\top AX = \lambda X^\top X = \lambda \|X\|^2$ (en notant encore $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$). On en déduit que le réel λ est positif, puisque le vecteur X est non nul.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'équation matricielle $AX = B$, avec X une matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $M_{m,1}(\mathbb{R})$. Plus précisément, une matrice X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite *solution* de cette équation si elle vérifie l'égalité, et elle est dite *pseudo-solution* de cette équation si elle vérifie

$$\forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX - B\| \leq \|AZ - B\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $M_{m,1}(\mathbb{R})$.

4. On suppose qu'il existe au moins une solution de l'équation. Montrer qu'une matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est une pseudo-solution de l'équation si et seulement si elle est une solution de l'équation.

Notons X_0 une solution de l'équation. Soit X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ une pseudo-solution de l'équation. On a

$$\forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX - B\| \leq \|AZ - B\|.$$

En particulier, pour $Z = X_0$, il vient

$$0 \leq \|AX - B\| \leq \|AX_0 - B\| = 0,$$

ce qui implique que $\|AX - B\| = 0$ et donc que $AX = B$. Réciproquement, on a

$$\forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AZ - B\| \geq 0 = \|AX_0 - B\|.$$

La solution X_0 est donc une pseudo-solution de l'équation.

5. On suppose que la matrice X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est une pseudo-solution de l'équation. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda^2 \|AY\|^2 + 2\lambda\, Y^\top A^\top (AX - B) \geq 0$$

(on pourra écrire tout vecteur Z de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ sous la forme $Z = X + \lambda Y$, avec λ un nombre réel et Y une matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$). En déduire que

$$A^\top AX = A^\top B$$

(on pourra chercher à montrer à partir de l'inégalité que $Y^\top A^\top (AX - B) = 0$ pour toute matrice Y de $M_{n,1}(\mathbb{R})$).

Puisque X est une pseudo-solution de l'équation, elle vérifie encore

$$\forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ 0 \leq \|AZ - B\|^2 - \|AX - B\|^2,$$

et donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ 0 \leq \|A(X + \lambda Y) - B\|^2 - \|AX - B\|^2 = \lambda^2 \|AY\|^2 + 2\lambda\, Y^\top A^\top (AX - B),$$

Supposons à présent que $AY = 0_{M_{m,1}(\mathbb{R})}$. On a alors

$$Y^\top A^\top (AX - B) = (AY)^\top (AX - B) = 0_{M_{1,m}(\mathbb{R})}(AX - B) = 0.$$

Sinon, supposons que $AY \neq 0_{M_{m,1}(\mathbb{R})}$. Dans ce cas, on a $\|AY\| \neq 0$ et $\lambda \mapsto \lambda^2 \|AY\|^2 + 2\lambda\, Y^\top A^\top (AX - B)$ est une application polynomiale du second degré s'annulant en 0 et en $-2Y^\top A^\top (AX - B)$. L'inégalité établie précédemment montrant que la fonction est positive sur $\mathbb{R}$, on a nécessairement $-2Y^\top A^\top (AX - B) = 0$. On a ainsi établi que

$$\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ Y^\top A^\top (AX - B) = 0,$$

ce qui implique que $A^\top (AX - B)$ est orthogonal à tout élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, donc nul.

6. Réciproquement, montrer que toute matrice X vérifiant la dernière égalité est une pseudo-solution de l'équation et en déduire qu'il existe toujours au moins une pseudo-solution de l'équation.

Soit X un élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^\top AX = A^\top B$. En posant, pour toute matrice Z de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y = Z - X$, et en utilisant l'inégalité de la question précédente pour $\lambda = 1$, on trouve

$$\forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AZ - B\|^2 - \|AX - B\|^2 = \|AY\|^2 + 2Y^\top A^\top (AX - B) = \|AY\|^2 \geq 0,$$

puisque $A^\top (AX - B) = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. On en déduit le premier résultat. Enfin, on a que $A^\top B$ appartient à $\operatorname{Im}(A^T)$ et donc, puisque $\operatorname{Im}(A^T) = \operatorname{Im}(A^T A)$, à $\operatorname{Im}(A^T A)$. Il existe donc au moins un élément X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $A^\top AX = A^\top B$, garantissant l'existence d'au moins une pseudo-solution de l'équation.

7. À quelle condition sur le rang de A l'équation admet-elle une unique pseudo-solution ?

On a vu que une matrice X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ était une pseudo-solution de l'équation si et seulement si elle est telle que $A^\top AX = A^\top B$. On en déduit qu'il existe une unique pseudo-solution de l'équation si et seulement si la matrice $A^\top A$ est inversible. Les premières questions montrent que c'est le cas si et seulement si $\operatorname{rang}(A) = n$.

Exercice 4 (polynômes de Hermite). Soit E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et telles que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} (f(x))^2 e^{-x^2}\,dx$ converge.

1. Établir que

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Soit a et b deux nombres réels. On a $0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, d'où $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

2. En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx$ est convergente.

Les fonctions f, g et $x \mapsto e^{-x^2}$ étant continues sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)g(x)e^{-x^2}$ l'est aussi en tant que produit de fonctions continues. Par ailleurs, on a, d'après la question précédente et la positivité de la fonction exponentielle,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq |f(x)g(x)|\, e^{-x^2} \leq \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right) e^{-x^2}.$$

Les fonctions f et g appartenant à E, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right) e^{-x^2}\,dx$ est convergente, et on déduit alors de l'encadrement obtenu ci-dessus que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx$ est absolument convergente, donc convergente.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx,$$

F l'espace vectoriel réel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, F_n le sous-espace vectoriel de F des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

3. (a) Montrer que E est un espace vectoriel réel.

Par définition, E est contenu dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel réel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction nulle appartient clairement à E. Soit λ un nombre réel et f et g deux fonctions de E. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda f(x) + g(x))^2 e^{-x^2} = \lambda^2 (f(x))^2 e^{-x^2} + 2\lambda f(x)g(x)e^{-x^2} + (g(x))^2 e^{-x^2},$$

et on sait p,ar définition de E et la précédente question, que les intégrales $\int_{\mathbb{R}} (f(x))^2 e^{-x^2}\,dx$, $\int_{\mathbb{R}} (g(x))^2 e^{-x^2}\,dx$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx$ sont convergentes. Il en résulte, par linéarité, que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} (\lambda f(x) + g(x))^2 e^{-x^2}\,dx$ est convergente, ce qui montre que $\lambda f + g$ est un élément de E. Ceci achève de prouver que E est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel réel, et donc un espace vectoriel réel.

(b) Montrer alors que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Tout d'abord, on observe que l'application est bien à valeurs réelles puisqu'on a montré que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx$ était convergente pour toutes fonction f et g de E. Elle est linéaire à gauche et à droite par linéarité de l'intégrale, symétrique par commutativité de la multiplication entre réels et positive par positivité de l'intégrale. Enfin, soit f un élément de E tel que $\int_{\mathbb{R}} (f(x))^2 e^{-x^2}\,dx = 0$. L'application $x \mapsto (f(x))^2 e^{-x^2}$ étant continue, positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'elle est nulle. La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est nulle. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

(c) Montrer enfin que $F \subset E$.

Soit k un entier naturel. La fonction monomiale $x \mapsto x^k$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on montre, par croissances comparées et par comparaison d'intégrales généralisées positives, que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} (x^k)^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente. Ceci montre que $x \mapsto x^k$ appartient à E. Toute fonction de F pouvant s'écrire comme une combinaison linéaire de fonctions monomiales, on en déduit qu'elle appartient à E, puisque E est un espace vectoriel.

Dans la suite, on notera encore $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la restriction à F (ou F_n) du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E, cette restriction définissant un produit scalaire sur F (ou F_n).

Pour tout entier naturel k, on note H_k l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(e^{-x^2}).$$

En particulier, $H_0 \equiv 1$.

4. Pour tout réel x, calculer $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$ (on donnera les calculs sur la copie).

On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{-x^2}) = -2x\,e^{-x^2},\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(e^{-x^2}) = -2\,e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2},\ \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}(e^{-x^2}) = 8x\,e^{-x^2} + (4x^2-2)(-2x)\,e^{-x^2},$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_1(x) = -e^{x^2}(-2x\,e^{-x^2}) = 2x,\ H_2(x) = e^{x^2}(4x^2-2)\,e^{-x^2} = 4x^2-2,$$
$$H_3(x) = -e^{x^2}(-8x^3+12x)\,e^{-x^2} = 8x^3-12x.$$

5. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_{k+1}(x) = 2x\,H_k(x) - H_k{}'(x).$$

En déduire que, pour tout entier naturel k, H_k est une application polynomiale de degré k et donner le coefficient de son terme de plus haut degré.

Soit k un entier naturel. En dérivant la formule définissant H_k, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_k{}'(x) = (-1)^k (2x) e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(e^{-x^2}) + (-1)^k e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}(e^{-x^2}) = 2x\,H_k(x) - H_{n+1}(x).$$

On raisonne ensuite par récurrence pour pour montrer que, pour tout entier naturel k, H_k est une application polynomiale de degré k dont le coefficient de plus haut degré est 2^k. Pour $k=0$, c'est évident puisque $H_0 \equiv 1$. Supposons que ce soit vrai au rang k. Les applications $x \mapsto 2xH_k(x)$ et $H_k{}'$ sont alors polynomiales, respectivement de degré $k+1$ et strictement inférieur à k. Il découle alors de la formule de récurrence qu'on vient d'établir que H_{k+1} est une application polynomiale de degré $k+1$. De plus, le coefficient du terme de plus haut degré de cette application est celui de l'application $x \mapsto 2xH_k(x)$, c'est-à-dire $2 \times 2^k = 2^{k+1}$.

6. (a) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in F,\ \langle P, H_k \rangle = \left\langle P', H_{k-1} \right\rangle,$$

(on pourra réaliser des intégrations par parties et exploiter la relation de récurrence obtenue plus haut), puis que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall j \in \{0, \dots, k\},\ \forall P \in F,\ \langle P, H_k \rangle = \left\langle P^{(j)}, H_{k-j} \right\rangle.$$

Soit α et β deux nombres réels. En réalisant alors une intégration par parties sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et en utilisant la relation de récurrence précédemment prouvée, on obtient

$$\int_\alpha^\beta P'(x) H_{k-1}(x) e^{-x^2} \mathrm{d}x = \left[P(x) H_{k-1}(x) e^{-x^2} \right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta P(x) H_k(x) e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

En faisant tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$, tout en remarquant que, par croissance comparées, on a

$$\lim_{\alpha \to -\infty} P(\alpha) H_{k-1}(\alpha) e^{-\alpha^2} = \lim_{\beta \to +\infty} P(\beta) H_{k-1}(\beta) e^{-\beta^2} = 0,$$

on arrive à l'égalité voulue après multiplication par $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (les deux intégrales étant convergentes). La seconde égalité est obtenue en raisonnant par récurrence sur l'entier k et procédant de manière similaire.

(b) En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in F_{k-1},\ \langle P, H_k \rangle = 0.$$

Soit k un entier naturel non nul et P un élément de F_{k-1}. On a, d'après la précedente question,

$$\langle P, H_k \rangle = \left\langle P^{(k)}, H_0 \right\rangle = 0,$$

puisque $P^{(k)}$ est l'application nulle.

(c) Conclure que, pour tout entier naturel n, la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ est orthogonale dans F et que c'est une base de F_n.

Si $n = 0$, il est évident que (h_0) est une famille orthogonale. Supposons à présent que n est non nul. Soit i et j deux entiers distincts de $\{0, \ldots, n\}$. Un produit scalaire étant symétrique, on a $\left\langle H_i, H_j \right\rangle = \left\langle H_j, H_i \right\rangle$ et on peut donc sans perte de généralité supposer que $i < j$. Il découle alors des précédentes questions que H_i appartient à F_i, H_j appartient à F_j, que $H_i \subset H_{j-1}$ (car $i \leq j-1$) et donc que $\left\langle H_i, H_j \right\rangle = 0$. Les applications H_i et H_j sont donc orthogonales. Ainsi, les éléments de la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ sont des éléments non nuls de F_n, orthogonaux deux à deux. La famille est donc libre. De plus, son cardinal égal à $n+1$, qui est la dimension de F_n. C'est une base de F_n.