Corrigé succinct du partiel du 18 octobre 2020

Exercice 1 :

1.) On peut prendre $f_n : x \longrightarrow n^2 x^n (1-x)$.

2.) a.) $u_n = 1/n$ b.) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ c.) u_n ne tend pas vers 0 si non $\equiv 0$, donc oui.

3.) a.) Oui car $\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ b.) Non en prenant $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

4.) a.) Voir le cours

b.) Écrire $|f_n(x_n) - f(x_\infty)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_\infty)|$

$$\leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x_\infty)|$$

Comme f_n CVU vers f, f est continue par a.) donc $|f(x_n) - f(x_\infty)| \to 0$. Par CVU, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Ainsi $f_n(x_n) \to f(x_\infty)$.

Exercice 2 : Ici, $n \in \mathbb{N}^*$.

1.) Par croissance comparée, $x^n \ln(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Il faut prendre $u_n(0) = 0$.

2.) Si $x = 1$, $u_n(1) \equiv 0$. Sinon $|x^n a_n \ln x| \leq \|a\|_\infty |x^n \ln x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc u_n CVS vers 0.

3.) Étudions $\|x^n \ln x\|_\infty$. On a $(x^n \ln x)' = x^{n-1}(n \ln x + 1)$ donc $|x^n \ln x|$ atteint son sup en $e^{-1/n}$. On en déduit $\|x^n \ln x\|_\infty = \frac{1}{ne}$.
Ainsi u_n CVU ssi a_n/n tend vers 0.

Exercice 3 :

1.) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} + \frac{1}{n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)$, comme $\frac{1}{n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) \sim \frac{1}{n^{2/3}}$, la STG u_n est DV.

2.) $b_n^{1/n} = \frac{1}{1+n^2} \longrightarrow 0$ donc la STG b_n converge par Cauchy.

3.) $c_n = \left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^{1/2} - 1 - \frac{\beta}{n} = \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2} - 1 - \beta/n$

$$= 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 - \beta/n = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La STG c_n diverge ssi $\beta \neq 1/2$.

Exercice 4

1.) a.) On a $|a_n u_n| \leq |u|_\infty |a_n|$ donc par comparaison, si la STG $|a_n|$ CV, alors la STG $a_n u_n$ aussi.

b.) On a $a_n u_n = |a_n| e^{i\theta_n} u_n$ où l'on a écrit $a_n = |a_n| e^{i\theta_n}$. Prendre $u_n = e^{-i\theta_n}$ convient. C'est aussi $u_n = \frac{\overline{a_n}}{|a_n|}$.

c.) Si $\Sigma |a_n|$ converge alors a_n vérifie P. Si $\Sigma |a_n|$ diverge alors a_n ne vérifie pas P car il existe u_n tq $a_n u_n$ est le TG d'une série divergente. Ainsi a_n vérifie P ssi $\Sigma |a_n| < \infty$.

2.) a.) i.) $a_n = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) + a_0$ donc a_n converge si la STG $a_{k+1}-a_k$ converge, ce qui est le cas car elle est abs. conv.

ii.) C'est la transformation d'Abel du cours.

iii.) U_N converge car la STG u_n converge. Par i), a_N a une limite. Donc $a_N U_N$ aussi. De plus $|(a_n-a_{n+1})[U_n]| \leq |a_n-a_{n+1}||U|_\infty$ donc la STG $(a_n - a_{n+1})U_n$ est convergente. Cela conclut.

b.) i.) On peut prendre ε_n vérifiant la construction suivante :
Si $A_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k$ avec $\varepsilon_{k \leq n}$ déjà construit, alors
$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n$ si $A_n \geq n$ et $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n$ sinon.

ii.) $\varepsilon_n = \frac{1}{\ln n}$ par Bertrand.

c) i) On peut dire que pour tout $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n' = \frac{\overline{a_n}}{|a_n|}\varepsilon_n$ tend vers 0 et donc $\varepsilon_n' a_n = \varepsilon_n |a_n|$ est le TG d'une série CV.

ii) Par l'absurde, si $\sum |a_n|$ diverge alors 2b.i) donne ε_n telle que $\varepsilon_n |a_n|$ est le TG d'une série DV. Absurde.

d.) i) Supposons que a_n n'est pas bornée. On a alors une extraction telle que $n_{k+1} = \min(n > n_k \,/\, |a_n| > 2^{k+1})$. En posant $u_{n_k} = \frac{1}{2^k}$, et 0 sinon, on a alors $\sum u_k < \infty$ et $|u_{n_k} a_{n_k}| \geq 1$ de sorte que $a_n u_n$ ne tend pas vers 0 et donc la STG $a_n u_n$ diverge. Contradict°.

ii) Par Abel de nouveau,
$$\sum_0^n \varepsilon_k (a_{k+1}-a_k) = \sum_{k=1}^{n}(\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k)a_k + \varepsilon_n a_{n+1} - \varepsilon_0 a_0$$
permet de conclure comme au 2a.) iii).

iii.) C'est immédiat par 2c.) ii).

e.) On a prouvé que les suites vérifiant α sont exactement celles telles que $\sum |a_{n+1} - a_n| < \infty$.