L2 MIDO Dauphine
Année 2023-2024

Analyse 3

Feuille d'exercices 0 : Rappels sur les suites, intégrales et développements limités ; suites de Cauchy.

Les exercices avec des étoiles sont à préparer en priorité et sont les seuls qui seront à coup sûr corrigés en TD.

1 Limites et DLs

***Exercice 1.** Calculer les limites des fonctions suivantes quand x tend vers 0.

$\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$; $\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x}$; $\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$

***Exercice 2.** Donner un équivalent simple quand n tends vers $+\infty$ de

$$1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Exercice 3. Déterminer un équivalent simple, puis un développement au second ordre des suites suivantes, en fonction du paramètre $\alpha > 0$ quand il est présent.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \ln(n)} \qquad b_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1\right)^\alpha \qquad c_n = \frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln(n)}{n+1}$$

$$d_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \qquad e_n = \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \qquad f_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}$$

$$g_n = n^{\frac{1}{1+n^2}} - 1 \qquad h_n = \ln(1 + (1 + n^{-2})^{2/3}), \qquad i_n = \frac{\cos(\frac{1}{n})}{n \sin(\frac{1}{n}) + \ln(1+n)}$$

$$j_n = \frac{e^{\frac{2}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{2}{\sqrt{n}}}{\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}}, \qquad k_n = \sqrt{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1 - \frac{1}{2n} \qquad l_n = n^3 \sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right) - n^2$$

$$m_n = \frac{\ln(1 + \alpha^n)}{\sqrt{1 + n \ln n + \cos(n)}}$$

2 Suites numériques

***Exercice 4.** Soit (u_n) une suite complexe telle que $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 5. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $0 \leqslant u_n \leqslant 1, 0 \leqslant v_n \leqslant 1$ et $u_n v_n \to 1$.

Que dire de ces suites ?

Exercice 6. Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Etudier $\lim\limits_{n \to +\infty} \max(u_n, v_n)$.

Exercice 7. Soit (u_n) une suite de réels non nuls vérifiant : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$

Etudier la convergence de (u_n).

Exercice 8. Soit $\theta \in]0, \pi/2[$, $u_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n}$, $v_n = 2^n \tan \frac{\theta}{2^n}$.
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 9. Soit (u_n) une suite définie par : $u_0 = 1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

Etudier la monotonie et la convergence de (u_n).

Exercice 10. La suite $(\sin(n))$ a-t-elle une limite ?

Exercice 11. Etude qualitative des équations (E_n) : $\dfrac{x^3}{x^2+1} = n$

1. Etudier les variations de $f : x \to \frac{x^3}{x^2+1}$. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'équation (E_n) possède une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée x_n.

2. Quelle est la monotonie de la suite $(x_n)_n$? (On utilisera la monotonie de f).

3. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad n \leqslant x_n \leqslant n+1$

4. En déduire la limite de la suite $(x_n)_n$ et en donner un équivalent simple.

Exercice 12. Posons $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geqslant 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On note x_n cette racine.

2. Justifier que $\forall n \geqslant 2, \quad \dfrac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{2}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

3. En utilisant l'égalité $f_n(x_n) = 0$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n x_n$. En déduire un équivalent de x_n.

4. Etudier le signe de $t \to f_{n+1}(t) - f_n(t)$. En évaluant en $t = x_n$, en déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_n$.

***Exercice 13.** **1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution x_n dans $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

2. Trouver un équivalent simple de x_n, qu'on va noter a_n.

3. Soit $b_n = x_n - a_n$. Etudier la convergence de la suite (b_n). On note ℓ sa limite, que l'on déterminera.

4. Soit $c_n = b_n - \ell$. Trouver un équivalent de (c_n).

En déduire un développement asymptotique à 3 termes de x_n, c'est à dire une écriture de la forme

$$x_n = u_n + v_n + w_n + o(w_n)$$

telle que $v_n = o(u_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

Exercice 14. Pour tout entier $n \geq 2$ on considère l'équation (E_n) : $x^n = x + n$.

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$. On note u_n cette solution.

2. Montrer que (u_n) est bornée.

3. Dans cette question, on suppose que (u_n) converge.

Montrer que sa limite ne peut être qu'un réel ℓ qu'on déterminera.

4. Le suite (u_n) converge-t-elle ?

5. Donner un équivalent de $(u_n - \ell)$.

Exercice 15. Etudier la suite définie pour $n > 0$ par $u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$ (il y a n "2")

Exercice 16. Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \cdots + \sqrt{1}}}$.

1. Montrer que $u_n \leq 2\sqrt{n}$.

2. En déduire que $u_n \sim \sqrt{n}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n - \sqrt{n})$.

3 Intégration

***Exercice 17.** On pose pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \int\limits_1^e (\ln x)^n dx$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \geqslant 0$ et donner la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$

2. Etablir à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

3. Déduire des questions précédentes que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ puis, avec la question 2, donner un équivalent simple de I_n.

Exercice 18. On pose $I_n = \int\limits_0^1 \ln(1+x^n)dx$.

1. Vérifier : $\forall x \in [0,+\infty[, \quad 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 19. On pose $I_n = \int\limits_2^n \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. Montrer que $\forall x \in]1,+\infty[, \quad \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leqslant \dfrac{1}{x-1}$.
En déduire que $\forall n \geqslant 2$, $\ln n - \ln 2 \leqslant I_n \leqslant \ln(n-1)$.

Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{\ln n}$.

Exercice 20. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeur dans $[0,1]$, autre que la fonction nulle. Montrer que, si $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(t)^2 dt$, alors f est la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$.

Exercice 21. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int\limits_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$ et $J_n = \int\limits_0^1 t^n \ln(1+t^2)dt$.

1. Donner la monotonie des suites $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(J_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3. Montrer que, $J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$.

4. En déduire la limite de J_n et celle de nJ_n puis donner un équivalent J_n.

Exercice 22. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice 23. **1.** Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos(\frac{\pi}{4} - x) \; dx$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) \; dx$.

Exercice 24. Si $m, n \in \mathbb{N}$, on pose $I_{m,n} = \int\limits_0^1 x^m (1-x)^n \; dx$.

1. Montrer que $\forall n, m \in \mathbb{N}, I_{m,n} = I_{n,m}$.

2. Montrer que pour $m \geqslant 1$, on a : $I_{m,n} = \dfrac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$.

3. En déduire la valeur de $I_{m,n}$.

Exercice 25. Intégrales de Wallis

On note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

1. Calculer W_0 et W_1.

2. Montrer que la suite W_n est positive et décroissante.

3. En intégrant par partie, trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2}, pour tout $n \geq 2$. En déduire que $W_n \sim W_{n+1}$.

4. Déduire de la relation de récurrence des formules explicites pour W_{2n} et W_{2n+1}.

5. On admet une forme faible de la formule de Stirling : $n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Déterminer la constante K.

4 Suites de Cauchy

***Exercice 26.** Parmi les suites suivantes, vérifier lesquelles sont des suites de Cauchy en utilisant la définition :

$$(i)\ a_n = \frac{1}{n^2}, \quad (ii)\ b_n = (-1)^n, \quad , \quad (iii)\ d_n = \ln n.$$

Exercice 27. **1.** Soit (r_n) une suite de nombres réels telle que $r_{n+1} - r_n$ tend vers 0. Est-elle de Cauchy ?

2. Soit (r_n) une suite de nombres réels telle que $|r_{n+1} - r_n| \leq \lambda^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où λ est un réel strictement compris entre 0 et 1. Montrer que la suite (r_n) est de Cauchy.

3. Soit (r_n) la suite définie par récurrence par $r_0 = 2$ et $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$, $n \geq 0$. Montrer que (r_n) est à valeurs dans $[\frac{3}{2}, 2]$. Puis, en utilisant la question précédente, montrer que (r_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Autrement dit on a montré que $\mathbb{Q}$ n'est pas *complet*, contrairement à $\mathbb{R}$.