Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2020 - 2021)

Examen - Mercredi 13 janvier 2021.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ désigne un espace de probabilité.

Exercice 1. *(5 pts)*

1. Donner la définition d'une variable aléatoire discrète. Donner sans démonstration la condition pour qu'elle soit intégrable et donner son espérance dans ce cas.
2. Quand dit-on d'événements $(A_i)_{i\in I}$ qu'ils sont indépendants ?
3. Énoncer puis prouver l'inégalité de Markov.
4. Soit $A \subset \Omega$. Montrer que la fonction 1_A est une variable aléatoire *si et seulement si* $A \in \mathcal{F}$.

Exercice 2. *(5 pts)* Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire de densité $x \to e^{-x}1_{[0,+\infty[}(x)$. On pose $Y = \min(X, 1)$.

1. Calculer $\mathrm{P}(Y = 1)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de Y et la dessiner.
3. La variable aléatoire Y est elle discrète ? à densité ?

Exercice 3. *(5 pts)* On considère les lancers successifs de deux pièces équilibrées : soit deux suites $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ formant une famille i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On considère le premier instant où l'un des deux tirages est « pile » (c'est-à-dire 1) :

$$N = \inf\{n \geq 1 | X_n = 1 \text{ ou } Y_n = 1\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

1. Pour tout $n \geq 1$, écrire l'événement $\{N > n\}$ à l'aide de $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_n$ puis calculer $\mathbb{P}(N > n)$. Quelle est la loi de N ?
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, X_N est une variable aléatoire. (c'est une question un peu plus difficile : on pourra penser à utiliser la question 4 de l'exercice 1).
3. Pour tout $n \geq 1$ réécrire l'événement

   $$\{N = n, X_N = 1, Y_N = 0\}$$

   (on rappelle que les virgules se lisent « et ») en fonction de $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n$ et en déduire un calcul de sa probabilité. En déduire la valeur de $P(X_N = 1, Y_N = 0)$.
4. Que vaut $P(X_N = 0, Y_N = 0)$? Et $P(X_N = 0, Y_N = 1)$? Et $P(X_N = 1, Y_N = 1)$?
5. En déduire une méthode, à l'aide de pièces de monnaie équilibrées, pour tirer un nombre au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ de façon équiprobable.

Exercice 4. *(5 pts)* La durée de vie d'un atome d'un élément radioactif est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle dont le paramètre $\lambda > 0$ est la constante de désintégration. À $t = 0$, on considère n atomes et les comportements des différents atomes sont indépendants. On introduit donc les variables $(X_i)_{i \leq 1 \leq n}$ i.i.d. de même loi exponentielle de paramètre λ où pour $1 \leq i \leq n$, la variable X_i représente le temps de désintégration de l'atome i.

1. Montrer que X_1 satisfait la propriété de non vieillissement : pour tous réels positifs s et t,
$$\mathbb{P}(X_1 > t + s | X_1 > t) = \mathbb{P}(X_1 > s)$$
2. Soit Y la variable aléatoire représentant le temps de la première désintégration. Exprimer Y comme fonction des $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ puis calculer la fonction de répartition de Y. Quelle loi reconnait on ?
3. Soit la variable aléatoire Z_t représentant le nombre de désintégrations observées sur $[0, t]$. Donner une expression mathématiques pour Z_t puis identifier sa loi.
4. Calculer $\mathbb{E}(Z_t)$.