Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

Département MIDO

Algèbre linéaire 3
Année 2021/2022

Corrigé (succinct) du partiel du 21 octobre 2021

Exercice 1. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Les matrices A et B ont toutes deux le même polynôme caractéristique, que l'on peut écrire sous la forme du même polynôme scindé à racines simples $\chi_A(X) = \chi_B(X) = (X-1)(X-5)$. Il en résulte que les matrices sont diagonalisables et semblables à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. On en déduit qu'elles sont semblables, la relation de similitude étant transitive.

Exercice 2. Soit a un nombre réel et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ a & X-(1+a) \end{vmatrix} = X(X-1-a)+a = X^2-(1+a)X+a.$$

La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si le polynôme χ_A admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ (si la racine de χ_A était double, le fait que la matrice soit diagonalisable impliquerait qu'elle soit égale à un multiple de la matrice identité). Le discriminant associé à χ_A est

$$\Delta = (1+a)^2 - 4a = (1-a)^2,$$

la matrice A est donc diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

2. Lorsque A est diagonalisable, calculer A^k pour tout entier naturel k.

Lorsque $a \neq 1$, les valeurs propres de la matrice A sont $\frac{1}{2}(1+a-(1-a)) = a$ et $\frac{1}{2}(1+a+(1-a)) = 1$. Caractérisons les sous-espaces propres associés. On a

$$AX = aX \iff a\,x_1 = x_2,$$

le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre associé à a, et

$$AX = X \iff x_1 = x_2,$$

le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre associé à 1. Il vient alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^k \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a-a^k & a^k-1 \\ a-a^{k+1} & a^{k+1}-1 \end{pmatrix}.$$

3. On suppose dans cette question que $a = 1$. Exprimer A^2 en fonction de A et I_2 et en déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = kA - (k-1)I_2.$$

Lorsque $a = 1$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, d'où $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 2A - I_2$. On vérifie facilement que la formule donnée est valide pour k égal à 0, 1 ou 2. Supposons qu'elle soit vraie pour un entier k supérieur ou égal à 2. On a

$$A^{k+1} = AA^k = A(kA-(k-1)I_2) = kA^2-(k-1)A = k(2A-I_2)-(k-1)A = (2k-(k-1))A - kI_2 = (k+1)A - kI_2,$$

ce qui achève de prouver l'égalité par récurrence.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée des réels u_0 et u_1 et de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - a\,u_n.$$

4. Montrer que
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}.$$

On a
$$\forall n\in\mathbb{N},\ A\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\(1+a)\,u_{n+1}-a\,u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix},$$
compte tenu de la relation de récurrence définissant la suite.

5. Pour toute valeur de a, exprimer le terme général de la suite en fonction de u_0, u_1 et a.

On montre, par un raisonnement par récurrence utilisant l'égalité établie dans la question précédente, que
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}.$$
Si $a\neq 1$, on a ainsi
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{a-1}\begin{pmatrix}a-a^n & a^n-1\\a-a^{n+1} & a^{n+1}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix},$$
d'où
$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{a-1}\left((a-a^n)\,u_0+(a^n-1)\,u_1\right).$$
Si $a=1$, on trouve
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(n-1) & n\\-n & n+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix},$$
d'où
$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=-(n-1)\,u_0+n\,u_1.$$

Exercice 3 (4,5 points). Soit E un espace vectoriel de dimension n supérieure ou égale à 2. On considère l'application ϕ définie sur $\mathscr{L}(E)$ par
$$\forall f\in\mathscr{L}(E),\ \phi(f)=f+\operatorname{tr}(f)\,id_E.$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

Pour tout endomorphisme f de E, $\phi(f)$ est une combinaison linéaire d'endomorphismes de E (f et id_E). L'application ϕ est par conséquent à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$. Montrons qu'elle est linéaire. Notons $\mathbb{K}$ le corps sur lequel E est construit. On a, par linéarité de l'application trace,
$$\forall (f,g)\in(\mathscr{L}(E))^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \phi(\lambda f+g)=\lambda f+g+\operatorname{tr}(\lambda f+g)\,id_E=\lambda f+g+(\lambda\operatorname{tr}(f)+\operatorname{tr}(g))\,id_E=\lambda\,\phi(f)+\phi(g).$$

2. Calculer $\phi^2=\phi\circ\phi$ et l'exprimer en fonction de ϕ et de $id_{\mathscr{L}(E)}$.

On a, par linéarité de l'application trace et parce que l'espace E de dimension n,
$$\begin{aligned}\forall f\in\mathscr{L}(E),\ \phi^2(f)&=f+\operatorname{tr}(f)\,id_E+\operatorname{tr}(f+\operatorname{tr}(f)\,id_E)\,id_E\\&=f+(2+\operatorname{tr}(id_E))\operatorname{tr}(f)\,id_E\\&=f+(2+n)\operatorname{tr}(f)\,id_E\\&=(n+2)\phi(f)-(n+1)\,f,\end{aligned}$$
d'où $\phi^2=(n+2)\,\phi-(n+1)\,id_{\mathscr{L}(E)}$.

3. En déduire le polynôme minimal de ϕ.

Il est clair que l'application ϕ n'est pas une homothétie, son polynôme minimal est donc de degré strictement plus grand que un. Par ailleurs, on a que $\phi^2-(n+2)\,\phi+(n+1)\,id_{\mathscr{L}(E)}=0_{\mathscr{L}(E)}$ d'après la question précédente. On en déduit que $\mu_\phi(X)=X^2-(n+2)X+(n+1)$.

Exercice 4. Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que l'application, appelée *produit vectoriel*, définie sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ par
$$(x,y)\mapsto x\wedge y=\left(\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\x_3 & y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_3 & y_3\\x_1 & y_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}\right),$$
où $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$, est une application bilinéaire antisymétrique.

La bilinéarité de l'application découle ici de la multilinéarité du déterminant, qui implique la linéarité par rapport à chacune des colonnes dans le déterminant. Le caractère antisymétrique de l'application découle du caractère alterné du déterminant, qui fait que la permutation de deux colonnes dans le déterminant entraîne la multiplication de ce dernier par -1.

2. Une forme bilinéaire b définie sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite *alternée* si

$$\forall x \in E,\ b(x,x) = 0.$$

   Montrer que cette notion équivaut à ce que b soit antisymétrique.

On suppose que b est antisymétrique. Pour tout vecteur x de E, on a alors $b(x,x) = -b(x,x)$ et donc $b(x,x) = 0$. Réciproquement, on suppose que b est alternée. Pour tous vecteurs x et y de E, on alors

$$0 = b(x+y, x+y) = b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) = b(x,y) + b(y,x)$$

et donc $b(y,x) = -b(x,y)$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, q une forme quadratique sur E et b la forme polaire de q. Montrer que

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ b(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) = \frac{1}{2}\left(q(x) + q(y) - q(x-y)\right).$$

On a

$$\frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) = \frac{1}{2}\left(q(x) + 2\,b(x,y) + q(y) - q(x) - q(y)\right) = b(x,y)$$

et

$$\frac{1}{2}\left(q(x) + q(y) - q(x-y)\right) = \frac{1}{2}\left(q(x) + q(y) - (q(x) - 2\,b(x,y) + q(y))\right) = b(x,y).$$