Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2020 - 2021)

CC2 - Lundi 30 novembre 2020.

durée : 1h30.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Dans tout le sujet on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Exercice 1. Questions de cours *(pts)*

1. Donner la définition d'une variable aléatoire réelle.
2. Montrer que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle est continue à droite.
3. Soit A un événement de $\mathcal{F}$ tel que $\mathrm{P}(A) > 0$. Rappeler la définition de $\mathrm{P}(\cdot|A)$ et montrer qu'il s'agit bien d'une probabilité.
4. Enoncer et prouver le premier lemme de Borel-Cantelli.

Correction. Voir le cours!

Exercice 2. *(pts)* Soit X une variable aléatoire. On suppose qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\mathrm{E}(e^{\mu X}) < +\infty$. Montrer que pour tout $a > 0$

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq \mathrm{E}(e^{\mu X})e^{-\mu a}.$$

Correction. Comme la fonction exponentielle est croissante,

$$\{X \geq a\} = \{e^{\mu X} \geq e^{\mu a}\}.$$

On applique ensuite l'inégalité de Markov à la variable positive intégrable $e^{\mu X}$ pour obtenir le résultat.

Exercice 3. *(pts)* On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y indépendantes et de même loi uniforme sur $\{-1, +1\}$. On note $Z = XY$. Montrer que les variables (X, Y, Z) sont indépendantes 2 à 2 mais ne sont pas mutuellement indépendantes.

Correction. On sait déjà que X et Y sont indépendantes. Montrons que X et Z sont indépendantes. On remarque déjà que Z est discrète à valeur dans $\{-1, +1\}$ et que

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z = 1) &= \mathrm{P}(X = 1, Y = 1) + \mathrm{P}(X = -1, Y = -1) \\ &= \mathrm{P}(X = 1)\mathrm{P}(Y = 1) + \mathrm{P}(X = -1)\mathrm{P}(Y = -1) = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

où on a utilisé l'indépendance de X et Y pour la seconde égalité. De même on a $\mathrm{P}(Z = -1) = 1/2$. Pour a, b dans $\{0, 1\}$ on a donc $\mathrm{P}(X = a, Z = b) = \mathrm{P}(X = a, Y = ab) = 1/4$ en utilisant l'indépendance de X et Y. On en déduit que $\mathrm{P}(X = a, Z = b) = \mathrm{P}(X = a)\mathrm{P}(Z = b)$. On prouve de la même façon que Y et Z sont indépendantes.

En revanche on a $\mathrm{P}(X=1, Y=1, Z=0)=0$ et $\mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1)\mathrm{P}(Z=0)=1/8>0$ donc X, Y, Z ne sont pas indépendantes.

Exercice 4. *(pts)* Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètres $\lambda > 0$. Montrer que pour toute fonction ϕ continue bornée la variable aléatoire $X\phi(X)$ est intégrable puis montrer que $\mathrm{E}(X\phi(X)) = \lambda\mathrm{E}(\phi(X+1))$.

Correction. On note $M>0$ une borne de ϕ. On a donc $|X\phi(X)| \leq M|X|$ et en utilisant la linéarité, il ne reste quye à prouver que $\mathrm{E}(|X|) < +\infty$. On pouvait invoquer le cours puisque X suit une loi de Poisson ou revérifier que

$$\mathrm{E}(|X|) = \sum_{k\geq 0} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} < +\infty$$

en utilisant le critère de D'Alembert.

On a donc

$$\mathrm{E}(X\phi(X)) = \sum_{k\geq 0} k\phi(k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k\geq 1}\phi(k)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

et en faisant le changement de variable $k' = k-1$ on obtient

$$\mathrm{E}(X\phi(X)) = \lambda\sum_{k\geq 0}\phi(k+1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda\mathrm{E}(\phi(X+1)).$$

Exercice 5. *(pts)* Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X = \frac{1}{1+U}$.

1. Determiner la fonction de répartition F de X et la dessiner son graphe.
2. Montrer que X admet une densité et la determiner.
3. La variable X est elle intégrable ? Si oui calculer son espérance

Correction.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) = \mathrm{P}(U \geq \frac{1}{t} - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{1}{t} & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

2. On observe que F_X peut s'écrire comme l'intégrale de la fonction $f: t \to \frac{1}{t^2}1_{[1/2,1]}(t)$. Donc X est une variable à densité et admet f pour densité.
3. On vérifie que X est bornée par 1 donc intégrable. De plus

$$\mathrm{E}(X) = \int tf(f)\ dt = \int_{1/2}^{1} t\frac{1}{t^2}\ dt = \ln(2).$$

Exercice 6. (Bonus...si vous avez encore un peu de temps) *(pts)* Un singe tape à la machine en appuyant de façon indépendante à chaque pas de temps sur une des 26 lettres de l'alphabet. Quelle est la probabilité qu'à un certain temps il écrive d'une traite *Les frères Karamazov* ?

Correction. On note N le nombre de caractères dans *Les frères Karamazov*. On note $\mathcal{A} = \{A, \cdots, Z\}$ l'alphabet et on note $(a_i)_{i=1,\cdots,N}$ la suite de lettres correspondant aux *Frères Karamazov*.

On considère une suite de variables aléatoires i.i.d. $(X_n)_{n\geq 1}$ uniformes dans $\mathcal{A}$ pour modéliser la suite de lettres choisies par le singe. On considère pour tout $k \geq 0$ l'événement

$$B_k = \{(X_{kN+1}, \cdots, X_{(k+1)N}) = (a_1, \cdots, a_N)\}.$$

Comme les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. les événements $(B_k)_{k\geq 1}$ sont indépendants. De plus pour tout $k \geq 1$, en utilisant que les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendants,

$$\mathrm{P}(B_k) = (\frac{1}{26})^N > 0.$$

Comme les $(B_k)_{k\geq 1}$ sont indépendants et $\sum_{k\geq 1} \mathrm{P}(B_k) = +\infty$, le second lemme de Borel Cantelli nous assure que $\mathrm{P}(\limsup B_k) = 1$. On obtient donc même que presque sûrement le singe va écrire *Les frères Karamazov* une infinité de fois. En M1 vous verrez comment on peut determiner l'espérance du premier temps où il écrit l'ouvrage.