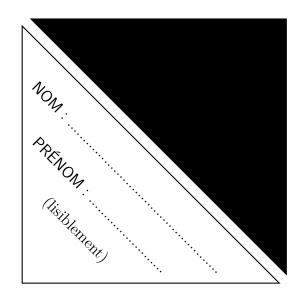


L2 MIDO 2023-2024

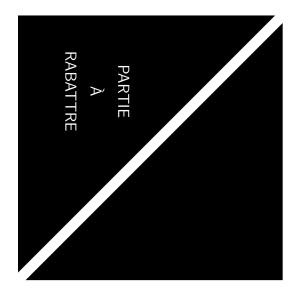


## Algèbre Linéaire 3. Partiel du 31 octobre 2023 (durée 2h).

L'examen se compose de quatre exercices et d'un problème en deux parties. Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Le soin apporté à la rédaction, la clarté, la concision et le respect des consignes (en particulier l'écriture lisible de son NOM et PRÉNOM) font partie de l'évaluation. Il y a largement la place de répondre dans les cases, utilisez le brouillon à bon escient pour être efficaces, et n'utilisez la dernière feuille blanche qu'en cas d'extrême nécessité.

Réservé pour la correction. Initiales correcteur / correctrice :	Nº copie :
Commentaires éventuels :	

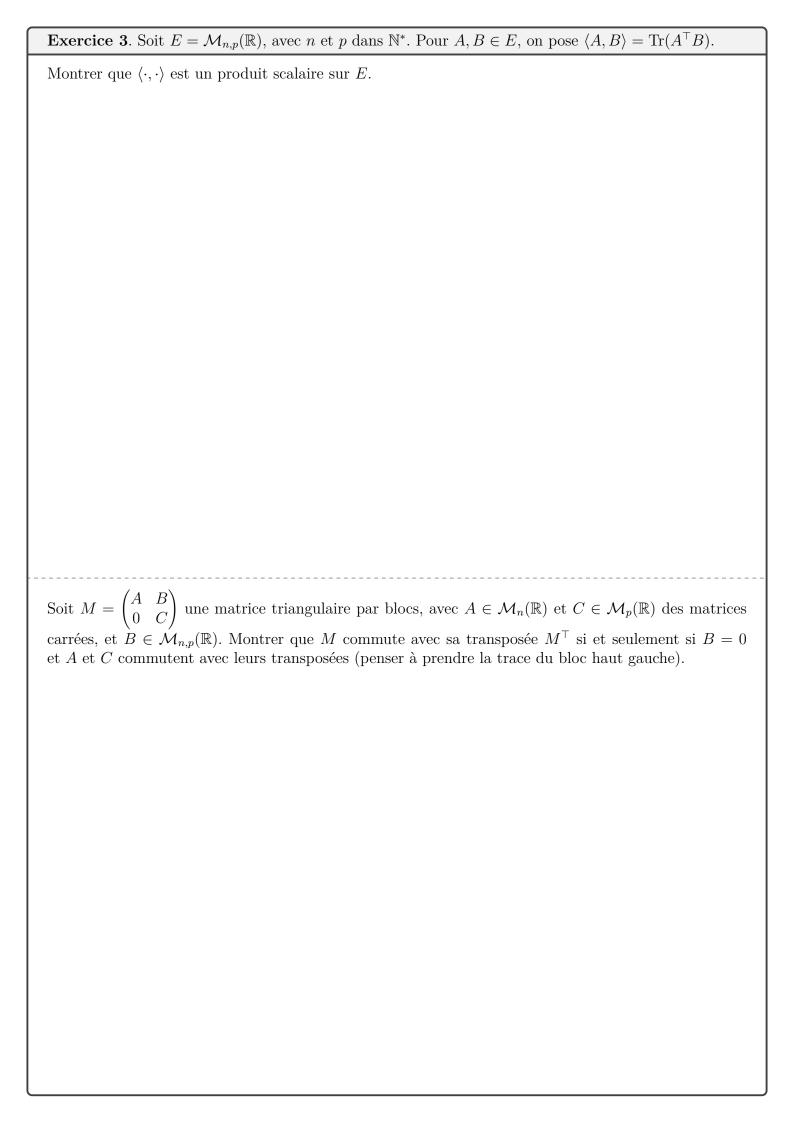


	/ U	1	U	υγ	١
<b>Exercice 1</b> . Soit $A$ la matrice	0	0	1	0	١
Exercice 1. Soft A la matric	0	0	0	1	.
\	$\sqrt{5}$	0	-18	8/	

Calculer son polynôme caractéristique, noté P, et factoriser son polynôme dérivé P'.

La matrice A est-elle diagonalisable dans  $\mathbb{C}\,?$ 

<b>Exercice 2</b> . Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ une matrice inversible, vérifiant $Tr(A) = 6$ et $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ .
Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de $A$ de degré $2$ .
La matrice $A$ est-elle diagonalisable? Quelles sont ses seules valeurs propres possibles?
La matrice A est-ene diagonalisable: Quenes sont ses seules valeurs propres possibles:
Déterminer l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres, et en déduire le polynôme caracté-
ristique de $A$ , ainsi que son polynôme minimal.



<b>Exercice 4.</b> Soit $E$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .
Quelle est la dimension de $E$ ? On pourra donner un isomorphisme d'un espace de matrices dans $E$ .
Pour $b \in E$ , on note $\Psi(b)$ l'application $(x,y) \mapsto b(y,x)$ . Montrer que l'application $\Psi$ ainsi définie est un
endomorphisme de $E$ et décrire les sous-espaces vectoriels $\ker(\Psi - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(\Psi + \mathrm{id}_E)$ .
L'endomorphisme $\Psi$ est-il diagonalisable?

Problème :	polvnômes	annulateurs	de	deux	matrices	différentes.
I I O O I CIII C .	POLYHOU	annana	$\mathbf{a}$		IIICCUI ICCO	CITION CITOOD.

robieme : polynomes annulateurs de deux matrices différentes.
Soit $A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et $A_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , avec $n, p \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que l'on a $Q_1$ et $Q_2$ dans $\mathbb{R}[X]$ tels que — $Q_1$ est un polynôme annulateur de $A_1$ , — $Q_2$ est un polynôme annulateur de $A_2$ , — $Q_1$ et $Q_2$ sont premiers entre eux.
I. Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Si $H \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on note $\Phi(H) = A_1H - HA_2$ .
Montrer que l'application $\Phi$ ainsi définie est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$
Si $H \in \ker \Phi$ et si $Q \in \mathbb{R}[X]$ , montrer que $Q(A_1)H = HQ(A_2)$ (on pourra commencer avec $Q = X^k$ ).
On considère des polynômes $R_1$ et $R_2$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que $Q_1R_1+Q_2R_2=1$ (de tels polynômes existent par le théorème de Bézout). En exprimant $(Q_1R_1)(A_1)+(Q_2R_2)(A_1)$ , montrer que que $Q_2(A_1)$ est inversible.
Déduire des deux questions précédentes que $\Phi$ est injectif, puis montrer qu'il est bijectif.



Soit  $H \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On pose  $P = \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ , puis calculer  $PMP^{-1}$ .

Déduire de la partie précédente (l'étude de  $\Phi$ ) que M est semblable à  $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ .

Si  $Q \in \mathbb{R}[X]$ , calculer  $Q(\widetilde{M})$  en fonction de  $Q(A_1)$  et  $Q(A_2)$  (on pourra commencer avec  $Q = X^k$ ). En déduire que  $Q_1Q_2$  est un polynôme annulateur de  $\widetilde{M}$ .

Si  $Q \in \mathbb{R}[X]$ , calculer  $Q(PMP^{-1})$  en fonction de Q(M), puis en conclure que  $Q_1Q_2$  est un polynôme annulateur de M.