**EXAMEN rattrapage : Algorithme et Programmation** Université Paris-Dauphine MIDO L2

Pour les exercices demandant de compléter un programme python les parties manquantes sont représentées par `?(1)?`, `?(2)?`, `?(3)?`... Le format de votre réponse sera par exemple

```
(1)   a=b
(2)   return x
(3)   f(x,y)
```

où `a=b` est le contenu manquant à l'endroit `?(1)?`,
`return x` est le contenu manquant à l'endroit `?(2)?`,
`f(x,y)` est le contenu manquant à l'endroit `?(3)?`...

**Exercice 1** *Complétez ce programme de tri fusion en python.*

```
def tf(t):
    if  len(t) <= 1:
        return t
    m = len(t)//2
    t1 = t[:m]
    t2 = t[m:]
    ?(1)?
    ?(2)?
    tt = fus(tt1,tt2)        #fus(tt1,tt2) retourne l'union triée de deux tableaux tt1,tt2 triés
    return tt
```

**Exercice 2** *Complétez ce programme de tri insertion en python.*

```
def trins(A):
        for j in range(1,len(A)):
                ?(1)?
                i=j-1
                while i>=0 and A[i]>x:
                        ?(2)?
                        i -= 1
                A[i+1]=x
```

**Exercice 3** *Complétez ce programme de tri dénombrement en python.*

```
def triden(A):
        n=len(A)
        m=max(A)   #retourne la valeur maximum du tableau A
        B=[0 for i in range(n)]
        C=[0 for j in range(m+1)]
        for i in range(n):
                C[A[i]] += 1
        for j in range(1,m+1):
                C[j]=C[j-1]+C[j]
        for i in range(n):
                B[?(1)?]=A[i]
        return B
```

**Exercice 4** *Complétez ce code python pour qu'il affiche l'expression en base 5 de tous les nombres de 0 à $5^5 - 1$.*

```
b=?(1)?
n=?(2)?
```

```
A=[0 for i in range(n)]
def count(i):
        for j in range(b):
                ?(3)?
                if ?(4)? :
                        print A
                else:
                        count(i+1)
?(5)?
```

**Exercice 5** *1. Complétez cette fonction python pour qu'elle retourne un triplet $(x, y, d) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $ax + by = d$, où $d$ est le pgcd de $a, b$.*

```
def B(a,b):
        """on suppose a>=b"""
        if b==0:
                return [1,0,a]
        else:
                [x,y,d]=B(b,a%b)
                return ?(1)?
```

*2. Répondez à l'aide d'une fonction python à la question suivante : étant donnés le pgcd $d$ de $a, b$, les couples d'entiers relatifs $(x, y)$ tels que $ax + by = d$ sont-ils uniques ?*

**Exercice 6** *1. Le pseudo-code suivant décrit un algorithme récursif pour la multiplication de deux matrices carrées:*

```
def mult(A,B):
    if n <= 1:
         return C=A*B
    else:
        C11=mult(A11,B11)+mult(A12,B21)
        C12=mult(A11,B12)+mult(A12,B22)
        C21=mult(A21,B11)+mult(A22,B21)
        C22=mult(A21,B12)+mult(A22,B22)
        return C
```

*Expliquez ce pseudo-code.*

*2. Quelle est la complexité de* `mult` *?*

*3. Sachant que*

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

*et que*

$$\begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & - & \cdot & + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & \cdot & - & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

*donnez le pseudo-code d'un algorithme récursif pour la multiplication de deux matrices carrées* $A, B$ *de taille* $n$, *dont le temps d'éxécution satisfait* $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$.

4. *Donez un algorithme qui multiplie deux nombres complexes* $u = x + iy$ *et* $z = a + ib$ *en n'effectuant que 3 multiplications.*

**Exercice 7** *Soit* $n$ *un entier. Les fonctions* $g(x) = 2x$ *et* $d(x) = 2x + 1$ *permettent de structurer la représentation de* $T = \{1, 2, \ldots, n\}$ *en tas binaire, la fonction* $p(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ *est alors telle que* $p(g(x)) = p(d(x)) = x$. *La fonction* $h(x)$ *associe un entier à chaque élément de* $T$ *de la manière suivante:* $h(1) = 0$, *et* $h(x) = h(p(x)) + 1$ *pour* $x \geq 2$. *On note* $n(h)$ *le nombre d'éléments* $x$ *de* $T$ *tels que* $h(x) = h$. *Montrez que*

$$n(h) \leq \left\lfloor \frac{n}{2^{h+1}} \right\rfloor$$