Département MIDO

Algèbre linéaire 3
Année 2021/2022

# Contrôle continu du 22 novembre 2021

*Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.*

Durée : 1h

**Exercice 1 (4 points).** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 et $q$ la forme quadratique sur $E$ définie par

$$\forall P \in E,\ P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2,\ q(P) = {a_0}^2 + 3\,{a_1}^2 + 8\,{a_2}^2 + 4\,a_0 a_1 + 6\,a_0 a_2 + 14\,a_1 a_2.$$

Déterminer une base de $E$ orthogonale pour $q$ et donner la matrice de $q$ relativement à cette base.

**Exercice 2 (7 points).** Soit $q$ la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^4,\ q(x) = x_1 x_2 - x_3 x_4.$$

1. Déterminer la matrice de $q$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer le rang et la signature de $q$.

Soit $H$ un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^4$, d'équation cartésienne $x_1 + \alpha\, x_2 + \beta\, x_3 + \gamma\, x_4 = 0$, avec $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ des réels.

3. Quelle est la dimension de l'orthogonal de $H$ pour $q$ ? En donner une base.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ pour que la restriction $q_{|_H}$ de $q$ à l'hyperplan $H$ soit dégénérée. Quel est son rang dans ce cas ?

**Exercice 3 (4 points).** Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(\{i,j\})\, x_i x_j.$$

1. Déterminer la matrice de $q$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i=k}^{n} \sum_{j=k}^{n} x_i x_j \right),$$

   et utiliser cette écriture pour trouver la signature et le rang de $q$.

**Exercice 4 (5 points).** Soit $a$ un nombre réel. On considère l'application $b_a$ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ b_a(x,y) = x_1 y_1 + (a+5)\, x_2 y_2 + (a^2+a+2)\, x_3 y_3 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + 2\,(x_1 y_2 + x_2 y_1) + (a+3)\,(x_2 y_3 + x_3 y_2).$$

Déterminer pour les valeurs de $a$ pour lesquelles $b_a$ est un produit scalaire.

**Exercice 5 (bonus, hors barème).** Soit $n$ un entier naturel non nul et $E$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre $n$ à coefficients réels. L'application définie par

$$\forall (A,B) \in E^2,\ \langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} b_{ii}$$

est-elle un produit scalaire sur $E$ ? On justifiera la réponse.