Corrigé Examen Algèbre linéaire 3, 12 Janvier 2023

Exercice 1. — 1. Un endomorphisme est trigonalisable lorsque il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

2. Inégalité de Cauchy-Schwarz : Pour tout x, y dans E, on a
$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Exercice 2. — 1. On introduit la matrice de la famille $\mathcal{F}^a$ dans la base canonique $\mathcal{C}^3$ de $\mathbb{R}^3$
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}^3}(\mathcal{F}^a) = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
En développant par rapport à la dernière ligne, on montre que $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}^3}(\mathcal{F})) = 2 + a^2 > 0$. Donc la matrice est inversible et la famille $\mathcal{F}^a$ est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On applique le procédé de Gram-Schmidt. On pose d'abord
$$e_1^a = \frac{1}{\|f_1^a\|} f_1^a = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Ensuite on définit $\tilde{e}_2^a$ comme
$$\begin{aligned} \tilde{e}_2^a = f_2^a - \langle f_2^a, e_1^a\rangle e_1^a &= \begin{pmatrix} -a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{a}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a^2} \left(\begin{pmatrix} -a-a^3 \\ 2+2a^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} -2a-a^3 \\ 2+a^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2+a^2}{1+a^2} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
puis on définit e_2^a comme
$$e_2^a = \frac{1}{\|\tilde{e}_2^a\|} \tilde{e}_2^a = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2+a^2}{1+a^2}\right)^2 ((-a)^2+1)}} \frac{2+a^2}{1+a^2} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Enfin, on définit $\tilde{e}_3^a$ comme
$$\begin{aligned} \tilde{e}_3^a &= f_3^a - \langle f_3^a, e_1^a\rangle e_1^a - \langle f_3^a, e_2^a\rangle e_2^a \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2(1+a)}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2(1-a)}{1+a^2} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+a^2} \left(\begin{pmatrix} 2+2a^2 \\ 2+2a^2 \\ 1+a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2-2a \\ -2a-2a^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a-2a^2 \\ 2a-2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puis on définit e_3^a comme

$$e_3^a = \frac{1}{\|\tilde{e}_3^a\|}\tilde{e}_3^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\{e_1^a, e_2^a, e_3^a\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Si a et b sont des réels strictement positifs tels que $a \neq b$, on a $e_1^a \neq e_1^b$ (à cause du deuxième coefficient et comme $a \neq b$ et que la fonction $\phi := a \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ est strictement croissante), $e_1^a \neq e_2^b$ (à cause du premier coefficient comme $-b \leq 0 < 1$) et $e_1^a \neq e_3^b$ (à cause du troisième coefficient). Donc les familles $\{e_1^a, e_2^a, e_3^a\}$ et $\left\{e_1^b, e_2^b, e_3^b\right\}$ sont distinctes. Ainsi l'ensemble $\{\mathcal{G}^a \ , \ a \geq 0\}$ est infini et il existe bien une infinité de bases orthonormales dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. — 1. Soit $y \in E$. Comme p est une projection orthogonale on sait que $p(y) \in \mathrm{Im}\,(p)$ et $y - p(y) \in \ker(p)$ sont orthogonaux entre eux. On obtient alors par le théorème de Pythagore

$$\|y\|^2 = \|y - p(y) + p(y)\|^2 = \|y - p(y)\|^2 + \|p(y)\|^2 \geq \|p(y)\|^2$$

car $\|y - p(y)\|^2 \geq 0$. Ainsi on a bien $\|y\| \geq \|p(y)\|$.

2. Soit λ une valeur propre de p et y un vecteur propre non nul associé. On a en utilisant la question précédente

$$|\lambda|\|y\| = \|\lambda y\| = \|p(y)\| \leq \|y\|$$

et donc en divisant par $\|y\|$ qui est non nul car y est non nul, nous obtenons $|\lambda| \leq 1$.

3. Soit $y \in E$. Comme p est une projection orthogonale p est symétrique. On obtient

$$\langle p(y), y\rangle = \langle (p \circ p)(y), y\rangle = \langle p(p(y)), y\rangle = \langle p(y), p(y)\rangle = \|p(y)\|^2.$$

Comme $\|p(y)\|^2 \geq 0$, on obtient que $\langle p(y), y\rangle \geq 0$.

4. En reprenant le calcul de la question précédente (appliquée à q au lieu de p comme q est aussi une projection orthogonale) on constate que

$$\|q(y)\|^2 = \langle q(y), y\rangle\,.$$

Comme pour tout $z \in E$, on a $\|z\| = 0$ si et seulement si $z = 0$, il vient que $q(y) = 0$ si et seulement si $\langle p(y), y\rangle = 0$.

5. Cette question n'est pas forcément évidente à attaquer, il faut avoir un peu d'intuition et bien utiliser les questions précédentes. Par la question 1 il suffit de montrer que tout élément du spectre est positif. Soit λ une valeur propre de $p \circ q$ et y un vecteur propre non nul associé. On a

$$\lambda \langle y, q(y)\rangle = \langle \lambda y, q(y)\rangle = \langle (p \circ q)(y), q(y)\rangle\,.$$

Deux cas se présentent.

Cas 1 : $\langle y, q(y)\rangle = 0$

Alors par la question 4 on a $q(y) = 0$ et donc $\lambda y = (p \circ q)(y) = p(q(y)) = 0$. Cela oblige $\lambda = 0$ (y est non nul).

Cas 2 : $\langle y, q(y)\rangle \neq 0$

Alors par la question 3 on a $\langle y, q(y)\rangle > 0$ (question appliquée à q) mais aussi $\langle (p \circ q)(y), q(y)\rangle \geq 0$. Il vient alors que

$$\lambda = \frac{\langle (p \circ q)(y), q(y)\rangle}{\langle y, q(y)\rangle} \geq 0$$

Dans les deux cas on a bien $0 \leq \lambda \leq 1$.

6(a). Soient x et y dans E. On sait que p et q sont des projecteurs orthogonaux donc des endomorphismes symétriques par le cours. On a alors

$$\langle f(x), y\rangle = \langle p(q(p(x))), y\rangle = \langle q(p(x)), p(y)\rangle = \langle p(x), q(p(y))\rangle = \langle x, p(q(p(y)))\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

donc f est un endomorphisme symétrique.

Soit maintenant $x \in \mathrm{Im}\,(p)$. On constate que $f(x) = p(q \circ p(x)) \in \mathrm{Im}\,(p)$ donc $\mathrm{Im}\,(p)$ est bien stable par f.

6(b). Considérons g la restriction de f à $\mathrm{Im}\,(p)$. g est un endomorphisme symétrique, car restriction d'un endomorphisme symétrique à un sous espace stable. De plus, comme g est la restriction de f qui est symétrique donc diagonalisable (théorème spectral), g est aussi diagonalisable (le polynôme minimal de f qui est scindé simple annule aussi g). Soit $(e_1, \cdots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}\,(p)$ formée de vecteurs propres de f et $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres respectives associées. Soit i entre 1 et r. On constate alors que, comme $e_i \in \mathrm{Im}\,(p)$, $p(e_i) = e_i$ (p est un projecteur) et donc que

$$\lambda_i e_i = f(e_i) = p(q(p(e_i))) = p(q(e_i)) = (p \circ q)(e_i).$$

La famille $(e_1, \cdots, e_r)$ est donc bien une base de $\mathrm{Im}\,(p)$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$.

6(c). On va procéder par double inclusion.

Montrons que $(G + H)^\perp \subset G^\perp \cap H^\perp$. Soit $x \in (G + H)^\perp$. Soit $y \in G$. Alors $y = y + 0 \in G + H$ ($0 \in H$) donc $\langle x, y\rangle = 0$. Donc $x \in G^\perp$. Soit maintenant $z \in H$. Alors $z = 0 + z \in G + H$ ($0 \in G$) donc $\langle x, z\rangle = 0$. Donc $x \in H^\perp$. Ainsi $x \in G^\perp \cap H^\perp$.

Montrons maintenant que $G^\perp \cap H^\perp \subset (G + H)^\perp$. Soit $x \in G^\perp \cap H^\perp$. Soit $y \in G$ et $z \in H$. On constate que

$$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle\,.$$

Or $\langle x, y\rangle = 0$ car $x \in G^\perp$ ($y \in G$) et $\langle x, z\rangle = 0$ car $x \in H^\perp$ ($z \in H$). Donc $\langle x, y + z\rangle = 0$. Ainsi $x \in (G + H)^\perp$.

6(d). Comme p et q sont des endomorphismes symétriques (car projections orthogonales), on sait que $\ker(q)^\perp = \mathrm{Im}\,(q)$ et $\mathrm{Im}\,(p)^\perp = \ker(p)$. Donc, en utilisant la question précédente, on voit que

$$F = (\ker(q) + \mathrm{Im}\,(p))^\perp = \ker(q)^\perp \cap \mathrm{Im}\,(p)^\perp = \mathrm{Im}\,(q) \cap \ker(p).$$

6(e). Soit $y \in \ker(q) + F$. Il existe $x \in \ker(q)$ et $z \in F$ tel que $y = x + z$. On a alors

$$(p \circ q)(y) = p(q(x)) + p(q(z)).$$

Comme $x \in \ker(q)$, $q(x) = 0$ et donc $p(q(x)) = 0$. De plus comme $z \in F$, en utilisant la question précédente, on observe que $z \in \mathrm{Im}\,(q)$ donc $q(z) = z$ (q est un projecteur) et que $z \in \ker(p)$ donc $p(z) = 0$. Il vient donc

$$p(q(z)) = p(z) = 0.$$

Ainsi $(p \circ q)(y) = 0$.

6(f). Déjà comme $F = (\mathrm{Im}\,(p) + \ker(q))^\perp$, on a $\mathrm{Im}\,(p) + \ker(q) + F = E$. Considérons une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Im}\,(p)$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$ (possible par la question 6(b)) et une base $\mathcal{B}_2$ de $\ker(q) + F$. La concaténation de ces deux bases (à savoir $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$) forme une famille génératrice de E comme $\mathrm{Im}\,(p) + \ker(q) + F = E$. On applique alors le théorème de la base extraite sur cette famille pour obtenir une base $\mathcal{B}$ de E. Tout élément de cette base $\mathcal{B}$ est soit un élément de $\mathrm{Im}\,(p)$ qui est vecteur propre $p \circ q$, soit un élément de $\ker(q) + F$. Or par la question 6(e), tout vecteur de $\ker(q) + F$ est dans le noyau de $p \circ q$ donc est vecteur propre de $p \circ q$ (pour la valeur propre 0). La base $\mathcal{B}$ ne contient donc que des vecteurs propres de $p \circ q$. C'est la définition d'un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 4. — 1. Soient x, y dans E. Comme v est un endomorphisme symétrique (et que le produit scalaire est symétrique) on a

$$g(x,y) = \langle v(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle = \langle v(y), x\rangle = g(y,x).$$

Donc g est symétrique.

Soient x, y, z dans E et λ réel. On a par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de v

$$g(x+\lambda y, z) = \langle v(x+\lambda y), z\rangle = \langle v(x), z\rangle + \lambda \langle v(y), z\rangle = g(x,z) + \lambda g(y,z).$$

Donc g est linéaire à gauche. Comme g est symétrique, g est aussi linéaire à droite. Ainsi g est bilinéaire symétrique.

Montrons ensuite que f est un produit scalaire sur E. On peut déjà montrer comme précédemment que f est une forme bilinéaire symétrique (on remplace v par u qui est aussi un endomorphisme symétrique). De plus, l'énoncé donne que f est définie positive. Ainsi f est bien un produit scalaire sur E et comme E est de dimension finie, (E, f) forme bien un espace euclidien.

2. Déjà $\mathcal{Q}(E)$ est bien un espace vectoriel car la somme de deux formes quadratiques est une forme quadratique et la multiplication par un réel d'une forme quadratique est encore une forme quadratique.

Notons n la dimension de E. Soit une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E. On sait par le cours que toute forme quadratique q sur E est entièrement déterminée par sa matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ (qui est une matrice symétrique car matrice d'une forme bilinéaire symétrique). Notons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ cette matrice. Notons $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles qui est aussi un espace vectoriel réel. Le point précédent nous permet de définir l'application

$$\phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{Q}(E) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ q & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) \end{array}.$$

On constate que ϕ est bien une application linéaire (par linéarité à gauche du produit scalaire). Montrons qu'elle est bijective.

Montrons déjà que ϕ est injective. Soit une forme quadratique q sur E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est nulle. Notons b la forme polaire de q. On rappelle que si x et y sont dans E et qu'ils se décomposent suivant la base $\mathcal{B}$ comme $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors par bilinéarité de b,

$$b(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j).$$

Or, comme la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est nulle, pour tout i et j, on a $b(e_i, e_j) = 0$. Ainsi b est nulle et donc q aussi. Cela montre que ϕ est injective.

Montrons maintenant que ϕ est surjective. Soit une matrice symétrique réelle $M = [m_{ij}]$. On peut lui associer une forme quadratique sur E. En effet on introduit l'unique forme bilinéaire symétrique réelle b telle que pour tout i, j on a $b(e_i, e_j) = m_{ij}$ (1). Ainsi ϕ est surjective.

Cela montre que $\mathcal{Q}(E)$ et $S_n(\mathbb{R})$ ont même dimension. Or $S_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. En effet, on peut choisir librement tous les coefficients en dessous strictement de la diagonale (spécifiant alors les coefficients symétriques au dessus de la diagonale car la matrice est symétrique) mais aussi sur la diagonale. Cela donne alors $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ degrés de liberté. Donc $\mathcal{Q}(E)$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

3. Déjà $S_f(E)$ est bien un espace vectoriel car la somme de deux endomorphismes dans $S_f(E)$ est dans $S_f(E)$ et la multiplication par un réel d'un élément de $S_f(E)$ est dans $S_f(E)$ (on utilise la bilinéarité de f).

Notons n la dimension de E. Soit une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E qui est orthonormale pour le produit scalaire f (qui existe toujours par le cours). À tout élément w de $S_f(E)$ on peut associer la matrice $[f(w(e_i), e_j)]$. Comme $w \in S_f(E)$, cette matrice est symétrique. On peut donc introduire l'application

$$\phi : \begin{array}{rcl} S_f(E) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ w & \longrightarrow & [f(w(e_i), e_j)] \end{array}.$$

1. C'est l'application b définie par, pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ dans E, $b(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j m_{ij}$.

On constate alors que ϕ est une application linéaire (par linéarité à gauche de f). Montrons qu'elle est bijective. Montrons déjà que ϕ est surjective. Soit $M = [m_{ij}]$ une matrice symétrique. L'idée est de chercher un endomorphisme w tel que pour tout i et j, on a $f(w(e_i), e_j) = m_{ij}$. On définit w comme l'unique endomorphisme tel que pour tout i entre 1 et n, a

$$w(e_i) = \sum_{k=1}^{n} m_{ij} e_j \,^{(2)}.$$

Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale pour f, par linéarité à gauche de f on a

$$f(w(e_i), e_j) = f\left(\sum_{k=1}^{n} m_{ik} e_j, e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} f(e_k, e_j) = m_{ij}.$$

NB : On a introduit une base orthonormale pour que le calcul précédent soit facile à faire mais on aurait pu s'en sortir sans cette hypothèse.

Comme M est symétrique, il vient que pour tout i, j, on a

$$f(w(e_i), e_j) = m_{ij} = m_{ji} = f(w(e_j), e_i).$$

Donc w appartient bien à $S_f(E)$.

Montrons que ϕ est injective. Soit $w \in S_f(E)$ telle que pour tout i, j on a $f(w(e_i), e_j) = 0$. Soit $x \in E$ et $y \in E$ à préciser. En décomposant suivant la base $\mathcal{B}$, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, il vient par bilinéarité de f et linéarité de w

$$f(w(x), y) = f\left(w\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(w(e_i), e_j) = 0.$$

On prend alors $y = w(x)$ de sorte que $f(w(x), w(x)) = 0$ et donc, comme f est un produit scalaire, $w(x) = 0$ et cela pour tout $x \in E$. Ainsi w est nul.

Ainsi $S_f(E)$ et $S_n(\mathbb{R})$ ont même dimension qui vaut (comme vu à la question précédente) $\frac{n(n+1)}{2}$.

4. Soit $w \in S_f(E)$. Définissons l'application

$$b: \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longrightarrow f(w(x), y) \end{array}.$$

Par bilinéarité de f et linéarité de w, b est une forme bilinéaire. De plus, comme $w \in S_f(E)$, b est symétrique. Comme pour tout $x \in E$, $q_w(x) = b(x, x)$ et que l'on vient de montrer que b est bilinéaire, il vient que q_w est une forme quadratique sur E. Sa forme polaire est alors l'application b définie précédemment (puisque que b est symétrique).

5. Déjà, par la question précédente, l'application Φ est bien définie. Elle est linéaire par linéarité à gauche de f. Ensuite l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont de même dimension par les deux questions précédentes. Montrons que Φ est injective. Soit $w \in S_f(E)$ tel que q_w est nulle, c'est à dire que pour tout x dans E,

$$f(w(x), x) = q_w(x) = 0.$$

Par polarisation de la forme quadratique q_w, pour tout x, y dans E, on a alors $f(w(x), y) = 0$. Soit $x \in E$. Par le point précédent, en prenant $y = w(x)$, il vient que $f(w(x), w(x)) = 0$ et comme f est un produit scalaire, $w(x) = 0$ et cela pour tout $x \in E$. Ainsi w est nul et Φ est injective. Par le théorème du rang, on en déduit que Φ est aussi surjective. Ainsi, Φ est un isomorphisme.

6. Par la question précédente, la forme quadratique $q_g := x \in E \mapsto g(x, x)$ admet un antécédent via Φ. Il existe donc $w \in S_f(E)$ tel que pour tout $x \in E$, on a

$$f(w(x), x) = q_w(x) = g(x, x).$$

2. C'est l'application définie par, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans E, $w(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_i m_{ik} e_k$.

Nous avons ici l'égalité de deux formes quadratiques. Par polarisation, les formes polaires associées sont donc égales. Comme la forme polaire de q_w est la forme b trouvée à la question 4 et celle de q_g est g, il vient que pour tout x, y dans E, on a $f(w(x), y) = g(x, y)$.

7. Supposons par l'absurde que u n'est pas inversible. Il existe alors $x \in E$ non nul tel que $u(x) = 0$. Alors $f(x, x) = \langle u(x), x\rangle = 0$ par linéarité à gauche de f. Mais cela est absurde car x est non nul donc $f(x, x) > 0$. Ainsi u est inversible.

Par la question 6, en reprenant la définition de f et g on a pour tout x, y dans E,

$$\langle u(w_f(x)), y\rangle = f(w_f(x), y) = g(x, y) = \langle v(x), y\rangle\,.$$

Ainsi, pour x fixé, on a pour tout y dans E, (en soustrayant les deux termes)

$$\langle u(w_f(x)) - v(x), y\rangle = 0.$$

On prend alors $y = u(w_f(x)) - v(x)$ de sorte que $\langle u(w_f(x)) - v(x), u(w_f(x)) - v(x)\rangle = 0$ et comme le produit scalaire est défini, $u(w_f(x)) - v(x) = 0$ et donc $u(w_f(x)) = v(x)$. Il reste à appliquer u^{-1} et il vient que $w_f = u^{-1} \circ v$.

8. L'endomorphisme $w_f = u^{-1} \circ v$ est un endomorphisme symétrique dans l'espace euclidien (E, f) par définition de $S_f(E)$. Par le cours, tout endomorphisme symétrique est diagonalisable. Donc w_f est diagonalisable.

9. Par la question précédente, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, orthonormée pour f, qui est formée de vecteurs propres de w_f et notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres respectives associées. Montrons que cette base répond à l'exercice. Soit i, j. Il est clair que

$$f(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire f. De plus, si $i \neq j$, en utilisant la question 6, le fait que l'on a une famille de vecteurs propres de w_f et que l'on a une base orthonormée pour le produit scalaire f,

$$g(e_i, e_j) = f(w_f(e_i), e_j) = f(\lambda_i e_i, e_j) = \lambda_i f(e_i, e_j) = 0.$$

D'où le résultat souhaité.