$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad A(X) = \lambda X$

f $\quad f(X) = \lambda X$

- Si A admet une seul val. p. λ, A diag. $\Leftrightarrow A = \lambda I_n$
- Si A admet en val. p. $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i} = n$.

recherche des vp. $\chi_A(\lambda) = 0 = \det(A - \lambda I_n)$

$1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq n$

$\dim E_{\lambda_i}$ = ordre de multiplicité de λ_i.

A diagonalisable : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tq $A = PDP^{-1}$

ou $D = P^{-1}AP$

Exercice 1:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} E & G \\ F & H \end{pmatrix}$$

$$MN = \begin{pmatrix} AE+BF & AG+BH \\ CE+DF & CG+DH \end{pmatrix}$$

A_{nm} B_{mn} $\quad AB \in M_n \quad BA \in M_m$

On pose $M_{m+n,m+n} = \begin{pmatrix} BA_{mm} & B_{mn} \\ 0_{nm} & 0_n \end{pmatrix}$ $\quad N_{m+n,m+n} = \begin{pmatrix} 0_{mm} & -B_{mn} \\ 0_{nm} & AB_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad P_{m+n} = \begin{pmatrix} I_m & 0_{mn} \\ A_{n,m} & I_n \end{pmatrix}$

On rq. P est inversible

$$PN_{m+n} = \begin{pmatrix} 0_m & -B \\ 0_{nm} & 0_n \end{pmatrix} \qquad MP_{m+n} = \begin{pmatrix} 0_m & -B \\ 0_{n,m} & 0_n \end{pmatrix}$$

On a $PN = MP$.

Comme P est inversible, alors M et N sont semblable.

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_{m+n} - M) = \begin{vmatrix} \lambda I_m - BA & B \\ 0 & \lambda I_n \end{vmatrix} = \lambda^n \left| \lambda I_m - BA \right| = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda)$$

$$\chi_N(\lambda) = \det(\lambda I_{m+n} - N) = \begin{vmatrix} \lambda I_m & B \\ 0 & \lambda I_n - AB \end{vmatrix} = \lambda^m \left| \lambda I_n - AB \right| = \lambda^m \chi_{AB}(\lambda)$$

__Exercice 2 :__

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda I_n - A$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$c_1 = c_1' + c_1''$; $\det(c_1, c_2, c_3) = \det(c_1', c_2, c_3) + \det(c_1'', c_2, c_3)$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \left[\begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \right] + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \left[\begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} \right] + \det(-A)$$

$$= \lambda \left[\begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} \right] - \det(A)$$

Exercice 3 :

$P(X) = aX^2 + bX + c$
$P(A) = aA^2 + bA + c$

1. MN inversible $\iff \det(MN) \neq 0$
$\iff \det(M) \cdot \det(N) \neq 0$
$\iff \det(M) \neq 0$ et $\det(N) \neq 0$
$\iff M$ inversible et N inversible

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valeur propres de A, $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$

$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{n} (B - \lambda_i I_n)$

$\chi_A(B)$ inversible $\iff \forall i \in [\![1, n]\!]$, $B - \lambda_i I_n$ inversible
$\iff$ det$(B - \lambda_i I_n) \neq 0$
$\lambda_i \notin Sp(B)$
$\iff Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$

__Exercice 4 :__

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = |C_1 \ \ C_2 \ \ C_3|$

$$= |C_1+C_2+C_3 \quad C_2 \quad C_3| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda-1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+4 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+4)(\lambda-2)$$

$Sp(A) = \{1, -4, 2\}$ $\quad (tr(A) = 1 \ ; \ \sum vp = 1)$

· Par $\lambda = 1$; $E_1 = \ker(I_n - A)$

$E_1 = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\lambda = -4$ $\quad E_{-4} = vect\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ $\qquad \lambda = 2$; $E_2 = vect\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ ; \ P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.

On a une matrice triangulaire (sup), donc ses val. p. sont les coef de la diag.
On a une unique val. p. : 2

D'après prop. si A admet une unique val. p. λ, alors A diag $\Leftrightarrow A = \lambda I_n$.
Or $A \neq 2 I_3$ donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 6 :

$E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E_{ij} = (e_{kl})_n$; $\begin{cases} e_{ij} = 1 \\ e_{kl} = 0 \end{cases}$

- On a E_{ii} diagonalisables car elles sont diagonales
- Par $i \neq j$. $\chi_{E_{ij}}(\lambda) = \det(\lambda I_n - E_{ij}) = (-1)^n \lambda^n$, donc $\lambda = 0$ est l'unique propre.

Par suite, E_{ij} diagonalisable ssi $E_{ij} = 0 I = 0$ → impossible

Exercice 7 :

$$f(P) = P - (X+1)P'$$

$$f(1) = 1$$

$$f(X) = X - X - 1$$
$$= -1$$

$$f(X^2) = X^2 - (X+1)2X$$
$$= X^2 - 2X^2 - 2X$$
$$= -X^2 - 2X$$

$$f(X^n) = X^n - (X+1)nX^{n-1}$$
$$= X^n - nX^n - nX^{n-1}$$
$$= (1-n)X^n - nX^{n-1}$$

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{cccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & & & f(X^n) \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & & & \\
 & 0 & -2 & & & \\
 & & -1 & & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & 0 & & & & -n \\
 & & & & & 1-n
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \\ \\ X^n \end{array}
\end{array}$$

$Sp = \{1-i,\ i \in [\![0, n]\!]\}$ $\hookrightarrow$ diag

$\hookrightarrow$ $n+1$ val p. distinct $\Longrightarrow$ diag

$B^T = B \Rightarrow$ symétrique
$A^T = -A \Rightarrow$ antisym.

Exercice 8 :

$E = M_n(\mathbb{R}) \quad \forall M \in M_n(\mathbb{R}) \quad f(M) = M^T$

Rappel : $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$; $A = \underbrace{\dfrac{A + A^T}{2}}_{\text{mat sym.}} + \underbrace{\dfrac{A - A^T}{2}}_{\text{mat antisym.}}$

$M_n(\mathbb{R}) = M_{sym} \oplus M_{antisym.}$

On cherche λ tq $f(M) = \lambda M$
$M^T = \lambda M$

· si $\lambda = 1$ on a $M^T = M$ d'où M est matrix. sym.
· si $\lambda = -1$, on a $M^T = -M$ antisym.
$E_1 = M_{sym}$; $E_{-1} = M_{antisym.}$

D'où $M_n(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_{-1}$. $Sp(P) = \{-1, 1\}$ et f diagonalisable

Exercice 10 :

$Im(A) = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$ donc $\dim(Im(A)) = 1 = rg(A)$ donc A pas inversible donc 0 val.p de A.

$E_0 = \ker(A)$. Et d'après thm du rg. $\dim \ker A) = 4 - \dim(Im(A)) = 3$
Donc 0 val p. d'ordre de multiplicité 3 (au min.).

Si 0 est vp. d'ordre 3 : on a une autre val p. λ.

Ĉ $\sum$ vp. $= tr(A)$; $0+0+0+\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 10$

D'où $Sp = \{0, 10\}$ $\quad \sum \dim E_{\lambda_i} = 4 \iff$ A diag.

Exercice 12 :

$A \in M_n(\mathbb{C})$, $\chi_A(X) = X^n - 1$.

On résout $\chi_A(X) = 0 \iff X^n = 1$

Les val.p. sont les racines $n^{ième}$ de 1 : $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$

On a n val.p racines distincte (car n racines)

Donc A diagonalisable : $\exists P$ inver. et D diag. avec $D = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & e^{\frac{2ik\pi}{n}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

$A = PDP^{-1}$

Donc $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = I_n$ ($\hat{c}$ $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ racine n^e)

$\iff A^n = P I_n P^{-1}$

$\iff A^n = I_n$

$\iff AA^{n-1} = I_n$ $\times A^{-1}$

$\iff A^{-1} = A^{n-1}$

Exercice 11 :

1. On a $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $M(a,b,c) = aI_3 + bJ + cJ^2$

2. $\det(\lambda I_3 - J) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda^2 + 1 \cdot (-1)$
$= \lambda^3 - 1$

Donc $\chi_J(\lambda) = 0 \iff \lambda^3 = 1$: racine cubique de 1 : $1 ; j$ et j^2

$J \in M_3$ admet 3 val. p. distinctes donc J est diag. : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ D diag.
$J = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1, j, j^2)$

· J^2 est diag car $J^2 = PD^2P^{-1}$; $D^2 = (1, j^2, j)$

3. On exprime $P^{-1}MP = P^{-1}(aI + bJ + cJ^2)P$
$= aI + bP^{-1}JP + cP^{-1}J^2P$
$= aI + b\,\mathrm{diag}(1, j, j^2) + c\,\mathrm{diag}(1, j^2, j)$
$= D$

avec $D = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+cj+bj^2 \end{pmatrix}$

$Sp(M) = \{a+b+c,\ a+bj+cj^2,\ a+cj+bj^2\}$

Exercice 12 :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_A(X) = X^n - 1$.

D'après C.H , $\chi_A(A) = 0$, $A^n - I = 0$; $A^n = I$

donc A inversible et $A^{-1} = A^{n-1}$