Examen d'appel du 29 juin 2022

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2h

Exercice 1 (polynôme annulateur, 2 points). Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E, admettant un polynôme annulateur de degré p non nul. Montrer que, pour tout entier naturel m, l'endomorphisme u^m appartient à $\text{Vect}(\{u^k\}_{k\in\{0,\dots,p-1\}})$.

Exercice 2 (positivité de formes quadratiques, 3 points). Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives (α, λ et μ étant des paramètres réels, on discutera en fonction de leurs valeurs respectives).

1. $\forall x \in \mathbb{R}^4,\ q(x) = {x_1}^2 + 3\,{x_2}^2 + 4\,{x_3}^2 + {x_4}^2 + 2\,x_1x_2 + x_1x_4$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2\,x_3(\cos(\alpha)\,x_1 + \sin(\alpha)\,x_2)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ q(x) = (1-\lambda)\,{x_1}^2 + (1+\lambda)\,{x_2}^2 + 2\mu\,x_1x_2$

Exercice 3 (pseudo-solutions d'un système linéaire, 8 points). Soit m et n deux entiers naturels non nuls et A une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

1. Donner les dimensions de la matrice $A^\top A$ et établir que $\text{Ker}\,(A) = \text{Ker}\,(A^\top A)$.
2. Justifier alors que $\text{Im}\,(A^\top) = \text{Im}\,(A^\top A)$.
3. Établir que la matrice $A^\top A$ est diagonalisable et montrer que ses valeurs propres sont des réels positifs.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'équation matricielle $AX = B$, avec X une matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $M_{m,1}(\mathbb{R})$. Plus précisément, une matrice X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite *solution* de cette équation si elle vérifie l'égalité, et elle est dite *pseudo-solution* de cette équation si elle vérifie

$$\forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX - B\| \le \|AZ - B\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $M_{m,1}(\mathbb{R})$.

4. On suppose qu'il existe au moins une solution de l'équation. Montrer qu'une matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est une pseudo-solution de l'équation si et seulement si elle est une solution de l'équation.
5. On suppose que la matrice X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est une pseudo-solution de l'équation. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda^2\|AY\|^2 + 2\lambda\,Y^\top A^\top(AX - B) \ge 0$$

   (on pourra écrire tout vecteur Z de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ sous la forme $Z = X + \lambda\,Y$, avec λ un nombre réel et Y une matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$). En déduire que

$$A^\top AX = A^\top B$$

   (on pourra chercher à montrer à partir de l'inégalité que $Y^\top A^\top(AX - B) = 0$ pour toute matrice Y de $M_{n,1}(\mathbb{R})$).
6. Réciproquement, montrer que toute matrice X vérifiant la dernière égalité est une pseudo-solution de l'équation et en déduire qu'il existe toujours au moins une pseudo-solution de l'équation.
7. À quelle condition sur le rang de A l'équation admet-elle une unique pseudo-solution ?

Exercice 4 (polynômes de Hermite, 7 points). Soit E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et telles que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}}(f(x))^2e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

1. Établir que
$$\forall (a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2,\ ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

2. En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}}f(x)g(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall (f,g)\in E^2,\ \langle f,g\rangle=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x)g(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$
F l'espace vectoriel réel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, F_n le sous-espace vectoriel de F des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

3. (a) Montrer que E est un espace vectoriel réel.
   (b) Montrer alors que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
   (c) Montrer enfin que $F\subset E$.

Dans la suite, on notera encore $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la restriction à F (ou F_n) du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E, cette restriction définissant un produit scalaire sur F (ou F_n).

Pour tout entier naturel k, on note H_k l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x\in\mathbb{R},\ H_k(x)=(-1)^k e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(e^{-x^2}).$$

En particulier, $H_0\equiv 1$.

4. Pour tout réel x, calculer $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$ (on donnera les calculs sur la copie).

5. Montrer que
$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ H_{k+1}(x)=2xH_k(x)-H_k{}'(x).$$
En déduire que, pour tout entier naturel k, H_k est une application polynomiale de degré k et donner le coefficient de son terme de plus haut degré.

6. (a) Montrer que
$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall P\in F,\ \langle P,H_k\rangle=\left\langle P',H_{k-1}\right\rangle,$$
(on pourra réaliser des intégrations par parties et exploiter la relation de récurrence obtenue plus haut), puis que
$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall j\in\{0,\dots,k\},\ \forall P\in F,\ \langle P,H_k\rangle=\left\langle P^{(j)},H_{k-j}\right\rangle.$$
   (b) En déduire que
$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall P\in F_{k-1},\ \langle P,H_k\rangle=0.$$
   (c) Conclure que, pour tout entier naturel n, la famille $(H_0,\dots,H_n)$ est orthogonale dans F et que c'est une base de F_n.