Corrigé (succinct) du contrôle continu du 3 décembre 2018

Exercice 1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

En considérant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité de Cauchy–Schwarz appliquée au produit scalaire entre le vecteur x, tel que, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k = k$, et le vecteur y, tel que, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $y_k = \sqrt{k}$, s'écrit

$$|\langle x, y \rangle| = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On conclut en utilisant que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices à coefficients réels d'ordre n du produit scalaire défini par $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$. Déterminer les supplémentaires orthogonaux respectifs des sous-espaces

$$F_1 = \operatorname{Vect}(\{I_n\}) \text{ et } F_2 = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \ M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \right\}.$$

dans $M_n(\mathbb{R})$.
Le sous-espace F_1 étant engendré par la matrice I_n, toute matrice M appartenant à ${F_1}^\perp$ est orthogonale à I_n, d'où

$$\operatorname{tr}({I_n}^\top M) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(I_n M) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(M) = 0.$$

On peut alors conclure que

$${F_1}^\perp = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \operatorname{tr}(M) = 0 \}.$$

La famille de matrices élémentaires [1] $\{E_{ii}\}_{i=1,\dots,n}$ est une base de F_2 (car génératrice et libre en tant que sous-famille de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$), d'où

$$M \in {F_2}^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ M \perp E_{ii} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \operatorname{tr}({E_{ii}}^\top M) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \operatorname{tr}(E_{ii} M) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ m_{ii} = 0.$$

On a alors

$${F_2}^\perp = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ m_{ii} = 0 \}.$$

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et b l'application définie sur $E \times E$ par

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \ b(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. Montrer que b est un produit scalaire sur E.

L'application b est bilinéaire en vertu de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des nombres réels. Elle est symétrique en vertu de la commutativité de la multiplication des nombres réels. Elle est aussi positive puisque

$$\forall P \in E, \ b(P, P) = (P(-1))^2 + (P(0))^2 + (P(1))^2 \geq 0.$$

Enfin, si $b(P, P) = 0$, alors le polynôme P de degré inférieur ou égal à deux possède au moins trois racines (qui sont -1, 0 et 1), il est donc nul. L'application b est ainsi définie positive. C'est par conséquent un produit scalaire sur E.

2. Déterminer une base orthonormale $\{P_0, P_1, P_2\}$ de E muni de ce produit scalaire, telle que

$$\forall i \in \{0, 1, 2\}, \ \deg(P_i) = i.$$

1. On rappelle que, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels appartenant chacun à $\{1, \dots, n\}$, la matrice E_{ij} a tous ses coefficients nuls, à l'exception de celui situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne qui vaut 1.

L'application du procédé de Gram–Schmidt à la base canonique $\{1, X, X^2\}$ conduit à une base orthonormée convenable. On trouve :

$$P_0 = \frac{1}{\|1\|}, \text{ avec } \|1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \text{ d'où } P_0(X) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$P_1 = \frac{X - b(X,P_0)P_0}{\|\sqrt{X - b(X,P_0)P_0}\|}, \text{ avec } b(X,P_0) = -1+0+1 = 0 \text{ et } \|X - b(X,P_0)P_0\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}, \text{ d'où } P_1(X) = \frac{X}{\sqrt{2}},$$

$$P_2 = \frac{X^2 - \sum_{i=0}^{1} b(X^2,P_i)P_i}{\|\sqrt{X^2 - \sum_{i=0}^{1} b(X^2,P_i)P_i}\|}, \text{ avec } b(X^2,P_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+0+1) = \frac{2}{\sqrt{3}},\ b(X^2,P_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+0+1) = 0$$

$$\text{et } \|X^2 - b(X^2,P_0)P_0 - b(X^2,P_1)P_1\| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ d'où } P_2(X) = \sqrt{\frac{3}{2}}X^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Exercice 4. On définit l'application b de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X],\ b(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{\mathrm{i}\theta})Q(e^{-\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que b est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ étant à coefficients réels, on observe tout d'abord que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall z \in \mathbb{C},\ \overline{P(z)} = P(\overline{z}).$$

On rappelle également que, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$, d'où $\overline{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta}$.
Par le changement de variable réelle $\varphi = -\theta$, il vient

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X],\ b(Q,P) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} Q(e^{-\mathrm{i}\varphi})P(e^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{d}(-\varphi) = b(P,Q).$$

D'autre part, on a

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X],\ \overline{b(P,Q)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\overline{e^{\mathrm{i}\theta}})Q(\overline{e^{-\mathrm{i}\theta}})\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{-\mathrm{i}\theta})Q(e^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta = b(Q,P) = b(P,Q).$$

L'application est donc symétrique à valeurs réelles. Par linéarité de l'intégrale et distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des nombres réels, elle est par ailleurs linéaire par rapport à sa première variable et donc, par symétrie, bilinéaire. On a enfin

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ b(P,P) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{\mathrm{i}\theta})P(e^{-\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{\mathrm{i}\theta})\overline{P(e^{\mathrm{i}\theta})}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|P(e^{\mathrm{i}\theta})\right|^2\,\mathrm{d}\theta \geq 0.$$

Si $b(P,P) = 0$, on a, par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive,

$$\forall \theta \in [-\pi,\pi],\ P(e^{\mathrm{i}\theta}) = 0.$$

Le polynôme P admet par conséquent une infinité de racines complexes de module égal à 1. Il est donc nul.

2. Montrer que la famille $\{X^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est orthonormée pour ce produit scalaire.

Pour tout couple (k,l) d'entiers naturels, on a

$$b(X^k, X^l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}(k-l)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(\pi+\pi) = 1 & \text{si } k = l \\ \frac{1}{2\pi\mathrm{i}(k-l)}\left(\cos((k-l)\pi) - \cos(-(k-l)\pi)\right) = 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La famille est donc orthonormée.

Exercice 5. Soit p un projecteur d'un espace euclidien E vérifiant

$$\forall x \in E,\ \langle p(x), x\rangle \geq 0.$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Le projecteur p projette sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(p)$ et est orthogonal si et seulement si $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(p)$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(p)$ et $y \in \mathrm{Im}\,(p)$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \langle p(x+ty), x+ty\rangle \geq 0,$$

soit encore

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t\,\langle y, x\rangle + t^2\|y\|^2 \geq 0.$$

Si l'on suppose que $\langle y, x\rangle \neq 0$, le membre de gauche de la précédente inégalité change de signe avec t, entraînant une contradiction.

Exercice 6.

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 2\,x_3 - 1)^2 + (x_2 - x_3 + 2)^2.$$

Déterminer son minimum sur $\mathbb{R}^3$.

En munissant $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = \|(x_1 - x_2, x_1 - 2\,x_3 - 1, x_2 - x_3 + 2)\|^2 = \|x_1(1,1,0) + x_2(-1,0,1) + x_3(0,-2,-1) - (0,1,-2)\|^2.$$

Minimiser f revient par conséquent à déterminer le projeté orthogonal du vecteur $(0,1,-2)$ sur le sous-espace vectoriel A de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,1,0)$, $(-1,0,1)$ et $(0,-2,-1)$ et à l'exprimer en fonction de ces derniers vecteurs pour trouver x. En remarquant que les trois vecteurs forment une famille libre, on en déduit que $A = \mathbb{R}^3$ et il existe donc une unique solution au système $x_1(1,1,0) + x_2(-1,0,1) + x_3(0,-2,-1) = (0,1,-2)$. On trouve que $x_1 = -5$, $x_2 = -5$ et $x_3 = -3$ est solution, le minimum valant 0.

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = (x_1 + 1)^2 + (x_1 + x_2 + 1)^2 + (x_1 - 2\,x_3)^2 + {x_3}^2.$$

Déterminer son minimum sur $\mathbb{R}^3$.

En munissant $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = \|(x_1 + 1, x_1 + x_2 + 1, x_1 - 2\,x_3, x_3)\|^2 = \|x_1(1,1,1,0) + x_2(0,1,0,0) + x_3(0,0,-2,1) - (-1,-1,0,0)\|^2.$$

Minimiser f revient par conséquent à déterminer le projeté orthogonal du vecteur $(-1,-1,0,0)$ sur le sous-espace vectoriel A de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,1,1,0)$, $(0,1,0,0)$ et $(0,0,-2,1)$ et à l'exprimer en fonction de ces derniers vecteurs pour trouver x. En posant $v = (-1,-1,0,0)$ et $u = p_A(v)$, il vient

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} u \in A \\ v - u \in A^\perp \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} u = x_1(1,1,1,0) + x_2(0,1,0,0) + x_3(0,0,-2,1) \\ \langle v - u, (1,1,1,0)\rangle = 0 \\ \langle v - u, (0,1,0,0)\rangle = 0 \\ \langle v - u, (0,0,-2,1)\rangle = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} u = x_1(1,1,1,0) + x_2(0,1,0,0) + x_3(0,0,-2,1) \\ (x_1 + 1) + (x_1 + x_2 + 1) + (x_1 - 2\,x_3) = 0 \\ x_1 + x_2 + 1 = 0 \\ -2(x_1 - 2\,x_3) + x_3 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} u = x_1(1,1,1,0) + x_2(0,1,0,0) + x_3(0,0,-2,1) \\ 3\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ -2\,x_1 + 5\,x_3 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} u = x_1(1,1,1,0) + x_2(0,1,0,0) + x_3(0,0,-2,1) \\ x_1 = -\dfrac{5}{6} \\ x_2 = -\dfrac{1}{6} \\ x_3 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}.
\end{aligned}$$

La fonction f atteint donc son minimum en $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$ et ce minimum vaut $\frac{1}{6}$.

3. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = \int_0^\pi (x_1\,\sin(t) + x_2\,\cos(t) - t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer son minimum sur $\mathbb{R}^2$.

En considérant l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0,\pi],\mathbb{R})$ des fonctions continues définies sur l'intervalle $[0,\pi]$ et à valeurs réelles, que l'on munit du produit scalaire défini par

$$\forall (g,h) \in E^2,\ \langle g, h\rangle = \int_0^\pi g(t)h(t)\,\mathrm{d}t,$$

on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = \|x_1 \sin + x_2 \cos - \mathrm{Id}_E\|^2.$$

Minimiser f revient par conséquent à déterminer le projeté orthogonal de la fonction identité Id_E sur le sous-espace vectoriel A de E engendré par les fonctions sinus et cosinus, puis à l'exprimer en fonction de ces deux fonctions pour trouver x. En posant $h = p_A(\mathrm{Id}_E)$, il vient

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} h \in A \\ \mathrm{Id}_E - h \in A^\perp \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} h = x_1 \sin + x_2 \cos \\ \langle \mathrm{Id}_E - h, \sin\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{Id}_E - h, \cos\rangle = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} h = x_1 \sin + x_2 \cos \\ \displaystyle\int_0^\pi t\sin(t)\,\mathrm{d}t - x_1 \int_0^\pi (\sin(t))^2\,\mathrm{d}t - x_2 \int_0^\pi \cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ \displaystyle\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t - x_1 \int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t - x_2 \int_0^\pi (\cos(t))^2\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} h = x_1 \sin + x_2 \cos \\ -\dfrac{\pi}{2} x_1 = -\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} x_2 = 2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} h = x_1 \sin + x_2 \cos \\ x_1 = 2 \\ x_2 = -\dfrac{4}{\pi} \end{cases} .
\end{aligned}$$

La fonction f atteint donc son minimum en $\left(2, -\frac{4}{\pi}\right)$ et ce minimum vaut $\frac{\pi^3}{3} - 2\pi - \frac{8}{\pi}$.