Université Paris-Dauphine
Analyse 3 (L2)
Date : 21 octobre 2020

Année universitaire 2020-2021
Responsable : Emeric Bouin
Durée : 3 heures

---

# Examen partiel

---

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées pour être considérées. Il est rappelé que la rédaction comptera de manière importante dans l'évaluation des copies. Aucun document n'est autorisé, aucune calculatrice. Le barême est donné à titre indicatif.

*Ara bien y hondo, cogerás pan en abondo... !*

---

**Exercice 1.** (Proche du cours ... - 1+1+0,5+1,5+1+1+1,5 = 7,5 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses, en le justifiant.
   (a) Soit $u_n \geq 0$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1. Alors la série de terme général $u_n$ converge.
   (b) Soit $u_n \geq 0$ le terme général d'une série divergente. Alors $nu_n$ ne tend pas vers 0.
   (c) Soit $u_n \geq 0$ le terme général d'une série convergente. Alors $nu_n$ tend vers 0.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$.
   (a) Donner un équivalent de $u_n$.
   (b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la série de terme général $u_n^\alpha$ est-elle convergente ?
3. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x + \frac{1}{n+1}$.
   (a) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ ?
   (b) La suite $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 2.** (Quels sont tes critères ?... - 1+1,5+1+1,5 = 5 points)

Etudier la convergence absolue puis la semi-convergence des séries de terme général ...

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2\ln(n)}\right)^{n\ln(n)}, \quad v_n = (-1)^n \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right),$$

$$w_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{2n}{2n+1}, \quad z_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}\ln(n)^\alpha}\right),$$

avec $\alpha > 0$.

**Exercice 3.** (Une suite récurrente ... - 0,5+1+3+1,5+1+2+1 = 10 points)

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle positive et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n},$$

avec $u_0 > 0$.

1. Montrer que que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et la série de terme général $\frac{a_n}{u_n}$ (*i.e.* $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{u_n}$) ont même nature.
3. Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si la série de terme général $a_n$ (*i.e.* $\sum_{n\geq 0} a_n$) converge.

4. (a) On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell$. Montrer que

$$\ell - u_n \sim \frac{1}{\ell}\sum_{k=n}^{\infty} a_k.$$

   (b) Donner un équivalent simple ($\ell$ pourra intervenir) de $u_n - \ell$ dans le cas particulier où $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, en prenant soin de spécifier les valeurs de $\alpha$ pertinentes.

5. On se place dans le cas où $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge et on suppose de plus que la suite $(a_n)$ est bornée.
   (a) En considérant la suite $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$, trouver un équivalent de $u_n$.
   (b) Donner un équivalent simple dans le cas particulier $a_n = \frac{1}{n+1}$.

**Exercice 4.** (Shuffling is bad luck ... - 1+1+2+1+1+1+1+2+2+2+1 = 15 points)

Le but du problème est d'étudier des phénomènes amusants liés au réarrangement des termes d'une série semi-convergente. On se propose de les observer sur un exemple, on considère alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

1. Justifier que la série de terme général $u_n$ est semi-convergente.
2. (a) Soit $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par

$$\sigma(3p) = 2p, \qquad \sigma(3p+1) = 4p+1, \qquad \sigma(3p+2) = 4p+3.$$

   Justifier que $\sigma$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (*i.e.* une permutation).

   (b) Pour $n \geq 0$, on définit la suite $v_n$ par $v_n = u_{\sigma(3n)} + u_{\sigma(3n+1)} + u_{\sigma(3n+2)}$. Expliciter $v_n$ puis en donner un équivalent simple.
   (c) Quelle est la nature de la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ ?
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe un plus petit entier $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n_1} u_{2k} \geq \alpha$.
   (b) Montrer qu'il existe un plus petit entier $m_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n_1} u_{2k} + \sum_{k=0}^{m_1} u_{2k+1} \leq \alpha$.
   (c) Montrer qu'il existe un plus petit entier $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n_1} u_{2k} + \sum_{k=0}^{m_1} u_{2k+1} + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} u_{2k} \geq \alpha.$$

   (d) A partir du procédé initié dans les trois questions précédentes, compléter (*en la recopiant sur votre copie*) la construction ci-dessous d'une permutation $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$.

   On définit $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ de la manière suivante. On pose $\sigma(0) = \ldots$ et supposant connus les $\sigma(p)$ pour $p \in [\![1, n-1]\!]$, on construit $\sigma(n)$ par récurrence par
   — Si $\sum_{p=0}^{n-1} u_{\sigma(p)} \leq \ldots$, on ajoute le premier terme $\ldots\ldots$ non déjà utilisé,
   — Si $\sum_{p=0}^{n-1} u_{\sigma(p)} > \ldots$, on ajoute le premier terme $\ldots\ldots$ non déjà utilisé.

   (e) Justifier que $\sigma$ ci-construite est bijective.
   (f) Montrer que, avec cette construction, nécessairement, $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n-1} u_{\sigma(p)} = \alpha$.
4. A partir des observations précédentes, proposer l'énoncé d'un théorème relatif à la permutation de termes d'une série semi-convergente générale.

---

Fin du sujet

---