Université Paris-Dauphine
Analyse 3 (L2)
Date : 5 octobre 2020

Année universitaire 2020-2021
Responsable : Emeric Bouin
Durée : 1 h 30

Premier contrôle continu

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées pour être considérées. Il est rappelé que la rédaction comptera de manière importante dans l'évaluation des copies. Aucun document n'est autorisé, aucune calculatrice. Le barême est donné à titre indicatif.

In bocca al lupo ... !

Exercice 1. (1,5+1+2 = 4,5 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Donner un équivalent simple de $\ln(n!)$.
2. La suite $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ est-elle de Cauchy ?
3. Soit u_n une suite réelle telle que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Est-elle nécessairement de Cauchy ?

Exercice 2. (1+1+1+1 = 4 points)

Etudier l'absolue convergence, la convergence des séries de terme général

$$u_n = \left(\frac{n^3}{1+n^3}\right)^n, \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{n^2 - \ln(n)}, \qquad w_n = \tan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right), \qquad z_n = e^{-\ln(n)^{\frac{1}{2}}}.$$

Exercice 3. (1,5+2+1,5+1 = 6 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $a > 0$ satisfaisant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq a.$$

1. Démontrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$,
$$|f(2^k y) - 2^k f(y)| \leq 2^k a.$$
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\frac{f(2^n x)}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
3. En déduire que la fonction $g(x) = \lim_n \frac{f(2^n x)}{2^n}$ existe et qu'elle vérifie, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$
4. Montrer que $f - g$ est bornée.

Exercice 4. (1+1,5+3 = 5,5 points)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad \text{et} \qquad S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Trouver un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $S_n \sim \alpha\sqrt{n}$.
2. On définit $v_n := S_n - \alpha\sqrt{n}$.
   (a) Donner un équivalent de $v_{n+1} - v_n$.
   (b) En déduire l'existence de β et γ tels que
   $$S_n = \alpha\sqrt{n} + \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$
   On précisera la valeur de γ.

Fin du sujet
