Département MIDO

Corrigé (succinct) du contrôle continu du 2 décembre 2020

Exercice 1. Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse par une démonstration ou en donnant un contre-exemple, selon le cas.

1. La somme de deux vecteurs isotropes est un vecteur isotrope.

Faux. La somme de deux vecteurs isotropes qui ne sont pas q-orthogonaux n'est pas un vecteur isotrope.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si f et g sont deux formes linéaires sur E, alors l'application $(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire sur $E\times E$.

Vrai. L'application est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est donc une forme. Elle est linéaire par rapport à la première variable par linéarité de f, linéaire par rapport à la deuxième variable par linéarité de g, et donc bilinéaire.

3. Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, alors l'application $(x,y)\mapsto f(x)f(y)$ est définie positive.

Faux. On montre comme précédemment que l'application est une forme bilinéaire, de forme quadratique associée $x\mapsto (f(x))^2$. Cette dernière est clairement positive, mais elle ne sera définie que si la forme f est injective. Or, une forme linéaire étant au plus de rang égal à 1 et la dimension de $\mathbb{R}^3$ étant égale 3, ce n'est jamais le cas.

4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Si q et q' deux formes quadratiques sur E ayant la même signature, alors il existe deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ telles que la matrice de q relativement à la base $\mathscr{B}$ est égale à la matrice de q' relativement à la base $\mathscr{B}'$.

Vrai. Soit n la dimension de l'espace E et $(p,r-p)$ la signature commune de q et q'. On sait d'après le cours qu'il existe des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E telles que la matrice de q relativement à $\mathscr{B}$ et la matrice de q' relativement à $\mathscr{B}'$ sont toutes deux diagonales avec pour coefficients diagonaux p fois le réel 1, $r-p$ fois le réel -1 et $n-r$ fois le réel 0. À une permutation de l'ordre des vecteurs d'une des bases près, on peut donc supposer que ces deux matrices sont égales.

5. La signature de la forme quadratique $q(x)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$ sur $\mathbb{R}^3$ est $(3,0)$.

Faux. Les formes linéaires apparaissant dans les carrés ne sont pas linéairement indépendantes et l'expression n'est donc pas une forme réduite. On ne peut donc directement conclure. On effectue donc une réduction de Gauss de q pour trouver

$$q(x)=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2,$$

d'où $\mathrm{sign}(q)=(2,0)$.

6. Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Si u est un endomorphisme de E, alors l'application $x\mapsto\langle u(x),x\rangle$ est une forme quadratique sur E.

Vrai. Considérons l'application b sur $E\times E$ définie par $b(x,y)=\langle u(x),y\rangle$. C'est une forme qui est linéaire par rapport à la première variable par linéarité de u et linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable, linéaire par rapport à la deuxième variable par linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable, donc bilinéaire, et telle que $b(x,x)=\langle u(x),x\rangle$.

Exercice 2. Suivant la valeur du réel λ, déterminer la signature de la forme quadratique définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}^2,\ x=(x_1,x_2),\ q(x)=(1+\lambda)({x_1}^2+{x_2}^2)+2(1-\lambda)x_1x_2.$$

Si $\lambda=-1$, on a

$$\forall x\in\mathbb{R}^2,\ q(x)=4x_1x_2=(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2,$$

d'où $\mathrm{sign}(q)=(1,1)$.
Si $\lambda\neq-1$, on a

$$\forall x\in\mathbb{R}^2,\ q(x)=(1+\lambda)\left(x_1+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_2\right)^2+\left(1+\lambda-\frac{(1-\lambda)^2}{1+\lambda}\right){x_2}^2=(1+\lambda)\left(x_1+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_2\right)^2+\frac{4\lambda}{1+\lambda}{x_2}^2.$$

Il vient par conséquent :
- $\mathrm{sign}(q)=(1,1)$ si $\lambda<-1$,
- $\mathrm{sign}(q)=(1,1)$ si $-1<\lambda<0$,
- $\mathrm{sign}(q)=(1,0)$ si $\lambda=0$,

— $\mathrm{sign}(q) = (2,0)$ si $\lambda > 0$.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ sur lequel on considère la forme q définie par

$$\forall P \in E,\ P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2,\ q(P) = a_1{}^2 - 4\,a_0 a_2.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur E.

L'application q est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est donc une forme. De plus, c'est un polynôme homogène de degré deux en les coefficients du polynôme dans la base canonique de E. C'est donc bien une forme quadratique sur E.

2. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de E.

On trouve la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer la signature de q et une base q-orthogonale de E. La forme q est-elle dégénérée ?

Effectuons une réduction de Gauss de la forme quadratique. On trouve

$$\forall P \in E,\ q(P) = a_1{}^2 - 4\,a_0 a_2 = a_1{}^2 - (a_0 + a_2)^2 + (a_0 - a_2)^2.$$

On a donc $\mathrm{sign}(q) = (2,1)$ et le rang de la forme est donc égal à 3. L'espace E étant de dimension égale à 3, la forme est non dégénérée.
On en déduit que la base duale d'une base q-orthogonale de E est composée des formes linéaires $l_1(P) = a_1$, $l_2(P) = a_0 + a_2$, $l_3(P) = a_0 - a_2$. On obtient alors la matrice de passage de la base canonique de E à une base q-orthogonale en déterminant l'inverse de la transposée de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Une base q-orthogonale de E est donc $\{X, \frac{1}{2}(1+X^2), \frac{1}{2}(1-X^2)\}$.

4. Soit $H = \{P \in E \,|\, P(0) = 0\}$. Donner une base de $H^\perp$, l'orthogonal de H pour la forme q.

On a $H = \mathrm{Vect}(\{X, X^2\})$ et la forme polaire de q est

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2,\ Q(X) = b_0 + b_1 X + b_2 X^2,\ b(P,Q) = a_1 b_1 - 2\,(a_0 b_2 + a_2 b_0).$$

On a alors

$$H^\perp = \{P \in E \,|\, b(P,X) = 0,\ b(P,X^2) = 0\} = \{P \in E \,|\, P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2,\ a_1 = 0,\ -2a_0 = 0\} = \mathrm{Vect}(\{X^2\}).$$

5. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

   (a) $H \oplus H^\perp = E$, (b) $\dim(H) + \dim(H^\perp) = \dim(E)$, (c) $(H^\perp)^\perp = H$.

   On justifiera la réponse donnée.

La première assertion est fausse puisque $H = \mathrm{Vect}(\{X, X^2\})$ et $H^\perp = \mathrm{Vect}(\{X^2\})$. En revanche, la seconde est vraie puisque $\dim(H) + \dim(H^\perp) = 2 + 1 = 3 = \dim(E)$. Enfin, la dernière assertion est vraie puisque

$$(H^\perp)^\perp = \{P \in E \,|\, b(P,X^2) = 0\} = \{P \in E \,|\, P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2,\ -2a_0 = 0\} = \mathrm{Vect}(\{X, X^2\}) = H.$$

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle, q une forme quadratique non nulle sur E, de forme polaire b. On définit l'application

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = q(a)q(x) - (b(a,x))^2,$$

où a est un vecteur de E.

1. Montrer que φ est une forme quadratique sur E et déterminer sa forme polaire.

L'application est la combinaison linéaire d'une forme quadratique et du carré d'une forme linéaire, c'est donc une forme quadratique sur E. La forme polaire b_φ de la forme φ est obtenue en utilisant une identité de polarisation :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ b_\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)\right) = q(a)b(x,y) - b(a,x)b(a,y).$$

2. Déterminer le noyau de φ en fonction de a et du noyau de q et en déduire dans chaque cas le rang de φ. On distinguera les cas pour lesquels le vecteur a appartient ou pas au noyau de q et au cône isotrope de q.

Si le vecteur a appartient au noyau de q (et donc au cône isotrope de q), alors

$$\forall x \in E,\ b(a,x) = 0,$$

et en particulier $q(a) = b(a,a) = 0$. Dans ce cas, la forme quadratique est nulle, d'où $\ker(\varphi) = E$ et $\mathrm{rang}(\varphi) = 0$.
Si le vecteur a appartient au cône isotrope de q mais pas au noyau de q, on a alors $q(a) = 0$ et il existe un vecteur y de E tel que $b(a,y) \neq 0$. Dans ce cas, le noyau de φ est

$$\ker(\varphi) = \{x \in E \mid b(a,x) = 0\} = \{a\}^\perp,$$

c'est-à-dire l'orthogonal du vecteur a pour la forme q, et $\mathrm{rang}(\varphi) = 1$.
Enfin, si le vecteur a n'appartient pas au cône isotrope de q, alors $q(a) \neq 0$ et il existe un vecteur y de E tel que $b(a,y) \neq 0$. Dans ce cas, un vecteur x appartient à au noyau de φ si et seulement si

$$\forall y \in E,\ q(a)b(x,y) - b(a,x)b(a,y) = 0,$$

soit encore

$$\forall y \in E,\ b(q(a)x - b(a,x)a, y) = 0.$$

On en déduit que le vecteur $q(a)x - b(a,x)a$ appartient à $\ker(q)$, soit encore que x appartient à $\ker(q) \oplus \mathrm{Vect}(\{a\})$ (la somme est directe par hypothèse sur le vecteur a). Dans ce cas, $\ker(\varphi) = \ker(q) \oplus \mathrm{Vect}(\{a\})$ et $\mathrm{rang}(\varphi) = n - (\dim(\ker(q)) + 1)$.