EXAMEN DU 14/01/2020

Les notes de cours, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Questions de cours (3 points)

1. Énoncer le théorème central limite (sans démonstration).
2. On lance 1000 fois une pièce équilibrée et l'on note Z la proportion de piles obtenus. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la v.a.r. Z, et en déduire un intervalle dans lequel Z a au moins 90% de chances de se trouver.

Exercice 1 (5 points)

On considère un dé truqué de telle sorte que les faces 1 et 6 aient la même probabilité $p \geq 0$, les faces 2 et 5 la même probabilité $q \geq 0$, et les faces 3 et 4 la même probabilité $r \geq 0$. On note X le résultat d'un lancer.

1. Quelle relation doivent vérifier les paramètres p, q et r ?
2. Calculer l'espérance de X.
3. Exprimer la variance de X en fonction de p et q.
4. On considère les trois événements suivants :

$$A = \{X \in \{1, 6\}\}, \qquad B = \{X \text{ est pair}\}, \qquad C = \{X \geq 4\}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de (p, q, r) les événements A, B, C sont-ils indépendants ?

Exercice 2 (6 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d., de loi $\mathcal{E}(1)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$Z_n \quad := \quad \max\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) - \ln(n).$$

On considère par ailleurs une v.a.r. Z dont la fonction de répartition est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_Z(t) \quad = \quad e^{-e^{-t}}.$$

1. Justifier que F_Z est bien une fonction de répartition.
2. Calculer la fonction de répartition de Z_n pour tout $n \geq 1$.
3. En déduire que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Z.
4. Déterminer la fonction de répartition, puis la loi de la v.a.r. e^{-Z}.
5. En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'existence et la valeur des limites

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\cos\left(te^{-Z_n}\right)] \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\sin\left(te^{-Z_n}\right)].$$

Exercice 3 (6 points)

Soit X, Y deux v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On considère les v.a.r. suivantes :

$$Z := \frac{X+Y}{2}, \qquad W := \frac{X-Y}{2}, \qquad U := \frac{(X-Z)^2}{2} + \frac{(Y-Z)^2}{2}.$$

1. Montrer que Z et W sont des v.a.r. gaussiennes dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $Z+W$, et en déduire que

$$\mathrm{Var}(Z+W) \quad = \quad \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(W).$$

   Que peut-on conclure au sujet des v.a.r. Z et W ?
3. Exprimer U en fonction de W uniquement.
4. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$F_U(t) \quad = \quad \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} \mathrm{d}u & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

5. Conclure que U suit une loi Gamma dont on précisera les paramètres, et retrouver au passage la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.