Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Algèbre linéaire 3
année 2018/2019

Examen d'appel du 5 juillet 2019

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2h

Exercice 1 (3 points). Déterminer, suivant la valeur du paramètre réel λ, la signature de la forme quadratique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ q(x) = (1+\lambda)({x_1}^2 + {x_2}^2) + 2(1-\lambda)\, x_1 x_2,$$

où x_1, x_2 sont les coordonnées du vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (4 points). Étant donné $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dans $\mathbb{R}^4$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall y \in \mathbb{R}^2,\ b(x,y) = \alpha\, x_1 y_1 + \beta\, x_1 y_2 + \gamma\, x_2 y_1 + \delta\, x_2 y_2,$$

où x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) sont les coordonnées du vecteur x (resp. y) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer des conditions nécessaire et suffisantes sur α, β, γ et δ pour que b définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (2 points). Soit la matrice

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que M est une matrice orthogonale.
2. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres avec leurs multiplicités.

Exercice 4 (4 points). Soit n un entier naturel non nul et A une matrice symétrique de $M_n(R)$, telle que $A^2 = A$.

1. Que dire de A ? Montrer en particulier que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rang}(A)$.
2. Établir que
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{\mathrm{rang}(A)} \leq n^{3/2}.$$
3. Montrer alors que
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < n^{3/2} \text{ si } n \geq 2.$$

Exercice 5 (3 points). Soit A une matrice de $M_n(R)$ telle que

$$\forall B \in M_n(R),\ \mathrm{tr}(B) = 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{tr}(AB) = 0.$$

1. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $E = \{B \in M_n(R) \mid \mathrm{tr}(B) = 0\}$?
2. En utilisant la structure euclidienne canonique de $M_n(R)$, montrer qu'il existe un réel λ tel que $A = \lambda\, I_n$.

Exercice 6 (4 points). Soit E un espace vectoriel euclidien, u une isométrie de E et l'endomorphisme $v = u - Id$ de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Im}\,(v)^{\perp}$. En déduire que $\mathrm{Ker}\,(v)^{\perp} = \mathrm{Im}\,(v)$.
2. Soit
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k,\ \text{où } u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}.$$
Montrer que l'image d'un élément de E par l'application u_n converge vers le projeté orthogonal de cet élément sur $\mathrm{Ker}\,(v)$ quand n tend vers l'infini.