Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2020 - 2021)

Partiel - Mardi 20 octobre 2020.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. On considère l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ que l'on munit de la tribu $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ (on notera bien que $\mathcal{F}$ n'est pas la tribu formée par l'ensemble des parties de Ω)

1. Rappeler la définition d'une tribu.
2. Qu'appelle-t-on une probabilité sur un espace mesurable ? Donner un exemple de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
3. La fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(1) = X(2) = \pi$ et $X(3) = X(4) = 100$ est elle une variable aléatoire ? Si oui préciser sa loi quand l'espace de départ est muni de la probabilité que vous avez choisie à la question précédente.
4. La fonction $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $Y(1) = 0$ et $Y(2) = Y(3) = Y(4) = 1$ est elle une variable aléatoire ? Si oui préciser sa loi quand l'espace de départ est muni de la probabilité que vous avez choisie à la question précédente.

Exercice 2. On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ modélisant cette expérience.
2. On considère la variable aléatoire X, identité sur Ω, définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $X(\omega) = \omega$ (qui correspond donc à un tirage du dé !). Donner la loi P_X de X et calculer son espérance.
3. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi P_Y de Y et son espérance.

Exercice 3. Soit $\lambda > 0$ un réel et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ c'est-à-dire de densité $x \to \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x)$. On note Y la partie entière de X, i.e. $Y = \lfloor X \rfloor$ (où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x c'est-à-dire l'unique entier k tel que $k \leq x < k + 1$).

1. Montrer que Y est
   i. une variable aléatoire
   ii. discrète.
2. Pour tout $k \geq 1$, calculer $\mathrm{P}(Y = k - 1)$ et en déduire la loi de $Y + 1$. Quelle loi reconnait on ?
3. On pose $Z = X - Y$. Pour tout $z \in [0, 1]$, calculer $\mathrm{P}(Z \leq z)$.
4. La variable Z est elle une variable à densité ? Si oui calculer une densité de Z.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note F sa fonction de répartition.

1. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$F(k-1) < x \leq F(k).$$

Pour tout $x \in]0,1[$ on note $Q(x)$ cet entier.

2. Montrer que Q est croissante.
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $Q(U)$ et X ont même loi.