# Corrigé (succinct) du contrôle continu du 7 octobre 2020

**Exercice 1.** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $A$.

On a

$$\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2)((X-3)(X-1)+1) = (X-2)^3.$$

2. Déterminer le polynôme minimal de $A$.

Le polynôme minimal divisant le polynôme caractéristique, on a trois polynômes candidats possibles pour ce dernier : $X-2$, $(X-2)^2$ et $(X-2)^3$. Il suffit donc de voir lequel de ces polynômes est le premier polynôme annulateur de $A$. On a

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } (A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = 0_{M_3(\mathbb{R})},$$

d'où $\mu_A(X) = (X-2)^2$.

3. En déduire que $A$ est inversible et déterminer son inverse.

En utilisant le fait que le polynôme minimal est annulateur de $A$, on trouve que $(A-2I_3)^2 = A^2 - 4A + 4I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$, d'où

$$I_3 = -\frac{1}{4}(A^2 - 4A) = A\left(-\frac{1}{4}A + I_3\right).$$

On en déduit que la matrice $A$ est inversible, d'inverse $A^{-1} = -\frac{1}{4}A + I_3$.

**Exercice 2.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant

$$u^3 - 3u^2 + 2u = 0_{\mathscr{L}(E)} \text{ et } u^8 + 16u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de $u$.

Le polynôme $P(x) = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est annulateur de l'endomorphisme, il est donc divisible par le polynôme minimal $\mu_u$. De même, le polynôme $Q(X) = X^8 + 16X^4 = X^4(X^4+16)$ est annulateur de l'endomorphisme et donc divisible par $\mu_u$. On en déduit que $\mu_u$ divise le plus grand commun diviseur de $P$ et $Q$, qui est $X$. Il en résulte que $\mu_u(X) = X$.

2. Que dire de $u$ ?

Le polynôme minimal étant annulateur de l'endomorphisme, on a $\mu_u(u) = u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

**Exercice 3.** Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre nombres réels tels que $bcd \neq 0$. On définit la matrice $A$ par :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les matrices $A + A^\top$, $AA^\top$ et $(XI_4 - A)(XI_4 - A^\top)$.

On trouve

$$A + A^\top = 2AI_4,\ AA^\top = (a^2+b^2+c^2+d^2)I_4 \text{ et } (XI_4 - A)(XI_4 - A^\top) = (X^2 - 2aX + (a^2+b^2+c^2+d^2))I_4.$$

2. En déduire le polynôme caractéristique de $A$.

Le déterminant d'un produit de matrices carrées étant égal au produit des déterminants de ces matrices et le déterminant d'une matrice carrée étant égal à celui de sa transposée, on a, par définition du polynôme caractéristique de $A$,

$$\det((X\,I_4 - A)(X\,I_4 - A^\top)) = \det(X\,I_4 - A)\det(X\,I_4 - A^\top) = (\det(X\,I_4 - A))^2 = (\chi_A(X))^2.$$

Or, d'après la question précédente, il vient

$$\det((X\,I_4 - A)(X\,I_4 - A^\top)) = (X^2 - 2a\,X + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2))^4 \det(I_4) = (X^2 - 2a\,X + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2))^4,$$

d'où

$$\chi_A(X) = (X^2 - 2a\,X + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2))^2,$$

le polynôme caractéristique étant unitaire par propriété.

3. Montrer que $A$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Les valeurs propres de $A$ sont les racines de $\chi_A$ et donc les racines de $\pi(X) = X^2 - 2a\,X + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. Par hypothèse, les nombres $b$, $c$ et $d$ sont non nuls, d'où

$$\forall X \in \mathbb{R},\ \pi(X) = (X - a)^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0.$$

Le polynôme $\pi$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, et par conséquent $\chi_A$ non plus : la matrice $A$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. Calculer $A^2 - 2a\,A + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,I_4$ et en déduire le polynôme minimal de $A$.

On trouve

$$A^2 - 2a\,A + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,I_4 = \pi(A) = 0_{M_4(\mathbb{R})},$$

le polynôme $\pi$ est donc un polynôme annulateur de $A$, divisible par le polynôme minimal $\mu_A$. Par ailleurs, $\pi$ possède deux racines complexes conjuguées, qui sont des valeurs propres de $A$ et donc des racines du polynôme minimal. Ainsi, $\pi$ divise $\mu_A$. Or, $\pi$ est un polynôme unitaire : c'est donc le polynôme minimal.

5. Montrer que $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Le polynôme minimal de $A$ est scindé sur $\mathbb{C}$, à racines simples, donc $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

On suppose désormais que $a = 1$, $b = c = d = -1$.

6. Vérifier que $U = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i}\sqrt{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de $A$.

On trouve $AU = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\,U$ et $AV = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\,V$. Par conséquent, $U$ et $V$ sont des vecteurs propres de $A$ associés à la valeur propre $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

7. En utilisant que la matrice $A$ est réelle, en déduire qu'il existe une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Puisque $A$ est réelle, on trouve que $A\overline{U} = \overline{AU} = \overline{(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\,U} = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\,\overline{U}$ et $A\overline{V} = \overline{AV} = \overline{(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\,V} = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\,\overline{V}$. Par conséquent, $\overline{U}$ et $\overline{V}$ sont des vecteurs propres de $A$ associés à la valeur propre $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Les sous-espaces propres étant en somme directe et les vecteurs $U$ et $V$ (resp. $\overline{U}$ et $\overline{V}$) étant linéairement indépendants, la famille $\{U, V, \overline{U}, \overline{V}\}$ est une base de $M_{4,1}(\mathbb{C})$. On a ainsi trouvé

$$P = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{3} & -1 & -\mathrm{i}\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \mathrm{i}\sqrt{3} & 1 & -\mathrm{i}\sqrt{3} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

telles que $A = PDP^{-1}$.

8. Montrer que $A^3 = -8\,I_4$ et, pour tout entier naturel $n$, donner l'expression de $A^n$ en fonction de $A$ et $I_4$.

D'après une question précédente, on sait que le polynôme minimal de $A$ est $\mu_A(X) = X^2 - 2X + 4$. Le polynôme $X^3 + 8$ étant un multiple de $\mu_A$ (on a en effet $X^3 + 8 = (X^2 - 2X + 4)(X + 2)$), c'est un polynôme annulateur de $A$, d'où $A^3 = -8\,I_4$. En raisonnant par récurrence, on trouve ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^{3n} = (-8)^n\,I_4,\ A^{3n+1} = (-8)^n\,A \text{ et } A^{3n+2} = (-8)^n\,A^2 = (-8)^n(2A - 4\,I_4).$$

9. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = A\,U_n$$

et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de $U_n$ en fonction de $n$.

En raisonnant par récurrence, on montre que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n\, U_0.$$
Par ailleurs, on a $AU_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En utilisant la question précédente, on trouve alors que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{3n} = (-8)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ U_{3n+1} = (-8)^n \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } U_{3n+2} = (-8)^n \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** Soit $A$, $B$ et $C$ trois matrices de $M_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe trois nombres complexes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ non tous nuls tels que la matrice $\alpha A + \beta B + \gamma C$ admette une unique valeur propre (*on pourra distinguer les cas pour lesquels la famille formée de $A$, $B$ et $C$ est respectivement liée et libre*).
Si la famille formée de $A$, $B$ et $C$ est liée, il existe trois nombres complexes non tous nuls $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0_{M_2(\mathbb{C})}$, la matrice nulle ayant pour seule valeur propre 0.
Supposons à présent que la famille formée de $A$, $B$ et $C$ est libre. Si la famille $\{A, B, C, I_2\}$ est liée, alors il existe trois nombres complexes non tous nuls $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C = I_2$, la matrice identité ayant pour seule valeur propre 1. Sinon, la famille $\{A, B, C, I_2\}$ est libre et forme une base de $M_2(\mathbb{C})$. Il existe alors des nombres complexes non tous nuls $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ tels que
$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
d'où
$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \begin{pmatrix} -\delta & 1 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix},$$
la dernière matrice ayant pour seule valeur propre $-\delta$.