Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2020 - 2021)

Partiel - Mardi 20 octobre 2020.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. On considère l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ que l'on munit de la tribu $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ (on notera bien que $\mathcal{F}$ n'est pas la tribu formée par l'ensemble des parties de Ω)

1. Rappeler la définition d'une tribu.
2. Qu'appelle-t-on une probabilité sur un espace mesurable ? Donner un exemple de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
3. La fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(1) = X(2) = \pi$ et $X(3) = X(4) = 100$ est elle une variable aléatoire ? Si oui préciser sa loi quand l'espace de départ est muni de la probabilité que vous avez choisie à la question précédente.
4. La fonction $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $Y(1) = 0$ et $Y(2) = Y(3) = Y(4) = 1$ est elle une variable aléatoire ? Si oui préciser sa loi quand l'espace de départ est muni de la probabilité que vous avez choisie à la question précédente.

Correction

1. $\mathcal{F}$ contient l'ensemble vide, est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable donc c'est une tribu
2. Une probabilité P est une application de $\mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ qui vérifie $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ et pour toute suite (dénombrable donc) $(A_n)_{n\geq}$ d'événements deux à deux distincts, $\mathrm{P}(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{P}(A_n)$. On peut par exemple prendre dans ce cas $\mathrm{P}(\emptyset) = 1\mathrm{P}(\Omega) = 0$ et $\mathrm{P}(\{1\}) = 1 - \mathrm{P}(\{2, 3, 4\}) = 1/3$.
3. L'ensemble $\{X = \pi\}$ n'est pas dans $\mathcal{F}$ donc X n'est pas mesurable donc pas une variable aléatoire.
4. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\{Y \in B\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \notin B \\ \Omega & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \in B \\ \{1\} & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \notin B \\ \{2, 3, 4\} & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \in B. \end{cases}$$

Dans tous les cas $\{Y \in B\}$ est dans $\mathcal{F}$ donc Y est une variable aléatoire. De plus

$$\mathrm{P}_Y(B) = \mathrm{P}(Y \in B) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \notin B \\ 1 & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \in B \\ 1/3 & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \notin B \\ 2/3 & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \in B. \end{cases}$$

Exercice 2. On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ modélisant cette expérience.
2. On considère la variable X, identité sur Ω i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \omega$ (qui correspond donc à un tirage du dé !). Donner la loi P_X de X et calculer son espérance.
3. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi P_Y de Y et son espérance.

Correction

1. On peut prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P défini sur les singletons par $\mathrm{P}(\{i\}) = i/K$ pour tout $i = 1, \cdots, 6$ où $K = 1 + \cdots + 6 = 21$.
2. Pour tout $A \subset \Omega$, $\mathrm{P}_X(A) = \mathrm{P}(X \in A) = \mathrm{P}(A)$ donc $\mathrm{P}_X = \mathrm{P}$. De plus $X = \sum_{i=1}^{6} i 1_{X=i}$ donc est étagé et $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i\mathrm{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{6} i^2/K = 91/21 = 13/3$.
3. La variable Y est discrète et à valeurs dans $\{1/i,\ i = 1, \cdots, 6\}$. On caractérise donc sa loi en précisant que pour tout $i = 1, \cdots, 6$, $\mathrm{P}(Y = 1/i) = \mathrm{P}(X = i) = i/K$. On obtient de plus que $Y = \sum_{i=1}^{6} 1/i 1_{Y=1/i}$ donc $\mathrm{E}(Y) = \sum_{i=1}^{6} 1/i\mathrm{P}(Y = 1/i) = \sum_{i=1}^{6} 1/K = 6/21$.

Exercice 3. Soit $\lambda > 0$ un réel et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ c'est-à-dire de densité $x \to \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x)$. On note Y la partie entière de X, i.e. $Y = \lfloor X \rfloor$ (où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière).

1. Montrer que Y est
   i. une variable aléatoire
   ii. discrète.
2. Pour tout $k \geq 1$, calculer $\mathrm{P}(Y = k - 1)$ et en déduire la loi de $Y + 1$. Quelle loi reconnait on ?
3. On pose $Z = X - Y$. Pour tout $z \in [0, 1]$, calculer $\mathrm{P}(Z \leq z)$.
4. La variable Z est elle une variable à densité ? Si oui calculer une densité de Z.

Correction

1. La fonction $x \to \lfloor x \rfloor$ étant croissante, elle est borelienne, donc Y est bien une variable aléatoire comme composée d'une fonction mesurable et d'une variable aléatoire. De plus elle est discrete car prend ses valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}$.
2. Soit $k \geq 1$. On a $\mathrm{P}(Y = k-1) = \mathrm{P}(k-1 \leq X < k) = \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda x} = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k}$. On a donc pour tout $k \geq 1$, $\mathrm{P}(Y + 1 = k) = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda})$. On reconnait une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.
3. La variable Z est à valeurs dans $[0, 1]$ et pour tout $z \in [0, 1]$, $\mathrm{P}(Z \leq z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(Z \leq z, Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X \in [k, k+z]) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+z)} = \frac{1-e^{-\lambda z}}{1-e^{-\lambda}}$.
4. La fonction F vérifie pour tout $z \in \mathbb{R}$, $F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{\lambda e^{-\lambda z}}{1-e^{-\lambda}} 1_{[0,1](z)}$ donc Z admet bien pour densité $z \to \frac{\lambda e^{-\lambda z}}{1-e^{-\lambda}} 1_{[0,1](z)}$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note F sa fonction de répartition.

1. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$F(k-1) < x \leq F(k).$$

Pour tout $x \in]0,1[$ on note $Q(x)$ cet entier.

2. Montrer que Q est croissante.
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $Q(U)$ et X ont même loi.

Correction

1. On a $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$ donc pour tout $x \in]0,1[$, l'ensemble $\{\ell \in \mathbb{N},\ F(\ell) \geq x\}$ est non vide et admet donc un plus petit élément k tel que $F(k) \geq x$. Par définition si $k \geq 1$, $F(k-1) < x$ tandis que si $k = 0$ on a, comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $F(-1) = 0 < x$. De plus comme Fest croissante, au plus un seul entier peut satisfaire la relation définissant Q (si $\ell > k$ alors $\ell - 1 \geq k$ et $F(\ell-1) \geq x$).
2. La réécriture $Q(x) = \min\{\ell \in \mathbb{N},\ F(\ell) \geq x\}$ montre que Q est croissante en x puisque, comme F est croissante, pour tout $u \leq v$, $\{\ell \in \mathbb{N},\ F(\ell) \geq u\} \subset \{\ell \in \mathbb{N},\ F(\ell) \geq v\}$.
3. Par définition $Q(U)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. De plus pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(Q(U) = n) = \mathrm{P}(F(n-1) < U \leq F(n)) = F(n) - F(n-1) = \mathrm{P}(X = n)$ où la dernière égalité est vraie car X est à valeurs entières.