Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Algèbre linéaire 3
Année 2021/2022

Examen de substitution du 19 février 2022

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2h

Exercice 1 (caractérisation d'une isométrie vectorielle, 3 points). Soit E un espace préhilbertien. Montrer qu'une application u de E dans E est une isométrie vectorielle si et seulement si

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle u(x),u(y)\rangle = \langle x,y\rangle\,.$$

Exercice 2 (3 points). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel α, on note M_α la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 et les autres à α. On note par ailleurs J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. La matrice J est-elle diagonalisable ? Calculer J^2 et en déduire les deux valeurs propres de J.
2. Utiliser une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J pour déterminer les deux valeurs propres de M_α.
3. En déduire que la matrice M_α est inversible si et seulement si $\alpha \notin \left\{1, \frac{1}{1-n}\right\}$.

Exercice 3 (4 points). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $E=\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit φ l'application définie par
$$\forall (P,Q)\in E^2,\ \varphi(P,Q)=\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer la valeur de
$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_{-1}^{1}\left(t^3-(a\,t^2+b\,t+c)\right)^2\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 (4 points). Soit E un espace euclidien, de produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et p un projecteur de E vérifiant

$$\forall x\in E,\ \langle p(x),x\rangle \geq 0.$$

1. Pour tout vecteur x de $\mathrm{Ker}(p)$, tout vecteur y de $\mathrm{Im}(p)$ et tout réel λ, calculer $\langle p(x+\lambda\,y), x+\lambda\,y\rangle$.
2. Montrer alors que p est un projecteur orthogonal (on pourra raisonner par l'absurde).

Exercice 5 (3 points). Soit E un espace euclidien et x et y deux vecteurs non nuls de E. À quelle condition sur x et y le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(\{y\})$ est-il égal au projeté orthogonal de y sur $\mathrm{Vect}(\{x\})$?

Exercice 6 (4 points).

1. Pour toute matrice Q de $O_n(\mathbb{R})$ et pour tout entier naturel k, calculer $\|Q^k\|$, où la norme $\|\cdot\|$ est définie par
$$\forall M\in M_n(\mathbb{R}),\ \|M\|=\sqrt{\mathrm{tr}(M^\top M)}.$$
2. Soit A une matrice de $O_n(\mathbb{R})$. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de A.
   (a) Pour tout entier naturel k, on pose $M_k=\frac{1}{k+1}\left(I_n+A+A^2+\cdots+A^k\right)$. Calculer le produit $(I_n-A)M_k$ et en déduire la convergence de la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente (on pourra raisonner par l'absurde).