Nom : Prénom : TD : Note :

Les questions suivantes sont indépendantes.

Justifier qu'une suite réelle divergente n'est pas de Cauchy.

En utilisant uniquement les suites de Cauchy, montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Soit u_n une suite telle que $n^2 u_n \geq 2$. Peut-on affirmer que la série de terme général u_n est divergente ? Peut-on affirmer que la série de terme général u_n est convergente ?

Etudier la convergence, la semi-convergence des séries de terme général ...

$u_n = e^{-\sqrt{\ln(n)}}$

$v_n = \left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)^n$

$w_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln(n)^2}\right)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, on définit

$$u_n = \frac{1}{n\ln(n)}, \qquad \text{et} \qquad S_n := \sum_{k=2}^{n} u_k.$$

En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $S_n \sim_{+\infty} \ln(\ln(n))$.

On définit $v_n := S_n - \ln(\ln(n))$. Montrer que $v_{n+1} - v_n \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2\ln(n)}$.

En déduire un développement asymptotique à deux termes de S_n.