Université Paris-Dauphine
Analyse 3 (L2)
Date : 18 octobre 2021

Année universitaire 2021-2022
Responsable : Emeric Bouin
Durée : 3 heures

Examen partiel

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées pour être considérées. Il est rappelé que la rédaction comptera de manière importante dans l'évaluation des copies. Aucun document n'est autorisé, aucune calculatrice. Le barême est donné à titre indicatif.

Bon travail !

Exercice 1. (1+1+1+1+1,5+1+1+2 = 9,5 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Donner l'exemple d'une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f et telle que $\int_0^1 f_n(t)\,dt$ ne tende pas vers $\int_0^1 f(t)\,dt$.
2. (a) Donner un exemple de suite réelle u_n telle que nu_n soit bornée et telle que la série de terme général u_n diverge.
   (b) Donner un exemple de suite réelle u_n telle que nu_n soit bornée et telle que la série de terme général u_n converge.
   (c) Soit $u_n \geq 0$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et tend vers 1. Peut-on affirmer que la série de terme général u_n diverge ?
3. (a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives. On suppose que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent. Peut-on dire que $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ est convergente ?
   (b) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent. Peut-on dire que $\sum_n \sqrt{|u_n v_n|}$ est convergente ?
4. Montrer que si une suite de fonctions continues f_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$, alors ...
   (a) la fonction f est continue sur $[0,1]$.
   (b) pour toute suite x_n convergente vers x_∞ dans $[0,1]$, la suite $f_n(x_n)$ tend vers $f(x_\infty)$.

Exercice 2. (1+ 2 + 4 = 7 points)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On définit sur $[0,1]$ la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall x \in]0,1], \qquad u_n(x) := a_n x^n \ln(x),$$

prolongée en zéro de sorte que u_n soit continue sur $[0,1]$.

1. Que vaut $u_n(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$?
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et donner sa limite.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la convergence soit uniforme.

Exercice 3. (2+2+2 = 6 points)

Etudier la convergence absolue puis la semi-convergence des séries de terme général ...

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}\right), \quad b_n = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^n, \quad c_n = \sqrt{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1 - \frac{\beta}{n},$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. (1+1,5+1+1+1+1+3+1+1+2+1+2+1+2 = 19,5 points)

Dans tout l'exercice, on dira qu'une suite a_n à valeurs complexes vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si pour toute suite complexe u_n bornée, la série de terme général $a_n u_n$ converge. On dira qu'une suite a_n à valeurs réelles vérifie la propriété $\mathcal{Q}$ si pour toute suite réelle u_n, la convergence de la série de terme général u_n entraîne celle de la série de terme général $a_n u_n$.

Le but de l'exercice est de caractériser les suites vérifiant $\mathcal{P}$ et celles vérifiant $\mathcal{Q}$.

1. Cette question s'intéresse à la propriété $\mathcal{P}$.
   (a) Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général $|a_n|$ converge vérifie $\mathcal{P}$.
   (b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série de terme général $a_n u_n$ diverge.
   (c) Caractériser les suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\mathcal{P}$.
2. Cette question s'intéresse à la propriété $\mathcal{Q}$.
   (a) Soit a_n une suite réelle telle que la série de terme général $|a_{n+1} - a_n|$ converge.
      i. Prouver que la suite a_n possède une limite.
      ii. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série de terme général u_n converge. On note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer, pour tout entier naturel non nul N, la relation
$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$$
      iii. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété $\mathcal{Q}$.
   (b) Soit b_n le terme général positif d'une série divergente.
      i. (Un peu difficile - on pourra admettre le résultat ou avoir un bonus) Montrer que l'on peut construire une suite ε_n qui tend vers 0 et telle que $\varepsilon_n b_n$ soit le terme général d'une série divergente.
      ii. Donner un exemple explicite d'une telle suite ε_n lorsque $b_n = \frac{1}{n}$.
   (c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tendant vers 0, la série de terme général $\epsilon_n a_n$ converge.
      i. Prouver que la série de terme général $\epsilon_n |a_n|$ converge.
      ii. En déduire que la série de terme général $|a_n|$ converge.
   (d) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série de terme général u_n entraine la convergence de la série de terme général $a_n u_n$.
      i. Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
      ii. Soit ϵ_n une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la série de terme général $\epsilon_n (a_{n+1} - a_n)$.
      iii. Prouver que la série de terme général $|a_{n+1} - a_n|$ converge.
   (e) Caractériser les suites vérifiant $\mathcal{Q}$.

FIN DU SUJET
