Algèbre linéaire 3, Partiel du 20 Octobre 2022

Durée : 2h. Documents et appareils électroniques interdits. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées. La qualité de la rédaction sera un élément essentiel de l'appréciation des copies. Vous êtes vivement encouragés à lire l'ensemble du sujet avant de commencer. Le barème est sur 22 points. Il est à titre indicatif.

Exercice 1 **(Question de cours, 1 point).** — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, une base $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_n)$ de E et $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire réelle sur $E \times E$. Donner la définition de la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 2 **(Réduction et matrice, 4 points).** — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les sous-espaces propres de A. (1,5 points)
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? En déduire le polynôme minimal de A. (1 point)
3. La matrice A est-elle trigonalisable ? (0,5 point)
4. Déterminer le polynôme minimal de la matrice $2I_3 - A$. (1 point)

Exercice 3 **(Diagonalisation d'une matrice, 3 points).** — Diagonaliser (en justifiant) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On ne demande pas l'inverse de la matrice de passage.

Exercice 4 **(Semblables ou pas semblables ? 2 points).** — Les matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 5 **(Équation matricielle, 6 points).** — Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + 2A^2 + A = 0_{M_n(\mathbb{C})}$. On note χ_A le polynôme caractéristique de A.

1. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A vu comme matrice de $M_n(\mathbb{C})$, alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$. (0,5 point)
2. En déduire que χ_A vu comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$ n'admet que des racines réelles. (0,5 point)
3. Montrer que A est trigonalisable sur $M_n(\mathbb{R})$. (1 point)
4. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in \{0, -1, \cdots, -n\}$. (1 point)
5. On suppose dans cette question que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
   (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A. (1 point)
   (b) En déduire le polynôme minimal de A puis que $A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. (1 point)
6. On suppose dans cette question que $\mathrm{Tr}(A) = -1$. Montrer que A est diagonalisable. (1 point)

Exercice 6 **(Endomorphisme sur les matrices. 6 points).** — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application Φ définie par

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ & & A & \mapsto & \mathrm{Tr}(A) I_n. \end{array}$$

1. Montrer que Φ est une application linéaire. (0,5 point)
2. Déterminer Φ^2 en fonction de Φ. (1 point)
3. En déduire le polynôme minimal de Φ. (1 point)
4. L'application Φ est elle diagonalisable ? (0,5 point)
5. Déterminer les sous-espaces propres de Φ. (2 points)
6. Calculer la trace de Φ. (1 point)