CNS · diagonalisable <=> polynôme c. scindé sur $\mathbb{K}$ et l'ordre de multiplicité des vecteurs soit égale à la dim. des sous. espaces propres

semblable : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = PBP^{-1}$

$$M_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{E}} M_{\mathcal{E}}(f) P_{\mathcal{E} \to \mathcal{B}}$$

· trigonalisable <=> polynôme scindé sur $\mathbb{K}$

Application diagonalisable

Rq : la Σ de deux matrice diagonalisables n'est pas diagonalisable.

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

- deux matrices peuvent ne pas être semblables mais avoir le m̂ pol. c.

Polynôme : $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$
$P(u) = a_0 id_E + a_1 u + \dots + a_n u^n$
$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_n A^n$

Polynôme annulateur : $P(u) = 0$
$P(A) = 0$

proposition : $Sp(A) \subseteq \{$racines du polynôme annulateur $P\}$

Théorème C.H. $\chi_u(u) = 0$

Def un polynôme minimal est annulateur unitaire et de d° minimal.

Prop : $\exists!$ polynôme minimal de u qui divise tout polynôme annulateur.

· les racines du polynôme minimal sont exactement les val. p.
· u dont le polynôme caractéristique est scindé est diagonalisable ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Exercice 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\left[(\lambda-2)(\lambda-1)+1\right] - \left[1+\lambda-2\right]$$

$$= (\lambda-1)\left[\lambda^2-3\lambda+3\right] - (\lambda-1) = (\lambda-1)\left[\lambda^2-3\lambda+3-1\right]$$

$$= (\lambda-1)\left[\lambda^2-3\lambda+2\right] = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

Le pol. c. est scindé dans $\mathbb{R}$, donc A est trigonalisable.

2. On résout : $\begin{cases} x_1 + x_3 = x_1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$

Donc $E_1 = \text{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$. $\text{Dim}(E_1) = 1$

Rq : $\dim E_1 = 1 \neq$ ordre de multiplicité de la racine 1
$\Rightarrow A$ pas diagonalisable.

· $I_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $rg(I_3-A) = 2 = \dim(I_3-A)$
D'après thm du rang,
$\dim(\ker(I_3-A)) = \dim(E_1)$
$= 3 - \dim(\text{Im}(I_3-A))$
$= 1$

· $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Rq par $u=(0,0,1)$; $(f-id_{\mathbb{R}^3})(v)=u$

$(f-id_{\mathbb{R}^3})(v)=f(v)-v \iff (A-I_3)\cdot v = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{f-id_{\mathbb{R}^3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u}$

$f(v)-v=u$; $\boxed{f(v)=u+v}$

4. On résout :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_1 \\ -x_1+2x_2+x_3 = 2x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$E_2 = \text{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

Rq (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$: Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $(\alpha,\mu,\gamma)\in\mathbb{K}$.

$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On résout alors :

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = a \\ \alpha = b \\ \mu+\gamma = c \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = a-b \\ \alpha = b \\ \mu = c-a+b \end{cases}$$

Donc $\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$; $(a-b)u + bv + (c-a+b)w = (a,b,c)$

Donc (u,v,w) est bien une base de $\mathbb{R}^3$ car elle génère $\mathbb{R}^3$ et elle est libre.

(u,v,w) base de $\mathbb{R}^3 \iff$ la matrice associé est inversible

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ det $=1\neq 0$, rg $=3$ $\qquad \mathcal{B}=(u,v,w)$ base de $\mathbb{R}^3$

$$T_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(u) & f(v) & f(w) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}$$

$f(u)=u$

$f(v)=u+v$

$f(w)=2w$

5. $f(u) = u \Rightarrow f^k(u) = u$

$f(w) = 2w \Rightarrow f^k(w) = 2^k w$

$f(v) = u+v \Rightarrow f^k(v) = ?$

$f^2(v) = f(u+v) = f(u) + f(v)$

$= u + u+v = 2u+v$

Montrons par recurence que $f^k(v) = ku+v$

Pour $k=1$ Ok

HR : Supposons pour un k fixé que $f^k(v) = ku+v$

Mq $f^{k+1}(v) = (k+1)u+v$

$f^{k+1}(v) = f(f^k(v)) = f(ku+v) = kf(u) + f(v)$

$= ku + u+v$

$= (k+1)u+v$

Donc on a bien $\forall k \in \mathbb{N}$; $f^k(v) = ku+v$

$$T^k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f^k(u) & f^k(v) & f^k(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \end{array}$$

6. $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}$

$$\begin{cases} u = a+b \\ v = c \\ w = a+c \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c = v \\ a = w-v \\ b = u+v-w \end{array}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^k = PT^kP^{-1}$

Exercice 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & 2 \\ 0 & \lambda-6 & 3 \\ 1 & -4 & \lambda \end{vmatrix} = |c_1 \quad c_2 \quad c_3| = |c_1+c_2+c_3 \quad c_2 \quad c_3|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 & 2 \\ \lambda-3 & \lambda-6 & 3 \\ \lambda-3 & -4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & \lambda-6 & 3 \\ 1 & -4 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & \lambda-6 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-2)[\lambda-6+4] = (\lambda-3)(\lambda-2)^2$$

Donc $\chi_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)^2$ scindé donc A trigonalisable
$Sp(A) = \{2, 3\}$

Pour $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2x_1 \\ \quad 6x_2 - 3x_3 = 2x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \quad = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_2 = 3x_3 \\ x_1 = x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4} x_3 \end{cases}$$

Donc $E_2 = \text{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \text{vect}\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \text{vect}[v]$

$\dim E_2 = 1 \neq$ ordre de multiplicité de la racine 2, donc A pas diag.

Pour $\lambda = 3$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3x_1 \\ \quad 6x_2 - 3x_3 = 3x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \quad = 3x_3 \end{cases}$$

Donc $E_3 = \text{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \text{vect}[u]$

On veut compléter par w pour $\mathcal{B}=(u,v,w)$ soit une base

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$f(w)=Aw$

Par exemple : $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a (u,v,w) base, $f(w) = Aw = \dots$

$(v_1 \dots v_j, u_{j+1}, \dots, u_n)$; $v_k = \alpha_1 u_{j+1} + \dots + \alpha_k u_n$

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \end{array} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(u,v,w) base. $w = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $a=-6$; $b=1$

$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; $\chi_B(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)^2$; $Sp(B) = \{-1, 1\}$

Pour $\lambda = -1$ $E_{-1} = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

Pour $\lambda = 1$; $E_1 = \text{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$; $\dim(E_1) \neq 2$ donc B pas diagonalisable.

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot \\ 2 & 2 & \cdot \end{pmatrix}$ On cherche (u, v, w) $T = \begin{array}{c c} \begin{matrix} f(u) & f(v) & f(w) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdot 0 \\ 0 & 1 & \cdot -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \end{array}$

On veut $w = \alpha w_1$

$Bw = f(w) = au + bv + 1w$ *

On peut prendre $w = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par ex $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a bien (u, v, w) base → justifier

Par *, on a :

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $a = 0$, $b = -1$

Exercice 3 :

$$M = \begin{pmatrix} \underset{n,n}{\overset{n}{A}} & \underset{n,m}{\overset{m}{C}} \\ \underset{m,n}{0} & \underset{m,m}{B} \end{pmatrix}\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$$

1. $$M = \begin{pmatrix} P_1T_1P_1^{-1} & C \\ 0 & P_2T_2P_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 & X \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_1T_1P_1^{-1} & P_1XP_2^{-1} \\ 0 & P_2T_2P_2^{-1} \end{pmatrix}$$

2. On cherche $M = P\begin{pmatrix} \lambda I_n & C \\ 0 & B \end{pmatrix}P^{-1}$

On pose $P = \begin{pmatrix} I_n & L \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$; P inversible car triangulaire sup. avec des 1 sur sa diag. donc $\det(P) = 1 \neq 0$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -L \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & L(B-\lambda I_m) \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

D'où $C = L(B-\lambda I_m)$

Comme $\lambda \notin Sp(B)$; $B-\lambda I_m$ est inversible donc $\det(B-\lambda I_m) \neq 0$

D'où $B-\lambda I_m$ est inversible.

Ainsi $L = C(B-\lambda I_m)^{-1}$

Exercice 4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & +3 & +0 & -3 \\ +2 & \lambda+6 & -0 & -13 \\ 0 & +3 & \lambda-1 & -3 \\ +1 & +4 & -0 & \lambda-8 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ 2 & \lambda+6 & -13 \\ 1 & 4 & \lambda-8 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} L_1 \\ L_2-2L_3 \\ L_3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ 0 & \lambda-2 & -2\lambda+3 \\ 1 & 4 & \lambda-8 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\,|C_1 \quad C_2 \quad C_3|$$

$$= (\lambda-1)\,|C_1 \quad C_2 \quad C_2+C_3| = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -\lambda+1 \\ 1 & 4 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\Big[(\lambda-1)\big[(\lambda-2)(\lambda-4) - 4(1-\lambda)\big] + (-3\lambda+3) - (\lambda-2)\Big]$$

$$= \quad \vdots$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1) = (\lambda-1)^2$$

Pour $\lambda = 1$; $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_1 = \ker(I-A)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & -13 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}}_{I_4 - A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y - t = 0 \\ 2x + 7y - 13t = 0 \\ x + 4y - 7t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ x = 3t \end{cases}$$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \\ z \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $E_1 = \mathrm{vect}\left[\underset{v_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} ; \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\right]$

$\dim(E_1) = 2 \neq 4 \rightarrow$ ordre de multiplicité de 1.

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdot a & \cdot\\ 0 & 1 & \cdot b & \cdot\\ 0 & 0 & 1 & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$, on complète $\begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\underset{u_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}\underset{u_4}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}$

On cherche $v_3 = \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = \begin{pmatrix}\alpha_4\\0\\0\\\alpha_3\end{pmatrix}$

et $Av_3 = f(v_3) = av_1 + bv_2 + 1v_3$

$Av_3 - v_3 = (A-I)v_3 = av_1 + bv_2$

$$\begin{pmatrix}0 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -7 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 0 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_4\\0\\0\\\alpha_3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\alpha_3 + 3b \Rightarrow b = \alpha_3\\ -2\alpha_4 + 13\alpha_3 = b\\ 3\alpha_3 = a \qquad a = 3\alpha_3 = 3b\\ -\alpha_4 + 7\alpha_3 = b \quad \Rightarrow \alpha_4 = 6\alpha_3\end{cases}$$

On pose $\alpha_3 = 1$ $b=1$ $a=3$
$\alpha_4 = 6$

$v_3 = \begin{pmatrix}6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ Donc
$$T = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4)\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & \cdot a\\ 0 & 1 & 1 & \cdot b\\ 0 & 0 & 1 & \cdot c\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

·On cherche $v_4 = \alpha_4 u_4 \Rightarrow v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$Av_4 = av_1 + bv_2 + cv_3 + v_4$

$(A-I)v_4 = av_1 + bv_2 + cv_3 = a\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}6\\0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3b+6c\\b\\a\\b+c\end{pmatrix}$

$\Rightarrow a=0$; $b=-2$, $c=1$

$$T = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4)\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix}0 & 3 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_4 - M) &= \det(\lambda I_2 - A)\cdot\det(\lambda I_2 - B) \\ &= \chi_A(\lambda)\cdot\chi_B(\lambda) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ -9 & \lambda+3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda-4 & 8 \\ -2 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\ &= [(\lambda-3)(\lambda+3)+9][(\lambda-4)(\lambda+4)+16] \\ &= [\lambda^2-9+9][\lambda^2-16+16] \\ &= \lambda^4 \end{aligned}$$

$Sp(M) = \{0\}$

- <u>Trigonalisation de A :</u>

$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_0 = \ker(A) \iff Ax = 0 \iff 3x = y \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$E_0 = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ $\quad \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad v_1 + 3v_2 = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \ker(A)$

$$T_A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(v_1) & f(v_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}$$

On complète : on peut prendre $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Av_2 = a v_1 \iff \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 3$; $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; $P_1^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

06.10.23 $\quad$ A. $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; $P_1^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_B(\lambda) = \lambda^2 \quad Sp(B) = \{0\}$

<u>$\lambda = 0$</u> $\quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_0 = \ker(B) \iff \{ \ldots \quad \Rightarrow E_0 = \text{vect}\left[\overset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}\right]$

On complète avec $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ peut prendre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ et $T_2 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} f(v_1) & f(v_2) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}$; $f(v_2) = Bv_2 = a v_2 \iff \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2$

$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $P_2^{-1} = -1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7/3 \\ 0 & 19/3 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 19/3 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5:

$\dim(E)=n$; $p \leq n$ $\quad$ → composée

u est nilpotent d'ordre p : $u^p=0$ et $\forall i \in [\![0,p-1]\!], u^i \neq 0$

$\exists x \neq 0$; $x \in E$ tq $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ libre

$u^p(x)=0$ $\quad A^p=0 \Rightarrow A^n=0$.

On a X^n est annulateur de A. $Sp(A) \subseteq \{$racines ...$\}$

ici, la seul val p est 0 → seul sol° de $\chi_u(X)=0$

D'où le poly. c. de A est de la forme X^k

Par ailleurs, le p.c est de degré n.

D'où le p.c est $X^n = \chi_u(X)$.

Exercice 6 :

$P(X) = X(X+2)$ polynôme annulateur.

· Il existe un polynôme annulateur scindé à racine simple, donc A diagonalisable.

· $Sp(A) \subset \{$racine de $P\}$; racine de $P = \{0, -2\}$

· Supposons que -2 n'est pas une valeur propre de A.
Alors 0 est l'unique val. p. et on aurait $A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$
↳ impossible : on a par hypothèse que A est non nulle.
D'où -2 est une val. p. de A.

Pour trouver un pol. an. si $A \in M_n(\mathbb{R})$, calculer / trouver sol^n de :
$a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0$

Exercice 7 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A^2 = 3I_4 + 2A$

2. On a $A^2 = 3I_4 + 2A$, donc $A^2 - 2A - 3I_4 = 0$
Ainsi $P(X) = X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A.
$= (X+1)(X-3)$
Donc {racine de P} = $\{-1, 3\}$
Comme il existe un polynôme annulateur scindé à racine simple, alors A est diagonalisable.
$Sp(A) \subset \{-1, 3\}$
Or si $Sp(A) = \{-1\}$; $A = -I_4$ ce qui est faux et si $Sp(A) = \{3\}$; $A = 3I_4$ qui est aussi faux. Donc $Sp(A) = \{-1, 3\}$

3. Pour $\lambda = -1$: soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$; $E_{-1} = \ker(-I_4 - A)$

$-I - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $rg(-I-A) = 1$

Donc d'après le thm du rg, $\dim(E) - rg(-I-A) = \dim(\ker(-I-A))$
$= 3$

$-x - y - z - t = 0 \iff x = -y - z - t$

$E_{-1} = vect\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

Rq : Si on n'avait -1 et 3 les 2 val. p. $\dim E_{-1} = 3$. On sait que A est diag.
Pour trouver l'autre val p. on calcule tr(A).
- $tr(A) = 0$
- $\sum vp \times \dim(E_{vp}) = -1 - 1 - 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

Pour $\lambda = 3$; $E_3 = \text{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \ker(3I_4 - A)$

Donc $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8 :

$n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. $A^3 - 3A - 4I_n = 0$ Mq $\det(A) > 0$

$P(X) = X^3 - 3X - 4$ est un polynôme annulateur.

$P'(X) = 3X^2 - 3 = 3(X^2 - 1) = 3(X+1)(X-1)$

X	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
P'		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

On a une racine réelle $b \in]1; +\infty[$ on a α et $\bar{\alpha}$ qui sont des racines.

A finir

Exercice 9 :

$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$; $\det(A) = \det(B)$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -4 \\ -1 & \lambda & 8 \\ 0 & -1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda[\lambda(\lambda-5)+8]-4 = \lambda[\lambda^2-5\lambda+8]-4 = \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = \chi_B(\lambda)$$

Pour A, pour $\lambda=2$: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_2 = \ker(2I-A)$

$E_2 = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\dim E_2 = 1 \neq$ ordre de multiplicité de $\lambda=2$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} ; \chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

pour B, pour $\lambda=2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2x_1 \\ -2x_3 = 2x_2 \\ x_2 + 3x_3 = 2x_3 \end{cases} \iff x_2 = -x_3$$

$E_2 = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

pour $\lambda=1$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = x_1 \\ -2x_3 = x_2 \\ x_2 + 3x_3 = x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_3 + x_3 = -x_1 \\ -2x_3 = x_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$E_1 = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

B diagonalisable ; $B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$

A et B pas semblables sinon A serait semblable à une matrice diagonalisable une matrice diagonale donc serait diagonalisable.

Exercice 11 :

$$(S) \iff \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad , \text{ On pose } X = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$(S) \iff X_{n+1} = A X_n$$
$$\iff X_n = A^n X_0$$

$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$. $Sp(A) = \{-1, 2, 5\}$

On a un polynôme scindé à racines simples, donc A est diag.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad ; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(-1)^n & 2^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & -2^{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

Il y a une erreur sûrement !!!

$$= \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & (-1)^{n+1} + 2^{n+2} & 0 \\ -2^{n+1} + 5^n & -2^{n+2} + 10^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

Calculer puis trouver les sep.
→ trouver P, calculer P^{-1}
→ $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ 0 & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$

Exercice 12 :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad \chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\left[(\lambda-2)(\lambda-3)-2\right]+\left[2+2(\lambda-2)\right]$$

$$=(\lambda-1)\left[\lambda^2-2\lambda-3\lambda+6-2\right]+\left[2+2\lambda-4\right]$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4)+(2\lambda-2)$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Pour $\lambda=1$

$$\begin{cases}x_1 \quad -x_3=x_1\\ x_1+2x_2+x_3=x_2\\ 2x_1+2x_2+3x_3=x_3\end{cases} \iff \begin{cases}x_3=0\\ x_1=-x_2\end{cases} \quad E_{\lambda_1}=\mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]$$

Pour $\lambda=2$:

$$\begin{cases}x_1 \quad -x_3=2x_1\\ x_1+2x_2+x_3=2x_2\\ 2x_1+2x_2+3x_3=2x_3\end{cases} \iff \begin{cases}-x_3=x_1\\ 2x_2=x_3\end{cases} \quad E_{\lambda_2}=\mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right]$$

$\exists P$ inversible et D diagonalisable tq $A=PDP^{-1}$

Trouver Ω

On cherche Ω qui commute avec A, $A\Omega=\Omega A$

$\iff PDP^{-1}\Omega=\Omega PDP^{-1}$

$\iff P^{-1}PDP^{-1}\Omega=P^{-1}\Omega PDP^{-1}$

$\iff DP^{-1}\Omega=P^{-1}\Omega PDP^{-1}$

$\iff DP^{-1}\Omega P=P^{-1}\Omega PDP^{-1}P$

$\iff DP^{-1}\Omega P=P^{-1}\Omega PD$; $B=P^{-1}\Omega P$

$\iff DB=BD$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$$

En résolvant $DB=BD$, on obtient une matrice B diagonale

$B=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$; $B=P^{-1}\Omega P \iff \Omega=PBP^{-1}$

A FAIRE

Les matrices M qui commutent avec A sont donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} 2b-c & -a+2b-c & \frac{a-c}{2} \\ -b+c & a-b+c & \frac{-a-c}{2} \\ -2b+2c & -2b+2c & c \end{pmatrix} \quad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$