Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Algèbre linéaire 3
année 2018/2019

Corrigé (succinct) du partiel du 24 octobre 2018

Exercice 1. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par la formule

$$q(x) = {x_1}^2 + 4\,x_1x_2 + 6\,x_1x_3 + 4\,{x_2}^2 + 16\,x_2x_3 + 9\,{x_3}^2.$$

1. Déterminer la forme polaire de q et la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On obtient la forme polaire b de q en polarisant les monômes dans la formule ci-dessus. On trouve alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ b(x,y) = x_1y_1 + 2\,(x_1y_2 + x_2y_1) + 3\,(x_1y_3 + x_3y_1) + 4\,x_2y_2 + 8\,(x_2y_3 + x_3 + y_2) + 9\,x_3y_3.$$

La matrice de q dans la base canonique est celle de sa forme polaire dans la même base et est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. En déduire le rang et la signature de q.

On applique l'algorithme de réduction de Gauss :

$$\begin{aligned} q(x) &= {x_1}^2 + 4\,x_1x_2 + 6\,x_1x_3 + 4\,{x_2}^2 + 16\,x_2x_3 + 9\,{x_3}^2 \\ &= (x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3)^2 - (2\,x^2 + 3\,x_3)^2 + 4\,{x_2}^2 + 16\,x_2x_3 + 9\,{x_3}^2 \\ &= (x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3)^2 + 4\,x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

L'utilisation de cette méthode justifie que l'on a bien obtenu une combinaison linéaire de carrés de trois formes linéaires linéairement indépendantes. On en déduit que le rang de q est égal à 3 (la forme q est donc non dégénérée) et que sa signature est $(2,1)$.

3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q et donner la matrice de q dans cette base.

La réduction de Gauss effectuée à la question précédente a fait apparaître trois formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendantes :

$$\ell_1(x) = x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3,\ \ell_2(x) = x_2 + x_3 \text{ et } \ell_3(x) = x_2 - x_3,$$

qui forment donc une base de $(\mathbb{R}^3)^*$. Une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q est alors obtenue en trouvant une base de $\mathbb{R}^3$ dont $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ est la base duale. La matrice de passage de la base canonique de $(\mathbb{R}^3)^*$ à la base $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ étant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base recherchée est donnée par l'inverse de la transposée de cette matrice. Après résolution d'un système linéaire, on trouve les vecteurs $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = \frac{1}{2}(-5,1,1)$ et $u_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1)$ de la base orthogonale pour q voulue. Dans cette base, la matrice de q est diagonale, de coefficients diagonaux correspondant aux coefficients devant les carrés des formes linéaires apparaissant dans la forme réduite de q, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Pour tout réel λ, on pose $v_\lambda = (\lambda, -1, 1)$ et on note F_λ l'orthogonal de v_λ par rapport à q. Déterminer la dimension de F_λ. À quelle condition sur λ a-t-on la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^3 = F_\lambda \oplus \mathrm{Vect}(\{v_\lambda\})$?

Pour tout réel λ, le vecteur v_λ est non nul et il engendre donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1. Son orthogonal F_λ pour la forme quadratique non dégénérée q est donc de dimension $3-1=2$. On a donc $\mathbb{R}^3 = F_\lambda \oplus \mathrm{Vect}(\{v_\lambda\})$ si et seulement si $F_\lambda \cap \mathrm{Vect}(\{v_\lambda\}) = \{0\}$, c'est-à-dire si $v_\lambda \notin F_\lambda$, c'est-à-dire si le vecteur v_λ n'est pas orthogonal à lui-même, autrement dit si $q(v_\lambda) \neq 0$. Un calcul donne $q(v_\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda - 3 = (\lambda+1)^2 - 4$ et on a par conséquent $\mathbb{R}^3 = F_\lambda \oplus \mathrm{Vect}(\{v_\lambda\})$ si et seulement si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -3$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n fonctions $f_1, \dots, f_n$, continues sur un intervalle borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout couple (i,j) de $\{1,\dots,n\}^2$, on pose $m_{ij} = \int_a^b f_i(t) f_j(t)\,\mathrm{d}t$ et, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}\, x_i x_j$.

1. Montrer que q est une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^n$.

La forme q est quadratique en tant que polynôme homogène de degré deux en les coordonnées du vecteur x. De plus, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) f_j(t)\,\mathrm{d}t \right) x_i x_j = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j\, f_i(t) f_j(t) \right) \mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n x_i\, f_i(t) \right)^2 \mathrm{d}t \geq 0.$$

2. Montrer que la forme q est définie positive si et seulement si la famille $\{f_1, \dots, f_n\}$ est libre.

Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on a

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a,b],\ \sum_{i=1}^n x_i\, f_i(t) = 0.$$

Le fait que cette dernière condition implique que le vecteur x est nul équivaut à dire que la famille $\{f_1, \dots, f_n\}$ est libre.

3. Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas particulier où $a = 0$, $b = 1$ et, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $f_i(t) = t^{i-1}$.

On a dans ce cas

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ m_{ij} = \int_0^1 t^{i+j-2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i+j-1}.$$

La matrice de q est la matrice de Hilbert d'ordre n.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et q une forme quadratique sur E, de forme polaire b.

1. On suppose qu'il existe un vecteur u de E, non nul et isotrope pour q, et un vecteur v de E, non orthogonal à u pour q. Montrer les propriétés suivantes :

   (a) Si v est isotrope pour q, il existe un vecteur w de E, non isotrope pour q et combinaison linéaire de u et de v.

   On suppose que le vecteur v est isotrope pour q et on cherche un vecteur w de E non isotrope pour q et de la forme $w = \alpha\, u + \beta\, v$, avec α et β des scalaires. Calculons $q(\alpha\, u + \beta\, v)$. Il vient :

   $$q(\alpha\, u + \beta\, v) = \alpha^2 q(u) + 2\alpha\beta\, b(u,v) + \beta^2 q(v).$$

   Comme u et v sont isotropes pour q, on en déduit que $q(\alpha\, u + \beta\, v) = 2\alpha\beta\, b(u,v)$. Les vecteurs u et v n'étant pas orthogonaux pour q, on a de plus $b(u,v) \neq 0$. Par conséquent, aucun vecteur w de la forme $w = \alpha\, u + \beta\, v$, avec α et β non nuls, n'est isotrope pour q. Par exemple, le vecteur $w = u + v$ n'est pas isotrope pour q

   (b) Si v n'est pas isotrope pour q, il existe un vecteur w' de E, isotrope pour q, non colinéaire à u et combinaison linéaire de u et de v.

   On suppose à présent que le vecteur v n'est pas isotrope pour q et on cherche un vecteur w' de E isotrope pour q et de la forme $w' = \alpha'\, u + \beta'\, v$, avec α' et β' des scalaires, $\beta' \neq 0$. Calculons $q(\alpha\, u + \beta\, v)$. Puisque u et v sont respectivement isotrope et non isotrope pour q, il vient :

   $$q(\alpha'\, u + \beta'\, v) = 2\alpha'\beta'\, b(u,v) + {\beta'}^2 q(v).$$

   En choisissant alors (par exemple) $\beta' = 1$ et $\alpha' = -\frac{q(v)}{2\, b(u,v)}$ (ce qui est possible puisque $b(u,v) \neq 0$), on obtient que $q(\alpha'\, u + \beta'\, v) = 0$. Le vecteur $w' = -\frac{q(v)}{b(u,v)}\, u + v$ est donc isotrope pour q.

2. On note $\mathcal{C}_q$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont isotropes pour q et $\mathrm{Ker}\,(q)$ le noyau de q. En utilisant la question précédente, montrer que $\mathcal{C}_q$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\mathcal{C}_q = \mathrm{Ker}\,(q)$ (on pourra raisonner par contraposée).

Si $\mathcal{C}_q = \mathrm{Ker}\,(q)$, alors $\mathcal{C}_q$ est un sous-espace vectoriel de E puisque $\mathrm{Ker}\,(q)$ en est un.
Supposons à présent que $\mathcal{C}_q \neq \mathrm{Ker}\,(q)$. Par définition, tous les éléments de $\mathrm{Ker}\,(q)$ sont isotropes pour q, on a donc $\mathrm{Ker}\,(q) \subset \mathcal{C}_q$. Par ailleurs, comme ces ensembles ne sont pas égaux, il existe un vecteur u tel que $u \in \mathcal{C}_q$ et $u \notin \mathrm{Ker}\,(q)$. Ainsi, le vecteur u est non nul, isotrope et il existe un vecteur v de E qui n'est pas orthogonal à u pour q. Les hypothèses de la première question sont donc vérifiées et alors :

— Si v est isotrope pour q, alors $w = u + v$ n'est pas isotrope pour q et l'on a : $u \in \mathcal{C}_q$, $v \in \mathcal{C}_q$, $u + v \notin \mathcal{C}_q$.

— Si v n'est pas isotrope pour q, alors $w' = -\frac{q(v)}{b(u,v)}\,u + v$ est isotrope pour q et l'on a $u \in \mathcal{C}_q$, $w' \in \mathcal{C}_q$, $\frac{q(v)}{b(u,v)}\,u + w' \notin \mathcal{C}_q$.

Dans les deux cas de figure, il est possible de trouver une combinaison linéaire de deux vecteurs de $\mathcal{C}_q$ qui n'appartient pas $\mathcal{C}_q$, prouvant que $\mathcal{C}_q$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et b une forme bilinéaire symétrique sur E. On considère deux applications φ et ψ de E dans E vérifiant la propriété

$$\forall (x,y) \in E^2,\ b(\varphi(x), y) = b(x, \psi(y)).$$

1. Montrer que

   (a) $\forall (x,y,z) \in E^3$, $b(\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y), z) = 0$.

   Par bilinéarité de b, il vient :

   $$\forall (x,y,z) \in E^3,\ b(\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y), z) = b(\varphi(x+y), z) - b(\varphi(x), z) - b(\varphi(y), z).$$

   En utilisant la propriété, on a alors :

   $$b(\varphi(x+y), z) - b(\varphi(x), z - b(\varphi(y), z) = b(x+y, \psi(z)) - b(x, \psi(z)) - b(y, \psi(z)) = b(x+y-x-y, \psi(z)) = 0.$$

   (b) $\forall (x,z) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $b(\varphi(\lambda\, x) - \lambda\, \varphi(x), z) = 0$.

   De même, on a, en utilisant la bilinéarité de b et la propriété :

   $$\begin{aligned}\forall (x,z) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ b(\varphi(\lambda\, x) - \lambda\, \varphi(x), z) &= b(\varphi(\lambda\, x), z) - \lambda\, b(\varphi(x), z) \\ &= b(\lambda\, x, \psi(z)) - \lambda\, b(x, \psi(z)) \\ &= b(\lambda\, x - \lambda\, x, \psi(z)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. On suppose dans cette question que la forme b est non dégénérée.

   (a) Déduire de la question précédente que φ est une application linéaire. Montrer de la même façon que ψ est une application linéaire.

   On a montré dans la question précedente que pour tous vecteurs x et y de E et tout réel λ, les vecteurs $\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)$ et $\varphi(\lambda\, x) - \lambda\, \varphi(x)$ appartiennent au noyau de b. Or, si b est non dégénérée, ce noyau est réduit au vecteur nul. On a donc obtenu que

   $$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ et } \varphi(\lambda\, x) = \lambda\, \varphi(x),$$

   c'est-à-dire que l'application φ est linéaire. La forme b étant symétrique, les applications φ et ψ jouent le même rôle dans les formules précédentes et l'application ψ est donc elle aussi une application linéaire.

   (b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On note respectivement M_φ et M_ψ les matrices de φ et de ψ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que les matrices ${M_\varphi}^\top$ et M_ψ sont semblables.

   Traduisons matriciellement la propriété en notant M la matrice de la forme bilinéaire b par rapport à la base $\mathcal{B}$. On a ainsi :

   $$(M_\varphi X)^\top M Y = X^\top M (M_\psi Y),$$

   soit encore $X^\top({M_\varphi}^\top M)Y = X^\top(M M_\psi)Y$. L'égalité étant vraie pour tous X et Y, on en déduit que ${M_\varphi}^\top M = M M_\psi$. La matrice M étant inversible en tant que matrice représentative d'une forme bilinéaire non dégénérée, on obtient finalement que ${M_\varphi}^\top = M M_\psi M^{-1}$.

3. En choisissant $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple de forme bilinéaire symétrique non nulle b et d'application θ de E dans E *non linéaire* vérifiant la propriété

   $$\forall (x,y) \in E^2,\ b(\theta(x), y) = b(x, y).$$

On remarque que la propriété voulue dans cette question correspond à celle du début de l'exercice en posant $\varphi = \theta$ et $\psi = Id_E$, où Id_E est l'application identique de E dans E. D'après la question précédente, l'application θ est nécessairement linéaire si b est non dégénérée. La forme bilinéaire symétrique b doit donc être choisie dégénérée, un exemple simple d'une telle forme sur $E = \mathbb{R}^2$ étant celle ayant pour matrice $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$. Ainsi, en choisissant b définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et tout $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b(x,y) = x_1 y_1$, l'application θ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $\theta(x) = (x_1, 1)$ n'est pas linéaire et vérifie la propriété.