Correction CC Algèbre linéaire 3, 21 Novembre 2022

Exercice 1. — 1. On résout l'équation caractéristique $\lambda^2X^2 = \lambda X + 1$. On trouve deux racines réelles $\frac{1-\sqrt{5}}{2\lambda}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2\lambda}$. Ainsi

$$S = \left\{ \left(a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\lambda}\right)^n + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\lambda}\right)^n \right)_{n\in\mathbb{N}}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Par la question 1, il existe a et b des réels tels que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\lambda}\right)^n + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\lambda}\right)^n.$$

Donc on a ici $u_0 = a+b$ et $u_1 = a\frac{1-\sqrt{5}}{2\lambda} + b\frac{1+\sqrt{5}}{2\lambda}$, on résout donc $a+b=0$ et $a\frac{1-\sqrt{5}}{2\lambda} + b\frac{1+\sqrt{5}}{2\lambda} = 2$. On trouve $a = -\frac{2\lambda}{\sqrt{5}}$ et $b = \frac{2\lambda}{\sqrt{5}}$. D'où pour tout entier naturel n

$$u_n = -\frac{2\lambda}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\lambda}\right)^n + \frac{2\lambda}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\lambda}\right)^n.$$

3. Par la question 1, il existe a et b des réels tels que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

On a ici $v_0 = a+b$ et $v_1 = a\frac{1-\sqrt{5}}{2} + b\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on résout donc $a+b = v_0$ et $a\frac{1-\sqrt{5}}{2} + b\frac{1+\sqrt{5}}{2} = v_1$. On trouve

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}v_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}v_1 \text{ et } b = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}v_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}v_1.$$

D'où pour tout entier naturel n

$$v_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}v_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}v_1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}v_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}v_1\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

On remarque que $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1,0[$ et que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$. Ainsi, si $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}v_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}v_1 > 0$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, si $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}v_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}v_1 < 0$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et si $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}v_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}v_1 = 0$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 2. — 1. La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} a & a & \frac{3}{2}a \\ a & a-1 & \frac{5}{2}a \\ \frac{3}{2}a & \frac{5}{2}a & \frac{9}{4}a - a^2 \end{pmatrix}.$$

2. En commençant avec la variable x_1 puis x_2 on obtient la forme réduite

$$q(x) = a(x_1 + x_2 + \tfrac{3}{2}x_3)^2 - (x_2 - ax_3)^2.$$

3. La signature de q est $(1,1)$ si $a > 0$, $(0,2)$ si $a < 0$, $(0,1)$ si $a = 0$.

4. Oui q peut être négative. q est négative pour n'importe quel $a < 0$.

5. q n'est jamais définie car la signature de q n'est jamais $(3,0)$ ou $(0,3)$.

5. On a par le cours $x \in \ker(q)$ si et seulement si

$$\sqrt{|a|}\left(x_1 + x_2 + \tfrac{3}{2}x_3\right) = 0 \text{ et } x_2 - ax_3 = 0.$$

D'où $\ker(q) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -a-\frac{3}{2} \\ a \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ si $a \neq 0$ et $\ker(q) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ si $a = 0$. Si $a \neq 0$, le rang de q est 2 et si $a = 0$ le rang de q est 1.

Exercice 3. — 1. $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$.

2. Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

On a par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} b_\lambda(P+\mu Q, R) &= \lambda(P(0)+\mu Q(0))R(0) + \int_0^1 (P(t)+\mu Q(t))R(t)dt \\ &= \lambda P(0)R(0) + \int_0^1 P(t)R(t)dt + \mu\left(\lambda Q(0)R(0) + \int_0^1 Q(t)R(t)dt\right) \\ &= b_\lambda(P,R) + \mu b_\lambda(Q,R). \end{aligned}$$

Donc b_λ est linéaire à gauche.

On a aussi

$$b_\lambda(P,R) = \lambda P(0)R(0) + \int_0^1 P(t)R(t)dt = \lambda R(0)P(0) + \int_0^1 R(t)P(t)dt = b_\lambda(R,P).$$

Donc b_λ est symétrique.

b_λ est linéaire à gauche et symétrique donc linéaire à droite.

Conclusion, b_λ est une forme bilinéaire symétrique réelle.

3. On sait déjà que b_λ est une forme bilinéaire symétrique réelle. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

On a comme P^2 est une fonction positive, et λ est positive

$$b_\lambda(P,P) = \lambda P(0)^2 + \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0.$$

Si $b_\lambda(P,P) = 0$ on a, comme b_λ est la somme de deux carrés,

$$\lambda P(0)^2 = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)^2 dt = 0.$$

Comme P^2 est une fonction continue et positive, il vient que P s'annule sur $[0,1]$. Donc le polynôme P admet une infinité de racines. Ainsi P est le polynôme nul.

4(a). On calcule

$$b_\lambda(P,Q) = \lambda(x_1 \times 0 + x_0)(y_1 \times 0 + y_0) + \int_0^1 (x_1 t + x_0)(y_1 t + y_0)dt.$$

On obtient que

$$b_\lambda(P,Q) = \tfrac{1}{3}x_1y_1 + \tfrac{1}{2}x_1y_0 + \tfrac{1}{2}x_0y_1 + (1+\lambda)x_0y_0. \tag{1}$$

4(b). On utilise la question précédente puisque P et Q sont décomposés dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ est alors

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

4(c). Nous proposons deux méthodes.

Méthode 1 : Réduction de Gauss

L'expression (1) pour $b_\lambda(P,P)$ est une forme quadratique en les variables (x_0,x_1). On effectue la réduction de Gauss en commençant par x_1 et on obtient

$$b_\lambda(P,P)=\tfrac{1}{3}(x_1+\tfrac{3}{2}x_0)^2+(\tfrac{1}{4}+\lambda)x_0^2.$$

On voit alors que la signature de la forme quadratique précédente est $(2,0)$ si et seulement si $\lambda>-\frac{1}{4}$. Ainsi comme on sait déjà que b_λ est symétrique bilinéaire réelle, c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$ si et seulement si $\lambda>-\frac{1}{4}$.

Méthode 2 : Critère de Sylvester

On applique le critère de Sylvester à la matrice (2). Ainsi, b_λ est définie positive si et seulement si $1+\lambda>0$ et $(1+\lambda)\frac{1}{3}-\frac{1}{4}>0$. Ainsi b_λ est définie positive si et seulement si $\lambda>-1$ et $\lambda+\frac{1}{4}>0$. Comme b_λ est une forme bilinéaire symétrique, il vient que b_λ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$ si et seulement si $\lambda>-\frac{1}{4}$.

5. On remarque que comme $n\in\mathbb{N}^*$,

$$b_{-\frac{1}{2}}((1-X)^n,(1-X)^n)=-\frac{1}{2}\times 1^2+\int_0^1(1-t)^{2n}dt=-\frac{1}{2}+\tfrac{1}{2n+1}<0.$$

Donc $b_{-\frac{1}{2}}$ n'est pas positive donc n'est pas un produit scalaire.

Exercice 4. — 1. Introduisons sur $\mathbb{R}^n$ un produit scalaire : pour $x=(x_0,\cdots,x_{n-1})$ et $y=(y_0,\cdots,y_{n-1})$ on définit

$$<x,y>=\sum_{k=0}^{n-1}x_ky_k.$$

Montrons que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Soit $x=(x_0,\cdots,x_{n-1})$, $y=(y_0,\cdots,y_{n-1})$, $z=(z_0,\cdots,z_{n-1})$ et $\mu\in\mathbb{R}$.

On a par linéarité de la somme

$$\begin{aligned}<x+\mu y,z> &=\sum_{k=0}^{n-1}(x_k+\mu y_k)z_k=\sum_{k=0}^{n-1}x_kz_k+\mu\sum_{k=0}^{n-1}y_kz_k\\ &=<x,z>+\mu<y,z>.\end{aligned}$$

Donc $<,>$ est linéaire à gauche.

On a aussi

$$<x,z>=\sum_{k=0}^{n-1}x_kz_k=\sum_{k=0}^{n-1}z_kx_k=<z,x>.$$

Donc $<,>$ est symétrique.

Comme $<,>$ est linéaire à gauche et symétrique, elle est linéaire à droite.

On a $<x,x>=\sum_{k=0}^{n-1}x_k^2\geq 0$ comme somme de carré. Donc $<,>$ est positive.

Si $<x,x>=0$, comme $<x,x>$ est une somme de carré, il vient que pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $x_k^2=0$ et donc que $x_k=0$. Donc $<,>$ est définie.

On applique ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz à ce produit scalaire : $<x,y>^2\leq<x,x><y,y>$ et donc

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}x_ky_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=0}^{n-1}x_k^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}y_k^2\right). \tag{3}$$

L'idée est alors de choisir de bons vecteurs x et y. Au vu de l'énoncé, on prend $x_k=\frac{1}{2^k}$ et $y_k=a_k$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à ces deux vecteurs nous obtenons donc

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}a_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k^2\right)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4^k}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k^2\right).$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k} = \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

D'où

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)^2 \leq \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2\right).$$

2. On rappelle qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (3) si et seulement si x et y sont liés. Ainsi, il existe deux réels α, β tels que $\alpha x + \beta y = 0$. Au vu des vecteurs x et y choisis dans la question 1, on obtient pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\alpha 2^{-k} + \beta a_k = 0.$$

Il vient donc qu'il y a égalité si et seulement si il existe un réel λ ($\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ avec les notations précédentes vu que β ne peut être nul ici si $\alpha \neq 0$) tel que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$a_k = \lambda \frac{1}{2^k}.$$