$x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$

$A^{\perp} = \{x \in E, \forall y \in A \ \langle x, y \rangle = 0\}$.

famille $(e_i)_i$ orthogonale $\forall i \neq j \ \langle e_i, e_j \rangle = 0$

famille $(e_i)_i$ orthonormale (orthonormée) : orthogonale et $\forall i \ \|e_i\| = 1$

E euclidien : Pythagore

$(e_i)_i$ famille orthogonale $\|\sum_{i=1}^{n} e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2$

prop: une famille orthogonale est libre

Base orthogonale - orthonormale

prop: $(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormale

$\forall x \in E \quad x = \sum x_i e_i$ — x_i sont les coordonnées de x dans

$\forall y \in E$ — cette base qui vérifie $x_i = \langle x, e_i \rangle$

$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$

Gram-Schmidt

Procédé d'orthonormalisation : construction d'une base orthonormale.

On part d'une famille libre $(x_1, \dots, x_n)$

Rappel : toute famille libre engendre un SEV

Par recurrence :

$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \qquad z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$

$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, z_j \rangle z_j \qquad z_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$

$(y_1, \dots, y_k)$ base orthogonale ; $(z_1, \dots, z_n)$ base orthonormale.

Exercice 1 :

$$x_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \; ; \; x_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \; ; \; x_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \; ; \; \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- $y_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ car $\|x_1\| = \sqrt{2} = \sqrt{1^2+1^2}$

- $\boxed{z_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$

- $y_2 = x_2 - \displaystyle\sum_{j=1}^{2-1=1} \langle x_2, z_j\rangle z_1 = x_2 - \langle x_2, z_1\rangle z_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}_{1\times1+1\times0+1\times1=2} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = y_2$$

- $z_2 = \dfrac{y_2}{\|y_2\|}$; $\|y_2\| = 1$

$\boxed{z_2 = y_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}$

- $y_3 = x_3 - \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \langle x_3, z_i\rangle z_i = x_3 - \langle x_3, z_1\rangle z_1 - \langle x_3, z_2\rangle z_2$

$$= \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\cdot \langle x_3, \sqrt{2}\, z_1\rangle = (-1)\times1 + 0 + 0 = -1$; $\langle x_3, z_1\rangle z_1 = -\frac{1}{2}\cdot z_1$

$\cdot \langle x_3, z_2\rangle = 0 + (-1)\times1 + 0 = -1$; $\langle x_3, z_2\rangle z_2 = -z_2$

$$y_3 = x_3 + \frac{1}{2}z_1 + z_2 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

- $z_3 = \dfrac{y_3}{\|y_3\|}$; $\|y_3\| = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}$ $\qquad z_3 = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Exercice 2:

$\{\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{X}_{x_2}, \underbrace{X^2}_{x_3}\}$; $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$

$x_1 = 1$; $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$; $\|x_1\| = \sqrt{\langle x_1,x_1\rangle} = \sqrt{\langle 1,1\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1\,dt} = \sqrt{[t]_{-1}^{1}} = \sqrt{2}$

$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1}$

$x_2 = X$; $y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1\rangle = X - \langle X, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = X - \frac{1}{2}\langle X,1\rangle$; $\langle X,1\rangle = \int_{-1}^{1} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$

$y_2 = X$

$z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{X}{\|X\|}$; $\|X\| = \sqrt{\langle X,X\rangle} = \sqrt{\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\boxed{z_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot X}$

$x_3 = X^2$; $y_3 = x_3 - \langle x_3, z_1\rangle z_1 - \langle x_3, z_2\rangle z_2$

$= X^2 - \frac{1}{2}\langle X^2, 1\rangle - \frac{3}{2}\langle X^2, X\rangle X$

$= X^2 - \frac{1}{3}$

; $\langle X^2, 1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

$\langle X^2, X\rangle = \int_{-1}^{1} t^3\,dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$

$z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|}$; $\|y_3\| = \sqrt{\langle X^2 - \frac{1}{3}, X^2 - \frac{1}{3}\rangle}$

$= \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt} = \sqrt{\int_{0}^{1} t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\,dt} = \sqrt{\left[\frac{t^5}{5} - \frac{2}{9}t^3 + \frac{1}{9}t\right]_{0}^{1}}$

$= \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{8}{45}}$

$z_3 = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}} \times \left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$

$\boxed{z_3 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}X^2}$

1. Mq {e1,...en} b.o.n:
Comme les (ei) sont unitaire, et que pour le p.s:

On a alors 1 = $\sum_{j=1}^{n}$<ei,ej>
-> conclure que <ei,ej>=0 si i≠j

1. Mq {e1,...,en} base de E pour mq dim(E)=n
Pour x dans E, mq x=y avec y = ∑<x,ei>ei (y appartient donc au vect{e1,...en})

Calculer pour tout entier k dans [1,n], <y,ek>, conclure que x = y et donc tout x dans est une combinaison linéaire de {e1,...,en}.
-> {e1,...en} génère E (base de E)
=>
dim(E)=dim(vect{e1,...,en})

Exercice 3 :

$(e_1, \dots, e_n)$ famille de n vecteurs, $\forall i \ \|e_i\| = 1$, $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$ (*)

$\forall k \ \|e_k\|^2 = 1$

Et $1 = \sum_{j=1}^{n} \langle e_k, e_j \rangle^2 = \langle e_k, e_k \rangle^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \langle e_k, e_j \rangle^2 = 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \langle e_k, e_j \rangle^2 \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \langle e_k, e_j \rangle^2 = 0$

D'où $\forall j \neq k$ $\langle e_k, e_j \rangle = 0$, $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale donc libre.

Montrons $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E.

<=> $\forall x \in E$, on va mq x peut s'écrire comme une c.l. des $(e_1, \dots, e_n)$.

$\forall x, \langle 0, x \rangle = 0$

Soit $x \in E$, on pose $y = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, e_j \rangle e_j$ donc $y \in \text{vect}\{e_1, \dots, e_n\}$.

On veut mq $x = y$

on "sort" le scalaire du p.s
linéarité du p.s

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\langle y, e_k \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\langle x, e_j \rangle}_{\text{scalaire}} \cdot e_j, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle$

$= \langle x, e_k \rangle \underbrace{\langle e_k, e_k \rangle}_{=1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{=0}$

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle$; $\langle y - x, e_k \rangle = 0$

comme $y - x \in E$, $\|y - x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle y - x, e_k \rangle^2 = 0$ par hypothèse $\Rightarrow y - x = 0$

Donc $x = y$

Conclusion : on a mq $\forall x \in E$, x est c.l de $(e_1, \dots, e_n)$
- la famille est géné. de E
- libre et géné donc base de E, $\dim(E) = n$
- $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale

Exercice 4 :

1. $u+v \perp u-v \iff \langle u+v, u-v\rangle = 0 \iff \langle u,u\rangle + \langle u,-v\rangle + \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle = 0$

$\iff \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0 \iff \|u\|^2 = \|v\|^2 \iff \|u\| = \|v\|$

2. $\forall x \in E$, $\langle f(x), f(x)\rangle = \lambda^2 \langle x, x\rangle$; $\|f(x)\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$ Donc $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$

$\iff$ 1. $\forall (x,y) \in E^2$ $A = \|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 = \langle f(x+y), f(x+y)\rangle - \langle f(x), f(x)\rangle - \langle f(y), f(y)\rangle$

$= 2\langle f(x), f(y)\rangle$ (f est endo donc linéaire)

2. Comme f similitude : $A = \lambda^2 \|x+y\|^2 - \lambda^2 \|x\|^2 - \lambda^2$

$\|y\|^2 = 2\lambda^2 \langle x, y\rangle$. D'où $\forall x, y$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2 \langle x, y\rangle$

3. a) On suppose f similitude : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$

- En particulier par x unitaire, alors $\|f(x)\| = \lambda > 0$ (non nulle, $\exists x$, $f(x) \neq 0$)
- Soient x et y tq $x \perp y$, on a $\langle x, y\rangle = 0$ avec la q.2, on a $\langle f(x), f(y)\rangle = 0$ donc $f(x) \perp f(y)$

b) On suppose f est non nulle et f conserve l'orthogonalité

$(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormale de E (orthogonale et unitaire).

$\forall i,j$ $\langle e_i + e_j, e_i - e_j\rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1 = 0$

Donc $e_i + e_j \perp e_i - e_j$.

f endo

Comme f conserve l'orthogonalité, alors $f(e_i + e_j) \perp f(e_i - e_j) = f(e_i) + f(e_j) \perp f(e_i) - f(e_j)$

D'après 1. $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$ $\forall i,j$

c) On a $\forall i$, les $\|f(e_i)\|$ sont égaux, donc $\forall i$ $\|f(e_i)\| = \beta \geq 0$

Mais $\beta \neq 0$, car sinon $\forall i$: $\|f(e_i)\| = 0$; on aurait $f(e_i) = 0$ or f non nulle.

On sait que $(e_1, \dots, e_n)$ base, $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$\|x\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\|^2$ car base orthogonale

$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i$ car b.o.n

$\|f(x)\|^2 = \|f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\|^2$ car f endo.

$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|f(e_i)\|^2$ car $(f(e_i))$ base orthogonale

Or $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \beta^2 = \beta^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \beta^2 \|x\|^2$

Donc $\forall x \in E$, avec $\beta > 0$ $\|f(x)\| = \beta \|x\|$.

f similitude de rapport β.

$A^\perp = \{x \in E,\ \forall y \in A,\ \langle x, y\rangle = 0\}$

prop : $E = A \oplus A^\perp$

$(x_1, \dots, x_n)$ libre $\quad y_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$; $x_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|} = y_0$

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j\rangle z_j \qquad z_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$$

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \left\langle x_k, \frac{y_j}{\|y_j\|}\right\rangle \frac{y_j}{\|y_j\|}$$

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\|y_j\|^2} \langle x_k, y_j\rangle \cdot y_j$$

$(y_1, \dots, y_n)$ base orthogonale
$(z_1, \dots, z_n)$ ——————————

Déf : $E = A \oplus A^\perp$

$\forall x \in E$, $x = u + v$ avec $u \in A$ et $v \in A^\perp$ s'écrit de manière unique.

$P_A : E \to A$
$x \mapsto P_A(x) = u$

Prop : 1. $\forall x \in E$, i- $P_A(x) \in A$

$x - P_A(x) \in A^\perp$

$x = P_A(x) + (x - P_A(x))$

ii- $\forall y \in A$ $\ x - P_A(x) \perp y$

2. Si $(e_1, \dots, e_n)$ base orthogonale de A, $\forall x \in E$, $P_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i$

Rappel : p projecteur $\Rightarrow$ p endo et $p \circ p = p$
$E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$

3. · Si p est une projection orthogonale, alors $p \circ p = p$,
· si p est endo vérifiant $p \circ p = p$ et $\mathrm{Im}(p) = \ker(p)^\perp$, alors p projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(p)$.

4. Caractérisation de la pté de minimalité
$\forall x \in E$, $\|x - P_A(x)\| = \mathrm{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$

Exercice 5 :

$\omega : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\forall t \in [a,b]$, $\omega(t) > 0$

$\forall (P,Q) \in E^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\,\omega(t)\,dt$

1. soit $n \in \mathbb{N}$, · On applique G.S. à partir de la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$

· On note $(Q_0, \dots, Q_n)$ la base obtenue.

On veut montrer par rec. $\forall j \in [\![0,n]\!]$ $\deg(Q_j) = j$

· $Q_0 = \dfrac{1}{\|1\|}$; $\langle 1, 1 \rangle = \int_a^b \omega(t)\,dt > 0$

$Q_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\int_a^b \omega(t)\,dt}}$, donc $\deg(Q_0) = 0$

· par $k \leq n-1$ $(Q_0, \dots, Q_k)$ tq les polynômes sont 2 à 2 orthogonaux et $\deg(Q_j) = j$

$Q_{k+1} = X^{k+1} - \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \langle X^{k+1}, Q_j \rangle . Q_j}_{\deg \leq k}$, donc $\deg(Q_{k+1}) = k+1$

$\forall k \in [\![0,n]\!]$

$Q_k = X^k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\|Q_j\|^2} \langle X^k, Q_j \rangle Q_j$

$\forall i \in \{0, k-1\}$, $\langle Q_k, Q_i \rangle = \langle X^k, Q_i \rangle - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\|Q_j\|^2} \langle X^k, Q_j \rangle . \langle Q_j, Q_i \rangle$ $\quad 0 \leq j \leq k-1$

Or $\langle Q_j, Q_i \rangle = 0$ si $i \neq j$

$= \langle X^k, Q_i \rangle - \frac{1}{\|Q_i\|^2} \langle X^k, Q_i \rangle \langle Q_i, Q_i \rangle$

$= 0$

Donc $Q_{k+1} = k+1$

$(Q_k)_k$ orthogonale, on note P_k : pol. unitaire "p orthogonale" à Q_k

$(Q_0, \dots, Q_n)$; $\deg(Q_j) = j$; orthogonale

↪ $(P_0, \dots, P_n)$: famille orthog. donc libre donc base de $\mathbb{R}_n[X]$

2. $n \geqslant 2$, $P_{n+1} - XP_n$ orthog. à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

On veut mq $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ $\langle P_{n+1} - XP_n, Q \rangle 0$

$Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$; Q est c.l de $(P_0, \dots, P_{n-2})$

$Q = \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i P_i$ $\langle P_{n+1}, Q \rangle = \langle P_{n+1}, \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i P_i \rangle = \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i \langle P_{n+1}, P_i \rangle = 0$ car $\forall i = 0, \dots, n-2$

$\langle P_{n+1}, P_i \rangle = 0$

$$\langle XP_n, Q \rangle = \int_a^b t P_n(t) Q(t) \omega(t) dt = \int_a^b P_n(t) \cdot t\, Q(t) \omega(t) dt = \langle P_n, XQ \rangle$$

$XQ \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc cl $P_0, \dots, P_{n-1}$ d'où $\langle P_n, XQ \rangle = 0$

On a aussi $\langle P_{n+1}, Q \rangle - \langle XP_n, Q \rangle = 0$ $\langle P_{n+1} - XP_n, Q \rangle = 0$

3) $P_{n+1} - XP_n$ comme P_i unitaires

Donc $P_{n+1} - XP_n \in \mathbb{R}_n[X] \perp \mathbb{R}_{n-2}$ cl. de 0 à $n-2$

Donc $\exists a_n, b_n$ $P_{n+1} - XP_n = a_n P_n + b P_{n+1}$

$P_{n+1} = (X + a_n) \cdot P_n + b_n P_{n-1}$

- Si p est une projection orthogonale, alors $p \circ p = p$
- Si p est un projecteur (ie. endo, $p \circ p = p$) ; et si $\mathrm{Im}(p) = \ker(p)^\perp$, alors p est un projecteur orthogonale.

Exercice 7 :

Rappel :

$E = F \oplus F^{\perp}$

$x = p(x) + p(x) - p(x)$

$p(x) \perp x - p(x)$

p projecteur de E ;

p projecteur orthogonale $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit p projecteur orthogonal $\forall x \in E$, $p(x) \in Im(p) = F$

$\|x\| = \|x - p(x)\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$ par orthogonalité

Donc $\|x\|^2 \geq \|p(x)\|^2$

$\boxed{\Leftarrow}$ hypothèse : $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ et p projecteur.

Il reste à mq $Im(p) = ker(p)^{\perp}$.

Soit $x \in ker(p)^{\perp}$, on a : $x - p(x) \in ker(p)$.

$p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$

x et $x - p(x)$ sont orthogonaux.

$\|p(x)\|^2 = \|p(x) - x + x\|^2 = \|p(x) - x\|^2 + \|x\|^2$ par orthogonalité

par hyp. $\|p(x) - x\|^2 \leq 0$, alors $\|p(x) - x\| = 0$ $\Rightarrow$ $p(x) = x$ donc $x \in Im(p)$

On a par ailleurs : $dim(E) = dim(Im(p)) + dim(ker(p))$

$dim(E) = dim(ker(p))^{\perp} + dim(ker(p))$ donc $dim(ker(p)^{\perp}) = dim(Im(p))$.

On a $ker(p)^{\perp} \subset Im(p)$ et $dim(ker(p)^{\perp}) = dim(Im(p))$, d'où $ker(p)^{\perp} = Im(p)$.

1. vérifier (justifier) que la famille est libre (si oui => génératrice)

<u>Exercice 11</u> : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ base euclidienne de $\mathbb{R}^4$

$F = \text{vect}\{v_1, v_2\}$, $v_1 = (1, 2, -1, 1)$; $v_2 = (0, 3, 1, -1)$

- (v_1, v_2) libre car famille de 2 elem non colinéaire donc (v_1, v_2) est une base de F. ($\dim F = 2$ et $\dim F^\perp = 2$)

- $y_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\quad \|v_1\| = \sqrt{7}$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = z_1$

- $y_2 = \frac{1}{\sqrt{7}} - \langle v_2, z_1 \rangle \cdot z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/7 \\ 13/7 \\ 11/7 \\ -11/7 \end{pmatrix} = y_2$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots$

$z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \ldots$

$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F^\perp$ ssi $\begin{cases} \langle x, v_1 \rangle = 0 \\ \text{et} \\ \langle x, v_2 \rangle = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \\ \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z + t = 0 & (1) \\ 3y + z - t = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) + (2)$: $x + 5y = 0$

$x = -5y$

(2) : $z = -3y + t$

$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F^\perp \iff \begin{cases} x = -5y \\ z = -3y + t \end{cases}$; $x = \begin{pmatrix} -5y \\ y \\ -3y+t \\ t \end{pmatrix} = y \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{z_2} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{z_3}$

$F^\perp = \text{vect}\{z_2, z_3\}$