Université Paris-Dauphine, L2 Mathématiques
Probabilités 1 - (2021 - 2022)

Partiel - Vendredi 22 octobre 2021.

durée : 2h00.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours. On considère un ensemble Ω.

1. Donner la définition d'une tribu sur Ω.
2. Donner la définition d'une mesure de probabilité.
3. Donner la définition d'une variable aléatoire réelle.

Exercice 1. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et E et F deux événements.

1. Montrer que si $\mathrm{P}(E) = 1$ alors $\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(E)$.
2. Montrer que si $\mathrm{P}(E) = 0$ alors $\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(F)$.

On définit

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mathrm{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathrm{P}(A) = 1\}.$$

3. Montrer que $\mathcal{G}$ est une tribu.

Exercice 2.

1. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
2. En déduire les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{a(x+4)}{b+|x|} 1_{]-4,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

soit une fonction de répartition.

Exercice 3. On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ et X une variable aléatoire réelle sur cet espace de loi uniforme sur $[0, 1]$. On fixe également un réel p dans $]0, 1[$.

1. Montrer que $Y = 1_{\{X \leq p\}}$ est une variable aléatoire.
2. Est elle-discrète ? À densité ? Donner sa loi.
3. On considère trois réels $a < b < c$ ainsi que trois réels p, q et r dans $]0, 1[$ tels que $p + r + q = 1$. Construire une variable Z à l'aide de X tel que Z prenne la valeur a (resp. b, c) avec probabilité p (resp. q, r).
4. Donner et tracer la fonction de répartition de Z.

Exercice 4. Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ satisfait la propriété $(\star)$ si

$$\mathrm{P}(X = n) = p\,\mathrm{P}(X \geq n) \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

1. Que vaut $\mathrm{P}(X = 1)$?
2. Montrer que si X suit une loi géométrique de paramètre p alors X satisfait $(\star)$.
3. Soit X une variable satisfaisant $(\star)$. On note $G : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la fonction qui a tout $n \geq 1$ associe $G(n) = \mathrm{P}(X \geq n)$. Calculer G.
4. En déduire la loi de X.