Corrigé (succinct) du contrôle continu du 22 novembre 2021

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 et q la forme quadratique sur E définie par

$$\forall P \in E,\ P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2,\ q(P) = {a_0}^2 + 3{a_1}^2 + 8{a_2}^2 + 4a_0a_1 + 6a_0a_2 + 14a_1a_2.$$

Déterminer une base de E orthogonale pour q et donner la matrice de q relativement à cette base.

Effectuons une réduction de Gauss de la forme quadratique. On a

$$\forall P \in E,\ q(P) = (a_0 + 2a_1 + 3a_2)^2 - {a_1}^2 - {a_2}^2 + 2a_1a_2 = (a_0 + 2a_1 + 3a_2)^2 - (a_1 - a_2)^2.$$

Complétons ensuite la famille libre de formes linéaires obtenues, $\ell_1(P) = a_0 + 2a_1 + 3a_2$ et $\ell_2(P) = a_1 - a_2$, avec la forme $\ell_3(P) = a_2$ pour arriver à une base du dual de E. On sait qu'une base de E orthogonale pour q est donnée par une base antéduale de $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$. Les coordonnées des vecteurs de cette base dans la base canonique de E sont alors données par les coefficients respectifs des colonnes de la matrice $(M^\top)^{-1}$, avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$(M^\top)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la base q-orthogonale est donc $\{1, X - 2, X^2 + X - 5\}$. La matrice de q relativement à cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^4,\ q(x) = x_1x_2 - x_3x_4.$$

1. Déterminer la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

La matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer le rang et la signature de q.

Il est clair que la matrice déterminée dans la question précédente est de rang égal à 4 et l'on sait donc que le rang de q vaut 4. Pour déterminer la signature de la forme quadratique, effectuons une réduction de Gauss. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^4,\ q(x) = \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{4}(x_3 + x_4)^2 + \frac{1}{4}(x_3 - x_4)^2,$$

et la signature de q vaut donc $(2, 2)$.

Soit H un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^4$, d'équation cartésienne $x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_4 = 0$, avec α, β et γ des réels.

3. Quelle est la dimension de l'orthogonal de H pour q ? En donner une base.

Le sous-espace vectoriel H est un hyperplan d'un espace de dimension égale à 4, d'où $\dim(H) = 3$. D'après le cours, et puisque $\ker(q) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, on a alors

$$\dim(H^\perp) = \dim(\mathbb{R}^4) + \dim(H \cap \ker(q)) - \dim(H) = 4 + 0 - 3 = 1.$$

Une base de H est donnée par $\{(\alpha,-1,0,0),(\beta,0,-1,0),(\gamma,0,0,-1)\}$ et la forme polaire b de q est définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4,\ b(x,y) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - \frac{1}{2}(x_3y_4 + x_4y_3).$$

Tout élément x de l'orthogonal $H^\perp$ satisfait alors le système d'équations

$$b(x,(\alpha,-1,0,0)) = b(x,(\beta,0,-1,0)) = b(x,(\gamma,0,0,-1)) = 0 \iff \alpha\, x_2 - x_1 = \beta\, x_2 + x_4 = \gamma\, x_2 + x_3 = 0.$$

On en déduit que $H^\perp = \mathrm{Vect}(\{(\alpha,1,-\gamma,-\beta)\})$.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β et γ pour que la restriction $q_{|_H}$ de q à l'hyperplan H soit dégénérée. Quel est son rang dans ce cas ?

La matrice de la restriction $q_{|_H}$ relativement à la base $\{(\alpha,-1,0,0),(\beta,0,-1,0),(\gamma,0,0,-1)\}$ est

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\gamma}{2} \\ -\frac{\beta}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

La forme $q_{|_H}$ est dégénérée si et seulement si le déterminant de cette matrice est nul, c'est-à-dire si $\frac{1}{4}(\alpha - \beta\gamma) = 0$. La condition recherchée est donc $\alpha = \beta\gamma$ et l'on vérifie facilement (en utilisant la matrice ci-dessus) que $q_{|_H}$ est de rang égal à 2 lorsqu'elle est satisfaite.

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul. On considère la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(\{i,j\})\, x_i x_j.$$

1. Déterminer la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & \dots & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \dots & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=k}^{n} x_i x_j\right),$$

et utiliser cette écriture pour trouver la signature et le rang de q.

La matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ peut être écrite comme la somme

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} x_i x_j + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} x_i x_j + \dots + {x_n}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=2}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=3}^{n} x_i\right)^2 + \dots + {x_n}^2.$$

On a ainsi écrit q comme la somme de n carrés de formes linéaires qui sont clairement linéairement indépendantes. Le rang de q vaut donc n et sa signature est $(n,0)$.

Exercice 4. Soit a un nombre réel. On considère l'application b_a de $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3,\ b_a(x,y)=x_1y_1+(a+5)x_2y_2+(a^2+a+2)x_3y_3+x_1y_3+x_3y_1+2(x_1y_2+x_2y_1)+(a+3)(x_2y_3+x_3y_2).$$

Déterminer pour les valeurs de a pour lesquelles b_a est un produit scalaire.
La forme b_a s'écrit comme une combinaison linéaire de termes qui sont le produit d'une forme linéaire en x et d'une forme linéaire en y, c'est donc une forme bilinéaire pour toute valeur du réel a. Sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & a+5 & a+3\\ 1 & a+3 & a^2+a+2\end{pmatrix}$$

et elle symétrique pour toute valeur de a. Enfin, il découle du critère de Sylvester que cette matrice symétrique est définie positive si et seulement si on a

$$1>0,\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & a+5\end{vmatrix}>0 \text{ et } \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & a+5 & a+3\\ 1 & a+3 & a^2+a+2\end{vmatrix}>0,\iff a+1>0 \text{ et } a^2(a+1)>0.$$

On en déduit que b_a est un produit scalaire si et seulement si a appratient à $]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

Exercice 5 (bonus). Soit n un entier naturel non nul et E l'espace vectoriel des matrices d'ordre n à coefficients réels. L'application définie par

$$\forall(A,B)\in E^2,\ \langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}b_{ii}$$

est-elle un produit scalaire sur E ? On justifiera la réponse.
On peut montrer que l'application est bilinéaire, symétrique et positive, mais $\langle A,A\rangle$ est nul pour toute matrice A dont les coefficients diagonaux sont nuls. L'application n'est donc pas un produit scalaire.