Université Paris-Dauphine, L2
Probabilités 1 - (2021 - 2022)

CC2 - Mardi 30 novembre 2021 - 1 heure

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ désigne un espace de probabilités.

Exercice 1. Les deux questions sont indépendantes.

1. Quand dit-on d'événements $(A_i)_{i\in I}$ qu'ils sont indépendants ?
2. Soit λ un réel strictement positif et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. Pour quelles valeurs $\mu \in \mathbb{R}$ peut on définir l'espérance de la variable aléatoire $e^{\mu X}$? Pour quelles valeurs $\mu \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $e^{\mu X}$ est elle intégrable ?

Correction.

1. Voir le cours.
2. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $e^{\mu X}$ est positive et son espérance est donc bien définie. De plus
$$\mathrm{E}(e^{\mu X}) = \int e^{\mu x} \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x) dx.$$
On en déduit que $\mathrm{E}(|e^{\mu X}|) < +\infty$ si et seulement si $\mu < \lambda$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Énoncer et prouver l'inégalité de Markov.
2. Justifier que l'on puisse considérer l'espérance de X puis montrer que
$$\mathrm{P}(X > 0) \leq \mathrm{E}(X).$$

Correction.

1. Voir le cours encore.
2. Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ elle est positive et on peut donc considérer son espérance. De plus, $\mathrm{P}(X > 0) = \mathrm{P}(X \geq 1) \leq \mathrm{E}(X)/1 = \mathrm{E}(X)$ où la dernière inégalité est due à l'inégalité de Markov.

Exercice 3.

1. Rappeler la définition d'une variable aléatoire discrète. Rappeler sans preuve la condition pour qu'elle soit intégrable ainsi que l'expression de son espérance dans ce cas.

2. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de réels positifs. Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique, que

$$\sum_{n\geq 1} x_n y_n \leq (\sum_{n\geq 1} x_n^2 y_n)^{1/2} (\sum_{n\geq 1} y_n)^{1/2}.$$

3. Soit X une variable aléatoire discrète. Montrer, en utilisant la question précédente que

$$\mathrm{E}(|X|) \leq \mathrm{E}(|X|^2)^{1/2}.$$

Correction.

1. Voir le cours toujours.
2. Par définition $\sum_{n\geq 1} x_n y_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^N x_n y_n$. Or, pour tout $N \geq 1$, par Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n=1}^N x_n y_n = \sum_{n=1}^N (x_n\sqrt{y_n})(\sqrt{y_n}) \leq (\sum_{n=1}^N x_n^2 y_n)^{1/2} (\sum_{n=1}^N y_n)^{1/2}.$$

Or la suite de terme général $\sum_{n=1}^N x_n^2 y_n$ croit vers $\sum_{n\geq 1} x_n^2 y_n$. En particulier $\sum_{n=1}^N x_n^2 y_n \leq \sum_{n\geq 1} x_n^2 y_n$. De même $\sum_{n=1}^N y_n \leq \sum_{n\geq 1} y_n$. Finalement on a bien montré que pour tout $N \geq 1$

$$\sum_{n=1}^N x_n y_n \leq (\sum_{n=1}^N x_n^2 y_n)^{1/2} (\sum_{n=1}^N y_n)^{1/2}$$

et on conclut facilement en passant à la limite.

3. On note $x_n,\ n \geq 1$ l'ensemble des valeurs prises par la variables discrète X. On a alors d'après la question précédente

$$\mathrm{E}(|X|) = \sum_{n\geq 1} |x_n| \mathrm{P}(X = x_n) \leq (\sum_{n\geq 1} |x_n|^2 \mathrm{P}(X = x_n))^{1/2} (\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(X = x_n))^{1/2}$$

Or $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(X = x_n) = 1$ et $\sum_{n\geq 1} |x_n|^2 \mathrm{P}(X = x_n) = \mathrm{E}(|X|^2)$. On conclut alors facilement. Vous verrez plus tard que cette inégalité est vraie même quand la variable n'est pas supposée discrète.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ un entier et $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$ une famille d'événements. Le but de l'exercice est de montrer la formule de Poincaré (qui est, rappelons le, très rarement utile en pratique) par une autre méthode (plus facile !) que celle vue en TD.
NB : la méthode proposée en TD ne sera d'aucune utilité ici et cela ne change donc rien que vous ayez ou non traité cet exercice dans votre groupe.

1. Montrer que $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - \mathrm{E}(\prod_{i=1}^n 1_{A_i^c})$.
2. Donner le développement, pour toute famille de réels $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$, de $\prod_{i=1}^n (1 - x_i)$.
3. En déduire la formule de Poincaré :

$$\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathrm{P}(\bigcap_{j=1,\cdots,k} A_{i_j}).$$

Correction.

1. On vérifie bien que
$$\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c) = 1 - \mathrm{E}(1_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c}) = 1 - \mathrm{E}(\prod_{i=1}^{n} 1_{A_i^c}).$$

2. On a le développement suivant :
$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{J\subset\{1,\cdots,n\}} (-1)^{|J|} \prod_{j\in J} x_j = \sum_{k=0,\cdots,n} (-1)^k \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \prod_{j=1\cdots,k} x_{i_j}.$$
On note que dans la dernière écriture, le terme correspondant à $k=0$ et en fait celui correspondant à $J=\emptyset$ et vaut donc 1 (ce qui est d'ailleurs cohérent avec la convention habituelle $\prod_{\emptyset} = 1$).

3. On en déduit
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= 1 - \mathrm{E}(\prod_{i=1}^{n}(1-1_{A_i})) = 1 - \mathrm{E}(\sum_{k=0,\cdots,n} (-1)^{|k|} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \prod_{j=1\cdots,k} 1_{A_{i_j}})\\ &= 1 + \sum_{k=0,\cdots,n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathrm{E}(\prod_{j=1\cdots,k} 1_{A_{i_j}})\\ &= 1 + \sum_{k=0,\cdots,n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathrm{P}(\bigcap_{j=1\cdots,k} A_{i_j}).\end{aligned}$$
Dans cette dernière somme le terme correspondant à $k=0$, vaut -1 et annule donc le 1 qui précède la somme. On obtient alors le résultat demandé.