Def :

- Espace euclidien : E.V dim finie munie du p.s
- préhilbertien : (pas de dim finie)

- Produit scalaire : application de $E \times E \to \mathbb{R}$, $\langle \cdot , \cdot \rangle$
  - bilinéaire , symétrique
  - définie positive , $\forall x \ b(x,x) = q(x)$

$E = \mathbb{R}^n \quad \langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$

$E = \mathcal{M}_n \quad \langle A, B \rangle = tr(A^T B)$

$E = C^0([a,b], \mathbb{R}) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \, dt$

Théorème : $\|\cdot\|$ sur E : $\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

- $\|x\| = 0 \implies x = 0_E$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ → rq : On a égalité · si $x = 0$
  - $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ , y = \lambda x$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$

= si x et y colinéaire

Inégalité triangulaire : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

= · si $x = 0_E$

· si x et y col. : $\exists \lambda > 0 ; \ x = \lambda y$

- x et y sont orthogonaux $\iff \langle x, y \rangle = 0$, $b(x,y) = 0$
- $A \subset E \quad A^{\perp} = \{ y \in E , \forall x \in A , \ \langle x, y \rangle = 0 \}$
- $A \perp B$ A et B sont orthogonaux ssi $\forall x \in A , \forall y \in B \ \langle x, y \rangle = 0$

Exercice 1:

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $b(x,y) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2 - x_3y_3$

Pour $x = (0,1,1)$

On a $b(x,x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2$

$= -3 - 1 = -4 < 0$

Négatif donc b n'est pas un produit scalaire

2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $b(x,y) = 2x_1^2 + y_3^2 + 3x_1y_2 + 5x_3y_3$

Pour $x = (1,0,1)$; $y = (1,1,1)$

Mq $b(x,y) \neq b(y,x)$

- $b(x,y) = 2x_1^2 + y_3^2 + 3x_1y_2 + 5x_3y_3$
  $= 2 + 1 + 3 = 6$
- $b(y,x) = 2y_1^2 + x_3^2 + 3y_1x_2 + 5y_2x_3$
  $= 2 + 1 + 5$
  $= 9 \neq 6 = b(x,y)$

On peut aussi mq b n'est pas positif avec $x = (1,-1,0)$ $b(x,x) = -1 < 0$

Donc b n'est pas symétrique, ainsi, b n'est pas un p.s..

3. $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Soit $(x, \tilde{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- symétrie : $b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = b(y,x)$
- bilinéaire : $b(\lambda x + \tilde{x}, y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \tilde{x}_i) y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i y_i + \tilde{x}_i y_i$
  $= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i y_i$
  $= \lambda b(x,y) + b(\tilde{x}, y)$
- positif : $b(x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$ par somme de réels au carré
- défini : $b(x,x) = 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], x_i^2 = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], x_i = 0$
  $\Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ , \ |b(x,y)| \leq \sqrt{b(x,x)} \cdot \sqrt{b(y,y)}$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

4. $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \ , \ P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2$

$Q(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$

$b(P,Q) = (\alpha_0 + \alpha_1)\beta_0 + (\alpha_0 + 3\alpha_1)\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$

Soit $P, \tilde{P}, Q \in \mathbb{R}_2[X] \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}$

· symétrie : $b(P,Q) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1 + 3\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$

$= \beta_0\alpha_0 + \beta_0\alpha_1 + \beta_1\alpha_0 + 3\beta_1\alpha_1 + 3\beta_2\alpha_2$

$= (\beta_0 + \beta_1)\alpha_0 + (\beta_0 + 3\beta_1)\alpha_1 + 3\beta_2\alpha_2$

$= b(Q,P)$

· linéarité : $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 \ ; \ \tilde{P}(X) = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 X + \tilde{\alpha}_2 X^2 \ ; \ Q(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$

$b(\lambda P + \tilde{P}, Q) = (\lambda\alpha_0 + \tilde{\alpha}_0 + \lambda\alpha_1 + \tilde{\alpha}_1)\beta_0 + (\lambda\alpha_0 + \tilde{\alpha}_0 + 3(\lambda\alpha_1 + \tilde{\alpha}_1))\beta_1 + 3(\lambda\alpha_2 + \tilde{\alpha}_2)\beta_2$

$= \lambda(\alpha_0 + \alpha_1)\beta_0 + (\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1)\beta_0 + \lambda(\alpha_0 + 3\alpha_1)\beta_1 + (\tilde{\alpha}_0 + 3\tilde{\alpha}_1)\beta_1 + \lambda 3\alpha_2\beta_2 + 3\tilde{\alpha}_2\beta_2$

$= \lambda\left[(\alpha_0 + \alpha_1)\beta_0 + (\alpha_0 + 3\alpha_1)\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2\right] + (\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1)\beta_0 + (\tilde{\alpha}_0 + 3\tilde{\alpha}_1)\beta_1 + 3\tilde{\alpha}_2\beta_2$

$= \lambda b(P,Q) + b(\tilde{P},Q)$

· positivité :

$b(P,P) = (\alpha_0 + \alpha_1)\alpha_0 + (\alpha_0 + 3\alpha_1)\alpha_1 + 3\alpha_2^2 = \alpha_0^2 + \alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_1 + 3\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2$

$= \alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 + 3\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2$

$= (\alpha_0 + \alpha_1)^2 - \alpha_1^2 + 3\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 = (\alpha_0 + \alpha_1)^2 + 2\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2$

· définie : $b(P,P) = 0 \Rightarrow (\alpha_0 + \alpha_1)^2 + 2\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$

CS : $|(\alpha_0 + \alpha_1)\beta_0 + (\alpha_0 + 3\alpha_1)\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2| \leq \sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1)^2 + 2\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2} \cdot \sqrt{(\beta_0 + \beta_1)^2 + 2\beta_1^2 + 3\beta_2^2}$

Exercice 2 :

$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\langle A, B\rangle = tr(A^T B)$

$tr(A^T B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$

1. Cf. ex 1 TD 4 (A FAIRE)

→ bilinéaire symétrique : $b(A, B)$

→ $\forall A \quad b(A, A) \geq 0$

et $b(A, A) = 0 \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

↳ Conclusion : c'est un produit scalaire.

2. A et B symétrique donc $A^T = A$ et $B^T = B$

On applique l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|\langle A, B\rangle| \leq \sqrt{\langle A, A\rangle} \cdot \sqrt{\langle B, B\rangle}$$

$$\Leftrightarrow |tr(AB)| \leq \sqrt{tr(A^T A)} \cdot \sqrt{tr(B^T B)}$$

$$\Leftrightarrow |tr(AB)| \leq \sqrt{tr(A^2)} \cdot \sqrt{tr(B^2)}$$

$$\Leftrightarrow tr(AB)^2 \leq tr(A^2) \cdot tr(B^2)$$

Exercice 3 :

1. $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$, $\langle f,g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$

Symétrie :

Soit $f,g \in E$, $\langle f,g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$

$= g(0)f(0) + \int_0^1 g'(t)f'(t)\,dt$

$= \langle g,f\rangle$ donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sym

bilinéarité

Soit $f, \tilde{f}, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda f + \tilde{f}, g\rangle = (\lambda f + \tilde{f})(0)\,g(0) + \int_0^1 (\lambda f' + \tilde{f}')(t)\,g'(t)\,dt$$

$$= \lambda f(0)g(0) + \tilde{f}(0)g(0) + \int_0^1 \lambda f'(t)g'(t) + \tilde{f}'(t)g'(t)\,dt$$

$$= \lambda f(0)g(0) + \tilde{f}(0)g(0) + \lambda\int_0^1 f'(t)g'(t)dt + \int_0^1 \tilde{f}'(t)g'(t)\,dt$$

$$= \lambda\langle f,g\rangle + \langle \tilde{f},g\rangle$$

Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ linéaire à gauche, et comme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sym, alors $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilinéaire.

positivité :

Soit $f \in E$; $\langle f,f\rangle = f(0)f(0) + \int_0^1 f'(t)f'(t)\,dt$

$$= \underbrace{f(0)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car carré}}} + \int_0^1 \underbrace{f'(t)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car carré et positivité de l'intégrale}}} dt$$

$f'(t)^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0$

D'où $\langle f,f\rangle \geq 0$

définie :

$\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ et $\int_0^1 (f'(t)^2)\,dt = 0$

$f(0) = 0$ et $f'(t) = 0$ car on intègre une fx° continue sur $[0,1]$.

D'où f constante avec $f(0) = 0$, on obtient $f = 0_E$

Conclusion : bilinéaire, symétrique, définie positive ; donc c'est un p.s.

07.11.23

<u>Exercice 4:</u> $\langle \cdot,\cdot \rangle$ p.s. $b : E \times E \to \mathbb{R}$ $k \in \mathbb{R}$

$b(x,y) = \langle x,y \rangle + k \langle x,a \rangle \langle y,a \rangle$,

· a unitaire : $\|a\| = 1 \Rightarrow \langle a,a \rangle = 1$

· $b(y,x) = \langle y,x \rangle + k \langle y,a \rangle \langle x,a \rangle$

$= \langle x,y \rangle + k \langle x,a \rangle \langle y,a \rangle$ comme $\langle \cdot,\cdot \rangle$ p.s.

$= b(x,y)$

· $b(x,x) = \langle x,x \rangle + k \langle x,a \rangle \langle x,a \rangle$

$= \langle x,x \rangle + k \langle x,a \rangle^2$

En particulier $x = a$; $b(a,a) = \langle a,a \rangle + k \langle a,a \rangle^2$

$= 1 + k$ comme a unitaire

a unitaire $a \neq 0$ donc $b(a,a) > 0$ $1+k > 0$

D'où condition nécessaire $1+k > 0$

· On peut mq b est une f.b.sym.

· On veut b déf positive, $\forall x$ $b(x,x) = \langle x,x \rangle + k \langle x,a \rangle^2$

→ on avait montré $b(x,x) \geq 0$ $\forall x$ $b(x,x) = 0 \iff x = 0$ si $k+1 > 0$

· Montrons si $k+1 > 0$, alors b est déf. pos. $k > -1$.

· si $k \geq 0$ · * on a alors $\forall x$ $b(x,x) \geq 0$

· $b(x,x) = 0$, comme on a une Σ de termes ⊕, chacun des termes doit être $= 0$.

Ainsi $\langle x,x \rangle = 0$ donc $x = 0$

· Si $k \in]-1,0[$: on utilise in. C.S :

$|\langle x,a\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle} \cdot \sqrt{\langle a,a\rangle}$ donc $\langle x,a\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle \cdot \underbrace{\langle a,a\rangle}_{=1}$

car a unitaire

D'où $\langle x,a\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle$

Comme $k<0$, $k\langle x,a\rangle^2 \geq k\langle x,x\rangle$ et donc :

$b(x,x) = \langle x,x\rangle + k\langle x,a\rangle^2 \geqslant \langle x,x\rangle + k\langle x,x\rangle = (1+k)\langle x,x\rangle$

D'où $b(x,x) \geq 0$.

Si $b(x,x)=0$ c'est donc que $(1+k)\langle x,x\rangle \leq 0$ (car on avait $b(x,x) \geqslant 0$)

aussi $(1+k)\langle x,x\rangle = 0$

Comme $1+k \neq 0$ donc $\langle x,x\rangle = 0$ et $x=0$.

Exercice 5 :

On utilise $\langle a,b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

On a $\langle a,b\rangle^2 \leq \|a\|^2 \|b\|^2$

Donc $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

En posant $b = (1, \dots, 1)$ on obtient : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1^2}_{=n}$

On a donc bien $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

Egalité si $\exists \lambda$; $a = \lambda b$; $\forall i$ $a_i = \lambda$

Donc on a égalité si $\forall i,j$, $a_i = a_j$

2. On a pour $a = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$; $b = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$

$\langle a,b\rangle = (\underbrace{\sum 1}_{=n})^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{a_i})^2}_{=1 \text{ par hypothèse}} = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2$

$\Leftrightarrow$ $n^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$

On a égalité si $\sqrt{a_i} = \frac{\lambda}{\sqrt{a_i}}$ $\forall i$ donc si $\forall i$, $a_i = \lambda$

Comme $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$; alors $a_i = \frac{1}{n}$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$.

Exercice 6 :

Rq : $x \in \mathbb{R}^n$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; $\langle x, x \rangle = X^T X$

· $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \in \mathbb{R}^n$

On suppose $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}$ $\|AX\|^2 \leq \|X\|^2$

$\underbrace{\|A^T X\|_2^2}_{\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = \left(\sqrt{\langle A^T X, A^T X \rangle}\right)^2 = (A^T X)^T \cdot A^T X = \underbrace{X^T A A^T X}_{\in \mathcal{M}_{n,1}} = \langle X, AA^T X \rangle$

Or $\langle X, AA^T X \rangle \overset{C.S}{\leqslant} \|X\|_2 \cdot \|\underbrace{AA^T X}_{\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\|_2$ or $\|\underbrace{AA^T X}_{\in \mathcal{M}_{n,1}}\| \leq \|\underbrace{A^T X}_{\in \mathcal{M}_{n,1}}\|$

On a donc $\|A^T X\|_2^2 \leq \|X\|_2 \cdot \|A^T X\|_2$

comme $\forall X$ $\|X\| \geq 0$, alors $\forall X$, $\|X\| \geq \|A^T X\|$

1er cas : si $\|A^T X\| = 0$ alors on a bien $0 = \|A^T X\| \leq \|X\|$ car $\forall X$ $\|X\| \geq 0$

2ème cas : si $\|A^T X\| \neq 0$ en simplifiant on a bien $\|A^T X\| \leq \|X\|$

Exercice 7 : $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$; $2x^2+y^2+5z^2\leq 1$ Mq $(x+y+z)^2\leq \frac{17}{10}$

$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $<X,Y>^2=\left(\sum_{i=1}^{3} x_i y_i\right)^2 \leq \|X\|^2\cdot\|Y\|^2$

avec $(a,b,c)\in(\mathbb{R}^*)^3$; $<\begin{pmatrix}ax\\by\\cz\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\ 1/b\\ 1/c\end{pmatrix}>^2=(x+y+z)^2$

Par hypothèse : $2x^2+y^2+5z^2\leq 1$

$$<\begin{pmatrix}ax\\by\\cz\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\ 1/b\\ 1/c\end{pmatrix}>^2 \leq \left\|\begin{pmatrix}ax\\by\\cz\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\ 1/b\\ 1/c\end{pmatrix}\right\| = (a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$a=\sqrt{2}$
$b=1$
$c=\sqrt{5}$

$$= (2x^2+y^2+5z^2)\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{5}\right)$$

$$= \underbrace{(2x^2+y^2+5z^2)}_{\leq 1}\cdot\frac{17}{10} \leq \frac{17}{10}$$

Donc $<\begin{pmatrix}ax\\by\\cz\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\ 1/b\\ 1/c\end{pmatrix}>^2=(x+y+z)^2\leq\frac{17}{10}$

Exercice 8 :

u continue et $\forall t \in [0,1]$, $u(t) > 0$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = \int_0^1 u^k(t)dt$ → puissance (par composée)

$V_k = \frac{I_{k+1}}{I_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Mq $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definie et ↗.
qu'elle existe

· Par hyp. $u(t)>0$ [...] donc la suite est bien def.

· On veut mq (V_k) ↗ $V_k \leq V_{k+1}$ cad $\frac{I_{k+1}}{I_k} \leq \frac{I_{k+2}}{I_{k+1}}$ cad : $(I_{k+1})^2 \leq I_k \cdot I_{k+2}$

On utilise $<f,g> = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt. \leq \int_0^1 f(t)^2\,dt \cdot \int_0^1 g(t)^2\,dt$

$I_{k+1}^2 = \left(\int_0^1 u^{k+1}(t)\,dt\right)^2$; $I_k \cdot I_{k+2} = \int_0^1 u^k(t)dt \cdot \int_0^1 u^{k+2}(t)\,dt$

$I_{k+1}^2 = \left(\int_0^1 u^{k+1}(t)dt\right)^2 = \left(\int_0^1 u^{\frac{k}{2}}(t) \cdot u^{\frac{k+2}{2}}dt\right)^2$

$= <u^{\frac{k}{2}}, u^{\frac{k+2}{2}}>^2 \leq \|u^{\frac{k}{2}}\|^2 \cdot \|u^{\frac{k+2}{2}}\|^2 = \int_0^1 u^k(t)\,dt \cdot \int_0^1 u^{k+2}(t)\,dt = I_k \cdot I_{k+2}$

On a bien $I_{k+1}^2 \leq I_k \cdot I_{k+2}$

Exercice 9 :

$E = C([a,b], \mathbb{R}^*)$

On a fx° continue sur $[a,b]$ et ne s'annule pas sur $[a,b]$. Donc de signe cste.

On peut prendre u tq $\forall t$; $u(t) > 0$ (ou on prend $-u$)

On prend $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \, dt$

$$\underbrace{\left(\int_a^b \sqrt{u(t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t)}} \, dt \right)^2}_{} = (b-a)^2$$

$$\leq \int_a^b u(t) dt \cdot \int_a^b \frac{1}{u(t)} dt$$

$u \in E$ $\quad \alpha_u = \int_a^b u(t) dt \int_a^b \frac{1}{u(t)} dt$ $\quad \{\alpha_u, u \in E\}$ ensemble non vide minoré donc il admet une borne inf.

On a égalité de C.S. : $\exists \lambda$ tq $\sqrt{u(t)} = \frac{\lambda}{\sqrt{u(t)}}$ $\forall t$.

Donc $\forall t$ $u(t) = \lambda$, on a égalité pour fx° constante.

On obtient alors $\int_a^b \lambda dt \int_a^b \frac{1}{\lambda} dt = (b-a)^2$

Exercice 10 :

$\Rightarrow$ On suppose x et y orthogonaux

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|x+\lambda y\|^2 = <x+\lambda y, x+\lambda y>$

$= <x,x> + \lambda <y,x> + \lambda <x,y> + <y,y>$

$= \|x\|^2 + 2\lambda <x,y> + \|y\|^2$ car p.s. sym.

Or $<x,y> = 0$ par hyp. Donc $\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{\|y\|^2}_{\geq 0} \geq \|x\|^2$

$\Leftarrow$ On suppose $\|x+\lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$

On a alors $\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda <x,y> + \lambda^2 \|y\|^2 \geq \|x\|^2$

$\Rightarrow \lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda <x,y> \geq 0$

$\cdot\ P(\lambda) = \lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda <x,y>$

$\forall \lambda$, $P(\lambda) \geq 0$ donc P a une racine ou aucune racine.

Donc $\Delta \leq 0$ or $\Delta = 4<x,y>^2 - 4\|y\|^2 \times 0 \leq 0$

$= 4<x,y>^2 \leq 0$

Et donc $\Delta = 0$ car $4<x,y>^2 \geq 0$. Donc $<x,y> = 0$.

Exercice 11 :


si $\forall x \in B$ $\langle x,y\rangle = 0$
alors $\forall x \in A \subset B$ $\langle x,y\rangle = 0$

1. Rq $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ $\quad B^\perp = \{z \in E,\ \forall x \in B,\ \langle x, z\rangle = 0\}$

$A \subset B$. Soit $y \in B^\perp$, $\forall x \in B$, $\langle x, y\rangle = 0$

Donc $\forall x \in A$ $\langle x, y \rangle = 0$ comme $A \subset B$. Donc $y \in A^\perp \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

↳ on a $x \in A$ et $\langle x,y\rangle = 0$

2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

$\subset$ On a toujours · $A \subset A \cup B$

· $B \subset A \cup B$

Donc d'après q.1, on a $(A\cup B)^\perp \subset A^\perp$ et $(A \cup B)^\perp \subset B^\perp$ donc $(A \cup B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$

$\supset$ Rq $A^\perp \cap B^\perp \subset (A \cup B)^\perp$. Soit $x \in A^\perp \cap B^\perp$

(On veut mq $x \in (A \cup B)^\perp$ càd $y \in A \cup B$ $\langle x,y\rangle = 0$)

Soit $x \in A^\perp \cap B^\perp$ et $y \in A \cup B$

· $y \in A \cup B \iff y \in A$ ou $y \in B$

si $y \in A$, alors comme $x \in A^\perp \cap B^\perp$; alors $\langle x, y\rangle = 0$

si $y \in B$, alors comme $x \in A^\perp \cap B^\perp$; alors $\langle x, y \rangle = 0$

D'où pour $y \in A \cup B$, $\langle x, y\rangle = 0$ donc $x \in (A \cup B)^\perp$

Donc $A^\perp \cap B^\perp \subset (A \cup B)^\perp$

3. $A^\perp = \mathrm{vect}(A^\perp)$

<u>Rappel</u> : $\mathrm{vect}(A) = \{$ens. des c.l des elem. de $A.\}$

On a tjr $A \subset \mathrm{vect}(A)$

$\subset$ d'après q.1 $\mathrm{vect}(A)^\perp \subset A^\perp$

$\supset$ Mq $A^{\perp} \subset \text{vect}(A)^{\perp}$

On veut mq $\forall x \in A^{\perp}$, $x \in \text{vect}(A)^{\perp}$, ie $\forall x \in A^{\perp}$ et $y \in \text{vect}(A)$, alors $<x,y> = 0$

$\cdot \forall x \in A^{\perp}$. Soit $y \in \text{vect}(A)$

Par def. $y \in \text{vect}(A)$: y est une c.l. d'elem. de A. $\exists n \in \mathbb{N}$ $\exists a_1, \dots, a_n \in A$ tq $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$, $y = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$

$<x, y> = <x, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i> = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i <x, a_i> = 0$ car $\forall i$ $a_i \in A$ donc $<x, a_i> = 0$ comme $x \in A^{\perp}$.

4. $\text{vect}(A) \subset (A^{\perp})^{\perp}$

On veut mq $\forall y \in \text{vect}(A)$, alors $y \in (A^{\perp})^{\perp}$

$\cdot$ Soit $y \in \text{vect}(A)$. Alors par def. $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ $\forall i$ $a_i \in A$

$\forall b \in A^{\perp}$, alors $\forall i$ $<b, a_i> = 0$. Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i <b, a_i> = 0$

soit $<b, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i> = 0$ donc $<b, y> = 0$ comme $b \in A^{\perp}$ alors $y \in (A^{\perp})^{\perp}$

Exercice 12 :

F et G SEV non vide

Rappel : $F+G = \{z = u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G\}$ sev de E.

1. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

$\boxed{\subset}$ On veut mq $\forall z \in (F+G)^\perp$, $z \in F^\perp \cap G^\perp$.

Soit $z \in (F+G)^\perp$

On veut mq $\forall x \in F$ $\forall y \in E$, $\langle z, x \rangle = 0$ et $\langle z, y \rangle = 0$

$\forall x \in F$ et $\forall y \in G$, on a $\langle z, \underbrace{x+y}_{\in F+G} \rangle = 0$ et en particulier

pour $x = 0 \in F$: on a alors $\langle z, y \rangle = 0$ et donc $z \in G^\perp$

pour $y = 0 \in G$: on a alors $\langle z, x \rangle = 0$ et donc $z \in F^\perp$

Ainsi $z \in G^\perp \cap F^\perp$

$\boxed{\supset}$ On veut mq $\forall z \in F^\perp \cap G^\perp$, $z \in (F+G)^\perp$ ie $\forall y \in F+G$ $\langle z, y \rangle = 0$

Soit $z \in F^\perp \cap G^\perp$ et $y \in F+G$, alors $y = u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$

donc $\langle z, y \rangle = \langle z, u+v \rangle = \langle z, u \rangle + \langle z, v \rangle$

Or $\langle z, u \rangle = 0$ car $u \in F$ et $z \in F^\perp$

$\langle z, v \rangle = 0$ car $v \in G$ et $z \in G^\perp$

D'où $\langle z, y \rangle = 0$ et $z \in (F+G)^\perp$

2. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

$\forall w \in F^\perp + G^\perp$, on veut mq $w \in (F \cap G)^\perp$, ie $\forall x \in F \cap G$ $\langle w, x \rangle = 0$

Soit $w \in F^\perp + G^\perp$ et $x \in F \cap G$ ($x \in F$ et $x \in G$), on a :

$\langle w, x \rangle = \langle u+v, x \rangle$ avec $u \in F^\perp$ et $v \in G^\perp$

$= \underbrace{\langle u, x \rangle}_{\substack{=0 \\ \text{car } x \in F}} + \underbrace{\langle v, x \rangle}_{\substack{=0 \\ \text{car } v \in G}} = 0$