Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Corrigé (succinct) du partiel du 19 octobre 2020

Exercice 1. Soit A une matrice de $M_2(\mathbb{C})$ de trace non nulle.

1. Montrer sans calcul que A^2 s'écrit comme une combinaison linéaire des matrices A et I_2.

La matrice A étant d'ordre deux, le polynôme caractéristique qui lui est associé est $\chi_A(X)=X^2-\mathrm{tr}(A)X+\det(A)$, et l'on sait, d'après le théorème de Cayley–Hamilton, qu'il est annulateur de A. On en déduit par conséquent que $A^2=\mathrm{tr}(A)A-\det(A)I_2$.

2. En déduire que toute matrice de $M_2(\mathbb{C})$ commutant avec A^2 commute aussi avec A.

La trace de A étant supposée non nulle, on a ainsi

$$A=\frac{1}{\mathrm{tr}(A)}(A^2+\det(A)I_2).$$

La matrice identité commutant avec toute matrice de même ordre, on en déduit le résultat.

Exercice 2. Réduire les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&1\\-1&3&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix}2&-4&-4\\-2&3&4\\0&-3&-1\end{pmatrix}.$$

Pour chaque cas, nommons A la matrice.
Premier cas. On a

$$\chi_A(X)=\begin{vmatrix}X&-1&1\\-1&X-2&-1\\1&-1&X-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X&-1&1\\-1&X-2&-1\\0&X-3&X-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X&-1&2\\-1&X-2&-X+1\\0&X-3&0\end{vmatrix}=(X-3)(X^2-X-2)=(X-3)(X-2)(X+1).$$

Le spectre de la matrice est donc $\{-1,2,3\}$ et la matrice A est diagonalisable (son polynôme caractéristique étant scindé à racines simples). Déterminons les sous-espaces propres de A :

$$AX=-X\iff\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\x_1+3x_2+x_3=0\\-x_1+x_2+3x_3=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_1=2x_3\\x_2=x_3\end{cases},$$

d'où

$$E_{-1}=\mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\right),$$

$$AX=2X\iff\begin{cases}-2x_1+x_2-x_3=0\\x_1+x_3=0\\-x_1+x_2=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_2=x_1\\x_3=-x_1\end{cases},$$

d'où

$$E_2=\mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}\right),$$

et

$$AX=3X\iff\begin{cases}-3x_1+x_2-x_3=0\\x_1-x_2+x_3=0\\-x_1+x_2-x_3=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_1=0\\x_2=x_3\end{cases},$$

d'où

$$E_3=\mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right).$$

On a ainsi trouvé
$$P=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\text{ et }D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$
telles que $A=PDP^{-1}$.

Deuxième cas. On a
$$\chi_A(X)=\begin{vmatrix}X-1&-1&-1\\1&X-3&-1\\-1&1&X-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X-1&-1&-1\\0&X-2&X-2\\-1&1&X-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X-1&0&-1\\0&0&X-2\\-1&2-X&X-1\end{vmatrix}=(X-1)(X-2)^2.$$
Le spectre de la matrice est donc $\{1,2\}$ et la matrice A est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à 2 est égale à 2. Déterminons ce sous-espace :
$$AX=2X\iff\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=0\\-x_1+x_2+x_3=0\\x_1-x_2-x_3=0\end{cases}\iff x_1-x_2-x_3=0,$$
d'où
$$E_2=\operatorname{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right).$$
Le sous-espace propre est de dimension 2 et la matrice A est donc diagonalisable. Il reste à déterminer le sous-espace propre de A associé à 1 :
$$AX=X\iff\begin{cases}x_2+x_3=0\\-x_1+2x_2+x_3=0\\x_1-x_2=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_3=-x_2\\x_1=x_2\end{cases},$$
d'où
$$E_1=\operatorname{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}\right).$$
On a ainsi trouvé
$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\text{ et }D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$
telles que $A=PDP^{-1}$.

Troisième cas. En développant par rapport à la première colonne, on a
$$\chi_A(X)=\begin{vmatrix}X-2&4&4\\2&X-3&-4\\0&3&X+1\end{vmatrix}=(X-2)(X^2-2X+9)-8(X-2)=(X-2)(X^2-2X+1)=(X-2)(X-1)^2.$$
Le spectre de la matrice est donc $\{1,2\}$ et la matrice est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre de A associé à 1 est égale à 2. Déterminons ce sous-espace :
$$AX=X\iff\begin{cases}x_1-4x_2-4x_3=0\\-2x_1+2x_2+4x_3=0\\-3x_2-2x_3=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_1=-2x_2\\3x_2=-2x_3\end{cases},$$
d'où
$$E_1=\operatorname{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}\right\}\right).$$
Le sous-espace propre est de dimension 1 et la matrice A n'est donc pas diagonalisable. Elle est en revanche trigonalisable, son polynôme caractéristique étant scindé.
Déterminons le sous-espace propre de A associé à 2 :
$$AX=2X\iff\begin{cases}x_2+x_3=0\\-2x_1+x_2+4x_3=0\\-3x_2-3x_3=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x_1=3x_3\\x_2=-x_3\end{cases},$$

d'où

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}\right\}\right).$$

Complétons la famille $\left\{\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}\right\}$ par $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ de manière à obtenir une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

et on a ainsi trouvé

$$P = \begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ -2 & -2 & 0\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

telles que $A = PTP^{-1}$.

Exercice 3. On définit l'application u de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) = (X^2-1)P'' + XP'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

L'énoncé mentionne que l'application va de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même, il reste donc à montrer qu'elle est linéaire. On a

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ u(\lambda P + Q) = (X^2-1)(\lambda P+Q)'' + X(\lambda P+Q)' &= \lambda(X^2-1)P'' + (X^2-1)Q'' + \lambda XP' + XQ'\\ &= \lambda((X^2-1)P'' + XP') + (X^2-1)Q'' + XQ' = \lambda u(P) + u(Q).\end{aligned}$$

2. Pour tout entier k dans $\{0,\ldots,n\}$, déterminer $u(X^k)$. En déduire $\mathrm{Ker}\,(u)$.

On a : $u(1) = 0$, $u(X) = X$ et, pour tout entier entier k dans $\{2,\ldots,n\}$, $u(X^k) = (X^2-1)k(k-1)X^{k-2} + XkX^{k-1} = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}$. Ainsi, l'image d'un polynôme de degré k non nul par u est un polynôme de même degré et l'on en déduit que le noyau de l'application est $\mathrm{Vect}(\{1\})$.

3. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

On déduit de la question précédente que la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & -2 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & -6 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & 4 & \ddots & -12 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 9 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1)\\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & n^2\end{pmatrix}.$$

4. Calculer la trace de cette matrice.

La trace de la matrice vaut $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

5. Quelles sont les valeurs propres de u ? L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

La matrice de l'endomorphisme étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont données par ses coefficients diagonaux, d'où $\mathrm{Sp}(u) = \{0,\ldots,n\}$. L'endomorphisme u possède ainsi $n+1$ valeurs propres distinctes, ce qui assure qu'il est diagonalisable.

Exercice 4. Pour toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ la matrice transposée de M.

On pose $E_{11} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

On rappelle que $\mathscr{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$. On note u l'application qui à toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ associe $M + M^\top$:

$$u(M) = M + M^\top.$$

1. (a) Montrer que u est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

La transposée d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ est une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ et la somme de deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ est une matrice de $M_2(\mathbb{R})$. L'application u est donc à valeurs dans $M_2(\mathbb{R})$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (M,N)\in (M_2(\mathbb{R}))^2,\ u(\lambda M+N) &= \lambda M+N+(\lambda M+N)^\top = \lambda M+N+\lambda M^\top+N^\top\\ &= \lambda(M+M^\top)+N+N^\top = \lambda u(M)+u(N).\end{aligned}$$

(b) Écrire la matrice A de u dans la base $\mathscr{B}$.

On a $u(E_{11})=2E_{11}$, $u(E_{12})=E_{12}+E_{21}$, $u(E_{21})=E_{21}+E_{12}$ et $u(E_{22})=2E_{22}$, d'où

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

(c) En déduire deux valeurs propres de u.

La deuxième colonne de A est identique à la troisième, la matrice n'est donc pas inversible et 0 est par conséquent valeur propre. Par ailleurs, on remarque que la somme de coefficients de chaque ligne de A vaut 2, ce qui signifie que 2 est valeur propre.

2. Calculer A^2 et en déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $A^n=2^{n-1}A$.

On trouve $A^2=2A$, ce qui permet de montrer l'identité en raisonnant par récurrence : on a $A=2^0A$ et, en supposant que $A^n=2^{n-1}A$ pour un entier naturel non nul donné, il vient que $A^{n+1}=A^nA=2^{n-1}A^2=2^{n-1}2A=2^nA$.

3. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Vect}(\{E_{11},E_{12}+E_{21},E_{22}\})$. Établir alors que $\dim(\mathrm{Im}(u))=3$.

On déduit de la question 1.(b) que l'image de u est engendrée par les vecteurs de la famille $\{E_{11},E_{12}+E_{21},E_{22}\}$. Cette famille étant par ailleurs libre, elle est une base de $\mathrm{Im}(u)$, qui est donc de dimension égale à 3.

(b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$, puis déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

Par le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u))=\dim(M_2(\mathbb{R}))-\mathrm{rang}(u)=4-3=1$. On observe par ailleurs que l'on a $u(E_{12}-E_{21})=u(E_{12})-u(E_{21})=0_{M_2(\mathbb{R})}$, d'où $\mathrm{Ker}(u))=\mathrm{Vect}(\{E_{12}-E_{21}\})$.

(c) Établir que $\mathrm{Im}(u)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 2.

On a $u(E_{11})=2E_{11}$, $u(E_{12}+E_{21})=u(E_{12})+u(E_{21})=2(E_{12}+E_{21})$ et $u(E_{22})=2E_{22}$. On en déduit donc que $\mathrm{Im}(u)$ est inclus dans le sous-espace propre associé à 2. Ce dernier sous-espace est par ailleurs de dimension au plus égale à 3, puisque 0 est valeur propre et que le noyau de u est de dimension égale à 1. Par conséquent, $\mathrm{Im}(u)$ est nécessairement le sous-espace propre associé à 2, qui est alors de dimension 3.

(d) En déduire que u est diagonalisable et donner, pour résumer, les valeurs propres de u, ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres associés.

On déduit des dernières questions que l'endomorphisme est diagonalisable, ses sous-espaces propres étant $\mathrm{Ker}(u)$ (de dimension 1) et $\mathrm{Im}(u)$ (de dimension 3). Ses valeurs propres sont 0 et 2 et l'on a $E_0=\mathrm{Vect}(\{E_{12}-E_{21}\})$ et $E_2=\mathrm{Vect}(\{E_{11},E_{12}+E_{21},E_{22}\})$.

Exercice 5. Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application b définie par :

$$\forall (P,Q)\in E\times E,\ b(P,Q)=P'(0)Q(0)+P(0)Q'(0).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une forme bilineaire symétrique.

La symétrie de b se déduit de la commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$. On n'a donc qu'à montrer que la forme est linéaire par rapport à son premier argument pour en déduire qu'elle est bilinéaire. On a, par linéarité de la dérivation,

$$\begin{aligned}\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall (P,Q,R)\in E^3,\ b(\lambda P+R,Q) &= (\lambda P+R)'(0)Q(0)+(\lambda P+R)(0)Q'(0)\\ &= (\lambda P'(0)+R'(0))Q(0)+\lambda P(0)+R(0))Q'(0)\\ &= \lambda P'(0)Q(0)+R'(0)Q(0)+\lambda P(0)Q'(0)+R(0)Q'(0)\\ &= \lambda(P'(0)Q(0)+P(0)Q'(0))+R'(0)Q(0)+R(0)Q'(0)\\ &= \lambda b(P,Q)+b(R,Q).\end{aligned}$$

La forme est donc bilinéaire.

2. Calculer la matrice de b relativement à la base canonique de E.

La forme b étant symétrique, sa matrice relativement à toute base est également symétrique. Il suffit donc de calculer les coefficients de sa partie triangulaire supérieure. On a

$$b(1,1)=0,\ b(1,X)=1,\ b(1,X^2)=0,\ b(X,X)=0,\ b(X,X^2)=0 \text{ et } b(X^2,X^2)=0.$$

La matrice de b relativement à la base canonique de E est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Cette forme bilinéaire est-elle dégénérée ?

On voit aisément que la matrice déterminée dans la question précédente est de rang égal à 2. En utilisant le théorème du rang et la définition du noyau d'une forme bilinéaire symétrique, on trouve que le noyau de b est de dimension égale à 1 et donc que la forme bilinéaire b est dégénérée.