Corrigé (succinct) de l'examen d'appel du 5 juillet 2019

Exercice 1. Déterminer, suivant la valeur du paramètre réel λ, la signature de la forme quadratique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ q(x) = (1+\lambda)({x_1}^2 + {x_2}^2) + 2(1-\lambda)\, x_1 x_2,$$

où x_1, x_2 sont les coordonnées du vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Si $\lambda = -1$, alors, par réduction de Gauss, $q(x) = 4\, x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$ et $\mathrm{sign}(q) = (1, 1)$.
Si $\lambda \neq -1$, alors, par réduction de Gauss, $q(x) = (1+\lambda)\left(x_1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} x_2\right)^2 + \frac{4\,\lambda}{1+\lambda}\, {x_2}^2$, d'où

— $\mathrm{sign}(q) = (1, 1)$ si $\lambda < -1$,
— $\mathrm{sign}(q) = (1, 1)$ si $-1 < \lambda < 0$,
— $\mathrm{sign}(q) = (1, 0)$ si $\lambda = 0$,
— $\mathrm{sign}(q) = (2, 0)$ si $\lambda > 0$.

Exercice 2. Étant donné $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dans $\mathbb{R}^4$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall y \in \mathbb{R}^2,\ b(x, y) = \alpha\, x_1 y_1 + \beta\, x_1 y_2 + \gamma\, x_2 y_1 + \delta\, x_2 y_2,$$

où x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) sont les coordonnées du vecteur x (resp. y) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer des conditions nécessaire et suffisantes sur α, β, γ et δ pour que b définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
La forme $b(x, y)$ est une combinaison linéaire de produits d'une forme linéaire en x par une forme linéaire en y. Elle est donc bilinéaire pour toute valeur de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.
On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall y \in \mathbb{R}^2,\ b(y, x) = \alpha\, y_1 x_1 + \beta\, y_1 x_2 + \gamma\, y_2 x_1 + \delta\, y_2 x_2,$$

la forme b est donc symétrique si $\beta = \gamma$.
Enfin, on remarque que, pour $x = (1, 0)$, on a $b(x, x) = \alpha$ et il faut nécessairement que $\alpha > 0$ pour que la forme soit définie positive. En tenant compte de cette condition et de la précédente, il vient, par réduction de Gauss,

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ b(x, x) = \alpha {x_1}^2 + 2\beta\, x_1 x_2 + \delta {x_2}^2 = \alpha \left(x_1 + \frac{\beta}{\alpha}\, x_2\right)^2 + \left(\delta - \frac{\beta^2}{\alpha}\right) {x_2}^2.$$

Pour $x = (-\beta, \alpha)$, on a $b(x, x) = \left(\delta - \frac{\beta^2}{\alpha}\right) \alpha^2$, qui est strictement positif si est seulement si $\alpha\delta - \beta^2 > 0$.
Vérifions à présent que les conditions $\alpha > 0$, $\beta = \gamma$ et $\alpha\delta - \beta^2 > 0$ suffisent à ce que b définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, la forme est clairement bilinéaire, symétrique et positive. De plus, on a

$$b(x, x) = 0 \Leftrightarrow x_1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \Leftrightarrow x = (0, 0),$$

la forme est donc définie.
On peut également faire appel au critère de Sylvester appliqué à la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

pour trouver des conditions nécessaires et suffisantes de définie positivité de la forme bilinéaire symétrique. On obtient alors directement les conditions $\alpha > 0$ et $\alpha\delta - \beta^2 > 0$ (stricte positivité des mineurs principaux).

Exercice 3. Soit la matrice

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que M est une matrice orthogonale.

On vérifie par le calcul que $M^\top M = M M^\top = I_3$.

2. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres avec leurs multiplicités.

La matrice A est réelle symétrique, on sait donc qu'elle est diagonalisable. Elle est de plus orthogonale, ses valeurs propres sont donc égales à -1 ou 1. La trace de M vaut $\frac{1}{9}(1+1+7) = 1$. Par invariance de cette dernière par changement de base, la somme des valeurs propres de M (en tenant compte de leur multiplicité) est égale à 1 et on en déduit que 1 est une valeur propre double et -1 est une valeur propre simple.

Exercice 4. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice symétrique de $M_n(R)$, telle que $A^2 = A$.

1. Que dire de A ? Montrer en particulier que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rang}(A)$.

La matrice A est idempotente, c'est donc la matrice représentative d'une projection p dans un espace vectoriel E de dimension n. Par propriété des projections, on a que $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p)$ et que $x \in \mathrm{Im}\,(p) \Leftrightarrow p(x) = x$. En choisissant une base de E adaptée à la somme directe précédente, $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{\mathrm{Im}\,(p)} \cup \mathscr{B}_{\mathrm{Ker}\,(p)}$, où $\mathscr{B}_{\mathrm{Im}\,(p)} = \{e_1, \dots, e_r\}$ est une base de $\mathrm{Im}\,(p)$, l'entier r étant le rang de p, et $\mathscr{B}_{\mathrm{Ker}\,(p)} = \{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(p)$, la matrice représentative de p dans la base $\mathscr{B}$ s'écrit par blocs :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par invariance de la trace par changement de base, on en déduit que $\mathrm{tr}(A) = r$.

2. Établir que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{\mathrm{rang}(A)} \leq n^{3/2}.$$

Considérons les matrices B et C de $M_n(R)$, cet espace étant muni de sa structure euclidienne canonique, telles que

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ b_{ij} = |a_i j| \text{ et } c_{ij} = 1.$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, les propriétés de A et la précédente question, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_{ij} = \mathrm{tr}(B^\top C) \leq \sqrt{\mathrm{tr}(B^\top B)}\sqrt{\mathrm{tr}(C^\top C)} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^2)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1} = \sqrt{\mathrm{rang}(A)}\sqrt{n^2}.$$

La seconde inégalité découle alors du fait que $\mathrm{rang}(A) \leq n$.

3. Montrer alors que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < n^{3/2} \text{ si } n \geq 2.$$

Pour avoir égalité dans la seconde inégalité établie dans la question précédente, il faut que $\mathrm{rang}(A) = n$, ce qui implique que A doit être inversible. En vertu de la condition d'idempotence, on doit alors avoir $A = I_n$. On voit dans ce cas que, pour $n \geq 2$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = n < n^{3/2},$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Exercice 5. Soit A une matrice de $M_n(R)$ telle que

$$\forall B \in M_n(R),\ \mathrm{tr}(B) = 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{tr}(AB) = 0.$$

1. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $E = \{B \in M_n(R) \mid \mathrm{tr}(B) = 0\}$?

Le sous-espace vectoriel E est le noyau de l'application trace, qui est une forme linéaire non nulle sur $M_n(R)$. On déduit donc du théorème du rang que $\dim(E) = \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Im}\,(\mathrm{tr})) = n^2 - 1$.

2. En utilisant la structure euclidienne canonique de $M_n(R)$, montrer qu'il existe un réel λ tel que $A = \lambda I_n$.

En munissant $M_n(R)$ de sa structure euclidienne canonique, on voit que la matrice A définie dans l'énoncé appartient à l'orthogonal de E. On déduit alors de la première question que $\dim(E^\perp) = 1$. En remarquant que la matrice I_n appartient aussi à $E^\perp$, on a montré que $E^\perp = \mathrm{Vect}\{I_n\}$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel euclidien, u une isométrie de E et l'endomorphisme $v = u - Id$ de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Im}\,(v)^\perp$. En déduire que $\mathrm{Ker}\,(v)^\perp = \mathrm{Im}\,(v)$.

On a d'une part

$$x \in \mathrm{Ker}\,(v) \Leftrightarrow v(x) = 0_E \Leftrightarrow u(x) = x,$$

et d'autre part

$$y \in \mathrm{Im}\,(v) \Leftrightarrow \exists z \in E,\ v(z) = y \Leftrightarrow \exists z \in E,\ u(z) - z = y,$$

et par conséquent

$$\langle x, y\rangle = \langle x, u(z) - z\rangle = \langle x, u(z)\rangle - \langle x, z\rangle = \langle u(x), u(z)\rangle - \langle x, z\rangle = \langle x, z\rangle - \langle x, z\rangle = 0,$$

car u est une isométrie. On en déduit que $\mathrm{Ker}\,(v) \subset \mathrm{Im}\,(v)^{\perp}$. On conclut alors en utilisant que

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}\,(v)) + \dim(\mathrm{Ker}\,(v)) = \dim(\mathrm{Im}\,(v)) + \dim(\mathrm{Im}\,(v)^{\perp}).$$

La seconde égalité s'obtient par passage au complémentaire, E étant de dimension finie.

2. Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k,\ \text{où } u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}.$$

   Montrer que l'image d'un élément de E par l'application u_n converge vers le projeté orthogonal de cet élément sur $\mathrm{Ker}\,(v)$ quand n tend vers l'infini.

D'après la question précédente, tout élément de E peut s'écrire comme une somme $x+y$, avec $x \in \mathrm{Ker}\,(v)$ et $y \in \mathrm{Im}\,(v)$, x étant le projeté orthogonal de l'élément sur $\mathrm{Ker}\,(v)$.
On a $u(x) = x$ d'où, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x = x$. Par ailleurs, soit z un élément de E tel que $v(z) = y$. On a $u(y) = u(v(z)) = u^2(z) - u(z)$, d'où, par récurrence, $u^k(y) = u^{k+1}(y) - u^k(z)$ pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$. On a alors que

$$u_n(y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=2}^{n+1} u^k(z) - \sum_{k=1}^{n} u^k(z)\right) = \frac{1}{n}(u^{n+1}(z) - u(z)),$$

d'où

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \|u_n(y)\| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\|u^{n+1}(z) - u(z)\| \leq \|z\| \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0,$$

puisque, pour tout entier naturel n, $\|u^{n+1}(z)\| = \|u(z)\| = \|z\|$, u étant une isométrie.