Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Algèbre linéaire 3
Année 2021/2022

Partiel du 21 octobre 2021

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2h

Exercice 1 (2 points). Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 2 (7 points). Soit a un nombre réel et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Lorsque A est diagonalisable, calculer A^k pour tout entier naturel k.
3. On suppose dans cette question que $a = 1$. Exprimer A^2 en fonction de A et I_2 et en déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = kA - (k-1)I_2.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée des réels u_0 et u_1 et de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - a\,u_n.$$

4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

5. Pour toute valeur de a, exprimer le terme général de la suite en fonction de u_0, u_1 et a.

Exercice 3 (4,5 points). Soit E un espace vectoriel de dimension n supérieure ou égale à 2. On considère l'application ϕ définie sur $\mathscr{L}(E)$ par

$$\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \phi(f) = f + \operatorname{tr}(f)\, id_E.$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.
2. Calculer $\phi^2 = \phi \circ \phi$ et l'exprimer en fonction de ϕ et de $id_{\mathscr{L}(E)}$.
3. En déduire le polynôme minimal de ϕ.

Exercice 4 (4,5 points). Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que l'application, appelée *produit vectoriel*, définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$(x,y) \mapsto x \wedge y = \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

   où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, est une application bilinéaire antisymétrique.

2. Une forme bilinéaire b définie sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite *alternée* si

$$\forall x \in E,\ b(x,x) = 0.$$

   Montrer que cette notion équivaut à ce que b soit antisymétrique.

Exercice 5 (2 points). Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, q une forme quadratique sur E et b la forme polaire de q. Montrer que

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ b(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) = \frac{1}{2}\left(q(x) + q(y) - q(x-y)\right).$$