ÉPREUVE DU 25/11/2019 AVEC CORRIGÉ

Les notes de cours, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Durée de l'épreuve : 1 heure.

Question de cours (2 points)

1. Énoncer les deux lemmes de Borel-Cantelli (sans démonstration).
2. Soit X et Y des v.a.r. indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Déterminer, en justifiant complètement, la loi de
$$Z := X + Y.$$

Exercice 1 (2 points)

Soient X et Y deux v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On considère les événements suivants :

$$A = \{X > 0\}, \qquad B = \{Y > 0\}, \qquad C = \{XY > 0\}.$$

Montrer que ces 3 événements sont deux-à-deux indépendants, mais pas indépendants.

Exercice 2 (6 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$M_n \;\; := \;\; \max(X_1, \ldots, X_n).$$

1. Calculer la fonction de répartition de M_n pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que M_n admet une densité que l'on déterminera, pour tout $n \geq 1$.
3. En déduire $\mathbb{E}[M_n^k]$ pour tous $n, k \geq 1$.
4. Calculer $\mathrm{Var}(M_n)$ pour tout $n \geq 1$.
5. Calculer $\mathbb{P}(M_{n+1} \leq s | M_n \leq t)$ pour tout $n \geq 1$ et tous $s, t \in [0,1]$.
6. Déterminer la loi de M_n^n pour tout $n \geq 1$.

<u>CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DU 23/11/2019</u>

Question de cours (2 points)

1. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

D'autre part, si les $(A_n)_{n\geq 1}$ sont indépendants, on a aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

2. Les v.a.r. X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $Z := X + Y$ aussi. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \{X = k, Y = n-k\}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\, \mathbb{P}(Y = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \times \frac{e^{-\mu}\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} (\lambda+\mu)^n.
\end{aligned}$$

On conclut que Z suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Dans ce calcul, on a utilisé successivement le fait que les événements $(\{X = k, Y = n-k\})_{0\leq k\leq n}$ sont 2-à-2 disjoints, l'indépendance de X et Y, les hypothèses $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, la définition de $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, et enfin la formule du binôme de Newton.

Exercice 1 (2 points)

Comme X et Y sont toutes deux de loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \mathbb{P}(B) \;=\; \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2},$$

où l'on a utilisé le fait que $x \mapsto \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ est une fonction paire, puis le fait que c'est une densité de probabilité. Par ailleurs, les définitions de A, B, C impliquent que

$$A \cap B \cap C \;=\; A \cap B \;=\; A \cap C \;=\; B \cap C \;=\; \{X > 0, Y > 0\}.$$

Comme les v.a.r. X et Y sont indépendantes, on en déduit aussitôt que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \;=\; \mathbb{P}(A \cap B) \;=\; \mathbb{P}(A \cap C) \;=\; \mathbb{P}(B \cap C) \;=\; \frac{1}{4}.$$

Enfin, comme C est l'union disjointe de $\{X > 0, Y > 0\}$ et $\{X < 0, Y < 0\}$, on a

$$\mathbb{P}(C) \;=\; \mathbb{P}(X > 0, Y > 0) + \mathbb{P}(X < 0, Y < 0) \;=\; \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{2}.$$

À partir de ces différentes valeurs, on conclut que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
\mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \\
\mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\
\mathbb{P}(A \cap B \cap C) &\neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).
\end{aligned}$$

Exercice 2 (6 points)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a par indépendance de $X_1, \ldots, X_n$,

$$F_{M_n}(t) \;=\; \mathbb{P}(M_n \leq t) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq t\}\right) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i \leq t\right).$$

   D'autre part, comme $X_1, \ldots, X_n$ suivent la loi $\mathcal{U}(0,1)$, on a pour $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbb{P}(X_i \leq t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

   On conclut que

$$F_{M_n}(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

2. En posant $f_n(t) = nt^{n-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(t)$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{t} f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

En comparant avec la question précédente, on voit que

$$\int_{-\infty}^{t} f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F_{M_n}(t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui montre que M_n admet f_n pour densité.

3. Pour tous $n, k \geq 1$, la v.a.r. M_n^k est à valeurs dans $[0,1]$ donc son espérance existe bien. De plus, la question précédente nous autorise à écrire

$$\mathbb{E}\left[M_n^k\right] \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} x^k f_n(x)\,\mathrm{d}x \; = \; n\int_0^1 x^{n+k-1}\,\mathrm{d}x \; = \frac{n}{n+k}.$$

4. La question précédente avec $k = 1, 2$ donne $\mathbb{E}[M_n] = \frac{n}{n+1}$, $\mathbb{E}[M_n^2] = \frac{n}{n+2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(M_n) &= \mathbb{E}[M_n^2] - \mathbb{E}[M_n]^2 \\ &= \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} \end{aligned}$$

5. Soient $s, t \in]0,1[$, et supposons d'abord que $s \leq t$. Comme $M_{n+1} \geq M_n$, on a $\{M_{n+1} \leq s\} \subset \{M_n \leq t\}$, et on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_{n+1} \leq s | M_n \leq t) &= \frac{\mathbb{P}(M_{n+1} \leq s, M_n \leq t)}{\mathbb{P}(M_n \leq t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(M_{n+1} \leq s)}{\mathbb{P}(M_n \leq t)} \\ &= \frac{F_{M_{n+1}}(s)}{F_{M_n}(t)} \\ &= \frac{s^{n+1}}{t^n}, \end{aligned}$$

où la dernière ligne utilise la question 1. Enfin, si $s > t$, alors $\{M_{n+1} \leq s, M_n \leq t\} = \{X_{n+1} \leq s, M_n \leq t\}$ et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_{n+1} \leq s | M_n \leq t) &= \mathbb{P}(X_{n+1} \leq s | M_n \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} \leq s) \\ &= s^{n+1}. \end{aligned}$$

On a ici remarqué que les événements $\{M_n \leq t\}$ et $\{X_{n+1} \leq s\}$ sont indépendants car $\{M_n \leq t\} = \{X_1 \leq t\} \cap \{X_2 \leq t\} \leq \ldots \{X_n \leq t\}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in [0,1]$, on a (par stricte croissance de $t \mapsto t^n$),

$$\mathbb{P}(M_n^n \leq t) \quad = \quad \mathbb{P}(M_n \leq t^{\frac{1}{n}}) \; = \; F_{M_n}(t^{\frac{1}{n}}) \; = \; t,$$

grâce à la question 1. D'autre part, on a trivialement $\mathbb{P}(M_n^n \leq t) = 0$ si $t \leq 0$, et $\mathbb{P}(M_n^n \leq t) = 1$ si $t \geq 1$. Ainsi, M_n^n a la même fonction de répartition qu'une v.a.r. uniforme sur $[0,1]$. On conclut donc que $M_n^n \sim \mathcal{U}(0,1)$.