Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Algèbre linéaire 3
année 2018/2019

Partiel du 24 octobre 2018

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2h

Exercice 1 (6 points). Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par la formule

$$q(x) = {x_1}^2 + 4\,x_1x_2 + 6\,x_1x_3 + 4\,{x_2}^2 + 16\,x_2x_3 + 9\,{x_3}^2.$$

1. Déterminer la forme polaire de q et la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. En déduire le rang et la signature de q.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q et donner la matrice de q dans cette base.
4. Pour tout réel λ, on pose $v_\lambda = (\lambda, -1, 1)$ et on note F_λ l'orthogonal de v_λ par rapport à q. Déterminer la dimension de F_λ. À quelle condition sur λ a-t-on la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^3 = F_\lambda \oplus \mathrm{Vect}(\{v_\lambda\})$?

Exercice 2 (3 points). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n fonctions $f_1, \ldots, f_n$, continues sur un intervalle borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout couple (i, j) de $\{1, \ldots, n\}^2$, on pose $m_{ij} = \int_a^b f_i(t) f_j(t)\, dt$ et, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}\, x_i x_j$.

1. Montrer que q est une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que la forme q est définie positive si et seulement si la famille $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est libre.
3. Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas particulier où $a = 0$, $b = 1$ et, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i(t) = t^{i-1}$.

Exercice 3 (6 points). Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et q une forme quadratique sur E.

1. On suppose qu'il existe un vecteur u de E, non nul et isotrope pour q, et un vecteur v de E, non orthogonal à u pour q. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) Si v est isotrope pour q, il existe un vecteur w de E, non isotrope pour q et combinaison linéaire de u et de v.
   (b) Si v n'est pas isotrope pour q, il existe un vecteur w' de E, isotrope pour q, non colinéaire à u et combinaison linéaire de u et de v.
2. On note $\mathcal{C}_q$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont isotropes pour q et $\mathrm{Ker}\,(q)$ le noyau de q. En utilisant la question précédente, montrer que $\mathcal{C}_q$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\mathcal{C}_q = \mathrm{Ker}\,(q)$ (on pourra raisonner par contraposée).

Exercice 4 (6 points). Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et b une forme bilinéaire symétrique sur E. On considère deux applications φ et ψ de E dans E vérifiant la propriété

$$\forall (x, y) \in E^2,\ b(\varphi(x), y) = b(x, \psi(y)).$$

1. Montrer que
   (a) $\forall (x, y, z) \in E^3$, $b(\varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y), z) = 0$.
   (b) $\forall (x, z) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $b(\varphi(\lambda\, x) - \lambda\, \varphi(x), z) = 0$.
2. On suppose dans cette question que la forme b est non dégénérée.
   (a) Déduire de la question précédente que φ est une application linéaire. Montrer de la même façon que ψ est une application linéaire.
   (b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On note respectivement M_φ et M_ψ les matrices de φ et de ψ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que les matrices ${M_\varphi}^\top$ et M_ψ sont semblables.
3. En choisissant $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple de forme bilinéaire symétrique non nulle b et d'application θ de E dans E *non linéaire* vérifiant la propriété

$$\forall (x, y) \in E^2,\ b(\theta(x), y) = b(x, y).$$