Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Algèbre linéaire 3
année 2018/2019

Contrôle continu du 3 décembre 2018

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 1h

Exercice 1 (2 points). Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

Exercice 2 (3 points). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices à coefficients réels d'ordre n du produit scalaire défini par $(A,B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$. Déterminer les supplémentaires orthogonaux respectifs des sous-espaces

$$F_1 = \operatorname{Vect}(\{I_n\}) \text{ et } F_2 = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \right\}.$$

dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (4 points). Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et b l'application définie sur $E \times E$ par

$$\forall (P,Q) \in E \times E,\ b(P,Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. Montrer que b est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale $\{P_0, P_1, P_2\}$ de E muni de ce produit scalaire, telle que

$$\forall i \in \{0,1,2\},\ \deg(P_i) = i.$$

Exercice 4 (4 points). On définit l'application b de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X],\ b(P,Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{\mathrm{i}\theta}) Q(e^{-\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que b est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que la famille $\{X^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 5 (3 points). Soit p un projecteur d'un espace euclidien E vérifiant

$$\forall x \in E,\ \langle p(x), x \rangle \geq 0.$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 6 (4 points).

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 2\,x_3 - 1)^2 + (x_2 - x_3 + 2)^2.$$

   Déterminer son minimum sur $\mathbb{R}^3$.
2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = (x_1 + 1)^2 + (x_1 + x_2 + 1)^2 + (x_1 - 2\,x_3)^2 + {x_3}^2.$$

   Déterminer son minimum sur $\mathbb{R}^3$.
3. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = \int_0^{\pi} (x_1\,\sin(t) + x_2\,\cos(t) - t)^2\,\mathrm{d}t.$$

   Déterminer son minimum sur $\mathbb{R}^2$.