PARTIEL DU 24/10/2019 AVEC CORRIGÉ

Les notes de cours, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Questions de cours (4 points)

1. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, sans la démontrer.
2. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. En justifiant soigneusement tous vos calculs, déterminer :
   (a) la fonction de répartition de X ;
   (b) l'espérance de X, si celle-ci existe ;
   (c) la variance de X, si celle-ci existe.

Exercice 1 (5 points)

Soit $\alpha > 0$ un paramètre, et soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité

$$f(x) \quad = \quad \frac{c}{x^{1+\alpha}}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Retrouver la valeur de la constante c.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X.
3. Calculer $\mathbb{P}(0 < X < 2)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X \in \mathbb{N})$.
5. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y := \ln X$.

Exercice 2 (5 points)

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre de succès $\frac{1}{2}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X > n)$ pour tout entier $n \geq 0$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \text{ est pair})$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \text{ est multiple de d})$, pour tout entier $d \geq 1$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X \text{ est pair ou multiple de } 3)$.

Exercice 3 (6 points)

On lance n fois de suite un dé à six faces.

1. Proposer un espace probabilisé pour modéliser cette expérience.
2. On note X le nombre total de *six* obtenus. Déterminer soigneusement la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X \text{ est pair})$ et $\mathbb{P}(X \text{ est impair})$, puis les comparer.

<u>**Corrigé**</u>

Questions de cours

1. Soit X une v.a.r. de carré intégrable. Alors, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a\right) \quad \leq \quad \frac{\mathrm{Var(X)}}{a^2}.$$

2. X admet pour densité la fonction $f_X : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)$. Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\mathrm{d}x \;\; = \;\; \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Comme X, X^2 sont des v.a.r. positives, leurs espérances sont bien définies et l'on a

$$\mathbb{E}[X] \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\mathrm{d}x \;\; = \;\; \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \;\; = \;\; \left[-\left(\frac{1}{\lambda} + x\right)e^{-\lambda x}\right]_0^\infty \;\; = \;\; \frac{1}{\lambda}.$$

$$\mathbb{E}[X^2] \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x \;\; = \;\; \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \;\; = \;\; \left[-\left(x^2 + \frac{2x}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda x}\right]_0^\infty \;\; = \;\; \frac{2}{\lambda^2}.$$

On en déduit que X est de carré intégrable et que sa variance est

$$\mathrm{Var}(X) \quad = \quad \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] \;\; = \;\; \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercice 1

1. On a forcément $c = \alpha$. En effet, par définition d'une densité de probabilité, on doit avoir

$$1 \;\; = \;\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x \quad = \quad \int_1^\infty \frac{c}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x \;\; = \;\; \left[\frac{-c}{\alpha x^\alpha}\right]_1^\infty \;\; = \;\; \frac{c}{\alpha}.$$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a par définition

$$F_X(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x \;\; = \;\; \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \left[-\frac{1}{x^\alpha}\right]_1^t \; = \; 1 - \frac{1}{t^\alpha} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

3. Comme F_X est continue, on a $\mathbb{P}(0 < X < 2) = F_X(2) - F_X(0) = 1 - 2^{-\alpha}$.

4. Comme F_X est continue, on a $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme par ailleurs $\mathbb{N}$ est la réunion dénombrable des $\{n\}, n \in \mathbb{N}$, on conclut que

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{N}) \;=\; \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n) \;=\; 0.$$

5. La fonction $\exp$ étant strictement croissante, on peut écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(t) \;=\; \mathbb{P}(\ln X \leq t) \;=\; \mathbb{P}(X \leq e^t) \;=\; F_X(e^t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\alpha)$. Ainsi, $Y \sim \mathcal{E}(\alpha)$.

Exercice 2

1. Par définition, X est une v.a.r. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ avec pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; \frac{1}{2^k}.$$

On en déduit aussitôt que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > n) \;=\; \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \;=\; \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \;=\; \frac{1}{2^{n+1}(1 - 1/2)} \;=\; \frac{1}{2^n}.$$

2. De même, on peut écrire

$$\mathbb{P}(X \text{ est pair}) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \;=\; \frac{1/4}{1 - 1/4} \;=\; \frac{1}{3}.$$

3. De la même façon, on a pour tout entier $d \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X \text{ est multiple de d}) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = dk) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{dk}} \;=\; \frac{2^{-d}}{1 - 2^{-d}} \;=\; \frac{1}{2^d - 1}.$$

4. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, on a

$$\mathbb{P}(X \text{ est pair } \underline{\text{et}} \text{ multiple de } 3) \;=\; \mathbb{P}(X \text{ est multiple de } 6) \;=\; \frac{1}{2^6 - 1} \;=\; \frac{1}{63}.$$

À l'aide de la formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, on déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \text{ est pair } \underline{\text{ou}} \text{ multiple de } 3) \;&=\; \mathbb{P}(X \text{ est pair}) + \mathbb{P}(X \text{ est multiple de } 3) \\ &\quad -\mathbb{P}(X \text{ est pair } \underline{\text{et}} \text{ multiple de } 3) \\ &=\; \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{63} \;=\; \frac{29}{63}. \end{aligned}$$

Exercice 3

1. On se place sur $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^n$, muni de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la loi uniforme.
2. Par définition, on a pour tout $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$,

$$X(\omega) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(\omega_i = 6)}.$$

   Il s'agit d'une v.a.r. discrète, puisque l'ensemble des valeurs possibles est fini :

$$\mathrm{Im}(X) \quad = \quad \{0,1,2,\ldots,n\}.$$

   En particulier, sa loi est déterminée par les $\mathbb{P}(X = k)$, $k \in \mathrm{Im(X)}$. Fixons donc $k \in \mathrm{Im(X)}$ et calculons $\mathbb{P}(X = k)$. Décrire un élément $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = k$ revient à spécifier
   - L'ensemble $I = \{i \in \{1,\ldots,n\} \colon \omega_i = 6\}$, qui doit être de taille k : $\binom{n}{k}$ possibilités.
   - La valeur $\omega_i \in \{1,2,3,4,5\}$ pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\} \setminus I$: 5^{n-k} possibilités.

   On conclut que

$$\mathbb{P}(X = k) \quad = \quad \frac{\binom{n}{k} \times 5^{n-k}}{6^n} \quad = \quad \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}.$$

   On reconnaît bien-sûr la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$.
3. On déduit aussitôt de la question précédente que

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \quad = \quad 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \;=\; 1 - \frac{5^n}{6^n} - \frac{n5^{n-1}}{6^n}.$$

4. Posons $p = \mathbb{P}(X \text{ est paire})$ et $q = \mathbb{P}(X \text{ est impaire})$. Comme les deux événements forment une partition de Ω, on a évidemment

$$p + q \quad = \quad 1.$$

   D'autre part, d'après la formule du binôme de Newton, on a aussi

$$p - q \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) \left(-\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \quad = \quad \left(-\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right)^n \quad = \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

   En combinant ces deux identités, on conclut que

$$p \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{et} \qquad q \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

   Remarquons que $p > q$: la v.a.r. X a plus de chances d'être paire qu'impaire.