

---

EXAMEN DE SUBSTITUTION CoØ

---

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées pour être considérées. Il est rappelé que la rédaction comptera de manière importante dans l'évaluation des copies. Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié. Aucun document n'est autorisé, aucune calculatrice.

---

**Exercice 1.** (Cours et proche du cours - 20 points)

Répondre aux questions suivantes en justifiant tout intégralement mais de manière concise.

1. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses, en le justifiant.  
**(Attention : malus pour réponse fausse ou non-réponse)**
  - (a)  $(u_n)$  converge vers 0 implique que la série de terme général  $u_n$  converge.
  - (b) La série de terme général  $u_n$  converge implique que  $(u_n)$  converge vers 0.
  - (c)  $u_n \sim v_n$  implique que les séries de terme général  $u_n$  et  $v_n$  ont même nature.
  - (d) La série de terme général  $u_n$  converge implique que la série de terme général  $|u_n|$  converge.
2. Énoncer le théorème d'intégration des suites de fonctions.
3. Soit  $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$  une fonction d'intégrale convergente sur  $\mathbb{R}^+$ .
  - (a) Quelle est la limite de  $\int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt$  lorsque  $x$  tend vers l'infini ?
  - (b) Montrer que si de plus  $f$  est décroissante alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$ .
4. Donner l'exemple d'une suite de fonctions continues  $f_n$  définies sur  $[0, 1]$  telle que  $f_n$  converge simplement vers 0 mais  $\int_0^1 f_n(t) dt$  ne tende pas vers 0.
5. Étudier l'absolue convergence, la semi-convergence des séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^{n^2}}{\ln(n^2 + n)}, \quad v_n = \left( \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right) \right)^\alpha,$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

6. Donner la nature des intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} x^2 \exp(-x^4) dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{|x-1|^4 e^{-x}}{|\ln(1+x)|^{\frac{1}{4}}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) e^{-x}}{|x-1|^{\frac{4}{3}}} dx.$$

7. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses, en le justifiant. On rappelle qu'une fonction est dite convexe si  $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ , pour tous  $t \in [0, 1]$  et  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - (a) La limite simple d'une suite de fonctions convexes est convexe.
  - (b) La limite uniforme d'une suite de fonctions strictement convexes est strictement convexe.

**Exercice 2.** (Autour de la convergence radiale ... - 25 points)

On se donne  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ .

1. Montrer que le rayon de convergence de  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est au moins égal à 1.
2. On suppose dans la suite que ce rayon est exactement 1 et on note  $f$  la somme de la série entière sur le disque de convergence. Finalement, on suppose que

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \ell \in \mathbb{R},$$

et on note  $u_n = \ell - \sum_{k=0}^n a_k$ .

(a) Montrer que

$$u_n = \ell - f(x) + \sum_{k=0}^n a_k (x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

(b) i. Après avoir justifié son existence, donner la limite de la suite  $M_n := \sup_{k \geq n+1} (|ka_k|)$ .

ii. Montrer que lorsque  $|x| < 1$ , on a  $\frac{1-x^k}{1-x} \leq k$ .

iii. Montrer que  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n ka_k$  tend vers 0.

(c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$|u_n| \leq |\ell - f(x)| + (1-x) \sum_{k=0}^n k|a_k| + \frac{M_n}{n(1-x)}.$$

(d) Montrer que  $u_n$  tend vers 0 en utilisant les questions précédentes.

(e) Conclure en énonçant clairement le résultat obtenu concernant la fonction  $f$ .

3. On considère l'équation différentielle

$$4x^2 y''(x) + 4xy'(x) - y(x) = \frac{x}{1-x}. \quad (\text{E})$$

(a) Trouver une solution développable en série entière de (E).

(b) Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

4. Soit  $\varphi : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{4k^2-1}$ .

(a) Montrer que, pour chaque  $u \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+u}{1-u} \right)$ .

(b) En déduire  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{2k+1}$  pour chaque  $x \in [0, 1[$ .

(c) Déduire des questions précédentes une expression simplifiée de  $\varphi$  (*i.e.* faisant intervenir des fonctions usuelles uniquement) pour chaque  $x \in [0, 1[$ .

(d) Que vaut  $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \varphi(x)$  ?

(e) Calculer  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ .

(f) Retrouver cette valeur par un calcul direct. On montrera d'abord que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$ .

5. Soit  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels tels que la série entière  $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$  ait pour rayon de convergence 1. On note  $h$  la somme de la série entière sur le disque de convergence. Finalement, on suppose que

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} h(x) = \ell' \in \mathbb{R},$$

(a) La série de terme général  $b_n$  est-elle toujours convergente ?

(b) On suppose dans cette question que  $b_n$  est positive. Montrer alors que la série de terme général  $b_n$  est convergente et que  $\sum_n b_n = \ell'$ .

(c) Dans le cas général, que pourrait-on supposer sur  $b_n$  pour que  $\sum_n b_n$  converge ?

**Exercice 3.** (Une série de fonctions ... - 10 points)

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle positive et décroissante. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x), \quad x \in [0, 1].$$

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions  $\sum u_n$ .

2. Montrer que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série  $\sum \frac{a_n}{n}$ .

3. Montrer que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément si, et seulement si,  $a_n \rightarrow 0$ .