Algèbre linéaire 3, Contrôle continu du 21 Novembre 2022

Durée : 1h. Documents et appareils électroniques interdits.
Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera un élément essentiel de l'appréciation des copies.
Vous êtes vivement encouragés à lire l'ensemble du sujet avant de commencer.
Le barème est sur 20 points. Il est à titre indicatif.

***Exercice 1* (Suite récurrente, 3 points).** — Soit λ un réel strictement positif. On considère l'ensemble

$$S_\lambda = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,;\, \lambda^2 u_{n+2} = \lambda u_{n+1} + u_n \ , \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

1. Déterminer l'ensemble S_λ. (1 point)
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_\lambda$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$. Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de λ. (1 point)
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_1$. Discuter de la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs de v_0 et v_1. (1 point)

***Exercice 2* (Étude d'une forme quadratique, 7 points).** — Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre. On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$: pour $x \in \mathbb{R}^3$

$$q(x) = ax_1^2 + 2ax_1x_2 + (a-1)x_2^2 + 3ax_1x_3 + (\tfrac{9}{4}a - a^2)x_3^2 + 5ax_2x_3.$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. (1 point)
2. Effectuer une réduction de Gauss de q. (2 points)
3. Donner la signature de q. (1 point)
4. La forme quadratique q peut-elle être négative ? (0,5 point)
5. A quelle condition sur a la forme quadratique q est-elle définie ? (1 point)
6. Donner le noyau et le rang de q. (1 point + 0,5 point)

***Exercice 3* (Un produit scalaire sur un espace de polynômes, 7 points)**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes ayant un degré inférieur ou égal à n. On définit $b_\lambda : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ par : pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on a

$$b_\lambda(P,Q) = \lambda P(0)Q(0) + \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$? (0,5 point)
2. Montrer que b_λ est une forme bilinéaire symétrique réelle. (1 point)
3. On suppose que $\lambda \geq 0$, montrer que b_λ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. (0,5 point)
4. Dans cette question on suppose que $n = 1$. Soit $P(X) = x_1X + x_0$ et $Q(X) = y_1X + y_0$ où x_0, x_1, y_0, y_1 sont des réels.
   (a) Exprimer $b_\lambda(P,Q)$ en fonction des coefficients. (1 point).
   (b) Déterminer la matrice de b_λ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. (1 point)
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que b_λ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$. (2 points)
5. On revient au cas général $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $b_{-\frac{1}{2}}$ n'est pas un produit scalaire. (1 point).

***Exercice 4* (En dimension finie, 3 points).** — **Dans cet exercice, si vous introduisez un produit scalaire, vous devrez justifier que c'est un produit scalaire**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \cdots, a_{n-1}$ des réels.

1. Montrer que l'on a (2 points)
$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} a_k\right)^2 \leq \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2.$$
2. Étudier les cas d'égalité (1 point).