Corrigé (succinct) de l'examen du 11 janvier 2021

Exercice 1. Soit n un entier naturel non nul.

1. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on pose
$$N_\infty(A) = \max_{1\leq i,j\leq n} \left|a_{ij}\right|.$$

   (a) Montrer que l'application N_∞ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on a, par propriétés de la valeur absolue (notamment l'inégalité triangulaire),
$$N_\infty(A)=0 \iff \max_{1\leq i,j\leq n} \left|a_{ij}\right| = 0 \iff \forall (i,j)\in\{1,\dots,n\}^2,\ \left|a_{ij}\right|=0 \iff A = 0_{M_n(\mathbb{R})},$$
$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ N_\infty(\lambda A) = \max_{1\leq i,j\leq n} \left|\lambda a_{ij}\right| = \max_{1\leq i,j\leq n} |\lambda|\left|a_{ij}\right| = |\lambda| \max_{1\leq i,j\leq n} \left|a_{ij}\right| = |\lambda| N_\infty(A),$$
$$\forall B\in M_n(\mathbb{R}),\ N_\infty(A+B) = \max_{1\leq i,j\leq n} \left|a_{ij}+b_{ij}\right| \leq \max_{1\leq i,j\leq n} \left(\left|a_{ij}\right|+\left|b_{ij}\right|\right) \leq \max_{1\leq i,j\leq n} \left|a_{ij}\right| + \max_{1\leq i,j\leq n} \left|b_{ij}\right| = N_\infty(A)+N_\infty(B).$$

   (b) Pour toute matrice M orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$, montrer que
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq N_\infty(M) \leq 1.$$

Les lignes d'une matrice orthogonale M ayant toutes une norme unitaire, on a d'une part que
$$\forall i\in\{1,\dots,n\},\ \sum_{j=1}^n {m_{ij}}^2 = 1,$$
ce qui implique que
$$\forall (i,j)\in\{1,\dots,n\}^2,\ \left|m_{ij}\right|\leq 1, \text{ d'où } N_\infty(M) = \max_{1\leq i,j\leq n} \left|m_{ij}\right| \leq 1.$$
D'autre part, on a
$$\forall i\in\{1,\dots,n\},\ 1 = \left(\sum_{j=1}^n {m_{ij}}^2\right)^{\frac12} \leq \left(\sum_{j=1}^n 1\right)^{\frac12} \left(\max_{1\leq j\leq n} {m_{ij}}^2\right)^{\frac12} = \sqrt{n} \max_{1\leq j\leq n} \left|m_{ij}\right|.$$
On en déduit que
$$N_\infty(M) = \max_{1\leq i,j\leq n} \left|m_{ij}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on pose
$$N_1(A) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left|a_{ij}\right|.$$

   (a) Montrer que l'application N_1 est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on a, par propriétés de la valeur absolue (notamment l'inégalité triangulaire),
$$N_1(A)=0 \iff \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left|a_{ij}\right| = 0 \iff \forall (i,j)\in\{1,\dots,n\}^2,\ \left|a_{ij}\right|=0 \iff A = 0_{M_n(\mathbb{R})},$$
$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ N_1(\lambda A) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left|\lambda a_{ij}\right| = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |\lambda|\left|a_{ij}\right| = |\lambda| \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left|a_{ij}\right| = |\lambda| N_1(A),$$
$$\forall B\in M_n(\mathbb{R}),\ N_1(A+B) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left|a_{ij}+b_{ij}\right| \leq \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left(\left|a_{ij}\right|+\left|b_{ij}\right|\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left|a_{ij}\right| + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left|b_{ij}\right| = N_1(A)+N_1(B).$$

(b) Pour toute matrice M orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$, montrer que

$$n \leq N_1(M) \leq n\sqrt{n}$$

et discuter des cas d'égalité pour la seconde inégalité.

On a montré dans la première partie de l'exercice que les coefficients d'une matrices orthogonale M sont tels que

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ \left|m_{ij}\right| \leq 1,\ \text{d'où } \left|m_{ij}\right| \geq {m_{ij}}^2.$$

On a ainsi

$$N_1(M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|m_{ij}\right| \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}{m_{ij}}^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

les lignes d'une matrice orthogonale ayant toutes une norme unitaire. Notons que, pour $M = I_n$, on a $N_1(M) = n$ et la borne inférieure est donc atteinte. Pour aller plus loin, on peut observer les coefficients d'une matrice orthogonale M vérifiant $N_1(M) = n$ sont tels que

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ \left|m_{ij}\right| = {m_{ij}}^2,\ \text{d'où } m_{ij} \in \{-1,0,1\}.$$

Les lignes et colonnes d'une matrice orthogonale ayant toutes une norme unitaire, on voit alors qu'il ne peut y avoir qu'un coefficient non nul par ligne et colonne, qui doit alors valoir -1 ou 1. Il existe donc au total $2^n n!$ telles matrices. D'autre part, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

$$N_1(M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|m_{ij}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}{m_{ij}}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}1\right)^{\frac{1}{2}}\right) = n\sqrt{n}.$$

Pour que cette borne soit atteinte, il faut qu'il y ait égalité dans chacune des inégalités de Cauchy–Schwarz apparaissant dans la somme. Ceci entraîne que chacune des lignes de la matrice doit être colinéaire à $(1\ \ldots\ 1)$ et donc que

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \forall (j,k) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ \left|m_{ij}\right| = |m_{ik}|.$$

Les colonnes d'une matrice orthogonale ayant de plus toutes une norme unitaire, on en conclut que les coefficients de la matrice doivent alors valoir $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$. On constate cependant qu'il n'est pas possible de construire des lignes et colonnes orthogonales avec de tels coefficients si l'entier n est impair. La borne supérieure est donc atteinte seulement si l'entier n est pair.

Exercice 2. On considère l'espace $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire canonique, et l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Sans faire de calculs, dire pourquoi l'endomorphisme u est diagonalisable.

L'endomorphisme est représenté dans la base canonique, orthonormale pour le produit scalaire canonique, par la matrice A qui est symétrique à coefficients réels. Il est donc auto-adjoint et l'on en déduit qu'il est diagonalisable dans une base orthonormée et que ses valeurs propres sont réelles.

2. Montrer que u est une isométrie vectorielle. En déduire les seules valeurs propres possibles pour cet endomorphisme.

Un calcul montre que $A^\top A = I_4$, la matrice A est donc orthogonale. Puisqu'elle représente l'endomorphisme u dans une base orthonormale, celui-ci est une isométrie vectorielle. La matrice étant aussi symétrique, on a obtenu que $A^2 - I_4 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire que $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ est un polynôme annulateur de u. Les seules valeurs propres possibles sont donc -1 et 1.

3. Sans calculer le polynôme caractéristique de u, déterminer à l'aide de la trace de A les ordres de multiplicité respectifs des valeurs propres de u. En déduire le polynôme caractéristique de l'endomorphisme.

La trace de la matrice A est égale à la somme des valeurs propres u, répétées avec leurs ordres de multiplicité (algébrique ou géométrique, puisque u est diagonalisable) respectifs. On a $\operatorname{tr}(A) = 2$ et les seules valeurs propres possibles pour u sont -1 et 1 ; on en déduit donc que -1 a pour ordre de multiplicité 1 et 1 a pour ordre de multiplicité 3. Le polynôme caractéristique de u étant de degré égal à 4, unitaire et ses racines étant les valeurs propres de u répétées avec leurs ordres de multiplicité respectifs, on trouve $\chi_u(X) = (X+1)(X-1)^3$.

4. Déterminer E_1, le sous-espace-propre de u associé à la valeur propre 1, et en donner une base.

Le système matriciel $(A - I_4)X = 0_{M_{4,1}(\mathbb{R})}$ fourni l'équation cartésienne de E_1, $2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$, dont on déduit aisément la base suivante : $\{(1,-2,0,0),(1,0,2,0),(1,0,0,-2)\}$.

5. Montrer que E_{-1}, le sous-espace-propre de u associé à la valeur propre -1, est tel que $E_{-1} = {E_1}^{\perp}$. En déduire une base de E_{-1}.

Les réels -1 et 1 sont les seules valeurs propres de u, qui est un endomorphisme auto-adjoint. Les sous-espaces propres d'un tel endomorphisme étant orthogonaux deux à deux, on en déduit que E_{-1} et E_1 sont complémentaires orthogonaux. Les éléments de E_{-1} sont donc les vecteurs orthogonaux aux vecteurs propres de E_1 et l'on a

$$x \in E_{-1} \iff \langle x, (1,-2,0,0)\rangle = 0,\ \langle x, (1,0,2,0)\rangle = 0, \langle x, (1,0,0,-2)\rangle = 0 \iff x_1 = 2x_2 = -2x_3 = 2x_4.$$

On en déduit qu'une base de E_{-1} est $\{(2,1,-1,1)\}$.

6. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

L'endomorphisme u étant diagonalisable, une telle base est une base orthonormée de vecteurs propres de u. Les sous-espaces propres de u étant par ailleurs orthogonaux, il suffit donc de prendre la réunion d'une base orthonormée de E_{-1} et d'une base orthonormée de E_1. Pour E_{-1}, on a juste à normaliser le vecteur obtenu dans la précédente question. Pour E_1, la base trouvée plus haut n'étant pas orthogonale, on lui applique le procédé de Gram–Schmidt. On obtient finalement la base $\{(2,1,-1,1)/\sqrt{7}, (1,-2,0,0)/\sqrt{5}, (2,1,5,0)/\sqrt{30}, (2,1,-1,-6)/\sqrt{42}\}$.

7. Donner une interprétation géométrique de u.

L'endomorphisme u est une réflexion par rapport à E_1, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à cet hyperplan.

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul et E un espace euclidien de dimension n, de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour tout endomorphisme u de E, on rappelle que l'adjoint de u, noté u^*, est l'unique endomorphisme de E tel que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle\,.$$

1. Montrer que $u^* \circ u$ est un endomorphisme auto-adjoint dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

L'application $u^* \circ u$ est est un endomorphisme de E en tant que composée d'endomorphismes de E. On a

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u^* \circ u(x), y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u^* \circ u(y)\rangle\,.$$

L'endomorphisme $u^* \circ u$ est donc auto-adjoint, ses valeurs propres sont par conséquent réelles. Soit λ une valeur propre de $u^* \circ u$ et x un vecteur propre associé. On a

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda \langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle u^* \circ u(x), x\rangle = \langle u(x), u(x)\rangle = \|u(x)\|^2 \geq 0,$$

d'où $\lambda \geq 0$.

2. Montrer que si les vecteurs x et y sont deux vecteurs propres orthogonaux de $u^* \circ u$ alors les vecteurs $u(x)$ et $u(y)$ sont orthogonaux.

Soit x et y des vecteurs propres orthogonaux de $u^* \circ u$, respectivement associés à des valeurs propres λ et ν (on ne suppose pas nécessairement que $\lambda \neq \nu$). On a

$$\langle x, y\rangle = 0 \implies 0 = \lambda \langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle u^* \circ u(x), y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle\,.$$

On suppose à partir de maintenant que $\mathrm{Ker}\,(u)$ n'est égal ni à E, ni à $\{0_E\}$.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}\,(u)$.

Soit x un élément de $\mathrm{Ker}\,(u)$. On a $u(x) = 0_E$, d'où $u^* \circ u(x) = u^*(0_E) = 0_E$. Le vecteur x est donc un élément de $\mathrm{Ker}\,(u^* \circ u)$. On a montré que $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u^* \circ u)$.
Soit x un élément de $\mathrm{Ker}\,(u^* \circ u)$. On a $u^* \circ u(x) = 0_E$, d'où

$$0 = \langle u^* \circ u(x), x\rangle = \langle u(x), u(x)\rangle = \|u(x)\|^2.$$

On en déduit que $u(x) = 0_E$ et donc x est un élément de $\mathrm{Ker}\,(u)$. On a montré que $\mathrm{Ker}\,(u^* \circ u) \subset \mathrm{Ker}\,(u)$.

4. Justifier que le sous-espace $(\mathrm{Ker}\,(u^* \circ u))^{\perp}$ est stable par $u^* \circ u$. En déduire qu'il existe une base orthonormale de $(\mathrm{Ker}\,(u^* \circ u))^{\perp}$ constituée de vecteurs propres de $u^* \circ u$ (*on pourra pour cela considérer la restriction de $u^* \circ u$ à ce sous-espace*).

Le sous-espace $\mathrm{Ker}\,(u^* \circ u)$ est clairement stable par $u^* \circ u$, qui est un endomorphisme auto-adjoint. On sait par conséquent que l'orthogonal $(\mathrm{Ker}\,(u^* \circ u))^{\perp}$ est aussi stable par $u^* \circ u$. Par hypothèse, on sait par ailleurs que $(\mathrm{Ker}\,(u^* \circ u))^{\perp}$ n'est égal ni à E, ni à $\{0_E\}$.
La restriction de $u^* \circ u$ à $(\mathrm{Ker}\,(u^* \circ u))^{\perp}$ est un endomorphisme auto-adjoint et il existe par conséquent une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_r\}$, avec $r = \dim((\mathrm{Ker}\,(u^* \circ u))^{\perp})$, de $(\mathrm{Ker}\,(u^* \circ u))^{\perp}$, constituée de vecteurs propres de $u^* \circ u$.

5. Montrer enfin qu'il existe une base orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que $\{u(e_1), \dots, u(e_r)\}$ est une base *orthogonale* de $\mathrm{Im}\,(u)$ et $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ est une base orthonormale de $\mathrm{Ker}\,(u)$.

On a posé dans la précédente question $r = \dim((\mathrm{Ker}(u^* \circ u))^\perp)$, on en déduit donc que $\dim(\mathrm{Ker}(u^* \circ u)) = n - r$. Soit $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)$. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)$ et $(\mathrm{Ker}(u^* \circ u))^\perp$ étant supplémentaires orthogonaux, la famille $\{e_1, \dots, e_r\} \cup \{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée de E. Par ailleurs, les vecteurs $e_1, \dots, e_r$ étant des vecteurs propres de $u^* \circ u$ deux à deux orthogonaux, les vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_r)$ sont deux à deux orthogonaux. Ils sont également non nuls. En effet, si l'on suppose que $u(e_i) = 0_E$ pour un entier i de $\{1, \dots, r\}$, alors e_i appartient à $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$ et donc à $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) \cap (\mathrm{Ker}(u^* \circ u))^\perp = \{0_E\}$, ce qui est impossible puisque e_i est un vecteur propre. Ainsi, $\{u(e_1), \dots, u(e_r)\}$ est une famille orthogonale, donc libre, de $\mathrm{Im}(u)$. Puisque $\dim(\mathrm{Im}(u)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - (n-r) = r$, on en déduit que c'est aussi une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 4. Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ possède la propriété (P) si et seulement s'il existe $2n+1$ réels $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1}$ tels que la matrice suivante, définie par blocs et d'ordre $n+1$,

$$U = \begin{pmatrix} & & & \alpha_{2n+1} \\ & A & & \vdots \\ & & & \alpha_{n+2} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n & \alpha_{n+1} \end{pmatrix}$$

soit orthogonale.

1. (question préliminaire) Soit B une matrice d'ordre n et la matrice suivante, définie par blocs et d'ordre $n+1$,

$$V = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Expliciter les produits $V^\top UV$ et $V^\top U$.

On a

$$V^\top UV = \begin{pmatrix} & & & \beta_{2n+1} \\ & B^\top AB & & \vdots \\ & & & \beta_{n+2} \\ \beta_1 & \dots & \beta_n & \beta_{n+1} \end{pmatrix},$$

avec $\begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} B$, $\begin{pmatrix} \beta_{2n+1} \\ \vdots \\ \beta_{n+2} \end{pmatrix} = B^\top \begin{pmatrix} \alpha_{2n+1} \\ \vdots \\ \alpha_{n+2} \end{pmatrix}$, $\beta_{n+1} = \alpha_{n+1}$ et

$$V^\top U = \begin{pmatrix} & & & \gamma_{2n+1} \\ & B^\top A & & \vdots \\ & & & \gamma_{n+2} \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_n & \gamma_{n+1} \end{pmatrix},$$

avec $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{n+1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \gamma_{2n+1} \\ \vdots \\ \gamma_{n+2} \end{pmatrix} = B^\top \begin{pmatrix} \alpha_{2n+1} \\ \vdots \\ \alpha_{n+2} \end{pmatrix}$.

2. On suppose tout d'abord que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   est une matrice diagonale. Montrer dans ce cas que A a la propriété (P) si et seulement si les valeurs absolues des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont égales à 1, sauf peut-être une qui appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

Si la matrice U est orthogonale, ses colonnes (ou ses lignes) sont unitaires et deux à deux orthogonales, ce qui signifie que

$$\sum_{j=1}^{n+1} {\alpha_i}^2 = \sum_{j=1}^{n+1} {\alpha_{2n+2-i}}^2 = 1,\ \forall i \in \{1, \dots, n\},\ {\alpha_i}^2 + {\lambda_i}^2 = {\lambda_i}^2 + {\alpha_{2n+2-i}}^2 = 1,$$

et

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ i \neq j,\ \alpha_i \alpha_j = \alpha_{2n+2-i}\alpha_{2n+2-j} = 0 \text{ et } \lambda_i \alpha_{2n+2-i} + \alpha_i \alpha_{n+1} = \alpha_i \lambda_i + \alpha_{2n+2-i}\alpha_{n+1} = 0.$$

Ces conditions imposent que les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (resp. $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n+1}$) sont tous nuls, sauf peut-être un, d'indice k (resp. $2n+2-k$), pour lequel ${\alpha_k}^2 = 1 - {\lambda_k}^2$ (resp. ${\alpha_{2n+2-k}}^2 = 1 - {\lambda_k}^2$), ce qui implique que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\},\ |\lambda_i| = 1 \text{ et } |\lambda_k| \in [0, 1].$$

Réciproquement, si les valeurs absolues des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont égales à 1, sauf peut-être la k^e qui appartient à l'intervalle $[0,1]$, on peut construire une matrice U orthogonale en posant

$$\forall i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\},\ \alpha_i=\alpha_{2n+2-i}=0,\ \alpha_k=\alpha_{2n+2-k}=\sqrt{1-\lambda_k{}^2},\ \alpha_{n+1}=-\lambda_k.$$

3. On suppose ensuite que A est une matrice symétrique. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A ait la propriété (P).

Si la matrice A est symétrique, on sait qu'il existe une matrice orthogonale P d'ordre n et une matrice réelle diagonale

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

les réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ étant les valeurs propres de A, telles que $A=P^\top DP$. Supposons que A possède la propriété (P) et posons $B=P^\top$. On a alors

$$V^\top V=\begin{pmatrix} & & & 0\\ & PP^\top & & \vdots\\ & & & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}=I_{n+1},$$

d'où V est orthogonale. La matrice U étant orthogonale, il en découle que

$$(V^\top UV)^\top V^\top UV=V^\top U^\top VV^\top UV=V^\top U^\top UV=V^\top V=I_{n+1}.$$

La matrice $V^\top UV$ est donc orthogonale et s'écrit, d'après la question préliminaire,

$$V^\top UV=\begin{pmatrix} & & & \beta_{2n+1}\\ & PAP^\top & & \vdots\\ & & & \beta_{n+2}\\ \beta_1 & \dots & \beta_n & \beta_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & & \beta_{2n+1}\\ & D & & \vdots\\ & & & \beta_{n+2}\\ \beta_1 & \dots & \beta_n & \beta_{n+1}\end{pmatrix}.$$

La matrice D possède par conséquent la propriété (P) et l'on se trouve ramené au cas de la question précédente : il faut et il suffit que les valeurs absolues des valeurs propres de la matrice A soient égales à 1, sauf peut-être une qui appartient à l'intervalle $[0,1]$.

4. On suppose enfin que A est une matrice inversible.
On va tout d'abord montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice symétrique définie positive S telles que $A=QS$.
   (a) Montrer que la matrice $A^\top A$ est symétrique définie positive.
   On a tout d'abord
   $$(A^\top A)^\top=A^\top(A^\top)^\top=A^\top A,$$
   la matrice est donc symétrique. D'autre part, il vient
   $$\forall X\in M_{n,1}[\mathbb{R}),\ X^\top(A^\top A)X=(AX)^\top AX=\|AX\|^2\geq 0,$$
   la matrice est donc positive. De plus, si la matrice colonne X est telle que $X^\top(A^\top A)X=0$, alors $\|AX\|=0$, d'où $AX=0_{M_{n,1}[\mathbb{R})}$. La matrice A étant inversible, ceci signifie que X est nulle. La matrice $A^\top A$ est donc définie positive.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice S symétrique définie positive telle que $A^\top A=S^2$.
   La matrice $A^\top A$ étant donc définie positive, on sait qu'il existe une existe une matrice orthogonale P' d'ordre n et une matrice réelle diagonale
   $$D'=\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix},$$
   les réels strictement positifs $\mu_1,\dots,\mu_n$ étant les valeurs propres de $A^\top A$, telles que $A^\top A=(P')^\top D'P'$. Posons alors
   $$\Delta=\begin{pmatrix}\sqrt{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\mu_n}\end{pmatrix}$$
   et $S=(P')^\top\Delta P'$. On vérifie alors aisément que S est symétrique définie positive et que
   $$S^2=(P')^\top\Delta P'(P')^\top\Delta P'=(P')^\top\Delta^2P'=(P')^\top D'P'=A^\top A.$$

(c) Poser $Q = AS^{-1}$ et conclure.

La matrice S étant symétrique, son inverse l'est aussi. On a alors $Q^\top Q = (AS^{-1})^\top AS^{-1} = (S^{-1})^\top A^\top AS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$ et $QS = AS^{-1}S = A$.

En déduire alors une condition portant sur $A^\top A$ pour que A ait la propriété (P).

Supposons que A possède la propriété (P) et posons $B = Q$. On a alors

$$V^\top V = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & Q\top Q & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1},$$

d'où V est orthogonale. La matrice U étant orthogonale, il en découle que

$$(V^\top U)^\top V^\top U = U^\top V V^\top U = U^\top U = I_{n+1}.$$

La matrice $V^\top U$ est donc orthogonale et s'écrit, d'après la question préliminaire,

$$V^\top U = \begin{pmatrix} & & & \gamma_{2n+1} \\ & Q^\top A & & \vdots \\ & & & \gamma_{n+2} \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_n & \gamma_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \gamma_{2n+1} \\ & S & & \vdots \\ & & & \gamma_{n+2} \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_n & \gamma_{n+1} \end{pmatrix}.$$

La matrice S possède par conséquent la propriété (P) et l'on se trouve ramené au cas de la question précédente : il faut et il suffit que les valeurs propres de cette matrice soient égales à 1, sauf peut-être une qui appartient à l'intervalle $]0, 1]$ (on rappelle que les valeurs propres de S sont strictement positives). Ces valeurs propres étant les racines carrées de celles de la matrice $A^\top A$, la condition nécessaire et suffisante recherchée est les valeurs propres de $A^\top A$ soient égales à 1, sauf peut-être une qui appartient à l'intervalle $]0, 1]$.