高等数学——函数与极限讲义

数学协会

前言：讲义主要对于函数与极限部分的知识点系统地进行梳理，此外添加了一些额外的内容。我们以例题与概念结合的形式对知识点进行描述。另外也整理了一部分高中的基本概念。然后对极限部分进行系统的分析以及阐述。由于编者水平有限，如有发现问题，希望大家及时指出。

（★为额外内容；※为选做题）

1. 函数

1.1反函数

作为逆映射的特例，有反函数的定义。简单来说就是对于一般函数将与的位置交换既可。对于一些常用的三角函数及其反三角函数：



 

 1.2初等函数

幂函数：（是常数）

指数函数：（且）；

对数函数：且特别地当时，记为；

三角函数： ；

反三角函数：等；

1. 极限

包括数列极限，函数极限以及左右极限的概念。

2.1无穷大量与无穷小量

重要性质：有界函数与无穷小的乘积还是无穷小（在极限计算中经常运用）

无穷小的比较中，若，则称是比高阶的无穷小，记作，即比接近0的速度更快。记住此条，即可举一反三。

常用的等价无穷小：

此外不常用的值得一记的是：等

2.2两个重要极限

以及

2.3极限存在准则

★**夹逼准则：如果数列｛｝、｛｝和｛｝满足以下条件：**

**（1）从某项起，即当时，有**

**，**

**（2）**

小练习：请利用极限存在准则证明：

（1）（2）

2.4函数的连续性和间断点

函数若要在处连续，就要同时满足三个条件：

1. 函数在点处有定义；
2. 极限存在，即；
3. 极限值与函数值相等，即.

左连续

震荡间断点

无穷间断点

跳跃间断点

可去间断点

第二类间断点

第一类间断点（左右极限存在）

右连续

函数的连续性

函数的间断点

函数的连续性和间断点

2.5闭区间上连续函数的性质

介值定理：设函数在闭区间上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

及

那么，对于与之间的任意一个数，在开区间内至少有一点，使得



零点定理：设函数在闭区间上连续，且与异号（即），那么在开区间内至少存在 ，使 

练习：证明方程至少有一个小于1的正根.

本章练习：

⑴当时，函数的极限是\_\_\_\_\_\_.

⑵已知其中是常数，则\_\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_\_.

⑶设，则是第\_\_\_\_\_\_类间断点，是第\_\_\_\_\_\_类间断点.

⑷极限\_\_\_\_\_\_.

⑸\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

⑹设则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

⑺设在连续，且存在，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

⑻已知函数在连续，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

⑼设当时，是比高阶的无穷小，而是比高阶的无穷小，则正整数等于\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

⑽\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

⑾设常数求

⑿求. ⒀求

⒁※求.

⒂求极限.

⒃已知

I求

II函数在定义域内是否连续.