高等数学——定积分及其应用

数学协会

2016.12.10

写在前面的话:前面我们说过对于不定积分的理解是函数的集合，与之相对的，这里我们强调定积分的实质意义是一块区域的面积，是对一块不规则图形用无穷细分的方法求其面积的重要工具。这一章我们要掌握其性质，计算方法，广义积分以及它的具体的实际应用方法。

# 1 定积分

## 1.1 概念

定义

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

可积条件：(1)若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

(2)若$f(x)$是在$[a,b]$上只有有限个间断点的有界函数，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

例1 利用定积分求极限：$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}})$

解：$f(\xi_i)=\frac{1}{\sqrt{4-\xi_i}}=\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n})^2}},\Delta x_i=\frac{1}{n}$

则$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n})^2}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4-\xi^2}}\cdot\Delta x_i$

$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

## 1.2 定积分中值定理

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点$\xi$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

例2 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)$在$(0,1)$上可导，又$3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx=f(0)$，证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=0$.(结合定积分中值定理与罗尔定理证明)

## 1.3 变上限积分

求导法则($\int_a^x f(t)dt$是$[a,b]$上连续函数$f(x)$的一个原函数.)

(1)$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$;

(2)$\frac{d}{dx}\int_a^{\beta(x)} f(t)dt=f[\beta(x)]\beta'(x)$;

(3)$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt=f[\beta(x)]\beta'(x)-f[\alpha(x)]\alpha'(x)$

例3 设函数$f(x)$连续，且$f(0)\neq 0$，求极限：$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

解：解决此类问题一般需要用洛必达法则.

(令$x-t=u$)因$\int_0^x f(t)dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du$.

原式$=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du}$

$=\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}\xrightarrow{\text{积分中值定理}}\lim_{x\to 0}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}$

$=\frac{1}{2}$(因$x\to 0$时，$\xi\to 0$，且$f(x)$连续.)

## 1.4 定积分计算方法

$Newton-Leibniz$公式

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

除此以外，定积分的换元积分法与分部积分法与不定积分区别不大，我们着重强调奇偶性与周期性.

奇偶性：设$f(x)$在$[-a,a]$上连续，若$f(x)$是奇函数，则$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.若$f(x)$是偶函数，则$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

例如$\int_{-1}^{1}x^3e^{-x^2}=0$(奇乘偶为奇)，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}sin^4xdx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}sin^4xdx$(之后可以利用$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}sin^n dx$的公式求解.)

周期性：设$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上以$T$为周期的周期函数，$a$为任意常数，则$\int_{a}^{a+T}f(x)dx=\int_{0}^{T}f(x)dx$.

例4 $\int_{0}^{100\pi}\sqrt{1-cos2x}dx=\int_{0}^{100\pi}\sqrt{2sin^2x}dx=\sqrt{2}\int_{0}^{100\pi}|sinx|dx$

$f(x)=|sinx|$是以$\pi$为周期的周期函数.

原式$=\sqrt{2}(\int_{0}^{\pi}|sinx|dx+\int_{\pi}^{2\pi}|sinx|dx)+\cdots+\int_{99\pi}^{100\pi}|sinx|dx$

$=100\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}|sinx|dx$

$=100\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}sinxdx$

$=100\sqrt{2}(-cosx)|_0^{\pi}=200\sqrt{2}$

常用积分公式:

(1)$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$.

(2)$\int_{0}^{\pi}xf(sinx)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(sinx)dx$.

(3)$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(sinx)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(cosx)dx$.

(4)$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}sin^nxdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}cos^nxdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\text{n为正偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot1,\text{n为大于1的奇数.}\end{cases}$

## 1.5 广义积分

(1)无穷限的广义积分.

若$f(x)$在积分区间连续，则

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}f(x)dx(a<b);$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b}f(x)dx(a<b);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}f(x)dx.$$

(2)无界函数的广义积分.

若$f(x)$在$(a,b]$上连续，在点$a$的右邻域内无界，则

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{a+\epsilon}^{b}f(x)dx(0<\epsilon<b-a).$$

若$f(x)$在$[a,b)$上连续，在点$b$的左邻域内无界，则

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\epsilon}f(x)dx(0<\epsilon<b-a).$$

若$f(x)$在$[a,c)$及$(c,b]$上连续，在点$c$的邻域内无界，则

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{a}^{c-\epsilon}f(x)dx+\lim_{\epsilon'\to0^+}\int_{c+\epsilon'}^{b}f(x)dx(0<\epsilon<c-a,0<\epsilon'<b-c).$$

以上定义中，若极限存在，则广义积分收敛，否则称其发散.

例5 计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}$

$=\lim_{a\to-\infty}arctan|_0^a+\lim_{b\to+\infty}arctan|_0^b$

$=-(-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}$

$=\pi$.

不能写成$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+x^2}dx$.

若$\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+x^2}dx$存在，不能保证收敛，称此极限值为$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$的柯西主值，记为：

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+x^2}dx.$$

$\Gamma$——函数

广义积分$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$，当$p>0$时，其收敛.

性质:(1)$\Gamma(1)=1$

(2)$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$

(3)$\Gamma(n+1)=n!(n\in N)$

# 2 几何物理应用

几何应用

1.平面图形面积

(1)直角坐标：$S=\int_a^b|g(x)-f(x)|dx.$

(2)极坐标:$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta|r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)|d\theta.$

2.体积

(1)平行截面面积的立体的体积：$V=\int_a^b A(x)dx.$

(2)旋转体体积:$V=\int_a^b\pi f^2(x)dx.$

3.平面曲线的弧长

(1)直角坐标：$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)dx}.$

(2)参数方程：$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$

(3)极坐标：$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$

物理应用

1.变力沿直线做功：$\int_a^b F(x)dx.$

2.液体的侧压力:$\int_a^b\gamma xf(x)dx.$($\gamma$为液体密度.)

函数值的平均值

$\tilde{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$

## 本章练习

(1) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4cos^4\theta d\theta$

(3) 证明$\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}.$

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-pt}sin\omega tdt(p>0,\omega>0)$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-sin2x}dx$

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}.$

(8) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=f(1)$.证明：在$(0,1)$内至少存在一点$\xi$，使$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$

(9) 求由摆线$x=a(t-sint)$，$y=a(1-cost)$的一拱$(0\le t\le 2\pi)$与横轴所围成的图形的面积.

(10) 把星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$所围成的图形绕x轴旋转，计算所得旋转体的体积.

(11) 求心形线$\rho=a(1+cos\theta)$的全长.

(12) 求抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$被圆$x^2+y^2=3$所截下的有限部分的弧长.