Chap 07

차원 - Dimension

7.1 기저의 크기

7.1.1 Morphing 보조 정리와 그 응용

Lemma (Morphing Lemma) : $\mathcal{V}$ 는 벡터공간이라고 하자. S 는 $\mathcal{V}$ 에 대한 생성자들의 집합이라 하고, B 는 $\mathcal{V}$ 에 속하는 벡터들로 구성된 선형독립인 집합(즉, 기저)이라고 하면, $|S| \geq |B|$ 이다.

Theorem (Basis Theorem) : $\mathcal{V}$ 는 벡터공간이라 하고, $\mathcal{V}$ 에 대한 모든 기저(basis)는 동일한 크기를 가진다.

- Proof : B_1 과 B_2 는 $\mathcal{V}$ 에 대한 두 기저라고 하자. $S = B_1$ 과 $B = B_2$ 를 위의 *Morphing Lemma* 에 적용하면 $|B_1| \geq |B_2|$ 라고 할 수 있다. $S = B_2$ 와 $B = B_1$ 을 적용하면 $|B_2| \geq |B_1|$ 이다. 이 둘의 부등식을 결합하면 $|B_1| = |B_2|$ 를 얻을 수 있다.

Theorem : $\mathcal{V}$ 는 벡터공간이라고 하면, $\mathcal{V}$ 에 대한 생성자들의 집합이 $\mathcal{V}$ 에 대한 생성자들로 구성된 *가장 작은 집합* 이 되는 필요충분 조건은 이 집합이 $\mathcal{V}$ 에 대한 기저인 것이다.

- Proof : T 는 $\mathcal{V}$ 에 대한 생성자들의 집합이라고 하자. 그렇다면, 증명해야 하는 것은
  - (1) 만약 T 가 $\mathcal{V}$ 에 대한 기저이면 T 는 $\mathcal{V}$ 에 대한 생성자들로 구성된 가장 작은 집합이다.
  - (2) 만약 T 가 $\mathcal{V}$ 에 대한 기저가 아니면 생성자들로 구성된 T 보다 더 작은 집합이 존재한다.

1. T 를 기저라고 하고, S 는 $\mathcal{V}$ 에 대한 생성자들로 구성된 가장 작은 집합이라고 하자. 위의 *Morphing Lemma* 에 의하면, $|T| \leq |S|$ 이고, 따라서 T 또한 생성자들의 가장 작은 집합이다.
2. T 는 기저가 아니라고 해보자. 기저는 *생성자들로 구성된 선형독립* 인 집합이다. 그러므로 T 는 기저가 아니라 했으니, T 는 생성자들로 구성된 선형종속인 집합이다. 6.5.4의 Lemma에 따르면 T 내에 다른 벡터들의 생성에 속하는 일부 벡터들이 있다. 그러므로 *Superfluous-Vector Lemma* 에 의해, T 에서 제거하면 $\mathcal{V}$ 에 대한 생성자들의 집합이 되는 일부 벡터가 존재한다. 따라서 T 는 생성자들로 구성된 가장 작은 집합이 아니다.

7.1.2 생략

7.2 차원과 랭크 - Dimension and Rank

7.2.1 정의 및 예제

Definition : 벡터공간의 *차원* 은 그 벡터공간에 대한 기저의 크기로 정의한다. 벡터공간 $\mathcal{V}$ 의 차원은 $\dim \mathcal{V}$ 로 표현한다.

- *Example 7.2.2* : $\mathbb{R}^3$ 에 대한 하나의 기저는 표준 기저 $\{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]\}$ 이다. 그러므로 $\mathbb{R}^3$ 의 차원은 기저의 크기인 3, 즉 $\dim \mathcal{V} = 3$ 이다.
- *Example 7.2.3* : 좀 더 일반적으로, 임의의 필드 F 와 유한집합 D 에 대해, F^D 에 대한 하나의 기저는 표준기저이고 이것은 $|D|$ 벡터들로 구성되므로, F^D 의 차원은 $|D|$ 이다.

Definition : 벡터들의 집합 S 의 랭크(rank)를 Span S 의 차원이라 정의한다. S 의 랭크는 rank S 로 나타낸다.

- *Example 7.2.6* : 벡터 $[1,0,0],[0,2,0],[2,4,0]$ 은 선형종속이다. 그러므로 이 벡터들의 랭크는 3보다 작다. 이들 중 임의의 두 벡터는 세 벡터들의 Span에 대한 기저를 형성한다. 따라서 랭크는 2 이다.

Proposition : 벡터들로 구성된 임의의 집합 S 에 대해, rank $S \leq |S|$

Definition : 행렬 M에 대해, M 의 *행랭크* 는 그 행렬의 행의 랭크이고, M 의 *열랭크* 는 그 행렬의 열의 랭크이다. 즉, M의 행랭크는 Row M의 차원이고, M 의 열랭크는 Col M의 차원이다.

- *Example 7.2.10* :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- 이 행렬의 행벡터는 $[1, 0, 0]$, $[0, 2, 0]$, $[2, 4, 0]$ 이고, 위의 Example 7.2.6 에서 살펴보았듯이 행벡터의 랭크는 2이므로, M의 행랭크는 2이다.
- 행렬 M의 열벡터는 $[1, 0, 2]$, $[0, 2, 4]$, $[0, 0, 0]$ 이다. 세 번째 벡터는 영벡터이므로, 열공간을 생성하는 데 필요하지 않다. 나머지 두 벡터는 선형독립이므로 열랭크는 2 이다.

- *Example 7.2.11* :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

- 행벡터 $[1, 0, 0, 5]$, $[0, 2, 0, 7]$, $[0, 0, 3, 9]$ 들은 선형독립이므로 M의 행랭크는 3 이다.
- M의 열벡터 $[1, 0, 0]$, $[0, 2, 0]$, $[0, 0, 3]$, $[5, 7, 9]$ 들은 처음 세 열은 선형독립이고 $[5, 7, 9]$ 은 앞의 세 벡터의 선형결합으로 나타낼 수 있으므로 열랭크는 3이다.

위의 두 예제를 통해 행랭크와 열랭크가 동일하다는 것을 알 수 있다. 이것은 우연히 동일한 것이 아니라, 어떤 행렬에 대해서도 *행랭크* 와 *열랭크* 가 *동일* 하다.

7.2.2 기하학적 구조

좌표계에 대해 기하학적으로 이해 해보자. 기하적 객체의 차원은 객체의 점들에 할당되어야 하는 최소 개수의 좌표이다. 좌표의 수는 기저의 크기이고, 기저의 크기는 주어진 벡터들로 구성된 집합의 랭크이다.

- Span $\{[1, 2, -2]\}$ 은 직선, 즉 1차원 객체이다. Span $\{[0, 0, 0]\}$ 은 점, 즉 1차원 구조이다. 첫 번째 벡터공간은 차원이 1이고 두 번째 벡터공간은 차원이 0이다.
- Span $\{[1, 2], [3, 4]\}$ 은 $\mathbb{R}^2$의 모든 것, 즉 2차원 객체를 구성한다. 반면, Span $\{[1, 3], [2, 6]\}$ 은 직선, 즉 1차원 객체이다.
- Span $\{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ 은 $\mathbb{R}^3$ 의 모든 것, 즉 3차원 객체이다. 반면에, Span $\{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [1, 1, 0]\}$ 은 평면 즉, 2차원 객체이다.

7.2.3 생략

7.2.4 $GF(2)$ 상의 벡터공간의 크기

d 는 $GF(2)$ 상의 벡터공간 $\mathcal{V}$ 에 대한 차원이라 하고, $b_1, \ldots, b_d$는 $\mathcal{V}$ 에 대한 기저라고 하면, 6.7.1의 Unique Representation Lemma에 의해, $\mathcal{V}$ 내의 각 벡터는 기저벡터들의 선형결합으로 유일하게 표현된다. 따라서, $\mathcal{V}$ 내 벡터들의 수는 이 기저벡터들의 선형결합들의 수와 동일하다. d 개의 기저벡터가 있으므로, 각 선형결합에는 d 개의 계수가 있다. 각 계수는 0 또는 1 이므로 2^d 개의 다른 선형결합이 있다.

7.2.5 $\mathcal{V}$ 에 속하는 벡터들의 임의의 선형독립 집합은 $\mathcal{V}$에 대한 기저를 형성하도록 확장될 수 있다.

Lemma (Superset-Basis Lemma) : 임의의 벡터공간 $\mathcal{V}$와 벡터들로 구성된 임의의 선형독립 집합 A 에 대해, $\mathcal{V}$는 A의 모든 원소를 포함하는 기저를 가진다.

- Proof : 6.3.1 에서 보았던 Grow 알고리즘을 사용해보자.

def superset_basis($T, \mathcal{V}$):
  Initialize B to be equal to T.
  Repeat while possible: select a vector in $\mathcal{V}$ that is not in Span B, and put it in B.
  Return B

Initially, B contains all of T (in fact, is equal to T) and is linearly independent. By the Grow-Algorithm Corollary, the set B remains linearly independent throughout the algorithm. If the algorithm terminates, Span $B = \mathcal{V}$. Hence upon termination B is a basis for $\mathcal{V}$. Furthermore, B still contains all of T since the algorithm did not remove any vectors from B.

How do we show that the algorithm terminates? For some field $\mathbb{F}$ and some set D, the vector space $\mathcal{V}$ consists of vectors in $\mathbb{F}^D$. In this book, we assume D is finite. Therefore there is a standard basis for $\mathbb{F}^D$, which consists of $|D|$ vectors.

By the Morphing Lemma, since B is a linearly independent set of vectors belonging to $\mathbb{F}^D$, the cardinality of B is at most the cardinality of the standard basis for $\mathbb{F}^D$. However, each iteration of the Grow algorithm increases the cardinality of B by one, so the algorithm cannot continue forever (in fact, it cannot continue for more than $|D|$ iterations). $\square$

7.2.6 차원 원리(Dimension principle)

Lemma (Dimension Principle) : 만약 $\mathcal{V}$가 $\mathcal{W}$의 부분공간(subspace)이면, 다음 성질이 성립한다.

- *Property D1* : $\dim \mathcal{V} \leq \dim \mathcal{W}$ 이다.
- *Property D2* : 만약 $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ 이면 $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ 이다.
  - proof : $v_1, \dots, v_k$ 는 $\mathcal{V}$에 대한 기저라고 하면, 7.2.5의 Superset-Basis Lemma에 의해 $v_1, \dots, v_k$를 포함하는 $\mathcal{W}$ 에 대한 기저 B가 있고, B의 크기는 적어도 k이다. 이 의미는 Property D1을 증명한다. 만약 B의 크기가 정확히 k이면 B는 $v_1, \dots, v_k$이외의 다른 벡터는 포함하지 않으며, $\mathcal{V}$의 기저는 $\mathcal{W}$의 기저임을 보여주어 Property D2를 증명한다.

- *Example 7.2.15* : $\mathcal{V} = Span\{[1,2],[2,1]\}$ 라고 해보자. $\mathcal{V}$는 $\mathbb{R}^2$ 의 부분공간이다. 집합 $\{[1,2],[2,1]\}$ 은 선형독립이고, 따라서 $\dim \mathcal{V} = 2$이다. $\dim \mathbb{R}^2 = 2$이므로 Property D2는 $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ 임을 보여준다.
- *Example 7.2.16* : 집합 $S = \{[-0.6,-2.1,-3.5,-2.2],[-1.3,1.5,-0.9,-0.5],[4.9,-3.7,0.5,-0.3],[2.6,-3.5,-1.2,-2.0],[-1.5,-2.5,-3.5,0.94]$ 에 대해 $|S| = 5$ 이므로, dim Span $S \leq 5$이다. S 내의 모든 벡터는 4-벡터이므로, Span S는 $\mathbb{R}^4$의 부분공간이고, dim Span $S \leq 4$ 이다.

위의 예제를 통해 다음을 알 수 있다.

Proposition : D-벡터들로 구성된 임의의 집합의 랭크는 $|D|$보다 작거나 같다.

7.2.7 생략

7.2.8 Rank 정리

앞의 예제에서 살표보았듯이 행랭크와 열랭크는 동일하다. 이제 왜 행랭크와 열랭크가 같은지 알아보자.

Theorem (Rank Theorem) : 임의의 어떠한 행렬에 대해, 행랭크와 열랭크는 동일하다.

- Proof : 임의의 행렬 A 에 대해 A 행랭크는 A의 열랭크보다 작거나 같다. 동일한 주장을 A^T 에 적용하면 A^T의 행랭크는 A^T의 열랭크보다 작거나 같다. 즉, A의 열랭크는 A의 행랭크보다 작거나 같다. 이 두 부등식을 결합하면 A의 행랭크는 A의 열랭크와 동일하다.
  A는 행렬이라 하자. 행렬 A를 열벡터로 나타내 보자:

$$A = \begin{bmatrix} \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \\ \end{bmatrix}$$

- r 은 A 의 열랭크라 하고 $b_1, \ldots, b_r$ 은 A의 열공간에 대한 기저라 하자.
  A 의 각 열 a_j에 대해 u_j는 a_j의 $b_1, \ldots, b_r$에 대한 좌표 표현이라 하자. 그러면, 행렬-벡터 곱셈의 선형결합 정의에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \\ a_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ b_1 & \cdots & b_r \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ u_j \end{bmatrix}$$

- 행렬-행렬 곱셈의 행렬-벡터 정의에 의하면, 다음과 같이 표현되며,

$$\begin{bmatrix} \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ b_1 & \cdots & b_r \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ u_1 & \cdots & u_n \\ \\ \end{bmatrix}$$

- 이것을 다음 처럼 쓸 수 있다.

$$A = BU$$

- B는 r 개의 열을 가지며 U는 r개의 행을 가진다.
  이제, A 와 B를 열 대신에 행들로 구성된 행렬로 생각해 보자.

$$\begin{bmatrix} & \bar{a}_1 & \\ & \vdots & \\ & \bar{a}_m & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \bar{b}_1 & \\ & \vdots & \\ & \bar{b}_m & \end{bmatrix} \cdot U$$

- 행렬-행렬 곱셈의 벡터-행렬 정의에 의하면, A의 행 i인 $\bar{a}_i$는 B의 행 i인 $\bar{b}_i$를 행렬 U에 곱한 것이다.

$$\begin{bmatrix} \\ \bar{a}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \bar{b}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ & U & \\ \\ \end{bmatrix}$$

- 그러므로, 벡터-행렬 곱셈의 선형결합에 의하면 A의 모든 행은 U의 행들의 선형결합이다. 따라서, A의 행공간은 U의 행공간의 부분공간이다. U의 행공간의 차원은 r, 즉 U의 행의 수보다 작거나 같다. 따라서, A의 행랭크는 r 보다 작거나 같다.
  위에서 보았듯이, 임의의 행렬 A에 대해 A의 행랭크는 A의 열랭크보다 작거나 같다. 임의의 행렬 M에 대해, 이결과를 M에 적용하면 다음이 성립한다.

$$rank(RowM) \leq rank(ColM)$$

- 이 결과를 M^T 에 적용하면,

$$rank(RowM^T) \leq rank(ColM^T) \Longleftrightarrow rank(ColM) \leq rank(RowM)$$

- 따라서, M의 행랭크는 M의 열랭크와 동일하다.

Definition : 행렬의 *랭크* 는 그 행렬의 열랭크와 동일하고, 이것은 또한 그 행렬의 행랭크와 같다.

7.3 직합 - Direct Sum

7.3.1 정의

$\mathcal{U}$와 $\mathcal{V}$는 필드 F상의 D-벡터들로 구성된 두 개의 벡터공간이라고 하자.

Definition : 만약 $\mathcal{U}$ 와 $\mathcal{V}$ 가 오로지 영벡터만을 공유한다면 $\mathcal{U}$ 와 $\mathcal{V}$ 의 *직합* (direct sum)은 아래와 같이 정의하며,

$$\{u + v : u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}$$

$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ 로 나타낸다. 즉, $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ 는 $\mathcal{U}$의 벡터와 $\mathcal{V}$의 벡터의 모든 합으로 구성된 집합이다.

- *Example 7.3.3* : $\mathcal{U} = \text{Span}\,\{[1,2,1,2],[3,0,0,4]\}$ 라 하고, $\mathcal{V}$ 는 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 의 영공간(null space) 이라 하자. $\mathcal{U}$ 와 $\mathcal{V}$는 아래의 이유로, $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ 가 성립하지 않는다.
  - 벡터 $[2,-2,-1,2]$는 $[3,0,0,4] - [1,2,1,2]$ 이므로 $\mathcal{U}$ 내에 있다.
  - 벡터 $[2,-2,-1,2]$는 아래와 같이 $\mathcal{V}$ 내에 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- *Example 7.3.4* : $\mathcal{U} = \text{Span}\,\{[4,-1,1]\}, \mathcal{V} = \text{Span}\,\{[0,1,1]\}$ 라고 하자. $\mathcal{U}$와 $\mathcal{V}$ 각각은 단일 벡터의 Span이고, 따라서 직선을 형성한다.
  유일한 교점은 원점(0,0,0)이다. 따라서, $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$는 성립한다. 이 직합은 Span $\{[4,-1,1],[0,1,1\}$ 이며 두개의 직선을 포함하는 평면이다.

Proposition : 직합(direct sum) $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$는 벡터공간이다.

7.3.2 직합에 대한 생성자

바로 위의 Example 7.3.4 에서, $\mathcal{U}$에 대한 생성자들의 집합과 $\mathcal{V}$에 대한 생성자들의 집합의 합집합을 구하면 직합 $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ 에 대한 하나의 생성자 집합이 얻어진다.

Lemma : 아래 집합의 합집합은

- $\mathcal{V}$의 생성자들의 집합
- $\mathcal{W}$의 생성자들의 집합

$\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$에 대한 생성자들의 집합이다.

- proof : $\mathcal{V} = \text{Span}\,\{v_1, \ldots, v_m\}, \mathcal{W} = \text{Span}\,\{w_1, \ldots, w_n\}$ 라고 하면,
  - $\mathcal{V}$ 내의 모든 벡터는 $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$ 으로 표현할 수 있다.
  - $\mathcal{W}$ 내의 모든 벡터는 $\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n$ 으로 표현할 수 있다.

  따라서, $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ 내의 모든 벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n$$

7.3.3 직합에 대한 기저

Lemma (Direct Sum Basis Lemma) : $\mathcal{U}$의 기저와 $\mathcal{V}$의 기저의 합집합은 $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ 의 기저이다.

- Proof : $\{u_1, \ldots, u_m\}$은 $\mathcal{U}$에 대한 기저라 하고, $\{v_1, \ldots, v_n\}$은 $\mathcal{V}$에 대한 기저라고 하면, 기저는 생성자들의 집합이므로, $\{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n\}$은 $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$에 대한 생성자들의 집합이다. 이제 기저라는 것을 보이기 위해서 *선형독립* 이라는 것을 보여주면 된다. 다음 식을 가정해보자.

$$0 = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$

- 위의 식은 다음이 성립한다.

$$\underbrace{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m}_{in\mathcal{U}} = \underbrace{(-\beta_1) v_1 + \cdots + (-\beta_n) v_n}_{in\mathcal{V}}$$

- 좌변은 $\mathcal{U}$ 내의 벡터이고, 우변은 $\mathcal{V}$ 내의 벡터이다. $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ 의 정의에 의하면, $\mathcal{U}$ 와 $\mathcal{V}$ 둘 모두에 있는 유일한 벡터는 영벡터이다. 이것은 다음을 보여준다.

$$0 = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m$$

$$0 = (-\beta_1) v_1 + \cdots + (-\beta_n) v_n$$

- 위의 식들은 선형독립에 의해 자명하다(trivial).

위의 Lemma(Direct Sum Basis Lemma) 에 의해 다음과 같은 Corollary가 가능하다.

Corollary (Direct-Sum Dimension Corollary) : $\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$

위의 Corollary(따름정리)는 Kernel-Image Theorem을 증명하는데 사용할 것 이다.

7.3.4 벡터의 고유분해 - Unique Decomposition

Corollary (Direct-Sum Unique Representation Collorary) : $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ 내의 임의의 벡터는 $u + v$ 로 유일하게 표현된다. (단, $u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}$)

- Proof : $\{u_1, \ldots, u_m\}$은 $\mathcal{U}$에 대한 기저라 하고, $\{v_1, \ldots, v_n\}$은 $\mathcal{V}$에 대한 기저라고 하면, $\{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n\}$은 $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$에 대한 기저이다.
  w는 $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ 내의 임의의 벡터라고 하자. w는 다음과 같이 표현된다.

$$w = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m}_{in\mathcal{U}} + \underbrace{\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n}_{in\mathcal{V}}$$

- w를 $w = u + v$로서 나타내는 방법을 고려해보자. u는 $\mathcal{U}$ 내에 있고, v는 $\mathcal{V}$ 내에 있다. u 를 $\mathcal{U}$ 의 기저에 대해 나타내고, v를 $\mathcal{V}$의 기저에 대해 표현하면 다음과 같다.

$$w = \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_m u_m + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_n v_n$$

- Unique-Representation Lemma 에 의해 $\gamma_1 = \alpha_1, \ldots, \gamma_m = \alpha_m, \delta_1 = \beta_1, \ldots, \delta_n = \beta_n$ 이므로, w는 $\mathcal{U}$ 내의 벡터와 $\mathcal{V}$ 내의 벡터의 합으로 유일하게 명시된다.

7.3.5 여부분공간 - Complementary subspace

Definition : 만약 $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{W}$ 이면, $\mathcal{U}$ 와 $\mathcal{V}$ 는 $\mathcal{W}$의 *여부분공간(complementary subspace, complementary: 상호보완적인)* 이라 한다.

Proposition : 임의의 벡터공간 $\mathcal{W}$ 와 $\mathcal{W}$의 임의의 부분공간 $\mathcal{U}$에 대해, $\mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$을 만족하는 $\mathcal{W}$ 의 부분공간 $\mathcal{V}$ 가 있다.

- Proof : $u_1, \ldots, u_k$ 는 $\mathcal{U}$에 대한 기저라고 하자. 7.2.5의 Superset-Basis Lemma에 의하면, $u_1, \ldots, u_k$ 를 포함하는 $\mathcal{W}$에 대한 기저가 있다. 이 기저를 $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots v_r\}$로 나타내고, $\mathcal{V} =$ Span $\{v_1, \ldots, v_r\}$ 이라고 하자. $\mathcal{W}$ 내의 임의의 벡터 w 는 이 기저에 대해 다음과 같이 좌표표현으로 나타낼 수 있다.

$$w = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k}_{in \mathcal{U}} + \underbrace{\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r}_{in \mathcal{V}}$$

- 따라서, 만약 직합(direct-sum)이 옳다는 것을 보여 줄 수 있으면, 즉 $\mathcal{U}$ 와 $\mathcal{V}$ 둘 모두에 속하는 유일한 벡터는 영벡터라는 것을 보여줄 수 있으면 $\mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ 임을 보여주는 것이다.
- 어떤 벡터 v가 $\mathcal{U}$와 $\mathcal{V}$ 둘 모두에 속한다고 하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\alpha_1 u_1 + \cdots \alpha_k u_k = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r$$

$$0 = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k - \beta_1 v_1 - \cdots - \beta_r v_r$$

- 이것이 의미하는 것은 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$ 이며, v는 영벡터임을 보여준다.

7.4 차원과 선형함수

선형함수가 가역적인지 아닌지 판단할 수 있는 기준에 대해 알아 보도록 하자. 이것은 또한 행렬이 가역적인지 판단한느 기준을 제공해 준다. 또한 이러한 기준은 중요한 정리인 *Kernel-Image* 정리를 기반으로 한다.

7.4.1 선형함수의 가역성

선형함수 $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 가 가역적인지 어떻게 판단할 수 있을까? 알아야 하는 것은 5장에서 배웠던 f 가 단사(one-to-one)인지 전사(onto)인지의 여부이다.

One-to-One Lemma에 의하면, f가 단사함수일 필요충분조건은 그 커널(kernel)은 자명한 경우 즉, $\ker f = \{0\}$ 인 경우이다.

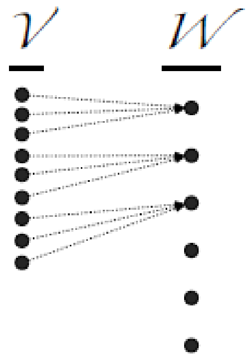
5.10.6에서 f 의 상은 Im $f = \{f(v) : v \in \mathcal{V}\}$ 이다. 따라서, f가 전사함수일 필요충분조건은 Im $f = \mathcal{W}$ 인 경우이다.

Im f 가 $\mathcal{W}$의 부분공간임을 보여줄 수 있다. 7.2.6의 Dimension principle Lemma에 의하면 f 가 전사함수일 필요충분 조건은 $\dim$ Im $f = \dim \mathcal{W}$ 이다.

- 선형함수 $f : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ 가 $\dim \ker f = 0$ 이고 $\dim$ Im $f = \dim \mathcal{W}$ 이면 가역적(Invertible)이다.

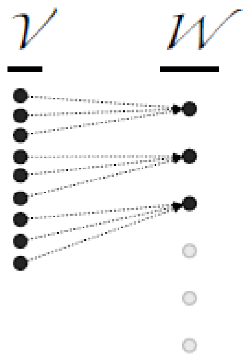
7.4.2 가장 큰 가역적인 서브함수(Subfunction)

$f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$는 아래의 그림과 같이 비가역적 선형함수라고 하자.

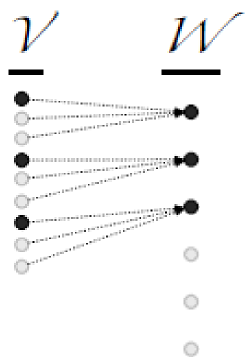


그렇다면 여기서 가역적인 서브함수 $f^*: \mathcal{V}^* \to \mathcal{W}^*$를 정의해보자. 여기서 *서브함수*란 $\mathcal{V}^*$는 $\mathcal{V}$의 부분집합이고 $\mathcal{W}^*$는 $\mathcal{W}$의 부분집합이며 f^*는 $\mathcal{V}^*$의 모든 원소에 대해 f와 동일하다는 것을 의미한다.

먼저, f^*가 전사함수가 되도록 $\mathcal{W}^*$를 아래의 그림처럼 선택한다. 그리고, $w_1, ..., w_r$은 $\mathcal{W}^*$에 대한 기저라고 하자.



그런다음, $v_1, ..., v_r$은 $w_1, ..., w_r$의 원상(pre-image)라고 하자. 즉, $f(v_1) = w_1, ..., f(v_r) = w_r$을 만족하는 $\mathcal{V}$내의 임의의 벡터들 $v_1, ... v_r$을 아래의 그림처럼 선택하고, $\mathcal{V}^*$ 는 Span $\{v_1, ..., v_r\}$라고 정의하자.



마지막으로 $f^*: \mathcal{V}^* \to \mathcal{W}^*$는 $f^*(x) = f(x)$ 라고 정의한다.

Lemma : f^* 는 전사함수이다.

- proof : w는 공역 $\mathcal{W}^*$ 내의 임의의 벡터라고 하고, 다음을 만족하는 스칼라 $\alpha_1, ..., \alpha_r$이 있다.

$$w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r$$

- f는 선형이므로,

$$\begin{gathered} f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r) \\ = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_r f(v_r) \\ = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r \end{gathered}$$

- 따라서, w는 $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r \in \mathcal{V}^*$ 의 상이다.

Lemma : f^*는 단사함수이다.

- Proof : One-to-One Lemma에 의해, f^*의 커널(kernel)이 자명한, 즉 $\ker f^* = \{0\}$임을 보여준면 된다. v^*는 $\mathcal{V}^*$ 내에 있고 $f(v^*) = 0$ 라고 해보자. $\mathcal{V}^* =$ Span $\{v_1, \ldots, v_r\}$ 이므로, 다음을 만족하는 스칼라 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 이 존재한다.

$$v^* = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$$

- 양변에 f를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 0 &= f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r) \\ &= \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r \end{aligned}$$

- $w_1, \ldots, w_r$은 선형독립이므로, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ 이고, $v^* = 0$ 이다.

Lemma : $v_1, \ldots, v_r$은 $\mathcal{V}^*$ 에 대한 기저를 형성한다.

- Proof : $\mathcal{V}^*$ 는 $v_1, \ldots, v_r$의 생성이라고 정의되었기 때문에, 이 벡터들이 선형독립이라는 것만 보여주면 된다. 아래의 식을 가정해 보자.

$$0 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$$

- 양변에 f를 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} 0 &= f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r) \\ &= \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r \end{aligned}$$

- $w_1, \ldots, w_r$은 선형독립이므로, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ 이다.

Example 7.4.4 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 이라 하고, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 은 $f(x) = Ax$라고 정의하자. $\mathcal{W}^* = \Ima f =$ Col $A =$ Span $\{[1,2,1],[2,1,2],[1,1,1]\}$ 이라고 정의하자. $\mathcal{W}^*$에 대한 하나의 기저는 $w_1 = [0,1,0], w_2 = [1,0,1]$ 이다.

이제, w_1과 w_2에 대한 원상(pre-image)를 선택하자. $Av_1 = w_1, Av_2 = w_2$에 대해 계산된 원상은 아래와 같다.

$$v_1 = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$v_2 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$\mathcal{V}^* =$ Span $\{v_1, v_2\}$ 라고 하면, $f^*(x) = f(x)$에 의해 정의된 함수 $f^* : \mathcal{V}^* \to \Ima f$은 전단사함수이다.

7.4.3 Kernel-Image 정리

함수 f에서 가역 서브함수 $f^* : \mathcal{V}^* \to \mathcal{W}^*$ 를 구성하는 것은 서브함수의 정의역을 원래 선형함수 f의 커널에 연관시킨다.

Lemma : $\mathcal{V} = \ker f \oplus \mathcal{V}^*$

- Proof : 다음 두 가지 항목을 증명해야 한다.
  - $\ker f$와 $\mathcal{V}^*$는 영벡터만을 공유한다.

- $\mathcal{V}$ 내의 모든 벡터는 $\ker f$내의 벡터와 $\mathcal{V}^*$ 내의 벡터의 합이다.

- 이미 위의 7.4.2 에서 f^* 의 커널은 자명하다는 것을 보여주었다. 따라서, $\mathcal{V}^*$에 속하는 $\ker f$의 유일한 벡터는 영(0)이고, 이를 통해 '$\ker f$와 $\mathcal{V}^*$ *는 영벡터만을 공유한다.*' 는 증명이 된다.
- v는 $\mathcal{V}$ 내의 임의의 벡터이고, $w = f(v)$라고 하자. f^*는 전사함수이므로, 그 정의역인 $\mathcal{V}^*$는 $f(v^*) = w$를 만족하는 벡터 v^*를 포함한다. 그러므로, $f(v) = f(v^*)$이고, 따라서 $f(v) - f(v^*) = 0$, $f(v - v^*) = 0$ 이 성립한다. 따라서, $u = v - v^*$는 $\ker f$ 내에 있고, $v = u + v^*$이다.

Example 7.4.6: Example 7.4.4에서 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$이라 하고, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 은 $f(x) = Ax$라고 정의하자. $\mathcal{V}^*$에 대한 기저는 위의 Example 7.4.4에서 $v_1 = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $v_2 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 로 구성된다. f의 커널은 Span $\{[1, 1, -3]\}$ 이다. 그러므로 $\mathcal{V} =$ (Span $\{[1, 1, -3]\}) \oplus$ (Span $\{v_1, v_2\}$) 이다.

Theorem (Kernel-Image Theorem): 임의의 선형함수 $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$에 대해,

$$\dim \ker f + \dim \text{\Ima} f = \dim \mathcal{V}$$

- Proof : $\mathcal{V} = \ker f \oplus \mathcal{V}^*$ 임을 보여준다. 7.3.3의 Direct-Sum Dmension Corollary에 의하면,

$$\dim \mathcal{V} = \dim \ker f + \dim \mathcal{V}^*$$

- $v_1, \ldots, v_r$은 $\mathcal{V}^*$에 대한 기저를 형성하고, 이러한 벡터들의 수 r은 $\text{\Ima} f$ 에대한 기저의 크기와 동일하다.

$$\dim \mathcal{V}^* = r = \dim \text{\Ima} f$$

7.4.4 선형함수의 가역성 - 다시보기

위의 Kernel-Image Theorem을 이용해 선형함수의 가역성을 판단하는 데 좀 더 나은 기준을 제시할 수 있다.

Theorem (Linear-Function Invertibility Theorem): $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$는 선형함수라고 하자. 그러면, f가 가역적일 필요충분조건은 $\dim \ker f = 0$ 이고, $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ 이다.

7.4.5 Rank-Nullity 정리

$R \times C$ 행렬 A에 대해, $f : F^C \to F^R$을 $f(x) = Ax$ 라고 하자. 위의 Kernel-Image Theorem에 의해, $\dim F^C = \dim = ker f + \dim \text{\Ima} f$이다. f의 커널은 A의 영공간(Null Space)이고, 행렬-벡터 곱셈의 선형결합 정의에 의해 f의 상은 A의 열공간이고, 따라서 다음을 얻는다.

$$\dim F^C = \dim Null(A) + \dim Col(A)$$

F^C 의 차원은 $|C|$, 즉 A의 열의 개수이고, A의 열공간의 차원은 A의 랭크라고 한다. 행렬 A의 영공간의 차원은 A의 *Nullity*라고한다.

Theorem (Rank-Nullity Theorem): 임의의 n-열 행렬 A 에 대해,

$$rank(A) + nullity(A) = n$$

7.4.6 생략

7.4.7 행렬의 가역성

Corollary : A는 $R \times C$ 행렬이라고 하면, A가 가역적이 될 필요충분조건은 $|R| = |C|$이고, A의 열들은 선형독립일 때다.

- Proof : F는 필드라고 하고, $f : F^C \to F^R$은 $f(x) = Ax$라 하면, A가 가역행렬이 될 필요충분조건은 f가 가역함수인 것이다. 7.4.4의 Theorem에 의하면, f가 가역적일 필요충분조건은 $\dim \ker f = 0$이고 $\dim F^C = \dim F^R$이다. 즉, $\dim Null(A) = 0$이고, $|C| = |R|$이다. 또한, $\dim Null(A) = 0$일 필요충분조건은 행렬의 열벡터들이 선형결합인 것이다.

Corollary : 가역행렬의 전치행렬은 가역적이다.

- Proof : A는 가역행렬이라고 하면, A는 정방행렬이고 그 열들은 선형독립이다. n은 열들의 개수라고 하고, 행렬을 다음과 같이 표현하자.

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \Big| \dots \Big| v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \hline \vdots \\ \hline a_n \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1 \Big| \dots \Big| a_n \end{bmatrix}$$

- A의 열들은 선형독립이므로, A의 랭크는 n이다. A는 정방행렬이므로, n 개의 행을 가진다. A의 행랭크는 n이고, 그 행들은 선형독립이다. 전치행렬 또한 마찬가지다.

Corollary : A와 B는 정방행렬이고 BA는 단위행렬이라고 하면, A와 B는 서로의 역행렬이다.

- Proof : A는 $R \times C$ 행렬이라 하고, B는 $C \times R$행렬이라고 하면, BA는 $C \times C$ 단위행렬 I_C이다. A의 열들은 선형독립이라는 것을 보여주자. u는 $Au = 0$을 만족하는 임의의 벡터라고 하면, $B(Au) = B0 = 0$ 이고, $(BA)u = I_C u = u$ 이므로, $u = 0$이다. A 는 가역적이므로 A의 역행렬을 A^{-1}로 나타내고 AA^{-1}은 $R \times R$ 단위행렬 I_R이다.

$$\begin{gathered} BA = I_C \\ BAA^{-1} = I_R A^{-1} \\ BAA^{-1} = A^{-1} \\ BI_R = A^{-1} \\ B = A^{-1} \end{gathered}$$

Example 7.4.15 : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 은 정방행렬이지만 열벡터들이 선형독립이 아닌 선형종속이므로 이 행렬은 가역적이지 않다.

7.4.8 행렬의 가역성과 기저 변경

동일한 공간의 기저 $a_1, \dots, a_n$과 $b_1, \dots, b_m$에 대해, $m \times n$ 행렬 C가 존재하며, 이 행렬 C를 곱하면 $a_1, \dots, a_n$에 대한 어떤 벡터의 좌표 표현이 동일한 벡터의 $b_1, \dots, b_m$에 대한 좌표표현으로 변환된다. 행렬 C는 가역적이다. 두 기저는 동일한 크기를 가져야 하며, 따라서 C는 정방행렬이다.

7.5 소멸자 - Annihilator

4.3.3에서 보았듯이, 벡터공간은 아래와 같은 두 개의 표현으로 나타낼 수 있다.

- *벡터들로 구성된 유한집합의 생성(Span)*
- *동차 선형시스템의 해집합*

4.5.5에서 보았듯이, 아핀공간도 아래와 같이 표현할 수 있다.

- *벡터들로 구성된 유한집합의 아핀 hull*
- *선형시스템의 해집합*

7.5.1 표현 변환

아래의 네 개의 변환 문제를 살펴보자.

- Conversion Problem 1: 주어진 동차선형시스템 $Ax = 0$에 대해, 벡터 $w_1, \ldots, w_k$를 찾아보자. 이 벡터들의 생성(Span)은 이 시스템의 해집합이다.
- Conversion Problem 2: 주어진 벡터들 $w_1, \ldots, w_k$에 대해, 동차 선형시스템 $Ax = 0$을 찾아보자. 이 시스템의 해집합은 Span $\{w_1, \ldots, w_k\}$와 동일하다.
- Conversion Problem 3 : 주어진 선형시스템 $Ax = b$에 대해, 벡터 $u_1, \ldots u_k$를 찾아보자. 이 벡터들의 아핀 hull은 그 시스템의 해집합이다.
- Conversion Problem 4 : 주어진 벡터들 $w_1, \ldots, w_k$에 대해, 선형시스템 $Ax = 0$을 찾아보자. 이 시스템의 해집합은 $\{w_1, \ldots, w_k\}$의 아핀 hull과 동일하다.

7.5.2 벡터공간의 소멸자