깃헙으로 Jupyter Notebook을 볼 경우 LaTex 문법이 깨지는 경우가 있어 되도록 nbviewer로 보는 것을 추천한다. → nbviewer에서 보기

Chap 05 - 행렬(The Matrix)

5.1 행렬이란 무엇인가?

5.1.1 전통적인 행렬

일반적으로, m개의 행과 n개의 열을 가진 행렬은 $m \times n$행렬이라 한다. 행렬 A에 대해 i, j *원소* 는 i번째 행과 j번째 열에 있는 원소로 정의되며, 전통적으로 $a_{i,j}$ 또는 a_{ij} 로 나타낸다.
따라서, F상의 모든 $i = 1, \dots, m$과 $j = 1, \dots, n$에 대하여 $a_{ij} \in F$일 때,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

을 F-위의 $(m \times n)$-행렬($(m \times n)$-matrix over F)이라고 한다.

5.1.2 행렬에 대해 알아보기

F상의 D-벡터를 집합 D에서 F로의 함수로 정의한거 처럼, F상의 $R \times C$ 행렬을 카테시안 곱 $R \times C$로의 함수로 정의한다. R의 원소를 *행 라벨* (row label) 이라 하고 C의 원소를 *열 라벨* (column label)이라 한다.

Example 5.1.3 아래는 $R =$ `{'a', 'b'}` 이고 $C =$ `{'#', '@', '?'}` 인 예이다.

	@	#	?
a	1	2	3
b	10	20	30

5.1.3 행, 열, 엔트리

행렬의 유용한 점은 행과 열을 벡터로 해석할 수 있다. 위의 Example 5.1.3의 행렬을 아래와 같이 벡터로 나타낼 수 있다.

- 행 `a` 는 벡터 [1, 2, 3] 이다.
- 행 `b` 는 벡터 [10, 20, 30] 이다.
- 열 `@` 는 벡터 [1, 10] 이다.
- 열 `#` 은 벡터 [2, 20] 이다.
- 열 `?` 는 벡터 [3, 30] 이다.

이번 5장에서는 행렬 구현 및 예제들을 파이썬의 고성능 수치 계산을 위한 모듈인 NumPy를 사용한다.
numpy모듈을 이용하여 위의 Example 5.1.3을 다음과 같이 코드로 나타낼 수 있다.

```python
import numpy as np

M = np.matrix('1 2 3; 10 20 30')  # = np.matrix([[1, 2, 3], [10, 20, 30]])
print(M)

"""출력 결과
[[ 1  2  3]
 [10 20 30]]
"""
```

위와 같이 $R \times C$ 행렬 $M(r \in R, c \in C)$에 대해, M의 r, c원소는 (r, c) 쌍이 매핑하는 것으로 정의 되며 $M_{r,c}$ 또는 $M[r, c]$로 나타내고, 행과 열은 아래와 같이 정의된다.

- $r \in R$에 대해, 행 r은 각 원소 $c \in C$에 대해 엔트리 c가 $M[r, c]$인 C-벡터 이다.
- $c \in C$에 대해, 열 c는 각 원소 $r \in R$에 대해 엔트리 r이 $M[r, c]$인 R-벡터 이다.

이를 numpy를 이용한 파이썬 코드로 나타내면 아래와 같다.

```python
# 1. 행(row)
print('첫 번째 행 :', M[0,:])
print('두 번째 행 :', M[1,:])

# 2. 열(column)
print('첫 번째 열 :\n', M[:,0])
print('두 번째 열 :\n', M[:,1])
print('세 번째 열 :\n', M[:,2])

"""출력결과
첫 번째 행 : [[1 2 3]]
두 번째 행 : [[10 20 30]]
첫 번째 열 :
 [[ 1]
 [10]]
두 번째 열 :
 [[ 2]
 [20]]
세 번째 열 :
 [[ 3]
 [30]]
"""
```

5.1.4 행렬의 파이썬 구현

교재에서는 `Mat` 이라는 클래스를 별도로 구현하지만, 여기서는 위에서도 언급 했듯이 numpy 모듈을 이용해서 행렬을 구현하도록 한다. 다음 행렬을 numpy 모듈을 이용해서 구현해보자.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 20 & 10 & 30 \end{bmatrix}$$

```python
import numpy as np

M = np.matrix('2 1 3; 20 10 30')
M

'''출력결과
matrix([[ 2,  1,  3],
        [20, 10, 30]])
'''
```

5.1.5 단위행렬 - Identity matrix

Definition : 유한 집합 D에 대해 $D \times D$ 단위행렬은 행-라벨 집합과 열-라벨 집합이 둘다 D이고 모든 $d \in D$에 대해 엔트리 (d, d)는 1 (다른 모든 엔트리는 0)인 행렬이다. 단위행렬은 1_D로 나타낸다.

numpy에서는 `identity()` 를 이용해 단위행렬을 생성할 수 있다.

```python
# 2 x 2 단위행렬
i2 = np.identity(2)
# 3 x 3 단위행렬
i3 = np.identity(3)

print('2 x 2 단위행렬\n', i2)
print('3 x 3 단위행렬\n', i3)
'''출력결과
2 x 2 단위행렬
 [[ 1.  0.]
 [ 0.  1.]]

3 x 3 단위행렬
 [[ 1.  0.  0.]
 [ 0.  1.  0.]
 [ 0.  0.  1.]]
'''
```

5.2 열공간(Column space)과 행공간(Row space)

행렬은 여러가지 목적을 위해 사용되며 그 중 한 가지는 벡터들의 묶음을 만드는 데 사용된다. 행렬을 벡터들의 묶음으로 해석하는 두 가지 방법이 있다. 바로, 열들의 묶음과 행들의 묶음이다. 따라서, 행렬과 연관된 벡터공간은 두 개가 있게 된다.

Definition : 행렬 M에 대해,

- M의 *열공간(Column space)* 은 Col M으로 나타내며 M의 열들에 의해 생성된 벡터공간이다.
- M의 *행공간(Row space)*은 Row M으로 나타내며 M의 행들에 의해 생성된 벡터공간이다.

Example 5.2.2 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$의 열공간은 $Span\{[1, 10], [2, 20], [3, 30]\}$ 이다. 이 경우 $[2, 20], [3, 30]$은 $[1, 10]$의 스칼라배이므로 열공간은 $Span\{[1, 10]\}$과 동일하다. 행공간은 $Span\{[1, 2, 3]\}$이다.

5.3 벡터로서의 행렬

위의 5.3에서 처럼 행렬은 벡터로 해석될 수 있다. F상의 $R \times S$행렬은 $R \times S$에서 F로의 함수이다. 따라서 F상의 $R \times S$ -벡터로 해석될 수 있다. 이 해석을 이용하면 벡터 연산인 *스칼라-벡터 곱셈* 와 *벡터 덧셈* 을 행렬에 대해 사용할 수 있다.

```
M = np.matrix([[1,2,3], [10, 20, 30]])

# 스칼라-벡터 곱셈
print('스칼라-벡터 곱셈\n',M * 2)
# 벡터 덧셈
print('벡터 덧셈\n', M+M)

'''출력결과
스칼라-벡터 곱셈
 [[ 2  4  6]
 [20 40 60]]
벡터 덧셈
 [[ 2  4  6]
 [20 40 60]]
'''
```

5.4 전치(Transpose)

행렬의 *전치* 는 행과 열을 바꾸는 것을 의미한다.

Definition : $P \times Q$행렬의 전치는 M^T로 나타내며, 모든 $i \in P, j \in Q$에 대해 $(M^T)_{j,i} = M_{i,j}$를 만족하는 $Q \times P$ 행렬이다.

다음 행렬 M에 대한 전치행렬은 아래와 같다.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 20 & 10 & 30 \end{bmatrix} \quad M^T = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 20 \\ 3 & 30 \end{bmatrix}$$

numpy 모듈에서는 `numpy.matrix.transpose()` 또는 `numpy.matrix.T` 로 전치행렬을 구할 수 있다.

```
M = np.matrix([[1,2,3], [10, 20, 30]])

print('numpy.matrix.transpose() \n', M.transpose())
print('numpy.matrix.T \n', M.T)

'''출력결과
numpy.matrix.transpose()
 [[ 1 10]
 [ 2 20]
 [ 3 30]]
numpy.matrix.T
 [[ 1 10]
 [ 2 20]
 [ 3 30]]
'''
```

만약 $M^T = M$이면, 행렬 M은 *대칭행렬(Symmetric Matrix)*이라 한다.

```
M = np.matrix([[1, 2], [2, 4]])

assert repr(M.T) == repr(M)
```

5.5 선형결합의 행렬-벡터 곱셈과 벡터-행렬 곱셈

5.5.1 선형결합의 행렬-벡터 곱셈

Definition(행렬-벡터 곱셈의 선형결합 정의): M을 F상의 $R \times C$행렬이라고 하고, v는 F상의 C-벡터라고 하면, $M * v$는 선형결합이다.

$\sum_{c \in C} v[c] \quad (M\text{의}\_\text{열}\_c)$

만약 행렬 M이 $R \times C$ 이지만 v는 C-벡터가 아니면, $M * v$는 성립하지 않는다. 행렬의 열(column) 수는 벡터의 원소 개수와 일치해야 한다. 우리가 중, 고등학교 수학해서 행렬을 배울때 행렬의 곱셈이 성립 되는 규칙을 생각하면 된다. 아래의 예제를 보자.

Example 5.5.2:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} * [7, 0, 4] &= 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 20 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 3 \\ 30 \end{bmatrix} \\ &= [7, 70] + [0, 0] + [12, 120] \\ &= [19, 190] \end{aligned}$$

`numpy.dot` 을 이용하여 벡터-행렬 곱셈을 구현할 수 있다.

```
M = np.matrix([[1,2,3], [10, 20, 30]])
v = [7, 0, 4]

print('M * v =', np.dot(M, v))
'''출력결과
M * v = [[ 19 190]]
'''
```

5.5.2 선형결합의 벡터-행렬 곱셈

Definition(벡터-행렬 곱셈의 선형결합 정의): M을 $R \times C$ 행렬이라 하고, w는 R-벡터라고 하면 $w * M$은 선형결합이다.

$\sum_{r \in R} w[r] \quad (M\text{의}\_\text{행}\_r)$

행렬과 벡터의 곱은 교환법칙이 성립되지 않는다. $M * v$는 성립하지만, $v * M$은 성립하지 않는 경우가 거의 대부분이다.

Example 5.5.7:

$$\begin{aligned} [3, 4] * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} &= 3[1, 2, 3] + 4[10, 20, 30] \\ &= [3, 6, 9] + [40, 80, 120] \\ &= [43, 86, 129] \end{aligned}$$

```
M = np.matrix([[1,2,3], [10, 20, 30]])
w = [3, 4]

print('w * M =', np.dot(w, M))
'''출력결과
w * M = [[ 43  86 129]]
'''
```

5.5.3 생략

5.5.4 행렬-벡터 방정식의 해 구하기

- *input*: $R \times C$ 행렬 A와 R-벡터 b
- *output*: $A * \hat{x} = b$를 만족하는 C-벡터 $\hat{x}$

Example 5.5.14 : Example 4.4.13 에서 $Span\{[a,b],[c,d]\}$를 고려하였다. 이때, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$이다.

- $[c,d]$가 $Span\{[a,b]\}$에 있지 않으면 $ad \neq bc$ 이다.
- 이 경우, $\mathbb{R}^2$의 모든 벡터 $[p,q]$에 대해 다음을 만족하는 계수 α, β가 있다.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$\alpha = \frac{dp-cq}{ad-bc}, \beta = \frac{aq-bp}{ad-bc}$ 라고 하면, 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

`numpy.linalg.solve()` 를 이용해 행렬-벡터 방정식의 해를 구할 수 있다. 예를 들어 , 행렬방정식 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 에서 $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ 를 구한다고 할때, 아래와 같이 구할 수 있다.

```
A = np.matrix([[1, 2], [3, 4]])
b = np.array([-1, 1])

x = np.linalg.solve(A, b)
print(x)
'''출력결과
[ 3. -2.]
'''
```

5.6 도트곱(dot-product)의 행렬-벡터 곱셈

5.6.1 정의

Definition(행렬 -벡터 곱셈의 도트곱 정의) : M이 $R \times C$ 행렬이고 u는 C-벡터 이면, $M * u$는 R-벡터 v이다. 이때, $v[r]$은 M의 행 r과 u의 도트곱이다.

Definition(벡터-행렬 곱셈의 도트곱 정의) : M이 $R \times C$ 행렬이고 u는 R-벡터 이면, $u * M$은 C-벡터 v이다. 이때, $v[c]$은 u와 M의 열 c 의 도트곱이다.

Example 5.6.2 : 행렬-벡터 곱셈을 고려해 보자.

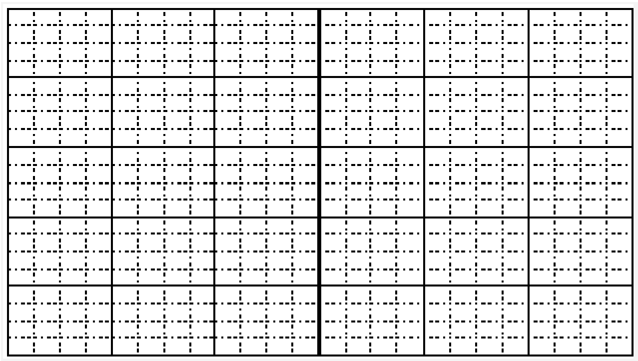
$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} * [3, -1] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 30 \end{bmatrix} \\
&= [1, 5, 30]
\end{aligned}
$$

```python
M = np.matrix([[1, 2], [3, 4], [10, 0]])
v = [3, -1]

dot_prod = np.dot(M, v)
print(dot_prod)
print('dot_prod shape: {}'.format(dot_prod.shape))

'''출력결과
[[ 1  5 30]]
dot_prod shape: (1, 3)
'''
```

5.6.2 응용 예

Example 5.6.4 : 고해상도 이미지가 있다고 해 보자. 이 이미지의 해상도를 줄여 *다운샘플링(downsampling)*을 한다고 해 보자.

아래의 그림처럼 원래의 이미지를 (4×4) 크기 만큼 그룹을 지어 그 그룹의 평균을 저해상도의 이미지 픽셀값으로 설정한다.



아래의 코드는 파이썬에서 `pillow` 라는 모듈을 이용하여 이미지 파일을 불러오고 `Image.resize()` 메소드를 이용해 사이즈를 4배 축소해준 예제 및 `for` 문을 순회 하면서 위의 설명 처럼 (4×4) 크기 만큼 그룹을 만들어 그 값의 평균을 픽셀값으로 지정하여 `img_r` 이라는 이미지 행렬을 만들어 준 예제이다.

```python
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
from PIL import Image

# 이미지 파일 불러오기
img = Image.open('./images/original.png')
```

```python
img = img.convert('L')
img_org = img
print('img.size : {}'.format(img.size))  # (width, height)

# 이미지를 너비, 높이를 4배 씩 축소하기
img_resized = img.resize((int(img.size[0]/4), int(img.size[1]/4)))
print('resized img size : {}'.format(img_resized.size))

# 이미지 파일을 np.asarray를 이용해 배열로 만들기
img_org = np.asarray(img_org, dtype='float32')


img2 = []
for i in range(int(img_org.shape[0]/4)):  # 행(row)
    for j in range(int(img_org.shape[1]/4)):  # 열 (column)
        tmp = []
        for m in range(4):  # 4 x 4 행렬의 행
            for n in range(4):  # 4 x 4 행렬의 열
                tmp.append(img_org[4*i+m, 4*j+n])
        img2.append(np.mean(tmp))

img_r = np.asarray(img2).reshape(64, -1)

fig, axs = plt.subplots(1, 3, figsize=(25, 5))
fig.subplots_adjust(hspace = .5, wspace=.5)

img_list = [img_org, img_r, img_resized]
title_list = ['original', 'downsample', 'resizing']

for i, img in enumerate(img_list):
    axs[i].imshow(img ,cmap='Greys_r')
```

5.6.3 선형방정식들의 시스템을 행렬-벡터 방정식으로 구성하기

3.9.2 선형방정식에서 선형방정식은 $\alpha \cdot x = \beta$ 형태의 방정식으로 정의하였고 선형방정식들의 시스템(일차 연립방정식)을 이러한 방정식들의 컬렉션으로 정의했다.

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x &= \beta_1 \\ a_2 \cdot x &= \beta_2 \\ &\vdots \\ a_m \cdot x &= \beta_m \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad A \cdot x = b$$

이를 행렬-벡터 곱셈의 도트곱 정의를 사용하여 행렬-벡터 방정식으로 나타낼 수 있다. A를 행들이 $a_1, a_2, \dots, a_m$인 행렬이라 하고, b는 벡터 $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]$라고 하면, 선형방정식들의 시스템은 행렬-벡터 방정식 $A \cdot x = b$와 동일하다. 따라서 선형시스템의 해를 구하는 것은 곧 *행렬방정식의 해*를 구하는 것과 같은 의미다.

5.6.4 삼각시스템(Triangular system)과 삼각행렬(Triangular matrix)

3.11에서 선형방정식들의 삼각시스템에 대한 해를 구하는 알고리즘을 알아보았다. 아래의 삼각시스템을 행렬-벡터 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 0.5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -8 \\
3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\
1x_3 + 5x_4 &= -4 \\
2x_4 &= 6
\end{aligned}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}
$$

Definition : $n \times n$ *상삼각* (Upper-triangular) 행렬 A는 $i > j$에 대해 $A_{ij} = 0$ 행렬이다.

삼각형을 형성하는 즉, Upper-traingular 부분의 원소들은 0일 수도 있고 아닐 수도 있다.

numpy에서는 `numpy.triu` 를 이용해 Upper-triangular를 구할 수 있다.

```
m = np.matrix([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9],[10,11,12]])

ut = np.triu(m, -1)
print(ut)
'''출력결과
[[ 1  2  3]
 [ 4  5  6]
 [ 0  8  9]
 [ 0  0 12]]
'''
```

5.6.5 행렬-벡터 곱셈의 산술적 성질

행렬-벡터 곱셈의 도트곱 해석을 사용하여 두 개의 중요한 성질을 유도해 보자.

Proposition : M을 $R \times C$ 행렬이라 하면,

- 임의의 C-벡터 v와 임의의 스칼라 α에 대해,

$M \cdot (\alpha v) = \alpha(M \cdot v)$

- 임의의 C-벡터 u와 v에 대해,

$M \cdot (u + v) = M \cdot u + M \cdot v$

Proof

To show Equation 4.3 holds, we need only show that, for each $r \in R$, entry r of the left-hand side equals entry r of the right-hand side. By the dot-product interpretation of matrix-vector multiplication,

- entry r of the left-hand side equals the dot-product of row r of M with αv, and
- entry r of the right-hand side equals α times the dot-product of row r of M with v.

These two quantities are equal by the homogeneity of dot-product, Proposition 2.9.22.

The proof of Equation 4.4 is similar; we leave it as an exercise. $\square$

5.7 영공간 - Null space

5.7.1 동차 선형시스템과 행렬방정식

4.6에서 동차 선형시스템에 대해 알아보았다. 동차 선형 시스템은 우변의 값들이 모두 영(0)인 선형 방정식들의 시스템이다. 이러한 시스템은 우변이 영벡터인 행렬-벡터 방정식 $A \cdot x = 0$ 으로 나타낼 수 있다.

Definition : 행렬 A의 *영공간(Null space)* 은 집합 $\{v : A \cdot v = 0\}$이다. 이를 Null A로 나타낸다. Null A는 동차 선형시스템의 해집합이므로 벡터공간(4.4 참고)이다.

Example 5.7.2 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ 이면, 첫 번째, 두번째 열의 합은 세 번째 열과 동일하므로 $A \cdot [1, 1, -1]$은 영벡터이다. 따라서, 벡터 [1, 1, -1]은 Null A에 속한다. 또한 임의의 스칼라 α에 대해 $A \cdot (\alpha[1, 1, -1])$ 도 영벡터이다. 그러므로 $\alpha[1, 1, -1]$도 Null A에 속한다.

Lemma : 임의의 $R \times C$ 행렬 A와 C-벡터 v에 대해 벡터 z가 A의 영공간(Null space)에 있을 필요충분조건은 $A \cdot (v + z) = A \cdot v$ 이다.

Proof

The statement is equivalent to the following statements:

1. if the vector z is in the null space of A then $A * (v + z) = A * v$;
2. if $A * (v + z) = A * v$ then z is in the null space of A.

For simplicity, we prove these two statements separately.

1. Suppose z is in the null space of A. Then

$$A * (v + z) = A * v + A * z = A * v + \mathbf{0} = A * v$$

2. Suppose $A * (v + z) = A * v$. Then

$$\begin{aligned} A * (v + z) &= A * v \\ A * v + A * z &= A * v \\ A * z &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

5.7.2 행렬-벡터 방정식의 해공간

Corollary : u_1 은 행렬-벡터 방정식 $A \cdot x = b$의 해라고 하면, u_2또한 해가 될 필요충분조건은 $u_1 - u_2$가 A의 영공간(Null space)에 속하는 것이다.

Proof

Since $A * u_1 = b$, we know that

$$A * u_2 = b \text{ if and only if } A * u_2 = A * u_1.$$

Applying Lemma 4.7.4 with $v = u_2$ and $z = u_1 - u_2$, we infer:

$$A * u_2 = A * u_1 \text{ if and only if } u_1 - u_2 \text{ is in the null space of } A.$$

Combining these two statements proves the corollary. □

Corollary : 행렬-벡터 방정식 $A \cdot x = b$가 해를 가진다면, 이 해가 유일한 해가 될 필요충분조건은 A의 *영공간이 영벡터로 만 구성*되는 것이다.

5.8 스파스(Sparse) 행렬-벡터 곱 계산

Sparse Matrix(희소행렬)은 아래의 행렬과 같이 행렬의 원소(엔트리) 대부분이 0인 행렬을 의미한다.

$$\begin{bmatrix} 11 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 33 & 0 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 77 \end{bmatrix}$$

Definition(행렬-벡터 곱셈의 일반적 정의) : M이 $R \times C$ 행렬이고 u가 C-벡터이면, $M \times u$은 각 $r \in R$에 대해 다음을 만족하는 R-벡터 v이다.

$v[r] = \sum_{c \in C} M[r, c]u[c]$

위의 정의대로 행렬-벡터 곱셈을 구현한다고 하면 다음과 같이 작성할 수 있다.

1. for i in R:
2. $v[i] : \sum_{j \in C} M[i, j]u[j]$

하지만, 희소행렬을 위의 방식대로 구현하면 효율적이지 않다. 희소행렬을 구현하는 방법 중 하나는 출력 벡터 v를 영벡터로 초기화하고, 그다음에 M의 영이 아닌 엔트리들에 대해 이터레이션하는 것이다.

1. initialize v to zero vector
2. $v[i] : \sum_{j \in C} M[i, j]u[j]$

5.9 행렬과 함수의 만남

5.9.1 행렬에서 함수로

모든 행렬 M에 대해 행렬-벡터 곱셈을 사용하여 함수 $x \mapsto M \cdot x$ 를 정의할 수 있다.

Definition : 행렬 M이 필드 F상의 $R \times C$ 행렬이면 함수 $f_M : F^C \mapsto F^R$은 $f_M(x) = M \cdot x$ 로 정의 할 수 있다.

위의 Definition은 선형 대수학에서 사용되는 전통적인 정의는 아니며, 교재에서 별도로 정의한 것이다.

Example 5.9.1 : M은 아래의 행렬이라고 하자.

	#	@	?
a	1	2	3
b	10	20	30

그러면, 함수 f_M의 정의역은 $\mathbb{R}^{\{\#,@,?\}}$, 공역은 $\mathbb{R}^{\{a,b\}}$이다. 예를 들어, 벡터 $\begin{array}{ccc} \# & @ & ? \\ [2, & 2, & -2] \end{array}$의 치역은 벡터 $\begin{array}{cc} a & b \\ [0, & 0] \end{array}$이다.

5.9.2 함수에서 행렬로

어떤 행렬 M에 대응하는 함수 $f_M : F^A \mapsto F^B$가 있다고 하고, $f_M(x) = M \cdot x$인 행렬 M을 계산하고자 한다.

먼저, M에 대한 열-레이블(Column-label) 집합을 알아보면 f_M의 정의역은 F^A이므로, x는 A-벡터이다. 곱 $M \cdot x$가 성립하려면 M의 열-레이블 집합은 A가 되어야 한다. 그다음으로, f_M의 공역은 F^B이므로, M을 x에 곱한 결과는 B-벡터여야 한다. 이것이 성립하려면 M의 행-레이블(Row-label) 집합은 B가 되어야 한다.

M은 $B \times A$라는 것을 알았으므로, 이제 행렬 M의 원소들을 구하면 된다. 원소들을 구하기 위해 행렬-벡터 곱의 선형결합 정의를 이용한다. F^A에 대한 표준 생성자(4.2.5 참고)를 기억해 보자. 각 원소 $a \in A$에 대해 a는 1에 매핑하고 A의 다른 모든 원소는 0에 매핑하는 생성자 e_a가 있다. 선형결합 정의에 의하면 $M \cdot e_a$는 M의 열 a이다. 즉, M의 열 a는 $f_M(e_a)$와 동일해야 한다.

5.9.3 행렬을 유도하는 예

Example 5.9.3 : $s(\cdot)$은 x-좌표를 2만큼 스케일링하는 $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$로의 함수라고 하고, 어떤 행렬 M에 대해 $s([x, y]) = M \cdot [x, y]$라고 가정하자. 정의역 $[1, 0]$에 대한 상(치역)은 $[2, 0]$이고, $[0, 1]$이 상은 $[0, 1]$이다. 따라서 $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이다.

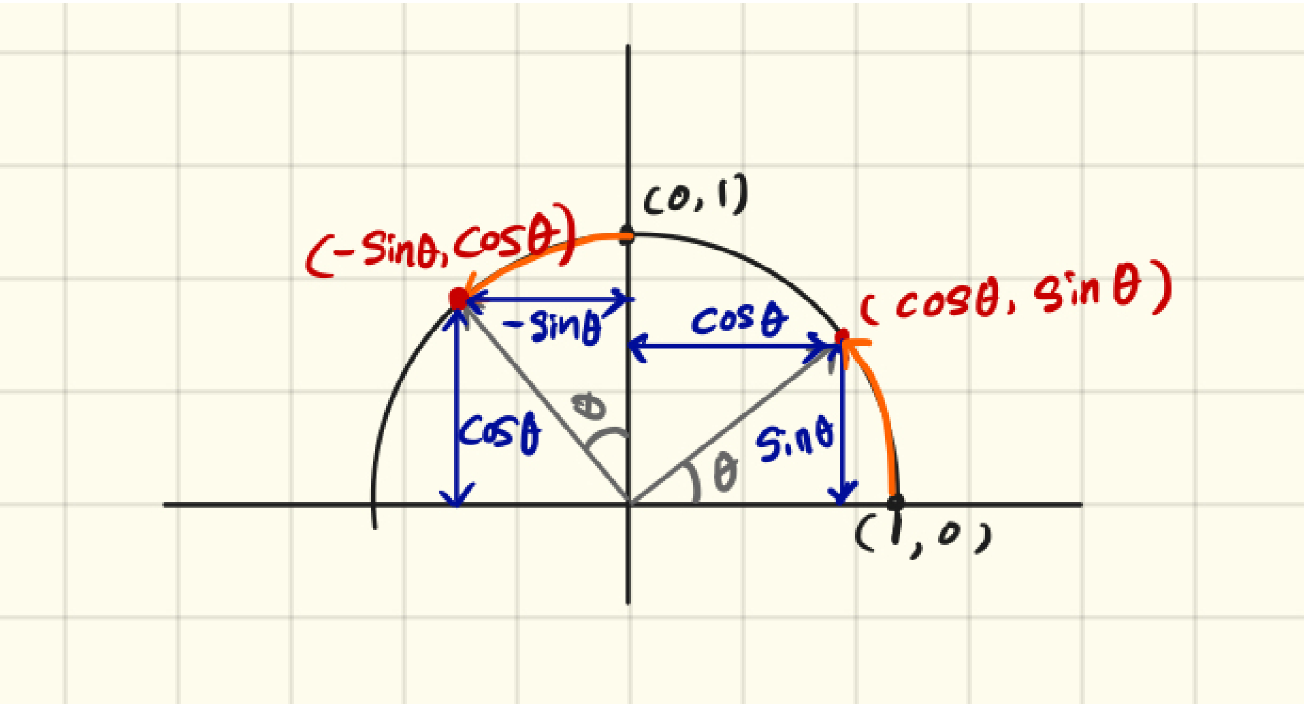
numpy와 matplotlib을 이용해 그래프로 확인 해보자.

```python
M = np.matrix([[2, 0], [0, 1]])  # 행렬 M 정의

v = [2, 4]  # 임의의 벡터 v

mv = np.dot(M, v)  # M * v

fig, ax = plt.subplots()

for spine in ['left', 'bottom']:
    ax.spines[spine].set_position('zero')

# Hide the other spines...
for spine in ['right', 'top']:
    ax.spines[spine].set_color('none')

ax.scatter([v[0], mv[0, 0]], [v[1], mv[0, 1]])
ax.axis([-4, 10, -4, 10])
ax.grid()

plt.show()
```

Example 5.9.4 : $r_{90}(\cdot)$ 은 $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ 로의 함수라고 하자. 이 함수는 2D 상의 점들을 원점에 대해 반시계 방향으로 90도 회전하는 것이다. 어떤 행렬 M에 대해 $r_{90}([x,y]) = M \cdot [x,y]$라고 가정하자. M을 찾기 위해 두 표준 생성자 $[1,0]$과 $[0,1]$의 함수값을 구하면 $[1,0] \mapsto [0,1]$ 이고, $[0,1] \mapsto [-1,0]$이 된다. 행렬 M을 구하게 되면 $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 이다.

```python
M = np.matrix([[0, -1], [1, 0]])  # 행렬 M 정의
v = [2, 2]  # 임의의 벡터 v
mv = np.dot(M, v)  # M * v

fig, ax = plt.subplots()

for spine in ['left', 'bottom']:
    ax.spines[spine].set_position('zero')

# Hide the other spines...
for spine in ['right', 'top']:
    ax.spines[spine].set_color('none')

ax.scatter([v[0]], [v[1]])
ax.scatter([mv[0, 0]], [mv[0, 1]])
ax.axis([-5, 5, -5, 5])
ax.grid()

plt.show()
```

Example 5.9.5 : 임의의 각도 θ에 대해, $r_\theta(\cdot)$은 $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ 로의 함수라 하자. 이 함수는 원점에 대해 θ만큼 반시계 방향으로 점들을 회전하는 것이다. 행렬 M에 대해 $r_\theta([x,y]) = M \cdot [x,y]$라고 가정하자. 점 $[1,0]$을 θ 만큼 회전하면 점 $[\cos\theta, \sin\theta]$가 얻어진다. 그리고 점 $[0,1]$을 θ만큼 회전하면 점 $[-\sin\theta, \cos\theta]$ 가 얻어진다. 그 이유는 아래의 그림과 같다.



따라서, $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 이다.

```
theta = np.pi / 4
M = np.matrix([[np.cos(theta), -np.sin(theta)], [np.sin(theta), np.cos(theta)]])
v = [np.cos(theta), np.sin(theta)]
mv = np.dot(M, v)

fig, ax = plt.subplots()

for spine in ['left', 'bottom']:
    ax.spines[spine].set_position('zero')

# Hide the other spines...
for spine in ['right', 'top']:
    ax.spines[spine].set_color('none')

ax.scatter([v[0]], [v[1]])
ax.scatter([mv[0, 0]], [mv[0, 1]])
ax.axis([-3, 3, -3, 3])
ax.grid()

plt.show()
```

5.10 선형함수 - Linear functions

5.10.1 행렬-벡터 곱으로 표현될 수 있는 함수

4.4 벡터공간 에서 벡테공간에 대한 세 가지 성질에 대해 살펴보았다. 또한 5.6.5에서 행렬-벡터 곱셈의 두 가지 대수적 성질을 알아보았다. 이제 이러한 대수적 성질을 사용하여 특수한 종류의 함수인 *선형함수* 를 정의해 보자.

5.10.2 정의와 간단한 예제

Definition : $\mathcal{U}$ 와 $\mathcal{V}$는 필드 F상의 벡터공간이라 하자. 함수 $f : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{V}$은 다음 두 성질을 만족할 경우 *선형함수(또는, 선형변환)* 라고 한다.

- *Property L1* : f의 정의역 내 임의의 벡터 u와 F내 임의의 스칼라 α에 대해,

$$f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

- *Property L2* : f의 정의역 내 임의의 두 벡터 u와 v에 대해,

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

M은 필드 F상의 행렬 $R \times C$라 하고, 아래 함수를 $f(x) = M \cdot x$ 로 정의해 보자.

$$f : F^C \rightarrow F^R$$

정의역과 공역은 벡터공간이다. 5.6.5의 성질에 의하면 아래와 같이 함수 f는 Property L1과 L2를 만족한다.

$$f(\alpha u) = M \cdot \alpha u = \alpha(M \cdot u) = \alpha f(u)$$

$$f(u+v) = M \cdot (u+v) = M \cdot u + M \cdot v = f(u) + f(v)$$

따라서, f는 선형함수이다.

Proposition : 임의의 행렬 M 데 대해 함수 $x \mapsto M \cdot x$는 *선형함수* 이다.

아래의 경우는 특수한 경우를 보여준다.

Lemma : F상의 임의의 C-벡터 a 에 대해, $f(x) = a \cdot x$ 에 의해 정의된 함수 $f : F^C \to F$는 *선형함수* 이다.

- *Proof*: A는 $\{0\} \times C$행렬이라 하고, 이행렬의 유일한 행은 a라 하면, $f(x) = A \cdot x$이고 위의 Lemma 는 5.6.5의 성질에 의해 성립한다.

5.10.3 선형함수와 영벡터

Lemma : $\mathcal{U}$ 와 $\mathcal{V}$는 필드 F상의 벡터공간이라 하고, $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ 가 선형함수이면, f는 $\mathcal{U}$의 영벡터를 $\mathcal{V}$의 영벡터에 매핑한다.

- *Proof*: 0을 $\mathcal{U}$의 영벡터, $0v$ 를 $\mathcal{V}$의 영벡터라 하면,

$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$

- 양번에 $f(0)$을 빼면 다음과 같다.

$0v = f(0)$

Definition : 행렬의 영공간(Null space)와 마찬가지로 선형함수의 f의 *커널(kernel)* 을 $\{v : f(v) = 0\}$라고 정의하고, f의 커널을 Ker f 로 나타낸다.

Lemma : 선형함수의 커널은 벡터공간이다.

5.10.4 선형함수와 직선의 관계는 무엇인가?

함수 $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ 는 선형함수라 가정하고, u_1과 u_2는$\mathcal{U}$ 내 두 개의 벡터라 하자. 선형결합 $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ 와 f의 상(함수값)을 고려해 보자. 함수 f 를 선형함수라고 가정하였으니, 위의 Property L1과 L2 를 만족한다.

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) &= f(\alpha_1 u_1) + f(\alpha_2 u_2) \\ &= \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) \end{aligned}$$

u_1 과 u_2의 선형결합의 상(함수값)은 $f(u_1)$ 과 $f(u_2)$의 선형결합에 대응한다고 할 수 있다.

이것이 기하학적으로 무엇을 의미할까? 정의역 $\mathcal{U}$가 $\mathbb{R}^n$ 인 경우에 대해 고려해 보자. 점 u_1 과 u_2 를 지나는 직선은 u_1 과 u_2의 *아핀 hull(Affine hull, 4.5.2 참고)* 즉, 아핀결합들로 구성된 집합니다.

$\{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$

이러한 모든 아핀결합들에 대한 f의 상들의 집합은 아래와 같다.

$\{f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in R, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$

또한, 위의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$\{\alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) : \alpha_2 u_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in R, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$

즉 .$f(u_1)$과 $f(u_2)$의 모든 아핀결합들의 집합이다. 따라서, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\Longrightarrow u_1$ 과 u_2 를 지나는 직선에 대한 f의 상은 $f(u_1)$과 $f(u_2)$를 지나는 *"직선"* 이다.

Proposition : 선형함수 f, f의 정의역 내 임의의 벡터 $v_1, \cdots, v_n$과 임의의 스칼라 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$에 대해, 다음이 성립한다.

$f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n)$

즉, 임의의 *flat*의 선형함수에 대한 상(함수값)은 또 다른 *flat*이다.

아래의 예제는 행렬 $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 에 대해 선형함수 $x \mapsto M \cdot x$ 에대해 그래프를 그려본 것이다. 아래의 그래프와 같이 $f(x) = x$ 라는 선형함수에 대한 상(함수값)은 또 다른 $flat$이라는 것을 알 수 있다.

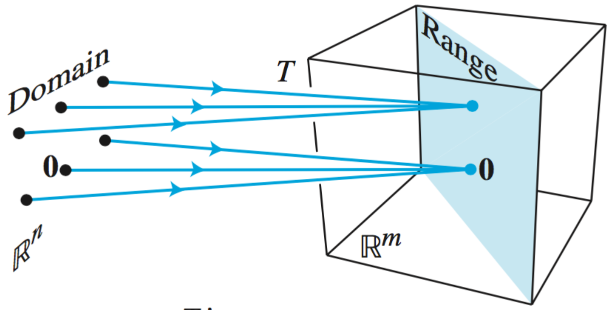
```
X = np.linspace(-4, 10, num=50, endpoint=True)
M = np.matrix([[2, 1], [2, 3]])

Y = X
mv = np.dot(M, np.column_stack((X, Y)).T)

fig, ax = plt.subplots()

for spine in ['left', 'bottom']:
    ax.spines[spine].set_position('zero')

# Hide the other spines...
for spine in ['right', 'top']:
    ax.spines[spine].set_color('none')

ax.plot(X, Y)
ax.plot(mv.T[:,0], mv.T[:,1])
ax.axis([-4, 10, -4, 10])
ax.grid()

plt.show()
```

5.10.5 단사함수인 선형함수

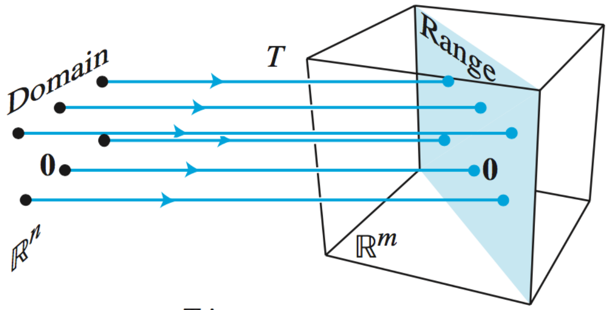
커널(kernel)의 개념을 사용하여 선형함수가 단사함수인지 아닌지를 알아보는 기준을 제시할 수 있다.

Lemma (One-to-One Lemma) : 선형함수가 단사함수일 필요충분조건은 함수의 커널이 자명한 벡터공간이 되는 것이다.

- *Proof*: $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$는 선형함수라고 하면 증명은 두 가지 방법으로 할 수 있다.
  - Ker f 가 어떤 영이 아닌 벡터 v를 포함한다고 하자. 그리고 $f(v) = 0v$이며, 또한 $f(0) = 0v$ 일 경우 f는 단사함수가 아니다.
  - Ker $f = \{0\}$ 라고 하자. v_1, v_2는 $f(v_1) = f(v_2)$를 만족하는 임의의 벡터라고 하면 $f(v_1) - f(v_2) = 0v$ 이다. 선형성(linearity)에 의해 $f(v_1 - v_2) = 0v$이고, $v_1 - v_2 \in$ Ker f 이다. Ker f는 0으로만 구성되므로 $v_1 - v_2 =$ 0이고, 따라서 $v_1 = v_2$이다.
- 위의 증명을 그림으로 나타내면 아래와 같다. *(출처 : ratsgo's blog)*



T is *not* one-to-one



T is one-to-one

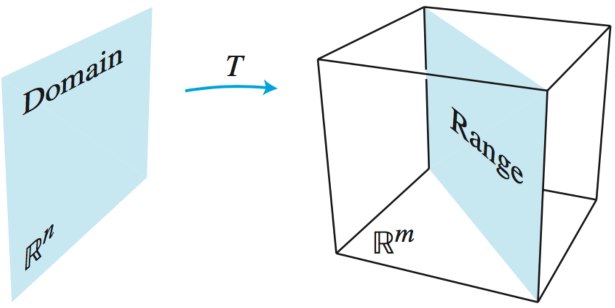
위의 Lemma 는 *선형시스템의 해가 유일한가?* 란 물음에 대해 새로운 관점을 제공한다. 선형시스템 $A \cdot x = b$의 해를 구하는 것은 함수 f 에 대한 b의 원상(pre-image) 즉, x 를 구하는 것으로 해석할 수 있다. 만약 원상이 존재하고, 그것이 f 가 단사함 수일 경우 선형시스템의 해는 유일하다.

5.10.6 전사함수인 선형함수

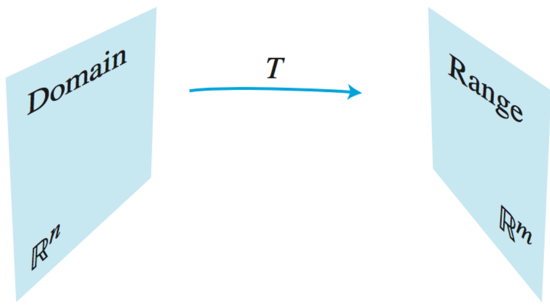
정의역 $\mathcal{V}$ 를 가진 함수 f 의 *상*은 집합 $\{f(v) : v \in \mathcal{V}\}$ 라 하고, 함수 f 가 *전사함수(onto)* 라는 것은 함수의 치역(Image)과 공역(codomain)이 일치해야 한다.

$f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ 가 선형함수일 때 f의 상을 Im f 로 나타낸다. 따라서 f가 전사인지를 판단하는 것은 Im $f = \mathcal{W}$ 와 같다.

아래의 그림은 전사함수가 아닌 경우와 전사함수인 경우를 나타낸다. *(출처 : ratsgo's blog)*



T is *not* onto $\mathbb{R}^m$



T is onto $\mathbb{R}^m$

Lemma : 선형함수의 상은 그 함수의 공역의 부분공간 이다.

- *Proof* : $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ 는 선형함수라고 하면, Im f 는 $\mathcal{W}$의 부분집합이다. Im f 는 $\mathcal{W}$ 의 부분 공간임을 보이기 위해, Im f 는 벡터공간의 성질 (4.4 벡터공간 참고) Property V1, V2, V3 을 만족해야 한다는 것을 보여야 한다.
  - *V1* : 5.10.3 에서 보았듯이 f 는 $\mathcal{V}$ 의 영벡터를 $\mathcal{W}$의 영벡터로 매핑한다. 따라서, $\mathcal{W}$ 의 영벡터는 Im f에 속한다.
  - *V2* : w 는 Im f 내의 벡터라고 하면, Im f 의 정의에 의하면, $f(v) = w$를 만족하는 벡터 v 가 $\mathcal{V}$ 내에 있어야 한다. 임의의 스칼라 α 에 대해, 다음이 성립한다. 따라서 αw 는 Im f 내에 있다.

  $$\alpha w = \alpha f(v) = f(\alpha v)$$

  - *V3* : w_1 과 w_2 는 Im f 내에 있는 벡터라고 하면, Im f 의 정의에 의해, $f(v_1) = w_1$ 과 $f(v_2) = w_2$ 를 만족하는 벡터 v_1 과 v_2가 $\mathcal{V}$ 내에 있어야 한다. 5.10.2 에서 선형함수의 Property L1에 의하면 $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$ 이다. 따라서, $w_1 + w_2$ 는 Im f 내에 있다.

5.10.7 행렬에 의해 표현될 수 있는 F^C 에서 F^R 로의 선형함수

Lemma : $f : F^C \rightarrow F^R$이 선형함수이면, 모든 벡터 $x \in F^C$ 에 대해 $f(x) = M \cdot x$ 을 만족하는 F 상의 $R \times C$ 행렬 M 이 있다.

5.10.8 대각행렬 - Diagonal Matrix

$d_1, \ldots, d_n$ 을 실수라고 하고, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 은 $f([x_1, \ldots, x_n]) = [d_1 x_1, \ldots, d_n x_n]$ 을 만족하는 함수라고 하면, 이 함수에 대응하는 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

이러한 행렬을 *대각* 행렬이라 한다.

Definition : 정의역 D 에 대해, $D \times D$ 행렬 M 은 $i \neq j$인 모든 쌍 $i, j \in D$ 에 대해 $M_{ij} = 0$이면 *대각행렬* 이다.

numpy 모듈에서 `numpy.diag()` 를 이용해 대각행렬을 구현할 수 있다.

```
x = np.arange(9).reshape(3, -1)
print(x)
x_diag = np.diag(x)
print('x_diag :', x_diag)

print('x의 대각행렬 : \n', np.diag(x_diag))

'''출력결과
[[0 1 2]
 [3 4 5]
 [6 7 8]]
x_diag : [0 4 8]
x의 대각행렬 :
 [[0 0 0]
 [0 4 0]
 [0 0 8]]
'''
```

5.11 행렬-행렬 곱셈

5.11.1 행렬-벡터 및 벡터-행렬 곱셈으로 표현한 행렬-행렬 곱셈

Definition :

- 행렬-행렬 곱셈의 벡터-행렬 정의 : A의 각 행-라벨 r 에 대해,

$AB\text{의\_행\_}r = (A\text{의\_행\_}r) \times B$

- 행렬-행렬 곱셈의 행렬-벡터 정의 : B의 각 열-라벨 s에 대해,

$AB\text{\_의\_열\_}s = A \cdot (B\text{의\_열\_}s)$

5.11.2 생략

5.11.3 행렬-행렬 곱셈과 함수 합성

행렬 A와 B는 행렬-벡터 곱셈 $f_A(y) = A \cdot y$와 $f_B(x) = B \cdot x$를 통해 함수를 정의 한다. 두 행렬을 곱한 결과인 행렬 AB 를 $f_{AB}(x) = (AB) \cdot x$ 라고 하면,

Lemma: $f_{AB} = f_A \circ f_B$

- *proof*: 행렬 B를 열 벡터로 나타내면 아래와 같다.

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c} b_1 & \cdots & b_n \end{array}\right]$$

- 행렬-행렬 곱셈의 행렬-벡터 정의에 의해, AB의 열 j 는 $A \cdot$ (B 의 열 j) 이다. 임의의 n-벡터 $x = [x_1, \dots x_n]$ 에대해,

$$\begin{aligned} f_B(x) &= B \cdot x \\ &= x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n \end{aligned}$$

$$\therefore$$

$$\begin{aligned} f_A(f_B(x)) &= f_A(x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n) \\ &= x_1(f_A(b_1)) + \cdots + x_n(f_A(b_n)) \\ &= x_1(Ab_1) + \cdots + x_n(Ab_n) \\ &= x_1(AB\_의\_열\_1) + \cdots + x_n(AB\_의\_열\_n) \\ &= (AB) \cdot x \\ &= f_{AB}(x) \end{aligned}$$

Definition: 행렬 A 를 k 번 곱한 것은 $A^k = AA \cdots A$ (k 번 곱함) 이다. 이를 "A 의 k 제곱 "이라 한다.

5.11.4 행렬-행렬 곱의 전치

Proposition: 행렬 A와 B 에 대해 다음이 성립한다.

$(AB)^T = B^T A^T$

Example 5.11.15

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 19 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 19 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 19 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

```python
A = np.matrix([[1, 2], [3, 4]])
B = np.matrix([[5, 0], [1, 2]])

print('(AB)^T : \n', np.dot(A, B).T)

print('B^T * A^T : \n', np.dot(B.T, A.T))
```

```
'''출력결과
(AB)^T :
 [[ 7 19]
 [ 4  8]]
B^T * A^T :
 [[ 7 19]
 [ 4  8]]
'''
```

5.11.5 열벡터와 행벡터

열벡터 : $m \times 1$ 행렬은 행렬-벡터 곱셈에서 벡터 처럼 동작하므로 *열벡터* 라고 한다. 아래의 행렬-행렬곱을 고려해 보자.

$$\begin{bmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

위의 행렬-행렬 곱셈에서 $(n \times m)$-행렬 M에 열이 하나밖에 없는 행렬 u를 곱한 결과는 열이 하나인 행렬이 된다. 위의 식에서 $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$를 벡터 u로 해석하고, $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$를 벡터 v로 해석하면 위의 식은 행렬-벡터 식 $M \cdot u = v$로 해석할 수 있다.

행벡터 : 벡터를 행렬로 해석하는 또 다른 방법은 행이 하나 밖에 없는 행렬로 해석할 수 있다. 이러한 행렬을 *행벡터* 라고 한다. 이러한 행벡터의 오른쪽에 행렬 M을 곱하는 것은 벡터-행렬 곱셈과 같다.

$$\begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix}$$

5.11.6 모든 벡터는 열벡터로 해석된다.

선형 대수학의 관례에 따르면, 행렬과 벡터가 관련된 것을 표현할 때 모든 벡터는 열벡터로 해석된다. 벡터를 행벡터 대신 열벡터로 해석하는 이유는 행렬-벡터 곱셈이 벡터-행렬 곱셈보다 더 흔하기 때문이다.

Example 5.11.17 : 아래의 행렬-벡터 곱을 행렬-행렬(열벡터)로 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} \cdot [7, \quad 0, \quad 4] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Example 5.11.18 : 벡터-행렬 곱은 아래와 같이 나타낸다.

$$[3, \quad 4] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

5.12 내적(Inner product)과 외적(Outer product)

5.12.1 내적 (Inner product)

u 와 v 는 두 개의 D-벡터라고 하고, "행렬-행렬" 곱 $u^T v$를 고려해 보자. 첫 번째 행렬은 하나의 행만 있고, 두 번째 행렬은 하나의 열만 가진다. 행렬-행렬 곱셈의 도트곱 정의 의하면 이 곱의 결과는 $u \cdot v$인 하나의 원소(엔트리)로 구성된다. 아래의 예제를 보자.

Example 5.12.1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [10]$$

위와 같이 u와 v의 도트곱은 흔히 $u^T v$로 나타내고, *내적* 이라고 한다. (내적에 대한 자세한 내용은 Chap09.내적 에서 자세히 다룬다.) 파이썬에서 numpy 모듈의 `numpy.inner()` 를 이용하여 벡터의 내적을 구할 수 있다. 위의 예제를 아래의 코드로 나타낼 수 있다.

```
u = np.array([1, 2, 3])
v = np.array([3, 2, 1])

uv = np.inner(u, v)
print(uv)
'''출력결과
10
'''
```

5.12.2 외적 (Outer product)

이번에는 벡터 u, v 에 대해 uv^T를 고려해 보자. u의 정의역 의 각 원소 i 와 v 의 정의역의 각 원소 j 에 대해, uv^T 의 i, j 원소는 $u[i]v[j]$ 이다. 이러한 곱셈을 벡터 u와 v 의 *외적* 이라고 한다.

Example 5.12.2 :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & u_1 v_4 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & u_2 v_4 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 & u_3 v_4 \end{bmatrix}$$

마찬가지로 `numpy.outer()` 를 이용하여 벡터의 외적을 구할 수 있다.

```
u = np.array([1, 2, 3])
v = np.array([1, 2, 3, 4])

uv = np.outer(u, v)
print(uv)
'''출력결과
[[ 1  2  3  4]
 [ 2  4  6  8]
 [ 3  6  9 12]]
'''
```

5.13 역함수와 역행렬

5.13.1 선형함수의 역함수는 선형함수이다.

Lemma : f 가 선형함수이고 g 는 f 의 역함수이면, g 도 또한 선형함수이다.

- *Proof* : 다음 두 가지를 증명하면 된다.
  - g 의 정의역 내 모든 벡터 쌍 y_1, y_2 에 대해, $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$
  - g 의 정의역 내 모든 스칼라 α 와 벡터 y 에 대해, $g(\alpha y) = \alpha g(y)$

5.13.2 역행렬

Definition : A 는 F 상의 $R \times C$ 행렬이라 하고 , B는 F상의 $C \times R$ 행렬이라 하자. 함수 $f : F^C \rightarrow F^R$ 은 $f_A(x) = Ax$ 라 정의 하고, 함수 $g : F^R \rightarrow F^C$는 $g(y) = By$라고 정의하자. f 와 g가 서로의 역함수이면, 행렬 A와 B는 서로의 역행렬이라고 한다. A 가 역행렬을 가지면 A는 가역행렬(Invertible matrix) 라고 한다. 역함수의 유일성을 이용하여 행렬 또한 역행렬이 존재할 경우 오직 하나의 역행렬을 가진다는 것을 보여줄 수 있다. 가역행렬 A의 역행렬은 A^{-1} 로 나타낸다.

가역적이지 않은 행렬은 *특이행렬(singular matrix)* 이라한다.

파이썬의 numpy 모듈에서 `numpy.linalg.inv()` 를 이용하여 행렬의 역행렬을 구할 수 있다. 아래의 예제 Example 5.13.9 의 A의 역행렬을 구해보자.

```
A = np.matrix([[1, 0, 0, 0], [2, 1, 0, 0], [3, 0, 1, 0], [4, 0, 0, 1]])

A_inv = np.linalg.inv(A)
print(A_inv)
'''출력결과
[[ 1.  0.  0.  0.]
 [-2.  1.  0.  0.]
 [-3.  0.  1.  0.]
 [-4. -0. -0.  1.]]
'''
```

5.13.3 역행렬의 사용

Lemma : $R \times C$ 행렬 A 가 역행렬 A^{-1} 을 가지면, AA^{-1} 은 $R \times R$ 단위행렬(Identity Matrix) 이다.

- Proof : $B = A^{-1}$ 라고 하고, $f_A(x) = Ax$, $f_B(y) = By$라고 하면, $f_A \circ f_B$는 모든 R-벡터 x에 대해 $(f_A \circ f_B)(x) = ABx$를 만족한다. $f_A \circ f_B$ 는 항등함수이고, 따라서 AB 는 $R \times R$ 단위행렬이다.

Proposition : 행렬 A 가 가역적이면, A의 행-라벨 집합과 동일한 정의역을 가지는 임의의 벡터 B에 대해 행렬-벡터 식 $Ax = b$ 는 정확하게 하나의 해를 가지며 그 해는 $A^{-1}b$ 이다.

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ Ix &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b \end{aligned}$$

Lemma : A 는 상삼각행렬(Upper triangular)이라고 하면, A 가 가역적(invertible)이 될 필요충분조건은 A의 대각 원소가 모두 영(0)이 아니어야 한다.

5.13.4 가역행렬의 곱은 가역행렬이다.

Proposition : 만약 A 와 B는 가역행렬이고 행렬 곱 AB는 가역행렬이고, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 이다.

- Proof : 함수 f 와 g 를 $f(x) = Ax$ 와 $g(x) = Bx$ 라 하고, A 와 B는 가역행렬이라고 하면 그에 대응하는 함수인 f 와 g 는 가역적이다. 그러므로 $f \circ g$ 는 가역적이고 그 가역 함수는 $g^{-1} \circ f^{-1}$ 이다. 따라서, $f \circ g$에 대응하는 행렬 AB는 가역행렬이고, 역행렬은 $B^{-1}A^{-1}$ 이다.

Example 5.13.15 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 와 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 는 함수 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 와 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 에 대응한다.

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

함수 f와 g 는 가역적이므로, 함수 $f \circ g$ 가역적이다. $f \circ g$ 의 행렬-곱셈은 다음과 같으며 AB도 가역행렬이다.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$