Chap 09

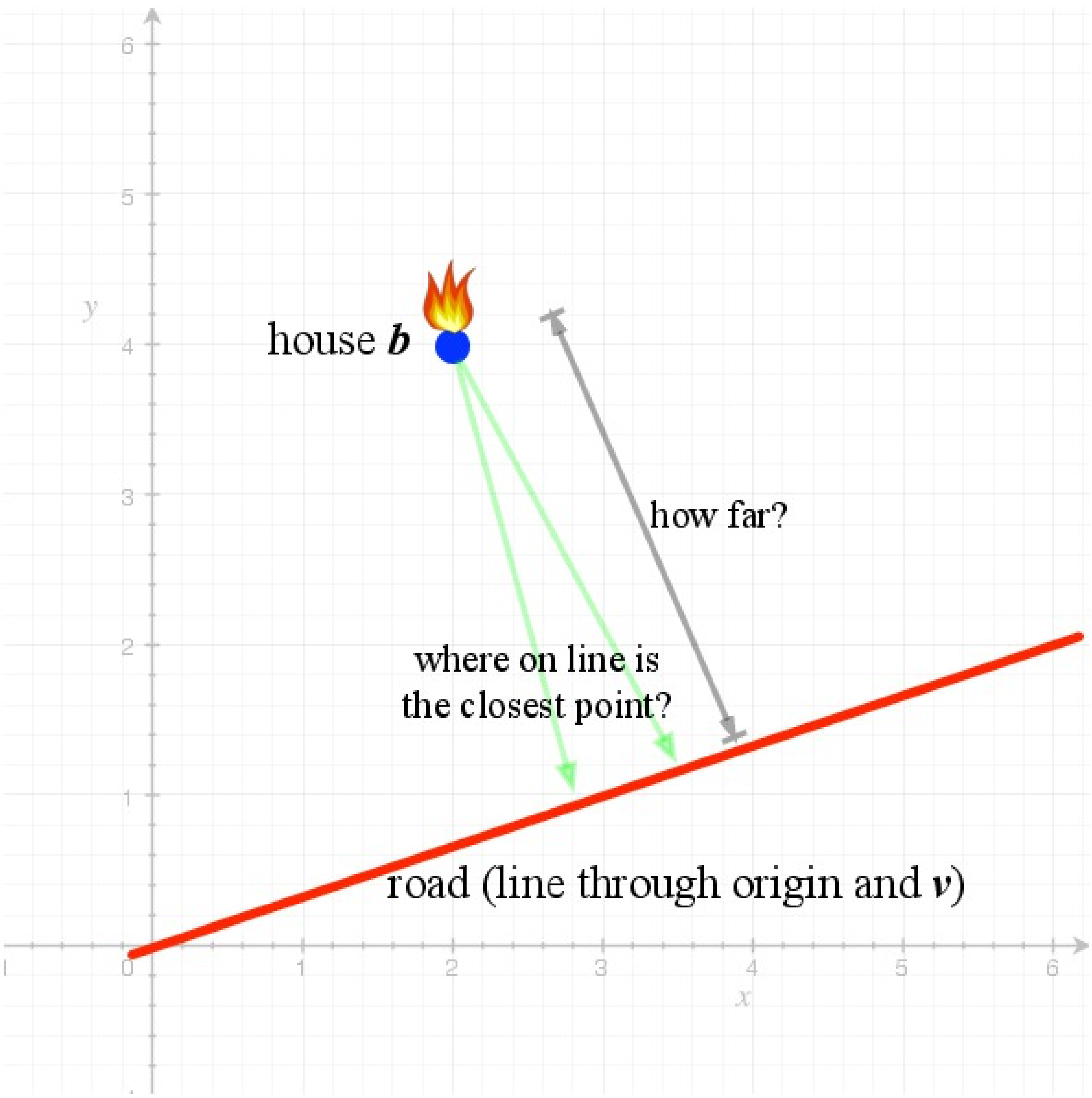
내적 - Inner Product

이번 9장에서는 *길이* (length)와 *직교* (perpendicular)의 개념이 수학적 용어로 어떻게 해석되는지 알아본다. 어떤 점에 가장 가까운 주어진 직선상의 점을 찾는 문제에 대해 살펴본다.

9.1 *소방차* 문제

아래의 그림에서 좌표 $[2, 4]$ 에 위치한 집 b에 화재가 났다고 하자. 집 주변을 지나가는 도로는 원점과 점 $[6, 2]$ 을 지나는 직선이면, 집 b와 가장 가까운 직선상의 어떤 지점으로 소방차를 위치 시킬 수 있으면 화재를 진압 시킬 수 있다고 하면, 두 가지를 생각할 수 있다.

- *직선상의 어느 점이 집 b와 가까운가?*
- *그렇다면, 가장 가까운 거리는 얼마나 되는가?*



이것을 계산문제로 재구성 해보자. 앞의 3.5.3 에서 처럼 원점을 지나는 직선은 벡터의 스칼라배들의 집합으로서 표현할 수 있다. 위의 그림에서 도로는 직선 $\{\alpha[3,1] : \alpha \in \mathbb{R}\}$ 로 나타낼 수 있다. 따라서, 위의 *소방차* 문제는 아래와 같이 구성할 수 있다.

Computational Problem : 하나의 주어진 벡터에 가장 가까운 다른 하나의 주어진 벡터의 생성(Span) 내에 있는 벡터

- *input* : 벡터 v 및 b
- *output* : b에 가장 가까운 직선 $\{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$ 상의 점

9.1.1 거리, 길이, norm, 내적

두 벡터 p 와 b 사이의 거리는 차분(difference) $p - b$ 로 정의한다. 이것은 벡터의 길이를 정의해야 한다는 것을 의미한다.(?) 벡터에 대해 "*길이*"라는 용어를 사용하는 대신에 보통 $norm$ 을 사용한다.

벡터 v 의 $norm$은 $||v||$ 로 표현한다. $norm$ 은 길이 역할을 하므로, 다음의 $norm$ 성질을 만족해야 한다.

- Property N1 : 임의의 벡터 v 에 대해, $||v||$ 은 음이 아닌 실수이다.
- Property N2 : 임의의 벡터 v 에 대해, $||v||$ 이 영(0)이 될 필요충분조건은 v 가 영벡터인 것이다.

- Property N3 : 임의의 벡터 v 와 임의의 스칼라 α 에 대해, $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$ 이다.
- Property N4 : 임의의 벡터 u 와 v 에 대해, $||u+v|| \le ||u|| + ||v||$ 이다.

벡터의 $norm$을 정의하는 한 가지 방법은 *내적* (inner product)라고 하는 벡터들에 대한 연산을 정의하는 것이다. 벡터 u 와 v 의 내적에 대한 표기법은 아래와 같다

$$\langle u, v \rangle$$

내적은 어떠한 공리(axiom)들을 만족해야 하며, 이 공리들에 대해서는 나중에 살펴보도록 하자.

내적이 정의 되었으면, 벡터 v 의 $norm$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

9.2 실수 벡터들에 대한 내적

$\mathbb{R}$ 상의 벡터들에 대한 내적은 도트곱으로 정의된다.

$$\langle u, v \rangle = u \cdot v$$

- *선형성* : $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- *대칭성* : $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- *동질성* : $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

9.2.1 실수 벡터들의 $norm$

$norm$ 함수가 어떤 형태인지 살펴보자.

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

v 는 n-벡터라 하고, $v = [v_1, \dots, v_n]$ 으로 표현하면,

$$||v||^2 = \langle v, v \rangle = v \cdot v$$

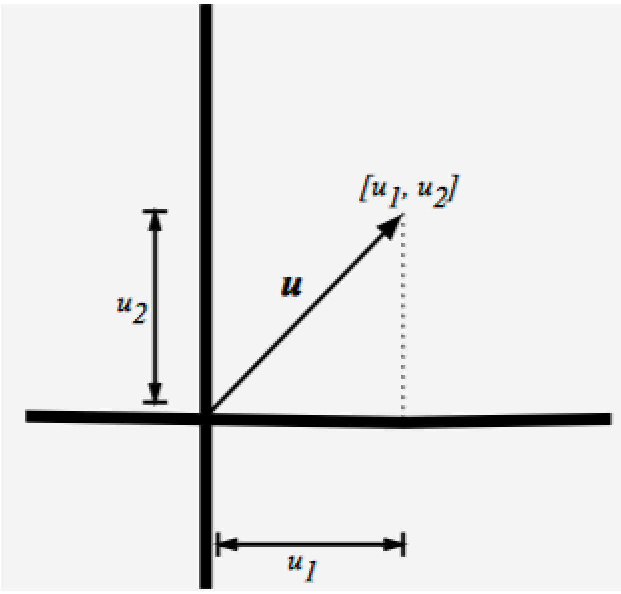
$$= v_1^2 + \cdots + v_n^2$$

좀 더 일반적으로, 만약 v 가 D-벡터이면,

$$||v||^2 = \sum_{i \in D} v_i^2$$

따라서 $||v|| = \sqrt{\sum_{i \in D} v_i^2}$ 이다.

Example 9.2.1 : 2-벡터의 예를 고려해 보자. 벡터 $u = [u_1, u_2]$ 의 길이는 무엇일까? 피타고라스 정리를 이용하면 아래와 같이 계산할 수 있다.



$$(u\text{의 길이})^2 = u_1^2 + u_2^2$$

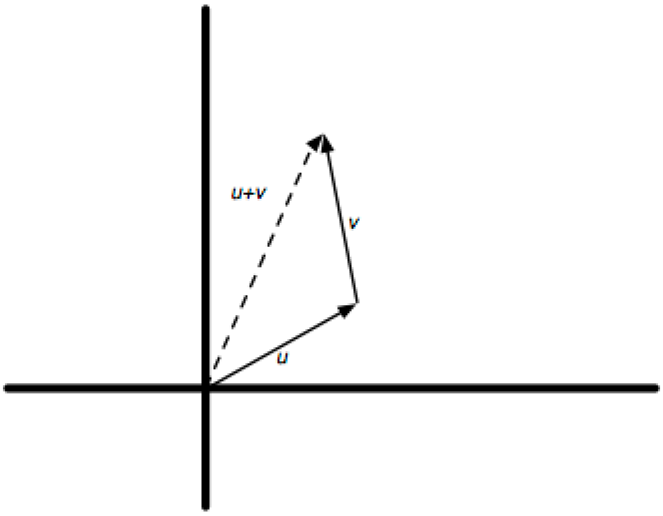
따라서, 위와 같이 피타고라스 정리에 의한 길이계산은 $\mathbb{R}^2$ 의 벡터들에 대한 길이와 일치한다.

9.3 직교성 - Orthogonality

직교 (Orthogonal)는 *수직* (perpendicular)에 대한 수학적인 용어이다.

직교의 정의에 대해 알아보기 전에 *피타고라스 정리* 를 역으로 사용하여 피타고라스 정리가 성립되도록 직교의 개념을 정의해보자.

u 와 v 는 벡터라고하자. 이 벡터들의 길이는 $||u||$ 와 $||v||$ 이다. 이 벡터들의 평행이동을 생각하여 v 의 꼬리를 u의 머리에 놓자. 그러면 '빗변'은 u 의 꼬리에서 v의 머리까지이며 $u + v$ 이다.



벡터 $u + v$ (빗변)의 제곱의 길이는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v \rangle \\
&= \langle u, u+v \rangle + \langle v, u+v \rangle \\
&= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\
&= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2
\end{aligned}
$$

마지막 표현이 $||u||^2 + ||v||^2$ 이 될 필요충분조건은 $\langle u, v \rangle = 0$ 이 되는 것이다.

따라서, 만약 $\langle u, v \rangle = 0$ 이면 u와 v 는 *직교* 라고 정의한다.

Theorem(실수 벡터들에 대한 피타고라스 정리) : 만약 실수 벡터 u 와 v 가 직교하면 다음이 성립한다.

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

9.3.1 직교의 성질

Lemma (Orthogonality Properties) : 임의의 벡터 u 와 v , 그리고 임의의 스칼라 α 에 대해,

- *Property O1* : 만약 u 가 v 와 직교하면 αu 는 모든 스칼라 α 에 대해 αv 와 직교한다.
- *Property O2* : 만약 u 와 v 둘 다 w 와 직교하면 $u+v$ 는 w 와 직교한다.
  - Proof :
  - i. $\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle = \alpha 0 = 0$
  - ii. $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = 0 + 0$

Lemma : 만약 u 가 v 와 직교이면 임의의 스칼라 α, β 에 대해 다음이 성립한다.

$$||\alpha u + \beta v||^2 = \alpha^2 ||u||^2 + \beta^2 ||v||^2$$

- Proof :

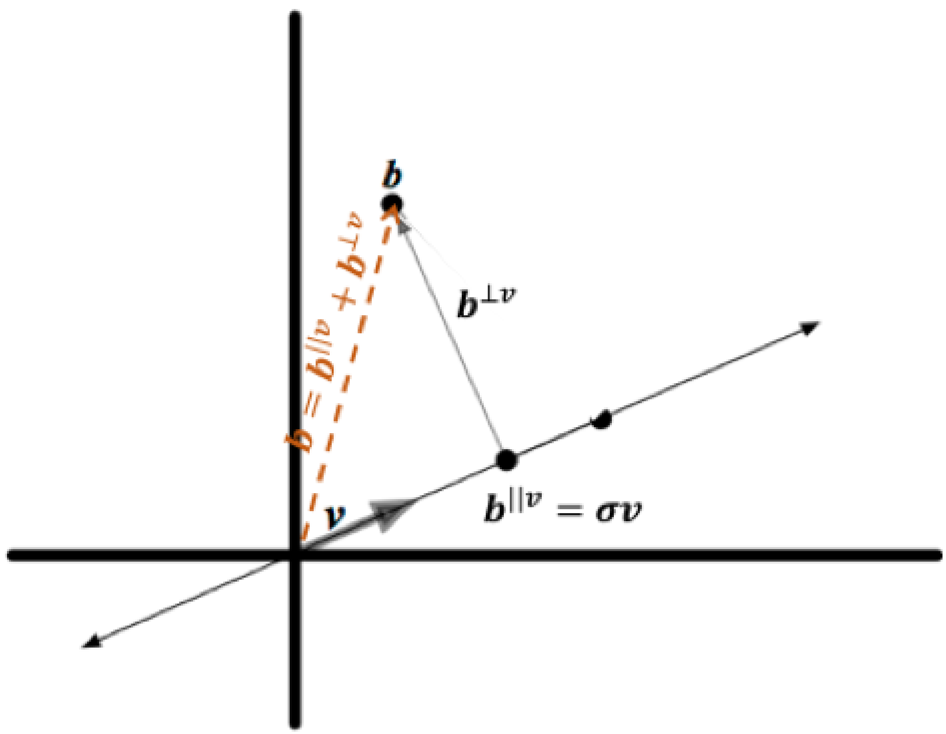
$$
\begin{aligned}
(\alpha u + \beta v) \cdot (\alpha u + \beta v) &= \alpha u \cdot \alpha u + \beta v \cdot \beta v + \alpha u \cdot \beta v + \beta v \cdot \alpha u \\
&= \alpha u \cdot \alpha u + \beta v \cdot \beta v + \alpha\beta(u \cdot v) + \beta\alpha(v \cdot u) \\
&= \alpha u \cdot \alpha u + \beta v \cdot \beta v + 0 + 0 \\
&= \alpha^2 ||u||^2 + \beta^2 ||v||^2
\end{aligned}
$$

9.3.2 평행 및 수직 성분으로 벡터 분해

Definition : 임의의 벡터 b 와 v 에 대해, 만약 다음이 성립하면 벡터 $b^{||v}$ 와 $b^{\perp v}$ 은 각각 *b 의 v 를 따른 투영(projection)* 과 *b 의 v 에 직교하는 투영* 이라 정의한다.

$$b = b^{||v} + b^{\perp v}$$

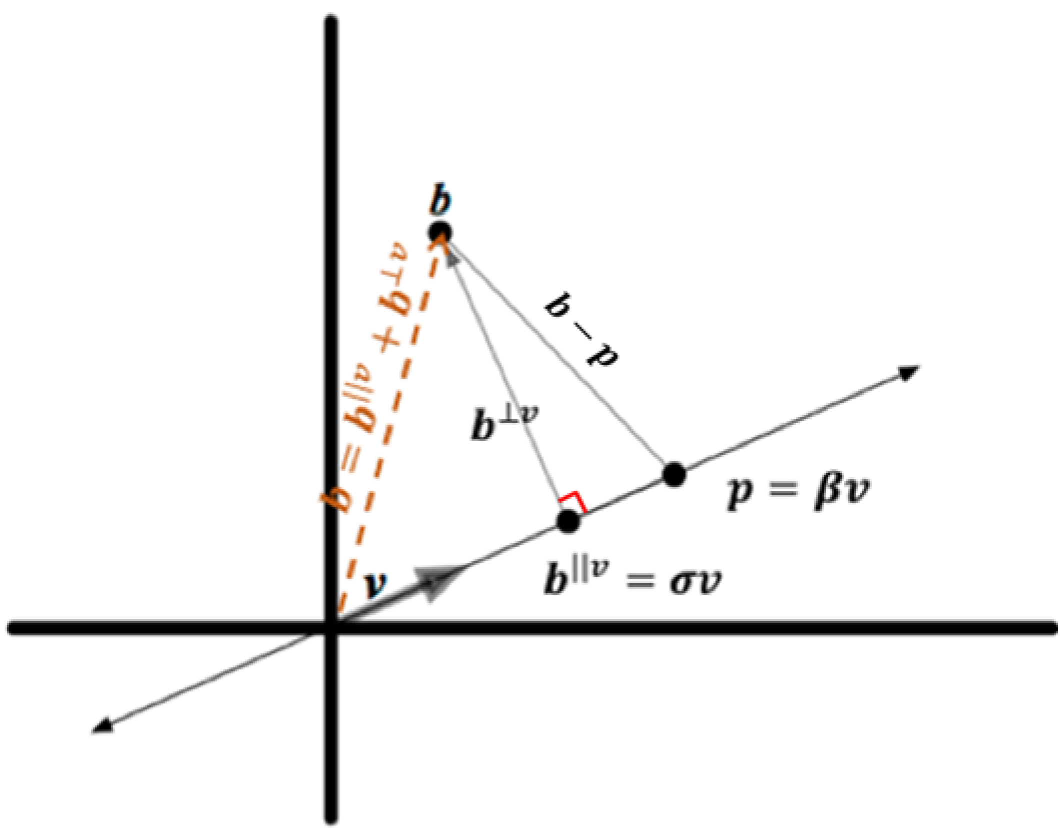
여기서, 어떤 스칼라 $\alpha \in \mathbb{R}$ 에 대해, $b^{||v} = \sigma v$ 이고, $b^{\perp v}$ 은 v 에 직교한다.



9.3.3 *소방차* 문제에 대한 해의 직교 성질

Lemma (Fire Engine Lemma) : b 와 v 는 벡터라고 하면, b 에 가장 가까운 Span $\{v\}$ 내의 점은 $b^{||v}$ 이고, 그 거리는 $||b^{\perp v}||$ 이다.

- Proof :



- p 는 $L = \text{Span}\ \{v\}$ 상의 임의의 점이라 하자. 세 점 $p, b^{||v}, b$ 는 삼각형을 형성한다. p 에서 $b^{||v}$ 로의 화살표는 $b^{||v} - p$ 이다. $b^{||v}$ 에서 b 로의 화살표는 $b - b^{||v}$ 이며 이것은 $b^{\perp v}$ 이다. p 에서 b 로의 화살표는 $b - p$ 이다.
- $b^{||v}$ 와 p 는 둘 다 L 상에 있으므로, 이 둘은 v 의 배수이고, 이 둘의 차분인 $b^{||v} - p$ 또한 v 의 배수이다. $b - b^{||v}$ 은 v 와 직교하므로 이것은 9.3.1의 Orthogonality Property Lemma에 의해 $b^{||v} - p$ 와 또한 직교한다. 이를 피타고라스 정리에 의하면 다음이 성립한다.

$$||b-p||^2 = ||b^{||v} - p||^2 + ||b - b^{||v}||^2$$

- 만약 $p \neq b^{||v}$ 이면 $||b^{||v} - p||^2 > 0$ 이고, 따라서 $||b - b^{||v}|| < ||b - p||$ 이다.

9.3.4 투영 및 가장 가까운 점 찾기

위의 9.3.3 의 그림에서 $\langle b^{\perp v}, v \rangle = 0$ 이다. $b^{\perp v} = b - b^{||v}$ 이므로 $\langle b^{\perp v}, v \rangle = \langle b - b^{||v}, v \rangle = 0$ 이다. 또한, $b^{||v} = \sigma v$ 이므로 $\langle b^{\perp v}, v \rangle = \langle b - b^{||v}, v \rangle = \langle b - \sigma v, v \rangle = 0$ 이다. 이를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\langle b, v \rangle - \sigma \langle v, v \rangle = 0$$

σ에 대해 풀면 다음과 같다.

$$\sigma = \frac{\langle b, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

$||v|| = 1$ 인 경우, 다음과 같다.

$$\sigma = \langle b, v \rangle$$

Lemma : 임의의 실수 벡터 b 와 v 에 대해,

- $b - \sigma v$ 가 v 에 직교하는 σ 가 존재한다.
- Span $\{v\}$ 상에 있으며, $||b - p||$ 를 최소화하는 점 p 는 σv 이다.
- σ 의 값은 $\frac{\langle b, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$ 이다.

파이썬 코드를 이용해 v 의 생성(Span)에 대한 b 의 투영(projection)을 반환하는 함수를 구현해보자. 아래 코드에서 `1e-20` 부분은 벡터 v가 아주 작은값(여기서는 10^{-20}) 보다 작거나 같으면 v 는 영벡터라고 간주해주기 위한 부분이다.

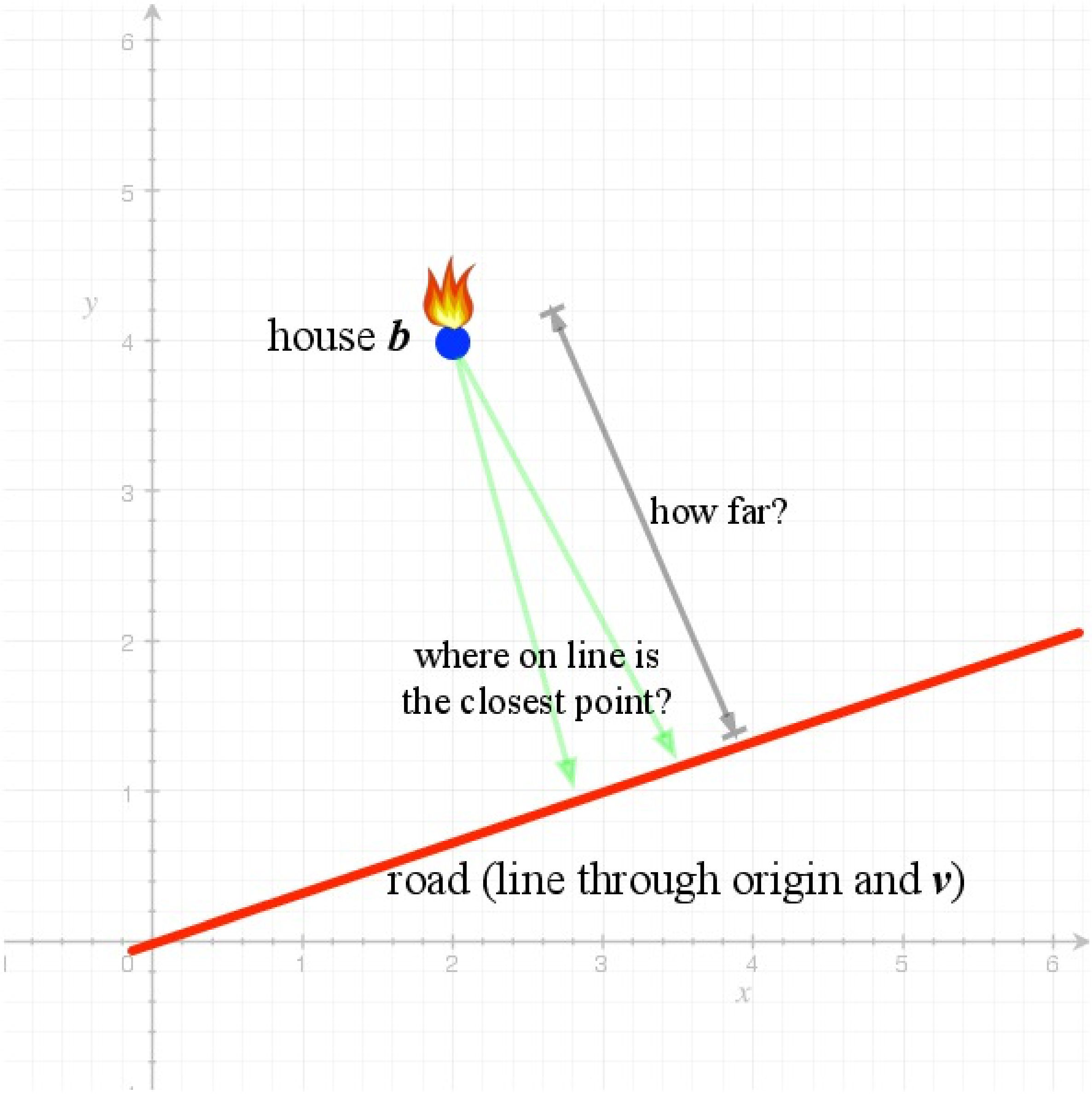
```
def project_along(b, v):
    bv = 0
    vv = 0
    for u, w in zip(b, v):
        bv += u*w
    for u,w in zip(v, v):
        vv += u*w

    sigma = (bv / vv) if vv > 1e-20 else 0
    return [sigma*e for e in v]

>>> b = [2, 4]
>>> v = [6, 2]
>>> project_along(b, v)
[3.0, 1.0]
```

9.3.5 *소방차* 문제에 대한 솔루션

이제 9.1에서 봤던 소방차 문제에 대한 그림을 다시 보자.



이 문제에서 $v = [6, 2]$ 이고, $b = [2, 4]$ 이다. 직선 $\{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$ 위에 있는 가장 가까운 점은 σv 이며, σ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{v \cdot b}{v \cdot v} \\ &= \frac{6 \cdot 2 + 2 \cdot 4}{6 \cdot 6 + 2 \cdot 2} \\ &= \frac{20}{40} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서, b 에 가장 가까운 점은 $\frac{1}{2}[6, 2] = [3, 1]$ 이다. b 까지의 거리는 $||[2, 4] - [3, 1]|| = ||[-1, 3]|| = \sqrt{10}$ 이다.

9.3.6 외적(Outer product)과 투영

벡터 u 와 v 의 *외적* 은 행렬-행렬 곱 uv^T 으로 정의된다.

$$\begin{bmatrix} \\ u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & v^T & \end{bmatrix}$$