Chap03

벡터 - Vector

3.1 벡터란 무엇인가?

*벡터*란 단어는 "vehere(운반하다)"라는 뜻의 라틴어에서 유래되었다. 어떤 것을 한 장소에서 다른 곳으로 이동하는 벡터의 방향성을 내포하고 있다. 한 벡터의 모든 원소는 *하나의 필드* (Chap02 참고)에서 나와야 한다.

- Definition 1 : 필드 F와 양의 정수 n에 대해, F에 속하는 n개의 원소를 가지는 벡터를 F상의 n-*벡터*라고 한다. F상의 n-벡터들의 집합은 F^n으로 나타낸다.
  예를 들어, 아래의 $\mathbb{R}$(실수) 상의 4-벡터들의 집합을 $\mathbb{R}^4$라고 쓴다.
  $[3.14, 2.17, -1.0, 2.0]$

위의 4-벡터 집합을 함수로 생각하면 $\mathbb{R}^4$ 를 함수의 집합에 대한 표기법으로 해석할 수 있다. 따라서, 위의 4-벡터는 사실상 함수라고 할 수 있다.

$0 \mapsto 3.14$
$1 \mapsto 2.17$
$2 \mapsto -1.0$
$3 \mapsto 2.0$

3.2 벡터는 함수이다.

위의 예제를 통해 알 수 있듯이 벡터는 함수로 나타낼 수 있다.

- Definition 2 : 유한 집합 D와 필드 F에 대해, F상의 D-*벡터*는 D에서 F로의 함수이다.

3.2.1 파이썬의 딕셔너리를 이용한 벡터 표현

파이썬의 딕셔너리(Dictionary) 타입은 정의역(Domain) $\mapsto$ 치역(Image)의 형태로 벡터를 표현하는 데 유용하다. 위의 예제를 딕셔너리를 이용하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

`{0: 3.14, 1: 2.17, 2: -1.0, 3: 2.0}`

3.2.2 Sparsity

대부분의 원소값이 0인 벡터를 *Sparse vector*(희소 벡터)라고 한다. 0이 아닌 언소의 수가 k개인 벡터는 k-*sparse* 라고 한다. k-*sparse* 벡터는 k에 비례하는 공간을 사용하여 표현할 수 있다. 예를 들어 여러 문서로 구성된 단어들의 모음을 $f : Words \mapsto \mathbb{R}$ 을 벡터로 나타내려고 하면 필요한 공간은 모든 문서를 구성하는 총 단어의 수에 비례한다.

3.3 벡터로 무엇을 표현할 수 있는가?

다양한 데이터들에 대해 벡터로 나타낼 수 있다.

1. 이진 문자열(binary string) : n-비트 이진 문자열 `10111011` 을 $GF(2)$상의 n-벡터, `[1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1]` 로 표현할 수 있다.

2. 속성(attribute) : 예를 들어, 소비자에 관한 데이터를 딕셔너리 형태의 벡터로 표현할 수 있다. 이러한 벡터를 이용하여 머신러닝 모델에 적용할 수 있다.

```
Jane = {'age': 30, 'education_level': 16, 'income': 85000}
```

3. 확률분포 : 아래와 같이 유한한 확률 분포는 벡터로 나타낼 수 있다.

```
{1: 1/6, 2: 1/6, 3: 1/6, 4: 1/6, 5: 1/6, 6: 1/6}
```

4. 이미지 : 예를 들어, `1024 x 768` 크기의 흑백 이미지는 집합 $\{(i,j)|0 \leq i < 1024, 0 \leq j < 768\}$ 에서 실수 $\mathbb{R}$로의 함수로 볼 수 있고, 벡터로 볼 수 있다.

5. 공간상의 점: 벡터를 이용하여 2차원 뿐만아니라 3차원 이상의 다차원의 공간의 점을 나타낼 수 있다.

```
# 2차원 공간상의 점
import numpy as np
import plotly.offline as offline
import plotly.graph_objs as go

# jupyter notebook 에서 출력
offline.init_notebook_mode(connected=True)

L = np.array([[2,2],[3,2],[1.75,1],[2,1],[2.25,1],[2.5,1],[2.75,1],[3,1],[3.25,1]])
x = L[:, 0]
y = L[:, 1]

def plot(x, y):
    '''plotly를 이용해 plotting 함수 구현'''
    trace = go.Scatter(
                x = x,
                y = y,
                mode = 'markers')

    layout = go.Layout(
        showlegend=False,
        xaxis=dict(
            rangemode='tozero',
            autorange=False
        ),
        yaxis=dict(
            rangemode='tozero',
            autorange=True
        )
    )

    data = [trace]
    fig = go.Figure(data=data, layout=layout)
    return offline.iplot(fig)

plot(x, y)
```

```
# 3차원 공간상의 점
x, y, z = np.random.multivariate_normal(np.array([0,0,0]), np.eye(3), 10).transpose()

trace1 = go.Scatter3d(
    x=x,
```

```python
    y=y,
    z=z,
    mode='markers',
    marker=dict(
        size=12,
        line=dict(
            color='rgba(217, 217, 217, 0.14)',
            width=0.5
        ),
        opacity=0.8
    )
)

x2, y2, z2 = np.random.multivariate_normal(np.array([0,0,0]), np.eye(3),
10).transpose()
trace2 = go.Scatter3d(
    x=x2,
    y=y2,
    z=z2,
    mode='markers',
    marker=dict(
        color='rgb(127, 127, 127)',
        size=12,
        symbol='circle',
        line=dict(
            color='rgb(204, 204, 204)',
            width=1
        ),
        opacity=0.9
    )
)
data = [trace1, trace2]
layout = go.Layout(
    margin=dict(
        l=0,
        r=0,
        b=0,
        t=0
    )
)
fig = go.Figure(data=data, layout=layout)

offline.iplot(fig)
```

3.4 벡터 덧셈

3.4.1 평행이동과 벡터 덧셈

벡터의 평행이동은 벡터(v)에 더하는 함수 $f(v) = v_0 + v$ 에 의해 평행이동을 할 수 있다.

- Definition 3 : n-벡터들의 덧셈은 대응하는 원소들의 덧셈으로 정의된다.

  $[u_1, u_2, \ldots, u_n] + [v_1, v_2, \ldots, v_n] = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n]$

모든 필드 F ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 등)는 0을 원소로 가진다. 그렇기 때문에 F상의 D-벡터들로 구성된 집합 F^D는 반드시 영벡터를 가진다. 영벡터는 모든 원소의 값이 0인 벡터를 말하며 $\mathbf{0}$ 으로 표기한다.
따라서, 함수 $f(v) = v + \mathbf{0}$에 의한 평행이동은 그 결과가 입력과 동일한 평행이동이다.

Task 3.4.3

[1, 2]를 아래의 리스트 `L` 의 각각의 벡터에 더하여 얻어진 점들을 그래프로 그려보자.

```
# Task 3.4.3
L = [[2,2],[3,2],[1.75,1],[2,1],[2.25,1],[2.5,1],[2.75,1],[3,1],[3.25,1]]
L = np.array(L)
L_add = L + [1, 2]
x = L_add[:, 0]
y = L_add[:, 1]
# plot(x, y)
```

3.4.2 벡터 덧셈의 결합성과 교환성

필드(체)에서 덧셈의 두 가지 성질은 *결합성(associativity)*과 *교환성(commutativity)*이다.

- Proposition : 임의의 벡터 u, v, w에 대해 다음의 성질이 성립한다.

$(u + v) + w = u + (v + w)$
$u + v = vu$

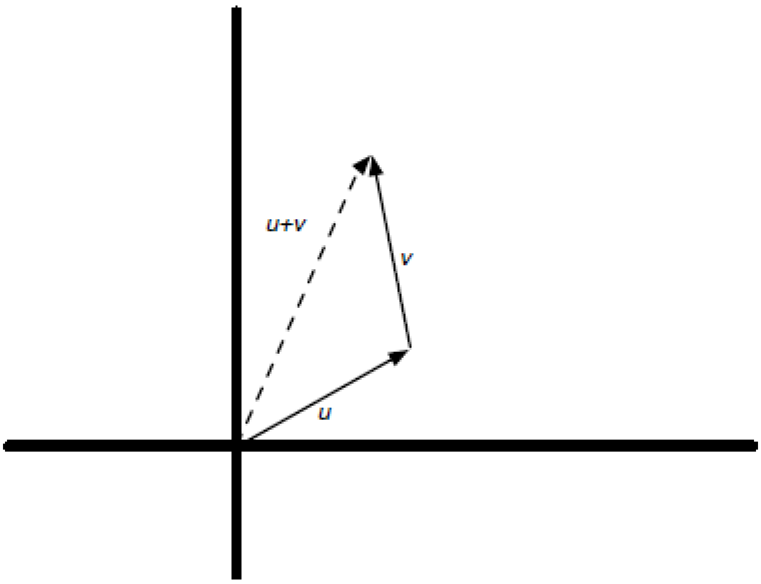
3.4.3 벡터를 화살표로 표현하기

필드$\mathbb{R}$상의 n-벡터들은 $\mathbb{R}^n$의 화살표로 나타낼 수 있다. 예를 들어, 2-벡터 $[3, 1.5]$는 꼬리가 원점에 있고 화살표가 $(3, 1.5)$에 있는 화살표로 나타낼 수 있다.

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

ax = plt.axes()
ax.arrow(0, 0, 3.0, 1.5, head_width=0.1, head_length=0.1)
plt.ylim([0, 10])
plt.xlim([0, 10])
```

또한 $\mathbb{R}$상의 벡터들의 덧셈을 화살표를 사용하여 보여줄 수 있다.



3.5 스칼라 - 벡터 곱셈

Chap02-필드에서 *스케일링(Scaling)*은 복소평면에서 입력된 복소수를 양의 실수 r과 곱하는 함수 $f(z) = r \cdot z$로 나타낼 수 있었다. 이처럼 벡터에 대해서도 스칼라-벡터 곱(scalar-vector multiplication)에 의해 벡터를 스케일링 할 수 있다. 벡터에서 필드 원소(e.g. 숫자)는 *스칼라(scalar)*라 하며, 그 이유는 곱셈을 통해 벡터를 스케일링 하는데 사용할 수 있기 때문이다.

- Definition 4 : 벡터 v와 스칼라 α의 곱셈은 v의 원소 각각을 α와 곱하는 것으로 정의된다.
  $\alpha[v_1, v_2, \ldots, v_n] = [\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n]$

Task 3.5.4

`L` 내의 벡터들을 0.5만큼 스케일링한 결과와 -0.5만큼 스케일링한 결과를 그래프로 그려보자.

```
L = [[2,2],[3,2],[1.75,1],[2,1],[2.25,1],[2.5,1],[2.75,1],[3,1],[3.25,1]]
L = np.array(L)

L1 = L * 0.5
L2 = L * (-0.5)

trace1 = go.Scatter(x=L1[:, 0],
                    y=L1[:, 1],
                    mode = 'markers')

trace2 = go.Scatter(x=L2[:, 0],
                    y=L2[:, 1],
                    mode = 'markers')

layout = go.Layout(
        showlegend=False,
        xaxis=dict(
            rangemode='tozero',
            autorange=True
        ),
        yaxis=dict(
            rangemode='negative',
            autorange=True
        )
    )

data = [trace1, trace2]
fig = go.Figure(data=data, layout=layout)
# offline.iplot(fig)
```

3.5.1 화살표 스케일링하기

$\mathbb{R}$상의 벡터를 양의 실수로 스케일링 하는 것은 벡터의 방향을 바꾸지 않고 화살표의 길이만 변경한다. 아래의 예제 코드는 위의 $[3, 1.5]$의 벡터를 2배한 화살표이다. 음의 실수를 곱하게 되면 벡터의 방향이 반대가 된다.

```
ax = plt.axes()
ax.arrow(0, 0, 3.0*2, 1.5*2, head_width=0.1, head_length=0.1)
plt.ylim([0, 10])
plt.xlim([0, 10])
```

3.5.2 스칼라-벡터 곱셈의 결합성

벡터를 스칼라와 곱한 다음에 그 결과를 또 다른 스칼라와 곱하는 것은 아래와 같이 단순화 할 수 있다.

- Proposition (Associativity) : $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

Proof

To show that the left-hand side equals the right-hand side, we show that each entry of the left-hand side equals the corresponding enty of the right-hand side. For each element k of the domain D, entry k of $\beta\boldsymbol{v}$ is $\beta\boldsymbol{v}[k]$, so entry k of $\alpha(\beta\boldsymbol{v})$ is $\alpha(\beta\boldsymbol{v}[k])$. Entry k of $(\alpha\beta)\boldsymbol{v}$ is $(\alpha\beta)\boldsymbol{v}[k]$. By the field's associative law, $\alpha(\beta\boldsymbol{v}[k])$ and $(\alpha\beta)\boldsymbol{v}[k]$ are equal. $\square$

3.5.3 원점을 지나는 선분

하나의 벡터와 스칼라 곱을 통해 스케일링하여 원점을 지나는 선분을 만들 수 있다. 아래의 예제는 벡터 $[3, 2]$를 스케일링하여 선분을 만드는 예시이다.

```
# [3, 2] 벡터를 10등분으로 스케일링
vecs = [[3 * (i/10), 2 * (i/10)] for i in range(11)]
vecs = np.array(vecs)
x = vecs[:, 0]
y = vecs[:, 1]
plot(x, y)
```

```
# [3, 2] 벡터를 100등분으로 스케일링
vecs = [[3 * (i/100), 2 * (i/100)] for i in range(101)]
vecs = np.array(vecs)
x = vecs[:, 0]
y = vecs[:, 1]
plot(x, y)
```

3.5.4 원점을 지나는 직선

위의 예제에서 선분을 확장하여 양수의 스칼라와 음수의 스칼라를 곱하여 스케일링 하게 되면 원점을 지나는 직선을 만들 수 있다.

```
vecs = [[3 * (i/10), 2 * (i/10)] for i in range(-10, 11)]
vecs = np.array(vecs)
x = vecs[:, 0]
y = vecs[:, 1]
plot(x, y)
```

```
vecs = [[3 * (i/100), 2 * (i/100)] for i in range(-100, 101)]
vecs = np.array(vecs)
x = vecs[:, 0]
y = vecs[:, 1]
plot(x, y)
```

3.6 벡터 덧셈과 스칼라 곱셈 결합하기

3.6.1 원점을 지나지 않는 선분과 직선

위의 예제에서 $[x,y] \mapsto [x+0.5, y+1]$평행이동을 적용하게 되면 아래의 그림처럼 그래프가 그려진다.

```
vecs = [[3 * (i/100), 2 * (i/100)] for i in range(101)]
vecs = np.array(vecs)
vecs_trns = [[3 * (i/100) + 0.5, 2 * (i/100) + 1] for i in range(101)]
vecs_trns = np.array(vecs_trns)

trace1 = go.Scatter(x=vecs[:, 0],
                    y=vecs[:, 1],
                    mode = 'markers',
                    name = 'original')

trace2 = go.Scatter(x=vecs_trns[:, 0],
                    y=vecs_trns[:, 1],
                    mode = 'markers',
                    name = 'translation')

layout = go.Layout(
        showlegend=False,
        xaxis=dict(
            rangemode='tozero',
            autorange=True
        ),
        yaxis=dict(
            rangemode='negative',
            autorange=True
        ),
        annotations=[
            dict(
                x=3,
                y=2,
                xref='x',
                yref='y',
                text='Orignial',
                showarrow=True,
                arrowhead=7
            ),
            dict(
                x=3.5,
                y=3,
                xref='x',
                yref='y',
                text='Translation',
                showarrow=True,
                arrowhead=7
            ),
        ]
    )

data = [trace1, trace2]
fig = go.Figure(data=data, layout=layout)
offline.iplot(fig)
```

3.6.2 스칼라-벡터 곱셈과 벡터 덧셈의 분배 법칙

아래의 성질은 필드에 대한 분배법칙 $x(y+z) = xy + xz$ 에서 비롯된다.

- Proposition (*벡터 덧셈에 대한 스칼라-벡터 곱의 분배*): $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
- Proposition (*스칼라 덧셈에 대한 스칼라-벡터 곱의 분배*): $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

Proof

We use the same approach as used in the proof of Proposition 2.5.5. To show that the left-hand side of Equation 2.1 equals the right-hand side, we show that each entry of the left-hand side equals the corresponding entry of the right-hand side.

For each element k of the domain D, entry k of $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$ is $\boldsymbol{u}[k]+\boldsymbol{v}[k]$, so entry k of $\alpha\,(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$ is $\alpha\,(\boldsymbol{u}[k]+\boldsymbol{v}[k])$.

Entry k of $\alpha\,\boldsymbol{u}$ is $\alpha \boldsymbol{u}[k]$ and entry k of $\alpha\,\boldsymbol{v}$ is $\alpha\,\boldsymbol{v}[k]$, so entry k of $\alpha\,\boldsymbol{u}+\alpha\,\boldsymbol{v}$ is $\alpha\,\boldsymbol{u}[k]+\alpha\,\boldsymbol{v}[k]$. Finally, by the distributive law for fields, $\alpha(\boldsymbol{u}[k]+\boldsymbol{v}[k]) = \alpha\,\boldsymbol{u}[k]+\alpha\,\boldsymbol{v}[k]$. $\square$

3.6.3 블록결합(Convex combination) 들여다 보기

$[0,5,1]$ 와 $[3.5,3]$을 잇는 선분을 이루는 점들의 집합에 대한 표현식은 $\{\alpha[3,2]+[0.5,1] : \alpha \in \mathbb{R}, 0 \le \alpha \le\}$ 이다. 이를 다음과 같이 더 나은 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\alpha[3,2]+[0.5,1] &= \alpha([3.5,3]-[0.5,1)+[0.5,1] \\
&= \alpha[3.5,3]-\alpha[0.5,1]+[0.5,1] \\
&= \alpha[3.5,3]+(1-\alpha)[0.5,1] \\
&= \alpha[3.5,3]+\beta[0.5,1]
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \{\alpha[3.5,3]+\beta[0.5,1] : \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \alpha,\beta \ge 0, \alpha+\beta = 1\}$$

$\alpha u + \beta v$형태의 표현식은 u와 v의 블록결합이라고 한다. 위의 예를 통해 임의의 $\mathbb{R}$상의 n-벡터들의 쌍 u, v에 대해 아래와 같이 말할 수 있다.

- Proposition : u-v 선분은 u와 v의 블록결합들의 집합으로 구성된다.

Task 3.6.9

파이썬 함수, `segment(pt1, pt2)` 를 작성해 보자. `pt1=[3.5,3], pt2=[0.5,1]` 일 경우, 리턴 결과인 100개의 점을 그래프로 그려보자

```python
def segment(pt1, pt2):
    pt1 = [[pt1[0] * i/100, pt1[1] * i/100] for i in range(101)]
    pt2 = [[pt2[0] * (1-(i/100)), pt2[1] * (1-(i/100))] for i in range(101)]
    pt1 = np.array(pt1)
    pt2 = np.array(pt2)
    result = pt1 + pt2
    x = result[:, 0]
    y = result[:, 1]
    return x, y
```

```python
pt1 = [3.5, 3]
pt2 = [0.5, 1]

x, y = segment(pt1, pt2)
plot(x, y, autorange=False)
```

Example 3.6.10

이미지를 나타내는 벡터들의 쌍에 대한 블록결합을 고려해 보자. 이미지 예로는 설현의 이미지를 이용하였다.

```
from PIL import Image

# 이미지 파일 불러오기
u = Image.open('./images/img01.jpg')
u = u.convert('L')
v = Image.open('./images/img02.PNG')
v = v.convert('L')
v = v.resize(u.size)  # 이미지 사이즈를 u의 사이즈와 같게 맞추기

# 이미지 파일을 np.asarray를 이용해 배열로 만들기
u = np.asarray(u, dtype='float32')
v = np.asarray(v, dtype='float32')

fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(25, 5))
fig.subplots_adjust(hspace = .5, wspace=.001)

img_org = [u, v]

for i, img in enumerate(img_org):
    axs[i].imshow(img ,cmap='Greys_r')
```

3.6.4 아핀결합(Affine combination) 들여다 보기

위의 3.6.3 절에서는 선분을 이루는 벡터들의 집합을 블록결합으로 표현하였다. 이번에는 $[0.5, 1]$과 $[3.5, 3]$을 지나는 (무한) 직선에 대해 알아보도록 하자. 이러한 직선은 아래와 같이 집합으로 표현할 수 있다.

$\{\alpha[3.5, 3] + \beta[0.5, 1] : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}$

$\alpha u + \beta v$ 형태의 표현식을 u와 v의 아핀결합(Affine combination) 이라고 부른다.

- Hypothesis : u와 v를 지나는 직선은 u와 v의 아핀결합들의 집합으로 구성된다.

3.7 딕셔너리에 기반을 둔 벡터 표현

이 교재에서는 파이썬의 딕셔너리를 이용하여 vec.py의 파이썬 파일에 클래스 `Vec` 이 정의 되어 있다. `Vec` 클래스의 인스턴스 변수는 아래와 같다.

- `f` : 파이썬의 딕셔너리에 의해 표현되는 함수
- `D` : 파이썬의 집합에 의해 표현되는 함수의 정의역

아래의 방법을 이용해 `Vec` 의 필드(변수)에 접근할 수 있다.

```
from vec import Vec, setitem, getitem

v = Vec({'A', 'B', 'C'}, {'A': 1})

for d in v.D:
    if d in v.f:
        print(v.f[d])
```

3.7.1 세터(setter)와 게터(getter)

`setitem` , `getitem` 함수를 이용해 벡터의 값을 할당하거나, 벡터의 값을 얻어올 수 있다.

먼저, `setitem(v, k val)` 은 벡터(`k`)에 값(`val`)을 할당하는 함수이다.

```
def setitem(v,k,val):
    v.f[k] = val
```

`getitem(v, k)` 은 벡터(`k`)의 값을 리턴해주는 함수이다.

```
def getitem(v,k):
    result = v.f[k] if k in v.f else 0
    return result
```

3.7.2 스칼라-벡터 곱셈

Quiz 3.7.3

`scalar_mul(v, alpha)` 을 작성해 보자.

- `input` : `Vec` 의 인스턴스와 스칼라 `alpha`
- `output` : 스칼라-벡터 곱 `alpha x v` 를 나타내는 `Vec` 의 새로운 인스턴스

```
def scalar_mul(v, alpha):
    result = {d: alpha * getitem(v, d) for d in v.D}
    return Vec(v.D, result)
```

3.7.3 덧셈

Quiz 3.7.4

`add(u, v)` 를 작성해보자.

- `input` : `Vec` 의 인스턴스 `u` 와 `v`
- `output` : `u` 와 `v` 의 벡터 합인 `Vec` 의 인스턴스

```
def add(u, v):
    result = {d: getitem(u, d) + getitem(v, d) for d in u.D}
    return Vec(u.D, result)
```

3.7.4 음의 벡터, 벡터 덧셈의 가역성, 벡터 뺄셈

벡터 v에 대한 음의 벡터는 $-v$이며 v의 각 원소값의 부호를 바꾸면 된다. 벡터를 화살표로 나타내면, $-v$는 동일한 길이를 가지며 방향이 정반대를 가리키는 화살표이다. 즉, 음의 벡터 $-v$는 역 평행이동이라 할 수 있다.

벡터의 뺄셈은 음의 벡터의 덧셈으로 정의할 수 있다. $u - v$는 $u + (-v)$로 표현할 수 있다.

벡터 뺄셈은 벡터 덧셈의 역이다.

$$f(v) = v + w \quad g(v) = v - w$$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(v) &= g(f(v)) \\
&= g(v + w) \\
&= v + w - w \\
&= v
\end{aligned}
$$

Quiz 3.7.5

`neg(v)` 를 작성해 보자.

- `input` : `Vec` 의 인스턴스 `v`
- `output` : 음의 `v` 를 나타내는 딕셔너리

```python
def neg(v):
    result = {d: (-1) * getitem(v, d) for d in v.D}
    return Vec(v.D, result)
```

3.8 $GF(2)$ 상의 벡터

생략

3.9 도트곱(Dot product)

두 개의 D-벡터들 u와 v에 대해, 도트곱은 대응하는 원소(엔트리)들의 곱의 합이다.

$u \cdot v = \sum_{k \in D} u[k]v[k]$

예를 들어, 벡터 $u = [u_1, \dots, u_n]$, $v = [v_1, \dots, v_n]$에 대해,

$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$

위의 도트곱의 연산 결과는 벡터가 아니라 스칼라 이다. 이러한 이유 때문에 도트곱은 벡터들의 *스칼라 곱(scalar product)* 이라고도 한다.

u의 오직 한 원소, 예를 들어, i번째 원소가 1이고, 나머지 다른 원소들은 0이면, $u \cdot v$는 v의 i번째 원소이다.

$$
\begin{aligned}
&[0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0, 0] \cdot [v_1, v_2, \cdots, vi - 1, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_n] \\
&= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_n \\
&= 1 \cdot v_i \\
&= v_i
\end{aligned}
$$

Quiz 3.9.3

위의 예제 벡터인 v의 원소들의 평균을 도트곱으로 표현 해보자. 먼저, `dot(u, v)` 함수는 아래와 같다

```python
def dot(u, v):
    result_vec = {d: getitem(u, d) * getitem(v, d) for d in u.D}
    result_dot = sum(list(result_vec.values()))
    return result_dot
```

3.9.2 선형방정식

- Definition : 선형방정식(일차 방정식)으 $\alpha \cdot x = \beta$의 형태를 가지는 식으로, α는 벡터, β는 스칼라이며, x는 벡터 변수이다.

Example 3.9.7

센서 노드의 에너지 사용률 : 정의역D를 아래와 같이 정의 해보자.

$D = \{radio, \quad sensor, \quad memory, \quad cpu\}$

각 하드웨어 구성요소를 전력 소모에 매핑하는 함수는 벡터이며 이것을 $rate$라 하고, 각 구성요소를 테스트 기간 동안에 켜져 있는 시간의 양에 매핑하는 함수 또한 벡터이며 $duration$이라 한다. 이를 코드로 나타내면 아래와 같다.

```python
from vec import Vec

D = {'memory', 'radio', 'sensor', 'cpu'}  # 정의역(Domain)
# 함수(function, vector)
f_rate = {'memory': 0.06, 'radio': 0.1, 'sensor': 0.004, 'cpu': 0.0025}
f_duration = {'memory': 1.0, 'radio': 0.2, 'sensor': 0.5, 'cpu': 1.0}

rate = Vec(D, f_rate)  # rate 정의
duration = Vec(D, f_duration)
```

테스트 기간 동안 센서 노드에 의해 소모된 총 에너지는 $rate \cdot duration$(도트곱) 이다.

```python
joule = dot(rate, duration)
print('Joule = {:.4f}'.format(joule))
## >> Joule = 0.0845
```

- Definition : 선형방정식들의 시스템(선형시스템)은 방정식들의 컬렉션이다.

$$a_1 \cdot x = \beta_1$$
$$a_2 \cdot x = \beta_2$$
$$\vdots$$
$$a_m \cdot x = \beta_m$$

3.9.3 ~ 3.9.7 : 생략

3.9.8 도트곱의 대수적 성질

교환성(Commutativity)

두 벡터의 도트곱을 계산할 때 벡터의 순서는 상관 없다.

- Proposition : $u \cdot v = v \cdot u$

$$\begin{aligned}[u_1, u_2, \ldots, u_n] \cdot [v_1, v_2, \ldots, v_n] &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \\ &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_n u_n \\ &= [v_1, v_2, \ldots, v_n] \cdot [u_1, u_2, \ldots, u_n]\end{aligned}$$

동질성(Homogeneity)

도트곱의 벡터 중 하나에 스칼라를 곱하는 것은 도트곱의 결과값에 곱하는 것과 같다.

- Proposition : $(\alpha u) \cdot v = \alpha (u \cdot v)$

분배성(Distributivity)

벡터 덧셈에 대한 도트곱의 분배법칙

- Proposition : $(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w$

Proof

Write $\boldsymbol{u}=[u_1,\ldots,u_n], \boldsymbol{v}=[v_1,\ldots,v_n]$ and $\boldsymbol{w}=[w_1,\ldots,w_n]$.

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} &= ([u_1,\ldots,u_n]+[v_1,\ldots,v_n])\cdot[w_1,\ldots,w_n] \\
&= [u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n]\cdot[w_1,\ldots,w_n] \\
&= (u_1+v_1)w_1+\cdots+(u_n+v_n)w_n \\
&= u_1w_1+v_1w_1+\cdots+u_nw_n+v_nw_n \\
&= (u_1w_1+\cdots+u_nw_n)+(v_1w_1+\cdots+v_nw_n) \\
&= [u_1,\ldots,u_n]\cdot[w_1,\ldots,w_n]+[v_1,\ldots,v_n]\cdot[w_1,\ldots,w_n]
\end{aligned}$$

3.10 생략

3.11 선형방정식들의 삼각시스템에 대한 해 구하기

3.11.1 상삼각시스템(Upper-triangular system)

선형방정식들의 *상삼각시스템* 다음 형태를 가진다.

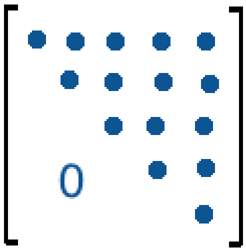
$$\begin{array}{lcccccccclccc}
[& a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \cdots & a_{1,n-1}, & a_{1,n} &] & \cdot & \boldsymbol{x} & = & \beta_1 \\
[& 0, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \cdots & a_{2,n-1}, & a_{2,n} &] & \cdot & \boldsymbol{x} & = & \beta_2 \\
[& 0, & 0, & a_{33}, & a_{34}, & \cdots & a_{3,n-1}, & a_{3,n} &] & \cdot & \boldsymbol{x} & = & \beta_3 \\
 & & & & & \vdots & & & & & & & \\
[& 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots & a_{n-1,n-1}, & a_{n-1,n} &] & \cdot & \boldsymbol{x} & = & \beta_{n-1} \\
[& 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots & 0, & a_{n,n} &] & \cdot & \boldsymbol{x} & = & \beta_n
\end{array}$$

- 첫 번째 벡터는 0을 가지지 않아도 된다.
- 두 번째 벡터는 첫 번째 위치의 값이 0이다.
- 세 번째 벡터는 첫 번째와 두 번째 위치의 값이 0이다.
- 네 번째 벡터는 첫 번째, 두 번째, 그리고 세 번째 위치의 값이 0 이다.

$\vdots$

- $n-1$ 번째 벡터는 $n-1$번째와 n 번째 원소를 제외한 모든 원소가 0이다.
- n 번째 벡터는 n 번째 원소 이외에는 모두 0이다.

상삼각시스템(Upper-triangular system) 이란 용어는 아래의 그림을 보면 쉽게 이해할 수 있다. 아래의 그림 처럼 0이 아닌 원소들은 삼각형을 형성한다.



Upper Triangular

아래의 예제는 4-벡터의 Upper-triangular system의 예이다.

$$\begin{array}{lrrrrlcr}
[& 1, & 0.5, & -2, & 4 &]\cdot\boldsymbol{x} & = & -8 \\
[& 0, & 3, & 3, & 2 &]\cdot\boldsymbol{x} & = & 3 \\
[& 0, & 0, & 1, & 5 &]\cdot\boldsymbol{x} & = & -4 \\
[& 0, & 0, & 0, & 2 &]\cdot\boldsymbol{x} & = & 6
\end{array}$$

$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$라 하고 도트곱의 정의를 사용하면 아래와 같이 연립 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1x_1 & + & 0.5x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & -8 \\
 & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\
 & & & & 1x_3 & + & 5x_4 & = & -4 \\
 & & & & & & 2x_4 & = & 6
\end{array}$$

3.11.2 후진대입법(Backward substitution)

위의 4-벡터 예제를 다음과 같이 후진대입법으로 벡터 x를 구할 수 있다.

Thus the above system is solved as follows:

$$\begin{array}{lccccccc}
 & 2x_4 & = & 6 & & & & \\
\text{so} & x_4 & & & = & 6/2 & = & 3 \\
 & & & & & & & \\
 & 1x_3 & = & -4-5x_4 & = & -4-5(3) & = & -19 \\
\text{so} & x_3 & & & = & -19/1 & = & -19 \\
 & & & & & & & \\
 & 3x_2 & = & 3-3x_3-2x_4 & = & 3-2(3)-3(-19) & = & 54 \\
\text{so} & x_2 & & & = & 54/3 & = & 18 \\
 & & & & & & & \\
 & 1x_1 & = & -8-0.5x_2+2x_3-4x_4 & = & -8-4(3)+2(-19)-0.5(18) & = & -67 \\
\text{so} & x_1 & & & = & -67/1 & = & -67
\end{array}$$