Exercices de Mathématiques pour L1 : Croissance Exponentielle, Populations, Énergie, Climat et Économie

5 février 2020

Résumé

Certains exercices (marqués ■) sont encore sous une forme primitive.

Table des matières

1 Dynamique Exponentielle et Croissance

Exercice 1: [Exponentiel]. Un être humain ordinaire marche linéairement, c'est-à-dire, à chaque pas, il avance d'environ 0.5m. Une autre espèce, l'"homoexponentiel" marche de façon exponentielle : à chaque pas, il double la taille du pas précédent. Comparez les distances parcourues par l'être humain ordinaire et l'exponentielle après 30 pas.

Solution : L'être humain ordinaire a marché $30 * 0.5m = 15$ m. L'être humain exponentielle a marché $2^{30} * 0.5 = 2^{29} = 536870.912$ Km, plus que la distance entre la terre et la lune.

Exercice 2: [Croissance Exponentielle]. Supposons que vous possédez un étang. Un jour, vous vous apercevez qu'au milieu pousse un nénuphar. Vous savez que chaque jour, la taille du nénuphar va doubler. Vous prenez alors conscience que si vous laissez pousser la plant en tout liberté, elle aura complètement recouvert la surface au bout de 30 jours, étouffant toute autre forme de vie dans l'étang. Mais le nénuphar qui pousse est si petit que vous décidez de ne pas vous inquiéter. Vous vous en occuperez quand le nénuphar recouvrira la moitié de l'étang. En prenant cette décision, combien de temps vous êtes-vous donné pour empêcher la destruction des autres formes de vie dans votre étang ?

Solution : Soit A l'aire de l'étang et a l'aire occupé par le nénuphar le première jour. Soit $A(n)$ l'aire du nénuphar le jour n. À chaque jour, le nénuphar double ça taille :

- jour 0, A(0)=a
- jour 1, $A(1) = 2 * a$
- jour 2, $A(2) = 2 * (2.a)$
- ...
- jour n, $A(n) = 2^n * a$

Alors, au bout de 30 jours, on a $A(30) = A$. On cherche donc le jour n avec

$$A(n) = \frac{1}{2}A = \frac{2^{30} * a}{2}$$

, c.a.d :

$$2^n * a = \frac{2^{30} * a}{2} = 2^{29}.a$$

donc $n = 29$. Il nous reste donc un jour pour résoudre le problème !

Remarque : Le jour n, le nénuphar occupe une fraction

$$\frac{2^n * a}{2^{30} * a} = 2^{n-30}$$

de la tótalité du lac :

- jour 10 : 2^{-20}, c.a.d. 0.00009536743% du lac (c'est rien !) ;
- jour 20 : 2^{-10}, c.a.d. 0.09765625% du lac (encore rien !) ;
- jour 25 : 2^{-5}, c.a.d. 3.125% du lac (encore rien !) ;
- jour 26 : 2^{-4}, c.a.d. 6.25% du lac ;
- jour 28 : 2^{-2}, c.a.d. 25% du lac ;
- jour 29 : 2^{-1}, c.a.d. 50% du lac ;
- jour 30 : 2^{0}, c.a.d. 100% du lac ;

Exercice 3: [Croissance Population]. En 2013, la population de la République démocratique du Congo (capitale Kinshasa) compte environ 63 millions d'habitants. Le taux de croissance annuel de cette population est de 3% . Supposons que ce taux se maintienne dans les années à venir.

1. Calculer la population de ce pays en 2025.
2. Quand le Congo comptera-il 80 millions d'habitants ?
3. Combien d'années faut-il à la population congolaise pour doubler ?

Solution :

1. Population en 2025 : $P(12) = 63 * (1,03)^{12} \sim 89,82$ millions d'habitants.

2. $P(n) = 63 * (1,03)^n = 80 \Leftrightarrow n = log_{1,03} 80 \sim 8,08$. Au cours de l'année 2021.
3. $126 = 63 * (1,03)^n \Leftrightarrow 2 = (1,03)^n \Leftrightarrow n = log_{1,03} 2 = 23,45$. Environ 23 années et demie.

Exercice 4: [Modèles de croissance]. De nombreux problèmes reposent sur une modélisation de la croissance (d'une population de bactérie, de l'économie...). Il y plusieurs paramètres à prendre en compte : la reproduction (ce qu'on compte se multiplie, soit le nombre de bactéries augmente, soit le capital rapporte des intérêts...) et des limitations (il y a des prédateurs, de la mortalité, ou les ressources économiques - par exemple le pétrole - sont limitées)...
Nous allons présenter (et discuter) deux modèles assez simples : exponentiel d'une part, logistique ou de Verhulst d'autre part.
Dans la suite, on note N la quantité qu'on mesure (nombre de bactéries, ou le capital disponible) vue comme une fonction dérivable du temps t. Pour simplifier, on suppose que $N(0) = 1$.

1. *Le modèle exponentiel :* c'est le modèle le plus simple, par exemple quand le capital rapporte 2% par an, ou le nombre de bactérie double toutes les secondes. Dans ce cas, on obtient que N' est proportionnel à N. Par exemple, on suppose que N vérifie : $N'(t) = \ln(2)N(t)$.
   a) Montrer que la fonction $N(t) = 2^t$ vérifie cette équation.

Solution : On calcule la dérivée de N, en utilisant la formule du cours. $N(t) = 2^t = e^{t\ln(2)}$, donc $N'(t) = \ln(2)e^{t\ln(2)} = \ln(2)N(t)$.

   b) On se place dans le cas des bactéries. Chaque bactérie a un volume de $10^{-26}m^3$. Au bout de combien de temps les bactéries remplissent-elles le verre de $10^{-3}m^3$ dans lequel on fait l'expérience ?

Solution : La volume occupé à l'instant t est donné par $N(t)10^{-26}$. Il faut donc résoudre $N(t)10^{-26} = 10^{-3}$, soit $2^t = 10^{23}$. On passe au logarithme, pour obtenir $t\ln(2) = 23\ln(10)$ ou encore $t = 23\dfrac{\ln(10)}{\ln(2)}$.
Il est intéressant, avant de sortir la calculette, de se rendre compte que on peut facilement obtenir $3 \leq \ln(10)/\ln(2) \leq 4$, car $2^3 = 8 \leq 10 \leq 16 = 2^4$, ce qui donne déjà une idée du résultat : $69 \leq t \leq 92$. En utilisant une calculette, on trouve $t \simeq 76,4$. On remplit donc le verre au bout d'environ $76,4$ secondes.

   c) À partir de combien de temps est-il à moitié plein ? Et où en est-on 2 secondes avant qu'il soit plein ?

Solution : On recommence, mais en résolvant $N(t)10^{-26} = \dfrac{10^{-3}}{2}$, ce qui mène à $t = 23\dfrac{\ln(10)}{\ln(2)} + \dfrac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(2)} = 23\dfrac{\ln(10)}{\ln(2)} - 1$. Le verre est à moitié plein une seconde avant d'être plein. En réfléchissant, c'est normal : la formule pour $N(t)$ dit qu'il double chaque seconde. Mais on se rend compte que les bactéries mettent environ 75 secondes à remplir la moitié du verre, puis 1 seule pour le remplir.
Vues les remarques ci-dessus, 2 secondes avant, le verre est au quart plein.

   d) Et si on laisse l'expérience se dérouler, combien de temps faut-il pour remplir la salle de TD (environ $100m^3$) ? Et recouvrir Paris sur $100m$ de haut (environ 10^7m^3)) ?

Solution : On refait les mêmes calculs : pour remplir $100m^3$, on obtient $t = 28\dfrac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 93$ secondes, soit moins de 20 secondes après avoir débordé du verre.

Pour recouvrir Paris, on obtient $t = 33\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 109,6$ secondes, soit à peine plus de 16 secondes après avoir rempli la salle.

On voit une croissance qui devient incontrôlable, au point que c'est la limite du modèle : où trouve-t-on les ressources pour permettre cette croissance ?

2. *Le modèle logistique ou de Verhulst:* Ici, on suppose qu'au fur et à mesure de la croissance de la population, le taux de croissance diminue. On obtient une équation du type : $N'(t) = \ln(2)(1 - \frac{1}{K}N(t))N(t)$, où $K > 0$ est une constante.

   (a) Montrer que la fonction $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)2^{-t}}$ est solution.

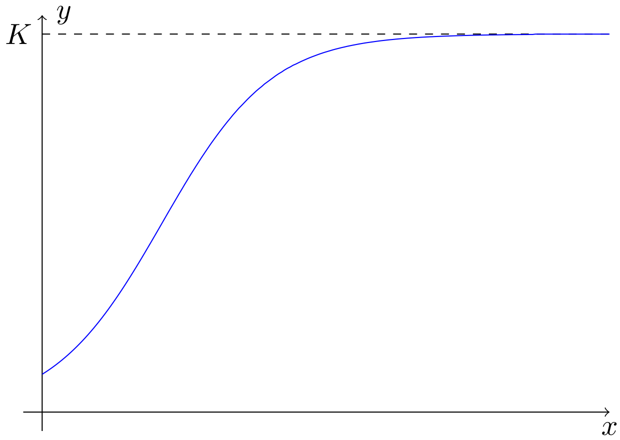
Solution : On calcule la dérivée de N : $N'(t) = \frac{K(K-1)\ln(2)2^{-t}}{(1+(K-1)2^{-t})^2}$.La formule proposée $\ln(2)(1 - \frac{1}{K}N(t))N(t)$ se calcule :

$$\ln(2)(1-\frac{1}{K}N(t))N(t) = \ln(2)\left(\frac{(K-1)2^{-t}}{1+(K-1)2^{-t}}\right)\frac{K}{1+(K-1)2^{-t}}.$$

On constate que les deux formules sont égales.

   (b) Etudier cette fonction pour $K = 10^3$.

Solution :
Déjà, pour $t = 0$, $N(t) = 1$. Ensuite, N est positive (car $K > 1$). Donc le signe de $N'(t) = \ln(2)(1 - \frac{1}{K}N(t))N(t)$ est celui de $1 - \frac{1}{K}N(t)$. Cette dérivée est donc positive si $N(t) \leq K$ et négative pour $N(t) \geq K$. Très bien, mais en fonction de t ? On peut utiliser la formule explicite : $N'(t) = \frac{K(K-1)\ln(2)2^{-t}}{(1+(K-1)2^{-t})^2}$. On voit que pour $K > 1$, $N'(t)$ est positive. Donc la fonction N est croissante. On voit alors que la limite en $+\infty$ est K. On obtient le graphe (tracé pour $K = 10$ pour la lisibilité) :



(c) Avec les données du modèle précédent, que se passe-t-il quand $t \to +\infty$? La population croit-elle indéfiniment ? Le verre se remplit-il ?

Solution : On a vu que N est croissante, donc oui la population croît indéfiniment. Cependant, N tend vers K : il y a une population maximale qui ne sera jamais atteinte. Ici, la population maximale est 1000, donc le volume maximale est 10^{-23} : le verre restera toujours presque vide !

Une grande limitation du modèle logistique est de ne pas prendre en compte la mortalité naturelle, ni le fait qu'on peut avoir un problème extérieur : prédateur ou ressource limitée. Pour prendre en compte ce problème, on peut utiliser *le modèle proie-prédateur ou Lokta-Volterra.* Dans cette modélisation, le résultat est sans appel : la population (ou l'économie) s'effondre après avoir consommé l'essentiel des ressources.

Exercice 5: [Croissance avec facteur limitant]. La croissance de la masse $m(t)$ d'un animal entre sa naissance et sa mort peut être donnée par la fonction suivante

$$m(t) = M.[1-(1-\frac{m_0}{M})^{\frac{1}{4}})e^{-at/4.M^{\frac{1}{4}}}]^4$$

où t est le nombre de jours, avec m_0 la masse au moment de la naissance, M la masse à l'âge adulte et a une constante qui dépend de l'espèce animale.

1. Montrer que $m(t)$ vérifié l'équation différentielle

$$m'(t) = a.m^{\frac{3}{4}} - \frac{a}{M^{1/4}}m$$

2. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} m(t) = M$.
3. Voici un tableau avec plusieurs espèces.

Animal	a	m_0	M
Vache	0.28	33.3 Kg	442 Kg
Cochon	0.31	0.90 Kg	320 Kg
Rat	0.23	8 g	280 g

Lequel atteint l'âge adulte plus rapidement ?

Commentaire : Ici le facteur limite la croissance musculaire infinie est la puissance 3/4. Cela vient de la géométrie fractale des capillaires qui empêche les cellules d'avoir plus d'énergie que le nécessaire. Voir l'article **Ici**.

Exercice 6: [Croissance Exponentielle - Taux d'intérêt]. Une personne souhaite placer 2500 euros sur un compte épargne.

1. Quel doit être le taux d'intérêt annuel si elle veut que son capital atteigne 3000 euros après 5 ans ?
2. Quel doit être le taux d'intérêt annuel si elle veut que le facteur de croissance pour une période de 10 ans soit égal à 1,2 ?

Solution :

1. La formule de référence étant $C(n) = C(0) * (1 + \frac{t}{100})^n$, il faut résoudre

$$3000 = 2500 * (1 + \frac{t}{100})^5$$

Donc

$$\frac{6}{5} = (1 + \frac{t}{100})^5 \Leftrightarrow (\frac{6}{5})^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{t}{100} \Leftrightarrow t = [(\frac{6}{5})^{\frac{1}{5}} - 1] * 100 \sim 3,71$$

Le taux d'intérêt annuel doit donc être d'environ 3,71%.

2. Cela signifie qu'il faut que

$$1,2 = (1 + \frac{t}{100})^{10} \Leftrightarrow (1,2)^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{t}{100} \Leftrightarrow t = [(1,2)^{\frac{1}{10}} - 1)] * 100 \sim 1,84\%$$

Le taux d'intérêt annuel doit donc être d'environ 1.84%.

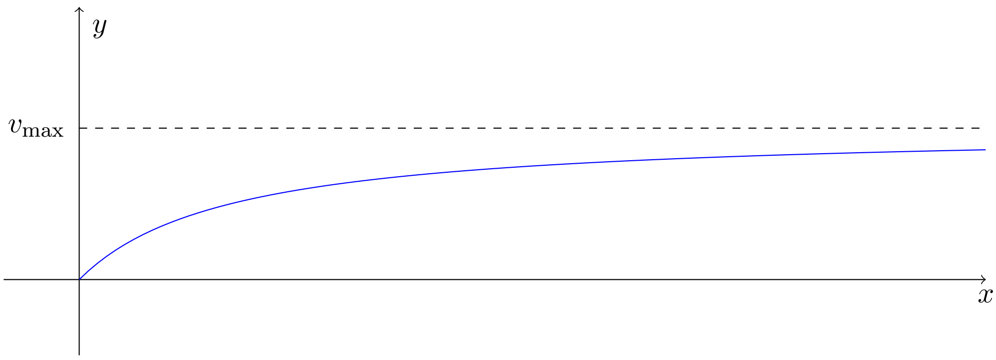
Exercice 7: [Des fonctions modèles]. Les fonctions suivantes sont utilisées dans des modélisations scientifiques (particulièrement chimie et biologie). Les étudier (attention à qui est la variable, qui sont les paramètres) !

1. $v(S) = \frac{v_{\max} S}{K + S}$ où $v_{\max}$ et K sont des constantes positives. Ici, S est une concentration et v désigne une vitesse de réaction. C'est l'équation de Michaelis-Menten.

Solution : Mathématiquement, c'est défini pour $S \neq -K$. Maintenant, l'énoncé précise que S est une concentration : il est sage de l'étudier sur $[0, +\infty[$.
La fonction v est continue et dérivable en tout point $S \geq 0$. La dérivée se calcule par les formules classiques :

$$v'(S) = v_{\max} \frac{K + S - S}{(K + S)^2} = v_{\max} \frac{K}{(K + S)^2}.$$

La fonction est donc croissante sur $[0, +\infty[$, de dérivée à droite $\frac{v_{\max}}{K}$. La limite en $+\infty$ est $v_{\max}$, la valeur en 0 est 0. Le graphe est :

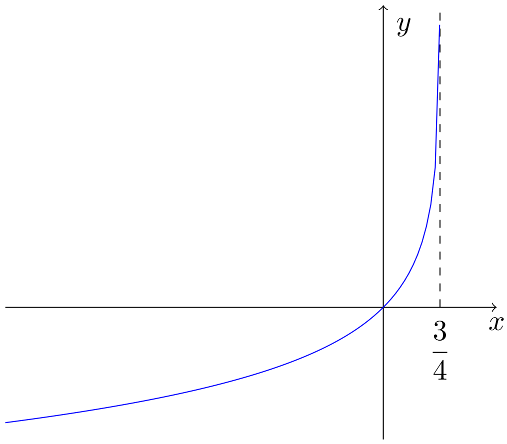


2. $d(p) = -\frac{3}{4} \ln \left(1 - \frac{4}{3} p\right)$. C'est l'équation de Jukes et Cantor, utile en phylogénie.

Solution : C'est défini si $p \leq \frac{3}{4}$. L'énoncé ne précise pas ce que modélise p, on étudie sur tout l'ensemble de définition (en vrai, c'est une proportion, donc la zone importante est $[0, \frac{3}{4}[$). La fonction d est continue et dérivable sur tout son ensemble de définition. Sa dérivée vaut :

$$d'(p) = \frac{1}{1 - \frac{4}{3} p}.$$

Cette dérivée est positive sur l'ensemble de définition. La fonction est donc croissante. La limite en $-\infty$ vaut $-\infty$ et la limite en $\frac{3}{4}$ est $+\infty$. La valeur en 0 est 0. Le graphe est :

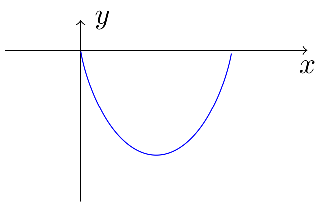


3. Pour $0 < p < 1$, la fonction suivante s'inspire de l'*entropie*, notion très utile en informatique, physique... : $h(p) = p\ln(p) + (1-p)\ln(1-p)$.

Solution : La fonction est définie si les deux logarithmes sont définis, c'est à dire pour $0 < p < 1$. On remarque que $h(p) \leq 0$: en effet, les deux logarithmes sont négatifs car leur variable est entre 0 et 1. La fonction h est dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée :

$$h'(p) = \ln(p) + 1 - \ln(1-p) - 1 = ln\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

La dérivée est négative pour $p \leq 1-p$, positive sinon. La fonction est donc décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$, croissante sur $[\frac{1}{2}, 1[$. La valeur en $\frac{1}{2}$ se calcule facilement : elle vaut $\ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$.
Il reste à voir les limites en 0 et 1. En 0, la limite de $p\ln(p)$ vaut 0, d'après le cours. D'autre part la limite de $(1-p)\ln(1-p)$ vaut $1\ln(1) = 0$. Donc $h(p) \xrightarrow{p\to 0} 0$. De la même façon, $h(p) \xrightarrow{p\to 1} 0$.
Le graphe est :



4. Le taux de croissance d'une population de N individus peut être modélisé par la fonction $T(N) = \alpha N\left(1-\left(\frac{N}{K}\right)^{\theta}\right)$, où K et α sont des constantes positives et θ une constante > 1. On cherchera en particulier à déterminer la taille de la population qui mène à un taux de croissance maximal.

Solution : La fonction est définie pour tout $N \geq 0$, ce qui correspond à la situation modélisée. Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition. Sa dérivée vaut :

$$T'(N) = \alpha\left(1-\left(\frac{N}{K}\right)^{\theta}\right) - \frac{\alpha}{K}\theta N\left(\frac{N}{K}\right)^{\theta-1} = \alpha - \alpha(1+\theta)\left(\frac{N}{K}\right)^{\theta}.$$

La dérivée s'annule pour $\left(\frac{N}{K}\right)^\theta = \frac{1}{1+\theta}$. On passe au logarithme pour obtenir $\theta \ln(\frac{N}{K}) = \ln(\frac{1}{1+\theta})$, soit $\ln(N) = \ln(K) - \frac{\ln(1+\theta)}{\theta}$. Finalement, on repasse à l'exponentielle, pour obtenir l'unique 0 de la dérivée :

$$N_0 = \frac{K}{(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}}.$$

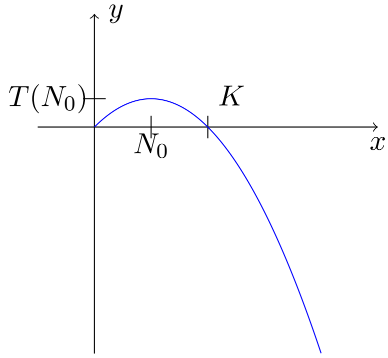
En N_0, on peut calculer la valeur de $T(N_0)$:

$$T(N_0) = \alpha \frac{K}{(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}} \left(1 - \left(\frac{1}{(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}}\right)^\theta\right) = \alpha \frac{K}{(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}} \frac{\theta}{1+\theta} = \alpha \frac{K\theta}{(1+\theta)^{\frac{1+\theta}{\theta}}}.$$

Par exemple, pour $\alpha = \theta = K = 1$, on obtient $T(N_0) = \frac{1}{4}$

Pour $N \leq N_0$, la dérivée est positive et la fonction T est croissante, pour $N \geq N_0$, au contraire, la dérivée est négative et la fonction décroissante. Elle admet donc un maximum en N_0, qu'on a déjà calculé.

La valeur en 0 est α, tandis que la limite en $+\infty$ est $-\infty$. Il peut être intéressant de trouver la valeur N_1 pour laquelle T change de signe. Pour ça on résoud $T(N) = 0$: on trouve deux solutions, 0 et $N_1 = K$.

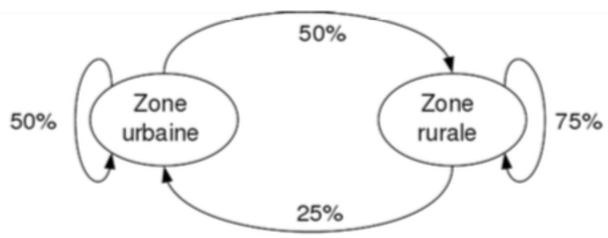


Exercice 8: [Migration de populations via Algèbre Linéaire, Source ici]. On considère le problème de migration de population entre les zones urbaines et les zones rurales. Chaque année, un mouvement de population entre ces deux zones s'opère de la façon suivante :

— la moitié des habitants en zone urbaine partent habiter en zone rurale, alors que l'autre moitié reste résidante en zone urbaine,

— un quart des habitants en zone rurale rejoignent une zone hurbaine, les trois quarts restant en zone rurale.

Le mouvement de population est indiqué par la figure



Notos r_0 et u_0 la répartition initiale de la population en proportion. Notons r_k la proportion de la population totale qui habite en zone rurale au terme de la k-ième année et u_k la proportion de population qui habite en zone urbaine au terme de cette même année. S'agissant de proportion de population, on a, pour toute année k,

$$r_k + u_k = 1$$

.

1. Écrire r_{k+1} et u_{k+1} en fonction r_k et u_k

Solution : D'après le schéma de répartition, chaque année, on a

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + \frac{1}{4}r_k$$

$$r_{k+1} = \frac{3}{4}r_k + \frac{1}{2}u_k$$

.

2. Déterminer la matrice A qui permet d'écrire la relation de la question précédente sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ r_{k+1} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix}$$

A est appelée la matrice de transition du système.

Solution :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

.

3. Montrer que

$$\begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = A^k. \begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

Solution :

$$\begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ r_{k-1} \end{pmatrix} = A.A. \begin{pmatrix} u_{k-2} \\ r_{k-2} \end{pmatrix} = ... = A^k. \begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

.

4. Calculer les valeurs propres de A.

Solution : Le polynôme caractéristique de A est

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda.\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} - \lambda \end{pmatrix} = (\frac{1}{2} - \lambda).(\frac{3}{4} - \lambda) - \frac{1}{8} =$$

$$= \lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4} = (x-1)(x - \frac{1}{4})$$

Donc $\lambda = 1, \frac{1}{4}$.

5. Est-ce que A est diagonalisable ?

Solution : Oui car d'après le théorème du cours, se A admet des valeurs propres réels, A est diagonalisable et il existe une matrice inversible P tel que

$$A = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.P$$

6. Est-ce que la répartition de la population stabilise, c.à.d, est-ce que la limite

$$\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix}$$

existe ?

Solution : D'après la question précèdent,

$$A^k = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^k.P = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^k} \end{pmatrix}.P = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P + \underbrace{\frac{1}{4^k}P^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.P}_{\to 0 \text{ pour } k>>0}$$

$$\lim_{k\to\infty} A^k = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P$$

Soit $U = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P$ et $V = P^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.P$.

On a un système

$$\begin{cases} U + V = \mathrm{Id} \\ U + \frac{1}{4}V = A \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{3}{4}U = A - \frac{1}{4}\mathrm{Id}$$

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc, quand $k \to \infty$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = \lim_{k\to\infty} A^k.\begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = U.\begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_0 + r_0 \\ 2u_0 + 2r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

A terme, il y aura donc un tiers de la population totale en zone urbaine et deux tiers en zone rurale. Notons que cette proportion est indépendante de la répartition initiale des populations entre les deux zones.

Exercice 9: [Espèces en compétition, Source]. On considère deux espèces A et B qui coexistent dans un même environnement naturel. On étudie deux situations d'évolution de ces espèces.

— Dans une première situation, on suppose que les deux espèces sont en compétition : le nombre d'individus d'une espèce augmente proportionnellement au nombre d'individus de cette même espèce et décroît proportionnellement au nombre d'individus de l'autre espèce.

1. Si la population de chaque espèce augmente de deux fois le nombre d'individus de l'espèce et décroît d'une fois le nombre d'individus de l'autre espèce, déterminer à chaque instant le nombre d'individus de chaque espèce lorsque initialement il y a 100 individus de l'espèce A et 200 individus de l'espèce B.

Solution : On considère l'interaction entre les espèces A et B comme un système d'évolution en temps discret. Posons $A_0 = 100$ et $B_0 = 200$ le nombre initial d'individus de chaque espèce et posons A_k et B_k le nombre d'individus de chaque espèce après k-étapes d'interaction.
On a :

$$\begin{cases} A_{k+1} = A_k + (2.A_k - B_k) = 3A_k - B_k \\ B_{k+1} = B_k + (2.B_k - A_k) = 3B_k - A_k \end{cases}$$

Donc, avec matrice de transition

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Par récurrence, on obtient donc

$$\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = M^k . \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = M^k . \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

.
Les valeurs propres de M sont 4 et 2. Donc, il existe une matrice inversible P tel que

$$M^k = P^{-1} \begin{pmatrix} 4^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} .P$$

2. Est-ce qu'une des espèces est en voie d'extinction ? Si oui, au bout de combien de temps.

Solution :

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 500 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ 1400 \end{pmatrix}$$

Donc l'espèce A est en voie d'extinction.

— Dans une deuxième situation, on suppose que les deux espèces vivent en symbiose de la façon suivante. Le nombre d'individus de chaque espèce augmente d'une fois le nombre d'individus de l'autre espèce et décroît d'une fois le nombre d'individus de la même espèce.

1. Si initialement les espèces A et B sont respectivement composées de 200 et 400 individus, déterminer à chaque instant la population de chaque espèce.
2. Que se passe-t-il à long terme ?

Exercice 10: [■ Espèces en compétition, équilibre instable]. On considère une population de rats R_k et de serpents S_k à un instant k donné où k progresse par mois. On suppose que les populations évoluent selon les lois suivantes :

$$S_{k+1} = 0.5S_k + 0.4R_k$$

$$R_{k+1} = -pS_k + 1.1R_k$$

— le facteur $0.5S_k$ dans la première équation signifie que s'il n'y a pas de rats, seulement la moitié des serpents survivront le mois prochain.
— le facteur $1.1R_k$ signifie que s'il n'y a pas de serpents, la population des rats augmente de 10% par mois.
— le terme $0.4R_k$ explique comment la population de rats aide la population de serpents à croître ;
— le paramètre $p > 0$ c'est le taux de mortalité des rats, tués par les serpents

1. Écrire la matrice A qui décrit l'évolution du système en fonction de p.

Solution :

$$\begin{pmatrix} S_{k+1} \\ R_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -p & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_k \\ R_k \end{pmatrix}$$

2. Calculer les valeurs propres réels de A en fonction de p.

Solution :

$$\det(\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -p & 1.1 \end{pmatrix} - \lambda.Id) = \det \begin{pmatrix} 0.5-\lambda & 0.4 \\ -p & 1.1-\lambda \end{pmatrix} = (0.5-\lambda).(1.1-\lambda)+0.4p = \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.55 + 0.4p$$

$$\Delta = (-1.6)^2 - 4.(0.55 + 0.4p) = 0.36 - 1.6p$$

Donc pour avoir des valeurs propres réels il faut que

$$0.36 - 1.6p > 0 \Leftrightarrow 1.6p < 0.36 \Leftrightarrow p < 0.225$$

Donc $\lambda_1 = \dfrac{1.6 + \sqrt{0.36 - 1.6p}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1.6 - \sqrt{0.36 - 1.6p}}{2}$.

3. Décrire l'évolution du système, ie, $\lim\limits_{k \to +\infty} \begin{pmatrix} S_k \\ R_k \end{pmatrix}$ lorsque :

(a) $p = 0.104$;

Solution : Pour $p = 0.104$, on trouve $\lambda_1 = 1.02$ et $\lambda_2 = 0.58$. Vue que $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$, la valeur propre $\lambda_2 = 0.58$ n'a pas de contribution asymptotique. Comme $\lambda_1 > 1$, le deux populations vont proliférer.

(b) $p = 0.2$;

Solution : Pour $p = 0.2$, on trouve $\lambda_1 = 0.9$ et $\lambda_2 = 0.7$. Comme les deux valeurs propres sont positives et inférieurs à 1, les deux espèces vont disparaître. Voir Lien Wolframalpha. Voici les résultats pour $S_0 = 10$ et $R_0 = 100$:

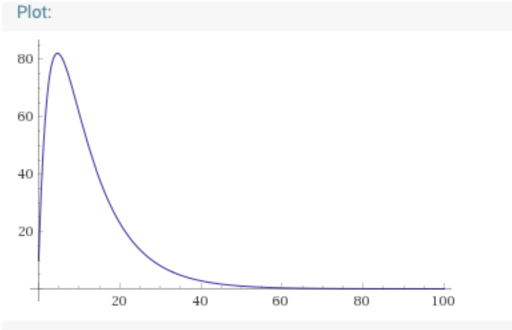


FIGURE 1 – Serpents

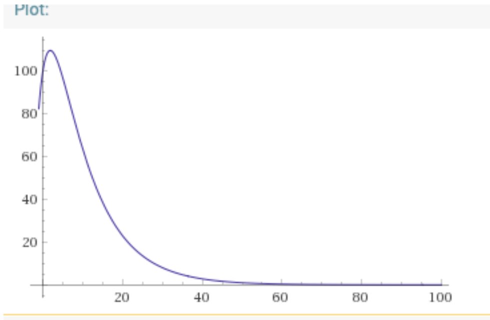


FIGURE 2 – Rats

(c) $p = 0.125$;

Solution : Pour $p = 0.125$, on trouve $\lambda_1 = 1.0$ (avec vecteur propre $(\frac{4}{5}, 1)$) et $\lambda_2 = 0.6$ (avec vecteur propre $(4, 1)$).Comme $0 < \lambda_2 < 1$, il y a que la contribution de λ_1. Mais $\lambda_1 = 1$ implique que les deux populations seront en équilibre, c'est à dire, les effectifs de chaque population resteront constants. Voici les résultats pour une population initiale de $S_0 = 10, R_0 = 100$:

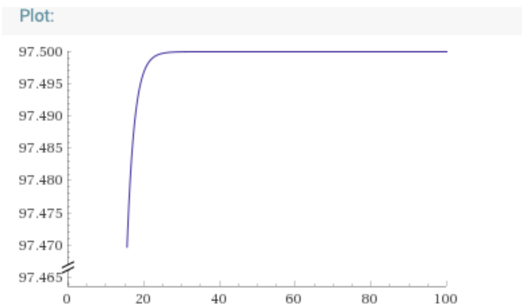


FIGURE 3 – Serpents

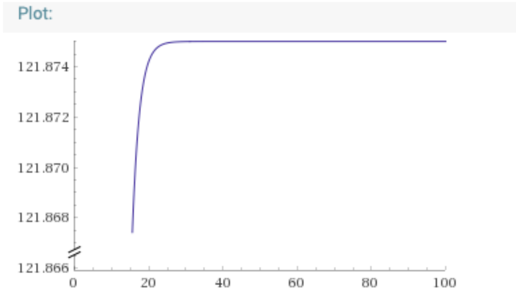


FIGURE 4 – Rats

Cependant, c'est un équilibre instable, dans le sens où une petite variation du paramètre p (par exemple, par une nouvelle maladie des serpents), peut nous faire revenir soit à l'extinction (4), soit à la prolifération (1).

2 Limites Énergétiques

Exercice 11: [Pic pétrolier]. La quantité de pétrole disponible sur la planète est gigantesque mais finie, disons, Q. Avant 1700, nous n'avons pas utilisé de pétrole. Soit donc $C(t)$ la quantité de pétrole consommé par l'humanité pendant l'année $1700+t$. On suppose que $C(0)=0$ et que $C(t)$ est continue.

1. On suppose que la limite $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ existe. En utilisant le fait que la quantité disponible de pétrole est finie, montrer que cette limite vaut 0.

Solution : La quantité totale de pétrole utilisé entre 1700 et 1700+T est donnée par l'intégrale

$$\int_0^T C(t).dt$$

et par hypothèse,

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T C(t)dt = Q$$

On raisonne par l'absurde : supposons que la limite $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ existe et vaut $L \neq 0$. Comme C est positive, alors $L \geq 0$. Donc on a $L > 0$, alors il existe $N \in [0, +\infty[$ tel que pour $t > N$, $C(t) > \frac{L}{2}$.On en déduit que $\int_N^t C(t)dt > (t-N) * \frac{L}{2}$. C'est en contradiction avec

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T C(t).dt = Q$$

2. Montrer que sous la condition $\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0$ la fonction $C(t)$ admet un maximum absolue.

Solution : Ici on utilise le théorème des bornes atteintes. En effet, la fonction $C(t)$ est continue est non-nulle, donc il existe $a \in [0, +\infty[$ tel que $C(a) \neq 0$. Par la question 1), $\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0$, et donc, il existe $N \geq 0$ tel que $\forall t > a, C(t) < C(a)$. Prenons donc l'intervalle fermée $[0, N]$. Ici, par le théorème des bornes atteintes, $C(t)$ admet un maximum absolue. Donc, $C(t)$ admet un maximum absolue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 12: [Épuisement des ressources et croissance]. En 1900, la quantité totale d'énergie consommée par l'humanité était d'environ 5×10^3 Twh. Depuis 1900, le taux de croissance de la consommation d'énergie est en moyenne d'environ 3% par an.

1. Si on fixe 1900 comme l'année zéro, donner la formule pour $E(t)$ la quantité d'énergie consommée par l'humanité pendant l'année 1900+t.

Solution : $E(t) = E_0(1 + 0,03)^t = E_0\, e^{\log(1,03)t} = 510^3 e^{\log(1,03)t}$.

2. Calculer la quantité d'énergie consommée par l'humanité en 2013 (vous pouvez comparer avec les informations qu'on trouve sur Internet).

Solution : La formule de la question précédente donne $E(113) \simeq 10^5$ Twh.

3. L'intégralité de l'énergie consommée entre 1900 et 1900+T est donnée par l'intégrale

$$Q(T) = \int_0^T E(t).dt$$

Le calculer explicitement.

Solution :

$$Q(T) = \int_0^T E(t).dt = \int_0^t E_0\, e^{\log(1,03)t}.dt = E_0 \int_0^T e^{\log(1,03)t}.dt$$
$$= \log(1,03).E_0[e^{\log(1,03)t}]_0^T = \log(1,03).E_0.(e^{\log(1,03)T} - 1)$$

4. Il est facile d'imaginer (bitcoin, netflix, 5G, etc), la consommation d'énergie pendant le 21ème siècle pourrait continuer de croître de la même manière. La terre a des ressources finies - la quantité totale d'énergie stockée est peut être estimée par l'équation d'Einstein $E_T = m_T.c^2$, où m_T est la masse terrestre (environ $6 \times 10^{24} kg$) et c est la vitesse de la lumière 310^8 m/s. Combien de siècles nous avons avant de consommer la totalité de l'énergie terrestre ? Comparer avec l'âge de la Terre.

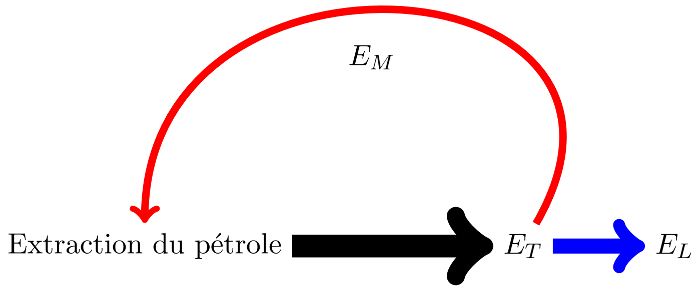
Solution : Il faut d'abord calculer $E_T = m_T.c^2 = 5 \times 10^{35}$ J $\sim 10^{26}$ Twh. Il faut maintenant résoudre l'équation

$$\log(1,03) * (5000).((1,03)^T - 1) = 10^{26}$$

On trouve

$$T = 1856 \sim 18,5\,\text{siècles}$$

Exercice 13: [EROI - Taux de retour énergétique et le prix du pétrole, Source ici]. Pour produire du pétrole on a besoin d'énergie pour faire fonctionner les machines d'extraction. Plus précisément, si E_T c'est la quantité totale d'énergie extraite en équivalent pétrole, il y a une partie E_M d'énergie qu'il faut redonner aux machines d'extraction et une partie E_L qu'on peut livrer dans l'économie.



$$E_T = E_M + E_M$$

Nous définissons le taux de retour énergétique EROI comme le ratio

$$EROI = \frac{E_T}{E_M}$$

— Si P est le prix moyen par unité d'énergie, on a un bénéfice total donnée par

$$P.E_L$$

— Si C c'est le coût moyen de production par unité d'énergie, le coût total de production est donnée par

$$C.E_T$$

— La marge de bénefice m est donnée par

$$m = \frac{P.E_L}{C.E_T}$$

1. Montrer que

$$P = \frac{m.C}{(1 - \frac{1}{EROI})}$$

Solution : On a

$$P.E_L = m.C.E_T = m.C.\frac{E_T}{E_L} = m.C.\frac{E_T}{E_T - E_M} = m.C.\frac{1}{(1 - \frac{E_M}{E_T})} = \frac{m.C}{(1 - \frac{1}{EROI})}$$

2. Supposons maintenant que le produit $m.C$ reste constant.

   (a) Calculer

$$\lim_{EROI \to 0} P \quad , \quad \lim_{EROI \to 1^-} P \quad , \quad \lim_{EROI \to 1^+} P \quad , \quad \lim_{EROI \to +\infty} P$$

Solution :

$$\lim_{EROI \to 0} P = \frac{m.C}{(1 - \underbrace{\frac{1}{EROI}}_{\to +\infty})} \to 0^-$$

$$\lim_{EROI \to 1^-} P = \frac{m.C}{\underbrace{(1 - \underbrace{\frac{1}{EROI}}_{\to 1^+})}_{\to 0^-}} \to -\infty$$

$$\lim_{EROI \to 1^-} P = \frac{m.C}{\underbrace{(1 - \underbrace{\frac{1}{EROI}}_{\to 1^-})}_{\to 0^+}} \to +\infty$$

$$\lim_{EROI \to +\infty} P = \frac{m.C}{\underbrace{(1 - \underbrace{\frac{1}{EROI}}_{\to 0})}_{\to 1}} \to m.C$$

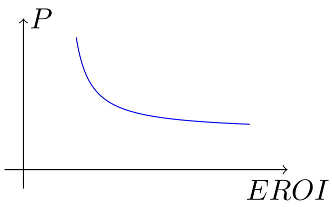
(b) Calculer la dérivée P' pour $EROI \in]1, +\infty[$ et le tableau de variation de P en fonction de l'EROI.

Solution :

$$P' = \frac{-mC}{(EROI - 1)^2} \qquad \text{donc } P' < 0$$

(c) Dessiner le graphe de P en fonction de l'EROI entre $]1, +\infty]$.

Solution :



(d) Conclure que même si le coût de production C et la marge de bénéfice m restant constants, c'est possible, à cause de la diminution de l'EROI, que le prix de vente explose très vite.

(e) En 1965, L'EROI était de 19.5 et depuis on observe que en fonction du temps (par an), on a

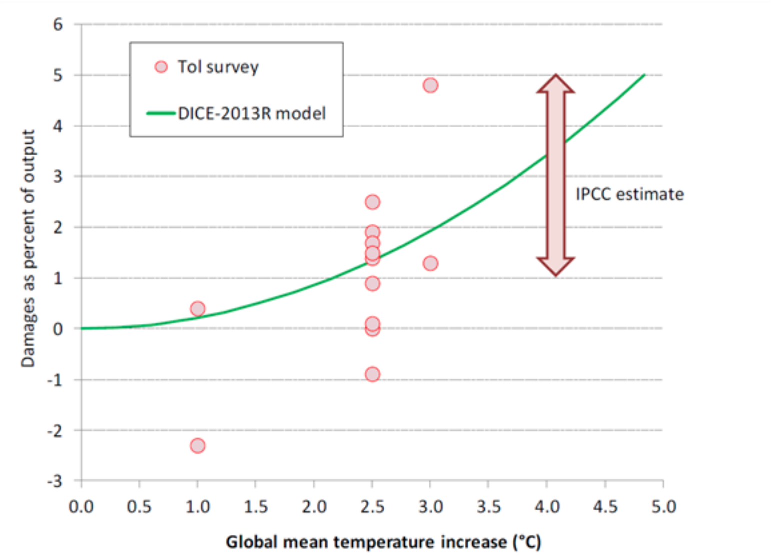
$$EROI(t) = 19.5 - 0.25.t$$

Étudier le prix P en fonction de t.

3 Hypothèses mathématiques irréalistes en économie

Exercice 14: [■ Le paradoxe de Jevons (Effet rebond)]. Le paradoxe de Jevons énonce qu'à mesure que les améliorations technologiques augmentent l'efficacité avec laquelle une ressource est employée, la consommation totale de cette ressource peut augmenter au lieu de diminuer.

Exercice 15: [■ Le prix nobel de Nordhaus pour la relation PIB/temperature, voir le Lien]. Le prix Nobel d'économie de 2018 a été décerné aux Américains William Nordhaus et Paul Romer, pour leurs travaux sur l'intégration du changement climatique et de l'innovation technologique dans l'analyse macro-économique. Voici leurs prévisions pour l'impact provoqué par l'augmentation de température sur le PIB mondial :



Pour faire ce calcul, ils supposent que l'impact ("damage") $D(T)$ provoqué par une augmentation de température de T dégrées est quadratique

$$D(T) = 0.00267T^2$$

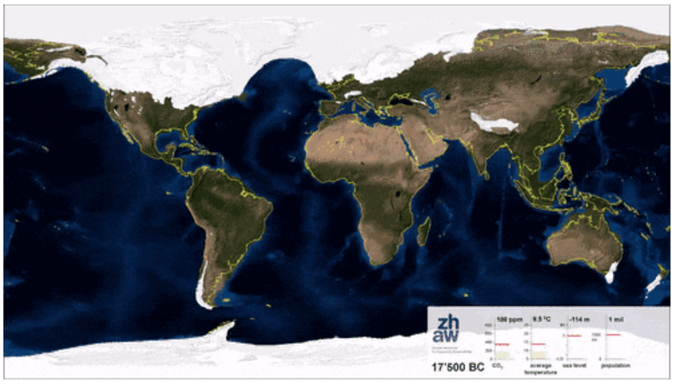
1. Montrer que $D(T)$ est continue.

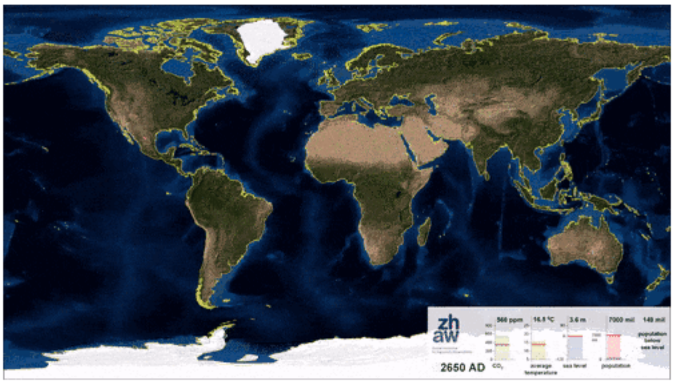
Solution : $D(T)$ est polynomiale donc continue.

2. D'après le graphe ci-dessus on constate que pour une différence de température de $T = 4$ dégrées, l'impact sur le PIB mondial est de $3,5\%$. Comparer avec l'impact de la crise de 2008 sur le PIB mondial.

Solution : D'après les économistes, la crise de 2008 a eu un impact d'environ 4% sur le PIB mondial.

3. La différence entre les deux images correspond à une augmentation de la température mondiale d'environ $T = 4$ degrés :





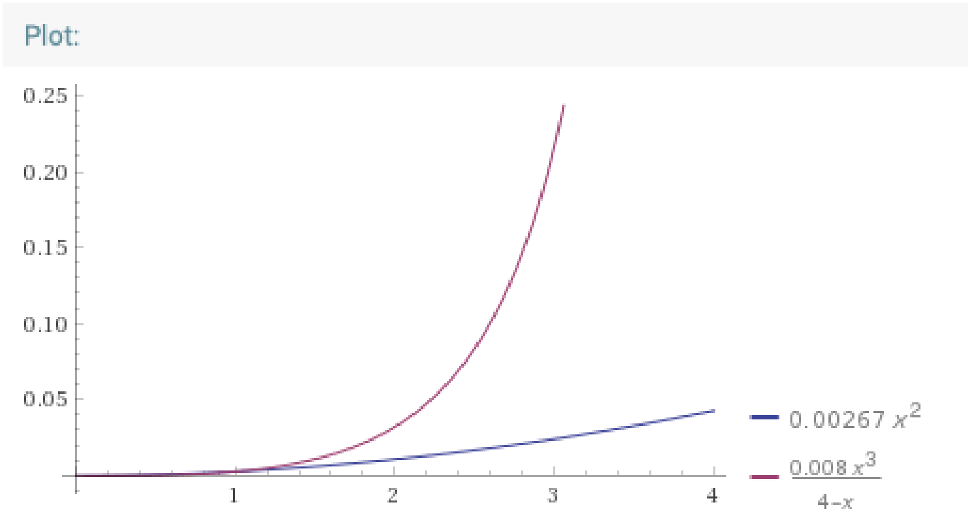
Est-il raisonnable de penser que cela aura moins d'impact que la crise de 2008 ?

4. Un point de basculement dans le système climatique est un seuil qui, lorsqu'il est dépassé, peut entraîner de grands changements dans l'état du système. Voici une version modifié de la fonction d'impact de Nordhaus avec un point de basculement en $T = 4$ dégrées :

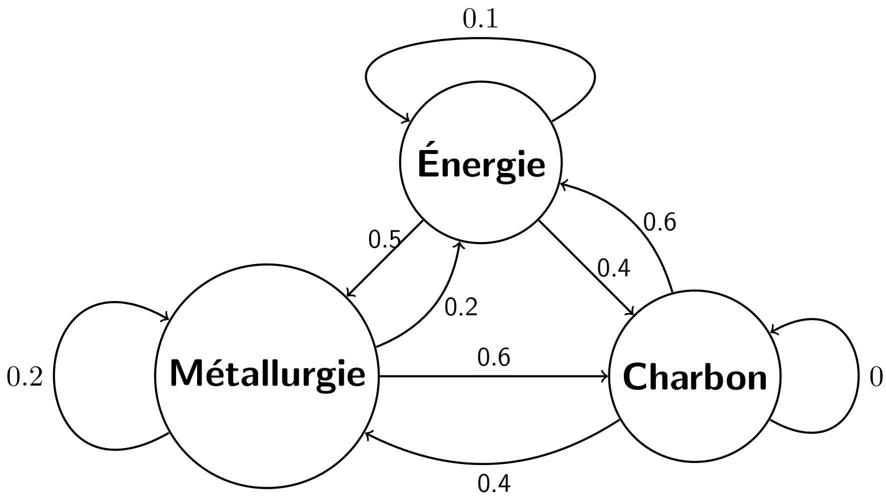
$$D_b(T) = \frac{0.008T^3}{4 - T}$$

   (a) Montrer que $D_b(1) = D(1)$ et que jusqu'à 1 dégrée de plus, les deux modèles sont comparables.
   (b) Calculer $\lim_{T \to 4} D_b(T)$. Est-ce que $D_b(T)$ est continue en $T = 4$?
   (c) Comparer les graphes de D_b et D et discuter la plausibilité physique des deux.

Solution :



Exercice 16: [Multiplicité d'équilibres]. L'économie d'un certain pays est composée de trois secteurs : énergie E, métallurgie M et charbon C. Chaque secteur doit utiliser une partie de sa propre production et vendre la partie qui reste aux autres secteurs. Le schéma suivant résume ces informations en % de production.



On note que pour chaque secteur, la somme des portions sortants est égale à 1. Notons p_E, p_M et p_C le chiffre d'affaires de chaque secteur.

1. Traduire en termes d'un système d'équations linéaire la condition d'équilibre budgétaire simultanée pour les trois secteurs.

Solution : Pour que le secteur du charbon soit en équilibre budgétaire , il faut que

$$p_C = 0.6p_M + 0.4.p_E$$

Pour le secteur de l'énergie on a besoin de

$$p_E = 0.1p_E + 0.2p_M + 0.6p_C$$

Finalement, pour le secteur métallurgique

$$p_M = 0.5p_E + 0.2p_M + 0.4p_C$$

On obtient donc le système linéaire :

$$\begin{cases} p_C - 0.4p_E - 0.6p_M = 0 \\ -0.6p_C + 0.9p_E - 0.2p_M = 0 \\ -0.4p_C - 0.5p_E + 0.8p_M = 0 \end{cases}$$

2. Est-ce qu'une tel condition d'équilibre existe et est unique ?

Solution : La matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.9 & -0.2 & 0 \\ -0.4 & -0.5 & 0.8 & 0 \end{array}\right)$$

Par pivot de Gauss, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.66 & -0.56 & 0 \\ 0 & -0.66 & 0.56 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.66 & -0.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.94 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc,

$$\begin{cases} p_C = 0.94p_M \\ p_E = 0.85p_M \\ p_M \text{ variable libre} \end{cases}$$

Conclusion : il y a une infinité de points d'équilibre, un pour chaque choix de p_M