БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Организация поиска

# Хеширование

Словарные операции

1) поиск элемента ***x***;
2) добавление нового элемента ***x***;
3) удаление элемента ***x***.

# Структуры данных для выполнения словарных операций

1. массив;
2. поисковые деревья;
3. хеш-таблицы.

Существуют интересные гибриды, находящиеся посередине между деревьями поиска и хеш-таблицами, которые реализуют концепцию упорядоченного множества. Это всевозможные деревья Ван Эмде Боасса (Van Emde Boas tree), X-fast-, Y-fast- и Fusion-деревья, у которых в оценках временной сложности появляется двойной логарифм.

**Структуры данных на основе хеш-таблиц реализованы в стандартных библиотеках всех широко используемых языков программирования.**

Абстрактный тип данных: множество (**set**)

| C++ | JAVA | Python |
|---|---|---|
| контейнер std::set, который реализует множество на основе сбалансированного дерева (обычно красно-чёрного)<br><br>контейнер **std::unordered_set, построенный на базе хеш-таблицы** | интерфейс Set, у которого есть несколько реализаций, среди которых классы TreeSet (работает на основе красно-чёрного дерева)<br><br>интерфейс **HashSet (на основе хеш-таблицы)** | нет готового класса множества, построенного на сбалансированных деревьях.<br><br>встроенный тип **set, использующий хеширование** |

Абстрактный тип данных: ассоциативный массив (**map**)

| C++ | JAVA | Python |
|---|---|---|
| в стандартной библиотеке C++: контейнер std::map, работающий на основе сбалансированного дерева (обычно красно-чёрного)<br><br>**контейнер std::unordered_map, работающий на основе хеш-таблицы.** | интерфейс Map, который реализуется несколькими классами, в частности классом TreeMap (базируется на красно-чёрном дереве) и<br><br>**HashMap (базируется на хеш-таблице)** | встроенный тип **dict (**этот словарь использует внутри хеширование) |

# Устройство хеш-таблицы

Для простоты будем считать, что ключи являются целыми числами из диапазона **[0, *N*)** и обозначим через $\boldsymbol{K}$ множество возможных ключей:

$$\boldsymbol{K} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{N} - \mathbf{1}\}.$$

На практике множество $\boldsymbol{K}$ обычно довольно большое.

Часто в качестве ключей в промышленном программировании применяются 32-битные или 64-битные целые числа, т. е.

$$\boldsymbol{N} = \mathbf{2}^{\mathbf{32}} \approx \mathbf{4{,}2} \cdot \mathbf{10}^{\mathbf{9}}$$

или

$$\boldsymbol{N} = \mathbf{2}^{\mathbf{64}} \approx \mathbf{1{,}8} \cdot \mathbf{10}^{\mathbf{19}}.$$

# 1. Прямая адресация

$\boldsymbol{K} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{N} - \mathbf{1}\}$

Если достаточно памяти для массива, число элементов которого равно числу всех возможных ключей, то для каждого возможного ключа можно отвести ячейку в этом массиве.

Имеем булев массив $\boldsymbol{T}$ размера $\boldsymbol{N}$, называемый **таблицей с прямой адресацией**, в котором **элемент** $\boldsymbol{t_i}$ содержит истинное значение, если ключ $\boldsymbol{i}$ входит в множество, и ложное значение, если ключ $\boldsymbol{i}$ в множестве отсутствует.

| | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | … | $N-2$ | $N-1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | True | False | True | False | … | False | True |

базовые операции:

- добавление ключа;
- проверка наличия ключа;
- удаление ключа.

$\mathbf{O(1)}$

# Недостатки прямой адресации

$$K = \{0, 1, 2, \ldots, N - 1\}$$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | … | $N-2$ | $N-1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | True | False | True | False | … | False | True |

- ✓ размер таблицы с прямой адресацией не зависит от того, сколько элементов реально содержится в множестве;
- ✓ если число реально присутствующих в таблице записей мало по сравнению с $N$, то много памяти тратится зря;
- ✓ если множество **K** всевозможных ключей велико, то хранить в памяти массив $T$ размера $N$ непрактично, а то и невозможно:

> Минимальным адресуемым набором данных в современных компьютерах является один байт, состоящий из восьми битов.
> Не представляет трудности реализовать таблицу с прямой адресацией так, чтобы каждый бит был использован для хранения одной ячейки.
> Если $N$ — мощность множества возможных ключей, то для прямой адресации требуется выделить последовательный блок из как минимум N бит памяти. Так, **для размеров множества $K$ в $10^9$ элементов таблица займёт около 120 МБ памяти** ($10^9$ бит≈1,2*$10^8$ байт=120*$10^6$ байт=120 Мбайт).
> Во многих случаях такой расход памяти неприемлем, особенно когда есть необходимость создавать несколько таблиц.

**Тем не менее при сравнительно небольших $N$ метод прямой адресации успешно используется на практике.**

$$\boldsymbol{K = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}}$$

## 2. Хеш-функция (англ. *hash function*)

Введём некоторую функцию, называемую **хеш-функцией**, которая отображает множество ключей в некоторое гораздо более узкое множество:

$$\boldsymbol{h : \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \to \{0, 1, \dots, M-1\},}$$

$$\boldsymbol{x \to h(x).}$$

Величина $\boldsymbol{h(x)}$ называется **хеш-значением** (англ. hash value) ключа $\boldsymbol{x}$.

Далее вместо того, чтобы работать с ключами, мы работаем с хеш-значениями.

Если разные ключи получают одинаковые хеш-значения: $x \neq y, h(x) = h(y)$, то говорят, что произошла **коллизия** (англ. collisions).

Хотелось бы выбрать хеш-функцию так, чтобы коллизии были невозможны. Но в общем случае при $M < N$ это неосуществимо: согласно принципу Дирихле (1834 г.), нельзя построить инъективное отображение из большего множества в меньшее.

$\boldsymbol{h(x) \equiv 0}$

любая пара различных ключей будет давать коллизию;

такая хеш-функция бесполезна несмотря на то, что она простая и быстро вычисляется;

$\boldsymbol{h(x) = rand(M)}$

всякий раз возвращает случайное число от 0 до M − 1 включительно, выбранное равновероятно независимо от x

не может быть использована как хеш-функция, потому что хеш-функция обязана для равных ключей возвращать одинаковые значения;

**деление с остатком**

$\boldsymbol{h(x) = x \bmod M}$

возвращает остаток от деления ключа x на M

является вполне годной для практики хеш-функцией и часто применяется;

если ключи возникают, как десятичные числа, то нежелательно выбирать в качестве *M* степень 10 (т.к. в этом случае окажется, что часть цифр числа уже полностью определяют хеш-значение);

в качестве *M* предпочтителен выбор простого числа, далеко отстоящего от степени 2;

**умножение**

$\boldsymbol{h(x) = \lfloor M \cdot (x \cdot A \bmod 1) \rfloor}$

$x \cdot A \bmod 1$ - дробная часть числа $x \cdot A$

в качестве *M* выбирают степень 2;

утверждают, что наиболее удачное значение константы *A* = 0,6180339887 (золотое сечение).

# Велика ли вероятность коллизий?

каждый элемент может принять одно из $M$ значений

Пусть осуществляется хеширование для $\boldsymbol{n}$ различных ключей, т.е. мы **строим вектор** длины $\boldsymbol{n}$, где назначаем каждому элементу одно из $\boldsymbol{M}$ значений (предположим, что хеш-значения независимы и распределены идеально равномерно от 0 до $\boldsymbol{M} - 1$).

| ***0-й ключ*** | ***1-й ключ*** | ***2-й ключ*** | ***3-й ключ*** | **...** | ***(n-1)-й ключ*** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **4** | **1** | **9** | **...** | **8** |

Число векторов длины $\boldsymbol{n}$, которые могут быть при этом сгенерированы:

$$M^n$$

Число векторов длины $\boldsymbol{n}$, которые могут быть при этом сгенерированы и в которых элементы не повторяются:

$$M \cdot (M-1) \cdot (M-2) \cdot \ldots \cdot (M-n+1) = \frac{M!}{(M-n)!}$$

Вероятность того, что все элементы сгенерированного вектора различны, т.е. **нет коллизий**:

$$\frac{M!}{(M-n)! \cdot M^n}$$

Вероятность $\boldsymbol{p}$ того, что **будут коллизии**:

$$p = 1 - \frac{M!}{(M-n)! \cdot M^n}$$

Пусть осуществляется хеширование для $\boldsymbol{n} \ll \boldsymbol{M}$ различных ключей

(предположим, что хеш-значения независимы и распределены идеально равномерно от 0 до $\boldsymbol{M} - 1$).

Используя приближенную формулу для значения факториала (Стирлинга), когда $\boldsymbol{M}$ велико, а $\boldsymbol{n} \ll \boldsymbol{M}$ получим приближенную формулу вероятности коллизии:

$$p = 1 - \frac{M!}{(M-n)! \cdot M^n} \approx \mathbf{1} - \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{n}^2}{2 \cdot \boldsymbol{M}}}$$

или

$$n = \sqrt[2]{2 \cdot M \cdot \log_e \frac{1}{p'}}$$

где $p' = p - 1$ – желаемая вероятность того, чтобы не было коллизий .

Несложно увидеть, что уже при $\mathrm{n} \approx \sqrt[2]{M}$ с вероятностью $\simeq$ 50%, будут коллизии.

Формула Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

$$p = 1 - e^{-\frac{n^2}{2 \cdot M}}$$

$$e^{-\frac{n^2}{2 \cdot M}} = p - 1$$

$$e^{\frac{n^2}{2 \cdot M}} = \frac{1}{p-1}$$

$$\frac{n^2}{2 \cdot M} = \log_e \frac{1}{1-p}$$

$$n^2 = 2 \cdot M \cdot \log_e \frac{1}{1-p}$$

$n = \sqrt[2]{2 \cdot M \cdot \log_e \frac{1}{p'}}$, где $p'$ – желаемая вероятность того, чтобы не было коллизий

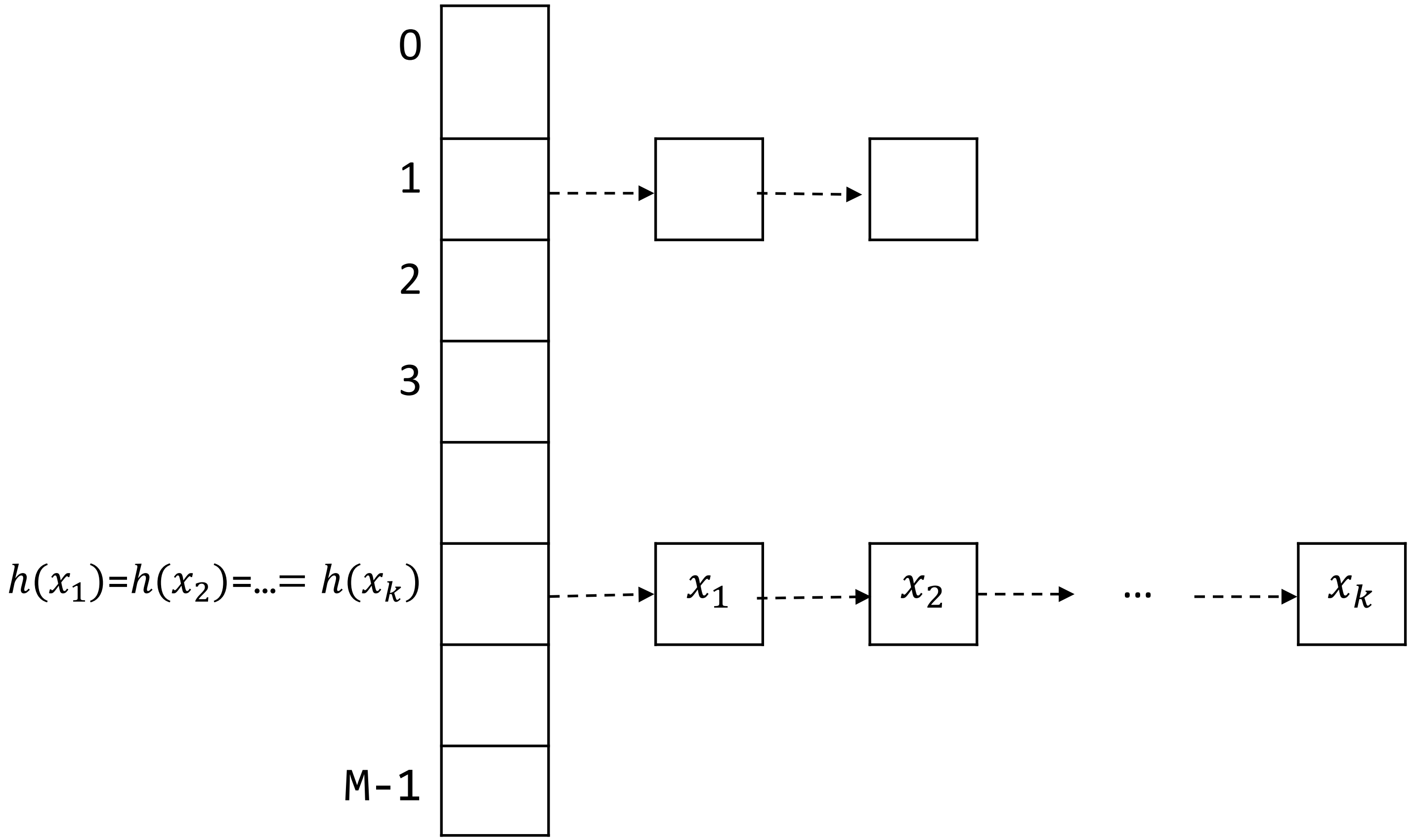
Например, если $\boldsymbol{M = 1\,000\,000}$ и хеширование выполняется для $\boldsymbol{n = 2\,450}$ уникальных ключей, то тогда с вероятностью $\approx$**95%** найдутся такие два ключа, что их хеш-значения будут одинаковыми, т.е. будет иметь место коллизия.

# Разработано несколько стратегий разрешения коллизий

1) Разрешение коллизий **методом цепочек** (англ. separate chaining).
2) Разрешение коллизий **методом открытой адресации** (англ. open addressing).

Разрешение коллизий **методом цепочек**
(англ. separate chaining)

Хеш-функция $\boldsymbol{h}$ раскладывает исходные ключи $\boldsymbol{x}$ по **корзинам** (англ. bins, buckets) или **слотам** (англ. slots).



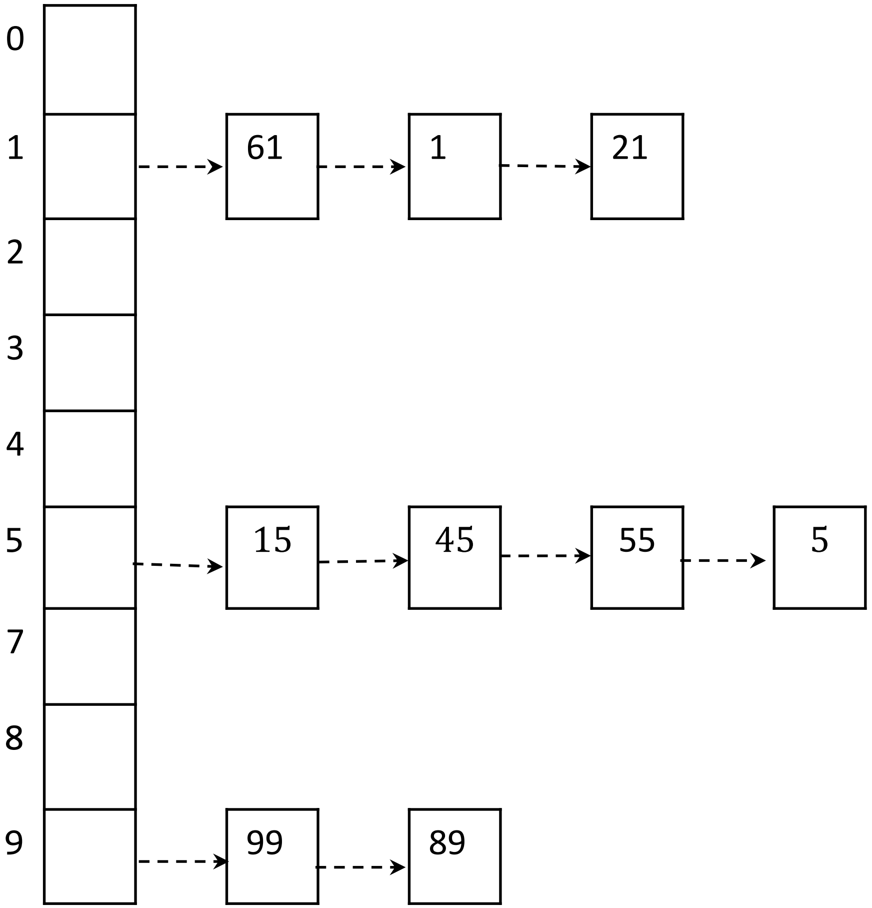

- ключ $\boldsymbol{x}$ попадает в корзину с номером, равным хеш-значению $\boldsymbol{h(x)}$;
- для хранения элементов с одинаковыми хеш-значениями внутри одной корзины можно использовать связные списки;

На верхнем уровне организуется массив размера $\boldsymbol{M}$ — по числу различных значений хеш-функции, каждый элемент которого — это односвязный список, состоящий из ключей, имеющих конкретное хеш-значение. Возникают цепочки ключей, из-за чего метод и получил название метода цепочек.

# Операция вставки элемента

$\mathbf{21, 1, 89, 5, 61, 55, 45, 15, 99}$

$h(x) = x \; mod \; 10$




**Сначала вычисляется хеш-значение $h(x)$ для ключа $x$**, а затем происходит обращение к соответствующему связному списку:

- ✓ если не стоит задача проверять, присутствует $x$ в таблице или нет, то операция вставки может быть реализована за константное время: всегда можно добавить элемент в начало списка, и не нужно идти по всему связному списку.

- ✓ если требуется поддерживать уникальность элементов, то сначала надо проверить, есть элемент $x$ в таблице или нет, и добавлять только уникальные элементы. Поэтому операция вставки вначале выполняет проход по списку, и на это расходуется время, пропорциональное длине соответствующей цепочки.

Поддерживать уникальность ключей удобно в силу ряда причин:

(1) можно легко отвечать на запросы о числе элементов в множестве;

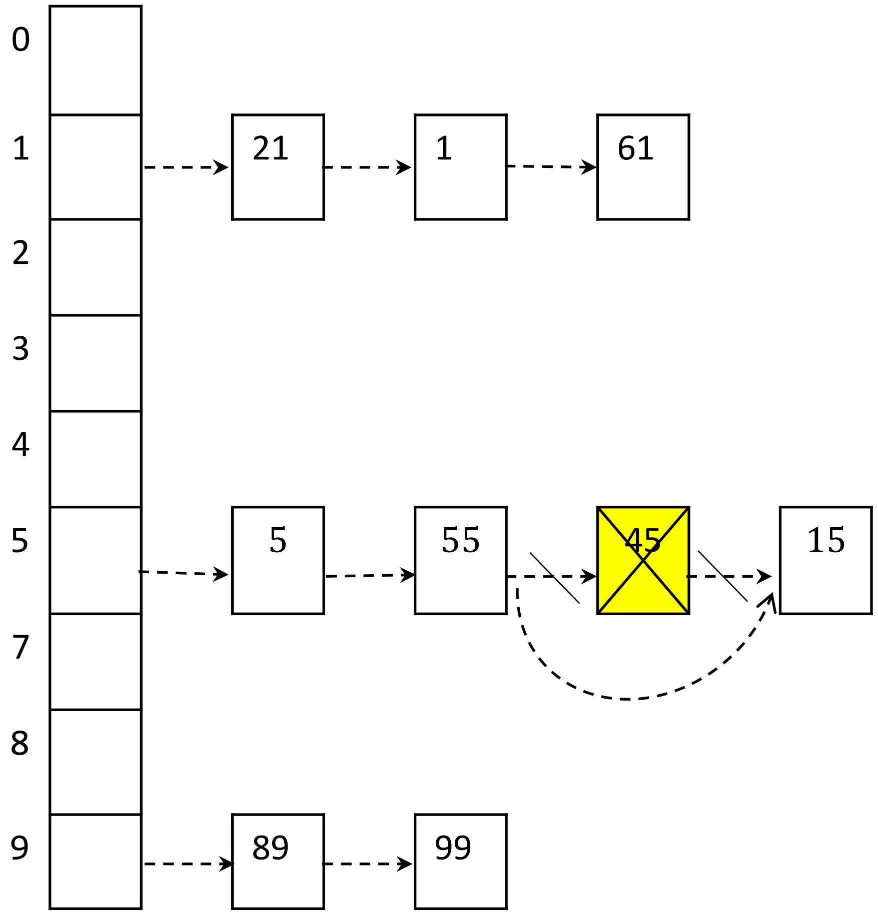
(2) меньше расход памяти (нередко на практике вставок выполняется много, но среди ключей мало различных);

(3) проще организовать удаление ключа.

ФПМИ БГУ

# Операция удаления элемента

$h(x) = x \bmod 10$




$x = 45$

1) Вычисляем хеш-значение для ключа $x$: $h(45) = 5$.
2) в списке $h(x)$ осуществляем поиск $x$.

В общем случае из односвязного списка удалить элемент из середины сложно. Однако в рассматриваемом случае, несмотря на то, что список односвязный удалять из него нетрудно:

- ✓ так как мы движемся слева направо, то можем поддерживать указатель на текущий элемент и на предыдущий;
- ✓ при удалении указатель у предыдущего элемента перенаправляется на следующий элемент, а память из-под текущего элемента освобождается.

Таким образом, производительность всей конструкции связана с таким параметром, как длина цепочки.

Пусть $l_0, l_1, \dots, l_{M-1}$ – длины цепочек (для каждого хеш-значения длина цепочки своя).

Каждая из базовых операций с ключом $\boldsymbol{x}$ требует времени $\mathrm{O}(1 + l_i)$, где $l_i$ — длина цепочки, в которую попадает ключ $\boldsymbol{x}$.

**ВНИМАНИЕ**

Даже если цепочка имеет нулевую длину, то требуется выделить время на то, чтобы вычислить хеш-значение (мы полагаем, что хеш-функция от ключа вычисляется за константу) и обратиться к соответствующей цепочке.

Разрешение коллизий **методом открытой адресации**
(англ. open addressing)

В линейном массиве хранятся непосредственно ключи, а не заголовки связных списков.

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **38** | **27** | **18** | | | **25** | | **7** | **67** | **29** |

В каждой ячейке массива разрешено хранить только один элемент.

Что делать, если произошла коллизия?

# Последовательность проб

(англ. probe sequence)

Обозначим через $\boldsymbol{h(x, i)}$ номер ячейки в массиве, к которой следует обращаться на $\boldsymbol{i}$-й попытке при выполнении операций с ключом $\boldsymbol{x}$.

Будем нумеровать попытки с $\mathbf{0}$ для каждого вновь поступающего элемента.

Последовательность проб для ключа $\boldsymbol{x}$ получается такой:

$$\boldsymbol{h(x, 0)},$$
$$\boldsymbol{h(x, 1)},$$
$$\boldsymbol{h(x, 2)},$$
$$\ldots$$

Для успешной работы алгоритмов поиска последовательность проб должна быть такой, чтобы в результате $\boldsymbol{M}$ проб все ячейки хеш-таблицы оказались просмотренными ровно по одному разу в каком-либо порядке:

$$\forall x \in K \; \{h(x,i) \mid i = 0,1,\dots,M-1\} = \{0,1,\dots,M-1\}.$$

**Широко используются три вида последовательностей проб:**

1. линейная;
2. квадратичная;
3. двойное хеширование.

# Линейное пробирование

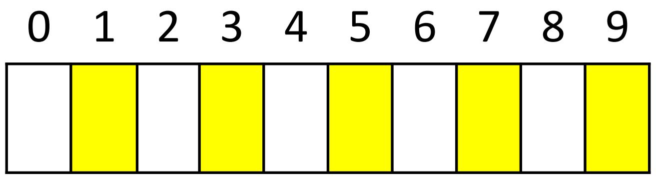
Ячейки хеш-таблицы последовательно просматриваются с некоторым фиксированным интервалом $\boldsymbol{c}$ между ячейками:

$$h(x, i) = (h'(x) + \boldsymbol{c} \cdot i) \bmod M,$$

где $h'(x)$ — некоторая хеш-функция.

Функция $h(x, i) = (x + 2 \cdot i)\ mod\ 10$

**НЕ ПОДХОДИТ** в качестве последовательности проб.



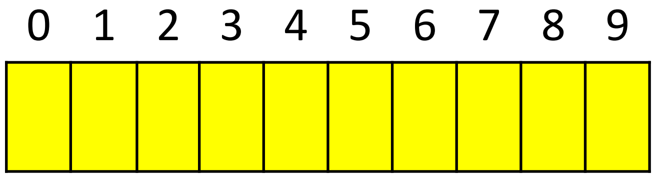

Например, при $x = 5$, подставляя $i$ от $0$ до 9, будем получать индексы: $5, 7, 9, 1, 3, 5, 7, 9, 1, 3$
в результате чётные позиции оказываются не посещены.

---

Функция $h(x, i) = (x + 3 \cdot i)\ mod\ 10$

**ПОДХОДИТ** в качестве последовательности проб

Например, при $x = 5$, подставляя $i$ от $0$ до 9, получим каждый индекс ровно один раз: $5, 8, 1, 4, 7, 0, 3, 6, 9, 2$



$$h(x, i) = (h'(x) + c \cdot i) \bmod M$$

**Теорема**

> Для того чтобы в ходе $\boldsymbol{M}$ проб все ячейки таблицы оказались просмотренными по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы число $\boldsymbol{c}$ было взаимно простым с размером хеш-таблицы $\boldsymbol{M}$.

В простейшем случае можно взять единицу в качестве константы $\boldsymbol{c}$

$$h(x, i) = (h'(x) + i) \bmod M$$

## Теорема

> Для того чтобы в ходе $\boldsymbol{M}$ проб все ячейки таблицы оказались просмотренными по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы число $\boldsymbol{c}$ было взаимно простым с размером хеш-таблицы $\boldsymbol{M}$.

**Доказательство.**

Воспользуемся сведениями из элементарной теории чисел.

Докажем необходимость

Пусть $h(x,i)$ пробегает все значения от $0$ до $M-1$. Значит, для любого $t$ найдётся такой индекс $i$, что $\boldsymbol{c} \cdot i \equiv t \pmod M$. В частности, это верно для $t=1$. Следовательно, есть такое $i$, что $\boldsymbol{c} \cdot i \equiv 1 \pmod M$, или, другими словами, $\boldsymbol{c} \cdot i - 1$ делится на $M$. Пусть $d$ — общий делитель чисел $\boldsymbol{c}$ и $M$. Тогда число 1 также вынуждено делиться на $d$. Значит, $d = \pm 1$, т.е. числа $\boldsymbol{c}$ и $M$ взаимно просты и не могут иметь других общих делителей.

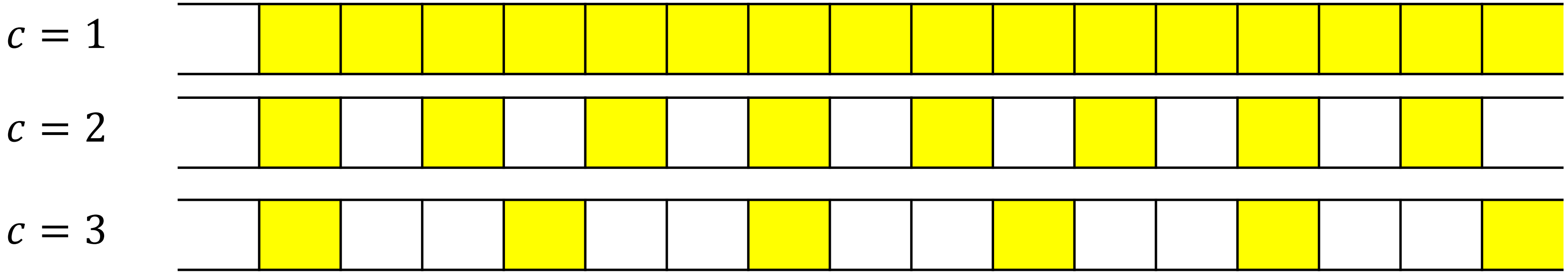
Докажем достаточность

Пусть числа $\boldsymbol{c}$ и $M$ взаимно просты. Предположим от противного, что при $i$-й и $j$-й пробах получаются одинаковые индексы: $h(x,i) = h(x,j)$. Но это значит, что $\boldsymbol{c} \cdot i \equiv \boldsymbol{c} \cdot j\ (mod\ M)$, или $\boldsymbol{c} \cdot (i-j) \equiv 0\ (mod\ M)$. Отсюда следует, что разность $i-j$ делится на $M$ без остатка. Но раз номера попыток $i$ и $j$ оба лежат на отрезке от $0$ до $M-1$, то это возможно лишь в случае, когда $i=j$. Противоречие. Значит, при всех попытках пробы получаются разными. Поскольку попыток всего $M$, каждая ячейка будет учтена по одному разу.

# Линейное пробирование

$$h(x,i) = (h'(x) + c \cdot i) \bmod M$$

Ячейки хеш-таблицы последовательно просматриваются с некоторым фиксированным интервалом c между ячейками:




Недостаток линейного пробирования проявляется в том, что на реальных данных часто образуются **кластеры из занятых ячеек** (длинные последовательности ячеек, идущих подряд).

При непрерывном расположении заполненных ячеек увеличивается время добавления нового элемента и других операций.

## Квадратичное пробирование

$$h(x,i) = (h'(x) + c_1 \cdot i + c_2 \cdot i^2)\, mod\ M,$$

где числа $c_1$ и $c_2$ фиксированы (эти значения должны быть тщательно подобраны, чтобы в результате $M$ попыток все ячейки были посещены.

На практике такой метод часто работает лучше линейного, разбрасывая ключи более равномерно по массиву. Тенденции к образованию кластеров нет, но аналогичный эффект проявляется в форме образования **вторичных кластеров** (ситуация, когда на начальном этапе различные элементы получают одно и тоже хеш-значение, что приводит к тому, что каждый последующий из этих элементов проходит путь предшествующего).

# Двойное хеширование

$$h(x, i) = (h'(x) + h''(x) \cdot i) \; mod \; M$$

Последовательность проб при работе с ключом x представляет собой арифметическую прогрессию (по модулю $M$) с первым членом $h'(x)$ и шагом $h''(\mathrm{x})$ .

Для того, чтобы последовательность проб покрыла всю таблицу, значение $h'(x)$ должно быть ненулевым и взаимно простым с $M$. Для этого можно поступить следующим образом:

- выбрать в качестве $M$ степень двойки, а функцию $h''(\mathrm{x})$ взять такую, чтобы она принимала только нечётные значения;
- выбрать в качестве $M$ простое число и потребовать, чтобы вспомогательная хеш-функция $h''(\mathrm{x})$ принимала значения от $\mathbf{1}$ до $M - 1$.

# Операция вставки элемента

1) Перед вставкой ключа $x$ выполняется поиск этого ключа. Если $x$ уже есть в таблице, то вставка не требуется.

2) Затем проверяется принципиальное наличие ячеек, не занятых ключами (счётчик занятых ячеек).

3) Если есть свободные ячейки, то осуществляется пробирование, начиная с того места, в которое указывает хеш-функция, в соответствии с некоторой последовательностью проб, пока не будет найдено свободное место в хеш-таблице.

4) В свободную ячейку заносится $x$, а счётчик занятых ячеек увеличивается на 1.

Например, при линейном пробировании:

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{i}) = \big((x \bmod M) + i\big) \bmod M, M = 10$$

для последовательности элементов:

**7, 29, 67, 38, 25, 27, 18**

Хеш-таблица будет иметь следующий вид:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 27 | 18 | | | 25 | | 7 | 67 | 29 |
| | | | | | | | 67 | 38 | 38 |
| 27 | | | | | | | 27 | 27 | 27 |
| 18 | 18 | | | | | | | 18 | 18 |

h(7, **0**)=7 свободна – заносим 7

h(29, **0**)=9 свободна – заносим 29

h(67, **0**)=7 - занята

h(67, **1**)=8 свободна – заносим 67

h(38, **0**)=8 занята

h(38, **1**)=9 занята

h(38, **2**)=0 свободна – заносим 38

h(25, **0**)=5 свободна – заносим 25

и так далее …

Название «открытая адресация» связано с тем фактом, что положение (адрес) элемента не определяется полностью его хеш-значением. В случае, когда слот уже занят, функция пробирования открывает следующий для проверки слот.

# Операция поиска элемента

**Случай 1.**

Предположим, что в таблице **операция удаления элемента НЕ поддерживается**.

Ячейки массива проверяются, в соответствии с той же функцией последовательности проб, которая использовалась при добавлении элементов в хеш-таблицу.

Для ячейки вводится **<u>два</u>** состояния:

- $\boldsymbol{empty}$ — ячейка пуста;
- $\boldsymbol{key(x)}$ — ячейка содержит ключ $\boldsymbol{x}$.

**Поиск останавливается** как только будет выполнено одно из условий:

1) найден элемент $\boldsymbol{x}$;
2) достигнута пустая ячейка (элемента $\boldsymbol{x}$ в таблице нет);
3) выполнены $\boldsymbol{M}$ попыток (таблица полностью заполнена, а элемента - нет).

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 27 | 18 | empty | empty | 25 | empty | 7 | 67 | 29 |
| =19 | =19 | =19 | =19 | | | | | | =19 |

$$h(x,i) = (x + i) \bmod M$$

$$M = 10, \qquad x = 19$$

СТОП, элемента x=19 НЕТ

ФПМИ БГУ

# Операция поиска элемента

**Случай 2.**

Предположим, что в хеш-таблице **поддерживается операция удаления элемента.**

$h(x, i) = (x + i) \bmod M,$
$M = 10$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 27 empty | 18 | empty | empty | 25 | empty | 7 | 67 | 29 |
| =18 | =18 | | | | | | | =18 | =18 |

СТОП, элемента x=18 НЕТ - **НЕ ВЕРНО**

1) Предположим, что из таблицы сначала удалили элемент $\boldsymbol{x} = 27$.

Для удаления элемента $x = 27$ вначале выполняем его поиск и, если ячейка с элементом найдена, то:

1) переводим её в состояние свободной;
2) счётчик занятых ячеек уменьшаем на единицу.

2) Затем выполнили поиск элемента $\boldsymbol{x} = 18$.

Поиск останавливается как только будет выполнено одно из условий:

1) найден элемент $\boldsymbol{x}$;
2) достигнута пустая ячейка (элемента $\boldsymbol{x}$ в таблице нет);
3) выполнены $\boldsymbol{M}$ попыток (таблица полностью заполнена, а элемента - нет).

$$h(x, i) = (x + i) \bmod M, \qquad M = 10$$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 27 deleted | 18 | empty | empty | 25 | empty | 7 | 67 | 29 |
| =18 | =18 | =18 | | | | | | =18 | =18 |

Для ячейки вводятся три состояния:

**(1)** **empty** — ячейка пуста;

(2) $\boldsymbol{key}(x)$ — ячейка содержит ключ $x$;

**(3)** **deleted** — ячейка ранее содержала ключ, но он был удалён.

**Поиск** останавливается как только будет выполнено одно из условий:

1) найден элемент $x$;
2) достигнута пустая ячейка **empty** (элемента $x$ в таблице нет);
3) выполнены **M** попыток (таблица полностью заполнена, но элемента $x$ в таблице нет).

Теперь при удалении $x = 27$, ячейка с номером 1 перейдет в состояние **deleted**.

Добавление нового элемента можно осуществлять как в ячейку **empty**, так и в ячейку **deleted**.

# Недостатки открытой адресации

1. Нетрудно видеть, что при разрешении коллизий методом открытой адресации наличие большого числа `deleted`-ячеек отрицательно сказывается на времени выполнения операции поиска, а значит и других операций.

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| deleted | deleted | deleted | deleted | deleted | 9 | empty | 7 | 67 | deleted |

Чтобы исправить ситуацию, после ряда удалений можно перестраивать хеш-таблицу заново, уничтожая удалённые ячейки.

$$h(x, i) = (x + i) \bmod M, \qquad M = 10$$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| empty | empty | empty | empty | empty | empty | empty | 7 | 67 | 9 |

2. Число хранимых ключей не может превышать размер хеш-массива (при заполнении на 70% производительность падает и нужно расширять таблицу);

3. Более строгие требования к выбору хеш-функции: чтобы распределять значения максимально равномерно по корзинам, функция должна минимизировать кластеризацию хеш-значений, которые стоят рядом в последовательности проб; при образовании больших кластеров, время выполнения всех операций может стать неприемлемым даже при том, что заполненность таблицы в среднем невысокая и коллизии редки.

# Преимущества
# открытой адресации

1) экономия памяти, если размер ключа невелик по сравнению с размером указателя

   в методе цепочек приходится хранить в массиве указатели на начала списков, а каждый элемент списка хранит, кроме ключа, указатель на следующий элемент, поэтому на все эти указатели расходуется память;

2) не требуется затрат времени на выделение памяти на каждую новую запись и подход может быть реализован даже на миниатюрных встраиваемых системах, где полноценный аллокатор недоступен;

3) нет лишней операции обращения по указателю (indirection) при доступе к элементу;

4) лучшая локальность хранения, особенно с линейной функцией проб

   когда размеры ключей небольшие, это даёт лучшую производительность за счёт хорошей работы кеша процессора, который ускоряет обращения к оперативной памяти;

   однако, когда ключи «тяжёлые» (не целые числа, а составные объекты), то они забивают все кеш-линии процессора, к тому же много места в кеше тратится на хранение незанятых ячеек - можно в массиве с открытой адресацией хранить не сами ключи, а указатели на них, но при этом часть преимуществ при этом будет утрачена.

За годы развития вычислительной техники сформировалась наука о том, как практически строить хеш-функции.

> Разработаны всевозможные правила на тему того, какие биты ключа $x$ стоит взять, на сколько позиций выполнить поразрядный сдвиг, как применить операцию исключающего «или», на что умножить, чтобы получить хеш, который бы выглядел как случайный.

Чтобы найти примеры практических хеш-функций, можно взять какую-нибудь стандартную библиотеку. Эти функции часто ничего не гарантируют: коллизии, конечно, есть.

Любую фиксированную хеш-функцию можно всегда «сломать» — придумать ситуацию, когда там будут одни сплошные коллизии. **Попробуем тогда внести элемент случайности при выборе хеш-функции?**

# Универсальное хеширование

(англ. universal hashing)

**Добавить рандомизацию**:

внести элемент случайности, чтобы не было фиксированного «плохого» случая.

Идея не брать какую-либо одну конкретную хеш-функцию, а, например, организовать программу так, чтобы при каждом запуске хеш-функция выбиралась заново.

Тогда одним и тем же входом «сломать» программу не получится, и можно будет рассуждать о длине цепочки с точки зрения теории вероятностей: говорить о том, какая длина цепочки в среднем, какая у неё дисперсия и т.п.

Такой подход называют **универсальным хешированием.**

# Хеш-функция выбирается

случайным образом из некоторого сгенерированного специальным образом **универсального множества хеш-функций**, которое гарантирует, что при случайном выборе хеш-функции из него вероятность коллизии для двух различных элементов $<\frac{1}{M}$

В **1977** году Дж.Л. **Картером** (J.L. Carter) и М.Н. **Вегманом** (M.N. Wegman) предложен один из способ **построения универсального семейства хеш-функций для целочисленных ключей**.

$$\boldsymbol{H_{a,b}(x) = \big((a \cdot x + b) \bmod p\big) \bmod M}$$

$\boldsymbol{x}$ – ключ;

$\boldsymbol{M}$ – размер таблицы (произвольное число, не обязательно простое);

$\boldsymbol{p}$ – выбрать достаточно большое простое число, такое, что все ключи лежат в диапазоне от $0$ до $p-1$ ($\boldsymbol{p} > \boldsymbol{M}$);

$\boldsymbol{a}$ – выбирается из множества $\{1,2,\dots,p-1\}$
$\boldsymbol{b}$ – выбирается из множества $\{0,1,\dots,p-1\}$

постулат Бертрана гласит, что существует достаточно близкое к $N$ простое число: $N \le p < 2N$

$p \cdot (p-1)$ способ выбрать хеш-функцию из семейства

**Оценки**

добавление элемента – усреднённо $O(1)$;

поиск элемента – математичекое ожидание $O(1)$.

**Совершенное хеширование**

(англ. *perfect hashing*)

Пусть $\boldsymbol{S}$ — фактическое множество ключей в хеш-таблице, и у этого множества размер $\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n} < \boldsymbol{M}$.

Тогда существует **хеш-функция**, которая не даёт коллизий: если элементов меньше, чем слотов, то их всегда можно отобразить без коллизий. Это хорошая хеш-функция, её называют **совершенной**. Эта функция всегда есть и зависит от набора ключей.

Даже если предположить, что набор ключей статический и известен заранее (т.е. все ключи сразу поступили, размещены в таблице и новые ключи туда более не будут более добавлены), есть трудность в том, как эффективно задать эту хеш-функцию.

Таким образом, задача заключается в построении **хеш-функции**, которая является:

- ✓ **простой**, т.е. достаточно константного объёма памяти, чтобы её хранить;
- ✓ **быстрой**, т.е. требуется константное время на вычисление;
- ✓ **совершенной,** т.е. коллизии отсутствуют.

# Совершенное двухуровневое хеширование

## Уровень 1

хеширование цепочками в M ячеек, возможны коллизии

**выполнять**

✓ выбрать хеш-функцию для таблицы порядка $M$

(функция берётся из универсального множества хеш-функций);

✓ вычислить $S = \sum_{i=0}^{M-1} l_i$, где $l_i$ - число ключей в $i$ –ой корзине

**пока** $(S > 3 \cdot M)$

$$p(S \le 3 \cdot M) \ge \frac{1}{2}$$

## Уровень 2

для каждой цепочки строится небольшая вторичная хеш-таблица, чтобы гарантировать отсутствие коллизий на этом уровне

**выполнять**

выбрать хеш-функцию для таблицы порядка $(l_i)^2$

(из универсального множества хеш-функций);

**пока** (есть коллизии)

$$p(\text{хеш}-\text{функция для таблицы порядка } l^2 \text{ на } l \text{ элементах не даёт коллизий}) \ge \frac{1}{2}$$

<u>В худшем случае поиск </u>элемента выполняется за $\mathbf{O}(\mathbf{1})$

<u>Математическое ожидание построения таблицы </u>$\mathbf{O}(\boldsymbol{n})$

$$H_{a,b}(x) = ((a \cdot x + b) \bmod p) \bmod M$$

$\boldsymbol{x}$ – ключ;

M – размер таблицы (произвольное число, не обязательно простое);

$\boldsymbol{p}$ - достаточно большое простое число, такое, что все ключи лежат в диапазоне от $0$ до $p-1$ $(p > M)$;

$a$ - выбирается из множества $\{1, 2, \dots, p-1\}$

$b$ - выбирается из множества $\{0, 1, \dots, p-1\}$

$$\{\mathbf{10}, \mathbf{22}, \mathbf{37}, \mathbf{40}, \mathbf{60}, \mathbf{70}, \mathbf{75}\}$$

### Уровень 1.

$h_{3,42}(x) =$
$((3 \cdot x + 42) \bmod 101) \bmod 9$

| | |
|---|---|
| 0 | **10** |
| 1 | |
| 2 | **60,75** |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | **70** |
| 6 | |
| 7 | **37,40,22** |
| 8 | |

$S = 1^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2 = 15$
$15 < 3 \cdot 9$,
переход ко 2-у уровню

### Уровень 2.

$h_i(x) =$
$((a_i \cdot x + b_i) \bmod 101) \bmod m_i$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $m_0=1^2$ | $a_0=0$ | $b_0=0$ | 0 / 10 | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | $m_2=2^2$ | $a_2=10$ | $b_2=18$ | 0 / 60 | 1 / 75 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | $m_5=1^2$ | $a_5=0$ | $b_5=0$ | 0 / 70 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | |
| 7 | $m_7=3^2$ | $a_7=23$ | $b_7=88$ | 0 / 40 | | | 3 / 37 | | | | | 8 / 22 |
| 8 | | | | | | | | | | | | |

# Хеш-таблицы на практике

Любой подход к реализации хеш-таблицы может работать достаточно быстро на реальных нагрузках.

Время, которое занимают операции с хеш-таблицами, обычно составляет малую долю от общего времени работы программы.

Расход памяти редко играет решающую роль.

Часто выбор между той или иной реализацией хеш-таблицы делается на основании других факторов в зависимости от ситуации.

## **Коэффициент заполнения** (англ. load factor )

Критически важным показателем для хеш-таблицы является коэффициент заполнения— отношение числа ключей, которые хранятся в хеш-таблице, к размеру хеш-таблицы:

$$\alpha = \frac{n}{M}$$

Однако коэффициент заполнения не показывает различия между заполненностью отдельных корзин.

Низкий коэффициент заполнения не является абсолютным благом. Если коэффициент близок к нулю, это говорит о том, что большая часть таблицы не используется и память тратится впустую.

**Для оптимального использования хеш-таблицы желательно, чтобы её размер был примерно пропорционален числу ключей, которые нужно хранить.**

На практике редко случается, что число ключей фиксировано и можно заранее выставить хорошее значение параметра M. Если ставить его заведомо больше, то много памяти будет потрачено зря (особенно если нужно организовать много хеш-таблиц с небольшим числом ключей в каждой).

Реализация хеш-таблицы общего назначения обязана поддерживать **операцию изменения размера**.

На практике часто используемым приёмом является автоматическое изменение размера.

Когда коэффициент заполнения превышает некоторый порог $\alpha_{max}$, выделяется память под новую, большую таблицу, все элементы из старой таблицы перемещаются в новую, затем память из-под старой хеш-таблицы освобождается.

Аналогично, если коэффициент заполненности опускается ниже другого порога $\alpha_{min}$, элементы перемещаются в хеш-таблицу меньшего размера.

## Объединение хеш-значений

Предположим, что координаты точек на плоскости хранятся в виде пар целых чисел $(x, y)$, и нужно создать множество точек с использованием хеш-таблицы.

Пусть получены хеш-значения двух координат $h(x)$ и $h(y)$.

Как их объединить, чтобы получить хеш от пары?

Пусть для простоты верхняя граница возможных значений хеш-функции не фиксирована (где-то дальше в реализации хеш будет взят по нужному модулю M). Часто на практике программисты для соединения хешей пишут тривиальные функции, например через операцию побитового исключающего или (xor):

```
def combine(hx, hy):
return hx ^ hy
```

Такой вариант часто работает на практике приемлемо, но не лишён очевидных недостатков. Например, для всех точек с равными координатами x и y хеш-функция будет принимать нулевое значение, и если точек на прямой y = x во входных данных окажется много, производительность будет низкой из-за коллизий.

Также очевидно, что разные точки (x, y) и (y, x), симметричные относительно той же прямой, получат одинаковые хеш-значения. Чтобы подобрать пары, дающие коллизию, было труднее, для объединения хешей используют более сложные функции с обилием «магических» констант и странных операций.

Например, в C++-библиотеке boost используется примерно такая формула:

```
def combine(hx, hy):
 return hx ^ (hy + 0x9e3779b9 + (hx << 6) + (hx >> 2))
```

Часто берут линейную комбинацию двух хеш-значений с, например, большими взаимно простыми коэффициентами.

```
def combine(hx, hy):
 return hx + 1000000007 * hy
```

Основной смысл таких манипуляций — сделать так, чтобы на реально встречающихся в жизни данных коллизии были более редкими. Но контрпример при желании можно подобрать. Лучшего универсального решения в этом деле нет.

## Проход по содержимому хеш-таблицы

В процессе программирования может возникнуть необходимость выполнить обход всех элементов структуры данных и, например, распечатать их.

Функция для итерации по содержимому структуры является полезной, поэтому обычно поддерживается в реализациях хеш-контейнеров, с которыми ведётся работа на практике.

В большинстве реализаций проход по хеш-множествам выполняется в произвольном порядке, **не гарантируется какой-либо отсортированности ключей**.

В случае, если внутренняя реализация хеш-таблицы использует метод цепочек, обычно функция обхода выдаёт сначала все элементы первой корзины (с хеш-значением 0) в порядке их следования в цепочке, затем все элементы второй корзины (с хеш-значением 1), и т. д.

Более того, если распечатать элементы хеш-множества, добавить новый ключ, сразу удалить его, вновь распечатать элементы, то порядок может получиться другим. Такое может случиться, если добавление нового ключа привело к перестроению хеш-таблицы с изменением числа $M$ корзин и элементы были перераспределены по корзинам вновь.

Не стоит нигде в коде закладываться на порядок итерации по хеш-контейнерам: большинство реализаций в разных языках программирования могут гарантировать только то, что посещены будут все элементы, не важно в каком порядке.

Наоборот, средства итерации по ключам множества, которое построено на базе бинарного поискового дерева, обычно возвращают ключи в порядке возрастания (выполняется внутренний обход дерева). Порядок фиксирован и каждый раз одинаковый.

Часто предсказуемость результата удобна, например, для написания модульных тестов к частям программы. **Таким образом, если порядок итерации важен, возможно, стоит использовать «древесные» структуры данных.**

# Хеш-таблицы в C++

Долгое время в языке **C++** не было стандартных реализаций структур данных на основе хеш-таблиц.

Контейнеры **`std::set`** и **`std::map`** из **STL** строятся на основе сбалансированных бинарных поисковых деревьев (во всех популярных реализациях применяются красно-чёрные деревья).

Хеш-таблицы существовали в виде нестандартных расширений (например `stdext::hash_set` в Visual Studio) или внешних библиотек (например `boost`).

Наконец, **в стандарте C++11 в STL официально были добавлены хеш-таблицы**.

Стандарт предусматривает четыре контейнера на основе хеш-таблиц, которые отличаются от своих аналогов на основе деревьев наличием префикса **unordered**_ в названии.

**std::unordered_set** представляет собой динамическое множество;
**std::unordered_map** — ассоциативный массив.

Существует также два **multi-контейнера**, которые допускают хранение одинаковых ключей.

Стандарт требует, чтобы в построении этих структур данных авторы компиляторов использовали **разрешение коллизий методом цепочек**.

Метод открытой адресации не был стандартизирован из-за внутренних трудностей при удалении элементов. Однако детали реализации хеш-таблиц стандартом не регламентируются.

В качестве хеш-значения в C++ используется число типа **`size_t`**.

Все хеш-контейнеры предоставляют метод **`rehash()`**, который позволяет установить размер хеш-таблицы (число корзин **`M`**).

Метод под названием **`load_factor()`** возвращает текущий коэффициент заполнения.

**Рассмотрим более подробно реализацию в компиляторе GCC (**GNU Compiler Collection)

Пусть ключи добавляются в **`std::unordered_set`** по одному.

Когда коэффициент заполнения достигает значения **1**, происходит перестроение хеш-таблицы:

> в качестве нового числа корзин берётся <u>первое простое число из заранее составленного списка, не меньшее удвоенного старого числа корзин</u> (**таким образом, размер таблицы как минимум удваивается и является простым числом**).

Длины отдельных цепочек никак не анализируются (появление одной длинной цепочки не повлечёт за собой операцию перестроения).

# Хеш-таблицы в JAVA

Коллекции **HashSet** и **HashMap** реализуются как хеш-таблицы, для разрешения коллизий используется **метод цепочек**.

Для хеширования целых чисел применяется функция следующего вида:

```
int hash(int h) {
h ^= (h >>> 20) ^ (h >>> 12);
return h ^ (h >>> 7) ^ (h >>> 4);
}
```

операция **>>>** — беззнаковый сдвиг вправо: биты смещаются вправо, число слева дополняется нулями;

операция **^** — поразрядное сложение по модулю 2, исключающее «или»;

Затем в классе коллекции результат функции hash берётся по модулю числа корзин, по которым раскладываются элементы.

**Число корзин**, оно же число различных значений хеш-функции $M$, в Java **всегда выбирается как некоторая степень числа 2:**

чтобы деление на $M$ можно было заменить операцией битового сдвига вправо, так как современные процессоры выполняют инструкцию деления целых чисел существенно медленнее, чем битовые операции;

В версии **Java 8**

разработчики озаботились вопросом **устойчивости коллекций**, использующих хеширование, **к коллизиям**.

В исходном коде библиотеки Java можно найти константу:

```
istatic final int TREEIFY_THRESHOLD = 8;
```

В случае, если новый ключ попадает в корзину, в которой уже лежат как минимум восемь других ключей, библиотека **преобразует связный список** для данной корзины в **бинарное сбалансированное поисковое дерево**.

Получается гибридная структура:

- ✓ корзины для тех хеш-значений, где **ключей мало**, хранятся **списками**;
- ✓ корзины, где **ключей** накопилось **много**, хранятся в виде **деревьев**.

# Хеш-таблицы в PYTHON

Встроенный тип **dict** — ассоциативный массив, словарь —широко используется в языке.

Он реализован в виде хеш-таблицы, где коллизии разрешаются **методом открытой адресации.**

Разработчики предпочли метод открытой адресации методу цепочек ввиду того, что он позволяет значительно сэкономить память на хранении указателей, которые используются в хеш-таблицах с цепочками.

Интерпреттором CPython поддерживается опция командной строки -R, которая активирует на старте случайный выбор начального значения (англ. seed), которое затем используется для вычисления хеш-значений от строк и массивов байт.

# Криптографические хеш-функции

В криптографии множество **K** возможных ключей бесконечно, и любой блок данных является ключом (в принципе, произвольный массив байт можно рассматривать как двоичную запись некоторого числа).

Хеш-функция h(x) называется **криптографической**, если она удовлетворяет следующим требованиям:

- **необратимость**: для заданного значения хеш-функции **c** должно быть сложно определить такой ключ **x**, для которого **h(x) = c**;
- **стойкость к коллизиям первого рода**: для заданного ключа **x** должно быть вычислительно невозможно подобрать другой ключ **y**, для которого **h(x) = h(y)**;
- **стойкость к коллизиям второго рода**: должно быть вычислительно невозможно подобрать пару ключей **x** и **y**, имеющих одинаковый хеш.

Криптографические хеш-функции обычно не используются в хеш-таблицах, потому что они сравнительно медленно вычисляются и имеют большое множество значений. Зато такие хеш-функции широко применяются в системах контроля версий, системах электронной подписи, во многих системах передачи данных для контроля целостности.

Примерами криптографических хеш-функций являются алгоритмы MD5, SHA-1, SHA-256.
Так, метод SHA-1 ставит в соответствие произвольному входному сообщению некоторую 20-байтную величину, т. е. результат вычисления SHA-1 принимает одно из $2^{160}$ различных значений.
Пример вычисления SHA-1 от ASCII-строки, где результат записан в шестнадцатеричной системе счисления:
SHA-1("The quick brown fox jumps over the lazy dog") = 0x2fd4e1c67a2d28fced849ee1bb76e7391b93eb12

В настоящий момент коллизии для MD5 и SHA-1 обнаружены, поэтому методы постепенно выходят из широкого использования.
Более новые алгоритмы семейства SHA-2 считаются существенно более стойкими к коллизиям. Тем не менее следует понимать, что коллизии есть обязательно, потому что нельзя биективно отобразить бесконечное множество в конечное. Вопрос только в том, насколько трудно эти коллизии отыскать.

# Общие задачи в iRunner для закрепления навыков

[0.5. Хеш-таблица (разрешение коллизий метом открытой адресации)]

БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

# Спасибо за внимание