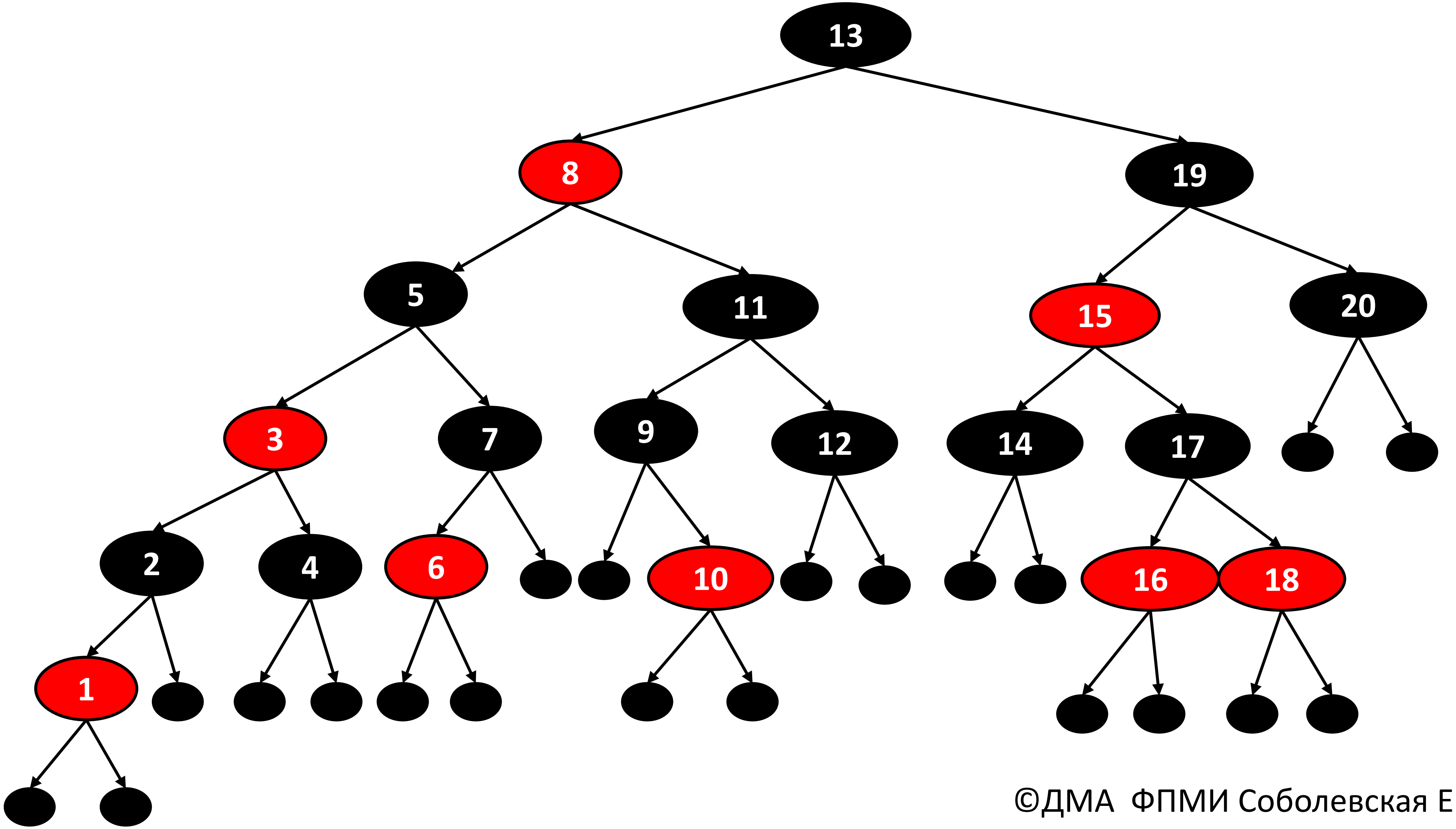
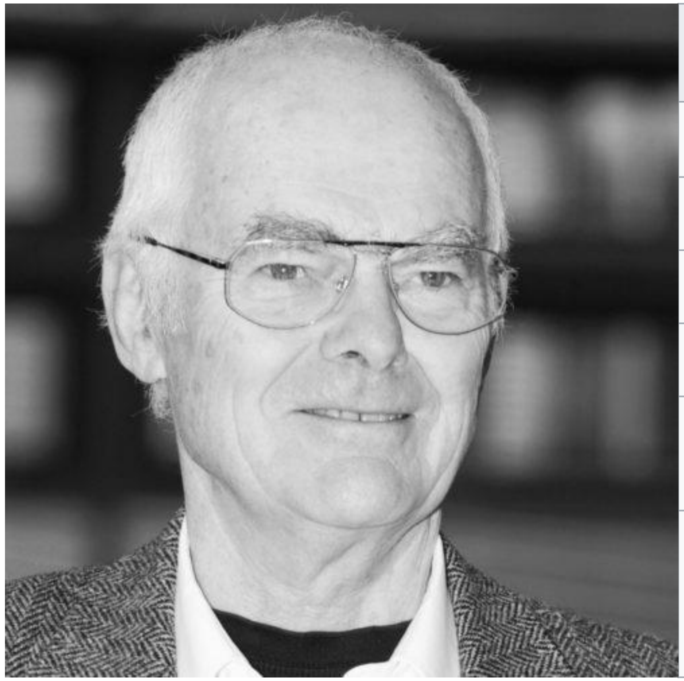
ОРГАНИЗАЦИЯ ПОИСКА

Красно-чёрное дерево (англ. red-black tree)



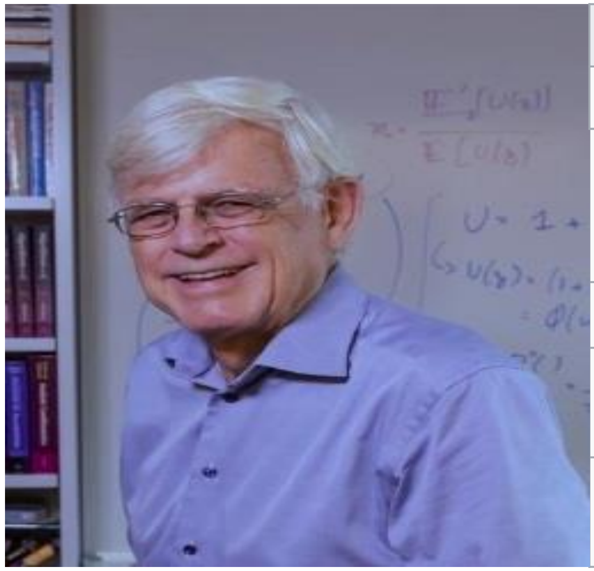
Изобретателем красно-чёрного дерева считают немецкого учёного:



Рудольф Байер	
Rudolf Bayer	
Дата рождения	7 мая 1939
Страна	Германия
Научная сфера	информатика
Место работы	Мюнхенский технический университет
Известен как	изобретатель красно-чёрного дерева, UB-дерева, B-дерева

В 1978 году в статье **Л. Гибаса** и **Р. Седжвика**
структура данных получила название «**красно-чёрное** дерево»:

Леонидас Джон (Иоаннис) Гибас греч . Λεωνίδας Γκίμπας	
Национальность	Греческий - Американский
Научная карьера	
профессор компьютерных наук и электротехники Пола Пиготта в Стэнфордском университете , где он возглавляет группу геометрических вычислений и является сотрудником лабораторий компьютерной графики и искусственного интеллекта	
Ученик (докторант) Дональда Кнута	



Роберт Седжвик	
Robert Sedgewick	
Дата рождения	20 декабря 1946
Страна	США
Научная сфера	Информатика
Место работы	Принстонский университет

- ✓ по словам Л. Гибаса, они использовали ручки двух цветов;
- ✓ по словам Р. Седжвика, красный и черный цвет лучше всех смотрелись на лазерном принтере Xerox.

Красно-чёрное дерево

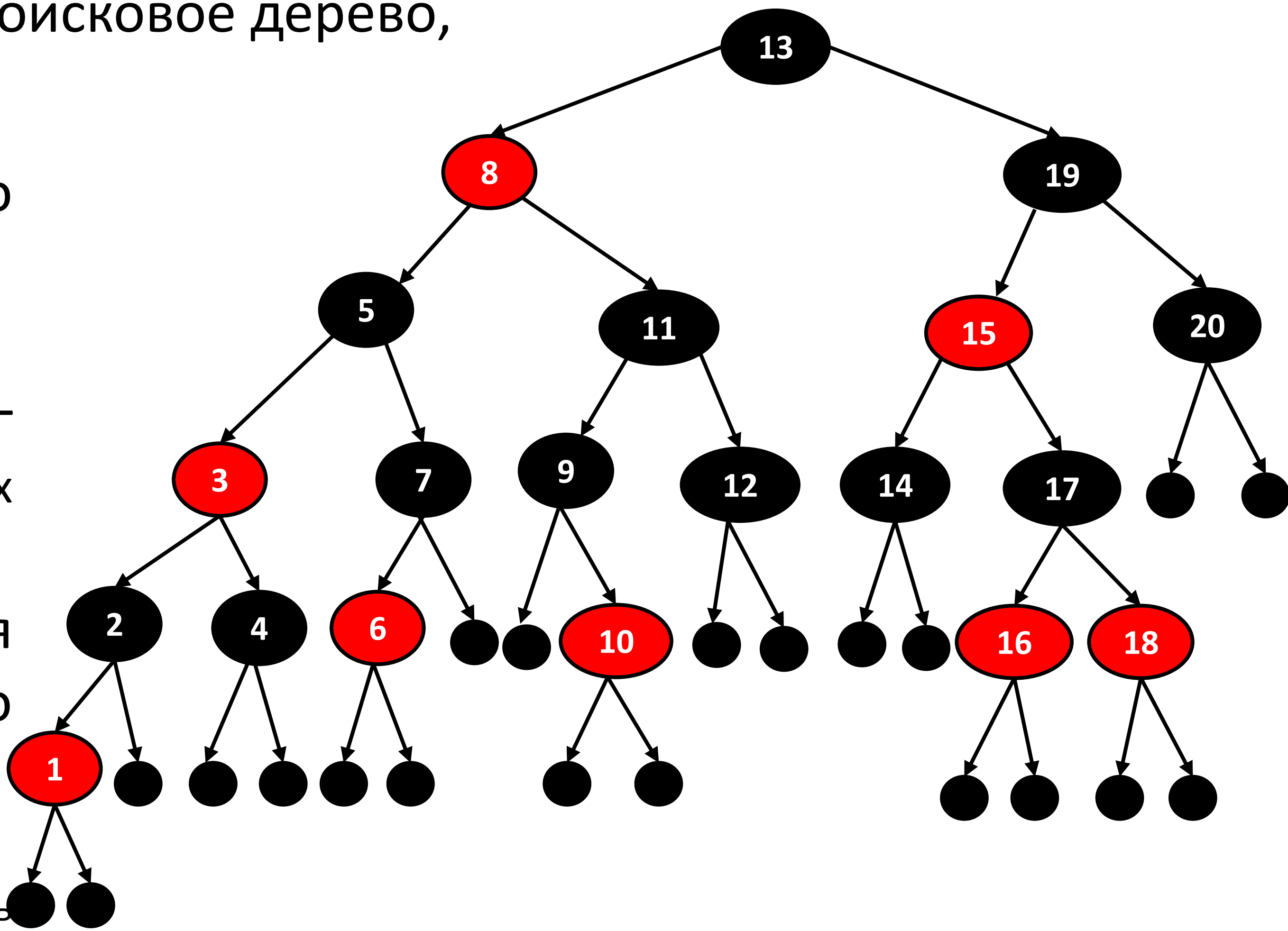
- является примером бинарного поискового дерева;

- специальные операции балансировки гарантируют, что высота красно-чёрного дерева не превзойдёт $O(\log n)$;

- при этом время выполнения процедур балансировки (перекрашивания вершин, повороты) также ограничено этой величиной.

Красно-чёрное дерево – это бинарное поисковое дерево, для которого выполняются **RB**-свойства:

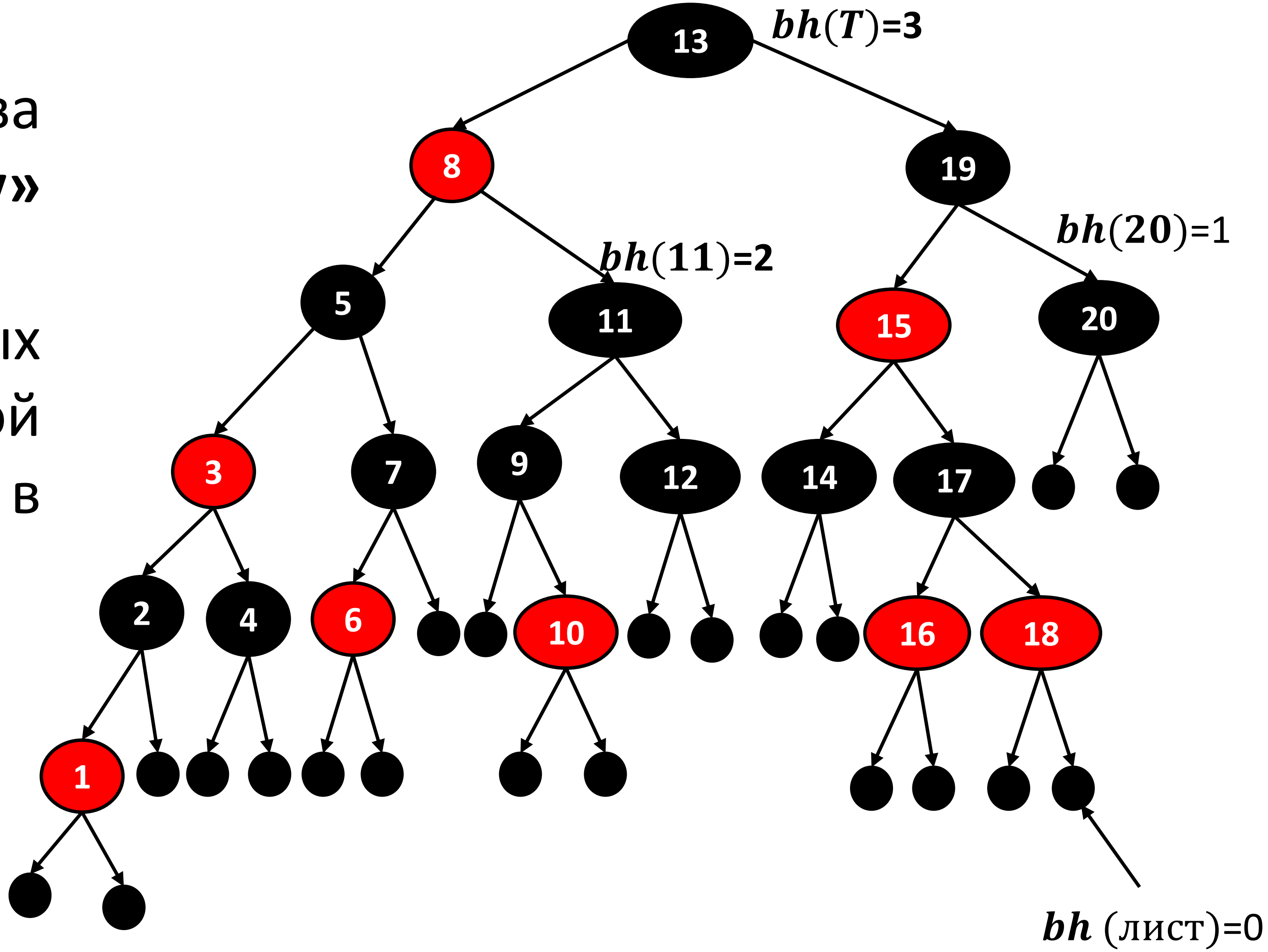
1) каждая вершина является либо **красной**, либо **чёрной**;
2) каждый **лист – чёрный**;
3) у **красной** вершины **оба сына** – **чёрные** (нет двух подряд идущих красных вершин);
4) любой путь из корня в листья содержит одинаковое количество **чёрных** вершин;
5) **корень – чёрный**
   (это требование не обязательно, так как корень всегда можно перекрасить в чёрный цвет и это не нарушит ни одно из RB-свойств).



Если к каждой вершине, которая не имеет сыновей, добавить фиктивный чёрный лист, то мы получим, что каждая внутренняя вершина дерева содержит ключевое значения, а все листья – фиктивные.

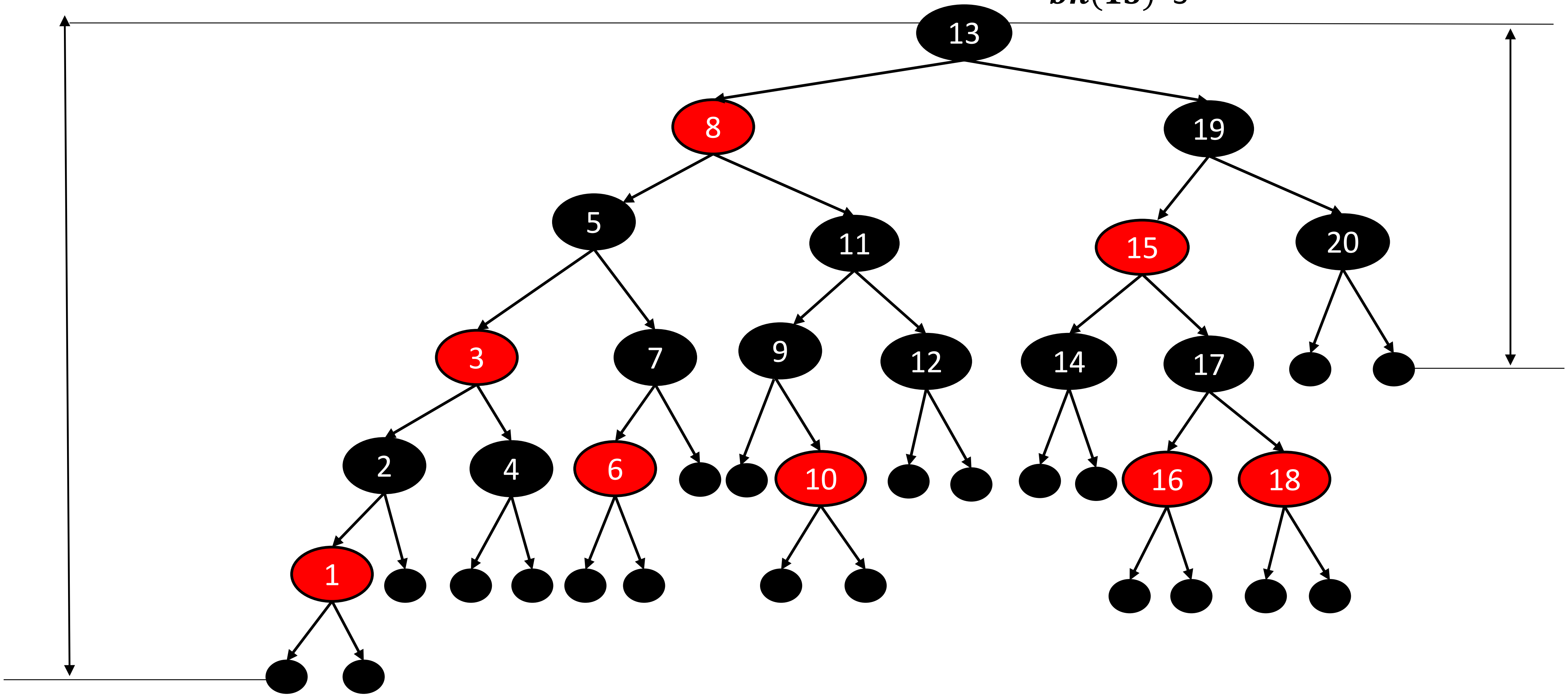
Для каждой вершины v дерева определим её **«чёрную высоту»** (англ. **b**lack-**h**eight):

$bh(v)$ – количество чёрных вершин (без учёта самой вершины v) на пути из v в лист.



Чёрной высотой дерева будем считать чёрную высоту его корня.

$bh(\mathbf{13})$=3



Для каждой вершины $\boldsymbol{v}$ любой путь из $\boldsymbol{v}$ в листья содержит одинаковое число чёрных вершин (свойство 4).

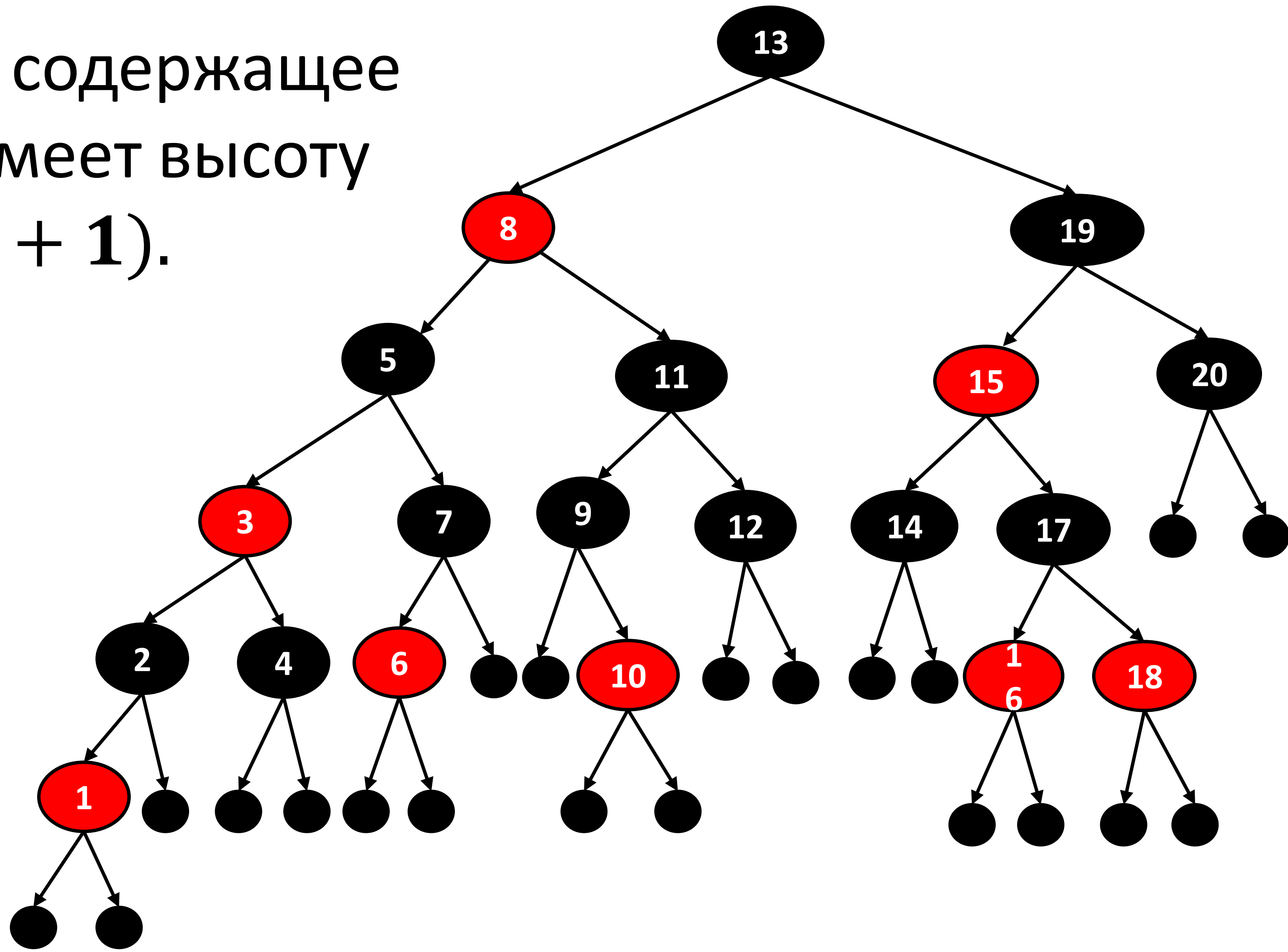
Для любой вершины $\boldsymbol{v}$ справедливо:

$$bh(v) \le LengthPath(v, leaf) \le 2 \cdot bh(v),$$
$$bh(v) \le h(v) \le 2 \cdot bh(v)$$

Теорема

Красно-чёрное дерево, содержащее $\boldsymbol{n}$ внутренних вершин, имеет высоту

$$h(\boldsymbol{T}) \leq \boldsymbol{2} \cdot \log(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{1}).$$



Доказательство

1) Сначала, используя метод математической индукции (по высоте h), докажем, что поддерево с корнем в вершине v содержит как минимум $\mathbf{2^{bh(v)}-1}$ внутренних вершин.

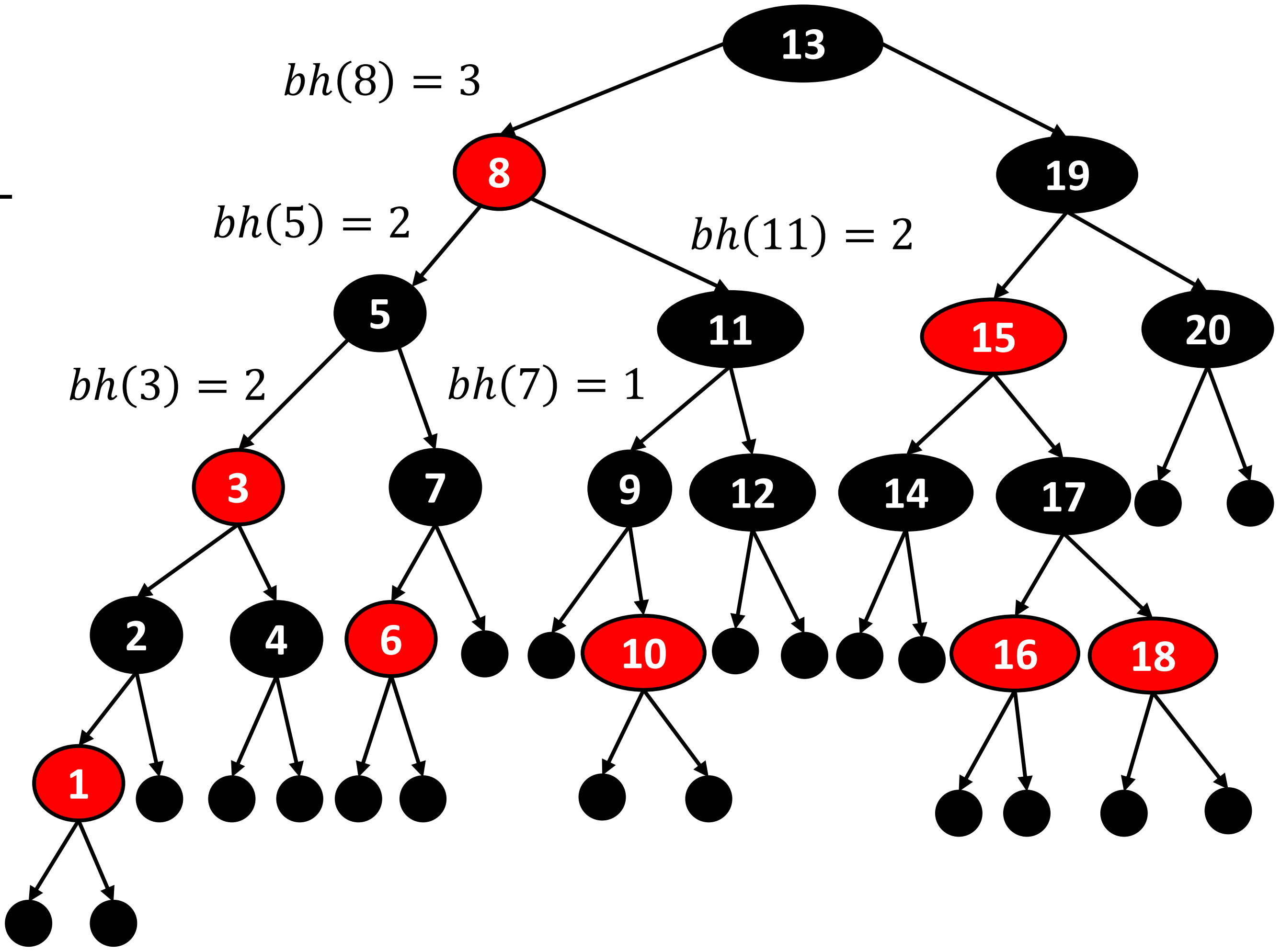
База индукции. Если вершина v – лист, то

$$bh(v) = 0 \text{ и } 2^{bh(v)} - 1 = 2^0 - 1 = 0.$$

Шаг индукции. Предположим, что для всех вершин дерева высоты $\leq h$ свойство выполняется. Рассмотрим вершину v высоты $h + 1 > 0$. Вершина v – внутренняя вершина дерева, значит у неё есть оба поддерева. Если у вершины v чёрная высота $bh(v)$, то её сыновья могут иметь чёрную высоту либо $bh(v) - 1$ (если сын – чёрный), либо $bh(v)$ (если сын – красный).

С учётом индукционного предположения для сыновей вершины v получим, что число внутренних вершин поддерева с корнем в вершине v:

$$\geq \mathbf{2 \cdot \left(2^{bh(v)-1} - 1\right) + 1 = 2^{bh(v)} - 1}.$$



Доказательство (продолжение)

2) Теперь рассмотрим произвольный путь из корня дерева в лист. По крайней мере половина вершин на пути, не считая сам корень, должны быть чёрными.

Следовательно

$$bh(T) \le h(T) \le 2 \cdot bh(T)$$

$$\frac{h(T)}{2} \le bh(T) \le h(T),$$

т.е. чёрная высота корня должна составлять как минимум $h(T)/2$ и по доказанному в пункте 1) свойству, для числа внутренних вершин дерева справедливо неравенство:

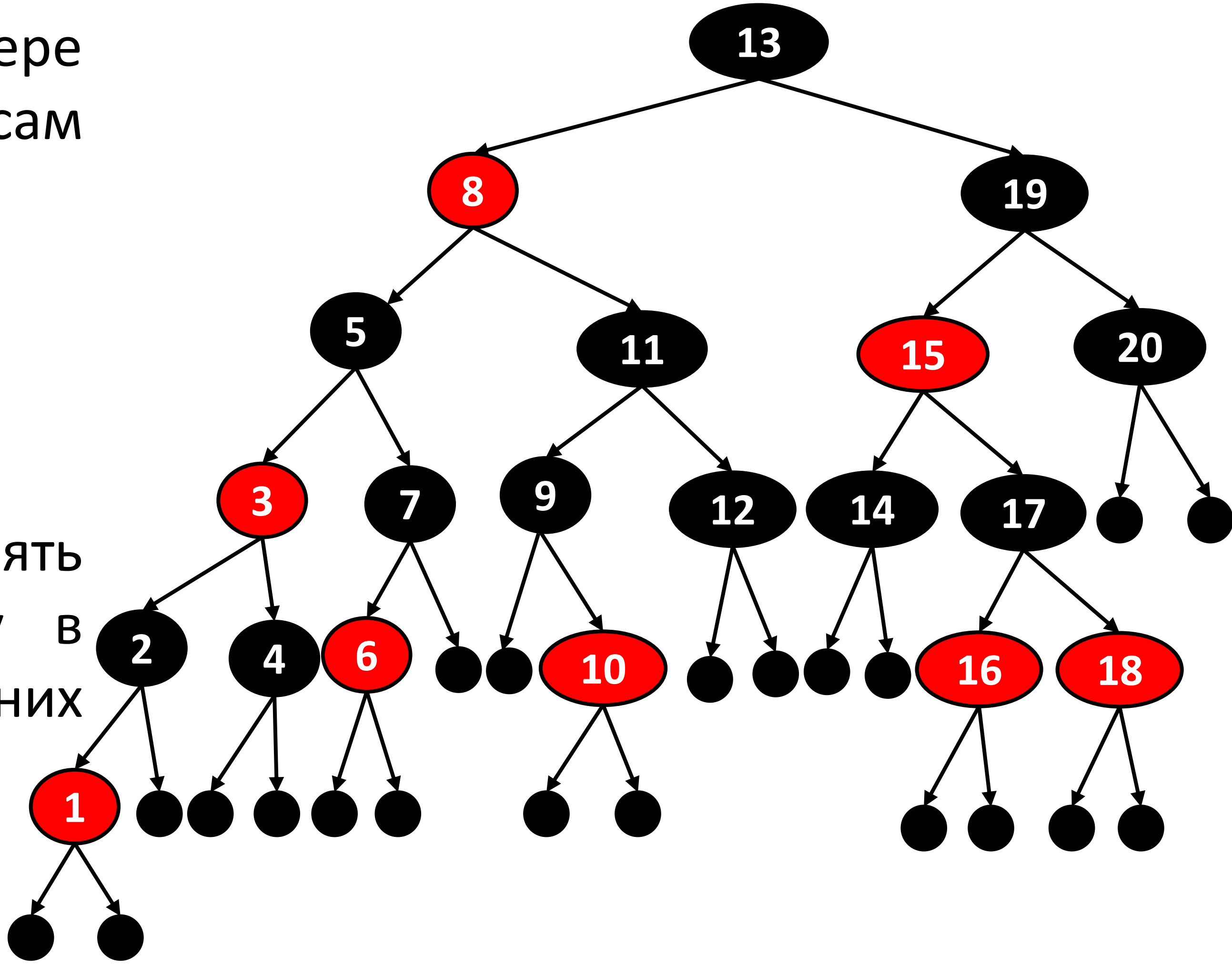
$$n \ge 2^{bh(T)} - 1 \ge 2^{\frac{h(T)}{2}} - 1.$$

Логарифмируем неравенство и получаем утверждение теоремы:

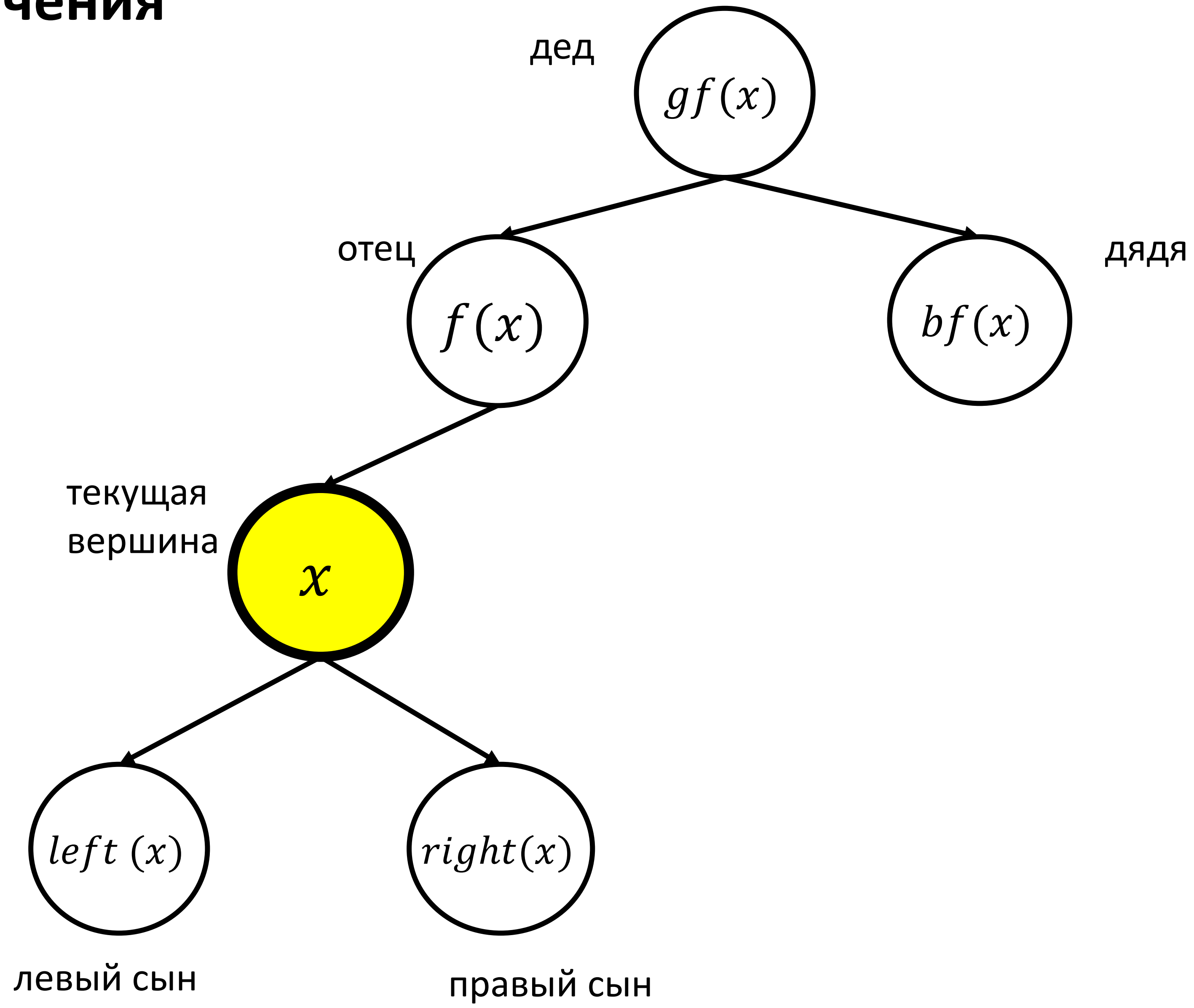
$$\boldsymbol{h(T) \le 2 \cdot log_2(n+1)}.$$

Доказательство завершено.

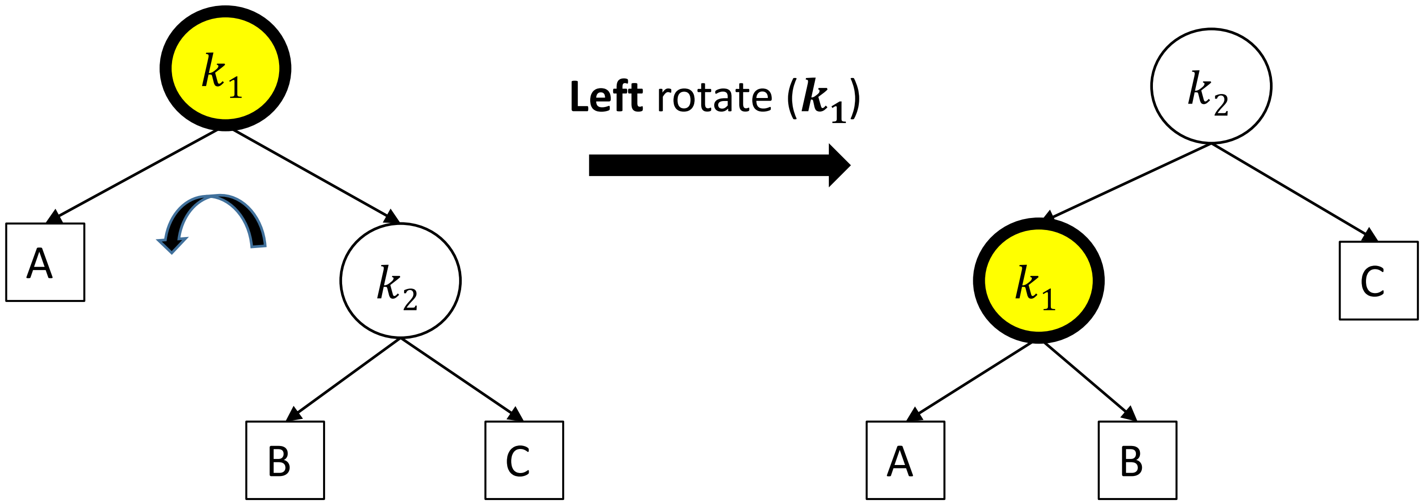
$bh(T) = 3$

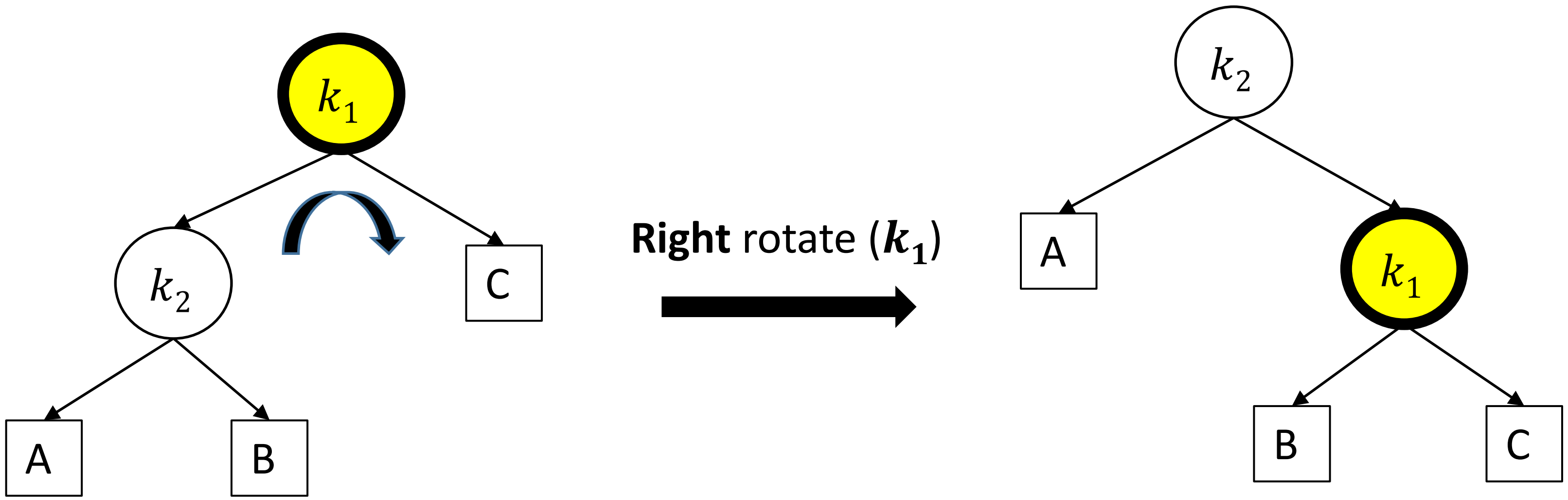


Обозначения



Для поддержки свойств красно-чёрных деревьев выполняются вращения, каждое из которых выполняется за O(1):





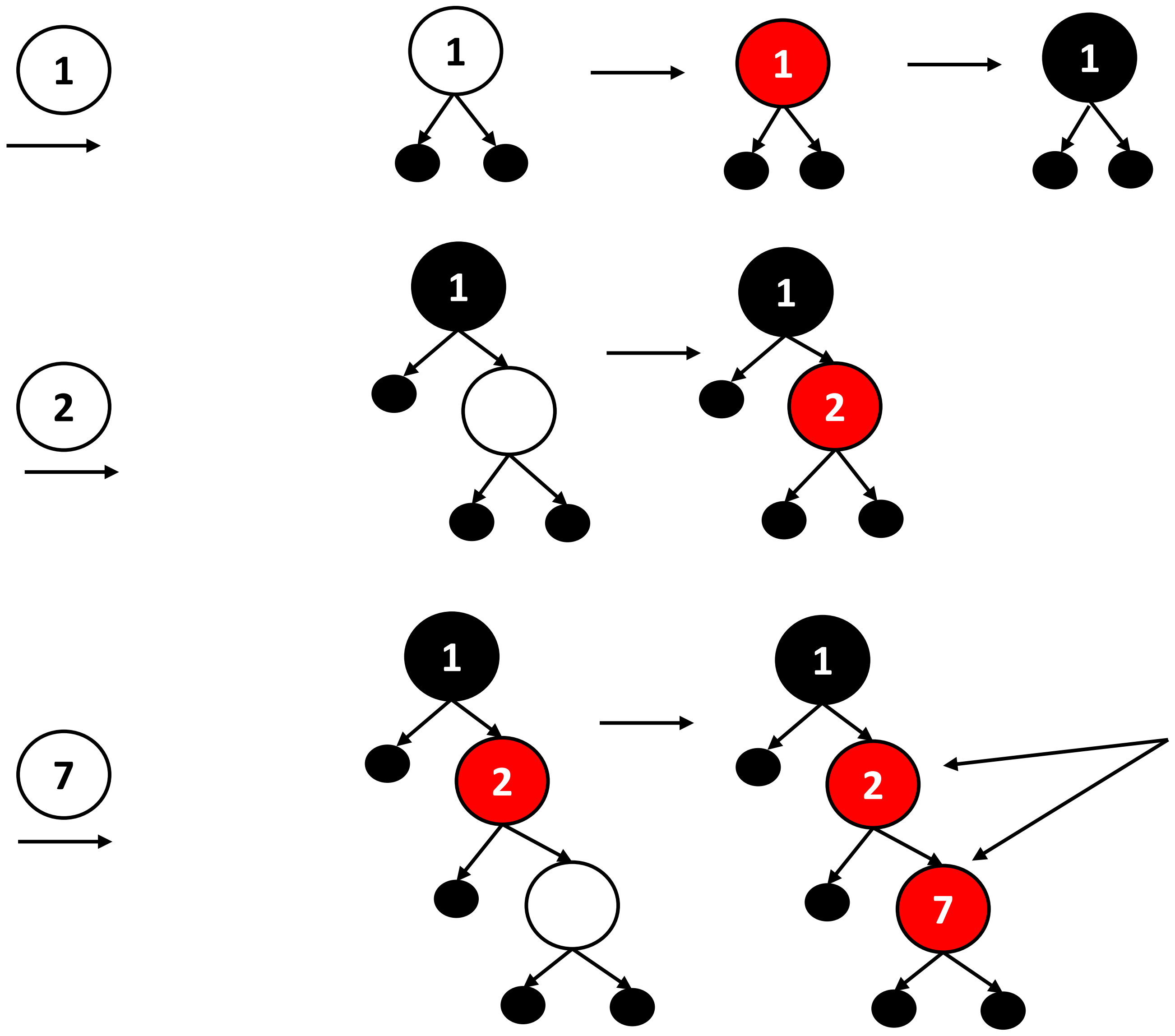
ФПМИ БГУ

Добавление вершины в дерево

1. Осуществляем поиск места для добавляемой вершины $\boldsymbol{x}$ по аналогии с тем, как это делали в бинарном поисковом дереве.
2. Добавляем вершину $\boldsymbol{x}$ на место чёрного фиктивного листа и добавляем ей в качестве сыновей две фиктивные чёрные вершины.
3. Красим вершину $\boldsymbol{x}$ в красный цвет.
4. Если после добавления произошло нарушение RB-свойства (может нарушиться только одно: появились две подряд идущие красные вершины), то выполняем процедуру, восстанавливающую RB-свойства: перекраска вершин и, возможно, не более двух поворотов.

Пример.

Для последовательности чисел: 1, 2, 7, 3, 8, 14, 9 построить RB-дерево.



появились две подряд идущие красные вершины – нарушение RB- свойства

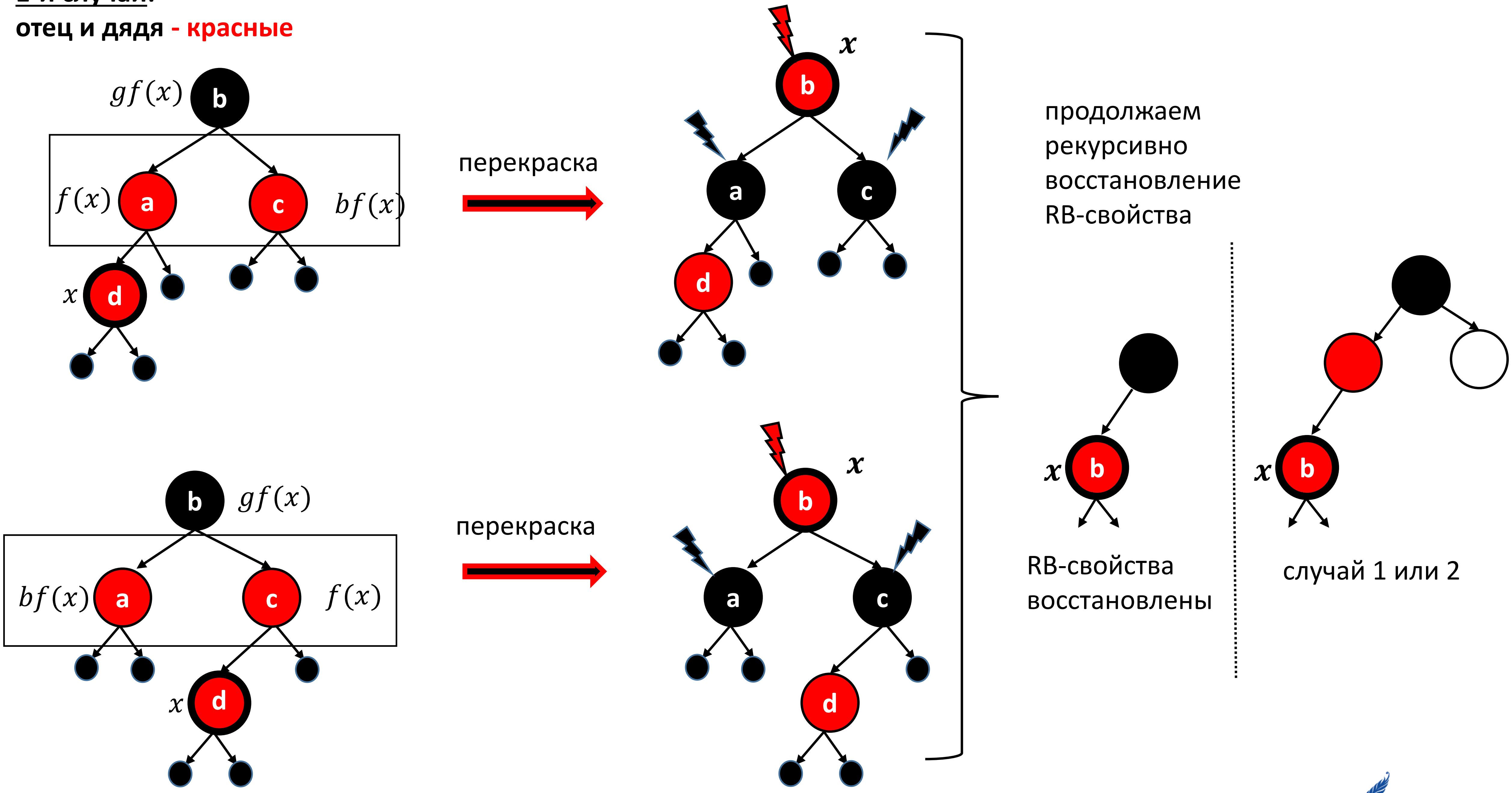
Процедуры, восстанавливающие RB-свойства:

(1) перекраски

(2) вращения

1-й случай:

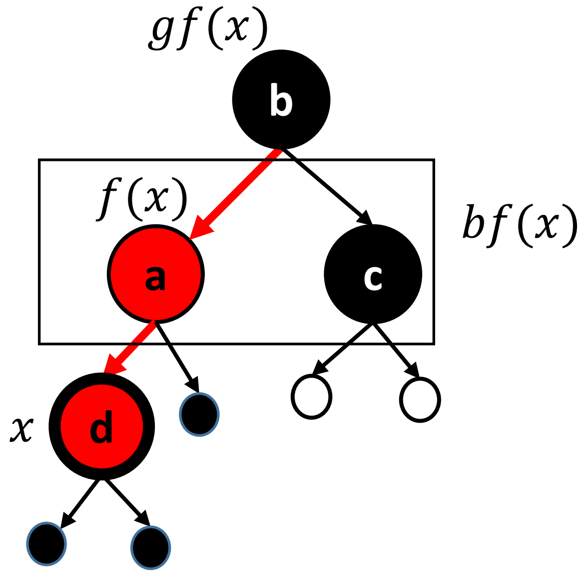
отец и дядя - красные



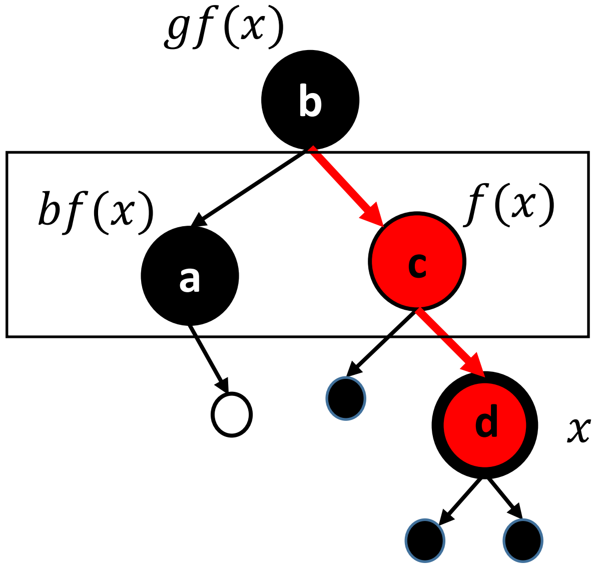
2-й случай:

отец – красный , дядя – чёрный

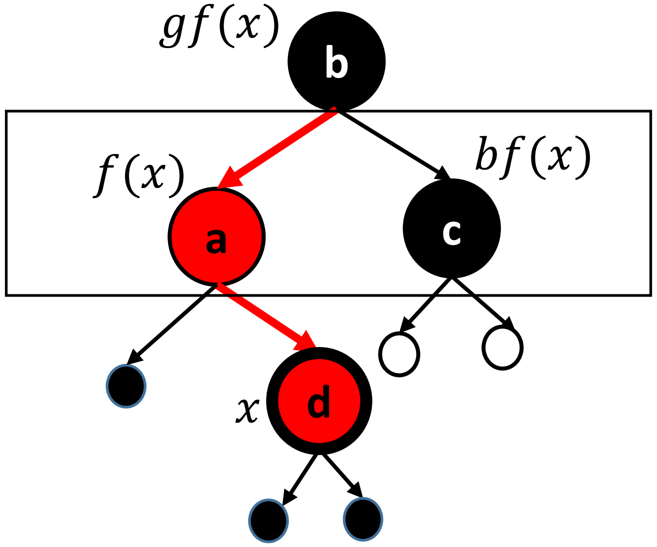
а)



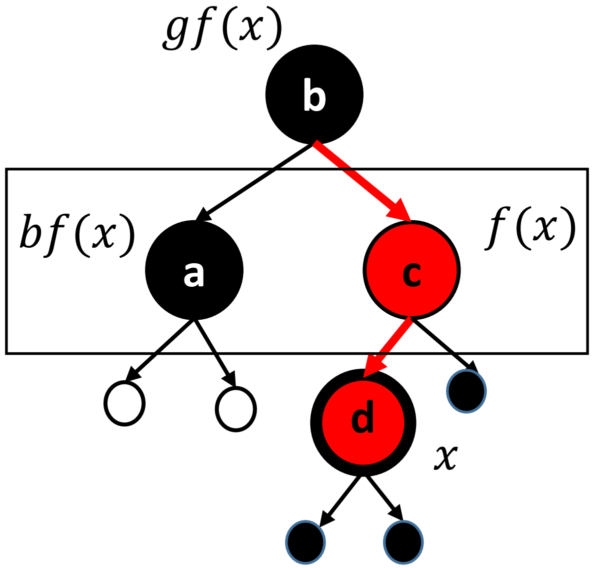
б)



в)



г)

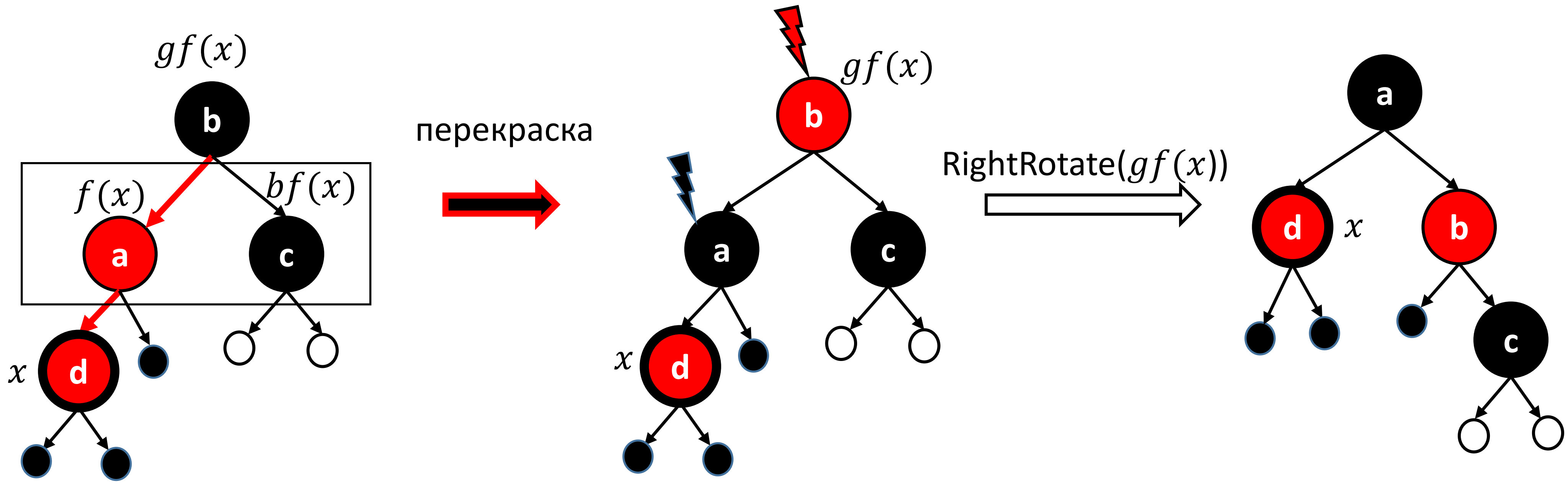


ФПМИ БГУ

2-й случай:

отец – красный , дядя – чёрный

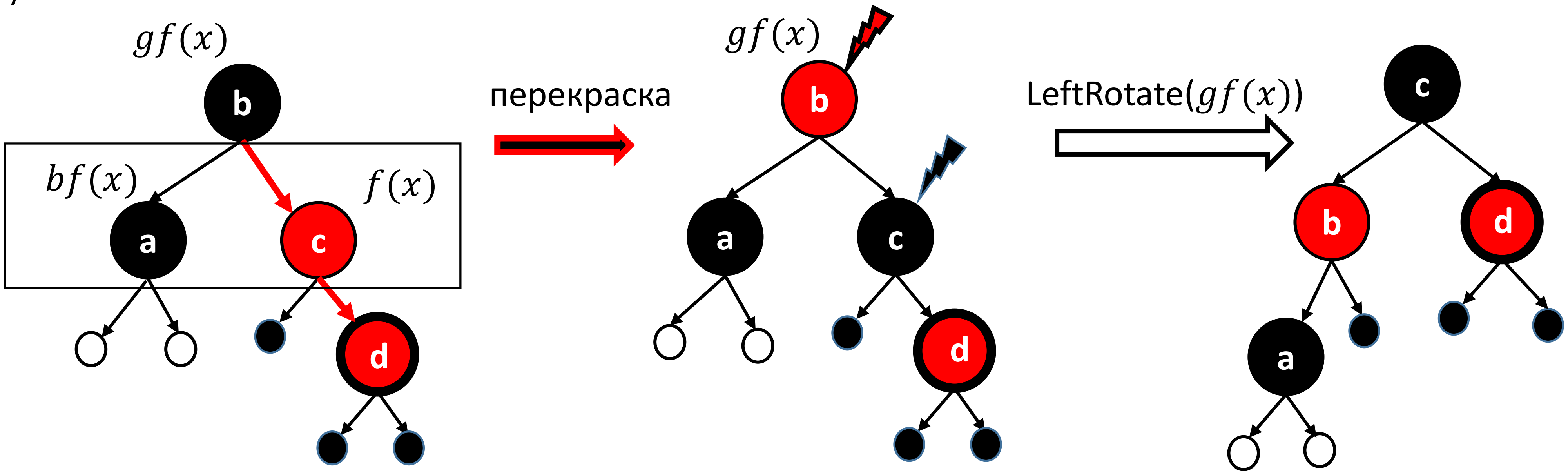
а)



RB-свойство восстановлено

<u>2-й случай</u>:
отец – красный , дядя – чёрный

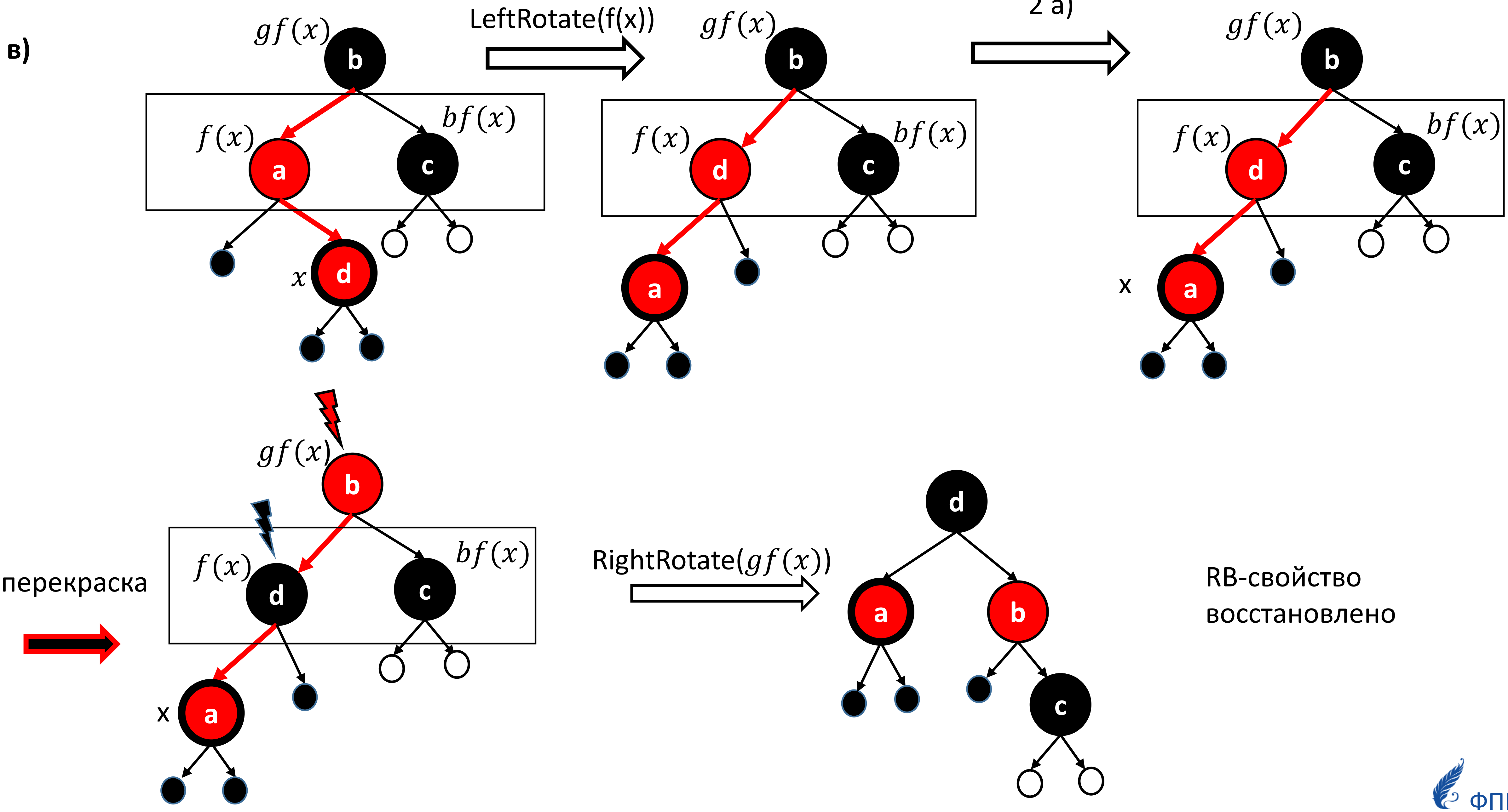
б)



RB-свойство
восстановлено

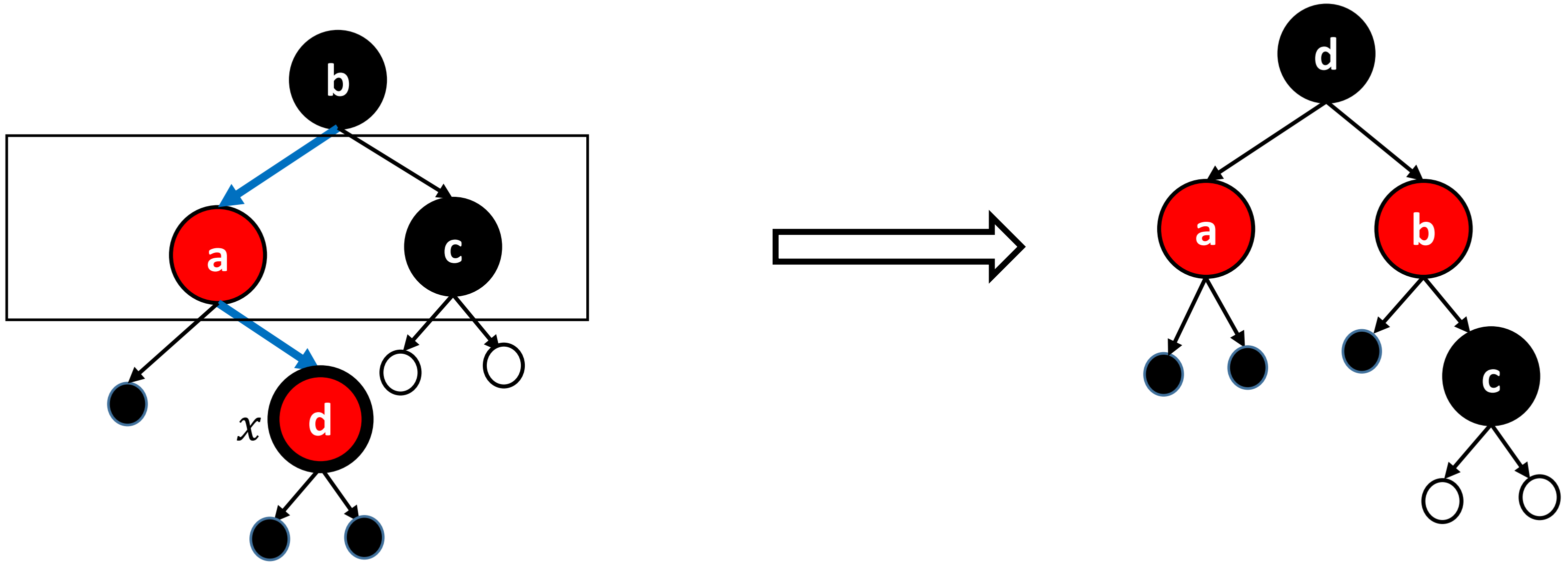
<u>2-й случай</u>:

отец – красный , дядя – чёрный



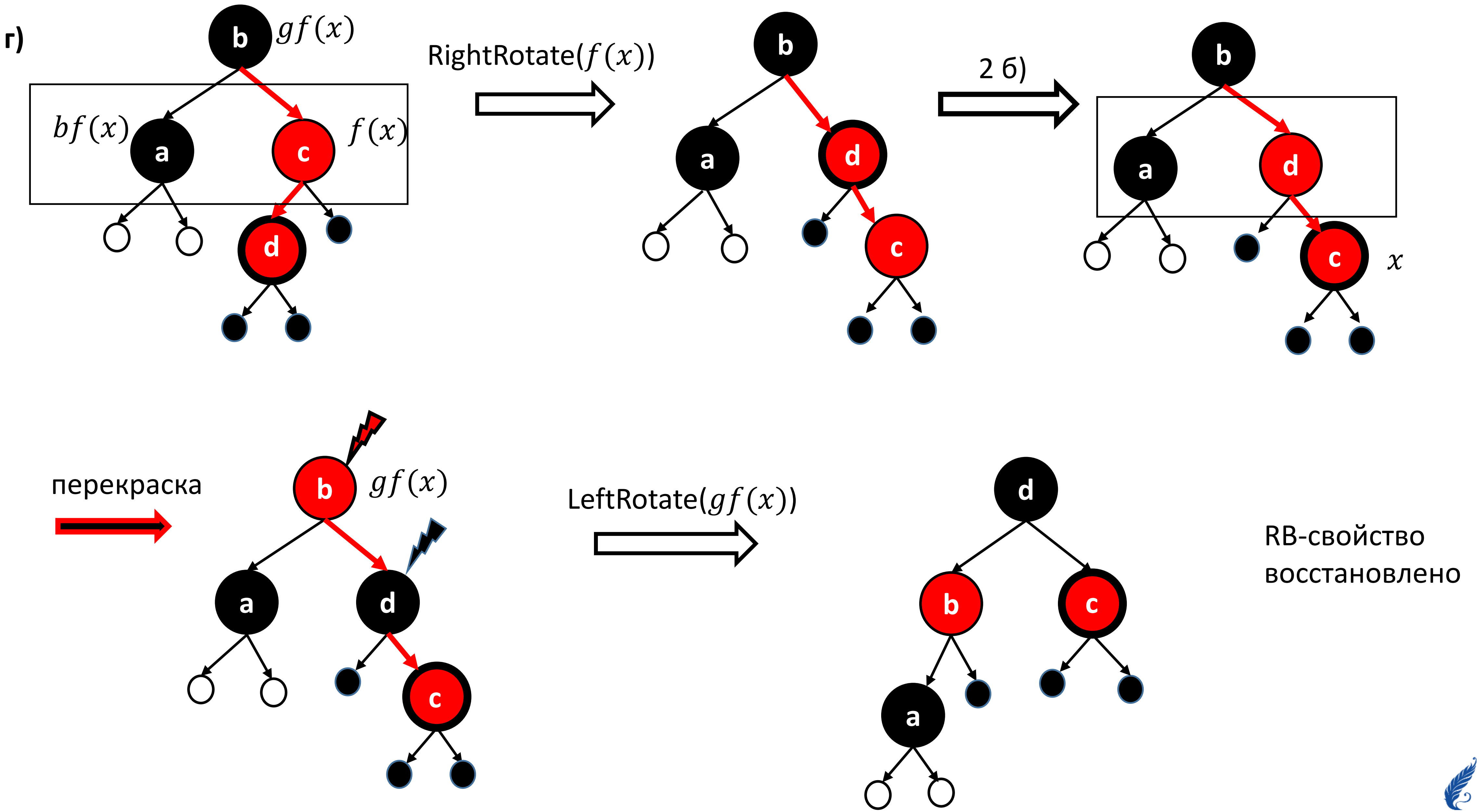
<u>2-й случай</u>:
красный , дядя – чёрный

в) итог



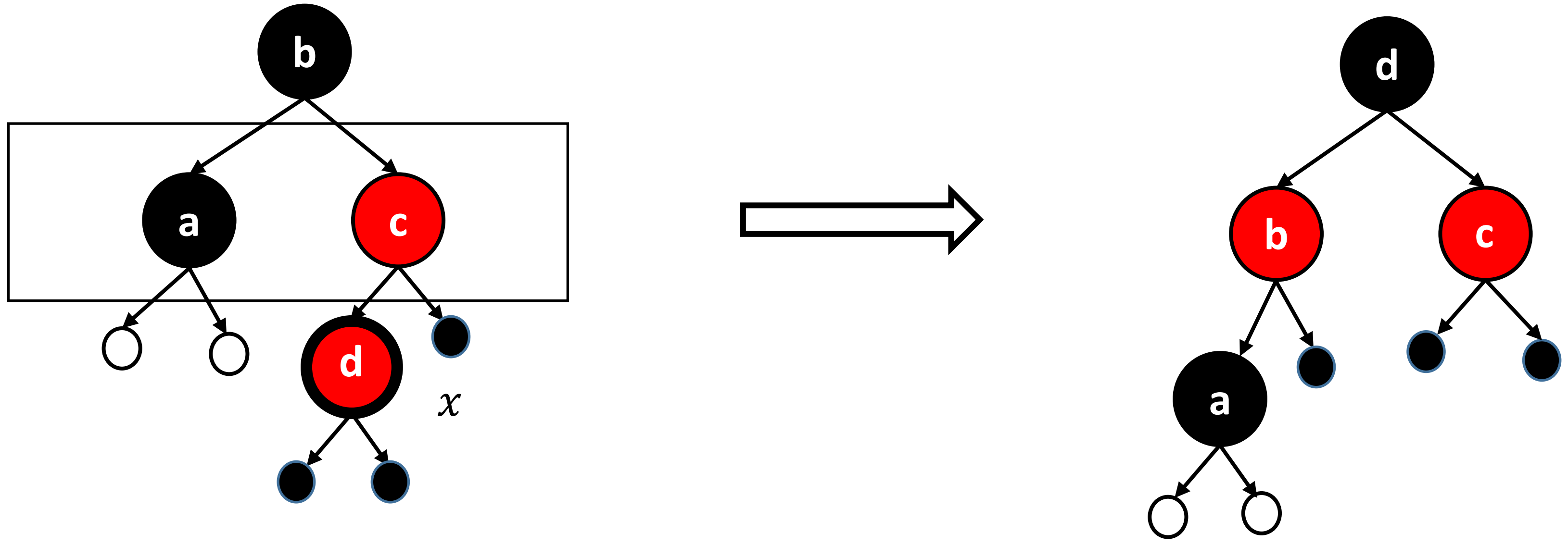
<u>2-й случай</u>:

отец – красный , дядя – чёрный

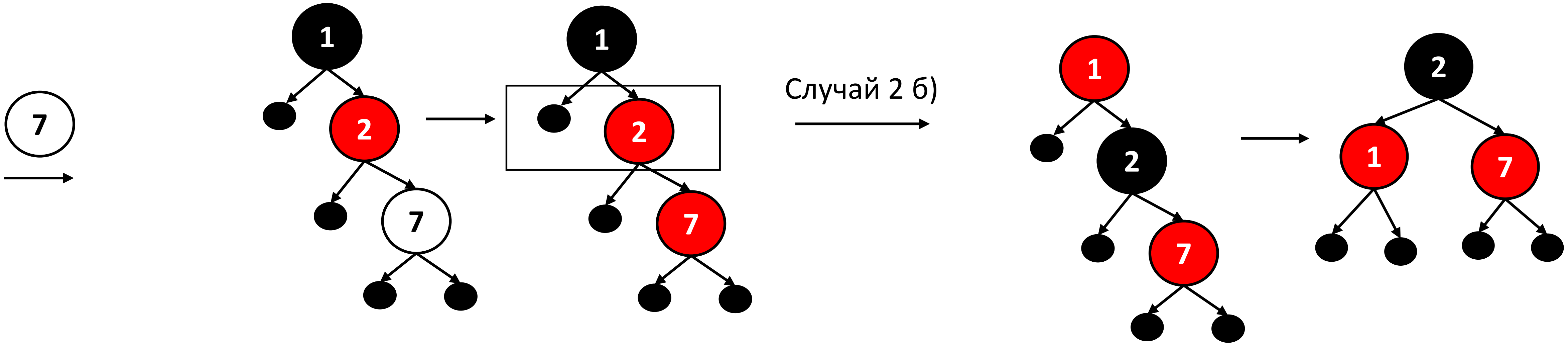


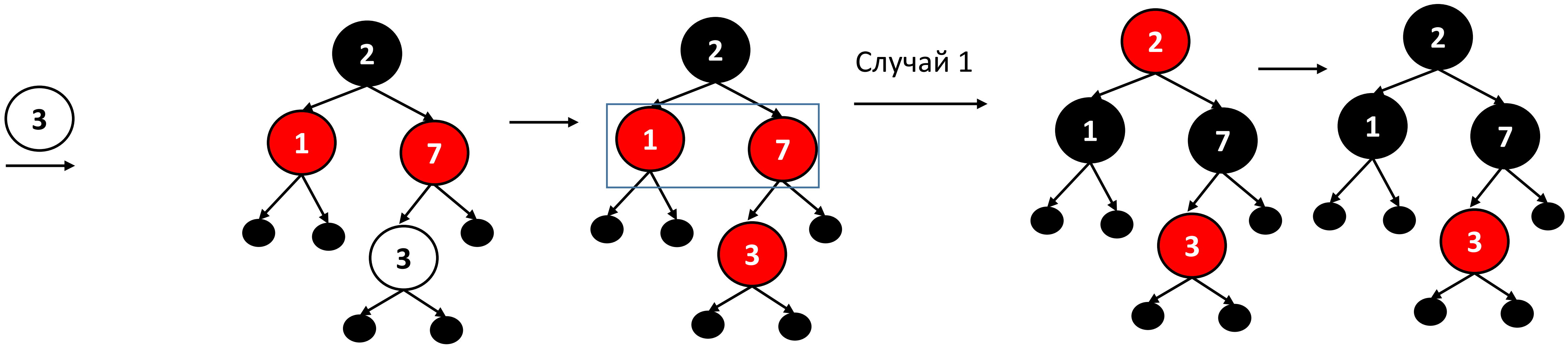
<u>2-й случай</u>:
отец – красный , дядя – чёрный

г) итог

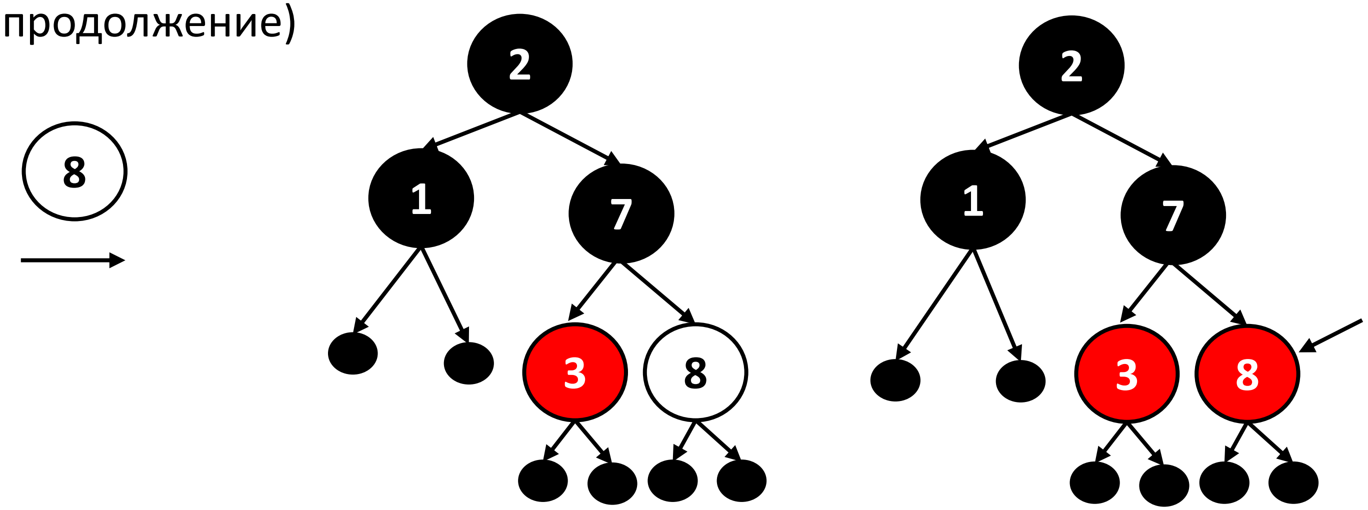


Пример (продолжение). Для последовательности чисел: 1, 2, 7, 3, 8, 14, 9 построить RB-дерево.

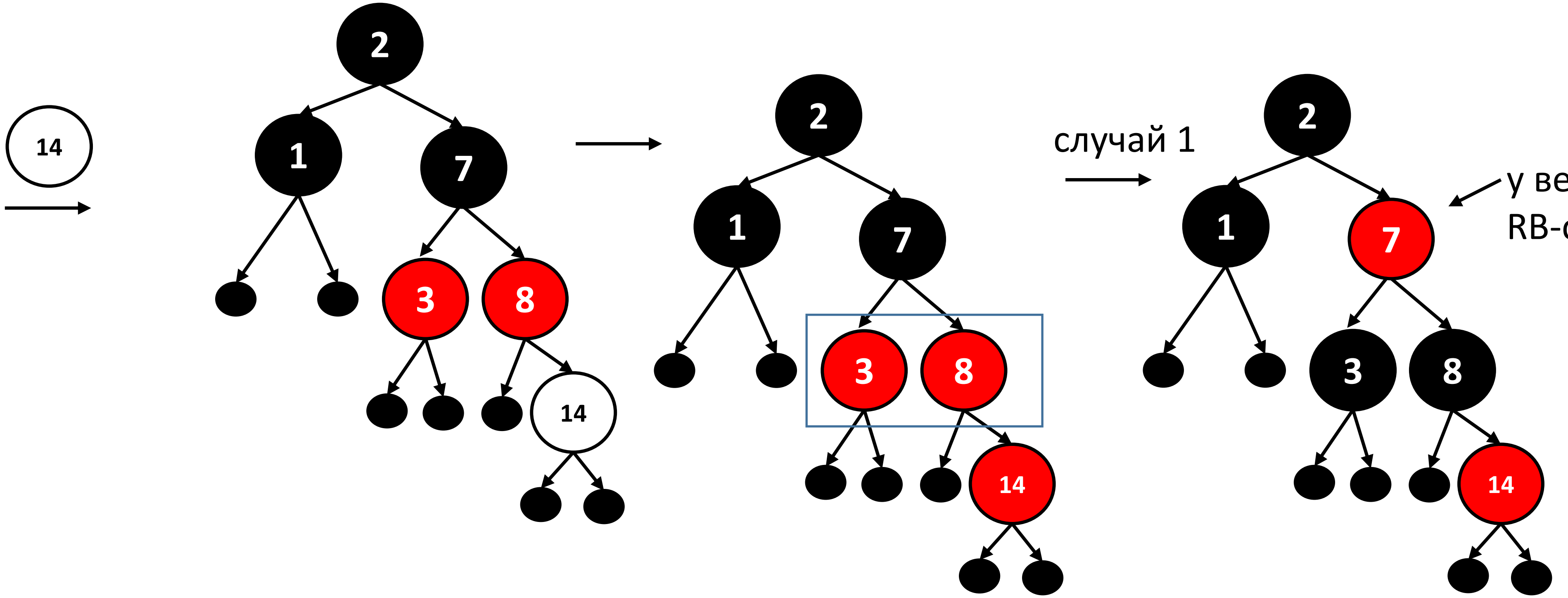




(продолжение)

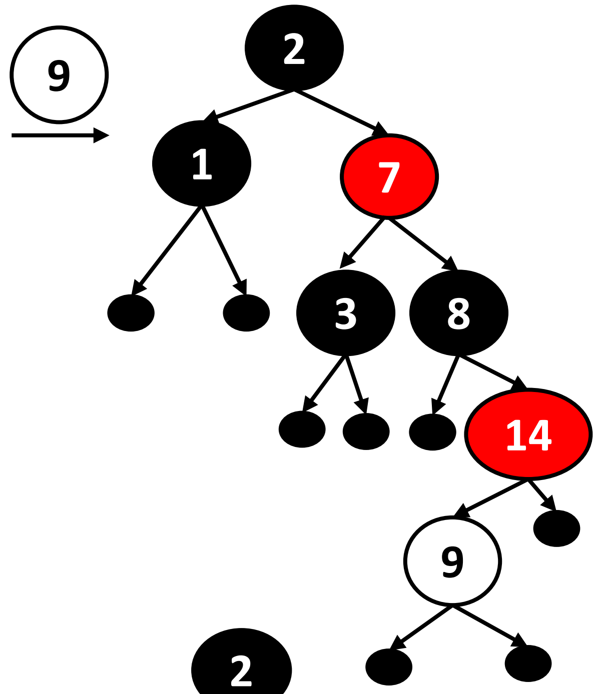


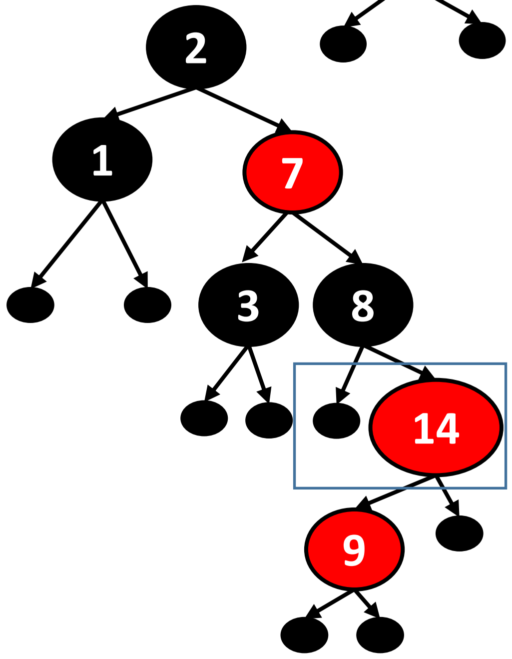
у вершины 8 отец - чёрный,
RB-свойства выполнены



у вершины 7 отец - чёрный,
RB-свойства выполнены

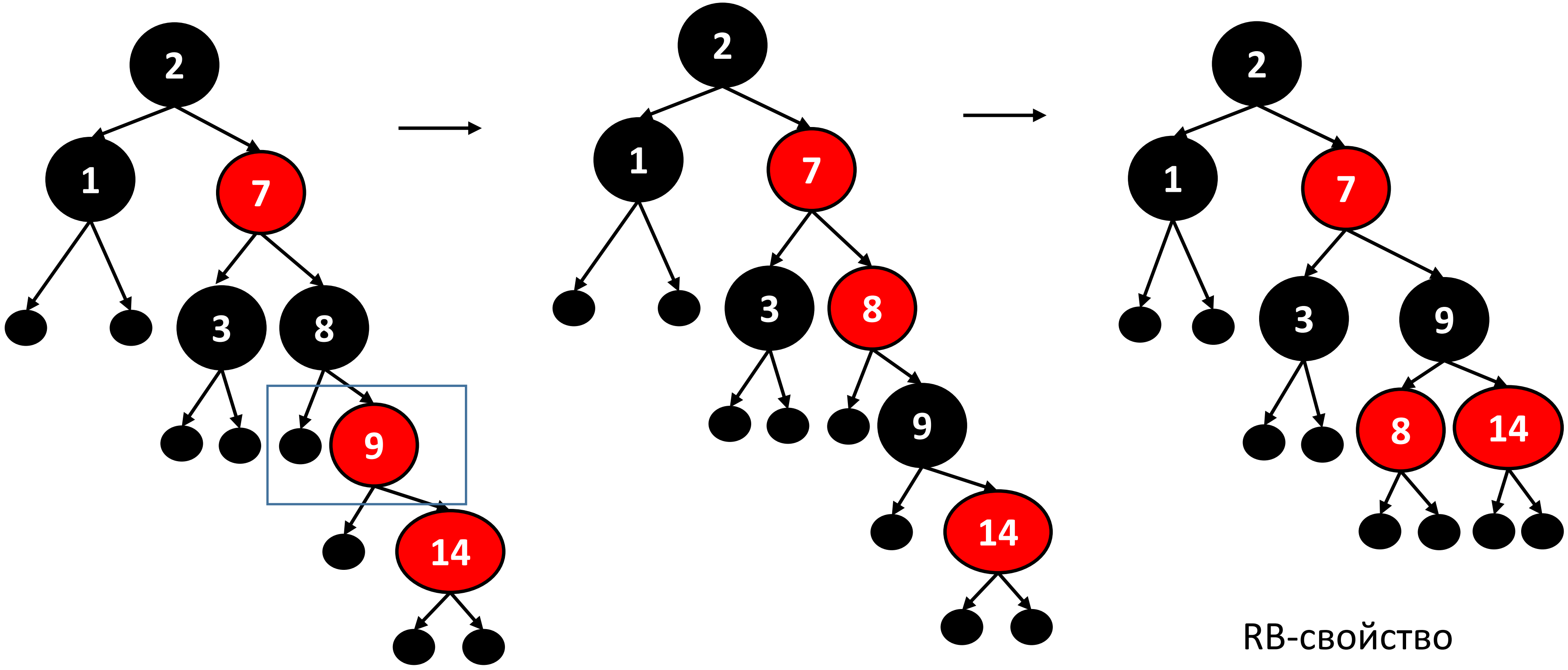
(продолжение)





случай 2 г)

восстановление RB-свойства



RB-свойство восстановлено

Добавление элемента

- поиск отца – $O(\log n)$
- добавление – $O(1)$
- перекрашивания – $O(\log n)$
- повороты (не более 2-х) – $O(1)$

Следовательно, время добавления элемента - $O(\log n)$.

Удаление

1. Удаляем вершину из дерева по аналогии с тем, как это делали в бинарном поисковом дереве.
2. Пусть $\boldsymbol{y}$ – фактически удалённая вершина.
3. Если удалённая вершина $\boldsymbol{y}$ имела **красный цвет**, то все RB-свойства будут выполняться и операция удаления элемента завершена.
4. Если удалённая вершина $\boldsymbol{y}$ имела **черный цвет**, то любой путь, через неё проходивший, теперь содержит на одну чёрную вершину меньше. Нарушается RB-свойство, которое требует, чтобы любой путь из корня в листья содержал одинаковое количество чёрных вершин. Восстановим RB-свойство.

Обозначения

- $\boldsymbol{y}$ – фактически удалённая вершина
- $\boldsymbol{x}$ – единственный ребёнок вершины $\boldsymbol{y}$ (если детей у вершины $\boldsymbol{y}$ не было, то $x = NULL$)
- $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = f(y)$
- вершину, которая может быть окрашена, как в красный, так и в чёрный цвет, будем обозначать на рисунках $\boldsymbol{r}/\boldsymbol{b}$

Если фактически удалённая вершина y имела **черный цвет**, то любой путь, через неё проходивший, теперь содержит на одну чёрную вершину меньше.

Поступим следующим образом:

- если вершина x - **красная**, то сделаем её **чёрной**, теперь все RB-свойства выполнены;
- если x - **чёрная**, то, будем при подсчёте числа чёрных вершин на пути от корня к листьям **считать её за две чёрные вершины**;

однако дерево не предполагает такие «двойные чёрные вершины», поэтому нужно выполнить процедуру, которая превращает полученное дерево в настоящее красно-чёрное дерево.

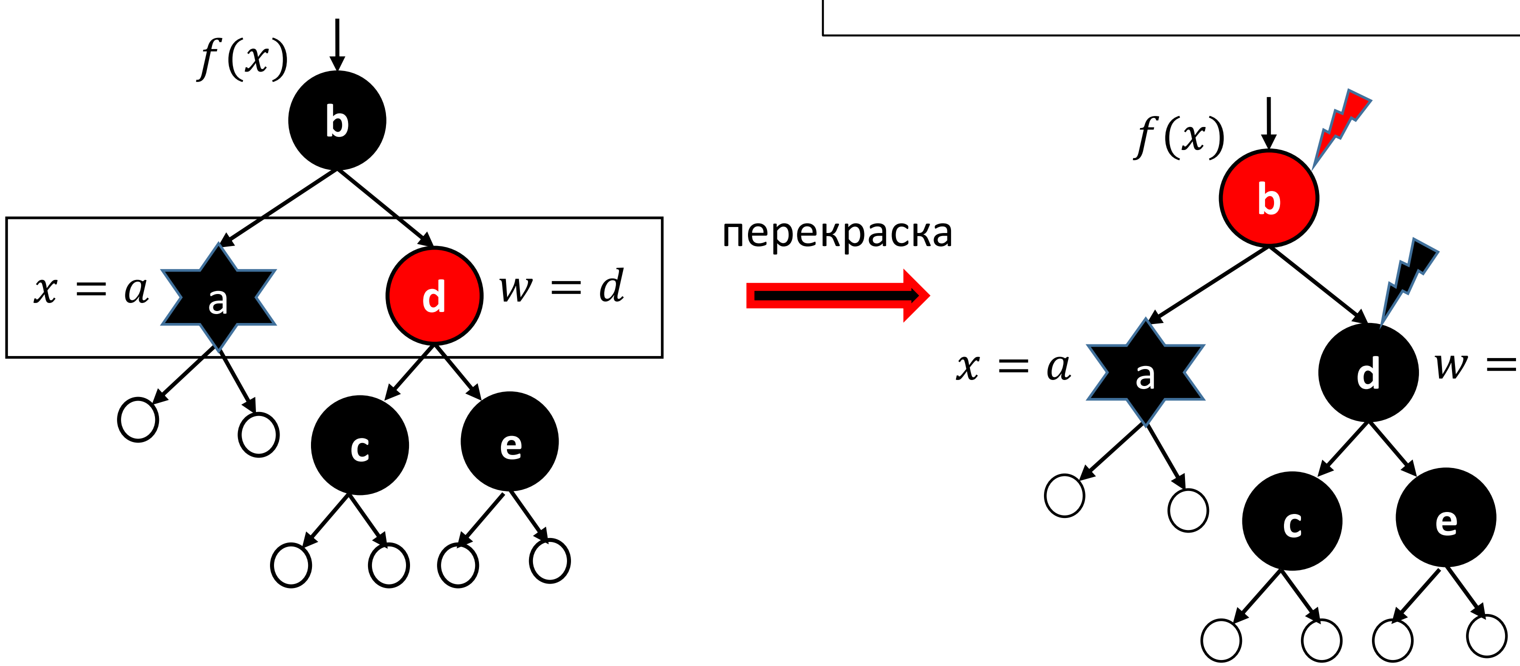
1-й случай
- x **– чёрный и является левым сыном своего отца** (ситуация правого сына выполняется симметрично),
- **брат w – красный**

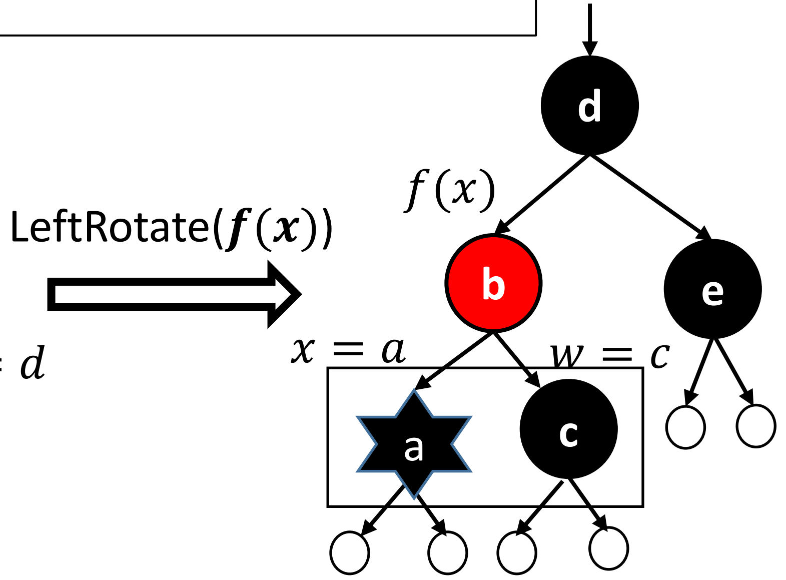
случай 2 перекраска и завершение

случай 3 перекраска и поворот

случай 4 (перекраска, поворот, завершение)

случай 4 (перекраска, поворот, завершение)



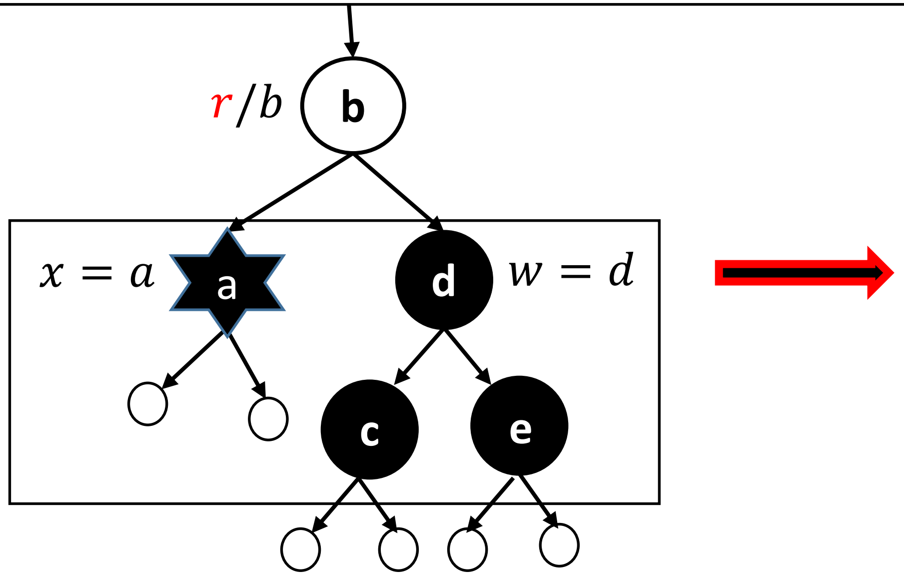


1) «новый брат» w вершины x – **чёрный**
2) вершину x считаем «**дважды чёрной**»,

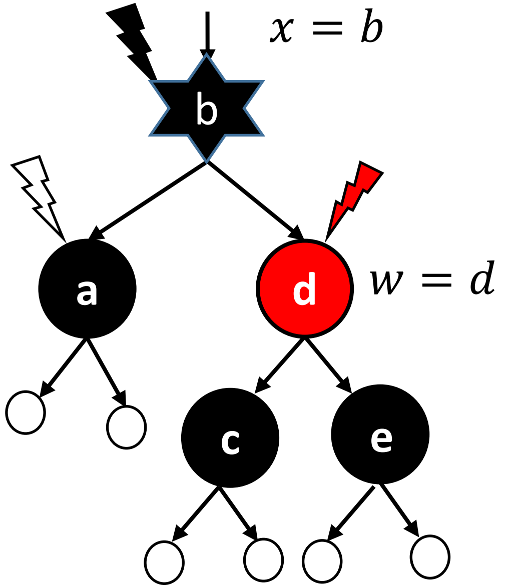
далее рассматриваются случаи в зависимости от того, какого цвета дети у вершины w (новый брат x)

2 случай (возможно повторение)

- ✓ $\boldsymbol{x}$ – «**дважды чёрный**» и является левым сыном своего отца,
- ✓ $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{left}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{right}\ (\boldsymbol{w})$ – **чёрные**

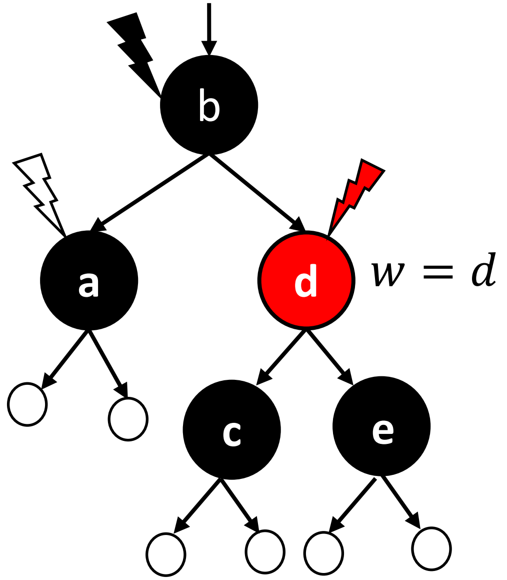


снятие «лишней» черной окраски



если вершина b была раньше чёрная, то она становится «дважды чёрной»;

продолжаем балансировку для вершины $\boldsymbol{x = b}$



если вершина b была раньше красная, то она становится чёрной;

RB-свойства выполнены;

3-й случай

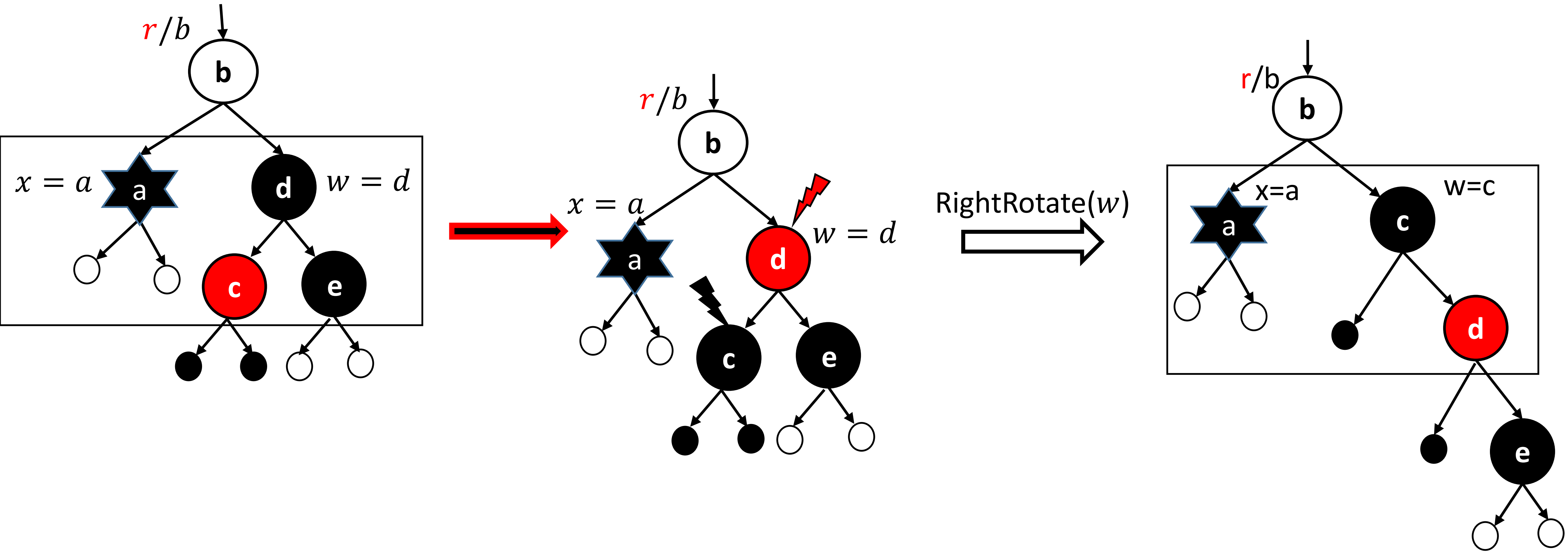
- ✓ $\boldsymbol{x}$ – «дважды чёрная»
- ✓ $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{right}\ (\boldsymbol{w})$ – чёрная
- ✓ $left(w)$ - красная

→

4-й случай

- ✓ $\boldsymbol{x}$ – «дважды чёрная»
- ✓ $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{left}\ (\boldsymbol{w})$ – чёрная
- ✓ $right(w)$ - красная

→ **завершение**



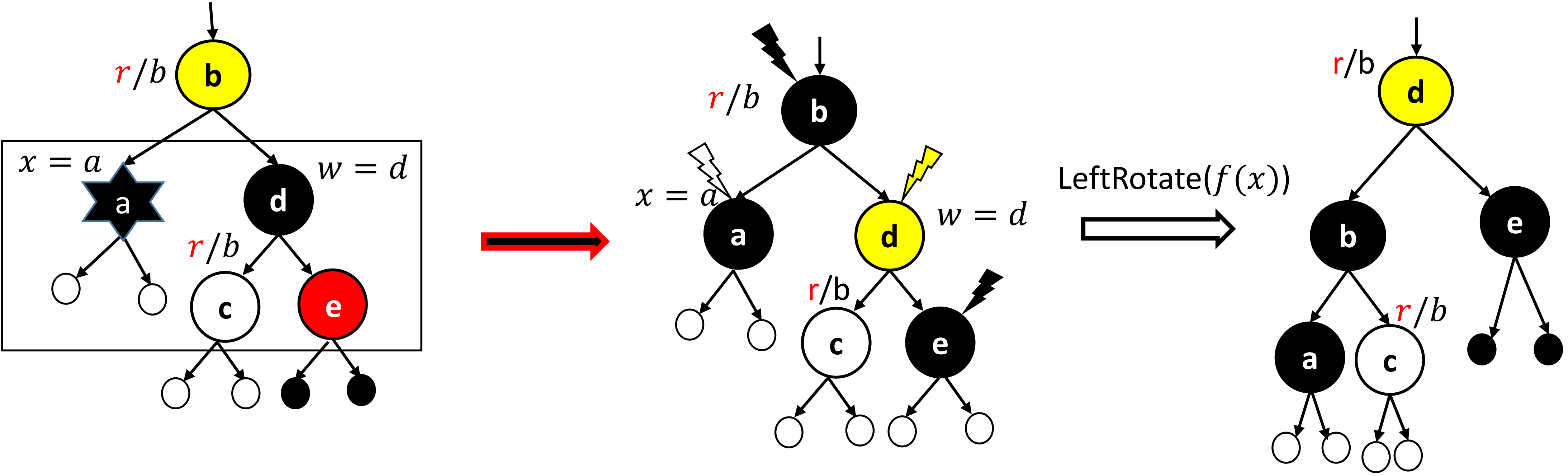
4 случай

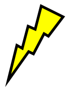
✓ $\boldsymbol{x}$ – «дважды чёрная»

✓ $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{left}\ (\boldsymbol{w})$ – чёрная

✓ $right(w)$ - красная

→ **завершение**



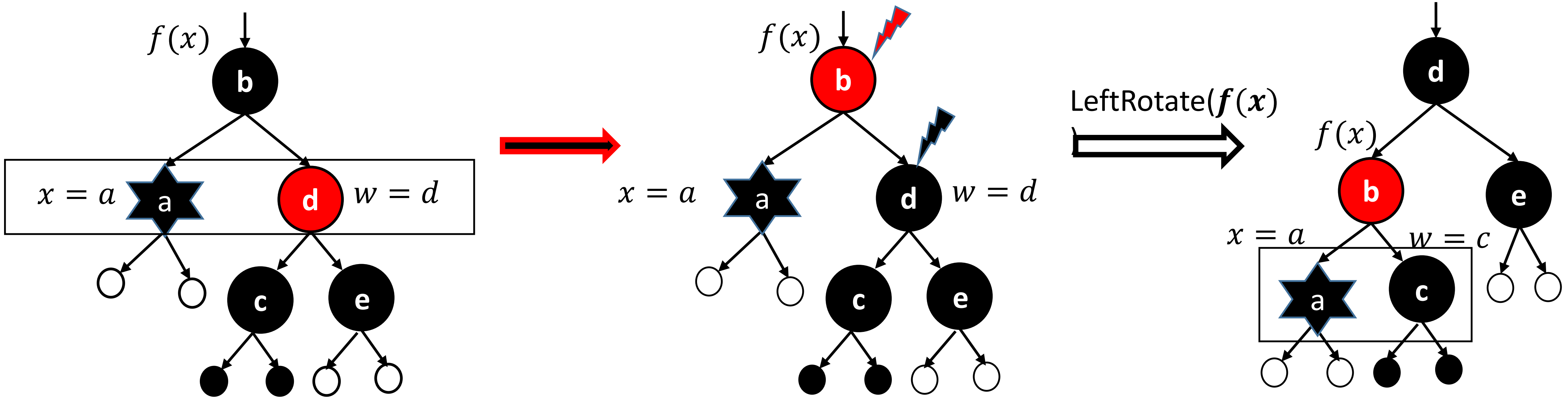


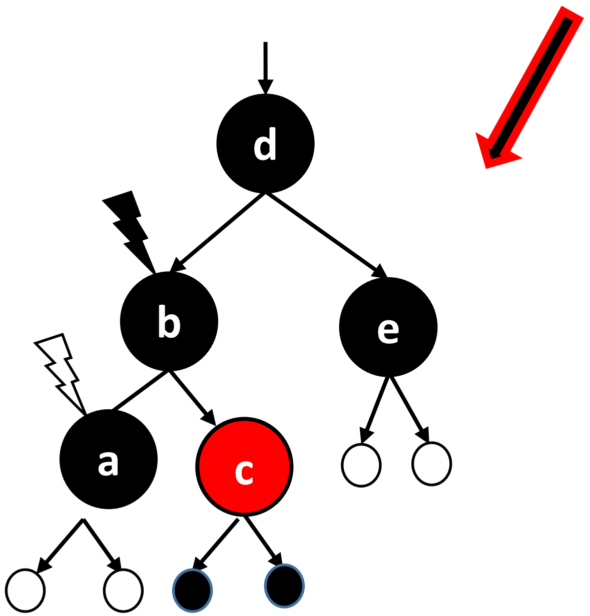
вершина d красится в тот же цвет, который был изначально у $f(x)$ (вершины b)

RB – свойства выполнены

1-й случай (продолжение) ⟶ если выполняется сведение к случаю 2 и завершение

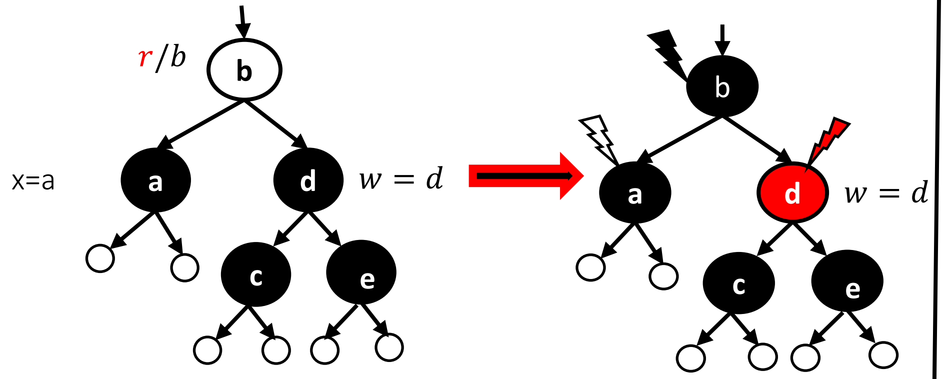
✓ если у нового брата вершины x оба сына - чёрные





RB - свойства выполнены

2-й случай



Удаление

Случаи 1, 3 и 4.

Выполняются за время $\mathbf{O}(\mathbf{1})$ (выполняется самое большое 3 вращения).

Случай 2.

При каждом выполнении этого случая цикл возможно продолжит свою работу. Одна итерация цикла выполняется за время $\mathbf{O}(\mathbf{1})$, но при каждом повторении указатель на вершину x перемещается вверх по дереву, никакие вращения при этом не происходят, поэтому количество повторений случая 2 ограничено высотой дерева $h = \mathbf{O}(\log \boldsymbol{n})$.

Таким образом время на восстановление RB-свойств после выполнения операции удаления элемента - $\mathbf{O}(\log \boldsymbol{n})$.

Удаление

- поиск удаляемой вершины – $O(\log n)$
- непосредственное удаление вершины – $O(\log n)$
- все перекрашивания - $O(\log n)$
- повороты (будет выполнено не более 3-х) – $O(1)$

Следовательно, время удаления элемента - $O(\log n)$.

Высота

АВЛ

$$h < 1{,}44 \cdot \log(n+2) - 0{,}328$$

Красно-чёрное

$$h \le 2 \cdot \log(n+1)$$

Высота АВЛ-дерева меньше, чем высота красно-чёрного дерева (на 38%).

Добавление элемента

АВЛ

- ✓ поиск отца для добавляемой вершины – O(h)
- ✓ непосредственное добавление вершины –O(1)
- ✓ поиск разбалансированной вершины - O(h)
- ✓ повороты (будет выполнен 1 поворот) – O(1)

Красно-чёрное

- ✓ поиск отца для добавляемой вершины – O(h)
- ✓ непосредственное добавление вершины –O(1)
- ✓ перекрашивания - O(h)
- ✓ повороты (будет выполнено не более 2-х) – O(1)

Удаление элемента

АВЛ

- ✓ поиск удаляемой вершины – O(h)
- ✓ непосредственное удаление –O(1)
- ✓ поворот – O(1)
- ✓ повторная балансировка (повороты) - O(h)

Красно-чёрное

- ✓ поиск удаляемой вершины – O(h)
- ✓ непосредственное удаление –O(1)
- ✓ повороты (не более 3-х) - O(1)
- ✓ перекрашивания - O(h)

Тесты показывают, что АВЛ-деревья быстрее красно-чёрных во всех операциях

https://radius-server.livejournal.com/598.html

http://nathanbelue.blogspot.com/2012/05/red-black-versus-avl.html

1. Структуры данных и алгоритмы: теория и практика: учеб. пособие / В.М. Котов, Е.П. Соболевская. Мн.: БГУ. 2004.– С.141–153.
2. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен [и др.] – М.: Вильямс, 2005. – С 336 –356.

Спасибо за внимание!