

MAT 4501
**INFÉRENCE BAYÉSIENNE DANS DES MODÈLES
MARKOVIENS**



**Filtrage de Kalman : application à la poursuite
de cible mobile**



Eloi CAMPAGNE



Saad AMMARI

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

1	Poursuite en coordonnées cartésiennes	1
1.1	Introduction	1
1.2	Implémentation du Filtre de Kalman sur données synthétiques	2
1.3	Application	5
2	Poursuite Angle-Distance	9
2.1	Une extension à la poursuite de plusieurs cibles	13

Table des figures

1.1	Trajectoire réelle et observée	2
1.2	Trajectoires réelles, observées et estimées par le filtre de Kalman (bruit 1)	3
1.3	Trajectoires réelles, observées et estimées par le filtre de Kalman (bruit 2)	3
1.4	Trajectoires réelles, observées et estimées par le filtre de Kalman (bruit 3)	4
1.5	Trajectoires réelles, observées et estimées par le filtre de Kalman (bruit 4)	4
1.6	Trajectoires réelles, observées et estimées des avions par le filtre de Kalman (bruit 1)	6
1.7	Trajectoires réelles, observées et estimées des avions par le filtre de Kalman (bruit 2)	6
1.8	Trajectoires réelles, observées et estimées des avions par le filtre de Kalman (bruit 3)	7
1.9	Trajectoires réelles, observées et estimées des avions par le filtre de Kalman (bruit 4)	7
1.10	Trajectoires réelles, observées et estimées des avions par le filtre de Kalman avec une adaptation des bruits selon l'avion	8
2.1	Filtre de Kalman étendu (bruit 1)	11
2.2	Filtre de Kalman étendu (bruit 2)	11
2.3	Filtre de Kalman étendu (bruit 3)	12
2.4	Filtre de Kalman étendu (bruit 4)	12

2.5	Filtre de Kalman étendu (bruit 5)	12
2.6	Filtre de Kalman étendu (bruit 6)	12

Liste des tableaux

1.1	Erreur moyenne en fonction des bruits appliqués	3
1.2	Erreur moyenne en fonction des avions et du bruit appliqué	5
2.1	Erreur moyenne en fonction des bruits appliqués	11

Poursuite en coordonnées cartésiennes

1.1 Introduction

L'**objectif** de ce TP est d'implémenter le filtre de Kalman afin de poursuivre une cible mobile à partir de mesures bruitées.

On utilisera les notations suivantes :

- $\hat{x}_{k+1|k}$ est l'état $k + 1$ prédit à l'instant k ,
- $\hat{x}_{k|k}$ est l'état à l'instant k ,
- y_k est l'observation à l'instant k ,
- \mathbf{F} est la matrice de transition,
- \mathbf{H} est la matrice des observations,
- \mathbf{Q} est le bruit parasite,
- \mathbf{R} est le bruit d'observation,
- $P_{k+1|k}$ est la matrice de prédiction de la covariance,
- $P_{k+1|k+1}$ est la matrice de covariance mise à jour,
- \mathbf{S} est la matrice de covariance de l'innovation,
- \mathbf{K} est le gain de Kalman

Le filtre de Kalman permet d'estimer $\hat{x}_{k+1|k+1}$ et $P_{k+1|k+1}$ à partir de $\hat{x}_{k|k}$ et $P_{k|k}$. Il se décompose en 2 étapes : la **prédiction** et la **mise à jour**.

❶ Étape de prédiction

$$\hat{x}_{k+1|k} = \mathbf{F}\hat{x}_{k|k}$$

$$P_{k+1|k} = \mathbf{F}P_{k|k}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}$$

❷ Étape de mise à jour

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + \mathbf{K} \left(y_{k+1} - \mathbf{H}\hat{x}_{k+1|k} \right)$$

$$P_{k+1|k+1} = (\mathbf{I}_{4 \times 4} - \mathbf{K}\mathbf{H})P_{k+1|k}$$

où

$$\mathbf{K} = P_{k+1|k}\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{-1}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}P_{k+1|k}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}$$

1.2 Implémentation du Filtre de Kalman sur données synthétiques

Dans un premier temps, nous créons une trajectoire de cible grâce à laquelle nous pouvons extraire des observations. Ces observations sont en réalité des points de la trajectoire auxquels on a rajouté un bruit d'observation, ici $\sigma_Q = 1$ et $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 30$. La FIGURE 1.1 expose la vraie trajectoire ainsi que ses observations associées.

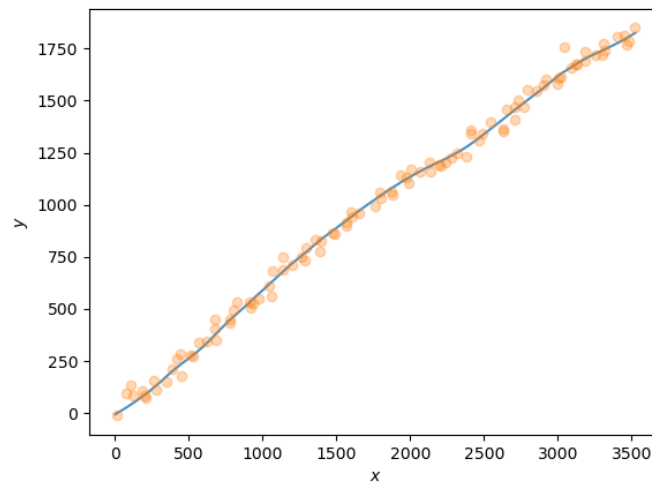


FIGURE 1.1 – Trajectoire réelle et observée

Par la suite, nous implémentons le filtre de Kalman à partir des équations décrites dans l'introduction. Afin de comprendre l'effet du bruit sur l'estimation de la trajectoire, nous calculons les erreurs moyennes d'estimation pour différents bruits (ces bruits sont définis dans la TABLE 1.1).

Bruit	σ_Q	σ_{p_x}	σ_{p_y}	Erreur moyenne
1	1	30	30	20
2	100	30	30	98
3	1	100	100	46
4	1	1000	1000	173

TABLE 1.1 – Erreur moyenne en fonction des bruits appliqués

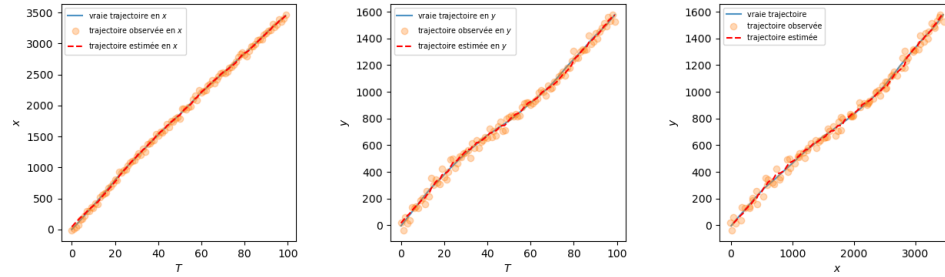


FIGURE 1.2 – Trajectoires réelles, observées et estimées par le filtre de Kalman (bruit 1)

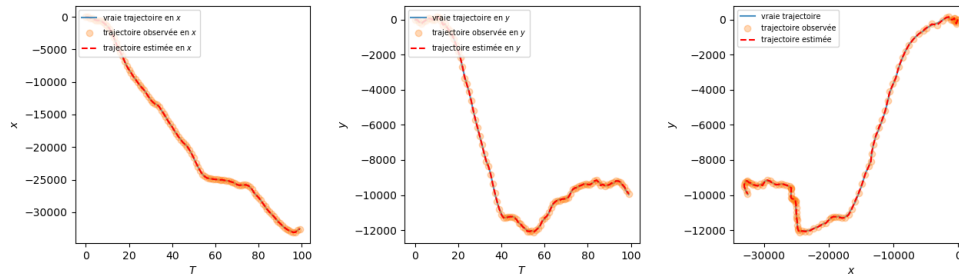


FIGURE 1.3 – Trajectoires réelles, observées et estimées par le filtre de Kalman (bruit 2)

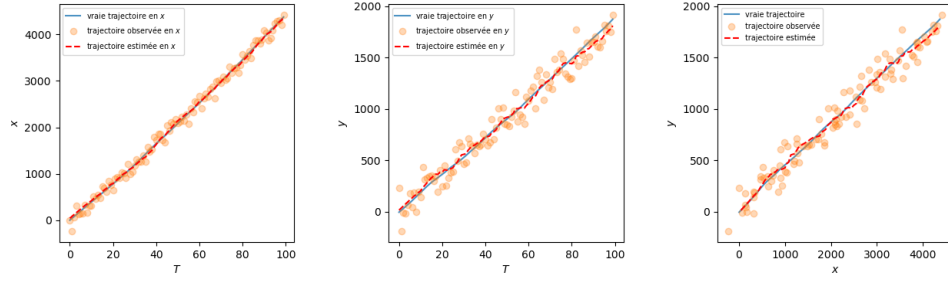


FIGURE 1.4 – Trajectoires réelles, observées et estimées par le filtre de Kalman (bruit 3)

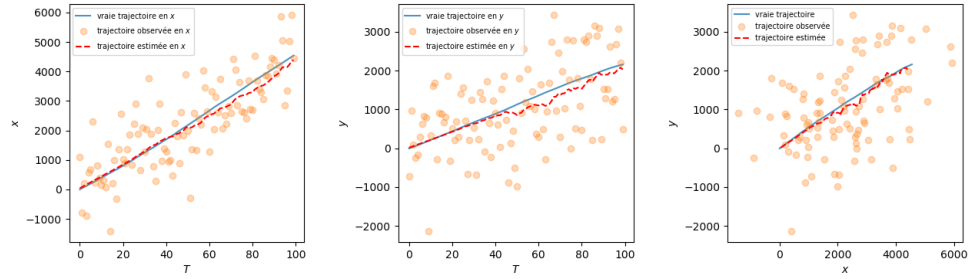


FIGURE 1.5 – Trajectoires réelles, observées et estimées par le filtre de Kalman (bruit 4)

Globalement, on remarque que l'erreur moyenne est d'autant plus importante que les différents bruits sont importants. On peut également noter que l'erreur sur la trajectoire est d'autant plus importante que σ_{p_x} et σ_{p_y} sont grands, ce qui est moins vrai lorsque σ_Q l'est. C'est finalement assez logique puisque σ_{p_x} et σ_{p_y} sont des bruits de mesure et qu'ils affectent directement les observations, et donc l'estimation de la trajectoire.

Il est intéressant de remarquer que, bien que l'erreur moyenne est importante pour le bruit 2, l'erreur sur la trajectoire est relativement faible (cf. FIGURE 1.3). Cela vient du fait que l'erreur moyenne est obtenue en sommant les distances entre les différentes composantes du vecteur x et du vecteur x estimé, et que l'erreur sur la vitesse (qui ne s'observe pas sur les graphiques) est d'autant plus importante que σ_Q est élevé.

1.3 Application

Nous pouvons dès lors appliquer le filtre de Kalman à un exemple concret, comme par exemple la prédiction de la trajectoire d'un avion. Cependant, un problème vient s'ajouter à cette application : les observations peuvent être incomplètes en ce sens qu'un observateur peut perdre sa cible de vue si celle-ci passe derrière un obstacle (un avion peut être inobservable lorsqu'il passe derrière un nuage). Une des deux étapes du filtre n'est donc pas possible dans la pratique : la mise à jour. La meilleure estimation de x_{k+1} ne peut pas prendre en compte l'observation y_{k+1} , il faut donc poser $\hat{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{F}\hat{x}_{k|k}$.

Nous pouvons à présent implémenter le filtre de Kalman en prenant en compte la contrainte des valeurs manquantes, et comparer les erreurs moyennes obtenues sur les différentes trajectoires.

Avion	Bruit	Erreur moyenne
Ligne	1	57
Voltige	1	70
Ligne	2	98
Voltige	2	97
Ligne	3	102
Voltige	3	176
Ligne	4	757
Voltige	4	584

TABLE 1.2 – Erreur moyenne en fonction des avions et du bruit appliqué

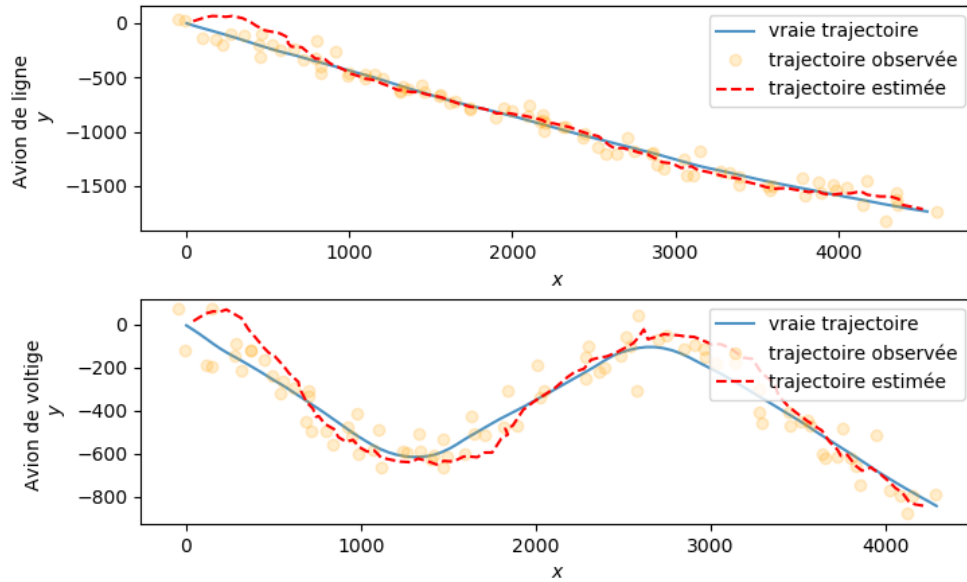


FIGURE 1.6 – Trajectoires réelles, observées et estimées des avions par le filtre de Kalman (bruit 1)

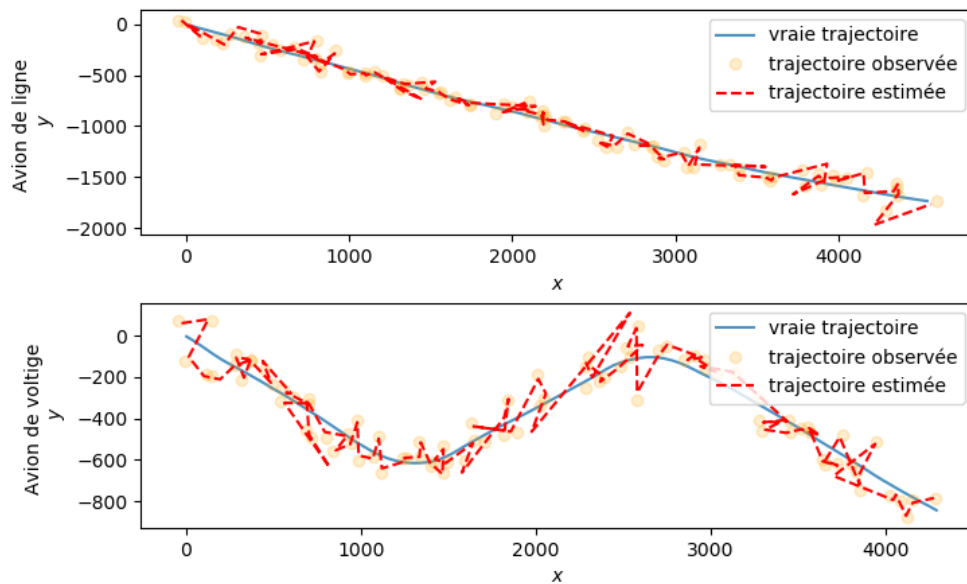


FIGURE 1.7 – Trajectoires réelles, observées et estimées des avions par le filtre de Kalman (bruit 2)

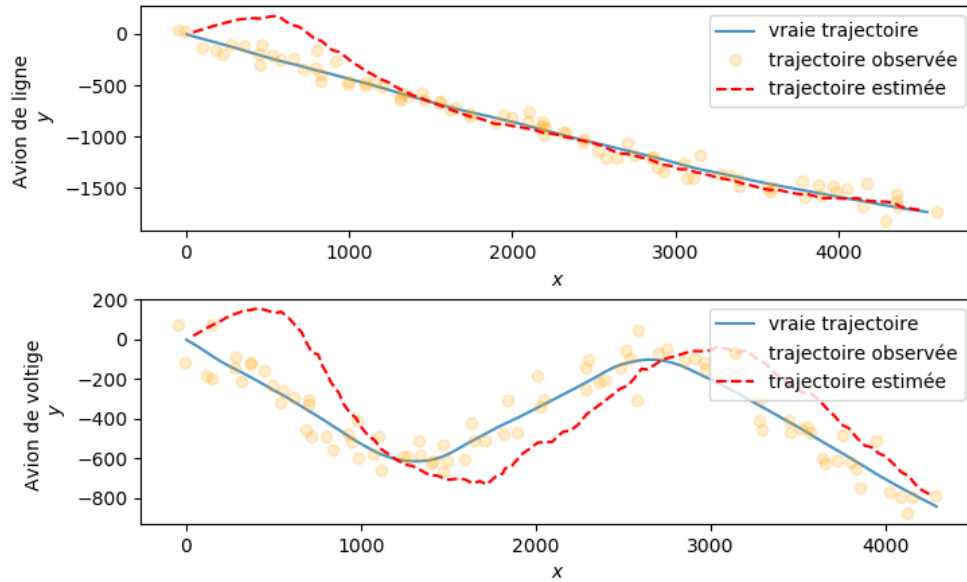


FIGURE 1.8 – Trajectoires réelles, observées et estimées des avions par le filtre de Kalman (bruit 3)

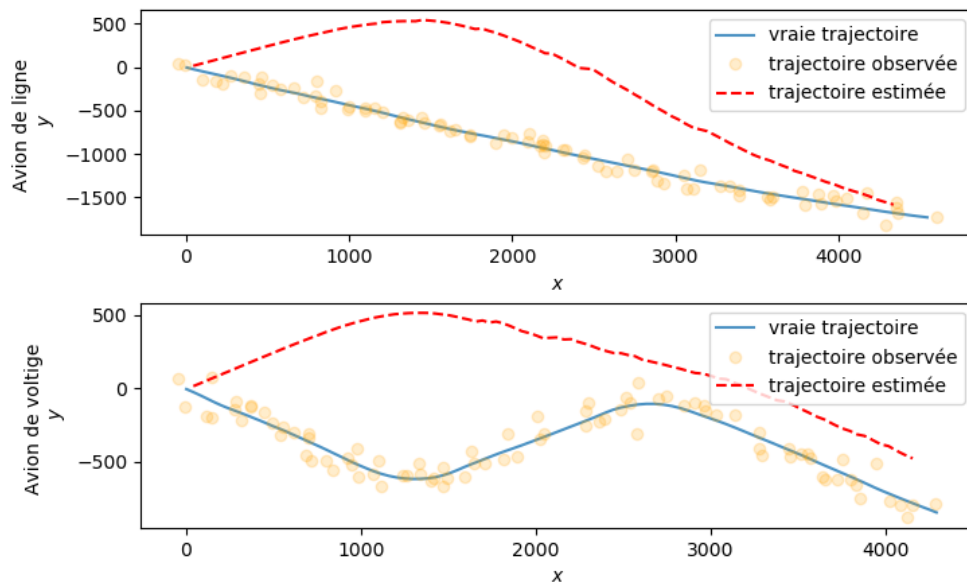


FIGURE 1.9 – Trajectoires réelles, observées et estimées des avions par le filtre de Kalman (bruit 4)

On remarque tout d'abord que lorsque σ_Q est faible, l'écart entre les erreurs d'estimation des trajectoires des différents avions est plus important que lorsque σ_Q est important. Ceci s'explique du fait que la trajectoire de l'avion de ligne est rectiligne, et donc plutôt stable, traduisant un bruit de processus faible. On remarque aussi que lorsque l'on augmente les bruits de mesure (σ_{p_x} et σ_{p_y}), la trajectoire estimée est moins "chaotique", mais celle-ci a tendance à s'éloigner de la véritable trajectoire.

Au vu de ces observations, il pourrait être intéressant d'estimer la trajectoire de l'avion de ligne avec un bruit de processus faible, contre un bruit de processus un peu plus élevé pour l'avion de voltige. Aussi, il faudrait probablement prendre des bruits de mesure tels que la trajectoire ne soit pas chaotique, mais qui resterait néanmoins proche de la véritable trajectoire. On peut donc prendre pour l'**avion de ligne** $\sigma_Q = 2$, $\sigma_{p_x} = 120$ et $\sigma_{p_y} = 20$; pour l'**avion de voltige** $\sigma_Q = 4$, $\sigma_{p_x} = 120$ et $\sigma_{p_y} = 20$. L'erreur obtenue est de 44 pour l'avion de ligne, contre 53 pour l'avion de voltige, ce qui est meilleur que pour les bruits précédents.

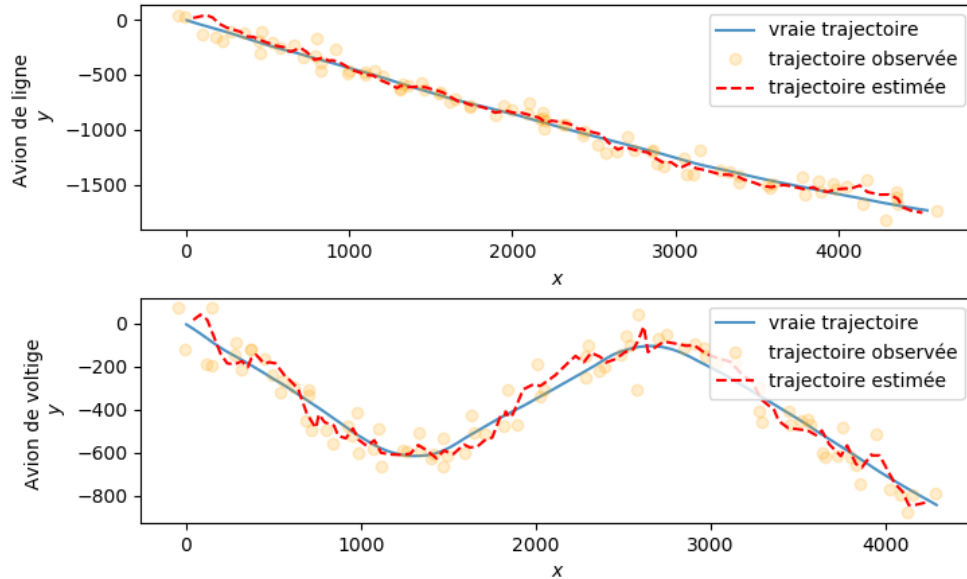
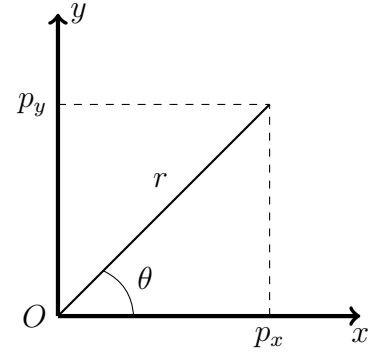


FIGURE 1.10 – Trajectoires réelles, observées et estimées des avions par le filtre de Kalman avec une adaptation des bruits selon l'avion

Poursuite Angle-Distance

Dans certaines applications, il est plus commode d'enregistrer la position de la cible avec ses coordonnées polaires et non cartésiennes, ceci entraînant néanmoins des non-linéarités.

Représentons la situation par un **schéma** :



En coordonnées polaires, on a $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) \end{pmatrix}$: on peut donc remplacer $\mathbf{H}x_k$

par $\begin{pmatrix} \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) \end{pmatrix}$ et on en déduit la loi de $g_k(y_k|x_k)$ donnée par :

$$y_k = \begin{pmatrix} \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) \end{pmatrix} + v_k, \quad \text{où } v_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{2 \times 1}, \mathbf{R})$$

Ici, le système n'est pas linéaire, ce qui signifie qu'il n'est pas possible d'appliquer le filtre de Kalman à chaque instant pour estimer le vecteur d'état x . Cependant, on peut toujours approcher les équations de Kalman localement grâce à la formule de Taylor au premier ordre.

On pose, pour un instant k , $y_k = h(x_k) + v_k$, soit écrit autrement :

$$y_k = \begin{pmatrix} h_1(x_k) \\ h_2(x_k) \end{pmatrix} + v_k, \quad \text{où } x_k = \begin{pmatrix} p_x^k \\ \dot{p}_x^k \\ p_y^k \\ \dot{p}_y^k \end{pmatrix}$$

Pour linéariser les équations, nous devons remplacer la matrice des observations \mathbf{H} par la Jacobienne $\tilde{\mathbf{H}}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k|k-1}}$ définie à tout instant. En théorie, il faudrait aussi remplacer la matrice de transition \mathbf{F} par la Jacobienne $\tilde{\mathbf{F}}_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k|k-1}, u_k}$ (mais dans le cadre de ce TP, nous n'avons besoin que de $\tilde{\mathbf{H}}_k$). Il vient donc :

$$\tilde{\mathbf{H}}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial p_x^k} & \frac{\partial h_1}{\partial \dot{p}_x^k} & \frac{\partial h_1}{\partial p_y^k} & \frac{\partial h_1}{\partial \dot{p}_y^k} \\ \frac{\partial h_2}{\partial p_x^k} & \frac{\partial h_2}{\partial \dot{p}_x^k} & \frac{\partial h_2}{\partial p_y^k} & \frac{\partial h_2}{\partial \dot{p}_y^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_x^k}{\sqrt{p_x^{k2} + p_y^{k2}}} & 0 & \frac{p_y^k}{\sqrt{p_x^{k2} + p_y^{k2}}} & 0 \\ -\frac{p_y^k}{p_x^{k2} + p_y^{k2}} & 0 & \frac{p_x^k}{p_x^{k2} + p_y^{k2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, l'équation (2) se réécrit comme suit :

$$y_k = \begin{pmatrix} \sqrt{p_x^{k2} + p_y^{k2}} \\ \arctan\left(\frac{p_y^k}{p_x^k}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{p_x^k}{\sqrt{p_x^{k2} + p_y^{k2}}} & 0 & \frac{p_y^k}{\sqrt{p_x^{k2} + p_y^{k2}}} & 0 \\ -\frac{p_y^k}{p_x^{k2} + p_y^{k2}} & 0 & \frac{p_x^k}{p_x^{k2} + p_y^{k2}} & 0 \end{pmatrix} (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) + v_k$$

Implémentons cette fois-ci le filtre de Kalman étendu observons les résultats.

Bruit	σ_Q	σ_{angle}	σ_{dist}	Erreur moyenne
1	1	$\pi/180$	10	19
2	40	$\pi/180$	10	3005
3	1	$\pi/1800$	10	29
4	1	$\pi/18$	10	61
5	1	$\pi/180$	1	13
6	1	$\pi/180$	100	69

TABLE 2.1 – Erreur moyenne en fonction des bruits appliqués

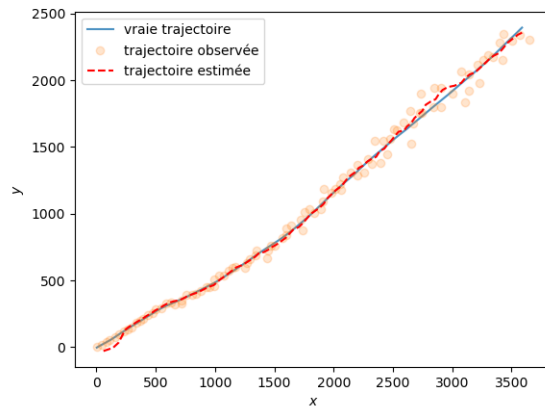


FIGURE 2.1 – Filtre de Kalman étendu (bruit 1)

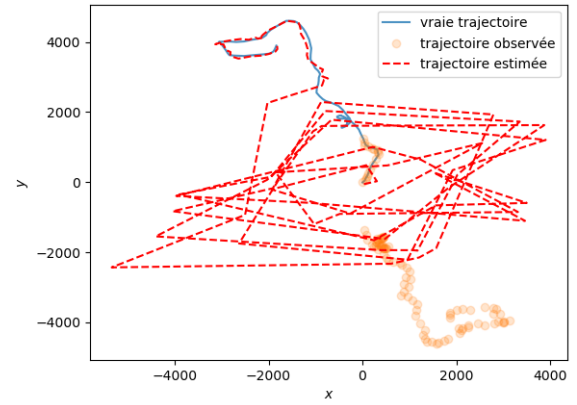


FIGURE 2.2 – Filtre de Kalman étendu (bruit 2)

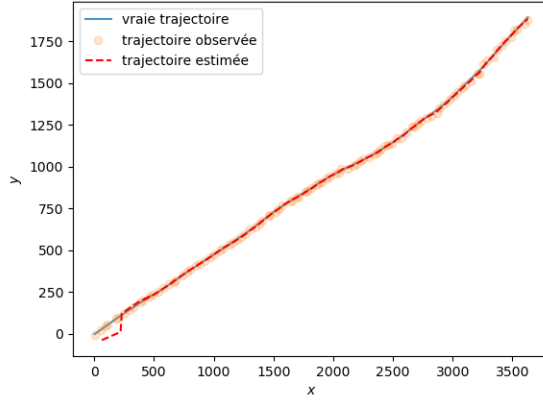


FIGURE 2.3 – Filtre de Kalman étendu (bruit 3)

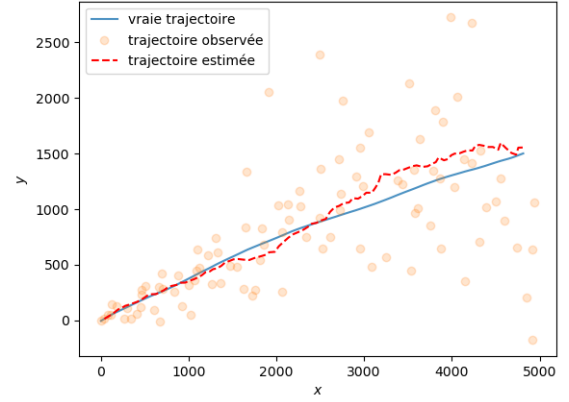


FIGURE 2.4 – Filtre de Kalman étendu (bruit 4)

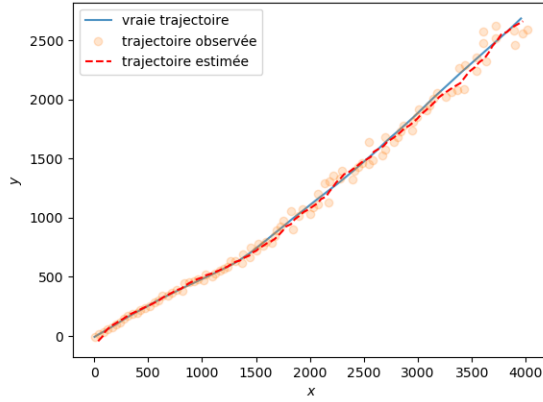


FIGURE 2.5 – Filtre de Kalman étendu (bruit 5)

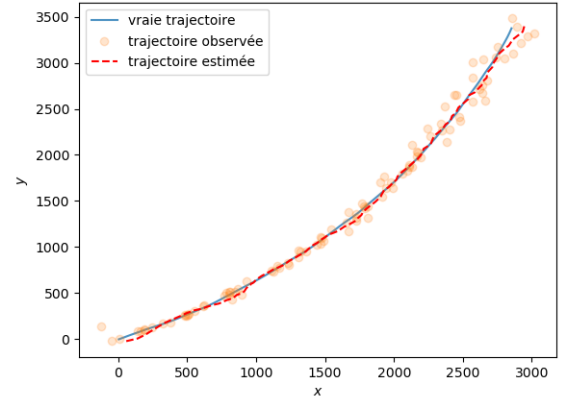


FIGURE 2.6 – Filtre de Kalman étendu (bruit 6)

Encore une fois, on observe que plus le bruit de processus σ_Q est élevé plus l'erreur est importante. C'est en particulier le cas ici puisque l'erreur "explose" du bruit 1 au bruit 2. On observe aussi que plus le bruit de mesure σ_{dist} est important, plus l'erreur l'est aussi, ce qui est aussi le cas pour le bruit de mesure σ_{angle} . On remarque d'ailleurs que les observations sont beaucoup plus éclatées lorsque σ_{angle} augmente que lorsque σ_{dist} augmente.

D'un point de vue un peu plus général, on remarque que l'estimation est plutôt bonne au début de la trajectoire, puis a tendance à se dégrader au fur et à mesure que l'on avance dans la trajectoire. Ceci s'explique très bien par le simple fait que le filtre de Kalman étendu est une approximation linéaire locale des équations définies en Introduction. Pour avoir de meilleurs résultats, il faudrait linéariser les équations en plusieurs points (ce qui se fait avec l'UKF).

2.1 Une extension à la poursuite de plusieurs cibles

Un des problèmes qui se pose lorsque l'on s'intéresse à la poursuite de plusieurs cibles est que chacune des cibles peut devenir un obstacle pour le capteur : un avion peut très bien passer derrière un autre. Pareil si dans le champ de vision du capteur il n'y a qu'une cible, il ne faudrait pas que celui-ci confonde la cible qui n'est pas visible avec celle qui l'est. Pour pallier à ce problème, il faudrait utiliser plusieurs capteurs qui seraient chacun en charge d'une cible et une seule.