

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра АПУ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №4
по дисциплине «Теория автоматического управления»
Тема: Анализ нелинейных систем

Студент гр. 8392

Сергеев М.С.

Преподаватель

Синица А.М.

Санкт-Петербург
2021

СОДЕРЖАНИЕ

1	Цель работы	3
2	Задачи	3
2.1	Моделирование и имитация релейных систем управления . .	3
2.2	Анализ устойчивости положений равновесия нелинейных си- стем	3
2.2.1	Задание 1	3
2.2.2	Задание 2	4
3	Основные теоретические положения	4
3.1	Пример релейной системы стабилизации температуры	4
3.2	Механизм вывода в четкой логике	6
3.3	Гибридные модели релейных систем управления	7
4	Обработка результатов эксперимента	8
4.1	Моделирование и имитация релейных систем управления . .	8
4.2	Анализ устойчивости положений равновесия нелинейных си- стем	11
4.2.1	Задание 1	11
4.2.2	Задание 2	13
5	Выводы	16

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучение инструментальных средств идентификации объектов управления.

2 ЗАДАЧИ

2.1 Моделирование и имитация релейных систем управления

Проведите анализ результатов, включающий следующие пункты:

1. Анализ установившегося режима
2. Частота колебаний в установившемся режиме
3. Амплитуда колебаний в установившемся режиме
4. Процедуру измерений п.2 и п. 3
5. Анализ реализации релейного регулятора относительно теории
6. Построение фазового портрета системы

Замените регулятор на идеальное реле и повторите анализ системы

2.2 Анализ устойчивости положений равновесия нелинейных систем

2.2.1 Задание 1

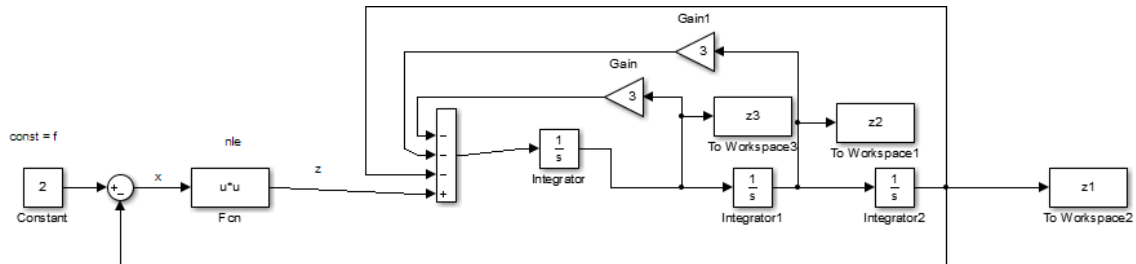
Проанализируйте первым и вторым методом Ляпунова нелинейный осциллятор, заданный следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = V_2, \\ \frac{dV_2}{dt} = -2 \cdot V_1 - V_2^3 \end{cases}$$

Проверьте себя, построив фазовый портрет системы и проанализировав его

2.2.2 Задание 2

Проанализируйте первым и вторым методом Ляпунова систему, заданную следующей структурной схемой:



Для выполнения задания вам необходимо составить по схеме систему дифференциальных уравнений

Проверьте себя, построив фазовый портрет системы и проанализировав его

3 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

3.1 Пример релейной системы стабилизации температуры

Распространенными примерами систем управления, в которых некоторые сигналы принимают значения на конечных множествах, являются релейные системы. Релейные регуляторы — это простые и дешевые устройства, применяемые в несложных приложениях, например в термостатах отопительных систем и бытовых холодильников

Принципиальная схема релейной системы стабилизации температуры (термостата) изображена на изображении ниже. Датчик температуры θ доставляет информацию о достижении пороговых значений θ_{min} , θ_{max} и, тем самым, выделяет три ситуации (события):

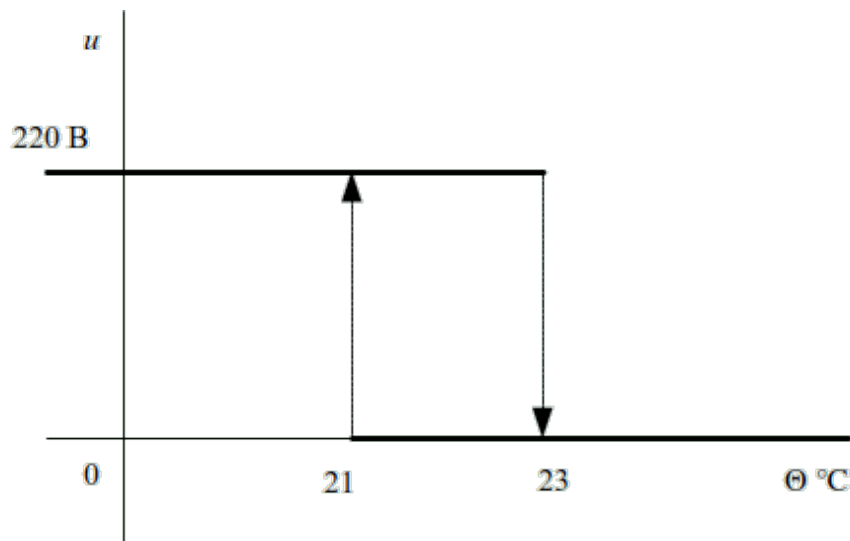
1. $\theta < \theta_{min}$ - "Прохладно"
2. $\theta_{min} < \theta < \theta_{max}$ - "Комфортно"
3. $\theta > \theta_{max}$ - "Жарко"

Управляющее воздействие — напряжение, приложенное к нагревательному элементу, может принимать два значения 0 В (выключен) и 220 В (включен)

Система функционирует в условиях дефицита информации о состоянии объекта и минимального разнообразия управляющих воздействий. Алгоритм принятия решений выразим в форме правил:

1. ЕСЛИ («Прохладно») ТО (Нагреватель включен)
2. ЕСЛИ («Тепло») ТО (Нагреватель выключен)
3. ЕСЛИ («Комфортно») И (Нагреватель включен) ТО (Нагреватель включен)
4. ЕСЛИ («Комфортно») И (Нагреватель выключен) ТО (Нагреватель выключен)

Ниже изображена статическая характеристика (СХ) релейного регулятора с гистерезисом для пороговых значений температуры $\theta_{min} = 21^\circ\text{C}$, $\theta_{max} = 23^\circ\text{C}$



Обратим внимание на важное обстоятельство — если значения температуры принадлежат интервалу двузначности СХ, т. е. лежат между двумя пороговыми значениями, воздействие на объект определяется не только входом, но и состоянием объекта до того, как значение температуры вошло в этот интервал. Другими словами, выход регулятора определяется и предысторией, так как регулятор имеет память

Графическое задание даже двузначной СХ типа «реле с гистерезисом» дополняется комментариями о значениях выхода в зоне двузначности, например:

$$\begin{cases} C, x > b \\ -C, x < -b \\ C, |x| \leq b, y_0 = C \\ -C, |x| \leq b, y_0 = -C \end{cases}$$

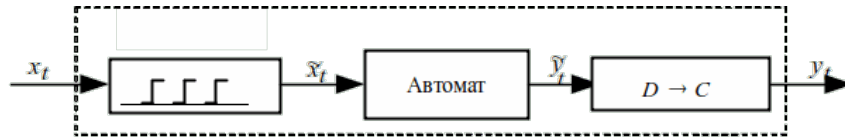
где: b — половина зоны неоднозначности СХ; y_0 — состояние реле, равное значению y до входа в зону неоднозначности. Таким образом, этот

безынерционный нелинейный элемент (НЭ) обладает памятью — значение его выхода определяется не только значением входа в тот же момент, но также и предысторией (состоянием) НЭ по уровню сигнала

Неоднозначность кусочно-постоянных СХ создает сложности формального описания релейных и логических алгоритмов управления моделями типа «вход-выход». Необходимы иные формы представления

3.2 Механизм вывода в четкой логике

Механизм вывода в четкой логике (Crisp-Logic Inference System) образован последовательным соединением детектора событий, блока логики и декодера, исполняющих информационную, алгоритмическую и исполнительную функции



Отображение непрерывного сигнала x на множество символов \tilde{x} реализуется на пороговых элементах, разбивающих множества действительных значений на конечное число подмножеств. Пороги являются четкими, т. е. каждое значение входного сигнала может принадлежать строго одному подмножеству. Преобразователь $D \rightarrow C$ (декодер) сопоставляет выходным символам автомата \tilde{y}_t действительные значения. Сигнал выхода y_t представляет собой кусочно-постоянную функцию времени, уровень которой может изменяться с появлением нового символа на входе преобразователя

Моделью логических устройств, входы и выходы которых принимают значения из конечных множеств (символов), является автомат. Конечный автомат задается пятеркой $\langle S, Y, X, \delta, \lambda \rangle$ где S, Y, X — множества состояний, выходов и входов автомата; δ — функция переходов; λ — функция выходов. Функционирование автомата можно описать в терминах «вход-состояние-выход»

$$\begin{cases} \tilde{s}' = \delta(\tilde{s}, \tilde{x}); \tilde{s}_0, \\ \tilde{y} = \lambda(\tilde{s}, \tilde{x}) \end{cases}$$

Здесь \tilde{s}' — последующее состояние, зависящее от предыдущего состояния \tilde{s} и от входа \tilde{x} ; \tilde{s}_0 — начальное состояние автомата

Механизмы вывода в четкой логике позволяют адекватно описать многозначные кусочно-постоянные преобразователи с разрывами первого рода и со сложной логикой переходов между ветвями СХ

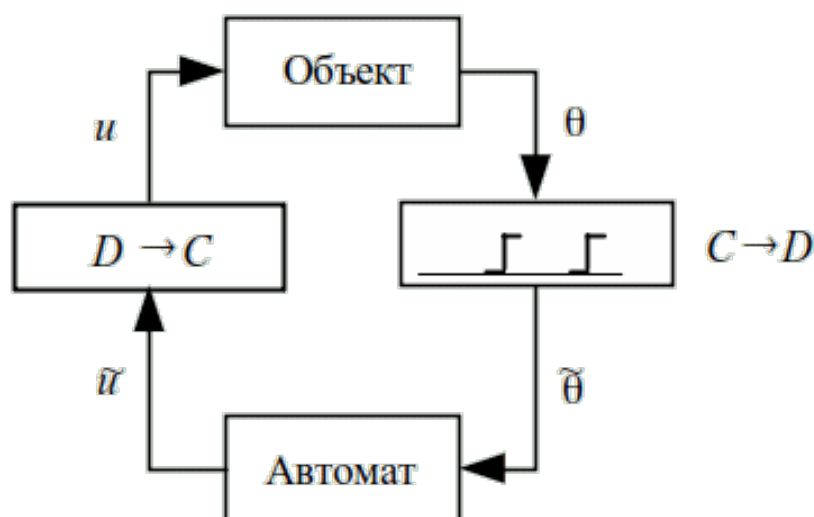
Механизмы вывода в четкой логике описывают преобразования без временной памяти. Вместе с тем, внутренние состояния автомата позволя-

ет учитывать «пространственную» память, выражаемую в многозначности преобразования — зависимости выхода от предыстории

Системы вывода в четкой логике — частный случай механизмов логического вывода на нечетких множествах (Fuzzy-Logic Inference Systems)

3.3 Гибридные модели релейных систем управления

Пример системы автоматической стабилизации температуры представляет систему, в которой сосуществуют как непрерывные переменные (температура), так и символьные последовательности, представляющие события (ситуации). Непрерывная часть системы описывается дифференциальными уравнениями, а моделью символьных преобразователей (логической части) являются конечные автоматы. Разнородные модели взаимодействуют посредством интерфейса, состоящего из двух частей — детектора событий $C \rightarrow D$ (измерительной части) и исполнительной части $D \rightarrow C$



Такие системы называют гибридными. Гибридная модель типа Нероде—Кона (A. Nerode, W. Kohn) системы управления с обратной связью изображена на рисунке выше

4 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

4.1 Моделирование и имитация релейных систем управления

Имитация релейной системы регулирования температуры

Основным методом исследования систем управления по гибридным моделям является компьютерная имитация

Произведем компьютерную имитацию работы системы из примера:

$$\begin{cases} T_1 \frac{dV}{dt} + v = u \\ T_2 \frac{d\theta}{dt} + \theta = kv \end{cases}$$

где $T_1 = 20$ мин; $T_2 = 40$ мин; $k = 40/220^\circ\text{C}/\text{В}$

Для имитации воспользуемся наработками из прошлых работ. И преобразуем систему дифференциальных уравнение в форму Коши:

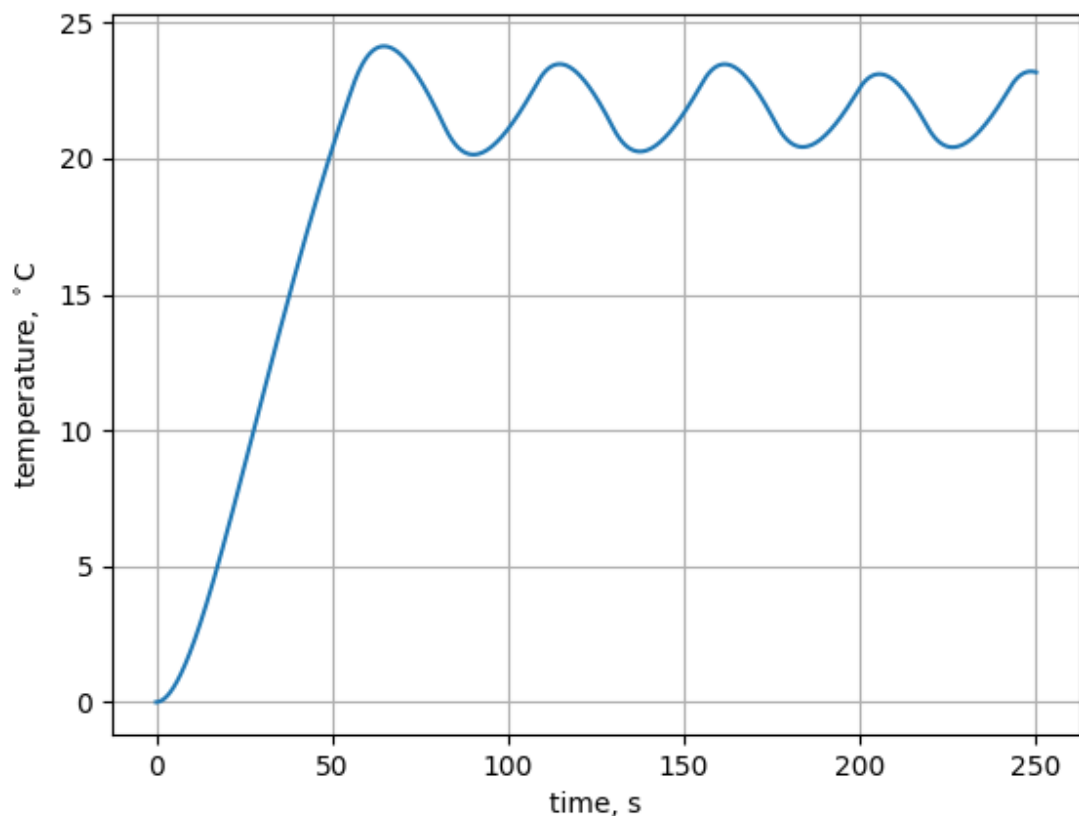


Рисунок 1 — Процесс при регуляторе с гистерезисом

Установившийся режим процесса представляет собой постоянное переключение между состоянием "вкл" и "выкл" нагревателя при достижении граничных значений температуры - гармонический процесс

Для определения амплитуды колебаний, программно найдём максимальное и минимальное значения, которых достигает температура. Используем алгоритм, похожий на градиентную эскалацию. Измерения будут проводить после завершения переходного процесса. Амплитуда оказалась равной 1.39459906. Также программно был найден период колебаний, как величина, обратная постоянной времени. Постоянная времени определялась таким же методом простейшей градиентной эскалации, и оказалась равна 43 секундам. Тогда период колебаний будет равен ≈ 0.023256 Гц

На рис. 2 представлен фазовый портрет системы с гистерезисом

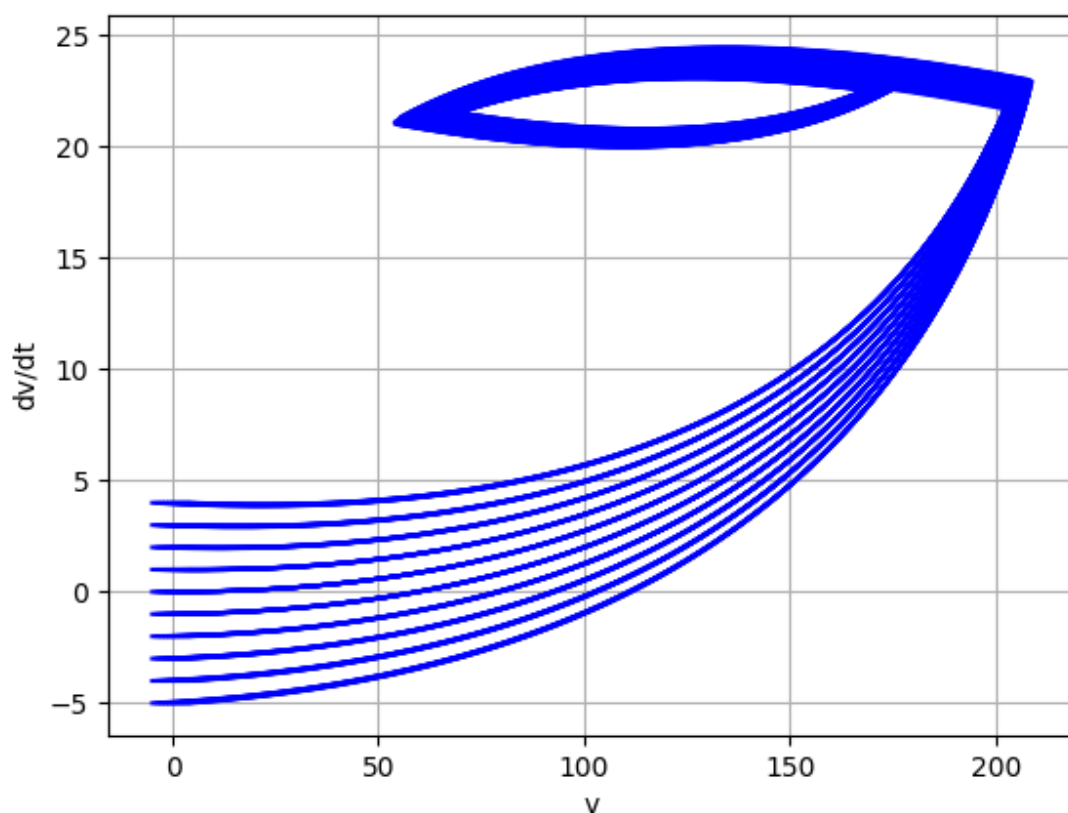


Рисунок 2 — Фазовый портрет нагревательной системы с управляющим элементом с гистерезисом

Заменяем регулятор на идеальное реле путем избавления от использования переменной состояния автомата

При использовании регулятора, реализующего реле в окрестности значений температуры в $23\text{ }^{\circ}\text{C}$, мы получаем колебательный процесс (Рис. 3). Как можно заметить, этот колебательный процесс является затухающим и связан с постоянно увеличивающейся частотой включения и выключения регулятора

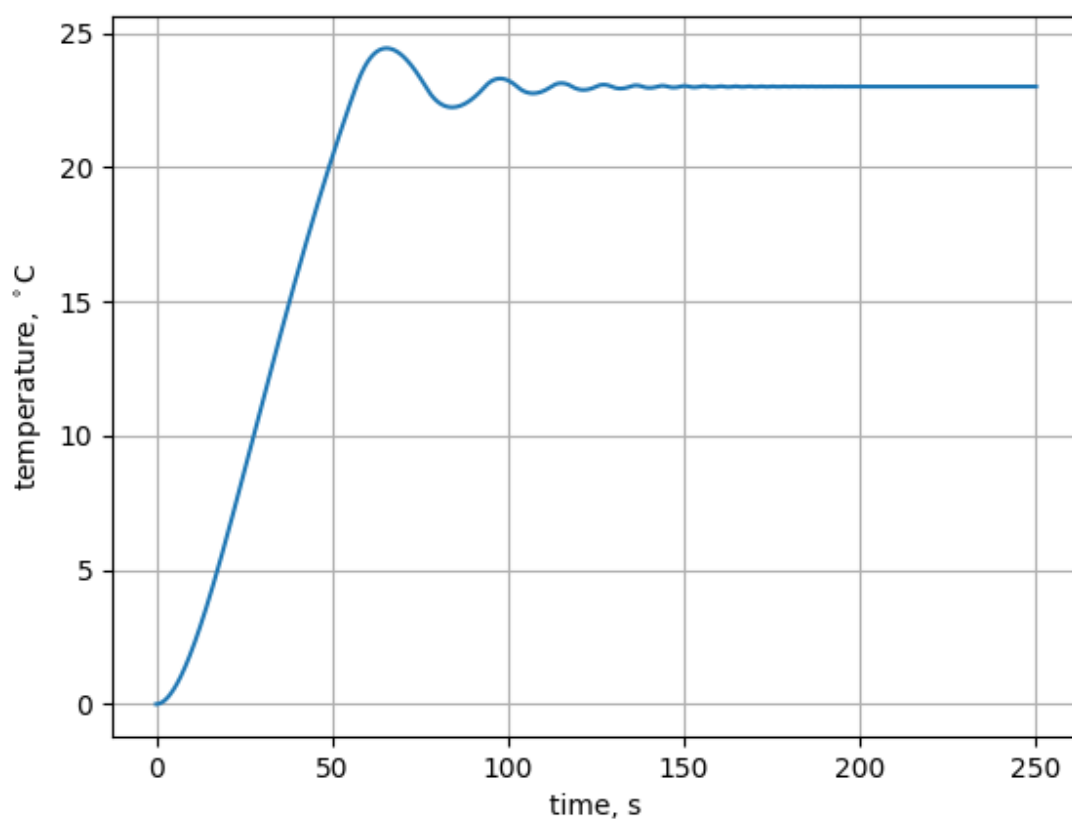


Рисунок 3 — Процесс при регуляторе с реле

Как уже отмечалось выше, из-за того, что процесс является затухающим, нельзя точно говорить о частоте колебаний. Данный вариант показывает большую предпочтительность по сравнению с гистерезисным регулятором. Однако, есть и минусы данного подхода: на большом временном интервале количество переключений регулятора будет стремиться к бесконечности, что уже плохо. Переноса это в реальность, можно сказать, что оборудование будет изнашиваться невероятно быстро, а значит такой подход не может быть реализуем

На рис. 4 представлен фазовый портрет системы с реле

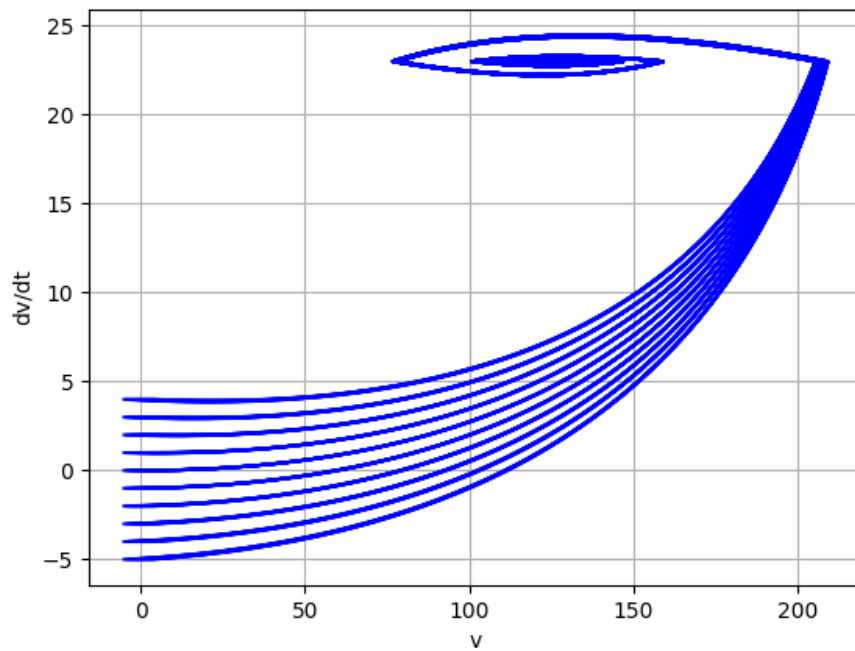


Рисунок 4 — Фазовый портрет нагревательной системы с управляющим элементом с реле

Если сравнивать вид фазовых портретов, то можно отметить то, что точкой стремления системы с элементом управления с гистерезисом более всего является что-то похожее на особую точку "Центр". Точкой стремления системы с элементом управления с реле явно видной особой точкой является особая точка "Устойчивый фокус". Перелом у каждой траектории происходит на отметке 23, что говорит нам о сходстве с теорией

4.2 Анализ устойчивости положений равновесия нелинейных систем

4.2.1 Задание 1

Нелинейный осциллятор задан следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = V_2, \\ \frac{dV_2}{dt} = -2 \cdot V_1 - V_2^3 \end{cases}$$

Проанализируем устойчивость его положения равновесия первым методом Ляпунова Для начала линеаризуем систему:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = V_2, \\ \frac{dV_2}{dt} = -2 \cdot V_1 \end{cases}$$

У системы присутствует одна точка равновесия: $(0, 0)$. Матрица Якоби будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим её собственные значения:

$$\det(sE - A) = s^2 + 2$$

Найдя корни полинома, получим $s_{1,2} = \pm\sqrt{2}i$. Корни мнимые, в этом критическом случае по линеаризованной модели нельзя судить об устойчивости положения равновесия нелинейной системы

Проанализируем данную систему при помощи второго метода Ляпунова

Подберём функцию Ляпунова для двух переменных. Функция $V(V_1, V_2) = V_1^2 + \frac{1}{2}V_2^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости

Найдём частные производные:

$$\frac{dV(V_1, V_2)}{dV_1} = 2 \cdot V_1$$

$$\frac{dV(V_1, V_2)}{dV_2} = V_2$$

Найдём производную функции по времени:

$$\frac{dV(V_1, V_2)}{dt} = \frac{dV(V_1, V_2)}{dV_1} \cdot \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV(V_1, V_2)}{dV_2} \cdot \frac{dV_2}{dt}$$

$$\frac{dV(V_1, V_2)}{dt} = 2 \cdot V_1 \cdot V_2 + V_2 \cdot (-2 \cdot V_1 - V_2^3)$$

$$\frac{dV(V_1, V_2)}{dt} = -2 \cdot V_2^4 < 0$$

Следовательно, положение равновесия асимптотически устойчиво. Это проверяется также и с помощью фазового портрета (Рис. 5), по которому видно, что траектории сходятся к точке $(0, 0)$

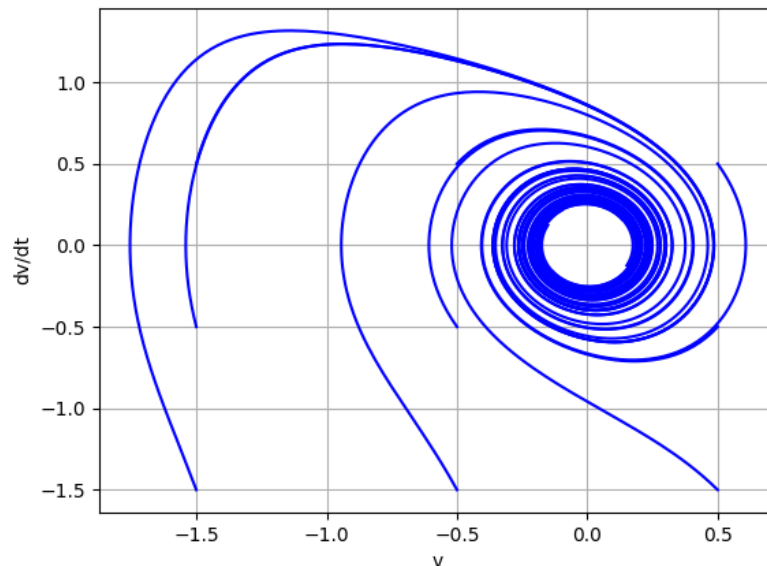


Рисунок 5 — Фазовый портрет нелинейного осциллятора

4.2.2 Задание 2

Рассмотрим систему второго порядка, описанную блок-схемой (Рис. 6)

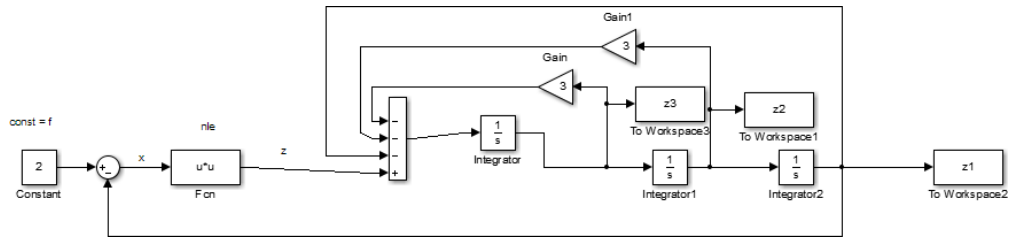


Рисунок 6 — Блок-схема системы третьего порядка

Соответствующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} = z_3, \\ \frac{dz_3}{dt} = (2 - z_1)^2 - z_1 - 3 \cdot z_2 - 3 \cdot z_3 \end{cases}$$

Проанализируем устойчивость его положения равновесия первым методом Ляпунова

Проверим положение равновесия системы. Корни уравнений: $(1, 0, 0)$ и $(4, 0, 0)$, рассмотрим их локально.

Для случая с $z_1 = 1$, система будет:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} = z_3, \\ \frac{dz_3}{dt} = (2 - (z_1 - 1))^2 - (z_1 - 1) - 3 \cdot z_2 - 3 \cdot z_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} = z_3, \\ \frac{dz_3}{dt} = z_1^2 - 3 \cdot z_1 - 3 \cdot z_2 - 3 \cdot z_3 \end{cases}$$

Для начала линеаризуем систему:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} = z_3, \\ \frac{dz_3}{dt} = -3 \cdot z_1 - 3 \cdot z_2 - 3 \cdot z_3 \end{cases}$$

Характеристическая матрица будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Вычислим её собственные значения:

$$\det(sE - A) = -s^3 - 3 \cdot s^2 - 3 \cdot s - 3$$

Найдя корни полинома, получим $s_1 = -\sqrt[3]{2} - 1$ $s_2 = \frac{-i\sqrt{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - 2}{2}$
 $s_2 = \frac{i\sqrt{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - 2}{2}$ - два корня комплексно-сопряженные, с отрицательной действительной частью и один отрицательный корень без мнимой части. Получается, линеаризованная система асимптотически устойчива и положение равновесия нелинейной системы устойчиво "в малом" в точке (1, 0, 0)

Для случая с $z_1 = 4$, система будет:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} = z_3, \\ \frac{dz_3}{dt} = (2 - (z_1 - 4))^2 - (z_1 - 4) - 3 \cdot z_2 - 3 \cdot z_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} = z_3, \\ \frac{dz_3}{dt} = z_1^2 + z_1 - 3 \cdot z_2 - 3 \cdot z_3 \end{cases}$$

Линеаризуем систему:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} = z_3, \\ \frac{dz_3}{dt} = z_1 - 3 \cdot z_2 - 3 \cdot z_3 \end{cases}$$

Характеристическая матрица будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Вычислим её собственные значения:

$$\det(sE - A) = -s^3 - 3 \cdot s^2 - 3 \cdot s + 1$$

Найдя корни полинома, получим $s_1 = \sqrt[3]{2} - 1$ $s_2 = \frac{-i\sqrt{3}\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} - 2}{2}$
 $s_2 = \frac{i\sqrt{3}\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} - 2}{2}$ - два корня комплексно-сопряженные, с отрицательной действительной частью и один положительный корень без мнимой части. Следовательно, положение равновесия нелинейной системы неустойчиво в точке (4, 0, 0)

Проанализируем данную систему при помощи второго метода Ляпунова

Подберём функцию Ляпунова для трёх переменных:

$$V(V_1, V_2, V_3) = \frac{1}{2}(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)$$

Найдём частные производные функции:

$$\frac{dV(Z_1, Z_2, Z_3)}{dZ_1} = Z_1$$

$$\frac{dV(Z_1, Z_2, Z_3)}{dZ_2} = Z_2$$

$$\frac{dV(Z_1, Z_2, Z_3)}{dZ_3} = Z_3$$

Найдём производную функции по времени:

$$\frac{dV(Z_1, Z_2, Z_3)}{dt} = \frac{dV(Z_1, Z_2, Z_3)}{dZ_1} \cdot \frac{dZ_1}{dt} + \frac{dV(Z_1, Z_2, Z_3)}{dZ_2} \cdot \frac{dZ_2}{dt} + \frac{dV(Z_1, Z_2, Z_3)}{dZ_3} \cdot \frac{dZ_3}{dt} +$$

$$\frac{dV(Z_1, Z_2, Z_3)}{dt} = Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 - Z_3 \cdot (4 - 3 \cdot Z_1 - 3 \cdot Z_2 - 3 \cdot Z_3 + Z_1^2)$$

$$\frac{dV(Z_1, Z_2, Z_3)}{dt} = 4 \cdot Z_3 + Z_1 Z_2 - 2 \cdot Z_2 Z_3 - 3 \cdot Z_1 Z_3 - 3 \cdot Z_3^2 + Z_3 Z_1^2$$

Преобразовать уравнение так, чтобы можно было однозначно сказать о знаке выражения, нельзя. Следовательно, и об устойчивости - тоже

Проверим результат применения первого метода Ляпунова, построив фазовый портрет системы (рис. 7). Поведение траекторий напоминает такие особые точки как устойчивый фокус в точке $(1, 0, 0)$ и седло в точке $(4, 0, 0)$. Заметно большое влияние седла, так как многие траектории уходят в бесконечность

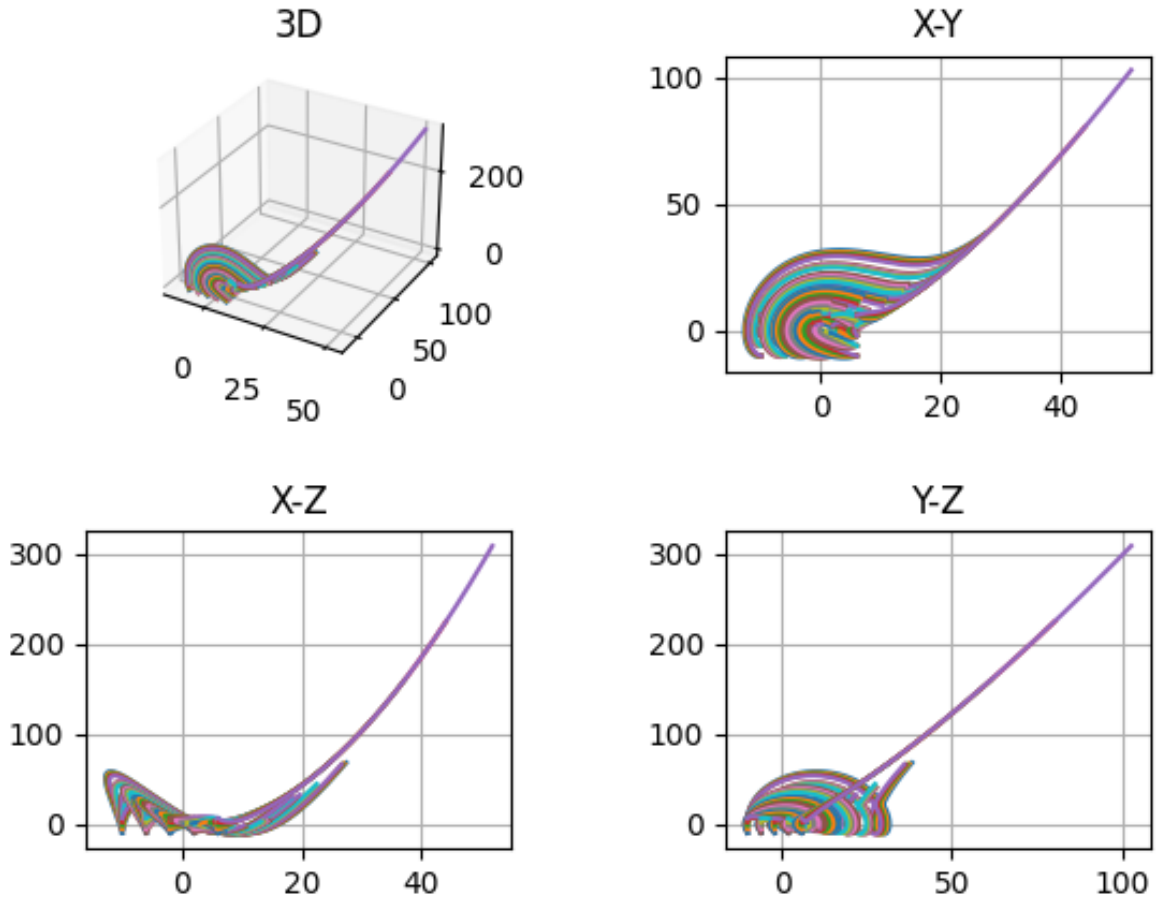


Рисунок 7 — Фазовый портрет системы третьего порядка

5 ВЫВОДЫ

В ходе работы было смоделировано и проанализировано поведение релейной системы управления с внутренней памятью и системы с идеальным реле, а также были применены методы Ляпунова: первый и второй