

Технически университет - София
Факултет по приложна математика и информатика

Курсова работа

ЧИСЛЕНО МОДЕЛИРАНЕ С ОБИКНОВЕННИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Студент:
Кристиян Кръчмаров

Преподавател:
доц. д-р. Богдан Гилев

Съдържание

1	Задачи	2
1.1	Задача 1	2
1.2	Задача 2	2
1.3	Задача 3	2
1.4	Задача 4	2
2	Решения	3
2.1	Задача 1	3
2.2	Задача 2	6
2.3	Задача 3	9
2.4	Задача 4	12

1 Задачи

1.1 Задача 1

Да се реши системата по Рунге - Кута:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2) \end{array} \right. \quad \text{при} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = y_{20} \end{array} \right. \quad (1)$$

където:

$$f(x, y_1, y_2) = -axy_2 - x^2y_1 \quad a = 0.05 \quad y_{20} = -\frac{1}{6}$$

1.2 Задача 2

Да се сведе до система и да се реши по метода на матричната експонента уравнението при нулеви начални условия

$$y'' + 3y' = xe^{-2x} \quad (2)$$

1.3 Задача 3

Да се реши граничната задача по метода на крайните разлики

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(\frac{16}{t^2}\right)x = \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad t \in [1; 4]; x(1) = -0.3; x(4) = 0.4 \quad (3)$$

1.4 Задача 4

Да се реши граничната задача по метода на стрелбата

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(\frac{16}{t^2}\right)x = \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad t \in [1; 4]; x(1) = -0.3; x(4) = 0.4 \quad (4)$$

2 Решения

2.1 Задача 1

Методът на Рунге-Кута от 4ти ред се използва за числено решение на система обикновенни диференциални уравнения от вида.

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = g(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2) \end{array} \right. \quad \text{при} \quad \left| \begin{array}{l} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{array} \right.$$

където:

$$y_1 = y_1(x); y_2 = y_2(x)$$

Методът се базира на апроксимация на следващата стойност на функцията, като използва няколко променливи за изчисляване на инкрементацията. При Метод на Рунге-Кута от 4ти ред се използват следните променливи

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= h \cdot f(x_i, y_{1i}, y_{2i}) \\ k_{2,1} &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right) \\ k_{3,1} &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{2,2}}{2}\right) \\ k_{4,1} &= h \cdot f(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}, y_{2,i} + k_{3,2}) \\ y_{1,i+1} &= y_{1,i} + \frac{1}{6} (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}) h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= h \cdot g(x_i, y_{1i}, y_{2i}) \\ k_{2,2} &= h \cdot g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right) \\ k_{3,2} &= h \cdot g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{2,2}}{2}\right) \\ k_{4,2} &= h \cdot g(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}, y_{2,i} + k_{3,2}) \\ y_{2,i+1} &= y_{2,i} + \frac{1}{6} (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}) h \end{aligned}$$

където $y_{1,i}$ и $y_{2,i}$ са предходни приближения, а $y_{1,i+1}$ и $y_{2,i+1}$ са текущи приближения.

```

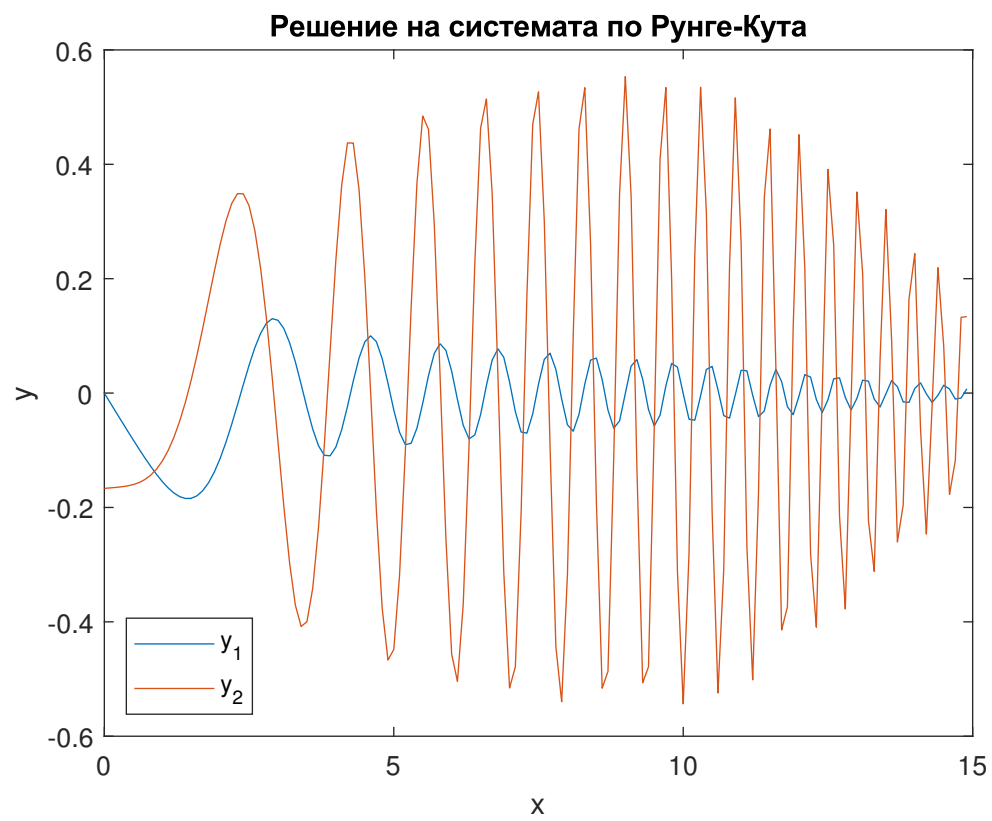
function firstTask
% Дефиниране на началните условия
y0 = [0; -1/6];
x0 = 0;
% Дефиниране на стъпката и броя на стъпките
h = 0.1;
n = 150;
% Използване на RK4 функцията
[x, y] = RK4(@system, x0, y0, h, n);
figure(1), plot(x, y(1,:), x, y(2,:));
title('Решение на системата по Рунге-Кута');
legend('y_1', 'y_2', 'Location', 'southwest', 'Orientation', 'vertical');
xlabel('x');
ylabel('y');
end

function [x, y] = RK4(f, x0, y0, h, n)
% f - функция, която връща дясната част на системата
% x0 - начална точка за решението
% y0 - началните условия
% h - стъпка на метода
% n - брой стъпки

x = x0 + (0:n-1)*h; % Изчисляваме x стойностите
y = zeros(length(y0), n); % Създаваме матрица за y
y(:,1) = y0; % Запазваме началните условия в първата колона на y
for i = 1:n-1
    k1 = f(x(i), y(:,i));
    k2 = f(x(i)+0.5*h, y(:,i)+0.5*h*k1);
    k3 = f(x(i)+0.5*h, y(:,i)+0.5*h*k2);
    k4 = f(x(i)+h, y(:,i)+h*k3);
    y(:,i+1) = y(:,i) + h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6; % Изчисляваме y_{i+1}
end
end

function dydx = system(x, y)
a = 0.05;
dydx = [y(2); -a*y(2) - x^2*y(1)];
end

```



2.2 Задача 2

Методът на матричната експонента се използва за числено решение на система обикновени диференциални уравнения от вида

$$\frac{dy}{dx} = Ay + Bx \quad \text{при} \quad y(x_0) = y_0$$

Матричната експонента се дефинира като безкраен матричен ред

$$e^{Ax} = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

където E е единичната матрица, а A^n е произведението на A , n пъти. В задачата уравнението се свежда до система с въвеждането на

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{cases} \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ xe^{-2x} \end{pmatrix} \iff Y' = AY + B$$
$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ xe^{-2x} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Решението на уравнението се дава във вида

$$y(x) = e^{A(x-x_0)}y(x_0) + e^{Ax} \int_{x_0}^x e^{-As} B(s) ds$$

Но, тъй като по условие имаме нулеви начални условия ($y(x_0) = 0$), следва че

$$y(x) = e^{Ax} \int_{x_0}^x e^{-As} B(s) ds$$

```

function secondTask
A = [0, 1; -3, 0]; % матрица на коефициенти
B = @(x)[0; myFunction(x)]; % свободни коефициенти
expA = expm(A); % матрична експонента

% начални условия
y0 = [0; 0];
% създаване на масив от времеви точки
t = linspace(0, 10, 200);
% създаване на масив за съхранение на резултатите
y = zeros(length(y0), length(t));

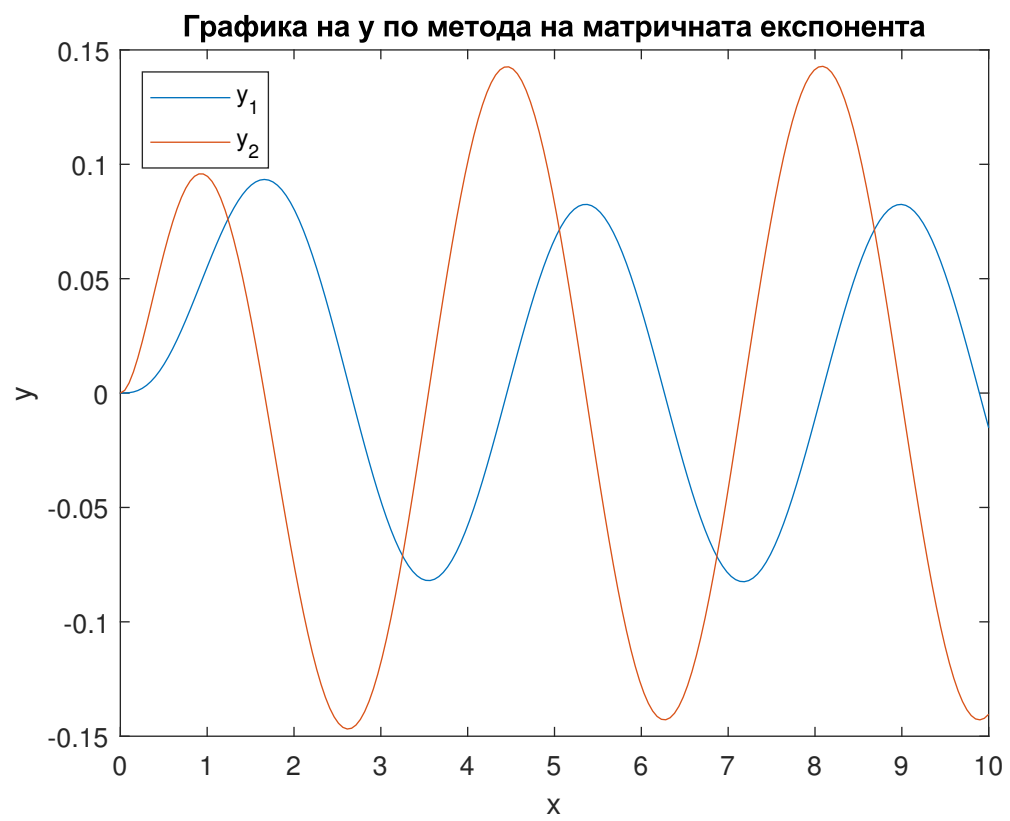
for i = 1:length(t)
    integrand = @(s) expm(A*(t(i)-s)) * B(s);
    y(:,i) = expA * y0 + integral(integrand, 0, t(i), 'ArrayValued', true);
end

figure(2),plot(t, y(1,:),t,y(2,:));
title('Графика на y по метода на матричната експонента');
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('y_1', 'y_2', 'Location', 'northwest', 'Orientation', 'vertical');

end

function f = myFunction(x)
f = x*exp(-2*x);
end

```

2.3 Задача 3

Метода на крайните разлики се използва за решаване на обикновенни диференциални уравнения от вида

$$x''(t) = f(t, x, x') \quad t \in [a; b] \quad x(a) = \alpha \quad x(b) = \beta$$

Метода се състои в следните стъпки

1. Определяне на начална стойност
2. Разделяне на интервала на $n - 1$ равни части
3. Намиране на разликите между стойностите на функцията в съседни точки. Често използвани формули са

$$x'(t) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad x''(t) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

4. Замяна на производните със съответните разлики.
5. Решаване на системата от линейни уравнения.

```

function thirdTask
% Задаване на параметри
a = 1; b = 4; % граници на интервала
alpha = -0.3; beta = 0.4; %x(a)=alpha; x(b)=beta
n = 150; % брой точки на дискретизация
h = (b-a)/(n+1); % стъпка на дискретизация

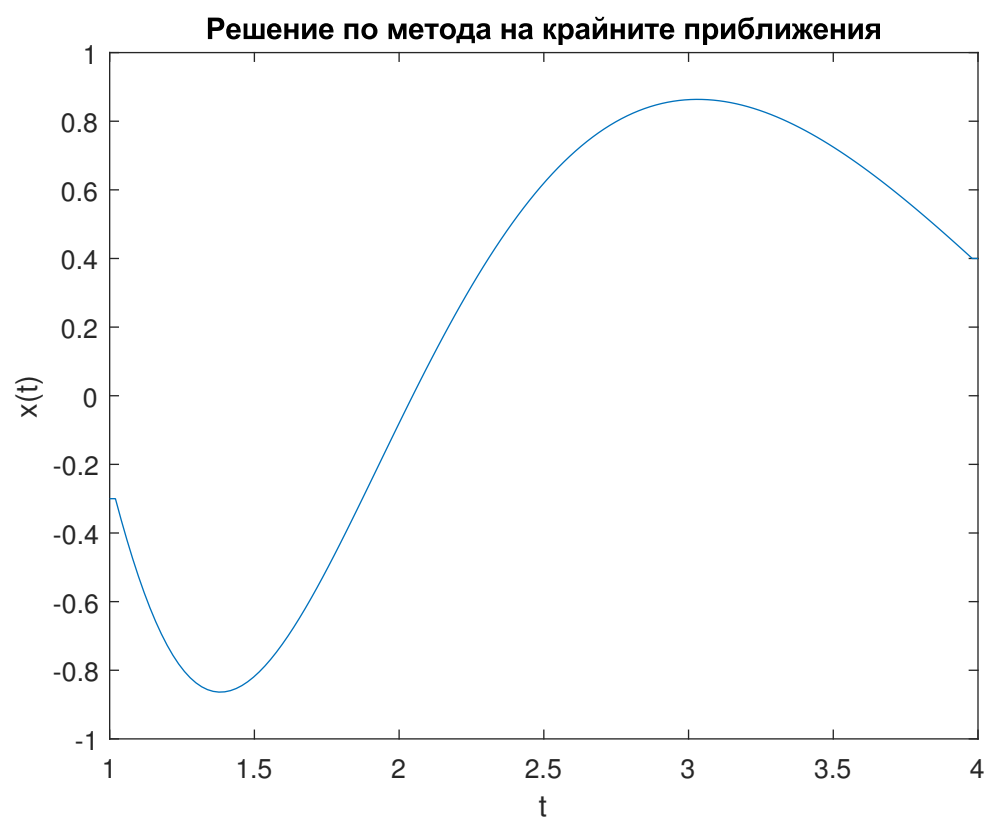
% Дефиниране на матрицата на коефициентите и вектора на дясната страна
A = zeros(n,n);
f = zeros(n,1);
for i = 1:n
    ti = a + i*h;
    A(i,i) = -2/h^2 + 16/ti^2;
    f(i) = h^2*sin(1/ti^2);
    if i ~= 1
        A(i,i-1) = 1/h^2 - 1/(2*h*ti);
    end
    if i ~= n
        A(i,i+1) = 1/h^2 + 1/(2*h*ti);
    end
end
end

% Прилагане на граничните условия
A(1,:) = 0; A(1,1) = 1;
f(1) = alpha;
A(n,:) = 0; A(n,n) = 1;
f(n) = beta;

% Решаване на системата
x = A\f;

% Визуализация на решението
t = linspace(a,b,n+2);
xx=[alpha;x;beta];
figure(3),plot(t,xx);
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
title('Решение по метода на крайните приближения');
end

```



2.4 Задача 4

Метода на стрелбата се използва за решаване на обикновенни диференциални уравнения от вида

$$x''(t) = f(t, x, x') \quad t \in [a; b] \quad x(a) = \alpha \quad x(b) = \beta$$

Метода се състои в следните стъпки

1. Представяне на началната задача като система от две уравнения от първи ред

$$\left| \begin{array}{l} x' = y \\ y' = f(t, x, x') \end{array} \right. \quad \text{при} \quad \left| \begin{array}{l} x(a) = \alpha \\ x(b) = \beta \\ y(1) = y(4) = s \end{array} \right.$$

2. Задаваме си начално предположение за стойността на параметъра $s = a$.
3. Решаваме получената система от диференциални уравнения с началните условия, използвайки числен метод.
4. Изчисляваме стойността на функцията получената от 3. функция x в $t = b$.
5. Изчисляваме разликата между изчислената стойност на x в края на интервала и действителната стойност на x в краен момент, която е дадена в началните условия.
6. Коригираме началното предположение за параметъра.
7. Повтаряме стъпки стъпки 3 - 6, докато корекцията не стане достатъчно малка.

```

function fourthTask
t0=0;
t0=fsolve(@function1,t0);
x0=[-0.3,t0];
[t,x]=ode45(@function2,[1,4],x0);
figure(4),plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'r')
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
legend('x(t)', "x'(t)", 'Location', 'northeast');
title('Решение по метода на стрелбата');
end

function f=function1(x)
x0=[-0.3,x];
[t,x]=ode45(@function2,[1,4],x0);
n=length(t);
f=x(n,1)-0.4;
end

function dy=function2(t,x)
dy(1,1)=x(2);
dy(2,1)=sin(1/t^2)-(16/t^2)-(x(1)/t);
end

```

