

Технически университет - София  
Факултет по приложна математика и информатика

## Курсова работа

### МАТЕМАТИЧЕСКА ЕКОЛОГИЯ

Студент:  
Кристиян Кръчмаров

Преподавател:  
проф. дмн. Людмил  
Каранджулов

# Съдържание

<b>1</b>	<b>Задание</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Решение</b>	<b>2</b>
2.1	Особени точки . . . . .	2
2.1.1	Първи случай . . . . .	2
2.1.2	Втори случай . . . . .	2
2.1.3	Трети случай . . . . .	2
2.1.4	Четвърти случай . . . . .	2
2.2	Линеаризация . . . . .	3
2.2.1	Първи случай . . . . .	3
2.2.2	Втори случай . . . . .	3
2.2.3	Трети случай . . . . .	3
2.2.4	Четвърти случай . . . . .	4
2.3	Собствени стойности . . . . .	5
2.3.1	Първи случай . . . . .	5
2.3.2	Втори случай . . . . .	5
2.3.3	Трети случай . . . . .	5
2.3.4	Четвърти случай . . . . .	6
2.4	Фазов портрет . . . . .	7
2.5	Компютърна реализация . . . . .	8
2.6	Примери . . . . .	9

## 1 Задание

За математическия модел на съжителство на две популации

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = (a - bN_1 - \sigma N_2) N_1 & a, b, \sigma > 0 \\ \dot{N}_2 = (c - \nu N_1 - dN_2) N_2 & c, d, \nu > 0 \end{cases} \quad (*)$$

са въведени следните означения

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & \sigma \\ \nu & d \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & \sigma \\ c & d \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b & a \\ \nu & c \end{vmatrix}$$

Изследвайте вида на особенните точки, фазов портрет, компютърна реализация, съответни чертежи и биологични изводи, ако е изпълнено

$$\Delta > 0 \quad \Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0$$

## 2 Решение

### 2.1 Особени точки

Особените точки се получават като решение на системата

$$\begin{cases} (a - bN_1 - \sigma N_2) N_1 = 0 \\ (c - \nu N_1 - dN_2) N_2 = 0 \end{cases}$$

#### 2.1.1 Първи случай

$$\begin{cases} N_1 = 0 \\ N_2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

#### 2.1.2 Втори случай

$$\begin{cases} N_1 = 0 \\ N_2 \neq 0 \end{cases} \implies c - dN_2 = 0 \implies \begin{cases} N_1 = 0 \\ N_2 = \frac{c}{d} \end{cases} \quad (II)$$

#### 2.1.3 Трети случай

$$\begin{cases} N_1 \neq 0 \\ N_2 = 0 \end{cases} \implies a - bN_1 = 0 \implies \begin{cases} N_1 = \frac{a}{b} \\ N_2 = 0 \end{cases} \quad (III)$$

#### 2.1.4 Четвърти случай

$$\begin{cases} N_1 \neq 0 \\ N_2 \neq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a - bN_1 - \sigma N_2 = 0 \\ c - \nu N_1 - dN_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} bN_1 + \sigma N_2 = a \\ \nu N_1 + dN_2 = c \end{cases} \implies$$

$$\begin{pmatrix} b & \sigma \\ \nu & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \implies \Delta = \begin{vmatrix} b & \sigma \\ \nu & d \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & \sigma \\ c & d \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b & a \\ \nu & c \end{vmatrix} \implies$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ N_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases} \quad (\text{Крамер}) \quad (IV)$$

## 2.2 Линеаризация

Линеаризацията се получава като се замести в (\*)

$$\begin{cases} N_1 - \alpha = y_1 \\ N_2 - \beta = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} N_1 = y_1 + \alpha \\ N_2 = y_2 + \beta \end{cases}$$

където  $(\alpha, \beta)$  е особенна точка и се вземе линейната част за всяка една променлива  $y_1, y_2$

### 2.2.1 Първи случай

$$\begin{cases} N_1 - 0 = y_1 \\ N_2 - 0 = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} N_1 = y_1 \\ N_2 = y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{y}_1 = (a - by_1 - \sigma y_2) y_1 \\ \dot{y}_2 = (c - \nu y_1 - dy_2) y_2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 - by_1^2 - \sigma y_1 y_2 \\ \dot{y}_2 = cy_2 - \nu y_1 y_2 - dy_2^2 \end{cases} \implies W = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad (I)$$

### 2.2.2 Втори случай

$$\begin{cases} N_1 - 0 = y_1 \\ N_2 - \frac{c}{d} = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} N_1 = y_1 \\ N_2 = y_2 + \frac{c}{d} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{y}_1 = \left[ a - by_1 - \sigma \left( y_2 + \frac{c}{d} \right) \right] y_1 \\ \dot{y}_2 = \left[ c - \nu y_1 - d \left( y_2 + \frac{c}{d} \right) \right] \left( y_2 + \frac{c}{d} \right) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 - by_1^2 - \sigma y_1 y_2 - \frac{\sigma c}{d} y_1 \\ \dot{y}_2 = [c - \nu y_1 - dy_2 - c] \left( y_2 + \frac{c}{d} \right) \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 - by_1^2 - \sigma y_1 y_2 - \frac{\sigma c}{d} y_1 \\ \dot{y}_2 = \nu y_1 y_2 - \frac{\nu c}{d} y_1 - dy_2^2 - cy_2 \end{cases} \implies$$

$$W = \begin{pmatrix} a - \frac{\sigma c}{d} & 0 \\ -\frac{\nu c}{d} & -c \end{pmatrix} \quad (II)$$

### 2.2.3 Трети случай

$$\begin{cases} N_1 - \frac{a}{b} = y_1 \\ N_2 - 0 = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} N_1 = y_1 + \frac{a}{b} \\ N_2 = y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{y}_1 = \left[ a - b \left( y_1 + \frac{a}{b} \right) - \sigma y_2 \right] \left( y_1 + \frac{a}{b} \right) \\ \dot{y}_2 = \left[ c - \nu \left( y_1 + \frac{a}{b} \right) - dy_2 \right] y_2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = [a - by_1 - a - \sigma y_2] \left( y_1 + \frac{a}{b} \right) \\ \dot{y}_2 = cy_2 - \nu y_1 y_2 - \frac{\nu a}{b} - dy_2^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{y}_1 = -by_1^2 - ay_1 - \sigma y_1 y_2 - \frac{\sigma a}{b} \\ \dot{y}_2 = cy_2 - \nu y_1 y_2 - \frac{\nu a}{b} - dy_2^2 \end{cases} \implies$$

$$W = \begin{pmatrix} -a & -\frac{\sigma a}{b} \\ 0 & c - \frac{\nu a}{b} \end{pmatrix} \quad (III)$$

#### 2.2.4 Четвърти случай

$$\left| \begin{array}{l} N_1 - \frac{\Delta_1}{\Delta} = y_1 \\ N_2 - \frac{\Delta_2}{\Delta} = y_2 \end{array} \right| \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} N_1 = y_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ N_2 = y_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{array} \right| \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \left[ a - b \left( y_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \right) - \sigma \left( y_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta} \right) \right] \left( y_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \right) \\ \dot{y}_2 = \left[ c - \nu \left( y_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \right) - d \left( y_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta} \right) \right] \left( y_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta} \right) \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \left[ a - by_1 - \frac{b\Delta_1}{\Delta} - \sigma y_2 - \frac{\sigma\Delta_2}{\Delta} \right] \left( y_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \right) \\ \dot{y}_2 = \left[ c - \nu y_1 - \frac{\nu\Delta_1}{\Delta} - dy_2 - \frac{d\Delta_2}{\Delta} \right] \left( y_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta} \right) \end{array} \right| \Longleftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = ay_1 + \frac{a\Delta_1}{\Delta} - by_1^2 - \frac{b\Delta_1}{\Delta}y_1 - \frac{b\Delta_1}{\Delta}y_1 - b\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^2 - \sigma y_1y_2 - \frac{\sigma\Delta_1}{\Delta}y_1 - \frac{\sigma\Delta_2}{\Delta}y_1 - \frac{\sigma\Delta_1\Delta_2}{\Delta^2} \\ \dot{y}_2 = cy_2 + \frac{c\Delta_2}{\Delta} - \nu y_1y_2 - \frac{\nu\Delta_2}{\Delta}y_1 - \frac{\nu\Delta_1}{\Delta}y_2 - \frac{\nu\Delta_1\Delta_2}{\Delta^2} - dy_2^2 - \frac{d\Delta_2}{\Delta}y_2 - \frac{d\Delta_2}{\Delta}y_2 - d\left(\frac{\Delta_2}{\Delta}\right)^2 \end{array} \right| \Longrightarrow$$

$$W = \begin{pmatrix} a - \frac{2b\Delta_1}{\Delta} - \frac{\sigma\Delta_2}{\Delta} & -\frac{\sigma\Delta_1}{\Delta} \\ -\frac{\nu\Delta_2}{\Delta} & c - \frac{2d\Delta_2}{\Delta} - \frac{\nu\Delta_1}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$W = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta a - 2b\Delta_1 - \sigma\Delta_2 & -\sigma\Delta_1 \\ -\nu\Delta_2 & \Delta c - 2d\Delta_2 - \nu\Delta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta a - 2b\Delta_1 - \sigma\Delta_2 &= (bd - \nu\sigma)a - 2b(ad - c\sigma) - \sigma(bc - a\nu) = \\ abd - a\nu\sigma - 2abd + 2bc\sigma - bc\sigma + a\nu\sigma &= bc\sigma - abd = b(c\sigma - ad) = -b(ad - c\sigma) = -b\Delta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta c - 2d\Delta_2 - \nu\Delta_1 &= (bd - \nu\sigma)c - 2d(bc - a\nu) - \nu(ad - c\sigma) = \\ bcd - c\nu\sigma - 2bcd + 2ad\nu - ad\nu + c\nu\sigma &= ad\nu - bcd = d(a\nu - bc) = -d(bc - a\nu) = -d\Delta_2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow W = -\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b\Delta_1 & \sigma\Delta_1 \\ \nu\Delta_2 & d\Delta_2 \end{pmatrix} \quad (IV)$$

## 2.3 Собствени стойности

Собствените стойности на матрицата  $W$  се получават от уравнението

$$\det(W - \lambda I) = 0$$

където  $I$  е единичната матрица

### 2.3.1 Първи случай

$$\det(W - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & c - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) = 0 \implies$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 = a > 0 \\ \lambda_2 = c > 0 \end{vmatrix} \implies \text{неустойчив възел} \quad (I)$$

### 2.3.2 Втори случай

$$\det(W - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \frac{\sigma c}{d} - \lambda & 0 \\ -\frac{\nu c}{d} & -c - \lambda \end{vmatrix} = \left( \frac{ad - \sigma c}{d} - \lambda \right) (-c - \lambda) = 0 \implies$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 = \frac{ad - \sigma c}{d} = \frac{\Delta_1}{d} > 0 \\ \lambda_2 = -c < 0 \end{vmatrix} \implies \text{седло} \quad (II)$$

### 2.3.3 Трети случай

$$\det(W - \lambda I) = \begin{vmatrix} -a - \lambda & -\frac{\sigma a}{b} \\ 0 & c - \frac{\nu a}{b} - \lambda \end{vmatrix} = (-a - \lambda) \left( \frac{bc - \nu a}{b} - \lambda \right) = 0 \implies$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 = \frac{bc - \nu a}{b} = \frac{\Delta_2}{d} > 0 \\ \lambda_2 = -a < 0 \end{vmatrix} \implies \text{седло} \quad (III)$$

#### 2.3.4 Четвърти случай

$$\det(W - \lambda I) = \begin{vmatrix} b\Delta_1 - \lambda & \sigma\Delta_1 \\ \nu\Delta_2 & d\Delta_2 - \lambda \end{vmatrix} = (b\Delta_1 - \lambda)(d\Delta_2 - \lambda) - \nu\sigma\Delta_1\Delta_2 = 0 \iff$$

$$bd\Delta_1\Delta_2 - b\Delta_1\lambda - d\Delta_2\lambda + \lambda^2 - \nu\sigma\Delta_1\Delta_2 = 0 \iff$$

$$\lambda^2 - \lambda(b\Delta_1 + d\Delta_2) + \Delta_1\Delta_2(bd - \nu\sigma) = 0 \iff \lambda^2 - \lambda(b\Delta_1 + d\Delta_2) + \Delta\Delta_1\Delta_2 = 0$$

Формули на Виет :  $p\lambda^2 + q\lambda + r$

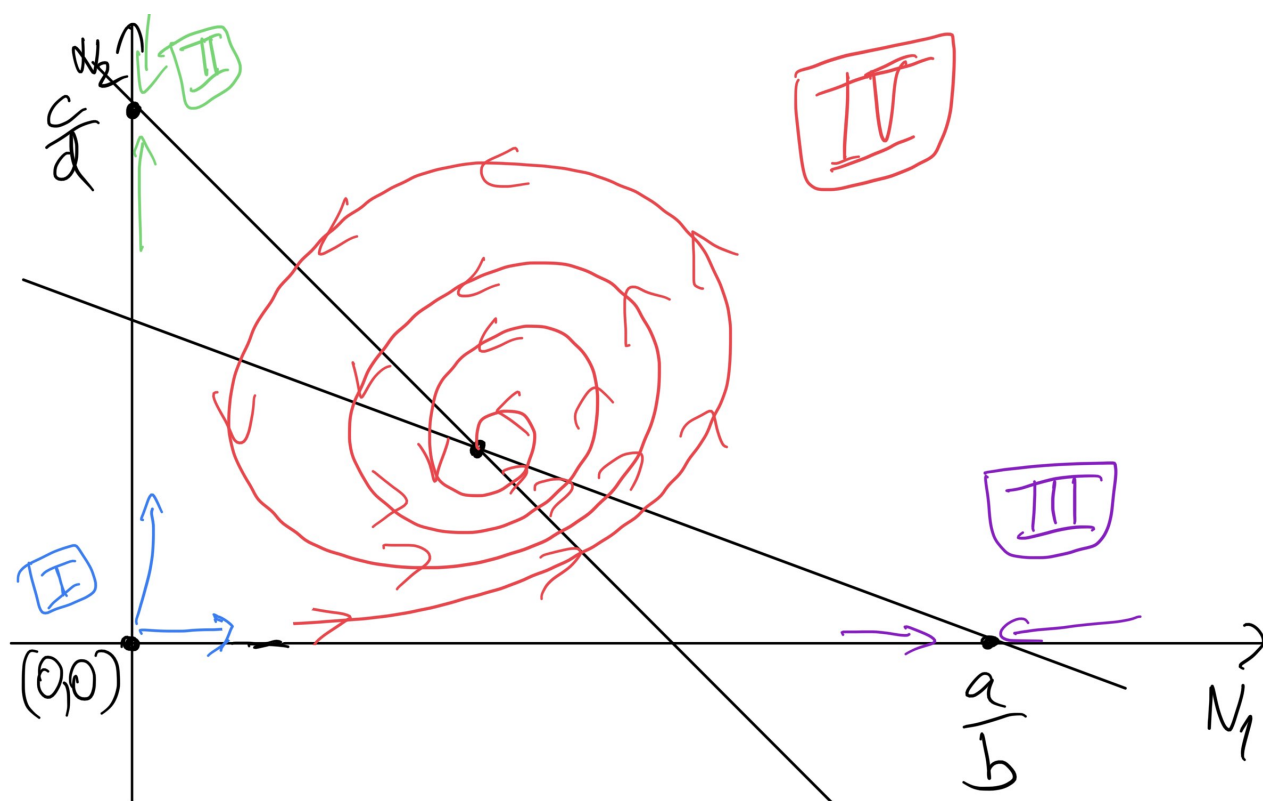
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{q}{p} = -(b\Delta_1 + d\Delta_2) < 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{r}{p} = \Delta\Delta_1\Delta_2 > 0 \end{cases}$$

$$\implies \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}, \alpha < 0 \implies \text{устойчив фокус} \quad (IV)$$

$$a_{21} = \nu\Delta_2 > 0 \implies \text{Посока: срещу часовника}$$



## 2.4 Фазов портрет



Фигура 1: Фазов портрет на обобщения модел

## 2.5 Компютърна реализация

Следния код реализира модела на съжителство в Matlab

```
function ecologyGraph(a,b,sigma,c,nu,d,N0,i)
% Дефиниране интервала на времето
tspan = [0 100];

% Дефиниране на функцията, която описва системата
ode = @(t, N) [ (a - b*N(1) - sigma*N(2)) * N(1);
                (c - nu*N(1) - d*N(2)) * N(2)];

% Решаване на системата от диференциални уравнения
[t, N] = ode45(ode, tspan, N0);

% Визуализация на резултатите
figure(i),plot(t, N(:,1), 'r-', t, N(:,2), 'b--');
legend('N_1', 'N_2', 'Location' , 'best');
xlabel('Time');
ylabel('Population');
end
```

Този код представлява функция, която генерира графика на две популационни групи в зависимост от времето. Функцията има следните параметри:

- $a, b, \sigma, c, \nu, d$  - коефициенти определящи растежа на популацията.
- $N_0$  - началните стойности на популациите във формата  $[N_1(0), N_2(0)]$
- $i$  - номер на графиката, която ще бъде създадена

Системата уравнения се задават в функцията `ode`, която приема два аргумента: време  $t$  и вектор  $N$ , който съдържа стойностите на популациите на двата вида. След това се използва вградената MATLAB функция `ode45`, която решава системата диференциални уравнения, зададена в `ode`, за интервала на времето `tspan`, като използва началните стойности  $N_0$ . След като решението е генерирано, функцията визуализира резултатите чрез графика.

## 2.6 Примери

### Пример 1

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = (5 - 2N_1 - 2N_2) N_1 & N_1(0) = 1 \\ \dot{N}_2 = (3 - 1N_1 - 6N_2) N_2 & N_2(0) = 1 \end{cases}$$

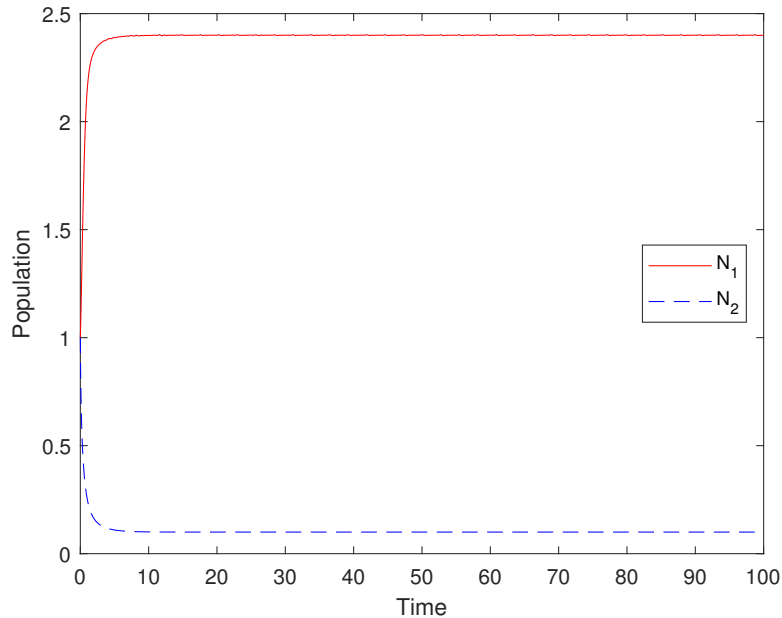
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 > 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 6 = 24 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 > 0$$

За генериране на графика е нужно да се изпълни следния код в MATLAB

```
a = 5;b = 2;sigma = 2;  
c = 3;nu = 1;d = 6;  
N0 = [1; 1];  
ecologyCompGraph(a,b,sigma,c,nu,d,N0,1)
```

Където ecologyCompGraph е функцията представена в 2.5. Генерира следната графика:



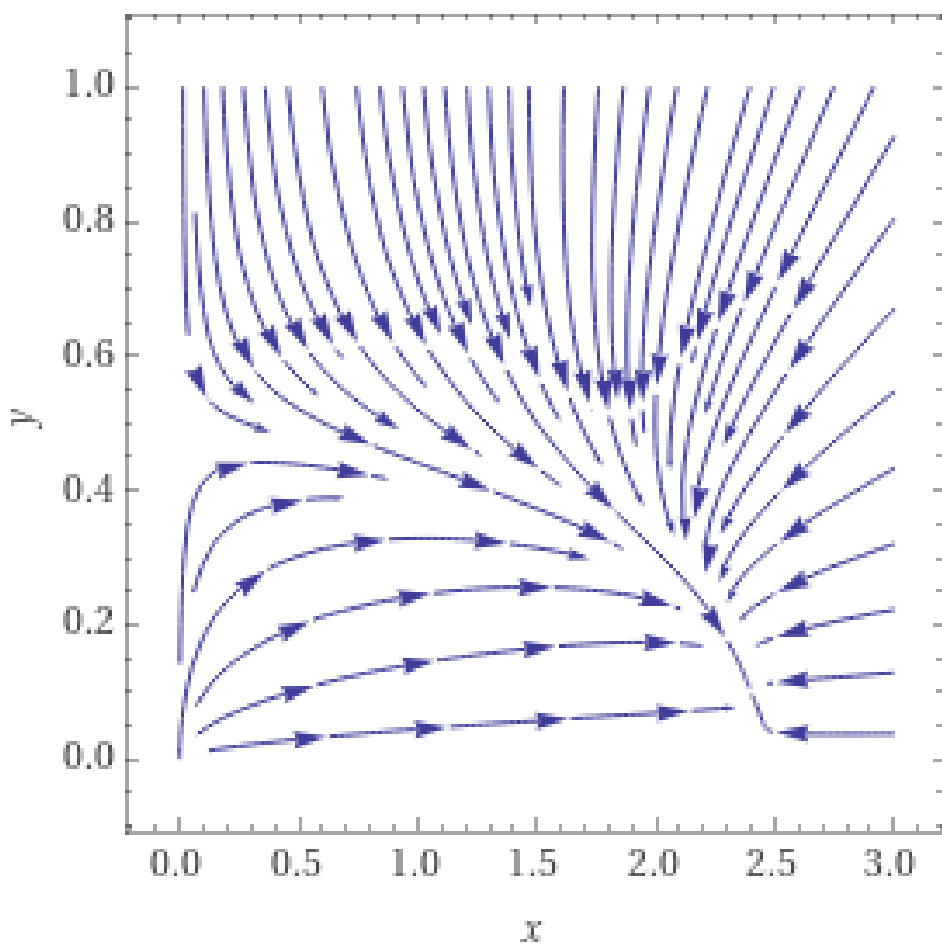
Фигура 2: Графика на получените резултати

Популациите запазват своя брой константен във времето. Тук стойността на  $N_1$  е  $2.4 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ . Аналогично за  $N_2$  стойността е  $0.1 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ .

Фазовия портрет на системата се генерира със следния код във Wolfram Mathematica.

```
StreamPlot[{(5-2*x-2*y)*x, (3-1*x-6*y)*y}, {x,0,3 }, {y,0,1 }]
```

Тъй като самата функция не може да работи с променливи различни от  $x, y$  правим полагане  $N_1 = x, N_2 = y$ . Генерира се фазовия портрет.



Фигура 3: Фазов портрет

## Пример 2

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = (1 - 2N_1 - 1N_2) N_1 & N_1(0) = 1 \\ \dot{N}_2 = (2 - 1N_1 - 3N_2) N_2 & N_2(0) = 1 \end{cases}$$

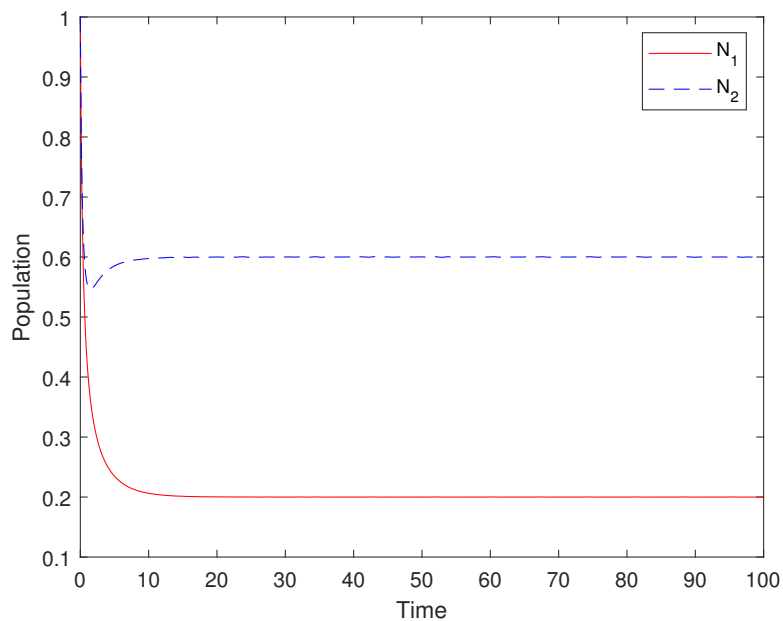
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

За генериране на графика е нужно да се изпълни следния MATLAB код

```
a = 1;b = 2;sigma = 1;  
c = 2;nu = 1;d = 3;  
N0 = [1; 1];  
ecologyCompGraph(a,b,sigma,c,nu,d,N0,2)
```

Където ecologyCompGraph е функцията представена в 2.5. Генерира се следната графика.



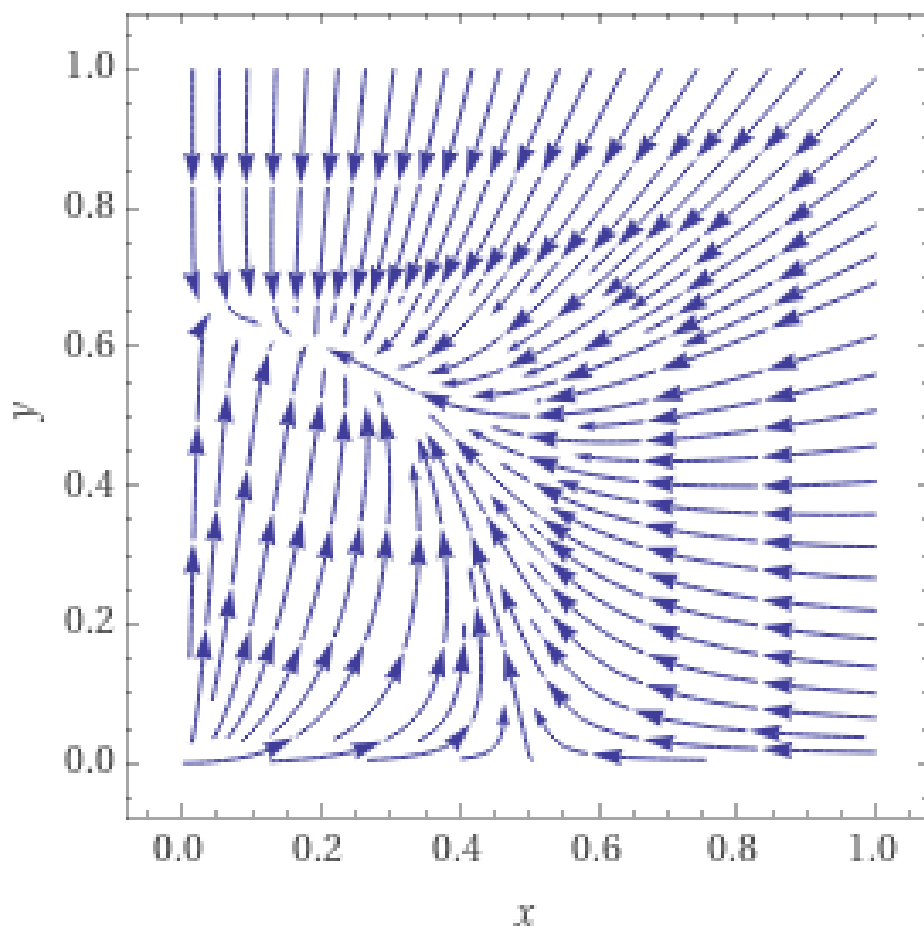
Фигура 4: Графика на получените резултати

И тук двете популации запазват своя брой константен. Тук стойността за  $N_1$  е  $0.2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ . Аналогично за  $N_2$  стойността е  $0.6 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ .

Фазовия портрет на системата се генерира със следния код във Wolfram Mathematica.

```
StreamPlot[{(1-2*x-1*y)*x, (2-1*x-3*y)*y}, {x,0,1 }, {y,0,1 }]
```

И тук е направено полагането  $N_1 = x, N_2 = y$ . Кодът генерира следния фазов портрет.



Фигура 5: Фазов портрет