Технически университет - София
Факултет по приложна математика и информатика

Курсова работа

Числено моделиране с обикновенни диференциални уравнения

Студент:
Кристиян Кръчмаров

Преподавател:
доц. д-р. Богдан Гилев

Съдържание

1 Задачи

1.1 Задача 1

Да се реши системата по Рунге - Кута:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2) \end{array} \right. \qquad \text{при} \qquad \left| \begin{array}{l} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = y_{20} \end{array} \right. \tag{1}$$

където:

$$f(x, y_1, y_2) = -axy_2 - x^2 y_1 \quad a = 0.05 \quad y_{20} = -\frac{1}{6}$$

1.2 Задача 2

Да се сведе до система и да се реши по метода на матричната експонента уравнението при нулеви начални условия

$$y'' + 3y' = xe^{-2x} \tag{2}$$

1.3 Задача 3

Да се реши граничната задача по метода на крайните разлики

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(\frac{16}{t^2}\right)x = \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad t \in [1; 4];\ x(1) = -0.3;\ x(4) = 0.4 \tag{3}$$

1.4 Задача 4

Да се реши граничната задача по метода на стрелбата

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(\frac{16}{t^2}\right)x = \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad t \in [1; 4];\ x(1) = -0.3;\ x(4) = 0.4 \tag{4}$$

2 Решения

2.1 Задача 1

Методът на Рунге-Кута от 4ти ред се използва за числено решение на система обикновенни диференциални уравнения от вида.

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = g(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2) \end{array} \right. \qquad \text{при} \qquad \left| \begin{array}{l} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{array} \right.$$

където:

$y_1 = y_1(x)$; $y_2 = y_2(x)$

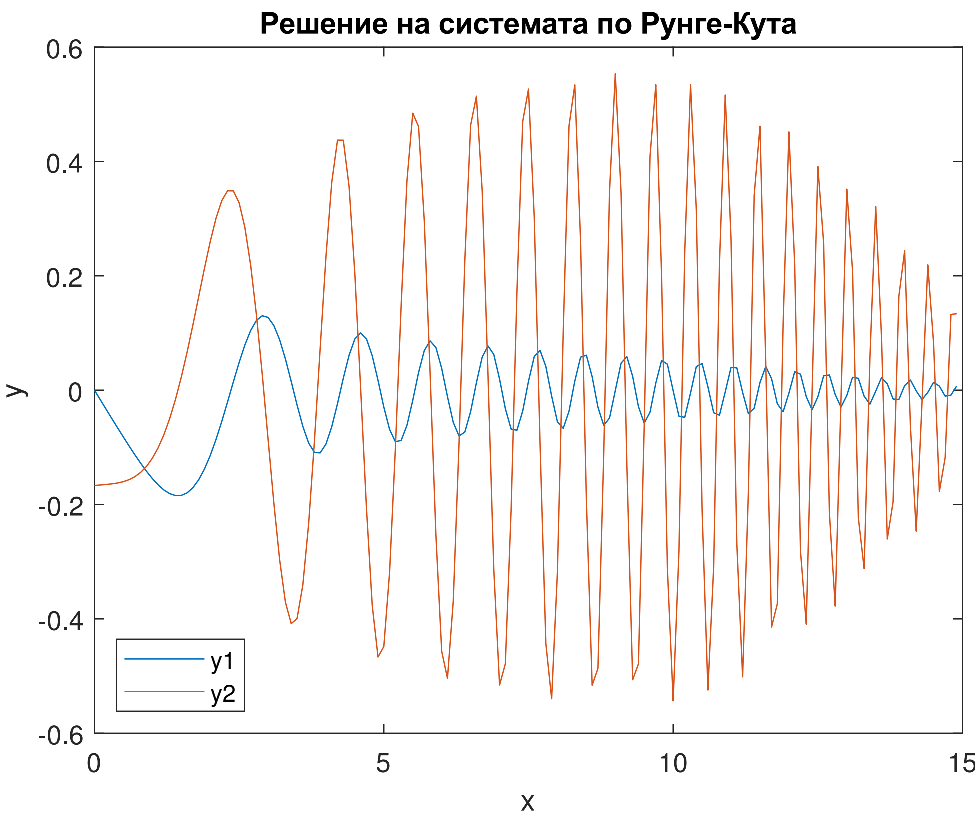
Методът се базира на апроксимация на следващата стойност на функцията, като използва няколко променливи за изчисляване на инкрементацията. При Метод на Рунге-Кута от 4ти ред се използват следните променливи

$$\begin{aligned}
k_{1,1} &= h \cdot f(x_i, y_{1i}, y_{2i}) \\
k_{2,1} &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right) \\
k_{3,1} &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{2,2}}{2}\right) \\
k_{4,1} &= h \cdot f\left(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}, y_{2,i} + k_{3,2}\right) \\
y_{1,i+1} &= y_{1,i} + \frac{1}{6}\left(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}\right) h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,2} &= h \cdot g(x_i, y_{1i}, y_{2i}) \\
k_{2,2} &= h \cdot g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right) \\
k_{3,2} &= h \cdot g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{2,2}}{2}\right) \\
k_{4,2} &= h \cdot g\left(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}, y_{2,i} + k_{3,2}\right) \\
y_{2,i+1} &= y_{2,i} + \frac{1}{6}\left(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}\right) h
\end{aligned}$$

където $y_{1,i}$ и $y_{2,i}$ са предходни приближения, а $y_{1,i+1}$ и $y_{2,i+1}$ са текущи приближения.

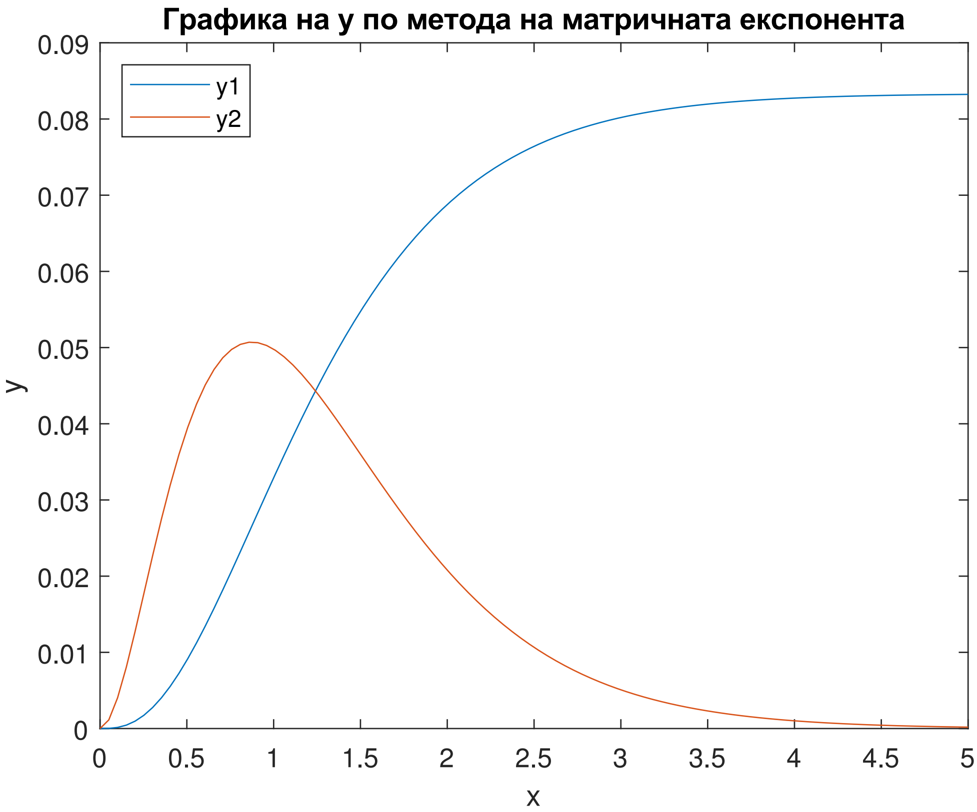
```
function firstTask
% Дефиниране на началните условия
y0 = [0; -1/6];
x0 = 0;
% Дефиниране на стъпката и броя на стъпките
h = 0.1;
n = 150;
% Използване на RK4 функцията
[x, y] = RK4(@system, x0, y0, h, n);
figure(1),plot(x,y(1,:),x,y(2,:));
title('Решение на системата по Рунге-Кута');
legend('y1', 'y2', 'Location', 'southwest', 'Orientation', 'vertical');
xlabel('x');
ylabel('y');
end

function [x, y] = RK4(f, x0, y0, h, n)
% f - функция, която връща дясната част на системата
% x0 - начална точка за решението
% y0 - началните условия
% h - стъпка на метода
% n - брой стъпки

x = x0 + (0:n-1)*h;  % Изчисляваме x стойностите
y = zeros(length(y0), n);  % Създаваме матрица за y
y(:,1) = y0;  % Запазваме началните условия в първата колона на y
for i = 1:n-1
    k1 = f(x(i), y(:,i));
    k2 = f(x(i)+0.5*h, y(:,i)+0.5*h*k1);
    k3 = f(x(i)+0.5*h, y(:,i)+0.5*h*k2);
    k4 = f(x(i)+h, y(:,i)+h*k3);
    y(:,i+1) = y(:,i) + h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;  % Изчисляваме y_i+1
end
end

function dydx = system(x, y)
a = 0.05;
dydx = [y(2); -a*y(2) - x^2*y(1)];
end
```


Решение на системата по Рунге-Кута
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
y
0
5
10
15
x
y1
y2

2.2 Задача 2

TODO: Добави инфо

```
function secondTask
A = [0, 1; 0, -3]; % матрица на коефициенти
B = @(x)[0; myFunction(x)]; % свободни коефициенти
expA = expm(A); % матрична експонента

% начални условия
y0 = [0; 0];
% създаване на масив от времеви точки
t = linspace(0, 5, 100);
% създаване на масив за съхранение на резултатите
y = zeros(length(y0), length(t));

for i = 1:length(t)
    integrand = @(s) expm(A*(t(i)-s)) * B(s);
    y(:,i) = expA * y0 + integral(integrand, 0, t(i), 'ArrayValued', true);
end

figure(2),plot(t, y(1,:),t,y(2,:));
title('Графика на y по метода на матричната експонента');
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('y1', 'y2', 'Location', 'northwest', 'Orientation', 'vertical');

end

function f = myFunction(x)
f = x*exp(-2*x);
end
```


Графика на y по метода на матричната експонента
y1
y2
y
x
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

2.3 Задача 3

2.4 Задача 4