Технически университет - София
Факултет по приложна математика и информатика

Курсова работа

Математическа Екология

Студент:
Кристиян Кръчмаров

Преподавател:
проф. дмн. Людмил Каранджулов

Съдържание

1 Задание

За математическия модел на съжителство на две популации

$$\left| \begin{array}{ll} \dot{N}_1 = (a - bN_1 - \sigma N_2)\, N_1 & \quad a, b, \sigma > 0 \\ \dot{N}_2 = (c - \nu N_1 - dN_2)\, N_2 & \quad c, d, \nu > 0 \end{array} \right. \qquad (*)$$

са въведени следните означения

$$\Delta = \begin{pmatrix} b & \sigma \\ \nu & d \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{pmatrix} a & \sigma \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{pmatrix} b & a \\ \nu & c \end{pmatrix}$$

Изследвайте вида на особенните точки, фазова картина, компютърна реализация, съответни чертежи и биологични изводи, ако е изпълнено

$$\Delta > 0 \qquad \Delta_1 > 0 \qquad \Delta_2 > 0$$

2 Решение

2.1 Особенни точки

Особенните точки се получават като решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} (a - bN_1 - \sigma N_2)\, N_1 = 0 \\ (c - \nu N_1 - dN_2)\, N_2 = 0 \end{array} \right.$$

2.1.1 Първи случай

$$\left| \begin{array}{l} N_1 = 0 \\ N_2 = 0 \end{array} \right. \tag{I}$$

2.1.2 Втори случай

$$\left| \begin{array}{l} N_1 = 0 \\ N_2 \neq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow c - dN_2 = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} N_1 = 0 \\ N_2 = \frac{c}{d} \end{array} \right. \tag{II}$$

2.1.3 Трети случай

$$\left| \begin{array}{l} N_1 \neq 0 \\ N_2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow a - bN_1 = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} N_1 = \frac{a}{b} \\ N_2 = 0 \end{array} \right. \tag{III}$$

2.1.4 Четвърти случай

$$\left| \begin{array}{l} N_1 \neq 0 \\ N_2 \neq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a - bN_1 - \sigma N_2 = 0 \\ c - \nu N_1 - dN_2 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} bN_1 + \sigma N_2 = a \\ \nu N_1 + dN_2 = c \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} N_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ N_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{array} \right. \qquad \text{(Крамер)} \tag{IV}$$

2.2 Линеаризация

Линеаризацията се получава като се замести в $(*)$

$$\left| \begin{array}{l} N_1 - \alpha = y_1 \\ N_2 - \beta = y_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} N_1 = y_1 + \alpha \\ N_2 = y_2 + \beta \end{array} \right.$$

където (α, β) е особенна точка и се вземе линейната част за всяка една променлива y_1, y_2

$$W = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$
$$W = \begin{pmatrix} a - \frac{\sigma c}{d} & 0 \\ -\frac{\nu c}{d} & -c \end{pmatrix}$$
$$W = \begin{pmatrix} -a & -\frac{\sigma a}{b} \\ 0 & c - \frac{\nu a}{b} \end{pmatrix}$$
$$W = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b\Delta_1 & \sigma\Delta_1 \\ \nu\Delta_2 & d\Delta_2 \end{pmatrix} ?!?!$$

2.2.1 Първи случай

$$\left| \begin{array}{l} N_1 - 0 = y_1 \\ N_2 - 0 = y_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} N_1 = y_1 \\ N_2 = y_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{y_1} = (a - by_1 - \sigma y_2)\, y_1 \\ \dot{y_1} = (c - \nu y_1 - dy_2)\, y_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y_1} = ay_1 - by_1^2 - \sigma y_1 y_2 \\ \dot{y_1} = cy_2 - \nu y_1 y_2 - dy_2^2 \end{array} \right. \Longrightarrow W = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad (I)$$

2.2.2 Втори случай

$$\left| \begin{array}{l} N_1 - 0 = y_1 \\ N_2 - \frac{c}{d} = y_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} N_1 = y_1 \\ N_2 = y_2 + \frac{c}{d} \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{y_1} = \left[a - by_1 - \sigma \left(y_2 + \frac{c}{d}\right)\right] y_1 \\ \dot{y_2} = \left[c - \nu y_1 - d\left(y_2 + \frac{c}{d}\right)\right] \left(y_2 + \frac{c}{d}\right) \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y_1} = ay_1 - by_1^2 - \sigma y_1 y_2 - \frac{\sigma c}{d} y_1 \\ \dot{y_2} = [c - \nu y_1 - dy_2 - c] \left(y_2 + \frac{c}{d}\right) \end{array} \right. \Longrightarrow W = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad (II)$$

2.2.3 Трети случай

2.2.4 Четвърти случай

2.3 Собствени стойностти

$$\det(W - \lambda I) = 0$$