

Технически университет - София
Факултет по приложна математика и информатика

Курсова работа

МАТЕМАТИЧЕСКА ЕКОЛОГИЯ

Студент:
Кристиян Кръчмаров

Преподавател:
проф. дмн. Людмил
Каранджулов

Съдържание

1	Задание	2
2	Решение	3
2.1	Особенни точки	3
2.1.1	Първи случай	3
2.1.2	Втори случай	3
2.1.3	Трети случай	3
2.1.4	Четвърти случай	3
2.2	Линеаризация	3
2.2.1	Първи случай	4
2.2.2	Втори случай	4
2.2.3	Трети случай	4
2.2.4	Четвърти случай	5
2.3	Собствени стойности	5

1 Задание

За математическия модел на съжителство на две популации

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = (a - bN_1 - \sigma N_2) N_1 & a, b, \sigma > 0 \\ \dot{N}_2 = (c - \nu N_1 - dN_2) N_2 & c, d, \nu > 0 \end{cases} \quad (*)$$

са въведени следните означения

$$\Delta = \begin{pmatrix} b & \sigma \\ \nu & d \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} a & \sigma \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} b & a \\ \nu & c \end{pmatrix}$$

Изследвайте вида на особенните точки, фазова картина, компютърна реализация, съответни чертежи и биологични изводи, ако е изпълнено

$$\Delta > 0 \quad \Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0$$

2 Решение

2.1 Особенни точки

Особенните точки се получават като решение на системата

$$\begin{cases} (a - bN_1 - \sigma N_2) N_1 = 0 \\ (c - \nu N_1 - dN_2) N_2 = 0 \end{cases}$$

2.1.1 Първи случай

$$\begin{cases} N_1 = 0 \\ N_2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

2.1.2 Втори случай

$$\begin{cases} N_1 = 0 \\ N_2 \neq 0 \end{cases} \implies c - dN_2 = 0 \implies \begin{cases} N_1 = 0 \\ N_2 = \frac{c}{d} \end{cases} \quad (II)$$

2.1.3 Трети случай

$$\begin{cases} N_1 \neq 0 \\ N_2 = 0 \end{cases} \implies a - bN_1 = 0 \implies \begin{cases} N_1 = \frac{a}{b} \\ N_2 = 0 \end{cases} \quad (III)$$

2.1.4 Четвърти случай

$$\begin{aligned} \begin{cases} N_1 \neq 0 \\ N_2 \neq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a - bN_1 - \sigma N_2 = 0 \\ c - \nu N_1 - dN_2 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} bN_1 + \sigma N_2 = a \\ \nu N_1 + dN_2 = c \end{cases} \implies \\ \begin{cases} N_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ N_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases} & \quad (\text{Крамер}) \end{aligned} \quad (IV)$$

2.2 Линеаризация

Линеаризацията се получава като се замести в (*)

$$\begin{cases} N_1 - \alpha = y_1 \\ N_2 - \beta = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} N_1 = y_1 + \alpha \\ N_2 = y_2 + \beta \end{cases}$$

където (α, β) е особенна точка и се вземе линейната част за всяка една променлива y_1, y_2

2.2.1 Първи случай

$$\left| \begin{array}{l} N_1 - 0 = y_1 \\ N_2 - 0 = y_2 \end{array} \right| \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} N_1 = y_1 \\ N_2 = y_2 \end{array} \right| \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = (a - by_1 - \sigma y_2) y_1 \\ \dot{y}_2 = (c - \nu y_1 - dy_2) y_2 \end{array} \right| \Longleftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = ay_1 - by_1^2 - \sigma y_1 y_2 \\ \dot{y}_2 = cy_2 - \nu y_1 y_2 - dy_2^2 \end{array} \right| \Longrightarrow W = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad (I)$$

2.2.2 Втори случай

$$\left| \begin{array}{l} N_1 - 0 = y_1 \\ N_2 - \frac{c}{d} = y_2 \end{array} \right| \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} N_1 = y_1 \\ N_2 = y_2 + \frac{c}{d} \end{array} \right| \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \left[a - by_1 - \sigma \left(y_2 + \frac{c}{d} \right) \right] y_1 \\ \dot{y}_2 = \left[c - \nu y_1 - d \left(y_2 + \frac{c}{d} \right) \right] \left(y_2 + \frac{c}{d} \right) \end{array} \right| \Longleftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = ay_1 - by_1^2 - \sigma y_1 y_2 - \frac{\sigma c}{d} y_1 \\ \dot{y}_2 = [c - \nu y_1 - dy_2 - c] \left(y_2 + \frac{c}{d} \right) \end{array} \right| \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = ay_1 - by_1^2 - \sigma y_1 y_2 - \frac{\sigma c}{d} y_1 \\ \dot{y}_2 = \nu y_1 y_2 - \frac{\nu c}{d} y_1 - dy_2^2 - cy_2 \end{array} \right| \Longrightarrow$$

$$W = \begin{pmatrix} a - \frac{\sigma c}{d} & 0 \\ -\frac{\nu c}{d} & -c \end{pmatrix} \quad (II)$$

2.2.3 Трети случай

$$\left| \begin{array}{l} N_1 - \frac{a}{b} = y_1 \\ N_2 - 0 = y_2 \end{array} \right| \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} N_1 = y_1 + \frac{a}{b} \\ N_2 = y_2 \end{array} \right| \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \left[a - b \left(y_1 + \frac{a}{b} \right) - \sigma y_2 \right] \left(y_1 + \frac{a}{b} \right) \\ \dot{y}_2 = \left[c - \nu \left(y_1 + \frac{a}{b} \right) - dy_2 \right] y_2 \end{array} \right| \Longleftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = [a - by_1 - a - \sigma y_2] \left(y_1 + \frac{a}{b} \right) \\ \dot{y}_2 = cy_2 - \nu y_1 y_2 - \frac{\nu a}{b} - dy_2^2 \end{array} \right| \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = -by_1^2 - ay_1 - \sigma y_1 y_2 - \frac{\sigma a}{b} \\ \dot{y}_2 = cy_2 - \nu y_1 y_2 - \frac{\nu a}{b} - dy_2^2 \end{array} \right| \Longrightarrow$$

$$W = \begin{pmatrix} -a & -\frac{\sigma a}{b} \\ 0 & c - \frac{\nu a}{b} \end{pmatrix} \quad (III)$$

2.2.4 Четвърти случай

$$\left| \begin{array}{l} N_1 - \frac{\Delta_1}{\Delta} = y_1 \\ N_2 - \frac{\Delta_2}{\Delta} = y_2 \end{array} \right| \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} N_1 = y_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ N_2 = y_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{array} \right| \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \left[a - b \left(y_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \right) - \sigma \left(y_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta} \right) \right] \left(y_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \right) \\ \dot{y}_2 = \left[c - \nu \left(y_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \right) - d \left(y_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta} \right) \right] \left(y_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta} \right) \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \left[a - by_1 - \frac{b\Delta_1}{\Delta} - \sigma y_2 - \frac{\sigma\Delta_2}{\Delta} \right] \left(y_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \right) \\ \dot{y}_2 = \left[c - \nu y_1 - \frac{\nu\Delta_1}{\Delta} - dy_2 - \frac{d\Delta_2}{\Delta} \right] \left(y_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta} \right) \end{array} \right| \Longleftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = ay_1 + \frac{a\Delta_1}{\Delta} - by_1^2 - \frac{b\Delta_1}{\Delta}y_1 - \frac{b\Delta_1}{\Delta}y_1 - b\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^2 - \sigma y_1y_2 - \frac{\sigma\Delta_1}{\Delta}y_1 - \frac{\sigma\Delta_2}{\Delta}y_1 - \frac{\sigma\Delta_1\Delta_2}{\Delta^2} \\ \dot{y}_2 = cy_2 + \frac{c\Delta_2}{\Delta} - \nu y_1y_2 - \frac{\nu\Delta_2}{\Delta}y_1 - \frac{\nu\Delta_1}{\Delta}y_2 - \frac{\nu\Delta_1\Delta_2}{\Delta^2} - dy_2^2 - \frac{d\Delta_2}{\Delta}y_2 - \frac{d\Delta_2}{\Delta}y_2 - d\left(\frac{\Delta_2}{\Delta}\right)^2 \end{array} \right| \Longrightarrow$$

$$W = \begin{pmatrix} a - \frac{2b\Delta_1}{\Delta} - \frac{\sigma\Delta_2}{\Delta} & -\frac{\sigma\Delta_1}{\Delta} \\ -\frac{\nu\Delta_2}{\Delta} & c - \frac{2d\Delta_2}{\Delta} - \frac{\nu\Delta_1}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$W = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta a - 2b\Delta_1 - \sigma\Delta_2 & -\sigma\Delta_1 \\ -\nu\Delta_2 & \Delta c - 2d\Delta_2 - \nu\Delta_1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta a - 2b\Delta_1 - \sigma\Delta_2 = (bd - \nu\sigma)a - 2b(ad - c\sigma) - \sigma(bc - a\nu) =$$

$$abd - a\nu\sigma - 2abd + 2bc\sigma - bc\sigma + a\nu\sigma = bc\sigma - abd = b(c\sigma - ad) = -b(ad - c\sigma) = -b\Delta_1$$

$$\Delta c - 2d\Delta_2 - \nu\Delta_1 = (bd - \nu\sigma)c - 2d(bc - a\nu) - \nu(ad - c\sigma) =$$

$$bcd - c\nu\sigma - 2bcd + 2ad\nu - ad\nu + c\nu\sigma = ad\nu - bcd = d(a\nu - bc) = -d(bc - a\nu) = -d\Delta_2$$

$$\Longrightarrow W = -\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b\Delta_1 & \sigma\Delta_1 \\ \nu\Delta_2 & d\Delta_2 \end{pmatrix}$$

2.3 Собствени стойности

$$\det(W - \lambda I) = 0$$