Технически университет - София
Факултет по приложна математика и информатика

Курсова работа

Числено моделиране с обикновенни диференциални уравнения

Студент:
Кристиян Кръчмаров

Преподавател:
доц. д-р. Богдан Гилев

Съдържание

1 Задачи

1.1 Задача 1

Да се реши системата по Рунге - Кута:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2) \end{array} \right. \qquad \text{при} \qquad \left| \begin{array}{l} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = y_{20} \end{array} \right. \tag{1}$$

където:

$$f(x, y_1, y_2) = -axy_2 - x^2 y_1 \quad a = 0.05 \quad y_{20} = -\frac{1}{6}$$

1.2 Задача 2

Да се сведе до система и да се реши по метода на матричната експонента уравнението при нулеви начални условия

$$y'' + 3y' = xe^{-2x} \tag{2}$$

1.3 Задача 3

Да се реши граничната задача по метода на крайните разлики

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(\frac{16}{t^2}\right)x = \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad t \in [1;4];\ x(1) = -0.3;\ x(4) = 0.4 \tag{3}$$

1.4 Задача 4

Да се реши граничната задача по метода на стрелбата

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(\frac{16}{t^2}\right)x = \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad t \in [1;4];\ x(1) = -0.3;\ x(4) = 0.4 \tag{4}$$

2 Решения

2.1 Задача 1

Методът на Рунге-Кута от 4ти ред се използва за числено решение на система обикновенни диференциални уравнения от вида.

$$\left|\begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = g(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2) \end{array}\right. \qquad \text{при} \qquad \left|\begin{array}{l} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{array}\right.$$

където:

$y_1 = y_1(x)$; $y_2 = y_2(x)$

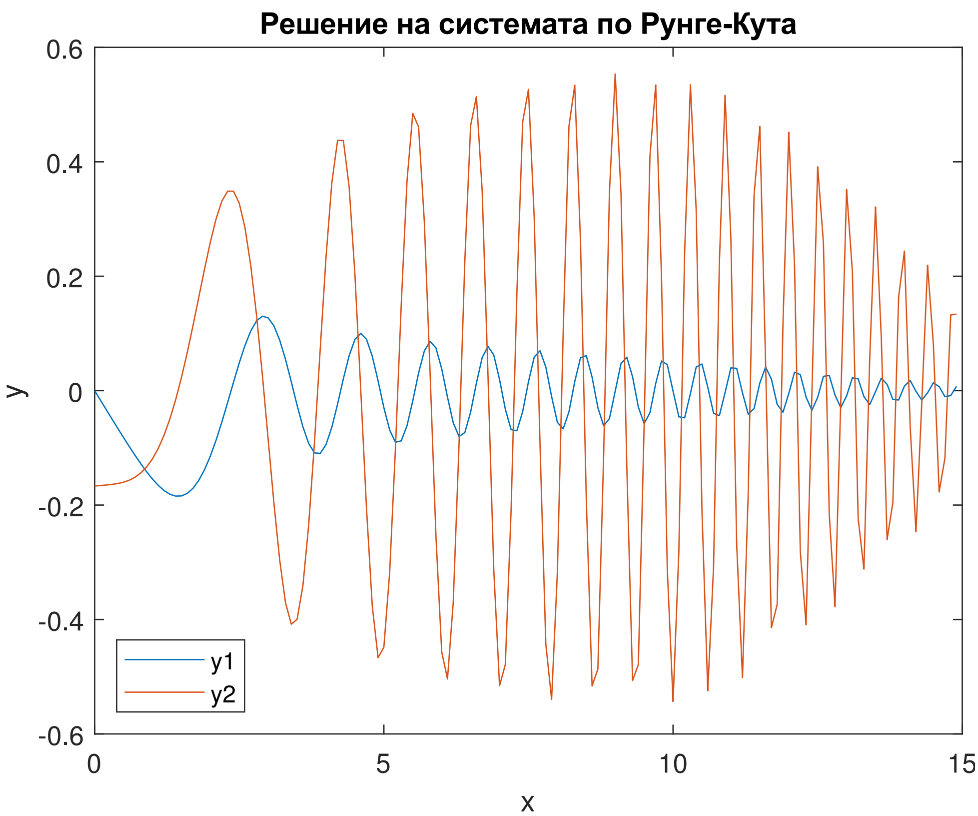
Методът се базира на апроксимация на следващата стойност на функцията, като използва няколко променливи за изчисляване на инкрементацията. При Метод на Рунге-Кута от 4ти ред се използват следните променливи

$$k_{1,1} = h \cdot f(x_i, y_{1i}, y_{2i})$$
$$k_{2,1} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right)$$
$$k_{3,1} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{2,2}}{2}\right)$$
$$k_{4,1} = h \cdot f\left(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}, y_{2,i} + k_{3,2}\right)$$
$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + \frac{1}{6}\left(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}\right) h$$

$$k_{1,2} = h \cdot g(x_i, y_{1i}, y_{2i})$$
$$k_{2,2} = h \cdot g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right)$$
$$k_{3,2} = h \cdot g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{2,2}}{2}\right)$$
$$k_{4,2} = h \cdot g\left(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}, y_{2,i} + k_{3,2}\right)$$
$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + \frac{1}{6}\left(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}\right) h$$

където $y_{1,i}$ и $y_{2,i}$ са предходни приближения, а $y_{1,i+1}$ и $y_{2,i+1}$ са текущи приближения.

```
function firstTask
% Дефиниране на началните условия
y0 = [0; -1/6];
x0 = 0;
% Дефиниране на стъпката и броя на стъпките
h = 0.1;
n = 150;
% Използване на RK4 функцията
[x, y] = RK4(@system, x0, y0, h, n);
figure(1),plot(x,y(1,:),x,y(2,:));
title('Решение на системата по Рунге-Кута');
legend('y1', 'y2', 'Location', 'southwest', 'Orientation', 'vertical');
xlabel('x');
ylabel('y');
end

function [x, y] = RK4(f, x0, y0, h, n)
% f - функция, която връща дясната част на системата
% x0 - начална точка за решението
% y0 - началните условия
% h - стъпка на метода
% n - брой стъпки

x = x0 + (0:n-1)*h;  % Изчисляваме x стойностите
y = zeros(length(y0), n);  % Създаваме матрица за y
y(:,1) = y0;  % Запазваме началните условия в първата колона на y
for i = 1:n-1
    k1 = f(x(i), y(:,i));
    k2 = f(x(i)+0.5*h, y(:,i)+0.5*h*k1);
    k3 = f(x(i)+0.5*h, y(:,i)+0.5*h*k2);
    k4 = f(x(i)+h, y(:,i)+h*k3);
    y(:,i+1) = y(:,i) + h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;  % Изчисляваме y_i+1
end
end

function dydx = system(x, y)
a = 0.05;
dydx = [y(2); -a*y(2) - x^2*y(1)];
end
```


Решение на системата по Рунге-Кута
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
y
0
5
10
15
x
y1
y2

2.2 Задача 2

Методът на матричната експонента се използва за числено решение на система обикновенни диференциални уравнения от вида

$$\frac{dy}{dx} = Ay + Bx \qquad \text{при} \qquad y(x_0) = y_0$$

Матричната експонента се дефинира като безкраен матричен ред

$$e^{Ax} = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

където E е единичната матрица, а A^n е произведението на А, n пъти.
В задачата уравнението се свежда до система с въвеждането на

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ xe^{-2x} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow Y' = AY + B$$

$$Y' = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}' \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ xe^{-2x} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}$$

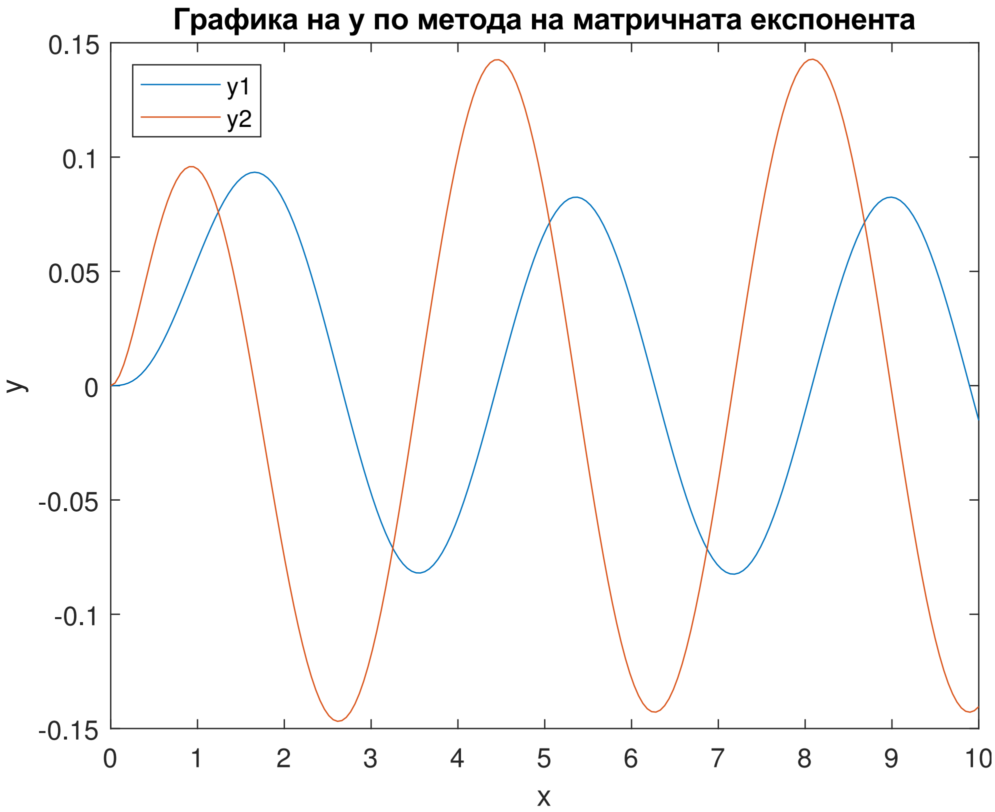
Решението на уравнението се дава във вида

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} y(x_0) + e^{Ax} \int_{x0}^{x} e^{-As} B(s)\, ds$$

Но, тъй като по условие имаме нулеви начални условия $(y(x_0) = 0)$, следва че

$$y(x) = e^{Ax} \int_{x0}^{x} e^{-As} B(s)\, ds$$

```
function secondTask
A = [0, 1; -3, 0]; % матрица на коефициенти
B = @(x)[0; myFunction(x)]; % свободни коефициенти
expA = expm(A); % матрична експонента

% начални условия
y0 = [0; 0];
% създаване на масив от времеви точки
t = linspace(0, 10, 200);
% създаване на масив за съхранение на резултатите
y = zeros(length(y0), length(t));

for i = 1:length(t)
    integrand = @(s) expm(A*(t(i)-s)) * B(s);
    y(:,i) = expA * y0 + integral(integrand, 0, t(i), 'ArrayValued', true);
end

figure(2),plot(t, y(1,:),t,y(2,:));
title('Графика на y по метода на матричната експонента');
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('y1', 'y2', 'Location', 'northwest', 'Orientation', 'vertical');

end

function f = myFunction(x)
f = x*exp(-2*x);
end
```


Графика на y по метода на матричната експонента
y1
y2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
y
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x

2.3 Задача 3

Метода на крайните разлики се използва за решаване на обикновенни диференциални уравнения от вида

$$x''(t) = f(t, x, x') \qquad t \in [a; b] \qquad x(a) = \alpha \qquad x(b) = \beta$$

Метода се състои в следните стъпки

1. Определяне на начална стойност

2. Разделяне на интервала на $n - 1$ равни части

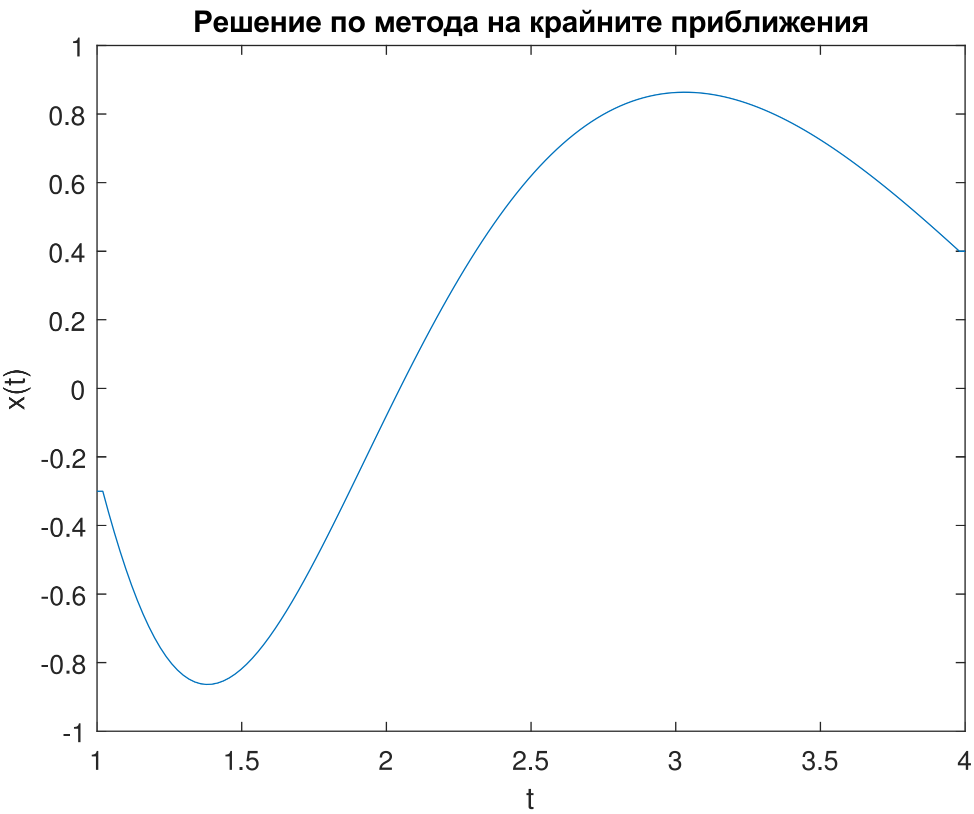
3. Намиране на разликите между стойностите на функцията в съседни точки. Често използвани формули са

$$x'(t) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \qquad\qquad x''(t) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

4. Замяна на производните със съответните разлики.

5. Решаване на системата от линейни уравнения.

```
function thirdTask
% Задаване на параметри
a = 1; b = 4; % граници на интервала
alpha = -0.3;  beta = 0.4; %x(a)=alpha; x(b)=beta
n = 150; % брой точки на дискретизация
h = (b-a)/(n+1); % стъпка на дискретизация

% Дефиниране на матрицата на коефициентите и вектора на дясната страна
A = zeros(n,n);
f = zeros(n,1);
for i = 1:n
    ti = a + i*h;
    A(i,i) = -2/h^2 + 16/ti^2;
    f(i) = h^2*sin(1/ti^2);
    if i ~= 1
        A(i,i-1) = 1/h^2 - 1/(2*h*ti);
    end
    if i ~= n
        A(i,i+1) = 1/h^2 + 1/(2*h*ti);
    end
end

% Прилагане на граничните условия
A(1,:) = 0; A(1,1) = 1;
f(1) = alpha;
A(n,:) = 0; A(n,n) = 1;
f(n) = beta;

% Решаване на системата
x = A\f;

% Визуализация на решението
t = linspace(a,b,n+2);
xx=[alpha;x;beta];
figure(3),plot(t,xx);
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
title('Решение по метода на крайните приближения');
end
```


Решение по метода на крайните приближения
x(t)
t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

2.4 Задача 4

Метода на стрелбата се използва за решаване на обикновенни диференциални уравнения от вида

$$x''(t) = f(t, x, x') \qquad t \in [a; b] \qquad x(a) = \alpha \qquad x(b) = \beta$$

Метода се състои в следдните стъпки

1. Представяне на началната задача като система от две уравнения от първи ред

$$\left|\begin{array}{l} x' = y \\ y' = f(t, x, x') \end{array}\right. \qquad \text{при} \qquad \left|\begin{array}{l} x(a) = \alpha \\ x(b) = \beta \\ y(1) = y(4) = s \end{array}\right.$$

2. Задаваме си начално предположение за стойността на параметъра $s = a$.

3. Решаваме получената система от диференциални уравнения с началните условия, използвайки числен метод.

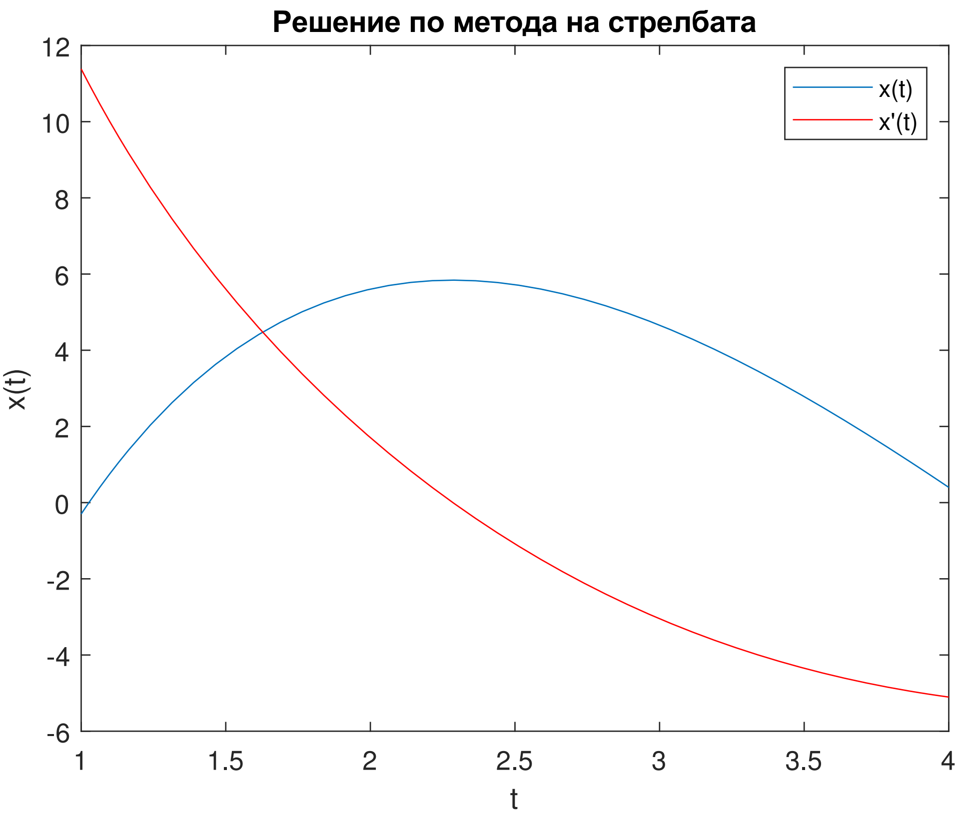
4. Изчисляваме стойността на функцията получената от 3. функция x в $t = b$.

5. Изчисляваме разликата между изчислената стойност на x в края на интервала и действителната стойност на x в краен момент, която е дадена в началните условия.

6. Коригираме началното предположение за параметъра.

7. Повтаряме стъпки стъпки 3 - 6, докато корекцията не стане достатъчно малка.

```
function fourthTask
t0=0;
t0=fsolve(@function1,t0);
x0=[-0.3,t0];
[t,x]=ode45(@function2,[1,4],x0);
figure(4),plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'r')
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
legend('x(t)', "x'(t)", 'Location', 'northeast');
title('Решение по метода на стрелбата');
end

function f=function1(x)
x0=[-0.3,x];
[t,x]=ode45(@function2,[1,4],x0);
n=length(t);
f=x(n,1)-0.4;
end

function dy=function2(t,x)
dy(1,1)=x(2);
dy(2,1)=sin(1/t^2)-(16/t^2)-(x(1)/t);
end
```


Решение по метода на стрелбата
x(t)
x'(t)
x(t)
t
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4