Технически университет - София
Факултет по приложна математика и информатика

Курсова работа

Числено моделиране с обикновенни диференциални уравнения

Студент:
Кристиян Кръчмаров

Преподавател:
доц. д-р. Богдан Гилев

Съдържание

1 Задачи **2**

1.1 Задача 1 2
1.2 Задача 2 2
1.3 Задача 3 2
1.4 Задача 4 2

2 Решения **3**

2.1 Задача 1 3
2.2 Задача 2 5
2.3 Задача 3 7
2.4 Задача 4 9

1 Задачи

1.1 Задача 1

Да се реши системата по Рунге - Кута:

$$\left|\begin{array}{l}\frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2)\end{array}\right. \qquad \text{при} \qquad \left|\begin{array}{l}y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = y_{20}\end{array}\right. \tag{1}$$

където:

$$f(x, y_1, y_2) = -axy_2 - x^2 y_1 \quad a = 0.05 \quad y_{20} = \frac{1}{6}$$

1.2 Задача 2

Да се сведе до система и да се реши по метода на матричната експонента уравнението при нулеви начални условия

$$y'' + 3y' = xe^{-2x} \tag{2}$$

1.3 Задача 3

Да се реши граничната задача по метода на крайните разлики

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(\frac{16}{t^2}\right)x = \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad t \in [1; 4];\ x(1) = -0.3;\ x(4) = 0.4 \tag{3}$$

1.4 Задача 4

Да се реши граничната задача по метода на стрелбата

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(\frac{16}{t^2}\right)x = \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad t \in [1; 4];\ x(1) = -0.3;\ x(4) = 0.4 \tag{4}$$

2 Решения

2.1 Задача 1

Методът на Рунге-Кута от 4ти ред се използва за числено решение на система обикновенни диференциални уравнения от вида.

$$\left|\begin{array}{l}\frac{dy_1}{dx} = g(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2)\end{array}\right. \qquad \text{при} \qquad \left|\begin{array}{l}y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20}\end{array}\right.$$

където:

$y_1 = y_1(x)$; $y_2 = y_2(x)$

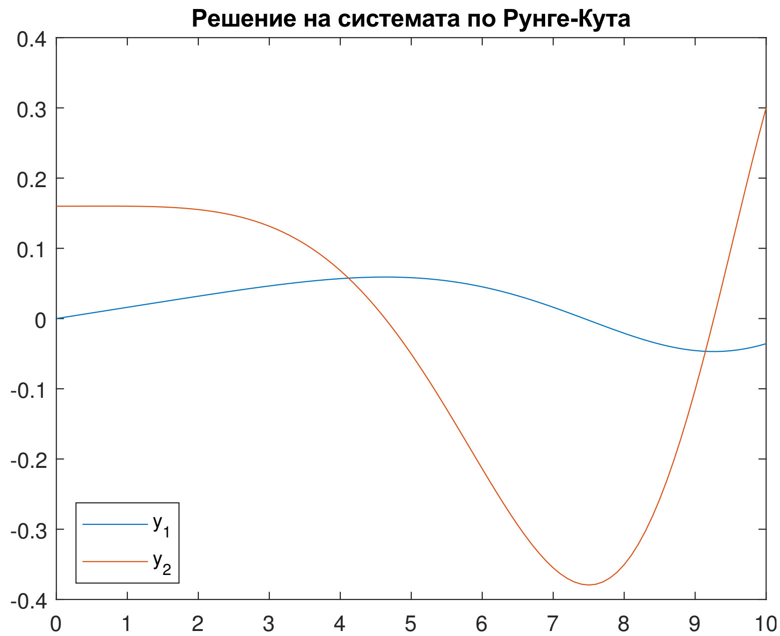
Методът се базира на апроксимация на следващата стойност на функцията, като използва няколко променливи за изчисляване на инкрементацията. При Метод на Рунге-Кута от 4ти ред се използват следните променливи

$$Y_i = \{y_1, y_2\}$$
$$k_1 = h \cdot f(x_i, Y_i)$$
$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1\right)$$
$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2} \cdot k_2\right)$$
$$k_4 = h \cdot f\left(x_i + h, Y_i + h \cdot k_3\right)$$
$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

където Y_i е предходното приближение, а Y_{i+1} е текущото приближение.

```
function firstTask
h=0.1;%стъпка
x=0:h:10;
n=length(x);%итерации
y(1,1)=0; y(2,1) = 0.16;%начални условия
for i=1:(n-1)
    k1=h*system (x(i), y(1:2,i));
    k2=h*system (x(i) + h/2, y(1:2, i) + h*k1/2);
    k3=h*system (x (i) + h/2, y(1:2, i) + h*k2/2);
    k4=h*system (x(i) + h, y(1:2, i) +h*k3);
    y(1:2, i+1)=y(1:2, i) + (h*(k1+2*k2+2*k3+k4))/6;
end
figure (1), plot (x,y (1, :),x,y(2,:));
legend('y_1', 'y_2','Location', 'best');
title('Решение на системата по Рунге-Кута');
end

function f = system (x, y)
    f(1,1)=y(2);
    f(2,1)=0.05*x*y(2)-x^2*y(1);
end
```



2.2 Задача 2

Методът на матричната експонента се използва за числено решение на система обикновенни диференциални уравнения от вида

$$\frac{dy}{dx} = Ay + Bx \qquad \text{при} \qquad y(x_0) = y_0$$

Матричната експонента се дефинира като безкраен матричен ред

$$e^{Ax} = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

където E е единичната матрица, а A^n е произведението на А, n пъти.
В задачата уравнението се свежда до система с въвеждането на

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ xe^{-2x} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow Y' = AY + B(x)$$

$$Y' = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}' \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ xe^{-2x} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}$$

Решението на уравнението се дава във вида

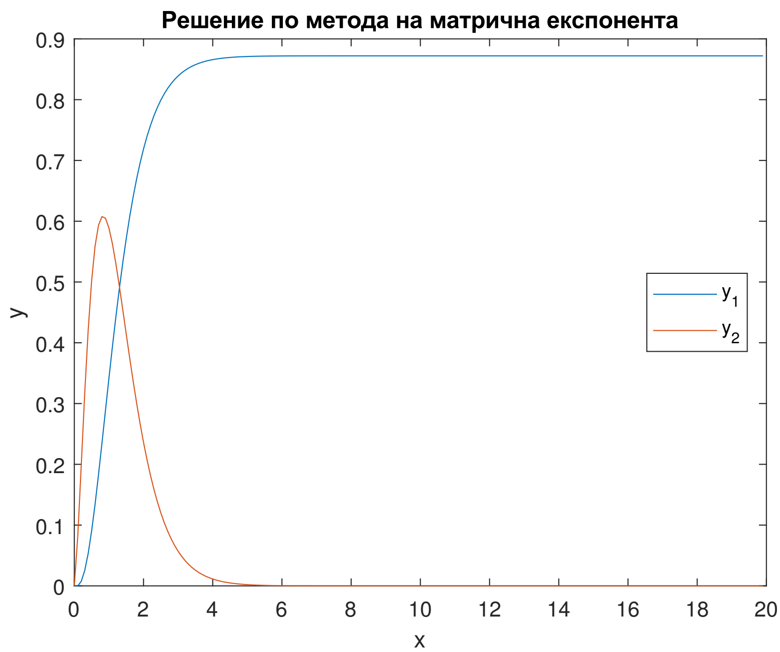
$$y(x) = e^{A(x-x_0)} y(x_0) + e^{Ax} \int_{x_0}^{x} e^{-As} B(s)\, ds$$

което може да се дискретизира след полагане на $x_0 = kh$, $x = (k+1)h$.
След полагането и апроксимиране на интеграла по метода на трапеците се получава

$$y((k+1)h) = e^{Ah} y(kh) + \frac{h}{2} \left[e^{Ah} Bu(kh) + Bu((k+1)h) \right]$$

```
function secondTask
A = [0, 1; 0, -3];%матрица от коефициенти
B = [0;1];
y0 = [0;0]; % начални условия
h = 0.1; % стъпка
n = 100; % итерации
x1 = 0; x(1)=0; y1(1)=0; y2(1)=0;
A2=expm(A*h);
for i=2:n
    y=A2*y0+(h/2)*(A2*B*myFunction(x1))+(B*myFunction(x1+h));
    y1(i)=y(1); y2(i)=y(2);
    y0=y;
    x1=x1+h; x(i)=x1;
end
figure(2), plot(x,y1,x,y2);
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('y_1', 'y_2', 'Location', 'best', 'Orientation', 'vertical');
title('Решение по метода на матрична експонента');
end

function f = myFunction(x)
f = x*exp(-2*x);
end
```



2.3 Задача 3

Метода на крайните разлики се използва за решаване на обикновенни диференциални уравнения от вида

$$x''(t) = f(t, x, x') \qquad t \in [a; b] \qquad x(a) = \alpha \qquad x(b) = \beta$$

Метода се състои в следните стъпки

1. Заменят се производните с техните приближения чрез крайни разлики

$$x'(t) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \qquad x''(t) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \qquad x(t_i) = y_i$$

2. Решаване на системата от уравнения.

$$\left| \begin{array}{l} y_0 = \alpha \\ \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} = f\left(t_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right), 1 \leq i \leq n-1 \\ y_n = \beta \end{array} \right.$$

но тази система е доста трудоемка за решаване. Задачата има вида

$$a(t)x''+b(t)x'+c(t)x = d(t) \qquad a(t) = 1 \quad b(x) = \frac{1}{t} \quad c(t) = \left(\frac{16}{t^2}\right) \quad d(t) = \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Можем да заместим производните с техните приближения. Ще положим

$$a_i = a(t_i) \qquad b_i = b(t_i) \qquad c_i = c(t_i) \qquad d_i = d(t_i)$$

$$a_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + b_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + c_i y_i = d_i$$

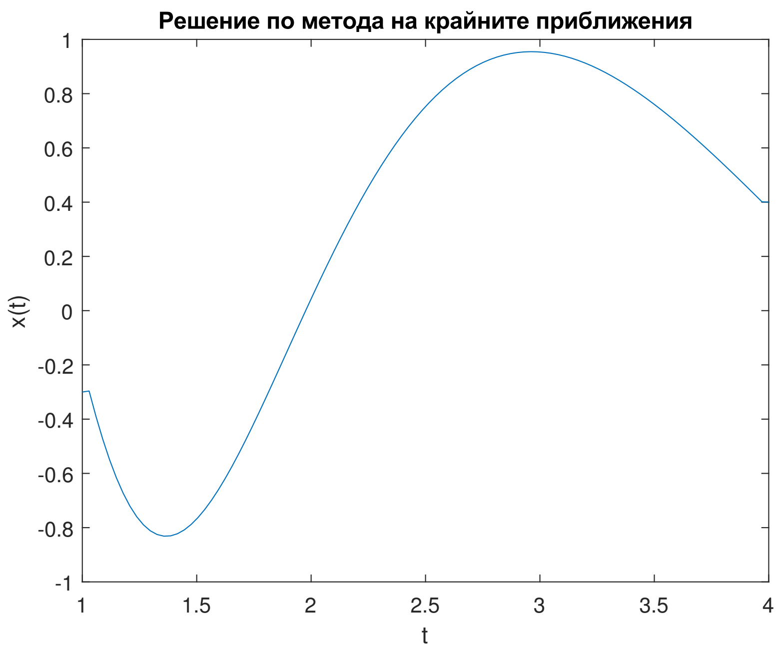
$$y_{i-1}\left(\frac{a_i}{h^2} - \frac{b_i}{2h}\right) + y_i\left(-\frac{2a_i}{h^2} + c_i\right) + y_{i+1}\left(\frac{a_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h}\right) = d_i \qquad \Big| \cdot -h^2$$

$$y_{i-1}\left(-a_i + \frac{hb_i}{2}\right) + y_i\left(2a_i - c_ih^2\right) + y_{i+1}\left(-a_i - \frac{hb_i}{2}\right) = -h^2 d_i$$

$$A_{i,i-1} = -a_i + \frac{hb_i}{2} = \frac{h}{2t_i} - 1 \qquad A_{i,i} = 2a_i - c_ih^2 = 2 - \frac{16h^2}{t_i^2}$$

$$A_{i,i+1} = -a_i - \frac{hb_i}{2} = -\frac{h}{2t_i} - 1 \qquad f_i = -h^2 d_i = -h^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

```
function thirdTask
a = 1; b = 4; % граници на интервала
alpha = -0.3; beta = 0.4; %x(a)=alpha; x(b)=beta
n = 100; % итерации
h = (b-a)/(n+1); % стъпка
t=a:h:b;
% Дефиниране на матрицата на коефициентите и вектора на дясната страна
A = zeros(n,n); f = zeros(n,1);
for i = 1:n
    if i ~= 1; A(i,i-1) = h/(2*t(i)) - 1; end
    A(i,i) = 2 - (16*h^2)/(t(i)^2);
    if i ~= n; A(i,i+1) = -h/(2*t(i)) - 1; end
    f(i) = -h^2*sin(1/t(i)^2);
end
% Прилагане на граничните условия
A(1,:) = 0; A(1,1) = 1;
A(n,:) = 0; A(n,n) = 1;
f(1) = f(1) - alpha*(h/(2*t(1)) - 1);
f(n) = f(n) - beta*(-h/(2*t(n)) - 1);
% Решаване на системата
x = A\f;
figure(3),plot(t,[alpha;x;beta]);
xlabel('t'); ylabel('x(t)'); title('Решение по метода на крайните приближения');
end
```



2.4 Задача 4

Метода на стрелбата се използва за решаване на обикновенни диференциални уравнения от вида

$$x''(t) = f(t, x, x') \qquad t \in [a; b] \qquad x(a) = \alpha \qquad x(b) = \beta$$

Метода се състои в следните стъпки

1. Представяне на началната задача като система от две уравнения от първи ред

$$\left| \begin{array}{l} x' = y \\ y' = f(t, x, x') \end{array} \right. \qquad \text{при} \qquad \left| \begin{array}{l} x(a) = \alpha \\ x(b) = \beta \\ y(1) = y(4) = s \end{array} \right.$$

2. Задаваме си начално предположение за стойността на параметъра $s = a$.

3. Решаваме получената система от диференциални уравнения с началните условия, използвайки числен метод.

4. Изчисляваме стойността на функцията получената от 3. функция x в $t = b$.

5. Изчисляваме разликата между изчислената стойност на x в края на интервала и действителната стойност на x в краен момент, която е дадена в началните условия.

6. Коригираме началното предположение за параметъра.

7. Повтаряме стъпки стъпки 3 - 6, докато корекцията не стане достатъчно малка.

```
function fourthTask
t0=0;
t0=fsolve(@function1,t0);
x0=[-0.3,t0];
[t,x]=ode45(@function2,[1,4],x0);
figure(4),plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'r')
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
legend('x(t)',"x'(t)", 'Location', 'best');
title('Решение по метода на стрелбата');
end

function f=function1(x)
x0=[-0.3,x];
[t,x]=ode45(@function2,[1,4],x0);
n=length(t);
f=x(n,1)-0.4;
end

function dx=function2(t,x)
dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=sin(1/t^2)-(16/t^2)*x(1)-(x(2)/t);
end
```