

Математически анализ 2

Exonaut

10 март 2021 г.

Съдържание

1	Лекция 1: Пространството R^m	2
1.1	Няколко важни неравенства	2
1.2	Видове крайно мерни пространства	2
1.2.1	Линейно(Векторно) пространство	2
1.2.2	Евклидово пространство	3
1.2.3	Метрично пространство	3
1.2.4	Нормирано пространство	3
1.3	Пространството R^m - дефиниция и основни свойства	3
1.3.1	Скалярно произведение	4
1.3.2	Норма и метрика	4
1.3.3	Скаларен квадрат	4
1.3.4	Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат	4
1.3.5	Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат	4
1.4	Точки и множества в R^m	4
1.4.1	Паралелепипед	4
1.4.2	Сфера и кълбо	5
1.5	Редици от точки в R^m	7
2	Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост	8
2.1	Дефиниция на функция на няколко променливи	8
2.2	Граница на функция на няколко променливи	8
2.3	Непрекъснатост на функция на няколко променливи	9
2.4	Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи	10
3	Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи	10

1 Лекция 1: Пространството R^m

1.1 Няколко важни неравенства

Нека a_k и b_k ($k = 1, 2, \dots, m$) са реални числа и $m \in N$

Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц) В сила е следното неравенство:

$$\left(\sum_{k=1}^m a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^m a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^m b_k^2 \right)$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални:
($\exists \lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k$)

Равенството може да се запише:

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски) В сила е следното неравенство:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left(\sum_{k=1}^m |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)$$

Теорема 1.1.3 В сила е следното неравенство:

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^m |a_k - b_k|$$

1.2 Видове крайно мерни пространства

1.2.1 Линейно(Векторно) пространство

Дефиниция 1.2.1 Нека L е линейно(векторно) пространство над полето R . В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.

$$1. \quad x, y \in L \implies z = x + y \in L$$

$$2. \quad x \in L, \lambda \in R \implies z = \lambda x \in L$$

1.2.2 Евклидово пространство

Дефиниция 1.2.2 Крайномерното пространство L се нарича евклидово, ако в него е въведено скалярно произведение, т.е. за всеки два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави реално число (x, y) , удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.

$$1. \ x, y, z \in L, \lambda \in R \implies (x + y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

$$2. \ x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$$

$$3. \ x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$$

1.2.3 Метрично пространство

Дефиниция 1.2.3 Крайномерното пространство L се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика) ρ , т.е. за два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави неотрицателно число $\rho \geq 0$ със следните свойства

$$1. \ \rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$$

$$2. \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$$

$$3. \ \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \forall x, y, z \in L$$

Метрично пространство L с метрика ρ се означава (L, ρ)

1.2.4 Нормирано пространство

Дефиниция 1.2.4 Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма $\| \cdot \|$, т.е. $\| \cdot \| : L \rightarrow R_0^+$ със свойства

$$1. \ x = 0 \implies \|x\| = 0, x \neq 0 \implies \|x\| > 0$$

$$2. \ x \in L, \lambda \in R \implies \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$3. \ x, y \in L \implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Теорема 1.2.1 Ако L е нормирано пространство с дадена норма $\| \cdot \|$, то L е метрично пространство, т.е. равенството $\rho(x, y) = \|x - y\|$ дефинира разстоянието в L

1.3 Пространството R^m - дефиниция и основни свойства

Дефиниция 1.3.1 Множеството от наредени m -торки $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ от реални числа. Числата a_1, a_2, \dots, a_m се наричат съответно първа, втора, ..., m -та координата на a .

Ако имаме $a = (a_1, a_2, \dots, a_m), b = (b_1, b_2, \dots, b_m); \lambda \in R$ то

$$1. \ a+b = (a_1, a_2, \dots, a_m) + (b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_m+b_m) \in R^m$$

$$2. \ \lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_m) \in R^m$$

1.3.1 Скалярно произведение

Скалярно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left(\sum_{k=1}^m a_k b_k \right)$$

С така въведено скалярно произведение пространството R^m се превръща в евклидово.

1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k)^2}$$

се въвежда норма в R^m .

Нормата генерира метрика в R^m с формула:

$$\rho(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k - b_k)^2}$$

1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат: $a^2 = (a, a) = \sum_{k=1}^m a_k^2$

1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат: $(a, b)^2 \leq a^2 b^2$ и $|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$

1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат: $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

1.4 Точки и множества в R^m

1.4.1 Паралелепипед

Дефиниция 1.4.1 *Множеството*

$$П(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in R^m : -\delta_k < x_k - a_k < \delta_k\}$$

се нарича отворен паралелепипед в R^m с център точката a .

Множеството

$$\tilde{\Pi}(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in R^m : -\delta_k \leq x_k - a_k \leq \delta_k\}$$

се нарича затворен паралелепипед в R^m с център точката a .

Ако $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_m = \delta$, получените множества $\Pi(a; \delta)$ и $\tilde{\Pi}(a; \delta)$ се наричат съответно отворен и затворен куб в R^m с център a .

1.4.2 Сфера и кълбо

Дефиниция 1.4.2 Нека числото $r > 0$. Множеството

$$B(a; r) = \{x | x \in R^m, \rho(x, a) < r\} = \{x | x \in R^m, \|x - a\| < r\}$$

се нарича отворено кълбо в R^m с център a и радиус r , множеството

$$\tilde{B}(a; r) = \{x | x \in R^m, \rho(x, a) \leq r\} = \{x | x \in R^m, \|x - a\| \leq r\}$$

се нарича затворено кълбо в R^m с център a и радиус r , а множеството

$$S(a; r) = \{x | x \in R^m, \rho(x, a) = r\} = \{x | x \in R^m, \|x - a\| = r\}$$

се нарича сфера в R^m с център a и радиус r , а множеството

Дефиниция 1.4.3 Точката a се нарича

- вътрешна за множеството A , ако съществува отворено кълбо $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset A$
- външна за A , ако съществува $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset R^m \setminus A$
- контурна за A , ако за всяко $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ и $B(a, \varepsilon) \cap (R^m \setminus A) \neq \emptyset$
- изолирана ако съществува $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$

Дефиниция 1.4.4 Множеството $A \subset R^m$ се нарича

- отворено, ако всяка негова точка е вътрешна
- затворено, ако неговото допълнение $R^m \setminus A$ е отворено

Дефиниция 1.4.5 Околност на дадена точка $a \in R^m$ се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с U_a .

Дефиниция 1.4.6 Точка a се нарича точка на съвстяване на множеството $A \subset R^m$, ако всяка нейна околност U_a съдържа поне една точка на A , различна от a , т.е. $U_a \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

Дефиниция 1.4.7 Величината

$$d = d(A) = \sup_{a', a'' \in A} \rho(a'; a'')$$

се нарича диаметър на множеството $A \subset R^m$.

Дефиниция 1.4.8 Множеството $A \subset R^m$ се нарича ограничено, ако съществува кълбо (с краен радиус), което го съдържа.

Дефиниция 1.4.9 Множеството $A \subset R^m$ се нарича компактно, ако A е затворено и ограничено.

Дефиниция 1.4.10 Множеството $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$, чийто координати са непрекъснати функции $x_k = x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, m$), дефинирани върху даден интервал $[a, b]$ се нарича непрекъснатата крива в R^m . t се нарича параметър на кривата.

Точките $x(a) = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_m(a))$ и $x(b) = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_m(b))$ се наричат начало и край на дадената крива. Ако $x(a) = x(b)$ кривата е затворена

Дефиниция 1.4.11 Нека $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in R^m$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ са фиксирани числа за които $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$. Множеството от точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ чийто координати се представят във вида

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, \dots, m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството R^m , минаваща през точка x^0 по направление $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

Дефиниция 1.4.12 Множеството $A \subset R^m$ се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъснатата крива γ , която ги свързва и $\gamma \subset A$.

Дефиниция 1.4.13 Множеството $A \subset R^m$ се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.

Дефиниция 1.4.14 Област, всеки две точки на която могат да се сведият с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.

Дефиниция 1.4.15 Областа $A \subset R^m$ се нарича звездообразна област, отнотно точката $x^0 \in A$, ако за всяка точка $x \in A$ отсечката $[x^0, x]$ лежи изцяло в A .

1.5 Редици от точки в R^m

Дефиниция 1.5.1 Редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\}$ се нарича редица от точки в R^m , а редицата $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} (k = 1 \div m)$ - k -та координатна редица. За по кратко редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ се означава $\{x^{(n)}\}$

Дефиниция 1.5.2 Редицата $\{y^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ се нарича поредица на редицата $\{x^{(n)}\}$ и се означава:

$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, \dots$, или $\{x^{(n_l)}\}_{l=1}^{\infty}$

ако за всяко l съществува такова n_l , че $y^{(l)} = x^{(n_l)}$, при това, ако $l' < l''$, то $n_{l'} < n_{l''}$.

Дефиниция 1.5.3 Редицата $\{x^{(n)}\}$ се нарича сходяща към точка $a \in R^m$ (граница на редицата), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $N_0 > 0$, че за всяко $n > N_0$ е изпълнено неравенството $\rho(x^{(n)}; a) = \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$. Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.

Дефиниция 1.5.4 Точката $a \in R^m$ се нарича точка на съвстяване на редицата $\{x^{(n)}\}$, ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.

Теорема 1.5.1 Нека $x^{(n)} \in R^m$ за $n \in N$ и точката $a \in R^m$. Тогава

$$(\{x^{(n)}\} \rightarrow a) \iff (x_k^{(n)} \rightarrow a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката a , тогава и само тогава когато всяка от координатите на редици $\{x_k^{(n)}\}$ има граница съответната координата a_k на точката a

Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши) Нека $x^{(n)} \in R^m$ за $n \in N$. Редицата $x^{(n)}$ е сходяща тогава и само тогава когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $N_0 > 0$, че при всяко $n \in N, n > N_0$ и всяко $p \in N$ е изпълнено $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = \|x^{(n+p)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$

Дефиниция 1.5.5 Редицата $\{x^{(n)}\}$ се нарича ограничена, ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.

Теорема 1.5.3 (Болцано-Вайерщрас) От всяка ограничена редица в пространството R^m може да се избере сходяща подредица.

Дефиниция 1.5.6 Всяко множество $A \subset R^m$ се нарича компактно, ако от всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$, може да се избере сходяща подредица $\{x_k^{(n)}\}$ с граница принадлежаща на A

2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

2.1 Дефиниция на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.1.1 Казва се че дадена функция с дефиниционна област (дефиниционно множество) D , ако на всяка точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ от множеството D е съпоставено реално число $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, т.е на всяко $x \in D$ съществува единствено число $y = f(x) \in R$. Понякога за кратко се записва.

$$f : D \rightarrow R$$

В R^2 се използва (x, y) за означение, а в R^3 - (x, y, z) .

2.2 Граница на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.2.1 (Коши) Нека $f : D \rightarrow R, a \in R^m$, a е точка на съгъствяване за D . Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \rightarrow a$ със стойности $x \neq a$ ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Дефиниция 2.2.2 (Хайне) Нека $f : D \rightarrow R, a \in R^m$, a е точка на съгъствяване за D . Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \rightarrow a$ със стойности $x \neq a$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in D, x^{(n)} \neq a$ сходяща към a , числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница L .

Теорема 2.2.1 Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.

Дефиниция 2.2.3 Нека $f : D \rightarrow R, a \in R^m$, a е точка на съгъствяване за D . Казва се че $f(x)$ дивергира към ∞ (съответно към $-\infty$) при $x \rightarrow a$ със стойности $x \neq a$, ако за всяко $A \in R$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $f(x) > A$ (съответно $f(x) < A$). Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (-\infty)$$

Дефиниция 2.2.4 (Повторна граница) Нека $D \subset R^2, a = (a_1, a_2) \in R^2$ е точка на съгъствяване за D и функция $f : D \rightarrow R$. Нека съществува такава околност $U_{a_2} \subset R$ на точката a_2 , че за всички стойности $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$. Ако освен това съществува $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = A$, A се нарича повторна граница и се означава както следва

$$A = A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow a_2} (\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y))$$

Аналогично се съвежда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow a_1} (\lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y))$$

Теорема 2.2.2 Нека $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на съвстяване за D и функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Нека

1. Нека съществува такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката a_2 , че за всички стойности $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$.
2. Съществува границата $\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1,a_2)} f(x, y) = L$.

Тогаво съществува граница $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y)$ и освен това е в сила равенството $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = L$

2.3 Непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.3.1 Казва се че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Дефиниция 2.3.2 (непрекъснатост по Коши) Казва се, че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството D , за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Дефиниция 2.3.3 (непрекъснатост по Хайне) Казва се, че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \in D$ за $n \in \mathbb{N}$) сходяща към a , числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница $f(a)$.

Дефиниция 2.3.4 (за съставна функция) Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}, k = 1 \div m$. Полагайки $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$ за всяко $t \in (\alpha, \beta)$ съставната функция $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$ се дефинира по формулата

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$$

Теорема 2.3.1 Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ интервалът $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ за $k = 1 \div m$. Нека освен това $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$ за $\forall t \in (\alpha, \beta)$ и x_k са непрекъснати в точката $t_0 \in (\alpha, \beta)$ за $k = 1 \div m$, а f е непрекъсната в $x^0 = x(t_0)$. Тогаво функцията $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ е непрекъсната в точката t_0

2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.4.1 Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Функцията се нарича равномерно непрекъсната в A , ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon)$, че за всеки две точки $x', x'' \in A$ за които разстоянието $\rho(x', x'') = \|x' - x''\| < \delta$, да следва, че $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 2.4.1 (на Вайерщрас) Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K . Тогава

1. f е ограничена в K , т.е. съществуват $m, M \in \mathbb{R}$ такива че за всички $x \in K$ е изпълнено неравенството $m \leq f(x) \leq M$
2. f достига най-малката и най-голямата си стойност в K , т.е. съществуват точки $x^0, y^0 \in K$, такива че

$$f(x^0) = \inf_{x \in K} f(x); f(y^0) = \sup_{y \in K} f(x)$$

Теорема 2.4.2 (на Кантор) Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K . Тогава f е равномерно непрекъсната върху K .

3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи