

# Математически анализ 2

Exonaut

10 март 2021 г.

## Съдържание

<b>1</b>	<b>Лекция 1: Пространството <math>R^m</math></b>	<b>2</b>
1.1	Няколко важни неравенства . . . . .	2
1.2	Видове крайно мерни пространства . . . . .	2
1.2.1	Линейно(Векторно) пространство . . . . .	2
1.2.2	Евклидово пространство . . . . .	3
1.2.3	Метрично пространство . . . . .	3
1.2.4	Нормирано пространство . . . . .	3
1.3	Пространството $R^m$ - дефиниция и основни свойства . . . . .	3
1.3.1	Скалярно произведение . . . . .	4
1.3.2	Норма и метрика . . . . .	4
1.3.3	Скаларен квадрат . . . . .	4
1.3.4	Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат . . . . .	4
1.3.5	Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат . . . . .	4
1.4	Точки и множества в $R^m$ . . . . .	4
1.4.1	Паралелепипед . . . . .	4
1.4.2	Сфера и кълбо . . . . .	5
1.5	Редици от точки в $R^m$ . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост</b>	<b>8</b>
2.1	Дефиниция на функция на няколко променливи . . . . .	8
2.2	Граница на функция на няколко променливи . . . . .	8
2.3	Непрекъснатост на функция на няколко променливи . . . . .	9
2.4	Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи</b>	<b>10</b>
3.1	Дефиниция на частна производна . . . . .	10
3.2	Частни производни от по-висок ред . . . . .	11
3.3	Диференцируемост на функция . . . . .	12

# 1 Лекция 1: Пространството $R^m$

## 1.1 Няколко важни неравенства

Нека  $a_k$  и  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) са реални числа и  $m \in N$

**Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц)** В сила е следното неравенство:

$$\left( \sum_{k=1}^m a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^m a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^m b_k^2 \right)$$

Равенство се достига само когато  $a_k$  и  $b_k$  са пропорционални:  
( $\exists \lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k$ )

Равенството може да се запише:

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

**Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски)** В сила е следното неравенство:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

Равенство се достига само когато  $a_k$  и  $b_k$  са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left( \sum_{k=1}^m |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)$$

**Теорема 1.1.3** В сила е следното неравенство:

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^m |a_k - b_k|$$

## 1.2 Видове крайно мерни пространства

### 1.2.1 Линейно(Векторно) пространство

**Дефиниция 1.2.1** Нека  $L$  е линейно(векторно) пространство над полето  $R$ . В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.

$$1. \quad x, y \in L \implies z = x + y \in L$$

$$2. \quad x \in L, \lambda \in R \implies z = \lambda x \in L$$

### 1.2.2 Евклидово пространство

**Дефиниция 1.2.2** Крайномерното пространство  $L$  се нарича евклидово, ако в него е въведено скалярно произведение, т.е. за всеки два елемента  $x, y \in L$  може да се съпостави реално число  $(x, y)$ , удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.

$$1. \ x, y, z \in L, \lambda \in R \implies (x + y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

$$2. \ x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$$

$$3. \ x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$$

### 1.2.3 Метрично пространство

**Дефиниция 1.2.3** Крайномерното пространство  $L$  се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика)  $\rho$ , т.е. за два елемента  $x, y \in L$  може да се съпостави неотрицателно число  $\rho \geq 0$  със следните свойства

$$1. \ \rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$$

$$2. \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$$

$$3. \ \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \forall x, y, z \in L$$

Метрично пространство  $L$  с метрика  $\rho$  се означава  $(L, \rho)$

### 1.2.4 Нормирано пространство

**Дефиниция 1.2.4** Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма  $\| \cdot \|$ , т.е.  $\| \cdot \| : L \rightarrow R_0^+$  със свойства

$$1. \ x = 0 \implies \|x\| = 0, x \neq 0 \implies \|x\| > 0$$

$$2. \ x \in L, \lambda \in R \implies \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$3. \ x, y \in L \implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Теорема 1.2.1** Ако  $L$  е нормирано пространство с дадена норма  $\| \cdot \|$ , то  $L$  е метрично пространство, т.е. равенството  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  дефинира разстоянието в  $L$

## 1.3 Пространството $R^m$ - дефиниция и основни свойства

**Дефиниция 1.3.1** Множеството от наредени  $m$ -торки  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  от реални числа. Числата  $a_1, a_2, \dots, a_m$  се наричат съответно първа, втора, ...,  $m$ -та координата на  $a$ .

Ако имаме  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m), b = (b_1, b_2, \dots, b_m); \lambda \in R$  то

$$1. \ a+b = (a_1, a_2, \dots, a_m) + (b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_m+b_m) \in R^m$$

$$2. \ \lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_m) \in R^m$$

### 1.3.1 Скалярно произведение

Скалярно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left( \sum_{k=1}^m a_k b_k \right)$$

С така въведено скалярно произведение пространството  $R^m$  се превръща в евклидово.

### 1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k)^2}$$

се въвежда норма в  $R^m$ .

Нормата генерира метрика в  $R^m$  с формула:

$$\rho(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k - b_k)^2}$$

### 1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат:  $a^2 = (a, a) = \sum_{k=1}^m a_k^2$

### 1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат:  $(a, b)^2 \leq a^2 b^2$  и  $|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$

### 1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат:  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

## 1.4 Точки и множества в $R^m$

### 1.4.1 Паралелепипед

**Дефиниция 1.4.1** *Множеството*

$$\Pi(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in R^m : -\delta_k < x_k - a_k < \delta_k\}$$

се нарича отворен паралелепипед в  $R^m$  с център точката  $a$ .

Множеството

$$\tilde{\Pi}(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in R^m : -\delta_k \leq x_k - a_k \leq \delta_k\}$$

се нарича затворен паралелепипед в  $R^m$  с център точката  $a$ .

Ако  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_m = \delta$ , получените множества  $\Pi(a; \delta)$  и  $\tilde{\Pi}(a; \delta)$  се наричат съответно отворен и затворен куб в  $R^m$  с център  $a$ .

#### 1.4.2 Сфера и кълбо

**Дефиниция 1.4.2** Нека числото  $r > 0$ . Множеството

$$B(a; r) = \{x | x \in R^m, \rho(x, a) < r\} = \{x | x \in R^m, \|x - a\| < r\}$$

се нарича отворено кълбо в  $R^m$  с център  $a$  и радиус  $r$ , множеството

$$\tilde{B}(a; r) = \{x | x \in R^m, \rho(x, a) \leq r\} = \{x | x \in R^m, \|x - a\| \leq r\}$$

се нарича затворено кълбо в  $R^m$  с център  $a$  и радиус  $r$ , а множеството

$$S(a; r) = \{x | x \in R^m, \rho(x, a) = r\} = \{x | x \in R^m, \|x - a\| = r\}$$

се нарича сфера в  $R^m$  с център  $a$  и радиус  $r$ , а множеството

**Дефиниция 1.4.3** Точката  $a$  се нарича

- вътрешна за множеството  $A$ , ако съществува отворено кълбо  $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset A$
- външна за  $A$ , ако съществува  $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset R^m \setminus A$
- контурна за  $A$ , ако за всяко  $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  и  $B(a, \varepsilon) \cap (R^m \setminus A) \neq \emptyset$
- изолирана ако съществува  $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$

**Дефиниция 1.4.4** Множеството  $A \subset R^m$  се нарича

- отворено, ако всяка негова точка е вътрешна
- затворено, ако неговото допълнение  $R^m \setminus A$  е отворено

**Дефиниция 1.4.5** Околност на дадена точка  $a \in R^m$  се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с  $U_a$ .

**Дефиниция 1.4.6** Точка  $a$  се нарича точка на съвстяване на множеството  $A \subset R^m$ , ако всяка нейна околност  $U_a$  съдържа поне една точка на  $A$ , различна от  $a$ , т.е.  $U_a \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

**Дефиниция 1.4.7** Величината

$$d = d(A) = \sup_{a', a'' \in A} \rho(a'; a'')$$

се нарича диаметър на множеството  $A \subset R^m$ .

**Дефиниция 1.4.8** Множеството  $A \subset R^m$  се нарича ограничено, ако съществува кълбо (с краен радиус), което го съдържа.

**Дефиниция 1.4.9** Множеството  $A \subset R^m$  се нарича компактно, ако  $A$  е затворено и ограничено.

**Дефиниция 1.4.10** Множеството  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ , чийто координати са непрекъснати функции  $x_k = x_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), дефинирани върху даден интервал  $[a, b]$  се нарича непрекъснатата крива в  $R^m$ .  $t$  се нарича параметър на кривата.

Точките  $x(a) = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_m(a))$  и  $x(b) = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_m(b))$  се наричат начало и край на дадената крива. Ако  $x(a) = x(b)$  кривата е затворена

**Дефиниция 1.4.11** Нека  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in R^m$  и  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  са фиксирани числа за които  $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$ . Множеството от точки  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  чийто координати се представят във вида

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, \dots, m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството  $R^m$ , минаваща през точка  $x^0$  по направление  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ .

**Дефиниция 1.4.12** Множеството  $A \subset R^m$  се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъснатата крива  $\gamma$ , която ги свързва и  $\gamma \subset A$ .

**Дефиниция 1.4.13** Множеството  $A \subset R^m$  се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.

**Дефиниция 1.4.14** Област, всеки две точки на която могат да се сведият с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.

**Дефиниция 1.4.15** Областа  $A \subset R^m$  се нарича звездообразна област, относно точката  $x^0 \in A$ , ако за всяка точка  $x \in A$  отсечката  $[x^0, x]$  лежи изцяло в  $A$ .

## 1.5 Редици от точки в $R^m$

**Дефиниция 1.5.1** Редицата  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\}$  се нарича редица от точки в  $R^m$ , а редицата  $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} (k = 1 \div m)$  -  $k$ -та координатна редица. За по кратко редицата  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  се означава  $\{x^{(n)}\}$

**Дефиниция 1.5.2** Редицата  $\{y^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$  се нарича поредица на редицата  $\{x^{(n)}\}$  и се означава:

$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, \dots$ , или  $\{x^{(n_l)}\}_{l=1}^{\infty}$

ако за всяко  $l$  съществува такова  $n_l$ , че  $y^{(l)} = x^{(n_l)}$ , при това, ако  $l' < l''$ , то  $n_{l'} < n_{l''}$ .

**Дефиниция 1.5.3** Редицата  $\{x^{(n)}\}$  се нарича сходяща към точка  $a \in R^m$  (граница на редицата), ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува такова  $N_0 > 0$ , че за всяко  $n > N_0$  е изпълнено неравенството  $\rho(x^{(n)}; a) = \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$ . Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.

**Дефиниция 1.5.4** Точката  $a \in R^m$  се нарича точка на съвстяване на редицата  $\{x^{(n)}\}$ , ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.

**Теорема 1.5.1** Нека  $x^{(n)} \in R^m$  за  $n \in N$  и точката  $a \in R^m$ . Тогава

$$(\{x^{(n)}\} \rightarrow a) \iff (x_k^{(n)} \rightarrow a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката  $a$ , тогава и само тогава когато всяка от координатите на редици  $\{x_k^{(n)}\}$  има граница съответната координата  $a_k$  на точката  $a$

**Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши)** Нека  $x^{(n)} \in R^m$  за  $n \in N$ . Редицата  $x^{(n)}$  е сходяща тогава и само тогава когато за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува такова число  $N_0 > 0$ , че при всяко  $n \in N, n > N_0$  и всяко  $p \in N$  е изпълнено  $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = \|x^{(n+p)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$

**Дефиниция 1.5.5** Редицата  $\{x^{(n)}\}$  се нарича ограничена, ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.

**Теорема 1.5.3 (Болцано-Вайерщрас)** От всяка ограничена редица в пространството  $R^m$  може да се избере сходяща подредица.

**Дефиниция 1.5.6** Всяко множество  $A \subset R^m$  се нарича компактно, ако от всяка редица  $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$ , може да се избере сходяща подредица  $\{x_k^{(n)}\}$  с граница принадлежаща на  $A$



## 2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

### 2.1 Дефиниция на функция на няколко променливи

**Дефиниция 2.1.1** Казва се че дадена функция с дефиниционна област (дефиниционно множество)  $D$ , ако на всяка точка  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  от множеството  $D$  е съпоставено реално число  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , т.е на всяко  $x \in D$  съществува единствено число  $y = f(x) \in R$ . Понякога за кратко се записва.

$$f : D \rightarrow R$$

В  $R^2$  се използва  $(x, y)$  за означение, а в  $R^3$  -  $(x, y, z)$ .

### 2.2 Граница на функция на няколко променливи

**Дефиниция 2.2.1 (Коши)** Нека  $f : D \rightarrow R, a \in R^m$ ,  $a$  е точка на съгъствяване за  $D$ . Казва се че  $f(x)$  има граница  $L$  при  $x \rightarrow a$  със стойности  $x \neq a$  ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , че за всяко  $x$  от множеството  $D \setminus \{a\}$ , за което  $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$  е изпълнено  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

**Дефиниция 2.2.2 (Хайне)** Нека  $f : D \rightarrow R, a \in R^m$ ,  $a$  е точка на съгъствяване за  $D$ . Казва се че  $f(x)$  има граница  $L$  при  $x \rightarrow a$  със стойности  $x \neq a$  ако за всяка редица  $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in D, x^{(n)} \neq a$  сходяща към  $a$ , числовата редица  $\{f(x^{(n)})\}$  има граница  $L$ .

**Теорема 2.2.1** Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.

**Дефиниция 2.2.3** Нека  $f : D \rightarrow R, a \in R^m$ ,  $a$  е точка на съгъствяване за  $D$ . Казва се че  $f(x)$  дивергира към  $\infty$  (съответно към  $-\infty$ ) при  $x \rightarrow a$  със стойности  $x \neq a$ , ако за всяко  $A \in R$  съществува такова  $\delta > 0$ , че за всяко  $x$  от множеството  $D \setminus \{a\}$ , за което  $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$  е изпълнено  $f(x) > A$  (съответно  $f(x) < A$ ). Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (-\infty)$$

**Дефиниция 2.2.4 (Повторна граница)** Нека  $D \subset R^2, a = (a_1, a_2) \in R^2$  е точка на съгъствяване за  $D$  и функция  $f : D \rightarrow R$ . Нека съществува такава околност  $U_{a_2} \subset R$  на точката  $a_2$ , че за всички стойности  $y \in U_{a_2}$  да съществува  $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$ . Ако освен това съществува  $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = A$ ,  $A$  се нарича повторна граница и се означава както следва

$$A = A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow a_2} (\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y))$$

Аналогично се съввежда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow a_1} (\lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y))$$

**Теорема 2.2.2** Нека  $D \subset R^2, a = (a_1, a_2) \in R^2$  е точка на съвставяване за  $D$  и функция  $f : D \rightarrow R$ . Нека

1. Нека съществува такава околност  $U_{a_2} \subset R$  на точката  $a_2$ , че за всички стойности  $y \in U_{a_2}$  да съществува  $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$ .
2. Съществува границата  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} f(x, y) = L$ .

Тогаво съществува граница  $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y)$  и освен това е в сила равенството  $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = L$

### 2.3 Непрекъснатост на функцията на няколко променливи

**Дефиниция 2.3.1** Казва се че функцията  $f : D \rightarrow R$  е непрекъсната в точка  $a \in D$  ако  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Дефиниция 2.3.2 (непрекъснатост по Коши)** Казва се, че функцията  $f : D \rightarrow R$  е непрекъсната в точка  $a \in D$ , ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , че за всяко  $x$  от множеството  $D$ , за което  $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$  е изпълнено  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

**Дефиниция 2.3.3 (непрекъснатост по Хайне)** Казва се, че функцията  $f : D \rightarrow R$  е непрекъсната в точка  $a \in D$  ако за всяка редица  $\{x^{(n)}\}$  (с  $x^{(n)} \in D$  за  $n \in N$ ) сходяща към  $a$ , числовата редица  $\{f(x^{(n)})\}$  има граница  $f(a)$ .

**Дефиниция 2.3.4 (за съставна функция)** Нека  $A \subset R^m$  е отворено множество,  $f : A \rightarrow R$  и  $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow R, k = 1 \div m$ . Полагайки  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$  за всяко  $t \in (\alpha, \beta)$  съставната функция  $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$  се дефинира по формулата

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$$

**Теорема 2.3.1** Нека  $A \subset R^m$  е отворено множество и  $f : A \rightarrow R$  интервалът  $(\alpha, \beta) \subset R$ ,  $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow R$  за  $k = 1 \div m$ . Нека освен това  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$  за  $\forall t \in (\alpha, \beta)$  и  $x_k$  са непрекъснати в точката  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  за  $k = 1 \div m$ , а  $f$  е непрекъсната в  $x^0 = x(t_0)$ . Тогаво функцията  $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$  е непрекъсната в точката  $t_0$

## 2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи

**Дефиниция 2.4.1** Нека  $A \subset \mathbb{R}^m$  е отворено множество и  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Функцията се нарича равномерно непрекъсната в  $A$ , ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , че за всеки две точки  $x', x'' \in A$  за които разстоянието  $\rho(x'; x'') = \|x' - x''\| < \delta$ , да следва, че  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

**Теорема 2.4.1 (на Вайерщрас)** Нека множеството  $K \subset \mathbb{R}^m$  е компактно и функцията  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната върху  $K$ . Тогава

1.  $f$  е ограничена в  $K$ , т.е съществуват  $m, M \in \mathbb{R}$  такива че за всички  $x \in K$  е изпълнено неравенството  $m \leq f(x) \leq M$
2.  $f$  достига най-малката и най-голямата си стойност в  $K$ , т.е съществуват точки  $x^0, y^0 \in K$ , такива че

$$f(x^0) = \inf_{x \in K} f(x); f(y^0) = \sup_{y \in K} f(x)$$

**Теорема 2.4.2 (на Кантор)** Нека множеството  $K \subset \mathbb{R}^m$  е компактно и функцията  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната върху  $K$ . Тогава  $f$  е равномерно непрекъсната върху  $K$ .

## 3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи

### 3.1 Дефиниция на частна производна

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $D \subset \mathbb{R}^m$  - отворено множество
- $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  - точка, принадлежаща на  $D$
- $U_{x^0} \subset D$  - околност на  $x^0$
- $U_{x_i^0} \subset D$  - околност на  $x_i^0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )
- точката  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0) \in U_{x^0}$ , за всички стойности на  $x_i \in U_{x_i^0}$
- $f$  и  $g$  - функции, дефинирани съответно в  $D$  и  $U_{x_i^0}$ . т.е  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : U_{x_i^0} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$

**Дефиниция 3.1.1** Производната, ако съществува на функцията  $g$  в точката  $x_i^0$  се нарича частна производна на функцията  $f$  (по променлива  $x_i^0$ ) в точката  $x^0$ . Използва се означението  $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$  или  $f'_{x_i}(x^0)$ .

Частната производна на функцията  $f$  относно променливата  $x_i$  е равна на границата на функцията  $\varphi(h_i) = \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i}$  при  $h_i \rightarrow 0$  (ако съществува) т.е

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \varphi(h_i) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$$

**Пример 3.1.1**

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + 9xy^2 \\ f'_x(x, y) &= (x^2)'_x + (9xy^2)'_x = 2x + 9y^2 \\ f'_y(x, y) &= (x^2)'_y + (9xy^2)'_y = 0 + 9x \cdot 2y = 18xy \end{aligned}$$

## 3.2 Частни производни от по-висок ред

**Дефиниция 3.2.1** Частната производна на частната производна от  $n-1$  ред,  $n = 1, 2, \dots$  (ако съществува), се нарича частична производна от  $n$ -ти ред. Частните производни, получени при диференциране по различни променливи се наричат смесени производни, а получените при диференциране само по една и съща променлива се наричат чисти производни.

**Пример 3.2.1**  $f(x, y) = x^3 \sin(6y) + x^2 y^3 + 2222$ ,  $f''_{x,y} = ?$ ,  $f''_{y,x} = ?$

$$1. f''_{x,y} = (f'_x(x, y))'_y$$

$$(a) f'_x(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_x + (x^2 y^3)'_x + (2222)'_x = 3x^2 \sin(6y) + 2xy^3 + 0$$

$$(b) f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y) + 2xy^3)'_y = (3x^2 \sin(6y))'_y + (2xy^3)'_y = 3x^2 \cos(6y) \cdot 6 + 2 \cdot 3xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

$$2. f''_{y,x} = (f'_y(x, y))'_x$$

$$(a) f'_y(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_y + (x^2 y^3)'_y + (2222)'_y = x^3 \cos(6y) \cdot 6 + x^2 \cdot 3y^2 + 0 = 6x^3 \cos(6y) + 3x^2 y^2$$

$$(b) f''_{y,x} = (6x^3 \cos(6y) + 3x^2 y^2)'_x = (6x^3 \cos(6y))'_x + (3x^2 y^2)'_x = 6 \cdot 3x^2 \cos(6y) + 3 \cdot 2xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

**Теорема 3.2.1 (за равенство на смесени производни)** Нека точката  $(x_0, y_0) \in R^2$  и нека функцията  $f$  е дефинирана в отвореното множество  $U = U_{(x_0, y_0)} \subset R^2$ , което е нейната област т.е  $f : U \rightarrow R$ . Нека освен това съществуват частните производни  $f'_x, f'_y, f''_{x,y}, f''_{y,x}$  за всички  $(x, y) \in U$  и  $f''_{x,y}, f''_{y,x}$  са непрекъснати в точката  $(x_0, y_0)$ . Тогава е изпълнено равенството

$$f''_{x,y}(x_0, y_0) = f''_{y,x}(x_0, y_0)$$

### 3.3 Диференцируемост на функция

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $x^0 \in R^m$
- $U \subset R^m$  - отворено множество, което е околност на  $x^0$ . Без ограничение на общността може да се счита че  $U$  е  $\delta$ -околност на  $x^0$  т.е  $U$  е отворено кълбо  $B(x^0; \delta)$  с център  $x^0$  и радиус  $\delta$
- $f : U \rightarrow R$  - функция дефинирана в  $U = B(x^0; \delta)$

**Дефиниция 3.3.1** Функцията  $f$  се нарича диференцируема в точка  $x^0$  ако съществуват числа  $A_1, A_2, \dots, A_m$  и функция  $\varepsilon(x^0, x - x^0)$ , дефинирана за всички допустими стойности на  $x \in U$  и  $x - x^0 = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_m - x_m^0)$ , като при това

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^m A_k(x_k - x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0) \|x - x^0\|$$

$$\text{и } \lim_{\|x - x^0\| \rightarrow 0} \varepsilon(x^0, x - x^0) = 0$$

**Дефиниция 3.3.2** Функцията  $f$  се нарича диференцируема в отвореното множество  $U$ , ако тя е диференцируема във всяка негова точка.

#### Теорема 3.3.1

#### Дефиниция 3.3.3

#### Дефиниция 3.3.4

#### Теорема 3.3.2

#### Теорема 3.3.3

#### Дефиниция 3.3.5

#### Дефиниция 3.3.6