Математически анализ 2

Exonaut

2021-01-23

Съдържание

1 Лекция 1: Пространството R^m

1.1 Няколко важни неравенства

Нека a_k и $b_k (k = 1, 2, ..., m)$ са реални числа и $m \in N$

Теорема 1.1 (Неравенство на Коши-Шварц) *В сила е следното неравенство:*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални:
$(\exists\lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k)$
Равенството може да се запише:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)}$$

Теорема 1.2 (Неравенство на Минковски) *В сила е следното неравенство:*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ (p \geq 1)$$

Теорема 1.3 *В сила е следното неравенство:*

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k - b_k|$$

1.2 Видове крайно мерни пространства

1. Линейно(Векторно) пространство
   Нека L е линейно(векторно) пространство над полето R. В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.

   (а) $x, y \in L \implies z = x + y \in L$

   (б) $x \in L, \lambda \in R \implies z = \lambda x \in L$

2. Евклидово пространство
Крайномерното пространство L се нарича евклидово, ако в него е въведено скаларно произведение, т.е за всеки два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави реално число (x, y), удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.

   (а) $x, y, z \in L, \lambda \in R \implies (x+y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
   (б) $x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$
   (в) $x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$

3. Метрично пространство
Крайномерното пространство L се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика) ρ, т.е за два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави неотрицателно число $\rho \geq 0$ със следните свойства

   (а) $\rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$
   (б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
   (в) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z). \forall x, y, z \in L$

   Метрично пространство L с метрика ρ се означава (L, ρ)

4. Нормирано пространство Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма $||.||$, т.е $||.|| : L \to R_0^+$ със свойства

   (а) $x = 0 \implies ||x|| = 0, x \neq 0 \implies ||x|| > 0$
   (б) $x \in L, \lambda \in R \implies ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
   (в) $x, y \in L \implies ||x+y|| \leq |x| + |y|$

Теорема 1.4 *Ако L е нормирано пространство с дадена норма $||.||$, то L е метрично пространство, т.е равенството $\rho(x, y) = ||x - y||$ дефинира разстоянието в L*

1.3 Пространството R^m - дефиниция и основни свойства

Дефиниция: Множеството от наредени m-торки $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ от реални числа. Числата $a_1, a_2, ..., a_m$ се наричат съответно първа, втора, ..., m-та кордината на a.

Ако имаме $a = (a_1, a_2, ..., a_m), b = (b_1, b_2, ..., b_m), ; \lambda \in R$ то
1) $a + b = (a_1, a_2, ..., a_m) + (b_1, b_2, ..., b_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_m + b_m) \in R^m$
2) $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_m) \in R^m$
Скаларно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \right)$$

С така въведено скаларно произведение пространството R^m се превръща в евклидово.
С равенството:

$$||a|| := \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k)^2}$$

се въвежда норма в R^m.
Нормата генерира метрика в R^m с формула:

$$\rho(a,b) := ||a-b|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k-b_k)^2}$$

Скаларен квадрат: $a^2 = (a,a) = \sum_{k=1}^{m} a_k^2$
Коши-Шварц чрез скаларен квадрат: $(a,b)^2 \leq a^2b^2$ и $|(a,b)| \leq ||a||||b||$
Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат: $||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$

1.4 Точки и множества в R^m

1.5 Редици от точки в R^m

2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи