

Математически анализ 2

Ехонаut

9 май 2021 г.

Съдържание

1	Лекция 1: Пространството \mathbb{R}^m	4
1.1	Няколко важни неравенства	4
1.2	Видове крайно мерни пространства	4
1.2.1	Линейно(Векторно) пространство	4
1.2.2	Евклидово пространство	5
1.2.3	Метрично пространство	5
1.2.4	Нормирано пространство	5
1.3	Пространството \mathbb{R}^m - дефиниция и основни свойства	6
1.3.1	Скаларно произведение	6
1.3.2	Норма и метрика	6
1.3.3	Скаларен квадрат	6
1.3.4	Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат	7
1.3.5	Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат	7
1.4	Точки и множества в \mathbb{R}^m	7
1.4.1	Паралелепипед	7
1.4.2	Сфера и кълбо	7
1.5	Редици от точки в \mathbb{R}^m	9
2	Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост	11
2.1	Дефиниция на функция на няколко променливи	11
2.2	Граница на функция на няколко променливи	11
2.3	Непрекъснатост на функция на няколко променливи	12
2.4	Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи	13
3	Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи	14
3.1	Дефиниция на частна производна	14
3.2	Частни производни от по-висок ред	15
3.3	Диференцируемост на функция	15
4	Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права	18
4.1	Диференциране на съставна функция	18
4.2	Производна по посока. Градиент	19
4.3	Допирателна равнина. Нормална права	21

5	Лекция 5: Неявни функции. Съществуване и диференциране	23
5.1	Неявни функции	23
6	Лекция 6: Формула на Тейлор за функция на няколко променливи. Локални екстремуми на функция на няколко променливи	28
6.1	Формула на Тейлор за функция на няколко променливи . .	28
6.2	Локални екстремуми на функция на няколко променливи .	30
6.3	Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция	31
7	Лекция 7: Локални екстремуми на функция на няколко променливи. Екстремум на неявна функция	36
7.1	Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция II	36
7.2	Локален екстремум на неявна функция	39
8	Лекция 8: Условни и абсолютни екстремуми на функция на няколко променливи	42
8.1	Условни екстремуми на функция на няколко променливи .	42
8.2	Абсолютни екстремуми на функция на няколко променливи	44
9	Лекция 9: Двоен интеграл	46
9.1	Понятие за обем в \mathbb{R}^m . Множество с мярка нула	46
9.2	Измерими множества в \mathbb{R}^m	47
9.3	Дефиниция на многократен интеграл	48
9.4	Съществуване на многократния интеграл	50
9.5	Свойства на многократните интеграли	50
9.6	Свеждане на кратни интеграли до повторни	52
9.6.1	Двумерен случай	52
10	Лекция 10: Смяна на променливите на двоен интеграл	54
10.1	Матрица на Якоби	54
10.2	Смяна на променливите в многократен интеграл	59
10.2.1	Полярна смяна	61
11	Лекция 11: Пресмятане на тройни интеграли	64
11.1	Пресмятане на тройни интеграли, чрез свеждане до повторни интеграли	64
11.2	Приложение на многократните интеграли	66
11.3	Смяна на променливите на троен интеграл	68

Съдържание	3
11.3.1 Цилиндрична смяна	68
11.3.2 Сферична смяна	69
12 Лекция 12	71
13 Лекция 13	72
14 Лекция 14	73
15 Лекция 15	74

1 Лекция 1: Пространството \mathbb{R}^m

1.1 Няколко важни неравенства

Нека a_k и b_k ($k = 1, 2, \dots, m$) са реални числа и $m \in \mathbb{N}$

Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц). *В сила е следното неравенство:*

$$\left(\sum_{k=1}^m a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^m a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^m b_k^2 \right)$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални:
($\exists \lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k$)

Равенството може да се запише:

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски). *В сила е следното неравенство:*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left(\sum_{k=1}^m |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)$$

Теорема 1.1.3. *В сила е следното неравенство:*

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^m |a_k - b_k|$$

1.2 Видове крайно мерни пространства

1.2.1 Линейно(Векторно) пространство

Дефиниция 1.2.1. *Нека L е линейно(векторно) пространство над полето R . В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.*

1. $x, y \in L \implies z = x + y \in L$
2. $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies z = \lambda x \in L$

1.2.2 Евклидово пространство

Дефиниция 1.2.2. *Крайномерното пространство L се нарича евклидово, ако в него е въведено скалярно произведение, т.е за всеки два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави реално число (x, y) , удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.*

1. $x, y, z \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies (x + y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
2. $x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$
3. $x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$

1.2.3 Метрично пространство

Дефиниция 1.2.3. *Крайномерното пространство L се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика) ρ , т.е за два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави неотрицателно число $\rho \geq 0$ със следните свойства*

1. $\rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \forall x, y, z \in L$

Метрично пространство L с метрика ρ се означава (L, ρ)

1.2.4 Нормирано пространство

Дефиниция 1.2.4. *Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма $\|\cdot\|$, т.е $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ със свойства*

1. $x = 0 \implies \|x\| = 0, x \neq 0 \implies \|x\| > 0$
2. $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $x, y \in L \implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Теорема 1.2.1. *Ако L е нормирано пространство с дадена норма $\|\cdot\|$, то L е метрично пространство, т.е равенството $\rho(x, y) = \|x - y\|$ дефинира разстоянието в L*

1.3 Пространството \mathbb{R}^m - дефиниция и основни свойства

Дефиниция 1.3.1. Множеството от наредени m -торки $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ от реални числа. Числата a_1, a_2, \dots, a_m се наричат съответно първа, втора, ..., m -та координата на a .

Ако имаме $a = (a_1, a_2, \dots, a_m), b = (b_1, b_2, \dots, b_m), ; \lambda \in \mathbb{R}$ то

1. $a + b = (a_1, a_2, \dots, a_m) + (b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) \in \mathbb{R}^m$
2. $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_m) \in \mathbb{R}^m$

1.3.1 Скалярно произведение

Скалярно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left(\sum_{k=1}^m a_k b_k \right)$$

С така въведено скалярно произведение пространството \mathbb{R}^m се превръща в евклидово.

1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k)^2}$$

се въвежда норма в \mathbb{R}^m .

Нормата генерира метрика в \mathbb{R}^m с формула:

$$\rho(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k - b_k)^2}$$

1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат: $a^2 = (a, a) = \sum_{k=1}^m a_k^2$

1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат: $(a, b)^2 \leq a^2 b^2$ и $|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$

1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат: $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

1.4 Точки и множества в \mathbb{R}^m **1.4.1 Паралелепипед**

Дефиниция 1.4.1. *Множеството*

$$\Pi(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k < x_k - a_k < \delta_k\}$$

се нарича отворен паралелепипед в \mathbb{R}^m с център точката a .

Множеството

$$\tilde{\Pi}(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k \leq x_k - a_k \leq \delta_k\}$$

се нарича затворен паралелепипед в \mathbb{R}^m с център точката a .

Ако $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_m = \delta$, получените множества $\Pi(a; \delta)$ и $\tilde{\Pi}(a; \delta)$ се наричат съответно отворен и затворен куб в \mathbb{R}^m с център a .

1.4.2 Сфера и кълбо

Дефиниция 1.4.2. *Нека числото $r > 0$. Множеството*

$$B(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) < r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| < r\}$$

се нарича отворено кълбо в \mathbb{R}^m с център a и радиус r , множеството

$$\tilde{B}(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) \leq r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| \leq r\}$$

се нарича затворено кълбо в \mathbb{R}^m с център a и радиус r , а множеството

$$S(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) = r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| = r\}$$

се нарича сфера в \mathbb{R}^m с център a и радиус r , а множеството

Дефиниция 1.4.3. Точката a се нарича

- *вътрешна* за множеството A , ако съществува отворено кълбо $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset A$
- *външна* за A , ако съществува $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$
- *контурна* за A , ако за всяко $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ и $B(a, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$
- *изолирана* ако съществува $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$

Дефиниция 1.4.4. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича

- *отворено*, ако всяка негова точка е вътрешна
- *затворено*, ако неговото допълнение $\mathbb{R}^m \setminus A$ е отворено

Дефиниция 1.4.5. Околност на дадена точка $a \in \mathbb{R}^m$ се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с U_a .

Дефиниция 1.4.6. Точка a се нарича точка на съставяване на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$, ако всяка нейна околност U_a съдържа поне една точка на A , различна от a , т.е. $U_a \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

Дефиниция 1.4.7. Величината

$$d = d(A) = \sup_{a', a'' \in A} \rho(a'; a'')$$

се нарича *диаметър* на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$.

Дефиниция 1.4.8. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича *ограничено*, ако съществува кълбо (с краен радиус), което го съдържа.

Дефиниция 1.4.9. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича *компактно*, ако A е затворено и ограничено.

Дефиниция 1.4.10. Множеството $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, чийто координати са непрекъснати функции $x_k = x_k(t) (k = 1, 2, \dots, m)$, дефинирани върху даден интервал $[a, b]$ се нарича *непрекъсната крива* в \mathbb{R}^m . t се нарича *параметър* на кривата.

Точките $x(a) = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_m(a))$ и $x(b) = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_m(b))$ се наричат *начало* и *край* на дадената крива. Ако $x(a) = x(b)$ кривата е *затворена*

Дефиниция 1.4.11. Нека $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ са фиксирани числа за които $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$. Множеството от точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ чиито координати се представят във вида

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, \dots, m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството \mathbb{R}^m , минаваща през точка x^0 по направление $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

Дефиниция 1.4.12. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъснатата крива γ , която ги свързва и $\gamma \subset A$.

Дефиниция 1.4.13. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.

Дефиниция 1.4.14. Област, всеки две точки на която могат да се сведият с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.

Дефиниция 1.4.15. Областа $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича звездообразна област, относно точката $x^0 \in A$, ако за всяка точка $x \in A$ отсечката $[x^0, x]$ лежи изцяло в A .

1.5 Редици от точки в \mathbb{R}^m

Дефиниция 1.5.1. Редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\}$ се нарича редица от точки в \mathbb{R}^m , а редицата $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} (k = 1 \div m)$ - k -та координатна редица. За по кратко редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ се означава $\{x^{(n)}\}$

Дефиниция 1.5.2. Редицата $\{y^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ се нарича поредица на редицата $\{x^{(n)}\}$ и се означава:

$$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, \dots, \text{ или } \{x^{(n_l)}\}_{l=1}^{\infty}$$

ако за всяко l съществува такова n_l , че $y^{(l)} = x^{(n_l)}$, при това, ако $l' < l''$, то $n_{l'} < n_{l''}$.

Дефиниция 1.5.3. Редицата $\{x^{(n)}\}$ се нарича сходяща към точка $a \in \mathbb{R}^m$ (граница на редицата), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $N_0 > 0$, че за всяко $n > N_0$ е изпълнено неравенството $\rho(x^{(n)}; a) = \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$. Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.

Дефиниция 1.5.4. Точката $a \in \mathbb{R}^m$ се нарича точка на събъстване на редицата $\{x^{(n)}\}$, ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.

Теорема 1.5.1. *Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$ и точката $a \in \mathbb{R}^m$. Тогава*

$$(\{x^{(n)}\} \rightarrow a) \iff (x_k^{(n)} \rightarrow a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката a , тогава и само тогава когато всяка от координатите на редици $\{x_k^{(n)}\}$ има граница съответната координата a_k на точката a

Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши). *Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$. Редицата $x^{(n)}$ е сходяща тогава и само тогава когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $N_0 > 0$, че при всяко $n \in \mathbb{N}, n > N_0$ и всяко $p \in \mathbb{N}$ е изпълнено $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = \|x^{(n+p)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$*

Дефиниция 1.5.5. *Редицата $\{x^{(n)}\}$ се нарича ограничена, ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.*

Теорема 1.5.3 (Болцано-Вайерщрас). *От всяка ограничена редица в пространството \mathbb{R}^m може да се избере сходяща подредица.*

Дефиниция 1.5.6. *Всяко множество $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича компактно, ако от всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$, може да се избере сходяща подредица $\{x_k^{(n)}\}$ с граница принадлежаща на A*

2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

2.1 Дефиниция на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.1.1. Казва се че дадена функция с дефиниционна област (дефиниционно множество) D , ако на всяка точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ от множеството D е съпоставено реално число $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, т.е на всяко $x \in D$ съществува единствено число $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Понякога за кратко се записва.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

В \mathbb{R}^2 се използва (x, y) за означение, а в \mathbb{R}^3 - (x, y, z) .

2.2 Граница на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.2.1 (Коши). Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, a е точка на съгъстяване за D . Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \rightarrow a$ със стойности $x \neq a$ ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Дефиниция 2.2.2 (Хайне). Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, a е точка на съгъстяване за D . Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \rightarrow a$ със стойности $x \neq a$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in D, x^{(n)} \neq a$ сходяща към a , числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница L .

Теорема 2.2.1. Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.

Дефиниция 2.2.3. Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, a е точка на съгъстяване за D . Казва се че $f(x)$ дивергира към ∞ (съответно към $-\infty$) при $x \rightarrow a$ със стойности $x \neq a$, ако за всяко $A \in \mathbb{R}$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $f(x) > A$ (съответно $f(x) < A$). Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (-\infty)$$

Дефиниция 2.2.4 (Повторна граница). Нека $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на съгъстяване за D и функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Нека съществува

такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката a_2 , че за всички стойности $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$. Ако освен това съществува $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = A$, A се нарича повторна граница и се означава както следва

$$A = A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow a_2} (\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y))$$

Аналогично се съвезжда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow a_1} (\lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y))$$

Теорема 2.2.2. Нека $D \subset \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на събстване за D и функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Нека

1. Съществува такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката a_2 , че за всички стойности $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$.
2. Съществува границата $\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1,a_2)} f(x, y) = L$.

Тогаво съществува граница $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y)$ и освен това е в сила равенството $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = L$

2.3 Непрекъснатост на функцията на няколко променливи

Дефиниция 2.3.1. Казва се че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Дефиниция 2.3.2 (непрекъснатост по Коши). Казва се, че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството D , за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Дефиниция 2.3.3 (непрекъснатост по Хайне). Казва се, че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \in D$ за $n \in \mathbb{N}$) сходяща към a , числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница $f(a)$.

Дефиниция 2.3.4 (за съставна функция). Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}, k = 1 \div m$. Полагайки $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$ за всяко $t \in (\alpha, \beta)$ съставната функция $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$ се дефинира по формулата

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$$

2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи¹³

Теорема 2.3.1. *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ интервалът $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ за $k = 1 \div m$. Нека освен това $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$ за $\forall t \in (\alpha, \beta)$ и x_k са непрекъснати в точката $t_0 \in (\alpha, \beta)$ за $k = 1 \div m$, а f е непрекъсната в $x^0 = x(t_0)$. Тогава функцията $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ е непрекъсната в точката t_0*

2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.4.1. *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Функцията се нарича равномерно непрекъсната в A , ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon)$, че за всеки две точки $x', x'' \in A$ за които разстоянието $\rho(x'; x'') = \|x' - x''\| < \delta$, да следва, че $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Теорема 2.4.1 (на Вайерщрас). *Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K . Тогава*

1. *f е ограничена в K , т.е. съществуват $m, M \in \mathbb{R}$ такива че за всички $x \in K$ е изпълнено неравенството $m \leq f(x) \leq M$*
2. *f достига най-малката и най-голямата си стойност в K , т.е. съществуват точки $x^0, y^0 \in K$, такива че*

$$f(x^0) = \inf_{x \in K} f(x); f(y^0) = \sup_{y \in K} f(x)$$

Теорема 2.4.2 (на Кантор). *Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K . Тогава f е равномерно непрекъсната върху K .*

3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функцията на две и повече променливи

3.1 Дефиниция на частна производна

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $D \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество
- $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ - точка, принадлежаща на D
- $U_{x^0} \subset D$ - околност на x^0
- $U_{x_i^0} \subset D$ - околност на x_i^0 ($i = 1, 2, \dots, m$)
- точката $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0) \in U_{x^0}$, за всички стойности на $x_i \in U_{x_i^0}$
- f и g - функции, дефинирани съответно в D и $U_{x_i^0}$. т.е.
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : U_{x_i^0} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$

Дефиниция 3.1.1. Производната, ако съществува на функцията g в точката x_i^0 се нарича частна производна на функцията f (по променлива x_i^0) в точката x^0 . Използва се означението $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(x^0)$.

Частната производна на функцията f относно променливата x_i е равна на границата на функцията $\varphi(h_i) = \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i}$ при $h_i \rightarrow 0$ (ако съществува) т.е

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \varphi(h_i) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$$

Пример 3.1.1.

$$f(x, y) = x^2 + 9xy^2$$

$$f'_x(x, y) = (x^2)'_x + (9xy^2)'_x = 2x + 9y^2$$

$$f'_y(x, y) = (x^2)'_y + (9xy^2)'_y = 0 + 9x \cdot 2 \cdot y = 18xy$$

3.2 Частни производни от по-висок ред

Дефиниция 3.2.1. Частната производна на частната производна от $n - 1$ ред, $n = 1, 2, \dots$ (ако съществува), се нарича частична производна от n -ти ред. Частните производни, получени при диференциране по различни променливи се наричат смесени производни, а получените при диференциране само по една и съща променлива се наричат чисти производни.

Пример 3.2.1.

$$f(x, y) = x^3 \sin(6y) + x^2 y^3 + 2222, f''_{x,y} = ?, f''_{y,x} = ?$$

$$f''_{x,y} = (f'_x(x, y))'_y$$

$$f'_x(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_x + (x^2 y^3)'_x + (2222)'_x = 3x^2 \sin(6y) + 2xy^3 + 0$$

$$f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y) + 2xy^3)'_y$$

$$f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y))'_y + (2xy^3)'_y = 3x^2 \cos(6y) \cdot 6 + 2 \cdot 3xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

$$f''_{y,x} = (f'_y(x, y))'_x$$

$$f'_y(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_y + (x^2 y^3)'_y + (2222)'_y$$

$$f'_y(x, y) = x^3 \cos(6y) \cdot 6 + x^2 \cdot 3y^2 + 0 = 6x^3 \cos(6y) + 3x^2 y^2$$

$$f''_{y,x} = (6x^3 \cos(6y) + 3x^2 y^2)'_x = (6x^3 \cos(6y))'_x + (3x^2 y^2)'_x$$

$$f''_{y,x} = 6 \cdot 3x^2 \cos(6y) + 3 \cdot 2xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

Теорема 3.2.1 (за равенство на смесени производни). Нека точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и нека функцията f е дефинирана в отвореното множество $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$, което е нейната област т.е $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Нека освен това съществуват частните производни $f'_x, f'_y, f''_{x,y}, f''_{y,x}$ за всички $(x, y) \in U$ и $f''_{x,y}, f''_{y,x}$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0) . Тогава е изпълнено равенството

$$f''_{x,y}(x_0, y_0) = f''_{y,x}(x_0, y_0)$$

3.3 Диференцируемост на функция

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$

- $U \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество, което е околност на x^0 . Без ограничение на общността може да се счита че U е δ -околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0; \delta)$ с център x^0 и радиус δ
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ - функция дефинирана в $U = B(x^0; \delta)$

Дефиниция 3.3.1. Функцията f се нарича диференцируема в точка x^0 ако съществуват числа A_1, A_2, \dots, A_m и функция $\varepsilon(x^0, x - x^0)$, дефинирана за всички допустими стойности на $x \in U$ и $x - x^0 = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_m - x_m^0)$, като при това

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^m A_k(x_k - x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0)\|x - x^0\|$$

$$\text{и } \lim_{\|x - x^0\| \rightarrow 0} \varepsilon(x^0, x - x^0) = 0$$

Дефиниция 3.3.2. Функцията f се нарича диференцируема в отвореното множество U , ако тя е диференцируема във всяка негова точка.

Теорема 3.3.1. Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то тя е непрекъсната.

Дефиниция 3.3.3. В случай на диференцируемост в точката x^0 на функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, изразът

$$df(x^0) \circ (h) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_m h_m$$

(или $df, df(x^0)$) се нарича пълнен диференциал на $f(x)$ в точката x^0

Теорема 3.3.2. Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то съществуват частните производни $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ в точката x^0 и освен това $A_k(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$.

Дефиниция 3.3.4. Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то със следната формула се изразява нейната производна в точката x^0

$$f'(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0))$$

.

Теорема 3.3.3. Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ притежава частни производни $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$ в отвореното множество U и освен това са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то f е диференцируема в точката x^0 .

Дефиниция 3.3.5. Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ притежава частни производни в U и тези частични производни са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в точката x^0 . Ако тези производни са непрекъснати в U , то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в това множество.

Дефиниция 3.3.6. Диференциалът на диференциала от $n - 1$ ред ($n = 2, 3, \dots$) от функцията f (ако съществува) се нарича диференциал от n -ти ред (n -ти диференциал) на тази функция и се бележи $d^n f$

Ако f е два пъти непрекъснатата и диференцируема в $x^0 \in U$ тогава втория диференциал получава по следния резултат

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f(x^0)$$

което е симетрична квадратична форма на $dx_i (i = 1 \div m)$.

Аналогично ако f е n пъти непрекъснатата и диференцируема в $x^0 \in U$, то $d^n f(x^0)$ съществува и се дава със следната формула

$$d^n f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f(x^0)$$

4 Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права

4.1 Диференциране на съставна функция

$x^0 \in \mathbb{R}^m$ и отворено множество $U \subset \mathbb{R}^m$ е околност на точката x^0 (Без ограничение на общността може да се счита че U е δ -околност на x^0 т.е. U е отворено кълбо $B(x^0; \delta)$ с център x^0 и радиус δ).
 $t_0 \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$

Теорема 4.1.1. Нека функцията f е дефинирана в U , а φ_k - в интервала (α, β) , т.е.

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$ и $\varphi_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1 \div m$)

като при това $x_k = \varphi_k(t)$ за $k = 1 \div m$, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t) \in U$ за всички стойности на $t \in (\alpha, \beta)$. Нека f е диференцируема в U , f'_k са непрекъснати в x^0 за $k = 1 \div m$, φ_k са диференцируеми в t_0 и $F : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ е дефинирана с равенството.

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)), t \in (\alpha, \beta)$$

Тогава функцията F е диференцируема в t_0 и в сила е следното равенство

$$F'(t_0) = \sum_{k=1}^m f'_{x_k}(x^0) \varphi'_k(t_0)$$

За $m = 2$:

$$\varphi_1(t) = \varphi(t), \varphi_2(t) = \psi(t)$$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) \varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) \psi'(t_0)$$

Пример 4.1.1. $f(x, y)$ - дефинирана и диференцируема в $U_{(1,2)} \subset \mathbb{R}^2$. с непрекъснати частни производни f'_x, f'_y в точката $(1, 2)$.
 Намерете производната $F'(0)$ на съставната функция F , зададена с равен-

ството $F(t) = f(1 + 3t, 2 + 4t)$.

$$t_0 = 0$$

$$x = \varphi(t) = 1 + 3t$$

$$y = \psi(t) = 2 + 4t$$

$$x_0 = \varphi(0) = 1$$

$$y_0 = \psi(0) = 2$$

$$\varphi'(t) = 3$$

$$\psi'(t) = 4$$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0) \implies F'(0) = 3f'_x(1, 2) + 4f'_y(1, 2)$$

4.2 Производна по посока. Градиент

Нека $x^0 \in \mathbb{R}^m$ и лъчът l е дефиниран, както следва:

$$l : x = x^0 + t\nu, t > 0$$

Функцията f е дефинирана върху този лъч, а

$$\varphi(t) := f(x(t)) = f(x^0 + t\nu), t > 0$$

Дефиниция 4.2.1. Границата (ако съществува)

$$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

се нарича производна на f в точката x^0 по посока на вектора ν и се означава $\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}$, т.е

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

ако съществува границата.

Ако частните производни съществуват, са производни "по посока на координатните оси".

Ако f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0 , то съществува производната ѝ по посока на вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$ и

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^m \nu_k \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$$

Дефиниция 4.2.2. Векторът с координати $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ се нарича *градиент* на f в точката x^0 и се означава

$$\text{grad } f(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0))$$

Предвид тази дефиниция, формулата за производна по посока на вектор ν се записва по кратко във вида

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \text{grad } (f(x^0), \nu)$$

Теорема 4.2.1. Ако функцията f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0 , то съществува производната на f по посока на произволен вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$ и тя се дава с формула: $\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \text{grad } f(x^0)$

Ако, ν е единичен вектор, т.е. $\|\nu\| = 1$.

Тогава е в сила неравенството $\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| \leq \|\text{grad } f(x^0)\|$, което следва от неравенство на Коши.

$$\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| = |\text{grad } (f(x^0), \nu)| \leq \|\text{grad } f(x^0)\| \|\nu\| = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

Равенство се достига само когато ν и $f(x^0)$ са колинеарни (еднопосочни или успоредни). тогава

$$\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

Ако вектора ν е колинеарен с градиента, тогава векторът $\nu = \frac{\text{grad } f(x^0)}{\|\text{grad } f(x^0)\|}$ и тогава

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \left(\text{grad } f(x^0), \frac{\text{grad } f(x^0)}{\|\text{grad } f(x^0)\|} \right) = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

Ако $\text{grad } f(x^0) \neq 0$ то производната достига най голяма стойност единствено, ако диференцирането се извършва по посока на градиента. С други думи, посоката на градиента е посоката на най бързо нарастване на функцията, а големината му е равна на производната по тази посока.

Ако $\nu = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m)$, то производната по посока ν става

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = f'_{x_1}(x^0) \cos \alpha_1 + f'_{x_2}(x^0) \cos \alpha_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0) \cos \alpha_m.$$

4.3 Допирателна равнина. Нормална права

- $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ - точка в \mathbb{R}^2
- $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ точка в \mathbb{R}^3
- $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$ - околност на (x_0, y_0)
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ - функция
- $z_0 = f(x_0, y_0)$
- $S : z = f(x, y) \iff S : f(x, y) - z = 0$ - уравнение на равнина
- f'_x, f'_y - първи частни производни за всички $(x, y) \in U$, f'_x, f'_y са непрекъснати в точката (x_0, y_0)

Дефиниция 4.3.1. Равнината $\tau(\tau \nparallel Oz)$, зададена с уравнение

$$\tau : z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина в точката M_0 към повърхнината S и представлява графиката на $f(x, y)$.

Дефиниция 4.3.2. Векторите n_1, n_2

$$n_1(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) \quad n_2(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1),$$

които са нормални вектори на тангенциалната равнина, се наричат нормални вектори и за повърхнината S .

$n_1 = -n_2$ Това позволява да се използват за ориентация на повърхнината S .

Горната страна се дефинира с вектора n_1 за който ъгъл $\angle(n_1, k)$ е остър.

Дефиниция 4.3.3. Правата n , зададена с уравнение

$$n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$

се нарича нормала към повърхнината S към точка M_0

Ако прекараме две равнини през O съответно $\alpha : x = x_0$ и $\beta : y = y_0$ всяка от тях пресича повърхнината в крива линия съответно

$$C_1 : x = x_0, y = y, z = f(x_0, y) \quad C_2 : x = x, y = y_0, z = f(x, y_0)$$

t_1 е направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в точката 0 , а с t_2 - направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в същата точката, то

$$t_1(0, 1, f'_y(x_0, y_0)), \quad t_2(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$$

Равнината τ е компланарна с векторите t_1, t_2 то нейния нормален вектор може да се получи от векторното им произведение

$$n_1 = t_2 \times t_1 \quad n_2 = t_1 \times t_2$$

Пример 4.3.1. За повърхнина S , зададена с уравнение $S : z = x^2 + y^2 + 3$, да се напишат:

- 1) допирателната равнина τ в $M_0(0, 0, 3)$
- 2) нормалните вектори на τ в т. M_0 .
- 3) нормалата на повърхнината S в т. M_0 .

Решение:

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x ; z'_y = 2y ; M_0(0, 0, 3) = M_0(x_0, y_0, z_0) \\ z'_x(x_0, y_0) &= z'_x(0, 0) = 0 ; z'_y(x_0, y_0) = z'_y(0, 0) = 0 \\ 1) \tau : z - z_0 &= z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \tau : z - 3 &= 0x + 0y \iff \tau : z = 3 \\ 2) \vec{n}_1 &= (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) = (0, 0, 1) \\ \vec{n}_2 &= (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1) = (0, 0, -1) \\ 3) n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} &= \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1} \\ n : \frac{x - 0}{0} &= \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 3}{1} = \lambda \\ n(0, 0, \lambda + 3), \lambda &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

5 Лекция 5: Неявни функции. Съществуване и диференциране

5.1 Неявни функции

Нека имаме уравнението $F(x, y) = 0$ и да се реши спрямо y . Решението трябва да зависи и от другата променлива. Нека $y = f(x)$ и заместваме в началното уравнение.

$$F(x, f(x)) = 0$$

Дефиниция 5.1.1. Ако функцията $f(x)$ удовлетворява равенството

$$F(x, f(x)) = 0$$

за всяко x от дефиниционното си множество, то тя се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението $F(x; y) = 0$.

Ако диференцираме равенството $F(x, f(x)) = 0$ по x с теоремата за съставни функции получаваме

$$F'_x(x, f(x)) + f'(x)F'_y(x, f(x)) = 0 \implies f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

Където $F'_y(x, f(x)) \neq 0$

Пример 5.1.1. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$

$$F(x, y) = 0 \iff y^2 = 5 - x^2$$

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{5 - x^2}$$

Нека $M_0(x_0, y_0)$ точка в \mathbb{R}^2 , отвореното множество $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$ е нейна околност и нека $F \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 5.1.1 (Съществуване на неявна функция). Нека $M_0(x_0, y_0)$ точка в \mathbb{R}^2 , отвореното множество $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$ е нейна околност и функцията $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворява следните условия

1. F е непрекъсната в U
2. $F(x_0, y_0) = 0$
3. За всяка точка $(x, y) \in U \exists F'_y(x, y)$
4. F'_y е непрекъсната в M_0

$$5. F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Тогава съществуват околности

$$X = \{x : |x - x_0| < a\} (a > 0) \quad Y = \{y : |y - y_0| < b\} (b > 0)$$

такива че правоъгълника $\Pi = X \times Y \subset U$ и съществува единствена функция $y = f(x)$, $f : X \rightarrow Y$, f - непрекъсната в X , $f(x_0) = y_0$ и $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$

Дефиниция 5.1.2. Функцията $y = f(x)$ се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението $F(x, y) = 0$, в околност на точката (x_0, y_0)

Теорема 5.1.2 (Добавка към 5.1.1). Ако освен това F'_x, F'_y са дефинирани в U и непрекъснати в (x_0, y_0) то $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 и $f'(x_0)$ се изразява

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

Ако F'_x, F'_y са непрекъснати в $U = U_{M_0}$, то f' е непрекъсната в X . Прилагайки формулата за производна в произволна точка в $x \in X$ получаваме

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (1)$$

Аналогично се формулира теоремата за неявна функция от уравнението $F(x, y) = 0$, за $x(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ($m > 2$) и $y \in \mathbb{R}$ т.е $F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$

Теорема 5.1.3 (Съществуване на неявна функция). Нека точката $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$, $M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ е околност на M_0 и функцията $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворява следните условия

1. F е непрекъсната в U
2. $F(x^0, y_0) = 0$
3. За всяка точка $(x, y) \in U \exists F'_y(x, y)$
4. F'_y е непрекъсната в M_0
5. $F'_y(x^0, y_0) \neq 0$

Тогава съществуват околности:

$$X = \{x : |x - x_k^0| < a_k\} (a_k > 0) \quad k = 1 \div m; \quad Y = \{y : |y - y_0| < b\} (b > 0)$$

такива че правоъгълника $\Pi = X \times Y \subset U$, $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ и освен това съществува единствена функция $y = f(x)$, $f : X \rightarrow Y$, f - непрекъсната в X , $f(x^0) = y_0$ и $\forall x \in X : F(x; f(x)) = 0$

Ако освен това F'_{x_k} , $k = 1 \div m$ и F'_y са дефинирани в U и непрекъснати в (x^0, y_0) , то $f(x)$ е диференцируема в точката x^0 и $f'(x_k^0)$ се изразява с формулата

$$f'(x_k^0) = -\frac{F'_{x_k}(x^0, f(x_0))}{F'_y(x^0, f(x_0))} = -\frac{F'_{x_k}(x^0, y_0)}{F'_y(x^0, y_0)}$$

Пример 5.1.2. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. Да се определи дали съществува единствена функция $y = f(x)$ определена от неявно от уравнението $F(x, y) = 0$ в околността $(1, 2)$. Ако съществува да се пресметне $f'(1)$.

$$F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4 \neq 0$$

Съществува единствена неявна функция $y = f(x)$ определена с уравнението $F(x, y) = 0$

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

$$F'_x = 2x, \quad F'_x(1, 2) = 4, \quad F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4$$

$$f'(1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Пример 5.1.3. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3z^2 - 13$. Да се определи дали съществува единствена функция $z = f(x, y)$ определена от неявно от уравнението $F(x, y, z) = 0$ в околността $(0, 1, 2)$. Ако съществува да се пресметне $z'_x(0, 1)$, $z'_y(0, 1)$.

$$F'_z = 6z \implies F'_z(0, 1, 2) = 6 \cdot 2 = 12 \neq 0$$

Съществува единствена неявна функция $z = f(x, y)$ определена от неявно от уравнението $F(x, y, z) = 0$

$$F'_x = 2x \implies F'_x(0, 1, 2) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$F'_y = 2y \implies F'_y(0, 1, 2) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{0}{6} = 0$$

$$z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Ако F'_{x_k}, F'_{y_k} са непрекъснати в $U = U_{M_0}$, то f'_{x_k} е непрекъснатата в X . Прилагайки формулата за производна в произволна точка в $x \in X$ получаваме

$$y'_{x_k} = f'_{x_k}(x) = -\frac{F'_{x_k}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_{x_k}(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (2)$$

Ако F има непрекъснати частни производни от втори ред, то изразите от дясната страна на (1) (съответно (2)) могат да се диференцират още веднъж по променлива $x(x_j, j = 1 \div m)$, при което се получават вторите производни на f . Така се получават формулите

$$f''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

респективно, изпускайки за удобство променливите получаваме

$$f''_{x_k x_k}(x) = f''_{x_k^2}(x) = -\frac{F''_{x_k^2} + 2F''_{x_k y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'^2_{x_k}}{F'_y}$$

и за $k \neq j$

$$f''_{x_k x_j}(x) = -\frac{F''_{x_k x_j} + F''_{x_k y}y'_{x_j} + F''_{x_j y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'_{x_k}y'_{x_j}}{F'_y}$$

Пример 5.1.4. Да се намери y', y'' на неявната функция $y = f(x)$, дефинирана от уравнението

$$x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

Да се пресметнат $y'(0), y''(0)$, ако $y(0) = 1$

Решение:

$$F(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

$$F'_y = -2x + 10y + 4 \neq 0$$

$$F'_x(x, y) = 2x - 2y - 2$$

$$F'_y(0, 1) = -2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4 \neq 0$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x - 2y - 2}{-2x + 10y + 4} = -\frac{x - y - 1}{-x + 5y + 2}$$

$$y'(0) = -\frac{0 - 1 - 1}{-0 + 5 \cdot 1 + 2} = -\frac{-2}{7} = \frac{2}{7}$$

$$y''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

$$F''_{xx} = 2, \quad F''_{yy} = 10, \quad F''_{xy} = -2$$

$$F''_{xx}(0, 1) = 2, \quad F''_{yy}(0, 1) = 10, \quad F''_{xy}(0, 1) = -2$$

$$y''(x) = -\frac{2 + 2 \cdot (-2)y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$

$$y''(x) = -\frac{2 + -4y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$

$$y''(0) = -\frac{2 + -4 \cdot \frac{2}{7} + 10 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2}{-2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4}$$

$$y''(0) = -\frac{2 + -\frac{8}{7} + \frac{40}{49}}{14}$$

$$y''(0) = -\frac{98 - 56 + 40}{49 \cdot 14} = -\frac{82}{49 \cdot 14} = \frac{82}{49} \cdot \frac{1}{14} = \frac{41}{343}$$

6 Лекция 6: Формула на Тейлор за функция на няколко променливи. Локални екстремуми на функция на няколко променливи

6.1 Формула на Тейлор за функция на няколко променливи

Формула на Тейлор за функцията f дефинирана и непрекъсната в околност $U = U_{x_0}$ на точката x_0 , която има производни до $(n+1)$ ред ($n \in \mathbb{N}_0$)

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x)$$

с остатъчен член записан във формата на Лагранж

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Нека имаме точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, околността $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$, която е звездообразна относно (x_0, y_0) (Всяка точка $(x, y) \in U$ околността съдържа и отсечка, която я свързва с (x_0, y_0)). Без ограничение на общостта считаме, че U е δ -околност на (x_0, y_0) (отворен кръг с център (x_0, y_0) и радиус δ). Функцията f е дефинирана в U .

Теорема 6.1.1. *Нека функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е дефинирана и непрекъсната в δ -околността U на точката (x_0, y_0) , заедно с частните производни от $n+1$ -ви ред ($n \in \mathbb{N}_0$). Нека $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$. Тогава съществува $\vartheta = \vartheta(\Delta x, \Delta y)$, ($0 < \vartheta < 1$) за която*

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + \\ &\frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^3 f(x_0, y_0) + \dots + \\ &\frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y) \end{aligned}$$

или по кратко

$$\Delta z = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y) \quad (3)$$

където

$$r_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n+1} f(x_0 + \vartheta \Delta x, y_0 + \vartheta \Delta y) \quad (4)$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

Дефиниция 6.1.1. Формулата (3) се нарича формула на Тейлор от ред n за функцията f , а функцията r_n - остатъчен член, а записът му във вида (4) се нарича остатъчен член на формулата на Тейлор във формата на Лагранж.

Ако $n = 0$, първото събираемо изисква разяснение, защото индексът над знака за сумиране е по малък от индекса под знака за сумиране. В този случай по дефиниция този член е равен на нула, т.е формулата има вид

$$\Delta z = r_0(\Delta x, \Delta y)$$

Теорема 6.1.2. Нека функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирана и непрекъсната в δ -околността U на точката x^0 , заедно с частните производни от $n+1$ -ви ред ($n \in \mathbb{N}_0$). Нека $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2} < \delta$.

Тогаво съществува $\vartheta = \vartheta(\Delta x) = \vartheta(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$, ($0 < \vartheta < 1$) за която

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x) - f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = \\ &= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta x_m \right)^k f(x_1^0, \dots, x_m^0) + r_n(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \end{aligned}$$

Където

$$r_n(\Delta x) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta x_m \right)^{n+1} f(x^0 + \vartheta \Delta x),$$

$$(x^0 + \vartheta \Delta x) = (x_1^0 + \vartheta \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \vartheta \Delta x_m) \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Записано с диференциали

$$\Delta z = f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^n d^k f(x^0) + r_n(\Delta x)$$

при $n = 1$

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + r_1(\Delta x, \Delta y) \\ r_1(\Delta x, \Delta y) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{\partial x^2} \Delta x^2 \right] + \frac{\partial^2 f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right]\end{aligned}$$

Пример 6.1.1. Да се напише формулата на Тейлор за $f(x, y) = e^{x+y}$ в точката $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $n = 1$

$$\begin{aligned}f'_x &= e^{x+y} \quad f'_y = e^{x+y} \quad f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yy} = e^{x+y} \\ f(0, 0) &= f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 1 \\ \xi &= (\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = \vartheta x, \quad \xi_2 = \vartheta y, \quad \vartheta \in (0, 1) \\ f''_{xx}(\xi_1, \xi_2) &= f''_{xy}(\xi_1, \xi_2) = f''_{yx}(\xi_1, \xi_2) = f''_{yy}(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1 + \xi_2} = e^{\vartheta(x+y)} \\ f(x, y) &= 1 + 1x + 1y + \frac{1}{2!} (e^{\vartheta(x+y)} x^2 + 2e^{\vartheta(x+y)} xy + e^{\vartheta(x+y)} y^2) \\ &= 1 + (x + y) + \frac{e^{\vartheta(x+y)}}{2!} (x + y)^2\end{aligned}$$

6.2 Локални екстремуми на функция на няколко променливи

Дефиниция 6.2.1. Казваме че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ има локален максимум в точката $x^0 \in D$, ако съществува околност $U_{x^0} \subset D$ на точката x^0 , че

$$f(x^0) \geq f(x), \quad \forall x \in U_{x^0}$$

Дефиниция 6.2.2. Казваме че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ има локален минимум в точката $x^0 \in D$, ако съществува околност $U_{x^0} \subset D$ на точката x^0 , че

$$f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in U_{x^0}$$

Дефиниция 6.2.3. Локалните максимуми и локалните минимуми се наричат по - общо локални екстремуми.

Дефиниция 6.2.4. Ако неравенството в дефинициите (6.2.1) или (6.2.2) е строго при $x \neq x^0$, то съответния локален екстремум се нарича строг локален екстремум (строг локален максимум или строг локален минимум).

Теорема 6.2.1 (Необходимо условие). *Нека функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ притежава локален екстремум в $x^0 \in D \subset \mathbb{R}^m$ и освен това съществуват първите частни производни $f'_{x_k}(x^0)$ в точката x^0 , $k = 1 \div m$ тогава*

$$f'_{x_k}(x^0) = 0 \quad k = 1 \div m$$

Дефиниция 6.2.5. *Точката x^0 се нарича стационарна точка за функцията f , диференцируема в нея, ако $\text{grad } f(x^0) = 0$.*

Пример 6.2.1. Тук са разгледани две функции които са дефинирани и диференцируеми в цялата равнина \mathbb{R}^2 , но нямат локални екстремуми

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{x+y} \\ f'_x(x, y) &= f'_y(x, y) = e^{x+y} \neq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy \\ f'_x(x, y) &= x \quad f'_y(x, y) = y \\ \text{grad } f(x, y) &= (y, x) = (0, 0) \\ f(x, y) - f(0, 0) &= xy - 0 = xy \implies \end{aligned}$$

няма локален екстремум (сменя знака си във всяка произволно взета околност на точката $(0,0)$). Точката $(0,0)$ е седловина на хиперболичната повърхнина $z = xy$.

6.3 Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция

Теорема 6.3.1 (Достатъчно условие). *Нека функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ притежава непрекъснати частни производни $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ от втори ред в околността U и точката (x_0, y_0) е стационарна точка f , т.е*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Тогава

1. Ако

$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0$$

то $f(x, y)$ има локален екстремум в (x_0, y_0) .

2. Ако

$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 < 0$$

то $f(x, y)$ няма локален екстремум в (x_0, y_0) .

3. Ако

$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 = 0$$

то $f(x, y)$ може да има локален екстремум в (x_0, y_0) , така и да няма такъв.

Пример 6.3.1. Да се намерят екстремумите на (ако съществуват) и да се определи видът им.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = -x^2 - y^2$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f'_x = 2x \quad f'_y = 2y$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0 \implies \exists \text{екстремум}$$

$$f''_{xx} = 2 > 0 \implies \text{екстремума е минимум } f_{min} = f(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$$

$$f(x, y) = -x^2 - y^2$$

$$f'_x = -2x \quad f'_y = -2y$$

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = -2 \quad f''_{yy} = -2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0 \implies \exists \text{екстремум}$$

$$f''_{xx} = -2 < 0 \implies \text{екстремума е максимум } f_{max} = f(0, 0) = -0^2 - 0^2 = 0$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$f'_x = 2x \quad f'_y = -2y$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = -2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 2(-2) - 0 = -4 < 0 \implies \text{няма екстремум}$$

Пример 6.3.2. Да се намерят екстремумите на (ако съществуват) и да се определи видът им.

- $f(x, y) = y^4 + x^2$
- $f(x, y) = -y^4 - x^2$
- $f(x, y) = y^3 + x^2$
- $f(x, y) = xy^3$
- $f(x, y) = (x + y)^2$
- $f(x, y) = -(x + y)^2$

$$f(x, y) = y^4 + x^2$$

$$f'_x = 2x \quad f'_y = 4y^3$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 12y^2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 2(12y^2) - 0 = 24y^2 = 0 \implies \text{трябва допълнително изследване}$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = y^4 + x^2 - (0^4 + 0^2) = y^4 + x^2 \geq 0$$

$$y^4 + x^2 = 0 \iff x = y = 0$$

$$f(x, y) - f(0, 0) \geq 0 \iff f(x, y) \geq f(0, 0) \text{ в } \mathbb{R}^2 \implies \text{локален минимум}$$

$$f_{min} = f(0, 0) = 0^4 + 0^2 = 0$$

$$f(x, y) = -y^4 - x^2$$

$$f'_x = -2x \quad f'_y = -4y^3$$

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -4y^3 = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = -2 \quad f''_{yy} = -12y^2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = -2(-12y^2) - 0 = 24y^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване}$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = -y^4 - x^2 - (-0^4 - 0^2) = -y^4 - x^2 \geq 0 \iff y^4 + x^2 \leq 0$$

$$y^4 + x^2 = 0 \iff x = y = 0$$

$$f(x, y) - f(0, 0) \leq 0 \iff f(x, y) \leq f(0, 0) \text{ в } \mathbb{R}^2 \implies \text{локален максимум}$$

$$f_{max} = f(0, 0) = -0^4 - 0^2 = 0$$

$$f(x, y) = y^3 + x^2 f'_x = 2x \quad f'_y = 3y^2$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 6y \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 2(6y) - 0 = 12y^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване}$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = y^3 + x^2 - (0^3 + 0^2) = y^3 + x^2$$

За всяка точка от положителната ординатна ос ($x > 0, y > 0$) $f(x, y) - f(0, 0) > 0$

За всяка точка от отрицателната ординатна ос ($x < 0, y < 0$) $f(x, y) - f(0, 0) < 0$

$\implies f(x, y) - f(0, 0)$ Няма постоянен знак във всяка околност на M_0

$\implies f(x, y)$ няма локален екстремум в 0 и точката M_0 е седловинна точка

$$f(x, y) = xy^3 f'_x = y^3 \quad f'_y = 3xy^2$$

$$\begin{cases} y^3 = 0 \implies y = 0 \\ 3xy^2 = 0 \implies x = 0 \text{ или } x \neq 0 \end{cases} \implies$$

Стационарните точки са безкрайно много

$$M_0(x, 0) (x \in \mathbb{R})$$

$$1. \quad x_0 = 0, y = 0 \implies M_0 = (0, 0)$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = xy^3 - 0 = xy^2$$

I и III квадрант - $xy > 0$, а във II и IV - $xy < 0, y^2 > 0 \implies$

Сменя знака си $\implies f$ няма локален екстремум в 0

$$2. \quad x_0 \neq 0, y = 0 \implies M_1 = (x_0, 0)$$

$$\Delta f = f(x_0, y) - f(x_0, 0) = x_0 y^3 - x_0 0^3 \implies$$

$$\Delta f = y^2(x_0 y)$$

$$x_0 > 0 \implies \begin{cases} \Delta f > 0, & y > 0 \\ \Delta f < 0, & y < 0 \end{cases} \implies \Delta f \text{ сменя знака си в околността на } M_1$$

Аналогично за $x_0 < 0$ знакът не се запазва

$\implies f$ няма локален екстремум в точката $M_1 \implies f$ няма локални екстремуми

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x + y)^2 \\ f'_x &= 2(x + y) \quad f'_y = 2(x + y) \\ \left| \begin{array}{l} 2(x + y) = 0 \\ 2(x + y) = 0 \end{array} \right. &\iff x + y = 0 \iff -x = y \implies \end{aligned}$$

Стационарни точки са всички точки от ъглополовящата на II и IV квадрант

- от правата $x + y = 0$, т.е. $M(x_0, -x_0), x_0 \in \mathbb{R}$

$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{xy} = 2,$$

$$\Delta = 2 \cdot 2 - (2)^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване}$$

$$f(x, y) - f(x_0, -x_0) = (x + y)^2 - (x_0 - x_0)^2 = (x + y)^2 \geq 0 \implies$$

f има локален минимум във всяка точка от вида $M(x_0, -x_0)$,

$$f_{min} = (x_0 - x_0)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -(x + y)^2 \\ f'_x &= -2(x + y) \quad f'_y = -2(x + y) \\ \left| \begin{array}{l} -2(x + y) = 0 \\ -2(x + y) = 0 \end{array} \right. &\iff x + y = 0 \iff -x = y \implies \end{aligned}$$

Стационарни точки са всички точки от ъглополовящата на II и IV квадрант

- от правата $x + y = 0$, т.е. $M(x_0, -x_0), x_0 \in \mathbb{R}$

$$f''_{xx} = -2, \quad f''_{yy} = -2, \quad f''_{xy} = -2,$$

$$\Delta = (-2)(-2) - (-2)^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване}$$

$$f(x, y) - f(x_0, -x_0) = -(x + y)^2 + (x_0 - x_0)^2 = -(x + y)^2 \leq 0 \implies$$

f има локален максимум във всяка точка от вида $M(x_0, -x_0)$,

$$f_{max} = (x_0 - x_0)^2 = 0$$

7 Лекция 7: Локални екстремуми на функция на няколко променливи. Екстремум на неявна функция

7.1 Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция II

Нека точката $x^0 \in \mathbb{R}^m$, ($m \geq 2$), отвореното множество $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$ е нейна околност и функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е поне два пъти непрекъснато диференцируема в U а точката x^0 е стационарна точка за f . В този случай изследванията се свеждат до използване на формулата на Тейлор с $n = 1$

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^m f'_{x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

$$\xi := x^0 + \vartheta(x - x^0), \quad \vartheta = \vartheta(x) \in (0, 1)$$

Първите частни производни имат стойност 0 в стационарните точки

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

Дефиниция 7.1.1. Квадратична форма A

$$A(x) = A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i x_j$$

се нарича положително дефинирана (отрицателно дефинирана) ако за всеки ненулев вектор $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ е изпълнено

$$A(x) > 0 \quad (A(x) < 0)$$

и знакопроменлива, ако за вектори

$$x, y \in \mathbb{R}^m : \quad A(x) > 0 \quad A(y) < 0$$

Теорема 7.1.1 (Достатъчно условие). Нека функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ притежава непрекъснати частни производни $f''_{x_i x_j}(i, j = 1 \div m)$ от втори ред в околността U на точката $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ и е стационарна точка

$$f_{x_i}(x^0) = f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0) = 0 \quad (i = 1 \div m)$$

Тогава ако квадратичната форма (втори диференциал)

$$A(dx_1, \dots, dx_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j$$

е положително дефинитна квадратична форма, то точката x^0 е строг локален минимум за функцията f .

Ако е отрицателно дефинитна квадратична форма, то точката x^0 е строг локален максимум за функцията f .

Ако е недефинитна, то f няма локален екстремум.

Ако изразът е равен на 0 може да има локален, но може и да няма.

Теорема 7.1.2 (Критерий на Силвестър). *Квадратичната форма A дефинирана в (7.1.1) в която $a_{ij} = a_{ji}$, $(i, j = 1 \div m)$ е положително дефинитна тогава и само тогава когато,*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

и отрицателно дефинитна ($-A(x)$ е положително дефинитна) тогава и само тогава, когато

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \dots, \quad (-1)^k \Delta_k > 0 (k = 1 \div m)$$

Пример 7.1.1. Да се разгледат функциите в точката $M_0(1, 2, -3)$

- $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z$
- $u = -x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z$
- $u = x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 6z$

$$\Delta_1(M_0) = u''_{xx}(M_0),$$

$$\Delta_2(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 u &= x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z \\
 u'_x &= 2x - 2 & u'_y &= 2y - 4 & u'_z &= 2z - 6 \\
 u''_{xx} &= 2 & u''_{xy} &= 0 & u''_{xz} &= 0 \\
 u''_{yx} &= 0 & u''_{yy} &= 2 & u''_{yz} &= 0 \\
 u''_{zx} &= 0 & u''_{zy} &= 0 & u''_{zz} &= 2 \\
 \Delta_1(M_0) &= u''_{xx}(M_0) = 2 > 0 \\
 \Delta_2(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\
 \Delta_3(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \implies
 \end{aligned}$$

Съгласно критерия на Силвестър вторият диференциал е положително дефинитна квадратична форма и има локален минимум

$$u_{min} = u(1, -2, 3) = -14$$

$$\begin{aligned}
 u &= -x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z \\
 u'_x &= -2x + 2 & u'_y &= -2y + 4 & u'_z &= -2z - 6 \\
 u''_{xx} &= -2 & u''_{xy} &= 0 & u''_{xz} &= 0 \\
 u''_{yx} &= 0 & u''_{yy} &= -2 & u''_{yz} &= 0 \\
 u''_{zx} &= 0 & u''_{zy} &= 0 & u''_{zz} &= -2 \\
 \Delta_1(M_0) &= u''_{xx}(M_0) = -2 < 0 \\
 \Delta_2(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\
 \Delta_3(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \implies
 \end{aligned}$$

Съгласно критерия на Силвестър вторият диференциал е отрицателно дефинитна квадратична форма и има локален максимум

$$u_{max} = u(1, -2, 3) = 14$$

$$\begin{aligned}
u &= x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 6z \\
u'_x &= 2x - 2 & u'_y &= 2y - 4 & u'_z &= -2z - 6 \\
u''_{xx} &= 2 & u''_{xy} &= 0 & u''_{xz} &= 0 \\
u''_{yx} &= 0 & u''_{yy} &= 2 & u''_{yz} &= 0 \\
u''_{zx} &= 0 & u''_{zy} &= 0 & u''_{zz} &= -2 \\
\Delta_1(M_0) &= u''_{xx}(M_0) = 2 > 0 \\
\Delta_2(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\
\Delta_3(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \implies
\end{aligned}$$

Не е дефинитна квадратична форма \implies няма локален екстремум

7.2 Локален екстремум на неявна функция

Нека

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$
- $M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ - точка
- $U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ - околност на M_0
- $F : U_{M_0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x^0, y_0) = 0$
- $\exists F'_x, F'_y : F'_y(M_0) \neq 0, F'_y$ е непрекъсната в M_0

Тогава уравнението $F(x, y) = 0$ дефинира неявната функция f в околност $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$ на точката x^0

$$f : U \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x^0) = y_0$$

Възможно е да има локални екстремуми. Тяхното намиране се осъществява по познатия ни алгоритъм.

В случая $m = 1$ неявната функция f е на една променлива съгласно формулата

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

стационарните точки се намират като решения на система

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y) \neq 0 \end{cases}$$

Евентуално съществуване на екстремум може да се установи от знака на $f''(x^0)$ тъй като по формула

$$f''(x^0) = -\frac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

Пример 7.2.1. Уравнението $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ задава четири неявни функции $y = f_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) според това в кой квадрант се намира точката, в чиято околност се търси неявната функция.

Нека

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

то уравнението $F(x, y) = 0$ задава единствена неявна функция в околността на някоя точка, само ако

$$F'_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2 + 1) \neq 0$$

в нея което дава $y \neq 0$

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 \\ 4y \neq 0 \end{cases}$$

$x = 0$ не е решение системата е еквивалентна

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 1 - 2(2x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 3 \\ 4y^2 = 1 \end{cases}$$

От където се получават 4 точки

$$M_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), M_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), M_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), M_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Нека $y = f_k(x)$ е неявна функция дефинирана в околността на точката M_k . Тъй като $F''_{xx}(x, y) = 4(3x^2 + y^2 - 1) > 0$ за точките M_k то знакът се определя от стойността на $F'_y(M_k) = 8y_k$

$$f''_1(x_1) < 0 \quad f''_2(x_2) < 0 \implies \text{максимум със стойност } \frac{1}{2}$$

$$f_3''(x_3) > 0 \quad f_4''(x_4) > 0 \implies \text{минимум със стойност } -\frac{1}{2}$$

$F_y'(0,0) = 0$ е точка на самопресичане на леминската на Бернули, чието уравнение е дадено в този пример.

Ако $m > 1$ неявната функция е на повече променливи и се намира като решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} F_{x_k}'(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \\ F_y'(x, y) \neq 0 \end{array} \right. \quad k = 1 \div m$$

Стойностите на вторите частни производни в стационарните точки са

$$f_{x_k x_k}''(x^0) = -\frac{F_{x_k x_k}''(x^0, y_0)}{F_y'(x^0, y_0)} \quad f_{x_k x_j}''(x^0) = -\frac{F_{x_k x_j}''(x^0, y_0)}{F_y'(x^0, y_0)} \quad (k \neq j)$$

8 Лекция 8: Условни и абсолютни екстремуми на функцията на няколко променливи

8.1 Условни екстремуми на функцията на няколко променливи

Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ и функциите $f, \varphi_n : D \rightarrow \mathbb{R} (n = 1, 2, \dots, k)$ са дефинирани и два пъти непрекъснато диференцируеми в D . Нека E е множеството от точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D$, за които дадената функция φ_n

$$E = \{x | \varphi_n(x) = 0, n = 1, 2, \dots, k, \quad x \in D\}$$

Дефиниция 8.1.1. Уравненията

$$\varphi_n(x) = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, k)$$

се наричат *условния на връзките*.

Дефиниция 8.1.2. Точката $x^0 \in D$ се нарича *точка на условен екстремум на f при условие, че са изпълнени условия на връзките (8.1.1), ако тя е точка на обичаен (локален) екстремум на тази функция, разглеждана само върху множеството E , в което са изпълнени дадените условия.*

С други думи стойността $f(x^0)$ се сравнява не със всички стойности в околността на x^0 , а само с тези от множеството E .

За да се изследва за екстремум функцията $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ при ограничения

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \dots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{array} \right.$$

се конструира функцията на Лагранж.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) + \sum_{n=1}^k \lambda_n \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Където $\lambda_n, n = 1, 2, \dots, k$ се наричат *множители на Лагранж*. За получената функция се решава задача за локален екстремум, като стационарните

точки са решения на следната система:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}{\partial x_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}{\partial x_m} = 0 \\ \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \dots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \lambda_n \neq 0, n = 1, 2, \dots, k \end{array} \right.$$

Видът на екстремума се определя от знака на втория диференциал в съответната стационарна точка.

Теорема 8.1.1. Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ и функциите $f, \varphi_n : D \rightarrow \mathbb{R} (n = 1, 2, \dots, k)$ са дефинирани и два пъти непрекъснато диференцируеми в D . Ако точката x^0 удовлетворява условията на връзките и е стационарна точка за функцията на Лагранж и ако вторият диференциал на функцията на Лагранж в тази точка е положително/отрицателно дефинитна квадратична форма на променливите dx_1, dx_2, \dots, dx_m при условие че те удовлетворяват системата от уравнения

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_m} dx_m = 0, n = 1, \dots, k$$

то точката x^0 е точка на строг условен минимум/максимум за дадената функция, относно уравненията на връзките.

Пример 8.1.1. Ако $E \subset \mathbb{R}^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x + y = s$ да се намери минимум на функцията $f(x, y) = x^2 + y^2$ върху E .

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda(s - x - y) = x^2 + y^2 + \lambda(s - x - y)$$

$$L''_{xx} = 2 \quad L''_{yy} = 2 \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 0$$

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} \right)$$

$$L_{min} \implies f_{min} = f(x_0, y_0) = f\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) = \frac{s^2}{2}$$

8.2 Абсолютни екстремуми на функция на няколко променливи

В много случаи е важно да се намерят най-голямата и най-малката стойност на дадена функция върху цялото дефиниционно множество, т.е. **абсолютният (глобалният) минимум и максимум на функцията**. Да предположим, че дефиниционното множество $D \subset \mathbb{R}^m$ на функцията $f(x)$ е компактно множество в \mathbb{R}^m . Тогава по теоремата на Вайерщрас (Теорема 2.4.1), $f(x)$ достига най-малката и най-голямата си стойност в някакви точки на D . Тогава се получават следните две алтернативни възможности: **абсолютният максимум може да се достигне във вътрешна или контурна точка на D** . Ако максимумът се достига във вътрешна точка, то той е и локален, и ние можем да използваме развитата дотук теория. Разбира се, всичко казано тук се отнася и за абсолютния минимум. Ако екстремумът е в точка от контура ∂D на дефиниционната област, то той е условен екстремум, и може да бъде намерен по алгоритъма, описан в предния параграф. Така задачата за намиране на абсолютните екстремуми се свежда до намирането на стационарните точки в множеството и локалните екстремуми, условните екстремуми по контура (или съставните му части) и сравняването на тези стойности. Най-голямата от тях е абсолютен максимум, а най-малката е абсолютен минимум. По-долу, за по-голяма яснота е разгледан следният пример.

Пример 8.2.1. Ако $E \subset \mathbb{R}^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1$ да се намерят най малката и най голямата стойност на функцията $f(x, y) = x^2 + y^2$ върху E .

Решение:

$$M_0 = (0, 0) \in E$$

$$\Delta = 2 \cdot 2 - 0^2 > 0 \quad f''_{xx} = 2 > 0 \implies f_{min}$$

$$f_{min} = f(0, 0) = 0$$

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda(x + y - 1) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

$$L'_x = 2x + \lambda \quad L'_y = 2y + \lambda$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda = -1 \end{cases} \implies M_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$L''_{xx} = 2 \quad L''_{yy} = 2 \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 0$$

$$f_{min} = f(M_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x = -1 \Leftrightarrow g(y) = (-1)^2 + y^2 = y^2 + 1$$

$$g_{min} = g(0) = 1 = f_{min} \implies M_2(-1, 0)$$

$$y = -1 \Leftrightarrow h(x) = x^2 + (-1)^2 = x^2 + 1$$

$$h_{min} = h(0) = 1 = f_{min} \implies M_3(0, -1) \quad f(M_3) = 1$$

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y = -1 \end{array} \right. \implies M_4(2, -1) \quad \left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x = -1 \end{array} \right. \implies M_5(-1, 2)$$

$$f(-1, -1) = 2 \quad f(2, -1) = 5 \quad f(-1, 2) = 5$$

9 Лекция 9: Двоен интеграл

9.1 Понятие за обем в \mathbb{R}^m . Множество с мярка нула

Нека $T_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ е съвкупността от всички затворени кубове от вида

$$Q^m = Q^{m,k} = \left\{ x : x \in \mathbb{R}^m, \frac{l_i}{10^k} \leq x_i \leq \frac{l_i + 1}{10^k}, i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

където $l_i \in \mathbb{Z}$. За удобство кубовете се означават просто Q^m .

Дефиниция 9.1.1. Системата T_k се нарича разделяне на \mathbb{R}^m от ранг k , а кубовете Q^m - кубове от ранг k .

В частност за $m = 1$ множествата Q^m са интервали, а за $m = 2$ - квадрати. По нататък ще предполагаме, че $m \geq 2$

Дефиниция 9.1.2. Числото $\frac{1}{10^{km}}$ се нарича m -мерен обем на куба Q^m и е използвано означението $\mu(Q^m)$.

$$\mu(Q^m) = \frac{1}{(10^k)^m} = \frac{1}{10^{km}}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Дефиниция 9.1.3. Ако $E \subset \mathbb{R}^m$ и E представлява обединение на крайно или изброимо много кубове Q_j^m от даден ранг k , т.е. $E = \cup_j Q_j^m$, то $\mu(E)$ се дефинира като

$$\mu(E) = \sum_j \mu(Q_j^m)$$

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ G - отворено. Да означим със $S_k = S_k(G)$ множеството от точки на всички m -мерни кубове от ранг k , изцяло лежащи в G . Тогава

$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_k \subset S_{k+1} \subset \dots$$

и следователно

$$\mu(S_0) \leq \mu(S_1) \leq \dots \leq \mu(S_k) \leq \mu(S_{k+1}) \leq \dots$$

и поради това съществува крайна или безкрайна граница $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k)$.

Дефиниция 9.1.4. Крайната или безкрайната граница $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k(G))$ се нарича m -мерна мярка или m -мерен обем на множеството G и се означава с $\mu(G)$

$$\mu(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k(G))$$

По силата на тази дефиниция $\mu(G) > 0$ за всяко отворено непразно множество $G \subset \mathbb{R}^m$ и $\mu(G) < \infty$ ако G е и ограничено.

Лема 9.1.1 (адитивност на мярка). *Нека $G', G'' \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества и $G' \cap G'' = \emptyset$ тогава е в сила*

$$\mu(G' \cup G'') = \mu(G') + \mu(G'')$$

Лема 9.1.2 (полуадитивност на мярка). *Нека $G', G'' \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества. Тогава е в сила*

$$\mu(G' \cup G'') \leq \mu(G') + \mu(G'')$$

Лема 9.1.3 (адитивност на мярка). *Нека $G', G'' \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества и $G' \subset G''$ тогава е в сила*

$$\mu(G') \leq \mu(G'')$$

Дефиниция 9.1.5. *Границата $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k^*(G))$ се нарича горна m -мерна мярка на множеството D и се означава с $\bar{\mu}(D)$*

$$\bar{\mu}(D) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k^*(G))$$

Лема 9.1.4 (монотонност на горната мярка). *Ако $D', D'' \subset \mathbb{R}^m$ то в сила е неравенството*

$$\bar{\mu}(D') \leq \bar{\mu}(D'')$$

Лема 9.1.5 (полуадитивност на горната мярка). *Ако $D_i \subset \mathbb{R}^m, i = 1 \div s$ и $D = \cup_{i=1}^s D_i$ то в сила е неравенството*

$$\bar{\mu}(D) \leq \sum_{i=1}^s \bar{\mu}(D_i)$$

Дефиниция 9.1.6. *Ако $\bar{\mu}(D) = 0$ то множеството D се нарича множество с мярка нула и се записва $\mu(D) = 0$. Празното множество по дефиниция има мярка нула $\mu(\emptyset) = 0$*

9.2 Измерими множества в \mathbb{R}^m

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е ограничено множество, $[G]$ е негова затворена обвивка. Да означим с $S_k^*([G])$ множеството от точки на всички m -мерни кубове от ранг k , всеки който се пресича с $[G]$ а със $S_k(G)$ множеството от точки

на всички m -мерни кубове от ранг k , съдържащи се във G . От $S_k \subset S_k^*$ следва

$$\mu(S_k) \leq \mu(S_k^*)$$

откъдето при $k \rightarrow \infty$ се получава че

$$\mu(G) \leq \bar{\mu}([G])$$

Дефиниция 9.2.1. Множеството $G \subset \mathbb{R}^m$ (G - отворено и ограничено) се нарича измеримо (кубируемо, а при $m = 2$ - квадратируемо), ако неговата мярка е равна на горната мярка на $[G]$

$$\mu(G) = \bar{\mu}([G])$$

Теорема 9.2.1. Ограниченото и отвореното множество $G \subset \mathbb{R}^m$ е измеримо, тогава и само тогава, когато контурът му има мярка нула.

$$\mu(\partial G) = 0$$

Дефиниция 9.2.2. Затворената обвивка $[G]$ на отвореното и измеримо множество $G \subset \mathbb{R}^m$ също се нарича измеримо и по дефиниция

$$\mu([G]) = \mu(G)$$

9.3 Дефиниция на многократен интеграл

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено и измеримо множество.

Дефиниция 9.3.1. Системата $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ от измерими множества G_i се нарича разделяне на множеството G , ако

1. $G_i \subset G, i = 1 \div i_0$
2. $G_i \cap G_j = \emptyset, i \neq j$
3. $\cup [G_i] = [G]$

Дефиниция 9.3.2. Числото

$$\delta_\tau = \max_{1 \leq i \leq i_0} d(G_i)$$

където $d(G_i)$ е диаметър на множеството G_i , се нарича диаметър на разделянето τ

Лема 9.3.1. Ако $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ е разделянето на G , то

$$\mu(G) = \sum_{i=1}^{i_0} \mu(G_i)$$

Дефиниция 9.3.3. Нека $\tau = \{G_i\}$ и $\tau' = \{G'_j\}$ са две разделяния от отвореното и измеримо множество G . Разделянето τ' се нарича вписано в τ ако за всеки елемент $G'_j \in \tau'$ съществува елемент $G_i \in \tau$, такъв че $G'_j \subset G_i$. Записва се $\tau' \succ \tau$ или $\tau \prec \tau'$.

Лема 9.3.2. В сила са следните свойства

1. Ако $\tau \prec \tau'$ и $\tau' \prec \tau''$, то $\tau \prec \tau''$.
2. За всеки две разделяния $\tau' = \{G'_i\}$ и $\tau'' = \{G''_j\}$ на отвореното и измеримо множество G съществува разделяне τ , такова че $\tau' \prec \tau$ и $\tau'' \prec \tau$.

Дефиниция 9.3.4. Нека $G \subset \mathbb{R}^m$, функцията $f : [G] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ е разделяне на множеството G . Тогава сумата

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)}) \mu(G_i)$$

където

$$\xi^{(i)} \in [G_i], i = 1, 2, \dots, i_0$$

се нарича риманова интегрална сума на функцията f .

Дефиниция 9.3.5. Крайната граница

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f)$$

ако съществува се нарича многократен интеграл от функцията f върху измеримото и отворено множеството G (или $[G]$) а функцията се нарича интегрируема в риманов смисъл върху множеството G (или $[G]$). Означава се по един от следните начини

$$\int f dG, \int f(x) dG, \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

Множеството $G([G])$ се нарича област на интегриране.

Дефиниция 9.3.6. Числото A се нарича интеграл от функцията f върху отвореното и измеримо множество G , ако за всяка редица от разделяния $\tau_n = \left\{ G_i^{(n)} \right\}_{i=1}^{i_0^{(n)}}$ на множеството G , с $\delta_{\tau_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и каквито и да са точките

$$\xi^{(i_n)} \in [G_i^{(n)}], i_n = 1, 2, \dots, i_0, n = 1, 2, \dots$$

е изпълнено равенството

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\tau_n}(f; \xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \dots, \xi_n^{(i_0^{(n)})}) = A$$

9.4 Съществуване на многократния интеграл

Теорема 9.4.1. Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ отворено е измеримо множество и функцията $f : [G] \rightarrow \mathbb{R}$ е интегрируема върху него. Тогава f е ограничена върху множеството $[G]$.

9.5 Свойства на многократните интеграли

За класа на функции, интегрируеми в риманов смисъл в дадено отворено и измеримо множество G е използвано означението $\mathfrak{R}(G)$.

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$, G - измеримо и отворено множество.

Освен това $f, g : [G] \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \mathfrak{R}(G)$, а λ, ν - производни реални константи.

Теорема 9.5.1. В сила са следните свойства на многократните интеграли

1. $\int dG = \int 1 dG = \mu(G)$
2. $\int (\lambda f + \nu g) dG = \lambda \int f dG + \nu \int g dG$ (Линейност на интеграла)
В частност
 - (a) $\lambda = \nu = 1 \implies \int (f + g) dG = \int f dG + \int g dG$
 - (б) $\lambda = 1, \nu = -1 \implies \int (f - g) dG = \int f dG - \int g dG$
 - (в) $\lambda = \text{const}, \nu = 0 \implies \int \lambda f dG = \lambda \int f dG$
3. $f \geq 0$ върху $G \implies \int f dG \geq 0$

От тези три свойства се получава следствието

$$f \geq g \implies \int f dG \geq \int g dG$$

Теорема 9.5.2. Ако G', G'' са измеримо множество, $[G] = [G'] \cup [G'']$ и $G' \cap G'' = \emptyset$ то следва

$$\int f dG = \int f d(G' \cup G'') = \int f dG' + \int f dG''$$

Теорема 9.5.3 (адитивност относно множества). Ако $G' \subset G$ е измеримо множество, то $f \in \mathfrak{R}(G')$

От тази теорема следва монотонността на интеграла: Ако $\Gamma \subset G$ е измеримо множество и $f \geq 0$ върху G , то

$$\int f dG \geq \int f d\Gamma$$

Теорема 9.5.4. Произведението $f \cdot g \in \mathfrak{R}(G)$

Теорема 9.5.5. Функцията $|f| \in \mathfrak{R}(G)$ и освен това е изпълнено неравенството

$$\left| \int f dG \right| \leq \int |f| dG$$

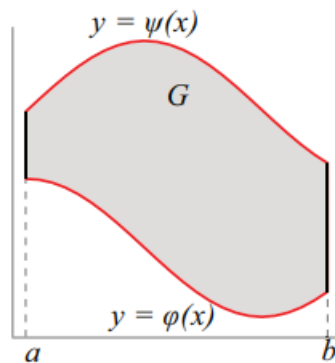
9.6 Свеждане на кратни интеграли до повторни

9.6.1 Двумерен случай

Нека равнината \mathbb{R}^2 е фиксирана правоъгълна координатна система с координати x и y .

Дефиниция 9.6.1. Нека $G \subset \mathbb{R}^2$. G се нарича елементарна област относително, ако ∂G се състои от графиките на две непрекъснати функции $\varphi(x), \psi(x)$, дефинирани в интервал $[a, b]$ и $\varphi(x) \leq \psi(x), x \in [a, b]$, и може да съдържа и отсечки от правите $x = a, x = b$. Аналогично се дефинира област, елементарна относително Ox .

На фигурата по-долу е показана област, елементарна относително Oy .



Фигура 5.6.1: $G \subset \mathbb{R}^2$ – елементарна относително Oy

Теорема 9.6.1 (Теорема на Фубини). Нека G е елементарна фигура относително $Oy, G \subset \mathbb{R}^2, \partial G$ границата на G , се състои от графиките на непрекъснатите функции $\varphi(x), \psi(x), \varphi(x) \leq \psi(x), x \in [a, b]$ и евентуално от отсечки от правите $x = a, x = b$. Нека $f : [G] \rightarrow \mathbb{R}$ и f е непрекъснатата върху $[G]$. Тогава

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Дефиниция 9.6.2. Интегралът в дясната страна на формулата от Теорема 9.6.1 се нарича повторен и обикновено се записва във вида

$$\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx$$

Лема 9.6.1. При предположенията от Теорема 9.6.1 функцията

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

е непрекъснатата функция на x в интервала $[a, b]$.

Ако областта G е елементарна отнотно Ox и границата ѝ се състои от графиките на непрекъснатите функции $\alpha(y), \beta(y), \alpha(y) \leq \beta(y), c \leq y \leq d$ и евентуално отсечки от правите $y = c, y = d$ и функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в компактното множество $[G]$ то е в сила формулата

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx dy$$

Пример 9.6.1. $z = x^2y$ заградена между $y = x^2, y = 1$.

Имаме: $\iint_G x^2y dx dy, G = \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases} \implies x^2 = 1 \implies x_{1,2} = \pm 1$$

Абсцисите на пресечните точки на кривата $y = x^2$ и $y = 1$.

Фигурата G се намира между правите $x = -1$ и $x = 1$ и освен това е оградена и от параболата $y = x^2$ и правата $y = 1$. По точно

$$G = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Тогава

$$\begin{aligned} \iint_G x^2y dx dy &= \int_{-1}^1 x^2 \int_{x^2}^1 y dy dx & \left(\int_{x^2}^1 y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^1 \right) \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2(1 - x^4) dx &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 (x^2 - x^6) dx = \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21} \end{aligned}$$

10 Лекция 10: Смяна на променливите на дво- ен интеграл

10.1 Матрица на Якоби

Нека $x \in D \subset \mathbb{R}^m$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n \implies y \in \mathbb{R}^n$ се задава със системата от функции

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases}$$

Дефиниция 10.1.1. Нека в точката $x^0 \in D$ съществуват първите частни производни на функциите $f_i (i = 1 \div m)$ от системата дефинирана по горе, тогава матрицата от всички частни производни в точката x^0

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

се нарича матрица на Якоби за изображението $f(x)$.

Ако $m = n$ може да се пресметне детерминантата $J(x_1, x_2, \dots, x_m)$ за матрицата на Якоби.

$$J(f; x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Дефиниция 10.1.2. Детерминанта на матрицата на Якоби се нарича още якобиан на изображението $f(x)$. Означава се $J(x_1, x_2, \dots, x_m)$ или $J(f)$

Дефиниция 10.1.3. Изображението $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n (G \subset \mathbb{R}^m)$ дадено със системата

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases}$$

се нарича непрекъснато диференцируемо изображение, ако всички първи частни производни на $f_i (i = 1 \div m)$ съществуват в G и са непрекъснати там.

Теорема 10.1.1. *Нека*

$$y = f(x) = \{y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m), i = 1 \div m\}$$

е взаимно еднозначно непрекъснато диференцируемо изображение от отвореното множество $G \subset \mathbb{R}^m$ върху отвореното множество $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^m$. Нека освен това и обратното изображение

$$x = f^{-1}(y) = \{x_i = f_i^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_m), i = 1 \div m\}$$

което е еднозначно непрекъснато диференцируемо изображение от своето дефиниционно множество \tilde{G} . Тогава е в сила формулата

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} = 1$$

което може да се запише във вида

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} = \frac{1}{\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}}$$

т.е. якобианът на изображението, което е обратно на даденото изображение е равен на реципрочната стойност на якобиана на даденото изображение.

Нито един от двата якобиана не е нула, защото произведението им е равно на 1.

При $m = 1$ формулата се свежда до формулата за производна на обратна функция

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Теорема 10.1.2. *Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$*

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases}$$

е непрекъснато диференцируемо изображение и нека точката $x^{(0)} \in G$ а $y^{(0)} = f(x^{(0)}) \in \mathbb{R}^m$. Освен това, ако якобианът на това изображение е различен от нула в точката $x^{(0)}$, то съществува такива околности $U_{x^{(0)}}$, $U_{y^{(0)}}$ съответно в точките $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, че изображението f е взаимно еднозначно изображение от $U_{x^{(0)}}$ върху $U_{y^{(0)}}$, т.е. $f : U_{x^{(0)}} \rightarrow U_{y^{(0)}}$ и

обратното му изображение е непрекъснато диференцируемо в множеството $U_{y^{(0)}}$.

Следствие: Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $F : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ е непрекъснато диференцируема в G , а якобианът $J(F)$ е различен от нула върху G . Тогава $F(G)$ също е отворено множество.

Теорема 10.1.3 (Принцип за запазване на областта). *Образът на m -мерна област в m -мерното пространство при непрекъснато диференцируемо изображение с ненулев якобиан е област, т.е. ако*

1. $G \subset \mathbb{R}^m$ е област
2. $F : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ е непрекъснато диференцируемо изображение
3. $J(F) \neq 0$ върху G

то $F(G)$ също е област.

По нататък е разгледан въпросът за геометричен смисъл на модула на якобиана. За по голяма яснота е разгледано в \mathbb{R}^2 .

Нека $G, G^* \subset \mathbb{R}^2$ са отворени множества и изображението $F : G \rightarrow G^*$, като F е зададена с двойката функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

и предполагаме, че F удовлетворява следните условия

1. F е взаимно еднозначно изображение от G върху G^*
2. F е непрекъснато диференцируемо върху G
3. Якобианът $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ върху G

Изображението F^{-1} което е обратно на F също е непрекъснато диференцируемо взаимно еднозначно изображение и якобианът му е различен от нула в G^*

Лема 10.1.1. *Ако $\gamma \subset G$ е по части гладка крива, то и нейния образ $\gamma^* = F(\gamma)$ е също по части гладка крива.*

Забележка: Ако $\gamma \subset G$ е прост затворен контур, то поради взаимната еднозначност на F , неговия образ $\gamma^* = F(\gamma)$ е също прост затворен контур.

Лема 10.1.2. Ако Γ е отворено и ограничено множество и $[\Gamma] \subset G$ тогава $\Gamma^* = F(\Gamma)$ е също отворено и ограничено множество и

$$\partial F(\Gamma) = F(\partial \Gamma)$$

Ако $\partial \Gamma$ се състои от краен брой по част гладки криви, то отворените множества Γ и $F(\Gamma)$ са квадрируеми.

Нека $(u_0, v_0) \in G$ и $h \in \mathbb{R}$ е реално число, и да разгледаме затворения квадрат S с върхове

$$A(u_0, v_0) \quad B(u_0 + h, v_0) \quad C(u_0 + h, v_0 + h) \quad D(u_0, v_0 + h)$$

Нека $S \subset G$ (за "достатъчно малки" h това включване винаги се изпълнява). Границата ∂S на квадрата S която се състои от четирите му страни е прост затворен по части гладък контур. Поради Лема 10.1.2 множеството $S^* = F(S)$ е затворена квадратируема област (факта, че S^* е затворена област, следва от принципа за запазване на областа). В сила е следната теорема

Теорема 10.1.4. Нека изображението F от отвореното множество $G \subset \mathbb{R}^2$ върху отвореното множество $G^* \subset \mathbb{R}^2$ е взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо върху G и нека якобианът му $J(u, v) \neq 0$ върху G . Тогава ако S е квадрат с върховете по горе, то

$$\frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(u_0, v_0)| + \varepsilon(u_0, v_0, h)$$

където $\varepsilon = \varepsilon(u_0, v_0, h)$ клони към нула, когато $h \rightarrow 0$. При това сходимостта е равномерна относно (u_0, v_0) , върху всяко затворено и ограничено множество $A \subset G$ за което $(u_0, v_0) \in A$.

Следствие: За всяка точка (u_0, v_0) на отворено множество G е изпълнено равенството

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(u_0, v_0)|$$

В общия случай за m -мерно пространство тази теорема се обобщава по следния начин.

Теорема 10.1.5. Нека множествата $G, G^* \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества и изображението $F : G \rightarrow G^*$, е зададено с m -торка функции

$$x = F(t) = \{x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_m), i = 1 \div m\}$$

Нека F е взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо върху G и якобианът му

$$J(t) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_m)}{\partial(t_1, \dots, t_m)} \neq 0, \quad t \in G$$

а S е m -мерния куб

$$S = \{t : t_i^0 \leq t_i \leq t_i^0 + h, i = 1, 2, \dots, m\} \subset G, t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0)$$

Тогава

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(t^0)|$$

при това, ако

$$\frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(t^0)| + \varepsilon(t^0, h)$$

то за всяко ограничено и затворено множество $A \subset G$, функцията $\varepsilon = \varepsilon(t^0, h)$, дефинирана за $t^0 \in A$, клони равномерно към нула върху множеството A , при $h \rightarrow 0$.

Ако $G, G^* \subset \mathbb{R}^3$, $F : G \rightarrow G^*$ е зададено с тройка функции

$$x = x(u, v, w) \quad y = y(u, v, w) \quad z = z(u, v, w)$$

Лема 10.1.3. Ако $S \subset G$ е по части гладка повърхнина в \mathbb{R}^3 , то и нейния образ $S^* = F(S)$ е също по части гладка повърхнина.

Забележка: Ако $S \subset G$ е проста затворена повърхнина, то поради взаимната еднозначност на F , неговия образ $S^* = F(S)$ е също проста затворена повърхнина.

Лема 10.1.4. Ако Γ е отворено и ограничено множество и $[\Gamma] \subset G$ тогава $\Gamma^* = F(\Gamma)$ е също отворено и ограничено множество и

$$\partial F(\Gamma) = F(\partial \Gamma)$$

Ако $\partial \Gamma$ се състои от краен брой по част гладки повърхнини, то отворените множества Γ и $F(\Gamma)$ са измерими.

10.2 Смяна на променливите в многократен интеграл

Нека

- F е непрекъснато диференцируемо изображение от отвореното множество $G \subset \mathbb{R}^2$ върху отвореното множество $G^2 \subset \mathbb{R}^2$
- Якобиан $J(F) \neq 0$ в G
- Γ, Γ^* са квадратируеми (следователно ограничени) и отворени множества
- $[\Gamma] \subset G, [\Gamma^*] \subset G^*$
- $F([\Gamma]) = [\Gamma^*]$
- F изобразява вътрешните точки на Γ във вътрешни точки на Γ^* а контура $\partial\Gamma$ - в контура $\partial\Gamma^*$

Теорема 10.2.1 (за смяна на променливите на двукратен интеграл).
Нека функцията

$$f : [\Gamma^*] \rightarrow \mathbb{R}$$

е непрекъсната върху $[\Gamma]$. Тогава в сила е формулата

$$\iint_{\Gamma^*} f(x, y) dx dy = \iint_{\Gamma} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Верността на (10.2.1) остава в сила и при малко по-общия случай, когато якобианът на изображението F , става нула върху границата на областта на интегриране, а самото изображение не е взаимно еднозначно върху тази граница. По-точно е в сила следната теорема.

Теорема 10.2.2. Нека $G, G^* \subset \mathbb{R}^2$ са отворени измерими множества и

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

е непрекъснато изображение от $[G]$ върху $[G^*]$, което е взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо изображение от G върху G^* . Нека якобианът на това изображение

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

е различен от нула в G и е непрекъснато продължим върху $[G]$. Нека освен това функцията

$$f : [G^*] \rightarrow \mathbb{R}$$

е непрекъснатата върху множеството $[G^*]$. Тогава е в сила формулата

$$\iint_{G^*} f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Пример 10.2.1. Да се пресметне интеграла

$$\iint_{x^2+y^2 < 1} \cos(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

Нека въведем нови променливи ρ, φ по формулите

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi$$

Тогава модулът на якобиана на смяната се дава със израза

$$\Delta = |J(\rho, \varphi)| = \rho$$

Изображението на новите променливи е правоъгълника

$$G = \{(\rho, \varphi) : 0 < \rho < 1, -\pi < \varphi < \pi\}$$

взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо и с якобиан, различен от нула върху кръга

$$K : \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

от който е премахнат радиусът, лежащ върху отрицателната част на оста Ox , т.е. G се изобразява върху множеството

$$G = K \setminus \{(x, y) : x \leq 0, y = 0\}$$

Освен това изображението на смяната изобразява затворения правоъгълник $[G]$ върху затворения кръг

$$[G] = [K] = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

при което контура $[G]$ вече не е взаимно еднозначно. Якобианът на изображението на смяната е непрекъснат върху $[G]$ а в една точка от контура (координатното начало) е нула. Следователно това изображение удовлетворява всички условия от Теорема (10.2.2), и затова може да се приложи формулата за смяна на променливите на интеграла. Така се получава

$$\iint_{x^2+y^2 < 1} \cos(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \iint_G \rho \cos(\pi \rho) d\rho d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \rho \cos(\pi \rho) d\rho d\varphi = -\frac{4}{\pi}$$

Теорема 10.2.3. Нека $G, G^* \subset \mathbb{R}^m$ са отворени кубирuеми множества. Нека $F : [G] \rightarrow [G^*]$ е непрекъснато изображение, зададено с уравненията

$$x = F(t) = \{x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_m), i = 1 \div m\}$$

взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо върху G , и якобианът му

$$J(t) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_m)}{\partial(t_1, \dots, t_m)} \neq 0, \quad t \in G$$

е непрекъснато продължим върху $[G]$. Тогава, ако функцията

$$f : [G^*] \rightarrow \mathbb{R}$$

е непрекъснатата върху $[G^*]$ то

$$\int f(x) dG^* = \int f(x(t)) |J(t)| dG$$

10.2.1 Полярна смяна

При $m = 2$ често използвана е полярна смяна, зададена с равенства

$$F(\rho, \varphi) = \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

За да се опише \mathbb{R}^2 , променливите ρ, φ се изменят както следва

$$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

я якобианът има стойност

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

А неговия модул

$$\Delta = |J(\rho, \varphi)| = \rho$$

Една обобщена полярна смяна е следната

$$F(\rho, \varphi) = \begin{cases} x = a\rho \cos \varphi \\ y = b\rho \sin \varphi \end{cases} \quad (a, b > 0)$$

известна като обобщена полярна смяна, за която в общия случай

$$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

А неговия модул

$$\Delta = |J(\rho, \varphi)| = ab\rho$$

Друга обобщена полярна смяна е следната

$$F(\rho, \varphi) = \begin{cases} x = a\rho \cos^k \varphi \\ y = b\rho \sin^k \varphi \end{cases} \quad (a, b > 0, k = 2, 3, \dots)$$

известна също като обобщена полярна смяна, за която в общия случай

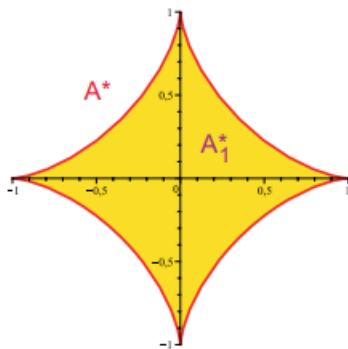
$$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

А неговия модул

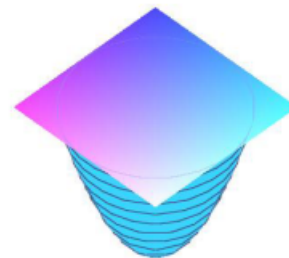
$$\Delta = |J(\rho, \varphi)| = abk\rho |\cos^{k-1} \varphi \sin^{k-1} \varphi|$$

Пример 10.2.2. Да се пресметне лицето на фигурата

$$A^* = \{(x, y) : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}, a > 0\}$$



Фигура 5.9.1: $A^* \subset \mathbb{R}^2$



Фигура 5.9.2

Поради симетрията на дадената фигура, нейното лице може да се пресметне като първо се намери лицето на часта A_1^* разположена в първи квадрант и получения резултат да се умножи по 4. За да се пресметне това може да се извърши следната смяна

$$x = \rho \cos^3 \varphi \quad y = \rho \sin^3 \varphi$$

която води до ограничения $0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $(\rho, \varphi) \in A$ и има якобиан с модул

$$\Delta = |J(\rho, \varphi)| = 3\rho \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

поради което

$$\mu(A^*) = 4\mu(A_1^*) = 4 \iiint_{A_1^*} = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^a \rho d\rho = \frac{3\pi a^2}{8}$$

11 Лекция 11: Пресмятане на тройни интеграли

11.1 Пресмятане на тройни интеграли, чрез свеждане до повторни интеграли

Нека $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$. Нека областта $G \subset \mathbb{R}$ и D е нейна ортогонална проекция върху равнината xOy , т.е. $D \subset \mathbb{R}^2$ или

$$D = \{(x, y) : \exists z, (x, y, z) \in G\}$$

Дефиниция 11.1.1. Областта G се нарича елементарна относно оста Oz ако нейната проекция D е кубирема (измерима), а границата ѝ се състои от две функции $\varphi(x, y)$ $\psi(x, y)$, непрекъснати върху множеството такова че

$$\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \quad (x, y) \in D$$

и евентуално част от цилиндъра с основна границата ∂D на проекцията D .

- Ако G е елементарна относно оста Oz , то тя е измерима. Нейната проекция D е измерима област, следователно ограничена. Поради това границата на областта G , която се състои от графиките на непрекъснатите функции върху компактно множество $[D]$ и евентуално част от цилиндър с основа, която има мярка нула

$$\mu(\partial D) = 0$$

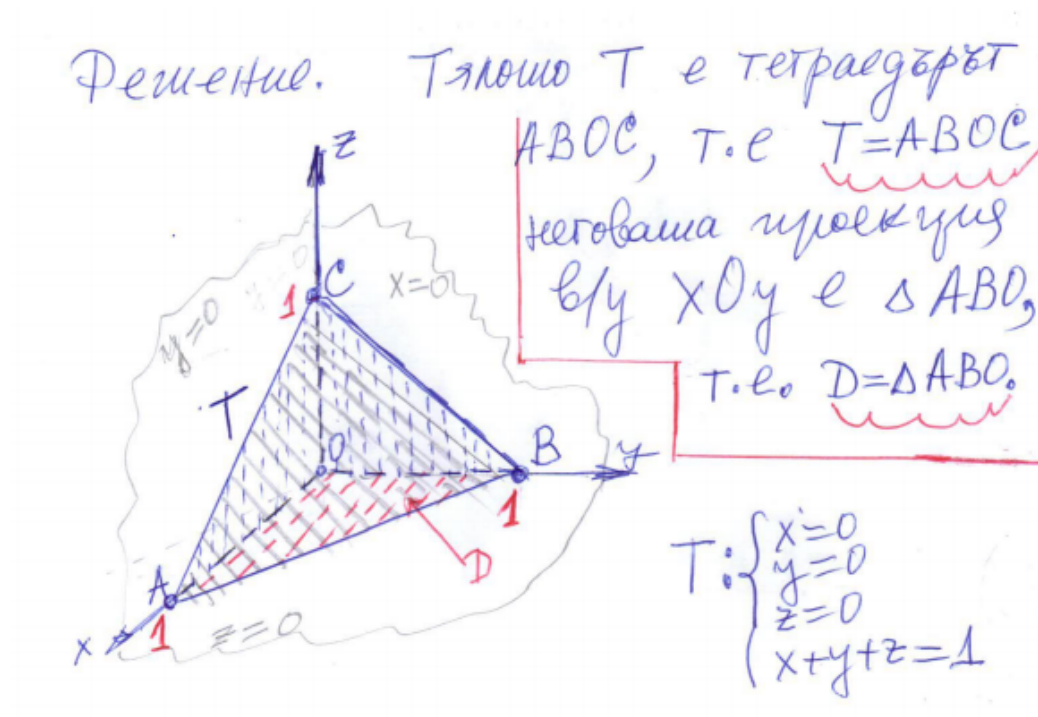
- Ако

$$f : [G] \rightarrow \mathbb{R}$$

е непрекъсната функция, то Теоремата на Фубини се обобщава и е валидна следната формула

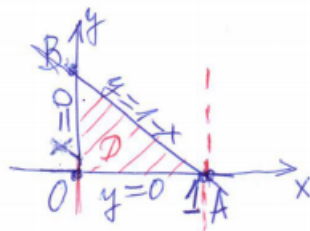
$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_G dx \, dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) \, dz = \iint_G \left[\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dx \, dy$$

Пример 11.1.1. Нека $\iiint_T dx dy dz$ по ограничената област T , заградена от повърхнините с уравнения $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.



Повърхнината $x + y + z = 1$ е равнина пресичаща и трите координатни оси с отрезки от тях равни на 1. $x = 0, y = 0, z = 0$ са координатните равнини. Проекцията на D на тялото се получава от

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow D: \begin{cases} x + y = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Имаме

$$A: \begin{cases} y = 1 - x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1,0) \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$$

По нататък

$$0 \leq z \quad x + y + z \leq 1 \implies 0 \leq z \leq 1 - x - y$$

Тогава получаваме

$$\begin{aligned} \iiint_T dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz \, dy \, dx \\ \int_0^{1-x-y} dz &= z \Big|_0^{1-x-y} = 1 - x - y \\ I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x - y \, dy \, dx \\ \int_0^{1-x} 1 - x - y \, dy &= (1-x)y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} = \frac{(1-x)^2}{2} \\ I &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 \, d(x-1) \\ I &= \frac{1}{2} \frac{(x-1)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} [0 - (-1)^3] = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

11.2 Приложение на многократните интеграли

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е измеримо (кубируемо) множество. Както е известно от Теорема (9.5.1) мярката на G се изразява с формулата по долу

$$\mu(G) = \int dG$$

По такъв начин посредством m -кратен интеграл може да се пресметне мярката на кубируемо множество в m -мерното пространство (лице - в двумерно, обем - в тримерното пространства). Ако m -кратният интеграл може да се сведе до повторен, то пресмятането на мярката на кубируемото множество G , се свежда до пресмятане на $(m-1)$ -кратен интеграл. Ако $m = 2$, площта на измеримата на равнинна област $D \subset \mathbb{R}^2$ се пресмята по формулата

$$S(D) = \mu(D) = \iint_D dx \, dy$$

Ако $m = 3$, обема на измеримата на равнинна област $T \subset \mathbb{R}^3$ се пресмята по формулата

$$V(T) = \mu(T) = \iiint_T dx \, dy \, dz$$

Освен това този интеграл може да се сведе до повторен и D е проекция на тялото T върху \mathbb{R}^2 а, T е разположено повърхнините $z = f_1(x, y)$ $z = f_2(x, y)$ като е изпълнено неравенството $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, $(x, y) \in D$ формулата за обем може да се запише

$$V(T) = \mu(T) = \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)] \, dx \, dy$$

Друга полезна формула е тази за намиране на част от повърхнина заключена в цилиндрична повърхнина. С други думи, ако $D \subset \mathbb{R}^2$ е квадратизируема област и повърхнината S е дефинирана в затвореното множество $[D]$

$$S : z = f(x, y) \quad f : [D] \rightarrow \mathbb{R}$$

Като при това f е непрекъснато диференцируема в D , то лицето на тази повърхнина се дава с формулата

$$\sigma = \sigma(S) = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dx \, dy$$

Пример 11.2.1. Да се пресметне лицето на частта от повърхнината $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, разположена във вътрешността на цилиндрична повърхнина с уравнение $x^2 + y^2 = 2x$

D е отворения кръг с център точката $(1, 0)$ и радиус 1, защото

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

Освен това

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{2}$$

От формулата имаме

$$\sigma = \sigma(S) = \iint_D \sqrt{2} \, dx \, dy = \sqrt{2} \iint_D dx \, dy = \sqrt{2} \mu(D) = \sqrt{2} \pi$$

11.3 Смяна на променливите на троен интеграл

Теорема 11.3.1. Нека $G, G^* \subset \mathbb{R}^3$ са отворени измерими множества. Нека $F : [G] \rightarrow [G^*]$ е непрекъснато изображение зададено чрез системата функция

$$F(u, v, w) = \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо изображение от G върху G^* . Нека якобианът на това изображение

$$J(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \quad (u, v, w) \in G$$

е непрекъснато продължим върху $[G]$. Нека освен това функцията

$$f : [G^*] \rightarrow \mathbb{R}$$

е непрекъсната върху множеството $[G^*]$. Тогава е в сила формулата

$$\iiint_{G^*} f(x, y) dx dy = \iiint_G f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw$$

11.3.1 Цилиндрична смяна

Честно използвани смени на променливите при тройни интеграли са цилиндричната смяна, зададена с уравнения

$$F(\rho, \varphi, z) = \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

и обобщена цилиндрична смяна

$$F(\rho, \varphi, z) = \begin{cases} x = a\rho \cos \varphi \\ y = b\rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (a, b > 0)$$

За да се опише цялото \mathbb{R}^3 , диапазонът на изменение на променливите е както следва

$$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad -\infty < z < \infty$$

А неговия модул съответно

$$\Delta = |J(\rho, \varphi, z)| = \rho \quad \Delta = |J(\rho, \varphi, z)| = ab\rho$$

11.3.2 Сферична смяна

Друга смяна е сферичната смяна, зададена с уравнения

$$F(\rho, \varphi, \psi) = \begin{cases} x = \rho \sin \psi \cos \varphi \\ y = \rho \sin \psi \sin \varphi \\ z = \rho \cos \psi \end{cases}$$

За да се опише цялото \mathbb{R}^3 , диапазонът на изменение на променливите е както следва

$$0 \leq \rho \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad 0 \leq \psi \leq \pi$$

а модула на якобиана се дава с равенството

$$\Delta = |J(\rho, \varphi, \psi)| = \rho^2 \sin \psi$$

Понякога се дава и следната вариация на сферична смяна

$$F(\rho, \varphi, \theta) = \begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$$

с диапазон на изменение на променливите

$$0 \leq \rho \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

и модул на якобиана

$$\Delta = |J(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \cos \theta$$

Пример 11.3.1. Да се пресметне обемът на тялото

$$T^* = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z, z \leq 4\}$$

Ако направим цилиндрична смяна получаваме

$$\mu(T^*) = \iiint_{T^*} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\rho^2}^4 dz d\rho d\varphi = 8\pi$$

Проекцията D^* на T^* върху xOy се определя от

$$x^2 + y^2 \leq z, \quad z \leq 4 \implies x^2 + y^2 \leq 4 \implies D^*\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

От D^* се определят границите за x и y .

Границите за променливата z са

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 4$$

След цилиндричната замяна се получава

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2 \leq 4$$

$$\rho^2 \leq 4 \quad \rho > 0 \implies 0 \leq \rho \leq 2$$

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 4 \implies \rho^2 \leq z \leq 4$$

а φ остава в $0 \leq \varphi < 2\pi$, защото няма нови ограничения.

12 Лекция 12

13 Лекция 13

14 Лекция 14

15 Лекция 15