Математически анализ 2

Exonaut

9 март 2021 г.

Съдържание

1 Лекция 1: Пространството R^m

1.1 Няколко важни неравенства

Нека a_k и $b_k (k = 1, 2, ..., m)$ са реални числа и $m \in N$

Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц) *В сила е следното неравенство:*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални:
$(\exists \lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k)$
Равенството може да се запише:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)}$$

Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски) *В сила е следното неравенство:*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ (p \geq 1)$$

Теорема 1.1.3 *В сила е следното неравенство:*

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k - b_k|$$

1.2 Видове крайно мерни пространства

1.2.1 Линейно(Векторно) пространство

Дефиниция 1.2.1 *Нека L е линейно(векторно) пространство над полето R. В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.*

1. $x, y \in L \implies z = x + y \in L$
2. $x \in L, \lambda \in R \implies z = \lambda x \in L$

1.2.2 Евклидово пространство

Дефиниция 1.2.2 *Крайномерното пространство L се нарича евклидово, ако в него е въведено скаларно произведение, т.е за всеки два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави реално число (x, y), удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.*

1. $x, y, z \in L, \lambda \in R \implies (x+y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
2. $x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$
3. $x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$

1.2.3 Метрично пространство

Дефиниция 1.2.3 *Крайномерното пространство L се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика) ρ, т.е за два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави неотрицателно число $\rho \geq 0$ със следните свойства*

1. $\rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z). \forall x, y, z \in L$

Метрично пространство L с метрика ρ се означава (L, ρ)

1.2.4 Нормирано пространство

Дефиниция 1.2.4 *Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма $||.||$, т.е $||.|| : L \to R_0^+$ със свойства*

1. $x = 0 \implies ||x|| = 0, x \neq 0 \implies ||x|| > 0$
2. $x \in L, \lambda \in R \implies ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
3. $x, y \in L \implies ||x + y|| \leq |x| + |y|$

Теорема 1.2.1 *Ако L е нормирано пространство с дадена норма $||.||$, то L е метрично пространство, т.е равенството $\rho(x, y) = ||x - y||$ дефинира разстоянието в L*

1.3 Пространството R^m - дефиниция и основни свойства

Дефиниция 1.3.1 *Множеството от наредени m-торки $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ от реални числа. Числата $a_1, a_2, ..., a_m$ се наричат съответно първа, втора, ..., m-та кордината на a.*

Ако имаме $a = (a_1, a_2, ..., a_m), b = (b_1, b_2, ..., b_m), ; \lambda \in R$ то

1. $a+b = (a_1, a_2, ..., a_m)+(b_1, b_2, ..., b_m) = (a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_m+b_m) \in R^m$
2. $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_m) \in R^m$

1.3.1 Скаларно произведение

Скаларно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)$$

С така въведено скаларно произведение пространството R^m се превръща в евклидово.

1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$||a|| := \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k)^2}$$

се въвежда норма в R^m.
Нормата генерира метрика в R^m с формула:

$$\rho(a, b) := ||a - b|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k)^2}$$

1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат: $a^2 = (a, a) = \sum_{k=1}^{m} a_k^2$

1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат: $(a, b)^2 \leq a^2 b^2$ и $|(a, b)| \leq ||a||||b||$

1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат: $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$

1.4 Точки и множества в R^m

1.4.1 Паралелепипед

Дефиниция 1.4.1 *Множеството*

$$\Pi(a; \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m) = \{x \in R^m : -\delta_k < x_k - a_k < \delta_k\}$$

се нарича отворен паралелепипед в R^m с център точката a.

Множеството

$$\widetilde{\Pi}(a;\delta_1,\delta_2,...,\delta_m) = \{x \in R^m : -\delta_k \leq x_k - a_k \leq \delta_k\}$$

се нарича затворен паралелепипед в R^m с център точката a.

Ако $\delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_m = \delta$, получените множества $\Pi(a;\delta)$ и $\widetilde{\Pi}(a;\delta)$ се наричат съответно отворен и затворен куб в R^m с център a.

1.4.2 Сфера и кълбо

Дефиниция 1.4.2 *Нека числото $r > 0$. Множеството*

$$B(a;r) = \{x|x \in R^m, \rho(x,a) < r\} = \{x|x \in R^m, ||x-a|| < r\}$$

се нарича отворено кълбо в R^m с център a и радиус r, множеството

$$\widetilde{B}(a;r) = \{x|x \in R^m, \rho(x,a) \leq r\} = \{x|x \in R^m, ||x-a|| \leq r\}$$

се нарича затворено кълбо в R^m с център a и радиус r, а множеството

$$S(a;r) = \{x|x \in R^m, \rho(x,a) = r\} = \{x|x \in R^m, ||x-a|| = r\}$$

се нарича сфера в R^m с център a и радиус r, а множеството

Дефиниция 1.4.3 *Точката a се нарича*

- *вътрешна за множеството A, ако съществува отворено кълбо $B(a,\varepsilon)$: $B(a,\varepsilon) \subset A$*
- *външна за A, ако съществува $B(a,\varepsilon) : B(a,\varepsilon) \subset R^m \backslash A$*
- *контурна за A, ако за всяко $\varepsilon > 0 : B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ и $B(a,\varepsilon) \cap (R^m \backslash A) \neq \emptyset$*
- *изолирана ако съществува $\varepsilon > 0 : B(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$*

Дефиниция 1.4.4 *Множеството $A \subset R^m$ се нарича*

- *отворено, ако всяка негова точка е вътрешна*
- *затворено, ако неговото допълнение $R^m \backslash A$ е отворено*

Дефиниция 1.4.5 *Околност на дадена точка $a \in R^m$ се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с U_a.*

Дефиниция 1.4.6 *Точка а се нарича точка на сгъстяване на множеството* $A \subset R^m$*, ако всяка нейна околност* U_a *съдържа поне една точка на* A*, различна от* a*, т.е* $U_a \cap (A \backslash \{a\} \neq \emptyset$

Дефиниция 1.4.7 *Величината*

$$d = d(A) = \sup_{a',a'' \in A} \rho(a';a'')$$

се нарича диаметър на множеството $A \subset R^m$*.*

Дефиниция 1.4.8 *Множеството* $A \subset R^m$ *се нарича ограничено, ако съществува кълбо(с краен радиус), което го съдържа.*

Дефиниция 1.4.9 *Множеството* $A \subset R^m$ *се нарича компактно, ако* A *е затворено и ограничено.*

Дефиниция 1.4.10 *Множеството* $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m$*, чийто кординати са непрекъснати функции* $x_k = x_k(t)(k = 1, 2, ..., m)$*, дефинирани върху даден интервал [a,b] се нарича непрекъсната крива в* R^m*.* t *се нарича параметър на кривата.*
Точките $x(a) = (x_1(a), x_2(a), ..., x_m(a))$ *и* $x(b) = (x_1(b), x_2(b), ..., x_m(b))$ *се наричат начало и край на дадената крива. Ако* $x(a) = x(b)$ *кривата е затворена*

Дефиниция 1.4.11 *Нека* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in R^m$ *и* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ *са фиксирани числа за които* $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$*. Множеството от точки* $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ *чиито кординати се представят във вида*

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, ..., m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството R^m*, минаваща през точка* x^0 *по направление* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$*.*

Дефиниция 1.4.12 *Множеството* $A \subset R^m$ *се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъсната крива* γ*, която ги свързва и* $\gamma \subset A$*.*

Дефиниция 1.4.13 *Множеството* $A \subset R^m$ *се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.*

Дефиниция 1.4.14 *Област, всеки две точки на която могат да се съединят с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.*

Дефиниция 1.4.15 *Областа* $A \subset R^m$ *се нарича звездообразна област, относно точката* $x^0 \in A$*, ако за вскяка точка* $x \in A$ *отсечката* $[x^0, x]$ *лежи изцяло в* A*.*

1.5 Редици от точки в R^m

Дефиниция 1.5.1 *Редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\}$ *се нарича редица от точки в* R^m*, а редицата* $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}(k = 1 \div m)$ *- к-та кординатна редица. За по кратко редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ *се означава* $\{x^{(n)}\}$

Дефиниция 1.5.2 *Редицата* $\{y^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ *се нарича поредица на редицата* $\{x^{(n)}\}$ *и се означава:*
$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, ...,$ *или* $\{x^{(n_l)}\}_{l=1}^{\infty}$
ако за всяко l *съществува такова* n_l*, че* $y^{(l)} = x^{(n_l)}$*, при това, ако* $l' < l''$*, то* $n_{l'} < n_{l''}$.

Дефиниция 1.5.3 *Редицата* $\{x^{(n)}\}$ *се нарича сходяща към точка* $a \in R^m$ *(граница на редицата), ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува такова* $N_0 > 0$*, че за всяко* $n > N_0$ *е изпълнено неравенството* $\rho(x^{(n)}; a) = ||x^{(n)} - a|| < \varepsilon$. *Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.*

Дефиниция 1.5.4 *Точката* $a \in R^m$ *се нарича точка на сгъстяване на редицата* $\{x^{(n)}\}$*, ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.*

Теорема 1.5.1 *Нека* $x^{(n)} \in R^m$ *за* $n \in N$ *и точката* $a \in R^m$. *Тогава*

$$(\{x^{(n)}\} \to a) \iff (x_k^{(n)} \to a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката а, тогава и само тогава когато всяка от кординатите на редици $\{x_k^{(n)}\}$ *има граница сьответната кордината* a_k *на точката а*

Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши) *Нека* $x^{(n)} \in R^m$ *за* $n \in N$. *Редицата* $x^{(n)}$ *е сходяща тогава и само тогава когато за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува такова число* $N_0 > 0$*, че при всяко* $n \in N, n > N_0$ *и всяко* $p \in N$ *е изпълнено* $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = ||x^{(n+p)} - x^{(n)}|| < \varepsilon$

Дефиниция 1.5.5 *Редицата* $\{x^{(n)}\}$ *се нарича ограничена , ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.*

Теорема 1.5.3 (Болцано-Вайерщрас) *От всяка ограничена редица в пространството* R^m *може да се избере сходяща подредица.*

Дефиниция 1.5.6 *Всяко множество* $A \subset R^m$ *се нарича компактно, ако от всяка редица* $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$*, може да се избере сходяща подредица* $\{x_k^{(n)}\}$ *с граница принадлежаща на* A

2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи