Математически анализ 2

Exonaut

10 март 2021 г.

Съдържание

1 Лекция 1: Пространството R^m

1.1 Няколко важни неравенства

Нека a_k и $b_k (k = 1, 2, ..., m)$ са реални числа и $m \in N$

Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц) *В сила е следното неравенство:*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални:
$(\exists\lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k)$
Равенството може да се запише:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)}$$

Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски) *В сила е следното неравенство:*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ (p \geq 1)$$

Теорема 1.1.3 *В сила е следното неравенство:*

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k - b_k|$$

1.2 Видове крайно мерни пространства

1.2.1 Линейно(Векторно) пространство

Дефиниция 1.2.1 *Нека L е линейно(векторно) пространство над полето R. В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.*

1. $x, y \in L \implies z = x + y \in L$

2. $x \in L, \lambda \in R \implies z = \lambda x \in L$

1.2.2 Евклидово пространство

Дефиниция 1.2.2 *Крайномерното пространство L се нарича евклидово, ако в него е въведено скаларно произведение, т.е за всеки два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави реално число (x, y), удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.*

1. $x, y, z \in L, \lambda \in R \implies (x+y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
2. $x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$
3. $x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$

1.2.3 Метрично пространство

Дефиниция 1.2.3 *Крайномерното пространство L се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика) ρ, т.е за два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави неотрицателно число $\rho \geq 0$ със следните свойства*

1. $\rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z). \forall x, y, z \in L$

Метрично пространство L с метрика ρ се означава (L, ρ)

1.2.4 Нормирано пространство

Дефиниция 1.2.4 *Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма $||.||$, т.е $||.|| : L \to R_0^+$ със свойства*

1. $x = 0 \implies ||x|| = 0, x \neq 0 \implies ||x|| > 0$
2. $x \in L, \lambda \in R \implies ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
3. $x, y \in L \implies ||x + y|| \leq |x| + |y|$

Теорема 1.2.1 *Ако L е нормирано пространство с дадена норма $||.||$, то L е метрично пространство, т.е равенството $\rho(x, y) = ||x - y||$ дефинира разстоянието в L*

1.3 Пространството R^m - дефиниция и основни свойства

Дефиниция 1.3.1 *Множеството от наредени m-торки $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ от реални числа. Числата $a_1, a_2, ..., a_m$ се наричат съответно първа, втора, ..., m-та кордината на a.*

Ако имаме $a = (a_1, a_2, ..., a_m), b = (b_1, b_2, ..., b_m), ; \lambda \in R$ то

1. $a+b=(a_1,a_2,...,a_m)+(b_1,b_2,...,b_m)=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_m+b_m)\in R^m$
2. $\lambda a=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_m)\in R^m$

1.3.1 Скаларно произведение

Скаларно произведение се дефинира :

$$(a,b)=\left(\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\right)$$

С така въведено скаларно произведение пространството R^m се превръща в евклидово.

1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$||a||:=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k)^2}$$

се въвежда норма в R^m.
Нормата генерира метрика в R^m с формула:

$$\rho(a,b):=||a-b||=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k-b_k)^2}$$

1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат: $a^2=(a,a)=\sum_{k=1}^{m}a_k^2$

1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат: $(a,b)^2\leq a^2b^2$ и $|(a,b)|\leq ||a||||b||$

1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат: $||a+b||\leq ||a||+||b||$

1.4 Точки и множества в R^m

1.4.1 Паралелепипед

Дефиниция 1.4.1 *Множеството*

$$\Pi(a;\delta_1,\delta_2,...,\delta_m)=\{x\in R^m:-\delta_k<x_k-a_k<\delta_k\}$$

се нарича отворен паралелепипед в R^m с център точката a.

Множеството

$$\widetilde{\Pi}(a;\delta_1,\delta_2,...,\delta_m)=\{x\in R^m:-\delta_k\le x_k-a_k\le\delta_k\}$$

се нарича затворен паралелепипед в R^m с център точката a.

Ако $\delta_1=\delta_2=...=\delta_m=\delta$, получените множества $\Pi(a;\delta)$ и $\widetilde{\Pi}(a;\delta)$ се наричат съответно отворен и затворен куб в R^m с център a.

1.4.2 Сфера и кълбо

Дефиниция 1.4.2 *Нека числото $r>0$. Множеството*

$$B(a;r)=\{x|x\in R^m,\rho(x,a)<r\}=\{x|x\in R^m,||x-a||<r\}$$

се нарича отворено кълбо в R^m с център a и радиус r, множеството

$$\widetilde{B}(a;r)=\{x|x\in R^m,\rho(x,a)\le r\}=\{x|x\in R^m,||x-a||\le r\}$$

се нарича затворено кълбо в R^m с център a и радиус r, а множеството

$$S(a;r)=\{x|x\in R^m,\rho(x,a)=r\}=\{x|x\in R^m,||x-a||=r\}$$

се нарича сфера в R^m с център a и радиус r, а множеството

Дефиниция 1.4.3 *Точката a се нарича*

- *вътрешна за множеството A, ако съществува отворено кълбо $B(a,\varepsilon)$: $B(a,\varepsilon)\subset A$*
- *външна за A, ако съществува $B(a,\varepsilon):B(a,\varepsilon)\subset R^m\setminus A$*
- *контурна за A, ако за всяко $\varepsilon>0:B(a,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ и $B(a,\varepsilon)\cap(R^m\setminus A)\neq\emptyset$*
- *изолирана ако съществува $\varepsilon>0:B(a,\varepsilon)\cap A=\{a\}$*

Дефиниция 1.4.4 *Множеството $A\subset R^m$ се нарича*

- *отворено, ако всяка негова точка е вътрешна*
- *затворено, ако неговото допълнение $R^m\setminus A$ е отворено*

Дефиниция 1.4.5 *Околност на дадена точка $a\in R^m$ се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с U_a.*

Дефиниция 1.4.6 *Точка a се нарича точка на сгъстяване на множеството* $A \subset R^m$*, ако всяка нейна околност* U_a *съдържа поне една точка на* A*, различна от* a*, т.е* $U_a \cap (A \setminus \{a\} \neq \emptyset$

Дефиниция 1.4.7 *Величината*

$$d = d(A) = \sup_{a',a'' \in A} \rho(a'; a'')$$

се нарича диаметър на множеството $A \subset R^m$.

Дефиниция 1.4.8 *Множеството* $A \subset R^m$ *се нарича ограничено, ако съществува кълбо(с краен радиус), което го съдържа.*

Дефиниция 1.4.9 *Множеството* $A \subset R^m$ *се нарича компактно, ако* A *е затворено и ограничено.*

Дефиниция 1.4.10 *Множеството* $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m$*, чийто кординати са непрекъснати функции* $x_k = x_k(t)(k = 1, 2, ..., m)$*, дефинирани върху даден интервал [a,b] се нарича непрекъсната крива в* R^m. t *се нарича параметър на кривата.*
Точките $x(a) = (x_1(a), x_2(a), ..., x_m(a))$ *и* $x(b) = (x_1(b), x_2(b), ..., x_m(b))$ *се наричат начало и край на дадената крива. Ако* $x(a) = x(b)$ *кривата е затворена*

Дефиниция 1.4.11 *Нека* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in R^m$ *и* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ *са фиксирани числа за които* $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$*. Множеството от точки* $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ *чиито кординати се представят във вида*

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, ..., m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството R^m*, минаваща през точка* x^0 *по направление* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$.

Дефиниция 1.4.12 *Множеството* $A \subset R^m$ *се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъсната крива* γ*, която ги свързва и* $\gamma \subset A$.

Дефиниция 1.4.13 *Множеството* $A \subset R^m$ *се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.*

Дефиниция 1.4.14 *Област, всеки две точки на която могат да се съединят с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.*

Дефиниция 1.4.15 *Областа* $A \subset R^m$ *се нарича звездообразна област, относно точката* $x^0 \in A$*, ако за вскяка точка* $x \in A$ *отсечката* $[x^0, x]$ *лежи изцяло в* A.

1.5 Редици от точки в R^m

Дефиниция 1.5.1 *Редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\}$ *се нарича редица от точки в* R^m*, а редицата* $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}(k = 1 \div m)$ *- к-та кординатна редица. За по кратко редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ *се означава* $\{x^{(n)}\}$

Дефиниция 1.5.2 *Редицата* $\{y^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ *се нарича поредица на редицата* $\{x^{(n)}\}$ *и се означава:*
$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, ...,$ *или* $\{x^{(n_l)}\}_{l=1}^{\infty}$
ако за всяко l *съществува такова* n_l*, че* $y^{(l)} = x^{(n_l)}$*, при това, ако* $l' < l''$*, то* $n_{l'} < n_{l''}$*.*

Дефиниция 1.5.3 *Редицата* $\{x^{(n)}\}$ *се нарича сходяща към точка* $a \in R^m$ *(граница на редицата), ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува такова* $N_0 > 0$*, че за всяко* $n > N_0$ *е изпълнено неравенството* $\rho(x^{(n)}; a) = ||x^{(n)} - a|| < \varepsilon$*. Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.*

Дефиниция 1.5.4 *Точката* $a \in R^m$ *се нарича точка на сгъстяване на редицата* $\{x^{(n)}\}$*, ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.*

Теорема 1.5.1 *Нека* $x^{(n)} \in R^m$ *за* $n \in N$ *и точката* $a \in R^m$*. Тогава*

$$(\{x^{(n)}\} \to a) \iff (x_k^{(n)} \to a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката а, тогава и само тогава когато всяка от кординатите на редици $\{x_k^{(n)}\}$ *има граница сьответната кордината* a_k *на точката а*

Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши) *Нека* $x^{(n)} \in R^m$ *за* $n \in N$*. Редицата* $x^{(n)}$ *е сходяща тогава и само тогава когато за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува такова число* $N_0 > 0$*, че при всяко* $n \in N, n > N_0$ *и всяко* $p \in N$ *е изпълнено* $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = ||x^{(n+p)} - x^{(n)}|| < \varepsilon$

Дефиниция 1.5.5 *Редицата* $\{x^{(n)}\}$ *се нарича ограничена , ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.*

Теорема 1.5.3 (Болцано-Вайерщрас) *От всяка ограничена редица в пространството* R^m *може да се избере сходяща подредица.*

Дефиниция 1.5.6 *Всяко множество* $A \subset R^m$ *се нарича компактно, ако от всяка редица* $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$*, може да се избере сходяща подредица* $\{x_k^{(n)}\}$ *с граница принадлежаща на* A

2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

2.1 Дефниция на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.1.1 *Казва се че дадена функция с дефиниционна област(дефиниционно множество) D, ако на всяка точка $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ от множеството D е съпоставено реално число $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, т.е на всяко $x \in D$ съществува единствено число $y = f(x) \in R$. Понякога за кратко се записва.*

$$f : D \to R$$

В R^2 се използва (x, y) за означение, а в R^3 - (x, y, z).

2.2 Граница на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.2.1 (Коши) *Нека $f : D \to R, a \in R^m$, a е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \to a$ със стойностти $x \neq a$ ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = ||x - a|| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записва се*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Дефиниция 2.2.2 (Хайне) *Нека $f : D \to R, a \in R^m$, a е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \to a$ със стойностти $x \neq a$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in D, x^{(n)} \neq a$ сходяща към a, числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница L.*

Теорема 2.2.1 *Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.*

Дефиниция 2.2.3 *Нека $f : D \to R, a \in R^m$, a е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ дивергира към ∞ (съответно към $-\infty$) при $x \to a$ със стойностти $x \neq a$, ако за всяко $A \in R$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = ||x - a|| < \delta$ е изпълнено $f(x) > A$(съответно $f(x) < A$). Записва се*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty(-\infty)$$

Дефиниция 2.2.4 (Повторна граница) *Нека $D \subset R^2, a = (a_1, a_2) \in R^2$ е точка на сгъстяване за D и функция $f : D \to R$. Нека съществува такава околност $U_{a_2} \subset R$ на точката $_2$, че за всички стойностти $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim_{x \to a_1} f(x, y) = \varphi(y)$. Ако освен това съществува $\lim_{y \to a_2} \varphi(y) = A$, A се нарича повторна граница и се означава както следва*

$$A = A_{1,2} = \lim_{y \to a_2} (\lim_{x \to a_1} f(x, y))$$

.
Аналогично се свежда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x \to a_1} (\lim_{y \to a_2} f(x,y))$$

Теорема 2.2.2 *Нека $D \subset R^2, a = (a_1, a_2) \in R^2$ е точка на сгъстяване за D и функция $f : D \to R$. Нека*

1. *Нека съществува такава околност $U_{a_2} \subset R$ на точката $_2$, че за всички стойностти $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim\limits_{x \to a_1} f(x,y) = \varphi(y)$.*

2. *Съществува границата $\lim\limits_{(x,y) \to (a_1,a_2)} f(x,y) = L$.*

Тогава съществува граница $\lim\limits_{y \to a_2} \varphi(y)$ и освен това е в сила равенствотот $\lim\limits_{y \to a_2} \varphi(y) = L$

2.3 Непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.3.1 *Казва се че функцията $f : D \to R$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Дефиниция 2.3.2 (непрекъснатост по Коши) *Казва се, че функцията $f : D \to R$ е непрекъсната в точка $a \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството D, за което $\rho(x; a) = ||x - a|| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Дефиниция 2.3.3 (непрекъснатост по Хайне) *Казва се, че функцията $f : D \to R$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}$ (с $x^{(n)} \in D$ за $n \in N$) сходяща към a, числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница $f(a)$.*

Дефиниция 2.3.4 (за съставна функция) *Нека $A \subset R^m$ е отворено множество, $f : \ \to R$ и $x_k : (\alpha, \beta) \to R, k = 1 \div m$. Полагайки $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)) \in A$ за всяко $t \in (\alpha, \beta)$ съставната функция $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$ се дефинира по формулата*

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$$

Теорема 2.3.1 *Нека $A \subset R^m$ е отворено множество и $f : \ \to R$ интервалът $(\alpha, \beta) \subset R$, $x_k : (\alpha, \beta) \to R$ за $k = 1 \div m$. Нека освен това $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)) \in A$ за $\forall t \in (\alpha, \beta)$ и x_k са непрекъснати в точката $t_0 \in (\alpha, \beta)$ за $k = 1 \div m$, а f е непрекъсната в $x^0 = x(t_0)$. Тогава функцията $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$ е непрекъсната в точката t_0*

2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.4.1 *Нека $A \subset R^m$ е отворено множество и $f : A \to R$. Функцията се нарича равномерно непрекъсната в A, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\epsilon)$, че за всеки две точки $x', x'' \in A$ за които разстоянието $\rho(x'; x'') = ||x' - x''|| < \delta$, да следва, че $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Теорема 2.4.1 (на Вайерщрас) *Нека множеството $K \subset R^m$ е компактно и функцията $f : K \to R$ е непрекъсната върху K. Тогава*

1. *f е ограничена в K, т.е съществуват $m, M \in R$ такива че за всички $x \in K$ е изпълнено неравенството $m \leq f(x) \leq M$*

2. *f достифа най малката и най-голямата си стойност в K, т.е съществуват точки $x^0, y^0 \in K$, такива че*

$$f(x^0) = \inf_{x \in K} f(x); f(y^0) = \sup_{y \in K} f(x)$$

Теорема 2.4.2 (на Кантор) *Нека множеството $K \subset R^m$ е компактно и функцията $f : K \to R$ е непрекъсната върху K. Тогава f е равномерно непрекъсната върху K.*

3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи

3.1 Дефиниция на частна производна

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $D \subset R^m$ - отворено множество
- $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ - точка, принадлежаща на D
- $U_{x^0} \subset D$ - околност на x^0
- $U_{x_i^0} \subset D$ - околност на x_i^0 (i = 1, 2, ..., m)
- точката $(x_1^0, x_2^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^i, ..., x_m^0) \in U_{x^0}$, за всички стойности на $x_i \in U_{x_i^0}$
- f и g - функции, дефинирани съответно в D и $U_{x_i^0}$. т.е
$f : D \to R, g : U_{x_i^0} \to R$ и $g(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^i, ..., x_m^0)$

Дефиниция 3.1.1 *Производната, ако съществува на функцията g в точката x_i^0 се нарича частна производна на функцията f(по променлива x_i^0) в точката x^0. Използва се означението $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(x^0)$.*
Частната производна на функцията f относно променливата x_i е равна на границата на функцията $\varphi(h_i) = \dfrac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i}$ при $h_i \to 0$ (ако съществува) т.е

$$\lim_{h_i \to 0} \varphi(h_i) = \lim_{h_i \to 0} \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$$

Пример 3.1.1

$$f(x, y) = x^2 + 9xy^2$$
$$f'_x(x, y) = (x^2)'_x + (9xy^2)'_x = 2x + 9y^2$$
$$f'_y(x, y) = (x^2)'_y + (9xy^2)'_y = 0 + 9x.2.y = 18xy$$

3.2 Частни производни от по-висок ред

Дефиниция 3.2.1 *Частната производна на частната производна от $n-1$ ред, $n = 1, 2, ...$(ако съществува), се нарича частична производна от n-ти ред. Частните производни, получени при диференциране по различни променливи се наричат смесени производни, а получените при диференциране само по една и съща променлива се наричат чисти производни.*

Пример 3.2.1 $f(x, y) = x^3 \sin(6y) + x^2y^3 + 2222, f''_{x,y} =?, f''_{y,x} =?$

1. $f''_{x,y} = (f'_x(x, y))'_y$

   (а) $f'_x(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_x + (x^2y^3)'_x + (2222)'_x = 3x^2 \sin(6y) + 2xy^3 + 0$

   (б) $f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y)+2xy^3)'_y = (3x^2 \sin(6y))'_y+(2xy^3)'_y = 3x^2 \cos(6y).6+ 2.3xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$

2. $f''_{y,x} = (f'_y(x, y))'_x$

   (а) $f'_y(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_y+(x^2y^3)'_y+(2222)'_y = x^3 \cos(6y).6+x^2.3y^2 + 0 = 6x^3 \cos(6y) + 3x^2y^2$

   (б) $f''_{y,x} = (6x^3 \cos(6y)+3x^2y^2)'_y = (6x^3 \cos(6y))_y+(3x^2y^2)'_y = 6.3.x^2 \cos(6y)+ 3.2.xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$

Теорема 3.2.1 (за равенство на смесени производни) *Нека точката $(x_0, y_0) \in R^2$ и нека функцията f е дефинирана в отвореното множество $U = U_{(x_0,y_0)} \subset R^2$, което е нейната област т.е $f : U \to R$. Нека освен това съществуват частните производни $f'_x, f'_y, f''_{x,y}, f''_{y,x}$ за всички $(x, y) \in U$ и $f''_{x,y}, f''_{y,x}$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0). Тогава е изпълнено равенството*

$$f''_{x,y}(x_0, y_0) = f''_{y,x}(x_0, y_0)$$

3.3 Диференцируемост на функция

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $x^0 \in R^m$
- $U \subset R^m$ - отворено множество, което е околност на x^0.Без ограничение на общността може да се счита че U е δ-околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0;\delta)$ с център x^0 и радиус δ
- $f : U \to R$ - функция дефинирана в $U = B(x^0;\delta)$

Дефиниция 3.3.1 *Функцията f се нарича диференцируема в точка x^0 ако съществуват числа $A_1, A_2, ..., A_m$ и функция $\varepsilon(x^0, x - x^0)$, дефинирана за всички допустими стойности на $x \in U$ и $x - x^0 = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, ...x_m - x_m^0)$, като при това*

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} A_k(x_k + x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0)||x - x^0||$$

и $\lim\limits_{||x-x^0||\to 0} \varepsilon(x^0, x - x^0) = 0$

Дефиниция 3.3.2 *Функцията f се нарича диференцируема в отвореното множество U, ако тя е диференцируема във всяка негова точка.*

Теорема 3.3.1 *Ако функцията $f : U \to R$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то тя е непрекъсната.*

Дефиниция 3.3.3 *В случай на диференцируемост в точката x^0 на функцията $f : U \to R$, изразът*

$$df(x^0) \circ (h) = A_1h_1 + A_2h_2 + ... + A_mh_m$$

(или $df, df(x^0)$) се нарича пълен диференциал на $f(x)$ в точката x^0

Теорема 3.3.2 *Ако функцията $f : U \to R$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то съществуват частните производни $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ в точката x^0 и освен това $A_k(x^0) = \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$.*

Дефиниция 3.3.4 *Ако функцията $f : U \to R$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то със следната формула се изразява нейната производна в точката x^0*

$$f'(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0))$$

.

Теорема 3.3.3 *Ако функцията $f : U \to R$ притежава частни производни* $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$ *в отвореното множество U и освен това са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то f е диференцируема в точката x^0.*

Дефиниция 3.3.5 *Ако функцията $f : U \to R$ притежава частни производни в U и тези частични производни са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в точката x^0. Ако тези производни са непрекъснати в U, то функцията се нарича непрекъсанот диференцируема в това множество.*

Дефиниция 3.3.6 *Диференциалът на диференциала от $n-1$ ред ($n = 2$, 3, ...) от функцията f(ако съществува) се нарича диференциал от n-ти ред(n-ти диференциал) на тази функция и се бележи $d^n f$*

Ако f е два пъти непрекъсната и диференцируема в $x^0 \in U$ тогава втория диференциал получава по следния резултат

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f(x^0)$$

Аналогично ако f е n пъти непрекъсната и диференцируема в $x^0 \in U$, то $d^n f(x^0)$ съществува и се дава със следната формула

$$d^n f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f(x^0)$$