

# Математически анализ 2

Ехонаut

18 април 2021 г.

## Съдържание

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Лекция 1: Пространството <math>\mathbb{R}^m</math></b>   | <b>3</b>  |
| 1.1      | Няколко важни неравенства . . . . .   | 3         |
| 1.2      | Видове крайно мерни пространства . . . . .  | 3         |
| 1.2.1    | Линейно(Векторно) пространство . . . . .  | 3         |
| 1.2.2    | Евклидово пространство . . . . .  | 4         |
| 1.2.3    | Метрично пространство . . . . .   | 4         |
| 1.2.4    | Нормирано пространство . . . . .  | 4         |
| 1.3      | Пространството $\mathbb{R}^m$ - дефиниция и основни свойства . . . . .  | 5         |
| 1.3.1    | Скаларно произведение . . . . .   | 5         |
| 1.3.2    | Норма и метрика . . . . .   | 5         |
| 1.3.3    | Скаларен квадрат . . . . .  | 5         |
| 1.3.4    | Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат . . . . .  | 6         |
| 1.3.5    | Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат . . . . .   | 6         |
| 1.4      | Точки и множества в $\mathbb{R}^m$ . . . . .  | 6         |
| 1.4.1    | Паралелепипед . . . . .   | 6         |
| 1.4.2    | Сфера и кълбо . . . . .   | 6         |
| 1.5      | Редици от точки в $\mathbb{R}^m$ . . . . .  | 8         |
| <b>2</b> | <b>Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост</b>  | <b>10</b> |
| 2.1      | Дефиниция на функция на няколко променливи . . . . .  | 10        |
| 2.2      | Граница на функция на няколко променливи . . . . .  | 10        |
| 2.3      | Непрекъснатост на функция на няколко променливи . . . . .   | 11        |
| 2.4      | Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи . . . . .  | 12        |
| <b>3</b> | <b>Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи</b>                      | <b>13</b> |
| 3.1      | Дефиниция на частна производна . . . . .  | 13        |
| 3.2      | Частни производни от по-висок ред . . . . .   | 14        |
| 3.3      | Диференцируемост на функция . . . . .   | 14        |
| <b>4</b> | <b>Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права</b> | <b>17</b> |
| 4.1      | Диференциране на съставна функция . . . . .   | 17        |
| 4.2      | Производна по посока. Градиент . . . . .  | 18        |
| 4.3      | Допирателна равнина. Нормална права . . . . .   | 20        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>5</b> | <b>Лекция 5: Неявни функции. Съществуване и диференциране</b>  | <b>22</b> |
| 5.1      | Неявни функции . . . . .   | 22        |
| <b>6</b> | <b>Лекция 6: Формула на Тейлор за функция на няколко променливи. Локални екстремуми на функция на няколко променливи</b> | <b>27</b> |
| 6.1      | Формула на Тейлор за функция на няколко променливи . .   | 27        |
| 6.2      | Локални екстремуми на функция на няколко променливи .  | 29        |
| 6.3      | Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция . . . . .   | 30        |
| <b>7</b> | <b>Лекция 7: Локални екстремуми на функция на няколко променливи. Екстремум на неявна функция</b>                        | <b>35</b> |
| 7.1      | Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция II . . . . .  | 35        |
| 7.2      | Локален екстремум на неявна функция . . . . .  | 38        |
| <b>8</b> | <b>Лекция 8: Условни и абсолютни екстремуми на функция на няколко променливи</b>   | <b>41</b> |
| 8.1      | Условни екстремуми на функция на няколко променливи .  | 41        |
| 8.2      | Абсолютни екстремуми на функция на няколко променливи  | 43        |
| <b>9</b> | <b>Лекция 9</b>  | <b>45</b> |

# 1 Лекция 1: Пространството $\mathbb{R}^m$

## 1.1 Няколко важни неравенства

Нека  $a_k$  и  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) са реални числа и  $m \in \mathbb{N}$

**Теорема 1.1.1** (Неравенство на Коши-Шварц). В сила е следното неравенство:

$$\left( \sum_{k=1}^m a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^m a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^m b_k^2 \right)$$

Равенство се достига само когато  $a_k$  и  $b_k$  са пропорционални:  
( $\exists \lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k$ )

Равенството може да се запише:

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

**Теорема 1.1.2** (Неравенство на Минковски). В сила е следното неравенство:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

Равенство се достига само когато  $a_k$  и  $b_k$  са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left( \sum_{k=1}^m |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)$$

**Теорема 1.1.3.** В сила е следното неравенство:

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^m |a_k - b_k|$$

## 1.2 Видове крайно мерни пространства

### 1.2.1 Линейно(Векторно) пространство

**Дефиниция 1.2.1.** Нека  $L$  е линейно(векторно) пространство над полето  $R$ . В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.

1.  $x, y \in L \implies z = x + y \in L$
2.  $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies z = \lambda x \in L$

### 1.2.2 Евклидово пространство

**Дефиниция 1.2.2.** Крайномерното пространство  $L$  се нарича евклидово, ако в него е въведено скалярно произведение, т.е. за всеки два елемента  $x, y \in L$  може да се съпостави реално число  $(x, y)$ , удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.

1.  $x, y, z \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies (x + y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
2.  $x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$
3.  $x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$

### 1.2.3 Метрично пространство

**Дефиниция 1.2.3.** Крайномерното пространство  $L$  се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика)  $\rho$ , т.е. за два елемента  $x, y \in L$  може да се съпостави неотрицателно число  $\rho \geq 0$  със следните свойства

1.  $\rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z). \forall x, y, z \in L$

Метрично пространство  $L$  с метрика  $\rho$  се означава  $(L, \rho)$

### 1.2.4 Нормирано пространство

**Дефиниция 1.2.4.** Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма  $\|\cdot\|$ , т.е.  $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  със свойства

1.  $x = 0 \implies \|x\| = 0, x \neq 0 \implies \|x\| > 0$
2.  $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3.  $x, y \in L \implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Теорема 1.2.1.** Ако  $L$  е нормирано пространство с дадена норма  $\|\cdot\|$ , то  $L$  е метрично пространство, т.е. равенството  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  дефинира разстоянието в  $L$

### 1.3 Пространството $\mathbb{R}^m$ - дефиниция и основни свойства

**Дефиниция 1.3.1.** Множеството от наредени  $m$ -торки  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  от реални числа. Числата  $a_1, a_2, \dots, a_m$  се наричат съответно първа, втора, ...,  $m$ -та координата на  $a$ .

Ако имаме  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m), b = (b_1, b_2, \dots, b_m), ; \lambda \in \mathbb{R}$  то

1.  $a + b = (a_1, a_2, \dots, a_m) + (b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) \in \mathbb{R}^m$
2.  $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_m) \in \mathbb{R}^m$

#### 1.3.1 Скалярно произведение

Скалярно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left( \sum_{k=1}^m a_k b_k \right)$$

С така въведено скалярно произведение пространството  $\mathbb{R}^m$  се превръща в евклидово.

#### 1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k)^2}$$

се въвежда норма в  $\mathbb{R}^m$ .

Нормата генерира метрика в  $\mathbb{R}^m$  с формула:

$$\rho(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k - b_k)^2}$$

#### 1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат:  $a^2 = (a, a) = \sum_{k=1}^m a_k^2$

**1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат**

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат:  $(a, b)^2 \leq a^2 b^2$  и  $|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$

**1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат**

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат:  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

**1.4 Точки и множества в  $\mathbb{R}^m$** **1.4.1 Паралелепипед**

**Дефиниция 1.4.1.** Множеството

$$\Pi(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k < x_k - a_k < \delta_k\}$$

се нарича отворен паралелепипед в  $\mathbb{R}^m$  с център точката  $a$ .

Множеството

$$\tilde{\Pi}(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k \leq x_k - a_k \leq \delta_k\}$$

се нарича затворен паралелепипед в  $\mathbb{R}^m$  с център точката  $a$ .

Ако  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_m = \delta$ , получените множества  $\Pi(a; \delta)$  и  $\tilde{\Pi}(a; \delta)$  се наричат съответно отворен и затворен куб в  $\mathbb{R}^m$  с център  $a$ .

**1.4.2 Сфера и кълбо**

**Дефиниция 1.4.2.** Нека числото  $r > 0$ . Множеството

$$B(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) < r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| < r\}$$

се нарича отворено кълбо в  $\mathbb{R}^m$  с център  $a$  и радиус  $r$ , множеството

$$\tilde{B}(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) \leq r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| \leq r\}$$

се нарича затворено кълбо в  $\mathbb{R}^m$  с център  $a$  и радиус  $r$ , а множеството

$$S(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) = r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| = r\}$$

се нарича сфера в  $\mathbb{R}^m$  с център  $a$  и радиус  $r$ , а множеството

**Дефиниция 1.4.3.** Точката  $a$  се нарича

- вътрешна за множеството  $A$ , ако съществува отворено кълбо  $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset A$
- външна за  $A$ , ако съществува  $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$
- контурна за  $A$ , ако за всяко  $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  и  $B(a, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$
- изолирана ако съществува  $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$

**Дефиниция 1.4.4.** Множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича

- отворено, ако всяка негова точка е вътрешна
- затворено, ако неговото допълнение  $\mathbb{R}^m \setminus A$  е отворено

**Дефиниция 1.4.5.** Околност на дадена точка  $a \in \mathbb{R}^m$  се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с  $U_a$ .

**Дефиниция 1.4.6.** Точка  $a$  се нарича точка на съгъстяване на множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$ , ако всяка нейна околност  $U_a$  съдържа поне една точка на  $A$ , различна от  $a$ , т.е.  $U_a \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

**Дефиниция 1.4.7.** Величината

$$d = d(A) = \sup_{a', a'' \in A} \rho(a'; a'')$$

се нарича диаметър на множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$ .

**Дефиниция 1.4.8.** Множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича ограничено, ако съществува кълбо (с краен радиус), което го съдържа.

**Дефиниция 1.4.9.** Множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича компактно, ако  $A$  е затворено и ограничено.

**Дефиниция 1.4.10.** Множеството  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ , чийто координати са непрекъснати функции  $x_k = x_k(t) (k = 1, 2, \dots, m)$ , дефинирани върху даден интервал  $[a, b]$  се нарича непрекъснатата крива в  $\mathbb{R}^m$ .  $t$  се нарича параметър на кривата.

Точките  $x(a) = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_m(a))$  и  $x(b) = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_m(b))$  се наричат начало и край на дадената крива. Ако  $x(a) = x(b)$  кривата е затворена



**Дефиниция 1.4.11.** Нека  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  и  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  са фиксирани числа за които  $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$ . Множеството от точки  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  чиито кординати се представят във вида

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, \dots, m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството  $\mathbb{R}^m$ , минаваща през точка  $x^0$  по направление  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ .

**Дефиниция 1.4.12.** Множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъснатата крива  $\gamma$ , която ги свързва и  $\gamma \subset A$ .

**Дефиниция 1.4.13.** Множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.

**Дефиниция 1.4.14.** Област, всеки две точки на която могат да се съединят с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.

**Дефиниция 1.4.15.** Областа  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича звездообразна област, отнотно точката  $x^0 \in A$ , ако за всяка точка  $x \in A$  отсечката  $[x^0, x]$  лежи изцяло в  $A$ .

## 1.5 Редици от точки в $\mathbb{R}^m$

**Дефиниция 1.5.1.** Редицата  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\}$  се нарича редица от точки в  $\mathbb{R}^m$ , а редицата  $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^\infty (k = 1 \div m)$  -  $k$ -та кординатна редица. За по кратко редицата  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  се означава  $\{x^{(n)}\}$

**Дефиниция 1.5.2.** Редицата  $\{y^{(l)}\}_{l=1}^\infty$  се нарича поредица на редицата  $\{x^{(n)}\}$  и се означава:

$$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, \dots, \text{ или } \{x^{(n_l)}\}_{l=1}^\infty$$

ако за всяко  $l$  съществува такова  $n_l$ , че  $y^{(l)} = x^{(n_l)}$ , при това, ако  $l' < l''$ , то  $n_{l'} < n_{l''}$ .

**Дефиниция 1.5.3.** Редицата  $\{x^{(n)}\}$  се нарича сходяща към точка  $a \in \mathbb{R}^m$  (граница на редицата), ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува такова  $N_0 > 0$ , че за всяко  $n > N_0$  е изпълнено неравенството  $\rho(x^{(n)}; a) = \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$ . Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.

**Дефиниция 1.5.4.** Точката  $a \in \mathbb{R}^m$  се нарича точка на съгъстяване на редицата  $\{x^{(n)}\}$ , ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.

**Теорема 1.5.1.** Нека  $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$  за  $n \in \mathbb{N}$  и точката  $a \in \mathbb{R}^m$ . Тогава

$$(\{x^{(n)}\} \rightarrow a) \iff (x_k^{(n)} \rightarrow a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката  $a$ , тогава и само тогава когато всяка от координатите на редици  $\{x_k^{(n)}\}$  има граница съответната координата  $a_k$  на точката  $a$

**Теорема 1.5.2** (Критерий на Коши). Нека  $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$  за  $n \in \mathbb{N}$ . Редицата  $x^{(n)}$  е сходяща тогава и само тогава когато за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува такова число  $N_0 > 0$ , че при всяко  $n \in \mathbb{N}, n > N_0$  и всяко  $p \in \mathbb{N}$  е изпълнено  $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = \|x^{(n+p)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$

**Дефиниция 1.5.5.** Редицата  $\{x^{(n)}\}$  се нарича ограничена, ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.

**Теорема 1.5.3** (Болцано-Вайерщрас). От всяка ограничена редица в пространството  $\mathbb{R}^m$  може да се избере сходяща подредица.

**Дефиниция 1.5.6.** Всяко множество  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича компактно, ако от всяка редица  $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$ , може да се избере сходяща подредица  $\{x_k^{(n)}\}$  с граница принадлежаща на  $A$

## 2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

### 2.1 Дефиниция на функция на няколко променливи

**Дефиниция 2.1.1.** Казва се че дадена функция с дефиниционна област (дефиниционно множество)  $D$ , ако на всяка точка  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  от множеството  $D$  е съпоставено реално число  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , т.е на всяко  $x \in D$  съществува единствено число  $y = f(x) \in \mathbb{R}$ . Понякога за кратко се записва.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

В  $\mathbb{R}^2$  се използва  $(x, y)$  за означение, а в  $\mathbb{R}^3$  -  $(x, y, z)$ .

### 2.2 Граница на функция на няколко променливи

**Дефиниция 2.2.1** (Коши). Нека  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$ ,  $a$  е точка на съгъстяване за  $D$ . Казва се че  $f(x)$  има граница  $L$  при  $x \rightarrow a$  със стойности  $x \neq a$  ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , че за всяко  $x$  от множеството  $D \setminus \{a\}$ , за което  $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$  е изпълнено  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

**Дефиниция 2.2.2** (Хайне). Нека  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$ ,  $a$  е точка на съгъстяване за  $D$ . Казва се че  $f(x)$  има граница  $L$  при  $x \rightarrow a$  със стойности  $x \neq a$  ако за всяка редица  $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in D, x^{(n)} \neq a$  сходяща към  $a$ , числовата редица  $\{f(x^{(n)})\}$  има граница  $L$ .

**Теорема 2.2.1.** Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.

**Дефиниция 2.2.3.** Нека  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$ ,  $a$  е точка на съгъстяване за  $D$ . Казва се че  $f(x)$  дивергира към  $\infty$  (съответно към  $-\infty$ ) при  $x \rightarrow a$  със стойности  $x \neq a$ , ако за всяко  $A \in \mathbb{R}$  съществува такова  $\delta > 0$ , че за всяко  $x$  от множеството  $D \setminus \{a\}$ , за което  $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$  е изпълнено  $f(x) > A$  (съответно  $f(x) < A$ ). Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (-\infty)$$

**Дефиниция 2.2.4** (Повторна граница). Нека  $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  е точка на съгъстяване за  $D$  и функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Нека съществува

такава околност  $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$  на точката  $a_2$ , че за всички стойности  $y \in U_{a_2}$  да съществува  $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$ . Ако освен това съществува  $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = A$ ,  $A$  се нарича повторна граница и се означава както следва

$$A = A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow a_2} (\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y))$$

Аналогично се съвежда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow a_1} (\lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y))$$

**Теорема 2.2.2.** Нека  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  е точка на сгъстяване за  $D$  и функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Нека

1. Съществува такава околност  $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$  на точката  $a_2$ , че за всички стойности  $y \in U_{a_2}$  да съществува  $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$ .
2. Съществува границата  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1,a_2)} f(x, y) = L$ .

Тогава съществува граница  $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y)$  и освен това е в сила равенството  $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = L$

## 2.3 Непрекъснатост на функцията на няколко променливи

**Дефиниция 2.3.1.** Казва се че функцията  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната в точка  $a \in D$  ако  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Дефиниция 2.3.2** (непрекъснатост по Коши). Казва се, че функцията  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната в точка  $a \in D$ , ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , че за всяко  $x$  от множеството  $D$ , за което  $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$  е изпълнено  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

**Дефиниция 2.3.3** (непрекъснатост по Хайне). Казва се, че функцията  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната в точка  $a \in D$  ако за всяка редица  $\{x^{(n)}\}$  (с  $x^{(n)} \in D$  за  $n \in \mathbb{N}$ ) сходяща към  $a$ , числовата редица  $\{f(x^{(n)})\}$  има граница  $f(a)$ .

**Дефиниция 2.3.4** (за съставна функция). Нека  $A \subset \mathbb{R}^m$  е отворено множество,  $f : \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}, k = 1 \div m$ . Полагайки  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$  за всяко  $t \in (\alpha, \beta)$  съставната функция  $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$  се дефинира по формулата

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$$

## 2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи<sup>12</sup>

**Теорема 2.3.1.** Нека  $A \subset \mathbb{R}^m$  е отворено множество и  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  интервалът  $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ ,  $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  за  $k = 1 \div m$ . Нека освен това  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$  за  $\forall t \in (\alpha, \beta)$  и  $x_k$  са непрекъснати в точката  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  за  $k = 1 \div m$ , а  $f$  е непрекъсната в  $x^0 = x(t_0)$ . Тогава функцията  $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$  е непрекъсната в точката  $t_0$ .

## 2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи

**Дефиниция 2.4.1.** Нека  $A \subset \mathbb{R}^m$  е отворено множество и  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Функцията се нарича равномерно непрекъсната в  $A$ , ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , че за всеки две точки  $x', x'' \in A$  за които разстоянието  $\rho(x'; x'') = \|x' - x''\| < \delta$ , да следва, че  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

**Теорема 2.4.1** (на Вайерщрас). Нека множеството  $K \subset \mathbb{R}^m$  е компактно и функцията  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната върху  $K$ . Тогава

1.  $f$  е ограничена в  $K$ , т.е. съществуват  $m, M \in \mathbb{R}$  такива че за всички  $x \in K$  е изпълнено неравенството  $m \leq f(x) \leq M$
2.  $f$  достига най малката и най-голямата си стойност в  $K$ , т.е. съществуват точки  $x^0, y^0 \in K$ , такива че

$$f(x^0) = \inf_{x \in K} f(x); f(y^0) = \sup_{y \in K} f(x)$$

**Теорема 2.4.2** (на Кантор). Нека множеството  $K \subset \mathbb{R}^m$  е компактно и функцията  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната върху  $K$ . Тогава  $f$  е равномерно непрекъсната върху  $K$ .

### 3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функцията на две и повече променливи

#### 3.1 Дефиниция на частна производна

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $D \subset \mathbb{R}^m$  - отворено множество
- $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  - точка, принадлежаща на  $D$
- $U_{x^0} \subset D$  - околност на  $x^0$
- $U_{x_i^0} \subset D$  - околност на  $x_i^0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )
- точката  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0) \in U_{x^0}$ , за всички стойности на  $x_i \in U_{x_i^0}$
- $f$  и  $g$  - функции, дефинирани съответно в  $D$  и  $U_{x_i^0}$ . т.е.  
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : U_{x_i^0} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$

**Дефиниция 3.1.1.** Производната, ако съществува на функцията  $g$  в точката  $x_i^0$  се нарича частна производна на функцията  $f$  (по променлива  $x_i^0$ ) в точката  $x^0$ . Използва се означението  $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$  или  $f'_{x_i}(x^0)$ .

Частната производна на функцията  $f$  относно променливата  $x_i$  е равна на границата на функцията  $\varphi(h_i) = \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i}$  при  $h_i \rightarrow 0$  (ако съществува) т.е

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \varphi(h_i) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$$

**Пример 3.1.1.**

$$f(x, y) = x^2 + 9xy^2$$

$$f'_x(x, y) = (x^2)'_x + (9xy^2)'_x = 2x + 9y^2$$

$$f'_y(x, y) = (x^2)'_y + (9xy^2)'_y = 0 + 9x \cdot 2 \cdot y = 18xy$$

### 3.2 Частни производни от по-висок ред

**Дефиниция 3.2.1.** Частната производна на частната производна от  $n - 1$  ред,  $n = 1, 2, \dots$  (ако съществува), се нарича частична производна от  $n$ -ти ред. Частните производни, получени при диференциране по различни променливи се наричат смесени производни, а получените при диференциране само по една и съща променлива се наричат чисти производни.

#### Пример 3.2.1.

$$f(x, y) = x^3 \sin(6y) + x^2 y^3 + 2222, f''_{x,y} = ?, f''_{y,x} = ?$$

$$f''_{x,y} = (f'_x(x, y))'_y$$

$$f'_x(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_x + (x^2 y^3)'_x + (2222)'_x = 3x^2 \sin(6y) + 2xy^3 + 0$$

$$f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y) + 2xy^3)'_y$$

$$f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y))'_y + (2xy^3)'_y = 3x^2 \cos(6y) \cdot 6 + 2 \cdot 3xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

$$f''_{y,x} = (f'_y(x, y))'_x$$

$$f'_y(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_y + (x^2 y^3)'_y + (2222)'_y$$

$$f'_y(x, y) = x^3 \cos(6y) \cdot 6 + x^2 \cdot 3y^2 + 0 = 6x^3 \cos(6y) + 3x^2 y^2$$

$$f''_{y,x} = (6x^3 \cos(6y) + 3x^2 y^2)'_x = (6x^3 \cos(6y))'_x + (3x^2 y^2)'_x$$

$$f''_{y,x} = 6 \cdot 3x^2 \cos(6y) + 3 \cdot 2xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

**Теорема 3.2.1** (за равенство на смесени производни). Нека точката  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  и нека функцията  $f$  е дефинирана в отвореното множество  $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$ , което е нейната област т.е  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Нека освен това съществуват частните производни  $f'_x, f'_y, f''_{x,y}, f''_{y,x}$  за всички  $(x, y) \in U$  и  $f''_{x,y}, f''_{y,x}$  са непрекъснати в точката  $(x_0, y_0)$ . Тогава е изпълнено равенството

$$f''_{x,y}(x_0, y_0) = f''_{y,x}(x_0, y_0)$$

### 3.3 Диференцируемост на функция

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$

- $U \subset \mathbb{R}^m$  - отворено множество, което е околност на  $x^0$ . Без ограничение на общността може да се счита че  $U$  е  $\delta$ -околност на  $x^0$  т.е  $U$  е отворено кълбо  $B(x^0; \delta)$  с център  $x^0$  и радиус  $\delta$
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  - функция дефинирана в  $U = B(x^0; \delta)$

**Дефиниция 3.3.1.** Функцията  $f$  се нарича диференцируема в точка  $x^0$  ако съществуват числа  $A_1, A_2, \dots, A_m$  и функция  $\varepsilon(x^0, x - x^0)$ , дефинирана за всички допустими стойности на  $x \in U$  и  $x - x^0 = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_m - x_m^0)$ , като при това

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^m A_k(x_k - x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0)\|x - x^0\|$$

и  $\lim_{\|x - x^0\| \rightarrow 0} \varepsilon(x^0, x - x^0) = 0$

**Дефиниция 3.3.2.** Функцията  $f$  се нарича диференцируема в отвореното множество  $U$ , ако тя е диференцируема във всяка негова точка.

**Теорема 3.3.1.** Ако функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  е диференцируема в точката  $x^0 \in U$ , то тя е непрекъсната.

**Дефиниция 3.3.3.** В случай на диференцируемост в точката  $x^0$  на функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , изразът

$$df(x^0) \circ (h) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_m h_m$$

(или  $df, df(x^0)$ ) се нарича пълен диференциал на  $f(x)$  в точката  $x^0$

**Теорема 3.3.2.** Ако функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  е диференцируема в точката  $x^0 \in U$ , то съществуват частните производни  $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$  в точката  $x^0$  и освен

$$\text{това } A_k(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m.$$

**Дефиниция 3.3.4.** Ако функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  е диференцируема в точката  $x^0 \in U$ , то със следната формула се изразява нейната производна в точката  $x^0$

$$f'(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0))$$

.

**Теорема 3.3.3.** Ако функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  притежава частни производни  $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$  в отвореното множество  $U$  и освен това са непрекъснати в точката  $x^0 \in U$ , то  $f$  е диференцируема в точката  $x^0$ .



**Дефиниция 3.3.5.** Ако функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  притежава частни производни в  $U$  и тези частични производни са непрекъснати в точката  $x^0 \in U$ , то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в точката  $x^0$ . Ако тези производни са непрекъснати в  $U$ , то функцията се нарича непрекъснатот диференцируема в това множество.

**Дефиниция 3.3.6.** Диференциалът на диференциала от  $n - 1$  ред ( $n = 2, 3, \dots$ ) от функцията  $f$  (ако съществува) се нарича диференциал от  $n$ -ти ред ( $n$ -ти диференциал) на тази функция и се бележи  $d^n f$

Ако  $f$  е два пъти непрекъснатата и диференцируема в  $x^0 \in U$  тогава втория диференциал получава по следния резултат

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f(x^0)$$

което е симетрична квадратична форма на  $dx_i (i = 1 \div m)$ .

Аналогично ако  $f$  е  $n$  пъти непрекъснатата и диференцируема в  $x^0 \in U$ , то  $d^n f(x^0)$  съществува и се дава със следната формула

$$d^n f(x^0) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f(x^0)$$

## 4 Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права

### 4.1 Диференциране на съставна функция

$x^0 \in \mathbb{R}^m$  и отворено множество  $U \subset \mathbb{R}^m$  е околност на точката  $x^0$  (Без ограничение на общността може да се счита че  $U$  е  $\delta$ -околност на  $x^0$  т.е.  $U$  е отворено кълбо  $B(x^0; \delta)$  с център  $x^0$  и радиус  $\delta$ ).  
 $t_0 \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$

**Теорема 4.1.1.** Нека функцията  $f$  е дефинирана в  $U$ , а  $\varphi_k$  - в интервала  $(\alpha, \beta)$ , т.е.

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\varphi_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1 \div m$ )

като при това  $x_k = \varphi_k(t)$  за  $k = 1 \div m$ ,  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t) \in U$  за всички стойности на  $t \in (\alpha, \beta)$ . Нека  $f$  е диференцируема в  $U$ ,  $f'_k$  са непрекъснати в  $x^0$  за  $k = 1 \div m$ ,  $\varphi_k$  са диференцируеми в  $t_0$  и  $F : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  е дефинирана с равенството.

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)), t \in (\alpha, \beta)$$

Тогава функцията  $F$  е диференцируема в  $t_0$  и в сила е следното равенство

$$F'(t_0) = \sum_{k=1}^m f'_{x_k}(x^0) \varphi'_k(t_0)$$

За  $m = 2$ :

$$\varphi_1(t) = \varphi(t), \varphi_2(t) = \psi(t)$$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) \varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) \psi'(t_0)$$

**Пример 4.1.1.**  $f(x, y)$  - дефинирана и диференцируема в  $U_{(1,2)} \subset \mathbb{R}^2$ . с непрекъснати частни производни  $f'_x, f'_y$  в точката  $(1, 2)$ .

Намерете производната  $F'(0)$  на съставната функция  $F$ , зададена с равен-

ството  $F(t) = f(1 + 3t, 2 + 4t)$ .

$$t_0 = 0$$

$$x = \varphi(t) = 1 + 3t$$

$$y = \psi(t) = 2 + 4t$$

$$x_0 = \varphi(0) = 1$$

$$y_0 = \psi(0) = 2$$

$$\varphi'(t) = 3$$

$$\psi'(t) = 4$$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0) \implies F'(0) = 3f'_x(1, 2) + 4f'_y(1, 2)$$

## 4.2 Производна по посока. Градиент

Нека  $x^0 \in \mathbb{R}^m$  и лъчът  $l$  е дефиниран, както следва:

$$l : x = x^0 + t\nu, t > 0$$

Функцията  $f$  е дефинирана върху този лъч, а

$$\varphi(t) := f(x(t)) = f(x^0 + t\nu), t > 0$$

**Дефиниция 4.2.1.** Границата (ако съществува)

$$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

се нарича производна на  $f$  в точката  $x^0$  по посока на вектора  $\nu$  и се означава  $\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}$ , т.е

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

ако съществува границата.

Ако частните производни съществуват, са производни "по посока на координатните оси".

Ако  $f$  е дефинирана и диференцируема в околността  $U_{x^0}$  на точката в  $x^0$  и  $f'_{x_k}$  са непрекъснати в  $x_0$ , то съществува производната ѝ по посока на вектора  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$  и

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^m \nu_k \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$$

**Дефиниция 4.2.2.** Векторът с координати  $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$  се нарича градиент на  $f$  в точката  $x^0$  и се означава

$$\text{grad } f(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0))$$

Предвид тази дефиниция, формулата за производна по посока на вектор  $\nu$  се записва по кратко във вида

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \text{grad } f(x^0), \nu$$

**Теорема 4.2.1.** Ако функцията  $f$  е дефинирана и диференцируема в околността  $U_{x^0}$  на точката  $x^0$  и  $f'_{x_k}$  са непрекъснати в  $x_0$ , то съществува производната на  $f$  по посока на произволен вектора  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$  и тя се дава с формула:  $\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \text{grad } f(x^0)$

Ако,  $\nu$  е единичен вектор, т.е.  $\|\nu\| = 1$ .

Тогава е в сила неравенството  $\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| \leq \|\text{grad } f(x^0)\|$ , което следва от неравенство на Коши.

$$\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| = |\text{grad } f(x^0), \nu| \leq \|\text{grad } f(x^0)\| \|\nu\| = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

Равенство се достига само когато  $\nu$  и  $f(x^0)$  са колинеарни (еднопосочни или успоредни). тогава

$$\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

Ако вектора  $\nu$  е колинеарен с градиента, тогава векторът  $\nu = \frac{\text{grad } f(x^0)}{\|\text{grad } f(x^0)\|}$  и тогава

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \left( \text{grad } f(x^0), \frac{\text{grad } f(x^0)}{\|\text{grad } f(x^0)\|} \right) = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

Ако  $\text{grad } f(x^0) \neq 0$  то производната достига най голяма стойност единствено, ако диференцирането се извършва по посока на градиента. С други думи, посоката на градиента е посоката на най бързо нарастване на функцията, а големината му е равна на производната по тази посока.

Ако  $\nu = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m)$ , то производната по посока  $\nu$  става

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = f'_{x_1}(x^0) \cos \alpha_1 + f'_{x_2}(x^0) \cos \alpha_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0) \cos \alpha_m.$$

### 4.3 Допирателна равнина. Нормална права

- $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  - точка в  $\mathbb{R}^2$
- $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  точка в  $\mathbb{R}^3$
- $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$  - околност на  $(x_0, y_0)$
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  - функция
- $z_0 = f(x_0, y_0)$
- $S : z = f(x, y) \iff S : f(x, y) - z = 0$  - уравнение на равнина
- $f'_x, f'_y$  - първи частни производни за всички  $(x, y) \in U$ ,  $f'_x, f'_y$  са непрекъснати в точката  $(x_0, y_0)$

**Дефиниция 4.3.1.** Равнината  $\tau(\tau \nparallel Oz)$ , зададена с уравнение

$$\tau : z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина в точката  $M_0$  към повърхнината  $S$  и представлява графиката на  $f(x, y)$ .

**Дефиниция 4.3.2.** Векторите  $n_1, n_2$

$$n_1(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) \quad n_2(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1),$$

които са нормални вектори на тангенциалната равнина, се наричат нормални вектори и за повърхнината  $S$ .

$n_1 = -n_2$  Това позволява да се използват за ориентация на повърхнината  $S$ .

Горната страна се дефинира с вектора  $n_1$  за който ъгъл  $\angle(n_1, k)$  е остър.

**Дефиниция 4.3.3.** Правата  $n$ , зададена с уравнение

$$n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$

се нарича нормала към повърхнината  $S$  към точка  $M_0$

Ако прекараме две равнини през  $O$  съответно  $\alpha : x = x_0$  и  $\beta : y = y_0$  всяка от тях пресича повърхнината в крива линия съответно

$$C_1 : x = x_0, y = y, z = f(x_0, y) \quad C_2 : x = x, y = y_0, z = f(x, y_0)$$

$t_1$  е направляващ вектор на допирателната права на кривата  $C_1$  в точката  $0$ , а с  $t_2$  - направляващ вектор на допирателната права на кривата  $C_1$  в същата точката, то

$$t_1(0, 1, f'_y(x_0, y_0)), \quad t_2(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$$

Равнината  $\tau$  е компланарна с векторите  $t_1, t_2$  то нейния нормален вектор може да се получи от векторното им произведение

$$n_1 = t_2 \times t_1 \quad n_2 = t_1 \times t_2$$

**Пример 4.3.1.** За повърхнина  $S$ , зададена с уравнение  $S : z = x^2 + y^2 + 3$ , да се напишат:

- 1) допирателната равнина  $\tau$  в  $M_0(0, 0, 3)$
- 2) нормалните вектори на  $\tau$  в т.  $M_0$ .
- 3) нормалата на повърхнината  $S$  в т.  $M_0$ .

Решение:

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x ; z'_y = 2y ; M_0(0, 0, 3) = M_0(x_0, y_0, z_0) \\ z'_x(x_0, y_0) &= z'_x(0, 0) = 0 ; z'_y(x_0, y_0) = z'_y(0, 0) = 0 \\ 1) \tau : z - z_0 &= z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \tau : z - 3 &= 0x + 0y \iff \tau : z = 3 \\ 2) \vec{n}_1 &= (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) = (0, 0, 1) \\ \vec{n}_2 &= (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1) = (0, 0, -1) \\ 3) n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} &= \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1} \\ n : \frac{x - 0}{0} &= \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 3}{1} = \lambda \\ n(0, 0, \lambda + 3), \lambda &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

## 5 Лекция 5: Неявни функции. Съществуване и диференциране

### 5.1 Неявни функции

Нека имаме уравнението  $F(x, y) = 0$  и да се реши спрямо  $y$ . Решението трябва да зависи и от другата променлива. Нека  $y = f(x)$  и заместваме в началното уравнение.

$$F(x, f(x)) = 0$$

**Дефиниция 5.1.1.** Ако функцията  $f(x)$  удовлетворява равенството

$$F(x, f(x)) = 0$$

за всяко  $x$  от дефиниционното си множество, то тя се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението  $F(x, y) = 0$ .

Ако диференцираме равенството  $F(x, f(x)) = 0$  по  $x$  с теоремата за съставни функции получаваме

$$F'_x(x, f(x)) + f'(x)F'_y(x, f(x)) = 0 \implies f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

Където  $F'_y(x, f(x)) \neq 0$

**Пример 5.1.1.**  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$

$$F(x, y) = 0 \iff y^2 = 5 - x^2$$

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{5 - x^2}$$

Нека  $M_0(x_0, y_0)$  точка в  $\mathbb{R}^2$ , отвореното множество  $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$  е нейна околност и нека  $F \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Теорема 5.1.1** (Съществуване на неявна функция). Нека  $M_0(x_0, y_0)$  точка в  $\mathbb{R}^2$ , отвореното множество  $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$  е нейна околност и функцията  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворява следните условия

1.  $F$  е непрекъсната в  $U$
2.  $F(x_0, y_0) = 0$
3. За всяка точка  $(x, y) \in U \exists F'_y(x, y)$
4.  $F'_y$  е непрекъсната в  $M_0$

$$5. \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Тогава съществуват околности

$$X = \{x : |x - x_0| < a\} (a > 0) \quad Y = \{y : |y - y_0| < b\} (b > 0)$$

такива че правоъгълника  $\Pi = X \times Y \subset U$  и съществува единствена функция  $y = f(x), f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  - непрекъсната в  $X$ ,  $f(x_0) = y_0$  и  $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$

**Дефиниция 5.1.2.** Функцията  $y = f(x)$  се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението  $F(x, y) = 0$ , в околност на точката  $(x_0, y_0)$

**Теорема 5.1.2** (Добавка към 5.1.1). Ако освен това  $F'_x, F'_y$  са дефинирани в  $U$  и непрекъснати в  $(x_0, y_0)$  то  $f(x)$  е диференцируема в точката  $x_0$  и  $f'(x_0)$  се изразява

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

Ако  $F'_x, F'_y$  са непрекъснати в  $U = U_{M_0}$ , то  $f'$  е непрекъсната в  $X$ . Прилагайки формулата за производна в произволна точка в  $x \in X$  получаваме

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (1)$$

Аналогично се формулира теоремата за неявна функция от уравнението  $F(x, y) = 0$ , за  $x(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  ( $m > 2$ ) и  $y \in \mathbb{R}$  т.е  $F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$

**Теорема 5.1.3** (Съществуване на неявна функция). Нека точката  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ ,  $M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$  и  $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$  е околност на  $M_0$  и функцията  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворява следните условия

1.  $F$  е непрекъсната в  $U$
2.  $F(x^0, y_0) = 0$
3. За всяка точка  $(x, y) \in U \exists F'_y(x, y)$
4.  $F'_y$  е непрекъсната в  $M_0$
5.  $F'_y(x^0, y_0) \neq 0$



Тогава съществуват околности:

$$X = \{x : |x - x_k^0| < a_k\} (a_k > 0) \quad k = 1 \div m; \quad Y = \{y : |y - y_0| < b\} (b > 0)$$

такива че правоъгълника  $\Pi = X \times Y \subset U, X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$  и освен това съществува единствена функция  $y = f(x), f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  - непрекъсната в  $X$ ,  $f(x^0) = y_0$  и  $\forall x \in X : F(x; f(x)) = 0$

Ако освен това  $F'_{x_k}, k = 1 \div m$  и  $F'_y$  са дефинирани в  $U$  и непрекъснати в  $(x^0, y_0)$ , то  $f(x)$  е диференцируема в точката  $x^0$  и  $f'(x_k^0)$  се изразява с формулата

$$f'(x_k^0) = -\frac{F'_{x_k}(x^0, f(x_0))}{F'_y(x^0, f(x_0))} = -\frac{F'_{x_k}(x^0, y_0)}{F'_y(x^0, y_0)}$$

**Пример 5.1.2.**  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ . Да се определи дали съществува единствена функция  $y = f(x)$  определена от неявно от уравнението  $F(x, y) = 0$  в околността  $(1, 2)$ . Ако съществува да се пресметне  $f'(1)$ .

$$F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4 \neq 0$$

Съществува единствена неявна функция  $y = f(x)$  определена с уравнението  $F(x, y) = 0$

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

$$F'_x = 2x, \quad F'_x(1, 2) = 4, \quad F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4$$

$$f'(1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

**Пример 5.1.3.**  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3z^2 - 13$ . Да се определи дали съществува единствена функция  $z = f(x, y)$  определена от неявно от уравнението  $F(x, y, z) = 0$  в околността  $(0, 1, 2)$ . Ако съществува да се пресметне  $z'_x(0, 1), z'_y(0, 1)$ .

$$F'_z = 6z \implies F'_z(0, 1, 2) = 6 \cdot 2 = 12 \neq 0$$

Съществува единствена неявна функция  $z = f(x, y)$  определена от неявно от уравнението

$$F'_x = 2x \implies F'_x(0, 1, 2) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$F'_y = 2y \implies F'_y(0, 1, 2) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{0}{6} = 0$$

$$z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Ако  $F'_{x_k}, F'_{y_k}$  са непрекъснати в  $U = U_{M_0}$ , то  $f'_{x_k}$  е непрекъснатата в  $X$ . Прилагайки формулата за производна в произволна точка в  $x \in X$  получаваме

$$y'_{x_k} = f'_{x_k}(x) = -\frac{F'_{x_k}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_{x_k}(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (2)$$

Ако  $F$  има непрекъснати частни производни от втори ред, то изразите от дясната страна на (1) (съответно (2)) могат да се диференцират още веднъж по променлива  $x(x_j, j = 1 \div m)$ , при което се получават вторите производни на  $f$ . Така се получават формулите

$$f''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

респективно, изпускайки за удобство променливите получаваме

$$f''_{x_k x_k}(x) = f''_{x_k^2}(x) = -\frac{F''_{x_k^2} + 2F''_{x_k y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'^2_{x_k}}{F'_y}$$

и за  $k \neq j$

$$f''_{x_k x_j}(x) = -\frac{F''_{x_k x_j} + F''_{x_k y}y'_{x_j} + F''_{x_j y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'_{x_k}y'_{x_j}}{F'_y}$$

**Пример 5.1.4.** Да се намери  $y', y''$  на неявната функция  $y = f(x)$ , дефинирана от уравнението

$$x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

Да се пресметнат  $y'(0), y''(0)$ , ако  $y(0) = 1$

Решение:

$$F(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

$$F'_y = -2x + 10y + 4 \neq 0$$

$$F'_x(x, y) = 2x - 2y - 2$$

$$F'_y(0, 1) = -2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4 \neq 0$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x - 2y - 2}{-2x + 10y + 4} = -\frac{x - y - 1}{-x + 5y + 2}$$

$$y'(0) = -\frac{0 - 1 - 1}{-0 + 5 \cdot 1 + 2} = -\frac{-2}{7} = \frac{2}{7}$$

$$y''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

$$F''_{xx} = 2, \quad F''_{yy} = 10, \quad F''_{xy} = -2$$

$$F''_{xx}(0, 1) = 2, \quad F''_{yy}(0, 1) = 10, \quad F''_{xy}(0, 1) = -2$$

$$y''(x) = -\frac{2 + 2 \cdot (-2)y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$

$$y''(x) = -\frac{2 + -4y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$

$$y''(0) = -\frac{2 + -4 \cdot \frac{2}{7} + 10 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2}{-2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4}$$

$$y''(0) = -\frac{2 + -\frac{8}{7} + \frac{40}{49}}{14}$$

$$y''(0) = -\frac{98 - 56 + 40}{49 \cdot 14} = -\frac{82}{49 \cdot 14} = \frac{82}{49} \cdot \frac{1}{14} = \frac{41}{343}$$

## 6 Лекция 6: Формула на Тейлор за функция на няколко променливи. Локални екстремуми на функция на няколко променливи

### 6.1 Формула на Тейлор за функция на няколко променливи

Формула на Тейлор за функцията  $f$  дефинирана и непрекъсната в околност  $U = U_{x_0}$  на точката  $x_0$ , която има производни до  $(n+1)$  ред ( $n \in \mathbb{N}_0$ )

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x)$$

с остатъчен член записан във формата на Лагранж

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Нека имаме точката  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , околността  $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$ , която е звездообразна относно  $(x_0, y_0)$  (Всяка точка  $(x, y) \in U$  околността съдържа и отсечка, която я свързва с  $(x_0, y_0)$ ). Без ограничение на общостта считаме, че  $U$  е  $\delta$ -околност на  $(x_0, y_0)$  (отворен кръг с център  $(x_0, y_0)$  и радиус  $\delta$ ). Функцията  $f$  е дефинирана в  $U$ .

**Теорема 6.1.1.** Нека функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  е дефинирана и непрекъсната в  $\delta$ -околността  $U$  на точката  $(x_0, y_0)$ , заедно с частните производни от  $n+1$ -ви ред ( $n \in \mathbb{N}_0$ ). Нека  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$ .

Тогава съществува  $\vartheta = \vartheta(\Delta x, \Delta y)$ , ( $0 < \vartheta < 1$ ) за която

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + \\ &\frac{1}{3!} \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^3 f(x_0, y_0) + \dots + \\ &\frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y) \end{aligned}$$

или по кратко

$$\Delta z = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y) \quad (3)$$

където

$$r_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n+1} f(x_0 + \vartheta \Delta x, y_0 + \vartheta \Delta y) \quad (4)$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

**Дефиниция 6.1.1.** Формулата (3) се нарича формула на Тейлор от ред  $n$  за функция  $f$ , а функцията  $r_n$  - остатъчен член, а записът му във вида (4) се нарича остатъчен член на формулата на Тейлор във формата на Лагранж.

Ако  $n = 0$ , първото събираемо изисква разяснение, защото индексът над знака за сумиране е по малък от индекса под знака за сумиране. В този случай по дефиниция този член е равен на нула, т.е. формулата има вид

$$\Delta z = r_0(\Delta x, \Delta y)$$

**Теорема 6.1.2.** Нека функцията  $f : U \rightarrow R$  дефинирана и непрекъснатата в  $\delta$ -околността  $U$  на точката  $x^0$ , заедно с частните производни от  $n+1$ -ви ред ( $n \in \mathbb{N}_0$ ). Нека  $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2} < \delta$ .

Тогава съществува  $\vartheta = \vartheta(\Delta x) = \vartheta(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ , ( $0 < \vartheta < 1$ ) за която

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x) - f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = \\ &= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta x_m \right)^k f(x_1^0, \dots, x_m^0) + r_n(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \end{aligned}$$

Където

$$r_n(\Delta x) = \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta x_m \right)^{n+1} f(x^0 + \vartheta \Delta x),$$

$$(x^0 + \vartheta \Delta x) = (x_1^0 + \vartheta \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \vartheta \Delta x_m) \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Записано с диференциали

$$\Delta z = f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^n d^k f(x^0) + r_n(\Delta x)$$

при  $n = 1$

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + r_1(\Delta x, \Delta y) \\ r_1(\Delta x, \Delta y) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{\partial x^2} \Delta x^2 \right] + \frac{\partial^2 f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right]\end{aligned}$$

**Пример 6.1.1.** Да се напише формулата на Тейлор за  $f(x, y) = e^{x+y}$  в точката  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,  $n = 1$

$$\begin{aligned}f'_x &= e^{x+y} \quad f'_y = e^{x+y} \quad f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yy} = e^{x+y} \\ f(0, 0) &= f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 1 \\ \xi &= (\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = \vartheta x, \quad \xi_2 = \vartheta y, \quad \vartheta \in (0, 1) \\ f''_{xx}(\xi_1, \xi_2) &= f''_{xy}(\xi_1, \xi_2) = f''_{yx}(\xi_1, \xi_2) = f''_{yy}(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1 + \xi_2} = e^{\vartheta(x+y)} \\ f(x, y) &= 1 + 1x + 1y + \frac{1}{2!} (e^{\vartheta(x+y)} x^2 + 2e^{\vartheta(x+y)} xy + e^{\vartheta(x+y)} y^2) \\ &= 1 + (x + y) + \frac{e^{\vartheta(x+y)}}{2!} (x + y)^2\end{aligned}$$

## 6.2 Локални екстремуми на функция на няколко променливи

**Дефиниция 6.2.1.** Казваме че функцията  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  има локален максимум в точката  $x^0 \in D$ , ако съществува околност  $U_{x^0} \subset D$  на точката  $x^0$ , че

$$f(x^0) \geq f(x), \quad \forall x \in U_{x^0}$$

**Дефиниция 6.2.2.** Казваме че функцията  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  има локален минимум в точката  $x^0 \in D$ , ако съществува околност  $U_{x^0} \subset D$  на точката  $x^0$ , че

$$f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in U_{x^0}$$

**Дефиниция 6.2.3.** Локалните максимуми и локалните минимуми се наричат по - общо локални екстремуми.

**Дефиниция 6.2.4.** Ако неравенството в дефинициите (6.2.1) или (6.2.2) е строго при  $x \neq x^0$ , то съответния локален екстремум се нарича строг локален екстремум (строг локален максимум или строг локален минимум).

**Теорема 6.2.1** (Необходимо условие). Нека функцията  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  притежава локален екстремум в  $x^0 \in D \subset \mathbb{R}^m$  и освен това съществуват първите частни производни  $f'_{x_k}(x^0)$  в точката  $x^0$ ,  $k = 1 \div m$  тогава

$$f'_{x_k}(x^0) = 0 \quad k = 1 \div m$$

**Дефиниция 6.2.5.** Точката  $x^0$  се нарича стационарна точка за функцията  $f$ , диференцируема в нея, ако  $\text{grad } f(x^0) = 0$ .

**Пример 6.2.1.** Тук са разгледани две функции които са дефинирани и диференцируеми в цялата равнина  $\mathbb{R}^2$ , но нямат локални екстремуми

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{x+y} \\ f'_x(x, y) &= f'_y(x, y) = e^{x+y} \neq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy \\ f'_x(x, y) &= x \quad f'_y(x, y) = y \\ \text{grad } f(x, y) &= (y, x) = (0, 0) \\ f(x, y) - f(0, 0) &= xy - 0 = xy \implies \end{aligned}$$

няма локален екстремум (сменя знака си във всяка произволно взета околност на точката  $(0,0)$ ). Точката  $(0,0)$  е седловина на хиперболичната повърхнина  $z = xy$ .

### 6.3 Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция

**Теорема 6.3.1** (Достатъчно условие). Нека функцията  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  притежава непрекъснати частни производни  $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$  от втори ред в околността  $U$  и точката  $(x_0, y_0)$  е стационарна точка  $f$ , т.е

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Тогава

1. Ако

$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0$$

то  $f(x, y)$  има локален екстермум в  $(x_0, y_0)$ .

2. Ако

$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 < 0$$

то  $f(x, y)$  няма локален екстермум в  $(x_0, y_0)$ .

3. Ако

$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 = 0$$

то  $f(x, y)$  може да има локален екстремум в  $(x_0, y_0)$ , така и да няма такъв.

**Пример 6.3.1.** Да се намерят екстремумите на (ако съществуват) и да се определи видът им.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = -x^2 - y^2$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f'_x = 2x \quad f'_y = 2y$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0 \implies \exists \text{екстремум}$$

$$f''_{xx} = 2 > 0 \implies \text{екстремума е минимум } f_{min} = f(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$$

$$f(x, y) = -x^2 - y^2$$

$$f'_x = -2x \quad f'_y = -2y$$

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = -2 \quad f''_{yy} = -2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0 \implies \exists \text{екстремум}$$

$$f''_{xx} = -2 < 0 \implies \text{екстремума е максимум } f_{max} = f(0, 0) = -0^2 - 0^2 = 0$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$f'_x = 2x \quad f'_y = -2y$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = -2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 2(-2) - 0 = -4 < 0 \implies \text{няма екстремум}$$



**Пример 6.3.2.** Да се намерят екстремумите на (ако съществуват) и да се определи видът им.

- $f(x, y) = y^4 + x^2$
- $f(x, y) = -y^4 - x^2$
- $f(x, y) = y^3 + x^2$
- $f(x, y) = xy^3$
- $f(x, y) = (x + y)^2$
- $f(x, y) = -(x + y)^2$

$$f(x, y) = y^4 + x^2$$

$$f'_x = 2x \quad f'_y = 4y^3$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 12y^2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 2(12y^2) - 0 = 24y^2 = 0 \implies \text{трябва допълнително изследване}$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = y^4 + x^2 - (0^4 + 0^2) = y^4 + x^2 \geq 0$$

$$y^4 + x^2 = 0 \iff x = y = 0$$

$$f(x, y) - f(0, 0) \geq 0 \iff f(x, y) \geq f(0, 0) \text{ в } \mathbb{R}^2 \implies \text{локален минимум}$$

$$f_{min} = f(0, 0) = 0^4 + 0^2 = 0$$

$$f(x, y) = -y^4 - x^2$$

$$f'_x = -2x \quad f'_y = -4y^3$$

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -4y^3 = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = -2 \quad f''_{yy} = -12y^2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = -2(-12y^2) - 0 = 24y^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване}$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = -y^4 - x^2 - (-0^4 - 0^2) = -y^4 - x^2 \geq 0 \iff y^4 + x^2 \leq 0$$

$$y^4 + x^2 = 0 \iff x = y = 0$$

$$f(x, y) - f(0, 0) \leq 0 \iff f(x, y) \leq f(0, 0) \text{ в } \mathbb{R}^2 \implies \text{локален максимум}$$

$$f_{max} = f(0, 0) = -0^4 - 0^2 = 0$$

$$f(x, y) = y^3 + x^2 f'_x = 2x \quad f'_y = 3y^2$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 6y \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 2(6y) - 0 = 12y^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване}$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = y^3 + x^2 - (0^3 + 0^2) = y^3 + x^2$$

За всяка точка от положителната ординатна ос ( $x > 0, y > 0$ )  $f(x, y) - f(0, 0) > 0$

За всяка точка от отрицателната ординатна ос ( $x < 0, y < 0$ )  $f(x, y) - f(0, 0) < 0$

$\implies f(x, y) - f(0, 0)$  Няма постоянен знак във всяка околност на  $M_0$

$\implies f(x, y)$  няма локален екстремум в  $0$  и точката  $M_0$  е седловинна точка

$$f(x, y) = xy^3 f'_x = y^3 \quad f'_y = 3xy^2$$

$$\begin{cases} y^3 = 0 \implies y = 0 \\ 3xy^2 = 0 \implies x = 0 \text{ или } x \neq 0 \end{cases} \implies$$

Стационарните точки са безкрайно много

$$M_0(x, 0) (x \in \mathbb{R})$$

$$1. x_0 = 0, y = 0 \implies M_0 = (0, 0)$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = xy^3 - 0 = xy^2$$

I и III квадрант -  $xy > 0$ , а във II и IV -  $xy < 0, y^2 > 0 \implies$

Сменя знака си  $\implies f$  няма локален екстремум в  $0$

$$2. x_0 \neq 0, y = 0 \implies M_1 = (x_0, 0)$$

$$\Delta f = f(x_0, y) - f(x_0, 0) = x_0 y^3 - x_0 0^3 \implies$$

$$\Delta f = y^2(x_0 y)$$

$$x_0 > 0 \implies \begin{cases} \Delta f > 0, & y > 0 \\ \Delta f < 0, & y < 0 \end{cases} \implies \Delta f \text{ сменя знака си в околността на } M_1$$

Аналогично за  $x_0 < 0$  знакът не се запазва

$\implies f$  няма локален екстремум в точката  $M_1 \implies f$  няма локални екстремуми

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x + y)^2 \\ f'_x &= 2(x + y) \quad f'_y = 2(x + y) \\ \left| \begin{array}{l} 2(x + y) = 0 \\ 2(x + y) = 0 \end{array} \right. &\iff x + y = 0 \iff -x = y \implies \end{aligned}$$

Стационарни точки са всички точки от ъглополовящата на II и IV квадрант

- от правата  $x + y = 0$ , т.е.  $M(x_0, -x_0), x_0 \in \mathbb{R}$

$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{xy} = 2,$$

$$\Delta = 2 \cdot 2 - (2)^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване}$$

$$f(x, y) - f(x_0, -x_0) = (x + y)^2 - (x_0 - x_0)^2 = (x + y)^2 \geq 0 \implies$$

$f$  има локален минимум във всяка точка от вида  $M(x_0, -x_0)$ ,

$$f_{min} = (x_0 - x_0)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -(x + y)^2 \\ f'_x &= -2(x + y) \quad f'_y = -2(x + y) \\ \left| \begin{array}{l} -2(x + y) = 0 \\ -2(x + y) = 0 \end{array} \right. &\iff x + y = 0 \iff -x = y \implies \end{aligned}$$

Стационарни точки са всички точки от ъглополовящата на II и IV квадрант

- от правата  $x + y = 0$ , т.е.  $M(x_0, -x_0), x_0 \in \mathbb{R}$

$$f''_{xx} = -2, \quad f''_{yy} = -2, \quad f''_{xy} = -2,$$

$$\Delta = (-2)(-2) - (-2)^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване}$$

$$f(x, y) - f(x_0, -x_0) = -(x + y)^2 + (x_0 - x_0)^2 = -(x + y)^2 \leq 0 \implies$$

$f$  има локален максимум във всяка точка от вида  $M(x_0, -x_0)$ ,

$$f_{max} = (x_0 - x_0)^2 = 0$$

## 7 Лекция 7: Локални екстремуми на функция на няколко променливи. Екстремум на неявна функция

### 7.1 Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция II

Нека точката  $x^0 \in \mathbb{R}^m$ , ( $m \geq 2$ ), отвореното множество  $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$  е нейна околност и функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  е поне два пъти непрекъснато диференцируема в  $U$  а точката  $x^0$  е стационарна точка за  $f$ . В този случай изследванията се свеждат до използване на формулата на Тейлор с  $n = 1$

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^m f'_{x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

$$\xi := x^0 + \vartheta(x - x^0), \quad \vartheta = \vartheta(x) \in (0, 1)$$

Първите частни производни имат стойност 0 в стационарните точки

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

**Дефиниция 7.1.1.** Квадратична форма  $A$

$$A(x) = A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i x_j$$

се нарича положително дефинирана (отрицателно дефинирана) ако за всеки ненулев вектор  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  е изпълнено

$$A(x) > 0 \quad (A(x) < 0)$$

и знакопроменлива, ако за вектори

$$x, y \in \mathbb{R}^m : \quad A(x) > 0 \quad A(y) < 0$$

**Теорема 7.1.1** (Достатъчно условие). Нека функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  притежава непрекъснати частни производни  $f''_{x_i x_j}(i, j = 1 \div m)$  от втори ред в околността  $U$  на точката  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$  и е стационарна точка

$$f_{x_i}(x^0) = f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0) = 0 \quad (i = 1 \div m)$$

Тогава ако квадратичната форма (втори диференциал)

$$A(dx_1, \dots, dx_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j$$

е положително дефинитна квадратична форма, то точката  $x^0$  е строг локален минимум за функцията  $f$ .

Ако е отрицателно дефинитна квадратична форма, то точката  $x^0$  е строг локален максимум за функцията  $f$ .

Ако е недефинитна, то  $f$  няма локален екстремум.

Ако изразът е равен на 0 може да има локален, но може и да няма.

**Теорема 7.1.2** (Критерий на Силвестър). Квадратичната форма  $A$  дефинирана в (7.1.1) в която  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $(i, j = 1 \div m)$  е положително дефинитна тогава и само тогава когато,

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

и отрицателно дефинитна ( $-A(x)$  е положително дефинитна) тогава и само тогава, когато

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \dots, \quad (-1)^k \Delta_k > 0 (k = 1 \div m)$$

**Пример 7.1.1.** Да се разгледат функциите в точката  $M_0(1, 2, -3)$

- $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z$
- $u = -x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z$
- $u = x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 6z$

$$\begin{aligned} \Delta_1(M_0) &= u''_{xx}(M_0), \\ \Delta_2(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} \\ \Delta_3(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u &= x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z \\
 u'_x &= 2x - 2 & u'_y &= 2y - 4 & u'_z &= 2z - 6 \\
 u''_{xx} &= 2 & u''_{xy} &= 0 & u''_{xz} &= 0 \\
 u''_{yx} &= 0 & u''_{yy} &= 2 & u''_{yz} &= 0 \\
 u''_{zx} &= 0 & u''_{zy} &= 0 & u''_{zz} &= 2 \\
 \Delta_1(M_0) &= u''_{xx}(M_0) = 2 > 0 \\
 \Delta_2(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\
 \Delta_3(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \implies
 \end{aligned}$$

Съгласно критерия на Силвестър вторият диференциал е положително дефинитна квадратична форма и има локален минимум

$$u_{min} = u(1, -2, 3) = -14$$

$$\begin{aligned}
 u &= -x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z \\
 u'_x &= -2x + 2 & u'_y &= -2y + 4 & u'_z &= -2z - 6 \\
 u''_{xx} &= -2 & u''_{xy} &= 0 & u''_{xz} &= 0 \\
 u''_{yx} &= 0 & u''_{yy} &= -2 & u''_{yz} &= 0 \\
 u''_{zx} &= 0 & u''_{zy} &= 0 & u''_{zz} &= -2 \\
 \Delta_1(M_0) &= u''_{xx}(M_0) = -2 < 0 \\
 \Delta_2(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\
 \Delta_3(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \implies
 \end{aligned}$$

Съгласно критерия на Силвестър вторият диференциал е отрицателно дефинитна квадратична форма и има локален максимум

$$u_{max} = u(1, -2, 3) = 14$$

$$\begin{aligned}
u &= x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 6z \\
u'_x &= 2x - 2 & u'_y &= 2y - 4 & u'_z &= -2z - 6 \\
u''_{xx} &= 2 & u''_{xy} &= 0 & u''_{xz} &= 0 \\
u''_{yx} &= 0 & u''_{yy} &= 2 & u''_{yz} &= 0 \\
u''_{zx} &= 0 & u''_{zy} &= 0 & u''_{zz} &= -2 \\
\Delta_1(M_0) &= u''_{xx}(M_0) = 2 > 0 \\
\Delta_2(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\
\Delta_3(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \implies
\end{aligned}$$

Не е дефинитна квадратична форма  $\implies$  няма локален екстремум

## 7.2 Локален екстремум на неявна функция

Нека

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$
- $M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$  - точка
- $U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$  - околност на  $M_0$
- $F : U_{M_0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x^0, y_0) = 0$
- $\exists F'_x, F'_y : F'_y(M_0) \neq 0, F'_y$  е непрекъсната в  $M_0$

Тогава уравнението  $F(x, y) = 0$  дефинира неявната функция  $f$  в околност  $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$  на точката  $x^0$

$$f : U \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x^0) = y_0$$

Възможно е да има локални екстремуми. Тяхното намиране се осъществява по познатия ни алгоритъм.

В случая  $m = 1$  неявната функция  $f$  е на една променлива съгласно формулата

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

стационарните точки се намират като решения на система

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y) \neq 0 \end{cases}$$

Евентуално съществуване на екстремум може да се установи от знака на  $f''(x^0)$  тъй като по формула

$$f''(x^0) = -\frac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

**Пример 7.2.1.** Уравнението  $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$  задава четири неявни функции  $y = f_k(x)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) според това в кой квадрант се намира точката, в чиято околност се търси неявната функция.

Нека

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

то уравнението  $F(x, y) = 0$  задава единствена неявна функция в околността на някоя точка, само ако

$$F'_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2 + 1) \neq 0$$

в нея което дава  $y \neq 0$

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 \\ 4y \neq 0 \end{cases}$$

$x = 0$  не е решение системата е еквивалентна

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 1 - 2(2x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 3 \\ 4y^2 = 1 \end{cases}$$

От където се получават 4 точки

$$M_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), M_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), M_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), M_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Нека  $y = f_k(x)$  е неявна функция дефинирана в околността на точката  $M_k$ . Тъй като  $F''_{xx}(x, y) = 4(3x^2 + y^2 - 1) > 0$  за точките  $M_k$  то знакът се определя от стойността на  $F'_y(M_k) = 8y_k$

$$f''_1(x_1) < 0 \quad f''_2(x_2) < 0 \implies \text{максимум със стойност } \frac{1}{2}$$



$$f_3''(x_3) > 0 \quad f_4''(x_4) > 0 \implies \text{минимум със стойност } -\frac{1}{2}$$

$F_y'(0,0) = 0$  е точка на самопресичане на леминската на Бернули, чието уравнение е дадено в този пример.

Ако  $m > 1$  неявната функция е на повече променливи и се намира като решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} F_{x_k}'(x, y) = 0 \quad k = 1 \div m \\ F(x, y) = 0 \\ F_y'(x, y) \neq 0 \end{array} \right.$$

Стойностите на вторите частни производни в стационарните точки са

$$f_{x_k x_k}''(x^0) = -\frac{F_{x_k x_k}''(x^0, y_0)}{F_y'(x^0, y_0)} \quad f_{x_k x_j}''(x^0) = -\frac{F_{x_k x_j}''(x^0, y_0)}{F_y'(x^0, y_0)} \quad (k \neq j)$$

## 8 Лекция 8: Условни и абсолютни екстремуми на функцията на няколко променливи

### 8.1 Условни екстремуми на функцията на няколко променливи

Нека  $D \subset \mathbb{R}^m$  и функциите  $f, \varphi_n : D \rightarrow \mathbb{R} (n = 1, 2, \dots, k)$  са дефинирани и два пъти непрекъснато диференцируеми в  $D$ . Нека  $E$  е множеството от точки  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D$ , за които дадената функция  $\varphi_n$

$$E = \{x | \varphi_n(x) = 0, n = 1, 2, \dots, k, \quad x \in D\}$$

**Дефиниция 8.1.1.** Уравненията

$$\varphi_n(x) = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, k)$$

се наричат условния на връзките.

**Дефиниция 8.1.2.** Точката  $x^0 \in D$  се нарича точка на условен екстремум на  $f$  при условие, че са изпълнени условия на връзките (8.1.1), ако тя е точка на обичаен (локален) екстремум на тази функция, разглеждана само върху множеството  $E$ , в което са изпълнени дадените условия. С други думи стойността  $f(x^0)$  се сравнява не със всички стойности в околността на  $x^0$ , а само с тези от множеството  $E$ .

За да се изследва за екстремум функцията  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  при ограничения

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \dots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{array} \right.$$

се конструира функцията на Лагранж.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) + \sum_{n=1}^k \lambda_n \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Където  $\lambda_n, n = 1, 2, \dots, k$  се наричат множители на Лагранж. За получената функция се решава задача за локален екстремум, като стационарните

точки са решения на следната система:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}{\partial x_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}{\partial x_m} = 0 \\ \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \dots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \lambda_n \neq 0, n = 1, 2, \dots, k \end{array} \right.$$

Видът на екстремума се определя от знака на втория диференциал в съответната стационарна точка.

**Теорема 8.1.1.** Нека  $D \subset \mathbb{R}^m$  и функциите  $f, \varphi_n : D \rightarrow \mathbb{R} (n = 1, 2, \dots, k)$  са дефинирани и два пъти непрекъснато диференцируеми в  $D$ . Ако точката  $x^0$  удовлетворява условията на връзките и е стационарна точка за функцията на Лагранж и ако вторият диференциал на функцията на Лагранж в тази точка е положително/отрицателно дефинитна квадратична форма на променливите  $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$  при условие че те удовлетворяват системата от уравнения

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_m} dx_m = 0, n = 1, \dots, k$$

то точката  $x^0$  е точка на строг условен минимум/максимум за дадената функция, относно уравненията на връзките.

**Пример 8.1.1.** Ако  $E \subset \mathbb{R}^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x + y = s$  да се намери минимум на функцията  $f(x, y) = x^2 + y^2$  върху  $E$ .

$$\begin{aligned} L(x, y; \lambda) &= f(x, y) + \lambda(s - x - y) = x^2 + y^2 + \lambda(s - x - y) \\ L''_{xx} &= 2 \quad L''_{yy} = 2 \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 0 \\ (x_0, y_0) &= \left( \frac{s}{2}, \frac{s}{2} \right) \\ L_{min} &\implies f_{min} = f(x_0, y_0) = f\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) = \frac{s^2}{2} \end{aligned}$$

## 8.2 Абсолютни екстремуми на функция на няколко променливи

В много случаи е важно да се намерят най-голямата и най-малката стойност на дадена функция върху цялото дефиниционно множество, т.е. **абсолютният (глобалният) минимум и максимум на функцията**. Да предположим, че дефиниционното множество  $D \subset \mathbb{R}^m$  на функцията  $f(x)$  е компактно множество в  $\mathbb{R}^m$ . Тогава по теоремата на Вайерщрас (Теорема 2.4.1),  $f(x)$  достига най-малката и най-голямата си стойност в някакви точки на  $D$ . Тогава се получават следните две алтернативни възможности: **абсолютният максимум може да се достигне във вътрешна или контурна точка на  $D$** . Ако максимумът се достига във вътрешна точка, то той е и локален, и ние можем да използваме развитата дотук теория. Разбира се, всичко казано тук се отнася и за абсолютния минимум. Ако екстремумът е в точка от контура  $\partial D$  на дефиниционната област, то той е условен екстремум, и може да бъде намерен по алгоритъма, описан в предния параграф. Така задачата за намиране на абсолютните екстремуми се свежда до намирането на стационарните точки в множеството и локалните екстремуми, условните екстремуми по контура (или съставните му части) и сравняването на тези стойности. Най-голямата от тях е абсолютен максимум, а най-малката е абсолютен минимум. По-долу, за по-голяма яснота е разгледан следният пример.

**Пример 8.2.1.** Ако  $E \subset \mathbb{R}^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1$  да се намерят най малката и най голямата стойност на функцията  $f(x, y) = x^2 + y^2$  върху  $E$ .

Решение:

$$M_0 = (0, 0) \in E$$

$$\Delta = 2 \cdot 2 - 0^2 > 0 \quad f''_{xx} = 2 > 0 \implies f_{min}$$

$$f_{min} = f(0, 0) = 0$$

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda(x + y - 1) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

$$L'_x = 2x + \lambda \quad L'_y = 2y + \lambda$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda = -1 \end{cases} \implies M_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$L''_{xx} = 2 \quad L''_{yy} = 2 \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 0$$

$$f_{min} = f(M_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x = -1 \Leftrightarrow g(y) = (-1)^2 + y^2 = y^2 + 1$$

$$g_{min} = g(0) = 1 = f_{min} \implies M_2(-1, 0)$$

$$y = -1 \Leftrightarrow h(x) = x^2 + (-1)^2 = x^2 + 1$$

$$h_{min} = h(0) = 1 = f_{min} \implies M_3(0, -1) \quad f(M_3) = 1$$

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y = -1 \end{array} \right. \implies M_4(2, -1) \quad \left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x = -1 \end{array} \right. \implies M_5(-1, 2)$$

$$f(-1, -1) = 2 \quad f(2, -1) = 5 \quad f(-1, 2) = 5$$

## 9 Лекция 9