

Математически анализ 2

Упражнения

Exonaut

19 април 2021 г.

Съдържание

1	Упражнение към лекция 1	3
1.1	Задачи	3
1.2	Решения	4
2	Упражнение към лекция 2	5
2.1	Задачи	5
2.2	Решения	7
3	Упражнение към лекция 3	10
3.1	Задачи	10
3.2	Решения	11
4	Упражнение към лекция 4	15
4.1	Задачи	15
4.2	Решения	16
5	Упражнение към лекция 5	21
5.1	Задачи	21
5.2	Решения	22
6	Упражнение към лекция 6	29
6.1	Задачи	29
6.2	Решения	31
7	Упражнение към лекция 7	35
7.1	Задачи	35
7.2	Решения	36
8	Упражнение към лекция 8	41
8.1	Задачи	41
8.2	Решения	44
9	Упражнение към лекция 9	45
9.1	Задачи	45
9.2	Решения	46
10	Упражнение към лекция 10	47
10.1	Задачи	47
10.2	Решения	48

Съдържание	2
11 Упражнение към лекция 11	49
11.1 Задачи	49
11.2 Решения	50

1 Упражнение към лекция 1

1.1 Задачи

Задача 1

Да се покаже дали посочените редици $\{X_n\} = \{x_n, y_n\}$ са сходящи или разходящи. За сходящите да се намери границите им.

1. $x_n = 1 + \frac{1}{n}, y_n = 2 + \frac{\sin n}{n}$

2. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, y_n = 2 + n$

3. $x_n = (-1)^n, y_n = n$

4. $x_n = (-1)^n, y_n = \frac{1}{n}$

5. $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}, y_n = (-1)^n$

6. $x_n = \sin n, y_n = \frac{(-1)^n}{n}$

1.2 Решения

Задача 1

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \frac{|\sin n|}{n} \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2 \implies$
редицата е сходяща; точката $(1,2)$ е нейна граница
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \implies$ разходяща редица
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не съществува, защото има две точки на сгъстяване., $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \implies$ разходяща редица
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не съществува, защото има две точки на сгъстяване., $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \implies$ разходяща редица
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не съществува, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \implies$ разходяща редица
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не съществува, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \implies$ разходяща редица

2 Упражнение към лекция 2

2.1 Задачи

Задача 1

Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ и са разгледани няколко функции. Да се напишат дефиниционните им множества и да се даде пояснение.

1. $z(x, y) = x^2 + y^2$

2. $z(x, y) = \sqrt{y^2 - 2x}$

3. $z(x, y) = \ln \sqrt{y^2 - 2x}$

4. $z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-y^2 + 2x + 1}}$

5. $w(x, y, z) = \arccos(x^2 + y^2 + z^2)$

6. $f(n) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}^m \\ 0, & x \in \overline{\mathbb{Q}^m} \end{cases}$

Задача 2

Разгледаните по - долу функциите са дефинирани в $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Кои от границите съществуват и колко са

$$A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \quad A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

1. $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$

2. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

3. $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$

4. $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}$

5. $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

Задача 3

Нека A, B, C, D са подмножества на \mathbb{R}^2 дефинирани както следва

$$A = \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 1, y > x\}$$

$$B = \{(x, y) : x \leq 1, y \geq 0, y < x\}$$

$$C = \{(x, y) : x = y, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$D = A \cup B \cup C$$

и функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ зададена по следния начин

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & (x, y) \in A \\ 0, & x = y \\ -\frac{1}{x^2}, & (x, y) \in B \end{cases}$$

Да се изследва непрекъснатостта на тази функция.

2.2 Решения

Задача 1

$$1. \quad z(x, y) = x^2 + y^2 \\ D = \mathbb{R}^2$$

$$2. \quad z(x, y) = \sqrt{y^2 - 2x} \\ D = \{(x, y) : y^2 - 2x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2, x \leq \frac{y^2}{2}$$

$$3. \quad z(x, y) = \ln \sqrt{y^2 - 2x} \\ D = \{(x, y) : y^2 - 2x > 0\} \subset \mathbb{R}^2, x < \frac{y^2}{2}$$

$$4. \quad z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-y^2 + 2x + 1}} \\ D = \{(x, y) : -y^2 + 2x + 1 > 0\} \subset \mathbb{R}^2, x > \frac{y^2 - 1}{2}$$

$$5. \quad w(x, y, z) = \arccos(x^2 + y^2 + z^2) \\ D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq \pi\} \subset \mathbb{R}^3, \\ \text{Графиката е кълбо с център } (0, 0, 0) \text{ и радиус } \sqrt{\pi}$$

$$6. \quad D \subset \mathbb{R}^m$$

Задача 2

1.

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{-y}{y} = -1 \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{x}{x} = 1$$

$$A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$$

$$A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$$

$$A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \text{ Не съществува, защото трябва } A_{1,2} = A_{2,1}$$

2.

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{y^2}{(-y)^2} = 1 \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\implies A_{1,2} = A_{2,1} = 1 \implies \exists A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

$$\text{Редица: } (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0), f(x_n, y_n) = 1 \rightarrow 1$$

$$\text{Редица: } (x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right) \rightarrow (0, 0), f(x'_n, y'_n) = \frac{2n^2}{1 + 4n^2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 1$$

$$\implies f(x, y) \text{ няма граница при } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

3.

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{0}{y^4} = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{0}{x^2} = 0$$

$$A_{1,2} = A_{2,1} = 0 \implies \exists A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

$$\text{Редица: } (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0), f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\implies f(x, y) \text{ няма граница при } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

4.

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}$$

$$0 \leq |f(x, y)| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \text{ и } |x| + |y| \rightarrow 0$$

$$A = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ - не съществува}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = y \cos \frac{1}{y} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

Аналогично и другата вътрешна граница не съществува. Но тогава и повторните граници $A_{1,2}$, $A_{2,1}$ не съществуват.

5.

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \\
\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) &= y^2 \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = x^2 \\
A_{1,2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (y^2) = 0 \\
A_{2,1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0 \\
\implies A &= A_{1,2} = A_{2,1} = 0
\end{aligned}$$

Задача 3

Функцията f е непрекъсната в A , защото е частно на две функции със знаменател $y^2 \neq 0$, в A .

Аналогично е непрекъсната в B защото знаменателя е $x^2 \neq 0$.

Остана да се изследва поведението върху C .

$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) &= (x_0, x_0) \in C \\
R &= \{(x_n, y_n)\}, (x_n, y_n) \in A \\
\lim_{n \rightarrow \infty} R &= (x_0, y_0) \\
\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) &= \frac{1}{y_0^2} = \frac{1}{x_0^2} \neq 0 \\
\text{Ако } x_0 &\neq 0, f(x_0, y_0) = 0 \\
\implies &\text{ функцията е прекъсната в точката } (x_0, x_0) \neq (0, 0) \\
\text{Ако } (x_n, y_n) &\in B, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = -\frac{1}{x_0^2} \neq f(x_0, x_0) \neq 0. \\
\text{Ако } x_0 &= 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \infty(-\infty), f(0, 0) = 0, \\
\implies &f \text{ е прекъсната в точката } (0, 0).
\end{aligned}$$

Функцията е непрекъсната в D , с изключение на точките от C , където е прекъсната.

3 Упражнение към лекция 3

3.1 Задачи

Задача 1

Да се намерят първите частни производни на следните функции

1. $f(x, y, z) = e^{4x+3y} + xy^2z^3 + 1111e^\pi$ за произволна точка $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$

2. $f(x, y) = |x + y|$ в точката $(0, 0)$

3. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ в равнината \mathbb{R}^2

Задача 2

$$f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}} \quad f'_x(x, 1) = ?$$

Задача 3

Да се докаже че функцията $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x^2 + y^2 = (0, 0) \end{cases}$

е прекъсната в точката $(0, 0)$ но има частни производни в тази точка.

Задача 4

Да се намерят първите частни производни на следните функции:

1. $f(x, y) = \sin(2x + 3) + 3e^{-x}e^{4y} - 11x^3 + 19e^\pi$

2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \arctan \frac{y}{x}$

3. $f(x, y, z) = (xy)^z$

4. $\sqrt[3]{x^2 + 3y^2}e^{x^2-5y}$

3.2 Решения

Задача 1

1.

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= e^{4x+3y} + xy^2z^3 + 1111e^\pi \\
 f(x, y_0, z_0) &\implies f'_x(x_0, y_0, z_0) = 4e^{4x_0+3y_0} + y_0^2z_0^3 \\
 f(x_0, y, z_0) &\implies f'_y(x_0, y_0, z_0) = 3e^{4x_0+3y_0} + 2x_0y_0z_0^3 \\
 f(x_0, y_0, z) &\implies f'_z(x_0, y_0, z_0) = 3x_0y_0^2z_0^2
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= |x + y| \\
 \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \text{ не съществува} \\
 \implies \nexists f'_x(0, 0) & \text{ (Аналогично се получава за } f'_y(0, 0))
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 (x, y) &\neq (0, 0) \\
 f'_x(x, y) &= \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\
 f'_y(x, y) &= \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \\
 \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0 \\
 \implies \text{Функцията има частни производни във всяко точки на равнината } \mathbb{R}^2
 \end{aligned}$$

Задача 2

$$\begin{aligned}
f'_x(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \text{ (Ако съществува) } \implies \\
f'_x(x, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, 1) - f(x, 1)}{h} \text{ (Ако съществува) } \\
f(x+h, 1) &= x+h + (1-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}} = x+h + 0 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}} = x+h \\
f(x, 1) &= x + (1-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}} = x + 0 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}} = x \implies \\
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, 1) - f(x, 1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 \implies f'_x(x, 1) = 1
\end{aligned}$$

Задача 3

$$\begin{aligned}
\text{Редица } (x_n, y_n) &= \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3} \right) \\
f(x_n, y_n) &= \frac{\left(\frac{1}{n} \right)^3 \cdot \frac{1}{n^3}}{\left(\frac{1}{n} \right)^6 + \left(\frac{1}{n^3} \right)^3} = \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^9}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \\
\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} f(x, y) &\neq f(0, 0) = 0 \implies f(x, y) \text{ е прекъсната в т. } (0, 0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^3 \cdot 0}{x^6 + 0} - 0}{x - 0} = 0 \\
f'_y(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \frac{\frac{0^3 \cdot y}{0^6 + y^2} - 0}{y - 0} = 0
\end{aligned}$$

Задача 4

1.

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \sin(2x + 3) + 3e^{-x}e^{4y} - 11x^3 + 19e^\pi \\
f'_x(x, y) &= (\sin(2x + 3))'_x + (3e^{-x}e^{4y})'_x - (11x^3)'_x + (19e^\pi)'_x \\
f'_x(x, y) &= \cos(2x + 3) \cdot 2 + (-3e^{-x}e^{4y}) - (3 \cdot 11x^2) + 0 \\
f'_x(x, y) &= 2\cos(2x + 3) - 3e^{-x}e^{4y} - 33x^2 \\
f'_y(x, y) &= (\sin(2x + 3))'_y + (3e^{-x}e^{4y})'_y - (11x^3)'_y + (19e^\pi)'_y \\
f'_y(x, y) &= 0 + (3 \cdot 4e^{-x}e^{4y}) - 0 + 0 = 12e^{-x}e^{4y}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2} + \arctan \frac{y}{x} \\
f'_x(x, y) &= \frac{1}{2}(x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
f'_x(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x^2} \\
f'_x(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \\
f'_y(x, y) &= \frac{1}{2}(x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \\
f'_y(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} \\
f'_y(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= (xy)^z \\
f'_x(x, y, z) &= z(xy)^{z-1} \cdot (xy)'_x = yz(xy)^{z-1} \\
f'_y(x, y, z) &= z(xy)^{z-1} \cdot (xy)'_y = xz(xy)^{z-1} \\
f'_z(x, y, z) &= (xy)^z \ln(xy)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} e^{x^2 - 5y} \\
f'_x(x, y) &= \left[\sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \right]'_x \cdot e^{x^2 - 5y} + \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot (e^{x^2 - 5y})'_x \\
f'_x(x, y) &= \frac{1}{3} (x^2 + 3y^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x \cdot e^{x^2 - 5y} + \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot 2x e^{x^2 - 5y} \\
f'_x(x, y) &= \frac{2x}{3} \cdot \frac{e^{x^2 - 5y}}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}} + 2x \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot e^{x^2 - 5y} \\
f'_x(x, y) &= \frac{2x}{3} \cdot \frac{e^{x^2 - 5y}}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}} [1 + 3(x^2 + 3y^2)] \\
f'_x(x, y) &= \frac{2x}{3} (1 + 3x^2 + 9y^2) \frac{e^{x^2 - 5y}}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}} \\
\\
f'_y(x, y) &= \left[\sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \right]'_y \cdot e^{x^2 - 5y} + \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot (e^{x^2 - 5y})'_y \\
f'_y(x, y) &= \frac{1}{3} (x^2 + 3y^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6y \cdot e^{x^2 - 5y} + \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot (-5e^{x^2 - 5y}) \\
f'_y(x, y) &= 2y \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}} \cdot e^{x^2 - 5y} - 5 \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot e^{x^2 - 5y} \\
f'_y(x, y) &= e^{x^2 - 5y} \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2} (2y - 5(x^2 + 3y^2)) \\
f'_y(x, y) &= (2y - 5x^2 - 15y^2) \frac{e^{x^2 - 5y}}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}}
\end{aligned}$$

4 Упражнение към лекция 4

4.1 Задачи

Задача 1

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$$

Изследвайте $f(x, y)$ за диференцируемост в $(0, 0)$.

$$f'_x(0, 0) = ?$$

$$f'_y(0, 0) = ?$$

Задача 2

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

Изследвайте $f(x, y)$ за диференцируемост в $(0, 0)$.

Задача 3

Да се изследвай за диференцируемост в $(0, 0)$ функцията

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Задача 4

$$f(x, y) = x^2 + 3xy - 8y^3 + 11, \quad df(0, 1) = ?$$

$$f(x, y, z) = x^2 + 3xy - 8y^3 - 2e^{3z}x, \quad df(0, 0, 4) = ?$$

Задача 5

$$f(x, y) = x^6 - 7xy^2 + 14y,$$

$$f''_{xx} = ?, f''_{yy} = ?, f''_{xy} = ?, d^2f(x, y) = ?$$

$$f(x, y, z) = x^6 - 7xy + y^2 - xz + z^3,$$

$$f''_{xx} = ?, f''_{xy} = ?, f''_{xz} = ?, f''_{yx} = ?, f''_{yy} = ?, f''_{yz} = ?, f''_{zx} = ?, f''_{zy} = ?, f''_{zz} = ?, d^2f(1, 0, 0)$$

4.2 Решения

Задача 1

$$f(x, 0) - f(0, 0) = \sqrt[3]{x0} - \sqrt[3]{0} \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$f(0, y) - f(0, 0) = \sqrt[3]{0y} - \sqrt[3]{0} \implies$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$\text{Нека: } \lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0, \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Проверка за диференцируемост в $(0, 0)$:

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)(x - 0) + f'_y(0, 0)(y - 0) + \varepsilon(x, y)\rho(x, y)$$

$$\sqrt[3]{xy} - 0 = 0x + 0y + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2} \implies$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0?$$

Разглеждаме редица с общ член $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^3}\right)$ за която $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$,

$$\varepsilon(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{n^2}{\sqrt{2}}} = \frac{n}{\sqrt{2}} \implies \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(x_n, y_n) \not\rightarrow 0 \implies$$

$f(x, y)$ не е диференцируема в т. $(0, 0)$

Задача 2

$$f(x, 0) - f(0, 0) = \sqrt[3]{x^3} - 0 = x \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \implies \exists f'_x(0, 0) = 1$$

$$f(0, y) - f(0, 0) = \sqrt[3]{y^3} - 0 = y \implies$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1 \implies \exists f'_y(0, 0) = 1$$

$$\text{Нека: } \lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0, \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Проверка за диференцируемост в $(0, 0)$:

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)(x - 0) + f'_y(0, 0)(y - 0) + \varepsilon(x, y)\rho(x, y)$$

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = x + y + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0?$$

Разглеждаме редица с общ член $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ за която $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$,

$$\varepsilon(x_n, y_n) = \frac{\frac{\sqrt[3]{2}}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \implies \lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \not\rightarrow 0 \implies$$

$f(x, y)$ не е диференцируема в т. $(0, 0)$

Задача 3

$$f(x, 0) - f(0, 0) = e^{-\frac{1}{x^2}} - 0 = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \left(\frac{1}{e x^2} \right)' = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 e^{-\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0 \implies f'_x(0, 0) = 0$$

Аналогично $f'_y(0, 0) = 0$

Нека : $\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0, \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Проверка за дифференцируемость в $(0, 0)$:

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)(x - 0) + f'_y(0, 0)(y - 0) + \varepsilon(x, y)\rho(x, y)$$

$$e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} - 0 = 0(x - 0) + 0(y - 0) + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} = \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0?$$

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \implies \lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \rho(x, y) \rightarrow 0$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\rho} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \right)' = -\frac{1}{\rho^2} \quad \left(e^{\frac{1}{\rho^2}} \right)' = -\frac{2}{\rho^3} e^{\frac{1}{\rho^2}}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho}{\frac{1}{2e\rho^2}} = \frac{0}{\infty} = 0 \implies$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{e\rho^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\rho} \right)'}{\left(\frac{1}{e\rho^2} \right)'} = 0 \implies$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) = 0 \implies f(x, y) \text{ е диференцируема в } (0, 0)$$

Задача 4

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

$$f'_x(x, y) = 2x + 3y \quad f'_x(0, 1) = 3$$

$$f'_y(x, y) = 3x - 24y^2 \quad f'_y(0, 1) = -24$$

$$df(x, y) = (2x + 3y)dx + (3x - 24y^2)dy$$

$$df(0, 1) = 3dx - 24dy$$

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz$$

$$f'_x(x, y, z) = 2x + 3y - 2e^{3z} \quad f'_x(0, 0, 4) = -2e^{12}$$

$$f'_y(x, y, z) = 3x - 24y^2 \quad f'_y(0, 0, 4) = 0$$

$$f'_z(x, y, z) = 6xe^{3z} \quad f'_z(0, 0, 4) = 0$$

$$df(x, y, z) = (2x + 3y - 2e^{3z})dx + (3x - 24y^2)dy + (6xe^{3z})dz$$

$$df(x, y, z) = -2e^{12}dx + 0dy + 0dz = -2e^{12}dx$$

Задача 5

$$\begin{aligned}
f'_x(x, y, z) &= 6x^5 - 7y - z \\
f''_{xx}(x, y, z) &= (6x^5 - 7y - z)'_x = 30x^4 & f''_{xx}(1, 0, 0) &= 30 \\
f''_{xy}(x, y, z) &= (6x^5 - 7y - z)'_y = -7 & f''_{xy}(1, 0, 0) &= -7 \\
f''_{xz}(x, y, z) &= (6x^5 - 7y - z)'_z = -1 & f''_{xz}(1, 0, 0) &= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_y(x, y, z) &= -7x + 2y \\
f''_{yx}(x, y, z) &= (-7x + 2y)'_x = -7 & f''_{yx}(1, 0, 0) &= -7 \\
f''_{yy}(x, y, z) &= (-7x + 2y)'_y = 2 & f''_{yy}(1, 0, 0) &= 2 \\
f''_{yz}(x, y, z) &= (-7x + 2y)'_z = 0 & f''_{yz}(1, 0, 0) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_z(x, y, z) &= -x + 3z^2 \\
f''_{zx}(x, y, z) &= (-x + 3z^2)'_x = -1 & f''_{zx}(1, 0, 0) &= -1 \\
f''_{zy}(x, y, z) &= (-x + 3z^2)'_y = 0 & f''_{zy}(1, 0, 0) &= 0 \\
f''_{zz}(x, y, z) &= (-x + 3z^2)'_z = 6z & f''_{zz}(1, 0, 0) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2f &= f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2 + 2f''_{xz}dxdz + f''_{zz}dz^2 + f''_{yz}dydz \\
d^2f(x, y, z) &= 30x^4dx^2 + 2 \cdot (-7)dxdy + 2dy^2 + 2 \cdot (-1)dxdz + 6zdz^2 + 2 \cdot 0dydz \\
d^2f(1, 0, 0) &= 30dx^2 - 14dxdy + 2dy^2 - 2dxdz + 0dz^2 + 0dydz \\
d^2f(1, 0, 0) &= 30dx^2 + 2dy^2 - 14dxdy - 2dxdz
\end{aligned}$$

5 Упражнение към лекция 5

5.1 Задачи

Задача 1

Да се намерят посочените частни производни на следните функции.

1. $u(x, y) = x^4 + 11x^2y^3$, $u''_{xx} = ?$, $u''_{xy} = ?$
2. $u(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$, $u''_{xx} = ?$, $u''_{xy} = ?$, $u''_{yy} = ?$
3. $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, $u''_{xx} = ?$, $u''_{xy} = ?$, $u''_{yx} = ?$, $u''_{yy} = ?$
4. $u(x, y) = \ln(x + 2y)$, $u'''_{xxy} = ?$
5. $u(x, y, z) = e^{xy^2z^3}$, $u'''_{xyz} = ?$

Задача 2

Дали са верни равенствата:

- Ако $z = y \ln(x^2 + y^2)$ то $\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$
- Ако $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ то $u'_x + u'_y + u'_z = \frac{3}{x+y+z}$

Задача 3

Да се докаже, че функцията: $z(x, y) = \arctan \left(\frac{x+y}{x-y} \right)$ удовлетворява

тържеството: $z'_x + z'_y = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

Задача 4

Да се провери тържеството на Ойлер за следните функции: $z(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$ $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \ln \left(\frac{y}{x} \right)$

Тържество на Ойлер ($f : D \rightarrow R, D \subset \mathbb{R}^m$)

$$x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \dots + x_m f'_{x_m} = m f$$

5.2 Решения

Задача 1

$$u(x, y) = x^4 + 11x^2y^3$$

$$u'_x = 4x^3 + 22xy^3$$

$$u''_{xx} = 12x^2 + 22y^3$$

$$u''_{xy} = 4x^3 + 66xy^2$$

$$u(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

$$u'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x$$

$$u'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y$$

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x$$

$$u''_{xy} = (u'_x)'_y$$

$$u''_{yy} = (u'_y)'_y$$

$$A = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \quad B = \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x \implies u'_x = AB$$

$$A = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}} = \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2}$$

$$A = \frac{(1-xy)^2}{1 - 2xy + x^2y^2 + x^2 + 2xy + y^2} = \frac{(1-xy)^2}{1 + x^2y^2 + x^2 + y^2}$$

$$A = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2) + x^2 + x^2y^2} = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2) + x^2(1+y^2)} = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2)(1+x^2)}$$

$$B = \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x = \frac{1(1-xy) - (x+y)(-y)}{(1-xy)^2} = \frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$$

$$u'_x = AB = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2)(1+x^2)} \cdot \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$C = \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y \implies u'_y = AC$$

$$C = \frac{1(1-xy) - (x+y)(-x)}{(1-xy)^2} = \frac{1-xy+x^2+xy}{(1-xy)^2} = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}$$

$$u'_y = AC = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2)(1+x^2)} \cdot \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$u''_{xx} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'_x = ((1+x^2)^{-1})'_x$$

$$u''_{yy} = -(1+x^2)^{-2}(1+x^2)'_x = -2x(1+x^2)^{-2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$u''_{xy} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'_y = 0$$

$$u''_{yy} = \left(\frac{1}{1+y^2}\right)'_y = ((1+y^2)^{-1})'_y$$

$$u''_{yy} = -(1+y^2)^{-2}(1+y^2)'_y = -2y(1+y^2)^{-2} = \frac{-2y}{(1+y^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \\
u'_x &= \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \cdot (x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{2(x^2 + y^2)} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\
u'_y &= \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \cdot (x^2 + y^2)'_y = \frac{2y}{2(x^2 + y^2)} = \frac{y}{x^2 + y^2} \\
u''_{xx} &= (u'_x)'_x = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{1(x^2 + y^2) - (2x)x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
u''_{xy} &= (u'_x)'_y = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\
u''_{yy} &= (u'_y)'_y = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{1(x^2 + y^2) - (2y)y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
u''_{yx} &= (u'_y)'_x = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \ln(x + 2y) \\
u'_x &= \frac{1}{x + 2y} \\
u''_{xx} &= \left(\frac{1}{x + 2y} \right)'_x = ((x + 2y)^{-1})'_x = -(x + 2y)^{-2}(x + 2y)'_x = -\frac{1}{(x + 2y)^2} \\
u'''_{xxy} &= \left(-\frac{1}{(x + 2y)^2} \right)'_y = -((x + 2y)^{-2})'_y = 2((x + 2y)^{-3})(x + 2y)'_y = \frac{4}{(x + 2y)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= e^{xy^2z^3} \\
u'_x &= e^{xy^2z^3}(xy^2z^3)'_x = y^2z^3e^{xy^2z^3} \\
u''_{xy} &= (y^2z^3 \cdot e^{xy^2z^3})'_y = (y^2z^3)'_y \cdot e^{xy^2z^3} + y^2z^3(e^{xy^2z^3})'_y \\
u''_{xy} &= 2yz^3e^{xy^2z^3} + 2xy^3z^6e^{xy^2z^3} = 2yz^3e^{xy^2z^3}(1 + xy^2z^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'''_{xyz} &= \left[2yz^3 e^{xy^2 z^3} (1 + xy^2 z^3) \right]'_z = (2yz^3 e^{xy^2 z^3})'_z (1 + xy^2 z^3) + 2yz^3 e^{xy^2 z^3} (1 + xy^2 z^3)'_z \\
&= \left[(2yz^3)'_z \cdot e^{xy^2 z^3} + 2yz^3 \cdot (e^{xy^2 z^3})'_z \right] (1 + xy^2 z^3) + 2yz^3 e^{xy^2 z^3} (1 + xy^2 z^3)'_z \\
u'''_{xyz} &= \left[6yz^2 e^{xy^2 z^3} + 2yz^3 e^{xy^2 z^3} 3xy^2 z^2 \right] (1 + xy^2 z^3) + 2yz^3 e^{xy^2 z^3} (3xy^2 z^2) \\
u'''_{xyz} &= \left[6yz^2 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} \right] (1 + xy^2 z^3) + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} \\
u'''_{xyz} &= \left[6yz^2 e^{xy^2 z^3} + 6yz^2 e^{xy^2 z^3} xy^2 z^3 + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} xy^2 z^3 \right] + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} \\
u'''_{xyz} &= \left[6yz^2 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} + 6x^2 y^5 z^8 e^{xy^2 z^3} \right] + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} \\
u'''_{xyz} &= 6yz^2 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} + 6x^2 y^5 z^8 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} \\
u'''_{xyz} &= 6yz^2 e^{xy^2 z^3} + 18xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} + 6x^2 y^5 z^8 e^{xy^2 z^3} \\
u'''_{xyz} &= 6yz^2 e^{xy^2 z^3} [1 + 3xy^2 z^3 + x^2 y^4 z^6]
\end{aligned}$$

Задача 2

$$\begin{aligned}
z &= y \ln(x^2 + y^2) \\
z'_x &= y \frac{1}{x^2 + y^2} 2x = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \\
z'_y &= \ln(x^2 + y^2) + y \frac{1}{x^2 + y^2} - 2y = \ln(x^2 + y^2) - \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \\
\frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y &= \frac{1}{x} \cdot \frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y} \cdot \left[\ln(x^2 + y^2) - \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \right] = \\
&= \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{\ln(x^2 + y^2)}{y} - \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{y} \\
\frac{z}{y^2} &= \frac{y \ln(x^2 + y^2)}{y^2} = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{y} \implies \text{Равенството е вярно.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \\
u'_x &= \frac{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)'_x}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \frac{3x^2 - 3yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \\
u'_y &= \frac{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)'_y}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \frac{3y^2 - 3xz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \\
u'_z &= \frac{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)'_z}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \frac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \\
u'_x + u'_y + u'_z &= \frac{3x^2 - 3yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} + \frac{3y^2 - 3xz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} + \frac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \\
&= \frac{3x^2 - 3yz + 3y^2 - 3xz + 3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \frac{3(x^2 - yz + y^2 - xz + z^2 - xy)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \\
&= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot \frac{x + y + z}{x + y + z} = \frac{3(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)}{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x + y + z)} = \\
&= \frac{3}{x + y + z} \implies \text{Равенството е вярно.}
\end{aligned}$$

Задача 3

$$\begin{aligned}
z'_x &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{1}{\frac{(x-y)^2 + (x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} \\
z'_x &= \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2 + (x+y)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2} \\
z'_x &= \frac{-2y}{2(x^2 + y^2)} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\
z'_y &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y = \frac{1}{\frac{(x-y)^2 + (x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} = \\
z'_y &= \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2 + (x+y)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{2x}{x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\
z'_x + z'_y &= -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x-y}{x^2 + y^2} \implies \text{тържеството е вярно}
\end{aligned}$$

Задача 4

$$\begin{aligned}
z(x, y) &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \\
xz'_x + yz'_y &= 2z \\
z'_x &= \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_x = ((x^2 + y^2)^{-2})'_x = -2(x^2 + y^2)^{-3}(x^2 + y^2)'_x = -\frac{4x}{(x^2 + y^2)^3} \\
z'_y &= \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_y = ((x^2 + y^2)^{-2})'_y = -2(x^2 + y^2)^{-3}(x^2 + y^2)'_y = -\frac{4y}{(x^2 + y^2)^3} \\
xz'_x + yz'_y &= x \cdot \left(-\frac{4x}{(x^2 + y^2)^3} \right) + y \cdot \left(-\frac{4y}{(x^2 + y^2)^3} \right) = -\frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^3} = \\
&= \frac{-4(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = -\frac{4}{(x^2 + y^2)^2} \\
2z &= \frac{2}{(x^2 + y^2)^2} \\
-\frac{4}{(x^2 + y^2)^2} &\neq \frac{2}{(x^2 + y^2)^2} \implies \text{Тъждението не е изпълнено.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \ln \left(\frac{y}{x} \right) \\
xu'_x + yu'_y + zu'_z &= 3z \\
u'_x &= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_x \\
u'_y &= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_y \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_y \\
u'_z &= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_z \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_x &= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_x \\
u'_x &= \frac{x \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x} = \frac{x \ln \left(\frac{y}{x} \right) x - \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2}{x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
u'_x &= \frac{x^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) - x^2 - y^2 - z^2}{x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_y &= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_y \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_y \\
u'_y &= \frac{y \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{y} = \frac{y \ln \left(\frac{y}{x} \right) y + \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2}{y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
u'_y &= \frac{y^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) + x^2 + y^2 + z^2}{y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_z &= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_z \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_z \\
u'_z &= \frac{z \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 0 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{z \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xu'_x + yu'_y + zu'_z &= 3z, \quad A = xu'_x + yu'_y + zu'_z, \quad B = 3u \\
A &= x \cdot \frac{x^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) - x^2 - y^2 - z^2}{x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + y \cdot \frac{y^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) + x^2 + y^2 + z^2}{y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z \cdot \frac{z \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
A &= \frac{x^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) - x^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) + x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
A &= \frac{x^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) - x^2 - y^2 - z^2 + y^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) + x^2 + y^2 + z^2 + z^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
A &= \frac{x^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) \ln \left(\frac{y}{x} \right) + z^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\ln \left(\frac{y}{x} \right) (x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \ln \left(\frac{y}{x} \right) \\
B &= 3u = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \ln \left(\frac{y}{x} \right) \implies A \neq B \implies \text{Тъждението не е изпълнено.}
\end{aligned}$$

6 Упражнение към лекция 6

6.1 Задачи

Задача 1

Дадени са функцията $z(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$, където φ, ψ - непрекъснато диференцируеми. Да се намерят първите частни производни.

Задача 2

Да се провери дали $w(x, y, z)$ удовлетворява тъждествено равенството:

$$xw_x + yw_y + zw_z = w + \frac{xy}{z}$$

Ако $w = \frac{xy}{z} + \ln x + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, φ е непрекъснато диференцируема.

Задача 3

Дадени са функциите и точката $M(2,1)$. Да се пресметне $\text{grad}f(M)$ и $\|\text{grad}f(M)\|$

1. $f(x, y) = x^2 + 11y^2 - 3$
2. $f(x, y) = x^2 - y^2$
3. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

Задача 4

Дадени са функциите и точката $M(2,1)$.

Да се пресметне $\frac{\partial f(M)}{\partial \nu}$, $\nu = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

1. $f(x, y) = x^2 + 11y^2 - 3$
2. $f(x, y) = x^2 - y^2$
3. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

Задача 5

Да се определи ъгъла между градиентите на функцията

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 111$$

в точките $A(\varepsilon, 0, 0)$ и $B(0, \varepsilon, 0), \varepsilon > 0$

Задача 6

Да се намери y', y'' на неявната функция $y = f(x)$, дефинирана от уравнението

$$x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

Да се пресметнат $y'(0), y''(0)$, ако $y(0) = 1$

6.2 Решения

Задача 1

$$\begin{aligned}
 z(x, y) &= \varphi(x + y) + \psi(x - y) \\
 z'_x &= \varphi'(x + y)(x + y)'_x + \psi'(x - y)(x - y)'_x = \varphi'(x + y)1 + \psi'(x - y)1 \\
 z'_x &= \varphi'(x + y) + \psi'(x - y) \\
 z'_y &= \varphi'(x + y)(x + y)'_y + \psi'(x - y)(x - y)'_y = \varphi'(x + y)1 + \psi'(x - y)(-1) \\
 z'_y &= \varphi'(x + y) - \psi'(x - y)
 \end{aligned}$$

Задача 2

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{y}{x} & v &= \frac{z}{x} \\
 u'_x &= -\frac{y}{x^2} & u'_y &= \frac{1}{x} & u'_z &= 0 \\
 v'_x &= -\frac{z}{x^2} & v'_y &= 0 & v'_z &= \frac{1}{x} \\
 w'_x &= \frac{y}{z} \ln x + \frac{xy}{z} \cdot \frac{1}{x} + \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x(\varphi'_u u'_x + \varphi'_v v_x) = \\
 w'_x &= \frac{y}{z} \ln x + \frac{y}{z} + \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - \frac{y}{x} \varphi'_u - \frac{z}{x} \varphi'_v \\
 w'_y &= \frac{x}{z} \ln x + x(\varphi'_u u'_y + \varphi'_v v_y) = \frac{x}{z} \ln x + \varphi'_u \\
 w'_z &= -\frac{xy}{z^2} \ln x + x(\varphi'_u u'_z + \varphi'_v v_z) = -\frac{xy}{z^2} \ln x + \varphi'_v \\
 xw_x + yw_y + zw_z &= \\
 &= \frac{xy}{z} \ln x + \frac{xy}{z} + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - y\varphi'_u - z\varphi'_v + \frac{xy}{z} \ln x + y\varphi'_u + -\frac{xy}{z} \ln x + z\varphi'_v = \\
 &= \frac{xy}{z} + \ln x + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \frac{xy}{z} = w + \frac{xy}{z}
 \end{aligned}$$

Задача 3

$$\operatorname{grad} f = (f'_x, f'_y)$$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= x^2 + 11y^2 - 3 \\
 f'_x &= 2x & f'_y &= 22y \\
 \operatorname{grad} f(x, y) &= (2x, 22y) \\
 \operatorname{grad} f(M) &= (2 \cdot 2, 22 \cdot 1) = (4, 22) \\
 \|\operatorname{grad} f(M)\| &= \sqrt{4^2 + 22^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= x^2 - y^2 \\
f'_x &= 2x \quad f'_y = -2y \\
\text{grad}f(x, y) &= (2x, -2y) \\
\text{grad}f(M) &= (2 \cdot 2, -2 \cdot 1) = (4, -2) \\
\|\text{grad}f(M)\| &= \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \ln(x^2 + y^2) \\
f'_x &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad f'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} \\
\text{grad}f(x, y) &= \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right) \\
\text{grad}f(M) &= \left(\frac{2 \cdot 2}{2^2 + 1^2}, \frac{2 \cdot 1}{2^2 + 1^2} \right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right) \\
\|\text{grad}f(M)\| &= \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Задача 4

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \nu} = (\text{grad}f, \nu)$$

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= x^2 + 11y^2 - 3 \\
\text{grad}f(M) &= (2 \cdot 2, 22 \cdot 1) = (4, 22) \\
\frac{\partial f(M)}{\partial \nu} &= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 22 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} + 11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= x^2 - y^2 \\
\text{grad}f(M) &= (2 \cdot 2, -2 \cdot 1) = (4, -2) \\
\frac{\partial f(M)}{\partial \nu} &= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \ln(x^2 + y^2) \\
 \operatorname{grad} f(M) &= \left(\frac{2 \cdot 2}{2^2 + 1^2}, \frac{2 \cdot 1}{2^2 + 1^2} \right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right) \\
 \frac{\partial f(M)}{\partial \nu} &= \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{10} + \frac{1}{5} = \frac{4\sqrt{3} + 2}{10}
 \end{aligned}$$

Задача 5

$$\begin{aligned}
 u'_x &= 2x & u'_y &= 2y & u'_z &= 2z \\
 \operatorname{gradu}(A) &= (2\varepsilon, 0, 0) & \operatorname{gradu}(B) &= (0, 2\varepsilon, 0) \\
 (\operatorname{gradu}(A), \operatorname{gradu}(B)) &= 2\varepsilon \cdot 0 + 0 \cdot 2\varepsilon + 0 \cdot 0 = 0 \\
 (\operatorname{gradu}(A), \operatorname{gradu}(B)) &= \|u(A)\| \cdot \|u(B)\| \cdot \cos \alpha \\
 \cos \alpha = 0 &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Задача 6

$$F(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

$$F'_y = -2x + 10y + 4 \neq 0$$

$$F'_x(x, y) = 2x - 2y - 2$$

$$F'_y(0, 1) = -2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4 \neq 0$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x - 2y - 2}{-2x + 10y + 4} = -\frac{x - y - 1}{-x + 5y + 2}$$

$$y'(0) = -\frac{0 - 1 - 1}{-0 + 5 \cdot 1 + 2} = -\frac{-2}{7} = \frac{2}{7}$$

$$y''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

$$F''_{xx} = 2, \quad F''_{yy} = 10, \quad F''_{xy} = -2$$

$$F''_{xx}(0, 1) = 2, \quad F''_{yy}(0, 1) = 10, \quad F''_{xy}(0, 1) = -2$$

$$y''(x) = -\frac{2 + 2 \cdot (-2)y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$

$$y''(x) = -\frac{2 + -4y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$

$$y''(0) = -\frac{2 + -4 \cdot \frac{2}{7} + 10 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2}{-2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4}$$

$$y''(0) = -\frac{2 + -\frac{8}{7} + \frac{40}{49}}{14}$$

$$y''(0) = -\frac{98 - 56 + 40}{49 \cdot 14} = -\frac{82}{49 \cdot 14} = \frac{82}{49} \cdot \frac{1}{14} = \frac{41}{343}$$

7 Упражнение към лекция 7

7.1 Задачи

Задача 1

Да се намерят локалните екстремуми на функциите

- $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2})$
- $z = x^4 + y^4 - 4xy$

Задача 2

Да се намерят локалните екстремуми на функциите

- $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
- $u = x^3 + y^2 + z^2 - 3x + 6y - 2z$
- $u = x^3 + y^2 + z^2 - 3x - 2y$

Задача 3

Да се намерят $y'(0), y''(0)$ ако $y(0) = 2$ на неявната функция $y = f(x)$ дефинирана от уравнението

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Задача 4

Да се покаже, че функцията $z = f(x, y)$ дефинирана неявно от уравнението

$$z = x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$$

φ - непрекъснато диференцируема, удовлетворява тъждествено уравнението

$$xz'_x + yz'_y = z$$

7.2 Решения

Задача 1

$$\begin{aligned}
z &= \sin x + \sin y + \sin(x+y) \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}) \\
z'_x &= \cos x + \cos(x+y) \quad z'_y = \cos y + \cos(x+y) \\
\begin{cases} \cos x + \cos(x+y) = 0 \\ \cos y + \cos(x+y) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos \frac{2x+y}{2} \cos \frac{y}{2} = 0 \\ 2 \cos \frac{x+2y}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+y}{2} = \frac{\pi}{2} \\ \frac{x+2y}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \\
\frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} &\implies x = y = \pi \notin (0 < x, y < \frac{\pi}{2}) \\
x_0 = y_0 = \frac{\pi}{3} &\implies M_0 \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) \\
z''_{xx} &= -\sin x - \sin(x+y) \quad z''_{yy} = -\sin y - \sin(x+y) \quad z''_{xy} = -\sin(x+y) \\
z''_{xx}(M_0) &= -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} = \Delta_1 \quad z''_{yy}(M_0) = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \quad z''_{xy}(M_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\begin{pmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{xy}(M_0) \\ z''_{yx}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
\Delta_1 &= -\sqrt{3} < 0 \quad \Delta_2 = 3 - \frac{3}{4} > 0 \\
&\implies \exists \text{ локален максимум, } z_{max} = z(M_0) - \frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= x^4 + y^4 - 4xy \\
z'_x &= 4x^3 - 4y \quad z'_y = 4y^3 - 4x \\
\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0 \\ y = x^3 \end{cases} \implies \\
M_0(0,0) \quad M_1(1,1) \quad M_2(-1,1) & \\
z''_{xx} &= 12x^2 \quad z''_{yy} = 12y^2 \quad z''_{xy} = -4 \\
d^2z &= \begin{pmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{xy}(M_0) \\ z''_{yx}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$d^2z(M_0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0 \Rightarrow \text{няма лок. екстремум в } M_0$$

$$d^2z(M_1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 12 > 0 \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} 144 - 16 > 0 \Rightarrow$$

z има локален минимум

$$z_{min} = z(M_1) = 1^4 + 1^4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

Аналогично и за M_2 има лок. мин $z_{min} = -2$

Задача 2

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$$

$$u'_x = 2x + 2 \quad u'_y = 2y + 4 \quad u'_z = 2z - 6$$

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(-1, -2, 3)$$

$$u''_{xx} = 2 \quad u''_{yy} = 2 \quad u''_{zz} = 2$$

$$u''_{xy} = u''_{xz} = u''_{yx} = u''_{yz} = u''_{zx} = u''_{zy} = 0$$

$$d^2u(M_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = u''_{xx} = 2 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \Rightarrow$$

d^2u е положително дефинитна квадратична форма

и има лок. минимум $u_{min} = u(M_0) = 1 + 4 + 9 - 2 - 4 \cdot 2 - 18 = -14$

$$u = x^3 + y^2 + z^2 - 3x + 6y - 2z$$

$$u'_x = 3x^2 + 2 \quad u'_y = 2y + 6 \quad u'_z = 2z - 2$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2 = 0 \\ 2y + 6 = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{cases} \implies M_0(1, -3, 1) \quad M_1(-1, -3, 1)$$

$$u''_{xx} = 6x \quad u''_{yy} = 2 \quad u''_{zz} = 2$$

$$u''_{xy} = u''_{xz} = u''_{yx} = u''_{yz} = u''_{zx} = u''_{zy} = 0$$

$$d^2u(M_0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\Delta_1 = 6 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0 \implies$$

d^2u е положително дефинитна квадратична форма

и има лок. минимум $u_{min} = u(M_0) = 1 + 9 + 1 - 3 - 18 - 2 = -12$

$$d^2u(M_1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\Delta_1 = -6 < 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -24 < 0 \implies$$

d^2u е не е дефинитна квадратична форма \implies няма лок. екстремуми

$$u = x^3 + y^2 + z^2 - 3x - 2y$$

$$u'_x = 3x^2 - 3 \quad u'_y = 2y - 2 \quad u'_z = 2z$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \implies M_0(1, 1, 0) \quad M_1(-1, 0, 0)$$

$$u''_{xx} = 6x \quad u''_{yy} = 2 \quad u''_{zz} = 2$$

$$u''_{xy} = u''_{xz} = u''_{yx} = u''_{yz} = u''_{zx} = u''_{zy} = 0$$

$$d^2u(M_0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\Delta_1 = 6 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0 \implies$$

d^2u е положително дефинитна квадратична форма

и има лок. минимум $u_{min} = u(M_0) = 1 + 1 - 3 - 2 = -3$

$$d^2u(M_1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\Delta_1 = -6 < 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -24 < 0 \implies$$

d^2u е не е дефинитна квадратична форма \implies няма лок. екстремуми

Задача 3

$$F(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 \quad M_0(0, 2)$$

$$F'_y = \frac{2y}{4} = \frac{y}{2} \neq 0 \quad y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad y''(x) = -\frac{F'''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(y')^2}{F'_y}$$

$$F'_x = \frac{2}{9}x \quad F'_y = \frac{2y}{4} \quad F''_{xx} = \frac{2}{9} \quad F''_{xy} = F''_{yx} = 0 \quad F''_{yy} = \frac{1}{2}$$

$$F'_x(0, 2) = 0 \quad F'_y(0, 2) = 1 \quad F''_{xx}(0, 2) = \frac{2}{9} \quad F''_{xy}(0, 2) = F''_{yx}(0, 2) = 0 \quad F''_{yy}(0, 2) = \frac{1}{2}$$

$$y'(0) = -\frac{0}{1} = 0 \quad y''(0) = -\frac{\frac{2}{9} + 2 \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2}{1} = -\frac{2}{9}$$

Задача 4

Решение. Означаваме

$$F(x, y, z) = z - x \varphi(z/y), \quad (3)$$

откъдето извеждаме условието за $\exists!$!
незв. функция:

$$F'_z = 1 - x \varphi'(z/y) \cdot \frac{1}{y} \neq 0. \quad (4)$$

по-нататък:

$$F'_x = -\varphi(z/y); \quad F'_y = -x \varphi'(z/y) \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right), \text{ т.е.}$$

$$F'_x = -\varphi(z/y); \quad F'_y = \frac{xz}{y^2} \varphi'(z/y) \Rightarrow$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-\varphi(z/y)}{1 - x \varphi'(z/y) \cdot \frac{1}{y}} = \frac{\varphi(z/y)}{1 - \frac{x}{y} \varphi'(z/y)}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{xz}{y^2} \varphi'(z/y)}{1 - \frac{x}{y} \varphi'(z/y)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} xz'_x + yz'_y &= \frac{\overset{z}{x} \cdot \varphi(z/y)}{1 - \frac{x}{y} \varphi'(z/y)} - \frac{\cancel{\frac{xz}{y}} \varphi'(z/y)}{1 - \frac{x}{y} \varphi'(z/y)} = \\ &= z \cdot \frac{1 - \cancel{\frac{x}{y}} \varphi'(z/y)}{1 - \cancel{\frac{x}{y}} \varphi'(z/y)} = z. \end{aligned}$$

8 Упражнение към лекция 8

8.1 Задачи

Задача 1

Да се изследва за локален екстремум следната функция.

$$z = 1 - \sqrt{x^2 - y^2}$$

Задача 2

Намерете точките на условен екстремум и екстремумите на следните функции.

- $z = x^2 + y^2$, ако $x + y = 1$
- $u = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, ако $x^2 + y^2 = 25$
- $u = x + y + z$, ако $z = 1$ и $x^2 + y^2 = 1$

Задача 3

Да се изследва функцията $u = xy + yz$ за условен екстремум, при ограничения.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 2 \\ y + z &= 2\end{aligned}$$

Задача 4

Да се изследва функцията $z = x + y$ за условен екстремум, при ограничения.

$$xy = 1$$

Задача 5

Да се намери дефиниционното множество на функциите.

- $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2 + 2x}$
- $z = \frac{x^2 y}{2x + y}$
- $z = \arcsin(x + y)$
- $w = \frac{1}{\sqrt{xy}}$

Задача 6

Да се намерят границите ако съществуват.

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan(xy)}{xy}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sin(xy)}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \sqrt{1 - xy}}{xy}$

Задача 7

Да се провери дали уравнението удовлетворява посочената функция.

- $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, z(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$
- $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z, z(x, y) = x^y$
- $2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, z(x, y) = 2 \cos^2(y - \frac{x}{2})$
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1, u(x, y, z) = x + \frac{x-y}{y-z}$

Задача 8

Да се изследват за локален екстремум следните функции.

- $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
- $z = xy(1 - x - y)$
- $z = x^3 - y^3 - 3x + 3y + 2$
- $u = x^3 + y^3 + z^2 - 12xy + 2z$

Задача 9

Да се изследват за локален екстремум следните неявно зададени функции.

- $x^3 + y^3 = 3xy, y = y(x)$
- $y^2 - 3y - \sin(x) = 0, y = y(x)$
- $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0, z = z(x, y)$
- $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - 8yz + 8 = 0, z = z(x, y)$

Задача 10

Да се изследва за условен екстремум

- $z = xy$, ако $2x + y = 1$
- $z = x^2 + y^2$, ако $x - y = 1$
- $u = x^2 + y^2 + z^2$, ако $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$
- $u = xyz$, ако $x + y + z = 5, xy + yz + zx = 8$

Задача 11

Намерете точките на условен екстремум и екстремумите на следните функции.

- $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$, ако $x^2 + y^2 + z^2 = 14$
- $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y$, ако $x^2 + y^2 = 20$
- $u = x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y + 4z$, ако $x^2 + y^2 + z^2 = 56$

Задача 12

Намерете абсолютните екстремуми на следните функции и определете вида им (условен, локален, минимум, максимум)

- $u = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, ако $x^2 + y^2 \leq 25, x^2 + y^2 \leq 400, x^2 + y^2 \leq 100$
- $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6$, ако $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$
- $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, ако $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$

8.2 Решения

Задача 1

$$z(\Delta x, \Delta y) - z(0, 0) = 1 - \sqrt{\Delta x^2 - \Delta y^2} - 1 = -\sqrt{\Delta x^2 - \Delta y^2} < 0$$

Имаме строг локален максимум в $z(0, 0) = 1$

Задача 2

Задача 3

Задача 4

Задача 5

Задача 6

Задача 7

Задача 8

Задача 9

Задача 10

Задача 11

Задача 12

9 Упражнение към лекция 9

9.1 Задачи

9.2 Решения

10 Упражнение към лекция 10

10.1 Задачи

10.2 Решения

11 Упражнение към лекция 11

11.1 Задачи

11.2 Решения