

Математически анализ 2

Ехонаut

11 април 2021 г.

Съдържание

1	Лекция 1: Пространството \mathbb{R}^m	3
1.1	Няколко важни неравенства	3
1.2	Видове крайно мерни пространства	3
1.2.1	Линейно(Векторно) пространство	3
1.2.2	Евклидово пространство	4
1.2.3	Метрично пространство	4
1.2.4	Нормирано пространство	4
1.3	Пространството \mathbb{R}^m - дефиниция и основни свойства	5
1.3.1	Скаларно произведение	5
1.3.2	Норма и метрика	5
1.3.3	Скаларен квадрат	5
1.3.4	Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат	6
1.3.5	Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат	6
1.4	Точки и множества в \mathbb{R}^m	6
1.4.1	Паралелепипед	6
1.4.2	Сфера и кълбо	6
1.5	Редици от точки в \mathbb{R}^m	8
2	Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост	10
2.1	Дефиниция на функция на няколко променливи	10
2.2	Граница на функция на няколко променливи	10
2.3	Непрекъснатост на функция на няколко променливи	11
2.4	Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи	12
3	Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи	13
3.1	Дефиниция на частна производна	13
3.2	Частни производни от по-висок ред	14
3.3	Диференцируемост на функция	14
4	Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права	17
4.1	Диференциране на съставна функция	17
4.2	Производна по посока. Градиент	18
4.3	Допирателна равнина. Нормална права	20

5	Лекция 5: Неявни функции. Съществуване и диференциране	22
5.1	Неявни функции	22
6	Лекция 6: Формула на Тейлор за функция на няколко променливи. Локални екстремуми на функция на няколко променливи	27
6.1	Формула на Тейлор за функция на няколко променливи . .	27
6.2	Локални екстремуми на функция на няколко променливи .	29
6.3	Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция	30
7	Лекция 7: Локални екстремуми на функция на няколко променливи. Екстремум на неявна функция	36
7.1	Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция II	36
7.2	Локален екстремум на неявна функция	39
8	Лекция 8	42
9	Упражнения	43
9.1	Упражнение към лекция 1	43
9.2	Упражнение към лекция 2	44
9.3	Упражнение към лекция 3	49
9.4	Упражнение към лекция 4	54
9.5	Упражнение към лекция 5	59
9.6	Упражнение към лекция 6	66
9.7	Упражнение към лекция 7	70
9.8	Упражнение към лекция 8	76

1 Лекция 1: Пространството \mathbb{R}^m

1.1 Няколко важни неравенства

Нека a_k и b_k ($k = 1, 2, \dots, m$) са реални числа и $m \in \mathbb{N}$

Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц). В сила е следното неравенство:

$$\left(\sum_{k=1}^m a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^m a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^m b_k^2 \right)$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални:
($\exists \lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k$)

Равенството може да се запише:

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски). В сила е следното неравенство:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left(\sum_{k=1}^m |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)$$

Теорема 1.1.3. В сила е следното неравенство:

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^m |a_k - b_k|$$

1.2 Видове крайно мерни пространства

1.2.1 Линеинно(Векторно) пространство

Дефиниция 1.2.1. Нека L е линеинно(векторно) пространство над полето R . В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.

1. $x, y \in L \implies z = x + y \in L$
2. $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies z = \lambda x \in L$

1.2.2 Евклидово пространство

Дефиниция 1.2.2. Крайномерното пространство L се нарича евклидово, ако в него е въведено скалярно произведение, т.е. за всеки два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави реално число (x, y) , удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.

1. $x, y, z \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies (x + y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
2. $x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$
3. $x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$

1.2.3 Метрично пространство

Дефиниция 1.2.3. Крайномерното пространство L се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика) ρ , т.е. за два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави неотрицателно число $\rho \geq 0$ със следните свойства

1. $\rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z). \forall x, y, z \in L$

Метрично пространство L с метрика ρ се означава (L, ρ)

1.2.4 Нормирано пространство

Дефиниция 1.2.4. Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма $\|\cdot\|$, т.е. $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ със свойства

1. $x = 0 \implies \|x\| = 0, x \neq 0 \implies \|x\| > 0$
2. $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $x, y \in L \implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Теорема 1.2.1. Ако L е нормирано пространство с дадена норма $\|\cdot\|$, то L е метрично пространство, т.е. равенството $\rho(x, y) = \|x - y\|$ дефинира разстоянието в L

1.3 Пространството \mathbb{R}^m - дефиниция и основни свойства

Дефиниция 1.3.1. Множеството от наредени m -торки $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ от реални числа. Числата a_1, a_2, \dots, a_m се наричат съответно първа, втора, ..., m -та координата на a .

Ако имаме $a = (a_1, a_2, \dots, a_m), b = (b_1, b_2, \dots, b_m), ; \lambda \in \mathbb{R}$ то

1. $a + b = (a_1, a_2, \dots, a_m) + (b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) \in \mathbb{R}^m$
2. $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_m) \in \mathbb{R}^m$

1.3.1 Скалярно произведение

Скалярно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left(\sum_{k=1}^m a_k b_k \right)$$

С така въведено скалярно произведение пространството \mathbb{R}^m се превръща в евклидово.

1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k)^2}$$

се въвежда норма в \mathbb{R}^m .

Нормата генерира метрика в \mathbb{R}^m с формула:

$$\rho(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k - b_k)^2}$$

1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат: $a^2 = (a, a) = \sum_{k=1}^m a_k^2$

1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат: $(a, b)^2 \leq a^2 b^2$ и $|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$

1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат: $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

1.4 Точки и множества в \mathbb{R}^m **1.4.1 Паралелепипед**

Дефиниция 1.4.1. Множеството

$$\Pi(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k < x_k - a_k < \delta_k\}$$

се нарича отворен паралелепипед в \mathbb{R}^m с център точката a .

Множеството

$$\tilde{\Pi}(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k \leq x_k - a_k \leq \delta_k\}$$

се нарича затворен паралелепипед в \mathbb{R}^m с център точката a .

Ако $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_m = \delta$, получените множества $\Pi(a; \delta)$ и $\tilde{\Pi}(a; \delta)$ се наричат съответно отворен и затворен куб в \mathbb{R}^m с център a .

1.4.2 Сфера и кълбо

Дефиниция 1.4.2. Нека числото $r > 0$. Множеството

$$B(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) < r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| < r\}$$

се нарича отворено кълбо в \mathbb{R}^m с център a и радиус r , множеството

$$\tilde{B}(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) \leq r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| \leq r\}$$

се нарича затворено кълбо в \mathbb{R}^m с център a и радиус r , а множеството

$$S(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) = r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| = r\}$$

се нарича сфера в \mathbb{R}^m с център a и радиус r , а множеството

Дефиниция 1.4.3. Точката a се нарича

- вътрешна за множеството A , ако съществува отворено кълбо $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset A$
- външна за A , ако съществува $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$
- контурна за A , ако за всяко $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ и $B(a, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$
- изолирана ако съществува $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$

Дефиниция 1.4.4. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича

- отворено, ако всяка негова точка е вътрешна
- затворено, ако неговото допълнение $\mathbb{R}^m \setminus A$ е отворено

Дефиниция 1.4.5. Околност на дадена точка $a \in \mathbb{R}^m$ се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с U_a .

Дефиниция 1.4.6. Точка a се нарича точка на съгъстяване на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$, ако всяка нейна околност U_a съдържа поне една точка на A , различна от a , т.е. $U_a \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

Дефиниция 1.4.7. Величината

$$d = d(A) = \sup_{a', a'' \in A} \rho(a'; a'')$$

се нарича диаметър на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$.

Дефиниция 1.4.8. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича ограничено, ако съществува кълбо (с краен радиус), което го съдържа.

Дефиниция 1.4.9. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича компактно, ако A е затворено и ограничено.

Дефиниция 1.4.10. Множеството $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, чийто координати са непрекъснати функции $x_k = x_k(t) (k = 1, 2, \dots, m)$, дефинирани върху даден интервал $[a, b]$ се нарича непрекъснатата крива в \mathbb{R}^m . t се нарича параметър на кривата.

Точките $x(a) = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_m(a))$ и $x(b) = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_m(b))$ се наричат начало и край на дадената крива. Ако $x(a) = x(b)$ кривата е затворена

Дефиниция 1.4.11. Нека $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ са фиксирани числа за които $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$. Множеството от точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ чиито кординати се представят във вида

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, \dots, m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството \mathbb{R}^m , минаваща през точка x^0 по направление $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

Дефиниция 1.4.12. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъснатата крива γ , която ги свързва и $\gamma \subset A$.

Дефиниция 1.4.13. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.

Дефиниция 1.4.14. Област, всеки две точки на която могат да се съединят с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.

Дефиниция 1.4.15. Областа $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича звездообразна област, отнотно точката $x^0 \in A$, ако за всяка точка $x \in A$ отсечката $[x^0, x]$ лежи изцяло в A .

1.5 Редици от точки в \mathbb{R}^m

Дефиниция 1.5.1. Редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\}$ се нарича редица от точки в \mathbb{R}^m , а редицата $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^\infty (k = 1 \div m)$ - k -та кординатна редица. За по кратко редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ се означава $\{x^{(n)}\}$

Дефиниция 1.5.2. Редицата $\{y^{(l)}\}_{l=1}^\infty$ се нарича поредица на редицата $\{x^{(n)}\}$ и се означава:

$$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, \dots, \text{ или } \{x^{(n_l)}\}_{l=1}^\infty$$

ако за всяко l съществува такова n_l , че $y^{(l)} = x^{(n_l)}$, при това, ако $l' < l''$, то $n_{l'} < n_{l''}$.

Дефиниция 1.5.3. Редицата $\{x^{(n)}\}$ се нарича сходяща към точка $a \in \mathbb{R}^m$ (граница на редицата), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $N_0 > 0$, че за всяко $n > N_0$ е изпълнено неравенството $\rho(x^{(n)}; a) = \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$. Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.

Дефиниция 1.5.4. Точката $a \in \mathbb{R}^m$ се нарича точка на съгъстяване на редицата $\{x^{(n)}\}$, ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.

Теорема 1.5.1. Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$ и точката $a \in \mathbb{R}^m$. Тогава

$$(\{x^{(n)}\} \rightarrow a) \iff (x_k^{(n)} \rightarrow a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката a , тогава и само тогава когато всяка от координатите на редици $\{x_k^{(n)}\}$ има граница съответната координата a_k на точката a

Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши). Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$. Редицата $x^{(n)}$ е сходяща тогава и само тогава когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $N_0 > 0$, че при всяко $n \in \mathbb{N}, n > N_0$ и всяко $p \in \mathbb{N}$ е изпълнено $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = \|x^{(n+p)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$

Дефиниция 1.5.5. Редицата $\{x^{(n)}\}$ се нарича ограничена, ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.

Теорема 1.5.3 (Болцано-Вайерщрас). От всяка ограничена редица в пространството \mathbb{R}^m може да се избере сходяща подредица.

Дефиниция 1.5.6. Всяко множество $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича компактно, ако от всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$, може да се избере сходяща подредица $\{x_k^{(n)}\}$ с граница принадлежаща на A

2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

2.1 Дефиниция на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.1.1. Казва се че дадена функция с дефиниционна област (дефиниционно множество) D , ако на всяка точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ от множеството D е съпоставено реално число $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, т.е на всяко $x \in D$ съществува единствено число $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Понякога за кратко се записва.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

В \mathbb{R}^2 се използва (x, y) за означение, а в \mathbb{R}^3 - (x, y, z) .

2.2 Граница на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.2.1 (Коши). Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, a е точка на съгъстяване за D . Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \rightarrow a$ със стойности $x \neq a$ ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Дефиниция 2.2.2 (Хайне). Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, a е точка на съгъстяване за D . Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \rightarrow a$ със стойности $x \neq a$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in D, x^{(n)} \neq a$ сходяща към a , числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница L .

Теорема 2.2.1. Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.

Дефиниция 2.2.3. Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, a е точка на съгъстяване за D . Казва се че $f(x)$ дивергира към ∞ (съответно към $-\infty$) при $x \rightarrow a$ със стойности $x \neq a$, ако за всяко $A \in \mathbb{R}$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $f(x) > A$ (съответно $f(x) < A$). Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (-\infty)$$

Дефиниция 2.2.4 (Повторна граница). Нека $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на съгъстяване за D и функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Нека съществува

такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката a_2 , че за всички стойности $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$. Ако освен това съществува $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = A$, A се нарича повторна граница и се означава както следва

$$A = A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow a_2} (\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y))$$

Аналогично се съвежда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow a_1} (\lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y))$$

Теорема 2.2.2. Нека $D \subset \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на сгъстяване за D и функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Нека

1. Съществува такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката a_2 , че за всички стойности $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$.
2. Съществува границата $\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1,a_2)} f(x, y) = L$.

Тогава съществува граница $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y)$ и освен това е в сила равенството $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = L$

2.3 Непрекъснатост на функцията на няколко променливи

Дефиниция 2.3.1. Казва се че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Дефиниция 2.3.2 (непрекъснатост по Коши). Казва се, че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството D , за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Дефиниция 2.3.3 (непрекъснатост по Хайне). Казва се, че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}$ (с $x^{(n)} \in D$ за $n \in \mathbb{N}$) сходяща към a , числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница $f(a)$.

Дефиниция 2.3.4 (за съставна функция). Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество, $f : \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}, k = 1 \div m$. Полагайки $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$ за всяко $t \in (\alpha, \beta)$ съставната функция $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$ се дефинира по формулата

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$$

2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи¹²

Теорема 2.3.1. Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ интервалът $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ за $k = 1 \div m$. Нека освен това $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$ за $\forall t \in (\alpha, \beta)$ и x_k са непрекъснати в точката $t_0 \in (\alpha, \beta)$ за $k = 1 \div m$, а f е непрекъсната в $x^0 = x(t_0)$. Тогава функцията $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ е непрекъсната в точката t_0

2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.4.1. Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Функцията се нарича равномерно непрекъсната в A , ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon)$, че за всеки две точки $x', x'' \in A$ за които разстоянието $\rho(x'; x'') = \|x' - x''\| < \delta$, да следва, че $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 2.4.1 (на Вайерщрас). Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K . Тогава

1. f е ограничена в K , т.е. съществуват $m, M \in \mathbb{R}$ такива че за всички $x \in K$ е изпълнено неравенството $m \leq f(x) \leq M$
2. f достига най малката и най-голямата си стойност в K , т.е. съществуват точки $x^0, y^0 \in K$, такива че

$$f(x^0) = \inf_{x \in K} f(x); f(y^0) = \sup_{y \in K} f(x)$$

Теорема 2.4.2 (на Кантор). Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K . Тогава f е равномерно непрекъсната върху K .

3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функцията на две и повече променливи

3.1 Дефиниция на частна производна

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $D \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество
- $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ - точка, принадлежаща на D
- $U_{x^0} \subset D$ - околност на x^0
- $U_{x_i^0} \subset D$ - околност на x_i^0 ($i = 1, 2, \dots, m$)
- точката $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0) \in U_{x^0}$, за всички стойности на $x_i \in U_{x_i^0}$
- f и g - функции, дефинирани съответно в D и $U_{x_i^0}$. т.е.
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : U_{x_i^0} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$

Дефиниция 3.1.1. Производната, ако съществува на функцията g в точката x_i^0 се нарича частна производна на функцията f (по променлива x_i^0) в точката x^0 . Използва се означението $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(x^0)$.

Частната производна на функцията f относно променливата x_i е равна на границата на функцията $\varphi(h_i) = \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i}$ при $h_i \rightarrow 0$ (ако съществува) т.е

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \varphi(h_i) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$$

Пример 3.1.1.

$$f(x, y) = x^2 + 9xy^2$$

$$f'_x(x, y) = (x^2)'_x + (9xy^2)'_x = 2x + 9y^2$$

$$f'_y(x, y) = (x^2)'_y + (9xy^2)'_y = 0 + 9x \cdot 2 \cdot y = 18xy$$

3.2 Частни производни от по-висок ред

Дефиниция 3.2.1. Частната производна на частната производна от $n - 1$ ред, $n = 1, 2, \dots$ (ако съществува), се нарича частична производна от n -ти ред. Частните производни, получени при диференциране по различни променливи се наричат смесени производни, а получените при диференциране само по една и съща променлива се наричат чисти производни.

Пример 3.2.1.

$$f(x, y) = x^3 \sin(6y) + x^2 y^3 + 2222, f''_{x,y} = ?, f''_{y,x} = ?$$

$$f''_{x,y} = (f'_x(x, y))'_y$$

$$f'_x(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_x + (x^2 y^3)'_x + (2222)'_x = 3x^2 \sin(6y) + 2xy^3 + 0$$

$$f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y) + 2xy^3)'_y$$

$$f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y))'_y + (2xy^3)'_y = 3x^2 \cos(6y) \cdot 6 + 2 \cdot 3xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

$$f''_{y,x} = (f'_y(x, y))'_x$$

$$f'_y(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_y + (x^2 y^3)'_y + (2222)'_y$$

$$f'_y(x, y) = x^3 \cos(6y) \cdot 6 + x^2 \cdot 3y^2 + 0 = 6x^3 \cos(6y) + 3x^2 y^2$$

$$f''_{y,x} = (6x^3 \cos(6y) + 3x^2 y^2)'_x = (6x^3 \cos(6y))'_x + (3x^2 y^2)'_x$$

$$f''_{y,x} = 6 \cdot 3x^2 \cos(6y) + 3 \cdot 2x y^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

Теорема 3.2.1 (за равенство на смесени производни). Нека точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и нека функцията f е дефинирана в отвореното множество $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$, което е нейната област т.е $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Нека освен това съществуват частните производни $f'_x, f'_y, f''_{x,y}, f''_{y,x}$ за всички $(x, y) \in U$ и $f''_{x,y}, f''_{y,x}$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0) . Тогава е изпълнено равенството

$$f''_{x,y}(x_0, y_0) = f''_{y,x}(x_0, y_0)$$

3.3 Диференцируемост на функция

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$

- $U \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество, което е околност на x^0 . Без ограничение на общността може да се счита че U е δ -околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0; \delta)$ с център x^0 и радиус δ
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ - функция дефинирана в $U = B(x^0; \delta)$

Дефиниция 3.3.1. Функцията f се нарича диференцируема в точка x^0 ако съществуват числа A_1, A_2, \dots, A_m и функция $\varepsilon(x^0, x - x^0)$, дефинирана за всички допустими стойности на $x \in U$ и $x - x^0 = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_m - x_m^0)$, като при това

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^m A_k(x_k - x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0)\|x - x^0\|$$

и $\lim_{\|x - x^0\| \rightarrow 0} \varepsilon(x^0, x - x^0) = 0$

Дефиниция 3.3.2. Функцията f се нарича диференцируема в отвореното множество U , ако тя е диференцируема във всяка негова точка.

Теорема 3.3.1. Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то тя е непрекъсната.

Дефиниция 3.3.3. В случай на диференцируемост в точката x^0 на функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, изразът

$$df(x^0) \circ (h) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_m h_m$$

(или $df, df(x^0)$) се нарича пълен диференциал на $f(x)$ в точката x^0

Теорема 3.3.2. Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то съществуват частните производни $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ в точката x^0 и освен

$$\text{това } A_k(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m.$$

Дефиниция 3.3.4. Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то със следната формула се изразява нейната производна в точката x^0

$$f'(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0))$$

.

Теорема 3.3.3. Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ притежава частни производни $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$ в отвореното множество U и освен това са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то f е диференцируема в точката x^0 .

Дефиниция 3.3.5. Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ притежава частни производни в U и тези частични производни са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в точката x^0 . Ако тези производни са непрекъснати в U , то функцията се нарича непрекъснатот диференцируема в това множество.

Дефиниция 3.3.6. Диференциалът на диференциала от $n - 1$ ред ($n = 2, 3, \dots$) от функцията f (ако съществува) се нарича диференциал от n -ти ред (n -ти диференциал) на тази функция и се бележи $d^n f$

Ако f е два пъти непрекъснатата и диференцируема в $x^0 \in U$ тогава втория диференциал получава по следния резултат

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f(x^0)$$

което е симетрична квадратична форма на $dx_i (i = 1 \div m)$.

Аналогично ако f е n пъти непрекъснатата и диференцируема в $x^0 \in U$, то $d^n f(x^0)$ съществува и се дава със следната формула

$$d^n f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f(x^0)$$

4 Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права

4.1 Диференциране на съставна функция

$x^0 \in \mathbb{R}^m$ и отворено множество $U \subset \mathbb{R}^m$ е околност на точката x^0 (Без ограничение на общността може да се счита че U е δ -околност на x^0 т.е. U е отворено кълбо $B(x^0; \delta)$ с център x^0 и радиус δ).
 $t_0 \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$

Теорема 4.1.1. Нека функцията f е дефинирана в U , а φ_k - в интервала (α, β) , т.е.

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$ и $\varphi_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1 \div m$)

като при това $x_k = \varphi_k(t)$ за $k = 1 \div m$, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t) \in U$ за всички стойности на $t \in (\alpha, \beta)$. Нека f е диференцируема в U , f'_k са непрекъснати в x^0 за $k = 1 \div m$, φ_k са диференцируеми в t_0 и $F : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ е дефинирана с равенството.

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)), t \in (\alpha, \beta)$$

Тогава функцията F е диференцируема в t_0 и в сила е следното равенство

$$F'(t_0) = \sum_{k=1}^m f'_{x_k}(x^0) \varphi'_k(t_0)$$

За $m = 2$:

$$\varphi_1(t) = \varphi(t), \varphi_2(t) = \psi(t)$$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) \varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) \psi'(t_0)$$

Пример 4.1.1. $f(x, y)$ - дефинирана и диференцируема в $U_{(1,2)} \subset \mathbb{R}^2$. с непрекъснати частни производни f'_x, f'_y в точката $(1, 2)$.

Намерете производната $F'(0)$ на съставната функция F , зададена с равен-

ството $F(t) = f(1 + 3t, 2 + 4t)$.

$$t_0 = 0$$

$$x = \varphi(t) = 1 + 3t$$

$$y = \psi(t) = 2 + 4t$$

$$x_0 = \varphi(0) = 1$$

$$y_0 = \psi(0) = 2$$

$$\varphi'(t) = 3$$

$$\psi'(t) = 4$$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0) \implies F'(0) = 3f'_x(1, 2) + 4f'_y(1, 2)$$

4.2 Производна по посока. Градиент

Нека $x^0 \in \mathbb{R}^m$ и лъчът l е дефиниран, както следва:

$$l : x = x^0 + t\nu, t > 0$$

Функцията f е дефинирана върху този лъч, а

$$\varphi(t) := f(x(t)) = f(x^0 + t\nu), t > 0$$

Дефиниция 4.2.1. Границата (ако съществува)

$$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

се нарича производна на f в точката x^0 по посока на вектора ν и се означава $\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}$, т.е

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

ако съществува границата.

Ако частните производни съществуват, са производни "по посока на координатните оси".

Ако f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката в x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0 , то съществува производната ѝ по посока на вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$ и

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^m \nu_k \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$$

Дефиниция 4.2.2. Векторът с координати $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ се нарича градиент на f в точката x^0 и се означава

$$\text{grad } f(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0))$$

Предвид тази дефиниция, формулата за производна по посока на вектор ν се записва по кратко във вида

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \text{grad } f(x^0), \nu$$

Теорема 4.2.1. Ако функцията f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0 , то съществува производната на f по посока на произволен вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$ и тя се дава с формула: $\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \text{grad } f(x^0)$

Ако, ν е единичен вектор, т.е. $\|\nu\| = 1$.

Тогава е в сила неравенството $\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| \leq \|\text{grad } f(x^0)\|$, което следва от неравенство на Коши.

$$\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| = |\text{grad } f(x^0), \nu| \leq \|\text{grad } f(x^0)\| \|\nu\| = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

Равенство се достига само когато ν и $\text{grad } f(x^0)$ са колинеарни (еднопосочни или успоредни). тогава

$$\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

Ако вектора ν е колинеарен с градиента, тогава векторът $\nu = \frac{\text{grad } f(x^0)}{\|\text{grad } f(x^0)\|}$ и тогава

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \left(\text{grad } f(x^0), \frac{\text{grad } f(x^0)}{\|\text{grad } f(x^0)\|} \right) = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

Ако $\text{grad } f(x^0) \neq 0$ то производната достига най голяма стойност единствено, ако диференцирането се извършва по посока на градиента. С други думи, посоката на градиента е посоката на най бързо нарастване на функцията, а големината му е равна на производната по тази посока.

Ако $\nu = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m)$, то производната по посока ν става

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = f'_{x_1}(x^0) \cos \alpha_1 + f'_{x_2}(x^0) \cos \alpha_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0) \cos \alpha_m.$$

4.3 Допирателна равнина. Нормална права

- $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ - точка в \mathbb{R}^2
- $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ точка в \mathbb{R}^3
- $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$ - околност на (x_0, y_0)
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ - функция
- $z_0 = f(x_0, y_0)$
- $S : z = f(x, y) \iff S : f(x, y) - z = 0$ - уравнение на равнина
- f'_x, f'_y - първи частни производни за всички $(x, y) \in U$, f'_x, f'_y са непрекъснати в точката (x_0, y_0)

Дефиниция 4.3.1. Равнината $\tau(\tau \nparallel Oz)$, зададена с уравнение

$$\tau : z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина в точката M_0 към повърхнината S и представлява графиката на $f(x, y)$.

Дефиниция 4.3.2. Векторите n_1, n_2

$$n_1(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) \quad n_2(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1),$$

които са нормални вектори на тангенциалната равнина, се наричат нормални вектори и за повърхнината S .

$n_1 = -n_2$ Това позволява да се използват за ориентация на повърхнината S .

Горната страна се дефинира с вектора n_1 за който ъгъл $\angle(n_1, k)$ е остър.

Дефиниция 4.3.3. Правата n , зададена с уравнение

$$n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$

се нарича нормала към повърхнината S към точка M_0

Ако прекараме две равнини през O съответно $\alpha : x = x_0$ и $\beta : y = y_0$ всяка от тях пресича повърхнината в крива линия съответно

$$C_1 : x = x_0, y = y, z = f(x_0, y) \quad C_2 : x = x, y = y_0, z = f(x, y_0)$$

t_1 е направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в точката 0 , а с t_2 - направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в същата точката, то

$$t_1(0, 1, f'_y(x_0, y_0)), \quad t_2(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$$

Равнината τ е компланарна с векторите t_1, t_2 то нейния нормален вектор може да се получи от векторното им произведение

$$n_1 = t_2 \times t_1 \quad n_2 = t_1 \times t_2$$

Пример 4.3.1. За повърхнина S , зададена с уравнение $S : z = x^2 + y^2 + 3$, да се напишат:

- 1) допирателната равнина τ в $M_0(0, 0, 3)$
- 2) нормалните вектори на τ в т. M_0 .
- 3) нормалата на повърхнината S в т. M_0 .

Решение:

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x ; z'_y = 2y ; M_0(0, 0, 3) = M_0(x_0, y_0, z_0) \\ z'_x(x_0, y_0) &= z'_x(0, 0) = 0 ; z'_y(x_0, y_0) = z'_y(0, 0) = 0 \\ 1) \tau : z - z_0 &= z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \tau : z - 3 &= 0x + 0y \iff \tau : z = 3 \\ 2) \vec{n}_1 &= (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) = (0, 0, 1) \\ \vec{n}_2 &= (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1) = (0, 0, -1) \\ 3) n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} &= \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1} \\ n : \frac{x - 0}{0} &= \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 3}{1} = \lambda \\ n(0, 0, \lambda + 3), \lambda &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

5 Лекция 5: Неявни функции. Съществуване и диференциране

5.1 Неявни функции

Нека имаме уравнението $F(x, y) = 0$ и да се реши спрямо y . Решението трябва да зависи и от другата променлива. Нека $y = f(x)$ и заместваме в началното уравнение.

$$F(x, f(x)) = 0$$

Дефиниция 5.1.1. Ако функцията $f(x)$ удовлетворява равенството

$$F(x, f(x)) = 0$$

за всяко x от дефиниционното си множество, то тя се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението $F(x; y) = 0$.

Ако диференцираме равенството $F(x, f(x)) = 0$ по x с теоремата за съставни функции получаваме

$$F'_x(x, f(x)) + f'(x)F'_y(x, f(x)) = 0 \implies f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

Където $F'_y(x, f(x)) \neq 0$

Пример 5.1.1. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$

$$F(x, y) = 0 \iff y^2 = 5 - x^2$$

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{5 - x^2}$$

Нека $M_0(x_0, y_0)$ точка в \mathbb{R}^2 , отвореното множество $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$ е нейна околност и нека $F \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 5.1.1 (Съществуване на неявна функция). Нека $M_0(x_0, y_0)$ точка в \mathbb{R}^2 , отвореното множество $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$ е нейна околност и функцията $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворява следните условия

1. F е непрекъсната в U
2. $F(x_0, y_0) = 0$
3. За всяка точка $(x, y) \in U \exists F'_y(x, y)$
4. F'_y е непрекъсната в M_0

$$5. \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Тогава съществуват околности

$$X = \{x : |x - x_0| < a\} (a > 0) \quad Y = \{y : |y - y_0| < b\} (b > 0)$$

такива че правоъгълника $\Pi = X \times Y \subset U$ и съществува единствена функция $y = f(x), f : X \rightarrow Y$, f - непрекъсната в X , $f(x_0) = y_0$ и $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$

Дефиниция 5.1.2. Функцията $y = f(x)$ се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението $F(x, y) = 0$, в околност на точката (x_0, y_0)

Теорема 5.1.2 (Добавка към 5.1.1). Ако освен това F'_x, F'_y са дефинирани в U и непрекъснати в (x_0, y_0) то $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 и $f'(x_0)$ се изразява

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

Ако F'_x, F'_y са непрекъснати в $U = U_{M_0}$, то f' е непрекъсната в X . Прилагайки формулата за производна в произволна точка в $x \in X$ получаваме

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (1)$$

Аналогично се формулира теоремата за неявна функция от уравнението $F(x, y) = 0$, за $x(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ($m > 2$) и $y \in \mathbb{R}$ т.е $F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$

Теорема 5.1.3 (Съществуване на неявна функция). Нека точката $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$, $M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ е околност на M_0 и функцията $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворява следните условия

1. F е непрекъсната в U
2. $F(x^0, y_0) = 0$
3. За всяка точка $(x, y) \in U \exists F'_y(x, y)$
4. F'_y е непрекъсната в M_0
5. $F'_y(x^0, y_0) \neq 0$

Тогава съществуват околности:

$$X = \{x : |x - x_k^0| < a_k\} (a_k > 0) \quad k = 1 \div m; \quad Y = \{y : |y - y_0| < b\} (b > 0)$$

такива че правоъгълника $\Pi = X \times Y \subset U, X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ и освен това съществува единствена функция $y = f(x), f : X \rightarrow Y$, f - непрекъсната в X , $f(x^0) = y_0$ и $\forall x \in X : F(x; f(x)) = 0$

Ако освен това $F'_{x_k}, k = 1 \div m$ и F'_y са дефинирани в U и непрекъснати в (x^0, y_0) , то $f(x)$ е диференцируема в точката x^0 и $f'(x_k^0)$ се изразява с формулата

$$f'(x_k^0) = -\frac{F'_{x_k}(x^0, f(x_0))}{F'_y(x^0, f(x_0))} = -\frac{F'_{x_k}(x^0, y_0)}{F'_y(x^0, y_0)}$$

Пример 5.1.2. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. Да се определи дали съществува единствена функция $y = f(x)$ определена от неявно от уравнението $F(x, y) = 0$ в околността $(1, 2)$. Ако съществува да се пресметне $f'(1)$.

$$F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4 \neq 0$$

Съществува единствена неявна функция $y = f(x)$ определена с уравнението $F(x, y) = 0$

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

$$F'_x = 2x, \quad F'_x(1, 2) = 4, \quad F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4$$

$$f'(1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Пример 5.1.3. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3z^2 - 13$. Да се определи дали съществува единствена функция $z = f(x, y)$ определена от неявно от уравнението $F(x, y, z) = 0$ в околността $(0, 1, 2)$. Ако съществува да се пресметне $z'_x(0, 1), z'_y(0, 1)$.

$$F'_z = 6z \implies F'_z(0, 1, 2) = 6 \cdot 2 = 12 \neq 0$$

Съществува единствена неявна функция $z = f(x, y)$ определена от неявно от уравнението

$$F'_x = 2x \implies F'_x(0, 1, 2) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$F'_y = 2y \implies F'_y(0, 1, 2) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{0}{6} = 0$$

$$z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Ако F'_{x_k}, F'_{y_k} са непрекъснати в $U = U_{M_0}$, то f'_{x_k} е непрекъснатата в X . Прилагайки формулата за производна в произволна точка в $x \in X$ получаваме

$$y'_{x_k} = f'_{x_k}(x) = -\frac{F'_{x_k}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_{x_k}(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (2)$$

Ако F има непрекъснати частни производни от втори ред, то изразите от дясната страна на (1) (съответно (2)) могат да се диференцират още веднъж по променлива $x(x_j, j = 1 \div m)$, при което се получават вторите производни на f . Така се получават формулите

$$f''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

респективно, изпускайки за удобство променливите получаваме

$$f''_{x_k x_k}(x) = f''_{x_k^2}(x) = -\frac{F''_{x_k^2} + 2F''_{x_k y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'^2_{x_k}}{F'_y}$$

и за $k \neq j$

$$f''_{x_k x_j}(x) = -\frac{F''_{x_k x_j} + F''_{x_k y}y'_{x_j} + F''_{x_j y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'_{x_k}y'_{x_j}}{F'_y}$$

Пример 5.1.4. Да се намери y', y'' на неявната функция $y = f(x)$, дефинирана от уравнението

$$x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

Да се пресметнат $y'(0), y''(0)$, ако $y(0) = 1$

Решение:

$$F(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

$$F'_y = -2x + 10y + 4 \neq 0$$

$$F'_x(x, y) = 2x - 2y - 2$$

$$F'_y(0, 1) = -2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4 \neq 0$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x - 2y - 2}{-2x + 10y + 4} = -\frac{x - y - 1}{-x + 5y + 2}$$

$$y'(0) = -\frac{0 - 1 - 1}{-0 + 5 \cdot 1 + 2} = -\frac{-2}{7} = \frac{2}{7}$$

$$y''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

$$F''_{xx} = 2, \quad F''_{yy} = 10, \quad F''_{xy} = -2$$

$$F''_{xx}(0, 1) = 2, \quad F''_{yy}(0, 1) = 10, \quad F''_{xy}(0, 1) = -2$$

$$y''(x) = -\frac{2 + 2 \cdot (-2)y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$

$$y''(x) = -\frac{2 + -4y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$

$$y''(0) = -\frac{2 + -4 \cdot \frac{2}{7} + 10 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2}{-2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4}$$

$$y''(0) = -\frac{2 + -\frac{8}{7} + \frac{40}{49}}{14}$$

$$y''(0) = -\frac{98 - 56 + 40}{49 \cdot 14} = -\frac{82}{49 \cdot 14} = \frac{82}{49} \cdot \frac{1}{14} = \frac{41}{343}$$

6 Лекция 6: Формула на Тейлор за функция на няколко променливи. Локални екстремуми на функция на няколко променливи

6.1 Формула на Тейлор за функция на няколко променливи

Формула на Тейлор за функцията f дефинирана и непрекъсната в околност $U = U_{x_0}$ на точката x_0 , която има производни до $(n+1)$ ред ($n \in \mathbb{N}_0$)

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x)$$

с остатъчен член записан във формата на Лагранж

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Нека имаме точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, околността $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$, която е звездообразна относно (x_0, y_0) (Всяка точка $(x, y) \in U$ околността съдържа и отсечка, която я свързва с (x_0, y_0)). Без ограничение на общостта считаме, че U е δ -околност на (x_0, y_0) (отворен кръг с център (x_0, y_0) и радиус δ). Функцията f е дефинирана в U .

Теорема 6.1.1. Нека функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е дефинирана и непрекъсната в δ -околността U на точката (x_0, y_0) , заедно с частните производни от $n+1$ -ви ред ($n \in \mathbb{N}_0$). Нека $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$.

Тогава съществува $\vartheta = \vartheta(\Delta x, \Delta y)$, ($0 < \vartheta < 1$) за която

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + \\ &\frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^3 f(x_0, y_0) + \dots + \\ &\frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y) \end{aligned}$$

или по кратко

$$\Delta z = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y) \quad (3)$$

където

$$r_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n+1} f(x_0 + \vartheta \Delta x, y_0 + \vartheta \Delta y) \quad (4)$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

Дефиниция 6.1.1. Формулата (3) се нарича формула на Тейлор от ред n за функция f , а функцията r_n - остатъчен член, а записът му във вида (4) се нарича остатъчен член на формулата на Тейлор във формата на Лагранж.

Ако $n = 0$, първото събираемо изисква разяснение, защото индексът над знака за сумиране е по малък от индекса под знака за сумиране. В този случай по дефиниция този член е равен на нула, т.е. формулата има вид

$$\Delta z = r_0(\Delta x, \Delta y)$$

Теорема 6.1.2. Нека функцията $f : U \rightarrow R$ дефинирана и непрекъснатата в δ -околността U на точката x^0 , заедно с частните производни от $n+1$ -ви ред ($n \in \mathbb{N}_0$). Нека $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2} < \delta$.

Тогава съществува $\vartheta = \vartheta(\Delta x) = \vartheta(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$, ($0 < \vartheta < 1$) за която

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x) - f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = \\ &= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta x_m \right)^k f(x_1^0, \dots, x_m^0) + r_n(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \end{aligned}$$

Където

$$r_n(\Delta x) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta x_m \right)^{n+1} f(x^0 + \vartheta \Delta x),$$

$$(x^0 + \vartheta \Delta x) = (x_1^0 + \vartheta \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \vartheta \Delta x_m) \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Записано с диференциали

$$\Delta z = f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^n d^k f(x^0) + r_n(\Delta x)$$

при $n = 1$

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + r_1(\Delta x, \Delta y) \\ r_1(\Delta x, \Delta y) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{\partial x^2} \Delta x^2 \right] + \frac{\partial^2 f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right]\end{aligned}$$

Пример 6.1.1. Да се напише формулата на Тейлор за $f(x, y) = e^{x+y}$ в точката $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $n = 1$

$$\begin{aligned}f'_x &= e^{x+y} \quad f'_y = e^{x+y} \quad f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yy} = e^{x+y} \\ f(0, 0) &= f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 1 \\ \xi &= (\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = \vartheta x, \quad \xi_2 = \vartheta y, \quad \vartheta \in (0, 1) \\ f''_{xx}(\xi_1, \xi_2) &= f''_{xy}(\xi_1, \xi_2) = f''_{yx}(\xi_1, \xi_2) = f''_{yy}(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1 + \xi_2} = e^{\vartheta(x+y)} \\ f(x, y) &= 1 + 1x + 1y + \frac{1}{2!} (e^{\vartheta(x+y)} x^2 + 2e^{\vartheta(x+y)} xy + e^{\vartheta(x+y)} y^2) \\ &= 1 + (x + y) + \frac{e^{\vartheta(x+y)}}{2!} (x + y)^2\end{aligned}$$

6.2 Локални екстремуми на функция на няколко променливи

Дефиниция 6.2.1. Казваме че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ има локален максимум в точката $x^0 \in D$, ако съществува околност $U_{x^0} \subset D$ на точката x^0 , че

$$f(x^0) \geq f(x), \quad \forall x \in U_{x^0}$$

Дефиниция 6.2.2. Казваме че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ има локален минимум в точката $x^0 \in D$, ако съществува околност $U_{x^0} \subset D$ на точката x^0 , че

$$f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in U_{x^0}$$

Дефиниция 6.2.3. Локалните максимуми и локалните минимуми се наричат по - общо локални екстремуми.

Дефиниция 6.2.4. Ако неравенството в дефинициите (6.2.1) или (6.2.2) е строго при $x \neq x^0$, то съответния локален екстремум се нарича строг локален екстремум (строг локален максимум или строг локален минимум).

Теорема 6.2.1 (Необходимо условие). Нека функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ притежава локален екстремум в $x^0 \in D \subset \mathbb{R}^m$ и освен това съществуват първите частни производни $f'_{x_k}(x^0)$ в точката x^0 , $k = 1 \div m$ тогава

$$f'_{x_k}(x^0) = 0 \quad k = 1 \div m$$

Дефиниция 6.2.5. Точката x^0 се нарича стационарна точка за функцията f , диференцируема в нея, ако $\text{grad } f(x^0) = 0$.

Пример 6.2.1. Тук са разгледани две функции които са дефинирани и диференцируеми в цялата равнина \mathbb{R}^2 , но нямат локални екстремуми

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{x+y} \\ f'_x(x, y) &= f'_y(x, y) = e^{x+y} \neq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy \\ f'_x(x, y) &= x \quad f'_y(x, y) = y \\ \text{grad } f(x, y) &= (y, x) = (0, 0) \\ f(x, y) - f(0, 0) &= xy - 0 = xy \implies \end{aligned}$$

няма локален екстремум (сменя знака си във всяка произволно взета околност на точката $(0,0)$). Точката $(0,0)$ е седловина на хиперболичната повърхнина $z = xy$.

6.3 Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция

Теорема 6.3.1 (Достатъчно условие). Нека функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ притежава непрекъснати частни производни $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ от втори ред в околността U и точката (x_0, y_0) е стационарна точка f , т.е

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Тогава

1. Ако

$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0$$

то $f(x, y)$ има локален екстермум в (x_0, y_0) .

2. Ако

$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 < 0$$

то $f(x, y)$ няма локален екстермум в (x_0, y_0) .

3. Ако

$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 = 0$$

то $f(x, y)$ може да има локален екстремум в (x_0, y_0) , така и да няма такъв.

Пример 6.3.1. Да се намерят екстремумите на (ако съществуват) и да се определи видът им.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = -x^2 - y^2$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f'_x = 2x \quad f'_y = 2y$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0 \implies \exists \text{екстремум}$$

$$f''_{xx} = 2 > 0 \implies \text{екстремума е минимум } f_{min} = f(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$$

$$f(x, y) = -x^2 - y^2$$

$$f'_x = -2x \quad f'_y = -2y$$

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка}$$

$$f''_{xx} = -2 \quad f''_{yy} = -2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0 \implies \exists \text{екстремум}$$

$$f''_{xx} = -2 < 0 \implies \text{екстремума е максимум } f_{max} = f(0, 0) = -0^2 - 0^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= x^2 - y^2 \\
 f'_x &= 2x \quad f'_y = -2y \\
 \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} &\implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка} \\
 f''_{xx} &= 2 \quad f''_{yy} = -2 \quad f''_{xy} = 0 \\
 \Delta &= f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 2(-2) - 0 = -4 < 0 \implies \text{няма екстремум}
 \end{aligned}$$

Пример 6.3.2. Да се намерят екстремумите на (ако съществуват) и да се определи видът им.

- $f(x, y) = y^4 + x^2$
- $f(x, y) = -y^4 - x^2$
- $f(x, y) = y^3 + x^2$
- $f(x, y) = xy^3$
- $f(x, y) = (x + y)^2$
- $f(x, y) = -(x + y)^2$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= y^4 + x^2 \\
 f'_x &= 2x \quad f'_y = 4y^3 \\
 \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} &\implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка} \\
 f''_{xx} &= 2 \quad f''_{yy} = 12y^2 \quad f''_{xy} = 0 \\
 \Delta &= f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 2(12y^2) - 0 = 24y^2 = 0 \implies \text{трябва допълнително изследване} \\
 f(x, y) - f(0, 0) &= y^4 + x^2 - (0^4 + 0^2) = y^4 + x^2 \geq 0 \\
 y^4 + x^2 = 0 &\iff x = y = 0 \\
 f(x, y) - f(0, 0) &\geq 0 \iff f(x, y) \geq f(0, 0) \text{ в } \mathbb{R}^2 \implies \text{локален минимум} \\
 f_{min} &= f(0, 0) = 0^4 + 0^2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= -y^4 - x^2 \\
 f'_x &= -2x \quad f'_y = -4y^3 \\
 \begin{cases} -2x = 0 \\ -4y^3 = 0 \end{cases} &\implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка} \\
 f''_{xx} &= -2 \quad f''_{yy} = -12y^2 \quad f''_{xy} = 0 \\
 \Delta &= f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = -2(-12y^2) - 0 = 24y^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване} \\
 f(x, y) - f(0, 0) &= -y^4 - x^2 - (-0^4 - 0^2) = -y^4 - x^2 \geq 0 \iff y^4 + x^2 \leq 0 \\
 y^4 + x^2 &= 0 \iff x = y = 0 \\
 f(x, y) - f(0, 0) &\leq 0 \iff f(x, y) \leq f(0, 0) \text{ в } \mathbb{R}^2 \implies \text{локален максимум} \\
 f_{\max} &= f(0, 0) = -0^4 - 0^2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= y^3 + x^2 f'_x = 2x \quad f'_y = 3y^2 \\
 \begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} &\implies M_0(0, 0) - \text{стационарна точка} \\
 f''_{xx} &= 2 \quad f''_{yy} = 6y \quad f''_{xy} = 0 \\
 \Delta &= f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 2(6y) - 0 = 12y^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване} \\
 f(x, y) - f(0, 0) &= y^3 + x^2 - (0^3 + 0^2) = y^3 + x^2 \\
 \text{За всяка точка от положителната ординатна ос } (x > 0, y > 0) &f(x, y) - f(0, 0) > 0 \\
 \text{За всяка точка от отрицателната ординатна ос } (x < 0, y < 0) &f(x, y) - f(0, 0) < 0 \\
 \implies f(x, y) - f(0, 0) &\text{ Няма постоянен знак във всяка околност на } M_0 \\
 \implies f(x, y) &\text{ няма локален екстремум в } 0 \text{ и точката } M_0 \text{ е седловинна точка}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= xy^3 f'_x = y^3 \quad f'_y = 3xy^2 \\
 \begin{cases} y^3 = 0 \implies y = 0 \\ 3xy^2 = 0 \implies x = 0 \text{ или } x \neq 0 \end{cases} &\implies
 \end{aligned}$$

Стационарните точки са безкрайно много

$$M_0(x, 0) (x \in \mathbb{R})$$

$$1. \ x_0 = 0, y = 0 \implies M_0 = (0, 0)$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = xy^3 - 0 = xy^2$$

$$\text{I и III квадрант} - xy > 0, \text{ а във II и IV} - xy < 0, y^2 > 0 \implies$$

$$\text{Сменя знака си} \implies f \text{ няма локален екстремум в } 0$$

$$2. \ x_0 \neq 0, y = 0 \implies M_1 = (x_0, 0)$$

$$\Delta f = f(x_0, y) - f(x_0, 0) = x_0 y^3 - x_0 0^3 \implies$$

$$\Delta f = y^2(x_0 y)$$

$$x_0 > 0 \implies \begin{cases} \Delta f > 0, & y > 0 \\ \Delta f < 0, & y < 0 \end{cases} \implies \Delta f \text{ сменя знака си в околността на } M_1$$

Аналогично за $x_0 < 0$ знакът не се запазва

$\implies f$ няма локален екстремум в точката $M_1 \implies f$ няма локални екстремуми

$$f(x, y) = (x + y)^2$$

$$f'_x = 2(x + y) \quad f'_y = 2(x + y)$$

$$\begin{cases} 2(x + y) = 0 \\ 2(x + y) = 0 \end{cases} \iff x + y = 0 \iff -x = y \implies$$

Стационарни точки са всички точки от ъглополовящата на II и IV квадрант

- от правата $x + y = 0$, т.е $M(x_0, -x_0), x_0 \in \mathbb{R}$

$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{xy} = 2,$$

$$\Delta = 2 \cdot 2 - (2)^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване}$$

$$f(x, y) - f(x_0, -x_0) = (x + y)^2 - (x_0 - x_0)^2 = (x + y)^2 \geq 0 \implies$$

f има локален минимум във всяка точка от вида $M(x_0, -x_0)$,

$$f_{min} = (x_0 - x_0)^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= -(x + y)^2 \\
 f'_x &= -2(x + y) \quad f'_y = -2(x + y) \\
 \begin{cases} -2(x + y) = 0 \\ -2(x + y) = 0 \end{cases} &\iff x + y = 0 \iff -x = y \implies
 \end{aligned}$$

Стационарни точки са всички точки от ъглополовящата на II и IV квадрант

- от правата $x + y = 0$, т.е. $M(x_0, -x_0), x_0 \in \mathbb{R}$

$$f''_{xx} = -2, \quad f''_{yy} = -2, \quad f''_{xy} = -2,$$

$$\Delta = (-2)(-2) - (-2)^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване}$$

$$f(x, y) - f(x_0, -x_0) = -(x + y)^2 + (x_0 - x_0)^2 = -(x + y)^2 \leq 0 \implies$$

f има локален максимум във всяка точка от вида $M(x_0, -x_0)$,

$$f_{max} = (x_0 - x_0)^2 = 0$$

7 Лекция 7: Локални екстремуми на функция на няколко променливи. Екстремум на неявна функция

7.1 Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция II

Нека точката $x^0 \in \mathbb{R}^m$, ($m \geq 2$), отвореното множество $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$ е нейна околност и функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е поне два пъти непрекъснато диференцируема в U а точката x^0 е стационарна точка за f . В този случай изследванията се свеждат до използване на формулата на Тейлор с $n = 1$

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^m f'_{x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

$$\xi := x^0 + \vartheta(x - x^0), \quad \vartheta = \vartheta(x) \in (0, 1)$$

Първите частни производни имат стойност 0 в стационарните точки

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

Дефиниция 7.1.1. Квадратична форма A

$$A(x) = A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i x_j$$

се нарича положително дефинирана (отрицателно дефинирана) ако за всеки ненулев вектор $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ е изпълнено

$$A(x) > 0 \quad (A(x) < 0)$$

и знакопроменлива, ако за вектори

$$x, y \in \mathbb{R}^m : \quad A(x) > 0 \quad A(y) < 0$$

Теорема 7.1.1 (Достатъчно условие). Нека функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ притежава непрекъснати частни производни $f''_{x_i x_j}(i, j = 1 \div m)$ от втори ред в околността U на точката $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ и е стационарна точка

$$f_{x_i}(x^0) = f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0) = 0 \quad (i = 1 \div m)$$

Тогава ако квадратичната форма (втори диференциал)

$$A(dx_1, \dots, dx_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j$$

е положително дефинитна квадратична форма, то точката x^0 е строг локален минимум за функцията f .

Ако е отрицателно дефинитна квадратична форма, то точката x^0 е строг локален максимум за функцията f .

Ако е недефинитна, то f няма локален екстремум.

Ако изразът е равен на 0 може да има локален, но може и да няма.

Теорема 7.1.2 (Критерий на Силвестър). Квадратичната форма A дефинирана в (7.1.1) в която $a_{ij} = a_{ji}$, $(i, j = 1 \div m)$ е положително дефинитна тогава и само тогава когато,

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

и отрицателно дефинитна ($-A(x)$ е положително дефинитна) тогава и само тогава, когато

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \dots, \quad (-1)^k \Delta_k > 0 (k = 1 \div m)$$

Пример 7.1.1. Да се разгледат функциите в точката $M_0(1, 2, -3)$

- $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z$
- $u = -x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z$
- $u = x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 6z$

$$\begin{aligned} \Delta_1(M_0) &= u''_{xx}(M_0), \\ \Delta_2(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} \\ \Delta_3(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u &= x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z \\
 u'_x &= 2x - 2 & u'_y &= 2y - 4 & u'_z &= 2z - 6 \\
 u''_{xx} &= 2 & u''_{xy} &= 0 & u''_{xz} &= 0 \\
 u''_{yx} &= 0 & u''_{yy} &= 2 & u''_{yz} &= 0 \\
 u''_{zx} &= 0 & u''_{zy} &= 0 & u''_{zz} &= 2 \\
 \Delta_1(M_0) &= u''_{xx}(M_0) = 2 > 0 \\
 \Delta_2(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\
 \Delta_3(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \implies
 \end{aligned}$$

Съгласно критерия на Силвестър вторият диференциал е положително дефинитна квадратична форма и има локален минимум

$$u_{min} = u(1, -2, 3) = -14$$

$$\begin{aligned}
 u &= -x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z \\
 u'_x &= -2x + 2 & u'_y &= -2y + 4 & u'_z &= -2z - 6 \\
 u''_{xx} &= -2 & u''_{xy} &= 0 & u''_{xz} &= 0 \\
 u''_{yx} &= 0 & u''_{yy} &= -2 & u''_{yz} &= 0 \\
 u''_{zx} &= 0 & u''_{zy} &= 0 & u''_{zz} &= -2 \\
 \Delta_1(M_0) &= u''_{xx}(M_0) = -2 < 0 \\
 \Delta_2(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\
 \Delta_3(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \implies
 \end{aligned}$$

Съгласно критерия на Силвестър вторият диференциал е отрицателно дефинитна квадратична форма и има локален максимум

$$u_{max} = u(1, -2, 3) = 14$$

$$\begin{aligned}
u &= x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 6z \\
u'_x &= 2x - 2 & u'_y &= 2y - 4 & u'_z &= -2z - 6 \\
u''_{xx} &= 2 & u''_{xy} &= 0 & u''_{xz} &= 0 \\
u''_{yx} &= 0 & u''_{yy} &= 2 & u''_{yz} &= 0 \\
u''_{zx} &= 0 & u''_{zy} &= 0 & u''_{zz} &= -2 \\
\Delta_1(M_0) &= u''_{xx}(M_0) = 2 > 0 \\
\Delta_2(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\
\Delta_3(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \implies
\end{aligned}$$

Не е дефинитна квадратична форма \implies няма локален екстремум

7.2 Локален екстремум на неявна функция

Нека

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$
- $M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ - точка
- $U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ - околност на M_0
- $F : U_{M_0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x^0, y_0) = 0$
- $\exists F'_x, F'_y : F'_y(M_0) \neq 0, F'_y$ е непрекъсната в M_0

Тогава уравнението $F(x, y) = 0$ дефинира неявната функция f в околност $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$ на точката x^0

$$f : U \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x^0) = y_0$$

Възможно е да има локални екстремуми. Тяхното намиране се осъществява по познатия ни алгоритъм.

В случая $m = 1$ неявната функция f е на една променлива съгласно формулата

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

стационарните точки се намират като решения на система

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y) \neq 0 \end{cases}$$

Евентуално съществуване на екстремум може да се установи от знака на $f''(x^0)$ тъй като по формула

$$f''(x^0) = -\frac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

Пример 7.2.1. Уравнението $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ задава четири неявни функции $y = f_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) според това в кой квадрант се намира точката, в чиято околност се търси неявната функция.

Нека

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

то уравнението $F(x, y) = 0$ задава единствена неявна функция в околността на някоя точка, само ако

$$F'_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2 + 1) \neq 0$$

в нея което дава $y \neq 0$

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 \\ 4y \neq 0 \end{cases}$$

$x = 0$ не е решение системата е еквивалентна

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 1 - 2(2x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 3 \\ 4y^2 = 1 \end{cases}$$

От където се получават 4 точки

$$M_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), M_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), M_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), M_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Нека $y = f_k(x)$ е неявна функция дефинирана в околността на точката M_k . Тъй като $F''_{xx}(x, y) = 4(3x^2 + y^2 - 1) > 0$ за точките M_k то знакът се определя от стойността на $F'_y(M_k) = 8y_k$

$$f''_1(x_1) < 0 \quad f''_2(x_2) < 0 \implies \text{максимум със стойност } \frac{1}{2}$$

$$f_3''(x_3) > 0 \quad f_4''(x_4) > 0 \implies \text{минимум със стойност } -\frac{1}{2}$$

$F_y'(0,0) = 0$ е точка на самопресичане на леминската на Бернули, чието уравнение е дадено в този пример.

Ако $m > 1$ неявната функция е на повече променливи и се намира като решения на системата

$$\begin{cases} F_{x_k}'(x, y) = 0 & k = 1 \div m \\ F(x, y) = 0 \\ F_y'(x, y) \neq 0 \end{cases}$$

Стойностите на вторите частни производни в стационарните точки са

$$f_{x_k x_k}''(x^0) = -\frac{F_{x_k x_k}''(x^0, y_0)}{F_y'(x^0, y_0)} \quad f_{x_k x_j}''(x^0) = -\frac{F_{x_k x_j}''(x^0, y_0)}{F_y'(x^0, y_0)} \quad (k \neq j)$$

8 Лекция 8

9 Упражнения

9.1 Упражнение към лекция 1

Задача 9.1.1. Да се покаже дали посочените редици $\{X_n\} = \{x_n, y_n\}$ са сходящи или разходящи. За сходящите да се намери границите им.

1. $x_n = 1 + \frac{1}{n}, y_n = 2 + \frac{\sin n}{n}$
2. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, y_n = 2 + n$
3. $x_n = (-1)^n, y_n = n$
4. $x_n = (-1)^n, y_n = \frac{1}{n}$
5. $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}, y_n = (-1)^n$
6. $x_n = \sin n, y_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Решение:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \frac{|\sin n|}{n} \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2 \implies$
 редицата е сходяща; точката $(1, 2)$ е нейна граница
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \implies$ разходяща редица
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не съществува, защото има две точки на съгъстяване., $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \implies$ разходяща редица
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не съществува, защото има две точки на съгъстяване., $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \implies$ разходяща редица
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не съществува, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \implies$ разходяща редица
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не съществува, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \implies$ разходяща редица

9.2 Упражнение към лекция 2

Задача 9.2.1. Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ и са разгледани няколко функции. Да се напишат дефиниционните им множества и да се даде пояснение.

1. $z(x, y) = x^2 + y^2$

2. $z(x, y) = \sqrt{y^2 - 2x}$

3. $z(x, y) = \ln \sqrt{y^2 - 2x}$

4. $z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-y^2 + 2x + 1}}$

5. $w(x, y, z) = \arccos(x^2 + y^2 + z^2)$

6. $f(n) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}^m \\ 0, & x \in \frac{\mathbb{R}^m}{\mathbb{Q}^m} \end{cases}$

Решение:

1. $z(x, y) = x^2 + y^2$
 $D = \mathbb{R}^2$

2. $z(x, y) = \sqrt{y^2 - 2x}$
 $D = \{(x, y) : y^2 - 2x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2, x \leq \frac{y^2}{2}$

3. $z(x, y) = \ln \sqrt{y^2 - 2x}$
 $D = \{(x, y) : y^2 - 2x > 0\} \subset \mathbb{R}^2, x < \frac{y^2}{2}$

4. $z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-y^2 + 2x + 1}}$
 $D = \{(x, y) : -y^2 + 2x + 1 > 0\} \subset \mathbb{R}^2, x > \frac{y^2 - 1}{2}$

5. $w(x, y, z) = \arccos(x^2 + y^2 + z^2)$
 $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq \pi\} \subset \mathbb{R}^3$,
 Графиката е кълбо с център $(0, 0, 0)$ и радиус $\sqrt{\pi}$

6. $D \subset \mathbb{R}^m$

Задача 9.2.2. Разгледаните по - долу функциите са дефинирани в $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Кои от границите съществуват и колко са

$$A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \quad A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

$$1. f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

$$2. f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

$$3. f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$4. f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}$$

$$5. f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

Решение:

1.

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{-y}{y} = -1 \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{x}{x} = 1$$

$$A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$$

$$A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$$

$$A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \text{ Не съществува, защото трябва } A_{1,2} = A_{2,1}$$

2.

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{y^2}{(-y)^2} = 1 \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\implies A_{1,2} = A_{2,1} = 1 \implies \exists A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

$$\text{Редица: } (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0), f(x_n, y_n) = 1 \rightarrow 1$$

$$\text{Редица: } (x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right) \rightarrow (0, 0), f(x'_n, y'_n) = \frac{2n^2}{1 + 4n^2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 1$$

$$\implies f(x, y) \text{ няма граница при } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

3.

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{0}{y^4} = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{0}{x^2} = 0$$

$$A_{1,2} = A_{2,1} = 0 \implies \exists A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

$$\text{Редица: } (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0), f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\implies f(x, y) \text{ няма граница при } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

4.

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}$$

$$0 \leq |f(x, y)| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \text{ и } |x| + |y| \rightarrow 0$$

$$A = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ - не съществува}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = y \cos \frac{1}{y} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

Аналогично и другата вътрешна граница не съществува. Но тогава и повторните граници $A_{1,2}$, $A_{2,1}$ не съществуват.

5.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) &= y^2 & \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) &= x^2 \\
 A_{1,2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (y^2) = 0 \\
 A_{2,1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0 \\
 \implies A &= A_{1,2} = A_{2,1} = 0
 \end{aligned}$$

Задача 9.2.3. Нека A, B, C, D са подмножества на \mathbb{R}^2 дефинирани както следва

$$A = \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 1, y > x\}$$

$$B = \{(x, y) : x \leq 1, y \geq 0, y < x\}$$

$$C = \{(x, y) : x = y, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$D = A \cup B \cup C$$

и функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ зададена по следния начин

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & (x, y) \in A \\ 0, & x = y \\ -\frac{1}{x^2}, & (x, y) \in B \end{cases}$$

Да се изследва непрекъснатостта на тази функция.

Решение:

Функцията f е непрекъсната в A , защото е частно на две функции със знаменател $y^2 \neq 0$, в A .

Аналогично е непрекъсната в B защото знаменателя е $x^2 \neq 0$.

Остана да се изследва поведението върху C .

$$(x_0, y_0) = (x_0, x_0) \in C$$

$$R = \{(x_n, y_n)\}, (x_n, y_n) \in A$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R = (x_0, y_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{y_0^2} = \frac{1}{x_0^2} \neq 0$$

$$\text{Ако } x_0 \neq 0, f(x_0, y_0) = 0$$

$$\implies \text{функцията е прекъсната в точката } (x_0, x_0) \neq (0, 0)$$

$$\text{Ако } (x_n, y_n) \in B, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = -\frac{1}{x_0^2} \neq f(x_0, x_0) \neq 0.$$

$$\text{Ако } x_0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \infty(-\infty), f(0, 0) = 0,$$

$$\implies f \text{ е прекъсната в точката } (0, 0).$$

Функцията е непрекъсната в D , с изключение на точките от C , където е прекъсната.

9.3 Упражнение към лекция 3

Задача 9.3.1. Да се намерят първите частни производни на следните функции

1. $f(x, y, z) = e^{4x+3y} + xy^2z^3 + 1111e^\pi$ за произволна точка $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$
2. $f(x, y) = |x + y|$ в точката $(0, 0)$
3. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ в равнината \mathbb{R}^2

Решение:

1.

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= e^{4x+3y} + xy^2z^3 + 1111e^\pi \\
 f(x, y_0, z_0) &\implies f'_x(x_0, y_0, z_0) = 4e^{4x_0+3y_0} + y_0^2z_0^3 \\
 f(x_0, y, z_0) &\implies f'_y(x_0, y_0, z_0) = 3e^{4x_0+3y_0} + 2x_0y_0z_0^3 \\
 f(x_0, y_0, z) &\implies f'_z(x_0, y_0, z_0) = 3x_0y_0^2z_0^2
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= |x + y| \\
 \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \text{ не съществува} \\
 &\implies \nexists f'_x(0, 0) \text{ (Аналогично се получава за } f'_y(0, 0))
 \end{aligned}$$

3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(x, y) \neq (0, 0)$$

$$f'_x(x, y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} = 0$$

\implies Функцията има частни производни във всички точки на равнината \mathbb{R}^2

Задача 9.3.2. $f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$ $f'_x(x, 1) = ?$

Решение:

$$f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \text{ (Ако съществува) } \implies$$

$$f'_x(x, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, 1) - f(x, 1)}{h} \text{ (Ако съществува) }$$

$$f(x + h, 1) = x + h + (1 - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}} = x + h + 0 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}} = x + h$$

$$f(x, 1) = x + (1 - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}} = x + 0 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}} = x \implies$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, 1) - f(x, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 \implies f'_x(x, 1) = 1$$

Задача 9.3.3. Да се докаже че функцията $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x^2 + y^2 = (0, 0) \end{cases}$

е прекъсната в точката $(0, 0)$ но има частни производни в тази точка.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{Редица } (x_n, y_n) &= \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3} \right) \\ f(x_n, y_n) &= \frac{\left(\frac{1}{n} \right)^3 \cdot \frac{1}{n^3}}{\left(\frac{1}{n} \right)^6 + \left(\frac{1}{n^3} \right)^3} = \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}} = \frac{1}{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \implies \\ \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} f(x, y) &\neq f(0, 0) = 0 \implies f(x, y) \text{ е прекъсната в т. } (0, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^3 \cdot 0}{x^6 + 0} - 0}{x - 0} = 0 \\ f'_y(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \frac{\frac{0^3 \cdot y}{0^6 + y^2} - 0}{y - 0} = 0 \end{aligned}$$

Задача 9.3.4. Да се намерят първите частни производни на следните функции:

1. $f(x, y) = \sin(2x + 3) + 3e^{-x}e^{4y} - 11x^3 + 19e^\pi$
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \arctan \frac{y}{x}$
3. $f(x, y, z) = (xy)^z$
4. $\sqrt[3]{x^2 + 3y^2}e^{x^2 - 5y}$

Решение:

1.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(2x + 3) + 3e^{-x}e^{4y} - 11x^3 + 19e^\pi \\ f'_x(x, y) &= (\sin(2x + 3))'_x + (3e^{-x}e^{4y})'_x - (11x^3)'_x + (19e^\pi)'_x \\ f'_x(x, y) &= \cos(2x + 3) \cdot 2 + (-3e^{-x}e^{4y}) - (3 \cdot 11x^2) + 0 \\ f'_x(x, y) &= 2\cos(2x + 3) - 3e^{-x}e^{4y} - 33x^2 \\ f'_y(x, y) &= (\sin(2x + 3))'_y + (3e^{-x}e^{4y})'_y - (11x^3)'_y + (19e^\pi)'_y \\ f'_y(x, y) &= 0 + (3 \cdot 4e^{-x}e^{4y}) - 0 + 0 = 12e^{-x}e^{4y} \end{aligned}$$

2.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \arctan \frac{y}{x}$$

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2}(x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{2}(x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

3.

$$f(x, y, z) = (xy)^z$$

$$f'_x(x, y, z) = z(xy)^{z-1} \cdot (xy)'x = yz(xy)^{z-1}$$

$$f'_y(x, y, z) = z(xy)^{z-1} \cdot (xy)'y = xz(xy)^{z-1}$$

$$f'_z(x, y, z) = (xy)^z \ln(xy)$$

4.

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} e^{x^2 - 5y} \\
f'_x(x, y) &= \left[\sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \right]'_x \cdot e^{x^2 - 5y} + \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot (e^{x^2 - 5y})'_x \\
f'_x(x, y) &= \frac{1}{3} (x^2 + 3y^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x \cdot e^{x^2 - 5y} + \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot 2x e^{x^2 - 5y} \\
f'_x(x, y) &= \frac{2x}{3} \cdot \frac{e^{x^2 - 5y}}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}} + 2x \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot e^{x^2 - 5y} \\
f'_x(x, y) &= \frac{2x}{3} \cdot \frac{e^{x^2 - 5y}}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}} [1 + 3(x^2 + 3y^2)] \\
f'_x(x, y) &= \frac{2x}{3} (1 + 3x^2 + 9y^2) \frac{e^{x^2 - 5y}}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_y(x, y) &= \left[\sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \right]'_y \cdot e^{x^2 - 5y} + \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot (e^{x^2 - 5y})'_y \\
f'_y(x, y) &= \frac{1}{3} (x^2 + 3y^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6y \cdot e^{x^2 - 5y} + \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot (-5e^{x^2 - 5y}) \\
f'_y(x, y) &= 2y \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}} \cdot e^{x^2 - 5y} - 5 \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot e^{x^2 - 5y} \\
f'_y(x, y) &= e^{x^2 - 5y} \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2} (2y - 5(x^2 + 3y^2)) \\
f'_y(x, y) &= (2y - 5x^2 - 15y^2) \frac{e^{x^2 - 5y}}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}}
\end{aligned}$$

9.4 Упражнение към лекция 4

Задача 9.4.1. $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$

Изследвайте $f(x, y)$ за диференцируемост в $(0, 0)$.

$$f'_x(0, 0) = ?$$

$$f'_y(0, 0) = ?$$

Решение:

$$f(x, 0) - f(0, 0) = \sqrt[3]{x0} - \sqrt[3]{0} \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$f(0, y) - f(0, 0) = \sqrt[3]{0y} - \sqrt[3]{0} \implies$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$\text{Нека: } \lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0, \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Проверка за диференцируемост в $(0, 0)$:

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)(x - 0) + f'_y(0, 0)(y - 0) + \varepsilon(x, y)\rho(x, y)$$

$$\sqrt[3]{xy} - 0 = 0x + 0y + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2} \implies$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0?$$

Разглеждаме редица с общ член $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^3}\right)$ за която $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$,

$$\varepsilon(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n}{\sqrt{2}}} = \frac{n}{\sqrt{2}} \implies \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(x, y) \not\rightarrow 0 \implies$$

$f(x, y)$ не е диференцируема в т. $(0, 0)$

Задача 9.4.2. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

Изследвайте $f(x, y)$ за диференцируемост в $(0, 0)$.

Решение:

$$f(x, 0) - f(0, 0) = \sqrt[3]{x^3} - 0 = x \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \implies \exists f'_x(0, 0) = 1$$

$$f(0, y) - f(0, 0) = \sqrt[3]{y^3} - 0 = y \implies$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1 \implies \exists f'_y(0, 0) = 1$$

$$\text{Нека: } \lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0, \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Проверка за диференцируемост в $(0, 0)$:

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)(x - 0) + f'_y(0, 0)(y - 0) + \varepsilon(x, y)\rho(x, y)$$

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = x + y + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0?$$

Разглеждаме редица с общ член $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ за която $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$,

$$\varepsilon(x_n, y_n) = \frac{\frac{\sqrt[3]{2}}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \implies \lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \not\rightarrow 0 \implies$$

$f(x, y)$ не е диференцируема в т. $(0, 0)$

Задача 9.4.3. Да се изследва за диференцируемост в $(0, 0)$ функцията

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$f(x, 0) - f(0, 0) = e^{-\frac{1}{x^2}} - 0 = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \left(\frac{1}{e x^2} \right)' = -\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0 \implies f'_x(0, 0) = 0$$

Аналогично $f'_y(0, 0) = 0$

Нека : $\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0, \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Проверка за диференцируемост в $(0, 0)$:

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)(x - 0) + f'_y(0, 0)(y - 0) + \varepsilon(x, y)\rho(x, y)$$

$$e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} - 0 = 0(x - 0) + 0(y - 0) + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} = \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0?$$

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \implies \lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \rho(x, y) \rightarrow 0$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\rho} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \right)' = -\frac{1}{\rho^2} \quad \left(e^{\frac{1}{\rho^2}} \right)' = -\frac{2}{\rho^3} e^{\frac{1}{\rho^2}}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho}{\frac{1}{2e\rho^2}} = \frac{0}{\infty} = 0 \implies$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{e\rho^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\rho} \right)'}{\left(\frac{1}{e\rho^2} \right)'} = 0 \implies$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) = 0 \implies f(x, y) \text{ е диференцируема в } (0, 0)$$

Задача 9.4.4. $f(x, y) = x^2 + 3xy - 8y^3 + 11$, $df(0, 1) = ?$
 $f(x, y, z) = x^2 + 3xy - 8y^3 - 2e^{3z}x$, $df(0, 0, 4) = ?$

Решение:

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

$$f'_x(x, y) = 2x + 3y \quad f'_x(0, 1) = 3$$

$$f'_y(x, y) = 3x - 24y^2 \quad f'_y(0, 1) = -24$$

$$df(x, y) = (2x + 3y)dx + (3x - 24y^2)dy$$

$$df(0, 1) = 3dx - 24dy$$

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz$$

$$f'_x(x, y, z) = 2x + 3y - 2e^{3z} \quad f'_x(0, 0, 4) = -2e^{12}$$

$$f'_y(x, y, z) = 3x - 24y^2 \quad f'_y(0, 0, 4) = 0$$

$$f'_z(x, y, z) = 6xe^{3z} \quad f'_z(0, 0, 4) = 0$$

$$df(x, y, z) = (2x + 3y - 2e^{3z})dx + (3x - 24y^2)dy + (6xe^{3z})dz$$

$$df(x, y, z) = -2e^{12}dx + 0dy + 0dz = -2e^{12}dx$$

Задача 9.4.5. $f(x, y) = x^6 - 7xy^2 + 14y$,

$$f''_{xx} = ?, f''_{yy} = ?, f''_{xy} = ?, d^2 f(x, y) = ?$$

$$f(x, y, z) = x^6 - 7xy^2 + y^2 - xz + z^3,$$

$$f''_{xx} = ?, f''_{xy} = ?, f''_{xz} = ?, f''_{yx} = ?, f''_{yy} = ?, f''_{yz} = ?, f''_{zx} = ?, f''_{zy} = ?, f''_{zz} = ?, d^2 f(1, 0, 0)$$

$$f'_x(x, y, z) = 6x^5 - 7y - z$$

$$f''_{xx}(x, y, z) = (6x^5 - 7y - z)'_x = 30x^4 \quad f''_{xx}(1, 0, 0) = 30$$

$$f''_{xy}(x, y, z) = (6x^5 - 7y - z)'_y = -7 \quad f''_{xy}(1, 0, 0) = -7$$

$$f''_{xz}(x, y, z) = (6x^5 - 7y - z)'_z = -1 \quad f''_{xz}(1, 0, 0) = -1$$

$$f'_y(x, y, z) = -7x + 2y$$

$$f''_{yx}(x, y, z) = (-7x + 2y)'_x = -7 \quad f''_{yx}(1, 0, 0) = -7$$

$$f''_{yy}(x, y, z) = (-7x + 2y)'_y = 2 \quad f''_{yy}(1, 0, 0) = 2$$

$$f''_{yz}(x, y, z) = (-7x + 2y)'_z = 0 \quad f''_{yz}(1, 0, 0) = 0$$

$$f'_z(x, y, z) = -x + 3z^2$$

$$f''_{zx}(x, y, z) = (-x + 3z^2)'_x = -1 \quad f''_{zx}(1, 0, 0) = -1$$

$$f''_{zy}(x, y, z) = (-x + 3z^2)'_y = 0 \quad f''_{zy}(1, 0, 0) = 0$$

$$f''_{zz}(x, y, z) = (-x + 3z^2)'_z = 6z \quad f''_{zz}(1, 0, 0) = 0$$

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2 + 2f''_{xz} dx dz + f''_{zz} dz^2 + f''_{yz} dy dz$$

$$d^2 f(x, y, z) = 30x^4 dx^2 + 2 \cdot (-7) dx dy + 2 dy^2 + 2 \cdot (-1) dx dz + 6z dz^2 + 2 \cdot 0 dy dz$$

$$d^2 f(1, 0, 0) = 30 dx^2 - 14 dx dy + 2 dy^2 - 2 dx dz + 0 dz^2 + 0 dy dz$$

$$d^2 f(1, 0, 0) = 30 dx^2 + 2 dy^2 - 14 dx dy - 2 dx dz$$

9.5 Упражнение към лекция 5

Задача 9.5.1. Да се намерят посочените частни производни на следните функции.

$$1. \ u(x, y) = x^4 + 11x^2y^3, \quad u''_{xx} = ?, \ u''_{xy} = ?$$

$$2. \ u(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}, \quad u''_{xx} = ?, \ u''_{xy} = ?, \ u''_{yy} = ?$$

$$3. \ u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad u''_{xx} = ?, \ u''_{xy} = ?, \ u''_{yx} = ?, \ u''_{yy} = ?$$

$$4. \ u(x, y) = \ln(x + 2y), \quad u'''_{xxy} = ?$$

$$5. \ u(x, y, z) = e^{xy^2z^3}, \quad u'''_{xyz} = ?$$

$$u(x, y) = x^4 + 11x^2y^3$$

$$u'_x = 4x^3 + 22xy^3$$

$$u''_{xx} = 12x^2 + 22y^3$$

$$u''_{xy} = 4x^3 + 66xy^2$$

$$u(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

$$u'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x$$

$$u'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y$$

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x$$

$$u''_{xy} = (u'_x)'_y$$

$$u''_{yy} = (u'_y)'_y$$

$$A = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \quad B = \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x \implies u'_x = AB$$

$$A = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}} = \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2}$$

$$A = \frac{(1-xy)^2}{1 - 2xy + x^2y^2 + x^2 + 2xy + y^2} = \frac{(1-xy)^2}{1 + x^2y^2 + x^2 + y^2}$$

$$A = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2) + x^2 + x^2y^2} = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2) + x^2(1+y^2)} = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2)(1+x^2)}$$

$$B = \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x = \frac{1(1-xy) - (x+y)(-y)}{(1-xy)^2} = \frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$$

$$u'_x = AB = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2)(1+x^2)} \cdot \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$C = \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y \implies u'_y = AC$$

$$C = \frac{1(1-xy) - (x+y)(-x)}{(1-xy)^2} = \frac{1-xy+x^2+xy}{(1-xy)^2} = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}$$

$$u'_y = AC = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2)(1+x^2)} \cdot \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$u''_{xx} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'_x = ((1+x^2)^{-1})'_x$$

$$u''_{yy} = -(1+x^2)^{-2}(1+x^2)'_x = -2x(1+x^2)^{-2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$u''_{xy} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'_y = 0$$

$$u''_{yy} = \left(\frac{1}{1+y^2}\right)'_y = ((1+y^2)^{-1})'_y$$

$$u''_{yy} = -(1+y^2)^{-2}(1+y^2)'_y = -2y(1+y^2)^{-2} = \frac{-2y}{(1+y^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \\
u'_x &= \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \cdot (x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{2(x^2 + y^2)} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\
u'_y &= \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \cdot (x^2 + y^2)'_y = \frac{2y}{2(x^2 + y^2)} = \frac{y}{x^2 + y^2} \\
u''_{xx} &= (u'_x)'_x = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{1(x^2 + y^2) - (2x)x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
u''_{xy} &= (u'_x)'_y = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\
u''_{yy} &= (u'_y)'_y = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{1(x^2 + y^2) - (2y)y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
u''_{yx} &= (u'_y)'_x = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \ln(x + 2y) \\
u'_x &= \frac{1}{x + 2y} \\
u''_{xx} &= \left(\frac{1}{x + 2y} \right)'_x = ((x + 2y)^{-1})'_x = -(x + 2y)^{-2}(x + 2y)'_x = -\frac{1}{(x + 2y)^2} \\
u'''_{xxy} &= \left(-\frac{1}{(x + 2y)^2} \right)'_y = -((x + 2y)^{-2})'_y = 2((x + 2y)^{-3})(x + 2y)'_y = \frac{4}{(x + 2y)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= e^{xy^2z^3} \\
u'_x &= e^{xy^2z^3}(xy^2z^3)'_x = y^2z^3e^{xy^2z^3} \\
u''_{xy} &= (y^2z^3 \cdot e^{xy^2z^3})'_y = (y^2z^3)'_y \cdot e^{xy^2z^3} + y^2z^3(e^{xy^2z^3})'_y \\
u''_{xy} &= 2yz^3e^{xy^2z^3} + 2xy^3z^6e^{xy^2z^3} = 2yz^3e^{xy^2z^3}(1 + xy^2z^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'''_{xyz} &= \left[2yz^3 e^{xy^2 z^3} (1 + xy^2 z^3) \right]'_z = (2yz^3 e^{xy^2 z^3})'_z (1 + xy^2 z^3) + 2yz^3 e^{xy^2 z^3} (1 + xy^2 z^3)'_z \\
&= \left[(2yz^3)'_z \cdot e^{xy^2 z^3} + 2yz^3 \cdot (e^{xy^2 z^3})'_z \right] (1 + xy^2 z^3) + 2yz^3 e^{xy^2 z^3} (1 + xy^2 z^3)'_z \\
u'''_{xyz} &= \left[6yz^2 e^{xy^2 z^3} + 2yz^3 e^{xy^2 z^3} 3xy^2 z^2 \right] (1 + xy^2 z^3) + 2yz^3 e^{xy^2 z^3} (3xy^2 z^2) \\
u'''_{xyz} &= \left[6yz^2 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} \right] (1 + xy^2 z^3) + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} \\
u'''_{xyz} &= \left[6yz^2 e^{xy^2 z^3} + 6yz^2 e^{xy^2 z^3} xy^2 z^3 + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} xy^2 z^3 \right] + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} \\
u'''_{xyz} &= \left[6yz^2 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} + 6x^2 y^5 z^8 e^{xy^2 z^3} \right] + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} \\
u'''_{xyz} &= 6yz^2 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} + 6x^2 y^5 z^8 e^{xy^2 z^3} + 6xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} \\
u'''_{xyz} &= 6yz^2 e^{xy^2 z^3} + 18xy^3 z^5 e^{xy^2 z^3} + 6x^2 y^5 z^8 e^{xy^2 z^3} \\
u'''_{xyz} &= 6yz^2 e^{xy^2 z^3} [1 + 3xy^2 z^3 + x^2 y^4 z^6]
\end{aligned}$$

Задача 9.5.2. Дали са верни равенствата:

- Ако $z = y \ln(x^2 + y^2)$ то $\frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{z}{y^2}$
- Ако $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ то $u'_x + u'_y + u'_z = \frac{3}{x + y + z}$

$$\begin{aligned}
z &= y \ln(x^2 + y^2) \\
z'_x &= y \frac{1}{x^2 + y^2} 2x = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \\
z'_y &= \ln(x^2 + y^2) + y \frac{1}{x^2 + y^2} - 2y = \ln(x^2 + y^2) - \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \\
\frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y &= \frac{1}{x} \cdot \frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y} \cdot \left[\ln(x^2 + y^2) - \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \right] = \\
&= \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{\ln(x^2 + y^2)}{y} - \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{y} \\
\frac{z}{y^2} &= \frac{y \ln(x^2 + y^2)}{y^2} = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{y} \implies \text{Равенството е вярно.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \\
u'_x &= \frac{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)'_x}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \frac{3x^2 - 3yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \\
u'_y &= \frac{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)'_y}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \frac{3y^2 - 3xz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \\
u'_z &= \frac{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)'_z}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \frac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \\
u'_x + u'_y + u'_z &= \frac{3x^2 - 3yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} + \frac{3y^2 - 3xz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} + \frac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \\
&= \frac{3x^2 - 3yz + 3y^2 - 3xz + 3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \frac{3(x^2 - yz + y^2 - xz + z^2 - xy)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \\
&= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot \frac{x + y + z}{x + y + z} = \frac{3(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)}{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x + y + z)} = \\
&= \frac{3}{x + y + z} \implies \text{Равенството е вярно.}
\end{aligned}$$

Задача 9.5.3. Да се докаже, че функцията: $z(x, y) = \arctan\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$

удовлетворява тъждеството: $z'_x + z'_y = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

$$\begin{aligned}
z'_x &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{1}{\frac{(x-y)^2 + (x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} \\
z'_x &= \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2 + (x+y)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2} \\
z'_x &= \frac{-2y}{2(x^2 + y^2)} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\
z'_y &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y = \frac{1}{\frac{(x-y)^2 + (x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} = \\
z'_y &= \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2 + (x+y)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{2x}{x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\
z'_x + z'_y &= -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x-y}{x^2 + y^2} \implies \text{тъждеството е вярно}
\end{aligned}$$

Задача 9.5.4. Да се провери тъждеството на Ойлер за следните функции: $z(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$ $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

Тъждество на Ойлер ($f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^m$)

$$x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \dots + x_m f'_{x_m} = m f$$

$$z(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$x z'_x + y z'_y = 2z$$

$$z'_x = \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_x = ((x^2 + y^2)^{-2})'_x = -2(x^2 + y^2)^{-3}(x^2 + y^2)'_x = -\frac{4x}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$z'_y = \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_y = ((x^2 + y^2)^{-2})'_y = -2(x^2 + y^2)^{-3}(x^2 + y^2)'_y = -\frac{4y}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$x z'_x + y z'_y = x \cdot \left(-\frac{4x}{(x^2 + y^2)^3} \right) + y \cdot \left(-\frac{4y}{(x^2 + y^2)^3} \right) = -\frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^3} = -\frac{4(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = -\frac{4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$2z = \frac{2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$-\frac{4}{(x^2 + y^2)^2} \neq \frac{2}{(x^2 + y^2)^2} \implies \text{Тъждението не е изпълнено.}$$

$$u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \ln \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$x u'_x + y u'_y + z u'_z = 3z$$

$$u'_x = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_x$$

$$u'_y = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_y \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_y$$

$$u'_z = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_z \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_z$$

$$u'_x = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_x$$

$$u'_x = \frac{x \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x} = \frac{x \ln \left(\frac{y}{x} \right) x - \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2}{x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$u'_x = \frac{x^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) - x^2 - y^2 - z^2}{x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\begin{aligned}
u'_y &= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_y \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_y \\
u'_y &= \frac{y \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{y} = \frac{y \ln \left(\frac{y}{x} \right) y + \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2}{y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
u'_y &= \frac{y^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) + x^2 + y^2 + z^2}{y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_z &= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_z \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_z \\
u'_z &= \frac{z \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 0 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{z \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xu'_x + yu'_y + zu'_z &= 3z, \quad A = xu'_x + yu'_y + zu'_z, \quad B = 3u \\
A &= x \cdot \frac{x^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) - x^2 - y^2 - z^2}{x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + y \cdot \frac{y^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) + x^2 + y^2 + z^2}{y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z \cdot \frac{z \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
A &= \frac{x^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) - x^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) + x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
A &= \frac{x^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) - x^2 - y^2 - z^2 + y^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) + x^2 + y^2 + z^2 + z^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
A &= \frac{x^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) \ln \left(\frac{y}{x} \right) + z^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\ln \left(\frac{y}{x} \right) (x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \ln \left(\frac{y}{x} \right) \\
B &= 3u = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \ln \left(\frac{y}{x} \right) \implies A \neq B \implies \text{Тъждението не е изпълнено.}
\end{aligned}$$

9.6 Упражнение към лекция 6

Задача 9.6.1. Дадени са функцията $z(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$, където φ, ψ - непрекъснато диференцируеми. Да се намерят първите частни производни.

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \varphi(x + y) + \psi(x - y) \\ z'_x &= \varphi'(x + y)(x + y)'_x + \psi'(x - y)(x - y)'_x = \varphi'(x + y)1 + \psi'(x - y)1 \\ z'_x &= \varphi'(x + y) + \psi'(x - y) \\ z'_y &= \varphi'(x + y)(x + y)'_y + \psi'(x - y)(x - y)'_y = \varphi'(x + y)1 + \psi'(x - y)(-1) \\ z'_y &= \varphi'(x + y) - \psi'(x - y) \end{aligned}$$

Задача 9.6.2. Да се провери дали $w(x, y, z)$ удовлетворява тъждествено равенството:

$$xw_x + yw_y + zw_z = w + \frac{xy}{z}$$

Ако $w = \frac{xy}{z} + \ln x + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, φ е непрекъснато диференцируема.

Решение:

$$\begin{aligned} u &= \frac{y}{x} & v &= \frac{z}{x} \\ u'_x &= -\frac{y}{x^2} & u'_y &= \frac{1}{x} & u'_z &= 0 \\ v'_x &= -\frac{z}{x^2} & v'_y &= 0 & v'_z &= \frac{1}{x} \\ w'_x &= \frac{y}{z} \ln x + \frac{xy}{z} \cdot \frac{1}{x} + \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x(\varphi'_u u'_x + \varphi'_v v'_x) = \\ w'_x &= \frac{y}{z} \ln x + \frac{y}{z} + \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - \frac{y}{x} \varphi'_u - \frac{z}{x} \varphi'_v \\ w'_y &= \frac{x}{z} \ln x + x(\varphi'_u u'_y + \varphi'_v v'_y) = \frac{x}{z} \ln x + \varphi'_u \\ w'_z &= -\frac{xy}{z^2} \ln x + x(\varphi'_u u'_z + \varphi'_v v'_z) = -\frac{xy}{z^2} \ln x + \varphi'_v \\ xw_x + yw_y + zw_z &= \\ &= \frac{xy}{z} \ln x + \frac{xy}{z} + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - y\varphi'_u - z\varphi'_v + \frac{xy}{z} \ln x + y\varphi'_u + -\frac{xy}{z} \ln x + z\varphi'_v = \\ &= \frac{xy}{z} + \ln x + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \frac{xy}{z} = w + \frac{xy}{z} \end{aligned}$$

Задача 9.6.3. Дадени са функциите и точката $M(2,1)$. Да се пресметне $\text{grad}f(M)$ и $\|\text{grad}f(M)\|$

$$1. f(x, y) = x^2 + 11y^2 - 3$$

$$2. f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$3. f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Решение $\text{grad } f = (f'_x, f'_y)$

$$f(x, y) = x^2 + 11y^2 - 3$$

$$f'_x = 2x \quad f'_y = 22y$$

$$\text{grad} f(x, y) = (2x, 22y)$$

$$\text{grad} f(M) = (2 \cdot 2, 22 \cdot 1) = (4, 22)$$

$$\|\text{grad} f(M)\| = \sqrt{4^2 + 22^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$f'_x = 2x \quad f'_y = -2y$$

$$\text{grad} f(x, y) = (2x, -2y)$$

$$\text{grad} f(M) = (2 \cdot 2, -2 \cdot 1) = (4, -2)$$

$$\|\text{grad} f(M)\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$f'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad f'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\text{grad} f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\text{grad} f(M) = \left(\frac{2 \cdot 2}{2^2 + 1^2}, \frac{2 \cdot 1}{2^2 + 1^2} \right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right)$$

$$\|\text{grad} f(M)\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Задача 9.6.4. Дадени са функциите и точката $M(2,1)$.

Да се пресметне $\frac{\partial f(M)}{\partial \nu}, \nu = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$

$$1. f(x, y) = x^2 + 11y^2 - 3$$

$$2. f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$3. f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Решение: $\frac{\partial f(M)}{\partial \nu} = (\text{grad} f, \nu)$

$$f(x, y) = x^2 + 11y^2 - 3$$

$$\text{grad} f(M) = (2 \cdot 2, 22 \cdot 1) = (4, 22)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \nu} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 22 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} + 11$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$\text{grad} f(M) = (2 \cdot 2, -2 \cdot 1) = (4, -2)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \nu} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} - 1$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$\text{grad} f(M) = \left(\frac{2 \cdot 2}{2^2 + 1^2}, \frac{2 \cdot 1}{2^2 + 1^2} \right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \nu} = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{10} + \frac{1}{5} = \frac{4\sqrt{3} + 2}{10}$$

Задача 9.6.5. Да се определи ъгъла между градиентите на функцията

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 111$$

в точките $A(\varepsilon, 0, 0)$ и $B(0, \varepsilon, 0)$, $\varepsilon > 0$

Решение:

$$u'_x = 2x \quad u'_y = 2y \quad u'_z = 2z$$

$$\text{grad} u(A) = (2\varepsilon, 0, 0) \quad \text{grad} u(B) = (0, 2\varepsilon, 0)$$

$$(\text{grad} u(A), \text{grad} u(B)) = 2\varepsilon \cdot 0 + 0 \cdot 2\varepsilon + 0 \cdot 0 = 0$$

$$(\text{grad} u(A), \text{grad} u(B)) = \|u(A)\| \cdot \|u(B)\| \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Задача 9.6.6. Да се намери y', y'' на неявната функция $y = f(x)$, дефинирана от уравнението

$$x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

Да се пресметнат $y'(0), y''(0)$, ако $y(0) = 1$

Решение:

$$F(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

$$F'_y = -2x + 10y + 4 \neq 0$$

$$F'_x(x, y) = 2x - 2y - 2$$

$$F'_y(0, 1) = -2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4 \neq 0$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x - 2y - 2}{-2x + 10y + 4} = -\frac{x - y - 1}{-x + 5y + 2}$$

$$y'(0) = -\frac{0 - 1 - 1}{-0 + 5 \cdot 1 + 2} = -\frac{-2}{7} = \frac{2}{7}$$

$$y''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

$$F''_{xx} = 2, \quad F''_{yy} = 10, \quad F''_{xy} = -2$$

$$F''_{xx}(0, 1) = 2, \quad F''_{yy}(0, 1) = 10, \quad F''_{xy}(0, 1) = -2$$

$$y''(x) = -\frac{2 + 2 \cdot (-2)y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$

$$y''(x) = -\frac{2 + -4y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$

$$y''(0) = -\frac{2 + -4 \cdot \frac{2}{7} + 10 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2}{-2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4}$$

$$y''(0) = -\frac{2 + -\frac{8}{7} + \frac{40}{49}}{14}$$

$$y''(0) = -\frac{98 - 56 + 40}{49 \cdot 14} = -\frac{82}{49 \cdot 14} = \frac{82}{49} \cdot \frac{1}{14} = \frac{41}{343}$$

9.7 Упражнение към лекция 7

Задача 9.7.1. Да се намерят локалните екстремуми на функциите

- $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2})$
- $z = x^4 + y^4 - 4xy$

$$z = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2})$$

$$z'_x = \cos x + \cos(x + y) \quad z'_y = \cos y + \cos(x + y)$$

$$\begin{cases} \cos x + \cos(x + y) = 0 \\ \cos y + \cos(x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos \frac{2x+y}{2} \cos \frac{y}{2} = 0 \\ 2 \cos \frac{x+2y}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+y}{2} = \frac{\pi}{2} \\ \frac{x+2y}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y = \pi \notin (0 < x, y < \frac{\pi}{2})$$

$$x_0 = y_0 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow M_0\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$z''_{xx} = -\sin x - \sin(x + y) \quad z''_{yy} = -\sin y - \sin(x + y) \quad z''_{xy} = -\sin(x + y)$$

$$z''_{xx}(M_0) = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} = \Delta_1 \quad z''_{yy}(M_0) = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \quad z''_{xy}(M_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{xy}(M_0) \\ z''_{yx}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = -\sqrt{3} < 0 \quad \Delta_2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ локален максимум, } z_{max} = z(M_0) - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$z = x^4 + y^4 - 4xy$$

$$z'_x = 4x^3 - 4y \quad z'_y = 4y^3 - 4x$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0 \\ y = x^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$M_0(0, 0) \quad M_1(1, 1) \quad M_2(-1, 1)$$

$$z''_{xx} = 12x^2 \quad z''_{yy} = 12y^2 \quad z''_{xy} = -4$$

$$d^2z = \begin{pmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{xy}(M_0) \\ z''_{yx}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$d^2z(M_0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0 \Rightarrow \text{няма лок. екстремум в } M_0$$

$$d^2z(M_1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 12 > 0 \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} 144 - 16 > 0 \Rightarrow$$

z има локален минимум

$$z_{min} = z(M_1) = 1^4 + 1^4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

Аналогично и за M_2 има лок. мин $z_{min} = -2$

Задача 9.7.2. Да се намерят локалните екстремуми на функциите

- $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
- $u = x^3 + y^2 + z^2 - 3x + 6y - 2z$
- $u = x^3 + y^2 + z^2 - 3x - 2y$

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$$

$$u'_x = 2x + 2 \quad u'_y = 2y + 4 \quad u'_z = 2z - 6$$

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(-1, -2, 3)$$

$$u''_{xx} = 2 \quad u''_{yy} = 2 \quad u''_{zz} = 2$$

$$u''_{xy} = u''_{xz} = u''_{yx} = u''_{yz} = u''_{zx} = u''_{zy} = 0$$

$$d^2u(M_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = u''_{xx} = 2 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \Rightarrow$$

d^2u е положително дефинитна квадратична форма

u има лок. минимум $u_{min} = u(M_0) = 1 + 4 + 9 - 2 - 4 \cdot 2 - 18 = -14$

$$u = x^3 + y^2 + z^2 - 3x + 6y - 2z$$

$$u'_x = 3x^2 + 2 \quad u'_y = 2y + 6 \quad u'_z = 2z - 2$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2 = 0 \\ 2y + 6 = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{cases} \implies M_0(1, -3, 1) \quad M_1(-1, -3, 1)$$

$$u''_{xx} = 6x \quad u''_{yy} = 2 \quad u''_{zz} = 2$$

$$u''_{xy} = u''_{xz} = u''_{yx} = u''_{yz} = u''_{zx} = u''_{zy} = 0$$

$$d^2u(M_0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\Delta_1 = 6 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0 \implies$$

d^2u е положително дефинитна квадратична форма

и има лок. минимум $u_{min} = u(M_0) = 1 + 9 + 1 - 3 - 18 - 2 = -12$

$$d^2u(M_1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\Delta_1 = -6 < 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -24 < 0 \implies$$

d^2u е не е дефинитна квадратична форма \implies няма лок. екстремуми

$$u = x^3 + y^2 + z^2 - 3x - 2y$$

$$u'_x = 3x^2 - 3 \quad u'_y = 2y - 2 \quad u'_z = 2z$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \implies M_0(1, 1, 0) \quad M_1(-1, 0, 0)$$

$$u''_{xx} = 6x \quad u''_{yy} = 2 \quad u''_{zz} = 2$$

$$u''_{xy} = u''_{xz} = u''_{yx} = u''_{yz} = u''_{zx} = u''_{zy} = 0$$

$$d^2u(M_0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\Delta_1 = 6 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0 \implies$$

d^2u е положително дефинитна квадратична форма

и има лок. минимум $u_{min} = u(M_0) = 1 + 1 - 3 - 2 = -3$

$$d^2u(M_1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\Delta_1 = -6 < 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -24 < 0 \implies$$

d^2u не е дефинитна квадратична форма \implies няма лок. екстремуми

Задача 9.7.3. Да се намерят $y'(0), y''(0)$ ако $y(0) = 2$ на неявната функция $y = f(x)$ дефинирана от уравнението

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$F(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 \quad M_0(0, 2)$$

$$F'_y = \frac{2y}{4} = \frac{y}{2} \neq 0 \quad y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad y''(x) = -\frac{F'''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(y')^2}{F'_y}$$

$$F'_x = \frac{2}{9}x \quad F'_y = \frac{2y}{4} \quad F''_{xx} = \frac{2}{9} \quad F''_{xy} = F''_{yx} = 0 \quad F''_{yy} = \frac{1}{2}$$

$$F'_x(0, 2) = 0 \quad F'_y(0, 2) = 1 \quad F''_{xx}(0, 2) = \frac{2}{9} \quad F''_{xy}(0, 2) = F''_{yx}(0, 2) = 0 \quad F''_{yy}(0, 2) = \frac{1}{2}$$

$$y'(0) = -\frac{0}{1} = 0 \quad y''(0) = -\frac{\frac{2}{9} + 2 \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2}{1} = -\frac{2}{9}$$

Задача 9.7.4. Да се покаже, че функцията $z = f(x, y)$ дефинирана неявно от уравнението

$$z = x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$$

φ - непрекъснато диференцируема, удовлетворява тъждествено уравнението

$$xz'_x + yz'_y = z$$

Решение. Означаваме

$$F(x, y, z) = z - x \varphi(z/y), \quad (3)$$

откъдето извеждаме условието за $\exists!$!
незв. функция:

$$F'_z = 1 - x \varphi'(z/y) \cdot \frac{1}{y} \neq 0. \quad (4)$$

по-нататък:

$$F'_x = -\varphi(z/y); \quad F'_y = -x \varphi'(z/y) \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right), \text{ т.е.}$$

$$F'_x = -\varphi(z/y); \quad F'_y = \frac{xz}{y^2} \varphi'(z/y) \Rightarrow$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-\varphi(z/y)}{1 - x \varphi'(z/y) \cdot \frac{1}{y}} = \frac{\varphi(z/y)}{1 - \frac{x}{y} \varphi'(z/y)}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{xz}{y^2} \varphi'(z/y)}{1 - \frac{x}{y} \varphi'(z/y)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} xz'_x + yz'_y &= \frac{\overset{z}{x} \cdot \varphi(z/y)}{1 - \frac{x}{y} \varphi'(z/y)} - \frac{\cancel{x} \varphi'(z/y)}{1 - \frac{x}{y} \varphi'(z/y)} = \\ &= z \cdot \frac{1 - \cancel{\frac{x}{y}} \varphi'(z/y)}{1 - \cancel{\frac{x}{y}} \varphi'(z/y)} = z. \end{aligned}$$

9.8 Упражнение към лекция 8