Математически анализ 2

Exonaut

3 април 2021 г.

Съдържание

1 Лекция 1: Пространството $\mathbb{R}^m$

1.1 Няколко важни неравенства

Нека a_k и $b_k(k = 1, 2, ..., m)$ са реални числа и $m \in \mathbb{N}$

Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц)**.** В сила е следното неравенство:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални:
$(\exists\lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k)$
Равенството може да се запише:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)}$$

Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски)**.** В сила е следното неравенство:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ (p \geq 1)$$

Теорема 1.1.3. В сила е следното неравенство:

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k - b_k|$$

1.2 Видове крайно мерни пространства

1.2.1 Линейно(Векторно) пространство

Дефиниция 1.2.1. Нека L е линейно(векторно) пространство над полето R. В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.

1. $x, y \in L \implies z = x + y \in L$
2. $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies z = \lambda x \in L$

1.2.2 Евклидово пространство

Дефиниция 1.2.2. Крайномерното пространство L се нарича евклидово, ако в него е въведено скаларно произведение, т.е за всеки два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави реално число (x, y), удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.

1. $x, y, z \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies (x + y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
2. $x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$
3. $x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$

1.2.3 Метрично пространство

Дефиниция 1.2.3. Крайномерното пространство L се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика) ρ, т.е за два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави неотрицателно число $\rho \geq 0$ със следните свойства

1. $\rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z). \forall x, y, z \in L$

Метрично пространство L с метрика ρ се означава (L, ρ)

1.2.4 Нормирано пространство

Дефиниция 1.2.4. Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма $\|.\|$, т.е $\|.\| : L \to \mathbb{R}_0^+$ със свойства

1. $x = 0 \implies \|x\| = 0, x \neq 0 \implies \|x\| > 0$
2. $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $x, y \in L \implies \|x + y\| \leq |x| + |y|$

Теорема 1.2.1. Ако L е нормирано пространство с дадена норма $\|.\|$, то L е метрично пространство, т.е равенството $\rho(x, y) = \|x - y\|$ дефинира разстоянието в L

1.3 Пространството $\mathbb{R}^m$ - дефиниция и основни свойства

Дефиниция 1.3.1. Множеството от наредени m-торки $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ от реални числа. Числата $a_1, a_2, ..., a_m$ се наричат съответно първа, втора, ..., m-та кордината на а.

Ако имаме $a = (a_1, a_2, ..., a_m), b = (b_1, b_2, ..., b_m), ; \lambda \in \mathbb{R}$ то

1. $a + b = (a_1, a_2, ..., a_m) + (b_1, b_2, ..., b_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_m + b_m) \in \mathbb{R}^m$
2. $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_m) \in \mathbb{R}^m$

1.3.1 Скаларно произведение

Скаларно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \right)$$

С така въведено скаларно произведение пространството R^m се превръща в евклидово.

1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k)^2}$$

се въвежда норма в $\mathbb{R}^m$.
Нормата генерира метрика в $\mathbb{R}^m$ с формула:

$$\rho(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k)^2}$$

1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат: $a^2 = (a, a) = \sum_{k=1}^{m} a_k^2$

1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат: $(a,b)^2 \leq a^2b^2$ и $|(a,b)| \leq \|a\|\|b\|$

1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат: $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

1.4 Точки и множества в $\mathbb{R}^m$

1.4.1 Паралелепипед

Дефиниция 1.4.1. Множеството

$$\Pi(a; \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k < x_k - a_k < \delta_k\}$$

се нарича отворен паралелепипед в $\mathbb{R}^m$ с център точката а.

Множеството

$$\widetilde{\Pi}(a; \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k \leq x_k - a_k \leq \delta_k\}$$

се нарича затворен паралелепипед в R^m с център точката а.

Ако $\delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_m = \delta$, получените множества $\Pi(a;\delta)$ и $\widetilde{\Pi}(a;\delta)$ се наричат съответно отворен и затворен куб в $\mathbb{R}^m$ с център а.

1.4.2 Сфера и кълбо

Дефиниция 1.4.2. Нека числото r $>$ 0. Множеството

$$B(a;r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x,a) < r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x-a\| < r\}$$

се нарича отворено кълбо в $\mathbb{R}^m$ с център а и радиус r, множеството

$$\widetilde{B}(a;r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x,a) \leq r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x-a\| \leq r\}$$

се нарича затворено кълбо в $\mathbb{R}^m$ с център а и радиус r, а множеството

$$S(a;r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x,a) = r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x-a\| = r\}$$

се нарича сфера в $\mathbb{R}^m$ с център а и радиус r, а множеството

Дефиниция 1.4.3. Точката а се нарича

- вътрешна за множеството А, ако съществува отворено кълбо $B(a, \varepsilon)$: $B(a, \varepsilon) \subset A$
- външна за А, ако съществува $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$
- контурна за А, ако за всяко $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ и $B(a, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \varnothing$
- изолирана ако съществува $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$

Дефиниция 1.4.4. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича

- отворено, ако всяка негова точка е вътрешна
- затворено, ако неговото допълнение $\mathbb{R}^m \setminus A$ е отворено

Дефиниция 1.4.5. Околност на дадена точка $a \in \mathbb{R}^m$ се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с U_a.

Дефиниция 1.4.6. Точка а се нарича точка на сгъстяване на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$, ако всяка нейна околност U_a съдържа поне една точка на А, различна от а, т.е $U_a \cap (A \setminus \{a\} \neq \varnothing$

Дефиниция 1.4.7. Величината

$$d = d(A) = \sup_{a', a'' \in A} \rho(a'; a'')$$

се нарича диаметър на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$.

Дефиниция 1.4.8. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича ограничено, ако съществува кълбо(с краен радиус), което го съдържа.

Дефиниция 1.4.9. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича компактно, ако А е затворено и ограничено.

Дефиниция 1.4.10. Множеството $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, чийто координати са непрекъснати функции $x_k = x_k(t)(k = 1, 2, ..., m)$, дефинирани върху даден интервал [a,b] се нарича непрекъсната крива в R^m. t се нарича параметър на кривата.
Точките $x(a) = (x_1(a), x_2(a), ..., x_m(a))$ и $x(b) = (x_1(b), x_2(b), ..., x_m(b))$ се наричат начало и край на дадената крива. Ако $x(a) = x(b)$ кривата е затворена

Дефиниция 1.4.11. Нека $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ и $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ са фиксирани числа за които $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$. Множеството от точки $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ чиито кординати се представят във вида

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, ..., m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството R^m, минаваща през точка x^0 по направление $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$.

Дефиниция 1.4.12. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъсната крива γ, която ги свързва и $\gamma \subset A$.

Дефиниция 1.4.13. Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.

Дефиниция 1.4.14. Област, всеки две точки на която могат да се съединят с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.

Дефиниция 1.4.15. Областа $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича звездообразна област, относно точката $x^0 \in A$, ако за вскяка точка $x \in A$ отсечката $[x^0, x]$ лежи изцяло в А.

1.5 Редици от точки в $\mathbb{R}^m$

Дефиниция 1.5.1. Редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\}$ се нарича редица от точки в $\mathbb{R}^m$, а редицата $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}(k = 1 \div m)$ - к-та кординатна редица. За по кратко редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ се означава $\{x^{(n)}\}$

Дефиниция 1.5.2. Редицата $\{y^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ се нарича поредица на редицата $\{x^{(n)}\}$ и се означава:
$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, ...,$ или $\{x^{(n_l)}\}_{l=1}^{\infty}$
ако за всяко l съществува такова n_l, че $y^{(l)} = x^{(n_l)}$, при това, ако $l' < l''$, то $n_{l'} < n_{l''}$.

Дефиниция 1.5.3. Редицата $\{x^{(n)}\}$ се нарича сходяща към точка $a \in \mathbb{R}^m$ (граница на редицата), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $N_0 > 0$, че за всяко $n > N_0$ е изпълено неравенството $\rho(x^{(n)}; a) = \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$. Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.

Дефиниция 1.5.4. Точката $a \in R^m$ се нарича точка на сгъстяване на редицата $\{x^{(n)}\}$, ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.

Теорема 1.5.1. Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$ и точката $a \in \mathbb{R}^m$. Тогава

$$(\{x^{(n)}\} \to a) \iff (x_k^{(n)} \to a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката а, тогава и само тогава когато всяка от кординатите на редици $\{x_k^{(n)}\}$ има граница съответната кордината a_k на точката а

Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши)**.** Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$. Редицата $x^{(n)}$ е сходяща тогава и само тогава когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $N_0 > 0$, че при всяко $n \in N, n > N_0$ и всяко $p \in \mathbb{N}$ е изпълнено $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = \|x^{(n+p)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$

Дефиниция 1.5.5. Редицата $\{x^{(n)}\}$ се нарича ограничена , ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.

Теорема 1.5.3 (Болцано-Вайерщрас)**.** От всяка ограничена редица в пространството R^m може да се избере сходяща подредица.

Дефиниция 1.5.6. Всяко множество $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича компактно, ако от всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$, може да се избере сходяща подредица $\{x_k^{(n)}\}$ с граница принадлежаща на А

2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

2.1 Дефниция на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.1.1. Казва се че дадена функция с дефиниционна област(дефиниционно множество) D, ако на всяка точка $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ от множеството D е съпоставено реално число $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, т.е на всяко $x \in D$ съществува единствено число $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Понякога за кратко се записва.

$$f : D \to \mathbb{R}$$

В $\mathbb{R}^2$ се използва (x, y) за означение, а в $\mathbb{R}^3$ - (x, y, z).

2.2 Граница на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.2.1 (Коши)**.** Нека $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, а е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \to a$ със стойностти $x \neq a$ ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко х от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записва се

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Дефиниция 2.2.2 (Хайне)**.** Нека $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, а е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \to a$ със стойностти $x \neq a$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in D, x^{(n)} \neq a$ сходяща към а, числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница L.

Теорема 2.2.1. Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.

Дефиниция 2.2.3. Нека $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, а е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ дивергира към ∞ (съответно към $-\infty$) при $x \to a$ със стойностти $x \neq a$, ако за всяко $A \in \mathbb{R}$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко х от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $f(x) > A$(съответно $f(x) < A$). Записва се

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty(-\infty)$$

Дефиниция 2.2.4 (Повторна граница)**.** Нека $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на сгъстяване за D и функция $f : D \to \mathbb{R}$. Нека съществува такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката $_2$, че за всички стойностти $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim\limits_{x \to a_1} f(x, y) = \varphi(y)$. Ако освен това съществува $\lim\limits_{y \to a_2} \varphi(y) = A$, A се нарича повторна граница и се означава както следва

$$A = A_{1,2} = \lim_{y \to a_2} (\lim_{x \to a_1} f(x, y))$$

.

Аналогично се съвежда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x \to a_1} (\lim_{y \to a_2} f(x, y))$$

Теорема 2.2.2. Нека $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на сгъстяване за D и функция $f : D \to \mathbb{R}$. Нека

1. Съществува такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката a_2, че за всички стойностти $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim\limits_{x \to a_1} f(x, y) = \varphi(y)$.
2. Съществува границата $\lim\limits_{(x,y) \to (a_1,a_2)} f(x, y) = L$.

Тогава съществува граница $\lim\limits_{y \to a_2} \varphi(y)$ и освен това е в сила равенствотот $\lim\limits_{y \to a_2} \varphi(y) = L$

2.3 Непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.3.1. Казва се че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Дефиниция 2.3.2 (непрекъснатост по Коши)**.** Казва се, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството D, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Дефиниция 2.3.3 (непрекъснатост по Хайне)**.** Казва се, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}$ (с $x^{(n)} \in D$ за $n \in \mathbb{N}$) сходяща към а, числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница $f(a)$.

Дефиниция 2.3.4 (за съставна функция)**.** Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество, $f : \ \to \mathbb{R}$ и $x_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}, k = 1 \div m$. Полагайки $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)) \in A$ за всяко $t \in (\alpha, \beta)$ съставната функция $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$ се дефинира по формулата

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$$

Теорема 2.3.1. Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : \ \to \mathbb{R}$ интервалът $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $x_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ за $k = 1 \div m$. Нека освен това $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)) \in A$ за $\forall t \in (\alpha, \beta)$ и x_k са непрекъснати в точката $t_0 \in (\alpha, \beta)$ за $k = 1 \div m$, а f е непрекъсната в $x^0 = x(t_0)$. Тогава функцията $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$ е непрекъсната в точката t_0

2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.4.1. Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : A \to \mathbb{R}$. Функцията се нарича равномерно непрекъсната в А, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\epsilon)$, че за всеки две точки $x', x'' \in A$ за които разстоянието $\rho(x'; x'') = \|x' - x''\| < \delta$, да следва, че $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 2.4.1 (на Вайерщрас)**.** Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \to \mathbb{R}$ е непрекъсната върху К. Тогава

1. f е ограничена в К, т.е съществуват $m, M \in \mathbb{R}$ такива че за всички $x \in K$ е изпълнено неравенството $m \leq f(x) \leq M$

2. f достифа най малката и най-голямата си стойност в К, т.е съществуват точки $x^0, y^0 \in K$, такива че

$$f(x^0) = \inf_{x \in K} f(x); f(y^0) = \sup_{y \in K} f(x)$$

Теорема 2.4.2 (на Кантор)**.** Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \to \mathbb{R}$ е непрекъсната върху К. Тогава f е равномерно непрекъсната върху К.

3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи

3.1 Дефиниция на частна производна

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $D \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество
- $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ - точка, принадлежаща на D
- $U_{x^0} \subset D$ - околност на x^0
- $U_{x_i^0} \subset D$ - околност на x_i^0 (i = 1, 2, ..., m)
- точката $(x_1^0, x_2^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^i, ..., x_m^0) \in U_{x^0}$, за всички стойности на $x_i \in U_{x_i^0}$
- f и g - функции, дефинирани съответно в D и $U_{x_i^0}$. т.е $f : D \to \mathbb{R}, g : U_{x_i^0} \to \mathbb{R}$ и $g(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^i, ..., x_m^0)$

Дефиниция 3.1.1. Производната, ако съществува на функцията g в точката x_i^0 се нарича частна производна на функцията f(по променлива x_i^0) в точката x^0. Използва се означението $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(x^0)$.
Частната производна на функцията f отностно променливата x_i е равна на границата на функцията $\varphi(h_i) = \dfrac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i}$ при $h_i \to 0$ (ако съществува) т.е

$$\lim_{h_i \to 0} \varphi(h_i) = \lim_{h_i \to 0} \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$$

Пример 3.1.1.

$$f(x, y) = x^2 + 9xy^2$$
$$f'_x(x, y) = (x^2)'_x + (9xy^2)'_x = 2x + 9y^2$$
$$f'_y(x, y) = (x^2)'_y + (9xy^2)'_y = 0 + 9x \cdot 2 \cdot y = 18xy$$

3.2 Частни производни от по-висок ред

Дефиниция 3.2.1. Частната производна на частната производна от $n-1$ ред, $n = 1, 2, ...$(ако съществува), се нарича частична производна от n-ти ред. Частните производни, получени при диференциране по различни променливи се наричат смесени производни, а получените при диференциране само по една и съща променлива се наричат чисти производни.

Пример 3.2.1.

$$f(x,y) = x^3\sin(6y) + x^2y^3 + 2222, f''_{x,y} =?, f''_{y,x} =?$$

$$\begin{aligned}
&f''_{x,y} = (f'_x(x,y))'_y \\
&f'_x(x,y) = (x^3\sin(6y))'_x + (x^2y^3)'_x + (2222)'_x = 3x^2\sin(6y) + 2xy^3 + 0 \\
&f''_{x,y} = (3x^2\sin(6y) + 2xy^3)'_y \\
&f''_{x,y} = (3x^2\sin(6y))'_y + (2xy^3)'_y = 3x^2\cos(6y).6 + 2.3xy^2 = 18x^2\cos(6y) + 6xy^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f''_{y,x} = (f'_y(x,y))'_x \\
&f'_y(x,y) = (x^3\sin(6y))'_y + (x^2y^3)'_y + (2222)'_y \\
&f'_y(x,y) = x^3\cos(6y).6 + x^2.3y^2 + 0 = 6x^3\cos(6y) + 3x^2y^2 \\
&f''_{y,x} = (6x^3\cos(6y) + 3x^2y^2)'_y = (6x^3\cos(6y))_y + (3x^2y^2)'_y \\
&f''_{y,x} = 6.3.x^2\cos(6y) + 3.2.xy^2 = 18x^2\cos(6y) + 6xy^2
\end{aligned}$$

Теорема 3.2.1 (за равенство на смесени производни)**.** Нека точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и нека функцията f е дефинирана в отвореното множество $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2$, което е нейната област т.е $f : U \to \mathbb{R}$. Нека освен това съществуват частните производни $f'_x, f'_y, f''_{x,y}, f''_{y,x}$ за всички $(x, y) \in U$ и $f''_{x,y}, f''_{y,x}$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0). Тогава е изпълнено равенството

$$f''_{x,y}(x_0, y_0) = f''_{y,x}(x_0, y_0)$$

3.3 Диференцируемост на функция

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$

- $U \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество, което е околност на x^0.Без ограничение на общността може да се счита че U е δ-околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0;\delta)$ с център x^0 и радиус δ
- $f : U \to \mathbb{R}$ - функция дефинирана в $U = B(x^0;\delta)$

Дефиниция 3.3.1. Функцията f се нарича диференцируема в точка x^0 ако съществуват числа $A_1, A_2, ..., A_m$ и функция $\varepsilon(x^0, x-x^0)$, дефинирана за всички допустими стойности на $x \in U$ и $x-x^0 = (x_1-x_1^0, x_2-x_2^0, ...x_m-x_m^0)$, като при това

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} A_k(x_k + x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0)\|x - x^0\|$$

и $\lim\limits_{\|x-x^0\|\to 0} \varepsilon(x^0, x - x^0) = 0$

Дефиниция 3.3.2. Функцията f се нарича диференцируема в отвореното множество U, ако тя е диференцируема във всяка негова точка.

Теорема 3.3.1. Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то тя е непрекъсната.

Дефиниция 3.3.3. В случай на диференцируемост в точката x^0 на функцията $f : U \to \mathbb{R}$, изразът

$$df(x^0) \circ (h) = A_1h_1 + A_2h_2 + ... + A_mh_m$$

(или $df, df(x^0)$) се нарича пълен диференциал на $f(x)$ в точката x^0

Теорема 3.3.2. Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то съществуват частните производни $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ в точката x^0 и освен това $A_k(x^0) = \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$.

Дефиниция 3.3.4. Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то със следната формула се изразява нейната производна в точката x^0

$$f'(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0))$$

.

Теорема 3.3.3. Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ притежава частни производни $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$ в отвореното множество U и освен това са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то f е диференцируема в точката x^0.

Дефиниция 3.3.5. Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ притежава частни производни в U и тези частични производни са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в точката x^0. Ако тези производни са непрекъснати в U, то функцията се нарича непрекъсанот диференцируема в това множество.

Дефиниция 3.3.6. Диференциалът на диференциала от $n-1$ ред (n = 2, 3, ...) от функцията f(ако съществува) се нарича диференциал от n-ти ред(n-ти диференциал) на тази функция и се бележи $d^n f$

Ако f е два пъти непрекъсната и диференцируема в $x^0 \in U$ тогава втория диференциал получава по следния резултат

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f(x^0)$$

което е симетрична квадратична форма на $dx_i (i = 1 \div m)$.

Аналогично ако f е n пъти непрекъсната и диференцируема в $x^0 \in U$, то $d^n f(x^0)$ съществува и се дава със следната формула

$$d^n f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f(x^0)$$

4 Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права

4.1 Диференциране на съставна функция

$x^0 \in \mathbb{R}^m$ и отворено множество $U \subset \mathbb{R}^m$ е околност на точката x^0 (Без ограничение на общността може да се счита че U е δ-околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0;\delta)$ с център x^0 и радиус δ).
$t_0 \in (\alpha,\beta) \subset R$

Теорема 4.1.1. Нека функцията f е дефинирана в U, а φ_k - в интервала (α,β), т.е
$f: U \to \mathbb{R}$ и $\varphi_k : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ $(k = 1 \div m)$
като при това $x_k = \varphi_k(t)$ за $k = 1 \div m$, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t) \in U$ за всички стойности на $t \in (\alpha,\beta)$. Нека f е диференцируема в U, f'_k са непрекъснати в x^0 за $k = 1 \div m$, φ_k са диференцируеми в t_0 и $F : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ е дефинирана с равенствово.

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)), t \in (\alpha,\beta)$$

Тогава функцията F е диференцируема в t_0 и в сила е следното равенство

$$F'(t_0) = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(x^0)\varphi'_k(t_0)$$

За m = 2:
$\varphi_1(t) = \varphi(t), \varphi_2(t) = \psi(t)$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0)$$

Пример 4.1.1. $f(x,y)$ - дефинирана и диференцируема в $U_{(1,2)} \subset \mathbb{R}^2$. с непрекъснати частни производни f'_x, f'_y в точката (1,2).
Намерете производната $F'(0)$ на съставната фунция F, зададена с равен-

ството $F(t) = f(1+3t, 2+4t)$.

$$\begin{aligned}
&t_0 = 0\\
&x = \varphi(t) = 1+3t\\
&y = \psi(t) = 2+4t\\
&x_0 = \varphi(0) = 1\\
&y_0 = \psi(0) = 2\\
&\varphi'(t) = 3\\
&\psi'(t) = 4\\
&F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0) \implies F'(0) = 3f'_x(1,2) + 4f'_y(1,2)
\end{aligned}$$

4.2 Производна по посока. Градиент

Нека $x^0 \in \mathbb{R}^m$ и лъчът l е дефиниран, както следва:

$$l : x = x^0 + t\nu, t > 0$$

Функцията f е дефинирана върху този лъч, а

$$\varphi(t) := f(x(t)) = f(x^0 + t\nu), t > 0$$

Дефиниция 4.2.1. Границата(ако съществува)

$$\lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

се нарича производна на f в точката x^0 по посока на вектора ν и се означава $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}$, т.е

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

ако съществува границата.

Ако частните производни съществуват, са производни "по посока на кординатните оси".

Ако f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката в x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0, то съществува производната ѝ по посока на вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m)$ и

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{m} \nu_k \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$$

Дефиниция 4.2.2. Векторът с кординати $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0)$ се нарича градиент на f в точката x^0 и се означава

$$grad\, f(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0))$$

Предвид тази дефиниция, формулата за производна по посока на вектор ν се записва по кратко във вида

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = grad\,(f(x^0), \nu)$$

Теорема 4.2.1. Ако функцията f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката в x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0, то съществува производната на f по посока на произволен вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m)$ и тя се дава с формула: $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = grad\, f(x^0)$

Ако, ν е единичен вектор, т.е $\|\nu\| = 1$.
Тогава е в сила неравнестово $\left|\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| \leq \|grad\, f(x^0)\|$, което следва от неравенство на Коши.

$$\left|\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| = \left|grad\,(f(x^0), \nu)\right| \leq \|grad\, f(x^0)\|\|\nu\| = \|grad\, f(x^0)\|$$

Равенство се достига само когато ν и $f(x^0)$ са колинеарни (еднопосочни или успоредни). тогава

$$\left|\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| = \|grad\, f(x^0)\|$$

Ако вектора ν е колинеарен с градиента, тогава векторът $\nu = \dfrac{grad\, f(x^0)}{\|grad\, f(x^0)\|}$ и тогава

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \left(grad\, f(x^0), \frac{grad\, f(x^0)}{\|grad\, f(x^0)\|}\right) = \|grad\, f(x^0)\|$$

Ако $grad\, f(x^0) \neq 0$ то производната достига най голяма стойност единствено, ако диференцирането се извършва по посока на градиента. С други думи, посоката на градиента е посоката на най бързо нарастване на функцията, а големината му е равна на производната по тази посока.

Ако $\nu = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, ..., \cos\alpha_m)$, то производната по посока ν става

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = f'_{x_1}(x^0)\cos\alpha_1 + f'_{x_2}(x^0)\cos\alpha_2 + ... + f'_{x_m}(x^0)\cos\alpha_m.$$

4.3 Допирателна равнина. Нормална права

- $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ - точка в $\mathbb{R}^2$
- $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ точка в $\mathbb{R}^3$
- $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2 =$ - околност на (x_0, y_0)
- $f : U \to \mathbb{R}$ - функция
- $z_0 = f(x, y)$
- $S : z = f(x, y) \iff S : f(x, y) - z = 0$ - уравнение на равнина
- f'_x, f'_y - първи частни производни за всички $(x, y) \in U$,f'_x, f'_y са непрекъснати в точката (x_0, y_0)

Дефиниция 4.3.1. Равнината $\tau(\tau \nparallel Oz)$, зададена с уравнение

$$\tau : z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина в точкат M_0 към повърхнината S и представлява графиката на $f(x, y)$.

Дефиниция 4.3.2. Векторите n_1, n_2

$$n_1(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) \qquad n_2(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1),$$

които са нормални вектори на тангенциалната равнина, се наричат нормални вектори и за повърхнината S.
$n_1 = -n_2$ Това позволява да се използват за ориентация на повърхината S.
Горната страна се дефинира с вектора n_1 за който ъгъл $\measuredangle(n_1, k)$ е остър.

Дефиниция 4.3.3. Правата n, зададена с уравнение

$$n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$

се нарича нормала към повърхнината S към точка M_0

Ако прекараме две равнини през $_0$ съответно $\alpha : x = x_0$ и $\beta : y = y_0$ всяка от тях пресича повърхнината в крива линия съответно

$$C_1 : x = x_0, y = y, z = f(x_0, y) \qquad C_2 : x = x, y = y_0, z = f(x, y_0)$$

t_1 е направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в точката $_0$, а с t_2 - направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в същата точката, то

$$t_1(0, 1, f'_y(x_0, y_0), \qquad t_2(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$$

Равнината τ е компланарна с векторите t_1, t_2 то нейния нормален вектор може да се получи от векторното им произведение

$$n_1 = t_2 \times t_1 \qquad n_2 = t_1 \times t_2$$

Пример 4.3.1. За повърхнина S, зададена с уранение $S : z = x^2 + y^2 + 3$, да се напишат:
1) допирателната равнина $\tau z M_0(0, 0, 3)$
2) нормалните вектори на τ в т. M_0.
3) нормалата на повърхнината S в т. M_0.
Решение:

$$z'_x = 2x \,;\, z'_y = 2y \,;\, M_0(0, 0, 3) = M_0(x_0, y_0, z_0)$$
$$z'_x(x_0, y_0) = z'_x(0, 0) = 0 \,;\, z'_y(x_0, y_0) = z'_y(0, 0) = 0$$
$$1)\tau : z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$\tau : z - 3 = 0x + 0y \iff \tau : z = 3$$
$$2)\vec{n_1} = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) = (0, 0, 1)$$
$$\vec{n_2} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1) = (0, 0, -1)$$
$$3)n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$
$$n : \frac{x - 0}{0} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 3}{1} = \lambda$$
$$n(0, 0, \lambda + 3), \lambda \in \mathbb{R}$$

5 Лекция 5: Неявни функции. Съществуване и диференциране

5.1 Неявни функции

Нека имаме уравнението $F(x, y) = 0$ и да се реши спрямо y. Решението трябва да зависи и от другата променлива. Нека $y = f(x)$ и заместваме в началното уравнение.

$$F(x, f(x)) = 0$$

Дефиниция 5.1.1. Ако функцията $f(x)$ удовлетворява равенството

$$F(x, f(x)) = 0$$

за всяко x от дефиниционното си множество, то тя се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението $F(x; y) = 0$.

Ако диференцираме равенството $F(x, f(x)) = 0$ по x с теоремата за съставни функции получаваме

$$F'_x(x, f(x)) + f'(x)F'_y(x, f(x)) = 0 \implies f'(x) - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

Където $F'_y(x, f(x)) \neq 0$

Пример 5.1.1. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$

$$F(x, y) = 0 \iff y^2 = 5 - x^2$$
$$y_{1,2} = \pm\sqrt{5 - x^2}$$

Нека $M_0(x_0, y_0)$ точка в $\mathbb{R}^2$, отвореното множество $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$ е нейна околност и нека $F \to \mathbb{R}$.

Теорема 5.1.1 (Съществуване на неявна функция)**.** Нека $M_0(x_0, y_0)$ точка в $\mathbb{R}^2$, отвореното множество $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$ е нейна околност и функцията $F : U \to \mathbb{R}$ удовлетворява следните условия

1. F е непрекъсната в U
2. $F(x_0, y_0) = 0$
3. За всяка точка $(x, y) \in U \; \exists F'_y(x, y)$
4. F'_y е непрекъсната в M_0

5. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогава съществуват околности

$$X = \{x : |x - x_0| < a\}(a > 0) \qquad Y = \{y : |y - y_0| < b\}(b > 0)$$

такива че правоъгълника $\Pi = X \times Y \subset U$ и съществува единствена функция $y = f(x), f : X \to Y$, f - непрекъсната в X, $f(x_0) = y_0$ и $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$

Дефиниция 5.1.2. Фунцкията $y = f(x)$ се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението $F(x, y) = 0$, в околност на точката (x_0, y_0)

Теорема 5.1.2 (Добавка към 5.1.1)**.** Ако освен това F'_x, F'_y са дефинирани в U и непрекъснати в (x_0, y_0) то $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 и $f'(x_0)$ се изразява

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

Ако F'_x, F'_y са непрекъснати в $U = U_{M_0}$, то f' е непрекъсната в X. Прилагайки формулата за производна в произволна точка в $x \in X$ получаваме

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \qquad (1)$$

Аналогично се формулира теоремата за неявна функция от уравнението $F(x, y) = 0,$ за $x(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ $(m > 2)$ и $y \in R$ т.е $F(x_1, x_2, ..., x_m, y) = 0$

Теорема 5.1.3 (Съществуване на неявна функция)**.** Нека точката $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in \mathbb{R}^m, M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ е околност на M_0 и функцията $F : U \to \mathbb{R}$ удовлетворява следните условия

1. F е непрекъсната в U

2. $F(x^0, y_0) = 0$

3. За всяка точка $(x, y) \in U$ $\exists F'_y(x, y)$

4. F'_y е непрекъсната в M_0

5. $F'_y(x^0, y_0) \neq 0$

Тогава съществуват околности:

$X = \{x : |x - x_k^0| < a_k\}(a_k > 0)\, k = 1 \div m; \qquad Y = \{y : |y - y_0| < b\}(b > 0)$

такива че правоъгълника $\Pi = X \times Y \subset U, X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$ и освен това съществува единствена функция $y = f(x), f : X \to Y$, f - непрекъсната в X, $f(x^0) = y_0$ и $\forall x \in X : F(x; f(x)) = 0$
Ако освен това $F'_{x_k}, k = 1 \div m$ и F'_y са дефинирани в U и непрекъснати в (x^0, y_0), то $f(x)$ е диференцируема в точката x^0 и $f'(x_k^0)$ се изразява с формулата

$$f'(x_k^0) = -\frac{F'_{x_k}(x^0, f(x_0))}{F'_y(x^0, f(x_0))} = -\frac{F'_{x_k}(x^0, y_0)}{F'_y(x^0, y_0)}$$

Пример 5.1.2. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. Да се определи дали съществува единствена функция $y = f(x)$ определена от неявно от уравнението $F(x, y) = 0$ в околността (1,2). Ако съществува да се пресметне $f'(1)$.

$F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4 \neq 0$
Съществува единствена неявна функция $y = f(x)$ определена с уравнението $F(x, y) =$
$f'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$
$F'_x = 2x, \quad F'_x(1, 2) = 4, \quad F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4$
$f'(1) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

Пример 5.1.3. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3z^2 - 13$. Да се определи дали съществува единствена функция $z = f(x, y)$ определена от неявно от уравнението $F(x, y, z) = 0$ в околността (0,1,2). Ако съществува да се пресметне $z'_x(0, 1), z'_y(0, 1)$.

$F'_z = 6z \implies F'_z(0, 1, 2) = 6 \cdot 2 = 12 \neq 0$
Същесвува единствена неявна функция $z = f(x, y)$ определена от неявно от уравнени
$F'_x = 2x \implies F'_x(0, 1, 2) = 2 \cdot 0 = 0$
$F'_y = 2y \implies F'_y(0, 1, 2) = 2 \cdot 1 = 2$
$z'_x(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} = -\dfrac{0}{6} = 0$
$z'_y(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

Ако F'_{x_k}, F'_{y_k} са непрекъснати в $U = U_{M_0}$, то f'_{x_k} е непрекъсната в X. Прилагайки формулата за производна в произволна точка в $x \in X$ получаваме

$$y'_{x_k} = f'_{x_k}(x) = -\frac{F'_{x_k}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_{x_k}(x, y)}{F'_y(x, y)} \tag{2}$$

Ако F има непрекъснати частни производни от втори ред, то изразите от дясната страна на (1) (съответно (2)) могат да се диференцират още веднъж по променлива $x(x_j, j = 1 \div m)$, при което се получават вторите производни на f. Така се получават формулите

$$f''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

респективно, изпускайки за удобство променливите получаваме

$$f''_{x_k x_k}(x) = f''_{x_k^2}(x) = -\frac{F''_{x_k^2} + 2F''_{x_k y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'^2_{x_k}}{F'_y}$$

и за $k \neq j$

$$f''_{x_k x_j}(x) = -\frac{F''_{x_k x_j} + F''_{x_k y}y'_{x_j} + F''_{x_j y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'_{x_k}y'_{x_j}}{F'_y}$$

Пример 5.1.4. Да се намери y', y'' на неявната функция $y = f(x)$, дефинирана от уравнението

$$x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

Да се пресметнат $y'(0), y''(0)$, ако $y(0) = 1$

Решение:

$$F(x,y) = x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$
$$F'_y = -2x + 10y + 4 \neq 0$$
$$F'_x(x,y) = 2x - 2y - 2$$
$$F'_y(0,1) = -2\cdot 0 + 10\cdot 1 + 4 \neq 0$$
$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{2x-2y-2}{-2x+10y+4} = -\frac{x-y-1}{-x+5y+2}$$
$$y'(0) = -\frac{0-1-1}{-0+5\cdot 1+2} = -\frac{-2}{7} = \frac{2}{7}$$
$$y''(x) = -\frac{F''_{xx}(x,y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x,y)y'^2}{F'_y(x,y)}$$
$$F''_{xx} = 2, \quad F''_{yy} = 10, \quad F''_{xy} = -2$$
$$F''_{xx}(0,1) = 2, \quad F''_{yy}(0,1) = 10, \quad F''_{xy}(0,1) = -2$$
$$y''(x) = -\frac{2 + 2\cdot(-2)y' + 10y'^2}{-2x+10y+4}$$
$$y''(x) = -\frac{2 + -4y' + 10y'^2}{-2x+10y+4}$$
$$y''(0) = -\frac{2 + -4\cdot\frac{2}{7} + 10\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2}{-2\cdot 0 + 10\cdot 1 + 4}$$
$$y''(0) = -\frac{2 + -\frac{8}{7} + \frac{40}{49}}{14}$$
$$y''(0) = -\frac{\frac{98-56+40}{49}}{14} = -\frac{\frac{82}{49}}{14} = \frac{82}{49}\cdot\frac{1}{14} = \frac{41}{343}$$

6 Лекция 6

6.1 Формула на Тейлор за функция на няколко променливи

Формула на Тейлор за функията f дефинирана и непрекъсната в околност $U = U_{x_0}$ на точката x_0, която има производни до (n+1) ред ($n \in \mathbb{N}_0$)

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x)$$

с остатъчен член записан във формата на Лагранж

$$r_n(x) = \frac{f^{n+1}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Нека имаме точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, околността $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2$, която е звездообразна относно (x_0, y_0) (Всяка точка $(x, y) \in U$ околността съдържа и отсечка, която я свързва с (x_0, y_0)). Без ограничение на общостта считаме, че U е δ-околност на (x_0, y_0)(отворен кръг с център (x_0, y_0) и радиус δ). Функцията f е дефинирана в U.

Теорема 6.1.1. Нека функцията $f : U \to R$ е дефинирана и непрекъсната в δ-околността U на точката (x_0, y_0), заедно с частните производни от n+1-ви ред ($n \in \mathbb{N}_0$). Нека $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$.
Тогава съществува $\vartheta = \vartheta(\Delta x, \Delta y), (0 < \vartheta < 1)$ за която

$$\begin{aligned}
&\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + \\
&\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^3 f(x_0, y_0) + ... + \\
&\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y)
\end{aligned}$$

или по кратко

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y) \tag{3}$$

където

$$r_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + \vartheta\Delta x, y_0 + \vartheta\Delta y) \quad (4)$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

Дефиниция 6.1.1. Формулата (3) се нарича формула на Тейлор от ред n за функция f, а функцията r_n - остатъчен член, а записът му във вида (4) се нарича остатъчен член на формулата на Тейлор във формата на Лагранж.
Ако n = 0, първото събираемо изисква разяснение, защото индексът над знака за сумиране е по малък от индекса под знака за сумиране. В този случай по дефиниция този член е равен на нула, т.е формулата има вид

$$\Delta z = r_0(\Delta x, \Delta y)$$

Теорема 6.1.2. Нека функцията $f : U \to R$ дефинирана и непрекъсната в δ-околността U на точката x^0, заедно с частните производни от n+1-ви ред $(n \in \mathbb{N}_0)$. Нека $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_m^2} < \delta$.
Тогава съществува $\vartheta = \vartheta(\Delta x) = \vartheta(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n), (0 < \vartheta < 1)$ за която

$$\Delta z = f(x) - f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) =$$
$$= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k f(x_1^0, ..., x_m^0) + r_n(\Delta x_1, ..., \Delta x_m)$$

Където

$$r_n(\Delta x) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^{n+1} f(x^0 + \vartheta\Delta x),$$
$$(x^0 + \vartheta\Delta x) = (x_1^0 + \vartheta\Delta x_1, ..., x_m^0 + \vartheta\Delta x_m) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Записано с диференциали

$$\Delta z = f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{n} d^k f(x^0) + r_n(\Delta x)$$

при n = 1

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$
$$= \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + r_1(\Delta x,\Delta y)$$
$$r_1(\Delta x,\Delta y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{\partial x^2}\Delta x^2\right] + \frac{\partial^2 f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]$$

Пример 6.1.1. Да се напише формулата на Тейлор за $f(x,y) = e^{x+y}$ в точката $(x_0,y_0) = (0,0), n = 1$

$$f'_x = e^{x+y}\; f'_y = e^{x+y} \qquad f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yy} = e^{x+y}$$
$$f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 1$$
$$\xi = (\xi_1,\xi_2),\quad \xi_1 = \vartheta x,\quad \xi_2 = \vartheta y,\quad \vartheta \in (0,1)$$
$$f''_{xx}(\xi_1,\xi_2) = f''_{xy}(\xi_1,\xi_2) = f''_{yx}(\xi_1,\xi_2) = f''_{yy}(\xi_1,\xi_2) = e^{\xi_1+\xi_2} = e^{\vartheta(x+y)}$$
$$f(x,y) = 1 + 1x + 1y + \frac{1}{2!}\left(e^{\vartheta(x+y)}x^2 + 2e^{\vartheta(x+y)}xy + e^{\vartheta(x+y)}y^2\right)$$
$$= 1 + (x+y) + \frac{e^{\vartheta(x+y)}}{2!}(x+y)^2$$

6.2 Локални екстремуми на функция на няколко променливи

Дефиниция 6.2.1. Казваме че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ има локален максимум в точката $x^0 \in D$, ако съществува околност $U_{x^0} \subset D$ на точката x^0, че

$$f(x^0) \geq f(x), \quad \forall x \in U_{x^0}$$

Дефиниция 6.2.2. Казваме че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ има локален минимум в точката $x^0 \in D$, ако съществува околност $U_{x^0} \subset D$ на точката x^0, че

$$f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in U_{x^0}$$

Дефиниция 6.2.3. Локалните максимуми и локалните минимуми се наричат по - общо локални екстремуми.

Дефиниция 6.2.4. Ако неравенството в дефинииците (6.2.1) или (6.2.2) е строго при $x \neq x^0$, то съответния локален екстремум се нарича строг локален екстремум(строг локален максимум или строг локален минимум).

Теорема 6.2.1 (Необходимо условие)**.** Нека функцията $f : D \to \mathbb{R}$ притежава локален екстремум в $x^0 \in D \subset \mathbb{R}^m$ и освен това съществуват първите частни производни $f'_{x_k}(x^0)$ в точката x^0, $k = 1 \div m$ тогава

$$f'_{x_k}(x^0) = 0 \quad k = 1 \div m$$

Дефиниция 6.2.5. Точката x^0 се нарича стационарна точка за функцията f, диференцируема в нея, ако $grad\, f(x^0) = 0$.

Пример 6.2.1. Тук са разгледани две функции които са дефинирани и диференцируеми в цялата равнина $\mathbb{R}^2$, но нямат локални екстремуми

$$f(x, y) = e^{x+y}$$
$$f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = e^{x+y} \neq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = xy$$
$$f'_x(x, y) = x \qquad f'_y(x, y) = y$$
$$grad\, f(x, y) = (y, x) = (0, 0)$$
$$f(x, y) - f(0, 0) = xy - 0 = xy \implies$$

няма локален екстремум (сменя знака си във всяка произволно взета околност на точката (0,0)). Точката (0,0) е седловина на хиперболичната повърхнина $z = xy$.

6.3 Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция

Теорема 6.3.1 (Достатъчно условие)**.** Нека функцията $f : D \to \mathbb{R}$ притежава непрекъснати частни производни $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ от втори ред в околността U и точката (x_0, y_0) е стационарна точка f, т.е

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Тогава

1. Ако
$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 > 0$$
то $f(x, y)$ има локален екстермум в (x_0, y_0).

2. Ако
$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 < 0$$
то $f(x, y)$ няма локален екстермум в (x_0, y_0).

3. Ако
$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 = 0$$
то $f(x, y)$ може да има локален екстремум в (x_0, y_0), така и да няма такъв.

Пример 6.3.1. Да се намерят екстремумите на (ако съществуват) и да се определи видът им.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = -x^2 - y^2$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$

$f(x, y) = x^2 + y^2$

$f'_x = 2x \qquad f'_y = 2y$

$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0)$ – стационарна точка

$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 2 \quad f''_{xy} = 0$

$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0 \implies \exists$екстремум

$f''_{xx} = 2 > 0 \implies$ екстремума е минимум$f_{min} = f(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$

$f(x, y) = -x^2 - y^2$

$f'_x = -2x \qquad f'_y = -2y$

$\begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \implies M_0(0, 0)$ – стационарна точка

$f''_{xx} = -2 \quad f''_{yy} = -2 \quad f''_{xy} = 0$

$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0 \implies \exists$екстремум

$f''_{xx} = -2 < 0 \implies$ екстремума е максимум$f_{max} = f(0, 0) = -0^2 - 0^2 = 0$

$f(x,y) = x^2 - y^2$
$f'_x = 2x \qquad f'_y = -2y$
$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \implies M_0(0,0)$ – стационарна точка
$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = -2 \quad f''_{xy} = 0$
$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 2(-2) - 0 = -4 < 0 \implies$ няма екстремум

Пример 6.3.2. Да се намерят екстремумите на (ако съществуват) и да се определи видът им.

- $f(x,y) = y^4 + x^2$
- $f(x,y) = -y^4 - x^2$
- $f(x,y) = y^3 + x^2$
- $f(x,y) = xy^3$
- $f(x,y) = (x+y)^2$
- $f(x,y) = -(x+y)^2$

$f(x,y) = y^4 + x^2$
$f'_x = 2x \quad f'_y = 4y^3$
$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \implies M_0(0,0)$ – стационарна точка
$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 12y^2 \quad f''_{xy} = 0$
$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 2(12y^2) - 0 = 24y^2 = 0 \implies$ трябва допълнително изследване
$f(x,y) - f(0,0) = y^4 + x^2 - (0^4 + 0^2) = y^4 + x^2 \geq 0$
$y^4 + x^2 = 0 \iff x = y = 0$
$f(x,y) - f(0,0) \geq 0 \iff f(x,y) \geq f(0,0)$ в $\mathbb{R}^2 \implies$ локален минимум
$f_{min} = f(0,0) = 0^4 + 0^2 = 0$

$f(x,y) = -y^4 - x^2$
$f'_x = -2x \quad f'_y = -4y^3$
$\begin{cases} -2x = 0 \\ -4y^3 = 0 \end{cases} \implies M_0(0,0) -$ стационарна точка
$f''_{xx} = -2 \quad f''_{yy} = -12y^2 \quad f''_{xy} = 0$
$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = -2(-12y^2) - 0 = 24y^2 = 0 \implies$ допълнително изследване
$f(x,y) - f(0,0) = -y^4 - x^2 - (-0^4 - 0^2) = -y^4 - x^2 \geq 0 \iff y^4 + x^2 \leq 0$
$y^4 + x^2 = 0 \iff x = y = 0$
$f(x,y) - f(0,0) \leq 0 \iff f(x,y) \leq f(0,0)$ в $\mathbb{R}^2 \implies$ локален максимум
$f_{max} = f(0,0) = -0^4 + -0^2 = 0$

$f(x,y) = y^3 + x^2 f'_x = 2x \quad f'_y = 3y^2$
$\begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \implies M_0(0,0) -$ стационарна точка
$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 6y \quad f''_{xy} = 0$
$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 2(6y) - 0 = 12y^2 = 0 \implies$ допълнително изследване
$f(x,y) - f(0,0) = y^3 + x^2 - (0^3 + 0^2) = y^3 + x^2$
За всяка точка от положителната ординатна ос $(x > 0, y > 0) f(x,y) - f(0,0) > 0$
За всяка точка от отрицателната ординатна ос $(x < 0, y < 0) f(x,y) - f(0,0) < 0$
$\implies f(x,y) - f(0,0)$ Няма постоянен знак във всяка околност на M_0
$\implies f(x,y)$ няма локален екстремум в $_0$ и точката M_0 е седловинна точка

$f(x,y) = xy^3 f'_x = y^3 \quad f'_y = 3xy^2$
$\begin{cases} y^3 = 0 \implies y = 0 \\ 3xy^2 = 0 \implies x = 0 \text{ или } x \neq 0 \end{cases} \implies$
Стационарните точки са безкрайно много
$$M_0(x,0)(x \in \mathbb{R})$$

1. $x_0 = 0, y = 0 \implies M_0 = (0,0)$

   $f(x,y) - f(0,0) = xy^3 - 0 = xyy^2$
   I и III квадрант - $xy > 0$, а във II и IV - $xy < 0$, $y^2 > 0 \implies$
   Сменя знака си $\implies$ f няма локален екстремум в $_0$

2. $x_0 \neq 0, y = 0 \implies M_1 = (x_0, 0)$

   $\Delta f = f(x_0, y) - f(x_0, 0) = x_0 y^3 - x_0 0^3 \implies$
   $\Delta f = y^2(x_0 y)$
   $$x_0 > 0 \implies \begin{cases} \Delta f > 0, & y > 0 \\ \Delta f < 0, & y < 0 \end{cases} \implies \Delta f \text{ сменя знака си в околността на } M_1$$

   Аналогично за $x_0 < 0$ знакът не се запазва
   $\implies$ f няма локален екстремум в точката $M_1 \implies$ f няма локални екстремуми

$f(x,y) = (x+y)^2$
$f'_x = 2(x+y) \quad f'_y = 2(x+y)$
$$\begin{cases} 2(x+y) = 0 \\ 2(x+y) = 0 \end{cases} \iff x + y = 0 \iff -x = y \implies$$
Стационарни точки са всички точки от ъглополовящата на II и IV квадрант
- от правата x+y = 0, т.е $M(x_0, -x_0), x_0 \in \mathbb{R}$
$f''_{xx} = 2, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{xy} = 2,$
$\Delta = 2 \cdot 2 - (2)^2 = 0 \implies$ допълнително изследване
$f(x,y) - f(x_0, -x_0) = (x+y)^2 - (x_0 - x_0)^2 = (x+y)^2 \geq 0 \implies$
f има локален минимум във всяка точка от вида $M(x_0, -x_0)$,
$f_{min} = (x_0 - x_0)^2 = 0$

$f(x,y) = -(x+y)^2$

$f'_x = -2(x+y) \quad f'_y = -2(x+y)$

$\begin{cases} -2(x+y) = 0 \\ -2(x+y) = 0 \end{cases} \iff x+y=0 \iff -x=y \implies$

Стационарни точки са всички точки от ъглополовящата на II и IV квадрант - от правата x+y = 0, т.е $M(x_0, -x_0), x_0 \in \mathbb{R}$

$f''_{xx} = -2, \quad f''_{yy} = -2, \quad f''_{xy} = -2,$

$\Delta = (-2)(-2) - (-2)^2 = 0 \implies$ допълнително изследване

$f(x,y) - f(x_0, -x_0) = -(x+y)^2 + (x_0 - x_0)^2 = -(x+y)^2 \leq 0 \implies$

f има локален максимум във всяка точка от вида $M(x_0, -x_0)$,

$f_{max} = (x_0 - x_0)^2 = 0$

7 Лекция 7

8 Упражения

8.1 Упражнение към лекция 1

Задача 8.1.1. Да се покаже дали посочените редици $\{X_n\} = \{x_n, y_n\}$ са сходящи или разходящи. За сходящите да се намери границите им.

1. $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $y_n = 2 + \dfrac{\sin n}{n}$
2. $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $y_n = 2 + n$
3. $x_n = (-1)^n$, $y_n = n$
4. $x_n = (-1)^n$, $y_n = \dfrac{1}{n}$
5. $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$, $y_n = (-1)^n$
6. $x_n = \sin n$, $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Решение:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\dfrac{|\sin n|}{n} \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 2 \implies$ редицата е сходяща; точката (1,2) е нейна граница
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty \implies$ разходяща редица
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$не съществува, защото има две точки на сгъстяване., $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty \implies$ разходяща редица
4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$не съществува, защото има две точки на сгъстяване., $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \implies$ разходяща редица
5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$не съществува, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty \implies$ разходяща редица
6. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$не съществува, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \implies$ разходяща редица

8.2 Упражнение към лекция 2

Задача 8.2.1. Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ и са разгледани няколко функции. Да се напишат дефиниционните им множества и да се даде пояснение.

1. $z(x, y) = x^2 + y^2$
2. $z(x, y) = \sqrt{y^2 - 2x}$
3. $z(x, y) = \ln \sqrt{y^2 - 2x}$
4. $z(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{-y^2 + 2x + 1}}$
5. $w(x, y, z) = \arccos(x^2 + y^2 + z^2)$
6. $f(n) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}^m \\ 0, & x \in \dfrac{\mathbb{R}^m}{\mathbb{Q}^m} \end{cases}$

Решение:

1. $z(x, y) = x^2 + y^2$
   $D = \mathbb{R}^2$
2. $z(x, y) = \sqrt{y^2 - 2x}$
   $D = \{(x, y) : y^2 - 2x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2, x \leq \dfrac{y^2}{2}$
3. $z(x, y) = \ln \sqrt{y^2 - 2x}$
   $D = \{(x, y) : y^2 - 2x > 0\} \subset \mathbb{R}^2, x < \dfrac{y^2}{2}$
4. $z(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{-y^2 + 2x + 1}}$
   $D = \{(x, y) : -y^2 + 2x + 1 > 0\} \subset \mathbb{R}^2, x > \dfrac{y^2 - 1}{2}$
5. $w(x, y, z) = \arccos(x^2 + y^2 + z^2)$
   $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq \pi\} \subset \mathbb{R}^3,$
   Графиката е кълбо с център (0,0,0) и радиус$\sqrt{\pi}$
6. $D \subset \mathbb{R}^m$

Задача 8.2.2. Разгледаните по - долу функциите са дефинирани в $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Кои от границите съществуват и колко са

$$A = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad A_{1,2} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \quad A_{2,1} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$$

1. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$
4. $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$
5. $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

Решение:

1.

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \frac{-y}{y} = -1 \qquad \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{x}{x} = 1$$

$$A_{1,2} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$

$$A_{2,1} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}(1) = 1$$

$A = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ Не съществува, защото трябва $A_{1,2} = A_{2,1}$

2.

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \frac{y^2}{(-y)^2} = 1 \qquad \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\implies A_{1,2} = A_{2,1} = 1 \implies \exists A = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Редица: $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0), f(x_n, y_n) = 1 \to 1$

Редица: $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}) \to (0,0), f(x'_n, y'_n) = \frac{2n^2}{1+4n^2} \to \frac{1}{2} \neq 1$

$\implies f(x,y)$ няма граница при $(x,y)\to(0,0)$

3.

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \frac{0}{y^4} = 0 \qquad \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{0}{x^2} = 0$$

$$A_{1,2} = A_{2,1} = 0 \implies \exists A = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Редица: $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \to (0,0), f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$

$\implies f(x,y)$ няма граница при $(x,y)\to(0,0)$

4.

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$$

$0 \leq |f(x,y)| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$ и $|x|+|y| \to 0$

$A = 0$

$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ - не съществува

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = y\cos\frac{1}{y}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

Аналогично и другата вътрешна граница не съществува. Но тогава и повторните граници $A_{1,2}$, $A_{2,1}$ не съществуват.

5.

$$f(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = y^2 \qquad \lim_{y\to 0} f(x,y) = x^2$$
$$A_{1,2} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(y^2\right) = 0$$
$$A_{2,1} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(x^2\right) = 0$$
$$\implies A = A_{1,2} = A_{2,1} = 0$$

Задача 8.2.3. Нека A, B, C, D са подмножества на $\mathbb{R}^2$ дефинирани както следва
$A = \{(x,y) : x \geq 0, y \leq 1, y > x\}$
$B = \{(x,y) : x \leq 1, y \geq 0, y < x\}$
$C = \{(x,y) : x = y, 0 \leq x \leq 1\}$
$D = A \cup B \cup C$
и функцията $f : D \to \mathbb{R}$ зададена по следния начин
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2}, & (x,y) \in A \\ 0, & x = y \\ -\dfrac{1}{x^2}, & (x,y) \in B \end{cases}$$
Да се изследва непрекъснатостта на тази функция.
Решение:
Функцията f е непрекъсната в A, защото е частно на две функции със знаменател $y^2 \neq 0$, в A.
Аналогично е непрекъсната в B защото знаменателя е $x^2 \neq 0$.
Остана да се изследва поведението върху C.

$(x_0, y_0) = (x_0, x_0) \in C$
$R = \{(x_n, y_n)\},\ (x_n, y_n) \in A$
$\lim\limits_{n\to\infty} R = (x_0, y_0)$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \dfrac{1}{y_0^2} = \dfrac{1}{x_0^2} \neq 0$
Ако $x_0 \neq 0,\ f(x_0, y_0) = 0$
$\implies$ функцията е прекъсната в точката $(x_0, x_0) \neq (0, 0)$
Ако $(x_n, y_n) \in B,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = -\dfrac{1}{x_0^2} \neq f(x_0, x_0) \neq 0.$
Ако $x_0 = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \infty(-\infty),\ f(0, 0) = 0,$
$\implies$ f е прекъсната в точката (0,0).

Функцията е непрекъсната в D, с изключение на точките от C, където е прекъсната.

8.3 Упражнение към лекция 3

Задача 8.3.1. Да се намерят първите частни производни на следните функции

1. $f(x,y,z) = e^{4x+3y} + xy^2z^3 + 1111e^{\pi}$ за произволна точка $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$
2. $f(x,y) = |x+y|$ в точката (0,0)
3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ в равнината $\mathbb{R}^2$

Решение:

1.
$$\begin{aligned}
&f(x,y,z) = e^{4x+3y} + xy^2z^3 + 1111e^{\pi} \\
&f(x,y_0,z_0) \implies f'_x(x_0,y_0,z_0) = 4e^{4x_0+3y_0} + y_0^2z_0^3 \\
&f(x_0,y,z_0) \implies f'_y(x_0,y_0,z_0) = 3e^{4x_0+3y_0} + 2x_0y_0z_0^3 \\
&f(x_0,y_0,z) \implies f'_z(x_0,y_0,z_0) = 3x_0y_0^2z_0^2
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
&f(x,y) = |x+y| \\
&\frac{g(h)-g(0)}{h} = \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\
&\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \text{ не съществува} \\
&\implies \nexists f'_x(0,0) (\text{Аналогично се получава за } f'_y(0,0))
\end{aligned}$$

3.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$

$$f'_x(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} = 0$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = \lim_{k\to 0} = 0$$

$\implies$ Функцията има частни производни във всичко точки на равнината $\mathbb{R}^2$

Задача 8.3.2. $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}} \qquad f'_x(x,1) = ?$

Решение:

$$f'_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} (\text{Ако съществува}) \implies$$

$$f'_x(x,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,1)-f(x,1)}{h} (\text{Ако съществува})$$

$$f(x+h,1) = x+h+(1-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1}} = x+h+0\arcsin\sqrt{\frac{x}{1}} = x+h$$

$$f(x,1) = x+(1-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1}} = x+0\arcsin\sqrt{\frac{x}{1}} = x \implies$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,1)-f(x,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 \implies f'_x(x,1) = 1$$

Задача 8.3.3. Да се докаже че функцията $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x^2+y^2 = (0,0) \end{cases}$ е прекъсната в точката (0,0) но има частни производни в тази точка.

Решение:

$$\text{Редица } (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right)$$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n^3}}{\left(\frac{1}{n}\right)^6 + \left(\frac{1}{n^3}\right)^3} = \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{2}{n^6}} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \implies$$

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y) \neq f(0,0) = 0 \implies f(x,y) \text{ е прекъсната в т. } (0,0).$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \frac{\frac{x^3 \cdot 0}{x^6+0} - 0}{x-0} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \frac{\frac{0^3 \cdot y}{0^6+y^2} - 0}{y-0} = 0$$

Задача 8.3.4. Да се намерят първите частни производни на следните функции:

1. $f(x,y) = \sin(2x+3) + 3e^{-x}e^{4y} - 11x^3 + 19e^{\pi}$
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \arctan\frac{y}{x}$
3. $f(x,y,z) = (xy)^z$
4. $\sqrt[3]{x^2+3y^2}e^{x^2-5y}$

Решение:

1.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sin(2x+3) + 3e^{-x}e^{4y} - 11x^3 + 19e^{\pi}\\
f'_x(x,y) &= (\sin(2x+3))'_x + (3e^{-x}e^{4y})'_x - (11x^3)'_x + (19e^{\pi})'_x\\
f'_x(x,y) &= \cos(2x+3)\cdot 2 + (-3e^{-x}e^{4y}) - (3\cdot 11x^2) + 0\\
f'_x(x,y) &= 2\cos(2x+3) - 3e^{-x}e^{4y} - 33x^2\\
f'_y(x,y) &= (\sin(2x+3))'_y + (3e^{-x}e^{4y})'_y - (11x^3)'_y + (19e^{\pi})'_y\\
f'_y(x,y) &= 0 + (3\cdot 4e^{-x}e^{4y}) - 0 + 0 = 12e^{-x}e^{4y}
\end{aligned}$$

2.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \arctan\frac{y}{x}$$
$$f'_x(x,y) = \frac{1}{2}(x^2)^{-\dfrac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-\frac{1}{x^2})$$
$$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$
$$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy}{x^2+y^2}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{1}{2}(x^2)^{-\dfrac{1}{2}} \cdot 2y + \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{x^2+y^2}$$

3.

$$f(x,y,z) = (xy)^z$$
$$f'_x(x,y,z) = z(xy)^{z-1} \cdot (xy)'x = yz(xy)^{z-1}$$
$$f'_y(x,y,z) = z(xy)^{z-1} \cdot (xy)'y = xz(xy)^{z-1}$$
$$f'_z(x,y,z) = (xy)^z \ln(xy)$$

4.

$$\sqrt[3]{x^2+3y^2}e^{x^2-5y}$$

$$f'_x(x,y) = \left[\sqrt[3]{x^2+3y^2}\right]'_x \cdot e^{x^2-5y} + \sqrt[3]{x^2+3y^2} \cdot (e^{x^2-5y})'_x$$

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{3}(x^2+3y^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x \cdot e^{x^2-5y} + \sqrt[3]{x^2+3y^2} \cdot 2xe^{x^2-5y}$$

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{3} \cdot \frac{e^{x^2-5y}}{\sqrt[3]{(x^2+3y^2)^2}} + 2x\sqrt[3]{x^2+3y^2} \cdot e^{x^2-5y}$$

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{3} \cdot \frac{e^{x^2-5y}}{\sqrt[3]{(x^2+3y^2)^2}} \left[1+3(x^2+3y^2)\right]$$

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{3}(1+3x^2+9y^2)\frac{e^{x^2-5y}}{\sqrt[3]{(x^2+3y^2)^2}}$$

$$f'_y(x,y) = \left[\sqrt[3]{x^2+3y^2}\right]'_y \cdot e^{x^2-5y} + \sqrt[3]{x^2+3y^2} \cdot (e^{x^2-5y})'_y$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{3}(x^2+3y^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6y \cdot e^{x^2-5y} + \sqrt[3]{x^2+3y^2} \cdot (-5e^{x^2-5y})$$

$$f'_y(x,y) = 2y \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+3y^2)^2}} \cdot e^{x^2-5y} - 5\sqrt[3]{x^2+3y^2} \cdot e^{x^2-5y}$$

$$f'_y(x,y) = e^{x^2-5y} \cdot \sqrt[3]{(x^2+3y^2)^2}(2y-5(x^2+3y^2))$$

$$f'_y(x,y) = (2y-5x^2-15y^2)\frac{e^{x^2-5y}}{\sqrt[3]{(x^2+3y^2)^2}}$$

8.4 Упражнение към лекция 4

Задача 8.4.1. $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$
Изследвайте $f(x,y)$ за диференцируемост в $(0,0)$.
$f'_x(0,0) =?$
$f'_y(0,0) =?$
Решение:

$$f(x,0) - f(0,0) = \sqrt[3]{x0} - \sqrt[3]{0} \implies$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0 f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$f(0,y) - f(0,0) = \sqrt[3]{0y} - \sqrt[3]{0} \implies$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Нека: $\lim\limits_{(x\to 0, y\to 0)} \varepsilon(x,y) \to 0, \rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Проверка за диференцируемост в (0,0):

$$f(x,y) - f(0,0) = f'_x(0,0)(x-0) + f'_y(0,0)(y-0) + \varepsilon(x,y)\rho(x,y)$$

$$\sqrt[3]{xy} - 0 = 0x + 0y + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2} \implies$$

$$\varepsilon(x,y) = \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0?$$

Разглеждаме редица с общ член $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^3}\right)$ за която $(x_n, y_n) \to (0,0)$,

$$\varepsilon(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{2}}{n^3}} = \frac{n}{\sqrt{2}} \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x_n,y_n) \not\to 0 \implies$$

$f(x,y)$ не е диференцируема в т.$(0,0)$

Задача 8.4.2. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$
Изследвайте $f(x,y)$ за диференцируемост в $(0,0)$.

Решение:

$$f(x,0) - f(0,0) = \sqrt[3]{x^3} - 0 = x \implies$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \implies \exists f'_x(0,0) = 1$$
$$f(0,y) - f(0,0) = \sqrt[3]{y^3} - 0 = y \implies$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1 \implies \exists f'_y(0,0) = 1$$

Нека: $\lim\limits_{(x\to 0, y\to 0)} \varepsilon(x,y) \to 0, \rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Проверка за диференцируемост в (0,0):

$$f(x,y) - f(0,0) = f'_x(0,0)(x-0) + f'_y(0,0)(y-0) + \varepsilon(x,y)\rho(x,y)$$
$$\sqrt[3]{x^3+y^3} = x + y + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\varepsilon(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\lim_{(x\to 0, y\to 0)} \varepsilon(x,y) \to 0?$$

Разглеждаме редица с общ член $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ за която $(x_n, y_n) \to (0,0)$,

$$\varepsilon(x_n, y_n) = \frac{\frac{\sqrt[3]{2}}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \implies \lim_{(x\to 0, y\to 0)} \varepsilon(x,y) \not\to 0 \implies$$

$f(x,y)$ не е диференцируема в т.$(0,0)$

Задача 8.4.3. Да се изследвай за диференцируемост в $(0,0)$ функцията

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$f(x,0) - f(0,0) = e^{-\frac{1}{x^2}} - 0 = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad \left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)' = -\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0 \implies f'_x(0,0) = 0$$

Аналогично$f'_y(0,0) = 0$

Нека : $\lim\limits_{(x\to 0, y\to 0)} \varepsilon(x,y) \to 0, \rho(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Проверка за диференцируемост в (0,0):

$$f(x,y) - f(0,0) = f'_x(0,0)(x-0) + f'_y(0,0)(y-0) + \varepsilon(x,y)\rho(x,y)$$

$$e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} - 0 = 0(x-0) + 0(y-0) + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varepsilon(x,y) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x\to 0, y\to 0)} \varepsilon(x,y) \to 0?$$

$$\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\implies \lim_{(x\to 0,y\to 0)}\rho(x,y)\to 0$$

$$\lim_{(x\to 0,y\to 0)}\varepsilon(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\rho}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'=-\frac{1}{\rho^2}\qquad\left(e^{\frac{1}{\rho^2}}\right)'=-\frac{2}{\rho^3}e^{\frac{1}{\rho^2}}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho}{2e^{\frac{1}{\rho^2}}}=\frac{0}{\infty}=0\implies$$

$$\lim_{(x\to 0,y\to 0)}\varepsilon(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{1}{\rho}}{e^{\frac{1}{\rho^2}}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\rho}\right)'}{\left(e^{\frac{1}{\rho^2}}\right)'}=0\implies$$

$$\lim_{(x\to 0,y\to 0)}\varepsilon(x,y)=0\implies f(x,y)\text{ е диференцируема в }(0,0)$$

Задача 8.4.4. $f(x,y)=x^2+3xy-8y^3+11,\quad df(0,1)=?$
$f(x,y,z)=x^2+3xy-8y^3-2e^{3z}x,\quad df(0,0,4)=?$
Решение:

$$df(x,y)=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$$
$$f'_x(x,y)=2x+3y\qquad f'_x(0,1)=3$$
$$f'_y(x,y)=3x-24y^2\qquad f'_y(0,1)=-24$$
$$df(x,y)=(2x+3y)dx+(3x-24y^2)dy$$
$$df(0,1)=3dx-24dy$$

$$df(x,y,z)=f'_x(x,y,z)dx+f'_y(x,y,z)dy+f'_z(x,y,z)dz$$
$$f'_x(x,y,z)=2x+3y-2e^{3z}\qquad f'_x(0,0,4)=-2e^{12}$$
$$f'_y(x,y,z)=3x-24y^2\qquad f'_y(0,0,4)=0$$
$$f'_z(x,y,z)=6xe^{3z}\qquad f'_z(0,0,4)=0$$
$$df(x,y,z)=(2x+3y-2e^{3z})dx+(3x-24y^2)dy+(6xe^{3z})dz$$
$$df(x,y,z)=-2e^{12}dx+0dy+0dz=-2e^{12}dx$$

Задача 8.4.5. $f(x,y) = x^6 - 7xy^2 + 14y$,
$f''_{xx} =?, f''_{yy} =?, f''_{xy} =?, d^2f(x,y) =?$
$f(x,y,z) = x^6 - 7xy + y^2 - xz + z^3$,
$f''_{xx} =?, f''_{xy} =?, f''_{xz} =? f''_{yx} =?, f''_{yy} =?, f''_{yz} =? f''_{zx} =?, f''_{zy} =?, f''_{zz} =?, d^2f(1,0,0)$

$$f'_x(x,y,z) = 6x^5 - 7y - z$$
$$f''_{xx}(x,y,z) = (6x^5 - 7y - z)'_x = 30x^4 \qquad f''_{xx}(1,0,0) = 30$$
$$f''_{xy}(x,y,z) = (6x^5 - 7y - z)'_y = -7 \qquad f''_{xy}(1,0,0) = -7$$
$$f''_{xz}(x,y,z) = (6x^5 - 7y - z)'_z = -1 \qquad f''_{xz}(1,0,0) = -1$$

$$f'_y(x,y,z) = -7x + 2y$$
$$f''_{yx}(x,y,z) = (-7x + 2y)'_x = -7 \qquad f''_{yx}(1,0,0) = -7$$
$$f''_{yy}(x,y,z) = (-7x + 2y)'_y = 2 \qquad f''_{yy}(1,0,0) = 2$$
$$f''_{yz}(x,y,z) = (-7x + 2y)'_z = 0 \qquad f''_{yz}(1,0,0) = 0$$

$$f'_z(x,y,z) = -x + 3z^2$$
$$f''_{zx}(x,y,z) = (-x + 3z^2)'_x = -1 \qquad f''_{zx}(1,0,0) = -1$$
$$f''_{zy}(x,y,z) = (-x + 3z^2)'_y = 0 \qquad f''_{zy}(1,0,0) = 0$$
$$f''_{zz}(x,y,z) = (-x + 3z^2)'_z = 6z \qquad f''_{zz}(1,0,0) = 0$$

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2 + 2f''_{xz}dxdz + f''_{zz}dz^2 + f''_{yz}dydz$$
$$d^2f(x,y,z) = 30x^4dx^2 + 2\cdot(-7)dxdy + 2dy^2 + 2\cdot(-1)dxdz + 6zdz^2 + 2\cdot 0dydz$$
$$d^2f(1,0,0) = 30dx^2 - 14dxdy + 2dy^2 - 2dxdz + 0dz^2 + 0dydz$$
$$d^2f(1,0,0) = 30dx^2 + 2dy^2 - 14dxdy - 2dxdz$$

8.5 Упражнение към лекция 5

Задача 8.5.1. Да се намерят посочените частни производни на следните функции.

1. $u(x,y) = x^4 + 11x^2y^3, \qquad u''_{xx} =?,\ u''_{xy} =?$
2. $u(x,y) = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}, \qquad u''_{xx} =?,\ u''_{xy} =?,\ u''_{yy} =?$
3. $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \qquad u''_{xx} =?,\ u''_{xy} =?,\ u''_{yx} =?,\ u''_{yy} =?$
4. $u(x,y) = \ln(x+2y), \qquad u'''_{xxy} =?$
5. $u(x,y,z) = e^{xy^2z^3}, \qquad u'''_{xyz} =?$

$$
\begin{aligned}
&u(x,y) = x^4 + 11x^2y^3\\
&u'_x = 4x^3 + 22xy^3\\
&u''_{xx} = 12x^2 + 22y^3\\
&u''_{xy} = 4x^3 + 66xy^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u(x,y) = \arctan\frac{x+y}{1-xy}\\
&u'_x = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x\\
&u'_y = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y\\
&u''_{xx} = (u'_x)'_x\\
&u''_{xy} = (u'_x)'_y\\
&u''_{yy} = (u'_y)'_y
\end{aligned}
$$

$$A = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}. \quad B = \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x \implies u'_x = AB$$

$$A = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1}{1+\dfrac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}} = \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}$$

$$A = \frac{(1-xy)^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2} = \frac{(1-xy)^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2}$$

$$A = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2)+x^2+x^2y^2} = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2)+x^2(1+y^2)} = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2)(1+x^2)}$$

$$B = \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x = \frac{1(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2} = \frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$$

$$u'_x = AB = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2)(1+x^2)} \cdot \frac{1-y^2}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$C = \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y \implies u'_y = AC$$

$$C = \frac{1(1-xy)-(x+y)(-x)}{(1-xy)^2} = \frac{1-xy+x^2+xy}{(1-xy)^2} = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}$$

$$u'_y = AC = \frac{(1-xy)^2}{(1+y^2)(1+x^2)} \cdot \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$u''_{xx} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'_x = ((1+x^2)^{-1})'_x$$

$$u''_{yy} = -(1+x^2)^{-2}(1+x^2)'_x = -2x(1+x^2)^{-2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$u''_{xy} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'_y = 0$$

$$u''_{yy} = \left(\frac{1}{1+y^2}\right)'_y = ((1+y^2)^{-1})'_y$$

$$u''_{yy} = -(1+y^2)^{-2}(1+y^2)'_y = -2y(1+y^2)^{-2} = \frac{-2y}{(1+y^2)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&u(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\\
&u'_x=\frac{1}{2(x^2+y^2)}\cdot(x^2+y^2)'_x=\frac{2x}{2(x^2+y^2)}=\frac{x}{x^2+y^2}\\
&u'_y=\frac{1}{2(x^2+y^2)}\cdot(x^2+y^2)'_y=\frac{2y}{2(x^2+y^2)}=\frac{y}{x^2+y^2}\\
&u''_{xx}=(u'_x)'_x=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{1(x^2+y^2)-(2x)x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\
&u''_{xy}=(u'_x)'_y=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
&u''_{yy}=(u'_y)'_y=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{1(x^2+y^2)-(2y)y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
&u''_{yx}=(u'_y)'_x=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u(x,y)=\ln\left(x+2y\right)\\
&u'_x=\frac{1}{x+2y}\\
&u''_{xx}=\left(\frac{1}{x+2y}\right)'_x=((x+2y)^{-1})'_x=-(x+2y)^{-2}(x+2y)'_x=-\frac{1}{(x+2y)^2}\\
&u'''_{xxy}=\left(-\frac{1}{(x+2y)^2}\right)'_y=-((x+2y)^{-2})'_y=2((x+2y)^{-3})(x+2y)'_y=\frac{4}{(x+2y)^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u(x,y,z)=e^{xy^2z^3}\\
&u'_x=e^{xy^2z^3}(xy^2z^3)'_x=y^2z^3e^{xy^2z^3}\\
&u''_{xy}=(y^2z^3\cdot e^{xy^2z^3})'_y=(y^2z^3)'_y\cdot e^{xy^2z^3}+y^2z^3(e^{xy^2z^3})'_y\\
&u''_{xy}=2yz^3e^{xy^2z^3}+2xy^3z^6e^{xy^2z^3}=2yz^3e^{xy^2z^3}(1+xy^2z^3)
\end{aligned}
$$

$$u'''_{xyz} = \left[2yz^3e^{xy^2z^3}(1+xy^2z^3)\right]'_z = (2yz^3e^{xy^2z^3})'_z(1+xy^2z^3) + 2yz^3e^{xy^2z^3}(1+xy^2z^3)'_z$$
$$= \left[(2yz^3)'_z \cdot e^{xy^2z^3} + 2yz^3 \cdot (e^{xy^2z^3})'_z\right](1+xy^2z^3) + 2yz^3e^{xy^2z^3}(1+xy^2z^3)'_z$$
$$u'''_{xyz} = \left[6yz^2e^{xy^2z^3} + 2yz^3e^{xy^2z^3}3xy^2z^2\right](1+xy^2z^3) + 2yz^3e^{xy^2z^3}(3xy^2z^2)$$
$$u'''_{xyz} = \left[6yz^2e^{xy^2z^3} + 6xy^3z^5e^{xy^2z^3}\right](1+xy^2z^3) + 6xy^3z^5e^{xy^2z^3}$$
$$u'''_{xyz} = \left[6yz^2e^{xy^2z^3} + 6yz^2e^{xy^2z^3}xy^2z^3 + 6xy^3z^5e^{xy^2z^3} + 6xy^3z^5e^{xy^2z^3}xy^2z^3\right] + 6xy^3z^5e^{xy^2z^3}$$
$$u'''_{xyz} = \left[6yz^2e^{xy^2z^3} + 6xy^3z^5e^{xy^2z^3} + 6xy^3z^5e^{xy^2z^3} + 6x^2y^5z^8e^{xy^2z^3}\right] + 6xy^3z^5e^{xy^2z^3}$$
$$u'''_{xyz} = 6yz^2e^{xy^2z^3} + 6xy^3z^5e^{xy^2z^3} + 6xy^3z^5e^{xy^2z^3} + 6x^2y^5z^8e^{xy^2z^3} + 6xy^3z^5e^{xy^2z^3}$$
$$u'''_{xyz} = 6yz^2e^{xy^2z^3} + 18xy^3z^5e^{xy^2z^3} + 6x^2y^5z^8e^{xy^2z^3}$$
$$u'''_{xyz} = 6yz^2e^{xy^2z^3}\left[1 + 3xy^2z^3 + x^2y^4z^6\right]$$

Задача 8.5.2. Дали са верни равенствата:

- Ако $z = y\ln(x^2+y^2)$ то $\quad \dfrac{1}{x}z'_x + \dfrac{1}{y}z'_y = \dfrac{z}{y^2}$
- Ако $u = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ то $\quad u'_x + u'_y + u'_z = \dfrac{3}{x+y+z}$

$$z = y\ln(x^2+y^2)$$
$$z'_x = y\frac{1}{x^2+y^2}2x = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$
$$z'_y = \ln(x^2+y^2) + y\frac{1}{x^2+y^2} - 2y = \ln(x^2+y^2) - \frac{2y^2}{x^2+y^2}$$
$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{1}{x}\cdot\frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{1}{y}\cdot\left[\ln(x^2+y^2) - \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right] =$$
$$\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{\ln(x^2+y^2)}{y} - \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{\ln(x^2+y^2)}{y}$$
$$\frac{z}{y^2} = \frac{y\ln(x^2+y^2)}{y^2} = \frac{\ln(x^2+y^2)}{y} \implies \text{Равенството е вярно.}$$

$$u = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$
$$u'_x = \frac{(x^3+y^3+z^3-3xyz)'_x}{x^3+y^3+z^3-3xyz} = \frac{3x^2-3yz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$
$$u'_y = \frac{(x^3+y^3+z^3-3xyz)'_y}{x^3+y^3+z^3-3xyz} = \frac{3y^2-3xz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$
$$u'_z = \frac{(x^3+y^3+z^3-3xyz)'_z}{x^3+y^3+z^3-3xyz} = \frac{3z^2-3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$
$$u'_x+u'_y+u'_z = \frac{3x^2-3yz}{x^3+y^3+z^3-3xyz} + \frac{3y^2-3xz}{x^3+y^3+z^3-3xyz} + \frac{3z^2-3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz} =$$
$$\frac{3x^2-3yz+3y^2-3xz+3z^2-3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz} = \frac{3(x^2-yz+y^2-xz+z^2-xy)}{x^3+y^3+z^3-3xyz} =$$
$$\frac{3(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)}{x^3+y^3+z^3-3xyz}\cdot\frac{x+y+z}{x+y+z} = \frac{3(x^3+y^3+z^3-3xyz)}{(x^3+y^3+z^3-3xyz)(x+y+z)} =$$
$$\frac{3}{x+y+z} \implies \text{Равенството е вярно.}$$

Задача 8.5.3. Да се докаже, че функцията: $z(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$ удовлетворява тъждеството: $z'_x + z'_y = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

$$z'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{1}{\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x-y)^2}}\cdot\frac{x-y-x-y}{(x-y)^2}$$
$$z'_x = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}\frac{-2y}{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2}$$
$$z'_x = \frac{-2y}{2(x^2+y^2)} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$z'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y\frac{1}{\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x-y)^2}}\cdot\frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} =$$
$$z'_y = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{2x}{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$
$$z'_x+z'_y = -\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x-y}{x^2+y^2} \implies \text{тъжеството е вярно}$$

Задача 8.5.4. Да се провери тъждеството на Ойлер за следните функции: $z(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2} \qquad u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Тъждество на Ойлер($f : D \to R, D \subset \mathbb{R}^m$)

$$x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + ... + x_m f'_{x_m} = mf$$

$$z(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

$$xz'_x + yz'_y = 2z$$

$$z'_x = \left(\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right)'_x = \left((x^2+y^2)^{-2}\right)'_x = -2(x^2+y^2)^{-3}(x^2+y^2)'_x = -\frac{4x}{(x^2+y^2)^3}$$

$$z'_y = \left(\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right)'_y = \left((x^2+y^2)^{-2}\right)'_y = -2(x^2+y^2)^{-3}(x^2+y^2)'_x = -\frac{4y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$xz'_x + yz'_y = x \cdot \left(-\frac{4x}{(x^2+y^2)^3}\right) + y \cdot \left(-\frac{4y}{(x^2+y^2)^3}\right) = -\frac{4x^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$\frac{-4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = -\frac{4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$2z = \frac{2}{(x^2+y^2)^2}$$

$-\frac{4}{(x^2+y^2)^2} \neq \frac{2}{(x^2+y^2)^2} \implies$ Тъждението не е изпълнено.

$$u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$xu'_x + yu'_y + zu'_z = 3z$$

$$u'_x = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_x \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)'_x$$

$$u'_y = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_y \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)'_y$$

$$u'_z = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_z \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)'_z$$

$$u'_x = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_x \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)'_x$$

$$u'_x = \frac{x\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x} = \frac{x\ln\left(\frac{y}{x}\right)x - \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u'_x = \frac{x^2\ln\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2 - z^2}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u'_y = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_y \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)'_y$$

$$u'_y = \frac{y\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{y} = \frac{y\ln\left(\frac{y}{x}\right)y + \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u'_y = \frac{y^2\ln\left(\frac{y}{x}\right) + x^2+y^2+z^2}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u'_z = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)'_z \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)'_z$$

$$u'_z = \frac{z\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 0\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{z\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$xu'_x + yu'_y + zu'_z = 3z, \quad A = xu'_x + yu'_y + zu'_z, \quad B = 3u$$

$$A = x\cdot\frac{x^2\ln\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2 - z^2}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + y\cdot\frac{y^2\ln\left(\frac{y}{x}\right) + x^2+y^2+z^2}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + z\cdot\frac{z\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$A = \frac{x^2\ln\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y^2\ln\left(\frac{y}{x}\right) + x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z^2\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$A = \frac{x^2\ln\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2 - z^2 + y^2\ln\left(\frac{y}{x}\right) + x^2+y^2+z^2 + z^2\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$A = \frac{x^2\ln\left(\frac{y}{x}\right)\ln\left(\frac{y}{x}\right) + z^2\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\ln\left(\frac{y}{x}\right)(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

$B = 3u = 3\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\ln\left(\frac{y}{x}\right) \implies A \neq B \implies$ Твърдението не е изпълнено.

8.6 Упражнение към лекция 6

Задача 8.6.1. Дадени са функцията $z(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$, където φ, ψ - непрекъснато диференцируеми Да се намерят първите частни производни.

$$z(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$$
$$z'_x = \varphi'(x+y)(x+y)'_x + \psi'(x-y)(x-y)'_x = \varphi'(x+y)1 + \psi'(x-y)1$$
$$z'_x = \varphi'(x+y) + \psi'(x-y)$$
$$z'_y = \varphi'(x+y)(x+y)'_y + \psi'(x-y)(x-y)'_y = \varphi'(x+y)1 + \psi'(x-y)(-1)$$
$$z'_y = \varphi'(x+y) - \psi'(x-y)$$

Задача 8.6.2. Да се провери дали $w(x,y,z)$ удволетворява тъждествено равенството:

$$xw_x + yw_y + zw_z = w + \frac{xy}{z}$$

Ако $w = \frac{xy}{z} + \ln x + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, φ е непрекъснато диференцируема.
Решение:

$$u = \frac{y}{x} \qquad v = \frac{z}{x}$$
$$u'_x = -\frac{y}{x^2} \qquad u'_y = \frac{1}{x} \qquad u'_z = 0$$
$$v'_x = -\frac{z}{x^2} \qquad v'_y = 0 \qquad v'_z = \frac{1}{x}$$
$$w'_x = \frac{y}{z}\ln x + \frac{xy}{z} \cdot \frac{1}{x} + \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x(\varphi'_u u'_x + \varphi'_v v_x) =$$
$$w'_x = \frac{y}{z}\ln x + \frac{y}{z} + \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi'_u - \frac{z}{x}\varphi'_v$$
$$w'_y = \frac{x}{z}\ln x + x(\varphi'_u u'_y + \varphi'_v v_y) = \frac{x}{z}\ln x + \varphi'_u$$
$$w'_z = -\frac{xy}{z^2}\ln x + x(\varphi'_u u'_z + \varphi'_v v_z) = -\frac{xy}{z^2}\ln x + \varphi'_v$$
$$xw_x + yw_y + zw_z =$$
$$= \frac{xy}{z}\ln x + \frac{xy}{z} + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - y\varphi'_u - z\varphi'_v + \frac{xy}{z}\ln x + y\varphi'_u + -\frac{xy}{z}\ln x + z\varphi'_v =$$
$$= \frac{xy}{z} + \ln x + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \frac{xy}{z} = w + \frac{xy}{z}$$

Задача 8.6.3. Дадени са функциите и точката M(2,1). Да се пресметне gradf(M) и $\|gradf(M)\|$

1. $f(x,y) = x^2 + 11y^2 - 3$
2. $f(x,y) = x^2 - y^2$
3. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

Решение grad f $= (f'_x, f'_y)$

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = x^2 + 11y^2 - 3\\
&f'_x = 2x \qquad f'_y = 22y\\
&gradf(x,y) = (2x, 22y)\\
&gradf(M) = (2\cdot 2, 22\cdot 1) = (4, 22)\\
&\|gradf(M)\| = \sqrt{4^2 + 22^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = x^2 - y^2\\
&f'_x = 2x \qquad f'_y = -2y\\
&gradf(x,y) = (2x, -2y)\\
&gradf(M) = (2\cdot 2, -2\cdot 1) = (4, -2)\\
&\|gradf(M)\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)\\
&f'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} \qquad f'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}\\
&gradf(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}\right)\\
&gradf(M) = \left(\frac{2\cdot 2}{2^2 + 1^2}, \frac{2\cdot 1}{2^2 + 1^2}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)\\
&\|gradf(M)\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Задача 8.6.4. Дадени са функциите и точката M(2,1).
Да се пресметне $\dfrac{\partial f(M)}{\partial \nu}, \nu = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

1. $f(x,y) = x^2 + 11y^2 - 3$

2. $f(x, y) = x^2 - y^2$

3. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

Решение: $\dfrac{\partial f(M)}{\partial \nu} = (gradf, \nu)$

$$
\begin{aligned}
&f(x, y) = x^2 + 11y^2 - 3 \\
&gradf(M) = (2 \cdot 2, 22 \cdot 1) = (4, 22) \\
&\frac{\partial f(M)}{\partial \nu} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 22 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} + 11
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(x, y) = x^2 - y^2 \\
&gradf(M) = (2 \cdot 2, -2 \cdot 1) = (4, -2) \\
&\frac{\partial f(M)}{\partial \nu} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} - 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \\
&gradf(M) = \left(\frac{2 \cdot 2}{2^2 + 1^2}, \frac{2 \cdot 1}{2^2 + 1^2}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) \\
&\frac{\partial f(M)}{\partial \nu} = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{10} + \frac{1}{5} = \frac{4\sqrt{3} + 2}{10}
\end{aligned}
$$

Задача 8.6.5. Да се определи ъгъла между градиентите на функцията

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 111$$

в точките A$(\varepsilon, 0, 0)$ и B $(0, \varepsilon, 0), \varepsilon > 0$
Решение:

$$
\begin{aligned}
&u'_x = 2x \qquad u'_y = 2y \qquad u'_z = 2z \\
&gradu(A) = (2\varepsilon, 0, 0) \qquad gradu(B) = (0, 2\varepsilon, 0) \\
&(gradu(A), gradu(B)) = 2\varepsilon \cdot 0 + 0 \cdot 2\varepsilon + 0 \cdot 0 = 0 \\
&(gradu(A), gradu(B)) = \|u(A)\| \cdot \|u(B)\| \cdot \cos\alpha \\
&\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Задача 8.6.6. Да се намери y', y'' на неявната функция $y = f(x)$, дефинирана от уравнението

$$x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

Да се пресметнат $y'(0), y''(0)$, ако $y(0) = 1$
Решение:

$$F(x,y) = x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$
$$F'_y = -2x + 10y + 4 \neq 0$$
$$F'_x(x,y) = 2x - 2y - 2$$
$$F'_y(0,1) = -2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4 \neq 0$$
$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{2x-2y-2}{-2x+10y+4} = -\frac{x-y-1}{-x+5y+2}$$
$$y'(0) = -\frac{0-1-1}{-0+5\cdot 1+2} = -\frac{-2}{7} = \frac{2}{7}$$
$$y''(x) = -\frac{F''_{xx}(x,y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x,y)y'^2}{F'_y(x,y)}$$
$$F''_{xx} = 2, \quad F''_{yy} = 10, \quad F''_{xy} = -2$$
$$F''_{xx}(0,1) = 2, \quad F''_{yy}(0,1) = 10, \quad F''_{xy}(0,1) = -2$$
$$y''(x) = -\frac{2 + 2\cdot(-2)y' + 10y'^2}{-2x+10y+4}$$
$$y''(x) = -\frac{2 + -4y' + 10y'^2}{-2x+10y+4}$$
$$y''(0) = -\frac{2 + -4\cdot\frac{2}{7} + 10\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2}{-2\cdot 0 + 10\cdot 1 + 4}$$
$$y''(0) = -\frac{2 + -\frac{8}{7} + \frac{40}{49}}{14}$$
$$y''(0) = -\frac{\frac{98-56+40}{49}}{14} = -\frac{\frac{82}{49}}{14} = \frac{82}{49}\cdot\frac{1}{14} = \frac{41}{343}$$