Дискретна математика
Упражнение

Exonaut

3 юни 2021 г.

Съдържание

1 Упражнение 1: Логика и логически оператори

Задача 1

Кои от следните изречения са съждения? Какъв е резултатът от тези съждения?

1. "Китай е държава с най - много жители в света."(Съждение с резултат "Истина")
2. "София е най - големия град в света."(Съждение с резултат "Лъжа")
3. "Не пресичай улицата!"(Не е съждение, а команда)
4. "Колко е часът?"(Не е съждение, а въпрос)
5. $4 + 1 = 5$ (Съждение с резултат "Истина")
6. $4 + x = 5$ (Предикат: Истина, ако $x = 1$; Лъжа, ако $x \neq 1$)
7. $4 + x = 5$, ако $x = 1$ (Съждение с резултат "Истина")

Задача 2

Нека p, q, r са следните прости съждения:
p: "Разболяваш се."
q: "**Не** можеш да вземеш финалния изпит."
r: "Посещавал си теоретични курсове"
Да се опишат семантично следните комбинирани съждения:

1. $p \to q$ - "Ако си болен, няма да можеш да си вземеш финалния изпит."
2. $q \Leftrightarrow \neg r$ - "Няма да вземеш финалния изпит тогава и само тогава, когато не си посещавал теоретичния курс."
3. $q \to \neg r$ - "Ако не си взел финалния изпит, то тогава следва, че не си посещавал теоретичния курс."

4. $p \vee q \vee r$ - "(Ти си болен) или (не си взел финалния изпит) или (не си посещавал теоретичния курс) или и трите заедно."

5. $(p \rightarrow \neg r) \vee (q \rightarrow \neg r)$ - "(Ако си болен, тогава не си посещавал теоретичния курс) или (ако не си взел финалния изпит, тно не си посещавал теоретичния курс) - или и двете заедно."

6. $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$ - "[(Болен си) и (не си взел финалния изпит)] или [(си взел финалния изпит) и (си посещавал теоретичния курс)]."

Задача 3

Нека p, q, r са следните прости съждения:
p: "Получил си 6 за годината."
q: "Решил си правилно всички домашни работи."
r: "Получил си 6 за всеки учебен срок."
Да се опишат следните комбинирани съждения с логически изрази:

1. "(Получил си 6 за всеки от сроковете), но (не си решил правилно всички домашни работи) $r \wedge \neg q$

2. "(Получил си 6 за годината) и (си решил правилно всички домашни работи) и (си получил си 6 за всеки учебен срок). $p \wedge q \wedge r$

3. "Ако (имаш 6 за всеки учебен срок), то (ще имаш 6 за годината).- $r \rightarrow q$

4. "(Получил си 6 за всеки учебен срок), но (не си решил правилно всички домашни работи), но въпреки това (си получил 6 за годината). $r \wedge \neg q \wedge p$

5. "(Получаването на 6 за всеки учебен срок) и (правилното решаване на всички домашни работи) е достатъчно условие за (получаване на 6 за годината). $(r \wedge q) \rightarrow p$

6. "(Ти си получил 6 за годината) тогава и само тогава когато [(си решил правилно всички домашни работи) и (си получил 6 за всеки учебен срок)]. $\Leftrightarrow (q \wedge r)$

Задача 4

Да се състави таблица на истинност за следните комбинирани съждения:

1. $\neg p \otimes \neg p$
2. $(p \vee q) \wedge \neg r$
3. $(p \to q) \to r$
4. $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$

Решение:

1. $\neg p \otimes \neg p$

p	**q**	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \otimes \neg p$
F	F	T	T	F
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
T	T	F	F	F

2. $(p \vee q) \wedge \neg r$

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \wedge \neg r$
F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	F	F

3. $(p \to q) \to r$

p	q	$p \to q$	r	$(p \to q) \to r$
F	F	T	F	F
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	F	T	T
T	T	T	F	F
T	T	T	T	T

4. $(p \land \neg q) \Leftrightarrow (p \land r)$

p	q	r	$\neg q$	$p \land \neg q$	$p \land r$	$(p \land \neg q) \Leftrightarrow (p \land r)$
F	F	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	T
T	T	T	F	F	T	T

Задача 5

Да се докаже по 2 начина, че всеки от следните логически изрази е тавтология:
1. Чрез таблица на истинност.
2. Чрез закони за еквивалентно преобразуване.

1. $(p \land q) \to q$

2. $[\neg p \land (p \lor q)] \to q$

3. $[p \wedge (p \to q)] \to q$

Решение:

1. $(p \wedge q) \to q$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to q$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

$(p \wedge q) \to q$

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee q$ (закон за импликация)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q$ (закон на де Морган)

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee q)$ (асоциативен закон)

$\Leftrightarrow \neg p \vee T$ (закон за тривиална тавтология)

$\Leftrightarrow T$ (закон за доминиране)

2. $[\neg p \wedge (p \vee q)] \to q$

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$	$[\neg p \wedge (p \vee q)] \to q$
F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
T	T	F	T	F	T

$[\neg p \wedge (p \vee q)] \to q$

$\Leftrightarrow \neg[\neg p \wedge (p \vee q)] \vee q$ (закон за импликация)

$\Leftrightarrow [\neg\neg p \vee (p \vee q)] \vee q$ (закон на де Морган)

$\Leftrightarrow [p \vee \neg(p \vee q)] \vee q$ (закон за двойното отрицание)

$\Leftrightarrow (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$ (асоциативен закон)

$\Leftrightarrow T$ (закон тривиална тавтология)

3. $[p \wedge (p \to q)] \to q$

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

$[p \wedge (p \to q)] \to q$
$\Leftrightarrow [p \wedge (\neg p \vee q)] \to q$ (закон за импликация)
$\Leftrightarrow [(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)] \to q$ (дистрибутивен закон)
$\Leftrightarrow [F \vee (p \wedge q)] \to q$ (закон за тривиално опровержение)
$\Leftrightarrow (p \wedge q) \to q$ (комутативен закон и закон за идентичност)
$\Leftrightarrow T$ (доказано в 1.)

2 Упражнение 2: Предикати и предикатни функции

Задача 1

Нека $P(x, y)$ е предикатна функция, съответстваща на следното твърдение $x + 2y = x + y$, където x и y са цели числа. Какъв е резултатът от:

1. $P(1, -1)$

$$P(1, -1) \Leftrightarrow 1 + 2 \cdot (-1) = 1 - 1 \Leftrightarrow -1 = 0 \quad \text{Лъжа}$$

2. $P(0, 0)$

$$P(0, 0) \Leftrightarrow 0 + 2 \cdot 0 = 0 + 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \text{Истина}$$

3. $P(2, 1)$

$$P(2, 1) \Leftrightarrow 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 1 \Leftrightarrow 4 = 3 \quad \text{Лъжа}$$

Задача 2

Нека $Q(x)$ е предикатна функция, съответстваща на следното твърдение $x + 1 = 2x$, където x е реално число. Какъв е резултатът от:

1. $Q(2)$

$$Q(2) \Leftrightarrow 2 + 1 = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow 3 = 4 \quad \text{Лъжа}$$

2. $\forall x Q(x)$

$$\forall x Q(x) \implies \quad \text{Лъжа}$$

3. $\exists x Q(x)$

$$\exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x = 1 \text{ което е решение на } Q(x)$$

Задача 3

Нека $R(x)$ е предикатна функция, съответстваща на следното твърдение: "ако $x + 3 = 6$, то $x + 8 = 16$". Какъв е резултатът от:

1. $R(3)$

$$3 + 3 = 6\, T \quad 3 + 8 = 16\, F \implies \quad \text{Лъжа}$$

2. $R(8)$
$$8+3=6\,F \quad 8+8=16\,T \implies \text{Истина}$$

3. $R(2)$
$$2+3=6\,F \quad 2+8=16\,F \implies \text{Истина}$$

4. $\exists(x)(R(x)) \quad x \in \mathbb{Z}$
$$x+3=6, x=3\,T \quad 3+8=16\,F \implies \text{Лъжа}$$

Задача 4

Нека е известно:
X - множеството на всички хора,
$x \in X$
C(x) е предикат: "x е комик"
F(x) е предикат: "x умее да разказва смешни истории"
Да се опишат семантично следните комбинирани предикати:

1. $\exists x C(x)$ - "Съществува човек, който е комик."

2. $\exists x \neg C(x)$ - "Не всеки човек е комик."или "Съществува човек, който не е комик."

3. $\forall x \neg C(x)$ - "Всеки човек е комик."

4. $\neg \forall x C(x)$ - "Никой не е комик."

5. $\exists x \neg F(x)$ - "Съществува човек, който не умее да разказва смешни истории."

6. $\forall x \neg F(x)$ - "Никой (нито един човек) не умее да разказва смешни истории."

7. $\forall x (C(x) \rightarrow F(x))$ - "Всеки човек, който е комик, умее да разказва смешни истории."

8. $\exists x (C(x) \wedge \neg F(x))$ - "Съществува човек, който е комик, но не умее да разказва смешни истории."

9. $\exists x (F(x) \wedge \neg C(x))$ - "Съществува човек, който умее да разказва смешни истории, но не е комик."

10. $\forall x(C(x) \land F(x))$ - "Всеки човек е комик и умее да разказва смешни истории."

11. $\exists x(C(x) \land F(x))$ - "Съществува човек, който е комик и умее да разказва смешни истории."

Задача 5

Ако с X е означено множеството навсички студенти от ФКСУ, нека са известни следните предикати:
$P(x)$: "x е взел изпита по ДС
$Q(x)$: "x знае да програмира на езика C ++".
Опишете чрез логически изрази следните комбинирани предикати, на простите предикати P(x) и Q(x), изпо лзвайки кванторите за общност и съществуване $\forall$ и $\exists$ и необходимите логически оператори.

1. "Съществува студентот ФКСУ, който е взел изпита по ДС и знае да програмира на езика C ++. $\exists x(P(x) \land Q(x))$

2. "Съществува студентот ФКСУ,който не знае да програмира на езика C++, но е взел изпита по ДС. $\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$

3. "Всички студенти от ФКСУ, които знаят да програмират на езика C++, са взели изпита по ДС. $\forall x(Q(x) \to P(x))$

4. "Само някои от студентитеот ФК СУ, които знаят да програмират на езика C++, са взели из пита по ДС. $\exists x(Q(x) \to P(x))$

5. "Всички студенти от ФКСУ знаят да програмират на езика C++ ИЛИса взели изпита по ДС. $\forall x(P(x) \lor Q(x))$

Задача 6

Да се определи резултатът от следните твърдения:

1. $\exists x(x^3 = -1 \land x \in \mathbb{R})$

$$\exists x(x^3 = -1 \land x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x = -1 \in \mathbb{R} \implies \text{ Истина}$$

2. $\exists x(x^3 = -1 \land x \in \mathbb{N})$

$$\exists x(x^3 = -1 \land x \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow x = -1 \notin \mathbb{N} \implies \text{ Лъжа}$$

3. $\forall x(2x > x \wedge x \in \mathbb{R})$

$$\forall x(2x > x \wedge x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \in R \implies \text{Лъжа}$$

4. $\forall x(2x \geq x \wedge x \in \mathbb{N})$

$$\forall x(2x > x \wedge x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \in R \implies \text{Истина}$$

3 Упражнение 3: Теория на множествата

Задача 1

Нека A е универсалното множество, а
$F(A)$ е предикат "A е крайно множество.
$I(A)$ е предикат "A е безкрайно множество.
$S(A, B)$ е предикат "A се съдържа в B.
$E(A)$ е предикат "Ае празно множество."
Да се запишат с логически изрази следните съждения:

1. "Не всички множества са крайни."

$$\exists A I(A) \qquad \exists A \neg F(A)$$

2. "Всяко подмножество на крайно множество е крайномножество."

$$\exists A \exists B[(S(A, B) \land F(B)) \to F(A)]$$

3. "Никое безкрайно множество не се съдържа в крайно множество."

$$\exists A \exists B[(I(A) \land S(A, B) \land F(B)) \to \varnothing]$$

4. "Празното множество е подмножество на всяко крайно множество."

$$\exists A \exists B[(E(A) \land F(B)) \to S(A, B)]$$

5. "Празното множество е подмножество на всяко безкрайно множество."

$$\exists A \exists B[(E(A) \land I(B)) \to S(A, B)]$$

Задача 2

Да се запишат членовете на всяко от следните множества:

1. $X\{x|x \in \mathbb{Z} \land x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$
2. $X\{x|x \in \mathbb{N} \land x^2 = 4\} = \{2\}$
3. $X\{x|x \in \mathbb{Z} \land x^2 = 5\} = \{\} = \varnothing$

4. $X\{5x|x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x^2 \leq 2\} = \{-5, 0, 5\}$
5. $X\{x|x \in \mathbb{N} \wedge x^2 \in \{1, 4, 9\}\} = \{1, 2, 3\}$
6. $X\{x|x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 \in \{1, 4, 9\}\} = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

Задача 3

Да се запишат посочените множества чрез използване на функция на принадлежност към даденото множество

1. $X = \{0, 3, 6, 9, 12\} = \{3x|x \in Z \wedge 0 \leq x \leq 4\}$
2. $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = \{x|x \in Z \wedge |x| \geq 3\}$
3. $X = \{1, 4, 8, 16, 25, 36, 49\} = \{x^2|x \in Z \wedge -7 \leq x \leq 7 \wedge x \neq 0\}$

Задача 6

Истина ли е твърдението $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$A-(B\cap C) = A\cap\neg(B\cap C) = A\cap(\neg B\cap\neg C) = (A\cap\neg B)\cup(A\cap\neg C) = (A-B)\cup(A-C)$

Задача 7

Истина ли е твърдението $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)[\text{ зад. } 6] \neq (A - B) \cap (A - C)$$

Задача 4

Задача 4: Нека $A=\{a,\ b,\ c\}$. Какъв е резултатът ("ИСТИНА" или "ЛЪЖА") от следните твърдения?

А) $\{b,c\} \in P(A)$

Б') $\{\{a\}\} \subseteq P(A)$,	Б") $\{\{a\}\} \in P(A)$	
В') $\varnothing \subseteq A$	В") $\varnothing \in A$	
Г') $\{\varnothing\} \in P(A)$	Г") $\{\varnothing\} \subseteq P(A)$	
Д') $\varnothing \subseteq A \times A$	Д") $\varnothing \in A \times A$	
Е') $\{a,c\} \in A$	Е") $\{a,c\} \subseteq A$	Е''') $\{a,c\} \in AxA$
Ж') $\{a,c\} \in P(A)$	Ж") $\{a,c\} \subseteq P(A)$	
З') $(c,c) \in A \times A$	З") $\{c,c\} \in A \times A$	
И') $\{c,c\} \in A$	И") $\{c,c\} \subseteq A$	

Решение:

$$A=\{a,b,c\} \Rightarrow P(A)=\{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{b,c\},\ \{c,a\},\ \{a,b,c\}\ \}$$

А) $\{b,c\} \in P(A)$ - "ИСТИНА"

Б') $\{\{a\}\} \subseteq P(A)$ - "ИСТИНА"

Б") $\{\{a\}\} \in P(A)$ - " ЛЪЖА", $\{a\} \neq \{\{a\}\}$

В') $\varnothing \subseteq A$ -"ИСТИНА"

В") $\varnothing \in A$ - "ЛЪЖА"

Г') $\{\varnothing\} \in P(A)$ - " ЛЪЖА", $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

Г") $\{\varnothing\} \subseteq P(A)$ - "ИСТИНА"

Д') $\varnothing \subseteq A \times A$ - "ИСТИНА"

Д") $\varnothing \in A \times A$ - " ЛЪЖА"

Е') $\{a,c\} \in A$ - " ЛЪЖА"

Е") $\{a,c\} \subseteq A$ - "ИСТИНА"

Е''')$\{a,c\} \in AxA$-"ЛЪЖА"

Ж') $\{a,c\} \in P(A)$ - "ИСТИНА"

Ж") $\{a,c\} \subseteq P(A)$ - "ЛЪЖА"

З') $(c,c) \in A \times A$ - "ИСТИНА"

З") $\{c,c\} \in A \times A$ - "ЛЪЖА"

И') $\{c,c\} \in A$ - "ЛЪЖА", $\{c,c\}=\{c\} \notin A$

И") $\{c,c\} \subseteq A$ - "ИСТИНА" $\{c,c\} = \{c\} \subseteq A$

A x A	a	b	c
a	(a, a)	(a, b)	(a, c)
b	(b, a)	(b, b)	(b, c)
c	(c, a)	(c, b)	(c, c)

$$A \text{ x } A = \{(a,a),\ (a,b),\ (a,c),\ (b,a),\ (b,b), (b,c),\ (c,a),\ (c,b),\ (c,c)\}$$

Задача 5: Докажете, че: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ чрез използване на:

а) правилата за доказателство;
б) таблица с поелементно сравняване;
в) законите за еквивалентни преобразувания на множества;
г) диаграма на Вен.

Решение:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$?

а) Използване на правилата за доказателство:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$:

Нека $x \in A \cap (B \cup C)$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C)$,
$\Leftrightarrow x \in A \wedge$ (или $x \in B$ или $x \in C$),
$\Leftrightarrow$ ИЛИ ($x \in A \wedge x \in B$), ИЛИ ($x \in A \wedge x \in C$),
$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Следователно, горното твърдение е доказано.

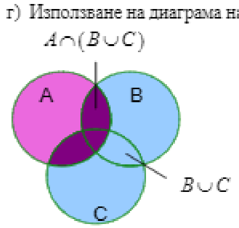
б) Използване на таблица с поелементно сравняване:

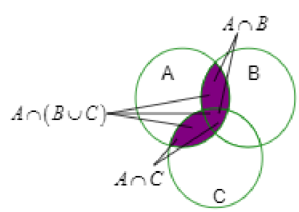
A	B	C	B∪C	**A ∩ (B∪C)**	A∩B	A∩C	**(A∩B) ∪ (A∩C)**
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**
1	0	1	1	**1**	0	1	**1**
1	1	0	1	**1**	1	0	**1**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

в) Използване на законите за еквивалентни преобразувания на множества:

$(A \cap B) \cup (A \cap C) =$
$= [A \cup (A \cap C)\ ] \cap [(B \cup (A \cap C)\ ] =$
$= A \cap [B \cup (A \cap C)] =$
$= A \cap [(B \cup A) \cap (B \cup C)] =$
$= [A \cap (B \cup A)] \cap (B \cup C) =$
$= A \cap (B \cup C)$

г) Използване на диаграма на Вен:





Задача 9

Истина или лъжа е следното твърдение $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$

A	B	C	$A \otimes B$	$B \otimes C$	$A \otimes (B \otimes C)$	$(A \otimes B) \otimes C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1

Задача 10

Какъв ще е резултатът от следните твърдения?

1. $A - (B - C) = (A - B) - C$
2. $(A - C) - (B - C) = A - B$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup C = B \cup C \implies A = B$
6. $A \cap C = B \cap C \implies A = B$
7. $A \otimes B = A \implies B = A$

а) $A - (B - C) = (A - B) - C$?
$\mathbf{A-(B-C)}=A-(B\cap\neg C)=A\cap\neg(B\cap\neg C)=A\cap(\neg B\cup\neg\neg C)=\mathbf{A\cap(\neg B\cup C)}$
$(A-B)-C=(A-B) \cap \neg C=(A\cap\neg B) \cap \neg C = \mathbf{A \cap (\neg B \cap \neg C)}$
$\mathbf{A\cap(\neg B\cup C) \neq A \cap (\neg B \cap \neg C) \Rightarrow}$ **ЛЪЖА**

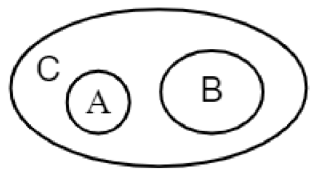
б) $(A - C) - (B - C) = A - B$?
$\mathbf{(A - C) - (B - C)} =$
$= (A\cap\neg C) - (B\cap\neg C) = (A\cap\neg C) \cap \neg(B\cap\neg C) =$
$= (A\cap\neg C) \cap (\neg B\cup\neg\neg C) = (A\cap\neg C) \cap (\neg B\cup C) = A \cap \neg C \cap (C\cup\neg B) =$
$= A\cap[(\neg C\cap C)\cup(\neg C\cap\neg B)]= A\cap[\varnothing\cup(\neg C\cap\neg B)] = A\cap(\neg C\cap\neg B) = A\cap(\neg B\cap\neg C) =$
$= (A \cap \neg B) \cap \neg C = (A - B) \cap \neg C = \mathbf{(A - B) - C \neq A-B \Rightarrow}$ **ЛЪЖА**

в) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?
$\mathbf{(A \cup B) \cap (A \cup C)} =$
$= [A \cap (A \cup C)] \cup [(B \cap (A \cup C)] =$
$= A \cup [B \cap (A \cup C)] =$
$= A \cup [(B \cap A) \cup (B \cap C)] =$
$= [A \cup (B \cap A)] \cup (B \cap C) =$
$= \mathbf{A \cup (B \cap C) \Rightarrow}$ **ИСТИНА**

г) $A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?
$\mathbf{(A \cup B) \cap (A \cup C)} =$
$= [(A \cup B) \cap A] \cup [(A \cup B) \cap C) =$
$= A \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) =$
$= \mathbf{A \cup (B \cap C) \neq A \cap (B \cap C) \Rightarrow}$ **ЛЪЖА**

д) Ако A ∪ C = B ∪ C, то A = B ?

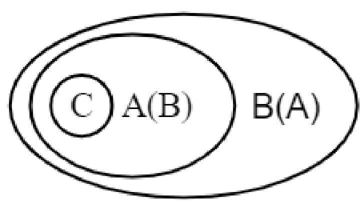
Посоченото твърдение е **ЛЪЖА**, тъй като то не е изпълнено за следните конкретни множества A, B и C, представени чрез диаграма на Вен:



$$\left|\begin{array}{l} A\cup C=C \\ B\cup C=C \\ A\neq B \end{array}\right.$$

е) Ако A ∩ C = B ∩ C, то A = B ?

Посоченото твърдение е **ЛЪЖА**, тъй като то не е изпълнено за следните конкретни множества A, B и C, представени чрез диаграма на Вен:



$$\left|\begin{array}{l} A\cap C=A \\ B\cap C=B \\ A\neq B \end{array}\right.$$

ж) Ако $A\oplus B=A$, то $B=A$?

Ще докажем резултатът от твърдението чрез използване на таблица на принадлежност.

A	B	$A\oplus B$
0	***0***	***0***
0	1	1
1	***0***	***1***
1	1	0

При $A=1,\ B=0 \Rightarrow A\oplus B=1$, но $A\neq B \Rightarrow$ Твърдението "Ако $A\oplus B=A$, то $B=A$" е **ЛЪЖА.**

4 Упражнение 4: Математически доказателства

Задача 1

За всеки от следващите аргументи кои правила за доказателство са използвани на всяка стъпка?

1. "Студентката от ТУ-София Петя има собствена кола. Всеки, който има кола, пътува по-удобно и по-бързо. Следователно, съществува студент от ТУ-София, който пътува по-удобно и по-бързо."
2. "Всеки от петимата студенти от ТУ-София Иван, Георги, Петър, Стоян и Никола е взел успешно изпита по ТЕ-1. Всеки студент, който е взел успешно ТЕ-1 има право да се яви на изпит по ТЕ-2. Следователно, и петте гореспоменати момчета могат да се явят на изпит по ТЕ-2 през лятната сесия."

Решение:

1. Нека: X - множество на всички студенти, x- произволен студент
   c(x) - "x е студент от ТУ-София."
   p(x) - "x има собствена кола"
   s(x) - "x се придвижва по-удобно и по-бързо."
   Доказателство:
   Изходни хипотези: c(Петя), p(Петя) и$\forall x(p(x) \rightarrow s(x))$.
   Заключение:$\exists x(c(x) \wedge s(x))$.
   (а) $\forall x(p(x) \rightarrow s(x))$ Хипотеза
   (б) p(Петя) $\rightarrow$ s(Петя) Универсално следствие (Universal instantiation) от а
   (в) p(Петя) Хипотеза
   (г) s(Петя) Закон на безразличие (Modus Ponens) от б и в
   (д) c(Петя) Хипотеза
   (е) c(Петя) $\wedge$ s(Петя) Конюнкция (Conjunction)от г и д
   (ж) $\exists x(c(x) \wedge s(x))$ Частично обобщение (Existential generalisation) от е

2. Нека: X – множест во от всички студенти в ТУ-София; x – произволен студентот X.
   f(x) - "x е един от петимата студенти Иван, Георги, Петър, Стоян и Никола."
   $t_1(x)$ - "x е взел успешно изпита по ТЕ-1."
   $t_2(x)$ - "x има право да се яви на изпит по ТЕ-2."
   y - произволен студент от петиматапо-горе.
   Изходни хипотези:$\forall x(f(x) \to t_1(x))$ и$\forall x(t_1(x) \to t_2(x))$
   Заключение:$\forall x(f(x) \to t_2(x))$.
   Доказателство:

   (а) $\forall x(f(x) \to t_1(x))$ Хипотеза
   (б) $f(y) \to t_1(x)$ Универсално следствие (Universal instantiation) от а
   (в) $\forall x(t_1(x) \to t_2(x))$ Хипотеза
   (г) $t_1(y) \to t_2(y)$ Универсално следствие (Universal instantiation) от в
   (д) $f(y) \to t_2(y)$ Хипотетичен силогизъм (Hypothetical syllogism) от б и г
   (е) $\forall x(f(x) \to t_2(x))$ Универсално обобщение (Universal generalisation) от д

Задача 2

Коректно ли е доказателството на следния аргумент: "Ако n^2 не се дели на 3, то n също не е кратно на 3?"
Доказателство: "Ако n^2 не се дели на 3, тогава $n^2 \neq 3k, k = 0, 1, ...$ Следователно $n \neq 3l, l = 0, 1, ...$, откъдето следва, че n не е кратно на 3."
Решение
От горното доказателство се вижда, че от това, че $n^2 \neq 3k, k = 0, 1, ...$ не следва директно, че $n \neq 3l, l = 0, 1, ...$ а трябва да се докаже.
За целта ще използваме индиректно доказателство: "Ако n е кратно на 3, то n^2 също се дели на 3."
Ако допуснем, че n е кратно на 3 $\implies$

$$n = 3l \implies n^2 = (3l)^2 = 3(3l)^2 = 3k \implies n^2$$

Откъдето следва, че горепосоченият аргумент е верен, но посоченото доказателство е некоректно.

Задача 3

Да се докаже, че квадратът на всяко четно число е също четно число чрез:

1. директно доказателство
2. индиректно доказателство
3. използване на контра-пример

Хипотеза p : "n е четно число."Заключение q: "n^2 е четно число."

1. директно доказателство $p \to q$
   Нека n е четно число $\implies$ то може да се запише като:
   $$n = 2k, k = 0, 1, ... \implies n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \implies n^2$$
2. индиректно доказателство $(\neg p \to \neg q) \Leftrightarrow (p \to q)$
   Нека n^2 е нечетно число $\implies$ то може да се запише като:
   $$n^2 = 2k + 1, k = 0, 1, ...$$
   $\implies$ n е нечетно число.
3. използване на контра-пример
   "Ако n^2 е нечетно число, то nсъщо е нечетно число."
   Хипотеза 1: "n^2 е нечетно число. p
   Хипотеза 2: "n е четно число. $\overline{q}$
   Допускаме, че Хипотеза 2 $\overline{q}$ е вярна $\implies$
   $$n = 2k, k = 0, 1, ... \implies n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2) \implies n^2 = 2l \implies n^2$$
   е четно число, т.е. $\overline{p}$, което е в противоречие с Хипотеза 1 p $\implies$ Допускането е грешно $\implies$ Хипотеза 2 не е вярна $\implies$ "n е нечетно число."

Задача 4

Да се докаже, че произведението на две рационални числа е също рационално число.
Решение
Директно доказателство: Нека a и b са рационални числа $\implies$ те могат да се запишат във вида
$$a = \frac{k}{l} \quad b = \frac{s}{t} \qquad k, l, s, t \in \mathbb{Z}, l \neq 0, s \neq 0 \implies ab = \frac{ks}{lt}$$

Задача 5

Вярно е, че произведението на две ирационални числа е ирационално число?
Решение
Ако $a = b = \sqrt{2} \implies ab = 2$ което е рационално число $\implies$ твърдението е лъжа.

Задача 6

Да се докаже, че следващите три твърдения са еквивалентни при $n \in Z$.

1. n е четно число.
2. n+1 е нечетно число.
3. 3n+1 е нечетно число.

$1 \to 2$

$$n = 2k \implies n + 1 = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$$

$2 \to 3$

$$n + 1 = 2k + 1 \implies 3n + 1 = 3(2k) + 1 = 2(3k) + 1 = 3n + 1, k \in \mathbb{N}$$

$3 \to 1$

$$3n + 1 = 2k + 1 \implies 3n = 2k, 2k = 2t \implies n = 2k, k, t \in \mathbb{N}$$

Задача 7

Да се докаже, че $\sqrt[3]{3}$ е ирационално число!
Решение
$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ a,b - взаимно прости(Най голям общ делител = 1)

$$\frac{a}{b} = \sqrt[3]{3} \implies \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 3 \implies a^3 = 3b^3$$

a^3 е кратно на 3 $\implies$ a се дели на 3 $\implies$

$$a = 3k, k \in \mathbb{N} \implies 3b^3 = a^3 = (3k)^3 = 9k^3 \implies b^3 = 9k^3 = 3s, s \in \mathbb{N}$$

b^3 е кратно на 3 $\implies$ b се дели на 3 $\implies$

$$b = 3l, l \in \mathbb{N} \implies \frac{a}{b} = \frac{3k}{3l} \implies$$

a и b не са взаимно прости числа (най-големият им общ делител е 3), както допуснахме по-горе $\implies$ Хипотезата, е лъжа $\implies$ $\sqrt[3]{3}$ е ирационално число

5 Упражнение 5: Булева алгебра

Задача 1

Нека функцията $f(x, y, z)$ е дефинирана посредством следната таблица: Да се намери съответни аналитични изрази!

			а	б
x	y	z	f(x,y,z)	f(x,y,z)
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

а) $f(x, y, z) = (-x) \cdot (-y) \cdot (-z) + (-x) \cdot y \cdot (-z) + x \cdot y \cdot (-z) + x \cdot y \cdot z$
б) $f(x, y, z) = (-x) \cdot (-y) \cdot z + x \cdot (-y) \cdot (-z) + x \cdot (-y) \cdot z + x \cdot y \cdot z$

Задача 2

Истина или лъжа са следните твърдения

1. $(a|b = b|a) \Leftrightarrow a = b$

a	b	$a\|b$	$b\|a$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

2. $(a|b) \cdot (c|d) \Leftrightarrow (a + c)|(b + d)$

$$(a|b) \cdot (c|d) = (\overline{a \cdot b}) \cdot (\overline{c \cdot d}) = (\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{c} + \overline{d}) = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{d} + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{d} \quad (1)$$

$$(a+c)|(b+d) = \overline{(a+c)\cdot(b+d)} = \overline{a+c} + \overline{b+d} = \overline{a}\cdot\overline{c} + \overline{b}\cdot\overline{d} \quad (2)$$

От (1) и (2) $\implies (a|b)\cdot(c|d) \neq (a+c)|(b+d)$

6 Упражнение 6: Релации

Задача 1

Да се провери дали всяка от бинарните релации е рефлексивна/антирефлексивна/симетрична/асиметрична/антисиметрична/транзитивна:

1. Релация R върху множеството N, където $(a, b) \in R$ тогава и само тогава когато $a \wedge b$

Рефлексивна, тъй като $(a,a) \Leftrightarrow a \vee a,\ \forall a \in N$.

Симетрична, тъй като от $\begin{array}{ll} a \vee b & \Rightarrow\ b \vee a, \\ (a,b) \in R & \Rightarrow (b,a) \in R \end{array},\quad \forall a,b \in N$.

Не е асиметрична, тъй като от $\begin{array}{ll} a \vee b & \Rightarrow\ b \vee a, \\ (a,b) \in R & не \Rightarrow (b,a) \notin R \end{array},\quad \forall a,b \in N$

Не е антисиметрична, тъй като от $\begin{array}{lll} (a \vee b) & \wedge\ (b,a) & не \Rightarrow a = b \\ (a,b) \in R & \wedge\ (b,a) \in R, & не \Rightarrow a = b \end{array},\quad \forall a,b \in N$.

Не е транзитивна, тъй като ако

$\begin{array}{lllll} (a \vee b) & \wedge & (b \vee c) = (a \wedge c) \vee b & \neq & (a \vee c) \\ (a,b) \in R & \wedge & (b,c) \in R & не \Rightarrow & (a,c) \in R \end{array},\quad \forall a,b,c \in N$.

2. Релация R върху множеството S = {w,x,y,z }, където

$$R = \{(w, w), (w, x), (x, w), (x, x), (x, z), (y, y), (z, y), (z, z)\}$$

Рефлексивна, тъй като $(w,w) \in S,\ (x,x) \in S,\ (y,y) \in S,\ (z,z) \in S$.
Не е симетрична, тъй като $(x,z) \in R$, но $(z,x) \notin R$.
Не е асиметрична, тъй като $(w,x) \in R \wedge (x,w) \in R$.
Не е антисиметрична, тъй като $(w,x) \in R \wedge (x,w) \in R$, но $x \neq w$.
Не е транзитивна, тъй като $(w,x) \in R \wedge (x,z) \in R$, но $(w,z) \notin R$.

3. Релация R върху множеството $P(x)$ на множеството X = { 1, 2, 3, 4} където $(S, T) \in R$ тогава и само тогава когато $S \subseteq T$

Рефлексивна, тъй като $S \subseteq S, \ \forall S \in P(X)$.

Не е симетрична, тъй като ако $\begin{matrix} S \subseteq T \ \text{ не} \Rightarrow T \subseteq S \\ (S,T) \in R \ \text{ не} \Rightarrow (T,S) \in R \end{matrix}, \ \forall S,T \in P(X)$.

Не е асиметрична , тъй като ако $\begin{matrix} S \subseteq T \ \text{ не} \Rightarrow T \not\subset S \\ (S,T) \in R \ \text{ не} \Rightarrow (T,S) \notin R \end{matrix}, \ \forall S,T \in P(X)$.

Антисиметрична, тъй като от $\begin{matrix} S \subseteq T \quad \wedge \quad T \subseteq S \quad \Rightarrow S = T \\ (S,T) \in R \ \wedge (T,S) \in R \ \Rightarrow S = T \end{matrix}, \ \forall S,T \in P(X)$.

Транзитивна, тъй като от $\begin{matrix} S \subseteq T \quad \wedge \quad T \subseteq G \ \Rightarrow \ S \subseteq G \\ (S,T) \in R \ \wedge (T,G) \in R \Rightarrow (T,G) \in R \end{matrix}, \ \forall S,T,G \in P(X)$.

Задача 2

Нека R и S са релации от вида

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)\} \qquad S = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$$

Да се определи композицията им $S \circ R$
Решение

$$(b,c) \circ (a,b) = (a,c)$$
$$S \circ R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

Задача 3

Задача 3: Нека R е рефлексивна и транзитивна релация. Да се докаже, че $R^n = R,\ \forall n \geq 1,\ n \in N$.

Решение:

Съгласно съществуваща в литературата теорема, ако релацията R е транзитивна, то

$R^n \subseteq R,\ \forall n \geq 1,\ n \in N$. (1)

Ако се докаже, че

$R \subseteq R^n,\ \forall n \geq 1,\ n \in N$, (2)

то от (1) и (2) $\Rightarrow R^n = R$.

Доказателството на $R \subseteq R^n,\ \forall n \geq 1,\ n \in N$:

Доказателството на $R \subseteq R^n,\ \forall n \geq 1,\ n \in N$ ще се извърши, основавайки се на принципа на пълната математическа индукция:

1. Проверява се верността на (2) при $n = 1 \Rightarrow R = R^1 \Rightarrow$ (2) е вярно при $n = 1$. (2а)
2. Допуска се, че твърдението (2) е изпълнено за

$n = k \Rightarrow R \subseteq R^k,\ k \geq 1,\ k \in N$. (2б)

Тъй като релацията R е рефлексивна $\Rightarrow (b,b) \in R \overset{(2б)}{\Rightarrow} (b,b) \in R^k$

3. Проверява се верността на твърдението (2) за $n = k+1$

$$\left| \begin{array}{l} (a,b) \in R \\ (b,b) \in R^k \\ R^{k+1} = R^k \circ R \Rightarrow (b,b) \circ (a,b) = (a,b) \Rightarrow (a,b) \in R^{k+1} \end{array} \right. \Rightarrow R \subseteq R^{k+1}. \quad (2в)$$

Съгласно принципа на пълната математическа индукция от (2а), (2б) и (2в) $\Rightarrow R \subseteq R^n,\ \forall n \geq 1,\ n \in N$.

Задача 4

Да се състави матрица, описваща следната релация R върху множеството $\{1,2,3,4\}$, където $(a,b) \in R$, тогава и само тогава когато $|a-b| \leq 1$
Решение :

$$M_R = a \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} b \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Задача 5

Ако релациите R и S се представят със следните матрици

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Определете матриците, които представят $R \cup S$ и $R \cap S$?
Решение:

$$M_{R\cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Задача 6

Да се определи релацията по следната матрица

$$M_R = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$R = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$$

Задача 7

Задача 7: Какъв е резултатът от следното твърдение: "Ако релацията R е антирефлексивна, то релацията R^2 също е антирефлексивна."

Решение:

Ако релацията R върху множеството А е антирефлексивна $\Rightarrow (a,a) \notin R,\ \forall a \in A$. Например, ако $S = \{a, \quad b\}$, $R = \{(a,b), \quad (b,a)\}$ то

$R^2 = R \circ R = \{(a,b), \quad (b,a)\} \circ \{(a,b), \quad (b,a)\} = \{(a,a), \quad (b,b)\}$, която е рефлексивна релация.

Отговор: ЛЪЖА

7 Упражнение 7: Функции и суми

Задача 1

Нека са дадени следните множества
$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{a, b, c\}$
$C = \{2, 7, 10\}$
На тяхна основа са дефинирани функциите

$$g : A \to B \qquad f : B \to C$$

по следния начин

$$g = \{(1, b), (2, a), (3, c)\} \qquad f = \{(a, 10), (b, 7), (c, 2)\}$$

Композицията $f \circ g$ е

$$f \circ g = \{(1, b), (2, a), (3, c)\} \circ \{(a, 10), (b, 7), (c, 2)\} = \{(1, 7), (2, 10), (3, 2)\}$$

Задача 2

Да се намерят обратните функции f^{-1} на следните функции f:

1. $f : A \to B$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 7, 10\}$, $f = \{(a, 10), (b, 7), (c, 2)\}$
   $\forall x \in A \implies \exists y \in B, f(x) = y$
   f е инекция, f е сюрекция $\implies$ f е биекция $\implies$
   $$f^{-1} = \{(10, a), (7, b), (2, c)\}$$

2. $f : A \to B$, A = { Иван, Стоян, Георги, Тони },
   B = { Опел, Форд, Рено, Пежо, Ситроен },
   f= { (Иван, Пежо), (Стоян, Форд), (Георги, Рено), (Тони, Опел) }
   $\forall a \in A \implies \exists b \in B, f(a) = b$
   $f(\varnothing) =$ Ситроен
   f е инекция, f не е сюрекция $\implies$ f не е биекция $\implies \nexists\, f^{-1}$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 5$
   f е инекция, f е сюрекция $\implies$ f е биекция $\implies \exists f^{-1}$
   $$x = 3y + 5 \implies y = f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{3}$$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x > \frac{2}{7}$, $f(x) = \ln(7x-2)$
   f е инекция, f е сюрекция $\implies$ f е биекция $\implies \exists f^{-1}$

$$x = \ln(7y-2) \implies 7y-2 = e^x \implies y = f^{-1}(x) = \frac{e^x+2}{7}$$

Задача 3

Да се запишат нулевия, първия, втория и третия член на редица с общ член a_n от вида:

1. $(-2)^n$

$$a_0 = (-2)^0 = 1,\ a_1 = (-2)^1 = -2,\ a_2 = (-2)^2 = 4,\ a_3 = (-2)^3 = -8$$

2. 3

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 3$$

3. $7 + 4^n$

$$a_0 = 7 + 4^0 = 8,\ a_1 = 7 + 4^1 = 11,\ a_2 = 7 + 4^2 = 23,\ a_3 = 7 + 4^3 = 71$$

4. $2^n + (-2)^n$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2^0 + (-2)^0 = 2 \qquad & a_1 &= 2^1 + (-2)^1 = 0 \\ a_2 &= 2^2 + (-2)^2 = 8 \qquad & a_3 &= 2^3 + (-2)^3 = 0 \end{aligned}$$

Задача 4

Да се запише общият член a_n за всеки от посочените редове от цели числа ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$)

1. $7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, ...$ - аритметична прогресия

$$a_1 = 7 \qquad d = 4 \implies a_n = a_1 + (n-1)d = 7 + (n-1)4$$

2. $2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, 13122, 39366, ...$ - геометрична прогресия

$$a_1 = 2 \qquad q = 3 \implies a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

3. $3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102, ...$

$$a_1 = 3 \quad a_2 = 6 = a_1 + 3 \quad a_3 = 11 = a_2 + 5 \quad a_4 = 18 = a_3 + 7$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + (2(n-1) - 1) = a_{n-2} + (2n - 3)$$

$$a_n = a_{n-1} + (2n - 1)$$

$$a_n = 3 + (3 + 5 + ... + (2n-1)) = 2 + (1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)) =$$

$$2 + \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = 2 + \frac{2n \cdot n}{2} = n^2 + 2$$

Задача 5

Да се намери стойността на всяка от следните суми:

1. $S_9 = \sum_{k=0}^{8}(1 + (-1)^k)$

$$S_9 = \sum_{k=0}^{8}(1+(-1)^k) = 2+0+2+0+2+0+2+0+2 = 5\cdot 2+4\cdot 0 = 10$$

2. $S_4 = \sum_{k=0}^{4}(2^k + 3k)$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{4}(2^k + 3k) = \sum_{k=0}^{4} 2^k + \sum_{k=0}^{4} 3k = \sum_{k=0}^{4} 2^k + 3\sum_{k=0}^{4} k$$

$$a_{1geo}\cdot\frac{q^4 - 1}{q - 1} + 3\frac{4(a_{1alg} + a_{4alg})}{2} = 2\cdot\frac{2^4 - 1}{2 - 1} + 3\frac{4(1 + 4)}{2} = \frac{2 \cdot 15}{1} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2} = 30 + 30 = 60$$

3. $S_5 = \sum_{k=0}^{4} 5 \cdot 2^k$

$$S_5 = \sum_{k=0}^{4} 5 \cdot 2^k = 5\sum_{k=0}^{4} 2^k = 5 \cdot a_0\frac{q^5 - 1}{q - 1} = 5 \cdot 2^0\frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 5 \cdot 31 = 155$$

4. $S = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(2i + 3j)$

$$S = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(2i + 3j) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3} 2i + \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3} 3j =$$

$$4 \cdot 2\sum_{i=0}^{2} i + 3 \cdot 3\sum_{j=0}^{3} j = 8 \cdot \frac{(0 + 2)3}{2} + 9 \cdot \frac{(0 + 3)4}{2} = 24 + 54 = 78$$

Задача 6

Задача 6: Да се пресметнат следните крайни и безкрайни суми:

1) $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$

2) $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$

3) $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + (-1)^{n-1} n$

4) $S_n = 1.1 + 2.3 + +3.5 + \ldots + n.(2n-1)$

5) $S_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

$S_\infty = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \ldots$

6) $S_\infty = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!} + \ldots$

Решение:

1) $S_n = 1 + 2 + ... + n = ?$

I начин: Посочената сума е сума от n члена в аритметична прогресия с: $a_1 = 1$ и $a_n = n$.

Следователно: $S_n = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(a_n + a_1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

II начин: Използва се формулата: $(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$

$$\begin{array}{lc|c}
x = 1 & & 2^2 - 1^2 = 2.1 + 1 \\
x = 2 & + & 3^2 - 2^2 = 2.2 + 1 \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x = n & & (n+1)^2 - n^2 = 2.n + 1
\end{array}$$

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2(1 + 2 + ... + n) + 1.n$$

$$(n^2 + 2n + 1) - 1^2 = 2S_n + n$$

$$n^2 + n = 2S_n$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = ?$

Използва се формулата: $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ \dots\dots \\ x=n \end{array} \quad + \right| \begin{array}{l} 2^3 - 1^3 = 3.1^2 + 3.1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 = 3.2^2 + 3.2 + 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (n+1)^3 - n^3 = 3.n^2 + 3.n + 1 \end{array}$$

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + ... + n) + 1.n$$

$$(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 1 = 3S_n + 3.\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n - n = 3S_n + 3.\frac{n(n+1)}{2}$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n - 3.\frac{n(n+1)}{2} = 3S_n$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{2}\right) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3) $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + (-1)^{n-1} n = ?$

I случай: $n = 2m \Rightarrow m = \dfrac{n}{2},\ m = 0, 1, ...$

$$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + (-1)^{n-1} n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + (-1)^{2m-1}.2m =$$

$$= \left[1 + 3 + 5 + ... + (2m-1)\right] - \left[2 + 4 + 6 + 2m\right] = \frac{m\left(1 + 2m - 1\right)}{2} - \frac{m\left(2 + 2m\right)}{2} =$$

$$= m^2 - m^2 - m = -m = -\frac{n}{2}$$

II случай: $n = 2m + 1 \Rightarrow m = \dfrac{n-1}{2},\ m = 0, 1, ...$

$$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + (-1)^{n-1} n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + (-1)^{(2m+1)-1}.(2m+1) =$$

$$= \left[1 + 3 + 5 + ... + (2m+1)\right] - \left[2 + 4 + 6 + 2m\right] = \frac{\left(1 + 2m - 1\right)(m+1)}{2} - \frac{m\left(2 + 2m\right)}{2} =$$

$$= (m+1)^2 - (1+m).m = m^2 + 2m + 1 - m - m^2 = m + 1 = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$$

4) $S_n = 1.1 + 2.3 + +3.5 + ... + n.(2n-1) = ?$

Базирайки се на общия член на разглежданата сума $a_n = n(2n-1) = 2n^2 - n$, всеки от членовете в нея се представя като:

$$+\left|\begin{array}{l} a_1 = 1.1 = 2.1^2 - 1 \\ a_2 = 2.3 = 2.2^2 - 2 \\ a_3 = 3.5 = 2.3^2 - 3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = n(2n-1) = 2.n^2 - n \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.1 + 2.3 + +3.5 + ... + n.(2n-1) = 2(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - \left(1 + 2 + 3 + ... + n\right) =$$

$$= 2.\frac{1}{6}.\left(2n^3 + 3n^2 + n\right) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n - 3n^2 - 3n}{6} = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6}$$

5) $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = ?$

Използва се формулата: $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ \dots\dots \\ x = n \end{array} \quad +\left|\begin{array}{l} \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{array}\right.$

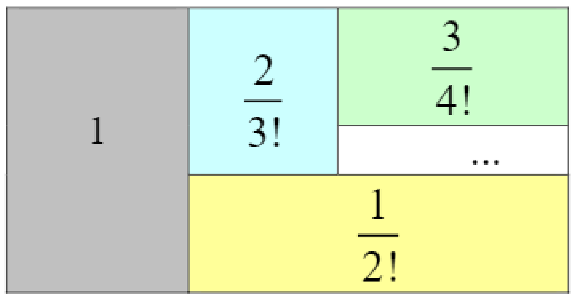
$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ... = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1$$

б) $S_{\infty} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} + \ldots = ?$

I начин: Геометрично решение

$S_{\infty} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} + \ldots = 2$, защото тази безкрайна сума е равна на лицето на правоъгълник със страни 1 и 2, който е разделен на нови правоъгълници по следния начин:



II начин: Аналитично решение

Използва се формулата: $\frac{x-1}{x!} = \frac{1}{(x-1)!} - \frac{1}{x!}$

$$
+\left|
\begin{array}{l}
x = 2 \quad \Rightarrow \frac{2-1}{1!} = \frac{1}{(2-1)!} - \frac{1}{2!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \\
x = 3 \quad \Rightarrow \frac{3-1}{3!} = \frac{1}{(3-1)!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x = n \quad \Rightarrow \frac{n-1}{n!} = \qquad \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \\
x = n+1 \Rightarrow \frac{n}{(n+1)!} = \qquad \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}
\end{array}
\right.
$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{(n+1)!} = 2 + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$S_{\infty} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} + \ldots = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{(n+1)!} \right) = 2$$

Задача 7

Нека $A = \{3, 3, 7, 15, 27\}$ Да се определи общия член във функцията на индексната променлива $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Решение:

$$a(n) = an^2 + bn + c$$

$$\left|\begin{array}{l} a(1) = 3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ a(2) = 3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ a(3) = 7 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} c = 3 - a - b \\ 4a + 2b + 3 - a - b = 3 \\ 9a + 3b + 3 - a - b = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} c = 3 - a - b \\ 3a + b = 0 \\ 8a + 2b = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} c = 3 - a - b \\ b = -3a \\ 8a + 2(-3a) = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} 8a - 6a = 4 \\ c = 3 - a - b \\ b = -3a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2a = 4 \\ c = 3 - a - b \\ b = -3a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -3 \cdot 2 = -6 \\ c = 3 - 2 - (-6) = 1 + 6 = 7 \end{array}\right.$$

$$a(n) = 2n^2 - 6n + 7$$

Задача 8

Да се намери решението на функцията спрямо y.

$$P(x, y) = 7x^2 - 2y^2 = 3$$

Решение:

$$7x^2 - 2y^2 = 3$$

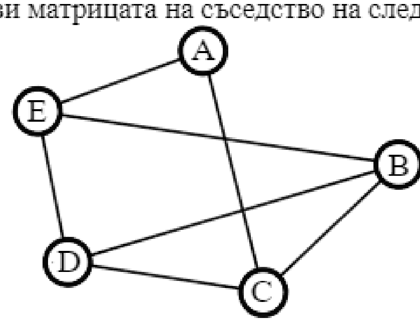
$$2y^2 = 7x^2 - 3 \Leftrightarrow y^2 = \frac{7x^2 - 3}{2} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{7x^2 - 3}{2}}$$

$$\frac{7x^2 - 3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{3}{7} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{\frac{3}{7}} \vee x \leq -\sqrt{\frac{3}{7}}$$

8 Упражнение 8: Графи и дървета

Задача 1

Задача 1: Да се състави матрицата на съседство на следния неориентиран граф:

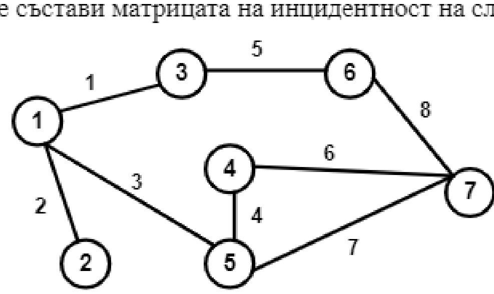


$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Извод: Матрицата на съседство на неориентиран граф е симетрична квадратна матрица, чиито елементи (i, i)по главния диагонал са 1, ако около съответния връх V_i има примка.

Задача 2

Задача 2: Да се състави матрицата на инцидентност на следния неориентиран граф:

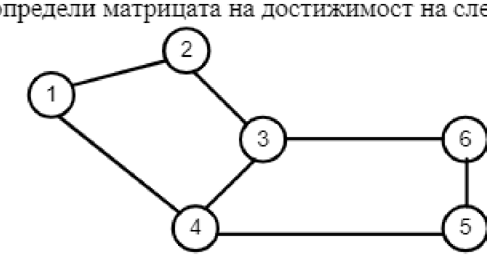


$$A_I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Извод: Матрицата на инцидентност на неориентиран граф съдържа по две 1 в колона, съответстваща на нормално ребро и по една 1 в колона, съответстваща на ребро-примка.

Задача 3

Задача 3: Да се определи матрицата на достижимост на следния неориентиран граф:



$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad H_1 = I \cup A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_G^2 = A_G \cdot A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_G^3 = A_G^2 \cdot A_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

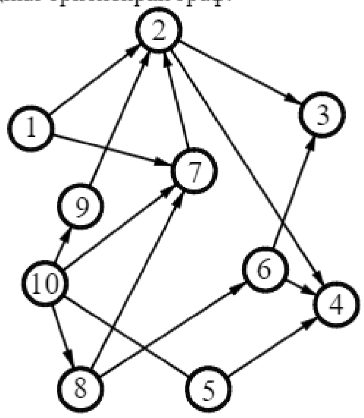
$$H_2 = I \cup A_G \cup A_G^2 = H_1 \cup A_G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = I \cup A_G \cup A_G^2 \cup A_G^3 = H_2 \cup A_G^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Елементите на матрицата H_3 са само от $1 \Longrightarrow \ H_4 = H_3 \ \Longrightarrow$ Процедурата се спира.
Всеки връх от разглеждания граф е достижим от всички останали.

Задача 4

Задача 4: Да се определи еквивалентен ориентиран граф, в който отделните върхове са групирани по нива, на следния ориентиран граф:



1. За всеки връх V_i се определя множество $V^+(i)$ от върхове, всеки от които е начало на дъга, влизаща във върха V_i както следва:

   - $V^+(1) = \varnothing$
   - $V^+(2) = \{V_1, V_9, V_7\}$
   - $V^+(3) = \{V_2, V_6\}$
   - $V^+(4) = \{V_2, V_5, V_6\}$
   - $V^+(5) = \{V_{10}\}$
   - $V^+(6) = \{V_8\}$
   - $V^+(7) = \{V_1, V_10, V_8\}$
   - $V^+(8) = \{V_{10}\}$
   - $V^+(9) = \{V_{10}\}$
   - $V^+(10) = \varnothing$

2. Определя се множеството от върхове от нулево ниво, което включва всички висящи (начални) върхове:

$$V^0 = \{V_1, V_10\}$$

3. Определя се множеството от върхове от първо ниво, което включва върхове, които са директно свързани чрез дъги единствено с върхове от нулево ниво:

$$V^1 = \{V_9, V_8, V_5\} \quad V_i \in V^1 \quad V^+(i) = V_0$$

4. Определя се множеството от върхове от второ ниво, което включва върхове, които са директно свързани чрез дъги единствено с върхове от нулево и първо ниво:

$$V^2 = \{V_7, V_6\} \quad V_i \in V^2 \quad V^+(i) = V_1$$

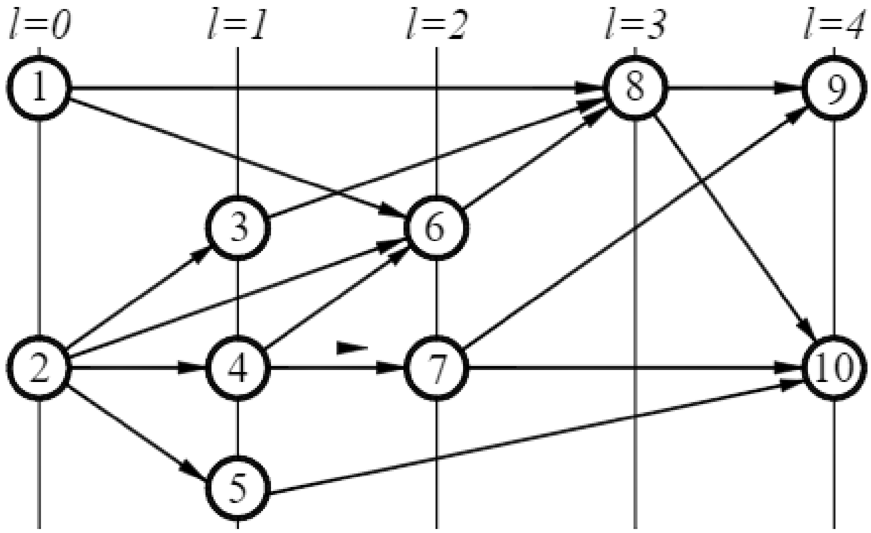
5. Определя се множеството от върхове от трето ниво, което включва върхове,които са директно свързани чрез дъги с върхове от нулево, първо и второ ниво:

$$V^3 = \{V_2\} \quad V_i \in V^3 \quad V^+(i) = V_2$$

6. Определя се множеството от върхове от четвърто ниво, което включва върхове, които са директно свързани чрез дъги с върхове от нулево, първо, второ и трето ниво:

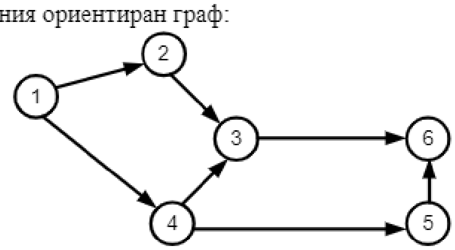
$$V^4 = \{V_3, V_9\} \quad V_i \in V^4 \quad V^+(i) = V_3$$

7. Преномерират се върховете в новия граф (не е задължително).

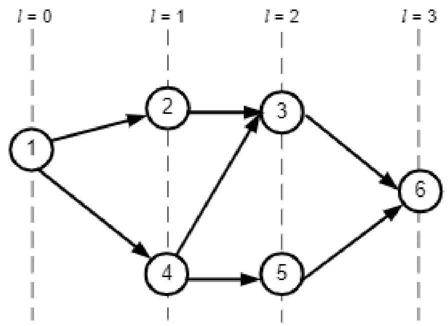


Задача 5

Задача 5: Да се определи матрицата на достижимост и броя на възможните пътища между върховете на следния ориентиран граф:



1. Определя се еквивалентния ориентиран граф, в който отделните върхове са групирани по нива, както следва:



2. Формира се единична квадратна матрица от вида:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \quad H^0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Формира се матрицата на достижимост до върховете от ниво 1 -H^1:

$$H^{(0-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \quad H^1 = H^{(0-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Формира се матрицата на достижимост до върховете от ниво 2 -H^2:

$$H^{(1-2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \quad H^2 = H^{(1-2)} + H^1 \cdot H^{(1-2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Формира се матрицата на достижимост до върховете от ниво 3 -H^3:

$$H^{(2-3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \quad H^3 = H^{(2-3)} + H^2 \cdot H^{(2-3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Определя се окончателната матрица на достижимост:

$$H = H^0 \cup H^1 \cup H^2 \cup H^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

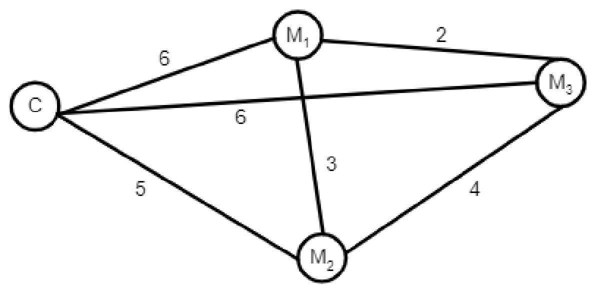
7. Определя се броя на възможните пътища между върховете на ориентиранияграф:

$$H = H^0 + H^1 + H^2 + H^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача 6

Задача 6: Задача за търговския пътник

Доставчик снабдява 3 магазина - M_1, M_2, M_3. Той взима стоката от склад С, разнася я по магазините и се прибира отново в склада. Разстоянията между отделните обекти са посочени на долния граф. Да се определи пътя, който ще измине доставчика, така че да снабди със стока всеки от магазините и едновременно с това да минимизира разходите си.



Решение:

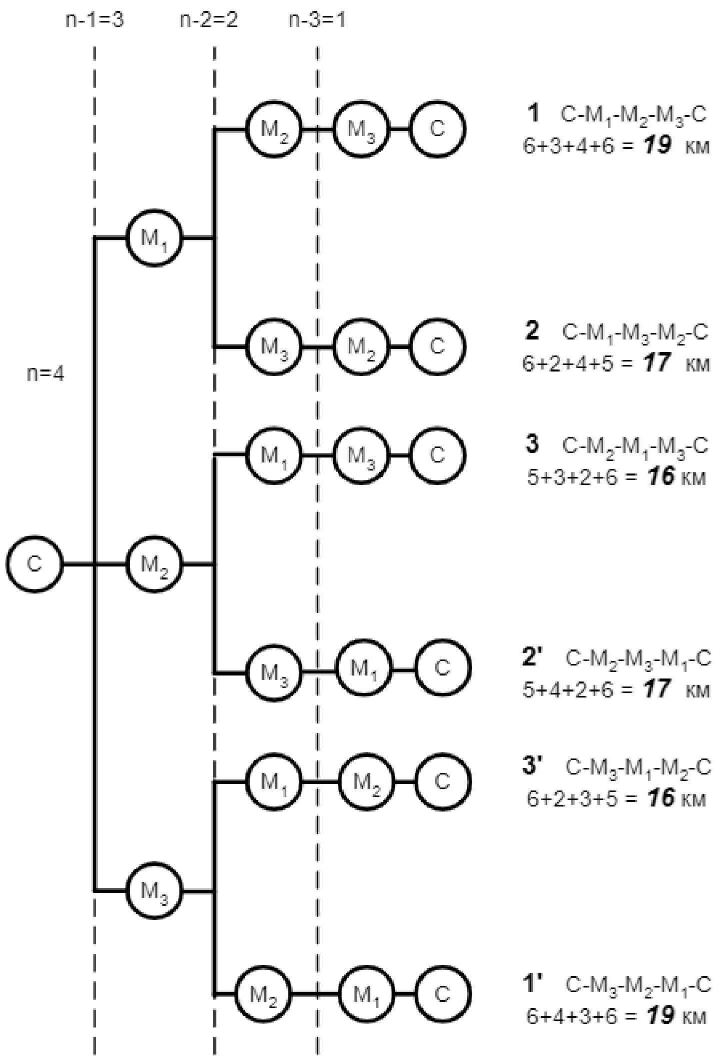
Необходимо е доставчикът да опише т.нар Хамилтонов контур, т.е. тръгвайки от склада С да мине последователно през всеки от магазините само по веднъж и отново да се върне в склада. В случая броя на върховете на неориентирания граф е $n = 4$. Следователно максималният брой различни Хамилтонови контури е $\frac{(n-1)!}{2} = \frac{3!}{2} = 3$, защото:

1. Фиксира се даден връх за N_1.
2. От връх N_1 може да се отиде до $(n-1)$ - нови върха, всеки от които може да се означи с връх N_2
3. При фиксирани връхове N_1 и N_2 от връх N_2 може да се отиде до $(n-2)$ - нови върха, всеки от които може да се означи с връх N_1 и т.н.

$\Longrightarrow$ Общият брой Хамилтонови контури е $(n-1)!$ -, но всеки два от тях са еднакви, но с противоположна посока на обхождане $\Longrightarrow$ бщият брой Хамилтонови контури е $\frac{(n-1)!}{2}$.

Решението на конкретната задача ще се визуализира чрез моделиране на възможните Хамилтонови контури, използвайки граф-дърво.

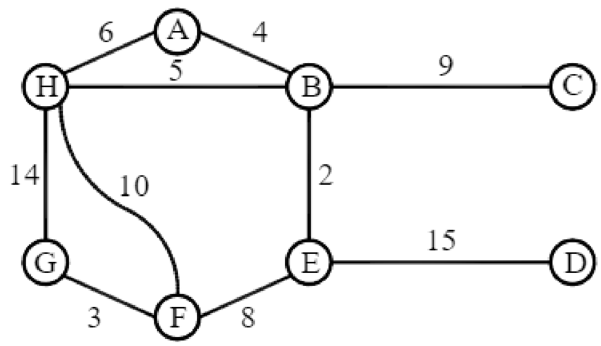
От дървото се вижда, че двойките контурите 1-1', 2-2' и 3-3' са с равна дължина, но с обратна последователност на обхождане и най-краткият път е 3 (респ.3'),чиято дължина е 16км.



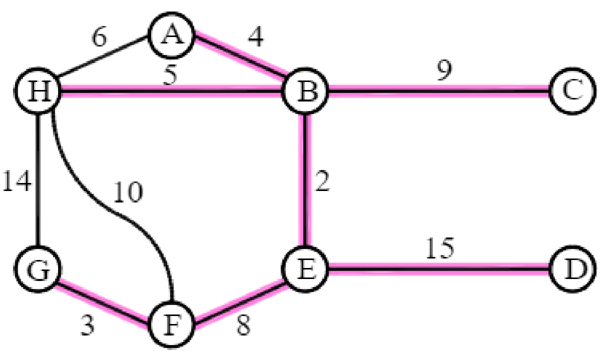
n-1=3
n-2=2
n-3=1
n=4
1 C-M1-M2-M3-C
6+3+4+6 = 19 км
2 C-M1-M3-M2-C
6+2+4+5 = 17 км
3 C-M2-M1-M3-C
5+3+2+6 = 16 км
2' C-M2-M3-M1-C
5+4+2+6 = 17 км
3' C-M3-M1-M2-C
6+2+3+5 = 16 км
1' C-M3-M2-M1-C
6+4+3+6 = 19 км

Задача 7

Задача 7: За посочения неориентиран граф с тегла на ребрата да се определи минимално покриващо дърво по метода на Крускал.



Последователността на присвояване на ребра на графа към МПД, съгласно алгоритъма на Крускал е следната: (B, E), (G, F), (A, B), (H,B), (F,E), (B,C), (E,D).
Резултантното МПД е показано на следващата фигура: Съответстващата

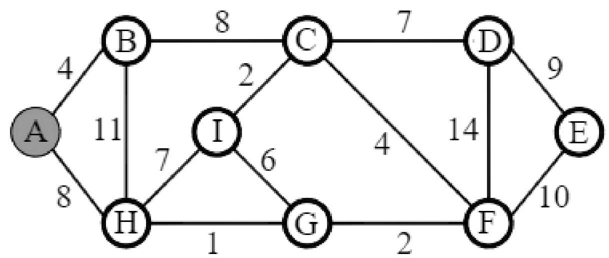


сума от тегловни коефициентина принадлежащите му ребра, е:

$$2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9 + 15 = 46$$

Задача 8

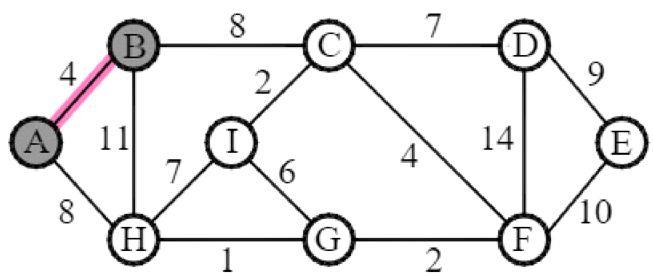
Задача 8: За посочения неориентиран граф с тегла на ребрата да се определи минимално покриващо дърво по метода на Прим, като се приеме възел *A* за начален.



Решение:

Последователността на присвояване на ребра на графа към МПД, съгласно алгоритъма на Прим е показана на следващата фигура:

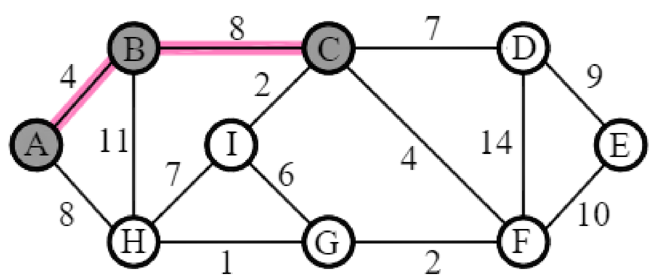
1)



Съответстващата сума от тегловни коефициентина принадлежащите му ребра, е:

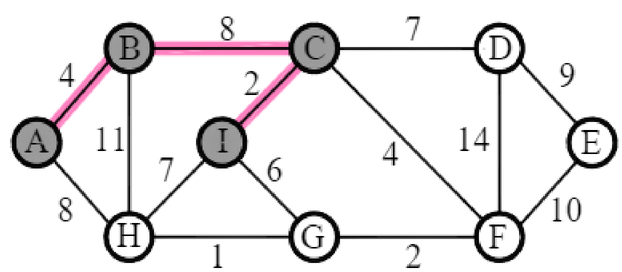
$$4 + 8 + 2 + 4 + 2 + 1 + 7 + 9 = 37$$

2)



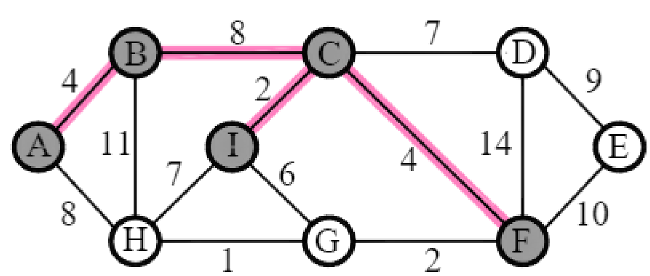
8
7
4
2
9
11
14
7
6
4
8
10
1
2
A
B
C
D
E
F
G
H
I

3)



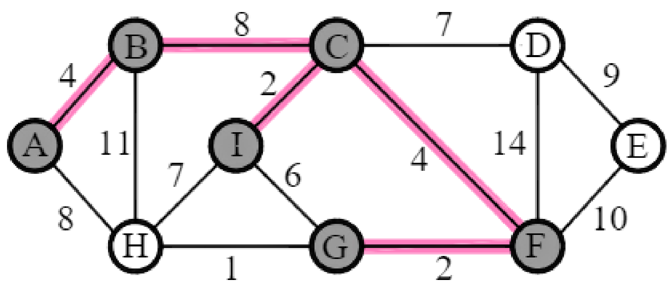
8
7
4
2
9
11
14
7
6
4
8
10
1
2
A
B
C
D
E
F
G
H
I

4)

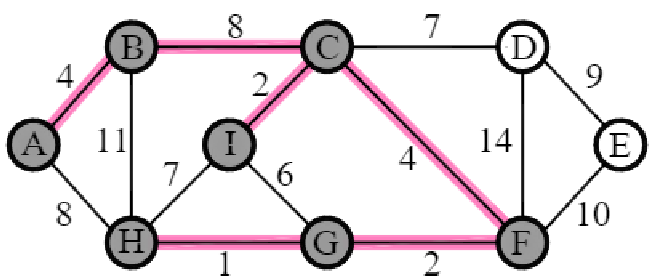


8
7
4
2
9
11
14
7
6
4
8
10
1
2
A
B
C
D
E
F
G
H
I

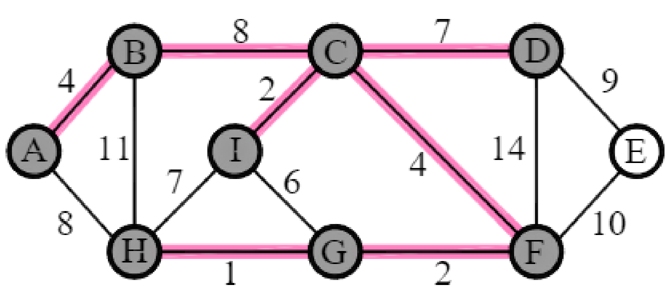
5)


A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
7
9
2
11
7
6
4
14
8
10
1
2

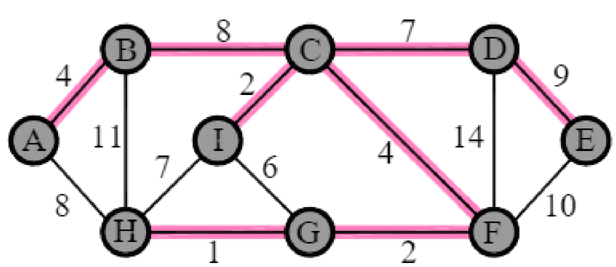
6)


A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
7
9
2
11
7
6
4
14
8
10
1
2

7)


A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
7
9
2
11
7
6
4
14
8
10
1
2

8)


A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
7
9
2
11
7
6
4
14
8
10
1
2

9 Упражнение 9: Комбинаторика

Задача 1

Колко различникомбинации на 5-разрядни числа могат да се съставят, ако се работи с двоична, десетична бройна система?
Решение:

Възможно е повтаряне

Двоична бройна система

1ви разряд	2ри разряд	3ти разряд	4ти разряд	5ти разряд	Комбинации
0-1	0-1	0-1	0-1	0-1	
2	2	2	2	2	$2^5 = 32$

Десетична бройна система

1ви разряд	2ри разряд	3ти разряд	4ти разряд	5ти разряд	Комбинации
0-9	0-9	0-9	0-9	0-9	
10	10	10	10	10	$10^5 = 32$

Не е възможно е повтаряне

Двоична бройна система - не е възможно защото трябва да се разпределят 2 цифри в 5 позиции.
Десетична бройна система

1ви разряд	2ри разряд	3ти разряд	4ти разряд	5ти разряд	Комбинации
10 числа	9 числа	8 числа	7числа	6 числа	$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$

Задача 2

Компютърна лаборатория разполага с 5 вида маси, 6 вида столове и 3 типа компютърни конфигурации.

1. Колко възможни начина на съчетаване на маса, стол и компютър могат да се получат?

2. Ако на всяко възможно работно място съответства по един студент, то колко възможни начина на съчетаване на маса, стол, компютър и студент могат да се получат?

Решение:
1.

Маси	Столове	Компютри	Комбинации
5	6	3	$5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$

2.

Маси	Столове	Компютри	Комбинации (М-С-К)	Студенти	Комбинации (М-С-К-Ст)
5	6	3	$5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$	90	$5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 90 = 8100$

Задача 3

Нека разгледаме краен автомат, чиято входна азбука се състои от 4 букви - a, b, c, d.
Колко различни думи може да разпознае автомата, ако във всяка дума буквите a, b, c, d срещат както следва:

a	3
b	2
c	1
d	4

$$k = 4 \quad n_1 = 3 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 1 \quad n_4 = 4 \implies n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$$

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} = \frac{10!}{3!2!1!4!} = 12600$$

Задача 4

Необходимо е да се изберат 4 души от студентска група от 10 човека. Какъв е максималният възможен брой комбинации от 4-ма студента, които да се изберат?
Решение:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad n = 10 \quad k = 4 \implies \frac{10!}{(10-4)!4!} = 210$$

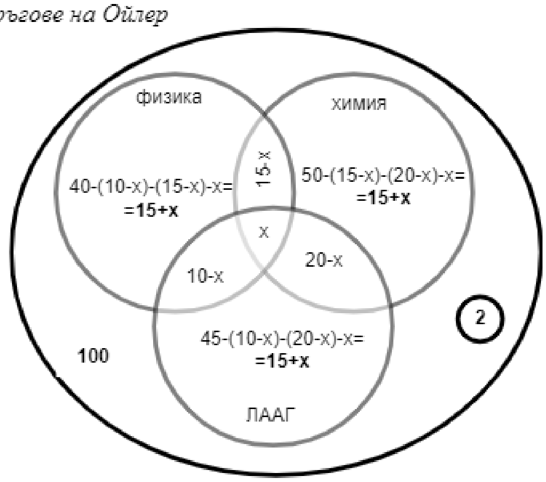
Задача 5

Нека общият брой на студентите от ФКСУ е 100. Част от тях са взели своите изпити по следния начин:

Брой студенти	Дисциплина
$N(\alpha_1) = 40$	физика
$N(\alpha_2) = 50$	химия
$N(\alpha_3) = 45$	ЛААГ
$N(\alpha_1, \alpha_2) = 15$	физика и химия
$N(\alpha_2, \alpha_3) = 20$	химия и ЛААГ
$N(\alpha_1, \alpha_3) = 10$	физика и ЛААГ
$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}) = 2$	нито един

Има ли студенти от ФКСУ, които са взели всеки от горепосочените изпити?

I начин: Чрез *кръгове на Ойлер*



$$100 = (15 + x) + (15 + x) + (15 + x) + (15 - x) + (10 - x) + (20 - x) + x + 2$$
$$100 = x + 2 + 15 + 15 + 15 + 15 + 10 + 20$$
$$100 = x + 92 \implies x = 8$$

II начин: Чрез *прилагане на основната теорема в комбинаториката (теорема за принадлежност и непринадлежност към дадено множество)*: Нека имаме N обекта и n свойства - α_1, α_2, ..., α_n и всеки обект може да притежава повече от 1 или нито 1 свойство. Нека

$N(\alpha_i)$ - брой обекти, притежаващи само свойство α_i;

$N(\alpha_i, \alpha_j)$ - брой обекти, притежаващи едновременно свойствата α_i и α_j;

$N(\overline{\alpha_i}, \overline{\alpha_j})$ - брой обекти, непритежаващи едновременно свойствата α_i и α_j;

и т.н.

Тогава броят на обектите, непритежаващи едновременно нито едно от посочените свойства, е:

$$N = N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, ..., \overline{\alpha_n}) + \left(N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + ... + N(\alpha_n)\right) - \left(N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_1, \alpha_4) + ... + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n)\right) - \\ + \left(N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + ... + N(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n)\right) + ... + (-1)^{n+1} N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

т.е.

$$\left.\begin{array}{l} N(\alpha_1) = 40 \\ N(\alpha_2) = 50 \\ N(\alpha_3) = 45 \\ N(\alpha_1, \alpha_2) = 15 \\ N(\alpha_2, \alpha_3) = 20 \\ N(\alpha_1, \alpha_3) = 10 \\ N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} N = \left(N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + N(\alpha_3)\right) - \left(N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_3)\right) + N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \\ + N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}) \end{array}$$

$$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = N - \left(N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + N(\alpha_3)\right) + \left(N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_3)\right) - N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}) = \\ = 100 - (40 + 50 + 45) + (15 + 20 + 10) - 2 = 100 - 135 + 45 - 2 = 100 - 90 - 2 = \mathbf{8}$$

Следователно, 8 студента са взели и трите горепосочени изпита.

Задача 6

Имаме 4 еднакви топчета и 2 различни кутии.
Колко са възможните комбинации за поставяне на топчетата в кутиите?

I кутия	4	3	2	1	0
II кутия	0	1	2	3	4

Отговор: 5

Задача 7

Какъв е броят на делителите на числото 400?

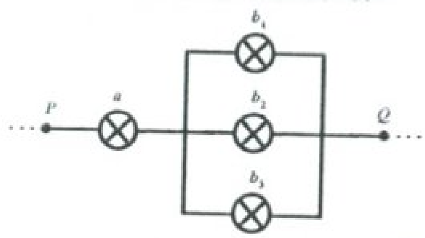
$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ... p_k^{n_k}$$
$$400 = 4 \cdot 100 = 4 \cdot 4 \cdot 25 = 2^4 \cdot 5^2 = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}$$
$$N = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot ...(n_k + 1) = (4 + 1) \cdot (2 + 1) = 5 \cdot 3 = 15$$

10 Упражнение 10: Вероятности

Задача 1

Задача 1: За показания участък от електрическа верига могат да възникнат следните събития:

A – изгаряне на светодиод a;
B_1 – изгаряне на светодиод b_1;
B_2 – изгаряне на светодиод b_2;
B_3 – изгаряне на светодиод b_3;
С – изгасване на всички светодиоди.



Да се изразят събитията C и $\overline{C}$ чрез събитията A, B_1, B_2 и B_3 !

Решение:
Светодиодите ще изгаснат (настъпва събитие С), ако настъпи събитие А или едновременно настъпят и трите събития B_1, B_2, B_3, т.е

$$C = A + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$$

Съответният израз за противоположното събитие се получава като

$$\overline{C} = \overline{A + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3} = \overline{A} \cdot \overline{B_1 \cdot B_2 \cdot B_3} = \overline{A} \cdot (\overline{B_1} + \overline{B_2} + \overline{B_3})$$

Задача 2

Дадено е устройство, състоящо се от два модула - а и b. Модул а се състои от два блока, а модул b- от три. Дефинирани са следните събития

- A_1 - блок a_1 е в изправност.
- A_2 - блок a_2 е в изправност.
- B_1 - блок b_1 е в изправност.

- B_2 - блок b_2 е в изправност.
- B_3 - блок b_3 е в изправност.

Устройството работи(събитие С), когато е в изправност поне един блок от модул a и не по малко от два блока от модул b. Да се изрази събитието С чрез останалите.
Решение:

$$A = A_1 + A_2 + A_1 \cdot A_2 \qquad B = B_1 \cdot B_2 + B_2 \cdot B_3 + B_3 \cdot B_1 + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$$
$$C = A \cdot B = (A_1 + A_2 + A_1 \cdot A_2) \cdot (B_1 \cdot B_2 + B_2 \cdot B_3 + B_3 \cdot B_1 + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3)$$

Задача 3

Да се докаже, че събитията $A, \overline{A} \cdot B, \overline{A + B}$ образуват пълна група събития.
Решение:

$$\begin{aligned}
&A \cdot \overline{A} \cdot B = \varnothing \cdot B = \varnothing \\
&A \cdot \overline{A + B} = A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} = \varnothing \cdot B = \varnothing \\
&\overline{A} \cdot B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot B \cdot \overline{B} = \overline{A} \cdot \varnothing = \varnothing \\
&A + \overline{A} \cdot B + \overline{A + B} = A + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} = \\
&A + \overline{A} \cdot (B + \overline{B}) = A + \overline{A} \cdot U = A + \overline{A} = U
\end{aligned}$$

От първите 3 уравнения $\Longrightarrow$ не са съвместими $\Longrightarrow$ образуват пълна група събития

Задача 4

Разполагаме с два различни зара, които се хвърлят едновременно. Нека се дефинират следните събития:

- A - Поне единият зар се е паднал 1 точка.
- B - Сумата от точки върху двата зара е четно число.

Да се определят вероятносттите

- $P(A \cdot B)$
- $P(\overline{A} \cdot B)$

$n = 6 \cdot 6 = 36$
$A \cdot B = \{E_1 \cdot E_1, E_1 \cdot E_3, E_3 \cdot E_1, E_1 \cdot E_5, E_5 \cdot E_1\} \implies m = 5$
$P(A \cdot B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{5}{36}$
$\overline{A} \cdot B = \{E_2 \cdot E_2, E_2 \cdot E_4, E_2 \cdot E_6 E_3 \cdot E_3, E_3 \cdot E_5, E_4 \cdot E_4, E_4 \cdot E_2,$
$E_4 \cdot E_6, E_5 \cdot E_5, E_5 \cdot E_3, E_6 \cdot E_6, E_6 \cdot E_2, E_6 \cdot E_4,\} \implies m = 13$
$P(\overline{A} \cdot B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{13}{36}$

Задача 5

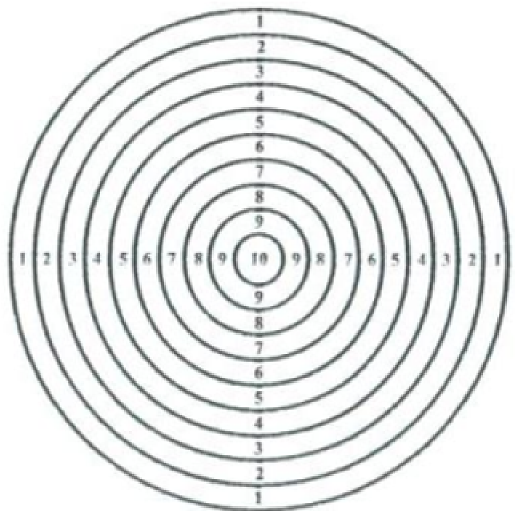
Върху картончета е написана всяка от цифрите 0-9 само по веднъж. Каква е вероятността след поставянето им в кутия и изваждането им оттам със затворени очи цифрите да са подредени по намаляващ ред в зависимост от последователността на изваждането им?
Решение:
Цифри: 0-9 $\implies$ 10 карточета които се подреждат по 10! начина $\implies$ $n = 10!$
Благоприятни изходи: $m = 1$, Да извадим тази подредба $(9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{10!}$$

Задача 6

Дадена е мишена. Радиусът на най външния кръг е 10см, а най вътрешния 1см. Движейки се навътре радиусите намаляват с 1см. Да се определи

- Каква е вероятността при произволно стреляне да се улучи всяка зона?
- Каква е вероятността при произволно стреляне да се улучи зона 5,6,7,8?



$$\left|\begin{array}{l} S_{10} = \pi r_{10}^2 = 100\pi \\ S_9 = \pi r_9^2 = 81\pi \\ S_8 = \pi r_8^2 = 8^2\pi = 64\pi \\ S_7 = \pi r_7^2 = 7^2\pi = 49\pi \\ S_6 = \pi r_6^2 = 6^2\pi = 36\pi \\ S_5 = \pi r_5^2 = 5^2\pi = 25\pi \\ S_4 = \pi r_4^2 = 4^2\pi = 16\pi \\ S_3 = \pi r_3^2 = 3^2\pi = 9\pi \\ S_2 = \pi r_2^2 = 2^2\pi = 4\pi \\ S_1 = \pi r_1^2 = 1\pi \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} m_1 = S_{10} - S_9 = 19\pi \\ m_2 = S_9 - S_8 = 17\pi \\ m_3 = S_8 - S_7 = 15\pi \\ m_4 = S_7 - S_6 = 13\pi \\ m_5 = S_6 - S_5 = 11\pi \\ m_6 = S_5 - S_4 = 9\pi \\ m_7 = S_4 - S_3 = 7\pi \\ m_8 = S_3 - S_2 = 5\pi \\ m_9 = S_2 - S_1 = 3\pi \\ m_{10} = S_1 = \pi \end{array}\right.$$

$n = 100\pi$

$$\left|\begin{array}{l} P(A_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{19\pi}{100\pi} = 0.19 \\ P(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{17\pi}{100\pi} = 0.17 \\ P(A_3) = \frac{m_3}{n} = \frac{15\pi}{100\pi} = 0.15 \\ P(A_4) = \frac{m_4}{n} = \frac{13\pi}{100\pi} = 0.13 \\ P(A_5) = \frac{m_5}{n} = \frac{11\pi}{100\pi} = 0.11 \\ P(A_6) = \frac{m_6}{n} = \frac{9\pi}{100\pi} = 0.09 \\ P(A_7) = \frac{m_7}{n} = \frac{7\pi}{100\pi} = 0.07 \\ P(A_8) = \frac{m_8}{n} = \frac{5\pi}{100\pi} = 0.05 \\ P(A_9) = \frac{m_9}{n} = \frac{3\pi}{100\pi} = 0.03 \\ P(A_{10}) = \frac{m_{10}}{n} = \frac{\pi}{100\pi} = 0.01 \end{array}\right.$$

$P = P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) + P(A_8) = 0.11 + 0.09 + 0.07 + 0.05 = 0.32$

Задача 7

Нека разлгедаме две фирми. На всеки 100 продукта доставени в първата фирма, 75 % са български, а във втората фирма - 50 %. Каква е вероятността дадена стока да е от български производител, ако е закупена от първата фирма и от втората.
A - Покупка на стока произведена в България.
B - Закупена от първа/втора фирма.

$$P(A/B) = \frac{75}{100} = 0.75$$

$$P(A/B) = \frac{50}{100} = 0.5$$

Задача 8

Вероятността да се появи ненулев потенциал върху корпуса на уред ориентиран към земята е 0.3. 99% от дефектно-токовите защити сработват и прекъсват веригата. Каква е вероятността да сработи защитата.
A - поява се ненулев потенциал.
B - сработване на дефектно-токова защита.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0.3 \cdot 0.99 = 0.297$$

Задача 9

Дадени са три несъвместими събития A,B,C. При провеждане на опит всяко от тях може да настъпи с вероятност $P(A) = 0.18,\ P(B) = 0.5,\ P(C) = 0.02$ Каква е вероятността да настъпи поне едно от събитията

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0.18 + 0.5 + 0.02 = 0.7$$

Задача 10

Дадена е електрическа верига, в която могат да възникнат следните събития

- A_1 - изгаряне на светодиод a_1 с вероятност $P(A_1) = 0.7$.
- A_2 - изгаряне на светодиод a_2 с вероятност $P(A_2) = 0.5$.

- B_1 - изгаряне на светодиод b_1 с вероятност $P(B_1) = 0.2$.
- B_2 - изгаряне на светодиод b_2 с вероятност $P(B_2) = 0.1$.
- B_3 - изгаряне на светодиод b_3 с вероятност $P(B_3) = 0.3$.

Каква е вероятността нито един да не свети.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = 0.7 + 0.5 - 0.7 \cdot 0.5 = 0.85$$
$$P(B) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) = 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.3 = 0.006$$
$$P(A+B) = 0.85 + 0.006 - 0.85 \cdot 0.006 = 0.8509$$

Задача 11

В непрозрачна кутия са поставени три цвята топки - червени, сини, зелени. При боядисването някои са оцветени неравномерно.

Цвят	Червен	Син	Зелен
Общо количество	50%	10%	40 %
Неравномерно оцветени	2 %	5%	1%

Каква е вероятността да се извади неравномерно оцветена.
А - Извадената топка е неравномерно оцветена.
$_r$ - Извадената топка е червена
$_b$ - Извадената топка е синя
$_g$ - Извадената топка е зелена

$$P(H_r) = \frac{50}{100} = 0.5 \implies P\left(\frac{A}{H_r}\right) = \frac{2}{100} = 0.02$$
$$P(H_b) = \frac{10}{100} = 0.1 \implies P\left(\frac{A}{H_b}\right) = \frac{5}{100} = 0.05$$
$$P(H_g) = \frac{40}{100} = 0.4 \implies P\left(\frac{A}{H_b}\right) = \frac{1}{100} = 0.01$$
$$P(A) = P(H_r) \cdot P\left(\frac{A}{H_r}\right) + P(H_b) \cdot P\left(\frac{A}{H_b}\right) + P(H_g) \cdot P\left(\frac{A}{H_g}\right) =$$
$$0.5 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.05 + 0.4 \cdot 0.01 = 0.019$$

Задача 12

Фирма произвежда един и същ модел ботуши от естествена и изкуствена кожа. В една от доставките в даден магазин 40% от ботушите били естествена кожа. Вероятността да са здрави ботушите от естествена кожа в продължение на 5 сезона е 0.9, а тези от изкуствена 0.5. Клиент купил ботуши и те били здрави 7 сезона. Каква е вероятността да са били от естествена кожа.
Решение:
A - Закупените ботуши са били здрави 7 сезона
E - Ботушите са от естестествена кожа
I - Ботушите са от изкуствена кожа

$$P(E) = \frac{40}{100} = 0.4 \qquad P\left(\frac{A}{E}\right) = \frac{90}{100} = 0.9$$
$$P(I) = \frac{60}{100} = 0.6 \qquad P\left(\frac{A}{I}\right) = \frac{50}{100} = 0.5$$
$$P(A) = P(E) \cdot P\left(\frac{A}{E}\right) + P(I) \cdot P\left(\frac{A}{I}\right) =$$
$$0.4 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.5 = 0.36 + 0.3 = 0.66$$
$$P\left(\frac{E}{A}\right) = \frac{m}{n} = \frac{P(E) \cdot P\left(\frac{A}{E}\right)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.9}{0.66} = \frac{0.36}{0.66} = \frac{6}{11} = 0.5455$$

11 Упражнение 11: Математическа индукция и рекурсия

Задача 1

Използвайки принципа на математическата индукция, да се докажат следните твърдения:

- $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$
  1. n = 1
  $$1 \cdot 1! = 1 \qquad (1+1)! - 1 = 1 \implies \text{вярно за n=1}$$
  2. n = k > 1
  $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! = (k+1)! - 1 \text{ истина}$$
  3. n = k+1
  $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! =$$
  $$(k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+1)!(k+1+1) - 1 = (k+2)! - 1$$
- $3^n < n! \quad \forall n > 6 \wedge n \in \mathbb{Z}^+$
  1. n = 7
  $$3^7 = 2187 \qquad 7! = 5040 \implies \text{вярно за n=7}$$
  2. n = k > 7
  $$3^k < k! \text{ истина}$$
  3. n = k+1
  $$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 \qquad (k+1)! = k!(k+1)$$
  $$3^k < k! \qquad 3 < k+1 (n > 7) \implies 3^{k+1} < (k+1)! \text{истина}$$

Задача 2

Нека функцията $f(n)$ е дефинирана посредством следните рекурентни зависимости:
Да се намерят f(1), f(2), f(3)

- $\left| \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(n+1) = -2 \cdot f(n) \end{array} \right. \qquad n \in \mathbb{Z}^+$

$$\left| \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(2) = -2f(1) = -2(1) = -2 \\ f(3) = -2f(2) = (-2)(-2) = 4 \end{array} \right.$$

- $\left| \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(n+1) = f^2(n) - 2 \cdot f(n) - 2 \end{array} \right. \qquad n \in \mathbb{N}$

$$\left| \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(1) = f(0)^2 - 2f(0) - 2 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 = -3 \\ f(2) = f(1)^2 - 2f(1) - 2 = -3^2 - 2(-3) - 2 = 13 \\ f(3) = f(2)^2 - 2f(2) - 2 = 13^2 - 2 \cdot 13 - 2 = 141 \end{array} \right.$$

Задача 3

Да се дадат рекурсивни дефиниции на следните функции, дефинирани нерекурсивно:

- $f(n) = 4 \cdot 7^n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$\left| \begin{array}{l} f(1) = 4 \cdot 7^1 = 4 \cdot 7 = 28 \\ f(n+1) = 4 \cdot 7^{n+1} = 7 \cdot 4 \cdot 7^n = 7 \cdot f(n) \end{array} \right.$$

- $f(n) = 3n + 5 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$\left| \begin{array}{l} f(1) = 3 \cdot 1 + 5 = 8 \\ f(n+1) = 3(n+1) + 5 = 3n + 3 + 5 = (3n+5) + 3 = f(n) + 3 \end{array} \right.$$

Задача 4

Да се дадат рекурсивна и нерекурсивна дефиниции намножеството S от:

- всички цели положителни четни числа

$$S = \{(2 \in S \wedge x \in S) \implies ((x+2) \in S)\} \quad S = \left\{ \begin{array}{|l} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n + 2 \end{array} \right\} \qquad S = \{2x | x \in \mathbb{Z}^+\}$$

- всички цели неотрицателни четни числа

$$S = \{(0 \in S \wedge x \in S) \implies ((x+2) \in S)\} \quad S = \left\{ \begin{array}{|l} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n + 2 \end{array} \right\} \qquad S = \{2x | x \in \mathbb{N}\}$$

12 Упражнение 12: Крайни автомати

Задача 1

Нека $E = \{\alpha, \beta, \gamma\},\ L_1 = \{\varepsilon, \alpha, \alpha\beta\beta\},\ L_2 = \{\gamma\}$. Да се определят:

- $L_1L_2 = \{\varepsilon, \alpha, \alpha\beta\beta\} \cdot \{\gamma\} = \{\varepsilon\gamma, \alpha\gamma, \alpha\beta\beta\gamma\}$
- $L_1^* = \{\varepsilon, \alpha, \alpha\beta\beta, (\varepsilon, \alpha, \alpha\beta\beta)(\varepsilon, \alpha, \alpha\beta\beta), ...\} = \{\varepsilon, \alpha, \alpha\beta\beta, \alpha\alpha, \alpha\alpha\beta\beta, \alpha\beta\beta\alpha, ...\}$
- $L_1 \cap L_2 = \varnothing$
- $L_1 \cup L_2 = \{\varepsilon, \alpha, \alpha\beta\beta, \gamma\}$

Задача 2

Нека: $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Да се определи $L_1 = (\alpha + \beta)\gamma^*$?

$$\gamma^* = \{\varepsilon, \gamma, \gamma\gamma, ...\} \qquad L_1 = (\alpha + \beta)\gamma^* = \alpha\gamma^* + \beta\gamma^*$$

$$\implies L_1\{\varepsilon, \alpha\gamma, \alpha\gamma\gamma, ...\} + \{\varepsilon, \beta\gamma, \beta\gamma\gamma, ...\} = \{\alpha, \beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\gamma\gamma, \beta\gamma\gamma, ...\}$$

Задача 3

Да се състави краен автомат, генериращ езика $L = (\alpha + \beta)^*\alpha,\ E = \{\alpha, \beta\}$

$$(\alpha + \beta)^* = \{\varepsilon, (\alpha + \beta), (\alpha + \beta)(\alpha + \beta), ...\}$$
$$L = (\alpha + \beta)^*\alpha = \{\alpha, \alpha\alpha, \beta\alpha, \alpha\alpha\alpha, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\alpha, \beta\beta\alpha\}$$
$$E = \{\alpha, \beta\} \qquad X = \{0, 1\}$$
$$f : \begin{cases} f(0, \alpha) = 1 \\ f(1, \alpha) = 1 \\ f(0, \beta) = 0 \\ f(1, \beta) = 0 \end{cases}$$
$$x_0 = 0$$
$$F = \{1\}$$

Задача 4

Нека е дадена азбуката $= \{\alpha_1, \alpha_2, \beta\}$. Да се синтезира краен автомат, генериращ езика L със стрингове с дължина поне 3 и следните свойства на всеки стринг.
1ва позиция: β; 2ра позиция: α_1, α_2; 3та позиция: β.
Всяка следваща позиция представлява произволенм елемент от множеството E или произволно тяхно съчетание.

$$L = \beta(\alpha_1 + \alpha_2)\beta(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta)^*$$

Задача 5

Да се състави краен автомат с азбука $E = \{1, 2, 3\}$ който да разпознава стринга 123.
Решение:

$$E = \{1,2,3\} \qquad x_0 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \qquad F = \{x_{123}\} \qquad X = \{x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_2x_3\}$$
$$x_1 \implies f(x_1,1) = x_1 \qquad f(x_1,2) = x_{12} \qquad f(x_1,3) = x_3$$
$$x_{12} \implies f(x_{12},1) = x_1 \qquad f(x_{12},2) = x_2 \qquad f(x_{12},3) = x_{123}$$
$$x_3 \implies f(x_3,1) = x_1 \qquad f(x_3,2) = x_2 \qquad f(x_3,3) = x_3$$
$$x_2 \implies f(x_2,1) = x_1 \qquad f(x_2,2) = x_2 \qquad f(x_2,3) = x_3$$

13 Упражнение 13