Дискретна математика

Exonaut

11 март 2021 г.

Съдържание

1 Лекция 1: Логика и логически оператори

1.1 Дефиниции

Дефиниция 1.1.1 ***Логиката*** *е система, базирана на съждения*

Дефиниция 1.1.2 ***Съждението*** *е твърдение което може да бъде истина или лъжа (но не и двете едновеременно).*
Следователно резултатът от едно съждение може да бъде истина(И) или ако то е вярно или лъжа (Л), ако е грешно.

Дефиниция 1.1.3 *Съжденията, които не съдържат в себе си други съждения, се наричат* ***прости****.*

Дефиниция 1.1.4 *Едно и няколко съждения могат да бъдат обединени в едно единствено* ***комбинирано съждение****, посредством логически оператори.*

Дефиниция 1.1.5 ***Таблица на истинност*** *се нарича таблица, в която се изброяват всички възможни комбинации от стойности на отделните променливи в съждението, както и съответните стойности на функцията.*

Дефиниция 1.1.6 *Две* ***съждения са еквиваленти****, ако имат една и съща таблица на истинност или следват едно от друго вследствие прилагани основни закони за преобразуване.*

1.2 Логически оператори

1.2.1 Отрицание(NOT)

Означава се със знака $\neg$
Функция на една променлива с таблица на истинност:

p	**¬p**
T	F
F	T

1.2.2 И, Конюнкция (AND)

Означава се със знака $\wedge$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	**q**	**p ∧ q**
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

1.2.3 ИЛИ, Дизюнкция (OR)

Означава се със знака $\vee$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	**q**	**p ∨ q**
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

1.2.4 Сума по модул 2, изключващо или (XOR)

Означава се със знака $\otimes$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	**q**	$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

1.2.5 Импликация, следствие

Означава се със знака $\rightarrow$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	**q**	$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

1.2.6 Двупосочно следствие

Означава се със знака $\Leftrightarrow$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	**q**	$\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

1.3 Закони за еквивалентни преобразувания

- Закон за идентичност : $p \wedge T \equiv p, p \vee F \equiv p$
- Закон за доминиране : $p \vee T \equiv T, p \wedge F \equiv F$
- Закон за пълна идентичност : $p \wedge p \equiv p, p \vee p \equiv p$
- Закон за двойно отрицание : $\neg(\neg p) \equiv p$
- Комутативен закон : $p \wedge q \equiv q \wedge p | p \vee q \equiv q \vee p$
- Асоциативен закон : $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r | p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
- Дистрибутивен закон : $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) | p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- Закони на Де Морган : $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) | \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$
- Закон за импликацията : $p \to q \equiv \neg p \vee q$
- Закон за тривиалната тавтология: $p \vee \neg p \equiv T | p \wedge \neg p \equiv F$
- Закон за тривиалното опровержение : $(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg(p \otimes q), \neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \otimes q)$

1.4 Предикатни функции и предикати

Дефиниция 1.4.1 (Предикатна функция) *Предикатна функция е твърдение, което съдържа една или повече променливи.*
Ако на дадена променлива е присвоена стойност, се казва, че е известна.
Предикатна функция става съждение, ако всички нейни аргументи са известни.

Дефиниция 1.4.2 (Предикат) *Нека е дадена предикатна функция $Q(x, y, z)$.*
Свойството Q, с което се задава връзката между променливите x, y, z се нарича предикат.

1.5 Квантор

Нека P(x) е предикатна функция.

Дефиниция 1.5.1 (Квантор за общност) *За твърдения от вида:*
*За **всяко** x, P(x) е истина/лъжа.*
се записва :
$\forall x P(x)$ *"за всяко x P(x)"*
Знака за общност е $\forall$.

Дефиниция 1.5.2 (Квантор за съществуване) *За твърдения от вида: Съществува* ***такова*** *x,* ***за което*** *$P(x)$ е* ***истина/лъжа****.*
се записва :
$\exists x P(x)$ *"съществува x, такова че P(x) е истина/лъжа"или "Съществува поне едно x, за което P(x) е истина/лъжа"*
Знака за общност е $\exists$.

1.6 Закони на Де Морган за квантори

- $\neg(\forall P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$
- $\neg(\exists P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$

2 Лекция 2: Математически доказателства

2.1 Теория на доказателствата

Теорията на доказателствата се използва за определяне на верността на дадени математически аргументи и за конструирането им.

Дефиниция 2.1.1 (Дедукция) *Дедукция във философията означава извеждане на особеното и единичното от общото, както и схващане на единичния случай на базата на всеобщ закон.*
В кибернетиката означава извеждане на твърдения от други твърдения с помощта на логически заключения.

2.2 Терминология

Дефиниция 2.2.1 (Аксиома) *Аксиомата е базово допускане, което не е необходимо да се доказва. Аксиомите са твърдения, които са истина, или твърдения които се приемат за истинам но не могат да бъдат доказани.*

Дефиниция 2.2.2 (Доказателство) *Доказателството се използва, за да се докаже, че дадено твърдение е истина. То се състои от последователност от твърдения, които формират* ***аргумент****.*

Дефиниция 2.2.3 (Теорема) *Теорема е твърдение, чиято истинност се доказва.*
Теоремата се състои от две части: условия(хипотези) и извод(заключения).
Коректното доказателство (по дедукция) се състои в това да се установи:

- *Ако условията са изпълнени, то извода е истина.*
- *Ако съждението "условия $\rightarrow$ извод"е таволология.*

Често липват елементи на логическа връзка, която може да бъде запълнена с допълнителни условия и аксиоми и съждения, свързани помежду си посредством подходящи правила за изводи.

Дефиниция 2.2.4 (Лема) *Лемата е проста теорема, което се използва като междинен резултат за доказване на друга теорема.*

Дефиниция 2.2.5 (Слествие) *Следствието е резултат, който директно следва от съответната теорема*

Дефиниция 2.2.6 (Допускане) *Допускането е твърдение, чийто резултат е неизвестен. Веднъж доказано, то се превръща в теорема.*

2.3 Правила за извод

$\therefore$ - знак за следователно
Всичко преди знака са хипотези.

- Събиране(Addition)
  $p(q)$
  $\therefore p \vee q$

- Опростяване (Simplification)
  $p \wedge q$
  $\therefore p(q)$

- Конюнкция (Conjunction)
  p
  q
  $\therefore p \wedge q$

- Закон за безразличие(Modus ponens)
  p
  $p \to q$
  $\therefore q$

- Modus tollens
  $\neg q$
  $p \to q$
  $\therefore \neg p$

- Хипотетичен силогизъм (Hypothetical syllogism)
  $p \to q$
  $q \to r$
  $\therefore p \to r$

- Дизюнктивен силогизъм
  $p \vee q$
  $\neg p$
  $\therefore q$

2.4 Аргументи

Дефиниция 2.4.1 (Аргумент) *Аргументът се състои от една или няколко хипотези и заключение.*
Аргумент е валиден, ако всичките му хипотези са истина и заключението също е истина.
Ако някоя от хипотезите е лъжа, дори валиден аргумент може да води до некоректно заключение.

Доказателство: трябва да се докаже че твърдението "хипотези $\rightarrow$ заключение"е истина, като се използват правила за извод.

Пример 2.4.1 *"Ако* 101 *е кратно на* 3 *, то* 101^2 *се дели на* 9*."*
*Въпреки че аргументът е валиден, заключението е некоректно (невярно), защото едната от хипотезите(“*101 *е кратно на* 3*”)е лъжа.*
Ако в аргумента 101 *се замести с* 102*, ще се получи коректно заключение “*102^2 *е кратно на* 9*”.*
Нека p: "101 е кратно на 3"и q: "101^2 *е кратно на* 9*". Тогава имаме следния случай*
p
$p \rightarrow q$
$\therefore q$
Обаче p е лъжа, следователно q е некоректно заключение.

2.5 Правила за извод при използване на квантори и предикати

- Универсалноследствие(Universal instantiation)
  $\forall x P(x)$
  $\therefore P(c)$ ако $c \in U$

- Универсално обобщение(Universal generalization)
  $P(c)$ за някое $c \in U$
  $\therefore \forall x P(x)$

- Частичноследствие(Existential instantiation)
  $\exists x P(x)$
  $\therefore P(c)$ за някой елемент $c \in U$

- Частично обобщение(Existential generalization)
  $P(c)$ за някой елемент $c \in U$
  $\therefore \exists x P(x)$

2.6 Доказателство на теореми

- Директно доказателство
  Импликацията "$p \rightarrow q$"може да бъде доказана чрез доказване на твър-

дението:
"Ако p е истина , то q също е истина."

- Индиректно доказателство
Импликацията "$p \to q$"е еквивалентна на следния контра-пример "$\neg q \to \neg p$". Следователно, доказателството на изходната импликация "$p \to q$"се свежда до доказване на твърдението: "Ако q е лъжа, то и p също е лъжа.

3 Лекция 3: Множества