Математически анализ 2

Exonaut

19 април 2021 г.

Съдържание

1 Лекция 1: Пространството $\mathbb{R}^m$

1.1 Няколко важни неравенства

Нека a_k и $b_k(k = 1, 2, ..., m)$ са реални числа и $m \in \mathbb{N}$

Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц). *В сила е следното неравенство:*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални:
$(\exists \lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k)$
Равенството може да се запише:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| \le \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)}$$

Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски). *В сила е следното неравенство:*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ (p \ge 1)$$

Теорема 1.1.3. *В сила е следното неравенство:*

$$|a_k + b_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \le \sum_{k=1}^{m} |a_k - b_k|$$

1.2 Видове крайно мерни пространства

1.2.1 Линейно(Векторно) пространство

Дефиниция 1.2.1. *Нека L е линейно(векторно) пространство над полето R. В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.*

1. $x, y \in L \implies z = x + y \in L$
2. $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies z = \lambda x \in L$

1.2.2 Евклидово пространство

Дефиниция 1.2.2. *Крайномерното пространство L се нарича евклидово, ако в него е въведено скаларно произведение, т.е за всеки два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави реално число (x, y), удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.*

1. $x, y, z \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies (x + y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
2. $x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$
3. $x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$

1.2.3 Метрично пространство

Дефиниция 1.2.3. *Крайномерното пространство L се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика) ρ, т.е за два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави неотрицателно число $\rho \geq 0$ със следните свойства*

1. $\rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).\forall x, y, z \in L$

Метрично пространство L с метрика ρ се означава (L, ρ)

1.2.4 Нормирано пространство

Дефиниция 1.2.4. *Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма $\|.\|$, т.е $\|.\| : L \to \mathbb{R}_0^+$ със свойства*

1. $x = 0 \implies \|x\| = 0, x \neq 0 \implies \|x\| > 0$
2. $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $x, y \in L \implies \|x + y\| \leq |x| + |y|$

Теорема 1.2.1. *Ако L е нормирано пространство с дадена норма $\|.\|$, то L е метрично пространство, т.е равенството $\rho(x, y) = \|x - y\|$ дефинира разстоянието в L*

1.3 Пространството $\mathbb{R}^m$ - дефиниция и основни свойства

Дефиниция 1.3.1. *Множеството от наредени m-торки $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ от реални числа. Числата $a_1, a_2, ..., a_m$ се наричат съответно първа, втора, ..., m-та кордината на a.*

Ако имаме $a = (a_1, a_2, ..., a_m), b = (b_1, b_2, ..., b_m), ; \lambda \in \mathbb{R}$ то

1. $a + b = (a_1, a_2, ..., a_m) + (b_1, b_2, ..., b_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_m + b_m) \in \mathbb{R}^m$
2. $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_m) \in \mathbb{R}^m$

1.3.1 Скаларно произведение

Скаларно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \right)$$

С така въведено скаларно произведение пространството R^m се превръща в евклидово.

1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k)^2}$$

се въвежда норма в $\mathbb{R}^m$.
Нормата генерира метрика в $\mathbb{R}^m$ с формула:

$$\rho(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k)^2}$$

1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат: $a^2 = (a, a) = \sum_{k=1}^{m} a_k^2$

1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат: $(a,b)^2 \leq a^2 b^2$ и $|(a,b)| \leq \|a\|\|b\|$

1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат: $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

1.4 Точки и множества в $\mathbb{R}^m$

1.4.1 Паралелепипед

Дефиниция 1.4.1. *Множеството*

$$\Pi(a;\delta_1,\delta_2,...,\delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k < x_k - a_k < \delta_k\}$$

се нарича отворен паралелепипед в $\mathbb{R}^m$ с център точката a.

Множеството

$$\widetilde{\Pi}(a;\delta_1,\delta_2,...,\delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k \leq x_k - a_k \leq \delta_k\}$$

се нарича затворен паралелепипед в R^m с център точката a.

Ако $\delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_m = \delta$, получените множества $\Pi(a;\delta)$ и $\widetilde{\Pi}(a;\delta)$ се наричат съответно отворен и затворен куб в $\mathbb{R}^m$ с център a.

1.4.2 Сфера и кълбо

Дефиниция 1.4.2. *Нека числото $r > 0$. Множеството*

$$B(a;r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x,a) < r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x-a\| < r\}$$

се нарича отворено кълбо в $\mathbb{R}^m$ с център a и радиус r, множеството

$$\widetilde{B}(a;r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x,a) \leq r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x-a\| \leq r\}$$

се нарича затворено кълбо в $\mathbb{R}^m$ с център a и радиус r, а множеството

$$S(a;r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x,a) = r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x-a\| = r\}$$

се нарича сфера в $\mathbb{R}^m$ с център a и радиус r, а множеството

Дефиниция 1.4.3. *Точката a се нарича*

- *вътрешна за множеството A, ако съществува отворено кълбо* $B(a,\varepsilon) : B(a,\varepsilon) \subset A$
- *външна за A, ако съществува* $B(a,\varepsilon) : B(a,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$
- *контурна за A, ако за всяко* $\varepsilon > 0 : B(a,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ *и* $B(a,\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \varnothing$
- *изолирана ако съществува* $\varepsilon > 0 : B(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$

Дефиниция 1.4.4. *Множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича*

- *отворено, ако всяка негова точка е вътрешна*
- *затворено, ако неговото допълнение* $\mathbb{R}^m \setminus A$ *е отворено*

Дефиниция 1.4.5. *Околност на дадена точка* $a \in \mathbb{R}^m$ *се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с* U_a*.*

Дефиниция 1.4.6. *Точка a се нарича точка на сгъстяване на множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$*, ако всяка нейна околност* U_a *съдържа поне една точка на A, различна от a, т.е* $U_a \cap (A \setminus \{a\} \neq \varnothing$

Дефиниция 1.4.7. *Величината*

$$d = d(A) = \sup_{a', a'' \in A} \rho(a'; a'')$$

се нарича диаметър на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$*.*

Дефиниция 1.4.8. *Множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича ограничено, ако съществува кълбо(с краен радиус), което го съдържа.*

Дефиниция 1.4.9. *Множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича компактно, ако A е затворено и ограничено.*

Дефиниция 1.4.10. *Множеството* $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$*, чийто кординати са непрекъснати функции* $x_k = x_k(t)(k = 1, 2, ..., m)$*, дефинирани върху даден интервал [a,b] се нарича непрекъсната крива в* R^m*. t се нарича параметър на кривата.*
Точките $x(a) = (x_1(a), x_2(a), ..., x_m(a))$ *и* $x(b) = (x_1(b), x_2(b), ..., x_m(b))$ *се наричат начало и край на дадената крива. Ако* $x(a) = x(b)$ *кривата е затворена*

Дефиниция 1.4.11. *Нека* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ *и* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ *са фиксирани числа за които* $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$*. Множеството от точки* $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ *чиито кординати се представят във вида*

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, ..., m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството R^m*, минаваща през точка* x^0 *по направление* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$*.*

Дефиниция 1.4.12. *Множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъсната крива* γ*, която ги свързва и* $\gamma \subset A$*.*

Дефиниция 1.4.13. *Множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.*

Дефиниция 1.4.14. *Област, всеки две точки на която могат да се съединят с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.*

Дефиниция 1.4.15. *Областа* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича звездообразна област, относно точката* $x^0 \in A$*, ако за всяка точка* $x \in A$ *отсечката* $[x^0, x]$ *лежи изцяло в* A*.*

1.5 Редици от точки в $\mathbb{R}^m$

Дефиниция 1.5.1. *Редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\}$ *се нарича редица от точки в* $\mathbb{R}^m$*, а редицата* $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}(k = 1 \div m)$ *- к-та координатна редица. За по кратко редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ *се означава* $\{x^{(n)}\}$

Дефиниция 1.5.2. *Редицата* $\{y^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ *се нарича поредица на редицата* $\{x^{(n)}\}$ *и се означава:*
$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, ...,$ *или* $\{x^{(n_l)}\}_{l=1}^{\infty}$
ако за всяко l *съществува такова* n_l*, че* $y^{(l)} = x^{(n_l)}$*, при това, ако* $l' < l''$*, то* $n_{l'} < n_{l''}$*.*

Дефиниция 1.5.3. *Редицата* $\{x^{(n)}\}$ *се нарича сходяща към точка* $a \in \mathbb{R}^m$ *(граница на редицата), ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува такова* $N_0 > 0$*, че за всяко* $n > N_0$ *е изпълено неравенството* $\rho(x^{(n)}; a) = \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$*. Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.*

Дефиниция 1.5.4. *Точката* $a \in R^m$ *се нарича точка на сгъстяване на редицата* $\{x^{(n)}\}$*, ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.*

Теорема 1.5.1. *Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$ и точката $a \in \mathbb{R}^m$. Тогава*

$$(\{x^{(n)}\} \to a) \iff (x_k^{(n)} \to a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката a, тогава и само тогава когато всяка от кординатите на редици $\{x_k^{(n)}\}$ има граница съответната кордината a_k на точката a

Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши)**.** *Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$. Редицата $x^{(n)}$ е сходяща тогава и само тогава когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $N_0 > 0$, че при всяко $n \in N, n > N_0$ и всяко $p \in \mathbb{N}$ е изпълено $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = \|x^{(n+p)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$*

Дефиниция 1.5.5. *Редицата $\{x^{(n)}\}$ се нарича ограничена , ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.*

Теорема 1.5.3 (Болцано-Вайерщрас)**.** *От всяка ограничена редица в пространството R^m може да се избере сходяща подредица.*

Дефиниция 1.5.6. *Всяко множество $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича компактно, ако от всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$, може да се избере сходяща подредица $\{x_k^{(n)}\}$ с граница принадлежаща на A*

2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

2.1 Дефниция на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.1.1. *Казва се че дадена функция с дефиниционна област(дефиниционно множество) D, ако на всяка точка $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ от множеството D е съпоставено реално число $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, т.е на всяко $x \in D$ съществува единствено число $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Понякога за кратко се записва.*

$$f : D \to \mathbb{R}$$

В $\mathbb{R}^2$ се използва (x, y) за означение, а в $\mathbb{R}^3$ - (x, y, z).

2.2 Граница на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.2.1 (Коши)**.** *Нека $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, a е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \to a$ със стойностти $x \neq a$ ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записва се*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Дефиниция 2.2.2 (Хайне)**.** *Нека $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, a е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \to a$ със стойностти $x \neq a$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in D, x^{(n)} \neq a$ сходяща към a, числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница L.*

Теорема 2.2.1. *Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.*

Дефиниция 2.2.3. *Нека $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, a е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ дивергира към ∞ (съответно към $-\infty$) при $x \to a$ със стойностти $x \neq a$, ако за всяко $A \in \mathbb{R}$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $f(x) > A$(съответно $f(x) < A$). Записва се*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty(-\infty)$$

Дефиниция 2.2.4 (Повторна граница)**.** *Нека $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на сгъстяване за D и функция $f : D \to \mathbb{R}$. Нека съществува* *такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката $_2$, че за всички стойностти $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim\limits_{x\to a_1} f(x,y) = \varphi(y)$. Ако освен това съществува $\lim\limits_{y\to a_2} \varphi(y) = A$, A се нарича повторна граница и се означава както следва*

$$A = A_{1,2} = \lim_{y\to a_2}(\lim_{x\to a_1} f(x,y))$$

.

Аналогично се съвежда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x\to a_1}(\lim_{y\to a_2} f(x,y))$$

Теорема 2.2.2. *Нека $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на сгъстяване за D и функция $f : D \to \mathbb{R}$. Нека*

1. *Съществува такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката a_2, че за всички стойностти $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim\limits_{x\to a_1} f(x,y) = \varphi(y)$.*

2. *Съществува границата $\lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L$.*

Тогава съществува граница $\lim\limits_{y\to a_2} \varphi(y)$ и освен това е в сила равенството $\lim\limits_{y\to a_2} \varphi(y) = L$

2.3 Непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.3.1. *Казва се че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Дефиниция 2.3.2 (непрекъснатост по Коши)**.** *Казва се, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството D, за което $\rho(x;a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Дефиниция 2.3.3 (непрекъснатост по Хайне)**.** *Казва се, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}$ (с $x^{(n)} \in D$ за $n \in \mathbb{N}$) сходяща към a, числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница $f(a)$.*

Дефиниция 2.3.4 (за съставна функция)**.** *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество, $f : \to \mathbb{R}$ и $x_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}, k = 1 \div m$. Полагайки $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)) \in A$ за всяко $t \in (\alpha, \beta)$ съставната функция $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$ се дефинира по формулата*

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$$

Теорема 2.3.1. *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f: \ \to \mathbb{R}$ интервалът $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $x_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ за $k = 1 \div m$. Нека освен това $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)) \in A$ за $\forall t \in (\alpha, \beta)$ и x_k са непрекъснати в точката $t_0 \in (\alpha, \beta)$ за $k = 1 \div m$, а f е непрекъсната в $x^0 = x(t_0)$. Тогава функцията $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$ е непрекъсната в точката t_0*

2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.4.1. *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f: A \to \mathbb{R}$. Функцията се нарича равномерно непрекъсната в A, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\epsilon)$, че за всеки две точки $x', x'' \in A$ за които разстоянието $\rho(x'; x'') = \|x' - x''\| < \delta$, да следва, че $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Теорема 2.4.1 (на Вайерщрас)**.** *Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \to \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K. Тогава*

1. *f е ограничена в K, т.е съществуват $m, M \in \mathbb{R}$ такива че за всички $x \in K$ е изпълнено неравенството $m \leq f(x) \leq M$*

2. *f достифа най малката и най-голямата си стойност в K, т.е съществуват точки $x^0, y^0 \in K$, такива че*

$$f(x^0) = \inf_{x \in K} f(x); f(y^0) = \sup_{y \in K} f(x)$$

Теорема 2.4.2 (на Кантор)**.** *Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \to \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K. Тогава f е равномерно непрекъсната върху K.*

3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи

3.1 Дефиниция на частна производна

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $D \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество
- $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ - точка, принадлежаща на D
- $U_{x^0} \subset D$ - околност на x^0
- $U_{x_i^0} \subset D$ - околност на x_i^0 (i = 1, 2, ..., m)
- точката $(x_1^0, x_2^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^i, ..., x_m^0) \in U_{x^0}$, за всички стойности на $x_i \in U_{x_i^0}$
- f и g - функции, дефинирани съответно в D и $U_{x_i^0}$. т.е
  $f : D \to \mathbb{R}, g : U_{x_i^0} \to \mathbb{R}$ и $g(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^i, ..., x_m^0)$

Дефиниция 3.1.1. *Производната, ако съществува на функцията g в точката x_i^0 се нарича частна производна на функцията f(по променлива x_i^0) в точката x^0. Използва се означението $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(x^0)$.*
Частната производна на функцията f относно променливата x_i е равна на границата на функцията $\varphi(h_i) = \dfrac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i}$ при $h_i \to 0$ (ако съществува) т.е

$$\lim_{h_i \to 0} \varphi(h_i) = \lim_{h_i \to 0} \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$$

Пример 3.1.1.

$$f(x, y) = x^2 + 9xy^2$$
$$f'_x(x, y) = (x^2)'_x + (9xy^2)'_x = 2x + 9y^2$$
$$f'_y(x, y) = (x^2)'_y + (9xy^2)'_y = 0 + 9x \cdot 2 \cdot y = 18xy$$

3.2 Частни производни от по-висок ред

Дефиниция 3.2.1. *Частната производна на частната производна от $n-1$ ред, $n = 1, 2, ...$(ако съществува), се нарича частична производна от n-ти ред. Частните производни, получени при диференциране по различни променливи се наричат смесени производни, а получените при диференциране само по една и съща променлива се наричат чисти производни.*

Пример 3.2.1.

$$f(x, y) = x^3 \sin(6y) + x^2y^3 + 2222, f''_{x,y} =?, f''_{y,x} =?$$

$$f''_{x,y} = (f'_x(x, y))'_y$$
$$f'_x(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_x + (x^2y^3)'_x + (2222)'_x = 3x^2 \sin(6y) + 2xy^3 + 0$$
$$f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y) + 2xy^3)'_y$$
$$f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y))'_y + (2xy^3)'_y = 3x^2 \cos(6y).6 + 2.3xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

$$f''_{y,x} = (f'_y(x, y))'_x$$
$$f'_y(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_y + (x^2y^3)'_y + (2222)'_y$$
$$f'_y(x, y) = x^3 \cos(6y).6 + x^2.3y^2 + 0 = 6x^3 \cos(6y) + 3x^2y^2$$
$$f''_{y,x} = (6x^3 \cos(6y) + 3x^2y^2)'_y = (6x^3 \cos(6y))_y + (3x^2y^2)'_y$$
$$f''_{y,x} = 6.3.x^2 \cos(6y) + 3.2.xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

Теорема 3.2.1 (за равенство на смесени производни)**.** *Нека точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и нека функцията f е дефинирана в отвореното множество $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2$, което е нейната област т.е $f : U \to \mathbb{R}$. Нека освен това съществуват частните производни $f'_x, f'_y, f''_{x,y}, f''_{y,x}$ за всички $(x, y) \in U$ и $f''_{x,y}, f''_{y,x}$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0). Тогава е изпълнено равенството*

$$f''_{x,y}(x_0, y_0) = f''_{y,x}(x_0, y_0)$$

3.3 Диференцируемост на функция

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$

- $U \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество, което е околност на x^0.Без ограничение на общността може да се счита че U е δ-околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0;\delta)$ с център x^0 и радиус δ

- $f : U \to \mathbb{R}$ - функция дефинирана в $U = B(x^0;\delta)$

Дефиниция 3.3.1. *Функцията f се нарича диференцируема в точка x^0 ако съществуват числа $A_1, A_2, ..., A_m$ и функция $\varepsilon(x^0, x-x^0)$, дефинирана за всички допустими стойности на $x \in U$ и $x - x^0 = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, ...x_m - x_m^0)$, като при това*

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} A_k(x_k + x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0)\|x - x^0\|$$

и $\lim\limits_{\|x-x^0\|\to 0} \varepsilon(x^0, x - x^0) = 0$

Дефиниция 3.3.2. *Функцията f се нарича диференцируема в отвореното множество U, ако тя е диференцируема във всяка негова точка.*

Теорема 3.3.1. *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то тя е непрекъсната.*

Дефиниция 3.3.3. *В случай на диференцируемост в точката x^0 на функцията $f : U \to \mathbb{R}$, изразът*

$$df(x^0) \circ (h) = A_1h_1 + A_2h_2 + ... + A_mh_m$$

(или $df, df(x^0)$) се нарича пълен диференциал на $f(x)$ в точката x^0

Теорема 3.3.2. *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то съществуват частните производни $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ в точката x^0 и освен това $A_k(x^0) = \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$.*

Дефиниция 3.3.4. *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то със следната формула се изразява нейната производна в точката x^0*

$$f'(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0))$$

.

Теорема 3.3.3. *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ притежава частни производни $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$ в отвореното множество U и освен това са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то f е диференцируема в точката x^0.*

Дефиниция 3.3.5. *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ притежава частни производни в U и тези частични производни са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в точката x^0. Ако тези производни са непрекъснати в U, то функцията се нарича непрекъсанот диференцируема в това множество.*

Дефиниция 3.3.6. *Диференциалът на диференциала от $n-1$ ред (n = 2, 3, ...) от функцията f(ако съществува) се нарича диференциал от n-ти ред(n-ти диференциал) на тази функция и се бележи $d^n f$*

Ако f е два пъти непрекъсната и диференцируема в $x^0 \in U$ тогава втория диференциал получава по следния резултат

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f(x^0)$$

което е симетрична квадратична форма на $dx_i (i = 1 \div m)$.

Аналогично ако f е n пъти непрекъсната и диференцируема в $x^0 \in U$, то $d^n f(x^0)$ съществува и се дава със следната формула

$$d^n f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f(x^0)$$

4 Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права

4.1 Диференциране на съставна функция

$x^0 \in \mathbb{R}^m$ и отворено множество $U \subset \mathbb{R}^m$ е околност на точката x^0 (Без ограничение на общността може да се счита че U е δ-околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0;\delta)$ с център x^0 и радиус δ).
$t_0 \in (\alpha,\beta) \subset R$

Теорема 4.1.1. *Нека функцията f е дефинирана в U, а φ_k - в интервала (α,β), т.е*
$f : U \to \mathbb{R}$ *и* $\varphi_k : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ $(k = 1 \div m)$
като при това $x_k = \varphi_k(t)$ за $k = 1 \div m$, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t) \in U$ за всички стойности на $t \in (\alpha,\beta)$. Нека f е диференцируема в U, f'_k са непрекъснати в x^0 за $k = 1 \div m$, φ_k са диференцируеми в t_0 и $F : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ е дефинирана с равенствово.

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)), t \in (\alpha,\beta)$$

Тогава функцията F е диференцируема в t_0 и в сила е следното равенство

$$F'(t_0) = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(x^0)\varphi'_k(t_0)$$

За $m = 2$:
$\varphi_1(t) = \varphi(t), \varphi_2(t) = \psi(t)$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0)$$

Пример 4.1.1. $f(x,y)$ - дефинирана и диференцируема в $U_{(1,2)} \subset \mathbb{R}^2$. с непрекъснати частни производни f'_x, f'_y в точката (1,2).
Намерете производната $F'(0)$ на съставната фунция F, зададена с равен-

ството $F(t) = f(1+3t, 2+4t)$.

$t_0 = 0$
$x = \varphi(t) = 1 + 3t$
$y = \psi(t) = 2 + 4t$
$x_0 = \varphi(0) = 1$
$y_0 = \psi(0) = 2$
$\varphi'(t) = 3$
$\psi'(t) = 4$
$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0) \implies F'(0) = 3f'_x(1,2) + 4f'_y(1,2)$

4.2 Производна по посока. Градиент

Нека $x^0 \in \mathbb{R}^m$ и лъчът l е дефиниран, както следва:

$$l : x = x^0 + t\nu, t > 0$$

Функцията f е дефинирана върху този лъч, а

$$\varphi(t) := f(x(t)) = f(x^0 + t\nu), t > 0$$

Дефиниция 4.2.1. *Границата(ако съществува)*

$$\lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

се нарича производна на f в точката x^0 по посока на вектора ν и се означава $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}$, т.е

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

ако съществува границата.

Ако частните производни съществуват, са производни "по посока на кординатните оси".

Ако f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката в x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0, то съществува производната ѝ по посока на вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m)$ и

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{m} \nu_k \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$$

Дефиниция 4.2.2. *Векторът с кординати $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0)$ се нарича градиент на f в точката x^0 и се означава*

$$grad\, f(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0))$$

Предвид тази дефиниция, формулата за производна по посока на вектор ν се записва по кратко във вида

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = grad\,(f(x^0), \nu)$$

Теорема 4.2.1. *Ако функцията f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката в x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0, то съществува производната на f по посока на произволен вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m)$ и тя се дава с формула: $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = grad\, f(x^0)$*

Ако, ν е единичен вектор, т.е $\|\nu\| = 1$.
Тогава е в сила неравнестово $\left|\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| \leq \|grad\, f(x^0)\|$, което следва от неравенство на Коши.

$$\left|\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| = \left|grad\,(f(x^0), \nu)\right| \leq \|grad\, f(x^0)\|\|\nu\| = \|grad\, f(x^0)\|$$

Равенство се достига само когато ν и $f(x^0)$ са колинеарни (еднопосочни или успоредни). тогава

$$\left|\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| = \|grad\, f(x^0)\|$$

Ако вектора ν е колинеарен с градиента, тогава векторът $\nu = \dfrac{grad\, f(x^0)}{\|grad\, f(x^0)\|}$ и тогава

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \left(grad\, f(x^0), \frac{grad\, f(x^0)}{\|grad\, f(x^0)\|}\right) = \|grad\, f(x^0)\|$$

Ако $grad\, f(x^0) \neq 0$ то производната достига най голяма стойност единствено, ако диференцирането се извършва по посока на градиента. С други думи, посоката на градиента е посоката на най бързо нарастване на функцията, а големината му е равна на производната по тази посока.

Ако $\nu = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, ..., \cos\alpha_m)$, то производната по посока ν става

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = f'_{x_1}(x^0)\cos\alpha_1 + f'_{x_2}(x^0)\cos\alpha_2 + ... + f'_{x_m}(x^0)\cos\alpha_m.$$

4.3 Допирателна равнина. Нормална права

- $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ - точка в $\mathbb{R}^2$
- $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ точка в $\mathbb{R}^3$
- $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2 =$ - околност на (x_0, y_0)
- $f : U \to \mathbb{R}$ - функция
- $z_0 = f(x, y)$
- $S : z = f(x, y) \iff S : f(x, y) - z = 0$ - уравнение на равнина
- f'_x, f'_y - първи частни производни за всички $(x, y) \in U$,f'_x, f'_y са непрекъснати в точката (x_0, y_0)

Дефиниция 4.3.1. *Равнината $\tau(\tau \nparallel Oz)$, зададена с уравнение*

$$\tau : z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина в точкат M_0 към повърхнината S и представлява графиката на $f(x, y)$.

Дефиниция 4.3.2. *Векторите n_1, n_2*

$$n_1(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) \qquad n_2(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1),$$

които са нормални вектори на тангенциалната равнина, се наричат нормални вектори и за повърхнината S.
$n_1 = -n_2$ Това позволява да се използват за ориентация на повърхнината S.
Горната страна се дефинира с вектора n_1 за който ъгъл $\measuredangle(n_1, k)$ е остър.

Дефиниция 4.3.3. *Правата n, зададена с уравнение*

$$n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$

се нарича нормала към повърхнината S към точка M_0

Ако прекараме две равнини през $_0$ съответно $\alpha : x = x_0$ и $\beta : y = y_0$ всяка от тях пресича повърхнината в крива линия съответно

$$C_1 : x = x_0, y = y, z = f(x_0, y) \qquad C_2 : x = x, y = y_0, z = f(x, y_0)$$

t_1 е направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в точката $_0$, а с t_2 - направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в същата точката, то

$$t_1(0, 1, f'_y(x_0, y_0), \qquad t_2(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$$

Равнината τ е компланарна с векторите t_1, t_2 то нейния нормален вектор може да се получи от векторното им произведение

$$n_1 = t_2 \times t_1 \qquad n_2 = t_1 \times t_2$$

Пример 4.3.1. За повърхнина S, зададена с уранение $S : z = x^2 + y^2 + 3$, да се напишат:
1) допирателната равнина $\tau z M_0(0, 0, 3)$
2) нормалните вектори на τ в т. M_0.
3) нормалата на повърхнината S в т. M_0.
Решение:

$$z'_x = 2x\ ; z'_y = 2y\ ; M_0(0, 0, 3) = M_0(x_0, y_0, z_0)$$
$$z'_x(x_0, y_0) = z'_x(0, 0) = 0\ ; z'_y(x_0, y_0) = z'_y(0, 0) = 0$$
$$1)\tau : z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$\tau : z - 3 = 0x + 0y \iff \tau : z = 3$$
$$2)\vec{n_1} = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) = (0, 0, 1)$$
$$\vec{n_2} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1) = (0, 0, -1)$$
$$3)n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$
$$n : \frac{x - 0}{0} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 3}{1} = \lambda$$
$$n(0, 0, \lambda + 3), \lambda \in \mathbb{R}$$

5 Лекция 5: Неявни функции. Съществуване и диференциране

5.1 Неявни функции

Нека имаме уравнението $F(x, y) = 0$ и да се реши спрямо у. Решението трябва да зависи и от другата променлива. Нека $y = f(x)$ и заместваме в началното уравнение.

$$F(x, f(x)) = 0$$

Дефиниция 5.1.1. *Ако функцията $f(x)$ удовлетворява равенството*

$$F(x, f(x)) = 0$$

за всяко x от дефиниционното си множество, то тя се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението $F(x; y) = 0$.

Ако диференцираме равенството $F(x, f(x)) = 0$ по x с теоремата за съставни функции получаваме

$$F'_x(x, f(x)) + f'(x)F'_y(x, f(x)) = 0 \implies f'(x) - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

Където $F'_y(x, f(x)) \neq 0$

Пример 5.1.1. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$

$$F(x, y) = 0 \iff y^2 = 5 - x^2$$
$$y_{1,2} = \pm\sqrt{5 - x^2}$$

Нека $M_0(x_0, y_0)$ точка в $\mathbb{R}^2$, отвореното множество $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$ е нейна околност и нека $F \to \mathbb{R}$.

Теорема 5.1.1 (Съществуване на неявна функция)**.** *Нека $M_0(x_0, y_0)$ точка в $\mathbb{R}^2$, отвореното множество $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$ е нейна околност и функцията $F : U \to \mathbb{R}$ удовлетворява следните условия*

1. *F е непрекъсната в U*

2. *$F(x_0, y_0) = 0$*

3. *За всяка точка $(x, y) \in U$ $\exists F'_y(x, y)$*

4. *F'_y е непрекъсната в M_0*

5. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогава съществуват околности

$$X = \{x : |x - x_0| < a\}(a > 0) \qquad Y = \{y : |y - y_0| < b\}(b > 0)$$

такива че правоъгълника $\Pi = X \times Y \subset U$ *и съществува единствена функция* $y = f(x), f : X \to Y$, f *- непрекъсната в* X, $f(x_0) = y_0$ *и* $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$

Дефиниция 5.1.2. *Фунцкията* $y = f(x)$ *се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението* $F(x, y) = 0$, *в околност на точката* (x_0, y_0)

Теорема 5.1.2 (Добавка към 5.1.1)**.** *Ако освен това* F'_x, F'_y *са дефинирани в* U *и непрекъснати в* (x_0, y_0) *то* $f(x)$ *е диференцируема в точката* x_0 *и* $f'(x_0)$ *се изразява*

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

Ако F'_x, F'_y са непрекъснати в $U = U_{M_0}$, то f' е непрекъсната в X. Прилагайки формулата за производна в произволна точка в $x \in X$ получаваме

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \tag{1}$$

Аналогично се формулира теоремата за неявна функция от уравнението $F(x, y) = 0,$ за $x(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ $(m > 2)$ и $y \in R$ т.е $F(x_1, x_2, ..., x_m, y) = 0$

Теорема 5.1.3 (Съществуване на неявна функция)**.** *Нека точката* $x^0 = (x^0_1, x^0_2, ..., x^0_m) \in \mathbb{R}^m, M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *и* $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ *е околност на* M_0 *и функцията* $F : U \to \mathbb{R}$ *удовлетворява следните условия*

1. F *е непрекъсната в* U

2. $F(x^0, y_0) = 0$

3. *За всяка точка* $(x, y) \in U\, \exists F'_y(x, y)$

4. F'_y *е непрекъсната в* M_0

5. $F'_y(x^0, y_0) \neq 0$

Тогава съществуват околности:

$X = \{x : |x - x_k^0| < a_k\}(a_k > 0)\, k = 1 \div m; \qquad Y = \{y : |y - y_0| < b\}(b > 0)$

такива че правоъгълника $\Pi = X \times Y \subset U, X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$ *и освен това съществува единствена функция* $y = f(x), f : X \to Y$ *,* f *- непрекъсната в* X*,* $f(x^0) = y_0$ *и* $\forall x \in X : F(x; f(x)) = 0$
Ако освен това $F'_{x_k}, k = 1 \div m$ *и* F'_y *са дефинирани в* U *и непрекъснати в* (x^0, y_0)*, то* $f(x)$ *е диференцируема в точката* x^0 *и* $f'(x_k^0)$ *се изразява с формулата*

$$f'(x_k^0) = -\frac{F'_{x_k}(x^0, f(x_0))}{F'_y(x^0, f(x_0))} = -\frac{F'_{x_k}(x^0, y_0)}{F'_y(x^0, y_0)}$$

Пример 5.1.2. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. Да се определи дали съществува единствена функция $y = f(x)$ определена от неявно от уравнението $F(x, y) = 0$ в околността (1,2). Ако съществува да се пресметне $f'(1)$.

$F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4 \neq 0$

Съществува единствена неявна функция $y = f(x)$ определена с уравнението $F(x, y) =$

$f'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$

$F'_x = 2x, \quad F'_x(1, 2) = 4, \quad F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4$

$f'(1) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

Пример 5.1.3. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3z^2 - 13$. Да се определи дали съществува единствена функция $z = f(x, y)$ определена от неявно от уравнението $F(x, y, z) = 0$ в околността (0,1,2). Ако съществува да се пресметне $z'_x(0, 1), z'_y(0, 1)$.

$F'_z = 6z \implies F'_z(0, 1, 2) = 6 \cdot 2 = 12 \neq 0$

Същесвува единствена неявна функция $z = f(x, y)$ определена от неявно от уравнени

$F'_x = 2x \implies F'_x(0, 1, 2) = 2 \cdot 0 = 0$

$F'_y = 2y \implies F'_y(0, 1, 2) = 2 \cdot 1 = 2$

$z'_x(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} = -\dfrac{0}{6} = 0$

$z'_y(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

Ако F'_{x_k}, F'_{y_k} са непрекъснати в $U = U_{M_0}$, то f'_{x_k} е непрекъсната в X. Прилагайки формулата за производна в произволна точка в $x \in X$ получаваме

$$y'_{x_k} = f'_{x_k}(x) = -\frac{F'_{x_k}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_{x_k}(x, y)}{F'_y(x, y)} \tag{2}$$

Ако F има непрекъснати частни производни от втори ред, то изразите от дясната страна на (1) (съответно (2)) могат да се диференцират още веднъж по променлива $x(x_j, j = 1 \div m)$, при което се получават вторите производни на f. Така се получават формулите

$$f''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

респективно, изпускайки за удобство променливите получаваме

$$f''_{x_k x_k}(x) = f''_{x_k^2}(x) = -\frac{F''_{x_k^2} + 2F''_{x_k y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'^2_{x_k}}{F'_y}$$

и за $k \neq j$

$$f''_{x_k x_j}(x) = -\frac{F''_{x_k x_j} + F''_{x_k y}y'_{x_j} + F''_{x_j y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'_{x_k}y'_{x_j}}{F'_y}$$

Пример 5.1.4. Да се намери y', y'' на неявната функция $y = f(x)$, дефинирана от уравнението

$$x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

Да се пресметнат $y'(0), y''(0)$, ако $y(0) = 1$

Решение:

$$F(x,y) = x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$
$$F'_y = -2x + 10y + 4 \neq 0$$
$$F'_x(x,y) = 2x - 2y - 2$$
$$F'_y(0,1) = -2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4 \neq 0$$
$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{2x - 2y - 2}{-2x + 10y + 4} = -\frac{x - y - 1}{-x + 5y + 2}$$
$$y'(0) = -\frac{0 - 1 - 1}{-0 + 5 \cdot 1 + 2} = -\frac{-2}{7} = \frac{2}{7}$$
$$y''(x) = -\frac{F''_{xx}(x,y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x,y)y'^2}{F'_y(x,y)}$$
$$F''_{xx} = 2, \quad F''_{yy} = 10, \quad F''_{xy} = -2$$
$$F''_{xx}(0,1) = 2, \quad F''_{yy}(0,1) = 10, \quad F''_{xy}(0,1) = -2$$
$$y''(x) = -\frac{2 + 2 \cdot (-2)y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$
$$y''(x) = -\frac{2 + -4y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$
$$y''(0) = -\frac{2 + -4 \cdot \frac{2}{7} + 10 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2}{-2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4}$$
$$y''(0) = -\frac{2 + -\frac{8}{7} + \frac{40}{49}}{14}$$
$$y''(0) = -\frac{\frac{98 - 56 + 40}{49}}{14} = -\frac{\frac{82}{49}}{14} = \frac{82}{49} \cdot \frac{1}{14} = \frac{41}{343}$$

6 Лекция 6: Формула на Тейлор за функция на няколко променливи. Локални екстремуми на функция на няколко променливи

6.1 Формула на Тейлор за функция на няколко променливи

Формула на Тейлор за функкията f дефинирана и непрекъсната в околност $U = U_{x_0}$ на точката x_0, която има производни до (n+1) ред $(n \in \mathbb{N}_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x)$$

с остатъчен член записан във формата на Лагранж

$$r_n(x) = \frac{f^{n+1}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Нека имаме точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, околността $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2$, която е звездообразна относно (x_0, y_0) (Всяка точка $(x, y) \in U$ околността съдържа и отсечка, която я свързва с (x_0, y_0)). Без ограничение на общостта считаме, че U е δ-околност на (x_0, y_0)(отворен кръг с център (x_0, y_0) и радиус δ). Функцията f е дефинирана в U.

Теорема 6.1.1. *Нека функцията $f : U \to R$ е дефинирана и непрекъсната в δ-околността U на точката (x_0, y_0), заедно с частните производни от n+1-ви ред $(n \in \mathbb{N}_0)$. Нека $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$.*
Тогава съществува $\vartheta = \vartheta(\Delta x, \Delta y), (0 < \vartheta < 1)$ за която

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] +$$
$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^3 f(x_0, y_0) + ...+$$
$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y)$$

или по кратко

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y) \qquad (3)$$

където

$$r_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + \vartheta\Delta x, y_0 + \vartheta\Delta y) \quad (4)$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

Дефиниция 6.1.1. *Формулата (3) се нарича формула на Тейлор от ред n за функция f, а функцията r_n - остатъчен член, а записът му във вида (4) се нарича остатъчен член на формулата на Тейлор във формата на Лагранж.*
Ако $n = 0$, първото събираемо изисква разяснение, защото индексът над знака за сумиране е по малък от индекса под знака за сумиране. В този случай по дефиниция този член е равен на нула, т.е формулата има вид

$$\Delta z = r_0(\Delta x, \Delta y)$$

Теорема 6.1.2. *Нека функцията $f : U \to R$ дефинирана и непрекъсната в δ-околността U на точката x^0, заедно с частните производни от n+1-ви ред ($n \in \mathbb{N}_0$). Нека $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_m^2} < \delta$.*
Тогава съществува $\vartheta = \vartheta(\Delta x) = \vartheta(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n), (0 < \vartheta < 1)$ за която

$$\Delta z = f(x) - f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) =$$
$$= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k f(x_1^0, ..., x_m^0) + r_n(\Delta x_1, ..., \Delta x_m)$$

Където

$$r_n(\Delta x) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^{n+1} f(x^0 + \vartheta\Delta x),$$
$$(x^0 + \vartheta\Delta x) = (x_1^0 + \vartheta\Delta x_1, ..., x_m^0 + \vartheta\Delta x_m) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Записано с диференциали

$$\Delta z = f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{n} d^k f(x^0) + r_n(\Delta x)$$

при $n = 1$

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + r_1(\Delta x, \Delta y)$$
$$r_1(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^2}\Delta x^2\right] + \frac{\partial^2 f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]$$

Пример 6.1.1. Да се напише формулата на Тейлор за $f(x, y) = e^{x+y}$ в точката $(x_0, y_0) = (0, 0), n = 1$

$$f'_x = e^{x+y}\, f'_y = e^{x+y} \qquad f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yy} = e^{x+y}$$
$$f(0, 0) = f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 1$$
$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = \vartheta x, \quad \xi_2 = \vartheta y, \quad \vartheta \in (0, 1)$$
$$f''_{xx}(\xi_1, \xi_2) = f''_{xy}(\xi_1, \xi_2) = f''_{yx}(\xi_1, \xi_2) = f''_{yy}(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1 + \xi_2} = e^{\vartheta(x+y)}$$
$$f(x, y) = 1 + 1x + 1y + \frac{1}{2!}\left(e^{\vartheta(x+y)}x^2 + 2e^{\vartheta(x+y)}xy + e^{\vartheta(x+y)}y^2\right)$$
$$= 1 + (x + y) + \frac{e^{\vartheta(x+y)}}{2!}(x + y)^2$$

6.2 Локални екстремуми на функция на няколко променливи

Дефиниция 6.2.1. *Казваме че функцията* $f : D \to \mathbb{R}$ *има локален максимум в точката* $x^0 \in D$*, ако съществува околност* $U_{x^0} \subset D$ *на точката* x^0*, че*

$$f(x^0) \geq f(x), \quad \forall x \in U_{x^0}$$

Дефиниция 6.2.2. *Казваме че функцията* $f : D \to \mathbb{R}$ *има локален минимум в точката* $x^0 \in D$*, ако съществува околност* $U_{x^0} \subset D$ *на точката* x^0*, че*

$$f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in U_{x^0}$$

Дефиниция 6.2.3. *Локалните максимуми и локалните минимуми се наричат по - общо локални екстремуми.*

Дефиниция 6.2.4. *Ако неравенството в дефиниициите (6.2.1) или (6.2.2) е строго при* $x \neq x^0$*, то съответния локален екстремум се нарича строг локален екстремум(строг локален максимум или строг локален минимум).*

Теорема 6.2.1 (Необходимо условие)**.** *Нека функцията $f : D \to \mathbb{R}$ притежава локален екстремум в $x^0 \in D \subset \mathbb{R}^m$ и освен това съществуват първите частни производни $f'_{x_k}(x^0)$ в точката x^0, $k = 1 \div m$ тогава*

$$f'_{x_k}(x^0) = 0 \quad k = 1 \div m$$

Дефиниция 6.2.5. *Точката x^0 се нарича стационарна точка за функцията f, диференцируема в нея, ако $grad\, f(x^0) = 0$.*

Пример 6.2.1. Тук са разгледани две функции които са дефинирани и диференцируеми в цялата равнина $\mathbb{R}^2$, но нямат локални екстремуми

$$f(x, y) = e^{x+y}$$
$$f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = e^{x+y} \neq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = xy$$
$$f'_x(x, y) = x \qquad f'_y(x, y) = y$$
$$grad\, f(x, y) = (y, x) = (0, 0)$$
$$f(x, y) - f(0, 0) = xy - 0 = xy \implies$$

няма локален екстремум (сменя знака си във всяка произволно взета околност на точката (0,0)). Точката (0,0) е седловина на хиперболичната повърхнина $z = xy$.

6.3 Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция

Теорема 6.3.1 (Достатъчно условие)**.** *Нека функцията $f : D \to \mathbb{R}$ притежава непрекъснати частни производни $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ от втори ред в околността U и точката (x_0, y_0) е стационарна точка f, т.е*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Тогава

1. *Ако*
$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 > 0$$
то $f(x, y)$ има локален екстермум в (x_0, y_0).

2. *Ако*
$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 < 0$$
то $f(x, y)$ няма локален екстермум в (x_0, y_0).

3. Ако

$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 = 0$$

то $f(x, y)$ може да има локален екстремум в (x_0, y_0), така и да няма такъв.

Пример 6.3.1. Да се намерят екстремумите на (ако съществуват) и да се определи видът им.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = -x^2 - y^2$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$

$f(x, y) = x^2 + y^2$
$f'_x = 2x \qquad f'_y = 2y$
$\left|\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right. \implies M_0(0, 0)$ – стационарна точка
$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 2 \quad f''_{xy} = 0$
$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0 \implies \exists$екстремум
$f''_{xx} = 2 > 0 \implies$ екстремума е минимум$f_{min} = f(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$

$f(x, y) = -x^2 - y^2$
$f'_x = -2x \qquad f'_y = -2y$
$\left|\begin{array}{l} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{array}\right. \implies M_0(0, 0)$ – стационарна точка
$f''_{xx} = -2 \quad f''_{yy} = -2 \quad f''_{xy} = 0$
$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0 \implies \exists$екстремум
$f''_{xx} = -2 < 0 \implies$ екстремума е максимум$f_{max} = f(0, 0) = -0^2 - 0^2 = 0$

$f(x, y) = x^2 - y^2$
$f'_x = 2x \qquad f'_y = -2y$
$\left|\begin{array}{l} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{array}\right. \implies M_0(0, 0)$ – стационарна точка
$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = -2 \quad f''_{xy} = 0$
$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 2(-2) - 0 = -4 < 0 \implies$ няма екстремум

Пример 6.3.2. Да се намерят екстремумите на (ако съществуват) и да се определи видът им.

- $f(x,y) = y^4 + x^2$
- $f(x,y) = -y^4 - x^2$
- $f(x,y) = y^3 + x^2$
- $f(x,y) = xy^3$
- $f(x,y) = (x+y)^2$
- $f(x,y) = -(x+y)^2$

$$f(x,y) = y^4 + x^2$$
$$f'_x = 2x \quad f'_y = 4y^3$$
$$\left|\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{array}\right. \implies M_0(0,0) - \text{стационарна точка}$$
$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 12y^2 \quad f''_{xy} = 0$$
$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 2(12y^2) - 0 = 24y^2 = 0 \implies \text{трябва допълнително изследване}$$
$$f(x,y) - f(0,0) = y^4 + x^2 - (0^4 + 0^2) = y^4 + x^2 \geq 0$$
$$y^4 + x^2 = 0 \iff x = y = 0$$
$$f(x,y) - f(0,0) \geq 0 \iff f(x,y) \geq f(0,0) \text{ в } \mathbb{R}^2 \implies \text{локален минимум}$$
$$f_{min} = f(0,0) = 0^4 + 0^2 = 0$$

$$f(x,y) = -y^4 - x^2$$
$$f'_x = -2x \quad f'_y = -4y^3$$
$$\left|\begin{array}{l} -2x = 0 \\ -4y^3 = 0 \end{array}\right. \implies M_0(0,0) - \text{стационарна точка}$$
$$f''_{xx} = -2 \quad f''_{yy} = -12y^2 \quad f''_{xy} = 0$$
$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = -2(-12y^2) - 0 = 24y^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване}$$
$$f(x,y) - f(0,0) = -y^4 - x^2 - (-0^4 - 0^2) = -y^4 - x^2 \geq 0 \iff y^4 + x^2 \leq 0$$
$$y^4 + x^2 = 0 \iff x = y = 0$$
$$f(x,y) - f(0,0) \leq 0 \iff f(x,y) \leq f(0,0) \text{ в } \mathbb{R}^2 \implies \text{локален максимум}$$
$$f_{max} = f(0,0) = -0^4 + -0^2 = 0$$

$f(x,y) = y^3 + x^2 f'_x = 2x \quad f'_y = 3y^2$

$\left| \begin{array}{l} 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{array} \right. \implies M_0(0,0)$ – стационарна точка

$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 6y \quad f''_{xy} = 0$

$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 2(6y) - 0 = 12y^2 = 0 \implies$ допълнително изследване

$f(x,y) - f(0,0) = y^3 + x^2 - (0^3 + 0^2) = y^3 + x^2$

За всяка точка от положителната ординатна ос $(x > 0, y > 0) f(x,y) - f(0,0) > 0$

За всяка точка от отрицателната ординатна ос $(x < 0, y < 0) f(x,y) - f(0,0) < 0$

$\implies f(x,y) - f(0,0)$ Няма постоянен знак във всяка околност на M_0

$\implies f(x,y)$ няма локален екстремум в $_0$ и точката M_0 е седловинна точка

$f(x,y) = xy^3 f'_x = y^3 \quad f'_y = 3xy^2$

$\left| \begin{array}{l} y^3 = 0 \implies y = 0 \\ 3xy^2 = 0 \implies x = 0 \text{ или } x \neq 0 \end{array} \right. \implies$

Стационарните точки са безкрайно много

$$M_0(x,0)(x \in \mathbb{R})$$

1. $x_0 = 0, y = 0 \implies M_0 = (0,0)$

   $f(x,y) - f(0,0) = xy^3 - 0 = xyy^2$

   I и III квадрант - $xy > 0$, а във II и IV - $xy < 0$, $y^2 > 0 \implies$

   Сменя знака си $\implies$ f няма локален екстремум в $_0$

2. $x_0 \neq 0, y = 0 \implies M_1 = (x_0, 0)$

   $\Delta f = f(x_0, y) - f(x_0, 0) = x_0 y^3 - x_0 0^3 \implies$

   $\Delta f = y^2(x_0 y)$

   $x_0 > 0 \implies \begin{cases} \Delta f > 0, & y > 0 \\ \Delta f < 0, & y < 0 \end{cases} \implies \Delta f$ сменя знака си в околността на M_1

Аналогично за $x_0 < 0$ знакът не се запазва

$\implies$ f няма локален екстремум в точката M_1 $\implies$ f няма локални екстремуми

$f(x,y) = (x+y)^2$

$f'_x = 2(x+y) \quad f'_y = 2(x+y)$

$\left| \begin{array}{l} 2(x+y) = 0 \\ 2(x+y) = 0 \end{array} \right. \iff x+y=0 \iff -x=y \implies$

Стационарни точки са всички точки от ъглополовящата на II и IV квадрант - от правата x+y $=0$, т.е $M(x_0, -x_0), x_0 \in \mathbb{R}$

$f''_{xx} = 2, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{xy} = 2,$

$\Delta = 2 \cdot 2 - (2)^2 = 0 \implies$ допълнително изследване

$f(x,y) - f(x_0, -x_0) = (x+y)^2 - (x_0 - x_0)^2 = (x+y)^2 \geq 0 \implies$

f има локален минимум във всяка точка от вида $M(x_0, -x_0)$,

$f_{min} = (x_0 - x_0)^2 = 0$

$f(x,y) = -(x+y)^2$

$f'_x = -2(x+y) \quad f'_y = -2(x+y)$

$\left| \begin{array}{l} -2(x+y) = 0 \\ -2(x+y) = 0 \end{array} \right. \iff x+y=0 \iff -x=y \implies$

Стационарни точки са всички точки от ъглополовящата на II и IV квадрант - от правата x+y $=0$, т.е $M(x_0, -x_0), x_0 \in \mathbb{R}$

$f''_{xx} = -2, \quad f''_{yy} = -2, \quad f''_{xy} = -2,$

$\Delta = (-2)(-2) - (-2)^2 = 0 \implies$ допълнително изследване

$f(x,y) - f(x_0, -x_0) = -(x+y)^2 + (x_0 - x_0)^2 = -(x+y)^2 \leq 0 \implies$

f има локален максимум във всяка точка от вида $M(x_0, -x_0)$,

$f_{max} = (x_0 - x_0)^2 = 0$

7 Лекция 7: Локални екстремуми на функция на няколко променливи. Екстремум на неявна функция

7.1 Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция II

Нека точката $x^0 \in \mathbb{R}^m, (m \geq 2)$, отвореното множество $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$ е нейна околност и функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е поне два пъти непрекъснато диференцируема в U а точката x^0 е стационарна точка за f. В този случай изследванията се свеждат до използване на формулата на Тейлор с $n = 1$

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

$$\xi := x^0 + \vartheta(x - x^0), \quad \vartheta = \vartheta(x) \in (0, 1)$$

Първите частни производни имат стойност 0 в стационарните точки

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

Дефиниция 7.1.1. *Квадратична форма A*

$$A(x) = A(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$$

се нарича положително дефинирана(отрицателно дефинирана) ако за всеки ненулев вектор $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ е изпълнено

$$A(x) > 0 \qquad (A(x) < 0)$$

и знакопроменлива, ако за вектори

$$x, y \in \mathbb{R}^m : \qquad A(x) > 0 \qquad A(y) < 0$$

Теорема 7.1.1 (Достатъчно условие)**.** *Нека функцията $f : U \to \mathbb{R}$ притежава непрекъснати частни производни $f''_{x_i x_j} (i, j = 1 \div m)$ от втори ред в околността U на точката $x^0 = (x_1^0, ..., x_m^0)$ и е стационарна точка*

$$f_{x_i}(x^0) = f_{x_i}(x_1^0, ..., x_m^0) = 0 \qquad (i = 1 \div m)$$

Тогава ако квадратичната форма (втори диференциал)

$$A(dx_1, ..., dx_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_ix_j}(x^0)dx_idx_j$$

е положително дефинитна квадратична форма, то точката x^0 е строг локален минимум за функцията f.
Ако е отрицателно дефинитна квадратична форма, то точката x^0 е строг локален максимум за функцията f.
Ако е недефинитна, то f няма локален екстремум.
Ако изразът е равен на 0 може да има локален, но може и да няма.

Теорема 7.1.2 (Критерий на Силвестър)**.** *Квадратичната форма A дефинирана в (7.1.1) в която $a_{ij} = a_{ji}$, $\quad (i, j = 1 \div m)$ е положително дефинитна тогава и само тогава когато,*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad ..., \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

и отрицателно дефинитна (-A(x) е положително дефинитна) тогава и само тогава, когато

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, ..., \qquad (-1)^k\Delta_k > 0 (k = 1 \div m)$$

Пример 7.1.1. Да се разгледат функциите в точката $M_0(1, 2, -3)$

- $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z$
- $u = -x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z$
- $u = x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 6z$

$$\begin{aligned}
\Delta_1(M_0) &= u''_{xx}(M_0), \\
\Delta_2(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} \\
\Delta_3(M_0) &= \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$u = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z$

$u'_x = 2x - 2 \qquad u'_y = 2y - 4 \qquad u'_z = 2z - 6$

$u''_{xx} = 2 \qquad u''_{xy} = 0 \qquad u''_{xz} = 0$

$u''_{yx} = 0 \qquad u''_{yy} = 2 \qquad u''_{yz} = 0$

$u''_{zx} = 0 \qquad u''_{zy} = 0 \qquad u''_{zz} = 2$

$\Delta_1(M_0) = u''_{xx}(M_0) = 2 > 0$

$$\Delta_2(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\Delta_3(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \implies$$

Съгласно критерия на Силвестър вторият диференциал е положително дефинитна квадратична форма и има локален минимум

$u_{min} = u(1, -2, 3) = -14$

$u = -x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z$

$u'_x = -2x + 2 \qquad u'_y = -2y + 4 \qquad u'_z = -2z - 6$

$u''_{xx} = -2 \qquad u''_{xy} = 0 \qquad u''_{xz} = 0$

$u''_{yx} = 0 \qquad u''_{yy} = -2 \qquad u''_{yz} = 0$

$u''_{zx} = 0 \qquad u''_{zy} = 0 \qquad u''_{zz} = -2$

$\Delta_1(M_0) = u''_{xx}(M_0) = -2 < 0$

$$\Delta_2(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\Delta_3(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \implies$$

Съгласно критерия на Силвестър вторият диференциал е отрицателно дефинитна квадратична форма и има локален максимум

$u_{max} = u(1, -2, 3) = 14$

$u = x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 6z$
$u'_x = 2x - 2 \qquad u'_y = 2y - 4 \qquad u'_z = -2z - 6$
$u''_{xx} = 2 \qquad u''_{xy} = 0 \qquad u''_{xz} = 0$
$u''_{yx} = 0 \qquad u''_{yy} = 2 \qquad u''_{yz} = 0$
$u''_{zx} = 0 \qquad u''_{zy} = 0 \qquad u''_{zz} = -2$
$\Delta_1(M_0) = u''_{xx}(M_0) = 2 > 0$
$\Delta_2(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$
$\Delta_3(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \implies$
Не е дефинитна квадратична форма $\implies$ няма локален екстремум

7.2 Локален екстремум на неявна функция

Нека

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$
- $M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ - точка
- $U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ - околност на M_0
- $F : U_{M_0} \to \mathbb{R}, \qquad F(x^0, y_0) = 0$
- $\exists F'_x, F'_y : \ F'_y(M_0) \neq 0, \ F'_y$ е непрекъсната в M_0

Тогава уравнението $F(x, y) = 0$ дефинира неявната функция f в околност $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$ на точката x^0

$$f : U \to \mathbb{R} \qquad f(x^0) = y_0$$

Възможно е да има локални екстремуми. Тяхното намиране се осъществява по познатия ни алгоритъм.
В случая $m = 1$ неявната функция f е на една променлива съгласно формулата

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

стационарните точки се намират като решения на система

$$\left| \begin{array}{l} F'_x(x,y) = 0 \\ F(x,y) = 0 \\ F'_y(x,y) \neq 0 \end{array} \right.$$

Евентуално съществуване на екстремум може да се останови от знака на $f''(x^0)$ тъй като по формула

$$f''(x^0) = -\frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

Пример 7.2.1. Уравнението $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ задава четири неявни функции $y = f_k(x)(k = 1,2,3,4)$ според това в кой квадрант се намира точката, в чиято околност се търси неявната функция.
Нека

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$$

то уравнението $F(x,y) = 0$ задава единствена неявна функция в околността на някоя тока, само ако

$$F'_y(x,y) = 4y(x^2+y^2+1) \neq 0$$

в нея което дава $y \neq 0$

$$\left| \begin{array}{l} 4x(x^2+y^2-1) = 0 \\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \\ 4y \neq 0 \end{array} \right.$$

$x = 0$ не е решение системата е еквивалентна

$$\left| \begin{array}{l} x^2+y^2 = 1 \\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 = 1 \\ 1 - 2(2x^2-1) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 4x^2 = 3 \\ 4y^2 = 1 \end{array} \right.$$

От където се получават 4 точки

$$M_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), M_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), M_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), M_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Нека $y = f_k(x)$ е неявна функция дефинирана в околността на точката M_k. Тъй като $F"_{xx}(x,y) = 4(3x^2+y^2-1) > 0$ за точките M_k то знакът се определя от стойността на $F'_y(M_k) = 8y_k$

$$f''_1(x_1) < 0 \qquad f''_2(x_2) < 0 \implies \text{максимум със стойност } \frac{1}{2}$$

$$f_3''(x_3) > 0 \qquad f_4''(x_4) > 0 \implies \text{минимум със стойност } -\frac{1}{2}$$

$F_y'(0,0) = 0$ е точка на самопресичане на леминскатата на Бернули, чието уравнение е дадено в този пример.
Ако $m > 1$ неявната фунцкия е на повече променливи и се намира като решения на системата

$$\left| \begin{array}{ll} F_{x_k}'(x,y) = 0 & \qquad k = 1 \div m \\ F(x,y) = 0 & \\ F_y'(x,y) \neq 0 & \end{array} \right.$$

Стойностите на вторите частни производни в стационарните точки са

$$f_{x_k x_k}''(x^0) = -\frac{F_{x_k x_k}''(x^0, y_0)}{F_y'(x^0, y_0)} \qquad f_{x_k x_j}''(x^0) = -\frac{F_{x_k x_j}''(x^0, y_0)}{F_y'(x^0, y_0)} \quad (k \neq j)$$

8 Лекция 8: Условни и абсолютни екстремуми на функция на няколко променливи

8.1 Условни екстремуми на функция на няколко променливи

Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ и функциите $f, \varphi_n : D \to \mathbb{R}(n = 1, 2, ..., k)$ са дефинирани и два пъти непрекъснато диференцируеми в D. Нека E е множеството от точки $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in D$, за които дадената функция φ_n

$$E = \{x | \varphi_n(x) = 0, n = 1, 2, ..., k, \quad x \in D\}$$

Дефиниция 8.1.1. *Уравненията*

$$\varphi_n(x) = 0, \quad (n = 1, 2, ..., k)$$

се наричат условния на връзките.

Дефиниция 8.1.2. *Точката $x^0 \in D$ се нарича точка на условен екстремум на f при условие, че са изпълнени условия на връзките (8.1.1), ако тя е точка на обичаен (локален) екстремум на тази функция, разглеждана само върху множеството E. в което са изпълнени дадените условия.*
С други думи стойността $f(x^0)$ се сравнява не със всички стойностти в околността на x^0, а само с тези от множеството E.

За да се изследва за екстремум функцията $y = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ при ограничения

$$\left|\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \\ ... \\ \varphi_k(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \end{array}\right.$$

се конструира функцията на Лагранж.

$$L(x_1, x_2, ..., x_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) = f(x_1, x_2, ..., x_m) + \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \varphi(x_1, x_2, ..., x_m)$$

Където $\lambda_n, n = 1, 2, ..., k$ се наричат множители на Лаграж. За получената функция се решава задача за локален ecktpeмум, като стационарните точки са решения на следната система:

$$\left|\begin{array}{l}\frac{\partial L(x_1,x_2,...,x_m;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)}{\partial x_1}=0\\ \frac{\partial L(x_1,x_2,...,x_m;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)}{\partial x_2}=0\\ ...\\ \frac{\partial L(x_1,x_2,...,x_m;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)}{\partial x_m}=0\varphi_1(x_1,x_2,...,x_m)=0\\ \varphi_2(x_1,x_2,...,x_m)=0\\ ...\\ \varphi_k(x_1,x_2,...,x_m)=0\\ \lambda_n\neq 0, n=1,2,...,k\end{array}\right.$$

Видът на екстремума се определя от знака на втория диференциал в съответната стационарна точка.

Теорема 8.1.1. *Нека $D\subset\mathbb{R}^m$ и функциите $f,\varphi_n : D\to\mathbb{R}(n=1,2,...,k)$ са дефинирани и два пъти непрекъснато диференцируеми в D. Ако точката x^0 удовлетворява условията на връзките и е стационарна точка за функцията на Лагранж и ако вторият диференциал на функцията на Лагранж в тази точка е положително/отрицателно дефинитна квадратична форма на променливите $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ при условие че те удовлетворяват системата от уравнения*

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_m}dx_m=0, n=1,...,k$$

то точката x^0 е точка на строг условен минимум/максимум за дадената функция, относно уравненията на връзките.

Пример 8.1.1. Ако $E\subset\mathbb{R}^2, (x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0, y>0, x+y=s$ да се намери минумума на функцията $f(x,y)=x^2+y^2$ върху E.

$$L(x,y;\lambda)=f(x,y)+\lambda(s-x-y)=x^2+y^2+\lambda(s-x-y)$$
$$L''_{xx}=2 \quad L''_{yy}=2 \quad L''_{xy}=L''_{yx}=0$$
$$(x_0,y_0)=\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)$$
$$L_{min}\implies f_{min}=f(x_0,y_0)=f\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)=\frac{s^2}{2}$$

8.2 Абсолютни екстремуми на функция на няколко променливи

В много случаи е важно да се намерят най-голямата и най-малката стойност на дадена функция върху цялото дефиниционно множество, т.е. абсолютният (глобалният) минимум и максимум на функцията. Да предположим, че дефиниционното множество $D \subset \mathbb{R}^m$ на функцията $f(x)$ е компактно множество в $\mathbb{R}^m$. Тогава по теоремата на Вайерщрас (Теорема 2.4.1), $f(x)$ достига най-малката и най-голямата си стойност в някакви точки на D. Тогава се получават следните две алтернативни възможности: абсолютният максимум може да се достигне във вътрешна или контурна точка на D. Ако максимумът се достига във вътрешна точка, то той е и локален, и ние можем да използваме развитата дотук теория. Разбира се, всичко казано тук се отнася и за абсолютния минимум. Ако екстремумът е в точка от контура ∂D на дефиниционната област, то той е условен екстремум, и може да бъде намерен по алгоритъма, описан в предния параграф.
Така задачата за намиране на абсолютните екстремуми се свежда до намирането на стационарните точки в множеството и локалните екстемуми, условните екстремуми по контура (или съставните му части) и сравняването на тези стойности. Най-голямата от тях е абсолютен максимум, а най-малката е абсолютен минимум. По-долу, за по-голяма яснота е разгледан следният пример.

Пример 8.2.1. Ако $E \subset \mathbb{R}^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1$ да се намерят най малката и най голямата стойност на функцията $f(x, y) = x^2 + y^2$ върху E.
Решение:

$$M_0 = (0, 0) \in E$$

$$\Delta = 2 \cdot 2 - 0^2 > 0 \quad f''_{xx} = 2 > 0 \implies f_{min}$$

$$f_{min} = f(0, 0) = 0$$

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda(x + y - 1) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

$$L'_x = 2x + \lambda \quad L'_y = 2y + \lambda$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0x + y - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda = -1 \end{array} \right. \implies M_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$L''_{xx} = 2 \quad L''_{yy} = 2 \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 0$

$f_{min} = f(M_1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

$x = -1 \Leftrightarrow g(y) = (-1)^2 + y^2 = y^2 + 1$

$g_{min} = g(0) = 1 = f_{min} \implies M_2(-1, 0)$

$y = -1 \Leftrightarrow h(x) = x^2 + (-1)^2 = x^2 + 1$

$h_{min} = h(0) = 1 = f_{min} \implies M_3(0, -1) \quad f(M_3) = 1$

$\left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y = -1 \end{array} \right. \implies M_4(2, -1) \qquad \left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x = -1 \end{array} \right. \implies M_5(-1, 2)$

$f(-1, -1) = 2 \quad f(2, -1) = 5 \quad f(-1, 2) = 5$

9 Лекция 9: Двоен интеграл

9.1 Понятие за обем в $\mathbb{R}^m$. Множество с мярка нула

Нека $T_k(k = 0, 1, 2...)$ е съвкупността от всички затворени кубове от вида

$$Q^m = Q^{m,k} = \left\{ x : x \in \mathbb{R}^m, \frac{l_i}{10^k} \leq x_i \leq \frac{l_i + 1}{10^k}, i = 1, 2, ..., m \right\}$$

където $l_i \in \mathbb{Z}$ За удобство кубовете се означават просто Q^m.

Дефиниция 9.1.1. *Системата T_k се нарича разделяне на $\mathbb{R}^m$ от ранг k, а кубовете Q^m - кубове от ранг k.*

В частност за $m = 1$ множествата Q^m са интервали, а за $m = 2$ - квадрати. По нататък ще предполагаме, че $m \geq 2$

Дефиниция 9.1.2. *Числото $\frac{1}{10^{km}}$ се нарича m-мерен обем на куба Q^m и е използвано означението $\mu(Q^m)$.*

$$\mu(Q^m) = \frac{1}{(10^k)^m} = \frac{1}{10^{km}}, k = 0, 1, 2, ...$$

Дефиниция 9.1.3. *Ако $E \subset \mathbb{R}^m$ и E представлява обединение на крайно или изброимо много кубове Q_j^m от даден ранг k, т.е. $E = \cup_j Q_j^m$, то $\mu(E)$ се дефинира като*

$$\mu(E) = \sum_j \mu(Q_j^m)$$

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ G - отворено. Да означим със $S_k = S_k(G)$ множеството от точки на всички m-мерни кубове от ранг k, изцяло лежащи в G. Тогава

$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset ... \subset S_k \subset S_{k+1} \subset ...$$

и следователно

$$\mu(S_0) \leq \mu(S_1) \leq ... \leq \mu(S_k) \leq \mu(S_{k+1}) \leq ...$$

и поради това съществува крайна или безкрайна граница $\lim\limits_{k \to \infty} \mu(S_k)$.

Дефиниция 9.1.4. *Крайната или безкрайната граница $\lim\limits_{k \to \infty} \mu(S_k(G))$ се нарича m-мерна мярка или m-мерен ожем на множеството G и се означава с $\mu(G)$*

$$\mu(G) = \lim_{k \to \infty} \mu(S_k(G))$$

По силата на тази дефиниция $\mu(G) > 0$ за всяко отворено непразно множество $G \subset \mathbb{R}^m$ и $\mu(G) < \infty$ ако G е и ограничено.

Лема 9.1.1 (адитивност на мярка). *Нека $G', G'' \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества и $G' \cap G'' = \varnothing$ тогава е в сила*

$$\mu(G' \cup G'') = \mu(G') + \mu(G'')$$

Лема 9.1.2 (полуадитивност на мярка). *Нека $G', G'' \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества. Тогава е в сила*

$$\mu(G' \cup G'') \leq \mu(G') + \mu(G'')$$

Лема 9.1.3 (адитивност на мярка). *Нека $G', G'' \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества и $G' \subset G''$ тогава е в сила*

$$\mu(G') \leq \mu(G'')$$

Дефиниция 9.1.5. *Границата $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k^*(G))$ се нарича горна m-мерна мярка на множеството D и се означава с $\overline{\mu}(D)$*

$$\overline{\mu}(D) = \lim_{k\to\infty} \mu(S_k^*(G))$$

Лема 9.1.4 (монотонност на горната мярка). *Ако $D', D'' \subset \mathbb{R}^m$ то в сила е неравенството*

$$\overline{\mu}(D') \leq \overline{\mu}(D'')$$

Лема 9.1.5 (полуадитивност на горната мярка). *Ако $D_i \subset \mathbb{R}^m, i = 1 \div s$ и $D = \cup_{i=1}^s D_i$ то в сила е неравенството*

$$\overline{\mu}(D) \leq \sum_{i=1}^{s} \overline{\mu}(D_i)$$

Дефиниция 9.1.6. *Ако $\overline{\mu}(D) = 0$ то множеството D се нарича множество с мярка нула и се записва $\mu(D) = 0$. Празното множество по дефиниция има мярка нула $\mu(\varnothing) = 0$*

9.2 Измерими множества в $\mathbb{R}^m$

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е ограничено множество, $[G]$ е негова затворена обвивка. Да означим с $S_k^*([G])$ множеството от точки на всички m-мерни кубове от ранг k, всеки който се пресича с [G] а със $S_k(G)$ множеството от точки на всички m-мерни кубове от ранг k, съдържащи се във G. От $S_k \subset S_k^*$ следва

$$\mu(S_k) \leq \mu(S_k^*)$$

откъдето при $k \to \infty$ се получава че

$$\mu(G) \leq \overline{\mu}([G])$$

Дефиниция 9.2.1. *Множеството $G \subset \mathbb{R}^m$ (G - отворено и ограничено) се нарича измеримо(кубируемо, а при $m = 2$ - квадратируемо), ако неговата мярка е равна на горната мярка на $[G]$*

$$\mu(G) = \overline{\mu}([G])$$

Теорема 9.2.1. *Ограниченото и отвореното множество $G \subset \mathbb{R}^m$ е измеримо, тогава и само тогава, когато контурът му има мярка нула.*

$$\mu(\partial G) = 0$$

Дефиниция 9.2.2. *Затворената обвивка $[G]$ на отвореното и измеримо множество $G \subset \mathbb{R}^m$ също се нарича измеримо и по дефиниция*

$$\mu([G]) = \mu(G)$$

9.3 Дефиниция на многократен интеграл

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено и измеримо множество.

Дефиниция 9.3.1. *Системата $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ от измерими множества G_i се нарича разделяне на множеството G, ако*

1. $G_i \subset G, i = 1 \div i_0$
2. $G_i \cap G_j = \varnothing, i \neq j$
3. $\cup[G_i] = [G]$

Дефиниция 9.3.2. *Числото*

$$\delta_\tau = \max_{1 \leq i \leq i_0} d(G_i)$$

Където $d(G_i)$ е диаметър на множеството G_i, се нарича диаметър на разделянето τ

Лема 9.3.1. *Ако* $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ *е разделянето на* G*, то*

$$\mu(G) = \sum_{i=1}^{i_0} \mu(G_i)$$

Дефиниция 9.3.3. *Нека* $\tau = \{G_i\}$ *и* $\tau' = \{G'_j\}$ *са две разделяния от отвореното и измеримо множество* G*. Разделянето* τ' *се нарича вписано в* τ *ако за всеки елемент* $G'_j \in \tau'$ *съществува елемент* $G_i \in \tau$*, такъв че* $G'_j \subset G_i$ *Записва се* $\tau' \succ \tau$ *или* $\tau \prec \tau'$.

Лема 9.3.2. *В сила са следните свойства*

1. *Ако* $\tau \prec \tau'$ *и* $\tau' \prec \tau''$*, то* $\tau \prec \tau''$.

2. *За всеки две разделяния* $\tau' = \{G'_i\}$ *и* $\tau'' = \{G''_j\}$ *на отвореното и измеримо множество* G *съществува разделяне* τ*, такова че* $\tau' \prec \tau$ *и* $\tau'' \prec \tau$.

Дефиниция 9.3.4. *Нека* $G \subset \mathbb{R}^m$*, функцията* $f : [G] \to \mathbb{R}$ *и* $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ *е разделяне на множеството* G*. Тогава сумата*

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu(G_i)$$

където

$$\xi^{(i)} \in [G_i], i = 1, 2, ..., i_0$$

се нарича риманова интегрална сума на функцията f.

Дефиниция 9.3.5. *Крайната граница*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f)$$

ако съществува се нарича многократен интеграл от функцията f *върху измеримото и отворено множеството* G*(или* $[G]$*) а функцията се нарича интегруема в риманов смисъл върху множеството* G*(или* $[G]$*). Означава се по един от следните начини*

$$\int f dG, \int f(x)dG, \int ... \int f(x_1, x_2, ..., x_m)dx_1dx_2...dx_m$$

Множеството G*(*$[G]$*) се нарича област на интегриране.*

Дефиниция 9.3.6. *Числото A се нарича интеграл от функцията f върху отвореното и измеримо множество G, ако за всяка редица от разделяния* $\tau_n = \left\{ G_i^{(n)} \right\}_{i=1}^{i_0^{(n)}}$ *на множеството G, с* $\delta_{\tau_n} \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и каквито и да са точките*

$$\xi^{(i_n)} \in [G_i^{(n)}], i_n = 1, 2, ...i_0, n = 1, 2, ...$$

е изпълнено равенството

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}(f; \xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, ..., \xi_n^{(i_0^{(n)})}) = A$$

9.4 Съществуване на многократния интеграл

Теорема 9.4.1. *Нека* $G \subset \mathbb{R}^m$ *отворено е измеримо множество и функцията* $f : [G] \to \mathbb{R}$ *е интегруема върху него. Тогава f е ограничена върху множеството [G].*

9.5 Свойства на многократните интеграли

За класа на функции, интегруеми в риманов смисъл в дадено отворено и измеримо множество G е използвано означението $\Re(G)$.
Нека $G \subset \mathbb{R}^m$, G - измеримо и отворено множество.
Освен това $f, g : [G] \to \mathbb{R}, f, g \in \Re(G)$, а λ, ν - производни реални константи.

Теорема 9.5.1. *В сила са следните свойства на многократните интеграли*

1. $\int dG = \int 1dG = \mu(G)$
2. $\int(\lambda f + \nu g)dG = \lambda \int f dG + \nu \int gdG$ *(Линейност на интеграла)*
   В частност
   (а) $\lambda = \nu = 1 \implies \int(f + g)dG = \int fdG + \int gdG$
   (б) $\lambda = 1, \nu = -1 \implies \int(f - g)dG = \int fdG - \int gdG$
   (в) $\lambda = const, \nu = 0 \implies \int \lambda fdG = \lambda \int fdG$
3. $f \geq 0$ *върху G* $\implies \int fdG \geq 0$

От тези три свойства се получава следствието

$$f \geq g \implies \int fdG \geq \int gdG$$

Теорема 9.5.2. *Ако G', G'' са измеримо множество, $[G] = [G'] \cup [G'']$ и $G' \cap G'' = \varnothing$ то следва*

$$\int f dG = \int f d(G' \cup G'') = \int f dG' + \int f dG''$$

Теорема 9.5.3 (адитивност относно множества)**.** *Ако $G' \subset G$ е измеримо множество, то $f \in \Re(G')$*

От тази теорема следва монотонноста на интеграла: Ако $\Gamma \subset G$ е измеримо множество и $f \geq 0$ върху G, то

$$\int f dG \geq \int f d\Gamma$$

Теорема 9.5.4. *Произведението $f \cdot g \in \Re(G)$*

Теорема 9.5.5. *Функцията $|f| \in \Re(G)$ и освен това е изпълнено неравенството*

$$\left| \int f dG \right| \leq \int |f| dG$$

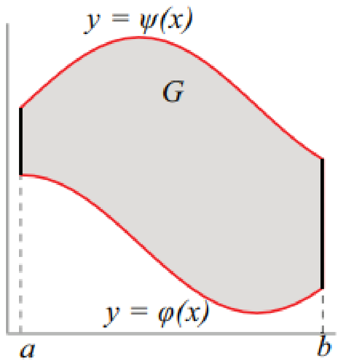
9.6 Свеждане на кратни интеграли до повторни

9.6.1 Двумерен случай

Нека равнината $\mathbb{R}^2$ е фиксирана правоъгълна кординатна система с кординати x и y.

Дефиниция 9.6.1. *Нека $G \subset \mathbb{R}^2$. G се нарича елементарна област относно , ако ∂G се състои от графиките на две непрекъснати функции $\varphi(x), \psi(x)$, дефинирани в интервал [a,b] и $\varphi(x) \leq \psi(x), x \in [a, b]$, и може да съдържа и отсечки от правите $x = a, x = b$. Аналогично се дефинира област, елементарна относно Ox.*

На фигурата по-долу е показана област, елементарна относно Oy.



Фигура 5.6.1: $G \subset \mathbb{R}^2$ – елементарна относно Oy

Теорема 9.6.1 (Теорема на Фубини). *Нека G е елементарна фигура относно $Oy, G \subset \mathbb{R}^2, \partial G$ границата на G, се състои от графиките на непрекъснатите функции $\varphi(x)\psi(x), \varphi(x) \leq \psi(x), x \in [a, b]$ и евентуално от отсечки от правите $x = a, x = b$. Нека $f : [G] \to \mathbb{R}$ и f е непрекъсната върху [G]. Тогава*

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Дефиниция 9.6.2. *Интегралът в дясната страна на формулата от Теорема 9.6.1 се нарича повторен и обикновенно се записва във вида*

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

Лема 9.6.2. *При предположенията от Теорема 9.6.1 функцията*

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

е непрекъсната функция на x в интервала [a,b].

Ако областта G е елементарна относно Ox и границата ѝ се състои от графиките на непрекъснатите функции $\alpha(y), \beta(y), \alpha(y) \leq \beta(y), c \leq y \leq d$ и евентуално отсечки от правите $y = c, y = d$ и функцията $f(x,y)$ е непрекъсната в компактното множество [G] то е в сила формулата

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

Пример 9.6.1. $z = x^2y$ заградена между $y = x^2, y = 1$. Имаме: $\iint_G x^2y\,dxdy$, $G = \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$

$$\left| \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 1 \end{array} \right. \implies x^2 = 1 \implies x_{1,2} = \pm 1$$

Абсцисите на пресечните точки на кривата $y = x^2$ и $y = 1$.
Фигурата G се намира между правите $x = -1$ и $x = 1$ и освен това е оградена и от параболата $y = x^2$ и правата $y = 1$. По точно

$$G = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Тогава

$$\iint_G x^2y\,dxdy = \int_{-1}^1 x^2dx \int_{x^2}^1 ydy \qquad \left(\int_{x^2}^1 ydy = \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^1 \right)$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^2(1-x^4)dx = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 (x^2 - x^6)dx =$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}$$

10 Лекция 10