Физика

Exonaut

15 март 2021 г.

Съдържание

1 Лекция 1: Кинематика

Механиката се дели на:

- Кинематика: описва движението, без да се интересува от причините, които го пораждат.
- Динамика: изучава законите за движение и причините, които го предизвикват.
- Статика: изучава условията за равновесие на телата.

1.1 Основни понятия

- Материална точка: тяло, чиито форма и размери могат да се пренебрегнат при изучаване на движението му.
- Отправно тяло: тяло, спрямо което отчитаме движението.
- Отправна система: състои се от отправно тяло, координатна система и часовник.
- Радиус вектор: вектор от началото на отправната система до материалната точка. Означава се с $\vec{r}(t)$
- Траектория: линията, описвана от материалната точка при движението й.
- Път: дължината на траекторията от началното до крайното положение.
- Преместване: вектор от началното до крайното положение.

1.2 Праволинейно движение

Като начало ще разгледаме движението само по едно направление, например по оста х. Такова движение се нарича праволинейно.

1.2.1 Средна скорост

Средна скорост: преместването по Δx разделена на интервала време Δt, или $V(t) = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

1.2.2 Моментна скорост

Ако интеравала е много малък ($\Delta t \to 0$) скоростта се нарича моментна : $V(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$. dx е много малко преместване извършено в за много малък интервал от време dt.

Моментната скорост е първа производна на радиус-вектора по времето. или

$$V(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$V = \left[\frac{m}{s}\right] = \left[\frac{km}{h}\right], \quad 1\frac{m}{s} = 3,6\frac{km}{h}$$

1.2.3 Средно ускорение

Средно ускорение наричаме изменението на скоростта ΔV , разделено на интервала време, за който е извършено това изменение: $a(t) = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$.

1.2.4 Моментно ускорение

Ако интеравала е много малък ($\Delta t \to 0$) ускорението се нарича моментно : $a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{dV}{dt}$.

Моментното ускорение е първа производна на скоростта по времето и втора производна на радиус-вектора по времето: или

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$a = \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Пример 1.2.1 *Тяло се движи по закон $x = 5t^3 + 2t^2 + 1$. Да се намери скоростта и ускорението в момента $t = 1s$.*
Решение:
$V(t) = \dfrac{dx}{dt}, \quad a(t) = \dfrac{dV}{dt}$
$V(t) = 5 \cdot 3 \cdot t^{3-1} + 2 \cdot 2 \cdot t^{2-1} + 0 = 15 \cdot t^2 + 4 \cdot t$
$a(t) = 15 \cdot 2 \cdot t^{2-1} + 4 = 30 \cdot t + 4$
$V(1) = 15 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 15 + 4 = 19\dfrac{m}{s}$
$a(1) = 30 \cdot 1 + 4 = 30 + 4 = 34\dfrac{m}{s^2}$

1.3 Движение с постоянна скорост

Нека материална точка се движи с начална скорост V_0 . В момента $t_0 = 0$ тя започва да се движи с постоянно ускорение $a = const$. В някакъв по-късен момент t материалната точка се движи със скорост V. От дефиницията за ускорение $a = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ можем да запишем

$$a = \frac{V - V_0}{t - t_0} = \frac{V - V_0}{t}$$

$$a = \frac{V - V_0}{t} \implies V - V_0 = at \implies V = V_0 + at$$

Изразът за зависимостта на скоростта от времето($V = V_0 + at$) се нарича закон за скоростта.

Нека материална точка започва да се движи в момента $t_0 - 0$ от положение с координата x_0 с постоянна скорост $V_0 = const$. В някакъв по-късен момент t материалната точка има координата x. От дефиницията за скорост $V_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ можем да запишем $V_0 = \frac{x - x_0}{t - t_0}$ или $x = x_0 + V_0(t - t_0)$, но $t_0 = 0$ от където следва

$$x = x_0 + V_0 t$$

При движение с постоянно ускорение a към горния израз се добавя още един член, отчитащ промяната в скоростта:

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Изразът, даващ зависимостта на радиус-вектора от времето се нарича закон за движение.
Знаците пред скоростта и ускорението в горните изрази могат да бъдат както положителни, така и отрицателни. Знакът е положителен, ако посоката на V или а съвпада с посоката на оста х и отрицателен, ако посоката е противоположна на оста х.
Ако ускорението е константа и скоростта на тялото нараства с времето, движението се нарича *равноускорително*. Ако скоростта на тялото намалява – *равнозакъснително*, а ако ускорението е нула и скоростта на тялото не се променя, говорим за *равномерно* движение.

Пример 1.3.1 *Кола се движи със скорост V_0 . След задействане на спирачката, колата започва да се движи равнозакъснително с ускорение а и скоростта на колата намалява до V. Намерете спирачния път.*
Решение:

$$V = V_0 - at$$

$$x = V_0 t - \frac{at^2}{2}$$

От първото равенство имаме $t = \frac{V_0 - V}{a}$ и заместваме във второто равенство

$$x = V_0 \frac{V_0 - V}{a} - \frac{1}{2} a \left(\frac{V_0 - V}{a} \right)^2$$

$$x = \frac{V_0^2 - VV_0}{a} - \frac{a}{2} \left(\frac{V_0^2 - 2VV_0 + V^2}{a^2} \right)$$

$$x = \frac{V_0^2 - VV_0}{a} - \frac{a(V_0^2 - 2VV_0 + V^2)}{2a^2}$$

$$x = \frac{2(V_0^2 - VV_0)}{2a} - \frac{V_0^2 - 2VV_0 + V^2}{2a}$$
$$x = \frac{2V_0^2 - 2VV_0 - V_0^2 + 2VV_0 - V^2}{2a}$$
$$x = \frac{V_0^2 - V^2}{2a}$$

Пример 1.3.2 *Тяло е хвърлено вертикално нагоре от височина $h_0 = 1m$ с начална скорост $V_0 = 10\frac{m}{s}$. След колко време тялото ще достигне максимална височина? До каква максимална височина ще се издигне тялото? След колко време и с каква скорост тялото ще падне до $h = 0$.*
Решение:
Всички тела в близост до земята се движат с ускорение $g = 9,8\frac{m}{s^2} \approx 10\frac{m}{s^2}$.
Записваме закона за скоростта и закона за движение по оста y:

$$V = V_0 - gt$$

$$y = h_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Знакът пред V_0 е положителен, защото посоката ѝ съвпада с посоката на оста y, а знакът пред g е отрицателен, защото посоката му е противоположна на оста y.
Когато тялото се издига, скоростта му намалява, в най-високата точка става нула, след което тялото започва да пада, скоростта му става отрицателна, понеже е насочена срещу оста y. В най-високата точка $V = 0$ или $0 = V_0 - gt$. От тук намираме времето, за което тялото ще достигне най-високата точка : $t = \frac{V_0}{g} = \frac{10}{10} = 1s$. Заместваме това време в израза за y за да получим максималната височина:

$$h_m ax = h_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2} = 1 + 10 \cdot 1 - \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 11 - 5 = 6m$$

Времето за падане до $h = 0$ намираме от условието $y = 0$.

$$0 = h_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$0 = 1 + 10t - \frac{10t^2}{2}$$

$$-5t^2 + 10t + 1 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 1 = 100 + 20 = 120$$

$$t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{120}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{30}}{-10} = \frac{-5 \pm \sqrt{30}}{-5}$$

$$t_1 = \frac{-5-\sqrt{30}}{-5} \approx -0.1s$$

$$t_2 = \frac{-5+\sqrt{30}}{-5} \approx 2.1s$$

Физичен смисъл има само положителното време. Заместваме го в израза за скоростта $V = V_0 - gt = 10 - 10 \cdot 2.1 = -11m/s$ Това е скоростта, с която тялото пада на земята. Тя е отрицателна, защото е насочена срещу оста y.

1.4 Движение при произволна форма на траекторията

Когато движението не е праволинейно, скоростта и ускорението се записват за всяка от компонентите на радиус-вектора:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} \qquad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Скоростта $\vec{V}$ е векторна величина - тя се характеризира с големина и посока. Големината на скоростта се определя от координатите на скоростта (по Питагоровата теорема) $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$
Аналогично:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Тъй като скоростта е вектор, тя може да се изменя поради промяна на големината и поради промяна на посоката си.
Ускорението, дължащо се на изменение на скоростта по големина се нарича тангенциално ускорение $\vec{a_\tau}$. То има посока, съвпадаща с направлението на скоростта.
Ускорението, дължащо се на изменение на скоростта по посока се нарича нормално ускорение $\vec{a_n}$. То има посока, перпендикулярна на направлението на скоростта. Може да се покаже, че $\vec{a_n} = \frac{V^2}{R}$, като R е радиусът на кривината на траекторията в разглежданата точка.
От казаното по-горе е ясно, че при праволинейно движение нормалното ускорение е винаги нула. При движение по крива, дори и с постоянна скорост, нормалното ускорение е различно от нула. Пълното ускорение се получава като векторна сума от тангенциалното и нормалното ускорение:

$$\vec{a} = \vec{a_\tau} + \vec{a_n}$$

При постоянно ускорение законът за скоростта и за движение се записват във векторен вид:

$$\vec{V} = \vec{V_0} + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{V_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

След това се записват уравненията за всяка от компонентите на векторите.

Пример 1.4.1 *Тяло е хвърлено под ъгъл $\alpha = 30^\circ$ спрямо хоризонта с начална скорост $V_0 = 10\frac{m}{s}$. Намерете максималната височина, до която се издига тялото и разстоянието, което то прелита.*
Решение:

$$\vec{V} = \vec{V_0} + \vec{g}t$$
$$\vec{r} = \vec{V_0}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

$\vec{r_0} = 0$.
Всеки от векторите може да бъде разложен на две компоненти xи y.
По оста x: $V_x = V_{0x}, \quad x = V_{0x}t$
По оста y: $V_y = V_{0y} - gt, \quad y = V_{0y}t - \frac{\vec{g}t^2}{2}$
Тук сме взели предвид, че по оста x няма ускорение, а по оста y ускорението е g, насочено надолу, в посока обратна на оста y(и затова с отрицателен знак).

$$V_{0x} = V_0 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}V_0 \quad V_{0y} = V_0 \sin 30^\circ = \frac{V_0}{2}$$

В най високата точка V_y е равна на 0: $0 = V_{0y} - gt$ *и времето за което тялото достига максимална височина е* $t = \frac{V_{0y}}{g}$ *Заместваме това време в израза за y и получаваме*

$$y_{max} = V_{0y}\frac{V_{0y}}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{V_{0y}}{g}\right)^2$$
$$y_{max} = \frac{V_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{0y}^2}{g}$$
$$y_{max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{0y}^2}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{10}{2}\right)^2}{10} = \frac{5^2}{20} = \frac{25}{20} = 1.25m$$

В общия случай, когато ускорението не е постоянно, законът за скоростта се получава с интегриране.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \Leftrightarrow d\vec{V} = \vec{a}dt$$

Интегрираме и получаваме закона за скоростта в общия случай:

$$\vec{V} = \int_0^t \vec{a}(t)dt + \vec{V_0}$$

Аналогично закона за движение :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow d\vec{r} = \vec{V}dt$$

Интегрираме и получаваме закона за пътя в общия случай:

$$\vec{r} = \int_0^t \vec{V}(t)dt + \vec{r_0}$$

Ще използваме този резултат за да получим закона за движение при постоянно ускорение. При движение с постоянно ускорение

$$\vec{V} = \int_0^t \vec{a}dt + \vec{V_0} = \vec{V_0} + \vec{a}\int_0^t dt = \vec{V_0} + \vec{a}t$$

Заместваме този резултат в $\vec{r} = \int_0^t \vec{V}(t)dt + \vec{r_0}$ и получаваме

$$\vec{r} = \int_0^t (\vec{V_0} + \vec{a}t)dt + \vec{r_0} = \vec{r_0} + \int_0^t \vec{V_0}dt + \int_0^t \vec{a}tdt$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{V_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

2 Лекция 2: Динамика

3 Формули

3.1 Лекция 1:

3.2 Лекция 2: