

# Математически анализ 2

Exonaut

24 март 2021 г.

# Съдържание

<b>1</b>	<b>Лекция 1: Пространството <math>\mathbb{R}^m</math></b>	<b>3</b>
1.1	Няколко важни неравенства . . . . .	3
1.2	Видове крайно мерни пространства . . . . .	4
1.2.1	Линейно(Векторно) пространство . . . . .	4
1.2.2	Евклидово пространство . . . . .	4
1.2.3	Метрично пространство . . . . .	4
1.2.4	Нормирано пространство . . . . .	5
1.3	Пространството $\mathbb{R}^m$ - дефиниция и основни свойства . . . .	5
1.3.1	Скалярно произведение . . . . .	5
1.3.2	Норма и метрика . . . . .	6
1.3.3	Скаларен квадрат . . . . .	6
1.3.4	Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат	6
1.3.5	Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат .	6
1.4	Точки и множества в $\mathbb{R}^m$ . . . . .	6
1.4.1	Паралелепипед . . . . .	6
1.4.2	Сфера и кълбо . . . . .	7
1.5	Редици от точки в $\mathbb{R}^m$ . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост</b>	<b>11</b>
2.1	Дефиниция на функция на няколко променливи . . . . .	11
2.2	Граница на функция на няколко променливи . . . . .	11
2.3	Непрекъснатост на функция на няколко променливи . . . .	12
2.4	Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи</b>	<b>14</b>
3.1	Дефиниция на частна производна . . . . .	14
3.2	Частни производни от по-висок ред . . . . .	15
3.3	Диференцируемост на функция . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права</b>	<b>18</b>
4.1	Диференциране на съставна функция . . . . .	18

4.2	Производна по посока. Градиент . . . . .	19
4.3	Допирателна равнина. Нормална права . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Лекция 5: Неявни функции. Съществуване и диференци- ране</b>	<b>23</b>
5.1	Неявни функции . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Лекция 6</b>	<b>28</b>
<b>7</b>	<b>Упражнения</b>	<b>29</b>
7.1	Лекция 1 . . . . .	29
7.2	Лекция 2 . . . . .	30
7.3	Лекция 3 . . . . .	35
7.4	Лекция 4 . . . . .	40
7.5	Лекция 5 . . . . .	45

# 1 Лекция 1: Пространството $\mathbb{R}^m$

## 1.1 Няколко важни неравенства

Нека  $a_k$  и  $b_k (k = 1, 2, \dots, m)$  са реални числа и  $m \in \mathbb{N}$

**Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц)** *В сила е следното неравенство:*

$$\left( \sum_{k=1}^m a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^m a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^m b_k^2 \right)$$

Равенство се достига само когато  $a_k$  и  $b_k$  са пропорционални:

$$(\exists \lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k)$$

Равенството може да се запише:

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

**Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски)** *В сила е следното неравенство:*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

Равенство се достига само когато  $a_k$  и  $b_k$  са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left( \sum_{k=1}^m |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)$$

**Теорема 1.1.3** *В сила е следното неравенство:*

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^m |a_k - b_k|$$

## 1.2 Видове крайно мерни пространства

### 1.2.1 Линейно(Векторно) пространство

**Дефиниция 1.2.1** Нека  $L$  е линейно(векторно) пространство над полето  $R$ . В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.

1.  $x, y \in L \implies z = x + y \in L$
2.  $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies z = \lambda x \in L$

### 1.2.2 Евклидово пространство

**Дефиниция 1.2.2** Крайномерното пространство  $L$  се нарича евклидово, ако в него е въведено скалярно произведение, т.е за всеки два елемента  $x, y \in L$  може да се съпостави реално число  $(x, y)$ , удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.

1.  $x, y, z \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies (x + y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
2.  $x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$
3.  $x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$

### 1.2.3 Метрично пространство

**Дефиниция 1.2.3** Крайномерното пространство  $L$  се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика)  $\rho$ , т.е за два елемента  $x, y \in L$  може да се съпостави неотрицателно число  $\rho \geq 0$  със следните свойства

1.  $\rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z). \forall x, y, z \in L$

Метрично пространство  $L$  с метрика  $\rho$  се означава  $(L, \rho)$

### 1.2.4 Нормирано пространство

**Дефиниция 1.2.4** Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма  $\|\cdot\|$ , т.е.  $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  със свойства

$$1. \ x = 0 \implies \|x\| = 0, x \neq 0 \implies \|x\| > 0$$

$$2. \ x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$3. \ x, y \in L \implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Теорема 1.2.1** Ако  $L$  е нормирано пространство с дадена норма  $\|\cdot\|$ , то  $L$  е метрично пространство, т.е. равенството  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  дефинира разстоянието в  $L$

### 1.3 Пространството $\mathbb{R}^m$ - дефиниция и основни свойства

**Дефиниция 1.3.1** Множеството от наредени  $m$ -торки  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  от реални числа. Числата  $a_1, a_2, \dots, a_m$  се наричат съответно първа, втора, ...,  $m$ -та координата на  $a$ .

Ако имаме  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m), b = (b_1, b_2, \dots, b_m), ; \lambda \in \mathbb{R}$  то

$$1. \ a + b = (a_1, a_2, \dots, a_m) + (b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$2. \ \lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_m) \in \mathbb{R}^m$$

#### 1.3.1 Скаларно произведение

Скаларно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left( \sum_{k=1}^m a_k b_k \right)$$

С така въведено скаларно произведение пространството  $\mathbb{R}^m$  се превръща в евклидово.

### 1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k)^2}$$

се въвежда норма в  $\mathbb{R}^m$ .

Нормата генерира метрика в  $\mathbb{R}^m$  с формула:

$$\rho(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k - b_k)^2}$$

### 1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат:  $a^2 = (a, a) = \sum_{k=1}^m a_k^2$

### 1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат:  $(a, b)^2 \leq a^2 b^2$  и  $|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$

### 1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат:  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

## 1.4 Точки и множества в $\mathbb{R}^m$

### 1.4.1 Паралелепипед

**Дефиниция 1.4.1** *Множеството*

$$P(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k < x_k - a_k < \delta_k\}$$

*се нарича отворен паралелепипед в  $\mathbb{R}^m$  с център точката  $a$ .*

*Множеството*

$$\tilde{P}(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k \leq x_k - a_k \leq \delta_k\}$$

*се нарича затворен паралелепипед в  $\mathbb{R}^m$  с център точката  $a$ .*

Ако  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_m = \delta$ , получените множества  $\Pi(a; \delta)$  и  $\tilde{\Pi}(a; \delta)$  се наричат съответно отворен и затворен куб в  $\mathbb{R}^m$  с център  $a$ .

#### 1.4.2 Сфера и кълбо

**Дефиниция 1.4.2** Нека числото  $r > 0$ . Множеството

$$B(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) < r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| < r\}$$

се нарича отворено кълбо в  $\mathbb{R}^m$  с център  $a$  и радиус  $r$ , множеството

$$\tilde{B}(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) \leq r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| \leq r\}$$

се нарича затворено кълбо в  $\mathbb{R}^m$  с център  $a$  и радиус  $r$ , а множеството

$$S(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) = r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| = r\}$$

се нарича сфера в  $\mathbb{R}^m$  с център  $a$  и радиус  $r$ , а множеството

**Дефиниция 1.4.3** Точката  $a$  се нарича

- *вътрешна* за множеството  $A$ , ако съществува отворено кълбо  $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset A$
- *външна* за  $A$ , ако съществува  $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$
- *контурна* за  $A$ , ако за всяко  $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  и  $B(a, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$
- *изолирана* ако съществува  $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$

**Дефиниция 1.4.4** Множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича

- *отворено*, ако всяка негова точка е вътрешна
- *затворено*, ако неговото допълнение  $\mathbb{R}^m \setminus A$  е отворено

**Дефиниция 1.4.5** Околност на дадена точка  $a \in \mathbb{R}^m$  се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с  $U_a$ .



**Дефиниция 1.4.6** Точка  $a$  се нарича точка на съвстяване на множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$ , ако всяка нейна околност  $U_a$  съдържа поне една точка на  $A$ , различна от  $a$ , т.е.  $U_a \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

**Дефиниция 1.4.7** Величината

$$d = d(A) = \sup_{a', a'' \in A} \rho(a'; a'')$$

се нарича диаметър на множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$ .

**Дефиниция 1.4.8** Множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича ограничено, ако съществува кълбо (с краен радиус), което го съдържа.

**Дефиниция 1.4.9** Множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича компактно, ако  $A$  е затворено и ограничено.

**Дефиниция 1.4.10** Множеството  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ , чийто координати са непрекъснати функции  $x_k = x_k(t) (k = 1, 2, \dots, m)$ , дефинирани върху даден интервал  $[a, b]$  се нарича непрекъснатата крива в  $\mathbb{R}^m$ .  $t$  се нарича параметър на кривата.

Точките  $x(a) = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_m(a))$  и  $x(b) = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_m(b))$  се наричат начало и край на дадената крива. Ако  $x(a) = x(b)$  кривата е затворена

**Дефиниция 1.4.11** Нека  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  и  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  са фиксирани числа за които  $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$ . Множеството от точки  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  чиито координати се представят във вида

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, \dots, m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството  $\mathbb{R}^m$ , минаваща през точка  $x^0$  по направление  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ .

**Дефиниция 1.4.12** Множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъснатата крива  $\gamma$ , която ги свързва и  $\gamma \subset A$ .

**Дефиниция 1.4.13** Множеството  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.

**Дефиниция 1.4.14** Област, всеки две точки на която могат да се свържат с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.

**Дефиниция 1.4.15** Областа  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича звездообразна област, относно точката  $x^0 \in A$ , ако за всяка точка  $x \in A$  отсечката  $[x^0, x]$  лежи изцяло в  $A$ .

## 1.5 Редици от точки в $\mathbb{R}^m$

**Дефиниция 1.5.1** Редицата  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\}$  се нарича редица от точки в  $\mathbb{R}^m$ , а редицата  $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} (k = 1 \div m)$  -  $k$ -та координатна редица. За по кратко редицата  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  се означава  $\{x^{(n)}\}$

**Дефиниция 1.5.2** Редицата  $\{y^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$  се нарича поредица на редицата  $\{x^{(n)}\}$  и се означава:

$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, \dots$ , или  $\{x^{(n_l)}\}_{l=1}^{\infty}$

ако за всяко  $l$  съществува такова  $n_l$ , че  $y^{(l)} = x^{(n_l)}$ , при това, ако  $l' < l''$ , то  $n_{l'} < n_{l''}$ .

**Дефиниция 1.5.3** Редицата  $\{x^{(n)}\}$  се нарича сходяща към точка  $a \in \mathbb{R}^m$  (граница на редицата), ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува такова  $N_0 > 0$ , че за всяко  $n > N_0$  е изпълнено неравенството  $\rho(x^{(n)}; a) = \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$ . Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.

**Дефиниция 1.5.4** Точката  $a \in \mathbb{R}^m$  се нарича точка на съвстяване на редицата  $\{x^{(n)}\}$ , ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.

**Теорема 1.5.1** Нека  $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$  за  $n \in \mathbb{N}$  и точката  $a \in \mathbb{R}^m$ . Тогава

$$(\{x^{(n)}\} \rightarrow a) \iff (x_k^{(n)} \rightarrow a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката  $a$ , тогава и само тогава когато всяка от координатите на редици  $\{x_k^{(n)}\}$  има граница съответната координата  $a_k$  на точката  $a$

**Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши)** Нека  $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$  за  $n \in \mathbb{N}$ . Редицата  $x^{(n)}$  е сходяща тогава и само тогава когато за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува такова число  $N_0 > 0$ , че при всяко  $n \in \mathbb{N}, n > N_0$  и всяко  $p \in \mathbb{N}$  е изпълнено  $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = \|x^{(n+p)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$

**Дефиниция 1.5.5** Редицата  $\{x^{(n)}\}$  се нарича ограничена , ако съществува кълбо ( с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.

**Теорема 1.5.3 (Болцано-Вайерщрас)** От всяка ограничена редица в пространството  $\mathbb{R}^m$  може да се избере сходяща подредица.

**Дефиниция 1.5.6** Всяко множество  $A \subset \mathbb{R}^m$  се нарича компактно, ако от всяка редица  $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$ , може да се избере сходяща подредица  $\{x_k^{(n)}\}$  с граница принадлежаща на  $A$

## 2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

### 2.1 Дефиниция на функция на няколко променливи

**Дефиниция 2.1.1** Казва се че дадена функция с дефиниционна област (дефиниционно множество)  $D$ , ако на всяка точка  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  от множеството  $D$  е сопоставено реално число  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , т.е на всяко  $x \in D$  съществува единствено число  $y = f(x) \in \mathbb{R}$ . Понякога за кратко се записва.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

В  $\mathbb{R}^2$  се използва  $(x, y)$  за означение, а в  $\mathbb{R}^3$  -  $(x, y, z)$ .

### 2.2 Граница на функция на няколко променливи

**Дефиниция 2.2.1 (Коши)** Нека  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$ ,  $a$  е точка на съгъствяване за  $D$ . Казва се че  $f(x)$  има граница  $L$  при  $x \rightarrow a$  със стойности  $x \neq a$  ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , че за всяко  $x$  от множеството  $D \setminus \{a\}$ , за което  $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$  е изпълнено  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

**Дефиниция 2.2.2 (Хайне)** Нека  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$ ,  $a$  е точка на съгъствяване за  $D$ . Казва се че  $f(x)$  има граница  $L$  при  $x \rightarrow a$  със стойности  $x \neq a$  ако за всяка редица  $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in D, x^{(n)} \neq a$  сходяща към  $a$ , числовата редица  $\{f(x^{(n)})\}$  има граница  $L$ .

**Теорема 2.2.1** Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.

**Дефиниция 2.2.3** Нека  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$ ,  $a$  е точка на съгъствяване за  $D$ . Казва се че  $f(x)$  дивергира към  $\infty$  (съответно към  $-\infty$ ) при  $x \rightarrow a$  със стойности  $x \neq a$ , ако за всяко  $A \in \mathbb{R}$  съществува такова  $\delta > 0$ , че за всяко  $x$  от множеството  $D \setminus \{a\}$ , за което  $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$  е изпълнено  $f(x) > A$  (съответно  $f(x) < A$ ). Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (-\infty)$$

**Дефиниция 2.2.4 (Повторна граница)** Нека  $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  е точка на съгъстяване за  $D$  и функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Нека съществува такава околност  $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$  на точката  $a_2$ , че за всички стойности  $y \in U_{a_2}$  да съществува  $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$ . Ако освен това съществува  $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = A$ ,  $A$  се нарича повторна граница и се означава както следва

$$A = A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow a_2} (\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y))$$

Аналогично се съвежда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow a_1} (\lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y))$$

**Теорема 2.2.2** Нека  $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  е точка на съгъстяване за  $D$  и функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Нека

1. Съществува такава околност  $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$  на точката  $a_2$ , че за всички стойности  $y \in U_{a_2}$  да съществува  $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$ .
2. Съществува границата  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1,a_2)} f(x, y) = L$ .

Тогава съществува граница  $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y)$  и освен това е в сила равенството  $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = L$

## 2.3 Непрекъснатост на функцията на няколко променливи

**Дефиниция 2.3.1** Казва се че функцията  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната в точка  $a \in D$  ако  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Дефиниция 2.3.2 (непрекъснатост по Коши)** Казва се, че функцията  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната в точка  $a \in D$ , ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , че за всяко  $x$  от множеството  $D$ , за което  $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$  е изпълнено  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

**Дефиниция 2.3.3 (непрекъснатост по Хайне)** Казва се, че функцията  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната в точка  $a \in D$  ако за всяка редица  $\{x^{(n)}\}$  ( $x^{(n)} \in D$  за  $n \in \mathbb{N}$ ) сходяща към  $a$ , числовата редица  $\{f(x^{(n)})\}$  има граница  $f(a)$ .

**Дефиниция 2.3.4 (за съставна функция)** Нека  $A \subset \mathbb{R}^m$  е отворено множество,  $f : \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}, k = 1 \div m$ . Полагайки  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$  за всяко  $t \in (\alpha, \beta)$  съставната функция  $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$  се дефинира по формулата

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$$

**Теорема 2.3.1** Нека  $A \subset \mathbb{R}^m$  е отворено множество и  $f : \rightarrow \mathbb{R}$  интервалът  $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ ,  $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  за  $k = 1 \div m$ . Нека освен това  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$  за  $\forall t \in (\alpha, \beta)$  и  $x_k$  са непрекъснати в точката  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  за  $k = 1 \div m$ , а  $f$  е непрекъсната в  $x^0 = x(t_0)$ . Тогава функцията  $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$  е непрекъсната в точката  $t_0$

## 2.4 Равномерна непрекъснатост на функцията на няколко променливи

**Дефиниция 2.4.1** Нека  $A \subset \mathbb{R}^m$  е отворено множество и  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Функцията се нарича равномерно непрекъсната в  $A$ , ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , че за всеки две точки  $x', x'' \in A$  за които разстоянието  $\rho(x'; x'') = \|x' - x''\| < \delta$ , да следва, че  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

**Теорема 2.4.1 (на Вайерщрас)** Нека множеството  $K \subset \mathbb{R}^m$  е компактно и функцията  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната върху  $K$ . Тогава

1.  $f$  е ограничена в  $K$ , т.е съществуват  $m, M \in \mathbb{R}$  такива че за всички  $x \in K$  е изпълнено неравенството  $m \leq f(x) \leq M$
2.  $f$  достига най малката и най-голямата си стойност в  $K$ , т.е съществуват точки  $x^0, y^0 \in K$ , такива че

$$f(x^0) = \inf_{x \in K} f(x); f(y^0) = \sup_{y \in K} f(x)$$

**Теорема 2.4.2 (на Кантор)** Нека множеството  $K \subset \mathbb{R}^m$  е компактно и функцията  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната върху  $K$ . Тогава  $f$  е равномерно непрекъсната върху  $K$ .

### 3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функцията на две и повече променливи

#### 3.1 Дефиниция на частна производна

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $D \subset \mathbb{R}^m$  - отворено множество
- $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  - точка, принадлежаща на  $D$
- $U_{x^0} \subset D$  - околност на  $x^0$
- $U_{x_i^0} \subset D$  - околност на  $x_i^0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )
- точката  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0) \in U_{x^0}$ , за всички стойности на  $x_i \in U_{x_i^0}$
- $f$  и  $g$  - функции, дефинирани съответно в  $D$  и  $U_{x_i^0}$ . т.е.  
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : U_{x_i^0} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$

**Дефиниция 3.1.1** Производната, ако съществува на функцията  $g$  в точката  $x_i^0$  се нарича частна производна на функцията  $f$  (по променлива  $x_i^0$ ) в точката  $x^0$ . Използва се означението  $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$  или  $f'_{x_i}(x^0)$ .

Частната производна на функцията  $f$  относно променливата  $x_i$  е равна на границата на функцията  $\varphi(h_i) = \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i}$  при  $h_i \rightarrow 0$  (ако съществува) т.е

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \varphi(h_i) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$$

#### Пример 3.1.1

$$f(x, y) = x^2 + 9xy^2$$

$$f'_x(x, y) = (x^2)'_x + (9xy^2)'_x = 2x + 9y^2$$

$$f'_y(x, y) = (x^2)'_y + (9xy^2)'_y = 0 + 9x \cdot 2 \cdot y = 18xy$$

## 3.2 Частни производни от по-висок ред

**Дефиниция 3.2.1** Частната производна на частната производна от  $n - 1$  ред,  $n = 1, 2, \dots$  (ако съществува), се нарича частична производна от  $n$ -ти ред. Частните производни, получени при диференциране по различни променливи се наричат смесени производни, а получените при диференциране само по една и съща променлива се наричат чисти производни.

### Пример 3.2.1

$$f(x, y) = x^3 \sin(6y) + x^2 y^3 + 2222, f''_{x,y} = ?, f''_{y,x} = ?$$

$$f''_{x,y} = (f'_x(x, y))'_y$$

$$f'_x(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_x + (x^2 y^3)'_x + (2222)'_x = 3x^2 \sin(6y) + 2xy^3 + 0$$

$$f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y) + 2xy^3)'_y$$

$$f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y))'_y + (2xy^3)'_y = 3x^2 \cos(6y) \cdot 6 + 2 \cdot 3xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

$$f''_{y,x} = (f'_y(x, y))'_x$$

$$f'_y(x, y) = (x^3 \sin(6y))'_y + (x^2 y^3)'_y + (2222)'_y$$

$$f'_y(x, y) = x^3 \cos(6y) \cdot 6 + x^2 \cdot 3y^2 + 0 = 6x^3 \cos(6y) + 3x^2 y^2$$

$$f''_{y,x} = (6x^3 \cos(6y) + 3x^2 y^2)'_x = (6x^3 \cos(6y))'_x + (3x^2 y^2)'_x$$

$$f''_{y,x} = 6 \cdot 3 \cdot x^2 \cos(6y) + 3 \cdot 2 \cdot xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

**Теорема 3.2.1 (за равенство на смесени производни)** Нека точката  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  и нека функцията  $f$  е дефинирана в отвореното множество  $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$ , което е нейната област т.е  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Нека освен това съществуват частните производни  $f'_x, f'_y, f''_{x,y}, f''_{y,x}$  за всички  $(x, y) \in U$  и  $f''_{x,y}, f''_{y,x}$  са непрекъснати в точката  $(x_0, y_0)$ . Тогава е изпълнено равенството

$$f''_{x,y}(x_0, y_0) = f''_{y,x}(x_0, y_0)$$

## 3.3 Диференцируемост на функция

Ще дефинираме елементи които ще се използват.



- $x^0 \in \mathbb{R}^m$
- $U \subset \mathbb{R}^m$  - отворено множество, което е околност на  $x^0$ . Без ограничение на общността може да се счита че  $U$  е  $\delta$ -околност на  $x^0$  т.е.  $U$  е отворено кълбо  $B(x^0; \delta)$  с център  $x^0$  и радиус  $\delta$
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  - функция дефинирана в  $U = B(x^0; \delta)$

**Дефиниция 3.3.1** Функцията  $f$  се нарича диференцируема в точка  $x^0$  ако съществуват числа  $A_1, A_2, \dots, A_m$  и функция  $\varepsilon(x^0, x - x^0)$ , дефинирана за всички допустими стойности на  $x \in U$  и  $x - x^0 = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_m - x_m^0)$ , като при това

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^m A_k(x_k - x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0)\|x - x^0\|$$

$$\text{и } \lim_{\|x - x^0\| \rightarrow 0} \varepsilon(x^0, x - x^0) = 0$$

**Дефиниция 3.3.2** Функцията  $f$  се нарича диференцируема в отвореното множество  $U$ , ако тя е диференцируема във всяка негова точка.

**Теорема 3.3.1** Ако функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  е диференцируема в точката  $x^0 \in U$ , то тя е непрекъсната.

**Дефиниция 3.3.3** В случай на диференцируемост в точката  $x^0$  на функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , изразът

$$df(x^0) \circ (h) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_m h_m$$

(или  $df, df(x^0)$ ) се нарича пълнен диференциал на  $f(x)$  в точката  $x^0$

**Теорема 3.3.2** Ако функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  е диференцируема в точката  $x^0 \in U$ , то съществуват частните производни  $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$  в точката  $x^0$  и

$$\text{освен това } A_k(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m.$$

**Дефиниция 3.3.4** Ако функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  е диференцируема в точката  $x^0 \in U$ , то със следната формула се изразява нейната производна в точката  $x^0$

$$f'(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0))$$

.

**Теорема 3.3.3** Ако функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  притежава частни производни  $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$  в отвореното множество  $U$  и освен това са непрекъснати в точката  $x^0 \in U$ , то  $f$  е диференцируема в точката  $x^0$ .

**Дефиниция 3.3.5** Ако функцията  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  притежава частни производни в  $U$  и тези частични производни са непрекъснати в точката  $x^0 \in U$ , то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в точката  $x^0$ . Ако тези производни са непрекъснати в  $U$ , то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в това множество.

**Дефиниция 3.3.6** Диференциалът на диференциала от  $n - 1$  ред ( $n = 2, 3, \dots$ ) от функцията  $f$  (ако съществува) се нарича диференциал от  $n$ -ти ред ( $n$ -ти диференциал) на тази функция и се бележи  $d^n f$

Ако  $f$  е два пъти непрекъсната и диференцируема в  $x^0 \in U$  тогава втория диференциал получава по следния резултат

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f(x^0)$$

което е симетрична квадратична форма на  $dx_i (i = 1 \div m)$ .

Аналогично ако  $f$  е  $n$  пъти непрекъсната и диференцируема в  $x^0 \in U$ , то  $d^n f(x^0)$  съществува и се дава със следната формула

$$d^n f(x^0) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f(x^0)$$

## 4 Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права

### 4.1 Диференциране на съставна функция

$x^0 \in \mathbb{R}^m$  и отворено множество  $U \subset \mathbb{R}^m$  е околност на точката  $x^0$  (Без ограничение на общността може да се счита че  $U$  е  $\delta$ -околност на  $x^0$  т.е.  $U$  е отворено кълбо  $B(x^0; \delta)$  с център  $x^0$  и радиус  $\delta$ ).  
 $t_0 \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$

**Теорема 4.1.1** Нека функцията  $f$  е дефинирана в  $U$ , а  $\varphi_k$  - в интервала  $(\alpha, \beta)$ , т.е.

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\varphi_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1 \div m$ )

като при това  $x_k = \varphi_k(t)$  за  $k = 1 \div m$ ,  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t) \in U$  за всички стойности на  $t \in (\alpha, \beta)$ . Нека  $f$  е диференцируема в  $U$ ,  $f'_k$  са непрекъснати в  $x^0$  за  $k = 1 \div m$ ,  $\varphi_k$  са диференцируеми в  $t_0$  и  $F : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  е дефинирана с равенството.

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)), t \in (\alpha, \beta)$$

Тогава функцията  $F$  е диференцируема в  $t_0$  и в сила е следното равенство

$$F'(t_0) = \sum_{k=1}^m f'_{x_k}(x^0) \varphi'_k(t_0)$$

За  $m = 2$ :

$$\varphi_1(t) = \varphi(t), \varphi_2(t) = \psi(t)$$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) \varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) \psi'(t_0)$$

**Пример 4.1.1**  $f(x, y)$  - дефинирана и диференцируема в  $U_{(1,2)} \subset \mathbb{R}^2$ .

Непрекъснати частни производни  $f'_x, f'_y$  в точката  $(1, 2)$ .

Намерете производната  $F'(0)$  на съставната функция  $F$ , зададена с ра-

вектoрoтo  $F(t) = f(1 + 3t, 2 + 4t)$ .

$$t_0 = 0$$

$$x = \varphi(t) = 1 + 3t$$

$$y = \psi(t) = 2 + 4t$$

$$x_0 = \varphi(0) = 1$$

$$y_0 = \psi(0) = 2$$

$$\varphi'(t) = 3$$

$$\psi'(t) = 4$$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0) \implies F'(0) = 3f'_x(1, 2) + 4f'_y(1, 2)$$

## 4.2 Производна по посока. Градиент

Нека  $x^0 \in \mathbb{R}^m$  и лъчът  $l$  е дефиниран, както следва:

$$l : x = x^0 + t\nu, t > 0$$

Функцията  $f$  е дефинирана върху този лъч, а

$$\varphi(t) := f(x(t)) = f(x^0 + t\nu), t > 0$$

**Дефиниция 4.2.1** Границата (ако съществува)

$$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

се нарича производна на  $f$  в точката  $x^0$  по посока на вектора  $\nu$  и се означава  $\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}$ , т.е

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

ако съществува границата.

Ако частните производни съществуват, са производни "по посока на координатните оси".

Ако  $f$  е дефинирана и диференцируема в околността  $U_{x^0}$  на точката

в  $x^0$  и  $f'_{x_k}$  са непрекъснати в  $x_0$ , то съществува производната ѝ по посока на вектора  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$  и

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^m \nu_k \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$$

**Дефиниция 4.2.2** Векторът с координати  $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$  се нарича градиент на  $f$  в точката  $x^0$  и се означава

$$\text{grad } f(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0))$$

Предвид тази дефиниция, формулата за производна по посока на вектор  $\nu$  се записва по кратко във вида

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \text{grad } f(x^0), \nu$$

**Теорема 4.2.1** Ако функцията  $f$  е дефинирана и диференцируема в околността  $U_{x^0}$  на точката  $x^0$  и  $f'_{x_k}$  са непрекъснати в  $x_0$ , то съществува производната на  $f$  по посока на произволен вектора  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$  и тя се дава с формула:  $\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \text{grad } f(x^0)$

Ако,  $\nu$  е единичен вектор, т.е  $\|\nu\| = 1$ .

Тогава е в сила неравенство  $\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| \leq \|\text{grad } f(x^0)\|$ , което следва от неравенство на Коши.

$$\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| = |\text{grad } f(x^0), \nu| \leq \|\text{grad } f(x^0)\| \|\nu\| = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

Равенство се достига само когато  $\nu$  и  $f(x^0)$  са колинеарни (еднопосочни или успоредни). тогава

$$\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

Ако вектора  $\nu$  е колинеарен с градиента, тогава векторът  $\nu = \frac{\text{grad } f(x^0)}{\|\text{grad } f(x^0)\|}$  и тогава

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \left( \text{grad } f(x^0), \frac{\text{grad } f(x^0)}{\|\text{grad } f(x^0)\|} \right) = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

Ако  $\text{grad } f(x^0) \neq 0$  то производната достига най голяма стойност единствено, ако диференцирането се извършва по посока на градиента. С други думи, посоката на градиента е посоката на най бързо нарастване на функцията, а големината му е равна на производната по тази посока.

Ако  $\nu = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m)$ , то производната по посока  $\nu$  става

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = f'_{x_1}(x^0) \cos \alpha_1 + f'_{x_2}(x^0) \cos \alpha_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0) \cos \alpha_m.$$

### 4.3 Допирателна равнина. Нормална права

- $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  - точка в  $\mathbb{R}^2$
- $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  точка в  $\mathbb{R}^3$
- $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$  - околност на  $(x_0, y_0)$
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  - функция
- $z_0 = f(x, y)$
- $S : z = f(x, y) \Leftrightarrow S : f(x, y) - z = 0$  - уравнение на равнина
- $f'_x, f'_y$  - първи частни производни за всички  $(x, y) \in U, f'_x, f'_y$  са непрекъснати в точката  $(x_0, y_0)$

**Дефиниция 4.3.1** Равнината  $\tau(\tau \nparallel Oz)$ , зададена с уравнение

$$\tau : z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина в точката  $M_0$  към повърхнината  $S$  и представлява графиката на  $f(x, y)$ .

**Дефиниция 4.3.2** Векторите  $n_1, n_2$

$$n_1(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) \quad n_2(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1),$$

които са нормални вектори на тангенциалната равнина, се наричат нормални вектори и за повърхнината  $S$ .

$n_1 = -n_2$  Това позволява да се използват за ориентация на повърхнината  $S$ .

Горната страна се дефинира с вектора  $n_1$  за който ъгъл  $\angle(n_1, k)$  е остър.

**Дефиниция 4.3.3** Правата  $n$ , зададена с уравнение

$$n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$

се нарича нормала към повърхнината  $S$  към точка  $M_0$

Ако прекараме две равнини през  $0$  съответно  $\alpha : x = x_0$  и  $\beta : y = y_0$  всяка от тях пресича повърхнината в крива линия съответно

$$C_1 : x = x_0, y = y, z = f(x_0, y) \quad C_2 : x = x, y = y_0, z = f(x, y_0)$$

$t_1$  е направляващ вектор на допирателната права на кривата  $C_1$  в точката  $0$ , а с  $t_2$  - направляващ вектор на допирателната права на кривата  $C_2$  в същата точката, то

$$t_1(0, 1, f'_y(x_0, y_0)), \quad t_2(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$$

Равнината  $\tau$  е компланарна с векторите  $t_1, t_2$  то нейния нормален вектор може да се получи от векторното им произведение

$$n_1 = t_2 \times t_1 \quad n_2 = t_1 \times t_2$$

**Пример 4.3.1** За повърхнина  $S$ , зададена с уравнение  $S : z = x^2 + y^2 + 3$ , да се напишат:

- 1) допирателната равнина  $\tau$  в  $M_0(0, 0, 3)$
- 2) нормалните вектори на  $\tau$  в т.  $M_0$ .
- 3) нормалата на повърхнината  $S$  в т.  $M_0$ .

Решение:

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x ; z'_y = 2y ; M_0(0, 0, 3) = M_0(x_0, y_0, z_0) \\ z'_x(x_0, y_0) &= z'_x(0, 0) = 0 ; z'_y(x_0, y_0) = z'_y(0, 0) = 0 \\ 1) \tau : z - z_0 &= z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \tau : z - 3 &= 0x + 0y \Leftrightarrow \tau : z = 3 \\ 2) \vec{n}_1 &= (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) = (0, 0, 1) \\ \vec{n}_2 &= (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1) = (0, 0, -1) \\ 3) n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} &= \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1} \\ n : \frac{x - 0}{0} &= \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 3}{1} = \lambda \\ n(0, 0, \lambda + 3), \lambda &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

## 5 Лекция 5: Неявни функции. Съществуване и диференциране

### 5.1 Неявни функции

Нека имаме уравнението  $F(x, y) = 0$  и да се реши спрямо  $y$ . Решението трябва да зависи и от другата променлива. Нека  $y = f(x)$  и заместяваме в началното уравнение.

$$F(x, f(x)) = 0$$

**Дефиниция 5.1.1** Ако функцията  $f(x)$  удовлетворява равенството

$$F(x, f(x)) = 0$$

за всяко  $x$  от дефиниционното си множество, то тя се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението  $F(x; y) = 0$ .

Ако диференцираме равенството  $F(x, f(x)) = 0$  по  $x$  с теоремата за съставни функции получаваме

$$F'_x(x, f(x)) + f'(x)F'_y(x, f(x)) = 0 \implies f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

Където  $F'_y(x, f(x)) \neq 0$

**Пример 5.1.1**  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$

$$\begin{aligned} F(x, y) = 0 &\Leftrightarrow y^2 = 5 - x^2 \\ y_{1,2} &= \pm\sqrt{5 - x^2} \end{aligned}$$

Нека  $M_0(x_0, y_0)$  точка в  $\mathbb{R}^2$ , отвореното множество  $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$  е нейна околност и нека  $F \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Теорема 5.1.1 (Съществуване на неявна функция)** Нека  $M_0(x_0, y_0)$  точка в  $\mathbb{R}^2$ , отвореното множество  $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$  е нейна околност и функцията  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворява следните условия

1.  $F$  е непрекъсната в  $U$
2.  $F(x_0, y_0) = 0$



3. За всяка точка  $(x, y) \in U \exists F'_y(x, y)$

4.  $F'_y$  е непрекъсната в  $M_0$

5.  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогава съществуват околности

$$X = \{x : |x - x_0| < a\} (a > 0) \quad Y = \{y : |y - y_0| < b\} (b > 0)$$

такива че правоъгълника  $\Pi = X \times Y \subset U$  и съществува единствена функция  $y = f(x), f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  - непрекъсната в  $X$ ,  $f(x_0) = y_0$  и  $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$

**Дефиниция 5.1.2** Функцията  $y = f(x)$  се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението  $F(x, y) = 0$ , в околност на точката  $(x_0, y_0)$

**Теорема 5.1.2 (Добавка към 5.1.1)** Ако освен това  $F'_x, F'_y$  са дефинирани в  $U$  и непрекъснати в  $(x_0, y_0)$  то  $f(x)$  е диференцируема в точката  $x_0$  и  $f'(x_0)$  се изразява

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

Ако  $F'_x, F'_y$  са непрекъснати в  $U = U_{M_0}$ , то  $f'$  е непрекъсната в  $X$ . Прилагайки формулата за производна в произволна точка в  $x \in X$  получаваме

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (1)$$

Аналогично се формулира теоремата за неявна функция от уравнението  $F(x, y) = 0$ , за  $x(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m (m > 2)$  и  $y \in \mathbb{R}$  т.е  $F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$

**Теорема 5.1.3 (Съществуване на неявна функция)** Нека точката  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m, M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$  и  $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$  е околност на  $M_0$  и функцията  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворява следните условия

1.  $F$  е непрекъсната в  $U$

2.  $F(x^0, y_0) = 0$
3. За всяка точка  $(x, y) \in U \exists F'_y(x, y)$
4.  $F'_y$  е непрекъсната в  $M_0$
5.  $F'_y(x^0, y_0) \neq 0$

Тогави съществуват околности:

$$X = \{x : |x - x_k^0| < a_k\} (a_k > 0) \quad k = 1 \div m; \quad Y = \{y : |y - y_0| < b\} (b > 0)$$

такива че правоъгълника  $\Pi = X \times Y \subset U$ ,  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$  и освен това съществува единствена функция  $y = f(x)$ ,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  - непрекъсната в  $X$ ,  $f(x^0) = y_0$  и  $\forall x \in X : F(x; f(x)) = 0$

Ако освен това  $F'_{x_k}$ ,  $k = 1 \div m$  и  $F'_y$  са дефинирани в  $U$  и непрекъснати в  $(x^0, y_0)$ , то  $f(x)$  е диференцируема в точката  $x^0$  и  $f'(x_k^0)$  се изразява с формулата

$$f'(x_k^0) = -\frac{F'_{x_k}(x^0, f(x_0))}{F'_y(x^0, f(x_0))} = -\frac{F'_{x_k}(x^0, y_0)}{F'_y(x^0, y_0)}$$

**Пример 5.1.2**  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ . Да се определи дали съществува единствена функция  $y = f(x)$  определена от неявно от уравнението  $F(x, y) = 0$  в околността  $(1, 2)$ . Ако съществува да се пресметне  $f'(1)$ .

$$F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4 \neq 0$$

Съществува единствена неявна функция  $y = f(x)$  определена с уравнението  $F(x, y)$

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

$$F'_x = 2x, \quad F'_x(1, 2) = 4, \quad F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4$$

$$f'(1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

**Пример 5.1.3**  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3z^2 - 13$ . Да се определи дали съществува единствена функция  $z = f(x, y)$  определена от неявно от уравнението  $F(x, y, z) = 0$  в околността  $(0, 1, 2)$ . Ако съществува да се

пресметне  $z'_x(0, 1), z'_y(0, 1)$ .

$$F'_z = 6z \implies F'_z(0, 1, 2) = 6 \cdot 2 = 12 \neq 0$$

Съществува единствена неявна функция  $z = f(x, y)$  определена от неявно от уравнение

$$F'_x = 2x \implies F'_x(0, 1, 2) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$F'_y = 2y \implies F'_y(0, 1, 2) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{0}{6} = 0$$

$$z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Ако  $F'_{x_k}, F'_{y_k}$  са непрекъснати в  $U = U_{M_0}$ , то  $f'_{x_k}$  е непрекъсната в  $X$ . Прилагайки формулата за производна в произволна точка в  $x \in X$  получаваме

$$y'_{x_k} = f'_{x_k}(x) = -\frac{F'_{x_k}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_{x_k}(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (2)$$

Ако  $F$  има непрекъснати частни производни от втори ред, то изразите от дясната страна на (1) (съответно (2)) могат да се диференцират още веднъж по променлива  $x(x_j, j = 1 \div m)$ , при което се получават вторите производни на  $f$ . Така се получават формулите

$$f''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

респективно, изпускайки за удобство променливите получаваме

$$f''_{x_k x_k}(x) = f''_{x_k^2}(x) = -\frac{F''_{x_k^2} + 2F''_{x_k y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'^2_{x_k}}{F'_y}$$

и за  $k \neq j$

$$f''_{x_k x_j}(x) = -\frac{F''_{x_k x_j} + F''_{x_k y}y'_{x_j} + F''_{x_j y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'_{x_k}y'_{x_j}}{F'_y}$$

**Пример 5.1.4** Да се намери  $y', y''$  на неявната функция  $y = f(x)$ , дефинирана от уравнението

$$x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

Да се пресметнат  $y'(0), y''(0)$ , ако  $y(0) = 1$

Решение:

$$F(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

$$F'_y = -2x + 10y + 4 \neq 0$$

$$F'_x(x, y) = 2x - 2y - 2$$

$$F'_y(0, 1) = -2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4 \neq 0$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x - 2y - 2}{-2x + 10y + 4} = -\frac{x - y - 1}{-x + 5y + 2}$$

$$y'(0) = -\frac{0 - 1 - 1}{-0 + 5 \cdot 1 + 2} = -\frac{-2}{7} = \frac{2}{7}$$

$$y''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

$$F''_{xx} = 2, \quad F''_{yy} = 10, \quad F''_{xy} = -2$$

$$F''_{xx}(0, 1) = 2, \quad F''_{yy}(0, 1) = 10, \quad F''_{xy}(0, 1) = -2$$

$$y''(x) = -\frac{2 + 2 \cdot (-2)y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$

$$y''(x) = -\frac{2 + -4y' + 10y'^2}{-2x + 10y + 4}$$

$$y''(0) = -\frac{2 + -4 \cdot \frac{2}{7} + 10 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2}{-2 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4}$$

$$y''(0) = -\frac{2 + -\frac{8}{7} + \frac{40}{49}}{14}$$

$$y''(0) = -\frac{\frac{98 - 56 + 40}{49}}{14} = -\frac{\frac{82}{49}}{14} = \frac{82}{49} \cdot \frac{1}{14} = \frac{41}{343}$$

## **6    Лекция 6**

## 7 Упражнения

### 7.1 Лекция 1

**Задача 7.1** Да се покаже дали посочените редици  $\{X_n\} = \{x_n, y_n\}$  са сходящи или разходящи. За сходящите да се намери границите им.

1.  $x_n = 1 + \frac{1}{n}, y_n = 2 + \frac{\sin n}{n}$
2.  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, y_n = 2 + n$
3.  $x_n = (-1)^n, y_n = n$
4.  $x_n = (-1)^n, y_n = \frac{1}{n}$
5.  $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}, y_n = (-1)^n$
6.  $x_n = \sin n, y_n = \frac{(-1)^n}{n}$

*Решение:*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \frac{|\sin n|}{n} \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2 \implies$   
редичата е сходяща; точката  $(1, 2)$  е нейна граница
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \implies$  разходяща редица
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не съществува, защото има две точки на съвстяване.,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \implies$  разходяща редица
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не съществува, защото има две точки на съвстяване.,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \implies$  разходяща редица
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не съществува,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \implies$  разходяща редица
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не съществува,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \implies$  разходяща редица

## 7.2 Лекция 2

**Задача 7.2** Нека  $D \subset \mathbb{R}^m$  и са разгледани няколко функции. Да се напишат дефиниционните им множества и да се даде пояснение.

1.  $z(x, y) = x^2 + y^2$

2.  $z(x, y) = \sqrt{y^2 - 2x}$

3.  $z(x, y) = \ln \sqrt{y^2 - 2x}$

4.  $z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-y^2 + 2x + 1}}$

5.  $w(x, y, z) = \arccos(x^2 + y^2 + z^2)$

6.  $f(n) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}^m \\ 0, & x \in \overline{\mathbb{Q}^m} \end{cases}$

*Решение:*

1.  $z(x, y) = x^2 + y^2$   
 $D = \mathbb{R}^2$

2.  $z(x, y) = \sqrt{y^2 - 2x}$   
 $D = \{(x, y) : y^2 - 2x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2, x \leq \frac{y^2}{2}$

3.  $z(x, y) = \ln \sqrt{y^2 - 2x}$   
 $D = \{(x, y) : y^2 - 2x > 0\} \subset \mathbb{R}^2, x < \frac{y^2}{2}$

4.  $z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-y^2 + 2x + 1}}$   
 $D = \{(x, y) : -y^2 + 2x + 1 > 0\} \subset \mathbb{R}^2, x > \frac{y^2 - 1}{2}$

5.  $w(x, y, z) = \arccos(x^2 + y^2 + z^2)$   
 $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq \pi\} \subset \mathbb{R}^3,$   
Графиката е кълбо с център  $(0, 0, 0)$  и радиус  $\sqrt{\pi}$

6.  $D \subset \mathbb{R}^m$

**Задача 7.3** Разгледаните по - долу функциите са дефинирани в  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Кои от границите съществуват и колко са

$$A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \quad A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) \quad A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right)$$

1.  $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

2.  $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$

3.  $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$

4.  $f(x,y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}$

5.  $f(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

*Решение:*

1.

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = \frac{-y}{y} = -1 \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = \frac{x}{x} = 1$$

$$A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$$

$$A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$$

$$A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ Не съществува, защото трябва } A_{1,2} = A_{2,1}$$



2.

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{y^2}{(-y)^2} = 1 \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\implies A_{1,2} = A_{2,1} = 1 \implies \exists A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

$$\text{Педица: } (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0), f(x_n, y_n) = 1 \rightarrow 1$$

$$\text{Педица: } (x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right) \rightarrow (0, 0), f(x'_n, y'_n) = \frac{2n^2}{1 + 4n^2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 1$$

$$\implies f(x, y) \text{ няма граница при } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

3.

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{0}{y^4} = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{0}{x^2} = 0$$

$$A_{1,2} = A_{2,1} = 0 \implies \exists A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

$$\text{Педица: } (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0), f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\implies f(x, y) \text{ няма граница при } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

4.

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}$$

$$0 \leq |f(x, y)| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \text{ у } |x| + |y| \rightarrow 0$$

$$A = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ - не съществува}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = y \cos \frac{1}{y} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

Аналогично и другата вътрешна граница не съществува. Но тогава и повторните граници  $A_{1,2}$ ,  $A_{2,1}$  не съществуват.

5.

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) &= y^2 & \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) &= x^2 \\ A_{1,2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (y^2) = 0 \\ A_{2,1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0 \\ \implies A &= A_{1,2} = A_{2,1} = 0\end{aligned}$$

**Задача 7.4** Нека  $A, B, C, D$  са подмножества на  $\mathbb{R}^2$  дефинирани както следва

$$A = \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 1, y > x\}$$

$$B = \{(x, y) : x \leq 1, y \geq 0, y < x\}$$

$$C = \{(x, y) : x = y, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$D = A \cup B \cup C$$

и функцията  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  зададена по следния начин

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & (x, y) \in A \\ 0, & x = y \\ -\frac{1}{x^2}, & (x, y) \in B \end{cases}$$

Да се изследва непрекъснатостта на тази функция.

*Решение:*

Функцията  $f$  е непрекъсната в  $A$ , защото е частно на две функции със знаменател  $y^2 \neq 0$ , в  $A$ .

Аналогично е непрекъсната в  $B$  защото знаменателя е  $x^2 \neq 0$ .

Остана да се изследва поведението върху  $C$ .

$$(x_0, y_0) = (x_0, x_0) \in C$$

$$R = \{(x_n, y_n)\}, (x_n, y_n) \in A$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R = (x_0, y_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{y_0^2} = \frac{1}{x_0^2} \neq 0$$

$$\text{Ако } x_0 \neq 0, f(x_0, y_0) = 0$$

$$\implies \text{функцията е прекъсната в точката } (x_0, x_0) \neq (0, 0)$$

$$\text{Ако } (x_n, y_n) \in B, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = -\frac{1}{x_0^2} \neq f(x_0, x_0) \neq 0.$$

$$\text{Ако } x_0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \infty(-\infty), f(0, 0) = 0,$$

$$\implies f \text{ е прекъсната в точката } (0, 0).$$

Функцията е непрекъсната в  $D$ , с изключение на точките от  $C$ , където е прекъсната.

### 7.3 Лекция 3

**Задача 7.5** Да се намерят първите частни производни на следните функции

1.  $f(x, y, z) = e^{4x+3y} + xy^2z^3 + 1111e^\pi$  за произволна точка  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$

2.  $f(x, y) = |x + y|$  в точката  $(0, 0)$

3.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  в равнината  $\mathbb{R}^2$

*Решение:*

1.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= e^{4x+3y} + xy^2z^3 + 1111e^\pi \\ f(x, y_0, z_0) &\implies f'_x(x_0, y_0, z_0) = 4e^{4x_0+3y_0} + y_0^2z_0^3 \\ f(x_0, y, z_0) &\implies f'_y(x_0, y_0, z_0) = 3e^{4x_0+3y_0} + 2x_0y_0z_0^3 \\ f(x_0, y_0, z) &\implies f'_z(x_0, y_0, z_0) = 3x_0y_0^2z_0^2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= |x + y| \\ \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \text{ не съществува} \\ \implies \nexists f'_x(0, 0) & \text{ (Аналогично се получава за } f'_y(0, 0)) \end{aligned}$$

3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(x, y) \neq (0, 0)$$

$$f'_x(x, y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} = 0$$

$\implies$  Функцията има частни производни във всяко точки на равнината  $\mathbb{R}^2$

**Задача 7.6**  $f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$   $f'_x(x, 1) = ?$

Решение:

$$f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \text{ (Ако съществува)} \implies$$

$$f'_x(x, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, 1) - f(x, 1)}{h} \text{ (Ако съществува)}$$

$$f(x + h, 1) = x + h + (1 - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}} = x + h + 0 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}} = x + h$$

$$f(x, 1) = x + (1 - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}} = x + 0 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}} = x \implies$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, 1) - f(x, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 \implies f'_x(x, 1) = 1$$

**Задача 7.7** Да се докаже че функцията  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x^2 + y^2 = (0, 0) \end{cases}$

е прекъсната в точката  $(0, 0)$  но има частни производни в тази точка.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{Редица } (x_n, y_n) &= \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n^3} \right) \\ f(x_n, y_n) &= \frac{\left( \frac{1}{n} \right)^3 \cdot \frac{1}{n^3}}{\left( \frac{1}{n} \right)^6 + \left( \frac{1}{n^3} \right)^3} = \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{2}{n^6}} = \frac{1}{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} f(x, y) &\neq f(0, 0) = 0 \Rightarrow f(x, y) \text{ е прекъсната в т. } (0, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^3 \cdot 0}{x^6 + 0} - 0}{x - 0} = 0 \\ f'_y(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \frac{\frac{0^3 \cdot y}{0^6 + y^2} - 0}{y - 0} = 0 \end{aligned}$$

**Задача 7.8** Да се намерят първите частни производни на следните функции:

1.  $f(x, y) = \sin(2x + 3) + 3e^{-x}e^{4y} - 11x^3 + 19e^\pi$
2.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \arctan \frac{y}{x}$
3.  $f(x, y, z) = (xy)^z$
4.  $\sqrt[3]{x^2 + 3y^2}e^{x^2 - 5y}$

Решение:

1.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(2x + 3) + 3e^{-x}e^{4y} - 11x^3 + 19e^\pi \\ f'_x(x, y) &= (\sin(2x + 3))'_x + (3e^{-x}e^{4y})'_x - (11x^3)'_x + (19e^\pi)'_x \\ f'_x(x, y) &= \cos(2x + 3) \cdot 2 + (-3e^{-x}e^{4y}) - (3 \cdot 11x^2) + 0 \\ f'_x(x, y) &= 2\cos(2x + 3) - 3e^{-x}e^{4y} - 33x^2 \\ f'_y(x, y) &= (\sin(2x + 3))'_y + (3e^{-x}e^{4y})'_y - (11x^3)'_y + (19e^\pi)'_y \\ f'_y(x, y) &= 0 + (3 \cdot 4e^{-x}e^{4y}) - 0 + 0 = 12e^{-x}e^{4y} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2} + \arctan \frac{y}{x} \\
 f'_x(x, y) &= \frac{1}{2}(x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
 f'_x(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x^2} \\
 f'_x(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \\
 f'_y(x, y) &= \frac{1}{2}(x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \\
 f'_y(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} \\
 f'_y(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x}{x^2 + y^2}
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= (xy)^z \\
 f'_x(x, y, z) &= z(xy)^{z-1} \cdot (xy)'_x = yz(xy)^{z-1} \\
 f'_y(x, y, z) &= z(xy)^{z-1} \cdot (xy)'_y = xz(xy)^{z-1} \\
 f'_z(x, y, z) &= (xy)^z \ln(xy)
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} e^{x^2 - 5y} \\
f'_x(x, y) &= \left[ \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \right]'_x \cdot e^{x^2 - 5y} + \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot (e^{x^2 - 5y})'_x \\
f'_x(x, y) &= \frac{1}{3} (x^2 + 3y^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x \cdot e^{x^2 - 5y} + \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot 2x e^{x^2 - 5y} \\
f'_x(x, y) &= \frac{2x}{3} \cdot \frac{e^{x^2 - 5y}}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}} + 2x \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot e^{x^2 - 5y} \\
f'_x(x, y) &= \frac{2x}{3} \cdot \frac{e^{x^2 - 5y}}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}} [1 + 3(x^2 + 3y^2)] \\
f'_x(x, y) &= \frac{2x}{3} (1 + 3x^2 + 9y^2) \frac{e^{x^2 - 5y}}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}} \\
\\
f'_y(x, y) &= \left[ \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \right]'_y \cdot e^{x^2 - 5y} + \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot (e^{x^2 - 5y})'_y \\
f'_y(x, y) &= \frac{1}{3} (x^2 + 3y^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6y \cdot e^{x^2 - 5y} + \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot (-5e^{x^2 - 5y}) \\
f'_y(x, y) &= 2y \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}} \cdot e^{x^2 - 5y} - 5 \sqrt[3]{x^2 + 3y^2} \cdot e^{x^2 - 5y} \\
f'_y(x, y) &= e^{x^2 - 5y} \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2} (2y - 5(x^2 + 3y^2)) \\
f'_y(x, y) &= (2y - 5x^2 - 15y^2) \frac{e^{x^2 - 5y}}{\sqrt[3]{(x^2 + 3y^2)^2}}
\end{aligned}$$



## 7.4 Лекция 4

**Задача 7.9**  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$

Изследвайте  $f(x, y)$  за диференцируемост в  $(0, 0)$ .

$$f'_x(0, 0) = ?$$

$$f'_y(0, 0) = ?$$

Решение:

$$f(x, 0) - f(0, 0) = \sqrt[3]{x0} - \sqrt[3]{0} \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$f(0, y) - f(0, 0) = \sqrt[3]{0y} - \sqrt[3]{0} \implies$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$\text{Нека: } \lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0, \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Проверка за диференцируемост в  $(0, 0)$ :

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)(x - 0) + f'_y(0, 0)(y - 0) + \varepsilon(x, y)\rho(x, y)$$

$$\sqrt[3]{xy} - 0 = 0x + 0y + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2} \implies$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0?$$

Разглеждаме редица с общ член  $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^3}\right)$  за която  $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ ,

$$\varepsilon(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{2}}{n^3}} = \frac{n}{\sqrt{2}} \implies \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(x, y) \not\rightarrow 0 \implies$$

$f(x, y)$  не е диференцируема в т.  $(0, 0)$

**Задача 7.10**  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

Изследвайте  $f(x, y)$  за диференцируемост в  $(0, 0)$ .

Решение:

$$f(x, 0) - f(0, 0) = \sqrt[3]{x^3} - 0 = x \implies \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \implies \exists f'_x(0, 0) = 1$$

$$f(0, y) - f(0, 0) = \sqrt[3]{y^3} - 0 = y \implies \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1 \implies \exists f'_y(0, 0) = 1$$

$$\text{Нека: } \lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0, \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Проверка за диференцируемост в  $(0, 0)$ :

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)(x - 0) + f'_y(0, 0)(y - 0) + \varepsilon(x, y)\rho(x, y)$$

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = x + y + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0?$$

Разглеждаме редица с общ член  $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  за която  $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ ,

$$\varepsilon(x_n, y_n) = \frac{\frac{\sqrt[3]{2}}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \implies \lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \not\rightarrow 0 \implies$$

$f(x, y)$  не е диференцируема в т.  $(0, 0)$

**Задача 7.11** Да се изследва за диференцируемост в  $(0, 0)$  функцията

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$f(x, 0) - f(0, 0) = e^{-\frac{1}{x^2}} - 0 = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e x^2}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\left( \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \left( \frac{1}{e x^2} \right)' = -\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 e x^2} = \frac{0}{\infty} = 0 \implies f'_x(0, 0) = 0$$

Аналогично  $f'_y(0, 0) = 0$

Нека:  $\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0, \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Проверка за дифференцируемость в  $(0, 0)$ :

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)(x - 0) + f'_y(0, 0)(y - 0) + \varepsilon(x, y)\rho(x, y)$$

$$e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} - 0 = 0(x - 0) + 0(y - 0) + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} = \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{1}{e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) \rightarrow 0?$$

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \implies \lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \rho(x, y) \rightarrow 0$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\rho} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\left( \frac{1}{\rho} \right)' = -\frac{1}{\rho^2} \quad \left( e^{\frac{1}{\rho^2}} \right)' = -\frac{2}{\rho^3} e^{\frac{1}{\rho^2}}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho}{\frac{1}{2e\rho^2}} = \frac{0}{\infty} = 0 \implies$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{e\rho^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{1}{\rho} \right)'}{\left( \frac{1}{e\rho^2} \right)'} = 0 \implies$$

$$\lim_{(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)} \varepsilon(x, y) = 0 \implies f(x, y) \text{ е диференцируема в } (0, 0)$$

**Задача 7.12**  $f(x, y) = x^2 + 3xy - 8y^3 + 11$ ,  $df(0, 1) = ?$   
 $f(x, y, z) = x^2 + 3xy - 8y^3 - 2e^{3z}x$ ,  $df(0, 0, 4) = ?$

*Решение:*

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

$$f'_x(x, y) = 2x + 3y \quad f'_x(0, 1) = 3$$

$$f'_y(x, y) = 3x - 24y^2 \quad f'_y(0, 1) = -24$$

$$df(x, y) = (2x + 3y)dx + (3x - 24y^2)dy$$

$$df(0, 1) = 3dx - 24dy$$

$$\begin{aligned}
df(x, y, z) &= f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz \\
f'_x(x, y, z) &= 2x + 3y - 2e^{3z} & f'_x(0, 0, 4) &= -2e^{12} \\
f'_y(x, y, z) &= 3x - 24y^2 & f'_y(0, 0, 4) &= 0 \\
f'_z(x, y, z) &= 6xe^{3z} & f'_z(0, 0, 4) &= 0 \\
df(x, y, z) &= (2x + 3y - 2e^{3z})dx + (3x - 24y^2)dy + (6xe^{3z})dz \\
df(x, y, z) &= -2e^{12}dx + 0dy + 0dz = -2e^{12}dx
\end{aligned}$$

**Задача 7.13**  $f(x, y) = x^6 - 7xy^2 + 14y$ ,  $f''_{xx} = ?$ ,  $f''_{yy} = ?$ ,  $f''_{xy} = ?$ ,  $d^2f(x, y) = ?$   
 $f(x, y, z) = x^6 - 7xy + y^2 - xz + z^3$ ,  
 $f''_{xx} = ?$ ,  $f''_{xy} = ?$ ,  $f''_{xz} = ?$ ,  $f''_{yx} = ?$ ,  $f''_{yy} = ?$ ,  $f''_{yz} = ?$ ,  $f''_{zx} = ?$ ,  $f''_{zy} = ?$ ,  $f''_{zz} = ?$ ,  $d^2f(1, 0, 0)$

$$\begin{aligned}
f'_x(x, y, z) &= 6x^5 - 7y - z \\
f''_{xx}(x, y, z) &= (6x^5 - 7y - z)'_x = 30x^4 & f''_{xx}(1, 0, 0) &= 30 \\
f''_{xy}(x, y, z) &= (6x^5 - 7y - z)'_y = -7 & f''_{xy}(1, 0, 0) &= -7 \\
f''_{xz}(x, y, z) &= (6x^5 - 7y - z)'_z = -1 & f''_{xz}(1, 0, 0) &= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_y(x, y, z) &= -7x + 2y \\
f''_{yx}(x, y, z) &= (-7x + 2y)'_x = -7 & f''_{yx}(1, 0, 0) &= -7 \\
f''_{yy}(x, y, z) &= (-7x + 2y)'_y = 2 & f''_{yy}(1, 0, 0) &= 2 \\
f''_{yz}(x, y, z) &= (-7x + 2y)'_z = 0 & f''_{yz}(1, 0, 0) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_z(x, y, z) &= -x + 3z^2 \\
f''_{zx}(x, y, z) &= (-x + 3z^2)'_x = -1 & f''_{zx}(1, 0, 0) &= -1 \\
f''_{zy}(x, y, z) &= (-x + 3z^2)'_y = 0 & f''_{zy}(1, 0, 0) &= 0 \\
f''_{zz}(x, y, z) &= (-x + 3z^2)'_z = 6z & f''_{zz}(1, 0, 0) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2f &= f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2 + 2f''_{xz}dxdz + f''_{zz}dz^2 + f''_{yz}dydz \\
d^2f(x, y, z) &= 30x^4dx^2 + 2 \cdot (-7)dxdy + 2dy^2 + 2 \cdot (-1)dxdz + 6zdz^2 + 2 \cdot 0dydz \\
d^2f(1, 0, 0) &= 30dx^2 - 14dxdy + 2dy^2 - 2dxdz + 0dz^2 + 0dydz \\
d^2f(1, 0, 0) &= 30dx^2 + 2dy^2 - 14dxdy - 2dxdz
\end{aligned}$$

## **7.5 Лекция 5**

**Задача 7.14**

**Задача 7.15**

**Задача 7.16**