Дискретна математика

Exonaut

11 март 2021 г.

Съдържание

1 Лекция 1: Логика и логически оператори

1.1 Дефиниции

Дефиниция 1.1.1 ***Логиката*** *е система, базирана на съждения*

Дефиниция 1.1.2 ***Съждението*** *е твърдение което може да бъде истина или лъжа (но не и двете едновеременно).*
Следователно резултатът от едно съждение може да бъде истина(И) или ако то е вярно или лъжа (Л), ако е грешно.

Дефиниция 1.1.3 *Сънеденията, които не съдържат в себе си други съждения, се наричат* ***прости****.*

Дефиниция 1.1.4 *Едно и няколко съждения могат да бъдат обединени в едно единствено* ***комбинирано съждение****, посредством логически оператори.*

Дефиниция 1.1.5 ***Таблица на истинност*** *се нарича таблица, в която се изброяват всички възможни комбинации от стойности на отделните променливи в съждението, както и съответните стойности на функцията.*

Дефиниция 1.1.6 *Две* ***съждения са еквиваленти****, ако имат една и съща таблица на истинност или следват едно от друго вследствие прилагани основни закони за преобразуване.*

1.2 Логически оператори

1.2.1 Отрицание(NOT)

Означава се със знака ¬
Функция на една променлива с таблица на истинност:

p	**¬p**
T	F
F	T

1.2.2 И, Конюнкция (AND)

Означава се със знака ∧
Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	**q**	**p ∧ q**
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

1.2.3 ИЛИ, Дизюнкция (OR)

Означава се със знака ∨
Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	**q**	**p ∨ q**
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

1.2.4 Сума по модул 2, изключващо или (XOR)

Означава се със знака $\otimes$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	**q**	$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

1.2.5 Импликация, следствие

Означава се със знака $\rightarrow$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	**q**	$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

1.2.6 Двупосочно следствие

Означава се със знака $\Leftrightarrow$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	**q**	$\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

1.3 Закони за еквивалентни преобразувания

- Закон за идентичност : $p \wedge T \equiv p, p \vee F \equiv p$
- Закон за доминиране : $p \vee T \equiv T, p \wedge F \equiv F$
- Закон за пълна идентичност : $p \wedge p \equiv p, p \vee p \equiv p$
- Закон за двойно отрицание : $\neg(\neg p) \equiv p$
- Комутативен закон : $p \wedge q \equiv q \wedge p | p \vee q \equiv q \vee p$
- Асоциативен закон : $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r | p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
- Дистрибутивен закон : $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) | p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- Закони на Де Морган : $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) | \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$
- Закон за импликацията : $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- Закон за тривиалната тавтология: $p \vee \neg p \equiv T | p \wedge \neg p \equiv F$
- Закон за тривиалното опровержение : $(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg(p \otimes q), \neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \otimes q)$

1.4 Предикатни функции и предикати

Дефиниция 1.4.1 (Предикатна функция) *Предикатна функция е твърдение, което съдържа една или повече променливи.*
Ако на дадена променлива е присвоена стойност, се казва, че е известна.
Предикатна функция става съждение, ако всички нейни аргументи са известни.

Дефиниция 1.4.2 (Предикат) *Нека е дадена предикатна функция $Q(x, y, z)$. Свойството Q, с което се задава връзката между променливите x, y, z се нарича предикат.*

1.5 Квантор

Нека P(x) е предикатна функция.

Дефиниция 1.5.1 (Квантор за общност) *За твърдения от вида:*
За ***всяко*** *x, P(x) е истина/лъжа.*
се записва :
$\forall x P(x)$ *"за всяко x P(x)"*
Знака за общност е $\forall$.

Дефиниция 1.5.2 (Квантор за съществуване) *За твърдения от вида: Съществува* ***такова*** *x,* ***за което*** *P(x) е* ***истина/лъжа****.*
се записва :
$\exists xP(x)$ *"съществува x, такова че P(x) е истина/лъжа"или "Съществува поне едно x, за което P(x) е истина/лъжа"*
Знака за общност е $\exists$.

1.6 Закони на Де Морган за квантори

- $\neg(\forall P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$
- $\neg(\exists P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$

2 Лекция 2: Математически доказателства

2.1 Теория на доказателствата

Теорията на доказателствата се използва за определяне на верността на дадени математически аргументи и за конструирането им.

Дефиниция 2.1.1 (Дедукция) *Дедукция във философията означава извеждане на особеното и единичното от общото, както и схващане на единичния случай на базата на всеобщ закон.*
В кибернетиката означава извеждане на твърдения от други твърдения с помощта на логически заключения.

2.2 Терминология

Дефиниция 2.2.1 (Аксиома) *Аксиомата е базово допускане, което не е необходимо да се доказва. Аксиомите са твърдения, които са истина, или твърдения които се приемат за истинам но не могат да бъдат доказани.*

Дефиниция 2.2.2 (Доказателство) *Доказателството се използва, за да се докаже, че дадено твърдение е истина. То се състои от последователност от твърдения, които формират* ***аргумент****.*

Дефиниция 2.2.3 (Теорема) *Теорема е твърдение, чиято истинност се доказва.*
Теоремата се състои от две части: условия(хипотези) и извод(заключения).
Коректното доказателство (по дедукция) се състои в това да се установи:

- *Ако условията са изпълнени, то извода е истина.*
- *Ако съждението "условия* $\rightarrow$ *извод"е таводогия.*

Често липват елементи на логическа връзка, която може да бъде запълнена с допълнителни условия и аксиоми и съждения, свързани помежду си посредством подходящи правила за изводи.

Дефиниция 2.2.4 (Лема) *Лемата е проста теорема, което се използва като междинен резултат за доказване на друга теорема.*

Дефиниция 2.2.5 (Слествие) *Следствието е резултат, който директно следва от съответната теорема*

Дефиниция 2.2.6 (Допускане) *Допускането е твърдение, чийто резултат е неизвестен. Веднъж доказано, то се превръща в теорема.*

2.3 Правила за извод

$\therefore$ - знак за следователно
Всичко преди знака са хипотези.

- Събиране(Addition)
  $p(q)$
  $\therefore p \vee q$

- Опростяване (Simplification)
  $p \wedge q$
  $\therefore p(q)$

- Конюнкция (Conjunction)
  p
  q
  $\therefore p \wedge q$

- Закон за безразличие(Modus ponens)
  p
  $p \to q$
  $\therefore q$

- Modus tollens
  $\neg q$
  $p \to q$
  $\therefore \neg p$

- Хипотетичен силогизъм (Hypothetical syllogism)
  $p \to q$
  $q \to r$
  $\therefore p \to r$

- Дизюнктивен силогизъм
  $p \vee q$
  $\neg p$
  $\therefore q$

2.4 Аргументи

Дефиниция 2.4.1 (Аргумент) *Аргументът се състои от една или няколко хипотези и заключение.*
Аргумент е валиден, ако всичките му хипотези са истина и заключението също е истина.
Ако някоя от хипотезите е лъжа, дори валиден аргумент може да води до некоректно заключение.

Доказателство: трябва да се докаже че твърдението "хипотези $\rightarrow$ заключение"е истина, като се използват правила за извод.

Пример 2.4.1 *"Ако* 101 *е кратно на* 3 *, то* 101^2 *се дели на* 9*."*
*Въпреки че аргументът е валиден, заключението е некоректно (невярно), защото едната от хипотезите("*101 *е кратно на* 3*")е лъжа.*
Ако в аргумента 101 *се замести с* 102*, ще се получи коректно заключение "*102^2 *е кратно на* 9*".*
Нека p: "101 е кратно на 3"и q: "101^2 *е кратно на* 9*". Тогава имаме следния случай*
p
$p \rightarrow q$
$\therefore q$
Обаче p е лъжа, следователно q е некоректно заключение.

2.5 Правила за извод при използване на квантори и предикати

- Универсалноследствие(Universal instantiation)
  $\forall x P(x)$
  $\therefore P(c)$ ако $c \in U$

- Универсално обобщение(Universal generalization)
  $P(c)$ за някое $c \in U$
  $\therefore \forall x P(x)$

- Частичноследствие(Existential instantiation)
  $\exists x P(x)$
  $\therefore P(c)$ за някой елемент $c \in U$

- Частично обобщение(Existential generalization)
  $P(c)$ за някой елемент $c \in U$
  $\therefore \exists x P(x)$

2.6 Доказателство на теореми

- Директно доказателство
  Импликацията "$p \rightarrow q$"може да бъде доказана чрез доказване на твър-

дението:
"Ако p е истина , то q също е истина."

- Индиректно доказателство
Импликацията "$p \to q$"е еквивалентна на следния контра-пример "$\neg q \to \neg p$". Следователно, доказателството на изходната импликация "$p \to q$"се свежда до доказване на твърдението: "Ако q е лъжа, то и p също е лъжа.

3 Лекция 3: Теория на множества

3.1 Парадокс на Ръсел

Някои множества (класове) съдържат себе си а други не.
Ръсел нарича множествата класове.
Класът от всички класове е клас, който се съдържа (принадлежи)на себе си. Празният клас не принадлежи на себе си. Да допуснем, че може да създадем клас от всички класове, като празния например, които не съдържат себе си.
Парадоксът възниква при въпроса, дали този клас принадлежи на себе си.
Множеството от всички множества, които не съдържат себе си !?
$M = \{A|A \notin A\}$

- Множество – първично понятие
- Принадлежност на елемент към множеството – първично понятие
$x \in A \to$ Елементът x принадлежи на A.
- Свойство – понятие от логиката и се приема за първично.
P – свойство. Ако даден предмет x го притежава се записва P(x)

Дефиниция 3.1.1 (Множества) *Множества се дефинират като се изброяват елементите му*

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

за безкрайни множества е по - удобно като се използва свойство за принадлежност

$$R = \{x|P(x)\}$$

Аксиома 3.1.1 *Ако го има свойството P, то съществува множеството на всички обекти, които имат това свойство P.*

Аксиома 3.1.2 *Две множества са равни, ако съдържат еднакви елементи.*

Дефиниция 3.1.2 (Нормално множество) *Нормално множество е множество, което не принадлежи на себе си $A \notin A$*

3.2 Множества

- Множество е неподредена съвокупност от нула или повече различни обекти (наречени елементи).
- $a \in A$ - "а е елемент на множеството А"
- $a \notin A$ - "а не е елемент на А"
- $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ - "А се състои от $a_1, a_2, ..., a_n$"
- Подреждането на елементите не е от значение.
- Няма значение ако някой елемент се повтаря.

Пример 3.2.1
- $A = \varnothing$ - *празно множество*
- $A = \{z\}, z \in A, z \neq \{z\}$
- $A = \{\{b, c\}, \{c, x, d\}\}$ - *множество от множества*
- $A = \{\{x, y\}\}, \{x, y\} \in A, \{x, y\} \neq \{\{x, y\}\}$
- $A = \{x | P(x)\}$

3.2.1 Равенство на множества

Дефиниция 3.2.1 *Множествата A и B са равни тогава и само тогава, когато съдържат едни и същи елементи.*

Пример 3.2.2 $A = \{9, 2, 7, 3\}, B = 7, 9, -3, 2 : A = B$
A= {куче, котка, кон}, B ={котка, кон, катерица, куче} : $A \neq B$
A = {куче, котка, кон}, B = {котка, кон, куче, куче} : $A = B$

3.2.2 Подмножества

$A \subseteq B$ - "А е подмножество на В"
$A \subseteq B$ тогава и само тогава, когато всеки елемент на А е и елемент на В
Формален запис:
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Правила

- $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
- $((A \subseteq B)) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C)$
- $\varnothing \subseteq A$ за всяко множество А (но $\varnothing \in A$ не е вярно за всяко множество А)
- $\subseteq A$ за всяко множество А

3.2.3 Собствени подмножества

$A \subset B$ - "A е собствено подмножество на B"
$A \subseteq B$ и $A \neq B$
Формален запис:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

или

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \neg\forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

3.2.4 Число на кардиналност, мощност(брой елементи) на множество

Ако множеството S съдържа n различни елемента, $n \in N$, Множеството S е крайно множество с кардиналност (мощност) n.
Мощност: $|P(A)| = 2^{|A|}$

Пример 3.2.3 $A = \{Mercedes, BMW, Porsche\}, |A| = 3$
$B = \{1, \{2, 3\}, \{4, 5\}, 6\}, |B| = 4$
$C = \varnothing, |C| = 0$
$D = \{x \in N | x \leq 7000\}, |D| = 7001$
$E = \{x \in N | x \geq 7000\}, |E| = \infty$

3.2.5 Множество от всички подмножества на дадено множество

$P(A)$ "множеството от всички подмножества на A"(записва се като 2^A)
$P(A) = \{B | B \subseteq A\}$

3.2.6 Декартово произведение

Дефиниция 3.2.2 (Декартово произведение) *Декартово произведение на две множества A и B е ново множество $A \times B$, което се дефинира като*

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

т.е декартовото произведение е множество от наредени двойки.

Пример 3.2.4 $A = \{x, y\}, B = \{a, b, c\}$
$A \times B = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$

- $A \times \varnothing = \varnothing$
- $\varnothing \times A = \varnothing$
- За непразни множества A иB : $A \neq B \Leftrightarrow A \times B \neq B \times A$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

3.3 Операции на множества

3.3.1 Обединение

$A \cup B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

Пример 3.3.1 $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$
$A \cup B = \{a, b, c, d\}$

3.3.2 Сечение

$A \cap B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
Несвързани множества: Нямат общи елементи , $A \cap B = \varnothing$

Пример 3.3.2 $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$
$A \cap B = \{b\}$

3.3.3 Разлика

$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

Пример 3.3.3 $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$
$A \setminus B = \{a\}$

3.3.4 Допълнение

$A^c \equiv \overline{A} = U - A$
U - универсално множество.

Пример 3.3.4 $U = N$
$B = \{250, 251, 252, ...\}$
$\overline{B} = \{0, 1, 2, ..., 248, 249\}$

3.4 Идентичност на законите за логическо преобразуване и законите за операции с множества

- Закон за идентичност :
  $A \cup \varnothing = A$
  $A \cap U = A$

- Закон за доминиране :
  $A \cup U = A$
  $A \cap \varnothing = A$

- Закон за пълна идентичност :
  $A \cup A = A$
  $A \cap A = A$

- Закон за двойно отрицание :
  $\overline{\overline{A}} \equiv (A^c)^c = A$

- Комутативен закон :
  $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$

- Асоциативен закон :
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- Дистрибутивен закон :
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Закони на Де Морган :
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- Закон за поглъщането :
  $A \cup (A \cap B) = A$
  $A \cap (A \cup B) = A$

- Закон за допълнението:
  $A \cup \overline{A} = U$
  $A \cap \overline{A} = \varnothing$

4 Лекция 4: Релации