Математически анализ 2

Exonaut

29 май 2021 г.

Съдържание

1 Лекция 1: Пространството $\mathbb{R}^m$

1.1 Няколко важни неравенства

Нека a_k и $b_k(k = 1, 2, ..., m)$ са реални числа и $m \in \mathbb{N}$

Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц). *В сила е следното неравенство:*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални:
$(\exists\lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k)$
Равенството може да се запише:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)}$$

Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски). *В сила е следното неравенство:*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} (p \geq 1)$$

Теорема 1.1.3. *В сила е следното неравенство:*

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k - b_k|$$

1.2 Видове крайно мерни пространства

1.2.1 Линейно(Векторно) пространство

Дефиниция 1.2.1. *Нека L е линейно(векторно) пространство над полето R. В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.*

1. $x, y \in L \implies z = x + y \in L$

2. $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies z = \lambda x \in L$

1.2.2 Евклидово пространство

Дефиниция 1.2.2. *Крайномерното пространство L се нарича евклидово, ако в него е въведено скаларно произведение, т.е за всеки два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави реално число (x, y), удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.*

1. $x, y, z \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies (x + y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

2. $x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$

3. $x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$

1.2.3 Метрично пространство

Дефиниция 1.2.3. *Крайномерното пространство L се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика) ρ, т.е за два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави неотрицателно число $\rho \geq 0$ със следните свойства*

1. $\rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z). \forall x, y, z \in L$

Метрично пространство L с метрика ρ се означава (L, ρ)

1.2.4 Нормирано пространство

Дефиниция 1.2.4. *Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма $\|.\|$, т.е $\|.\| : L \to \mathbb{R}_0^+$ със свойства*

1. $x = 0 \implies \|x\| = 0, x \neq 0 \implies \|x\| > 0$

2. $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

3. $x, y \in L \implies \|x + y\| \leq |x| + |y|$

Теорема 1.2.1. *Ако L е нормирано пространство с дадена норма $\|.\|$, то L е метрично пространство, т.е равенството $\rho(x, y) = \|x - y\|$ дефинира разстоянието в L*

1.3 Пространството $\mathbb{R}^m$ - дефиниция и основни свойства

Дефиниция 1.3.1. *Множеството от наредени m-торки* $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ *от реални числа. Числата* $a_1, a_2, ..., a_m$ *се наричат съответно първа, втора, ..., m-та кордината на a.*

Ако имаме $a = (a_1, a_2, ..., a_m), b = (b_1, b_2, ..., b_m), ; \lambda \in \mathbb{R}$ *то*

1. $a + b = (a_1, a_2, ..., a_m) + (b_1, b_2, ..., b_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_m + b_m) \in \mathbb{R}^m$

2. $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_m) \in \mathbb{R}^m$

1.3.1 Скаларно произведение

Скаларно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \right)$$

С така въведено скаларно произведение пространството R^m се превръща в евклидово.

1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k)^2}$$

се въвежда норма в $\mathbb{R}^m$.
Нормата генерира метрика в $\mathbb{R}^m$ с формула:

$$\rho(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k)^2}$$

1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат: $a^2 = (a, a) = \sum_{k=1}^{m} a_k^2$

1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат: $(a,b)^2 \leq a^2b^2$ и $|(a,b)| \leq \|a\|\|b\|$

1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат: $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

1.4 Точки и множества в $\mathbb{R}^m$

1.4.1 Паралелепипед

Дефиниция 1.4.1. *Множеството*

$$\Pi(a;\delta_1,\delta_2,...,\delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k < x_k - a_k < \delta_k\}$$

се нарича отворен паралелепипед в $\mathbb{R}^m$ с център точката a.

Множеството

$$\widetilde{\Pi}(a;\delta_1,\delta_2,...,\delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k \leq x_k - a_k \leq \delta_k\}$$

се нарича затворен паралелепипед в R^m с център точката a.

Ако $\delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_m = \delta$, получените множества $\Pi(a;\delta)$ и $\widetilde{\Pi}(a;\delta)$ се наричат съответно отворен и затворен куб в $\mathbb{R}^m$ с център a.

1.4.2 Сфера и кълбо

Дефиниция 1.4.2. *Нека числото $r > 0$. Множеството*

$$B(a;r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x,a) < r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x-a\| < r\}$$

се нарича отворено кълбо в $\mathbb{R}^m$ с център a и радиус r, множеството

$$\widetilde{B}(a;r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x,a) \leq r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x-a\| \leq r\}$$

се нарича затворено кълбо в $\mathbb{R}^m$ с център a и радиус r, а множеството

$$S(a;r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x,a) = r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x-a\| = r\}$$

се нарича сфера в $\mathbb{R}^m$ с център a и радиус r, а множеството

Дефиниция 1.4.3. *Точката a се нарича*

- *вътрешна за множеството A, ако съществува отворено кълбо* $B(a,\varepsilon) : B(a,\varepsilon) \subset A$
- *външна за A, ако съществува* $B(a,\varepsilon) : B(a,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$
- *контурна за A, ако за всяко* $\varepsilon > 0 : B(a,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ *и* $B(a,\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \varnothing$
- *изолирана ако съществува* $\varepsilon > 0 : B(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$

Дефиниция 1.4.4. *Множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича*

- *отворено, ако всяка негова точка е вътрешна*
- *затворено, ако неговото допълнение* $\mathbb{R}^m \setminus A$ *е отворено*

Дефиниция 1.4.5. *Околност на дадена точка* $a \in \mathbb{R}^m$ *се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с* U_a.

Дефиниция 1.4.6. *Точка a се нарича точка на сгъстяване на множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$, *ако всяка нейна околност* U_a *съдържа поне една точка на A, различна от a, т.е* $U_a \cap (A \setminus \{a\} \neq \varnothing$

Дефиниция 1.4.7. *Величината*

$$d = d(A) = \sup_{a',a'' \in A} \rho(a'; a'')$$

се нарича диаметър на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$.

Дефиниция 1.4.8. *Множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича ограничено, ако съшествува кълбо(с краен радиус), което го съдържа.*

Дефиниция 1.4.9. *Множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича компактно, ако A е затворено и ограничено.*

Дефиниция 1.4.10. *Множеството* $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, *чийто кординати са непрекъснати функции* $x_k = x_k(t)(k = 1, 2, ..., m)$, *дефинирани върху даден интервал [a,b] се нарича непрекъсната крива в* R^m. t *се нарича параметър на кривата.*
Точките $x(a) = (x_1(a), x_2(a), ..., x_m(a))$ *и* $x(b) = (x_1(b), x_2(b), ..., x_m(b))$ *се наричат начало и край на дадената крива. Ако* $x(a) = x(b)$ *кривата е затворена*

Дефиниция 1.4.11. *Нека* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ *и* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ *са фиксирани числа за които* $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k > 0$. *Множеството от точки* $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ *чиито координати се представят във вида*

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, ..., m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството R^m, *минаваща през точка* x^0 *по направление* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$.

Дефиниция 1.4.12. *Множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъсната крива* γ, *която ги свързва и* $\gamma \subset A$.

Дефиниция 1.4.13. *Множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.*

Дефиниция 1.4.14. *Област, всеки две точки на която могат да се съединят с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.*

Дефиниция 1.4.15. *Областа* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича звездообразна област, относно точката* $x^0 \in A$, *ако за всяка точка* $x \in A$ *отсечката* $[x^0, x]$ *лежи изцяло в* A.

1.5 Редици от точки в $\mathbb{R}^m$

Дефиниция 1.5.1. *Редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\}$ *се нарича редица от точки в* $\mathbb{R}^m$, *а редицата* $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} (k = 1 \div m)$ *- к-та координатна редица. За по кратко редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ *се означава* $\{x^{(n)}\}$

Дефиниция 1.5.2. *Редицата* $\{y^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ *се нарича поредица на редицата* $\{x^{(n)}\}$ *и се означава:*
$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, ...,$ *или* $\{x^{(n_l)}\}_{l=1}^{\infty}$
ако за всяко l *съществува такова* n_l, *че* $y^{(l)} = x^{(n_l)}$, *при това, ако* $l' < l''$, *то* $n_{l'} < n_{l''}$.

Дефиниция 1.5.3. *Редицата* $\{x^{(n)}\}$ *се нарича сходяща към точка* $a \in \mathbb{R}^m$ *(граница на редицата), ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува такова* $N_0 > 0$, *че за всяко* $n > N_0$ *е изпълнено неравенството* $\rho(x^{(n)}; a) = \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$. *Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.*

Дефиниция 1.5.4. *Точката* $a \in R^m$ *се нарича точка на сгъстяване на редицата* $\{x^{(n)}\}$, *ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.*

Теорема 1.5.1. *Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$ и точката $a \in \mathbb{R}^m$. Тогава*

$$(\{x^{(n)}\} \to a) \iff (x_k^{(n)} \to a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката a, тогава и само тогава когато всяка от кординатите на редици $\{x_k^{(n)}\}$ има граница съответната кордината a_k на точката a

Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши)**.** *Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$. Редицата $x^{(n)}$ е сходяща тогава и само тогава когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $N_0 > 0$, че при всяко $n \in N, n > N_0$ и всяко $p \in \mathbb{N}$ е изпълнено $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = \|x^{(n+p)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$*

Дефиниция 1.5.5. *Редицата $\{x^{(n)}\}$ се нарича ограничена , ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.*

Теорема 1.5.3 (Болцано-Вайерщрас)**.** *От всяка ограничена редица в пространството R^m може да се избере сходяща подредица.*

Дефиниция 1.5.6. *Всяко множество $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича компактно, ако от всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$, може да се избере сходяща подредица $\{x_k^{(n)}\}$ с граница принадлежаща на A*

2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

2.1 Дефниция на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.1.1. *Казва се че дадена функция с дефиниционна област(дефиниционно множество) D, ако на всяка точка $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ от множеството D е съпоставено реално число $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, т.е на всяко $x \in D$ съществува единствено число $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Понякога за кратко се записва.*

$$f : D \to \mathbb{R}$$

В $\mathbb{R}^2$ се използва (x, y) за означение, а в $\mathbb{R}^3$ - (x, y, z).

2.2 Граница на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.2.1 (Коши)**.** *Нека $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, а е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \to a$ със стойностти $x \neq a$ ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записва се*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Дефиниция 2.2.2 (Хайне)**.** *Нека $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, а е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \to a$ със стойностти $x \neq a$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in D, x^{(n)} \neq a$ сходяща към а, числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница L.*

Теорема 2.2.1. *Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.*

Дефиниция 2.2.3. *Нека $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, а е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ дивергира към ∞ (съответно към $-\infty$) при $x \to a$ със стойностти $x \neq a$, ако за всяко $A \in \mathbb{R}$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $f(x) > A$(съответно $f(x) < A$). Записва се*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty(-\infty)$$

Дефиниция 2.2.4 (Повторна граница)**.** *Нека $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на сгъстяване за D и функция $f : D \to \mathbb{R}$. Нека съществува* *такава околност* $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ *на точката* $_2$*, че за всички стойностти* $y \in U_{a_2}$ *да съществува* $\lim\limits_{x \to a_1} f(x, y) = \varphi(y)$*. Ако освен това съществува* $\lim\limits_{y \to a_2} \varphi(y) = A$*,* A *се нарича повторна граница и се означава както следва*

$$A = A_{1,2} = \lim_{y \to a_2} (\lim_{x \to a_1} f(x, y))$$

.

Аналогично се съвежда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x \to a_1} (\lim_{y \to a_2} f(x, y))$$

Теорема 2.2.2. *Нека* $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *е точка на сгъстяване за* D *и функция* $f : D \to \mathbb{R}$*. Нека*

1. *Съществува такава околност* $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ *на точката* a_2*, че за всички стойностти* $y \in U_{a_2}$ *да съществува* $\lim\limits_{x \to a_1} f(x, y) = \varphi(y)$*.*

2. *Съществува границата* $\lim\limits_{(x,y) \to (a_1, a_2)} f(x, y) = L$*.*

Тогава съществува граница $\lim\limits_{y \to a_2} \varphi(y)$ *и освен това е в сила равенството* $\lim\limits_{y \to a_2} \varphi(y) = L$

2.3 Непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.3.1. *Казва се че функцията* $f : D \to \mathbb{R}$ *е непрекъсната в точка* $a \in D$ *ако* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$*.*

Дефиниция 2.3.2 (непрекъснатост по Коши)**.** *Казва се, че функцията* $f : D \to \mathbb{R}$ *е непрекъсната в точка* $a \in D$*, ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува* $\delta > 0$*, че за всяко* x *от множеството* D*, за което* $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ *е изпълнено* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$*.*

Дефиниция 2.3.3 (непрекъснатост по Хайне)**.** *Казва се, че функцията* $f : D \to \mathbb{R}$ *е непрекъсната в точка* $a \in D$ *ако за всяка редица* $\{x^{(n)}\}$ *(с* $x^{(n)} \in D$ *за* $n \in \mathbb{N}$*) сходяща към* a*, числовата редица* $\{f(x^{(n)})\}$ *има граница* $f(a)$*.*

Дефиниция 2.3.4 (за съставна функция)**.** *Нека* $A \subset \mathbb{R}^m$ *е отворено множество,* $f : A \to \mathbb{R}$ *и* $x_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}, k = 1 \div m$*. Полагайки* $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)) \in A$ *за всяко* $t \in (\alpha, \beta)$ *съставната функция* $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$ *се дефинира по формулата*

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$$

Теорема 2.3.1. *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : A \to \mathbb{R}$ интервалът $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $x_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ за $k = 1 \div m$. Нека освен това $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)) \in A$ за $\forall t \in (\alpha, \beta)$ и x_k са непрекъснати в точката $t_0 \in (\alpha, \beta)$ за $k = 1 \div m$, а f е непрекъсната в $x^0 = x(t_0)$. Тогава функцията $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$ е непрекъсната в точката t_0*

2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.4.1. *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : A \to \mathbb{R}$. Функцията се нарича равномерно непрекъсната в A, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\epsilon)$, че за всеки две точки $x', x'' \in A$ за които разстоянието $\rho(x'; x'') = \|x' - x''\| < \delta$, да следва, че $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Теорема 2.4.1 (на Вайерщрас)**.** *Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \to \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K. Тогава*

1. *f е ограничена в K, т.е съществуват $m, M \in \mathbb{R}$ такива че за всички $x \in K$ е изпълнено неравенството $m \le f(x) \le M$*

2. *f достифа най малката и най-голямата си стойност в K, т.е съществуват точки $x^0, y^0 \in K$, такива че*

$$f(x^0) = \inf_{x \in K} f(x); f(y^0) = \sup_{y \in K} f(x)$$

Теорема 2.4.2 (на Кантор)**.** *Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \to \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K. Тогава f е равномерно непрекъсната върху K.*

3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи

3.1 Дефиниция на частна производна

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $D \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество
- $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ - точка, принадлежаща на D
- $U_{x^0} \subset D$ - околност на x^0
- $U_{x_i^0} \subset D$ - околност на x_i^0 (i = 1, 2, ..., m)
- точката $(x_1^0, x_2^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^i, ..., x_m^0) \in U_{x^0}$, за всички стойности на $x_i \in U_{x_i^0}$
- f и g - функции, дефинирани съответно в D и $U_{x_i^0}$. т.е
  $f : D \to \mathbb{R}, g : U_{x_i^0} \to \mathbb{R}$ и $g(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^i, ..., x_m^0)$

Дефиниция 3.1.1. *Производната, ако съществува на функцията g в точката x_i^0 се нарича частна производна на функцията f(по променлива x_i^0) в точката x^0. Използва се означението $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(x^0)$.*
Частната производна на функцията f отностно променливата x_i е равна на границата на функцията $\varphi(h_i) = \dfrac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i}$ при $h_i \to 0$ (ако съществува) т.е

$$\lim_{h_i \to 0} \varphi(h_i) = \lim_{h_i \to 0} \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$$

Пример 3.1.1.

$$f(x, y) = x^2 + 9xy^2$$
$$f'_x(x, y) = (x^2)'_x + (9xy^2)'_x = 2x + 9y^2$$
$$f'_y(x, y) = (x^2)'_y + (9xy^2)'_y = 0 + 9x \cdot 2 \cdot y = 18xy$$

3.2 Частни производни от по-висок ред

Дефиниция 3.2.1. *Частната производна на частната производна от $n-1$ ред, $n = 1, 2, ...$(ако съществува), се нарича частична производна от n-ти ред. Частните производни, получени при диференциране по различни променливи се наричат смесени производни, а получените при диференциране само по една и съща променлива се наричат чисти производни.*

Пример 3.2.1.

$$f(x,y) = x^3\sin(6y) + x^2y^3 + 2222, f''_{x,y} =?, f''_{y,x} =?$$

$$f''_{x,y} = (f'_x(x,y))'_y$$
$$f'_x(x,y) = (x^3\sin(6y))'_x + (x^2y^3)'_x + (2222)'_x = 3x^2\sin(6y) + 2xy^3 + 0$$
$$f''_{x,y} = (3x^2\sin(6y) + 2xy^3)'_y$$
$$f''_{x,y} = (3x^2\sin(6y))'_y + (2xy^3)'_y = 3x^2\cos(6y).6 + 2.3xy^2 = 18x^2\cos(6y) + 6xy^2$$

$$f''_{y,x} = (f'_y(x,y))'_x$$
$$f'_y(x,y) = (x^3\sin(6y))'_y + (x^2y^3)'_y + (2222)'_y$$
$$f'_y(x,y) = x^3\cos(6y).6 + x^2.3y^2 + 0 = 6x^3\cos(6y) + 3x^2y^2$$
$$f''_{y,x} = (6x^3\cos(6y) + 3x^2y^2)'_y = (6x^3\cos(6y))_y + (3x^2y^2)'_y$$
$$f''_{y,x} = 6.3.x^2\cos(6y) + 3.2.xy^2 = 18x^2\cos(6y) + 6xy^2$$

Теорема 3.2.1 (за равенство на смесени производни)**.** *Нека точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и нека функцията f е дефинирана в отвореното множество $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2$, което е нейната област т.е $f : U \to \mathbb{R}$. Нека освен това съществуват частните производни $f'_x, f'_y, f''_{x,y}, f''_{y,x}$ за всички $(x,y) \in U$ и $f''_{x,y}, f''_{y,x}$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0). Тогава е изпълнено равенството*

$$f''_{x,y}(x_0, y_0) = f''_{y,x}(x_0, y_0)$$

3.3 Диференцируемост на функция

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$

- $U \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество, което е околност на x^0.Без ограничение на общността може да се счита че U е δ-околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0;\delta)$ с център x^0 и радиус δ
- $f : U \to \mathbb{R}$ - функция дефинирана в $U = B(x^0;\delta)$

Дефиниция 3.3.1. *Функцията f се нарича диференцируема в точка x^0 ако съществуват числа $A_1, A_2, ..., A_m$ и функция $\varepsilon(x^0, x-x^0)$, дефинирана за всички допустими стойности на $x \in U$ и $x - x^0 = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, ...x_m - x_m^0)$, като при това*

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} A_k(x_k + x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0)\|x - x^0\|$$

и $\lim\limits_{\|x-x^0\|\to 0} \varepsilon(x^0, x - x^0) = 0$

Дефиниция 3.3.2. *Функцията f се нарича диференцируема в отвореното множество U, ако тя е диференцируема във всяка негова точка.*

Теорема 3.3.1. *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то тя е непрекъсната.*

Дефиниция 3.3.3. *В случай на диференцируемост в точката x^0 на функцията $f : U \to \mathbb{R}$, изразът*

$$df(x^0) \circ (h) = A_1h_1 + A_2h_2 + ... + A_mh_m$$

(или $df, df(x^0)$) се нарича пълен диференциал на $f(x)$ в точката x^0

Теорема 3.3.2. *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то съществуват частните производни $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ в точката x^0 и освен това $A_k(x^0) = \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$.*

Дефиниция 3.3.4. *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то със следната формула се изразява нейната производна в точката x^0*

$$f'(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0))$$

.

Теорема 3.3.3. *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ притежава частни производни $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$ в отвореното множество U и освен това са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то f е диференцируема в точката x^0.*

Дефиниция 3.3.5. *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ притежава частни производни в U и тези частични производни са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в точката x^0. Ако тези производни са непрекъснати в U, то функцията се нарича непрекъсанот диференцируема в това множество.*

Дефиниция 3.3.6. *Диференциалът на диференциала от $n-1$ ред ($n = 2, 3, \ldots$) от функцията f(ако съществува) се нарича диференциал от n-ти ред(n-ти диференциал) на тази функция и се бележи $d^n f$*

Ако f е два пъти непрекъсната и диференцируема в $x^0 \in U$ тогава втория диференциал получава по следния резултат

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f(x^0)$$

което е симетрична квадратична форма на $dx_i (i = 1 \div m)$.

Аналогично ако f е n пъти непрекъсната и диференцируема в $x^0 \in U$, то $d^n f(x^0)$ съществува и се дава със следната формула

$$d^n f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f(x^0)$$

4 Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права

4.1 Диференциране на съставна функция

$x^0 \in \mathbb{R}^m$ и отворено множество $U \subset \mathbb{R}^m$ е околност на точката x^0 (Без ограничение на общността може да се счита че U е δ-околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0;\delta)$ с център x^0 и радиус δ).
$t_0 \in (\alpha,\beta) \subset R$

Теорема 4.1.1. *Нека функцията f е дефинирана в U, а φ_k - в интервала (α,β), т.е*
$f : U \to \mathbb{R}$ *и* $\varphi_k : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ $(k = 1 \div m)$
като при това $x_k = \varphi_k(t)$ за $k = 1 \div m$, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t) \in U$ за всички стойности на $t \in (\alpha,\beta)$. Нека f е диференцируема в U, f'_k са непрекъснати в x^0 за $k = 1 \div m$, φ_k са диференцируеми в t_0 и $F : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ е дефинирана с равенствово.

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)), t \in (\alpha,\beta)$$

Тогава функцията F е диференцируема в t_0 и в сила е следното равенство

$$F'(t_0) = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(x^0)\varphi'_k(t_0)$$

За $m = 2$:
$\varphi_1(t) = \varphi(t), \varphi_2(t) = \psi(t)$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0)$$

Пример 4.1.1. $f(x, y)$ - дефинирана и диференцируема в $U_{(1,2)} \subset \mathbb{R}^2$. с непрекъснати частни производни f'_x, f'_y в точката (1,2).
Намерете производната $F'(0)$ на съставната фунция F, зададена с равен-

ството $F(t) = f(1+3t, 2+4t)$.

$t_0 = 0$
$x = \varphi(t) = 1 + 3t$
$y = \psi(t) = 2 + 4t$
$x_0 = \varphi(0) = 1$
$y_0 = \psi(0) = 2$
$\varphi'(t) = 3$
$\psi'(t) = 4$
$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0) \implies F'(0) = 3f'_x(1,2) + 4f'_y(1,2)$

4.2 Производна по посока. Градиент

Нека $x^0 \in \mathbb{R}^m$ и лъчът l е дефиниран, както следва:

$$l : x = x^0 + t\nu, t > 0$$

Функцията f е дефинирана върху този лъч, а

$$\varphi(t) := f(x(t)) = f(x^0 + t\nu), t > 0$$

Дефиниция 4.2.1. *Границата(ако съществува)*

$$\lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

се нарича производна на f в точката x^0 по посока на вектора ν и се означава $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}$, т.е

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

ако съществува границата.

Ако частните производни съществуват, са производни "по посока на кординатните оси".

Ако f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката в x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0, то съществува производната ѝ по посока на вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m)$ и

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{m} \nu_k \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$$

Дефиниция 4.2.2. *Векторът с кординати* $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0)$ *се нарича градиент на* f *в точката* x^0 *и се означава*

$$grad\, f(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0))$$

Предвид тази дефиниция, формулата за производна по посока на вектор ν *се записва по кратко във вида*

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = grad\, (f(x^0), \nu)$$

Теорема 4.2.1. *Ако функцията* f *е дефинирана и диференцируема в околността* U_{x^0} *на точката в* x^0 *и* f'_{x_k} *са непрекъснати в* x_0*, то съществува производната на* f *по посока на произволен вектора* $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m)$ *и тя се дава с формула:* $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = grad\, f(x^0)$

Ако, ν е единичен вектор, т.е $\|\nu\| = 1$.
Тогава е в сила неравнестово $\left|\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| \leq \|grad\, f(x^0)\|$, което следва от неравенство на Коши.

$$\left|\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| = \left|grad\, (f(x^0), \nu)\right| \leq \|grad\, f(x^0)\| \|\nu\| = \|grad\, f(x^0)\|$$

Равенство се достига само когато ν и $f(x^0)$ са колинеарни (еднопосочни или успоредни). тогава

$$\left|\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| = \|grad\, f(x^0)\|$$

Ако вектора ν е колинеарен с градиента, тогава векторът $\nu = \dfrac{grad\, f(x^0)}{\|grad\, f(x^0)\|}$ и тогава

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \left(grad\, f(x^0), \frac{grad\, f(x^0)}{\|grad\, f(x^0)\|}\right) = \|grad\, f(x^0)\|$$

Ако $grad\, f(x^0) \neq 0$ то производната достига най голяма стойност единствено, ако диференцирането се извършва по посока на градиента. С други думи, посоката на градиента е посоката на най бързо нарастване на функцията, а големината му е равна на производната по тази посока.

Ако $\nu = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, ..., \cos\alpha_m)$, то производната по посока ν става

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = f'_{x_1}(x^0)\cos\alpha_1 + f'_{x_2}(x^0)\cos\alpha_2 + ... + f'_{x_m}(x^0)\cos\alpha_m.$$

4.3 Допирателна равнина. Нормална права

- $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ - точка в $\mathbb{R}^2$
- $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ точка в $\mathbb{R}^3$
- $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2 =$ - околност на (x_0, y_0)
- $f : U \to \mathbb{R}$ - функция
- $z_0 = f(x, y)$
- $S : z = f(x, y) \iff S : f(x, y) - z = 0$ - уравнение на равнина
- f'_x, f'_y - първи частни производни за всички $(x, y) \in U$,f'_x, f'_y са непрекъснати в точката (x_0, y_0)

Дефиниция 4.3.1. *Равнината $\tau(\tau \nparallel Oz)$, зададена с уравнение*

$$\tau : z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина в точкат M_0 към повърхнината S и представлява графиката на $f(x, y)$.

Дефиниция 4.3.2. *Векторите n_1, n_2*

$$n_1(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) \qquad n_2(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1),$$

които са нормални вектори на тангенциалната равнина, се наричат нормални вектори и за повърхнината S.
$n_1 = -n_2$ Това позволява да се използват за ориентация на повърхнината S.
Горната страна се дефинира с вектора n_1 за който ъгъл $\measuredangle(n_1, k)$ е остър.

Дефиниция 4.3.3. *Правата n, зададена с уравнение*

$$n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$

се нарича нормала към повърхнината S към точка M_0

Ако прекараме две равнини през $_0$ съответно $\alpha : x = x_0$ и $\beta : y = y_0$ всяка от тях пресича повърхнината в крива линия съответно

$$C_1 : x = x_0, y = y, z = f(x_0, y) \qquad C_2 : x = x, y = y_0, z = f(x, y_0)$$

t_1 е направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в точката $_0$, а с t_2 - направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в същата точката, то

$$t_1(0, 1, f'_y(x_0, y_0), \qquad t_2(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$$

Равнината τ е компланарна с векторите t_1, t_2 то нейния нормален вектор може да се получи от векторното им произведение

$$n_1 = t_2 \times t_1 \qquad n_2 = t_1 \times t_2$$

Пример 4.3.1. За повърхнина S, зададена с уранение $S : z = x^2 + y^2 + 3$, да се напишат:
1) допирателната равнина $\tau z M_0(0, 0, 3)$
2) нормалните вектори на τ в т. M_0.
3) нормалата на повърхнината S в т. M_0.
Решение:

$$z'_x = 2x \,;\, z'_y = 2y \,;\, M_0(0, 0, 3) = M_0(x_0, y_0, z_0)$$
$$z'_x(x_0, y_0) = z'_x(0, 0) = 0 \,;\, z'_y(x_0, y_0) = z'_y(0, 0) = 0$$
$$1)\tau : z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$\tau : z - 3 = 0x + 0y \iff \tau : z = 3$$
$$2)\vec{n_1} = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) = (0, 0, 1)$$
$$\vec{n_2} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1) = (0, 0, -1)$$
$$3)n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$
$$n : \frac{x - 0}{0} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 3}{1} = \lambda$$
$$n(0, 0, \lambda + 3), \lambda \in \mathbb{R}$$

5 Лекция 5: Неявни функции. Съществуване и диференциране

5.1 Неявни функции

Нека имаме уравнението $F(x, y) = 0$ и да се реши спрямо y. Решението трябва да зависи и от другата променлива. Нека $y = f(x)$ и заместваме в началното уравнение.

$$F(x, f(x)) = 0$$

Дефиниция 5.1.1. *Ако функцията $f(x)$ удовлетворява равенството*

$$F(x, f(x)) = 0$$

за всяко x от дефиниционното си множество, то тя се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението $F(x; y) = 0$.

Ако диференцираме равенството $F(x, f(x)) = 0$ по x с теоремата за съставни функции получаваме

$$F'_x(x, f(x)) + f'(x)F'_y(x, f(x)) = 0 \implies f'(x) - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

Където $F'_y(x, f(x)) \neq 0$

Пример 5.1.1. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$

$$F(x, y) = 0 \iff y^2 = 5 - x^2$$
$$y_{1,2} = \pm\sqrt{5 - x^2}$$

Нека $M_0(x_0, y_0)$ точка в $\mathbb{R}^2$, отвореното множество $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$ е нейна околност и нека $F \to \mathbb{R}$.

Теорема 5.1.1 (Съществуване на неявна функция)**.** *Нека $M_0(x_0, y_0)$ точка в $\mathbb{R}^2$, отвореното множество $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$ е нейна околност и функцията $F : U \to \mathbb{R}$ удовлетворява следните условия*

1. *F е непрекъсната в U*
2. *$F(x_0, y_0) = 0$*
3. *За всяка точка $(x, y) \in U$ $\exists F'_y(x, y)$*
4. *F'_y е непрекъсната в M_0*

5. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогава съществуват околности

$$X = \{x : |x - x_0| < a\}(a > 0) \qquad Y = \{y : |y - y_0| < b\}(b > 0)$$

такива че правоъгълника $\Pi = X \times Y \subset U$ *и съществува единствена функция* $y = f(x), f : X \to Y$ *,* f *- непрекъсната в* X*,* $f(x_0) = y_0$ *и* $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$

Дефиниция 5.1.2. *Фунцкията* $y = f(x)$ *се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението* $F(x, y) = 0$*, в околност на точката* (x_0, y_0)

Теорема 5.1.2 (Добавка към 5.1.1)**.** *Ако освен това* F'_x, F'_y *са дефинирани в* U *и непрекъснати в* (x_0, y_0) *то* $f(x)$ *е диференцируема в точката* x_0 *и* $f'(x_0)$ *се изразява*

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

Ако F'_x, F'_y са непрекъснати в $U = U_{M_0}$, то f' е непрекъсната в X. Прилагайки формулата за производна в произволна точка в $x \in X$ получаваме

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \tag{1}$$

Аналогично се формулира теоремата за неявна функция от уравнението $F(x, y) = 0,$ за $x(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ $(m > 2)$ и $y \in R$ т.е $F(x_1, x_2, ..., x_m, y) = 0$

Теорема 5.1.3 (Съществуване на неявна функция)**.** *Нека точката* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in \mathbb{R}^m, M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *и* $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ *е околност на* M_0 *и функцията* $F : U \to \mathbb{R}$ *удовлетворява следните условия*

1. *F е непрекъсната в U*

2. $F(x^0, y_0) = 0$

3. *За всяка точка* $(x, y) \in U \, \exists F'_y(x, y)$

4. *F'_y е непрекъсната в M_0*

5. $F'_y(x^0, y_0) \neq 0$

Тогава съществуват околности:

$$X = \{x : |x - x_k^0| < a_k\}(a_k > 0)\, k = 1 \div m; \qquad Y = \{y : |y - y_0| < b\}(b > 0)$$

такива че правоъгълника $\Pi = X \times Y \subset U, X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$ *и освен това съществува единствена функция* $y = f(x), f : X \to Y$ *,* f *- непрекъсната в* X*,* $f(x^0) = y_0$ *и* $\forall x \in X : F(x; f(x)) = 0$
Ако освен това $F'_{x_k}, k = 1 \div m$ *и* F'_y *са дефинирани в* U *и непрекъснати в* (x^0, y_0)*, то* $f(x)$ *е диференцируема в точката* x^0 *и* $f'(x_k^0)$ *се изразява с формулата*

$$f'(x_k^0) = -\frac{F'_{x_k}(x^0, f(x_0))}{F'_y(x^0, f(x_0))} = -\frac{F'_{x_k}(x^0, y_0)}{F'_y(x^0, y_0)}$$

Пример 5.1.2. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. Да се определи дали съществува единствена функция $y = f(x)$ определена от неявно от уравнението $F(x, y) = 0$ в околността (1,2). Ако съществува да се пресметне $f'(1)$.

$F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4 \neq 0$

Съществува единствена неявна функция $y = f(x)$ определена с уравнението $F(x, y) =$

$f'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$

$F'_x = 2x, \quad F'_x(1, 2) = 4, \quad F'_y = 2y; \quad F'_y(1, 2) = 4$

$f'(1) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

Пример 5.1.3. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3z^2 - 13$. Да се определи дали съществува единствена функция $z = f(x, y)$ определена от неявно от уравнението $F(x, y, z) = 0$ в околността (0,1,2). Ако съществува да се пресметне $z'_x(0, 1), z'_y(0, 1)$.

$F'_z = 6z \implies F'_z(0, 1, 2) = 6 \cdot 2 = 12 \neq 0$

Съцесвува единствена неявна функция $z = f(x, y)$ определена от неявно от уравнени

$F'_x = 2x \implies F'_x(0, 1, 2) = 2 \cdot 0 = 0$

$F'_y = 2y \implies F'_y(0, 1, 2) = 2 \cdot 1 = 2$

$z'_x(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} = -\dfrac{0}{6} = 0$

$z'_y(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

Ако F'_{x_k}, F'_{y_k} са непрекъснати в $U = U_{M_0}$, то f'_{x_k} е непрекъсната в X. Прилагайки формулата за производна в произволна точка в $x \in X$ получаваме

$$y'_{x_k} = f'_{x_k}(x) = -\frac{F'_{x_k}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_{x_k}(x, y)}{F'_y(x, y)} \tag{2}$$

Ако F има непрекъснати частни производни от втори ред, то изразите от дясната страна на (1) (съответно (2)) могат да се диференцират още веднъж по променлива $x(x_j, j = 1 \div m)$, при което се получават вторите производни на f. Така се получават формулите

$$f''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x, y)y'^2}{F'_y(x, y)}$$

респективно, изпускайки за удобство променливите получаваме

$$f''_{x_k x_k}(x) = f''_{x_k^2}(x) = -\frac{F''_{x_k^2} + 2F''_{x_k y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'^2_{x_k}}{F'_y}$$

и за $k \neq j$

$$f''_{x_k x_j}(x) = -\frac{F''_{x_k x_j} + F''_{x_k y}y'_{x_j} + F''_{x_j y}y'_{x_k} + F''_{yy}y'_{x_k}y'_{x_j}}{F'_y}$$

Пример 5.1.4. Да се намери y', y'' на неявната функция $y = f(x)$, дефинирана от уравнението

$$x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$

Да се пресметнат $y'(0), y''(0)$, ако $y(0) = 1$

Решение:

$$F(x,y) = x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y = 2x + 9$$
$$F'_y = -2x + 10y + 4 \neq 0$$
$$F'_x(x,y) = 2x - 2y - 2$$
$$F'_y(0,1) = -2\cdot 0 + 10\cdot 1 + 4 \neq 0$$
$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{2x-2y-2}{-2x+10y+4} = -\frac{x-y-1}{-x+5y+2}$$
$$y'(0) = -\frac{0-1-1}{-0+5\cdot 1+2} = -\frac{-2}{7} = \frac{2}{7}$$
$$y''(x) = -\frac{F''_{xx}(x,y) + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(x,y)y'^2}{F'_y(x,y)}$$
$$F''_{xx} = 2, \quad F''_{yy} = 10, \quad F''_{xy} = -2$$
$$F''_{xx}(0,1) = 2, \quad F''_{yy}(0,1) = 10, \quad F''_{xy}(0,1) = -2$$
$$y''(x) = -\frac{2 + 2\cdot(-2)y' + 10y'^2}{-2x+10y+4}$$
$$y''(x) = -\frac{2 + -4y' + 10y'^2}{-2x+10y+4}$$
$$y''(0) = -\frac{2 + -4\cdot\frac{2}{7} + 10\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2}{-2\cdot 0 + 10\cdot 1 + 4}$$
$$y''(0) = -\frac{2 + -\frac{8}{7} + \frac{40}{49}}{14}$$
$$y''(0) = -\frac{\frac{98-56+40}{49}}{14} = -\frac{\frac{82}{49}}{14} = \frac{82}{49}\cdot\frac{1}{14} = \frac{41}{343}$$

6 Лекция 6: Формула на Тейлор за функция на няколко променливи. Локални екстремуми на функция на няколко променливи

6.1 Формула на Тейлор за функция на няколко променливи

Формула на Тейлор за функията f дефинирана и непрекъсната в околност $U = U_{x_0}$ на точката x_0, която има производни до (n+1) ред ($n \in \mathbb{N}_0$)

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x)$$

с остатъчен член записан във формата на Лагранж

$$r_n(x) = \frac{f^{n+1}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Нека имаме точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, околността $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2$, която е звездообразна относно (x_0, y_0) (Всяка точка $(x, y) \in U$ околността съдържа и отсечка, която я свързва с (x_0, y_0)). Без ограничение на общостта считаме, че U е δ-околност на (x_0, y_0)(отворен кръг с център (x_0, y_0) и радиус δ). Функцията f е дефинирана в U.

Теорема 6.1.1. *Нека функцията $f : U \to R$ е дефинирана и непрекъсната в δ-околността U на точката (x_0, y_0), заедно с частните производни от n+1-ви ред ($n \in \mathbb{N}_0$). Нека $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$.*
Тогава съществува $\vartheta = \vartheta(\Delta x, \Delta y), (0 < \vartheta < 1)$ за която

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] +$$
$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^3 f(x_0, y_0) + ...+$$
$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y)$$

или по кратко

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y) \qquad (3)$$

където

$$r_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + \vartheta\Delta x, y_0 + \vartheta\Delta y) \quad (4)$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

Дефиниция 6.1.1. *Формулата (3) се нарича формула на Тейлор от ред n за функция f, а функцията r_n - остатъчен член, а записът му във вида (4) се нарича остатъчен член на формулата на Тейлор във формата на Лагранж.*
Ако $n = 0$, първото събираемо изисква разяснение, защото индексът над знака за сумиране е по малък от индекса под знака за сумиране. В този случай по дефиниция този член е равен на нула, т.е формулата има вид

$$\Delta z = r_0(\Delta x, \Delta y)$$

Теорема 6.1.2. *Нека функцията $f : U \to R$ дефинирана и непрекъсната в δ-околността U на точката x^0, заедно с частните производни от n+1-ви ред ($n \in \mathbb{N}_0$). Нека $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_m^2} < \delta$.*
Тогава съществува $\vartheta = \vartheta(\Delta x) = \vartheta(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n), (0 < \vartheta < 1)$ за която

$$\begin{aligned}
&\Delta z = f(x) - f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = \\
&= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k f(x_1^0, ..., x_m^0) + r_n(\Delta x_1, ..., \Delta x_m)
\end{aligned}$$

Където

$$r_n(\Delta x) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^{n+1} f(x^0 + \vartheta\Delta x),$$

$$(x^0 + \vartheta\Delta x) = (x_1^0 + \vartheta\Delta x_1, ..., x_m^0 + \vartheta\Delta x_m) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Записано с диференциали

$$\Delta z = f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{n} d^k f(x^0) + r_n(\Delta x)$$

при $n = 1$

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$
$$= \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + r_1(\Delta x, \Delta y)$$
$$r_1(\Delta x,\Delta y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{\partial x^2}\Delta x^2\right] + \frac{\partial^2 f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]$$

Пример 6.1.1. Да се напише формулата на Тейлор за $f(x,y) = e^{x+y}$ в точката $(x_0,y_0) = (0,0), n = 1$

$$f'_x = e^{x+y}\, f'_y = e^{x+y} \qquad f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yy} = e^{x+y}$$
$$f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 1$$
$$\xi = (\xi_1,\xi_2), \quad \xi_1 = \vartheta x, \quad \xi_2 = \vartheta y, \quad \vartheta \in (0,1)$$
$$f''_{xx}(\xi_1,\xi_2) = f''_{xy}(\xi_1,\xi_2) = f''_{yx}(\xi_1,\xi_2) = f''_{yy}(\xi_1,\xi_2) = e^{\xi_1+\xi_2} = e^{\vartheta(x+y)}$$
$$f(x,y) = 1 + 1x + 1y + \frac{1}{2!}\left(e^{\vartheta(x+y)}x^2 + 2e^{\vartheta(x+y)}xy + e^{\vartheta(x+y)}y^2\right)$$
$$= 1 + (x+y) + \frac{e^{\vartheta(x+y)}}{2!}(x+y)^2$$

6.2 Локални екстремуми на функция на няколко променливи

Дефиниция 6.2.1. *Казваме че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ има локален максимум в точката $x^0 \in D$, ако съществува околност $U_{x^0} \subset D$ на точката x^0, че*

$$f(x^0) \geq f(x), \quad \forall x \in U_{x^0}$$

Дефиниция 6.2.2. *Казваме че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ има локален минимум в точката $x^0 \in D$, ако съществува околност $U_{x^0} \subset D$ на точката x^0, че*

$$f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in U_{x^0}$$

Дефиниция 6.2.3. *Локалните максимуми и локалните минимуми се наричат по - общо локални екстремуми.*

Дефиниция 6.2.4. *Ако неравенството в дефиниицте (6.2.1) или (6.2.2) е строго при $x \neq x^0$, то съответния локален екстремум се нарича строг локален екстремум(строг локален максимум или строг локален минимум).*

Теорема 6.2.1 (Необходимо условие)**.** *Нека функцията $f : D \to \mathbb{R}$ притежава локален екстремум в $x^0 \in D \subset \mathbb{R}^m$ и освен това съществуват първите частни производни $f'_{x_k}(x^0)$ в точката x^0, $k = 1 \div m$ тогава*

$$f'_{x_k}(x^0) = 0 \quad k = 1 \div m$$

Дефиниция 6.2.5. *Точката x^0 се нарича стационарна точка за функцията f, диференцируема в нея, ако $grad\, f(x^0) = 0$.*

Пример 6.2.1. Тук са разгледани две функции които са дефинирани и диференцируеми в цялата равнина $\mathbb{R}^2$, но нямат локални екстремуми

$$f(x,y) = e^{x+y}$$
$$f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = e^{x+y} \neq 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = xy$$
$$f'_x(x,y) = x \qquad f'_y(x,y) = y$$
$$grad\, f(x,y) = (y,x) = (0,0)$$
$$f(x,y) - f(0,0) = xy - 0 = xy \implies$$

няма локален екстремум (сменя знака си във всяка произволно взета околност на точката (0,0)). Точката (0,0) е седловина на хиперболичната повърхнина $z = xy$.

6.3 Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция

Теорема 6.3.1 (Достатъчно условие)**.** *Нека функцията $f : D \to \mathbb{R}$ притежава непрекъснати частни производни $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ от втори ред в околността U и точката (x_0, y_0) е стационарна точка f, т.е*

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$$

Тогава

1. *Ако*
$$\Delta = f''_{xx}(x_0,y_0) \cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - \left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 > 0$$
то $f(x,y)$ има локален екстермум в (x_0,y_0).

2. *Ако*
$$\Delta = f''_{xx}(x_0,y_0) \cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - \left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 < 0$$
то $f(x,y)$ няма локален екстермум в (x_0,y_0).

3. Ако

$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 = 0$$

то $f(x, y)$ може да има локален екстремум в (x_0, y_0), така и да няма такъв.

Пример 6.3.1. Да се намерят екстремумите на (ако съществуват) и да се определи видът им.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = -x^2 - y^2$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$

$f(x, y) = x^2 + y^2$
$f'_x = 2x \qquad f'_y = 2y$
$\left|\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right. \implies M_0(0, 0)$ – стационарна точка
$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 2 \quad f''_{xy} = 0$
$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0 \implies \exists$екстремум
$f''_{xx} = 2 > 0 \implies$ екстремума е минимум$f_{min} = f(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$

$f(x, y) = -x^2 - y^2$
$f'_x = -2x \qquad f'_y = -2y$
$\left|\begin{array}{l} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{array}\right. \implies M_0(0, 0)$ – стационарна точка
$f''_{xx} = -2 \quad f''_{yy} = -2 \quad f''_{xy} = 0$
$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0 \implies \exists$екстремум
$f''_{xx} = -2 < 0 \implies$ екстремума е максимум$f_{max} = f(0, 0) = -0^2 - 0^2 = 0$

$f(x, y) = x^2 - y^2$
$f'_x = 2x \qquad f'_y = -2y$
$\left|\begin{array}{l} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{array}\right. \implies M_0(0, 0)$ – стационарна точка
$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = -2 \quad f''_{xy} = 0$
$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 2(-2) - 0 = -4 < 0 \implies$ няма екстремум

Пример 6.3.2. Да се намерят екстремумите на (ако съществуват) и да се определи видът им.

- $f(x,y) = y^4 + x^2$
- $f(x,y) = -y^4 - x^2$
- $f(x,y) = y^3 + x^2$
- $f(x,y) = xy^3$
- $f(x,y) = (x+y)^2$
- $f(x,y) = -(x+y)^2$

$$f(x,y) = y^4 + x^2$$
$$f'_x = 2x \quad f'_y = 4y^3$$
$$\left| \begin{array}{l} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{array} \right. \implies M_0(0,0) - \text{стационарна точка}$$
$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 12y^2 \quad f''_{xy} = 0$$
$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 2(12y^2) - 0 = 24y^2 = 0 \implies \text{трябва допълнително изследване}$$
$$f(x,y) - f(0,0) = y^4 + x^2 - (0^4 + 0^2) = y^4 + x^2 \geq 0$$
$$y^4 + x^2 = 0 \iff x = y = 0$$
$$f(x,y) - f(0,0) \geq 0 \iff f(x,y) \geq f(0,0) \text{ в } \mathbb{R}^2 \implies \text{локален минимум}$$
$$f_{min} = f(0,0) = 0^4 + 0^2 = 0$$

$$f(x,y) = -y^4 - x^2$$
$$f'_x = -2x \quad f'_y = -4y^3$$
$$\left| \begin{array}{l} -2x = 0 \\ -4y^3 = 0 \end{array} \right. \implies M_0(0,0) - \text{стационарна точка}$$
$$f''_{xx} = -2 \quad f''_{yy} = -12y^2 \quad f''_{xy} = 0$$
$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = -2(-12y^2) - 0 = 24y^2 = 0 \implies \text{допълнително изследване}$$
$$f(x,y) - f(0,0) = -y^4 - x^2 - (-0^4 - 0^2) = -y^4 - x^2 \geq 0 \iff y^4 + x^2 \leq 0$$
$$y^4 + x^2 = 0 \iff x = y = 0$$
$$f(x,y) - f(0,0) \leq 0 \iff f(x,y) \leq f(0,0) \text{ в } \mathbb{R}^2 \implies \text{локален максимум}$$
$$f_{max} = f(0,0) = -0^4 + -0^2 = 0$$

$f(x,y) = y^3 + x^2 f'_x = 2x \quad f'_y = 3y^2$

$\begin{vmatrix} 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{vmatrix} \implies M_0(0,0)$ – стационарна точка

$f''_{xx} = 2 \quad f''_{yy} = 6y \quad f''_{xy} = 0$

$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 2(6y) - 0 = 12y^2 = 0 \implies$ допълнително изследване

$f(x,y) - f(0,0) = y^3 + x^2 - (0^3 + 0^2) = y^3 + x^2$

За всяка точка от положителната ординатна ос $(x > 0, y > 0) f(x,y) - f(0,0) > 0$

За всяка точка от отрицателната ординатна ос $(x < 0, y < 0) f(x,y) - f(0,0) < 0$

$\implies f(x,y) - f(0,0)$ Няма постоянен знак във всяка околност на M_0

$\implies f(x,y)$ няма локален екстремум в $_0$ и точката M_0 е седловинна точка

$f(x,y) = xy^3 f'_x = y^3 \quad f'_y = 3xy^2$

$\begin{vmatrix} y^3 = 0 \implies y = 0 \\ 3xy^2 = 0 \implies x = 0 \text{ или } x \neq 0 \end{vmatrix} \implies$

Стационарните точки са безкрайно много

$$M_0(x,0)(x \in \mathbb{R})$$

1. $x_0 = 0, y = 0 \implies M_0 = (0,0)$

   $f(x,y) - f(0,0) = xy^3 - 0 = xyy^2$
   I и III квадрант - $xy > 0$, а във II и IV - $xy < 0$, $y^2 > 0 \implies$
   Сменя знака си $\implies$ f няма локален екстремум в $_0$

2. $x_0 \neq 0, y = 0 \implies M_1 = (x_0, 0)$

   $\Delta f = f(x_0, y) - f(x_0, 0) = x_0 y^3 - x_0 0^3 \implies$
   $\Delta f = y^2(x_0 y)$

   $$x_0 > 0 \implies \begin{cases} \Delta f > 0, & y > 0 \\ \Delta f < 0, & y < 0 \end{cases} \implies \Delta f \text{ сменя знака си в околността на } M_1$$

Аналогично за $x_0 < 0$ знакът не се запазва
$\implies$ f няма локален екстремум в точката $M_1 \implies$ f няма локални екстремуми

$f(x,y) = (x+y)^2$

$f'_x = 2(x+y) \quad f'_y = 2(x+y)$

$\left| \begin{array}{l} 2(x+y)=0 \\ 2(x+y)=0 \end{array} \right. \iff x+y=0 \iff -x=y \implies$

Стационарни точки са всички точки от ъглополовящата на II и IV квадрант - от правата x+y $=0$, т.е $M(x_0,-x_0), x_0 \in \mathbb{R}$

$f''_{xx} = 2, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{xy} = 2,$

$\Delta = 2 \cdot 2 - (2)^2 = 0 \implies$ допълнително изследване

$f(x,y) - f(x_0,-x_0) = (x+y)^2 - (x_0-x_0)^2 = (x+y)^2 \geq 0 \implies$

f има локален минимум във всяка точка от вида $M(x_0,-x_0)$,

$f_{min} = (x_0-x_0)^2 = 0$

$f(x,y) = -(x+y)^2$

$f'_x = -2(x+y) \quad f'_y = -2(x+y)$

$\left| \begin{array}{l} -2(x+y)=0 \\ -2(x+y)=0 \end{array} \right. \iff x+y=0 \iff -x=y \implies$

Стационарни точки са всички точки от ъглополовящата на II и IV квадрант - от правата x+y $=0$, т.е $M(x_0,-x_0), x_0 \in \mathbb{R}$

$f''_{xx} = -2, \quad f''_{yy} = -2, \quad f''_{xy} = -2,$

$\Delta = (-2)(-2) - (-2)^2 = 0 \implies$ допълнително изследване

$f(x,y) - f(x_0,-x_0) = -(x+y)^2 + (x_0-x_0)^2 = -(x+y)^2 \leq 0 \implies$

f има локален максимум във всяка точка от вида $M(x_0,-x_0)$,

$f_{max} = (x_0-x_0)^2 = 0$

7 Лекция 7: Локални екстремуми на функция на няколко променливи. Екстремум на неявна функция

7.1 Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция II

Нека точката $x^0 \in \mathbb{R}^m, (m \geq 2)$, отвореното множество $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$ е нейна околност и функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е поне два пъти непрекъснато диференцируема в U а точката x^0 е стационарна точка за f. В този случай изследванията се свеждат до използване на формулата на Тейлор с $n = 1$

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

$$\xi := x^0 + \vartheta(x - x^0), \quad \vartheta = \vartheta(x) \in (0, 1)$$

Първите частни производни имат стойност 0 в стационарните точки

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

Дефиниция 7.1.1. *Квадратична форма A*

$$A(x) = A(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$$

се нарича положително дефинирана(отрицателно дефинирана) ако за всеки ненулев вектор $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ *е изпълнено*

$$A(x) > 0 \qquad (A(x) < 0)$$

и знакопроменлива, ако за вектори

$$x, y \in \mathbb{R}^m : \qquad A(x) > 0 \qquad A(y) < 0$$

Теорема 7.1.1 (Достатъчно условие)**.** *Нека функцията* $f : U \to \mathbb{R}$ *притежава непрекъснати частни производни* $f''_{x_i x_j} (i, j = 1 \div m)$ *от втори ред в околността* U *на точката* $x^0 = (x_1^0, ..., x_m^0)$ *и е стационарна точка*

$$f_{x_i}(x^0) = f_{x_i}(x_1^0, ..., x_m^0) = 0 \qquad (i = 1 \div m)$$

Тогава ако квадратичната форма (втори диференциал)

$$A(dx_1, ..., dx_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j$$

е положително дефинитна квадратична форма, то точката x^0 е строг локален минимум за функцията f.
Ако е отрицателно дефинитна квадратична форма, то точката x^0 е строг локален максимум за функцията f.
Ако е недефинитна, то f няма локален екстремум.
Ако изразът е равен на 0 може да има локален, но може и да няма.

Теорема 7.1.2 (Критерий на Силвестър)**.** *Квадратичната форма A дефинирана в (7.1.1) в която $a_{ij} = a_{ji}$, $\quad (i, j = 1 \div m)$ е положително дефинитна тогава и само тогава когато,*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad ..., \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

и отрицателно дефинитна (-A(x) е положително дефинитна) тогава и само тогава, когато

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, ..., \qquad (-1)^k \Delta_k > 0 (k = 1 \div m)$$

Пример 7.1.1. Да се разгледат функциите в точката $M_0(1, 2, -3)$

- $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z$
- $u = -x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z$
- $u = x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 6z$

$$\Delta_1(M_0) = u''_{xx}(M_0),$$
$$\Delta_2(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}$$
$$\Delta_3(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix}$$

$u = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z$

$u'_x = 2x - 2 \qquad u'_y = 2y - 4 \qquad u'_z = 2z - 6$

$u''_{xx} = 2 \qquad u''_{xy} = 0 \qquad u''_{xz} = 0$

$u''_{yx} = 0 \qquad u''_{yy} = 2 \qquad u''_{yz} = 0$

$u''_{zx} = 0 \qquad u''_{zy} = 0 \qquad u''_{zz} = 2$

$\Delta_1(M_0) = u''_{xx}(M_0) = 2 > 0$

$$\Delta_2(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\Delta_3(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \implies$$

Съгласно критерия на Силвестър вторият диференциал е положително дефинитна квадратична форма и има локален минимум

$u_{min} = u(1, -2, 3) = -14$

$u = -x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z$

$u'_x = -2x + 2 \qquad u'_y = -2y + 4 \qquad u'_z = -2z - 6$

$u''_{xx} = -2 \qquad u''_{xy} = 0 \qquad u''_{xz} = 0$

$u''_{yx} = 0 \qquad u''_{yy} = -2 \qquad u''_{yz} = 0$

$u''_{zx} = 0 \qquad u''_{zy} = 0 \qquad u''_{zz} = -2$

$\Delta_1(M_0) = u''_{xx}(M_0) = -2 < 0$

$$\Delta_2(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\Delta_3(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \implies$$

Съгласно критерия на Силвестър вторият диференциал е отрицателно дефинитна квадратична форма и има локален максимум

$u_{max} = u(1, -2, 3) = 14$

$u = x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 6z$
$u'_x = 2x - 2 \qquad u'_y = 2y - 4 \qquad u'_z = -2z - 6$
$u''_{xx} = 2 \qquad u''_{xy} = 0 \qquad u''_{xz} = 0$
$u''_{yx} = 0 \qquad u''_{yy} = 2 \qquad u''_{yz} = 0$
$u''_{zx} = 0 \qquad u''_{zy} = 0 \qquad u''_{zz} = -2$
$\Delta_1(M_0) = u''_{xx}(M_0) = 2 > 0$
$\Delta_2(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$
$\Delta_3(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \implies$
Не е дефинитна квадратична форма $\implies$ няма локален екстремум

7.2 Локален екстремум на неявна функция

Нека

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$
- $M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ - точка
- $U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ - околност на M_0
- $F : U_{M_0} \to \mathbb{R}, \qquad F(x^0, y_0) = 0$
- $\exists F'_x, F'_y :\ F'_y(M_0) \neq 0,\ F'_y$ е непрекъсната в M_0

Тогава уравнението $F(x, y) = 0$ дефинира неявната функция f в околност $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$ на точката x^0

$$f : U \to \mathbb{R} \qquad f(x^0) = y_0$$

Възможно е да има локални екстремуми. Тяхното намиране се осъществява по познатия ни алгоритъм.
В случая $m = 1$ неявната функция f е на една променлива съгласно формулата

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

стационарните точки се намират като решения на система

$$\left|\begin{array}{l} F'_x(x,y) = 0 \\ F(x,y) = 0 \\ F'_y(x,y) \neq 0 \end{array}\right.$$

Евентуално съществуване на екстремум може да се останови от знака на $f''(x^0)$ тъй като по формула

$$f''(x^0) = -\frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

Пример 7.2.1. Уравнението $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ задава четири неявни функции $y = f_k(x)(k = 1,2,3,4)$ според това в кой квадрант се намира точката, в чиято околност се търси неявната функция.
Нека

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$$

то уравнението $F(x,y) = 0$ задава единствена неявна функция в околността на някоя тока, само ако

$$F'_y(x,y) = 4y(x^2+y^2+1) \neq 0$$

в нея което дава $y \neq 0$

$$\left|\begin{array}{l} 4x(x^2+y^2-1) = 0 \\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \\ 4y \neq 0 \end{array}\right.$$

$x = 0$ не е решение системата е еквивалентна

$$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2 = 1 \\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2+y^2 = 1 \\ 1 - 2(2x^2-1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 4x^2 = 3 \\ 4y^2 = 1 \end{array}\right.$$

От където се получават 4 точки

$$M_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), M_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), M_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), M_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Нека $y = f_k(x)$ е неявна функция дефинирана в околността на точката M_k. Тъй като $F\text{"}_{xx}(x,y) = 4(3x^2+y^2-1) > 0$ за точките M_k то знакът се определя от стойността на $F'_y(M_k) = 8y_k$

$$f''_1(x_1) < 0 \qquad f''_2(x_2) < 0 \implies \text{максимум със стойност } \frac{1}{2}$$

$$f_3''(x_3) > 0 \qquad f_4''(x_4) > 0 \implies \text{минимум със стойност } -\frac{1}{2}$$

$F_y'(0,0) = 0$ е точка на самопресичане на леминската на Бернули, чието уравнение е дадено в този пример.
Ако $m > 1$ неявната фунцкия е на повече променливи и се намира като решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} F_{x_k}'(x,y) = 0 \qquad k = 1 \div m \\ F(x,y) = 0 \\ F_y'(x,y) \neq 0 \end{array} \right.$$

Стойностите на вторите частни производни в стационарните точки са

$$f_{x_k x_k}''(x^0) = -\frac{F_{x_k x_k}''(x^0, y_0)}{F_y'(x^0, y_0)} \qquad f_{x_k x_j}''(x^0) = -\frac{F_{x_k x_j}''(x^0, y_0)}{F_y'(x^0, y_0)} \quad (k \neq j)$$

8 Лекция 8: Условни и абсолютни екстремуми на функция на няколко променливи

8.1 Условни екстремуми на функция на няколко променливи

Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ и функциите $f, \varphi_n : D \to \mathbb{R}(n = 1, 2, ..., k)$ са дефинирани и два пъти непрекъснато диференцируеми в D. Нека E е множеството от точки $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in D$, за които дадената функция φ_n

$$E = \{x|\varphi_n(x) = 0, n = 1, 2, ..., k, \quad x \in D\}$$

Дефиниция 8.1.1. *Уравненията*

$$\varphi_n(x) = 0, \quad (n = 1, 2, ..., k)$$

се наричат условния на връзките.

Дефиниция 8.1.2. *Точката $x^0 \in D$ се нарича точка на условен екстремум на f при условие, че са изпълнени условия на връзките (8.1.1), ако тя е точка на обичаен (локален) екстремум на тази функция, разглеждана само върху множеството E. в което са изпълнени дадените условия.*
С други думи стойността $f(x^0)$ се сравнява не със всички стойностти в околността на x^0, а само с тези от множеството E.

За да се изследва за екстремум функцията $y = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ при ограничения

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \\ ... \\ \varphi_k(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \end{array} \right.$$

се конструира функцията на Лагранж.

$$L(x_1, x_2, ..., x_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) = f(x_1, x_2, ..., x_m) + \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \varphi(x_1, x_2, ..., x_m)$$

Където $\lambda_n, n = 1, 2, ..., k$ се наричат множители на Лаграж. За получената функция се решава задача за локален есктремум, като стационарните точки са решения на следната система:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial L(x_1,x_2,...,x_m;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial L(x_1,x_2,...,x_m;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)}{\partial x_2} = 0 \\ ... \\ \frac{\partial L(x_1,x_2,...,x_m;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)}{\partial x_m} = 0 \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \\ ... \\ \varphi_k(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \\ \lambda_n \neq 0, n = 1, 2, ..., k \end{array} \right.$$

Видът на екстремума се определя от знака на втория диференциал в сътовентата стационарна точка.

Теорема 8.1.1. *Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ и функциите $f, \varphi_n : D \to \mathbb{R}(n = 1, 2, ..., k)$ са дефинирани и два пъти непрекъснато диференцируеми в D. Ако точката x^0 удовлетворява условията на връзките и е стационарна точка за функцията на Лагранж и ако вторият диференциал на функцията на Лагранж в тази точка е положително/отрицателно дефинитна квадратична форма на променливите $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ при условие че те удовлетворяват системата от уравнения*

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_m} dx_m = 0, n = 1, ..., k$$

то точката x^0 е точка на строг условен минимум/максимум за дадената функция, относно уравненията на връзките.

Пример 8.1.1. Ако $E \subset \mathbb{R}^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x + y = s$ да се намери минумума на функцията $f(x, y) = x^2 + y^2$ върху E.

$$\begin{array}{l} L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda(s - x - y) = x^2 + y^2 + \lambda(s - x - y) \\ L''_{xx} = 2 \quad L''_{yy} = 2 \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 0 \\ (x_0, y_0) = \left(\dfrac{s}{2}, \dfrac{s}{2}\right) \\ L_{min} \implies f_{min} = f(x_0, y_0) = f\left(\dfrac{s}{2}, \dfrac{s}{2}\right) = \dfrac{s^2}{2} \end{array}$$

8.2 Абсолютни екстремуми на функция на няколко променливи

В много случаи е важно да се намерят най-голямата и най-малката стойност на дадена функция върху цялото дефиниционно множество, т.е. абсолютният (глобалният) минимум и максимум на функцията. Да предположим, че дефиниционното множество $D \subset \mathbb{R}^m$ на функцията $f(x)$ е компактно множество в $\mathbb{R}^m$. Тогава по теоремата на Вайерщрас (Теорема 2.4.1), $f(x)$ достига най-малката и най-голямата си стойност в някакви точки на D. Тогава се получават следните две алтернативни възможности: абсолютният максимум може да се достигне във вътрешна или контурна точка на D. Ако максимумът се достига във вътрешна точка, то той е и локален, и ние можем да използваме развитата дотук теория. Разбира се, всичко казано тук се отнася и за абсолютния минимум. Ако екстремумът е в точка от контура ∂D на дефиниционната област, то той е условен екстремум, и може да бъде намерен по алгоритъма, описан в предния параграф.
Така задачата за намиране на абсолютните екстремуми се свежда до намирането на стационарните точки в множеството и локалните екстемуми, условните екстремуми по контура (или съставните му части) и сравняването на тези стойности. Най-голямата от тях е абсолютен максимум, а най-малката е абсолютен минимум. По-долу, за по-голяма яснота е разгледан следният пример.

Пример 8.2.1. Ако $E \subset \mathbb{R}^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1$ да се намерят най малката и най голямата стойност на функцията $f(x, y) = x^2 + y^2$ върху E.
Решение:

$$M_0 = (0, 0) \in E$$
$$\Delta = 2 \cdot 2 - 0^2 > 0 \quad f''_{xx} = 2 > 0 \implies f_{min}$$
$$f_{min} = f(0, 0) = 0$$
$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda(x + y - 1) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$
$$L'_x = 2x + \lambda \quad L'_y = 2y + \lambda$$
$$\left| \begin{array}{l} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0x + y - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda = -1 \end{array} \right. \implies M_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$L''_{xx} = 2 \quad L''_{yy} = 2 \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 0$

$f_{min} = f(M_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$x = -1 \Leftrightarrow g(y) = (-1)^2 + y^2 = y^2 + 1$

$g_{min} = g(0) = 1 = f_{min} \implies M_2(-1, 0)$

$y = -1 \Leftrightarrow h(x) = x^2 + (-1)^2 = x^2 + 1$

$h_{min} = h(0) = 1 = f_{min} \implies M_3(0, -1) \quad f(M_3) = 1$

$\left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y = -1 \end{array} \right. \implies M_4(2, -1) \qquad \left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x = -1 \end{array} \right. \implies M_5(-1, 2)$

$f(-1, -1) = 2 \quad f(2, -1) = 5 \quad f(-1, 2) = 5$

9 Лекция 9: Двоен интеграл

9.1 Понятие за обем в $\mathbb{R}^m$. Множество с мярка нула

Нека $T_k (k = 0, 1, 2...)$ е съвкупността от всички затворени кубове от вида

$$Q^m = Q^{m,k} = \left\{ x : x \in \mathbb{R}^m, \frac{l_i}{10^k} \leq x_i \leq \frac{l_i + 1}{10^k}, i = 1, 2, ..., m \right\}$$

където $l_i \in \mathbb{Z}$ За удобство кубовете се означават просто Q^m.

Дефиниция 9.1.1. *Системата T_k се нарича разделяне на $\mathbb{R}^m$ от ранг k, а кубовете Q^m - кубове от ранг k.*

В частност за $m = 1$ множествата Q^m са интервали, а за $m = 2$ - квадрати. По нататък ще предполагаме, че $m \geq 2$

Дефиниция 9.1.2. *Числото $\frac{1}{10^{km}}$ се нарича m-мерен обем на куба Q^m и е използвано означението $\mu(Q^m)$.*

$$\mu(Q^m) = \frac{1}{(10^k)^m} = \frac{1}{10^{km}}, k = 0, 1, 2, ...$$

Дефиниция 9.1.3. *Ако $E \subset \mathbb{R}^m$ и E представлява обединение на крайно или изброимо много кубове Q_j^m от даден ранг k, т.е. $E = \cup_j Q_j^m$, то $\mu(E)$ се дефинира като*

$$\mu(E) = \sum_j \mu(Q_j^m)$$

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ G - отворено. Да означим със $S_k = S_k(G)$ множеството от точки на всички m-мерни кубове от ранг k, изцяло лежащи в G. Тогава

$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset ... \subset S_k \subset S_{k+1} \subset ...$$

и следователно

$$\mu(S_0) \leq \mu(S_1) \leq ... \leq \mu(S_k) \leq \mu(S_{k+1}) \leq ...$$

и поради това съществува крайна или безкрайна граница $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k)$.

Дефиниция 9.1.4. *Крайната или безкрайната граница $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k(G))$ се нарича m-мерна мярка или m-мерен ожем на множеството G и се означава с $\mu(G)$*

$$\mu(G) = \lim_{k\to\infty} \mu(S_k(G))$$

По силата на тази дефиниция $\mu(G) > 0$ за всяко отворено непразно множество $G \subset \mathbb{R}^m$ и $\mu(G) < \infty$ ако G е и ограничено.

Лема 9.1.1 (адитивност на мярка). *Нека $G', G'' \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества и $G' \cap G'' = \varnothing$ тогава е в сила*

$$\mu(G' \cup G'') = \mu(G') + \mu(G'')$$

Лема 9.1.2 (полуадитивност на мярка). *Нека $G', G'' \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества. Тогава е в сила*

$$\mu(G' \cup G'') \leq \mu(G') + \mu(G'')$$

Лема 9.1.3 (адитивност на мярка). *Нека $G', G'' \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества и $G' \subset G''$ тогава е в сила*

$$\mu(G') \leq \mu(G'')$$

Дефиниция 9.1.5. *Границата $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k^*(G))$ се нарича горна m-мерна мярка на множеството D и се означава с $\overline{\mu}(D)$*

$$\overline{\mu}(D) = \lim_{k\to\infty} \mu(S_k^*(G))$$

Лема 9.1.4 (монотонност на горната мярка). *Ако $D', D'' \subset \mathbb{R}^m$ то в сила е неравенството*

$$\overline{\mu}(D') \leq \overline{\mu}(D'')$$

Лема 9.1.5 (полуадитивност на горната мярка). *Ако $D_i \subset \mathbb{R}^m, i = 1 \div s$ и $D = \cup_{i=1}^s D_i$ то в сила е неравенството*

$$\overline{\mu}(D) \leq \sum_{i=1}^s \overline{\mu}(D_i)$$

Дефиниция 9.1.6. *Ако $\overline{\mu}(D) = 0$ то множеството D се нарича множество с мярка нула и се записва $\mu(D) = 0$. Празното множество по дефиниция има мярка нула $\mu(\varnothing) = 0$*

9.2 Измерими множества в $\mathbb{R}^m$

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е ограничено множество, $[G]$ е негова затворена обвивка. Да означим с $S_k^*([G])$ множеството от точки на всички m-мерни кубове от ранг k, всеки който се пресича с [G] а със $S_k(G)$ множеството от точки на всички m-мерни кубове от ранг k, съдържащи се във G. От $S_k \subset S_k^*$ следва

$$\mu(S_k) \leq \mu(S_k^*)$$

откъдето при $k \to \infty$ се получава че

$$\mu(G) \leq \overline{\mu}([G])$$

Дефиниция 9.2.1. *Множеството $G \subset \mathbb{R}^m$ (G - отворено и ограничено) се нарича измеримо(кубируемо, а при $m = 2$ - квадратируемо), ако неговата мярка е равна на горната мярка на $[G]$*

$$\mu(G) = \overline{\mu}([G])$$

Теорема 9.2.1. *Ограниченото и отвореното множество $G \subset \mathbb{R}^m$ е измеримо, тогава и само тогава, когато контурът му има мярка нула.*

$$\mu(\partial G) = 0$$

Дефиниция 9.2.2. *Затворената обвивка $[G]$ на отвореното и измеримо множество $G \subset \mathbb{R}^m$ също се нарича измеримо и по дефиниция*

$$\mu([G]) = \mu(G)$$

9.3 Дефиниция на многократен интеграл

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено и измеримо множество.

Дефиниция 9.3.1. *Системата $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ от измерими множества G_i се нарича разделяне на множеството G, ако*

1. $G_i \subset G, i = 1 \div i_0$
2. $G_i \cap G_j = \varnothing, i \neq j$
3. $\cup[G_i] = [G]$

Дефиниция 9.3.2. *Числото*

$$\delta_\tau = \max_{1 \leq i \leq i_0} d(G_i)$$

Където $d(G_i)$ е диаметър на множеството G_i, се нарича диаметър на разделянето τ

Лема 9.3.1. *Ако* $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ *е разделянето на* G, *то*

$$\mu(G) = \sum_{i=1}^{i_0} \mu(G_i)$$

Дефиниция 9.3.3. *Нека* $\tau = \{G_i\}$ *и* $\tau' = \{G'_j\}$ *са две разделяния от отвореното и измеримо множество* G. *Разделянето* τ' *се нарича вписано в* τ *ако за всеки елемент* $G'_j \in \tau'$ *съществува елемент* $G_i \in \tau$, *такъв че* $G'_j \subset G_i$ *Записва се* $\tau' \succ \tau$ *или* $\tau \prec \tau'$.

Лема 9.3.2. *В сила са следните свойства*

1. *Ако* $\tau \prec \tau'$ *и* $\tau' \prec \tau''$, *то* $\tau \prec \tau''$.
2. *За всеки две разделяния* $\tau' = \{G'_i\}$ *и* $\tau'' = \{G''_j\}$ *на отвореното и измеримо множество* G *съществува разделяне* τ, *такова че* $\tau' \prec \tau$ *и* $\tau'' \prec \tau$.

Дефиниция 9.3.4. *Нека* $G \subset \mathbb{R}^m$, *функцията* $f : [G] \to \mathbb{R}$ *и* $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ *е разделяне на множеството* G. *Тогава сумата*

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu(G_i)$$

където

$$\xi^{(i)} \in [G_i], i = 1, 2, ..., i_0$$

се нарича риманова интегрална сума на функцията f.

Дефиниция 9.3.5. *Крайната граница*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f)$$

ако съществува се нарича многократен интеграл от функцията f *върху измеримото и отворено множеството* G*(или* $[G]$*) а функцията се нарича интегруема в риманов смисъл върху множеството* G*(или* $[G]$*). Означава се по един от следните начини*

$$\int f\ dG, \int f(x)\ dG, \int ... \int f(x_1, x_2, ..., x_m)\ dx_1\ dx_2\ ...\ dx_m$$

Множеството $G([G])$ *се нарича област на интегриране.*

Дефиниция 9.3.6. *Числото A се нарича интеграл от функцията f върху отвореното и измеримо множество G, ако за всяка редица от разделяния $\tau_n = \left\{G_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{i_0^{(n)}}$ на множеството G, с $\delta_{\tau_n} \to 0$ при $n \to \infty$ и каквито и да са точките*

$$\xi^{(i_n)} \in [G_i^{(n)}], i_n = 1, 2, ...i_0, n = 1, 2, ...$$

е изпълнено равенството

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}(f; \xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, ..., \xi_n^{(i_0^{(n)})}) = A$$

9.4 Съществуване на многократния интеграл

Теорема 9.4.1. *Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ отворено е измеримо множество и функцията $f : [G] \to \mathbb{R}$ е интегруема върху него. Тогава f е ограничена върху множеството $[G]$.*

9.5 Свойства на многократните интеграли

За класа на функции, интегруеми в риманов смисъл в дадено отворено и измеримо множество G е използвано означението $\Re(G)$.
Нека $G \subset \mathbb{R}^m$, G - измеримо и отворено множество.
Освен това $f, g : [G] \to \mathbb{R}, f, g \in \Re(G)$, а λ, ν - производни реални константи.

Теорема 9.5.1. *В сила са следните свойства на многократните интеграли*

1. $\int\ dG = \int 1\ dG = \mu(G)$
2. $\int (\lambda f + \nu g)\ dG = \lambda \int f\ dG + \nu \int g\ dG$ *(Линейност на интеграла)* *В частност*
   (а) $\lambda = \nu = 1 \implies \int (f+g) dG = \int f\ dG + \int g\ dG$
   (б) $\lambda = 1, \nu = -1 \implies \int (f-g)\ dG = \int f\ dG - \int g\ dG$
   (в) $\lambda = const, \nu = 0 \implies \int \lambda f\ dG = \lambda \int f\ dG$
3. $f \geq 0$ *върху* $G \implies \int f\ dG \geq 0$

От тези три свойства се получава следствието

$$f \geq g \implies \int f\ dG \geq \int g\ dG$$

Теорема 9.5.2. *Ако* G', G'' *са измеримо множество,* $[G] = [G'] \cup [G'']$ *и* $G' \cap G'' = \varnothing$ *то следва*

$$\int f\ dG = \int f\ d(G' \cup G'') = \int f\ dG' + \int f\ dG''$$

Теорема 9.5.3 (адитивност относно множества)**.** *Ако* $G' \subset G$ *е измеримо множество, то* $f \in \Re(G')$

От тази теорема следва монотонноста на интеграла: Ако $\Gamma \subset G$ е измеримо множество и $f \geq 0$ върху G, то

$$\int f\ dG \geq \int f\ d\Gamma$$

Теорема 9.5.4. *Произведението* $f \cdot g \in \Re(G)$

Теорема 9.5.5. *Функцията* $|f| \in \Re(G)$ *и освен това е изпълнено неравенството*

$$\left|\int f\ dG\right| \leq \int |f|\ dG$$

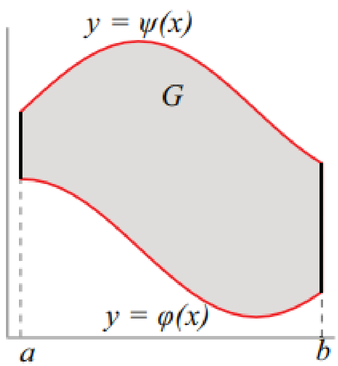
9.6 Свеждане на кратни интеграли до повторни

9.6.1 Двумерен случай

Нека равнината $\mathbb{R}^2$ е фиксирана правоъгълна кординатна система с координати x и y.

Дефиниция 9.6.1. *Нека $G \subset \mathbb{R}^2$. G се нарича елементарна област отностно , ако ∂G се състои от графиките на две непрекъснати функции $\varphi(x), \psi(x)$, дефинирани в интервал [a,b] и $\varphi(x) \leq \psi(x), x \in [a, b]$, и може да съдържа и отсечки от правите $x = a, x = b$. Аналогично се дефинира област, елементарна отностно Ox.*

На фигурата по-долу е показана област, елементарна относно Oy.



Фигура 5.6.1: $G \subset \mathbb{R}^2$ – елементарна относно Oy

Теорема 9.6.1 (Теорема на Фубини)**.** *Нека G е елементарна фигура отностно $Oy, G \subset \mathbb{R}^2, \partial G$ границата на G, се състои от графиките на непрекъснатите функции $\varphi(x)\psi(x), \varphi(x) \leq \psi(x), x \in [a, b]$ и евентуално от отсечки от правите $x = a, x = b$. Нека $f : [G] \to \mathbb{R}$ и f е непрекъсната върху [G]. Тогава*

$$\iint_G f(x, y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\ dy \right)\ dx$$

Дефиниция 9.6.2. *Интегралът в дясната страна на формулата от Теорема 9.6.1 се нарича повторен и обикновенно се записва във вида*

$$\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\ dy\ dx$$

Лема 9.6.1. *При предплoженията от Теорема 9.6.1 функцията*

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy$$

е непрекъсната функция на x в интервала [a,b].

Ако областта G е елементарна относно Ox и границата ѝ се състои от графиките на непрекъснатите функции $\alpha(y), \beta(y), \alpha(y) \leq \beta(y), c \leq y \leq d$ и евентуално отсечки от правите $y = c, y = d$ и функцията $f(x,y)$ е непрекъсната в компактното множество [G] то е в сила формулата

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Пример 9.6.1. $z = x^2y$ заградена между $y = x^2, y = 1$.
Имаме: $\iint\limits_G x^2y\,dx\,dy,\ G = \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$

$$\left| \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 1 \end{array} \right. \implies x^2 = 1 \implies x_{1,2} = \pm 1$$

Абсцисите на пресечните точки на кривата $y = x^2$ и $y = 1$.
Фигурата G се намира между правите $x = -1$ и $x = 1$ и освен това е оградена и от параболата $y = x^2$ и правата $y = 1$. По точно

$$G = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Тогава

$$\iint\limits_G x^2y\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \int\limits_{x^2}^{1} y\,dy\,dx \qquad \left(\int\limits_{x^2}^{1} y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1} \right)$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^2(1-x^4)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\int\limits_0^1 (x^2 - x^6)\,dx =$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}$$

10 Лекция 10: Смяна на променливите на двоен интеграл

10.1 Матрица на Якоби

Нека $x \in D \subset \mathbb{R}^m, f : D \to \mathbb{R}^n \implies y \in \mathbb{R}^m$ се задава със системата от функции

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_m) \\ ... \\ y_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_m) \end{array} \right.$$

Дефиниция 10.1.1. *Нека в точката $x^0 \in D$ съществуват първите частни производни на функциите $f_i(i = 1 \div m)$ от системата дефинирана по горе, тогава матрицата от всички частни производни в точката x^0*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

се нарича матрица на Якоби за изображението $f(x)$.
Ако $m = n$ може да се пресметне детерминантата $J(x_1, x_2, ..., x_m)$ за матрицата на Якоби.

$$J(f; x_1, x_2, ..., x_m) = \frac{D(y_1, y_2, ..., y_m)}{D(x_1, x_2, ..., x_m)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Дефиниция 10.1.2. *Детерминанта на матрицата на Якоби се нарича още якобиан на изображението $f(x)$. Означава се $J(x_1, x_2, ..., x_m)$ или $J(f)$*

Дефиниция 10.1.3. *Изображението $f : G \to \mathbb{R}^m (G \subset \mathbb{R}^m)$ дадено със системата*

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_m) \\ ... \\ y_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_m) \end{array} \right.$$

се нарича непрекъснато диференцируемо изображение, ако всички първи частни производни на $f_i(i = 1 \div m)$ съществуват в G и са непрекъснати там.

Теорема 10.1.1. *Нека*

$$y = f(x) = \{y_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_m), i = 1 \div m\}$$

е взаимно еднозначно непрекъснато диференцируемо изображение от отвореното множество $G \subset \mathbb{R}^m$ върху отвореното множество $\widetilde{G} \subset \mathbb{R}^m$. Нека освен това и обратното изображение

$$x = f^{-1}(y) = \{x_i = f_i^{-1}(y_1, y_2, ..., y_m), i = 1 \div m\}$$

което е еднозначно непрекъснато диференцируемо изображение от своето дефиниционно множество $\widetilde{G}$. Тогава е в сила формулата

$$\frac{D(y_1, y_2, ..., y_m)}{D(x_1, x_2, ..., x_m)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, ..., x_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)} = 1$$

което може да се запише във вида

$$\frac{D(x_1, x_2, ..., x_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)} = \frac{1}{\frac{D(y_1, y_2, ..., y_m)}{D(x_1, x_2, ..., x_m)}}$$

т.е якобианът на изображението, което е обратно на даденото изображение е равен на реципрочната стойност на якобиана на даденото изображение.
Нито един от двата якобиана не е нула, защото произведението им е равно на 1.
При $m = 1$ формулата се свежда до формулата за производна на обратна функция

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Теорема 10.1.2. *Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество, $f : G \to \mathbb{R}^m$*

$$y = f(x) = \left| \begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_m) \\ ... \\ y_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_m) \end{array} \right.$$

е непрекъснато диференцируемо изображение и нека точката $x^{(0)} \in G$ а $y^{(0)} = f(x^{(0)}) \in \mathbb{R}^m$. Освен това, ако якобианът на това изображение е различен от нула в точката $x^{(0)}$, то съществува такива околносттu $U_{x^{(0)}}$, $U_{y^{(0)}}$ съответно в точките $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, че изображението f е взаимно еднозначно изображение от $U_{x^{(0)}}$ върху $U_{y^{(0)}}$, т.е $f : U_{x^{(0)}}, \to U_{y^{(0)}}$ и *обратното му изображение е непрекъснато диференцируемо в множеството* $U_{y^{(0)}}$.

Следствие: Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ *е отворено множество и* $F : G \to \mathbb{R}^m$ *е непрекъснато диференцируема в G, а якобианът J(F) е различен от нула върху G. Тогава F(G) също е отворено множество.*

Теорема 10.1.3 (Принцип за запазване на областта)**.** *Образът на m-мерна област в m-мерното пространство при непрекъснато диференцируемо изображение с ненулев якобиан е област, т.е ако*

1. $G \subset \mathbb{R}^m$ *е област*
2. $F : G \to \mathbb{R}^m$ *е непрекъснато диференцируемо изображение*
3. $J(F) \neq 0$ *върху G*

то F(G) също е област.

По нататък е разгледан въпросът за геометричен смисъл на модула на якобиана. За по голяма яснота е разгледано в $\mathbb{R}^2$.
Нека $G, G^* \subset \mathbb{R}^2$ са отворени множества и изображението $F : G \to G^*$, като F е зададена с двойката функции

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$

и предполагаме, че F удовлетворява следните условия

1. F е взаимно еднозначно изображение от G върху G^*
2. F е непрекъснато диференцируемо върху G
3. Якобианът $J(u, v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ върху G

Изображението F^{-1} което е обратно на F също е непрекъснато диференцируемо взаимно еднозначно изображение и якобианът му е различен от нула в G^*

Лема 10.1.1. *Ако* $\gamma \subset G$ *е по части гладка крива, то и нейния образ* $\gamma^* = F(\gamma)$ *е също по части гладка крива.*

Забележка: Ако $\gamma \subset G$ *е прост затворен контур, то поради взаимната еднозначност на F, неговия образ* $\gamma^* = F(\gamma)$ *е също прост затворен контур.*

Лема 10.1.2. *Ако Γ е отворено и ограничено множество и $[\Gamma] \subset G$ тогава $\Gamma^* = F(\Gamma)$ е също отворено и ограничено множество и*

$$\partial F(\Gamma) = F(\partial\Gamma)$$

Ако $\partial\Gamma$ се състои от краен брой по част гладки криви, то отворените множества Γ и $F(\Gamma)$ са квадрируеми.

Нека $(u_0, v_0) \in G$ и $h \in \mathbb{R}$ е реално число, и да разгледаме затворения квадрат S с върхове

$$A(u_0, v_0) \qquad B(u_0 + h, v_0) \qquad C(u_0 + h, v_0 + h) \qquad D(u_0, v_0 + h)$$

Нека $S \subset G$ (за "достатъчно малки"h това включване винаги се изпълнява). Границата ∂S на квадрата S която се състои от четирите му страни е прост затворен по части гладък контур. Поради Лема 10.1.2 множеството $S^* = F(S)$ е затворена квадратируема област (факта, че S^* е затворена област, следва от принципа за запзаване на областа). В сила е следната теорема

Теорема 10.1.4. *Нека изображението F от отвореното множество $G \subset \mathbb{R}^2$ върху отвореното множество $G^* \subset \mathbb{R}^2$ е взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо върху G и нека якобианът му $J(u, v) \neq 0$ върху G. Тогава ако S е квадрат с върховете по горе, то*

$$\frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(u_0, v_0)| + \varepsilon(u_0, v_0, h)$$

където $\varepsilon = \varepsilon(u_0, v_0, h)$ клони към нула, когато $h \to 0$. При това сходимостта е равномерна отностно (u_0, v_0), върху всяко затворено и ограничено множество $A \subset G$ за което $(u_0, v_0) \in A$.

Следствие: За всяка точка (u_0, v_0) на отворено множество G е изпълнено равенството

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(u_0, v_0)|$$

В общия случай за m-мерно пространство тази теорема се обобщава по следния начин.

Теорема 10.1.5. *Нека множествата $G, G^* \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества и изображението $F : G \to G^*$, е зададено с m-торка функции*

$$x = F(t) = \{x_i = x_i(t_1, t_2, ..., t_m), i = 1 \div m\}$$

Нека F е взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо върху G и якобианът му

$$J(t) = \frac{\partial(x_1, ..., x_m)}{\partial(t_1, ..., t_m)} \neq 0, \quad t \in G$$

а S е m-мерния куб

$$S - \{t : t_i^0 \leq t_i \leq t_i^0 + h, i = 1, 2, ..., m\} \subset G, t^0 = (t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0)$$

Тогава

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(t^0)|$$

при това, ако

$$\frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(t^0)| + \varepsilon(t^0, h)$$

то за всяко ограничено и затворено множество $A \subset G$, функцията $\varepsilon = \varepsilon(t^0, h)$, дефинирана за $t^0 \in A$, клони равномерно към нула върху множеството A, при $h \to 0$.

Ако $G, G^* \subset R^3$, $\quad F : G \to G^*$ е зададено с тройка функции

$$x = x(u, v, w) \qquad y = y(u, v, w) \qquad z = z(u, v, w)$$

Лема 10.1.3. *Ако $S \subset G$ е по части гладка повърхнина в $\mathbb{R}^3$, то и нейния образ $S^* = F(S)$ е също по части гладка повърхнина.*

Забележка: Ако $S \subset G$ е проста затворена повърхнина, то поради взаимната еднозначност на F, неговия образ $S^* = F(S)$ е същопроста затворена повърхнина.

Лема 10.1.4. *Ако Γ е отворено и ограничено множество и $[\Gamma] \subset G$ тогава $\Gamma^* = F(\Gamma)$ е също отворено и ограничено множество и*

$$\partial F(\Gamma) = F(\partial\Gamma)$$

Ако $\partial\Gamma$ се състои от краен брой по част гладки повърхнини, то отворените множества Γ и $F(\Gamma)$ са измерими.

10.2 Смяна на променливите в многократен интеграл

Нека

- F е непрекъснато диференцируемо изображение от отвореното множество $G \subset \mathbb{R}^2$ върху отвореното множество $G^2 \subset \mathbb{R}^2$
- Якобиан $J(F) \neq 0$ в G
- Γ, Γ^* са квадратируеми (следователно ограничени) и отворени множества
- $[\Gamma] \subset G, [\Gamma^*] \subset G^*$
- $F([\Gamma]) = [\Gamma^*]$
- F изобразява вътрепните точки на Г във вътрешни точки на Γ^* а контура $\partial\Gamma$ - в контура $\partial\Gamma^*$

Теорема 10.2.1 (за смяна на променливите на двукратен интеграл). *Нека функцията*

$$f : [\Gamma^*] \to \mathbb{R}$$

е непрекъсната върху $[\Gamma]$. *Тогава в сила е формулата*

$$\iint\limits_{\Gamma^*} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Gamma} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

Верността на (10.2.1) остава в сила и при малко по-общия случай, когато якобианът на изображението F, става нула върху границата на областта на интегриране, а самото изображение не е взаимно еднозначно върху тази граница. По-точно е в сила следната теорема.

Теорема 10.2.2. *Нека* $G, G^* \subset \mathbb{R}^2$ *са отворени измерими множества и*

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v)$$

е непрекъснато изображение от [G] върху $[G^*]$, *което е взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо изображение от* G *върху* G^*. *Нека якобианът на това изображение*

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

е различен от нула в G и е непрекъснато продължим върху [G]. Нека освен това функцията

$$f : [G^*] \to \mathbb{R}$$

е непрекъсната върхи множеството $[G^*]$. *Тогава е в сила формулата*

$$\iint_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{G} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

Пример 10.2.1. Да се пресметне интеграла

$$\iint_{x^2+y^2<1} \cos(\pi\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$$

Нека въведем нови променливи ρ, φ по формулите

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi$$

Тогава модулът на якобиана на смяната се дава със израза

$$\Delta = |J(\rho,\varphi)| = \rho$$

Изображението на новите променливи е правоъгълника

$$G = \{(\rho,\varphi) : 0 < \rho < 1, -\pi < \varphi < \pi\}$$

взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо и с якобиан, различен от нула върху кръга

$$K : \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

от който е премахнат радиусът, лежащ върху отрицателната част на оста Ox, т.е G се изобразява върху множеството

$$G = K \setminus \{(x,y) : x \le 0, y = 0\}$$

Освен това изображението на смяната изобразява затвореният правоъгълник $[G]$ върху затворения кръг

$$[G] = [K] = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

при което контура $[G]$ вече не е взаимно еднозначно. Якобианът на изображението на смяната е непрекъснат върху $[G]$ а в една точка от контура(кординатното начало) е нула. Следователно това изображение удовлетворява всички условия от Теорема (10.2.2), и затова може да се приложи формулата за смяна на променливите на интеграла. Така се получава

$$\iint_{x^2+y^2<1} \cos(\pi\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = \iint_{G} \rho\cos(\pi\rho)\,d\rho\,d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1} \rho\cos(\pi\rho)\,d\rho\,d\varphi = -\frac{4}{\pi}$$

Теорема 10.2.3. *Нека* $G, G^* \subset \mathbb{R}^m$ *са отворени кубируеми множества. Нека* $F : [G] \to [G^*]$ *е непрекъснато изображение, зададено с уравненията*

$$x = F(t) = \{x_i = x_i(t_1, t_2, ..., t_m), i = 1 \div m\}$$

взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо върху G*, и якобиантът му*

$$J(t) = \frac{\partial(x_1, ..., x_m)}{\partial(t_1, ..., t_m)} \neq 0, \quad t \in G$$

е непрекъснато продължим върху [G]. Тогава, ако функцията

$$f : [G^*] \to \mathbb{R}$$

е непрекъсната върху $[G^*]$ *то*

$$\int f(x)\, dG^* = \int f(x(t))|J(t)|dG$$

10.2.1 Полярна смяна

При $m = 2$ често използвана е полярна смяна, зададена с равенства

$$F(\rho, \varphi) = \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

За да се опише $\mathbb{R}^2$, променливите ρ, φ се изменят както следва

$$\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

я якобианът има стойност

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

А неговия модул

$$\Delta = |J(\rho, \varphi)| = \rho$$

Една обощена полярна смяна е следната

$$F(\rho, \varphi) = \begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases} \qquad (a, b > 0)$$

известна като обобщена полярна смяна, за която в общия случай

$$\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

А неговия модул

$$\Delta = |J(\rho, \varphi)| = ab\rho$$

Друга обощена полярна смяна е следната

$$F(\rho, \varphi) = \begin{cases} x = a\rho \cos^k \varphi \\ y = b\rho \sin^k \varphi \end{cases} \qquad (a, b > 0mk = 2, 3, ...)$$

известна също като обобщена полярна смяна, за която в общия случай

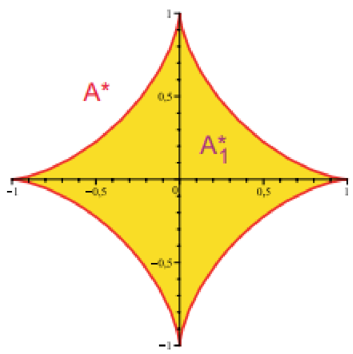
$$\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

А неговия модул

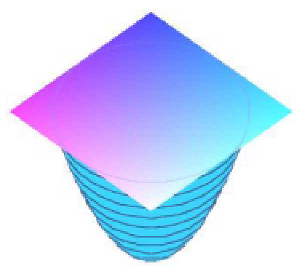
$$\Delta = |J(\rho, \varphi)| = abk\rho |\cos^{k-1} \varphi \sin^{k-1} \varphi|$$

Пример 10.2.2. Да се пресметне лицето на фигурата

$$A^* = \{(x, y) : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}, a > 0\}$$



Фигура 5.9.1: $A^* \subset \mathbb{R}^2$



Фигура 5.9.2

Поради симетрията на дадената фигура, нейното лице може да се пресметни като първо се намери лицето на часта A_1^* разположена в първи квадрант и получения резултат да се умножи по 4. За да се пресметне това може да се извърши следната смяна

$$x = \rho \cos^3 \varphi \qquad y = \rho \sin^3 \varphi$$

която води до ограничения $0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (\rho, \varphi) \in A$ и има якобиан с модул

$$\Delta = |J(\rho, \varphi)| = 3\rho \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

поради което

$$\mu(A^*) = 4\mu(A_1^*) = 4\iint\limits_{A_1^*} = 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^a \rho\, d\rho = \frac{3\pi a^2}{8}$$

11 Лекция 11: Пресмятане на тройни интеграли

11.1 Пресмятане на тройни интеграли, чрез свеждане до повторни интеграли

Нека $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$. Нека областта $G \subset \mathbb{R}$ и D е нейна ортогонална проекция върху равнината xOy. т.е $D \subset \mathbb{R}^2$ или

$$D = \{(x, y) : \exists z, (x, y, z) \in G\}$$

Дефиниция 11.1.1. *Областта G се нарича елементарна относно оста Oz ако нейната проекция D е кубируема (измерима), а границата ѝ се състои от две функции $\varphi(x, y)$ $\psi(x, y)$, непрекъснати върху множеството такива че*

$$\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \qquad (x, y) \in D$$

и евентуално част от цилиндъра с онсова границата ∂D на проекцията D.

- Ако G е елементарна относно оста Oz, то тя е измерима.
  Нейната проекция D е измерима област, следователно ограничена. Поради това границата на областта G, който се състои от графиките на непрекъснатите функции върху компактното множество $[D]$ и евентуално част от цилиндър с основа, която има мярка нула

  $$\mu(\partial D) = 0$$

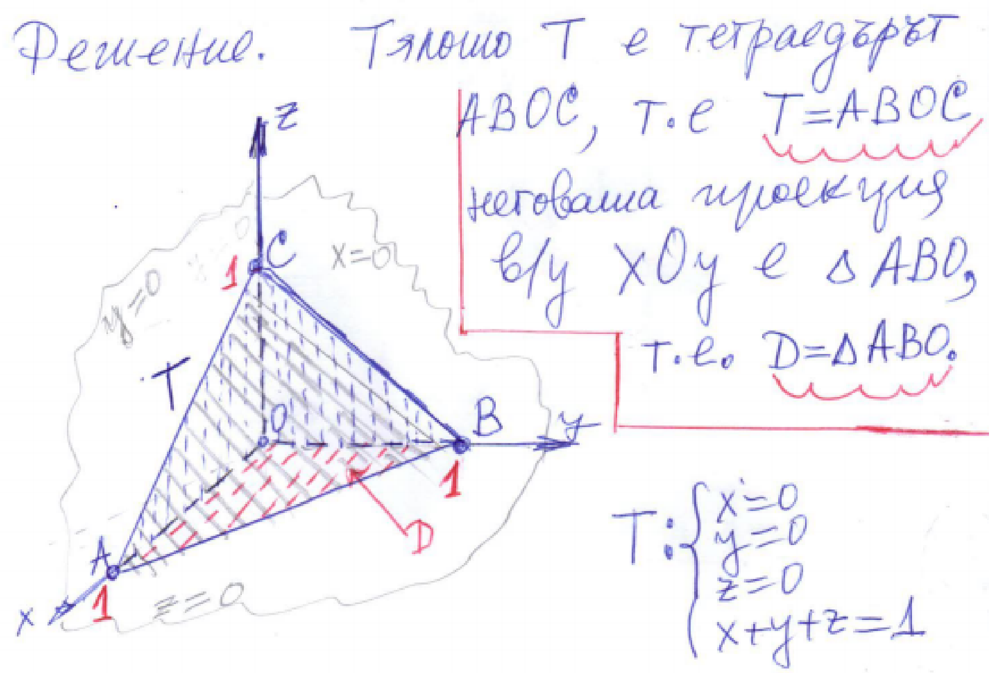
- Ако

  $$f : [G] \to \mathbb{R}$$

  е непрекъсната функция, то Теоремата на фубини се обобщава и е валидна следната формула

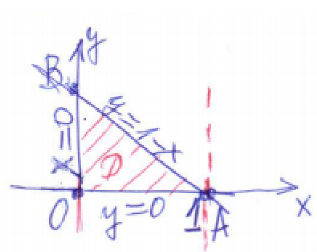
$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_G dx\, dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz = \iint\limits_G \left[\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dx\, dy$$

Пример 11.1.1. Нека $\iiint\limits_T dx\,dy\,dz$ по ограничената област T, заградена от повърхнините с уравнения $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.



Повърхнината $x+y+z = 1$ е равнина пресичаща и трите кординатни оси с отрези от тях равни на 1. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ са кординатните равнини. Проекцията на D на тялото се получава от

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \implies D : \begin{cases} x+y=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$



Имаме

$$A : \left| \begin{array}{l} y = 1-x \\ y = 0 \end{array} \right. \implies A(1,0) \implies \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$$

По нататък

$$0 \leq z \qquad x + y + z \leq 1 \implies 0 \leq z \leq 1 - x - y$$

Тогава получаваме

$$\iiint\limits_T dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} dz\,dy\,dx$$

$$\int\limits_0^{1-x-y} dz = z\Big|_0^{1-x-y} = 1 - x - y$$

$$I = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} 1 - x - y\,dy\,dx$$

$$\int\limits_0^{1-x} 1 - x - y\,dy = (1-x)\Big|_0^{1-x} - \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x-1)^2\,d(x-1)$$

$$I = \frac{1}{2}\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}[0 - (-1)^3] = \frac{1}{6}$$

11.2 Приложение на многократните интеграли

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е измеримо (кубируемо) множество. Както е известно от Теорема (9.5.1) мярката на G се изразява с формулата по долу

$$\mu(G) = \int dG$$

По такъв начин посредством m-кратен интеграл може да се пресметне мярката на кубируемо множество в m-мерното пространство(лице - в двумерно, обем - в тримерното пространства). Ако m-кратнията интеграл може да се сведе до повторен, то пресмятането на мярката на кубируемото множество G, се свежда до пресмятане на (m-1)-кратен интеграл. Ако $m = 2$, площта на измеримата на равнинна област $D \subset \mathbb{R}^2$ се пресмята по формулата

$$S(D) = \mu(D) = \iint\limits_D dx\,dy$$

Ако $m = 3$, обема на измеримата на равнинна област $T \subset \mathbb{R}^3$ се пресмята по формулата

$$V(T) = \mu(T) = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz$$

Освен това този интеграл може да се сведе до повторен и D е проекция на тялото T върху $\mathbb{R}^2$ а, T е разположено повърхнините $z = f_1(x, y)\, z = f_2(x, y)$ като е изпълнено неравенството $f_1(x, y) \leq f_2(x, y), \quad (x, y) \in D$ формулата за обем може да се запише

$$V(T) = \mu(T) = \iint\limits_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\; dx\,dy$$

Друга полезна формула е тази за намиране на част от повърхнина заключена в цилиндрична повърхнина. С други думи, ако $D \subset \mathbb{R}^2$ е квадратируема област и повърхнината S е дефинирана в затвореното множество $[D]$

$$S : z = f(x, y) \qquad f : [D] \to \mathbb{R}$$

Като при това f е непрекъснато диференцируема в D, то лицето на тази повърхнина се дава с формулата

$$\sigma = \sigma(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\,dy$$

Пример 11.2.1. Да се пресметне лицето на частта от повърхнината $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, разположена във вътрешността на цилиндрична повърхнина с уравнение $x^2 + y^2 = 2x$

D е отворения кръг с център точката (1,0) и радиус 1, защото

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

Освен това

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{2}$$

От формулата имаме

$$\sigma = \sigma(S) = \iint\limits_D \sqrt{2}\, dx\,dy = \sqrt{2} \iint\limits_D dx\,dy = \sqrt{2}\mu(D) = \sqrt{2}\pi$$

11.3 Смяна на променливите на троен интеграл

Теорема 11.3.1. *Нека $G, G^* \subset \mathbb{R}^3$ са отворени измерими множества. Нека $F : [G] \to [G^*]$ е непрекъснато изображение зададено чрез системата функция*

$$F(u,v,w) = \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо изображение от G върху G^*. Нека якобианът на това изображение

$$J(u,v,w) = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \quad (u,v,w) \in G$$

е непрекъснато продължим върху [G]. Нека освен това функцията

$$f : [G^*] \to \mathbb{R}$$

е непрекъсната върхи множеството $[G^*]$. Тогава е в сила формулата

$$\iiint\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy = \iiint\limits_{G} f(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

11.3.1 Цилиндрична смяна

Честно използвани смени на променливите при тройни интеграли са цилиндричната смяна, зададена с уравнения

$$F(\rho,\varphi,z) = \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

и обобщена цилиндрична смяна

$$F(\rho,\varphi,z) = \begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad (a,b>0)$$

За да се опише цялото $\mathbb{R}^3$, диапазонът на изменение на променливите е както следва

$$\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi \qquad -\infty < z < \infty$$

А неговия модул съответно

$$\Delta = |J(\rho,\varphi,z)| = \rho \qquad \Delta = |J(\rho,\varphi,z)| = ab\rho$$

11.3.2 Сферична смяна

Друга смяна е сферичната смяна, зададена с уравнения

$$F(\rho,\varphi,\psi)=\begin{cases}x=\rho\sin\psi\cos\varphi\\ y=\rho\sin\psi\sin\varphi\\ z=\rho\cos\psi\end{cases}$$

За да се опише цялото $\mathbb{R}^3$, диапазонът на изменение на променливите е както следва

$$0\le\rho\qquad 0\le\varphi<2\pi\qquad 0\le\psi\le\pi$$

а модула на якобиана се дава с равенсвото

$$\Delta=|J(\rho,\varphi,\psi)|=\rho^2\sin\psi$$

Понякога се дава и следната вариация на сферична смяна

$$F(\rho,\varphi,\theta)=\begin{cases}x=\rho\cos\theta\cos\varphi\\ y=\rho\cos\theta\sin\varphi\\ z=\rho\sin\theta\end{cases}$$

с диапазон на изменение на променливите

$$0\le\rho\qquad 0\le\varphi<2\pi\qquad -\frac{\pi}{2}\le\psi\le\frac{\pi}{2}$$

и модул на якобиана

$$\Delta=|J(\rho,\varphi,\theta)|=\rho^2\cos\theta$$

Пример 11.3.1. Да се пресметне обемът на тялото

$$T^*=\{(x,y,z):x^2+y^2\le z,\ z\le 4\}$$

Ако направим цилиндрична смяна получаваме

$$\mu(T^*)=\iiint\limits_{T^*}dx\,dy\,dz=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}\rho\int\limits_{\rho^2}^{4}dz\,d\rho\,d\varphi=8\pi$$

Проекцията D^* на T^* върху xOy се определя от

$$x^2+y^2\le z,\quad z\le 4\implies x^2+y^2\le 4\implies D^*\{(x,y):x^2+y^2\le 4\}$$

От D^* се определят границите за x и y.
Границите за променливата z са

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 4$$

След цилиндричната замяна се получава

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2 \leq 4$$

$$\rho^2 \leq 4 \qquad \rho > 0 \implies 0 \leq \rho \leq 2$$

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 4 \implies \rho^2 \leq z \leq 4$$

а φ остава в $0 \leq \varphi < 2\pi$, защото няма нови ограничения.

12 Лекция 12: Криви и повърхнини в тримерното пространство

12.1 Криви и повърхнини в тримерното пространство

Нека $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ е непрекъсната крива линия, зададена в следния параметричен вид:

$$\Gamma : \{r(t); t \in [\alpha, \beta]\} \equiv \{x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t); t \in [\alpha, \beta]\}$$

в интервала $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.

Дефиниция 12.1.1. *Точката $A = r(\alpha)$ се нарича начало на кривата, а $B = r(\beta)$ - неин край.*

Дефиниция 12.1.2. *Точка от кривата Γ, която е образ на повече от една точка от интервала $[\alpha, \beta]$ (с изключение на началото и края) се нарича точка на самопресичане или кратна точка на тази крива. Крива която няма други точки на самопресичане (освен $r(\alpha) = r(\beta)$) и такива, че $r(t) \neq r(\alpha) = r(\beta); t \in [\alpha, \beta]$ се нарича прост контур. Кривата Γ се нарича затворена крива или затворен контур, ако началото ѝ съвпада с нейния край, $r(\alpha) = r(\beta)$.*

Дефиниция 12.1.3. *В частност ако кривата Γ лежи в някаква равнина, тя се нарича равнинна. Ако посочената равнина е кординатната равнина xOy, то представянето на тази крива има вида*

$$\Gamma : \{r(t); t \in [\alpha, \beta]\} \equiv \{x = \varphi(t), y = \psi(t), z = 0; t \in [\alpha, \beta]\}$$

при което уравнението $z = 0$ обикновенно не се пише.

Дефиниция 12.1.4. *Кривата Γ се нарича диференцируема, ако координатните ѝ функции $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ са диференцируеми в $[\alpha, \beta]$, а*

$$r'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t))$$

се нарича производна на представянето $r(t)$ на кривата. Ако освен това тези функци са и непрекъснато диференцируеми, то кривата се нарича непрекъснато диференцируема.

Дефиниция 12.1.5. *Нека кривата Γ е диференцируема крива. Точката на кривата Γ в която $r' \neq 0$ се нарича неособена, а точката в която $r' = 0$ - особена.*

От равенството

$$|r'| = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}$$

следва че точката $(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ от кривата Γ е неособена тогава и само тогава когато $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t) > 0$ т.е поне една от производните е различна от нула.
Кривата Γ има допирателна във всяка неособена точка.

Дефиниция 12.1.6. *Кривата Γ се нарича гладка, ако е непрекъснато диференцируема крива без особени точки. Ако дадената крива не е гладка, но може да се представи като сума от краен брой гладки криви, се казва, че тя по части гладка или частично гладка.*

Дефиниция 12.1.7. *Кривата се нарича ректифицируема, ако има крайна дължина.*

Дефиниция 12.1.8. *Множеството $D \subset \mathbb{R}^2$ се нарича едносвързано, ако за всяка непрекъсната затворена крива линия $\gamma \subset D$ е изпълнено $Int\gamma \subset D$, където $Int\gamma$ е множеството от всички точки, които се намират в ограниченото множество $\widetilde{D}$ с контур $\partial\widetilde{D} = \gamma$*

Нека сега $D \subset \mathbb{R}^2$ е едносвързана област и за всички точки от тази област са дефинирани три функции

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

или векторна функция

$$r = r(u, v)$$

където $r(u, v)$ е вектор с компоненти $x = x(u, v)\, y = y(u, v)\, z = z(u, v)$.

Дефиниция 12.1.9. *Казва се че уравненията по горе (x,y,z) или (r) дефинират гладка повърхност, ако функциите (x,y,z) са непрекъснато диференцируеми в областта D и векторното произведение*

$$N = r'_u(u, v) \times r'_v(u, v) \neq 0 \qquad (u, v) \in D$$

а векторите

$$N = r'_u(u, v) \times r'_v(u, v), \qquad n = \frac{N}{\|N\|}$$

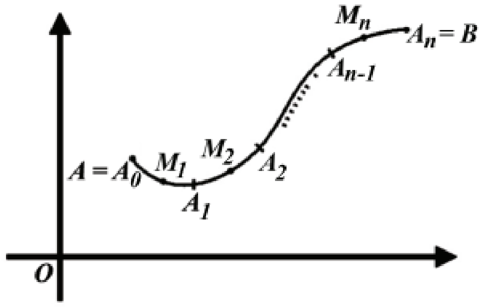
се наричат съответно нормален вектор (нормала) и единичен нормален вектор към тази повърхнина. Ако повърхнината не е гладка, но може да се раздели на краен брой гладки части, тя се нарича частично гладка или по части гладка повърхнина.

Пример 12.1.1 (Лист на Мьобиус)**.** Ако залепим правоъгълника $ABCD$ така, че A да съвпада с C, а B с D то че получава повърхнина, известна като лист на Мьобиус. Нейната нормала се характеризира с това, че след като направи една обиколка, тя сменя посоката си с противоположната.

13 Лекция 13: Криволинейни интеграли

13.1 Дефиниция на криволинейни интеграли от първи и втори род

Нека функциите $f(x,y,z), P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ са дефинирани върху непрекъснатата проста ректифируема крива Γ с начална точка A и крайна точка B.



С помощта на точките $A \equiv A_0, A_1, ..., A_n \equiv B$ с кординати съответно $A_i(x_i, y_i, z_i)(i = 0, 1, ..., n)$, кривата Γ е разделеня на n дъгички и върху всяка дъгичка произволно е избрана точка $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, в която се пресмятат стойностите $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ на функциите f, P, Q, R. Да отбележим, че аналогичен процес на разделяне може да бъде проведен и в случай на затворена крива, ако за точка $A_0(A_n)$ се вземе коя да е нейна точка, а останалите точки A_i да се разположат последователно по кривата в една от двете възможни посоки.
За дължината на i-тата дъгичка е използвано означението Δl_i, а за дължината на най-дългата дъгичка от разделянето δ_n

$$\Delta l_i = \text{дължината на } A_{i-1}A_i \qquad \delta_n = \max_{i=1\div n} \Delta l_i$$

Наред с това са въведени и означенията

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad \Delta y_i = y_i - y_{i-1} \qquad \Delta z_i = z_i - z_{i-1} \qquad i = 1 \div n$$

По нататък са образувани съответните интегрални суми за всяка една от разглежданите функции както следва

$$\sigma_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i$$
$$\sigma_n(P) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i$$
$$\sigma_n(Q) = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i$$
$$\sigma_n(R) = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i$$

Дефиниция 13.1.1. *Границата на интегралната сума (първата; ако съществува, не зависейки нито от начина на разделяне, нито от избора на точките M_i) при δ_n, клоняща към нула се нарича криволинеен интеграл от първи род на функцията $f(x, y, z)$ върху кривата Γ и се записва $\int\limits_{\Gamma} f(x, y, z)\ dl$, или кратко $\int\limits_{\Gamma} f\ dl$, т.е криволинейният интеграл от първи род се дефинира с равенството*

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y, z)\ dl = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_n(f) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i$$

ако границата съществува.

Дефиниция 13.1.2. *Границата на интегралната сума (втората; ако съществува, не зависейки нито от начина на разделяне, нито от избора на точките M_i) при δ_n, клоняща към нула се нарича криволинеен интеграл от втори род на функцията $P(x, y, z)$ върху кривата Γ и се записва $\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\ dx$, или кратко $\int\limits_{\Gamma} P\ dx$. Аналогично се дефинират и останалите два криволинейни интеграла от втори род.*

$$\int\limits_{\Gamma} P\ dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_n(P) \qquad \int\limits_{\Gamma} Q\ dy = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_n(Q) \qquad \int\limits_{\Gamma} R\ dz = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_n(R)$$

ако границите съществуват.

Дефиниция 13.1.3. *Сумата от криволинейните интеграли от втори род $\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\ dx$, $\int\limits_{\Gamma} Q(x, y, z)\ dy$, $\int\limits_{\Gamma} R(x, y, z)\ dz$, ако те съществуват* *също се нарича криволинеен интеграл от втори род върху кривата* Γ *(общ вид) и се означава по следния начин*

$$\int\limits_{\Gamma} P\ dx + Q\ dy + R\ dz = \int\limits_{\Gamma} P\ dx + \int\limits_{\Gamma} Q\ dy + \int\limits_{\Gamma} R\ dz$$

Казва се също че интегралът е криволинеен интеграл от втори род от векторната функция

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$$

върху кривата Γ *и се записва още във вида* $\int\limits_{\Gamma} F\ dr$*, т.е*

$$\int\limits_{\Gamma} F\ dr = \int\limits_{\Gamma} P\ dx + Q\ dy + R\ dz$$

Да съпоставим сега дефинираните интеграли от втори род с тези от първи род. Въпреки очевидното сходство на двете дефниции, има съществена разлика между тях. Така например криволинейния интеграл от първи род при съставяне на интегрална сума стойността $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ на функцията е умножена с дължината на дъгата Δl_i на частта A_iA_{i-1} от кривата AB, докато при криволинейния интеграл от втори род стойността на $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ се умножава с величината на проекцията $\Delta x_i(\Delta y_i, \Delta z_i)$ на споменатата дъгичка върху оста $Ox(Oy, Oz)$.

Ясно е че ориентацията (посоката на описване) на кривата AB, по която се интегрира, не влияе на стойността на интеграла от първи род, защото дължината Δl_i не зависи от тази ориентация. По друг начин стоят нещата при интегриране от втори род. В този случай величината $\Delta x_i(\Delta y_i, \Delta z_i)$ съществено зависи от посоката на описване на дъгата и сменя знака си със смяната на посоката на обход на кривата с обратна. По такъв начин, за интегралите от втори род са изпълнени следните равенства

$$\int\limits_{BA} P(x,y,z)\ dx = -\int\limits_{AB} P(x,y,z)\ dx$$

Съответно

$$\int\limits_{BA} Q(x,y,z)\ dy = -\int\limits_{AB} Q(x,y,z)\ dy$$

$$\int\limits_{BA} R(x,y,z)\ dz = -\int\limits_{AB} R(x,y,z)\ dz$$

при това, от съществуването на интегралите, които се намират от една-та страна на равенствата, следва съществуването и на интегралите от другата страна. Най сетне и за криволинейния интеграл "от общ вид"е изпълнени аналогично равенство, както следва

$$\int\limits_{BA} P\ dx + Q\ dy + R\ dz = -\int\limits_{AB} P\ dx + Q\ dy + R\ dz$$

което показва, че и в този случай смяната на посока на интегриране сменя знака на интеграла.
Като частен случай може да се получи криволинеен интеграл от първи род и два криволинейни от втори род за равнинната крива $\Gamma = AB$, а именно

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\ dl \qquad \int\limits_{\Gamma} P(x,y)\ dx \qquad \int\limits_{\Gamma} Q(x,y)\ dy$$

Сумата от последните два интеграла в този случай се нарича криволинеен интеграл от втори род върху кривата Γ и се означава по следния начин

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = \int\limits_{\Gamma} P(x,y)\ dx + \int\limits_{\Gamma} Q(x,y)\ dy$$

Както е отбелязано по-горе, криволинейният интеграл, от втори род зависи от посоката на описвана на кривата. Затова трябва да се направи уточнение, когато Γ е затворена крива.
Положителна посока се нарича, тази посока, при движението по която областта, лежаща във вътрешността на контура, остава от лявата страна (т.е движението се извършва обратно на часовниковата стрелка).

По нататък се счита, че затвореният контур Γ, по който се извършва интегрирането, винаги е описан в положителна посока.
Когато е необходимо да се подчертае, че контура е затворен, криволинейния интеграл от втори род се означава

$$\oint\limits_{\Gamma} P\ dx + Q\ dy + R\ dz \qquad \oint\limits_{\Gamma} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy$$

Аналогично криволинейните интеграли в $\mathbb{R}^3$ се изгражда и теорията за криволинейните интеграли в $\mathbb{R}^m, m > 3$.
Елементарните свойства се пренасят върху криволинейните интеграли.

13.2 Свойства и пресмятане на криволинейни интеграли

Ако Γ е гладка (по части гладка) крива линия, зададена с параметричния вид

$$\Gamma \equiv \{x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [t_1; t_2]\}$$

и f е непрекъсната функция върху Γ, то криволинейният интеграл от първи род съществува и се пресмята чрез следния определен интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y,z)\ dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\ dt$$

При дадени допълнителни условия, адитивносттите на криволинейния интеграл от първи род относно интеграционната крива.
Ако кривата Γ е зададена в декартови кординати

$$\Gamma \equiv \{x = x, y = \psi(x), z = \chi(x), z \in [a; b]\}$$

то формулата се свежда до

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y,z)\ dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, \psi(x), \chi(x))\sqrt{1 + \psi'^2(x), \chi'^2(x)}\ dx$$

Ако Γ е равнинна крива, зададена в полярни кординати

$$\Gamma \equiv \{\rho = \rho(\vartheta), \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]\}$$

то формулата се свежда до

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y,z)\ dl = \int\limits_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\ d\vartheta$$

Пример 13.2.1. Да се пресметне $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{y}\ dl$, където Γ е дъга от циклоидата

$$\Gamma \equiv \{x = t - \sin t, y = 1 - \cos t; t \in [0, \pi]\}$$

Тъй като кривата Γ, по която се интегрира е зададена параметрично, за пресмятане на интеграла се получава

$$I = \int\limits_{\Gamma} \sqrt{y}\ dl = \int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos t}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\ dt$$

$$\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t} = \sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t} = \sqrt{2-2\cos t} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$$

$$I = \int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos t}\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\ dt = \sqrt{2}\int\limits_{0}^{\pi}(1-\cos t)\ dt$$

$$\int\limits_{0}^{\pi}(1-\cos t)\ dt = \int\limits_{0}^{\pi} 1\ dt - \int\limits_{0}^{\pi}\cos t\ dt = t\Big|_0^{\pi} - \sin t\Big|_0^{\pi} = \pi - 0 = \pi$$

$$I = \sqrt{2}\pi$$

Нека функциите $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ са дефинирани върху гладката крива Γ с начална точка A и крайна точка B.
Ако кривата е зададена в параметричния и вид, то криволинейния интеграл от втори род се пресмята по следната формула

$$\int\limits_{\Gamma} P\ dx + Q\ dy + R\ dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{\widetilde{P}\varphi' + \widetilde{Q}\psi' + \widetilde{R}\chi'\right\}\ dt$$

където

$$\widetilde{P}(t) = P[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)] \quad \widetilde{Q}(t) = Q[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)] \quad \widetilde{R}(t) = R[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]$$

Пример 13.2.2. Да се пресметне криволинейният интеграл

$$I = \int\limits_{C} y\ dx - x\ dy + (x+y+z)\ dz$$

върху винтовата линия

$$C = \left\{x = a\cos t, y = a\sin t, z = \frac{h}{2\pi}t, t\in[0;2\pi]\right\}, \quad a>0, h>0$$

Кривата C е зададена параметрично и прилагането на формулата води до

$$dx = -a\sin t \qquad dy = a\cos t \qquad dz = \frac{h}{2\pi}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left[a\sin t(-a\sin t) - a\cos t(a\cos t) + \left(a\cos t + a\sin t + \frac{h}{2\pi}t \right) \frac{h}{2\pi} \right] \, dt =$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left[-a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + \left(\frac{ha}{2\pi}\cos t + \frac{ha}{2\pi}\sin t + \frac{h^2}{4\pi^2}t \right) \right] \, dt =$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left[-a^2 + \frac{ha}{2\pi}\cos t + \frac{ha}{2\pi}\sin t + \frac{h^2}{4\pi^2}t \right] \, dt =$$

$$I = \int_0^{2\pi} -a^2 \, dt + \int_0^{2\pi} \frac{ha}{2\pi}\cos t \, dt + \int_0^{2\pi} \frac{ha}{2\pi}\sin t \, dt + \int_0^{2\pi} \frac{h^2}{4\pi^2}t \, dt$$

$$\int_0^{2\pi} -a^2 \, dt = -a^2 \int_0^{2\pi} \, dt = -a^2 t\Big|_0^{2\pi} = -2a^2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{ha}{2\pi}\cos t \, dt = \frac{ha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = \frac{ha}{2\pi} \cdot \sin t\Big|_0^{2\pi} = \frac{ha}{2\pi} \cdot 0 = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{ha}{2\pi}\sin t \, dt = \frac{ha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = \frac{ha}{2\pi} \cdot (-\cos t\Big|_0^{2\pi}) = \frac{ha}{2\pi} \cdot 0 = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{h^2}{4\pi^2}t \, dt = \frac{h^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} t \, dt = \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{4\pi^2}{2} = \frac{h^2}{2}$$

$$I = -2a^2\pi + \frac{h^2}{2}$$

Пример 13.2.3. Да се пресметне криволинейния интеграл

$$I = \int_\Gamma xy \, dx + (x - y) \, dy$$

върху параболата $x = y^2$ от точка O(0,0) до точка M(4,2).
Равнинната крива е зададена с явна функция и за параметър ще вземем

едната променлива.

$$\Gamma \equiv \{x = t^2, y = t; t \in [0, 2]\}$$

След прилагане на формулата се стига до

$$dx = 2t \quad dy = 1$$

$$I = \int_0^2 \left(t^2 t 2t + t^2 - t\right)\, dt = I = \int_0^2 \left(2t^4 + t^2 - t\right)\, dt = \frac{202}{15}$$

Дотук се занимавахме с директно интегриране. Понякога пресмятането може да се улесни като се използват специфични свойства на криволинейния интеграл и на подинтегралната функция.
Ако подинтегралната функция е пълен диференциал, т.е съществува еднозначна и диференцируема функция U в едносвързано множество D, в която

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = R$$

то стойността не зависи от кривата на интегриране, а само от началната и крайната точка и неговата стойност е $U(B) - U(A)$. Ако кривата по която се интегрира е затворена, то стойността на криволинейния интеграл при изпълнени условия е нула.
Необходими и достатъчни условия изразът

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

да бъде пълен диференциал на два пъти непрекъснато диференцируема функия U са

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

познато като условия за интегруемост.
Нека D е равнинно множество с частично гладка граница, а функциите $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ са непрекъснати в затвореното множество [D]. Тогава е в сила формулата на Грийн-Гаус.

$$\oint_\Gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dx\, dy$$

Пример 13.2.4. Да се пресметне криволинейния интеграл

$$I = \int_\Gamma (3x - y)\, dx + (y - x)\, dy$$

върху затворената начупена линия ABCA с върхове точката $A(0,0), B(1,0), C(0,2)$. Интегралът може да бъде решен с формулата за криволинеен интеграл от втори род, но тъй като преди това начупената линия ABCA се нуждае от параметризиране, е използвана формулата на Грийн-Гаус според която

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial(y-x)}{\partial x} - \frac{\partial(3x-y)}{\partial y} \right)\ dx\ dy = 0$$

Същия е и резултата, ако се отчете факта че израза под интеграла е пълен диференциал, тъй като

$$d\left(\frac{y^2}{2} + \frac{3x^2}{2} - xy\right) = (3x-y)\ dx + (y-x)\ dy$$

, а контурът е затворен

14 Лекция 14: Приложения на криволинейните интеграли

14.1 Приложения на криволинейните интеграли

Пример 14.1.1. С помощна на криволинеен интеграл от първи ред да се намери дължината на астроидата

$$C \equiv \{x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, t \in [0.2\pi]\}, a > 0$$

Астроидата е симетрична и е достатъчно да се сметне дължината на частта от кривата в първи квадрант и да се умножи по 4.

$$I = \int\limits_C dl = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2\sin t)^2 + (3a\sin^2\cos t)}\ dl = 6a$$

От формулата на Грийн-Гаус автоматично се получава следната формула

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma x\ dy - y\ dx$$

за пресмятане на лице на равнинно множество D, чиято граница Γ е проста затворена крива.
В полярни кординати формулата изглгежда

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma \rho^2\ d\varphi$$

Пример 14.1.2. С помощта на криволинеен интеграл да се пресметне лицето на една навивка от спиралата на Архимед

$$C \equiv \{\rho = a\varphi, |\varphi \in [0, 2\pi]\}, a > 0$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma \rho^2\ d\varphi = \frac{1}{2}\oint\limits_0^{2\pi} a^2\varphi^2\ d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4a^2\pi^3}{3}$$

Лицето σ на цилиндър с управителна линия

$$C \equiv \{x = \varphi(t), y = \psi(t), z = 0, t \in [t_1, t_2]\}$$

което е ограничено от равнината xOy и от линията

$$C^* \equiv \{x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [t_1, t_2]\}$$

се пресмята с криволинеен интеграл от първи род по формулата

$$\int\limits_C z\ dl$$

където dl е линейният елемент на дъгата С.

Пример 14.1.3. Да се пресметне лицето на цилиндрична повърхнина с управителна крива $x^2 + y^2 = 1$ ограничена надолу от равнината xOy и отгоре от повърхнината $z = xy$.
Параметричните уравнения на окръжността са

$$C \equiv \{x = \cos t, y = \sin t, |t \in [0, 2\pi]\}$$

От графиката се вижда наличие на симетрия което се ползва във формулата

$$\sigma = \int\limits_C z\ dl = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\ dt = 1$$

Ако $\rho(x, y, z)$ е плътността на материална крива Γ, то масата m на тази крива се пресмята чрез криволинеен интеграл от първи род

$$m = \int\limits_\Gamma \rho(x, y, z)\ dl$$

а центъра на тежеста $G(x_G, y_G, z_G)$ на материална крива има кординати

$$x_G = \frac{\int\limits_\Gamma x\rho(x,y,z)\ dl}{\int\limits_\Gamma \rho(x,y,z)\ dl} \qquad y_G = \frac{\int\limits_\Gamma y\rho(x,y,z)\ dl}{\int\limits_\Gamma \rho(x,y,z)\ dl} \qquad z_G = \frac{\int\limits_\Gamma z\rho(x,y,z)\ dl}{\int\limits_\Gamma \rho(x,y,z)\ dl}$$

Пример 14.1.4. Дадена е материална отсечка свързваща точка $M(1, 0)$ с точка $N(2, 3)$. Плътността във всяка точка е равна на $x^2 + y^2$. Да се намерят кординатите на центъра на тежестта на отсечката.
Кривата е равнинна и затова се използа формулата за двумерен случай

$$MN \equiv \{x = 1 + t, y = 3t, |t \in [0, 1]\}$$

а линейния елемент в този случай е

$$dl = \sqrt{(1 + t)'^2 + (3t)'^2} dt = \sqrt{10}$$

Масата е

$$m = \int_0^1 (1 + 2t + t^2 + 9t^2)\sqrt{10}\, dt = \frac{16\sqrt{10}}{3}$$

Пресмятат се моментите от първи ред

$$\int_0^1 (1+t)(1 + 2t + t^2 + 9t^2)\sqrt{10}\, dt = 9\sqrt{10}$$

$$\int_0^1 3t(1 + 2t + t^2 + 9t^2)\sqrt{10}\, dt = 11\sqrt{10}$$

След което се получават кординатите на центъра на тежестта

$$x_G = \frac{27\sqrt{10}}{16\sqrt{10}} = \frac{27}{16} \qquad y_G = \frac{33\sqrt{10}}{16\sqrt{10}} = \frac{33}{16}$$

Физическия смисъл на криволинеен интеграл от втори род е работата, която силата

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$$

извършва за преместване по криволинеен път от началната до крайната му точка.

Пример 6.4.5 *Да се намери работата, която силата*

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$$

извършва по отсечката AB от точката $A(1,1,2)$ до точката $B(2,2,3)$.

Търсената работа се пресмята по формулата

$$I = \int_{AB} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z,$$

и изчисленията могат да се извършат по (6.3.7) след параметризация на отсечката AB. Обаче тук това е направено по друг начин. Тъй като функциите $P(x,y,z) = yz$, $Q(x,y,z) = yz$ и $R(x,y,z) = xy$ удовлетворяват уравненията (6.3.9), то $yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$ е пълен диференциал на някаква функция U и интегралът не зависи от пътя на интегриране. По-внимателен поглед показва, че $\mathrm{d}U = \mathrm{d}(xyz) = yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$, и следователно

$$I = U(2,2,3) - U(1,1,2) = 12 - 2 = 10.$$

14.2 Повърхнинни интеграли от първи род

Нека S е частично гладка двустранна повърхнина и функцията $f(x, y, z)$ е дефинирана и ограничена върху нея. Повърхнината се разделя на части S_i, които имат общи точки евентуално по границите си и лица σ_i. Върху всяка част се избира произволна точка $M_i(x_i, y_i, z_i)$, в която се пресмята стойността на функцията $f(x_i, y_i, z_i)$.

Дефиниция 6.5.1 *Ако сумата* $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\sigma_i$ *има крайна граница при условие, че максималната площ* σ_i *клони към нула (не зависейки нито от начина на разделяне, нито от избора на точките* $M_i(x_i, y_i, z_i)$*), се казва, че повърхнинният интеграл от първи род от* $f(x, y, z)$ *върху* S *съществува и се записва*

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\max \sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\sigma_i. \qquad (6.5.1)$$

15 Лекция 15