

Математически анализ 2

Exonaut

16 март 2021 г.

Съдържание

1	Лекция 1: Пространството \mathbb{R}^m	2
1.1	Няколко важни неравенства	2
1.2	Видове крайно мерни пространства	2
1.2.1	Линейно(Векторно) пространство	2
1.2.2	Евклидово пространство	3
1.2.3	Метрично пространство	3
1.2.4	Нормирано пространство	3
1.3	Пространството \mathbb{R}^m - дефиниция и основни свойства	3
1.3.1	Скаларно произведение	4
1.3.2	Норма и метрика	4
1.3.3	Скаларен квадрат	4
1.3.4	Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат	4
1.3.5	Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат	4
1.4	Точки и множества в \mathbb{R}^m	4
1.4.1	Паралелепипед	4
1.4.2	Сфера и кълбо	5
1.5	Редици от точки в \mathbb{R}^m	7
2	Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост	8
2.1	Дефиниция на функция на няколко променливи	8
2.2	Граница на функция на няколко променливи	8
2.3	Непрекъснатост на функция на няколко променливи	9
2.4	Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи	10
3	Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи	11
3.1	Дефиниция на частна производна	11
3.2	Частни производни от по-висок ред	11
3.3	Диференцируемост на функция	12
4	Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права	15
4.1	Диференциране на съставна функция	15
4.2	Производна по посока. Градиент	16
4.3	Допирателна равнина. Нормална права	17
5	Лекция 5:	19

1 Лекция 1: Пространството \mathbb{R}^m

1.1 Няколко важни неравенства

Нека a_k и b_k ($k = 1, 2, \dots, m$) са реални числа и $m \in \mathbb{N}$

Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц) В сила е следното неравенство:

$$\left(\sum_{k=1}^m a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^m a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^m b_k^2 \right)$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални:
($\exists \lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k$)

Равенството може да се запише:

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски) В сила е следното неравенство:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left(\sum_{k=1}^m |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)$$

Теорема 1.1.3 В сила е следното неравенство:

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^m |a_k - b_k|$$

1.2 Видове крайно мерни пространства

1.2.1 Линейно(Векторно) пространство

Дефиниция 1.2.1 Нека L е линейно(векторно) пространство над полето R . В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.

$$1. \quad x, y \in L \implies z = x + y \in L$$

$$2. \quad x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies z = \lambda x \in L$$

1.2.2 Евклидово пространство

Дефиниция 1.2.2 Крайномерното пространство L се нарича евклидово, ако в него е въведено скалярно произведение, т.е. за всеки два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави реално число (x, y) , удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.

$$1. \ x, y, z \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies (x + y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

$$2. \ x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$$

$$3. \ x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$$

1.2.3 Метрично пространство

Дефиниция 1.2.3 Крайномерното пространство L се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика) ρ , т.е. за два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави неотрицателно число $\rho \geq 0$ със следните свойства

$$1. \ \rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$$

$$2. \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$$

$$3. \ \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \forall x, y, z \in L$$

Метрично пространство L с метрика ρ се означава (L, ρ)

1.2.4 Нормирано пространство

Дефиниция 1.2.4 Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма $\|\cdot\|$, т.е. $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ със свойства

$$1. \ x = 0 \implies \|x\| = 0, x \neq 0 \implies \|x\| > 0$$

$$2. \ x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$3. \ x, y \in L \implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Теорема 1.2.1 Ако L е нормирано пространство с дадена норма $\|\cdot\|$, то L е метрично пространство, т.е. равенството $\rho(x, y) = \|x - y\|$ дефинира разстоянието в L

1.3 Пространството \mathbb{R}^m - дефиниция и основни свойства

Дефиниция 1.3.1 Множеството от наредени m -торки $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ от реални числа. Числата a_1, a_2, \dots, a_m се наричат съответно първа, втора, ..., m -та координата на a .

Ако имаме $a = (a_1, a_2, \dots, a_m), b = (b_1, b_2, \dots, b_m); \lambda \in \mathbb{R}$ то

$$1. \ a+b = (a_1, a_2, \dots, a_m) + (b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_m+b_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$2. \ \lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_m) \in \mathbb{R}^m$$

1.3.1 Скалярно произведение

Скалярно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left(\sum_{k=1}^m a_k b_k \right)$$

С така въведено скалярно произведение пространството \mathbb{R}^m се превръща в евклидово.

1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k)^2}$$

се въвежда норма в \mathbb{R}^m .

Нормата генерира метрика в \mathbb{R}^m с формула:

$$\rho(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k - b_k)^2}$$

1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат: $a^2 = (a, a) = \sum_{k=1}^m a_k^2$

1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат: $(a, b)^2 \leq a^2 b^2$ и $|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$

1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат: $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

1.4 Точки и множества в \mathbb{R}^m

1.4.1 Паралелепипед

Дефиниция 1.4.1 *Множеството*

$$\Pi(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k < x_k - a_k < \delta_k\}$$

се нарича отворен паралелепипед в \mathbb{R}^m с център точката a .

Множеството

$$\tilde{\Pi}(a; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k \leq x_k - a_k \leq \delta_k\}$$

се нарича затворен паралелепипед в \mathbb{R}^m с център точката a .

Ако $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_m = \delta$, получените множества $\Pi(a; \delta)$ и $\tilde{\Pi}(a; \delta)$ се наричат съответно отворен и затворен куб в \mathbb{R}^m с център a .

1.4.2 Сфера и кълбо

Дефиниция 1.4.2 Нека числото $r > 0$. Множеството

$$B(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) < r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| < r\}$$

се нарича отворено кълбо в \mathbb{R}^m с център a и радиус r , множеството

$$\tilde{B}(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) \leq r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| \leq r\}$$

се нарича затворено кълбо в \mathbb{R}^m с център a и радиус r , а множеството

$$S(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) = r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| = r\}$$

се нарича сфера в \mathbb{R}^m с център a и радиус r , а множеството

Дефиниция 1.4.3 Точката a се нарича

- вътрешна за множеството A , ако съществува отворено кълбо $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset A$
- външна за A , ако съществува $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$
- контурна за A , ако за всяко $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ и $B(a, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$
- изолирана ако съществува $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$

Дефиниция 1.4.4 Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича

- отворено, ако всяка негова точка е вътрешна
- затворено, ако неговото допълнение $\mathbb{R}^m \setminus A$ е отворено

Дефиниция 1.4.5 Околност на дадена точка $a \in \mathbb{R}^m$ се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с U_a .

Дефиниция 1.4.6 Точка a се нарича точка на съвстяване на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$, ако всяка нейна околност U_a съдържа поне една точка на A , различна от a , т.е. $U_a \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

Дефиниция 1.4.7 Величината

$$d = d(A) = \sup_{a', a'' \in A} \rho(a'; a'')$$

се нарича диаметър на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$.

Дефиниция 1.4.8 Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича ограничено, ако съществува кълбо (с краен радиус), което го съдържа.

Дефиниция 1.4.9 Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича компактно, ако A е затворено и ограничено.

Дефиниция 1.4.10 Множеството $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, чийто координати са непрекъснати функции $x_k = x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, m$), дефинирани върху даден интервал $[a, b]$ се нарича непрекъснатата крива в \mathbb{R}^m . t се нарича параметър на кривата.

Точките $x(a) = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_m(a))$ и $x(b) = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_m(b))$ се наричат начало и край на дадената крива. Ако $x(a) = x(b)$ кривата е затворена

Дефиниция 1.4.11 Нека $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ са фиксирани числа за които $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$. Множеството от точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ чийто координати се представят във вида

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, \dots, m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството \mathbb{R}^m , минаваща през точка x^0 по направление $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

Дефиниция 1.4.12 Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъснатата крива γ , която ги свързва и $\gamma \subset A$.

Дефиниция 1.4.13 Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.

Дефиниция 1.4.14 Област, всеки две точки на която могат да се свързват с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.

Дефиниция 1.4.15 Областа $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича звездообразна област, относително точката $x^0 \in A$, ако за всяка точка $x \in A$ отсечката $[x^0, x]$ лежи изцяло в A .

1.5 Редици от точки в \mathbb{R}^m

Дефиниция 1.5.1 Редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\}$ се нарича редица от точки в \mathbb{R}^m , а редицата $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} (k = 1 \div m)$ - k -та координатна редица. За по кратко редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ се означава $\{x^{(n)}\}$

Дефиниция 1.5.2 Редицата $\{y^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ се нарича поредица на редицата $\{x^{(n)}\}$ и се означава:

$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, \dots$, или $\{x^{(n_l)}\}_{l=1}^{\infty}$

ако за всяко l съществува такова n_l , че $y^{(l)} = x^{(n_l)}$, при това, ако $l' < l''$, то $n_{l'} < n_{l''}$.

Дефиниция 1.5.3 Редицата $\{x^{(n)}\}$ се нарича сходяща към точка $a \in \mathbb{R}^m$ (граница на редицата), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $N_0 > 0$, че за всяко $n > N_0$ е изпълнено неравенството $\rho(x^{(n)}; a) = \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$. Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.

Дефиниция 1.5.4 Точката $a \in \mathbb{R}^m$ се нарича точка на съвстяване на редицата $\{x^{(n)}\}$, ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.

Теорема 1.5.1 Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$ и точката $a \in \mathbb{R}^m$. Тогава

$$(\{x^{(n)}\} \rightarrow a) \iff (x_k^{(n)} \rightarrow a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката a , тогава и само тогава когато всяка от координатите на редици $\{x_k^{(n)}\}$ има граница съответната координата a_k на точката a

Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши) Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$. Редицата $x^{(n)}$ е сходяща тогава и само тогава когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $N_0 > 0$, че при всяко $n \in \mathbb{N}, n > N_0$ и всяко $p \in \mathbb{N}$ е изпълнено $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = \|x^{(n+p)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$

Дефиниция 1.5.5 Редицата $\{x^{(n)}\}$ се нарича ограничена, ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.

Теорема 1.5.3 (Болцано-Вайерщрас) От всяка ограничена редица в пространството \mathbb{R}^m може да се избере сходяща подредица.

Дефиниция 1.5.6 Всяко множество $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича компактно, ако от всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$, може да се избере сходяща подредица $\{x_k^{(n)}\}$ с граница принадлежаща на A

2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

2.1 Дефиниция на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.1.1 Казва се че дадена функция с дефиниционна област (дефиниционно множество) D , ако на всяка точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ от множеството D е съпоставено реално число $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, т.е на всяко $x \in D$ съществува единствено число $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Понякога за кратко се записва.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

В \mathbb{R}^2 се използва (x, y) за означение, а в \mathbb{R}^3 - (x, y, z) .

2.2 Граница на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.2.1 (Коши) Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, a е точка на съгъствяване за D . Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \rightarrow a$ със стойности $x \neq a$ ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Дефиниция 2.2.2 (Хайне) Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, a е точка на съгъствяване за D . Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \rightarrow a$ със стойности $x \neq a$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in D, x^{(n)} \neq a$ сходяща към a , числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница L .

Теорема 2.2.1 Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.

Дефиниция 2.2.3 Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, a е точка на съгъствяване за D . Казва се че $f(x)$ дивергира към ∞ (съответно към $-\infty$) при $x \rightarrow a$ със стойности $x \neq a$, ако за всяко $A \in \mathbb{R}$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $f(x) > A$ (съответно $f(x) < A$). Записва се

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (-\infty)$$

Дефиниция 2.2.4 (Повторна граница) Нека $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на съгъствяване за D и функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Нека съществува такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката a_2 , че за всички стойности $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$. Ако освен това съществува $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = A$, A се нарича повторна граница и се означава както следва

$$A = A_{1,2} = \lim_{y \rightarrow a_2} (\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y))$$

Аналогично се съвежда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x \rightarrow a_1} (\lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y))$$

Теорема 2.2.2 Нека $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на съвстяване за D и функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Нека

1. Нека съществува такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката a_2 , че за всички стойности $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \varphi(y)$.
2. Съществува границата $\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} f(x, y) = L$.

Тогаво съществува граница $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y)$ и освен това е в сила равенството $\lim_{y \rightarrow a_2} \varphi(y) = L$

2.3 Непрекъснатост на функцията на няколко променливи

Дефиниция 2.3.1 Казва се че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Дефиниция 2.3.2 (непрекъснатост по Коши) Казва се, че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството D , за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Дефиниция 2.3.3 (непрекъснатост по Хайне) Казва се, че функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \in D$ за $n \in \mathbb{N}$) сходяща към a , числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница $f(a)$.

Дефиниция 2.3.4 (за съставна функция) Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество, $f : \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}, k = 1 \div m$. Полагайки $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$ за всяко $t \in (\alpha, \beta)$ съставната функция $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$ се дефинира по формулата

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$$

Теорема 2.3.1 Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : \rightarrow \mathbb{R}$ интервалът $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $x_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ за $k = 1 \div m$. Нека освен това $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \in A$ за $\forall t \in (\alpha, \beta)$ и x_k са непрекъснати в точката $t_0 \in (\alpha, \beta)$ за $k = 1 \div m$, а f е непрекъсната в $x^0 = x(t_0)$. Тогаво функцията $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ е непрекъсната в точката t_0

2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.4.1 Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Функцията се нарича равномерно непрекъсната в A , ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon)$, че за всеки две точки $x', x'' \in A$ за които разстоянието $\rho(x'; x'') = \|x' - x''\| < \delta$, да следва, че $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 2.4.1 (на Вайерщрас) Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K . Тогава

1. f е ограничена в K , т.е. съществуват $m, M \in \mathbb{R}$ такива че за всички $x \in K$ е изпълнено неравенството $m \leq f(x) \leq M$
2. f достига най-малката и най-голямата си стойност в K , т.е. съществуват точки $x^0, y^0 \in K$, такива че

$$f(x^0) = \inf_{x \in K} f(x); f(y^0) = \sup_{y \in K} f(x)$$

Теорема 2.4.2 (на Кантор) Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K . Тогава f е равномерно непрекъсната върху K .

3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи

3.1 Дефиниция на частна производна

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $D \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество
- $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ - точка, принадлежаща на D
- $U_{x^0} \subset D$ - околност на x^0
- $U_{x_i^0} \subset D$ - околност на x_i^0 ($i = 1, 2, \dots, m$)
- точката $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0) \in U_{x^0}$, за всички стойности на $x_i \in U_{x_i^0}$
- f и g - функции, дефинирани съответно в D и $U_{x_i^0}$. т.е.
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : U_{x_i^0} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$

Дефиниция 3.1.1 Производната, ако съществува на функцията g в точката x_i^0 се нарича частна производна на функцията f (по променлива x_i^0)

в точката x^0 . Използва се означението $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(x^0)$.

Частната производна на функцията f относно променливата x_i е равна на границата на функцията $\varphi(h_i) = \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i}$ при $h_i \rightarrow 0$ (ако съществува) т.е

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \varphi(h_i) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$$

Пример 3.1.1

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + 9xy^2 \\ f'_x(x, y) &= (x^2)'_x + (9xy^2)'_x = 2x + 9y^2 \\ f'_y(x, y) &= (x^2)'_y + (9xy^2)'_y = 0 + 9x \cdot 2y = 18xy \end{aligned}$$

3.2 Частни производни от по-висок ред

Дефиниция 3.2.1 Частната производна на частната производна от $n-1$ ред, $n = 1, 2, \dots$ (ако съществува), се нарича частична производна от n -ти ред. Частните производни, получени при диференциране по различни променливи се наричат смесени производни, а получените при диференциране само по една и съща променлива се наричат чисти производни.

Пример 3.2.1 $f(x, y) = x^3 \sin(6y) + x^2 y^3 + 2222$, $f''_{x,y} = ?$, $f''_{y,x} = ?$

$$1. f''_{x,y} = (f'_x(x,y))'_y$$

$$(a) f'_x(x,y) = (x^3 \sin(6y))'_x + (x^2 y^3)'_x + (2222)'_x = 3x^2 \sin(6y) + 2xy^3 + 0$$

$$(b) f''_{x,y} = (3x^2 \sin(6y) + 2xy^3)'_y = (3x^2 \sin(6y))'_y + (2xy^3)'_y = 3x^2 \cos(6y) \cdot 6 + 2 \cdot 3xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

$$2. f''_{y,x} = (f'_y(x,y))'_x$$

$$(a) f'_y(x,y) = (x^3 \sin(6y))'_y + (x^2 y^3)'_y + (2222)'_y = x^3 \cos(6y) \cdot 6 + x^2 \cdot 3y^2 + 0 = 6x^3 \cos(6y) + 3x^2 y^2$$

$$(b) f''_{y,x} = (6x^3 \cos(6y) + 3x^2 y^2)'_x = (6x^3 \cos(6y))'_x + (3x^2 y^2)'_x = 6 \cdot 3x^2 \cos(6y) + 3 \cdot 2 \cdot xy^2 = 18x^2 \cos(6y) + 6xy^2$$

Теорема 3.2.1 (за равенство на смесени производни) Нека точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и нека функцията f е дефинирана в отвореното множество $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$, което е нейната област т.е $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Нека освен това съществуват частните производни $f'_x, f'_y, f''_{x,y}, f''_{y,x}$ за всички $(x, y) \in U$ и $f''_{x,y}, f''_{y,x}$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0) . Тогава е изпълнено равенството

$$f''_{x,y}(x_0, y_0) = f''_{y,x}(x_0, y_0)$$

3.3 Диференцируемост на функция

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$
- $U \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество, което е околност на x^0 . Без ограничение на общността може да се счита че U е δ -околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0; \delta)$ с център x^0 и радиус δ
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ - функция дефинирана в $U = B(x^0; \delta)$

Дефиниция 3.3.1 Функцията f се нарича диференцируема в точка x^0 ако съществуват числа A_1, A_2, \dots, A_m и функция $\varepsilon(x^0, x - x^0)$, дефинирана за всички допустими стойности на $x \in U$ и $x - x^0 = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_m - x_m^0)$, като при това

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^m A_k(x_k - x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0) \|x - x^0\|$$

$$\text{и } \lim_{\|x - x^0\| \rightarrow 0} \varepsilon(x^0, x - x^0) = 0$$

Дефиниция 3.3.2 Функцията f се нарича диференцируема в отвореното множество U , ако тя е диференцируема във всяка негова точка.

Теорема 3.3.1 Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то тя е непрекъсната.

Дефиниция 3.3.3 В случай на диференцируемост в точката x^0 на функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, изразът

$$df(x^0) \circ (h) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_m h_m$$

(или $df, df(x^0)$) се нарича пълнен диференциал на $f(x)$ в точката x^0

Теорема 3.3.2 Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то съществуват частните производни $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ в точката x^0 и освен това $A_k(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$.

Дефиниция 3.3.4 Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то със следната формула се изразява нейната производна в точката x^0

$$f'(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0))$$

Теорема 3.3.3 Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ притежава частни производни $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$ в отвореното множество U и освен това са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то f е диференцируема в точката x^0 .

Дефиниция 3.3.5 Ако функцията $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ притежава частни производни в U и тези частични производни са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в точката x^0 . Ако тези производни са непрекъснати в U , то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в това множество.

Дефиниция 3.3.6 Диференциалът на диференциала от $n - 1$ ред ($n = 2, 3, \dots$) от функцията f (ако съществува) се нарича диференциал от n -ти ред (n -ти диференциал) на тази функция и се бележи $d^n f$

Ако f е два пъти непрекъсната и диференцируема в $x^0 \in U$ тогава втория диференциал получава по следния резултат

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f(x^0)$$

което е симетрична квадратична форма на $dx_i (i = 1 \div m)$.

Аналогично ако f е n пъти непрекъсната и диференцируема в $x^0 \in U$, то $d^n f(x^0)$ съществува и се дава със следната формула

$$d^n f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f(x^0)$$

Пример 3.3.1 $f(x, y) = x^2 + 3xy - 8y^3 + 11, df(0, 1) = ?$

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = ?$$

$$f'_x(x, y) = 2x + 3y \implies f'_x(0, 1) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$$

$$f'_y(x, y) = 3x - 24y^2 \implies f'_y(0, 1) = 3 \cdot 0 - 24 \cdot 1 = -24$$

$$df(x, y) = (2x + 3y)dx + (3x - 24y^2)dy$$

$$df(0, 1) = 3dx - 24dy$$

4 Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права

4.1 Диференциране на съставна функция

$x^0 \in \mathbb{R}^m$ и отворено множество $U \subset \mathbb{R}^m$ е околност на точката x^0 (Без ограничение на общността може да се счита че U е δ -околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0; \delta)$ с център x^0 и радиус δ).

$t_0 \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$

Теорема 4.1.1 Нека функцията f е дефинирана в U , а φ_k - в интервала (α, β) , т.е

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$ и $\varphi_k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1 \div m$)

като при това $x_k = \varphi_k(t)$ за $k = 1 \div m$, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t) \in U$ за всички стойности на $t \in (\alpha, \beta)$. Нека f е диференцируема в U , f'_k са непрекъснати в x^0 за $k = 1 \div m$, φ_k са диференцируеми в t_0 и $F : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ е дефинирана с равенството.

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)), t \in (\alpha, \beta)$$

Тогава функцията F е диференцируема в t_0 и в сила е следното равенство

$$F'(t_0) = \sum_{k=1}^m f'_{x_k}(x^0) \varphi'_k(t_0)$$

За $m = 2$:

$$\varphi_1(t) = \varphi(t), \varphi_2(t) = \psi(t)$$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) \varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) \psi'(t_0)$$

Пример 4.1.1 $f(x, y)$ - дефинирана и диференцируема в $U_{(1,2)} \subset \mathbb{R}^2$.

Непрекъснати частни производни f'_x, f'_y в точката $(1, 2)$.

Намерете производната $F'(0)$ на съставната функция F , зададена с равенството $F(t) = f(1 + 3t, 2 + 4t)$.

$$t_0 = 0$$

$$x = \varphi(t) = 1 + 3t$$

$$y = \psi(t) = 2 + 4t$$

$$x_0 = \varphi(0) = 1$$

$$y_0 = \psi(0) = 2$$

$$\varphi'(t) = 3$$

$$\psi'(t) = 4$$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) \varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) \psi'(t_0) \implies F'(0) = 3f'_x(1, 2) + 4f'_y(1, 2)$$

4.2 Производна по посока. Градиент

Нека $x^0 \in \mathbb{R}^m$ и лъчът l е дефиниран, както следва:

$$l : x = x^0 + t\nu, t > 0$$

Функцията f е дефинирана върху този лъч, а

$$\varphi(t) := f(x(t)) = f(x^0 + t\nu), t > 0$$

Дефиниция 4.2.1 Границата (ако съществува)

$$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

се нарича производна на f в точката x^0 по посока на вектора ν и се означава $\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}$, т.е

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

ако съществува границата.

Ако частните производни съществуват, са производни "по посока на координатните оси".

Ако f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0 , то съществува производната ѝ по посока на вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$ и

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^m \nu_k \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$$

Дефиниция 4.2.2 Векторът с координати $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ се нарича градиент на f в точката x^0 и се означава

$$\text{grad } f(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0))$$

Предвид тази дефиниция, формулата за производна по посока на вектор ν се записва по кратко във вида

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \text{grad } (f(x^0), \nu)$$

Теорема 4.2.1 Ако функцията f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0 , то съществува производната на f по посока на произволен вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$ и

тя се дава с формула: $\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \text{grad } f(x^0)$

Ако, ν е единичен вектор, т.е $\|\nu\| = 1$.

Тогава е в сила неравенство $\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| \leq \|grad f(x^0)\|$, което следва от неравенство на Коши.

$$\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| = |grad(f(x^0), \nu)| \leq \|grad f(x^0)\| \|\nu\| = \|grad f(x^0)\|$$

Равенство се достига само когато ν и $f(x^0)$ са колинеарни (еднопосочни или успоредни). тогава

$$\left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} \right| = \|grad f(x^0)\|$$

Ако вектора ν е колинеарен с градиента, тогава векторът $\nu = \frac{grad f(x^0)}{\|grad f(x^0)\|}$ и тогава

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \left(grad f(x^0), \frac{grad f(x^0)}{\|grad f(x^0)\|} \right) = \|grad f(x^0)\|$$

Ако $grad f(x^0) \neq 0$ то производната достига най голяма стойност единствено, ако диференцирането се извършва по посока на градиента. С други думи, посоката на градиента е посоката на най бързо нарастване на функцията, а големината му е равна на производната по тази посока.

Ако $\nu = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m)$, то производната по посока ν става

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = f'_{x_1}(x^0) \cos \alpha_1 + f'_{x_2}(x^0) \cos \alpha_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0) \cos \alpha_m.$$

4.3 Допирателна равнина. Нормална права

- $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ - точка в \mathbb{R}^2
- $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ точка в \mathbb{R}^3
- $U = U_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2 =$ - околност на (x_0, y_0)
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ - функция
- $z_0 = f(x, y)$
- $S : z = f(x, y) \Leftrightarrow S : f(x, y) - z = 0$ - уравнение на равнина
- f'_x, f'_y - първи частни производни за всички $(x, y) \in U, f'_x, f'_y$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0)

Дефиниция 4.3.1 Равнината $\tau(\tau \nparallel Oz)$, зададена с уравнение

$$\tau : z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина в точката M_0 към повърхнината S и представлява графиката на $f(x, y)$.

Дефиниция 4.3.2 Векторите n_1, n_2

$$n_1(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) \quad n_2(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1),$$

които са нормални вектори на тангенциалната равнина, се наричат нормални вектори и за повърхнината S .

$n_1 = -n_2$ Това позволява да се използват за ориентация на повърхнината S .

Горната страна се дефинира с вектора n_1 за който ъгъл $\angle(n_1, k)$ е остър.

Дефиниция 4.3.3 Правата n , зададена с уравнение

$$n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$

се нарича нормала към повърхнината S към точка M_0

Ако прекараме две равнини през 0 съответно $\alpha : x = x_0$ и $\beta : y = y_0$ всяка от тях пресича повърхнината в крива линия съответно

$$C_1 : x = x_0, y = y, z = f(x_0, y) \quad C_2 : x = x, y = y_0, z = f(x, y_0)$$

t_1 е направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в точката 0 , а с t_2 - направляващ вектор на допирателната права на кривата C_2 в същата точката, то

$$t_1(0, 1, f'_y(x_0, y_0)), \quad t_2(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$$

Равнината τ е компланарна с векторите t_1, t_2 то нейния нормален вектор може да се получи от векторното им произведение

$$n_1 = t_2 \times t_1 \quad n_2 = t_1 \times t_2$$

Пример 4.3.1 За повърхнина S , зададена с уравнение $S : z = x^2 + y^2 + 3$, да се напишат:

- допирателната равнина τ в $M_0(0, 0, 3)$
- нормалните вектори на τ в т. 0 .
- нормалата на повърхнината S в т. 0 .

Решение:

$$z'_x = 2x ; z'_y = 2y ; M_0(0, 0, 3) = M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$z'_x(x_0, y_0) = z'_x(0, 0) = 0 ; z'_y(x_0, y_0) = z'_y(0, 0) = 0$$

$$a) \tau : z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\tau : z - 3 = 0x + 0y \Leftrightarrow \tau : z = 3$$

$$b) \vec{n}_1 = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) = (0, 0, 1)$$

$$\vec{n}_2 = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1) = (0, 0, -1)$$

$$в) n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$

$$n : \frac{x - 0}{0} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 3}{1} = \lambda$$

$$n(0, 0, \lambda + 3), \lambda \in \mathbb{R}$$

5 Лекция 5: