Математически анализ 2

Exonaut

15 март 2021 г.

Съдържание

1 Лекция 1: Пространството $\mathbb{R}^m$

1.1 Няколко важни неравенства

Нека a_k и $b_k (k = 1, 2, ..., m)$ са реални числа и $m \in \mathbb{N}$

Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц) *В сила е следното неравенство:*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални:
$(\exists\lambda_0 : b_k = \lambda_0 a_k)$
Равенството може да се запише:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)}$$

Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски) *В сила е следното неравенство:*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални. Общ случай на неравенството на Минковски:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ (p \geq 1)$$

Теорема 1.1.3 *В сила е следното неравенство:*

$$|a_k + b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k - b_k|$$

1.2 Видове крайно мерни пространства

1.2.1 Линейно(Векторно) пространство

Дефиниция 1.2.1 *Нека L е линейно(векторно) пространство над полето R. В него има въведени две операции: събиране и умножение на вектор с число.*

1. $x, y \in L \implies z = x + y \in L$

2. $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies z = \lambda x \in L$

1.2.2 Евклидово пространство

Дефиниция 1.2.2 *Крайномерното пространство L се нарича евклидово, ако в него е въведено скаларно произведение, т.е за всеки два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави реално число (x, y), удовлетворяващо свойствата за линейност, симетричност и положителна определеност.*

1. $x, y, z \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies (x + y, z) = (x, z) + (y, z); (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
2. $x, y \in L \implies (x, y) = (y, x)$
3. $x \in L, x \neq 0 \implies (x, x) > 0$

1.2.3 Метрично пространство

Дефиниция 1.2.3 *Крайномерното пространство L се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика) ρ, т.е за два елемента $x, y \in L$ може да се съпостави неотрицателно число $\rho \geq 0$ със следните свойства*

1. $\rho(x, x) = 0; \rho(x, y) > 0, x \neq y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z). \forall x, y, z \in L$

Метрично пространство L с метрика ρ се означава (L, ρ)

1.2.4 Нормирано пространство

Дефиниция 1.2.4 *Пространството се нарича нормирано, ако в него е въведена норма $\|.\|$, т.е $\|.\| : L \to \mathbb{R}_0^+$ със свойства*

1. $x = 0 \implies \|x\| = 0, x \neq 0 \implies \|x\| > 0$
2. $x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \implies \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $x, y \in L \implies \|x + y\| \leq |x| + |y|$

Теорема 1.2.1 *Ако L е нормирано пространство с дадена норма $\|.\|$, то L е метрично пространство, т.е равенството $\rho(x, y) = \|x - y\|$ дефинира разстоянието в L*

1.3 Пространството $\mathbb{R}^m$ - дефиниция и основни свойства

Дефиниция 1.3.1 *Множеството от наредени m-торки $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ от реални числа. Числата $a_1, a_2, ..., a_m$ се наричат съответно първа, втора, ..., m-та кордината на a.*

Ако имаме $a = (a_1, a_2, ..., a_m), b = (b_1, b_2, ..., b_m), ; \lambda \in \mathbb{R}$ то

1. $a+b = (a_1, a_2, ..., a_m) + (b_1, b_2, ..., b_m) = (a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_m+b_m) \in \mathbb{R}^m$
2. $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_m) \in \mathbb{R}^m$

1.3.1 Скаларно произведение

Скаларно произведение се дефинира :

$$(a, b) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \right)$$

С така въведено скаларно произведение пространството R^m се превръща в евклидово.

1.3.2 Норма и метрика

С равенството:

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k)^2}$$

се въвежда норма в $\mathbb{R}^m$.
Нормата генерира метрика в $\mathbb{R}^m$ с формула:

$$\rho(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k)^2}$$

1.3.3 Скаларен квадрат

Скаларен квадрат: $a^2 = (a, a) = \sum_{k=1}^{m} a_k^2$

1.3.4 Неравенство на Коши-Шварц, чрез скаларен квадрат

Коши-Шварц чрез скаларен квадрат: $(a, b)^2 \leq a^2 b^2$ и $|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$

1.3.5 Неравенство на Минковски, чрез скаларен квадрат

Неравенство на Минковски чрез скаларен квадрат: $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

1.4 Точки и множества в $\mathbb{R}^m$

1.4.1 Паралелепипед

Дефиниция 1.4.1 *Множеството*

$$\Pi(a; \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k < x_k - a_k < \delta_k\}$$

се нарича отворен паралелепипед в $\mathbb{R}^m$ с център точката a.

Множеството

$$\widetilde{\Pi}(a; \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m) = \{x \in \mathbb{R}^m : -\delta_k \leq x_k - a_k \leq \delta_k\}$$

се нарича затворен паралелепипед в R^m с център точката a.

Ако $\delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_m = \delta$, получените множества $\Pi(a; \delta)$ и $\widetilde{\Pi}(a; \delta)$ се наричат съответно отворен и затворен куб в $\mathbb{R}^m$ с център a.

1.4.2 Сфера и кълбо

Дефиниция 1.4.2 *Нека числото $r > 0$. Множеството*

$$B(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) < r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| < r\}$$

се нарича отворено кълбо в $\mathbb{R}^m$ с център a и радиус r, множеството

$$\widetilde{B}(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) \leq r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| \leq r\}$$

се нарича затворено кълбо в $\mathbb{R}^m$ с център a и радиус r, а множеството

$$S(a; r) = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \rho(x, a) = r\} = \{x | x \in \mathbb{R}^m, \|x - a\| = r\}$$

се нарича сфера в $\mathbb{R}^m$ с център a и радиус r, а множеството

Дефиниция 1.4.3 *Точката a се нарича*

- *вътрешна за множеството A, ако съществува отворено кълбо $B(a, \varepsilon)$: $B(a, \varepsilon) \subset A$*
- *външна за A, ако съществува $B(a, \varepsilon) : B(a, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$*
- *контурна за A, ако за всяко $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ и $B(a, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$*
- *изолирана ако съществува $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$*

Дефиниция 1.4.4 *Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича*

- *отворено, ако всяка негова точка е вътрешна*
- *затворено, ако неговото допълнение $\mathbb{R}^m \setminus A$ е отворено*

Дефиниция 1.4.5 *Околност на дадена точка $a \in \mathbb{R}^m$ се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с U_a.*

Дефиниция 1.4.6 *Точка a се нарича точка на сгъстяване на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$, ако всяка нейна околност U_a съдържа поне една точка на A, различна от a, т.е $U_a \cap (A \setminus \{a\} \neq \emptyset$*

Дефиниция 1.4.7 *Величината*

$$d = d(A) = \sup_{a',a'' \in A} \rho(a'; a'')$$

се нарича диаметър на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$.

Дефиниция 1.4.8 *Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича ограничено, ако съществува кълбо(с краен радиус), което го съдържа.*

Дефиниция 1.4.9 *Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича компактно, ако A е затворено и ограничено.*

Дефиниция 1.4.10 *Множеството $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, чийто кординати са непрекъснати функции $x_k = x_k(t)(k = 1, 2, ..., m)$, дефинирани върху даден интервал [a,b] се нарича непрекъсната крива в R^m. t се нарича параметър на кривата.*
Точките $x(a) = (x_1(a), x_2(a), ..., x_m(a))$ и $x(b) = (x_1(b), x_2(b), ..., x_m(b))$ се наричат начало и край на дадената крива. Ако $x(a) = x(b)$ кривата е затворена

Дефиниция 1.4.11 *Нека $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ и $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ са фиксирани числа за които $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$. Множеството от точки $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ чиито кординати се представят във вида*

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, k = 1, 2, ..., m, -\infty < t < \infty$$

се нарича права линия в пространството R^m, минаваща през точка x^0 по направление $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$.

Дефиниция 1.4.12 *Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъсната крива γ, която ги свързва и $\gamma \subset A$.*

Дефиниция 1.4.13 *Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича област, ако е отворено и свързано. Ако е и затворено, то се нарича затворена област.*

Дефиниция 1.4.14 *Област, всеки две точки на която могат да се съединят с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.*

Дефиниция 1.4.15 *Областа $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича звездообразна област, относно точката $x^0 \in A$, ако за всякя точка $x \in A$ отсечката $[x^0, x]$ лежи изцяло в A.*

1.5 Редици от точки в $\mathbb{R}^m$

Дефиниция 1.5.1 *Редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\}$ *се нарича редица от точки в* $\mathbb{R}^m$*, а редицата* $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}(k = 1 \div m)$ *- к-та кординатна редица. За по кратко редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ *се означава* $\{x^{(n)}\}$

Дефиниция 1.5.2 *Редицата* $\{y^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ *се нарича поредица на редицата* $\{x^{(n)}\}$ *и се означава:*
$\{x^{(n_l)}\}, l = 1, 2, ...,$ *или* $\{x^{(n_l)}\}_{l=1}^{\infty}$
ако за всяко l *съществува такова* n_l*, че* $y^{(l)} = x^{(n_l)}$*, при това, ако* $l' < l''$*, то* $n_{l'} < n_{l''}$*.*

Дефиниция 1.5.3 *Редицата* $\{x^{(n)}\}$ *се нарича сходяща към точка* $a \in \mathbb{R}^m$ *(граница на редицата), ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува такова* $N_0 > 0$*, че за всяко* $n > N_0$ *е изпълнено неравенството* $\rho(x^{(n)}; a) = \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$*. Ако редицата няма граница, се нарича разходяща.*

Дефиниция 1.5.4 *Точката* $a \in R^m$ *се нарича точка на сгъстяване на редицата* $\{x^{(n)}\}$*, ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.*

Теорема 1.5.1 *Нека* $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ *за* $n \in \mathbb{N}$ *и точката* $a \in \mathbb{R}^m$*. Тогава*

$$(\{x^{(n)}\} \to a) \iff (x_k^{(n)} \to a_k, k = 1 \div m)$$

Т.е редицата има граница точката a*, тогава и само тогава когато всяка от кординатите на редици* $\{x_k^{(n)}\}$ *има граница съответната кордината* a_k *на точката* a

Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши) *Нека* $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ *за* $n \in \mathbb{N}$*. Редицата* $x^{(n)}$ *е сходяща тогава и само тогава когато за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува такова число* $N_0 > 0$*, че при всяко* $n \in N, n > N_0$ *и всяко* $p \in \mathbb{N}$ *е изпълнено* $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = \|x^{(n+p)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$

Дефиниция 1.5.5 *Редицата* $\{x^{(n)}\}$ *се нарича ограничена , ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.*

Теорема 1.5.3 (Болцано-Вайерщрас) *От всяка ограничена редица в пространството* R^m *може да се избере сходяща подредица.*

Дефиниция 1.5.6 *Всяко множество* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича компактно, ако от всяка редица* $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in A$*, може да се избере сходяща подредица* $\{x_k^{(n)}\}$ *с граница принадлежаща на* A

2 Лекция 2: Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

2.1 Дефниция на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.1.1 *Казва се че дадена функция с дефиниционна област(дефиниционно множество) D, ако на всяка точка $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ от множеството D е съпоставено реално число $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, т.е на всяко $x \in D$ съществува единствено число $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Понякога за кратко се записва.*

$$f : D \to \mathbb{R}$$

В $\mathbb{R}^2$ се използва (x, y) за означение, а в $\mathbb{R}^3$ - (x, y, z).

2.2 Граница на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.2.1 (Коши) *Нека $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, а е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \to$ a със стойностти $x \neq$ a ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записва се*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Дефиниция 2.2.2 (Хайне) *Нека $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, а е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ има граница L при $x \to$ a със стойностти $x \neq$ a ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}, x^{(n)} \in D, x^{(n)} \neq$ a сходяща към a, числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница L.*

Теорема 2.2.1 *Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.*

Дефиниция 2.2.3 *Нека $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$, а е точка на сгъстяване за D. Казва се че $f(x)$ дивергира към ∞ (съответно към $-\infty$) при $x \to$ a със стойностти $x \neq a$, ако за всяко $A \in \mathbb{R}$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $f(x) > A$(съответно $f(x) < A$). Записва се*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty(-\infty)$$

Дефиниция 2.2.4 (Повторна граница) *Нека $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на сгъстяване за D и функция $f : D \to \mathbb{R}$. Нека съществува такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката $_2$, че за всички стойностти $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim\limits_{x \to a_1} f(x, y) = \varphi(y)$. Ако освен това съществува $\lim\limits_{y \to a_2} \varphi(y) = A$, A се нарича повторна граница и се означава както следва*

$$A = A_{1,2} = \lim_{y \to a_2} (\lim_{x \to a_1} f(x, y))$$

.
Аналогично се свежда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x\to a_1}(\lim_{y\to a_2} f(x,y))$$

Теорема 2.2.2 *Нека $D \subset \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на сгъстяване за D и функция $f : D \to \mathbb{R}$. Нека*

1. *Нека съществува такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката $_2$, че за всички стойностти $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim\limits_{x\to a_1} f(x,y) = \varphi(y)$.*

2. *Съществува границата $\lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L$.*

Тогава съществува граница $\lim\limits_{y\to a_2} \varphi(y)$ и освен това е в сила равенствотот $\lim\limits_{y\to a_2} \varphi(y) = L$

2.3 Непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.3.1 *Казва се че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Дефиниция 2.3.2 (непрекъснатост по Коши) *Казва се, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че за всяко x от множеството D, за което $\rho(x; a) = \|x - a\| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Дефиниция 2.3.3 (непрекъснатост по Хайне) *Казва се, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точка $a \in D$ ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}$ (с $x^{(n)} \in D$ за $n \in \mathbb{N}$) сходяща към a, числовата редица $\{f(x^{(n)})\}$ има граница $f(a)$.*

Дефиниция 2.3.4 (за съставна функция) *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество, $f : \to \mathbb{R}$ и $x_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}, k = 1 \div m$. Полагайки $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)) \in A$ за всяко $t \in (\alpha, \beta)$ съставната функция $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$ се дефинира по формулата*

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$$

Теорема 2.3.1 *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : \to \mathbb{R}$ интервалът $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $x_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ за $k = 1 \div m$. Нека освен това $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)) \in A$ за $\forall t \in (\alpha, \beta)$ и x_k са непрекъснати в точката $t_0 \in (\alpha, \beta)$ за $k = 1 \div m$, а f е непрекъсната в $x^0 = x(t_0)$. Тогава функцията $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$ е непрекъсната в точката t_0*

2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи

Дефиниция 2.4.1 *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : A \to \mathbb{R}$. Функцията се нарича равномерно непрекъсната в A, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\epsilon)$, че за всеки две точки $x', x'' \in A$ за които разстоянието $\rho(x'; x'') = \|x' - x''\| < \delta$, да следва, че $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Теорема 2.4.1 (на Вайерщрас) *Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \to \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K. Тогава*

1. *f е ограничена в K, т.е съществуват $m, M \in \mathbb{R}$ такива че за всички $x \in K$ е изпълнено неравенството $m \leq f(x) \leq M$*

2. *f достифа най малката и най-голямата си стойност в K, т.е съществуват точки $x^0, y^0 \in K$, такива че*

$$f(x^0) = \inf_{x \in K} f(x); f(y^0) = \sup_{y \in K} f(x)$$

Теорема 2.4.2 (на Кантор) *Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \to \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K. Тогава f е равномерно непрекъсната върху K.*

3 Лекция 3: Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи

3.1 Дефиниция на частна производна

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $D \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество
- $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ - точка, принадлежаща на D
- $U_{x^0} \subset D$ - околност на x^0
- $U_{x_i^0} \subset D$ - околност на x_i^0 (i = 1, 2, ..., m)
- точката $(x_1^0, x_2^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^i, ..., x_m^0) \in U_{x^0}$, за всички стойности на $x_i \in U_{x_i^0}$
- f и g - функции, дефинирани съответно в D и $U_{x_i^0}$. т.е
$f : D \to \mathbb{R}, g : U_{x_i^0} \to \mathbb{R}$ и $g(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^i, ..., x_m^0)$

Дефиниция 3.1.1 *Производната, ако съществува на функцията g в точката x_i^0 се нарича частна производна на функцията f(по променлива x_i^0) в точката x^0. Използва се означението $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(x^0)$.*
Частната производна на функцията f относно променливата x_i е равна на границата на функцията $\varphi(h_i) = \dfrac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i}$ при $h_i \to 0$ (ако съществува) т.е

$$\lim_{h_i \to 0} \varphi(h_i) = \lim_{h_i \to 0} \frac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$$

Пример 3.1.1

$$f(x, y) = x^2 + 9xy^2$$
$$f'_x(x, y) = (x^2)'_x + (9xy^2)'_x = 2x + 9y^2$$
$$f'_y(x, y) = (x^2)'_y + (9xy^2)'_y = 0 + 9x.2.y = 18xy$$

3.2 Частни производни от по-висок ред

Дефиниция 3.2.1 *Частната производна на частната производна от $n-1$ ред, $n = 1, 2, ...$(ако съществува), се нарича частична производна от n-ти ред. Частните производни, получени при диференциране по различни променливи се наричат смесени производни, а получените при диференциране само по една и съща променлива се наричат чисти производни.*

Пример 3.2.1 $f(x, y) = x^3 \sin(6y) + x^2y^3 + 2222, f''_{x,y} =?, f''_{y,x} =?$

1. $f''_{x,y} = (f'_x(x,y))'_y$

   (а) $f'_x(x,y) = (x^3\sin(6y))'_x + (x^2y^3)'_x + (2222)'_x = 3x^2\sin(6y) + 2xy^3 + 0$

   (б) $f''_{x,y} = (3x^2\sin(6y)+2xy^3)'_y = (3x^2\sin(6y))'_y + (2xy^3)'_y = 3x^2\cos(6y).6+ 2.3xy^2 = 18x^2\cos(6y) + 6xy^2$

2. $f''_{y,x} = (f'_y(x,y))'_x$

   (а) $f'_y(x,y) = (x^3\sin(6y))'_y + (x^2y^3)'_y + (2222)'_y = x^3\cos(6y).6 + x^2.3y^2 + 0 = 6x^3\cos(6y) + 3x^2y^2$

   (б) $f''_{y,x} = (6x^3\cos(6y)+3x^2y^2)'_y = (6x^3\cos(6y))_y + (3x^2y^2)'_y = 6.3.x^2\cos(6y)+ 3.2.xy^2 = 18x^2\cos(6y) + 6xy^2$

Теорема 3.2.1 (за равенство на смесени производни) *Нека точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и нека функцията f е дефинирана в отвореното множество $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2$, което е нейната област т.е $f : U \to \mathbb{R}$. Нека освен това съществуват частните производни $f'_x, f'_y, f''_{x,y}, f''_{y,x}$ за всички $(x, y) \in U$ и $f''_{x,y}, f''_{y,x}$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0). Тогава е изпълнено равенството*

$$f''_{x,y}(x_0, y_0) = f''_{y,x}(x_0, y_0)$$

3.3 Диференцируемост на функция

Ще дефинираме елементи които ще се използват.

- $x^0 \in \mathbb{R}^m$
- $U \subset \mathbb{R}^m$ - отворено множество, което е околност на x^0.Без ограничение на общността може да се счита че U е δ-околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0;\delta)$ с център x^0 и радиус δ
- $f : U \to \mathbb{R}$ - функция дефинирана в $U = B(x^0;\delta)$

Дефиниция 3.3.1 *Функцията f се нарича диференцируема в точка x^0 ако съществуват числа $A_1, A_2, ..., A_m$ и функция $\varepsilon(x^0, x - x^0)$, дефинирана за всички допустими стойности на $x \in U$ и $x - x^0 = (x_1 - x^0_1, x_2 - x^0_2, ...x_m - x^0_m)$, като при това*

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} A_k(x_k + x^0_k) + \varepsilon(x^0, x - x^0)\|x - x^0\|$$

и $\lim\limits_{\|x-x^0\|\to 0} \varepsilon(x^0, x - x^0) = 0$

Дефиниция 3.3.2 *Функцията f се нарича диференцируема в отвореното множество U, ако тя е диференцируема във всяка негова точка.*

Теорема 3.3.1 *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то тя е непрекъсната.*

Дефиниция 3.3.3 *В случай на диференцируемост в точката x^0 на функцията $f : U \to \mathbb{R}$, изразът*

$$df(x^0) \circ (h) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + ... + A_m h_m$$

(или $df, df(x^0)$) се нарича пълен диференциал на $f(x)$ в точката x^0

Теорема 3.3.2 *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то съществуват частните производни $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ в точката x^0 и освен това $A_k(x^0) = \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$.*

Дефиниция 3.3.4 *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то със следната формула се изразява нейната производна в точката x^0*

$$f'(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0))$$

.

Теорема 3.3.3 *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ притежава частни производни $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, k = 1 \div m$ в отвореното множество U и освен това са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то f е диференцируема в точката x^0.*

Дефиниция 3.3.5 *Ако функцията $f : U \to \mathbb{R}$ притежава частни производни в U и тези частични производни са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в точката x^0. Ако тези производни са непрекъснати в U, то функцията се нарича непрекъсанот диференцируема в това множество.*

Дефиниция 3.3.6 *Диференциалът на диференциала от $n-1$ ред ($n = 2$, 3, ...) от функцията f(ако съществува) се нарича диференциал от n-ти ред(n-ти диференциал) на тази функция и се бележи $d^n f$*

Ако f е два пъти непрекъсната и диференцируема в $x^0 \in U$ тогава втория диференциал получава по следния резултат

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f(x^0)$$

което е симетрична квадратична форма на $dx_i (i = 1 \div m)$.

Аналогично ако f е n пъти непрекъсната и диференцируема в $x^0 \in U$, то $d^n f(x^0)$ съществува и се дава със следната формула

$$d^n f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f(x^0)$$

Пример 3.3.1 $f(x, y) = x^2 + 3xy - 8y^3 + 11, df(0, 1) =?$
$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'y(x, y)dy =?$
$f'_x(x, y) = 2x + 3y \implies f'_x(0, 1) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$
$f'_y(x, y) = 3x - 24y^2 \implies f'_y(0, 1) = 3 \cdot 0 - 24 \cdot 1 = 24$
$df(x, y) = (2x + 3y)dx + (3x - 24y^2)dy$
$df(0, 1) = 3dx - 24dy$

4 Лекция 4: Диференциране на съставна функция. Производна по посока. Градиент. Допирателна. Нормална права

4.1 Диференциране на съставна функция

$x^0 \in \mathbb{R}^m$ и отворено множество $U \subset \mathbb{R}^m$ е околност на точката x^0 (Без ограничение на общността може да се счита че U е δ-околност на x^0 т.е U е отворено кълбо $B(x^0;\delta)$ с център x^0 и радиус δ).
$t_0 \in (\alpha, \beta) \subset R$

Теорема 4.1.1 *Нека функцията f е дефинирана в U, а φ_k - в интервала (α,β), т.е*
$f : U \to \mathbb{R}$ *и* $\varphi_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ $(k = 1 \div m)$
като при това $x_k = \varphi_k(t)$ за $k = 1 \div m$, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t) \in U$ за всички стойности на $t \in (\alpha,\beta)$. Нека f е диференцируема в U, f'_k са непрекъснати в x^0 за $k = 1 \div m$, φ_k са диференцируеми в t_0 и $F : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ е дефинирана с равенствово.

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)), t \in (\alpha, \beta)$$

Тогава функцията F е диференцируема в t_0 и в сила е следното равенство

$$F'(t_0) = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(x^0)\varphi'_k(t_0)$$

За $m = 2$:
$\varphi_1(t) = \varphi(t), \varphi_2(t) = \psi(t)$

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0)$$

Пример 4.1.1 *$f(x, y)$ - дефинирана и диференцируема в $U_{(1,2)} \subset \mathbb{R}^2$.*
Непрекъснати частни производни f'_x, f'_y в точката (1,2).
Намерете производната $F'(0)$ на съставната фунция F, зададена с равенството $F(t) = f(1 + 3t, 2 + 4t)$.

$t_0 = 0$
$x = \varphi(t) = 1 + 3t$
$y = \psi(t) = 2 + 4t$
$x_0 = \varphi(0) = 1$
$y_0 = \psi(0) = 2$
$\varphi'(t) = 3$
$\psi'(t) = 4$
$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0) \implies F'(0) = 3f'_x(1, 2) + 4f'_y(1, 2)$

4.2 Производна по посока. Градиент

Нека $x^0 \in \mathbb{R}^m$ и лъчът l е дефиниран, както следва:

$$l : x = x^0 + t\nu, t > 0$$

Функцията f е дефинирана върху този лъч, а

$$\varphi(t) := f(x(t)) = f(x^0 + t\nu), t > 0$$

Дефиниция 4.2.1 *Границата(ако съществува)*

$$\lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

се нарича производна на f в точката x^0 по посока на вектора ν и се означава $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}$, т.е

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(x^0 + t\nu) - \varphi(x^0)}{t}$$

ако съществува границата.

Ако частните производни съществуват, са производни "по посока на кординатните оси".

Ако f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката в x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0, то съществува производната ѝ по посока на вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m)$ и

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{m} \nu_k \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$$

Дефиниция 4.2.2 *Векторът с кординати $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0)$ се нарича градиент на f в точката x^0 и се означава*

$$grad\, f(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), ..., f'_{x_m}(x^0))$$

Предвид тази дефиниция, формулата за производна по посока на вектор ν се записва по кратко във вида

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = grad\,(f(x^0), \nu)$$

Теорема 4.2.1 *Ако функцията f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката в x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0, то съществува производната на f по посока на произволен вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m)$ и тя се дава с формула: $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = grad\, f(x^0)$*

Ако, ν е единичен вектор, т.е $\|\nu\| = 1$.
Тогава е в сила неравнестово $\left|\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| \leq \|grad\, f(x^0)\|$, което следва от неравенство на Коши.

$$\left|\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| = \left|grad\,(f(x^0),\nu)\right| \leq \|grad\, f(x^0)\|\|\nu\| = \|grad\, f(x^0)\|$$

Равенство се достига само когато ν и $f(x^0)$ са колинеарни (еднопосочни или успоредни). тогава

$$\left|\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| = \|grad\, f(x^0)\|$$

Ако вектора ν е колинеарен с градиента, тогава векторът $\nu = \dfrac{grad\, f(x^0)}{\|grad\, f(x^0)\|}$ и тогава

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \left(grad\, f(x^0), \frac{grad\, f(x^0)}{\|grad\, f(x^0)\|}\right) = \|grad\, f(x^0)\|$$

Ако $grad\, f(x^0) \neq 0$ то производната достига най голяма стойност единствено, ако диференцирането се извършва по посока на градиента. С други думи, посоката на градиента е посоката на най бързо нарастване на функцията, а големината му е равна на производната по тази посока.

Ако $\nu = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, ..., \cos\alpha_m)$, то производната по посока ν става

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = f'_{x_1}(x^0)\cos\alpha_1 + f'_{x_2}(x^0)\cos\alpha_2 + ... + f'_{x_m}(x^0)\cos\alpha_m.$$

4.3 Допирателна равнина. Нормална права

- $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ - точка в $\mathbb{R}^2$
- $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ точка в $\mathbb{R}^3$
- $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2 =$ - околност на (x_0, y_0)
- $f : U \to \mathbb{R}$ - функция
- $z_0 = f(x, y)$
- $S : z = f(x, y) \Leftrightarrow S : f(x, y) - z = 0$ - уравнение на равнина
- f'_x, f'_y - първи частни производни за всички $(x, y) \in U$,f'_x, f'_y са непрекъснати в точката (x_0, y_0)

Дефиниция 4.3.1 *Равнината $\tau(\tau \nparallel Oz)$, зададена с уравнение*

$$\tau : z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина в точкат M_0 към повърхнината S и представлява графиката на $f(x, y)$.

Дефиниция 4.3.2 *Векторите* n_1, n_2

$$n_1(-f'_x(x_0,y_0), -f'_y(x_0,y_0), 1) \qquad n_2(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1),$$

които са нормални вектори на тангенциалната равнина, се наричат нормални вектори и за повърхнината S.
$n_1 = -n_2$ *Това позволява да се използват за ориентация на повърхината S.*
Горната страна се дефинира с вектора n_1 *за който ъгъл* $\measuredangle(n_1, k)$ *е остър.*

Дефиниция 4.3.3 *Правата n, зададена с уравнение*

$$n : \frac{x - x_0}{-f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$

се нарича нормала към повърхнината S към точка M_0

Ако прекараме две равнини през $_0$ съответно $\alpha : x = x_0$ и $\beta : y = y_0$ всяка от тях пресича повърхнината в крива линия съответно

$$C_1 : x = x_0, y = y, z = f(x_0, y) \qquad C_2 : x = x, y = y_0, z = f(x, y_0)$$

t_1 е направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в точката $_0$, а с t_2 - направляващ вектор на допирателната права на кривата C_1 в същата точката, то

$$t_1(0, 1, f'_y(x_0,y_0), \qquad t_2(1, 0, f'_x(x_0,y_0))$$

Равнината τ е компланарна с векторите t_1, t_2 то нейния нормален вектор може да се получи от векторното им произведение

$$n_1 = t_2 \times t_1 \qquad n_2 = t_1 \times t_2$$

Пример 4.3.1 *За повърхнина S, зададена с уранение* $S : z = x^2 + y^2 + 3$*, да се напишат:*
а) допирателната равнина $\tau z M_0(0,0,3)$
б) нормалните вектори на τ *в т.* $_0$.
в) нормалата на повърхнината S в т. $_0$.

Решение:
$z'_x = 2x \,;\, z'_y = 2y \,;\, M_0(0,0,3) = M_0(x_0,y_0,z_0)$
$z'_x(x_0,y_0) = z'_x(0,0) = 0 \,;\, z'_y(x_0,y_0) = z'_y(0,0) = 0$
а) $\tau : z - z_0 = z'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0,y_0)(y - y_0)$
$\tau : z - 3 = 0x + 0y \Leftrightarrow \tau : z = 3$

б)$\vec{n_1} = (-f'_x(x_0,y_0), -f'_y(x_0,y_0), 1) = (0,0,1)$
$\vec{n_2} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1) = (0,0,-1)$

в) $n : \dfrac{x - x_0}{-f'_x(x_0,y_0)} = \dfrac{y - y_0}{-f'_y(x_0,y_0)} = \dfrac{z - z_0}{1}$
$n : \dfrac{x - 0}{0} = \dfrac{y - 0}{0} = \dfrac{z - 3}{1} = \lambda$
$n(0, 0, \lambda + 3), \lambda \in \mathbb{R}$

5 Лекция 5: