

Дискретна математика

Exonaut

8 април 2021 г.

Съдържание

1	Лекция 1: Логика и логически оператори	5
1.1	Дефиниции	5
1.2	Логически оператори	6
1.2.1	Отрицание(NOT)	6
1.2.2	И, Конюнкция (AND)	6
1.2.3	ИЛИ, Дизюнкция (OR)	6
1.2.4	Сума по модул 2, изключващо или (XOR)	7
1.2.5	Импликация, следствие	7
1.2.6	Двупосочно следствие	7
1.3	Закони за еквивалентни преобразувания	8
1.4	Предикатни функции и предикати	9
1.5	Квантор	9
1.6	Закони на Де Морган за квантори	9
2	Лекция 2: Математически доказателства	10
2.1	Теория на доказателствата	10
2.2	Терминология	10
2.3	Правила за извод	11
2.4	Аргументи	12
2.5	Правила за извод при използване на квантори и предикати	12
2.6	Доказателство на теореми	13
3	Лекция 3: Теория на множества	14
3.1	Парадокс на Ръсел	14
3.2	Множества	15
3.2.1	Равенство на множества	15
3.2.2	Подмножества	15
3.2.3	Собствени подмножества	16
3.2.4	Число на кардиналност, мощност(брой елементи) на множество	16
3.2.5	Множество от всички подмножества на дадено мно- жество	16
3.2.6	Декартово произведение	17
3.3	Операции на множества	17
3.3.1	Обединение	17
3.3.2	Сечение	17

3.3.3	Разлика	17
3.3.4	Допълнение	18
3.4	Идентичност на законите за логическо преобразуване и законите за операции с множества	18
4	Лекция 4: Релации (Отношения)	20
4.1	Релации	20
4.2	Функциите като релации	20
4.3	Релации, дефинирани върху множество	20
4.4	Свойства на релациите	21
4.5	Операции с релациите	22
4.5.1	Комбиниране на релациите	22
4.6	n-арни релации	23
4.7	Бази данни и релации	23
4.8	Представяне релации	24
4.8.1	Булеви матрици	24
4.8.2	Ориентирани графи	26
4.9	Релации на еквивалентност	26
4.10	Класове на еквивалентност	27
5	Лекция 5: Функции	29
5.1	Функциите като релации	30
5.2	Свойства на функции	30
5.2.1	Инекция	30
5.2.2	Строго нарастваща/намаляваща	31
5.2.3	Сюрекция	31
5.2.4	Биекция	31
5.3	Обратна функция	31
5.4	Крайни и безкрайни множества	31
5.5	Принцип на Дирихле	32
5.6	Композиция	32
5.7	Функции най-голямо цяло (Floor) и най-малко цяло (Ceiling)	33
6	Лекция 6: Булева алгебра	34
6.1	Булеви операции	34
6.2	Булеви (двоични) функции и изрази	34
6.3	Дуалност	36
6.4	Дефиниция на булевата алгебра	36

6.5	Логика, множества и булева алгебра	37
7	Лекция 7: Графи	38
7.1	Дефиниции и терминология	38
7.2	Специални графи	40
7.3	Представяне на графите	41
7.4	Изоморфизъм на графи	42
7.5	Пътища и контури в графи	42
7.6	Свързаност	43
7.7	Достижимост	44
7.8	Графи с допълнителни характеристики на ребрата	45
7.9	Най-къс път	45
7.10	Задача на търговския пътник	45
8	Лекция 8: Дървета	46
8.1	Дървета	46
8.2	Дървета с корен и наредба на върховете	47
8.3	Свойства на дърветата	47
8.4	Покриващо дърво	48
8.5	Минимално покриващо дърво (МПД)	48
8.6	Метод на Крускал	49
8.7	Метод на Прим	49
8.8	Особености на методите на Крускал и Прим	50
9	Лекция 9: Комбинаторика и теория на вероятностите	51
10	Лекция 10: Теория на алгоритмите	52
11	Лекция 11: Математическа индукция	53
12	Лекция 12: Рекурсия	54
13	Лекция 13: Крайни автомати	55
14	Упражнения	56
14.1	Лекция 1	56
14.2	Лекция 2	62
14.3	Лекция 3	63
14.4	Лекция 4	64

14.5	Лекция 5	65
14.6	Лекция 6	66
14.7	Лекция 7	67
14.8	Лекция 8	68
14.9	Лекция 9	69
14.10	Лекция 10	70
14.11	Лекция 11	71
14.12	Лекция 12	72
14.13	Лекция 13	73

1 Лекция 1: Логика и логически оператори

1.1 Дефиниции

Дефиниция 1.1.1. Логиката е система, базирана на съждения

Дефиниция 1.1.2. Съждението е твърдение което може да бъде истина или лъжа (но не и двете едновременно).

Следователно резултатът от едно съждение може да бъде истина (И) или ако то е вярно или лъжа (Л), ако е грешно.

Дефиниция 1.1.3. Съжденията, които не съдържат в себе си други съждения, се наричат **прости**.

Дефиниция 1.1.4. Едно и няколко съждения могат да бъдат обединени в едно единствено **комбинирано съждение**, посредством логически оператори.

Дефиниция 1.1.5. Таблица на истинност се нарича таблица, в която се изброяват всички възможни комбинации от стойности на отделните променливи в съждението, както и съответните стойности на функцията.

Дефиниция 1.1.6. Две съждения са **еквиваленти**, ако имат една и съща таблица на истинност или следват едно от друго вследствие прилагани основни закони за преобразуване.

1.2 Логически оператори

1.2.1 Отрицание(NOT)

Означава се със знака \neg

Функция на една променлива с таблица на истинност:

p	$\neg p$
T	F
F	T

1.2.2 И, Конюнкция (AND)

Означава се със знака \wedge

Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

1.2.3 ИЛИ, Дизюнкция (OR)

Означава се със знака \vee

Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

1.2.4 Сума по модул 2, изключващо или (XOR)

Означава се със знака \otimes

Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	q	$p \otimes q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

1.2.5 Импликация, следствие

Означава се със знака \rightarrow

Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

1.2.6 Двупосочно следствие

Означава се със знака \Leftrightarrow

Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

1.3 Закони за еквивалентни преобразувания

- Закон за идентичност :

$$p \wedge T \equiv p, p \vee F \equiv p$$

- Закон за доминиране :

$$p \vee T \equiv T, p \wedge F \equiv F$$

- Закон за пълна идентичност :

$$p \wedge p \equiv p, p \vee p \equiv p$$

- Закон за двойно отрицание :

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

- Комутативен закон :

$$p \wedge q \equiv q \wedge p | p \vee q \equiv q \vee p$$

- Асоциативен закон :

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r | p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

- Дистрибутивен закон :

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) | p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Закони на Де Морган :

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) | \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

- Закон за импликацията :

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

- Закон за тривиалната тавтология:

$$p \vee \neg p \equiv T | p \wedge \neg p \equiv F$$

- Закон за тривиалното опровержение :

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg(p \otimes q), \neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \otimes q)$$

1.4 Предикатни функции и предикати

Дефиниция 1.4.1 (Предикатна функция). Предикатна функция е твърдение, което съдържа една или повече променливи.

Ако на дадена променлива е присвоена стойност, се казва, че е известна. Предикатна функция става съждение, ако всички нейни аргументи са известни.

Дефиниция 1.4.2 (Предикат). Нека е дадена предикатна функция $Q(x, y, z)$. Свойството Q , с което се задава връзката между променливите x, y, z се нарича предикат.

1.5 Квантор

Нека $P(x)$ е предикатна функция.

Дефиниция 1.5.1 (Квантор за общност). За твърдения от вида:

За **всяко** x , $P(x)$ е истина/лъжа.

се записва :

$\forall x P(x)$ "за всяко x $P(x)$ "

Знака за общност е \forall .

Дефиниция 1.5.2 (Квантор за съществуване). За твърдения от вида:

Съществува **такова** x , **за което** $P(x)$ е **истина/лъжа**.

се записва :

$\exists x P(x)$ "съществува x , такова че $P(x)$ е истина/лъжа" или "Съществува поне едно x , за което $P(x)$ е истина/лъжа"

Знака за общност е \exists .

1.6 Закони на Де Морган за квантори

- $\neg(\forall P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$
- $\neg(\exists P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$

2 Лекция 2: Математически доказателства

2.1 Теория на доказателствата

Теорията на доказателствата се използва за определяне на верността на дадени математически аргументи и за конструирането им.

Дефиниция 2.1.1 (Дедукция). Дедукция във философията означава извеждане на особеното и единичното от общото, както и схващане на единичния случай на базата на всеобщ закон.

В кибернетиката означава извеждане на твърдения от други твърдения с помощта на логически заключения.

2.2 Терминология

Дефиниция 2.2.1 (Аксиома). Аксиомата е базово допускане, което не е необходимо да се доказва. Аксиомите са твърдения, които са истина, или твърдения които се приемат за истина, но не могат да бъдат доказани.

Дефиниция 2.2.2 (Доказателство). Доказателството се използва, за да се докаже, че дадено твърдение е истина. То се състои от последователност от твърдения, които формират **аргумент**.

Дефиниция 2.2.3 (Теорема). Теорема е твърдение, чиято истинност се доказва.

Теоремата се състои от две части: условия (хипотези) и извод (заключения). Коректното доказателство (по дедукция) се състои в това да се установи:

- Ако условията са изпълнени, то извода е истина.
- Ако съждението "условия \rightarrow извод" е тавтология.

Често липват елементи на логическа връзка, която може да бъде запълнена с допълнителни условия и аксиоми и съждения, свързани помежду си посредством подходящи правила за изводи.

Дефиниция 2.2.4 (Лема). Лемата е проста теорема, което се използва като междинен резултат за доказване на друга теорема.

Дефиниция 2.2.5 (Слествие). Следствието е резултат, който директно следва от съответната теорема

Дефиниция 2.2.6 (Допускане). Допускането е твърдение, чийто резултат е неизвестен. Веднъж доказано, то се превръща в теорема.

2.3 Правила за извод

\therefore - знак за следователно

Всичко преди знака са хипотези.

- Събиране (Addition)
 $p(q)$
 $\therefore p \vee q$
- Опростяване (Simplification)
 $p \wedge q$
 $\therefore p(q)$
- Конюнкция (Conjunction)
 p
 q
 $\therefore p \wedge q$
- Закон за безразличие (Modus ponens)
 p
 $p \rightarrow q$
 $\therefore q$
- Modus tollens
 $\neg q$
 $p \rightarrow q$
 $\therefore \neg p$
- Хипотетичен силогизъм (Hypothetical syllogism)
 $p \rightarrow q$
 $q \rightarrow r$
 $\therefore p \rightarrow r$
- Дизюнктивен силогизъм
 $p \vee q$
 $\neg p$
 $\therefore q$

2.4 Аргументи

Дефиниция 2.4.1 (Аргумент). Аргументът се състои от една или няколко хипотези и заключение.

Аргумент е валиден, ако всичките му хипотези са истина и заключението също е истина.

Ако някоя от хипотезите е лъжа, дори валиден аргумент може да води до некоректно заключение.

Доказателство: трябва да се докаже че твърдението "хипотези \rightarrow заключение" е истина, като се използват правила за извод.

Пример 2.4.1. "Ако 101 е кратно на 3 , то 101^2 се дели на 9 ."

Въпреки че аргументът е валиден, заключението е некоректно (невярно), защото едната от хипотезите ("101 е кратно на 3") е лъжа.

Ако в аргумента 101 се замени с 102 , ще се получи коректно заключение "102² е кратно на 9".

Нека p : "101 е кратно на 3" и q : "101² е кратно на 9". Тогава имаме следния случай

$$p$$

$$p \rightarrow q$$

$$\therefore q$$

Обаче p е лъжа, следователно q е некоректно заключение.

2.5 Правила за извод при използване на квантори и предикати

- Универсалноследствие(Universal instantiation)
 $\forall xP(x)$
 $\therefore P(c)$ ако $c \in U$
- Универсално обобщение(Universal generalization)
 $P(c)$ за някое $c \in U$
 $\therefore \forall xP(x)$
- Частичноследствие(Existential instantiation)
 $\exists xP(x)$
 $\therefore P(c)$ за някой елемент $c \in U$

- Частично обобщение (Existential generalization)
 $P(c)$ за някой елемент $c \in U$
 $\therefore \exists x P(x)$

2.6 Доказателство на теореми

- Директно доказателство
Импликацията " $p \rightarrow q$ " може да бъде доказана чрез доказване на твърдението:
"Ако p е истина, то q също е истина."
- Индиректно доказателство
Импликацията " $p \rightarrow q$ " е еквивалентна на следния контра-пример " $\neg q \rightarrow \neg p$ ". Следователно, доказателството на изходната импликация " $p \rightarrow q$ " се свежда до доказване на твърдението: "Ако q е лъжа, то и p също е лъжа."

3 Лекция 3: Теория на множества

3.1 Парадокс на Ръсел

Някои множества (класове) съдържат себе си а други не.

Ръсел нарича множествата класове.

Класът от всички класове е клас, който се съдържа (принадлежи) на себе си. Празният клас не принадлежи на себе си. Да допуснем, че може да създадем клас от всички класове, като празния например, които не съдържат себе си.

Парадоксът възниква при въпроса, дали този клас принадлежи на себе си.

Множеството от всички множества, които не съдържат себе си !?

$$M = \{A | A \notin A\}$$

- Множество – първично понятие
- Принадлежност на елемент към множеството – първично понятие
 $x \in A \rightarrow$ Елементът x принадлежи на A .
- Свойство – понятие от логиката и се приема за първично.
 P – свойство. Ако даден предмет x го притежава се записва $P(x)$

Дефиниция 3.1.1 (Множества). Множества се дефинират като се изброяват елементите му

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

за безкрайни множества е по - удобно като се използва свойство за принадлежност

$$R = \{x | P(x)\}$$

Аксиома 3.1.1. Ако го има свойството P , то съществува множеството на всички обекти, които имат това свойство P .

Аксиома 3.1.2. Две множества са равни, ако съдържат еднакви елементи.

Дефиниция 3.1.2 (Нормално множество). Нормално множество е множество, което не принадлежи на себе си $A \notin A$

3.2 Множества

- Множество е неопределена съвкупност от нула или повече различни обекти (наречени елементи).
- $a \in A$ - "а е елемент на множеството А"
- $a \notin A$ - "а не е елемент на А"
- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - "А се състои от a_1, a_2, \dots, a_n "
- Подреждането на елементите не е от значение.
- Няма значение ако някой елемент се повтаря.

Пример 3.2.1. • $A = \emptyset$ - празно множество

- $A = \{z\}, z \in A, z \neq \{z\}$
- $A = \{\{b, c\}, \{c, x, d\}\}$ - множество от множества
- $A = \{\{x, y\}\}, \{x, y\} \in A, \{x, y\} \neq \{\{x, y\}\}$
- $A = \{x | P(x)\}$

3.2.1 Равенство на множества

Дефиниция 3.2.1. Множествата А и В са равни тогава и само тогава, когато съдържат едни и същи елементи.

Пример 3.2.2. $A = \{9, 2, 7, 3\}, B = \{7, 9, -3, 2\} : A = B$

$A = \{\text{куче, котка, кон}\}, B = \{\text{котка, кон, катерица, куче}\} : A \neq B$

$A = \{\text{куче, котка, кон}\}, B = \{\text{котка, кон, куче, куче}\} : A = B$

3.2.2 Подмножества

$A \subseteq B$ - "А е подмножество на В"

$A \subseteq B$ тогава и само тогава, когато всеки елемент на А е и елемент на В

Формален запис:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Правила

- $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
- $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C)$
- $\emptyset \subseteq A$ за всяко множество A (но $\emptyset \in A$ не е вярно за всяко множество A)
- $\subseteq A$ за всяко множество A

3.2.3 Собствени подмножества

$A \subset B$ - "A е собствено подмножество на B"

$A \subseteq B$ и $A \neq B$

Формален запис:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

или

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \neg \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

3.2.4 Число на кардиналност, мощност(брой елементи) на множество

Ако множеството S съдържа n различни елемента, $n \in \mathbb{N}$, Множеството S е крайно множество с кардиналност (мощност) n .

Мощност: $|P(A)| = 2^{|A|}$

Пример 3.2.3. $A = \{Mercedes, BMW, Porsche\}, |A| = 3$

$B = \{1, \{2, 3\}, \{4, 5\}, 6\}, |B| = 4$

$C = \emptyset, |C| = 0$

$D = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 7000\}, |D| = 7001$

$E = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 7000\}, |E| = \infty$

3.2.5 Множество от всички подмножества на дадено множество

$P(A)$ "множеството от всички подмножества на A"(записва се като 2^A)

$P(A) = \{B | B \subseteq A\}$

3.2.6 Декартово произведение

Дефиниция 3.2.2 (Декартово произведение). Декартово произведение на две множества A и B е ново множество $A \times B$, което се дефинира като

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

т.е. декартовото произведение е множество от наредени двойки.

Пример 3.2.4. $A = \{x, y\}, B = \{a, b, c\}$

$$A \times B = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$$

- $A \times \emptyset = \emptyset$
- $\emptyset \times A = \emptyset$
- За непразни множества A и B : $A \neq B \Leftrightarrow A \times B \neq B \times A$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

3.3 Операции на множества

3.3.1 Обединение

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Пример 3.3.1. $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$

$$A \cup B = \{a, b, c, d\}$$

3.3.2 Сечение

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Несвързани множества: Няма общи елементи, $A \cap B = \emptyset$

Пример 3.3.2. $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$

$$A \cap B = \{b\}$$

3.3.3 Разлика

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Пример 3.3.3. $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$

$$A \setminus B = \{a\}$$

3.3.4 Допълнение

$$A^c \equiv \bar{A} = U - A$$

U - универсално множество.

Пример 3.3.4. $U = N$

$$B = \{250, 251, 252, \dots\}$$

$$\bar{B} = \{0, 1, 2, \dots, 248, 249\}$$

3.4 Идентичност на законите за логическо преобразуване и законите за операции с множества

- Закон за идентичност :

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

- Закон за доминиране :

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

- Закон за пълна идентичност :

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

- Закон за двойно отрицание :

$$\overline{\bar{A}} \equiv (A^c)^c = A$$

- Комутативен закон :

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- Асоциативен закон :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- Дистрибутивен закон :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

3.4 Идентичност на законите за логическо преобразуване и законите за операции с множества 19

- Закони на Де Морган :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- Закон за поглъщането :

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

- Закон за допълнението:

$$A \cup \overline{A} = U$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

4 Лекция 4: Релации (Отношения)

4.1 Релации

Дефиниция 4.1.1 (Бинарна релация). Нека A и B са две множества. Бинарна релация от A в B е подмножество на $A \times B$.

С други думи, за дадена бинарна релация R е в сила $R \subseteq A \times B$. Означението aRb означава $(a, b) \in R$, а означението $a \underline{R} b$ означава, че $(a, b) \notin R$.

Когато $(a, b) \in R$ се казва, че a е в отношение с b чрез R .

Пример 4.1.1. Нека P е множество от хора, C е множество от коли, а D е релацията, която описва кой човек каква кола (коли) кара.

$P = \{\text{Иван, Лили, Петър, Валя}\},$

$C = \{\text{Опел, BMW, Рено}\}$

$D = \{(\text{Иван, Опел}), (\text{Лили, Опел}), (\text{Лили, Рено}), (\text{Петър, BMW})\}$

4.2 Функциите като релации

Графиката на f е множество от наредени двойки (a, b) , такова че $b = f(a)$. Тъй като графиката на f е подмножество на $A \times B$, то тя е релация от A в B .

Още повече, за всеки елемент на A , съществува точно една наредена двойка в графиката на функцията, чийто първи елемент е a .

Обратно, ако R е релация от A в B , такава че всеки елемент от A е първи елемент на само една наредена двойка от R , тогава функцията може да бъде дефинирана посредством R като нейна графика.

Това се прави като на всеки елемент $a \in A$ се присвоява само един елемент $b \in B$, така че $(a, b) \in R$.

4.3 Релации, дефинирани върху множество

Дефиниция 4.3.1. Релация, дефинирана върху множество A , е релация от A в A .

С други думи, дадена релация, дефинирана върху множество A , е подмножество на $A \times A$.

Пример 4.3.1. Нека $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Кои наредени двойки са от релацията $R = \{(a, b) | a < b\}$

Решение: $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

Колко различни релации могат да бъдат дефинирани върху едно множество A с n елемента?

Броят на елементите на $A \times A = n^2$, тогава броя на подмножествата (релации върху A) е 2^{n^2} - броят на елементите на множеството от всички подмножества на $A \times A$.

Отговор: Броят на различните релации, дефинирани върху A , е 2^{n^2}

4.4 Свойства на релациите

Дефиниция 4.4.1 (Рефлексивна). Релацията R , дефинирана върху A , се нарича **рефлексивна**, ако $(a, a) \in R$ за всеки елемент $a \in A$

Дефиниция 4.4.2 (Антирефлексивна). Релацията R , дефинирана върху A , се нарича **антирефлексивна**, ако $(a, a) \notin R$ за всеки елемент $a \in A$

Дефиниция 4.4.3 (Симетрична). Релацията R , дефинирана върху A , се нарича **симетрична**, ако $(b, a) \in R$ когато $(a, b) \in R$ за $a, b \in R$.

Дефиниция 4.4.4 (Антисиметрична). Релацията R , дефинирана върху A , се нарича **антисиметрична**, ако когато $(a, b) \in R$ и $(b, a) \in R$ то $a = b, a, b \in R$.

Дефиниция 4.4.5 (Асиметрична). Релацията R , дефинирана върху A , се нарича **асиметрична**, ако когато $(a, b) \in R$ и $(b, a) \notin R$ за $a, b \in R$.

Дефиниция 4.4.6 (Транзитивна). Релацията R , дефинирана върху A , се нарича **транзитивна**, ако когато $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$, тогава $(a, c) \in R$ за $a, b, c \in A$.

Пример 4.4.1. Релации, дефинирани върху $\{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$ - рефлексивна

$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$ - симетрична

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ - антисиметрична

$R = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$ - асиметрична

$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ - транзитивна

4.5 Операции с релациите

Релациите са множества, и затова, върху тях може да бъдат прилагани стандартни **операции с множества**.

Ако R_1, R_2 са релации от множеството A в множеството B , тогава може да разгледаме операциите $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2$

Във всеки от случаите, резултатът от операциите е друга релация от A в B .

4.5.1 Комбиниране на релациите

Дефиниция 4.5.1. Нека R е релация от множеството A в множеството B и S е релация от множеството B в множеството C .

Композицията от R и S е релация състояща се от наредени двойки $(a, c); a \in A, c \in C$ и за които съществува елемент $b \in B$ такива че $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in S$

Композицията се означава $S \circ R$.

Пример 4.5.1. Нека D и S са релации от $\{1, 2, 3, 4\}$

$$D = \{(a, b) | b = 5 - a\}$$

$$S = \{(a, b) | a < b\}$$

$$D = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

$$S \circ R = \{(2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$S \circ R = \{(a, b) | b > 5 - a\} \Leftrightarrow S \circ R = \{(a, b) | a + b > 5\}$$

Дефиниция 4.5.2. Нека R е релация дефинирана върху множеството A . Степените на R при получаване на композиция, $R^n, n = 1, 2, 3, \dots$, се дефинират по индукция като

$$R^1 = R$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R$$

$$R^n = R \circ R \circ \dots \circ R \text{ (n-пъти } R)$$

Теорема 4.5.1. Релацията R върху множеството A е транзитивна тогава и само тогава когато $R^n \subseteq R$ за всяко цяло положително число n .

4.6 n-арни релации

Дефиниция 4.6.1. Нека A_1, A_2, \dots, A_n са множества. n -арна релация върху тези множества е подмножеството $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Множествата A_1, A_2, \dots, A_n се наричат области (домейни) на релацията, а n - ред на релацията.

Пример 4.6.1. Нека $R = \{(a, b, c) | a = 2b \wedge b = 2c; a, b, c \in \mathbb{N}\}$

Редът на R - 3, тъй като елементите са тройки.

Области на R - множеството на естествените числа \mathbb{N}

$(2, 4, 8)$ - не е от R

$(4, 2, 1)$ - е от R

4.7 Бази данни и релации

Дефиниция 4.7.1. Базата данни се състои от n -торки наречени **записи**, които са изградени от **атрибути (полета)**. Тези полета (атрибути) са **позициите** в n -торките.

Релационният модел на данните представя базата данни като n -арна релация, което по същество представлява множество от записи, като всеки от **атрибутите (полетата)** има своя **област (домейн)**.

Пример 4.7.1. Разглеждаме база данни от студенти, чиито записи представляват наредени 4-творки с полета (атрибути): Име, Фак.номер, Факултет, и Успех:

$R = \{(\text{Иван}, 231455, \text{ФА}, 4.88), (\text{Георги}, 888323, \text{ФЕТТ}, 4.45), (\text{Димитър}, 232147, \text{ФА}, 5.29), (\text{Петър}, 453876, \text{ФКСУ}, 5.45), (\text{Николай}, 458543, \text{ФКСУ}, 4.45), (\text{Стефан}, 886576, \text{ФЕТТ}, 5.18)\}$

Прост код: ако n -торките могат да бъдат точно определени по стойностите на това поле. Това означава, че няма два (или повече) записа с една и съща стойност на полето, което е прост код.

Дефиниция 4.7.2 (Проекция). Проекцията P_{i_1, i_2, \dots, i_m} изобразява n -торката (a_1, a_2, \dots, a_n) в m -торка $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$ където $m \leq n$

Пример 4.7.2. Какъв резултат се получава, ако се приложи проекцията $P_{2,4}$ на записа от базата данни:

(Георги, 888323, ФЕТТ, 4.45)? Отговор: Наредена двойка (888323, 4.45)

Дефиниция 4.7.3 (Съединение). Нека R е релация от ред m а S е релация от ред n . Съединение $J_p(R, S)$, където $p \leq m$ и $p \leq n$, е релация от ред $m + n - p$, която съдържа всички $(m + n - p)$ -торки

$$(a_1, a_2, \dots, a_{m-p}, c_1, c_2, \dots, c_p, b_1, b_2, \dots, b_{n-p})$$

такива че m -торката $(a_1, a_2, \dots, a_{m-p}, c_1, c_2, \dots, c_p)$ принадлежи на R , а n -торката $(c_1, c_2, \dots, c_p, b_1, b_2, \dots, b_{n-p})$ принадлежи на S .

Пример 4.7.3. Да се определи съединението $J_1(Y, R)$, където релацията Y съдържа атрибутите Год. на раждане и Име.

$Y = \{(1982, \text{Иван}), (1980, \text{Георги}), (1984, \text{Димитър}), (1979, \text{Петър}), (1983, \text{Николай}), (1985, \text{Стефан})\}$

$R = \{(\text{Иван}, 231455, \text{ФА}, 4.88), (\text{Георги}, 888323, \text{ФЕТТ}, 4.45), (\text{Димитър}, 232147, \text{ФА}, 5.29), (\text{Петър}, 453876, \text{ФКСУ}, 5.45), (\text{Николай}, 458543, \text{ФКСУ}, 4.45), (\text{Стефан}, 886576, \text{ФЕТТ}, 5.18)\}$

Решение:

$J_1 = \{(1982, \text{Иван}, 231455, \text{ФА}, 4.88), (1980, \text{Георги}, 888323, \text{ФЕТТ}, 4.45), (1984, \text{Димитър}, 232147, \text{ФА}, 5.29), (1979, \text{Петър}, 453876, \text{ФКСУ}, 5.45), (1983, \text{Николай}, 458543, \text{ФКСУ}, 4.45), (1985, \text{Стефан}, 886576, \text{ФЕТТ}, 5.18)\}$

Тъй като Y има два атрибута, R има четири атрибута, а общият атрибут Име е един, релацията $J_1(Y, R)$ има $2 + 4 - 1 = 5$ атрибута.

4.8 Представяне релации

Два нови начина за представяне на релации: булеви матрици и ориентирани графи.

4.8.1 Булеви матрици

Ако R е релация от $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ в $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, то R може да бъде представена посредством булева матрица (матрица с елементи единици и нули)

$M_R = [m_{ij}]$ с елементи

$m_{ij} = 1, (a_i, b_j) \in R,$

$m_{ij} = 0, (a_i, b_j) \notin R.$ За формиране на матрицата трябва първо да се изредят елементите на A и B в определен (но произволен) ред.

Пример 4.8.1. Да се представи релацията $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ като булева матрица?

Решение:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрици, които представят релации върху множество трябва да бъдат квадратни матрици.

Матрици, които представят рефлексивни релации всички елементи от главния диагонал на такива матрици M_{ref} трябва да са единици.

Матрици, които представят симетрични релации трябва да бъдат симетрични матрици, $M_R = (M_R)^T$.

При определяне на матрицата, която представя обединение на две релации се прилага логическата операция “или” върху съответните елементи на матриците, представящи релациите.

При определяне на матрицата, която представя сечение на две релации се прилага логическата операция “и” върху съответните елементи на матриците, представящи релациите.

Пример 4.8.2. Нека релациите R и S се представят с матриците:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Определете матриците, които представят $R \cup S$ и $R \cap S$?

Решение:

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Дефиниция 4.8.1. Нека $A = [a_{ij}]$ е $m \times k$ булева матрица, а $B = [b_{ij}]$ е $k \times n$ булева матрица.

Булевото произведение на A и B , се означава с $A \circ B$, и е $m \times n$ матрица (i, j) -тият елемент $[c_{ij}]$, на която е

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

$c_{ij} = 1$ тогава и само тогава, когато поне един от компонентите $(a_{in} \vee b_{nj})$ е 1 за някое n ; $c_{ij} = 0$ в останалите случаи.

4.8.2 Ориентирани графи

Дефиниция 4.8.2 (Ориентиран граф). Ориентираният граф, се състои от множество V от върхове (или възли) и множество E от наредени двойки от V наречено ребра (или дъги). Върха се нарича начален връх на ребро (a, b) , а връх b се нарича краен връх на реброто. Стрелките се използват за означаване на посоките.

Очевидно всяка релация R върху A може да се представи с ориентиран граф, като елементите на A са негови върхове, а всички наредени двойки $(a, b) \in R$ са негови ребра.

Обратно, всеки ориентиран граф с върхове V и ребра E може да се представи с релация върху V , съдържаща всички наредени двойки от E .

Това взаимно еднозначно съответствие между релации и ориентирани графи означава, че всяко твърдение за релациите е приложимо за ориентираните графи и обратно.

4.9 Релации на еквивалентност

Дефиниция 4.9.1 (Релация на еквивалентност). Дадена релация, дефинирана върху множеството A , се нарича релация на еквивалентност ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Два елемента, свързани посредством дадена релация на еквивалентност R , се наричат еквивалентни.

Тъй като R е симетрична, a е еквивалентен на b , когато b е еквивалентен на a .

Тъй като R е рефлексивна, всеки елемент е еквивалентен на себе си.

Тъй като R е транзитивна, ако a и b са еквивалентни и b и c са еквивалентни, то a и c са еквивалентни.

Очевидно, тези три свойства са необходими за обосновано дефиниране на еквивалентността.

Пример 4.9.1. Нека R е релация върху множество от думи на български език, такава че aRb тогава и само тогава, когато $l(a) = l(b)$, където $l(x)$ е дължината на думата x .

Релация на еквивалентност ли е R ? Решение:

R е рефлексивна, защото $l(a) = l(a)$ и следователно aRa за всяка дума a .

R е симетрична, защото ако $l(a) = l(b)$ то $l(b) = l(a)$, така че ако aRb то

bRa .

R е транзитивна, защото ако $l(a) = l(b)$ и $l(b) = l(c)$, то $l(a) = l(c)$, така че от aRb и bRc , следва че aRc .

Следователно R е релация на еквивалентност.

4.10 Класове на еквивалентност

Дефиниция 4.10.1 (Клас на еквивалентност). Нека R е релация на еквивалентност дефинирана върху множеството A . Множеството от всички елементи свързани с даден елемент "а" от A посредством R се нарича клас на еквивалентност на "а".

Класът на еквивалентност на "а" по отношение на R се означава с $[a]_R$. Ако $b \in [a]_R$, b - представител.

Пример 4.10.1 (котка). е множеството от всички думи на български език с пет букви. Например, "петел" е представител на този клас на еквивалентност.

Теорема 4.10.1. Нека R е релация на еквивалентност, дефинирана върху A . Долните твърдения са еквивалентни:

- aRb
- $[a] = [b]$
- $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Дефиниция 4.10.2 (Разбиване). Разбиванена множеството S е съвкупност от несвързани, непразни подмножества от S , чието обединение е S . С други думи, съвкупността от подмножества $A_i, i \in I$, формират разделяне на S тогава и само тогава, когато

- $A_i \neq \emptyset, i \in I$
- $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = S$

Пример 4.10.2. Нека S е $\{u, m, b, r, o, c, k, s\}$.

Разбиване на S ли са долните съвокупности от множества?

$\{\{m, o, c, k\}, \{r, u, b, s\}\}$ - да.

$\{\{c, o, m, b\}, \{u, s\}, \{r\}\}$ - не(k липсва).
 $\{\{b, r, o, c, k\}, \{m, u, s, t\}\}$ - не(t не е от S).
 $\{\{u, m, b, r, o, c, k, s\}\}$ - да.
 $\{\{b, o, o, k\}, \{r, u, m\}, \{c, s\}\}$ - да ($\{b, o, o, k\} = \{b, o, k\}$).
 $\{\{u, m, b\}, \{r, o, c, k, s\}, \emptyset\}$ не(\emptyset не е позволено).

Теорема 4.10.2. Нека R е релация на еквивалентност, дефинирана върху S . Тогава класовете на еквивалентност, свързани с R , формират разбиване на S .

Обратно, за дадено разбиване $\{A_i | i \in I\}$ на множеството S , съществува релация на еквивалентност R , за която множествата $A_i, i \in I$, са класове на еквивалентност.

Пример 4.10.3. Нека Иван, Силвия и Георги живеят в София, Мая и Петър живеят в Пловдив, а Кирил живее в Бургас.

Нека R е релация на еквивалентност $\{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ живеят в един и същ град}\}$ върху множеството $P = \{\text{Иван, Силвия, Георги, Мая, Петър, Кирил}\}$.

Тогава

$R = \{(\text{Иван, Иван}), (\text{Иван, Силвия}), (\text{Иван, Георги}), (\text{Силвия, Иван}),$
 $(\text{Силвия, Силвия}), (\text{Силвия, Георги}), (\text{Георги, Иван}), (\text{Георги, Силвия}),$
 $(\text{Георги, Георги}), (\text{Мая, Мая}), (\text{Мая, Петър}), (\text{Петър, Мая}), (\text{Петър, Петър}),$
 $(\text{Кирил, Кирил})\}$.

Класовете на еквивалентност, свързани с R , са: $\{\{\text{Иван, Силвия, Георги}\}, \{\text{Мая, Петър}\}, \{\text{Кирил}\}\}$. Това също е и разбиване на R .

Пример 4.10.4. Нека R е релацията $\{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{3}\}$, дефинирана върху множеството на целите числа.

Релация на еквивалентност ли е R ?

Да, защото R е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Кои са класовете на еквивалентност свързани с R ?

$\{\{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\},$
 $\{\{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\},$
 $\{\{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}\}$

5 Лекция 5: Функции

Функция f от множеството A в множеството B е такова съответствие, че на всеки елемент от множеството A е съпоставен (присвоен) един (единствен) елемент от множеството B .

Присвояването се записва като

$$f(a) = b$$

където b е единствения елемент от B присвоен посредством f на елемента a от A . Ако f е функция от множество A в множество B , то това се означава по следния начин

$$f : A \rightarrow B$$

Множеството A е дефиниционна област на f , а множеството B е област на стойностите на f .

b е образ на a , а a е първообраз на b .

Диапазон на f е множеството от всички образи на всички елементи на A .

Пример 5.0.1. Да разгледаме функцията $f : P \rightarrow C$ където

$P = \{\text{Лили, Митко, Катя, Петър}\}$

$C = \{\text{Бургас, София, Пловдив, Варна}\}$

$f(\text{Лили}) = \text{Пловдив}$

$f(\text{Митко}) = \text{София}$

$f(\text{Катя}) = \text{Бургас}$

$f(\text{Петър}) = \text{Варна}$

За случая, диапазонът на f е C .

Начини за представяне на функциите :

- таблици

x	$f(x)$
Лили	Пловдив
Митко	София
Катя	Бургас
Петър	Варна

- означаване на съответствията със стрелки
- формули $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x$
- графики: множеството от наредени двойки $\{(a, b) | a \in A, f(a) = b\}$.

Нека f_1 и f_2 са функции от A в \mathbb{R} . Сумата и произведението на f_1 и f_2 също са функции от A в \mathbb{R} дефинирани като:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

Пример 5.0.2.

$$f_1(x) = 3x \quad f_2(x) = x + 5$$

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = 3x + x + 5 = 4x + 5$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = 3x(x + 5) = 3x^2 + 15x$$

Ако разгледаме подмножеството $S \subseteq A$, то множеството от всички образи на елементите $s \in S$ се нарича образ на S .

Образът на S се означава с $f(S)$: $f(S) = \{f(s) | s \in S\}$

5.1 Функциите като релации

Тъй като графиката на f е подмножество на $A \times B$, то тя е релация от A в B .

Още повече, за всеки елемент на A , съществува точно една наредена двойка в графиката на функцията, чийто първи елемент е a .

Обратно, ако R е релация от A в B , такава че всеки елемент от A е първи елемент на само една наредена двойка от R , тогава функцията може да бъде дефинирана посредством R като нейна графика.

Това се прави като на всеки елемент $a \in A$ се присвоява само един елемент $b \in B$, така че $(a, b) \in R$

5.2 Свойства на функции

5.2.1 Инекция

Функцията $f : A \rightarrow B$ е "изображение в" или инекция (влагане), тогава и само тогава, когато

$$\forall x, y \in A (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$$

5.2.2 Строго нарастваща/намаляваща

Функцията $f : A \rightarrow B$, където $A, B \subseteq \mathbb{R}$ се нарича строго нарастваща, ако

$$\forall x, y \in A (x < y \rightarrow f(x) < f(y))$$

и строго намаляваща, ако

$$\forall x, y \in A (x < y \rightarrow f(x) > f(y))$$

5.2.3 Сюрекция

Функцията $f : A \rightarrow B$ е "изображение върху" или сюрекция (налагане), тогава и само тогава, когато за всеки елемент $b \in B$ съществува елемент $a \in A$, така че $f(a) = b$.

5.2.4 Биекция

Функцията $f : A \rightarrow B$ е взаимно еднозначно съответствие, или биекция, тогава и само тогава, когато е едновременно инекция и сюрекция.

5.3 Обратна функция

Обратна функция на биекцията $f : A \rightarrow B$ е функцията

$$f^{-1} : B \rightarrow A, f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

5.4 Крайни и безкрайни множества

Дефиниция 5.4.1. Множеството A е крайно, ако $A \neq \emptyset$ или $\exists n \in \mathbb{N}$ и биекция $f : A \rightarrow I_n$. Мощността $|A|=0$, ако $A = \emptyset$.

Дефиниция 5.4.2. Множеството A е изброимо безкрайно, ако съществува биекция $f : A \rightarrow \mathbb{N}$. Множеството A е изброимо, ако е крайно или изброимо безкрайно.

Индексацията на елементите на едно множество A с елементите на друго множество е знак за съществуване на биекция между тях.

Дефиниция 5.4.3. Едно множество е безкрайно ако е равномощно на свое собствено подмножество.

Пример 5.4.1. Функцията $f : N \rightarrow N_2, f(n) = 2n$ изобразява множеството на естествените числа N в собственото му подмножество на четните естествени числа N_2 . Следователно N е безкрайно множество. Множеството $A = \{1, 2, 3\}$ е крайно, тъй като не съществува биекция между него и негово собствено подмножество.

5.5 Принцип на Дирихле

Ако X и Y са крайни множества, чиито мощности са в отношение $|X| > |Y|$, то за всяка функция $f : X \rightarrow Y$, съществуват $a_1 \neq a_2 \in X$, за които е в сила $f(a_1) = f(a_2)$.

Принципът на Дирихле неформално се нарича принципа на чекмеджетата. Ако множеството X е множество от предмети а Y е множество от чекмеджета, така че предметите са повече от чекмеджетата и всички предмети от X се поставят в чекмеджетата от Y , то поне в едно чекмедже ще има поне два предмета.

5.6 Композиция

Композицията на две функции $g : A \rightarrow B, f : B \rightarrow C$, се означава с $f \circ g$, и се дефинира като:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Това означава :

- първо, функцията g се прилага на елемента $a \in A$, като го изобразява в елемент от B
- второ, функцията f се прилага на този елемент от B , изобразявайки го в елемент от C .
- Следователно, съставната функция $(f \circ g)$ е изображение от A в C .

Композиция на функция с обратната и функция:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Пример 5.6.1.

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
f(x) &= 7x - 4, & g(x) &= 3x \\
(f \circ g)(5) &= f(g(5)) = f(15) = 105 - 4 = 101 \\
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(3x) = 21x - 4
\end{aligned}$$

5.7 Функции най-голямо цяло (Floor) и най-малко цяло (Ceiling)

Функциите floor и ceiling изобразяват реалните числа в целите числа $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Функцията най-голямо цяло (floor) присвоява на дадено $r \in \mathbb{R}$ най-голямото цяло число $z \in \mathbb{Z}$, такова че $z \leq r$.

Означава се с $\lfloor r \rfloor$.

По същество това е закръгляване надолу.

Пример 5.7.1.

$$\lfloor 2.3 \rfloor = 2, \quad \lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0.5 \rfloor = 0, \quad \lfloor -3.5 \rfloor = -4$$

Функцията най-малко цяло (ceiling) присвоява на дадено $r \in \mathbb{R}$ най-малкото цяло число $z \in \mathbb{Z}$, такова че $z \geq r$.

Означава се с $\lceil r \rceil$.

По същество това е закръгляване нагоре.

Пример 5.7.2.

$$\lceil 2.3 \rceil = 3, \quad \lceil 2 \rceil = 2, \quad \lceil 0.5 \rceil = 1, \quad \lceil -3.5 \rceil = -3$$

6 Лекция 6: Булева алгебра

При булевата алгебра операциите и правилата за работа с тях са свързани с множеството $\{0, 1\}$.

6.1 Булеви операции

Дефиниция 6.1.1. Отрицанието се означава с $-$. Дефинира се по следния начин

$$-0 = 1 \quad -1 = 0$$

Дефиниция 6.1.2. Булевата сума, се означава с $+$ и правилата за прилагането и са следните:

$$1 + 1 = 1 \quad 1 + 0 = 1 \quad 0 + 1 = 1 \quad 0 + 0 = 0$$

Дефиниция 6.1.3. Булевото умножение, се означава с \cdot , и правилата за прилагането му са следните:

$$1 \cdot 1 = 1 \quad 1 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 1 = 0 \quad 0 \cdot 0 = 0$$

6.2 Булеви (двоични) функции и изрази

Дефиниция 6.2.1. Нека $B = \{0, 1\}$. Променливата x се нарича булева променлива ако приема стойности само от B .

Дадена функция от B^n , т.е. $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$, в B се нарича булева (двоична) функция от ред n .

Булевите функции могат да бъдат представени посредством: формули, които са изрази от булеви променливи и булеви операции и таблици със стойности на функцията за всяка комбинация от стойности на променливите.

Дефиниция 6.2.2. Булев израз на променливите x_1, x_2, \dots, x_n може да се дефинира рекурсивно както следва:

$0, 1, x_1, x_2, \dots, x_n$ са булеви изрази

$E_1, E_2 \rightarrow$ булеви изрази, то $(-E_1), (E_1 E_2), (E_1 + E_2)$ са булеви изрази

Всеки булев израз представя булева функция.

Стойностите на тази функция могат да бъдат намерени чрез заместване на булевите променливи в изказа с 0 и 1.

Пример 6.2.1. Намерете формулата (булевият израз) за булевата функция $F(x, y)$, която се дефинира с долната таблица:

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Възможно решение: $F(x, y) = (-x) \cdot y$

Най-простият метод за получаване на формула (булев израз) за функция зададена с таблица от стойности на функцията за всяка комбинация от стойности на променливите се базира на булева сума от компоненти. Тези компоненти съответстват на комбинациите от стойности на променливите, за които функцията има стойност 1

Те са булево произведение от вида $y_1 y_2 \dots y_n, y_i = x_i (x_i = 1)$ или $y_i = -x_i (x_i = 0)$

Дефиниция 6.2.3. Булевите функции F и G на n променливи са равни тогава и само тогава, когато $F(b_1, b_2, \dots, b_n) = G(b_1, b_2, \dots, b_n)$ за b_1, b_2, \dots, b_n от B .

Два различни булеви изказа (формули), които представят една и съща функция се наричат еквивалентни.

Например, булевите изрази $xy, xy + 0, xy \cdot 1$ са еквивалентни.

Дефиниция 6.2.4. Булево допълнение или отрицание на булевата функция F е булевата функция $\neg F$, където

$$\neg F(b_1, b_2, \dots, b_n) = \neg(F(b_1, b_2, \dots, b_n))$$

Дефиниция 6.2.5. Нека F и G са булеви функции от ред n . Булева сума $F + G$ и булево произведение $F \cdot G$ се дефинират като:

$$(F + G)(b_1, b_2, \dots, b_n) = F(b_1, b_2, \dots, b_n) + G(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$(F \cdot G)(b_1, b_2, \dots, b_n) = F(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot G(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

Броят на различните булеви функции от ред n е 2^{2^n} .

6.3 Дуалност

Дуален на даден булев израз се получава като се заменят булевите суми с булеви умножения, булевите умножения с булеви суми, единиците се заменят с нули и нулите с единици.

Тази дуална функция, се означава с F^d , и не зависи от конкретния булев израз използван за представяне на F .

Пример 6.3.1. Дуалният израз на $x(y + z) = x + yz$
 Дуалният израз на $-x \cdot 1 + (-y + z) = (-x + 0) \cdot ((-y)z)$

Равенството между функции представени с булеви изрази остава валидно когато се вземат дуалните функции на двете страни на равенството.

Това се нарича принцип на дуалността, и може да се използва за извеждане на нови равенства.

Пример 6.3.2. Закон за поглъщането

$$x(x + y) = x$$

Като вземем дуалните изрази на двете страни на равенството, се получава

$$x + xy = x$$

което също е равенство (и също се нарича закон за поглъщането).

6.4 Дефиниция на булевата алгебра

Дефиниция 6.4.1. Булева алгебра е множество B с елементи 0 и 1, две бинарни операции (+ и \cdot) и една унарна операция ($-$), така че за всяко x, y, z от B са в сила следните свойства :

- Закони за идентичност

$$x + 0 = x \quad x \cdot 1 = x$$

- Закони за доминация

$$x + (-x) = 1 \quad x \cdot (-x) = 0$$

- Асоциативни закони

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

- Комутативни закони

$$x + y = y + z \quad x \cdot y = y \cdot x$$

- Дистрибутивни закони

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

6.5 Логика, множества и булева алгебра

Логика	Множества	Булева алгебра
Лъжа	\emptyset	0
Истина	U	1
$A \wedge B$	$A \cap B$	$A \cdot B$
$A \vee B$	$A \cup B$	$A + B$
$\neg A$	A^c	$\overline{A}(-A)$

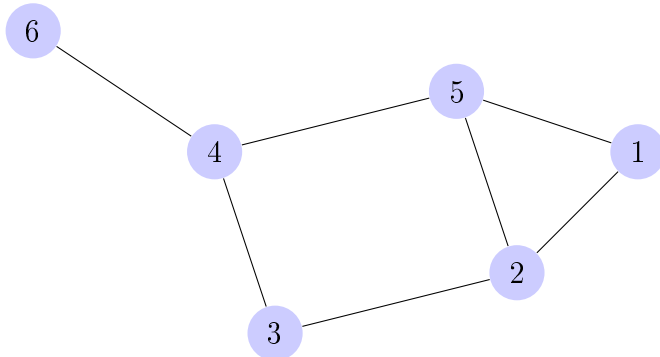
7 Лекция 7: Графи

7.1 Дефиниции и терминология

Дефиниция 7.1.1. Простия граф $G = (V, E)$ е математическа структура, която се състои от:

- Непразно множество от върхове V .
- Множество E от ненаредени двойки от различни елементи от V , наречени ребра
- Всяко ребро $e \in E$ е множество $= \{u, v\}$ където $u, v \in V$ (М/у 2 върха има само едно ребро)
- Даден ненасочен (неориентиран) граф може да съдържа примки (тогава не е прост).
- Дадено ребро е примка ако $e = \{u, u\}$ за някое $u \in V$.

Прост граф:



Дефиниция 7.1.2. Мултиграф $G = (V, E)$ е такъв граф, който може да съдържа примки и двойки върхове съединени с няколко ребра.

Дефиниция 7.1.3. Даден граф е планарен, ако може да бъде начертан в една равнина без да има пресичане на ребрата му.

Дефиниция 7.1.4. Насоченият (ориентираният) граф $G = (V, E)$ е математическа структура, която се състои от:

- Непразно множество от върхове V .

- Множество E от наредени двойки от различни елементи от V , наречени ребра
- Всяко ребро $e \in E$ е наредена двойка $e = (u, v)$ където $u, v \in V$
- Дадено ребро е примка ако $e = (u, u)$ за някое $u \in V$.

Дефиниция 7.1.5. Два върха u, v в ненасочен граф G се наричат съседни в G ако $\{u, v\}$ е ребро в G .

С цел определяне на отношението на принадлежност на ребрата на графа към върховете му и обратно се въвежда понятието инцидентност.

Дефиниция 7.1.6. Ако $e = \{u, v\}$, реброто e се нарича инцидентно с върховете u и v .

Реброто e свързва u и v .

Върховете u и v се наричат крайни точки на реброто $\{u, v\}$.

Дефиниция 7.1.7. Степен (валентност) на даден връх от неориентиран граф е броят на ребрата свързани с него.

Степента на връх v се означава с $\deg(v)$.

Връх със степен 0 се нарича изолиран, тъй като не е съседен на никой друг връх на графа.

Връх с примка е от степен поне 2 и по дефиниция не е изолиран, дори да не е съседен на друг връх.

Връх със степен 1 се нарича висящ. Такъв връх е съседен на точно един друг връх от графа.

Теорема 7.1.1. Нека $G = (V, E)$ е ненасочен граф с n ребра. Тогава

$$2n = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Пример 7.1.1. Колко са ребрата в граф с 10 върха, всеки от степен 6.

Решение: Сумата от степените на върховете на графа е $6 \cdot 10 = 60$. От горната теорема, следва че $2n = 60$, т.е. $n = 30$ ребра.

Теорема 7.1.2. Всеки ненасочен граф има четен брой върхове от нечетна степен.

Дефиниция 7.1.8. Когато (u, v) е ребро в ориентиран граф G , върховете u и v са съседни.

Върхът u се нарича начален върх на реброто (u, v) а върхът v се нарича краен върх на (u, v) .

Началният и крайният върх на дадена примка съвпадат.

Дефиниция 7.1.9. В ориентиран граф, полустепената на върх v , се означава с $\deg^-(v)$, и е равна на броят на ребрата, чиито краен върх е v .

Полустепената на върх v , означена с $\deg^+(v)$, е броят на ребрата, чиито начален върх е v .

Теорема 7.1.3. Нека $G = (V, E)$ е ориентиран граф. Тогава:

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$$

7.2 Специални графи

Дефиниция 7.2.1. Пълен граф е прост граф, който съдържа точно едно ребро между всяка двойка различни върхове.

Пълен граф с n върха се означава с K_n .

Дефиниция 7.2.2. Граф-контур $C_n, n \geq 3$ се състои от n върха v_1, v_2, \dots, v_n и ребрата $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$.

Дефиниция 7.2.3. Граф-колело W_n се получава ако към даден граф-контур $C_n, n \geq 3$, се добави допълнителен върх, който се свързва с всички върхове на контура C_n с нови ребра.

Дефиниция 7.2.4. Граф n -куб, се означава с Q_n , и е граф, чиито върхове представляват $2n$ стринга от битове с дължина n . Два върха са съседни (свързани с ребро) тогава и само тогава, когато стринговете от битове, които които представляват върховете се различават само по един бит.

Дефиниция 7.2.5. Даден прост граф се нарича двуделен ако множеството на върховете му V може да се разбие на две непресичащи множества V_1, V_2 , така че всяко ребро в графа свързва върхове от V_1 с върхове от V_2 (по този начин няма ребро в графа, което свързва два върха само от V_1 или само от V_2).

Пример 7.2.1. Графът, чрез който всеки човек от даден град се представя с връх а всеки брак с ребро.

Този граф е двуделен, защото всяко ребро свързва върхове от две подмножества от мъжете и жените (има се предвид нормални бракове).

Дефиниция 7.2.6. Пълен двуделен граф $K_{m,n}$ е граф, чиито върхове са разделени на две подмножества съответно от m и n елементи. Два върха са свързани с ребро тогава и само тогава ако са от различни подмножества.

Дефиниция 7.2.7. Подграф на даден граф $G = (V, E)$ е граф $H = (W, F)$ където $W \subseteq V, F \subseteq E$.

Дефиниция 7.2.8. Обединение на два ненасочени графа $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ е ненасочен граф с множество от върховете $V_1 \cup V_2$ и множество от ребрата $E_1 \cup E_2$. Обединението на G_1 и G_2 се означава с $G_1 \cup G_2$.

7.3 Представяне на графите

Дефиниция 7.3.1. Нека $G = (V, E)$ е неориентиран граф и $|V| = n$. Нека върховете на G са подредени в произволен ред v_1, v_2, \dots, v_n .

Матрица на съседство A на G при избраната подредба на върховете е $n \times n$ матрица от единици и нули с 1 в позиция (i, j) , когато v_i и v_j са съседни, и 0 в противен случай. В случаите на мултиграфи, различните от нула елементи показват колко ребра съединяват съответните върхове.

Пример 7.3.1. Матрицата на съседство A_G за графа G при следния ред на върховете a, b, c, d е

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Дефиниция 7.3.2. Нека $G = (V, E)$ е неориентиран граф и $|V| = n$. Нека върховете и ребрата на G са подредени в произволен ред v_1, v_2, \dots, v_n и e_1, e_2, \dots, e_m .

Матрица на инцидентност на G при избраната подредба на върховете и ребрата е $n \times m$ матрица от единици и нули с 1 в позиция (i, j) , когато ребро e_j е инцидентно с връх v_i и 0 в противен случай.

Пример 7.3.2. Матрицата на инцидентност M за графа G при следната подредба на върховете a, b, c, d и ребрата 1, 2, 3, 4, 5, 6 е

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.4 Изоморфизъм на графи

Дефиниция 7.4.1. Два ненасочени графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ са изоморфни ако съществува биекция (взаимно еднозначно съответствие) $f : V_1 \rightarrow V_2$, такава че a и b са съседни в G_1 , тогава и само тогава когато $f(a)$ и $f(b)$ са съседни в G_2 , за всяко a и b от V_1 . Такава функция f се нарича изоморфизъм.

Визуално, G_1 и G_2 са изоморфни ако могат да бъдат организирани по такъв начин, че техните изображения да са еднакви.

За два прости графа с по n върха има $n!$ възможни изоморфизми, които трябва да бъдат проверени, за да се покаже, че графите са изоморфни. За да може два графа да са изоморфни трябва да се провери инвариантността, на някои параметри на графите, което е задължително свойство. Двата графа трябва да имат:

- един и същ брой върхове,
- един и същ брой ребра,
- едни и същи степени на върховете.

Ако горните параметри не са инвариантни, то графите не са изоморфни, но ако два графа имат инвариантни параметри, те не са задължително изоморфни.

7.5 Пътища и контури в графи

Дефиниция 7.5.1. Път с дължина n от u до v , където n е положително цяло число, в **ненасочен граф** е последователност от ребра e_1, e_2, \dots, e_n на графа, така че $e_1 = \{x_0, x_1\}, e_2 = \{x_1, x_2\}, \dots, e_n = \{x_{n-1}, x_n\}$, където $x_0 = u$ и $x_n = v$.

Даден път е контур (затворен път) ако започва и свършва с един и същ връх, т.е. $u = v$.

Дефиниция 7.5.2. Път с дължина n от u до v , където n е положително цяло число, в **насочен граф** е последователност от ребра e_1, e_2, \dots, e_n на графа, така че $e_1 = \{x_0, x_1\}, e_2 = \{x_1, x_2\}, \dots, e_n = \{x_{n-1}, x_n\}$, където $x_0 = u$ и $x_n = v$.

Даден път е контур (затворен път) ако започва и свършва с един и същ връх, т.е. $u = v$.

Дефиниция 7.5.3. Казва се, че даден път или контур преминава през върховете x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .

Дефиниция 7.5.4. Даден път или контур е прост ако не съдържа едно ребро два пъти.

Дефиниция 7.5.5 (Ойлеров контур). Даден контур е Ойлеров, ако преминава през всяко ребро само по един път.

Дефиниция 7.5.6 (Хамилтонов контур). Даден контур е Хамилтонов, ако преминава през всеки връх само по един път.

7.6 Свързаност

Дефиниция 7.6.1. Даден ненасочен граф е свързан ако съществува път между всяка двойка ребра.

Дефиниция 7.6.2. Даден несвързан граф е обединение на два или повече свързани подграфа, като всяка двойка от тези подграфи няма общи върхове. Тези подграфи се наричат свързани компоненти на графа.

Дефиниция 7.6.3. Даден прост граф е дърво ако не съдържа контури и кратни ребра (няколко ребра, които свързват два върха). Броят на ребрата на дървото е $n-1$, където n е броят на върховете на графа.

Дефиниция 7.6.4. Даден насочен граф е силно свързан ако съществува път от a до b и от b до a , за всяка двойка върхове a и b от графа.

Дефиниция 7.6.5. Даден насочен граф е слабо свързан ако има път между всеки два върха на съответния ненасочен граф.

7.7 Достижимост

Дефиниция 7.7.1. Нека $G = (V, E)$ е неориентиран граф и $|V| = n$. Нека върховете на G са подредени в произволен ред v_1, v_2, \dots, v_n . Матрица на достижимост за p стъпки H_p на G при избраната подредба на върховете е $n \times n$ матрицата

$$H_p = I \cup A_G \cup A_G \cdot A_G \cup \dots \cup A_G \cdot A_G \dots A_G \text{ (} p \text{ пъти умножение)}$$

Пример 7.7.1. Матрицата на достижимост за 2 и 3 стъпки за графа G при следния ред на върховете a, b, c, d

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad H_2 = ? \quad H_3 = ?$$

$$A_G^2 = A_G \cdot A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = I \cup A_G \cup A_G^2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_G^3 = A_G^2 \cdot A_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = I \cup A_G \cup A_G^2 \cup A_G^3 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7.8 Графи с допълнителни характеристики на ребрата

На ребрата от даден граф може да бъдат присвоени тегла, свързани с допълнителни характеристики на обекта, който се моделира с дадения граф. Например при моделиране на дадена железопътна мрежа (в аспект на разстояния), разстоянията между отделните градове могат да служат като тегла на съответните ребра от графа.

В общ случай тези характеристики могат да бъдат цени, пропускателни способности на линии и др.

7.9 Най-къс път

Графи с тегла на ребрата могат да служат за моделиране на компютърни мрежи, като теглата могат да бъдат свързани с време за реакция, цена и др.

Най-интересния въпрос за този тип графи е:

Какъв е най-късият път между два върха в графа, в смисъл такъв път, за който сумата от теглата на ребрата от пътя е минимална?

С тази задача от теорията на графите се моделира проблема за най-късото разстояние по железопътната мрежа между два града или на най-бърза връзка в компютърна мрежа.

7.10 Задача на търговския пътник

Дадени са n върха. Колко различни граф-контура C_n могат да бъдат формирани, свързвайки върховете с ребра?

Отговор: Да отбележим, че всеки връх от граф-контура може да бъде считан за начален. Ако фиксираме даден връх, то тогава имаме $(n - 1)$ възможности за избор на втори връх от граф-контура, $(n - 2)$ възможности за избор на трети връх, и т.н. По този начин имаме $(n - 1)!$ възможности за формиране на граф-контури. Разгледаният начин за получаване на граф-контурите е свързан с посока на обхождане от началния до последния възел. Поради това, горният брой възможности включват същите контури но при обратна посока на обхождане. Следователно, ре-

алният брой граф-контури $C_n = \frac{(n - 1)!}{2}$.

8 Лекция 8: Дървета

8.1 Дървета

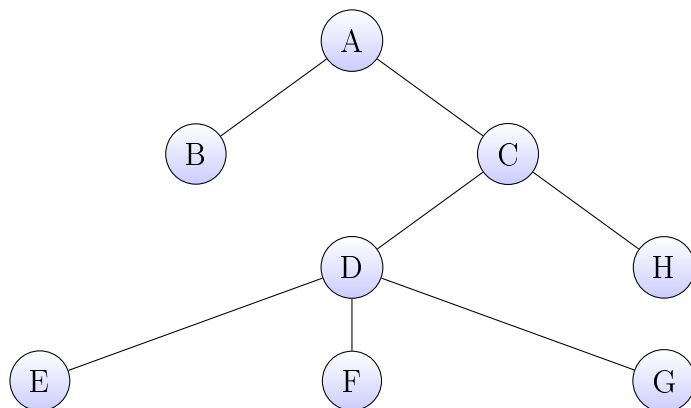
Дефиниция 8.1.1. Дървото е прост свързан граф, в който няма контури (затворени пътища).

Дървото не съдържа примки и между всяка двойка върхове може да има само едно ребро (няма кратни ребра).

Дефиниция 8.1.2. Гората е граф, в който всеки свързан компонент е дърво.

Теорема 8.1.1. Даден граф е дърво тогава и само тогава, когато между всеки два върха има само един път.

Дефиниция 8.1.3. Ако даден връх бъде определен за корен на дървото, то е възможно да бъде въведена посока на всяко от ребрата.



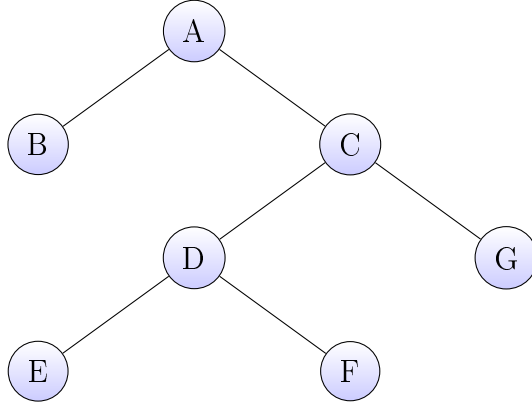
Видове върхове

- Корен - A ("начало")
- Вътрешен връх - C (има родител и деца)
- Лист - B (няма деца)
- Родител - C е родител на D (връх на по горно ниво)
- Прародител - A е прародител на D (родителя на родителя)
- Деца - E, F, G (имат родител, но нямат самите те деца)

Дефиниция 8.1.4. Едно дърво с корен е m -арно дърво ако всеки вътрешен връх има не повече от m върха деца.

Дефиниция 8.1.5. Дървото е пълно m -арно ако всеки вътрешен връх има точно m върха деца.

m -арно дърво с $m=2$ се нарича бинарно дърво.



8.2 Дървета с корен и наредба на върховете

Дефиниция 8.2.1. Дърво с корен и наредба на върховете е дърво с корен, за което върховете деца на всеки вътрешен връх са подредени. Дърветата с наредба се чертаят, така че върховете деца на всеки вътрешен връх се подреждат отляво наясно.

Теорема 8.2.1. Дадено дърво с n върха има $n - 1$ ребра.

Теорема 8.2.2. Дадено пълно m -арно дърво с i вътрешни върха има общо $n = m \cdot i + 1$ върхове.

8.3 Свойства на дърветата

Дадено пълно m -арно дърво с

1. n върха има $i = \frac{n-1}{m}$ вътрешни върхове и $l = \frac{(m-1)(n+1)}{m}$ листа
2. i вътрешни върха има $n = m \cdot i + 1$ върха и $l = (m-1)i + 1$ листа
3. l листа има $n = \frac{(ml-1)}{m-1}$ върха и $i = \frac{l-1}{m-1}$ вътрешни върха

Дефиниция 8.3.1. Нивото на даден връх v в дърво с корене дължината на единствения път от корена до този връх v .

Дефиниция 8.3.2. Височината на дадено дърво с корен е равна на максималното ниво на върховете.

Дефиниция 8.3.3. m -арно дърво с корен и височина h се нарича балансирано ако всичките му листа са на нива h или $h - 1$.

Дефиниция 8.3.4. В m -арно дърво с височина h има най-много m^h листа.

Теорема 8.3.1. Ако m -арно дърво с височина h има l листа, то $h \geq \lceil \log_m l \rceil$

8.4 Покриващо дърво

Покриващо дърво на даден граф е подграф, който съдържа всички върхове и е дърво (свързан без контури).

Един граф може да има много покриващи дървета, например за графа от фигурата.

8.5 Минимално покриващо дърво (МПД)

Минимално покриващо дърво (МПД) е подграф на неориентиран граф $G = (V, E)$ с тегла на ребрата, така че:

1. той е дърво (т.е. свързан без цикли)
2. състои се от всички върхове от множеството V и съдържа $|V| - 1$ ребра
3. общата сума от теглата на ребрата от покриващото дърво е минимална, по отношение на останалите покриващи дървета
4. може да има няколко покриващи дървета

Лема 8.5.1. Нека X е подмножество от върхове на графа G , и нека реброто e е ребро с най-малко тегло, което свързва X с $G - X$ (върховете, които не принадлежат на X).

Тогава e е част от МПД

8.6 Метод на Крускал

Нека елементите на минималното покриващо дърво (МПД) на графа $G = \{V, E\}$ формират множеството A .

1. Първоначално $A = \emptyset$.
2. Подреждат се елементите на множеството $E' = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ от ребра на графа по ненамаляващ ред на съответстващите им тегла в ново множество E' .
3. Завсеки елемент (ребро) (u, v) от подреденото множество E' , движейки се по нарастващ ред на номера на съответния елемент, се проверява дали той може да принадлежи на покриващото дърво, т.е. да не се допуска формиране на затворен контур.
 - При "да" разглежданото ребро (u, v) се добавя към покриващото дърво (елемент от множеството A)
 - При "не" се преминава към анализ на следващия по нарастващ ред на номера елемент от подреденото множество E' .

Критерият за спиране е когато всички върхове от анализирания неориентиран граф се включат в множеството A , т.е. принадлежат на търсеното МПД.

8.7 Метод на Прим

Нека елементите на минималното покриващо дърво (МПД) на графа $G = \{V, E\}$ формират множеството A .

1. Първоначално $A = \emptyset$.
2. Избира се произволен връх v_i от графа
3. Избира се реброто с най-малък тегловен коефициент, свързано с върха v_i , и се проверява дали то може да принадлежи на МПД, т.е. да не се допуска формиране на затворен контур от ребра принадлежащи на МПД.
 - При "да" разглежданото ребро се добавя към множеството A .

- При "не" се преминава към анализ на реброто със следващия по нарастващ ред тегловен коефициент, свързано с върха v_i .
4. От множеството от ребра свързани с върхове на ребрата от A се избира немаркирано (непринадлежащо на A) ребро с най-малък тегловен коефициент. Се проверява дали то може да принадлежи на МПД, т.е. да не се допуска формиране на затворен контур от ребра принадлежащи на покриващото дърво.
- При "да" разглежданото ребро се добавя към множеството A .
 - При "не" се преминава към анализ на реброто със следващия по нарастващ ред тегловен коефициент, свързано с някой от върховете на ребрата от A .
5. Стъпка 4 се повтаря, докато всички върхове от анализираният граф се включат в множеството A , т.е. принадлежат на търсеното МПД.

8.8 Особености на методите на Крускал и Прим

1. Метод на Крускал

- Като резултат от метода се получава множество от ребра A , което формира "гора".
- Дадено ребро се прибавя като елемент на множеството A винаги, когато на него съответства най-малкият по стойност все още неанализиран тегловен коефициент на ребро от графа, свързващо два несвързани върха.

2. Метод на Прим

- Като резултат от метода се получава множество от ребра A , което формира просто дърво.
- Дадено ребро се прибавя като елемент на множеството A винаги, когато то е свързано с анализирания възел и на него съответства най-малкият по стойност тегловен коефициент на всички ребра, излизащи от разглеждания възел на дървото.

9 Лекция 9: Комбинаторика и теория на вероятностите

10 Лекция 10: Теория на алгоритмите

11 **Лекция 11: Математическа индукция**

12 Лекция 12: Рекурсия

13 Лекция 13: Крайни автомати

14 Упражнения

14.1 Лекция 1

Задача 1

Кои от следните изречения са съждения? Какъв е резултатът от тези съждения?

1. "Китай е държава с най - много жители в света." (Съждение с резултат "Истина")
2. "София е най - големия град в света." (Съждение с резултат "Лъжа")
3. "Не пресичай улицата!" (Не е съждение, а команда)
4. "Колко е часът?" (Не е съждение, а въпрос)
5. $4 + 1 = 5$ (Съждение с резултат "Истина")
6. $4 + x = 5$ (Предикат: Истина, ако $x = 1$; Лъжа, ако $x \neq 1$)
7. $4 + x = 5$, ако $x = 1$ (Съждение с резултат "Истина")

Задача 2

Нека p , q , r са следните прости съждения:

p : "Разболяваш се."

q : "Не можеш да вземеш финалния изпит."

r : "Посещавал си теоретични курсове"

Да се опишат семантично следните комбинирани съждения:

1. $p \rightarrow q$ - "Ако си болен, няма да можеш да си вземеш финалния изпит."
2. $q \Leftrightarrow \neg r$ - "Няма да вземеш финалния изпит тогава и само тогава, когато не си посещавал теоретичния курс."
3. $q \rightarrow \neg r$ - "Ако не си взел финалния изпит, то тогава следва, че не си посещавал теоретичния курс."

4. $p \vee q \vee r$ - "(Ти си болен) или (не си взел финалния изпит) или (не си посещавал теоретичния курс) или и трите заедно."
5. $(p \rightarrow \neg r) \vee (q \rightarrow \neg r)$ - "(Ако си болен, тогава не си посещавал теоретичния курс) или (ако не си взел финалния изпит, то не си посещавал теоретичния курс) - или и двете заедно."
6. $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$ - "[(Болен си) и (не си взел финалния изпит)] или [(си взел финалния изпит) и (си посещавал теоретичния курс)]."

Задача 3

Нека p , q , r са следните прости съждения:

p : "Получил си 6 за годината."

q : "Решил си правилно всички домашни работи."

r : "Получил си 6 за всеки учебен срок."

Да се опишат следните комбинирани съждения с логически изрази:

1. "(Получил си 6 за всеки от сроковете), но (не си решил правилно всички домашни работи) $r \wedge \neg q$
2. "(Получил си 6 за годината) и (си решил правилно всички домашни работи) и (си получил си 6 за всеки учебен срок). $p \wedge q \wedge r$
3. "Ако (имаш 6 за всеки учебен срок), то (ще имаш 6 за годината).- $r \rightarrow q$
4. "(Получил си 6 за всеки учебен срок), но (не си решил правилно всички домашни работи), но въпреки това (си получил 6 за годината). $r \wedge \neg q \wedge p$
5. "(Получаването на 6 за всеки учебен срок) и (правилното решаване на всички домашни работи) е достатъчно условие за (получаване на 6 за годината). $(r \wedge q) \rightarrow p$
6. "(Ти си получил 6 за годината) тогава и само тогава когато [(си решил правилно всички домашни работи) и (си получил 6 за всеки учебен срок)]. $\Leftrightarrow (q \wedge r)$

Задача 4

Да се състави таблица на истинност за следните комбинирани съждения:

1. $\neg p \otimes \neg p$
2. $(p \vee q) \wedge \neg r$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
4. $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$

Решение:

1. $\neg p \otimes \neg p$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \otimes \neg p$
F	F	T	T	F
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
T	T	F	F	F

2. $(p \vee q) \wedge \neg r$

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \wedge \neg r$
F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	F	F

3. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

p	q	$p \rightarrow q$	r	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
F	F	T	F	F
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	F	T	T
T	T	T	F	F
T	T	T	T	T

4. $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge r$	$(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$
F	F	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	T
T	T	T	F	F	T	T

Задача 5

Да се докаже по 2 начина, че всеки от следните логически изрази е тавтология:

1. Чрез таблица на истинност.
2. Чрез закони за еквивалентно преобразуване.

1. $(p \wedge q) \rightarrow q$

2. $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$

$$3. [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

Решение:

$$1. (p \wedge q) \rightarrow q$$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow q$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee q \quad (\text{закон за импликация})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \quad (\text{закон на де Морган})$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee q) \quad (\text{асоциативен закон})$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee T \quad (\text{закон за тривиална тавтология})$$

$$\Leftrightarrow T \quad (\text{закон за доминиране})$$

$$2. [\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$	$[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$
F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
T	T	F	T	F	T

$$[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow \neg[\neg p \wedge (p \vee q)] \vee q \quad (\text{закон за импликация})$$

$$\Leftrightarrow [\neg\neg p \vee (p \vee q)] \vee q \quad (\text{закон на де Морган})$$

$$\Leftrightarrow [p \vee \neg(p \vee q)] \vee q \quad (\text{закон за двойното отрицание})$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \vee \neg(p \vee q) \quad (\text{асоциативен закон})$$

$$\Leftrightarrow T \quad (\text{закон тривиална тавтология})$$

3. $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

$$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow [p \wedge (\neg p \vee q)] \rightarrow q \quad (\text{закон за импликация})$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)] \rightarrow q \quad (\text{дистрибутивен закон})$$

$$\Leftrightarrow [F \vee (p \wedge q)] \rightarrow q \quad (\text{закон за тривиално опровержение})$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow q \quad (\text{комутативен закон и закон за идентичност})$$

$$\Leftrightarrow T \quad (\text{доказано в 1.})$$

14.2 Лекция 2

14.3 Лекция 3

14.4 Лекция 4

14.5 Лекция 5

14.6 Лекция 6

14.7 Лекция 7

14.8 Лекция 8

14.9 Лекция 9

14.10 Лекция 10

14.11 Лекция 11

14.12 Лекция 12

14.13 Лекция 13