

Дискретна математика

Exonaut

24 март 2021 г.

Съдържание

1	Лекция 1: Логика и логически оператори	3
1.1	Дефиниции	3
1.2	Логически оператори	4
1.2.1	Отрицание(NOT)	4
1.2.2	И, Конюнкция (AND)	4
1.2.3	ИЛИ, Дизюнкция (OR)	4
1.2.4	Сума по модул 2, изключващо или (XOR)	5
1.2.5	Импликация, следствие	5
1.2.6	Двупосочно следствие	5
1.3	Закони за еквивалентни преобразувания	6
1.4	Предикатни функции и предикати	7
1.5	Квантор	7
1.6	Закони на Де Морган за квантори	7
2	Лекция 2: Математически доказателства	8
2.1	Теория на доказателствата	8
2.2	Терминология	8
2.3	Правила за извод	9
2.4	Аргументи	10
2.5	Правила за извод при използване на квантори и предикати	10
2.6	Доказателство на теореми	11
3	Лекция 3: Теория на множества	12
3.1	Парадокс на Ръсел	12
3.2	Множества	13
3.2.1	Равенство на множества	13
3.2.2	Подмножества	13
3.2.3	Собствени подмножества	14
3.2.4	Число на кардиналност, мощност(брой елементи) на множество	14
3.2.5	Множество от всички подмножества на дадено мно- жество	14
3.2.6	Декартово произведение	15
3.3	Операции на множества	15
3.3.1	Обединение	15
3.3.2	Сечение	15

3.3.3	Разлика	15
3.3.4	Допълнение	16
3.4	Идентичност на законите за логическо преобразуване и законите за операции с множества	16
4	Лекция 4: Релации (Отношения)	18
4.1	Релации	18
4.2	Функциите като релации	18
4.3	Релации, дефинирани върху множество	18
4.4	Свойства на релациите	19
4.5	Операции с релациите	20
4.5.1	Комбиниране на релациите	20
4.6	n-арни релации	21
4.7	Бази данни и релации	21
4.8	Представяне релации	22
4.8.1	Булеви матрици	22
4.8.2	Ориентирани графи	24
4.9	Релации на еквивалентност	24
4.10	Класове на еквивалентност	25
5	Лекция 5: Функции	27
5.1	Функциите като релации	28
5.2	Свойства на функции	28
5.2.1	Инекция	28
5.2.2	Строго нарастваща/намаляваща	29
5.2.3	Сюрекция	29
5.2.4	Биекция	29
5.3	Обратна функция	29
5.4	Крайни и безкрайни множества	29
5.5	Принцип на Дирихле	30
5.6	Композиция	30
5.7	Функции най-голямо цяло (Floor) и най-малко цяло(Ceiling)	31
6	Лекция 6:	32

1 Лекция 1: Логика и логически оператори

1.1 Дефиниции

Дефиниция 1.1.1 *Логиката е система, базирана на съждения*

Дефиниция 1.1.2 *Съждението е твърдение което може да бъде истина или лъжа (но не и двете едновременно).*

Следователно резултатът от едно съждение може да бъде истина (И) или ако то е вярно или лъжа (Л), ако е грешно.

Дефиниция 1.1.3 *Съжденията, които не съдържат в себе си други съждения, се наричат **прости**.*

Дефиниция 1.1.4 *Едно и няколко съждения могат да бъдат обединени в едно единствено **комбинирано съждение**, посредством логически оператори.*

Дефиниция 1.1.5 *Таблица на истинност се нарича таблица, в която се изброяват всички възможни комбинации от стойности на отделните променливи в съждението, както и съответните стойности на функцията.*

Дефиниция 1.1.6 *Две съждения са **еквиваленти**, ако имат една и съща таблица на истинност или следват едно от друго вследствие прилагани основни закони за преобразуване.*

1.2 Логически оператори

1.2.1 Отрицание(NOT)

Означава се със знака \neg

Функция на една променлива с таблица на истинност:

p	$\neg p$
T	F
F	T

1.2.2 И, Конюнкция (AND)

Означава се със знака \wedge

Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

1.2.3 ИЛИ, Дизюнкция (OR)

Означава се със знака \vee

Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

1.2.4 Сума по модул 2, изключващо или (XOR)

Означава се със знака \otimes

Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	q	$p \otimes q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

1.2.5 Импликация, следствие

Означава се със знака \rightarrow

Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

1.2.6 Двупосочно следствие

Означава се със знака \Leftrightarrow

Функция на две променливи с таблица на истинност:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

1.3 Закони за еквивалентни преобразувания

- Закон за идентичност :

$$p \wedge T \equiv p, p \vee F \equiv p$$

- Закон за доминиране :

$$p \vee T \equiv T, p \wedge F \equiv F$$

- Закон за пълна идентичност :

$$p \wedge p \equiv p, p \vee p \equiv p$$

- Закон за двойно отрицание :

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

- Комутативен закон :

$$p \wedge q \equiv q \wedge p | p \vee q \equiv q \vee p$$

- Асоциативен закон :

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r | p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

- Дистрибутивен закон :

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) | p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Закони на Де Морган :

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) | \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

- Закон за импликацията :

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

- Закон за тривиалната тавтология:

$$p \vee \neg p \equiv T | p \wedge \neg p \equiv F$$

- Закон за тривиалното опровержение :

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg(p \otimes q), \neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \otimes q)$$

1.4 Предикатни функции и предикати

Дефиниция 1.4.1 (Предикатна функция) *Предикатна функция е твърдение, което съдържа една или повече променливи.*

Ако на дадена променлива е присвоена стойност, се казва, че е известна.

Предикатна функция става съждение, ако всички нейни аргументи са известни.

Дефиниция 1.4.2 (Предикат) *Нека е дадена предикатна функция $Q(x, y, z)$. Свойството Q , с което се задава връзката между променливите x , y , z се нарича предикат.*

1.5 Квантор

Нека $P(x)$ е предикатна функция.

Дефиниция 1.5.1 (Квантор за общност) *За твърдения от вида:*

За всяко x , $P(x)$ е истина/лъжа.

се записва :

$\forall x P(x)$ "за всяко x $P(x)$ "

Знака за общност е \forall .

Дефиниция 1.5.2 (Квантор за съществуване) *За твърдения от вида:*

*Съществува **такова** x , за което $P(x)$ е истина/лъжа.*

се записва :

$\exists x P(x)$ "съществува x , **такова** че $P(x)$ е истина/лъжа" или "Съществува поне едно x , за което $P(x)$ е истина/лъжа"

Знака за общност е \exists .

1.6 Закони на Де Морган за квантори

- $\neg(\forall P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$
- $\neg(\exists P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$

2 Лекция 2: Математически доказателства

2.1 Теория на доказателствата

Теорията на доказателствата се използва за определяне на верността на дадени математически аргументи и за конструирането им.

Дефиниция 2.1.1 (Дедукция) *Дедукция във философията означава извеждане на особеното и единичното от общото, както и схващане на единичния случай на базата на всеобщ закон. В кибернетиката означава извеждане на твърдения от други твърдения с помощта на логически заключения.*

2.2 Терминология

Дефиниция 2.2.1 (Аксиома) *Аксиомата е базово допускане, което не е необходимо да се доказва. Аксиомите са твърдения, които са истина, или твърдения които се приемат за истина, но не могат да бъдат доказани.*

Дефиниция 2.2.2 (Доказателство) *Доказателството се използва, за да се докаже, че дадено твърдение е истина. То се състои от последователност от твърдения, които формират **аргумент**.*

Дефиниция 2.2.3 (Теорема) *Теорема е твърдение, чиято истинност се доказва.*

Теоремата се състои от две части: условия(хипотези) и извод(заключения). Коректното доказателство (по дедукция) се състои в това да се установи:

- *Ако условията са изпълнени, то извода е истина.*
- *Ако съждението "условия \rightarrow извод" е тавтология.*

Често липват елементи на логическа връзка, която може да бъде изпълнена с допълнителни условия и аксиоми и съждения, свързани помежду си посредством подходящи правила за изводи.

Дефиниция 2.2.4 (Лема) *Лемата е проста теорема, което се използва като междинен резултат за доказване на друга теорема.*

Дефиниция 2.2.5 (Слествие) Следствието е резултат, който директно следва от съответната теорема

Дефиниция 2.2.6 (Допускане) Допускането е твърдение, чийто резултат е неизвестен. Веднъж доказано, то се превръща в теорема.

2.3 Правила за извод

\therefore - знак за следователно

Всичко преди знака са хипотези.

- Събиране (Addition)

$$\begin{array}{l} p(q) \\ \therefore p \vee q \end{array}$$

- Опростяване (Simplification)

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \therefore p(q) \end{array}$$

- Конюнкция (Conjunction)

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

- Закон за безразличие (Modus ponens)

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \therefore q \end{array}$$

- Modus tollens

$$\begin{array}{l} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \therefore \neg p \end{array}$$

- Хипотетичен силлогизъм (Hypothetical syllogism)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

- Дизюнктивен силогизъм

$$p \vee q$$

$$\neg p$$

$$\therefore q$$

2.4 Аргументи

Дефиниция 2.4.1 (Аргумент) Аргументът се състои от една или няколко хипотези и заключение.

Аргумент е валиден, ако всичките му хипотези са истина и заключението също е истина.

Ако някоя от хипотезите е лъжа, дори валиден аргумент може да води до некоректно заключение.

Доказателство: трябва да се докаже че твърдението "хипотези \rightarrow заключение" е истина, като се използват правила за извод.

Пример 2.4.1 "Ако 101 е кратно на 3, то 101^2 се дели на 9."

Въпреки че аргументът е валиден, заключението е некоректно (невярно), защото едната от хипотезите ("101 е кратно на 3") е лъжа.

Ако в аргумента 101 се замени с 102, ще се получи коректно заключение "102² е кратно на 9".

Нека p : "101 е кратно на 3" и q : " 101^2 е кратно на 9". Тогава имаме следния случай

$$p$$

$$p \rightarrow q$$

$$\therefore q$$

Обаче p е лъжа, следователно q е некоректно заключение.

2.5 Правила за извод при използване на квантори и предикати

- Универсалноследствие (Universal instantiation)
 $\forall x P(x)$
 $\therefore P(c)$ ако $c \in U$
- Универсално обобщение (Universal generalization)
 $P(c)$ за някое $c \in U$
 $\therefore \forall x P(x)$

- Частично следствие (Existential instantiation)
 $\exists x P(x)$
 $\therefore P(c)$ за някой елемент $c \in U$
- Частично обобщение (Existential generalization)
 $P(c)$ за някой елемент $c \in U$
 $\therefore \exists x P(x)$

2.6 Доказателство на теореми

- Директно доказателство
 Импликацията " $p \rightarrow q$ " може да бъде доказана чрез доказване на твърдението:
 "Ако p е истина, то q също е истина."
- Индиректно доказателство
 Импликацията " $p \rightarrow q$ " е еквивалентна на следния контра-пример " $\neg q \rightarrow \neg p$ ". Следователно, доказателството на изходната импликация " $p \rightarrow q$ " се свежда до доказване на твърдението: "Ако q е лъжа, то и p също е лъжа."

3 Лекция 3: Теория на множества

3.1 Парадокс на Ръсел

Някои множества (класове) съдържат себе си а други не.

Ръсел нарича множествата класове.

Класът от всички класове е клас, който се съдържа (принадлежи) на себе си. Празният клас не принадлежи на себе си. Да допуснем, че може да създадем клас от всички класове, като празния например, които не съдържат себе си.

Парадоксът възниква при въпроса, дали този клас принадлежи на себе си.

Множеството от всички множества, които не съдържат себе си !?

$$M = \{A | A \notin A\}$$

- Множество – първично понятие
- Принадлежност на елемент към множеството – първично понятие
 $x \in A \rightarrow$ Елементът x принадлежи на A .
- Свойство – понятие от логиката и се приема за първично.
 P – свойство. Ако даден предмет x го притежава се записва $P(x)$

Дефиниция 3.1.1 (Множества) *Множества се дефинират като се изброяват елементите му*

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

за безкрайни множества е по - удобно като се използва свойство за принадлежност

$$R = \{x | P(x)\}$$

Аксиома 3.1.1 *Ако го има свойството P , то съществува множеството на всички обекти, които имат това свойство P .*

Аксиома 3.1.2 *Две множества са равни, ако съдържат еднакви елементи.*

Дефиниция 3.1.2 (Нормално множество) *Нормално множество е множество, което не принадлежи на себе си $A \notin A$*

3.2 Множества

- Множество е неопределена съвкупност от нула или повече различни обекти (наречени елементи).
- $a \in A$ - "а е елемент на множеството А"
- $a \notin A$ - "а не е елемент на А"
- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - "А се състои от a_1, a_2, \dots, a_n "
- Подреждането на елементите не е от значение.
- Няма значение ако някой елемент се повтаря.

Пример 3.2.1 • $A = \emptyset$ - празно множество

- $A = \{z\}, z \in A, z \neq \{z\}$
- $A = \{\{b, c\}, \{c, x, d\}\}$ - множество от множества
- $A = \{\{x, y\}\}, \{x, y\} \in A, \{x, y\} \neq \{\{x, y\}\}$
- $A = \{x | P(x)\}$

3.2.1 Равенство на множества

Дефиниция 3.2.1 Множествата A и B са равни тогава и само тогава, когато съдържат едни и същи елементи.

Пример 3.2.2 $A = \{9, 2, 7, 3\}, B = \{7, 9, -3, 2\} : A = B$

$A = \{\text{куче, котка, кон}\}, B = \{\text{котка, кон, катерица, куче}\} : A \neq B$

$A = \{\text{куче, котка, кон}\}, B = \{\text{котка, кон, куче, куче}\} : A = B$

3.2.2 Подмножества

$A \subseteq B$ - "А е подмножество на В"

$A \subseteq B$ тогава и само тогава, когато всеки елемент на А е и елемент на В

Формален запис:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Правила

- $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
- $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C)$
- $\emptyset \subseteq A$ за всяко множество A (но $\emptyset \in A$ не е вярно за всяко множество A)
- $\subseteq A$ за всяко множество A

3.2.3 Собствени подмножества

$A \subset B$ - " A е собствено подмножество на B "

$A \subseteq B$ и $A \neq B$

Формален запис:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

или

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \neg \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

3.2.4 Число на кардиналност, мощност(брой елементи) на множество

Ако множеството S съдържа n различни елемента, $n \in \mathbb{N}$, Множеството S е крайно множество с кардиналност (мощност) n .

Мощност: $|P(A)| = 2^{|A|}$

Пример 3.2.3 $A = \{Mercedes, BMW, Porsche\}, |A| = 3$

$B = \{1, \{2, 3\}, \{4, 5\}, 6\}, |B| = 4$

$C = \emptyset, |C| = 0$

$D = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 7000\}, |D| = 7001$

$E = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 7000\}, |E| = \infty$

3.2.5 Множество от всички подмножества на дадено множество

$P(A)$ "множеството от всички подмножества на A " (записва се като 2^A)

$P(A) = \{B | B \subseteq A\}$

3.2.6 Декартово произведение

Дефиниция 3.2.2 (Декартово произведение) Декартово произведение на две множества A и B е ново множество $A \times B$, което се дефинира като

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

т.е. декартовото произведение е множество от наредени двойки.

Пример 3.2.4 $A = \{x, y\}, B = \{a, b, c\}$
 $A \times B = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$

- $A \times \emptyset = \emptyset$
- $\emptyset \times A = \emptyset$
- За непразни множества A и B : $A \neq B \Leftrightarrow A \times B \neq B \times A$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

3.3 Операции на множества

3.3.1 Обединение

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Пример 3.3.1 $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$
 $A \cup B = \{a, b, c, d\}$

3.3.2 Сечение

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Несвързани множества: Няма общи елементи, $A \cap B = \emptyset$

Пример 3.3.2 $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$
 $A \cap B = \{b\}$

3.3.3 Разлика

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Пример 3.3.3 $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$
 $A \setminus B = \{a\}$

3.3.4 Допълнение

$$A^c \equiv \overline{A} = U - A$$

U - универсално множество.

Пример 3.3.4 $U = N$

$$B = \{250, 251, 252, \dots\}$$

$$\overline{B} = \{0, 1, 2, \dots, 248, 249\}$$

3.4 Идентичност на законите за логическо преобразуване и законите за операции с множества

- Закон за идентичност :
 $A \cup \emptyset = A$
 $A \cap U = A$
- Закон за доминиране :
 $A \cup U = U$
 $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Закон за пълна идентичност :
 $A \cup A = A$
 $A \cap A = A$
- Закон за двойно отрицание :
 $\overline{\overline{A}} \equiv (A^c)^c = A$
- Комутативен закон :
 $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$
- Асоциативен закон :
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Дистрибутивен закон :
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Закони на Де Морган :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
- Закон за поглъщането :

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$
- Закон за допълнението:

$$A \cup \overline{A} = U$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

4 Лекция 4: Релации (Отношения)

4.1 Релации

Дефиниция 4.1.1 (Бинарна релация) Нека A и B са две множества. Бинарна релация от A в B е подмножество на $A \times B$.

С други думи, за дадена бинарна релация R е в сила $R \subseteq A \times B$. Означението aRb означава $(a, b) \in R$, а означението $a \underline{R} b$ означава, че $(a, b) \notin R$.

Когато $(a, b) \in R$ се казва, че a е в отношение с b чрез R .

Пример 4.1.1 Нека P е множество от хора, C е множество от коли, а D е релацията, която описва кой човек каква кола (коли) кара.

$P = \{\text{Иван, Лили, Петър, Валя}\},$

$C = \{\text{Опел, BMW, Рено}\}$

$D = \{(\text{Иван, Опел}), (\text{Лили, Опел}), (\text{Лили, Рено}), (\text{Петър, BMW})\}$

4.2 Функциите като релации

Графиката на f е множество от наредени двойки (a, b) , такова че $b = f(a)$. Тъй като графиката на f е подмножество на $A \times B$, то тя е релация от A в B .

Още повече, за всеки елемент на A , съществува точно една наредена двойка в графиката на функцията, чийто първи елемент е a .

Обратно, ако R е релация от A в B , такава че всеки елемент от A е първи елемент на само една наредена двойка от R , тогава функцията може да бъде дефинирана посредством R като нейна графика.

Това се прави като на всеки елемент $a \in A$ се присвоява само един елемент $b \in B$, така че $(a, b) \in R$.

4.3 Релации, дефинирани върху множество

Дефиниция 4.3.1 Релация, дефинирана върху множество A , е релация от A в A .

С други думи, дадена релация, дефинирана върху множество A , е подмножество на $A \times A$.

Пример 4.3.1 Нека $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Кои наредени двойки са от релацията $R = \{(a, b) | a < b\}$

Решение: $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

Колко различни релации могат да бъдат дефинирани върху едно множество A с n елемента?

Броят на елементите на $A \times A = n^2$, тогава броя на подмножествата (релации върху A) е 2^{n^2} - броят на елементите на множеството от всички подмножества на $A \times A$.

Отговор: Броят на различните релации, дефинирани върху A , е 2^{n^2}

4.4 Свойства на релациите

Дефиниция 4.4.1 (Рефлексивна) Релацията R , дефинирана върху A , се нарича **рефлексивна**, ако $(a, a) \in R$ за всеки елемент $a \in A$

Дефиниция 4.4.2 (Антирефлексивна) Релацията R , дефинирана върху A , се нарича **антирефлексивна**, ако $(a, a) \notin R$ за всеки елемент $a \in A$

Дефиниция 4.4.3 (Симетрична) Релацията R , дефинирана върху A , се нарича **симетрична**, ако $(b, a) \in R$ когато $(a, b) \in R$ за $a, b \in R$.

Дефиниция 4.4.4 (Антисиметрична) Релацията R , дефинирана върху A , се нарича **антисиметрична**, ако когато $(a, b) \in R$ и $(b, a) \in R$ то $a = b$, $a, b \in R$.

Дефиниция 4.4.5 (Асиметрична) Релацията R , дефинирана върху A , се нарича **асиметрична**, ако когато $(a, b) \in R$ и $(b, a) \notin R$ за $a, b \in R$.

Дефиниция 4.4.6 (Транзитивна) Релацията R , дефинирана върху A , се нарича **транзитивна**, ако когато $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$, тогава $(a, c) \in R$ за $a, b, c \in A$.

Пример 4.4.1 Релации, дефинирани върху $\{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$ - рефлексивна

$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$ - симетрична

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ - антисиметрична

$R = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$ - асиметрична

$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ - транзитивна

4.5 Операции с релациите

Релациите са множества, и затова, върху тях може да бъдат прилагани стандартни **операции с множества**.

Ако R_1, R_2 са релации от множеството A в множеството B , тогава може да разгледаме операциите $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2$

Във всеки от случаите, резултатът от операциите е друга релация от A в B .

4.5.1 Комбиниране на релациите

Дефиниция 4.5.1 Нека R е релация от множеството A в множеството B и S е релация от множеството B в множеството C .

Композицията от R и S е релация състояща се от наредени двойки $(a, c); a \in A, c \in C$ и за които съществува елемент $b \in B$ такива че $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in S$

Композицията се означава $S \circ R$.

Пример 4.5.1 Нека D и S са релации от $\{1, 2, 3, 4\}$

$$D = \{(a, b) | b = 5 - a\}$$

$$S = \{(a, b) | a < b\}$$

$$D = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

$$S \circ R = \{(2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$S \circ R = \{(a, b) | b > 5 - a\} \Leftrightarrow S \circ R = \{(a, b) | a + b > 5\}$$

Дефиниция 4.5.2 Нека R е релация дефинирана върху множеството A . Степените на R при получаване на композиция, $R^n, n = 1, 2, 3, \dots$, се дефинират по индукция като

$$R^1 = R$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R$$

$$R^n = R \circ R \circ \dots \circ R \text{ (} n\text{-пъти } R\text{)}$$

Теорема 4.5.1 Релацията R върху множеството A е транзитивна тогава и само тогава когато $R^n \subseteq R$ за всяко цяло положително число n .

4.6 n-арни релации

Дефиниция 4.6.1 Нека A_1, A_2, \dots, A_n са множества. n -арна релация върху тези множества е подмножеството $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Множествата A_1, A_2, \dots, A_n се наричат области (домейни) на релацията, а n - ред на релацията.

Пример 4.6.1 Нека $R = \{(a, b, c) | a = 2b \wedge b = 2c; a, b, c \in \mathbb{N}\}$

Редът на R - 3, тъй като елементите са тройки.

Области на R - множеството на естествените числа \mathbb{N}

$(2, 4, 8)$ - не е от R

$(4, 2, 1)$ - е от R

4.7 Бази данни и релации

Дефиниция 4.7.1 Базата данни се състои от n -торки наречени **записи**, които са изградени от **атрибути (полета)**. Тези полета (атрибути) са **позициите** в n -торките.

Релационният модел на данните представя базата данни като n -арна релация, което по същество представлява множество от записи, като всеки от **атрибутите (полетата)** има своя **област (домейн)**.

Пример 4.7.1 Разглеждаме база данни от студенти, чиито записи представляват наредени 4-торки с полета (атрибути): Име, Фак.номер, Факултет, и Успех:

$R = \{(\text{Иван}, 231455, \text{ФА}, 4.88), (\text{Георги}, 888323, \text{ФЕТТ}, 4.45), (\text{Димитър}, 232147, \text{ФА}, 5.29), (\text{Петър}, 453876, \text{ФКСУ}, 5.45), (\text{Николай}, 458543, \text{ФКСУ}, 4.45), (\text{Стефан}, 886576, \text{ФЕТТ}, 5.18)\}$

Прост код: ако n -торките могат да бъдат точно определени по стойностите на това поле. Това означава, че няма два (или повече) записа с една и съща стойност на полето, което е прост код.

Дефиниция 4.7.2 (Проекция) Проекцията P_{i_1, i_2, \dots, i_m} изобразява n -торката (a_1, a_2, \dots, a_n) в m -торка $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$ където $m \leq n$

Пример 4.7.2 Какъв резултат се получава, ако се приложи проекцията $P_{2,4}$ на записа от базата данни:

(Георги, 888323, ФЕТТ, 4.45)? Отговор: Наредена двойка (888323, 4.45)

Дефиниция 4.7.3 (Съединение) Нека R е релация от ред m а S е релация от ред n . Съединение $J_p(R, S)$, където $p \leq m$ и $p \leq n$, е релация от ред $m + n - p$, която съдържа всички $(m + n - p)$ -торки

$$(a_1, a_2, \dots, a_{m-p}, c_1, c_2, \dots, c_p, b_1, b_2, \dots, b_{n-p})$$

такива че m -торката $(a_1, a_2, \dots, a_{m-p}, c_1, c_2, \dots, c_p)$ принадлежи на R , а n -торката $(c_1, c_2, \dots, c_p, b_1, b_2, \dots, b_{n-p})$ принадлежи на S .

Пример 4.7.3 Да се определи съединението $J_1(Y, R)$, където релацията Y съдържа атрибутите Год. на раждане и Име.

$Y = \{(1982, \text{Иван}), (1980, \text{Георги}), (1984, \text{Димитър}), (1979, \text{Петър}), (1983, \text{Николай}), (1985, \text{Стефан})\}$

$R = \{(\text{Иван}, 231455, \text{ФА}, 4.88), (\text{Георги}, 888323, \text{ФЕТТ}, 4.45), (\text{Димитър}, 232147, \text{ФА}, 5.29), (\text{Петър}, 453876, \text{ФКСУ}, 5.45), (\text{Николай}, 458543, \text{ФКСУ}, 4.45), (\text{Стефан}, 886576, \text{ФЕТТ}, 5.18)\}$

Решение:

$J_1 = \{(1982, \text{Иван}, 231455, \text{ФА}, 4.88), (1980, \text{Георги}, 888323, \text{ФЕТТ}, 4.45), (1984, \text{Димитър}, 232147, \text{ФА}, 5.29), (1979, \text{Петър}, 453876, \text{ФКСУ}, 5.45), (1983, \text{Николай}, 458543, \text{ФКСУ}, 4.45), (1985, \text{Стефан}, 886576, \text{ФЕТТ}, 5.18)\}$

Тъй като Y има два атрибута, R има четири атрибута, а общият атрибут Име е един, релацията $J_1(Y, R)$ има $2 + 4 - 1 = 5$ атрибута.

4.8 Представяне релации

Два нови начина за представяне на релации: булеви матрици и ориентирани графи.

4.8.1 Булеви матрици

Ако R е релация от $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ в $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, то R може да бъде представена посредством булева матрица (матрица с елементи единици и нули)

$M_R = [m_{ij}]$ с елементи

$m_{ij} = 1, (a_i, b_j) \in R,$

$m_{ij} = 0, (a_i, b_j) \notin R.$ За формиране на матрицата трябва първо да се изредят елементите на A и B в определен (но произволен) ред.

Пример 4.8.1 Да се представи релацията $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ като булева матрица?

Решение:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрици, които представят релации върху множество трябва да бъдат квадратни матрици.

Матрици, които представят рефлексивни релации всички елементи от главния диагонал на такива матрици M_{ref} трябва да са единици.

Матрици, които представят симетрични релации трябва да бъдат симетрични матрици, $M_R = (M_R)^T$.

При определяне на матрицата, която представя обединение на две релации се прилага логическата операция “или” върху съответните елементи на матриците, представящи релациите.

При определяне на матрицата, която представя сечение на две релации се прилага логическата операция “и” върху съответните елементи на матриците, представящи релациите.

Пример 4.8.2 Нека релациите R и S се представят с матриците:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Определете матриците, които представят $R \cup S$ и $R \cap S$?

Решение:

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Дефиниция 4.8.1 Нека $A = [a_{ij}]$ е $m \times k$ булева матрица, а $B = [b_{ij}]$ е $k \times n$ булева матрица.

Булевото произведение на A и B , се означава с $A \circ B$, и е $m \times n$ матрица (i, j) -тият елемент $[c_{ij}]$, на която е

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

$c_{ij} = 1$ тогава и само тогава, когато поне един от компонентите $(a_{in} \vee b_{nj})$ е 1 за някое n ; $c_{ij} = 0$ в останалите случаи.

4.8.2 Ориентирани графи

Дефиниция 4.8.2 (Ориентиран граф) *Ориентираният граф, се състои от множество V от върхове (или възли) и множество E от наредени двойки от V наречено ребра (или дъги). Върха се нарича начален връх на ребро (a, b) , а връх b се нарича краен връх на реброто. Стрелките се използват за означаване на посоките.*

Очевидно всяка релация R върху A може да се представи с ориентиран граф, като елементите на A са негови върхове, а всички наредени двойки $(a, b) \in R$ са негови ребра.

Обратно, всеки ориентиран граф с върхове V и ребра E може да се представи с релация върху V , съдържаща всички наредени двойки от E .

Това взаимно еднозначно съответствие между релации и ориентирани графи означава, че всяко твърдение за релациите е приложимо за ориентирани графи и обратно.

4.9 Релации на еквивалентност

Дефиниция 4.9.1 (Релация на еквивалентност) *Дадена релация, дефинирана върху множеството A , се нарича релация на еквивалентност ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна.*

Два елемента, свързани посредством дадена релация на еквивалентност R , се наричат еквивалентни.

Тъй като R е симетрична, a е еквивалентен на b , когато b е еквивалентен на a .

Тъй като R е рефлексивна, всеки елемент е еквивалентен на себе си.

Тъй като R е транзитивна, ако a и b са еквивалентни и b и c са еквивалентни, то a и c са еквивалентни.

Очевидно, тези три свойства са необходими за обосновано дефиниране на еквивалентността.

Пример 4.9.1 *Нека R е релация върху множество от думи на български език, такава че aRb тогава и само тогава, когато $l(a) = l(b)$, където $l(x)$ е дължината на думата x .*

Релация на еквивалентност ли е R ? Решение:

R е рефлексивна, защото $l(a) = l(a)$ и следователно aRa за всяка дума a .

R е симетрична, защото ако $l(a) = l(b)$ то $l(b) = l(a)$, така че ако aRb то bRa .

R е транзитивна, защото ако $l(a) = l(b)$ и $l(b) = l(c)$, то $l(a) = l(c)$, така че от aRb и bRc , следва че aRc .

Следователно R е релация на еквивалентност.

4.10 Класове на еквивалентност

Дефиниция 4.10.1 (Клас на еквивалентност) Нека R е релация на еквивалентност дефинирана върху множеството A . Множеството от всички елементи свързани с даден елемент " a " от A посредством R се нарича клас на еквивалентност на " a ".

Класът на еквивалентност на " a " по отношение на R се означава с $[a]_R$. Ако $b \in [a]_R$, b - представител.

Пример 4.10.1 (котка) е множеството от всички думи на български език с пет букви. Например, "петел" е представител на този клас на еквивалентност.

Теорема 4.10.1 Нека R е релация на еквивалентност, дефинирана върху A . Долните твърдения са еквивалентни:

- aRb
- $[a] = [b]$
- $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Дефиниция 4.10.2 (Разбиване) Разбиванена множеството S е съвкупност от несвързани, непразни подмножества от S , чието обединение е S .

С други думи, съвкупността от подмножества $A_i, i \in I$, формират разделяне на S тогава и само тогава, когато

- $A_i \neq \emptyset, i \in I$
- $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = S$

Пример 4.10.2 Нека S е $\{u, t, b, r, o, c, k, s\}$.

Разбиване на S ли са долните съвокупности от множества?

$\{\{t, o, c, k\}, \{r, u, b, s\}\}$ - да.

$\{\{c, o, t, b\}, \{u, s\}, \{r\}\}$ - не (k липсва).

$\{\{b, r, o, c, k\}, \{t, u, s, t\}\}$ - не (t не е от S).

$\{\{u, t, b, r, o, c, k, s\}\}$ - да.

$\{\{b, o, o, k\}, \{r, u, t\}, \{c, s\}\}$ - да ($\{b, o, o, k\} = \{b, o, k\}$).

$\{\{u, t, b\}, \{r, o, c, k, s\}, \emptyset\}$ не (\emptyset не е позволено).

Теорема 4.10.2 Нека R е релация на еквивалентност, дефинирана върху S . Тогава класовете на еквивалентност, свързани с R , формират разбиване на S .

Обратно, за дадено разбиване $\{A_i | i \in I\}$ на множеството S , съществува релация на еквивалентност R , за която множествата $A_i, i \in I$, са класове на еквивалентност.

Пример 4.10.3 Нека Иван, Силвия и Георги живеят в София, Мая и Петър живеят в Пловдив, а Кирил живее в Бургас.

Нека R е релация на еквивалентност $\{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ живеят в един и същ град}\}$ върху множеството $P = \{\text{Иван, Силвия, Георги, Мая, Петър, Кирил}\}$.

Тогава

$R = \{(\text{Иван, Иван}), (\text{Иван, Силвия}), (\text{Иван, Георги}), (\text{Силвия, Иван}), (\text{Силвия, Силвия}), (\text{Силвия, Георги}), (\text{Георги, Иван}), (\text{Георги, Силвия}), (\text{Георги, Георги}), (\text{Мая, Мая}), (\text{Мая, Петър}), (\text{Петър, Мая}), (\text{Петър, Петър}), (\text{Кирил, Кирил})\}$.

Класовете на еквивалентност, свързани с R , са: $\{\{\text{Иван, Силвия, Георги}\}, \{\text{Мая, Петър}\}, \{\text{Кирил}\}\}$. Това също е и разбиване на R .

Пример 4.10.4 Нека R е релацията $\{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{3}\}$, дефинирана върху множеството на целите числа.

Релация на еквивалентност ли е R ?

Да, защото R е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Кои са класовете на еквивалентност свързани с R ?

$\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$,

$\{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$,

$\{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

5 Лекция 5: Функции

Функция f от множеството A в множеството B е такова съответствие, че на всеки елемент от множеството A е съпоставен (присвоен) един (единствен) елемент от множеството B .

Присвояването се записва като

$$f(a) = b$$

където b е единствения елемент от B присвоен посредством f на елемента a от A . Ако f е функция от множество A в множество B , то това се означава по следния начин

$$f : A \rightarrow B$$

Множеството A е дефиниционна област на f , а множеството B е област на стойностите на f .

b е образ на a , а a е първообраз на b .

Диапазон на f е множеството от всички образи на всички елементи на A .

Пример 5.0.1 Да разгледаме функцията $f : P \rightarrow C$ където

$P = \{\text{Лили, Митко, Катя, Петър}\}$

$C = \{\text{Бургас, София, Пловдив, Варна}\}$

$f(\text{Лили}) = \text{Пловдив}$

$f(\text{Митко}) = \text{София}$

$f(\text{Катя}) = \text{Бургас}$

$f(\text{Петър}) = \text{Варна}$

За случая, диапазонът на f е C .

Начини за представяне на функциите :

- таблици

x	f(x)
Лили	Пловдив
Митко	София
Катя	Бургас
Петър	Варна

- означаване на съответствията със стрелки
- формули $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x$
- графики: множеството от наредени двойки $\{(a, b) | a \in A, f(a) = b\}$.

Нека f_1 и f_2 са функции от A в \mathbb{R} . Сумата и произведението на f_1 и f_2 също са функции от A в \mathbb{R} дефинирани като:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

Пример 5.0.2

$$f_1(x) = 3x \quad f_2(x) = x + 5$$

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = 3x + x + 5 = 4x + 5$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = 3x(x + 5) = 3x^2 + 15x$$

Ако разгледаме подмножеството $S \subseteq A$, то множеството от всички образи на елементите $s \in S$ се нарича образ на S .

Образът на S се означава с $f(S)$: $f(S) = \{f(s) | s \in S\}$

5.1 Функциите като релации

Тъй като графиката на f е подмножество на $A \times B$, то тя е релация от A в B .

Още повече, за всеки елемент на A , съществува точно една наредена двойка в графиката на функцията, чийто първи елемент е a .

Обратно, ако R е релация от A в B , такава че всеки елемент от A е първи елемент на само една наредена двойка от R , тогава функцията може да бъде дефинирана посредством R като нейна графика.

Това се прави като на всеки елемент $a \in A$ се присвоява само един елемент $b \in B$, така че $(a, b) \in R$

5.2 Свойства на функции

5.2.1 Инекция

Функцията $f : A \rightarrow B$ е "изображение в" или инекция (влагане), тогава и само тогава, когато

$$\forall x, y \in A (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$$

5.2.2 Строго нарастваща/намаляваща

Функцията $f : A \rightarrow B$, където $A, B \subseteq \mathbb{R}$ се нарича строго нарастваща, ако

$$\forall x, y \in A (x < y \rightarrow f(x) < f(y))$$

и строго намаляваща, ако

$$\forall x, y \in A (x < y \rightarrow f(x) > f(y))$$

5.2.3 Сюрекция

Функцията $f : A \rightarrow B$ е "изображение върху" или сюрекция (налагане), тогава и само тогава, когато за всеки елемент $b \in B$ съществува елемент $a \in A$, така че $f(a) = b$.

5.2.4 Биекция

Функцията $f : A \rightarrow B$ е взаимно еднозначно съответствие, или биекция, тогава и само тогава, когато е едновременно инекция и сюрекция.

5.3 Обратна функция

Обратна функция на биекцията $f : A \rightarrow B$ е функцията

$$f^{-1} : B \rightarrow A, f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

5.4 Крайни и безкрайни множества

Дефиниция 5.4.1 Множеството A е крайно, ако $A \neq \emptyset$ или $\exists n \in \mathbb{N}$ и биекция $f : A \rightarrow I_n$. Мощността $|A| = 0$, ако $A = \emptyset$.

Дефиниция 5.4.2 Множеството A е изброимо безкрайно, ако съществува биекция $f : A \rightarrow \mathbb{N}$. Множеството A е изброимо, ако е крайно или изброимо безкрайно.

Индексацията на елементите на едно множество A с елементите на друго множество е знак за съществуване на биекция между тях.

Дефиниция 5.4.3 Едно множество е безкрайно ако е равномошно на свое собствено подмножество.

Пример 5.4.1 Функцията $f : N \rightarrow N_2, f(n) = 2n$ изобразява множеството на естествените числа N в собственото му подмножество на четните естествени числа N_2 . Следователно N е безкрайно множество.

Множеството $A = \{1, 2, 3\}$ е крайно, тъй като не съществува биекция между него и негово собствено подмножество.

5.5 Принцип на Дирихле

Ако X и Y са крайни множества, чиито мощности са в отношение $|X| > |Y|$, то за всяка функция $f : X \rightarrow Y$, съществуват $a_1 \neq a_2 \in X$, за които е в сила $f(a_1) = f(a_2)$.

Принципът на Дирихле неформално се нарича принципа на чекмеджетата. Ако множеството X е множество от предмети а Y е множество от чекмеджета, така че предметите са повече от чекмеджетата и всички предмети от X се поставят в чекмеджетата от Y , то поне в едно чекмедже ще има поне два предмета.

5.6 Композиция

Композицията на две функции $g : A \rightarrow B, f : B \rightarrow C$, се означава с $f \circ g$, и се дефинира като:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Това означава :

- първо, функцията g се прилага на елемента $a \in A$, като го изобразява в елемент от B
- второ, функцията f се прилага на този елемент от B , изобразявайки го в елемент от C .
- Следователно, съставната функция $(f \circ g)$ е изображение от A в C .

Композиция на функция с обратната и функция:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Пример 5.6.1

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
f(x) &= 7x - 4, & g(x) &= 3x \\
(f \circ g)(5) &= f(g(5)) = f(15) = 105 - 4 = 101 \\
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(3x) = 21x - 4
\end{aligned}$$

5.7 Функции най-голямо цяло (Floor) и най-малко цяло (Ceiling)

Функциите floor и ceiling изобразяват реалните числа в целите числа $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Функцията най-голямо цяло (floor) присвоява на дадено $r \in \mathbb{R}$ най-голямото цяло число $z \in \mathbb{Z}$, такова че $z \leq r$.

Означава се с $\lfloor r \rfloor$.

По същество това е закръгляване надолу.

Пример 5.7.1

$$\lfloor 2.3 \rfloor = 2, \quad \lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0.5 \rfloor = 0, \quad \lfloor -3.5 \rfloor = -4$$

Функцията най-малко цяло (ceiling) присвоява на дадено $r \in \mathbb{R}$ най-малкото цяло число $z \in \mathbb{Z}$, такова че $z \geq r$.

Означава се с $\lceil r \rceil$.

По същество това е закръгляване нагоре.

Пример 5.7.2

$$\lceil 2.3 \rceil = 3, \quad \lceil 2 \rceil = 2, \quad \lceil 0.5 \rceil = 1, \quad \lceil -3.5 \rceil = -3$$

6 Лекция 6: