# Дискретна математика

Exonaut

3 април 2021 г.

# Съдържание

# 1 Лекция 1: Логика и логически оператори

## 1.1 Дефиниции

**Дефиниция 1.1.1** ***Логиката*** *е система, базирана на съждения*

**Дефиниция 1.1.2** ***Съждението*** *е твърдение което може да бъде истина или лъжа (но не и двете едновеременно).*
*Следователно резултатът от едно съждение може да бъде истина(И) или ако то е вярно или лъжа (Л), ако е грешно.*

**Дефиниция 1.1.3** *Съжденията, които не съдържат в себе си други съждения, се наричат* ***прости****.*

**Дефиниция 1.1.4** *Едно и няколко съждения могат да бъдат обединени в едно единствено* ***комбинирано съждение****, посредством логически оператори.*

**Дефиниция 1.1.5** ***Таблица на истинност*** *се нарича таблица, в която се изброяват всички възможни комбинации от стойности на отделните променливи в съждението, както и съответните стойности на функцията.*

**Дефиниция 1.1.6** *Две* ***съждения са еквиваленти****, ако имат една и съща таблица на истинност или следват едно от друго вследствие прилагани основни закони за преобразуване.*

## 1.2 Логически оператори

### 1.2.1 Отрицание(NOT)

Означава се със знака $\neg$
Функция на една променлива с таблица на истинност:

| **p** | **¬p** |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

### 1.2.2 И, Конюнкция (AND)

Означава се със знака $\wedge$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

| **p** | **q** | **p ∧ q** |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

### 1.2.3 ИЛИ, Дизюнкция (OR)

Означава се със знака $\vee$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

| **p** | **q** | **p ∨ q** |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | T |

### 1.2.4 Сума по модул 2, изключващо или (XOR)

Означава се със знака $\otimes$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

| **p** | **q** | $\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | F |

### 1.2.5 Импликация, следствие

Означава се със знака $\rightarrow$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

| **p** | **q** | $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

### 1.2.6 Двупосочно следствие

Означава се със знака $\Leftrightarrow$
Функция на две променливи с таблица на истинност:

| **p** | **q** | $\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

## 1.3 Закони за еквивалентни преобразувания

- Закон за идентичност :

$$p \wedge T \equiv p, p \vee F \equiv p$$

- Закон за доминиране :

$$p \vee T \equiv T, p \wedge F \equiv F$$

- Закон за пълна идентичност :

$$p \wedge p \equiv p, p \vee p \equiv p$$

- Закон за двойно отрицание :

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

- Комутативен закон :

$$p \wedge q \equiv q \wedge p | p \vee q \equiv q \vee p$$

- Асоциативен закон :

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r | p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

- Дистрибутивен закон :

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) | p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Закони на Де Морган :

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) | \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

- Закон за импликацията :

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

- Закон за тривиалната тавтология:

$$p \vee \neg p \equiv T | p \wedge \neg p \equiv F$$

- Закон за тривиалното опровержение :

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg(p \otimes q), \neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \otimes q)$$

## 1.4 Предикатни функции и предикати

**Дефиниция 1.4.1 (Предикатна функция)** *Предикатна функция е твърдение, което съдържа една или повече променливи.*
*Ако на дадена променлива е присвоена стойност, се казва, че е известна.*
*Предикатна функция става съждение, ако всички нейни аргументи са известни.*

**Дефиниция 1.4.2 (Предикат)** *Нека е дадена предикатна функция $Q(x, y, z)$. Свойството $Q$, с което се задава връзката между променливите $x$, $y$, $z$ се нарича предикат.*

## 1.5 Квантор

Нека P(x) е предикатна функция.

**Дефиниция 1.5.1 (Квантор за общност)** *За твърдения от вида:*
*За* ***всяко*** *x, P(x) е истина/лъжа.*
*се записва :*
$\forall x P(x)$ *"за всяко x P(x)"*
*Знака за общност е $\forall$.*

**Дефиниция 1.5.2 (Квантор за съществуване)** *За твърдения от вида:*
*Съществува* ***такова*** *x,* ***за което*** *P(x) е* ***истина/лъжа****.*
*се записва :*
$\exists x P(x)$ *"съществува x, такова че P(x) е истина/лъжа"или "Съществува поне едно x, за което P(x) е истина/лъжа"*
*Знака за общност е $\exists$.*

## 1.6 Закони на Де Морган за квантори

- $\neg(\forall P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$
- $\neg(\exists P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$

# 2 Лекция 2: Математически доказателства

## 2.1 Теория на доказателствата

Теорията на доказателствата се използва за определяне на верността на дадени математически аргументи и за конструирането им.

**Дефиниция 2.1.1 (Дедукция)** *Дедукция във философията означава извеждане на особеното и единичното от общото, както и схващане на единичния случай на базата на всеобщ закон.*
*В кибернетиката означава извеждане на твърдения от други твърдения с помощта на логически заключения.*

## 2.2 Терминология

**Дефиниция 2.2.1 (Аксиома)** *Аксиомата е базово допускане, което не е необходимо да се доказва. Аксиомите са твърдения, които са истина, или твърдения които се приемат за истинам но не могат да бъдат доказани.*

**Дефиниция 2.2.2 (Доказателство)** *Доказателството се използва, за да се докаже, че дадено твърдение е истина. То се състои от последователност от твърдения, които формират **аргумент**.*

**Дефиниция 2.2.3 (Теорема)** *Теорема е твърдение, чиято истинност се доказва.*
*Теоремата се състои от две части: условия(хипотези) и извод(заключения).*
*Коректното доказателство (по дедукция) се състои в това да се установи:*

- *Ако условията са изпълнени, то извода е истина.*
- *Ако съждението "условия $\rightarrow$ извод" е таво логия.*

*Често липват елементи на логическа връзка, която може да бъде запълнена с допълнителни условия и аксиоми и съждения, свързани помежду си посредством подходящи правила за изводи.*

**Дефиниция 2.2.4 (Лема)** *Лемата е проста теорема, което се използва като междинен резултат за доказване на друга теорема.*

**Дефиниция 2.2.5 (Слествие)** *Следствието е резултат, който директно следва от съответната теорема*

**Дефиниция 2.2.6 (Допускане)** *Допускането е твърдение, чийто резултат е неизвестен. Веднъж доказано, то се превръща в теорема.*

## 2.3 Правила за извод

$\therefore$ - знак за следователно
Всичко преди знака са хипотези.

- Събиране(Addition)
  $p(q)$
  $\therefore p \vee q$

- Опростяване (Simplification)
  $p \wedge q$
  $\therefore p(q)$

- Конюнкция (Conjunction)
  $p$
  $q$
  $\therefore p \wedge q$

- Закон за безразличие(Modus ponens)
  $p$
  $p \to q$
  $\therefore q$

- Modus tollens
  $\neg q$
  $p \to q$
  $\therefore \neg p$

- Хипотетичен силогизъм (Hypothetical syllogism)
  $p \to q$
  $q \to r$
  $\therefore p \to r$

- Дизюнктивен силогизъм
  $p \vee q$
  $\neg p$
  $\therefore q$

## 2.4 Аргументи

**Дефиниция 2.4.1 (Аргумент)** *Аргументът се състои от една или няколко хипотези и заключение.*
*Аргумент е валиден, ако всичките му хипотези са истина и заключението също е истина.*
*Ако някоя от хипотезите е лъжа, дори валиден аргумент може да води до некоректно заключение.*

*Доказателство: трябва да се докаже че твърдението "хипотези $\rightarrow$ заключение"е истина, като се използват правила за извод.*

**Пример 2.4.1** *"Ако* $101$ *е кратно на* $3$ *, то* $101^2$ *се дели на* $9$*."*
*Въпреки че аргументът е валиден, заключението е некоректно (невярно), защото едната от хипотезите("*$101$ *е кратно на* $3$*")е лъжа.*
*Ако в аргумента* $101$ *се замести с* $102$*, ще се получи коректно заключение "*$102^2$ *е кратно на* $9$*".*
*Нека p: "101 е кратно на 3"и q: "*$101^2$ *е кратно на* $9$*". Тогава имаме следния случай*
$p$
$p \rightarrow q$
$\therefore q$
*Обаче p е лъжа, следователно q е некоректно заключение.*

## 2.5 Правила за извод при използване на квантори и предикати

- Универсалноследствие(Universal instantiation)
  $\forall x P(x)$
  $\therefore P(c)$ ако $c \in U$

- Универсално обобщение(Universal generalization)
  $P(c)$ за някое $c \in U$
  $\therefore \forall x P(x)$

- Частичноследствие(Existential instantiation)
  $\exists x P(x)$
  $\therefore P(c)$ за някой елемент $c \in U$

- Частично обобщение(Existential generalization)
  $P(c)$ за някой елемент $c \in U$
  $\therefore \exists x P(x)$

## 2.6 Доказателство на теореми

- Директно доказателство
  Импликацията "$p \to q$"може да бъде доказана чрез доказване на твърдението:
  "Ако p е истина , то q също е истина."

- Индиректно доказателство
  Импликацията "$p \to q$"е еквивалентна на следния контра-пример "$\neg q \to \neg p$". Следователно, доказателството на изходната импликация "$p \to q$"се свежда до доказване на твърдението: "Ако q е лъжа, то и p също е лъжа.

# 3 Лекция 3: Теория на множества

## 3.1 Парадокс на Ръсел

Някои множества (класове) съдържат себе си а други не.
Ръсел нарича множествата класове.
Класът от всички класове е клас, който се съдържа (принадлежи)на себе си. Празният клас не принадлежи на себе си. Да допуснем, че може да създадем клас от всички класове, като празния например, които не съдържат себе си.
Парадоксът възниква при въпроса, дали този клас принадлежи на себе си.
Множеството от всички множества, които не съдържат себе си !?
$M = \{A | A \notin A\}$

- Множество – първично понятие
- Принадлежност на елемент към множеството – първично понятие
  $x \in A \rightarrow$ Елементът x принадлежи на А.
- Свойство – понятие от логиката и се приема за първично.
  P – свойство. Ако даден предмет x го притежава се записва P(x)

**Дефиниция 3.1.1 (Множества)** *Множества се дефинират като се изброяват елементите му*

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

*за безкрайни множества е по - удобно като се използва свойство за принадлежност*

$$R = \{x | P(x)\}$$

**Аксиома 3.1.1** *Ако го има свойството P, то съществува множеството на всички обекти, които имат това свойство P.*

**Аксиома 3.1.2** *Две множества са равни, ако съдържат еднакви елементи.*

**Дефиниция 3.1.2 (Нормално множество)** *Нормално множество е множество, което не принадлежи на себе си $A \notin A$*

## 3.2 Множества

- Множество е неподредена съвокупност от нула или повече различни обекти (наречени елементи).
- $a \in A$ - "а е елемент на множеството А"
- $a \notin A$ - "а не е елемент на А"
- $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ - "А се състои от $a_1, a_2, ..., a_n$"
- Подреждането на елементите не е от значение.
- Няма значение ако някой елемент се повтаря.

**Пример 3.2.1** • $A = \varnothing$ - *празно множество*

- $A = \{z\}, z \in A, z \neq \{z\}$
- $A = \{\{b, c\}, \{c, x, d\}\}$ - *множество от множества*
- $A = \{\{x, y\}\}, \{x, y\} \in A, \{x, y\} \neq \{\{x, y\}\}$
- $A = \{x | P(x)\}$

### 3.2.1 Равенство на множества

**Дефиниция 3.2.1** *Множествата А и В са равни тогава и само тогава, когато съдържат едни и същи елементи.*

**Пример 3.2.2** $A = \{9, 2, 7, 3\}, B = 7, 9, -3, 2 : A = B$
$A$= $\{$*куче, котка, кон*$\}$, $B$ =$\{$*котка, кон, катерица, куче*$\}$ : $A \neq B$
$A$ = $\{$*куче, котка, кон*$\}$, $B$ = $\{$*котка, кон, куче, куче*$\}$ : $A = B$

### 3.2.2 Подмножества

$A \subseteq B$ - "А е подмножество на В"
$A \subseteq B$ тогава и само тогава, когато всеки елемент на А е и елемент на В
Формален запис:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

Правила

- $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
- $((A \subseteq B)) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C)$
- $\varnothing \subseteq A$ за всяко множество A (но $\varnothing \in A$ не е вярно за всяко множество A)
- $\subseteq A$ за всяко множество A

### 3.2.3 Собствени подмножества

$A \subset B$ - "A е собствено подмножество на B"
$A \subseteq B$ и $A \neq B$
Формален запис:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

или

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \neg\forall x(x \in B \to x \in A)$$

### 3.2.4 Число на кардиналност, мощност(брой елементи) на множество

Ако множеството S съдържа n различни елемента, $n \in N$, Множеството S е крайно множество с кардиналност (мощност) n.
Мощност: $|P(A)| = 2^{|A|}$

**Пример 3.2.3** $A = \{Mercedes, BMW, Porsche\}, |A| = 3$
$B = \{1, \{2, 3\}, \{4, 5\}, 6\}, |B| = 4$
$C = \varnothing, |C| = 0$
$D = \{x \in N | x \leq 7000\}, |D| = 7001$
$E = \{x \in N | x \geq 7000\}, |E| = \infty$

### 3.2.5 Множество от всички подмножества на дадено множество

$P(A)$ "множеството от всички подмножества на A"(записва се като $2^A$)
$P(A) = \{B | B \subseteq A\}$

### 3.2.6 Декартово произведение

**Дефиниция 3.2.2 (Декартово произведение )** *Декартово произведение на две множества $A$ и $B$ е ново множество $A \times B$, което се дефинира като*

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \land b \in B\}$$

*т.е декартовото произведение е множество от наредени двойки.*

**Пример 3.2.4** $A = \{x, y\}, B = \{a, b, c\}$
$A \times B = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$

- $A \times \varnothing = \varnothing$
- $\varnothing \times A = \varnothing$
- За непразни множества А иВ : $A \neq B \Leftrightarrow A \times B \neq B \times A$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

## 3.3 Операции на множества

### 3.3.1 Обединение

$A \cup B = \{x | x \in A \land x \in B\}$

**Пример 3.3.1** $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$
$A \cup B = \{a, b, c, d\}$

### 3.3.2 Сечение

$A \cap B = \{x | x \in A \lor x \in B\}$
Несвързани множества: Нямат общи елементи , $A \cap B = \varnothing$

**Пример 3.3.2** $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$
$A \cap B = \{b\}$

### 3.3.3 Разлика

$A \setminus B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$

**Пример 3.3.3** $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$
$A \setminus B = \{a\}$

### 3.3.4 Допълнение

$A^c \equiv \overline{A} = U - A$
U - универсално множество.

**Пример 3.3.4** $U = N$
$B = \{250, 251, 252, ...\}$
$\overline{B} = \{0, 1, 2, ..., 248, 249\}$

## 3.4 Идентичност на законите за логическо преобразуване и законите за операции с множества

- Закон за идентичност :
  $A \cup \varnothing = A$
  $A \cap U = A$

- Закон за доминиране :
  $A \cup U = A$
  $A \cap \varnothing = A$

- Закон за пълна идентичност :
  $A \cup A = A$
  $A \cap A = A$

- Закон за двойно отрицание :
  $\overline{\overline{A}} \equiv (A^c)^c = A$

- Комутативен закон :
  $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$

- Асоциативен закон :
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- Дистрибутивен закон :
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Закони на Де Морган :
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- Закон за поглъщането :
  $A \cup (A \cap B) = A$
  $A \cap (A \cup B) = A$

- Закон за допълнението:
  $A \cup \overline{A} = U$
  $A \cap \overline{A} = \varnothing$

# 4 Лекция 4: Релации (Отношения)

## 4.1 Релации

**Дефиниция 4.1.1 (Бинарна релация)** *Нека $A$ и $B$ са две множества. Бинарна релация от $A$ в $B$ е подмножество на $A \times B$.*
*С други думи, за дадена бинарна релация $R$ е в сила $R \subseteq A \times B$. Означението $aRb$ означава $(a, b) \in R$, а означението $a\underline{R}b$ означава, че $(a, b) \notin R$.*

Когато $(a, b) \in R$ се казва, че a е в отношение с b чрез R.

**Пример 4.1.1** *Нека $P$ е множество от хора, $C$ е множество от коли, а $D$ е релацията, която описва кой човек каква кола (коли) кара.*
*$P$ = {Иван, Лили, Петър, Валя},*
*$C$ = {Опел, BMW, Рено}*
*$D$ = {(Иван, Опел), (Лили, Опел),(Лили, Рено), (Петър, BMW)}*

## 4.2 Функциите като релации

Графиката на f е множество от наредени двойки $(a, b)$, такова че $b = f(a)$. Тъй като графиката на f е подмножество на $A \times B$, то тя е релация от A в B.
Още повече, за всеки елементана A, съществува точно една наредена двойка в графиката на функцията, чийто първи елемент е a.
Обратно, ако R е релация отA в B,такава че всеки елемент от A е първи елемент на само една наредена двойка от R, тогава функцията може да бъде дефинирана посредством R като нейна графика.
Това се прави като на всеки елемент $a \in A$ се присвоява само един елемент $b \in B$, така че $(a, b) \in R$.

## 4.3 Релации, дефинирани върху множество

**Дефиниция 4.3.1** *Релация, дефинирана върху множество $A$, е релация от $A$ в $A$.*
*С други думи, дадена релация, дефинирана върху множество $A$, е подмножество на $A \times A$.*

**Пример 4.3.1** *Нека* $A = \{1, 2, 3, 4\}$. *Кои наредени двойки са от релацията* $R = \{(a, b)|a < b\}$
*Решение:* $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

Колко различни релации могат да бъдат дефинирани върху едно множество A с n елемента?
Броят на елементите на $A \times A = n^2$, тогава броя на подмножествата (релации върху A) е $2^{n^2}$ - броят на елементите на множеството от всички подмножества на $A \times A$.
Отговор: Броят на различните релации, дефинирани върху A, е $2^{n^2}$

## 4.4 Свойства на релациите

**Дефиниция 4.4.1 (Рефлексивна)** *Релацията R, дефинирана върху A, се нарича* ***рефлексивна****, ако* $(a, a) \in R$ *за всеки елемент* $a \in A$

**Дефиниция 4.4.2 (Антирефлексивна)** *Релацията R, дефинирана върху A, се нарича* ***антирефлексивна****, ако* $(a, a) \notin R$ *за всеки елемент* $a \in A$

**Дефиниция 4.4.3 (Симетрична)** *Релацията R, дефинирана върху A, се нарича* ***симетрична****, ако* $(b, a) \in R$ *когато* $(a, b) \in R$ *за* $a, b \in R$.

**Дефиниция 4.4.4 (Антисиметрична)** *Релацията R, дефинирана върху A, се нарича* ***антисиметрична****, ако когато* $(a, b) \in R$ *и* $(b, a) \in R$ *то* $a = b, a, b \in R$.

**Дефиниция 4.4.5 (Асиметрична)** *Релацията R, дефинирана върху A, се нарича* ***асиметрична****, ако когато* $(a, b) \in R$ *и* $(b, a) \notin R$ *за* $a, b \in R$.

**Дефиниция 4.4.6 (Транзитивна)** *Релацията R, дефинирана върху A, се нарича* ***транзитивна****, ако когато*$(a, b) \in R$ *и* $(b, c) \in R$, *тогава* $(a, c) \in R$ *за* $a, b, c \in A$.

**Пример 4.4.1** *Релации, дефинирани върху* $\{1, 2, 3, 4\}$
$R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$ - *рефлексивна*
$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$ - *симетрична*
$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ - *антисиметрична*
$R = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$ - *асиметрична*
$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ -*транзитивна*

## 4.5 Операции с релациите

Релациите са множества, и затова, върху тях може да бъдат прилагани стандартни **операции с множества**.
Ако $R_1, R_2$ са релации от множеството A в можеството B, тогава може да разгледаме операциите $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2$
Във всеки от случаите, резултатът от операциите е друга релация от A в B.

### 4.5.1 Комбиниране на релациите

**Дефиниция 4.5.1** *Нека $R$ е релация от множеството $A$ в множеството $B$ и $S$ е релация от множеството $B$ в множеството $C$.*
*Композицията от $R$ и $S$ е релация състояща се от наредени двойки $(a, c); a \in A, c \in C$ и за които съществува елемент $b \in B$ такива че $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in S$*
*Композицията се означава $S \circ R$.*

**Пример 4.5.1** *Нека $D$ и $S$ са релации от* $= \{1, 2, 3, 4\}$
$D = \{(a, b)|b = 5 - a\}$
$S = \{(a, b)|a < b\}$
$D = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$
$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
$S \circ R = \{(2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

$S \circ R = \{(a, b)|b > 5 - a\} \Leftrightarrow S \circ R = \{(a, b)|a + b > 5\}$

**Дефиниция 4.5.2** *Нека $R$ е релация дефинирана върху множеството $A$. Степените на $R$ при получаване на композиция, $R^n, n = 1, 2, 3, ...,$ се дефинират по индукция като*
$R^1 = R$
$R^{n+1} = R^n \circ R$
$R^n = R \circ R \circ ... \circ R$ *(n-пъти R)*

**Теорема 4.5.1** *Релацията $R$ върху множеството $A$ е транзитивна тогава и само тогава когато $R^n \subseteq R$ за всяко цяли положително число $n$.*

## 4.6 n-арни релации

**Дефиниция 4.6.1** *Нека* $A_1, A_2, ..., A_n$ *са множества. n-арна релация върху тези множества е подмножеството* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$
*Множествата* $A_1, A_2, ..., A_n$ *се наричат области (домейни) на релацията, а n - ред на релацията.*

**Пример 4.6.1** *Нека* $R = \{(a, b, c) | a = 2b \wedge b = 2c; a, b, c \in \mathbb{N}\}$
*Редът на R - 3, тъй като елементите са тройки.*
*Области на R - множеството на естествените числа* $\mathbb{N}$
$(2, 4, 8)$ *- не е от R*
$(4, 2, 1)$ *- е от R*

## 4.7 Бази данни и релации

**Дефиниция 4.7.1** *Базата данни се състои от n-торки наречени* ***записи****, които са изградени от* ***атрибути (полета)****.Тези полета (атрибути) са* ***позициите*** *в n-торките.*
*Релационният модел на данните представя базата данни като n-арна релация, което по същество представлява множество от записи, като всеки от* ***атрибутите (полетата)*** *има своя* ***област (домейн)****.*

**Пример 4.7.1** *Разглеждаме база данни от студенти, чиито записи представляват наредени 4-творки с полета (атрибути): Име, Фак.номер, Факултет, и Успех:*
*R = {(Иван, 231455, ФА, 4.88), (Георги, 888323, ФЕТТ, 4.45), (Димитър, 232147, ФА, 5.29), (Петър, 453876, ФКСУ, 5.45), (Николай, 458543, ФКСУ, 4.45), (Стефан, 886576, ФЕТТ, 5.18)}*

Прост код: ако n-торките могат да бъдат точно определени по стойностите на това поле. Това означава, че няма два (или повече) записа с една и съща стойност на полето, което е прост код.

**Дефиниция 4.7.2 (Проекция)** *Проекцията* $P_{i_1, i_2, ..., i_m}$ *изобразява n-торката* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *в m-торка* $(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m})$ *където* $m \leq n$

**Пример 4.7.2** *Какъв резултат се получава, ако се приложи проекцията* $P_{2,4}$ *на записа от базата данни:*
*(Георги, 888323, ФЕТТ, 4.45)? Отговор: Наредена двойка (888323, 4.45)*

**Дефиниция 4.7.3 (Съединение)** *Нека $R$ е релация от ред $m$ а $S$ е релация от ред $n$. Съединение $J_p(R, S)$, където $p \leq m$ и $p \leq n$, е релация от ред $m + n - p$, която съдържа всички (m + n - p)-торки*

$$(a_1, a_2, ..., a_{m-p}, c_1, c_2, ..., c_p, b_1, b_2, ..., b_{n-p})$$

*такива че m-торката $(a_1, a_2, ..., a_{m-p}, c_1, c_2, ..., c_p)$ принадлежи на R,а n-торката $(c_1, c_2, ..., c_p, b_1, b_2, ..., b_{n-p})$ принадлежи на S.*

**Пример 4.7.3** *Да се определисъединението $J_1(Y, R)$, където релацията Y съдържа атрибутите Год. на раждане и Име.*
*Y = {(1982, Иван), (1980, Георги), (1984, Димитър), (1979, Петър), (1983, Николай), (1985, Стефан) }*
*R = {(Иван, 231455, ФА, 4.88), (Георги, 888323, ФЕТТ, 4.45), (Димитър, 232147, ФА, 5.29), (Петър, 453876, ФКСУ, 5.45), (Николай, 458543, ФКСУ, 4.45), (Стефан, 886576, ФЕТТ, 5.18)}*
*Решение:*
*$J_1$ = {(1982, Иван, 231455, ФА, 4.88), (1980, Георги, 888323, ФЕТТ, 4.45), (1984, Димитър, 232147, ФА, 5.29), (1979, Петър, 453876, ФКСУ, 5.45), (1983, Николай, 458543, ФКСУ, 4.45), (1985, Стефан, 886576, ФЕТТ, 5.18)}*

*Тъй като Y има два атрибута, R има четири атрибута, а общият атрибут Име е един, релацията $J_1(Y, R)$ има 2 + 4 – 1 = 5 атрибута.*

## 4.8 Представяне релации

Два нови начина за представяне на релации: булеви матрици и ориентирани графи.

### 4.8.1 Булеви матрици

Ако R е релация от A = $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ в B = $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$, то R може да бъде представена посредством булева матрица (матрица с елементи единици и нули)
$M_R = [m_{ij}]$ с елементи
$m_{ij} = 1, (a_i, b_j) \in R$,
$m_{ij} = 0, (a_i, b_j) \notin R$. За формиране на матрицата трябва първо да се изредят елементите на A и B в определен (но произволен) ред.

**Пример 4.8.1** *Да се представи релацията* $R = \{(2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)\}$ *като булева матрица?*
*Решение:*
$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Матрици, които представят релации върху множество трябва да бъдат квадратни матрици.
Матрици, които представят рефлексивни релации всички елементи от главния диагонал на такива матрици $M_{ref}$ трябва да са единици.
Матрици, които представят симетрични релации трябва да бъдат симетрични матрици, $M_R = (M_R)^T$.
При определяне на матрицата, която представя обединение на две релации се прилага логическата операция "или" върху съответните елементи на матриците, представящи релациите.
При определяне на матрицата, която представя сечение на две релации се прилага логическата операция "и" върху съответните елементи на матриците, представящи релациите.

**Пример 4.8.2** *Нека релациите* $R$ *и* $S$ *се представят с матриците:*

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Определете матриците, които представят* $R \cup S$ *и* $R \cap S$*?*
*Решение:*

$$M_{R\cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Дефиниция 4.8.1** *Нека* $A = [a_{ij}]$ *е* $m \times k$ *булева матрица, а* $B = [b_{ij}]$ *е* $k \times n$ *булева матрица.*
*Булевото произведение на* $A$ *и* $B$*, се означава с* $A \circ B$*, и е* $m \times n$ *матрица (i, j)-тият елемент*$[c_{ij}]$*, на която е*

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2i}) \vee ... \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

$c_{ij} = 1$ *тогава и само тогава, когато поне един от компонентите* $(a_{in} \vee b_{nj})$ *е 1 за някое n;* $c_{ij} = 0$ *в останалите случаи.*

### 4.8.2 Ориентирани графи

**Дефиниция 4.8.2 (Ориентиран граф)** *Ориентираният граф, се състои от множество V отвърхове (или възли) и множество E от наредени двойки от V наречено ребра (или дъги).Връха се нарича начален връхн а ребро (a, b), а връх b се нарича краен връх на реброто.*
*Стрелките се използват за означаване на посоките.*

Очевидно всяка релация R върху A може да се представи с ориентиран граф, като елементите на A са негови върхове, а всички наредени двойки $(a, b) \in R$ са негови ребра.
Обратно, всеки ориентиран граф с върхове V и ребра E може да се представи с релация върху V,съдържаща всички наредени двойки от E.
Това взаимно еднозначно съответствие между релации и ориентирани графи означава, че всяко твърдение за релациите е приложимо за ориентираните графи и обратно.

## 4.9 Релации на еквивалентност

**Дефиниция 4.9.1 (Релация на еквивалентност)** *Дадена релация, дефинирана върху множеството A,се нарича релация на еквивалентност ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна.*
*Два елемента, свързани посредством дадена релация на еквивеалентност R,се наричат еквивалентни.*

Тъй като R е симетрична, a е еквивалентен на b, когато b е еквивалентен на a.
Тъй като R е рефлексивна, всеки елемент е еквивалентен на себе си.
Тъй като R е транзитивна, ако a и b са еквивалентни и b и c са еквивалентни, то a и c са еквивалентни.
Очевидно, тези три свойства са необходими за обосновано дефиниране на еквивалентността.

**Пример 4.9.1** *Нека R е релация върху множество от думи на българския език, такава че $aRb$ тогава и само тогава, когато $l(a) = l(b)$, където $l(x)$ е дължината на думата x.*
*Релация на еквивалентност ли е R? Решение:*
*R е рефлексивна, защото $l(a) = l(a)$ и следователно $aRa$ за всяка дума $a$.*

*$R$ е симетрична, защото ако $l(a) = l(b)$ то $l(b) = l(a)$, така че ако $aRb$ то $bRa$.*
*$R$ е транзитивна, защото ако $l(a) = l(b)$ и $l(b) = l(c)$ , то $l(a) = l(c)$, така че от $aRb$ и $bRc$,следва че $aRc$.*
*Следователно $R$ е релация на еквивалентност.*

## 4.10 Класове на еквивалентност

**Дефиниция 4.10.1 (Клас на еквивалентност)** *Нека $R$ е релация на еквивалентност дефинирана върху множеството $A$. Множеството от всички елементи свързани с даден елемент "a" от $A$ посредством $R$ се нарича клас на еквивалентност на "a".*
*Класът на еквивалентност на "a" по отношение на $R$ се означава с $[a]_R$. Ако $b \in [a]_R$, $b$ - представител.*

**Пример 4.10.1 (котка)** *е множеството от всички думи на български език с пет букви. Например, "петел"е представител на този клас на еквивалентност.*

**Теорема 4.10.1** *Нека $R$ е релация на еквивалентност, дефинирана върху $A$. Долните твърдения са еквивалентни:*

- $aRb$
- $[a] = [b]$
- $[a] \cap [b] \neq \varnothing$

**Дефиниция 4.10.2 (Разбиване)** *Разбиванена множеството $S$ е съвкупност от несвързани, непразни подмножества от $S$, чието обединение е $S$.*
*С други думи, съвкупността от подмножества $A_i, i \in I$, формират разделяне на $S$ тогава и само тогава, когато*

- $A_i \neq \varnothing, i \in I$
- $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = S$

**Пример 4.10.2** *Нека S е {u, m, b, r, o, c, k, s}.*
*Разбиване на S ли са долните съвокупности от множества?*
*{{m, o, c, k}, {r, u, b, s}} - да.*
*{{c, o, m, b}, {u, s}, {r}} - не(k липсва).*
*{{b, r, o, c, k}, {m, u, s, t}} - не(t не е отS).*
*{{u, m, b, r, o, c, k, s}} - да.*
*{{b, o, o, k}, {r, u, m}, {c, s}} - да ({b,o,o,k} = {b,o,k}).*
*{{u, m, b}, {r, o, c, k, s}, ∅}не(∅не е позволено).*

**Теорема 4.10.2** *Нека R е релация на еквивалентност, дефинирана върху S. Тогава класовете на еквивалентност, свързани с R,формират разбиване на S.*
*Обратно, за дадено разбиване $\{A_i | i \in I\}$ на множеството S, съществува релация на еквивалентност R, за която множествата $A_i, i \in I$, са класове на еквивалентност.*

**Пример 4.10.3** *Нека Иван, Силвия и Георги живеят в София, Мая и Петър живеят в Пловдив, а Кирил живее в Бургас.*
*Нека R е релация на еквивалентност {(a, b) | a и b живеят в един и същ град} върху множеството P = {Иван, Силвия, Георги, Мая, Петър, Кирил}.*
*Тогава*
*R = {(Иван, Иван), (Иван, Силвия), (Иван, Георги), (Силвия, Иван), (Силвия, Силвия), (Силвия, Георги), (Георги, Иван), (Георги, Силвия), (Георги, Георги), (Мая, Мая), (Мая, Петър), (Петър, Мая), (Петър, Петър), (Кирил, Кирил)}.*

*Класовете на еквивалентност, свързани с R,са:{{Иван, Силвия, Георги}, {Мая, Петър}, {Кирил}}. Това също е и разбиване на R.*

**Пример 4.10.4** *Нека R е релацията $\{(a, b) | a \equiv b(\mod 3)\}$, дефинирана върху множеството на целите числа.*
*Релация на еквивалентност ли е R?*
*Да, защото R е рефлексивна, симетрична и транзитивна.*
*Кои са класовете на еквивалентност свързани с R?*
*{{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...},*
*{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...},*
*{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...}}*

# 5 Лекция 5: Функции

Функция f от множеството A в множеството B е такова съответствие, че на всеки елемент от множеството A е съпоставен (присвоен) един (единствен) елемент от множеството B.
Присвояването се записва като

$$f(a) = b$$

където b е едиствения елемент от B присвоен посредством f на елемента a от A. Ако f е функция отмножество A в множество B, то това се означава по следния начин

$$f : A \to B$$

Множеството A е дефиниционна област на f, а множеството B е област на стойностите на f.
b е образ на a, а a е първообраз на b.
Диапазон на f е множеството от всички образи на всички елементи на A.

**Пример 5.0.1** *Да разгледаме функцията* $f : P \to C$ *където*
*P = {Лили, Митко, Катя, Петър}*
*C = {Бургас, София, Пловдив, Варна}*
*f(Лили) = Пловдив*
*f(Митко) = София*
*f(Катя) = Бургас*
*f(Петър) = Варна*
*За случая, диапазонът на f е C.*

Начини за представяне на функциите :

- таблици

| **x** | **f(x)** |
|---|---|
| Лили | Пловдив |
| Митко | София |
| Катя | Бургас |
| Петър | Варна |

- означаване на съответствията със стрелки
- формули $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x$
- графики: множеството от наредени двойки $\{(a, b)|a \in A,\ f(a) = b\}$.

Нека $f_1$ и $f_2$ са функции от A в R.Сумата и произведението на $f_1$ и $f_2$ също са функции от A в R дефинирани като:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

**Пример 5.0.2**

$$f_1(x) = 3x \qquad f_2(x) = x + 5$$

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = 3x + x + 5 = 4x + 5$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = 3x(x + 5) = 3x^2 + 15x$$

Ако разгледаме подмножеството $S \subseteq A$, то множеството от всички образи на елементите $s \in S$ се нарича образ на S.
Образът на S се означава с f(S): $f(S) = \{f(s)|s \in S\}$

## 5.1 Функциите като релации

Тъй като графиката на f е подмножество на $A \times B$, то тя е релация от A в B.
Още повече, за всеки елемента на A, съществува точно една наредена двойка в графиката на функцията, чийто първи елемент е a.
Обратно, ако R е релация от A в B, такава че всеки елемент от A е първи елемент на само една наредена двойка от R, тогава функцията може да бъде дефинирана посредством R като нейна графика.
Това се прави като на всеки елемент $a \in A$ се присвоява само един елемент $b \in B$, така че $(a, b) \in R$

## 5.2 Свойства на функции

### 5.2.1 Инекция

Функцията $f : A \to B$ е "изображение в"или инекция (влагане), тогава и само тогава, когато

$$\forall x, y \in A(f(x) = f(y) \to x = y)$$

### 5.2.2 Строго нарастваща/намаляваща

Функцията $f : A \to B$, където $A, B \subseteq R$ се наричастрого нарастваща, ако

$$\forall x, y \in A(x < y \to f(x) < f(y))$$

и строго намаляваща, ако

$$\forall x, y \in A(x < y \to f(x) > f(y))$$

### 5.2.3 Сюрекция

Функцията $f : A \to B$ е "изображение върху"или сюрекция (налагане), тогава и само тогава, когато за всеки елемент $b \in B$ съществува елемент $a \in A$ ,така че $f(a) = b$.

### 5.2.4 Биекция

Функцията $f : A \to B$ е взаимно еднозначно съответствие, или биекция, тогава и само тогава, когато е едновременно инекция и сюрекция.

## 5.3 Обратна функция

Обратна функция на биекцията $f : A \to B$ е функцията

$$f^{-1} : B \to A,\ f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

## 5.4 Крайни и безкрайни множества

**Дефиниция 5.4.1** *Множеството A е крайно, ако* $A \neq \varnothing$ *или* $\exists n \in \mathbb{N}$ *и биекция* $f : A \to I_n$. *Мощността* $|A|=0$*, ако* $A = \varnothing$.

**Дефиниция 5.4.2** *Множеството A е изброимо безкрайно, ако съществува биекция* $f : A \to N$. *Множеството A е изброимо, ако е крайно или изброимо безкрайно.*
*Индексацията на елементите на едно множество A с елементите на друго множество е знак за съществуване на биекция между тях.*

**Дефиниция 5.4.3** *Едно множество е безкрайно ако е равномощно на свое собствено подмножество.*

**Пример 5.4.1** *Фунцкията $f : N \to N_2, f(n) = 2n$ изобразява множеството на естествените числа $N$ в собственото му подмножество на четните естествени числа $N_2$. Следователно $N$ е безкрайно множество.*
*Множеството A= {1,2,3} е крайно, тъй като не съществува биекция между него и негово собствено подмножество.*

## 5.5 Принцип на Дирихле

Ако X и Y са крайни множества, чиито мощности са в отношение $|X| > |Y|$, то за всяка функция $f : X \to Y$, съществуват $a_1 \neq a_2 \in X$, за които е в сила $f(a_1) = f(a_2)$.
Принципът на Дерихле неформално се нарича принципа на чекмеджетата. Ако множеството X е множество от предмети а Y е множество от чекмеджета, така че предметите са повече от чекмеджетата и всички предмети от X се поставят в чекмеджетата от Y, то поне в едно чекмедже ще има поне два предмета.

## 5.6 Композиция

Композицията на две функции $g : A \to B, \quad f : B \to C$ , се означава с $f^\circ g$, и се дефинира като:

$$(f^\circ g)(a) = f(g(a))$$

Това означава :

- първо, функцията g се прилага на елемента $a \in A$, като го изобразява в елемент от B
- второ, функцията f се прилага на този елемент от B, изобразявайки го в елемент от C.
- Следователно, съставната функция $(f^\circ g)$ е изображение от A в C.

Композиция на функция с обратната и функция:

$$(f^{-1\circ} f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

**Пример 5.6.1**

$$
\begin{aligned}
&f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&f(x) = 7x - 4, \qquad g(x) = 3x \\
&(f^\circ g)(5) = f(g(5)) = f(15) = 105 - 4 = 101 \\
&(f^\circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = 21x - 4
\end{aligned}
$$

## 5.7 Функции най-голямо цяло (Floor) и най-малко цяло(Ceiling)

Функциите floor и ceiling изобразяват реалните числа в целите числа $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.
Функцията най-голямо цяло (floor) присвоява на дадено $r \in R$ най-голямото цяло число $z \in Z$,такова че $z \leq r$.
Означава се с $\lfloor r \rfloor$.
По същество това е закръгляване надолу.

**Пример 5.7.1**

$$\lfloor 2.3 \rfloor = 2, \qquad \lfloor 2 \rfloor = 2, \qquad \lfloor 0.5 \rfloor = 0, \qquad \lfloor -3.5 \rfloor = -4$$

Функцията най-малко цяло (ceiling) присвоява на дадено $r \in R$ най-малкото цяло число $z \in Z$ ,такова че $z \geq r$.
Означава се с $\lceil r \rceil$.
По същество това е закръгляване нагоре.

**Пример 5.7.2**

$$\lceil 2.3 \rceil = 3, \qquad \lceil 2 \rceil = 2, \qquad \lceil 0.5 \rceil = 1, \qquad \lceil -3.5 \rceil = -3$$

# 6 Лекция 6: Булева алгебра

При булевата алгебра операциите и правилата за работа с тях са свързани с множеството {0, 1}.

## 6.1 Булеви операции

**Дефиниция 6.1.1** *Отрицанието се означава с - . Дефинира се по следния начин*

$$-0 = 1 \qquad -1 = 0$$

**Дефиниция 6.1.2** *Булевата сума, се означава с + и правилата за прилагането и са следните:*

$$1 + 1 = 1 \qquad 1 + 0 = 1 \qquad 0 + 1 = 1 \qquad 0 + 0 = 0$$

**Дефиниция 6.1.3** *Булевото умножение, се означава с ·, и правилата за прилагането му са следните:*

$$1 \cdot 1 = 1 \qquad 1 \cdot 0 = 0 \qquad 0 \cdot 1 = 0 \qquad 0 \cdot 0 = 0$$

## 6.2 Булеви (двоични) функции и изрази

**Дефиниция 6.2.1** *Нека B = {0, 1}. Променливата x се нарича булева променлива ако приема стойности само от B.*

Дадена функция от $B^n$, т.е.$\{(x_1, x_2, ..., x_n)|x_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$, в B се нарича булева (двоична) функция от ред n.
Булевите функции могат да бъдат представени посредством: формули, които са изрази от булеви променливи и булеви операции и таблици със стойности на функцията за всяка комбинация от стойности на променливите.

**Дефиниция 6.2.2** *Булев израз на променливите $x_1, x_2, ..., x_n$ може да се дефинира рекурсивно както следва:*

$$0, 1, x_1, x_2, ..., x_n \text{ са булеви изрази}$$

$$E_1, E_2 \rightarrow \text{ булеви изрази, то}(-E_1), (E_1E_2), (E_1 + E_2) \text{ са булеви изрази}$$

Всеки булев израз представя булева функция.
Стойностите на тази функция могат да бъдат намерени чрез заместване на булевите променливи в израза с 0 и 1 .

**Пример 6.2.1** *Намерете формулата (булевият израз) за булевата функция F(x, y), която се дефинира с долната таблица:*

| **x** | **y** | **F(x,y)** |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

*Възможно решение:* $F(x, y) = (-x) \cdot y$

Най-простият метод за получаване на формула (булев израз) за функция зададена с таблица от стойности на функцията за всяка комбинация от стойности на променливите се базира на булева сума от компоненти.
Тези компоненти съответстват на комбинациите от стойности на променливите, за които функцията има стойност 1
Те са булево произведениеот вида $y_1 y_2 ... y_n, y_i = x_i (x_i = 1)$ или $y_i = -x_i (x_i = 0)$

**Дефиниция 6.2.3** *Булевите функции $F$ и $G$ на $n$ променливи са равни тогава и само тогава, когато $F(b_1, b_2, ..., b_n) = G(b_1, b_2, ..., b_n)$ за $b_1, b_2, ..., b_n$ от $B$.*
*Два различни булеви израза (формули), които представят една и съща функция се наричат еквивалентни.*
*Например, булевите изрази $xy, xy + 0, xy \cdot 1$ са еквивалентни.*

**Дефиниция 6.2.4** *Булево допълнение или отрицаниена булевата функция F е булевата функция –F, където*

$$-F(b_1, b_2, ..., b_n) = -(F(b_1, b_2, ..., b_n))$$

**Дефиниция 6.2.5** *Нека $F$ и $G$ са булеви функции от ред $n$. Булева сума $F + G$ и булево произведение $F \cdot G$ се дефинират като:*

$$(F + G)(b_1, b_2, ..., b_n) = F(b_1, b_2, ..., b_n) + G(b_1, b_2, ..., b_n)$$

$$(F \cdot G)(b_1, b_2, ..., b_n) = F(b_1, b_2, ..., b_n) \cdot G(b_1, b_2, ..., b_n)$$

Броят на различните булеви функции от ред n е $2^{2^n}$.

## 6.3 Дуалност

Дуален на даден булев израз се получава като се заменят булевите суми с булеви умножения, булевите умножения с булеви суми, единиците се заменят с нули и нулите с единици.
Тази дуална функция, се означава с $F^d$, и не зависи от конкретния булев израз използван за представяне на F.

**Пример 6.3.1** *Дуалният израз на* $x(y+z) = x + yz$
*Дуалният израз на* $-x \cdot 1 + (-y + z) = (-x + 0) \cdot ((-y)z)$

Равенството между функции представени с булеви изрази остава валидно когато се вземат дуалните функции на двете страни на равенството. Това се нарича принцип на дуалността, и може да се използва за извеждане на нови равенства.

**Пример 6.3.2** *Закон за поглъщането*

$$x(x+y) = x$$

*Като вземем дуалните изрази на двете страни на равенството, се получава*

$$x + xy = x$$

*което също е равенство(и също се нарича закон за поглъщането).*

## 6.4 Дефиниция на булевата алгебра

**Дефиниция 6.4.1** *Булева алгебра е множество B с елементи 0 и 1, две бинарни операции (+ и ·) и една унарна операция ( - ), така че за всяко* $x, y, z$ *от B са в сила следните свойства :*

- *Закони за идентичност*

$$x + 0 = x \qquad x \cdot 1 = x$$

- *Закони за доминация*

$$x + (-x) = 1 \qquad x \cdot (-x) = 0$$

- *Асоциативни закони*

$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

- *Комутативни закони*

$$x + y = y + z \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

- *Дистрибутивни закони*

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \qquad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

## 6.5 Логика, множества и булева алгебра

| **Логика** | **Множества** | **Булева алгебра** |
|---|---|---|
| Лъжа | $\varnothing$ | 0 |
| Истина | U | 1 |
| $A \wedge B$ | $A \cap B$ | $A \cdot B$ |
| $A \vee B$ | $A \cup B$ | $A + B$ |
| $\neg A$ | $A^c$ | $\overline{A}(-A)$ |

# 7 Лекция 7: Графи

## 7.1 Дефиниции и терминология

**Дефиниция 7.1.1** *Простия граф $G = (V, E)$ е математическа структура, която се състои от:*

- *Непразно множество от върхове $V$.*
- *Множество $E$ от ненаредени двойки от различни елементи от $V$, наречени ребра*
- *Всяко ребро $e \in E$ е множество $= \{u, v\}$ където $u, v \in V$ (М/у 2 върха има само едно ребро)*
- *Даден ненасочен (неориентиран) граф може да съдържа примки (тогава не е прост).*
- *Дадено ребро е примка ако $e = \{u, u\}$ за някое $u \in V$.*

**Дефиниция 7.1.2** *Мултиграф $G = (V, E)$ е такъв граф, който може да съдържа примки и двойки върхове съединени с няколко ребра.*

**Дефиниция 7.1.3** *Даден граф е планарен, ако може да бъде начертан в една равнина без да има пресичане на ребрата му.*

**Дефиниция 7.1.4** *Насоченият (ориентираният) граф $G = (V, E)$ е математическа структура, която се състои от:*

- *Непразно множество от върхове $V$.*
- *Множество $E$ от наредени двойки от различни елементи от $V$, наречени ребра*
- *Всяко ребро $e \in E$ е наредена двойка $= (u, v)$ където $u, v \in V$*
- *Дадено ребро е примка ако $e = (u, u)$ за някое $u \in V$.*

**Дефиниция 7.1.5** *Два върха $u, v$ в ненасочен граф $G$ се наричат съседни в $G$ ако $\{u, v\}$ е ребро в $G$.*

С цел определяне на отношението на принадлежност на ребрата на графа към върховете му и обратно се въвежда понятието инцидентност.

**Дефиниция 7.1.6** *Ако* $e = \{u, v\}$, *реброто e се нарича инцидентно с върховете u и v.*
*Реброто e свързва u и v.*
*Върховете u и v се наричат крайни точки на реброто* $\{u, v\}$.

**Дефиниция 7.1.7** *Степен (валентност) на даден връх от неориентиран граф е броят на ребрата свързани с него.*
*Степента на връх v се означава с* $deg(v)$.
*Връх със степен 0 се нарича изолиран, тъй като не е съседен на никой друг връх на графа.*
*Връх с примка е от степен поне 2 и по дефиниция не е изолиран, дори да не е съседен на друг връх.*
*Връх със степен 1 се нарича висящ. Такъв връх е съседен на точно един друг връх от графа.*

**Теорема 7.1.1** *Нека* $G = (V, E)$ *е ненасочен граф с n ребра. Тогава*

$$2n = \sum_{v \in V} \cdot deg(v)$$

**Пример 7.1.1** *Колко са ребрата в граф с 10 върха, всеки от степен 6. Решение: Сумата от степените на върховете на графа е* $6 \cdot 10 = 60$. *От горната теорема, следва че* $2n = 60$, *т.е.* $n = 30$ *ребра.*

**Теорема 7.1.2** *Всеки ненасочен граф има четен брой върхове от нечетна степен.*

**Дефиниция 7.1.8** *Когато* $(u, v)$ *е ребро в ориентиран граф G, върховете u и v са съседни.*
*Върхът u се нарич аначален връхна реброто* $(u, v)$ *а върхът v се наричакраен връх на* $(u, v)$.
*Началният и крайният връх на дадена примка съвпадат.*

**Дефиниция 7.1.9** *В ориентиран граф, полустепента на връх v, се означава с* $deg^-(v)$, *и е равна на броят на ребрата, чиито краен връх е v. Полустепентана връх v, означена с* $deg^+(v)$, *е броят на ребрата, чиийто начален връх е v.*

**Теорема 7.1.3** *Нека* $G = (V, E)$ *е ориентиран граф. Тогава:*

$$\sum_{v \in V} \cdot deg^-(v) = \sum_{v \in V} \cdot deg^+(v) = |E|$$

## 7.2 Специални графи

**Дефиниция 7.2.1** *Пълен граф е прост граф, който съдържа точно едно ребро между всяка двойка различни върхове.*
*Пълен граф с n върха се означава с* $K_n$.

**Дефиниция 7.2.2** *Граф-контур* $C_n, n \geq 3$ *се състои от n върха* $v_1, v_2, ..., v_n$ *и ребрата* $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, ..., \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$.

**Дефиниция 7.2.3** *Граф-колело* $W_n$ *се получава ако към даден граф-контур* $C_n, n \geq 3$, *се добави допълнителен връх, който се свързва с всички върхове на контура* $C_n$ *с нови ребра.*

**Дефиниция 7.2.4** *Граф n-куб, се означава с* $Q_n$, *и е граф, чиито върхове представляват 2n стринга от битове с дължина n. Два върха са съседни (свързани с ребро) тогава и само тогава, когато стринговете от битове, които които представляват върховете се различават само по един бит.*

**Дефиниция 7.2.5** *Даден прост граф се нарича двуделен ако множеството на върховете му V може да се разбие на две непресичащи се множества* $V_1, V_2$, *така че всяко ребро в графа свързва върхове от* $V_1$ *с върхове от* $V_2$ *(по този начин няма ребро в графа, което свързва два върха само от* $V_1$ *или само от* $V_2$*).*

**Пример 7.2.1** *Графът, чрез който всеки човек от даден град се представя с връх а всеки брак с ребро.*
*Този граф е двуделен, защото всяко ребро свързва върхове от две подмножества от мъжете и жените (има се предвид нормални бракове).*

**Дефиниция 7.2.6** *Пълен двуделен граф* $K_{m,n}$ *е граф, чиито върхове са разделени на две подмножества съответно от m и n елементи. Два върха са свързани с ребро тогава и само тогава ако са от различни подмножества.*

**Дефиниция 7.2.7** *Подграфна даден граф* $G = (V, E)$ *е граф* $H = (W, F)$ *където* $W \subseteq V, F \subseteq E$.

**Дефиниция 7.2.8** *Обединение на два ненасочени графа* $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ *е ненасочен граф с множество от върховете* $V_1 \cup V_2$ *и множество от ребрата* $E_1 \cup E_2$. *Обединението на* $G_1$ *и* $G_2$*се означава с* $G_1 \cup G_2$.

## 7.3 Представяне на графите

**Дефиниция 7.3.1** *Нека $G = (V, E)$ е неориентиран граф и $|V| = n$. Нека върховете на $G$ са подредени в произволен ред $v_1, v_2, ..., v_n$.*
*Матрица на съседство $A$ на $G$ при избраната подредбана върховете е $n \times n$ матрица от единици и нули с 1 в позиция $(i, j)$, когато $v_i$ и $v_j$ са съседни, и 0 в противен случай. В случаите на мултиграфи, различните от нула елементи показват колко ребра съединяват съответните върхове.*

**Пример 7.3.1** *Матрицата на съседство $A_G$ за графа $G$ при следния ред на върховете $a, b, c, d$ е*

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Дефиниция 7.3.2** *Нека $G = (V, E)$ е неориентиран граф и $|V| = n$. Нека върховете и ребрата на $G$ са подредени в произволен ред $v_1, v_2, ..., v_n$ и $e_1, e_2, ..., e_m$.*
*Матрица на инцидентност на $G$ при избраната подредба на върховете и ребрата е $n \times m$ матрица от единици и нули с 1 в позиция $(i, j)$, когато ребро $e_j$ е инцидентно с връх $v_i$ и 0 в противен случай.*

**Пример 7.3.2** *Матрицата на инцидентност $M$ за графа $G$ при следната подредба на върховете $a, b, c, d$ и ребрата 1, 2, 3, 4, 5, 6 е*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 7.4 Изоморфизъм на графи

**Дефиниция 7.4.1** *Два ненасочени графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ са изоморфни ако съществува биекция (взаимно еднозначно съответствие) $f : V1 \to V2$,такава че $a$ и $b$ са съседни в $G_1$, тогава и само тогава когато $f(a)$ и $f(b)$ са съседни в $G_2$, за всяко $a$ и $b$ от $V_1$.*
*Такава функция $f$ се нарича изоморфизъм.*

Визуално, $G_1$ и $G_2$ са изоморфни ако могат да бъдат организирани по такъв начин, че техните изображения да са еднакви.
За два прости графа с по n върха има n! възможни изоморфизми, които трябва да бъдат проверени, за да се покаже, че графите са изоморфни.
За да може два графа да са изоморфни трябва да се провери инвариантността, на някои параметри на графите, което е задължително свойство.
Двата графа трябва да имат:

- един и същ брой върхове,
- един и същ брой ребра,
- едни и същи степени на върховете.

Ако горните параметри не са инвариантни, то графите не са изоморфни, но ако два графа имат инвариантни параметри, те не са задължително изоморфни.

## 7.5 Пътища и контури в графи

**Дефиниция 7.5.1** *Път с дължина n от u до v, където n е положително цяло число, в* ***ненасочен граф*** *е последователност от ребра* $e_1, e_2, ..., e_n$ *на графа, така че* $e_1 = \{x_0, x_1\}, e_2 = \{x_1, x_2\}, ..., e_n = \{x_{n-1}, x_n\}$, *където* $x_0 = u$ *и* $x_n = v$.
*Даден път е контур (затворен път) ако започва и свършва с един и същ връх, т.е.* $u = v$.

**Дефиниция 7.5.2** *Път с дължина n от u до v, където n е положително цяло число, в* ***насочен граф*** *е последователност от ребра* $e_1, e_2, ..., e_n$ *на графа, така че* $e_1 = \{x_0, x_1\}, e_2 = \{x_1, x_2\}, ..., e_n = \{x_{n-1}, x_n\}$, *където* $x_0 = u$ *и* $x_n = v$.
*Даден път е контур (затворен път) ако започва и свършва с един и същ връх, т.е.* $u = v$.

**Дефиниция 7.5.3** *Казва се, че даден път или контур преминава през върховете* $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$.

**Дефиниция 7.5.4** *Даден път или контур е прост ако не съдържа едно ребро два пъти.*

**Дефиниция 7.5.5 (Ойлеров контур)** *Даден контур е Ойлеров, ако преминава през всяко ребро само по един път.*

**Дефиниция 7.5.6 (Хамилтонов контур)** *Даден контур е Хамилтонов, ако преминава през всеки връх само по един път.*

## 7.6 Свързаност

**Дефиниция 7.6.1** *Даден ненасочен граф е свързан ако съществува път между всяка двойка ребра.*

**Дефиниция 7.6.2** *Даден несвързан граф е обединение на два или повече свързани подргафа, като всяка двойка от тези подграфи няма общи върхове. Тези подграфи се наричат свързани компонентина графа.*

**Дефиниция 7.6.3** *Даден прост граф е дърво ако не съдържа контури и кратни ребра (няколко ребра, които свързват два върха).*
*Броят на ребрата на дървото е n-1, където n е броят на върховете на графа.*

**Дефиниция 7.6.4** *Даден насочен граф е силно свързан ако съществува път от a до b и от b до a, за всяка двойка върхове a и b от графа.*

**Дефиниция 7.6.5** *Даден насочен граф е слабо свързанако има път между всеки два върха на съответния ненасочен граф.*

## 7.7 Достижимост

**Дефиниция 7.7.1** *Нека $G = (V, E)$ е неориентиран граф и $|V| = n$. Нека върховете на $G$ са подредени в произволен ред $v_1, v_2, ..., v_n$.*
*Матрица на достижимост за $p$ стъпки $H_p$ на $G$ при избраната подредба на върховете е $n \times n$ матрицата*

$$H_p = I \cup A_G \cup A_G \cdot A_G \cup ... \cup A_G \cdot A_G ... A_G (p \text{ пъти умножение})$$

**Пример 7.7.1** *Матрицата на достижимост за 2 и 3 стъпкиза графа G при следния ред на върховете a, b, c, d*

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad H_2 = ? \quad H_3 = ?$$

$$A_G^2 = A_G \cdot A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = I \cup A_G \cup A_G^2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_G^3 = A_G^2 \cdot A_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = I \cup A_G \cup A_G^2 \cup A_G^3 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 7.8 Графи с допълнителни характеристики на ребрата

На ребрата от даден граф може да бъдат присвоени тегла, свързани с допълнителни характеристики на обекта, който се моделира с дадения граф. Например при моделиране на дадена железопътна мрежа (в аспект на разстояния), разстоянията между отделните градове могат да служат като тегла на съответните ребра от графа.
В общ случай тези характеристики могат да бъдат цени, пропускателни способности на линии и др.

## 7.9 Най-къс път

Графи с тегла на ребрата могат да служат за моделиране на компютърни мрежи, като теглата могат да бъдат свързани с време за реакция, цена и др.
Най-интересния вапрос за този тип графи е:
Какъв енай-късият пътмежду два върха в графа, в смисъл такъв път, за който сумата от теглата на ребрата от пътя е минимална?
С тази задача от теорията на графите се моделира проблема за най-късото разстояние по железопътната мрежа между два града или на най-бърза връзка в компютърна мрежа.

## 7.10 Задача на търговския пътник

Дадени са n върха. Колко различни граф-контура $C_n$ могат да бъдат формирани, свързвайки върховете с ребра?
Отговор: Да отбележим, че всеки врън от граф-контура може да бъде считан за начален. Ако фиксираме даден връх, то тогава имаме (n – 1) възможности за избор на втори връх от граф-контура, (n – 2) възможности за избор на трети връх, и т.н. По този начин имаме (n –1)! възможности за формиране на граф-контури. Разгледаният начин за получаване на граф-контурите е свързан с посока на обхождане от началния до последния възел. Поради това, горният брой възможности включват същите контури но при обратна посока на обхождане. Следователно, реалният брой граф-контури $C_n = \dfrac{(n-1)!}{2}$.

# 8 Лекция 8: Дървета