

Дискретна математика

Упражнение

Exonaut

13 май 2021 г.

Съдържание	1
------------	---

Съдържание

1 Упражнение 1: Логика и логически оператори	2
2 Упражнение 2: Предикати и предикатни функции	8
3 Упражнение 3: Теория на множествата	12
4 Упражнение 4: Математически доказателства	19
5 Упражнение 5: Булева алгебра	24
6 Упражнение 6: Релации	26
7 Упражнение 7: Функции и суми	31
8 Упражнение 8: Графи и дървета	40
9 Упражнение 9: Комбинаторика	54
10 Упражнение 10: Вероятности	59
11 Упражнение 11	66
12 Упражнение 12	67
13 Упражнение 13	68

1 Упражнение 1: Логика и логически оператори

Задача 1

Кои от следните изречения са съждения? Какъв е резултатът от тези съждения?

1. "Китай е държава с най - много жители в света." (Съждение с резултат "Истина")
2. "София е най - големия град в света." (Съждение с резултат "Лъжа")
3. "Не пресичай улицата!" (Не е съждение, а команда)
4. "Колко е часът?" (Не е съждение, а въпрос)
5. $4 + 1 = 5$ (Съждение с резултат "Истина")
6. $4 + x = 5$ (Предикат: Истина, ако $x = 1$; Лъжа, ако $x \neq 1$)
7. $4 + x = 5$, ако $x = 1$ (Съждение с резултат "Истина")

Задача 2

Нека p , q , r са следните прости съждения:

p : "Разболяваш се."

q : "Не можеш да вземеш финалния изпит."

r : "Посещавал си теоретични курсове"

Да се опишат семантично следните комбинирани съждения:

1. $p \rightarrow q$ - "Ако си болен, няма да можеш да си вземеш финалния изпит."
2. $q \Leftrightarrow \neg r$ - "Няма да вземеш финалния изпит тогава и само тогава, когато не си посещавал теоретичния курс."
3. $q \rightarrow \neg r$ - "Ако не си взел финалния изпит, то тогава следва, че не си посещавал теоретичния курс."

4. $p \vee q \vee r$ - "(Ти си болен) или (не си взел финалния изпит) или (не си посещавал теоретичния курс) или и трите заедно."
5. $(p \rightarrow \neg r) \vee (q \rightarrow \neg r)$ - "(Ако си болен, тогава не си посещавал теоретичния курс) или (ако не си взел финалния изпит, то не си посещавал теоретичния курс) - или и двете заедно."
6. $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$ - "[(Болен си) и (не си взел финалния изпит)] или [(си взел финалния изпит) и (си посещавал теоретичния курс)]."

Задача 3

Нека p , q , r са следните прости съждения:

p : "Получил си 6 за годината."

q : "Решил си правилно всички домашни работи."

r : "Получил си 6 за всеки учебен срок."

Да се опишат следните комбинирани съждения с логически изрази:

1. "(Получил си 6 за всеки от сроковете), но (не си решил правилно всички домашни работи) $r \wedge \neg q$
2. "(Получил си 6 за годината) и (си решил правилно всички домашни работи) и (си получил си 6 за всеки учебен срок). $p \wedge q \wedge r$
3. "Ако (имаш 6 за всеки учебен срок), то (ще имаш 6 за годината).- $r \rightarrow q$
4. "(Получил си 6 за всеки учебен срок), но (не си решил правилно всички домашни работи), но въпреки това (си получил 6 за годината). $r \wedge \neg q \wedge p$
5. "(Получаването на 6 за всеки учебен срок) и (правилното решаване на всички домашни работи) е достатъчно условие за (получаване на 6 за годината). $(r \wedge q) \rightarrow p$
6. "(Ти си получил 6 за годината) тогава и само тогава когато [(си решил правилно всички домашни работи) и (си получил 6 за всеки учебен срок)]. $\Leftrightarrow (q \wedge r)$

Задача 4

Да се състави таблица на истинност за следните комбинирани съждения:

1. $\neg p \otimes \neg p$
2. $(p \vee q) \wedge \neg r$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
4. $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$

Решение:

1. $\neg p \otimes \neg p$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \otimes \neg p$
F	F	T	T	F
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
T	T	F	F	F

2. $(p \vee q) \wedge \neg r$

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \wedge \neg r$
F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	F	F

3. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

p	q	$p \rightarrow q$	r	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
F	F	T	F	F
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	F	T	T
T	T	T	F	F
T	T	T	T	T

4. $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge r$	$(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$
F	F	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	T
T	T	T	F	F	T	T

Задача 5

Да се докаже по 2 начина, че всеки от следните логически изрази е тавтология:

1. Чрез таблица на истинност.
2. Чрез закони за еквивалентно преобразуване.

1. $(p \wedge q) \rightarrow q$

2. $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$

$$3. [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

Решение:

$$1. (p \wedge q) \rightarrow q$$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow q$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee q \quad (\text{закон за импликация})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \quad (\text{закон на де Морган})$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee q) \quad (\text{асоциативен закон})$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee T \quad (\text{закон за тривиална тавтология})$$

$$\Leftrightarrow T \quad (\text{закон за доминиране})$$

$$2. [\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$	$[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$
F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
T	T	F	T	F	T

$$[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow \neg[\neg p \wedge (p \vee q)] \vee q \quad (\text{закон за импликация})$$

$$\Leftrightarrow [\neg\neg p \vee (p \vee q)] \vee q \quad (\text{закон на де Морган})$$

$$\Leftrightarrow [p \vee \neg(p \vee q)] \vee q \quad (\text{закон за двойното отрицание})$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \vee \neg(p \vee q) \quad (\text{асоциативен закон})$$

$$\Leftrightarrow T \quad (\text{закон тривиална тавтология})$$

3. $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

$$\begin{aligned}
 & [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q \\
 \Leftrightarrow & [p \wedge (\neg p \vee q)] \rightarrow q \quad (\text{закон за импликация}) \\
 \Leftrightarrow & [(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)] \rightarrow q \quad (\text{дистрибутивен закон}) \\
 \Leftrightarrow & [F \vee (p \wedge q)] \rightarrow q \quad (\text{закон за тривиално опровержение}) \\
 \Leftrightarrow & (p \wedge q) \rightarrow q \quad (\text{комутативен закон и закон за идентичност}) \\
 \Leftrightarrow & T \quad (\text{доказано в 1.})
 \end{aligned}$$

2 Упражнение 2: Предикати и предикатни функции

Задача 1

Нека $P(x, y)$ е предикатна функция, съответстваща на следното твърдение $x + 2y = x + y$, където x и y са цели числа. Какъв е резултатът от:

1. $P(1, -1)$

$$P(1, -1) \Leftrightarrow 1 + 2 \cdot (-1) = 1 - 1 \Leftrightarrow -1 = 0 \quad \text{Лъжа}$$

2. $P(0, 0)$

$$P(0, 0) \Leftrightarrow 0 + 2 \cdot 0 = 0 + 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \text{Истина}$$

3. $P(2, 1)$

$$P(2, 1) \Leftrightarrow 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 1 \Leftrightarrow 4 = 3 \quad \text{Лъжа}$$

Задача 2

Нека $Q(x)$ е предикатна функция, съответстваща на следното твърдение $x + 1 = 2x$, където x е реално число. Какъв е резултатът от:

1. $Q(2)$

$$Q(2) \Leftrightarrow 2 + 1 = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow 3 = 4 \quad \text{Лъжа}$$

2. $\forall x Q(x)$

$$\forall x Q(x) \implies \quad \text{Лъжа}$$

3. $\exists x Q(x)$

$$\exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x = 1 \text{ което е решение на } Q(x)$$

Задача 3

Нека $R(x)$ е предикатна функция, съответстваща на следното твърдение: "ако $x + 3 = 6$, то $x + 8 = 16$ ". Какъв е резултатът от:

1. $R(3)$

$$3 + 3 = 6 \quad T \quad 3 + 8 = 16 \quad F \implies \quad \text{Лъжа}$$

2. $R(8)$

$$8 + 3 = 6 \text{ } F \quad 8 + 8 = 16 \text{ } T \implies \text{Истина}$$

3. $R(2)$

$$2 + 3 = 6 \text{ } F \quad 2 + 8 = 16 \text{ } F \implies \text{Истина}$$

4. $\exists(x)(R(x)) \quad x \in \mathbb{Z}$

$$x + 3 = 6, x = 3 \text{ } T \quad 3 + 8 = 16 \text{ } F \implies \text{Лъжа}$$

Задача 4

Нека е известно:

X - множеството на всички хора,

$x \in X$

$C(x)$ е предикат: "x е комик"

$F(x)$ е предикат: "x умее да разказва смешни истории"

Да се опишат семантично следните комбинирани предикати:

1. $\exists x C(x)$ - "Съществува човек, който е комик."
2. $\exists x \neg C(x)$ - "Не всеки човек е комик." или "Съществува човек, който не е комик."
3. $\forall x \neg C(x)$ - "Всеки човек е комик."
4. $\neg \forall x C(x)$ - "Никой не е комик."
5. $\exists x \neg F(x)$ - "Съществува човек, който не умее да разказва смешни истории."
6. $\forall x \neg F(x)$ - "Никой (нито един човек) не умее да разказва смешни истории."
7. $\forall x (C(x) \rightarrow F(x))$ - "Всеки човек, който е комик, умее да разказва смешни истории."
8. $\exists x (C(x) \wedge \neg F(x))$ - "Съществува човек, който е комик, но не умее да разказва смешни истории."
9. $\exists x (F(x) \wedge \neg C(x))$ - "Съществува човек, който умее да разказва смешни истории, но не е комик."

10. $\forall x(C(x) \wedge F(x))$ - "Всеки човек е комик и умее да разказва смешни истории."
11. $\exists x(C(x) \wedge F(x))$ - "Съществува човек, който е комик и умее да разказва смешни истории."

Задача 5

Ако с X е означено множеството навсички студенти от ФКСУ, нека са известни следните предикати:

$P(x)$: "x е взел изпита по ДС"

$Q(x)$: "x знае да програмира на езика C++".

Опишете чрез логически изрази следните комбинирани предикати, на простите предикати $P(x)$ и $Q(x)$, използвайки кванторите за общност и съществуване \forall и \exists и необходимите логически оператори.

1. "Съществува студентот ФКСУ, който е взел изпита по ДС и знае да програмира на езика C++. $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
2. "Съществува студентот ФКСУ, който не знае да програмира на езика C++, но е взел изпита по ДС. $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
3. "Всички студенти от ФКСУ, които знаят да програмират на езика C++, са взели изпита по ДС. $\forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$
4. "Само някои от студентитеот ФКСУ, които знаят да програмират на езика C++, са взели изпита по ДС. $\exists x(Q(x) \rightarrow P(x))$
5. "Всички студенти от ФКСУ знаят да програмират на езика C++ ИЛИ са взели изпита по ДС. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

Задача 6

Да се определи резултатът от следните твърдения:

1. $\exists x(x^3 = -1 \wedge x \in \mathbb{R})$

$$\exists x(x^3 = -1 \wedge x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x = -1 \in \mathbb{R} \implies \text{Истина}$$

2. $\exists x(x^3 = -1 \wedge x \in \mathbb{N})$

$$\exists x(x^3 = -1 \wedge x \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow x = -1 \notin \mathbb{N} \implies \text{Лъжа}$$

$$3. \forall x(2x > x \wedge x \in \mathbb{R})$$

$$\forall x(2x > x \wedge x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \in R \implies \text{Лъжа}$$

$$4. \forall x(2x \geq x \wedge x \in \mathbb{N})$$

$$\forall x(2x > x \wedge x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \in R \implies \text{Истина}$$

3 Упражнение 3: Теория на множествата

Задача 1

Нека A е универсалното множество, а

$F(A)$ е предикат " A е крайно множество.

$I(A)$ е предикат " A е безкрайно множество.

$S(A, B)$ е предикат " A се съдържа в B .

$E(A)$ е предикат " A е празно множество."

Да се запишат с логически изрази следните съждения:

1. "Не всички множества са крайни."

$$\exists A I(A) \quad \exists A \neg F(A)$$

2. "Всяко подмножество на крайно множество е крайно множество."

$$\exists A \exists B [(S(A, B) \wedge F(B)) \rightarrow F(A)]$$

3. "Никое безкрайно множество не се съдържа в крайно множество."

$$\exists A \exists B [(I(A) \wedge S(A, B) \wedge F(B)) \rightarrow \emptyset]$$

4. "Празното множество е подмножество на всяко крайно множество."

$$\exists A \exists B [(E(A) \wedge F(B)) \rightarrow S(A, B)]$$

5. "Празното множество е подмножество на всяко безкрайно множество."

$$\exists A \exists B [(E(A) \wedge I(B)) \rightarrow S(A, B)]$$

Задача 2

Да се запишат членовете на всяко от следните множества:

1. $X\{x|x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$

2. $X\{x|x \in \mathbb{N} \wedge x^2 = 4\} = \{2\}$

3. $X\{x|x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 = 5\} = \{\} = \emptyset$

$$4. X\{5x|x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x^2 \leq 2\} = \{-5, 0, 5\}$$

$$5. X\{x|x \in \mathbb{N} \wedge x^2 \in \{1, 4, 9\}\} = \{1, 2, 3\}$$

$$6. X\{x|x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 \in \{1, 4, 9\}\} = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$$

Задача 3

Да се запишат посочените множества чрез използване на функция на принадлежност към даденото множество

$$1. X = \{0, 3, 6, 9, 12\} = \{3x|x \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq x \leq 4\}$$

$$2. X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = \{x|x \in \mathbb{Z} \wedge |x| \geq 3\}$$

$$3. X = \{1, 4, 8, 16, 25, 36, 49\} = \{x^2|x \in \mathbb{Z} \wedge -7 \leq x \leq 7 \wedge x \neq 0\}$$

Задача 6

$$\text{Истина ли е твърдението } A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = A \cap \neg(B \cap C) = A \cap (\neg B \cap \neg C) = (A \cap \neg B) \cup (A \cap \neg C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Задача 7

$$\text{Истина ли е твърдението } A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) [\text{зад. 6}] \neq (A - B) \cap (A - C)$$

Задача 4

Задача 4: Нека $A = \{a, b, c\}$. Какъв е резултатът ("ИСТИНА" или "ЛЪЖА") от следните твърдения?

- | | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|
| А) $\{b, c\} \in P(A)$ | Б") $\{\{a\}\} \in P(A)$ | |
| Б') $\{\{a\}\} \subseteq P(A)$, | В") $\emptyset \in A$ | |
| В') $\emptyset \subseteq A$ | Г") $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$ | |
| Г') $\{\emptyset\} \in P(A)$ | Д") $\emptyset \in A \times A$ | |
| Д') $\emptyset \subseteq A \times A$ | Е") $\{a, c\} \subseteq A$ | Е'') $\{a, c\} \in A \times A$ |
| Е') $\{a, c\} \in A$ | Ж") $\{a, c\} \subseteq P(A)$ | |
| Ж') $\{a, c\} \in P(A)$ | З") $\{c, c\} \in A \times A$ | |
| З') $(c, c) \in A \times A$ | И") $\{c, c\} \subseteq A$ | |
| И') $\{c, c\} \in A$ | | |

Решение:

$$A = \{a, b, c\} \Rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$$

- | | |
|---|--|
| А) $\{b, c\} \in P(A)$ - "ИСТИНА" | Б") $\{\{a\}\} \in P(A)$ - "ЛЪЖА", $\{a\} \neq \{\{a\}\}$ |
| Б') $\{\{a\}\} \subseteq P(A)$ - "ИСТИНА" | В") $\emptyset \in A$ - "ЛЪЖА" |
| В') $\emptyset \subseteq A$ - "ИСТИНА" | Г") $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$ - "ИСТИНА" |
| Г') $\{\emptyset\} \in P(A)$ - "ЛЪЖА", $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ | Д") $\emptyset \in A \times A$ - "ЛЪЖА" |
| Д') $\emptyset \subseteq A \times A$ - "ИСТИНА" | Е") $\{a, c\} \subseteq A$ - "ИСТИНА" |
| Е') $\{a, c\} \in A$ - "ЛЪЖА" | Ж") $\{a, c\} \subseteq P(A)$ - "ЛЪЖА" |
| Е'') $\{a, c\} \in A \times A$ - "ЛЪЖА" | З") $\{c, c\} \in A \times A$ - "ЛЪЖА" |
| Ж') $\{a, c\} \in P(A)$ - "ИСТИНА" | И") $\{c, c\} \subseteq A$ - "ИСТИНА" $\{c, c\} = \{c\} \subseteq A$ |
| З') $(c, c) \in A \times A$ - "ИСТИНА" | |
| И') $\{c, c\} \in A$ - "ЛЪЖА", $\{c, c\} = \{c\} \notin A$ | |

$A \times A$	a	b	c
a	(a, a)	(a, b)	(a, c)
b	(b, a)	(b, b)	(b, c)
c	(c, a)	(c, b)	(c, c)

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

Задача 5: Докажете, че: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ чрез използване на:

- правилата за доказателство;
- таблица с поелементно сравняване;
- законите за еквивалентни преобразувания на множества;
- диаграма на Вен.

Решение:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$?

- Използване на правилата за доказателство:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C):$$

Нека $x \in A \cap (B \cup C)$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C),$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (\text{или } x \in B \text{ или } x \in C),$$

$$\Leftrightarrow \text{ИЛИ } (x \in A \wedge x \in B), \text{ ИЛИ } (x \in A \wedge x \in C),$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Следователно, горното твърдение е доказано.

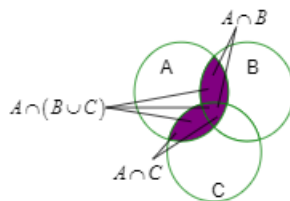
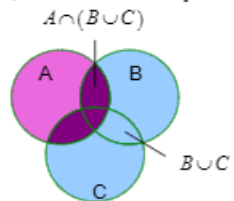
- Използване на таблица с поелементно сравняване:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

- Използване на законите за еквивалентни преобразувания на множества:

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) \cup (A \cap C) &= \\
 &= [A \cup (A \cap C)] \cap [(B \cup (A \cap C))] = \\
 &= A \cap [B \cup (A \cap C)] = \\
 &= A \cap [(B \cup A) \cap (B \cup C)] = \\
 &= [A \cap (B \cup A)] \cap (B \cup C) = \\
 &= A \cap (B \cup C)
 \end{aligned}$$

- Използване на диаграма на Вен:



Задача 9

Истина или лъжа е следното твърдение $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$

A	B	C	$A \otimes B$	$B \otimes C$	$A \otimes (B \otimes C)$	$(A \otimes B) \otimes C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1

Задача 10

Какъв ще е резултатът от следните твърдения?

1. $A - (B - C) = (A - B) - C$
2. $(A - C) - (B - C) = A - B$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup C = B \cup C \implies A = B$
6. $A \cap C = B \cap C \implies A = B$
7. $A \otimes B = A \implies B = A$

а) $A - (B - C) = (A - B) - C$?

$$\mathbf{A - (B - C) = A - (B \cap \neg C) = A \cap \neg (B \cap \neg C) = A \cap (\neg B \cup \neg \neg C) = A \cap (\neg B \cup C)}$$

$$\mathbf{(A - B) - C = (A - B) \cap \neg C = (A \cap \neg B) \cap \neg C = A \cap (\neg B \cap \neg C)}$$

$$\mathbf{A \cap (\neg B \cup C) \neq A \cap (\neg B \cap \neg C) \Rightarrow \text{ЛЪЖА}}$$

б) $(A - C) - (B - C) = A - B$?

$$\mathbf{(A - C) - (B - C) =}$$

$$\mathbf{= (A \cap \neg C) - (B \cap \neg C) = (A \cap \neg C) \cap \neg (B \cap \neg C) =}$$

$$\mathbf{= (A \cap \neg C) \cap (\neg B \cup \neg \neg C) = (A \cap \neg C) \cap (\neg B \cup C) = A \cap \neg C \cap (C \cup \neg B) =}$$

$$\mathbf{= A \cap [(\neg C \cap C) \cup (\neg C \cap \neg B)] = A \cap [\emptyset \cup (\neg C \cap \neg B)] = A \cap (\neg C \cap \neg B) = A \cap (\neg B \cap \neg C) =}$$

$$\mathbf{= (A \cap \neg B) \cap \neg C = (A - B) \cap \neg C = (A - B) - C \neq A - B \Rightarrow \text{ЛЪЖА}}$$

в) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

$$\mathbf{(A \cup B) \cap (A \cup C) =}$$

$$\mathbf{= [A \cap (A \cup C)] \cup [(B \cap (A \cup C))]} =$$

$$\mathbf{= A \cup [B \cap (A \cup C)] =}$$

$$\mathbf{= A \cup [(B \cap A) \cup (B \cap C)] =}$$

$$\mathbf{= [A \cup (B \cap A)] \cup (B \cap C) =}$$

$$\mathbf{= A \cup (B \cap C) \Rightarrow \text{ИСТИНА}}$$

г) $A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

$$\mathbf{(A \cup B) \cap (A \cup C) =}$$

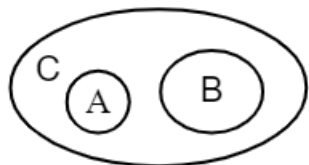
$$\mathbf{= [(A \cup B) \cap A] \cup [(A \cup B) \cap C] =}$$

$$\mathbf{= A \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) =}$$

$$\mathbf{= A \cup (B \cap C) \neq A \cap (B \cap C) \Rightarrow \text{ЛЪЖА}}$$

д) Ако $A \cup C = B \cup C$, то $A = B$?

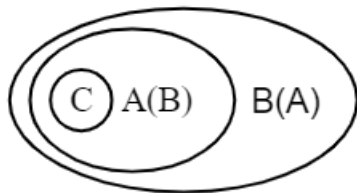
Посоченото твърдение е **ЛЪЖА**, тъй като то не е изпълнено за следните конкретни множества A , B и C , представени чрез диаграма на Вен:



$$\begin{array}{l} A \cup C = C \\ B \cup C = C \\ A \neq B \end{array}$$

е) Ако $A \cap C = B \cap C$, то $A = B$?

Посоченото твърдение е **ЛЪЖА**, тъй като то не е изпълнено за следните конкретни множества A , B и C , представени чрез диаграма на Вен:



$$\begin{array}{l} A \cap C = A \\ B \cap C = B \\ A \neq B \end{array}$$

7

ж) Ако $A \oplus B = A$, то $B = A$?

Ще докажем резултатът от твърдението чрез използване на таблица на принадлежност.

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

При $A = 1$, $B = 0 \Rightarrow A \oplus B = 1$, но $A \neq B \Rightarrow$ Твърдението “Ако $A \oplus B = A$, то $B = A$ ” е **ЛЪЖА**.

4 Упражнение 4: Математически доказателства

Задача 1

За всеки от следващите аргументи кои правила за доказателство са използвани на всяка стъпка?

1. "Студентката от ТУ-София Петя има собствена кола. Всеки, който има кола, пътува по-удобно и по-бързо. Следователно, съществува студент от ТУ-София, който пътува по-удобно и по-бързо."
2. "Всеки от петимата студенти от ТУ-София Иван, Георги, Петър, Стоян и Никола е взел успешно изпита по ТЕ-1. Всеки студент, който е взел успешно ТЕ-1 има право да се яви на изпит по ТЕ-2. Следователно, и петте гореспоменати момчета могат да се явят на изпит по ТЕ-2 през лятната сесия."

Решение:

1. Нека: X - множество на всички студенти, x - произволен студент
 $c(x)$ - "х е студент от ТУ-София."
 $p(x)$ - "х има собствена кола"
 $s(x)$ - "х се придвижва по-удобно и по-бързо."

Доказателство:

Изходни хипотези: $c(\text{Петя})$, $p(\text{Петя})$ и $\forall x(p(x) \rightarrow s(x))$.

Заключение: $\exists x(c(x) \wedge s(x))$.

- (а) $\forall x(p(x) \rightarrow s(x))$ Хипотеза
- (б) $p(\text{Петя}) \rightarrow s(\text{Петя})$ Универсално следствие (Universal instantiation) от а
- (в) $p(\text{Петя})$ Хипотеза
- (г) $s(\text{Петя})$ Закон на безразличие (Modus Ponens) от б и в
- (д) $c(\text{Петя})$ Хипотеза
- (е) $c(\text{Петя}) \wedge s(\text{Петя})$ Конюнкция (Conjunction) от г и д
- (ж) $\exists x(c(x) \wedge s(x))$ Частично обобщение (Existential generalisation) от е

2. Нека: X – множество от всички студенти в ТУ-София; x – произволен студентот X .

$f(x)$ - "х е един от петимата студенти Иван, Георги, Петър, Стоян и Никола."

$t_1(x)$ - "х е взел успешно изпита по ТЕ-1."

$t_2(x)$ - "х има право да се яви на изпит по ТЕ-2."

y - произволен студент от петимата по-горе.

Изходни хипотези: $\forall x(f(x) \rightarrow t_1(x))$ и $\forall x(t_1(x) \rightarrow t_2(x))$

Заклучение: $\forall x(f(x) \rightarrow t_2(x))$.

Доказателство:

(а) $\forall x(f(x) \rightarrow t_1(x))$ Хипотеза

(б) $f(y) \rightarrow t_1(x)$ Универсално следствие (Universal instantiation)
от а

(в) $\forall x(t_1(x) \rightarrow t_2(x))$ Хипотеза

(г) $t_1(y) \rightarrow t_2(y)$ Универсално следствие (Universal instantiation)
от в

(д) $f(y) \rightarrow t_2(y)$ Хипотетичен силогизъм (Hypothetical syllogism)
от б и г

(е) $\forall x(f(x) \rightarrow t_2(x))$ Универсално обобщение (Universal generalisation)
от д

Задача 2

Коректно ли е доказателството на следния аргумент: "Ако n^2 не се дели на 3, то n също не е кратно на 3?"

Доказателство: "Ако n^2 не се дели на 3, тогава $n^2 \neq 3k, k = 0, 1, \dots$. Следователно $n \neq 3l, l = 0, 1, \dots$, откъдето следва, че n не е кратно на 3."

Решение

От горното доказателство се вижда, че от това, че $n^2 \neq 3k, k = 0, 1, \dots$ не следва директно, че $n \neq 3l, l = 0, 1, \dots$ а трябва да се докаже.

За целта ще използваме индиректно доказателство: "Ако n е кратно на 3, то n^2 също се дели на 3."

Ако допуснем, че n е кратно на 3 \implies

$$n = 3l \implies n^2 = (3l)^2 = 3(3l)^2 = 3k \implies n^2$$

Откъдето следва, че горепосоченият аргумент е верен, но посоченото доказателство е некоректно.

Задача 3

Да се докаже, че квадратът на всяко четно число е също четно число чрез:

1. директно доказателство
2. индиректно доказателство
3. използване на контра-пример

Хипотеза p : " n е четно число." Заключение q : " n^2 е четно число."

1. директно доказателство $p \rightarrow q$

Нека n е четно число \implies то може да се запише като:

$$n = 2k, k = 0, 1, \dots \implies n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \implies n^2$$

2. индиректно доказателство $(\neg p \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$

Нека n^2 е нечетно число \implies то може да се запише като:

$$n^2 = 2k + 1, k = 0, 1, \dots$$

$\implies n$ е нечетно число.

3. използване на контра-пример

"Ако n^2 е нечетно число, то n също е нечетно число."

Хипотеза 1: " n^2 е нечетно число. p

Хипотеза 2: " n е четно число. \bar{q}

Допускаме, че Хипотеза 2 \bar{q} е вярна \implies

$$n = 2k, k = 0, 1, \dots \implies n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2) \implies n^2 = 2l \implies n^2$$

е четно число, т.е. \bar{p} , което е в противоречие с Хипотеза 1 $p \implies$

Допускането е грешно \implies Хипотеза 2 не е вярна \implies " n е нечетно число."

Задача 4

Да се докаже, че произведението на две рационални числа е също рационално число.

Решение

Директно доказателство: Нека a и b са рационални числа \implies те могат да се запишат във вида

$$a = \frac{k}{l} \quad b = \frac{s}{t} \quad k, l, s, t \in \mathbb{Z}, l \neq 0, s \neq 0 \implies ab = \frac{ks}{lt}$$

Задача 5

Вярно е, че произведението на две ирационални числа е ирационално число?

Решение

Ако $a = b = \sqrt{2} \implies ab = 2$ което е рационално число \implies твърдението е лъжа.

Задача 6

Да се докаже, че следващите три твърдения са еквивалентни при $n \in \mathbb{Z}$.

1. n е четно число.
2. $n+1$ е нечетно число.
3. $3n+1$ е нечетно число.

$1 \rightarrow 2$

$$n = 2k \implies n + 1 = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$$

$2 \rightarrow 3$

$$n + 1 = 2k + 1 \implies 3n + 1 = 3(2k) + 1 = 2(3k) + 1 = 3n + 1, k \in \mathbb{N}$$

$3 \rightarrow 1$

$$3n + 1 = 2k + 1 \implies 3n = 2k, 2k = 2t \implies n = 2k, k, t \in \mathbb{N}$$

Задача 7

Да се докаже, че $\sqrt[3]{3}$ е ирационално число!

Решение

$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ а, b - взаимно прости (Най голям общ делител = 1)

$$\frac{a}{b} = \sqrt[3]{3} \implies \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 3 \implies a^3 = 3b^3$$

a^3 е кратно на 3 \implies а се дели на 3 \implies

$$a = 3k, k \in \mathbb{N} \implies 3b^3 = a^3 = (3k)^3 = 9k^3 \implies b^3 = 9k^3 = 3s, s \in \mathbb{N}$$

b^3 е кратно на 3 \implies b се дели на 3 \implies

$$b = 3l, l \in \mathbb{N} \implies \frac{a}{b} = \frac{3k}{3l} \implies$$

a и b не са взаимно прости числа (най-големият им общ делител е 3), както допуснахме по-горе \implies Хипотезата, е лъжа $\implies \sqrt[3]{3}$ е ирационално число

5 Упражнение 5: Булева алгебра

Задача 1

Нека функцията $f(x, y, z)$ е дефинирана посредством следната таблица:
Да се намери съответни аналитични изрази!

			a	б
x	y	z	f(x,y,z)	f(x,y,z)
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

а) $f(x, y, z) = (-x) \cdot (-y) \cdot (-z) + (-x) \cdot y \cdot (-z) + x \cdot y \cdot (-z) + x \cdot y \cdot z$

б) $f(x, y, z) = (-x) \cdot (-y) \cdot z + x \cdot (-y) \cdot (-z) + x \cdot (-y) \cdot z + x \cdot y \cdot z$

Задача 2

Истина или лъжа са следните твърдения

1. $(a|b = b|a) \Leftrightarrow a = b$

a	b	a b	b a
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

2. $(a|b) \cdot (c|d) \Leftrightarrow (a + c)|(b + d)$

$$(a|b) \cdot (c|d) = (\overline{a \cdot b}) \cdot (\overline{c \cdot d}) = (\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{c} + \overline{d}) = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{d} + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{d} \quad (1)$$

$$(a + c)|(b + d) = \overline{(a + c) \cdot (b + d)} = \overline{a + c} + \overline{b + d} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{d} \quad (2)$$

$$\text{От (1) и (2)} \implies (a|b) \cdot (c|d) \neq (a + c)|(b + d)$$

6 Упражнение 6: Релации

Задача 1

Да се провери дали всяка от бинарните релации е рефлексивна/антирефлексивна/симетрична/асиметрична/антисиметрична/транзитивна:

1. Релация R върху множеството N , където $(a, b) \in R$ тогава и само тогава когато $a \wedge b$

Рефлексивна, тъй като $(a, a) \Leftrightarrow a \vee a, \forall a \in N$.

Симетрична, тъй като от
$$\begin{aligned} a \vee b &\Rightarrow b \vee a, \\ (a, b) \in R &\Rightarrow (b, a) \in R, \end{aligned} \quad \forall a, b \in N.$$

Не е асиметрична, тъй като от
$$\begin{aligned} a \vee b &\Rightarrow b \vee a, \\ (a, b) \in R &\text{ не } \Rightarrow (b, a) \notin R, \end{aligned} \quad \forall a, b \in N$$

Не е антисиметрична, тъй като от
$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge (b, a) &\text{ не } \Rightarrow a = b \\ (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R, &\text{ не } \Rightarrow a = b, \end{aligned} \quad \forall a, b \in N.$$

Не е транзитивна, тъй като ако

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge (b \vee c) &= (a \wedge c) \vee b \neq (a \vee c) \\ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R &\text{ не } \Rightarrow (a, c) \in R, \end{aligned} \quad \forall a, b, c \in N.$$

2. Релация R върху множеството $S = \{w, x, y, z\}$, където

$$R = \{(w, w), (w, x), (x, w), (x, x), (x, z), (y, y), (z, y), (z, z)\}$$

Рефлексивна, тъй като $(w, w) \in S, (x, x) \in S, (y, y) \in S, (z, z) \in S$.

Не е симетрична, тъй като $(x, z) \in R$, но $(z, x) \notin R$.

Не е асиметрична, тъй като $(w, x) \in R \wedge (x, w) \in R$.

Не е антисиметрична, тъй като $(w, x) \in R \wedge (x, w) \in R$, но $x \neq w$.

Не е транзитивна, тъй като $(w, x) \in R \wedge (x, z) \in R$, но $(w, z) \notin R$.

3. Релация R върху множеството $P(X)$ на множеството $X = \{1, 2, 3, 4\}$ където $(S, T) \in R$ тогава и само тогава когато $S \subseteq T$

Рефлексивна, тъй като $S \subseteq S, \forall S \in P(X)$.

Не е симетрична, тъй като ако $S \subseteq T$ не $\Rightarrow T \subseteq S$
 $(S, T) \in R$ не $\Rightarrow (T, S) \in R, \forall S, T \in P(X)$.

Не е асиметрична, тъй като ако $S \subseteq T$ не $\Rightarrow T \subsetneq S$
 $(S, T) \in R$ не $\Rightarrow (T, S) \notin R, \forall S, T \in P(X)$.

Антисиметрична, тъй като от $S \subseteq T \wedge T \subseteq S \Rightarrow S = T$
 $(S, T) \in R \wedge (T, S) \in R \Rightarrow S = T, \forall S, T \in P(X)$.

Транзитивна, тъй като от $S \subseteq T \wedge T \subseteq G \Rightarrow S \subseteq G$
 $(S, T) \in R \wedge (T, G) \in R \Rightarrow (S, G) \in R, \forall S, T, G \in P(X)$.

Задача 2

Нека R и S са релации от вида

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\} \quad S = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$$

Да се определи композицията им $S \circ R$

Решение

$$(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$$

$$S \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Задача 3

Задача 3: Нека R е рефлексивна и транзитивна релация. Да се докаже, че $R^n = R$, $\forall n \geq 1$, $n \in N$.

Решение:

Съгласно съществуваща в литературата теорема, ако релацията R е транзитивна, то

$$R^n \subseteq R, \quad \forall n \geq 1, \quad n \in N. \quad (1)$$

Ако се докаже, че

$$R \subseteq R^n, \quad \forall n \geq 1, \quad n \in N, \quad (2)$$

то от (1) и (2) $\Rightarrow R^n = R$.

Доказателството на $R \subseteq R^n$, $\forall n \geq 1$, $n \in N$:

Доказателството на $R \subseteq R^n$, $\forall n \geq 1$, $n \in N$ ще се извърши, основавайки се на принципа на пълната математическа индукция:

$$1. \quad \text{Проверява се верността на (2) при } n=1 \Rightarrow R = R^1 \Rightarrow (2) \text{ е вярно при } n=1. \quad (2a)$$

$$2. \quad \text{Допуска се, че твърдението (2) е изпълнено за}$$

$$n=k \Rightarrow R \subseteq R^k, \quad k \geq 1, \quad k \in N. \quad (2б)$$

(2б)

Тъй като релацията R е рефлексивна $\Rightarrow (b, b) \in R \Rightarrow (b, b) \in R^x$

$$3. \quad \text{Проверява се верността на твърдението (2) за } n=k+1$$

$$\left| \begin{array}{l} (a, b) \in R \\ (b, b) \in R^k \\ R^{k+1} = R^k \circ R \Rightarrow (b, b) \circ (a, b) = (a, b) \Rightarrow (a, b) \in R^{k+1} \end{array} \right. \Rightarrow R \subseteq R^{k+1}. \quad (2в)$$

Съгласно принципа на пълната математическа индукция от (2а), (2б) и (2в) $\Rightarrow R \subseteq R^n$, $\forall n \geq 1$, $n \in N$.

Задача 4

Да се състави матрица, описваща следната релация R върху множеството $\{1,2,3,4\}$, където $(a,b) \in R$, тогава и само тогава когато $|a-b| \leq 1$

Решение :

$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} b \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Задача 5

Ако релациите R и S се представят със следните матрици

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Определете матриците, които представят $R \cup S$ и $R \cap S$?

Решение:

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Задача 6

Да се определи релацията по следната матрица

$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$$

Задача 7

Задача 7: Какъв е резултатът от следното твърдение: “Ако релацията R е антирефлексивна, то релацията R^2 също е антирефлексивна.”

Решение:

Ако релацията R върху множеството A е антирефлексивна $\Rightarrow (a, a) \notin R, \forall a \in A$.

Например, ако $S = \{a, b\}$, $R = \{(a, b), (b, a)\}$ то

$R^2 = R \circ R = \{(a, b), (b, a)\} \circ \{(a, b), (b, a)\} = \{(a, a), (b, b)\}$, която е рефлексивна релация.

Отговор: ЛЪЖА

7 Упражнение 7: Функции и суми

Задача 1

Нека са дадени следните множества

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{a, b, c\}$$

$$C = \{2, 7, 10\}$$

На тяхна основа са дефинирани функциите

$$g : A \rightarrow B \quad f : B \rightarrow C$$

по следния начин

$$g = \{(1, b), (2, a), (3, c)\} \quad f = \{(a, 10), (b, 7), (c, 2)\}$$

Композицията $f \circ g$ е

$$f \circ g = \{(1, b), (2, a), (3, c)\} \circ \{(a, 10), (b, 7), (c, 2)\} = \{(1, 7), (2, 10), (3, 2)\}$$

Задача 2

Да се намерят обратните функции f^{-1} на следните функции f :

1. $f : A \rightarrow B$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 7, 10\}$, $f = \{(a, 10), (b, 7), (c, 2)\}$
 $\forall x \in A \implies \exists y \in B, f(x) = y$

f е инекция, f е сюрекция $\implies f$ е биекция \implies

$$f^{-1} = \{(10, a), (7, b), (2, c)\}$$

2. $f : A \rightarrow B$, $A = \{ \text{Иван, Стоян, Георги, Тони} \}$,
 $B = \{ \text{Опел, Форд, Рено, Пежо, Ситроен} \}$,
 $f = \{ (\text{Иван, Пежо}), (\text{Стоян, Форд}), (\text{Георги, Рено}), (\text{Тони, Опел}) \}$
 $\forall a \in A \implies \exists b \in B, f(a) = b$
 $f(\emptyset) = \text{Ситроен}$
 f е инекция, f не е сюрекция $\implies f$ не е биекция $\implies \nexists f^{-1}$

3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 5$
 f е инекция, f е сюрекция $\implies f$ е биекция $\implies \exists f^{-1}$

$$x = 3y + 5 \implies y = f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{3}$$

$$4. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x > \frac{2}{7}, f(x) = \ln(7x - 2)$$

$$f \text{ е инекция, } f \text{ е сюрекция} \implies f \text{ е биекция} \implies \exists f^{-1}$$

$$x = \ln(7y - 2) \implies 7y - 2 = e^x \implies y = f^{-1}(x) = \frac{e^x + 2}{7}$$

Задача 3

Да се запишат нулевия, първия, втория и третия член на редица с общ член a_n от вида:

$$1. (-2)^n$$

$$a_0 = (-2)^0 = 1, a_1 = (-2)^1 = -2, a_2 = (-2)^2 = 4, a_3 = (-2)^3 = -8$$

$$2. 3$$

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 3$$

$$3. 7 + 4^n$$

$$a_0 = 7 + 4^0 = 8, a_1 = 7 + 4^1 = 11, a_2 = 7 + 4^2 = 23, a_3 = 7 + 4^3 = 71$$

$$4. 2^n + (-2)^n$$

$$a_0 = 2^0 + (-2)^0 = 2 \quad a_1 = 2^1 + (-2)^1 = 0$$

$$a_2 = 2^2 + (-2)^2 = 8 \quad a_3 = 2^3 + (-2)^3 = 0$$

Задача 4

Да се запише общият член a_n за всеки от посочените редове от цели числа ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$)

$$1. 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, \dots - \text{аритметична прогресия}$$

$$a_1 = 7 \quad d = 4 \implies a_n = a_1 + (n - 1)d = 7 + (n - 1)4$$

$$2. 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, 13122, 39366, \dots - \text{геометрична прогресия}$$

$$a_1 = 2 \quad q = 3 \implies a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

3. 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102, ...

$$a_1 = 3 \quad a_2 = 6 = a_1 + 3 \quad a_3 = 11 = a_2 + 5 \quad a_4 = 18 = a_3 + 7$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + (2(n-1) - 1) = a_{n-2} + (2n - 3)$$

$$a_n = a_{n-1} + (2n - 1)$$

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (3 + 5 + \dots + (2n - 1)) = 2 + (1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)) = \\ &= 2 + \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = 2 + \frac{2n \cdot n}{2} = n^2 + 2 \end{aligned}$$

Задача 5

Да се намери стойността на всяка от следните суми:

1. $S_9 = \sum_{k=0}^8 (1 + (-1)^k)$

$$S_9 = \sum_{k=0}^8 (1 + (-1)^k) = 2 + 0 + 2 + 0 + 2 + 0 + 2 + 0 + 2 = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 10$$

2. $S_4 = \sum_{k=0}^4 (2^k + 3k)$

$$S_4 = \sum_{k=0}^4 (2^k + 3k) = \sum_{k=0}^4 2^k + \sum_{k=0}^4 3k = \sum_{k=0}^4 2^k + 3 \sum_{k=0}^4 k$$

$$a_{1geo} \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} + 3 \frac{4(a_{1alg} + a_{4alg})}{2} = 2 \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} + 3 \frac{4(1 + 4)}{2} = \frac{2 \cdot 15}{1} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2} = 30 + 30 = 60$$

3. $S_5 = \sum_{k=0}^4 5 \cdot 2^k$

$$S_5 = \sum_{k=0}^4 5 \cdot 2^k = 5 \sum_{k=0}^4 2^k = 5 \cdot a_0 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 5 \cdot 2^0 \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 5 \cdot 31 = 155$$

4. $S = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 (2i + 3j)$

$$S = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 (2i + 3j) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 2i + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 3j =$$

$$4 \cdot 2 \sum_{i=0}^2 i + 3 \cdot 3 \sum_{j=0}^3 j = 8 \cdot \frac{(0 + 2)3}{2} + 9 \cdot \frac{(0 + 3)4}{2} = 24 + 54 = 78$$

Задача 6

Задача 6: Да се пресметнат следните крайни и безкрайни суми:

$$1) \quad S_n = 1 + 2 + \dots + n$$

$$2) \quad S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$3) \quad S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{n-1}n$$

$$4) \quad S_n = 1.1 + 2.3 + 3.5 + \dots + n.(2n-1)$$

$$5) \quad S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

$$6) \quad S_\infty = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots$$

Решение:

$$1) \quad S_n = 1 + 2 + \dots + n = ?$$

I начин: Посочената сума е сума от n члена в аритметична прогресия с: $a_1 = 1$ и $a_n = n$.

$$\text{Следователно: } S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(a_n + a_1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

II начин: Използва се формулата: $(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 2^2 - 1^2 = 2 \cdot 1 + 1 \\ x=2 & 3^2 - 2^2 = 2 \cdot 2 + 1 \\ \dots & \dots \\ x=n & (n+1)^2 - n^2 = 2 \cdot n + 1 \end{array} \quad +$$

4

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2(1+2+\dots+n) + 1 \cdot n$$

$$(n^2 + 2n + 1) - 1^2 = 2S_n + n$$

$$n^2 + n = 2S_n$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2) S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = ?$$

Използва се формулата: $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ x=2 & 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ \dots & \dots \\ x=n & (n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{array}$$

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + 1 \cdot n$$

$$(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 1 = 3S_n + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n - n = 3S_n + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 3S_n$$

$$S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{2} \right) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3) S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{n-1} n = ?$$

I случай: $n = 2m \Rightarrow m = \frac{n}{2}, m = 0, 1, \dots$

$$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{n-1} n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{2m-1} \cdot 2m =$$

$$= [1 + 3 + 5 + \dots + (2m-1)] - [2 + 4 + 6 + 2m] = \frac{m(1+2m-1)}{2} - \frac{m(2+2m)}{2} =$$

$$= m^2 - m^2 - m = -m = -\frac{n}{2}$$

II случай: $n = 2m+1 \Rightarrow m = \frac{n-1}{2}, m = 0, 1, \dots$

$$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{n-1} n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{(2m+1)-1} \cdot (2m+1) =$$

$$= [1 + 3 + 5 + \dots + (2m+1)] - [2 + 4 + 6 + 2m] = \frac{(1+2m-1)(m+1)}{2} - \frac{m(2+2m)}{2} =$$

$$= (m+1)^2 - (1+m) \cdot m = m^2 + 2m + 1 - m - m^2 = m+1 = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$$

$$4) S_n = 1.1 + 2.3 + 3.5 + \dots + n.(2n-1) = ?$$

Базирайки се на общия член на разглежданата сума $a_n = n(2n-1) = 2n^2 - n$, всеки от членовете в нея се представя като:

$$\begin{array}{l} a_1 = 1.1 = 2.1^2 - 1 \\ a_2 = 2.3 = 2.2^2 - 2 \\ + a_3 = 3.5 = 2.3^2 - 3 \\ \dots\dots\dots \\ a_n = n(2n-1) = 2.n^2 - n \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_n &= \sum_{i=1}^n a_i = 1.1 + 2.3 + 3.5 + \dots + n.(2n-1) = 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot (2n^3 + 3n^2 + n) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n - 3n^2 - 3n}{6} = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6} \end{aligned}$$

$$5) S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = ?$$

$$\text{Използва се формулата: } \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ \dots\dots\dots \\ x=n \end{array} + \left| \begin{array}{l} \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{array} \right.$$

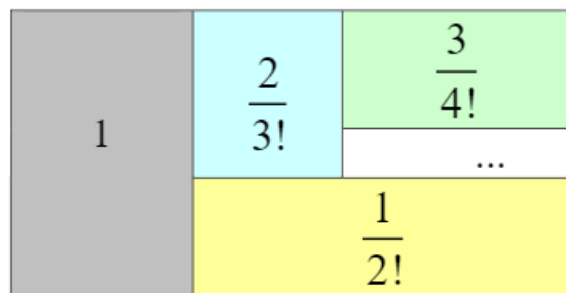
$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1$$

$$6) S_{\infty} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots = ?$$

I начин: Геометрично решение

$S_{\infty} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots = 2$, защото тази безкрайна сума е равна на лицето на правоъгълник със страни 1 и 2, който е разделен на нови правоъгълници по следния начин:



II начин: Аналитично решение

Използва се формулата: $\frac{x-1}{x!} = \frac{1}{(x-1)!} - \frac{1}{x!}$

$$\begin{array}{lcl}
 x=2 & \Rightarrow & \frac{2-1}{1!} = \frac{1}{(2-1)!} - \frac{1}{2!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \\
 x=3 & \Rightarrow & \frac{3-1}{3!} = \frac{1}{(3-1)!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \\
 + & & \dots \\
 x=n & \Rightarrow & \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \\
 x=n+1 & \Rightarrow & \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}
 \end{array}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{(n+1)!} = 2 + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$S_{\infty} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{(n+1)!} \right) = 2$$

Задача 7

Нека $A = \{3, 3, 7, 15, 27\}$ Да се определи общия член във функцията на индексната променлива $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Решение:

$$\begin{aligned}
 a(n) &= an^2 + bn + c \\
 \left| \begin{array}{l} a(1) = 3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ a(2) = 3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ a(3) = 7 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{array} \right| &\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 7 \end{array} \right| \Leftrightarrow \\
 \left| \begin{array}{l} c = 3 - a - b \\ 4a + 2b + 3 - a - b = 3 \\ 9a + 3b + 3 - a - b = 7 \end{array} \right| &\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} c = 3 - a - b \\ 3a + b = 0 \\ 8a + 2b = 4 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} c = 3 - a - b \\ b = -3a \\ 8a + 2(-3a) = 4 \end{array} \right| \Leftrightarrow \\
 \left| \begin{array}{l} 8a - 6a = 4 \\ c = 3 - a - b \\ b = -3a \end{array} \right| &\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2a = 4 \\ c = 3 - a - b \\ b = -3a \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -3 \cdot 2 = -6 \\ c = 3 - 2 - (-6) = 1 + 6 = 7 \end{array} \right| \\
 a(n) &= 2n^2 - 6n + 7
 \end{aligned}$$

Задача 8

Да се намери решението на функцията спрямо y .

$$P(x, y) = 7x^2 - 2y^2 = 3$$

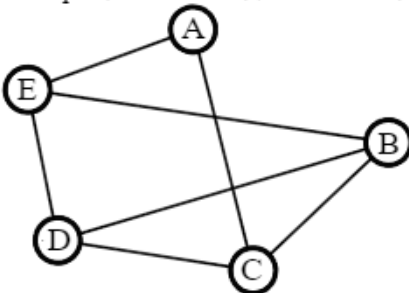
Решение:

$$\begin{aligned}
 7x^2 - 2y^2 &= 3 \\
 2y^2 &= 7x^2 - 3 \Leftrightarrow y^2 = \frac{7x^2 - 3}{2} \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{7x^2 - 3}{2}} \\
 \frac{7x^2 - 3}{2} &\geq 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{3}{7} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{\frac{3}{7}} \vee x \leq -\sqrt{\frac{3}{7}}
 \end{aligned}$$

8 Упражнение 8: Графи и дървета

Задача 1

Задача 1: Да се състави матрицата на съседство на следния неориентиран граф:

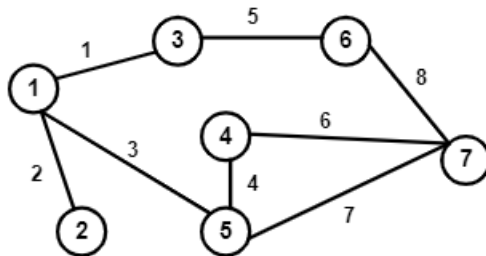


$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Извод: Матрицата на съседство на неориентиран граф е симетрична квадратна матрица, чиито елементи (i, i) по главния диагонал са 1, ако около съответния връх V_i има примка.

Задача 2

Задача 2: Да се състави матрицата на инцидентност на следния неориентиран граф:

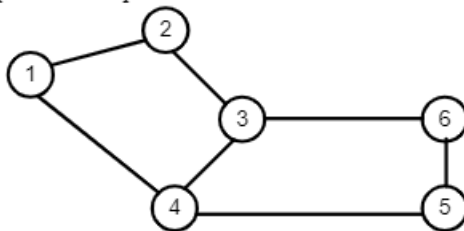


$$A_I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Извод: Матрицата на инцидентност на неориентиран граф съдържа по две 1 в колона, съответстваща на нормално ребро и по една 1 в колона, съответстваща на ребро-примка.

Задача 3

Задача 3: Да се определи матрицата на достижимост на следния неориентиран граф:



$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad H_1 = I \cup A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_G^2 = A_G \cdot A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_G^3 = A_G^2 \cdot A_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = I \cup A_G \cup A_G^2 = H_1 \cup A_G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

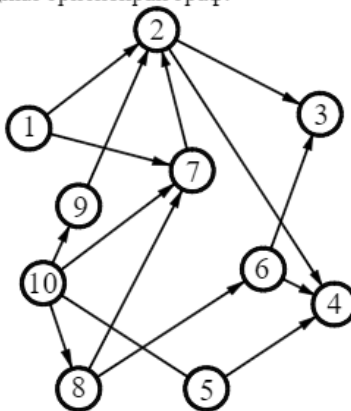
$$H_3 = I \cup A_G \cup A_G^2 \cup A_G^3 = H_2 \cup A_G^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Елементите на матрицата H_3 са само от 1 $\implies H_4 = H_3 \implies$ Процедурата се спира.

Всеки връх от разглеждания граф е достижим от всички останали.

Задача 4

Задача 4: Да се определи еквивалентен ориентиран граф, в който отделните върхове са групирани по нива, на следния ориентиран граф:



1. За всеки връх V_i се определя множество $V^+(i)$ от върхове, всеки от които е начало на дъга, влизаща във върха V_i както следва:
 - $V^+(1) = \emptyset$
 - $V^+(2) = \{V_1, V_9, V_7\}$
 - $V^+(3) = \{V_2, V_6\}$
 - $V^+(4) = \{V_2, V_5, V_6\}$
 - $V^+(5) = \{V_{10}\}$
 - $V^+(6) = \{V_8\}$
 - $V^+(7) = \{V_1, V_{10}, V_8\}$
 - $V^+(8) = \{V_{10}\}$
 - $V^+(9) = \{V_{10}\}$
 - $V^+(10) = \emptyset$
2. Определя се множеството от върхове от нулево ниво, което включва всички висящи (начални) върхове:

$$V^0 = \{V_1, V_{10}\}$$

3. Определя се множеството от върхове от първо ниво, което включва върхове, които са директно свързани чрез дъги единствено с върхове от нулево ниво:

$$V^1 = \{V_9, V_8, V_5\} \quad V_i \in V^1 \quad V^+(i) = V_0$$

4. Определя се множеството от върхове от второ ниво, което включва върхове, които са директно свързани чрез дъги единствено с върхове от нулево и първо ниво:

$$V^2 = \{V_7, V_6\} \quad V_i \in V^2 \quad V^+(i) = V_1$$

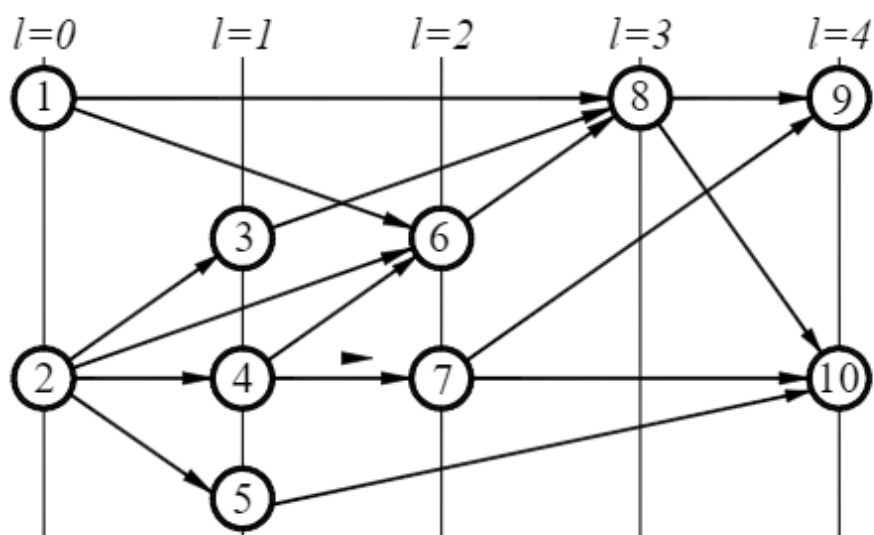
5. Определя се множеството от върхове от трето ниво, което включва върхове, които са директно свързани чрез дъги с върхове от нулево, първо и второ ниво:

$$V^3 = \{V_2\} \quad V_i \in V^3 \quad V^+(i) = V_2$$

6. Определя се множеството от върхове от четвърто ниво, което включва върхове, които са директно свързани чрез дъги с върхове от нулево, първо, второ и трето ниво:

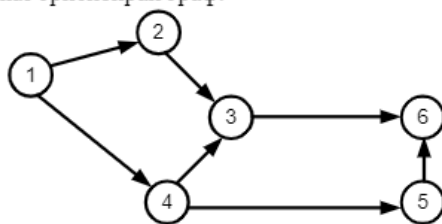
$$V^4 = \{V_3, V_9\} \quad V_i \in V^4 \quad V^+(i) = V_3$$

7. Преномерират се върховете в новия граф (не е задължително).

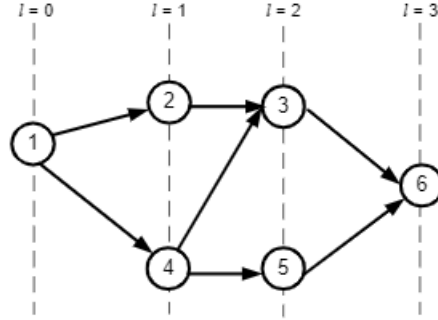


Задача 5

Задача 5: Да се определи матрицата на достижимост и броя на възможните пътища между върховете на следния ориентиран граф:



1. Определя се еквивалентния ориентиран граф, в който отделните върхове са групирани по нива, както следва:



2. Формира се единична квадратна матрица от вида:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow H^0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Формира се матрицата на достижимост до върховете от ниво 1 - H^1 :

$$H^{(0-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H^1 = H^{(0-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Формира се матрицата на достижимост до върховете от ниво 2 - H^2 :

$$H^{(1-2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H^2 = H^{(1-2)} + H^1 \cdot H^{(1-2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Формира се матрицата на достижимост до върховете от ниво 3 - H^3 :

$$H^{(2-3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies H^3 = H^{(2-3)} + H^2 \cdot H^{(2-3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Определя се окончателната матрица на достижимост:

$$H = H^0 \cup H^1 \cup H^2 \cup H^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

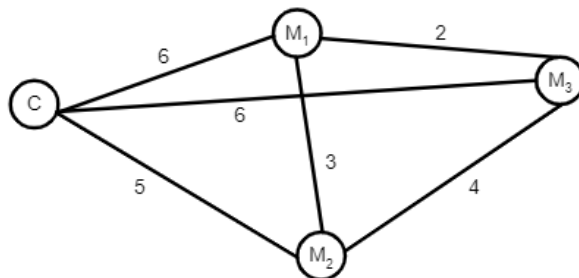
7. Определя се броя на възможните пътища между върховете на ориентирания граф:

$$H = H^0 + H^1 + H^2 + H^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача 6

Задача 6: Задача за търговския пътник

Доставчик снабдява 3 магазина - M_1, M_2, M_3 . Той взима стоката от склад C , разнася я по магазините и се прибира отново в склада. Разстоянията между отделните обекти са посочени на долния граф. Да се определи пътя, който ще измине доставчика, така че да снабди със стока всеки от магазините и едновременно с това да минимизира разходите си.



Решение:

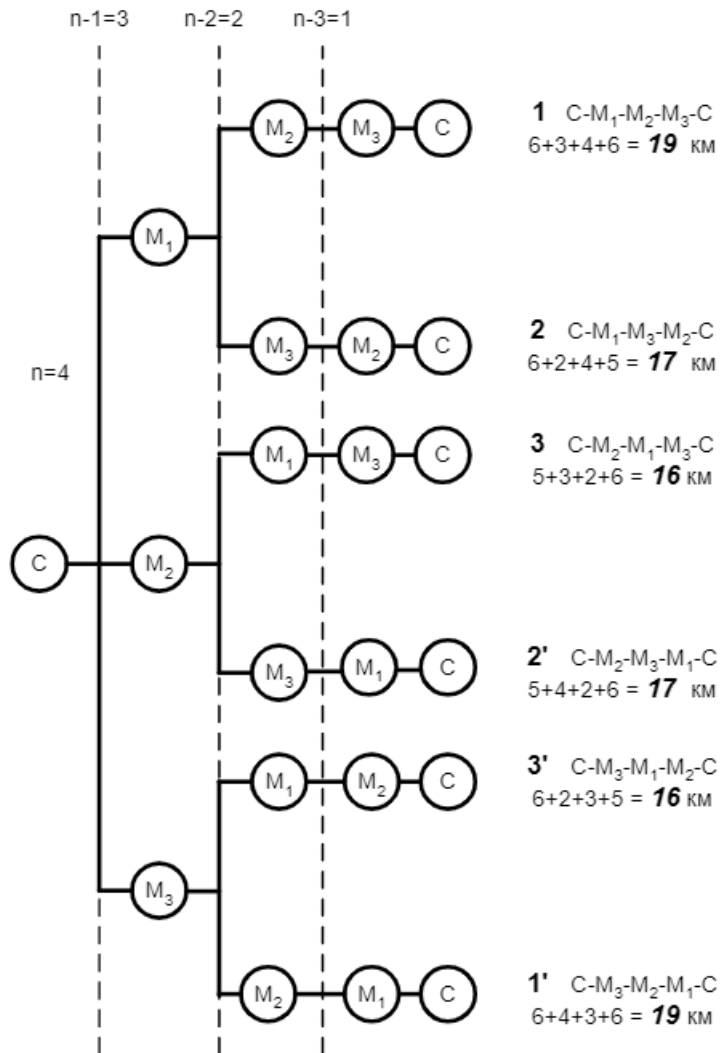
Необходимо е доставчикът да опише т.нар Хамилтонов контур, т.е. търговайки от склада C да мине последователно през всеки от магазините само по веднъж и отново да се върне в склада. В случая броя на върховете на неориентирания граф е $n = 4$. Следователно максималният брой различни Хамилтонови контури е $\frac{(n-1)!}{2} = \frac{3!}{2} = 3$, защото:

1. Фиксира се даден връх за N_1 .
2. От връх N_1 може да се отиде до $(n-1)$ - нови върха, всеки от които може да се означае с връх N_2
3. При фиксирани върхове N_1 и N_2 от връх N_2 може да се отиде до $(n-2)$ - нови върха, всеки от които може да се означае с връх N_1 и т.н.

\Rightarrow Общият брой Хамилтонови контури е $(n-1)!$ -, но всеки два от тях са еднакви, но с противоположна посока на обхождане \Rightarrow общият брой Хамилтонови контури е $\frac{(n-1)!}{2}$.

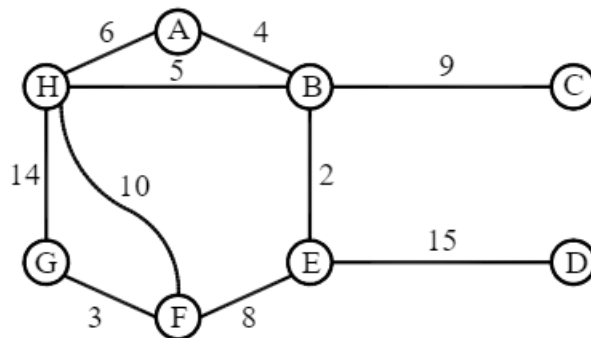
Решението на конкретната задача ще се визуализира чрез моделиране на възможните Хамилтонови контури, използвайки граф-дърво.

От дървото се вижда, че двойките контури 1-1', 2-2' и 3-3' са с равна дължина, но с обратна последователност на обхождане и най-краткият път е 3 (респ.3'), чиято дължина е 16км.

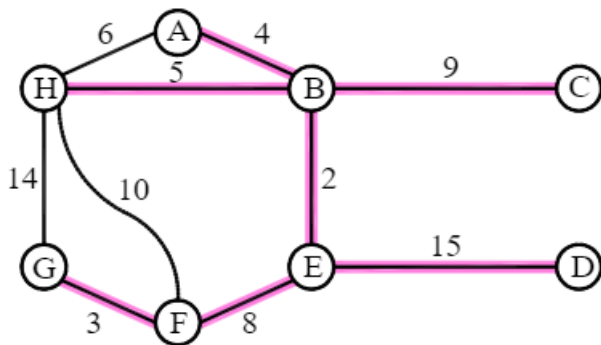


Задача 7

Задача 7: За посочения неориентиран граф с тегла на ребрата да се определи минимално покриващо дърво по метода на Крускал.



Последователността на присвояване на ребра на графа към МПД, съгласно алгоритъма на Крускал е следната: (B, E), (G, F), (A, B), (H, B), (F, E), (B, C), (E, D).
Резултантното МПД е показано на следващата фигура: Съответстващата

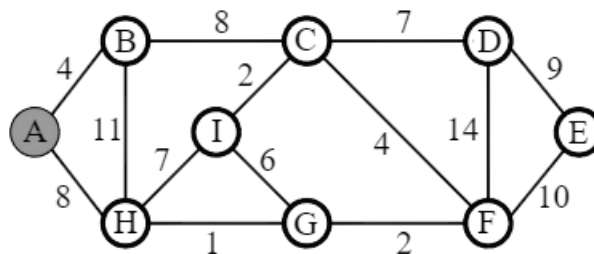


сума от тегловни коефициентина принадлежащите му ребра, е:

$$2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9 + 15 = 46$$

Задача 8

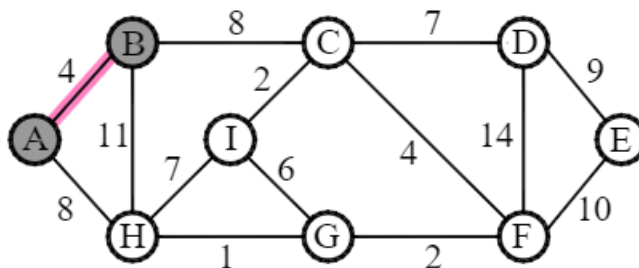
Задача 8: За посочения неориентиран граф с тегла на ребрата да се определи минимално покриващо дърво по метода на Прим, като се приеме възел *A* за начален.



Решение:

Последователността на присвояване на ребра на графа към МПД, съгласно алгоритъма на Прим е показана на следващата фигура:

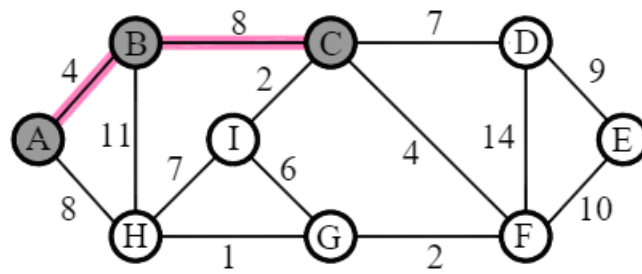
1)



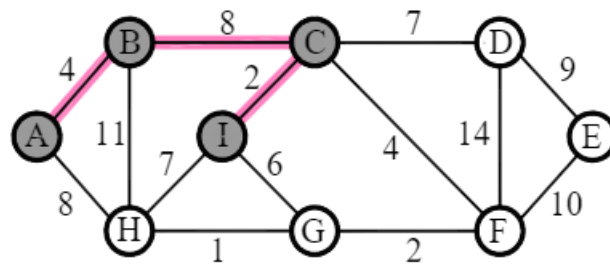
Съответстващата сума от тегловни коефициентина принадлежащите му ребра, е:

$$4 + 8 + 2 + 4 + 2 + 1 + 7 + 9 = 37$$

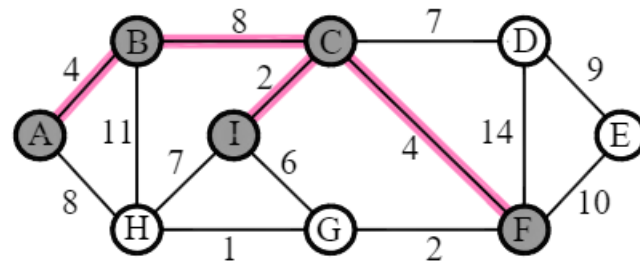
2)



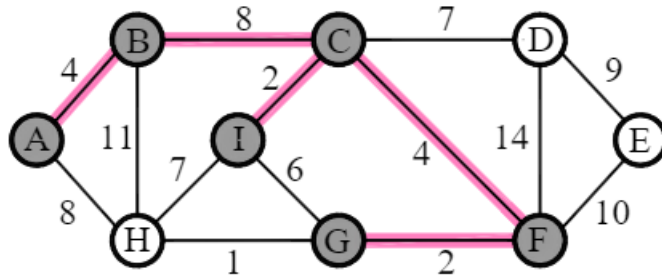
3)



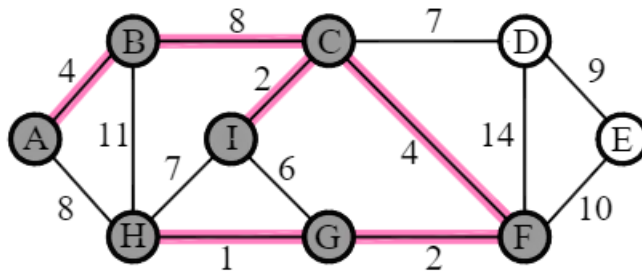
4)



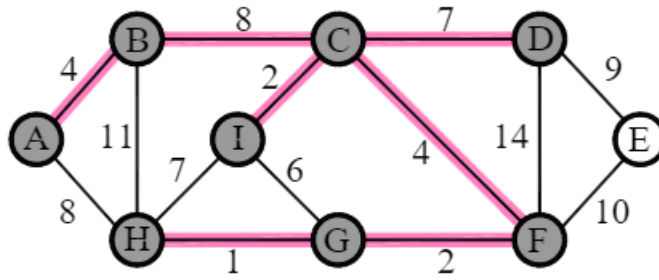
5)



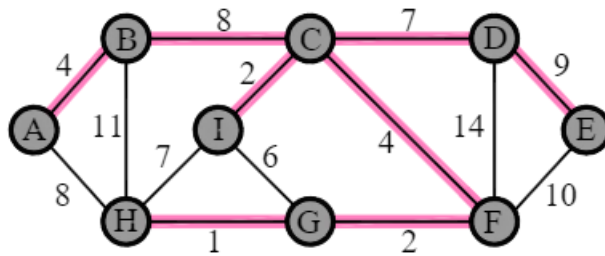
6)



7)



8)



9 Упражнение 9: Комбинаторика

Задача 1

Колко различни комбинации на 5-разрядни числа могат да се съставят, ако се работи с двоична, десетична бройна система?

Решение:

Възможно е повтаряне

Двоична бройна система

1ви разряд	2ри разряд	3ти разряд	4ти разряд	5ти разряд	Комбинации
0-1	0-1	0-1	0-1	0-1	
2	2	2	2	2	$2^5 = 32$

Десетична бройна система

1ви разряд	2ри разряд	3ти разряд	4ти разряд	5ти разряд	Комбинации
0-9	0-9	0-9	0-9	0-9	
10	10	10	10	10	$10^5 = 32$

Не е възможно е повтаряне

Двоична бройна система - не е възможно защото трябва да се разпределят 2 цифри в 5 позиции.

Десетична бройна система

1ви разряд	2ри разряд	3ти разряд	4ти разряд	5ти разряд	Комбинации
10 числа	9 числа	8 числа	7 числа	6 числа	$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$

Задача 2

Компютърна лаборатория разполага с 5 вида маси, 6 вида столове и 3 типа компютърни конфигурации.

1. Колко възможни начина на съчетаване на маса, стол и компютър могат да се получат?
2. Ако на всяко възможно работно място съответства по един студент, то колко възможни начина на съчетаване на маса, стол, компютър и студент могат да се получат?

Решение:

1.

Маси	Столове	Компютри	Комбинации
5	6	3	$5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$

2.

Маси	Столове	Компютри	Комбинации (М-С-К)	Студенти	Комбинации (М-С-К-Ст)
5	6	3	$5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$	90	$5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 90 = 8100$

Задача 3

Нека разгледаме краен автомат, чиято входна азбука се състои от 4 букви - a, b, c, d .

Колко различни думи може да разпознае автомата, ако във всяка дума буквите a, b, c, d срещат както следва:

a	3
b	2
c	1
d	4

$$k = 4 \quad n_1 = 3 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 1 \quad n_4 = 4 \implies n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$$

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! n_4!} = \frac{10!}{3! 2! 1! 4!} = 12600$$

Задача 4

Необходимо е да се изберат 4 души от студентска група от 10 човека. Какъв е максималният възможен брой комбинации от 4-ма студента, които да се изберат?

Решение:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad n = 10 \quad k = 4 \implies \frac{10!}{(10-4)!4!} = 210$$

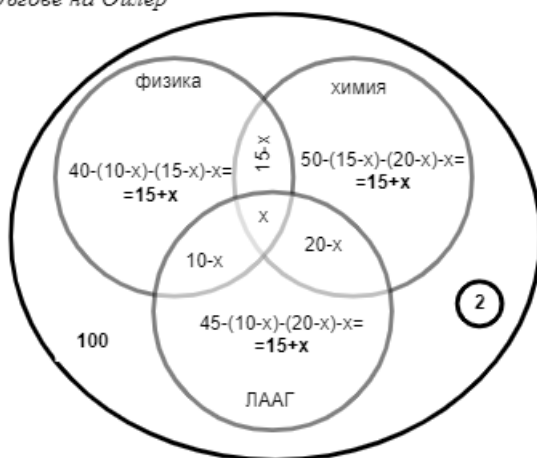
Задача 5

Нека общият брой на студентите от ФКСУ е 100. Част от тях са взели своите изпити по следния начин:

Брой студенти	Дисциплина
$N(\alpha_1) = 40$	физика
$N(\alpha_2) = 50$	химия
$N(\alpha_3) = 45$	ЛААГ
$N(\alpha_1, \alpha_2) = 15$	физика и химия
$N(\alpha_2, \alpha_3) = 20$	химия и ЛААГ
$N(\alpha_1, \alpha_3) = 10$	физика и ЛААГ
$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}) = 2$	ниито един

Има ли студенти от ФКСУ, които са взели всеки от горепосочените изпити?

1 начин: Чрез кръгове на Ойлер



$$100 = (15 + x) + (15 + x) + (15 + x) + (15 - x) + (10 - x) + (20 - x) + x + 2$$

$$100 = x + 2 + 15 + 15 + 15 + 15 + 10 + 20$$

$$100 = x + 92 \implies x = 8$$

II начин: Чрез прилагане на основната теорема в комбинаториката (теорема за принадлежност и непринадлежност към дадено множество): Нека имаме N обекта и n свойства - $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и всеки обект може да притежава повече от 1 или нито 1 свойство. Нека

$N(\alpha_i)$ - брой обекти, притежаващи само свойство α_i ;

$N(\alpha_i, \alpha_j)$ - брой обекти, притежаващи едновременно свойствата α_i и α_j ;

$N(\overline{\alpha_i}, \overline{\alpha_j})$ - брой обекти, непритежаващи едновременно свойствата α_i и α_j ;

и т.н.

Тогава броят на обектите, непритежаващи едновременно нито едно от посочените свойства, е:

$$N = N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n}) + (N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + \dots + N(\alpha_n)) - (N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_1, \alpha_4) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n)) - \\ + (N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \dots + N(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n)) + \dots + (-1)^{n+1} N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

т.е.

$$\left. \begin{array}{l} N(\alpha_1) = 40 \\ N(\alpha_2) = 50 \\ N(\alpha_3) = 45 \\ N(\alpha_1, \alpha_2) = 15 \\ N(\alpha_2, \alpha_3) = 20 \\ N(\alpha_1, \alpha_3) = 10 \\ N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} N = (N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + N(\alpha_3)) - (N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_3)) + \\ + N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}) \end{array}$$

$$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = N - (N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + N(\alpha_3)) + (N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_3)) - N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}) = \\ = 100 - (40 + 50 + 45) + (15 + 20 + 10) - 2 = 100 - 135 + 45 - 2 = 100 - 90 - 2 = \mathbf{8}$$

Следователно, 8 студента са взели и трите горепосочени изпита.

Задача 6

Имаме 4 еднакви топчета и 2 различни кутии.

Колко са възможните комбинации за поставяне на топчетата в кутиите?

I кутия	4	3	2	1	0
II кутия	0	1	2	3	4

Отговор: 5

Задача 7

Какъв е броят на делителите на числото 400?

$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$$

$$400 = 4 \cdot 100 = 4 \cdot 4 \cdot 25 = 2^4 \cdot 5^2 = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}$$

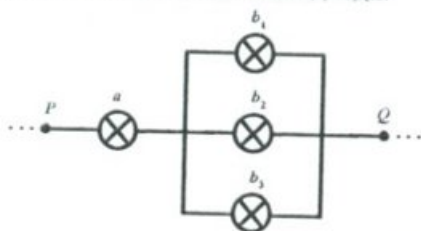
$$N = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1) = (4 + 1) \cdot (2 + 1) = 5 \cdot 3 = 15$$

10 Упражнение 10: Вероятности

Задача 1

Задача 1: За показания участък от електрическа верига могат да възникнат следните събития:

- A – изгаряне на светодиодиод a ;
- B_1 – изгаряне на светодиодиод b_1 ;
- B_2 – изгаряне на светодиодиод b_2 ;
- B_3 – изгаряне на светодиодиод b_3 ;
- C – изгасване на всички светодиоди.



Да се изразят събитията C и \bar{C} чрез събитията A, B_1, B_2 и B_3 !

Решение:

Светодиодите ще изгаснат (настъпва събитие C), ако настъпи събитие A или едновременно настъпят и трите събития B_1, B_2, B_3 , т.е

$$C = A + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$$

Съответният израз за противоположното събитие се получава като

$$\bar{C} = \overline{A + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3} = \bar{A} \cdot \overline{B_1 \cdot B_2 \cdot B_3} = \bar{A} \cdot (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \bar{B}_3)$$

Задача 2

Дадено е устройство, състоящо се от два модула - а и б. Модул а се състои от два блока, а модул б- от три. Дефинирани са следните събития

- A_1 - блок a_1 е в изправност.
- A_2 - блок a_2 е в изправност.
- B_1 - блок b_1 е в изправност.

- B_2 - блок b_2 е в изправност.
- B_3 - блок b_3 е в изправност.

Устройството работи(събитие C), когато е в изправност поне един блок от модул а и не по малко от два блока от модул б. Да се изрази събитието C чрез останалите.

Решение:

$$A = A_1 + A_2 + A_1 \cdot A_2 \quad B = B_1 \cdot B_2 + B_2 \cdot B_3 + B_3 \cdot B_1 + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$$

$$C = A \cdot B = (A_1 + A_2 + A_1 \cdot A_2) \cdot (B_1 \cdot B_2 + B_2 \cdot B_3 + B_3 \cdot B_1 + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3)$$

Задача 3

Да се докаже, че събитията $A, \bar{A} \cdot B, \overline{A + B}$ образуват пълна група събития.

Решение:

$$A \cdot \bar{A} \cdot B = \emptyset \cdot B = \emptyset$$

$$A \cdot \overline{A + B} = A \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} = \emptyset \cdot B = \emptyset$$

$$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot B \cdot \bar{B} = \bar{A} \cdot \emptyset = \emptyset$$

$$A + \bar{A} \cdot B + \overline{A + B} = A + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} =$$

$$A + \bar{A} \cdot (B + \bar{B}) = A + \bar{A} \cdot U = A + \bar{A} = U$$

От първите 3 уравнения \implies не са съвместими \implies образуват пълна група събития

Задача 4

Разполагаме с два различни зара, които се хвърлят едновременно. Нека се дефинират следните събития:

- A - Поне единият зар се е паднал 1 точка.
- B - Сумата от точки върху двата зара е четно число.

Да се определят вероятностите

- $P(A \cdot B)$
- $P(\overline{A} \cdot B)$

$$n = 6 \cdot 6 = 36$$

$$A \cdot B = \{E_1 \cdot E_1, E_1 \cdot E_3, E_3 \cdot E_1, E_1 \cdot E_5, E_5 \cdot E_1\} \implies m = 5$$

$$P(A \cdot B) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$$

$$\overline{A} \cdot B = \{E_2 \cdot E_2, E_2 \cdot E_4, E_2 \cdot E_6, E_3 \cdot E_3, E_3 \cdot E_5, E_4 \cdot E_4, E_4 \cdot E_2, \\ E_4 \cdot E_6, E_5 \cdot E_5, E_5 \cdot E_3, E_6 \cdot E_6, E_6 \cdot E_2, E_6 \cdot E_4, \} \implies m = 13$$

$$P(\overline{A} \cdot B) = \frac{m}{n} = \frac{13}{36}$$

Задача 5

Върху картончета е написана всяка от цифрите 0-9 само по веднъж.

Каква е вероятността след поставянето им в кутия и изваждането им оттам със затворени очи цифрите да са подредени по намаляващ ред в зависимост от последователността на изваждането им?

Решение:

Цифри: 0-9 \implies 10 картончета които се подреждат по 10! начина \implies
 $n = 10!$

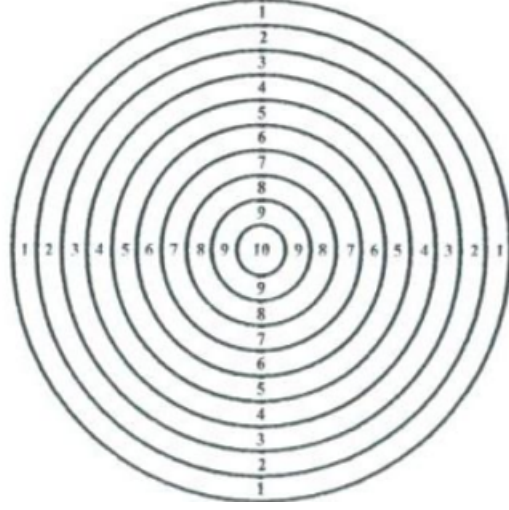
Благоприятни изходи: $m = 1$, Да извадим тази подредба (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{10!}$$

Задача 6

Дадена е мишена. Радиусът на най външния кръг е 10см, а най вътрешния 1см. Движейки се навътре радиусите намаляват с 1см. Да се определи

- Каква е вероятността при произволно стреляне да се улучи всяка зона?
- Каква е вероятността при произволно стреляне да се улучи зона 5,6,7,8?



$$\begin{array}{l|l}
 \begin{array}{l}
 S_{10} = \pi r_{10}^2 = 100\pi \\
 S_9 = \pi r_9^2 = 81\pi \\
 S_8 = \pi r_8^2 = 8^2\pi = 64\pi \\
 S_7 = \pi r_7^2 = 7^2\pi = 49\pi \\
 S_6 = \pi r_6^2 = 6^2\pi = 36\pi \\
 S_5 = \pi r_5^2 = 5^2\pi = 25\pi \\
 S_4 = \pi r_4^2 = 4^2\pi = 16\pi \\
 S_3 = \pi r_3^2 = 3^2\pi = 9\pi \\
 S_2 = \pi r_2^2 = 2^2\pi = 4\pi \\
 S_1 = \pi r_1^2 = 1\pi
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 m_1 = S_{10} - S_9 = 19\pi \\
 m_2 = S_9 - S_8 = 17\pi \\
 m_3 = S_8 - S_7 = 15\pi \\
 m_4 = S_7 - S_6 = 13\pi \\
 m_5 = S_6 - S_5 = 11\pi \\
 m_6 = S_5 - S_4 = 9\pi \\
 m_7 = S_4 - S_3 = 7\pi \\
 m_8 = S_3 - S_2 = 5\pi \\
 m_9 = S_2 - S_1 = 3\pi \\
 m_{10} = S_1 = \pi
 \end{array}
 \end{array}
 \implies$$

$$n = 100\pi$$

$$\begin{array}{l}
 P(A_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{19\pi}{100\pi} = 0.19 \\
 P(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{17\pi}{100\pi} = 0.17 \\
 P(A_3) = \frac{m_3}{n} = \frac{15\pi}{100\pi} = 0.15 \\
 P(A_4) = \frac{m_4}{n} = \frac{13\pi}{100\pi} = 0.13 \\
 P(A_5) = \frac{m_5}{n} = \frac{11\pi}{100\pi} = 0.11 \\
 P(A_6) = \frac{m_6}{n} = \frac{9\pi}{100\pi} = 0.09 \\
 P(A_7) = \frac{m_7}{n} = \frac{7\pi}{100\pi} = 0.07 \\
 P(A_8) = \frac{m_8}{n} = \frac{5\pi}{100\pi} = 0.05 \\
 P(A_9) = \frac{m_9}{n} = \frac{3\pi}{100\pi} = 0.03 \\
 P(A_{10}) = \frac{m_{10}}{n} = \frac{\pi}{100\pi} = 0.01
 \end{array}$$

$$P = P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) + P(A_8) = 0.11 + 0.09 + 0.07 + 0.05 = 0.32$$

Задача 7

Нека разгледаме две фирми. На всеки 100 продукта доставени в първата фирма, 75 % са български, а във втората фирма - 50 %. Каква е вероятността дадена стока да е от български производител, ако е закупена от първата фирма и от втората.

A - Покупка на стока произведена в България.

B - Закупена от първа/втора фирма.

$$P(A/B) = \frac{75}{100} = 0.75$$

$$P(A/B) = \frac{50}{100} = 0.5$$

Задача 8

Вероятността да се появи ненулев потенциал върху корпуса на уред ориентиран към земята е 0.3. 99% от дефектно-токовите защиты сработват и прекъсват веригата. Каква е вероятността да сработи защитата.

A - поява се ненулев потенциал.

B - сработване на дефектно-токова защита.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0.3 \cdot 0.99 = 0.297$$

Задача 9

Дадени са три несъвместими събития A,B,C. При провеждане на опит всяко от тях може да настъпи с вероятност $P(A) = 0.18$, $P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.02$ Каква е вероятността да настъпи поне едно от събитията

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0.18 + 0.5 + 0.02 = 0.7$$

Задача 10

Дадена е електрическа верига, в която могат да възникнат следните събития

- A_1 - изгаряне на светодиод a_1 с вероятност $P(A_1) = 0.7$.
- A_2 - изгаряне на светодиод a_2 с вероятност $P(A_2) = 0.5$.

- B_1 - изгаряне на светодиод b_1 с вероятност $P(B_1) = 0.2$.
- B_2 - изгаряне на светодиод b_2 с вероятност $P(B_2) = 0.1$.
- B_3 - изгаряне на светодиод b_3 с вероятност $P(B_3) = 0.3$.

Каква е вероятността нито един да не свети.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = 0.7 + 0.5 - 0.7 \cdot 0.5 = 0.85$$

$$P(B) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) = 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.3 = 0.006$$

$$P(A + B) = 0.85 + 0.006 - 0.85 \cdot 0.006 = 0.8509$$

Задача 11

В непрозрачна кутия са поставени три цвята топки - червени, сини, зелени. При боядисването някои са оцветени неравномерно.

Цвят	Червен	Син	Зелен
Общо количество	50%	10%	40 %
Неравномерно оцветени	2 %	5%	1%

Каква е вероятността да се извади неравномерно оцветена.

A - Извадената топка е неравномерно оцветена.

r - Извадената топка е червена

b - Извадената топка е синя

g - Извадената топка е зелена

$$P(H_r) = \frac{50}{100} = 0.5 \implies P\left(\frac{A}{H_r}\right) = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$P(H_b) = \frac{10}{100} = 0.1 \implies P\left(\frac{A}{H_b}\right) = \frac{5}{100} = 0.05$$

$$P(H_g) = \frac{40}{100} = 0.4 \implies P\left(\frac{A}{H_g}\right) = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$P(A) = P(H_r) \cdot P\left(\frac{A}{H_r}\right) + P(H_b) \cdot P\left(\frac{A}{H_b}\right) + P(H_g) \cdot P\left(\frac{A}{H_g}\right) =$$

$$0.5 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.05 + 0.4 \cdot 0.01 = 0.019$$

Задача 12

Фирма произвежда един и същ модел ботуши от естествена и изкуствена кожа. В една от доставките в даден магазин 40% от ботушите били естествена кожа. Вероятността да са здрави ботушите от естествена кожа в продължение на 5 сезона е 0.9, а тези от изкуствена 0.5. Клиент купил ботуши и те били здрави 7 сезона. Каква е вероятността да са били от естествена кожа.

Решение:

A - Закупените ботуши са били здрави 7 сезона

E - Ботушите са от естествена кожа

I - Ботушите са от изкуствена кожа

$$P(E) = \frac{40}{100} = 0.4 \quad P\left(\frac{A}{E}\right) = \frac{90}{100} = 0.9$$

$$P(I) = \frac{60}{100} = 0.6 \quad P\left(\frac{A}{I}\right) = \frac{50}{100} = 0.5$$

$$P(A) = P(E) \cdot P\left(\frac{A}{E}\right) + P(I) \cdot P\left(\frac{A}{I}\right) =$$

$$0.4 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.5 = 0.36 + 0.3 = 0.66$$

$$P\left(\frac{E}{A}\right) = \frac{m}{n} = \frac{P(E) \cdot P\left(\frac{A}{E}\right)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.9}{0.66} = \frac{0.36}{0.66} = \frac{6}{11} = 0.5455$$

11 Упражнение 11

12 Упражнение 12

13 Упражнение 13