Hermite Radial-Based Functions

Valentin Roussellet

25 novembre 2014

1 Notations

Les fonctions à base radiale de Hermite (Hermite Radial-Based Functions ou HRBF) sont des fonctions interpolées depuis un ensemble de points et de vecteurs normaux par une combinaison linéaire de fonctions a base radiale.
Dans la suite, on utilisera les notations suivantes :
- $\mathbf{v}$: vecteurs en gras
- $\mathbf{M}$: matrices en capitales grasses. Les éléments seront notés $M_{i,j}$.
- $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1$: produit scalaire de $\mathbf{v}_0$ et $\mathbf{v}_1$.

Les données d'entrée sont un ensemble de N points $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1..N}$ et les normales à la surface attendues en ces points $\mathbf{n_i}$ (c'est a dire la valeur du gradient de la fonction que l'on cherche).
Pour simplifier les formules, les notations : $\mathbf{r}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{p}_i$ et $R_i(x) = ||\mathbf{r}_i(\mathbf{x})|| = ||\mathbf{x} - \mathbf{p}_i||$ seront utilisées et le $(\mathbf{x})$ de ces expressions sera omis si il n'y a pas d'ambiguité.

2 Expression générale de la HRBF

Étant donné une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on cherche une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forme

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi(||\mathbf{x} - \mathbf{p}_i||) + \boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla(\phi(||\mathbf{x} - \mathbf{p}_i||))$$

Soit, avec les notations introduites plus haut :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi(R_i) + \boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla(\phi(R_i))$$

3 Expression du gradient

Le calcul de ∇f requiert un peu de calcul différentiel vectoriel.

3.1 Remarques préliminaires

Le gradient est analogue a une dérivée pour les fonctions dans l'espace. Aussi on a les propriétés suivantes :
- linearité : $\nabla[af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})] = a\nabla f(\mathbf{x}) + b\nabla g(\mathbf{x})$
- produit : $\nabla[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})] = g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x})$
- quotient : $\nabla \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x})}{(g(\mathbf{x}))^2}$

La formule de composition du gradient avec une fonction ϕ :

$$\nabla\phi(R_i(\mathbf{x})) = \phi'(R_i(\mathbf{x}))\nabla R_i(\mathbf{x})$$

En general, $\nabla R_i = \nabla||\mathbf{x} - \mathbf{p}_i||$, dont nous aurons besoin dans le calcul de ∇f, in'est pas défini en $\mathbf{x} = \mathbf{p}_i$. Pour éviter cette difficulté, on le définit comme nul en ce point, et on ignorera le i^e terme du gradient correspondant en $\mathbf{x} = \mathbf{p}_i$.

$$\nabla R_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{if} \mathbf{x} = \mathbf{p_i} \\ \frac{\mathbf{r_i}}{R_i} & \text{if} \mathbf{x} \neq \mathbf{p_i} \end{cases} \quad (1)$$

Enfin, cette identité sera utilisée un peu plus loin.

$$\nabla(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\beta}_i \quad (2)$$

3.2 Calcul

Ce développement est plutot long ; les changements d'une ligne sont surlignés en bleu

$$
\begin{aligned}
\nabla f(\mathbf{x}) &= \nabla \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi(R_i) + \boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla(\phi(R_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nabla(\phi(R_i)) + \nabla(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla(\phi(R_i))) && \text{(Linearité du gradient)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi'(R_i)\nabla R_i + \nabla(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \phi'(R_i)\nabla R_i) && \text{(Composition)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi'(R_i)\nabla R_i + \nabla(\phi'(R_i).(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi'(R_i)\nabla R_i + (\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i).\nabla(\phi'(R_i)) + \phi'(R_i).\nabla(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i) && \text{(Gradient d'un produit)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi'(R_i)\nabla R_i + (\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i).\phi''(R_i)\nabla R_i + \phi'(R_i).\nabla(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i) && \text{(Composition avec } \phi')
\end{aligned}
$$

On développe $\nabla(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i)$. Si $\mathbf{x} = \mathbf{p_i}$ on considère que $\nabla(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i) = \mathbf{0}$ comme vu plus haut. Ailleurs,

$$
\begin{aligned}
\nabla(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i) &= \nabla(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \frac{\mathbf{r_i}}{R_i}) \\
&= \frac{R_i \nabla(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{r_i}) - (\boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{r_i})\nabla R_i}{R_i^2} && \text{(Gradient d'un quotient)} \\
&= \frac{1}{R_i}\boldsymbol{\beta}_i - \frac{(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{r_i})\nabla R_i}{R_i^2} && \text{(Par l'équation 2)} \\
&= \frac{1}{R_i}\boldsymbol{\beta}_i - \frac{(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i)\nabla R_i}{R_i} && \text{(Par l'équation 1)}
\end{aligned}
$$

On peut maintenant remplacer dans l'expression du gradient :

$$
\begin{aligned}
\nabla f(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi'(R_i)\nabla R_i + (\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i).\phi''(R_i)\nabla R_i + \phi'(R_i).\nabla(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi'(R_i)\nabla R_i + (\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i).\phi''(R_i)\nabla R_i + \phi'(R_i).\left(\frac{1}{R_i}\boldsymbol{\beta}_i - \frac{(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i)\nabla R_i}{R_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi'(R_i)\nabla R_i + \frac{\phi'(R_i)}{R_i}\boldsymbol{\beta}_i + \left(\phi''(R_i) - \frac{\phi'(R_i)}{R_i}\right)(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla R_i)\nabla R_i && \text{(Factorizing)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{\phi'(R_i)}{R_i}\mathbf{r}_i + \frac{\phi'(R_i)}{R_i}\boldsymbol{\beta}_i + \left(\frac{\phi''(R_i)}{R_i^2} - \frac{\phi'(R_i)}{R_i^3}\right)(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i && \text{(Expanding} \nabla R_i)
\end{aligned}
$$

3.3 Forme finale

Pour simplifier, on définit :

$$
a_i(\mathbf{x}) = \frac{\phi'(R_i(\mathbf{x}))}{R_i(\mathbf{x})} \qquad b_i(\mathbf{x}) = \left(\frac{\phi''(R_i(\mathbf{x}))}{(R_i(\mathbf{x}))^2} - \frac{\phi'(R_i(\mathbf{x}))}{(R_i(\mathbf{x}))^3}\right)
$$

en gardant toujours $a_i(\mathbf{p}_i) = 0$ et $b_i(\mathbf{p}_i) = 0$. On peut maintennant écrire f et ∇f

$$
f(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi(R_i) + \boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla(\phi(R_i))
$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi(R_i) + \boldsymbol{\beta}_i \cdot \frac{\phi'(R_i)}{R_i} \mathbf{r_i}$$
$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi(R_i) + a_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{r_i}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i a_i(\mathbf{x}) \mathbf{r}_i + a_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}_i + b_i(\mathbf{x})(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i$$

4 Représentation sous forme de matrice

Pour calculer les valeurs de α_i et $\boldsymbol{\beta}_i$ on a une famille d'équations de la forme $f(\mathbf{p}_i) = c$ (en supposant que tous les points sont situés sur la surface c-iso-valeur), et $\nabla f(\mathbf{p}_i) = \mathbf{n}_i$. Pour fixer les idées, on fera ce développement en dimension 3. On a donc N équations $f(\mathbf{p}_i) = c$ et $3N$ équations correspondant aux composantes du gradient $\nabla f_x, \nabla f_y$ and ∇f_z
On peut écrire ces équations sous forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{p}_1) \\ \vdots \\ f(\mathbf{p}_N) \\ \nabla f_x(\mathbf{p}_1) \\ \nabla f_y(\mathbf{p}_1) \\ \nabla f_z(\mathbf{p}_1) \\ \nabla f_x(\mathbf{p}_2) \\ \vdots \\ \nabla f_z(\mathbf{p}_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ c \\ n_{1,x} \\ n_{1,y} \\ n_{1,z} \\ n_{2,x} \\ \vdots \\ n_{N,z} \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ces équations et calculer les valeurs des scalaires α_i et des vecteurs $\boldsymbol{\beta}_i$ (donc de leur the coordonnées $\beta_{i,x}, \beta_{i,y}, \beta_{i,z}$), on cherche une matrice carée $\mathbf{A}$ d'ordre $4N$ telle que :

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \beta_{1,x} \\ \beta_{1,y} \\ \beta_{1,z} \\ \vdots \\ \beta_{N,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ c \\ n_{1,x} \\ n_{1,y} \\ n_{1,z} \\ \vdots \\ n_{N,z} \end{pmatrix}$$

L'expression $f(\mathbf{p}_k) = c$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq k} \alpha_i \phi(R_i(\mathbf{p}_k)) + a_i(\mathbf{p}_k) \boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{r_i}(\mathbf{p}_k) &= c \\ \sum_{i \neq k} \alpha_i \phi(R_i(\mathbf{p_k})) + a_i(\mathbf{p}_k)(r_{i,x}(\mathbf{p}_k)\beta_{i,x} + r_{i,y}(\mathbf{p}_k)\beta_{i,y} + r_{i,z}(\mathbf{p}_k)\beta_{i,z}) &= c \end{aligned}$$

L'équation du gradient $\nabla f(\mathbf{p}_k) = \mathbf{n_k}$ donne

$$\sum_i \alpha_i a_i(\mathbf{p}_k) \mathbf{r}_i(\mathbf{p}_k) + a_i(\mathbf{p}_k) \boldsymbol{\beta}_i + b_i(\mathbf{p}_k)(\boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i = \mathbf{n}_k$$

On projette cette équation sur les axes (x, y, z)

$$\left\{ \begin{aligned} \textstyle\sum_{i \neq k} \alpha_i a_i(\mathbf{p}_k) r_{i,x}(\mathbf{p}_k) + a_i(\mathbf{p}_k)\beta_{i,x} + b_i(\mathbf{p}_k) r_{i,x}(\mathbf{p}_k)(r_{i,x}(\mathbf{p}_k)\beta_{i,x} + r_{i,y}(\mathbf{p}_k)\beta_{i,y} + r_{i,z}(\mathbf{p}_k)\beta_{i,z}) &= n_{k,x} \\ \textstyle\sum_{i \neq k} \alpha_i a_i(\mathbf{p}_k) r_{i,y}(\mathbf{p}_k) + a_i(\mathbf{p}_k)\beta_{i,y} + b_i(\mathbf{p}_k) r_{i,y}(\mathbf{p}_k)(r_{i,x}(\mathbf{p}_k)\beta_{i,x} + r_{i,y}(\mathbf{p}_k)\beta_{i,y} + r_{i,z}(\mathbf{p}_k)\beta_{i,z}) &= n_{k,y} \\ \textstyle\sum_{i \neq k} \alpha_i a_i(\mathbf{p}_k) r_{i,z}(\mathbf{p}_k) + a_i(\mathbf{p}_k)\beta_{i,z} + b_i(\mathbf{p}_k) r_{i,z}(\mathbf{p}_k)(r_{i,x}(\mathbf{p}_k)\beta_{i,x} + r_{i,y}(\mathbf{p}_k)\beta_{i,y} + r_{i,z}(\mathbf{p}_k)\beta_{i,z}) &= n_{k,z} \end{aligned} \right.$$

On peut maintenant identifier chaque coefficient de A et écrire la matrice. Chaque ligne correspond aux N équations $f(\mathbf{p_i}) = c$ puis aux $3N$ équations $\nabla f(\mathbf{p}_i) = \mathbf{n}_i$ projetées sur les axes x,y et z. Chaque colonne contient les N coefficents devant α_j puis les $3N$ coefficients pour chaque coordonnée de β_j.

On peut donc décomposer A en 4 sous-matrices :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|c} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{array}$$

P est une matrice carrée $N \times N$, et ses éléments $P_{i,j}$ sont les coefficients qui multiplient α_j dans l'équation $f(\mathbf{p_i}) = c$. On a donc $P_{i,j} = \phi(R_j(\mathbf{p_i})) = \phi(||\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j||)$. Cette sous-matrice est symétrique.

Q contient $N \times N$ sous-matrices de taille 1×3 notées $\Gamma_{i,j}$, correspondant aux coefficients qui affectent respectivement $\beta_{j,x}, \beta_{j,y}, \beta_{j,z}$ dans l'équation $f(\mathbf{p_i}) = c$. On rappelle que $\Gamma_{i,i} = 0_{1\times 3}$ (les éléments “diagonaux” sont nuls), et quand $i \neq j$

$$\Gamma_{i,j} = \begin{pmatrix} a_j(\mathbf{p}_i)r_{j,x}(\mathbf{p}_i) & a_j(\mathbf{p}_i)r_{j,y}(\mathbf{p}_i) & a_j(\mathbf{p}_i)r_{j,z}(\mathbf{p}_i) \end{pmatrix}$$

R, contient $N \times N$ sous-matrices de taille 3×1 notées $\Psi_{i,j}$, correspondant aux coefficients qui affectent α_j dans les 3 équations de $\nabla f(\mathbf{p_i}) = \mathbf{n}_i$ sur chaque axe. On rappelle que $\Psi_{i,i} = 0_{3\times 1}$ (les éléments “diagonaux” sont nuls), et quand $i \neq j$

$$\Psi_{i,j} = \begin{pmatrix} a_j(\mathbf{p}_i)r_{j,x}(\mathbf{p}_i) \\ a_j(\mathbf{p}_i)r_{j,y}(\mathbf{p}_i) \\ a_j(\mathbf{p}_i)r_{j,z}(\mathbf{p}_i) \end{pmatrix}$$

S, est une matrice carrée de taille $3N \times 3N$ qui contient $N \times N$ sous-matrices de taille 3×3 notées $\Sigma_{i,j}$. Cette matrice Σ représente les coefficients de $\beta_{j,x}, \beta_{j,y}, \beta_{j,z}$ données par les 3 équations de $\nabla f(\mathbf{p_i}) = \mathbf{n}_i$ sur chaque axe.
Tout comme pour Q et R,les éléments de la “diagonale” sont nuls : $\Sigma_{i,i} = 0_{3\times 3}$. Sinon on a

$$\Sigma_{i,j} = \begin{pmatrix} a_j(\mathbf{p}_i) + b_j(\mathbf{p}_i)r_{j,x}(\mathbf{p}_i)^2 & b_j(\mathbf{p}_i)r_{j,x}(\mathbf{p}_i)r_{j,y}(\mathbf{p}_i) & b_j(\mathbf{p}_i)r_{j,x}(\mathbf{p}_i)r_{j,z}(\mathbf{p}_i) \\ b_j(\mathbf{p}_i)r_{j,y}(\mathbf{p}_i)r_{j,x}(\mathbf{p}_i) & a_j(\mathbf{p}_i) + b_j(\mathbf{p}_i)r_{j,y}(\mathbf{p}_i)^2 & b_j(\mathbf{p}_i)r_{j,y}(\mathbf{p}_i)r_{j,z}(\mathbf{p}_i) \\ b_j(\mathbf{p}_i)r_{j,z}(\mathbf{p}_i)r_{j,x}(\mathbf{p}_i) & b_j(\mathbf{p}_i)r_{j,z}(\mathbf{p}_i)r_{j,y}(\mathbf{p}_i) & a_j(\mathbf{p}_i) + b_j(\mathbf{p}_i)r_{j,z}(\mathbf{p}_i)^2 \end{pmatrix}$$

On peut de plus constater que les coefficient i et j peuvent permuter dans certains cas (ce qui peut éviter de faire des calculs inutiles) :

$$\begin{aligned}
&R_j(\mathbf{p_i}) = ||\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|| \\
&R_j(\mathbf{p_i}) = R_i(\mathbf{p_j}) \\
\\
&\mathbf{r}_j(\mathbf{p_i}) = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j \\
&\mathbf{r}_j(\mathbf{p_i}) = -(\mathbf{r}_i(\mathbf{p_j})) \\
\\
&a_j(\mathbf{p}_i) = \frac{\phi'(R_j(\mathbf{p}_i))}{R_j(\mathbf{p}_i)} = \frac{\phi'(||\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j||)}{||\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j||} \\
&a_j(\mathbf{p_i}) = a_i(\mathbf{p_j}) \\
\\
&b_j(\mathbf{p}_i) = \left(\frac{\phi''(R_j(\mathbf{p}_i))}{(R_j(\mathbf{p}_i))^2} - \frac{\phi'(R_j(\mathbf{p}_i))}{(R_j(\mathbf{p}_i))^3}\right) \\
&b_j(\mathbf{p}_i) = \left(\frac{\phi''(||\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j||)}{(||\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j||)^2} - \frac{\phi'(||\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j||)}{(||\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j||)^3}\right) \\
&b_j(\mathbf{p}_i) = b_i(\mathbf{p}_j)
\end{aligned}$$

Et maintenant, on peut représenter la matrice au grand complet :

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
\phi(0) & \phi(R_2(\mathbf{p}_1)) & \dots & \phi(R_N(\mathbf{p}_1)) & 0 & 0 & 0 & a_2(\mathbf{p}_1)r_{2,x}(\mathbf{p}_1) & \dots & a_N(\mathbf{p}_1)r_{N,z}(\mathbf{p}_1) \\
\phi(R_1(\mathbf{p}_2)) & \phi(0) & \dots & \phi(R_N(\mathbf{p}_2)) & a_1(\mathbf{p}_2)r_{1,x}(\mathbf{p}_2) & a_1(\mathbf{p}_2)r_{1,y}(\mathbf{p}_2) & a_1(\mathbf{p}_2)r_{1,z}(\mathbf{p}_2) & 0 & \dots & a_N(\mathbf{p}_2)r_{N,z}(\mathbf{p}_2)) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\phi(R_1(\mathbf{p}_N)) & \phi(R_2(\mathbf{p}_N)) & \dots & \phi(0) & a_1(\mathbf{p}_N)r_{1,x}(\mathbf{p}_N) & a_1(\mathbf{p}_N)r_{1,y}(\mathbf{p}_N) & a_1(\mathbf{p}_N)r_{1,z}(\mathbf{p}_N) & a_2(\mathbf{p}_1)r_{2,x}(\mathbf{p}_1) & \dots & 0 \\
\hline
0 & a_2(\mathbf{p}_1)r_{2,x}(\mathbf{p}_1) & \dots & a_N(\mathbf{p_1})r_{N,x}(\mathbf{p}_1) & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} b_2(\mathbf{p}_1)r_{2,x}(\mathbf{p}_1)^2 \\ +a_2(\mathbf{p}_1) \end{matrix} & \dots & b_N(\mathbf{p}_1)r_{N,x}(\mathbf{p}_1)r_{N,z}(\mathbf{p}_1) \\
0 & a_2(\mathbf{p}_1)r_{2,y}(\mathbf{p}_1) & \dots & a_N(\mathbf{p_1})r_{N,y}(\mathbf{p}_1) & 0 & 0 & 0 & b_2(\mathbf{p}_1)r_{2,y}(\mathbf{p_2})r_{2,x}(\mathbf{p}_1) & \dots & b_N(\mathbf{p}_1)r_{N,y}(\mathbf{p}_1)r_{N,z}(\mathbf{p}_1) \\
0 & a_2(\mathbf{p}_1)r_{2,z}(\mathbf{p}_1) & \dots & a_N(\mathbf{p_1})r_{N,z}(\mathbf{p}_1) & 0 & 0 & 0 & b_2(\mathbf{p}_1)r_{2,z}(\mathbf{p}_1)r_{2,x}(\mathbf{p}_1) & \dots & \begin{matrix} b_N(\mathbf{p}_1)r_{N,z}(\mathbf{p}_1)^2 \\ +a_N(\mathbf{p}_1) \end{matrix} \\
a_1(\mathbf{p}_2)r_{1,x}(\mathbf{p}_2) & 0 & \dots & a_N(\mathbf{p_2})r_{N,x}(\mathbf{p}_2) & \begin{matrix} b_1(\mathbf{p_2})r_{1,x}(\mathbf{p_2})^2 \\ +a_1(\mathbf{p_2}) \end{matrix} & b_1(\mathbf{p_2})r_{1,x}(\mathbf{p_2})r_{1,y}(\mathbf{p_2}) & b_1(\mathbf{p_2})r_{1,x}(\mathbf{p_2})r_{1,z}(\mathbf{p_2}) & 0 & \dots & b_N(\mathbf{p}_2)r_{N,x}(\mathbf{p}_2)r_{N,z}(\mathbf{p}_2) \\
a_1(\mathbf{p}_2)r_{1,y}(\mathbf{p}_2) & 0 & \dots & a_N(\mathbf{p_2})r_{N,y}(\mathbf{p}_2) & b_1(\mathbf{p_2})r_{1,y}(\mathbf{p_2})r_{1,x}(\mathbf{p_2}) & \begin{matrix} b_1(\mathbf{p_2})r_{1,y}(\mathbf{p_2})^2 \\ +a_1(\mathbf{p_2}) \end{matrix} & b_1(\mathbf{p_2})r_{1,y}(\mathbf{p_2})r_{1,z}(\mathbf{p_2}) & 0 & \dots & b_N(\mathbf{p}_2)r_{N,y}(\mathbf{p}_2)r_{N,z}(\mathbf{p}_2) \\
a_1(\mathbf{p}_2)r_{1,z}(\mathbf{p}_2) & 0 & \dots & a_N(\mathbf{p_2})r_{N,z}(\mathbf{p}_2) & b_1(\mathbf{p_2})r_{1,z}(\mathbf{p_2})r_{1,x}(\mathbf{p_2}) & b_1(\mathbf{p_2})r_{1,z}(\mathbf{p_2})r_{1,y}(\mathbf{p_2}) & \begin{matrix} b_1(\mathbf{p_2})r_{1,z}(\mathbf{p_2})^2 \\ +a_1(\mathbf{p_2}) \end{matrix} & 0 & \dots & \begin{matrix} b_N(\mathbf{p}_2)r_{N,z}(\mathbf{p}_2)^2 \\ +a_N(\mathbf{p}_2) \end{matrix} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1(\mathbf{p_N})r_{1,z}(\mathbf{p}_N) & a_2(\mathbf{p}_N)r_{2,z}(\mathbf{p}_N) & \dots & 0 & b_1(\mathbf{p_N})r_{1,z}(\mathbf{p_N})r_{1,x}(\mathbf{p_N}) & b_1(\mathbf{p_N})r_{1,z}(\mathbf{p_N})r_{1,y}(\mathbf{p_N}) & \begin{matrix} b_1(\mathbf{p_N})r_{1,z}(\mathbf{p_N})^2 \\ +a_1(\mathbf{p_N}) \end{matrix} & b_2(\mathbf{p}_N)r_{2,z}(\mathbf{p}_N)r_{2,x}(\mathbf{p}_N) & \dots & 0
\end{array}\right)
$$

Annexe

Démonstration de l'équation 1

$$
\begin{aligned}
\nabla R_i(\mathbf{x}) &= \nabla ||\mathbf{x} - \mathbf{p_i}|| \\
&= \nabla \sqrt{(\mathrm{x}_x - p_{i,x})^2 + (\mathrm{x}_y - p_{i,y})^2 + (\mathrm{x}_z - p_{i,z})^2}
\end{aligned}
$$

On calcul la dérivée partielle selon x (dérivée d'une composition) :

$$
\frac{\partial R_i}{\partial x} = 2(\mathrm{x}_x - \mathbf{p}_{i,x}).\frac{1}{2\sqrt{(\mathrm{x}_x - p_{i,x})^2 + (\mathrm{x}_y - p_{i,y})^2 + (\mathrm{x}_z - p_{i,z})^2}} \tag{3}
$$

$$
= \frac{\mathrm{x}_x}{||\mathbf{x} - \mathbf{p_i}||} \tag{4}
$$

Et de même on a

$$
\frac{\partial R_i}{\partial y} = \frac{\mathrm{x}_y - \mathbf{p}_{i,y}}{||\mathbf{x} - \mathbf{p_i}||} \quad \text{and} \quad \frac{\partial R_i}{\partial z} = \frac{\mathrm{x}_z - \mathbf{p}_{i,z}}{||\mathbf{x} - \mathbf{p_i}||}
$$

D'où

$$
\nabla R_i(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p_i}}{||\mathbf{x} - \mathbf{p_i}||} = \frac{\mathbf{r_i}}{R_i}
$$

Démonstration de l'équation 2

$$
\nabla \left[\boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{r}_i\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(\beta_{i,x_1}.(x_1 - p_{i,x_1}) + \ldots + \beta_{i,x_n}.(x_n - p_{i,x_n})\right)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\left(\beta_{i,x_1}.(x_1 - p_{i,x_1}) + \ldots + \beta_{i,x_n}.(x_n - p_{i,x_n})\right)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}_i
$$