

## Vorlesungsskript

# PHYS2000.0 Optik Bachelor Physik Bachelor Wirtschaftsphysik Lehramt Physik

Othmar Marti

Institut für Experimentelle Physik  
Universität Ulm



veröffentlicht unter

Lizenzinformationen

DOI 10.13140/RG.2.1.3086.0325

22. März 2018



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1 Lizenzinformationen . . . . .	7
1.2 Literaturhinweise . . . . .	8
<b>2 Zusammenfassung Elektrizitätslehre</b>	<b>9</b>
2.1 Maxwellgleichungen . . . . .	9
2.2 Wellengleichung . . . . .	10
2.3 Die Fresnelschen Formeln . . . . .	11
2.3.1 s-Polarisation . . . . .	15
2.3.2 p-Polarisation . . . . .	18
2.3.3 Grenzfall des senkrechten Einfalles . . . . .	19
2.3.4 Brewster-Winkel . . . . .	20
2.3.5 Beispielkurven für die Fresnelformeln . . . . .	22
2.3.6 Evanescente Wellen . . . . .	22
<b>3 Interferenz und Beugung</b>	<b>25</b>
3.1 Vorbemerkungen und Motivation . . . . .	25
3.2 Phasendifferenz und Kohärenz . . . . .	29
3.2.1 Stehende Wellen . . . . .	30
3.2.2 Mach-Zehnder-Interferometer . . . . .	31
3.2.3 Das Michelson-Interferometer . . . . .	32
3.2.4 Sagnac-Interferometer . . . . .	35
3.2.5 Das Fabry-Perot-Interferometer . . . . .	37
3.2.6 Beugungsmuster bei Interferometern . . . . .	45
3.3 Wellen in 2 und mehr Dimensionen . . . . .	48
3.3.1 Ebene Wellen . . . . .	48
3.3.2 Kugelwellen . . . . .	49
3.3.3 Fourier-Transformation . . . . .	51
3.4 Das Fresnel-Huygenssche Prinzip . . . . .	54
3.4.1 Interferenz von Kugelwellen . . . . .	57
3.5 Interferenzmuster an einem Doppelspalt . . . . .	58
3.6 Vektoraddition von harmonischen Wellen . . . . .	61
3.7 Interferenzmuster bei drei und mehr äquidistanten Quellen . . . . .	62
3.8 Interferenz an dünnen Schichten . . . . .	63
3.9 Beugungsmuster an einem Einzelspalt . . . . .	67
3.9.1 Berechnung der Intensitätsverteilung . . . . .	68
3.10 Interferenz- und Beugungsmuster beim Doppelspalt . . . . .	72
3.10.1 Fouriertransformation und Faltung . . . . .	72
3.10.2 Fouriertransformation und Diracsche Deltafunktion . . . . .	73

3.10.3 Diskussion der Interferenz beim Doppelspalt . . . . .	74
3.11 Fraunhofersche und Fresnelsche Beugung . . . . .	75
3.11.1 Fresnelsche Näherung . . . . .	76
3.11.2 Prinzip von Babinet . . . . .	81
3.11.3 Fraunhofer-Beugung . . . . .	83
3.11.4 Vergleich . . . . .	85
3.11.5 Kirchhoffsche Beugungstheorie . . . . .	87
3.12 Beugungsgitter und Spektrographen . . . . .	91
3.12.1 Blaze-Gitter . . . . .	92
3.12.2 Hologramme . . . . .	93
3.13 Beugung und Auflösung . . . . .	98
3.13.1 Impulsantwort und Faltungssatz . . . . .	98
<b>4 Geometrische Optik und Wellenoptik</b>	<b>103</b>
4.1 Reflexion . . . . .	103
4.2 Brechung . . . . .	104
4.2.1 Totalreflexion . . . . .	106
4.3 Das Fermatsche Prinzip . . . . .	107
4.3.1 Reflexion . . . . .	107
4.3.2 Brechung . . . . .	108
4.3.3 Das Fermatsche Prinzip und die Interferenz . . . . .	109
4.4 Polarisation . . . . .	111
4.4.1 Polarisation durch Absorption (Dichroismus) . . . . .	112
4.4.2 Polarisation durch Streuung . . . . .	114
4.4.3 Polarisation durch Reflexion . . . . .	115
4.4.4 Polarisation durch Doppelbrechung . . . . .	116
4.4.5 Beschreibung der Polarisation . . . . .	120
4.4.6 Zusammenhang zwischen Jones-Matrizen und Müller-Matrizen	136
4.4.7 Beispiele zur Polarisation . . . . .	139
<b>5 Geometrische Optik</b>	<b>143</b>
5.1 Lichtgeschwindigkeit . . . . .	144
5.2 Licht in der geometrischen Optik . . . . .	148
5.3 Bilderzeugung durch Brechung . . . . .	149
5.3.1 Dünne Linsen . . . . .	150
5.3.2 Bildkonstruktion bei Linsen . . . . .	154
5.3.3 Dicke Linsen . . . . .	155
5.3.4 Mehrere Linsen . . . . .	155
5.4 Ebene Spiegel . . . . .	157
5.5 Bilderzeugung mit sphärischen Spiegel . . . . .	158
5.5.1 Konvexspiegel . . . . .	159
5.5.2 Bildkonstruktion beim Hohlspiegel . . . . .	160
5.6 Abbildungsfehler . . . . .	163
<b>6 Optische Instrumente</b>	<b>167</b>
6.1 Das Auge . . . . .	167
6.2 Die Lupe . . . . .	168
6.3 Die Kamera . . . . .	169
6.4 Das Mikroskop . . . . .	170

6.5	Das Teleskop oder Fernrohr . . . . .	172
6.6	Das Prisma: ein optisches Instrument mit Dispersion . . . . .	174
6.7	Spektrometer . . . . .	181
6.7.1	Gitter-Spektrometer . . . . .	182
<b>7</b>	<b>Resonatoren und ihre Lichtmoden</b>	<b>191</b>
7.1	Matrixformulierung der Lichtpropagation . . . . .	191
7.1.1	Lichtpropagation entlang eines Lichtstrahls . . . . .	191
7.1.2	Lichtpropagation durch eine Linse . . . . .	192
7.1.3	Lichtpropagation durch eine gewölbte Grenzschicht . . . . .	193
7.1.4	Lichtpropagation durch eine schräge Grenzschicht . . . . .	194
7.1.5	Lichtpropagation bei Reflexion an einem gewölbten Spiegel .	195
7.1.6	Lichtpropagation bei einem Indexmedium . . . . .	195
7.1.7	Zusammenfassung Lichtpropagation . . . . .	197
7.1.8	Stabilität . . . . .	200
7.2	Resonatoren mit sphärischen Spiegeln . . . . .	201
7.3	Gaußsche Strahlen . . . . .	202
7.3.1	Divergenz und Strahldurchmesser . . . . .	206
7.3.2	Wirkung optischer Elemente auf Gaußsche Strahlen . . . . .	206
7.3.3	Moden . . . . .	209
<b>A</b>	<b>Bestimmung des Polarisationszustandes</b>	<b>219</b>
A.1	Rechnung mit Jones-Matrizen . . . . .	219
A.2	Rechnung mit Müller-Matrizen . . . . .	220
<b>B</b>	<b>Einige notwendige mathematische Verfahren</b>	<b>223</b>
B.1	Vektoren . . . . .	223
B.1.1	Gesetze . . . . .	224
B.2	Differentiation und Integration . . . . .	225
B.2.1	Einige Reihen . . . . .	226
B.2.2	Ableitungen in drei Dimensionen . . . . .	227
B.3	Skalarprodukt und Vektorprodukt in kartesischen Koordinaten .	231
B.4	Rechnen mit Vektoren . . . . .	231
B.4.1	Vektoridentitäten . . . . .	231
B.5	Drehungen . . . . .	235
B.5.1	Drehmatrizen . . . . .	235
B.5.2	Drehung von Vektoren und Matrizen (oder Tensoren) . . . .	236
B.5.3	Allgemeine Drehung mit Eulerwinkeln . . . . .	237
B.6	Umrechnung zwischen Koordinatensystemen . . . . .	238
B.6.1	Definitionen . . . . .	238
B.6.2	Allgemeine Transformation . . . . .	239
B.6.3	Vom kartesischen ins sphärische System . . . . .	243
B.6.4	Vom sphärischen ins kartesische System . . . . .	243
B.6.5	Vom kartesischen ins zylindrische System . . . . .	243
B.6.6	Vom zylindrischen ins kartesische System . . . . .	244
B.6.7	Vom sphärischen ins zylindrische System . . . . .	244
B.6.8	Vom zylindrischen ins sphärische System . . . . .	244
B.7	Vektor-differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten . .	245
B.7.1	Zylinderkoordinaten . . . . .	245

B.7.2 Kugelkoordinaten . . . . .	245
B.8 Die Diracsche Deltafunktion . . . . .	246
B.9 Kronecker-Produkt . . . . .	248
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>251</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>257</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>259</b>
<b>Index</b>	<b>263</b>

# 1. Einleitung

## 1.1. Lizenzinformationen

Diese Skript wird unter der Creative Commons Lizenz CC-BY-SA 4.0 veröffentlicht. Dies heisst,

- Sie dürfen das Werk ganz oder in Teilen in allen denkbaren Formaten weiterverwenden, vervielfältigen und weiterverbreiten
- das Werk oder Teile davon neu zusammenstellen, verändern und darauf weitere Werke aufbauen,

sofern Sie

- den Namen der Verfassers dieses Werkes sowie deren Institution, die Universität Ulm, nennen und angemessene Rechte- und Urheberrechtsangaben machen, einen Link zur Lizenz beifügen und angeben, ob Sie Änderungen vorgenommen haben. Dabei darf nicht der Eindruck entstehen, die Verfasser oder die Universität Ulm würden Sie oder Ihre Nutzung unterstützen.
- Wenn Sie Dieses Werk oder Teile davon neu zusammenstellen, verändern und darauf weitere Werke aufbauen, dürfen Sie ihre Beiträge nur unter der gleichen Lizenz wie dieses Werk wie dieses Original verbreiten.

Sie dürfen insbesondere keine weiteren Einschränkungen einsetzen und auch keine technischen Verfahren wie z.B. DRM verwenden, die anderen Nutzern etwas untersagt oder daran hindert, das abgeleitete Werk nach dieser Lizenz zu nutzen. Der Lizenzgeber kann diese Freiheiten nicht widerrufen solange Sie sich an die Lizenzbedingungen halten.

Eine detaillierte Erklärung finden Sie unter

<http://www.uni-ulm.de/en/einrichtungen/e-learning/blog/article/was-sind-eigentlich-cc-lizenzen.html>

oder unter

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

oder unter

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>



Die CC-Icons und -Buttons wurden unter der Lizenz CC BY von <http://creativecommons.org/about/downloads> veröffentlicht.

**Der Aufbau dieser Vorlesung richtet sich nach dem studienbegleitenden Praktikum zur Optik.** Wir beginnen deshalb mit der geometrischen Optik, ohne eine Ableitung der Gesetze aus der Wellennatur des Lichtes. Die Gesetze der

geometrischen Optik werden im folgenden Kapitel aus der Wellennatur des Lichtes abgeleitet. Dies führt zu der Diskussion von Interferenz und Beugung.

Als Ergänzung zur Vorlesung möchte ich auf eine wunderbare Website zum Aufarbeiten Ihres Wissens ist [Hyperphysics](#) von R. Nave hinweisen. Ergänzend gibt es vom gleichen Autor auch [Hypermath](#). Das Programm [Winlens](#) ist ein wunderbares Spielzeug, um auch grössere optische Aufbauten schnell und interaktiv zu berechnen. Die Firma Melles Griot hat auf ihren Webseiten ein längeres [Tutorium](#).

## 1.2. Literaturhinweise

Die Vorlesung orientiert sich an den Werken von Tipler[[TM04](#)], Physik, und Gerthsen/Vogel[[Mes04](#)] Physik. Zum Aufarbeiten des gelernten Stoffes (nicht als Einsteigerliteratur) kann auch Kneubühl[[Kne78](#)] "Repetitorium der Physik" empfohlen werden. Speziell für die Optik sind die Bücher von Demtröder [[Dem08](#)], Hecht[[Hec05](#)] und Perez[[Pér96](#)]. Mathematische Probleme und Formeln sind sehr schön im Bronstein[[BSMM08](#)] zusammengefasst.

## 2. Zusammenfassung Elektrizitätslehre

### 2.1. Maxwellgleichungen

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 251])

Alle optischen Phänomene können mit den Maxwellgleichungen berechnet werden.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{el} \quad \text{I} \quad (2.1.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{II} \quad (2.1.1b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{III} \quad (2.1.1c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{IV} \quad (2.1.1d)$$

Hier ist  $\mathbf{E}$  das elektrische Feld,  $\mathbf{D}$  die dielektrische Verschiebung,  $\mathbf{H}$  das magnetische Feld,  $\mathbf{B}$  die magnetische Induktion,  $\mathbf{i}$  die mikroskopische Stromdichte und  $\rho_{el}$  die Ladungsdichte.

Weiter benötigen wir das Kraftgesetz

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.1.2)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t}. \quad (2.1.3)$$

Die angegebenen Maxwellgleichungen gelten für alle Medien, auch mit tensoriellen Eigenschaften. Dort benötigt man die beiden Materialgleichungen

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.1.4a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.1.4b)$$

um das elektrische Feld und die dielektrische Verschiebung, bzw. das magnetische Feld und die magnetische Induktion miteinander zu verknüpfen, wobei  $\epsilon$  (relative Permittivität) und  $\mu$  (relative Permeabilität) Tensoren sein können.  $\epsilon_0$  ist die Permittivität des Vakuums,  $\mu_0$  die Permeabilität des Vakuums.

Die Integralformulierung der Maxwellgleichungen lauten

$$\iint_{A(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \quad \text{I} \quad (2.1.5a)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{II} \quad (2.1.5b)$$

$$\iint_{A(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{III} \quad (2.1.5c)$$

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S)} \left( \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad \text{IV} \quad (2.1.5d)$$

Die Integralformulierung des Kontinuitätsgesetzes lautet

$$\iint_{A(V)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = - \iiint_V \frac{d}{dt} \rho_{el} dV \quad (2.1.6)$$

## 2.2. Wellengleichung

Aus den Maxwellgleichungen folgen Wellengleichungen. Für das Vakuum erhält man

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E} \quad (2.2.1)$$

oder

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{B} \quad (2.2.2)$$

In jedem Inertialsystem im Vakuum ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (2.2.3)$$

In Medien ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit entsprechend

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \cdot c \quad (2.2.4)$$

wobei  $\mu$  die relative Permeabilität und  $\epsilon$  die relative Permittivität ist.

Alle Funktionen (skalar, vektoriell oder tensoriell), die nur von einer skalaren Variablen

$$u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (2.2.5)$$

abhängen lösen die Wellengleichung, wenn sie genügend oft stetig differenzierbar sind.

Damit können wir sagen: Jede Funktion  $\mathbf{E}(u)$  mit  $u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$  ist eine Lösung

der Wellengleichung

$$c^2 \Delta \mathbf{E}(u(\mathbf{r}, t)) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(u(\mathbf{r}, t)), \quad (2.2.6)$$

sofern

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \quad (2.2.7)$$

gilt.

Aus den Gleichungen Maxwellgleichungen kann die *Orientierung von  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$*  berechnet werden.

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (2.2.8)$$

$\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  bilden in dieser Reihenfolge ein *rechtshändiges Dreibein*. Die drei Vektoren stehen paarweise rechtwinklig aufeinander.

Aus der Wellengleichung für  $\mathbf{B}$ , bekommen wir die Beziehung

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}. \quad (2.2.9)$$

Diese Beziehung (2.2.9) ist aber unter Verwendung von (2.2.7) identisch mit (2.2.8). Betragsmässig haben wir im Vakuum weiter die Beziehung

$$|\mathbf{E}| = c |\mathbf{B}|. \quad (2.2.10)$$



## 2.3. Die Fresnelschen Formeln

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 190]) (Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 539])



Abbildung 2.1.: Das gleiche Gebäude mit Polarisationsfilter aufgenommen. Die Achse des Polarisationsfilters wurde dabei um 90° gedreht. Links sind die Reflexionen im Glas kaum zu erkennen, rechts ist dafür der Kontrast des Himmels schwächer.

Die beiden Aufnahmen in Abbildung 2.1 wurden mit dem *Polarisationsfilter* in zwei um 90° gedrehten Stellungen aufgenommen. Links wird durch den Polarisor das diffus gestreute Licht mit der falschen Polarisation unterdrückt. Links ist die Spiegelung des linken Gebäudes im rechten nicht sichtbar. Die Fensterfront ist hell. Rechts ist das linke Gebäude dunkel. Das bedeutet, dass das gespiegelte Licht polarisiert ist. Die im folgenden abgeleiteten Fresnelschen Formeln erklä-

ren dieses Phänomen, aber auch die Spiegelung an Metallen. Sie beschreiben die Wechselwirkung von elektromagnetischen Wellen mit Grenzflächen jeder Art.

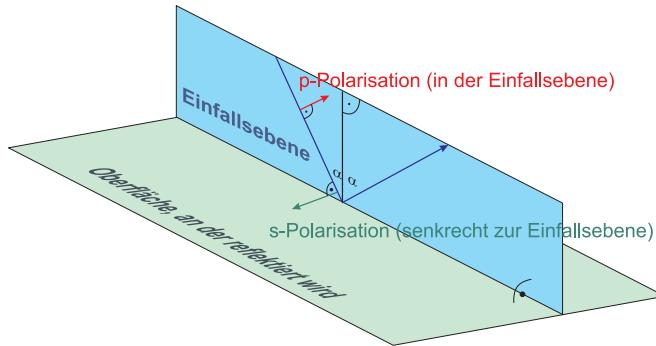


Abbildung 2.2.: Definition der *s-Polarisation* und der *p-Polarisation*

Die *Reflexion* und die Brechung von elektromagnetischen Wellen werden durch die Maxwellschen Gleichungen und die daraus abgeleiteten Randbedingungen bestimmt. Die resultierenden Beziehungen für die Amplituden und die Intensitäten werden die *Fresnelschen Formeln* genannt. Zur Berechnung verwenden die Definitionen

- Der einfallende und der reflektierte Strahl elektromagnetischer Wellen definiert die *Einfallsebene*. Diese ist senkrecht zur Grenzfläche der beiden Medien.
- Elektromagnetische Wellen, deren Polarisationsebene senkrecht zur *Einfallsebene* liegt, heißen *s-polarisiert*. Die Polarisationsebene gibt die Richtung des elektrischen Feldes an.
- Elektromagnetische Wellen, deren Polarisationsebene parallel zur *Einfallsebene* liegt, heißen *p-polarisiert*.
- Für die *Intensität* der elektromagnetischen Wellen in nichtmagnetischen Medien gilt  $I \propto \sqrt{\varepsilon} E^2$ , wobei  $\varepsilon = n^2$  ist.
- Genauer gilt für die Intensität:  $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E^2 = \frac{n \varepsilon_0 c}{2 \mu} E^2$  für sinusförmige Wellen mit der Amplitude  $E$ .

Wir betrachten eine Welle  $\mathbf{E}_e$ , die aus dem Medium mit  $\mu_1$  und  $\varepsilon_1$  auf eine ebene Grenzfläche zum Medium mit  $\mu_2$  und  $\varepsilon_2$  fällt. Neben der einfallenden Welle existieren eine reflektierte und eine transmittierte elektromagnetische Welle

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_e &= \mathbf{E}_e e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t)} \\ \mathbf{E}_r &= \mathbf{E}_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r)} \\ \mathbf{E}_t &= \mathbf{E}_t e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t)}\end{aligned}\quad (2.3.1)$$

Gegeben sind  $\mathbf{E}_e$ ,  $\mu_1$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\mathbf{k}_e$  und  $\omega_e (|\mathbf{k}_e|)$ . An den Grenzflächen gilt

- Die tangentiale Komponente von  $\mathbf{E}$  ist stetig.

- Die tangentiale Komponente von  $\mathbf{H}$  ist stetig.

Sei  $\mathbf{e}_n$  der Normaleneinheitsvektor auf die Grenzfläche. Der resultierende Vektor des Kreuzproduktes von  $\mathbf{E}_e$  mit  $\mathbf{e}_n$  liegt senkrecht zu  $\mathbf{e}_n$  und damit in der Grenzfläche der beiden Medien. Um den Tangentialvektor in die ursprüngliche Richtung zurück zu drehen, wenden wir nochmals ein Kreuzprodukt mit  $\mathbf{e}_n$  an. Unabhängig von der Richtung von  $\mathbf{E}_e$  bekommt man mit dieser Operation immer die Komponente von  $\mathbf{E}_e$  tangential zur Grenzfläche

$$\mathbf{E}_{e,\text{tangential}} = \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_e \times \mathbf{e}_n \quad (2.3.2)$$

Mit der gleichen Methode kann man auch die Komponenten der Vektoren  $\mathbf{E}_r$  und  $\mathbf{E}_t$  in der Grenzfläche berechnen. Die Bedingung der Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes kann dann mit den Kreuzprodukten so geschrieben werden

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_e \times \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_r \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_t \times \mathbf{e}_n \quad (2.3.3)$$

Die Gleichung besagt, dass die Summe der Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes im Medium 1 (einfallende und reflektierte Welle) gleich der Tangentialkomponente der transmittierten Welle ist. Für alle Zeiten und alle Orte auf der Grenzfläche gilt

$$\begin{aligned} e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t)} \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} &= e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r)} \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} \\ &= e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t)} \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

wobei  $\mathbf{r}$  nach Definition ein Vektor in der Grenzfläche ist, also mit  $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{r} = 0$ . Damit Gleichung (2.3.4) zu allen Zeiten an einem beliebigen Punkt gilt, müssen die Kreisfrequenzen gleich sein

$$\omega_e = \omega_r = \omega_t \quad (2.3.5)$$

Weiter muss dann gelten: Die Gleichung (2.3.4) muss für alle Zeiten und alle Orte auf der Grenzfläche gelten. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} &= \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} + \varphi_r \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} \\ &= \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} + \varphi_t \Big|_{\text{in der Grenzfläche}} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

$\mathbf{r}$  zeigt auf einen Punkt in der Grenzfläche. Da der Ursprung des Koordinatensystems nicht in der Grenzfläche liegen muss, ist  $\mathbf{r}$  im Allgemeinen nicht parallel zur Grenzfläche. Aus der ersten Gleichung in (2.3.6) folgt

$$((\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r})_{\text{in der Grenzfläche}} = \varphi_r \quad (2.3.7)$$

Eine Gleichung vom Typ  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \varpi$  beschreibt eine Ebene. Die Endpunkte von  $\mathbf{r}$  liegen in der Ebene mit dem Normalenvektor  $\mathbf{a}$ .  $\varpi$  gibt die Verschiebung zum Nullpunkt an. Gleichung (2.3.7) ist also die Gleichung einer Ebene, die senkrecht zu  $\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r$  liegt. Andererseits wissen wir, nach unserer Konstruktion, dass  $\mathbf{r}$  in

der Grenzfläche mit dem Normalenvektor  $\mathbf{e}_n$  liegt.  $\mathbf{e}_n$  ist also parallel zu  $\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r$ . Weiter sind beide Wellen im gleichen Medium 1, das heisst  $|\mathbf{k}_e| = k_e = |\mathbf{k}_r| = k_r$ . Wir können also schreiben

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r) = 0 \quad (2.3.8)$$

Mit Beträgen geschrieben heisst dies

$$k_e \sin \alpha = k_r \sin \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \alpha = \beta \quad (2.3.9)$$

Dabei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen der Oberflächennormale  $\mathbf{e}_n$  und dem Wellenvektor der einfallenden Welle  $\mathbf{k}_e$  und  $\beta$  der Winkel zwischen der Oberflächennormale  $\mathbf{e}_n$  und dem Wellenvektor der reflektierten Welle  $\mathbf{k}_r$ .

Das Reflexionsgesetz besagt, dass

$$\alpha = \beta \quad (2.3.10)$$

(Einfallswinkel=Ausfallswinkel)

Aus Gleichung (2.3.6) folgt weiter

$$((\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r})_{\text{Grenzfläche}} = \varphi_t \quad (2.3.11)$$

Gleichung (2.3.7) ist also die Gleichung einer Ebene, die senkrecht zu  $\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t$  liegt. Andererseits wissen wir, nach unserer Konstruktion, dass  $\mathbf{r}$  in der Grenzfläche mit dem Normalenvektor  $\mathbf{e}_n$  liegt.  $\mathbf{e}_n$  ist also parallel zu  $\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t$ . Wir können also schreiben

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t) = 0 \quad (2.3.12)$$

Mit Beträgen geschrieben heisst dies

$$k_e \sin \alpha = k_t \sin \gamma \quad (2.3.13)$$

Dabei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen der Oberflächennormale  $\mathbf{e}_n$  und dem Wellenvektor der einfallenden Welle  $\mathbf{k}_e$  und  $\gamma$  der Winkel zwischen der Oberflächennormale  $\mathbf{e}_n$  und dem Wellenvektor der transmittierten Welle  $\mathbf{k}_t$ . Aus der Wellengleichung folgt

$$\frac{\omega}{k_i} = c_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i \mu_0 \epsilon_i \epsilon_0}} \quad (2.3.14)$$

Da  $\omega_e = \omega_r = \omega_t$  ist, kann Gleichung (2.3.13) auch als

$$\frac{\omega_e}{c_e} \sin \alpha = \frac{\omega_t}{c_t} \sin \gamma \quad (2.3.15)$$

oder

$$\sqrt{\mu_1 \mu_0 \epsilon_1 \epsilon_0} \sin \alpha = \sqrt{\mu_2 \mu_0 \epsilon_2 \epsilon_0} \sin \gamma \Rightarrow \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \sin \gamma \quad (2.3.16)$$

Mit der Definition (2.2.4) ( $n = \sqrt{\mu \epsilon}$ ) bekommt man auch

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\gamma) \quad (2.3.17)$$

Dies ist das Brechungsgesetz nach Snellius.

Schliesslich können wir noch eine Beziehung der Tangentialkomponenten aller Felder erhalten. Analog zur Gleichung (2.3.3) können wir die Tangentialkomponenten der Wellenvektoren angeben:

$$\mathbf{k}_{e,tangential} = \mathbf{e}_n \times \mathbf{k}_e \times \mathbf{e}_n \quad (2.3.18a)$$

$$\mathbf{k}_{r,tangential} = \mathbf{e}_n \times \mathbf{k}_r \times \mathbf{e}_n \quad (2.3.18b)$$

$$\mathbf{k}_{t,tangential} = \mathbf{e}_n \times \mathbf{k}_t \times \mathbf{e}_n \quad (2.3.18c)$$

Wir subtrahieren Gleichung (2.3.18a) von Gleichung (2.3.18b), beziehungsweise von Gleichung (2.3.18c).

Setzen wir mit Gleichung (2.3.8) für  $\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_e = \Gamma_{re}\mathbf{e}_n$  und  $\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_e = \Gamma_{te}\mathbf{e}_n$  erhalten wir

$$\mathbf{k}_{r,tangential} - \mathbf{k}_{e,tangential} = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_e) \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n \times \Gamma_{re}\mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_n = 0 \quad (2.3.19a)$$

$$\mathbf{k}_{t,tangential} - \mathbf{k}_{e,tangential} = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_e) \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n \times \Gamma_{te}\mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_n = 0 \quad (2.3.19b)$$

Die Tangentialkomponenten der Wellenvektoren der einfallenden, reflektierten und gebrochenen Wellen sind gleich.

$$\mathbf{k}_{e,tangential} = \mathbf{k}_{r,tangential} = \mathbf{k}_{t,tangential} \quad (2.3.20)$$

Die Änderung der Ausbreitungsrichtung bei Reflexion und Brechung stammt alleine von den Komponenten der Wellenvektoren, die parallel zum Normalenvektor der Grenzfläche liegen.

### 2.3.1. s-Polarisation

Zur Berechnung der Amplitude der reflektierten und transmittierten Wellen mit einer allgemeinen Polarisation verwenden wir zwei orthogonale Polarisationsrichtungen, die s-Polarisation und die p-Polarisation. Jeder Polarisationszustand kann als Linearkombination der s-Polarisation und der p-Polarisation geschrieben werden.

Wir beginnen die Rechnungen für elektromagnetische Wellen mit einer Polarisation senkrecht zur *Einfallsebene (s-Polarisation)*.

Wenn in den beiden angrenzenden Medien die *Dielektrizitätskonstanten*  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  sind, dann muss der *Pointingvektor* (Energiestrom) senkrecht zur Grenzfläche an der Grenzfläche kontinuierlich sein, also

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} (\mathfrak{E}_e^2 - \mathfrak{E}_r^2) \cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} \mathfrak{E}_t^2 \cos \gamma \quad (2.3.21)$$

wobei  $\alpha$  und  $\gamma$  die Winkel zur *Oberflächennormalen*  $\mathbf{e}_n$  sind,  $\mathfrak{E}_e$  ist die Amplitude der  $\mathbf{E}$ -Feldkomponente der einfallenden elektromagnetischen Welle parallel zur *Oberfläche* (s-Polarisation),  $\mathfrak{E}_r$  die Amplitude der reflektierten und  $\mathfrak{E}_t$  die der gebrochenen elektromagnetischen Welle.

Die Komponente von  $\mathbf{E}$  parallel zur *Oberfläche* muss stetig sein, also ist nach Gleichung (2.3.3)

$$\mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_t \quad (2.3.22)$$

Aus der Kombination der Gleichungen (2.3.21) und (2.3.22) erhalten wir die Fresnelschen Gleichungen für die *s*-Polarisation.

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma} \quad (2.3.23a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma} \quad (2.3.23b)$$

Mit den Brechungsindizes  $n_1 = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$  und  $n_2 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$  erhält man

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha - \frac{n_2}{\mu_2} \cos \gamma}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \gamma} \quad (2.3.24a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \gamma} \quad (2.3.24b)$$

Nach dem Brechungsgesetz ist

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\mu_1 \varepsilon_2}} \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\mu_1 \varepsilon_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Wir setzen dies ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} (\mathfrak{E}_e - \mathfrak{E}_r) \cos \alpha &= \mathfrak{E}_t \cos \gamma \\ \frac{(\mathfrak{E}_e - \mathfrak{E}_r) \cos \alpha \sin \gamma}{\mu_1} &= \frac{\mathfrak{E}_t \cos \gamma \sin \alpha}{\mu_2} \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Wir setzen  $\mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_t$  ein und bekommen die Fresnelsche Formeln für die *s*-Polarisation

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\frac{1}{\mu_1} \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha - \frac{1}{\mu_2} \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)}{\frac{1}{\mu_1} \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \frac{1}{\mu_2} \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)} \quad (2.3.26a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{\frac{2}{\mu_1} \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\frac{1}{\mu_1} \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \frac{1}{\mu_2} \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)} \quad (2.3.26b)$$

Dabei ist

$$\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \sin \gamma$$

Für nichtmagnetische Materialien können die Fresnelgleichungen für die *s*-Polarisation umgeschrieben werden

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_r &= \mathfrak{E}_e \frac{\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)}{\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)} \\ &= -\mathfrak{E}_e \frac{\sin(\alpha - \gamma(\alpha))}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))}\end{aligned}\quad (2.3.27a)$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_t &= \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)} \\ &= \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))}\end{aligned}\quad (2.3.27b)$$

Dabei ist

$$\sqrt{\varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \gamma$$

- Wenn  $\alpha > \gamma$ , wenn also die elektromagnetische Welle aus dem schnelleren Medium auf das langsamere Medium trifft, haben  $\mathfrak{E}_e$  und  $\mathfrak{E}_r$  unterschiedliche Vorzeichen: es tritt ein Phasensprung um  $\pi$  bei der *Reflexion* auf.
- Bei der *Reflexion* am schnelleren Medium  $\alpha < \gamma$  ist  $\sin(\alpha - \gamma)$  negativ und  $\mathfrak{E}_r$  positiv. Es gibt keinen Phasensprung bei der *Reflexion*. Dies erklärt zum Beispiel, warum Seifenlamellen in Reflexion schwarz werden, wenn die Dicke gegen null geht.
- Die Gesetze für die *Intensität* bekommt man durch quadrieren und unter Berücksichtigung der relativen Dielektrizitätszahl  $\varepsilon_1$  und der relativen magnetischen Permeabilität  $\mu_1$ .
- Bei fast senkrecht入射 bekommen man  $\mathfrak{E}_r \approx -\mathfrak{E}_e \frac{\sin \alpha - \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \gamma} \approx -\mathfrak{E}_e \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$
- und für die Transmission  $\mathfrak{E}_t \approx -\mathfrak{E}_e \frac{2 \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \gamma} \approx \mathfrak{E}_e \frac{2 n_1}{n_2 + n_1}$

Die Fresnelsche Formeln für die Intensität bei der *s-Polarisation* für nichtmagnetische Materialien lauten

$$\begin{aligned}I_r &= I_e \frac{[\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)]^2}{[\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)]^2} \\ &= I_e \frac{\sin^2(\alpha - \gamma(\alpha))}{\sin^2(\alpha + \gamma(\alpha))}\end{aligned}\quad (2.3.28a)$$

$$I_t = \frac{n_2}{n_1} I_e \frac{4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \gamma(\alpha))}\quad (2.3.28b)$$

Wir haben die einfallende Intensität  $I_e = n_1 \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_e^2$  als Referenz verwendet. Deshalb erscheint der Vorfaktor  $\frac{n_2}{n_1}$  für  $I_t$ . Im Medium mit dem Brechungsindex  $n_2$  wird die Energie mit einer anderen Geschwindigkeit transportiert als im Medium mit dem Brechungsindex  $n_1$ . Ist  $n_2$  grösser als  $n_1$ , so ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner und  $I_t$  muss grösser werden.

Bei fast senkrecht入射 erhalten wir

- für die Reflexion  $I_r \approx I_0 \left( -\frac{\sin \alpha - \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \gamma} \right)^2 \approx I_0 \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$
- und die Transmission  $I_t \approx I_0 \frac{n_2 \cdot 4 \sin^2 \gamma}{n_1 (\sin \gamma + \sin \alpha)^2} \approx I_0 \frac{4 n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}$ .

### 2.3.2. p-Polarisation

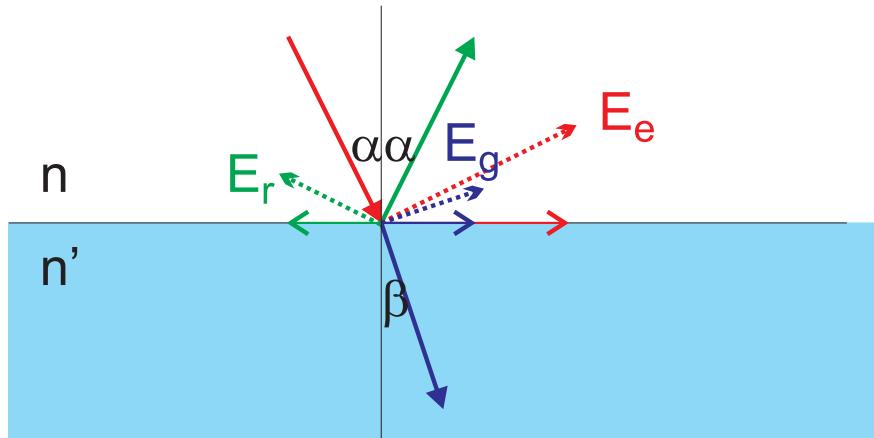


Abbildung 2.3.: Stetigkeitsbedingungen für elektromagnetische Wellen mit p-Polarisation. Die dicken Vektoren stellen die  $\mathbf{k}$ -Vektoren dar (rot für die einfallende elektromagnetische Welle, grün für die reflektierte und blau für die gebrochene elektromagnetische Welle.). Die  $\mathbf{E}$ -Vektoren sind gestrichelt gezeichnet, ihre Projektion auf die Grenzfläche dünn.

Bei  $p$ -polarisierten elektromagnetischen Wellen ist die Bedingung für die Stetigkeit der Parallelkomponente von  $\mathbf{E}$  durch

$$(\mathfrak{E}_e - \mathfrak{E}_r) \cos \alpha = \mathfrak{E}_t \cos \gamma \quad (2.3.29)$$

gegeben. Weiter gilt immer noch die Beziehung für den Poynting-Vektor (Energieerhaltung)

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (\mathfrak{E}_e^2 - \mathfrak{E}_r^2) \cos \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \mathfrak{E}_t^2 \cos \gamma \quad (2.3.30)$$

Wir teilen die beiden Gleichungen und lösen das Gleichungssystem und erhalten die Fresnelsche Formeln (p-Polarisation):

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha} \quad (2.3.31a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma} \quad (2.3.31b)$$

Für nichtmagnetische Materialien vereinfachen sie sich unter Verwendung der Brechungsindizes zu

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \gamma}{n_1 \cos \gamma + n_2 \cos \alpha} \quad (2.3.32a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \gamma} \quad (2.3.32b)$$

Bei senkrechtem Einfall gilt  $\cos \alpha \approx \cos \gamma \approx 1$  und damit

- für die Reflexion  $\mathfrak{E}_r \approx \mathfrak{E}_e \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$
- und für die Transmission  $\mathfrak{E}_t \approx \mathfrak{E}_e \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$

Dass das Vorzeichen von  $\mathfrak{E}_r$  anders ist als bei der s-Polarisation hängt mit der Definition der lokalen Koordinatensystem der reflektierten Wellen zusammen und ist kein Widerspruch.

Die Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  können mit dem Snelliusschen Gesetz  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma$  eliminiert werden

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_e \frac{\tan[\alpha - \gamma(\alpha)]}{\tan[\alpha + \gamma(\alpha)]} \quad (2.3.33a)$$

$$\mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_e \frac{2 \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\sin[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos[\alpha - \gamma(\alpha)]} \quad (2.3.33b)$$

Die Fresnelschen Formeln für die Intensität bei nichtmagnetischen Materialien lauten

$$I_r = I_e \frac{\tan^2[\alpha - \gamma(\alpha)]}{\tan^2[\alpha + \gamma(\alpha)]} \quad (2.3.34a)$$

$$I_t = \frac{n_2}{n_1} I_e \frac{4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)]} \quad (2.3.34b)$$

Wir haben die einfallende Intensität  $I_e = n_1 \frac{\varepsilon_0 c}{2} \mathfrak{E}_e^2$  als Referenz verwendet. Deshalb erscheint der Vorfaktor  $\frac{n_2}{n_1}$  für  $I_t$ .

Bei senkrechtem Einfall erhalten wir

- für die Reflexion  $I_r \approx I_0 \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$
- und die Transmission  $I_t = I_0 \frac{n_2}{n_1} \frac{4n_1^2}{(n_2 + n_1)^2} = I_0 \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}$ .

### 2.3.3. Grenzfall des senkrechten Einfalles

Im Grenzfall  $\alpha \rightarrow 0$  stimmen die Resultate für die s- und p-Polarisation überein. In diesem Falle ist

$$\frac{I_r}{I_e} + \frac{I_t}{I_e} = \frac{n_1^2 - 2n_1 n_2 + n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} + \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{n_1^2 + 2n_1 n_2 + n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} = 1, \quad (2.3.35)$$

also ganz klar die Energie erhalten. Der Faktor  $n_2/n_1$  ist notwendig dazu.

### 2.3.4. Brewster-Winkel

Wenn bei der  $p$ -Polarisation in der Gleichung (2.3.33) für  $\mathfrak{E}_r$  der Nenner  $\alpha + \gamma(\alpha) = \pi/2$  ist, divergiert er. Wir erhalten also  $\mathfrak{E}_r(\alpha = \pi/2 - \gamma(\alpha)) = 0$ . Dies ist der *Brewster-Winkel*. Beim Brewsterwinkel gegeben durch  $\alpha + \gamma(\alpha) = \pi/2$  ist  $\mathfrak{E}_{r,p}$  für die p-Polarisation gleich null. Die elektromagnetische Welle ist s-polarisiert!

Mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz folgt

$$\alpha_{Brewster} = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (2.3.36)$$



Abbildung 2.4.: Polarisation bei der Spiegelung an Wasser. Links ist der Analysator so gestellt, dass das an der Wasseroberfläche reflektierte Licht durchgelassen wird. Rechts die gleiche Szene, aber der Analysator blockt das an der Wasserfläche reflektierte Licht.



Abbildung 2.5.: Polarisation bei der Spiegelung an Wasser. Die beiden Bilder aus Abbildung 2.4 sind hier übereinandergelegt. Die Trennlinie läuft entlang des Baumstammes.

---



Abbildung 2.6.: Polarisation bei der Spiegelung an Wasser. Linkes und rechtes Bild wurden mit zwei Stellungen des Polarisationsfilters aufgenommen.

---

### 2.3.5. Beispielkurven für die Fresnelformeln

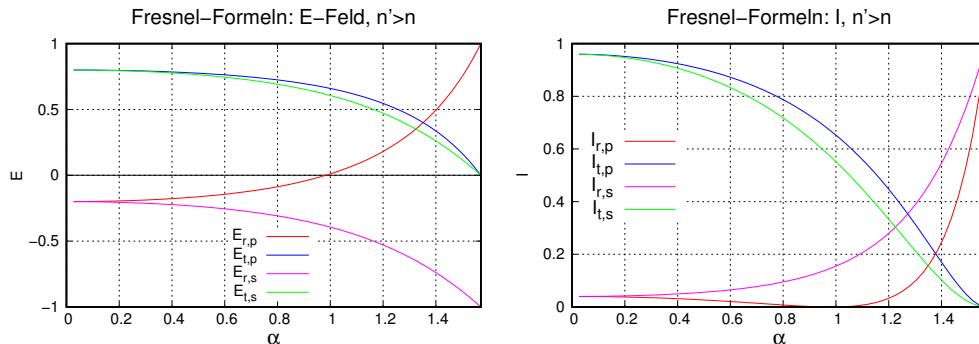


Abbildung 2.7.: Verlauf der *Amplitude* des elektrischen Feldes (links) und der *Intensität*(rechts) für *p*- und *s*-Polarisation, wenn elektromagnetische Wellen aus dem schnelleren Medium ( $n_1 = 1$ ) in das langsamere ( $n_2 = 1.5$ ) eintreten. Die *Intensität* ist mit  $I = n_i E^2$  berechnet worden, wobei  $n_i$  die für das jeweilige Medium gültige Brechzahl ist.

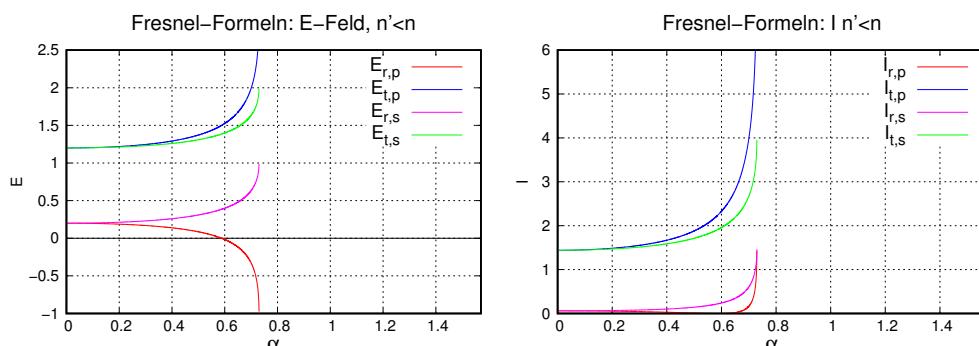


Abbildung 2.8.: Verlauf der *Amplitude* des elektrischen Feldes (links) und der *Intensität*(rechts) für *p*- und *s*-Polarisation, wenn elektromagnetische Wellen aus dem langsameren ( $n_1 = 1.5$ ) Medium in das schnellere ( $n_2 = 1$ ) eintreten. Die *Intensität* ist mit  $I = n_i E^2$  berechnet worden, wobei  $n_i$  die für das jeweilige Medium gültige Brechzahl ist.



### 2.3.6. Evaneszente Wellen

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 193,196])

Aus den letzten Abbildungen ist ersichtlich, dass, wenn elektromagnetische Wellen aus dem langsameren Medium ( $n_1$ ) in das schnellere  $n_2 < n_1$  eintreten, es Winkel  $\gamma$  gibt ( $(n_1/n_2) \sin \alpha = \sin \gamma > 1$ ), für die es keine reelle Lösung der Fresnelschen Formeln gibt. Die Lösung ist dann in die  $z$ -Richtung rein imaginär. Dies heisst, dass auch die  $z$ -Komponente des  $\mathbf{k}$ -Vektor der elektromagnetischen Welle im schnelleren Medium imaginär wird. Darum wird aus  $e^{ik_z z}$  mit  $k_z = i\kappa_z$  der exponentielle

Dämpfungsfaktor  $e^{-\kappa_z z}$ , wobei  $\kappa_z$  vom Einfallswinkel abhängt. Die elektromagnetischen Wellen aus dem langsameren Medium können sich im schnelleren Medium also nicht weiter in die  $z$ -Richtung bewegen: Wegen der Energieerhaltung ist die *Reflexion* perfekt.

Eine kurze Rechnung zeigt,

dass im Falle der Totalreflexion ( $n_1 \sin(\alpha) \geq n_2$  und damit  $n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\alpha) \leq 0$ ) der Betrag von  $\mathbf{k}_{t, \text{senkrecht}}$

$$k_{t, \text{senkrecht}} = \pm i k_{vac} \sqrt{n_1^2 \sin^2(\alpha) - n_2^2} = i \kappa_t \quad (2.3.37)$$

ist. Die physikalisch sinnvolle Lösung für einen unendlich ausgedehnten Halbraum mit dem Brechungsindex  $n_2$  ist die exponentiell abfallende Lösung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_t e^{i(\mathbf{k}_{t, \text{tangential}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{-\kappa_t z} \quad (2.3.38)$$

Die resultierende Welle im Medium 2 hat dann die zeitgemittelte Intensität

$$I(x, z) = I_0 e^{-2\kappa_t z} \quad (2.3.39)$$

Wir erhalten also für die Intensität einen exponentiellen Abfall mit einer Abfalllänge

$$\ell_0 = \frac{1}{2\kappa_t} = \frac{\lambda_{vac}}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 \sin^2(\alpha) - n_2^2}} \quad (2.3.40)$$

Wenn eine Welle mit der Vakuumwellenlänge  $\lambda_{vac} = 500 \text{ nm}$  und dem Einfallswinkel  $\alpha = 5\pi/12 = 75^\circ$  von einem Medium mit dem Brechungsindex  $n_1 = 1.55$  in Luft  $n_2 = 1$  übertritt, ist  $\lambda_0 = 35.71 \text{ nm}$ .



# 3. Interferenz und Beugung



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 562]) (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 649]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 327]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 348]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1109])

## 3.1. Vorbemerkungen und Motivation

Soweit bekannt ist, war der polnische Naturphilosoph *Witelo* aus Liegnitz bei Breslau/Schlesien (geboren um 1230, gestorben zwischen 1275 und 1314) der erste Forscher, der bemerkte, dass *Lichtstrahlen* nicht unendlich dünn werden können (Bemerkung im Buch von John Freely [Fre12, Fre15]). Diese experimentelle Beobachtung ist der erste bekannte experimentelle Hinweis auf die *Wellennatur des Lichtes* [Thu72, Wik26].

Dieses Kapitel beruht auf den in der Elektrizitätslehre abgeleiteten Wellengleichungen (2.2.1) oder (2.2.2)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{B}$$

In diesem Abschnitt sollen die Eigenschaften von Licht, die auf der Wellennatur, also auf (2.2.1) oder (2.2.2), beruhen, diskutiert werden. Alle Lösungen hängen von einem skalaren Parameter ab, der in den Gleichungen (2.2.6) und (2.2.7) eingeführten Phase.

Wir setzen also

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \tag{3.1.1}$$

Dabei ist in kartesischen Koordinaten  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$  der Wellenvektor und  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  der Beobachtungsort. Der Wellenvektor ergibt sich aus  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$  aus der Wellenlänge  $\lambda$ , die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$  aus der Frequenz  $\nu$  oder aus der Periodendauer  $T = 1/\nu$ .

Damit sind zum Beispiel

Schreibweise mit komplexen Zahlen

$$A(\varphi(\mathbf{r})) = A(\varphi(\mathbf{r})) = A_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \quad \text{skalare Welle} \tag{3.1.2a}$$

$$\mathbf{E}(\varphi(\mathbf{r})) = \mathbf{E}(\varphi(\mathbf{r})) = \mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \quad \text{vektorielle Welle} \tag{3.1.2b}$$

Schreibweise mit reellen Zahlen

$$A(\varphi(\mathbf{r})) = A(\varphi(\mathbf{r})) = A_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad \text{skalare Welle} \quad (3.1.2c)$$

$$\mathbf{E}(\varphi(\mathbf{r})) = \mathbf{E}(\varphi(\mathbf{r})) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad \text{vektorielle Welle} \quad (3.1.2d)$$



**Versuch zur Vorlesung:**  
Wellenmaschine ([Versuchskarte SW-077](#))



Abbildung 3.1.: Interferenz zweier Kreiswellen im Riffelsee auf der Riffelalp.

Abbildung 3.1 zeigt die Interferenz von Kreiswellen auf der Wasseroberfläche.

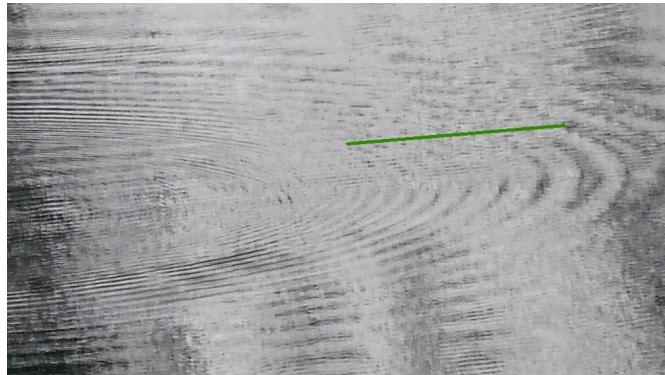


Abbildung 3.2.: Detail aus Abbildung 3.1. Die grüne Linie liegt im Bereich, in dem zwei Wellen interferieren.

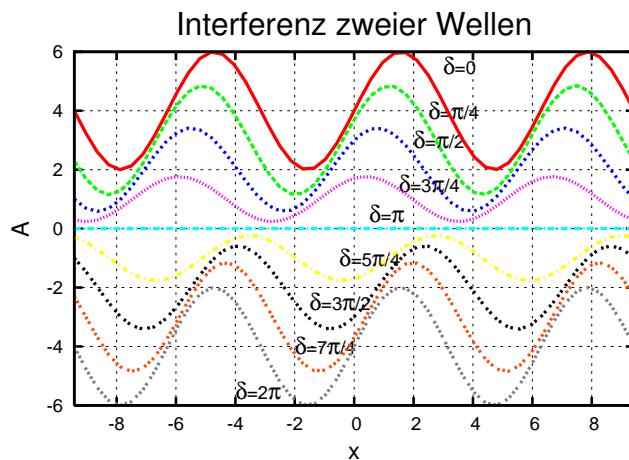


Abbildung 3.3.: Interferenz zweier Wellen mit der gleichen *Amplitude* und der gleichen Frequenz und einer Phase, die von  $0 \dots 2\pi$  variiert.

Abbildung 3.3 zeigt schematisch, wie solche Wellen entlang der grünen Linie in Abbildung 3.2 interferieren könnten.

Zur Beschreibung dieser in der Wellenwanne und im Riffelsee beobachteten Interferenz setzen wir zwei Wellen an, wobei wir hier nur die  $x$ -Komponente und skalare Amplituden betrachten

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= A_{1,0} \exp(i(kx - \omega t)) \\ A_2(x, t) &= A_{2,0} \exp(i(kx - \omega t + \delta)) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Die Phase der beiden Wellen unterscheidet sich dabei um  $\delta$ , der Phasendifferenz. Wie immer ist nur der Real- oder der Imaginärteil messbar.

An einem bestimmten Ort zu verschiedenen Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  ist die Differenz der Phasen durch

$$(kx - \omega t_1) - (kx - \omega t_2 + \delta) = \omega(t_1 - t_2) - \delta = \omega\Delta t - \delta \quad (3.1.4)$$

gegeben und unabhängig vom Ort. Zu einer bestimmten Zeit und an verschiedenen Orten  $x_1$  und  $x_2$  ist die Differenz der Phasen durch

$$(kx_1 - \omega t) - (kx_2 - \omega t + \delta) = k(x_1 - x_2) - \delta = k\Delta x - \delta \quad (3.1.5)$$

gegeben, unabhängig von der Zeit.

Beobachten können wir nur die Summe der beiden Wellen, also

$$A_1(x, t) + A_2(x, t) = A_{1,0} \exp(i(kx - \omega t)) + A_{2,0} \exp(i(kx - \omega t + \delta)) \quad (3.1.6a)$$

mit  $A_{1,0} = A_0 + \Delta A$  und  $A_{2,0} = A_0 - \Delta A$

$$\begin{aligned} &= A_0 [\exp(i(kx - \omega t)) + \exp(i(kx - \omega t + \delta))] \\ &\quad + \Delta A [\exp(i(kx - \omega t)) - \exp(i(kx - \omega t + \delta))] \end{aligned} \quad (3.1.6b)$$

Nur reelle Größen sind messbar

$$\begin{aligned} \Re(A_1(x, t) + A_2(x, t)) &= A_0 [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx - \omega t + \delta)] \\ &\quad + \Delta A [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx - \omega t + \delta)] \end{aligned} \quad (3.1.6c)$$

Wir wenden die Additionstheoreme für die Winkelfunktionen an. Wir verwenden

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (3.1.7a)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (3.1.7b)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} A(x, t) &= A_1(x, t) + A_2(x, t) \\ &= A_0 [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx - \omega t + \delta)] \\ &\quad + \Delta A [\exp(i(kx - \omega t)) - \exp(i(kx - \omega t + \delta))] \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right) + 2\Delta A \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Wenn beide Wellen die gleiche Amplitude haben Aus dieser Gleichung kann bei

gleichen Amplituden ( $\Delta A = 0$ ) die folgende Tabelle abgeleitet werden.

Phase	resultierende <i>Amplitude</i>	Interferenz
0	$2A_0$	konstruktiv
$\pi/2$	$\sqrt{2}A_0$	
$\pi$	0	destruktiv
$3\pi/2$	$\sqrt{2}A_0$	
$2\pi$	$2A_0$	konstruktiv

Tabelle 3.1.: Interferenz und Phasendifferenz

Wenn  $\Delta A > 0$  ist, fehlt der Fall der kompletten destruktiven Interferenz.

## 3.2. Phasendifferenz und Kohärenz



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 570]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 367]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1109]) (Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 514])

Wir betrachten Wellen, die sich auf verschiedenen Wegen ausbreiten und die unterschiedliche Abstände zu einer Quelle haben.

Zwei Wellen heissen kohärent, wenn sie, bis auf eine Phase, die gleiche Zeitabhängigkeit haben.



### Versuch zur Vorlesung:

Kohärenz (Versuchskarte O-051)

Die Kohärenz von Wellen ist nur im Idealfall überall und zu jeder Zeit gegeben.

**Kohärenzzeit** Jede Quelle hat ein beschränktes Phasengedächtnis. Dies bedeutet, dass die Wellenzüge, die vor einer Zeit grösser als die Kohärenzzeit  $\tau$  emittiert wurden, keine definierte Phasenbeziehung mehr haben. Der Phasenunterschied wird eine stochastische Grösse.

**Kohärenzlänge** Die Kohärenzzeit  $\tau$  kann in eine Kohärenzlänge  $L$  umgerechnet werden. Ist der Weglängenunterschied grösser als  $L$ , gibt es keine Kohärenz mehr.

Hat eine Quelle (ein gedämpfpter harmonischer Oszillator) eine Bandbreite  $\Delta\nu$ , dann ist die Kohärenzzeit  $\tau \approx \Delta\nu^{-1}$  und  $L \approx c\tau \approx \frac{c}{\Delta\nu}$ .

Ist die Lichtquelle ausgedehnt (Breite  $b$ ), dann gibt es nur im Winkelbereich  $\sigma < \frac{\lambda}{4b}$  eine kohärente Überlagerung.

Die *Intensität* muss verschieden berechnet werden, je nachdem ob die beiden Wellenzüge mit den Amplituden  $E_1$  und  $E_2$  kohärent oder nicht sind.

**bei kohärenten Wellenzügen**  $I(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} (\mathbf{E}_1(x, t) + \mathbf{E}_2(x, t))^2$

**bei inkohärenten Wellenzügen**  $I(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} [\mathbf{E}_1(x, t)^2 + \mathbf{E}_2(x, t)^2]$

Bei kohärenten Wellen mit dem Phasenunterschied  $\phi$  und den Amplituden  $\mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{E}_2$  ist die resultierende *Amplitude*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, t) &= \mathbf{E}_1 e^{i(kx - \omega t)} + \mathbf{E}_2 e^{i(kx - \omega t + \delta(x))} \\ &= \mathbf{E}_1 \left( e^{i(kx - \omega t)} + e^{i(kx - \omega t + \delta(x))} \right) + (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) e^{i(kx - \omega t + \delta(x))} \\ &= \mathbf{E}_1 e^{i(kx - \omega t)} \left( 1 + e^{i\delta(x)} \right) + (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) e^{i(kx - \omega t + \delta(x))}\end{aligned}\quad (3.2.1)$$



### 3.2.1. Stehende Wellen

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 431]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 293]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 435]) (Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 513])

Wenn wir eine nach links laufende Welle  $A_1(x, t) = A_0 \exp(i(kx + \omega t))$  und eine nach rechts laufende Welle  $A_2 = A_0 \exp(i(kx - \omega t + \delta))$  mit gleicher Amplitude zur Interferenz bringen lassen, erhalten wir

$$\begin{aligned}A(x, t) &= A_1(x, t) + A_2(x, t) \\ &= A_0 \exp(i(kx + \omega t)) + A_0 \exp(i(kx - \omega t + \delta)) \\ &= A_0 \exp(i(kx + \delta/2)) [\exp(i(\omega t - \delta/2)) + \exp(-i(\omega t - \delta/2))] \\ &= 2A_0 \exp(i(kx + \delta/2)) \frac{\exp(i(\omega t - \delta/2)) + \exp(-i(\omega t - \delta/2))}{2} \\ &= 2A_0 \exp\left(i\left(kx + \frac{\delta}{2}\right)\right) \cos\left(\omega t - \frac{\delta}{2}\right)\end{aligned}\quad (3.2.2)$$

Die Summe der beiden Wellenfunktionen ist das Produkt zweier Terme

- ein zeitabhängiger Teil, der für alle Orte gleich ist:  $\cos\left(\omega t - \frac{\delta}{2}\right)$
- ein ortsabhängiger Teil, der für alle Zeiten gleich ist:  $\exp\left(i\left(kx + \frac{\delta}{2}\right)\right)$

Damit bilden sich räumlich stehende Knotenlinien aus, wir haben eine **stehende Welle**.

Wenn die Amplituden der beiden Wellen nicht gleich gross ist, dann interferieren von der Welle mit der grösseren *Amplitude* nur die Amplitudenteile, die gleich gross wie die *Amplitude* der schwächeren Welle sind.

Stehende Wellen als Resultat zweier gegenläufiger Wellen gibt es in jedem Resonator, insbesondere in Laserresonatoren.

### 3.2.2. Mach-Zehnder-Interferometer



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 663]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 365])

In Gleichung (3.2.2) zeigt sich, dass bei einem optischen Aufbau, der effektiv nur von einer Ortskoordinate abhängt, die zeitlich gemittelte Amplitude nur von der Phase  $\delta$  abhängt. Das heisst, dass es reicht, die Phasen zu untersuchen! Beachten Sie, in Gleichung (3.2.2) wurde die Phase  $\delta$  nur einem Weg zugeordnet, die zeitgemittelte Amplitude hängt aber von  $\cos(\delta/2)$  ab.

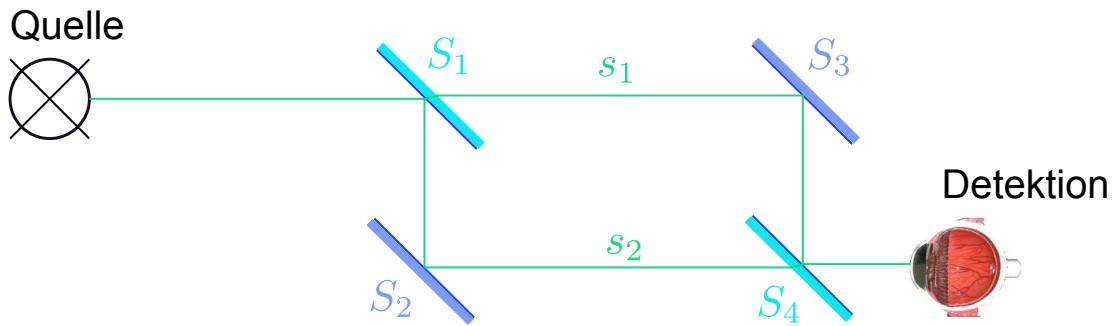


Abbildung 3.4.: Aufbau des Mach-Zehnder-Interferometers.

Abbildung 3.4 zeigt den schematischen Aufbau eines Mach-Zehnder-Interferometers. Licht aus der Quelle trifft auf den halbdurchlässigen Spiegel  $S_1$  und spaltet sich in die zwei Wege  $s_1$  und  $s_2$  auf. Der Weg  $s_1$  läuft vom Spiegel  $S_1$  über  $S_3$  nach  $S_4$ , der Weg  $s_2$  vom Spiegel  $S_1$  über  $S_2$  nach  $S_4$ . Am Spiegel  $S_4$  werden die Lichtwellen vereinigt und gelangen interferierend auf den Detektor.

Die relative Phase des Lichtes für die beiden Wege  $s_1$  und  $s_2$  kann aus dem Brechungsindexverlauf entlang der Wege berechnet werden. Die Geschwindigkeit ist durch  $c(s) = c_0/n(s)$  gegeben. Dann ist

$$t_i = \int_{s_i} \frac{1}{c(s)} ds = \frac{1}{c_0} \int_{S_1, s_i}^{S_4} n_i(s) ds \quad (3.2.3)$$

Die Phasendifferenz von Licht mit der Vakuumwellenlänge  $\lambda_0$  und damit der Frequenz  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c_0/\lambda_0$  ist

$$\begin{aligned} \delta = \omega(t_2 - t_1) &= \frac{2\pi c_0}{\lambda_0} \left( \frac{1}{c_0} \int_{S_1, s_2}^{S_4} n_2(s) ds - \frac{1}{c_0} \int_{S_1, s_1}^{S_4} n_1(s) ds \right) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \int_{S_1, s_2}^{S_4} n_2(s) ds - \int_{S_1, s_1}^{S_4} n_1(s) ds \right) \quad (3.2.4) \end{aligned}$$

Die beobachtete zeitgemittelte Amplitude am Ort  $x = 0$  (kann willkürlich gewählt werden!) ist nach Gleichung (3.2.2) mit  $\mathbf{E}(\delta) = \mathbf{E}_1(x, t) + \mathbf{E}_2(x, t)$ , beide mit gleichen Amplituden  $|\mathbf{E}_0|$

$$\begin{aligned}
 I(\delta) &= \left\langle \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \mathbf{E}^2(x, t, \delta) \right\rangle_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} 4 \mathbf{E}_0^2 \cos^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \mathbf{E}_0^2 \cos^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \\
 &= 2 \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \mathbf{E}_0^2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda_0} \left( \int_{S_1, s_2}^{S_4} n_2(s) ds - \int_{S_1, s_1}^{S_4} n_1(s) ds \right) \right) \\
 &= 4 I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda_0} \left( \int_{S_1, s_2}^{S_4} n_2(s) ds - \int_{S_1, s_1}^{S_4} n_1(s) ds \right) \right) \quad (3.2.5)
 \end{aligned}$$

wobei  $I_0 = \frac{1}{2} \left\langle \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \mathbf{E}_i^2(0, t) \right\rangle_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \mathbf{E}_0^2$  ist.

Das heisst, dass das Ausgangssignal des Mach-Zehnder-Interferometers nicht nur von der geometrischen Weglängendifferenz, sondern auch von Unterschieden der Brechungsindizes abhängt. Das Licht läuft in beiden Armen mit einer definierten Richtung. Das heisst, dass der Ausgang des Mach-Zehnder-Interferometers abhängig zum Beispiel von der Fließrichtung eines Mediums mit dem Brechungsindex  $n$  ist. Mach-Zehnder-Interferometer werden kaum zur Distanzmessung aber oftmals zur Messung von Brechungsindexdifferenzen verwendet.



### 3.2.3. Das Michelson-Interferometer

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 596]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 360]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1114])



**Versuch zur Vorlesung:**  
Michelson-Interferometer (Versuchskarte O-031)

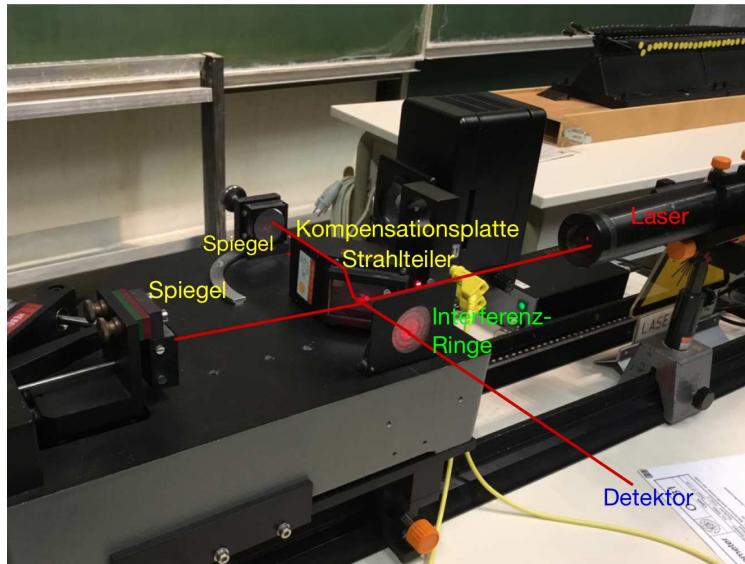


Abbildung 3.5.: Bild des Michelson-Interferometers aus der Vorlesungssammlung mit eingezeichnetem Strahlengang.

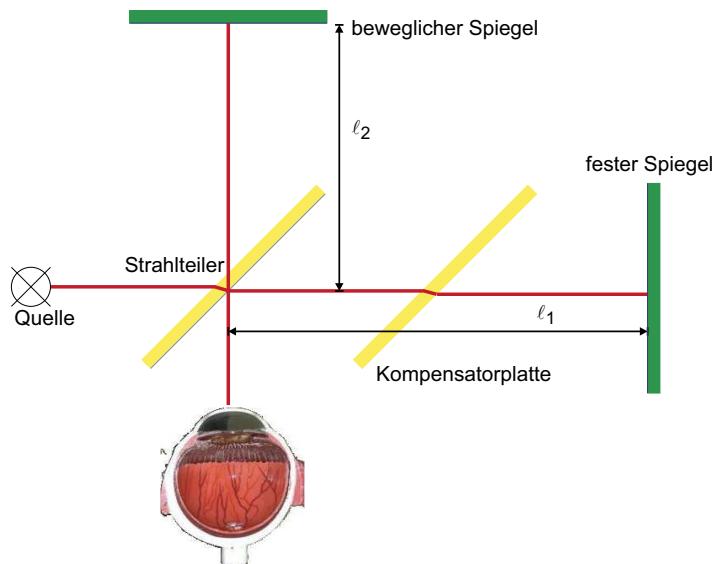


Abbildung 3.6.: Schematische Zeichnung des Aufbaus eines Michelson-Interferometers aus Abb. 3.5.

Beim Michelson-Interferometer wird Licht durch einen Strahlteiler in zwei Lichtwege aufgespalten. Der Weg vom Strahlteiler zum festen Spiegel sei  $\ell_1$ , der zum beweglichen  $\ell_2$ . Analog zum *Mach-Zehnder-Interferometer* (siehe Abschnitt 3.2.2) kann die Phase wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\delta = \omega(t_2 - t_1) &= \frac{2\pi c_0}{\lambda_0} \left( \frac{2}{c_0} \int_{\ell_2} n_2(s) ds - \frac{2}{c_0} \int_{\ell_1} n_1(s) ds \right) \\ &= \frac{4\pi}{\lambda_0} \left( \int_{\ell_2} n_2(s) ds - \int_{\ell_1} n_1(s) ds \right) \quad (3.2.6)\end{aligned}$$

Die Phase hängt also sowohl vom Weglängenunterschied wie auch von Unterschieden im Brechungsindex ab. Anders als beim *Mach-Zehnder-Interferometer* wird jeder Weg zweimal und zwar gegenläufig durchlaufen. Bewegungseffekte mitteln sich so in erster Näherung heraus.

Der gesamte Weglängenunterschied ist bei konstantem  $n_i(s) = n_0$  durch  $\Delta\ell = 2(\ell_2 - \ell_1)$  gegeben. Immer wenn  $\Delta\ell$  ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$  ist, tritt konstruktive Interferenz auf. Wird der bewegliche Spiegel um  $\lambda/4$  verschoben, ändert sich  $\Delta\ell$  um  $\lambda/2$ , dann haben wir destruktive Interferenz.

Wenn wir das Interferometer am Ausgang mit einer *Intensität* von  $I_0$  betreiben und wenn wir eine Intensitätsänderung von  $\Delta I$  noch messen können, dann können wir die mögliche Distanzauflösung in nichtmagnetischen Medien wie folgt berechnen:

$$I(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E^2 \cos^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) = I_0 \cos^2 \left( \frac{2\pi \frac{(2x)}{\lambda}}{2} \right) = I_0 \cos^2 \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \quad (3.2.7)$$

oder umgeschrieben

$$I(x) = \frac{I_0}{2} \left[ 1 + \cos \left( 4\pi \frac{x}{\lambda} \right) \right] \quad (3.2.8)$$

Die Ableitung dieser Gleichung ist

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\frac{2\pi I_0}{\lambda} \sin \left( 4\pi \frac{x}{\lambda} \right) \quad (3.2.9)$$

Die maximale Steigung, also die höchste Empfindlichkeit beträgt

$$\left| \left( \frac{dI(x)}{dx} \right) \Big|_{max} \right| = \frac{2\pi I_0}{\lambda} \quad (3.2.10)$$

Wir können also die Distanz

$$\Delta x = \frac{\Delta I}{\left. \frac{dI(x)}{dx} \right|_{max}} = \frac{\Delta I}{2\pi I_0} \lambda \quad (3.2.11)$$

noch bestimmen. Dazu muss die Position (die Phase) so gelegt werden, dass der Sinus extremal ist:

$$4\pi \frac{x_{opt}}{\lambda} = \frac{2j+1}{2} \pi, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (3.2.12)$$

Wir bekommen so den Arbeitspunkt  $8\pi x_{opt} = (2j+1)\pi\lambda$  oder

$$x_{opt}(j) = \frac{2j+1}{8}\lambda, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (3.2.13)$$

Maxima der Intensität am Ausgang liegen aber bei

$$x_{max} = \frac{j}{2}\lambda, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (3.2.14)$$

und die Minima bei

$$x_{min} = \frac{2j+1}{4}\lambda, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (3.2.15)$$

Wenn zum Beispiel  $\lambda = 500 \text{ nm}$  ist und  $\Delta I/I_0 = 0.01$  ist, liegt der erste optimale Arbeitspunkt bei  $x = 67.5 \text{ nm}$  und die mögliche Auflösung beträgt  $\Delta x = 0.8 \text{ nm}$ . Das Michelson-Interferometer wird häufig zur Messung von Distanzen verwendet. Bei besserem Signal-Rauschverhältnis, können kleinere Längenänderungen bestimmt werden. Wenn ein *Signal-Rausch-Verhältnis* von etwa  $10^{-13}$  erreicht wird, können Gravitationswellen detektiert werden.



### 3.2.4. Sagnac-Interferometer

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 701])

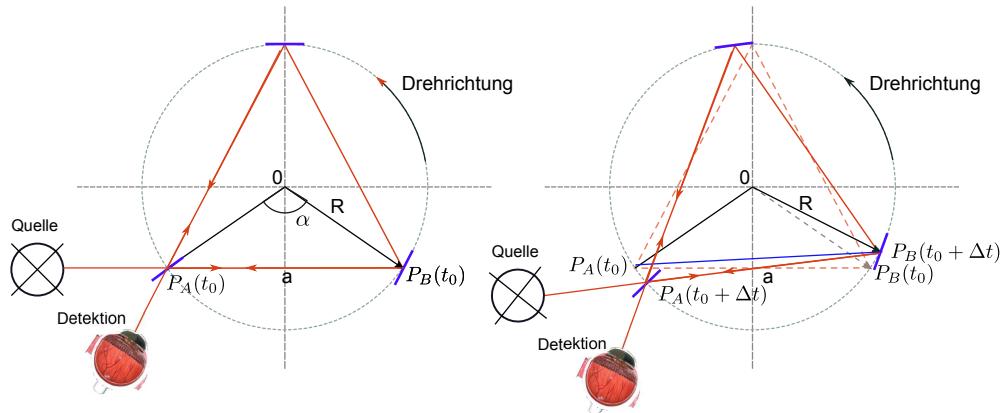


Abbildung 3.7.: Sagnac-Interferometer. Rechts nach einer Laufzeit.

Beim Sagnac Interferometer läuft das Licht links- und rechts herum und interfeiert dann. Die Lichtwege sind identisch, das Verschieben eines Spiegels erzeugt kein Signal. Wenn man das Sagnac-Interferometer jedoch mit der Kreisfrequenz  $\Omega$  dreht, dann sind die Umlaufzeiten mit und gegen die Drehrichtung unterschiedlich. Die Behauptung ist, dass der Laufzeitunterschied zwischen der links- und der rechtsgläufigen Welle

$$\Delta t = t_{rechts} - t_{links} = \frac{4A}{c^2}\Omega \quad (3.2.16)$$

ist. Dabei ist  $\Omega$  die Winkelfrequenz, mit der das Interferometer rotiert,  $A$  die vom Licht eingeschlossene Fläche (in Abbildung 3.7 die Fläche des Dreieckes) und  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Sagnac-Interferometer werden heute als *Gyroskope*

verwendet. Sie messen zum Beispiel die Drehraten von Flugzeugen und werden so zur magnetfeldunabhängigen Navigation herangezogen.

Wir betrachten ein Interferometer aus  $n$  Seiten. Die Fläche des  $n$ -Ecks ist  $n$ -mal die Fläche eines einzelnen Dreiecks, und dessen Fläche  $A_D = ah/2$ . Beim  $n$ -Eck ist die Höhe  $h = R \cos(\pi/n)$  und die Grundlinie  $a = 2R \sin(\pi/n)$ . Damit ist

$$A(n) = nA_D = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) R^2 \quad (3.2.17)$$

Wir brauchen nun die Strecke  $\overline{P_A(t_0)P_B(t_0 + \Delta t)}$ . Diese ist die Grundlinie in einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Spitzewinkel

$$\alpha_{\pm} = \frac{2\pi}{n} \pm \Omega \Delta t_{pm}. \quad (3.2.18)$$

Mit  $\pm$  können beide Fälle gleichzeitig behandelt werden. Wir brauchen noch den Winkel an der Grundlinie (zweimal der gleiche Winkel  $\beta_{\pm}$

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{2}(\pi - \alpha_{\pm}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \mp \frac{\Omega \Delta t_{\pm}}{2}. \quad (3.2.19)$$

Mit dem Sinussatz für beliebige Dreiecke bekommen wir die Länge der Grundlinie

$$\begin{aligned} \frac{\ell_{\pm}}{\sin(\alpha_{\pm})} &= \frac{R}{\sin(\beta_{\pm})} \\ \Rightarrow \frac{\ell_{\pm}}{\sin\left(\frac{2\pi}{n} \pm \Omega \Delta t_{\pm}\right)} &= \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \mp \frac{\Omega \Delta t_{\pm}}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

$$\begin{aligned} \ell_{\pm} &= R \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n} \pm \Omega \Delta t_{\pm}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n} \pm \Omega \Delta t_{\pm}\right)} \\ &= R \left( 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \pm \Omega \Delta t_{\pm} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) + O(\Delta t_{\pm}^2) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Die Zeit  $\Delta t_{\pm}$  ist sowohl die Laufzeit von  $P_A(t_0)$  nach  $P_B(t_0 + \Delta t_{\pm})$  wie auch die Zeit, in der sich das Interferometer dreht. Wir haben also die Gleichungen

$$\Delta t_{\pm} = \frac{\ell_{\pm}}{c} = \frac{R}{c} \left( 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \pm \Omega \Delta t_{\pm} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \quad (3.2.22)$$

welche gelten wenn  $|\Omega| \ll \frac{1}{|\Delta t_{\pm}|}$  gilt. Die Lösungen sind

$$\Delta t_{\pm} = \frac{2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{c \mp R \Omega \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad (3.2.23)$$

Damit ist der Laufzeitunterschied (und daraus kann die Phase berechnet werden)

$$\Delta t_{\text{eine Seite}} = \Delta t_{+} - \Delta t_{-} = \frac{2nR^2 \Omega \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{c^2 - R^2 \Omega^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad (3.2.24)$$

Auch dieser Ausdruck kann entwickelt werden wenn  $|\Omega| \ll \frac{1}{|\Delta t_{\pm}|}$  ist. Wir erhalten die linearisierte Gleichung,

$$\Delta t = n\Delta t_{\text{eine Seite}} = \frac{2nR^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{c^2} \quad (3.2.25)$$

und, wenn wir die Fläche  $A(n)$  des  $n$ -Ecks einsetzen

$$\Delta t = \frac{4A(n)}{c^2} \Omega \quad (3.2.26)$$

Diese Gleichung müsste eigentlich mit der allgemeinen Relativitätstheorie hergeleitet werden. Für langsame Drehungen ist das Resultat jedoch korrekt. Bei einem kreisförmigen Sagnac-Interferometer (z.B. mit whispering gallery modes) ist

$$\Delta t = \frac{4\pi R^2}{c^2} \Omega = \frac{4A_{Kreis}}{c^2} \Omega$$

genau so gross. Mit  $c = \Delta s / \Delta t$  folgt

$$\Delta s = N\lambda = c\Delta t = \frac{4A(n)}{c} \Omega \implies N = \frac{4A(n)}{c\lambda} \Omega \quad (3.2.27)$$

Beispiel: Mit  $\Omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $A(n) = 0.01 \text{ m}^2$  und  $\lambda = 632 \text{ nm}$  (HeNe-Laser) erhält man  $N = 0.00132648$ . Dies ist eine kleine Zahl, kann aber mit Modulationstechniken problemlos gemessen werden.



### 3.2.5. Das *Fabry-Perot-Interferometer*

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 670]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 399]) (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 678])

Aus den Fresnelschen Gleichungen sind die Transmissionskoeffizienten für Amplituden für die beiden Polarisationsrichtungen  $p$  und  $s$  bekannt. Wir setzen nach den Gleichungen (2.3.27) und (2.3.33) können wir winkel- und polarisationsabhängige Transmissions- und Reflexionskoeffizienten definieren.

Für die Reflexion haben wir

$$r = \begin{cases} -\frac{\sin(\alpha - \gamma(\alpha))}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))}, & s\text{-Polarisation (2.3.27)}; \\ \frac{\tan[\alpha - \gamma(\alpha)]}{\tan[\alpha + \gamma(\alpha)]}, & p\text{-Polarisation (2.3.33)}. \end{cases} \quad (3.2.28)$$

Analog schreiben wir für die Transmission

$$t = \begin{cases} \frac{2\sin\gamma(\alpha)\cos\alpha}{\sin(\alpha+\gamma(\alpha))}, & s\text{-Polarisation (2.3.27)}; \\ \frac{2\sin\gamma(\alpha)\cos\alpha}{\sin[\alpha+\gamma(\alpha)]\cos[\alpha-\gamma(\alpha)]}, & p\text{-Polarisation (2.3.33)}. \end{cases} \quad (3.2.29)$$

Im Weiteren sind mit  $t$  und  $r$  immer diese Koeffizienten aus den Fresnelschen Formeln gemeint.



#### Versuch zur Vorlesung:

Interferenz an dünnen Schichten als Beispiel für das Fabry-Perot-Interferometer (Versuchskarte O-085)

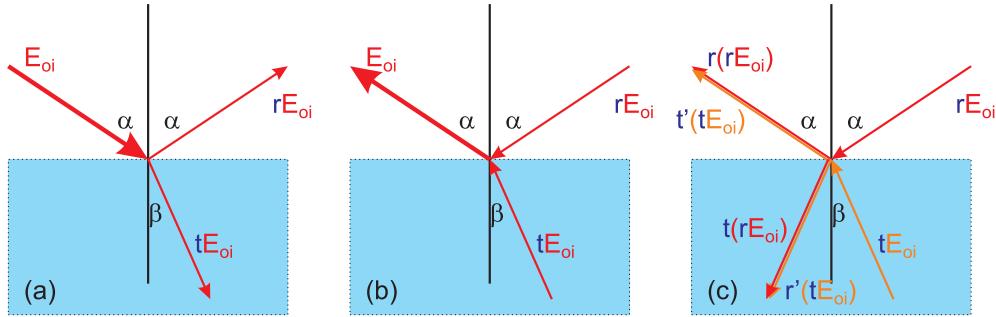


Abbildung 3.8.: Stokessche Behandlung von Reflexion und Brechung (nach Hecht [Hec05])

Wir nehmen an, dass eine Welle mit der Amplitude  $|\mathbf{E}_{0i}|$ , die vom oberen Medium her auf die Grenzfläche auftritt, mit dem Faktor  $r$  reflektiert wird, sowie mit dem Faktor  $t$  gebrochen wird. Die Amplitude der gebrochenen Welle ist dann  $t|\mathbf{E}_{0i}|$ , die der reflektierten Welle  $r|\mathbf{E}_{0i}|$ . Das Fermatsche Prinzip bedeutet, dass auch die zeitumgekehrte Situation eine physikalisch realisierbare ist. Also ist auch die Strahlführung im Teilbild (b) oben eine realisierbare Situation. Dabei müssen wir uns klar machen, dass sowohl die einfallende Welle mit der Amplitude  $r|\mathbf{E}_{0i}|$  und diejenige mit  $t|\mathbf{E}_{0i}|$  eine reflektierte und eine transmittierte, gebrochene Welle erzeugen. Dabei ist für die Welle, die von unten kommt der Reflexionsfaktor  $r'$  und der Transmissionsfaktor  $t'$ . Die Situation in (c) ist nur dann äquivalent zu der in (b), wenn gilt

$$|\mathbf{E}_{0i}| = t(\alpha)t'(\beta)|\mathbf{E}_{0i}| + r(\alpha)r(\beta)|\mathbf{E}_{0i}| \quad (3.2.30a)$$

$$0 = t(\alpha)r'(\beta)|\mathbf{E}_{0i}| + t(\alpha)r(\beta)|\mathbf{E}_{0i}| \quad (3.2.30b)$$

Damit erhält man eine Verknüpfung der Reflexions- und Brechungskoeffizienten für den Übergang vom Medium 1 in das Medium 2 und umgekehrt. Dabei sind  $\alpha$  und  $\beta$  die jeweiligen Einfallswinkel, die durch das Snelliussche Gesetz verknüpft sind.

$$t(\alpha)t'(\beta) = 1 - r^2(\alpha) \quad (3.2.31a)$$

$$r'(\beta) = -r(\alpha) \quad (3.2.31b)$$

Diese beiden Gleichungen heißen die *Stokeschen Relationen*. Die zweite Gleichung zeigt, dass wenn  $r$  für die Reflexion am dichteren Medium steht, bei der es nach den Fresnelschen Formeln einen Phasensprung von  $\pi$  gibt, dass dann bei der Reflexion am optisch dünneren Medium kein Phasensprung auftritt.

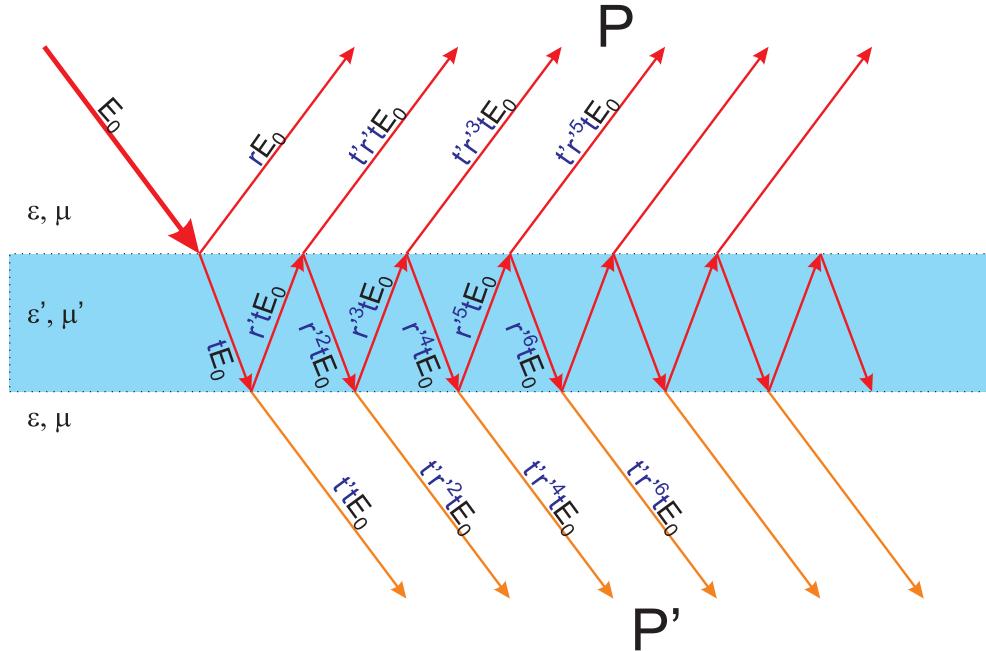


Abbildung 3.9.: Strahlengang bei einem *Fabry-Perot-Etalon* (nach Hecht [Hec05]). Dabei ist in der Zeichnung  $|\mathbf{E}_{0i}| = |\mathbf{e}_{0i}|$  gesetzt worden.

Wir betrachten nun die Reflexion an einem *Etalon*, also einer Glasplatte mit dem Brechungsindex  $n_G$  mit planparallelen Oberflächen. Im Außenraum sei auf beiden Seiten  $n = 1$ . Die Abbildung zeigt die reflektierten und gebrochenen Strahlen, wobei die Konvention der Gleichung (3.2.31) verwendet wurde. Die reflektierten Strahlen interferieren in dem weit entfernten Punkt  $P$ , die transmittierten Strahlen im weit entfernten Punkt  $P'$ .

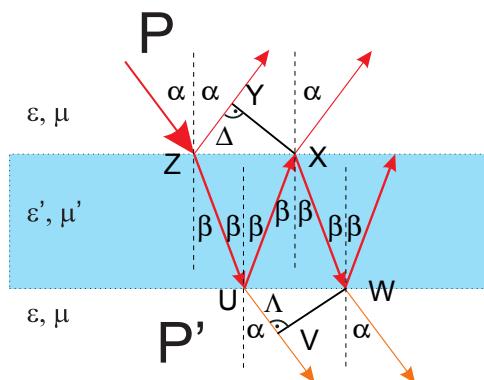


Abbildung 3.10.: Strahlengang bei einem *Fabry-Perot-Etalon* (nach Pérez [Pér96, p. 392])

Für das transmittierte Licht ist der Weglängenunterschied durch den Unterschied der optischen Wege  $\overline{UV}$  und  $\overline{UXW}$ ,  $\Lambda = \overline{UXW} - \overline{UV}$  der relevante Unterschied. Die Strecke  $\overline{UXW}$  ist im Medium mit dem Brechungsindex  $n_G$ , im Glas. Der optische Weg ist dann

$$\overline{UXW} = 2n_G \frac{d}{\cos \beta}.$$

Weiter ist die Strecke  $\overline{UV}$  durch  $\overline{UW} \sin \alpha$  gegeben. Weiter ist aber auch  $\overline{UW} = 2d \tan \beta$ , eine rein geometrische Überlegung, die keine optischen Wege beinhaltet. Zusammen bekommen wir

$$\overline{UV} = \overline{UW} \sin \alpha = 2d \tan \beta \sin \alpha$$

Damit ist  $\Lambda$  für ein Etalon der Dicke  $d$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \overline{UXW} - \overline{UV} \\ &= 2n_G \frac{d}{\cos \beta} - 2d \tan \beta \sin \alpha = \frac{2dn_G}{\cos \beta} \left( 1 - \frac{1}{n_G} \sin \beta \sin \alpha \right) \\ &\text{mit } \sin \beta = \sin \alpha / n_G \text{ (Brechungsgesetz)} \\ &= \frac{2dn_G}{\cos \beta} \left( 1 - \sin^2 \beta \right) \\ \Lambda &= 2n_G d \cos \beta \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

Der Gangunterschied für die Reflexion  $\Delta$  kann aus dem Gangunterschied für die Transmission abgeleitet werden, wobei ein Phasensprung von  $\pi$  berücksichtigt werden muss. Wir haben mit  $\overline{ZUX} = \overline{UXW}$  und  $\overline{ZY} = \overline{UV}$

$$\Delta = \frac{\lambda}{2} + 2n_G d \cos \beta \tag{3.2.33}$$

Bei den Strahlen, die in  $P$  interferieren, ist die Anzahl der inneren Reflexionen ungerade. Für den Spezialfall des senkrechten Einfalls, oder bei senkrechter Polarisation, ergeben die Reflexionen keine Phasenänderung. Wenn  $\Lambda = m\lambda$  ist, haben in  $P$  alle Wellen die gleiche Phase, ausser der ersten, deren Phase wegen  $r' = -r$  um  $\pi$  ändert. Also ist die reflektierte Amplitude

$$|\mathbf{E}_{0r}| = r |\mathbf{E}_{0i}| + (t'r't |\mathbf{E}_{0i}| + t'r'^3t |\mathbf{E}_{0i}| + t'r'^5t |\mathbf{E}_{0i}| + \dots) \tag{3.2.34}$$

Da  $\Lambda = m\lambda$  und damit die innere Phasenverschiebung 0 ist, ersetzen wir  $r'$  mit  $-r$  und erhalten

$$|\mathbf{E}_{0r}| = |\mathbf{E}_{0i}| \left[ r - t'rt (1 + r^2 + r^4 + \dots) \right] \tag{3.2.35}$$

Diese geometrische Reihe konvergiert bei  $r^2 < 1$  gegen  $1/(1 - r^2)$ , so dass wir

$$|\mathbf{E}_{0r}| = |\mathbf{E}_{0i}| \left[ r - \frac{t'rt}{1 - r^2} \right] = |\mathbf{E}_{0i}| r \left( 1 - \frac{tt'}{1 - r^2} \right) \tag{3.2.36}$$

Nach den Stokeschen Relationen ist  $tt' = 1 - r^2$  und damit die reflektierte Amplitude bei senkrechtem Einfall

$$|\mathbf{E}_{0r}| = 0 \tag{3.2.37}$$

Also wird im Falle  $\Lambda = m\lambda = 2n_G d \cos \beta$  oder  $d \cos \beta = \frac{m\lambda}{2n_G}$  alles Licht transmittiert.

Der zweite Spezialfall ist  $\Lambda = (m + \frac{1}{2})\lambda$ . Dann sind die relativen Phasen be-

nachbarter Wellen, unter der Berücksichtigung dass  $r' = -r$  und dass die innere Phase  $\pi$  ist, die Phasenverschiebung  $\pi$ , ausser bei den ersten beiden Wellen, die gleichphasig sind. Wir erhalten für die skalare Amplitude

$$|\mathbf{E}_{0r}| = r |\mathbf{E}_{0i}| + t' r t |\mathbf{E}_{0i}| - t' r^3 t |\mathbf{E}_{0i}| + t' r^5 t |\mathbf{E}_{0i}| - \dots \quad (3.2.38)$$

oder

$$|\mathbf{E}_{0r}| = |\mathbf{E}_{0i}| r \left[ 1 + t' t (1 - r^2 + r^2 - \dots) \right] \quad (3.2.39)$$

Die Reihe in der Klammer konvergiert gegen  $1/(1+r^2)$ . Wir erhalten also

$$|\mathbf{E}_{0r}| = |\mathbf{E}_{0i}| r \left[ 1 + \frac{t' t}{1 + r^2} \right] \quad (3.2.40)$$

Mit  $t' t = 1 - r^2$  erhalten wir

$$|\mathbf{E}_{0r}| = |\mathbf{E}_{0i}| r \left[ 1 + \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \right] = |\mathbf{E}_{0i}| r \frac{1 + r^2 + 1 - r^2}{1 + r^2} = |\mathbf{E}_{0i}| \frac{2r}{1 + r^2} \quad (3.2.41)$$

Damit wird die reflektierte Intensität maximal, nämlich

$$I_r = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \frac{|\mathbf{E}_{0r}|^2}{2} = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} \frac{|\mathbf{E}_{0i}|^2}{2} \quad (3.2.42)$$

Den allgemeinen Fall kann man berechnen, indem man die durch die einfallende Welle  $\tilde{\mathbf{E}}_0(t) = \mathbf{E}_{0i} e^{i\omega t}$  angeregten reflektierten Teilwellen aufschreibt, wobei zwischen zwei Teilwellen die Phasenverschiebung  $\delta = k_0 \Lambda$  ist. Wir betrachten eine definierte Polarisationsrichtung  $s$  oder  $p$ , so dass wir betragsmäßig schreiben können

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1r}(t) &= |\mathbf{E}_{0i}| r e^{i\omega t} \\ \tilde{E}_{2r}(t) &= |\mathbf{E}_{0i}| t' r' t e^{i(\omega t - \delta)} \\ \tilde{E}_{3r}(t) &= |\mathbf{E}_{0i}| t' r'^3 t e^{i(\omega t - 2\delta)} \\ \tilde{E}_{4r}(t) &= |\mathbf{E}_{0i}| t' r'^5 t e^{i(\omega t - 3\delta)} \\ &\vdots \\ \tilde{E}_{Nr}(t) &= |\mathbf{E}_{0i}| t' r'^{(2N-3)} t e^{i(\omega t - (N-1)\delta)} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

Die resultierende Welle ist die Summe aller Teilwellen

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{1r} + \tilde{E}_{2r} + \tilde{E}_{3r} + \tilde{E}_{4r} + \dots \quad (3.2.44)$$

Eingesetzt erhalten wir die Summe

$$\tilde{E}_r = |\mathbf{E}_{0i}| r e^{i\omega t} + |\mathbf{E}_{0i}| t' r' t e^{i(\omega t - \delta)} + |\mathbf{E}_{0i}| t' r'^3 t e^{i(\omega t - 2\delta)} + |\mathbf{E}_{0i}| t' r'^5 t e^{i(\omega t - 3\delta)} + \dots \quad (3.2.45)$$

Zusammengefasst kann diese so umgeschrieben werden

$$\begin{aligned}\tilde{E}_r &= |\mathbf{E}_{0i}| e^{i\omega t} \left\{ r + t' r' t e^{-i\delta} \left[ 1 + r'^2 e^{-i\delta} + r'^4 e^{-i(2\delta)} + r'^6 e^{-i(3\delta)} + \dots \right] \right\} \quad (3.2.46) \\ &= |\mathbf{E}_{0i}| e^{i\omega t} \left\{ r + t' r' t e^{-i\delta} \left[ 1 + (r'^2 e^{-i\delta})^1 + (r'^2 e^{-i\delta})^2 + (r'^2 e^{-i\delta})^3 + \dots \right] \right\}\end{aligned}$$

Für  $|r'^2 e^{-i\delta}| < 1$  konvergiert die geometrische Reihe. Wir erhalten

$$\tilde{E}_r = |\mathbf{E}_{0i}| e^{i\omega t} \left[ r + \frac{t' r' t e^{-i\delta}}{1 - r'^2 e^{-i\delta}} \right] \quad (3.2.47)$$

Mit den Stokeschen Relationen  $r' = -r$  und  $t' t = 1 - r^2$  bekommen wir

$$\tilde{E}_r = |\mathbf{E}_{0i}| e^{i\omega t} \left[ r - \frac{r(1 - r^2) e^{-i\delta}}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right] = |\mathbf{E}_{0i}| e^{i\omega t} \left[ \frac{r(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right] \quad (3.2.48)$$

Die reflektierte optische Intensität ist  $I_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} \tilde{E}_r \tilde{E}_r^*$  und somit

$$I_r = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} \frac{|\mathbf{E}_{0i}|^2}{2} r^2 \frac{(1 - e^{-i\delta})(1 - e^{+i\delta})}{(1 - r^2 e^{-i\delta})(1 - r^2 e^{+i\delta})} = I_i \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} \quad (3.2.49)$$

Mit einer analogen Ableitung berechnet man die transmittierte Intensität

$$I_t = I_i \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} \quad (3.2.50)$$

da das transmittierte Licht sich im gleichen Medium wie das einfallende Licht sich bewegt. Mit  $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2(\delta/2)$  werden  $I_t$  und  $I_r$

$$\begin{aligned}I_r &= I_i \frac{\left[ \frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2(\delta/2)}{1 + \left[ \frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2(\delta/2)} \quad (3.2.51) \\ I_t &= I_i \frac{1}{1 + \left[ \frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2(\delta/2)}\end{aligned}$$

Wir haben dabei angenommen, dass keine Energie absorbiert wird<sup>1</sup>. Dann ist  $I_i = I_t + I_r$ . Ein Maximum in der Transmission erhält man, wenn der Nenner möglichst klein, das heißt, dass in Gleichung (3.2.50)  $\cos \delta = 1$  ist. Dann ist

$$I_t|_{max} = I_i \quad (3.2.52)$$

und

$$I_r|_{min} = 0 \quad (3.2.53)$$

Umgekehrt ist die Transmission minimal, wenn der Nenner bei  $I_t$  maximal ist, also wenn in Gleichung (3.2.50)  $\cos \delta = -1$  ist

<sup>1</sup>Dies ist bei metallbedampften Spiegeln nicht der Fall.

$$I_t|_{min} = I_i \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^2)^2} \quad (3.2.54)$$

und

$$I_r|_{max} = I_i \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2} \quad (3.2.55)$$

Es hat sich eingebürgert, dass *Fabry-Perot-Interferometer* mit der Kennzahl *Finessefaktor* charakterisiert werden:

$$F = \left( \frac{2r}{1 - r^2} \right)^2 \quad (3.2.56)$$

Dann gilt für die Intensitätsverhältnisse

$$\begin{aligned} \frac{I_r}{I_i} &= \frac{F \sin^2(\delta/2)}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \\ \frac{I_t}{I_i} &= \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \end{aligned} \quad (3.2.57)$$

wobei die Funktion  $[1 + F \sin^2(\delta/2)]^{-1} = \mathcal{A}(\delta)$  auch *Airy-Funktion* genannt wird<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Achtung! Es gibt mehrere Definitionen der Airy-Funktion.

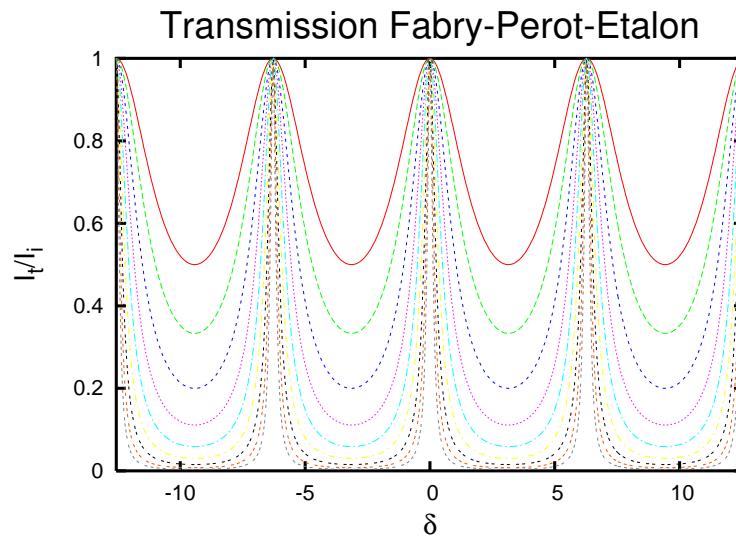


Abbildung 3.11.: Transmission durch ein Fabry-Perot-Etalon in Abhangigkeit von der Finesse  $F$ . Von oben nach unten sind die Transmissionskurven fur  $F = 1, F = 2, F = 4, F = 8, F = 16, F = 32, F = 64, F = 128$  und  $F = 256$  dargestellt.

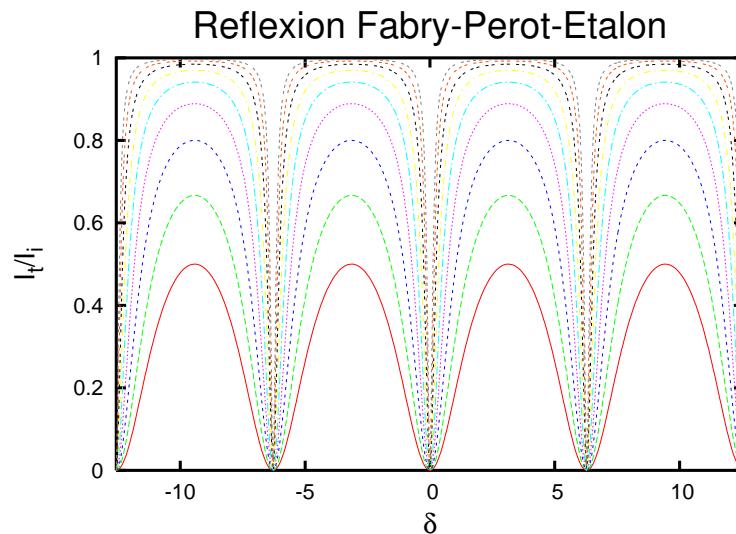


Abbildung 3.12.: Reflexion an einem Fabry-Perot-Etalon in Abhangigkeit von der Finesse  $F$ . Von unten nach oben sind die Reflexionskurven fur  $F = 1, F = 2, F = 4, F = 8, F = 16, F = 32, F = 64, F = 128$  und  $F = 256$  dargestellt.

Die Halbwertsbreite der Transmissionskurven ist durch

$$\frac{1}{2} = \frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta_{1/2}/2)} \quad (3.2.58)$$

gegeben. Daraus folgt

$$\delta_{1/2} = 2 \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{F}} \right) \quad (3.2.59)$$

Das Verhältnis des Abstandes benachbarter Maxima zu der Halbwertsbreite heisst *Finesse* und ist

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{F}}{2} \quad (3.2.60)$$

Die einfachsten *Fabry-Perot-Spektrometer* haben ein  $\mathcal{F} \approx 30$ . Werte von  $\mathcal{F} \approx 1000$  sind an der Grenze des technisch machbaren. Wenn bei dem Fabry-Perot-Spektrometer Absorption vorhanden ist, müssen kompliziertere Gleichungen, die Sie zum Beispiel in Hecht [Hec05, 617] finden, verwendet werden.

### 3.2.6. Beugungsmuster bei Interferometern

Die Wellenfronten in Interferometern sind nicht eben sondern in erster Näherung sphärisch. Jedes Interferometer hat eine endliche Ausdehnung. Licht wird deshalb an den Bauteilen des Interferometers gebeugt. Seine Flächen gleicher Phase sind also gekrümmmt. Dies wird im Kapitel 7.3 über Gausssche Strahlen noch weiter ausgeführt.

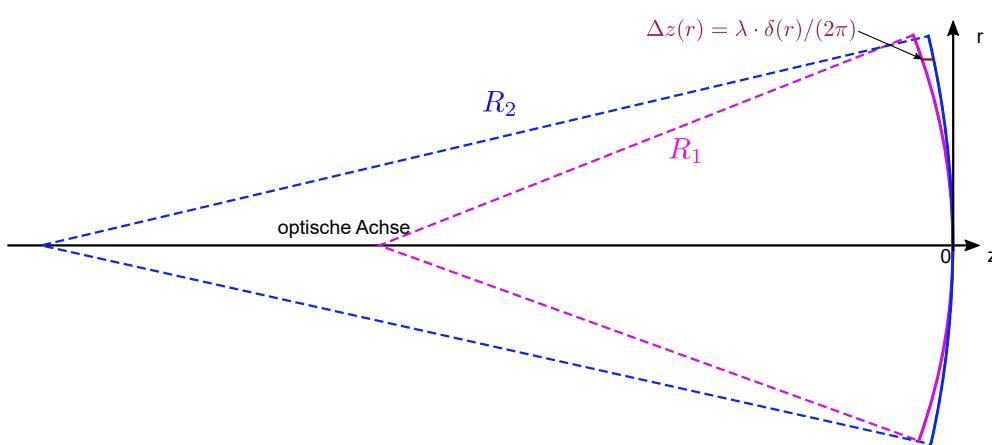


Abbildung 3.13.: Geometrie zur Berechnung der Ringmuster in Interferometern

Wir haben nach Abbildung 3.13 mit  $r^2 = x^2 + y^2$  in der  $xy$ -Ebene

$$z_1(r) = \sqrt{R_1^2 - r^2} - R_1 \approx R_1 \left( 1 - \frac{r^2}{2R_1} \right) - R_1 = -\frac{r^2}{2R_1} \quad (3.2.61a)$$

$$z_2(r) = \sqrt{R_2^2 - r^2} - R_2 \approx R_2 \left( 1 - \frac{r^2}{2R_2} \right) - R_2 = -\frac{r^2}{2R_2} \quad (3.2.61b)$$

$$\Delta z(r) = \frac{\lambda}{2\pi} \delta(r) = z_2(r) - z_1(r) = \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.2.61c)$$

Gleichung (3.2.61c) zeigt, dass die Phase der durch die Interferenz resultierenden Welle proportional zu  $r^2$  ist.

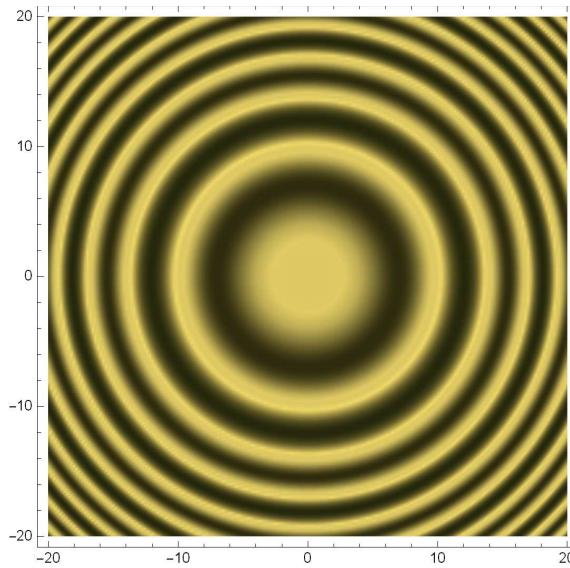


Abbildung 3.14.: Simulation der Interferenzringe nach (3.2.61c) mit  $R_1/\lambda = 50$ ,  $R_2/\lambda = 100$

Abbildung 3.14 zeigt eine Simulation dieser Ringe.

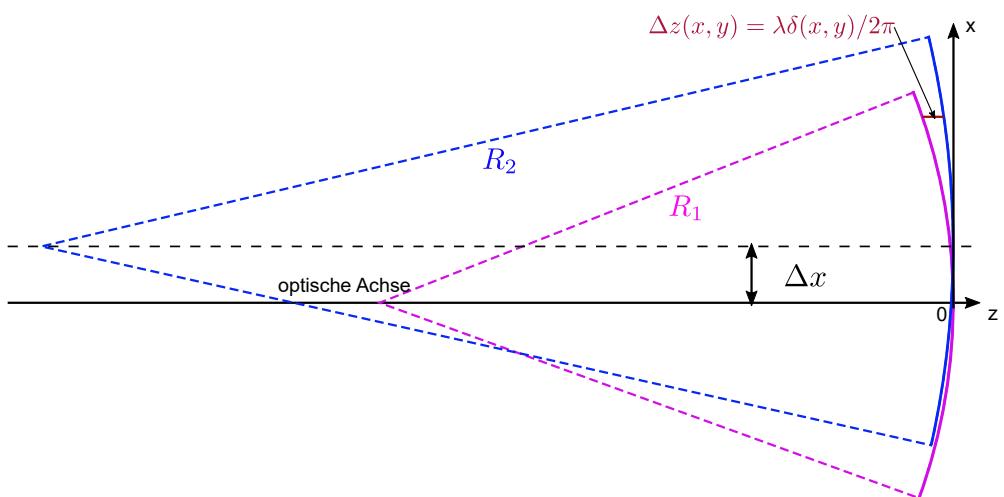


Abbildung 3.15.: Geometrie zur Berechnung der Streifenmuster in Interferometern

Oftmals sind die Strahlen seitlich versetzt. Abbildung 3.15 zeigt die neue Geome-

trie. Dies führt zu

$$z_1(x, y) = \sqrt{R_1^2 - (x - \Delta x)^2 - y^2} - R_1 \quad (3.2.62a)$$

$$\approx R_1 \left( 1 - \frac{(x - \Delta x)^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_1} \right) - R_1$$

$$= -\frac{(x - \Delta x)^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_1} \approx -\frac{(x^2 + y^2)}{2R_1} + \frac{x\Delta x}{R_1}$$

$$z_2(r) = \sqrt{R_2^2 - (x + \Delta x)^2 - y^2} - R_2 \quad (3.2.62b)$$

$$\approx R_2 \left( 1 - \frac{(x + \Delta x)^2}{2R_2} - \frac{y^2}{2R_2} \right) - R_2$$

$$= -\frac{(x + \Delta x)^2}{2R_2} - \frac{y^2}{2R_2} \approx -\frac{(x^2 + y^2)}{2R_2} - \frac{x\Delta x}{R_2}$$

$$\Delta z(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} \delta(x, y) = z_2(x, y) - z_1(x, y) \quad (3.2.62c)$$

$$= \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (x^2 + y^2) + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Delta x \cdot x$$

Gleichung (3.2.62c) zeigt, dass das Muster aus Ringen aus Gleichung (3.2.61c) mit einer linearen Phase überlagert wird.

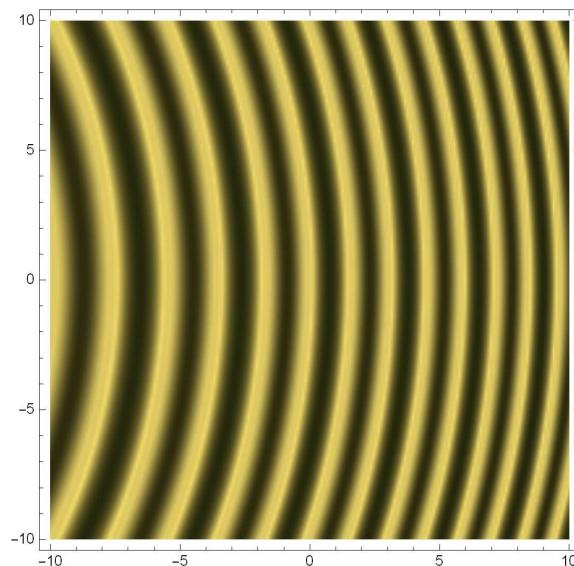


Abbildung 3.16.: Simulation der Interferenzringe nach (3.2.62c) mit  $R_1/\lambda = 50$ ,  $R_2/\lambda = 100$  und  $\Delta x/\lambda = 10$ .

Dies führt, wie in Abbildung 3.16 gezeigt zu streifenförmigen gekrümmten Interferenzmustern.



### 3.3. Wellen in 2 und mehr Dimensionen

(Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 160]) (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 41])



**Versuch zur Vorlesung:**  
Wellenwanne (Versuchskarte O-021)

Die Wellenfunktion für eine zeitunabhängige Welle in zwei oder drei Dimensionen wird wie

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi_0(\mathbf{x}) \exp[iu(\mathbf{x}, t)] = \Psi_0(\mathbf{x}) \exp[i(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (3.3.1)$$

für eine longitudinale Welle und

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) \exp[iu(\mathbf{x}, t)] = \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) \exp[i(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (3.3.2)$$

für transversale Wellen.  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  ist ein Vektor, der auch komplexe Komponenten haben kann (Die komplexen Komponenten geben die Phasen an.). Der Vektor, der aus dem Betrag der einzelnen Komponenten gebildet wird, gibt die Schwingungsrichtung der Welle an. Für eine transversale Welle gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{k}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.3.3)$$

#### 3.3.1. Ebene Wellen

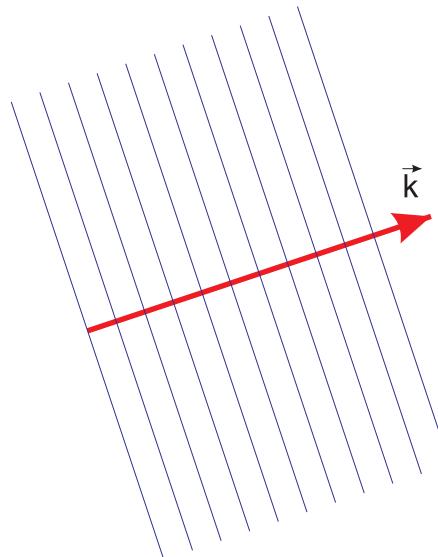


Abbildung 3.17.: Bild einer ebenen Welle

Eine ebene Welle entsteht aus der allgemeinen Lösung der Wellengleichung dadurch, dass die *Amplitude* und der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  nicht vom Ort abhängen. Eine ebene Transversalwelle ist durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (3.3.4)$$

eine Longitudinalwelle durch

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi_0 \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]. \quad (3.3.5)$$

gegeben.

Die Ausbreitungsrichtung ebener Wellen ist durch den Wellenvektor  $\mathbf{k}$  gegeben. Eine Vektor gezeichnet parallel zu  $\mathbf{k}$  kann so die Ausbreitungsrichtung anzeigen. Bei ebenen Lichtwellen spricht man dann von **Lichtstrahlen**.

### Achtung!

Mathematisch streng muss eine ebene Welle eine unendliche Ausdehnung haben. Sie beginnt und endet nur im Unendlichen.

Alle „ebenen Wellen“ und alle „Lichtstrahlen“ sind nur mehr oder weniger gute Approximationen der physikalisch nicht realisierbaren Mathematik.



### 3.3.2. Kugelwellen

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 48, 710]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 287])



#### Versuch zur Vorlesung:

Wellenwanne (Versuchskarte O-021)

Eine weitere häufig vorkommende Form von Wellen sind die Kugelwellen. Auch sie sind eine Lösung der aus den Maxwellgleichungen abgeleiteten Wellengleichung (2.2.1), aber in Kugelkoordinaten. Wir verwenden den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten aus Gleichung (B.7.12)

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\theta,\phi} A(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A(r, \theta, \phi)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial A(r, \theta, \phi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A(r, \theta, \phi)}{\partial r^2} \\ &+ \frac{1}{r} \csc(\theta) \left( \sin(\theta) \frac{\partial A(r, \theta, \phi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \cos(\theta) \frac{\partial A(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} + \csc(\theta) \frac{\partial^2 A(r, \theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Wir interessieren uns hier zuerst nur für kugelsymmetrische Lösungen, also Lösungen, die nicht von  $\theta$  und  $\phi$  abhängen. Alle Ableitungen nach  $\theta$  und  $\phi$  sind dann null. Der Laplace-Operator hat für kugelsymmetrische Probleme die Form

$$\Delta_{r,\theta,\phi} A(r) = \frac{2}{r} \frac{\partial A(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 A(r)}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial A(r)}{\partial r} \right). \quad (3.3.6)$$

Damit ist die Wellengleichung

$$c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \mathbf{E}(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{E}(r, t)}{\partial t^2} \quad (3.3.7)$$

Gleichung (3.3.7) ist in Wirklichkeit drei Gleichungen. Diese Gleichungen können durch einen Separationsansatz gelöst werden (siehe z.B. Bücher zur Atomphysik). Wir nehmen eine Koordinate und raten, dass die Amplitude

$$A(r, t) = \frac{A_0}{r} e^{i(k r - \omega t)} \quad (3.3.8)$$

eine Lösung ist. Eingesetzt erhalten wir

$$c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{A_0}{r} e^{i(k r - \omega t)} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{A_0}{r} e^{i(k r - \omega t)} \quad (3.3.9a)$$

$$c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \left( -\frac{A_0}{r^2} + ik \frac{A_0}{r} \right) e^{i(k r - \omega t)} \right) = \frac{-i A_0 \omega}{r} \frac{\partial}{\partial t} e^{i(k r - \omega t)} \quad (3.3.9b)$$

$$A_0 c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( (-1 + ik r) e^{i(k r - \omega t)} \right) = \frac{-i A_0 \omega}{r} \frac{\partial}{\partial t} e^{i(k r - \omega t)} \quad (3.3.9c)$$

$$A_0 c^2 \frac{1}{r^2} \left( (-i k + i k + i^2 k^2 r) e^{i(k r - \omega t)} \right) = \frac{(-i)^2 A_0 \omega^2}{r} e^{i(k r - \omega t)} \quad (3.3.9d)$$

$$-\frac{A_0 c^2 k^2}{r} e^{i(k r - \omega t)} = -\frac{A_0 \omega^2}{r} e^{i(k r - \omega t)} \quad (3.3.9e)$$

$$c = \pm \frac{\omega}{k} \quad (3.3.9f)$$

Wenn die Bedingung in Gleichung (3.3.9f) erfüllt ist, ist Gleichung (3.3.8) eine Lösung einer Lösung der Wellengleichung (3.3.7) in Kugelkoordinaten für kugelsymmetrische Probleme. Für eine auslaufende Welle ist  $c = \omega/k$ , für eine einlaufende Welle ist  $c = -\omega/k$ .

Alternativ hätten wir die Amplitudenabhängigkeit durch folgende Überlegung erhalten können:

- Wir denken uns eine Kugeloberfläche um die Quelle, wobei die Quelle im Mittelpunkt der Kugel sein soll.
- Der Energiefloss pro Zeit, die Leistung, die durch die gesamte Kugeloberfläche fliesst ist konstant, unabhängig vom Radius der Kugel.
- Damit diese Gleichung für alle  $r$  gilt muss  $A(r) = A_0 \frac{r_0}{r}$  sein.

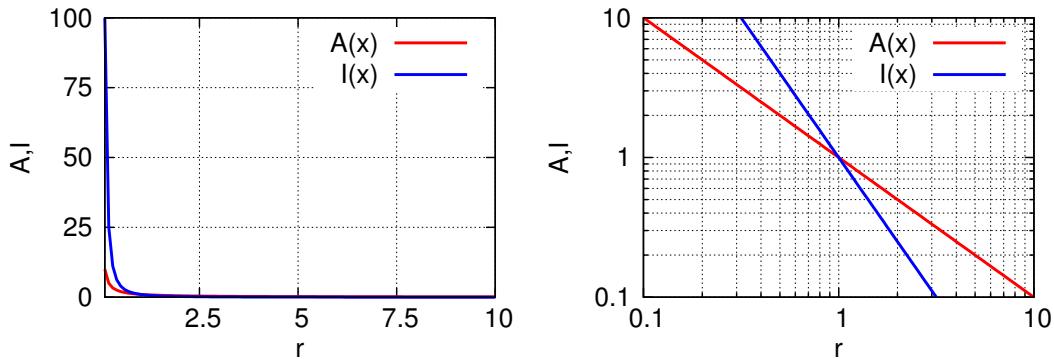


Abbildung 3.18.: Amplitude und Intensität einer Kugelwelle in Abhängigkeit der Distanz  $r$  von der Quelle. Links eine lineare, rechts eine logarithmische Darstellung.

Bei einer Kugelwelle ist

- die Amplitude:  $A(r) = A_0 \frac{r_0}{r}$
- die Intensität  $I(r) = I_0 \frac{r_0^2}{r^2}$



#### Versuch zur Vorlesung:

Moiré-Modell der Interferenz von Kugelwellen ([Versuchskarte O-019](#))

### 3.3.3. Fourier-Transformation

Eine beliebige in der Zeit periodische Funktion  $f(t)$  (mit der Periode  $T = 2\pi/\omega$ ), die genügend oft stetig differenzierbar ist, kann durch Sinus- und Cosinusfunktionen dargestellt werden [AW95, p 808ff].

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega t) \quad (3.3.10)$$

Wir können  $a_j$  und  $b_j$  wie folgt ausdrücken [AW95, p 808ff]:

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(j\omega t) dt \quad j \in \mathbb{N} \quad (3.3.11a)$$

$$b_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(j\omega t) dt \quad j \in \mathbb{N} \quad (3.3.11b)$$

Mit komplexen Funktionen und komplexen Koeffizienten lauten die Gleichungen

(3.3.10)

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \exp(i \cdot j\omega t) \quad (3.3.12)$$

und (3.3.11)

$$c_j = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-i \cdot j\omega t) dt \quad j \in \mathbb{Z} \quad (3.3.13)$$

Auf dem Einheitskreis  $z = \exp(i\theta)$  entspricht dies der Entwicklung von

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j \exp(i \cdot j\theta) \quad (3.3.14)$$

in eine Laurent-Reihe [AW95, p 809].

Eine Erweiterung der Laurent-Reihen ist die Fourier-Transformation für beliebige genügend oft stetig differenzierbare komplexwertige Funktionen eines komplexen Arguments [AW95, p 846ff]:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt \quad (3.3.15)$$

sowie die Rücktransformation

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (3.3.16)$$

Die Literatur ist nicht eindeutig, wie der Faktor  $(2\pi)^{-1}$  verteilt wird. So schreibt zum Beispiel [Hec05, p 839] für die Transformation

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt \quad (3.3.17)$$

sowie für die Rücktransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (3.3.18)$$

Hecht hat dabei noch die Konvention verwendet, dass grosse Buchstaben die Fouriertransformierte beschreiben.

Anstelle der Integrale wird oft auch  $\mathcal{F}$  für die Transformation und  $\mathcal{F}^{-1}$  für die Rücktransformation verwendet, also in der Hechtschen Notation

$$G(\omega) = \mathcal{F}(g(t)) \quad g(t) = \mathcal{F}^{-1}(G(\omega)) \quad (3.3.19)$$

Würden wir in Gleichung (3.3.15)  $t$  durch  $t = a\tilde{t}$  ersetzen, hätten wir also auch  $dt = a d\tilde{t}$  und

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(a\tilde{t}) \exp(i\omega a\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (3.3.20)$$

Nun sieht natürlich Gleichung (3.3.20) nicht mehr wie die Definition der Fouriertransformation aus. Wir können dies beheben, indem wir nun mit  $\tilde{\omega} = a\omega$  rechnen und den zusätzlichen Faktor  $a$  weglassen. Dann haben wir

$$g(\tilde{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(a\tilde{t}) \exp(i\tilde{\omega}\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (3.3.21)$$

In der Hechtschen Notation folgt jetzt aus  $G(\omega) = \mathcal{F}(g(t))$  dass für eine gestreckte Achse  $t/a$  die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right) = aG(a\omega) \quad (3.3.22)$$

ist.

In 2 Dimensionen, wichtig für die Optik lauten die Gleichungen mit  $\mathbf{r} = (x, y)^T$  und  $\mathbf{R} = (u, v)^T$

$$F(\mathbf{R}) = F(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(i(xu + yv)) dx dy \quad (3.3.23a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}) d\mathbf{r} \quad (3.3.23b)$$

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp(-i(xu + yv)) du dv \quad (3.3.23c)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} F(\mathbf{R}) \exp(-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}) d\mathbf{R} \quad (3.3.23d)$$

Dabei wurden zwei Konventionen verwendet:

1. Funktionen in unserem Raum werden mit kleinen Buchstaben, Funktionen im Raum der transformierten Funktionen mit den entsprechenden grossen Buchstaben bezeichnet.
2. Die Koordinaten des transformierten Raumes  $(x, y)$  werden mit  $(u, v)$  bezeichnet.

In drei Dimensionen lauten die Fourier-Transformationen mit  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  und  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$ :

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) d\mathbf{r} \quad (3.3.24a)$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} F(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (3.3.24b)$$



## 3.4. Das Fresnel-Huygenssche Prinzip

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 163, 650]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 328])  
 (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1028])

Die Beugung von Wellen an einem Objekt kann mit dem *Prinzip von Fresnel-Huygens* erklärt werden.

Dieses Prinzip kann mit Hilfe von sphärischen Wellen (3.3.8) und der Fourier-Transformation (3.3.23) motiviert werden. Wir betrachten das elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle in einer Ebene, praktischerweise mit  $z = 0$ . Die komplexe Amplitude (ein Weg, die Phase mit zu berücksichtigen) ist in dieser Ebene ortsabhängig. Der Mittelpunkt der Kugelwelle wird dabei nach  $\mathbf{r}_0$  verschoben.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \exp(i(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| - \omega t)) \quad (3.4.1)$$

Die resultierende Welle kann als Summe von einzelwellen, oder im kontinuierlichen Falle als Integral geschrieben werden.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \iint_{\text{Ebene}} \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \exp(i(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| - \omega t)) d\mathbf{r}_0 \quad (3.4.2a)$$

Das Integral hängt nicht von  $t$  ab

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\omega t) \iint_{\text{Ebene}} \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \exp(ik|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) d\mathbf{r}_0 \quad (3.4.2b)$$

In Komponenten haben wir  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  und  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, 0)^T$ . Wir setzen  $\boldsymbol{\rho} = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)^T = (x - x_0, y - y_0, z)^T$ . Mit den neuen Variablen  $\boldsymbol{\rho}$  und  $d\rho_x = -dx_0$  und  $d\rho_y = -dy_0$  und  $d\mathbf{r}_0 = (-dx_0)(-dy_0) = d\boldsymbol{\rho}$  lautet das Integral:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\omega t) \iint_{\text{Ebene}} \frac{\mathbf{E}_0(\boldsymbol{\rho})}{\rho} \exp(ik\rho) d\boldsymbol{\rho} \quad (3.4.3)$$

Weit weg von der Ebene  $z = 0$  kann man schreiben, dass  $\rho \approx \rho_0$  ist. Wir können dann schreiben

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\exp(-i\omega t)}{\rho_0} \iint_{\text{Ebene}} \mathbf{E}_0(\boldsymbol{\rho}) \exp(ik\rho) d\boldsymbol{\rho} \quad (3.4.4)$$

Aus dieser Gleichung folgt, die komplexe Amplitude einer elektromagnetischen Welle, die in einer Ebene bekannt ist, näherungsweise als Fouriertransformation beschrieben werden kann. Genauere Analysen (später) sind die Kirchhoff-Theorie, die Fraunhofer-Theorie und die Fresnel-Theorie.

Andererseits kann, wenn vom Integral zurück zu einer Summe gegangen wird, und die  $1/\rho$ -Abhängigkeit vernachlässigt wird, das *Fresnel-Huygenssche Prinzip* formuliert werden.

### Das Fresnel-Huygenssche Prinzip

Jeder Punkt einer bestehenden Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen **kugelförmigen** Elementarwelle, die die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit und Frequenz wie die ursprüngliche Welle hat. Die Einhüllende aller Elementarwellen ergibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt.

Man nimmt eine Momentaufnahme des Wellenbildes eines bestimmten Wellenberges und nimmt jeden Punkt auf diesem Wellenberg als Ausgangspunkt einer neuen *Kreiswelle* (*Kugelwelle* in 3 Dimensionen).

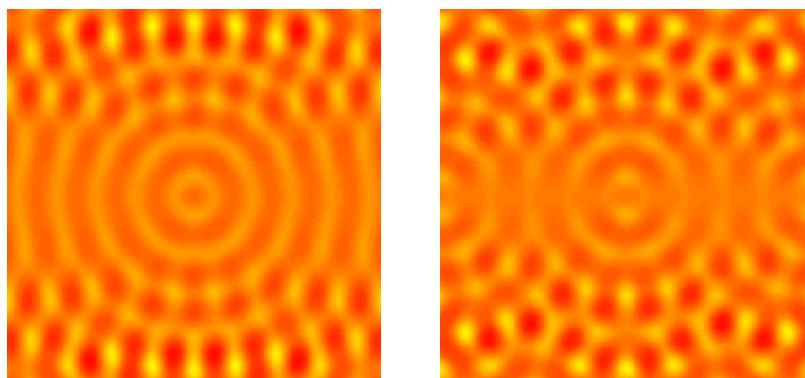


Abbildung 3.19.: *Huygenssches Prinzip*. Links die Interferenz von 5 *Kreiswellen* auf einer horizontalen Linie, die 4 mal so lang ist wie die Bildkante. Rechts das gleiche mit 9 *Kreiswellen*.

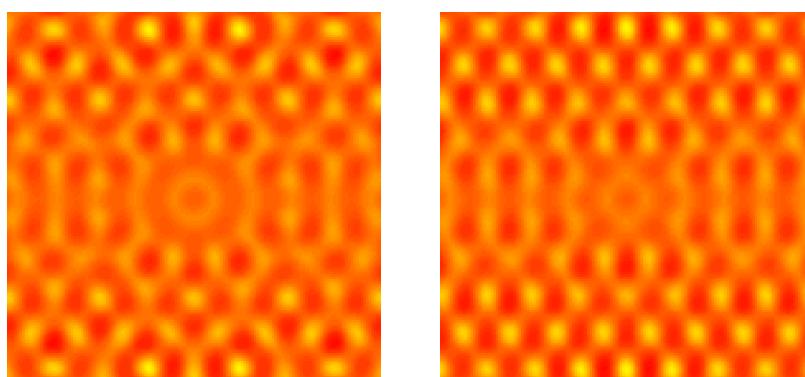


Abbildung 3.20.: *Huygenssches Prinzip*. Links die Interferenz von 17 *Kreiswellen* auf einer horizontalen Linie, die 4 mal so lang ist wie die Bildkante. Rechts das gleiche mit 33 *Kreiswellen*.

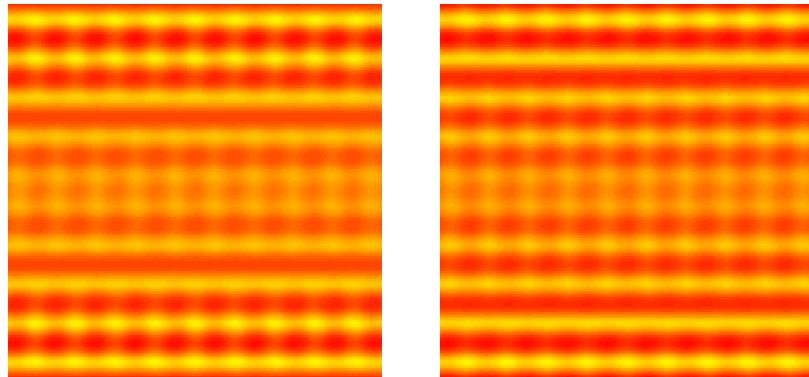


Abbildung 3.21.: *Huygenssches Prinzip*. Links die Interferenz von 65 *Kreiswellen* auf einer horizontalen Linie, die 4 mal so lang ist wie die Bildkante. Rechts das gleiche mit 129 *Kreiswellen*.

---

Die Beugung an einem Spalt kann so verstanden werden, dass nicht mehr *Kreiswellen* aus einem grossen Bereich, sondern nur noch *Kreiswellen* aus dem Spalt zum neuen *Wellenbild* beitragen.

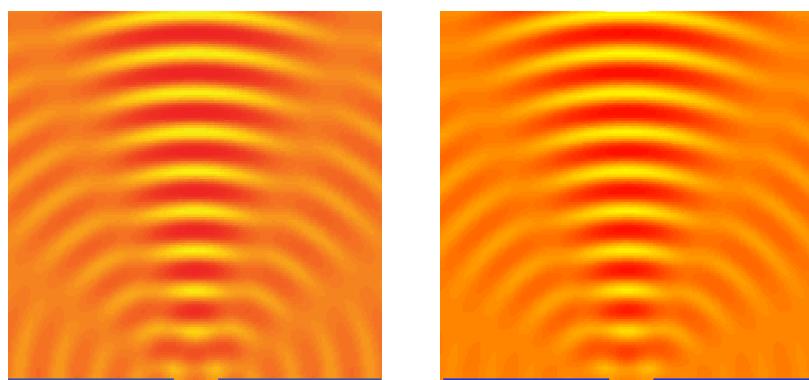


Abbildung 3.22.: *Huygenssches Prinzip. Interferenzmuster an einem Spalt*. Links die Interferenz von 5 *Kreiswellen* auf einer horizontalen Linie im Spalt. Rechts das gleiche mit 9 *Kreiswellen*.

---

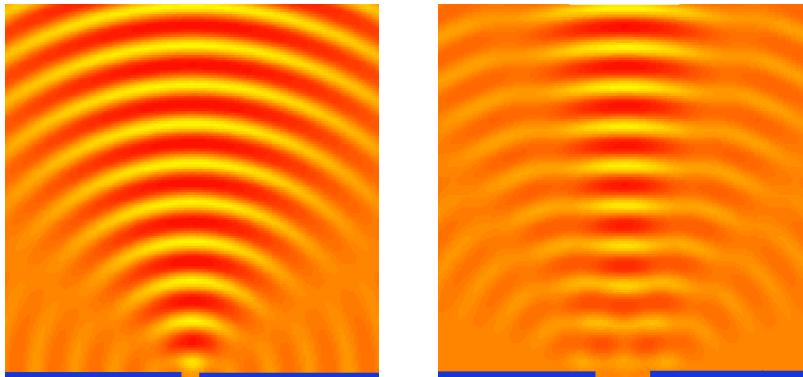


Abbildung 3.23.: *Huygenssches Prinzip.* Interferenzmuster an einem Spalt. Links das Interferenzmuster bei einer Spaltbreite von 1 Wellenlänge, rechts von 3 Wellenlängen.

---

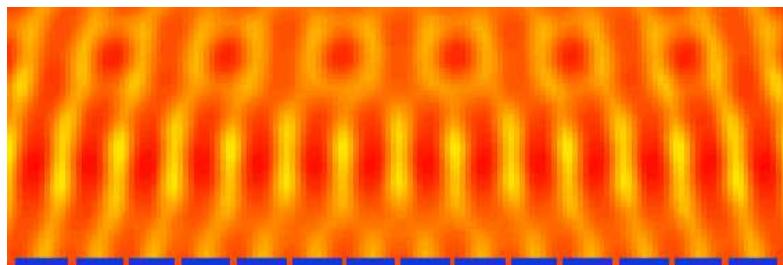


Abbildung 3.24.: *Huygenssches Prinzip.* Interferenzmuster an einem Gitter. Die im Bild sichtbare Drehung röhrt daher, dass nur eine endliche Anzahl von Gitterschlitten berücksichtigt wurde.

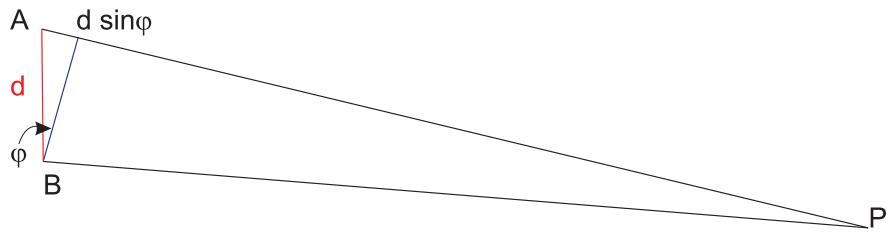
---

### 3.4.1. Interferenz von Kugelwellen

Nach dem Fresnel-Huygensschen Prinzip interferieren Kugelwellen. Bei grossem  $\rho$  (siehe auch Gleichung (3.4.4)) und achsnahen Positionen ist

$$\rho = \sqrt{\rho_z^2 + (\rho_x^2 + \rho_y^2)} \approx \rho_z \left(1 + \frac{(\rho_x^2 + \rho_y^2)}{2\rho_z}\right) \approx \rho_z \quad (3.4.5)$$

Situationen, bei denen Gleichung (3.4.5) gilt, heissen *paraxial*, die Näherung also *paraxiale Näherung*.

Abbildung 3.25.: Interferenz zweier Wellen aus *A* und *B*

Die Interferenz von Kugelwellen kann bei etwa gleichen Amplituden nach Abbildung 3.25 berechnet werden. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass der Weglängenunterschied von *A* nach *P* und von *B* nach *P*  $\Delta\ell = d \sin \varphi$  ist. Aus Gleichung (3.2.1) wissen wir, dass konstruktive Interferenz auftritt, wenn

$$\sin \varphi = \frac{n\lambda}{d} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.4.6)$$

ist. In der *paraxialen Näherung* (kleine  $\varphi$ ) gilt auch

$$\varphi = \frac{n\lambda}{d} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.4.7)$$

Interferenzminima treten bei

$$\sin \varphi = \frac{(n + 1/2)\lambda}{d} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.4.8)$$

oder, in der *paraxialen Näherung* (kleine  $\phi$ ), bei

$$\varphi = \frac{(n + 1/2)\lambda}{d} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.4.9)$$

Die Lage der *Interferenzextrema* hängen von der Wellenlänge ab.



## 3.5. Interferenzmuster an einem Doppelspalt

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 572]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 358]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1116])



**Versuch zur Vorlesung:**  
Beugung am Doppelspalt (Versuchskarte O-123)

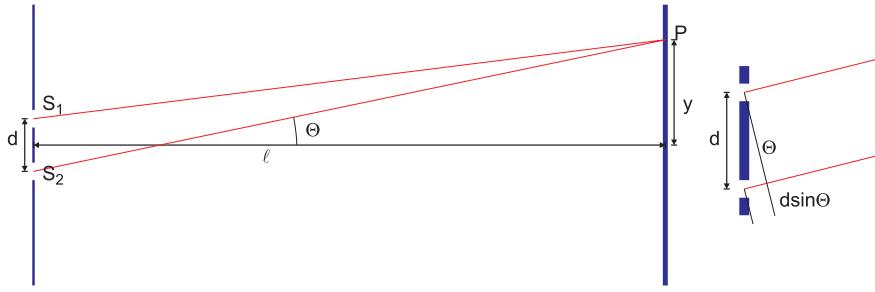


Abbildung 3.26.: Strahlengang bei einem Doppelspalt

Aus den Interferenzbedingungen wissen wir, dass wir

konstruktive Interferenz (helle Streifen) bei

$$d \sin \Theta = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.5.1)$$

destruktive Interferenz (dunkle Streifen) bei

$$d \sin \Theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.5.2)$$

haben. Wir berechnen nun den Verlauf der *Intensität*.

Am Punkt  $P$  ist die Phasendifferenz

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \Theta \quad (3.5.3)$$

Der  $m$ -te helle Streifen hat von der Achse den Abstand  $y_m$ . Nach der Skizze ist der Winkel dann durch

$$\tan \Theta = \frac{y_m}{\ell} \quad (3.5.4)$$

gegeben. Wir verwenden, dass für kleine Winkel  $\Theta$  gilt:  $\tan \Theta \approx \sin \Theta \approx \Theta$ . Damit folgt

$$d \sin \Theta \approx d \tan \Theta = d \frac{y_m}{\ell} \approx m\lambda \quad (3.5.5)$$

Der  $m$ -te helle Streifen liegt also bei

$$y_m \approx m \frac{\lambda \ell}{d} \quad (3.5.6)$$

Der Abstand zweier Streifen ist

$$\Delta y = \frac{\lambda \ell}{d} \quad (3.5.7)$$

Wenn wir die Amplituden der Felder verwenden (die elektrischen Felder  $E$ ), können wir sagen, dass die beiden Felder  $E_1 = |\mathbf{E}_{0i}| \sin(\omega t)$  und  $E_2 = |\mathbf{E}_{0i}| \sin(\omega t + \delta)$  am

Punkt  $P$  interferieren.

$$E = E_1 + E_2 = |\mathbf{E}_{0i}| \sin(\omega t) + |\mathbf{E}_{0i}| \sin(\omega t + \delta) \quad (3.5.8)$$

Mit  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$   
bekommt man

$$E = 2 |\mathbf{E}_{0i}| \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \quad (3.5.9)$$

Die *Intensität* ist dann

$$I = 4n \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}_{0i}|^2 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 2n\epsilon_0 c |\mathbf{E}_{0i}|^2 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (3.5.10)$$

wobei  $n$  der Brechungsindex des Mediums ist. Mit  $d \sin \Theta \approx yd/\ell$  wird die Phase

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \Theta \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{yd}{\ell} \quad (3.5.11)$$

und mit  $I_0 = \frac{n\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}_{0i}|^2$

$$I(y) \approx 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi yd}{\lambda \ell}\right) \quad (3.5.12)$$

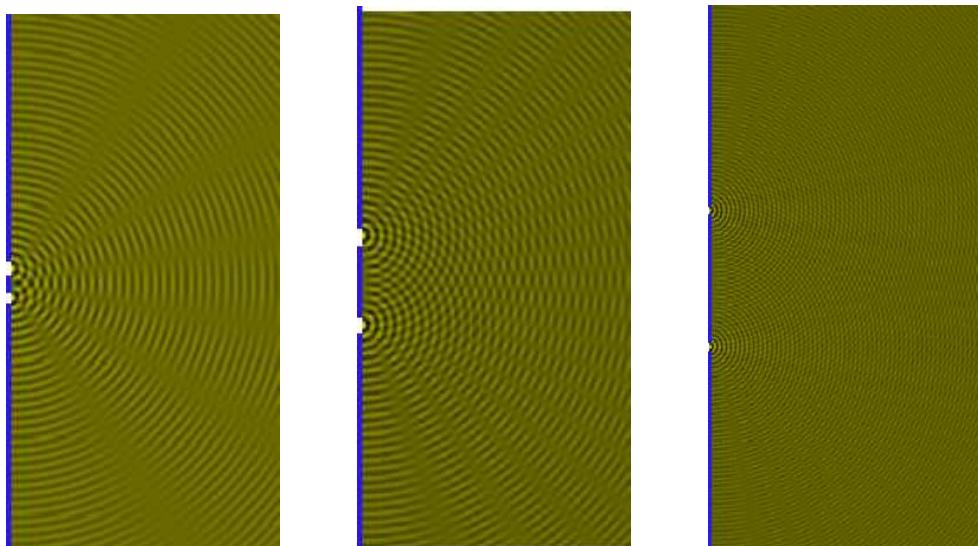


Abbildung 3.27.: Beugung an einem Doppelspalt. Links ist  $d = 3\lambda$ , in der Mitte  $d = 10\lambda$  und rechts  $d = 30\lambda$  (rechts ist der gezeigte Bildausschnitt grösser).

Die Interferenz an einem Doppelspalt hängt von der Polarisationsrichtung ab.



### Versuch zur Vorlesung:

Interferenz mit Polarisation (Versuchskarte AT-051)

### 3.6. Vektoraddition von harmonischen Wellen



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 420]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1120])

Wir betrachten zwei Wellen

$$E_1 = \hat{E}_1 \sin(\omega t) \quad E_2 = \hat{E}_2 \sin(\omega t) + \delta \quad (3.6.1)$$

Beide Schwingungen haben die gleiche Frequenz: die Zeiger der Schwingung behalten ihre relative Stellung und rotieren gemeinsam. Die Summe muss sein

$$E_1 + E_2 = \hat{E}_1 \sin(\omega t) + \hat{E}_2 \sin(\omega t) + \delta = E' = \hat{E}' \sin(\omega t + \delta') \quad (3.6.2)$$

Wir legen die "1"-Achse so, dass der Vektor  $E_1$  entlang dieser Achse ist. Die Komponenten von  $E_2$  sind entlang der "1"-Achse  $E_{2,1} = \hat{E}_2 \cos \delta$  und entlang der "2"-Achse  $E_{2,2} = \hat{E}_2 \sin \delta$ . Damit sind die Komponenten

$$\begin{aligned} E'_1 &= \hat{E}_1 + \hat{E}_2 \cos \delta \\ E'_2 &= \hat{E}_2 \sin \delta \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Damit ist

$$E' = \sqrt{E'^1_1^2 + E'^2_2^2} = \sqrt{(\hat{E}_1 + \hat{E}_2 \cos \delta)^2 + (\hat{E}_2 \sin \delta)^2} \quad (3.6.4)$$

oder

$$E' = \sqrt{\hat{E}_1^2 + 2\hat{E}_1\hat{E}_2 \cos \delta + \hat{E}_2^2} \quad (3.6.5)$$

Die Phase ist

$$\tan \delta' = \frac{E'^2_2}{E'^1_1} = \frac{\hat{E}_2 \sin \delta}{\hat{E}_1 + \hat{E}_2 \cos \delta} \quad (3.6.6)$$

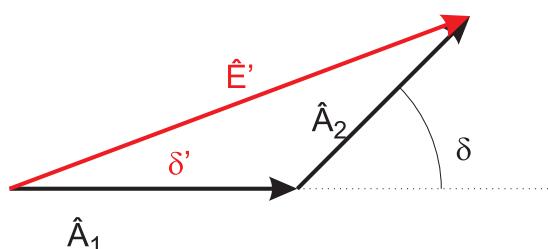


Abbildung 3.28.: Grafische Darstellung der Vektoraddition

### 3.7. Interferenzmuster bei drei und mehr äquidistanten Quellen



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 609]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1122])



**Versuch zur Vorlesung:**  
Interferenz am Glimmerplättchen (Versuchskarte)

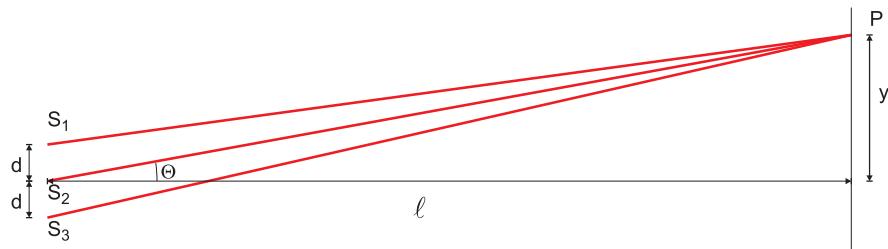


Abbildung 3.29.: Interferenz von drei Quellen

Die folgenden drei *paraxialen Wellen* interferieren im Punkt  $P$ .

$$\begin{aligned} E_1 &= |\mathbf{E}_{0i}| \sin(\omega t) \\ E_2 &= |\mathbf{E}_{0i}| \sin(\omega t + \delta) \\ E_3 &= |\mathbf{E}_{0i}| \sin(\omega t + 2\delta) \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

Die Phasendifferenz ist, wie bei zwei Quellen<sup>3</sup>

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \Theta \approx \frac{2\pi yd}{\lambda \ell} \quad (3.7.2)$$

Für  $\Theta = 0$  sind alle drei Wellen in Phase. Wir haben ein Maximum. Das erste Nebenmaximum entsteht, wenn  $\delta = 2\pi/3$  ist, und nicht bei  $\delta = \pi$  wie bei zwei interferierenden Wellen. Der Winkel  $\Theta$  des ersten Nebenmaximums ist also grösser.

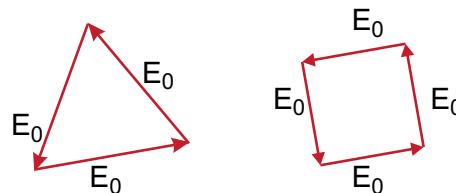


Abbildung 3.30.: Vektordiagramm für die Interferenz von drei Wellen (links) und vier Wellen (rechts).

Die Maxima liegen wieder bei

$$d \sin \Theta = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (3.7.3)$$

<sup>3</sup> $\sin \Theta \approx \tan \Theta \approx \Theta$

Die Maxima sind schärfer und intensiver als bei einer Welle.

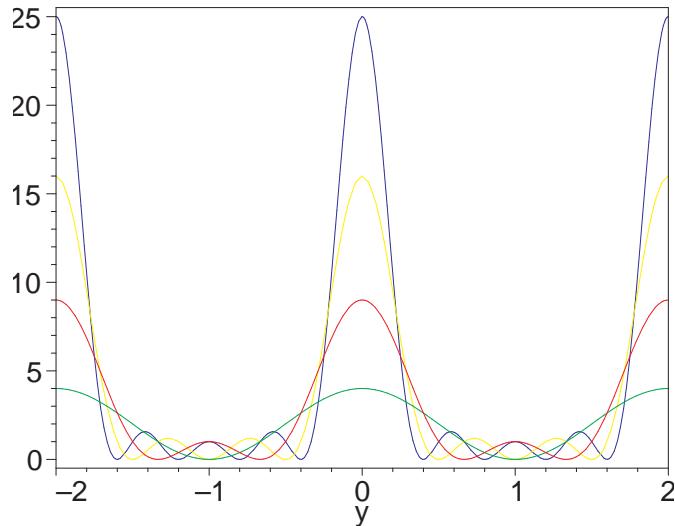


Abbildung 3.31.: Interferenzmuster für zwei bis fünf *Punktquellen*, nicht normiert.

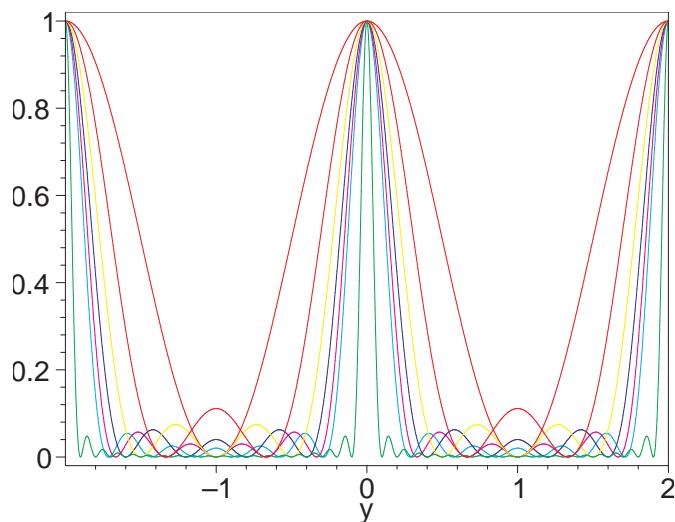


Abbildung 3.32.: Interferenzmuster für zwei bis sieben sowie 20 *Punktquellen*, normiert

## 3.8. Interferenz an dünnen Schichten

(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1111]) Interferenzmuster an dünnen planparallelen Schichten wurden im Abschnitt 3.2.5 behandelt.

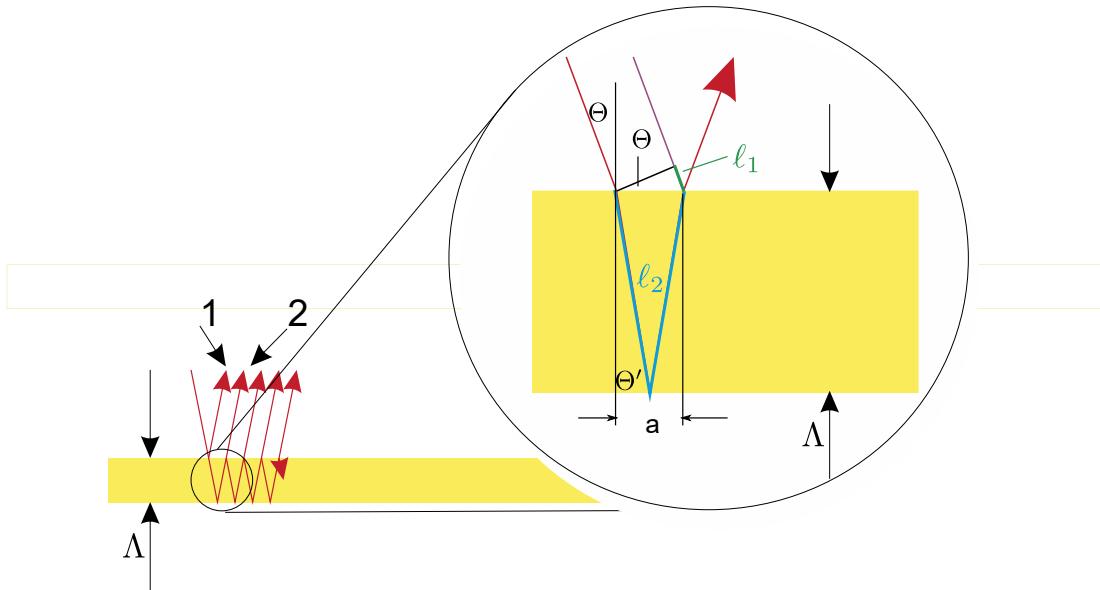


Abbildung 3.33.: Interferenz an dünnen Schichten

Die folgende Zusammenfassung beruht auf den Gleichungen (3.2.51). Wir betrachten eine dünne Schicht der Dicke  $\Lambda$  mit dem *Brechungsindex*  $n$  in Luft ( $n_{Luft} = 1$ ). Dabei nehmen wir an, dass das Licht fast senkrecht auf die Grenzfläche auftritt. Die Phase des Strahls 1, der an der oberen Grenzfläche reflektiert wird, wird bei der *Reflexion* um  $\pi$  gedreht. Der Strahl 2, der an der unteren Grenzfläche reflektiert wird, unterliegt keinem Phasensprung. In der dünnen Schicht ist die Wellenlänge kleiner,  $\lambda' = \lambda/n$ . Wir müssen für die Interferenz den Weg in der Schicht doppelt zählen. Zusätzlich muss die Phase des zweiten interferierenden Lichtstrahls an der Luft (grün eingezeichnet) berücksichtigt werden. Die Phase bei senkrechtem Einfall ist durch den Laufzeitunterschied  $\Delta t = \frac{\Lambda}{c'} = \frac{n\Lambda}{c}$  im Glas gegeben. Deshalb kann man auch mit dem optischen Weg

$$\ell = 2n\Lambda \quad (3.8.1)$$

rechnen. Bei schrägem Einfall (Winkel  $\Theta$  zur Normalen) muss mit dem Brechungsgesetz gerechnet werden:

$$\sin(\Theta) = n \sin(\Theta')$$

Dann ist der zurückgelegte Weg

$$\ell_2(\Theta) = \frac{2\Lambda}{\cos(\Theta')}, \quad (3.8.2)$$

da ja das Brechungsgesetz gelten muss. Weiter brauchen wir auch  $\ell_1$ . Hier haben wir

$$\ell_1(\Theta) = a \sin(\Theta) \quad (3.8.3)$$

$a$  kann mit  $\Theta'$  berechnet werden

$$a = 2\Lambda \tan(\Theta') \quad (3.8.4)$$

Weiter gibt es bei der Reflexion an der oberen Grenzfläche einen Phasensprung von  $\pi$ , den wir mit der Addition von  $\lambda/2$  einbringen.

Insgesamt haben wir also unter Berücksichtigung des optischen Weges  $n\ell_2$  im Glas

$$\Delta\ell = n\ell_2 - \ell_1 + \frac{\lambda}{2} = \frac{2n\Lambda}{\cos(\Theta')} - a \sin(\Theta) + \frac{\lambda}{2} \quad (3.8.5a)$$

$$= \frac{2n\Lambda}{\cos(\Theta')} - 2\Lambda \tan(\Theta') \sin(\Theta) + \frac{\lambda}{2} = 2\Lambda \frac{n - \sin(\Theta') \sin(\Theta)}{\cos(\Theta')} + \frac{\lambda}{2} \quad (3.8.5b)$$

$$= 2\Lambda \frac{n - \sin(\Theta') \sin(\Theta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\Theta')}} + \frac{\lambda}{2} = 2\Lambda \frac{n^2 - n \sin(\Theta') \sin(\Theta)}{\sqrt{n^2 - n^2 \sin^2(\Theta')}} + \frac{\lambda}{2} \quad (3.8.5c)$$

$$\stackrel{\sin(\Theta)=n \sin(\Theta')}{=} 2\Lambda \frac{n^2 - \sin^2(\Theta)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\Theta)}} + \frac{\lambda}{2} = 2\Lambda \sqrt{(n^2 - \sin^2(\Theta))} + \frac{\lambda}{2} \quad (3.8.5d)$$

Damit erhalten wir

$$2\Lambda \sqrt{n^2 - \sin^2 \Theta} = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.8.6a)$$

destruktive Interferenz

$$2\Lambda \sqrt{n^2 - \sin^2 \Theta} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.8.6b)$$

konstruktive Interferenz



### Versuch zur Vorlesung:

Newton'sche Ringe (Versuchskarte O-017)

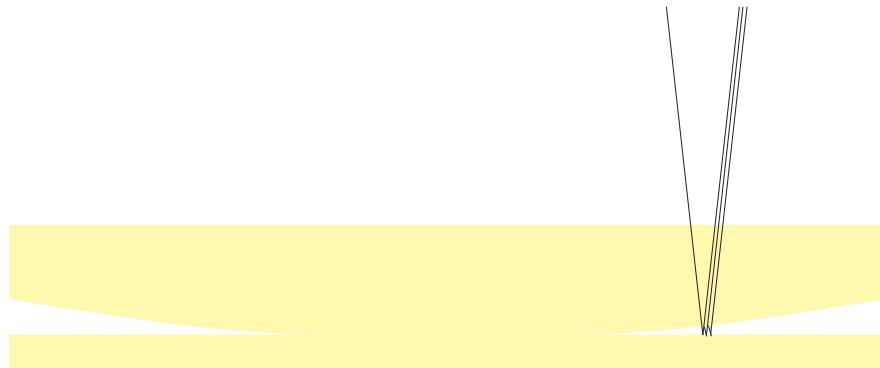


Abbildung 3.34.: Querschnitt durch eine *Linse* auf einem Glasplättchen, bei dem Newtonsche Ringe auftreten.

---

Bei einer schwachen Krümmung einer Linse, die auf einer ebenen Glasplatte liegt (Siehe Abbildung 3.34), kann der Luftspalt lokal wie eine planparallele Schicht behandelt werden. Dann treten in dem sehr kleinen Luftspalt, beleuchtet mit monochromatischem Licht, das senkrecht auf die Platten fällt, wegen der Interferenz die Newtonschen Ringe auf. Wieder tritt ein Phasensprung von  $\pi$  bei der *Reflexion* an der unteren Platte auf. Auch hier gelten die Gleichungen (3.8.6a) und (3.8.6b);

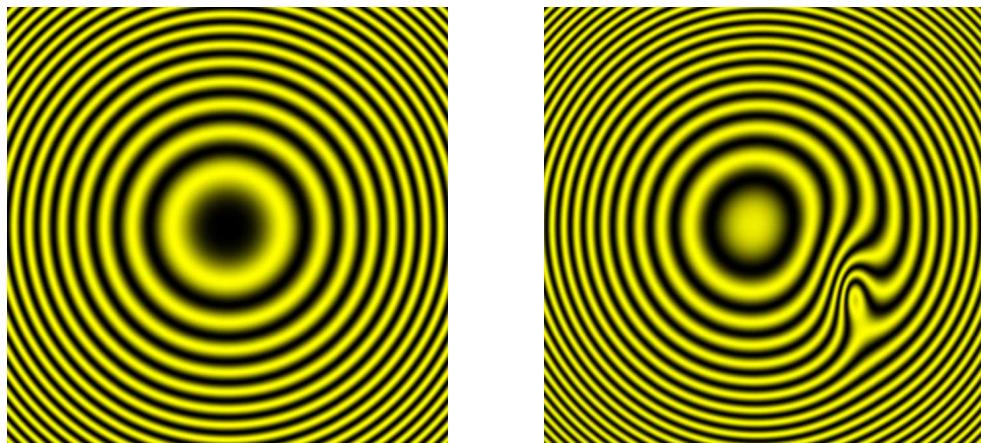


Abbildung 3.35.: Simulation Newtonscher Ringe (rechts mit einem Fehler).

---

Bei dünnen Schichten mit einem niedrigen *Brechungsindex* zwischen zwei Schichten mit einem höheren *Brechungsindex* tritt Auslöschung für die *Reflexion* auf. Damit können reflexmindernde Schichten erzeugt werden.

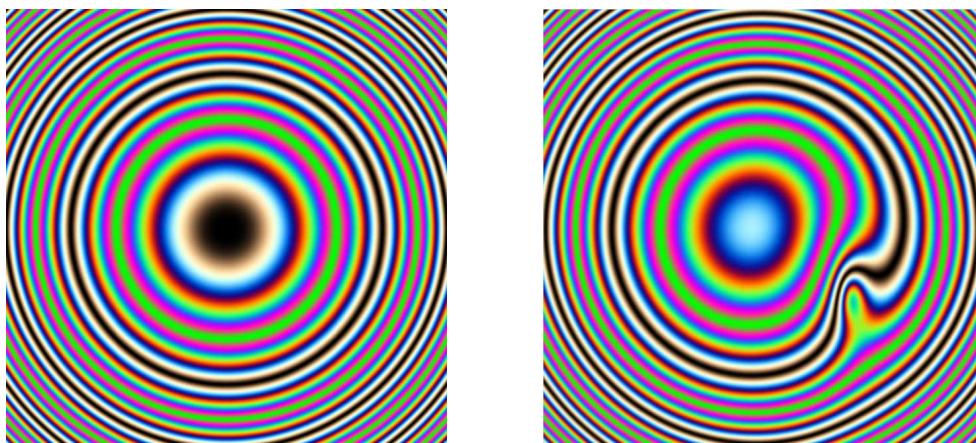


Abbildung 3.36.: Simulation Newtonscher Ringe bei weissem Licht (rechts mit einem Fehler).



Abbildung 3.37.: Weisslichtinterferenz an der Blende eines Objektivs. Abgebildet ist ein defokussierter Wassertropfen.

In der oben stehenden Abbildung 3.36 werden die Newtonschen Ringe bei weissem Licht durch die Überlagerung dreier Ringsysteme mit rotem Licht ( $\lambda = 6/5$ ), grünem ( $\lambda = 1$ ) und blauem Licht ( $\lambda = 4/5$ ) simuliert. Es treten nun farbige Ringe auf. Abbildung 3.37 zeigt eine Messung mit einer Kamera. Gezeigt sind Weisslichtinterferenzen an der Blendenöffnung.

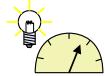
### 3.9. Beugungsmuster an einem Einzelspalt



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 650,663]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1125])  
(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 341])

In diesem Abschnitt wird die Beugung an einem Einzelspalt näherungsweise berechnet. Dabei verwenden wir die Methode, Phasen und Amplituden in der kom-

plexen Ebene aufzuaddieren.



**Versuch zur Vorlesung:**  
Beugung am Einzelspalt (Versuchskarte O-050)

---

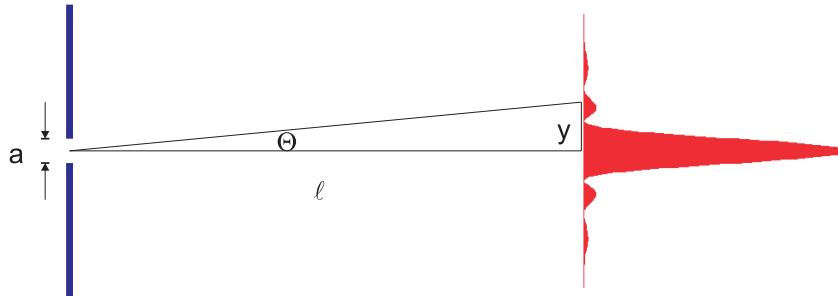


Abbildung 3.38.: Berechnung des Beugungsmusters an einem Einzelspalt.

---

Wir definieren den Winkel  $\Theta$  genau so wie in der Zeichnung



### 3.9.1. Berechnung der Intensitätsverteilung

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 663]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1127])  
Wir betrachten  $N + 1$  punktförmige Lichtquellen in einem Spalt der Breite  $a$ . Ihr Abstand ist  $d = a/N$ . Der Phasenunterschied zwischen zwei Lichtquellen in die Richtung  $\Theta$  ist

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \Theta \quad (3.9.1)$$

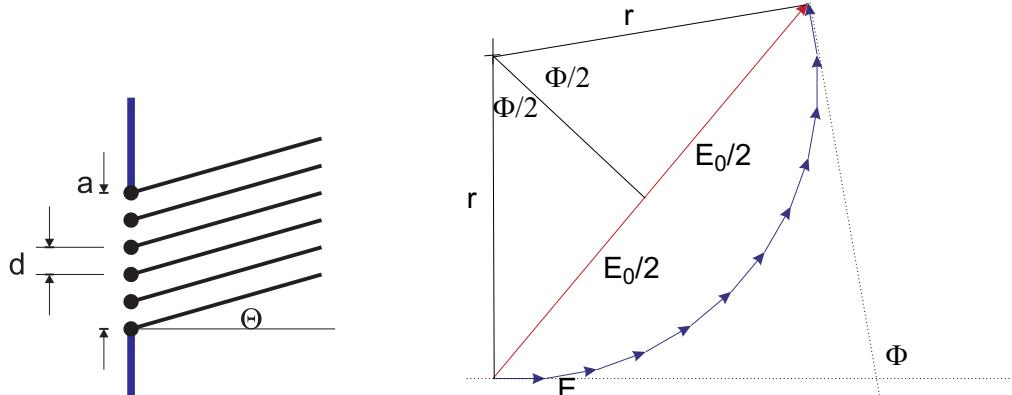


Abbildung 3.39.: Definition der Größen. Rechts ist die Berechnung der *Amplitude* gezeigt.

---

Der gesamte Phasenunterschied ist

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \delta = N \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \Theta = \frac{N}{N} \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \Theta \quad (3.9.2)$$

oder

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \Theta \quad (3.9.3)$$

Wie hängt nun die *Amplitude* von  $\Phi$  ab?

Die *Amplitude*  $|\mathbf{E}_{0i}|$  resultiert aus der Addition von  $N + 1$  Einzelamplituden  $E$ . Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass

$$|\mathbf{E}_{0i}| = 2r \sin \left( \frac{\Phi}{2} \right) \quad (3.9.4)$$

Für den Winkel  $\Theta = 0$  ist  $E_{max} = E(\Phi = 0) = N \cdot E$ . Die Amplituden der einzelnen Quellen sind unabhängig von der Beobachtungsrichtung. Deshalb ist auch die Bogenlänge  $E_{max} = N \cdot E = r\Phi$ . Wir lösen nach  $r$  auf und setzen ein.

$$|\mathbf{E}_{0i}| = 2 \frac{E_{max}}{\Phi} \sin \left( \frac{\Phi}{2} \right) = \frac{E_{max}}{\frac{\Phi}{2}} \sin \left( \frac{\Phi}{2} \right) \quad (3.9.5)$$

Wenn wir berücksichtigen, dass  $I = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2$  ist und wir  $I_0 = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{max}^2$  setzen, erhalten wir für die *Intensität*

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \left( \frac{\Phi}{2} \right)}{\frac{\Phi}{2}} \right)^2 \quad (3.9.6)$$

Wenn wir  $\Phi$  einsetzen, bekommen wir

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \left( \frac{\pi}{\lambda} a \sin \Theta \right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \Theta} \right)^2 \quad (3.9.7)$$

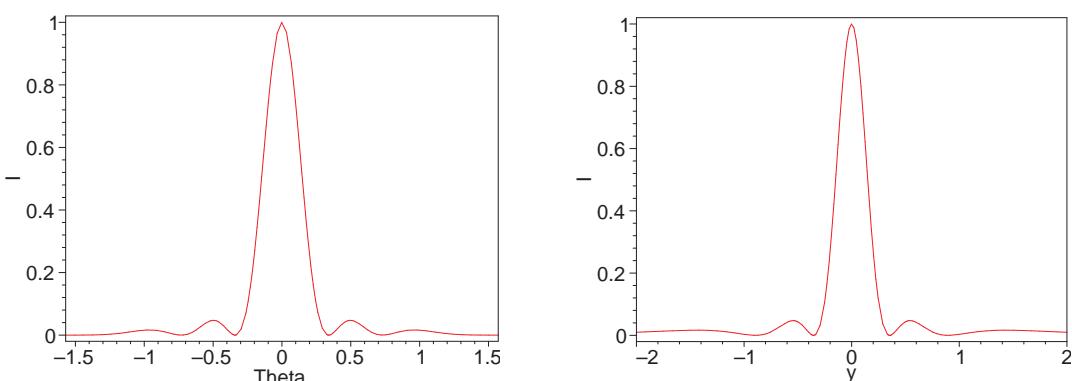


Abbildung 3.40.: *Beugungsmuster* als Funktion des Ablenkwinkels und, rechts, als Funktion des Abstandes von der optischen Achse.

Wir können mit  $\Theta(y) = \arctan \frac{y}{\ell}$  das *Beugungsmuster* für einen ebenen Schirm berechnen. Soll das *Beugungsmuster* in Funktion von  $\Theta$  betrachtet werden, muss

es mit einer Sammellinse (Schirm im *Brennpunkt*) betrachtet werden.

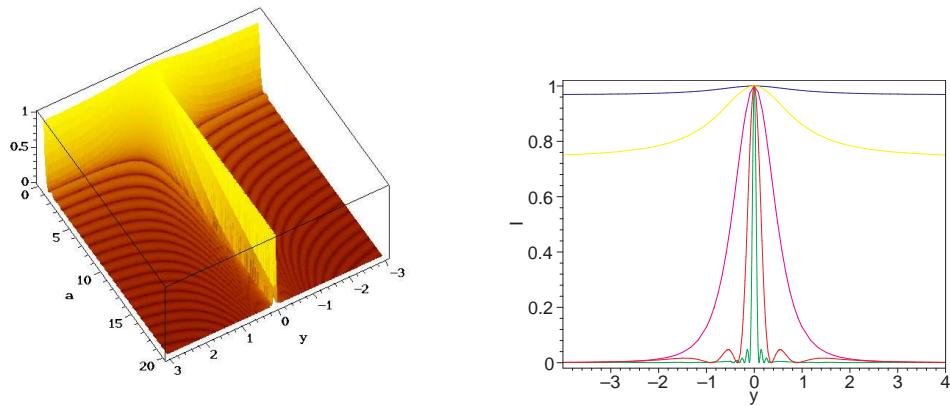


Abbildung 3.41.: *Beugungsmuster* als Funktion der Spaltbreite. Links kontinuierlich und rechts für die Breiten  $a = 0.1, 0.3, 1, 3, 10$

Die Lage der Beugungsmaxima und -minima ist gegeben durch  $\Phi/2 = k\pi$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  für die Minima und  $\Phi/2 = (k + 1/2)\pi$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  sowie  $\Phi = 0$  für die Maxima.

$$\begin{aligned} \Theta_{max} &= 0 \\ \Theta_{max,n} &\approx \arcsin\left(\frac{\lambda(k+1/2)}{a}\right) \quad k \in \mathbb{N} \\ \Theta_{max,-n} &\approx \arcsin\left(\frac{\lambda(-k-1/2)}{a}\right) \quad k \in \mathbb{N} \\ \Theta_{min,n} &= \arcsin\left(\frac{\lambda k}{a}\right) \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (3.9.8)$$

Die *Amplitude* in den Nebenmaxima  $\Theta_{max,n}$  bekommt man durch Ableitung und auf Null setzen. Ungefähr liegen diese Maxima in der Mitte zwischen den Minima. Die *Amplitude* ist dort ungefähr

$$E_{max,n} = |\mathfrak{E}_{0i}| \frac{\sin((k + 1/2)\pi)}{(k + 1/2)\pi} \approx \frac{|\mathfrak{E}_{0i}|}{(k + 1/2)\pi} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.9.9)$$

Damit gilt für die Intensitäten der Nebenmaxima

$$I_{max,n} = \frac{I_0}{[(k + 1/2)\pi]^2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.9.10)$$

$\Phi/2$	Art	Amplitude bezogen auf $I_0$
0	Maximum	1
$\pm\pi$	Minimum	0
$\approx \pm 3\pi/2$	Maximum	$\approx \frac{4}{9\pi^2}$
$\pm 2\pi$	Minimum	0
$\approx \pm 5\pi/2$	Maximum	$\approx \frac{4}{25\pi^2}$
$\approx \pm 7\pi/2$	Maximum	$\approx \frac{4}{49\pi^2}$
$\approx \pm 9\pi/2$	Maximum	$\approx \frac{4}{81\pi^2}$

Tabelle 3.2.: Lage der Minima und Maxima

Die genaue Lage der Extrema kann man durch

$$0 = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[ \frac{\sin(\Phi/2)}{\Phi/2} \right]^2 = 4 \frac{\sin(\Phi/2) \cos(\Phi/2)}{\Phi^2} - 8 \frac{\sin^2(\Phi/2)}{\Phi^3} \quad (3.9.11)$$

oder vereinfacht für  $\Phi \neq 0$

$$0 = \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \left[ \Phi \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \right] \quad (3.9.12)$$

bestimmt werden. Nullstellen gibt es für  $\sin(\Phi/2) = 0$  und für  $\Phi \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) = 0$  oder

$$\begin{aligned} \Phi &= 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} & \text{Nullstellen oder Minima} \\ \text{Lösung von } \Phi &= 2 \tan(\Phi/2) & & \text{Maxima} \end{aligned} \quad (3.9.13)$$

Dies folgt aus der Analyse der zweiten Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \left[ \frac{\sin(\Phi/2)}{\Phi/2} \right]^2 &= \frac{2((\Phi^2 - 6) \cos(\Phi) - 4\Phi \sin(\Phi) + 6)}{\Phi^4} \\ &\stackrel{\Phi \neq 0}{=} (\Phi^2 - 6) \cos(\Phi) - 4\Phi \sin(\Phi) + 6 \end{aligned} \quad (3.9.14)$$

Für  $\Phi = 2k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ist die zweite Ableitung positiv, es sind also Minima. Die anderen Lösungen müssen also Maxima sein.

Für grosse Beugungsordnungen  $|k| \rightarrow \infty$  geht die Lage der Maxima gegen  $\Phi = (2k - 1)\pi$ . In der Nähe der optischen Achse sind sie verschoben.

## 3.10. Interferenz- und Beugungsmuster beim Doppelspalt

### 3.10.1. Fouriertransformation und Faltung

Die im Abschnitt 3.3.3 vorgestellte Fouriertransformation ist eine lineare Transformation (siehe z.B. [AW95, BSMM08]). Hier soll die Faltung diskutiert werden. Dazu überlegen wir, wie hoch die Gesamtenergie von Licht ist, das von einer begrenzten Leuchte mit konstanter Intensität durch einen Spalt geschickt wird, wobei die Leuchte am Spalt vorbei bewegt wird.

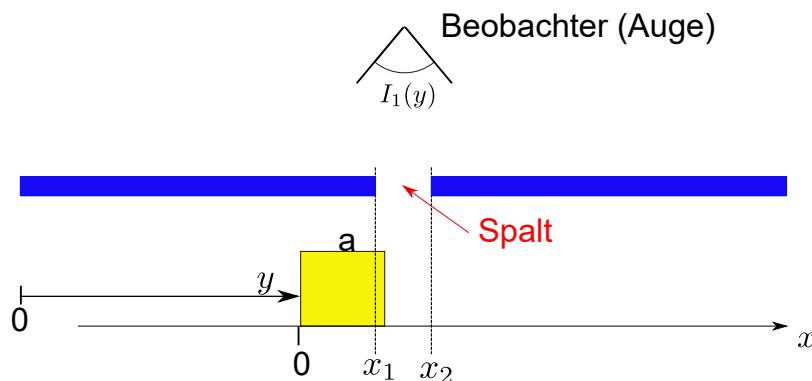


Abbildung 3.42.: Prinzip einer Faltung

Abbildung 3.42 zeigt das Prinzip einer Faltung. Wenn die Leuchte ganz vom Spalt abgedeckt wird, ist die Intensität  $I_1 = 0$ . Wenn die Leuchte teilweise vom Spalt abgedeckt wird, hängt die Intensität  $I_1$  von der Position ab. Ist die Leuchte im Spalt, ist die Intensität  $I_1$  wieder konstant.

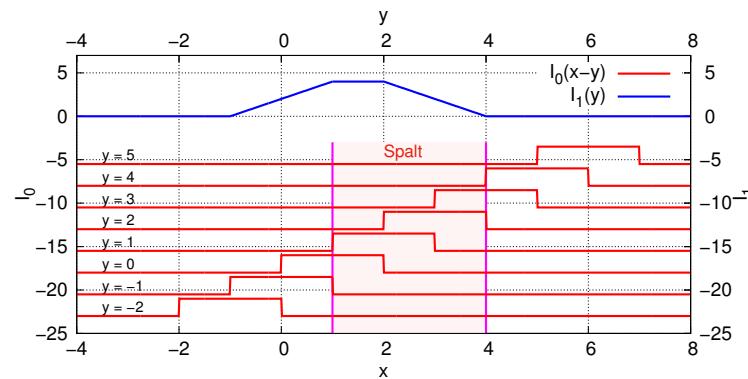


Abbildung 3.43.: Faltung einer Rechteckfunktion an einem Spalt

Abbildung 3.43 zeigt ein gerechnetes Beispiel. Die rote rechteckförmige Kurve  $I_0$  wird am Spalt vorbeigeschoben. Die blaue Kurve  $I_1$  zeigt das Resultat. Formal wird eine Faltung in einer Dimension durch die Integralgleichung

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(y-x)dx = h * f \quad (3.10.1)$$

beschrieben (Siehe [AW95, p865]).  $*$  ist das Operationszeichen für eine Faltung. Hecht [Hec05, p 859] schreibt

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(y-x)dx = f \circledast h \quad (3.10.2)$$

Der Unterschied röhrt wieder von der Verteilung des Faktors  $1/(2\pi)$  her. Beachten Sie auch, dass bei Hecht  $\circledast$  das Operatorzeichen für eine Faltung ist.

Faltungen können besonders effizient über die Fouriertransformation berechnet werden:

$$f * h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(y-x)dx \quad (3.10.3a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(k) \exp(-ik(y-x)) dk \right) dx \quad (3.10.3b)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(k) \exp(-iky) \exp(ikx) dk \right) dx \quad (3.10.3c)$$

Integrationsreihenfolge wechselt

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(k) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ikx) dx \right) \exp(-iky) dk \quad (3.10.3d)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(k)F(k) \exp(-iky) dk \quad (3.10.3e)$$

mit dem Operator  $\mathcal{F}$

$$f * h = \mathcal{F}^{-1}(H(k)F(k)) \quad (3.10.3f)$$

$$\mathcal{F}(f * h) = \mathcal{F}(f(x)) \cdot \mathcal{F}(h(x)) \quad (3.10.3g)$$

Die Fouriertransformation einer Faltung zweier Funktionen ist das Produkt der Fouriertransformationen der beiden Funktionen.

### 3.10.2. Fouriertransformation und Diracsche Deltafunktion

Die Diracsche Deltafunktion nach Gleichung (B.8.3) hat eine besonders einfache Fouriertransformation

$$\mathcal{F}(\delta(x - x_0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \exp(ikx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikx_0) \quad (3.10.4)$$

Das Resultat ist also eine Funktion mit konstanter komplexer Amplitude. Umgekehrt ist die Fouriertransformation einer konstanten Funktion eine Dirac-Delta-Funktion

$$\mathcal{F}(\exp(i\phi)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\phi) \exp(ikx) dx = \exp(i\phi) \sqrt{2\pi}\delta(k) \quad (3.10.5)$$

Die Interpretation dieser Gleichungen zum Beispiel für Schall ist: ein extrem kurzer Knall enthält alle Schallfrequenzen.



### 3.10.3. Diskussion der Interferenz beim Doppelspalt

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 670]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1130])



#### Versuch zur Vorlesung:

Beugung am Doppelspalt ([Versuchskarte O-123](#))

Perfekte Spalte, also Spalte mit verschwindender Breite können über Dirac-Deltafunktionen (B.8.3) modelliert werden. Ein Beugungsobjekt mit mehreren gleichabständigen identischen Spalten kann als Faltung

1. der Beugungsfunktion des Einzelpaltes
2. der Multiplikation mit einer unendlichen Summe von Diracpulsen an den Orten der Spalte
3. und alles gefaltet mit der Beugungsfunktion des Spaltes mit der Breite des Objektes.

Dies kann auch so formuliert werden:

*Bei Doppelspalten oder bei Gittern mit  $N$  Linien setzt sich das Beugungsmuster aus dem Muster des Einzelpaltes multipliziert mit dem Beugungsmuster des Gitters zusammen.*

Da die charakteristische Länge des Einzelpaltes kleiner ist als die Gitterperiode, ist das *Beugungsmuster* des Einzelpaltes breiter als das des Gitters. Die Beugungsfunktion des Einzelpaltes gibt die Umhüllende des Beugungsmusters.

Wir hatten für das *Beugungsmuster* des Doppelspalts mit linienförmigen Spalten

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (3.10.6)$$

wenn wir  $n = 1$  setzen. Das gesamte *Beugungsmuster* ist dann durch

$$I(\Theta) = 4I_0 \left( \frac{\sin\left(\frac{\Phi(\Theta)}{2}\right)}{\frac{\Phi(\Theta)}{2}} \right)^2 \cos^2\left(\frac{\delta(\Theta)}{2}\right) \quad (3.10.7)$$

wobei  $\Phi(\Theta) = \frac{2\pi}{\lambda}a \sin \Theta$  und  $\delta(\Theta) = \frac{2\pi}{\lambda}d \sin \Theta$  sind mit  $a$  der Spaltbreite und  $d$  dem Abstand der beiden Spalte. Wir können nun noch mit  $\Theta(y) = \arctan \frac{y}{\ell}$  das *Beugungsmuster* für einen ebenen Schirm berechnen.

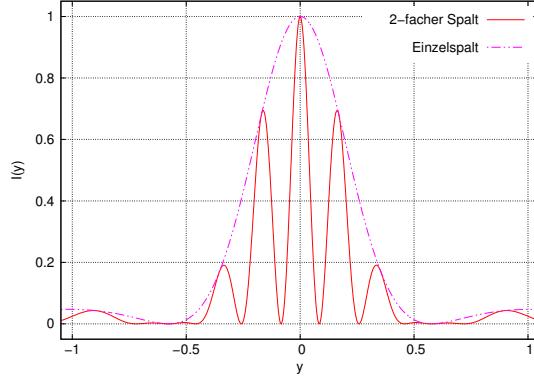


Abbildung 3.44.: Beugung an einem Doppelspalt mit dem Spaltabstand  $d = 6$  und der Spaltbreite  $a = 2$ .

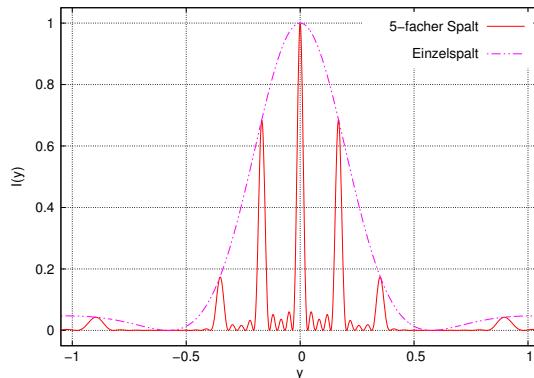


Abbildung 3.45.: Beugung an einem 5-fach Spalt mit dem Spaltabstand  $d = 6$  und der Spaltbreite  $a = 2$

## 3.11. Fraunhofersche und Fresnelsche Beugung



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 650, 710]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1131])  
 (Siehe Sommerfeld, Theoretische Physik Band IV, Optik [Som78, pp. 206])

Hier wird die Diskussion des Fresnel-Huygensschen Prinzips (siehe Abschnitt 3.4) wieder aufgenommen. Bei der damaligen Betrachtung wurde angenommen, dass sich der Abstand zwischen einem Punkt in der Quellebene und einem Punkt in der Beobachtungsebene kaum ändert (siehe Gleichung (3.4.4)).

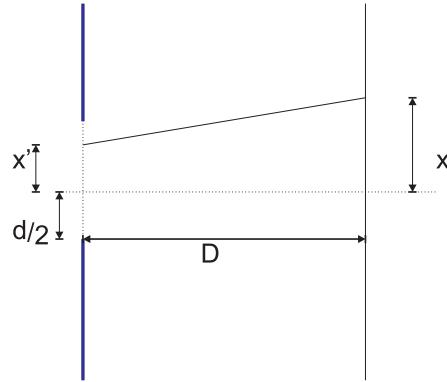


Abbildung 3.46.: Berechnung der Fresnelbeugung an einer Halbebene.

Bei der Beugung interferiert Licht von Kugelwellen aus allen Punkten mit den Koordinaten  $x'$  im Beobachtungspunkt mit der Koordinate  $x$ . Für eine einzelne Teilwelle ist der Weg

$$s = \sqrt{D^2 + (x - x')^2} \quad (3.11.1)$$

Entsprechend ist die komplexe *Amplitude* am Punkt  $x$  gegeben durch

$$\Phi(x, x') = \frac{\Phi_0}{s(x, x')} e^{i \cdot 2\pi s(x, x')/\lambda} \quad (3.11.2)$$

Die *Amplitude* am Punkt  $x$  ist dann nach Fresnel-Huygens

$$\Phi(x) = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\Phi_0}{s(x, x')} e^{i \cdot 2\pi s(x, x')/\lambda} dx' \quad (3.11.3)$$

da wir Kugelwellen haben. Diese Gleichung kann numerisch gelöst werden. Es existieren die folgenden Näherungen:

1. die Fresnelsche Näherung, die  $s$  bis zur zweiten Ordnung in  $x'$  approximiert (siehe Abschnitt 3.11.1) und die
2. die Fraunhofersche Näherung, die  $s$  bis zur ersten Ordnung in  $x'$  approximiert, also letztlich eine Fouriertransformation ist (siehe Abschnitt 3.11.3).

Bei beiden Näherungen wird nur das rein imaginäre Argument der Exponentialfunktion approximiert. Der Faktor  $1/s$  wird beide Male konstant gesetzt, das heisst, die Amplitudenvariation wegen der unterschiedlichen Distanzen wird vernachlässigt.



### 3.11.1. Fresnelsche Näherung

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 710]) (Siehe Sommerfeld, Theoretische Physik Band IV, Optik [Som78, pp. 206])

Wir betrachten nur Orte, bei denen  $|x - x'| \ll D$  sind. Dann ist

$$s \approx D + \frac{(x - x')^2}{2D} \quad (3.11.4)$$

und  $1/s \approx 1/D$ . Das heisst auch, dass die Phase ist proportional zu  $(x - x')^2$ . Unser Integral wird dann

$$\Phi(x) = \frac{\Phi_0}{D} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i \cdot 2\pi s(x,x')/\lambda} dx' = \frac{\Phi_0}{D} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i \cdot 2\pi[D+(x'-x)^2/2D]\lambda} dx' \quad (3.11.5)$$

und

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{\Phi_0}{D} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i \cdot 2\pi D/\lambda} e^{i \cdot 2\pi(x'-x)^2/(2D\lambda)} dx' \\ &= \frac{\Phi_0}{D} e^{i \cdot 2\pi D/\lambda} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i \cdot 2\pi(x'-x)^2/(2D\lambda)} dx' \end{aligned} \quad (3.11.6)$$

Mit der Variablentransformation  $\xi = x' - x$  und damit den Grenzen  $\xi_u = -d/2 - x$  und  $\xi_o = d/2 - x$  wird das Integral zu

$$\Phi(\xi) = \frac{\Phi_0}{D} e^{i \cdot 2\pi D/\lambda} \int_{\xi_u}^{\xi_o} e^{i \cdot 2\pi \xi^2/(2D\lambda)} d\xi \quad (3.11.7)$$

Das verbleibende Integral  $\int_{\xi_u}^{\xi_o} e^{i \cdot 2\pi \xi^2/(2D\lambda)} d\xi$  kann als Summe und Differenz der Fresnelschen Integrale geschrieben werden. Wir verwenden, dass  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  ist.

$$\begin{aligned} \int_{\xi_u}^{\xi_o} e^{i \cdot 2\pi \xi^2/(2D\lambda)} d\xi &= \int_{\xi_u}^{\xi_o} \left( \cos \left( 2\pi \xi^2 / (2D\lambda) \right) + i \sin \left( 2\pi \xi^2 / (2D\lambda) \right) \right) d\xi \\ &= \int_{\xi_u}^{\xi_o} \left( \cos \left( \frac{\pi \xi^2}{D\lambda} \right) + i \sin \left( \frac{\pi \xi^2}{2D\lambda} \right) \right) d\xi \end{aligned} \quad (3.11.8)$$

Dieses Integral, nach Real- und Imaginärteil aufgetrennt und normiert ergibt die Fresnelschen Integrale

$$\begin{aligned} C(w) &= \int_0^w \cos \left( \frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau \\ S(w) &= \int_0^w \sin \left( \frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau \end{aligned} \quad (3.11.9)$$

Die Funktion  $\Phi(x)$  kann als Differenz zweier Fresnelscher Integrale geschrieben werden

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= K [C((d/2 - x) \cdot k) - C((-d/2 - x) \cdot k)] \\ &\quad + i \cdot K [S((d/2 - x) \cdot k) - S((-d/2 - x) \cdot k)] \end{aligned} \quad (3.11.10)$$

wobei  $K$  eine von der Intensität abhängige Konstante ist.

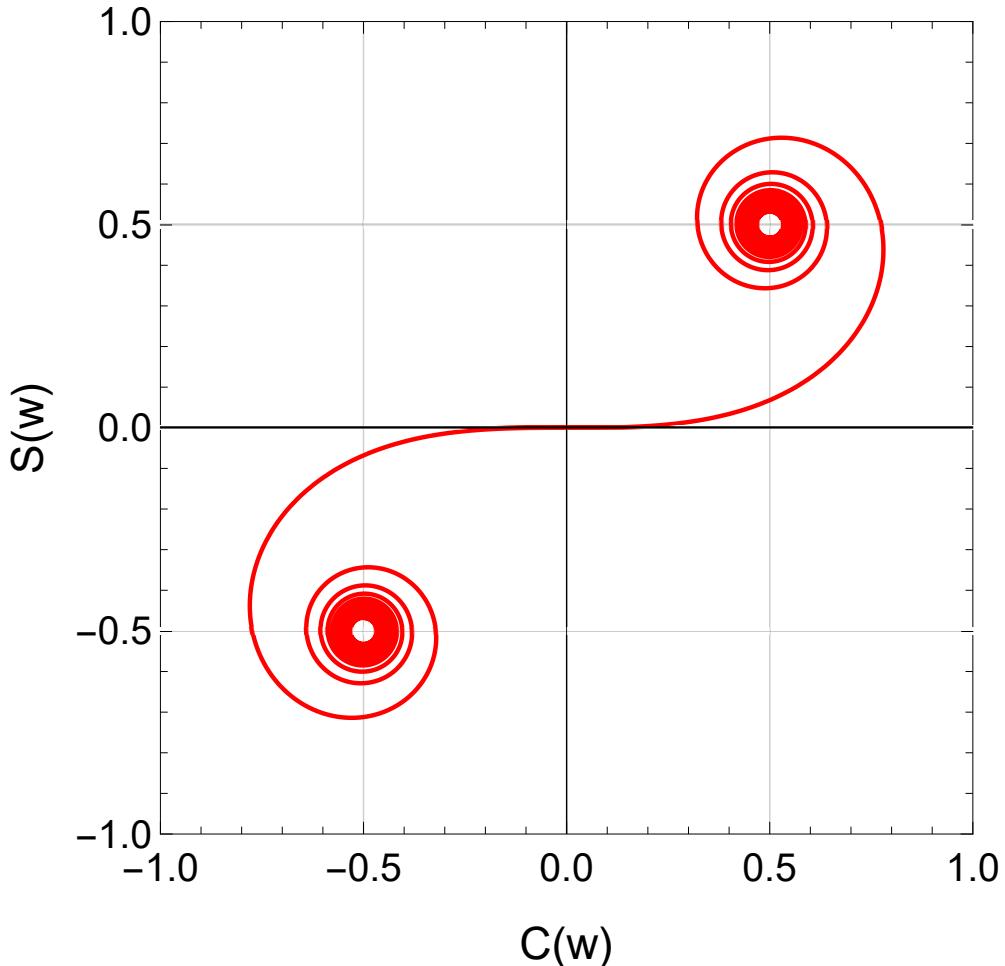


Abbildung 3.47.: Die Cornu-Spirale. Aufgetragen ist die parametrische Kurve  $(C(w), S(w))$  mit  $-\infty \leq w \leq \infty$ . Die linke untere Spirale entspricht  $w = -\infty$ , die rechte obere Spirale  $w = \infty$ .

Die durch  $F(w) = C(w) + iS(w)$  definierte Ortskurve ist die *Cornu-Spirale*. Diese Funktion beschreibt eine längentreue Abbildung der reellen Achse  $w$  auf die komplexe  $C, S$ -Ebene. Mit dieser Konstruktion kann auf einfaches graphischem Wege das *Beugungsmuster* konstruiert werden. Dazu zeichnet man vom Ortspunkt der unteren Integrationsgrenze zum Ortspunkt der oberen Integrationsgrenze eine Linie. Deren Länge gibt die *Amplitude*, deren Winkel zur reellen Achse die Phase. Damit kann das Fresnel-Beugungsbild eines Spalts berechnet werden.

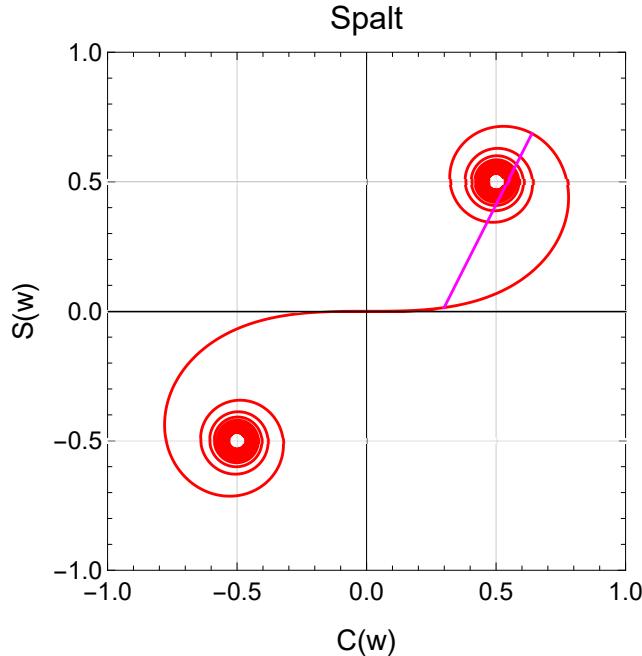


Abbildung 3.48.: Cornu-Spirale mit einem Spalt der Breite  $1.0 = w_2 - w_1$ , hier von  $w_1 = 0.3$  bis  $w_2 = 1.3$ .

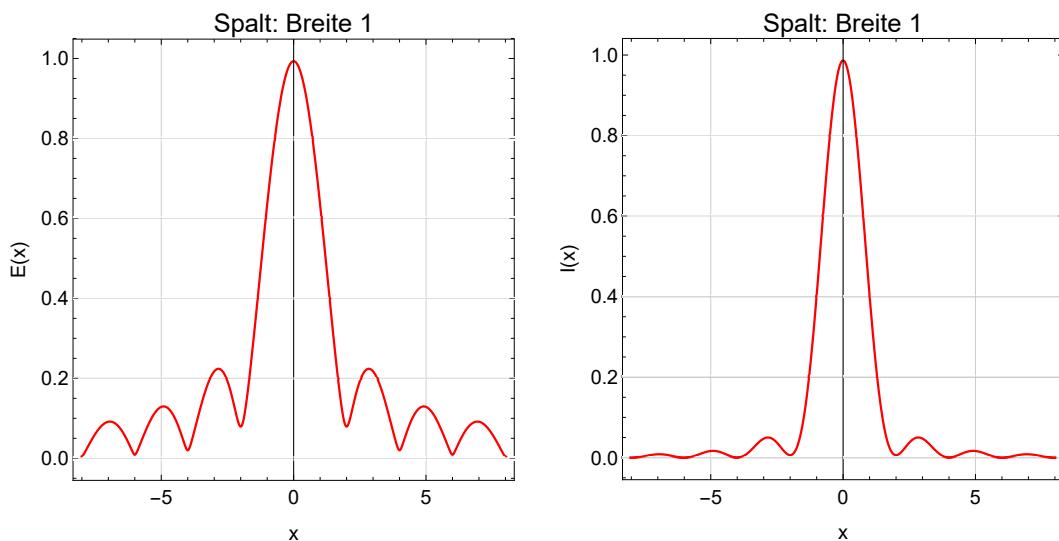


Abbildung 3.49.: Fresnelsches Beugungsmuster an einem Spalt der Breite 1. Links die Amplitude und rechts die Intensität, die einzige direkt beobachtbare Grösse.

Wenn man die untere Integrationsgrenze nach  $-\infty$  gehen lässt und bei der oberen Integrationsgrenze  $d$  gegen Null gehen lässt, bekommt man das Beugungsbild an einer Kante. Wir tragen nun die Strecke vom Zentrum der linken Spirale ( $F(-\infty) = -1/2(1+i)$ ) aus zum Ortspunkt korrespondierend zu  $x$  ab. Wir sehen, dass im Schattenbereich (bis der bewegliche Ortspunkt  $0,0$  erreicht) die Amplitude monoton zunimmt. Dann beginnt eine Oszillation, die als die Interferenzmuster im hellen Bereich beobachtet werden kann.

Abbildung 3.50 zeigt eine ausgewählte Position in der Cornu-Spirale. Ersichtlich ist in der Abbildung und in Abbildung 3.51, dass bei einer einfallenden Intensität mit dem Betrage 2 das transmittierte Licht an gewissen Orten eine höhere Intensität hat

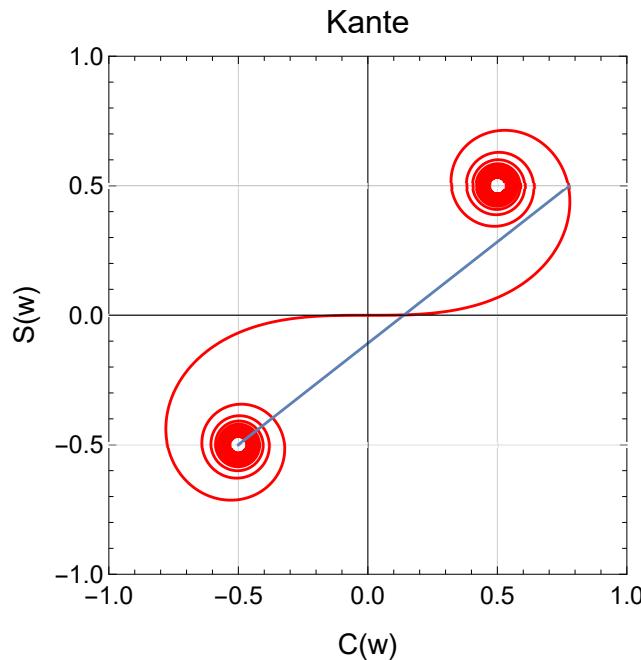


Abbildung 3.50.: Cornu-Spirale für eine Kante. Die Linie geht von  $w_1 = -\infty$  nach  $w_2 = 1.06$ .

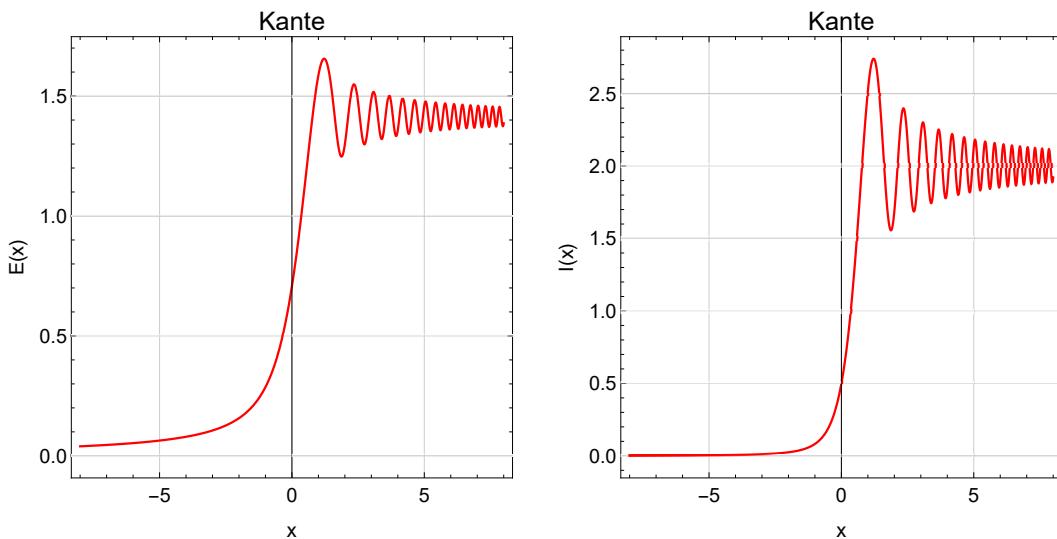


Abbildung 3.51.: Fresnelsches Beugungsmuster an einer Halbebene. Links die Amplitude und rechts die Intensität, die einzige direkt beobachtbare Grösse.

### 3.11.2. Prinzip von Babinet

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 817])

Jacques Babinet hat im 19. Jahrhundert beobachtet, dass die Beugungsmuster komplementärer Beugungsobjekte identisch sind. Abbildung 3.52 zeigt ein Beispiel komplementärer Beugungsobjekte.

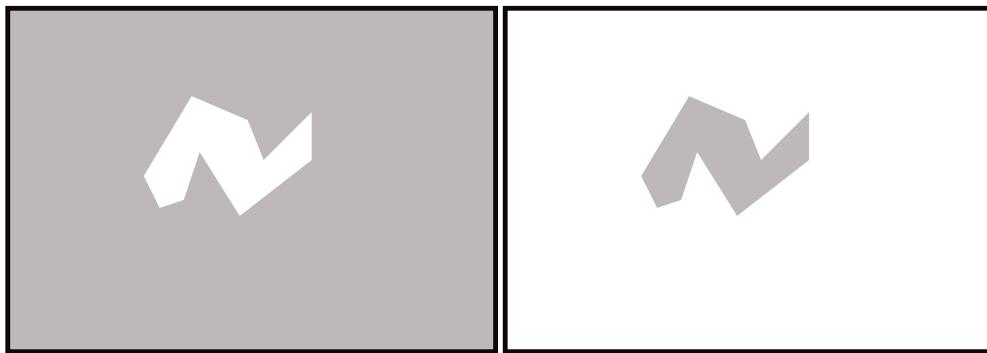


Abbildung 3.52.: Zwei komplementäre Beugungsobjekte zur Illustration von Babinet's Prinzip.

Anhand der Cornu-Spirale in Abbildung 3.47 kann nach Hecht [Hec05, p. 817] das Babinet'sche Prinzip verstanden werden.

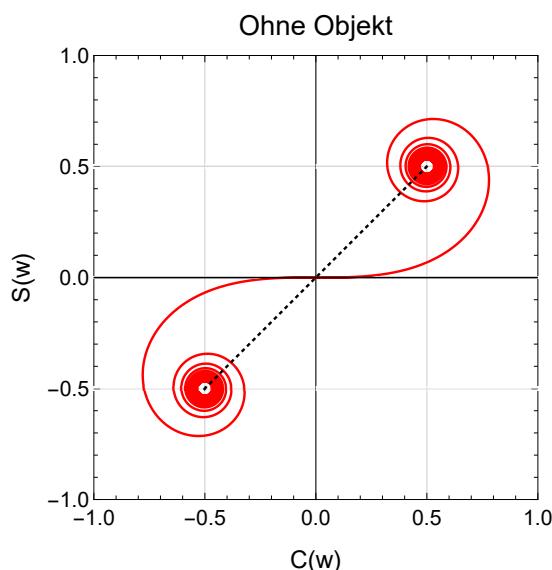


Abbildung 3.53.: Ohne beugendes Objekt erstreckt sich die Phase in der Cornu-Spirale von  $-(1+i)/2$  bis  $(1+i)/2$ .

Abbildung 3.53 zeigt die Amplitude und Phase ohne Beugungsobjekt. Bei einem Spalt bekommen wir eine Situation wie in Abbildung 3.48.

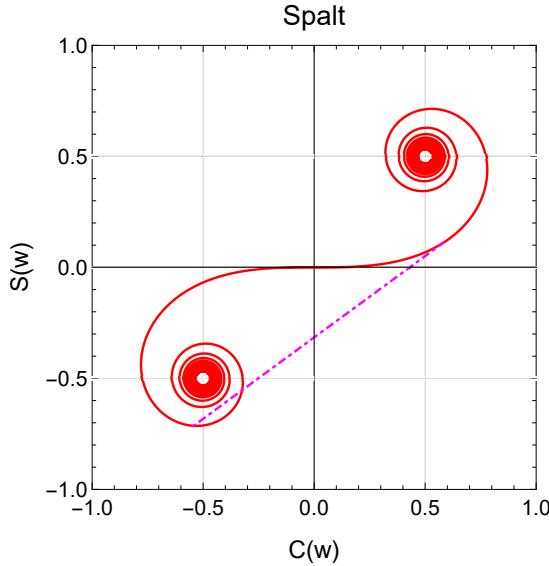


Abbildung 3.54.: Phase in der Cornu-Spirale für  $w_1 = -1.4$  und  $w_2 = 0.6$ , also  $w = 2$ .

Abbildung 3.54 zeigt die Phase bei einem Spalt. Die Beugung an der linken Kante und an der rechten Kante des komplementären Streifens mit gleicher Breite wie die Spaltbreite kann wie in Abbildung 3.50 dargestellt werden.

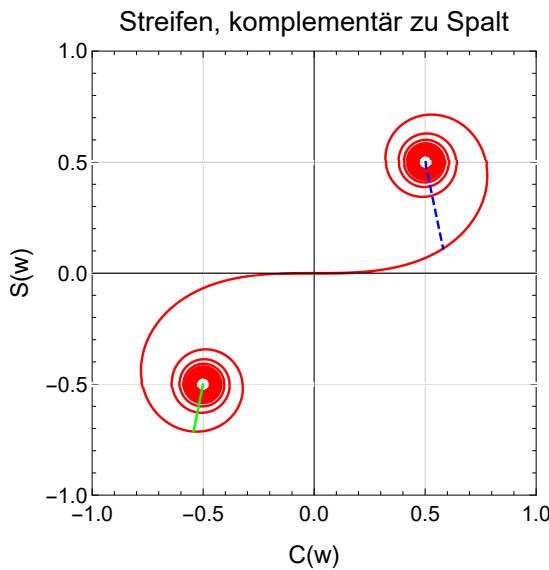


Abbildung 3.55.: Beugung an den beiden Kanten einer Linie mit der Breite  $w = 2$  und den Werten  $w = -1.4$  (links) und  $w = 0.6$  (rechts).

Die einzelnen Linien in den Abbildungen 3.53 bis 3.55 stellen Amplitude und Phase des elektrischen Feldes dar. Das Babinet'sche Prinzip besagt nun, dass die elektrischen Felder nach der Beugung an einem Spalt summiert mit den elektrischen Feldern nach der Beugung an einem Streifen das elektrische Feld ohne Beugungsobjekt geben müssen.

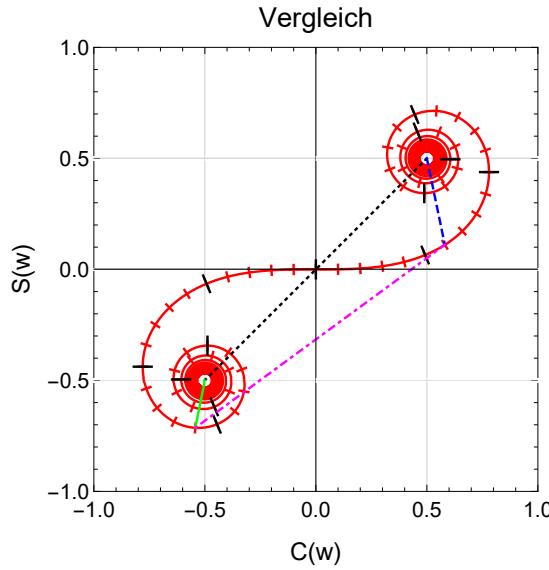


Abbildung 3.56.: Illustration des Babinetischen Prinzips anhand der Beugung an einem Spalt (Abb. 3.54) addiert zur Beugung an einem Streifen (Abb. 3.55). Diskussion nach Hecht [Hec05, p. 817].

In der Abbildung 3.56 (nach Hecht [Hec05, p. 817]) wird gezeigt, dass der  $\mathbf{E}$ -Feldvektor der ungestörten Lichtwelle (schwarz) die Summe aus den  $\mathbf{E}$ -Feldern der Beugung am Spalt (magenta) und der Beugung an den zwei Kanten des Streifens (grün und blau) ist.

### 3.11.3. *Fraunhofer-Beugung*

Die Gleichung (3.11.4) kann weiter vereinfacht werden, wenn  $|x'| \ll |x|$  ist. Dann bekommen wir

$$s \approx D + \frac{x^2 - 2x \cdot x'}{2D} = D + \frac{x^2}{2D} - \frac{x}{D}x' \quad (3.11.11)$$

und  $1/s \approx 1/D$ . Nun ist die optische Distanz  $s$  eine lineare Funktion von  $x'$ . Die Approximation gilt nur, wenn das Beugungsobjekt klein gegen die Distanz zu Objekt und der Grösse des Beugungsmusters ist. Diese Fernfeld-Approximation nennt man die *Fraunhofer-Näherung*.

Das heisst, dass die Phase proportional zu  $C + x'$  ist. Unser Integral wird dann

$$\Phi(x) = \frac{\Phi_0}{D} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i \cdot 2\pi s(x, x')/\lambda} dx' = \frac{\Phi_0}{D} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i \cdot 2\pi [D + \frac{x^2}{2D} - \frac{x}{D}x']\lambda} dx' \quad (3.11.12)$$

und

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{\Phi_0}{D} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i \cdot 2\pi [D + \frac{x^2}{2D}] / \lambda} e^{-i \cdot 2\pi x x' / (2D\lambda)} dx' \\ &= \frac{\Phi_0}{D} e^{i \cdot (2\pi/\lambda) [D + \frac{x^2}{2D}]} \int_{-d/2}^{d/2} \exp \left[ -i \cdot \frac{\pi x}{D\lambda} x' \right] dx' \end{aligned} \quad (3.11.13)$$

Würde das Integral von  $-\infty$  nach  $+\infty$  laufen, hätten wir eine Fouriertransformation.

Um aus Gleichung (3.11.13) ein Integral über  $\mathbb{R}$  zu machen, brauchen wir eine Fensterfunktion. Die *Heaviside- $\Theta$ -Funktion* erlaubt dies. Sie berechnet sich aus der Delta-Funktion über

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(y) dy \quad (3.11.14)$$

Die Fensterfunktion oder Spaltfunktion  $g_S(x)$  kann dann aus der Subtraktion zweier verschobener  $\Theta$ -Funktionen erzeugt werden:

$$g_S(x) = \Theta(x + d/2) - \Theta(x - d/2) \quad (3.11.15)$$

Gleichung (3.11.13) wird mit Gleichung (3.11.15) umgeschrieben:

$$\Phi(x) = \frac{\Phi_0}{D} e^{i \cdot (2\pi/\lambda) \left[ D + \frac{x^2}{2D} \right]} \int_{-\infty}^{\infty} g_S(x') \exp \left[ -i \cdot \frac{\pi x}{D\lambda} x' \right] dx' \quad (3.11.16a)$$

$$= \frac{\Phi_0}{D} e^{i \cdot (2\pi/\lambda) \left[ D + \frac{x^2}{2D} \right]} \mathcal{F}^{-1}(g_S(x')) \quad (3.11.16b)$$

Damit ist klar, dass die Fraunhofer-Näherung für das Amplituden-Beugungsmuster eines Spaltes die inverse Fouriertransformation (Rücktransformation) der Spaltfunktion multipliziert mit einem *Phasenfaktor* ist. Die inverse Fouriertransformation der Spaltfunktion ist

$$\mathcal{F}^{-1}(g_S(x')) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d \sin \left( \pi \frac{dx}{2D\lambda} \right)}{2\pi} = \frac{d}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc} \left( \pi \frac{dx}{2D\lambda} \right) \quad (3.11.17)$$

Dabei ist  $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  eine übliche Kurzschreibweise.

Die Amplitude  $\Phi$  hier ist zum Beispiel das elektrische Feld  $E$ . Dann ist die beobachtbare Intensität wie im Abschnitt 2.3 gegeben.

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E E^* = \frac{n \epsilon_0 c}{2\mu} E E^* \quad (3.11.18)$$

Wir bekommen also für das Beugungsmuster der Intensität beim Einzelspalte in der Fraunhofer-Näherung

$$I(x) = \frac{n \epsilon_0 c}{2\mu} \left( \frac{E_0}{D} e^{i \cdot (2\pi/\lambda) \left[ D + \frac{x^2}{2D} \right]} \right) \left( \frac{E_0}{D} e^{i \cdot (2\pi/\lambda) \left[ D + \frac{x^2}{2D} \right]} \right)^* \cdot \left( \frac{d}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc} \left( \pi \frac{dx}{2D\lambda} \right) \right)^2 \quad (3.11.19a)$$

$$= \frac{n \epsilon_0 c}{2\mu} \frac{E_0^2}{D^2} \frac{d^2}{2\pi} \operatorname{sinc}^2 \left( \pi \frac{dx}{2D\lambda} \right) \quad (3.11.19b)$$

$$= I_0 \frac{d^2}{2\pi D^2} \operatorname{sinc}^2 \left( \pi \frac{dx}{2D\lambda} \right) = I_0 \frac{\lambda^2}{\pi^3 x^2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{d\pi}{D\lambda} x \right) \right] \quad (3.11.19c)$$



### 3.11.4. Vergleich

(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 327])

Die bis jetzt besprochenen Beugungseffekte haben die folgenden Eigenschaften:

#### Fraunhofersche Beugung

1. Ebene Wellen fallen so auf einen Spalt, dass ihre Strahlen senkrecht auf ihn treffen. Damit sind die Amplituden und die Phasen der nach dem Huygensschen Prinzip emittierten Wellen gleich.
2. Das Beugungsbild wird auf einem weit entfernten Schirm beobachtet. Die von *Punktquellen* ausgehenden Strahlen treffen ungefähr parallel auf den Schirm.

Ist eine der obigen Bedingungen nicht erfüllt, spricht man von *Fresnelscher Beugung*. Eine andere Formulierung der Bedingungen der Fraunhoferschen Beugung ist

1. Der Abstand  $R$  von der Quelle zum Beugungsobjekt ist sehr viel grösser als die charakteristische Länge  $d$  des Beugungsobjekts.
2. Der Abstand  $R'$  vom Beobachter zum Beugungsobjekt ist sehr viel grösser als die charakteristische Länge  $d$  des Beugungsobjekts.

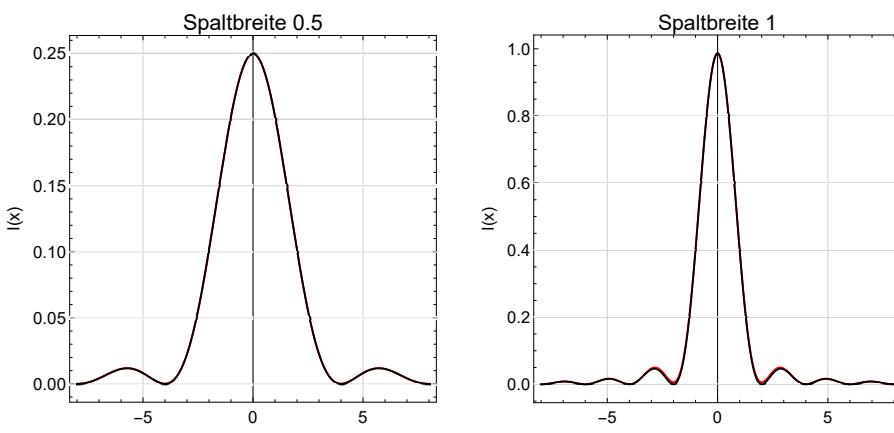


Abbildung 3.57.: Vergleich der Fresnelbeugung (rot) mit der Fraunhoferbeugung (schwarz) für Spaltweiten von 0.5 und 1.

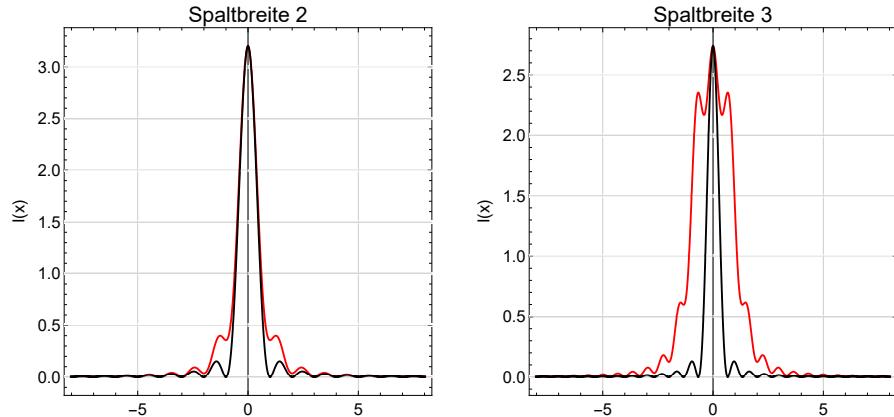


Abbildung 3.58.: Vergleich der Fresnelbeugung (rot) mit der Fraunhoferbeugung (schwarz) für Spaltweiten von 2 und 3.

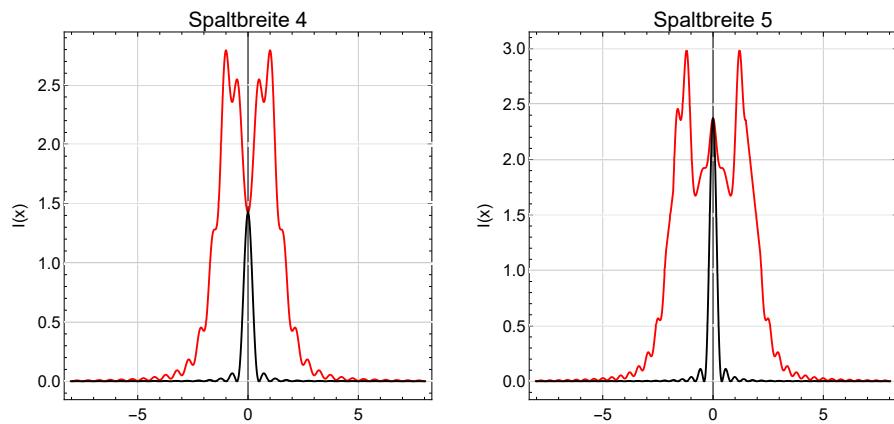


Abbildung 3.59.: Vergleich der Fresnelbeugung (rot) mit der Fraunhoferbeugung (schwarz) für Spaltweiten von 4 und 5.

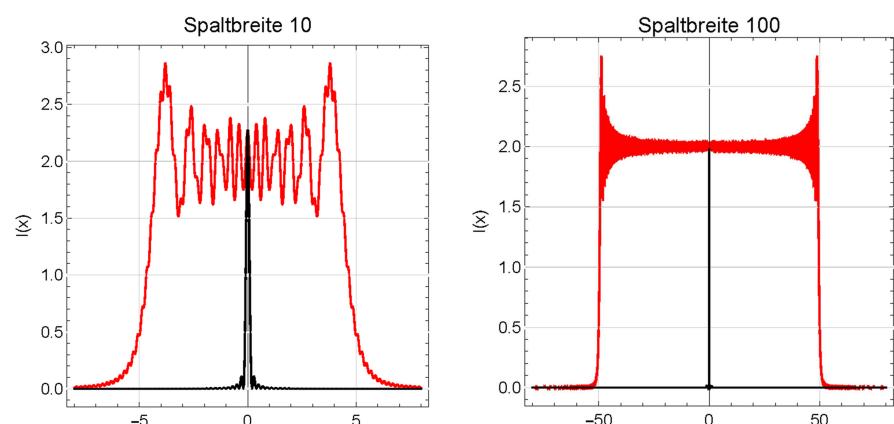


Abbildung 3.60.: Vergleich der Fresnelbeugung (rot) mit der Fraunhoferbeugung (schwarz) für Spaltweiten von 10 und 100. Beachten Sie die geänderte x-Achse bei der Spaltbreite 100.

Sehr schön ist aus den Abbildungen zu ersehen, dass sich die transmittierte Inten-

sität bei sehr breiten Spalten wie aus der geometrischen Optik erwartet verhält. Das Überschwingen an den Kanten in Abbildung 3.60 ist auch von Fouriertransformationen bekannt. Es heisst *Gibbs-Phänomen* und entsteht immer, wenn bei Integraltransformationen (Fourier oder eben die Wellentheorie der Beugung) die Bedingung der beliebig oft stetigen Differenzierbarkeit verletzt ist.



### 3.11.5. Kirchhoffsche Beugungstheorie

(Siehe Hecht, Optik [Hec05], pp. 819])

Wenn die Polarisation der Lichtwelle nicht relevant ist, kann die vektorielle Wellengleichung, wie sie aus den Maxwellgleichungen abgeleitet wird, als skalare Wellengleichung geschrieben werden. Beim Fresnel-Huygenschen Prinzip wird die anregende Welle in eine unendliche Anzahl von Punktstörungen aufgeteilt. Diese punktförmigen Anregungen beinhalten nun alle räumlichen Frequenzen.

Der alternative Ansatz von Kirchhoff analysiert die in der Anregung und dem Beugungshindernis vorhandenen Frequenzen und berechnet so das Beugungsmuster über eine Fourieranalyse.

Kirchhoff betrachtet skalare monochromatische Wellen [Hec05, p. 820], [AW95]. Diese haben die Form

$$E(\mathbf{r}, t) = E_r(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \stackrel{\omega=k c}{=} E_r(\mathbf{r}) \exp(-ik c t) \quad (3.11.20)$$

und sind die Lösung der skalaren Form der vektoriellen Wellengleichung (2.2.1). Wird Gleichung (3.11.20) eingesetzt, ergibt sich die rein räumliche partielle Differentialgleichung

$$\Delta E_r(\mathbf{r}) = -k^2 E_r(\mathbf{r}) \quad (3.11.21)$$

Gleichung (3.11.21) wird in der Literatur *Helmholtz-Gleichung* genannt. Nach Hecht [Hec05, pp. 1041-1042] kann die Gleichung mit dem zweiten Greenschen Satz gelöst werden. Nach [AW95, pp. 58-60] beruht dies auf dem Gaussschen Satz

$$\iint_A \mathbf{V} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_{V(A)} \operatorname{div} \mathbf{V} dV = \iiint_{V(A)} \nabla \cdot \mathbf{V} dV \quad (3.11.22)$$

mit einer geschlossenen Oberfläche  $A$ . Weiter werden die Identitäten für Vektorableitungen

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = u \nabla \cdot \nabla v + (\nabla u) \cdot (\nabla v) = u \Delta v + (\nabla u) \cdot (\nabla v) \quad (3.11.23a)$$

$$\operatorname{div} (u \operatorname{grad} v) = u \operatorname{div} \operatorname{grad} v + (\operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} v)$$

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = v \nabla \cdot \nabla u + (\nabla v) \cdot (\nabla u) = v \Delta u + (\nabla v) \cdot (\nabla u) \quad (3.11.23b)$$

$$\operatorname{div} (v \operatorname{grad} u) = v \operatorname{div} \operatorname{grad} u + (\operatorname{grad} v) \cdot (\operatorname{grad} u)$$

Die Differenz der beiden Gleichungen eliminiert das Skalarprodukt der Gradienten

$$\nabla \cdot (u \nabla v) - \nabla \cdot (v \nabla u) = u \Delta v - v \Delta u \quad (3.11.24)$$

$$\operatorname{div} (u \operatorname{grad} v) - \operatorname{div} (v \operatorname{grad} u) = u \Delta v - v \Delta u$$

oder in Integralform

$$\iiint_{V(A)} (u \Delta v - v \Delta u) dV = \iiint_{V(A)} (\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) - \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u)) dV$$

$$\stackrel{\text{Gauss}}{=} \iint_A (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) \cdot dA \quad (3.11.25)$$

Nach Hecht [Hec05, p. 1041] nimmt man nun an, dass  $u$  und  $v$  die Helmholtzgleichung (3.11.21) lösen, dass also  $\Delta u = -k^2 u$  und  $\Delta v = -k^2 v$  ist. Dann ist die linke Seite von Gleichung (3.11.25) null, also haben wir

$$\iint_A (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) \cdot dA = 0 \quad (3.11.26)$$

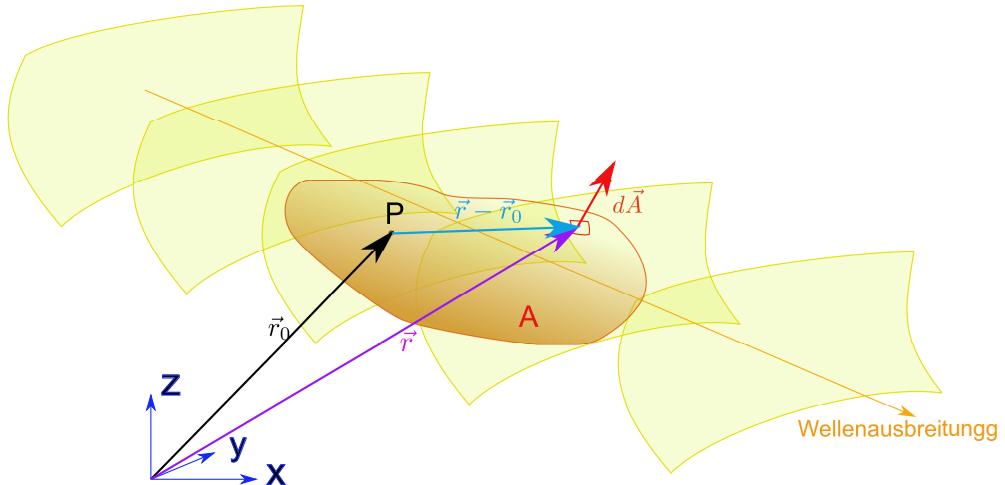


Abbildung 3.61.: Geometrie zur Herleitung des Kirchhoffschen Integralsatzes  
(Adaptiert aus [Hec05, pp. 819 ff]).

Danach wird  $u = E_r(\mathbf{r})$  gesetzt und  $v$  als Kugelwelle um den Nullpunkt

$$v = \frac{\exp(ik r_P)}{r_P} \quad (3.11.27)$$

Dabei ist  $\mathbf{r}_p = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  der Vektor eines Beobachtungspunktes vom Punkt  $P$  und  $r_P$  der dazugehörige Abstand.  $P$  soll innerhalb der geschlossenen Fläche  $A$  liegen. In Kugelkoordinaten ist

$$\operatorname{grad} v = \operatorname{grad} \left( \frac{\exp(ik r_P)}{r_P} \right) = \left( -\frac{1}{r_P^2} + \frac{ik}{r_P} \right) \exp(ik r_P) \mathbf{e}_{r_P} \quad (3.11.28)$$

$\mathbf{e}_{r_P}$  zeigt von  $P$  weg nach aussen. Wir subtrahieren also eine kleine Kugelfläche  $\mathfrak{A}$  mit dem Kugelmittelpunkt bei  $P$  von  $A$  und schliessen so die Divergenz aus. Dann lassen wir  $\mathfrak{A} \rightarrow 0$  gehen. Auf der Kugeloberfläche  $\mathfrak{A}$  lautet der Gradient

$$\operatorname{grad} E_r(\mathbf{r}_P) = \frac{\partial}{\partial r_P} E_r(\mathbf{r}_P) \quad (3.11.29)$$

Damit wird der Integrand von Gleichung (3.11.26) innerhalb der kleinen Kugel  $\mathfrak{A}$

$$E_r(\mathbf{r}_P) \mathbf{grad} \left( \frac{\exp(i k r_P)}{r_P} \right) - \frac{\exp(i k r_P)}{r_P} \mathbf{grad} E_r(\mathbf{r}_P) \quad (3.11.30a)$$

$$= E_r(\mathbf{r}_P) \left( -\frac{1}{r_P^2} + \frac{i k}{r_P} \right) \exp(i k r_P) \mathbf{e}_{r_P} - \frac{\exp(i k r_P)}{r_P} \frac{\partial}{\partial r_P} E_r(\mathbf{r}_P) \quad (3.11.30b)$$

$$= \frac{1}{r_P^2} \left( -E_r(\mathbf{r}_P) + i k r_P E_r(\mathbf{r}_P) - r_P \frac{\partial}{\partial r_P} E_r(\mathbf{r}_P) \right) \exp(i k r_P) \quad (3.11.30c)$$

Dieser Integrand soll über eine Kugelfläche  $\mathfrak{A}$  mit dem Radius  $r_P$  integriert werden. Alle Vektoren sind weiter radial, so dass für eine beliebige, gutartige Funktion  $\mathbf{H}$  die Beziehung  $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{A} = H r_P^2 d\Omega$  geschrieben werden kann, wobei  $d\Omega$  ein Raumwinkelement ist. Im Grenzfall  $\mathfrak{A} \rightarrow 0$  oder  $r_P \rightarrow 0$  nimmt  $E_r(\mathbf{r}_P)$  einen konstanten Wert an, nämlich den Wert  $E_{r,P}$  am Ort des Punktes  $P$ . Weiter geht  $\exp(i k r_P)$  in diesem Falle gegen 1. Die Terme mit  $r_P$  gehen nach Null.

Wir haben also

$$0 = \lim_{\tilde{r}_P \rightarrow 0} \left[ \iint_A (u \mathbf{grad} v - v \mathbf{grad} u) \cdot d\mathbf{A} - \iint_{\mathfrak{A}} (u \mathbf{grad} v - v \mathbf{grad} u) \cdot d\tilde{\mathbf{A}} \right] \quad (3.11.31a)$$

$$= \lim_{\tilde{r}_P \rightarrow 0} \left[ \iint_A \left( E_r(\mathbf{r}_P) \mathbf{grad} \left( \frac{\exp(i k r_P)}{r_P} \right) - \frac{\exp(i k r_P)}{r_P} \mathbf{grad} E_r(\mathbf{r}_P) \right) \cdot d\mathbf{A} - \iint_{\mathfrak{A}} \frac{1}{\tilde{r}_P^2} \left( -E_r(\tilde{\mathbf{r}}_P) + i k \tilde{r}_P E_r(\tilde{\mathbf{r}}_P) - r_P \frac{\partial}{\partial \tilde{r}_P} E_r(\tilde{\mathbf{r}}_P) \right) \exp(i k \tilde{r}_P) \cdot d\tilde{\mathbf{A}} \right] \quad (3.11.31b)$$

$$= \iint_A \left( E_r(\mathbf{r}_P) \mathbf{grad} \left( \frac{\exp(i k r_P)}{r_P} \right) - \frac{\exp(i k r_P)}{r_P} \mathbf{grad} E_r(\mathbf{r}_P) \right) \cdot d\mathbf{A} - \lim_{\tilde{r}_P \rightarrow 0} \iint_{\mathfrak{A}} (-E_{r,P}) d\Omega \quad (3.11.31c)$$

$$= \iint_A \left( E_r(\mathbf{r}_P) \mathbf{grad} \left( \frac{\exp(i k r_P)}{r_P} \right) - \frac{\exp(i k r_P)}{r_P} \mathbf{grad} E_r(\mathbf{r}_P) \right) \cdot d\mathbf{A} + \lim_{\tilde{r}_P \rightarrow 0} 4\pi E_{r,P} \quad (3.11.31d)$$

$$E_{r,P} = \frac{1}{4\pi} \left[ \iint_A \frac{\exp(i k r_P)}{r_P} \mathbf{grad} E_r(\mathbf{r}_P) \cdot d\mathbf{A} - \iint_A E_r(\mathbf{r}_P) \mathbf{grad} \left( \frac{\exp(i k r_P)}{r_P} \right) \cdot d\mathbf{A} \right] \quad (3.11.32)$$

Mit  $\mathbf{r}_P = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  kann der *Kirchhoffsche Integralsatz* so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} E_r(\mathbf{r}_0) = & \frac{1}{4\pi} \iint_A \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \mathbf{grad} E_r(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_A E_r(\mathbf{r}) \mathbf{grad} \left( \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \cdot d\mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.11.33)$$

Der *Kirchhoffsche Integralsatz* besagt, dass die skalare Amplitude des elektrischen Feldes aus dem Feld auf einer Integrationsfläche berechnet werden kann.

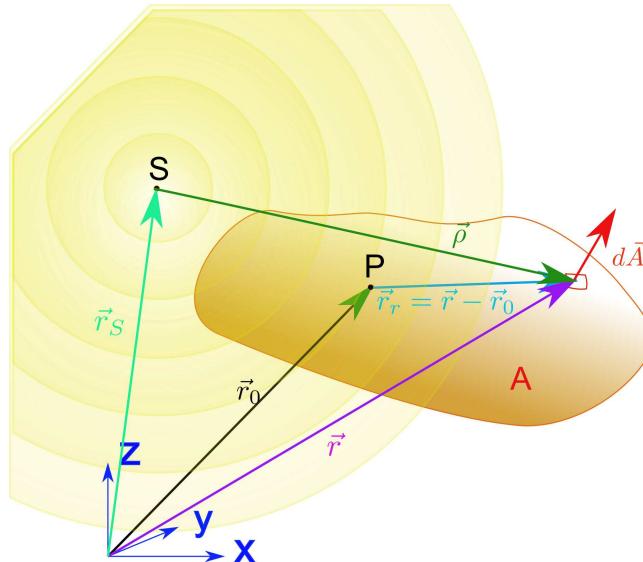


Abbildung 3.62.: Skizze der Geometrie der Kirchhoff-Theorie (Adaptiert aus [Hec05, pp. 819 ff]).

Im Weiteren betrachtet man jetzt nach Hecht [Hec05, p. 820] eine ungestörte Kugelwelle, die von einem Punkt  $S$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_S$  ausgeht. Dann wird  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_S$  gesetzt die Funktion  $E_r(\boldsymbol{\rho}, t) = E_r(\rho, t)$

$$E_r(\rho, t) = \hat{E}_r(\rho) \exp(-i\omega t) = \left[ E_0 \frac{\exp(i k \rho)}{\rho} \right] \exp(-i\omega t) \quad (3.11.34)$$

angesetzt. Weiter setzen wir

$$d\mathbf{a} = \mathbf{e}_a da \quad (3.11.35a)$$

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} \quad (3.11.35b)$$

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \quad (3.11.35c)$$

$$\mathbf{e}_{r,r0} = \frac{\mathbf{r}_p}{r_p} \quad (3.11.35d)$$

und verwenden

$$\begin{aligned}\mathbf{grad} \left( \frac{\exp(i k r_p)}{r_p} \right) &= \mathbf{e}_{r,r0} \frac{\partial}{\partial r_p} \left( \frac{\exp(i k r_p)}{r_p} \right) \\ &= \mathbf{e}_{r,r0} (i k r_p - 1) \frac{\exp(i k r_p)}{r_p^2}\end{aligned}\quad (3.11.35e)$$

$$\mathbf{grad} \hat{E}_r(\rho) = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial \hat{E}_r(\rho)}{\partial \rho} = \mathbf{e}_\rho (i k \rho - 1) \frac{\exp(i k \rho)}{\rho^2} \quad (3.11.35f)$$

Wenn nun wie in der makroskopischen Optik  $\lambda \ll \rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|$  und  $\lambda \ll r_p = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$  ist, wenn also die Ausdehnungen der Objekte gross gegen die Wellenlänge sind, können die quadratischen Terme vernachlässigt werden und Gleichung (3.11.33) lautet dann mit  $k = 2\pi/\lambda$  dann:

$$E_r(\mathbf{r}_0) = -\frac{E_0 i}{\lambda} \iint_A \frac{\exp(i k (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|))}{2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_S| |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \mathbf{e}_a \cdot (\mathbf{e}_{r,r0} - \mathbf{e}_\rho) dA \quad (3.11.36)$$

Gleichung (3.11.36) gilt nicht für die Nanooptik, die Wechselwirkung zwischen Nanoteilchen und auch nicht für Mikrowellen.

Hecht [Hec05, p. 824] schliesst aus Gleichung (3.11.36), dass das *Fresnel-Huygenssche Prinzip* direkt aus der skalaren Wellengleichung hergeleitet werden kann. Er gibt an, dass bei dieser Herleitung aus der Wellengleichung ein zusätzlicher *Phasenfaktor*  $\pi/2$  entsteht, der in der normalen Ableitung fehlt. Dieser *Phasenfaktor* ist dann wichtig, wenn die gebeugte Welle mit einer Referenzwelle interferieren soll.

## 3.12. Beugungsgitter und Spektrographen



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 696]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 429]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1135])



### Versuch zur Vorlesung:

Beugungsgitter (Versuchskarte O-025)

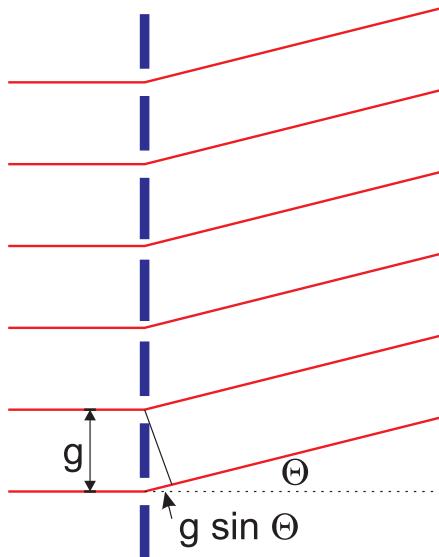


Abbildung 3.63.: Lichtdurchgang durch ein Gitter mit der Gitterkonstante  $g$ .

*Beugungsgitter* haben Spaltabstände  $g$  in der Größenordnung von etwa  $1\mu m$ . Licht wird um den Winkel  $\Theta$ , gegeben durch

$$g \sin \Theta = m\lambda \quad (3.12.1)$$

abgelenkt.  $m$  heisst die *Beugungsordnung*. Wenn man eine monochromatische Lichtquelle beobachtet, stellt man fest, dass ein einzelnes Beugungsmaximum beobachtet wird. Man spricht von einer *Spektrallinie*.

**Spektrum 1. Ordnung** Die Menge der Spektrallinien, deren Beugungsbilder zu  $m = 1$  gehören.

**Spektrum 2. Ordnung** Die Menge der Spektrallinien, deren Beugungsbilder zu  $m = 2$  gehören.

Entsprechendes gilt für die höheren Ordnungen.

Das *Auflösungsvermögen* eines Gitters ist als die Zahl  $\lambda/|\Delta\lambda|$  definiert, wobei  $|\Delta\lambda|$  die kleinste, noch trennbare Wellenlängendifferenz ist. Damit ist

$$A = \frac{\lambda}{|\Delta\lambda|} = mN \quad (3.12.2)$$

Das Auflösungsvermögen ist proportional zur Zahl der beleuchteten Spalte  $N$ . Zum Beispiel braucht man, um die zwei Na-Linien bei 589 nm und bei 589.59 nm aufzulösen,

$$A = \frac{589 \text{ nm}}{589.59 \text{ nm} - 589 \text{ nm}} \approx 998$$



### 3.12.1. Blaze-Gitter

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 700])

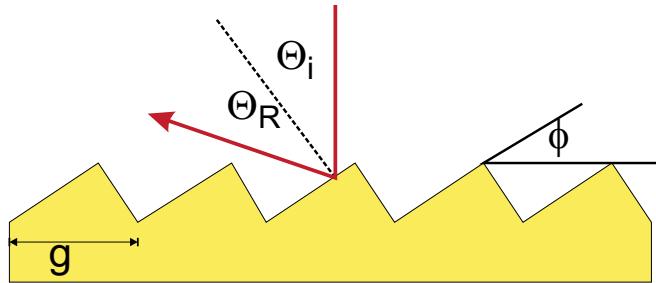


Abbildung 3.64.: Blaze-Gitter in Reflexion

Bei einem *Beugungsgitter*, bei dem alle Flächen senkrecht auf der einfallenden Strahlung stehen, wird der Hauptteil der Energie in die 0. Ordnung gebeugt. Für spektroskopische Zwecke ist das sinnlos, da die Wellenzerlegung bei Ordnungen grösser als null auftritt. Deshalb haben moderne Gitter eine bestimmte Oberflächenform („blaze“), wie in der Abbildung gezeigt. Dadurch wird die *Reflexion*, die die meiste Energie enthält, zu höheren Ordnungen verschoben.

Aus der Abbildung geht hervor, dass der reflektierte Strahl mit der Einfallsrichtung den Winkel  $2\phi$  bildet, da ja  $\Theta = \phi$  gilt. Dieser Winkel soll einer bestimmten Ordnung  $m$  der Interferenz entsprechen. Also muss gelten:

$$\sin 2\phi = m\lambda \quad (3.12.3)$$

oder

$$\phi = \frac{1}{2} \arcsin (m\lambda/g) \quad (3.12.4)$$



### Versuch zur Vorlesung:

Auflösung eines Gitters (Versuchskarte O-124)



## 3.12.2. Hologramme

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 925]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1137])  
 (Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 526])



### Versuch zur Vorlesung:

Herstellung von Hologrammen (Versuchskarte O-070)



### Versuch zur Vorlesung:

Hologramm einer Elektrolokomotive (Versuchskarte O-014)

### Versuch zur Vorlesung:

Hologramm eines Baggers (Versuchskarte O-069)

Die *Holographie* speichert die Phaseninformation eines Lichtfeldes in einer fotografischen Schicht. Sie wurde von *Dennis Gabor* 1947 zum ersten Male beschrieben. Um die Phaseninformation aufzuzeichnen ist es notwendig, die Interferenz des aufzuzeichnenden Lichtfeldes mit einem Referenzlichtfeld aufzuzeichnen.

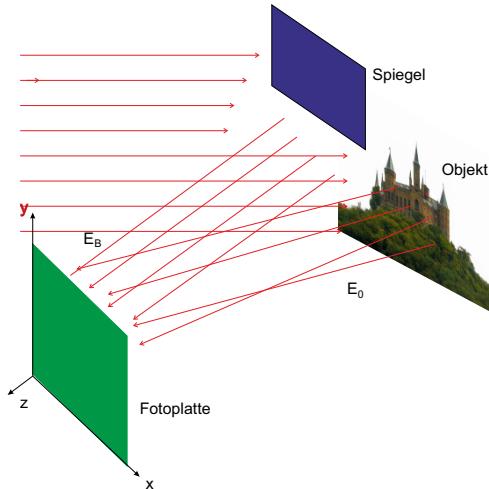


Abbildung 3.65.: Aufzeichnung eines Hologramms

Bei der Aufzeichnung des Hologramms wird eine möglichst monochromatische Lichtquelle, also zum Beispiel ein Laser auf zwei Pfade aufgeteilt. Der eine Pfad beleuchtet das Objekt, dessen gestreutes Licht mit der Amplitude  $|E_{0i}|$  die Fotoplatte beleuchtet. Der zweite Strahl wird über ein Spiegelsystem als Referenzstrahl  $E_B$  auf die Fotoplatte gebracht, deren Ebene mit  $\Sigma_H$  bezeichnet wird und die identisch mit der Ebene  $z = 0$ , also der  $xy$ -Ebene ist. Auf dem Hologramm wird die Intensitätsverteilung  $I(x, y)$  resultierend aus der Interferenz von  $E_B$  und  $|E_{0i}|$  in eine dazu proportionale Schwärzung umgewandelt.

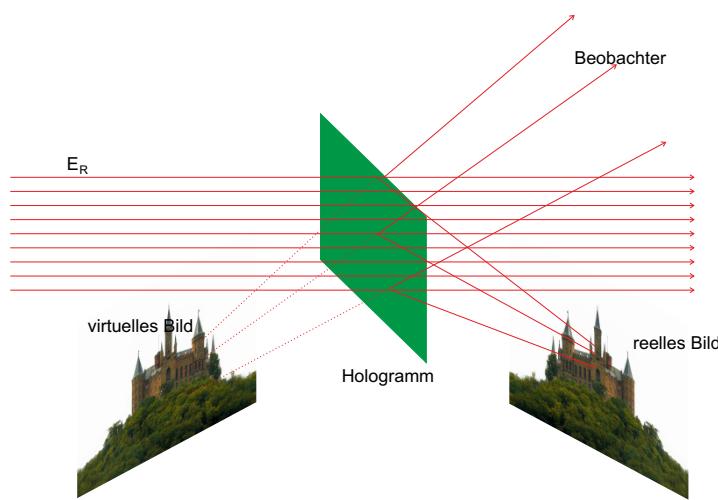


Abbildung 3.66.: Auslesen eines Hologramms

Das Hologramm in der  $\Sigma_H$ -Ebene wird anschliessend mit monochromatischem Licht der gleichen Wellenlänge,  $E_R$  beleuchtet. Es entstehen drei Strahlen, nämlich

**den ungebeugten Strahl** Dieser Strahl hat zwar eine geringere *Intensität*, kann aber so nicht ausgewertet werden.

**einen gebeugten Strahl mit negativer Phase** Dieser Strahl erzeugt das reelle Bild, das aber dem Betrachter tiefenverkehrt erscheint.

**einem gebeugten Strahl mit positiver Phase** Dieser Strahl, mit einer Kamera aufgenommen, erzeugt auf der Bildebene der Kamera ein Intensitätsmuster, wie wenn der Gegenstand noch vorhanden wäre. Dieses tiefenrichtige Bild heisst virtuelles Bild.

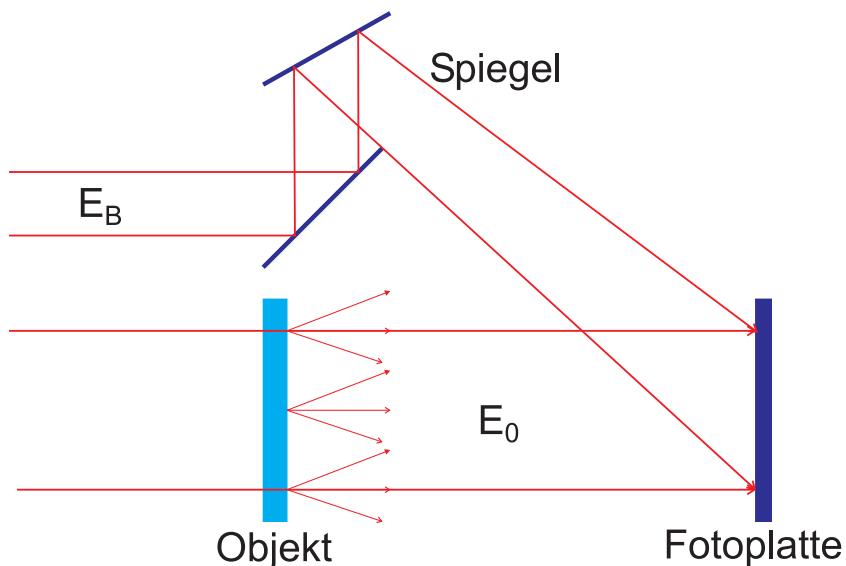


Abbildung 3.67.: Schematischer Aufbau von Hologrammen

Die Berechnung dieser Effekte beginnt mit dem Referenzstrahl  $E_B$

$$E_B(x, y) = E_{0B} \cos[\omega t + \phi(x, y)] \quad (3.12.5)$$

Dabei ist  $\phi(x, y)$  die örtlich variierende Phase, da  $E_B$  nicht senkrecht auf  $\Sigma_B$  fällt. Bei einer ebenen Welle, die mit dem Winkel  $\Theta$  zur Senkrechten auf die Hologrammebene fällt wäre

$$\phi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \Theta = kx \sin \Theta \quad (3.12.6)$$

Die vom Objekt gestreute Welle ist

$$|\mathbf{E}_{0i}|(x, y) = E_{00}(x, y) \cos[\omega t + \phi_0(x, y)] \quad (3.12.7)$$

wobei sowohl  $E_{00}(x, y)$  und  $\phi_0(x, y)$  komplizierte Funktionen des Ortes sind. Die

Intensität in der Hologrammebene  $\Sigma_H$  ist durch

$$I(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \left\langle (E_B(x, y) + |\mathbf{E}_{0i}|(x, y))^2 \right\rangle_T \quad (3.12.8a)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \left\langle E_{0B}^2 \cos^2(\omega t + \phi(x, y)) \right. \quad (3.12.8b)$$

$$\left. + E_{00}^2(x, y) \cos^2(\omega t + \phi_0(x, y)) \right\rangle_T \quad (3.12.8c)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \left\langle \frac{E_{0B}^2}{2} (\cos(2\omega t + 2\phi(x, y)) - 1) \right. \quad (3.12.8c)$$

$$\left. + 2 \frac{E_{0B} E_{00}(x, y)}{2} (\cos(\phi(x, y) - \phi_0(x, y)) + \cos(2\omega t + \phi(x, y) + \phi_0(x, y))) \right. \\ \left. + \frac{E_{00}^2(x, y)}{2} (\cos(2\omega t + 2\phi_0(x, y)) - 1) \right\rangle_T \quad (3.12.8c)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \frac{E_{0B}^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \frac{E_{00}^2(x, y)}{2} \quad (3.12.8d)$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_{0B} E_{00}(x, y) \cos(\phi(x, y) - \phi_0(x, y))$$

gegeben<sup>4</sup>. Durch die Mittelung über  $t$  fallen alle Integrale über lineare Winkelfunktionen weg.

Der Kontrast, gegeben durch  $\nu = (I_{max} - I_{min})/(I_{max} + I_{min})$  ist

$$\nu = \frac{2E_{0B}E_{00}}{E_{0B}^2 + E_{00}^2} \quad (3.12.9)$$

Die Schwärzung der holografische Emulsion soll proportional zu  $I(x, y)$  sein. Indem wir mit der Rekonstruktionswelle

$$E_R(x, y) = E_{0R} \cos(\omega t + \phi(x, y)) \quad (3.12.10)$$

das Hologramm beleuchten, erhalten wir eine Amplitudenverteilung gerade hinter dem Hologramm proportional zu  $I(x, y)E_R(x, y)$ . Ohne konstante Faktoren ist das

---

<sup>4</sup>Wir haben dabei  $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) - 1)$  und  $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$  verwendet.

Resultat unter Verwendung des rechentrick aus Gleichung (3.12.8d)

$$E_F(x, y) \propto \left( \frac{E_{0B}^2 + E_{00}^2}{2} + E_{0B}E_{00}(x, y) \cos(\phi(x, y) - \phi_0(x, y)) \right) \quad (3.12.11a)$$

$$\begin{aligned} & \cdot E_{0R} \cos(\omega t + \phi(x, y)) \\ & = \frac{E_{0R}(E_{0B}^2 + E_{00}^2(x, y)) \cos(\omega t + \phi(x, y))}{2} \end{aligned} \quad (3.12.11b)$$

$$\begin{aligned} & + E_{0R}E_{0B}E_{00}(x, y) \cos(\phi(x, y) - \phi_0(x, y)) \cos(\omega t + \phi(x, y)) \\ & = \frac{E_{0R}(E_{0B}^2 + E_{00}^2(x, y)) \cos(\omega t + \phi(x, y))}{2} \end{aligned} \quad (3.12.11c)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{E_{0R}E_{0B}E_{00}(x, y)}{2} \cos(\phi(x, y) - \phi_0(x, y) - (\omega t + \phi(x, y))) \\ & + \frac{E_{0R}E_{0B}E_{00}(x, y)}{2} \cos(\phi(x, y) - \phi_0(x, y) + (\omega t + \phi(x, y))) \\ & = \frac{E_{0R}(E_{0B}^2 + E_{00}^2(x, y))}{2} \cos(\omega t + \phi(x, y)) \end{aligned} \quad (3.12.11d)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{E_{0R}E_{0B}E_{00}(x, y)}{2} \cos(\omega t + \phi_0(x, y)) \\ & + \frac{E_{0R}E_{0B}E_{00}(x, y)}{2} \cos(\omega t + 2\phi(x, y) - \phi_0(x, y)) \end{aligned}$$

Wie oben diskutiert existieren drei Terme.

- $\frac{1}{2}(E_{0B}^2 + E_{00}^2(x, y))E_{0R}$ : die amplitudenmodulierte Rekonstruktionswelle
- $\frac{1}{2}E_{0R}E_{0B}E_{00}(x, y) \cos[\omega t + 2\phi(x, y) - \phi_0(x, y)]$ : Die tiefenverkehrte Welle mit negativer Phase, die das reelle Bild erzeugt.
- $\frac{1}{2}E_{0R}E_{0B}E_{00}(x, y) \cos[\omega t + \phi_0(x, y)]$ : Die rekonstruierte Welle.

Durch den schrägen Einfall der Referenz- und der Rekonstruktionswelle werden virtuelles und reelles Bild getrennt.

Hologramme mit ebenen Wellen als Referenz- und Rekonstruktionswellen haben eine beschränkte Auflösung. Dies ist ersichtlich bei der Betrachtung des Hologramms einer punktförmigen Quelle. Die Interferenz zwischen einer ebenen Welle und einer Kugelwelle ergibt das gleiche Muster wie das *Beugungsmuster* an einer kreisförmigen Öffnung. Dort und auch hier nimmt der Abstand der Beugungsmaxima nach aussen ab. Indem das Hologramm mit Licht etwa der gleichen Krümmung wie die Objektwelle beleuchtet wird kann diese Abnahme vermieden werden (Fourier-Holographie).

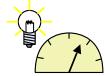
Neben den besprochenen flächigen Hologrammen gibt es auch *Volumenhologramme*. Dort wird ein dreidimensionales *Beugungsgitter* analog zu einem Kristall erzeugt. Diese Hologramme können auch mit weissem Licht beleuchtet werden.

Durch die Überlagerung zweier Hologramme können interferometrische Messungen der Verschiebung von Objekten im  $\mu\text{m}$ -Bereich durchgeführt werden.



## 3.13. Beugung und Auflösung

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 327, 694, 703]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1132]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 488])



### Versuch zur Vorlesung:

Auflösungsvermögen eines Mikroskops (Versuchskarte O-001)

Wir verwenden die Tatsache, dass optische Systeme in den einfachsten Fällen lineare Systeme sind und verwenden die in Abschnitt 3.3.3 eingeführte Fouriertransformation, hier aber in zwei Dimensionen. Wenn  $f(x, y)$  und  $g(x, y)$  Intensitätsverteilungen senkrecht zur optischen Achse sind, und  $f$  die Ausgangsverteilung und  $g$  die Bildverteilung ist, schreibt man für die Abbildung

$$f(x, y) \rightarrow g(x, y) \quad (3.13.1)$$

Die Abbildung ist linear, das heisst, wenn  $f_1 \rightarrow g_1$  und  $f_2 \rightarrow g_2$  ist, ist

$$a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 \rightarrow a_1 \cdot g_1 + a_2 \cdot g_2 \quad (3.13.2)$$

Wir nennen  $\hat{f}(u, v)$  die Fouriertransformation von  $f(x, y)$ . Im Zusammenhang mit der Fourieroptik ist die Bezeichnung  $\hat{f}(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u})$  üblich, also keine Grossbuchstaben wie oftmals verwendet. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \iint \hat{f}(u, v) e^{2\pi i[ux+vy]} dudv \\ \hat{f}(u, v) &= \iint f(x, y) e^{-2\pi i[ux+vy]} dx dy \end{aligned} \quad (3.13.3)$$

Wir schreiben  $\mathbf{x} = (x, y)$  und  $\mathbf{u} = (u, v)$ . Die Fouriertransformation lässt sich dann kompakt schreiben als

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \iint \hat{f}(\mathbf{u}) e^{2\pi i[\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}]} d\mathbf{u} \\ \hat{f}(\mathbf{u}) &= \iint f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i[\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}]} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.13.4)$$



### 3.13.1. Impulsantwort und Faltungssatz

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 765])



### Versuch zur Vorlesung:

Fourier-Transformation (Versuchskarte O-067)

Ein Lichtfleck an der Position  $\mathbf{x}'$  der Eingangsebene erzeugt eine Intensitätsverteilung in der Ausgangsebene, die sowohl vom Beobachtungspunkt  $\mathbf{x}$  wie auch von  $\mathbf{x}'$  abhängt. Die Impulsantwort ist

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (3.13.5)$$

Ein optisches System ist translationsinvariant, wenn

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = h(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$
 (3.13.6)

gilt. Bei einem kontinuierlichen linearen optischen System gilt zwischen der Bildebene und der Eingangsebene die Beziehung

$$g(\mathbf{x}) = \int \int f(\mathbf{x}') h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) \star h(\mathbf{x})$$
 (3.13.7)

Dies ist das *Faltungstheorem* (Siehe auch Gleichung (3.10.3)) aus der *Fourieroptik*. Im Fourierraum wird aus einer Faltung eine Multiplikation, also

$$\hat{g}(\mathbf{u}) = \hat{h}(\mathbf{u}) \hat{f}(\mathbf{u})$$
 (3.13.8)

Wenn die optische Übertragung kohärent verläuft, dann verwendet man die oben definierte kohärente Übertragungsfunktion, die **Amplituden** verknüpft. Ist die Übertragung nicht kohärent, muss man mit Intensitäten rechnen.

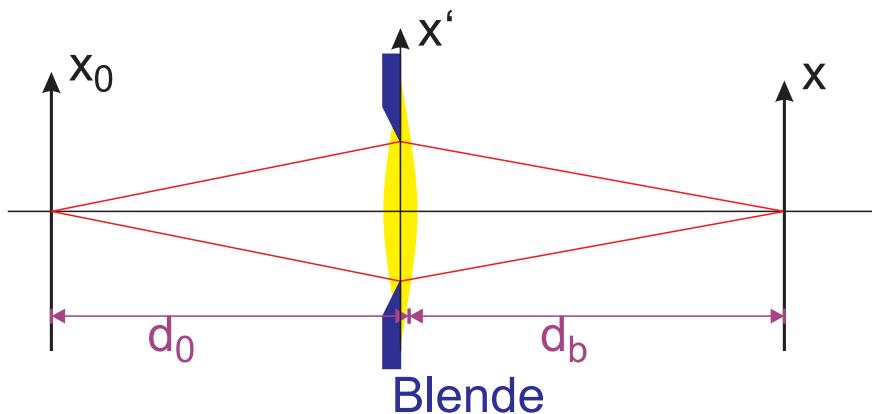


Abbildung 3.68.: Berechnung der Beugung an einer Öffnung

Das entstehende Beugungsbild eines Punktes ist das Fraunhofersche *Beugungsmuster* der Blendenöffnung. Die inkohärente Impulsantwort wird

$$H_d(x, y) = \frac{1}{\lambda^2 d_b^2} \left| \iint P(x', y') e^{-2\pi i \left( \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{\lambda d_b} \right)} dx' dy' \right|^2$$
 (3.13.9)

Dies bedeutet, dass  $H_d$  proportional zum Betragsquadrat der Fouriertransformation der Pupillenfunktion  $P$  ist.

Für eine kreisförmige Öffnung ist die Pupillenfunktion

$$P(x', y') = \begin{cases} 1 & \text{für } r' \leq D/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
 (3.13.10)

wobei  $D$  den Durchmesser der Öffnung und  $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$  den Radius darstellt. Die Rechnung ist in Polarkoordinaten einfacher.

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ \Theta' &= \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right) \end{aligned} \quad (3.13.11)$$

sowie in der Bildebene

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \Theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (3.13.12)$$

Mit  $\rho_b = r/(\lambda d_b)$  bekommt man

$$\begin{aligned} \hat{P}(\rho_b) &= \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i \rho_b r' (\cos \Theta' \cos \Theta + \sin \Theta' \sin \Theta)} r' dr' d\Theta' \\ &= \int_0^{D/2} r' dr' \left\{ \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i \rho_b r' \cos(\Theta' - \Theta)} d\Theta' \right\} \end{aligned} \quad (3.13.13)$$

Dabei ist die Grösse

$$J_0(2\pi\rho_b r') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i \rho_b r' \cos(\Theta' - \Theta)} d\Theta' \quad (3.13.14)$$

die sogenannte *Besselfunktion nullter Ordnung*. Die Fouriertransformation einer *runden Pupille* wird also

$$\begin{aligned} \hat{P}(\rho_b) &= \int_0^{D/2} 2\pi r' J_0(2\pi\rho_b r') dr' \\ &= \frac{1}{2\pi\rho_b^2} \int_0^{\pi\rho_b D} \omega J_0(\omega) d\omega \\ &= \frac{\pi\rho_b D}{2\pi\rho_b^2} J_1(\pi\rho_b D) \\ &= \frac{D}{2\rho_b} J_1(\pi\rho_b D) \end{aligned} \quad (3.13.15)$$

$J_1(\alpha) = \int_0^\alpha \omega J_0(\omega) d\omega$  ist die Besselfunktion erster Ordnung. Mit  $r = \lambda d_b \rho_b$ ,  $\Theta$  und  $S = \pi D^2/4$ , der Pupillenfläche, bekommt man für die komplexe *Amplitude*

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \hat{P}(\rho_b) = S \left[ \frac{2J_1(\pi\rho_b D)}{\pi\rho_b D} \right] \\ I(r) &= K |\psi(r)|^2 = KS^2 \left[ \frac{2J_1(\pi\rho_b D)}{\pi\rho_b D} \right]^2 \end{aligned} \quad (3.13.16)$$

Die Intensitäten als Funktion von  $X = \rho_b D$  sind

$X$	0	1.22	1.63	2.33	2.68	3.33
$[2J_1(\pi X)/(\pi X)]^2$	1	0	0.017	0	0.004	0

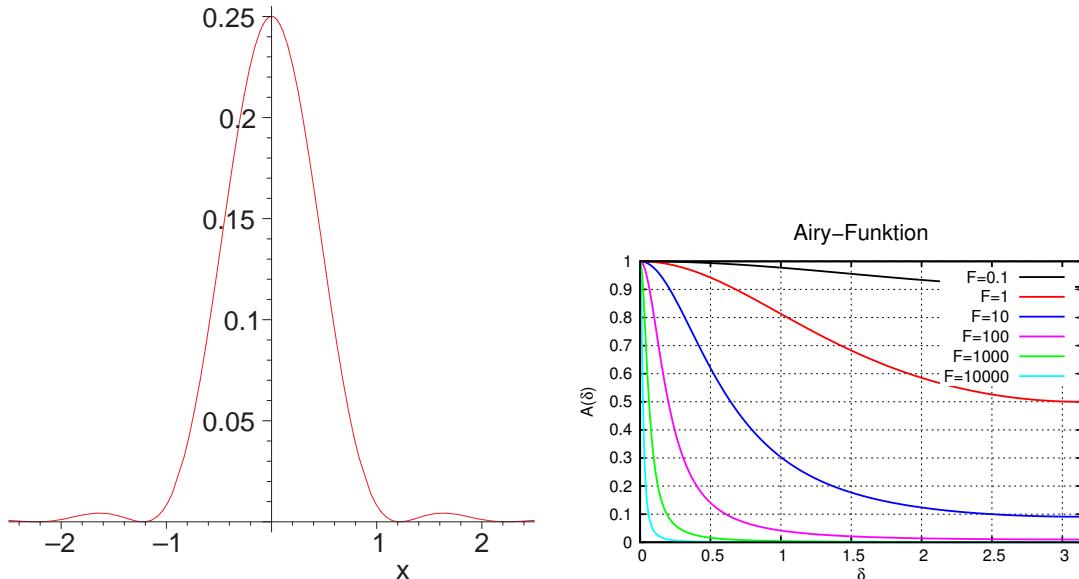
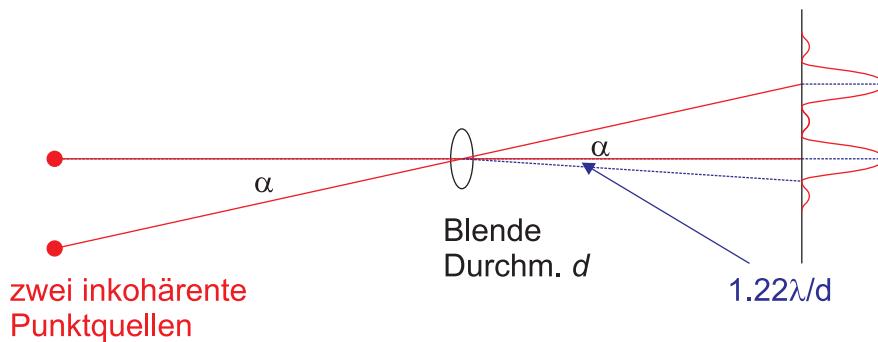


Abbildung 3.69.: Die Beugung an einer ringförmigen Apertur.

Bei der Beugungsfigur an einer kreisförmigen Öffnung mit dem Durchmesser  $d$  ist das erste Minimum bei  $\sin \Theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}$ .

Abbildung 3.70.: Abbildung zweier punktförmiger, inkohärenter Quellen durch eine Blende mit der Öffnung  $d$ .

Bei dem sogenannten kritischen Winkel  $\alpha_K$ , der durch

$$\sin \alpha_K = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (3.13.17)$$

gegeben ist, fällt das Minimum der einen Beugungsfigur gerade auf das Maximum der anderen. Das obige Kriterium wird das *Rayleighsche Auflösungskriterium* genannt.

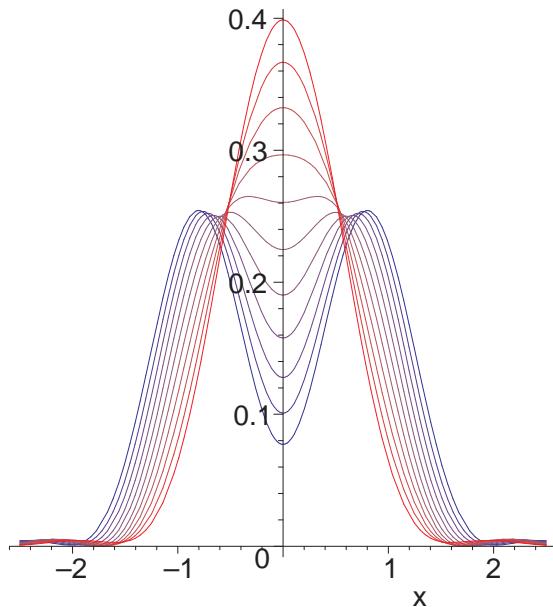


Abbildung 3.71.: Form der *Intensität* bei der Überlagerung zweier inkohärenter *Punktquellen*. Der Abstand variiert von 0.6 (rot) bis 1.6 (blau) in Schritten von 0.1.

Diese Abbildung zeigt, dass die Definition des *Auflösungsvermögens* an das mögliche *Signal-Rausch-Verhältnis* gebunden ist. Mit modernen Detektoren mit 16 Bit Auflösung sind deshalb leicht bessere *Grenzen der Auflösung* möglich.

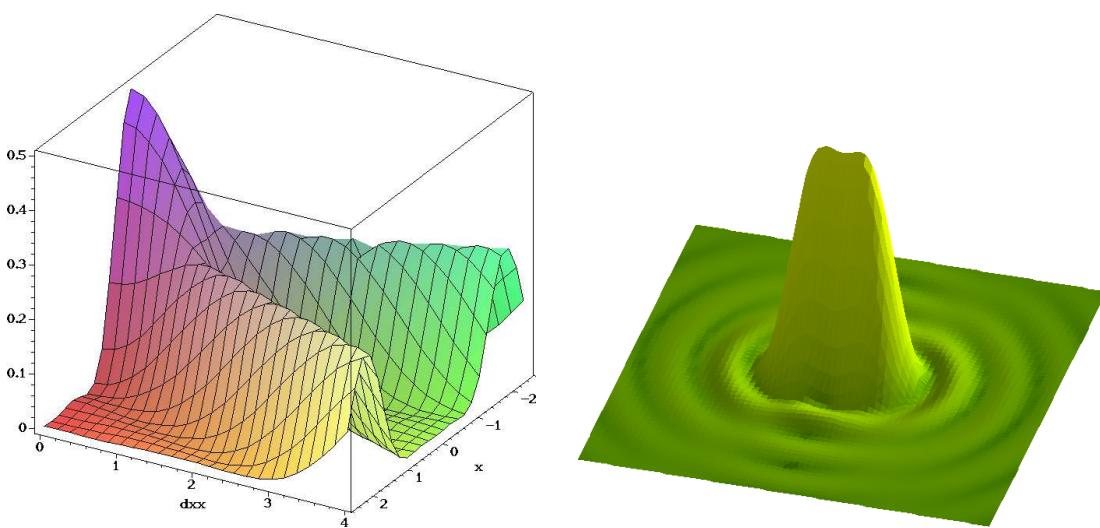


Abbildung 3.72.: Querschnitt zweier inkohärenter *Punktquellen* als Funktion des Abstandes (links) und Bild der Intensitätsverteilung bei einem Abstand von 1.

Wenn das zu untersuchende Objekt in ein Medium mit dem *Brechungsindex*  $n$  eingebettet ist, dann verbessert sich die Auflösung auf  $\sin \alpha_K = 1.22 \frac{\lambda}{n \cdot d}$ , da in diesem Medium die Wellenlänge ja  $\lambda' = \lambda/n$  ist.

# 4. Geometrische Optik und Wellenoptik

## 4.1. Reflexion



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 153]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 20]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1030])



**Versuch zur Vorlesung:**  
Optische Scheibe (Versuchskarte O-046)

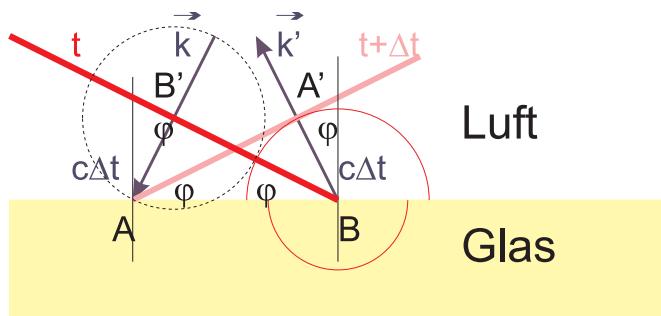


Abbildung 4.1.: Geometrie der *Reflexion*

Wir betrachten eine Welle, die sich mit dem *Wellenvektor*  $\mathbf{k}$  auf die Grenzfläche Luft-Glas hin bewegt. Eingezeichnet ist rot der Wellenberg, der durch  $B'$  zur Zeit  $t$  geht. Dieser Wellenberg berührt die Grenzfläche in  $B$ . An beiden Orten wird eine Huygenssche *Elementarwelle* (Siehe Abschnitt 3.4) ausgelöst. Nach der Zeit  $\Delta t$  hat der Wellenberg, der zur Zeit  $t$  durch  $B'$  ging,  $A$  erreicht. Nach dem Huygensschen Prinzip (Siehe Abschnitt 3.4) hat auch die in  $B'$  startende *Elementarwelle*  $A$  erreicht. Die *Elementarwelle* aus  $B$  ist nun bei  $A'$ . Da wir keine Annahme über Zeiten und Abstände gemacht haben, muss diese *Elementarwelle* Teil eines konstruktiv überlagernden Systems von Elementarwellen sein, die eine zweite ebene Welle mit dem *Wellenvektor*  $\mathbf{k}'$  erzeugen. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit für die beiden Elementarwellen gleich ist, da die Verbindungsstrecken  $\overline{B'A}$  und  $\overline{BA'}$  gleich lang sind und beide Teile eines rechtwinkligen Dreiecks sind, müssen alle Winkel gleich sein. Deshalb ist der Neigungswinkel von  $\mathbf{k}'$  zur Senkrechten gleich dem Neigungswinkel von  $\mathbf{k}$  zur Senkrechten. Es folgt das Reflexionsgesetz

Bei der *Reflexion* gilt:  
**Einfallswinkel=Ausfallswinkel**

In einem Medium bewegt sich Licht langsamer: die Lichtwelle regt die gebundenen Elektronen zum Schwingen an. Diese erzeugen Huygenssche Elementarwellen (Siehe Abschnitt 3.4), aber mit einer Phasenverschiebung oder, in anderen Worten, einer Zeitverzögerung. Dies bedeutet, dass Licht sich langsamer ausbreitet. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht im Medium ist

$$c_m = \frac{c}{n} \quad (4.1.1)$$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und  $n$  der *Brechungsindex* des Mediums ist<sup>1</sup>. Die Brechzahl  $n$  gibt an, um wieviel langsamer Licht in einem Medium ist als im Vakuum. Die *Intensität* ist gegeben durch

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E^2 = \frac{n \epsilon_0 c}{2} E^2 \quad (4.1.2)$$

wenn  $E$  das elektrische Feld, d.h. die Amplitude der Lichtwelle ist.  $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{AS}{Vm}$  ist die *Dielektrische Feldkonstante* und  $c = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Der Vorfaktor  $\frac{1}{2}$  kommt von der Mittelung über viele Wellen her. Gleichung (4.1.2) kann auch so geschrieben werden:

$$I = n E^2 \cdot 1.3272 \cdot 10^{-3} \frac{A}{V} \quad (4.1.3)$$

Bei senkrechtem Einfall ist die *Intensität* des reflektierten Lichtes (ohne Beweis)

$$I = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 I_0 \quad (4.1.4)$$

Dabei sind  $n_1$  und  $n_2$  die Brechzahlen der beiden Medien und  $I_0$  die einfallende *Intensität*. Bei  $n_1 = 1$  (Luft) und  $n_2 = 1.33$  (Wasser) ist  $I/I_0 = 0.02$ . Für  $n_2 = 1.5$  (Glas) ist  $I/I_0 = 0.04$  und für  $n_2 = 2.5$  (etwa Diamant) ist  $I/I_0 = 0.18$ . Bei  $n_2 = 3.5$  ist  $I/I_0 = 0.31$ !

Bei zwei Medien mit unterschiedlichen Brechzahlen heisst dasjenige das **optisch dichtere Medium**, dessen Brechzahl grösser ist.



## 4.2. Brechung

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 166]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 20]) (Siehe Tippler, Physik [TM04, pp. 1032])



**Versuch zur Vorlesung:**  
Optische Scheibe (Versuchskarte O-046)

---

<sup>1</sup>Es ist auch  $n = \sqrt{\epsilon}$ , wobei  $\epsilon$  die relative Dielektrizitätszahl bei der Frequenz des Lichtes ist

Da jede *Huygenssche Elementarwelle* eine periodische Schwingung mit einer gegebenen Frequenz  $\nu$  darstellt, ändert sich die Frequenz beim Übergang von einem Medium in das zweite nicht. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_m = c/n$  kleiner ist, gilt für die *Wellenlänge*

$$\lambda_m = \frac{c_m}{\nu} = \frac{c/n}{\nu} = \frac{\lambda}{n} \quad (4.2.1)$$

In einem Medium mit einer *Brechzahl*  $n > 1$  ist die Wellenlänge kleiner. So hat rotes Licht  $\lambda = 600 \text{ nm}$  in Glas die Wellenlänge  $\lambda_m = 400 \text{ nm}$ .

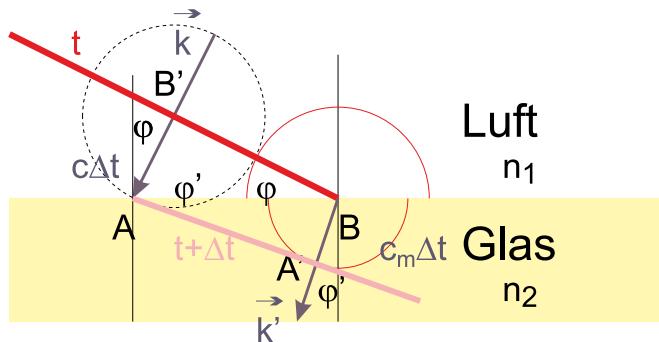


Abbildung 4.2.: Geometrie der Brechung

Wir betrachten nun den Weg, den das Licht im Inneren eines Mediums zurücklegt. Wir berücksichtigen, dass die Geschwindigkeit im Medium um den *Brechungsindex*  $n$  kleiner ist. Aus dem rechtwinkligen Dreieck wissen wir, dass

$$\begin{aligned} \overline{AB} \sin \phi &= \overline{AB'} \\ \overline{AB} \sin \phi' &= \overline{BA'} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \overline{AB'} &= \frac{c\Delta t}{n_1} \\ \overline{BA'} &= \frac{c\Delta t}{n_2} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Also gilt

$$\frac{c\Delta t}{n_1 \sin \phi} = \frac{c\Delta t}{n_2 \sin \phi'} \quad (4.2.4)$$

Wir kürzen mit  $c\Delta t$  und setzen  $\phi = \phi_1$  und  $\phi' = \phi_2$  und erhalten das **Snelliussche Brechungsgesetz**.

### Brechungsgesetz

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2 \quad (4.2.5)$$

Bei diesem Gesetz gibt es nur dann immer eine Lösung, wenn  $n_1 \leq n_2$  ist. Sonst gibt es den Winkel der *Totalreflexion*. Wenn der vom optisch dichteren Medium einfallende Lichtstrahl gegen die Grenzflächennormale den Winkel  $\phi_{tot}$  hat und der Winkel des resultierenden Lichtstrahls gegen die Grenzflächennormale im optisch dünneren Medium  $\pi/2$  ist, hat das Brechungsgesetz gerade noch eine reelle Lösung.

$$\phi_{tot} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \quad \text{mit } n_1 < n_2 \quad (4.2.6)$$

Für Winkel, die grösser als  $\phi_{tot}$  sind, wird Licht aus dem optisch dünneren Medium total reflektiert. Die *Reflexion* geschieht in einer Tiefe von etwa 100nm innerhalb des optisch dünneren Mediums.



### 4.2.1. Totalreflexion

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 191]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 21]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1035]) (Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 485])



**Versuch zur Vorlesung:**  
Brechung und Reflexion (Versuchskarte O-068)



**Versuch zur Vorlesung:**  
Wasserstrahl als Lichtleiter (Versuchskarte O-072)

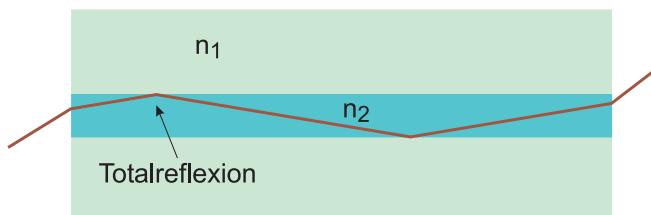


Abbildung 4.3.: Transport von Licht in einer Stufenindexfaser

Wenn Licht mit einem Winkel nahe der Achse der optischen Faser in diese eingekoppelt wird, dann wird das Licht mit *Totalreflexion* transportiert. Nur Licht, das innerhalb des Akzeptanzwinkels den Faserkern trifft, wird weiter transportiert. Wenn die Faser gekrümmmt wird, dann verlässt ein Teil des Lichtes die Faser: Krümmungen in der Faser erhöhen die Verluste.

Wenn der Faserkern den Durchmesser  $d$  hat, ist der effektive Weg vom Winkel  $\alpha$  gegen die Achse abhängig. Die Hypotenuse ist  $\ell_H = d / \sin \alpha$  lang, der direkte Weg wäre  $\ell = d / \tan \alpha$ . Die relative Längenänderung ist

$$\frac{\ell_H}{\ell} = \frac{d}{\sin \alpha} \frac{\tan \alpha}{d} = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \approx 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \quad (4.2.7)$$

Die Laufzeit hängt also davon ab, wie das Licht durch eine Glasfaser läuft. Zusätzlich tritt Dispersion (Siehe Abschnitt 6.6) auf. bei allen Gläsern ist

$$n_{blau} > n_{grün} > n_{gelb} > n_{rot} \quad (4.2.8)$$

Deshalb ist die Laufzeit für die verschiedenen Farben auch unterschiedlich. Da  $c_{Medium} = c/n_{Medium}$  ist ist auch

$$c_{blau} < c_{grün} < c_{gelb} < c_{rot} \quad (4.2.9)$$

## 4.3. Das Fermatsche Prinzip



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 166]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 13]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1042])

Eine alternative Art, die Ausbreitung von Licht zu beschreiben, ist das *Fermatsche Prinzip*. Es ist eines der vielen Extremalprinzipien, wie zum Beispiel auch die Wirkung in der theoretischen Mechanik. Alle diese Prinzipien beruhen auf der Variationsrechnung [AW95, pp 952-991]

Der Weg, den das Licht nimmt, um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, ist stets so, dass die benötigte Zeit minimal ist.

Die genauere Formulierung lautet:

Der Weg, den das Licht nimmt, um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, ist stets so, dass die Zeit, die das Licht benötigt, invariant gegen kleine Änderungen des Weges ist.

Mathematisch lautet das Fermatsche Prinzip: Die Zeit

$$t = \int_{s_1}^{s_2} \frac{n(s)}{c} ds = \frac{1}{c} \int_{s_1}^{s_2} n(s) ds \quad (4.3.1)$$

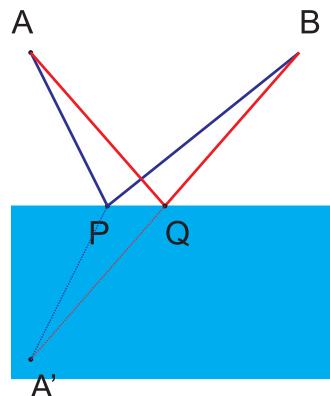
hat für jeden realisierten Lichtweg bezüglich einer Variation des Weges einen Extremalwert. Bei zwei- oder mehrmals stetig differenzierbaren Funktionen folgt auch der strengere Satz.

Wenn man den Weg nicht kennt, kann man Testfunktionen  $s(\mathbf{r})$  verwenden. Diejenige, die die kürzeste Zeit ergibt, ist die wahrscheinlichste.



### 4.3.1. Reflexion

(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1042])

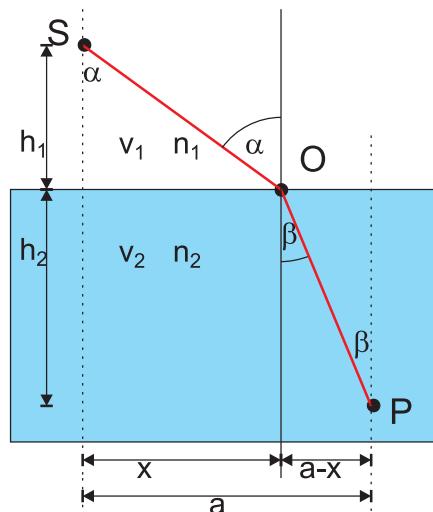
Abbildung 4.4.: Begründung des Reflexionsgesetzes mit dem *Fermatschen Prinzip*

Ein Beispiel für das Fermatsche Prinzip ist die *Reflexion*. In der obigen Zeichnung ist  $A'$  das an der Grenzfläche gespiegelte Bild von  $A$ . In dem Dreieck  $A'BP$  ist die Summe der Seitenlängen  $A'P$  und  $PB$  grösser als die Seitenlänge  $A'B$ . Da die Konstruktion mit  $A'$  eine Hilfskonstruktion ist und wir überall die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  haben, ist die direkte Verbindung  $A'B$  die kürzeste Strecke zwischen den beiden Punkten. Damit ist aber das Gesetz **Einfallswinkel = Ausfallswinkel** gezeigt.



### 4.3.2. Brechung

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 166]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1043])

Abbildung 4.5.: Anwendung des Fermatschen Prinzips auf die Berechnung des *Brechungsgesetzes*

Zur Berechnung des Brechungsgesetzes nehmen wir an, dass das Licht von  $S$  (gegeben) über  $O$  (verschiebbar, Koordinate  $x$ ) nach  $P$  (gegeben) sich ausbreitet. Die Zeit, um von  $S$  nach  $P$  ist

$$t_{SP} = t_{S0} + t_{0P} \quad (4.3.2)$$

Diese Zeit soll extremal sein, das heisst

$$\frac{\partial t_{SP}}{\partial x} = 0 \quad (4.3.3)$$

Nun ist

$$t_{SP} = \frac{\overline{S0}}{v_1} + \frac{\overline{OP}}{v_2} \quad (4.3.4)$$

Nach der obigen Skizze ist

$$\begin{aligned}\overline{S0} &= \sqrt{x^2 + h_1^2} \\ \overline{OP} &= \sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}\end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Also ist

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial t_{SP}}{\partial x} = \frac{1}{2v_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} \cdot 2x - \frac{1}{2v_2} \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}} \cdot 2(a-x) \\ &= \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{(a-x)}{v_2 \sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}}\end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Die Betrachtung der in der Skizze auftretenden Dreiecke zeigt, dass

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} \\ \sin \beta &= \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}}\end{aligned} \quad (4.3.7)$$

ist. Mit  $v_1 = c/n_1$  und  $v_2 = c/n_2$  erhalten wir das *Brechungsgesetz* nach *Snellius*

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (4.3.8)$$

### 4.3.3. Das Fermatsche Prinzip und die Interferenz



(Siehe Känzig, Mechanik und Wellenlehre [Kän78, pp. 253])

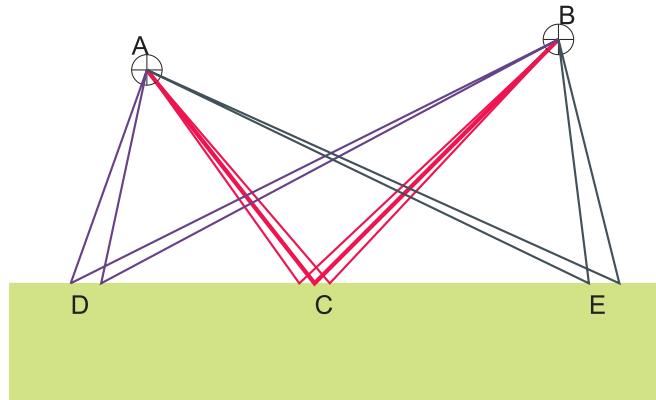


Abbildung 4.6.: Der kürzeste Weg  $\overline{ACB}$  und nahe benachbarte Wege haben fast gleiche Längen. Im Gegensatz dazu sind ändert sich bei den längeren Wegen  $\overline{ADB}$  und  $\overline{AEB}$  die Länge schnell.

Vom Punkte  $A$  soll Licht zum Punkte  $C$  gelangen. Es gibt viele mögliche Wege. nach dem Fermatschen Prinzip folgt Licht dem Weg, der sich am wenigsten in der optischen Länge<sup>2</sup> von seinen benachbarten Wegen unterscheidet. Wenn die Weglängenfunktion stetig differenzierbar ist, ist dies auch der kürzeste Weg. Wir berechnen nun die Phase einer Welle, die entlang eines beliebigen Weges sich ausbreitet, wobei  $w$  ein Parameter ist, der die möglichen Wege beschreibt.

Man nimmt an, dass alle Amplituden gleich sind und erhält

$$\begin{aligned} A_B(t) &= \sum_{\text{alle Wege } j} A e^{i(k s_j - \omega t)} \\ &= A e^{-i \omega t} \sum_{\text{alle Wege } j} e^{i k s_j} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Die verbleibende Summation wird auf graphischem Wege in der komplexen Ebene durchgeführt. Die im Punkte  $B$  beobachtete *Intensität* ist das **Resultat der Interferenz aller möglichen Wege**.

<sup>2</sup>Das ist die Länge, die mit dem *Brechungsindex* gewichtet ist.

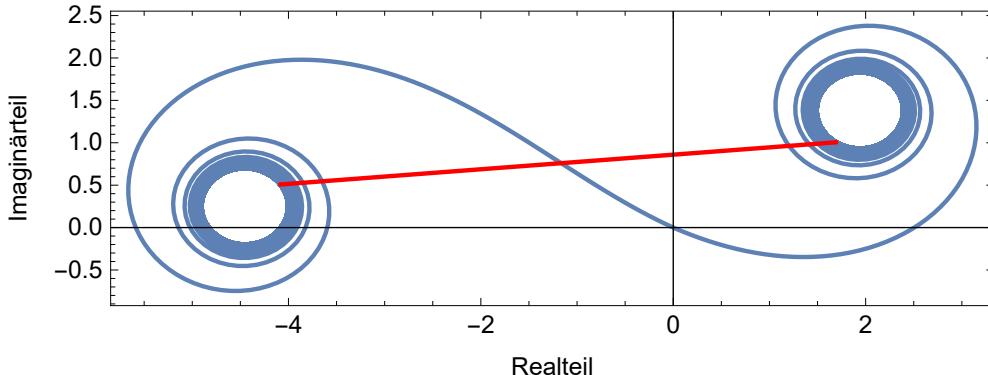


Abbildung 4.7.: Diese Darstellung zeigt grafisch die Summenbildung zur Berechnung der Interferenz für alle möglichen Wege. Die einzelnen Amplituden werden aufsummiert. Rot ist das Resultat dargestellt.

In dieser Abbildung tragen nur die Wege in der Nähe des kürzesten Weges zur konstruktiven Interferenz bei. Nur dort ist die Ableitung der Weglänge gegen den Parameter  $w$  null: Alle Summanden interferieren konstruktiv. Die Wege über  $D$  und  $E$  ändern die Länge schnell mit  $w$ . Sie bilden die beiden Spiralen auf der linken und auf der rechten Seite und tragen nichts zur Summe bei. Wir können das Fermatsche Prinzip auch so formulieren:

Die *Intensität* des Lichtes in  $B$  ausgehend von der Quelle  $A$  ist gegeben durch die Interferenz der Lichtstrahlen auf allen möglichen Wegen. Dabei interferieren alle Lichtstrahlen destruktiv, mit Ausnahme derjenigen, die wir bei der Lichtausbreitung beobachten.

In der Quantenelektrodynamik werden Prozesse durch das Aufsummieren aller möglichen Feynmanschen Diagramme berechnet. Nur wenige Diagramme tragen zum Resultat wesentliches bei, die anderen sind Korrekturen höherer Ordnung. Die Summe Feynmanschen Diagramme ist nichts anderes als das Fermatsche Prinzip angewandt auf die Quantenelektrodynamik.

## 4.4. Polarisation

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 475]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1044])



### Versuch zur Vorlesung: Polarisiertes Licht: Polarisator und Analysator

Die aus den Maxwellgleichungen abgeleiteten Wellengleichung (2.2.6) hat als Lösung transversale elektromagnetische Wellen. Licht ist eine elektromagnetische Welle, schwingt also transversal und hat deshalb als reine Welle auch eine Polarisationsrichtung. Das elektrische und das magnetische Feld schwingen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Aus der Wellengleichung für das elektrische Feld und damit auch für Licht folgt als Lösung  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \exp(i(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t))$ , sowie

die Bedingung

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (4.4.1)$$

Wenn wir nun, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, die Ausbreitungsrichtung der Welle in die x-Richtung legen, dann sind

- der Wellenvektor  $\mathbf{k} = (k; 0; 0)$
- und die Amplitude  $\mathbf{E}_0 = (0; E_y; E_z)$

Diese Wahl erfüllt die Bedingung der Transversalität.

Es gibt zwei mögliche orthogonale Orientierungen von  $\mathbf{E}_0$  sowie die daraus folgenden Linearkombinationen. Die Richtung, in die  $\mathbf{E}_0$  zeigt ist die **Polarisationsrichtung**.



#### 4.4.1. Polarisation durch Absorption (*Dichroismus*)



(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 323]) (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 487]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1044])

**Versuch zur Vorlesung:** Polarisiertes Licht: Polarisator und Analysator

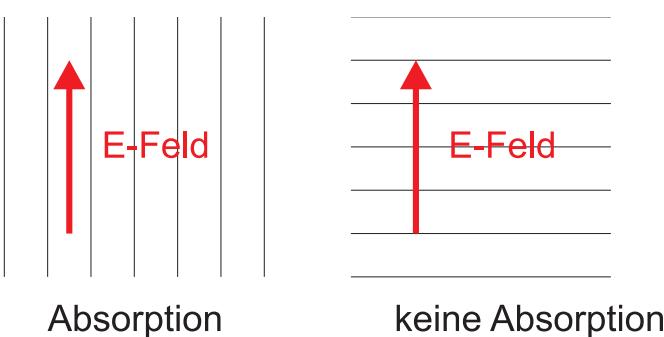


Abbildung 4.8.: Polarisation durch Absorption in einem Drahtpolarisator

Wenn das elektrische Feld einer Mikrowellen entlang eines Drahtes zeigt, kann dieses Feld im Draht Ladungen bewegen und so Energie abgeben. Die *Intensität* der Welle und damit die die Absorption hängen von der **Polarisation** ab.

Ebenso gibt es Moleküle mit Doppelbindungen zwischen den Kohlenstoffatomen, bei denen  $\pi$ -Elektronen beweglich sind, die wie Drähte wirken. Werden diese Moleküle orientiert zu einer Folie gemacht, so erhält man eine polarisierende Folie.

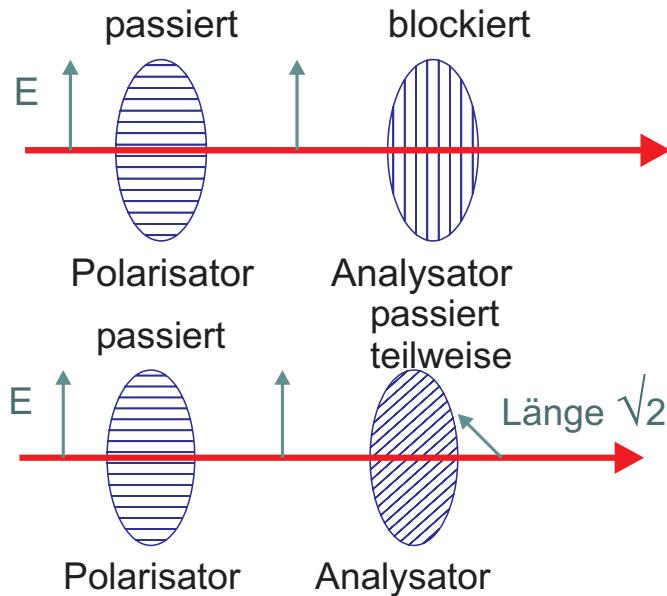


Abbildung 4.9.: Licht durch einen *Polarisator* und einen *Analysator* mit gekreuzten Polarisationsrichtungen. Darunter die gleiche Anordnung, aber der *Analysator* ist nun um  $\pi/4$  gedreht.

Bei einer Anordnung von *Analysator* und *Polarisator* polarisiert der *Polarisator* das Licht. Der *Analysator* lässt nur die Projektion des  $\mathbf{E}$ -Feldes auf seine Durchlassachse durch. Für die *Amplitude* gilt

$$E = E_0 \cos \theta \quad (4.4.2)$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen den Polarisationsrichtungen von *Polarisator* und *Analysator* ist. Da die *Intensität* durch  $I = \frac{n\epsilon_0 c}{2} E^2$  ist und somit proportional zum Quadrat der *Amplitude*  $I \propto E^2$ , gilt für die *Intensität*

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (4.4.3)$$

(Gesetz von Malus). Wenn zwischen gekreuzten Polarisatoren und Analysatoren eine optisch aktive Substanz eingebracht wird, kann mit dieser Anordnung die Grösse der optischen Aktivität gemessen werden<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Die Analyse von Spannungen in Bauteilen nachgebildet mit Plexiglas war eine wichtige Anwendung (heute gibt es Programme zur Finite-Elemente-Analyse)

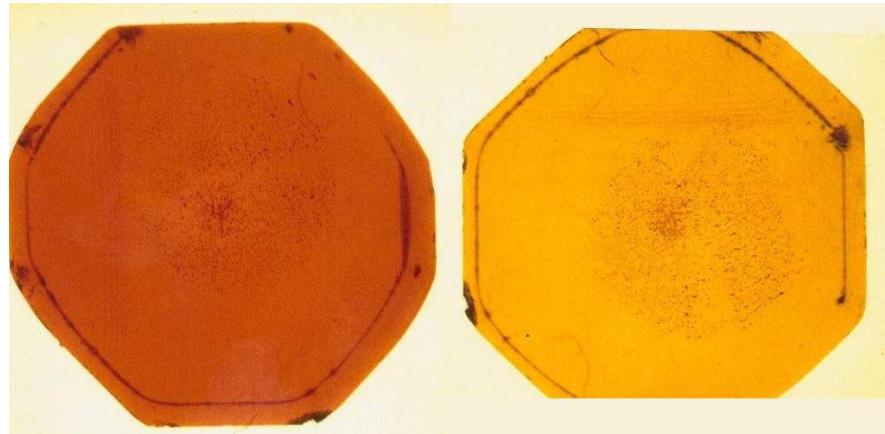


Abbildung 4.10.: Dichroismus in einem  $\text{NaVO}_4\text{Mn}$ -Kristall (gezüchtet von A. Lentz, photographiert von M. Pietralla).



#### 4.4.2. Polarisation durch Streuung

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 507]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1046])



**Versuch zur Vorlesung:**  
Sonnenuntergang ([Versuchskarte O-042](#))

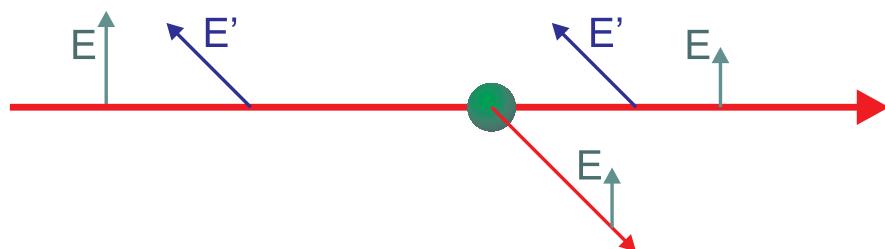


Abbildung 4.11.: Polarisation durch Streuung an einem Teilchen

Aus den Lösungen der Wellengleichung (2.2.6) folgt, dass Licht eine Transversale Welle ist. Wenn Licht von links auf ein streuendes Teilchen (z.B. ein Wassertröpfchen) fällt, dann kann nur die Komponente des  $\mathbf{E}$ -Feldes, die auch senkrecht zur Streurichtung steht, eine Lichtwelle anregen. Die dazu senkrechte Komponente würde eine propagierende, longitudinal polarisierte Welle erzeugen. Propagierende, longitudinale Lichtwellen stehen aber im Widerspruch zu den Maxwell'schen Gleichungen und treten deshalb nicht auf.

### 4.4.3. Polarisation durch Reflexion

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 509]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 320]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1047])



#### Versuch zur Vorlesung:

Spiegelanalysator (Versuchskarte O-115)

Der Brewsterwinkel ist eine Konsequenz der Stetigkeitsbedingungen elektrischer Felder, Gleichungen (2.3.27) und (2.3.28) für die s-Polarisation, beziehungsweise (2.3.33) und (2.3.28)

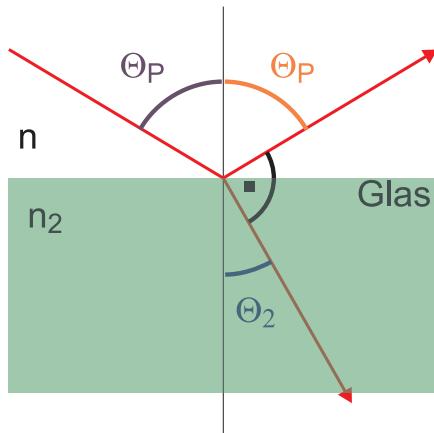


Abbildung 4.12.: Winkel bei der *Reflexion* unter dem *Brewster-Winkel*.

Wenn Licht in ein dichteres Medium eindringt und es zur Reflexion (Siehe Abschnitt 4.1) und zur Brechung kommt gelten zwei Gesetze

- Einfallswinkel = Ausfallswinkel (Impulserhaltung für die zur Grenzfläche tangentiale Komponenten des Lichtes)
- Das Gesetz von Snellius  $n \sin \theta_P = n_2 \sin \theta_2$

Wenn nun der Winkel zwischen dem gebrochenen Licht und dem reflektierten Licht  $\pi/2$  ist, haben wir wieder die Situation wie bei der Streuung: im reflektierten Licht kann keine Lichtwelle angeregt werden, deren Polarisationsrichtung ( $\mathbf{E}!$ ) in der durch den einfallenden und gebrochenen Lichtstrahl definierten *Einfallsebene* liegt. Das heisst, der reflektierte Strahl ist vollkommen polarisiert mit der Polarisierungsebene senkrecht zur *Einfallsebene*. Der Winkel  $\theta_P$  heisst nach seinem Entdecker *Brewster-Winkel*. Eine Betrachtung der Winkel in der Abbildung ergibt, dass  $\theta_P + \theta_2 = \pi/2$  ist. Damit wird der *Brewster-Winkel*

$$n \sin \theta_P = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \sin(\pi/2 - \theta_P) = n_2 \cos \theta_P \quad (4.4.4)$$

und damit

$$\tan \theta_P = \frac{n_2}{n} \quad (4.4.5)$$

Für Glas ( $n_2 = 1.5$ ) gegen Luft ( $n = 1$ ) ist  $\theta_P = \arctan(1.5) = 0.3128\pi = 56.31^\circ$ . Der *Brewster-Winkel* wird zum Beispiel beim Resonator von Gaslasern angewandt um die Polarisationsrichtung zu definieren.



#### 4.4.4. Polarisation durch Doppelbrechung

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 492]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 322]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1048])

Doppelbrechung ist eine Konsequenz der Maxwellgleichungen bei anisotropen optischen Medien, Medien also bei denen die relative Permittivität und/oder die relative Permeabilität tensorielle Eigenschaften haben.

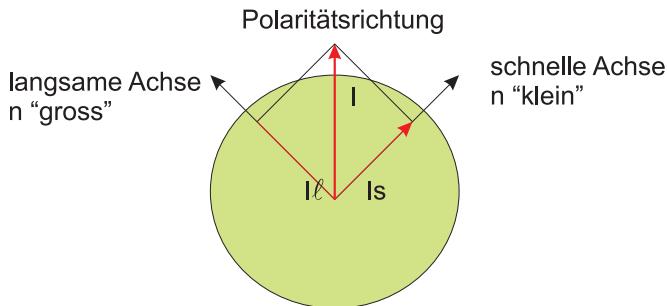


##### Versuch zur Vorlesung: Doppelbrechung (Versuchskarte O-005)

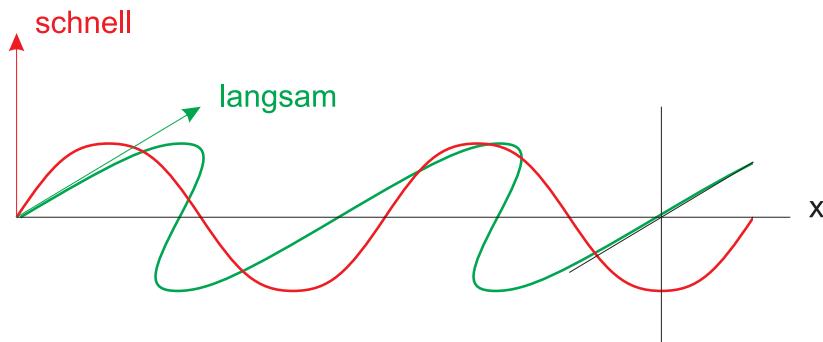
Viele Materialien haben isotrope optische Eigenschaften. Analog zu den elastomechanischen Eigenschaften von isotropen Materialien, die durch den Elastizitätsmodul  $E$  beschrieben werden, werden isotrope optische Materialien durch eine Brechzahl  $n = \varepsilon^2$  beschrieben. Die mechanischen Eigenschaften anisotroper Materialien werden durch Tensoren beschrieben. Analog werden optische Eigenschaften anisotroper Medien durch Tensoren  $\varepsilon$  oder  $n$  beschrieben. Die Mathematik sagt, dass solche Tensoren in einem *Hauptachsensystem* nur Komponenten auf ihren Hauptdiagonalen haben. Für den *Brechungsindex* heisst dies, dass nicht einer,  $n$  sondern drei Indizes  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  angegeben werden müssen.

Material	Anwendung
Kalkspat	<i>Differenz-Interferenz-Kontrast-Objektive</i>
Quarz	
Flüssigkristalle	Anzeigen ...
Plexiglas unter mechanischer Spannung	Spannungsuntersuchung
usw.	

Tabelle 4.1.: Doppelbrechende Materialien

Abbildung 4.13.: Wirkungsweise eines  $\lambda/4$ -Plättchens oder eines  $\lambda/2$ -Plättchens

Bei einem  $\lambda/4$ - oder einem  $\lambda/2$ -Plättchen wird die Polarisationsrichtung des einfalldenden Lichtes so gewählt, dass sie  $\pi/4$  zu den beiden Hauptachsen mit  $n_{\text{schnell}} < n_{\text{langsam}}$  ist. Dann wird **die eine Welle** wie in der unten stehenden Zeichnung gezeigt, langsamer propagierte als **die andere (die rote)**. Es entsteht eine Phasenverschiebung, die bei  $\lambda/4$ -Plättchen gerade eine viertel Wellenlänge ausmacht. Das Licht ist dann zirkular polarisiert.

Abbildung 4.14.: Wellen in einem  $\lambda/4$ -Plättchen

Ist der Gangunterschied  $\lambda/2$ , wie in der oben stehenden Zeichnung, dann wird die Polarisationsrichtung um  $\pi/2$  gedreht.

Wir beschreiben kohärentes Licht durch die Gleichung

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t - \phi)} \quad (4.4.6)$$

wobei  $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$  ist (Transversalität) und  $\mathbf{E}_0$  die Polarisationsrichtung angibt.  $\phi$  ist die Phase, die die Anfangsbedingung am Ort 0 und zur Zeit 0 angibt.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir  $\mathbf{k} = (k; 0; 0)$  setzen. Dann ist  $\mathbf{E}_0 = (0; E_y; E_z)$  die möglichen Polarisationsrichtungen. Der Vektor des elektrischen Feldes hat also nur Komponenten in die  $y$ - und die  $z$ -Richtung.

Unser dichroitisches Plättchen habe die schnelle Achse (*Brechungsindex*  $n_1$ ) entlang  $y'$  und die langsame Achse (*Brechungsindex*  $n_2$ ) entlang  $z'$  und die Dicke  $\ell$ . Die  $x$ -Achse sollen übereinstimmen. Das gestrichene Koordinatensystem sei um den Winkel  $\alpha$  gegen das ungestrichene verdreht. Dann ist

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha) \\z' &= y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha)\end{aligned}\tag{4.4.7}$$

Für Licht mit einer beliebigen Polarisation und einer Ausbreitung entlang der  $x$ -Achse muss das elektrische Feld auf das gestrichene Koordinatensystem projiziert werden. Am Anfang des Plättchens sei zudem die Phase  $\phi = 0$ . Wir bekommen dann

$$\begin{aligned}E_{y'} &= E_y \cos \alpha - E_z \sin \alpha \\E_{z'} &= E_y \sin \alpha + E_z \cos \alpha\end{aligned}\tag{4.4.8}$$

Die Feldkomponente mit der Polarisation  $E_{y'}$  breite sich mit der Geschwindigkeit  $c_1 = c/n_1$  aus, die Polarisation  $E_{z'}$  mit der Geschwindigkeit  $c_2 = c/n_2$ . Damit sind die Wellenlängen der Polarisation entlang  $y'$   $\lambda_1 = \lambda/n_1 = \frac{2\pi}{kn_1} = \frac{2\pi}{k_1}$  und entlang  $z'$   $\lambda_2 = \lambda/n_2 = \frac{2\pi}{kn_2} = \frac{2\pi}{k_2}$ . Für die  $\mathbf{k}$  gilt dann

$$\begin{aligned}k_1 &= n_1 k \\k_2 &= n_2 k\end{aligned}\tag{4.4.9}$$

Die Laufzeit durch ein Plättchen der Dicke  $\ell$  ist dann  $t_1 = \ell/c_1 = \ell n_1/c$  und  $t_2 = \ell/c_2 = \ell n_2/c$ . Wir betrachten zu einer feststehenden Zeit (praktischerweise  $t = 0$ ) das Wellenmuster. Am Ausgang des Plättchens haben wir

$$\begin{aligned}E_{y'}(\ell, 0) &= E_{y'} e^{ik_1 \ell} = E_{y'} e^{in_1 k \ell} \\E_{z'}(\ell, 0) &= E_{z'} e^{ik_2 \ell} = E_{y'} e^{in_2 k \ell}\end{aligned}\tag{4.4.10}$$

Der Phasenunterschied der beiden Wellen ist die Differenz der Argumente der Exponentialfunktion, also  $\phi(\ell)(n_2 - n_1)k\ell$ . Wir können also auch schreiben

$$\begin{aligned}E_{y'}(\ell, 0) &= E_{y'} e^{in_1 k \ell} \\E_{z'}(\ell, 0) &= E_{z'} e^{in_1 k \ell} e^{i\phi(\ell)}\end{aligned}\tag{4.4.11}$$

Wenn wir den gemeinsamen Faktor abspalten, dann wird die  $z'$ -Komponente gegen der  $y'$ -Komponente um  $\phi(\ell)$  phasenverschoben. Diese neuen Polarisationen müssen wir auf das  $x, y, z$ -Koordinatensystem mit

$$\begin{aligned}x &= x' \\y &= y' \cos(\alpha) + z' \sin(\alpha) \\z &= -y' \sin(\alpha) + z' \cos(\alpha)\end{aligned}\tag{4.4.12}$$

projizieren. Damit ist

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'}(\ell) \\ E_{z'}(\ell) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'} \\ E_{z'} e^{i\phi(\ell)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi(\ell)/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\phi(\ell)/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'} \\ E_{z'} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi(\ell)/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\phi(\ell)/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

Ausmultipliziert erhält man für die Matrix

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi(\ell)/2} \cos^2 \alpha + e^{-i\phi(\ell)/2} \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha (e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}) \\ \sin \alpha \cos \alpha (e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}) & e^{i\phi(\ell)/2} \sin^2 \alpha + e^{-i\phi(\ell)/2} \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \tag{4.4.14}$$

oder (nur für die Matrix)

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi(\ell)/2} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + e^{-i\phi(\ell)/2} \frac{1-\cos 2\alpha}{2} & \frac{\sin 2\alpha}{2} (e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}) \\ \frac{\sin 2\alpha}{2} (e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}) & e^{i\phi(\ell)/2} \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + e^{-i\phi(\ell)/2} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{pmatrix} \tag{4.4.15}$$

Wir vereinfachen und erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{i\phi(\ell)/2} + e^{-i\phi(\ell)/2}}{2} + i \cos 2\alpha \frac{e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}}{2i} & i \sin 2\alpha \frac{e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}}{2i} \\ i \sin 2\alpha \frac{e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}}{2i} & \frac{e^{i\phi(\ell)/2} + e^{-i\phi(\ell)/2}}{2} - i \cos 2\alpha \frac{e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}}{2i} \end{pmatrix} \tag{4.4.16}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} &= \\
 \begin{pmatrix} \cos(\phi(\ell)/2) + i \cos 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) & i \sin 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) \\ i \sin 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) & \cos(\phi(\ell)/2) - i \cos 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

Wir betrachten nun den Spezialfall, dass  $\alpha = \pi/4$  und  $\phi(\ell) = \pi/2$  ist. Die obige Matrix wird dann

$$\begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{4.4.18}$$

oder

$$\begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (4.4.19)$$

Eine Lichtwelle, die nur in  $y$ -Richtung polarisiert ist, wird zu einer Welle, die sowohl in die  $y$  wie auch in die  $z$ -Richtung polarisiert ist, aber mit einem *Phasenfaktor* von  $\pi/2$ . Die Wellengleichung ist dann

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= E_y \cos(kx - \omega t) \\ E_z(x, t) &= E_z \cos(kx - \omega t - \pi/2) = E_z \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Diese Art Wellen heisst *zirkular polarisierte Welle*. Es gibt zwei Arten von Wellen, mit rechtsläufigem und linksläufigem Drehsinn. Ein dichroitisches Objekt, dass die obigen Eigenschaften hat, heisst  $\lambda/4$ -Plättchen.

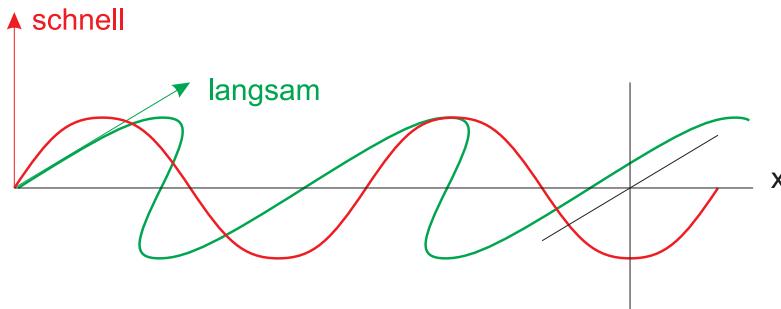


Abbildung 4.15.: Wellen in einem  $\lambda/2$ -Plättchen

Der zweite wichtige Spezialfall ist  $\alpha = \pi/4$  und  $\phi(\ell) = \pi$ . Die obige Matrix wird dann

$$\begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (4.4.21)$$

Licht mit einer Polarisationsrichtung in  $y$ -Richtung wird in Licht mit einer Polarisationsrichtung  $z$  überführt. Eine solche Anordnung heisst  $\lambda/2$ -Plättchen. Zwei  $\lambda/4$ -Plättchen hintereinander geschaltet haben die gleiche Wirkung. Anwendung: optisches Lesesystem in CDs.



#### 4.4.5. Beschreibung der Polarisation

(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 310-319])

Wir wollen in diesem Abschnitt mögliche Darstellungen des *Polarisationszustandes* des Lichtes beschreiben. Die Darstellung in diesm Abschnitt und den folgenden Unterabschnitten folgt Perez [Pér96].

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass Licht sich entlang der  $x$ -Achse in einem kartesischen Koordinatensystem ausbreitet. Licht wird dann durch

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, t) &= \mathbf{E}_y(x, t) + \mathbf{E}_z(x, t) \\ &= E_{y,0} \mathbf{e}_y \cos(k_y x - \omega t - \varphi_y) + E_{z,0} \mathbf{e}_z \cos(k_z x - \omega t - \varphi_z)\end{aligned}\quad (4.4.22)$$

mit  $k_y$  dem Wellenvektor der Welle mit einem elektrischen Feld in die  $y$ -Richtung.  $k_z$  ist analog definiert. Durch eine Verschiebung der Zeitachse kann erreicht werden, dass  $\varphi_y = 0$  ist. Nur die Differenz der Phasen  $\phi = \varphi_y - \varphi_z = -\varphi_z$  ist relevant. Gleichung (4.4.22) lautet dann

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, t) &= \mathbf{E}_y(x, t) + \mathbf{E}_z(x, t) \\ &= E_{y,0} \mathbf{e}_y \cos(k_y x - \omega t) + E_{z,0} \mathbf{e}_z \cos(k_z x - \omega t + \phi)\end{aligned}\quad (4.4.23)$$

Mit dem Additionstheorem  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, t) &= \mathbf{E}_y(x, t) + \mathbf{E}_z(x, t) \\ &= E_{y,0} \mathbf{e}_y [\cos(k_y x) \cos(\omega t) + \sin(k_y x) \sin(\omega t)] \\ &\quad + E_{z,0} \mathbf{e}_z [\cos(k_z x) \cos(\omega t - \phi) + \sin(k_z x) \sin(\omega t - \phi)]\end{aligned}\quad (4.4.24)$$

Wir können die Welle aus Gleichung (4.4.24) an irgend einem Ort untersuchen, z.B. bei  $x = 0$ . Dann lautet Gleichung (4.4.24)

$$\mathbf{E}(0, t) = \mathbf{E}_y(0, t) + \mathbf{E}_z(0, t) = E_{y,0} \mathbf{e}_y \cos(\omega t) + E_{z,0} \mathbf{e}_z \cos(\omega t - \phi) \quad (4.4.25)$$

Gleichung (4.4.25) beschreibt eine Ellipse. Die folgende Abbildung 4.16 zeigt verschiedene Kurven als Funktion der Phasenverschiebung  $\phi$ .

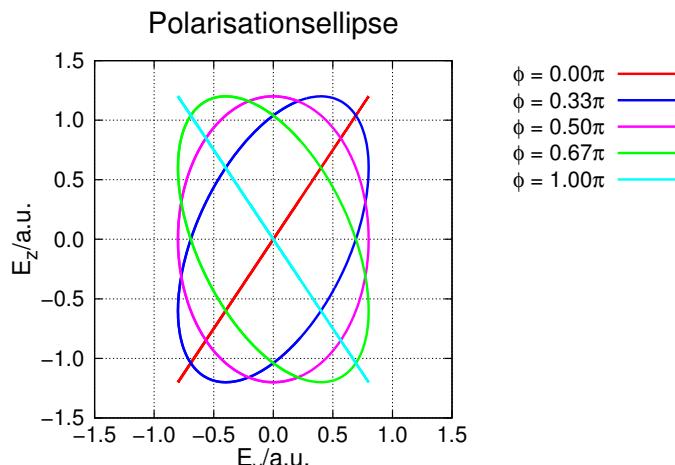


Abbildung 4.16.: Gezeigt wird die Abhängigkeit von der Phase  $\phi$ . Die Werte sind  $\omega = 1$ ,  $E_{y,0} = 0.8$  und  $E_{z,0} = 1.2$ .

Im Laborsystem ist die Ellipse durch

$$E_y(t) = E_{y,0} \cos(\omega t) \quad E_z(t) = E_{z,0} \cos(\omega t - \phi) \quad (4.4.26)$$

und

$$\frac{E_y(t)}{E_{y,0}} = \cos(\omega t) \quad \frac{E_z(t)}{E_{z,0}} = \cos(\omega t) \cos(\phi) + \sin(\omega t) \sin(\phi) \quad (4.4.27)$$

beschrieben, wobei ein Additionstheorem für den cos angewandt wurde. Wir setzen  $\cos(\omega t)$  in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{E_z(t)}{E_{z,0}} &= \frac{E_y(t)}{E_{y,0}} \cos(\phi) + \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)} \sin(\phi) \\ &= \frac{E_y(t)}{E_{y,0}} \cos(\phi) + \sqrt{1 - \frac{E_y^2(t)}{E_{y,0}^2}} \sin(\phi) \quad (4.4.28) \\ \frac{E_z(t)}{E_{z,0}} - \frac{E_y(t)}{E_{y,0}} \cos(\phi) &= \sqrt{1 - \frac{E_y^2(t)}{E_{y,0}^2}} \sin(\phi) \end{aligned}$$

und

$$\left( \frac{E_z(t)}{E_{z,0}} - \frac{E_y(t)}{E_{y,0}} \cos(\phi) \right)^2 = \left( 1 - \frac{E_y^2(t)}{E_{y,0}^2} \right) \sin^2(\phi) \quad (4.4.29)$$

Wird die Gleichung (4.4.29) neu geordnet, bekommen wir

$$\frac{E_z^2(t)}{E_{z,0}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{y,0}^2} \cos^2(\phi) - 2 \frac{E_z(t)}{E_{z,0}} \frac{E_y(t)}{E_{y,0}} \cos(\phi) = \sin^2(\phi) - \frac{E_y^2(t)}{E_{y,0}^2} \sin^2(\phi) \quad (4.4.30)$$

$$\frac{E_y^2(t)}{E_{y,0}^2} + \frac{E_z^2(t)}{E_{z,0}^2} - 2 \frac{E_z(t)}{E_{z,0}} \frac{E_y(t)}{E_{y,0}} \cos(\phi) = \sin^2(\phi) \quad (4.4.31)$$

Nach Bronstein [BSMM08, p. 212, Kurven 2. Ordnung] kann bei einer Kurve vom Typ  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = f$  der Typ der Kegelschnittkurve bestimmt werden, wenn die folgenden Kennzahlen berechnet werden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & -f \end{vmatrix} \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \quad S = a + c \quad (4.4.32)$$

berechnet werden. Für  $\Delta \neq 0$ ,  $\delta > 0$  und  $\Delta \cdot S < 0$  beschreibt die Kurve eine Ellipse. Wir haben mit den Koeffizienten aus Gleichung (4.4.31)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{E_{y,0}^2} & \frac{\cos(\phi)}{E_{y,0}E_{z,0}} & 0 \\ \frac{\cos(\phi)}{E_{y,0}E_{z,0}} & \frac{1}{E_{z,0}^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2(\phi) \end{vmatrix} = -\frac{\sin^4(\phi)}{E_{y,0}^2 E_{z,0}^2} \quad (4.4.33)$$

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{E_{y,0}^2} & \frac{\cos(\phi)}{E_{y,0}E_{z,0}} \\ \frac{\cos(\phi)}{E_{y,0}E_{z,0}} & \frac{1}{E_{z,0}^2} \end{vmatrix} = \frac{\sin^2(\phi)}{E_{y,0}^2 E_{z,0}^2} \quad (4.4.34)$$

$$S = \frac{1}{E_{y,0}^2} + \frac{1}{E_{z,0}^2} \quad (4.4.35)$$

Da alle Koeffizienten reell sind, haben wie für  $\phi \neq \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  die Beziehungen  $\Delta < 0$  oder  $\Delta \neq 0$ ,  $\delta > 0$  und  $S \cdot \Delta < 0$ .

Ausser für  $\phi \neq \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  beschreibt das allgemeine elektrische Feld  $\mathbf{E}(t)$  eine Ellipse. Das heisst, dass es möglich ist, diese Ellipse auf ihre Hauptachse zu transformieren. Eine Ellipse wird in ihrem *Hauptachsensystem* durch

$$\frac{E_Y^2}{a^2} + \frac{E_Z^2}{b^2} = 1 \quad (4.4.36)$$

beschrieben, wobei  $a$  die Länge der grossen Hauptachse und  $b$  die Länge der kleinen Hauptachse ist, also mit  $|b/a| \leq 1$ . Das Vorzeichen von  $\phi$  gibt den Drehsinn des elektrischen Feldes.

Für  $\phi = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  haben wir lineare Polarisation, das heisst nach (4.4.31)

$$\begin{aligned} \frac{E_y^2(t)}{E_{y,0}^2} + \frac{E_z^2(t)}{E_{z,0}^2} \mp 2 \frac{E_z(t)}{E_{z,0}} \frac{E_y(t)}{E_{y,0}} = 0 &= \left( \frac{E_y(t)}{E_{y,0}} \mp \frac{E_z(t)}{E_{z,0}} \right)^2 \\ \implies E_y(t) &= \pm \frac{E_{y,0}}{E_{z,0}} E_z(t) \quad (4.4.37) \end{aligned}$$

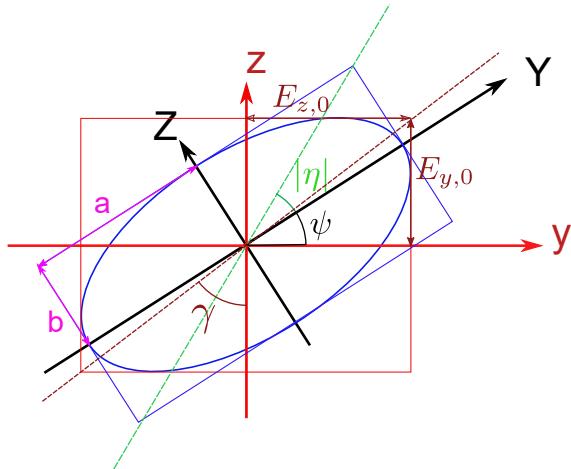


Abbildung 4.17.: Koordinatensysteme zur Berechnung der elliptischen Polarisation. Das Laborsystem wird mit kleinen (roten) Buchstaben bezeichnet, das Eigensystem der Ellipse mit grossen (schwarzen) Buchstaben. Die weiteren Variablen werden im Text erklärt.

Im Folgenden wollen wir die Darstellung der vom elektrischen Feld abgefahrenen Ellipse in ihrem *Hauptachsensystem* und im Laborsystem vergleichen. Das Laborsystem wird durch die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  aufgespannt, das *Hauptachsensystem* durch  $\mathbf{e}_Y$  und  $\mathbf{e}_Z$ . In den beiden Systemen lauten die Gleichungen für die Ellipse (siehe auch Abbildung 4.17)

$$E_y(t) = E_{y,0} \cos(\omega t) \quad E_Y(t) = a \cos(\omega t + \phi_{HA}) \quad (4.4.38)$$

$$E_z(t) = E_{z,0} \cos(\omega t + \phi) \quad E_Z(t) = b \cos(\omega t + \phi_{HA} + \phi) \quad (4.4.39)$$

$$E_{Labor}(t) = E_y(t)\mathbf{e}_y + E_z(t)\mathbf{e}_z \quad E_{HS}(t) = E_Y(t)\mathbf{e}_Y + E_Z(t)\mathbf{e}_Z \quad (4.4.40)$$

mit  $\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0$  und  $\mathbf{e}_Y \cdot \mathbf{e}_Z = 0$ . Die Intensität, gemittelt über die Zeit ist

$$\begin{aligned} I_{Labor} &= \left\langle K |E_{Labor}(t)|^2 \right\rangle = K \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (E_y(t)\mathbf{e}_y + E_z(t)\mathbf{e}_z)^2 dt \\ &= K \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (E_y(t)^2 + E_z(t)^2) dt \\ &= K \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (E_{y,0}^2 \cos^2(\omega t) + E_{z,0}^2 \cos^2(\omega t + \phi)) dt \\ &= K \frac{\omega}{2\pi} \left( E_{y,0}^2 \frac{\pi}{\omega} + E_{z,0}^2 \frac{\pi}{\omega} \right) = \frac{K}{2} (E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2) \end{aligned} \quad (4.4.41)$$

$$\begin{aligned}
I_{HS} &= \left\langle K |E_{HS}(t)|^2 \right\rangle = K \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (E_Y(t)\mathbf{e}_Y + E_Z(t)\mathbf{e}_Z)^2 dt \\
&= K \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (E_Y(t)^2 + E_Z(t)^2) dt \\
&= K \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (a^2 \cos^2(\omega t) + b^2 \cos^2(\omega t + \phi)) dt \\
&= K \frac{\omega}{2\pi} \left( a^2 \frac{\pi}{\omega} + b^2 \frac{\pi}{\omega} \right) = \frac{K}{2} (a^2 + b^2)
\end{aligned} \tag{4.4.42}$$

Dabei ist  $K$  eine (vom *Einheitensystem* abhängige) Konstante.

Also haben wir die Beziehung

$$\frac{2I}{K} = a^2 + b^2 = E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2 \tag{4.4.43}$$

Im *Hauptachsensystem* lautet die Ellipsengleichung

$$1 = \frac{E_Y^2(t)}{a^2} + \frac{E_Z^2(t)}{b^2} \tag{4.4.44}$$

Diese transformieren wir jetzt in das Laborsystem mit der *Drehmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \tag{4.4.45}$$

Damit haben wir die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \\
&\implies \begin{cases} E_Y &= E_y \cos(\psi) + E_z \sin(\psi) \\ E_Z &= -E_y \sin(\psi) + E_z \cos(\psi) \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.4.46}$$

Wir setzen nun Gleichung (4.4.46) in Gleichung (4.4.44) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
&\frac{E_y^2 \cos^2(\psi)}{a^2} + \frac{2E_y E_z \sin(\psi) \cos(\psi)}{a^2} + \frac{E_z^2 \sin^2(\psi)}{a^2} \\
&+ \frac{E_y^2 \sin^2(\psi)}{b^2} - \frac{2E_y E_z \sin(\psi) \cos(\psi)}{b^2} + \frac{E_z^2 \cos^2(\psi)}{b^2} = 1
\end{aligned} \tag{4.4.47}$$

Wir fassen ähnliche Terme in Gleichung (4.4.47) zusammen und können diese Gleichung so mit Gleichung (4.4.31) vergleichen

$$\begin{aligned}
&\frac{E_y^2 \cos^2(\psi)}{a^2} + \frac{E_z^2 \sin^2(\psi)}{a^2} + \frac{E_y^2 \sin^2(\psi)}{b^2} + \frac{E_z^2 \cos^2(\psi)}{b^2} \\
&+ 2E_y E_z \sin(\psi) \cos(\psi) \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 1
\end{aligned} \tag{4.4.48}$$

$$\frac{E_y^2(t)}{E_{y,0}^2} + \frac{E_z^2(t)}{E_{z,0}^2} - 2 \frac{E_z(t)}{E_{z,0}} \frac{E_y(t)}{E_{y,0}} \cos(\phi) = \sin^2(\phi) \tag{4.4.49}$$

Der Vergleich der Gleichungen (4.4.48) und (4.4.49) ergibt die Beziehungen

$$\text{Koeffizient von } E_y^2: \frac{1}{E_{y,0}^2 \sin^2(\phi)} = \frac{\cos^2(\psi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\psi)}{b^2} \quad (4.4.50)$$

$$\text{Koeffizient von } E_z^2: \frac{1}{E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)} = \frac{\sin^2(\psi)}{a^2} + \frac{\cos^2(\psi)}{b^2} \quad (4.4.51)$$

$$\text{Koeffizient von } E_y E_z: \frac{\cos(\phi)}{\sin^2(\phi) E_{y,0} E_{z,0}} = -\cos(\psi) \sin(\psi) \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \quad (4.4.52)$$

Die Addition von Gleichungen (4.4.50) und (4.4.51) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{y,0}^2} + \frac{1}{E_{z,0}^2} &= \sin^2(\phi) (\cos^2(\psi) + \sin^2(\psi)) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \\ \sin^2(\phi) &= \frac{\frac{1}{E_{y,0}^2} + \frac{1}{E_{z,0}^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{a^2 b^2 (E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2)}{E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 (a^2 + b^2)} = \frac{a^2 b^2}{E_{y,0}^2 E_{z,0}^2} \end{aligned} \quad (4.4.53)$$

wobei Gleichung (4.4.43) verwendet wurde. Weiter erhalten wir aus Gleichung (4.4.53) mit Gleichung (4.4.43)

$$\pm ab = E_{y,0} E_{z,0} \sin(\phi) \quad (4.4.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pm ab}{\frac{2I}{K}} &= \pm \frac{ab}{a^2 + b^2} = \pm \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{E_{y,0} E_{z,0} \sin(\phi)}{\frac{2I}{K}} \\ &= \frac{E_{y,0} E_{z,0} \sin(\phi)}{E_{y,0}^2 E_{z,0}^2} = \frac{\frac{E_{z,0}}{E_{y,0}} \sin(\phi)}{1 + \frac{E_{z,0}^2}{E_{y,0}^2}} \end{aligned} \quad (4.4.55)$$

Wir definieren nun die Winkel (siehe Abbildung 4.17) mit Hilfe der Amplituden

$$\tan(\gamma) := \frac{E_{z,0}}{E_{y,0}} \qquad \qquad \tan(\eta) := \pm \frac{b}{a} \quad (4.4.56)$$

Weiter verwenden wir die Identität [BSMM08]

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin(2\alpha) \quad (4.4.57)$$

und erhalten mit der Gleichung (4.4.55) multipliziert mit 2

$$\begin{aligned} \frac{2 \tan(\eta)}{1 + \tan^2(\eta)} &= \frac{2 \tan(\gamma)}{1 + \tan^2(\gamma)} \sin(\phi) \\ \sin(2\eta) &= \sin(2\gamma) \sin(\phi) \end{aligned} \quad (4.4.58)$$

Eine weitere Beziehung gewinnen wir aus Gleichung (4.4.52) (mit  $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ) und Gleichung (4.4.54)

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\phi)}{\sin^2(\phi)E_{y,0}E_{z,0}} &= -\frac{1}{2}\sin(2\psi)\frac{b^2-a^2}{a^2b^2} = \frac{\cos(\phi)E_{y,0}E_{z,0}}{a^2b^2} \\ \sin(2\psi) &= \frac{2\cos(\phi)E_{y,0}E_{z,0}}{a^2-b^2} \end{aligned} \quad (4.4.59)$$

Wir suchen  $\psi(E_{y,0}, E_{z,0}, \phi)$ . Dazu müssen noch  $a^2$  und  $b^2$  eliminiert werden. Wir haben

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \frac{\frac{2I}{K}}{\frac{2I}{K}} (a^2 - b^2) = \frac{2I}{K} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{2I}{K} \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2I}{K} \frac{1 - \tan^2(\eta)}{1 + \tan^2(\eta)} \\ &= \frac{2I}{K} (\cos^2(\eta) - \sin^2(\eta)) = \frac{2I}{K} \cos(2\eta) \end{aligned} \quad (4.4.60)$$

Andererseits folgt aus der Definition von  $\gamma$  und mit  $\sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha / (1 + \tan^2 \alpha)$

$$\begin{aligned} E_{y,0} \sin(\gamma) &= E_{z,0} \cos(\gamma) \\ \implies E_{y,0} \sin^2(\gamma) &= E_{z,0} \sin(\gamma) \cos(\gamma) = \frac{1}{2} E_{z,0} \sin(2\gamma) \\ \sin(2\gamma) &= \frac{2E_{y,0} \sin^2(\gamma)}{E_{z,0}} = \frac{2E_{y,0}}{E_{z,0}} \frac{\tan^2(\gamma)}{1 + \tan^2(\gamma)} = \frac{2E_{y,0}}{E_{z,0}} \frac{\frac{E_{z,0}^2}{E_{y,0}^2}}{1 + \frac{E_{z,0}^2}{E_{y,0}^2}} \\ &= \frac{2E_{y,0} E_{z,0}^2}{E_{z,0} (E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2)} = \frac{2E_{y,0} E_{z,0}}{\frac{2I}{K}} \end{aligned} \quad (4.4.61)$$

Weiter ist mit den Gleichungen (4.4.58) und (4.4.61)

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \frac{2I}{K} \cos(2\eta) = \frac{2I}{K} \sqrt{1 - \sin^2(2\eta)} = \frac{I}{2K} \sqrt{1 - \sin^2(2\gamma) \sin^2(\phi)} \\ &= \frac{2I}{K} \sqrt{1 - \left(\frac{2E_{y,0} E_{z,0}}{\frac{2I}{K}}\right)^2 \sin^2(\phi)} = 2 \sqrt{\frac{I^2}{K^2} - E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)} \\ &= \sqrt{(E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2)^2 - 4E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)} \end{aligned} \quad (4.4.62)$$

Damit lautet Gleichung (4.4.59)

$$\begin{aligned}\sin(2\psi) &= \frac{2 \cos(\phi) E_{y,0} E_{z,0}}{a^2 - b^2} = \frac{\cos(\phi) E_{y,0} E_{z,0}}{\sqrt{\frac{I^2}{K^2} - E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)}} \\ &= \frac{2 \cos(\phi) E_{y,0} E_{z,0}}{\sqrt{(E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2)^2 - 4 E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)}} \quad (4.4.63)\end{aligned}$$

und mit Gleichung (4.4.43)

$$\begin{aligned}\cos(2\psi) &= \sqrt{1 - \sin^2(2\psi)} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2(\phi) E_{y,0}^2 E_{z,0}^2}{\frac{I^2}{K^2} - E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{I^2}{K^2} - E_{y,0}^2 E_{z,0}^2}{\frac{I^2}{K^2} - E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} (E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2)^2 - E_{y,0}^2 E_{z,0}^2}{\frac{1}{4} (E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2)^2 - E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)}} \\ &= \sqrt{\frac{E_{y,0}^4 + 2 E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 + E_{z,0}^4 - 4 E_{y,0}^2 E_{z,0}^2}{(E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2)^2 - 4 E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)}} \\ &= \sqrt{\frac{(E_{y,0}^2 - E_{z,0}^2)^2}{(E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2)^2 - 4 E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)}} \\ &= \frac{E_{y,0}^2 - E_{z,0}^2}{\sqrt{(E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2)^2 - 4 E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)}} \quad (4.4.64)\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (4.4.63) und (4.4.64) bekommen wir

$$\tan(2\psi) = \frac{2 \cos(\phi) E_{y,0} E_{z,0}}{E_{y,0}^2 - E_{z,0}^2} \quad (4.4.65)$$

Damit sind alle Parameter in der Abbildung 4.17 bestimmt.



#### 4.4.5.1. Poincaré-Kugel

(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 316-317])

Wir haben eine Lichtwelle, die durch das elektrische Feld  $E_{y,0}$  entlang der  $y$ -Achse,  $E_{z,0}$  entlang der  $z$ -Achse und durch die Phase  $\phi$  bestimmt ist. Da die  $y$ -und  $z$ -Achse orthogonal sind, kann man für die Gesamtintensität nach (4.4.41) auch schreiben

$$I = I_y + I_z = \frac{K E_{y,0}^2}{2} + \frac{K E_{z,0}^2}{2} = \frac{K}{2} (E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2) \quad (4.4.66)$$

Dies ist der erste von drei Parametern nach Poincaré [Poi92, Kapitel 12]. Als zweiten Parameter verwendet Poincaré den Winkel  $\psi = \angle(e_y, e_Y)$ , also die Drehung der Ellipse. Der dritte Parameter ist  $\tan(\eta) = \pm b/a$ , also das Verhältnis der Hauptachsen des vom elektrischen Felde beschriebenen Ellipsoids. Wegen  $|b/a| \leq 1$  ist auch  $|\eta| \leq \pi/4$ .

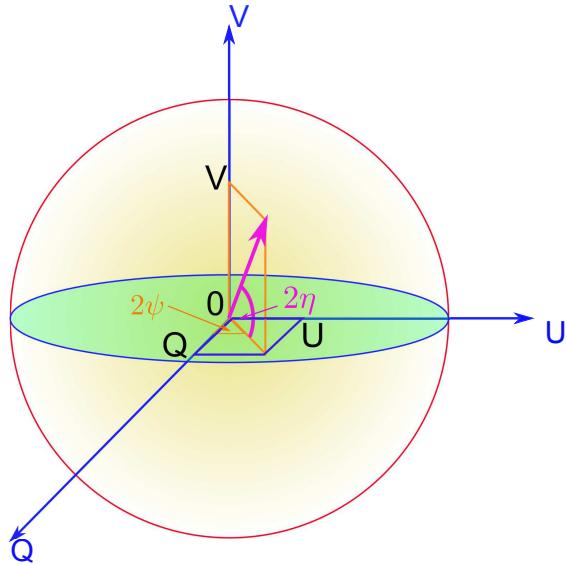


Abbildung 4.18.: Darstellung des *Polarisationszustandes* auf der Poincaré-Kugel [Poi92].

Poincaré hat deshalb die folgenden drei Parameter definiert (siehe auch Abbildung 4.18):

$$Q = I \cos(2\eta) \cos(2\psi) \quad (4.4.67a)$$

$$U = I \cos(2\eta) \sin(2\psi) \quad (4.4.67b)$$

$$V = I \sin(2\eta) \quad (4.4.67c)$$

Die Definitionsbereiche der Winkel sind  $0 \leq \psi \leq \pi$  (die Ellipse ist symmetrisch um die grosse Hauptachse) und  $-\pi/4 \leq \eta \leq \pi/4$ . Damit spannen die Gleichungen (4.4.67) eine Kugel auf.

Jeder *Polarisationszustand* zu einer Welle mit der Intensität  $I$  wird durch einen Punkt auf oder innerhalb der Kugel repräsentiert.

Weiter gilt:

$$I = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2} \quad (4.4.68)$$

Welche Zustände gibt es auf der Poincaré-Kugel? Dazu schreiben wir mit Gleichung (4.4.66) die Gleichungen für  $\sin(2\psi)$  (4.4.63), für  $\cos((2\psi))$  (4.4.64) sowie für  $\sin(2\eta)$  (4.4.58) und  $\cos(2\eta)$  auf die Variablen  $I_y$ ,  $I_z$  und  $\phi$  um. Wir brauchen dazu noch

Gleichung (4.4.56) und den ersten Teil von Gleichung (4.4.58).

$$\sin(2\gamma) = \frac{2 \tan(\eta)}{1 + \tan^2(\eta)} = \frac{2 \frac{E_{z,0}}{E_{y,0}}}{1 + \frac{E_{z,0}^2}{E_{y,0}^2}} = \frac{2 E_{y,0} E_{z,0}}{E_{y,0}^2 + E_{y,0}^2} = \frac{2 \sqrt{I_y I_z}}{I_y + I_z} \quad (4.4.69a)$$

$$\sin(2\eta) = \sin(2\gamma) \sin(\phi) = \frac{2 \sqrt{I_y I_z}}{I_y + I_z} \sin(\phi) \quad (4.4.69b)$$

$$\begin{aligned} \cos(2\eta) &= \sqrt{1 - \sin^2(2\eta)} = \sqrt{1 - \frac{4 I_y I_z}{(I_y + I_z)^2} \sin^2(\phi)} \\ &= \frac{\sqrt{(I_y + I_z)^2 - 4 I_y I_z \sin^2(\phi)}}{I_y + I_z} = \frac{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 I_y I_z \cos^2(\phi)}}{I_y + I_z} \end{aligned} \quad (4.4.69c)$$

$$\begin{aligned} \sin(2\psi) &= \frac{2 \cos(\phi) E_{y,0} E_{z,0}}{\sqrt{(E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2)^2 - 4 E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)}} = \frac{2 \cos(\phi) \sqrt{I_y I_z}}{\sqrt{(I_y + I_z)^2 - 4 I_y I_z \sin^2(\phi)}} \\ &= \frac{2 \cos(\phi) \sqrt{I_y I_z}}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 I_y I_z \cos^2(\phi)}} \end{aligned} \quad (4.4.69d)$$

$$\begin{aligned} \cos(2\psi) &= \frac{E_{y,0}^2 - E_{z,0}^2}{\sqrt{(E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2)^2 - 4 E_{y,0}^2 E_{z,0}^2 \sin^2(\phi)}} = \frac{I_y - I_z}{\sqrt{(I_y + I_z)^2 - 4 I_y I_z \sin^2(\phi)}} \\ &= \frac{I_y - I_z}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 I_y I_z \cos^2(\phi)}} \end{aligned} \quad (4.4.69e)$$

Setzen wir (4.4.69) in (4.4.67) ein, erhalten wir

$$Q = I_y - I_z \quad (4.4.70a)$$

$$U = 2 \sqrt{I_y I_z} \cos(\phi) \quad (4.4.70b)$$

$$V = 2 \sqrt{I_y I_z} \sin(\phi) \quad (4.4.70c)$$

Polarisation	$I_y$	$I_z$	$\phi$	Vektor $(Q, U, V)/I$
Linear in $y$	$I$	0	0	$(1, 0, 0)$
Linear in $z$	0	$I$	0	$(-1, 0, 0)$
Linear $45^\circ$	$I/2$	$I/2$	0	$(0, 1, 0)$
Linear $-45^\circ$	$I/2$	$I/2$	$\pi$	$(0, -1, 0)$
Zirkular links	$I$	$I$	$\pi/2$	$(0, 0, 1)$
Zirkular rechts	$I$	$I$	$-\pi/2$	$(0, 0, -1)$

Tabelle 4.2.: Ausgewählte Zustände auf der Poincaré-Kugel.



#### 4.4.5.2. Stokes-Parameter

(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 316-317])

Die Größen  $Q$ ,  $U$  und  $V$  einer vollständig polarisierten monochromatischen Lichtwelle können durch die Messung mit verschiedenen Polarisatorstellungen bestimmt werden.

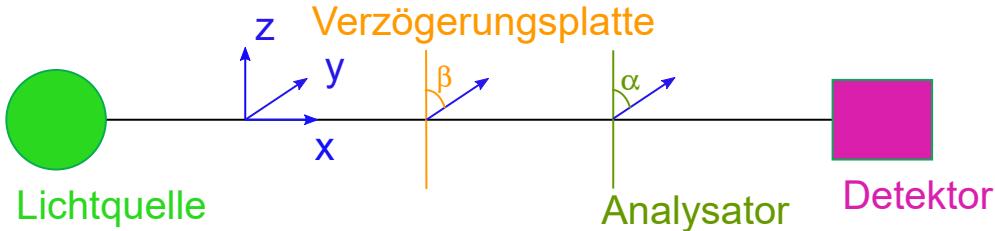


Abbildung 4.19.: Messung der Stokes-Parameter.

Wie Abbildung 4.19 zeigt braucht man zur Messung der *Stokes-Parameter* einen drehbaren Analysator, eine drehbare Verzögerungsplatte, bevorzugt eine  $\lambda/4$ -Platte und einen Detektor. Sei  $\alpha$  der Winkel der Polarisationsebene des Analytors zur  $y$ -Achse,  $\beta$  der Winkel der  $\lambda/4$ -Platte zur  $y$ -Achse. Wir messen nun die Intensitäten bei  $\alpha = 0$  und  $\beta = 0$ , also  $I_{0,0}$ , bei  $\alpha = \pi/4$  und  $\beta = 0$ , also  $I_{\pi/4,0}$ , bei  $\alpha = \pi/4$  und  $\beta = \pi/4$ , also  $I_{\pi/4,\pi/4}$ , bei  $\alpha = \pi/2$  und  $\beta = 0$ , also  $I_{\pi/2,0}$ ,  $\alpha = 3\pi/4$  oder, was äquivalent ist bei  $\alpha = -\pi/4$  und  $\beta = 0$ , also  $I_{-\pi/4,0}$  und schliesslich bei  $\alpha = -\pi/4$  und  $\beta = \pi/4$ , also  $I_{-\pi/4,\pi/4}$ .

Wir setzen die Welle als

$$E_y(t) = E_{y,0} e^{i\frac{\phi}{2}} \quad E_z(t) = E_{z,0} e^{-i\frac{\phi}{2}} \quad (4.4.71)$$

wobei angenommen wurde, dass die Welle monochromatisch sei.  $\phi$  gibt die relative Verzögerung der  $z$ -Komponente im Vergleich zur  $y$ -Komponente an.

Wir verwenden für das  $\lambda/4$ -Plättchen ( $\phi = \pi/2$ ) die Gleichung (4.4.27). Eine um den Winkel  $\beta$  gedrehte Verzögerungsplatte wirkt auf die komplexen Wellen in die  $y$ - und die  $z$ -Richtung wie

$$\begin{pmatrix} E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i \cos(2\beta) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & i \sin(2\beta) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ i \sin(2\beta) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i \cos(2\beta) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (4.4.72)$$

Ein Polarisator im Winkel  $\alpha$  erzeugt eine Welle mit dem  $\mathbf{E}$ -Feld

$$|\mathbf{E}|(\alpha) = E''(\alpha, t) = E'_y \cos(\alpha) + E'_z \sin(\alpha) \quad (4.4.73)$$

wobei  $E_y$  und  $E_z$  komplexe Amplituden sind. Es ergibt sich dann nach einer Rechnung (siehe Abschnitt A.1 im Anhang)

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad I_{0,0} = \frac{K}{2} E_{y,0}^2 = I_y \quad (4.4.74)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \beta = 0 \quad I_{\pi/2,0} = \frac{K}{2} E_{z,0}^2 = I_z \quad (4.4.75)$$

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \beta = 0 \quad I_{\pi/4,0} &= \frac{K}{4} (E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2 - 2E_{y,0}E_{z,0}\sin(\phi)) \\ &= \frac{I_y}{2} - \frac{I_z}{2} + \sqrt{I_y I_z} \sin(\phi) \end{aligned} \quad (4.4.76)$$

$$\begin{aligned} \alpha = -\frac{\pi}{4} \quad \beta = 0 \quad I_{-\pi/4,0} &= \frac{K}{4} (E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2 + 2E_{y,0}E_{z,0}\sin(\phi)) \\ &= \frac{I_y}{2} + \frac{I_z}{2} + \sqrt{I_y I_z} \sin(\phi) \end{aligned} \quad (4.4.77)$$

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \beta = \pi/4 \quad I_{\pi/4,\pi/4} &= \frac{K}{4} (E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2 + 2E_{y,0}E_{z,0}\cos(\phi)) \\ &= \frac{I_y}{2} + \frac{I_z}{2} + \sqrt{I_y I_z} \cos(\phi) \end{aligned} \quad (4.4.78)$$

$$\begin{aligned} \alpha = -\frac{\pi}{4} \quad \beta = \pi/4 \quad I_{-\pi/4,\pi/4} &= \frac{K}{4} (E_{y,0}^2 + E_{z,0}^2 - 2E_{y,0}E_{z,0}\cos(\phi)) \\ &= \frac{I_y}{2} + \frac{I_z}{2} - \sqrt{I_y I_z} \cos(\phi) \end{aligned} \quad (4.4.79)$$

Die Stokes-Parameter  $I$ ,  $Q$ ,  $U$  und  $V$  bekommen wir nun mit

$$I = I_y + I_z = I_{0,0} + I_{\pi/2,0} \quad (4.4.80)$$

$$Q = I_y - I_z = I_{0,0} - I_{\pi/2,0} \quad (4.4.81)$$

$$U = 2\sqrt{I_y I_z} \cos(\phi) = I_{\pi/4,\pi/4} - I_{-\pi/4,\pi/4} \quad (4.4.82)$$

$$V = 2\sqrt{I_y I_z} \sin(\phi) = I_{-\pi/4,0} - I_{\pi/4,0} \quad (4.4.83)$$

Es gibt noch weitere Möglichkeiten, durch die Messung der Intensitäten bei verschiedenen Polarisationsrichtungen den *Polarisationszustand* zu bestimmen (siehe z. B. Hecht [Hec05] oder Born und Wolf [BW70])

Müller 1948 [Mül48] schlug vor, die Stokes-Parameter als Vektoren zu schreiben, also

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad (4.4.84)$$

Damit werden ausgewählte Polarisationen (siehe auch Tabelle 4.2) geschrieben:

Polarisation	Stokes-Vektor	Polarisation	Stokes-Vektor
Linear in $y$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Linear in $z$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Linear $45^\circ$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	Linear $-45^\circ$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Zirkular links	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Zirkular rechts	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Tabelle 4.3.: Stokes-Vektoren für ausgewählte Polarisationszustände.

Schliesslich verwendet man noch die Definition für den

### Polarisationsgrad

$$p = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} \quad (4.4.85)$$

Die Polarisation von Licht und deren Modifikation durch  $\lambda/4$  und  $\lambda/2$ -Platten wird häufig mit Stokes-Vektoren und Müller-Matrizen beschrieben [Col03, Abschnitt 9.5].

Die Messung des Polarisationszustandes Abbildung 4.19 für teipolarisiertes Licht kann mit Müllermatrizen und Stokes-Vektoren berechnet werden. Dies ist im Anhang, Absatz A.2 beschrieben. Müllermatrizen werden im Unterabschnitt 4.4.6 besprochen.

#### 4.4.5.3. Beschreibung der Polarisation durch Jones-Vektoren und Jones-Matrizen



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 544]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 317-319]) Die Änderung der Polarisation von kohärentem Licht beim Durchgang durch Polarisatoren oder doppelbrechende Materialien kann mit Jones-Vektoren und Jones-Matrizen beschrieben werden. Jones-Vektoren und Jones-Matrizen sind eine Verallgemeinerung der obigen Rechnung. Formal läuft dies darauf hinaus, dass wir den Ausgangszustand als Vektor beschreiben und auf ihn die Operatoren der polarisationsändernden Objekte anwenden.

Aus der Darstellung im vorhergehenden Kapitel geht hervor, dass nur die  $y$ - und die  $z$ -Richtung die Polarisation beschreiben. Wir können also Zweiervektoren verwenden. Weiter soll die Phase der Welle als komplexe Zahl dargestellt werden.

Schliesslich normieren wir die Länge des Vektors auf 1. Eine Welle polarisiert in die  $y$ -Richtung wird also durch den Vektor

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.86)$$

dargestellt. Rechtszirkular polarisiertes Licht wird durch

$$\mathbf{A}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (4.4.87)$$

beschrieben.

Jones-Vektoren	Beschreibung
$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	Linear polarisiert in $y$ -Richtung
$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Linear polarisiert in $z$ -Richtung
$\mathbf{A}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	Rechtshändig zirkular polarisiert
$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	Linkshändig zirkular polarisiert

Polarisationen in andere Richtungen können durch die Anwendung von Drehmatrizen berechnet werden. Die Drehung aus dem Koordinatensystem  $y, z$  nach  $y', z'$  wird durch

$$\begin{aligned} y' &= y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha) \\ z' &= y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (4.4.88)$$

beschrieben. Die *Drehmatrix* lautet also

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.4.89)$$

Ein um den Winkel  $\alpha$  zu  $y$ -Achse linear polarisierter Strahl wird durch

$$\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha) \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.4.90)$$

beschrieben. Ein linearer Polarisator in  $y$ -Richtung wird durch

$$\mathbf{P}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.91)$$

beschrieben. Die Wirkung eines um den Winkel  $\alpha$  gedrehten Polarisators kann berechnet man, indem man das Koordinatensystem um  $-\alpha$  dreht, den Polarisator in der  $y$ -Ebene anwendet und mit  $\alpha$  zurückdreht.

$$\mathbf{P}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{P}_y\mathbf{R}(-\alpha) \quad (4.4.92)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.93)$$

Die Jones-Matrix des linearen Polarisators in die  $z$ -Richtung lautet also

$$\mathbf{P}_z = \mathbf{P}(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4.94)$$

Die zirkulare Polarisierung wird durch die beiden homogenen Polarisatoren  $\mathbf{P}_{\mathcal{R}}$  und  $\mathbf{P}_{\mathcal{L}}$  erzeugt.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathcal{R}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_{\mathcal{L}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.95)$$

Das  $\lambda/4$ -Plättchen mit der schnellen Achse entlang der  $y$ -Richtung wird durch

$$\mathbf{P}_{\lambda/4,y} = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (4.4.96)$$

Mit der Gleichung (4.4.17) hatten wir ein schräg stehendes  $\lambda/4$ -Plättchen berechnet. Die Gleichung ist aber allgemeiner: sie beschreibt ein Verzögerungselement von  $\phi$  gedreht um  $\alpha$  zur  $y$ -Achse.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{VZ}(\alpha, \phi) &= \\ \begin{pmatrix} \cos(\phi(\ell)/2) + i \cos 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) & i \sin 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) \\ i \sin 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) & \cos(\phi(\ell)/2) - i \cos 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.97)$$

Das Verzögerungselement mit der schnellen Achse parallel zur  $y$ -Achse ist durch

$$\mathbf{P}_{VZ,y} = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \quad (4.4.98)$$

gegeben. Die folgende Tabelle zeigt aus Gleichung (4.4.97) berechenbaren Elemente.

Jones-Matrix	Bedeutung
$\mathbf{P}_{\lambda/4,y} = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$\lambda/4$ -Plättchen mit der schnellen Achse in $y$
$\mathbf{P}_{\lambda/4,z} = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda/4$ -Plättchen mit der schnellen Achse in $z$
$\mathbf{P}_{\lambda/4}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{P}_{\lambda/4,y}\mathbf{R}(-\alpha)$	$\lambda/4$ -Plättchen mit der schnellen Achse gedreht um $\alpha$ bezüglich $y$
$\mathbf{P}_{\lambda/2,y} = \mathbf{P}_{\lambda/4,y}\mathbf{P}_{\lambda/4,y} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$\lambda/2$ -Plättchen mit der schnellen Achse in $y$
$\mathbf{P}_{\lambda/2,z} = \mathbf{P}_{\lambda/4,z}\mathbf{P}_{\lambda/4,z} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$\lambda/2$ -Plättchen mit der schnellen Achse in $z$
$\mathbf{P}_{\lambda/2}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{P}_{\lambda/2,y}\mathbf{R}(-\alpha)$	$\lambda/2$ -Plättchen mit der schnellen Achse gedreht um $\alpha$ bezüglich $y$

Wenn ein Lichtstrahl mit der Polarisation  $\mathbf{A}$  durch die Objekte  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n$  geht, ist die resultierende Welle

$$\mathbf{A}_{Ende} = \mathbf{T}_n \mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{A} \quad (4.4.99)$$

Mit den oben angegebenen Polarisations- und Rotationsmatrizen können die meisten Polarisationsprobleme berechnet werden.

#### 4.4.6. Zusammenhang zwischen Jones-Matrizen und Müller-Matrizen

Jones- und Müller-Matrizen sind miteinander verwandt. Die Darstellung in diesem Abschnitt folgt [Gil00] sowie auch [Sim82, Tak73a, Tak73b, RMS98a, RMS98b, Gol03]. Wir haben im Abschnitt über Jones-Matrizen gesehen, dass die Wirkung eines den Polarisationszustand verändernden optischen Bauelements durch Matrizenmultiplikationen beschrieben werden kann. Analog dazu kann allgemein geschrieben werden, dass ein Bauelement, das den Stokes-Vektor  $\mathbf{S}_1$  in den Stokes-Vektor  $\mathbf{S}_2$  überführt, durch eine Müller-Matrix beschrieben ist.

$$\mathbf{S}_2 = M \mathbf{S}_1 \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} I_2 \\ Q_2 \\ U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & M_{1,4} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & M_{2,4} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & M_{3,4} \\ M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & M_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ Q_1 \\ U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad (4.4.100)$$

Zum Beispiel sind nach Tabelle 4.2 die Stokes-Vektoren für Licht mit der Intensität  $I$  und vollständiger Polarisation in die  $y$ - oder die  $z$ -Richtung gegeben durch

$$\mathbf{S}_y = \begin{pmatrix} I \\ I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{S}_z = \begin{pmatrix} I \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.101)$$

Ein  $\lambda/2$ -Plättchen mit der schnellen Achse  $45^\circ$  verkippt zur  $y$ -Achse bewirkt diese Transformation. Eine minimale Müllermatrix (die die zirkulären und  $\pm 45^\circ$ -Anteile vernachlässigt) wäre dann

$$M_{\lambda/4,\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \quad (4.4.102)$$

Die  $x$  und  $y$  können nicht aus unserer Bedingung abgeleitet werden. Eine genauere Rechnung zeigt, dass  $x = 1$  und  $y = -1$  ist.

Die Umrechnung einer Jones-Matrix  $\mathbf{P}$  (bei [Sim82]  $J$  genannt) in eine Müllermatrix  $\mathbf{M}$  geht nach [Sim82] folgendermassen:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}^*) \mathbf{A}^{-1} \quad (4.4.103)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.104)$$

$\otimes$  ist das Kronecker-Matrix-Produkt oder das äussere Produkt (Siehe Anhang Abschnitt B.9).

Durch Anwendung dieser Transformation erhalten wir die Müllermatrizen

Müller-Matrix	Bedeutung
$\mathbf{M}_{\lambda/4,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda/4$ -Plättchen mit der schnellen Achse in $y$
$\mathbf{M}_{\lambda/4,z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda/4$ -Plättchen mit der schnellen Achse in $z$
$\mathbf{M}_{\lambda/4}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\alpha) & \frac{1}{2}\sin(4\alpha) & \sin(2\alpha) \\ 0 & \frac{1}{2}\sin(4\alpha) & \sin^2(2\alpha) & \cos(2\alpha) \\ 0 & \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda/4$ -Plättchen mit der schnellen Achse gedreht um $\alpha$ bezüglich $y$
$\mathbf{M}_{\lambda/4,\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda/4$ -Plättchen mit der schnellen Achse $\pi/4$ zur $y$ Achse
$\mathbf{M}_{\lambda/4,-\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda/4$ -Plättchen mit der schnellen Achse $-\pi/4$ zur $y$ Achse

Müller-Matrix	Bedeutung
$\mathbf{M}_{\lambda/2,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\lambda/2$ -Plättchen mit der schnellen Achse in $y$
$\mathbf{M}_{\lambda/2,z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\lambda/2$ -Plättchen mit der schnellen Achse in $z$
$\mathbf{M}_{\lambda/2}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(4\alpha) & \sin(4\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(4\alpha) & -\cos(4\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\lambda/2$ -Plättchen mit der schnellen Achse gedreht um $\alpha$ bezüglich $y$
$\mathbf{M}_{\lambda/2,\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\lambda/2$ -Plättchen mit der schnellen Achse $\pi/4$ zur $y$ Achse
$\mathbf{M}_{\lambda/2,-\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\lambda/2$ -Plättchen mit der schnellen Achse $-\pi/4$ zur $y$ Achse

Müller-Matrix
$\mathbf{M}_V(\delta, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2(2\alpha) \cos(\delta) + \cos^2(2\alpha) & \sin(4\alpha) \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) & \sin(2\alpha) \sin(\delta) \\ 0 & \sin(4\alpha) \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) & \cos^2(2\alpha) \cos(\delta) + \sin^2(2\alpha) & \cos(2\alpha) \sin(\delta) \\ 0 & \sin(2\alpha) \sin(\delta) & -\cos(2\alpha) \sin(\delta) & \cos(\delta) \end{pmatrix}$
Verzögerungsplättchen mit der Phasenverzögerung $\delta$ und der schnellen Achse $\alpha$ zur $y$ -Achse

Für die Polarisatoren bekommt man

Müller-Matrix	Bedeutung
$\mathbf{M}_{P,y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	linearer Polarisator in $y$
$\mathbf{M}_{P,z} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	linearer Polarisator in $z$
$\mathbf{M}_P(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & 0 \\ \cos(2\alpha) & \cos^2(2\alpha) & \frac{1}{2}\sin(4\alpha) & 0 \\ \sin(2\alpha) & \frac{1}{2}\sin(4\alpha) & \sin^2(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	linearer Polarisator gedreht um $\alpha$ bezüglich $y$
$\mathbf{M}_{P,\pi/4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	linearer Polarisator $\pi/4$ zur $y$ Achse
$\mathbf{M}_{P,-\pi/4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	linearer Polarisator $-\pi/4$ zur $y$ Achse

#### 4.4.7. Beispiele zur Polarisation

(Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 535])

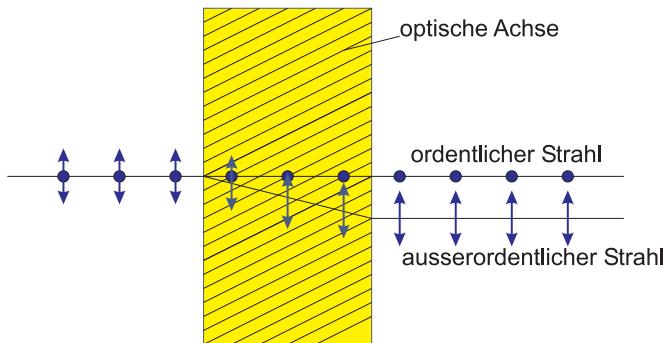


Abbildung 4.20.: Aufspaltung eines Lichtstrahls in einem doppelbrechenden Material wie Kalkspat



Abbildung 4.21.: Doppelbrechung in einem  $\text{NaVO}_4\text{Mn}$ -Kristall (gezüchtet von A. Lentz, fotografiert von M. Pietralla). Gezeigt wird, dass die drei Kristallrichtungen eines sechseckig scheinenden Kristalls nicht äquivalent sind.

Viele Kristalle sind nicht isotrop. Es gibt auch in diesen Kristallen Achsen, die eine höhere Symmetrie aufweisen, als die anderen Achsen. Diese Achse wird *Hauptachse* genannt. Alle physikalischen Eigenschaften eines Kristalls, also auch die optischen Eigenschaften, müssen die Symmetrie des Kristalls haben. Die physikalischen Eigenschaften und insbesondere die *Lichtgeschwindigkeit* sind in allen Ebenen senkrecht zur Hauptachse isotrop. Dabei ist die Lichtgeschwindigkeit aber von der Polarisationsrichtung des Lichtes abhängig. In Richtung der Hauptachse ist die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Polarisationsrichtung  $c_0$ . Licht, das sich senkrecht zur Polarisationsrichtung ausbreitet, bewegt sich ebenfalls mit  $c_0$ , wenn der  **$E$** -Vektor in Richtung der Hauptachse zeigt, die Polarisationsrichtung also senkrecht zur Hauptachse liegt. Dieses Licht heißt *ordentliches Licht*. Licht mit der anderen Polarisationsrichtung läuft im Kalkspat schneller, und zwar mit  $c_{ao} = 1.116c_0$ . Dieses Licht heißt *ausserordentliches Licht*. Wenn die Einfallrichtung dazwischen liegt, ist die Geschwindigkeit des ordentlichen Lichts immer noch  $c_0$ , die des ausserordentlichen Lichts liegt zwischen  $c_0$  und  $c_{ao}$ .

Die Wellenflächen des ordentlichen Lichts stammend von einer punktförmigen Quelle sind also Kugelflächen, während die Wellenflächen des ausserordentlichen Lichts Rotationsellipsoide sind, deren Rotationsachse mit der Hauptachse parallel

ist. Bei Kalkspat ist das Rotationsellipsoid abgeplattet, das Material heisst *einachsig negativ*. Bei Quarz ist das Rotationsellipsoid länglich (die ordentliche Lichtgeschwindigkeit ist grösser als die ausserordentliche.). Man nennt Quarz deshalb *einachsig positiv*.

Wenn Licht senkrecht auf eine Fläche fällt, die schräg zur Hauptachse liegt, müssen zwei verschiedene Konstruktionen verwendet werden:

- Kugelflächen beim ordentlichen Licht
- Rotationsellipsoide beim ausserordentlichen Licht. Die Rotationsachse liegt schief zur Einfallsrichtung.

Da die resultierenden Flächen Tangentenflächen sind, bleibt die Richtung des ordentlichen Lichtes senkrecht zur *Oberfläche*, während das ausserordentliche Licht sich schräg weiter ausbreitet. Zur Berechnung des Lichtweges müssen Tensoren verwendet werden.

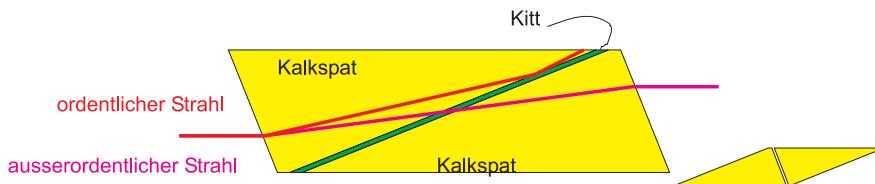


Abbildung 4.22.: Das Nicolsche Prisma, kurz Nicol, ist eine Anwendung der Doppelbrechung zur Polarisation. Der spitze Winkel ist  $68^0$ , der abgeflachte Winkel genau  $90^0$ . Die optische Achse liegt senkrecht zur Längsachse in der Bildebene. Das Nicol-Prisma entsteht aus dem rechts gezeigten länglichen Kalkspatkristall, der diagonal geschnitten wird. Er wird mit einem Kitt, dessen *Brechungsindex* wie der *Brechungsindex* des ausserordentlichen Strahls ist, wieder zusammengeklebt. Der ausserordentliche Strahl geht dann ohne grössere Ablenkung durch das Nicol-Prisma, während der ordentliche Strahl am Kitt totalreflektiert wird und aus dem Strahlengang verschwindet.

In der Technik war die spannungsinduzierte Doppelbrechung lange das einzige Mittel, unzulässige Beanspruchungen in Bauteilen festzustellen.



### Versuch zur Vorlesung:

Spannungsdoppelbrechung (Versuchskarte O-008)



# 5. Geometrische Optik



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 231]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1023])  
(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1059]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 7])

Licht besteht, je nach Experiment, das durchgeführt wird, aus Wellen oder aus Teilchen. Der Teilchencharakter ist zuerst durch *Isaac Newton* propagiert worden. Newton konnte damit die Brechungsgesetze erklären, musste dazu aber annehmen, dass das Licht sich im optisch dichten Medium schneller als im Vakuum ausbreitet. Die Experimente von *Thomas Young* zur Wellennatur des Lichtes sowie die Theorie von *Augustin Fresnel* zeigten, dass alle klassischen optischen Experimente durch die Wellentheorie erklärt werden können. Insbesondere konnte die Brechung erklärt werden durch die geringere Lichtgeschwindigkeit im optisch dichten Medium. Die Entdeckung des *photoelektrischen Effektes* und ihre Erklärung durch *Albert Einstein* führte zur quantenmechanischen Theorie des Lichtes, in der Licht sowohl Wellen- wie auch Teilchencharakter hat.

Licht ist aus der modernen Forschung nicht mehr wegzudenken, wie die folgenden Beispiele zeigen:

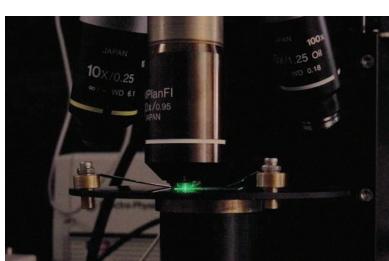


Abbildung 5.1.: Links sehen sie ein konfokales Ramanmikroskop aus dem Institut für Experimentelle Physik, rechts ein Fluoreszenz-Laserscanningmikroskop, wie es im Institut für Biophysik steht.

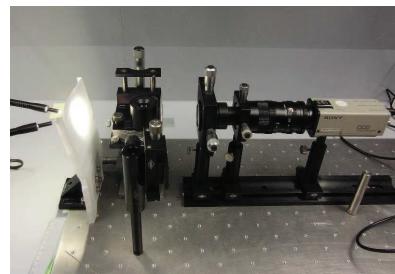
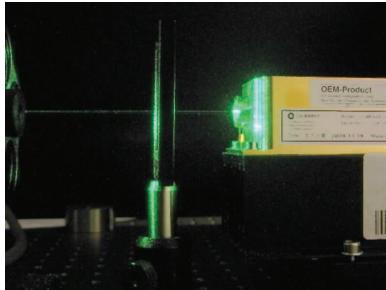


Abbildung 5.2.: Links sehen sie einen frequenzverdoppelten NdYAG-Laser aus dem Institut für Experimentelle Physik, rechts ein Kontaktwinkelmessgerät aus dem Institut für Experimentelle Physik.

---

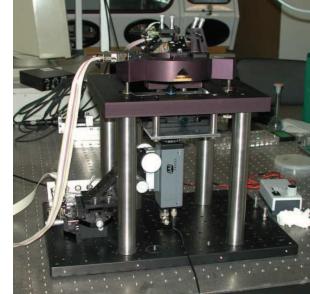
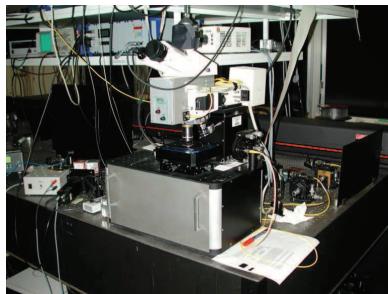


Abbildung 5.3.: Links sehen Sie einen Prototypen des AlphaSNOM, rechts das von Herrn Maghelli gebaute Rasterkraftmikroskop, beide aus dem Institut für Experimentelle Physik

---

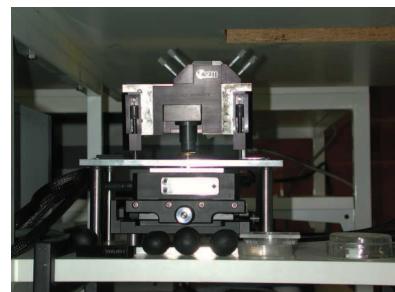


Abbildung 5.4.: Links sehen Sie einige Laser aus dem Optiklabor dem Institut für Experimentelle Physik, rechts ein Rasterkraftmikroskop aus dem Institut für Experimentelle Physik

---

Die geometrische Optik, das Thema dieses Kapitels, befasst sich mit den Experimenten, bei denen die Wellennatur des Lichtes vernachlässigt werden kann, bei denen man also von *Lichtstrahlen* reden kann.



## 5.1. Lichtgeschwindigkeit

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 71]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1025])

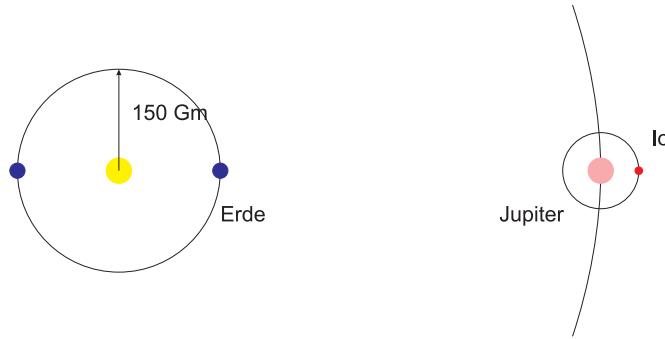


Abbildung 5.5.: Bestimmung der *Lichtgeschwindigkeit* mit Hilfe der Periodendauer der Umlaufzeit des Jupitermondes Io.

Astronomische Beobachtungen waren schon immer sehr genau. *Ole Rømer* beobachtete 1675 dass der Eintritt des Jupitermondes Io in den Kernschatten sich abhängig von den Sternkonstellationen verschob. Die Periode der Umlaufzeit beträgt 42.5 Stunden und nimmt zu, wenn die Erde sich vom Jupiter weg bewegt und ab, wenn sie sich auf den Jupiter zu bewegt. Der maximale Zeitunterschied ist  $2 \cdot 150 \cdot 10^9 \text{ m} / 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 1000 \text{ s}$ . Zwischen zwei Eintritten in den Kernschatten ist der Zeitunterschied zum mittleren Zeitunterschied  $150 \cdot 10^9 \text{ m} / (365.24 * 24 \text{ h}) \cdot 5 \text{ h} / 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2.42 \text{ s}$ . Ole Rømer brauchte also eine Uhr, die in 24 h weniger als eine Sekunde Fehler hatte. Ole Rømer mass eine Lichtgeschwindigkeit von ungefähr  $2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Daraus kann geschlossen werden, dass seine Zeitmessung eine relative Genauigkeit von  $3 \cdot 10^{-7}$  hatte, besser als manche Armbanduhr heute.

Eine gewaltige Verbesserung der Genauigkeit erzielte *Bradley* mit seiner Beobachtung der Aberration des Lichtes. Analog zum Regen, der, wenn man steht von oben kommt und der wenn man geht schräg von vorne fällt, ändert das Licht seine Einfallsrichtung. Aus der Winkeländerung kann auf die Lichtgeschwindigkeit geschlossen werden, wenn man die Eigengeschwindigkeit kennt.

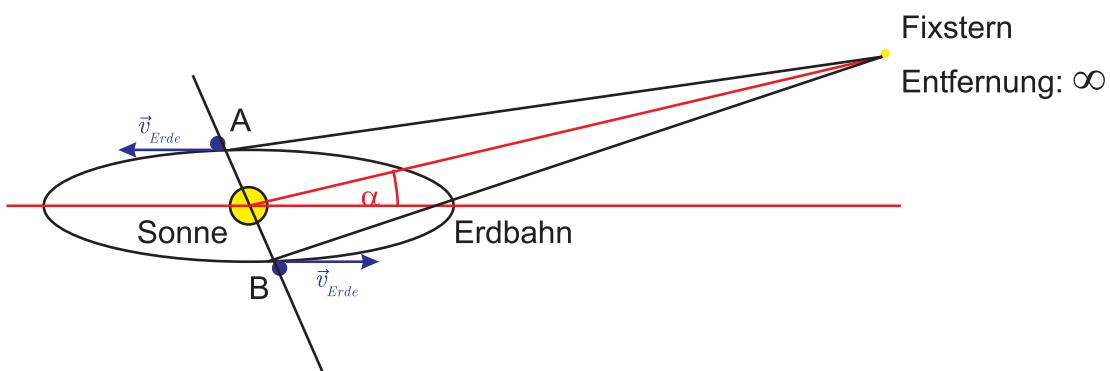


Abbildung 5.6.: Bradley beobachtete die Position eines Fixsterns (möglichst unendlich weit weg) zu verschiedenen Zeiten.

In der Abbildung sind zwei extreme Positionen aufgezeichnet, da wo die Erde mit maximaler Geschwindigkeit auf den Stern sich hinbewegt und da, wo sie sich mit maximaler Geschwindigkeit entfernt. Die Bahngeschwindigkeit der Erde ist etwa

$v_{Erde} = 3 \cdot 10^4$  m/s. Alternativ könnte man die Position des Sterns auch im Abstand von 12 Stunden ausmessen, dabei müsste die Umfangsgeschwindigkeit, die in Ulm etwa  $v_{Umfang, Ulm} = 327$  m/s und damit etwa 100 mal kleiner ist, verwendet werden.

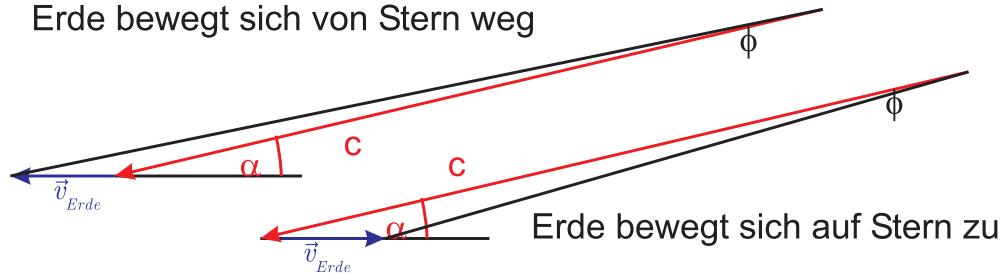


Abbildung 5.7.: Dreiecke zur Berechnung der Lichtgeschwindigkeit nach Bradley

Zur Berechnung verwenden wir den Sinussatz:

$$\frac{v_{Erde}}{\sin \phi} = \frac{c}{\sin(\pi - \alpha - \phi)} \quad (5.1.1)$$

Praktischerweise ergeben sich für beide Fälle, sowohl auf die Erde zu wie von der Erde weg die gleiche Gleichung. Diese Beziehung formen wir um

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sin(\pi - \alpha - \phi)}{\sin \phi} v_{Erde} \\ &= \frac{\sin(\alpha + \phi)}{\sin \phi} v_{Erde} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \phi + \cos \alpha \sin \phi}{\sin \phi} v_{Erde} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Für kleine Winkel  $\phi \ll \pi$  bekommen wir

$$c = \frac{\sin \alpha}{\tan \phi} v_{Erde} \quad (5.1.3)$$

Wie gross ist nun der zu messende Winkel  $\phi$ ? Wir betrachten einen Stern, der etwa  $\pi/4$  über der *Ekliptik* (der *Bahnebene der Erde*) liegt. Mit  $v_{Erde} = 30$  km/s und  $c = 300000$  km/s und  $\alpha = \pi/4$  erhalten wir

$$\phi \approx \tan \phi = \sin \alpha \frac{v_{Erde}}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0.0001 \approx 7 \cdot 10^{-5} = 0.24' \quad (5.1.4)$$

Der gemessene Winkelunterschied zwischen den Punkten A und B ist somit

$$\Delta\Phi = 2\phi \approx 0.48' \quad (5.1.5)$$

Wenn wir nur im Zeitabstand von einem Tag messen, ist der Winkel  $\Delta\Phi = 0,29''$ .

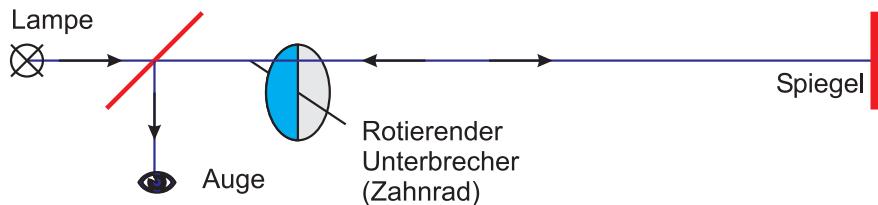


Abbildung 5.8.: Lichtgeschwindigkeitsmessung nach Armand Fizeau (1849)

Fizeau verwendete einen Weg von 8.63 km. Bei bestimmten Geschwindigkeiten (welchen?) wurde der Weg des Lichtes blockiert, bei anderen durchgelassen. Nehmen wir an, dass das Zahnrad mit 100 Umdrehungen pro Sekunde rotiere. Das Licht wird blockiert, wenn das Zahnrad sich um einen halben Zahn weiter dreht in der Laufzeit des Lichtes. Die Laufzeit ist  $t = 8630 \text{ m} / 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2.877 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ . Die Umdrehungszeit des Rades ist 0.01 s. Also hat das Rad  $n = 0.01 / (2 \times 2.877 \cdot 10^{-5}) = 174$  Zähne, machbar!.

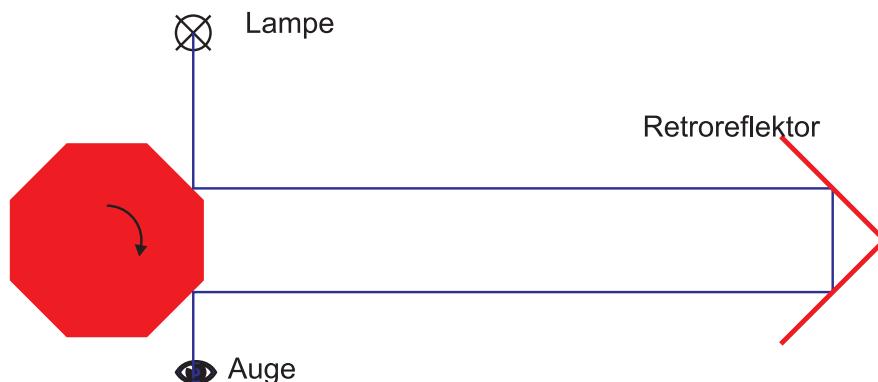


Abbildung 5.9.: Messung der Lichtgeschwindigkeit mit der Drehspiegelmethode



### Versuch zur Vorlesung:

Messung der Lichtgeschwindigkeit mit der Drehspiegelmethode (Versuchskarte O-030)

Eine verbesserte Methode ist die **Messung der Lichtgeschwindigkeit** nach **Leon Foucault**. Er verwendete einen Drehspiegel. Seine Genauigkeit war so gross, dass er auch den Unterschied der Lichtgeschwindigkeit in stehendem und fliessendem Wasser messen konnte.

Heute wird die **Lichtgeschwindigkeit** mit moderner Elektronik gemessen.

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt  $299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Sie ist eine Definitionsgröße.

## 5.2. Licht in der geometrischen Optik

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 41]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 7])



**Versuch zur Vorlesung:**  
Brechung und Reflexion (Versuchskarte O-068)

In der geometrischen Optik hat das Licht die folgenden Eigenschaften:

- Licht bewegt sich in homogenen Medien geradlinig aus.
- Licht wird durch *Lichtstrahlen* dargestellt (Im Wellenbild entspricht dies ebenen Wellen).
- Licht hat nur eine Farbe, das heisst es ist *monochromatisch*.
- Wenn die Farbe von Licht keinen Einfluss auf die Ausbreitung des Lichtes hat, verwendet man auch weisses Licht.
- Licht wird an Oberflächen reflektiert. Dabei gilt das Reflexionsgesetz (Siehe Abschnitt 4.1).

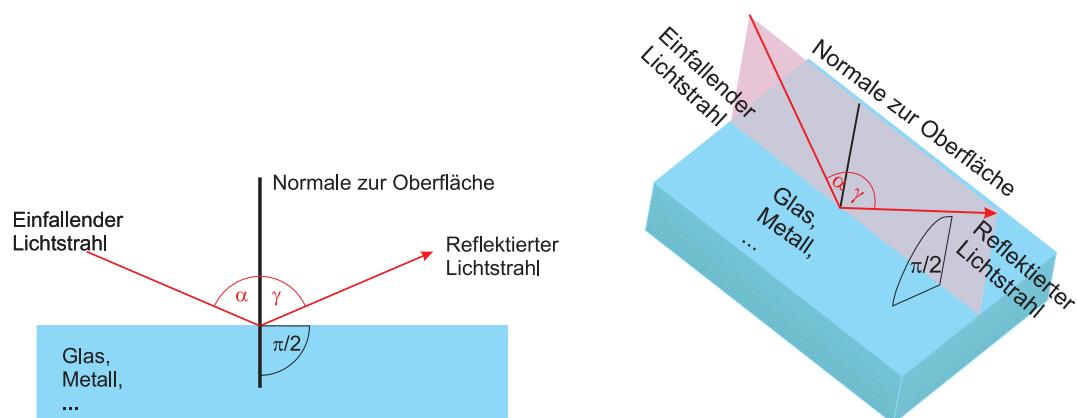


Abbildung 5.10.: *Reflexionsgesetz*: links die Querschnittsansicht und rechts eine dreidimensionale Skizze

Der einfallende Strahl und der reflektierte Strahl liegen in einer Ebene, in der auch die Oberflächennormale zur reflektierenden Oberfläche liegt. Für die Winkel zwischen den Lichtstrahlen und der Oberflächennormale gilt

$$\alpha = \gamma \quad (5.2.1)$$

- Tritt ein Lichtstrahl von einem transparenten Medium mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_1$  in ein zweites transparentes Medium mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_2$  ein, so wird er gebrochen.

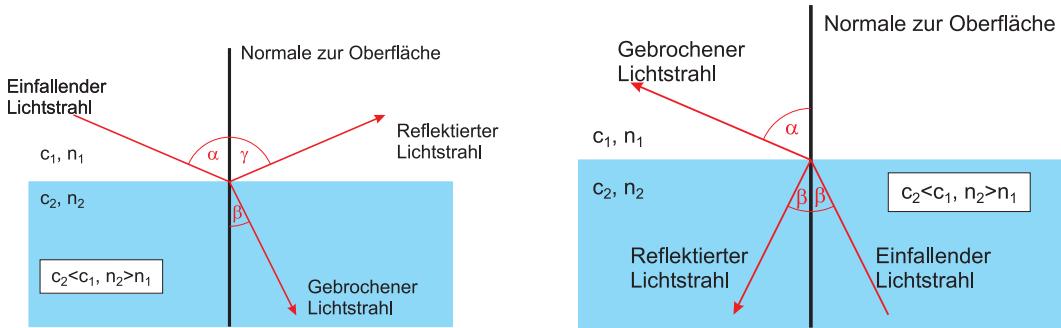


Abbildung 5.11.: Strahlengang bei *Brechung*. Links ist der Strahlengang gezeigt, wenn Licht aus dem optisch dünneren Medium mit  $c_1$  in das optisch dichtere Medium mit  $c_2 < c_1$  eintritt. Die rechte Zeichnung zeigt den umgekehrten Verlauf der Strahlung, aus dem optisch dichteren Medium in das optisch dünne Medium.

Das *Brechungsgesetz* oder das *Gesetz von Snellius* lautet

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2} \quad (5.2.2)$$

Mit dem *Brechungsindex*, der definiert ist als das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c$  und der Lichtgeschwindigkeit im Medium  $i$ ,  $n_i$

$$n_i = \frac{c}{c_i} \quad (5.2.3)$$

lautet das Brechungsgesetz

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (5.2.4)$$

Mit diesen beiden Gesetzen können die Phänomene der geometrischen Optik berechnet werden.



### Versuch zur Vorlesung:

Applet Lichtbrechung ([Versuchskarte -](#))



## 5.3. Bilderzeugung durch Brechung

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 238]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1068])  
(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 41])



### Versuch zur Vorlesung:

Optische Scheibe ([Versuchskarte O-046](#))

Winlens Software

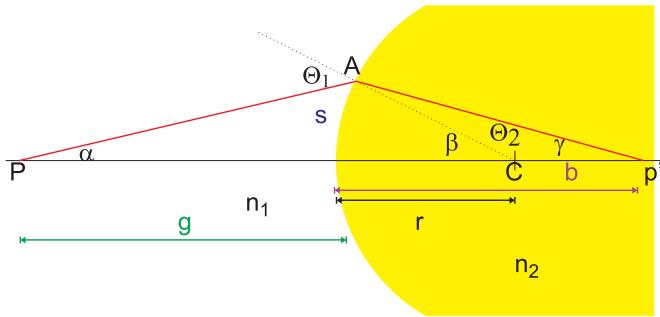


Abbildung 5.12.: Brechung von Licht an einer gekrümmten Glasoberfläche

Gleich wie mit Spiegeln können Abbildungen mit Linsen durchgeführt werden. Für kleine Winkel gilt  $\sin \Theta \approx \Theta$ . Wir erhalten

$$n_1 \Theta_1 = n_2 \Theta_2 \quad (5.3.1)$$

$\beta$  ist der Außenwinkel von  $P'CA$ . Also ist

$$\beta = \Theta_2 + \gamma = \frac{n_1}{n_2} \Theta_1 + \gamma \quad (5.3.2)$$

$\Theta_1$  ist der Außenwinkel von  $PAC$ .

$$\Theta_1 = \alpha + \beta \quad (5.3.3)$$

Nach Elimination von  $\Theta_1$  folgt

$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta \quad (5.3.4)$$

Für kleine Winkel (*paraxiale Näherung*) gilt, dass  $\alpha \approx s/g$ ,  $\beta = s/r$  und  $\gamma = s/b$  ist, wobei  $g$  die *Gegenstandsweite*,  $b$  die *Bildweite* und  $r$  der Krümmungsradius der *Oberfläche* ist. Eingesetzt:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (5.3.5)$$

Hier sind, im Gegensatz zum sphärischen Spiegel, die reellen Bilder hinter der Grenzfläche.

Nach dem Strahlensatz ist  $n_1 \frac{\text{Gegenstandsgrösse}}{g} = n_2 \frac{\text{-Bildgrösse}}{b}$ . Der Abbildungsmassstab ist also

$$V = \frac{\text{Bildgrösse}}{\text{Gegenstandsgrösse}} = -\frac{n_1 b}{n_2 g} \quad (5.3.6)$$



### 5.3.1. Dünne Linsen

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 242]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 106]) (Siehe Tippler, Physik [TM04, pp. 1071])



**Versuch zur Vorlesung:**  
Optische Scheibe (Versuchskarte O-046)

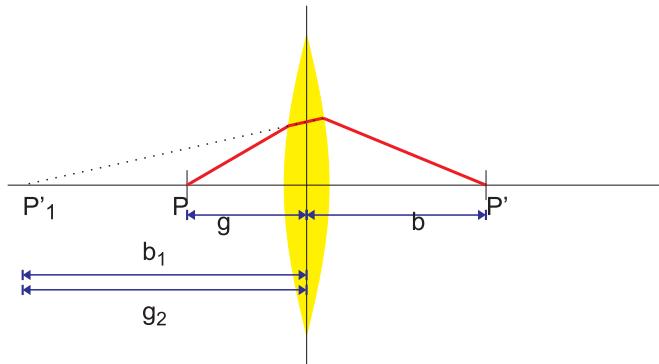


Abbildung 5.13.: *Dünne Linse*. Brechung tritt an beiden Oberflächen auf.

Wir betrachten eine *dünne Linse*, das heisst, dass wir die Dicke des Glases vernachlässigen. Die Linsenoberflächen sollen die Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$  (rechts) haben.  $r_1$  ist der Krümmungsradius einer konvexen Oberfläche , aus der Sicht des ankommenden Lichtstrahles) und damit positiv.  $r_2$  ist der Krümmungsradius einer **konkaven** Grenzfläche (wieder aus der Sicht des ankommenden Lichtstrahles) und damit **negativ**. Die *Linse* mit dem *Brechungsindex*  $n$  ist in Luft (*Brechungsindex* = 1). Ein Gegenstand befindet sich im Abstand  $g$  links vor der ersten Ebene, und damit auch im Abstand  $g$  vor der Mittelebene. Die *Bildweite*  $b_1$  aufgrund der ersten *Oberfläche* nach wird Gleichung (5.3.5) mit

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{r_1} \quad (5.3.7)$$

Das Bild ist virtuell, da das Licht auch noch an der zweiten Grenzfläche gebrochen wird. In unserer Abbildung ist die *Bildweite*  $b_1$  negativ. Diese *Bildweite*  $b_2$  ist für die zweite *Oberfläche* die Gegenstandsweite  $g_2 = -b_1$ . Die Abbildungsgleichung dort lautet

$$\frac{n}{g_2} + \frac{1}{b} = \frac{1-n}{r_2} \quad (5.3.8)$$

Eingesetzt und addiert ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} + \frac{1}{b} &= \frac{n-1}{r_1} + \frac{1-n}{r_2} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ \frac{1}{f} &= (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

wobei wir  $g = \infty$  gesetzt haben. Dann ist  $b = f$  die *Brennweite*. Bei einer symmetrischen Linse ist  $r_1 = -r_2 = r$  und damit  $f = \frac{2}{(n-1)r}$ .

## Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (5.3.10)$$

- Strahlen, die die *Linse* auf der optischen Achse schneiden, werden nicht abgelenkt.
- Achsenparallele Strahlen werden im *Brennpunkt* fokussiert
- Strahlen aus dem *Brennpunkt* werden zu achsenparallelen Strahlen.



## Versuch zur Vorlesung:

Brennweitenbestimmung nach Bessel (Versuchskarte O-055)

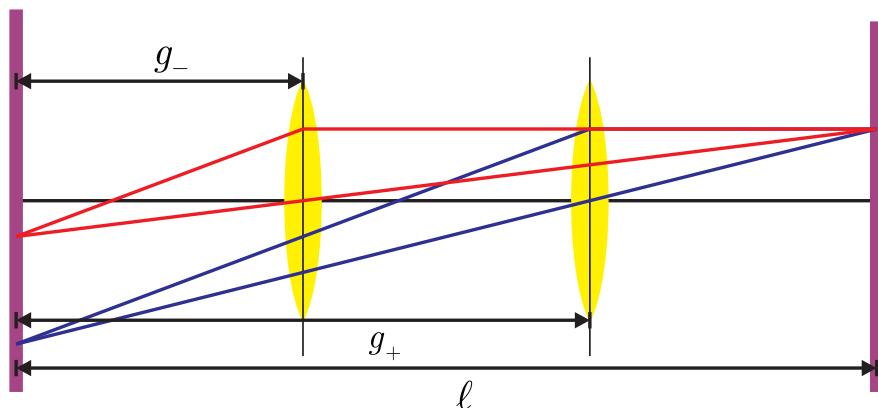


Abbildung 5.14.: Die zwei Positionen einer Linse, bei denen eine scharfe Abbildung erreicht wird.

Zur Berechnung verwenden wir die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (5.3.11)$$

mit der Nebenbedingung

$$g + b = \ell \quad (5.3.12)$$

Aus den beiden Gleichungen erhalten wir

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{\ell - g} = \frac{\ell}{g(\ell - g)} \quad (5.3.13)$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} g(\ell - g) &= \ell f \\ g^2 - \ell g + \ell f &= 0 \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung ist:

$$\begin{aligned} g_{\pm} &= \frac{\ell \pm \sqrt{\ell^2 - 4\ell f}}{2} \\ &= \frac{\ell}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{f}{\ell}} \right) \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Die Linse wird auf die zwei Positionen eingestellt, in denen eine scharfe Abbildung geschieht. Der Abstand dieser zwei Positionen ist:

$$\Delta g = g_+ - g_- = \ell \sqrt{1 - 4\frac{f}{\ell}} \tag{5.3.16}$$

Dann ist

$$\left( \frac{\Delta g}{\ell} \right)^2 = 1 - 4\frac{f}{\ell} \tag{5.3.17}$$

Somit ist die Brennweite

$$f = \frac{\ell}{4} \left( 1 - \frac{\Delta g^2}{\ell^2} \right) \tag{5.3.18}$$

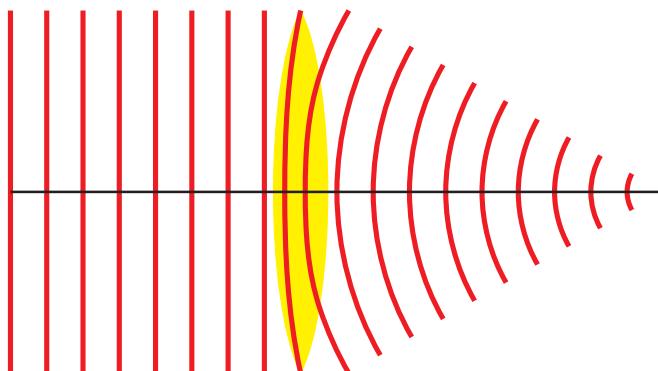


Abbildung 5.15.: Wellenfronten beim Durchgang durch eine *Linse*

Licht breitet sich in einem optisch dichteren Medium langsamer aus als im dünneren. Bei einer Konvexlinse treffen die achsennahen Lichtstrahlen eher auf das Glas als dieachsenferneren. Diese überholen deshalb die achsennahen Lichtstrahlen. Im Wellenbild bedeutet dies, dass ebene Wellen zu konzentrisch auf einen Punkt zulaufenden Wellen werden: die *Linse* fokussiert.

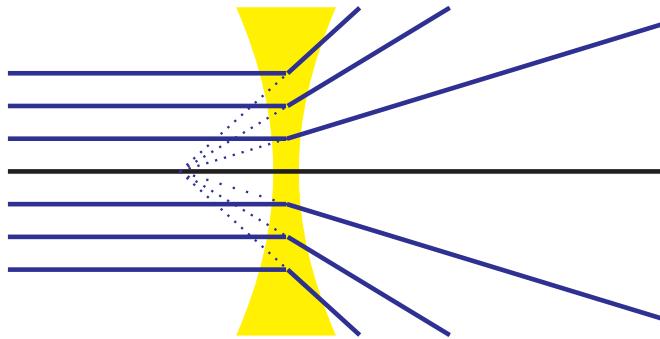


Abbildung 5.16.: Zerstreuungslinse

Bei einer *Zerstreuungslinse* sind die Oberflächen konkav gekrümmmt. Die Krümmungsradien sind negativ. Eine Konkavlinse (Zerstreuungslinse) wirkt wie ein Konvexspiegel.



### 5.3.2. Bildkonstruktion bei Linsen

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 250]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 107]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1075])

Bei einer *Linse* gelten die folgenden Regeln zur Konstruktion der Bilder:

- Achsparallele Strahlen werden in den Fokus fokussiert. Bei Konkavlinsen scheinen die aus achsparallelen Strahlen hervorgegangenen Strahlen aus dem *Brennpunkt* zu kommen.
- Strahlen, die Die *Linse* auf ihrer optischen Achse treffen, werden nicht abgelenkt.

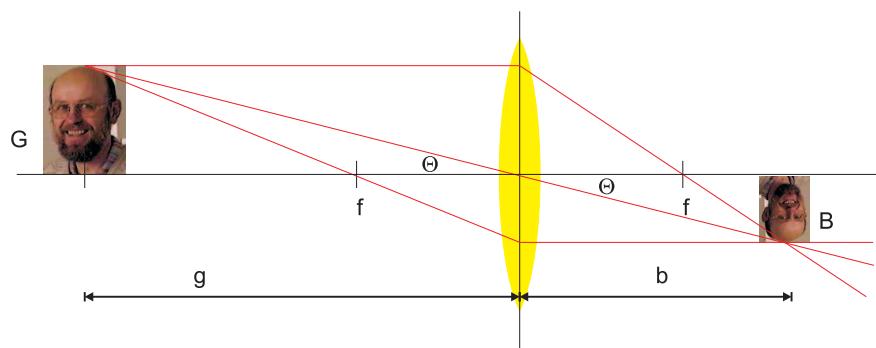


Abbildung 5.17.: Abbildung bei einer Konvexlinse

Die Konstruktion der Abbildung bei einer Konvexlinse ist in der obigen Abbildung gezeigt.  $g$  ist die Gegenstandsweite,  $b$  die *Bildweite* und  $f$  die *Brennweite*. Die *Vergrösserung* ist:

$$V = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g} \quad (5.3.19)$$

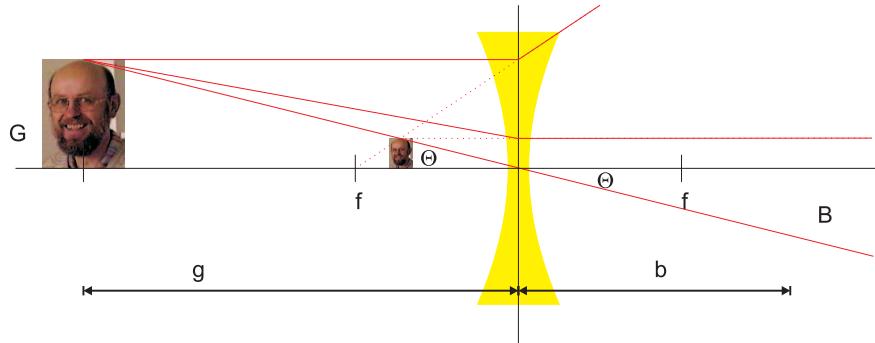


Abbildung 5.18.: Abbildung bei einer Konkavlinse

Die Bildkonstruktion bei einer *Konkavlinse* verläuft analog zu der bei einer *Konvexlinse*.

### 5.3.3. Dicke Linsen



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 363]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 100]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1077])

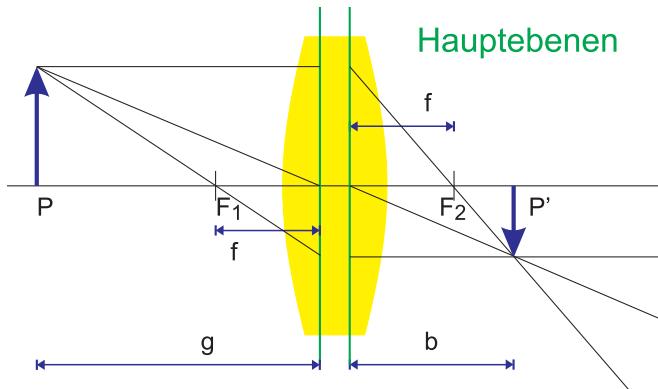


Abbildung 5.19.: Dicke Linse

Eine dicke *Linse* wird wie eine dünne berechnet, mit der Ausnahme, dass alle Messungen von Distanzen von den jeweiligen Hauptebenen aus gemacht werden müssen.

### 5.3.4. Mehrere Linsen



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 258]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 116]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1078])

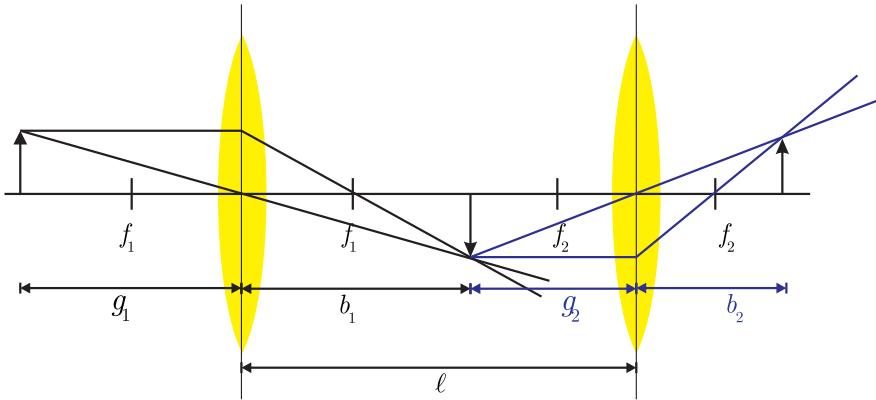


Abbildung 5.20.: Geometrie eines Doppellinsensystems

Bei mehreren Linsen berechnet man aus der Brennweite  $f_1$  und der Gegenstandsweite  $g_1$  die *Bildweite*  $b_1$ . Die Lage des Bildes gibt die Gegenstandsweite  $g_2$  der zweiten *Linse*. Mit der *Brennweite* der zweiten *Linse*  $f_2$  kann das Bild  $b_2$  berechnet werden. Zur Berechnung benötigen wir noch den Abstand der Linsen  $\ell$ . Die Gegenstandsweite der zweiten Linse ist  $g_2 = \ell - b_1$ .

Aus der Abbildungsgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1} \\ b_2 &= \frac{f_2 g_2}{g_2 - f_2} \end{aligned} \tag{5.3.20}$$

Durch die Kombination der beiden Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{f_2(\ell - b_1)}{\ell - b_1 - f_2} \\ &= \frac{f_2(\ell - \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1})}{\ell - \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1} - f_2} \\ &= \frac{f_2(\ell(g_1 - f_1) - f_1 g_1)}{(\ell - f_2)(g_1 - f_1) - f_1 g_1} \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

Diese Gleichung hat eine Divergenz bei  $(\ell - f_2)(g_1 - f_1) - f_1 g_1 = 0$ , das heisst bei der Gegenstandsweite

$$g_1 = \frac{(\ell - f_2)f_1}{\ell - f_1 - f_2} \tag{5.3.22}$$

### Beispiel

- Die *Linse* 1 sei bei der Position  $x_1 = 0$  cm, die *Linse* 2 bei der Position  $x_2 = 20$  cm.
- Die Brennweiten seien  $f_1 = 5$  cm und  $f_2 = 10$  cm
- Der Gegenstand sei bei  $x_g = -6$  cm

- Dann ist  $g_1 = 6 \text{ cm}$ . Daraus folgt mit der Linsengleichung  $b_1 = 1/(1/f_1 - 1/g_1) = 30 \text{ cm}$
  - Es ist also  $x_b = 30 \text{ cm}$
  - Da  $x_2 = 20 \text{ cm}$  ist  $g_2 = -10 \text{ cm}$
  - Damit erhalten wir  $b_2 = 1/(1/f_2 - 1/g_2) = 1/(1/10 \text{ cm} - 1/(-10 \text{ cm})) = 5 \text{ cm}$
- 

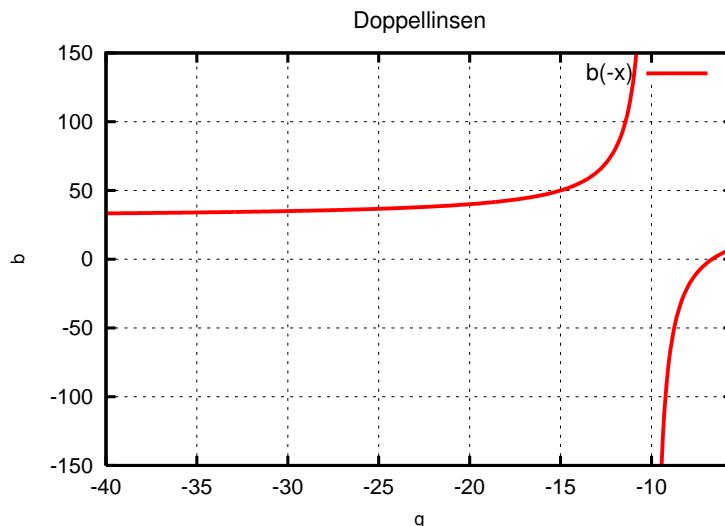


Abbildung 5.21.: Die Position des Bildes für verschiedene  $x_g = -g_1$  im obigen Beispiel

## 5.4. Ebene Spiegel



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 271]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 169]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1059])



### Versuch zur Vorlesung:

Virtuelles Bild: Reflexion am ebenen Spiegel (Versuchskarte O-111)

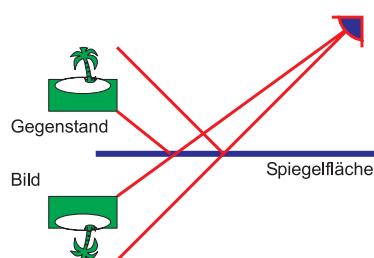


Abbildung 5.22.: Ebener Spiegel

Blickt man in einen ebenen Spiegel, so sieht man ein virtuelles Bild des Gegen-

standes. Bei einem perfekten Spiegel ist das Bild nicht von einem wirklichen Gegenstand zu unterscheiden, ausser: links und rechts sind vertauscht. Eine andere Sichtweise ist auch, dass links und rechts bleiben, aber dass vorne und hinten vertauscht sind. Mehrere Spiegel erlauben Mehrfachbilder. Zwei Spiegel, die senkrecht aufeinander stehen, reflektieren das Licht in die gleiche Richtung zurück, aus der es gekommen ist.



## 5.5. Bilderzeugung mit sphärischen Spiegel

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 277]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 170]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1062])

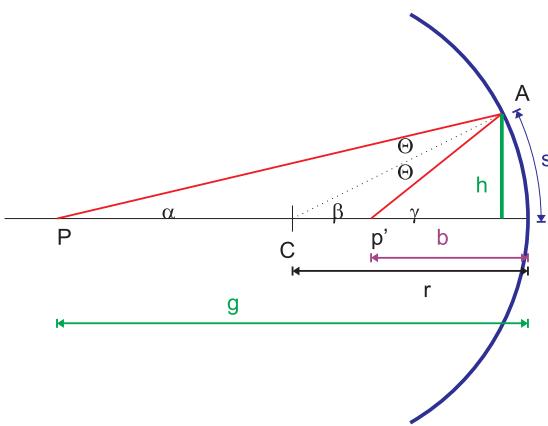


Abbildung 5.23.: Gekrümmter Spiegel

Bei einem gekrümmten Spiegel wird der Gegenstand  $P$  in das Bild  $P'$  abgebildet.  $C$  ist der Krümmungsmittelpunkt des Spiegels, deshalb sind die Winkel  $\Theta$  der einfallenden und reflektierten Strahlen zu dieser Linie gleich. Es gilt (Aussenwinkel)

$$\beta = \Theta + \alpha \quad (5.5.1)$$

und (auch Aussenwinkel)

$$\gamma = \alpha + 2\Theta \quad (5.5.2)$$

Wir eliminieren  $\Theta$

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad (5.5.3)$$

Für kleine Winkel (**paraxiale Näherung**) gilt, dass  $\alpha \approx h/g$ ,  $\beta = s/r \approx h/r$  und  $\gamma \approx h/b$  ist, wobei  $g$  die *Gegenstandsweite*,  $b$  die *Bildweite*,  $r$  der Krümmungsradius des Spiegels und  $h$  der Abstand der Strahlen von der optischen Achse ist. Eingesetzt:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \quad (5.5.4)$$

Wenn der Gegenstand im unendlichen ist,  $g = \infty$  ist  $b = r/2$ . Wir nennen diese Weite die

*Brennweite*

$$f = \frac{r}{2} \quad (5.5.5)$$

Die *Abbildungsgleichung*, die nicht nur für sphärische Spiegel gilt, sondern auch für Linsen, ist also

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (5.5.6)$$

*Abbildungsgleichung eines sphärischen Spiegels*

Der obige Spiegel ist ein *Konkavspiegel* (französisch: la cave: Keller (mit einem Kellergewölbe)). Bei einem *Konvexspiegel* gilt die Abbildungsgleichung auch, die *Brennweite* ist aber negativ.

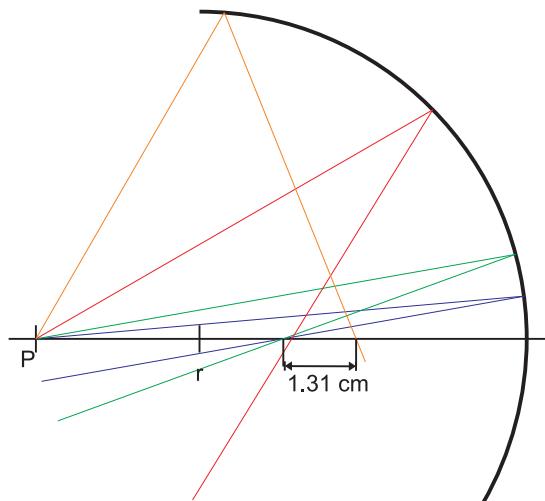


Abbildung 5.24.: Sphärische Aberration

Strahlen, die die *paraxiale Näherung* verletzen, werden nicht auf einen Punkt fokussiert. Sie bilden eine *Kaustik*, das Bild eines Punktes ist ausgedehnt. Dieser Abbildungsfehler, der allen sphärischen abbildenden Geräten eigen ist, heisst *sphärische Aberration*.

### 5.5.1. Konvexspiegel



(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 178]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1067])

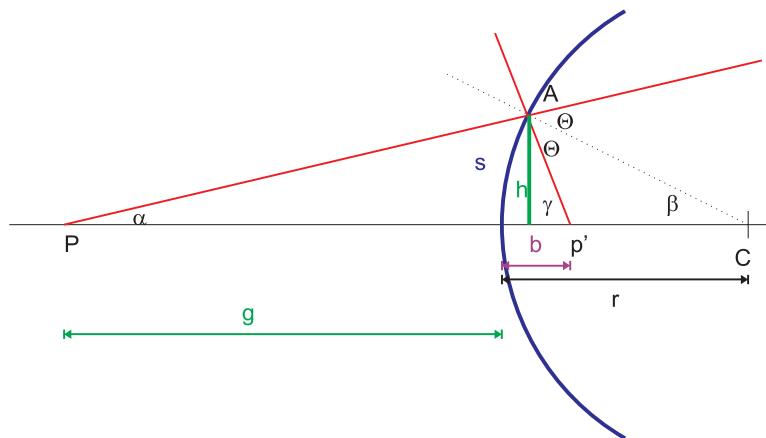


Abbildung 5.25.: Konvexspiegel

Die Berechnung der Abbildungsgleichung ist analog zu der eines Konkavspiegels. Für die Winkel können die folgenden Relationen aufgeschrieben werden:

$$\alpha + \gamma = 2\Theta \quad (5.5.7)$$

sowie

$$\beta + \Theta = \gamma \quad (5.5.8)$$

Wir eliminieren  $\Theta$  und erhalten

$$2\beta = \gamma - \alpha \quad (5.5.9)$$

Für kleine Winkel gilt wieder  $\alpha s/g \approx h/g$ ,  $\beta = s/r \approx h/r$  und  $\gamma \approx h/b$ . Eingesetzt bekommen wir

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{r} = \frac{1}{b} - \frac{1}{g} \quad (5.5.10)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung (5.5.4) so sehen wir, dass formal die gleiche Abbildungsgleichung gilt, wenn wir die **Bildweite** und die **Brennweite negativ** wählen.

Wir halten fest:

Bei einem Konvexspiegel ist die **Brennweite negativ** (Zerstreuungsspiegel), bei einem Konkavspiegel **positiv** (Sammelspiegel).



## 5.5.2. Bildkonstruktion beim Hohlspiegel

(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 177]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1065])



**Versuch zur Vorlesung:**  
Optische Scheibe (Versuchskarte O-046)

Die Bildkonstruktion bei einem Hohlspiegel verläuft nach den folgenden Regeln:

- Jeder achsparallele Strahl verläuft nach der *Reflexion* durch den *Brennpunkt* (oder seine Verlängerung nach rückwärts geht durch den *Brennpunkt*).
- Jeder Strahl durch den *Brennpunkt* wird zu einem achsparallelen Strahl (oder jeder Strahl, dessen Verlängerung durch den *Brennpunkt* ginge, wird nach der *Reflexion* zu einem achsparallelen Strahl).
- Jeder radiale Strahl verläuft durch den Krümmungsmittelpunkt eines Spiegels und wird in sich selber zurück abgebildet.
- Jeder Strahl, der auf den Scheitelpunkt des Spiegels (da wo die optische Achse auf den Spiegel trifft) gerichtet ist, wird unter dem gleichen Winkel zur optischen Achse reflektiert.

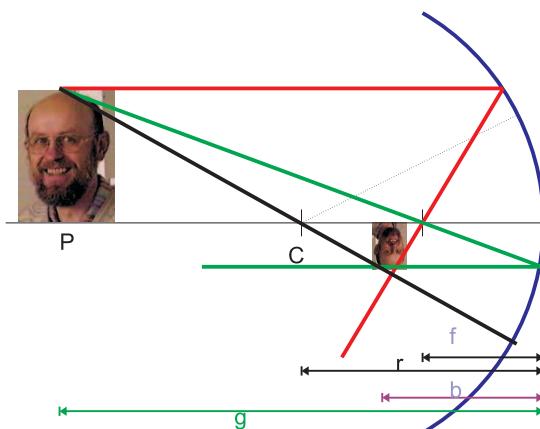


Abbildung 5.26.: Bildentstehung beim Konkavspiegel

Die Abbildung zeigt, wie nach den obigen Regeln, ein Bild konstruiert wird. Dass die Strahlen sich nicht in einem Punkt kreuzen, liegt daran, dass wir keine *paraxialen Strahlen* haben.

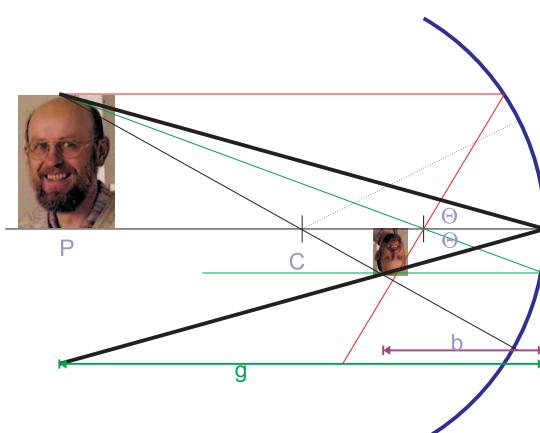


Abbildung 5.27.: Abbildungsmassstab

Der *Abbildungsmassstab* wird berechnet, indem wir den Strahl auf den Scheitel

analysieren. Aus dem Strahlensatz ergibt sich

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (5.5.11)$$

wobei  $G$  die Höhe des Gegenstandes und  $B$  die Höhe des Bildes ist.

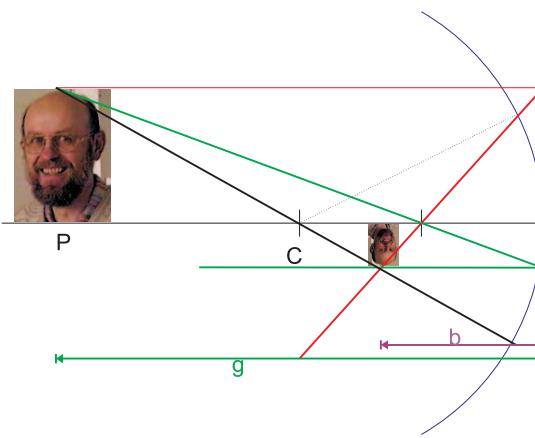


Abbildung 5.28.: Vereinfachung der Konstruktion

Für *paraxiale Strahlen* kann die Konstruktion vereinfacht werden, indem man die gekrümmte Fläche durch eine Tangentialebene am Scheitel des Spiegels ersetzt. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die durch die sphärische Aberration ungenau gewordene Abbildung wieder genau wird. Die neu eingeführte Ebene nennt man *Hauptebene*.

$g$	+	Gegenstand vor dem Spiegel (reeller Gegenstand)
	-	Gegenstand hinter dem Spiegel (virtueller Gegenstand)
$b$	+	Bild vor dem Spiegel (reelles Bild)
	-	Bild hinter dem Spiegel (virtuelles Bild)
$r,f$	+	Krümmungsmittelpunkt vor dem Spiegel (Konkavspiegel)
	-	Krümmungsmittelpunkt hinter dem Spiegel (Konvexspiegel)

Tabelle 5.1.: Vorzeichenkonventionen für die Abbildung

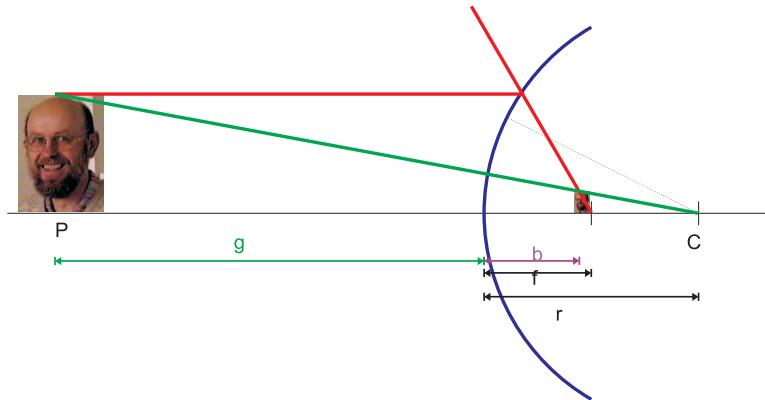


Abbildung 5.29.: Abbildung bei einem konvexen Spiegel

Bei einem konvexen Spiegel existiert ein virtuelles Bild hinter dem Spiegel. Die Abbildung zeigt die Bildkonstruktion.



## 5.6. Abbildungsfehler

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 380]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 117,130])  
 (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1081])

Es gibt die folgenden Abbildungsfehler

**sphärische Aberration** Wie bei Konkavspiegeln werden nicht achsennahe parallele Strahlen nicht auf einen Punkt fokussiert. Die sphärische Aberration entsteht bei kugelförmigen Spiegeln oder bei Linsen mit kugelförmigen Oberflächen. Parabelförmige Oberflächen würden für achsenparallele Strahlen keine sphärische Aberration zeigen<sup>1</sup>.

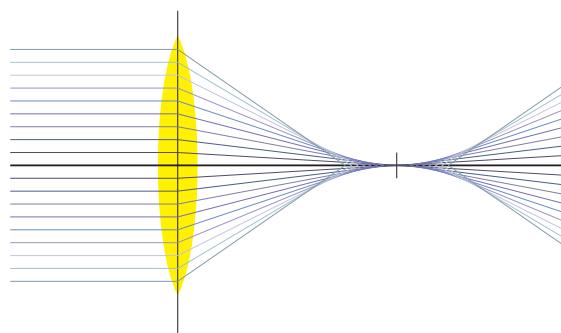


Abbildung 5.30.: Sphärische Aberration

Die von einem Punkt ausgehenden Strahlen formen eine Kaustik. Deshalb sind Fotografien, die mit kleinen Blendenöffnungen aufgenommen werden,

<sup>1</sup>Moderne *Objektive* haben asphärische Linsen, die bei grossen Blendenöffnungen eine bessere Abbildung ermöglichen

schärfer abgebildet. Wird die Blendenöffnung zu fest geschlossen, verschmieren Beugungseffekte die Abbildung. Optimal sind Blenden zwischen 8 und 11.

**chromatische Aberration** Durch die chromatische Dispersion (Siehe Abschnitt 6.6) werden verschiedene Farben unterschiedlich stark gebrochen.

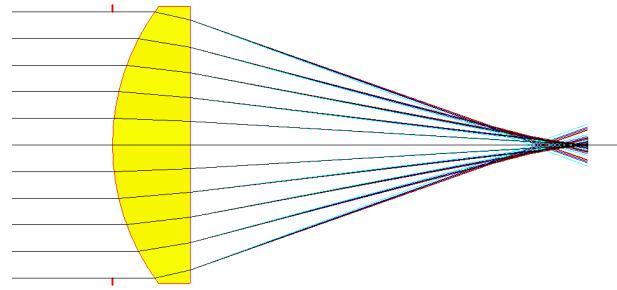


Abbildung 5.31.: Chromatische Aberration

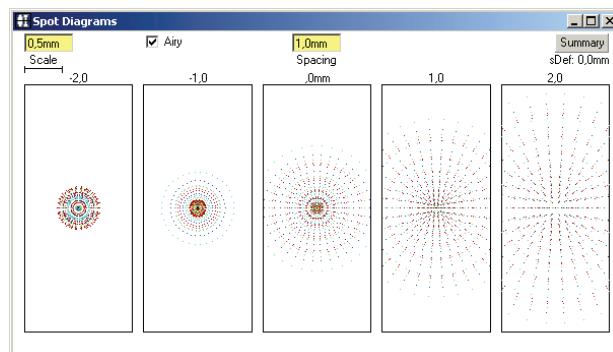


Abbildung 5.32.: Intensitätsverteilung im Fokus bei chromatischer Aberration

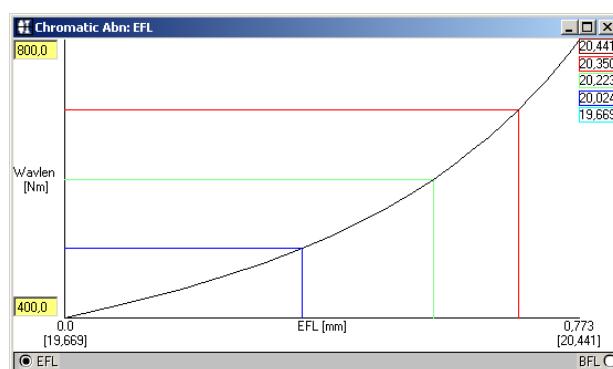
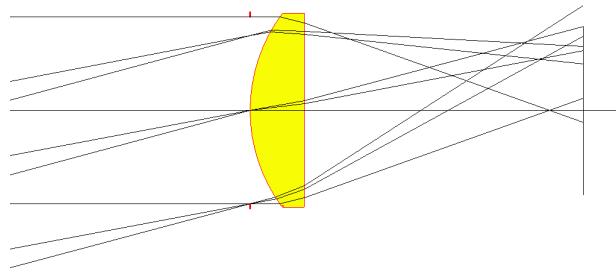


Abbildung 5.33.: Charakteristische Kurve bei chromatischer Abberation

Blaues Licht wird stärker gebrochen als rotes, also ist die *Brennweite* für rotes Licht länger als für blaues. Die Abbildung zeigt oben den Strahlengang und in der Mitte die Farbzusammensetzung des Fokus. Unten ist die Verschiebung des Fokus als Funktion der Farbe angegeben. Berechnet worden sind die Darstellungen mit WinLens3D Basic.

### Astigmatismus schiefer Bündel

---



---

Abbildung 5.34.: Astigmatismus

Schiefe parallele Bündel von Licht werden auf einen Punkt fokussiert, dessen Abstand von der Linsenhauptebene umso grösser wird, je schiefer der Einfallswinkel ist. Deshalb sind Fotografien am Rand weniger scharf als im Zentrum.



# 6. Optische Instrumente



(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1089])

## 6.1. Das Auge



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 304]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1089])

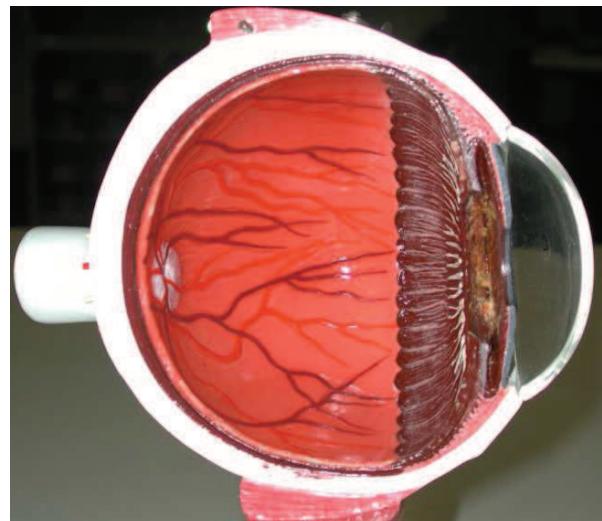
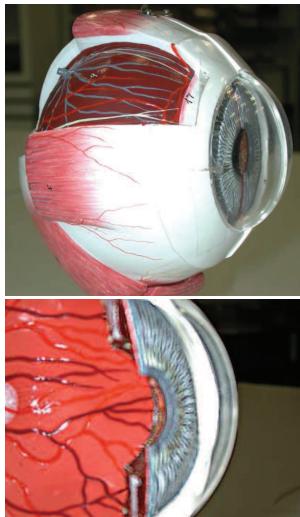


Abbildung 6.1.: Das Auge. Links oben eine Gesamtansicht eines Augenmodells. Rechts ein Schnitt durch das Auge mit der Iris links, dann der *Linse* und dem *Glaskörper*. Links unten eine Detailansicht der Linse.

Das Auge hat eine *Linse* mit einer *Brennweite* von etwa 2.5 cm (Abstand Linse-Netzhaut). **Achtung:** Der Brechungsindexunterschied nach aussen (Linse zu Luft) und nach innen (Linse zu *Glaskörper*) ist verschieden. Deshalb ist die *Brennweite* der *Linse* ausserhalb kleiner als innerhalb des Auges. Die Krümmung der *Linse* kann eingestellt werden: *Akkommodation*.



**Versuch zur Vorlesung:**  
Augen-Modell (Versuchskarte O-132)

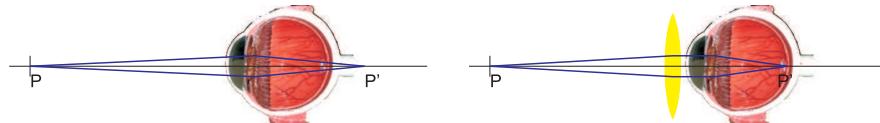


Abbildung 6.2.: Weitsichtiges Auge: Links ohne Brille, rechts mit Korrektur

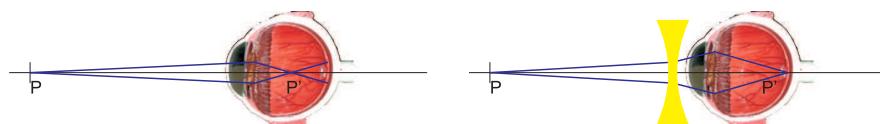


Abbildung 6.3.: Kurzsichtiges Auge: Links ohne Brille, rechts mit Korrektur



## 6.2. Die Lupe

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 318]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 100,105])  
 (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1093])



**Versuch zur Vorlesung:**  
 Lupe und Mikroskop (Versuchskarte O-081)

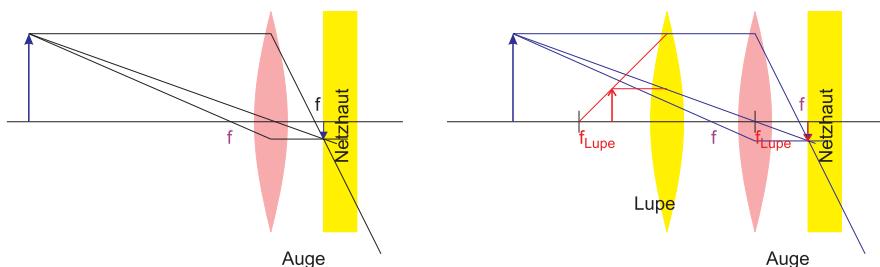


Abbildung 6.4.: Wirkungsweise einer Lupe

Die Wirkungsweise einer Lupe kann nur verstanden werden, wenn wir das Auge mit berücksichtigen. Auf der linken Seite finden sie eine Skizze, wie ein Bild auf der Netzhaut des Auges entsteht. Die *Brennweite* des Auges sei dabei  $f_a$ . Der blaue Pfeil wird entsprechend den Abbildungsgesetzen auf die Netzhaut abgebildet.

Die Lupe (rechtes Bild) wird nun so vor das Auge gehalten, dass ihr *Brennpunkt* auf der Linsenachse des Auges ist. Die vom roten Pfeil (innerhalb der *Brennweite* der Lupe) ausgehenden Strahlen werden von der Lupe so geformt, dass sie nach ihr gleich wie die Strahlen des blauen Pfeils ohne Lupe sind. Das Bild des roten Pfeils ist gleich gross wie das des blauen. Die Lupe hilft dem Auge, ein vergrößertes Bild zu sehen. Sie vergrößert den Winkel, unter dem ein Gegenstand gesehen wird.

Oft wird der Gegenstand in den *Brennpunkt* der Lupe gebracht. Wenn das Auge ohne Lupe einen Gegenstand der Länge  $G$  im Abstand  $s_0$  (Nahpunkt,  $s_0 = 25 \text{ cm}$ )

beobachtet, ist der *Sehwinkel*  $\varepsilon_0 = \frac{G}{s_0}$ . Eine Lupe vergrössert den *Sehwinkel* eines Gegenstandes auf den Wert  $\varepsilon = \frac{G}{f}$ . Die *Vergrösserung der Lupe* ist

$$V_L = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{s_0}{f} \quad (6.2.1)$$

Allgemein:

$$\text{Vergrösserung} = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel im Abstand des Nahpunktes ohne Instrument}} \quad (6.2.2)$$

## 6.3. Die Kamera



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 327]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 228]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1095])

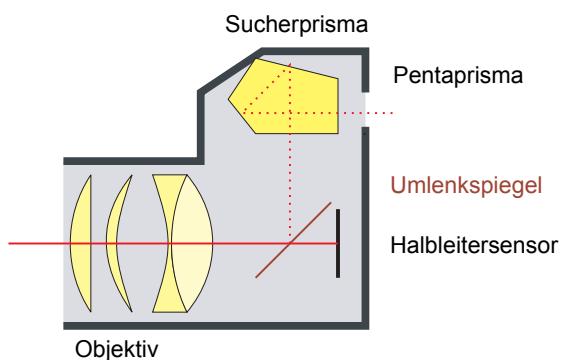


Abbildung 6.5.: Schematische Skizze einer Spiegelreflexkamera

Eine Kamera besteht aus einem *Objektiv*, das in einer Führung verschiebbar gelagert ist, dem Film oder der CCD und einer Beobachtungsoptik. Bei einer Spiegelreflexkamera sind die Beobachtungsoptik und der Strahlengang des *Objektivs* teilweise identisch. Wie weit müssen *Objektive* bewegt werden? Wir verwenden  $1/f = 1/b + 1/g$  und beachten, dass bei einer auf  $\infty$  eingestellten Kamera das Objektiv gerade  $f$  vom Film entfernt ist.

Distanz	20 mm	50 mm	100 mm	200 mm	1000 mm
100 m	20.004 <b>mm</b>	50.025 <b>mm</b>	100.1 mm	200.4 mm	1010.1 mm
Verschiebung	0.004 <b>mm</b>	0.025 <b>mm</b>	0.1 mm	0.4 mm	10.1 mm
30 m	20.013 <b>mm</b>	50.08 <b>mm</b>	100.3 mm	201.3 mm	1034.4 mm
Verschiebung	0.013 <b>mm</b>	0.08 <b>mm</b>	0.3 mm	1.3 mm	34.4 mm
10 m	20.04 <b>mm</b>	50.25 mm	101 mm	204.1 mm	1111 <b>mm</b>
Verschiebung	0.04 <b>mm</b>	0.25 mm	1 mm	4.1 mm	111 <b>mm</b>
3 m	20.13 mm	50.85 mm	103.4 mm	214 mm	1500 <b>mm</b>
Verschiebung	0.13 mm	0.85 mm	3.4 mm	14 mm	500 <b>mm</b>
1 m	20.4 mm	52.6 mm	111 mm	250 mm	-
Verschiebung	0.4 mm	2.6 mm	11 mm	50 mm	-
0.3 m	21.4 mm	60 mm	150 mm	600 <b>mm</b>	-
Verschiebung	1.4 mm	10 mm	15 mm	400 <b>mm</b>	-
0.1 m	25 mm	100 mm	-	-	-
Verschiebung	5 mm	50 mm	-	-	-
0.03 m	60 mm	-	-	-	-
Verschiebung	50 mm	-	-	-	-

**Fett** angegeben sind die Kombinationen von Distanzen und Brennweiten, die wahrscheinlich nicht einstellbar sind, weil die Verschiebungen zu klein sind. **Rot** angegeben sind die Kombinationen von Distanzen und Brennweiten, die wahrscheinlich nicht einstellbar sind, weil die Verschiebungen zu gross sind.

Die Blendenzahl ist das Verhältnis der *Brennweite f* zum Durchmesser der *d* der Öffnung der Blende.

$$\text{Blendenzahl} = \frac{f}{d} \quad (6.3.1)$$

Bei einem *Objektiv* mit der *Brennweite* 50 mm und einer Blendenzahl von 8 ist die Öffnung also  $d = 6.25$  mm.



## 6.4. Das Mikroskop

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 324]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 147]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1098])



**Versuch zur Vorlesung:**  
Lupe und Mikroskop (Versuchskarte O-081)

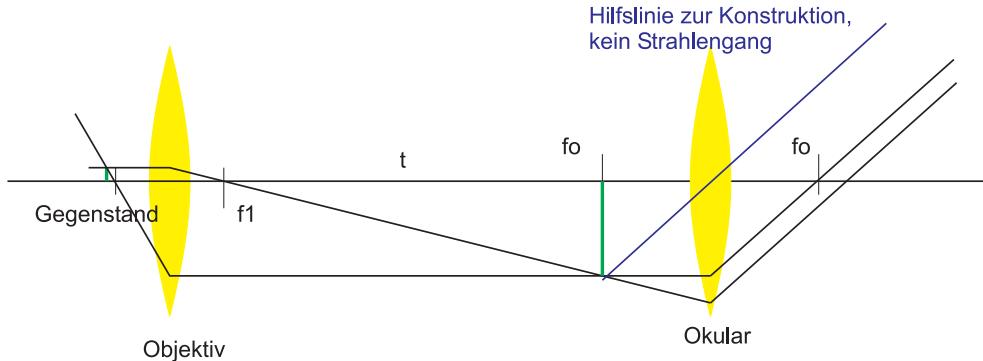


Abbildung 6.6.: Strahlengang in einem Mikroskop

Bei einem Mikroskop ist ein Gegenstand so nahe am *Brennpunkt* einer *Objektivlinse*, dass ein stark vergrößertes Bild erzeugt wird. Dieses Bild, **Zwischenbild** genannt, wird in einer Ebene im Abstand  $t$  vom zweiten *Brennpunkt* des *Okulars* erzeugt. Würde man in dieser Ebene eine *Kamera* anbringen, könnte man ein Bild des Gegenstandes aufnehmen. Der *Abbildungsmassstab* ist

$$V_{\text{Objektiv}} = \frac{t}{f_1} \quad (6.4.1)$$

Die Strahlen gehen jedoch weiter und werden von einer zweiten *Linse*, dem *Okular* weiterverarbeitet. Das *Okular* ist so platziert, dass das von der ersten *Linse* erzeugte Bild genau auf seinem *Brennpunkt* erzeugt wird. Die Strahlen aus der ersten *Linse*, dem *Objektiv*, werden nun so gebrochen, dass sie parallel sind. Dies ist die gleiche Funktion, wie sie die Lupe (Siehe Abschnitt 6.2) hatte. Nur das Auge, hier nicht eingezeichnet, kann wieder ein Bild formen, das nun aber sehr stark vergrößert ist.

Die *Winkelvergrößerung* des *Okulars* (*Lupe*) ist

$$V_{\text{Okular}} = \frac{s_0}{f_O} \quad (6.4.2)$$

Damit wird die *Gesamtvergrößerung*

$$V = V_{\text{Objektiv}} V_{\text{Okular}} = \frac{t s_0}{f_1 f_O} \quad (6.4.3)$$

In vielen Lehrbüchern findet man Zeichnungen, in denen die Lichtstrahlen beim Zwischenbild ihre Richtung ändern. Dies ist in Luft nicht möglich, und Streukörper gibt es in einem Mikroskopstubus nicht. Zur Konstruktion des Bildes ist diese Vorgehensweise jedoch gestattet.

Ein *Objektiv* mit der *Vergrößerung* 60 bei einer Tubuslänge von 180 mm hat eine *Brennweite*  $f_1 = 3$  mm. Ein *Okular* mit der *Vergrößerung* 20 hat die *Brennweite*  $f_O = 12.5$  mm.

## 6.5. Das *Teleskop oder Fernrohr*



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 332]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 158]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1099])

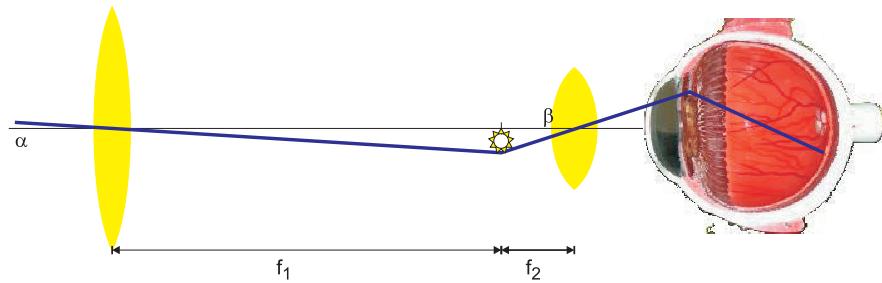


Abbildung 6.7.: Das *Teleskop*. Die angegebenen Strahlen werden zur Konstruktion des Bildes benötigt. Sie stellen jedoch nicht den Strahlengang dar!.

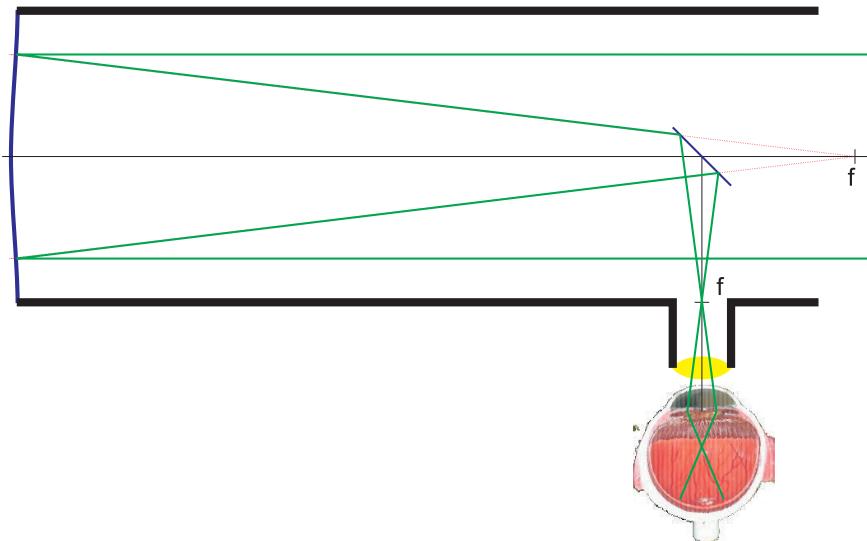
Der Zweck eines *Teleskops* ist, den *Sehwinkel* zu vergrössern. Das *Objektiv* sammelt dabei möglichst viel Licht, ändert den Winkel aber nicht. Das *Zwischenbild* des *Objektivs* hat die Grösse  $B = f_1\alpha$ . Das *Okular* (Lupe) erzeugt also den Winkel  $\beta = \frac{B}{f_2}$ . Zusammen ergibt sich die *Vergrösserung*

$$V = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2} \quad (6.5.1)$$

Ob ein Stern gesehen werden kann, hängt allein vom Verhältnis

$$\left( \frac{\text{Ø Linse}}{\text{ØAugenpupille}} \right)^2$$

ab. Deshalb hätte man gerne möglichst grosse *Teleskope* in der *Astronomie*.

Abbildung 6.8.: Das *Spiegelteleskop*

Da Linsen mit Durchmessern von mehr als einigen 10 cm unhandlich schwer sind und schwierig herzustellen, verwendet man für die lichtstärksten *Teleskope* Spiegel. Im folgenden sind einige hübsche Bilder des *Hubble-Teleskops* gezeigt.



Abbildung 6.9.: Links: Eine Hubble-Aufnahme, die den Blasen-Nebel NGC 7635 zeigt ([NU99]). Rechts: Der so genannte Ameisen-Nebel"Menzel 3. Die Sternengruppe erhielt ihren Namen aufgrund der Ähnlichkeit zu Kopf und Brustkorb der gemeinen Gartenameise ([NAS97]).



Abbildung 6.10.: Links: Zwei Galaxien tauschen Materie aus ([NAS10]), sichtbar als dunkles Band in der Mitte. Rechts: Gigantische Gasgebilde, die einen verglühenden Stern umkreisen. ([FHT96])



Abbildung 6.11.: Links: Hubble-Aufnahme vom Sternbild Aquila ([NAS00b]). Rechts: Der Schlüsselloch-Nebel ([NAS00a]), rund 8.000 Lichtjahre von der Erde entfernt, ist Teil des Carina-Nebels. Der Carina-Nebel enthält Sterne, die zu den heissten und grössten bekannten Sternen gehören. Der Schlüsselloch-Nebel, rund 8.000 Lichtjahre von der Erde entfernt, ist Teil des Carina-Nebels. Der Carina-Nebel enthält Sterne, die zu den heissten und grössten bekannten Sternen gehören. (NASA)



## 6.6. Das *Prisma*: ein optisches Instrument mit Dispersion

(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 106, 284]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 415])  
 (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1038])



**Versuch zur Vorlesung:**  
 Optische Scheibe (Versuchskarte O-046)

Im allgemeinen Falle hängt die Phasengeschwindigkeit einer Welle von der Fre-

quenz und vom Medium ab. Das heisst für Licht, dass jede Farbe eine eigene Ausbreitungsgeschwindigkeit hat.

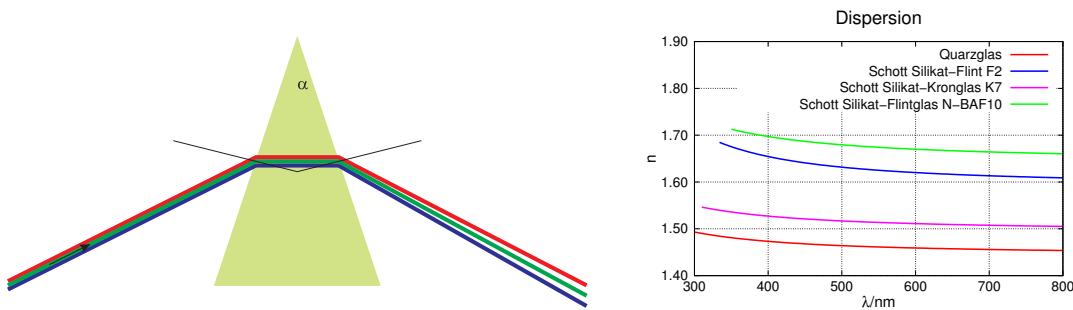


Abbildung 6.12.: Links: Strahlengang durch ein Prisma. Rechts: Dispersion einiger Materialien



### Versuch zur Vorlesung:

$n(\lambda)$  Abhängigkeit beim Prisma ([Versuchskarte O-074](#))

Durch die Dispersion des Lichtes, das heisst, dass die Brechzahl von der Wellenlänge abhängt, werden die verschiedenen Farben unterschiedlich gebrochen. Jedes Mal, wenn Licht durch die Grenzfläche Luft-Materie geht, werden unterschiedliche Farben unterschiedlich gebrochen. Dies bewirkt die folgenden Effekte:

- die Chromatische Aberration bei Linsen (Farbsäume)
- die Möglichkeit, ein Prisma als Spektralapparat zu verwenden
- das Auseinanderlaufen von Signalen in Glasfasern
- den Regenbogen

Um die Physik der Dispersion zu klären, müssen wir ein physikalisches Modell finden, bei dem eine Frequenzabhängigkeit auftritt. Wir erinnern uns aus der Mechanik, dass bei Oszillatoren eine Resonanz auftritt. Als Beispiel kann man ein Feder-Masse-System betrachten.

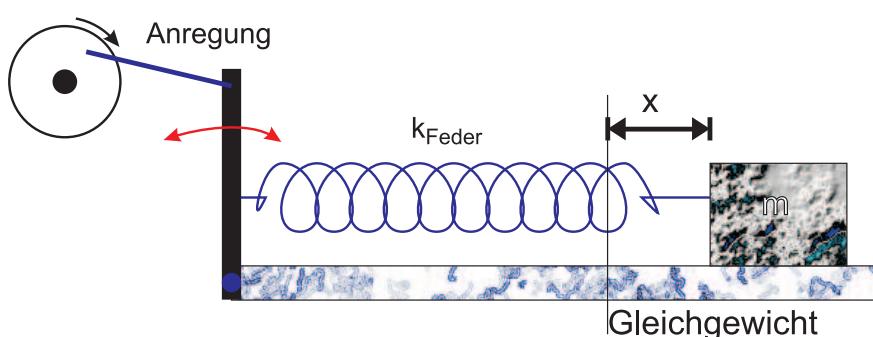


Abbildung 6.13.: Modell eines Oszillators

In diesem Feder-Masse-Modell wird die Schwingung durch  $\hat{x}(t) = x_0 \cos \omega t$  ange-

regt. Die Amplitude verhält sich als Funktion der Frequenz wie

$$x(\omega) = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}}} \quad (6.6.1)$$

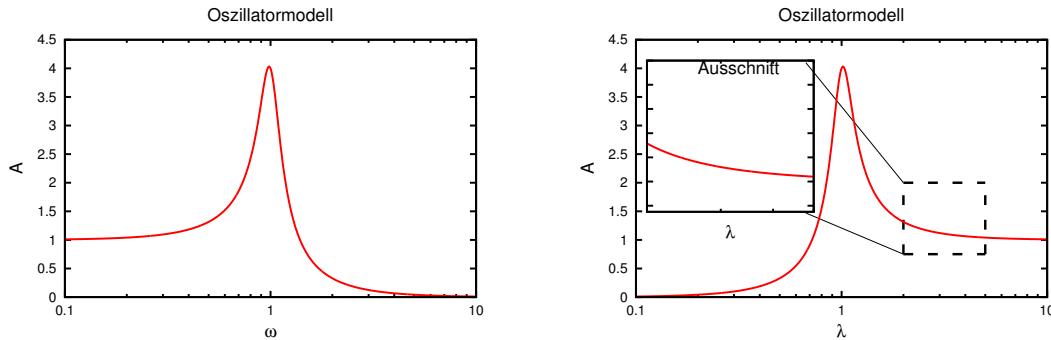


Abbildung 6.14.: Resonanzkurve links als Funktion der Frequenz  $\omega$  und rechts als Funktion der Wellenlänge  $\lambda$ . Der Ausschnitt zeigt, dass es einen Bereich der Resonanzkurve gibt, der genau so aussieht wie der Verlauf des Brechungsindexes.

Aus diesen Kurven gewinnt man die Anregung, dass ein Feder-Masse-System als Modell für die Dispersion geeignet sein könnte.

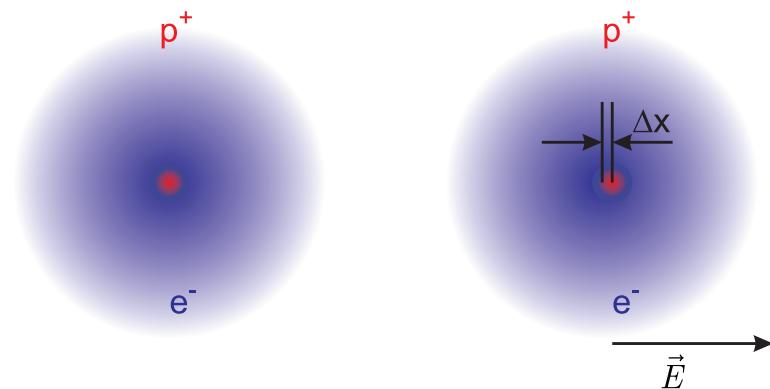


Abbildung 6.15.: Links liegt die Elektronenwolke zentriert über dem positiv geladenen Kern. Wenn ein elektrisches Feld  $\mathbf{E}$  eingeschaltet wird, wird die Elektronenwolke entgegengesetzt zu  $\mathbf{E}$  verschoben.

Ein fester Körper besteht aus Atomen. Diese bestehen aus Elektronen, deren Aufenthaltswahrscheinlichkeit über einen Durchmesser von 100 pm ausgeschmiert ist, sowie aus einem *Atomkern*, der im Zentrum der Elektronenwolke liegt und einen Durchmesser von ungefähr 1 fm hat. Wenn ein elektrisches Feld  $\mathbf{E}$  angelegt wird, dann verschiebt sich die Elektronenwolke gegen den Kern um eine Distanz  $\Delta x$ . Diese Verschiebung soll klein gegen den Durchmesser der Elektronenwolke sein. Dann können wir annehmen, dass die Ladung der Elektronenwolke homogen ver-

teilt ist. Da das Coulombgesetz für die elektrostatischen Kräfte die gleiche Form wie das Gravitationsgesetz hat, hängt die Kraft für die Testladung des Kerns linear von der Auslenkung ab, und zwar so, dass der Schwerpunkt des Kerns und der Elektronenwolke wieder übereinander gelegt werden sollen. Wir haben also eine zur Auslenkung proportionale rücktreibende Kraft, wie bei einer Feder.

Deshalb nehmen wir an, dass das Elektron-Kern-System als Feder-Masse-System beschrieben werden kann. Da ein Elektron nicht nur Kräfte auf seinen Kern, sondern auch auf die benachbarten ausübt, müssen wir ein dreidimensionales Netz von Federn und Massen betrachten. Wir vereinfachen das System hier auf eine *lineare Federkette*.

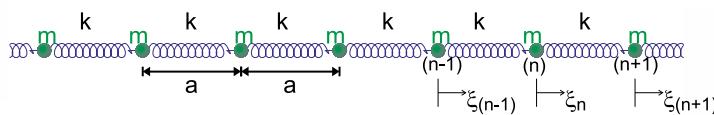


Abbildung 6.16.: Federmodell für die Dispersion nach (Siehe Känzig, Mechanik und Wellenlehre [Kän78, pp. 292]).

Wir betrachten eine longitudinale Welle auf einem Feder-Masse-System. Die Bewegungsgleichung für die n-te Masse ist

$$m\ddot{\xi}_n = -k(\xi_n - \xi_{n-1}) + k(\xi_{n+1} - \xi_n) = k(\xi_{n+1} + \xi_{n-1}) - 2k\xi_n \quad (6.6.2)$$

analog zur Gleichung für ein inneres Pendel bei gekoppelten Pendeln. Bei sehr kleinen Frequenzen schwingen alle Massen in Phase: wie bei den gekoppelten Pendeln gibt die gleichsinnige Bewegung aller Massen die tiefste Frequenz, die hier, da wir eine unendliche Anzahl Massen annehmen, null ist. Die maximale Frequenz erhält man dann, wenn jeweils zwei benachbarte Massen gegensinnig schwingen. Eine höher Schwingungsfrequenz ist nicht möglich. Die minimale Wellenlänge ist  $\lambda_{min} = 2a$  und entsprechend  $k_{max} = \frac{\pi}{a}$ . **Beachte, dass  $k_{max} = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl ist, während  $k$  die Federkonstante bedeutet.**

Wir setzen  $\Omega_0^2 = \frac{4k}{m}$  und erhalten

$$\ddot{\xi}_n = \Omega_0^2 \left[ \frac{1}{4} (\xi_{n+1} + \xi_{n-1}) - \frac{1}{2} \xi_n \right] \quad (6.6.3)$$

Wir setzen als vorläufige Lösung für  $\lambda > 2a$  an:  $\xi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ . Da die Schwingung nur für diskrete Positionen definiert ist, ersetzen wir  $x = na$  und erhalten als endgültigen Lösungsansatz

$$\xi_n = \xi(n, t) = Ae^{i(kna - \omega t)} \quad (6.6.4)$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
-\omega^2 e^{ikna} &= \Omega_0^2 \left[ \frac{1}{4} (e^{ik(n-1)a} + e^{ik(n+1)a}) - \frac{1}{2} e^{ikna} \right] \\
\omega^2 &= \frac{1}{2} \Omega_0^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} (e^{ika} + e^{-ika}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \Omega_0^2 [1 - \cos(ka)] \\
&= \Omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2}
\end{aligned} \tag{6.6.5}$$

Die Dispersionsbeziehung für die Feder-Masse-Kette ist

$$\omega(k) = \Omega_0 \sin \frac{ka}{2} \tag{6.6.6}$$

- Für lange Wellen  $\lambda \gg a$  oder  $ka \ll 2\pi$  ist  $\sin \frac{ka}{2} \approx \frac{ka}{2}$ . Damit ist  $\omega(k) \approx \frac{1}{2} \Omega_0 ka$ .
- Mit der Definition der *Phasengeschwindigkeit*  $c_P = \omega/k$  erhalten wir

$$c_P \approx \frac{1}{2} \Omega_0 a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} a$$

Die Gruppengeschwindigkeit  $c_G = \frac{d\omega}{dk}$  ist

$$c_G \approx \frac{1}{2} \Omega_0 a = c_P$$

- Für Wellen mit  $\lambda = \lambda_{min} = 2a$  ist die Phasengeschwindigkeit

$$c_P = \frac{\Omega_0}{\pi/a} = \frac{\Omega_0 a}{\pi} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} a$$

und die Gruppengeschwindigkeit

$$c_G = \frac{d}{dk} \Omega_0 \sin \frac{ka}{2} \Big|_{\pi/a} = \Omega_0 \frac{a}{2} \cos \frac{ka}{2} \Big|_{\pi/a} = 0$$

- Für  $\lambda < 2a$  wird die Welle exponentiell gedämpft.

Wir können das Gefundene auf das Problem des Brechungsexponenten wie folgt zurückrechnen:

- Die Phasengeschwindigkeit  $c_P$  ist für die Berechnung der Ausbreitung zu nehmen.

- Die Phasengeschwindigkeit ist

$$c_P(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{\Omega_0 \sin \frac{ka}{2}}{k}$$

- Der dazugehörige Brechungsindex ist

$$n(k) = \frac{c_0}{c_P} = \frac{c_0 k}{\Omega_0 \sin \frac{ka}{2}}$$

wobei  $c_0$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist.

- Mit  $k = 2\pi/\lambda$  erhalten wir

$$n(\lambda) = \frac{c_0 2\pi}{\lambda \Omega_0 \sin \frac{2\pi a}{2\lambda}} = \frac{2\pi c_0}{\Omega_0 \lambda \sin \frac{\pi a}{\lambda}}$$

- Wir verwenden die Werte für Silikat-Flintglas und passen die obige Gleichung an.

$\lambda$	$n_{ist}$	$n_{berechnet}$
400 nm	1.660	1.655
450 nm	1.645	1.636
500 nm	1.630	1.622
550 nm	1.620	1.612
600 nm	1.610	1.605
650 nm	1.605	1.599
700 nm	1.600	1.595

Tabelle 6.1.: Brechungsindex für Flintglas

---

Diese Werte wurden mit den folgenden Parametern erreicht:

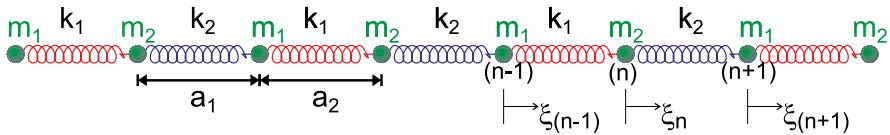
Parameter	Wert
$c_0$	$3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
$k/m$	$1.322 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-2}$
oder mit $k = 1 \text{ N/m}$ : $m$	$7.56 \cdot 10^{-16} \text{ kg}$
$a$	$7.24 \cdot 10^{-8} \text{ m}$

Tabelle 6.2.: Parameter für die Berechnung

---

Die Werte für  $a$  und  $m$  sind grösser als die erwarteten Werte von  $a = 10^{-10} \text{ m}$  und  $m = 1.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \times 28 = 4.5 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ . Der Wert für  $a$  deutet darauf hin, dass man nicht ein Atom für sich, sondern eine Gruppe von 724 Atomen betrachten muss. Die Masse in diesem Volumen wäre dann etwa  $m = 1.7 \cdot 10^{-17} \text{ kg}$ . Damit kann man berechnen, dass die Federkonstante

$$k = 1.322 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-2} \times 1.7 \cdot 10^{-17} \text{ kg} = 0.023 \text{ N/m} \text{ sein muss.}$$



Dispersion einer zweiatomigen Federkette

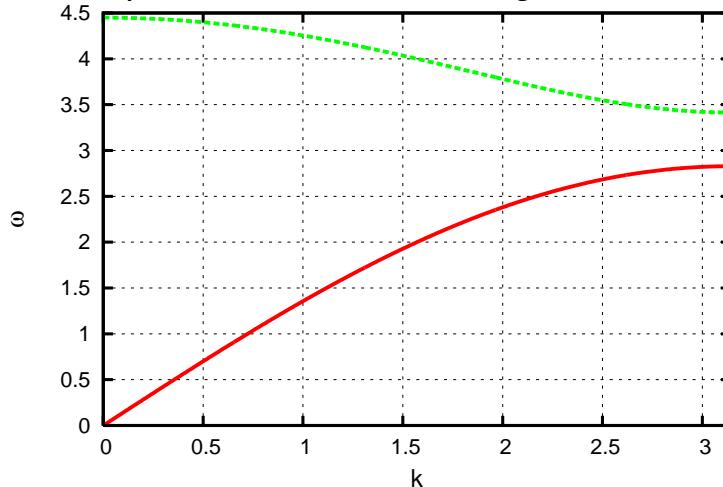


Abbildung 6.17.: Dispersionsrelation für Federketten mit zwei unterschiedlichen Atomen.

Wenn eine Federkette mit einer regelmässigen Anordnung zweier ungleicher Massen gebildet wird, tritt zum von den vorherigen Ausführungen bekannten **akustischen Zweig** ein optischer Zweig. Zusätzlich gibt es Frequenzen, für die es keinen reellen  $\mathbf{k}$ -Vektor gibt. Diese Frequenzen (oder über  $E = \hbar\omega$  auch diese Energien) sind keine propagierenden Wellen möglich. Gibt es neben longitudinalen auch transversale Wellen, zeigt die Dispersionsrelation nicht einen sondern drei Zweige akustischer Phononen.

Schwerewellen im tiefen Wasser haben die Dispersionsbeziehung

$$c_s^2 = \frac{g}{k} = \frac{1}{2\pi} g \lambda \quad (6.6.7)$$

Eine Konsequenz ist, dass sehr lange Wellen sehr schnell sind (Bsp. Tsunamis)

- $c_s = 300 \text{ m/s}$
- Dann ist  $\lambda = 2\pi c_s^2 / g \approx 2 \cdot 3 \cdot 300 \cdot 300 / 10 = 54000 \text{ m}$

Ein Puls oder eine Wellengruppe besteht aus Wellen benachbarter Frequenz. Analog zur Modulation<sup>1</sup> besteht ein Puls aus einer Einhüllenden sowie einer Phase, die für sich aber keine Information trägt. Eine längere Rechnung[Kän78] ergibt, dass die resultierende Wellenfunktion aus harmonischen Welle  $e^{i(k_0 x - \omega t)}$  sowie der Modulation  $G \left( x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} t \right)$ . Die resultierende Welle ist

<sup>1</sup>Dabei muss  $\omega t$  durch  $kx - \omega t$  ersetzt werden.

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega t)} G \left( x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t \right) \quad (6.6.8)$$

### Die Gruppengeschwindigkeit

$$v_G = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \quad (6.6.9)$$

Bei unserem Feder-Masse-System ist  $v_G = 0$  wenn  $\lambda = 2a$  ist. Das heisst, der Puls, der die Information trägt, ist **ortsfest**. Wenn  $v_G$  nicht konstant ist, bewegen verändert sich die Form des Pulses, da die verschiedenen Frequenzanteile sich unterschiedlich schnell ausbreiten.



### Versuch zur Vorlesung:

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit bei Dispersion (Versuchskarte SW-093)

### Lösungsmöglichkeiten

- Dispersionskompensation. Sie ist aufwendig und wird hauptsächlich bei Kurzpuls-Lasersystemen angewandt.
- Betrieb des Systems bei einer Wellenlänge, bei der die Dispersion minimal, also  $v_G$  möglichst konstant ist. Dies wird bei der optischen Kommunikation angewandt (Wellenlängen 1300 nm und 1500 nm).
- Man setzt die Datenrate auf niedrigere Werte, verbreitert also die Pulse und minimiert so die Fehler durch die Dispersion. Bis zu einer Verringerung der übertragenen Datenrate um den Faktor 2 kann der Geschwindigkeitsverlust meist durch die Anwendung von Kompressionsalgorithmen minimiert werden.

## 6.7. Spektrometer

*Spektrometer* gibt es in verschiedenen Ausführungen

1. Dispersive optische Elemente wie Prismen oder Gitter werden zur Trennung der verschiedenen Wellenlängen verwendet.
2. Resonatoren (*Fabry-Perot-Resonator*, Michelson-Interferometer, *Lummer-Gehrcke-Platte*) unterdrücken Teile des Lichtspektrums
3. Weitere Effekte wie akustische Wellen können zur höchstaufgelösten Spektroskopie verwendet werden.

Im Folgenden soll der Aufbau eines Spektrometers mit dispersiven optischen Komponenten erläutert werden.

Gemeinsames Charakteristikum aller dispersiver Bauelemente ist, dass eine ebene Welle um einen wellenlängenabhängigen Winkel  $\alpha(\lambda)$  abgelenkt wird. Jedes *Spektrometer* muss also

1. das zu untersuchende Licht so präparieren, dass eine ebene Welle das dispergierende Bauelement trifft und
2. nach dem Bauelement die Winkeländerung in eine Positionsänderung überführen, zur Detektion z.B. auf einer CCD-Zeile oder einem CMOS-Sensor.

### 6.7.1. Gitter-Spektrometer

Anhand eines *Gitterspektrometers* soll hier die Optik dieser Geräte diskutiert werden.

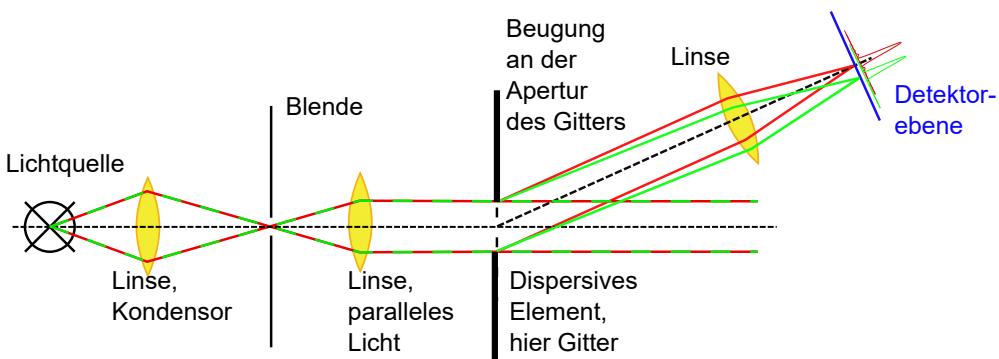


Abbildung 6.18.: Prinzipieller Aufbau eines *Gitterspektrometers*

Abbildung 6.18 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines *Gitterspektrometers*. Licht aus der zu untersuchenden Quelle (oder aus der zu untersuchenden Probe) wird mit einer Kondensorlinse auf einen Punkt (sphärische Linse) oder auf eine Linie (Zylinderlinse) abgebildet. Eine Blende (kreidförmiges Loch oder Spalt) lässt nur Licht aus dem zu untersuchenden Bereich durch. Mit einer weiteren Linse (sphärisch oder zylindrisch) wird das Licht aus der Blende parallelisiert. Dazu steht die Blende in der Fokusebene der Linse. Dieses parallele Licht wird durch das Gitter, unser dispersives Element, abgelenkt. Eine der höheren Ordnungen (größer oder gleich eins), die ja aus parallelem Licht besteht wird durch eine weitere Linse (sphärisch oder zylindrisch) auf einen positionsempfindlichen Detektor abgebildet (z.B. eine CCD-Zeile oder ein Photodiodenarray).

Die parallelen Strahlen der verschiedenen Wellenlängen sind unterschiedlich stark zur optischen Achse geneigt. Das heißt, die Foci der verschiedenen Wellenlängen werden auf dem Detektor getrennt. Die Breite eines Fokuspunktes hängt von den Beugungerscheinungen an den Linsen, aber auch an dem Gitter ab.

Das größte Objekt ist das Gitter selber. Wenn es eine Gitterkonstante  $g$  hat (Abstand der „Striche“) und  $N$  Linien, hat es eine Breite  $b_{Gitter} = Ng$ , ist also ein Spalt mit der Breite  $b_{Gitter}$ . Nach Gleichung (3.9.7) hat dann das Beugungsmuster die Form (siehe auch Abbildung 6.19)

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \left( \frac{\pi}{\lambda} N g \sin \Theta \right)}{\frac{\pi}{\lambda} N g \sin \Theta} \right)^2 = \text{sinc} \left( \frac{\pi}{\lambda} N g \sin \Theta \right)^2 \quad (6.7.1)$$

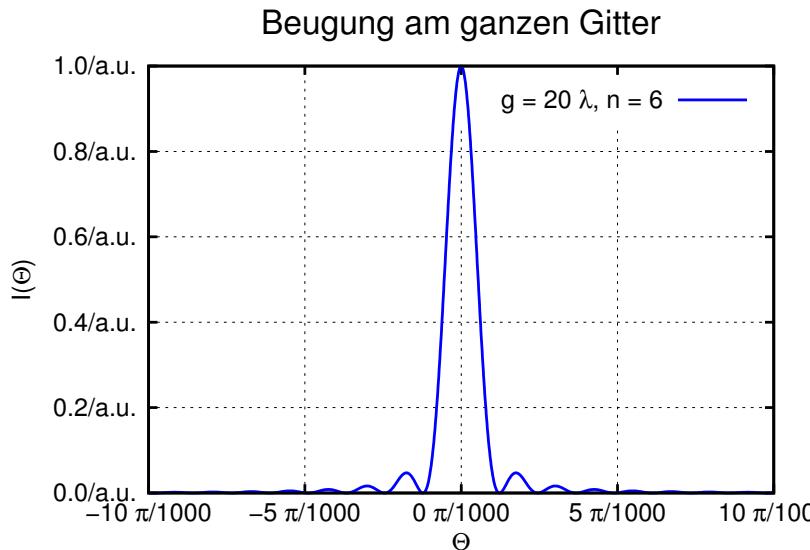


Abbildung 6.19.: Beugung an einem Gitter mit der Gitterkonstante  $g = 20\lambda$  und  $n = 6$  Gitterperioden, also einer Breite von  $120\lambda$ .

Die kleinste Struktur ist die einzelne Linie, die wir hier als Spalt der Breite  $a \leq g$  annehmen wollen. Wir können einen Füllfaktor  $s_f$  definieren und schreiben:

$$a = \frac{s_f}{g} \quad (6.7.2)$$

Damit ist das Beugungsmuster einer einzelnen Gitterlinie, als Spalt modelliert (siehe auch Abbildung 6.20):

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \left( \frac{\pi}{\lambda s_f} g \sin \Theta \right)}{\frac{\pi}{\lambda s_f} g \sin \Theta} \right)^2 = \text{sinc} \left( \frac{\pi}{\lambda s_f} g \sin \Theta \right)^2 \quad (6.7.3)$$

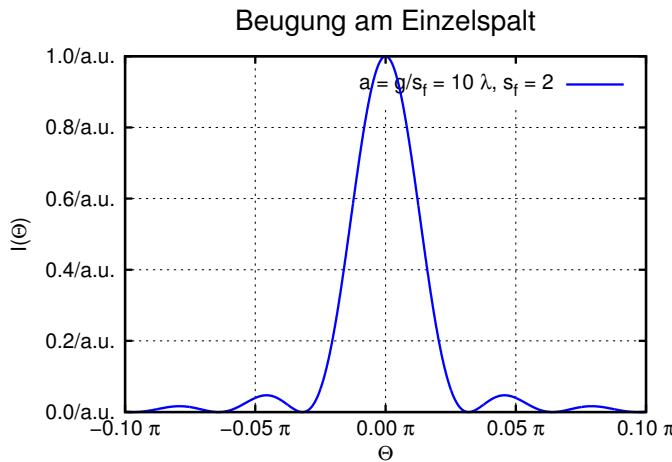


Abbildung 6.20.: Beugung an einem Einzelspalt mit der Breite  $g/s_f = 20/2\lambda = 10\lambda$ .

Schliesslich erzeugt ein Gitter eine periodische Struktur an den Winkeln (siehe auch Abbildung 6.21)

$$\Theta = \arcsin \left( \frac{m \lambda}{g} \right) \quad (6.7.4)$$

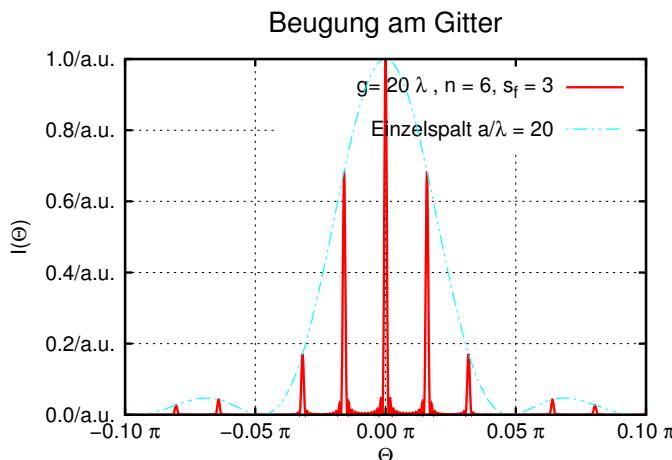


Abbildung 6.21.: Lage der Gitterordnungen, gezeigt mit den Beugungsbildern des ganzen Gitters mit Beugung an einem Einzelspalt mit der Breite  $g = 20\lambda$   $n = 6$  und  $s_f = 2$ .

Diese drei Komponenten ergeben dann das Beugungsbild eines realen Gitters. Dabei müssen die Amplituden phasenrichtig addiert werden. Wir nehmen hier an, dass an den Orten der Beugungsmaxima jeweils eine Komponente dominant ist, dass wir also in erster Näherung die Phasen vernachlässigen können und die Intensitäten addieren. Die breiteste Komponente ist die mit der kleinsten Strukturgrösse, also der Einzelspalt. Diese ergibt die Umhüllende.

Die schmälste Komponente ist der Spalt, der das ganze Gitter repräsentiert. Dieses Beugungsmuster wird an jeder Beugungsordnung des Gitters wiederholt.

Zusammen ergibt sich das Beugungsmuster des Gitters

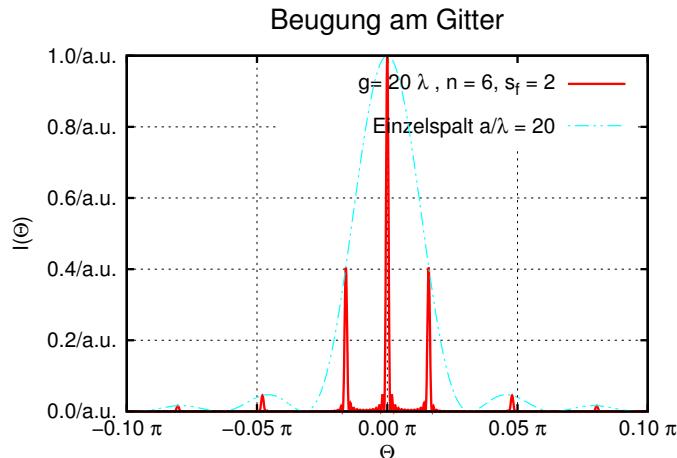


Abbildung 6.22.: Beugungsmuster eines Gitters mit der Breite  $g = 20\lambda$ ,  $n = 6$  und  $s_f = 2$ .

Die folgende Abbildung 6.23 zeigt den Einfluss der Beugung an einem einzelnen Gitterelement.

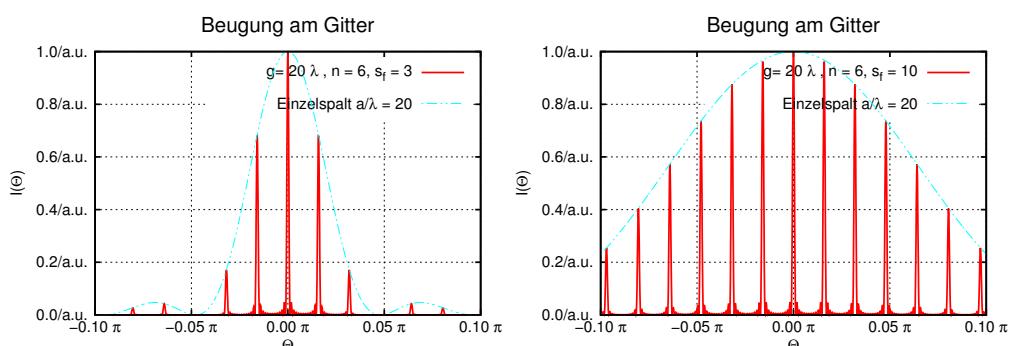


Abbildung 6.23.: Beugungsmuster eines Gitters mit der Breite  $g = 20\lambda$ ,  $n = 6$  und  $s_f = 3$  mit einem Gitters mit der Breite  $g = 20\lambda$ ,  $n = 6$  und  $s_f = 10$ .

Schliesslich zeigt Abbildung 6.24 die Wirkung der Anzahl beleuchteter Gitterelemente.

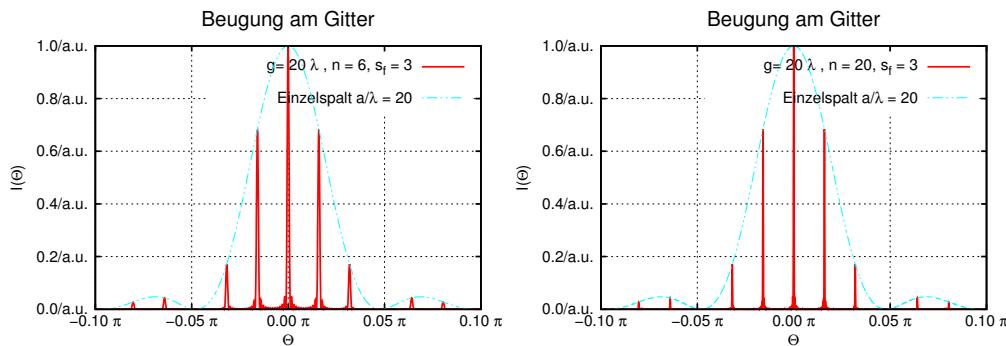


Abbildung 6.24.: Beugungsmuster eines Gitters mit der Breite  $g = 20\lambda$ ,  $n = 6$  und  $s_f = 3$  mit einem Gitters mit der Breite  $g = 20\lambda$ ,  $n = 20$  und  $s_f = 3$ .

Aus Abbildung 6.24 kann ersehen werden, dass eine grössere Anzahl beleuchteter Gitterlinien die Linienbreite auf dem Detektor verringert. Deshalb ist es wichtig, ein Gitter immer voll auszuleuchten. Dies kann mit einer vorgeschalteten Optik erreicht werden.

Aus Abbildung 6.23 kann beobachtet werden, dass die Amplitude des ersten Beugungsmaximums von der Form und Beugung an einer Gitterperiode abhängt.

Jedes Gitter hat einen nutzbaren Spektralbereich. Wenn die zweite Ordnung einer Wellenlänge sich mit der ersten einer anderen Wellenlänge überlagert, können diese beiden Spektralkomponenten nicht mehr getrennt werden.

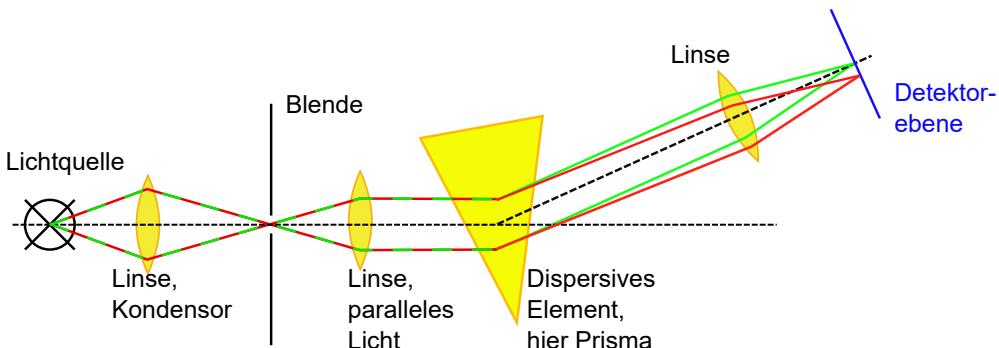


Abbildung 6.25.: Prismenspektrometer

Abbildung 6.25 zeigt den gleichen Aufbau wie Abbildung 6.18, aber mit einem Prisma als dispersives Element. Die Argumentation zur Begründung des optischen Aufbaus ist die gleiche wie beim Gitterspektrometern.

Prismenspektrometer haben Vorteile gegenüber Gitterspektrometern

1. Im Gegensatz zu einem Gitter gibt es nur eine, abgelenkte Ordnung.
2. Es gibt keine Vermischung verschiedener Ordnungen, und deshalb potentiell einen sehr grossen freien Spektralbereich.
3. Durch die Wahl des Materials kann die Dispersion und damit die Wellentrennung eingestellt werden.

4. Prismen sind weniger anfällig auf Oberflächenschäden wie Gitter.
5. Die Beugung an den Linsenaperturen oder am Prisma beschränkt die mögliche Auflösung

Prismenspektrometer haben aber auch Nachteile:

1. Licht geht durch Materie, das heisst das die Materialeigenschaften wie Absorption die möglichen Wellenlängen einschränken
2. Bei Gittern kann die Dispersion über den Gitterabstand  $g$  in sehr weiten Bereichen eingestellt werden. Dies geht bei Prismen nicht.
3. Die Wellenlängenauflösung kann durch Verwenden höherer Ordnungen verbessert werden.

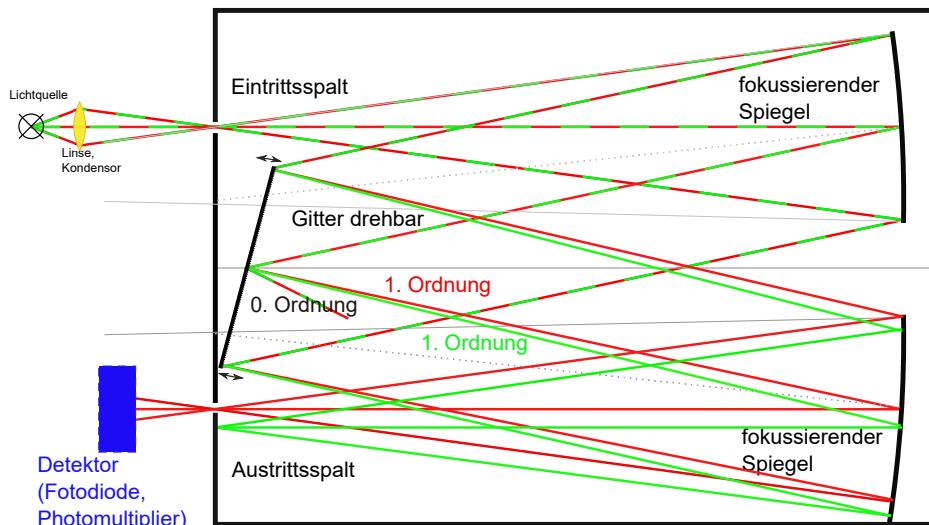


Abbildung 6.26.: Schematische Darstellung eines Gitter-Reflexionsspektrometers. Die Lampe und Linse vor dem Eingangsspalt sind symbolisch zu verstehen und stellen die Quelle dar.

Beide diskutierten Aufbauten in den Abbildungen 6.25 und 6.18 verwenden Linsen als optische Elemente. Die Probleme der Absorption, wie Sie für Linsen angeprochen wurden, gelten natürlich auch für die Linsen. Deshalb verwenden viele *Spektrometer* Spiegel und reflektierende Gitter, wie in Abbildung 6.26 schematisch gezeigt.

Licht tritt durch einen Eintrittsspalt, der sich im Fokus eines sphärischen Spiegels befindet in das *Spektrometer* ein. Deshalb erzeugt der obere Spiegel paralleles Licht, das an einem Reflexionsgitter gebeugt und reflektiert wird. Die Erste Ordnung wird durch die Form des Gitters unterdrückt (siehe Blaze-Gitter im Abschnitt 3.12.1). Das Gitter lenkt nun verschiedene Farben in verschiedene Richtungen. Der untere Spiegel fokussiert nun die ebenen Wellen mit unterschiedlichen Richtungen auf die Ebene des Austrittsspaltes. Nur ein kleiner Wellenlängenbereich gegeben durch die Breite des Austrittsspaltes wird zum Detektor zugelassen. Dieser Detektor kann eine Fotodiode, eine Avalanche-Diode [Mar09, 3.3.5.1, pp. 176-177] oder

ein Photomultiplier [Mar09, 4.2.5.1, pp. 317-318] sein. Die Wellenlänge wird nun ausgewählt, indem das Gitter gedreht wird.

*Spektrometer* wie das in Abbildung 6.26 gezeigte enthalten außer dem Gitter keine dispersiven Elemente und, da nur mit Reflexion gearbeitet wird, zuerst auch keine absorptiven Bauteile. Die Absorption in Luft (z.B. durch Wasser) kann umgangen werden, indem das *Spektrometer* evakuiert wird. Dieser Typ *Spektrometer* kann auch im Ultravioletten oder im fernen Infrarot, ja sogar für Terahertz-Strahlung verwendet werden.

Das oben gezeigte *Gitterspektrometer* ist hervorragend geeignet, mit höchster zeitlicher Auflösung die Intensität bei einer Wellenlänge zu bestimmen. Spektren hingegen brauchen lange Zeit, können aber bei zeitlich konstanten Quellen mit sehr hohem *Signal-Rausch-Verhältnis* gemessen werden.

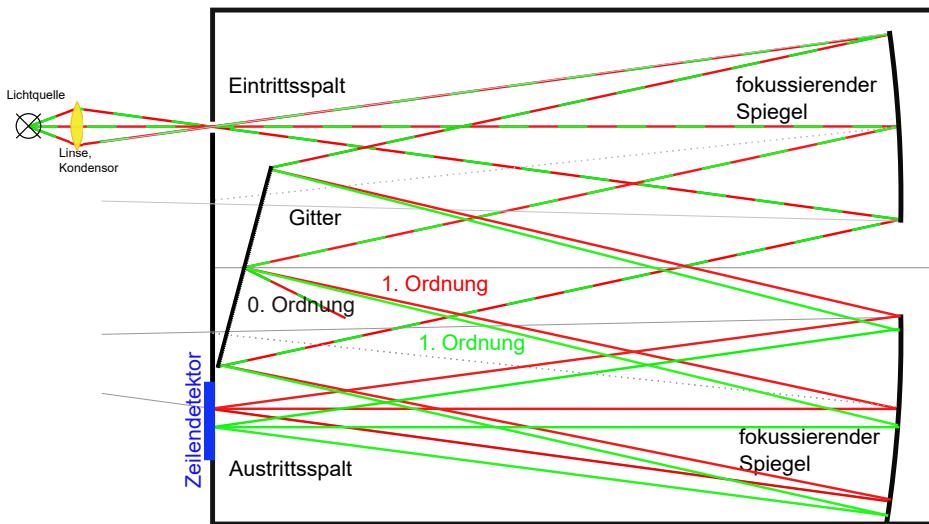


Abbildung 6.27.: Schematische Darstellung eines Gitter-Reflexionsspektrometers. Die Lampe und Linse vor dem Eingangsspalt sind symbolisch zu verstehen und stellen die Quelle dar. Dies ist eine Modifikation des Spektrometers aus Abbildung 6.26.

Beim Spektrometer in der Abbildung 6.27 wurde der Austrittsspalt (siehe Abbildung 6.26) durch einen Zeilendetektor (z.B. ein Kamerachip) ersetzt. Damit kann wie in den Spektrometern in den Abbildungen 6.18 und 6.25 das Spektrum als ganzes gemessen werden. Das Gitter steht nun fest, oder wird nur noch zur Wahl des Wellenlängenbereichs gedreht.



Abbildung 6.28.: Ein kommerzielles Gitterspektrometer, wie es im Labor des Instituts für Experimentelle Physik an der Universität Ulm verwendet wird.

Diese Art Gitterspektrometer kann auch hochintegriert hergestellt werden.

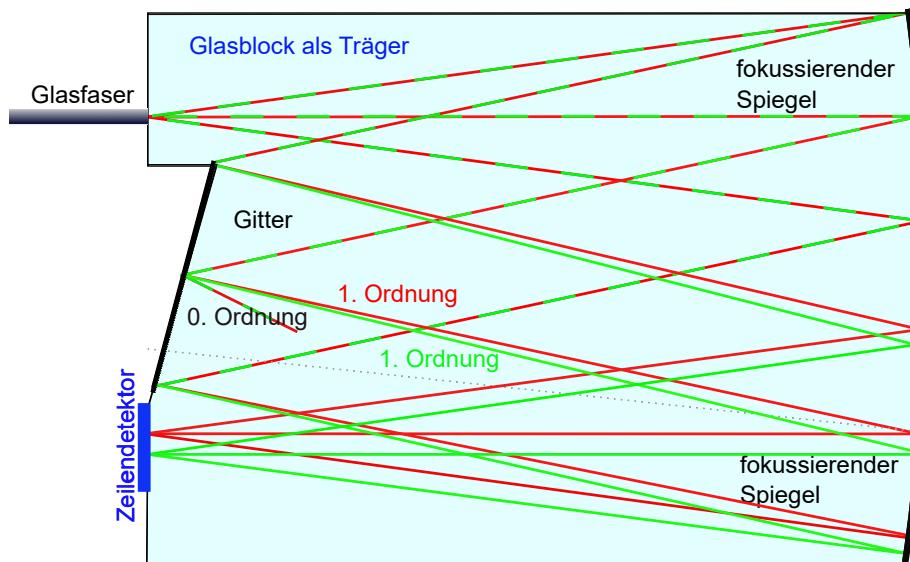


Abbildung 6.29.: Schematische Darstellung eines integrierten Gitter-Reflexionsspektrometers. Dies ist eine Modifikation des Spektrometers aus Abbildung 6.27.

Das Spektrometer aus Abbildung 6.29 ist gleich aufgebaut wie das aus Abbildung 6.27. Alles wird auf einen Glasblock aufgebracht, dessen Außenwände als Spiegel (mit einer Metallbedampfung) oder als Gitter (auch mit einer Metallbedampfung) strukturiert sind. Licht wird mit einer Glasfaser zugeführt. Deren Öffnung ist dabei die Eintrittsöffnung. Ebenso wird der Zeilendetektor direkt am Glaskörper befestigt. Die ganze Struktur kann, wenn gewünscht vergossen werden.



# 7. Resonatoren und ihre Lichtmoden

## 7.1. Matrixformulierung der Lichtpropagation



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 371]) (Siehe Yariv, Quantum Electronics [Yar75, pp. 99])

Zur Behandlung von Resonatoren verwenden wir die Matrixdarstellung der Lichtausbreitung *paraxialer Strahlen* in einer zylindersymmetrischen Anordnung. Die Lage des Lichtstrahls wird durch den Vektor

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r(z) \\ r'(z) \end{pmatrix} \quad (7.1.1)$$

wobei  $z$  die Koordinate entlang der optischen Achse ist. Die Wirkung eines optischen Elementes wird durch eine Matrix  $\mathbf{A}$  beschrieben

$$\mathbf{r}_{aus} = \mathbf{A}\mathbf{r}_{ein} \quad (7.1.2)$$

### 7.1.1. Lichtpropagation entlang eines Lichtstrahls

Für eine Gerade haben wir die Geradengleichung

$$r(z) = r' \cdot z + r(0) \quad (7.1.3)$$

Wir kennen  $r(z_0)$  und  $r'(z_0)$  sowie  $z_1 = z_0 + d$  und haben dann

$$r(z_0) = r'(z_0) \cdot z_0 + r(0) \quad (7.1.4a)$$

$$r(z_1) = r'(z_1) \cdot z_1 + r(0) \quad (7.1.4b)$$

$$r'(z_1) = r'(z_0) \quad (7.1.4c)$$

$$r(z_1) = r'(z_0) \cdot (z_0 + d) + r(0) \quad (7.1.4d)$$

$$= r'(z_0) \cdot d + (r'(z_0) \cdot z_0 + r(0)) = r'(z_0) \cdot d + r(z_0)$$

$$\begin{pmatrix} r(z_1) \\ r'(z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(z_0) \\ r'(z_0) \end{pmatrix} \quad (7.1.4e)$$

### 7.1.2. Lichtpropagation durch eine Linse

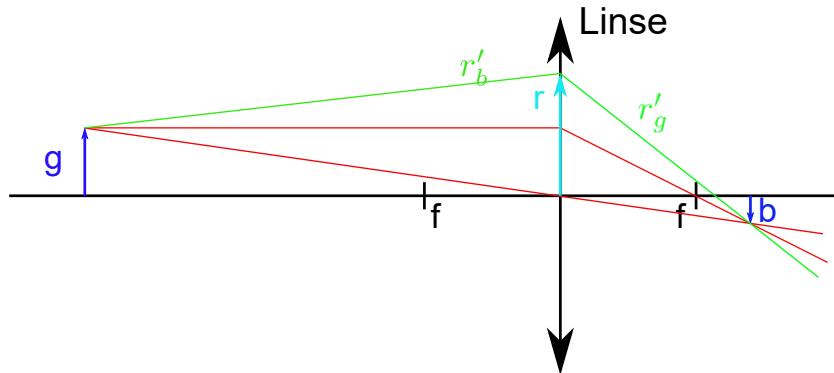


Abbildung 7.1.: Skizze zur Berechnung der Linsenmatrix

In Abbildung 7.1 ist der Strahlengang von einem Gegenstand mit der Gegenstands-höhe  $G$  im Abstand  $g$  von der Linse zu einem Bild mit der Bildhöhe  $B < 0$  im Abstand  $b$  zur Linse aufgezeichnet. Wir interessieren uns für den grünen Strahl mit der ursprünglichen Steigung  $r'_g$ . Gesucht ist die Steigung  $r'_b$  an der Linse im Abstand  $r = r_g = r_b$ .

Wir können die folgenden Gleichungen aufstellen:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \quad \text{Linsengleichung} \quad (7.1.5a)$$

$$\frac{b}{g} = \frac{B}{G} \implies \frac{B}{b} = \frac{G}{g} \quad \text{Vergrösserung} \quad (7.1.5b)$$

$$r = r'_g g + G \implies r'_g = \frac{r - G}{g} \quad (7.1.5c)$$

$$r + r'_b b = -B \implies r'_b = -\frac{r}{b} - \frac{B}{b} = -\frac{r}{b} + \frac{G}{g} \quad (7.1.5d)$$

$$= -\frac{r}{f} + \frac{r}{g} - \frac{G}{g} = -\frac{r}{f} + \frac{r+G}{g} = -\frac{r}{f} + r'_g \quad (7.1.5e)$$

$$\begin{pmatrix} r_b \\ r'_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_g \\ r'_g \end{pmatrix} \quad (7.1.5f)$$

### 7.1.3. Lichtpropagation durch eine gewölbte Grenzschicht

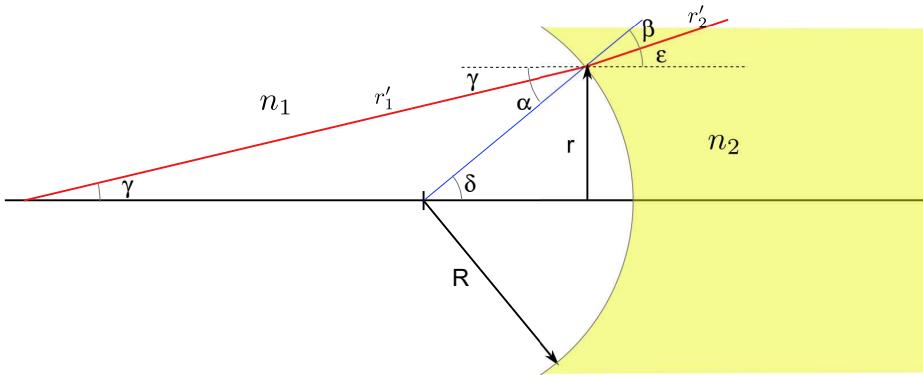


Abbildung 7.2.: Skizze zur Berechnung der Matrix für eine gewölbte Grenzfläche

In Abbildung 7.2 betrachten wir zuerst Winkelbeziehungen

$$\gamma + \alpha = \pi - (\pi - \delta) = \delta \quad (7.1.6a)$$

$$\beta + \varepsilon = \delta \quad (7.1.6b)$$

$$\alpha = \delta - \gamma \quad (7.1.6c)$$

und die weiteren Beziehungen

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \xrightarrow{\text{paraxiale Näherung}} \quad n_1 \alpha = n_2 \beta \quad (7.1.7a)$$

$$\sin \delta = \frac{r}{R} \quad \xrightarrow{\text{paraxiale Näherung}} \quad \delta = \frac{r}{R} \quad (7.1.7b)$$

$$r'_1 = \tan \gamma \quad \xrightarrow{\text{paraxiale Näherung}} \quad r'_1 = \gamma \quad (7.1.7c)$$

$$r'_2 = \tan \varepsilon \quad \xrightarrow{\text{paraxiale Näherung}} \quad r'_2 = \varepsilon = \delta - \beta \quad (7.1.7d)$$

$$r'_2 = \frac{r}{R} - \frac{n_1}{n_2} \alpha = \frac{r}{R} - \frac{n_1}{n_2} (\delta - \gamma) \quad (7.1.7e)$$

$$= \frac{r}{R} - \frac{n_1}{n_2} \left( \frac{r}{R} - r'_1 \right) \quad (7.1.7f)$$

$$r'_2 = \frac{r}{R} \left( 1 - \frac{n_1}{n_2} \right) + \frac{n_1}{n_2} \quad (7.1.7g)$$

$$r'_1 = \frac{r}{R} \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2} \right) + \frac{n_1}{n_2} \quad (7.1.7h)$$

$$r = r_1 = r_2$$

und damit

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (7.1.8)$$

und mit  $R \rightarrow \infty$  auch für eine ebene Grenzfläche senkrecht zur optischen Achse

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (7.1.9)$$

### 7.1.4. Lichtpropagation durch eine schräge Grenzschicht

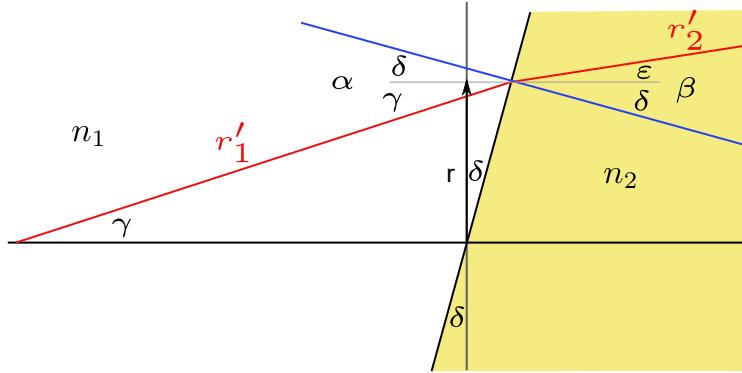


Abbildung 7.3.: Skizze zur Berechnung der Matrix für eine schräge Grenzfläche

Wir betrachten in Abbildung 7.3 eine Grenzfläche zwischen Medien mit  $n_1$  und  $n_2$ , die um den Winkel  $\delta$  gegen die Normale auf die optische Achse geneigt ist.

Wir haben die folgenden Beziehungen:

$$\beta = \varepsilon + \delta \quad (7.1.10a)$$

$$\alpha = \gamma + \delta \quad (7.1.10b)$$

$$r'_1 = \tan(\gamma) \quad \xrightarrow{\text{paraxiale Näherung}} \quad r'_1 = \gamma \quad (7.1.10c)$$

$$r'_2 = \tan(\varepsilon) \quad \xrightarrow{\text{paraxiale Näherung}} \quad r'_2 = \varepsilon \quad (7.1.10d)$$

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta) \quad \xrightarrow{\text{paraxiale Näherung}} \quad n_1 \alpha = n_2 \beta \quad (7.1.10e)$$

$$\varepsilon = \beta - \delta = \frac{n_1}{n_2} \alpha - \delta \quad (7.1.10f)$$

$$= \frac{n_1}{n_2} (\gamma + \delta) - \delta$$

$$= \frac{n_1}{n_2} r'_1 + \frac{n_1 - n_2}{n_2} \delta$$

Diesmal gibt es zur Matrixgleichung noch einen konstanten Term

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2} \delta \end{pmatrix} \quad (7.1.11)$$

Für  $\delta = 0$  erhalten wir das Resultat für eine Grenzfläche senkrecht zur optischen Achse.

### 7.1.5. Lichtpropagation bei Reflexion an einem gewölbten Spiegel

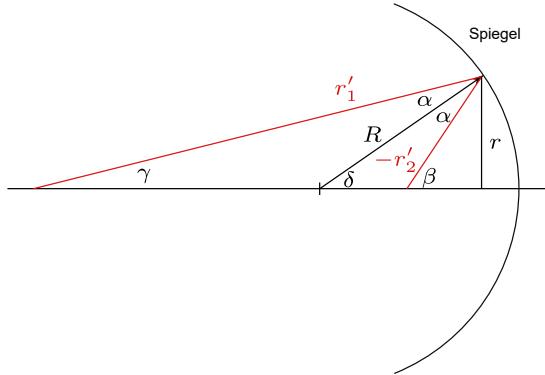


Abbildung 7.4.: Skizze zur Berechnung der Matrix für einen Spiegel.

Nach der Abbildung 7.4 gelten die folgenden Winkelbeziehungen:

$$\gamma + \alpha = \delta \quad (7.1.12a)$$

$$\gamma + 2\alpha = \beta \quad (7.1.12b)$$

$$\beta = 2\delta - \gamma \quad (7.1.12c)$$

$$\sin(\delta) = \frac{r}{R} \quad \text{paraxiale Näherung} \quad \delta = \frac{r}{R} \quad (7.1.12d)$$

Mit den Beziehungen  $r'_1 = \tan(\gamma) \approx \gamma$  und  $-r'_2 = \tan(\beta) \approx \beta$  erhalten wir

$$r'_2 = r'_1 - \frac{2r}{R} \quad (7.1.13)$$

und

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (7.1.14)$$

### 7.1.6. Lichtpropagation bei einem Indexmedium

Wir betrachten hier nach Yariv [Yar75, pp. 106] ein sogenanntes *quadratisches Indexmedium*, also ein Medium, das die folgende Variation des Brechungsindexes hat

$$n(x, y) = n_0 \left[ 1 - \frac{k_2}{2k} (x^2 + y^2) \right] \quad (7.1.15)$$

Mit dem Fermatschen Prinzip in differentieller Schreibweise

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dr}{ds} \right) = \nabla n = \mathbf{grad} \, n \quad (7.1.16)$$

kann die Trajektorie des Lichtstrahls ausgerechnet werden. Dabei ist  $s$  die Weglänge entlang des Lichtstrahls. Bei *paraxialen Strahlen* kann  $d/ds$  durch  $d/dz$  ersetzt

werden.

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right) = n_0 \mathbf{grad} \left[ 1 - \frac{k_2}{2k} (x^2 + y^2) \right] = -\frac{n_0 k_2}{k} \mathbf{r} \quad (7.1.17)$$

Da  $n$  nicht von  $z$  abhängt, ist auch

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right) = n \frac{d^2 \mathbf{r}}{dz^2} = -\frac{n_0 k_2}{k} \mathbf{r} = n_0 \left[ 1 - \frac{k_2}{2k} (x^2 + y^2) \right] \frac{d^2 \mathbf{r}}{dz^2} \quad (7.1.18)$$

Nehmen wir nun weiter an, dass  $\frac{k_2}{2k} (x^2 + y^2) \ll 1$  ist, so können wir schreiben:

$$n_0 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dz^2} = -\frac{n_0 k_2}{k} \mathbf{r} \quad (7.1.19)$$

Uns interessiert nur der Abstand  $r = |\mathbf{r}|$ . Da  $n_0 > 0$  ist, kann es eliminiert werden. Damit erhalten wir die Differentialgleichung für *paraxiale Strahlen*

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \left( \frac{k_2}{k} \right) r = 0 \quad (7.1.20)$$

Wenn der Strahl am Eingang die Position  $r_0$  und die Steigung  $r'_0$  hat, ist die Lösung

$$r(z) = \cos \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r_0 + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r'_0 \quad (7.1.21a)$$

$$r'(z) = -\sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r_0 + \cos \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r'_0 \quad (7.1.21b)$$

Wir haben also für ein quadratisches Indexmedium mit  $k_2 > 0$  der Länge  $\ell$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell \right) & \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell \right) \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell \right) & \cos \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (7.1.22)$$

Wenn  $k_2 < 0$  ist, wenn wir also eine Zerstreuungslinse haben, bekommen wir

$$r(z) = \cosh \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r_0 + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sinh \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r'_0 \quad (7.1.23a)$$

$$r'(z) = \sqrt{\frac{k_2}{k}} \sinh \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r_0 + \cosh \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r'_0 \quad (7.1.23b)$$

Wir haben also für ein quadratisches Indexmedium mit  $k_2 < 0$  der Länge  $\ell$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell \right) & \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sinh \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell \right) \\ \sqrt{\frac{k_2}{k}} \sinh \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell \right) & \cosh \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (7.1.24)$$

### 7.1.7. Zusammenfassung Lichtpropagation

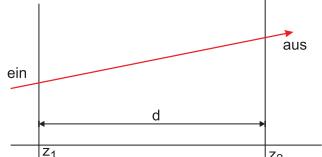
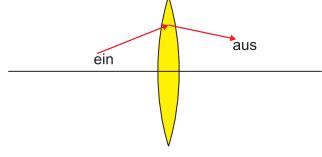
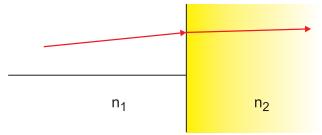
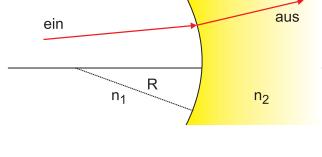
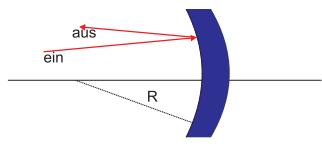
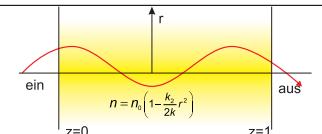
Gerade Strecke		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Dünne Linse, Brennweite $f$ ( $f > 0$ : Sammellinse, $f < 0$ : Zerstreuungslinse)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Dielektrische Grenzschicht mit den Brechungsindizes $n_1$ und $n_2$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Sphärische dielektrische Grenzschicht mit Krümmungsradius $R$ und den Brechungsindizes $n_1$ und $n_2$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{n_2} \frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Sphärischer Spiegel mit dem Krümmungsradius $R$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$
Gerade Strecke		$\begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell) & \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin(\sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell) \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin(\sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell) & \cos(\sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell) \end{bmatrix}$

Tabelle 7.1.: Matrizen für die Strahlausbreitung

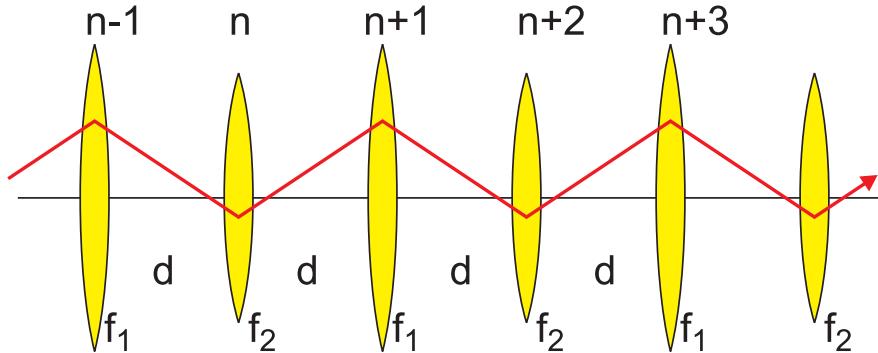


Abbildung 7.5.: Linsenübertragungsstrecke als Modell für einen Laserresonator.

Der Strahl von der  $n$ -ten zur  $n + 1$ -ten *Linse* ist durch

$$\mathbf{r}_{aus} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ein} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d}{f} + 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ein} \quad (7.1.25)$$

Wir haben dann eine Lichtausbreitung in einem Resonator, wenn die Strahllage nach der  $n + 2$ -ten *Linse* gleich wie nach der  $n$ -ten ist. Daraus folgt

$$\mathbf{r}_{aus} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_1} & -\frac{d}{f_1} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_2} & -\frac{d}{f_2} + 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ein} \quad (7.1.26)$$

Ausmultipliziert erhalten wir

$$\mathbf{r}_{aus} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{f_2} & d \cdot \left(2 - \frac{d}{f_2}\right) \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} & -\frac{d}{f_1} + \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ein} \quad (7.1.27)$$

Um eine Resonatormode zu bekommen muss  $\mathbf{r}_{aus} = \mathbf{r}_{ein}$  sein. Wir setzen

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{d}{f_2} \\ B &= d \cdot \left(2 - \frac{d}{f_2}\right) \\ C &= -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} \\ D &= -\frac{d}{f_1} + \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) \end{aligned} \quad (7.1.28)$$

Damit bekommen wir auch

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= A \cdot r_n + B \cdot r'_n \\ r'_{n+2} &= C \cdot r_n + D \cdot r'_n \end{aligned} \quad (7.1.29)$$

Wir lösen die erste Gleichung nach  $r'_n$  auf und erhalten

$$r'_n = \frac{1}{B} (r_{n+2} - A \cdot r_n) \quad (7.1.30)$$

Diese Gleichung schreiben wir um 2 verschoben hin und bekommen

$$r'_{n+2} = \frac{1}{B} (r_{n+4} - A \cdot r_{n+2}) \quad (7.1.31)$$

Wir setzen diese Resultate in die zweite Gleichung (7.1.29) ein und erhalten

$$r_{n+4} - (A + D) r_{n+2} + (AD - BC) r_n = 0 \quad (7.1.32)$$

Durch ausrechnen erhält man, dass  $AD - BC = 1$  ist. Wenn wir  $b = \frac{1}{2} (A + D) = \left(1 - \frac{d}{f_2} - \frac{d}{f_1} + \frac{d^2}{2f_1 f_2}\right)$  setzen, können wir schreiben

$$r_{n+4} - 2br_{n+2} + r_n = 0 \quad (7.1.33)$$

Diese Differenzengleichung ist formal äquivalent zu einer Differentialgleichung vom Typ  $\ddot{r} + kr = 0$ <sup>1</sup>. Die Lösung der Differentialgleichung ist  $r(z) = r(0) \exp [\pm i \sqrt{k} z]$ . Deshalb setzen wir in die Differenzengleichung den Ansatz  $r_s = r_0 \exp [is\Theta]$  mit  $s = 2n$  ein und erhalten

$$e^{2i\Theta} - 2be^{i\Theta} + 1 = 0 \quad (7.1.34)$$

Die Lösung ist

$$e^{i\Theta} = b \pm \sqrt{b^2 - 1} = b \pm i \sqrt{1 - b^2} \quad (7.1.35)$$

Mit  $b = \cos \Theta$  und daraus  $\sqrt{1 - b^2} = \sin \Theta$  ist die obige Gleichung erfüllt. Die allgemeine Lösung ist also

$$r_s = r_{max} \sin(s\Theta + \delta) \quad (7.1.36)$$

mit  $r_{max} = r_0 / \sin \delta$ . Damit wir eine stabile Lösung haben, muss  $\Theta$  reell sein. Daraus folgt

$$|b| \leq 1 \quad (7.1.37)$$

Aus der Definition von  $b$  folgt<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Dazu schreiben wir die Gleichung wie folgt um.  $r_{n+4} - 2r_{n+2} + r_n + 2(1 - b)r_{n+2} = 0$ . Nun sind die ersten drei Summanden die zweite Ableitung.

<sup>2</sup>Wir rechnen

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 - \frac{d}{f_1} - \frac{d}{f_2} + \frac{d^2}{2f_1 f_2} \leq 2 \\ 0 &\leq 1 - \frac{d}{2f_1} - \frac{d}{2f_2} + \frac{d^2}{4f_1 f_2} \leq 1 \end{aligned}$$

und damit folgt die Behauptung.

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 - \frac{d}{f_1} - \frac{d}{f_2} + \frac{d^2}{2f_1 f_2} \leq 1 \\ 0 &\leq \left(1 - \frac{d}{2f_1}\right) \left(1 - \frac{d}{2f_2}\right) \leq 1 \end{aligned} \quad (7.1.38)$$

### 7.1.8. Stabilität

Wenn wir die neuen normierten Koordinaten  $g_1 = 1 - d/(2f_1)$  und  $g_2 = 1 - d/(2f_2)$  einführen, heisst die Stabilitätsbedingung

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (7.1.39)$$

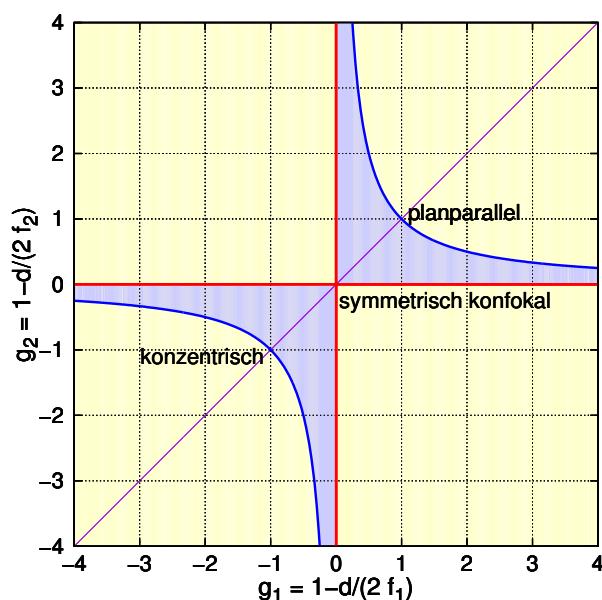


Abbildung 7.6.: Stabilitätsdiagramm für Strahlführoptiken mit Linsen. Die gelbe Farbe zeigt die instabilen Bereiche, die türkis-Farbe die stabilen.

Das obige Stabilitätsdiagramm kann auch für Spiegel berechnet werden, indem man  $f = R/2$  setzt, wobei  $R$  der Krümmungsradius des Spiegels ist.

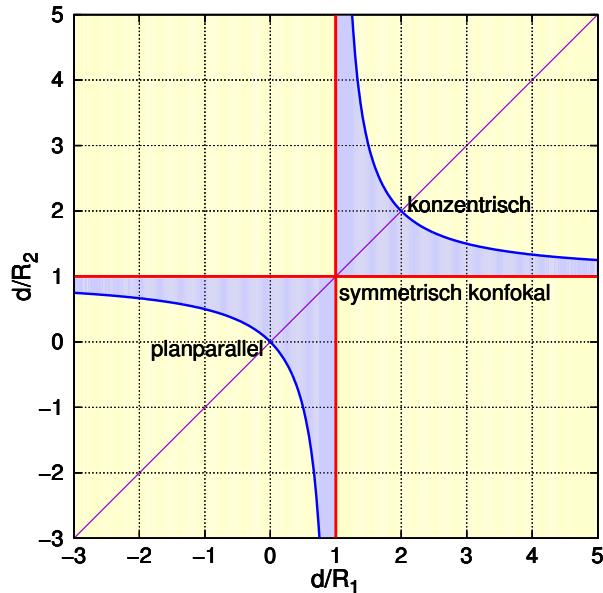


Abbildung 7.7.: Das Stabilitätsdiagramm für Spiegelresonatoren.



**Versuch zur Vorlesung:**  
Laser (Versuchskarte AT-052)

## 7.2. Resonatoren mit sphärischen Spiegeln



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 893])

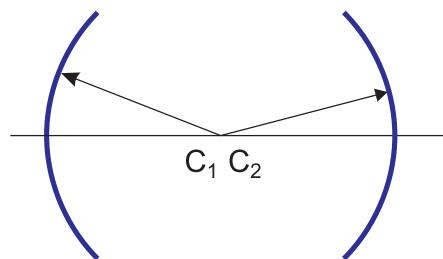


Abbildung 7.8.: Konzentrischer Resonator

Beim konzentrischen Resonator ist  $R_1 = R_2 = \ell/2$ . Damit liegt dieser Resonator auf der Diagonale des Stabilitätsdiagramms am Punkt  $(2, 2)$  an der Grenze zur Instabilität.

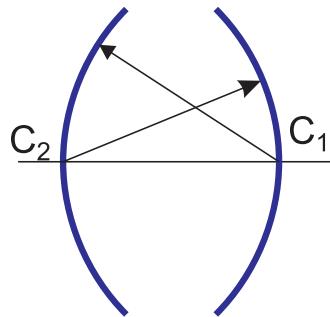


Abbildung 7.9.: Konfokaler symmetrischer Resonator.

Beim konfokalen Resonator ist  $\ell = R_1 = R_2$ . Dieser Resonator liegt am Punkt  $(1, 1)$  und ist auch an der Grenze zu instabilen Regionen.

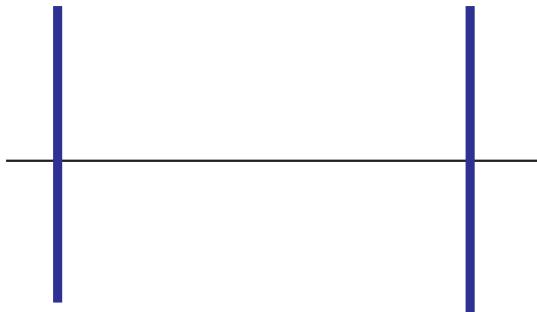


Abbildung 7.10.: Resonator mit planparallelen Spiegeln.

Der planparallele Resonator ist ein Sonderfall der sphärischen Resonatoren mit  $R_1 = R_2 = \infty$ . Dieser Resonator, der an der Stabilitätsgrenze bei  $(0, 0)$  liegt, ist heute der am häufigsten vorkommende Resonator: praktisch jede Laserdiode besteht aus einem planparallelen Resonator.



### 7.3. Gaußsche Strahlen

(Siehe Yariv, Quantum Electronics [Yar75, pp. 106])

Als Vorstufe betrachten wir die durch eine *Linse* induzierte abstandsabhängige Phasendifferenz für *paraxiale Strahlen*. Die *Linsenkrümmung* sei  $R$ . Die  $x, y$ -Ebene sei senkrecht zur optischen Achse. Dann ist die Dicke der *Sammellinse* durch  $d(x, y) = d_0 - (x^2 + y^2)/2R_1 - (x^2 + y^2)/2R_2$  gegeben. Der optische Weg setzt sich dann aus  $s = s_{\text{Linse}}(r) + s_{\text{Luft}}(r)$  zusammen. Die Zeit, die das Licht für das durchlaufen dieser Strecke benötigt ist

$$t = t_{\text{Linse}} + t_{\text{Luft}} = \frac{s_{\text{Linse}}(r)n}{c} + \frac{s_{\text{Luft}}(r)}{c} \quad (7.3.1)$$

Mit  $s_{\text{Luft}} = s_0 - s_{\text{Linse}}$  und unter Weglassung aller konstanten Terme bekommt man

$$t = -(x^2 + y^2) \left( \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) (n - 1) \quad (7.3.2)$$

Mit  $1/f = (n - 1)(1/R_1 + 1/R_2)$  ist das Resultat

$$t = -\frac{x^2 + y^2}{2f} \quad (7.3.3)$$

Wenn wir mit  $E_L(x, y)$  die Amplitudenverteilung links von der *Linse* und mit  $E_R(x, y)$  die Verteilung rechts von der *Linse* beschreiben, gilt

$$E_R(x, y) = E_L(x, y) e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2f}} \quad (7.3.4)$$

Den gleichen Effekt erreicht man mit einem Medium, das die folgende Variation des Brechungsindexes hat

$$n(x, y) = n_0 \left[ 1 - \frac{k_2}{2k} (x^2 + y^2) \right] \quad (7.3.5)$$

Das Resultat aus Abschnitt 7.1.6 lautet

$$r(z) = \cos \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r_0 + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r'_0 \quad (7.3.6a)$$

$$r'(z) = -\sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r_0 + \cos \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r'_0 \quad (7.3.6b)$$

Aus der Elektrizitätslehre folgt (ohne Ableitung), dass für das elektrische Feld

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2(\mathbf{r}) \mathbf{E} = 0 \quad (7.3.7)$$

gilt. Wir beschränken uns auf den Fall wo  $k^2(\mathbf{r}) = k^2 - kk_2r^2$  gilt. Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten für Funktionen, die nur von  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  abhängen, ist

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.3.8)$$

Wir verwenden die Abkürzung  $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ . Weiter setzen wir an:

$$E = \psi(x, y, z) e^{-iz} \quad (7.3.9)$$

und erhalten

$$\nabla_t^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} - kk_2 r^2 \psi = 0 \quad (7.3.10)$$

Wenn die *Intensität* entlang  $z$  sich nur wenig ändert ( $k(\partial \psi / \partial z) \gg \partial^2 \psi / \partial z^2 \ll k^2 \psi$ , ist, können wir für  $\psi$  ansetzen

$$\psi(x, y, z) = \exp \left\{ -i \left[ P(z) + \frac{1}{2} Q(z) r^2 \right] \right\} \quad (7.3.11)$$

Wir setzen dies ein und bekommen

$$-Q^2 r^2 - 2iQ - kr^2 \frac{\partial Q}{\partial z} - 2k \frac{\partial P}{\partial z} - kk_2 r^2 = 0 \quad (7.3.12)$$

Da dies Gleichung für alle  $r$  gelten soll, müssen die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von  $r$  einzeln verschwinden. Also ist

$$\begin{aligned} Q^2 + k \frac{\partial Q}{\partial z} + kk_2 &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{iQ}{k} \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

In einem homogenen Medium ist  $k_2 = 0$  so dass wir die Gleichung

$$Q^2 + k \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad (7.3.14)$$

erhalten. Wir definieren die Funktion  $s(z)$  über

$$Q = k \frac{\frac{\partial s}{\partial z}}{s} \quad (7.3.15)$$

Durch Einsetzen sehen wir, dass

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0 \quad (7.3.16)$$

Damit muss  $s(z) = az + b$  sein. Somit ist  $Q$

$$Q(z) = k \frac{a}{az + b} \quad (7.3.17)$$

Bequemer ist es im weiteren, wenn wir die Funktion

$$q(z) = \frac{k}{Q(z)} = \frac{2\pi n}{\lambda Q(z)} \quad (7.3.18)$$

verwenden. Diese hat die Form

$$q(z) = z + q_0 \quad (7.3.19)$$

Wir setzen  $Q(z)$  in die Gleichung für  $P(z)$  ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= -\frac{i}{q} = -\frac{i}{z + q_0} \\ P(z) &= -i \ln \left( 1 + \frac{z}{q_0} \right) \end{aligned} \quad (7.3.20)$$

Wir nehmen an, dass  $q_0$  rein imaginär ist. Dann gilt für die örtliche Amplitudenverteilung

$$\psi(r, z) = \exp \left\{ -i \left[ -i \ln \left( 1 + \frac{z}{q_0} \right) + \frac{k}{2(q_0 + z)} r^2 \right] \right\} \quad (7.3.21)$$

Wir setzen  $q_0 := i \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda}$ , berücksichtigen  $\lambda = 2\pi n/k$  und verwenden die Identität  $\ln(a+ib) = \ln \sqrt{a^2 + b^2} + i \arctan(b/a)$  und erhalten für den ersten Term im obigen Produkt

$$\exp \left[ -\ln \left( 1 - i \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 \omega_0^4 n^2}}} \exp \left[ i \arctan \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0 n} \right) \right] \quad (7.3.22)$$

Der zweite Term wird

$$\exp \left[ \frac{-ikr^2}{2(q_0 + z)} \right] = \exp \left\{ \frac{-r^2}{\omega_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n} \right)^2 \right]} - \frac{ikr^2}{2z \left[ 1 + \left( \frac{\pi \omega_0 n}{\lambda z} \right)^2 \right]} \right\} \quad (7.3.23)$$

Die folgenden Definitionen sind üblich

$$\omega^2(z) = \omega_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n} \right)^2 \right] = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right) \quad (7.3.24)$$

$$R(z) = \left[ 1 + \left( \frac{\pi \omega_0 n}{\lambda z} \right)^2 \right] = z \left( 1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right) \quad (7.3.25)$$

$$\eta(z) = \arctan \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n} \right) = \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right) \quad (7.3.26)$$

$$z_0 \equiv \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda} \quad (7.3.27)$$

Die Parameter haben die folgende Bedeutung:

$\omega(z)$	Der halbe Strahldurchmesser an der Position $z$
$R(z)$	Der Krümmungsradius der Wellenfront an der Stelle $z$
$\eta(z)$	Phasenfaktor
$z_0$	Ort der maximalen Krümmung der Wellenfront

Mit dieser abgekürzten Schreibweise wird

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp \left[ -i(kz - \eta(z)) - r^2 \left( \frac{1}{\omega^2(z)} + \frac{ik}{2r(z)} \right) \right] \quad (7.3.28)$$

Weiter ist

$$\frac{1}{q(z)} := \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi n \omega^2(z)} \quad (7.3.29)$$

Die Grösse  $1/q(z)$  beschreibt die Gaußschen Strahlen. Der Realteil gibt den Krümmungsradius der Wellenfronten, der Imaginärteil den Strahldurchmesser.

Die Grösse  $q(z)$  ist deshalb sehr wichtig, weil mit Hilfe der Transfermatrizen  $q(z)$  propagiert werden kann. Die Transfermatrizen geben deshalb auch die Änderung der Strahlform durch optische Elemente an.



### 7.3.1. Divergenz und Strahldurchmesser

(Siehe Yariv, Quantum Electronics [Yar75], pp. 106])  
Die obigen Parameter haben die folgende Bedeutung

#### 7.3.1.1. $\omega(z)$ und $\omega_0$

Die transversale Amplitudenverteilung folgt einer Gausskurve, wie man aus dem Term  $\exp[r^2/\omega^2(z)]$  ersehen kann.  $\omega(z)$  ist die Distanz zur optischen Achse, bei der die *Intensität* um den Faktor  $e$  vom Maximum abgefallen ist.  $\omega_0$  beschreibt den minimalen Strahldurchmesser.

#### 7.3.1.2. $R(z)$

$R(z)$  ist der Krümmungsradius der Wellenfronten. Aus  $R(z) = z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)$  ist ersichtlich, dass  $\lim_{z \rightarrow 0} R(z) = \infty$  ist. Damit nähern Gaußsche Wellen im Fokus eine ebene Welle an. Ebenso ist  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} R(z) = \pm\infty$ . Auch für sehr grosse Distanzen sind Gaußsche Wellen eine gute Approximation für ebene Wellen.

#### 7.3.1.3. Öffnungswinkel

Weit weg vom minimalen Strahldurchmesser kann ein Gaußscher Strahl durch einen Öffnungswinkel

$$\Theta = \arctan \left( \frac{\lambda}{\pi \omega_0 n} \right) \approx \frac{\lambda}{\pi \omega_0 n} \quad (7.3.30)$$

beschrieben werden. Es gilt deshalb die folgende Gleichung

$$\Theta \omega_0 = \text{const} = \frac{\lambda}{\pi n} \quad (7.3.31)$$

die formal äquivalent zur Unschärferelation ist. Damit ist klar, dass ein kleinerer Brennfleck unweigerlich einen grösseren Öffnungswinkel bedeutet. In einer nullten Approximation sieht man auch, dass  $\omega_0 \geq \frac{\lambda}{\pi^2 n}$  sein muss.

### 7.3.2. Wirkung optischer Elemente auf Gaußsche Strahlen

Die Transformation eines Gaußschen Strahls mit optischen Elementen, die durch die Matrix

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

charakterisiert sind, wird durch

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (7.3.32)$$

beschrieben. Zum Beispiel wirkt eine *Linse* mit der *Brennweite*  $-f$ , also der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$$

so auf einen Gaußschen Strahl

$$q_2 = \frac{q_1}{-q_1/f + 1} \quad (7.3.33)$$

Wir nehmen den Kehrwert und bekommen

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1 - q_1/f}{q_1} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} \quad (7.3.34)$$

Mit der Definition  $1/q = 1/R + i\lambda/(\pi n \omega^2)$  wird die Gleichung

$$\frac{1}{R_2} + i \frac{\lambda}{\pi n \omega_2^2} = \frac{1}{R_1} + i \frac{\lambda}{\pi n \omega_1^2} - \frac{1}{f} \quad (7.3.35)$$

Diese Gleichung muss für den Real- und den Imaginärteil separat erfüllt sein. Also haben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} && \text{(Realteil)} \\ \omega_1 &= \omega_2 && \text{(Imaginärteil)} \end{aligned} \quad (7.3.36)$$

Wenn zwei optische Elemente mit den Matrizen

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

hintereinander geschaltet, ist das Resultat durch

$$\begin{aligned} q_3 &= \frac{A_2 q_2 + B_2}{C_2 q_2 + D_2} \\ &= \frac{A_2 \frac{A_1 q_1 + B_1}{C_1 q_1 + D_1} + B_2}{C_2 \frac{A_1 q_1 + B_1}{C_1 q_1 + D_1} + D_2} \\ &= \frac{(A_2 A_1 + B_2 C_1) q_1 + (A_2 B_1 + B_2 D_1)}{(C_2 A_1 + D_2 C_1) q_1 + (C_2 B_1 + D_2 D_1)} \\ &= \frac{A_T q_1 + B_T}{C_T q_1 + D_T} \end{aligned} \quad (7.3.37)$$

gegeben. Die Analyse dieser Gleichung zeigt, dass für die Koeffizienten auch

$$\begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \quad (7.3.38)$$

gilt. Damit gelten für Gaußsche Strahlen die gleichen mathematischen Formeln für die Berechnung von optischen Systemen wie bei Lichtstrahlen.

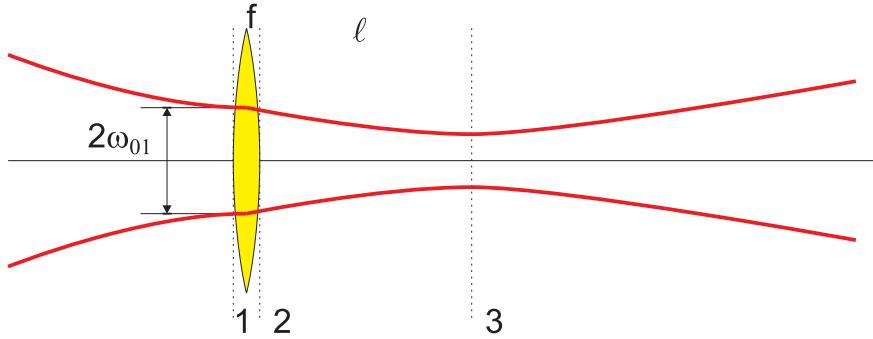


Abbildung 7.11.: Fokussierung eines Gaussischen Strahls.

In der Eingangsebene 1 ist  $R_1 = \infty$  und  $\omega = \omega_{01}$ . Dann ist

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{R_1} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_{01}^2 n} = -i \frac{\lambda}{\pi \omega_{01}^2 n} \quad (7.3.39)$$

In der Ebene 2 ist

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{f} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_{01}^2 n} \quad (7.3.40)$$

Damit ist

$$q_2 = \frac{1}{-\frac{1}{f} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_{01}^2 n}} = \frac{-a + ib}{a^2 + b^2} \quad (7.3.41)$$

wobei  $a = 1/f$  und  $b = \lambda/(\pi \omega_{01}^2 n)$ . In der Ebene 3 ist

$$q_3 = q_2 + \ell = \frac{-a}{a^2 + b^2} + \ell + \frac{ib}{a^2 + b^2} \quad (7.3.42)$$

Nun muss in der Ebene 3 auch gelten

$$\frac{1}{q_3} = \frac{1}{R_3} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_3^2 n} = \frac{\left(\frac{-a}{a^2 + b^2} + \ell\right) - i \frac{b}{a^2 + b^2}}{\left(\frac{-a}{a^2 + b^2} + \ell\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)^2} \quad (7.3.43)$$

In der Ebene 3 soll der Durchmesser minimal sein, also ist  $R_3 = \infty$ . Damit muss in der obigen Gleichung der Realteil null sein. Damit ergibt sich die Bedingung

$$0 = \frac{-a}{a^2 + b^2} + \ell \Leftrightarrow \ell = \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{f}{1 + \left(\frac{f}{\pi \omega_{01}^2 n / \lambda}\right)} = \frac{f}{1 + \left(\frac{f}{z_{01}}\right)^2} \quad (7.3.44)$$

Und damit ist auch der Ort des Strahlminimums gegeben. Der neue Strahldurchmesser ist

$$\frac{\omega_3}{\omega_{01}} = \frac{\frac{f \lambda}{\pi \omega_{01}^2 n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f \lambda}{\pi \omega_{01}^2 n}\right)^2}} = \frac{\frac{f}{z_{01}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{z_{01}}\right)^2}} \quad (7.3.45)$$

Der Parameter  $z_0$  ist der konfokale Parameter, der angibt, in welcher Distanz vom Strahlminimum der Strahldurchmesser um  $\sqrt{2}$  zunimmt. Der Wert des konfokalen Parameters ist

$$z_0 = \frac{\pi\omega_{01}^2 n}{\lambda} \quad (7.3.46)$$

### 7.3.3. Moden



(Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 881]) (Siehe Yariv, Quantum Electronics [Yar75, pp. 118])



#### Versuch zur Vorlesung: Laser (Versuchskarte AT-052)

Die Gaußschen Strahlen sind die Grundmode von Laserstrahlung. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie keine Knotenlinie hat. Es existieren weiter Moden, die durch die Anzahl Knotenlinien in horizontaler und vertikaler Richtung charakterisiert sind. Die möglichen Moden sind durch die Randbedingungen vorgegeben. So erzeugt eine vertikale Störung durch die Resonatorachse eine Mode mit zwei Maxima, die durch eine vertikale Knotenlinie getrennt sind.

Im folgenden werden Messungen von Moden gezeigt, die im Institut für Experimentelle Physik an vertikal emittierenden Laserdioden (VCSEL) aus der Abteilung Optoelektronik gemessen wurden.

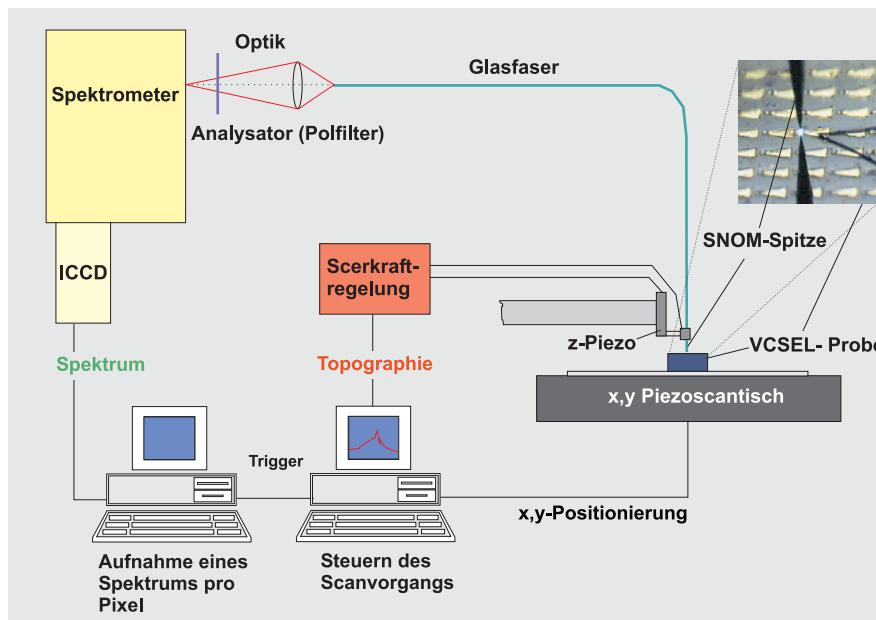


Abbildung 7.12.: Aufbau der Nahfeld-Messeinrichtung für Modenverteilungen.  
(Zeichnung von Markus Fischer [Fis97]).

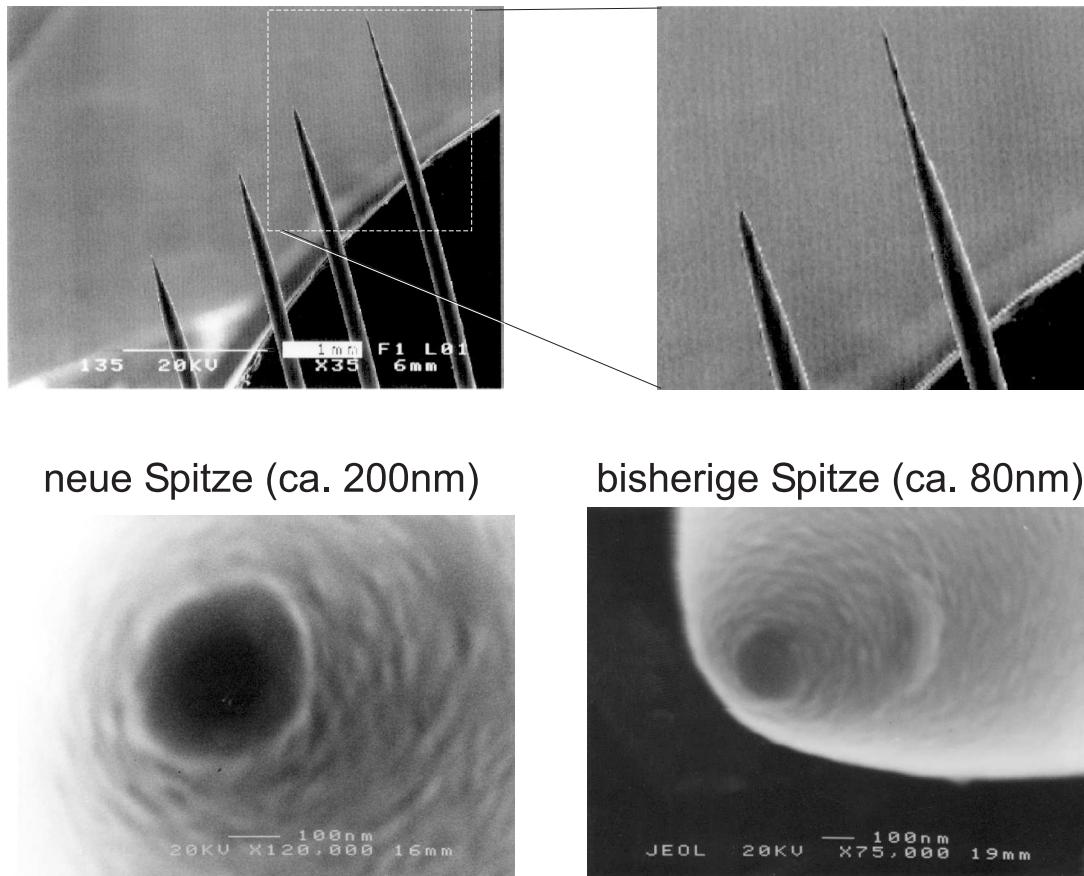


Abbildung 7.13.: Nahaufnahme von Glasfaser-Nahfeldsonden. (Daten gemessen von Markus Fischer[Fis97]).

## neue Spitzenform für mehr Intensität

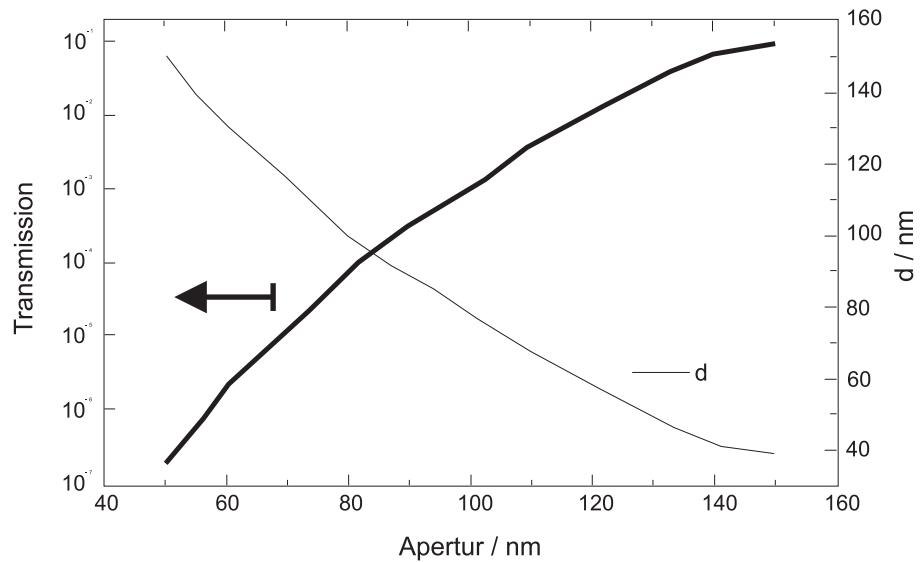


Abbildung 7.14.: Transmission von Nahfeld-Glasfasersonden. (Schaubild gezeichnet von Markus Fischer[Fis97]).

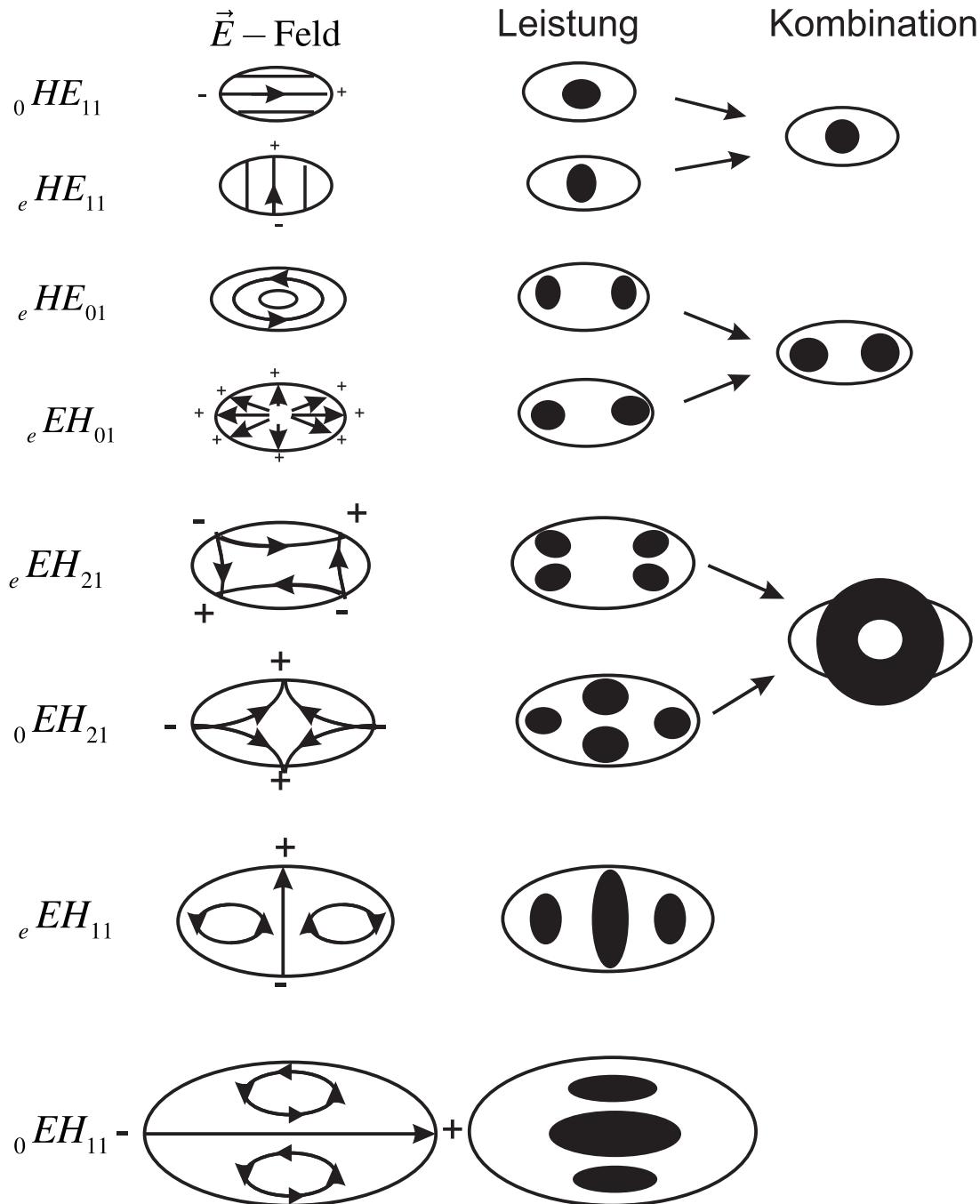


Abbildung 7.15.: Wellenleitermoden für elliptische *Wellenleiter*. Links sind die Bezeichnungen, dann die Anordnung der elektrischen Felder und schliesslich die Intensitätsmuster gezeigt. (gezeichnet nach [Dyo95].)

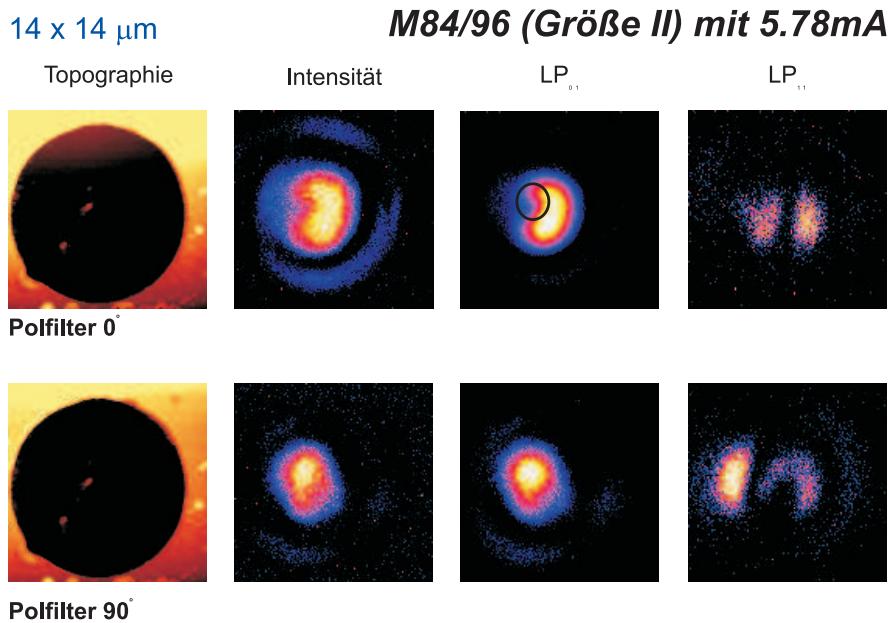


Abbildung 7.16.: Diese Aufnahme zeigt Moden bei relativ geringen Strömen. Deshalb können nur die Grundmode sowie noch wenige Oberwellen anschwingen. Die Modenform wird durch die Verunreinigungen auf den Laserspiegeln (rechts sichtbar) hervorgerufen. In der Unteren Reihe ist der Analysator für die Polarisation um  $\pi/2$  gedreht worden. Die beiden Reihen zeigen also die beiden orthogonalen Polarisationszustände des Lichtes. (Daten gemessen von Markus Fischer [Fis97]).

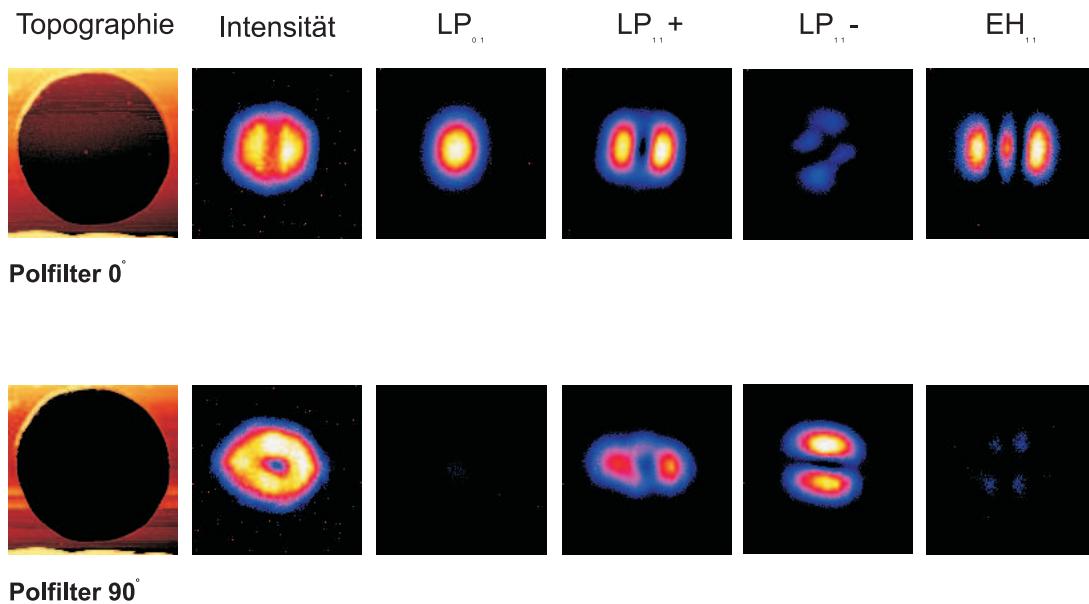
**15 x 15  $\mu\text{m}$** **M84/96 (Größe III) mit 7.5mA**

Abbildung 7.17.: Bei ähnlichem Strom hängen die möglichen Moden auch vom Durchmesser des Resonators ab. Dieser Resonator ist größer als der im vorherigen Bild. (Daten gemessen von Markus Fischer[Fis97]).

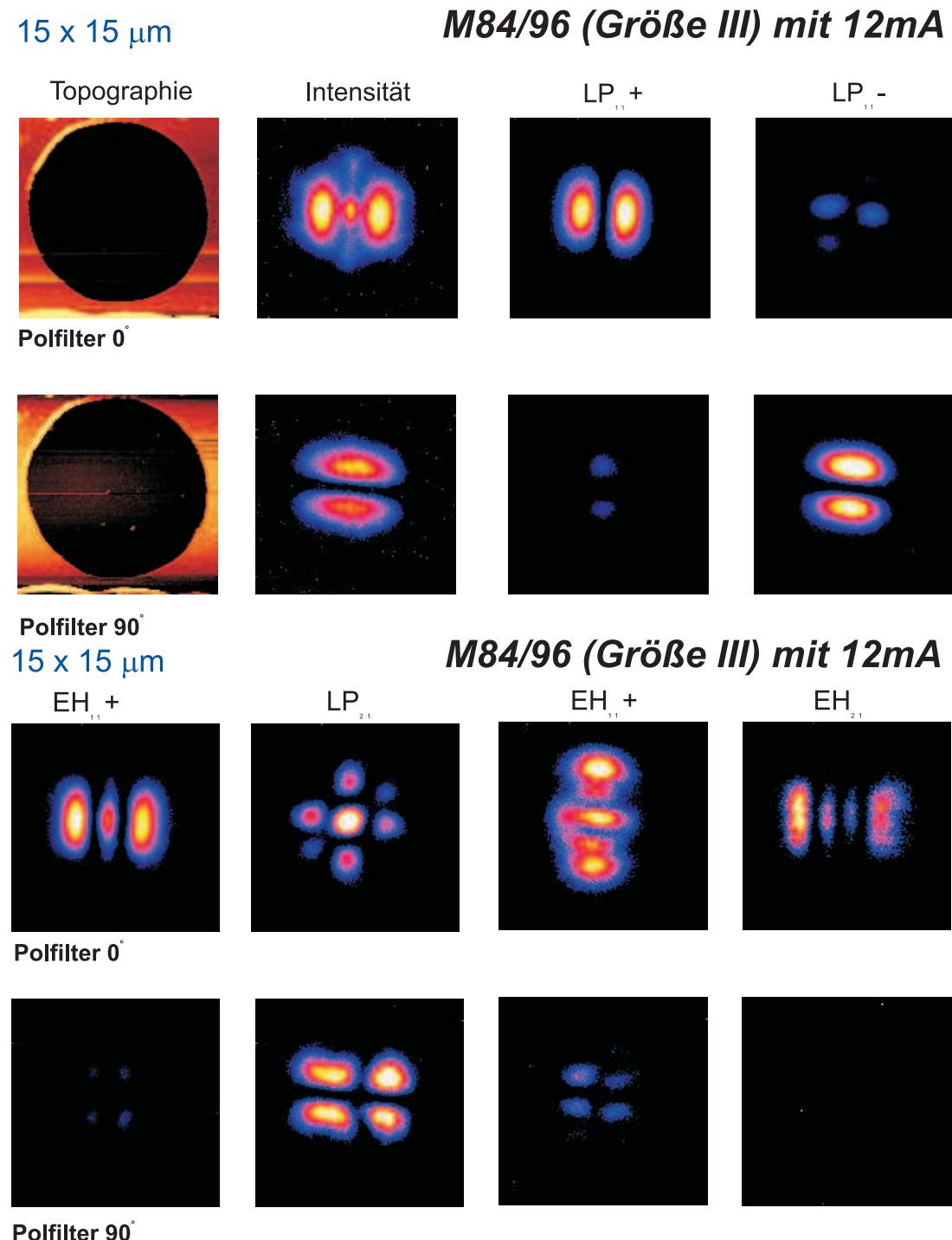


Abbildung 7.18.: Hier ist der Strom bei gleicher Geometrie grösser als im vorherigen Bild. Entsprechend schwingen mehr Moden an. Beachten Sie, dass die Knotenlinien von Moden mit einer orthogonalen Polarisation auch orthogonal sind. (Daten gemessen von Markus Fischer[Fis97]).

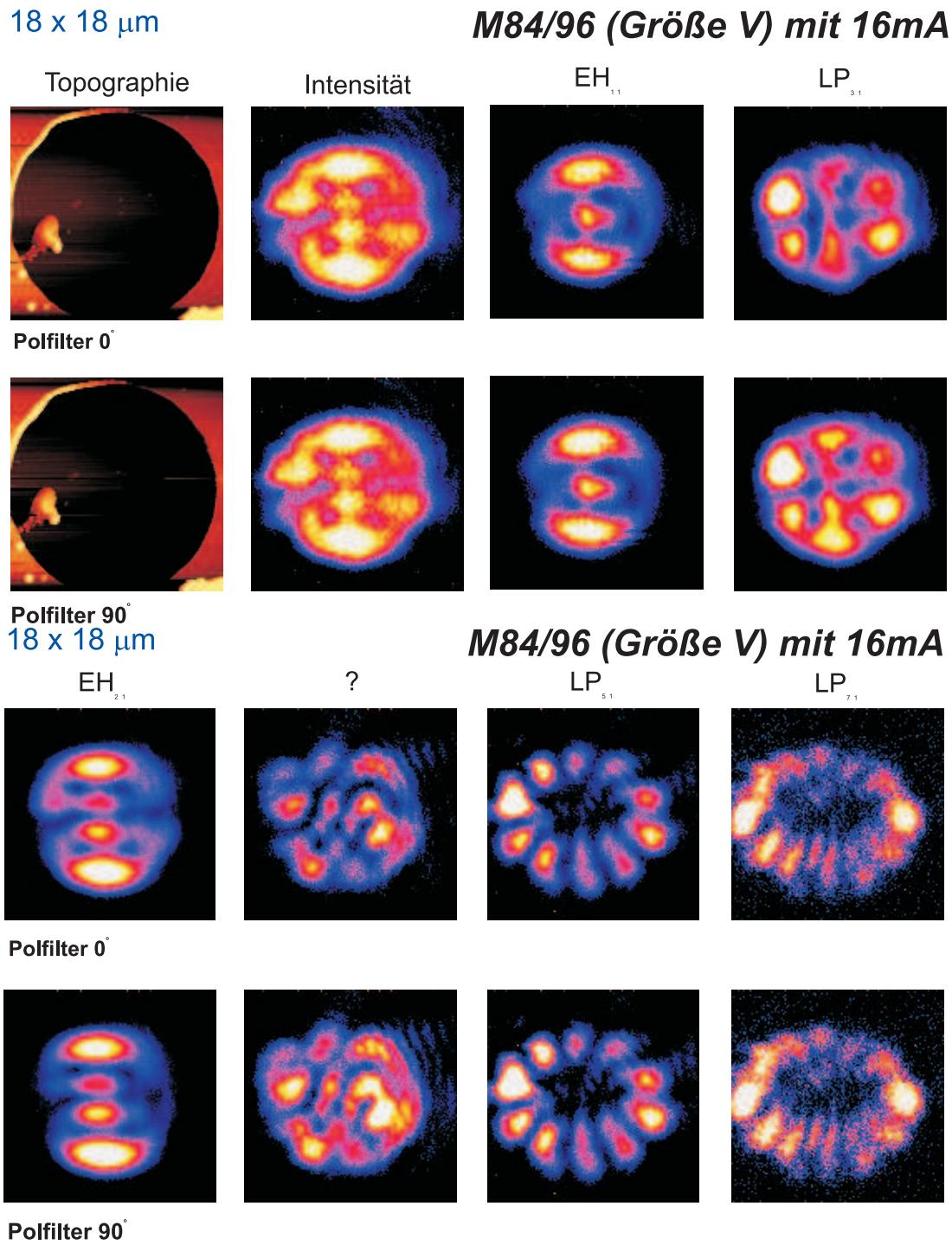
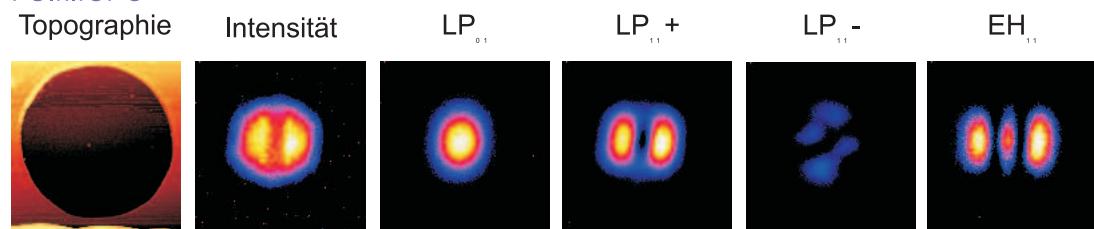


Abbildung 7.19.: Dieser Laserresonator hat den grösseren Durchmesser als der vorherige. Da auch der Injektionsstrom grösser ist, schwingen hier sehr viele Moden an, die zum Teil auch nicht mehr identifiziert werden können. (Daten gemessen von Markus Fischer[Fis97]).

### **Einfluß der Spitze auf Polarisation**

M84/96 (Größe 3), 7.5 mA,  $15 \times 15 \mu\text{m}$

Polfilter 0°



Probe 90° nach links gedreht

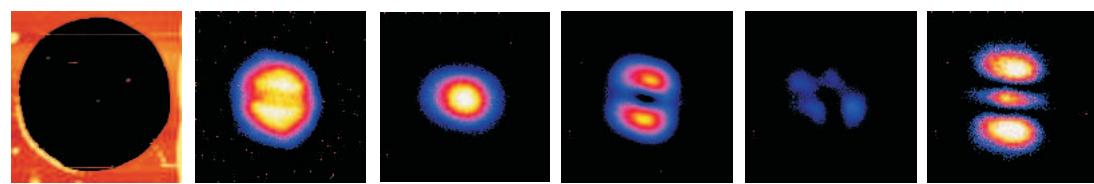
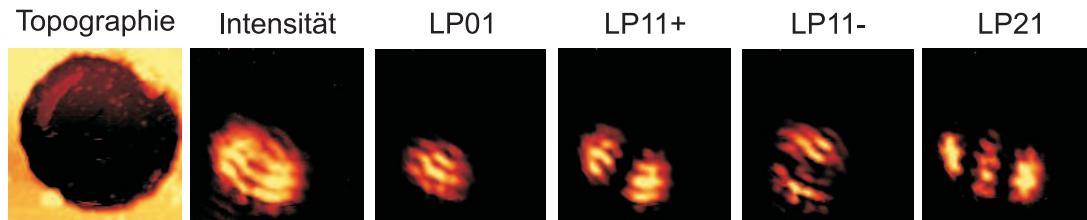
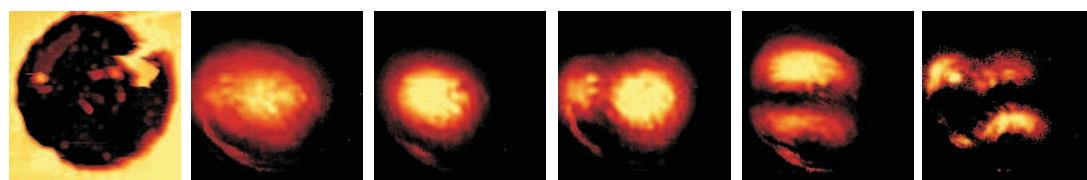


Abbildung 7.20.: Hier wird gezeigt, dass die Sonde, hier "Spitze" genannt, keinen Einfluss auf die Messung hat. (Daten gemessen von Markus Fischer [Fis97]).

**Probe M129, 4mA ( $I_{th} = 1,3\text{mA}$ ), 12x12  $\mu\text{m}$**



**Messung mit anderer Spalte:**



**Messung in ca. 1  $\mu\text{m}$  Abstand:**

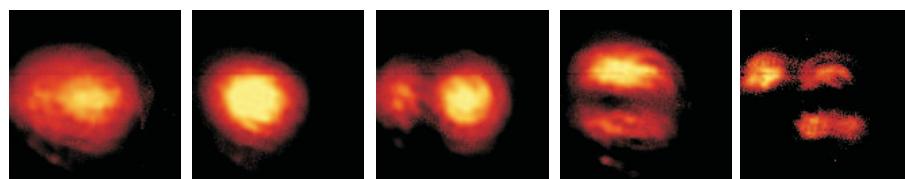


Abbildung 7.21.: Wie bei allen Messmethoden gibt es auch hier Artefakte. So führen hier Rückwirkungen auf den Laser zu einer optisch sonst nicht erklärbaren Streifenbildung. (Daten gemessen von Markus Fischer[Fis97]).

Nach Yariv[Yar75, 118] genügen die Moden in rechteckförmigen *Wellenleiter*

$$\begin{aligned}
 E_{\ell,m} &= E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} H_\ell \left( \sqrt{2} \frac{x}{\omega(z)} \right) H_m \left( \sqrt{2} \frac{y}{\omega(z)} \right) \\
 &\quad \times \exp \left[ -ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} - ikz + i(m+n+1)\eta \right] \\
 &= E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} H_\ell \left( \sqrt{2} \frac{x}{\omega(z)} \right) H_m \left( \sqrt{2} \frac{y}{\omega(z)} \right) \\
 &\quad \times \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - ikz + i(m+n+1)\eta \right]
 \end{aligned} \tag{7.3.47}$$

wobei  $H_\ell$  das Hermitsche Polynom  $\ell$ -ten Grades ist und die anderen Größen wie bei den Gaußschen Strahlen definiert sind.

# A. Bestimmung des Polarisationszustandes

## A.1. Rechnung mit Jones-Matrizen

Diese Rechnung ist für vollständig polarisiertes Licht.

Wir beziehen uns hier auf die Abbildung 4.19. Für die Verzögerungsplatte (Phasenverzögerung  $\delta$ ) im Winkel  $\beta$  setzen wir im Jones-Formalismus an

$$P_V(\beta, \delta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) + i \cos(2\beta) \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) & i \sin(2\beta) \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ i \sin(2\beta) \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - i \cos(2\beta) \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.1})$$

Der um  $\alpha$  gedrehte Polarisator ist durch

$$P_P(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.2})$$

beschrieben. Mit dem vollständig polarisierten Eingangsfeld

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_y e^{I\phi/2} \\ E_z e^{-I\phi/2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

bekommen wir für eine  $\lambda/4$ -Verzögerungsplatte ( $\delta = \pi/2$ )

$$\mathbf{E}_{res} = P_P(\alpha) P_V(\beta, \pi/2) \mathbf{E}_0 \quad (\text{A.1.4})$$

Eingesetzt und ausgerechnet ergibt dies

$$\mathbf{E}_{res} = \frac{e^{-\frac{i\phi}{2}} (E_y e^{i\phi} (\cos(\alpha) + i \cos(\alpha - 2\beta)) + E_z (\sin(\alpha) - i \sin(\alpha - 2\beta)))}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.5})$$

Die resultierende Intensität ist dann

$$\begin{aligned} I_{res}(\alpha, \beta) &= K \mathbf{E}_{res} \mathbf{E}_{res}^* \\ &= \frac{1}{2} (E_y^2 - 2E_y E_z \sin(\phi) \sin(2(\alpha - \beta)) \\ &\quad + \cos(2(\alpha - \beta))(2E_y E_z \sin(2\beta) \cos(\phi) + \cos(2\beta)(E_y - E_z)(E_y + E_z)) + E_z^2) \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

Nach dem Rezept aus Abschnitt 4.4.5.2 messen wir

$$I_{res}(0, 0) = KE_y^2 \quad (\text{A.1.7a})$$

$$I_{res}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = KE_z^2 \quad (\text{A.1.7b})$$

$$I_{res}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \frac{K}{2} \left( E_y^2 + E_z^2 - 2E_y E_z \sin(\phi) \right) \quad (\text{A.1.7c})$$

$$I_{res}\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) = \frac{K}{2} \left( E_y^2 + E_z^2 + 2E_y E_z \sin(\phi) \right) \quad (\text{A.1.7d})$$

$$I_{res}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{K}{2} \left( E_y^2 + E_z^2 + 2E_y E_z \cos(\phi) \right) \quad (\text{A.1.7e})$$

$$I_{res}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{K}{2} \left( E_y^2 + E_z^2 - 2E_y E_z \cos(\phi) \right) \quad (\text{A.1.7f})$$

Daraus ergeben sich dann die Beziehungen aus Abschnitt 4.4.5.2

$$I_{res}(0, 0) + I_{res}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = K \left( E_y^2 + E_z^2 \right) \quad (\text{A.1.8a})$$

$$I_{res}(0, 0) - I_{res}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = K \left( E_y^2 - E_z^2 \right) \quad (\text{A.1.8b})$$

$$I_{res}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) - I_{res}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = 2KE_y E_z \cos(\phi) \quad (\text{A.1.8c})$$

$$I_{res}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) - I_{res}\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) = -2KE_y E_z \sin(\phi) \quad (\text{A.1.8d})$$

## A.2. Rechnung mit Müller-Matrizen

Die Rechnung mit Müller-Matrizen verläuft analog zur Rechnung mit Jones-Matrizen, nur dass über den Polarisationsgrad nichts angenommen werden muss.

Wir haben nach [Gol03] für eine Verzögerungsplatte (Phasenverzögerung  $\delta$ ) im Winkel  $\beta$  die Müller-Matrix

$$M_V(\beta, \delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2(2\beta) \cos(\delta) + \cos^2(2\beta) & \sin(2\beta) \cos(2\beta)(1 - \cos(\delta)) & \sin(2\beta) \sin(\delta) \\ 0 & \sin(2\beta) \cos(2\beta)(1 - \cos(\delta)) & \cos^2(2\beta) \cos(\delta) + \sin^2(2\beta) & \cos(2\beta) \sin(\delta) \\ 0 & \sin(2\beta) \sin(\delta) & -\cos(2\beta) \sin(\delta) & \cos(\delta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.1})$$

Der um  $\alpha$  gedrehte Polarisator ist durch die Müllermatrix

$$M_P(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & 0 \\ \cos(2\alpha) & \cos^2(2\alpha) & \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) & 0 \\ \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) & \sin^2(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.2})$$

gegeben. Als Eingangs-Stokes-Vektor nehmen wir

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.3})$$

an. Der resultierende Stokes-Vektor  $\mathbf{S}_1$  ist dann

$$\mathbf{S}_1 = M_P(\alpha)M_V(\beta, \delta)\mathbf{S}_0 \quad (\text{A.2.4})$$

Wir setzen  $\delta = \pi/2$  ( $\lambda/4$ -Platte) und bekommen

$$\mathbf{S}_1(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I + \cos(2(\alpha - \beta))(Q \cos(2\beta) + U \sin(2\beta)) + V \sin(2(\alpha + \beta))) \\ \frac{1}{2}\cos(2\alpha)(I + \cos(2(\alpha - \beta))(Q \cos(2\beta) + U \sin(2\beta)) + V \sin(2(\alpha + \beta))) \\ \frac{1}{2}\sin(2\alpha)(I + \cos(2(\alpha - \beta))(Q \cos(2\beta) + U \sin(2\beta)) + V \sin(2(\alpha + \beta))) \\ \frac{1}{2}(Q \sin(2\beta) - U \cos(2\beta)) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.5})$$

Nach dem Rezept aus Abschnitt 4.4.5.2 messen wir

$$\mathbf{S}_{0,0} = \mathbf{S}_1(0, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & I + Q & 0 & -U \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.2.6a})$$

$$\mathbf{S}_{\pi/2,0} = \mathbf{S}_1\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I - Q & -I + Q & 0 & -U \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.2.6b})$$

$$\mathbf{S}_{\pi/4,0} = \mathbf{S}_1\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + V & 0 & I + V & -U \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.2.6c})$$

$$\mathbf{S}_{-\pi/4,0} = \mathbf{S}_1\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I - V & 0 & -I + V & -U \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.2.6d})$$

$$\mathbf{S}_{\pi/4,\pi/4} = \mathbf{S}_1\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + U & 0 & I + U & Q \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.2.6e})$$

$$\mathbf{S}_{-\pi/4,\pi/4} = \mathbf{S}_1\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I - U & 0 & -I + U & Q \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.2.6f})$$

Die erste Komponente eines Stokes-Vektors ist die Intensität, also die Grösse, die mit einer Fotodiode, einem analogen Film oder einer sonstigen Energiemessung bestimmt werden kann. Wenn wir nun nach dem Rezept aus Abschnitt 4.4.5.2 die folgenden Summen und Differenzen bilden, erhalten wir zuerst die Stokes-Vektoren und dann die gemessenen Intensitäten

$$\mathbf{S}_{0,0} + \mathbf{S}_{\pi/2,0} = (I \ Q \ 0 \ -U)^T \implies I_{\text{Fotodiode}} = (\mathbf{S}_{0,0} + \mathbf{S}_{\pi/2,0})(1) = I \quad (\text{A.2.7a})$$

$$\mathbf{S}_{0,0} - \mathbf{S}_{\pi/2,0} = (Q \ I \ 0 \ 0)^T \implies I_{\text{Fotodiode}} = (\mathbf{S}_{0,0} - \mathbf{S}_{\pi/2,0})(1) = Q \quad (\text{A.2.7b})$$

$$\mathbf{S}_{\pi/4,\pi/4} - \mathbf{S}_{-\pi/4,\pi/4} = (U \ 0 \ I \ 0)^T \implies I_{\text{Fotodiode}} = (\mathbf{S}_{\pi/4,\pi/4} - \mathbf{S}_{-\pi/4,\pi/4})(1) = U \quad (\text{A.2.7c})$$

$$\mathbf{S}_{\pi/4,0} - \mathbf{S}_{-\pi/4,0} = (V \ 0 \ I \ 0)^T \implies I_{\text{Fotodiode}} = (\mathbf{S}_{\pi/4,0} - \mathbf{S}_{-\pi/4,0})(1) = V \quad (\text{A.2.7d})$$

Damit ist der Stokes-Vektor und damit der Polarisationsgrad und der Polarisationszustand gemessen.

## B. Einige notwendige mathematische Verfahren

### B.1. Vektoren

beschreiben Orte oder gerichtete Größen

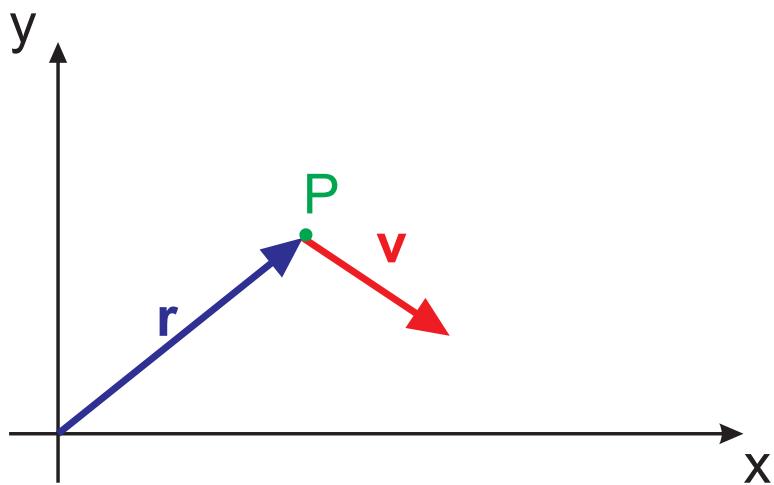


Abbildung B.1.: Definition von Vektoren.  $\mathbf{r}$  ist ein Ortsvektor,  $\mathbf{v}$  der Geschwindigkeitsvektor.

$$\vec{r} = \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Die Ableitung nach der Zeit wird auch als

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

geschrieben.

Addition:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.1})$$



**Versuch zur Vorlesung:**  
Kraft-Polygon ([Versuchskarte M-28](#))

Länge eines Vektors

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + b_y^2 + a_z^2} \quad (\text{B.1.2})$$

Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cdot \cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\text{B.1.3})$$

der Einheitsvektor  $\mathbf{e}_x$  ist ein Vektor der Länge 1, der in die  $x$ -Richtung zeigt.  
Vektorprodukt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.4})$$

### B.1.1. Gesetze

Für die Orientierung der Vektoren gilt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a} \quad (\text{B.1.5})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b} \quad (\text{B.1.6})$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cdot \sin(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\text{B.1.7})$$

#### B.1.1.1. Spatprodukt

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \quad (\text{B.1.8})$$

Das Spatprodukt berechnet das *Volumen* des durch  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  aufgespannten Spates.

#### B.1.1.2. Orthogonalität zweier Vektoren testen

Gegeben seien zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ . Die Projektion von  $\mathbf{a}$  auf  $\mathbf{b}$ , das heisst, die Komponente von  $\mathbf{a}$  in die Richtung von  $\mathbf{b}$  ist

$$a_b = a_{\text{in Richtung } \mathbf{b}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b = \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{b}}{b} \quad (\text{B.1.9})$$

In kartesischen Koordinaten heisst dies

$$a_b = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (\text{B.1.10})$$

#### Beispiel:

Sei  $\mathbf{a} = (3, 2, -2)$  und  $\mathbf{b} = (-2, 0, 1)$ . Dann ist

$$a_b = \frac{3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 2}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{-6 - 4}{\sqrt{8}} = -\frac{10}{2\sqrt{2}} = -\frac{5}{\sqrt{2}}$$

**Beispiel:**

Sei  $\mathbf{a} = (3, 2, -2)$  und  $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ . Dann ist

$$a_b = \frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 2}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1}} = -2$$

Dies ist die  $z$ -Komponente von  $\mathbf{a}$ .

## B.2. Differentiation und Integration

### B.2.1. Einige Reihen

Funktion	Potenzreihe	Konvergenz
$(1 \pm x)^m$	$1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$	$ x  \leq 1$
$\sin(x + \Delta x)$	$\sin(x) + \frac{\Delta x}{1!} \cos(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{(n!)} \sin(x + \frac{\pi n}{2}) + \dots$	$ \Delta x  < \infty$
$\cos(x + \Delta x)$	$\cos(x) - \Delta x \sin(x) - \frac{\Delta x^2 \cos(x)}{2!} + \frac{\Delta x^3 \sin(x)}{3!} + \frac{\Delta x^4 \cos(x)}{4!} - \dots + \frac{\Delta x^n \cos(x + \frac{n\pi}{2})}{n!} \pm \dots$	$ \Delta x  < \infty$
$\tan x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 \dots$	$ x  < \frac{\pi}{2}$
$\cot x$	$\frac{1}{x} - \left[ \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} \dots \right]$	$0 <  x  < \pi$
$e^x$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$ x  < \infty$
$a^x = e^{x \ln a}$	$1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \frac{(x \ln a)^4}{4!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\ln x$	$2 \left[ \frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} + \dots \right]$	$x > 0$
$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$	$0 < x \leq 2$
$\ln x$	$\frac{x-1}{x} + \frac{1}{2} \left( \frac{x-1}{x} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{x-1}{x} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left( \frac{x-1}{x} \right)^n + \dots$	$x > \frac{1}{2}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$	$ x  < 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \left[ x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right]$	$ x  < 1$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$ x  < 1$
Tabelle B.1.: Reihenentwicklungen		

## B.2.2. Ableitungen in drei Dimensionen

### B.2.2.1. Gradient in kartesischen Koordinaten

Wenn wir eine Funktion  $y = f(x)$  als Höhenprofil in einer zweidimensionalen Landschaft auffassen, dann ist

$$\frac{df(x)}{dx}$$

die Steigung dieses Profiles an der Stelle  $x$ .  $f(x)$  ist die Höhenangabe über einer eindimensionalen Grundfläche.

Wir können eine Funktion  $f(x, y)$  als Höhenangabe über einer zweidimensionalen Grundfläche betrachten.

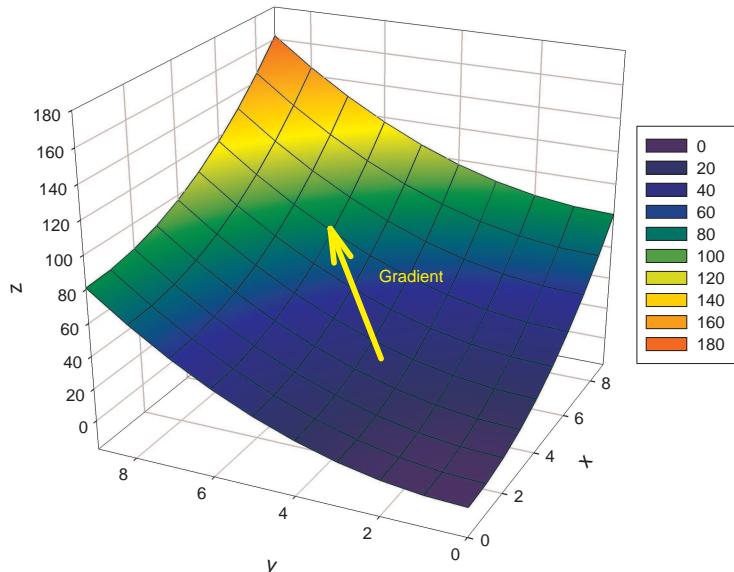


Abbildung B.2.: Gradient als Richtung der stärksten Steigung

Die Funktion **Gradient** berechnet das stärkste Gefälle einer Höhenlandschaft über einer zweidimensionalen Ebene. Sie ist definiert:

$$\mathbf{grad} \ f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Eine skalare Funktion  $f(x, y, z)$  definiert eine „Höhenlandschaft“ über einer dreidimensionalen Grundfläche. Sie kann nicht mit einfachen Mitteln visualisiert werden. Hier ist die Definition

**Gradient einer skalaren Funktion  $f(x, y, z)$  von drei Variablen**

$$\mathbf{grad} \ f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

### B.2.2.2. Divergenz in kartesischen Koordinaten

Wir betrachten eine Vektorfunktion

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

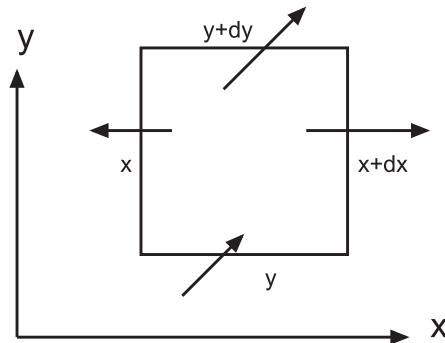


Abbildung B.3.: Vektorfeld mit Umrandung

Wenn wir die Umrandung betrachten, dann sehen wir, dass netto etwas aus ihr herausfliesst. In die  $x$ -Richtung heisst das, dass

$$F_x \cdot dx = f_x(x + dx, y) - f_x(x, y)$$

fliesst.

In die  $y$ -Richtung müssen wir die schräg liegenden Vektoren aufteilen. Die  $x$ -Komponente,  $f_x(x, y)$  und  $f_x(x, y + dy)$  ist parallel zur oberen und unteren Umrandung. Sie trägt nichts zum Fluss bei. Also gilt auch für die  $y$ -Richtung

$$F_y \cdot dy = f_y(x, y + dy) - f_y(x, y)$$

Die Grösse  $F = F_x + F_y$  nennen wir Divergenz oder Quellstärke. Sie ist also

### Divergenz oder Quellstärke in 2 Dimensionen

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y) = \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial y}$$

Eine analoge Überlegung kann man sich in drei Dimensionen machen. Die Vektorfunktion ist dann

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Wir definieren

### Divergenz einer Vektorfunktion $\mathbf{f}(x, y)$ in drei Dimensionen

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial z}$$

#### B.2.2.3. Rotation in kartesischen Koordinaten

Wir betrachten wieder eine zweidimensionale Vektorfunktion

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

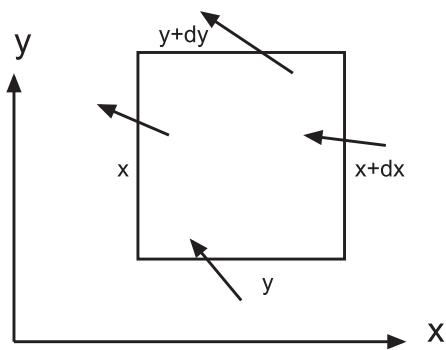


Abbildung B.4.: Drehung eines schwimmenden Klotzes, Rotation

Wir nehmen nun an, dass die durch  $\mathbf{f}(x, y)$  definierten Strömungen den rechteckigen schwimmenden Klotz beeinflussen. So wie die Vektoren gezeichnet sind, wird er sich drehen. Seine Drehachse zeigt aus der Zeichenebene heraus, also die  $z$ -Richtung. Die Drehung hat etwas zu tun mit den Größen

$$R_y dx = f_y(x + dx, y) - f_y(x, y)$$

und

$$R_x dy = -(f_x(x, y + dy) - f_x(x, y))$$

Um bei gleicher Drehrichtung (positiv ist im Gegenuhrzeigersinn) eine positive Grösse zu haben, wird bei  $R_x$  ein „–“ eingefügt. Die Stärke der Drehung ist also

### Rotation in zwei Dimensionen

$$R = \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y}$$

Für eine dreidimensionale Vektorfunktion

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

kann man sich überlegen, dass die gleichen Überlegungen wie für die  $xy$ -Ebene auch für die  $xz$ -Ebene (Rotation um  $y$ ) und die  $yz$ -Ebene (Rotation um  $x$ ) gelten. Wir definieren also

### Rotation in drei Dimensionen

$$\text{rot } \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Man kann sich die Berechnung gut merken mit

### Gedankenstütze für Rotation

$$\text{rot } \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

## B.3. Skalarprodukt und Vektorprodukt in kartesischen Koordinaten

Wir betrachten die zwei Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Das Vektorprodukt der beiden Vektoren ist

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

## B.4. Rechnen mit Vektoren

### B.4.1. Vektoridentitäten

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [BSMM08, pp. 190])

Im Folgenden sind  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{f}$  Vektoren oder vektorielle Funktionen,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $f$  ihre Längen,  $k$  eine Zahl und  $\varphi(\mathbf{r})$  eine skalare Funktion. Die Komponenten der Vektoren in kartesischen Koordinaten sind

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Für die anderen Vektoren werden die Komponenten analog geschrieben.

#### B.4.1.1. Produkte mit Vektoren

Skalarprodukt

$$k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a b \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \quad (\text{B.4.1})$$

Vektorprodukt

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = a b \sin(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \quad (\text{B.4.2})$$

Vertauschung der Reihenfolge (Kommutationsgesetze)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{B.4.3})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{B.4.4})$$

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{B.4.5})$$

Sie sind kollinear, wenn

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{B.4.6})$$

Doppeltes Vektorprodukt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (\text{B.4.7})$$

Spatprodukt oder gemischtes Produkt

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \\ &= (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \\ &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} \\ &= -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \\ &= -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \\ &= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - (a_z b_y c_x + a_x b_z c_y + a_y b_x c_z) \end{aligned} \quad (\text{B.4.8})$$

Drei Vektoren sind komplanar, wenn

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (\text{B.4.9})$$

Lagrangesche Identität

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{f}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{f}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{B.4.10})$$

Vierfaches Vektorprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{f}) \mathbf{c} - ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}) \mathbf{f} \quad (\text{B.4.11})$$

### B.4.1.2. Ableiten von Vektoren

Ableiten eines Vektors

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{da_x}{dt} \\ \frac{da_y}{dt} \\ \frac{da_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.4.12})$$

Ableitung eines Produktes

$$\frac{d}{dt} (\varphi(t) \mathbf{a}(t)) = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{a} + \varphi \frac{d}{dt} \mathbf{a} \quad (\text{B.4.13})$$

Ableitung des Skalarproduktes

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (\text{B.4.14})$$

Ableitung des Vektorproduktes

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (\text{B.4.15})$$

Ableitung eines Vektors mit konstantem Betrag. Hier ist  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = \text{const.}$  Aus Gleichung (B.4.14) folgt

$$0 = \frac{da^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} \perp \mathbf{a} \quad (\text{B.4.16})$$

Taylorentwicklung einer Vektorfunktion

$$\mathbf{a}(t + \tau) = \mathbf{a}(t) + \tau \left. \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right|_t + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \right|_t + \dots + \frac{\tau^n}{n!} \left. \frac{d^n\mathbf{a}}{dt^n} \right|_t + \dots \quad (\text{B.4.17})$$

#### B.4.1.3. Vektorableitungen bei Skalarfeldern

Ableitung eines skalaren Feldes nach einer Richtung

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{c}) - \varphi(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad (\text{B.4.18})$$

Ableitung  $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c}$  in Richtung des Einheitsvektors  $\mathbf{e}_c$  in Richtung von  $\mathbf{c}$

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} \quad (\text{B.4.19})$$

Richtungsableitung einer skalaren Funktion im Vergleich zur Richtung mit dem stärksten Abfall (Einheitsvektor  $\mathbf{n}$ )

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \cos(\angle \mathbf{e}_c, \mathbf{n}) \quad (\text{B.4.20})$$

#### B.4.1.4. Vektorableitungen bei Vektorfeldern

Ableitung eines Vektorfeldes  $\mathbf{a}$  nach einer Richtung

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad (\text{B.4.21})$$

Ableitung  $\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c}$  in Richtung des Einheitsvektors  $\mathbf{e}_c$  in Richtung von  $\mathbf{c}$

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} \quad (\text{B.4.22})$$

Richtungsableitung einer Vektorfunktion

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} &= (\mathbf{c} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \operatorname{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{c} \cdot \operatorname{div} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{div} \mathbf{c} \\ &\quad - \mathbf{c} \times \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{c}) \end{aligned} \quad (\text{B.4.23})$$

Gradient eines Produktes

$$\mathbf{grad} (\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 \mathbf{grad} \varphi_2 + \varphi_2 \mathbf{grad} \varphi_1 \quad (\text{B.4.24})$$

Kettenregel beim Gradienten

$$\mathbf{grad} \varphi_1 (\varphi_2) = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} \mathbf{grad} \varphi_2 \quad (\text{B.4.25})$$

Gradient eines Skalarproduktes

$$\mathbf{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{rot} \mathbf{a} \quad (\text{B.4.26})$$

Gradient eines Skalarproduktes eines konstanten Vektors  $\mathbf{k}$  mit einem Ortsvektor  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{grad} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) = \mathbf{k} \quad (\text{B.4.27})$$

Divergenz eines Produktes

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{grad} \varphi \quad (\text{B.4.28})$$

Divergenz eines Skalarproduktes eines konstanten Vektors  $\mathbf{k}$  mit einem Ortsvektor  $\mathbf{r}$

$$\operatorname{div} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{r}|} \quad (\text{B.4.29})$$

Divergenz eines Vektorproduktes

$$\operatorname{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{b} \quad (\text{B.4.30})$$

Rotation eines Produktes

$$\mathbf{rot} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \mathbf{rot} \mathbf{a} + \mathbf{grad} \varphi \times \mathbf{a} \quad (\text{B.4.31})$$

Divergenz eines Vektorproduktes

$$\mathbf{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} \quad (\text{B.4.32})$$

Rotation eines Potentialfeldes

$$\mathbf{rot} (\mathbf{grad} \varphi) = \mathbf{0} \quad \forall \varphi \quad (\text{B.4.33})$$

Divergenz einer Rotation

$$\operatorname{div} (\mathbf{rot} \mathbf{a}) = 0 \quad \forall \mathbf{a} \quad (\text{B.4.34})$$

Rotation einer Rotation

$$\mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{a}) = \mathbf{grad} (\operatorname{div} \mathbf{a}) - \operatorname{div} (\mathbf{grad} \mathbf{a}) \quad (\text{B.4.35})$$

## B.5. Drehungen

### B.5.1. Drehmatrizen

Eine Drehung um die  $x$ -Achse beschrieben durch den Vektor  $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)^T$  um den Winkel  $\alpha$  wird durch die Matrix

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{B.5.1})$$

die Transformation ausgeführt. Für eine Drehung um die  $y$ -Achse beschrieben durch den Vektor  $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)^T$  um den Winkel  $\beta$  wird durch die Matrix

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (\text{B.5.2})$$

die Transformation ausgeführt. Schliesslich wird eine Drehung um die  $y$ -Achse beschrieben durch den Vektor  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)^T$  um den Winkel  $\gamma$  wird durch die Matrix

$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5.3})$$

ausgeführt.

Der Vektor  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  soll um den Winkel  $\alpha$  um die  $x$ -Achse gedreht werden. Dies wird mit der Operation

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha) \\ y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{B.5.4})$$

bewerkstelligt. Im Allgemeinen wird eine Drehung durch die Multiplikation des Vektors von links mit einer Matrix beschrieben.

Die Drehung zurück wird (antisymmetrische reelle Matrix mit der Determinante 1) wird durch die inverse Matrix oder die transponierte Matrix beschrieben Alternativ kann man auch  $\alpha$  durch  $-\alpha$  ersetzen.

$$\mathbf{R}_x(-\alpha) = \mathbf{R}_x^T(\alpha) = \mathbf{R}_x^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{B.5.5})$$

Eine Drehung um einen beliebigen Vektor  $\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)^T$  mit  $x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 = 1$  wird durch

$$\mathbf{R}_{(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)^T}(\alpha) = \begin{pmatrix} x_\alpha^2 + \cos(\alpha)(y_\alpha^2 + z_\alpha^2) & -x_\alpha y_\alpha \cos(\alpha) + x_\alpha y_\alpha - z_\alpha \sin(\alpha) & -x_\alpha z_\alpha \cos(\alpha) + x_\alpha z_\alpha + y_\alpha \sin(\alpha) \\ -x_\alpha y_\alpha \cos(\alpha) + x_\alpha y_\alpha + z_\alpha \sin(\alpha) & \cos(\alpha)(x_\alpha^2 + z_\alpha^2) + y_\alpha^2 & -x_\alpha \sin(\alpha) - y_\alpha z_\alpha \cos(\alpha) + y_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha z_\alpha \cos(\alpha) + x_\alpha z_\alpha - y_\alpha \sin(\alpha) & x_\alpha \sin(\alpha) - y_\alpha z_\alpha \cos(\alpha) + y_\alpha z_\alpha & \cos(\alpha)(x_\alpha^2 + y_\alpha^2) + z_\alpha^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5.6})$$

beschrieben[WR14]. Die Drehung ist bei positivem  $\alpha$  rechtshändig bezüglich der Richtung von  $\mathbf{r}_\alpha$  (Der Daumen zeigt in die Richtung von  $\mathbf{r}_\alpha$ , die Finger geben die Drehrichtung).

### B.5.2. Drehung von Vektoren und Matrizen (oder Tensoren)

Sei  $\mathbf{R}_{e_\alpha}(\alpha)$  die Drehmatrix. Dann ist der aus  $\mathbf{r}$  hervorgegangene um die Achse  $e_\alpha$  und den Winkel  $\alpha$  gedrehte Vektor

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}_{e_\alpha}(\alpha) \mathbf{r} \quad (\text{B.5.7})$$

Ein Beispiel dafür ist in (B.5.4) gezeigt.

Die aus der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix}$$

hervorgegangene um die Achse  $e_\alpha$  und den Winkel  $\alpha$  gedrehte Matrix ist

$$\mathbf{A}' = \mathbf{R}_{e_\alpha}(\alpha) \mathbf{A} \mathbf{R}_{e_\alpha}^T(\alpha). \quad (\text{B.5.8})$$

Die Drehung zurück ist dann

$$\mathbf{R}_{e_\alpha}(-\alpha) \mathbf{A}' \mathbf{R}_{e_\alpha}^T(-\alpha) = \mathbf{R}_{e_\alpha}^T(\alpha) \mathbf{A}' \mathbf{R}_{e_\alpha}(\alpha) = \mathbf{R}_{e_\alpha}^T(\alpha) \mathbf{R}_{e_\alpha}(\alpha) \mathbf{A} \mathbf{R}_{e_\alpha}^T(\alpha) \mathbf{R}_{e_\alpha}(\alpha) = \mathbf{A} \quad (\text{B.5.9})$$

Wenn wir als Beispiel die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

um  $\mathbf{e}_\alpha = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T$  drehen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
A' &= R_{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T}(\alpha) A R_{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T}^T(\alpha) \quad (B.5.10) \\
&= R_{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T}(\alpha) A R_{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T}(-\alpha) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + 1) & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\cos(\alpha) - 1) \\ -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \cos(\alpha) & -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(\cos(\alpha) - 1) & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + 1) & -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\cos(\alpha) - 1) \\ \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \cos(\alpha) & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(\cos(\alpha) - 1) & -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + 1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + 1) & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\cos(\alpha) - 1) \\ -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \cos(\alpha) & -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(\cos(\alpha) - 1) & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + 1) \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a(\cos(\alpha) + 1) + \frac{b\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & b\cos(\alpha) - \frac{a\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}a(\cos(\alpha) - 1) + \frac{b\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} \\ \frac{c\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}b(\cos(\alpha) + 1) & \frac{b\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} + c\cos(\alpha) & \frac{c\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}b(\cos(\alpha) - 1) \\ \frac{1}{2}d(\cos(\alpha) - 1) & -\frac{d\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}d(\cos(\alpha) + 1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}((a+d)\cos^2(\alpha) + 2(a-d)\cos(\alpha) + a + 2c\sin^2(\alpha) + d) & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}(-\sqrt{2}\sin(\alpha)(\cos(\alpha)(a-2c+d) + a-d) - 2b(\cos(\alpha) + 1)) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\sin(\alpha)(\sin(\alpha)(a-2c+d) + 2\sqrt{2}b) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}(2b(\cos(\alpha) + 1) - \sqrt{2}\sin(\alpha)(\cos(\alpha)(a-2c+d) + a-d)) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(a+d)\sin^2(\alpha) + c\cos^2(\alpha) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(-\sqrt{2}\sin(\alpha)(\cos(\alpha)(a-2c+d) - a+d) - 2b(\cos(\alpha) - 1)) & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4}\sin(\alpha)(\sin(\alpha)(a-2c+d) - 2\sqrt{2}b) \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(2b(\cos(\alpha) - 1) - \sqrt{2}\sin(\alpha)(\cos(\alpha)(a-2c+d) - a+d)) \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(\cos(\alpha)((a+d)\cos(\alpha) - 2a + 2d) + a + 2c\sin^2(\alpha) + d) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### B.5.3. Allgemeine Drehung mit Eulerwinkeln

Das Koordinatensystem  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  geht durch drei Drehungen aus dem Koordinatensystem  $\mathbf{e}_x^*, \mathbf{e}_y^*, \mathbf{e}_z^*$  hervor.

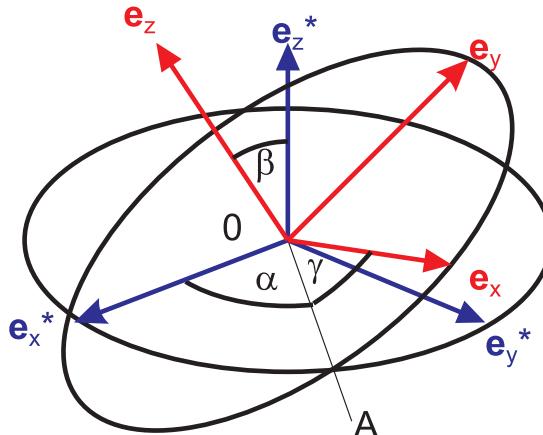


Abbildung B.5.: Definition der Eulerschen Winkel

Die Eulerschen Winkel sind

1. Drehung um  $e_z^*$  :  $\alpha$
2. Drehung um  $0A$  :  $\beta$
3. Drehung um  $e_z^*$  :  $\gamma$

Dabei  $\overline{0A}$  steht senkrecht zur Ebene aufgespannt durch  $e_z$  und  $e_z^*$ .  
Die Reihenfolge der Drehungen ist

1. Drehung: Bringe  $e_x^*$  senkrecht zu  $e_z$  (In der Abbildung B.5.3 zeigen die Kreise die Ebenen senkrecht zu  $e_z^*$  und senkrecht zu  $e_z$ . Die Schnittlinie der beiden Kreise ist  $\overline{0A}$ .)
2. Drehung: Bringe z-Achse in richtige Lage
3. Drehung: Bringe x,y-Achsen in die richtige Lage.

## B.6. Umrechnungen zwischen Koordinatensystemen, insbesondere kartesischen, sphärischen und zylindrischen Koordinatensystemen

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [BSMM08, pp. 218])

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [BSMM08, pp. 667])

(Siehe Arfken und Weber, Mathematical Methods for Physicists, [AW95, pp. 100])

### B.6.1. Definitionen

Wir betrachten lokal orthogonale Systeme:

#### Kartesisches System

$$\mathbf{V}_c = V_x \mathbf{e}_x + V_y \mathbf{e}_y + V_z \mathbf{e}_z$$

**Sphärisches System**

$$\mathbf{V}_s = V_r \mathbf{e}_r + V_\phi \mathbf{e}_\phi + V_\theta \mathbf{e}_\theta$$

**Zylindrisches System**

$$\mathbf{V}_z = V_r \mathbf{e}_r + V_\phi \mathbf{e}_\phi + V_z \mathbf{e}_z$$

**Allgemeines gekrümmtes System**

$$\mathbf{V}_g = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3$$

Bei allen Koordinatensystemen sei für alle  $i$   $\mathbf{e}_i^2 = 1$ . Die  $\mathbf{e}_i$  sollen ein rechtshändiges System bilden, also dass  $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) > 0$  (wobei die Zahlen 1 bis 3 die drei Koordinaten in den jeweiligen Systemen in der oben angegebenen Reihenfolge sind).

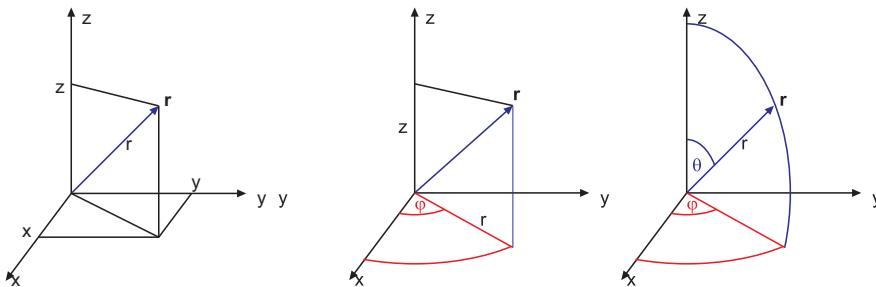


Abbildung B.6.: Definition der Koordinatensysteme. Links: kartesisches System. Mitte: Zylinderkoordinaten. Rechts: Kugelkoordinaten

**B.6.2. Allgemeine Transformation**

Dieser Abschnitt folgt [AW95, p. 100]. Wenn die Transformation von einem beliebigen gekrümmten Koordinatensystem mit den Koordinaten  $(q_1, q_2, q_3)^T$  in das kartesische System  $(x, y, z)^T$  bekannt ist, können über das kartesische System als Zwischensystem beliebige gekrümmte, lokal orthogonale Koordinatensystem differziell ineinander übergeführt werden.

Sei nach

$$x = x(q_1, q_2, q_3) \quad y = y(q_1, q_2, q_3) \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (\text{B.6.1})$$

$$q_1 = q_1(x, y, z) \quad q_2 = q_2(x, y, z) \quad q_3 = q_3(x, y, z) \quad (\text{B.6.2})$$

Infinitesimale Verschiebungen führen nach [AW95, p. 100] (B.6.1) zu

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \quad (\text{B.6.3})$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3 \quad (\text{B.6.4})$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3 \quad (\text{B.6.5})$$

Ausgehend vom infinitesimalen Abstand bei kartesischen Koordinaten  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  postuliert man

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{i,j} dq_i dq_j = d\mathbf{q}^T G d\mathbf{q} = \begin{pmatrix} dq_1 & dq_2 & dq_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & g_{1,3} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & g_{2,3} \\ g_{3,1} & g_{3,2} & g_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6.6})$$

Andererseits erhält man aus den quadrierten Gleichungen (B.6.3) bis (B.6.5)

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 dq_1^2 + \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_1 dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_1 dq_3 \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_2 dq_1 + \left( \frac{\partial x}{\partial q_2} \right)^2 dq_2^2 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_2 dq_3 \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial q_3} \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_3 dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_3} \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_3 dq_2 + \left( \frac{\partial x}{\partial q_3} \right)^2 dq_3^2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 dq_1^2 + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_1 dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_1 dq_3 \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_2 dq_1 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_2} \right)^2 dq_2^2 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_2 dq_3 \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial q_3} \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_3 dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_3} \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_3 dq_2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_3} \right)^2 dq_3^2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2 dq_1^2 + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_1 dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_1 dq_3 \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_2 dq_1 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_2} \right)^2 dq_2^2 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_2 dq_3 \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial q_3} \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_3 dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_3} \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_3 dq_2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_3} \right)^2 dq_3^2 \\ &= \begin{pmatrix} dq_1 & dq_2 & dq_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^3 \left( \frac{\partial x_\ell}{\partial q_1} \right)^2 & \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_\ell}{\partial q_1} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_2} & \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_\ell}{\partial q_1} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_3} \\ \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_\ell}{\partial q_2} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_1} & \sum_{\ell=1}^3 \left( \frac{\partial x_\ell}{\partial q_2} \right)^2 & \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_\ell}{\partial q_2} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_3} \\ \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_\ell}{\partial q_3} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_1} & \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_\ell}{\partial q_2} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_2} & \sum_{\ell=1}^3 \left( \frac{\partial x_\ell}{\partial q_3} \right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6.7}) \end{aligned}$$

wobei  $x_1 \triangleq x$ ,  $x_2 \triangleq y$  und  $x_3 \triangleq z$ . Die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^3 \left( \frac{\partial x_\ell}{\partial q_1} \right)^2 & \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_\ell}{\partial q_1} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_2} & \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_\ell}{\partial q_1} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_3} \\ \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_\ell}{\partial q_2} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_1} & \sum_{\ell=1}^3 \left( \frac{\partial x_\ell}{\partial q_2} \right)^2 & \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_\ell}{\partial q_2} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_3} \\ \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_\ell}{\partial q_3} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_1} & \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_\ell}{\partial q_2} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_2} & \sum_{\ell=1}^3 \left( \frac{\partial x_\ell}{\partial q_3} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6.8})$$

heisst Metrik. Bei lokal orthogonalen Koordinatensystemen ist

$$g_{i,j} = 0 \text{ für } i \neq j \quad (\text{B.6.9})$$

und

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.6.10})$$

Mit der Definition

$$h_i^2 = g_{i,i} \text{ für } i \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{B.6.11})$$

erhalten wir

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 dq_i^2 \quad (\text{B.6.12})$$

Die  $h_i$  sind Skalenfaktoren, die die gekrümmten Koordinaten  $dq_i$  in Wegelemente  $ds_i$  umrechnen:

$$ds_i = h_i dq_i \quad (\text{B.6.13})$$

Weiter haben wir für eine infinitesimale vektorielle Verschiebung

$$d\mathbf{r} = h_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + h_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + h_3 dq_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 h_i dq_i \mathbf{e}_i \quad (\text{B.6.14})$$

Weitere Beziehungen sind

$$\int \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \int V_i h_i dq_i \quad (\text{B.6.15})$$

Linienintegral

$$da_{i,j} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j \quad (\text{B.6.16})$$

Flächenelement

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (\text{B.6.17})$$

Volumenelement

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= ds_2 ds_3 \mathbf{e}_1 + ds_3 ds_1 \mathbf{e}_2 + ds_1 ds_2 \mathbf{e}_3 \\ &= h_2 h_3 dq_2 dq_3 \mathbf{e}_1 + h_3 h_1 dq_3 dq_1 \mathbf{e}_2 + h_1 h_2 dq_1 dq_2 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{B.6.18})$$

vektorielles Oberflächenelement

$$\int \mathbf{V} \cdot d\mathbf{a} = \int V_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 + \int V_2 h_3 h_1 dq_3 dq_1 + \int V_3 h_1 h_2 dq_1 dq_2 \quad (\text{B.6.19})$$

Oberflächenintegral

**Bemerkung:** Skalar- und Vektorprodukt haben in diesen gekrümmten Koordinaten die gleiche Form wie im kartesischen Koordinatensystem.

### B.6.2.1. Beispiel

Wir betrachten das Koordinatensystem

$$u = xy \quad v = x^2 - y^2 \quad z = z, \quad (\text{B.6.20})$$

das in der Elektrostatik und Hydrodynamik angewandt wird. Wir sollten gemäss unserem Rezept  $x$ ,  $y$  und  $z$  mit  $u$ ,  $v$  und  $z$  ausdrücken. Es gibt vier Möglichkeiten, wir verwenden als Beispiel die erste.

$$x = \frac{\sqrt{\sqrt{4u^2 + v^2} + v}}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.6.21})$$

$$y = \frac{\frac{(\sqrt{4u^2 + v^2} + v)^{3/2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}v \sqrt{\sqrt{4u^2 + v^2} + v}}{2u} \quad (\text{B.6.22})$$

$$z = z \quad (\text{B.6.23})$$

Die Skalenfaktoren sind dann mit (B.6.11), also  $h_i = \sum \frac{\partial x_\ell}{\partial q_i}$

$$h_u = \frac{1}{\sqrt[4]{4u^2 + v^2}} \quad (\text{B.6.24})$$

$$h_v = \frac{1}{2 \sqrt[4]{4u^2 + v^2}} \quad (\text{B.6.25})$$

$$h_z = 1 \quad (\text{B.6.26})$$

Die Transformation zwischen den Koordinatensystemen läuft auf eine allgemeine Drehung der Koordinaten im Raum hinaus.

### B.6.3. Vom kartesischen ins sphärische System

$$V_r = V_x \sin \theta \cos \phi + V_y \sin \theta \sin \phi + V_z \cos \theta \quad (\text{B.6.27})$$

$$V_\theta = V_x \cos \theta \cos \phi + V_y \cos \theta \sin \phi - V_z \sin \theta \quad (\text{B.6.28})$$

$$V_\phi = -V_x \sin \phi + V_y \cos \phi \quad (\text{B.6.29})$$

### B.6.4. Vom sphärischen ins kartesische System

$$V_x = V_r \sin \theta \cos \phi + V_\theta \cos \theta \cos \phi - V_\phi \sin \phi \quad (\text{B.6.30})$$

$$V_y = V_r \sin \theta \sin \phi + V_\theta \cos \theta \sin \phi + V_\phi \cos \phi \quad (\text{B.6.31})$$

$$V_z = V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta \quad (\text{B.6.32})$$

### B.6.5. Vom kartesischen ins zylindrische System

$$V_\varrho = V_x \cos \phi + V_y \sin \phi \quad (\text{B.6.33})$$

$$V_\phi = -V_x \sin \phi + V_y \cos \phi \quad (\text{B.6.34})$$

$$V_z = V_z \quad (\text{B.6.35})$$

### B.6.6. Vom zylindrischen ins kartesische System

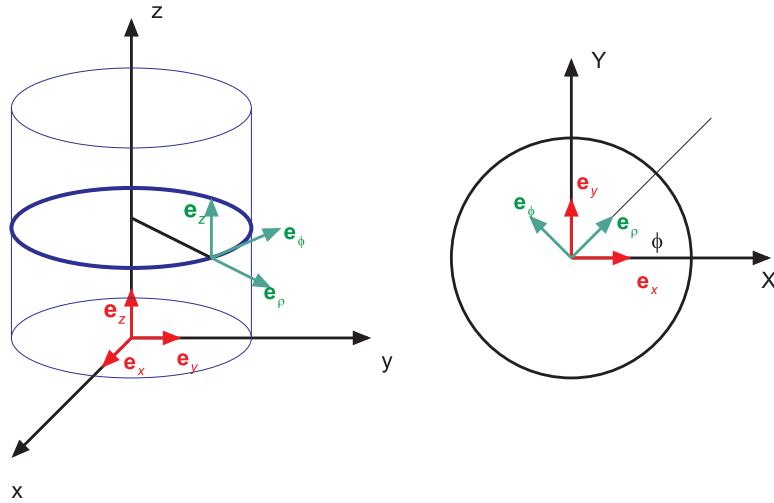


Abbildung B.7.: Umrechnung der Koordinaten

$$V_x = V_\rho \cos \phi - V_\phi \sin \phi \quad (\text{B.6.36})$$

$$V_y = V_\rho \sin \phi + V_\phi \cos \phi \quad (\text{B.6.37})$$

$$V_z = V_z \quad (\text{B.6.38})$$

### B.6.7. Vom sphärischen ins zylindrische System

$$V_\rho = V_r \sin \theta + V_\theta \cos \theta \quad (\text{B.6.39})$$

$$V_\phi = V_\phi \quad (\text{B.6.40})$$

$$V_z = V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta \quad (\text{B.6.41})$$

### B.6.8. Vom zylindrischen ins sphärische System

$$V_r = V_\rho \sin \theta + V_z \cos \theta \quad (\text{B.6.42})$$

$$V_\theta = V_\rho \cos \theta - V_z \sin \theta \quad (\text{B.6.43})$$

$$V_\phi = V_\phi \quad (\text{B.6.44})$$

## B.7. Vektordifferentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Diese Operatoren können in [AW95] nachgeschaut werden oder mit [WR14] berechnet werden.

### B.7.1. Zylinderkoordinaten

Die Definition lautet

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad z = z \quad (\text{B.7.1})$$

Die Skalenfaktoren lauten

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = 1 \quad (\text{B.7.2})$$

Dann ist der Gradient der skalaren Funktion  $\Psi(r, \phi, z)$

$$\nabla_{r,\phi,z} \Psi(r, \phi, z) = \frac{\partial \Psi(r, \phi, z)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, \phi, z)}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial \Psi(r, \phi, z)}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{B.7.3})$$

Die Divergenz der Vektorfunktion  $\mathbf{V}(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} V_r(r, \phi, z) \\ V_\phi(r, \phi, z) \\ V_z(r, \phi, z) \end{pmatrix}$  ist

$$\nabla_{r,\phi,z} \cdot \mathbf{V}(r, \phi, z) = \frac{\partial V_r(r, \phi, z)}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( V_r(r, \phi, z) + \frac{\partial V_\phi(r, \theta, z)}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial V_z(r, \theta, z)}{\partial z} \quad (\text{B.7.4})$$

Die Rotation der Vektorfunktion  $\mathbf{V}(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} V_r(r, \phi, z) \\ V_\phi(r, \phi, z) \\ V_z(r, \phi, z) \end{pmatrix}$  ist

$$\nabla_{r,\phi,z} \times \mathbf{V}(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial V_z(r, \theta, z)}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi(r, \theta, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial V_r(r, \theta, z)}{\partial z} - \frac{\partial V_z(r, \theta, z)}{\partial r} \\ \frac{\partial V_\phi(r, \theta, z)}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_r(r, \theta, z)}{\partial \phi} - V_\phi(r, \theta, z) \right) \end{pmatrix} \quad (\text{B.7.5})$$

Schliesslich lautet der Laplace-Operator der skalaren Funktion  $\Psi(r, \phi, z)$

$$\Delta_{r,\phi,z} \Psi(r, \phi, z) = \frac{\partial^2 \Psi(r, \theta, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi(r, \theta, z)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial \Psi(r, \theta, z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi(r, \theta, z)}{\partial z^2} \quad (\text{B.7.6})$$

### B.7.2. Kugelkoordinaten

Die Definition lautet

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \quad y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad z = r \cos(\theta) \quad (\text{B.7.7})$$

Die Skalenfaktoren lauten

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r \sin(\theta) \quad (\text{B.7.8})$$

Dann ist der Gradient der skalaren Funktion  $\Psi(r, \theta, z)$

$$\nabla_{r,\theta,\phi} \Psi(r, \theta, \phi) = \frac{\partial \Psi(r, \theta, \phi)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \csc(\theta) \frac{\partial \Psi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (\text{B.7.9})$$

Die Divergenz der Vektorfunktion  $\mathbf{V}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} V_r(r, \theta, \phi) \\ V_\theta(r, \theta, \phi) \\ V_\phi(r, \theta, \phi) \end{pmatrix}$  ist

$$\begin{aligned} \nabla_{r,\theta,\phi} \cdot \mathbf{V}(r, \theta, \phi) &= \frac{\partial V_r(r, \theta, \phi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( V_r(r, \theta, \phi) + \frac{\partial V_\theta(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{1}{r} \left( \csc(\theta) \left( \sin(\theta) V_r(r, \theta, \phi) + \cos(\theta) V_\theta(r, \theta, \phi) + \frac{\partial V_\phi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.7.10})$$

Die Rotation der Vektorfunktion  $\mathbf{V}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} V_r(r, \theta, \phi) \\ V_\theta(r, \theta, \phi) \\ V_\phi(r, \theta, \phi) \end{pmatrix}$  ist

$$\begin{aligned} \nabla_{r,\theta,\phi} \times \mathbf{V}(r, \theta, \phi) &= \\ &\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_\phi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} - \csc(\theta) \left( \frac{\partial V_\theta(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} - \cos(\theta) V_\phi(r, \theta, \phi) \right) \right) \\ \frac{1}{r} \csc(\theta) \left( \frac{\partial V_r(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} - \sin(\theta) V_\phi(r, \theta, \phi) \right) - \frac{\partial V_\phi(r, \theta, \phi)}{\partial r} \\ \frac{\partial V_\theta(r, \theta, \phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_r(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} - V_\theta(r, \theta, \phi) \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.7.11})$$

Schliesslich lautet der Laplace-Operator der skalaren Funktion  $\Psi(r, \theta, z)$

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\theta,\phi} \Psi(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Psi(r, \theta, \phi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi(r, \theta, \phi)}{\partial r^2} \\ &+ \frac{1}{r} \csc(\theta) \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Psi(r, \theta, \phi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \cos(\theta) \frac{\partial \Psi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} + \csc(\theta) \frac{\partial^2 \Psi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.7.12})$$

## B.8. Die Diracsche Deltafunktion

Die Diracsche Deltafunktion ist ein nützliches Instrument, um diskrete Ladungsverteilungen, Kräfte, Punktmassen als kontinuierliche Verteilung oder Kraftfelder zu beschreiben.

Wir beginnen, indem wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{für } |x| \leq \frac{a}{2}; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.8.1})$$

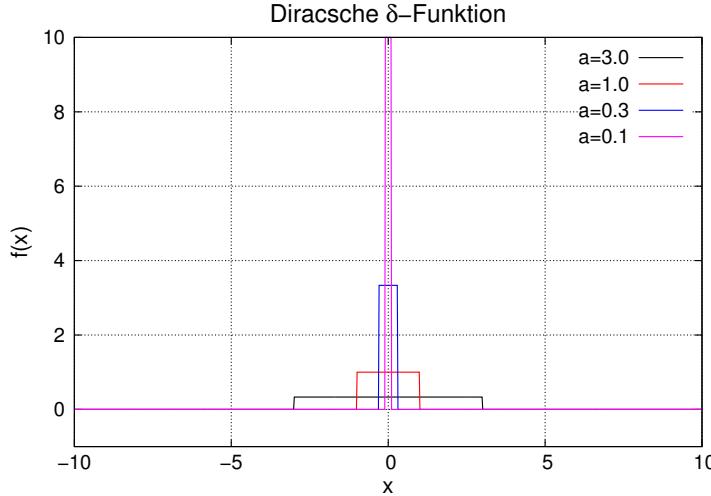


Abbildung B.8.: Darstellung von  $f(x)$ , wobei  $a$  variiert wird.

In der Abbildung B.8 sieht man, dass mit kleiner werdendem  $a$  die Amplitude von  $f(x)$  immer grösser wird. Die Fläche unter der Kurve

$$A_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a} dx = \frac{x}{a} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{1}{a} \left( \frac{a}{2} - \left( -\frac{a}{2} \right) \right) = 1 \quad (\text{B.8.2})$$

ist konstant und unabhängig von  $a$ . Wir definieren nun die Diracsche Deltafunktion

$$\delta(x) := \lim_{a \rightarrow 0} f(x) \quad (\text{B.8.3})$$

Damit ist auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \lim_{a \rightarrow 0} f(x) \right) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a} dx = \lim_{a \rightarrow 0} 1 = 1 \quad (\text{B.8.4})$$

Als Anwendung betrachten wir das Integral des Produktes

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)dx$$

wobei  $g(x)$  genügend oft (Fragen Sie einen Mathematiker oder lesen die Packungsbeilage oder ein Mathematikbuch) stetig differenzierbar sein soll. Die Taylorreihe von  $g(x)$  ist dann

$$g(x) = g(0) + x \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right) + \dots + \frac{x^n}{n!} \left( \frac{\partial^n}{\partial x^n} g(x) \Big|_{x=0} \right) + \dots \quad (\text{B.8.5})$$

Dann ergibt das Integral

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)dx &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ g(0) + x \left( \frac{\partial}{\partial x}g(x) \Big|_{x=0} \right) + \dots \right] f(x)dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a/2}^{a/2} \left[ g(0) + x \left( \frac{\partial}{\partial x}g(x) \Big|_{x=0} \right) + \dots \right] \frac{1}{a} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{g(0)}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx + \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x}g(x) \Big|_{x=0} \right)}{a} \int_{-a/2}^{a/2} x dx + \dots \right] \\
 &= g(0) + \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x}g(x) \Big|_{x=0} \right)}{a} \frac{x^2}{2} \Big|_{-a/2}^{a/2} + \dots \right] \\
 &= g(0) + \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x}g(x) \Big|_{x=0} \right) \frac{a^2}{4a} + \dots \right] = g(0)
 \end{aligned} \tag{B.8.6}$$

Damit ist klar, dass die nützliche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x-x_0)dx = g(x_0) \tag{B.8.7}$$

gilt.

## B.9. Kronecker-Produkt

Die Definition des Kronecker-Produkts  $\otimes$  soll mit den Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m_2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m_2} \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{m_1,1} & b_{m_1,2} & \cdots & b_{m_1,m_2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n_2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n_2} \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n_1,1} & c_{n_1,2} & \cdots & c_{n_1,n_2} \end{pmatrix} \tag{B.9.1}$$

gezeigt werden, wobei  $m_1 \in \mathbb{N}$ ,  $m_2 \in \mathbb{N}$ ,  $n_1 \in \mathbb{N}$  und  $n_2 \in \mathbb{N}$  sind. Alle vier Dimensionen können unterschiedlich sein.

Dann ist

$$D := B \otimes C \tag{B.9.2}$$

gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} b_{1,1}C & b_{1,2}C & \cdots & b_{1,m_2}C \\ b_{2,1}C & b_{2,2}C & \cdots & b_{2,m_2}C \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{m_1,1}C & b_{m_1,2}C & \cdots & b_{m_1,m_2}C \end{pmatrix}. \tag{B.9.3}$$

Das folgende Beispiel illustriert die Rechnung. Sei

$$B = (b_1, b_2) \quad (\text{B.9.4})$$

und

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9.5})$$

Dann ist

$$\begin{aligned} D = (b_1, b_2) \otimes \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix} &= \left( b_1 \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}, b_2 \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} b_1 c_{1,1} & b_1 c_{1,2} & b_2 c_{1,1} & b_2 c_{1,2} \\ b_1 c_{2,1} & b_1 c_{2,2} & b_2 c_{2,1} & b_2 c_{2,2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9.6}) \end{aligned}$$



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Polarisation und Spiegelung . . . . .	11
2.2	Definition der <i>s</i> -Polarisation und der <i>p</i> -Polarisation . . . . .	12
2.3	Stetigkeitsbedingungen für elektromagnetische Wellen . . . . .	18
2.4	Polarisation bei der Spiegelung an Wasser . . . . .	20
2.5	Polarisation bei der Spiegelung an Wasser . . . . .	21
2.6	Polarisation bei der Spiegelung an Wasser . . . . .	21
2.7	p-Polarisation . . . . .	22
2.8	Amplitudenverlauf . . . . .	22
3.1	Interferenz zweier Kreiswellen im Riffelsee auf der Riffelalp. . . . .	26
3.2	Detail der Interferenz zweier Wellen . . . . .	27
3.3	Interferenz zweier Wellen . . . . .	27
3.4	Aufbau des Mach-Zehnder-Interferometers. . . . .	31
3.5	Bild des Michelson-Interferometers aus der Vorlesungssammlung mit eingezeichnetem Strahlengang. . . . .	33
3.6	Aufbau des Michelson-Interferometers. . . . .	33
3.7	Sagnac-Interferometer. Rechts nach einer Laufzeit. . . . .	35
3.8	Stokessche Behandlung von Reflexion und Brechung . . . . .	38
3.9	Strahlengang bei einem Fabry-Perot-Etalon . . . . .	39
3.10	Berechnung des Strahlengangs bei einem Fabry-Perot-Etalon . . . . .	39
3.11	Transmission durch ein Fabry-Perot-Etalon . . . . .	44
3.12	Reflexion an einem Fabry-Perot-Etalon . . . . .	44
3.13	Geometrie zur Berechnung der Ringmuster in Interferometern . . . . .	45
3.14	Simulation der Interferenzringe . . . . .	46
3.15	Geometrie zur Berechnung der Streifenmuster in Interferometern . . . . .	46
3.16	Simulation der Interferenzringe . . . . .	47
3.17	Bild einer ebenen Welle . . . . .	48
3.18	Amplitude und Intensität . . . . .	51
3.19	Huygenssches Prinzip . . . . .	55
3.20	Huygenssches Prinzip . . . . .	55
3.21	Huygenssches Prinzip . . . . .	56
3.22	Huygenssches Prinzip . . . . .	56
3.23	Huygenssches Prinzip . . . . .	57
3.24	Huygenssches Prinzip . . . . .	57
3.25	Interferenz zweier Wellen aus <i>A</i> und <i>B</i> . . . . .	58
3.26	Strahlengang bei einem Doppelspalt . . . . .	59
3.27	Beugung an einem Doppelspalt . . . . .	60
3.28	Grafische Darstellung der Vektoraddition . . . . .	61
3.29	Interferenz von drei Quellen . . . . .	62
3.30	Vektordiagramm für die Interferenz . . . . .	62

3.31	Interferenzmuster für zwei bis fünf <i>Punktquellen</i> , nicht normiert . . . . .	63
3.32	Interferenzmuster für zwei bis sieben sowie 20 <i>Punktquellen</i> , normiert . . . . .	63
3.33	Interferenz an dünnen Schichten . . . . .	64
3.34	Newton'sche Ringe in einem Glasplättchen . . . . .	66
3.35	Simulation Newton'scher Ringe (rechts mit einem Fehler). . . . .	66
3.36	Newton'sche Ringe bei weissem Licht . . . . .	67
3.37	Weisslichtinterferenz . . . . .	67
3.38	Berechnung des Beugungsmusters an einem Einzelspalt. . . . .	68
3.39	Definition der Grössen. . . . .	68
3.40	Beugungsmuster als Funktion des Ablenkwinkels . . . . .	69
3.41	Beugungsmuster als Funktion der Spaltbreite. . . . .	70
3.42	Prinzip einer Faltung . . . . .	72
3.43	Faltung einer Rechteckfunktion an einem Spalt . . . . .	72
3.44	Beugung an einem Doppelspalt . . . . .	75
3.45	Beugung an einem 5-fach Spalt . . . . .	75
3.46	Berechnung der Fresnelbeugung an einer Halbebene. . . . .	76
3.47	Die Cornu-Spirale. . . . .	78
3.48	Cornu-Spirale mit einem Spalt der Breite 1.0 . . . . .	79
3.49	Fresnelsches Beugungsmuster . . . . .	79
3.50	Cornu-Spirale für eine Kante . . . . .	80
3.51	Fresnelsches Beugungsmuster . . . . .	80
3.52	Prinzip von Babinet: Illustration . . . . .	81
3.53	Cornu-Spirale ohne beugendes Objekt . . . . .	81
3.54	Phase in der Cornu-Spirale . . . . .	82
3.55	Beugung an zwei Kanten . . . . .	82
3.56	Babinet's Prinzip anhand der Beugung an einem Spalt . . . . .	83
3.57	Vergleich der Fresnelbeugung mit der Fraunhoferbeugung . . . . .	85
3.58	Vergleich der Fresnelbeugung mit der Fraunhoferbeugung . . . . .	86
3.59	Vergleich der Fresnelbeugung mit der Fraunhoferbeugung . . . . .	86
3.60	Vergleich der Fresnelbeugung mit der Fraunhoferbeugung . . . . .	86
3.61	Geometrie zur Herleitung des Kirchhoff'schen Integralsatzes . . . . .	88
3.62	Sizze der Geometrie der Kirchhoff-Theorie . . . . .	90
3.63	Lichtdurchgang durch ein Gitter mit der Gitterkonstante $g$ . . . . .	92
3.64	Blaze-Gitter in Reflexion . . . . .	93
3.65	Aufzeichnung eines Hologramms . . . . .	94
3.66	Auslesen eines Hologramms . . . . .	94
3.67	Schematischer Aufbau von Hologrammen . . . . .	95
3.68	Berechnung der Beugung an einer Öffnung . . . . .	99
3.69	Die Beugung an einer ringförmigen Apertur. . . . .	101
3.70	Abbildung zweier punktförmiger, inkohärenter Quellen . . . . .	101
3.71	Überlagerung zweier inkohärenter Punktquellen . . . . .	102
3.72	Querschnitt zweier inkohärenter Punktquellen . . . . .	102
4.1	Geometrie der <i>Reflexion</i> . . . . .	103
4.2	Geometrie der Brechung . . . . .	105
4.3	Transport von Licht in einer Stufenindexfaser . . . . .	106
4.4	Begründung des Reflexionsgesetzes mit dem <i>Fermatschen Prinzip</i> . . . . .	108
4.5	Anwendung des Fermatschen Prinzips . . . . .	108

4.6	Fermatsches Prinzip	110
4.7	Interferenzsumme	111
4.8	Polarisation durch Absorption in einem Drahtpolarisator	112
4.9	Polarisator und Analysator	113
4.10	Dichroismus in einem $NaVO_4Mn$ -Kristall	114
4.11	Polarisation durch Streuung an einem Teilchen	114
4.12	Brewster-Winkel	115
4.13	Wirkungsweise eines $\lambda/4$ -Plättchens oder eines $\lambda/2$ -Plättchens	117
4.14	Wellen in einem $\lambda/4$ -Plättchen	117
4.15	Wellen in einem $\lambda/2$ -Plättchen	120
4.16	Verschiedene Polarisationsellipsen	121
4.17	Koordinatensysteme zur Berechnung der elliptischen Polarisation	124
4.18	Poincaré-Kugel	129
4.19	Messung der Stokes-Parameter	131
4.20	Aufspaltung eines Lichtstrahls in einem doppelbrechenden Material	140
4.21	Doppelbrechung in einem $NaVO_4Mn$ -Kristall	140
4.22	Das Nicolsche Prisma	141
5.1	Mikroskope	143
5.2	Laser	144
5.3	Nahfeldmikroskope	144
5.4	Optiklabor	144
5.5	Lichtgeschwindigkeit	145
5.6	Bradley und die Lichtgeschwindigkeit	145
5.7	Dreiecke zur Berechnung der Lichtgeschwindigkeit nach Bradley	146
5.8	Lichtgeschwindigkeitsmessung nach Armand Fizeau (1849)	147
5.9	Messung der Lichtgeschwindigkeit mit der <i>Drehspiegelmethode</i>	147
5.10	Reflexionsgesetz	148
5.11	Strahlengang bei Brechung	149
5.12	Brechung von Licht an einer gekrümmten Glasoberfläche	150
5.13	Dünne Linse	151
5.14	Brennweitenbestimmung nach Bessel	152
5.15	Wellenfronten beim Durchgang durch eine <i>Linse</i>	153
5.16	Zerstreuungslinse	154
5.17	Abbildung bei einer Konvexlinse	154
5.18	Abbildung bei einer Konkavlinse	155
5.19	<i>Dicke Linse</i>	155
5.20	Geometrie eines Doppellinsensystems	156
5.21	Bildposition	157
5.22	Ebener Spiegel	157
5.23	Gekrümmter Spiegel	158
5.24	Sphärische Aberration	159
5.25	Konvexspiegel	160
5.26	Bildentstehung beim Konkavspiegel	161
5.27	<i>Abbildungsmassstab</i>	161
5.28	Vereinfachung der Konstruktion	162
5.29	Abbildung bei einem konvexen Spiegel	163
5.30	Sphärische Aberration	163

5.31 Chromatische Aberration . . . . .	164
5.32 Intensitätsverteilung im Fokus bei chromatischer Aberration . . . . .	164
5.33 Charakteristische Kurve bei chromatischer Abberation . . . . .	164
5.34 Astigmatismus . . . . .	165
6.1 Das Auge . . . . .	167
6.2 Weitsichtiges Auge: Links ohne Brille, rechts mit Korrektur . . . . .	168
6.3 Kurzsichtiges Auge: Links ohne Brille, rechts mit Korrektur . . . . .	168
6.4 Wirkungsweise einer Lupe . . . . .	168
6.5 Schematische Skizze einer Spiegelreflexkamera . . . . .	169
6.6 Strahlengang in einem Mikroskop . . . . .	171
6.7 Das Teleskop . . . . .	172
6.8 Das <i>Spiegelteleskop</i> . . . . .	173
6.9 Aufnahmen des Hubble-Teleskops . . . . .	173
6.10 Galaxien . . . . .	174
6.11 Hubble-Teleskop . . . . .	174
6.12 Prisma . . . . .	175
6.13 Modell eines Oszillators . . . . .	175
6.14 Resonanzkurven . . . . .	176
6.15 Polarisierbarkeit: Modell . . . . .	176
6.16 Federmodell für die Dispersion . . . . .	177
6.17 Dispersionsrelation für Federketten mit zwei unterschiedlichen Atomen .	180
6.18 Prinzipieller Aufbau eines <i>Gitterspektrometers</i> . . . . .	182
6.19 Beugungsmuster an einem Gitter . . . . .	183
6.20 Beugungsmuster eines Einzelpaltes . . . . .	184
6.21 Lage der Gitterordnungen . . . . .	184
6.22 Beugungsmuster eines Gitters . . . . .	185
6.23 Beugungsmuster: Variation des Gitterelementes . . . . .	185
6.24 Beugungsmuster: Variation der Linienzahl . . . . .	186
6.25 Prismenspektrometer . . . . .	186
6.26 Schematische Darstellung eines Gitter-Reflexionsspektrometers. . . . .	187
6.27 Gitter-Reflexionsspektrometer mit Zeilendetektor. . . . .	188
6.28 Kommerzielles Gitterspektrometer . . . . .	189
6.29 Integriertes Gitter-Reflexionsspektrometers mit Zeilendetektor. . . . .	189
7.1 Skizze zur Berechnung der Linsenmatrix . . . . .	192
7.2 Skizze zur Berechnung der Matrix für eine gewölbte Grenzfläche . . . . .	193
7.3 Skizze zur Berechnung der Matrix für eine schräge Grenzfläche . . . . .	194
7.4 Skizze zur Berechnung der Matrix für einen Spiegel. . . . .	195
7.5 Linsenübertragungsstrecke als Modell für einen Laserresonator. . . . .	198
7.6 Stabilitätsdiagramm für Strahlführroptiken mit Linsen. . . . .	200
7.7 Das Stabilitätsdiagramm für Spiegelresonatoren. . . . .	201
7.8 Konzentrischer Resonator . . . . .	201
7.9 Konfokaler symmetrischer Resonator. . . . .	202
7.10 Resonator mit planparallelen Spiegeln. . . . .	202
7.11 Fokussierung eines Gaußschen Strahls. . . . .	208
7.12 Aufbau der Nahfeld-Messeinrichtung für Modenverteilungen. . . . .	209
7.13 Nahaufnahme von Glasfaser-Nahfeldsonden. . . . .	210
7.14 Transmission von Nahfeld-Glasfasersonden. . . . .	211

7.15 Wellenleitermoden für elliptische Wellenleiter . . . . .	212
7.16 Moden von VCSELn . . . . .	213
7.17 Modenstrukturen von VCSELn. . . . .	214
7.18 Modenstruktur von VCSELn. . . . .	215
7.19 Lasermoden bei VCSEL. . . . .	216
7.20 Einfluss der Sonden auf die gemessenen Modenstrukturen. . . . .	217
7.21 Artefakte . . . . .	218
B.1 Definition von Vektoren . . . . .	223
B.2 Gradient als Richtung der stärksten Steigung . . . . .	227
B.3 Vektorfeld mit Umrandung . . . . .	228
B.4 Drehung eines schwimmenden Klotzes, Rotation . . . . .	229
B.5 Definition der Eulerschen Winkel . . . . .	238
B.6 Kartesisches, zylindrisches und sphärisches Koordinatensystem . . . . .	239
B.7 Umrechnung der Koordinaten . . . . .	244
B.8 Darstellung von $f(x)$ , wobei $a$ variiert wird. . . . .	247



# Tabellenverzeichnis

3.1	Interferenz und Phasendifferenz . . . . .	29
3.2	Lage der Minima und Maxima . . . . .	71
4.1	Doppelbrechende Materialien . . . . .	116
4.2	Ausgewählte Zustände auf der Poincaré-Kugel . . . . .	130
4.3	Stokes-Vektoren . . . . .	133
5.1	Vorzeichenkonventionen für die Abbildung . . . . .	162
6.1	Brechungsindex für Flintglas . . . . .	179
6.2	Parameter für die Berechnung . . . . .	179
7.1	Matrizen für die Strahlausbreitung . . . . .	197
B.1	Reihenentwicklungen . . . . .	226



# Literaturverzeichnis

- [AW95] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 4<sup>th</sup> edition, 1995. QA 401/1995 A.
- [BSMM08] I.N. Bronštein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 7<sup>th</sup> edition, 2008. QA 40/2008 B.
- [BW70] Max Born and Emil Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon Press, 4<sup>th</sup>.ed. edition, 1970. <https://archive.org/details/PrinciplesOfOptics>.
- [Col03] Edward Collett. *Polarized Light in Fiber Optics*. Spie Press Book, 2003.
- [Dem08] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2*. Experimentalphysik / Wolfgang Demtröder. Springer London, Limited, 2008.
- [Dyo95] R. B. Dyott. *Elliptical Fibre Waveguides*. Artech House, 1995.
- [FHT96] STScI und NASA Fotograf: Hubble-Teleskop, bzw. Helix-Team. Beschreibung: Hst detailansicht der knoten im helixnebel (ngc 7293) in der entdeckungs-aufnahme von 1996. Internet, 1996. Lizenz: Public Domain : NASA/STScI Public Domain.
- [Fis97] Markus Bernd Fischer. Polarisationsaufgelöste messung der modenstruktur von oberflächenemittierenden lasern. Diplomarbeit, 1997.
- [Fre12] John Freely. *Before Galileo. The Birth of Modern Science in Medieval Europe*. Duckworth, London, New York, 2012.
- [Fre15] John Freely. *Aristoteles in Oxford*. Büchergilde Gutenberg, 2015. übersetzt von Ina Pfitzner.
- [Gil00] José J. Gil. Characteristic properties of mueller matrices. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17(2):328–334, Feb 2000.
- [Gol03] Dennis H. Goldstein. *Polarized Light*. CRC Press, 2003.
- [Hec05] Eugene Hecht. *Optik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 4<sup>th</sup> edition, 2005. Übersetzt von Dr. Anna Schleitzer.
- [Kän78] Werner Känzig. *Physik I: Mechanik und Wellenlehre*. Verlag der Fachvereine Zürich, 1978.
- [Kne78] Fritz Kneubühl. *Repetitorium der Physik*. Teubner, 1978.

- [Lei98] Hans Jörg Leisi. *Klassische Physik*, volume 2. Birkhäuser, 1998. QC 21/1996 L-2 und QC 21/1996 L-1.
- [Mar09] Othmar Marti. *Physikalische Elektronik und Messtechnik*. Universität Ulm, 2009. [http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/physikalischeelektronik/phys\\_elektr/phys\\_elektr.pdf](http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/physikalischeelektronik/phys_elektr/phys_elektr.pdf).
- [Mes06] Dieter Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer Verlag, 23<sup>rd</sup> edition, 2006. QC 21/2006 G-1 Ex.2.
- [Mül48] Hans Müller. The foundation of optics (abstract). *J. Opt. Soc. Am.*, 38(7):661, Jul 1948. Proceedings of the Winter Meeting of the Optical Society of America.
- [NAS97] B. Balick (University of Washington NASA, ESA & the Hubble Heritage Team (STScI/AURA). Acknowledgment: R. Sahai (Jet Propulsion Lab). The ant planetary nebula (menzel 3 or mz 3). stsci-prc2001-05. Internet, 1997.
- [NAS00a] The Hubble Heritage Team (AURA/STScI) NASA. The keyhole nebula, within ngc 3372. a mosaic of four April 1999 images by hubble's wide field planetary camera 2., Februar 2000.
- [NAS00b] The Hubble Heritage Team (STScI/AURA) NASA. Glowing eye of planetary nebula ngc 6751, 2000.
- [NAS10] Tuscaloosa) NASA, William C. Keel (University of Alabama. intergalactic pipeline of material flowing between two battered galaxies. Internet, 2010.
- [NU99] Paul Scowen NASA, Donald Walter (South Carolina State University) and Brian Moore (Arizona State University). Ngc 7635 or the bubble nebula. Internet, October and November 1997 and April 1999.
- [Pér96] José-Philippe Pérez. *Optik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.
- [Poi92] Henri Poincaré. *Théorie mathématique de la lumière II*. Georges Carré, Paris, 1892.
- [RMS98a] A. V. Gopala Rao, K. S. Mallesh, and Sudha. On the algebraic characterization of a mueller matrix in polarization optics. i. identifying a mueller matrix from its n matrix. *Journal of Modern Optics*, 45(5):955–987, 1998.
- [RMS98b] A. V. Gopala Rao, K. S. Mallesh, and Sudha. On the algebraic characterization of a mueller matrix in polarization optics. ii. necessary and sufficient conditions for jones-derived mueller matrices. *Journal of Modern Optics*, 45(5):989–999, 1998.
- [Sim82] R. Simon. The connection between mueller and jones matrices of polarization optics. *Optics Communications*, 42(5):293 – 297, 1982.

- [Som78] A. Sommerfeld. *Theoretische Physik IV, Optik*. Verlag Harri Deutsch, 1978.
- [Tak73a] Hiroshi Takenaka. A unified formalism for polarization optics by using group theory i (theory). *Japanese Journal of Applied Physics*, 12(2):226, 1973.
- [Tak73b] Hiroshi Takenaka. A unified formalism for polarization optics by using group theory ii (generator representation). *Japanese Journal of Applied Physics*, 12(11):1729, 1973.
- [Thu72] Vitellonis Thuringopoloni. *opticae libri decem*. Basilae, 1572.
- [TM04] Paul A. Tipler and Gene Mosca. *Physik*. Spektrum Verlag, 2<sup>nd</sup> edition edition, 2004. ISBN-13: 978-3827411648.
- [Wik26] Wikipedia. Witelo. <https://de.wikipedia.org/wiki/Witelo>, entnommen 2016-05-26. [https://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Lizenzbestimmungen\\_Creative\\_Commons\\_Attribution-ShareAlike\\_3.0\\_Unported](https://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Lizenzbestimmungen_Creative_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported).
- [WR14] Inc. Wolfram Research. *Mathematica*. Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, version 10.0 edition, 2014.
- [Yar75] A. Yariv. *Quantum Electronics, 2<sup>nd</sup> Edition*. John Wiley and Sons, New York., 1975.



# Index

- $\delta$ -Funktion
  - Dirac, 248–250
- $\lambda/4$ -Platte, 133
- Öffnungswinkel, 208
- Abbildungsfehler, 165–167
- Abbildungsgleichung, 161
- Abbildungsmassstab, 163, 173
- Aberration
  - chromatisch, 166
  - sphärisch, 161, 165
- Ableitung
  - drei Dimensionen, 229–232
- Ableitung von Vektoren, 234–236
- Airy-Funktion, 43
- Akkomodation, 169
- Amplitude, 22, 27, 29, 30, 48, 51, 68–71, 76, 78–80, 95, 101, 114, 115
- Analysator, 115
- Astigmatismus, 167
- Astronomie, 174
- Atomkern, 178
- Auflösung
  - Beugung, 99–103
  - Grenze, 103
- Auflösungsvermögen, 93, 103
- Auge, 169–170
- ausserordentliches Licht, 142
- Babinet
  - Prinzip, 81–83
- Bahnebene der Erde, 148
- Beispiele
  - Polarisation, 141–143
- Beschreibung
  - Polarisation
    - mathematisch, 122–141
- Besselfunktion nullter Ordnung, 101
- Beugung, 25–103
  - Einzelpunkt, 67–71
- Fraunhofer, 83–85
- Fresnel, 76, 85
- Beugungsgitter, 92–98
- Beugungsmuster, 67, 69, 70, 72, 74, 75, 78–80, 98, 100
  - Fraunhofer, 100
  - Fresnel, 79, 80
  - Interferometer, 45–47
- Beugungsordnung, 93
- Beugungstheorie
  - Kirchhoff, 88–92
- Bilderzeugung
  - Brechung, 151–159
- Bildkonstruktion
  - Linsen, 156–157
- Bildweite, 152, 153, 156, 158, 160, 162
- Blaze-Gitter, 93–94
- Bradley, 147
- Brechung, 106–111, 151
  - Bilderzeugung, 151–159
- Brechungsgesetz, 110, 111, 151
- Brechungsindex, 64, 66, 103, 106, 107, 112, 118, 119, 143, 151, 153
- Brechzahl, 107
- Brennpunkt, 70, 154, 156, 163, 170, 173
- Brennweite, 153, 156, 158, 161, 162, 167, 169, 170, 172, 173, 199, 208
- Brewster-Winkel, 20, 117, 118
- chromatische Aberration, 166
- Cornu-Spirale, 78
- Dünne Linse, 152–156, 199
- Dichroismus, 114–116
- Dicke Linse, 157
- Dicke Linsen, 157
- Dielektrizitätskonstanten, 15
- Differentiation, 227–232

- Dirac  
δ-Funktion, 248–250
- Diracsche Deltafunktion  
Fouriertransformation, 73
- Divergenz, 208, 230–231, 247–248
- Doppelbrechung  
Polarisation, 118–122
- Doppelspalt, 58–60, 72, 74–75
- Drehmatrix, 127, 136
- Drehmatrizen, 237–238
- Drehspiegelmethode, 149
- Drehung  
Matrix, 238–239
- Tensor, 238–239
- Vektor, 238–239
- Drehungen, 237–240
- Dreibein  
rechtshändig, 11
- Ebene Welle, 48–49
- Effekt  
photoelektrischer, 145
- einachsig negativ, 143
- einachsig positiv, 143
- Einfallsebene, 12, 15, 117
- Einheitensystem, 127
- Einstein, Albert, 145
- Einzelspalt, 67  
Intensitätsverteilung, 68–71
- Ekliptik, 148
- Elektrizitätslehre  
Wiederholung, 9–23
- Elementarwelle, 105
- Etalon, 39
- Eulersche Winkel, 239–240
- Fabry-Perot-Etalon, 39
- Fabry-Perot-Interferometer, 37–45
- Fabry-Perot-Resonator, 183
- Fabry-Perot-Spektrometer, 45
- Faltung  
Fouriertransformation, 72–73
- Faltungssatz, 99–103
- Faltungstheorem, 100
- Feldkonstante  
dielektrisch, 106
- Fermat, Pierre de  
Prinzip, 109
- Fermatsches Prinzip, 109–113
- Interferenz, 111–113
- Fernrohr, 174
- Finesse, 45
- Finessefaktor, 43
- Fizeau, Armand, 149
- Foucault, Leon, 149
- Fourieroptik, 100
- Fouriertransformation, 51–53  
Diracsche Deltafunktion, 73
- Faltung, 72–73
- Fraunhofer-Beugung, 83
- Fraunhofer-Näherung, 83
- Fraunhoferbeugung, 75–88
- Fraunhofersche Beugung, 85
- Fresnel  
Näherung, 76–80
- Fresnel, Augustin, 145
- Fresnel-Huygens  
Prinzip, 54
- Fresnel-Huygenssche Prinzip, 54, 92
- Fresnel-Huygensches Prinzip, 54–57
- Fresnelbeugung, 75–88
- Fresnelsche Formeln, 11–23  
p-Polarisation, 18
- Fresnelsche Näherung, 76
- Fresnelschen Formeln, 12
- Fresnelscher Beugung, 85
- Gabor, Dennis, 95
- Gausssche Strahlen, 204–220  
 $\omega(z)$ , 208
- Gegenstandsweite, 152, 160
- Geometrische Optik, 145–167  
Begründung, 105–143  
Licht, 150–151
- Gesamtvergrösserung, 173
- Gesetz von Snellius, 151
- Gibbs-Phänomen, 88
- Gitterspektrometer, 184–191
- Glaskörper, 169
- Gleichung  
Helmholtz, 88
- Gleichungen  
Maxwell, 9–10
- Gradient, 229–230, 247–248
- Gyroskop, 36
- Hauptachse, 142
- Hauptachsensystem, 118, 125–127

- Hauptebene, 164  
 Heaviside- $\Theta$ -Funktion, 84  
 Helmholtz-Gleichung, 88  
 Hohlspiegel  
     Bildkonstruktion, 162–165  
 Hologramme, 94–98  
 Holographie, 95  
 Hubble-Teleskop, 175  
 Huygens  
     Prinzip, 54–57  
 Huygenssche Elementarwelle, 107  
 Huygenssches Prinzip, 54–57  
 Impulsantwort, 99–103  
 Indexmedium  
     quadratisch, 197  
 Integration, 227–232  
 Intensität, 12, 17, 22, 29, 34, 51, 59, 60, 69, 79, 80, 96, 97, 103, 106, 112–115, 205, 208  
 Interferenz, 25–103  
     dünne Schicht, 63–67  
     Fermatsches Prinzip, 111–113  
     Kugelwellen, 57–58  
     mehrere Quellen, 62–63  
 Interferenzextrema, 58  
 Interferenzmuster, 56–58, 62  
 Interferometer  
     Beugungsmuster, 45–47  
     mach-Zehnder, 31  
 Jones-Matrix, 135–138  
 Jones-Matrizen  
     Polarisationszustand  
         Bestimmung, 221–222  
         Rechnung, 221–222  
 Jones-Matrizen und Müller-Matrizen, 138–141  
     Umrechnung, 138–141  
 Jones-Vektor, 135–138  
 Kamera, 171–173  
 Kartesische Koordinaten, 233, 240–246  
 Kaustik, 161  
 Kirchhoffsche Integralsatz, 91  
 Kirchoff  
     Beugungstheorie, 88–92  
 Kohärenz, 29–47  
 Kohärenzlänge, 29  
 Kohärenzzeit, 29  
 Konkavlinse, 157  
 Konkavspiegel, 161  
 Konvexlinse, 157  
 Konvexspiegel, 161–162  
 Koordinaten  
     kartesisch, 233, 240–246  
     sphärisch, 240–246  
     zylindrisch, 240–246  
 Koordinatensystem, 239  
 Kreiswellen, 55, 56  
 Kronecker-Produkt, 250–251  
 Kugelwellen, 49–51, 55  
     Interferenz, 57–58  
 $\lambda/2$ -Plättchen  
     Müller-Matrix, 139  
 $\lambda/4$ -Plättchen  
     Müller-Matrix, 139  
 Licht  
     Geometrische Optik, 150–151  
     Wellennatur, 25  
 Lichtgeschwindigkeit, 142, 146–149  
 Lichtstrahl, 146, 150  
 Lichtstrahlen, 25  
 lineare Federkette, 179  
 Linse, 66, 153–158, 169, 173, 200, 204, 205, 208  
     Auge, 169  
     dünn, 152–156, 199  
     dick, 157  
     Objektiv, 173  
 Linsen  
     Bildkonstruktion, 156–157  
     dick, 157  
     mehrere, 157–159  
 Linsenkrümmung, 204  
 Lummer-Gehrcke-Platte, 183  
 Lupe, 170–171  
     Vergrößerung, 171  
 Müller-Matrix  
      $\lambda/2$ -Plättchen, 139  
      $\lambda/4$ -Plättchen, 139  
     Polarisator, 140  
     Verzögerungsplatte, 140  
 Müller-Matrizen  
     Polarisationszustand  
         Bestimmung, 222–224

- Rechnung, 222–224  
 Müller-Matrizen und Jones-Matrizen, 138–141  
 Umrechnung, 138–141  
 Mach-Zehnder-Interferometer, 31–34  
 Mathematik, 225–227  
 mathematische Beschreibung  
     Polarisation, 122–141  
 Matrix  
     Jones, 135–138  
 Matrixformalismus, 193–204  
 Maxwell  
     Gleichungen, 9–10  
 Maxwellsche Gleichungen, 9–10  
 Michelson-Interferometer, 32–35  
 Mikroskop, 172–173  
 Moden, 211–220  
     Licht, 193–220  
 monochromatisch, 150  
  
 Näherung  
     paraxial, 57, 58  
 Näherung:paraxial, 152  
 Newton, Isaac, 145  
  
 Oberfläche, 15, 143, 152, 153  
 Oberflächennormalen, 15  
 Objektiv, 165, 171–174  
     DIC, 118  
 Objektivlinse, 173  
 Okular, 173, 174  
 Optische Elemente  
     Gaußsche Strahlen, 208–211  
 Optische Instrumente, 169–191  
 ordentliches Licht, 142  
 Orientierung  
      $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ , 11  
  
 p-Polarisation, 12, 22  
 p-polarisiert, 12  
 paraxial, 57  
 paraxiale Näherung, 57, 152, 161  
 Phasendifferenz, 29–47  
 Phasenfaktor, 84, 92, 122, 207  
 Phasengeschwindigkeit, 180  
 photoelektrischer Effekt, 145  
 Poincaré, 130  
 Poincaré-Kugel, 130–132  
 Pointingvektor, 15  
  
 Polarisation, 113–143  
     Beispiele, 141–143  
     Beschreibung, 122–141  
     Doppelbrechung, 118–122  
     Jones-Matrix, 135–138  
     Jones-Vektor, 135–138  
     mathematische Beschreibung, 122–141  
     p, 22  
     Poincaré-Kugel, 130–132  
     Reflexion, 117–118  
     s, 15–17, 22  
     Stokes-Parameter, 133–135  
     Streuung, 116  
     zirkular, 122  
 Polarisationsfilter, 11  
 Polarisationszustand, 122, 131, 134  
     Bestimmung, 221–224  
         Jones-Matrizen, 221–222  
         Müller-Matrizen, 222–224  
     Rechnung, 221–224  
         Jones-Matrizen, 221–222  
         Müller-Matrizen, 222–224  
 Polarisator, 115  
     Müller-Matrix, 140  
 Prinzip  
     Fermat, 109, 110  
     Huygens, 55–57  
 Prinzip von Babinet, 81–83  
 Prinzip von Fresnel-Huygens, 54  
 Prisma, 176–183  
 Produkte mit Vektoren, 233–234  
 Punktquelle, 63, 85, 103  
     inkohärent, 103  
 Pupille  
     rund, 101  
  
 R(z), 208  
 Rayleighsche Auflösungskriterium, 102  
 Rechnen mit Vektoren, 233–236  
 Reflexion, 12, 17, 23, 64, 66, 94, 105–106, 108, 110, 117, 163  
     Polarisation, 117–118  
 Reflexionsgesetz, 150  
 Reihen, 228  
 Relation  
     Stokes, 38  
 Resonatoren, 193–220  
     sphärische Spiegel, 203–204

- Rotation, 231–232, 247–248  
 Rømer, Ole, 147
- s-Polarisation, 12, 15–17, 22  
 s-polarisiert, 12  
 Sagnac-Interferometer, 35–37  
 Sammellinse, 204  
 Schinkel, 171, 174  
 Signal-Rausch-Verhältnis, 35, 103, 190  
 Skalarprodukt, 233  
 Snellius, 111  
 Spektrallinie, 93  
 Spektrographen, 92–98  
 Spektrometer, 183–191  
     Gitter, 184–191  
 sphärische Aberration, 161, 165  
 Sphärische Koordinaten, 240–246  
 Spiegel  
     eben, 159–160  
     sphärisch  
         Bilderzeugung, 160  
 Spiegelteleskop, 175  
 Stabilität, 202–203  
 Stehende Wellen, 30  
 Stokes-Parameter, 133–135  
 Stokes-Vektor, 133–135  
 Stokessche Relation, 38  
 Strahl  
     paraxial, 163, 164, 193, 197, 198, 204  
 Strahldurchmesser, 208  
 Streuung  
     Polarisation, 116  
 Teleskop, 174, 174, 174, 175, 176  
     Hubble, 175  
     Spiegel, 175  
 Totalreflexion, 108–109
- Umrechnung  
     Jones-Matrizen und Müller-Matrizen, 138–141  
     kartesisch zu sphärisch, 245  
     kartesisch zu zylindrisch, 245  
     sphärisch zu kartesisch, 245  
     sphärisch zu zylindrisch, 246  
     zylindrisch zu kartesisch, 246  
     zylindrisch zu sphärisch, 246
- Vektor
- Jones, 135–138  
 Stokes, 133–135  
 Vektoren, 225–227  
     Ableitung, 234–236  
     Vektorprodukt, 233–234  
 Vektoridentitäten, 233  
 Vektorprodukt, 233–234  
 Vergleich  
     Fraunhofer und Fresnel, 85–88  
 Vergrößerung, 156, 173, 174  
     Lupe, 171, 173  
     Okular, 173  
 Verzögerungsplatte  
     Müller-Matrix, 140  
 Volumen, 226  
 Volumenhologramme, 98
- Welle  
     eben, 48–49  
     Kugel, 49–51  
     paraxial, 62
- Wellen  
     2D, 48–58  
     3D, 48–58  
     Vektoraddition, 61  
 Wellenbild, 56  
 Wellengleichung, 10–11  
 Wellenlänge, 107  
 Wellenleiter, 214, 220  
     elliptisch, 214  
     rechteckförmig, 220  
 Wellennatur des Lichtes, 25  
 Wellenvektor, 105  
 Winkel  
     Brewster, 117, 118  
     Euler, 239–240  
 Winkelvergrößerung, 173  
 Witelo, Naturforscher ca. 1230 bis ca. 1275–1314, 25
- Young, Thomas, 145
- Zerstreuungslinse, 156  
 Zwischenbild, 174  
 Zylinderkoordinaten, 240–246