



Vorlesungsskript

PHYS3200

Einführung in die

Kern-, Teilchen- und Astrophysik

Bachelor Physik

Bachelor Wirtschaftsphysik

Master Lehramt für Gymnasium

Othmar Marti

Institut für Experimentelle Physik

Universität Ulm



veröffentlicht unter

Lizenzinformationen

28. Juni 2022

Die Astronomie erhebt aus diesen Finsternissen und aus dieser trüben Luft und lädt ein, in eine höhere, von strahlendem Licht erfüllte Region zu schauen.

Durch die Naturwissenschaft, in der Tat, kennen wir den Ursprung und die darauf folgenden Veränderungen aller Dinge, der belebten wie auch der unbelebten. Wir können das „Warum“ vieler Phänomene, die dem Volk als Wunder erscheinen, benennen.

Pier Paolo Vergerio 1370-1444, zitiert nach [Roe18]

Zweifel ist der Weisheit Anfang.

René Descartes, 1596-1650, französischer Mathematiker und Philosoph

Mit leerem Kopf nickt es sich leichter!

Zarko Petane, 1929-2014, slowenischer Schriftsteller

Mehr Erklärung bitte und weniger Verstehen! Mehr Neugier und weniger Einverständnis. Nicken bildet nicht.

Alexander Kissler, am 22. 9. 2014 in Deutschlandradio Kultur

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	17
1.1. Lizenzinformationen	17
1.2. Dank	18
1.3. Vorschau auf den Inhalt	18
1.3.1. Kernphysik	18
1.3.2. Teilchenphysik	19
1.3.3. Astrophysik	19
2. Astronomische Beobachtungen	21
2.1. Geräte	21
2.1.1. Teleskope	21
2.1.1.1. Optische Teleskope	21
2.1.1.2. Radioteleskope	30
2.1.1.3. Röntgenteleskope	32
2.1.1.4. Auflösung eines einzelnen Teleskopes	36
2.1.1.5. Auflösung interferometrisch gekoppelter Teleskope .	39
2.1.1.6. Aberration	41
2.1.2. Spektrometer	42
2.1.2.1. Gitterspektrometer	42
2.1.2.2. Échelle-Spektrometer	49
2.1.3. Interferometer	51
2.1.3.1. Mach-Zehnder-Interferometer	51
2.1.3.2. Michelson-Interferometer	52
2.1.3.3. Sagnac-Interferometer	55
2.1.3.4. Fabry-Perot-Interferometer	57
2.1.3.5. Michelson-Sterninterferometer	65
2.1.3.6. Hanbury Brown und Twiss-Interferometer	66
2.1.3.7. Interferometer als Spektrometer	68
2.2. Koordinatensysteme	70
2.2.1. Horizontsystem	70
2.2.2. Äquatorsystem	71
2.2.3. Ekliptikales System	72
2.2.4. Galaktisches System	72
2.2.5. Galaktozentrisches System	73
2.2.6. Längenmasse in der Astrophysik	73
2.2.6.1. Astronomische Einheit	73
2.2.6.2. Lichtjahr	74
2.2.6.3. Parsec	74
2.3. Störeinflüsse	76
2.3.1. Seeing	76
2.3.2. Guide Stars	77

2.3.3. Brechung in der Atmosphäre	77
2.4. Distanzmessung mit optischen Methoden	78
2.4.1. Triangulation	78
2.4.2. Magnituden	79
2.5. Spektroskopische Distanzmessung	81
2.5.1. Cepheiden	81
2.5.2. Supernovae Typ Ia	83
2.5.3. Doppelsterne	84
2.5.4. Rotverschiebung	85
3. Himmelsmechanik und unser Sonnensystem	87
3.1. Geschichte	87
3.1.1. Die Griechen	87
3.1.2. Kopernikus	90
3.1.3. Kepler	92
3.1.4. Newton	93
3.2. Virialtheorem	95
3.3. Keplersche Gesetze: Bestimmung der Zentralmasse	97
3.3.1. Umlaufszeiten	99
3.3.2. Massenbestimmung des Zentralkörpers	100
3.4. Erdähnliche Planeten und ihre Umgebung	101
3.4.1. Merkur	103
3.4.2. Venus	104
3.4.3. Erde	106
3.4.3.1. Schwankungen der Bahnpараметer der Erde	107
3.4.3.2. Energieflüsse in der Atmosphäre, Treibhauseffekt	109
3.4.3.3. Temperaturverteilung in der Atmosphäre	113
3.4.3.4. Erdinneres	115
3.4.3.5. Erdmagnetfeld	116
3.4.3.6. Auswirkung von Einschlägen von Himmelskörpern	118
3.4.3.7. Mond	120
3.4.4. Mars	120
3.5. Riesenplaneten und ihre Umgebung	123
3.5.1. Jupiter	124
3.5.1.1. Jupitermonde	124
3.5.2. Saturn	126
3.5.2.1. Ringe	127
3.5.2.2. Monde	127
3.5.3. Uranus	128
3.5.4. Neptun	129
3.6. Kleinere Objekte	130
3.6.1. Planetoiden	132
3.6.1.1. Pluto	132
3.6.1.2. Eris	134
3.6.1.3. Haumea	135
3.6.1.4. Makemake	136
3.6.1.5. Objekte des Kuipergürtels	136

3.6.2.	Asteroiden	137
3.6.2.1.	Asteroidengürtel	137
3.6.3.	Kometen	138
4. Instrumente der Kern- und Teilchenphysik		141
4.1.	Teilchenbeschleuniger	141
4.1.1.	Relativistische Bewegung	141
4.1.2.	Wirkungsgrad bei ruhendem Target	146
4.1.3.	Funktionsweise	148
4.1.4.	Linearbeschleuniger	149
4.1.5.	Zyklotron	152
4.1.6.	Betatron	154
4.1.7.	Synchrotron	155
4.1.7.1.	Vertikale Stabilisierung	156
4.1.7.2.	Radiale Stabilisierung	157
4.1.7.3.	Starke Fokussierung	158
4.1.7.4.	Synchrotron-Schwingungen und Energiegewinn	160
4.1.7.5.	Steuerung der Magnetfelder	161
4.1.8.	Beispiele von Beschleunigern	163
4.2.	Detektoren	164
4.2.1.	Ionisationskammer	165
4.2.2.	Szintillatoren	167
4.2.3.	Halbleiterdetektoren	169
4.2.4.	Čerenkov-Detektoren	170
4.2.5.	Spurendetektoren	172
4.2.5.1.	Photoplatten	172
4.2.5.2.	Nebelkammern	172
4.2.5.3.	Blasenkammern	173
4.2.5.4.	Streamerkammern	173
4.2.5.5.	Mehrdräht-Funkenkammern	174
4.2.5.6.	Anwendung: Zerfall von Pionen	174
5. Fermionen und Bosonen		177
5.1.	Spin und magnetisches Moment	177
5.2.	Dirac-Theorie	180
5.2.1.	Basiszustände in der zweiten Quantisierung	183
5.2.2.	Freie Teilchen	184
5.2.3.	Teilchen mit Wechselwirkungen	185
6. Streuexperimente		187
6.1.	Röntgenstrahlung und Rayleigh-Streuung	187
6.2.	Streumethoden	188
6.3.	Stossprozesse	193
6.3.1.	Elektrodynamik und Vierervektoren	193
6.3.2.	Elektron-Elektron-Streuung	194
6.3.3.	Quantenmechanische Behandlung	195
6.3.3.1.	Differenzieller Streuquerschnitt	195
6.3.3.2.	Streuung im Coulomb-Potential	197
6.3.3.3.	Mehrere Streuzentren	197

6.3.3.4. Hofstadter-Streuung	198
6.3.3.5. Kohärente Überlagerung	199
6.4. Compton-Effekt	202
6.5. Paarbildung	204
7. Wechselwirkung von Teilchen mit Materie	207
7.1. Photoeffekt	207
7.2. Verluste in Materie	207
7.3. Neutronen	208
8. Atome und Kerne	211
8.1. Atomkerne	211
8.1.1. Begriffe	211
8.1.2. Rutherford's Atommodell	211
8.1.3. Bestimmung des Kernradius	212
8.1.4. Ladungsverteilung im Kern	216
8.1.4.1. Iterative Methoden	218
8.1.5. Beugung an Kernen	218
8.1.5.1. Alternative Methoden	221
8.2. Isospin-Formalismus	221
8.2.1. Pauli-Prinzip	223
8.3. Parität	224
8.4. Nukleon-Nukleon-Streuung	226
8.4.1. Spinabhängigkeit	227
8.4.2. Ladungsabhängigkeit	228
8.5. Kernmodelle	229
8.5.1. Massendichteverteilung und Masse	229
8.5.2. Bausteine	231
8.5.3. Tröpfchenmodell	231
8.5.3.1. Bethe-Weizsäcker-Gleichung	234
8.5.3.2. Gesamtmasse von Kernen und Atomen	235
8.5.4. Einteilchenmodelle	235
8.5.4.1. Würfelförmiges Kastenpotential	235
8.5.4.2. Fermigas-Modell	237
8.5.4.3. Sphärisches Kastenpotential	239
8.5.4.4. Harmonischer Oszillatator	241
8.5.4.5. Schalenmodell	241
8.5.5. Mehrteilchenmodelle	249
8.5.6. Vergleich der Kernmodelle	249
8.5.7. Bindungsenergien	250
8.5.8. Rotation und Schwingung von Kernen	253
8.5.9. Drehimpuls, Spin, Statistik	257
8.5.9.1. Kerndrehimpulse	257
8.5.9.2. Rabi-Methode	258
8.5.9.3. Magnetische Momente von Nukleonen	259
8.5.10. Momente von Kernen	261
8.5.10.1. Resonanz-Spektroskopie, kernmagnetische Momente	262
8.5.10.2. Elektrisches Dipolmoment	263
8.5.10.3. Elektrisches Quadrupolmoment	263

8.5.10.4. Isotopeneffekt in der optischen Spektroskopie	264
8.5.11. Kollektive Anregungen	264
8.6. Kernkräfte und Kernmodelle	265
8.6.1. Deuteron	265
8.6.1.1. Abschätzung des n-p-Abstandes	266
8.6.2. Mesonen-Austauschmodell	267
9. Radioaktiver Zerfall	269
9.1. Stabilitätskriterien	271
9.1.1. Mattauch'sche Isobarenregeln	271
9.2. Zerfallsgesetze	272
9.2.1. Statistik der Zerfälle	272
9.2.2. Natürlich vorkommende radioaktive Kerne	274
9.2.3. Goldene Regel und Lebensdauer	274
10. Radioaktive Strahlung	279
10.1. Strahlenquellen und Strahlungsarten	279
10.1.1. alpha-Strahlung	279
10.1.1.1. Geiger-Nuttall-Geraden bei alpha-Strahlern	281
10.1.2. gamma-Strahlung	286
10.1.2.1. Multipol-Übergänge	287
10.1.2.2. Innere Konversion	291
10.1.2.3. Innere Paarbildung	292
10.1.3. Isomere	292
10.1.4. beta-Strahlung	293
10.1.4.1. Doppelzerfälle	294
10.1.4.2. beta-Zerfall und Positronenemission	297
10.1.4.3. Fermi-Theorie des beta-Zerfalls	299
10.1.4.4. K-Einfang	303
10.1.4.5. Energiebilanzen und Zerfallstypen	304
10.1.5. Zerfallsketten	304
11. Mensch und Strahlung	307
11.1. Wechselwirkung von Strahlung und Gewebe	310
11.1.1. Dosimeter	310
11.1.1.1. Füllhalter-Dosimeter	310
11.1.1.2. Elektronisches Dosimeter	311
11.1.2. Jod	312
11.1.3. PET: Positronen-Emissions-Tomographie	313
11.2. Regulierungen	313
11.3. Anwendungen	314
11.3.1. Suche nach Spurenelementen	314
11.3.2. Altersbestimmung	315
11.3.2.1. C-14-Methode	316
11.3.2.2. Alter von Gesteinen	317

12. Kernreaktionen	319
12.1. Grundlagen	319
12.1.1. Kategorien von Kernreaktionen	322
12.1.1.1. Inelastische Streuung	322
12.1.1.2. Reaktive Streuung	322
12.1.1.3. Induzierte Spaltung	322
12.2. Stossinduzierte Kernspaltung	323
12.2.1. Stossinduzierte Spaltung leichter Kerne	324
12.2.2. Stossinduzierte Kernreaktionen mit alpha-Teilchen	324
12.2.2.1. (alpha,p)-Reaktion	324
12.2.2.2. (alpha,n)-Reaktion	325
12.2.3. Stossinduzierte Radioaktivität	326
12.2.3.1. (n,gamma)-Reaktionen	326
12.2.3.2. Aktivierung und Aktivität	326
12.2.4. Schwelle	327
12.2.5. Abweichung von Kugelgestalt: Bethe-Weizsäcker-Modell	330
12.2.6. Reaktionsquerschnitt	332
12.2.7. Massenverteilung der Spaltprodukte	332
12.2.8. Energieausbeute	333
12.3. Erhaltungssätze	334
12.3.1. Paritätserhaltung	335
13. Kernenergie	337
13.1. Kernspaltung	337
13.1.1. Wie viel Uran braucht es?	342
13.1.2. Steuerung durch verzögerte Neutronen	344
13.1.3. Reaktoren	344
13.2. Kernfusion	350
13.2.1. Fusionsreaktoren	351
13.2.1.1. Magnetfelder in einem Tokamak	353
13.2.2. Weitere Konzepte für Fusionsreaktoren	355
13.2.3. Roadmap für Fusionsreaktoren	355
13.2.4. Transurane	356
13.3. Das Abfallproblem	356
14. Sonne	359
14.1. Experimentelle Beobachtungen	359
14.1.1. Sonnenflecken	360
14.1.2. Magnetfelder der Sonne	366
14.1.3. Seismik der Sonne	375
14.2. Modelle	379
14.2.1. Naives Modell des Energiehaushalts	379
14.2.2. Realistischeres Modell des Energiehaushalts	381
14.2.3. Radiale Struktur der Sonne	382
14.2.4. Äussere Sonnenatmosphäre	384
14.2.5. Energiequellen und nukleare Prozesse	388
14.2.5.1. pp-Prozesse	389
14.2.5.2. Triple-Alpha-Prozess	389
14.2.5.3. CNO-Prozess	390

14.2.5.4. Entstehung der Elemente	392
15. Teilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung	395
15.1. Photon	396
15.2. Elektron	397
15.3. Feynman-Diagramme	398
15.4. Zweite Quantisierung, Fortsetzung	402
15.5. Virtuelle Teilchen	405
15.6. Rechnen mit Feynman-Diagrammen	408
15.7. Weitere Leptonenfamilien	411
15.7.1. Myonen	411
15.7.2. Tau	412
15.7.3. Symmetrien der Leptonenfamilien	412
16. Starke Wechselwirkung	417
16.1. Hadronen	417
16.1.1. Pion	417
16.1.2. Delta und rho	419
16.1.3. Isospin, Baryonenzahl und Ladung	420
16.2. Symmetrien	422
16.2.1. Lie-Gruppen und -Algebren	422
16.2.1.1. Darstellung einer Gruppe	423
16.2.1.2. Definition einer Lie-Algebra	424
16.2.1.3. Lie-Algebren und Darstellungen	426
16.2.1.4. Isomorphismen	427
16.2.1.5. Isomorphismen: unendlichdim. Funktionenraum	428
16.2.2. Translationen	429
16.2.3. Drehimpulse in 3 D - nicht Abelsche Lie-Gruppen	430
16.2.4. Spinvektoren (magnetisches Moment) und Spinzustand	432
16.2.5. Mesonen	433
16.3. Quarks	433
16.3.1. Experimentelle Hinweise	435
16.3.2. Hadronen und Quarks	436
16.3.3. Warum gibt es drei Quarks?	440
16.3.3.1. Spin	441
16.3.4. Austauschteilchen	443
16.3.5. Charm	444
16.3.6. Quarks und Farbladungen	446
16.4. Quarkfamilien und -eigenschaften	448
17. Schwache Wechselwirkung	451
17.1. Parität	452
17.1.1. Definition	454
17.1.1.1. Beispiel elektrisches Dipolmoment	455
17.1.2. Messung	456
17.1.3. Universalprinzip bei der Umwandlung von Teilchen	459
17.2. Ladungskonjugation (C-Symmetrie)	460
17.3. CP-Symmetrie	461
17.4. Zeitumkehr (T-Symmetrie)	461

17.5. CPT-Symmetrie	463
17.5.1. K0-Mesonen	463
17.6. G-Symmetrie	467
17.7. Angabe des Symmetriezustandes	467
17.8. Antimaterie	468
17.9. Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung	468
17.9.1. beta-Zerfall und Streuung von Neutrinos	471
17.9.2. Reelle W- und Z-Bosonen	471
18. Standardmodell	475
18.1. Quarks und Leptonen	478
18.2. Higgs-Feld	481
18.3. Fazit der Teilchenphysik	484
19. Allgemeine Relativitätstheorie	489
19.1. Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld	489
19.2. Rotverschiebung im Gravitationsfeld	492
19.3. Schwarzschildlösung	494
19.3.1. Schwarze Löcher	496
19.4. Gravitationslinse	499
19.5. Gravitationswellendetektoren	503
20. Milchstrasse und ihre Sterne	505
20.1. Sternentwicklung	505
20.1.1. Masse und Leuchtkraft	505
20.1.2. Sternspektren und Klassifikation von Sternen	506
20.1.3. Geburt von Sternen	514
20.1.3.1. Drehimpuls	517
20.1.4. Hauptreihe	518
20.1.4.1. Hertzsprung-Russell-Diagramm	520
20.1.4.2. Lebensdauer von Sternen	522
20.1.4.3. Hauptreihenentwicklung	523
20.1.4.4. Nachhauptreihenentwicklung	526
20.1.5. Veränderliche Sterne	528
20.1.6. Massive Sterne	529
20.1.6.1. Novae	532
20.1.7. Überreste von Sternen	536
20.1.7.1. Weisse Zwerge	536
20.1.7.2. Neutronensterne	539
20.1.7.3. Pulsare	542
20.2. Planetensysteme und Exoplaneten	543
20.2.1. Bildung von Planetensystemen	543
20.2.2. Methode der radialen Geschwindigkeitsvariation	548
20.2.3. Abschattung	550
20.2.4. Micro-Lensing	552
20.2.5. Direkte Abbildung	554
20.2.6. Astrometrie	555
20.2.7. Einordnung der mehr als 4000 bekannten Exoplaneten	555
20.2.8. Atmosphäre von Exoplaneten	556

20.3. Binärsysteme	556
20.3.1. Visuelle Doppelsterne	557
20.3.2. Astrometrische Doppelsterne	557
20.3.3. Spektroskopische Doppelsterne	558
20.3.4. Photometrische Doppelsterne	559
20.4. Struktur der Milchstrasse	559
20.4.1. Geschwindigkeitsmessung in der Galaxis	561
20.4.2. Oort'sche Gleichung und Oort'sche Konstanten	562
20.4.3. Spiralarme	565
20.4.4. Kugelsternhaufen	572
20.4.5. Schwarzes Loch im Zentrum	572
20.4.6. Geschwindigkeit der Sterne	575
20.4.6.1. Dunkle Materie	578
21. Universum	581
21.1. Beobachtungen	581
21.1.1. Olbers' Paradox	581
21.1.2. Unmöglichkeit eines statischen Universums	583
21.1.3. Isotropie der Fluchtbewegung	584
21.2. Hubble-Gesetz	585
21.2.1. Distanzangaben ferner Objekte	585
21.3. Struktur	586
21.3.1. Objekte	586
21.3.1.1. Galaxien	587
21.3.2. Gekrümmter Raum	592
21.3.2.1. Grenzwerte	595
21.3.3. Quasare	595
21.3.4. Aktive Galaxien	597
21.3.5. Galaxienhaufen	599
21.3.6. Dunkle Materie	602
21.3.7. Dunkle Energie	603
21.4. Kosmologie	604
21.4.1. Big-Bang-Theorie	605
21.4.2. Anfangsgrösse des Universums	605
21.4.3. Das frühe Universum	611
A. Literaturhinweise	617
B. Weitere physikalische Methoden und Begriffe	619
B.1. Streuung	619
B.1.1. Berechnung	619
B.2. Namen der Bänder nach Fraunhofer	622
C. Mathematische Sätze	625
C.1. Rechnen mit Vektoren	625
C.1.1. Produkte mit Vektoren	625
C.1.2. Ableiten von Vektoren	626
C.1.3. Vektorableitungen bei Skalarfeldern	627
C.1.4. Vektorableitungen bei Vektorfeldern	627

C.2. Vektorsätze	628
C.2.1. Satz von Gauss	628
C.2.2. Satz von Green	629
C.2.3. Satz von Stokes	629
C.3. Typen von Zahlen, Vektoren und mehr	629
C.3.1. Skalare	630
C.3.2. Vektoren	630
C.3.3. Pseudoskalare	630
C.3.4. Tensoren und Pseudotensoren	630
C.4. Distributionen	631
C.4.1. Binomialdistribution	631
C.4.2. Poisson-Distribution	631
C.5. Sphärische Trigonometrie	632
C.5.1. Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen	632
C.5.1.1. Halbwinkelsätze	633
C.5.2. Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie	633
C.5.2.1. Sinussatz	634
C.5.2.2. Cosinusseitensatz	634
C.5.2.3. Cosinuswinkelsatz	635
C.5.2.4. Beziehung zwischen vier Stücken	635
C.5.2.5. Beziehung zwischen fünf Stücken	635
C.5.2.6. Gaußsche Gleichungen	636
C.5.2.7. Nepersche Analogien	637
C.5.3. Das rechtwinklige sphärische Dreieck	637
C.5.3.1. Sinussatz	638
C.5.3.2. Cosinusseitensatz	638
C.5.3.3. Cosinuswinkelsatz	638
C.5.3.4. Beziehung zwischen vier Stücken	638
C.5.3.5. Beziehung zwischen fünf Stücken	638
C.5.4. Astronomisches Dreieck	639
C.5.4.1. Beziehungen zwischen phi, delta, s und z, a	639
C.5.4.2. Beziehungen zwischen phi, delta, s und z, q	639
C.5.5. Koordinatentransformationen	640
C.5.5.1. Berechnung von z und a aus delta und s	640
C.5.5.2. Berechnung von delta und s aus z und a	640
C.6. Integrale	640
Liste der Experimente	643
Abbildungsverzeichnis	655
Tabellenverzeichnis	658
Personenregister	659
Glossar	679
Akronyme	681

Referenzen**714**

1. Einleitung

1.1. Lizenzinformationen

Diese Skript wird unter der Creative Commons Lizenz CC-BY-SA 4.0 veröffentlicht. Dies heisst,

- Sie dürfen das Werk ganz oder in Teilen in allen denkbaren Formaten weiter verwenden, vervielfältigen und weiterverbreiten
- das Werk oder Teile davon neu zusammenstellen, verändern und darauf weitere Werke aufbauen,

sofern Sie

- den Namen der Verfassers dieses Werkes sowie deren Institution, die Universität Ulm, nennen und angemessene Rechte- und Urheberrechtsangaben machen, einen Link zur Lizenz beifügen und angeben, ob Sie Änderungen vorgenommen haben. Dabei darf nicht der Eindruck entstehen, die Verfasser oder die Universität Ulm würden Sie oder Ihre Nutzung unterstützen.
- Wenn Sie Dieses Werk oder Teile davon neu zusammenstellen, verändern und darauf weitere Werke aufbauen, dürfen Sie ihre Beiträge nur unter der gleichen Lizenz wie dieses Werk wie dieses Original verbreiten.

Sie dürfen insbesondere keine weiteren Einschränkungen einsetzen und auch keine technischen Verfahren wie z.B. DRM verwenden, die anderen Nutzern etwas untersagt oder daran hindert, das abgeleitete Werk nach dieser Lizenz zu nutzen. Der Lizenzgeber kann diese Freiheiten nicht widerrufen solange Sie sich an die Lizenzbedingungen halten.

Eine detaillierte Erklärung finden Sie unter

<http://www.uni-ulm.de/en/einrichtungen/e-learning/blog/article/was-sind-eigentlich-cc-lizenzen.html>

oder unter

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

oder unter

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>



Die CC-Icons und -Buttons und wurden unter der Lizenz CC BY von <http://creativecommons.org/about/downloads> veröffentlicht.

1.2. Dank

Das Skript in der gegenwärtigen Form ist eine Reorganisation des Stoffes früherer Veranstaltungen dar. Trotzdem ist dieses Skript zuerst eine rudimentäre Sammlung zusätzlicher Gedanken. Ich danke Tamara Stadter für das für sie sehr mühsame übertragen meiner Notizen in TeX.

Die Struktur und der Inhalt des Skriptes sind inspiriert von den Werken von Jörn Bleck-Neuhaus (*Elementare Teilchen*, [Ble13]), Wolfgang Demtröder (*Experimentalphysik IV, Kern-, Teilchen- und Astrophysik*, [Dem10]) und von Bradley W. Carroll und Dale A. Ostlie (*An Introduction to Modern Astrophysics*, [CO07]). Weiterer Input kam von Ulrich Ellwanger (*Vom Universum zum Elementarteilchen; From the universe to the elementary particles : a first introduction to cosmology and the fundamental interactions*, [Ell15; Ell12]), Abraham Seiden (*Particle Physics: A Comprehensive Introduction*, [Sei09]), Peter Thyssen und Arnauld Ceulemans (*Shattered symmetry: group theory from the eightfold way to the periodic table*, [TC17]), A. Das und T. Ferbel (*Introduction To Nuclear And Particle Physics*, [DF09]), Klaus Stierstadt (*Atommüll - wohin damit?*, [Sti10a]), John Stillwell (*Naive Lie Theory*, [Sti10b]), Torsten Fliessbach (*Allgemeine Relativitätstheorie*, [Fli12]), Jakob Schwichtenberg (*Physics from Symmetry (Undergraduate Lecture Notes in Physics)*, [Sch15]), Catherine Heymans (*The Dark Universe* [Hey17]), Karl Schilcher (*Quantenelektrodynamik kompakt*, [Sch19]) und Grotzinger und Jordan (*Press/Siever Allgemeine Geologie*, [GJ17]).

Ein interessantes Buch mit Links zu Videos ist von J. Wambsganß, *Universum für alle* [Wam12].

Das DESY hat Usenet FAQs zusammengetragen [Cha+13]. Diese behandeln allgemeine Physikfragen, Teilchen- und Kernphysik, Quantenphysik und Relativität und Kosmologie.

1.3. Vorschau auf den Inhalt

Die drei Themengebiete KERNPHYSIK, TEILCHENPHYSIK und ASTROPHYSIK werden ineinander verwoben besprochen. Astrophysik kann nicht ohne Teilchen und Kernphysik verstanden werden, Teilchenphysik nicht ohne Kernphysik. Und die Kernphysik beruht auf der Teilchenphysik und in ihren Anfängen auch auf der Astrophysik. Die einzelnen Kapitel sind mit den Teilgebieten gekennzeichnet.

1.3.1. Kernphysik

Die KERNPHYSIK befasst sich mit Atomen und deren Kernen. Radioaktivität, Kernenergie, Fusion, Periodensystem und die Auswirkungen auf den Mensch sind das Thema. Die detaillierte Klärung von Fragen wird mit der TEILCHENPHYSIK angegangen. Zur Teilchenphysik möchte ich auf die Materialien (Folien, Vorlesungsvideos) von Dr. Tina Potter, University of Cambridge hinweisen [Pot21]. Die Materialien waren Ende März 2021 unter <https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~chpotter/particleandnuclearphysics/mainpage.html> zu erreichen. Dr. Potter gibt eine sehr ausführliche Darstellung der Kernphysik. Sie bespricht die fundamentalen Prinzipien (Kräfte, Symmetrien) und Theorien.

1.3.2. Teilchenphysik

Die **TEILCHENPHYSIK** ist die Physik der Elementarteilchen, also die Bausteine der in der **KERNPHYSIK** besprochenen Objekte. Sie behandelt Wechselwirkungen bei hohen Energien ($> 1 \text{ MeV}$), mit einigen Ausnahmen und bei kleinen Strukturen ($< 1 \text{ pm}$). Die Beobachtungen werden mit fortgeschrittenen mathematischen Methoden beschrieben (Gruppentheorie, Quantenelektrodynamik). Zur Teilchenphysik möchte ich auf die Materialien (Folien, Vorlesungsvideos) von Dr. Tina Potter, University of Cambridge hinweisen [Pot21]. Die Materialien waren Ende März 2021 unter <https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~chpotter/particleandnuclearphysics/mainpage.html> zu erreichen. Dr. Potter gibt eine sehr ausführliche Darstellung der Teilchenphysik. Sie bespricht die fundamentalen Prinzipien (Kräfte, Symmetrien, Quantenelektrodynamik und Quantenchromodynamik) bis hin zur Supersymmetrie.

1.3.3. Astrophysik

Im Teil **ASTROPHYSIK** wird das, was wir über uns sehen oder erahnen besprochen. Alles was wir über die Welt ausserhalb des Sonnensystems wissen, haben wir durch Messung von Strahlung oder Teilchen erfahren. Licht und optische Astronomie war der Anfang dieser Erkundung. Im Sonnensystem haben wir punktuell Besuche von Menschen (erdnahe Umlaufbahn oder der Mond) oder Besuche von Sonden (Planeten, Monde, Asteroiden und die Grenze des Sonnensystems).

Nach einer Besprechung der klassischen Astronomie, deren Instrumente, der Himmelsmechanik im Sonnensystem und der Koordinatensysteme folgt eine Diskussion der Planeten, Asteroiden, Kometen und natürlich der Sonne.

Das gesamte Verständnis der Sonne beruht auf der Diagnose von ferne. Sonnenflecken, Magnetfelder und Spektren zusammen mit den Teilchen im Sonnenwind erlauben ein Modell der Sonne zu entwerfen. Die kernphysikalischen Prozesse innerhalb der Sonne werden phänomenologisch und ohne tiefere Begründung diskutiert. Ausgehend von der Sonne wird allgemein das Innere von Sternen und deren Klassifikation besprochen. Nach einem Ausflug in die **ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE** werden die Sterne in unserer Galaxie, der Milchstrasse betrachtet. Unsere Milchstrasse wird, wie wahrscheinlich alle Galaxien, von einem schwarzen Loch zusammengehalten.

Es interessiert dabei, wie Sterne entstehen und auch wieder vergehen.

Am Ende dieses Abschnittes betrachten wir das grosse Ganze, das Universum. Seine Struktur und seine Geschichte, Kosmologie genannt, schliessen diesen Teil ab.

Im *Explanatory supplement to the Astronomical Almanac* P. K. Seidelmann [Sei92] finden sich viele nützliche Informationen zur praktischen Astrophysik und Astronomie. Das Werk in der Ausgabe von 1992 kann von [archive.org](https://archive.org/details/explanatorysup0000seid) geladen werden.

2. Astronomische Beobachtungen

2.1. Geräte

In diesem Abschnitt werden Geräte aus der Astrophysik besprochen. Mit Teleskopen können entfernte Objekte beobachtet werden. Spektrometer erlauben aus dem Licht vorhandene Elemente zu bestimmen, aber auch Geschwindigkeiten zu messen. Interferometer können als Spektrometer verwendet werden, können aber auch Sterndurchmesser bestimmen.

2.1.1. Teleskope

Teleskope sind Instrumente, die weit entfernte Objekte sichtbar machen.

2.1.1.1. Optische Teleskope

Die frühesten optischen Teleskope waren Fernrohre, die aus zwei Linsen bestanden. Der folgende Abschnitt ist eine Erweiterung des Skripts Optik [Mar17]. Weitere Informationen gibt es auch in [Hec05, p. 332] und in [Pér96, p. 158].

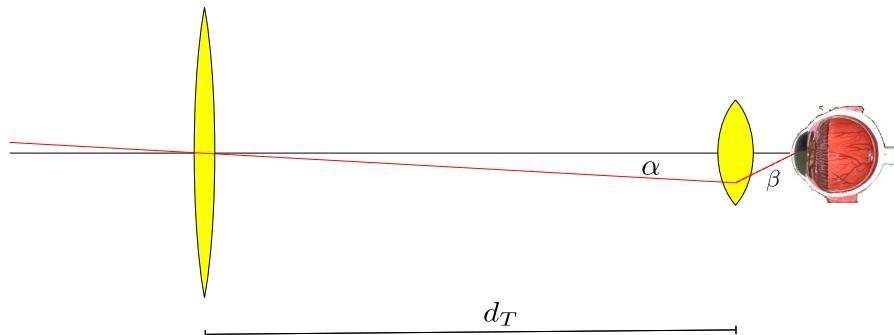


Abb. 2.1.: TELESKOP NACH KEPLER. Das Keplersche Teleskop verwendet ein sammelndes Okular.

Der Zweck eines TELESKOPS ist, den SEHWINKEL um den Faktor V zu vergrössern. Das heisst, das Auge hat den Eindruck, dass das betrachtete Objekt beim Bruchteil V des realen Abstands liegt. Das OBJEKTIV sammelt dabei möglichst viel Licht, ändert den Winkel aber nicht. Das ZWISCHENBILD des OBJEKTIVS hat die Grösse $eB = f_1\alpha$. Das OKULAR (Lupe) erzeugt also den Winkel $\beta = \frac{B}{f_2}$. Zusammen ergibt sich die VERGRÖSSERUNG

$$V = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2} \quad (2.1.1)$$

Ob ein Stern gesehen werden kann, hängt allein von der Leistung des Lichtes ab, die auf das Auge und damit auf die Netzhaut trifft. Der Zweck des Teleskopes ist nun, möglichst viel Licht zu sammeln. Da die Leuchtdichte des Sterns gegeben ist, muss das Teleskop eine möglichst grosse erste Linse oder erste Öffnung haben. Das heisst, dass das Verhältnis

$$\left(\frac{\text{Ø erste Linse}}{\text{ØAugenpupille}} \right)^2$$

bestimmend ist. Deshalb hätte man gerne möglichst grosse TELESCOPE in der ASTRONOMIE.

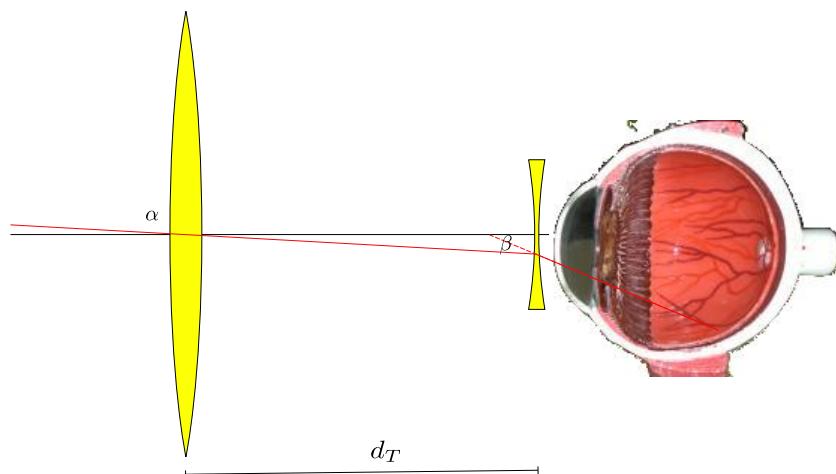


Abb. 2.2.: TELESKOP NACH GALILEI. Das Galileische Teleskop verwendet eine Zerstreuungslinse als Okular.

Grosse Linsen (über 1 m Durchmesser) sind sehr schwer und wegen der Schlierenbildung beim Abkühlen des Glases kaum herstellbar. Deshalb, und auch weil Spiegel einfacher herzustellen sind und einfacher auf ihre optische Qualität zu testen sind verwendet man heute vorwiegend Spiegelteleskope.

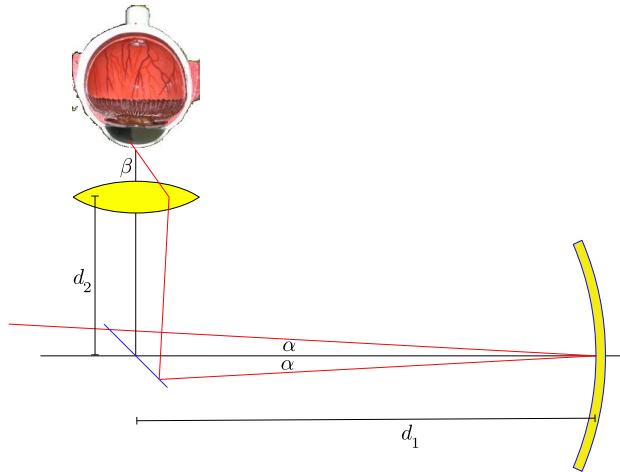


Abb. 2.3.: TELESKOP NACH NEWTON. Das Newtonsche Teleskop verwendet ein sammelndes Okular und einen Spiegel.

Abbildung 2.3 zeigt den ersten, von NEWTON vorgestellten und realisierten Bauplan.

Die Bilder 2.1 bis 2.3 zeigen gebräuchliche Teleskope. Die Vergrösserung kann am einfachsten mit der Matrixformulierung der paraxialen Optik berechnet werden [Mar17, Kap. 7.1], (basierend auf [Hec05, Seiten 371 ff] und [Yar75, Seiten 95 ff]). Lichtstrahlen werden als Vektor mit den Komponenten Abstand r von der optischen Achse und der Steigung r' des Lichtstrahls, also

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

Eine Linse der Brennweite f wird durch die Matrix

$$M_L(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

gegeben. Die freie Propagation des Lichtstrahls über die Distanz d wird durch die Matrix

$$M_d(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

beschrieben. Schliesslich stellt die Matrix

$$M_S(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} = M_L(R/2) \quad (2.1.5)$$

einen sphärischen Spiegel mit dem Krümmungsradius R dar.

Optische Instrumente werden nun als Multiplikation dieser Matrizen von rechts beschrieben. Zwei Lichtstrahlen mit unterschiedlicher Steigung ausgehend von einem Punkt des Objektes treffen sich im Bild. Damit kann die Abbildung berechnet werden.

Wir haben bei den angegebenen Teleskopen (Kepler-, Galilei- oder Newton) die folgenden Größen:

1. Abstand des Gegenstandspunktes von der optischen Achse r_0
2. Steigung des Lichtstrahls vom Gegenstandspunkt s_0 , beliebig
3. Abstand des Gegenstandspunktes vom ersten optischen Element d_S
4. Brennweite des ersten optischen Elements $f_1 = R/2$. R ist der Krümmungsradius des Fangspiegels im Newton-Teleskop. Dieser hat in paraxialer Näherung die Brennweite $R/2$.
5. Abstand vom ersten optischen Element zum zweiten optischen Element d_T .
Beim Newton-Teleskop ist $d_T = d_1 + d_2$.
6. Brennweite des zweiten optischen Elements $f_2 = R/2$. Dies ist das Okular.
7. Abstand des Auges vom Okular (zweites optisches Element) d_A .
8. Brennweite der Linse des Auges f_A
9. Abstand der Augenlinse von der Netzhaut d_B
10. Abstand des Bildpunktes von der optischen Achse r_B . Der Bildpunkt ist der Punkt, indem r_B unabhängig von s_0 ist.
11. Steigung des Lichtstrahls im Bildpunkt s_A .

Mit diesen Werten ergeben sich die beiden Vektoren

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ s_0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} r_A \\ s_A \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

und die Abbildungsgleichung

$$\mathbf{r}_B = M_d(d_B)M_L(f_A)M_d(d_A)M_L(f_2)M_d(d_T)M_L(f_1)M_d(d_S)\mathbf{r}_0 \quad (2.1.7)$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_B = & s_0 \left[d_S \left(-\frac{d_T \left(-\frac{d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B}{f_2} - \frac{d_B}{f_A} + 1 \right) + d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B}{d_T \left(-\frac{1 - \frac{d_A}{f_A}}{f_2} - \frac{1}{f_A} \right) - \frac{d_A}{f_A} + 1} - \frac{d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B}{f_2} - \frac{d_B}{f_A} + 1 \right) \right. \\
& + \left. \left(d_T \left(-\frac{d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B}{f_2} - \frac{d_B}{f_A} + 1 \right) + d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B \right) \right] \\
& + r_0 \left(-\frac{d_T \left(-\frac{d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B}{f_2} - \frac{d_B}{f_A} + 1 \right) + d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B}{d_T \left(-\frac{1 - \frac{d_A}{f_A}}{f_2} - \frac{1}{f_A} \right) - \frac{d_A}{f_A} + 1} - \frac{d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B}{f_2} - \frac{d_B}{f_A} + 1 \right)
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Wir suchen nun d_B so, dass $\frac{dr_B}{ds_0} = 0$ ist. Also muss die Gleichung

$$\begin{aligned}
d_S \left(-\frac{d_T \left(-\frac{d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B}{f_2} - \frac{d_B}{f_A} + 1 \right) + d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B}{f_1} - \frac{d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B}{f_2} - \frac{d_B}{f_A} + 1 \right) \\
+ d_T \left(-\frac{d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B}{f_2} - \frac{d_B}{f_A} + 1 \right) + d_A \left(1 - \frac{d_B}{f_A} \right) + d_B = 0 \tag{2.1.9}
\end{aligned}$$

gelöst werden. Die Lösung ist:

$$d_B = \frac{f_1(f_2 f_A (d_A + d_S + d_T) + f_A (-d_A d_S - d_A d_T)) + f_2 f_A (-d_A d_S - d_S d_T) + d_A d_S d_T f_A}{f_1(f_2(d_A + d_S + d_T - f_A) - d_A d_S - d_A d_T + f_A(d_S + d_T)) + f_2(-d_A d_S - d_S d_T + d_S f_A) + d_A d_S d_T - d_S d_T f_A} \tag{2.1.10}$$

Diese Lösung kann nun in Gleichung (2.1.8) in die erste Komponente eingesetzt werden:

$$r_B = \frac{f_1 f_2 f_A r_0}{d_A d_S (-d_T + f_1 + f_2) + d_A f_1 (d_T - f_2) + d_S d_T (f_2 + f_A) - d_S f_1 (f_2 + f_A) - d_S f_2 f_A - d_T f_1 (f_2 + f_A) + f_1 f_2 f_A} \tag{2.1.11}$$

Wenn kein Auge das Objekt betrachtet, sondern eine Kamera im Abstand d_K vom zweiten optischen Element, ist der Bildvektor $\mathbf{r}_K = (r_K, s_K)^T$. Zu Lösen ist die Gleichung

$$\mathbf{r}_K = M_d(d_K) M_L(f_2) M_d(d_T) M_L(f_1) M_d(d_S) \mathbf{r}_0 \tag{2.1.12}$$

oder

$$\begin{aligned} r_K = \frac{1}{f_1 f_2} & \left[\begin{pmatrix} d_K d_T (s_0(d_S - f_1) + r_0) - d_K f_1 (s_0(d_S - f_2) + r_0) - d_K f_2 (d_S s_0 + r_0) \\ d_T (s_0(d_S - f_1) + r_0) - f_1 (d_S s_0 - f_2 s_0 + r_0) - f_2 (d_S s_0 + r_0) \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} -d_T f_2 (s_0(d_S - f_1) + r_0) + f_1 f_2 (d_S s_0 + r_0) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (2.1.13) \end{aligned}$$

Wieder wird die Grösse d_K so bestimmt, dass r_K unabhängig von s_0 ist, die Ableitung $\frac{dr_K}{ds_0} = 0$ ist.

$$d_S \left(-\frac{d_T \left(1 - \frac{d_K}{f_2} \right) + d_K}{f_2} - \frac{d_K}{f_2} + 1 \right) + d_T \left(1 - \frac{d_K}{f_2} \right) + d_K = 0 \quad (2.1.14)$$

Das Resultat ist

$$d_K = \frac{f_2 (d_S d_T - d_S f_1 - d_T f_1)}{d_S d_T - d_S f_1 - d_S f_2 - d_T f_1 + f_1 f_2} \quad (2.1.15)$$

Eingesetzt in Gleichung (2.1.13) ergibt sich

$$r_K = \frac{f_1 f_2 r_0}{d_S (d_T - f_1 - f_2) + f_1 (f_2 - d_T)} \quad (2.1.16)$$

Zur Berechnung der Winkelvergrösserung ist es nicht notwendig, die Abbildung zu berechnen. Wir können die Steigung in (2.1.13) verwenden. Wir setzen $d_S = 0$ und $r_0 = 0$, das heisst wir betrachten die Richtung auf der Oberfläche des ersten optischen Elementes. Wir erhalten

$$s_K = s_0 \left(1 - \frac{d_T}{f_2} \right) \quad (2.1.17)$$

Damit ist die Winkelvergrösserung

$$V = \frac{s_K}{s_0} = 1 - \frac{d_T}{f_2} \quad (2.1.18)$$

Ein Galileoteleskop mit einer Zerstreuungslinse ($f_2 < 0$) hat verglichen mit einem Kepler-Teleskop oder einem Newton-Teleskop mit einer Sammellinse mit einer betragsmäßig gleichen Brennweite eine grössere Vergrösserung.

Bei einem Newton-Teleskop würde Gleichung (2.1.18) so lauten

$$V = \frac{s_K}{s_0} = 1 - 2 \frac{d_1 + d_2}{R} \quad (2.1.19)$$

Die Winkelvergrösserung eines Teleskopes hängt nur von der Tubuslänge und der Brennweite des Okulars ab!

Die Tubuslänge ergibt sich aus der Brennweite des ersten optischen Elementes, da ja die Abbildungsgleichung auch erfüllt sein muss! Der Hauptzweck des ersten optischen Elementes (Linse, Spiegel) ist, so viele Photonen oder so viel Licht wie möglich zu sammeln. Deshalb ist eine grössere Öffnung besser bei lichtschwachen

Objekten.

Zur Bezeichnung von Teleskopen gibt es die beiden Begriffe:

Refraktor Teleskop mit einer Linse als erstem optischem Element.

Reflektor Teleskop mit einem Spiegel als erstem optischem Element.

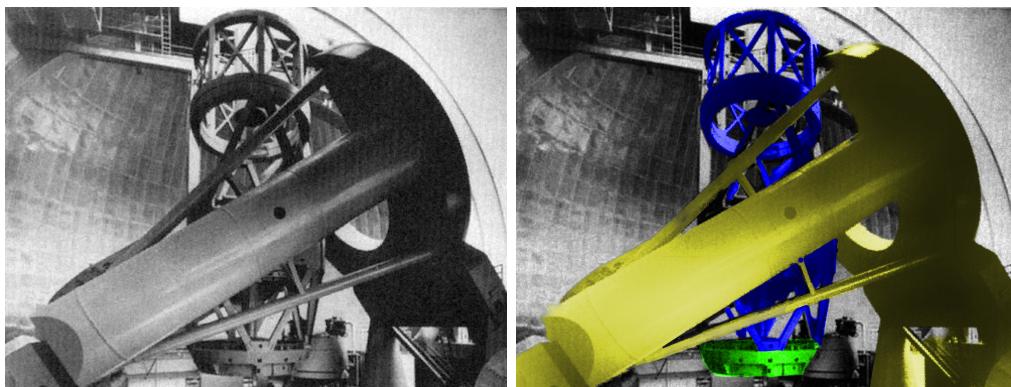


Abb. 2.4.: Das 5 m-Hale-Teleskop von Mount Palomar (By Nasa [Public domain], via Wikimedia Commons, <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/HaleTelescope-MountPalomar.jpg>). Rechts eine eingefärbte Fassung: Die parallaktische Montierung ist gelb, die Serrurier-Kompensationsstruktur [Wik19o] für die Spiegelhalterung blau und die Spiegelhalterung grün.

Abbildung 2.4 zeigt die Montierung des grossen Teleskopes. Der Spiegel und die Auffangoptik sind in einem Gitterkäfig so montiert, dass die Gravitation die beiden Ebenen parallel um den gleichen Betrag verschiebt, dass also die optische Präzision gewährleistet ist.

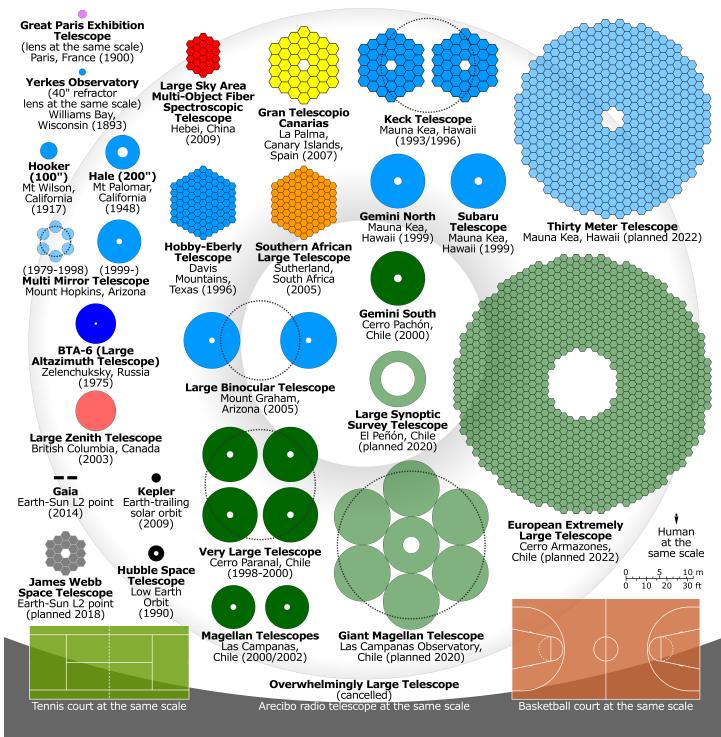


Abb. 2.5.: Vergleich der Spiegelgrößen von Teleskopen (Cmglee [CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)], via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Comparison_optical_telescope_primary_mirrors.svg).

Abbildung 2.5 zeigt schliesslich welche Spiegelgrößen heute verwendet werden. Dabei werden grosse Spiegel segmentiert. Die Segmente können einzeln verformt werden um Störungen der Atmosphäre auszugleichen (Siehe auch Abschnitt 2.3).

2.1.1.1. Montierung optischer Teleskope Wie optische Teleskope mit dem Boden verbunden sind bestimmt, wie einfach deren Benutzung ist. Die Montierung im Horizontsystem ist einfach, aber bewirkt im Teleskop eine Bilddrehung mit zunehmender Zeit. Deshalb werden professionelle Teleskope parallaktisch montiert (Siehe Abbildung 2.6).

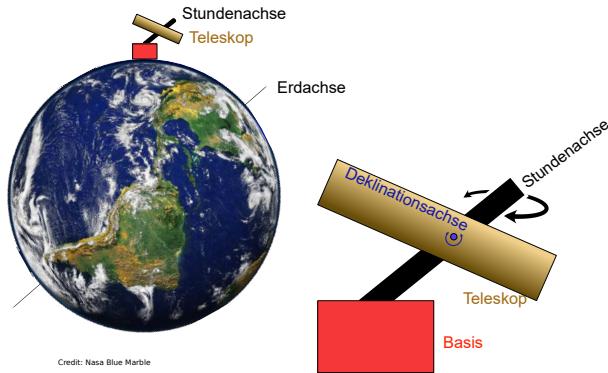


Abb. 2.6.: Parallaktische Montierung. Die Stundenachse muss parallel zur Erdachse sein. Dann kann das Teleskop mit einer einfachen Rotation um die Stundenachse auf einen Stern gerichtet bleiben.

Wenn die Achse für den Deklinationswinkel durch den Coudé-Fokus (aus dem französischen umgebogen) geht, kann das Licht unabhängig vom Deklinationswinkel in ein ortsfestes Spektrometer mit fest eingestellter Optik transportiert werden (siehe Abb. 2.7). Da heute astronomische und astrophysikalische Beobachtungen meistens spektrale Eigenschaften von Sternen oder Galaxien oder Quasaren oder was immer untersuchen, ist dieser Strahlengang in der Regel so in Teleskope eingebaut.

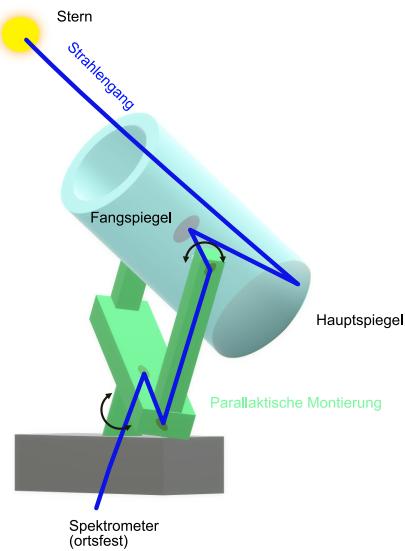


Abb. 2.7.: Strahlengang eines Teleskopes mit Coudé-Fokus. Diese Art der Strahlführung ermöglicht die problemarme Einkoppelung in ein ortsfestes Spektrometer oder Interferometer.

2.1.1.2. Radioteleskope

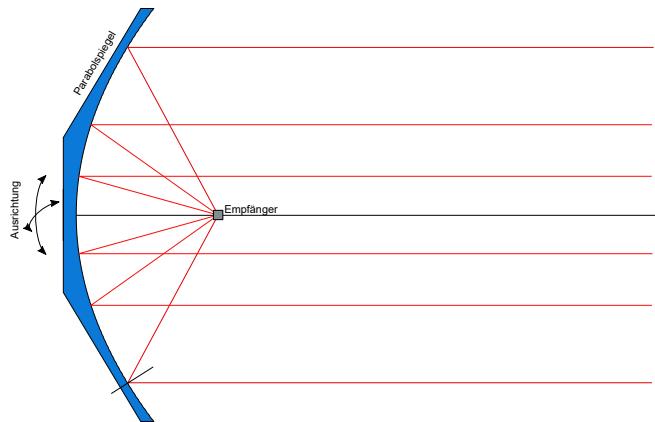


Abb. 2.8.: Ein Radioteleskop misst mit einem Parabolspiegel die Energie einer elektromagnetischen Welle aus einer bestimmten Richtung (breit- oder schmalbandig).

Ein Radioteleskop (siehe Abb. 2.8) sammelt elektromagnetische Strahlung aus einer einzigen Richtung. Je grösser der Spiegeldurchmesser ist, desto kleiner ist der Winkeldurchmesser des Beugungsmusters. Der Spiegel wird in die Richtung der zu untersuchenden Quelle gedreht. Die Spiegeloberfläche ist parabolisch. Diese Flächenform konzentriert alle Radiowellen aus einer Richtung auf einen Empfänger. Spiegel haben keine Dispersion, deshalb hat das Gerät keine ungewollte Frequenzselektion. Im Gegensatz zu optischen Geräten sind die Empfänger der Radioteleskope kohärent, d.h. sie können die Phase messen.

Deshalb können mehrere Radioteleskope zu grösseren virtuellen Teleskopen zusammengeschaltet werden. So kann die Winkelauflösung dieser virtuellen Teleskope besser sein als die der grössten optischen Teleskope, trotz der mehrere Grössenordnungen längeren Wellenlänge.



Abb. 2.9.: Das Radioteleskop von Effelsberg (By Dr. Schorsch (photo taken by Dr. Schorsch) [GFDL (<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>), CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>) or CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)], via Wikimedia Commons
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/05/Effelsberg_total2.jpg)

Radioteleskope wie das in Effelsberg (siehe Abbildung 2.9) werden azimutal montiert. Der Durchmesser des Spiegels in Effelsberg beträgt 100 m (siehe 2.1). Das Teleskop arbeitet bei einer Wellenlänge von $\lambda = 5$ mm. Das ergibt eine Winkelauflösung von $61.0 \mu\text{rad}$.



Abb. 2.10.: Das grosse Radioteleskop in Aricibo (courtesy of the NAIC - Arecibo Observatory, a facility of the NSF, <http://www.naic.edu/public/about/photos/hires/ao004.jpg>).

Das Radioteleskop von Aricibo (Puerto Rico) ist ortsfest in einen Krater gebaut (siehe 2.10 und [Wik22a]). Das Teleskop war im James Bond-Film «GoldenEye» in 1995 zu sehen (siehe [Wik22c]). Das Teleskop arbeitet bei einer Wellenlänge von $\lambda = 3$ mm. Das ergibt bei einem Durchmesser der Parabolantenne von 305 m

eine Winkelauflösung von $120 \mu\text{rad}$. Das Radioteleskop von Arecibo existiert nicht mehr, es ist im Jahr 2020 am 10. August in sich zusammenstürzt.

2.1.1.3. Röntgenteleskope

Röntgenteleskope verwenden Parabol- und Hyperbolspiegel zur Fokussierung. Sie benützen dazu die Tatsache, dass der Brechungsindex von Materialien im Röntgenbereich kleiner als eins ist. Bei streifendem Einfall erhalten wir also Totalreflexion.

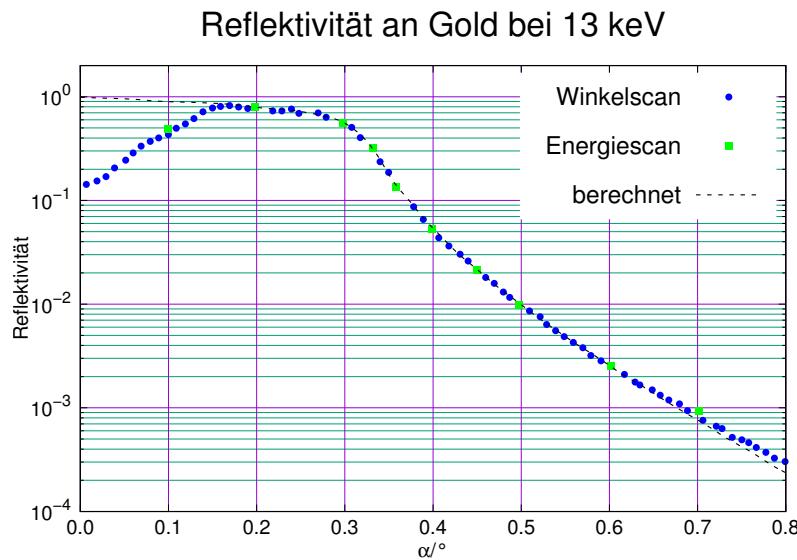


Abb. 2.11.: Reflektivität von 13 keV Röntgenlicht an Gold. Die Daten für die Darstellung stammen aus [Kik+16].

Abbildung 2.11 zeigt Messungen und Theorie der Reflektivität von 13 keV-Röntgenlicht an Gold. bei etwa 0.3° wird Totalreflexion erreicht. Dämpfung verhindert eine perfekte Totalreflexion.

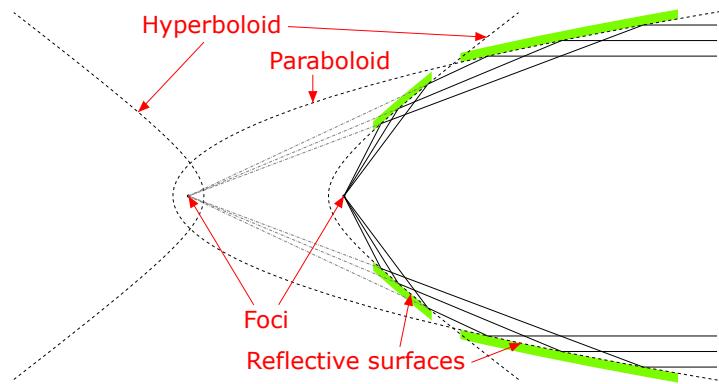


Abb. 2.12.: Wolter-Spiegel zur Fokussierung von Röntgenstrahlen.
 (Andreas 9384 [CC BY-SA 4.0
 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)],
 via Wikimedia Commons,
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wolter-I.svg>).

Abbildung 2.12 zeigt einen schematischen Aufbau eines Wolter-Spiegelreflektors zur Fokussierung von Röntgenstrahlen. Die Kombination von Paraboloiden und Hyperboloiden ermöglicht eine bessere Fokussierung als paraboloidale Spiegel allein. Spiegel wie diese werden in Röntgensatelliten wie ROSAT [Max19] oder CHANDRA (NASA).

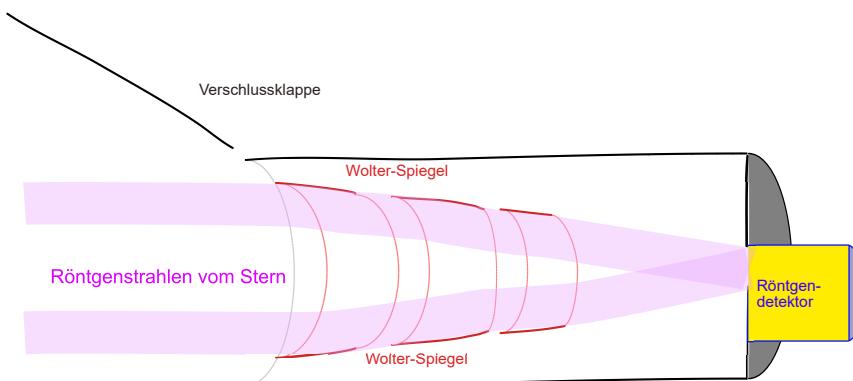


Abb. 2.13.: Skizze des Aufbaus des Röntgensatelliten ROSAT (basierend auf [Max19])

In ROSAT (siehe Abbildung 2.13) fokussiert der Wolter-Spiegel (siehe auch Abbildung 2.14) fokussiert die Röntgenstrahlen auf den Detektor (siehe Abbildung 2.15). Der Detektor ist ein Vieldrahtproportionalzähler. Er ermöglicht also eine Orts- und Energieauflösung.

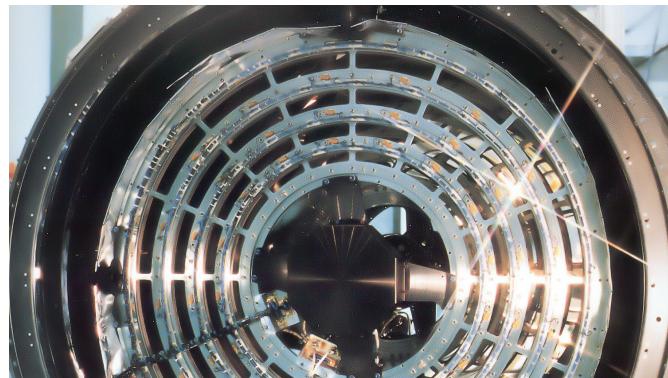


Abb. 2.14.: Wolter-Spiegel des Röntgensatelliten ROSAT, von vorne.
(DLR, CC BY 3.0
<https://www.dlr.de/dlr/Portaldata/1/Resources/bilder/missionen/rosat/roentgensattelit1.jpg>)

Abbildung 2.14 zeigt den Wolter-Spiegel von ROSAT von vorne.



Abb. 2.15.: Detektor des Röntgensatelliten ROSAT.
(DLR, CC BY 3.0
<https://www.dlr.de/dlr/Portaldata/1/Resources/bilder/missionen/rosat/roentgensattelit2.jpg>)

Der Detektor von ROSAT in Abbildung 2.15 ist ein Vieldrahtproportionalzähler (siehe auch Abschnitt 4.2).

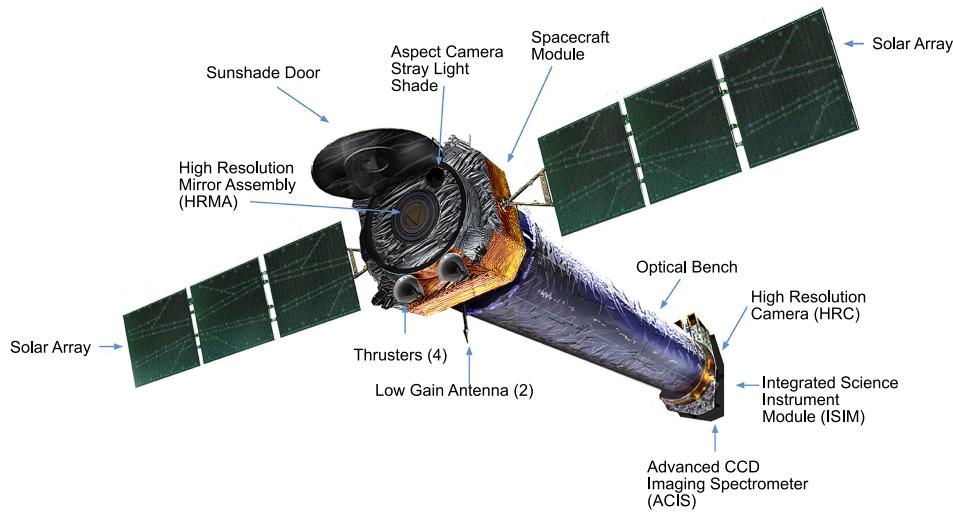


Abb. 2.16.: Komponenten des Röntgensatelliten Chandra.
 (NASA
https://www.nasa.gov/sites/default/files-thumbnails/image/craft_lable_0.jpg)

Ein Nachfolger von ROSAT ist Chandra. Sein Aufbau ist in Abbildung 2.16. Chandra hat eine grössere Brennweite und mehr Instrumente und kombiniert diese. Abbildung 2.17 zeigt eine Überlagerung von Messdaten von Chandra mit einem optischen Bild. Die Galaxie NGC 3079 enthält ein sehr schweres schwarzes Loch. Die Aufnahme von Materie durch dieses schwarze Loch erzeugt starke Röntgenstrahlen und Stossfronten. Diese sind als zwei Blasen oberhalb und unterhalb der Galaxienebene sichtbar.

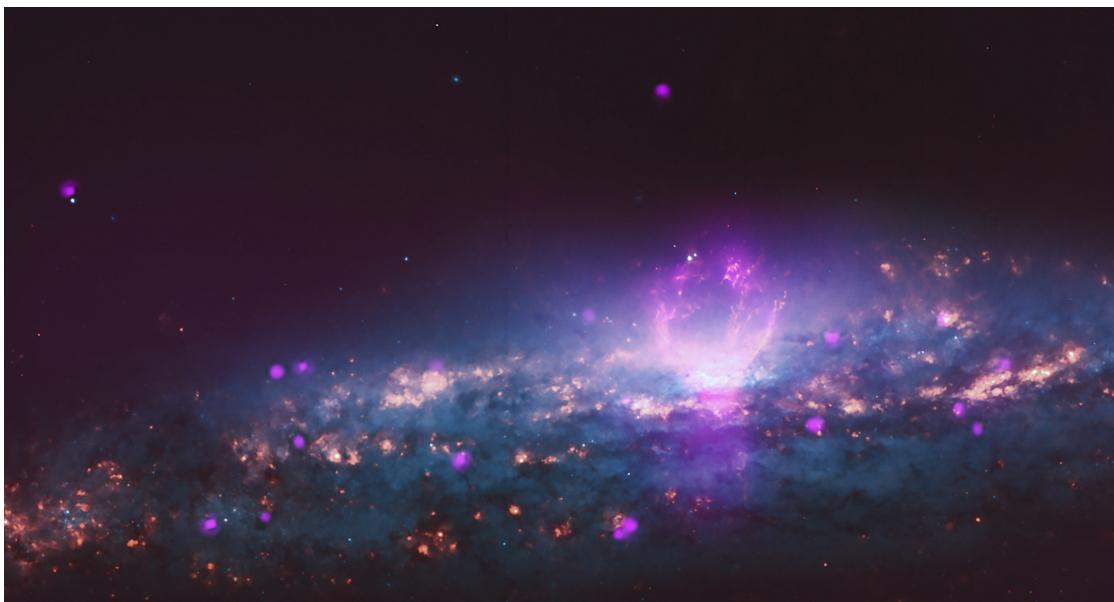


Abb. 2.17.: Die Galaxie NGC 3079, $67 \cdot 10^6$ ly entfernt, enthält zwei «Superubbles». Die «Superubbles», gemessen im Röntgenbereich durch Chandra, sind hier mit einem optischen Bild überlagert. Die beiden Blasen haben Durchmesser von 4900 ly und 3600 ly. Zu sehen sind die Stosswellenfronten. (X-ray: NASA/CXC/University of Michigan/J-T Li et al.; Optical: NASA/STScI, <https://www.nasa.gov/sites/default/files-thumbnails/image/ngc3079.jpg>)

2.1.1.4. Auflösung eines einzelnen Teleskopes

Durch die Wellennatur des Lichtes, d.h. durch Beugungseffekte können optische Teleskope (egal welche Wellenlänge) zwei Objekte nur ab einer bestimmten Winkelabstand getrennt abbilden. Die Berechnung der Auflösung ist analog zur Berechnung bei Mikroskopen.

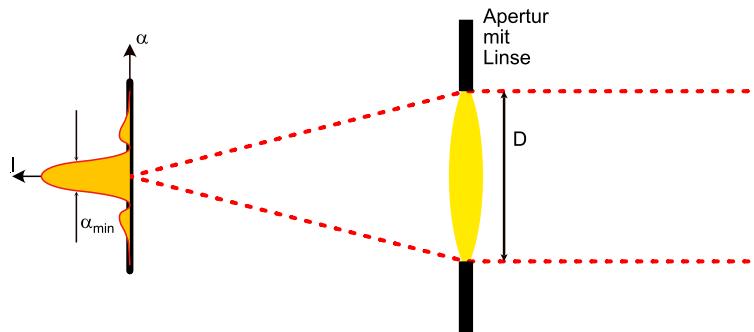


Abb. 2.18.: Die Öffnung des Teleskopes begrenzt die Auflösung.

Das Rayleigh-Kriterium (minimalen Breite eines Beugungsmusters) in der Skizze 2.18 ist

$$\alpha_{min} \approx \sin(\alpha_{min}) = \frac{1.22 \lambda}{D} \quad (2.1.20)$$

Teleskop	Apertur D	Wellenlänge λ	Beugungsbreite α_{min}	Bemerkungen
ROSAT (Satellit)	84 cm	60 pm	$87.1 \text{ prad} = 1.80 \cdot 10^{-5}''$	Röntgen
Chandra (Satellit)	1.20 m	124 pm	$126 \text{ prad} = 2.60 \cdot 10^{-5}''$	Röntgen
Extremely Large Telescope (ELT) (European Southern Observatory)	39 m	500 nm	$15.6 \text{ prad} = 3.23 \cdot 10^{-3}''$	
ROSAT (Satellit)	0.84 m	30 nm	$43.6 \text{ nrad} = 8.99 \cdot 10^{-3}''$	Röntgen
Gran Telescopio Canarias (GTC)	10.4 m	500 nm	$58.7 \text{ nrad} = 1.21 \cdot 10^{-2}''$	
Hale-Teleskop (Mount Palomar)	5.10 m	500 nm	$120 \text{ nrad} = 2.47 \cdot 10^{-2}''$	
Herschel-Weltraumteleskop	3.50 m	500 nm	$1.74 \text{ nrad} = 3.59 \cdot 10^{-2}''$	
Hubble Space Telescope	2.40 m	500 nm	$254 \text{ nrad} = 5.24 \cdot 10^{-2}''$	
Alfred-Jensch-Teleskop (Thüringer Landessternwarte)	2.00 m	500 nm	$305 \text{ nrad} = 6.29 \cdot 10^{-2}''$	
Chandra (Satellit)	1.20 m	?	$2.91 \mu\text{rad} = 0.6''$	[ODE+10, Tab. 1]
Meade Teleskop ACF-SC 406/4064 16" UHTC LX200 GoTo	40.6 cm	500 nm	$1.50 \mu\text{rad} = 0.310''$	
Skywatcher Teleskop N 200/1000 Explorer BD NEQ-5	20 cm	500 nm	$3.05 \mu\text{rad} = 0.629''$	
Canon EF 600mm f/4L IS III USM Objektiv	15 cm	500 nm	$4.07 \mu\text{rad} = 0.839''$	
Canon EF 800mm f/5.6L IS USM Objektiv	14.3 cm	500 nm	$4.27 \mu\text{rad} = 0.881''$	
Canon EF 85mm f/1.2L II USM Objektiv	7.08 cm	500 nm	$8.61 \mu\text{rad} = 1.78''$	
Omegon Teleskop AC 70/700 AZ-2	7 cm	500 nm	$8.71 \mu\text{rad} = 1.80''$	
Leica DG Vario-Elmar 100-400mm/F4-6.3	6.35 cm	500 nm	$9.61 \mu\text{rad} = 1.98''$	bei $f = 400 \text{ mm}$
Minolta 50mm/F1.7	2.94 cm	500 nm	$20.7 \mu\text{rad} = 4.28''$	
ROSAT (Satellit)	84 cm	?	$24.24 \mu\text{rad} = 5''$	[ODE+10, Tab. 1]
Leica DG Vario-Elmar 100-400mm/F4-6.3	2.50 cm	©2005-2022 Universität Ulm, 4. Orthometrische Mardi		bei $f = 100 \text{ mm}$

Tabelle 2.1 zeigt die Winkelauflösung verschiedener Optiken und Teleskope. Röntgensteleskope erreichen die berechnete Auflösung nicht, da ihre Optiken zu grossen Abweichungen von der idealen Spiegelform haben. Das ELT ist im Bau. Hochauflösende optische Teleskope erreichen Ihre Auflösung nur mit adaptiven Spiegeln, da die Atmosphäre unruhig ist (SEEING, siehe auch Abschnitt 2.3.1).

2.1.1.5. Auflösung interferometrisch gekoppelter Teleskope

Gelingt es Teleskope (optisch oder Radioteleskope) interferometrisch starr zu koppeln, kann die Auflösung verbessert werden.

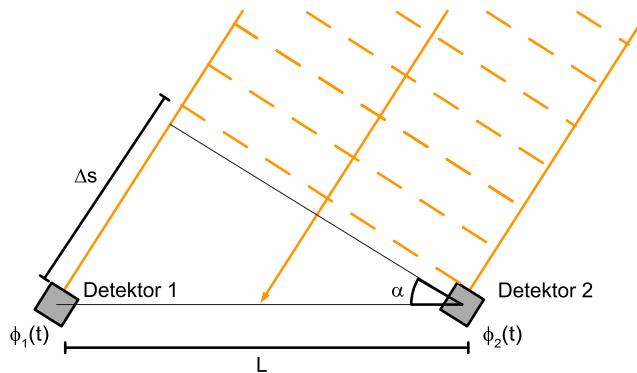


Abb. 2.19.: Prinzipieller Aufbau einer Long-Baseline-Interferometrie.

In Abbildung 2.19 wird der prinzipielle Aufbau einer Long-Baseline Interferometrie gezeigt. Licht von einem Objekt (sichtbar oder Radiowellen) trifft auf zwei Detektoren D_1 und D_2 im Abstand L . Der Winkel zwischen der einfallenden Wellenfront und der Verbindungsline $\overline{D_1 D_2}$ sei α . Am Detektor D_1 werde die Phase $\phi_1(t)$ und am Detektor D_2 die Phase $\phi_2(t)$ gemessen. Wichtig ist, dass

- die Zeiten an den Orten der Detektoren und ihre Differenz relativ sehr viel genauer als die Periodendauer c/λ der einfallenden Welle bekannt ist und
- das die Grösse L oder die sonst noch involvierten Wege sich viel weniger als λ verändern.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, können die Interferenzen der beiden Signale ausgewertet werden.

Mögliche Aufbauten sind:

- zwei oder mehr optische Empfänger(Teleskope), die über einen Interferometeraufbau gekoppelt sind (sehr schwierig bei grossem L),
- zwei oder mehr Radioteleskope, deren Signale über Kabel oder Mikrowellen (-leiter) zu einem Korrelator geführt werden. Radioempfänger auch im Millimeterbereich und darunter messen Amplituden und nicht wie optische Empfänger Intensitäten!. Oder

- zwei oder mehr weit entfernte Radioteleskope ohne direkte Verbindung, bei denen die zeitabhängige Phase mit Hilfe von korrelierten Atomuhren gemessen wird. Die Genauigkeit der Atomuhren garantiert eine gute Zeitauflösung der Phase, auch ohne direkte Verbindung.

Im Einzelnen ist die Phasendifferenz

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda} \quad (2.1.21)$$

und

$$\Delta s = L \sin(\alpha) \quad (2.1.22)$$

und damit

$$\Delta\phi = \frac{2\pi L \sin(\alpha)}{\lambda} \quad (2.1.23)$$

Das Auflösungsvermögen für zwei Sterne A und B in kleinem Winkelabstand können wir so abschätzen:

$$\text{Stern A: } \Delta\phi_A = \frac{2\pi L}{\lambda} \sin(\alpha_A) \quad (2.1.24a)$$

$$\text{Stern B: } \Delta\phi_B = \frac{2\pi L}{\lambda} \sin(\alpha_B) \quad (2.1.24b)$$

Mit $\alpha_B - \alpha_A = \Delta\alpha$ und $|\Delta\phi_B - \Delta\phi_A| \ll 1 < \pi$ und der minimal auflösbaren Phase $\delta\phi$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta\phi &\leq \Delta\phi_B - \Delta\phi_A = \frac{2\pi L}{\lambda} (\sin(\alpha_B) - \sin(\alpha_A)) \\ &= \frac{2\pi L}{\lambda} (\sin(\alpha_A + \Delta\alpha) - \sin(\alpha_A)) \end{aligned} \quad (2.1.25a)$$

$$\delta\phi \leq \frac{2\pi L}{\lambda} \left(\sin(\alpha_A) \underbrace{\cos(\Delta\alpha)}_{\approx 1} + \cos(\alpha_A) \underbrace{\sin(\Delta\alpha)}_{\approx \Delta\alpha} - \sin(\alpha_A) \right) \quad (2.1.25b)$$

$$\approx \frac{2\pi L}{\lambda} (\sin(\alpha_A) + \cos(\alpha_A) \cdot \Delta\alpha - \sin(\alpha_A)) \quad (2.1.25c)$$

$$\delta\phi \leq \frac{2\pi L \cos(\alpha_A)}{\lambda} \Delta\alpha \quad (2.1.25d)$$

$$\Delta\alpha \geq \frac{\delta\phi \lambda}{2\pi L \cos \alpha_A} \geq \frac{\lambda}{2L} \quad (2.1.25e)$$

$$(2.1.25f)$$

Wenn die zwei Empfänger $L = 12\,000$ km auseinander sind (das Maximum auf der Erde) und die verwendete Wellenlänge die H^α -Wellenlänge ist, also $\lambda = 21$ cm, dann ergeben sich

$$\Delta\alpha \geq \frac{21 \text{ cm}}{2 \cdot 12\,000 \text{ km}} = 8.8 \cdot 10^{-9} \text{ rad} = 1.80 \cdot 10^{-3}'' \quad (2.1.26)$$

Mit $\delta\phi \approx 0.1$ und $\alpha_A = \pi/4$ bekommt man mit der besseren Approximation

$$\Delta\alpha \geq \frac{0.1 \text{ rad} \cdot 21 \text{ cm}}{2\pi \cdot \sqrt{2}/2 \cdot 12000 \text{ km}} = 3.94 \cdot 10^{-10} \text{ rad} = 8.1 \cdot 10^{-5}'' \quad (2.1.27)$$

Die zweite Abschätzung nimmt nahezu perfekte Instrumente an, so dass die erste wahrscheinlich näher an den Werten realisierbarer Instrumente liegt.

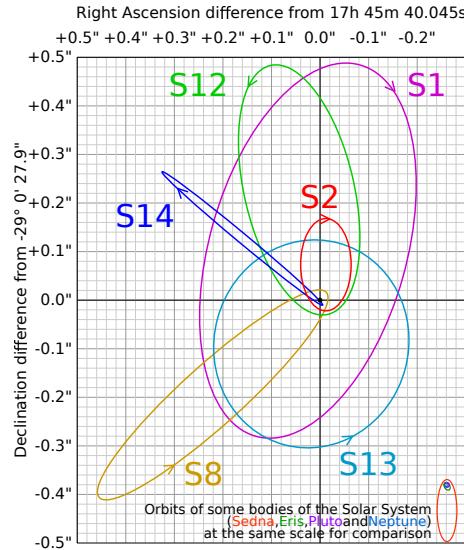


Abb. 2.20.: Gemessene Orbits im galaktischen Zentrum (Abbildung By Cmglee (Own work) [CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>) or GFDL (<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>)], via Wikimedia Commons, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galactic_centre_orbits.svg).

Abbildung 2.20 zeigt gemessene Orbits um das zentrale schwarze Loch unserer Galaxis (etwa 8 kpc entfernt). Die Skizze zeigt, dass für diese Messungen eine Winkelauflösung von etwa $0.1''$ notwendig ist. Die obige Abschätzung zeigt, dass heutige Instrumente genau genug sind.

2.1.1.6. Aberration

Die Erde bewegt sich mit einer mittleren Geschwindigkeit von 29.78 km s^{-1} um die Sonne [Wil21]. Im Laufe eines halben Jahres kehrt sich die Bewegungsrichtung um. Wie Regen bei schnellem Gehen schräg von vorne kommt, kommt bei endlicher Lichtgeschwindigkeit das Licht unter einem leicht anderen Winkel. Dieser Winkel α wird nach James Bradley ABERRATION genannt [Bra28].

$$\alpha = \frac{v_E}{sc} \sin \vartheta \quad (2.1.28)$$

Scheinbar bewegen sich weit entfernte Sterne in der Form einer Ellipse. Die grosse

Halbachse ist dabei für alle Sterne gleich. Dies ist ein Beweis, dass die Erde sich bewegt. Die Aberrationskonstante A ist

$$A = 20.5'' = \frac{\langle v_E \rangle}{c} \quad (2.1.29)$$

Pro Tag bewegen sich Sterne um die tägliche Aberration, die $< 0.3''$ ist.

2.1.2. Spektrometer

SPEKTROMETER gibt es in verschiedenen Ausführungen

1. Dispersive optische Elemente wie Prismen oder Gitter werden zur Trennung der verschiedenen Wellenlängen verwendet.
2. Resonatoren (FABRY-PEROT-RESONATOR, Michelson-Interferometer, LUMMER-GEHRCKE-PLATTE) unterdrücken Teile des Lichtspektrums
3. Weitere Effekte wie akustische Wellen können zur höchstauflösten Spektroskopie verwendet werden.

2.1.2.1. Gitterspektrometer

Anhand eines GITTERSPEKTROMETERS soll hier die Optik dieser Geräte diskutiert werden.

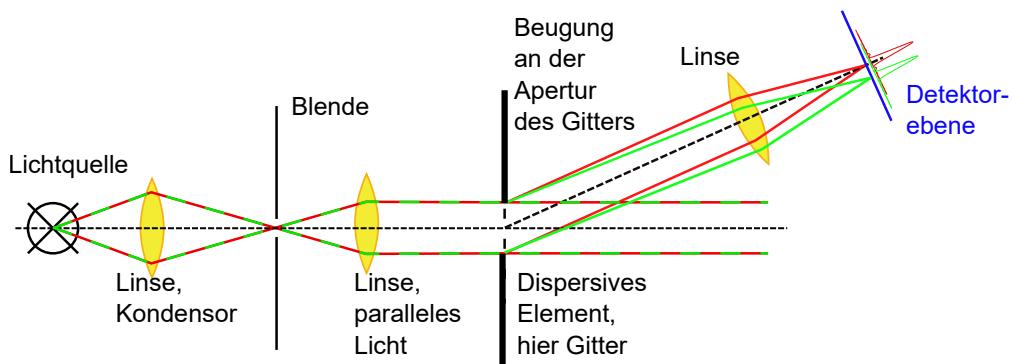


Abb. 2.21.: Prinzipieller Aufbau eines GITTERSPEKTROMETERS

Abbildung 2.21 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines GITTERSPEKTROMETERS. Licht aus der zu untersuchenden Quelle (oder aus der zu untersuchenden Probe) wird mit einer Kondensorlinse auf einen Punkt (sphärische Linse) oder auf eine Linse (Zylinderlinse) abgebildet. Eine Blende (kreisförmige Loch oder Spalt) lässt nur Licht aus dem zu untersuchenden Bereich durch. Mit einer weiteren Linse (sphärisch oder zylindrisch) wird das Licht aus der Blende parallelisiert. Dazu steht die Blende in der Fokusebene der Linse. Dieses parallele Licht wird durch das Gitter, unser dispersives Element, abgelenkt. Eine der höheren Ordnungen (größer oder gleich eins), die ja aus parallelem Licht besteht wird durch eine weitere Linse

(sphärisch oder zylindrisch) auf einen positionsempfindlichen Detektor abgebildet (z.B. eine CCD-Zeile oder ein Photodiodenarray).

Die parallelen Strahlen der verschiedenen Wellenlängen sind unterschiedlich stark zur optischen Achse geneigt. Das heisst, die Foci der verschiedenen Wellenlängen werden auf dem Detektor getrennt. Die Breite eines Fokuspunktes hängt von den Beugungerscheinungen an den Linsen, aber auch an dem Gitter ab.

Das grösste Objekt ist das Gitter selber. Wenn es eine Gitterkonstante g hat (Abstand der „Striche“) und N Linien, hat es eine Breite $b_{Gitter} = Ng$, ist also ein Spalt mit der Breite b_{Gitter} . Nach [Mar17, Gleichung (3.9.7)] hat dann das Beugungsmuster die Form (siehe auch Abbildung 2.22)

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}Ng \sin\Theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda}Ng \sin\Theta} \right)^2 = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda}Ng \sin\Theta\right)^2 \quad (2.1.30)$$

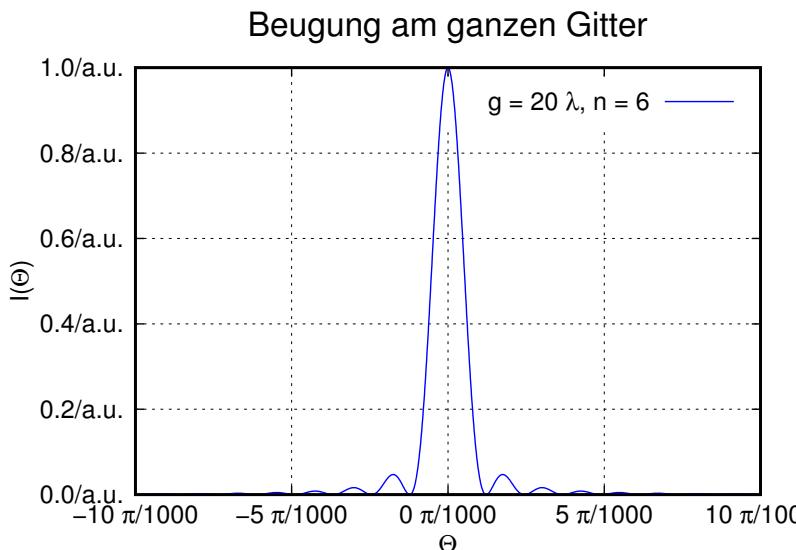


Abb. 2.22.: Beugung an einem Gitter mit der Gitterkonstante $g = 20\lambda$ und $n = 6$ Gitterperioden, also einer Breite von 120λ .

Die kleinste Struktur ist die einzelne Linie, die wir hier als Spalt der Breite $a \leq g$ annehmen wollen. Wir können einen Füllfaktor s_f definieren und schreiben:

$$a = \frac{s_f}{g} \quad (2.1.31)$$

Damit ist das Beugungsmuster einer einzelnen Gitterlinie, als Spalt modelliert (siehe auch Abbildung 2.23):

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}s_f \sin\Theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda}s_f \sin\Theta} \right)^2 = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda}s_f \sin\Theta\right)^2 \quad (2.1.32)$$

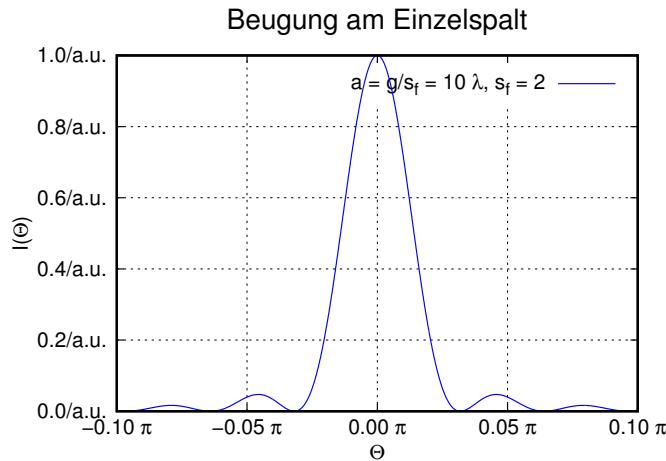


Abb. 2.23.: Beugung an einem Einzelspalt mit der Breite $g/s_f = 20/2\lambda = 10\lambda$.

Schliesslich erzeugt ein Gitter eine periodische Struktur an den Winkeln (siehe auch Abbildung 2.24)

$$\Theta = \arcsin \left(\frac{m \lambda}{g} \right) \quad (2.1.33)$$

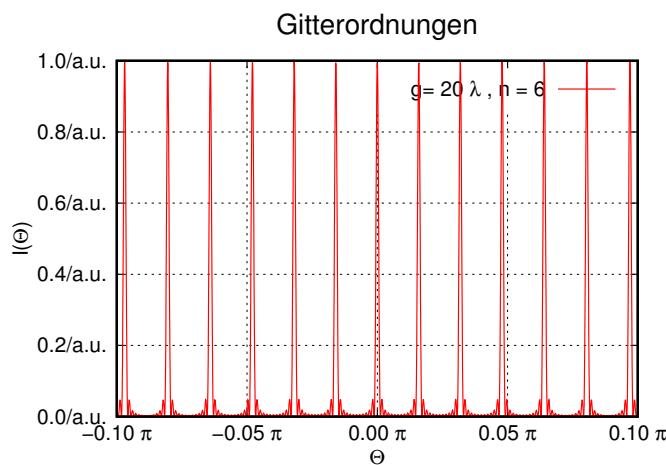


Abb. 2.24.: Lage der Gitterordnungen, gezeigt mit den Beugungsbildern des ganzen Gitters mit Beugung an einem Einzelspalt mit der Breite $g = 20\lambda$, $n = 6$ und $s_f = 2$.

Diese drei Komponenten ergeben dann das Beugungsbild eines realen Gitters. Dabei müssen die Amplituden phasenrichtig addiert werden. Wir nehmen hier an, dass an den Orten der Beugungsmaxima jeweils eine Komponente dominant ist, dass

wir also in erster Näherung die Phasen vernachlässigen können und die Intensitäten addieren. Die breiteste Komponente ist die mit der kleinsten Strukturgrösse, also der Einzelspalt. Diese ergibt die Umhüllende.

Die schmälste Komponente ist der Spalt, der das ganze Gitter repräsentiert. Dieses Beugungsmuster wird an jeder Beugungsordnung des Gitters wiederholt.

Zusammen ergibt sich das Beugungsmuster des Gitters

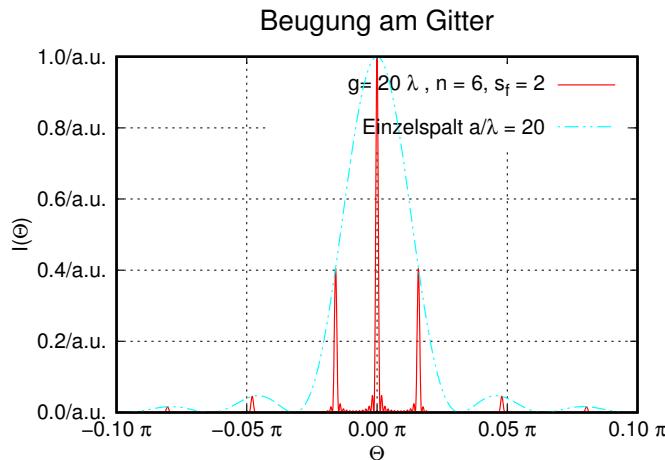


Abb. 2.25.: Beugungsmuster eines Gitters mit der Breite $g = 20\lambda$, $n = 6$ und $s_f = 2$.

Die folgende Abbildung 2.26 zeigt den Einfluss der Beugung an einem einzelnen Gitterelement.

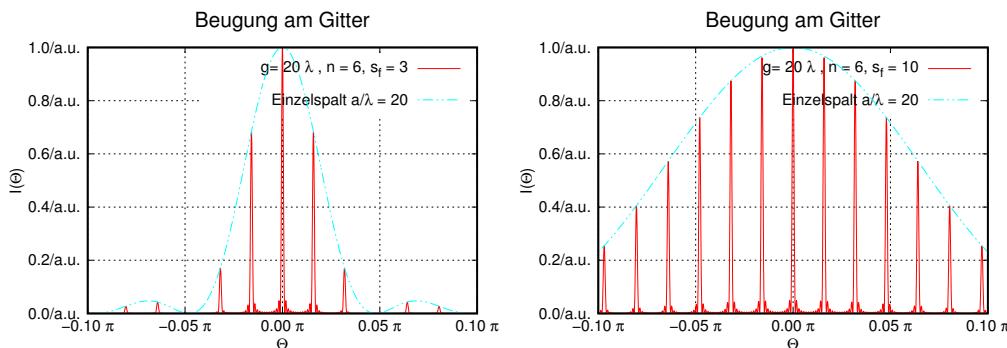


Abb. 2.26.: Beugungsmuster eines Gitters mit der Breite $g = 20\lambda$, $n = 6$ und $s_f = 3$ mit einem Gitters mit der Breite $g = 20\lambda$, $n = 6$ und $s_f = 10$.

Schliesslich zeigt Abbildung 2.27 die Wirkung der Anzahl beleuchteter Gitterelemente.

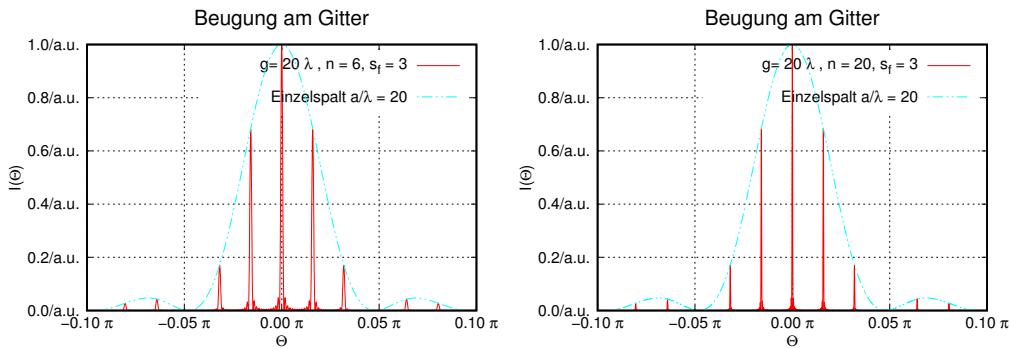


Abb. 2.27.: Beugungsmuster eines Gitters mit der Breite $g = 20\lambda$, $n = 6$ und $s_f = 3$ mit einem Gitters mit der Breite $g = 20\lambda$, $n = 20$ und $s_f = 3$.

Aus Abbildung 2.27 kann ersehen werden, dass eine grössere Anzahl beleuchteter Gitterlinien die Linienbreite auf dem Detektor verringert. Deshalb ist es wichtig, ein Gitter immer voll auszuleuchten. Dies kann mit einer vorgesetzten Optik erreicht werden.

Aus Abbildung 2.26 kann beobachtet werden, dass die Amplitude des ersten Beugungsmaximums von der Form und Beugung an einer Gitterperiode abhängt. Jedes Gitter hat einen nutzbaren Spektralbereich. Wenn die zweite Ordnung einer Wellenlänge sich mit der ersten einer anderen Wellenlänge überlagert, können diese beiden Spektralkomponenten nicht mehr getrennt werden.

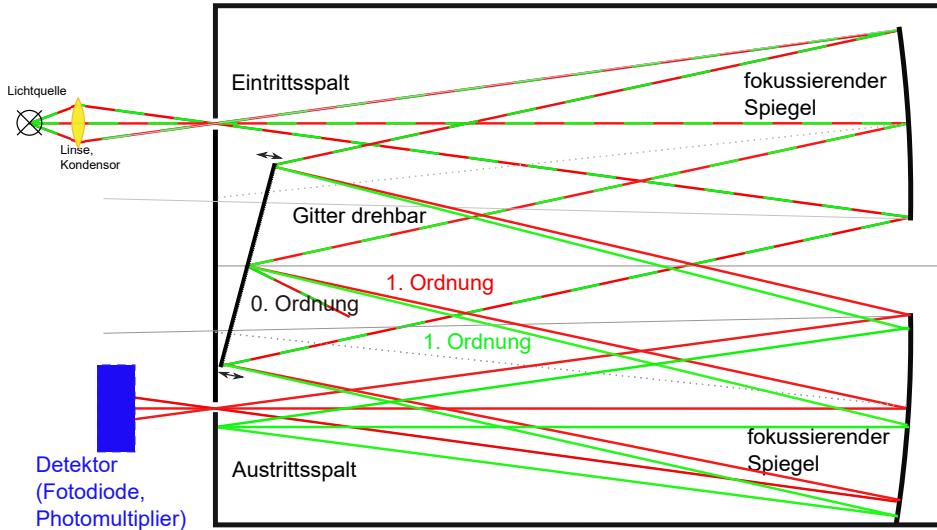


Abb. 2.28.: Schematische Darstellung eines Gitter-Reflexionsspektrometers. Die Lampe und Linse vor dem Eingangsspalt sind symbolisch zu verstehen und stellen die Quelle dar.

Die in der Abbildung 2.21 diskutierten Aufbauten verwenden Linsen als optische

Elemente. Die Probleme der Absorption, wie Sie für Linsen angesprochen wurden, gelten natürlich auch für die Linsen. Deshalb verwenden viele SPEKTROMETER Spiegel und reflektierende Gitter, wie in Abbildung 2.28 schematisch gezeigt. Licht tritt durch einen Eintrittsspalt, der sich im Fokus eines sphärischen Spiegels befindet in das SPEKTROMETER ein. Deshalb erzeugt der obere Spiegel paralleles Licht, das an einem Reflexionsgitter gebeugt und reflektiert wird. Die Erste Ordnung wird durch die Form des Gitters unterdrückt (siehe Blaze-Gitter in [Mar17]). Das Gitter lenkt nun verschiedene Farben in verschiedene Richtungen. Der untere Spiegel fokussiert nun die ebenen Wellen mit unterschiedlichen Richtungen auf die Ebene des Austrittsspaltes. Nur ein kleiner Wellenlängenbereich gegeben durch die Breite des Austrittsspaltes wird zum Detektor zugelassen. Dieser Detektor kann eine Fotodiode, eine Avalanche diode [Mar09, 3.3.5.1, pp. 176-177] oder ein Photomultiplier [Mar09, 4.2.5.1, pp. 317-318] sein. Die Wellenlänge wird nun ausgewählt, indem das Gitter gedreht wird.

SPEKTROMETER wie das in Abbildung 2.28 gezeigte enthalten außer dem Gitter keine dispersiven Elemente und, da nur mit Reflexion gearbeitet wird, zuerst auch keine absorptiven Bauteile. Die Absorption in Luft (z.B. durch Wasser) kann umgangen werden, indem das SPEKTROMETER evakuiert wird. Dieser Typ SPEKTROMETER kann auch im Ultravioletten oder im fernen Infrarot, ja sogar für Terahertz-Strahlung verwendet werden.

Das oben gezeigte GITTERSPEKTROMETER ist hervorragend geeignet, mit höchster zeitlicher Auflösung die Intensität bei einer Wellenlänge zu bestimmen. Spektren hingegen brauchen lange Zeit, können aber bei zeitlich konstanten Quellen mit sehr hohem SIGNAL-RAUSCH-VERHÄLTNIS gemessen werden.

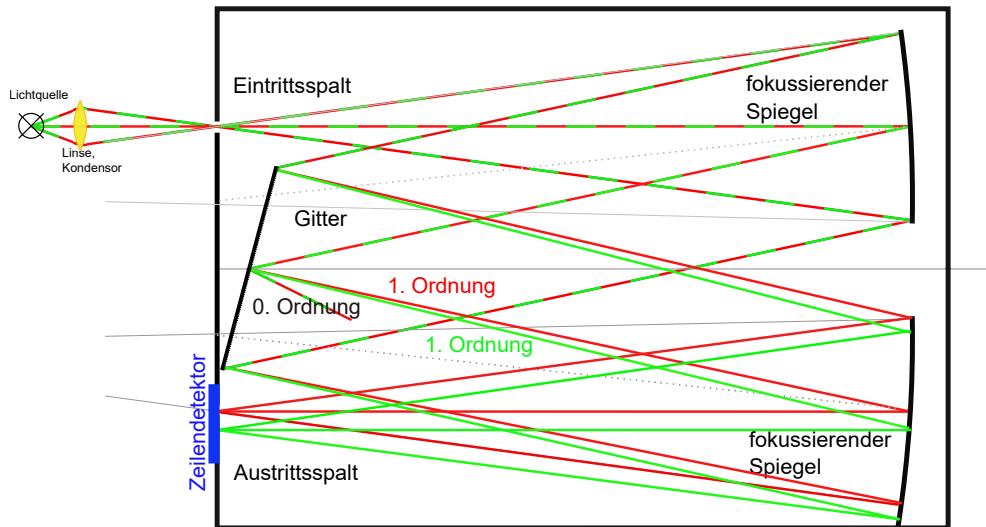


Abb. 2.29.: Schematische Darstellung eines Gitter-Reflexionsspektrometers. Die Lampe und Linse vor dem Eingangsspalt sind symbolisch zu verstehen und stellen die Quelle dar. Dies ist eine Modifikation des Spektrometers aus Abbildung 2.28.

Beim Spektrometer in der Abbildung 2.29 wurde der Austrittsspalt (siehe Ab-

bildung 2.28) durch einen Zeilendetektor (z.B. ein Kamerachip) ersetzt. Damit kann wie in den Spektrometern in der Abbildung 2.21 das Spektrum als ganzes gemessen werden. Das Gitter steht nun fest, oder wird nur noch zur Wahl des Wellenlängenbereichs gedreht.



Abb. 2.30.: Ein kommerzielles Gitterspektrometer, wie es im Labor des Instituts für Experimentelle Physik an der Universität Ulm verwendet wird.

Diese Art Gitterspektrometer kann auch hochintegriert hergestellt werden.

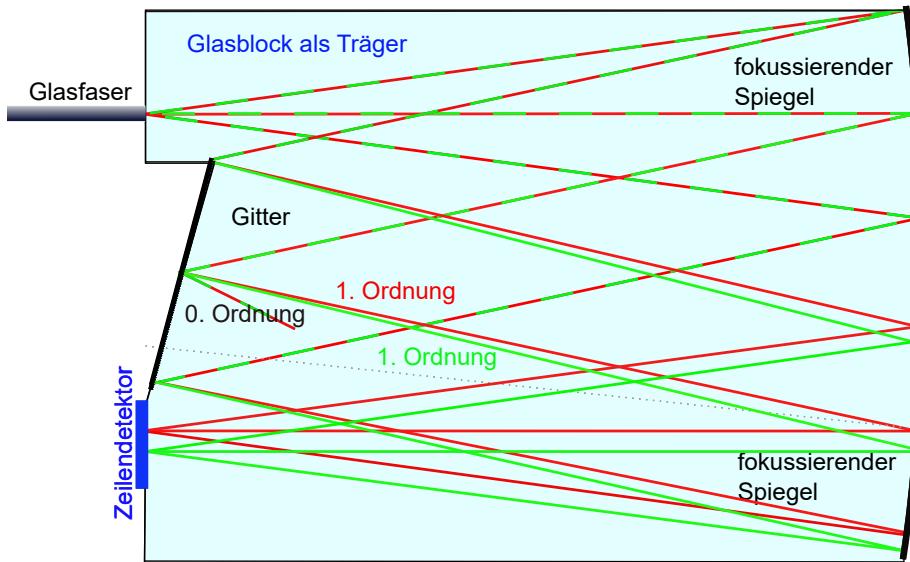


Abb. 2.31.: Schematische Darstellung eines integrierten Gitter-Reflexionsspektrometers. Dies ist eine Modifikation des Spektrometers aus Abbildung 2.29.

Das Spektrometer aus Abbildung 2.31 ist gleich aufgebaut wie das aus Abbildung 2.29. Alles wird auf einen Glasblock aufgebracht, dessen Außenwände als Spiegel (mit einer Metallbedämpfung) oder als Gitter (auch mit einer Metallbedämpfung) strukturiert sind. Licht wird mit einer Glasfaser zugeführt. Deren Öffnung ist dabei die Eintrittsöffnung. Ebenso wird der Zeilendetektor direkt am Glaskörper befestigt. Die ganze Struktur kann, wenn gewünscht vergossen werden.

2.1.2.2. Échelle-Spektrometer

ÉCHELLE-SPEKTROMETER (siehe T.-S. Pyo [Pyo03]) nutzen die Wellenlängendiffusion von zwei unterschiedlichen dispersiven Elementen (zwei Gitter oder ein Gitter und ein Prisma) aus um die hohe Wellenlängenauflösung eines Gitters (dem Échelle-Gitter) in hoher Ordnung, also mit relativ wenig Linien pro Länge zu nutzen.

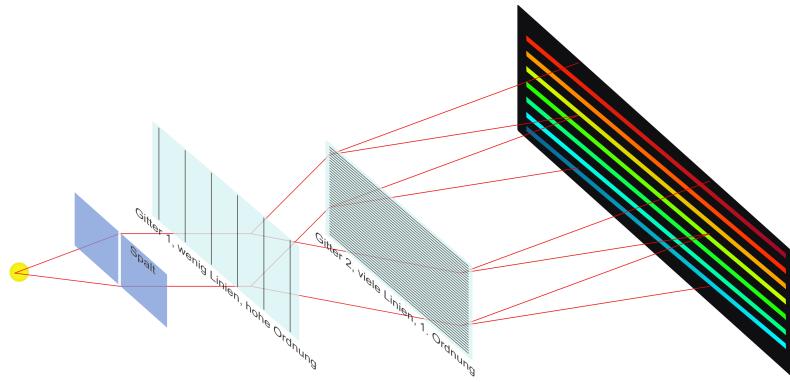


Abb. 2.32.: Aufbau eines Échelle-Spektrometers.

Abbildung 2.32 zeigt den prinzipiellen Aufbau. Die übereinander liegenden Spektren werden mit einem zweiten senkrecht dazu angeordneten Gitter oder einem Prisma getrennt. Beim ORFEUS-Instrument (J. Barnstedt u. a. [Bar+99]) hat das Échelle-Gitter 316 Linien/mm und arbeitet mit den 40. bis 61. Ordnungen. Das nachgeschaltete Dispersionsgitter hat 1200 Linien/mm und trennt die einzelnen Ordnungen. Die hohe Auflösung stammt von den hohen Ordnungen des Échelle-Gitters.

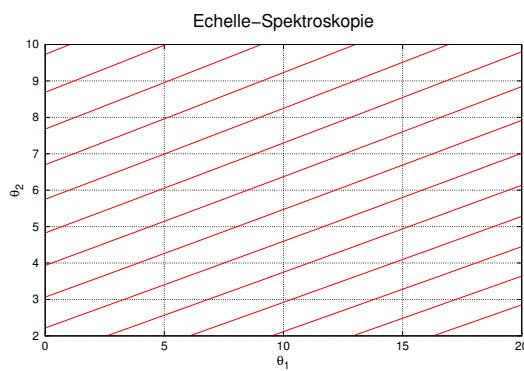


Abb. 2.33.: Gitter eines Échelle-Spektrometers.

Abbildung 2.33 zeigt, wie die Spektren liegen. Hier wurden die 50. bis 70. Ordnung verwendet. Abbildung 2.34 zeigt ein Échelle-Spektrum der Sonne.

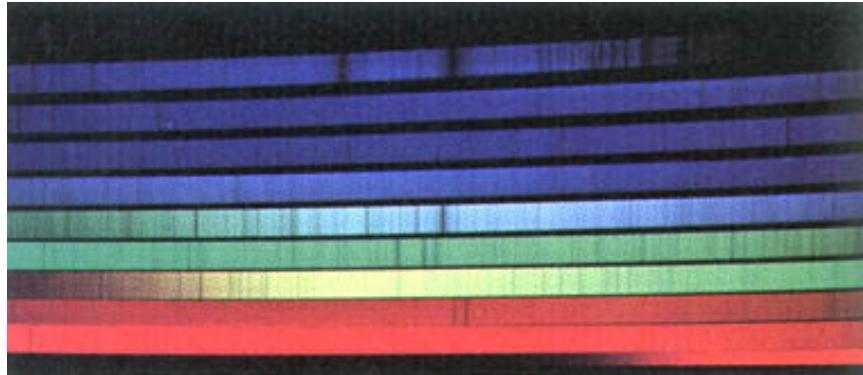


Abb. 2.34.: Spektrum der Sonne gemessen mit einem ÉCHELLE-SPEKTROMETER (By NASA [Public domain], via Wikimedia Commons, File: FraunhoferLinesDiagram.jpg).

2.1.3. Interferometer

2.1.3.1. Mach-Zehnder-Interferometer

Literatur: (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 663]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 365])

Nach [Mar17, Gleichung (3.2.2)] zeigt es sich, dass bei einem optischen Aufbau, der effektiv nur von einer Ortskoordinate abhängt, die zeitlich gemittelte Amplitude nur von der Phase δ abhängt. Das heisst, dass es reicht, die Phasen zu untersuchen! Beachten Sie, in [Mar17, Gleichung (3.2.2)] wurde die Phase δ nur einem Weg zugeordnet, die zeitgemittelte Amplitude hängt aber von $\cos(\delta/2)$ ab.

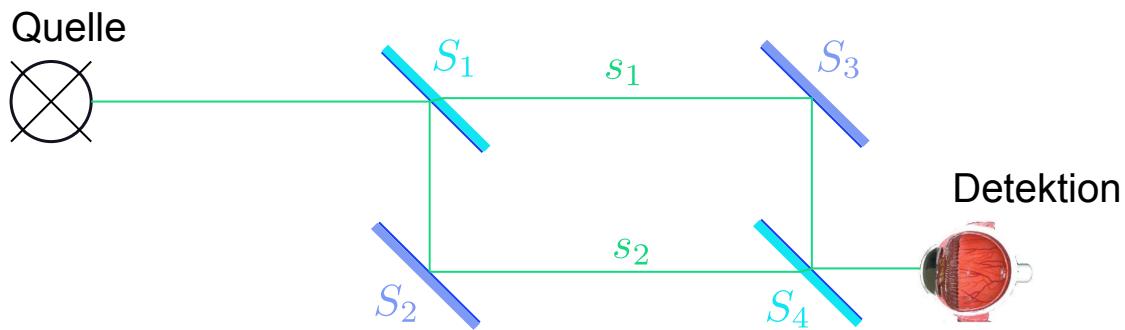


Abb. 2.35.: Aufbau des Mach-Zehnder-Interferometers.

Abbildung 2.35 zeigt den schematischen Aufbau eines Mach-Zehnder-Interferometers (nach Ludwig Mach und Ludwig Zehnder). Licht aus der Quelle trifft auf den halbdurchlässigen Spiegel S_1 und spaltet sich in die zwei Wege s_1 und s_2 auf. Der Weg

s_1 läuft vom Spiegel S_1 über S_3 nach S_4 , der Weg s_2 vom Spiegel S_1 über S_2 nach S_4 . Am Spiegel S_4 werden die Lichtwellen vereinigt und gelangen interferierend auf den Detektor.

Die relative Phase des Lichtes für die beiden Wege s_1 und s_2 kann aus dem Brechungsindexverlauf entlang der Wege berechnet werden. Die Geschwindigkeit ist durch $c(s) = c_0/n(s)$ gegeben. Dann ist

$$t_i = \int_{s_i}^{S_4} \frac{1}{c(s)} ds = \frac{1}{c_0} \int_{S_1, s_i}^{S_4} n_i(s) ds \quad (2.1.34)$$

Die Phasendifferenz von Licht mit der Vakuumwellenlänge λ_0 und damit der Frequenz $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c_0/\lambda_0$ ist

$$\begin{aligned} \delta = \omega(t_2 - t_1) &= \frac{2\pi c_0}{\lambda_0} \left(\frac{1}{c_0} \int_{S_1, s_2}^{S_4} n_2(s) ds - \frac{1}{c_0} \int_{S_1, s_1}^{S_4} n_1(s) ds \right) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\int_{S_1, s_2}^{S_4} n_2(s) ds - \int_{S_1, s_1}^{S_4} n_1(s) ds \right) \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

Die beobachtete zeitgemittelte Amplitude am Ort $x = 0$ (kann willkürlich gewählt werden!) ist nach [Mar17, Gleichung (3.2.2)] mit $\mathbf{E}(\delta) = \mathbf{E}_1(x, t) + \mathbf{E}_2(x, t)$, beide mit gleichen Amplituden $|\mathbf{E}_0|$

$$\begin{aligned} I(\delta) &= \left\langle \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \mathbf{E}^2(x, t, \delta) \right\rangle_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} 4 \mathbf{E}_0^2 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \mathbf{E}_0^2 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \\ &= 2 \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \mathbf{E}_0^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda_0} \left(\int_{S_1, s_2}^{S_4} n_2(s) ds - \int_{S_1, s_1}^{S_4} n_1(s) ds \right) \right) \\ &= 4 I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda_0} \left(\int_{S_1, s_2}^{S_4} n_2(s) ds - \int_{S_1, s_1}^{S_4} n_1(s) ds \right) \right) \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

wobei $I_0 = \frac{1}{2} \left\langle \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \mathbf{E}_i^2(0, t) \right\rangle_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \mathbf{E}_0^2$ ist.

Das heisst, dass das Ausgangssignal des Mach-Zehnder-Interferometers nicht nur von der geometrischen Weglängendifferenz, sondern auch von Unterschieden der Brechungsindices abhängt. Das Licht läuft in beiden Armen mit einer definierten Richtung. Das heisst, dass der Ausgang des Mach-Zehnder-Interferometers abhängig zum Beispiel von der Fließrichtung eines Mediums mit dem Brechungsindex n ist. Mach-Zehnder-Interferometer werden kaum zur Distanzmessung aber oftmals zur Messung von Brechungsindexdifferenzen verwendet.

2.1.3.2. Michelson-Interferometer

Literatur: (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 596]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 360]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1114])

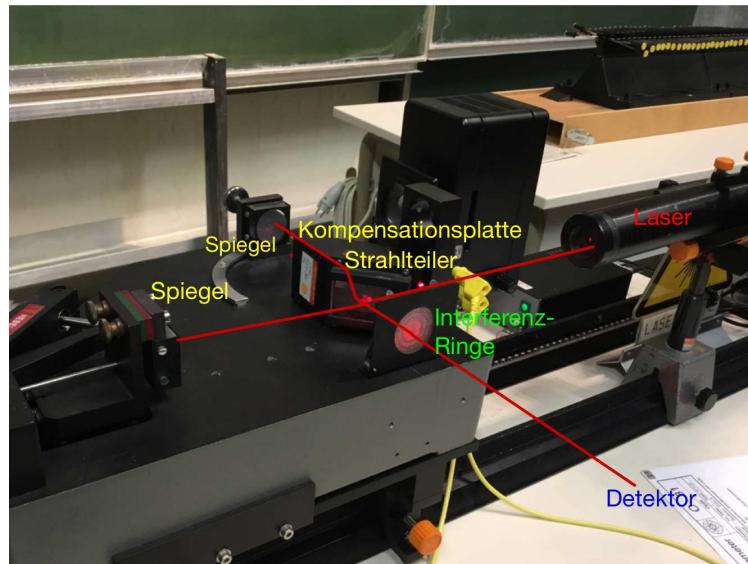


Abb. 2.36.: Bild des Michelson-Interferometers aus der Vorlesungssammlung mit eingezeichnetem Strahlengang.

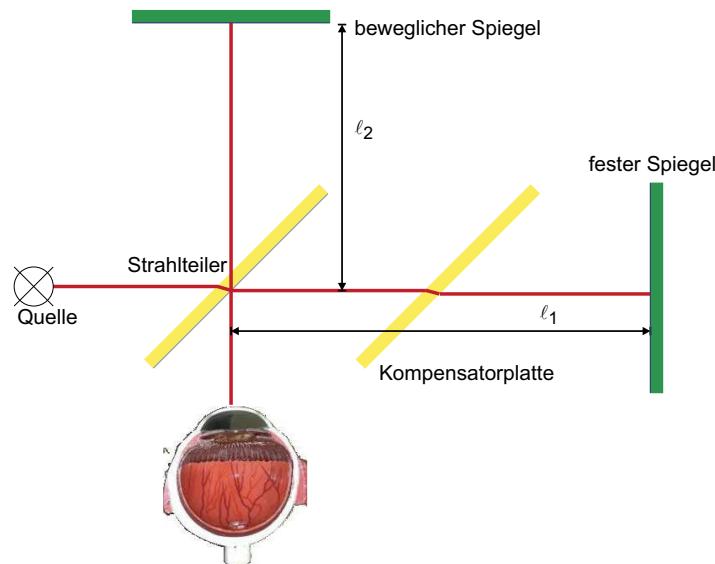


Abb. 2.37.: Schematische Zeichnung des Aufbaus eines Michelson-Interferometers aus Abb. 2.36.

Beim Michelson-Interferometer (nach Albert Michelson) wird Licht durch einen Strahlteiler in zwei Lichtwege aufgespalten. Der Weg vom Strahlteiler zum festen Spiegel sei ℓ_1 , der zum beweglichen ℓ_2 . Analog zum MACH-ZEHNDER-INTERFEROMETER (siehe Abschnitt 2.1.3.1) kann die Phase wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\delta = \omega(t_2 - t_1) &= \frac{2\pi c_0}{\lambda_0} \left(\frac{2}{c_0} \int_{\ell_2} n_2(s) ds - \frac{2}{c_0} \int_{\ell_1} n_1(s) ds \right) \\ &= \frac{4\pi}{\lambda_0} \left(\int_{\ell_2} n_2(s) ds - \int_{\ell_1} n_1(s) ds \right) \quad (2.1.37)\end{aligned}$$

Die Phase hängt also sowohl vom Weglängenunterschied wie auch von Unterschieden im Brechungsindex ab. Anders als beim MACH-ZEHNDER-INTERFEROMETER wird jeder Weg zweimal und zwar gegenläufig durchlaufen. Bewegungseffekte mitteln sich so in erster Näherung heraus.

Der gesamte Weglängenunterschied ist bei konstantem $n_i(s) = n_0$ durch $\Delta\ell = 2(\ell_2 - \ell_1)$ gegeben. Immer wenn $\Delta\ell$ ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ ist, tritt konstruktive Interferenz auf. Wird der bewegliche Spiegel um $\lambda/4$ verschoben, ändert sich $\Delta\ell$ um $\lambda/2$, dann haben wir destruktive Interferenz.

Wenn wir das Interferometer am Ausgang mit einer INTENSITÄT von I_0 betreiben und wenn wir eine Intensitätsänderung von ΔI noch messen können, dann können wir die mögliche Distanzauflösung in nichtmagnetischen Medien wie folgt berechnen:

$$I(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E^2 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) = I_0 \cos^2 \left(\frac{2\pi \frac{(2x)}{\lambda}}{2} \right) = I_0 \cos^2 \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2.1.38)$$

oder umgeschrieben

$$I(x) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left(4\pi \frac{x}{\lambda} \right) \right] \quad (2.1.39)$$

Die Ableitung dieser Gleichung ist

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\frac{2\pi I_0}{\lambda} \sin \left(4\pi \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2.1.40)$$

Die maximale Steigung, also die höchste Empfindlichkeit beträgt

$$\left| \left(\frac{dI(x)}{dx} \right) \Big|_{max} \right| = \frac{2\pi I_0}{\lambda} \quad (2.1.41)$$

Wir können also die Distanz

$$\Delta x = \frac{\Delta I}{\left. \frac{dI(x)}{dx} \right|_{max}} = \frac{\Delta I}{2\pi I_0} \lambda \quad (2.1.42)$$

noch bestimmen. Dazu muss die Position (die Phase) so gelegt werden, dass der Sinus extremal ist:

$$4\pi \frac{x_{opt}}{\lambda} = \frac{2j+1}{2} \pi, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (2.1.43)$$

Wir bekommen so den Arbeitspunkt $8\pi x_{opt} = (2j+1)\pi\lambda$ oder

$$x_{opt}(j) = \frac{2j+1}{8}\lambda, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (2.1.44)$$

Maxima der Intensität am Ausgang liegen aber bei

$$x_{max} = \frac{j}{2}\lambda, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (2.1.45)$$

und die Minima bei

$$x_{min} = \frac{2j+1}{4}\lambda, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (2.1.46)$$

Wenn zum Beispiel $\lambda = 500 \text{ nm}$ ist und $\Delta I/I_0 = 0.01$ ist, liegt der erste optimale Arbeitspunkt bei $x = 67.5 \text{ nm}$ und die mögliche Auflösung beträgt $\Delta x = 0.8 \text{ nm}$. Das Michelson-Interferometer wird häufig zur Messung von Distanzen verwendet. Bei besserem Signal-Rauschverhältnis, können kleinere Längenänderungen bestimmt werden. Wenn ein SIGNAL-RAUSCH-VERHÄLTNIS von etwa 10^{-13} erreicht wird, können Gravitationswellen detektiert werden.

2.1.3.3. Sagnac-Interferometer

Literatur: (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 701])

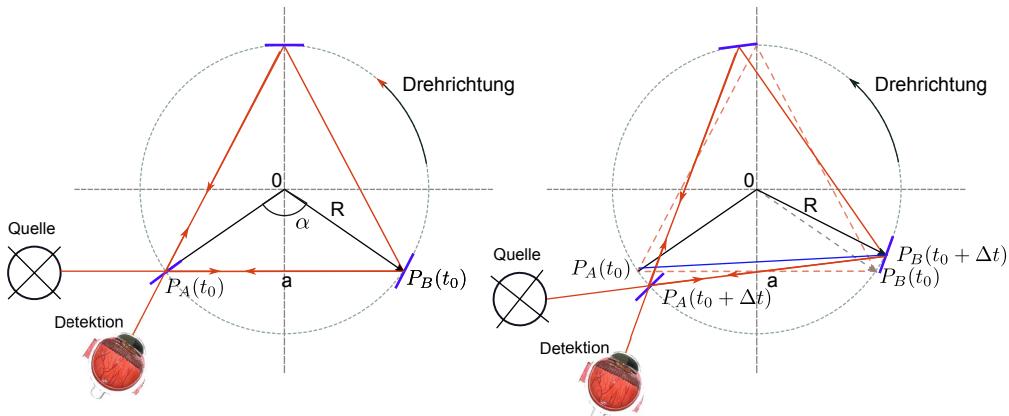


Abb. 2.38.: Sagnac-Interferometer. Rechts nach einer Laufzeit.

Beim Sagnac Interferometer (nach Georges Sagnac) läuft das Licht links- und rechts herum und interferiert dann. Die Lichtwege sind identisch, das Verschieben eines Spiegels erzeugt kein Signal. Wenn man das Sagnac-Interferometer jedoch mit der Kreisfrequenz Ω dreht, dann sind die Umlaufzeiten mit und gegen die Drehrichtung unterschiedlich. Die Behauptung ist, dass der Laufzeitunterschied zwischen der links- und der rechtsläufigen Welle

$$\Delta t = t_{rechts} - t_{links} = \frac{4A}{c^2}\Omega \quad (2.1.47)$$

ist. Dabei ist Ω die Winkelfrequenz, mit der das Interferometer rotiert, A die vom Licht eingeschlossene Fläche (in Abbildung 2.38 die Fläche des Dreiecks) und c die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Sagnac-Interferometer werden heute als GYROSKOPE verwendet. Sie messen zum Beispiel die Drehraten von Flugzeugen und werden so zur magnetfeldunabhängigen Navigation herangezogen.

Wir betrachten ein Interferometer aus n Seiten. Die Fläche des n -Ecks ist n -mal die Fläche eines einzelnen Dreiecks, und dessen Fläche $A_D = ah/2$. Beim n -Eck ist die Höhe $h = R \cos(\pi/n)$ und die Grundlinie $a = 2R \sin(\pi/n)$. Damit ist

$$A(n) = nA_D = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) R^2 \quad (2.1.48)$$

Wir brauchen nun die Strecke $\overline{P_A(t_0)P_B(t_0 + \Delta t)}$. Diese ist die Grundlinie in einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Spitzewinkel

$$\alpha_{\pm} = \frac{2\pi}{n} \pm \Omega \Delta t_{pm}. \quad (2.1.49)$$

Mit \pm können beide Fälle gleichzeitig behandelt werden. Wir brauchen noch den Winkel an der Grundlinie (zweimal der gleiche Winkel β_{\pm}

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{2}(\pi - \alpha_{\pm}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \mp \frac{\Omega \Delta t_{\pm}}{2}. \quad (2.1.50)$$

Mit dem Sinussatz für beliebige Dreiecke bekommen wir die Länge der Grundlinie

$$\begin{aligned} \frac{\ell_{\pm}}{\sin(\alpha_{\pm})} &= \frac{R}{\sin(\beta_{\pm})} \\ \implies \frac{\ell_{\pm}}{\sin\left(\frac{2\pi}{n} \pm \Omega \Delta t_{\pm}\right)} &= \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \mp \frac{\Omega \Delta t_{\pm}}{2}\right)} \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

$$\begin{aligned} \ell_{\pm} &= R \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n} \pm \Omega \Delta t_{\pm}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n} \pm \Omega \Delta t_{\pm}\right)} \\ &= R \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \pm \Omega \Delta t_{\pm} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) + O(\Delta t_{\pm}^2) \end{aligned} \quad (2.1.52)$$

Die Zeit Δt_{\pm} ist sowohl die Laufzeit von $P_A(t_0)$ nach $P_B(t_0 + \Delta t_{\pm})$ wie auch die Zeit, in der sich das Interferometer dreht. Wir haben also die Gleichungen

$$\Delta t_{\pm} = \frac{\ell_{\pm}}{c} = \frac{R}{c} \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \pm \Omega \Delta t_{\pm} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \quad (2.1.53)$$

welche gelten wenn $|\Omega| \ll \frac{1}{|\Delta t_{\pm}|}$ gilt. Die Lösungen sind

$$\Delta t_{\pm} = \frac{2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{c \mp R \Omega \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad (2.1.54)$$

Damit ist der Laufzeitunterschied (und daraus kann die Phase berechnet werden)

$$\Delta t_{\text{eine Seite}} = \Delta t_{+} - \Delta t_{-} = \frac{2nR^2\Omega \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{c^2 - R^2\Omega^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \quad (2.1.55)$$

Auch dieser Ausdruck kann entwickelt werden wenn $|\Omega| \ll \frac{1}{|\Delta t_{\pm}|}$ ist. Wir erhalten die linearisierte Gleichung,

$$\Delta t = n \Delta t_{\text{eine Seite}} = \frac{2nR^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{c^2} \quad (2.1.56)$$

und, wenn wir die Fläche $A(n)$ des n -Ecks einsetzen

$$\Delta t = \frac{4A(n)}{c^2} \Omega \quad (2.1.57)$$

Diese Gleichung müsste eigentlich mit der allgemeinen Relativitätstheorie hergeleitet werden. Für langsame Drehungen ist das Resultat jedoch korrekt. Bei einem kreisförmigen Sagnac-Interferometer (z.B. mit whispering gallery modes) ist

$$\Delta t = \frac{4\pi R^2}{c^2} \Omega = \frac{4A_{\text{Kreis}}}{c^2} \Omega \quad (2.1.58)$$

genau so gross. Mit $c = \Delta s / \Delta t$ folgt

$$\Delta s = N\lambda = c\Delta t = \frac{4A(n)}{c} \Omega \implies N = \frac{4A(n)}{c\lambda} \Omega \quad (2.1.59)$$

Beispiel: Mit $\Omega = 2\pi s^{-1}$, $A(n) = 0.01 \text{ m}^2$ und $\lambda = 632 \text{ nm}$ (HeNe-Laser) erhält man $N = 0.00132648$. Dies ist eine kleine Zahl, kann aber mit Modulationstechniken problemlos gemessen werden.

2.1.3.4. Fabry-Perot-Interferometer

Literatur: (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 670]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 399]) (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 678])

Fabry-Perot Interferometer (nach Charles Fabry und Alfred Perot) sind optische Resonatoren. Aus den Fresnelschen Gleichungen sind die Transmissionskoeffizienten für Amplituden für die beiden Polarisationsrichtungen p und s bekannt. Nach [Mar17, Gleich. (2.3.27) und (2.3.33)] können wir winkel- und polarisationsabhängige Transmissions- und Reflexionskoeffizienten definieren.

Für die Reflexion haben wir

$$r = \begin{cases} -\frac{\sin(\alpha - \gamma(\alpha))}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))}, & s\text{-Polarisation}; \\ \frac{\tan[\alpha - \gamma(\alpha)]}{\tan[\alpha + \gamma(\alpha)]}, & p\text{-Polarisation}. \end{cases} \quad (2.1.60)$$

Analog schreiben wir für die Transmission

$$t = \begin{cases} \frac{2\sin\gamma(\alpha)\cos\alpha}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))}, & s\text{-Polarisation}; \\ \frac{2\sin\gamma(\alpha)\cos\alpha}{\sin[\alpha + \gamma(\alpha)]\cos[\alpha - \gamma(\alpha)]}, & p\text{-Polarisation}. \end{cases} \quad (2.1.61)$$

Im Weiteren sind mit t und r immer diese Koeffizienten aus den Fresnelschen Formeln gemeint.

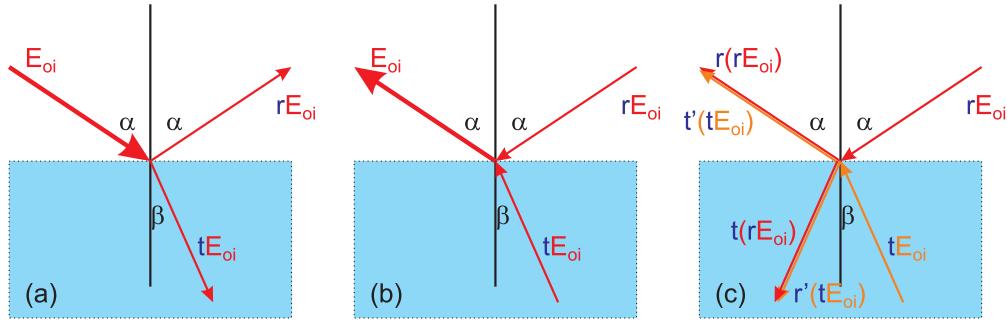


Abb. 2.39.: Stokessche Behandlung von Reflexion und Brechung (nach Hecht [Hec05])

Wir nehmen an, dass eine Welle mit der Amplitude $|\mathbf{E}_{0i}|$, die vom oberen Medium her auf die Grenzfläche auftritt, mit dem Faktor r reflektiert wird, sowie mit dem Faktor t gebrochen wird. Die Amplitude der gebrochenen Welle ist dann $t |\mathbf{E}_{0i}|$, die der reflektierten Welle $r |\mathbf{E}_{0i}|$. Das Fermatsche Prinzip bedeutet, dass auch die zeitumgekehrte Situation eine physikalisch realisierbare ist. Also ist auch die Strahlführung im Teilbild (b) oben eine realisierbare Situation. Dabei müssen wir uns klar machen, dass sowohl die einfallende Welle mit der Amplitude $r |\mathbf{E}_{0i}|$ und diejenige mit $t |\mathbf{E}_{0i}|$ eine reflektierte und eine transmittierte, gebrochene Welle erzeugen. Dabei ist für die Welle, die von unten kommt der Reflexionsfaktor r' und der Transmissionsfaktor t' . Die Situation in (c) ist nur dann äquivalent zu der in (b), wenn gilt

$$|\mathbf{E}_{0i}| = t(\alpha)t'(\beta) |\mathbf{E}_{0i}| + r(\alpha)r(\alpha) |\mathbf{E}_{0i}| \quad (2.1.62a)$$

$$0 = t(\alpha)r'(\beta) |\mathbf{E}_{0i}| + t(\alpha)r(\alpha) |\mathbf{E}_{0i}| \quad (2.1.62b)$$

Damit erhält man eine Verknüpfung der Reflexions- und Brechungskoeffizienten für den Übergang vom Medium 1 in das Medium 2 und umgekehrt. Dabei sind α und β die jeweiligen Einfallswinkel, die durch das Snelliussche Gesetz verknüpft sind.

$$t(\alpha)t'(\beta) = 1 - r^2(\alpha) \quad (2.1.63a)$$

$$r'(\beta) = -r(\alpha) \quad (2.1.63b)$$

Diese beiden Gleichungen heißen die **STOKESCHEN RELATIONEN**. Die zweite Gleichung zeigt, dass wenn r für die Reflexion am dichteren Medium steht, bei der es nach den Fresnelschen Formeln einen Phasensprung von π gibt, dass dann bei der Reflexion am optisch dünneren Medium kein Phasensprung auftritt.

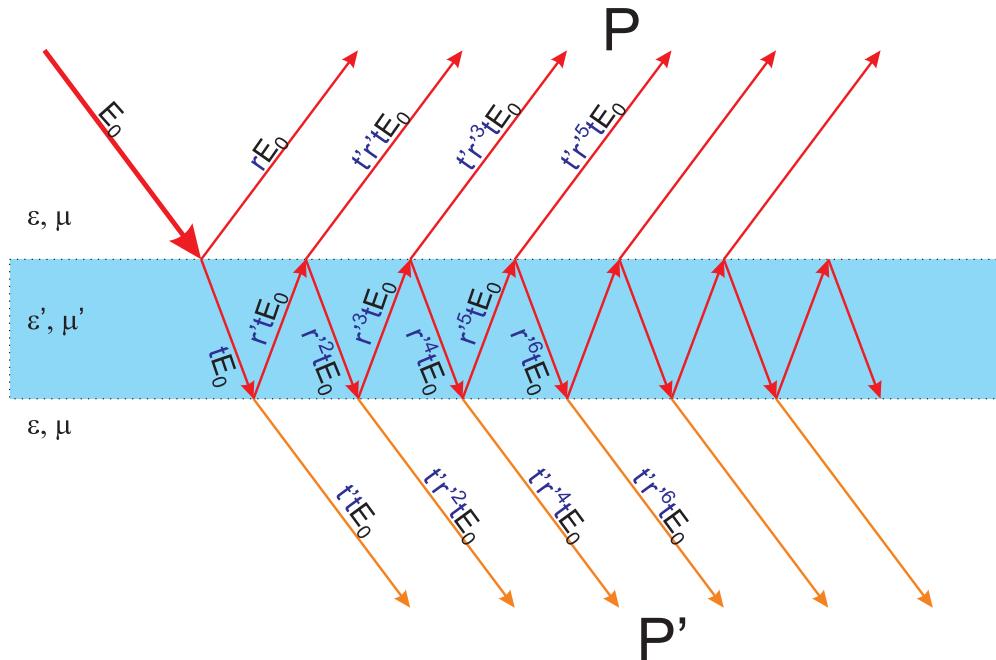


Abb. 2.40.: Strahlengang bei einem FABRY-PEROT-ETALON (nach Hecht [Hec05]). Dabei ist in der Zeichnung $|E_{0i}| = |\mathbf{E}_{0i}|$ gesetzt worden.

Wir betrachten nun die Reflexion an einem ETALON, also einer Glasplatte mit dem Brechungsindex n_G mit planparallelen Oberflächen. Im Aussenraum sei auf beiden Seiten $n = 1$. Die Abbildung zeigt die reflektierten und gebrochenen Strahlen, wobei die Konvention der Gleichung (2.1.63) verwendet wurde. Die reflektierten Strahlen interferieren in dem weit entfernten Punkt P , die transmittierten Strahlen im weit entfernten Punkt P' .

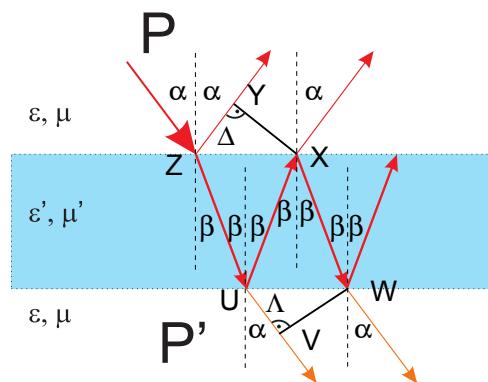


Abb. 2.41.: Strahlengang bei einem FABRY-PEROT-ETALON (nach Pérez [Pér96, p. 392])

Für das transmittierte Licht ist der Weglängenunterschied durch den Unterschied

der optischen Wege \overline{UV} und \overline{UXW} , $\Lambda = \overline{UXW} - \overline{UV}$ der relevante Unterschied. Die Strecke \overline{UXW} ist im Medium mit dem Brechungsindex n_G , im Glas. Der optische Weg ist dann

$$\overline{UXW} = 2n_G \frac{d}{\cos \beta}.$$

Weiter ist die Strecke \overline{UV} durch $\overline{UW} \sin \alpha$ gegeben. Weiter ist aber auch $\overline{UW} = 2d \tan \beta$, eine rein geometrische Überlegung, die keine optischen Wege beinhaltet. Zusammen bekommen wir

$$\overline{UV} = \overline{UW} \sin \alpha = 2d \tan \beta \sin \alpha$$

Damit ist Λ für ein Etalon der Dicke d

$$\begin{aligned} \Lambda &= \overline{UXW} - \overline{UV} \\ &= 2n_G \frac{d}{\cos \beta} - 2d \tan \beta \sin \alpha = \frac{2dn_G}{\cos \beta} \left(1 - \frac{1}{n_G} \sin \beta \sin \alpha \right) \\ &\text{mit } \sin \beta = \sin \alpha / n_G \text{ (Brechungsgesetz)} \\ &= \frac{2dn_G}{\cos \beta} \left(1 - \sin^2 \beta \right) \\ \Lambda &= 2n_G d \cos \beta \end{aligned} \tag{2.1.64}$$

Der Gangunterschied für die Reflexion Δ kann aus dem Gangunterschied für die Transmission abgeleitet werden, wobei ein Phasensprung von π berücksichtigt werden muss. Wir haben mit $\overline{ZUX} = \overline{UXW}$ und $\overline{ZY} = \overline{UV}$

$$\Delta = \frac{\lambda}{2} + 2n_G d \cos \beta \tag{2.1.65}$$

Bei den Strahlen, die in P interferieren, ist die Anzahl der inneren Reflexionen ungerade. Für den Spezialfall des senkrechten Einfalls, oder bei senkrechter Polarisierung, ergeben die Reflexionen keine Phasenänderung. Wenn $\Lambda = m\lambda$ ist, haben in P alle Wellen die gleiche Phase, ausser der ersten, deren Phase wegen $r' = -r$ um π ändert. Also ist die reflektierte Amplitude

$$|\mathbf{E}_{0r}| = r |\mathbf{E}_{0i}| + (t'r't |\mathbf{E}_{0i}| + t'r'^3t |\mathbf{E}_{0i}| + t'r'^5t |\mathbf{E}_{0i}| + \dots) \tag{2.1.66}$$

Da $\Lambda = m\lambda$ und damit die innere Phasenverschiebung 0 ist, ersetzen wir r' mit $-r$ und erhalten

$$|\mathbf{E}_{0r}| = |\mathbf{E}_{0i}| \left[r - t'rt (1 + r^2 + r^4 + \dots) \right] \tag{2.1.67}$$

Diese geometrische Reihe konvergiert bei $r^2 < 1$ gegen $1/(1 - r^2)$, so dass wir

$$|\mathbf{E}_{0r}| = |\mathbf{E}_{0i}| \left[r - \frac{t'rt}{1 - r^2} \right] = |\mathbf{E}_{0i}| r \left(1 - \frac{tt'}{1 - r^2} \right) \tag{2.1.68}$$

Nach den Stokeschen Relationen ist $tt' = 1 - r^2$ und damit die reflektierte Ampli-

tude bei senkrechtem Einfall

$$|\mathbf{E}_{0r}| = 0 \quad (2.1.69)$$

Also wird im Falle $\Lambda = m\lambda = 2n_G d \cos \beta$ oder $d \cos \beta = \frac{m\lambda}{2n_G}$ alles Licht transmittiert.

Der zweite Spezialfall ist $\Lambda = (m + \frac{1}{2})\lambda$. Dann sind die relativen Phasen benachbarter Wellen, unter der Berücksichtigung dass $r' = -r$ und dass die innere Phase π ist, die Phasenverschiebung π , ausser bei den ersten beiden Wellen, die gleichphasig sind. Wir erhalten für die skalare Amplitude

$$|\mathbf{E}_{0r}| = r |\mathbf{E}_{0i}| + t' r t |\mathbf{E}_{0i}| - t' r^3 t |\mathbf{E}_{0i}| + t' r^5 t |\mathbf{E}_{0i}| - \dots \quad (2.1.70)$$

oder

$$|\mathbf{E}_{0r}| = |\mathbf{E}_{0i}| r [1 + t' t (1 - r^2 + r^2 - \dots)] \quad (2.1.71)$$

Die Reihe in der Klammer konvergiert gegen $1/(1 + r^2)$. Wir erhalten also

$$|\mathbf{E}_{0r}| = |\mathbf{E}_{0i}| r \left[1 + \frac{t' t}{1 + r^2} \right] \quad (2.1.72)$$

Mit $t' t = 1 - r^2$ erhalten wir

$$|\mathbf{E}_{0r}| = |\mathbf{E}_{0i}| r \left[1 + \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \right] = |\mathbf{E}_{0i}| r \frac{1 + r^2 + 1 - r^2}{1 + r^2} = |\mathbf{E}_{0i}| \frac{2r}{1 + r^2} \quad (2.1.73)$$

Damit wird die reflektierte Intensität maximal, nämlich

$$I_r = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} \frac{|\mathbf{E}_{0r}|^2}{2} = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2} \frac{|\mathbf{E}_{0i}|^2}{2} \quad (2.1.74)$$

Den allgemeinen Fall kann man berechnen, indem man die durch die einfallende Welle $\tilde{\mathbf{E}}_0(t) = \mathbf{E}_{0i} e^{i\omega t}$ angeregten reflektierten Teilwellen aufschreibt, wobei zwischen zwei Teilwellen die Phasenverschiebung $\delta = k_0 \Lambda$ ist. Wir betrachten eine definierte Polarisationsrichtung s oder p , so dass wir betragsmäßig schreiben können

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1r}(t) &= |\mathbf{E}_{0i}| r e^{i\omega t} \\ \tilde{E}_{2r}(t) &= |\mathbf{E}_{0i}| t' r' t e^{i(\omega t - \delta)} \\ \tilde{E}_{3r}(t) &= |\mathbf{E}_{0i}| t' r'^3 t e^{i(\omega t - 2\delta)} \\ \tilde{E}_{4r}(t) &= |\mathbf{E}_{0i}| t' r'^5 t e^{i(\omega t - 3\delta)} \\ &\vdots \\ \tilde{E}_{Nr}(t) &= |\mathbf{E}_{0i}| t' r'^{(2N-3)} t e^{i(\omega t - (N-1)\delta)} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.1.75)$$

Die resultierende Welle ist die Summe aller Teilwellen

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{1r} + \tilde{E}_{2r} + \tilde{E}_{3r} + \tilde{E}_{4r} + \dots \quad (2.1.76)$$

Eingesetzt erhalten wir die Summe

$$\tilde{E}_r = |\mathbf{E}_{0i}| r e^{i\omega t} + |\mathbf{E}_{0i}| t' r' t e^{i(\omega t - \delta)} + |\mathbf{E}_{0i}| t' r'^3 t e^{i(\omega t - 2\delta)} + |\mathbf{E}_{0i}| t' r'^5 t e^{i(\omega t - 3\delta)} + \dots \quad (2.1.77)$$

Zusammengefasst kann diese so umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r &= |\mathbf{E}_{0i}| e^{i\omega t} \left\{ r + t' r' t e^{-i\delta} \left[1 + r'^2 e^{-i\delta} + r'^4 e^{-i(2\delta)} + r'^6 e^{-i(3\delta)} + \dots \right] \right\} \\ &= |\mathbf{E}_{0i}| e^{i\omega t} \left\{ r + t' r' t e^{-i\delta} \left[1 + (r'^2 e^{-i\delta})^1 + (r'^2 e^{-i\delta})^2 + (r'^2 e^{-i\delta})^3 + \dots \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1.78)$$

Für $|r'^2 e^{-i\delta}| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe. Wir erhalten

$$\tilde{E}_r = |\mathbf{E}_{0i}| e^{i\omega t} \left[r + \frac{t' r' t e^{-i\delta}}{1 - r'^2 e^{-i\delta}} \right] \quad (2.1.79)$$

Mit den Stokeschen Relationen $r' = -r$ und $t't = 1 - r^2$ bekommen wir

$$\tilde{E}_r = |\mathbf{E}_{0i}| e^{i\omega t} \left[r - \frac{r(1 - r^2) e^{-i\delta}}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right] = |\mathbf{E}_{0i}| e^{i\omega t} \left[\frac{r(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right] \quad (2.1.80)$$

Die reflektierte optische Intensität ist $I_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \tilde{E}_r \tilde{E}_r^*$ und somit

$$I_r = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{|\mathbf{E}_{0i}|^2}{2} r^2 \frac{(1 - e^{-i\delta})(1 - e^{+i\delta})}{(1 - r^2 e^{-i\delta})(1 - r^2 e^{+i\delta})} = I_i \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} \quad (2.1.81)$$

Mit einer analogen Ableitung berechnet man die transmittierte Intensität

$$I_t = I_i \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} \quad (2.1.82)$$

da das transmittierte Licht sich im gleichen Medium wie das einfallende Licht sich bewegt. Mit $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2(\delta/2)$ werden I_t und I_r

$$\begin{aligned} I_r &= I_i \frac{\left[\frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2(\delta/2)}{1 + \left[\frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2(\delta/2)} \\ I_t &= I_i \frac{1}{1 + \left[\frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2(\delta/2)} \end{aligned} \quad (2.1.83)$$

Wir haben dabei angenommen, dass keine Energie absorbiert wird¹. Dann ist $I_i = I_t + I_r$. Ein Maximum in der Transmission erhält man, wenn der Nenner möglichst klein, das heisst, dass in Gleichung (2.1.82) $\cos \delta = 1$ ist. Dann ist

¹Dies ist bei metallbedampften Spiegeln nicht der Fall.

$$I_t|_{max} = I_i \quad (2.1.84)$$

und

$$I_r|_{min} = 0 \quad (2.1.85)$$

Umgekehrt ist die Transmission minimal, wenn der Nenner bei I_t maximal ist, also wenn in Gleichung (2.1.82) $\cos \delta = -1$ ist

$$I_t|_{min} = I_i \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^2)^2} \quad (2.1.86)$$

und

$$I_r|_{max} = I_i \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2} \quad (2.1.87)$$

Es hat sich eingebürgert, dass FABRY-PEROT-INTERFEROMETER mit der Kennzahl FINESSEFAKTOR charakterisiert werden:

$$F = \left(\frac{2r}{1 - r^2} \right)^2 \quad (2.1.88)$$

Dann gilt für die Intensitätsverhältnisse

$$\begin{aligned} \frac{I_r}{I_i} &= \frac{F \sin^2(\delta/2)}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \\ \frac{I_t}{I_i} &= \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \end{aligned} \quad (2.1.89)$$

wobei die Funktion $[1 + F \sin^2(\delta/2)]^{-1} = \mathcal{A}(\delta)$ auch AIRY-FUNKTION genannt wird².

²Achtung! Es gibt mehrere Definitionen der Airy-Funktion.

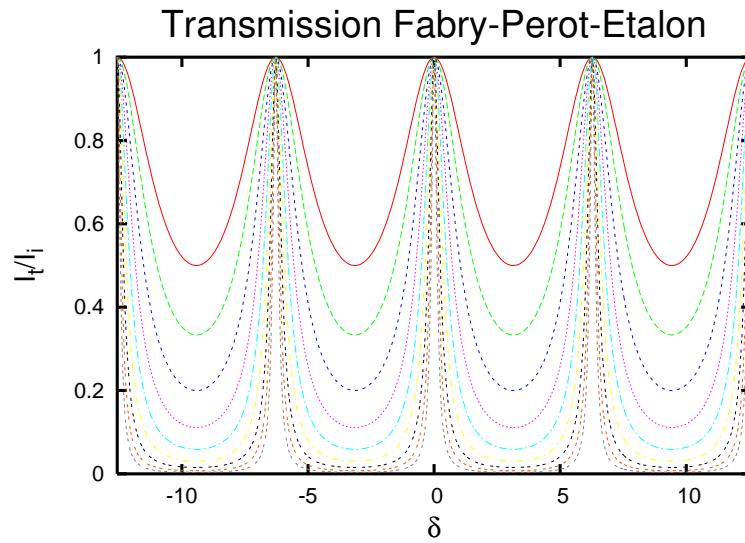


Abb. 2.42.: Transmission durch ein Fabry-Perot-Etalon in Abhängigkeit von der Finesse F . Von oben nach unten sind die Transmissionskurven für $F = 1, F = 2, F = 4, F = 8, F = 16, F = 32, F = 64, F = 128$ und $F = 256$ dargestellt.

In der Reflexion sind die gut reflektierenden Bereiche die Bereiche der stark unterdrückten Transmission.

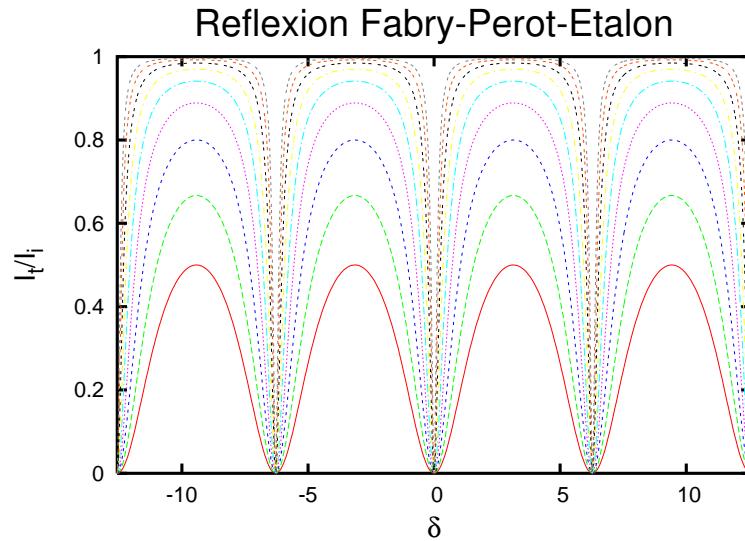


Abb. 2.43.: Reflexion an einem Fabry-Perot-Etalon in Abhängigkeit von der Finesse F . Von unten nach oben sind die Reflexionskurven für $F = 1, F = 2, F = 4, F = 8, F = 16, F = 32, F = 64, F = 128$ und $F = 256$ dargestellt.

Die Halbwertsbreite der Transmissionskurven ist durch

$$\frac{1}{2} = \frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta_{1/2}/2)} \quad (2.1.90)$$

gegeben. Daraus folgt

$$\delta_{1/2} = 2 \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{F}} \right) \quad (2.1.91)$$

Das Verhältnis des Abstandes benachbarter Maxima zu der Halbwertsbreite heisst FINESSE und ist

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{F}}{2} \quad (2.1.92)$$

Die einfachsten FABRY-PEROT-SPEKTROMETER haben ein $\mathcal{F} \approx 30$. Werte von $\mathcal{F} \approx 1000$ sind an der Grenze des technisch machbaren. Wenn bei dem Fabry-Perot-Spektrometer Absorption vorhanden ist, müssen kompliziertere Gleichungen, die Sie zum Beispiel in Hecht [Hec05, S. 617] finden, verwendet werden.

2.1.3.5. Michelson-Sterninterferometer

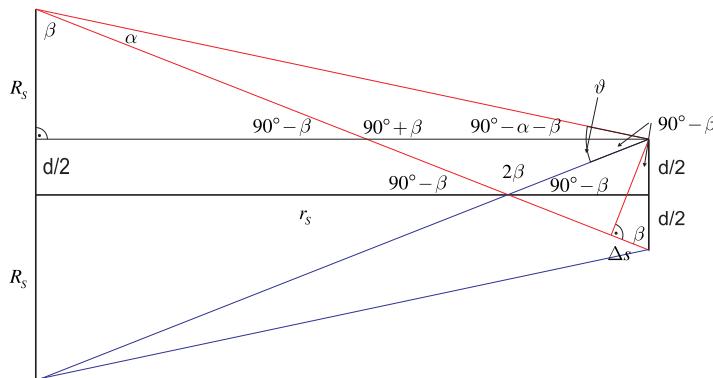


Abb. 2.44.: Strahlengang im Michelson-Sterninterferometer

Das Michelson-Sterninterferometer (nach Albert Michelson) ist ein WEISSLICHTINTERFEROMETER, das aus der Interferenz um den Weglängenunterschied null den Durchmesser von Sternen bestimmen kann. Nach Abbildung 2.44 ist die maximale Phasenverschiebung von einem Punkt am Rande des Sterns aus gesehen

$$\Delta s_{max} = \overline{R_2S_1} - \overline{R_2S_2} = \overline{R_1S_2} - \overline{R_1S_1} \approx d \sin(90^\circ - \beta) \quad (2.1.93)$$

Die Winkel können umgerechnet werden:

$$\vartheta = 180^\circ - \alpha - 2\beta \implies 90^\circ - \beta = \frac{\vartheta + \alpha}{2} \quad (2.1.94)$$

Das ergibt die Näherungslösung

$$\Delta s_{max} \approx d \sin\left(\frac{\vartheta + \alpha}{2}\right) \quad (2.1.95)$$

Daraus ergibt sich für den Sterndurchmesser

$$2R_S \approx r_S \vartheta \quad (2.1.96)$$

Der Winkel α ist klein. Mit $\alpha \ll \vartheta$ erhalten wir

$$\Delta s_{max} \approx \frac{d}{2} \frac{2R_S}{r_S} = \frac{R_S}{r_S} d \quad (2.1.97)$$

Die Quelle ist inkohärent, also muss für die Interferenz gelten

$$\Delta s_{max} \approx \frac{R_S d}{r_S} \leq \frac{\lambda}{2} \quad (2.1.98)$$

Im Michelson-Sterninterferometer wird der Kontrast

$$K = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (2.1.99)$$

gemessen. Daraus wird die erste Nullstelle d_S bestimmt (dort ist $\Delta s_{max} = \lambda/2$).

$$R_S = r_s \frac{\lambda}{2d_S} \quad (2.1.100)$$

Beispiel: Betelgeuze (α -Orionis): $r_S = 310$ ly und Winkeldurchmesser $\vartheta = 2R_S/r_S = 0.04''$

$$D = 2R_S = 4.1 \cdot 10^8 \text{ km} = 2.33 \text{ AU} \quad (2.1.101)$$

2.1.3.6. Hanbury Brown und Twiss-Interferometer

Das Hanbury Brown and Twiss Interferometer (nach Robert Hanbury Brown und Richard Q. Twiss) ist ein Intensitätsinterferometer. Es misst die Korrelation in der Photonenzahl.

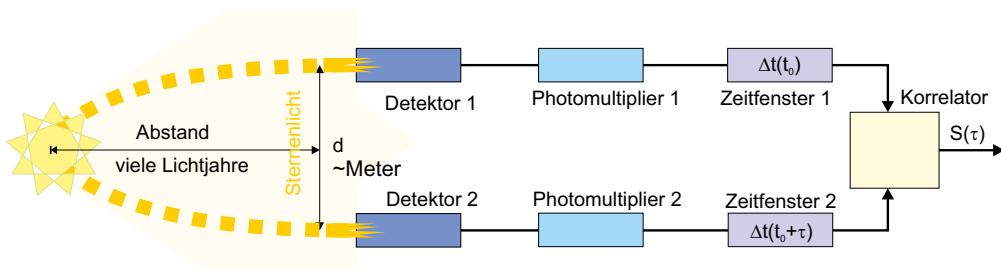


Abb. 2.45.: Schematischer Aufbau eines Intensitäts-Korrelationsinterferometers nach Hanbury Brown und Twiss (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.4])

Abbildung 2.45 zeigt den Aufbau dieses Interferometers. Die Berechnung des Korrelators nach [HT57; HDA67; Han+67] lautet

$$S(\tau) = \int_0^{\Delta t} \frac{I_1(t) \cdot I_2(t + \tau)}{\langle I^2(t) \rangle} dt = \frac{1}{\langle N^2 \rangle} \int_0^{\Delta t} \frac{dN_1(t)}{dt} \cdot \frac{dN_2(t + \tau)}{dt} dt \quad (2.1.102)$$

$S(\tau)$ ist ein Mass für die Kohärenz. Die Kohärenzlänge ergibt den Sterndurchmesser! Die Korrelationsfunktion ist

$$\Gamma_\lambda^2(d) = \left| \frac{2J_1\left(\frac{\pi\theta_{Stern}d}{\lambda}\right)}{\frac{\pi\theta_{Stern}d}{\lambda}} \right|^2 \quad (2.1.103)$$

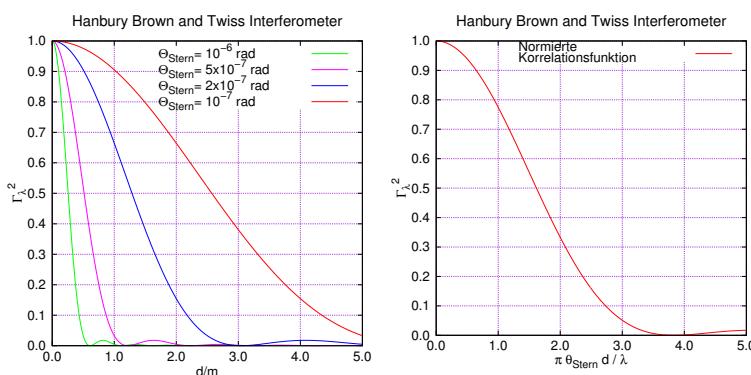


Abb. 2.46.: Empfindlichkeitskurven des Hanbury Brown und Twiss-Interferometers. Links in Abhängigkeit des Sternradius, rechts normiert [HT57; HDA67; Han+67].

Abbildung 2.46 zeigt die Empfindlichkeitskurven. Abbildung 2.47 zeigt die Zusammenhänge zwischen Sichtwinkel, Sterndurchmesser und Abstand der Detektoren.

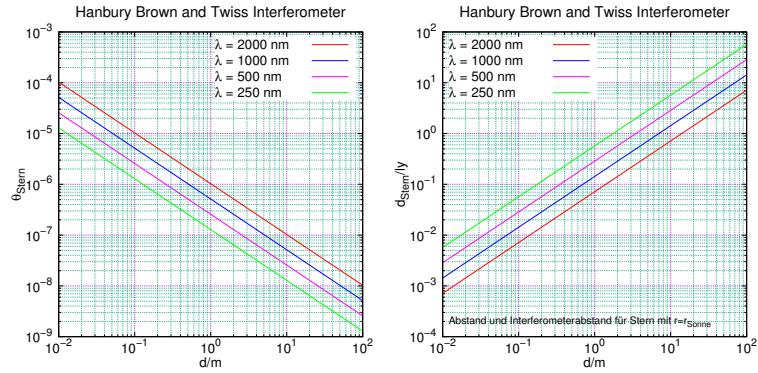


Abb. 2.47.: Sichtwinkel und Sterndurchmesser im Hanbury Brown und Twiss-Interferometer. Links Abstand der Detektoren und Sichtwinkel, rechts Abstand der Detektoren und Sterndurchmesser [HT57; HDA67; Han+67].

2.1.3.7. Interferometer als Spektrometer

Im Abschnitt 2.1.3.4 wurden die folgenden Gleichungen abgeleitet

$$I_r = I_i \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} \quad \text{Gleichung (2.1.81)}$$

sowie

$$I_t = I_i \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} \quad \text{Gleichung (2.1.82)}$$

Mit $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2(\delta/2)$ werden I_t und I_r

$$I_r = I_i \frac{\left[\frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2(\delta/2)}{1 + \left[\frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2(\delta/2)} \quad \text{Gleichungen (2.1.83)}$$

$$I_t = I_i \frac{1}{1 + \left[\frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2(\delta/2)}$$

Es wurde angenommen, dass keine Energie absorbiert wird. Dann ist $I_i = I_t + I_r$. Ein Maximum in der Transmission erhält man, wenn der Nenner möglichst klein, das heisst, dass in Gleichung (2.1.82) $\cos \delta = 1$ ist. Dann ist

$$I_t|_{max} = I_i \quad \text{und} \quad I_r|_{min} = 0$$

Umgekehrt ist die Transmission minimal, wenn der Nenner bei I_t maximal ist, also wenn in Gleichung (2.1.82) $\cos \delta = -1$ ist

$$I_t|_{min} = I_i \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^2)^2} \quad \text{und} \quad I_r|_{max} = I_i \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2}$$

Es hat sich eingebürgert, dass FABRY-PEROT-INTERFEROMETER mit der Kennzahl FINESSEFAKTOR charakterisiert werden:

$$F = \left(\frac{2r}{1 - r^2} \right)^2$$

Dann gilt für die Intensitätsverhältnisse

$$\begin{aligned} \frac{I_r}{I_i} &= \frac{F \sin^2(\delta/2)}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \\ \frac{I_t}{I_i} &= \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \end{aligned}$$

wobei die Funktion $[1 + F \sin^2(\delta/2)]^{-1} = \mathcal{A}(\delta)$ auch AIRY-FUNKTION genannt wird.

Die Grösse δ wird durch die Phasenverschiebung zwischen zwei benachbarten Teilwellen, also nach einem Umlauf gegeben. Wenn die beiden Spiegel im Abstand L sind, dann ist die resultierende Phasenverschiebung mit $k_0 = 2\pi/\lambda$

$$\delta(\lambda) = k_0 L = 2\pi \frac{L}{\lambda} \mod 2\pi \quad (2.1.104)$$

Wir interessieren uns für den Ort der grössten Steigung z.B. der Transmissionskurve. Wir ersetzen $\sin(\delta/2) = x$ und leiten nach x ab. Damit haben wir die Empfindlichkeitskurve. Eine weitere Ableitung nach x ergibt den Verlauf der Empfindlichkeit. Deren Maximum erhalten wir als Nullstelle nach einer weiteren Ableitung nach x .

Wir müssen also die Gleichung

$$\frac{d^3}{dx^3} \frac{1}{1 + Fx^2} = \frac{24F^2x}{(Fx^2 + 1)^3} - \frac{48F^3x^3}{(Fx^2 + 1)^4} = -\frac{24(F^3x^3 - F^2x)}{(Fx^2 + 1)^4} = 0 \quad (2.1.105)$$

lösen. Der Nenner hat die Nullstellen

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{nicht interessant;} \\ \frac{1}{\sqrt{F}}, & \text{erste Lösung;} \\ -\frac{1}{\sqrt{F}}, & \text{zweite Lösung.} \end{cases} \quad (2.1.106)$$

und daraus mit $\delta = 2 \arcsin(x)$ sowie $\lambda = 2\pi L / \delta$

$$\lambda_j = \begin{cases} \frac{\pi L}{\arcsin(1/\sqrt{F})}, & \text{erste Lösung;} \\ -\frac{\pi L}{\arcsin(-1/\sqrt{F})}, & \text{zweite Lösung.} \end{cases} \quad (2.1.107)$$

Wenn die Kurven dargestellt werden, ist dies gerade der Ort der grössten Steigung links und rechts des Transmissionsmaximums. Die Finesse F gibt also die Empfindlichkeit eines Spektrometers an.

2.2. Koordinatensysteme

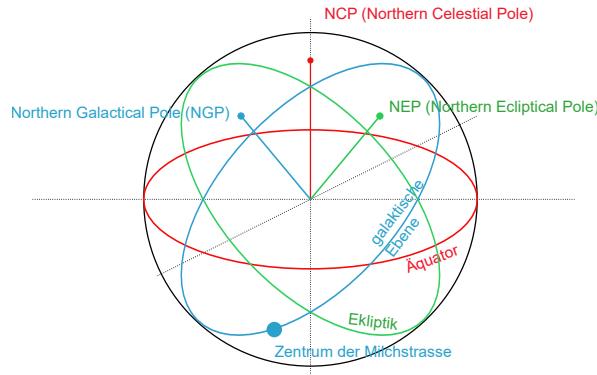


Abb. 2.48.: Astronomische Koordinatensysteme

Wenn wir in den Himmel schauen, sehen wir Sterne. Wir verwenden dabei unterschiedliche Referenzsysteme, mathematisch Koordinatensysteme genannt. Diese sind in der Abbildung 2.48 zusammengefasst, wobei das einfachste System, das Horizontsystem nicht eingezeichnet ist.

2.2.1. Horizontsystem

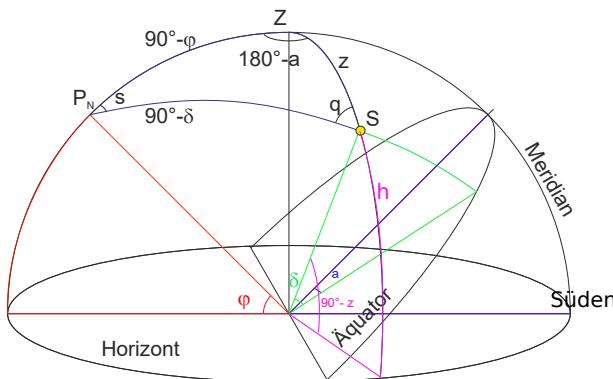


Abb. 2.49.: Das astronomische Dreieck und die Koordinatensysteme

Das **Horizontsystem** beschreibt die Lage eines Sterns anhand zweier Winkelkoordinaten, der Höhe h über dem Horizont und dem Azimut a der Ebene durch Beobachter, Zenit und Stern. Das Azimut a wird von Süden (0°) aus Richtung Westen (90°) gemessen. Die Wertebereiche der Höhe und des Azimuts sind $0 \leq h \leq 90^\circ$ und $0 \leq a \leq 360^\circ$. Anstelle der Höhe h kann auch die Zenitdistanz z verwendet werden, mit $z = 90^\circ - h$.

Dieses Horizontsystem gibt jedem Stern an unterschiedlichen Orten zur gleichen Zeit oder am gleichen Ort zu unterschiedlichen Zeiten eine andere Koordinate.

2.2.2. Äquatorsystem

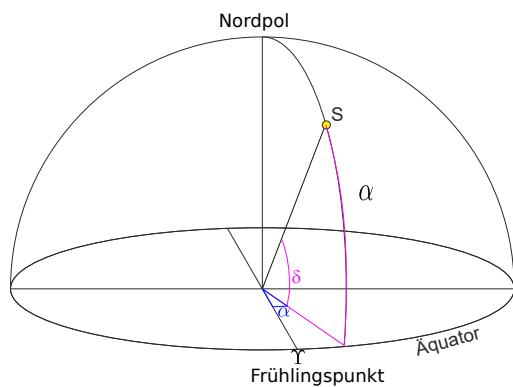


Abb. 2.50.: Winkel im Äquatorsystem.

Das ÄQUATORSYSTEM (siehe Abb. 2.50) verwendet als Koordinaten die Rektaszension α (oder auch a) und die Deklination δ . Die Rektaszension ist die Länge, gemessen vom Frühlingspunkt Υ aus. Der Frühlingspunkt ist der Ort, an dem sich der Himmelsäquator im Frühling (21. 3.) die Ebene der Ekliptik schneidet. Die Deklination ist die Höhe des Sternes über der Äquatorebene. Dieses Koordinatensystem rotiert bezüglich der Erde.

Wenn der Meridian des Beobachters als Referenzpunkt für die Länge verwendet wird, verwendet man anstelle der Rektaszension den Stundenwinkel τ . Im Gegensatz zum Horizontsystem ist der Erdäquator die Bezugsebene.

2.2.3. Ekliptikales System

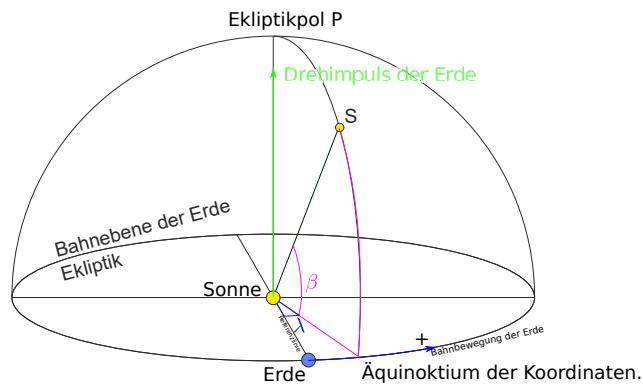


Abb. 2.51.: Winkel im ekliptikalens System.

Im ekliptikalens System (siehe Abb. 2.51) verwendet man die Bahnebene der Erde. Der Ursprung ist in der Sonne, die Referenzachse ist die Verbindungsline Sonne-Erde. Als Koordinaten werden die ELIPTIKALE LÄNGE λ und die ELIPTIKALE BREITE β verwendet.

Mit Hilfe dieses ekliptikalens Systems können die Phänomene Präzession und Nutation sowie die Schwankungen der Erddrehachse beschrieben werden.

2.2.4. Galaktisches System

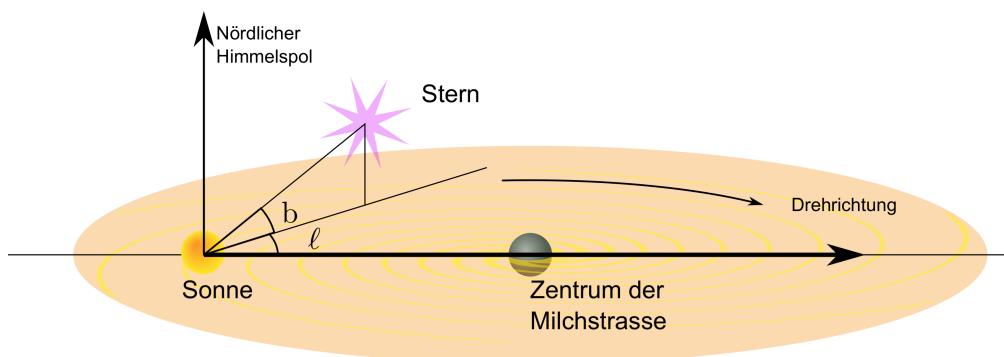


Abb. 2.52.: Galaktisches Koordinatensystem

Abbildung 2.52 zeigt das galaktische Koordinatensystem. Der GALAKTISCHE ÄQUATOR ist die Schnittmenge der Himmelskugel mit der Mittelebene der Milchstrasse. Senkrecht zu dieser Mittelebene steht ausgehend von der Erde die Richtung zum nördlichen galaktischen Pol (NGP). Der Winkel zwischen der Verbindungsline

Erde-galaktisches Zentrum und der Projektion der Verbindungsgeraden zum Stern auf die galaktische Mittelebene heißt GALAKTISCHE LÄNGE, ℓ . Die Elevation der Sichtlinie zum Stern über der galaktischen Mittelebene heißt GALAKTISCHE BREITE, b . Die wechselseitigen Beziehungen der Koordinatensysteme sind in Abbildung 2.48 angegeben. Zur Umrechnung der Koordinaten wird die sphärische Trigonometrie benötigt (siehe C.5.1). Für mehr Informationen siehe auch [CO07, Kap. 24.3].

2.2.5. Galaktozentrisches System

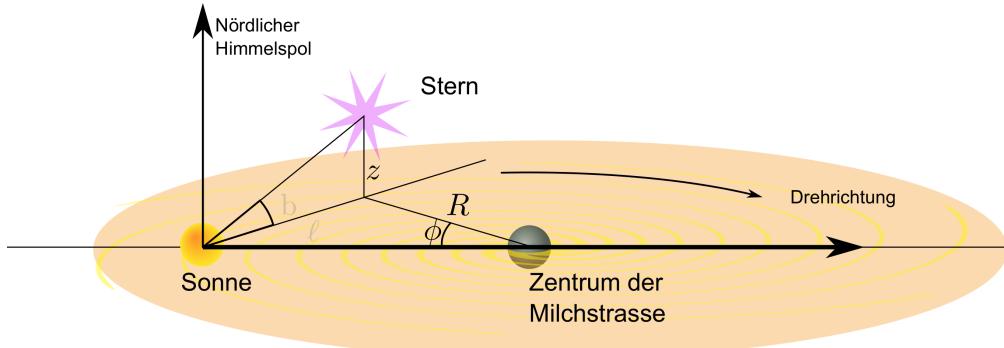


Abb. 2.53.: Galaktozentrisches Koordinatensystem

Abbildung 2.53 zeigt das galaktozentrische Koordinatensystem. Der Winkel ϕ sowie die Distanz zum galaktischen Zentrum in der Mittelebene der Milchstraße sind zwei der drei Koordinaten eines zylindrischen Koordinatensystems. Die dritte Koordinate ist die Höhe z über der galaktischen Mittelebene. Dieses galaktozentrische System wird zur Berechnung der Dynamik in der Milchstraße verwendet. Zur Umrechnung der Koordinaten wird die sphärische Trigonometrie benötigt (siehe C.5.1). Für mehr Informationen siehe auch [CO07, Kap. 24.3].

2.2.6. Längenmasse in der Astrophysik

Die Längenmasse des täglichen Lebens sind für die Astrophysik zu unhandlich. Deshalb werden häufig Masse verwendet, die vom SI abweichen. Die «International Astronomic Union» koordiniert die Messverfahren und die Definitionen im Bereich der Astronomie [Int21; Sei92].

2.2.6.1. Astronomische Einheit

Die Bahn der Erde um die Sonne ist in etwa kreisförmig. Ursprünglich wurde der mittlere Abstand zwischen Erde und Sonne als Astronomische Einheit definiert. Da dieser mittlere Abstand aber bei den heute üblichen Messgenauigkeiten variiert, wird die Astronomische Einheit seit 2012 definiert [IAU12] als:

$$1 \text{ Astronomische Einheit} = 1 \text{ Astronomic Unit} = 1 \text{ AU} := 149\,597\,870\,700 \text{ m} \quad (2.2.1)$$

Die Astronomische Einheit ist ein bequemes Längenmass innerhalb des Sonnensystems.

2.2.6.2. Lichtjahr

Die Distanz zu den nächsten Sternen ist so gross, dass auch mit der Einheit AU unhandliche Zahlen entstehen würden. Deshalb verwendet man häufig das «anschauliche» Längenmass Lichtjahr [Sei92, p. 716]. Diese Länge ist die Distanz, die Licht im Vakuum in einem Jahr (= 365.25 d, Definition!) zurücklegt.

$$\begin{aligned} 1 \text{ Lichtjahr} &= 1 \text{ ly} := 9\,460\,730\,472\,580\,800 \text{ m} \\ &= 9.460\,730\,472\,580\,8 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9.460\,730\,472\,580\,8 \text{ Pm} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Untergeordnete Längenmasse sind auch

$$\begin{aligned} 1 \text{ Lichttag} &= 1 \text{ ld} := 25\,902\,068\,371\,200 \text{ m} \\ &= 2.590\,206\,837\,120\,0 \cdot 10^{13} \text{ m} \\ &= 25.902\,068\,371\,2 \text{ Tm} \end{aligned} \quad (2.2.3a)$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ Lichtstunde} &= 1 \text{ lh} := 1\,079\,252\,848\,800 \text{ m} = 1.079\,252\,848\,8 \cdot 10^{12} \text{ m} \\ &= 1.079\,252\,848\,8 \text{ Tm} \end{aligned} \quad (2.2.3b)$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ Lichtminute} &= 1 \text{ lm} := 17\,987\,547\,480 \text{ m} = 1.798\,754\,748 \cdot 10^{10} \text{ m} \\ &= 17.987\,547\,48 \text{ Gm} \end{aligned} \quad (2.2.3c)$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ Lichtsekunde} &= 1 \text{ ls} := 299\,792\,458 \text{ m} = 2.997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m} \\ &= 299.792\,458 \text{ Mm} \end{aligned} \quad (2.2.3d)$$

Eine Lichtsekunde ist etwa die Distanz von der Erde zum Mond.

2.2.6.3. Parsec

Der nächste Stern, PROXIMA CENTAURI, ist etwa 4.247 ly entfernt. In der Astronomie ist für solche Distanzen eine andere Einheit gebräuchlich, die sich aus den Winkelmessungen ableitet.

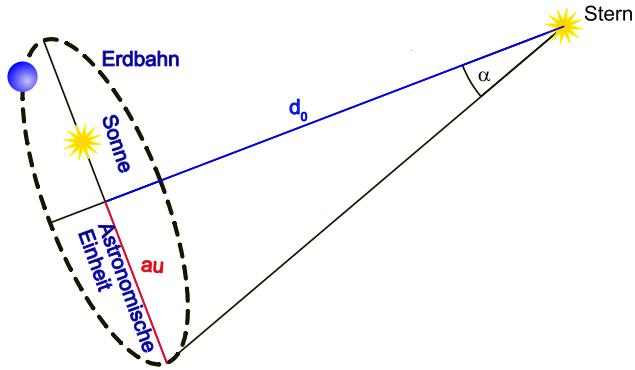


Abb. 2.54.: Definition der Parallaxensekunde

Die Skizze in Abbildung 2.54 zeigt die Erdbahn um die Sonne. Die Astronomische Einheit (AU) entspricht etwa der grossen Halbachse a der Erdbahn. Diese Länge ist heute eine definierte Einheit (siehe Abschnitt 2.2.6.1). Ein Stern, der eine Parallaxensekunde entfernt ist, ist die dritte Ecke eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete der Länge 1 AU und dem Gegenwinkel $\alpha = 1''$. Von der Erdbahn aus gesehen bewegt sich der Stern in einem halben Jahr um den Parallaxenwinkel $2''$, sofern die Verbindungsstrecke Sonne-Stern senkrecht auf der Ekliptik steht.

Mit der Beziehung $\tan(\alpha) = \frac{a}{d_0} = \frac{1 \text{ AU}}{d_0}$ kann d_0 , die Distanz einer Parallaxensekunde, berechnet werden:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Parallaxensekunde} &= 1 \text{ pc} = 30\,856\,775\,814\,672\,000 \text{ m} \\ &= 3.085\,677\,581\,467\,2 \cdot 10^{16} \text{ m} \\ &= 30.856\,775\,814\,672 \text{ Pm} = 3.261\,563\,78 \text{ ly} \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

2.3. Störeinflüsse

2.3.1. Seeing



© Othmar Marti

Abb. 2.55.: SEEING am Beispiel eines Bildes des Klosters Wiblingen gesehen vom Eselsberg [Mar18].

2.3.2. Guide Stars

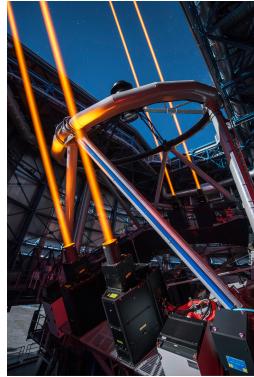


Abb. 2.56.: ESA Guide Star System des Paranal Observatoriums (ESO/G. Hüdepohl [CC BY 4.0](<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)], via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_most_powerful_laser_guide_star_system_in_the_world_sees_first_light_at_the_Paranal_Observatory.jpg).

2.3.3. Brechung in der Atmosphäre

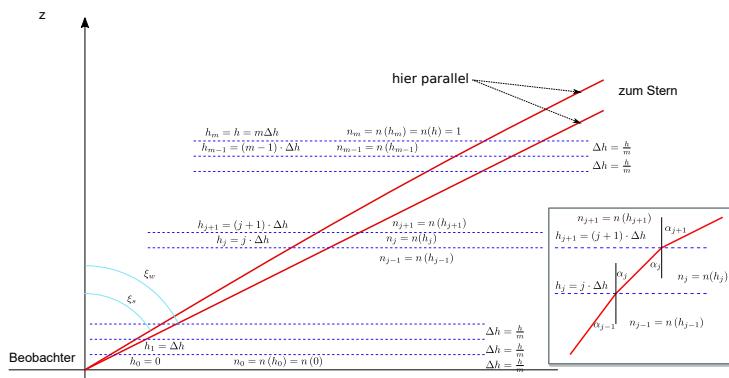


Abb. 2.57.: Durch die Brechung in der Atmosphäre werden horizontnahe Sterne höher gesehen als sie wirklich sind.

Aus der Abbildung 2.57 kann nach [Wal68, Kap. 5] die Winkelablenkung eines horizontnahen Lichtstrahls durch die höhenabhängige Dichte der Atmosphäre berechnet werden. Dabei denkt man sich die Atmosphäre in dünne horizontale und homogene Schichten aufgeteilt, mit jeweils einem konstanten Brechungsindex $n(h_i)$.

An jeder Grenze kann mit dem Brechungsgesetz (siehe auch O. Marti [Mar17]) die Winkeländerung berechnet werden. Nach dem Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$ erhält man

$$\rho = a \cdot (n_0 - 1) \tan(\zeta_S) \quad \text{für } \zeta_S < 45^\circ \quad (2.3.1)$$

Dabei ist $a \approx 1$. a hängt vom Aufbau der Atmosphäre und ihrer Temperatur, Luftfeuchtigkeit ab.

Im Mittel ist $\rho = 58.2''$.

2.4. Distanzmessung mit optischen Methoden

Das Bild auf der Netzhaut (oder einer Kamera) hängt von der Distanz der Objekte, ihrer Lage und der Lage der Kamera ab. Wenn die Kamera verschoben wird ändert sich das Bild. Aus den Änderungen können Distanzen bestimmt werden.

2.4.1. Triangulation

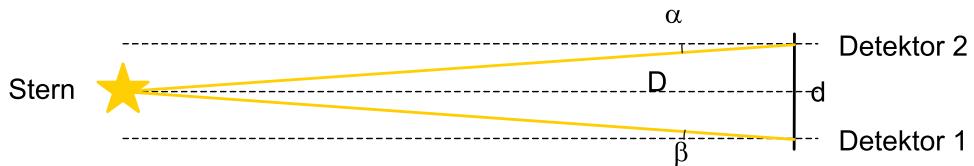


Abb. 2.58.: Distanzmessung mit Triangulation.

Zur optischen Messung der Distanz zu einem Stern verwendet man die **Triangulation**. Abbildung 2.58 zeigt die Geometrie des Problems. Zu bestimmen sind die beiden Winkel α und β zu der (gedachten) Sichtlinie zum zu vermessenden Stern. Weiter bekannt ist der Abstand der beiden Beobachtungsorte d . Dann ergibt sich der Abstand D aus

$$D = \frac{d}{2 \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \quad (2.4.1)$$

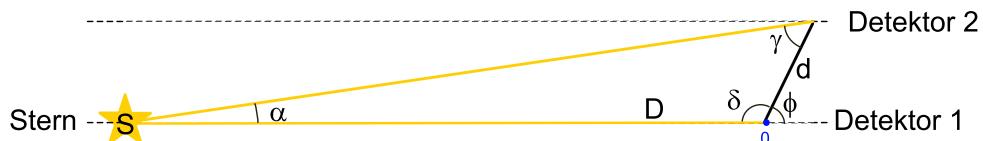


Abb. 2.59.: Distanzmessung mit Triangulation. Hier sind die Winkel beliebig.

Wenn die Lage der einzelnen Detektoren wie in Abbildung 2.59 beliebig ist, muss mit den allgemeinen Sinussätzen gerechnet werden. Die Verbindungsstrecke der beiden Detektoren sei um den Winkel ϕ gegen die Sichtlinie geneigt. Die Rechnung geht folgendermassen:

$$\frac{D}{\sin(\gamma)} = \frac{d}{\sin(\alpha)} \quad (2.4.2a)$$

$$\pi = \alpha + \gamma + \delta \quad (2.4.2b)$$

$$D = d \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = d \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\pi - \gamma - \delta)} \quad (2.4.2c)$$

$$D = d \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\gamma + \delta)} \quad (2.4.2d)$$

Gleichung (2.4.2d) gib an, wie aus den Winkeländerungen der Sichtlinie zu einem Objekt von zwei unterschiedlichen Standorten aus die Distanz von der Grundlinie zum Objekt bestimmt werden kann.

2.4.2. Magnituden

Mit dem Begriff Magnitude ist die Helligkeit eines Sterns oder eines anderen Objekts gemeint. Magnituden wurde zuerst qualitativ zur Beschreibung der Helligkeit der Sterne verwendet. Da das Auge eine logarithmische Empfindlichkeit hat, sind der Logarithmus der Sternhelligkeit, skaliert und verschoben auf der Zahlengerade. Wenn die absolute Helligkeit bekannt ist kann aus der gemessenen Helligkeit die Distanz bestimmt werden. Die Erhaltung der Energie (GAUSSSCHES GESETZ DER ELEKTRODYNAMIK) ist die Grundlage dazu:

$$I(r) = I(r_0) \frac{r_0^2}{r^2} \quad (2.4.3)$$

Am Ort der Beobachtung ist die Strahlungsstärke die scheinbare Helligkeit des Sterns oder des Objektes. Wenn Φ_0 der Strahlungsfluss (in W) des Sterns Wega ist, dann ist seine Helligkeit per Definition $m = 0$ mag. **Claudius Ptolemäus** schlug eine erste sechsstellige Skala vor. **Norman Pogson** führte dann ein, dass ein Stern mit 1 mag hundertmal so hell sei wie einer mit 6 mag und dieser wiederum hundert mal so hell wie einer mit 11 mag. Je heller ein Stern ist, desto niedriger ist seine Magnitude. Die Definition der relativen Magnitudenskala ist dann

$$m = -2.5 \log_{10} \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (2.4.4)$$

Umgekehrt haben wir

$$\Phi = 10^{-m/2.5} \quad (2.4.5)$$

Eine Magnitude Unterschied entspricht dann einem Unterschied von $10^{-1/2.5} = 10^{-2/5} = 0.398107 = \frac{1}{2.51189}$ im Lichtstrom Φ . Φ ist der Lichtstrom in W.

Magnituden können mit kalibrierten Kameras oder mit BOLOMETERN gemessen werden. Bolometer sind Kalorimeter mit definiertem Wärmeleck.

In der Astrophysik ist die absolute Helligkeit die Helligkeit, die der Stern hätte, wäre er eine Distanz von 10 pc entfernt.

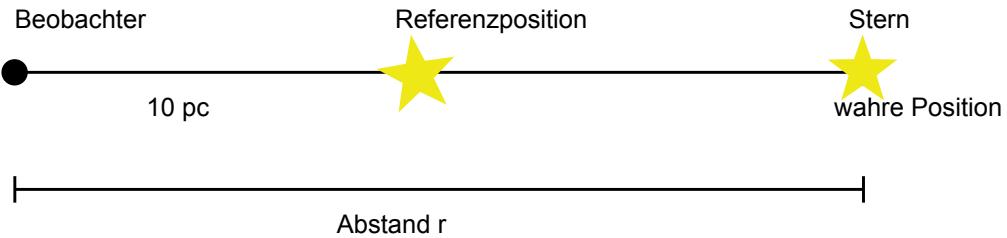


Abb. 2.60.: Relative und absolute Magnitude

Während RELATIVE MAGNITUDEN mit m bezeichnet werden, werden ABSOLUTE MAGNITUDEN mit M angegeben. Wenn ein Stern X aus einer Distanz von 10 pc beobachtet die relative Magnitude m hätte, wäre $M = m$ auch seine absolute Magnitude. Die absolute Magnitude ist also

$$M = -2.5 \log_{10} \left(\frac{\Phi(10 \text{ pc})}{\Phi_0} \right) \quad (2.4.6)$$

Wenn der Stern X 10 pc weg ist und wenn er die absolute und relative Magnitude $M = m = 0$ mag habe (bei 10 pc sind beide gleich), dann hat er im Abstand 1 pc die scheinbare Helligkeit $m = -2.5 \text{ mag} \cdot \log_{10}(10^2) = -5 \text{ mag}$ (nach Gleichung (2.4.3)). Wegen $\Phi \propto r^{-2}$ gilt

$$m - M = 5 \text{ mag} \cdot \log_{10} \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right) \quad (2.4.7)$$

Daraus kann auch der Abstand bestimmt werden:

$$r = 10^{\frac{5 \text{ mag} + m - M}{5 \text{ mag}}} \quad (2.4.8)$$

Beispiel: Die Sonne hat eine relative Magnitude von $m = -26.73$ mag. Ihre absolute Magnitude ist $M = 4.84$ Mag. Daraus folgt mit Gleichung (2.4.3) dass $r = 4.8 \cdot 10^{-6} \text{ pc} \stackrel{\wedge}{=} 150 \text{ Gm}$ ist.

$m - M/\text{mag}$	-5	-4	-2	0	2	5	10
r/pc	1	1.58	3.98	10	25.12	100	1000
r/ly	3.26	5.17	8.19	32.62	81.93	326.16	3261.62

Tab. 2.2.: Zusammenhang zwischen Distanzen und relativen und absoluten Magnituden (Helligkeiten).

Stern	Scheinbare Helligkeit /mag	Absolute Helligkeit /Mag	Entfernungsmodul $m - M$	Entfernung /pc
Sonne	-26.73	+4.84	-31.57	$4.851 \cdot 10^{-6}$
Sirius	-1.46	+1.43	-2.89	2.64
Wega	+0.03	+0.58	-0.55	7.75
Polaris	2.02	-3.40	5.60	132.8
κ -Cassiopeiae	4.17	-6.33	10.50	1257
HR8168	5.92	-1.40	7.32	291.3
Whirlpool Galaxy	8.4	-20.84	29.24	$7.05 \cdot 10^6$

Tab. 2.3.: Einige Distanzen und relativen und absoluten Magnituden (Helligkeiten) von Sternen und Galaxien.

Die Bestimmung der Magnitude benötigt eine Analyse des Sternenspektrums. Deshalb existieren verschiedene Gewichtungssysteme. Das heisst, dass die Magnituden nur verstanden werden können, wenn auch das Gewichtungssystem bekannt ist. Informationen dazu finden Sie in J. B. Oke [Oke74], C. N. A. Willmer [Wil18] oder B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07].

2.5. Spektroskopische Distanzmessung

2.5.1. Cepheiden

Henrietta Swan Leavitt entdeckte, dass Sterne der Klasse CEPHEIDEN periodisch ihre Leuchtkraft ändern und dass die Periodendauer mit der absoluten Leuchtkraft korrelierte.

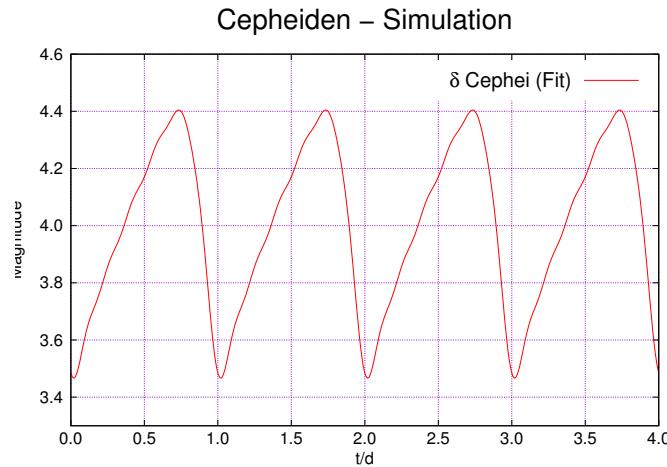


Abb. 2.61.: Simulation der Helligkeitskurven von Cepheiden

Abbildung 2.61 zeigt eine simulierte Darstellung der periodischen Leuchtkraftänderung. Die von Henrietta Swan Leavitt entdeckte Beziehung ist

$$M_{\langle V \rangle} = -2.81 \log_{10} P_d - 1.43 \quad (2.5.1)$$

Dabei ist P_d : Pulsationsdauer in Tagen und $M_{\langle V \rangle}$ die mittlere Magnitude im V-Band (Mittenwellenlänge $\lambda = 550$ nm, Bandbreite $\Delta\lambda = 88$ nm) (siehe [CO07, Gl. (14.1)]).

2.5.2. Supernovae Typ Ia

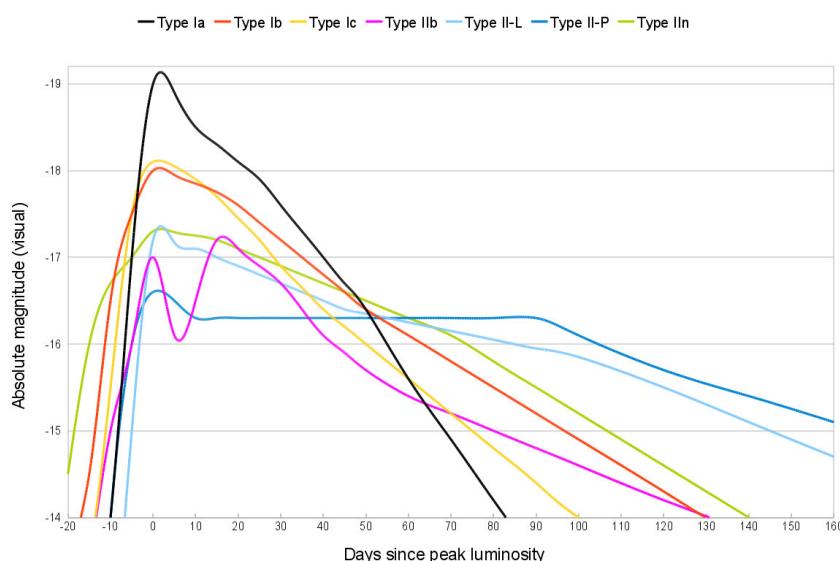


Abb. 2.62.: Helligkeitskurven verschiedener Supernovaetypen (Lithopsian [CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>)], https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Comparative_supernova_type_light_curves.png)

Supernovae werden anhand Ihrer Helligkeitskurven in unterschiedliche Klassen eingeteilt (siehe Abbildung 2.62). Novae der Klasse Ia haben einen universellen Verlauf mit einer soweit wir wissen gut definierten maximalen Helligkeit. Diese absolute Helligkeit hilft nun Distanzen zu bestimmen. Abbildung 2.63 zeigt, dass diese Distanzmessung auch bei anderen Galaxien funktioniert.

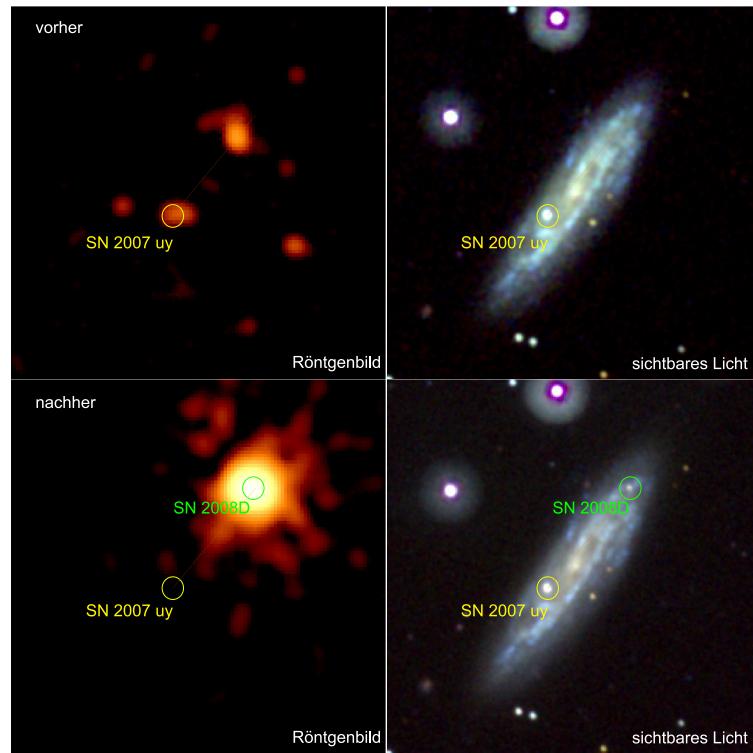


Abb. 2.63.: Distanzmessung mit Supernova Typ Ia. Das Bild zeigt die GALAXIE NGC 2770 im Röntgenbild der Sonde SWIFT (links) und im sichtbaren Licht (rechts). Die obere Reihe zeigt den Zustand mit der SUPERNOVA SN 2007 uy. Die untere Reihe zeigt die neu explodierte SUPERNOVA SN 2008D. Die feine orange Linie soll den Abstand und die Richtung zeigen. (Credit: NASA/Swift Science Team/Stefan Immler)

2.5.3. Doppelsterne

Z. Eker u. a. [Eke+15] geben einen empirischen Zusammenhang zwischen der Masse und der Luminosität von Hauptreihensternen (siehe auch Abschnitt 20.1.4. Abbildung 2.64 zeigt exemplarisch Messwerte.

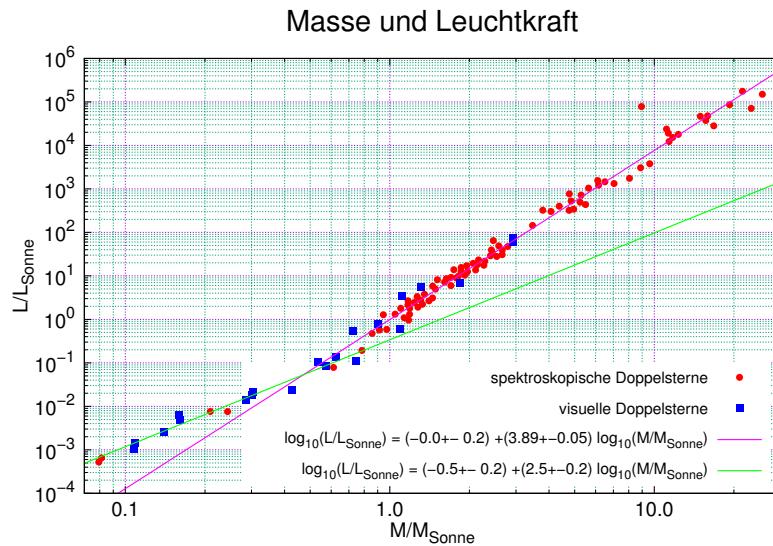


Abb. 2.64.: Distanzmessung mit Doppelsternen. (Daten von A. Unsöld und B. Baschek [UB91], siehe auch Z. Eker u. a. [Eke+15]).

2.5.4. Rotverschiebung

Galaxien, die weit entfernt sind, bewegen sich von uns fort. **Edwin Hubble** leitete aus diesen Beobachtungen die heute Hubble-Gesetz genannte Beziehung ab. Im Abschnitt 21.2 wird abgeleitet, dass die Geschwindigkeit sich mit der Distanz wie

$$v = H \cdot r \quad (2.5.2)$$

ändert. Dabei ist

$$H_0 = 73(7) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (2.5.3)$$

die Hubble-Konstante. Es ist nicht geklärt, ob die Hubble-Konstante wirklich konstant ist.

3. Himmelsmechanik und unser Sonnensystem

Die Bewegung von Planeten, Monden und Sternen wird durch die Gesetze der Mechanik und der allgemeinen Relativitätstheorie bestimmt. In diesem Kapitel wird auf die Himmelsmechanik eingegangen und dann die Objekte unseres Sonnensystems, aber ohne die Sonne, besprochen. Die Sonne wird im Kapitel 14 diskutiert, da für deren Verständnis zuerst die Kernreaktionen besprochen werden müssen.

3.1. Geschichte

In den alten Kulturen Mesopotamiens oder Ägyptens, aber auch in den Hochkulturen des Indus-Tales, in China aber auch in Europa waren Sterne wichtige Hinweisgeber auf den Ablauf der Zeit, auf die Jahreszeiten und nicht zu vergessen auf die Steuertermine. Eine gute Zusammenfassung der Physikgeschichte gibt K. Simonyi [Sim90] in seinem Buch *Kulturgeschichte der Physik*. Die wichtigsten Akteure sind

- Nikolaus Kopernikus (1473-1543) postuliert heliozentrisches System
- Tycho Brahe (1546-1601) erste präzise Messungen
- Johannes Kepler (1571-1630) Interpretation und Gesetze
- Isaac Newton (1643-1727) Gravitationsgesetz
- Albert Einstein (1879-1955) Allgemeine Relativität

Ich beziehe mich hier auf das Buch von K. Simonyi [Sim90]. Da von den Griechen die zugänglichsten Texte vorhanden sind ist die Geschichte voreingenommen, biased.

Artefakte wie beispielsweise die Himmelsscheibe von Nebra (möglicherweise 2100 bis 1700 v. Chr.) [Wik21c], die Megalithen von Stonehenge (2000 v. Chr) [Wik21k], aber auch die Himmelsdarstellungen aus einem Tempel auf Malta (Tal-Quadi, 4000 v. Chr. [Wik21l]) zeigen, dass Himmelserscheinungen wichtig waren.

3.1.1. Die Griechen

Die griechische Astronomie beruht zu grossen Teilen auf der babylonischen Astronomie (siehe auch [Wik21f]).

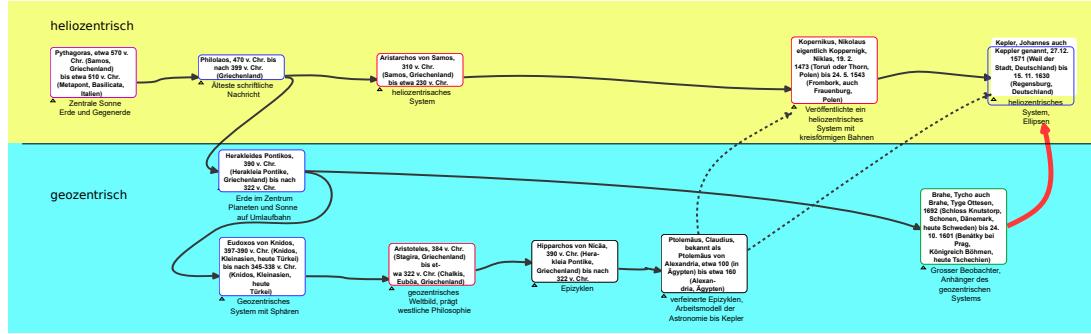


Abb. 3.1.: Von den Griechen zu Kepler (inspiriert von [Sim90, p. 82]). Ein Versuch, die Verknüpfungen darzustellen.

Philolaos schrieb die Theorie, die auf Pythagoras zurückgeführt wird. Um ein zentrales Feuer, die Sonne, dreht sich die Erde und die Gegenerde. Die Gegenerde sollte wohl die Kräfte ausgleichen. Nach K. Simonyi [Sim90] hat Herakleides Pontikos ein Modell mit der Erde im Zentrum und den Planeten und der Sonne in einer Umlaufbahn um die Sonne vorgestellt, ein GEOZENTRISCHES WELTBILD. Die inneren Planeten bewegten sich dabei um die Sonne. Dieses Modell wurde noch von Tycho Brahe verwendet. Aristarchos von Samos entwickelte daraus sein HELIOZENTRISCHES WELTBILD. Diese heliozentrische Weltbild war immer bekannt, wurde aber verdrängt. Erst Nikolaus Kopernikus griff die Idee wieder auf und machte sie bekannt.

Aus dem geozentrischen Weltbild von Herakleides Pontikos entwickelte Eudoxos von Knidos ein geozentrisches System, bei dem die Sonne und die Planeten auf Sphären montiert waren. Diese Weltbild wurde schliesslich von Aristoteles aufgegriffen. Aristoteles hat die Philosophie und die Physik im Westen bis ins 16. Jahrhundert geprägt. Abbildung 3.1 zeigt einen Versuch, Verbindungen grafisch darzustellen.

Wer Planeten wie den Jupiter oder den Saturn beobachtet sieht, dass diese sich manchmal vorwärts und manchmal rückwärts bewegen. Diese Bewegung kann das geozentrische Weltbild nicht beschreiben. Hipparchos von Nicäa schlug deshalb vor, dass Planeten sich auf EPIZYKLEN bewegen. Mit diesem Kniff können die Planetenbahnen im geozentrischen Weltbild genau so gut berechnet werden wie im heliozentrischen Weltbild. Dieser Rechentrick wurde durch Claudius Ptolemäus weiter verfeinert und für die Nachwelt erhalten. Abbildung 3.2 zeigt das Schema dieser Epizyken.

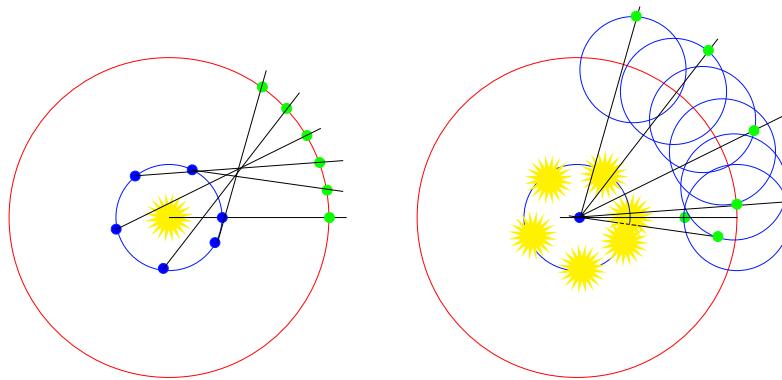


Abb. 3.2.: Schema der Epizyklen. Links ist das heliozentrische Weltbild skizziert, rechts das geozentrische mit Epizyklen. Rot ist die Bahn des Jupiter, um den die Epizyklen drehen.

Letztlich ist das Konzept der Epizyklen bei kreisförmigen Bahnen nichts anderes als die Anwendung der Galilei-Transformation, Abbildung 3.3 zeigt die scheinbare Bahn des Jupiter. Da die Bahnen der Planeten keine Kreise sondern Ellipsen sind und da die Bahnen nicht alle genau in der Ekliptik liegen, reicht ein Epizyklus pro Planet nicht aus. **Claudius Ptolemäus** hat deshalb mehrere Epizyklen pro Planet verwendet. Weiter führte er **ÄQUANTEN** ein, das heisst dass das Bewegungszentrum einer Epizykle nicht mit dem Kreismittelpunkt der Epizykle zusammenfällt. Dieser Trick ermöglichte eine relativ gute Approximation der Ellipsenbahnen [Sim90, p.98, p.179]. **Eudoxos von Knidos** hatte zur Korrektur zwei gegenläufige Kugeln mit leicht unterschiedlicher Achse verwendet. Näheres findet sich in K. Simonyi [Sim90].

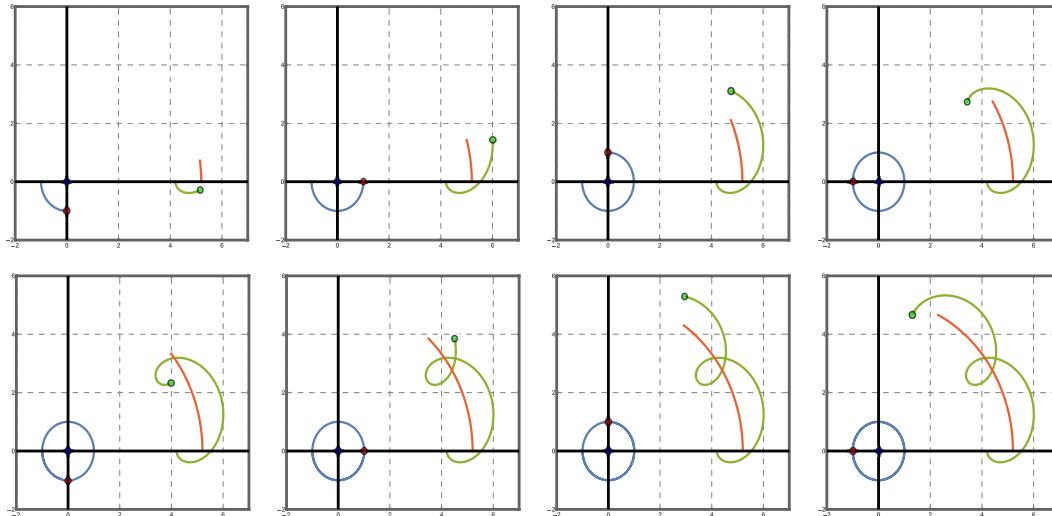


Abb. 3.3.: Epizyklen des Jupiter. Gezeigt ist die Erde im Zentrum, die Sonne auf der blauen Umlaufbahn und Jupiter auf der grünen Bahn. Rot ist die kreisförmige Bahn des Jupiter ohne Epizyklen.

3.1.2. Kopernikus

Nikolaus Kopernikus störte sich an den von Claudius Ptolemäus eingeführten ÄQUANTEN. Nach K. Simonyi [Sim90, p. 179] war Kopernikus die Abweichung von den perfekten Kreisbahnen suspekt. Er kam deshalb auf das von Aristarchos von Samos vorgestellte heliozentrische System zurück, mit dem er eine nicht bessere, aber logisch geschlossener Approximation der richtigen Bahnen erreichte, die zudem nach Wilhelm von Ockham und seinem Sparsamkeitsprinzip, «Ockhams Rasiermesser».

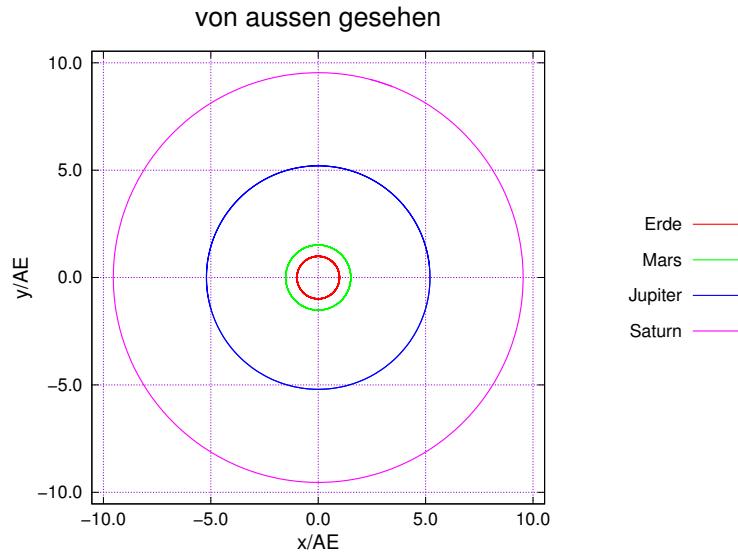


Abb. 3.4.: Bahnen der äusseren Planeten von der Ferne gesehen.

Abbildung 3.4 zeigt die Bahnen der Planeten von Erde bis Saturn von aussen gesehen, senkrecht über der Sonne und der Ekliptik. Nach Galileo Galilei kann mit der GALILEITRANSFORMATION das ruhende Koordinatensystem \mathbf{r} auf ein bewegtes Koordinatensystem \mathbf{r}' mit der Erde transformiert werden.

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_e(t) \quad (3.1.1)$$

mit $\mathbf{r}_e(t)$ der Position der Erde im ruhenden Koordinatensystem.. Abbildung 3.5 zeigt die transformierten Bahnen von der Sonne und von Mars bis Saturn. Ange deutet sind auch die Epizyken. Wie im vorherigen Abschnitt 3.1.1 angedeutet, ist das hier gezeigte Bild vereinfacht. Es dient dazu, die Idee zu zeigen.

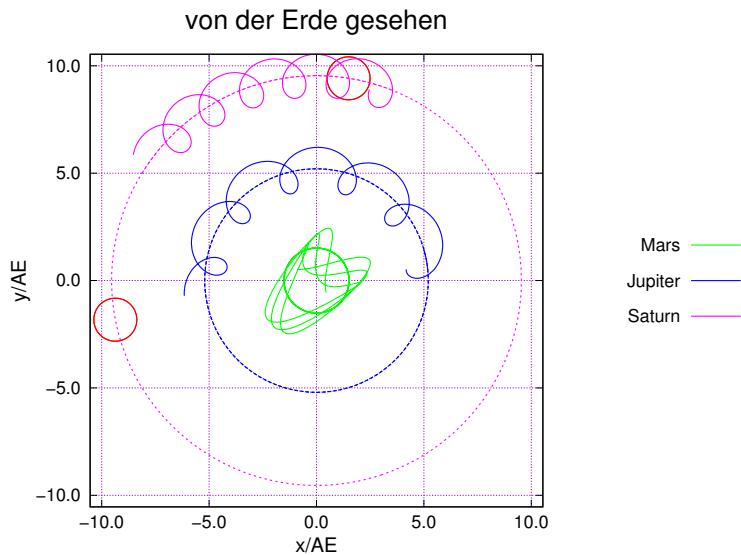


Abb. 3.5.: Bahnen der äusseren Planeten von der Erde aus gesehen.

3.1.3. Kepler

Johannes Kepler konnte bei der Erstellung seiner revolutionären Theorie der Himmelsmechanik auf die Messdaten von pld:brahetycho zurückgreifen. Revolutionär ist die Theorie weil Johannes Kepler die Forderungen nach perfekten Kreisbahnen und konstanten Geschwindigkeiten über Bord warf. Seine Theorie griff auf KEGELSCHNITTE zurück. Im Sinne Wilhelm von Ockhams war seine Theorie sehr viel sparsamer, also wahrscheinlich auch näher an der Realität. Diese Einschätzung hatte bis zur Allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein Bestand. Seine Erkenntnisse werden heute mit drei Gesetzen formuliert.

1. Gesetz (1609) Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen mit der SONNE in einem Brennpunkt.
2. Gesetz (1609) Jeder Strahl von der SONNE zu den Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
3. Gesetz (1619) Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen ihrer Bahnen um die SONNE.

Die KEPLERSCHEN GESETZE können zur Ableitung der Gravitationstheorie von Isaac Newton verwendet werden. Ausgehend von dieser NEWTONSCHEN GRAVITATIONSTHEORIE geht der Beweis des 2. Gesetzes wie folgt: Es gibt keine äusseren Kräfte, deshalb gibt es auch keine Drehmomente. Aus $\mathbf{M}_0 = 0$ bekommt man: $\mathbf{L}_0 = \text{const.}$

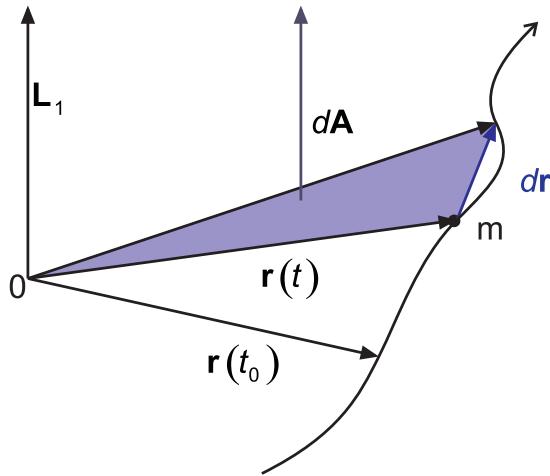


Abb. 3.6.: 2. Keplersches Gesetz

Weiter behauptet das 2. Keplersche Gesetz: Für die Fläche $A(t)$ gilt

$$A(t) = \frac{L_0}{2m} \cdot t \quad (3.1.2)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{L}_0}{2m} dt &= \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dt \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) = d\mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Bemerkung:

bei einer ebenen Bewegung ist immer

$$d\mathbf{r} \perp \mathbf{L}_0 \quad (3.1.4)$$

$$\mathbf{r} \perp \mathbf{L}_0 \quad (3.1.5)$$

d.h. das 2. KEPLERSCHE GESETZ entspricht der Drehimpulserhaltung.

Abschnitt 3.3 greift das Thema nochmals auf und diskutiert Anwendungen.

3.1.4. Newton

Hier geht es darum zu zeigen, dass das Gravitationsgesetz nach Isaac Newton aus dem DRITTEN KEPLERSCHEN GESETZ abgeleitet werden kann. Wir betrachten das DRITTE KEPLERSCHE GESETZ für den Spezialfall einer Kreisbahn. Eine Masse m soll um eine zentrale Masse M kreisen. Eine Kreisbahn ist eine Ellipse, bei der die grosse und die kleine Halbachse gleich sind. Wir nennen die Grösse den Radius r . Das 3. Keplersche Gesetz lautet

$$\frac{r^3}{T^2} = \mathfrak{G} = \text{const} \quad (3.1.6)$$

\mathfrak{G} ist eine zunächst unbekannte Konstante. Bei einer gekrümmten Bahn mit dem Krümmungsradius r muss immer eine physikalische Kraft existieren, deren Grösse durch die ZENTRIPETALKRAFT gegeben ist.

$$F_z = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m \frac{(2\pi)^2}{T^2} r \quad (3.1.7)$$

Wir haben $v = \omega r$ und $\omega = 2\pi/T$ verwendet, wobei T die Umlaufszeit ist. Wenn wir Gleichung (3.1.6) und Gleichung (3.1.7) kombinieren, erhalten wir

$$F_z = 4\pi^2 mr \frac{1}{T^2} = 4\pi^2 mr \frac{\mathfrak{G}}{r^3} = \frac{(4\pi^2 \mathfrak{G}) m}{r^2} \quad (3.1.8)$$

Wie gesagt, zeigt die Zentripetalkraft F_z an, dass eine physikalisch begründete Kraft F_G existieren muss mit $F_z = F_G$. Diese Kraft, von Isaac Newton die SCHWERKRAFT oder die GRAVITATION genannt, hat die Eigenschaften

- Die Kraft ist proportional zu r^{-2} , wobei r der Abstand der Masse m zur Zentralen Masse M ist.
- Für eine gerichtete Strecke von M zu m zeigt die Zentripetalkraft F_z entgegen der Richtung der Strecke.
- Die Kraft ist proportional zur Masse m .
- Die Kraft ist proportional zu einer Konstante $4\pi^2 \mathfrak{G}$, deren Grösse wiederum nur von der zentralen Masse M abhängen kann.

Zum letzten Punkt ist zu bemerken: bei einem Zweikörperproblem ist es unsere Wahl, ob wir m oder M als zentrale Masse anschauen. Die Gleichung für die Gravitationskraft muss also m und M gleich behandeln. Um dies zu berücksichtigen, hat NEWTON Gleichung (3.1.8) so geschrieben

$$F_G = -G \frac{mM}{r^2} \quad (3.1.9)$$

wobei $4\pi^2 \mathfrak{G} = GM$ ist.

Das DRITTE KEPLERSCHE GESETZ lautet also

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (3.1.10)$$

Die obigen Argumente gelten nur für KREISBAHNEN. Ausgefilterte mathematische Methoden aus der theoretischen Mechanik zeigen aber, dass Gleichung (3.1.10) auch gilt, wenn wir r durch die Länge der GROSSEN HALBACHSE ersetzen.

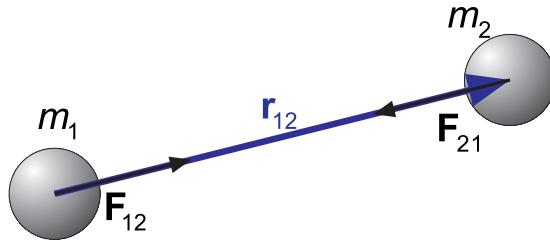


Abb. 3.7.: Newtonsches Gravitationsgesetz

Die Kraft der Masse 1 auf die Masse 2 ist \mathbf{F}_{21} , also

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (3.1.11)$$

Betragsmäßig:

$$F_{12} = F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (3.1.12)$$

Dabei ist $G = 6.6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ die Gravitationskonstante. Das Newtonsche Gravitationsgesetz definiert die schwere MASSE, im Gegensatz zum 2. Newtonschen Gesetz der Bewegung ($\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$), das die träge MASSE definiert.

Im Gravitationsgesetz nach Isaac Newton (Gleichung (3.1.11)) steht als unbekannte Konstante die Gravitationskonstante G . Aus den Keplerschen Gesetzen kann die Gültigkeit des Gravitationsgesetzes Gleichung (3.1.11) abgeleitet werden. Wenn man jedoch wissen will, wie schwer die zentrale Masse ist, muss G bekannt sein.

3.2. Virialtheorem

Für gravitativ gebundene Systeme kann gezeigt werden, dass die Gesamtenergie immer die Hälfte der zeitgemittelten potentiellen Energie ist. Dieser Abschnitt folgt [CO07, Kap. 2.4].

Es wird die Grösse

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \left(\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{p}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) \quad (3.2.1)$$

betrachtet. Dabei ist \mathbf{r}_i der Ortsvektor des i -ten Himmelskörpers und \mathbf{p}_i dessen Impuls. Summiert wird über alle betrachteten Himmelskörper. Die linke Seite kann auch als

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} \frac{d(m_i \mathbf{r}_i)^2}{dt} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{d^2 I_i}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} \quad (3.2.2)$$

Dabei ist $I = \sum_i I_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i^2$ die Summe der einzelnen Flächenträgheitsmomente bezüglich des Koordinatenursprungs.

Gleichung (3.2.1) kann so umgeschrieben werden

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot \mathbf{r}_i \quad (3.2.3)$$

Wenn die Grösse $-\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ so geschrieben wird:

$$-\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = -\sum_i \frac{1}{m_i} \mathbf{p}_i \cdot \left(m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = -2 \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} = -2E_{kin} \quad (3.2.4)$$

ist die kinetische Energie zu erkennen. Dabei dürfen sich die Massen mit der Zeit nicht ändern.

Die Grösse $\sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot \mathbf{r}_i$ kann mit **Isaac Newton** als Virial von Clausius (nach **Rudolf Clausius**), also

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \sum_{j, i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i \quad (3.2.5)$$

geschrieben werden. Dabei ist $\mathbf{F}_i = \sum_{j, i \neq j} \mathbf{F}_j$ die Summe aller externen Kräfte auf die Masse m_i . Nun muss nach [CO07, p. 51] intelligent null addiert werden:

$$\mathbf{r}_i = \frac{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j}{2} + \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{2} \quad (3.2.6)$$

Es folgt

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j, i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j, i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (3.2.7)$$

Die Ortskomponente der ersten Doppelsumme rechts ist in den Indices i und j symmetrisch. Nach **Isaac Newton** ist aber $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Damit ist der Wert der ersten Doppelsumme null. Es bleibt also

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j, i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (3.2.8)$$

Für die Kraft wird jetzt das Newtonsche Gravitationsgesetz $\mathbf{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{\mathbf{r}_{ij}^2} \mathbf{e}_{ij}$ eingesetzt. Dabei ist $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ und $\mathbf{e}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}$.

Schliesslich ergibt sich

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j, i \neq j} G \frac{m_i m_j}{\mathbf{r}_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2 = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j, i \neq j} G \frac{m_i m_j}{\mathbf{r}_{ij}} \quad (3.2.9)$$

Dies ist nichts anderes als die Summe der gegenseitigen potentiellen Energien. Jede Energie wird zweimal gezählt. Der Faktor 1/2 korrigiert dies. Damit ist

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = E_{pot} \quad (3.2.10)$$

Das Virialtheorem macht eine Aussage über die zeitlichen Mittelwerte. Während die Mittelwerte der potentiellen Energie $\langle E_{pot} \rangle_t$ und der kinetischen Energie $\langle E_{kin} \rangle_t$ ohne Kenntnis der genauen Konfiguration nicht zu berechnen sind, kann der zeitliche Mittelwert von $\langle \frac{d^2 I}{dt^2} \rangle_t$ für periodische Systeme berechnet und für quasi-

periodische Systeme für lange Zeiten abgeschätzt werden. Sei T die Periodenlänge des betrachteten Systems. Dann ist

$$\left\langle \frac{d^2I}{dt^2} \right\rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d^2I}{dt^2} dt = \frac{1}{T} \left. \frac{dI}{dt} \right|_0^T \stackrel{\text{periodisches System}}{=} 0 \quad (3.2.11)$$

Wenn das System nicht streng periodisch ist, kann gezeigt werden, dass

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{d^2I}{dt^2} \right\rangle_t = 0 \quad (3.2.12)$$

Das heisst, dass über eine Periode gesehen (oder genügend lange betrachtet)

$$-2 \langle E_{kin} \rangle_t = \langle E_{pot} \rangle_t \quad \text{oder} \quad \langle E_{tot} \rangle_t = \langle E_{kin} \rangle_t + \langle E_{pot} \rangle_t = \frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle_t \quad (3.2.13)$$

ist.

Konsequenzen aus dem Virialtheorem sind:

- Wenn eine Gaswolke sich zu einem Stern zusammen zieht, wird die potentielle Energie stärker negativ. Das heisst, dass Energie aus dem Gebiet der Gaswolke verschwinden muss, in Form von Strahlung oder kinetischer Energie von Teilchen.
- Wenn ein Stern einen konstanten Durchmesser hat und Energie abstrahlt, muss eine noch zu findende Quelle der Energie vorhanden sein.

3.3. Keplersche Gesetze: Bestimmung der Zentralmasse

In diesem Abschnitt sollen die Keplerschen Gesetze aus dem Abschnitt 3.1.3 und deren Präzisierung im Abschnitt 3.1.4 aufgegriffen und vertieft werden. Ziel ist es, UMLAUFZEITEN und die Bestimmung der ZENTRALMASSE behandelt werden.

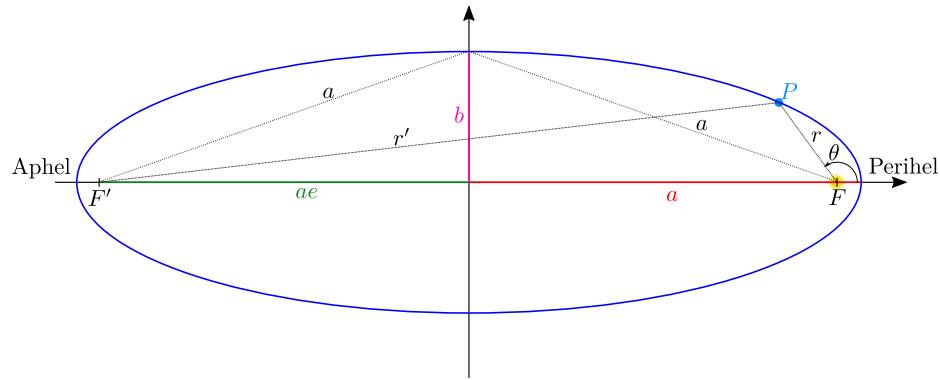


Abb. 3.8.: Definition der Größen in einer Keplerschen Ellipsenbahn.

KEPLERSCHE ELLIPSENBAHNEN sind durch die folgenden Parameter gegeben (Siehe Abbildung 3.8):

- die grosse Halbachse a ,
- die kleine Halbachse b ,
- die Exzentrizität $0 \leq e < 1$,

Der Punkt F ist der Hauptfokus, er liegt am Ort des Zentralgestirns. Der Punkt F' ist der Nebenfokus. Es gibt die Beziehung

$$r + r' = 2a \quad (3.3.1)$$

zwischen dem Abstand r des Planeten P und dem Ort des Zentralgestirns F , dem Abstand des Nebenfokus F' zum Planeten P und der grossen Hauptachse. Der Planet kann natürlich auch ein Asteroid, ein Komet, ein Raumschiff oder sonst ein Objekt in einer Umlaufbahn sein. Haupt- und Nebenachse un Exzentrizität hängen über

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \quad (3.3.2)$$

zusammen. Mit dem Winkel θ wird

$$r = \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)} \quad (3.3.3)$$

Wenn wir $e < 1$ nicht mehr fordern haben wir zwei weitere Klassen von Kegelschnitten:

- $0 \leq e < 1$: Dies ist eine Ellipse, eine gebundene Bahn mit der Gesamtenergie $E_{tot} < 0$.
- $e = 1$: Dies ist eine Parabel, eine ungebundene Bahn mit der Gesamtenergie $E_{tot} = 0$. Hier ist $r = 2p/(1 + \cos(\theta))$.

- $e > 1$: Dies ist eine Hyperbel, eine ungebundene Bahn mit der Gesamtenergie $E_{tot} > 0$. Hier ist $r = a(e^2 - 1)/(1 + e \cos(\theta))$.

Die Gesamtenergie setzt sich aus potentieller und kinetischer Energie (auch der Rotation) zusammen.

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} \quad (3.3.4)$$

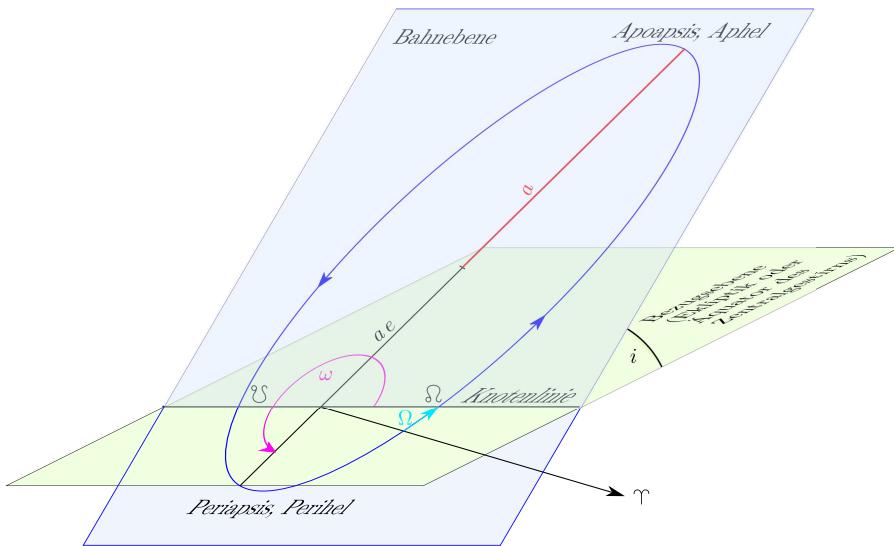


Abb. 3.9.: Definition des Frühlingspunktes Υ , des aufsteigenden Knotens Ω und der Länge des aufsteigenden Knotens Ω (Siehe auch [Wik21a]).

Weitere Größen nach Abbildung 3.9 sind

- der Neigungswinkel i der Bahnebene gegen die Erdbahnebene (INKLINATION),
- den Winkel Ω zwischen Frühlingspunkt Υ und dem AUFSTEIGENDEN KNOTEN Ω (Länge oder REKTASZENSION des aufsteigenden Knotens Ω) und
- dem Winkel ω zwischen den aufsteigendem Knoten Ω und der Richtung zum PERIHEL oder der PERIAPSIS, auch Argument der Periapsis oder PERIAPSISABSTAND genannt.

3.3.1. Umlaufszeiten

Bei den Umlaufszeiten der Planeten im Sonnensystem werden zwei Größen unterschieden:

- Die SIDERISCHE UMLAUFZEIT T_{sid} bezüglich eines ruhenden Bezugssystems und
- die SYNODISCHE UMLAUFZEIT zwischen zwei KONJUNKTIONEN oder OPPOSITIONEN

So ist zum Beispiel die siderische Umlaufszeit des Jupiter 11 a 315 d (dann ist er einmal um die Sonne herum) und seine synodische Umlaufzeit 398.88 d (dann sehen wir ihn von der Erde aus wieder am gleichen Ort).

3.3.2. Massenbestimmung des Zentralkörpers

Das dritte Keplersche Gesetz wird mit Hilfe der Zentralbeschleunigung umgeformt ($F_z = F_G$)

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM_Z}{r^2} \Rightarrow M_Z = \frac{v^2 r}{G} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2} \quad (3.3.5)$$

Dabei ist T die Umlaufszeit des Satelliten, r der Radius der Kreisbahn. Wichtig ist, dass G mit unabhängigen Mitteln bestimmt werden muss. Deshalb heisst das Experiment nach Loránd Ágoston Eötvös auch Eötvös'sches Experiment oder «Wägung der Erde».

Bei Ellipsenbahnen verwendet man das dritte Keplersche Gesetz. Dieses besagt, dass die Umlaufzeit bei gleicher Zentralmasse nur von der grossen Halbachse a abhängt. Das heisst, die Umlaufszeit einer Kreisbahn mit dem Radius $r = a$ ist gleich wie bei jeder anderen Ellipsenbahn mit einer grossen Halbachse a . Wir können also schreiben:

$$M_Z = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{T^2} \quad (3.3.6)$$

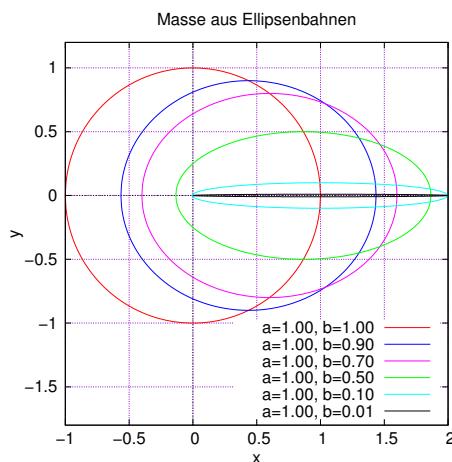


Abb. 3.10.: Bestimmung der Masse des Zentralgestirns aus der Ellipsenbahn eines Satelliten. Dargestellt sind Bahnen mit der gleichen grossen Halbachse

In Abbildung 3.10 sind Bahnen mit der grossen Halbachse $a = 1$ und verschiedenen kleinen Halbachsen b dargestellt. Gezeichnet ist die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, aber so

verschoben, dass der linke Fokuspunkt der Ellipse bei $(0, 0)$ liegt. Die Verschiebung ist $\Delta x = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Das Rezept ist:

1. Bestimme die Ellipse (a, b)
 2. Verwende eine Kreisbahn mit $r = a$ und bestimme mit T die Masse M_Z .

3.4. Erdähnliche Planeten und ihre Umgebung

In Sonnensystemen gibt es zwei Arten von Satelliten: feste Objekte wie z.B. die Erde oder gasförmige Objekte. Die Unterscheidung ist nicht scharf. Die Erde hat eine Gashülle, Jupiter könnte einen festen Kern haben. Wir befassen uns zuerst mit festen Objekten, Planeten. Dies sind sogenannte erdähnliche Planeten.

Es gibt in unserem Sonnensystem vier grosse erdähnliche Planeten sowie im Asteroidengürtel viele kleinere. Zudem haben die grossen Gasplaneten Monde wie auch

die Erde feste Monde.

Eigenschaft	Merkur	Venus	Erde	Mars	
Mittlerer Bahnradius	57 909 227 km	108 209 475 km	149 598 262 km	227 943 824 km	41
Mittlerer Bahnradius	0.387 099 AU	0.723 336 AU	1 AU	1.523 71 AU	
Bahn-exzentrizität	0.205 635 93	0.006 776 72	0.016 711 23	0.093 394 1	
Bahnneigung	7.0°	3.39°	0.000 05°	1.85°	
Durchmesser	4879.4 km	12 103.6 km	12 742 km	6779 km	
Neigung der Achse	0°	177.3° ¹	23.4393°	25.2°	
Massendichte	5.427 g cm ⁻³	5.243 g cm ⁻³	5.513 g cm ⁻³	3.934 g cm ⁻³	
Umdrehungsdauer	58.646 d	−243.018 d	0.997 269 68 d	1.026 d	
Mittlere Bahnge- schwindig- keit	47.3619 km s ⁻¹	35.0206 km s ⁻¹	29.7828 km s ⁻¹	24.0769 km s ⁻¹	17
Umlaufdauer um die Sonne	0.240 846 7 a	0.615 197 26 a	1.000 017 4 a	1.880 847 6 a	
Umlaufdauer um die Sonne	87.9693 d	224.701 d	365.256 d	686.98 d	
Feldvektor Gravitation	3.7 m s ⁻²	8.87 m s ⁻²	9.806 65 m s ⁻²	3.71 m s ⁻²	
Flucht- geschwin- digkeit	4.25 km s ⁻¹	10.36 km s ⁻¹	11.19 km s ⁻¹	5.03 km s ⁻¹	0.51
Oberflächen- temperatur	(−137 … 427) °C	462 °C	(−88 … 58) °C	(−153 … 20) °C	(−83
Atmosphäre	keine	CO ₂ , N	N, O	H, He	
Monde	keine	keine	1	2	
Ringe	keine	keine	keine	keine	

Tab. 3.1.: Liste der erdähnlichen Planeten im Sonnensystem, sowie eines Asteroiden (Quelle: NASA [NAS19f] und [NJ19]).

Die Liste beruht auf Daten der NASA [NAS19f].

¹Die Venus dreht rückwärts.

²nach [Wik19a]

³Nach [Com+16]

3.4.1. Merkur

Die folgenden Informationen stammen von der NASA [NAS19f].

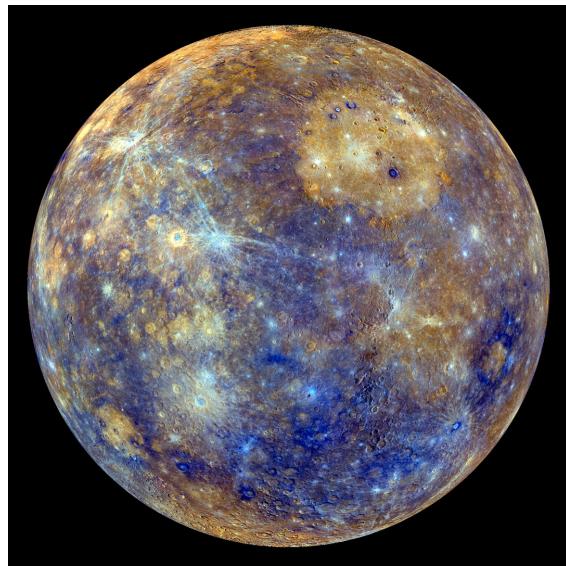


Abb. 3.11.: Farbverstärktes Bild des Merkur. Das Bild besteht aus drei Wellenlängenbereichen, 1000 nm (infrarot) dargestellt als rot, 700 nm (dunkelrot) dargestellt als grün und 430 nm (violett) dargestellt als blau. Aufgenommen wurde das Bild von der Sonde Messenger und ihrer Weitwinkelkamera (WAC). (NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Carnegie Institution of Washington: https://solarsystem.nasa.gov/system/downloadable_items/1074_PIA16853.tif)

Merkur (Abbildung 3.11) ist der sonnennächste Planet. Er ist unwesentlich grösser als der Erdmond. Keine Atmosphäre schützt ihn vor Meteoriteinschlägen, entsprechend sind auf ihm viele Krater zu sehen. Es gibt grosse und kleine Krater, ein Hinweis, auch ein Hinweis, dass keine nennenswerte Atmosphäre vorhanden ist. Seine Kenndaten finden sich in Tabelle 3.1. Neben Beobachtungen von der Erde (optisch, Radar) stammen die Kenntnisse über Merkur von einigen wenigen Sonden. Die erste war Mariner 10 im Jahre 1974. Erst im März 2011 kam mit MESSENGER die zweite Sonde zum Merkur (Die Abbildung 3.11 stammt von dieser Sonde). Die dritte Mission ist BEPICOLOMBO, die unter der Leitung der ESA 2018 gestartet ist.

Das Hauptproblem von Merkurmissionen ist die Nähe zur Sonne. Zwar wären die Temperaturen beherrschbar, aber Merkur ist tiefer im Potentialtopf als die Erde. Also ist jede Sonde schneller als in der Erdbahn. Dazu ist die Masse des Merkur kleiner, so auch die Geschwindigkeit für merkurnahe Bahnen. Das heisst, entweder müssen Swing-By-Manöver durch geführt werden, oder die Sonde braucht einen überproportional hohen Treibstoffvorrat.

Merkur ist der kleinste Planet im Sonnensystem. Sein Aufbau ist analog zu dem

der Erde. Ein riesiger Eisenkern (2074 km) nimmt einen wesentlichen Teil des Volumens ein. Etwas davon scheint geschmolzen zu sein. Die Gesteinskruste Merkurs hat eine Dicke von etwa 400 km. Das Magnetfeld des Merkur hat eine Stärke von etwa einem Hundertstel des Erdmagnetfeldes.

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 737-740], [NAS19f] und [Wik19j].

3.4.2. Venus

Die folgenden Informationen stammen von der NASA [NAS19f].

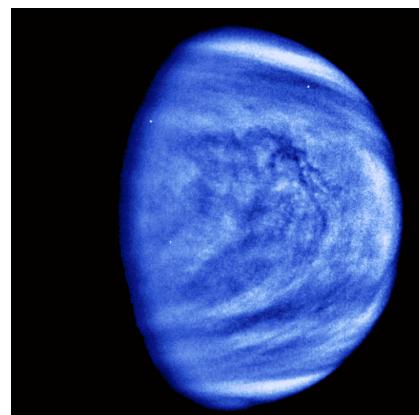


Abb. 3.12.: Wolken in der Venusatmosphäre, gemessen von Galileo. Zu sehen im hochpassgefilterten Bild sind H₂S-Wolken. (NASA/JPL 1996 https://solarsystem.nasa.gov/resources/575/venus-cloud-patterns/?category=planets_venus).

Abbildung 3.12 zeigt eine optische Aufnahme der Sonde Galileo aus etwa $2.6 \cdot 10^6$ km Entfernung. Die Oberfläche der Venus ist im optischen Bereich nicht sichtbar. Die Venus ist der zweite Planet von der Sonne aus gesehen. Seine Kenndaten finden sich in Tabelle 3.1. Von der Grösse her ist er sehr ähnlich zur Erde. Durch einen ausufernden Treibhauseffekt beträgt seine Oberflächentemperatur 462°.



Abb. 3.13.: Venusoberfläche ohne Wolken. Die Daten stammen von der Magellan-Mission sowie von der Pioneer Venus Orbiter- Mission. Die Farben entsprechen den von Venera 13 und 14 bestimmten Farbtönen. (NASA/Jet Propulsion Laboratory-Caltech https://solarsystem.nasa.gov/resources/688/computer-simulated-global-view-of-venus/?category=planets_venus).

Radarstrahlen durchdringen die Wolken der Venus und erlauben so ein detailliertes Bild der Oberfläche zu erstellen. Abbildung 3.13 zeigt vorwiegend Radardaten der Magellan-Mission.

Wie die Erde hat die Venus einen Eisenkern, darüber eine Zone flüssigen Gesteins, Magma, und aussen eine dünne Kruste. Der Kern scheint 3200 km Durchmesser zu haben. Die Venus hat aktive Vulkane und dadurch eine sich ändernde Topographie. Es gibt nur grosse Meteoritenkrater. Die kleineren schmelzen in der Atmosphäre aus Kohlendioxid. Wolken bestehen aus Schwefelwasserstoff.

Die Venus rotiert rückwärts, als entgegen dem Drehsinn ihrer Bahn. Wolken umrunden die Venus alle vier Tage. Ihre Geschwindigkeit ist etwa 400 km h^{-1} .

Wegen der langsamen Eigenrotation der Venus ist ihr Magnetfeld viel schwächer als das der Erde, obwohl ihr Aufbau sehr ähnlich dem der Erde ist.

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 740-745], [NAS19f] und [Wik19q]. Auf der Website [Mit21] gibt es eines der wenigen Fotos von der Venusoberfläche, aufgenommen am Boden.

3.4.3. Erde

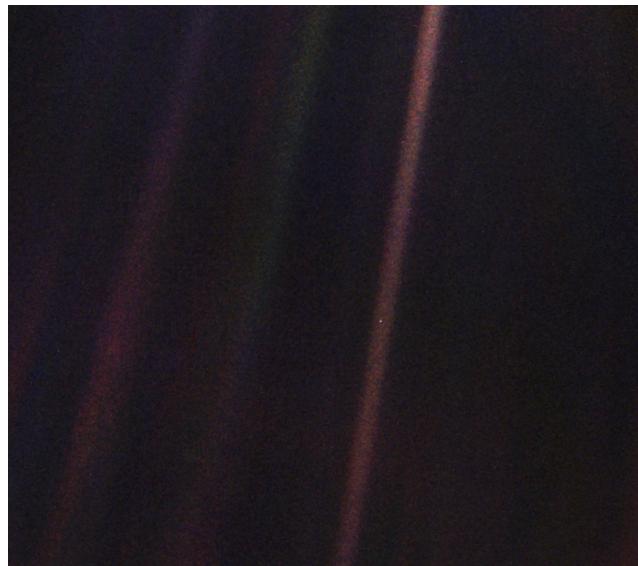


Abb. 3.14.: Erde als weisser Punkt, gesehen am 14. Januar 1990 von Voyager aus einer Distanz von $6.4 \cdot 10^9$ km (NASA/JPL-Caltech, <https://solarsystem.nasa.gov/resources/536/voyager-1s-pale-blue-dot/>)

Die Erde ist unser Heimatplanet. Abb. 3.14 zeigt eine Aufnahme der Sonde Voyager aus einer Distanz von $6.4 \cdot 10^9$ km. Die Erde ist der kleine Punkt.



Abb. 3.15.: Bild der Erde aufgenommen von Apollo 10. Dieses Bild ist das, was Menschen zum ersten Mal gesehen haben, als sie eine Erdumlaufbahn verließen. (NASA, https://solarsystem.nasa.gov/resources/590/apollo-10-view-of-the-earth/?category=planets_earth).

Abb. 3.15 zeigt die Aufnahme der Erde von einer Mondumlaufbahn aus gesehen. Die Erde deckt etwa eine Winkelbreite von 1.5° ab. Die nächste Abbildung 3.16 zeigt die Erde und ihren Mond aus einer Distanz von $1.6 \cdot 10^6$ km.



Abb. 3.16.: Der Mond vor der Erde, gesehen von DSCOVR (Deep Space Climate Observatory) in 2015 (NASA/NOAA, <https://solarsystem.nasa.gov/resources/696/from-a-million-miles-away-moon-crossing-face-of-earth/>)

3.4.3.1. Schwankungen der Bahnparameter der Erde

Sowohl die Exzentrizität der Erdbahn wie auch die Ausrichtung der Erdachse unterliegen periodischen Schwankungen.

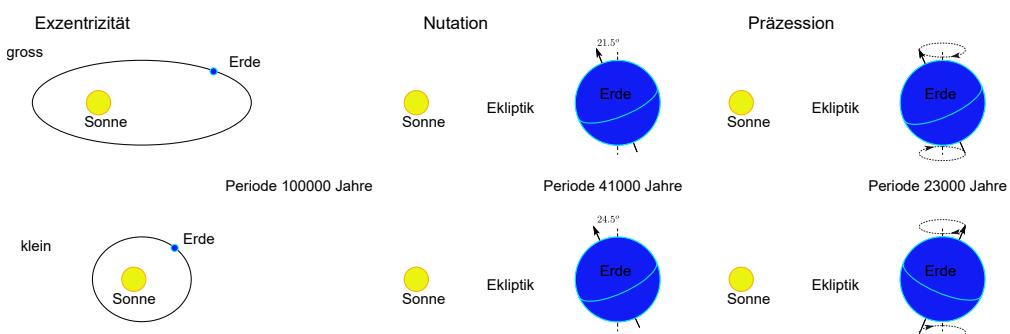


Abb. 3.17.: Milankovićzyklen der Erdbahn (siehe auch [GJ17, Abb. 15.14])

Die MILANKOVIĆ-ZYKLEN (siehe Abbildung 3.17, nach Milutin Milanković) mit 100 000 a (Bahnexzentrizität), 41 000 a (Nutation) und 23 000 a (Präzession) beeinflussen den Energiefluss der Sonne zur Erde über den Jahresverlauf.

Die Exzentrizität verändert den Abstand zwischen Erde und Sonne und beeinflusst daher das Klima. Für die Zeit zwischen –4000 vor unserer Zeit und 8000 kann die

numerische Exzentrizität der Erdbahn nach [Sim+94, Abschn. 5.8.3] so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} e(t) = & 0.0167086342 - 0.0004203654 \cdot t - 0.0000126734 \cdot t^2 \\ & + 1444.0 \cdot 10^{-10} \cdot t^3 - 2.0 \cdot 10^{-10} \cdot t^4 + 3.0 \cdot 10^{-10} \cdot t^5 \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Dabei ist t durch

$$t = \frac{JD - 2451545.0}{365.25 \cdot 1000} \quad (3.4.2)$$

gegeben. t zählt hier also die Jahrtausende. Das Julianische Datum JD ist so definiert:

$$JD(1. \text{ Januar } 2000, 11.58:55.816 \text{ UTC}) = 2451545.0 \quad (3.4.3)$$

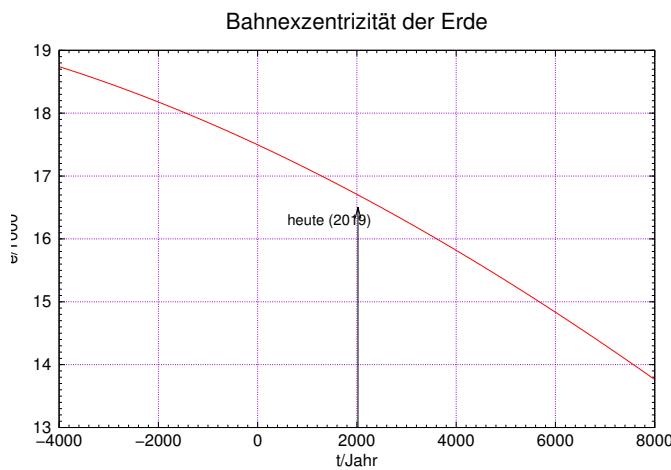


Abb. 3.18.: Bahnexzentrizität zwischen -4000 und 8000 unserer Zeitrechnung nach [Sim+94, Abschn. 5.8.3]

Abbildung 3.18 zeigt die Änderung der Bahnexzentrizität über die nähere Vergangenheit und Zukunft.

Die numerische Exzentrizität wird durch die Wirkung aller anderen Planeten verändert. Über eine längere Zeit verhält sie sich wie in der Abbildung 3.19 zeigt die Variation über $\pm 1 \cdot 10^6$ a.

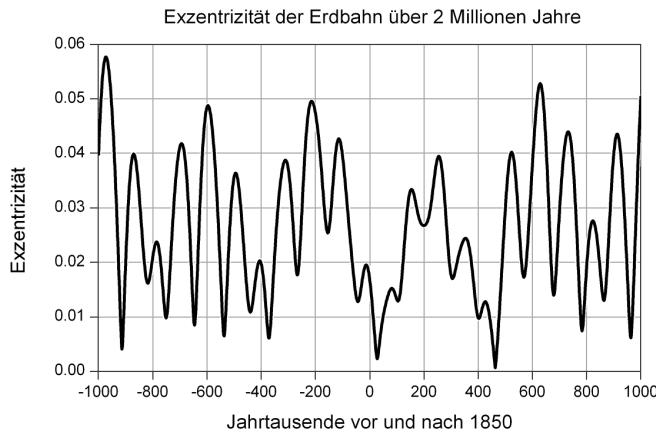


Abb. 3.19.: Erdbahnexzentrizität von $-1 \cdot 10^6$ bis $1 \cdot 10^6$ Jahren (Sch [CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)], https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Earth%27s_orbit_-Variation_of_eccentricity_de.png).

Die Bahn schwankt zwischen $e \approx 0$ (Kreisbahn) und $e = 0.06$ (Die kleine Halbachse ist um 0.18 % kürzer als die grosse Halbachse).

3.4.3.2. Energieflüsse in der Atmosphäre, Treibhauseffekt

Die Erde steht im Strahlungsgleichgewicht mit dem Weltall und der Sonne. Eine weitere Energiequelle ist der heisse, aus festem Eisen bestehende Erdkern (≈ 6000 K). Nach [GJ17] ist dessen Beitrag zur Energiebilanz an der Erdoberfläche klein.

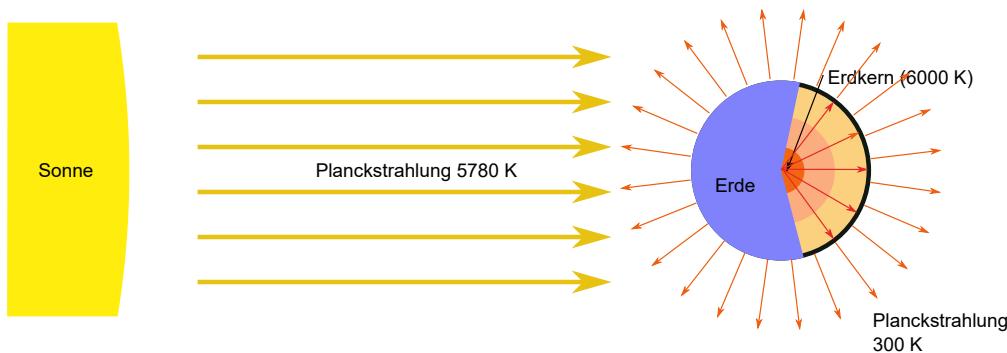


Abb. 3.20.: Strahlungsgleichgewicht der Erde. Der Erdkern erwärmt die Erdoberfläche von unten, die Sonne auf einer Hälfte. Die Abstrahlung ist isotrop. Das Strahlungsgleichgewicht ergibt die Erdtemperatur.

Dieses Strahlungsgleichgewicht ist in Abbildung 3.20 skizziert. Eine naive Berech-

nung der Erdtemperatur mit diesem Modell ergibt eine um etwa 30 K zu niedrige Temperatur. Diese Temperatur ist in ein paar Kilometern Höhe zu finden (siehe auch 3.25). Die Erdatmosphäre ist wärmer, da die Atmosphäre nicht alle Strahlung des Erdbodens im Infraroten durchlässt. Die Grösse dieses Treibhauseffektes ist für das Leben auf der Erde kritisch. Zu wenig davon und die Erde ist in grossen Teilen zu kalt, zu viel und es ist zu warm. Die Erdtemperatur sollte etwa auf 0.5 K konstant gehalten werden.

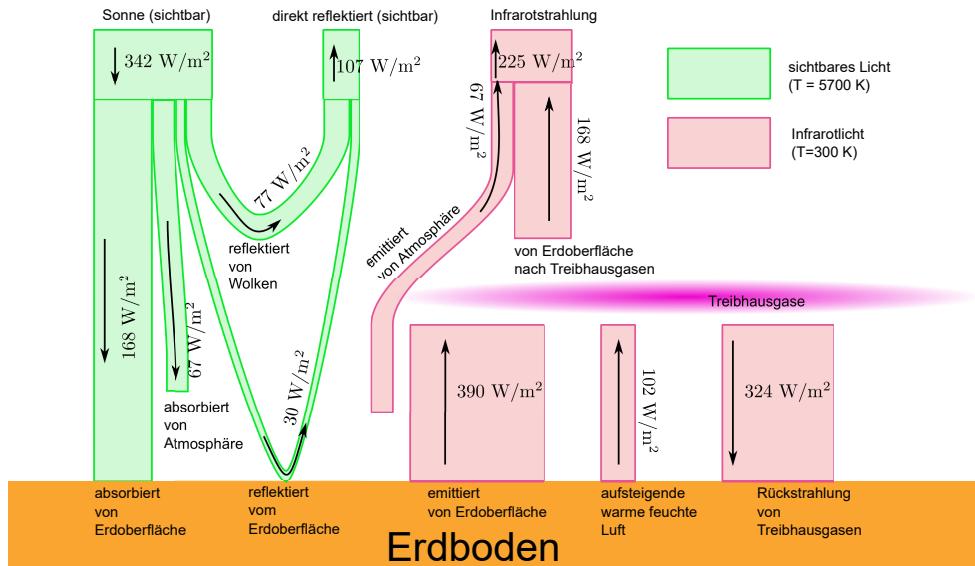


Abb. 3.21.: Energieflüsse in der Erdatmosphäre. Die Daten stammen aus [GJ17, Abb. 15.7] und dort aus [Ipc13, Fig. 2.11, p. 181]

Abbildung 3.21 zeigt die über ein Jahr und die geographischen Breiten gemittelten Energieflüsse angezeigt. Durch diese Mittelung sind die Flüsse kleiner als die Solarkonstante von 1300 W m^{-2} . Die linke Seite zeigt den Energieeintrag der Sonne. Von den 342 W m^{-2} erreichen 168 W m^{-2} den Erdboden und werden dort absorbiert. 67 W m^{-2} werden von der Atmosphäre absorbiert. Deshalb erwärmt sich die Luft am Morgen vom Boden aus und deshalb ist die kälteste Lufttemperatur etwa eine Stunde nach Sonnenaufgang. Der Erdboden reflektiert weitere 30 W m^{-2} direkt. Schliesslich werden 77 W m^{-2} von Wolken zurück ins Weltall reflektiert. In der Summe werden von den eintreffenden 342 W m^{-2} etwa ein Drittel, also 107 W m^{-2} im sichtbaren Spektralbereich ins Weltall reflektiert.

Der Energiefluss im Infraroten vom Erdboden weg ist mit 390 W m^{-2} Planckscher Strahlung sowie 102 W m^{-2} durch Luftströmung und durch Kondensationswärme von Wassertropfen signifikant grösser, als der Energiefluss von der Sonne. Dieser Energiefluss wird von Wolken und Treibhausgasen absorbiert und reflektiert. Der Rückfluss zur Erde im infraroten Spektralbereich beträgt 324 W m^{-2} .

Die andere Seite der Treibhausschicht ist im Infraroten im Strahlungsgleichgewicht mit der Hintergrundstrahlung (2.7 K). Deren Rückstrahlung ist vernachlässigbar. 168 W m^{-2} werden so von Wolken und Treibhausgasen im Infraroten abgestrahlt. Dazu kommt noch die Infrarotstrahlung der absorbierten 67 W m^{-2} (sichtbar) in

der Atmosphäre, auch in der Grösse von 67 W m^{-2} .

Wenn sich nun der Treibhauseffekt ändert, ändern sich die Beträge der von den Treibhausgasen ins Weltall emittierten 168 W m^{-2} und der Rückstrahlung von 324 W m^{-2} . Sinkt der erste Energiefluss und erhöht sich der Letztere steigt die Temperatur der Erde.

Da der direkte Energieeintrag der Sonne verglichen mit der Rückstrahlung im Infraroten etwa ein Drittel der gesamten Einstrahlung am Erdboden ausmachen, dürften Schwankungen des Energieoutputs der Sonne sich nur zu einem Drittel auswirken (linearisierte Betrachtung für kleine Abweichungen).

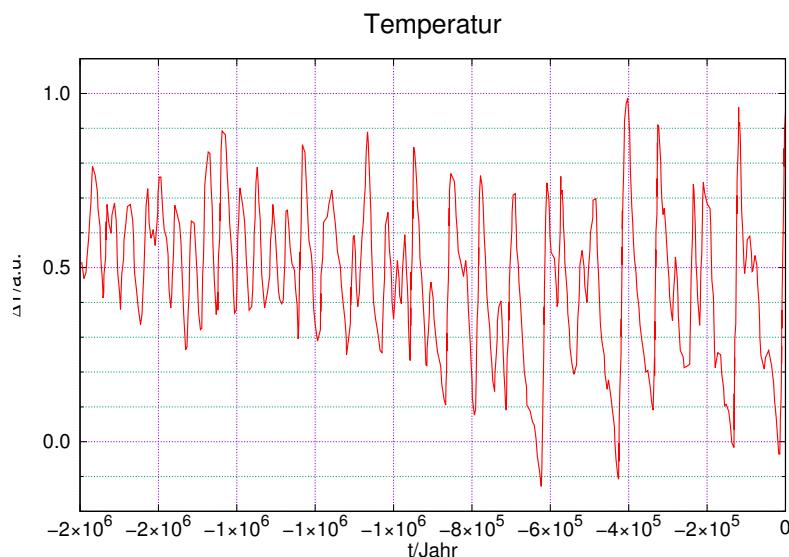


Abb. 3.22.: Temperaturschwankungen über die letzten $1.8 \cdot 10^6$ a (nach [GJ17, Abb. 15.12] und [LR05, Fig. 4])

Die Temperatur der Erde war nie konstant. Abbildung 3.22 zeigt die Schwankungen über die letzten $1.8 \cdot 10^6$ a. Während der meisten Zeit war die durchschnittliche Temperatur niedriger als heute. Meteoriteneinschläge (siehe Abschnitt 3.4.3.6), Vulkanausbrüche oder die Milanković-Zyklen (siehe Abbildung 3.17)

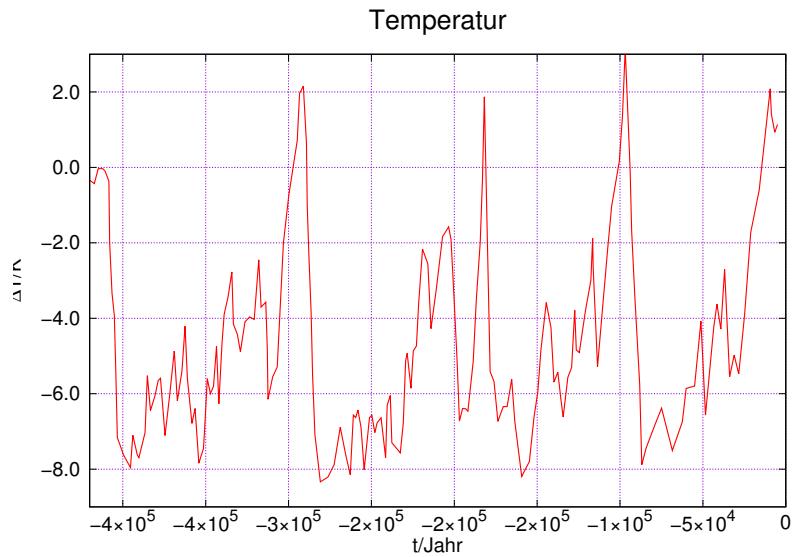


Abb. 3.23.: Temperaturen über die letzten $4.2 \cdot 10^5$ a anhand der Eisbohrkerne der Station Vostok (Daten aus [Pet+99, Fig. 3b.]).

Aus Eisbohrkernen [Pet+99] kann sowohl die Temperatur wie auch die Konzentration verschiedener Gase abgelesen werden (siehe Abbildung 3.23)

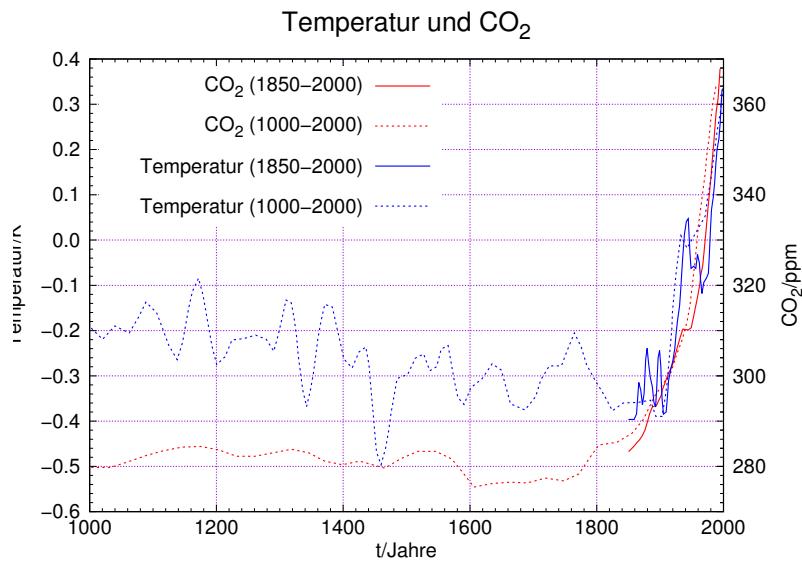


Abb. 3.24.: Verlauf der Temperatur und der CO₂-Konzentration in der Atmosphäre (nach [GJ17, Abb. 15.21]).

Abbildung 3.24 schliesslich zeigt den Temperaturverlauf in der jüngsten Zeit, zusammen mit der Konzentration von CO₂. CO₂ ist ein ausgezeichneter Indikator für

den Verbrauch fossiler Brennstoffe. Fossile Brennstoffe erzeugen beim Verbrennen neben CO_2 auch H_2O . Wasser hat breitere Absorptionsbanden als CO_2 , erhöht aber durch Wolken die direkte Reflexion von Sonnenlicht.

Als nach 9/11 der Flugverkehr eingestellt war, die Kondensstreifen also fehlten, hat sich die Durchschnittstemperatur über den USA trotz gleicher Wetterlage messbar erhöht.

Aus den vorliegenden Daten müssen die folgenden Schlüsse gezogen werden:

- Die Menschheit ist in der Lage, die mittlere Erdtemperatur zu beeinflussen.
- das Verbrennen von fossilen Brennstoffen sind die dominante Ursache der Erhöhung der Konzentration von Treibhausgasen.
- Graue Energie, das heisst Energie zur Herstellung von Autos, Geräten, usw. ist häufig so umfangreich, dass mehrere Jahre notwendig sind, um mit Gewinnen durch die Energieeffizienz die Energiekosten der Herstellung auszugleichen.
- Es bleibt nichts anderes, als durch lokales Handeln den Energieverbrauch zu reduzieren.

Zusätzlich werden erhöhte mittlere Temperaturen in Permafrostgebieten gebundenes Methan freisetzen, ein starkes Treibhausgas. Der steigende Meeresspiegel kann zu vielen Klimaflüchtlingen führen, z.B. Niederländer, Friesen oder Hamburger.

3.4.3.3. Temperaturverteilung in der Atmosphäre

Das Strahlungsgleichgewicht zwischen der Sonnenstrahlung und der abgestrahlten Schwarzkörperstrahlung zusammen mit den Transportvorgängen in der Atmosphäre ist die Ursache für die in Abbildung 3.25 gezeigte Temperaturverteilung.

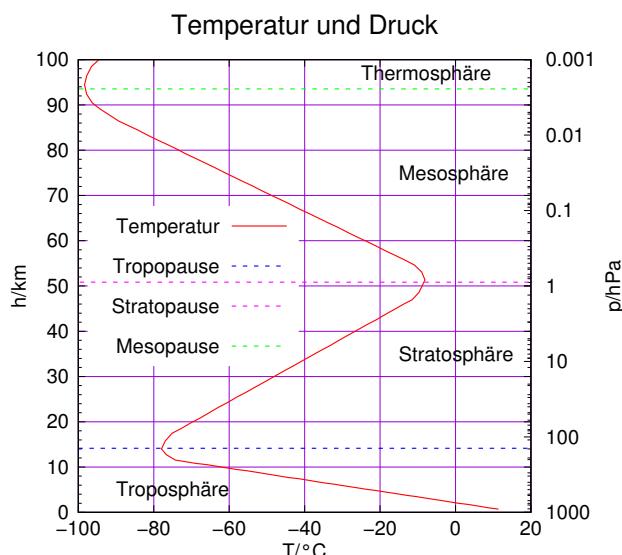


Abb. 3.25.: Temperaturverteilung in der Atmosphäre nach [GJ17, Abb. 15.2]

Bis zur Tropopause nimmt die Temperatur mit zunehmender Höhe ab, dann bis zur Stratopause wieder zu. Die Tropopause verhindert das Aufsteigen warmer Luft und isoliert das Wetter von der höheren Atmosphäre. Flugzeuge bewegen sich gerne an der Tropopause, da dort die Luft weniger Turbulenzen aufweist.

Ab der Stratopause nimmt die Temperatur wieder ab, um dann an der Mesopause wieder zu zunehmen. Üblicherweise wird die Höhe der Mesopause als Grenze des Weltalls bezeichnet.

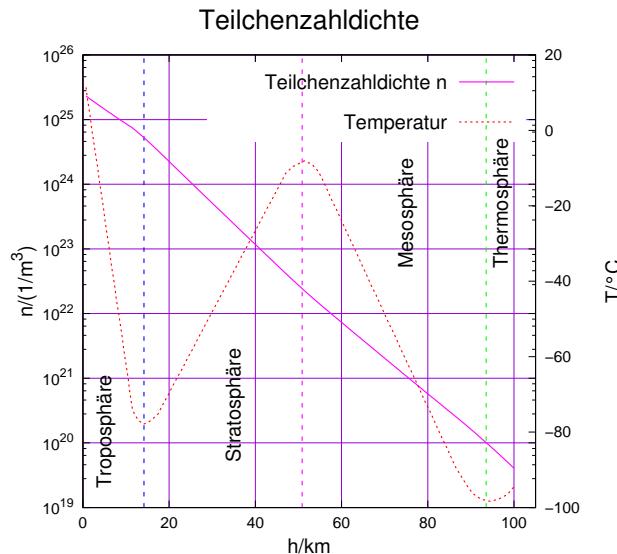


Abb. 3.26.: Teilchenzahldichte, berechnet mit Daten aus [GJ17, Abb. 15.2]

Aus dem Temperatur- und Druckverlauf kann mit dem idealen Gasgesetz

$$pV = Nk_B T \implies n = \frac{N}{V} = \frac{p}{k_B T} \quad (3.4.4)$$

die Teilchenzahldichte n berechnet werden. k_B ist die Boltzmannkonstante, T muss in K angegeben werden. Abbildung 3.26 zeigt die berechnete Teilchenzahl. In der Höhe von 100 km werden üblicherweise die GUIDE-STARS für adaptive Optiken in Teleskopen erzeugt (siehe auch Abschnitt 2.3.2).

Die Grösse der Rückstrahlung wird mit dem ALBEDO angegeben.

$$A = \frac{S_{\text{rück,diffus}}}{S_{\text{ein}}} \quad (3.4.5)$$

$S_{\text{rück,diffus}}$ ist die Leistungsdichte der diffus zurückgestrahlten Strahlung, S_{ein} die Leistungsdichte der eingestrahlten Strahlung. Diese, die Leistungsdichte durch Sonne, hat die Grösse

$$S(r) = SK \cdot \left(\frac{1 \text{ AE}}{r} \right)^2 = \frac{R_\odot^2}{r} \sigma T_\odot^2 \quad (3.4.6)$$

Die absorbierte Leistung ist proportional zu der von der Sonne aus gesehenen Fläche der Erde

$$\frac{dW_1}{dt} = \pi r^2 (1 - A) S(r) \quad (3.4.7)$$

Zusätzlich haben wir aus dem Inneren die Wärmestromdichte Q_i

$$\frac{dW_2}{dt} = 4\pi R^2 Q_i \quad (3.4.8)$$

Dann muss die Abstrahlung mit dem STEPHAN-BOLTZMANN-GESETZ (nach Josef Stefan und Ludwig Boltzmann) betrachtet werden

$$\frac{dW_3}{dt} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (3.4.9)$$

Auf der Tagseite ist das Gleichgewicht

$$\frac{dW_1}{dt} + \frac{dW_2}{dt} = \frac{dW_3}{dt} \quad (3.4.10)$$

oder

$$\pi r^2 (1 - A) S(r) + 4\pi R^2 Q_i = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (3.4.11)$$

Auf der Nachtseite muss die Wärmeleitung $Q_{WL,Nachtseite}$ mit berücksichtigt werden. Das führt auf

$$2\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 + Q_{WL,Nachtseite} = \pi R^2 (1 - A) S(r) + 2\pi R^2 Q_i \quad (3.4.12)$$

Unter Vernachlässigung von $Q_{WL,Nachtseite}$ ergeben sich die effektiven Gleichgewichtstemperaturen

$$T_{eff}^{Tag} = \sqrt[4]{\frac{1}{2\sigma r^2} [(1 - A) SK] + \frac{Q_i}{\sigma}} \quad (3.4.13a)$$

$$T_{eff}^{Nacht} = \sqrt[4]{\frac{Q_i}{\sigma}} \quad (3.4.13b)$$

Wenn die Rotation schnell ist, hätten wir die ganzen 24 h die gleiche Temperatur

$$T_{schnell} = \frac{T_{eff}}{\sqrt[4]{2}} \quad (3.4.14)$$

Diese Rechnung stimmt ohne Atmosphäre. Mit Atmosphäre muss der Treibhauseffekt mit berücksichtigt werden.

3.4.3.4. Erdinneres

Mit Bohrungen in die Erde können die obersten 10 km der Erdkruste untersucht werden. Für tiefer gehende Untersuchungen werden die durch Erdbeben erzeugten Druck- und Scherwellen verwendet ([GJ17, Kap. 14]).

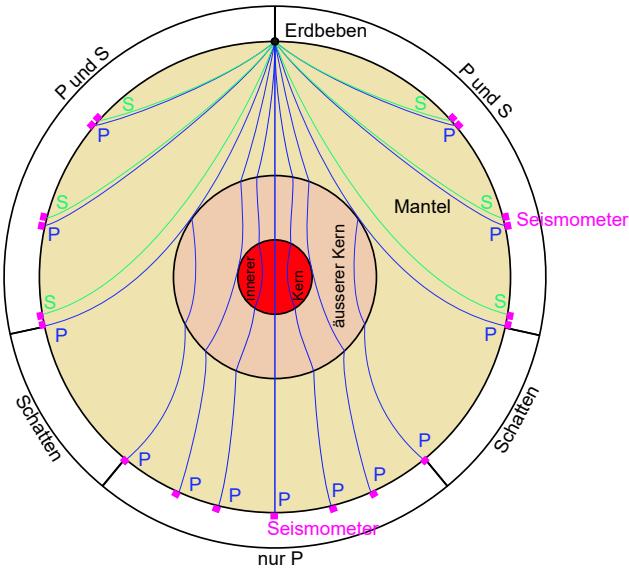


Abb. 3.27.: Verlauf von Erdbebenwellen durch die Erde. S-Wellen sind Scherwellen, die eine nicht verschwindende Viskosität und/oder einen Festkörper benötigen. P-Wellen sind Druckwellen, die sich in allen Medien ausbreiten. Es gilt das Fermat'sche Prinzip (nach Pierre de Fermat) und Brechung an Grenzflächen (nach [CO07, pp. 749-750] und [GJ17, Kap. 14])

Abbildung 3.27 zeigt eine Skizze des Erdquerschnittes zusammen mit Trajektorien von Erdbebenwellen. SCHERWELLEN können nur von Medien mit einer genügend grossen Viskosität übertragen werden, also zähflüssige Magma oder Festkörper. Flüssigkeiten wie Wasser können nur DRUCKWELLEN übertragen. Druckwellen werden in allen Materialien, auch in Gasen, weitergeleitet. Inge Lehmann verstand als erste die Eigenschaften der verschiedenen Erdbebenwellen, insbesondere aber die Wichtigkeit und die Funktion von P-WELLEN.

Die Trajektorien im Inneren der Erde werden durch das FERMAT'SCHE PRINZIP bestimmt (siehe auch [Mar17, Kap. 7.1.6]). Daraus ergeben sich auch die Beziehungen für Winkel und Amplituden an Grenzflächen. Druckwellen (P) und Scherwellen (S) sehen nicht die gleiche Impedanz. Deshalb sind ihre Trajektorien unterschiedlich. Insgesamt ergibt sich ein Bereich um den Erdbebenherd, bei dem sowohl P- wie auch S-WELLEN detektiert werden. Es folgt ein ringförmiger Bereich, bei dem die Erdbebenwellen abgeschattet werden. Schliesslich treffen auf dem der Erdbebenstelle gegenüberliegenden Ort nur P-Wellen ein.

Inge Lehmann entdeckte die Wichtigkeit und die Funktion von P-Wellen ([Leh36; Leh87; Leh64; Leh10; Leh61]) Auszüge aus der Arbeit von 1936 sind in „Inge Lehmann's paper: “P”“ (1936)“ von M. Kölbl-Ebert ([Köl01]) veröffentlicht worden.

3.4.3.5. Erdmagnetfeld

Die Erde hat eine Magnetosphäre (siehe Abbildung 3.28).

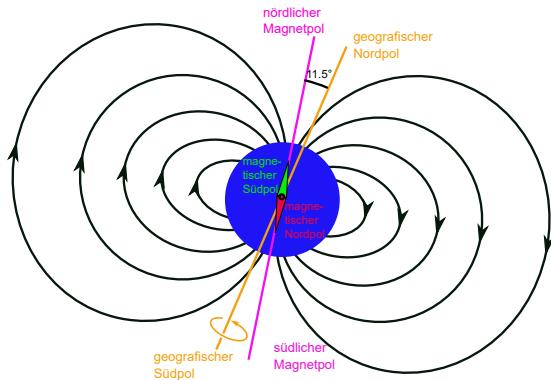


Abb. 3.28.: Gegenseitige Lage der geographischen und magnetischen Pole (nach NASA und Peter Reid, The University of Edinburgh)

Gegenwärtig ist die magnetische Polachse um 11.5° gegen die Rotationsachse geneigt (vom geographischen Nord- zum geographischen Südpol). Der nördliche magnetische Pol ist der magnetische Südpol, der südliche magnetische Pol ist der magnetische Nordpol. Dies ist eine Konsequenz der Definition, dass der magnetische Nordpol einer Magnettadel nach Norden zeigt.

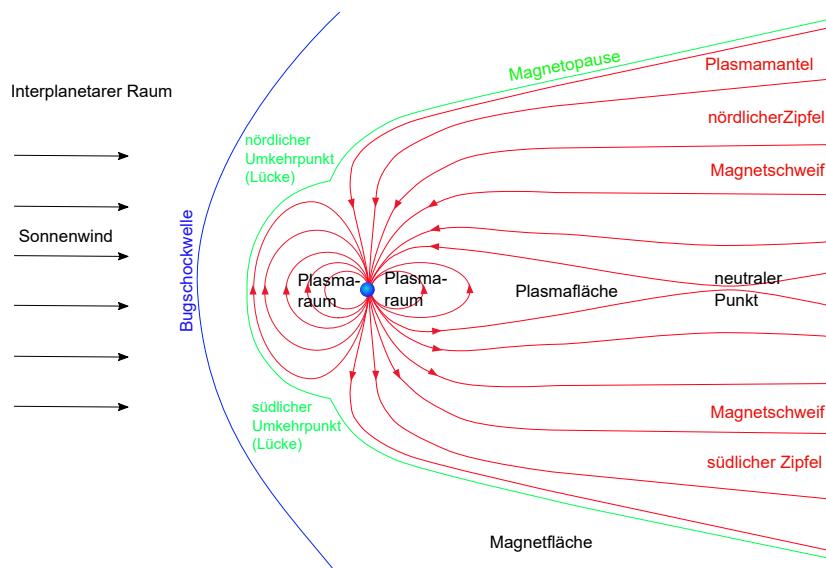


Abb. 3.29.: Magnetfeld der Erde (nach NASA/ESA/C. T. Russel).

Abbildung 3.29 zeigt das Magnetfeld der Erde auf einer grösseren Skala. Der Sonnenwind und die Magnetfeldlinien der Sonne komprimieren das Magnetfeld der Erde auf der Tagseite und strecken es auf der Nachtseite. Die Grenze ist die Bugschokewelle. Diese hat im Norden und Süden über den polen einen Umkehrpunkt. Das ist der Ort, bei dem ionisierte Teilchen in die Atmosphäre eintreten können

und Polarlichter erzeugen. Auf der Nachtseite treffen sich die Magnetfeldlinien der Erde im neutralen Punkt. Dessen Lage hängt von der Stärke des Sonnenwindes ab. In seiner Nähe können sich in Phasen starken Sonnenwindes ionisierte Teilchen sammeln und sich entlang der Magnetfeldlinien zu den Polen bewegen, und dann Polarlichter erzeugen.

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 745-754], [NAS19f] und [Wik19b].

3.4.3.6. Auswirkung von Einschlägen von Himmelskörpern

Meteoriten, d.h. Objekte aus dem Weltall schlagen immer wieder auf der Erde ein. Zu Beginn, vor etwa $4.6 \cdot 10^9$ a, bildete sich die Erde aus einem Staub- und Gesteinsfeld. Die Erde als Planet hatte danach ihre Bahn im Wesentlichen von anderen Objekten freigeräumt. Bei $3.9 \cdot 10^9$ a gab es ein Maximum der METEORITENHÄUFIGKEIT. Den Verlauf zeigt Abbildung 3.30 an.

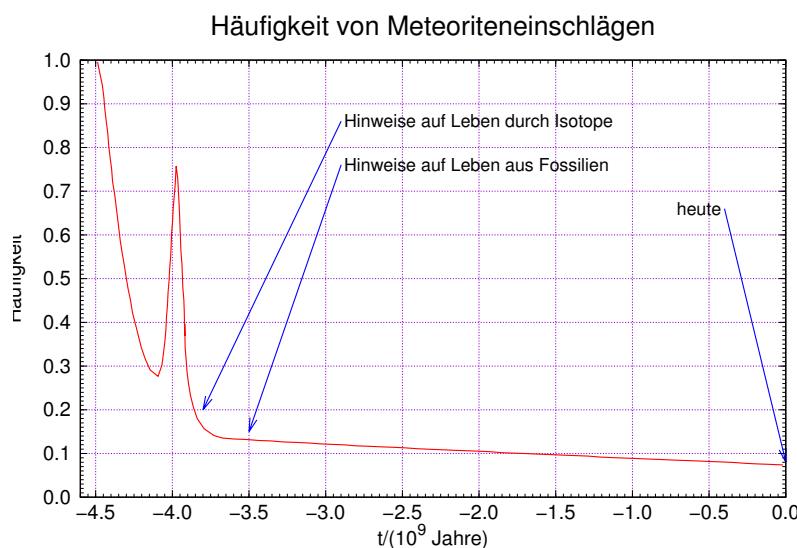


Abb. 3.30.: Zahl der Meteoriteinschläge im Laufe der Zeit von der Entstehung der Erde an (nach [GJ17, Abb. 9.10])

Meteoriten, die auf der Erde einschlagen können gravierende Auswirkungen haben.

J. J. Lissauer [Lis99] gibt die in der Tabelle 3.2 angegebenen Wirkungen an.

Radius	Beispiel	wann zuletzt	Wirkung auf Erde	Wirkung auf Leben
> 2000 km	Bildung des Mondes	$4.46 \cdot 10^9$ a	Erde geschmolzen	flüchtige Substanzen verdampfen, alles Leben vernichtet
> 700 km	Pluto oder Ceres	$\geq 4.3 \cdot 10^9$ a	Kruste geschmolzen	alles Leben vernichtet
> 200 km	Vesta (grosser Asteroid)	$\approx 4 \cdot 10^9$ a	Ozeane verdampfen	eventuell überlebt Leben unter dem Boden
> 70 km	Chiron (grösster aktiver Komet)	$3.8 \cdot 10^9$ a	oberste 100 m der Ozeane verdampfen	Photosynthese zerstört, Leben wird unter Dampfdruck gekocht
> 30 km	Komet Hale-Bopp	$\approx 2 \cdot 10^9$ a	Atmosphäre und Oberfläche auf 1000 K aufgeheizt	Kontinente brennen
> 10 km	433 Eros, auch Objekt, das Saurier auslöschte	$65 \cdot 10^6$ a	Feuer, Staub, Dunkelheit. Atmosphäre und Ozeane chemisch verändert. Grosser Temperaturausschläge	Hälften aller Arten tot
> 1 km	etwa 500 erdnahe Asteroiden	$\approx 3 \cdot 10^5$ a	für Monate Staub in der Atmosphäre	Photosynthese unterbrochen, Tote, wenige Arten sterben aus, Zivilisation bedroht
> 100 m	Tunguska	110 a	Lokal komplettete Zerstörung, Staub in der Atmosphäre, leichte Auswirkung auf die betroffene Halbkugel	Twitter, Bildzeitung, romantische Sonnenuntergänge

Tab. 3.2.: Größenabhängige Wirkung von Objekten aus dem Weltall, die auf der Erde aufschlagen (nach J. J. Lissauer [Lis99]).

3.4.3.7. Mond

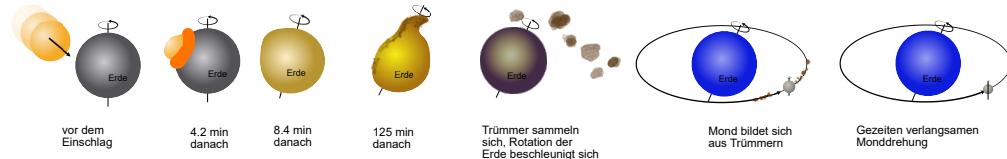


Abb. 3.31.: Entstehung des Mondes nach [GJ17].

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 754-762], [NAS19f] und [Wik19k].

3.4.4. Mars

Mars ist der Äusserste der erdähnlichen inneren Steinplaneten. Mars ist zwischen (1.381 bis 1.666) AU von der Sonne entfernt. Die grosse Halbachse hat eine Länge von 1.524 AU. Die Bahn ist um 1.8506° gegen die Ekliptik geneigt. Die siderische Umlaufszeit von 686.980 d.

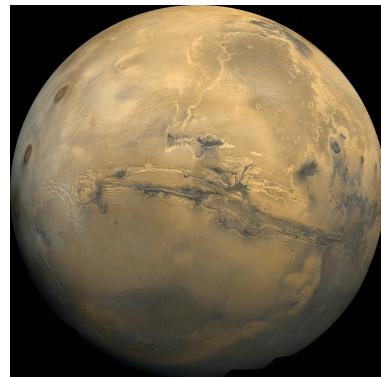


Abb. 3.32.: Bild des Mars mit dem grossen Canyon Valles Marineris (NASA, https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_83.html).

Abbildung 3.32 zeigt ein Bild des Mars aufgenommen von den Viking-Orbitern der NASA in den 1970-er Jahren. Die grosse Schlucht ist 3000 km lang, 600 km breit und 8 km tief. Mars hat Überreste einer Atmosphäre, die aber nur etwa einen zwanzigsten des Drucks der Erdatmosphäre hat.

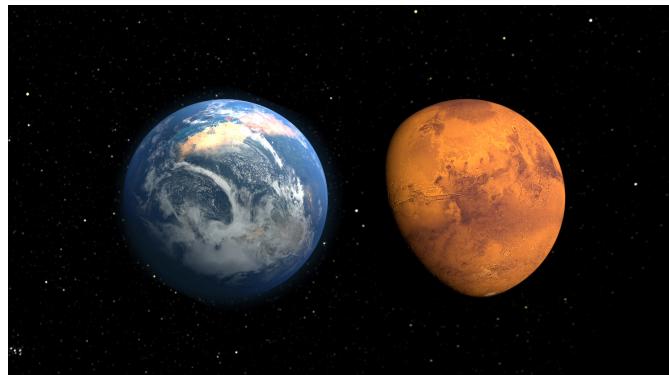


Abb. 3.33.: Links eine künstlerische Darstellung wie Mars in den Anfangszeiten des Sonnensystems ausgesehen haben könnte und rechts der heutige Zustand. Die realen Daten stammen von der NASA-Sonde «Mars Atmosphere and Volatile Evolution» (NASA's Goddard Space Flight Center, <https://www.nasa.gov/content/goddard/the-look-of-a-young-mars-3>).

Es gibt Indizien, dass der Mars in der Frühzeit unseres Universums flüssiges Wasser an seiner Oberfläche hatte (siehe auch Abb. 3.33). Es gibt Spuren von Erosion durch Wasser und es gibt gefrorenes Wasser an einem Pol. Deshalb gibt es die Vermutung, dass auf dem Mars Reste von Leben zu finden sein könnten.

Die Rotationsachse des Mars ist geneigt. Sie scheint über den Zeitraum von etwa einer Million Jahren zwischen Neigungen von fast 0° und 60° zu schwanken. Es wird angenommen, dass die Wechselwirkung mit Jupiter, der Erde und der Sonne und anderen Objekten dafür verantwortlich sei (siehe [CO07, p. 767]).

Der Mars hat zwei kleine Monde, Phobos und Daimos. Der größere, Phobos hat einen Durchmesser von 28 km, Daimos' Durchmesser ist nur 16 km. Beide könnten eingefangene ASTEROIDEN sein.

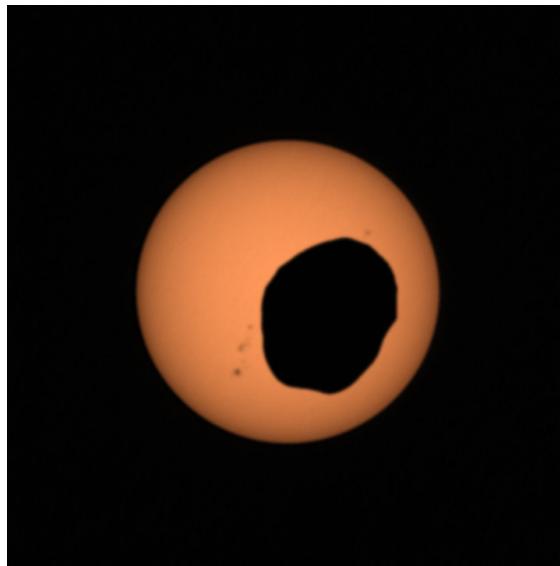


Abb. 3.34.: Bild einer partiellen SONNENINSTERNIS auf dem MARS. Der Mond PHOBOS befindet sich vor der SONNE (mit SONNENFLECKEN).
(Quelle: NASA/JPL-Caltech/ASU/MSSS/SSI [[NJ22](#)])

Der Mars-Rover PERSEVERANCE konnte am 2. April 2022 mit seiner Kamera MASTCAM-Z die partielle SONNENINSTERNIS auf dem Mars messen. Neben dem hier gezeigten Standbild des Mondes PHOBOS haben NASA und Jet Propulsion Laboratory [[NJ22](#)] auch ein Video zur Verfügung gestellt.

3.5. Riesenplaneten und ihre Umgebung

Eigenschaft	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
Mittlerer Bahnradius	778 340 821 km	1 426 666 422 km	2 870 658 186 km	4 498 396 441 km
Mittlerer Bahnradius	5.202 887 0 AU	9.536 676 0 AU	19.189 164 7 AU	30.069 922 9 AU
Bahnexzentrizität	0.04838624	0.05386179	0.04725744	0.00859048
Bahnneigung	1.304°	2.49°	0.77°	1.77°
Durchmesser	139 822 km	116 464 km	50 724 km	49 244 km
Neigung der Achse	3.1°	26.7°	97.8°	28.3°
Massendichte	1.326 g cm ⁻³	0.687 g cm ⁻³	1.27 g cm ⁻³	1.638 g cm ⁻³
Umdrehungsdauer	0.413 54 d	0.444 d	-0.718 d ⁴	0.671 d
Mittlere Bahngeschwindigkeit	13.056 km s ⁻¹	9.639 km s ⁻¹	6.799 km s ⁻¹	5.435 km s ⁻¹
Umlaufdauer um die Sonne	11.862 615 a	29.447 498 a	84.016 846 a	164.791 32 a
Umlaufdauer um die Sonne	4332.8 d	10 755.7 d	30 687.2 d	60 190 d
Feldvektor Gravitation	24.79 m s ⁻²	10.4 m s ⁻²	8.87 m s ⁻²	11.15 m s ⁻²
Fluchtgeschwindigkeit	60.2 km s ⁻¹	36.09 km s ⁻¹	21.38 km s ⁻¹	23.56 km s ⁻¹
Oberflächentemperatur	nicht definiert	nicht definiert	nicht definiert	nicht definiert
Atmosphäre	H ₂ , He	H ₂ , He	H ₂ , He, CH ₄	H ₂ , He, CH ₄
Monde	79	83	27	14
Ringe	ja	ja	ja	ja

Tab. 3.3.: Liste der Riesenplaneten im Sonnensystem (Quelle: NASA [NAS19f]).

3.5.1. Jupiter

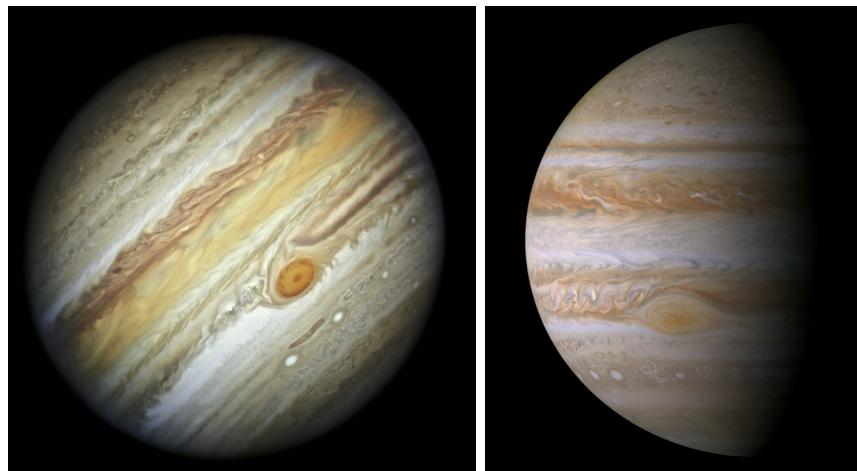


Abb. 3.35.: Links: Jupiter abgebildet vom Hubble-Space-Telescope. Rechts: Bild des Jupiters durch die Sonde Cassini (links: NASA, ESA, A. Simon (Goddard Space Flight Center), and M.H. Wong (University of California, Berkeley) https://solarsystem.nasa.gov/resources/2486/hubbles-new-portrait-of-jupiter/?category=planets_jupiter, rechts: NASA/JPL/Space Science Institute, https://solarsystem.nasa.gov/resources/11667/cassini-jupiter-portrait/?category=planets_jupiter)

Jupiter (Siehe Abb. 3.35) ist der innerste und grösste der vier äusseren Gasplaneten. Sein Durchmesser beträgt 10 % des Sonnendurchmessers. Jupiter wie auch Saturn haben eine Gashülle, die sehr ähnlich ist wie die Gaszusammensetzung der Sonne. Aufgrund der Form, der Grösse und der durch Sonden gemessenen Gravitation muss Jupiter einen festen Kern haben [CO07, p. 783]. Dessen Masse ist etwa zehn mal die Erdmasse, macht aber trotzdem nur einen kleinen Bruchteil der Gesamtmasse des Jupiters aus. Die Atmosphäre ist turbulent, bekannt ist der grosse rote Fleck, ein seit der ersten Beobachtung des Planeten mit einem genügend starken Fernrohr bestehender Wirbelsturm.

Jupiter besitzt wie Saturn einen Ring, der aber sehr viel schwächer ausgeprägt ist. Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 775-807], [NAS19f] und [Wik19g].

3.5.1.1. Jupitermonde

Jupiter hat mit heutigem Kenntnisstand 79 Monde. Die vier grössten Monde, von innen nach aussen gesehen sind Io (Durchmesser 3643 km, grosse Halbachse 421 800 km, numerische Exzentrizität 0.004), EUROPA (Durchmesser 3122 km,

⁴Uranus dreht rückwärts.

grosse Halbachse 671 100 km, numerische Exzentrizität 0.009), GANYMED (Durchmesser 5262 km, grosse Halbachse 1 070 400 km, numerische Exzentrizität 0.001) und KALLISTO (Durchmesser 4821 km, grosse Halbachse 1 882 700 km, numerische Exzentrizität 0.007). Alle anderen 75 Monde haben einen Durchmesser < 200 km. Die vier grössten Monde wurden von Galileo Galilei im Jahre 1610 entdeckt (siehe auch Abb. 3.36).

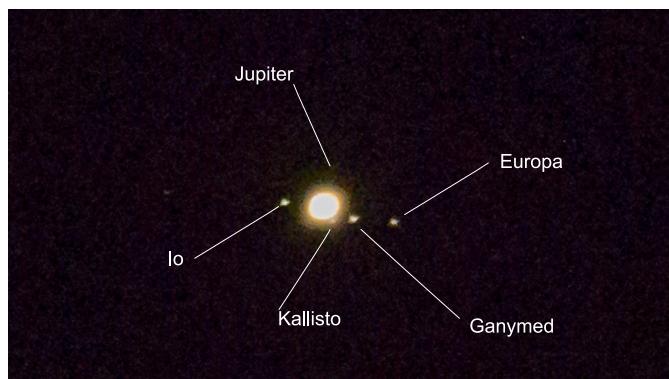


Abb. 3.36.: Die Galileischen Monde und Jupiter aufgenommen am 27. 7. 2018 um 22:34 vom Boltzplatz beim Oberberghof auf dem Eselsberg, während der totalen Mondfinsternis (Teleobjektiv 400 mm, MFT-Sensor).

Abbildung 3.37 zeigt die Galileischen Jupitermonde aufgenommen von der Sonde Galileo aufgenommen. Io hat aktive VULKANE. Europa ist von Eis bedeckt. Ganymed ist der grösste Mond in unserem Sonnensystem.

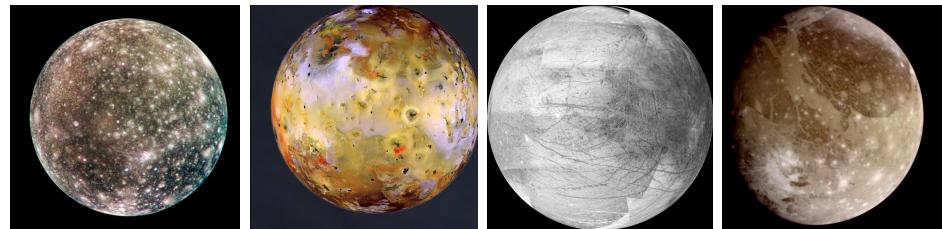


Abb. 3.37.: Ganz links: Bild des Jupitermondes Kallisto aus dem Jahre 2001 (Credit: NASA/JPL/ DLR(German Aerospace Center) https://www.nasa.gov/sites/default/files/images/110204main_image_feature_279_ajhfull.jpg). Mitte links: Kontrastverstärktes Bild des Jupitermondes Io. Das Bild enthält im Original die Farbkanäle Infrarot, Grün und Violett (Credit: NASA/JPL https://www.nasa.gov/sites/default/files/styles/full_width_feature/public/images/169854main_image_feature_764_ys_full.jpg). Mitte rechts: Bild des Jupitermondes Europa. Das Bild ist ein Mosaik vieler kleinerer Bilder (Credit NASA/JPL/University of Arizona https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/pia02528_0.jpg). Ganz rechts: Bild des Jupitermondes Ganymed (Credit: NASA, JPL, Galileo Probe https://apod.nasa.gov/apod/image/1705/Ganymede_Galileo_790.jpg).

3.5.2. Saturn

Saturn ist der zweitgrößte Planet im Sonnensystem. Seine Ringe sind in jedem Teleskop gut sichtbar. Ebenso wie Jupiter hat auch Saturn einen festen Kern. Saturn ist nur wenig kleiner als Jupiter, hat aber nur 30 % der Masse des Jupiters. Der feste Kern des Saturn ist mit etwa 15 Erdmassen schwerer als der Kern des Jupiter.



Abb. 3.38.: Links: Aufnahme des Saturns durch das Hubble-Space-Telescopes, rechts eine Aufnahme von Cassini (links: NASA, ESA, A. Simon (GSFC), M.H. Wong (University of California, Berkeley) and the OPAL Team, <https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/stsci-h-p1943a-f-2076x1484.png>, rechts NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute, https://solarsystem.nasa.gov/resources/17845/saturn-planet-six/?category=planets_saturn)

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 775-807], [NAS19f] und [Wik19n].

3.5.2.1. Ringe

Von der Erde aus gesehen teilt sich das Ringsystem des Saturn in drei Bereiche, A, B und C genannt. Die Lücke zwischen A und B wird die Cassini-Lücke genannt. Von nahe gesehen (Sonde Cassini) bestehen die Ringe aus unzähligen Teilringen. Die Ringe beginnen bei ungefähr einem Saturnradius R_S und reichen bis zu $8R_S$. Die Ringe bestehen aus vielen sehr kleinen Wassereisbrocken und Staub, mit Größen von μm bis 1 km. Kollisionen unter ihnen bewirken, dass die Ringe dünn bleiben (siehe [CO07, pp. 802-804]).

3.5.2.2. Monde

Saturn hat 82 Monde, Stand 2021. Der zweitgrößte Mond des Sonnensystems umkreist Saturn. TITAN hat einen Durchmesser von 5150 km, seine grosse Halbachse misst 1221865 km bei einer numerischen Exzentrizität von 0.029. Weitere größere Monde sind RHEA (Durchmesser 1528 km, grosse Halbachse 527068 km bei einer numerischen Exzentrizität von 0.000), IAPETUS (Durchmesser 1436 km, grosse Halbachse 3560854 km bei einer numerischen Exzentrizität von 0.029), DIONE (Durchmesser 1118 km, grosse Halbachse 377415 km bei einer numerischen Exzentrizität von 0.002) und THETIS (Durchmesser 1060 km, grosse Halbachse 294672 km bei einer numerischen Exzentrizität von 0.000).

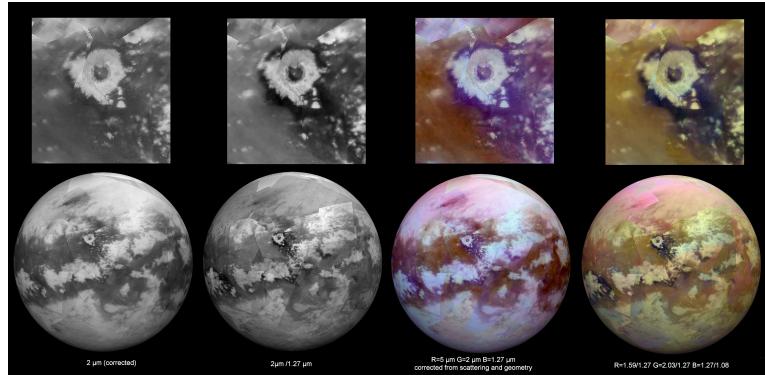


Abb. 3.39.: Bilder des Mondes Titan bei einer Wellenlänge von $2 \mu\text{m}$ aufgenommen von der Sonde Cassini (Credit: NASA <https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/pia20022.jpg>).

Abbildung 3.39 zeigt in der oberen Reihe den Sinlap-Einschlagskrater (80 km Durchmesser) und das Gebiet, auf dem die Sonde Huygens der ESA dann landete. Die untere Reihe zeigt ein Bild der gesamten Halbkugel. M. Perez [Per17] führte aus, dass das Bild links aussen die Oberfläche bei der Wellenlänge von $2 \mu\text{m}$ zeige, da wo die Atmosphäre des Titan am durchlässigsten sei. Das zweite Bild von links zeigt das Verhältnis der Intensitäten bei zwei Wellenlängen, $I(2 \mu\text{m})/I(1.27 \mu\text{m})$. Damit sollen Details besser sichtbar werden. Das zweite Bild von rechts zeigt eine Falschfarbendarstellung, rot entspricht $\lambda = 5 \mu\text{m}$, grün entspricht $\lambda = 2 \mu\text{m}$ und entspricht $\lambda = 1.27 \mu\text{m}$. Das Bild rechts zeigt im roten Kanal $I(1.59 \mu\text{m})/I(1.29 \mu\text{m})$, im grünen Kanal $I(2.03 \mu\text{m})/I(1.27 \mu\text{m})$ und im blauen Kanal $I(1.27 \mu\text{m})/I(1.08 \mu\text{m})$. Wieder sollen so Details hervorgehoben werden.

Titans Atmosphäre besteht vorwiegend aus Stickstoff. Weitere Informationen gibt es bei [CO07, pp. 797-799].

3.5.3. Uranus

Uranus wurde 1781 von Friedrich Wilhelm Herschel entdeckt. Uranus ist der erste mit Instrumenten entdeckte Planet. Er ist ein Gasplanet mit einem festen Kern mit etwa 13 Erdmassen.

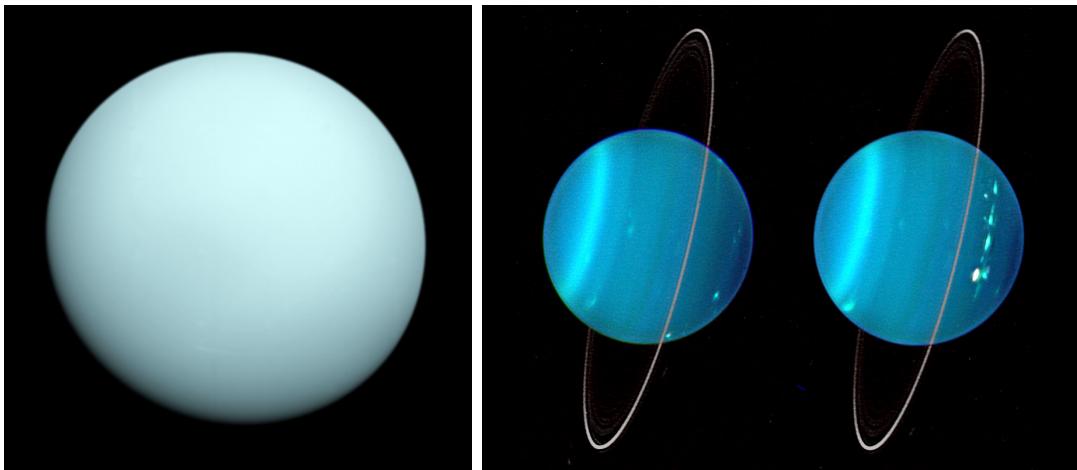


Abb. 3.40.: Links: Aufnahme des Uranus durch Voyager 2, rechts: Falschfarben-Infrarotaufnahme des Uranus durch das Keck-Teleskop (mit adaptiver Optik) (links: NASA, ESA, A. Simon (GSFC), M.H. Wong (University of California, Berkeley) and the OPAL Team, https://solarsystem.nasa.gov/resources/599/uranus-as-seen-by-nasas-voyager-2/?category=planets_uranus, rechts Lawrence Sromovsky, University of Wisconsin-Madison/W.W. Keck Observatory, https://solarsystem.nasa.gov/resources/605/keck-telescope-views-of-uranus/?category=planets_uranus)

Uranus hat wie alle anderen Riesenplaneten ein Ringsystem (siehe Abb. 3.40). Heute sind 27 Monde bekannt. Die grössten Monde sind TITANIA (Durchmesser 1578 km, grosse Halbachse 436 300 km, numerische Exzentrizität 0.001), OBERON (Durchmesser 1522 km, grosse Halbachse 583 500 km, numerische Exzentrizität 0.001), UMBRIEL (Durchmesser 1169 km, grosse Halbachse 266 000 km, numerische Exzentrizität 0.004) und ARIEL (Durchmesser 1158 km, grosse Halbachse 190 900 km, numerische Exzentrizität 0.001).

Weitere Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 775-807], [NAS19f] und [Wik19p].

3.5.4. Neptun

Nach der Entdeckung des Uranus wurde aufgrund von Bahnunregelmässigkeiten vermutet, dass es einen weiteren Planeten gäbe. Am 23. September 1846 entdeckte Johann Gottfried Galle den Planeten Neptun. Auch Neptun ist ein Gasplanet mit einem festen Kern mit etwa 13 Erdmassen.

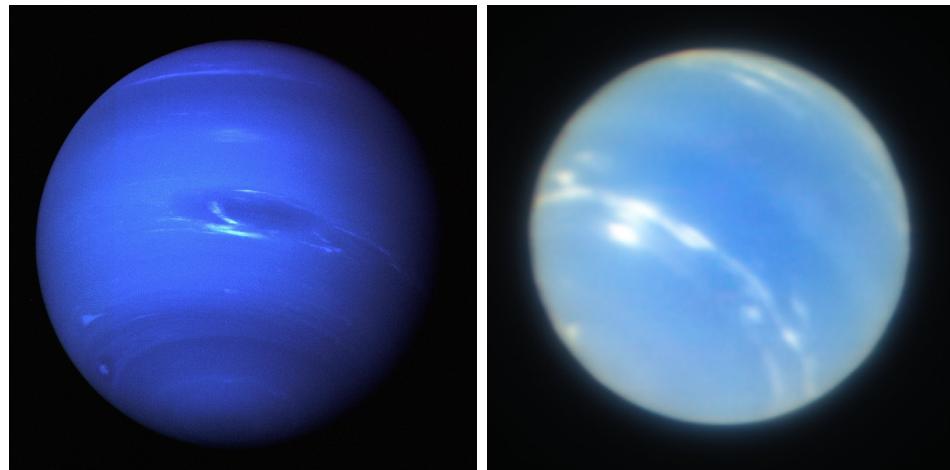


Abb. 3.41.: Links: Aufnahme Voyager 2, rechts: Bild im Kleinwinkelmodus mit adaptiver Optik der MUSE/GALACSI Kamera an ESO's Very Large Telescope (links: NASA/JPL, https://solarsystem.nasa.gov/resources/611/neptune-full-disk-view/?category=planets_neptune, rechts ESO/P. Weilbacher (AIP), https://solarsystem.nasa.gov/resources/936/neptune-from-the-very-large-telescope-vlt/?category=planets_neptune)

Neptun hat 14 Monde (Stand 2021). Der grösste Mond ist TRITON mit einem Durchmesser von 2706 km, einer grossen Halbachse von 354 800 km und einer numerischen Exzentrizität von 0.000).

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 775-807], [NAS19f] und [Wik19].

3.6. Kleinere Objekte

Neben den vier erdähnlichen Planeten und den vier Riesenplanetten gibt es in unserem Sonnensystem unzählige weitere Objekte. Da sind einmal die Planetoiden, durchaus grosse Himmelskörper, aber eben kleiner als die Planeten. Planeten beherrschen ihre Umlaufbahn und Ihre Umgebung. Bei PLUTO ist es so, dass sein Bahn wesentlich von NEPTUN beeinflusst wird. Ebenso ist er nur wenig grösser als sein Mond CHARON. Neben weiteren Planetoiden aus dem KUIPERGÜRTEL gibt es auch ASTEROIDEN, KOMETEN, METEORITEN und auch Besucher aus den Tiefen

des Alls. Tabelle 3.1 listet einige der Planetoiden oder Zwergplaneten auf.

Eigenschaft	Pluto ⁵	Ceres ⁶	Haumea ⁷	Makemake ⁸
Mittlerer Bahnradius	5 906 440 628 km	413 690 250 km	6 432 011 461 km	6 783 345 606 km
Mittlerer Bahnradius	39.482 117 AU	2.765 349 AU	42.995 341 AU	45.343 865 AU
Bahnexzentrizität	0.2488273	0.079138251	0.198132061	0.163844964
Bahnneigung	17.089°	10.59°	28.21°	28.98°
Durchmesser	2302 km	952.4 km	2013 km	1468 km
Neigung der Achse	122.53°	4°	unbekannt	unbekannt
Massendichte	2.05 g cm ⁻³	2.09 g cm ⁻³	1.885 g cm ⁻³	(1.4 … 3.2) g cm ⁻³
Umdrehungsdauer	6.387 229 d	0.378 09 d	0.163 194 d	0.323 792 d
Mittlere Bahngeschwindigkeit	4.669 km s ⁻¹	17.877 km s ⁻¹	4.498 km s ⁻¹	4.393 km s ⁻¹
Umlaufdauer um die Sonne	247.94 a	4.6082 a	284.7965 a	307.5 a
Umlaufdauer um die Sonne	90 560.1 d	1683.1 d	104 021.9 d	112 314.4 d
Feldvektor Gravitation	0.66 m s ⁻²	0.28 m s ⁻²	0.401 m s ⁻²	0.545 088 m s ⁻²
Fluchtgeschwindigkeit	1.23 km s ⁻¹	0.515 km s ⁻¹	0.809 km s ⁻¹	0.895 km s ⁻¹
Oberflächentemperatur	(−240 bis −218) °C	(−83 … −35) °C	< 223 °C	nicht definiert
Atmosphäre	N ₂ , CH ₄ , CO		H ₂ O	unbekannt
Monde	5	keine	2	unbekannt
Ringe	nein	nein	nein	nein

Tab. 3.4.: Liste einiger Zwergplaneten im Sonnensystem, sowie eines Asteroiden
(Quelle: NASA [NAS19f] und [NJ19]).

⁵Nach [Wik19m].

⁶Nach [Wik19a] und [Com+16].

⁷Nach [Wik19e].

⁸Nach [Wik19h].

⁹Nach [Wik19c].

3.6.1. Planetoiden

Planetoiden sind wie gesagt Objekte, die ihre Umlaufbahn nicht beherrschen. Ausser PLUTO zählen zu diesen Objekten diejenigen aus dem KUIPERGÜRTEL. Der Kuipergürtel ist eine Ansammlung von Planetoiden und weiteren Objekten zwischen der Neptunbahn und der weiter draussen liegenden OORT'SCHEN WOLKE.

3.6.1.1. Pluto

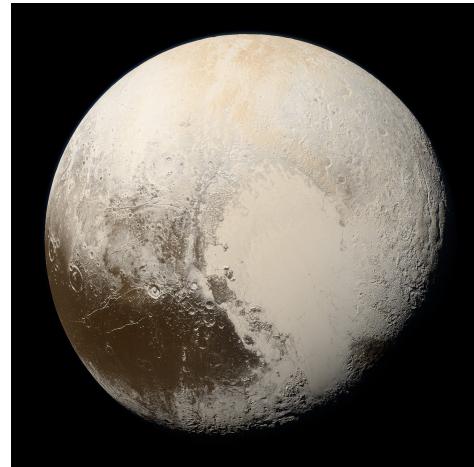


Abb. 3.42.: Bild des Pluto aufgenommen durch die New Horizons-Sonde der NASA (NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute/Alex Parker, https://solarsystem.nasa.gov/resources/933/true-colors-of-pluto/?category=planets/dwarf-planets_pluto)

PLUTO (siehe Abb. 3.42) ist von der Grösse und der Struktur her ähnlich wie der Neptunmond TRITON. Pluto wurde am 18. 2. 1930 von Clyde Tombaugh entdeckt. Von der Erde aus gesehen ist Pluto ein Objekt mit 15 mag. Seine Bahn mit einer Umlaufdauer von 248.5 a hat eine numerische Exzentrizität von 0.25. Das Perihel liegt mit 29.7 AU innerhalb der Neptunbahn, das Aphel hat den Wert 49.3 AU [CO07, pp. 813-816].

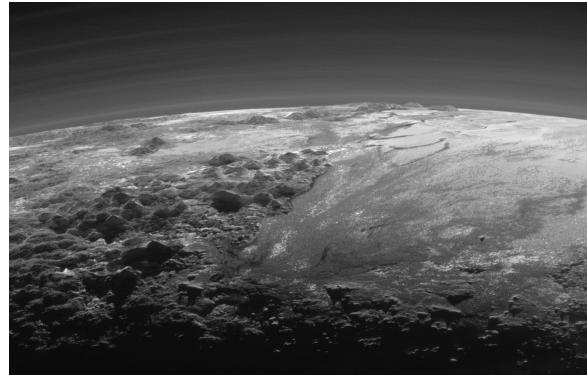


Abb. 3.43.: Berge und Ebenen auf Pluto, fotografiert von New Horizons. Rechts ist die Sputnik-Ebene, links die Norgay und Hillary Montes. Das Bild ist 380 km breit. Die Berge sind schätzungsweise 10 000 m hoch (NASA/JHUAPL/SwRI, https://solarsystem.nasa.gov/resources/796/closer-look-majestic-mountains-and-frozen-plains/?category=planets/dwarf-planets_pluto).

PLUTO (siehe Abb. 3.43) hat eine vereiste Oberfläche mit Bergen.

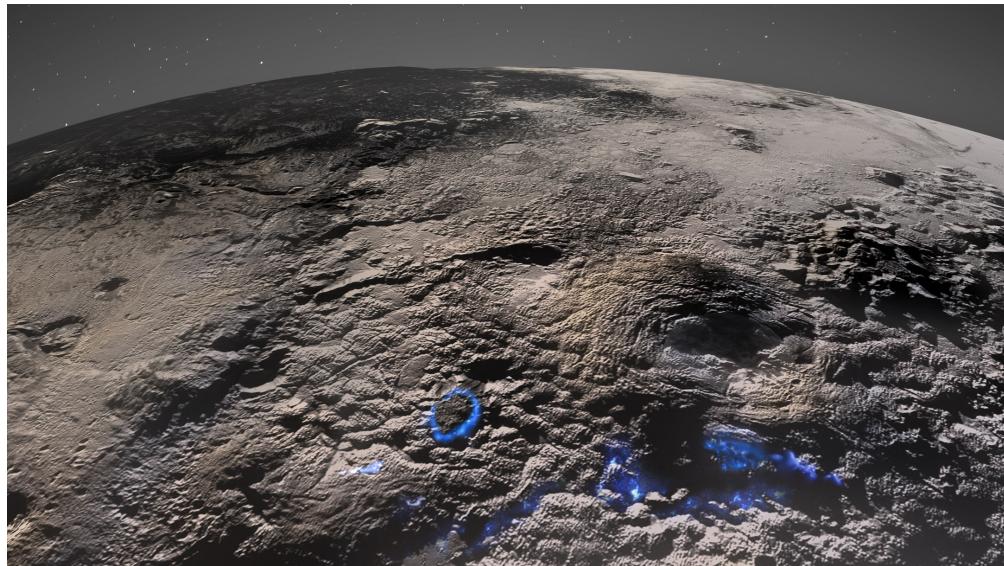


Abb. 3.44.: Blau eingezeichnet sind die Gebiete auf Pluto, bei denen eine Eis-Wasser-Mischung aus dem Untergrund die Struktur gebildet hat ([Sin+22], Credit: Courtesy of NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute, zugeschnitten).

Diese Berge sind Eisvulkane, also Vulkane, die eine Eis-Wasser-Mischung speien (siehe Abb. 3.44 und K. N. Singer u. a. „Large-scale cryovolcanic resurfacing on Pluto“ [Sin+22]). Ähnliche Strukturen gibt es auf dem Jupitermond Europa (L. Li und C. Chen „Ice-volcanism due to tidal stress on Europa“ [LC03]). Es wird vermutet, dass die Atmosphäre des Planeten nur in der Nähe des Perihels existiert.

3.6.1.1.1. Charon Der Zwergplanet Pluto hat einen fast gleich grossen Mond, CHARON (siehe Abb. 3.45). Charon ist sehr ähnlich wie Pluto aufgebaut. Charons Masse ist etwa 12.4 % der Masse des Pluto. Charon und Pluto umkreisen den gemeinsamen Schwerpunkt im gegenseitigen Abstand von 19 640 km in 6.39 d. Die Eigenrotation von Charon wie auch die von Pluto sind exakt gleich lang wie die Umdrehungsdauer [CO07, pp. 813-815].



Abb. 3.45.: Charon ist der grösste Mond Plutos. Die Aufnahme wurde von New Horizons gemacht. (NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute, <https://solarsystem.nasa.gov/moons/pluto-moons/charon/in-depth/>)

3.6.1.2. Eris

Der Planetoid ERIS wurde im Jahre 2003 mit dem Palomar-Teleskop in Kalifornien entdeckt [Wik19d]. Eris ist massereicher als Pluto, aber kleiner. Eris (benannt nach der griechischen Göttin der Zwietracht) ist der Grund, warum Pluto kein Planet sondern ein Planetoid oder Zwergplanet ist. Abb. 3.46 zeigt eine Aufnahme des Hubble-Teleskops von Eris und dem Mond DYSNOMIA.

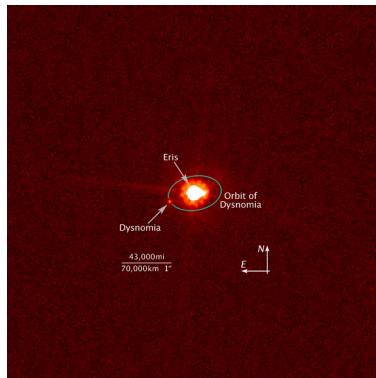


Abb. 3.46.: Zwergeplanet Eris mit Mond Dysnomia gesehen von Hubble (NASA, ESA, and M. Brown (California Institute of Technology), https://solarsystem.nasa.gov/resources/403/hubble-view-of-eris-and-dysnomia/?category=solar-system_kuiper-belt).

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [NAS19f] und [Wik19d].

3.6.1.3. Haumea

HAUMEA wurde 2005 auf Aufnahmen von 2003 des Hubble Space Telescopes entdeckt (Abb. 3.47). Haumea hat zwei Monde, HI’IKA und NAMAKA. Die Bahn-daten sind in der Tabelle 3.1 aufgeführt.

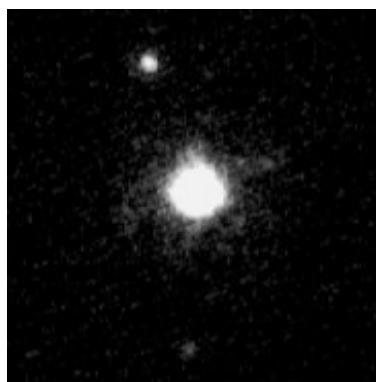


Abb. 3.47.: Bild des Planetoiden Haumea mit den Monden Hi'iaka (oben) und Namaka (unten), aufgenommen 2015 mit dem Hubble Space Teleskop (Credit: NASA https://heasarc.gsfc.nasa.gov/Images/StarChild/solar_system_level2/haumea.jpg).

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [NAS19f] und [Wik19f].

3.6.1.4. Makemake

Der Planetoid Makemake wurde am 31. 3. 2005 mit dem Palomar-Teleskop entdeckt (Abb. 3.48). Makemake hat einen Mond mit der Bezeichnung S/2015 (136472) 1. Die Bahndaten von Makemake sind in der Tabelle 3.1 aufgeführt.



Abb. 3.48.: Bild des Planetoiden Makemake des Hubble Space Teleskop aus dem April 2015. Der Pfeil zeigt auf den Mond S/2015 (136472) 1 (Credits: NASA, ESA, and A. Parker and M. Buie (SwRI) <https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/image1-p1618aw.jpg>).

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [NAS19f] und [Wik19i].

3.6.1.5. Objekte des Kuipergürtels

Der KUIPERGÜRTEL ist nach Gerard Peter Kuiper benannt. Abb. 3.49 zeigt neben der Oort'schen Wolke die Lage des Kuipergürtels. Er erstreckt sich etwa von 30 AU bis 50 AU und enthält etwa 70000 Objekte [Wik21h].

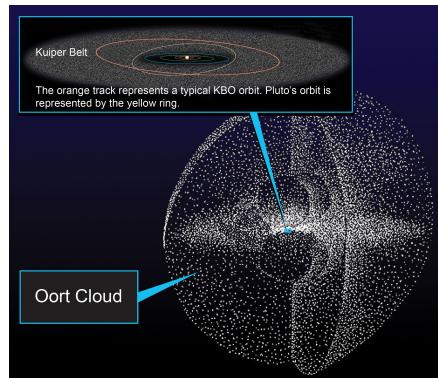


Abb. 3.49.: Illustration der Oort'schen Wolke und der Lage des Kuipergürtels (NASA, https://solarsystem.nasa.gov/resources/491/oort-cloud/?category=solar-system_oort-cloud).

Es scheint, dass auch Systeme mit Exoplaneten Gürtel besitzen, die ähnlich dem Kuipergürtel sind.

Ausserhalb des Kuipergürtels befindet sich die OORT'SCHE WOLKE.

3.6.2. Asteroiden

Unter Asteroiden versteht man kleinere Objekte des Sonnensystems die sich in der Regel innerhalb der Jupiterbahn befinden.

3.6.2.1. Asteroidengürtel

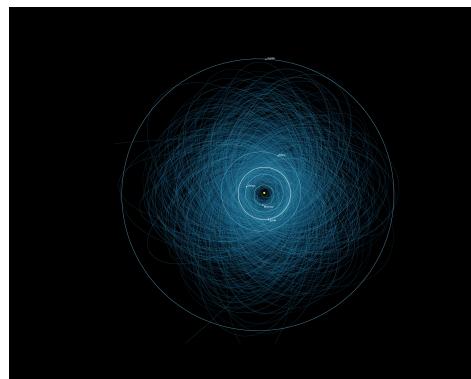


Abb. 3.50.: Asteroiden, die die Erdbahn kreuzen (NASA/JPL-Caltech, https://solarsystem.nasa.gov/resources/405/orbits-of-potentially-hazardous-asteroids-phas/?category=planets_jupiter)

Asteroiden konzentrieren sich hauptsächlich auf den Asteroidengürtel (siehe Abb. 3.50). Nach [CO07, pp. 835-837] gibt es die folgenden Klassen von Asteroiden:

Typ S Asteroiden befinden sich im inneren Asteroidengürtel (2 bis 3.5) AU. Sie bestehen aus eisen- und magnesiumreichen Silikaten und scheinen rötlich zu sein. Beispiele sind GASPERA, IDA oder EROS.

Typ M Asteroiden befinden sich wie die Typ-S Asteroiden im inneren Asteroidengürtel (2 bis 3.5) AU. Eisen und Nickel dominieren ihre Absorptionsspektren.

Typ C Asteroiden finden sich im ganzen Asteroidengürtel (2 bis 4) AU. Sie konzentrieren sich bei 3 AU. Sie sind sehr schwarz und scheinen viel Kohlenstoff zu enthalten.

Typ P Asteroiden sind im äusseren Teil des Asteroidengürtels (3 bis 5) AU mit einem Maximum bei 4 AU. Sie sind rötlich und enthalten in ihrer Oberfläche viel altes organisches Material, ähnlich wie bei Kometen.

Typ D Asteroiden sind ähnlich wie die Typ-P Asteroiden, aber röter und weiter von der Sonne weg. Einige der kleinen Monde des Jupiters haben die gleiche optische Charakteristik wie Typ-D Asteroiden.

3.6.2.1.1. (1) Ceres Als Beispiel eines Asteroiden wird hier Ceres vorgestellt (Abb. 3.51). Ceres (bei 2.77 AU scheint einen Wassereismantel zu haben. Ceres ist der einzige Asteroid, der als Zwergplanet oder Planetoid klassifiziert ist. Ceres wurde um 1800 entdeckt.

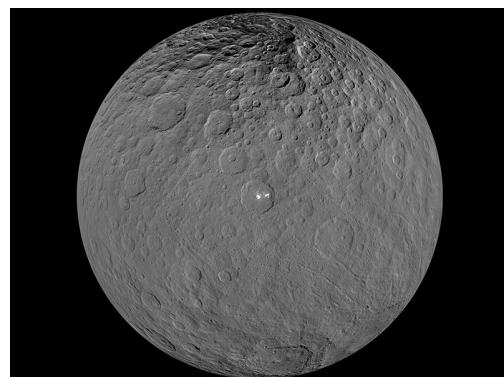


Abb. 3.51.: Zwergplanet Ceres aus dem Astroidengürtel aufgenommen von der Sonde Dawn (NASA/JPL-Caltech/UCLA/MPS/DLR/IDA, https://solarsystem.nasa.gov/system/feature_items/images/141_PLA21906_800w.jpg)

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 716-717, 830, 837], [NAS19f] und [Wik19a].

3.6.3. Kometen

Kometen sind seit Urzeiten bekannt. In der Nähe der Sonne haben Sie einen Schweif. Kometen gibt es mit «kurzen» Perioden oder Umlaufszeiten von weniger

als 200 a. Die kurzperiodischen Kometen bewegen sich in oder nahe der Ekliptik. Es gibt aber auch langperiodische Kometen mit Umlaufszeiten von (200 bis $1 \cdot 10^6$) a. Diese langperiodischen Kometen können Bahnen haben, die stark zur Ekliptik geneigt sind. Sie stammen aus der OORT'SCHEN WOLKE (siehe Abb. 3.52).

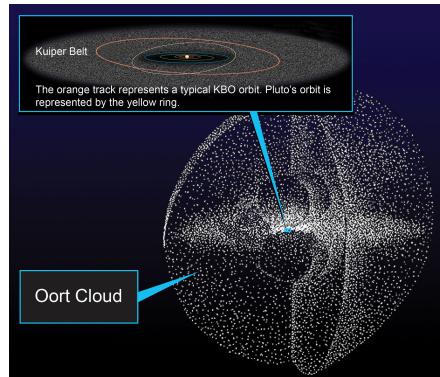


Abb. 3.52.: Illustration der Oort'schen Wolke (NASA, https://solarsystem.nasa.gov/resources/491/oort-cloud/?category=solar-system_oort-cloud).

Die OORT'SCHE WOLKE ist nach ihrem Entdecker Jan Hendrik Oort benannt. Kometen, die die Erdbahn kreuzen, haben eine kleine Wahrscheinlichkeit mit der Erde zu kollidieren. Sollte der Kern gross sein, hätte dies katastrophale Folgen für die Erde. Weitere Informationen gibt es bei [CO07, pp. 816-826].

4. Instrumente der Kern- und Teilchenphysik

In diesem Teilgebiet der Physik werden Teilchen beschleunigt, dann zur Kollision oder Streuung gebracht und die Energien und Impulse sowie die inneren Freiheitsgrade der Teilchen analysiert. Dazu braucht man

- Beschleuniger,
- Wechselwirkungzonen und
- Detektoren.

4.1. Teilchenbeschleuniger

Bei Teilchenbeschleunigern sollen möglichst hohe Energien erzeugt werden, die zur Umwandlung von Teilchen in andere Teilchen dienen können. Deshalb werden Teilchen mit relativistischen Geschwindigkeiten verwendet.

4.1.1. Relativistische Bewegung

Wir betrachten eine MASSE m , die mit einer konstanten KRAFT $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0$ beschleunigt werde [Fre04; Sch15; Hof97]. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz ist [Mar14]

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \\ &= \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \mathbf{v} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}\end{aligned}\tag{4.1.1a}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{m_0 \cdot \left(-2 \frac{v}{c^2}\right) \mathbf{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{m_0 \mathbf{a}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\tag{4.1.1b}$$

Daraus berechnet man skalar

$$\frac{F}{m_0} dt = \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\tag{4.1.2}$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{F}{m_0} dt = \frac{F}{m_0} t &= \int_0^{v(t)} \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \left. \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right|_0^{v(t)} = \frac{v(t)}{\left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$v(t)$ ist sowohl im Zähler wie auch in der Wurzel des Nenners. Wir lösen die Gleichung nach $v(t)$ auf und erhalten

$$v(t) = \frac{F}{m_0} t \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} \quad (4.1.4)$$

und

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{F}{m_0} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.1.5)$$

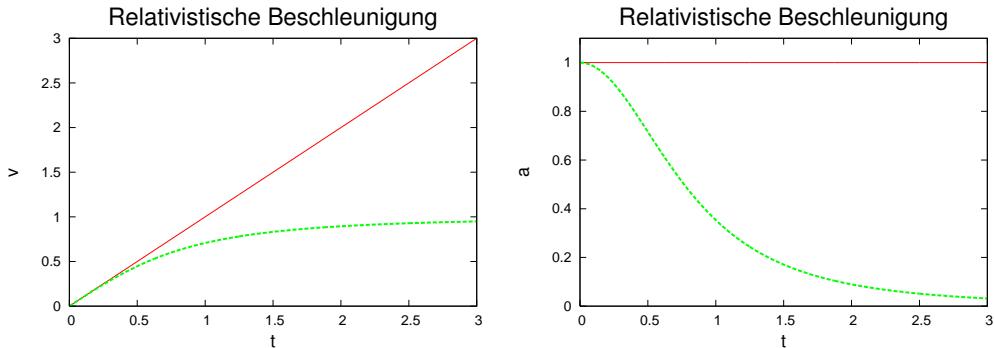


Abb. 4.1.: Zeitverlauf der RELATIVISTISCHEN GESCHWINDIGKEIT (links) und der RELATIVISTISCHEN BESCHLEUNIGUNG bei konstanter KRAFT [Mar14].

Für die Geschwindigkeit erhalten wir

$$v \approx \begin{cases} \frac{Ft}{m_0} & \text{für } t \ll \frac{m_0 c}{F} \\ c \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^{-2}\right) & \text{für } t \gg \frac{m_0 c}{F} \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Dann ist die BESCHLEUNIGUNG

$$a(t) \approx \begin{cases} \frac{F}{m_0} & \text{für } t \ll \frac{m_0 c}{F} \\ \left(\frac{m_0}{F}\right)^2 \left(\frac{c}{t}\right)^3 & \text{für } t \gg \frac{m_0 c}{F} \end{cases} \quad (4.1.7)$$

- Geschwindigkeit und BESCHLEUNIGUNG: $t \ll \frac{m_0 c}{F}$ ist der klassische Newtonsche Bereich.
- Der Impuls nimmt linear mit der Zeit zu
 - unabhängig, ob relativistisch oder klassisch
 - Im klassischen Fall beruht die Impulszunahme auf der Zunahme der GE SCHWINDIGKEIT, im relativistischen Fall auf der Zunahme der MASSE.

Zur Berechnung der kinetischen Energie setzen wir ($v^2/c^2 = \frac{A^2}{1+A^2}$) mit $A = Ft/(m_0 c)$

$$E_{kin} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{A^2}{1+A^2}\right)^{1/2}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(\left(1 + A^2\right)^{1/2} - 1 \right) \quad (4.1.8)$$

oder

$$E_{kin} = m_0 c^2 \left(\left(1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2\right)^{1/2} - 1 \right) \quad (4.1.9)$$

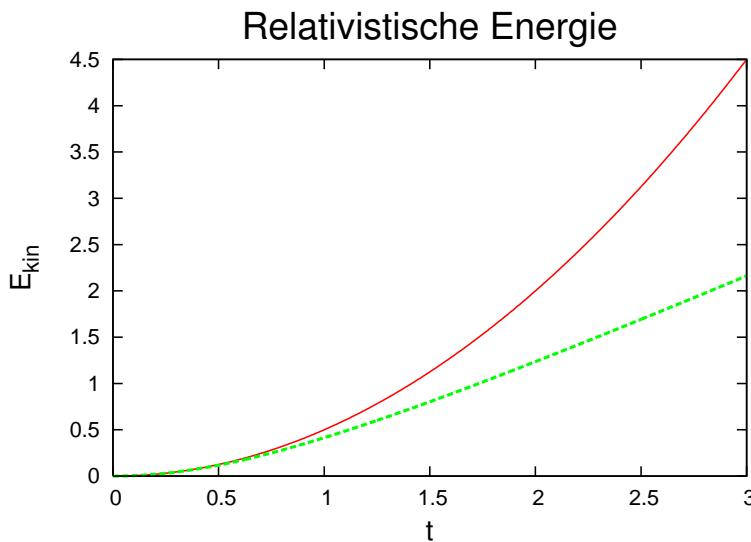


Abb. 4.2.: Verlauf der kinetischen Energie bei konstanter KRAFT im klassischen (rot) und relativistischen (grün) Fall[Mar14].

$$E_{kin} \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{F^2 t^2}{m_0} & \text{für } t \ll \frac{m_0 c}{F} \\ Fct & \text{für } t \gg \frac{m_0 c}{F} \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Die kinetische Energie steigt im relativistischen Falle linear mit der Zeit.

Die Distanz als Funktion der Zeit ist

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = c \int_0^t \frac{\frac{Ft}{m_0c}}{\left(1 + \left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2\right)^{1/2}} d\tau \quad (4.1.11)$$

Wir substituieren $A = \frac{Ft}{m_0c} \Rightarrow dA = \frac{F}{m_0c} dt \ dt = \frac{m_0c}{F} dA$.

$$\begin{aligned} x(t) &= c \frac{m_0c}{F} \int_0^{Ft/(m_0c)} \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} dA \\ &= \frac{m_0c^2}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

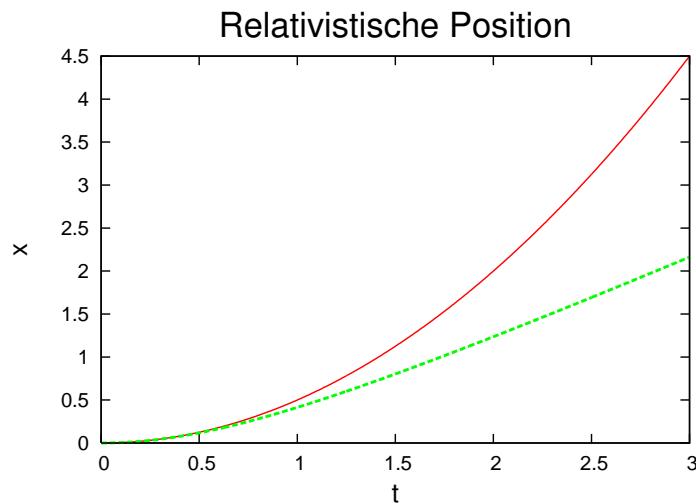


Abb. 4.3.: Verlauf der zurückgelegten Distanz bei konstanter KRAFT im klassischen (rot) und relativistischen (grün) Fall [Mar14].

$$x(t) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{F}{m_0} t^2 & \text{für } t \ll \frac{m_0c}{F} \\ ct & \text{für } t \gg \frac{m_0c}{F} \end{cases} \quad (4.1.13)$$

Die relativistische Eigenzeit $\tau = t'$ der beschleunigten MASSE nimmt langsamer zu:

$$\frac{v}{c} = \frac{Ft}{m_0 c} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} \quad (4.1.14a)$$

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right) = 1 - \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} \quad (4.1.14b)$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} \quad (4.1.14c)$$

(4.1.14d)

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} \quad (4.1.15)$$

$$\tau = \int_0^t \frac{d\hat{t}}{\sqrt{1 + \left(\frac{F\hat{t}}{m_0 c}\right)^2}} = \frac{m_0 c}{F} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{Ft}{m_0 c} \right) \quad (4.1.16)$$

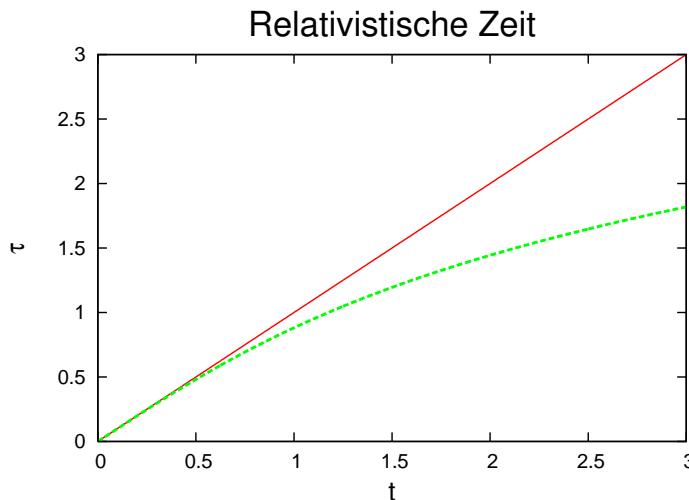


Abb. 4.4.: Verlauf der Eigenzeit bei konstanter KRAFT im klassischen (rot) und relativistischen (grün) Fall [Mar14].

$$t = \frac{m_0 c}{F} \sinh \left(\frac{F\tau}{m_0 c} \right) \quad (4.1.17)$$

$$x(\tau) = \frac{m_0 c^2}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\sinh \left(\frac{F\tau}{m_0 c} \right) \right)^2} - 1 \right) = \frac{m_0 c^2}{F} \left(\cosh \left(\frac{F\tau}{m_0 c} \right) - 1 \right) \quad (4.1.18)$$

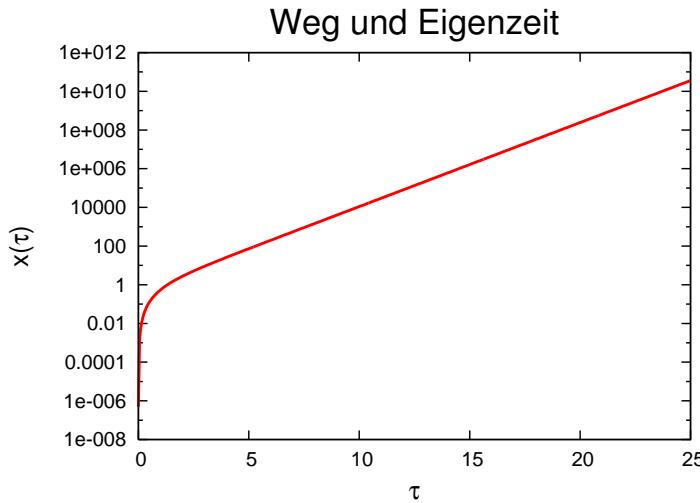


Abb. 4.5.: Zurückgelegte Strecke als Funktion der Eigenzeit [Mar14].

$$\alpha = \frac{E_{kin}}{m_0 c^2} \quad (4.1.19a)$$

$$(4.1.19b)$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (4.1.19c)$$

$$(4.1.19d)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.1.19e)$$

4.1.2. Wirkungsgrad bei ruhendem Target

Wir betrachten zuerst die Prozesse bei einer Kollision. Die pro Zeiteinheit in den Winkel ϑ gestreute Teilchenzahl oder Ereignisrate ist

$$\frac{dN}{dt} = \phi_A n_B \Delta V \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega. \quad (4.1.20)$$

Dabei ist $\Delta\Omega$ der Raumwinkel, ΔV das Volumen, ϕ_A der Teilchenfluss, n_B die Teilchendichte im Target und $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ der differentielle Wirkungsquerschnitt.

Bei einem ruhenden Target müssen die kinetischen Energien im Laborsystem $E_{kin}(A) > 0$ und $E_{kin}(B) = 0$ in kinetische Energien im Schwerpunktsystem $E'_{kin}(A)$ und $E'_{kin}(B)$ umgerechnet werden. Dann kann die Streuung oder die Reaktion rechnerisch durchgeführt werden. Dabei bleibt die Bewegung des Schwerpunkts erhalten. Schliesslich muss in das Laborsystem zurückgerechnet werden.

Wir verwenden, dass der relativistische Viererimpuls $\mathbf{P} = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)^T$, dessen Norm eine relativistische Invariante ist. Aus $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2}$.

Wir betrachten eine eindimensionale Welt. Im Laborsystem mit dem ruhenden Teilchen B haben wir die Energien $E_{A,L} = m_{A,0}c^2 + E_{A,kin}$ und $E_{B,L} = m_{B,0}c^2$ sowie die Impulse $p_{A,L} \neq 0$ und $p_{B,L} = 0$ und die Viererimpulsvektoren $\mathbf{P}_{A,L} = \left(\frac{E_{A,L}}{c}, p_{A,L}, 0, 0\right)^T$ und $\mathbf{P}_{B,L} = \left(\frac{E_{B,L}}{c}, 0, 0, 0\right)^T$. Im Schwerpunktssystem haben wir die Viererimpulse $\mathbf{P}_{A,S} = \left(\frac{E_{A,S}}{c}, p_{A,S}, 0, 0\right)^T$ und $\mathbf{P}_{B,S} = \left(\frac{E_{B,S}}{c}, p_{B,S}, 0, 0\right)^T$.

Im Schwerpunktssystem sind die Impulse der Teilchen A und B entgegengesetzt gleich, also $p_{A,S} = -p_{B,S} = p_S$. Wir setzen nun die Quadrate der Vierervektoren im Laborsystem und im Schwerpunktssystem gleich (relativistische Invariante) und erhalten

$$(\mathbf{P}_{A,L} + \mathbf{P}_{B,L})^2 = (\mathbf{P}_{A,S} + \mathbf{P}_{B,S})^2 \quad (4.1.21a)$$

$$c^2 \left(\left(\frac{E_{A,L} + E_{B,L}}{c}, p_{A,L}, 0, 0 \right)^T \right)^2 = c^2 \left(\left(\frac{E_{A,S} + E_{B,S}}{c}, 0, 0, 0 \right)^T \right)^2 \quad (4.1.21b)$$

mit dem Skalarprodukt der speziellen Relativitätstheorie

$$-(E_{A,L} + E_{B,L})^2 + c^2 p_{A,L}^2 = -(E_{A,S} + E_{B,S})^2 := -E_S^2 \quad (4.1.21c)$$

$$E_S^2 = (E_{A,L} + E_{B,L})^2 - c^2 p_{A,L}^2 \quad (4.1.21d)$$

E_S ist die für Reaktionen im Schwerpunktssystem verfügbare Energie. Wir setzen nun $E_{A,L}^2 = m_{A,0}^2 c^4 + c^2 p_{A,L}^2$, daraus $E_{A,L}^2 - c^2 p_{A,L}^2 = m_{A,0}^2 c^4$ und $E_{B,L} = m_{B,0} c^2$. Wir versuchen $E_{A,L}$ in erster Potenz zu isolieren und bekommen

$$E_S = \sqrt{E_{A,L}^2 + 2E_{A,L}E_{B,L} + E_{B,L}^2 - c^2 p_{A,L}^2} \quad (4.1.22a)$$

$$= \sqrt{E_{A,L}^2 - c^2 p_{A,L}^2 + 2E_{A,L}E_{B,L} + E_{B,L}^2} \quad (4.1.22b)$$

$$E_S = \sqrt{m_{A,0}^2 c^4 + m_{B,0}^2 c^4 + 2m_{B,0} c^2 E_{A,L}} \quad (4.1.22c)$$

Wenn nun $M_{A_0} = m_{B,0} = m_0$ ist, folgt

$$E_S = \sqrt{2m_0^2 c^4 + 2m_0 c^2 E_{A,L}} \quad (4.1.23)$$

Mit der Definition $\alpha = \frac{E_{A,L}}{m_0 c^2}$ erhalten wir

$$E_S = m_0 c^2 \sqrt{2 + 2\alpha} \quad (4.1.24)$$

Dies ergibt einen Wirkungsgrad von

$$\eta = \frac{E_S}{E_A} = \frac{E_S}{m_A(v_A)c^2} = \sqrt{\frac{2}{1 + \alpha}} \quad (4.1.25)$$

Abbildung 4.6 zeigt eine grafische Darstellung.

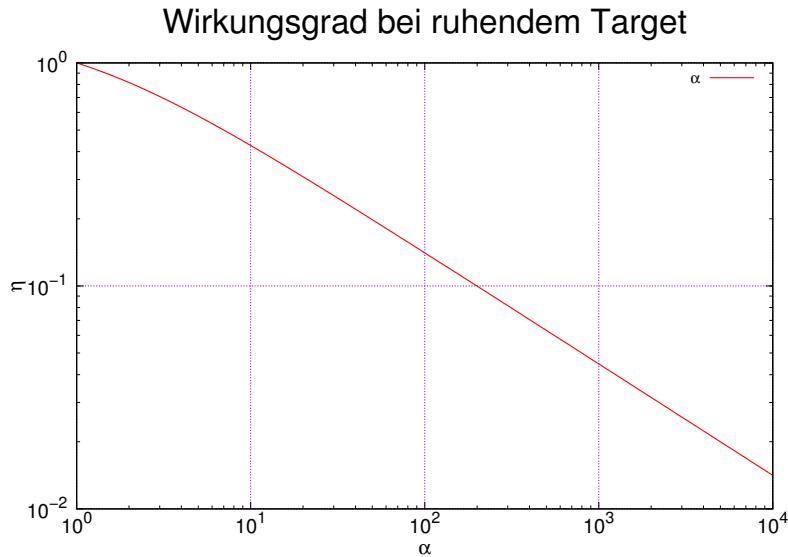


Abb. 4.6.: Wirkungsgrad bei der Streuung

Wer sich für eine tiefer gehende Erörterung interessiert verweise ich auf Demtröder [Dem10, p. 64ff].

4.1.3. Funktionsweise

Beschleuniger benötigen elektrisch geladene Teilchen. Wenn ein Teilchen mit der Ladung q durch eine Spannung U beschleunigt wird, ergibt sich eine kinetische Energie von

$$q U = E_{kin} = (m - m_0)c^2 = \alpha m_0 c^2 \quad (4.1.26)$$

$\alpha = 1 + \gamma$ ist wie üblich in der speziellen Relativitätstheorie definiert.

Wegen der begrenzten Durchschlagsspannung von Luft (oder Druckluft) werden Teilchen in der Regel durch N Beschleunigungsstrecken mit der Spannung U beschleunigt.

$$N q U = E_{kin} = (m - m_0)c^2 = \alpha m_0 c^2 \quad (4.1.27)$$

Neben einstufigen Beschleunigern wie einer Kathodenstrahlröhre werden die mehrstufigen Beschleuniger in verschiedenen Ausführungen gebaut

Linearbeschleuniger haben die kleinsten Verluste, benötigen aber eine grosse Länge

kreisförmige Beschleuniger Synchrotrons und Zyklotrons benötigen weniger Platz.

Die Teilchen können im Prinzip unendlich lange Zeit beschleunigt werden.

Die Strahlungsverluste sind durch die notwendige Beschleunigung zum Kreismittelpunkt aber gross.

Laserbasierte Beschleuniger können sehr kurz gebaut werden, da Laser dynamisch sehr viel grössere elektrische Felder erzeugen können. Die Strahlqualität erreicht jedoch noch nicht die Qualität der elektrischen Beschleuniger [Lee+06].

4.1.4. Linearbeschleuniger

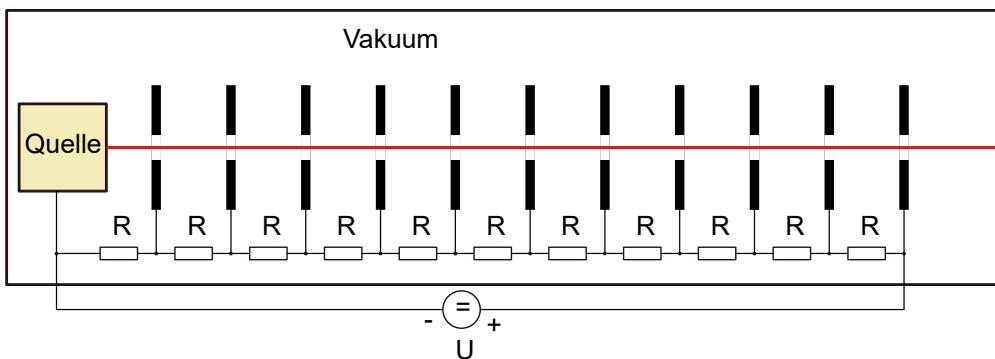


Abb. 4.7.: Elektrostatischer Beschleuniger (siehe auch [Dem10, Abb. 4.5])

Einstufige elektrostatische Beschleuniger sind so ähnlich aufgebaut wie in Abbildung 4.7. Eine Gleichspannung U wird über eine Widerstandskaskade aus N Widerständen R in gleiche Spannungsschritte aufgeteilt. Das Vorzeichen der Spannung hängt dabei vom Vorzeichen der zu beschleunigenden Ladung ab. In Abbildung 4.7 wären dies negativ geladene Teilchen.

Die Hochspannung kann über Van-de-Graaff-Generatoren (nach Robert Jemison Van de Graaff) oder über Spannungsvervielfacherkaskaden hergestellt werden.

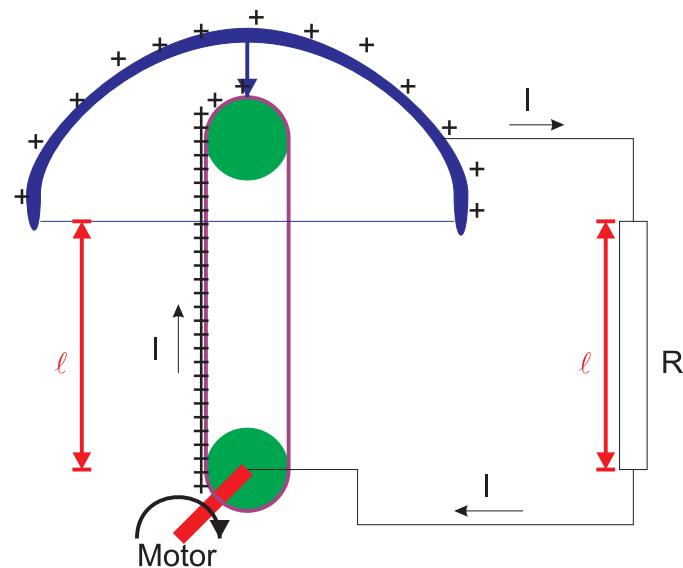


Abb. 4.8.: Van-de-Graaff-Generator zur Herstellung von Hochspannung. [Mar16]

In Abbildung 4.8 ist schematisch ein Van-de-Graaff-Generator gezeigt. Für positiv geladene Teilchen muss die Quelle auf Hochspannung gebracht werden, dafür ist die Detektion bei Erdpotential.

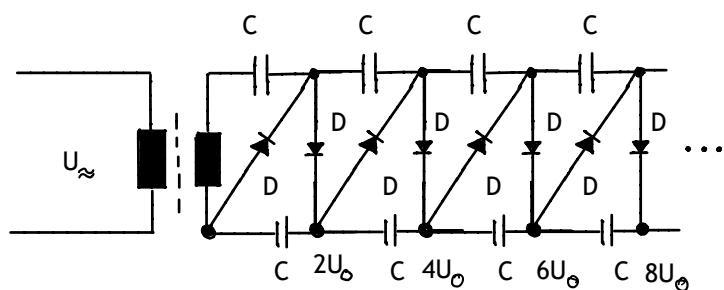


Abb. 4.9.: Kaskaden-Hochspannungsgenerator [HH89, p. 48]

Abbildung 4.9 zeigt eine Halbleiter-Kaskadenschaltung zur Erzeugung einer hochvoltage Gleichspannung. Teilspannungen können an den Knoten abgegriffen werden.

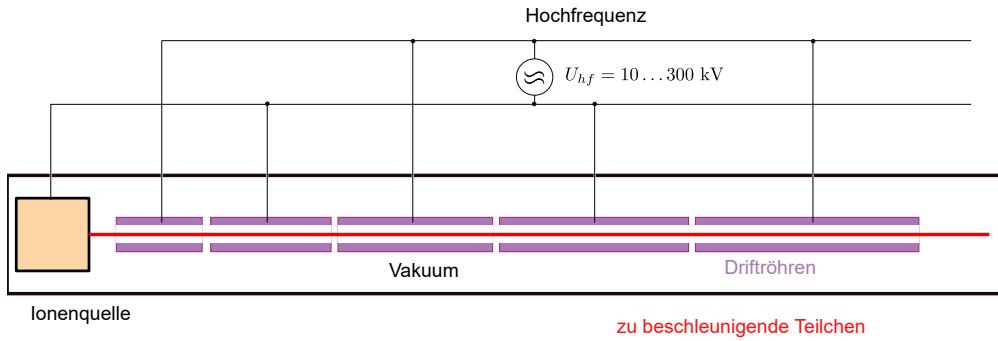


Abb. 4.10.: Skizze eines Driftröhrenbeschleunigers, inspiriert von [Dem10].

Beim Driftröhrenbeschleuniger nach Abbildung 4.10 werden Ladungen durch eine Wechselspannung mit der Amplitude U_0 beschleunigt.

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.1.28)$$

φ ist dabei eine durch die Apparatur bestimmte Phase. Bei jedem Übergang von einer Röhre zur nächsten wird die Ladung durch die Spannung $\Delta U = 2U_0$ beschleunigt, ausser am Anfang und am Ende. Dort ist die Beschleunigungsspannung U_0 . Bei N Driftröhren wird eine Ladung also durch

$$U_{tot} = U_0 + 2(N - 1)U_0 + U_0 = 2NU_0 \quad (4.1.29)$$

beschleunigt. Die Beschleunigungsspannung ändert die kinetische Energie, also

$$E_{kin} = \alpha m_0 c^2 = 2NU_0 \cdot q \quad (4.1.30)$$

oder

$$\alpha = \frac{2NU_0}{m_0 c^2} q \quad (4.1.31)$$

Aus $v = \frac{c}{1+\alpha} \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} = c \frac{\alpha}{1+\alpha} \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}}$ folgt schliesslich

$$v = \frac{c}{1 + \frac{2NU_0}{m_0 c^2} q} \frac{2NU_0}{m_0 c^2} q \sqrt{1 + \frac{2m_0 c^2}{2NU_0 q}} = \frac{2NU_0 q c}{m_0 c^2 + 2NU_0 q} \sqrt{1 + \frac{m_0 c^2}{NU_0 q}} \quad (4.1.32)$$

Die Ladung q ist je nach dem zu beschleunigenden Teilchen eine Elementarladung oder auch Z mal eine Elementarladung. Im zweiten Falle werden schwere Kerne beschleunigt.

Im i -ten Rohr hat das geladene Teilchen die Geschwindigkeit

$$v_i = \frac{2 \left(\frac{1}{2} + (i-1) \right) U_0 q c}{m_0 c^2 + 2 \left(\frac{1}{2} + (i-1) \right) U_0 q} \sqrt{1 + \frac{m_0 c^2}{\left(\frac{1}{2} + (i-1) \right) U_0 q}} \quad (4.1.33)$$

oder

$$v_i = \frac{(2i-1) U_0 q c}{m_0 c^2 + (2i-1) U_0 q} \sqrt{1 + \frac{2m_0 c^2}{(2i-1) U_0 q}} \quad (4.1.34)$$

Die Driftzeit in einer Röhre ist die halbe Periodendauer $t_D = T/2 = 1/2\nu = \pi/\omega$. Damit ist die Länge der i -ten Röhre

$$L_i = v_i t_D = \frac{\pi (2i-1) U_0 q c}{\omega (m_0 c^2 + (2i-1) U_0 q)} \sqrt{1 + \frac{2m_0 c^2}{(2i-1) U_0 q}} \quad (4.1.35)$$

Wenn $nU_0q \ll m_0c^2$ ist, also im nichtrelativistischen Falle, ist

$$v_i \approx \frac{(2i-1) U_0 q c}{m_0 c^2} \sqrt{\frac{2m_0 c^2}{(2i-1) U_0 q}} = \sqrt{\frac{2(2i-1) U_0 q}{m_0 c}} \quad (4.1.36)$$

und

$$L_i \approx \frac{\pi (2i-1) U_0 q c}{\omega (m_0 c^2)} \sqrt{\frac{2m_0 c^2}{(2i-1) U_0 q}} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{(i-1/2) U_0 q}{m_0 c}} \quad (4.1.37)$$

Hochfrequenztechnisch einfacher sind Wanderwellenbeschleuniger, z. B. nach Luis Walter Alvarez [Alv+55] oder [Wei94]. In diesem Design werden Mikrowellen so geführt, dass sie zur rechten Zeit am richtigen Ort die geladenen Teilchen beschleunigen können.

4.1.5. Zyklotron

Funktionsfähige Zyklotrone bauten 1930 in Berkeley, California, USA, Ernest Orlando Lawrence und pld:livingstonms sowie im gleichen Jahr in Paris Jean Thibaud.

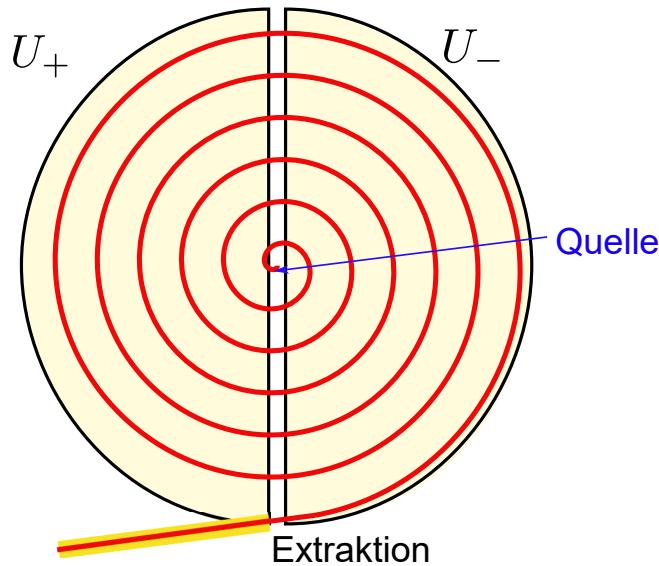


Abb. 4.11.: Schematischer Aufbau eines Zyklotrons

Ein Zyklotron ist ein relativ einfach aufgebauter Beschleuniger. Die folgenden Rechnungen sind nichtrelativistisch, gelten also nur für kleine Geschwindigkeiten.

Ein Zyklotron verwendet die Tatsache, dass die Umlaufzeit proportional zur Geschwindigkeit zunimmt.

Im nichtrelativistischen Fall lautet das Kräftegleichgewicht

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow v = \frac{rqB}{m} \quad (4.1.38)$$

Dabei ist der Impuls $p = mv$ und daraus

$$r = \frac{p}{qB} \quad (4.1.39)$$

Die Zeit für einen Umlauf ist

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{m}{qB} \quad (4.1.40)$$

Das heisst, dass die Hochfrequenz

$$f_{HF} = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \quad (4.1.41a)$$

$$\omega_{HF} = \frac{qB}{m} \quad (4.1.41b)$$

Wenn R der maximale Radius des Zyklotrons ist, ist die erreichbare Energie

$$E_{kin,max} = \frac{mv^2(R)}{2} = \frac{m}{2} \frac{R^2 q^2 B^2}{m^2} = \frac{q^2}{2m} (R \cdot B)^2 \quad (4.1.42)$$

4.1.6. Betatron

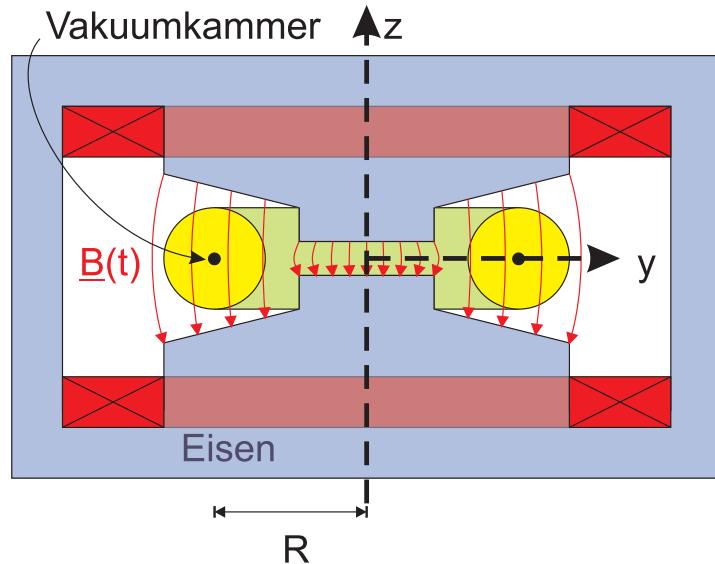


Abb. 4.12.: Aufbau eines Betatrons

Aufbau eines Betatrons

Die Bewegung der Teilchen in einem Betatron wird durch

$$m \frac{v^2}{R} = e \cdot v \cdot B(t) \quad (4.1.43)$$

oder

$$mv(t) = p(t) = e \cdot B \cdot R \quad (4.1.44)$$

beschrieben. Daraus ergibt sich

$$\frac{dp(t)}{dt} = eE(t) \quad (4.1.45)$$

Mit der Integralform des Induktionsgesetzes, unter Annahme einer stationären Kreisbahn $S(R)$ mit dem Radius R bekommt man

$$\oint_{S(R)} \mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{s} = E(t) \cdot 2\pi R = -\frac{d}{dt} \iint_{A(R)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a} = \frac{d\bar{B}(t)}{dt} \cdot \pi R^2 \quad (4.1.46)$$

wobei \bar{B} das über die Fläche des Kreises gemittelte \mathbf{B} -Feld ist. Somit

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{e \cdot R}{2} \cdot \frac{d\bar{B}}{dt} \quad (4.1.47)$$

Die Integration mit den Anfangsbedingungen $p(0) = 0$ und $B(0) = 0$ liefert

$$p(t) = \frac{e \cdot R}{2} \cdot \bar{B}(t) \quad (4.1.48)$$

Der Vergleich mit der Gleichung für die Zentripetalkraft liefert die WIDERÖE-BEDINGUNG (nach Rolf Wideröe)

$$\bar{B}(t) = 2 \cdot B(t) \quad (4.1.49)$$

Diese Bedingung kann durch eine geeignete Wahl der Form der Polschuhe erreicht werden.

Ein Betatron betrieben mit 50 Hz hat jeweils 5 ms Zeit zur Beschleunigung. Das heisst die Teilchen (z.B. e^-) machen so etwa 10^6 Umläufe bis relativistische Effekte die Funktionsweise verunmöglichen.

4.1.7. Synchrotron

Das Prinzip des Synchrotrons wurde 1944 von **Vladimir Weksler** in einer russischen Zeitschrift veröffentlicht. Das erste bekannte funktionierende Elektronensynchrotron wurde 1945 von **Edwin McMillan** in Berkeley, California, USA gebaut. 1952 baute **Mark Oliphant** an der University of Birmingham in England das erste Protonensynchrotron.

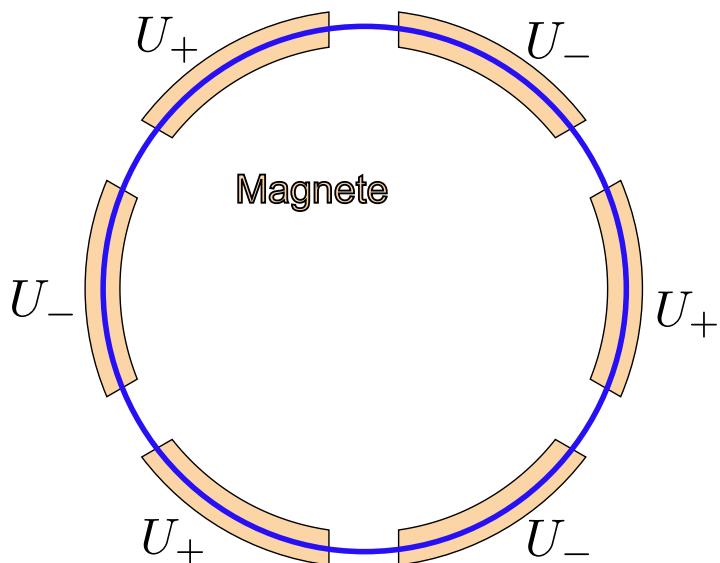


Abb. 4.13.: Schematischer Aufbau eines Synchrotrons

Bei einem Synchrotron muss, anders als bei einem Zyklotron, die Beschleunigungs-frequenz nachgeregelt werden. Für den Radius ergibt sich¹

$$r = \frac{p}{qB} = \frac{m_0c^2}{qB} \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} = \frac{E_{kin}}{qcB} \sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{E_{kin}}} \quad (4.1.50)$$

Im relativistischen Fall $E_{kin} \gg m_0c^2$ erhalten wir

¹ $\alpha = \frac{E_{kin}}{m_0c^2}$, $\frac{m(v)}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma = 1 + \alpha$ aus $1 + \alpha = \frac{E_{kin}}{m_0c^2} + \frac{m_0c^2}{m_0c^2} = \frac{E_{kin} + E_0}{m_0c^2} = \frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{m(v)}{m_0}$, $v = \frac{c\sqrt{2\alpha+\alpha^2}}{1+\alpha}$ und $p = m_0v(1+\alpha) = m_0c \cdot \sqrt{2\alpha+\alpha^2}$

$$r = \frac{E_{kin}}{qcB} \quad (4.1.51)$$

Das heisst, die magnetische Induktion muss nachgeregelt werden, um R konstant zu halten. Das heisst für eine magnetische Induktion $B = 1$ T, dann ist $\frac{r}{E_{kin}} = 3.3$ m GeV $^{-1}$.

4.1.7.1. Vertikale Stabilisierung

Beschleuniger funktionieren nur korrekt, wenn die zu beschleunigenden Teilchen auf ihrer Bahn stabilisiert werden. Die z -Komponente von \mathbf{B} ist

$$B_z(r) = B_0 \left(1 - n \frac{r - r_0}{r_0} \right) \quad (4.1.52)$$

dabei ist n der Feldindex, der sich aus der relativen Änderung des Feldes bezogen auf die relative Änderung des Ortes

$$\frac{dB_z}{B_0} = -n \frac{dr}{r_0} \quad (4.1.53)$$

ergibt, also

$$n = -\frac{dB/B_0}{dr/r_0} \quad (4.1.54)$$

oder

$$n = -\frac{dB}{dr} \frac{r_0}{B_0} \quad (4.1.55)$$

Sei nun $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)^T$. Weiter benötigen wir die Lorentzkraft $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ und daraus

$$F_z = qvB_r \quad (4.1.56)$$

Bei einem statischen Feld $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ gilt

$$(\text{rot } \mathbf{B})_\varphi = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0 \quad (4.1.57)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r} = -n \frac{B_0}{r_0} \quad (4.1.58)$$

und

$$B_r(z) = -n \frac{B_0}{r_0} z \quad (4.1.59)$$

damit gibt es in die z -Richtung eine rücktreibende Kraft

$$F_z = -qvn \frac{B_0}{r_0} z \quad (4.1.60)$$

Dies führt zu einer Schwingung um die Gleichgewichtslage mit der Frequenz

$$\nu_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q}{m}} \frac{vB_0}{r_0} n \quad (4.1.61)$$

Mit dem Gleichgewicht in radialer Richtung $\frac{mv^2}{r_0} = qvB_0$ folgt

$$\nu_z = \frac{1}{2\pi} \frac{v}{r_0} \sqrt{n} \quad (4.1.62)$$

Es gibt die Grenzsituation, dass $n < 1$ ist. Dann ist die Periode

$$\lambda_z = 2\pi r_0 \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{L}{\sqrt{n}} \quad (4.1.63)$$

bezogen auf die zurückgelegte Strecke grösser als $L = 2\pi r_0$.

4.1.7.2. Radiale Stabilisierung

Die radiale Gleichgewichtslage wird durch

$$qvB_0 = \frac{mv^2}{r_0} \quad (4.1.64)$$

gegeben. Wenn nun $r \neq r_0$ ist, ergibt sich eine Kraft

$$\begin{aligned} \Delta F &= \left[\frac{mv^2}{r} - qvB_0 \left(1 - n \frac{r - r_0}{r_0} \right) \right] e_r \\ &= \frac{mv^2}{r_0} \left[\frac{1}{1 + \frac{r-r_0}{r_0}} - \left(1 - n \frac{r - r_0}{r_0} \right) \right] e_r \end{aligned} \quad (4.1.65)$$

und damit

$$\frac{r_0}{r} = \frac{1}{\frac{r}{r_0}} = \frac{1}{1 - 1 + \frac{r}{r_0}} = \frac{1}{1 - \frac{r-r_0}{r_0}} \quad (4.1.66)$$

$$\Delta F = \frac{mv^2}{r_0} \left[\frac{1}{1 + \frac{r-r_0}{r_0}} - \left(1 - n \frac{r - r_0}{r_0} \right) \right] e_r \quad (4.1.67)$$

wenn $\frac{r-r_0}{r_0} \ll 1$

$$\Delta F = \frac{mv^2}{r_0} \left[1 - \left(\frac{r - r_0}{r_0} \right) - \left(1 - n \frac{r - r_0}{r_0} \right) \right] e_r \quad (4.1.68)$$

$$= \frac{mv^2}{r_0^2} [-(r - r_0) + (n(r - r_0))] e_r \quad (4.1.69)$$

$$= -\frac{mv^2}{r_0^2} (r - r_0)(1 - n) e_r \quad (4.1.70)$$

$$(4.1.71)$$

Wenn $n < 1$ ist, gibt es eine rücktreibende Kraft. Diese oszilliert mit der Frequenz

$$\nu_r = \frac{v}{2\pi r_0} \sqrt{1-n} \quad (4.1.72)$$

Damit ist

$$\lambda_r = 2\pi r_0 \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{L}{\sqrt{1-n}} \quad (4.1.73)$$

4.1.7.3. Starke Fokussierung

Das Prinzip der starken Fokussierung stammt von Ernest D. Courant, M. Stanley Livingston und Hartland Snyder.

Wenn Teilchen in einen Beschleuniger eingebracht werden, haben diese nie alle die gleiche Richtung. Das heisst neben dem Transfer von Energie muss ein Beschleuniger die Teilchen auf der Bahn halten, also letztlich fokussieren (um einen Begriff aus der Optik zu verwenden).

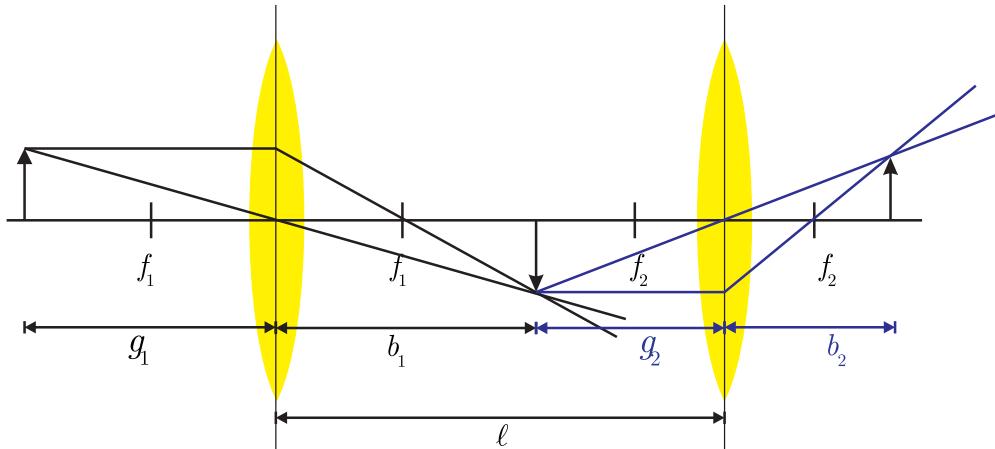


Abb. 4.14.: Prinzip der starken Fokussierung (siehe auch [Mar16])

Um das Wesentliche herauszuarbeiten betrachten wir zwei Linsen mit f_1, g_1 und der daraus folgenden Bildweite b_1 sowie f_2, g_2 und der daraus folgenden Bildweite b_2 . Daraus ergibt die Beziehung $g_2 = \ell - b_1$ zwischen der Gegenstandsweite der zweiten Linse und der Bildweite der ersten Linse.

Die entsprechenden Abbildungsgleichungen sind

$$b_1 = \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1} \quad b_2 = \frac{f_2 g_2}{g_2 - f_2}$$

Die Kombination der beiden Gleichungen liefert

$$b_2 = \frac{f_2(\ell - b_1)}{\ell - b_1 - f_2} = \frac{f_2(\ell - \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1})}{\ell - \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1} - f_2} = \frac{f_2(\ell(g_1 - f_1) - f_1 g_1)}{(\ell - f_2)(g_1 - f_1) - f_1 g_1}$$

Wenn wir $f_2 = -f_1 = -f$ setzen, bekommen wir

$$b_{2,f \rightarrow -f} = \frac{-f(\ell(g_1 - f) - fg_1)}{(\ell + f)(g_1 - f) - fg_1} = \frac{-f(\ell(1 - \frac{f}{g_1}) - f)}{(\ell + f)(1 - \frac{f}{g_1}) - f} \quad (4.1.74)$$

Wenn parallel sich bewegende Objekte (Licht) auf die erste Linse treffen, bekommen wir für $g_1 \rightarrow \infty$ die Gleichung

$$b_{2,f \rightarrow -f,\infty} = \lim_{g_1 \rightarrow \infty} \frac{-f(\ell(1 - \frac{f}{g_1}) - f)}{(\ell + f)(1 - \frac{f}{g_1}) - f} = \frac{-f\ell + f^2}{\ell + f - f} = f \left(\frac{f}{\ell} - 1 \right) \quad (4.1.75)$$

Wenn anderseits $f_2 = -f_1 = f$ ist, bekommen wir

$$b_{2,-f \rightarrow f} = \frac{f(\ell(g_1 + f) + fg_1)}{(\ell - f)(g_1 + f) + fg_1} = \frac{f(\ell(1 + \frac{f}{g_1}) + f)}{(\ell - f)(1 + \frac{f}{g_1}) + f} \quad (4.1.76)$$

Wenn parallel sich bewegende Objekte (Licht) auf die erste Linse treffen, bekommen wir für $g_1 \rightarrow \infty$ die Gleichung

$$b_{2,-f \rightarrow f,\infty} = \lim_{g_1 \rightarrow \infty} \frac{f(\ell(1 + \frac{f}{g_1}) + f)}{(\ell - f)(1 + \frac{f}{g_1}) + f} = \frac{f\ell + f^2}{\ell - f + f} = f \left(\frac{f}{\ell} + 1 \right) \quad (4.1.77)$$

(4.1.78)

Die resultierende Bildweite hängt also sowohl von der Reihenfolge der Linsen wie auch von ℓ und f ab. Bei endlicher Gegenstandsweite g_1 sind die Bildweiten $b_{2,f \rightarrow -f} = b_{2,-f \rightarrow f}$ gleich, wenn gilt

$$\ell = \frac{2f^2 g_1}{g_1^2 - f^2} \quad (4.1.79)$$

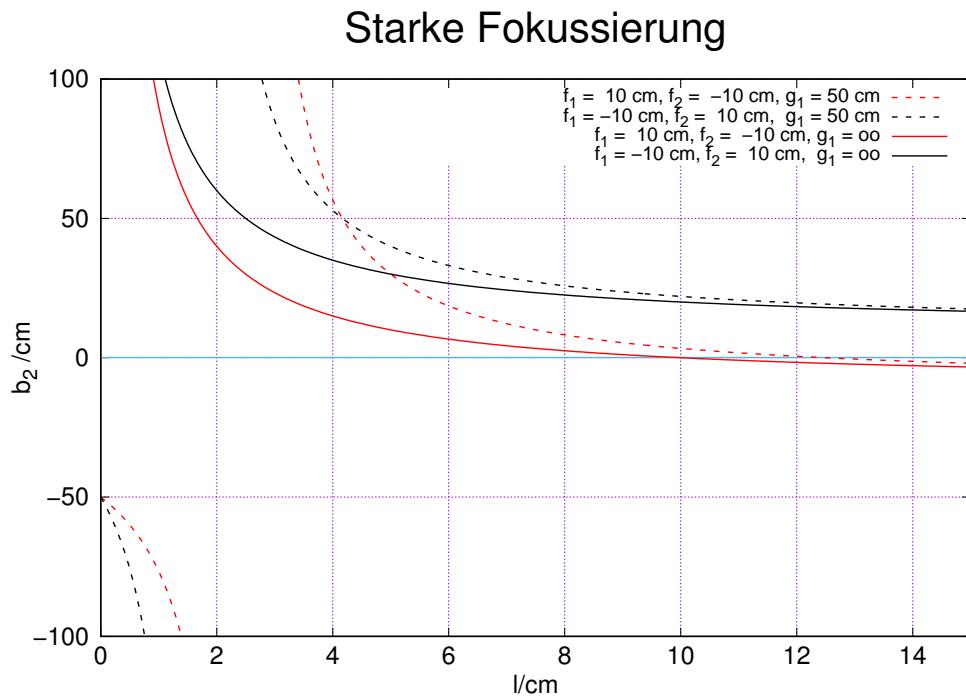


Abb. 4.15.: Starke Fokussierung, basierend auf [Mar16]

Abbildung 4.16 zeigt die Wirkung von elektrischen Feldlinien auf geladene Teilchen. Geladene Teilchen erfahren eine Kraft entlang der Feldlinien. Deshalb ist der linke Teil der Lücke fokussierend, der rechte defokussierend. Die Beträge der Fokuslängen sind gleich. Da die „Linsen“ nicht am gleichen Ort sind, kompensiert sich wie bei optischen Linsen die Wirkung der Fokussierung nicht komplett durch die Wirkung einer gleich starken Defokussierung. Zusammen ist so eine Konstruktion fokussierend.

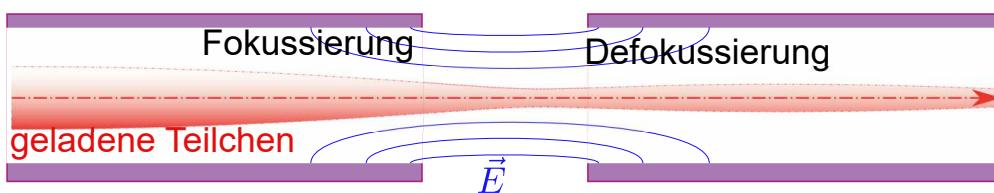


Abb. 4.16.: Fokussierung in Beschleunigern

4.1.7.4. Synchrotronschwingungen und Energiegewinn

Synchrotronschwingungen sind longitudinale Schwingungen, die entstehen weil Resonatoren Teilchen nicht kontinuierlich beschleunigen können. Es gibt N_{Res} Resonatoren.

Der Energiegewinn berechnet sich aus

$$\Delta E = N_{\text{Res}} q \cos \varphi(t_n) \text{ mit } \varphi(t_n) = 2\pi\nu t_n + \varphi_0 \quad (4.1.80)$$

Dabei ist ν die Frequenz, mit der das Synchrotron betrieben wird. Die Energie der Teilchen und die Grösse des \mathbf{B} -Feldes müssen synchron zunehmen.

Aus $m(v)v = p = qr_0 B_z$ und der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2$$

Der Energiezuwachs pro Umlauf ist

$$\Delta E = \left(\frac{dE}{dt} \right) T \quad (4.1.81)$$

wobei $T = \frac{2\pi r_0}{v}$ ist.

Dann ist

$$\frac{d}{dt} E^2 = 2E \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} (m_0 c^4 + c^2 p^2) = c^2 p \frac{dp}{dt} \quad (4.1.82a)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{E}{c^2 p} \frac{dE}{dt} \quad (4.1.82b)$$

Weiter gilt für die z Komponente von \mathbf{B}

$$\frac{dB_z}{dt} = \frac{1}{qr_0} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{qr_0} \frac{E}{c^2 p} \frac{dE}{dt} \quad (4.1.83a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\Delta E}{T} = \frac{\Delta E v}{2\pi r_0} = \frac{v \cdot N_{\text{Res}} q U_0 \cos \varphi(t_n)}{2\pi r_0} \quad (4.1.83b)$$

$$\frac{dB_z}{dt} = \frac{1}{qr_0} \frac{E(t)}{c^2 p} \frac{v \cdot N_{\text{Res}} q U_0 \cos \varphi(t_n)}{2\pi r_0} = E(t) \frac{N_{\text{Res}} U_0 \cos \varphi(t_n)}{2\pi r_0^2 c^2 m} \quad (4.1.83c)$$

Damit ein Synchrotron funktioniert muss diese Beziehung gelten.

4.1.7.5. Steuerung der Magnetfelder

$$\nu = \frac{N_{\text{Strecken}}}{2\pi \sqrt{\left(\frac{r_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{m_0}{qr_0 B}\right)^2}} \quad (4.1.84)$$

Aus dem feststehenden Radius des Synchrotrons bekommen wir

$$r = \frac{p}{qB} = \frac{m_0 c}{qB} \sqrt{2\alpha + \alpha^2} = \frac{E_{\text{kin}}}{qcB} \sqrt{1 + \frac{2m_0 c^2}{E_{\text{kin}}}} \quad (4.1.85)$$

Im relativistischen Falle ist

$$r = \frac{E_{\text{kin}}}{qcB} \quad (4.1.86)$$

In einem Synchrotron werden die Magnetfelder und die Frequenzen nachgesteuert

$$B(\alpha) = \frac{m_0 c}{qr} \sqrt{2\alpha + \alpha^2} \quad (4.1.87a)$$

$$v(\alpha) = c \frac{\sqrt{2\alpha + \alpha^2}}{1 + \alpha} \quad (4.1.87b)$$

$$\nu = \frac{v}{2\pi r} = \frac{c}{2\pi r} \frac{\sqrt{2\alpha + \alpha^2}}{1 + \alpha} \quad (4.1.87c)$$

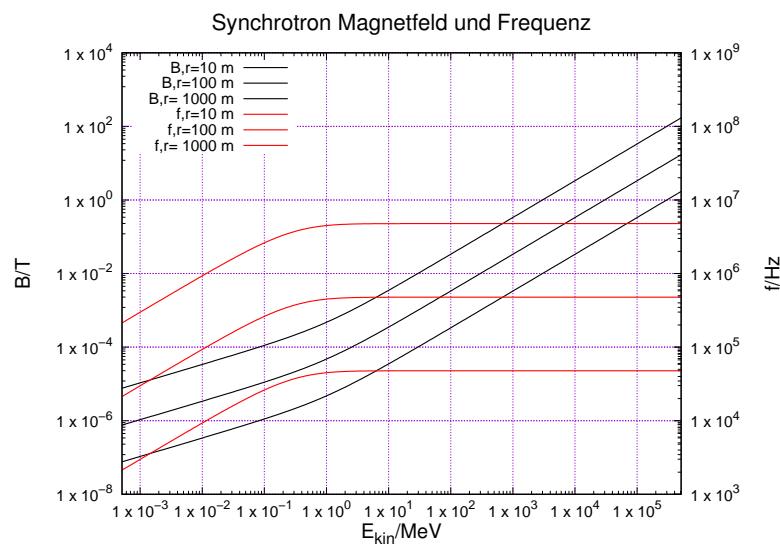


Abb. 4.17.: Nachsteuerung der magnetischen Induktion

4.1.8. Beispiele von Beschleunigern

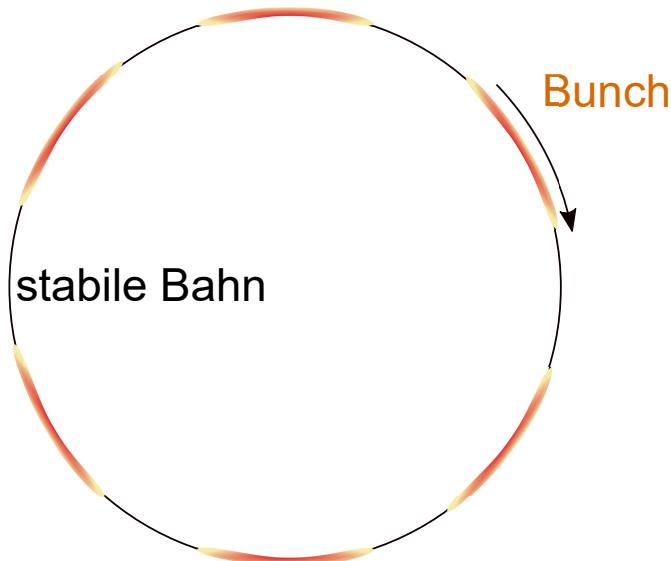


Abb. 4.18.: Teilchenpakete im Beschleuniger (adaptiert aus [Dem10, Abb. 4.31])

In Synchrotrons laufen Teilchen in Paketen im Kreis herum (Siehe Abb. 4.18). Dies ist notwendig, da keine Quelle Teilchen mit genau einer Geschwindigkeit erzeugen kann. Deshalb ist es notwendig, dass die Struktur der beschleunigenden Felder zu schnelle Teilchen weniger beschleunigt als zu langsame Teilchen. Damit erhält man eine longitudinale Fokussierung. Die Bunches können nicht beliebig kurz werden, da die geladenen Teilchen sich abstoßen.

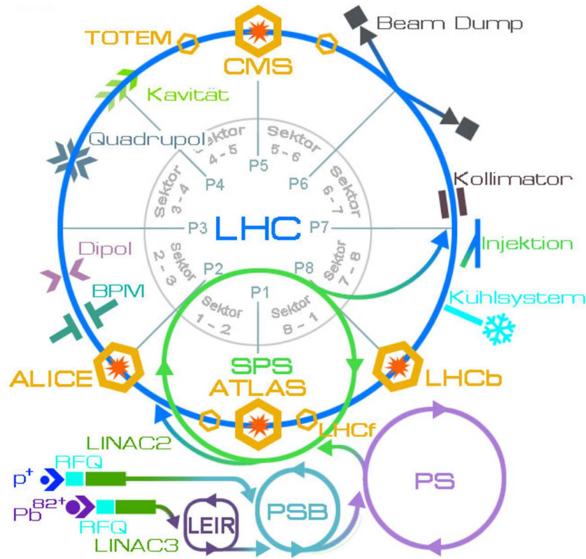


Abb. 4.19.: Layout des Large Hadron Collider des CERN [CER17a] (Nutzung nach den Terms of Copyright [CER17b])

Abbildung 4.19 zeigt das Layout des Large Hadron Colliders des CERN. Details dazu und auch der aktuelle Betriebszustand können unter <http://www.lhc-facts.ch/> eingesehen werden.

Die Website des Beschleunigers ELSA in Bonn hat eine Liste von Beschleunigern weltweit «*Particle Accelerators Around the World*» [Fro21].

4.2. Detektoren

Ohne Detektoren sind die Experimente in der Kernphysik und in der Teilchenphysik nicht durchführbar. Der Mensch hat für diese Ereignisse keine Sinnesorgane! Unter Detektoren verstehen wir:

- Nachweisgeräte
- Spurendetektoren
- Energieauflösende Detektoren

4.2.1. Ionisationskammer

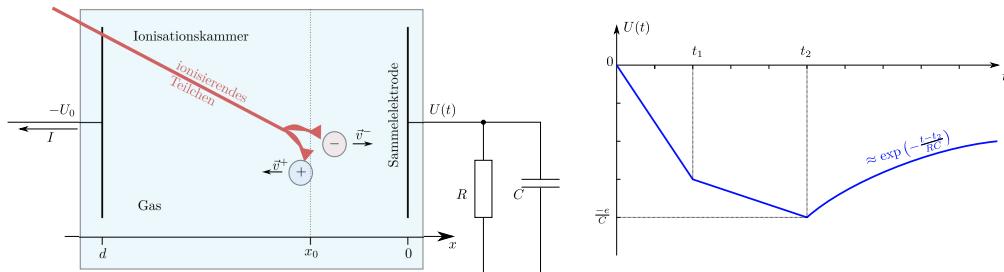


Abb. 4.20.: Aufbau einer Ionisationskammer und der entstehende Ausgangspuls (siehe auch W. Demtröder [Dem10, Fig. 4.59]).

Wenn ein ionisierendes Teilchen (siehe Abbildung 4.20 links) in eine Ionisationskammer eintritt ionisiert es durch Stöße das dort befindliche Gas. Das Elektron und das Ion werden durch das elektrische Feld nach links zur negativen Spannung $-U_0$ oder nach rechts zum RC -Glied beschleunigt. Die Spannung $U(t)$ ist im ungestörten Zustand 0. Wenn die Ionisation bei $t = 0$ geschieht werden die geladenen Teilchen beschleunigt. Da das Elektron leichter ist, trifft es zur Zeit t_1 auf der Sammelektrode ein, bevor das Ion zur Zeit t_2 auf der Gegenelektrode eintrifft. Durch die kapazitive Kopplung erreicht die Spannung am Kondensator zur Zeit t_2 ihren negativen Maximalwert $-\frac{e}{C}$. e ist der Betrag der Elektronenladung. Der Kondensator C entlädt sich über R mit einer exponentiellen Charakteristik und der Zeitkonstante $\tau = RC$. Wichtig ist, dass $\tau \gg t_1$ und $\tau \gg t_2$ ist.

Die einmal gebildeten positiven und negativen Ladungsträger bewegen sich aber nicht im Vakuum, sondern in einem Gas. Dieses führt zur Rekombination der Ladungsträger mit der Rate

$$\frac{dn}{dt} = \alpha \cdot n^+ \cdot n^- \quad (4.2.1)$$

mit α dem Rekombinationskoeffizienten. Diese Rate hängt sowohl von der Konzentration der negativen (n^-) wie auch der positiven (n^+) Ladungsträger ab. Nun bewegen sich die schwereren positiven Ladungsträger langsamer, was zu Raumladungseffekten führt [Dem10, p. 97].

Für die Rekombination von positiven und negativen Ionen in Luft beträgt der Rekombinationskoeffizient $\alpha \approx 10^{-12} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ und für die Rekombination von positiven Ionen mit Elektronen $\alpha \approx 10^{-16} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

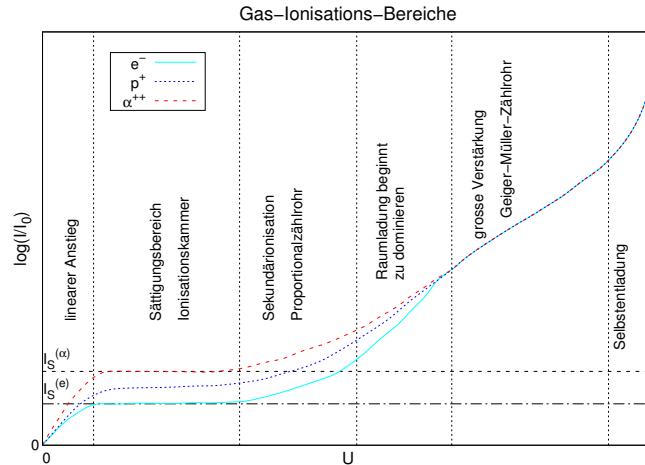


Abb. 4.21.: Unterschiedliche Ionisationsbereiche in einer Gasentladungsrohre (nach [Dem10, Abb. 4.58]).

In Abb. 4.21 können die folgenden Bereiche unterschieden werden:

linearer Anstieg In diesem Bereich sinkt die Driftzeit der Ladungsträger mit zunehmender Spannung U und damit sinkt auch die Rekombinationsrate.

Sättigungsbereich In diesem Bereich werden alle Ladungsträger gesammelt. Der Strom hängt von der Masse der ionisierenden Teilchen ab, α^{++} erzeugt mehr Ladungsträger und einen grösseren Strom als p^+ und da wieder grösser als e^- .

Sekundärionisation Ab elektrischen Feldern von $> 10^6 \text{ V m}^{-1}$ tritt Sekundärionisation auf. Da das elektrische Feld um einen Draht $E \propto \ln(r/r_0)$ ist, kann der Ionisationsbereich eng am Draht eingeschränkt werden.

Raumladung beginnt zu dominieren Die Raumladung der positiven Ionen erniedrigt die effektiv wirkende Spannung und damit die Ströme. Deshalb werden die Stromkurven für leichte und schwere Teilchen immer ähnlicher.

grössere Verstärkung Hier ist die Verstärkung so gross und die Raumladung so dominant, dass die Höhe des Strompulses unabhängig von der Teilchensorte ist. Dies ist der Bereich des Geiger-Müller-Zählrohrs (nach Hans Geiger und Walther Müller).

Selbstentladung In diesem Bereich sind die elektrischen Felder so hoch, dass sich die Elektroden spontan entladen können.

Ein Geiger-Müller-Zählrohr ist ähnlich aufgebaut wie ein Proportionalzählohr.



Versuch 1: Versuch zur Vorlesung:

Geiger-Müller-Zählrohr (Versuchskarte k-2, Video)

Anstelle des elektrischen Pulses kann auch das bei der Entladung entstehende Licht detektiert werden (FUNKENZÄHLER).

4.2.2. Szintillatoren

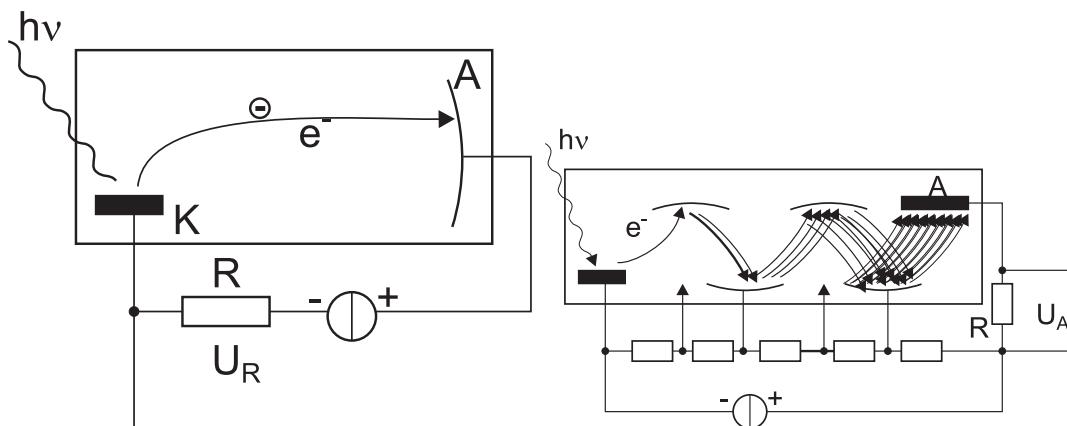


Abb. 4.22.: PHOTOZELLE (links) und PHOTOMULTIPLIER (rechts).

Szintillationszähler wandeln die kinetische Energie von Teilchen in Anregungen von Atomen in einem Szintillatormaterial um. Die entstehenden Lichtblitze werden in einem Photomultiplier (siehe Abb. 4.22) detektiert.

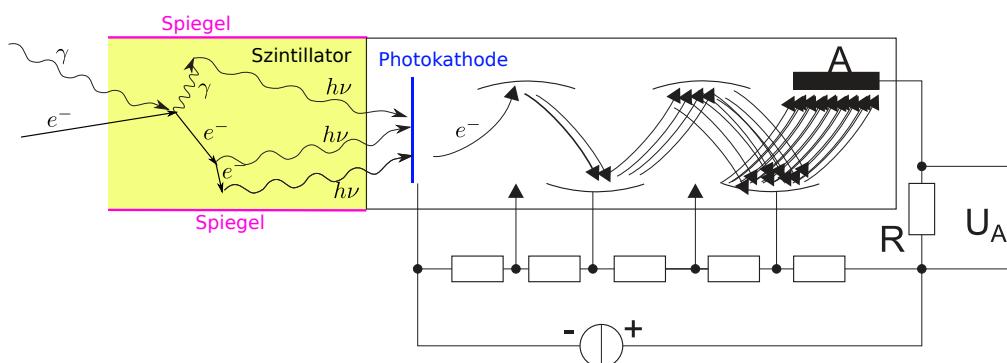


Abb. 4.23.: Schematischer Aufbau eines Szintillationsdetektors (siehe auch W. Demtröder [Dem10, Kap. 4.3.2.]

Wichtig ist, dass möglichst viel Licht gesammelt wird. Deshalb sind die Seiten des Szintillatorkristalls wie in Abb. 4.23 verspiegelt. Die von geladenen und ungeladenen Teilchen erzeugten Photonen werden von der Photokathode in Elektronen umgewandelt und dann im Photomultiplier verstärkt. Die Pulse werden dann wie bei der Ionisationskammer ausgelesen (siehe Abschnitt 4.2.1).

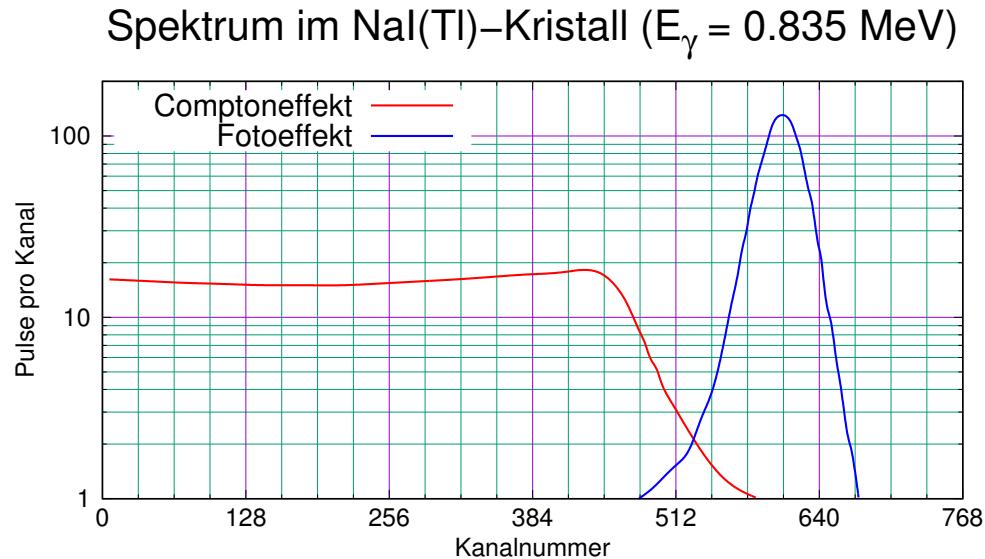


Abb. 4.24.: Spektrum eines Szintillators nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 4.62]

Abbildung 4.24 zeigt das Spektrum eines Szintillatorkristalls aus NaI(Tl). Natriumiodid wird mit Thallium aktiviert. Die dominanten Effekte sind der Comptoneffekt (siehe Abschnitt 6.4) und der Photoeffekt [MG19, Kap. 4.1.]. Pro Elektron entstehen

$$N_{\text{ph}} = \underbrace{\delta}_{\text{Quantenausbeute}} \cdot \frac{E_{\text{kin}}}{h\nu} \quad (4.2.2)$$

Photonen. Dies führt am Photomultiplier zur Spannung

$$U = M \cdot \eta \cdot \beta \cdot N_{\text{ph}} \cdot \frac{e}{C}. \quad (4.2.3)$$

Dabei sind M der Multiplikationsfaktor, η die Quantenausbeute der Photokathode, β der Bruchteil weitergeleiteter Elektronen und C die Kapazität. Die resultierende Spannung ist proportional zur Energie der Teilchen, also z.B. für γ -Quanten

$$U = U(E_\gamma) \quad (4.2.4)$$

Der Detektor funktioniert wie erwähnt auch mit γ -Quanten. Der Photoeffekt ist proportional zu Z^5 , der Anzahl Elektronen (und Protonen) in einem Atom. NaI(Tl) ist dann nicht das optimale Szintillatormaterial. CsI ist besser geeignet. Bei hohen Energien dominiert dann der COMPTON-EFFEKT (siehe Abbildung 4.24).

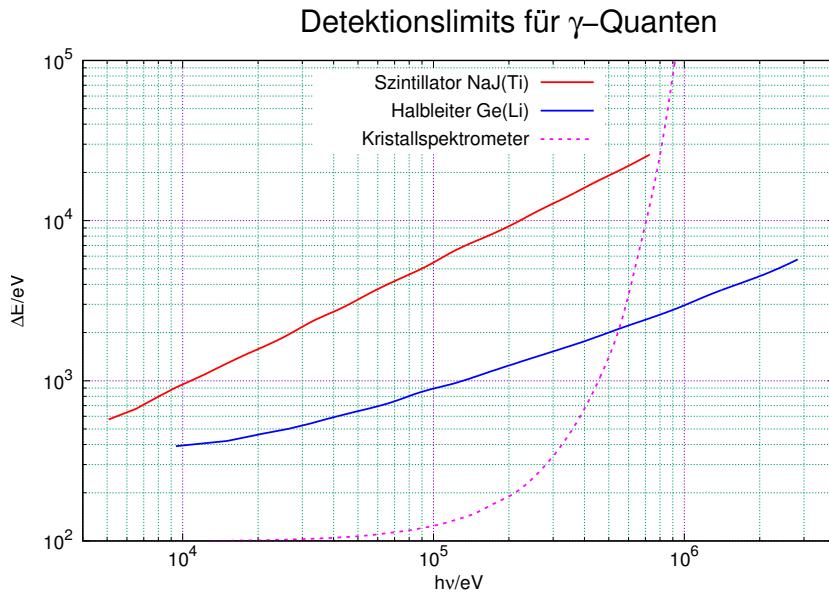


Abb. 4.25.: Detektionslimits nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 4.81]

Abbildung 4.25 zeigt schliesslich die Detektionsgrenzen von Szintillator-Detektoren und von Halbleiterdetektoren (siehe Abschnitt 4.2.3).

4.2.3. Halbleiterdetektoren

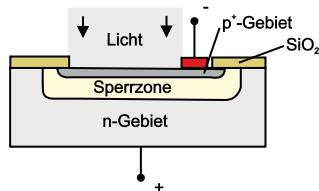


Abb. 4.26.: Schema der P^+NN^+ -Fotodiode (skizziert nach Hinsch [Hin96]).

Abbildung 4.26 zeigt das Schema einer Photodiode. Hochenergetische Teilchen regen in der Sperrzone Elektronen ins Leitungsband an. Bei genügender Energie können auch mehrere Elektronen angeregt werden. Dabei ist die Breite der Übergangsschicht

$$d \approx \sqrt{\frac{3\epsilon\epsilon_0}{q} \left(\frac{1}{n_D} + \frac{1}{n_A} \right) U} \quad (4.2.5)$$

mit $U \sim 500$ V der angelegten Sperrspannung, $n_D \sim 1 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$ der Zahlendichte der Donatoren und $n_A \sim 1 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$ der Zahlendichte der Akzeptoren. Dann ist die Breite der empfindlichen Schicht, der Übergangsschicht $d \sim 1.3$ mm.

4.2.4. Čerenkov-Detektoren

Čerenkov-Detektoren beruhen auf der Čerenkov-Strahlung (nach Pavel Alexeevič Čerenkov [Che60]). Eine Beschreibung von Čerenkov-Detektoren gibt R. L. Mather [Mat51].

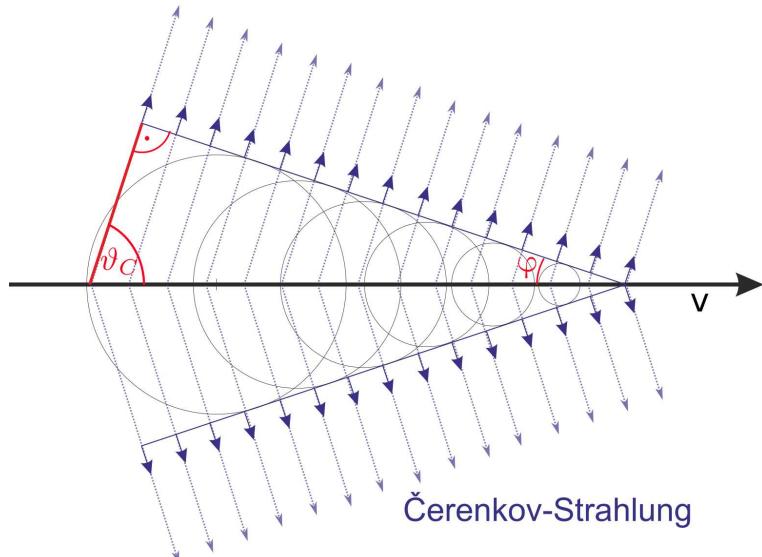


Abb. 4.27.: Čerenkov-Effekt

Abbildung 4.27 zeigt die Wirkung des Detektors. Ein geladenes Teilchen mit der Geschwindigkeit v nach rechts bewirkt in den Atomen des durchflogenen Materials eine Bewegung der Ladungen, es entsteht eine elektromagnetische Welle. Da das Teilchen sich im Material mit $v > \frac{c}{n}$ bewegt, also schneller als die Lichtgeschwindigkeit im Material, bilden die entstehenden Huygens'schen Elementarwellen einen Konus. Der Öffnungswinkel des Konus ist φ

$$\sin(\varphi) = \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{\beta n} \quad (4.2.6)$$

(β ist eine Abkürzung aus der speziellen Relativitätstheorie). Der Winkel der Richtung des ausgestrahlten Lichtes zum Geschwindigkeitsvektor heisst Čerenkov-Winkel $\vartheta_C = \pi - \varphi$.

$$\cos(\vartheta_C) = \frac{1}{\beta n} \quad (4.2.7)$$

R. L. Mather [Mat51] zitiert in seinem Paper I. Frank und I. Tamm [FT37] und I. Tamm [Tam39]: In den beiden Artikeln² wird die Gleichung

²Beide sind in elektronischer Form nicht erhältlich.

$$\begin{aligned}\frac{dN(x)}{dx} &= \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) \Delta\omega \\ &= \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c^2} \left(1 - \cos^2(\vartheta_C)\right) \Delta\omega = \frac{Z^2 e^2 \sin^2(\vartheta_C)}{4\pi\varepsilon_0\hbar c^2} \Delta\omega \quad (4.2.8)\end{aligned}$$

zitiert. Hier ist Z die Ladung des Teilchens und $dN(x)/dx$ die Anzahl abgestrahlte Teilchen pro Länge. Betrachten wir den Bereich von $\lambda = (400$ bis $700)$ nm ist

$$\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_o} - \frac{2\pi c}{\lambda_u} = 2\pi c \left(\frac{1}{400 \text{ nm}} - \frac{1}{700 \text{ nm}} \right) = 2.0182 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

Damit ist die Zahl der Photonen

$$\frac{dN_{Z=1,(400 \text{ bis } 700) \text{ nm}}(x)}{dx} = 49\,125.7 \text{ m}^{-1} \quad (4.2.9)$$

ein Wert, der mit [Mat51, Gleich. (2)] übereinstimmt. Wenn man $dN(x)/dx \cdot \hbar\omega = dW(x)/dx$ berechnet, also die abgestrahlte Energie pro Länge, und ω und $\Delta\omega$ und λ bzw. $\Delta\lambda$ umrechnet erhält man die abgestrahlte Leistung analog zu [Mat51, Gleich. (3)]

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{4\pi^2 Z^2 e^2}{\varepsilon_0} \frac{\sin^2(\vartheta_C)}{\lambda^3} \Delta\lambda \quad (4.2.10)$$

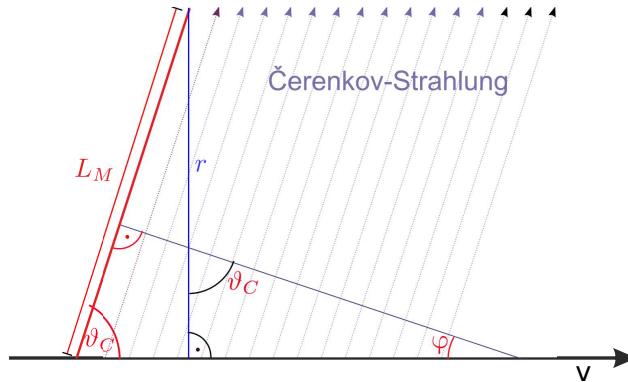


Abb. 4.28.: Berechnung der Energie aus dem Čerenkovwinkel.

Abbildung 4.28 zeigt die Berechnung des Čerenkovwinkels. Dazu betrachten wir die Fläche des Kegelmantels des Lichtkegels, nicht des Kegels der Wellenfront. Aus der Geometrie in der Abbildung ergibt sich, dass $r = L_M \sin(\vartheta_C)$ ist. Dann ist die Mantelfläche

$$A_M = \pi r L_M = \pi L_M^2 \sin(\vartheta_C) \propto \frac{dW(x)}{dx} \quad (4.2.11)$$

Aus der Fläche des Kegelmantels des Lichtkegels für zwei verschiedene Winkel ϑ_C bei gegebener Flugstrecke kann das Verhältnis der abgestrahlten Leistung be-

stimmt werden. Ebenso folgt aus $\cos \vartheta_c = 1 = \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{v}$ die Minimalgeschwindigkeit für den Čerenkov-Effekt

$$v_{min,\text{Čerenkov}} = \frac{c}{n} \quad (4.2.12)$$

Wenn Teilchen durch die Wechselwirkung unter $v_{min,\text{Čerenkov}}$ abgebremst werden, hört die Čerenkov-Strahlung auf. Wenn der Lichtkonus auf eine Ebene projiziert wird, kann so die Energie und die Stärke der Wechselwirkung bestimmt werden.

4.2.5. Spurendetektoren

Mit Spurendetektoren meint man Nebel-, Blasen- und Funkenkammern. In ihnen werden Magnetfelder zur Bestimmung von Energie und Ladungsvorzeichen eingesetzt.

$$\frac{mv^2}{r_0} = q v B \quad (4.2.13)$$

4.2.5.1. Photoplatten

Bei Photoplatten wirken die Ionen, erzeugt durch die hochenergetischen Teilchen, als Kondensationskeime. So wird die Spur des Teilchens dargestellt.

4.2.5.2. Nebelkammern

Bei Nebelkammern wirken die Ionen, erzeugt durch die hochenergetischen Teilchen, als Kondensationskeime. In einem unterkühlten Gas entstehen so kleine Wassertröpfchen, Nebel. So wird die Spur des Teilchens dargestellt.

Wassertröpfchen sind nur ab einer gewissen Mindestgrösse stabil, da der Dampfdruck proportional zum Kehrwert des Tröpfchenradius ist. Damit ein Tröpfchen entsteht muss der Dampfdruck $p_s < p_{\text{extern}}$ kleiner als der Umgebungsdruck sein. Die Verkleinerung des Tröpfchenradius ergibt die Energie

$$\Delta W = 4\pi\sigma \left(r^2 - (r - \Delta r)^2 \right) \approx 8\pi\sigma r \Delta r \quad (4.2.14)$$

mit σ der Oberflächenspannung und Δr der Änderung des Radius. Nach Kelvin ist

$$p_s(r) = p_\infty \exp \left(2\frac{\sigma}{r} \frac{M}{\rho RT} \right) \quad (4.2.15)$$

mit p_∞ dem Sättigungsdampfdruck für $r = \infty$, ρ der Dichte der Flüssigkeit, M dem Molekulargewicht (pro Mol) und R der Gaskonstante.

Bei geladenen Tröpfchen verringert der nach aussen gerichtete Druck der Ladungen die kollabierende Wirkung der Oberflächenspannung

$$p_s(r) = p_\infty \exp \left(\left(2\frac{\sigma}{r} - \frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 r^4} \right) \cdot \frac{M}{\rho RT} \right) \quad (4.2.16)$$



Versuch 2: Versuch zur Vorlesung:

Nebelkammer: Ulmer Nebel ([Versuchskarte AT-72, Video](#))

4.2.5.3. Blasenkammern

Effizienter als Nebelkammern sind Blasenkammern, da sich bei Ihnen die Teilchen durch ein Material mit sehr viel höherer Dichte bewegen. Die höhere Dichte erhöht die Wahrscheinlichkeit der Wechselwirkung. Wenn die Flüssigkeit überhitzt ist, dann bilden die geladenen Teilchen die Siedekeime. Es entstehen Bläschen entlang der Spur. Dieser Prozess ist analog zum Siedeverzug von Wasser in Mikrowellen, dem explosionsartigen Verdampfen des Wassers.

4.2.5.4. Streamerkammern

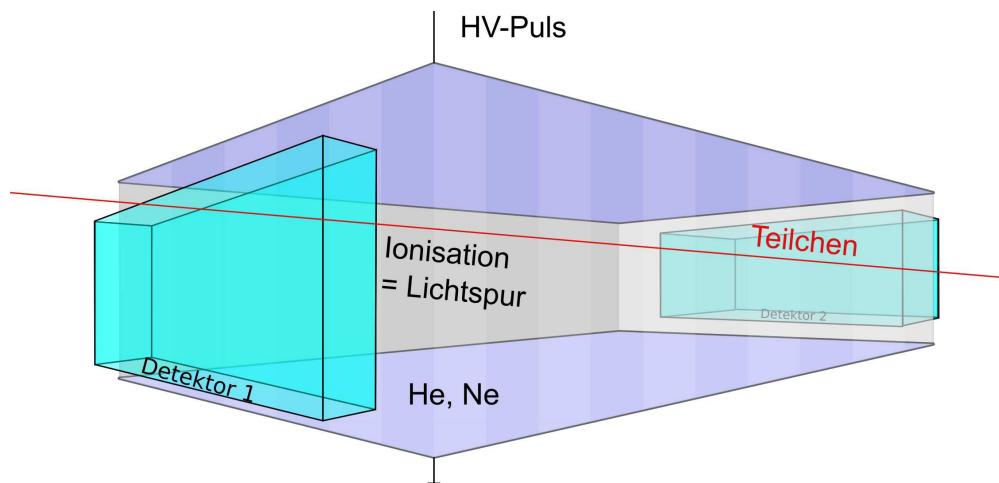


Abb. 4.29.: Prinzipieller Aufbau einer Streamer-Kammer

Streamerkammern wie in Abbildung 4.29 gezeigt bestehen aus einer gasgefüllten Kammer, je einem Detektor an der Eintritts- und der Austrittsseite und Elektroden, an die Hochspannungspulse angelegt werden können. Tritt ein Teilchen sowohl durch den Eintritts- wie auch durch den Austrittsdetektor wird mit einer einstellbaren Zeitverzögerung ein Hochspannungspuls (≈ 500 kV, ≈ 10 ns) ausgelöst. Die ionisierten Atome entlang des Entladungskanals (Streamer) leuchten. Deren Licht wird detektiert. Der Hochspannungspuls beendet das Leuchten des STREAMERS.

4.2.5.5. Mehrdraht-Funkenkammern

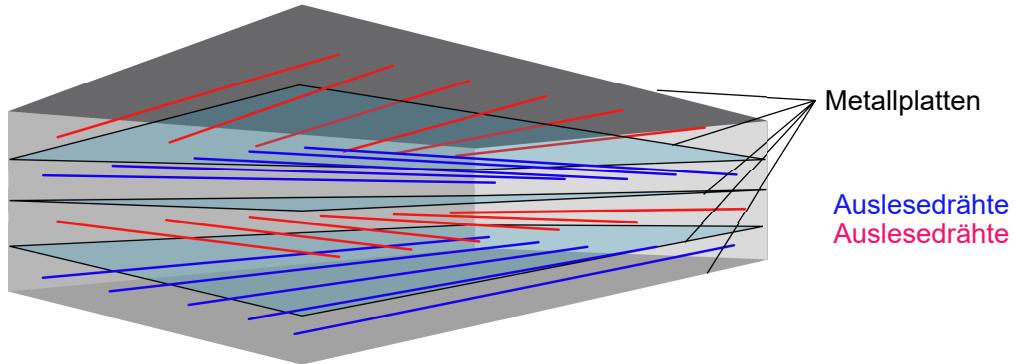


Abb. 4.30.: Prinzip der Mehrdraht-Funkenkammer

Mehrdraht-Funkenkammern wie in Abb. 4.30 funktionieren ähnlich. Detektoren am Eingang und am Ausgang stellen wieder fest, dass ein Teilchen passiert hat. Auch hier erzeugt das Teilchen wieder Ionen. Die Drähte sind geladen. Die Ionisationswahrscheinlichkeit ist in der Nähe dünner Drähte höher ist (siehe Seite 166). Deshalb bricht die Spannung zwischen jenen Drähten zusammen, zwischen denen das Teilchen passiert ist. Jeder Draht wird einzeln ausgelesen, die Signale verarbeitet, kategorisiert und die gesuchten Muster gespeichert, der Rest weggeworfen.

4.2.5.6. Anwendung: Zerfall von Pionen

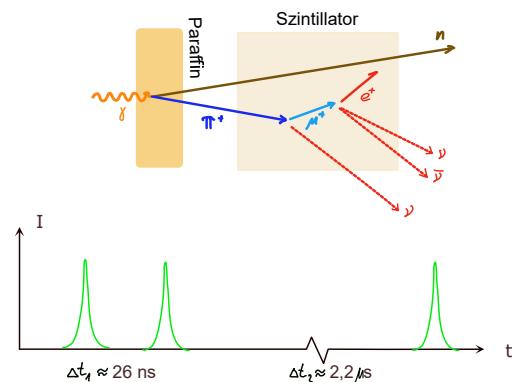


Abb. 4.31.: Messung des π^+ -Zerfalls (nach O. Chamberlain u. a. [Cha+50] und W. Demröder [Dem10]).

Abbildung 4.31 zeigt eine Möglichkeit, den Zerfall des π^+ zu messen. O. Chamberlain u. a. [Cha+50] verwendeten Röntgenstrahlen aus einem 340 MeV-Synchrotron,

um in einem Paraffin-Kristall (Kohlenwasserstoffketten mit einem hohen Wasserstoffanteil) π^+ zu erzeugen. Diese kommen in einem Szintillator zur Ruhe und emittieren dabei ein erstes Photonenpaket. Nach ihrer mittleren Lebensdauer wird ein weiteres Photonenpaket emittiert, diesmal beim Entstehen eines μ^+ -Leptons. Auch dessen Zerfall nach 2.2 μs ergibt das dritte Lichtpaket. Daraus wurden dann die Messdaten in Abbildung 4.32 berechnet.

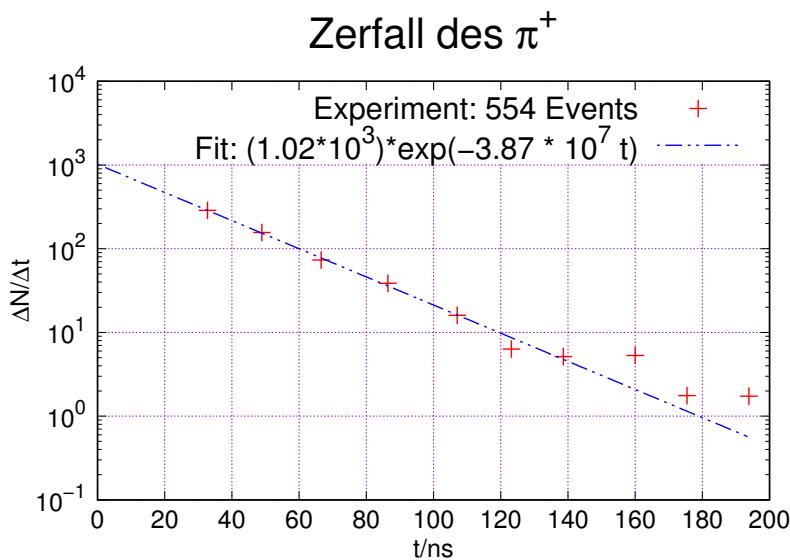


Abb. 4.32.: Zerfall des π^+ (nach O. Chamberlain u. a. [Cha+50], siehe auch W. Demtröder [Dem10, abb. 7.3]).

5. Fermionen und Bosonen

Diese Darstellung hier ist angelehnt an J. Bleck-Neuhaus [Ble13] und J.-M. Schwindt [Sch13]. Wir kennen aus früheren Vorlesungen zwei Teilchen, PHOTONEN und ELEKTRONEN. Beide Teilchen haben einen SPIN, das Elektron hat MASSE und LADUNG. Die Quantenmechanik sagt, dass beide Objekte durch Wellenfunktionen beschrieben werden können. Das Elektron mit einer endlichen RUHEMASSE kann sich nur mit $v < c$ bewegen, während im Vakuum die Geschwindigkeit von Photonen gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. In den folgenden zwei Abschnitten soll eine Zusammenfassung der Dirac-Theorie und ein Überblick über Spins und magnetische Momente gegeben werden.

5.1. Spin und magnetisches Moment

Nach J.-M. Schwindt [Sch13] betrachten wir zuerst Drehimpulse, klassisch definiert durch $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ für punktförmige Teilchen. Aus der Atomphysik / Quantenphysik wissen wir, dass für die Eigenwerte von Drehimpulsen per Kommutatorrelationen bestimmt werden können. Wir betrachten dazu die Operatoren \hat{L}_x , \hat{L}_y und \hat{L}_z sowie \hat{L}^2 . Mit $k = \{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$ kann man die Kommutatorrelationen

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad \forall \{i, j\} \in \{1, 2, 3\} \quad (5.1.1a)$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.1.1b)$$

Hier ist ϵ_{ijk} der EPSILON-TENSOR, oder nach J.-M. Schwindt [Sch13] die EPSILON-TENSORDICHTE. Oftmals wird ϵ_{ijk} auch LEVI-CIVITA-TENSOR genannt. Es gilt, dass $\epsilon_{ijk} = 1$ ist wenn ijk eine gerade PERMUTATION von 1 2 3 ist, $\epsilon_{ijk} = -1$ wenn ijk eine ungerade Permutation von 1 2 3 ist und $\epsilon_{ijk}=0$ sonst.

$$\epsilon_{ijk} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{i=1}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{i=2}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{i=3} \right) \quad (5.1.2)$$

Elektronen haben neben dem Bahndrehimpuls \mathbf{L} auch einen Eigendrehimpuls, einen Spin \mathbf{s} . Die z -Komponente von \mathbf{s} nimmt dabei die Werte $\pm \frac{1}{2}$ an. Die Kombination des Gesamtbahndrehimpulses L mit dem Gesamtspin S ist der Gesamtdrehimpuls J . Auch dort gilt

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{J}_k \quad \forall \{i, j\} \in \{1, 2, 3\} \quad (5.1.3a)$$

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_i] = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.1.3b)$$

Die Zustände eines Teilchens sind durch die Drehimpulsquantenzahlen ℓ, s, j und die entsprechenden z -Komponenten m (unabhängig vom Typ) noch nicht festgelegt. Beim Wasserstoffatom braucht es noch die Energiequantenzahl n , es kann aber auch irgend eine andere Quantenzahl ν zu einer anderen Messgröße sein. Aus der Quantenphysik ist bekannt, dass Aufsteige- und Absteigeoperatoren (\hat{J}_+ oder \hat{J}_-) alle Zustände abbilden können:

$$\hat{J}_+ |j, m, \nu\rangle = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1, \nu\rangle \quad (5.1.4a)$$

$$\hat{J}_- |j, m, \nu\rangle = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1, \nu\rangle \quad (5.1.4b)$$

Der Spin mit seinen Eigenwerten $s_z = \pm \frac{\hbar}{2}$ kann durch zwei Eigenfunktionen dargestellt werden, also ein zweidimensionales Problem. Aus

$$\hat{S}_z \left| \pm \frac{1}{2} \right\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} \left| \pm \frac{1}{2} \right\rangle \text{ oder } \hat{S}_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle \quad (5.1.5)$$

ergibt sich die Matrixschreibweise

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.1.6)$$

mit den gleichen Eigenwerten. Mit den Aufsteige- und Absteigeoperatoren (j durch s ersetzen) erhalten wir

$$\hat{S}_+ = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.7a)$$

$$\hat{S}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.1.7b)$$

Mit den Definitionen der Aufsteige- und Absteigeoperatoren folgt

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2} (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.8a)$$

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2i} (\hat{S}_+ - \hat{S}_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.8b)$$

Mit der Einheitsmatrix I haben wir eine vollständige Basis der komplexen 2×2 -Matrizen. Weiter sind, bis auf Vorfaktoren, \hat{S}_x , \hat{S}_y und \hat{S}_z die PAULI-MATRIZEN. \hat{S}^2 hat den Eigenwert $\hbar(s+1)s = \frac{3}{4}\hbar^2$. Es ist

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 I \quad (5.1.9)$$

Ein punktförmiges Elementarteilchen wie ein ELEKTRON mit Spin hat also zwei Wellenfunktionen, eine für den Ort (Hilbertraum $\mathcal{H}_\psi = \mathcal{L}^2$ der Funktionen $\psi : (\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{C}$ und dem Skalarprodukt $(\psi, \phi) = \int \psi^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$) und eine für den Spin (Hilbertraum $\mathcal{H}_\chi = \mathbb{C}^2$ mit dem üblichen Skalarprodukt). Die vollständige Wellenfunktion existiert nun im Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\psi \otimes \mathcal{H}_\chi$. Für Wellenfunktionen bedeutet dies, dass es für jeden Spinzustand eine eigene Wellenfunktion braucht. Wir können dann $|\pm\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle \otimes |\pm\rangle$ durch die beiden simultan existierenden Wellenfunktionen $(\psi_+(\mathbf{x}), \psi_-(\mathbf{x}))$ ausdrücken.

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int \begin{pmatrix} \psi_+^* & \psi_-^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \int (|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2) d\mathbf{x} = 1 \quad (5.1.10)$$

Weiter haben wir

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle \text{ mit } |\chi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ und } |\psi_+\rangle = \alpha |\psi\rangle, \quad |\psi_i\rangle = \beta |\psi\rangle \quad (5.1.11)$$

Schliesslich ist die Normierungsbedingung auch

$$\int |\psi(\mathbf{x}^2)| d\mathbf{x} = 1 \text{ und } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (5.1.12)$$

Es gibt Teilchen wie die Z -Bosonen und die W^\pm -Bosonen wie auch das Photon, die einen Spin 1 haben. Diese Leben in einem dreidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$. Die Basisvektoren sind die Eigenzustände $|+\rangle, |0\rangle$ und $|-\rangle$. Die Spinoperatoren $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ und \hat{S}^2 sind die Matrizen

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.13a)$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.13b)$$

$$\hat{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.1.13c)$$

$$\hat{S}^2 = 2\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\hbar I \quad (5.1.13d)$$

$$(5.1.13e)$$

Ein PHOTON hat einen Spin der Grösse $\hbar = 1 \cdot \hbar$. Das würde nach den vorherigen Ausführungen bedeuten, dass das Photon drei z -Zustände hätte. Nun bewegt sich aber ein Photon mit der Lichtgeschwindigkeit c . Deshalb existiert bei einem Photon der Zustand mit $m = 0$ nicht. Auch Photonen haben nur zwei mögliche Orientierungen entlang der z -Achse. Diese z -Achse liegt in die Bewegungsrichtung der Photonen. Der Spin des Photons ist gleichbedeutend mit den beiden möglichen ZIRKULAREN POLARISATIONSRICHTUNGEN.

Aus der Atomphysik wissen wir das Elektronen als Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen ein magnetisches Moment haben, so wie alle Fermionen. Der Spin \mathbf{s} entspricht einem mechanischen Drehimpuls, der nach quantenmechanischen Überlegungen mit einem magnetischen Moment $\boldsymbol{\mu}_s$ verknüpft ist. Der Zusammenhang zwischen dem Spin \mathbf{s} und dessen magnetischem Moment $\boldsymbol{\mu}_s$ ist

$$\boldsymbol{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m_e} \mathbf{s} \quad (5.1.14)$$

wobei

$$g_s = 2.0023 \quad (5.1.15)$$

ist. Der Wert von g_s ist überraschend:

- Das magnetische Moment ist etwa doppelt so gross wie aus klassischen Argumenten zu erwarten gewesen wäre. Dies ist ein quantenmechanischer Effekt.
- Aus klassischer quantenmechanischer Rechnung würde $g_s = 2$ folgen. Die Abweichung von 2.0000 ist ein quantenelektrodynamischer Effekt und durch Messungen auf viele Nachkommastellen bestätigt. Die Quantenelektrodynamik verknüpft die spezielle Relativitätstheorie mit der Quantenmechanik. Gleichzeitig bietet sie eine einheitliche Beschreibung von Teilchen und Feldern.

Zur Erinnerung: Das magnetische Moment des Elektronenspins kann mit dem BOHRSCHEM MAGNETON ausgedrückt werden

$$\mu_{s,z} = \pm 1.00116 \mu_{Bohr} \quad (5.1.16)$$

Das Verhältnis zwischen Drehimpuls und magnetischem Moment heisst gyromagnetisches Verhältnis $\gamma = \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{|e|}$. Das gyromagnetische Verhältnis für den Bahndrehimpuls und den Spin ist

$$\gamma = 1.00116 \frac{e}{m_e} \quad (5.1.17)$$

Der Spin kann zum Beispiel mit dem Stern-Gerlach-Versuch nachgewiesen werden (nach Otto Stern und Walther Gerlach).

5.2. Dirac-Theorie

In seiner Theorie des PHOTOEFFEKTS hat Albert Einstein gezeigt, dass elektromagnetische Wellen auch als PHOTONEN angesehen werden können. Dies ist der WELLE-TEILCHEN-DUALISMUS. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.2.2.] können die MAXWELLGLEICHUNGEN bei festgehaltener Frequenz ω in der Form der Gleichungen des HARMONISCHEN OSZILLATORS geschrieben werden. Der Grund ist, dass die Energie des elektromagnetischen Feldes von $\mathbf{E}^2(t)$ und $\mathbf{B}^2(t)$ abhängt und dass beide Größen über Zeitableitungen ($\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$ in einer Dimension) verknüpft sind. Beim harmonischen Oszillator hängt die Gesamtenergie von $\mathbf{x}^2(t)$ und

$\mathbf{p}^2(t)$ ab, und Impuls und Ort sind auch über eine Zeitableitung $\mathbf{p}(t) = m \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)$ miteinander verknüpft. Aus den Aufsteige- und Absteigeoperatoren werden im Zusammenhang mit Photonen Erzeugungs- (\hat{c}^\dagger) und Vernichtungsoperatoren (\hat{c}) für Photonen. Diese erhöhen oder erniedrigen die Photonenzahl n jeweils um 1.

$$\hat{c}^\dagger |n\rangle = |n+1\rangle \quad (5.2.1a)$$

$$\hat{c} |n\rangle = |n-1\rangle \quad \text{mit } n > 0 \quad (5.2.1b)$$

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = 1 \quad (5.2.1c)$$

Weiter kann die Zahl der Photonen durch den Operator

$$\hat{n} |n\rangle = \hat{c}^\dagger \hat{c} |n\rangle = n |n\rangle \quad (5.2.2)$$

bestimmt werden. Ausgehend von der Matrixformulierung der Quantenmechanik nach Werner Heisenberg gelang es Paul Dirac im Jahre 1927 das elektromagnetische Feld quantisiert zu beschreiben. Er verwendete für das Feld den (Strahlungs-) Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{rad} = \sum_{k,\sigma} (\hat{n}_{k,\sigma} + 1) \hbar \omega_k \quad (5.2.3)$$

wobei σ die beiden Polarisationsrichtungen sind und $k = |\mathbf{k}| = \omega_k/c$ alle Wellenzahlen beinhaltet. Paul Dirac kombinierte den Hamiltonoperator \hat{H}_{rad} des Feldes mit dem Hamiltonoperator eines Atoms. Er ergänzte diesen Operator durch einen Störoperator bestehend aus \hat{c}^\dagger und \hat{c} : Diese Operatoren verändern den Zustand des Atoms in dem Sie ein Photon vernichten (absorbieren) oder erzeugen (emittieren). Eine weitere Konsequenz seiner Theorie war, dass es zu jedem FERMION ein ANTITEILCHEN gibt, auch ein Fermion. Das heisst, dass ein Teilchen und sein Antiteilchen sich vernichten können. Umgekehrt heisst das auch, dass Teilchen und Antiteilchen nur gemeinsam entstehen können. Die Zahl der Fermionen einer bestimmten Art ist also konstant wenn Antiteilchen negativ gezählt werden. Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Spin) können in Paaren erzeugt werden, müssen aber nicht. Wenn Bosonen geladen sind, dann können sie nur in Paaren entstehen. Elementarteilchen sind wie Photonen ununterscheidbar. Dirac gelang es, das elektromagnetische Feld in der sogenannten ZWEITEN QUANTISIERUNG ohne Nummerierung der Teilchen zu beschreiben. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.3.3.] folgt daraus die BOSE-EINSTEIN-STATISTIK. Die Ununterscheidbarkeit bedeutet, dass die Teilchen interferieren. Die Ununterscheidbarkeit verlangt, dass bei mehreren gleichartigen Teilchen beim Vertauschen von zwei Teilchen

- die Mehrteilchenwellenfunktion für Bosonen (ganzzahliger Spin) gleich bleibt (symmetrische Wellenfunktion) oder
- die Mehrteilchenwellenfunktion für Fermionen (halbzahliges Spin) das Vorzeichen umkehrt (antisymmetrische Wellenfunktion).

Bei zwei Teilchen vom identischen Typ mit den Wellenfunktionen ψ und ϕ ist nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.3.3.] die resultierende Zweiteilchenwellenfunktion

$$\psi^{s,a}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(1)\phi(2) \pm \psi(2)\phi(1)) \quad (5.2.4)$$

Diese Operation nennt sich SYMMETRISIERUNG (Vorzeichen +, Index s für Bosonen) oder ANTISYMMETRISIERUNG (Vorzeichen -, Index a für Fermionen). Gleichung (5.2.4) hat zur Konsequenz, dass zwei Fermionen nicht im gleichen Zustand sein können, d. h. nicht die gleiche Wellenfunktion haben dürfen. Dann ist nämlich $\psi^a(1,2) = 0$. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.3.3.] bedeutet dies, dass zwei Elektronen (allgemein Fermionen) mit parallelem Spin eine antisymmetrische Ortsfunktion haben müssen, d.h. wenn Ihre Orte $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ gleich sind ist wieder $\psi^a(1,2) = 0$.

J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.3.3.] gibt das folgende Beispiel an: Es seien ψ und ϕ zwei orthogonale Zustände, d.h. sie sind wegen der Konstruktion nicht gleich und erfüllen damit das Prinzip, dass zwei Fermionen nicht im gleichen Zustand sein dürfen. Ein Parameter $0 \leq \beta \leq 1$ erlaubt die Konstruktion einer weiteren normierten Wellenfunktion $\phi_\beta = \sqrt{1 - \beta^2}\psi + \beta\phi$. Für $\beta = 1$ bekommen wir die beiden orthogonalen Wellenfunktionen. Die antisymmetrisierte Zweiteilchenwellenfunktion ist dann

$$\begin{aligned} \psi^a(1,2,\beta) &= \frac{k}{\sqrt{2}} (\psi(1)\phi_\beta(2) - \psi(2)\phi_\beta(1)) \\ &= \frac{k}{\sqrt{2}} \left(\psi(1) \left(\sqrt{1 - \beta^2}\psi(2) + \beta\phi(2) \right) - \psi(2) \left(\sqrt{1 - \beta^2}\psi(1) + \beta\phi(1) \right) \right) \\ &= \frac{k}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 - \beta^2}\psi(1)\psi(2) + \beta\phi(2)\psi(1) - \sqrt{1 - \beta^2}\psi(2)\psi(1) - \beta\psi(2)\phi(1) \right) \\ &= \frac{k\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{2}} (\psi(1)\psi(2) - \psi(2)\psi(1)) + \frac{k\beta}{\sqrt{2}} (\phi(2)\psi(1) - \psi(2)\phi(1)) \\ &= \frac{k\beta}{\sqrt{2}} (\phi(2)\psi(1) - \psi(2)\phi(1)) \quad (5.2.5) \end{aligned}$$

Es bleibt also nur der Term mit den orthogonalen Wellenfunktionen übrig. Die Normierung verlangt, dass $k = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ ist. Wenn $\beta = 0$ ist, ist die resultierende Wellenfunktion 0. In allen anderen Fällen ist sie einfach die Kombination der beiden orthogonalen Wellenfunktionen. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.3.3.] kann die antisymmetrische Variante der Gleichung (5.2.4) als Determinante einer quadratischen Matrix bestehend aus zwei Spaltenvektoren geschrieben werden

$$\begin{aligned} \psi^a(1,2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} (\psi(1)) & (\phi(1)) \\ (\psi(2)) & (\phi(2)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} \psi(1) & \phi(1) \\ \psi(2) & \phi(2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(1)\phi(2) - \psi(2)\phi(1)) \quad (5.2.6) \end{aligned}$$

Nun ist nach den Gesetzen der linearen Algebra die Determinante unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Das heisst, die resultierende Wellenfunktion hängt nicht von der gewählten Basis ab.

Werden bei einem System von vielen identischen Fermionen zwei Paare ausge-

tauscht, dann ändert sich das Vorzeichen für jedes Teilpaar einmal, insgesamt also nicht. Dies ist der Fall bei der Supraleitung, da dort die Elektronen zu COOPER-PAAREN vereint sind. Die Gesamtwellenfunktion eines Systems von Fermionen hat also symmetrische, bosonische Anteile. Bei Supraleitern sind durch die Paarbildung die antisymmetrischen Anteile unterdrückt. Supraleiter sind ein bosonisches System.

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Frage 9.2] zeigt sich, dass die abstossende Coulombkraft zweier Elektronen durch die Orbitale noch nicht vollständig gegeben ist.

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \langle \Psi^a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) | \Psi^a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle \\ &= E_{pot}(\text{direct}) - E_{pot}(\text{ausgetauscht}) \quad (5.2.7) \end{aligned}$$

Das heisst, der erste Term $E_{pot}(\text{direct})$ ist die klassische potentielle Energie zwischen den zwei Elektronenzuständen $\psi(\mathbf{r})$ und $\phi(\mathbf{r})$ in der antisymmetrischen Wellenfunktion $\Psi^a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Der zweite Term $E_{pot}(\text{ausgetauscht})$ ist die quantenmechanische Korrektur, hier mit einem «-» wegen der Antisymmetrie der Fermionen. Die abstossende potentielle Energie zweier Elektronen wird durch Austauschkräfte (die Interferenzen) verringert.

Bei bosonischen Teilchen muss Gleichung (5.2.7) so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \langle \Psi^s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) | \Psi^s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle \\ &= E_{pot}(\text{direct}) + E_{pot}(\text{ausgetauscht}) \quad (5.2.8) \end{aligned}$$

Hier ist die klassische potentielle Energie durch den positiven Term erhöht.

5.2.1. Basiszustände in der zweiten Quantisierung

J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kasten 9.2] sagt, dass es im Vakuum einen Grundzustand mit dem Zustandsvektor $|\mathbf{0}\rangle$ mit der Normierung $\langle \mathbf{0} | \mathbf{0} \rangle = 1$ gäbe. Wenn nun ein Teilchen erzeugt werden soll verwendet man den Aufsteigeoperator \hat{a}_k^\dagger , wobei k den in einer Einteilchenbasis zu erzeugenden Zustand ϕ_k beschreibt.

$$|k\rangle = \hat{a}_k^\dagger |\mathbf{0}\rangle \quad (5.2.9)$$

In der Ortsbasis verwenden wir den Erzeugungsoperator $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$ um am Ort \mathbf{r} das Teilchen $|\mathbf{r}\rangle = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) |\mathbf{0}\rangle$ zu erzeugen. Die zum Eigenzustand $|\mathbf{r}\rangle$ gehörige Eigenfunktion ist $\psi(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$.

In der Vorlesung Atomphysik oder Quantenmechanik wurde der Sachverhalt so beschrieben: Der Zustand $|k\rangle$ hat die Wellenfunktion ([Ble13, Kasten 9.2])

$$\phi_k(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | k \rangle = \langle \mathbf{0} | \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{a}_k^\dagger | \mathbf{0} \rangle \quad (5.2.10)$$

Ein zweites Teilchen entsteht durch

$$|k', k\rangle = \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k^\dagger |\mathbf{0}\rangle \quad (5.2.11)$$

Der Operator \hat{a}_k vernichtet den Zustand $|k\rangle$. Insbesondere gilt $\hat{a}_k |\mathbf{0}\rangle = 0$.

5.2.2. Freie Teilchen

Wie im Abschnitt 5.2.1 und bei J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.4.1.] skizziert werden Teilchen durch zustandsspezifische Aufsteigeoperatoren erzeugt

$$|k\rangle = \hat{a}_k^\dagger |\mathbf{0}\rangle \quad (5.2.12)$$

Der Prozess ist analog zu dem im HARMONISCHEN OSZILLATOR. Mit Hilfe des Kommutators (tiefgestellter Index «-») und des Antikommutators (tiefgestellter Index «+»)

$$[X, Y]_+ = XY + YX \quad \text{Antikommator} \quad (5.2.13a)$$

$$[X, Y]_- = [X, \dot{Y}] = XY - YX \quad \text{Kommutator} \quad (5.2.13b)$$

kann man die folgenden Relationen für Aufsteige- und Absteigeoperatoren (oder Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren) für zwei Zustände A und B einer orthonormierten Basis hinschreiben

$$[\hat{a}_A, \hat{a}_B^\dagger]_\pm = \hat{a}_A \hat{a}_B^\dagger \pm \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_A = \begin{cases} 1, & \text{wenn } A = B; \\ 0, & \text{wenn } A \neq B. \end{cases} \quad \text{und} \quad [\hat{a}_A^\dagger, \hat{a}_B^\dagger]_\pm = 0 \quad (5.2.14)$$

Die 0 in Gleichung (5.2.14) ist die Zahl Null oder der Nullvektor. Dieser Nullvektor muss vom Vektor des Vakuums, hier auch mit einer Null beschrieben, unterschrieben werden. In Gleichung (5.2.14) steht der Kommutator (tiefgestellter Index «-») für **Bosonen**, der Antikommator (tiefgestellter Index «+») für **Fermionen**. Der Grund ist: Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Fermionen in Mehrteilchensystemen antikommutieren. Dies ist nicht zu verwechseln mit den Zuständen: Orthogonale Fermionenzustände kommutieren.

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.4.1.] ergibt sich daraus das AUSCHLUSSPRINZIP (PAULIPRINZIP) aus der zweiten Relation in Gleichung (5.2.14).

$$[\hat{a}_A^\dagger, \hat{a}_B^\dagger]_+ = \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B^\dagger + \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_A^\dagger = 0 \quad (5.2.15)$$

Bei zwei identischen Fermionen (Vorzeichen «+», $A = B$) ergibt sich $2\hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B^\dagger = 0$ (der Nulloperator).

Der Hamiltonoperator eines Vielteilchensystems mit allen Wechselwirkungen kann allein durch wiederholte Anwendung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (\hat{a}^\dagger und \hat{a}) konstruiert werden.

Wenn die $E(k)$ die Energieeigenwerte freier Teilchen in den Einteilchenzuständen $|k\rangle$ sind, wenn der Teilchenzahloperator $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ ist und wenn es keine Wechselwirkungen der Teilchen untereinander gibt, dann lautet der Hamiltonoperator des Vielteilchensystems

$$\hat{H}_{\text{freie Teilchen}} = \sum_{\forall k} E(k) \hat{n}_k = \sum_{\forall k} E(k) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (5.2.16)$$

Dies ist der Operator der Gesamtenergie. Die Summe bei Elektronen ist dann über alle Raumdimensionen.

Photonen entstehen aus dem gleichen Vakuum, aber mit anderen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (\hat{c}^\dagger und \hat{c}). Der Hamiltonoperator für die elektromagnetische Strahlung ist

$$\hat{H}_{\text{Strahlung}} = \sum_{\forall p} \hbar \omega_p \hat{n}_p = \sum_{\forall p} \hbar \omega_p \hat{c}_p^\dagger \hat{c}_p \quad (5.2.17)$$

Elektronen und Strahlung hätten ohne Wechselwirkung den Gesamthamiltonoperator $\hat{H}_{\text{gesamt}} = \hat{H}_{\text{freie Teilchen}} + \hat{H}_{\text{Strahlung}}$.

5.2.3. Teilchen mit Wechselwirkungen

Wechselwirkungen werden in die Welt der zweiten Quantisierung eingefügt, indem zusätzliche Terme genannt Hamiltonoperator der Wechselwirkung \hat{H}_{WW} addiert werden. Die Idee dabei ist: Wenn ein Teilchen vom Zustand A in den Zustand B wechselt muss gleichzeitig ein Teilchen des Zustandes A vernichtet und eines des Zustandes B erzeugt werden. Wir erinnern uns daran, dass die Operatoren in der Reihenfolge von rechts nach links angewandt werden.

$$\hat{H}_{WW}(A \rightarrow B) = \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_A \quad (5.2.18)$$

Sollte der Zustand A kein Teilchen beinhalten, dann kommt hier null heraus. Dieser Wechselwirkungsoperator muss nun entsprechend realer physikalischer Wechselwirkungen konstruiert werden. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.4.3.] kann der Wechsel eines Elektrons von einem Zustand höherer Energie A in einen Zustand niedriger Energie A' unter Aussendung eines Photons so geschrieben werden

$$\hat{H}_{\text{Photonenemission}} = \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_p^\dagger \quad (5.2.19)$$

Entsprechend wäre der Hamiltonoperator der Photonenabsorption

$$\hat{H}_{\text{Photonenabsorption}} = \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_{A'} \hat{c}_p \quad (5.2.20)$$

Wenn zwei Teilchen A und B aneinander streuen und nach dem Stoss in den Zuständen A' und B' sind lautet der vorläufige Wechselwirkungshamiltonoperator

$$\hat{H}_{\text{Streuung}} = \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_B \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \quad (5.2.21)$$

Wer Billard spielt weiß, dass aus dem gleichen Ausgangszustand durchaus mehrere Endzustände auftreten können. Weil in der Quantenwelt Ort und Impuls nach Werner Heisenberg nie gleichzeitig genau gemessen werden kann muss über alle möglichen Endzustände summiert (integriert) werden. Da nun nicht jedes Resultat des Stossprozesses gleich wahrscheinlich ist, müssen wir noch eine Wahrscheinlichkeit, die Streuamplitude $f(\Delta p)$ aus dem Impulsübertrag Δp , mit multiplizieren.

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{Streuung}} = & \sum_{\forall A, A', B, B'} f(\Delta p) \hat{a}_{B'}^\dagger \hat{a}_B \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \\ & \Delta p = p_{A'} - p_A = p_B - p_{B'} \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Für die Coulombkraft ist $f(\Delta p) \propto \frac{1}{(\Delta p)^2}$.

J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.4.3.] gibt weiter an, dass eine genaue Rechnung zeigt, dass der Wechselwirkungshamiltonoperator nach Gleichung (5.2.22) nicht braucht, sofern im Falle der elektromagnetischen Wechselwirkung die Emission von Photonen nach Gleichung (5.2.19) und die Absorption von Photonen nach Gleichung (5.2.20) sowie eine korrekte Störungsrechnung verwendet werden. Dies führt dann letztlich auf den Formalismus der Feynmandiagramme (von Richard Feynman) nach Abschnitt 15.4.

Die Wechselwirkung über elektromagnetische Felder wird in diesem Formalismus über die Emission und die Absorption von Photonen gehandhabt. Das heisst, jegliche elektromagnetische Wechselwirkungsoperatoren müssen mindestens die Hamiltonoperatoren der Photonenabsorption und der Photonenemission enthalten. Das kann J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.5.] auch so formuliert werden:

Der elementare Prozess der elektromagnetischen Wechselwirkung ist die Emission und Absorption eines Photons.

Wenn die erlaubten Zustände die Impulseigenzustände von Elektronen und von Photonen sind und davon nur die genommen werden, die die Energie-, und Impulserhaltung sowie den Erhaltungssatz von der Anzahl Fermionen erfüllen. Dies heisst, dass $\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_B + \mathbf{p}_\gamma$ und $E_A = E_B + E_\gamma$ ist wobei γ für ein Photon steht (γ -Quant). Die Stärke der Wechselwirkung wird über eine noch zu bestimmende Kopplungskonstante g angegeben [Ble13, Kap. 9.5.]. Schliesslich benötigt man zur Normierung noch einen Faktor $1/\sqrt{p_\gamma c}$. Dieser Faktor ergibt sich aus der Umrechnung freier elektromagnetischer Felder in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (und erinnert an die relativistische Energie $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$ mit $m_0 = 0$).

6. Streuexperimente

Bei Streuexperimenten gibt es die folgenden Untersuchungsmethoden:

- Elastische Streuung: Ein einfallender Strahl mit der Teilchenflussdichte $\Phi = nv_0$ (Einheit $[\Phi] = \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$) trifft auf das Ziel mit der Fläche A . Die Anzahl Teilchen pro Zeiteinheit ist

$$\frac{dN}{dt} = \Phi A \quad (6.0.1)$$

In der Zeit Δt treffen dann $N = \frac{dN}{dt}t = \dot{N}t = \Phi A \Delta t$ Teilchen auf, von denen $\Delta N = \dot{N}\Delta t = \Phi A \Delta t$ gestreut werden.

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta \dot{N} \Delta t}{\dot{N}t} = f(\vartheta, E_0) \delta\Omega \quad (6.0.2)$$

mit

$$f(\vartheta, E_0) = \frac{n_T}{A} V \frac{d\sigma(\vartheta, E_0)}{d\Omega} \quad (6.0.3)$$

Hier ist ϑ der Ablenkwinkel. Die Teilchen werden um den Raumwinkel Ω gestreut. Dabei ist die Teilchendichte im Target n_T und im nichtrelativistischen Falle die Energie $E_0 = \frac{1}{2}mv^2$

- Inelastische Streuung: Es gibt die folgenden Arten inelastischer Streuung:
 - Reaktive Streuung
 - Spektroskopie der Gammastrahlen für angeregte Kernzustände
 - Ersatz eines Elektrons durch ein μ , das sich im Wesentlichen im Kern aufhält
 - Messung der Energieverteilung der emittierten Teilchen von instabilen Kernen (e^- oder α)

Im Folgenden werden einzelne Realisierung von elastischer und inelastischer Streuung besprochen.

6.1. Röntgenstrahlung und Rayleigh-Streuung

Wenn Röntgenlicht (nach Wilhelm Conrad Röntgen) an einer Ladungswolke gestreut wird, tritt RAYLEIGH-STREUUNG auf. Das elektrische Feld der Röntgenwelle bringt die Ladungen des Kerns zum Schwingen. Diese strahlen dann nach [Mar16, Kap. 6.5]

$$I(r, \Theta) = \langle S(r, \Theta, t) \rangle_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{q^2 z_0^2 \omega^4}{(4\pi\varepsilon_0 c^2)^2} \frac{\sin^2 \Theta}{2r^2} \quad (6.1.1)$$

elektromagnetische Energie der gleichen Frequenz ab, es tritt also Streuung auf. Aus der Gleichung (6.1.1) kann abgelesen werden, dass die Streuamplitude der Rayleigh-Streuung proportional zu $\omega^4 \propto \nu^4$ ist. Die Amplitude ist proportional $q = Z \cdot e$, die Intensität oder der Betrag des Poynting-Vektors proportional zu $Z^2 e^2$. Bei einer Energie von $\hbar\omega = 3 \text{ keV}$ ist die Wellenlänge $1.046\,852\,1 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ und die Frequenz $2.863\,752 \cdot 10^{19} \text{ 1/s}$, im Vergleich zu grünem Licht mit der Wellenlänge $5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ und der Frequenz $6.00 \cdot 10^{14} \text{ 1/pers}$. Deshalb ist die Intensität der Rayleigh-Streuung für die Energie $\hbar\omega = 3 \text{ keV}$ somit $5.204016 \cdot 10^{18}$ mal stärker als für grünes Licht.

6.2. Streumethoden

Bei einem Streuexperiment werden Teilchen an einem ruhenden (oder bewegten) Objekt, TARGET genannt, gestreut. Das Target wird über seinen Wirkungsquerschnitt σ charakterisiert. σ ist die aus der Ferne aus der Richtung des streuenden Teilchens gesehene Querschnittsfläche eines harten Streukörpers. Der Wirkungsquerschnitt wird in der Teilchenphysik mit der Einheit

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} := 10^{-28} \text{ m}^2 \quad (6.2.1)$$

Die Wahrscheinlichkeit p , dass ein Streuereignis eintritt wenn eine Fläche A mit N sich nicht überlappenden STREUZENTREN mit dem Streuquerschnitt σ mit einem Projektil beschossen wird ist

$$p = \frac{N\sigma}{A} \quad (6.2.2)$$

Solange Streuzentren sich nicht überlappen ist die Wahrscheinlichkeit gegeben durch die Geometrie.

Der TOTALE WIRKUNGSQUERSCHNITT wird auch mit der Grösse σ gemessen und ist durch

$$\sigma = \frac{\frac{\# \text{Reaktionen}}{\text{Zeit}}}{\frac{\text{Strahlteilchen}}{\text{Zeit}} \cdot \frac{\text{Streuzentren}}{\text{Fläche}}} = \frac{\dot{N}}{\dot{N}_a \cdot \frac{N_b}{A}} = \frac{\dot{N}}{I \cdot N_b^A} s \quad (6.2.3)$$

Hier ist \dot{N} die Anzahl der Streuprozesse (Reaktionen) pro Sekunde, \dot{N}_a die Anzahl der Teilchen pro Sekunde im einströmenden Teilchenstrahl, N_b Die Anzahl Streuzentren in der Fläche A . $\dot{N}_a = I$ ist auch der TEILCHENSTROM der eintreffenden Teilchen. $\frac{N_b}{A} = N_b^A$ ist die Flächendichte der Streuzentren (mit der Annahme, dass die Zentren sich nicht überlappen).

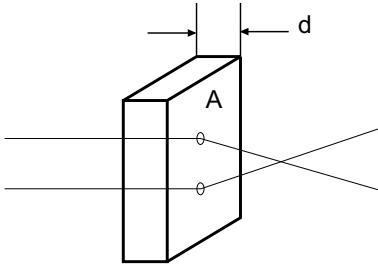


Abb. 6.1.: Berechnung eines Streuquerschnittes nach [Dem10, Abb 2.3].

Abbildung 6.1 zeigt eine weitere Betrachtungsmöglichkeit. Sei n_a die Teilchendichte im eintreffenden Strahl, N_a die gesamte Teilchenzahl im Strahl, v_a die (mittlere) Strahlgeschwindigkeit, n_b die Volumendichte der Streuzentren, N_b die Zahl der Streuzentren im Target, A die Querschnittsfläche des Targets und d dessen Dicke. Dann haben wir die Größen

$$\dot{N}_a = I_a \quad (\text{Teilchenstrom}) \quad (6.2.4a)$$

$$Q_a = \frac{\dot{N}_a}{A} \quad (\text{Teilchenfluss}) \quad (6.2.4b)$$

$$N_b = n_b A d \quad (6.2.4c)$$

$$N_b^F = \frac{N_b}{A} \quad (\text{Dichte der Streuzentren}) \quad (6.2.4d)$$

Die Reaktionsrate oder Streurate im Target ist dann:

$$\dot{N} = Q_a N_b \sigma_b = I_a N_b^F \sigma_b \quad (6.2.5)$$

Eine häufige Kenngrösse einer Streuung (oder Kernreaktion) ist die Luminosität:

$$L = I_a N_b^F = n_a v_a N_b \quad \text{Einheit: } [\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}] \quad (6.2.6)$$

Mit der Luminosität L wird die Reaktionsrate (Streurate)

$$\dot{N} = L \sigma \quad (6.2.7)$$

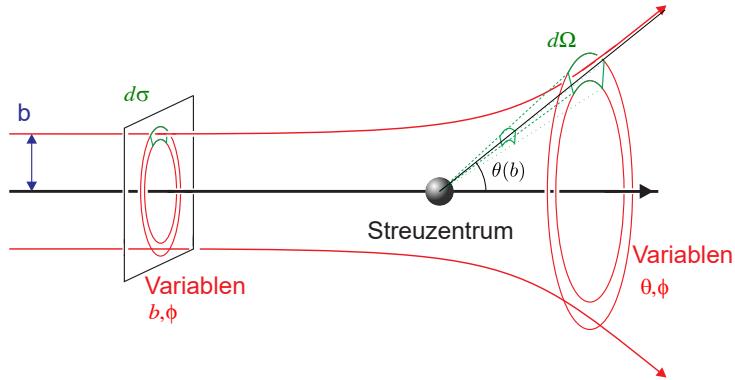


Abb. 6.2.: Differenzieller Streuquerschnitt [Dem10].

Der differentielle Streuquerschnitt ist folgendermassen definiert (siehe Abb. 6.2):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{\frac{\# \text{Reaktionen}}{\text{Zeit}}}{\frac{\text{Strahlteilchen}}{\text{Zeit}} \cdot \text{Flächendichte} \cdot \text{Raumwinkel}} \quad (6.2.8)$$

$d\sigma$ ist eine Fläche, $d\Omega$ ein Raumwinkel. Beide hängen vom Streuwinkel θ ab. Im Vergleich zu Gleichung (6.2.3) ist im Nenner noch die Variable «Raumwinkel» hinzugekommen.

Die Anzahl einfallender Teilchen in der Ringfläche $d\sigma$ ist

$$d\sigma = 2\pi bdb \quad (6.2.9)$$

Diese Teilchen werden gestreut und werden danach auslaufende Teilchen genannt. Sie bewegen sich durch das Raumwinkelement $d\Omega$

$$d\Omega = 2\pi \sin(\theta)d\theta = 2\pi d(-\cos(\theta)) = -2\pi d \cos(\theta) \quad (6.2.10)$$

Zusammen ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi bdb}{2\pi \sin(\theta)(-d\theta)} = \frac{b}{\sin(\theta)} \frac{db}{d\theta} \quad (6.2.11)$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen aus dem Bereich $b \dots b + db$ nach $\theta \dots \theta + d\theta$ gestreut wird.

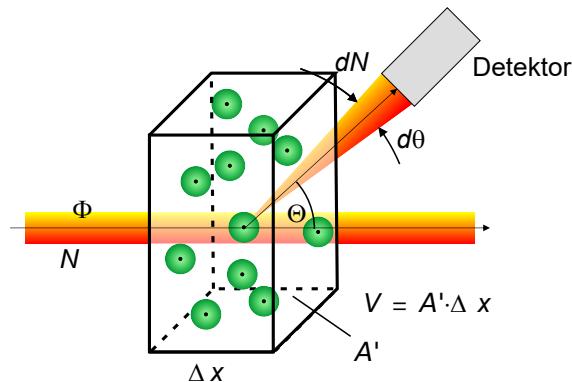


Abb. 6.3.: Prinzipieller Aufbau eines Streuversuches (Adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.1 [Dem10])

In Abb. 6.3 hat der einfallende Strahl die Teilchendichte

$$\Phi = n v_0 \quad (6.2.12)$$

(die Einheiten sind $[\Phi] = \text{m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, $[n] = \text{m}^{-3}$, und $[v_0] = \text{m s}^{-1}$). Die Gesamtzahl der Teilchen ist

$$N = \Phi A \quad (6.2.13)$$

Dann ist die Zahl ΔN der in die Richtung θ gestreuten Teilchen im Vergleich zur Gesamtzahl N

$$\frac{\Delta N}{N} = f(\theta, E_0) \Delta \Omega \quad (6.2.14)$$

Wie immer hier wird Zylindersymmetrie um die Einfallsrichtung angenommen. $f(\theta, E_0)$ ist die Streufunktion. Die Form dieser Funktion hängt von der Physik des Streuprozesses ab, vom Streuwinkel θ oder von der Energie E_0 (und damit von der Geschwindigkeit v_0). Mit der Teilchendichte n_T im Targetvolumen $V = A' \cdot \Delta x$ erhalten wir für die elastische Streuung die Form

$$f(\theta, E_0) = \frac{n_T}{A'} V \frac{d\sigma(\theta, E_0)}{d\Omega} \quad (6.2.15)$$

$\frac{V}{A'}$ ist die Dicke des Targets. Weiter ist der Ablenkwinkel θ . Wir betrachten hier die Streuung in den Raumwinkel $d\Omega$ bei der Energie $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Wie schon definiert ist $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ der differentielle Streuquerschnitt, also der Beitrag eines Targetatoms zur Streuung in den Winkel θ mit dem Normraumwinkel $\Delta\Omega = 1$.

Mögliche einfallende Teilchen und deren Wechselwirkungen sind:

- Elektronen: Nur elektromagnetische und schwache Wechselwirkung
- Neutronen: Nur starke Wechselwirkung
- Protonen, α -Teilchen, usw.: Alle Wechselwirkungen

Wir unterscheiden die folgenden Arten der Streuung:

- Elastische Streuung: Keine Dissipation
- Inelastische Streuung: Innere Energie wird angeregt
- Reaktive Streuung: Identität der beteiligten Teilchen ist nicht erhalten

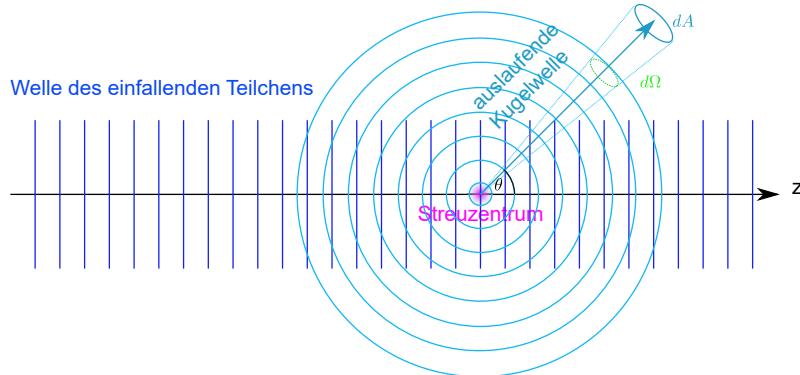


Abb. 6.4.: Skizze der Wellennatur der Streuung

Abbildung 6.4 zeigt die Streuung im Wellenbild. Eine einfallende ebene Welle e^{ikz} entlang der z -Achse streut an einem punktförmigen Streuzentrum bei $z = 0$. Bei elastischer Streuung wird die Energie der Teilchen oder Wellen nicht geändert: Die Wellenlänge und damit der Wellenvektor k bleiben. Am Streuzentrum läuft eine Kugelwelle weg. Wir übersehen grosszügig die Probleme bei $r = 0$. Die detektierte Welle bei ELASTISCHER STREUUNG ist eine Überlagerung einer ebenen Welle und einer Kugelwelle: elastische Streuung

$$\Psi(\mathbf{r}) = \mathfrak{A} \left[e^{ikz} + f(\theta) \cdot \frac{1}{r} e^{ikr} \right] \quad (6.2.16)$$

\mathfrak{A} ist die Amplitude der Welle, $f(\theta)$ ist die oben diskutierte Streufunktion, nur ohne Bezug auf die Energie. Die gestreute Welle trifft im Abstand r_D auf einen Detektor mit der Fläche dA . Der Detektor deckt also den Raumwinkel

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} \quad (6.2.17)$$

ab. Wenn j_a die am Detektor eintreffende Teilchenstromdichte (Einheit $[j_a] = \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$) und j_e die Teilchenstromdichte des einfallenden Strahls ist, gilt die Beziehung

$$\sigma(\theta)d\Omega = \frac{j_a dA}{j_e} \quad (6.2.18)$$

Für den Teilchenstrom am Detektor erhalten wir mit v_a der Geschwindigkeit der auslaufenden Teilchen (Wir detektieren nur $\langle \Psi^2 \rangle = |\Psi|^2$)

$$j_a dA = v_a |\Psi_a|^2 dA = v_a \left| \mathfrak{A} f(\theta) \frac{1}{r} e^{ikr} \right|^2 dA = v_a \mathfrak{A}^2 |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (6.2.19)$$

Bei elastischer Streuung ist $v_e = v_a$. Dann haben wir

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{v_a \mathfrak{A}^2 |f(\theta)|^2}{v_e \mathfrak{A}^2} = |f(\theta)|^2 \quad (6.2.20)$$

Das heisst, mit einem Streuexperiment kann $|f(\theta)|^2$ bestimmt werden, aber nicht die in der Regel komplexe Amplitude $f(\theta)$. Gleichung (6.2.20) ist die Partialwellengleichung.

6.3. Stossprozesse

Bei Stößen von geladenen Teilchen wie dem Elektron oder dem α -Teilchen mit Atomen oder Atomkernen ist die elektromagnetische Wechselwirkung und insbesondere die Coulomb-Wechselwirkung (nach Charles Augustin de Coulomb) dominant. Diese Wechselwirkung ist das Hauptthema der folgenden Abschnitte.

6.3.1. Elektrodynamik und Vierervektoren, Repetition und Erweiterung

Nach U. Ellwanger [Ell15] muss zuerst die Formulierung der Elektrodynamik betrachtet werden.

$$\text{Lorentzkraft klassisch} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.3.1a)$$

Maxwellgleichungen \Rightarrow Wellengleichung \Rightarrow

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{B} \quad (6.3.1b)$$

Eine andere Schreibweise dieser Gleichung angepasst für Operatoren heisst Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) \mathbf{E}(x, y, z, t) = 0 \quad (6.3.2)$$

Eine analoge Klein-Gordon-Gleichung existiert für \mathbf{B} . \mathbf{B} und \mathbf{E} sind über die Maxwellgleichungen gekoppelt, so dass es nicht 6 sondern nur vier unabhängige Komponenten gibt.

\Rightarrow Verwendung des elektrostatischen Potentials ϕ und des Vektorpotentials \mathbf{A}

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) \phi(x, y, z, t) = 0 \quad (6.3.3a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) A_i(x, y, z, t) = 0 \quad i \in \{x, y, z\} \quad (6.3.3b)$$

und

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.3.4)$$

Formulierung als Vierervektor $(\phi, A_x, A_y, A_z)^T$.

Für hohe Geschwindigkeiten transformiert sich $(\phi, A_x, A_y, A_z)^T$ wie der Vierervektor $(ct, x, y, z)^T$.

6.3.2. Elektron-Elektron-Streuung

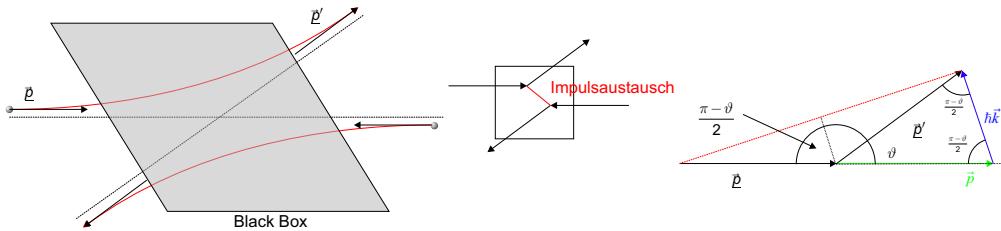


Abb. 6.5.: Links: Streuung zweier Elektronen im Schwerpunktssystem. Mitte: Situation, wenn man die Details der Streuung vernachlässigt. Rechts: Impulsübertrag.

Wir betrachten nur das Schwerpunktssystem. Wir vernachlässigen dabei wie in Abb. 6.5 die Details im Wechselwirkungsbereich. Dann sind Energien und Impulse auch einzeln erhalten (siehe auch U. Ellwanger [Ell15, Kap. 5.2]):

$$\text{vorher } E_1^a = \sqrt{m_e^2 c^4 + (\mathbf{p}_1^a)^2 c^2} = \sqrt{m_e^2 c^4 + (\mathbf{p}_2^a)^2 c^2} = E_2^a \quad (6.3.5)$$

Im Schwerpunktssystem vor dem Stoß ist $\mathbf{p}_1^a = -\mathbf{p}_2^a$. Wie üblich wird der Abstand der Bewegungslinien der beiden Elektronen mit b bezeichnet (Stoßparameter).

Nach dem Stoß haben wir

$$\text{nachher } E_1^b = \sqrt{m_e^2 c^4 + (\mathbf{p}_1^b)^2 c^2} \text{ und } \sqrt{m_e^2 c^4 + (\mathbf{p}_2^b)^2 c^2} = E_2^b \quad (6.3.6)$$

Es gilt die Energie- und die Impulserhaltung:

$$\mathbf{p}_1^a + \mathbf{p}_2^a = \mathbf{p}_{tot} = 0 = \mathbf{p}_1^b + \mathbf{p}_2^b \text{ und } E_1^a + E_2^a = E_{tot} = E_1^b + E_2^b \quad (6.3.7)$$

Damit folgt auch

$$E_i^b = E_i^a \text{ und } |\mathbf{p}_i^b| = |\mathbf{p}_i^a| \text{ mit } i \in \{1, 2\} \quad (6.3.8)$$

Der Winkel θ gegeben durch das Skalarprodukt

$$\mathbf{p}_1^a \cdot \mathbf{p}_1^b = |\mathbf{p}_1^a| |\mathbf{p}_1^b| \cos(\theta) \quad (6.3.9)$$

Klassischerweise wird die Ablenkung als Folge der Kräfte der elektrischen Felder gesehen. Wenn $|\mathbf{p}_1|^2 \ll m_e c^2$ ist, haben wir

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{(-e)^2}{4\pi\varepsilon_0}\right) \frac{m_e}{2b|\mathbf{p}_1|^2} \quad (6.3.10)$$

Daraus ergibt sich die nach Ernest Rutherford benannte RUTHERFORD-STREUUNG.

$$P(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{(-e)^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e^2}{16|\mathbf{p}_1|^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (6.3.11)$$

Bei vielen ununterscheidbaren Elektronen sind die gestreuten Teilchen in die Winkel θ und $\theta + \pi$ ununterscheidbar. Gleichung (6.3.11) muss ergänzt werden. Wir erhalten die Winkelverteilung

$$P(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{(-e)^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e^2}{16|\mathbf{p}_1|^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \left(\frac{(-e)^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e^2}{16|\mathbf{p}_1|^4 \sin^4\left(\frac{(\theta+\pi)}{2}\right)} \quad (6.3.12)$$

Bei dem Prozess der Streuung zweier Elektronen müssen die Ladungen berücksichtigt werden. Das heisst, elektromagnetische Wellen werden abgestrahlt.



Es gibt auch den Prozess der inversen Bremsstrahlung, d. h. der Streuung im elektrischen Feld



Allgemein kann die elektromagnetische Wechselwirkung durch den Austausch virtueller Photonen beschrieben werden. Die Lebensdauer des virtuellen Photons $E = h\nu$ beträgt

$$\Delta t \leq \frac{\hbar}{h\nu} = \frac{1}{2\pi\nu} \quad (6.3.15)$$

oder $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$.

6.3.3. Quantenmechanische Behandlung

In diesen Abschnitten sollen die verschiedenen Effekte besprochen werden, die auf der Anwendung der Quantenmechanik beruhen. So sind Teilchen vom gleichen Typ ununterscheidbar, der Wellencharakter führt zu Interferenzen und Prozesse wie Absorption und Emission werden mit Übergangsmatrixelementen beschrieben.

6.3.3.1. Differenzieller Streuquerschnitt

In diesem und den kommenden Abschnitten soll die quantenmechanische Behandlung nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13] skizziert werden. Das Teilchen vor dem Stoss hat den Impuls \mathbf{p}_{ein} und nach dem Stoss den Impuls $\mathbf{p}_{aus} = \mathbf{p}_{ein} + \Delta\mathbf{p}$. $\Delta\mathbf{p}$ ist der IMPULSÜBERTRAG. Die de Broglie-Welle (nach Louis-Victor de Broglie) hat eine

Wellenlänge $\lambda_{ein,aus} = 2\pi \frac{\hbar}{p_{ein,aus}}$. Im Raum hat die Wellenfunktion der einfallenden oder ausfallenden Welle die Form

$$\psi_{\mathbf{k}} = \mathfrak{A}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \quad (6.3.16)$$

mit den üblichen Definitionen in der Quantenmechanik $\hbar \mathbf{k} = \mathbf{p}$ und $E_{kin} = \hbar \omega$. Weiter verwenden wir den Hamiltonoperator des freien Teilchens und die zeitunabhängige SCHRÖDINGERGLEICHUNG (nach Erwin Schrödinger)

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (6.3.17a)$$

$$\hat{H}_0 \psi_{\mathbf{k}} = E_{kin} \psi_{\mathbf{k}} \quad (6.3.17b)$$

Zur Behandlung des Streuprozesse brauchen wir die komplette Schrödingergleichung

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad (6.3.18)$$

Der Hamiltonoperator \hat{H} enthält neben der kinetischen Energie ($\frac{\hat{p}^2}{2m}$) auch die potentielle Energie $V(r)$ des Streuzentrums. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 5.2.] kann gezeigt werden, dass weg vom Streuzentrum ($V(r) \ll E_{kin}$) mit freien Teilchen gerechnet werden kann. Die einlaufende Welle ist ein Eigenzustand von \hat{H}_0 und nicht zu $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$. Im Streubereich ist die einlaufende Welle kein Eigenzustand des Hamiltonoperators. Sie muss nach den Eigenzuständen entwickelt werden. Wieder weiter weg sind die Eigenzustände von \hat{H} keine Eigenzustände von \hat{H}_0 mehr, also müssen die Zustände nochmals Projiziert werden. Diese Projektionen können mit einem Übergangsmatrixelement

$$\langle \psi_{\mathbf{k}_{aus}} | \hat{V} | \psi_{\mathbf{k}_{ein}} \rangle = \int \psi_{\mathbf{k}_{aus}}^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}_{ein}}(\mathbf{r}) d^3 r \quad (6.3.19)$$

charakterisiert werden. Diese Näherung wird nach Max Born BORN'SCHE NÄHERUNG genannt.

Mit Gleichung (6.2.20) kann der differenzielle Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2$ mit der Streuamplitude f ausgedrückt werden. Die Streuamplitude ist in der BORN'SCHEN NÄHERUNG und mit Gleichung (6.3.19):

$$f(\mathbf{k}_{ein}, \mathbf{k}_{aus}) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \psi_{\mathbf{k}_{aus}} | \hat{V} | \psi_{\mathbf{k}_{ein}} \rangle \quad (6.3.20)$$

Anders als in der klassischen Mechanik kann aus der Streuamplitude nicht mehr eindeutig auf das Streuzentrum geschlossen werden. Mit den hier verwendeten ebenen Wellen und mit $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_{ein} - \mathbf{k}_{aus}$ wird die Streuamplitude

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\mathbf{k}_{aus}} | \hat{V} | \psi_{\mathbf{k}_{ein}} \rangle &= \int \exp(i\mathbf{k}_{aus} \cdot \mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}_{ein} \cdot \mathbf{r}) d^3 r \\ &= \int \exp(i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d^3 r \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

6.3.3.2. Streuung im Coulomb-Potential

Je nach Energie des einlaufenden Teilchens (auch PROJEKTIL genannt, Ladung ze) sind Atomkerne (Ladung Ze) bei der Streuung mehr oder weniger abgeschirmt. Das Coulomb-Potential (nach Charles Augustin de Coulomb) ist kugelsymmetrisch. Deshalb ist die Streuamplituden nur von $\Delta k = |\Delta k|$ ab.

$$V_{abgeschirmt}(\mathbf{r}) = V_a(\mathbf{r}) = V_{Coulomb}(r) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}{r} \quad (6.3.22)$$

a ist die Reichweite, $a \rightarrow \infty$ führt zum üblichen Coulombpotential. Für die Streuung von α -Teilchen ist $a \approx 50$ pm. Laut J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 5.4.1.] ist die Streuamplitude für das abgeschirmte Coulombpotential

$$f_a(\Delta k) = \frac{2m}{\hbar^2} (z Z) \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\Delta k^2 + a^{-2}} = 2m z Z \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\Delta p^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}} \quad (6.3.23)$$

Mit $a \rightarrow \infty$ wird aus Gleichung (6.3.23) die Streuformel für das klassische Coulombpotential

$$f(\Delta k) = 2m z Z \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\Delta p^2} \quad (6.3.24)$$

Diese Gleichung ist sogar für Materiewellen rein klassisch (z.B. bei der RUTHERFORD-STREUUNG (nach Ernest Rutherford) von α -Teilchen an einer Goldfolie.

Der differenzielle Streuquerschnitt für das klassische Coulomb-Potential wird

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\Delta p)|^2 = \left(2m z Z \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{\Delta p^4} = \frac{\rho_0^2}{16} \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (6.3.25)$$

Die Streuformel für das abgeschirmte Coulomb-Potential ($\frac{1}{a} > 0$) hat keine Divergenzen mehr bei $\theta = 0$. Dies ist ein Ausdruck der quantenmechanischen Unschärferelation nach Werner Heisenberg.

6.3.3.3. Mehrere Streuzentren

Bei mehreren Streuzentren müssen die einzelnen Streuamplituden kohärent überlagert werden. Das heisst, dass zuerst die Amplituden addiert werden müssen und erst dann das Betragsquadrat (Wellenfunktion mal konjugiert komplexe Wellenfunktion) berechnet werden darf. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 5.5.2.] ist es immer richtig die kohärente Summe

$$\left| \sum_n \psi_n \right|^2 = \sum_n |\psi_n|^2 + \sum_{\substack{n, m \\ n \neq m}} \psi_n^* \psi_m \quad (6.3.26)$$

Gleichung (6.3.26) bedeutet nichts anderes, dass der Betrag der kohärenten Summe ($\left| \sum_n \psi_n \right|^2$) gleich der Summe der inkohärenten Summe ($\sum_n |\psi_n|^2$) plus der Summe aller Interferenzterme ist. Die Summe der Interferenzterme der beiden Wellen ψ_m

und ψ_n sieht mit Phasenfaktoren $\Delta\varphi_{mn} = \varphi_m - \varphi_n$ so aus

$$\sum_{\substack{n, m \\ n \neq m}} \psi_n^* \psi_m = \sum_{\substack{n, m \\ n \neq m}} |\psi_n| |\psi_m| \cos(\Delta\varphi_{mn}) \quad (6.3.27)$$

Die Interferenzterme verschwinden also nur wenn (bei gleichen Amplituden) die Werte des Cosinus bei «+» und «-» gleich häufig sind. Ein Beispiel der Wirkung dieser Aussage ist die Supraleitung, dort verschwinden die $\cos(\Delta\varphi_{mn})$ der Elektronenwellenfunktion (Fermionen) eben nicht.

6.3.3.4. Hofstadter-Streuung

Robert Hofstadter entdeckte, dass auch einzelne Atomkerne Teilchenwellen zur Interferenz bringen können. Seine Interpretation der Resultate mit der Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung zusammen mit der elektromagnetischen Wechselwirkung wurde mit dem Nobelpreis ausgezeichnet. Die Gleichung (6.3.23) für die Streuung an einem abgeschirmten Coulombpotential kann so erweitert werden, dass die Streuung an gedachten punktförmigen Streuzentren ($f_{Ze,\text{punkt}}(\Delta k)$) gefaltet wird mit der normierten Verteilung ($\rho(\mathbf{r})$) dieser Zentren. Die Form der Ladungsverteilung beschreibt

$$df_r(\Delta k) = f_{Ze,\text{punkt}}(\Delta k) \rho(\mathbf{r}) dV \quad (6.3.28)$$

wobei $dQ = \rho(\mathbf{r}) Ze dV$ ist.

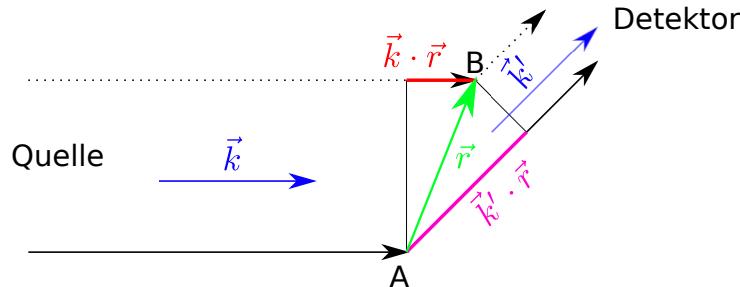


Abb. 6.6.: Berechnung der Hofstadter-Streuung. Skizziert nach J. Bleck-Neuhaus[Ble13, Abb. 5.2]

Analog zur Berechnung der Phase bei der Beugung an einem Gitter subtrahieren wir die zwei Phasen $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}$ und $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, die an zwei durch den Vektor \mathbf{r} getrennten Punkten A und B gestreut werden (siehe Abb. 6.6). Die Streuamplitude des Kerns ist dann nach J. Bleck-Neuhaus[Ble13, Kap. 5.6.1.]

$$\begin{aligned} f_{Ze,\rho}(\Delta k) &= \int \exp(i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) df_r(\Delta\mathbf{k}) = f_{Ze,\text{punkt}}(\Delta k) \cdot \int \exp(i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV \\ &= f_{Ze,\text{punkt}}(\Delta k) \cdot F(\Delta\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

$F(\Delta \mathbf{k})$ in Gleichung (6.3.29) ist die räumliche FOURIERTRANSFORMIERTE der Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$. $F(\Delta \mathbf{k})$ heisst FORMFAKTOER DER LADUNGSVERTEILUNG. Für ein punktförmiges Teilchen mit $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \delta(\mathbf{r})$ ergibt sich die Streufunktion für das Coulomb-Potential einer punktförmigen Ladung. Wenn $\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ ist (die Einheiten stimmen) im Gebiet mit ρ wesentlich von Null verschieden, dann sind die Phasen klein und das Resultat für punktförmige Teilchen entsteht auch wieder.

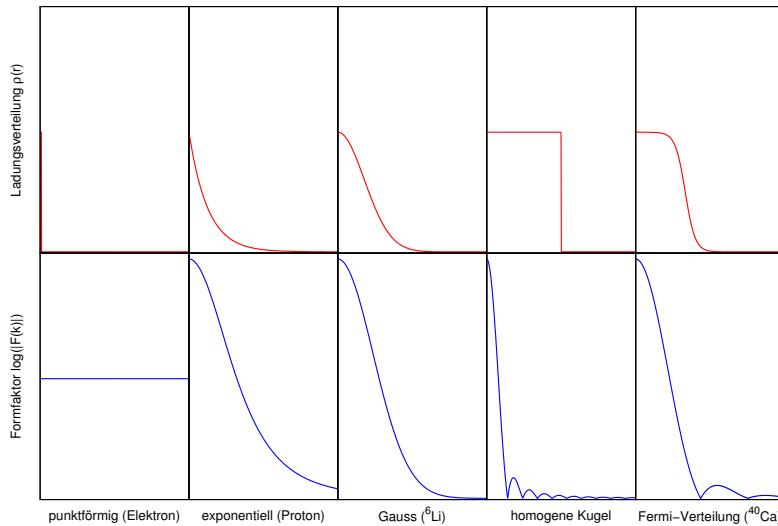


Abb. 6.7.: Formfaktor verschiedener Ladungsverteilungen (nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 5.6.1.] und K. Bethge; G. Walter und B. Wiedemann [BWW07])

Abbildung 6.7 zeigt den Formfaktor für verschiedene typische Ladungsverteilungen. Aus der Abbildung könnte die Idee kommen, dass aus dem Betrag des Formfaktors, gemessen über die Streuamplitude, die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ rekonstruiert werden könnte. Dies ist so direkt nicht möglich, da die Phase verloren geht. Die einzige Möglichkeit ist, ein Modell von $\rho(\mathbf{r})$ zu erstellen, und dann die Fouriertransformation zu berechnen. Stimmt diese mit den Messungen überein, gibt es eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit, dass das Modell die Wirklichkeit wiederspiegelt.

6.3.3.5. Kohärente Überlagerung

Aus der klassischen Behandlung kann die STREUFORMEL nach Ernest Rutherford

$$\frac{dn(\theta, d\Omega)}{n} = \frac{Z^2 e^4 D_{Folie} N}{(4\pi\epsilon_0)^2 M^2 v_0^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\Omega \quad (6.3.30)$$

abgeleitet werden (siehe O. Marti und M. Gonçalves *Atomphysik* [MG19]).

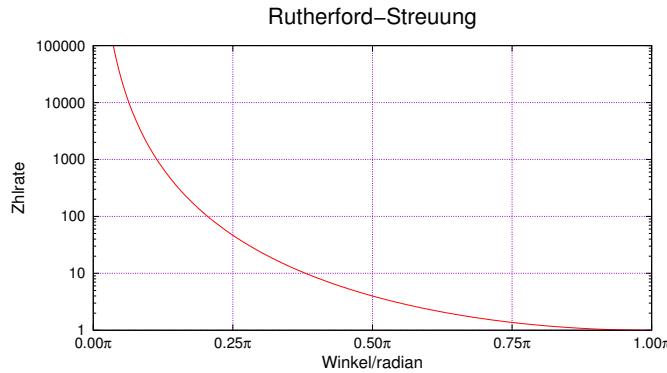


Abb. 6.8.: Schematischer Verlauf der Streuamplitude der RUTHERFORD-STREUUNG.

Abbildung 6.8 zeigt die mit der Gleichung (6.3.30) berechnete Streukurve.

Nun treten noch zwei Phänomene auf:

1. Wir können die Streuung in die Winkel θ und $\theta + \pi$ nicht unterscheiden, das heisst wir müssen die beiden Streuquerschnitte addieren.

$$\frac{dn(\theta, d\Omega)}{n} = \frac{Z^2 e^4 D_{Folie} N}{(4\pi\epsilon_0)^2 M^2 v_0^4} \left(\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} \right) d\Omega \quad (6.3.31)$$

2. Bei gleichem Projektil und Ziel sind die Teilchen (z.B. Elektron und Elektron, oder α -Teilchen und α -Teilchen, nicht aber ein Elektron und ein ANTI-PROTON) nicht unterscheidbar, das heisst: Anstelle der Wahrscheinlichkeiten müssen die Amplituden addiert werden und erst dann kann die Wahrscheinlichkeit ausgerechnet werden. Dies führt für $\frac{dn(\theta, d\Omega)}{n}$ zu Interferenzthermen. Wir erhalten die MOTTS’SCHE STREUFORMEL (nach Nevill Mott)

$$\frac{dn(\theta, d\Omega)}{n} = \frac{Z^2 e^4 D_{Folie} N}{(4\pi\epsilon_0)^2 M^2 v_0^4} \left(\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} \mp \frac{1}{\sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)} \right) d\Omega \quad (6.3.32)$$

mit «+» für Bosonen und «-» für Fermionen. Bei unterschiedbaren Teilchen ist Gleichung (6.3.30) zu verwenden.

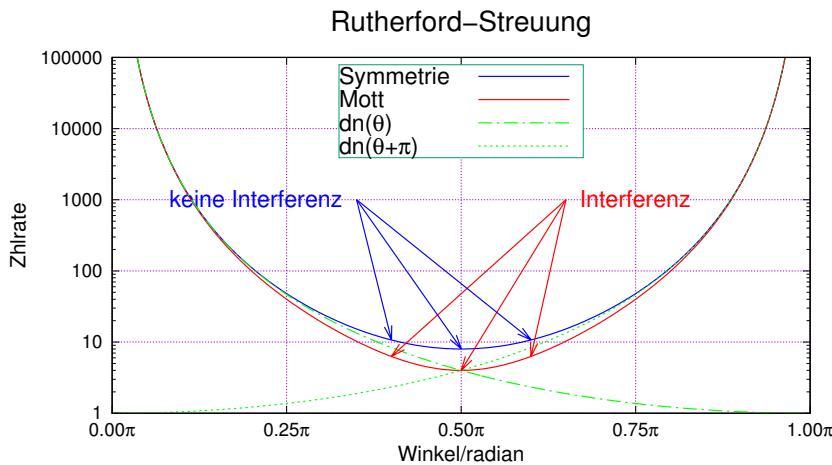


Abb. 6.9.: Vergleich der Streuung ohne Symmetrie (grün) mit der Streuung mit Symmetrie (blau) und zusätzlich mit Interferenz (rot), der MOTT-STREUUNG (nach Nevill Mott).

Abbildung 6.9 zeigt die Wechselwirkung ohne Berücksichtigung der Quantenstatistik. Es gibt zwei Verhalten

- Wenn beide Teilchen Bosonen sind, dann ist die Streuamplitude bei 0.5π grösser als aus der inkohärenten Streuung erwartet.
- Wenn beide Teilchen Fermionen sind, dann ist die Streuamplitude bei 0.5π kleiner als aus der inkohärenten Streuung erwartet.

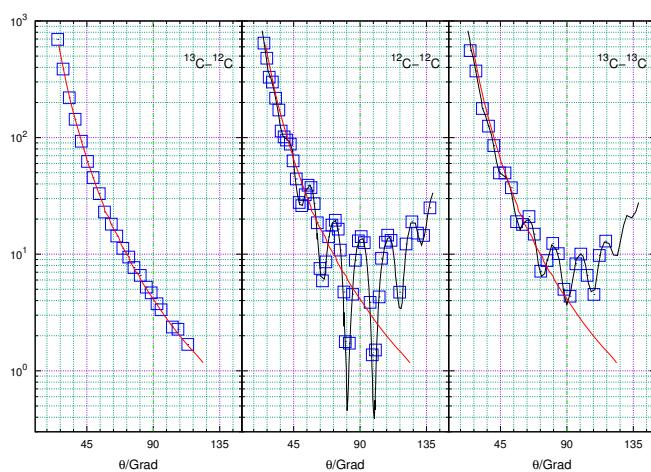


Abb. 6.10.: Streuung von Fermionen und Bosonen (nach G. R. Plattner und I. Sick [PS81] und J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 5.7.3.]).

Abbildung 6.10 zeigt die Streuung von ^{13}C und ^{12}C Kernen aneinander. ^{13}C ist ein Fermion, ^{12}C ist ein Boson. Wenn ein Fermion an einem Boson streut, ergibt sich die ganz gewöhnliche Streuung ohne Interferenz (Abb. 6.10 links). Bei der Streuung eines Bosons an einem Boson ist bei $\theta = 90^\circ$ eine Überhöhung gegenüber der nicht interferierenden Streuung zu beobachten. Bei der Streuung von einem Fermion an einem Fermion (Abb. 6.10 rechts) wird bei $\theta = 90^\circ$ ein Minimum beobachtet. Die grüne Linie zeigt den Winkel von 90° an. Die vertikale Achse zeigt die gestreute Intensität in zufälligen Einheiten.

6.4. Compton-Effekt

Beim COMPTON-EFFEKT (nach Arthur Compton) streut ein an einem geladenen Teilchen (z.B ein ELEKTRON oder ein PROTON). Im Originalversuch (A. H. Compton „The Spectrum of Scattered X-Rays“ [Com23b]) wurden Photonen an Elektronen gestreut. Energie und Impuls sind erhalten. Im Allgemeinen ist die Energie der Photonen sehr viel grösser als die Bindungsenergie des streuenden Elektrons (oder allgemein eine Ladung) in einem Atom (oder einem anderen gebundenen System).

$$\hbar\omega \gg E_b \quad (6.4.1)$$

Die Änderung der Wellenlänge der Photonen ist nach A. H. Compton „A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements“ [Com23a] im nichtrelativistischen Falle durch

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) = (4.85 \text{ pm}) \cdot \sin^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \quad (6.4.2)$$

gegeben, wobei die COMPTON-WELLENLÄNGE durch

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2.43 \text{ pm} \quad (6.4.3)$$

gegeben ist. Eine ausführliche Rechnung kann im Skript *Atomphysik* [MG19] von O. Marti und M. Gonçalves gefunden werden.

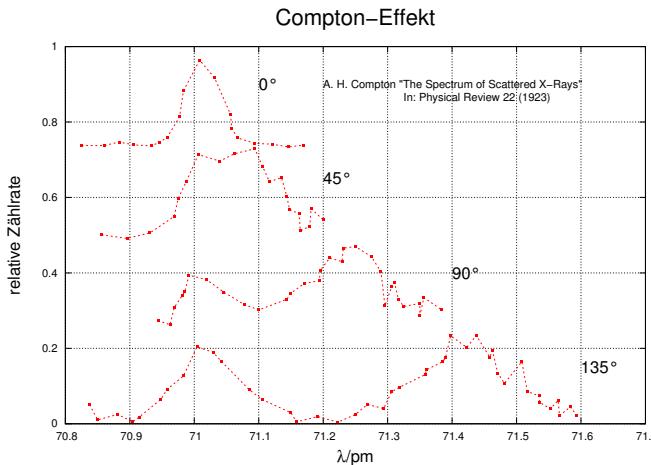


Abb. 6.11.: Compton-Effekt bei vier Streuwinkeln, Daten aus [Com23b]

Abbildung 6.11 zeigt Messungen der Compton-Streuung bei unterschiedlichen Streuwinkeln. Die horizontale Achse ist die Wellenlänge.

Bei sehr hohen Energien schlagen die γ -Quanten ein e^\mp aus dem Atom oder Kern. Dann kann das Streuproblem als eine Streuung des Teilchens Photon an einem geladenen Teilchen aufgefasst werden. Es müssen sowohl Energie wie auch Impuls erhalten bleiben. Deshalb wird die Energie und damit die Wellenlänge der γ -Strahlen sich bei der Compton-Streuung ändern. Nach O. Klein und Y. Nishina [KN29] ist der relativistisch korrekte Streuquerschnitt für die Compton-Streuung

$$\sigma_c = \pi r_e^2 Z \frac{m_e c^2}{E_\gamma} \left[\ln \left(\frac{2E_\gamma}{m_e c^2} \right) + \frac{1}{2} \right] \propto \frac{Z}{E_\gamma} \quad (6.4.4)$$

Dabei ist r_e der klassische Elektronenradius gegeben durch die Gleichheit der elektrostatischen Energie einer Kugel mit $q = e$ und $r = r_e$ und der Ruheenergie $m_0 c^2$.

$$\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_e} = m_e c^2 \quad \text{mit} \quad r_e = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e c^2} \quad (6.4.5)$$

6.5. Paarbildung

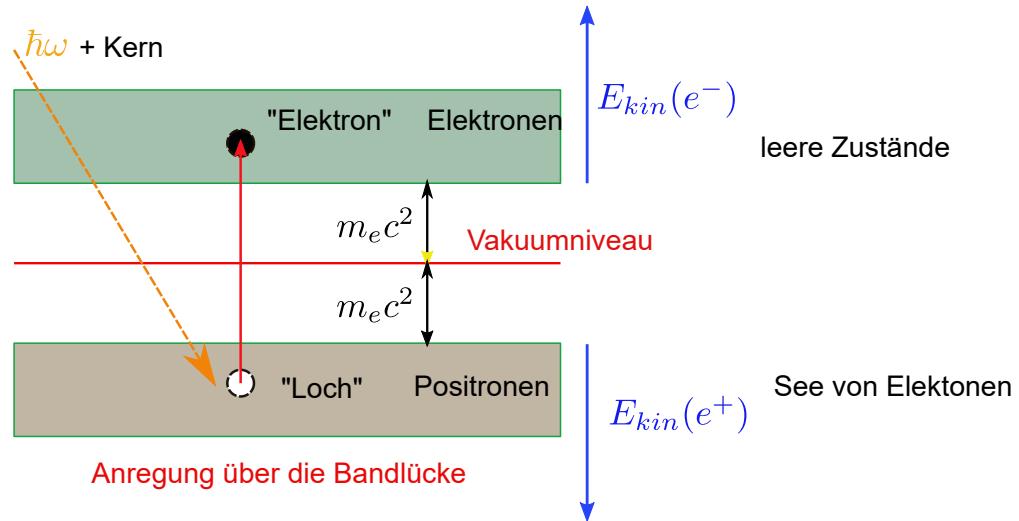


Abb. 6.12.: Paarerzeugung nach Paul Dirac (Nach [Dem10, Abb. 4.51])

Abbildung 6.12 zeigt die Erzeugung eines e^-e^+ -Paars nach Paul Dirac. das Szenario ist an die Vorstellungen der Festkörperphysik für die Anregung von Exzitonen (Elektron-Loch-Paare) in Halbleitern angelehnt. Der Prozess ist nur möglich, wenn ein Atomkern als weiterer Körper vorhanden ist, der durch seine Beteiligung Energie- und Impulserhaltung garantieren kann. In der Vorstellung ist die das Volumen voll von unsichtbaren Teilchen, deren Fehlen (das Loch) als Antiteilchen wahrgenommen wird. In diesem Bild muss für jedes neu entstandene Elektron ein Loch, also ein Positron, vorhanden sein. Es muss gelten

$$\hbar\omega \geq 2m_e c^2 \quad (6.5.1)$$

und für die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{\hbar\omega}{2} - m_e c^2 \quad (6.5.2)$$

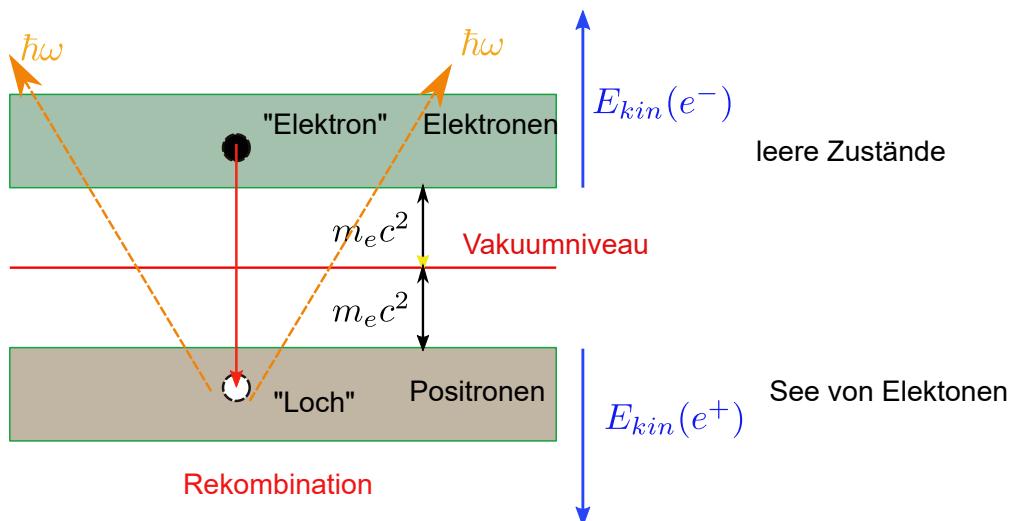


Abb. 6.13.: Paarvernichtung nach Paul Dirac (Nach [Dem10, Abb. 4.51])

Auch der umgekehrte Prozess ist möglich: Ein Elektron rekombiniert mit einem Positron, einem Loch. Wegen der Impuls-, der Drehimpuls- und der Energieerhaltung entstehen zwei γ -Quanten. Prozesse mit mehr γ -Quanten sind denkbar, aber viel unwahrscheinlicher.

Für diese Prozesse ist der Streuquerschnitt

$$\sigma_p \propto Z^2 \quad (6.5.3)$$

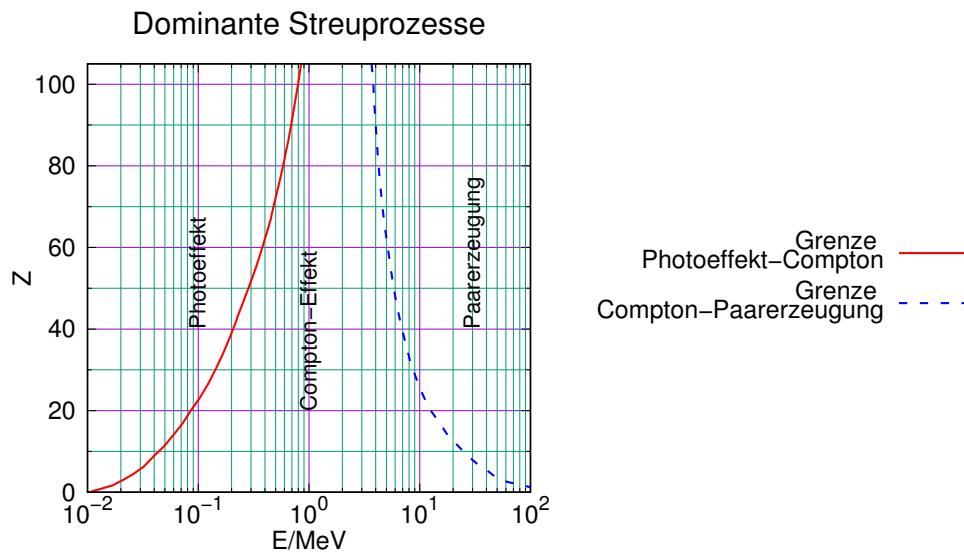


Abb. 6.14.: Dominante Streuprozesse in Abhängigkeit der Kernladung Z und der γ -Energie nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 4.52]

Zur Einordnung des COMPTON-EFFEKT (siehe Abschnitt 6.4) und der Paarerzeugung mit dem Photoeffekt (Abschnitt 7.1) zeigt Abbildung 6.14 die Bereiche, in denen jeweils einer der drei Effekte dominiert. Links ist der Bereich des PHOTOEFFEKTS, in der Mitte ist der Bereich des COMPTON-EFFEKT und rechts dominiert die PAARERZEUGUNG.

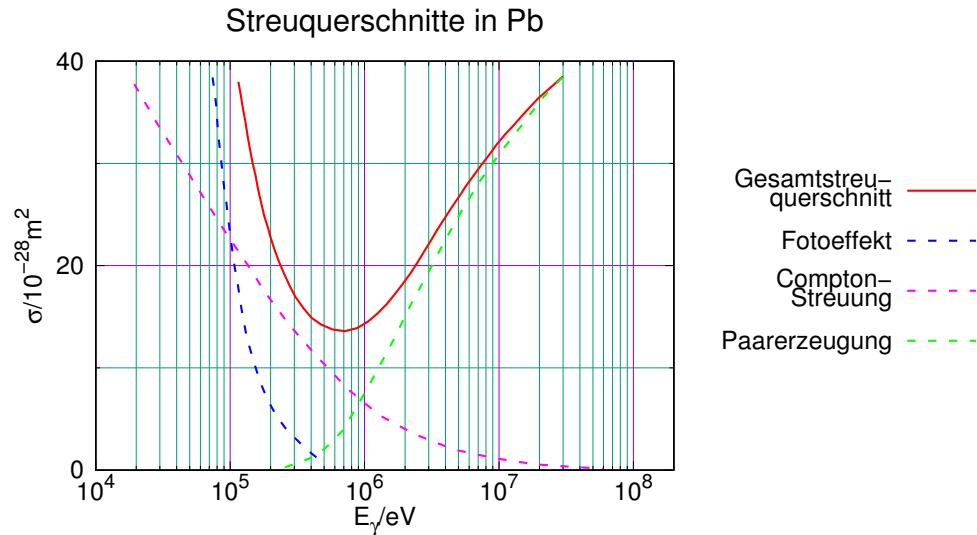


Abb. 6.15.: Streuquerschnitte von γ -Quanten in Pb als Funktion der γ -Energie nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 4.53].

Abbildung 6.15 schliesslich zeigt den Beitrag der drei Effekte (PHOTOEFFEKT, COMPTON-EFFEKT und PAARERZEUGUNG) zur Streuung von γ -Quanten an Blei.

7. Wechselwirkung von Teilchen mit Materie

7.1. Photoeffekt

Beim PHOTOEFFEKT (erklärt von Albert Einstein) wird durch die Absorption eines Photons soviel Energie eingetragen, dass ein Hüllenelektron das Atom verlässt. Das Restatom wird benötigt um Energie- und Impulssatz gleichzeitig zu erfüllen. Der Streuquerschnitt ist die Summe der Streuquerschnitte jedes einzelnen Elektrons in der Schale

$$\sigma_{ph} = \sum_{i=1}^Z (\sigma_{ph})_i \quad (7.1.1)$$

$\sigma_{ph,i}$ ist der Streuquerschnitt des i -ten Elektrons. Von allen Elektronen haben diejenigen in der K -Schale, also im untersten S -Zustand, den grössten Streuquerschnitt. Nach Heitler [Hei54] und der Rechnung von Eichler und Stöhlker [ES07, Gl. 4.8] gilt

$$\sigma_{ph} \approx \sigma_0 Z^5 \left(\frac{m_e c^2}{E_\gamma} \right)^{\frac{7}{2}} \quad \text{für } E_\gamma \gg E_b(K) \quad (7.1.2)$$

Die Referenz ist die Bindungsenergie der K -Schale. Bei schweren Elementen überwiegt der Photoeffekt wegen Z^5 -Abhängigkeit in Gleichung (7.1.2).

7.2. Verluste in Materie

Wenn sich leichte Teilchen wie ELEKTRONEN oder POSITRONEN durch Materie bewegen, werden sie relativ schnell in andere Richtungen gestreut. Dadurch ist die Teilchenzahl nicht alleine durch ein Exponentialgesetz beschrieben. Hans Bethe konnte aus einer statistischen Betrachtung des Energieverlustes (Geschwindigkeitsabnahme) nichtrelativistischer Elektronen oder Positronen¹ die Gleichung

$$-\frac{dE}{dx} \approx \frac{Z_1^2 e^4 n_e}{4\pi \varepsilon_0^2 m_e v^2} \ln \left(\frac{2m_e v^2}{\langle E_b \rangle} \right) \quad (7.2.1)$$

ableiten. Dabei ist n_e die Elektronendichte im durchstrahlten Material (Target), $\langle E_b \rangle$ die mittlere Bindungsenergie der Elektronen im Target, Z_1 die Anzahl Elektronen in einem Atom des Targets (Kernladungszahl), v die Geschwindigkeit der Elektronen (oder Positronen) und m_e deren Massen. Wird Gleichung (7.2.1) für schwerere Teilchen verwendet, dann ist bei gleicher Energie deren Geschwindig-

¹Für den relativistischen Fall siehe Gleichung (10.1.10).

keit geringer. Deshalb ist die Reichweite von Elektronen in Materie bei gleicher kinetischer Energie grösser als z.B. die Reichweite von Protonen oder α -Teilchen. Ein weiterer Verlustmechanismus ist die BREMSSTRAHLUNG. Beschleunigte Ladungen strahlen Energie ab. Der Verlust an kinetischer Energie pro Länge in Materie bei Bremsstrahlung ist

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Bremsstrahlung}} = \frac{4n_a Z^2 \alpha^3 (\hbar c)^2 E_e}{m_e^2 c^4} \ln\left(\frac{a(E_e)}{Z^{1/3}}\right) \quad (7.2.2)$$

Hier ist n_a die Zahlendichte von Atomen im Target, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$ die FEINSTRUKTURKONSTANTE und $a(E_e)$ eine Funktion, die angibt, bei welchem Stossparameter die Elektronen noch nahe genug am Kern vorbei fliegen um beschleunigt zu werden. Die Bremsstrahlungsverluste dominieren bei hohen Energien.

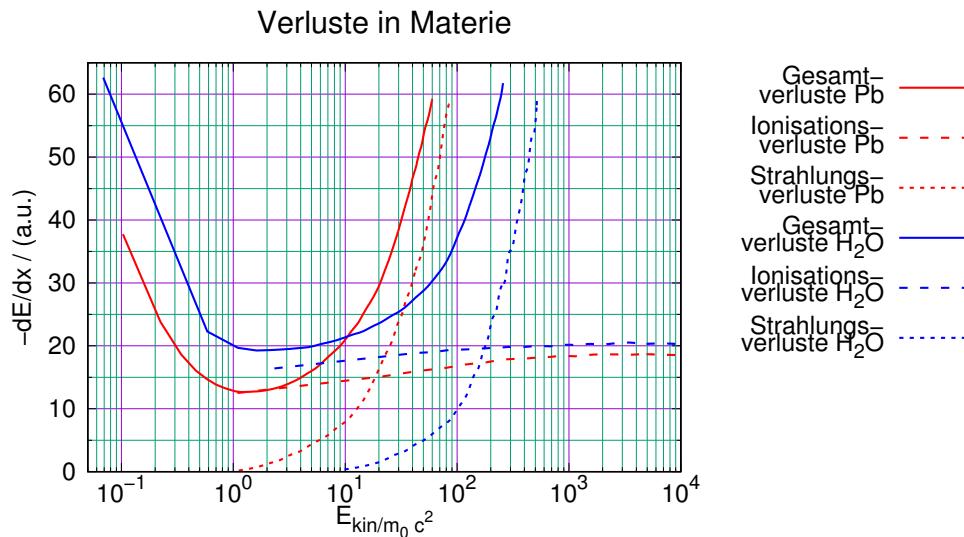


Abb. 7.1.: Verluste beim Durchgang durch Materie nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 4.49].

Abbildung 7.1 zeigt die verschiedenen Verlustarten in Materie und deren relative Stärke.

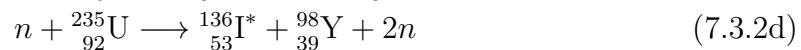
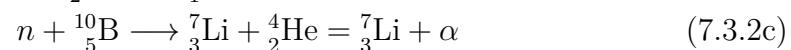
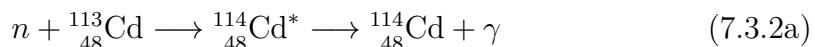
7.3. Neutronen

Neutronen (entdeckt von James Chadwick) können mit der Hülle von Atomen nur magnetisch wechselwirken, da ihre Ladung ja null ist. Neutronen können elastisch an Kernen gestreut werden, wobei die Spins der Kerne und des Neutrons wechselwirken, es also eine spinabhängige Streuung gibt. Wenn wir die Orientierung der Spins vernachlässigen, ergibt sich aus der Physik des klassischen Stosses bei einem zentralen Auftreffen im nichtrelativistischen Falle der maximale Energieübertrag

$$\Delta E_n = E_n - E_{n'} = E_n \frac{4m_K m_n}{(m_K + m_n)^2} \quad (7.3.1)$$

wobei E_n die kinetische Energie des Neutrons vor und $E_{n'}$ die kinetische Energie nach dem Stoß ist. m_K ist die Masse des Kerns und m_n die Masse des Neutrons. Für ${}^1\text{H}$ sind die Massen von Kern und Neutron etwa gleich, für ${}^{235}\text{U}$ ist der Kern 235 mal schwerer als das Neutron.

Schliesslich können Neutronen durch den Kern eingefangen werden. Beispiele für solche Reaktionen sind:



Der Absorptionsquerschnitt der Neutronen zeigt Resonanzen (siehe Abb. 7.2), wenn die Energie der Neutronen einem Energieniveau des Kerns entspricht.

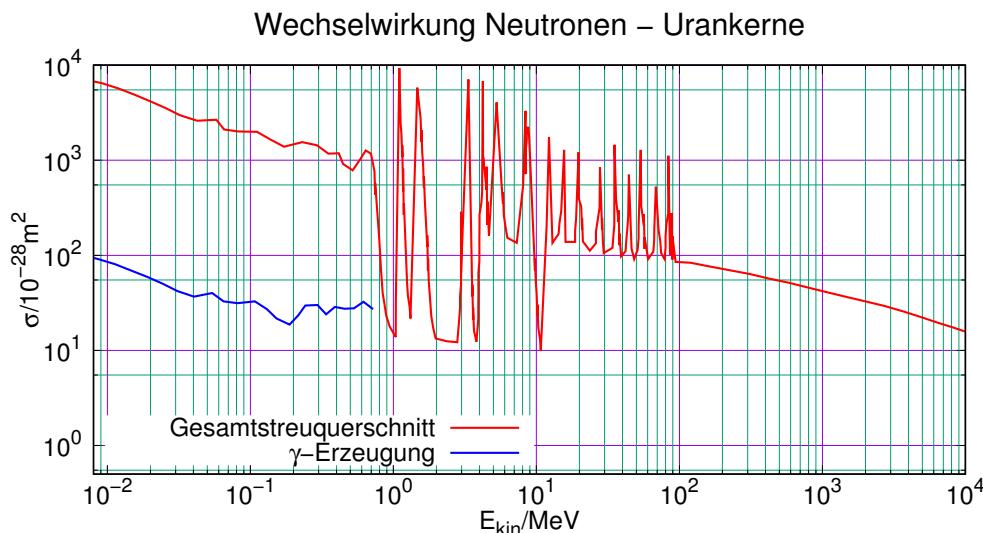


Abb. 7.2.: Streuung von Neutronen an ${}^{238}\text{U}$ (nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 4.56]). Der Wirkungsquerschnitt ist in b (Barn) angegeben.

8. Atome und Kerne

8.1. Atomkerne

8.1.1. Begriffe

Nukleonen	Protonen und Neutronen	^7_3Li , ^{235}U
Nuklid	Kern ${}_Z^AX$ mit A Nukleonen und Z Protonen und $N = (A - Z)$ Neutronen	${}_{ 6}^{12}\text{C}$, ${}_{ 6}^{14}\text{C}$
Isotope	Kerne mit gleicher Protonenzahl Z , aber unterschiedlicher Neutronenzahl N	${}_{ 28}^{62}\text{Ni}$, ${}_{ 28}^{64}\text{Ni}$
Isobare	Kerne mit gleicher Nukleonenzahl A , aber unterschiedlicher Protonenzahl Z	${}_{ 6}^{14}\text{C}$, ${}_{ 7}^{14}\text{N}$
Isotone	Kerne mit gleicher Neutronenzahl N , aber unterschiedlicher Protonenzahl Z	${}_{ 6}^{14}\text{C}$, ${}_{ 7}^{15}\text{N}$, ${}_{ 8}^{16}\text{O}$
Spiegelkerne	Kerne mit vertauschten Werten von Z und N	${}_{ 1}^3\text{H}$, ${}_{ 2}^3\text{He}$
Isomere Kerne	Kerne mit gleichem Z und N in unterschiedlichen Energiezuständen	${}_{ 8}^{16}\text{O}(E_1)$, ${}_{ 8}^{16}\text{O}(E_2)$

Tab. 8.1.: Begriffe aus der Atomphysik (nach W. Demtröder [[Dem10](#), Tab. 2.2.]).

Tabelle 8.1 erklärt einige, im Folgenden wichtige Begriffe.

8.1.2. Rutherford's Atommodell

Die auf Seite 195 beschriebene Streumethode hat Ernest Rutherford verwendet um zu zeigen, dass Materie aus Atomen besteht. Er konnte dabei das Modell von J. J. Thomson erweitern (siehe auch K. Simonyi [[Sim90](#), Abb. 4.6-4 und Kap. 4.6.4.]). Thomsons Modell bestand aus einem See von damals nicht spezifizierten positiven Ladungen gemischt mit Elektronen. Sein Modell stammte aus seinen Beobachtungen mit KATHODENSTRÄHLEN. Thomson erkannte, dass die Bestandteile des Atoms sich aus thermodynamischen Gründen bewegen mussten. Er führte die Emission von Licht auf Schwingungen in diesem Gemisch aus positiven und negativen Ladungen zurück. Er erkannte, dass die thermischen Bewegungen wegen den Maxwellschen Gesetzen (James Clerk Maxwell) zu einer Emission von elektromagnetischen Wellen führen müsste, also einem Energieverlust. Thomson konnte

mathematisch zeigen, dass in sehr guter Näherung die Interferenz der elektromagnetischen Wellen eine Auslöschung derselben bewirkt. Die gleiche Thematik kam dann wieder mit dem Bohrschen Atommodell auf (Niels Bohr).

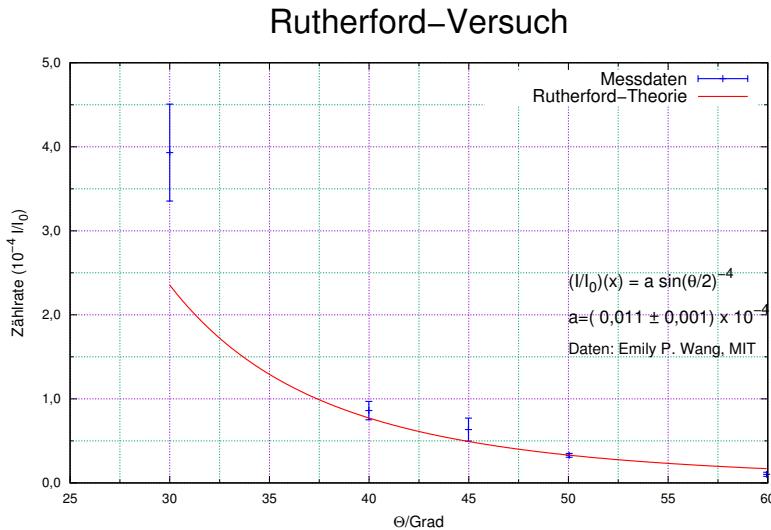


Abb. 8.1.: Moderne Ausführung von Rutherfords Streuversuch von α -Teilchen an einer dünnen Goldfolie (Quelle: E. P. Wang [Wan04]).

Ernest Rutherford streute α -Teilchen an einer Goldfolie. E. P. Wang [Wan04] hat sein Experiment 2004 wiederholt (Siehe Abb. ??). Sein aus den Ergebnissen und den Abweichungen hergeleitetes Modell hatte die folgenden Eigenschaften (siehe auch J. Bleck-Neuhäus [Ble13], Kap. 3.5.1.):

- Atome haben eine Hülle von kreisenden Elektronen. Ihre Anzahl stimmt mit der Ordnungszahl des Elements überein. Die Elektronen nehmen den grössten Teil des Atomvolumens ein.
- Es gibt einen sehr kleinen positiv geladenen Kern. Die Anzahl positiver Ladungen stimmt mit der Anzahl Elektronen überein, da Atome neutral sind. Der Löwenanteil der Atommasse ist im Kern konzentriert. Ernest Rutherford nahm an, dass der Atomkern aus den etwas früher entdeckten Protonen (Wilhelm Wien) besteht. Um die Ladung zu kompensieren mussten sich zusätzliche nicht beobachtbare Elektronen im Kern befinden.

Die Annahme, dass Elektronen im Kern gewisse positive Ladungen der Protonen kompensieren, führte zu einem Widerspruch mit gemessenen Drehimpulsen der Atomkerne.

8.1.3. Bestimmung des Kernradius

Mit dem Coulomb-Gesetz (nach Charles Augustin de Coulomb) kann mit dem Formalismus aus Abschnitt B.1.1 der minimale Abstand δ_0 bei einem zentralen Stoss berechnet werden. Für die Energie gilt:

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0\delta} \quad (8.1.1)$$

Hier ist $\delta = \delta(v_0, b)$ der minimale Abstand zum Streuzentrum. Für einen zentralen Stoss ($b = 0$) ist $v = 0$. Der minimale Minimalabstand δ_0 ist dann (siehe Abb. B.1)

$$\delta_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2} \quad (8.1.2)$$

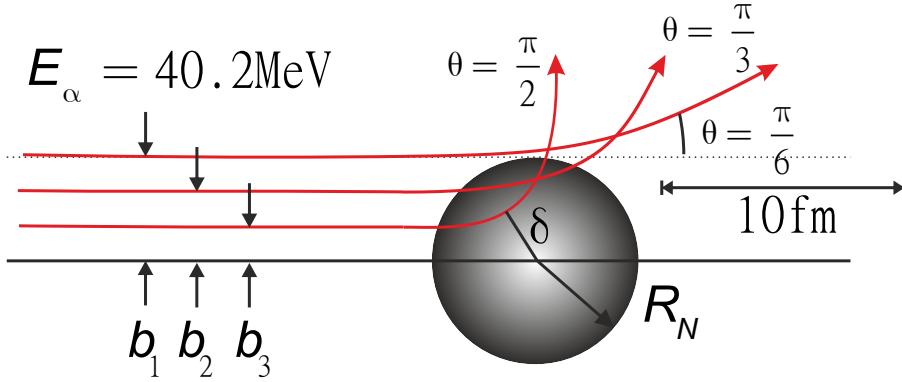


Abb. 8.2.: Skizze der Streuung bei unterschiedlichen Streuparametern

Abbildung 8.2 zeigt die Streugeometrie. Eine allgemeine Lösung bekommen wir, wenn wir die Drehimpulserhaltung mit verwenden. Für den Drehimpuls bezogen auf das Streuzentrum bekommen wir

$$m b v_0 = m \delta v \implies v = v_0 \frac{b}{\delta} \quad (8.1.3)$$

Zusammen mit der potentiellen Energie ergibt sich

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2} \left(\frac{b^2}{\delta^2} \right) + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0\delta} \quad (8.1.4)$$

Wir setzen $x = \frac{1}{\delta}$ und erhalten eine quadratische Gleichung

$$\frac{m v_0^2 b^2}{2} x^2 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} x - \frac{m v_0^2}{2} = 0 \quad (8.1.5)$$

Diese hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \pm \sqrt{\frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2} + 4 \frac{m^2 v_0^4}{4} b^2}}{m v_0^2 b^2} \\ = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2 b^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16\pi^2\epsilon_0^2 m^2 v_0^4 b^2}{Z_1^2 Z_2^2 e^4}} \right) \quad (8.1.6)$$

x sollte positiv sein, also ist

$$x_{1,2} = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2 b^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 v_0^4 b^2}{Z_1^2 Z_2^2 e^4}} \right) \quad (8.1.7)$$

Damit ist $\delta(v_0, b)$

$$\delta(v_0, b) = -\frac{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2 b^2}{Z_1 Z_2 e^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 v_0^4 b^2}{Z_1^2 Z_2^2 e^4}} \right)} \quad (8.1.8)$$

Für den Grenzwert $b \rightarrow 0$ schreiben wir Gleichung (8.1.5) um

$$b^2 x^2 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2} x - 1 = 0 \quad (8.1.9)$$

Wenn $b = 0$ ist, ist die Lösung

$$x_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2}{Z_1 Z_2 e^2} = \frac{1}{\delta_0} \implies \delta_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 E_0} \quad (8.1.10)$$

Gleichung (8.1.9) kann mit δ_0 (Gleichungen (8.1.2) oder (8.1.8)) geschrieben:

$$b^2 x^2 + \delta_0 x - 1 = 0 \quad (8.1.11a)$$

$$\frac{b^2}{\delta^2} + \frac{\delta_0}{\delta} - 1 = 0 \quad (8.1.11b)$$

$$b^2 + \delta_0 \delta - \delta^2 = 0 \quad (8.1.11c)$$

$$\implies \delta = \frac{-\delta_0 \pm \sqrt{\delta_0^2 + 4b^2}}{-2} = \frac{\delta_0}{2} \mp \sqrt{\frac{\delta_0^2}{4} + b^2} \quad (8.1.11d)$$

$$(8.1.11e)$$

δ muss positiv sein. Dann ist die Lösung

$$\delta = \frac{\delta_0}{2} + \sqrt{\frac{\delta_0^2}{4} + b^2} \quad (8.1.12)$$

Weiter ist

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2} \cdot \frac{1}{b} \quad (8.1.13)$$

oder

$$b = \frac{\delta_0}{2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (8.1.14)$$

Schliesslich können wir den Minimalabstand $\delta(\theta)$ schreiben

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{\delta_0}{2} + \sqrt{\frac{\delta_0^2}{4} + \frac{\delta_0^2}{4} \frac{1}{\tan^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{\delta_0}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}} \right) \\
&= \frac{\delta_0}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{8.1.15}$$

Wir setzen nun $\delta(\theta) = r_K(\theta)$. Wir suchen nun den Winkel, ab dem die Streugleichung (8.1.4) nicht mehr gilt. r_K ist dann ein Mass für den Radius des Kerns.

$$r_K = \delta = \frac{\delta_0}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \iff \frac{2r_K}{\delta_0} - 1 = \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \tag{8.1.16a}$$

$$\sin \frac{\theta_G}{2} = \frac{1}{\frac{2r_K}{\delta_0} - 1} = \frac{\delta_0}{2r_K - \delta_0} \tag{8.1.16b}$$

$$\theta_G = 2 \arcsin \frac{\delta_0}{2r_K - \delta_0} = 2 \arcsin \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \varepsilon_0 E_0 r_K - Z_1 Z_2 e^2} \tag{8.1.16c}$$

θ_G ist der Grenzwinkel, ab dem die Physik der Coulomb-Streuung versagt. Es ist $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$.

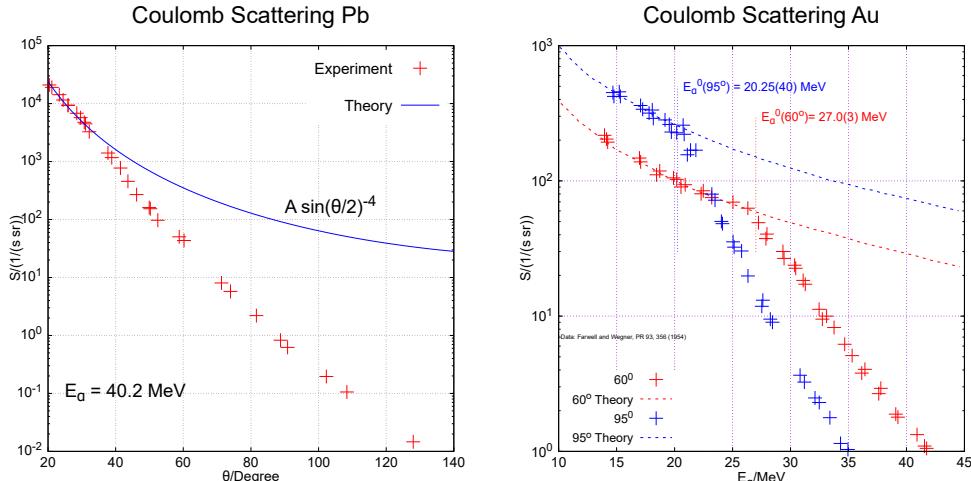


Abb. 8.3.: Coulomb-Streuung an Blei (links, adaptiert aus H. E. Wegner; R. M. Eisberg und G. Igo, „Elastic Scattering of 40-Mev Alpha Particles from Heavy Elements“ [WEI55]) und Gold (Adaptiert aus F. T. Avignone; S. R. Elliott und J. Engel, „Double beta decay, Majorana neutrinos, and neutrino mass“ [AEE08]).

Abbildung 8.3 zeigt, dass die Idee richtig war. Der Grenzwinkel θ_G , bei dem die Streuung von der Coulomb-Streuung (auch Rutherford-Streuung) abweicht ist ein Mass für die Grösse des Kerns.

Aus ähnlichen Experimenten schloss James Chadwick 1920 aus dem Knick in der Rutherford-Streuung (Coulomb-Streuung) dass

$$R_K \approx r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}} \quad (8.1.17)$$

Die Masse des Kernes kann mit einem Massenspektrometer bestimmt werden (Vorschau)

$$M_N = M^+ - \left[(Z-1)m_e - \frac{E_B^{\text{el}}}{c^2} \right] \quad (8.1.18)$$

wobei E_B^{el} die Bindungsenergie der $Z-1$ Elektronen ist (Äquivalenz von Masse und Energie).

8.1.4. Ladungsverteilung im Kern

Mit der in Abschnitt 6.3.3.4 diskutierten Methode konnte Robert Hofstadter die Ladungsverteilung in Kernen messen. Abbildung 8.4 zeigt sein Resultat.

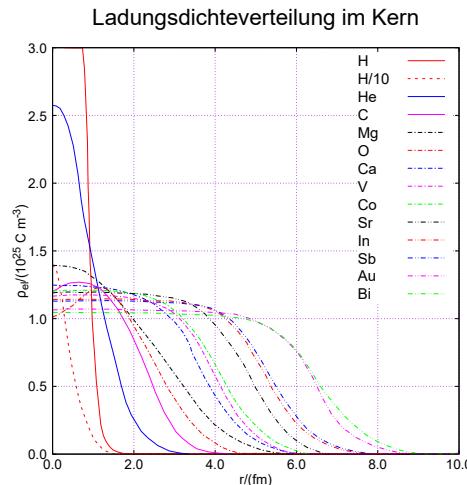


Abb. 8.4.: Ladungsdichteverteilung in Kernen, adaptiert von R. Hofstadter [Hof57]

Wichtig für das Verständnis von Kernen ist die Beobachtung, dass die Ladungsdichteverteilung für Kerne mit $Z \geq 16$ (ungefähr) konstant ist. Das heisst, die potentielle Energie in einem Kern ist nicht die eines Wasserstoffatoms. Nach Enrico Fermi ist eine Approximation der Ladungsdichteverteilung im Kern

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp((r - R_{1/2})/a)} \quad (8.1.19)$$

r ist die Radialkoordinate und $R_{1/2}$ der Radius, bei dem die Ladungsdichteverteilung auf die Hälfte abfällt. Abbildung 8.5 zeigt exemplarisch für Ca

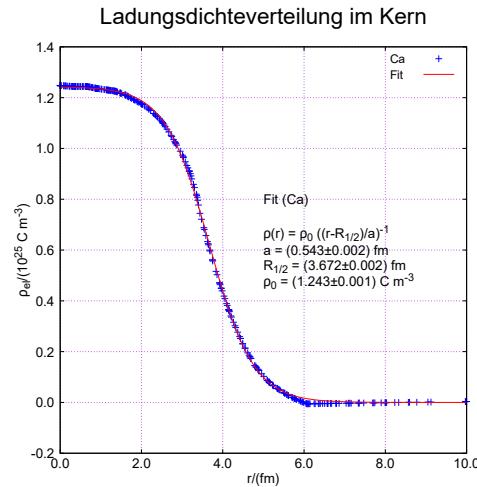


Abb. 8.5.: Fit der Ladungsverteilung bei Ca (Daten aus R. Hofstadter [[Hof57](#)]).

8.1.4.1. Iterative Methoden

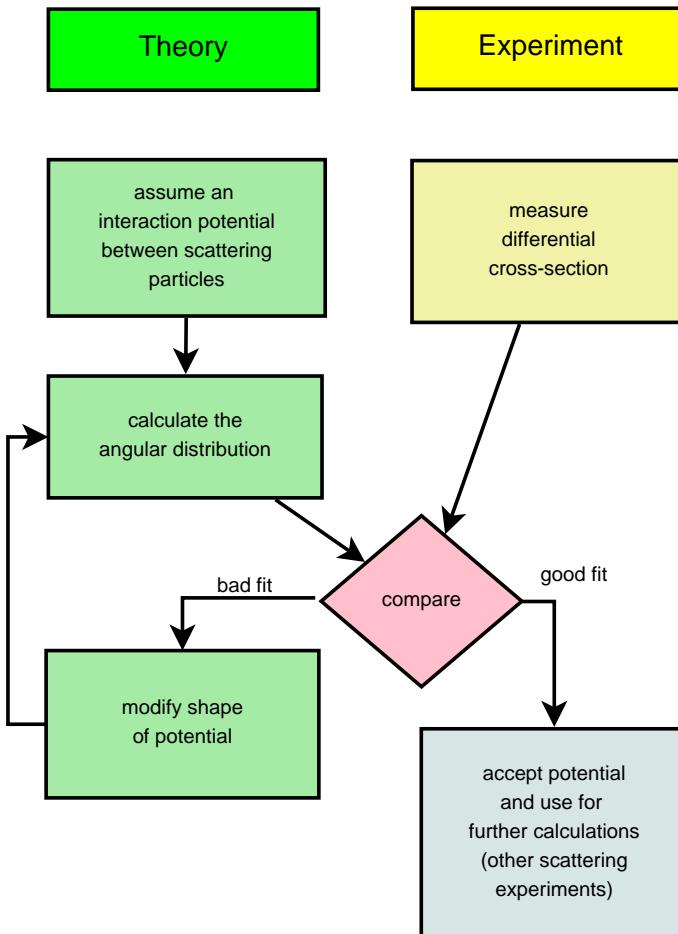


Abb. 8.6.: Iterative Methoden, adaptiert aus W. Demtröder [[Dem10](#), Abb 2.7].

Wie schon ausgeführt, ist es nicht möglich aus den Streukurven die Ladungsverteilung im Kern direkt zu bestimmen. Abb. 8.6 zeigt ein mögliches iteratives Vorgehen. Aus der Theorie wird ein Modell gebaut. Diese wird zur Berechnung der Streuamplitude verwendet. Das Resultat wird mit dem Experiment verglichen. Gibt es Diskrepanzen über einem gewissen Grenzmaß, wird das Modell verändert und wieder berechnet. Dabei wird darauf geachtet, dass das Mass der Differenz abnimmt. Bei einer Konvergenz glaubt man, dass das Modell die Wirklichkeit beschreibt.

8.1.5. Beugung an Kernen

Aus Abschnitt 6.3.3.5 wissen wir, dass, wenn die de Broglie-Wellenlänge (nach Louis-Victor de Broglie) $\lambda \ll R_K$ kleiner als der Kernradius ist, es Beugungsmuster in den Streuverteilungen $\Delta N(\vartheta)d\vartheta = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) n_T N_0 V \Delta\Omega$ gibt. Für nichtrelativistische Teilchen ist $\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}$. Robert Hofstadter zeigte, dass Beugungsmes-

sungen nicht direkt in Strukturfaktoren überführt werden können (Phasenproblem, siehe auch vorherige Abschnitte).

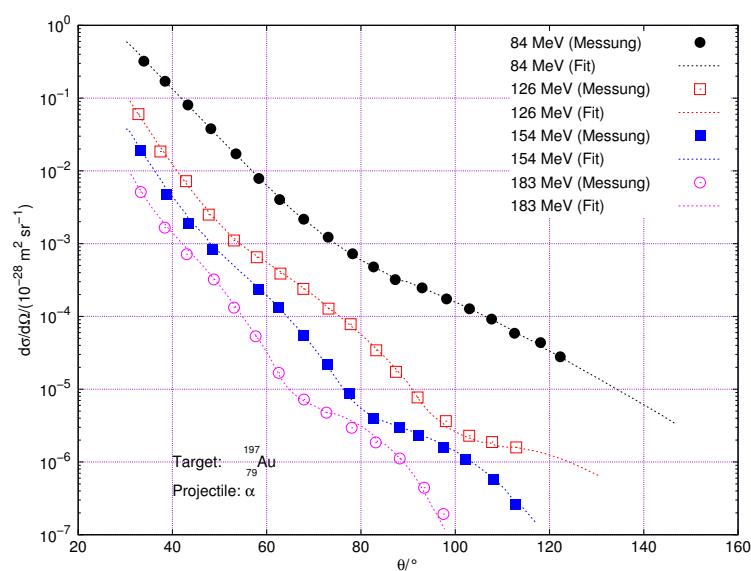


Abb. 8.7.: Streuung von Elektronen an $^{197}_{79}\text{Au}$ Atomkernen skizziert nach Hofstadter [Hof61]

Abbildung 8.7 skizziert das Resultat von Robert Hofstadter. Abbildung 8.8 zeigt eine seiner genauen Auswertungen der Streukurven.

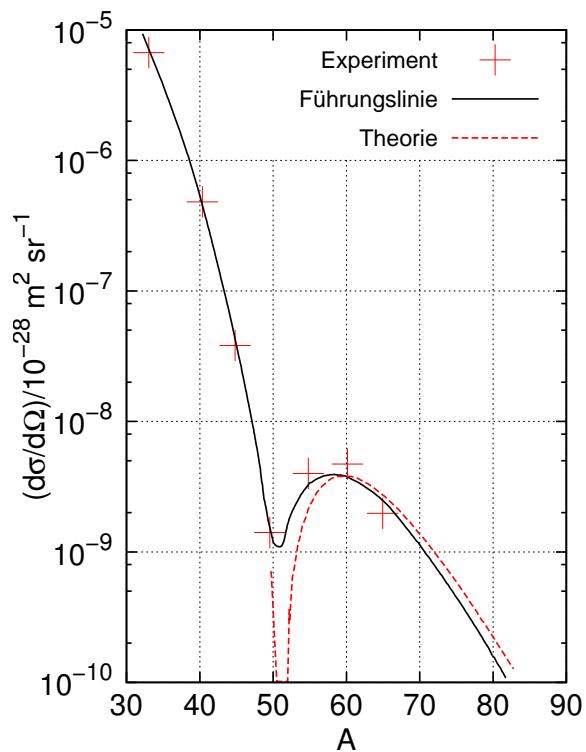


Abb. 8.8.: Streumessung mit Beugung, skizziert nach Hofstadter [Hof57]

Abbildung 8.9 schliesslich zeigt den Formfaktor bei einer Streuung an $^{16}_8\text{O}$ -Kernen.

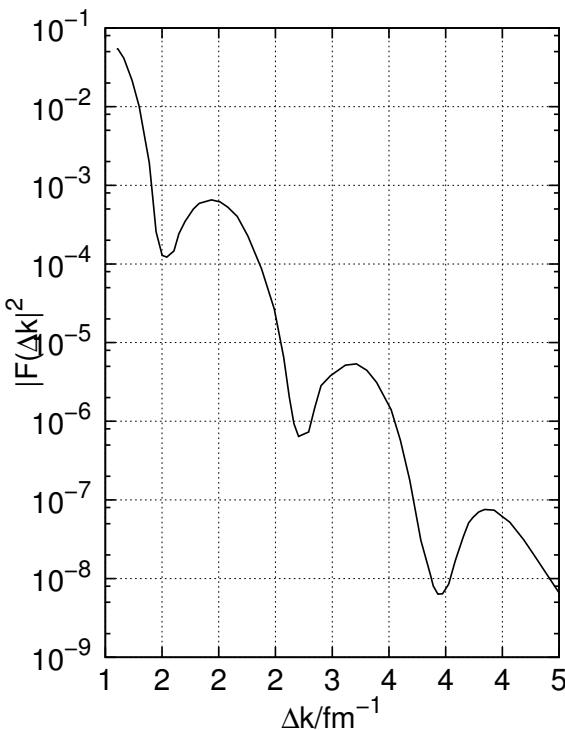


Abb. 8.9.: Streuung von 750 MeV-Elektronen an $^{16}_8\text{O}$ -Kernen, adaptiert aus [Dem10] [Dem10, Abb 2.12].

8.1.5.1. Alternative Methoden

Aus der Atomphysik wissen wir, dass nach Johannes Rydberg die Frequenzen in Atomen von der Masse des Kerns (und z.B. der Abschirmung durch die anderen Ladungen) abhängt. Nach der Messung des differenziellen Streuquerschnittes (siehe Gleichung (6.3.25)) werden die Frequenzen der Röntgen- K_α -Linien gemessen und mit dem MOSELEYSCHEN GESETZ (nach Henry Moseley) ausgewertet:

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_y \cdot (Z - S)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (8.1.20)$$

Hier ist $\bar{\nu}$ die Wellenzahl, $R_y = 10\,973\,731.568\,527(73) \text{ m}^{-1}$ die Rydberg-Konstante und $(Z - S)e$ die effektive Kernladung unter Berücksichtigung der Abschirmung. Da Frequenzen auf mehr als 12 Stellen genau gemessen werden können, bietet diese Methode eine Möglichkeit, Kernmassen zu bestimmen. Diese werden zur Auswertung der Streuergebnisse benötigt.

8.2. Isospin-Formalismus

Werner Heisenberg zeigte, dass in weiten Grenzen ein NEUTRON n und ein PROTON p als zwei Varianten eines gedachten Teilchens namens NUKLEON mit zwei

verschiedenen Ladungszuständen angesehen werden können. Dies erlaubt, analog zum Spinformalismus eine Wellenfunktion für ein Nukleon hinzuschreiben

$$\Psi_e = \underbrace{\Psi(\mathbf{r})}_{\text{Ortsfunktion}} \cdot \underbrace{X^\pm}_{\text{Spinfunktion}} \quad (8.2.1)$$

Hier ist $X^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \uparrow$ und $X^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \downarrow$ die Bezeichnungen für die zwei Zustände. Diese Darstellung ist analog zum Spinformalismus

$$\Psi_p = \Psi_N(\mathbf{r}) \cdot \pi \quad \text{mit } \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für p} \quad (8.2.2a)$$

$$\Psi_n = \Psi_N(\mathbf{r}) \cdot \nu \quad \text{mit } \nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für n} \quad (8.2.2b)$$

$$(8.2.2c)$$

ν und π sind die Isospinwellenfunktionen für das NEUTRON und das PROTON.

Die Isospinwellenfunktion ist eine abstrakte Darstellung der beiden Zustände eines Nukleons, dem Proton und dem Neutron. Anders als beim Spin ist beim Isospin **kein magnetisches Moment** und **kein Drehimpuls** verknüpft.

Analog zum Spinvektor schreiben wir einen Isospinvektor

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \quad (8.2.3)$$

Der Isospinvektor $\boldsymbol{\tau}$ hat alle Eigenschaften eines Drehimpulses und kann durch Pauli-Matrizen (nach Wolfgang Pauli) beschrieben werden

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.2.4)$$

Analog zum Spin gibt es die Eigenwerte

$$\tau_3 \pi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \pi \quad (8.2.5a)$$

$$\tau_3 \nu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \nu \quad (8.2.5b)$$

Ein Kern besteht aus verschiedenen Nukleonen, der Isospin des Kerns ist die Vektorsumme der Isospins der einzelnen Bestandteile

$$\mathbf{T} = \sum \boldsymbol{\tau}_k \quad (8.2.6)$$

Für die 3-Komponente des Isospinvektors \mathbf{T} (Betrag $T = |\mathbf{T}|$) gibt es $2T + 1$ mögliche Werte von $T_3 = \sum \tau_{3k}$, analog zu Drehimpulsen.

Achtung: Die Komponenten von τ sind keine Ortskomponenten, sondern Komponenten eines Isospins.

Beispiel: Bei den beiden Spiegelkernen $^{11}_6\text{C}$ und $^{11}_5\text{B}$ müsste die Gesamtwellenfunktion bei identischen Nukleonen identisch sein. Dabei wurde die Coulomb-Wechselwirkung vernachlässigt. Wenn der Energiegewinn beim Übergang von $^{11}_6\text{C}$ in $^{11}_5\text{B}$

$$\Delta E_C > (m_n + m_p)c^2 \rightarrow \beta^+ \text{-Zerfall} \quad (8.2.7)$$

ist, erwarten wir einen β -Zerfall.

8.2.1. Pauli-Prinzip

Wolfgang Pauli erkannte, dass die Symmetrieverbedingungen bei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen die möglichen Wellenfunktionen einschränkten. Dies führte zum PAULI-AUSSCHLUSSPRINZP oder PAULI-PRINZIP. $2p$ und/oder $2n$ mit jeweils antiparallelem Kernspin füllen die tiefen Energieniveaus. Für diese gepackten Nukleonen ist $T_3 = 0$.

$^{11}_6\text{C}$ und $^{11}_5\text{B}$ bilden ein Isospin-Dublett

$$\left. \begin{array}{l} {}^{11}_6\text{C} : T_3 = \frac{1}{2} \\ {}^{11}_5\text{B} : T_3 = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{Isospin-Dublett} \quad (8.2.8)$$

Der in Abschnitt 8.2 angesprochene β^+ -Zerfall bedeutet für die 3-Komponente des Isospins

$$T_3 = +\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad T_3 = -\frac{1}{2} \quad (8.2.9)$$

dass sie sich ändert. Diese Änderung bei einem Übergang ist ein Zeichen für die SCHWACHE WECHSELWIRKUNG. Mehr dazu in späteren Kapiteln.

Allgemein gilt bei A Nukleonen

$$T_3 = \sum_{k=1}^A \tau_{3k} = \frac{1}{2}(Z - N) \quad (8.2.10)$$

A ist das allgemein übliche Symbol für die Gesamtzahl der Nukleonen in einem

Kern.

T	T_3	Isospinfunktion
1	1	$\varphi_1^1 = \pi(1) \cdot \pi(2)$
1	0	$\varphi_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\pi(1)\nu(2) + \pi(2)\nu(1)]$
1	-1	$\varphi_{-1}^1 = \nu(1) \cdot \nu(2)$
0	0	$\varphi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\pi(1)\nu(2) - \pi(2)\nu(1)]$

Tab. 8.2.: Isospinzustände bei zwei Nukleonen. (nach W. Demtröder [Dem10, Tab. 5.3]).

Die Gesamtwellenfunktion bei zwei Nukleonen hat die folgenden Symmetrieeigenschaften:

- Isospin-Triplett \Rightarrow Wellenfunktion symmetrisch beim Austausch der beiden Teilchen
- Isospin-Singulett \Rightarrow Wellenfunktion antisymmetrisch beim Austausch der beiden Teilchen

8.3. Parität

Unter dem Begriff PARITÄT verstehen wir die Punktspiegelung im Raum

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \quad (8.3.1)$$

Wir haben bei der Diskussion in Abschnitt 8.2.1 gesehen, dass das PAULI-PRINZIP eine Aussage über die Symmetrie der Wellenfunktion beim Austausch zweier Teilchen macht. Hier betrachten wir zwei Typen von Wellenfunktionen:

$$\text{Symmetrisch: } \psi_s(\mathbf{r}) \xrightarrow{\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}} \overline{\psi_s}(\mathbf{r}) = \psi_s(-\mathbf{r}) \quad (8.3.2a)$$

$$\text{Antisymmetrisch: } \psi_a(\mathbf{r}) \xrightarrow{\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}} \overline{\psi_a}(\mathbf{r}) = -\psi_a(-\mathbf{r}) \quad (8.3.2b)$$

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.2.] bedeutet die Linearität der Transformation, dass die Operation durch den PARITÄTSOPERATOR \hat{P} ausgedrückt werden kann. Die Eigenzustände des Paritätsoperators haben den Eigenwert

$$\hat{P}\psi_p(\mathbf{r}) = P\psi_p(\mathbf{r}) \quad (8.3.3)$$

Wenn wir \hat{P} zweimal anwenden haben wir die Identität

$$\hat{P}^2\psi(\mathbf{r}) = \hat{P}(\hat{P}\psi(\mathbf{r})) = \hat{P}(P\psi(-\mathbf{r})) = P^2\psi(\mathbf{r}) = \hat{I}\psi(\mathbf{r}) \quad (8.3.4)$$

Daraus folgt:

$$P = \pm 1 \quad (8.3.5)$$

Weiter ist auch $\hat{P} = \hat{P}^\dagger = \hat{P}^{-1}$, also hermitesch und unitär. Die Eigenfunktionen zu den zwei Eigenwerten sind

$$\overline{\psi^{(+)}}(\mathbf{r}) = (\hat{P}\psi^{(+)})(\mathbf{r}) = \psi^{(+)}(-\mathbf{r}) = (+1)\psi^{(+)}(\mathbf{r}) \quad (8.3.6a)$$

$$\overline{\psi^{(-)}}(\mathbf{r}) = (\hat{P}\psi^{(-)})(\mathbf{r}) = \psi^{(-)}(-\mathbf{r}) = (-1)\psi^{(-)}(\mathbf{r}) \quad (8.3.6b)$$

Die Bewegungsgleichungen der Quantenmechanik sind invariant gegen der Punktssymmetrie deshalb kommutieren der Paritätsoperator und der Hamiltonoperator.

$$[\hat{P}, \hat{H}] = 0 \quad (8.3.7)$$

Dies heisst, dass jeder nicht entartete Eigenzustand des Hamiltonoperators auch ein Eigenzustand des Paritätsoperators ist, also eine definierte Parität hat.

Die Ortskoordinaten wechseln bei der Paritätsoperation das Vorzeichen, genauso wie die Geschwindigkeiten. Dies entspricht dem Eigenwert -1 . Oder in anderen Worten: diese Vektoren sind bezüglich des Nullpunkts antisymmetrisch. Beide Größen sind polare Vektoren. Der Drehimpuls mit seinem Kreuzprodukt aus Orts- und Geschwindigkeitsvektor ändert das Vorzeichen nicht, das entspricht $+1$. Drehimpulse sind axiale Vektoren, also symmetrisch bezüglich der Spiegelung am Koordinatennullpunkt.

Wenn der Wechselwirkungsoperator \hat{H}_{WW} mit dem Paritätsoperator kommutiert, also

$$[\hat{P}, \hat{H}_{WW}] = 0 \quad (8.3.8)$$

Die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung erhalten die Parität, deren Wechselwirkungsoperator kommutiert mit dem Paritätsoperator. Die schwache Wechselwirkung ist nicht paritätserhaltend.

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.2.] ist die PARITÄT nicht einfach zu messen. Wenn bei einer paritätserhaltenden Wechselwirkung ein Teilchen 1 sich in zwei Teilchen 1' und 2' aufspalten, gibt es die folgenden Einschränkungen:

- Der gesamte Endzustand ψ_{Ende} muss die gleiche Parität haben wie der Anfangszustand ψ_{Anfang} . Das bedeutet dass
 - bei gerader Parität des Anfangszustandes die beiden Endzustände entweder beide gerade oder beide ungerade
 - bei ungerader Parität des Anfangszustandes die beiden Endzustände je einmal gerade und ungerade
 sein müssen.
- Wenn die beiden Endzustände einen Bahndrehimpuls haben, dann kommt noch ein Faktor $(-1)^\ell$ hinzu.
- Generell ist die Parität das Produkt der Paritätseigenwerte aller Teilwellenfunktionen.

- Die Transformationseigenschaften von Zahlen und Vektoren sind im Anhang C.3 aufgelistet.

8.4. Nukleon-Nukleon-Streuung

Hier betrachten wir die Streuung von n an p , von n an n oder von p an p . Die Berechnung der Streuung wird im Schwerpunktsystem durchgeführt. Bei kleinen und mittleren Energien haben wir

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{L}| = b\mu v_0 = b\sqrt{\frac{1}{2}mE_0} \quad (8.4.1)$$

mit E_0 der kinetischen Energie eines Nukleons und $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}$ der reduzierten Masse.

Die Wechselwirkung z.B. zwischen Neutronen n kann nicht die elektromagnetische Wechselwirkung sein. Wir kennen sie noch nicht, aber wir wissen, dass sie eine maximale Reichweite R_0 haben müssen. Dieses R_0 ist der maximal mögliche Abstand bei dem es eine Wechselwirkung gibt. Das Produkt aus einer Geschwindigkeit und einem dazu senkrechten Bahndrehimpuls ist ein Bahndrehimpuls. Bahndrehimpulse sind quantisiert. Das heisst, aus der Geometrie gibt es einem maximalen Bahndrehimpuls, gleichzeitig gibt es den Bahndrehimpuls nur quantisiert. Wir haben die Beziehung

$$|\mathbf{L}_{\max}| = \ell_{\max}\hbar \leq 2R_0\mu v_0 = 2R_0\hbar k \quad (8.4.2)$$

Die maximal mögliche Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ_{\max} für die Streuung (oder der maximal mögliche Wert für die 3-Komponente des Bahndrehimpulses)

$$\ell_{\max} \leq 2R_0k = \frac{2R_0}{\hbar}\sqrt{\frac{1}{2}mE_0} \quad (8.4.3)$$

Quantenmechanisch wird der Streuprozess durch den totalen elastischen Wirkungsquerschnitt für Teilchen mit der reduzierten de Broglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{1}{k}$ beschrieben. Wenn die einlaufende Welle in Partialwellen mit den Drehimpulsen $\hbar\ell$ bezüglich des Streuzentrums eingeteilt wird, ergibt sich eine Aufteilung der gesamten Fläche des einfallenden Teilchenstroms in Kreisringzonen (siehe W. Demtröder [Dem10, Kap. 4.4.2.]). Teilchen mit dem Impuls p ergeben die Ringradien

$$r_n = \frac{L}{p} = \frac{\hbar\ell}{p} = \ell\frac{\hbar}{p} = \ell\frac{\hbar}{\hbar k} = \ell\frac{\lambda}{2\pi} = \ell\lambda \quad (8.4.4)$$

Pro Kreisringsegment ergibt sich die Fläche

$$A_\ell = \pi \left(r^2(\ell+1) - r^2(\ell) = \pi (\ell+1)^2 \lambda^2 - \ell^2 \lambda^2 \right) = \pi \lambda^2 (2\ell+1) \quad (8.4.5)$$

Die Gesamtfläche wird

$$A = \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \sigma_\ell = \pi \lambda^2 \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) = \pi \lambda^2 (\ell+1)^2 \quad (8.4.6)$$

Dieses A ist der Ausgang für die Berechnung des Streuquerschnitts unter Berücksichtigung der Wechselwirkung über das Potential. Jede Partialwelle in A_ℓ erhält durch die Wechselwirkung einen Faktor $(1 - \exp(2i\delta_\ell))$. Die Summation kann in ein Integral überführt werden. Aus dem Integral ergibt sich, dass bei der elastischen Streuung jede Partialwelle eine Phase δ_ℓ – also die Phase gegen einen einmal festgelegten Nullpunkt – erhält. Der Gesamtstreuquerschnitt ist dann

$$\sigma_{\text{int}}^{\text{el}} = 4\pi\lambda^2 \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell + 1) \sin^2(\delta_\ell) \quad (8.4.7)$$

erhält. Die Streuphase δ_0 wird durch die Physik der Wechselwirkung bestimmt. Dadurch enthält der gesamte Streuquerschnitt die Physik der Wechselwirkung.

8.4.1. Spinabhängigkeit

Wir haben gesehen, dass Nukleonen einen Spin \mathbf{I}_i haben. Wie bei den sonstigen Drehimpulsen gilt

$$|\mathbf{I}_i| = \hbar\sqrt{I_i(I_i + 1)} \quad (8.4.8)$$

Bei einem Nukleon oder Teilchen mit mehreren Nukleonen ist die Vektorsumme aller Spins¹ und aller Drehimpulse ein Charakteristikum des Teilchens. Diese Summe

$$\mathbf{I} = \sum_{\forall i} (\mathbf{I}_i + \boldsymbol{\ell}_i) \quad (8.4.9)$$

heisst der KERNSPIN.

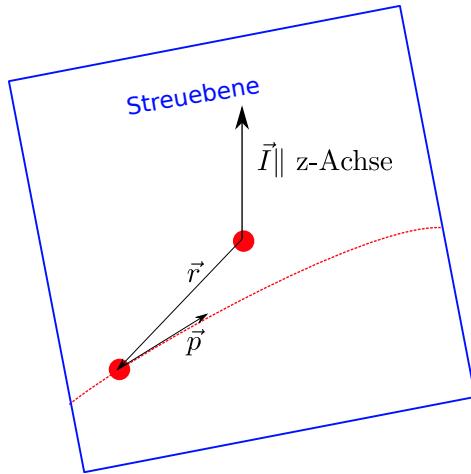


Abb. 8.10.: Definition der Streuebene nach [Dem10, Abb. 5.1]

Abbildung 8.10 zeigt die Streugeometrie. Wir setzen die z -Achse parallel zum Gesamtdrehimpuls \mathbf{I} . Wenn die beiden einzelnen Spins \mathbf{I}_i der beiden Nukleonen par-

¹aber nicht der Isospins.

allel sind, dann befinden sich die beiden Nukleonen in einem TRIPLETZUSTAND. Der resultierende Gesamtspin kann eine 3-Komponente parallel zur z -Achse haben, oder es ist $I_3 = 0$. Bei antiparallelen Spins ist nur $I_3 = 0$ möglich.

$$\mathbf{I}_1 \parallel \mathbf{I}_2 \implies \begin{cases} I_z = 0 & \text{in der Streuebene;} \\ I_z = \pm 1, & \text{auserhalb der Streuebene.} \end{cases} \quad (8.4.10a)$$

$$\mathbf{I}_1 \downarrow \mathbf{I}_2 \implies I_z = 0 \text{ nur in der Streuebene} \quad (8.4.10b)$$

Es gibt also drei Triplettzustände und einen Singulettzustand. Die Streuquerschnitte für Triplettzustände (σ_{tot}^t) und die Singulettzustände (σ_{tot}^s) müssen dann mit den Gewichten $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{2}$ addiert werden

$$\sigma_{tot}^{\text{el}} = \frac{1}{4}\sigma_{tot}^s + \frac{3}{4}\sigma_{tot}^t \quad (8.4.11)$$

Mit den Streuphasen erhalten wir

$$\sigma_{tot}^{\text{el}} = \frac{4\pi}{k^2} \left[\frac{3}{4} \sin^2 \delta_0^t + \frac{1}{4} \sin^2 \delta_0^s \right] \quad (8.4.12)$$

mit $k = \frac{1}{\lambda}$ wie oben.

Experimentell waren die totalen Streuquerschnitte bei der Neutron-Proton-Streuung (gemessen: σ_{tot}^{el} sowie σ_{tot}^t und σ_{tot}^s mit Gleichung (8.4.12) berechnet):

$$\sigma_{tot}^{\text{el}} = 20.3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 = 20.3 \text{ b} \quad (8.4.13a)$$

$$\sigma_{tot}^t \approx 3.8 \text{ b} \quad (8.4.13b)$$

$$\sigma_{tot}^s \approx 70 \text{ b} = 4(20.3 \text{ b} - 3 \cdot 3.8 \text{ b}) \quad (8.4.13c)$$

Aus den Gleichungen (8.4.7) und (8.4.12) kann man für Streuwellen mit $\ell = 0$ (S-WELLE) eine Streulänge definieren. Aus dem dann winkelunabhängigen totalen Streuquerschnitt ergibt sich

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma_{total} = 4\pi(a^*)^2 \stackrel{\ell=0}{=} 4\pi\lambda^2 \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) \sin^2(\delta_\ell) = 4\pi\lambda^2 \sin^2(\delta_0) \quad (8.4.14)$$

Durch Ziehen der Wurzel bekommen wir

$$a^* = \pm \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sin(\delta_0) = \pm \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin(\delta_0)}{k} \quad (8.4.15)$$

$k \rightarrow 0$ ist äquivalent zur Aussage, dass die Energie des Teilchens gegen null geht. In der Regel hat der Quotient einen endlichen Grenzwert.

Beispiel:

Aus $\sigma_{tot}^t \approx 3.8 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ folgt $a^* = 5.5 \text{ fm}$. Aus der Singulett- und Triplettstreuung kann a^* und R_K bestimmt werden, aber nicht der Potentialverlauf.

8.4.2. Ladungsabhängigkeit

Um die Ladungsunabhängigkeit der Nukleonstreuung zu zeigen vergleichen wir die $p - n$ -Streuung mit der $p - p$ -Streuung und der $n - n$ -Streuung. Aus Gleichung

(6.3.25)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2$$

folgt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta) \pm f(\pi - \vartheta)|^2 \quad (8.4.16)$$

Wenn der Stossparameter b genügend klein ist, ist $\ell = 0$ und damit (keine Winkelabhängigkeit bei S-WELLEN

$$f(\vartheta) = f(\pi - \vartheta) \quad (8.4.17)$$

Bei höheren Bahndrehimpulsen modifiziert dieser die Winkelverteilung, das heisst die Symmetrie ist nicht mehr gewährleistet. Wie schon besprochen ist bei Fermionen die Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch. Das bedeutet, dass die Spins der Fermionen antiparallel sind.

Das bedeutet, dass die $n - n$ - und die $p - p$ -Streuung nur im Singulettzustand möglich ist. Die $p - n$ -Streuung unterliegt nicht dem Pauli-Prinzip: Sie tritt sowohl im Singulett- wie auch im Tripletzustand auf. Deshalb muss hier der Singulettzustand rechnerisch bestimmt werden.

Wir können deshalb die $n - n$ - und die $p - p$ -Streuung nur im Singulettzustand vergleichen (den Tripletzustand gibt es nicht). Bei der $p - p$ -Streuung muss das Coulombpotential zusätzlich mit berücksichtigt werden.

Wenn alle diese Nebenbedingungen erfüllt sind ergibt sich, dass die $n - n$ -, $p - p$ - und $p - n$ -Streuquerschnitte gleich sind. Dies ist eine Stütze der Annahme eines generischen Teilchens namens NUKLEON. Dies kann auch so formuliert werden:

Kernkräfte hängen nicht von der Ladung der Nukleonen ab.

8.5. Kernmodelle

8.5.1. Massendichtheverteilung und Masse

Die Ladungsdichtheverteilung (8.1.19) (nach Enrico Fermi)

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r - R_{1/2}}{a}\right)}$$

ist eine Approximation für die Massenverteilung.

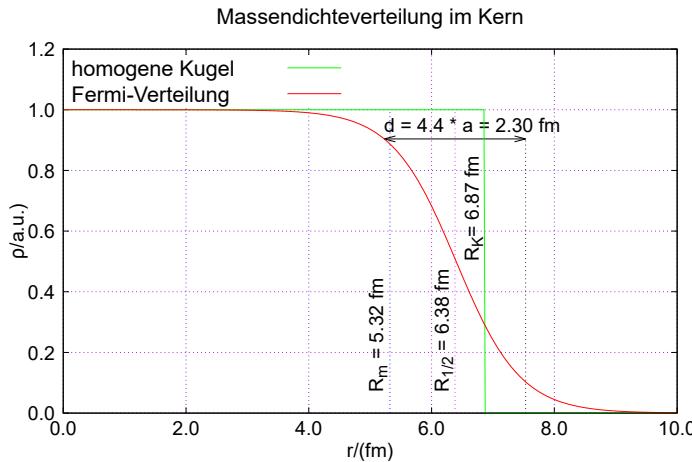


Abb. 8.11.: Massedichteverteilung von Au mit den verschiedenen Kernradien (nach W. Demtröder [Dem10]).

Abbildung 8.11 zeigt die verschiedenen Größen bei der Beschreibung eines Kerns

- Halbwertsradius $R_{1/2}$ ($= 6.38 \text{ fm}$ bei $^{197}_{79}\text{Au}$)
- mittlerer quadratischer Kernradius R_m^2 ($R_m = 5.32 \text{ fm}$ bei $^{197}_{79}\text{Au}$)

$$R_m^2 = \frac{\int_0^\infty r^2 \rho(r) 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty 4\pi r^2 dr} \quad (8.5.1)$$

- Kugelradius bei einer homogenen Kugel R_K ($R_K = 6.87 \text{ fm}$ bei $^{197}_{79}\text{Au}$)

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{4\pi\rho_0 \int_0^{R_K} r^2 dr} \int_0^\infty r^2 \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{3}{5} R_K^2 \quad (8.5.2)$$

- Randbereich von $R_{1/2} - 2.2a$ bis $R_{1/2} + 2.2a$ mit $d = 4.4a$ ($= 2.3 \text{ fm}$ bei $^{197}_{79}\text{Au}$)

Der Radius der homogenen Kugel berechnet sich mit $M_K = 4\pi\rho_0 \int_0^{R_K} r^2 dr$ und R_m für $\rho(r) = \rho_0$. Bei einer konstanten Massendichte $\rho_m(r) = \rho_0$ folgt aus der Kernmasse

$$\frac{4}{3}\pi R_S^3 \rho_0 = M_K \approx M_N \cdot A \quad (8.5.3)$$

M_N ist die Masse eines Nukleons. Daraus ergibt sich

$$\left(\frac{3M_K}{4\pi\rho_0}\right)^{\frac{1}{3}} \approx r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}} \quad (8.5.4)$$

Wir haben dann

$$R_m = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.77 \cdot R_K = A^{1/3} \cdot 1.0 \text{ fm} \quad (8.5.5a)$$

$$R_K = \sqrt{\frac{3}{5}} R_m \approx A^{1/3} \cdot 1.3 \text{ fm} \quad (8.5.5b)$$

$$R_{1/2} = 0.9 - 1.1 \cdot R_m \approx A^{1/3} \cdot (0.9 - 1.1) \text{ fm} \quad (8.5.5c)$$

Oft wird $r_0 \approx 0.94 - 1.3 \text{ fm}$ gesetzt.

Die Grösse des Kernradius' hängt vom betrachteten Modell ab.

8.5.2. Bausteine

Die Untersuchungen von Ernest Rutherford (siehe Abschnitt 8.1.2) ergab sich, dass haben Kerne aus zwei Arten von NUKLEONEN bestehen. Das PROTON ist das positiv geladene Nukleon und ein wenig leichter als das ungeladene Nukleon, das NEUTRON. Die Nukleonen werden durch Kernkräfte, die auch STARKE WECHSELWIRKUNG genannt werden, zusammengehalten. Diese ist unabhängig von der LADUNG.

Name	Proton	Neutron
Symbol	p	n
Ladung	$+e$	0
Masse	1.007 276 466 63(9) u $\hat{=} 938.272\,081(6) \text{ MeV}/c^2$	1.008 664 915 9(5) u $\hat{=} 939.565\,413(6) \text{ MeV}/c^2$
Spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Pariät	+	+
magnetisches Moment	$2.792\,847\,344\,6(8)\mu_K$	$-1.913\,042\,7(5)\mu_K$

Tab. 8.3.: Masse der Nukleonen nach P. A. e. Zyla, *The Review of Particle Physics (2021)* [Zyl21]. μ_K ist das KERNMAGNETON.

Da die Massen der beiden Nukleonen (siehe 8.3) unterscheidet sich nur um 1.293 332 1(5) MeV/c^2 . Deshalb kann in guter Näherung von einem generischen Nukleon gesprochen werden.

8.5.3. Tröpfchenmodell

Im Folgenden werden die Gleichungen plausibel gemacht.

1. Anziehende Kernkräfte sind kurzreichweitig (also nur zu nächsten Nachbarn)
Aus $\Rightarrow E_B/\text{Nukleon}$ unabhängig von $A = Z + N$

$$\Rightarrow E_{B_1} = +a_v \cdot A$$

$$E_{B_1} = +a_V \cdot A \quad (8.5.6)$$

Dies ist der VOLUMENANTEIL.

2. Wir nehmen weiter an, dass Nukleonen an der Oberfläche weniger gebunden sind, da Nachbarn fehlen:

$$\text{Oberfläche} \propto V^{\frac{2}{3}} \propto A^{\frac{2}{3}}$$

$$E_{B_2} = -a_s \cdot A^{2/3} \quad (8.5.7)$$

Damit ist dies der Oberflächenanteil.

3. Nukleonen sind Fermionen (nach Enrico Fermi) \Rightarrow Pauli-Prinzip (nach Wolfgang Pauli)

Energie minimal bei gegebenem A wenn eine gerade Anzahl von Protonen Z und eine gerade Anzahl von Neutronen N vorhanden sind: gg-Kern

$$\begin{aligned} \langle E_{kin} \rangle &= \frac{3}{5} E_F (N_n + N_p) = \frac{3}{5} E_F A \\ E_F &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{V} \right)^{2/3} \left(N_p^{2/3} + N_n^{2/3} \right) \end{aligned}$$

Mit $\Delta N = N_n - N_p$ und $N = N_n + N_p$ und $N_n = (1/2)(A + \Delta N) = (A/2)(1 + \Delta N/A)$ und $N_p = (1/2)(A - \Delta N) = (A/2)(1 - \Delta N/A)$

$$\langle E_F \rangle = \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{3\pi^2}{V} \right)^{2/3} \frac{A^{2/3}}{2^{2/3}} \left(\left(1 + \frac{\Delta N}{A} \right)^{2/3} + \left(1 - \frac{\Delta N}{A} \right)^{2/3} \right) \quad (8.5.8)$$

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{3\pi^2}{V} \right)^{2/3} \frac{A^{5/3}}{2^{2/3}} \left(\left(1 + \frac{\Delta N}{A} \right)^{2/3} + \left(1 - \frac{\Delta N}{A} \right)^{2/3} \right) \quad (8.5.9)$$

$$\begin{aligned} (1 \pm x)^{2/3} &\approx 1 \pm \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \pm \dots \\ (1 + x)^{2/3} + (1 - x)^{2/3} &\approx 2 - \frac{2}{9}x^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle E_{kin} \rangle &= C_1 A \left(\frac{A}{V} \right)^{2/3} \left[2 - \frac{2}{9} \left(\frac{\Delta N}{A} \right)^2 + \dots \right] \\ &= C \left[A - \frac{2}{9} \frac{\Delta N^2}{A} + \dots \right]\end{aligned}\quad (8.5.10)$$

(mit $A \approx V$). Der erste Term ist im Volumenterm enthalten. Der zweite Term wird

$$E_{B_3} = -a_F \frac{(Z - N)^2}{A} \quad (8.5.11)$$

Dies ist die Asymmetrie-Energie

4. Coulomb-Abstossung

$$E_{B_4} = -a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad \text{mit} \quad a_C = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \quad (8.5.12)$$

Folgt aus der Integration der Coulombenergie für eine homogene sphärische Ladung.

5. gg-Kerne sind stabiler als uu-Kerne. Also gibt es einen Paarungsanteil

$$E_{B_5} = a_P \cdot A^{-1/2} \delta \quad \text{mit} \quad \delta = \begin{cases} +1 & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für gu- und ug-Kerne} \\ -1 & \text{für uu-Kerne} \end{cases} \quad (8.5.13)$$

wobei die A -Abhängigkeit empirisch ist

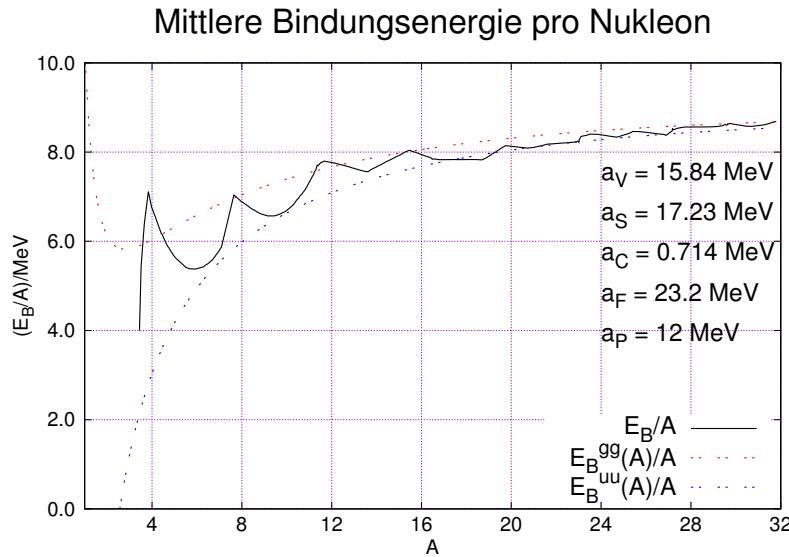


Abb. 8.12.: Experimentelle Bindungsenergie pro Nukleon im Vergleich zum Tröpfchenmodell (Nach Demtröder Band 4, Abb 2.32 [Dem10])

8.5.3.1. Bethe-Weizsäcker-Gleichung

Das Tröpfchenmodell wird in der Bethe-Weizsäcker-Gleichung (nach Hans Bethe und Carl Friedrich von Weizsäcker) durch

$$\begin{aligned} E_B &= \Delta M c^2 \\ &= (Zm_p + Nm_n - M_k) c^2 \\ &= a_V A - a_S A^{2/3} - a_F (N - Z)^2 A^{-1} - a_C Z^2 A^{-1/3} + \delta a_P A^{-1/2} \end{aligned} \quad (8.5.14)$$

beschrieben, wobei M_K die Masse des Kerns ist.

Die Zahlenwerte nach W. Demtröder [Dem10] sind:

$$a_V = 15.84 \text{ MeV} \quad a_S = 18.33 \text{ MeV} \quad a_F = 23.2 \text{ MeV} \quad (8.5.15a)$$

$$a_C = 0.714 \text{ MeV} \quad a_p = 12 \text{ MeV} \quad (8.5.15b)$$

A. Das und T. Ferbel [DF09] geben den Paarungsterm etwas anders an:

$$E_B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_F \frac{(A - 2Z)^2}{A} - a_C Z^2 A^{-1/3} + \delta a_p A^{-3/4} \quad (8.5.16)$$

mit den Zahlenwerten

$$a_V = 15.6 \text{ MeV} \quad a_S = 16.8 \text{ MeV} \quad a_F = 23.3 \text{ MeV} \quad (8.5.17a)$$

$$a_C = 0.72 \text{ MeV} \quad a_p = 34 \text{ MeV} \quad (8.5.17b)$$

8.5.3.2. Gesamtmasse von Kernen und Atomen

$$\begin{aligned} M_K(A, Z) &= Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{E_B}{c^2} \\ &= Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{1}{c^2} \left[a_V A - a_S A^{2/3} - a_F (N - Z)^2 A^{-1} \right. \\ &\quad \left. - a_C Z^2 A^{-1/3} + \delta a_P A^{-1/2} \right] \end{aligned} \quad (8.5.18)$$

$$\begin{aligned} M_a(A, Z) &= M_K(A, Z) + Zm_e - \frac{E_B^{el}}{c^2} \\ &= Zm_p + (A - Z)m_n + Zm_e - \frac{1}{c^2} \left[a_V A - a_S A^{2/3} - a_F (N - Z)^2 A^{-1} \right. \\ &\quad \left. - a_C Z^2 A^{-1/3} + \delta a_P A^{-1/2} - E_B^{el} \right] \end{aligned} \quad (8.5.19)$$

8.5.4. Einteilchenmodelle

Die einfachsten Kernmodelle betrachten jedes einzelne Nukleon als selbständiges Teilchen. Nach dem Kastenpotential wird als Erweiterung das Fermigas-Modell (nach Enrico Fermi) betrachtet. Ein Vergleich mit der Atomphysik führt dann zum Schalenmodell.

8.5.4.1. Begriffserklärung mit würfelförmigem Kastenpotential

Vor dem sphärischen Potentialkasten betrachten wir zuerst den würfelförmigen Potentialkasten.

- Im Kern heben sich die gegenseitigen Kräfte der Nukleonen auf
- Für $r = a$ und $r > a$ gibt es eine nach innen gerichtete Kraft, die die Nukleonen im Kern hält.
- Kurze Reichweite der Kernkräfte \Rightarrow das Potential ist wegen $\mathbf{F} = -\mathbf{\text{grad}} V$ im Kern konstant und negativ
- Potentielle Energie

$$E_{pot}(r) = \begin{cases} -E_0 & \text{für } r < a \\ 0 & \text{für } r \geq a \end{cases} \quad (8.5.20)$$

- Schrödingergleichung (nach Erwin Schrödinger)

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi - E_0 \psi = E \psi \quad (8.5.21)$$

- Produktansatz

$$\psi(x, y, z) = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y) \cdot \psi_z(z) \quad (8.5.22)$$

- Drei Gleichungen

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_x(x)}{\partial x^2} = E_x \psi_x \quad (8.5.23a)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_y(y)}{\partial y^2} = E_y \psi_y \quad (8.5.23b)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_z(z)}{\partial z^2} = E_z \psi_z \quad (8.5.23c)$$

- Energieniveaus

$$E_x + E_y + E_z = E + E_0 = E - E_{pot} \quad (8.5.24)$$

- Wellenvektor $k_i = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE_i}$

$$\frac{\partial^2 \psi_x(x)}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi_x \quad (8.5.25a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_y(y)}{\partial y^2} = -k_y^2 \psi_y \quad (8.5.25b)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_z(z)}{\partial z^2} = -k_z^2 \psi_z \quad (8.5.25c)$$

- Randbedingungen (ψ verschwindet) ergeben

$$\psi_x(x) = A_x \sin(k_x x) \quad \text{mit} \quad k_x = n_x \cdot \frac{\pi}{a} \quad (8.5.26a)$$

$$\psi_y(y) = A_y \sin(k_y y) \quad \text{mit} \quad k_y = n_y \cdot \frac{\pi}{a} \quad (8.5.26b)$$

$$\psi_z(z) = A_z \sin(k_z z) \quad \text{mit} \quad k_z = n_z \cdot \frac{\pi}{a} \quad (8.5.26c)$$

- Kubischer Potentialkasten

$$E_i = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} n_i^2 \quad \text{mit } i = x, y, z \quad (8.5.27)$$

- Gesamtenergie

$$E + E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (8.5.28)$$

- E Gesamtenergie, $E - E_{pot} = E + E_0$ (siehe Gleichung (8.5.20))
- Energie $E \leq E_{max} - E_0 < 0 \Rightarrow$ Gitterpunkte in Oktanten mit $k_x > 0$, $k_y > 0$, $k_z > 0$ und

$$k_{max} = \frac{p_{max}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \cdot E_{max}} \quad (8.5.29)$$

- Anzahl Zustände

$$n = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 = \frac{a^3}{6\pi^2 \hbar^3} (2m \cdot E_{max})^{3/2} \quad (8.5.30)$$

- Die Zustände $n < n_F$ werden bis zur Fermi-Energie E_F aufgefüllt (nach Enrico Fermi). Wenn $Z = N$ ist, sind dies $A/4 = n_F$ Zustände

8.5.4.2. Fermigas-Modell

Mit Hilfe des im Abschnitt 8.5.4.1 würfelförmigen Kastens soll die Anzahl Zustände abgezählt werden.

Annahme: Nukleonen sind ein Fermigas. Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Energie folgt der Fermi-Verteilung. Das Konzept der Fermi-Energie stammt aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für Partikel mit halbzahligem Spin von Enrico Fermi.

Kinetische Energie

$$E + E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (8.5.31)$$

Nach Gleichung (8.5.30) ist die Zahl der Energiedichten (in einem Oktanten zwischen den x -, y - und z -Achsen) für $E \leq E_{max} - E_0 < 0$

$$n = \frac{a^3}{6\pi^2 \hbar^3} (2mE_{max})^{\frac{3}{2}}$$

Die Anzahl Zustände pro Volumen (unabhängig vom Volumen!) ist

$$\frac{n}{V} = \frac{1}{6\pi^2} \cdot \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (8.5.32)$$

und die Zustandsdichte

$$\frac{dn}{dE} = \frac{a^3}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{E} \quad (8.5.33)$$

Wenn $Z = N$ ist, ist die Fermi-Energie (nach Enrico Fermi)

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6n_F \pi^2}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (8.5.34)$$

Da Neutronen und Protonen sich durch ihren Isospin unterscheiden können gilt

$$n_F = \frac{A}{4} \quad (8.5.35)$$

Für stabile Kerne muss

$$E_F < E_{max} \Rightarrow E < 0 \quad (8.5.36)$$

gelten. Die mittlere Nukleonendichte wird dann

$$\rho_N = \frac{n_F}{V} \approx 0.15 \text{ Nukleonen/f}^3\text{m} \quad (8.5.37)$$

Daraus kann die folgende Voraussage gemacht werden

$$E_F \approx 35 \text{ MeV}, \text{ da } E_B \leq 10 \text{ MeV} \quad (8.5.38)$$

Schliesslich ergibt sich daraus für die Tiefe des Potentialtopfs

$$-E_0 \approx (40 - 50) \text{ MeV} \quad \text{unabhängig von } A \quad (8.5.39)$$

Alternative Sichtweise

Abschätzung mit dem Phasenraumvolumen (nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.3.]):

Der maximale Impuls sei p_F . Dann ist die maximale kinetische Energie

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} \quad (8.5.40)$$

Der Impuls nimmt das Impulsvolumen

$$V_p(p_F) = \frac{4\pi}{3} p_F^3 \quad (8.5.41)$$

ein. Im Ortsraum ist das Volumen mit dem Kernradius $R_K = r_0 A^{1/3}$

$$V(A) = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A \quad (8.5.42)$$

Das Phasenraumvolumen ist dann

$$V_{tot} = V_p(p_F)V(A) = \frac{4\pi}{3} p_F^3 \cdot \frac{4\pi}{3} r_0^3 A = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 (r_0 p_F)^3 A \quad (8.5.43)$$

Nach Werner Heisenberg ist das minimale Phasenraumvolumen (**UNSCHÄRFERELATION**)

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (8.5.44)$$

Das Volumen eines dreidimensionalen Zustandes muss dann mindestens

$$V_{tot,1 \text{ Teilchen}} = (2\pi\hbar)^3 = h^3 \quad (8.5.45)$$

sein. Damit gehen wir den umgekehrten Weg von Planck, der um seine Strahlungsformel abzuleiten einen klassischen Phasenraumansatz macht, aber nicht wie üblich $h \rightarrow 0$ gehen lassen konnte.

Die Anzahl Teilchen bekommen wir, indem wir V_{tot} durch das Volumen eines Zustandes teilen. Wir beachten, dass wegen den Spins in jedem Einteilchen-Phasenraumvolumen zwei Teilchen sein können.

$$n_F = \frac{V_{tot}}{V_{tot,1 \text{ Teilchen}}} = 2 \frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 (r_0 p_F)^3 A}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4}{9\pi} A \left(\frac{r_0 p_F}{\hbar}\right)^3 \quad (8.5.46)$$

$r_0 p_F$ verglichen mit \hbar ist offensichtlich ein Mass proportional zum Volumen eines Nukleons.

Zur Abschätzung setzen wir $N = Z = \frac{A}{2}$. Wir beachten, dass Neutronen und Protonen im gleichen Phasenraumvolumen sein können, da sie einen unterschiedlichen Isospin haben. Wir setzen nun $A/2$ gleich n_F und erhalten

$$\frac{A}{2} = \frac{4}{9\pi} A \left(\frac{r_0 p_F}{\hbar}\right)^3 \quad (8.5.47)$$

A fällt heraus (das war zu erwarten, da Robert Hofstadter [Hof57] experimentell gezeigt hatte, dass die Ladungsdichte und damit die Massendichte konstant ist).

Bei ausschliesslich nächster Nachbar-Wechselwirkung bedeutet dies, dass der Potentialtopf eine konstante Tiefe hat. Der Fermiimpuls ist

$$p_F = \frac{\hbar}{r_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \quad (8.5.48)$$

Damit ist auch der Fermiimpuls konstant. Die entsprechende Energie ist

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{r_0} \right)^2 \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \quad (8.5.49)$$

Mit der Masse eines Nukleons (etwa die Protonen- oder Neutronenmasse) folgt

$$E_F \approx 33 \text{ MeV} \quad (8.5.50)$$

Mit der noch nicht besprochenen Bindungsenergie im Kern $E_{B,K} \approx -8 \text{ MeV}$ ergibt sich

$$-E_0 = E_F - E_{B,K} = 41 \text{ MeV} \quad (8.5.51)$$

Besser als das Kastenpotential ist das WOODS-SAXON-POTENTIAL

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-R_0)/b}} \quad (8.5.52)$$

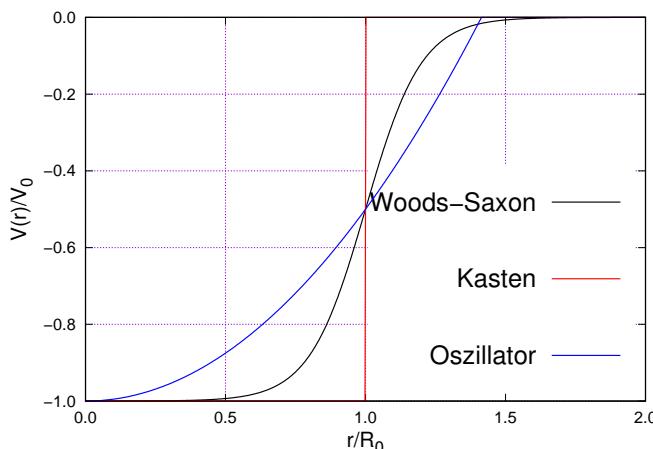


Abb. 8.13.: Woods-Saxon-Potential

8.5.4.3. Sphärisches Kastenpotential

Wir treffen die Annahme, dass das Verhalten von Nukleonen in Kernen durch ein sphärisches Kastenpotential für die starke Wechselwirkung mit endlicher Tiefe beschrieben wird. Wege zur Lösung werden zum Beispiel im Vorlesungsskript *Quantenmechanik I* von M. Sigrist, Kap. 5.4, p. 58ff [Sig03] beschrieben. Unter [Bli19] kann eine interaktive Simulation geladen werden.

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (8.5.53)$$

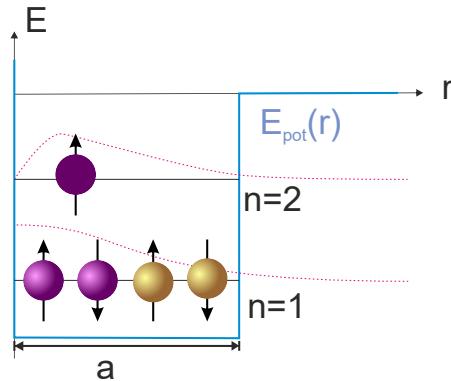


Abb. 8.14.: Kastenpotential für Neutronen und Protonen (adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.28 [Dem10] und modifiziert nach [Bli19]).

Abbildung 8.14 zeigt schematisch ein Kastenpotential für ${}^7_3\text{Li}$. Dabei ist die Coulomb-Abstossung der Protonen vernachlässigt.

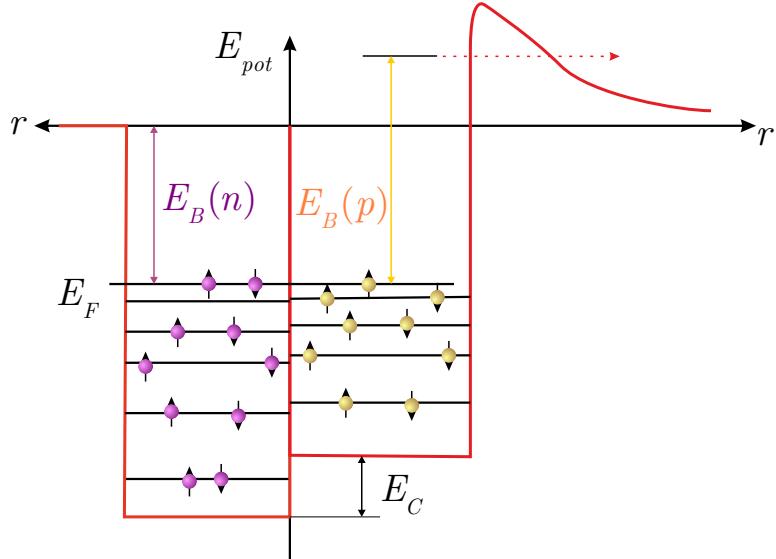


Abb. 8.15.: Vergleich der Potentiale von Neutronen und Protonen für ${}^{19}_9\text{F}$, adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.29 [Dem10]

Abbildung 8.15 zeigt die Anordnung von Protonen und Neutronen für ${}^{19}_9\text{F}$. Das Potential ist tiefer, als es der Bindungsenergie entspricht, weil die Nukleonen aufgrund der Unschärferelation wegen ihrer räumlichen Begrenzung eine grosse positive kinetische Energie besitzen.

Die Energie, die benötigt wird um einen Kern zu verlassen ist die Austrittsarbeit

$$W_a = E_b = -E_{\text{pot}} - E_F. \quad (8.5.54)$$

Da $E_{\text{pot}} < 0$ gilt ist $E_F > 0$.

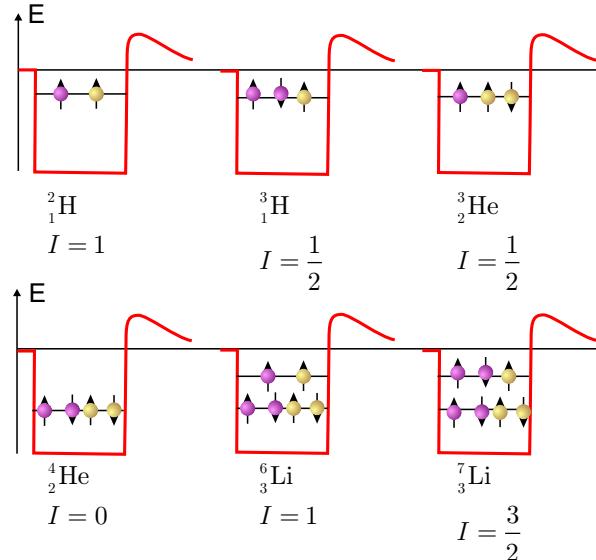


Abb. 8.16.: Nukleonenaufbau der leichten Kerne, adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.30 [Dem10]

8.5.4.4. Harmonischer Oszillatör

Das Potential eines harmonischen Oszillators ohne Berücksichtigung der Drehimpulse ist

$$V(r) = c \cdot r^2 - V_0 \quad (8.5.55)$$

Es ist $(V(r) + V_0)^2 \propto r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und damit

$$\psi(r) = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y) \cdot \psi_z(z) \quad (8.5.56)$$

Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators

$$\begin{aligned} E(n_x, n_y, n_z) &= \hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega \left((n_x + n_y + n_z) + \frac{3}{2} \right) \end{aligned} \quad (8.5.57)$$

8.5.4.5. Schalenmodell

Die Idee ist, dass bei elektronischen Zuständen im Coulombpotential immer dann wenn alle Drehimpulszustände zu einem n gefüllt sind, die Elektronenkonfigura-

tion besonders stabil ist. Beim Wasserstoffatom sind dies (siehe O. Marti und M. Gonçalves [MG19, Kap. 6.])

$$n_d = 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = 2n^2 \quad (8.5.58)$$

Zustände. Wenn noch die Reihenfolge der Besetzung von Unterschalen berücksichtigt wird ergeben sich die Zahlen in Tabelle 8.4

n	1	2	3	4	5	...
n_d	2	8	18	32	50	...
Magische Zahlen	2	10	18	36	54	...
	$= 2 + 8$	$= 2 + 8$	$= 2 + 8$	$= 2 + 8 + 18$		
		$+ 8$	$+ 18 + 8$	$+ 18 + 8$		

Tab. 8.4.: Magische Zahlen der Elektronenkonfigurationen

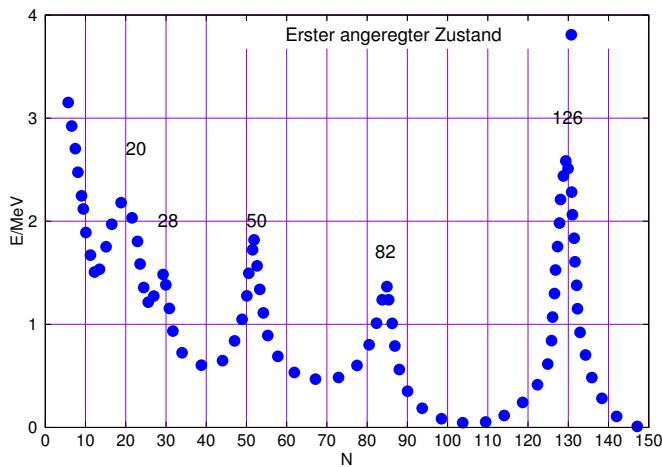


Abb. 8.17.: Energie des ersten angeregten Neutronenzustandes als Funktion der Neutronenzahl nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 5.29].

Abbildung 8.17 zeigt eine Messung der Energie des ersten angeregten Neutronenzustandes, die zeigt, dass es auch im Kern magische Zahlen geben muss.

Diese experimentell bestimmten Zahlen sind in Tabelle 8.5 angegeben.

Schale	1	2	3	4	5	6	7
Mag. Zahl N	2	8	20	28	50	82	126
Mag. Zahl Z	2	8	20	28	50	82	

Tab. 8.5.: Magische Zahlen der Protonen (Z) und Neutronen (N) in Kernen nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.].

In diesem Abschnitt soll nun begründet werden, wie diese Zahlen gefunden werden können. Beim Kastenmodell und beim harmonischen Oszillator sind n und ℓ unabhängig. Immer dann wenn bei den Drehimpulsen Schalen oder Unterschalen gefüllt sind beobachten wir magische Zahlen, also besonders stabile Konfigurationen.

- kugelsymmetrisches Potential, radiale Schrödingergleichung (nach Erwin Schrödinger) mit $u(r) = r \cdot R(r)$

$$\partial_r^2 u + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0 \quad (8.5.59)$$

- $V(r)$ liegt zwischen dem Kastenpotential und dem harmonischen Potential
 - Lösung Kastenpotential (Energieeigenwerte nach Gleichung (8.5.28))

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (8.5.60)$$

- Lösung harmonisches Potential (Energieeigenwerte nach Gleichung (8.5.57))

$$\begin{aligned} E(n_x, n_y, n_z) &= \hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega \left((n_x + n_y + n_z) + \frac{3}{2} \right) \end{aligned} \quad (8.5.61)$$

Teilchen im Potentialtopf

Die radiale Wellenfunktion kann aus der Gleichung (siehe O. Marti und M. Gonçalves [MG19, Kap. 6.3.2.4.])

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 \ell (\ell+1)}{2m_e r^2} + V(r) \right] R(r) = E \cdot R(r) \quad (8.5.62)$$

berechnet werden. Die Lösungen sind nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.1.] sphärische Besselfunktionen. Insbesondere sind die Energieniveaus für alle n und ℓ nicht entartet. Was bleibt ist die Entartung der ϕ -Abhängigkeit, also der m -Quantenzahl. Analog wie beim Wasserstoffatom ist

$$-\ell \leq m \leq \ell \text{ und } m \in \mathbb{Z} \quad (8.5.63)$$

Das heisst, es gibt zu jedem ℓ bei zwei Spinorientierungen $2(2\ell + 1)$ entartete Zustände.

ℓ	0	1	2	3	4	5	6
$2(2\ell + 1)$	2	6	10	14	18	22	26

Tab. 8.6.: Gefüllte Schalen im Kastenmodell nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.].

Die Werte aus Tabelle 8.6 ergeben die magischen Zahlen in Tabelle

Schale	1	2	3	4	5	...
Magische Zahlen	2	8	18	32	50	...

$= 2 + 6 = 8 + 10 = 18 + 14 = 32 + 18$

Tab. 8.7.: Magische Zahlen der im Kastenmodell nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.].

Die Zahlen in Tabelle 8.7 sind Kombinationen aus der Tabelle selber und aus Tabelle 8.6.

Teilchen im harmonischen Oszillator

Die radiale Wellenfunktion lautet hier (siehe A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.2.])

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{n,\ell} - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} \right) \right) R_{n,\ell} = 0 \quad (8.5.64)$$

Die Lösungen sind Laguerre-Polynome. Die Energieeigenwerte sind

$$E_{n,\ell} = \hbar \omega \left(2n + \ell - \frac{1}{2} \right) \text{ mit } n = 1, 2, 3, \dots \text{ und } \ell = 0, 1, 2, \dots \text{ unabhängig von } n \quad (8.5.65)$$

Mit der Umformung $\Lambda = 2n + \ell - 2$ bekommt man eine Darstellung wie in Gleichung (8.5.57). Dann ist

$$E_{n,\ell} = E_\Lambda = \hbar \omega \left(\Lambda + \frac{3}{2} \right) \text{ mit } \Lambda = 0, 1, 2, \dots \quad (8.5.66)$$

Wieder gibt es die $(2\ell + 1)$ -fache Entartung. Nur in der Koordinate Λ ist dies komplizierter, da prinzipiell n und ℓ unabhängig sind. Für gerade Λ ist (ℓ, n) nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.2.]

$$(\ell, n) = \left(0, \frac{\Lambda + 2}{2}\right), \left(2, \frac{\Lambda}{2}\right), \left(4, \frac{\Lambda - 2}{2}\right), \dots, (\Lambda, 1) \quad (8.5.67)$$

Für ungerade Λ ist (ℓ, n) nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.2.]

$$(\ell, n) = \left(1, \frac{\Lambda + 1}{2}\right), \left(3, \frac{\Lambda - 1}{2}\right), \left(5, \frac{\Lambda - 3}{2}\right), \dots, (\Lambda, 1) \quad (8.5.68)$$

Λ	(ℓ, n)				
0	(0, 1)				
1	(1, 1)				
2	(0, 2)	(2, 1)			
3	(1, 2)	(3, 1)			
4	(0, 3)	(2, 2)	(4, 1)		
5	(1, 3)	(3, 2)	(5, 1)		
6	(0, 4)	(2, 3)	(4, 2)	(6, 1)	
7	(1, 4)	(3, 3)	(5, 2)	(7, 1)	
8	(0, 5)	(2, 4)	(4, 3)	(6, 2)	(8, 1)
9	(1, 5)	(3, 4)	(5, 3)	(7, 3)	(9, 1)

Tab. 8.8.: Entartete Niveaus im harmonischen Oszillatator nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.].

In jedem (ℓ, n) -Niveau gibt es $2(2\ell - 1)$ entartete Zustände (ϕ -Abhängigkeit, Spins). Die Anzahl der entarteten Niveaus bei geradem Λ ist

$$n_\Lambda = \sum_{\ell=0,2,4,\dots}^{\Lambda} 2(2\ell + 1) = \sum_{k=0}^{\Lambda/2} 2(4k + 1) = \dots = (\Lambda + 1)(\Lambda + 2) \quad (8.5.69)$$

Für ungerade Λ erhalten wir den gleichen Wert. Die beiden Bedingungen zusammen ergeben die Tabelle 8.9.

Λ	0	1	2	3	4	5	6
$(\Lambda + 1)(\Lambda + 2)$	2	6	12	20	30	42	56

Tab. 8.9.: Entartungen im harmonischen Oszillatator.

Tabelle 8.10 zeigt die daraus abgeleiteten magischen Zahlen.

Schale	0	1	2	3	4	...
Magische	2	8	20	40	70	...
Zahlen		$= 2 + 6$	$= 2 + 6 + 12$	$= 2 + 6 + 12 + 20$	$= 2 + 6 + 12 + 20 + 30$	

Tab. 8.10.: Magische Zahlen der im Kastenmodell nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.].

M. Goeppert Mayer und J. H. D. Jensen [GJ55] erkannten, dass im Inneren von Kernen eine starke Spin-Bahnkopplung herrschen muss. Das bewirkt für grosse n Abweichungen der magischen Zahlen. Das Potential mit Spin-Bahn-Kopplung ist

$$V_i(r) = V(r) + V_{ls}(r) \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \quad (8.5.70)$$

$V_{ls}(r)$ ist eine Funktion von r . Diese Funktion ist in der Atomphysik $V_{ls}(r) = 1$. Hier ist sie nicht konstant und die wichtige von Maria Goeppert-Mayer gefundene Funktion der Kopplung der Niveaus. Wie üblich bekommt man mit $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ und $\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ dass $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2)$. Daraus ergibt sich für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) \right\rangle = \frac{\hbar^2}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) \\ &\stackrel{s=\frac{1}{2}}{=} \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2}, & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}; \\ -\frac{\hbar^2}{2}(\ell+1), & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (8.5.71) \end{aligned}$$

V_{ls} ist negativ. Deshalb liegt das Niveau mit $j = \ell - \frac{1}{2}$ tiefer. Die einzelnen Niveaus verschieben sich durch die Kopplung um

$$\Delta E_{n,\ell} \left(j = \ell + \frac{1}{2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2} \int |\psi_{n,\ell}(\mathbf{r})|^2 V_{ls}(r) dr \quad (8.5.72a)$$

$$\Delta E_{n,\ell} \left(j = \ell - \frac{1}{2} \right) = \frac{\hbar^2}{2}(\ell+1) \int |\psi_{n,\ell}(\mathbf{r})|^2 V_{ls}(r) dr \quad (8.5.72b)$$

Dies ergibt die Aufspaltung

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta E_{n,\ell} \left(j = \ell - \frac{1}{2} \right) - \Delta E_{n,\ell} \left(j = \ell + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar^2 \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \int |\psi_{n,\ell}(\mathbf{r})|^2 V_{ls}(r) dr \quad (8.5.73) \end{aligned}$$

Für grössere ℓ wird die Aufspaltung von Niveaus durch die Spin-Bahn-Kopplung

grösser. Schwere Kerne sind nicht mehr kugelsymmetrisch. \mathbf{L} ist nicht zeitlich konstant. Dies ändert nochmals die Reihenfolge und die Besetzung von Niveaus. Das Schalenmodell manifestiert sich in der Energie die benötigt wird um ein Neutron abzuspalten.

- Energie, um ein Nukleon abzuspalten

$$-E_B = E_{kin}^{max} + E_{pot} = E_F - E_0 \quad (8.5.74)$$

E_F : Fermi-Energie (nach Enrico Fermi)

E_0 : Tiefe des Potentialtopfs

- Vergleich der Separationsenergien für p und n

$$E_S(p) = E_B(N, Z) - E_B(N, Z - 1) \quad (8.5.75a)$$

$$E_S(n) = E_B(N, Z) - E_B(N - 1, Z) \quad (8.5.75b)$$

- Paarung von zwei n oder zwei p mit antiparallelem Spin erhöht die Bindungsenergie

$$E_p(p) = 2 [E_B(N, Z) - E_B(Z - 1, N)] - [E_B(N, Z) - E_B(Z - 2, N)] \quad (8.5.76a)$$

$$E_p(n) = 2 [E_B(N, Z) - E_B(Z, N - 1)] - [E_B(N, Z) - E_B(Z, N - 2)] \quad (8.5.76b)$$

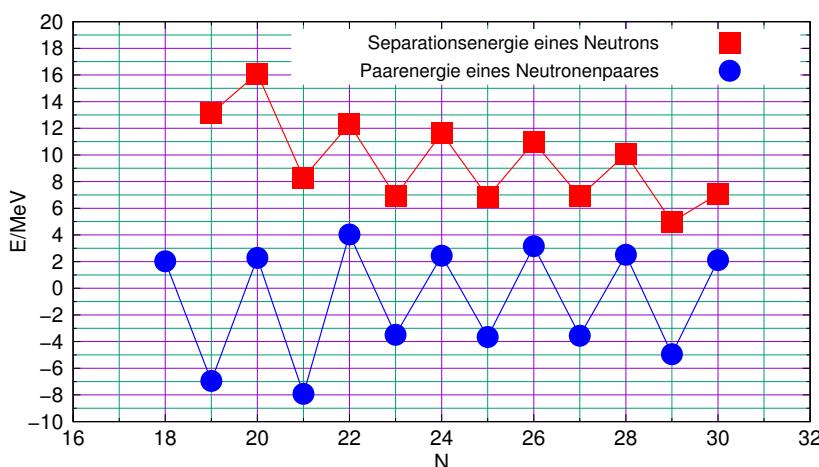


Abb. 8.18.: Separationsenergie eines Neutrons ($E_S(N)$, rot) und Paarenergie eines Neutronenpaars ($E_P(N)$, blau) für Kalziumisotope $^{20+N}_{20}\text{Ca}$ nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 5.27]

- Fermigasmodell sagt voraus, dass es keine Schwankungen gäbe

- Schwankungen der Separationsenergien analog zu den Schwankungen der Ionisierungsenergien in der Elektronenhülle

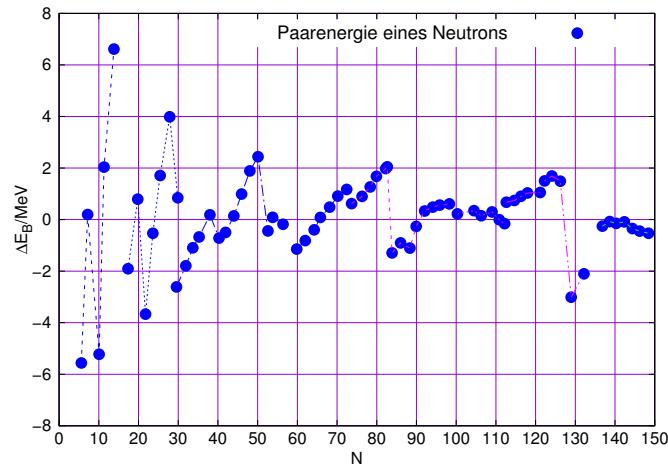


Abb. 8.19.: Paarenergie eines Neutronenpaars für verschiedene Isotope nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 5.28]

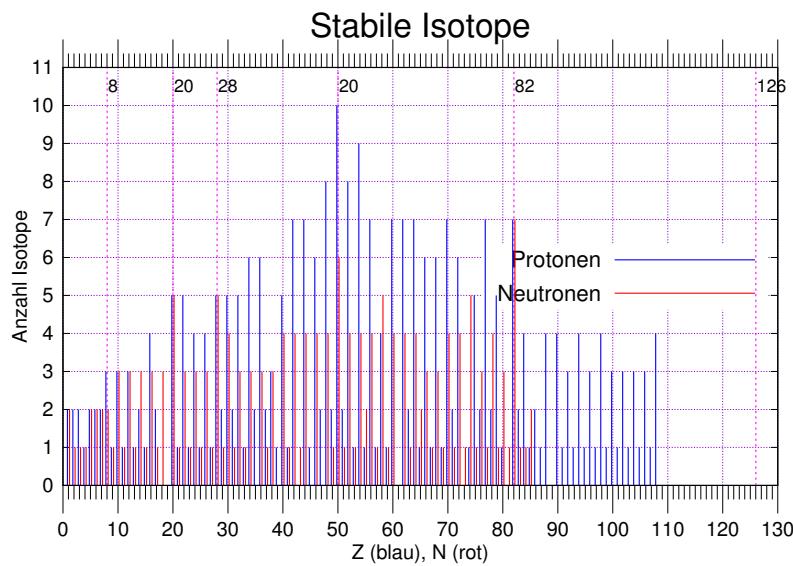


Abb. 8.20.: Anzahl der stabilen Isotope als Funktion der Protonenzahl Z und der Neutronenzahl N nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 5.30].

Maxima analog zu Maxima in der Ionisationsenergie der Atome.

8.5.5. Mehrteilchenmodelle

- Schalenmodell bei schweren Kernen nicht sehr genau
- Tröpfchenmodell bei sehr schweren Kernen manchmal genauer
- Quadrupolmomente stimmen nur qualitativ
- Schwere Kerne haben ein permanentes elektrisches Quadrupolmoment
- Aage Bohr, James Rainwater, Ben Mottelson: Mehrteilchenmodell
- Schalenstruktur im Inneren, flüssige Oberfläche
- Vorhersage: Vibrations- und Rotationsniveaus in Kernen (sie existieren experimentell)
- Rotationshamiltonoperator $H = \frac{L^2}{2I_{\text{träg}}}$ mit Eigenwerten $\frac{\ell(\ell+1)}{2I_{\text{träg}}} \hbar^2$
- Modell sagt Verringerung der Niveauabstände bei zunehmendem A voraus

8.5.6. Vergleich der Kernmodelle

Maria Goeppert-Mayer verglich das SCHALENMODELLE mit vielen anderen Modellen.

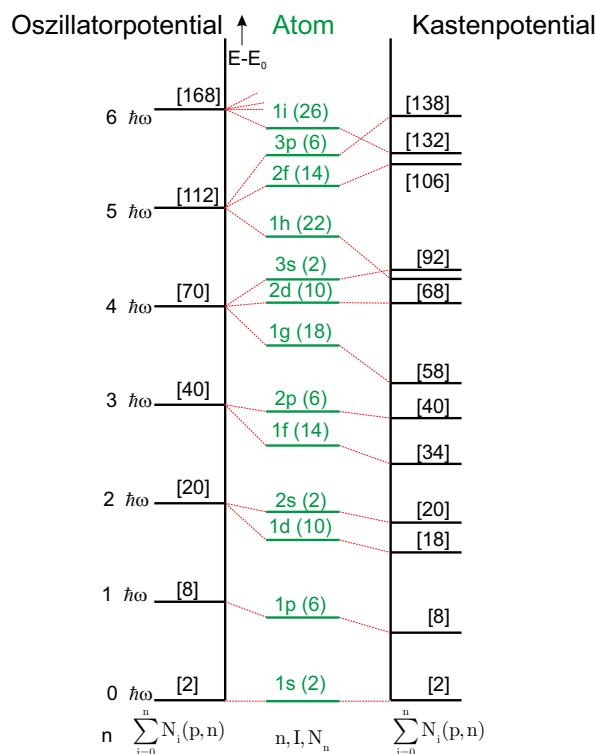


Abb. 8.21.: Vergleich der Kernmodelle nach M. Goeppert Mayer und J. H. D. Jensen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure* [GJ55] sowie [Goe64; GJ61; GJ60; Goe50a; Goe50b]

8.5.7. Bindungsenergien

Unter Bindungsenergie verstehen wir das Folgende:

$$\underbrace{M_K}_{\text{Kernmasse}} = \underbrace{\sum m_p}_{\text{Protonen}} + \underbrace{\sum m_n}_{\text{Neutronen}} - \underbrace{\Delta M}_{\text{Massendefekt}} \quad (8.5.77)$$

Achtung: Die Bindungsenergie E_B wird positiv definiert, so dass $-E_B$ die Erniedrigung der Energie durch eine Bindung ist.

Der Massendefekt ΔM wird bestimmt, indem die Größen M_K , m_n und m_p gemessen werden. Den Massendefekt bezogen auf die Zahl der Nukleonen nennt man auch Packungsanteil

$$P_A = \frac{\Delta M}{A}. \quad (8.5.78)$$

Die folgende Tabelle 8.11 gibt einige Resultate wieder:

Kern	Masse / u	E_B/MeV	$E_B/A/\text{MeV}$
^2H	2.014	2.225	1.112
^3H	3.016	8.482	2.827
^4He	4.003	28.295	7.074
^2Li	7.016	39.245	5.606
^{12}C	12.00	92.161	7.68
^{16}O	15.995	127.617	7.976
^{35}Cl	34.969	298.20	8.520
^{57}Fe	56.935	499.90	8.77
^{26}U	238.051	1804.04	7.58
$_{92}$			

Tab. 8.11.: Kerne und Kernmassen nach W. Demtröder [Dem10, Tab. 2.6.].

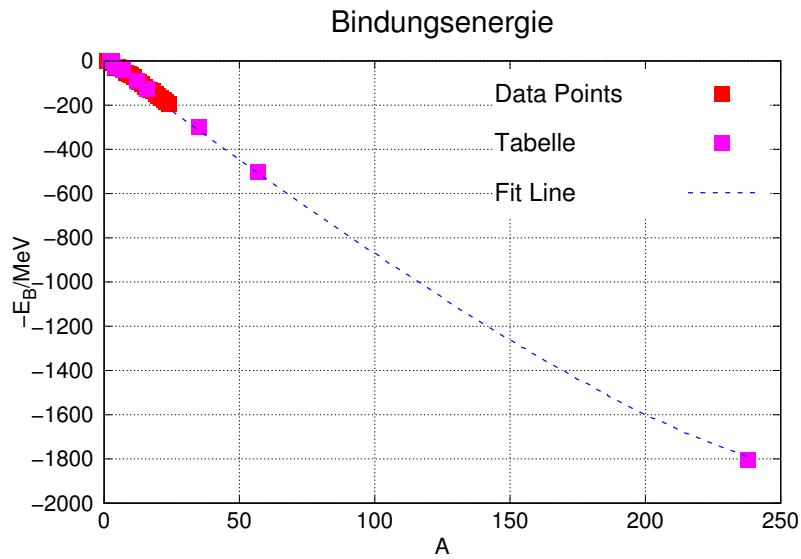


Abb. 8.22.: Bindungsenergie von Kernen nach Demtröder Band 4, Abb 2.24 [Dem10]

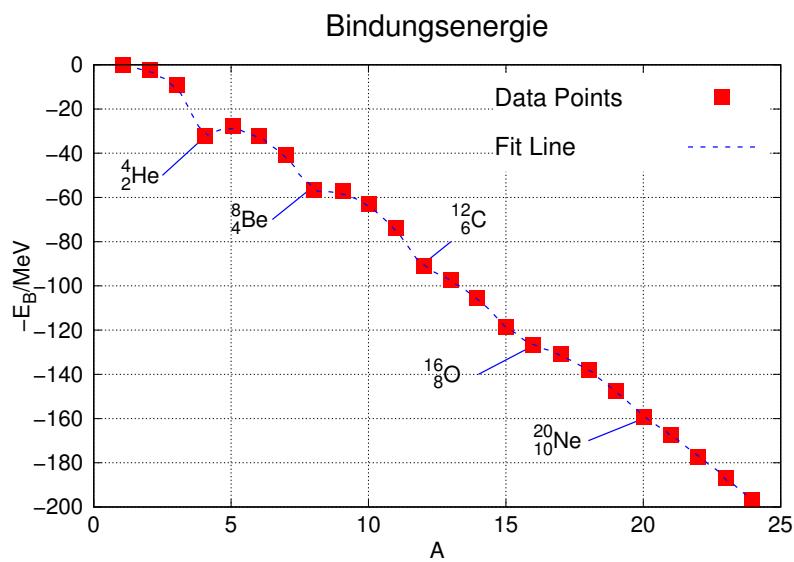


Abb. 8.23.: Bindungsenergie von leichten Kernen nach Demtröder Band 4, Abb 2.24 [Dem10]

Die Tabelle oben zeigt, dass die Bindungsenergie pro Nukleon, der Packungsanteil, für $^{62}_{28}\text{Ni}$ maximal ist.

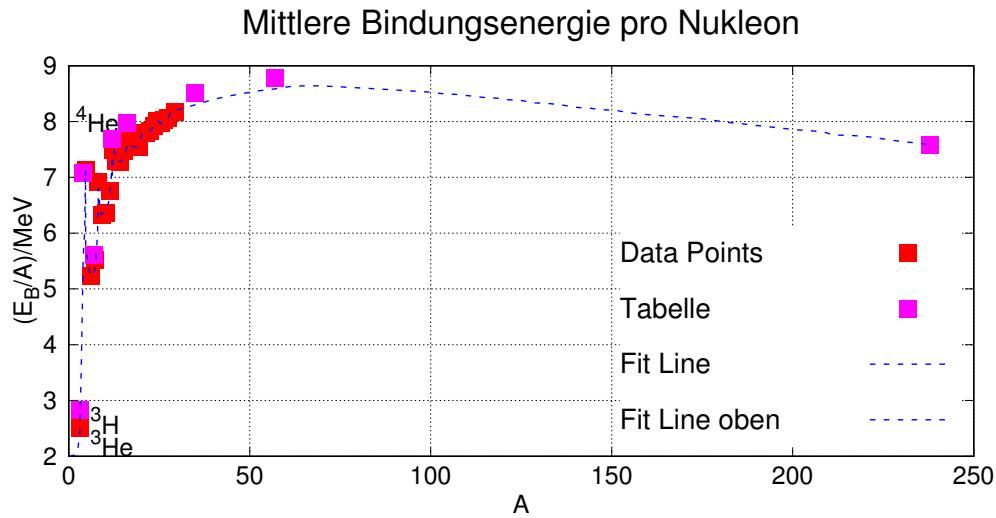


Abb. 8.24.: Mittlere Bindungsenergie (Nach Demtröder Band 4, Abb 2.25 [Dem10])

Abbildung 8.24 zeigt die mittlere Bindungsenergie pro Kern.

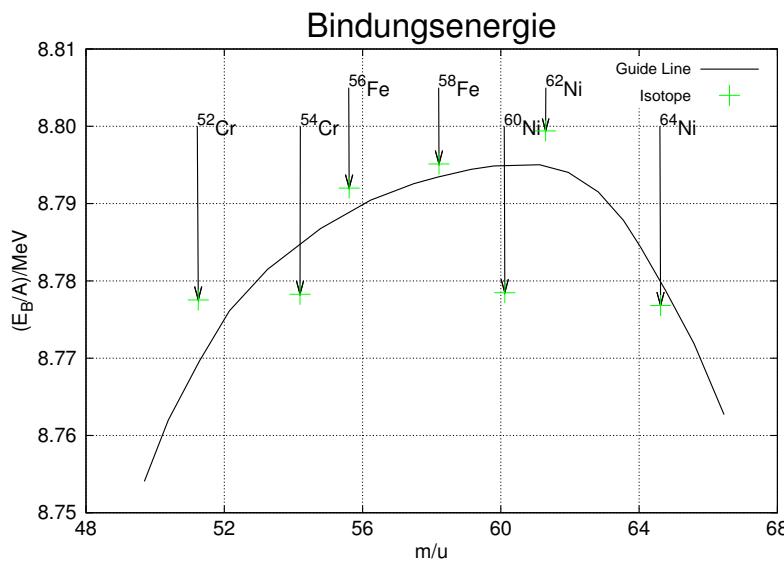


Abb. 8.25.: Stabilste Kerne (Nach Demtröder Band 4, Abb 2.26)

Abbildung 8.25 zeigt den Bereich der stabilsten Kerne mit der höchsten Bindungsenergie.

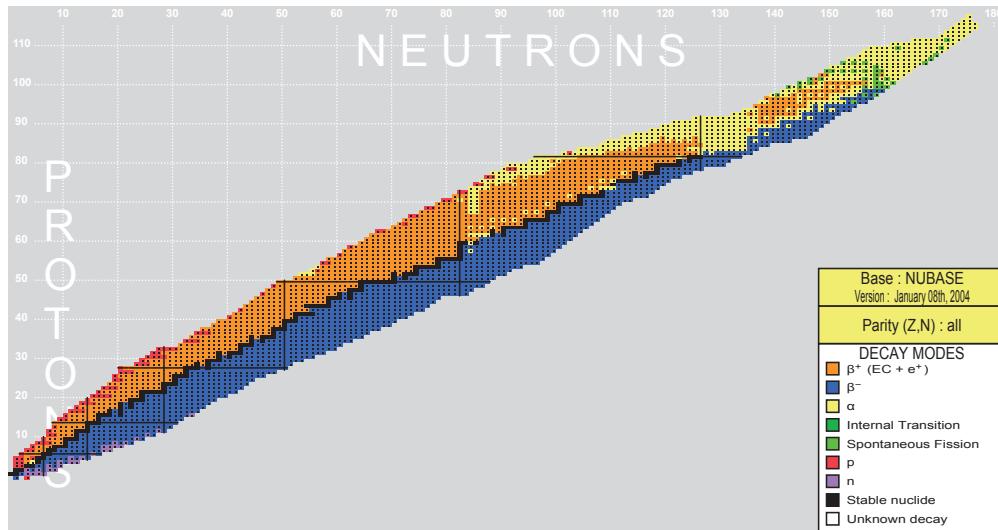


Abb. 8.26.: Nuklidkarte erzeugt mit Nucleus-Amdc [Wap12]

Daten zur Stabilität der Kerne können aus Programmen wie Nucleus-Amdc [Wap12] oder aus Webseiten wie dem Nuclear Data Center [Nat17] des Brookhaven National Laboratory gewonnen werden (siehe auch Abb. 8.26).

8.5.8. Rotation und Schwingung von Kernen

Wenn Kerne von der sphärischen Form abweichen, können sie in nächster Näherung durch Rotationsellipsoide beschrieben werden.

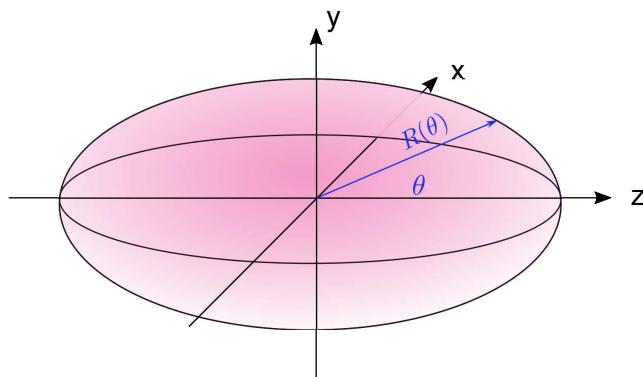


Abb. 8.27.: Bezeichnungen in einem Rotationsellipsoid.

Beim Rotationsellipsoid in Polardarstellung in Abbildung 8.27 ist der Radius als Funktion von θ durch

$$R(\theta) = R_0 \left[1 + \beta Y_2^0(\theta, \phi) \right] = R_0 \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta \left(3 \cos^2(\theta) - 1 \right) + 1 \right) \quad (8.5.79)$$

gegeben. Mit $\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \cdot \frac{\Delta R}{R_0}$ haben wir auch

$$R(\theta) = R_0 \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0} \left(\cos^2(\theta) - \frac{1}{3} \right) \right) \quad (8.5.80)$$

In der üblichen Darstellung eines Rotationsellipsoids mit a der Halbachse entlang der Symmetriearchse und b den Halbachsen senkrecht dazu ist

$$\Delta R = a - b \quad (8.5.81)$$

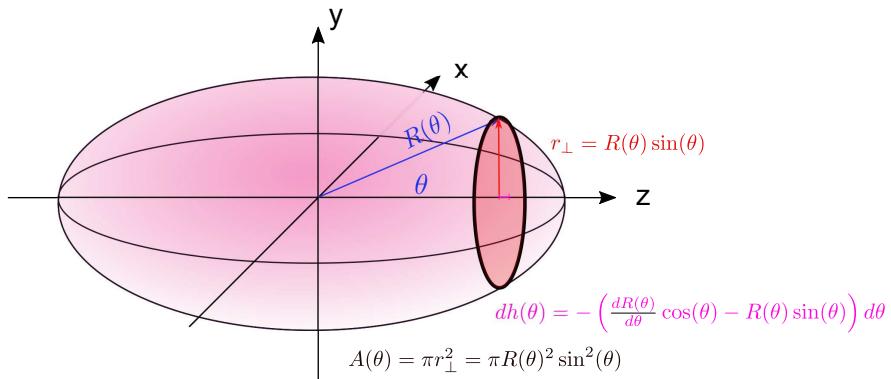


Abb. 8.28.: Definition der Integrationsfläche bei einem Rotationsellipsoid.

Das Volumen (siehe Abbildung 8.28) kann berechnet werden, indem die Fläche

$$A(\theta) = A(R(\theta)) = \pi r_{\perp}^2 \sin^2(\theta) = \pi R^2(\theta) \sin^2(\theta) \quad (8.5.82)$$

über den Wertebereich von θ integriert wird. Dabei kann aus dem Abstand $h(\theta) = R(\theta) \cos(\theta)$ entlang der z -Achse zum Nullpunkt

$$dh(\theta) = - \left(\frac{dR(\theta)}{d\theta} \cos(\theta) - R(\theta) \sin(\theta) \right) d\theta \quad (8.5.83)$$

(das „-“-Zeichen hängt von den Zählrichtungen ab) berechnet werden. Das Volumen ist dann

$$V(R_0, \beta) = \int_0^\pi A(\theta) dh(\theta) \quad (8.5.84a)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^\pi \pi R^2(\theta) \sin^2(\theta) \left(\frac{dR(\theta)}{d\theta} \cos(\theta) - R(\theta) \sin(\theta) \right) d\theta \\ &= - \pi R_0^3 \int_0^\pi \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta \left(3 \cos^2(\theta) - 1 \right) + 1 \right)^2 \sin^3(\theta) \\ &\quad \cdot \left(-\frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta \cos^2(\theta) - \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta \left(3 \cos^2(\theta) - 1 \right) + 1 \right) \right) d\theta \\ &= \frac{4\pi R_0^3}{3} \left(\left(\sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta + 21 \right) \frac{\beta^2}{28\pi} + 1 \right) \end{aligned} \quad (8.5.84b)$$

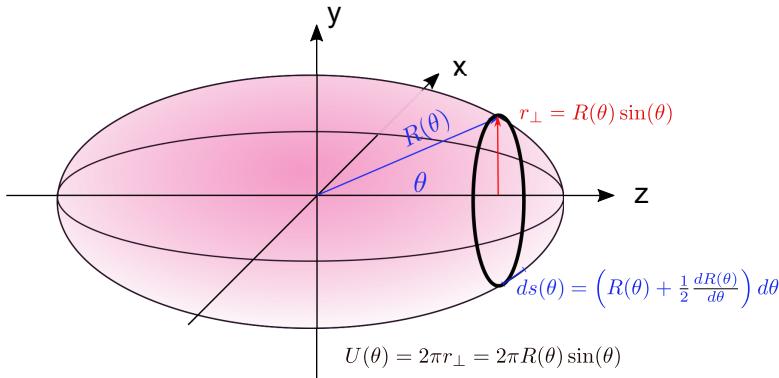


Abb. 8.29.: Definition der Integrationsfläche bei einem Rotationsellipsoid.

Für die Oberfläche (siehe Abbildung 8.29) benötigen wir den Umfang

$$U(\theta) = U(R(\theta)) = 2\pi r_\perp = 2\pi R(\theta) \sin(\theta) \quad (8.5.85)$$

und das Linienelement entlang eines Grosskreises durch die Pole. Nach dem Cosinussatz ist

$$ds^2(\theta) = R^2(\theta) + R^2(\theta + d\theta) - 2R(\theta)R(\theta + d\theta) \cos(d\theta) \quad (8.5.86)$$

Wenn man $R(\theta + d\theta) = R(\theta) + \frac{dR(\theta)}{d\theta} d\theta$ einsetzt und $\cos(d\theta) = 1 - d^2\theta/2$ bis zur ersten nichttrivialen Ordnung einsetzt, die Wurzel ausrechnet und Ordnungen höher als 2 ignoriert, bekommt man

$$ds(\theta) = R(\theta) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{dR(\theta)}{d\theta} \right)^2}{R(\theta)} \right) d\theta \quad (8.5.87)$$

Damit ist die Oberfläche

$$A_V(R_0, \beta) = \int_0^\pi U(\theta) ds(\theta) \quad (8.5.88a)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi 2\pi R(\theta) \sin(\theta) R(\theta) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\frac{dR(\theta)}{d\theta}}{R(\theta)} \right) d\theta \\ &= 2\pi R_0^2 \int_0^\pi \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta (3 \cos^2(\theta) - 1) + 1 \right)^2 \sin(\theta) \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{-\frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta \sin(\theta) \cos(\theta)}{\left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta (3 \cos^2(\theta) - 1) + 1 \right)} \right) d\theta \\ &= 4\pi R_0^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\pi} \right) \end{aligned} \quad (8.5.88b)$$

Mit dem Parameter ΔR sind Volumen und Oberfläche

$$V(R_0, \Delta R) = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \left(1 + \frac{4\Delta R^2}{15R_0^2} + \frac{16\Delta R^3}{945R_0^3} \right) \quad (8.5.89a)$$

$$A_V(R_0, \Delta R) = 4\pi R_0^2 \left(1 + \frac{16\Delta R^2}{45R_0^2} \right) \quad (8.5.89b)$$

Nach Bethe-Weizsäcker (8.5.16) ist der Oberflächenterm proportional zu R^2 oder zu $A_V(R_0, \Delta R)$. Mit Gleichung (8.5.89b) und der Definition $\Delta R = a - b$ mit $a = R_0(1 + \epsilon)$ und $b = R_0/\sqrt{1 + \epsilon}$ erhalten wir für $E_0^S = -a_S A^{2/3} = -a_S A_V(R_0, \epsilon)$

$$\begin{aligned} A_V(R_0, \epsilon) &= 4\pi R_0^2 \left(1 + \frac{16\Delta R^2}{45R_0^2} \right) &= 4\pi R_0^2 \left(1 + \frac{16(a - b)^2}{45R_0^2} \right) \\ &= 4\pi R_0^2 \left(1 + \frac{16}{45} \left(\epsilon - \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon}} \right)^2 + 1 \right) &= 4\pi R_0^2 \left(1 + \frac{4\epsilon^2}{45} + O(\epsilon^3) \right) \end{aligned} \quad (8.5.90)$$

Damit wird der Oberflächentherm

$$E^S = E_0^S \left(1 + \frac{4\epsilon^2}{45} + O(\epsilon^3) \right) = E_0^S + \Delta E^S \quad (8.5.91)$$

Der Ladungsterm $E_0^C = -a_C A^{(-1/3)} = -\tilde{a}_C R^{-1}$ wird mit

$$R \propto \sqrt{A_V(R_0, \epsilon)} \implies \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} \left(1 - \frac{2\epsilon^2}{45} + O(\epsilon^3) \right) \quad (8.5.92)$$

Damit wird der Ladungsterm

$$E^C = E_0^C \left(1 - \frac{2\epsilon^2}{45} + O(\epsilon^3) \right) = E_0^C - \Delta E^C \quad (8.5.93)$$

8.5.9. Drehimpuls, Spin, Statistik

Optische Spektren von Atomen zeigen eine HYPERFEINSTRUKTUR. Deshalb müssen Kerne ein magnetisches Moment haben. Und dies können sie nur haben, wenn es einen Spin gibt.

8.5.9.1. Kerndrehimpulse

- \mathbf{I} : Kernspin, I : Kernspinquantenzahl

$$|\mathbf{I}| = \hbar \sqrt{I \cdot (I+1)} \quad (8.5.94)$$

- Der Kernspin \mathbf{I} ist die Vektorsumme aus den Bahndrehimpulsen der Neutronen und Protonen sowie aus deren Spins.

$$\mathbf{I} = \sum_i (\mathbf{I}_i + \mathbf{L}_i) \quad (8.5.95)$$

- Magnetisches Moment

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{I}} = g_I \cdot \mu_K \cdot \frac{\mathbf{I}}{\hbar} \quad (8.5.96)$$

mit Kern-Landé-Faktor g_I und Kernmagneton

$$\mu_K = \frac{e}{2m_p} \hbar = 5.056 \cdot 10^{-27} \text{ J T}^{-1} \quad (8.5.97)$$

- In der Regel ist $\mathbf{L}_i = 0$ im Grundzustand. Es gibt Ausnahmen, z.B. ${}^7_3\text{Li}$

Landé-Faktor (nach Alfred Landé)

$$g_I = \frac{|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{I}}|}{\frac{\mu_K}{\hbar}} \quad (8.5.98)$$

Verhältnis von magnetischem Moment zu Drehimpuls
KERNSPIN I

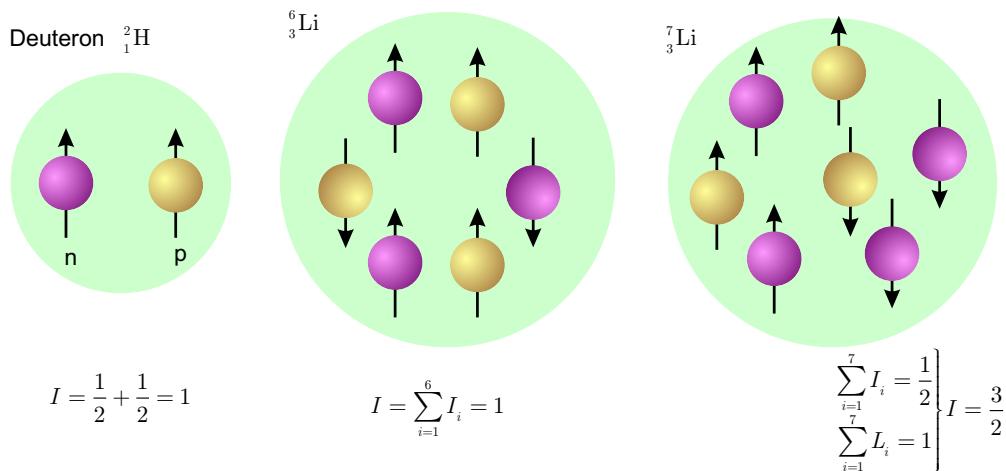


Abb. 8.30.: Kernspins, Adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.16 [Dem10]

Verhältnisse

- gyromagnetisches Verhältnis:

$$\gamma = \frac{|\boldsymbol{\mu}_I|}{|\mathbf{I}|} \quad (8.5.99)$$

- Bestimmung aus der Hyperfeinstruktur des $1s$ -Zustandes im H-Atom

$$\Delta E_{HFS} = \frac{2}{3} \mu_0 g_e \mu_B \cdot g_p \mu_K \cdot |\psi_{1s}(r=0)|^2 \quad (8.5.100)$$

- Zeeman-Aufspaltung (nach Pieter Zeeman)

$$\Delta W = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (8.5.101)$$

- Rabi-Methode (nach Isidor Rabi): Wegen des Kernspins $I = \frac{1}{2}$ gibt es vier HF-Übergänge mit $\Delta m_J = +1$

8.5.9.2. Rabi-Methode

Die Methode ist nach Isidor Rabi benannt. Benutzt wird, dass der Gesamtdrehimpuls \mathbf{J} der Elektronenhülle an den Kernspin \mathbf{I} koppelt und es (analog zu \mathbf{J}) einen neuen Gesamtdrehimpuls \mathbf{F} gibt., mit

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \hbar \sqrt{F(F+1)} = \langle \mathbf{I} + \mathbf{J} \rangle \text{ mit } |J - I| \leq F \leq |J + I| \quad (8.5.102)$$

Analog zur Zeemanaufspaltung ist die Energie des Wechselwirkungsoperators \hat{V}_{HFS} des Kernspins \mathbf{I} mit der magnetischen Induktion des Gesamtdrehimpulses \mathbf{J} , \mathbf{B}_J

$$\Delta E_{HFS} = -\boldsymbol{\mu}_I \cdot \boldsymbol{B}_J = g_I \mu_K B_J \frac{F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)}{\sqrt{J(J+1)}} \\ := \frac{A}{2} \frac{F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)}{\sqrt{J(J+1)}} \quad (8.5.103)$$

mit g_I dem Landé-Faktor des Kerns, $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p}$ dem Kernmagneton und $A = \frac{g_I \mu_K B_J}{\sqrt{J(J+1)}}$ der Hyperfeinstrukturkonstante. Die Rabi-Methode kann nun ΔE_{HFS} bestimmen.

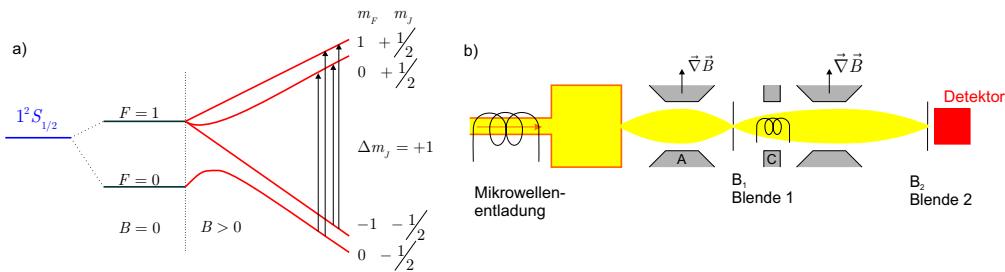


Abb. 8.31.: Messung des gyromagnetischen Verhältnisses nach Isidor Rabi, adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.16 [Dem10]

Abbildung 8.31 zeigt den Aufbau der Apparatur. Die zu untersuchenden Atomkerne (z.B. ${}^1\text{H}$) werden aus dem Ofen nach rechts emittiert. Im Bereich A lenkt ein inhomogenes Magnetfeld die Atome ab. Die Grösse der Ablenkung hängt vom gesamten magnetischen Moment ab. Dieses wird durch das magnetische Moment der Elektronen dominiert. Im Bereich C induziert Mikrowellenstrahlung einen Übergang vom $F = 0$ ins $F = 1$ Niveau. Das anliegende homogene Magnetfeld erzeugt eine Hyperfeinaufspaltung, also eine Aufspaltung, die vom magnetischen Moment des Kerns abhängt. In B schliesslich kehrt ein umgekehrt orientiertes inhomogenes Magnetfeld die Ablenkung um. Die Blende B_2 wählt die Atome aus, die nicht abgelenkt sind. Durch die Änderung der Frequenz der Mikrowellenstrahlung kann so die Hyperfeinaufspaltung abgetastet werden.

8.5.9.3. Magnetische Momente von Nukleonen

Die Landé-Faktoren von Proton und Neutron haben keine so «schönen» Werte wie beim Elektron. Dies ist ein Hinweis auf die möglicherweise vorhandene innere Struktur der beiden Nukleonen. Das magnetische Moment des Protons ist

$$\mu_p = +2.79278 \mu_K \quad (8.5.104)$$

Damit wird das magnetische Moment des Protons μ_p in Einheiten des KERNMAGNETONS $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p}$ ausgedrückt. Der Spin und das magnetische Moment des Protons sind parallel. Der Landé-Faktor des Protons ist

$$g_p = \frac{\mu_p / \mu_K}{I_p / \hbar} = \frac{2.79278}{0.5} = 5.585\ 56 \quad (8.5.105)$$

Das magnetische Moment des Neutrons existiert, auch wenn das Nukleon ungeladen ist. Sein Wert beträgt:

$$\mu_n = -1.91315 \mu_K \quad (8.5.106)$$

Der Neutronenspin und das magnetische Moment sind antiparallel. Der Landé-Faktor des Neutrons beträgt

$$g_n = -3.8263 \quad (8.5.107)$$

Während für die Bestimmung des magnetischen Moments des Protons die aus der Atomphysik bekannten Verfahren verwendet werden können, funktioniert dies bei Neutronen wegen der fehlenden Ladung nicht. Zur Bestimmung des magnetischen Moments verwendet man die spinabhängige Streuung des Neutrons an Spin-polarisierten Targetatomen. Die Streuung des Neutrons hängt von der relativen Orientierung des Neutronenspins und des Spins der Target-Atome ab.

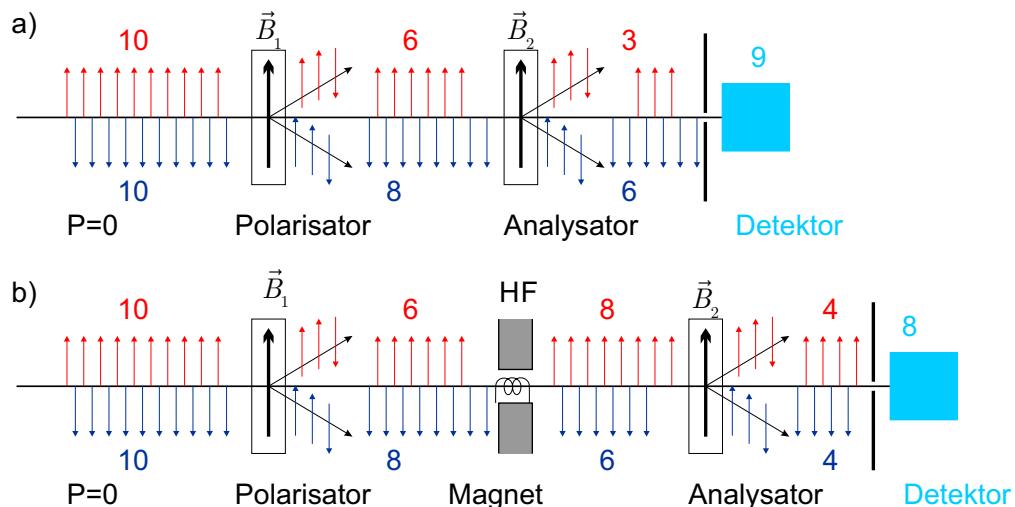


Abb. 8.32.: Messung des magnetischen Moments des Neutrons, Adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.18 [Dem10]

In Abbildung 8.32 a) wird ein Neutronenstrahl durch ein Eisentarget in einer starken magnetischen Induktion gesandt. Neutronen mit einem antiparallelem Spin (Anzahl N_-) zur Polarisationsrichtung des Eigentargets werden weniger oft gestreut als Neutronen mit parallelem Spin (N_+). Der Strahl ist nun leicht polarisiert

$$P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} \quad (8.5.108)$$

P ist negativ, da $N_- > N_+$ ist. Das zweite durch ein Magnetfeld polarisierte Eisentarget dient als Analysator. Sind die beiden magnetischen Induktionen \mathbf{B}_1 und

\mathbf{B}_2 parallel ist die Transmission höher als im antiparallelen Falle. Im homogenen Magnetfeld bei b) zwischen Polarisator und Analysator kann die Spin-Richtung der Neutronen umgeklappt werden. Die Energie der beiden Zeeman-Niveaus ist

$$E_{1,2} = \pm \mu_n \cdot \mathbf{B} \quad (8.5.109)$$

Aus der Frequenz der elektromagnetischen Strahlung und der Grösse der magnetischen Induktion kann μ_N bestimmt werden.

8.5.9.3.1. Proton, Elektron, Neutron Tabelle 8.12 zeigt einen Vergleich von verschiedenen Grössen der beiden Nukleonen Proton und Neutron mit dem Elektron.

Grösse	p	n	e^-
Masse	$1.672\,621\,923\,69(51) \cdot 10^{-27}$ kg	$1.674\,927\,498\,04(95) \cdot 10^{-27}$ kg	$9.109\,383\,701\,5(28) \cdot 10^{-31}$ kg
Spin	$1/2$	$1/2$	$1/2$
Magn.	$+2.792\,847\,344\,63(82)\mu_K$	$-1.913\,042\,73(45)\mu_K$	$-1.001\,159\,652\,181\,28(1)$
Moment	$1.410\,606\,797\,36(60) \cdot 10^{-26}$ J T $^{-1}$	$-9.662\,365\,1(23) \cdot 10^{-27}$ J T $^{-1}$	$-9.284\,764\,704\,3(28) \cdot 10^{-31}$ J T $^{-1}$
Landé-Faktor	$+5.585\,694\,689\,3(16)$	$-3.826\,085\,45(90)$	$-2.002\,319\,304\,362\,56(3)$
Lebensdauer	$> 1 \cdot 10^{30}$ a	887 s	∞

Tab. 8.12.: Vergleich von Proton, Neutron und Elektron (nach W. Demtröder [Dem10, Tab. 2.3.] und *The NIST Reference of Constants, Units and Uncertainty* [NIS21].

8.5.10. Momente von Kernen

Das magnetische Moment des Deuterons ${}^2_1\text{H}$ (Spin $I_d = 1$) ist nach *The NIST Reference of Constants, Units and Uncertainty* [NIS21]

$$\mu_d = 0.857\,438\,233\,8(22)\mu_K \quad (8.5.110)$$

Dies ist um

$$\begin{aligned} \Delta\mu_d &= \mu_d - (\mu_p + \mu_n) \\ &= 0.857\,438\,233\,8(22)\mu_K - (2.792\,847\,344\,63(82)\mu_K - 1.913\,042\,73(45)\mu_K) \\ &= -0.022\,366\,4(4)\mu_K \quad (8.5.111) \end{aligned}$$

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.3.2.] ist der Grund, dass die beiden Nukleonen neben dem Grundzustand noch mit kleiner Wahrscheinlichkeit in einem

angeregten Zustand mit dem Bahndrehimpuls $\ell = 2$ sind. $\ell = 1$ ist nicht möglich, da dieser Zustand eine andere Parität hat als der Grundzustand. Der Spin dieses angeregten Zustandes steht dann antiparallel zu $\ell = 2$, also $m_\ell = -2$.

Insgesamt zeigen sich Gemeinsamkeiten bei Kernen mit ungerader Protonen- und Neutronenzahl, bei Kernen mit ungerader Protonenzahl und gerader Neutronenzahl, oder umgekehrt. Die Interpretation analog zu den Elektronen im Atom sagt, dass nach abgeschlossenen Schalen ein Leuchtnukleon existiert, analog zum Elektronensystem. Eine genaue Analyse dieser Idee und der Abweichungen davon führte dann zum Schalenmodell.

8.5.10.1. Resonanz-Spektroskopie, Magnetische Momente von Kernen

Wie bei Atomen gibt es für ein Nukleon eine Energieaufspaltung im Magnetfeld, einen nuklearen Zeeman-Effekt. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.3.3.] ist die Aufspaltung

$$\Delta E = \hbar \omega_{Larmor} = g_p \mu_K B \quad (8.5.112)$$

Bei einer magnetischen Induktion von $B = 0.15$ T entspricht dies $\Delta E = 50$ nV. Auch mit stärkeren magnetischen Induktionen ist die Energieaufspaltung direkt spektroskopisch nur schwierig nachzuweisen. ΔE entspricht einer Larmorfrequenz von

$$\nu_{Larmor} = \frac{\Delta E}{2\pi\hbar} = 4.2 \text{ MHz} \quad (8.5.113)$$

Diese Frequenz ist leicht herstellbar und messbar. Das heisst, beim Durchstimmen einer Hochfrequenzquelle sollte sich bei 4.2 MHz ein Absorptionsmaximum zeigen.

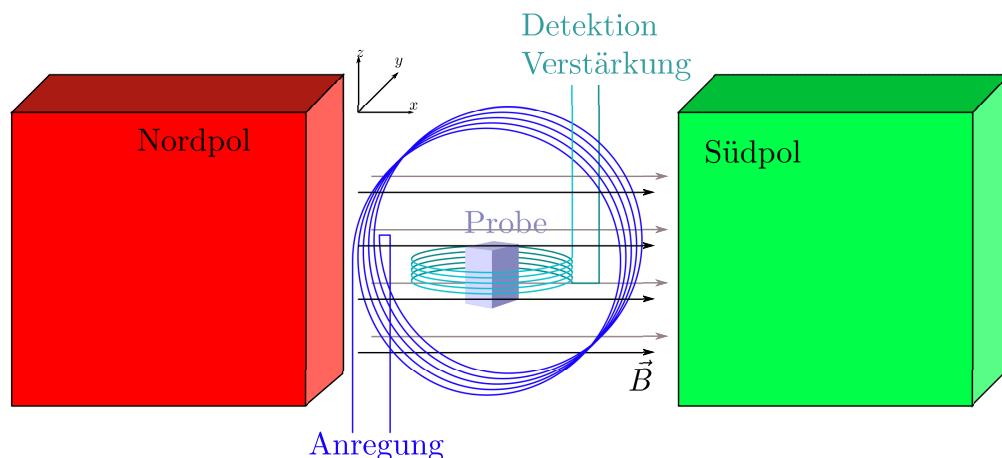


Abb. 8.33.: Prinzip der Magnetresonanzmessung (analog zu W. Demtröder [Dem10, Abb. 2.19.]).

Abbildung 8.33 zeigt das Prinzip der Magnetresonanzmessung. In einer magnetischen Induktion in die x -Richtung befindet sich die Probe. Mit der Anregungsspule wird ein periodisches Magnetfeld in die y -Richtung erzeugt. Die durch \mathbf{B}

ausgerichteten Spins der Probe präzidieren um die x -Richtung. So wird auch eine periodische Komponente in die z -Richtung erzeugt. Die Auslesespule detektiert diese Komponente des Magnetfeldes. Das verstärkte Signal ist das Messergebnis. Wenn nun die Anregungsfrequenz durchgestimmt wird, können die verschiedenen möglichen Anregungen, und insbesondere auch die Hyperfeinaufspaltung durch die Kopplung des Kernspins an den Gesamtspin der Elektronen detektiert werden. Da die Grösse des Kernspins und damit die Aufspaltung charakteristisch für die Kernsorte und das Isotop ist, kann man so sehr genau z.B. die Antwort von $^{13}_6\text{C}$ detektiert werden.

Mit inhomogenen magnetischen Induktionen kann über die Aufspaltung bei bekanntem Isotop auch der Ort des Kerns detektiert werden. Die Anregung wird in der Regel nicht kontinuierlich eingestrahlt, sondern gepulst. Dies erlaubt, die freie Präzession zu detektieren. Auf diese Weise können auch Informationen über die Umgebung des getesteten Isotops erhalten werden.

8.5.10.2. Elektrisches Dipolmoment

Elektrische Dipolmomente treten im Gegensatz zu magnetischen Dipolmomenten selten auf. Magnetische Dipolmomente beruhen auf einem axialen Vektor (die Fläche des Kreisstromes), der bei der Raumspiegelung seine Richtung nicht ändert. Bei elektrischen Dipolmomenten ist dies ein polarer Vektor (der Abstand). Alle Eigenzustände des Hamiltonoperators haben definierte Parität. Eine kurze Rechnung zeigt, dass dies äquivalent dazu ist, dass es bei diesen Zuständen kein elektrisches Dipolmoment geben darf.

Der Störoperator hingegen hat eine Dipolkomponente. Wenn dem nicht so wäre, gäbe es keine Absorption oder Emission von Licht im Elektronensystem eines Atoms. Die Drehimpulserhaltung bei der Emission oder Absorption führt dann zu den bekannten Auswahlregeln.

8.5.10.3. Elektrisches Quadrupolmoment

Im Gegensatz zu Dipolmomenten können permanente elektrische Quadrupolmomente existieren. Diese treten auf, wenn Kerne nicht mehr kugelförmig sondern elliptisch sind. Die Argumentation nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.4.2.] beginnt mit der Beobachtung, dass bei Kugelsymmetrie

$$\int x^2 \rho_K(\mathbf{r}) d^3r = \int y^2 \rho_K(\mathbf{r}) d^3r = \int z^2 \rho_K(\mathbf{r}) d^3r \quad (8.5.114)$$

ist und dass wegen $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ dann das Quadrupolmoment null wird. Das Quadrupolmoment in die z -Richtung ist durch

$$\begin{aligned} Q &= 2 \langle z^2 \rangle - (\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle) \\ &= \int (3r^2 - z^2) \rho_K(\mathbf{r}) d^3r = \int r^2 (3 \cos^2(\theta) - 1) \rho_K(\mathbf{r}) d^3r \end{aligned} \quad (8.5.115)$$

gegeben. Dies führt zum Quadrupoloperator

$$\hat{Q} = e r^2 (3 \cos^2(\theta) - 1) \quad (8.5.116)$$

und zu dessem Erwartungswert

$$Q = \int \psi^* \hat{Q} \psi d^3r = \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle \quad (8.5.117)$$

Wenn ein Kern mit mehreren Protonen den Kernspin I hat ist das gesamte Quadrupolmoment parallel zu $\langle \hat{\mathbf{I}} \rangle$

$$Q = \langle \psi_I | \hat{Q} | \psi_I \rangle \quad (8.5.118)$$

Die Energie eines Quadrupols in einem Feldgradienten $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ ist

$$\Delta E_Q = \frac{Q}{4} \frac{\partial E_z}{\partial z} \frac{3 \cos^2(\theta) - 1}{2} \quad (8.5.119)$$

Diese Energieaufspaltung ist proportional zu m_I^2 , gegeben durch $(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^2$. Quadrupolmomente wurden nur in kernen mit $I \geq 1$ beobachtet. $I = 0$ bedeutet Kugelsymmetrie. $I = \frac{1}{2}$ ist äquivalent zu einem Vektor. Quadrupolmomente und höhere Momente zeigen oft grössere Abweichungen von Kernmodellen als z.B. die Schalenstruktur.

8.5.10.4. Isotopeneffekt in der optischen Spektroskopie

Die enorme Präzision der optischen Spektroskopie ermöglicht es, einzelne Isotope in optischen Spektren zu unterscheiden. R. N. Zare u. a. [Zar+09] zeigen dies anhand der Untersuchung von $^{13}_6\text{C}$ und $^{12}_6\text{C}$. Grundlage für diese Messungen ist einerseits die Abhängigkeit von der Kernmasse der reduzierten Masse in der Rydbergformel und andererseits die Kopplung von Kernspins über die Hyperfeinaufspaltung.

8.5.11. Kollektive Anregungen

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.4.2.] können Kerne mit $A \geq 6$ kollektive Bewegungen mit scharf definierten Frequenzen zeigen. Dies kann verstanden werden, indem Kerne als kleine Vielteilchensysteme betrachtet werden, wie z.B. im Tröpfchenmodell oder bei Mehrteilchenmodellen mit einer flüssigen Oberfläche.

- Wenn Kerne schwingen können elektrische Dipolmomente auftreten. Diese können als Dipol-Riesenresonanzen beobachtet werten (siehe J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.5.1.]). Diese Riesenresonanzen sind experimentell beobachtet worden (B. L. Berman und S. C. Fultz [BF75]).
- Kollektive Rotationen können entlang der Achse des Kerns mit dem grössten oder dem kleinsten Massenträgheitsmoment auftreten. Dies ist analog zur Kreiseltheorie aus der Mechanik (siehe [Mar14]). An schwereren Kernen wurden solche Rotationen gefunden. A. Heusler [Heu17] zeigt Messungen an $^{208}_{82}\text{Pb}$.
- Wenn das Mehrteilchenmodell stimmt, müssten analog zu Oberflächenerdbebenwellen auf Kernen Oberflächenschwingungen auftreten. Auch diese Anregungsform wurde gefunden (siehe z.B. B. Hadinia u. a. [Had+05]).

8.6. Kernkräfte und Kernmodelle

8.6.1. Deuteron

Wie misst man die Bindungsenergie des Deuterons?

- Photospaltung



- Dazu Messungen von $h\nu$ mit dem Photoeffekt
 $h\nu = U \cdot e$ wenn U die Beschleunigungsspannung für die Elektronen ist
- da $m_n \approx m_p \Rightarrow E_{kin,n} = E_{kin,p}$ ²
- Messung von $E_{kin,p}$ mit einer Gegenspannung

$$E_B = h\nu - E_{kin}(p) - E_{kin}(n) \quad (8.6.2)$$

- Rekombinationsstrahlung



$\Rightarrow E_B = 2.224\,573$ MeV, da die Bindungsenergie kleiner als 8 MeV pro Nukleon ist \Rightarrow grosse kinetische Energie

Abschätzung: Da $p_i \approx \frac{\hbar}{R}$ für $I = x, y, z$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_{kin} &\geq \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} = \frac{3\hbar^2}{2mR^2} \\ &\Rightarrow 23 \text{ MeV/Nukleon} \\ -E_B &= -E_0 + E_{kin} \Rightarrow E_0 \approx +48 \text{ MeV} \end{aligned}$$

- Hyperfeinaufspaltung $\Rightarrow I = 1$ aus $1s$ -Zustand von ${}^2_1\text{H}$

$\Rightarrow \mu_D = 0.857348 \mu_K$ magn. Moment

μ_D ist kleiner als $\mu_p + \mu_n = 0.87963 \mu_K$

$\Rightarrow \mu_D$ röhrt von den Spins her und nicht von den Bahndrehimpulsen

$\Rightarrow L = 0$, S -Zustand

Bezeichnung analog zur Elektronenhülle 3S -Zustand

²genauer: $E_{kin,n} = \frac{1}{2} \frac{1}{m_n} (\sqrt{2E_{kin,p}m_p} - p_{h\nu})^2$

D hat ein elektrisches Quadrupolmoment

$$QM_D = 2.86 \cdot 10^{-31} \text{ cm}^2 \cdot e \quad (8.6.4)$$

\Rightarrow Ladungsverteilung ist nicht sphärisch.

8.6.1.1. Abschätzung des n-p-Abstandes

Kastenpotential

$$\mu = \frac{m_n \cdot m_p}{m_n + m_p} \Rightarrow \mu \approx \frac{1}{2}m \quad \text{mit } m = \frac{1}{2}(m_n + m_p)$$

Pot. Energie $E_{\text{pot}} = \begin{cases} -E_0 & \text{für } r < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\frac{du}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2}[E - E_{\text{pot}}(r)] = 0$$

$$\Rightarrow u(r) = \begin{cases} A_1 \sin(k_1 r) & r < R_0 \\ A_2 e^{-r/a} & r > R_0 \end{cases}$$

Mit $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m(E_0 - E_B)}$ und $\frac{1}{a} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{mE_B}$

Stetigkeit

$$k_1 \cot(k_1 R_0) = \cot \left[\frac{R_0 \sqrt{m(E_0 - E_B)}}{\hbar} \right] = -\sqrt{\frac{E_B}{E_0 - E_B}} = -\frac{1}{u}$$

Wenn $E_0 \gg |E_B|$

$$\cot(\) \ll 1 \Rightarrow \frac{m}{\hbar^2} R_0^2 (E_0 - E_B) \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$E_0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2}{m R_0^2}$$

$$1. \quad R_0 = 1.5 \text{ fm}, \quad E_B = 2.2 \text{ MeV} \Rightarrow E_0 = 45 \text{ MeV}$$

\Rightarrow Wahrscheinlichkeit, das Nukleon ausserhalb zu finden: 80 %

WW zwischen zwei Nukleonen:

$$V_{\text{NN}} = V_1(\mathbf{r}) + V_2(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)$$

$$V_2(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2) = a_1 \left[3 \cdot \frac{(\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 \right]$$

8.6.2. Mesonen-Austauschmodell

Siehe auch Seite 186

Analog kann die starke WW beschrieben werden

elektromagnetische Wechselwirkung	starke Wechselwirkung
$e^- + e^- \rightarrow e^- + (h\nu)_{\text{virt}} + e^- \rightarrow e^- + e^-$	$p + p \rightarrow p + (\pi^0)_{\text{virt}} + p \rightarrow p + p$
	$p + n \rightarrow n + (\pi^+)_{\text{virt}} + n \rightarrow n + p$
	$p + n \rightarrow p + (\pi^0)_{\text{virt}} + n \rightarrow p + n$
	$n + p \rightarrow n + (\pi^0)_{\text{virt}} + p \rightarrow n + p$
	$n + p \rightarrow p + (\pi^-)_{\text{virt}} + p \rightarrow p + n$
	$n + n \rightarrow n + (\pi^+)_{\text{virt}} + n \rightarrow n + n$

Tab. 8.13.: Vergleich der starken Wechselwirkung mit der elektromagnetischen Wechselwirkung. Die Austauschteilchen sind virtuell.

π hat einen Isospin

$$T_3 : \begin{cases} \pi^0 & \tau_3 = 0 \\ \pi^+ & \tau_3 = 1 \\ \pi^- & \tau_3 = -1 \end{cases} \quad \text{Austauschmodell der Kernkräfte (Hideki Yukawa)} \quad (8.6.5)$$

π : π -Meson, auch Pion genannt.

$$\text{Ruhemasse: } h\nu : m_0 = 0 \Rightarrow \text{unendliche Reichweite} \quad (8.6.6a)$$

$$\pi : m_{0,\pi} > 0 \Rightarrow \text{endliche Reichweite} \quad (8.6.6b)$$

Wegen $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ mit $\Delta E = m_\pi c^2$ und $r \leq c \cdot \Delta t$

$$\Rightarrow r \leq r_0 = \frac{\hbar}{m_\pi c} \quad (8.6.7)$$

mit $m_\pi c^2 = 139 \text{ MeV}$ $\Rightarrow r_0 = 1.4 \text{ fm}$

Yukawa-Potential (nach Hideki Yukawa) $V(r) = \frac{g}{r} e^{-\left(\frac{m_{\pi}c}{\hbar}\right)r}$ (8.6.8a)

Reichweite der Kernkräfte $r_0 = \lambda_{c,\pi} = \frac{\hbar}{m_{\pi}c}$ (8.6.8b)

Die WW zwischen p-p und n-n wird über π^0 vermittelt, n-p und p-n über π^+ und π^- .

Da $\frac{m_{\pi^+}}{m_{\pi^-}} > \frac{m_{\pi^0}}{m_{\pi^0}}$ ist die np-WW die stärkste
Geometrie

$$\cos\left(\frac{\pi - \vartheta}{2}\right) = \frac{\hbar k}{2p} \implies k = \frac{2p}{\hbar} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (8.6.9)$$

Relativitätstheorie

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.6.10)$$

Quantenmechanik

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{2p \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = \frac{\pi\hbar}{p \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = \frac{\pi\hbar\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m_0 v \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \quad (8.6.11)$$

Dieses Photon entspricht der Energie

$$\Delta E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{hc m_0 v \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\pi\hbar\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2cm_0 v \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.6.12)$$

Nach der Energieunschärfe entspricht dies der Zeit

$$t = \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{2cm_0 v \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \quad (8.6.13)$$

Damit erreicht das Pion maximal die Reichweite

$$x = ct = \frac{\hbar c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{2cm_0 v \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = \frac{\hbar\sqrt{c^2 - v^2}}{2cm_0 v \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \quad (8.6.14)$$

9. Radioaktiver Zerfall

Anhand des Tröpfchenmodells (Gleichung (8.5.14) oder Gleichung (8.5.16)) kann die Frage (teilweise) beantwortet werden: Welches sind die stabilen Kerne? Dazu suchen wir die Kernladungszahl Z_{min} (Anzahl Protonen) bei der die Masse des Atoms M_a minimal ist, die Gesamtenergie also minimal ist.

$$\frac{\partial M_a(Z, A)}{\partial Z} \Big|_{A=\text{const}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (9.0.1)$$

und daraus

$$0 = \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ Zm_p + (A - Z)m_n + Zm_e - \frac{1}{c^2} [a_V A - a_S A^{2/3} - a_F (N - Z)^2 A^{-1} - a_C Z^2 A^{-1/3} + \delta a_P A^{-1/2} - E_B^{el}] \right\} \quad (9.0.2a)$$

mit $\frac{\partial}{\partial Z} E_B^{el} \approx 0$ und $A = N + Z = \text{const}$

$$= \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ Zm_p + (A - Z)m_n + Zm_e - \frac{1}{c^2} [a_V A - a_S A^{2/3} - a_F (A - 2Z)^2 A^{-1} - a_C Z^2 A^{-1/3} + \delta a_P A^{-1/2} - E_B^{el}] \right\} \quad (9.0.2b)$$

$$= m_p - m_n + m_e - \frac{1}{c^2} \left[-2a_F(A - 2Z) \frac{(-2)}{A} - 2a_C \frac{Z}{A^{1/3}} \right] \quad (9.0.2c)$$

$$0 = Z \left(\frac{8a_F}{A} + \frac{2a_C}{A^{1/3}} \right) + c^2 (m_p - m_n + m_e) - 4a_F \quad (9.0.2d)$$

$$0 = \frac{Z}{A} \left(8a_F + 2a_C A^{2/3} \right) + c^2 (m_p - m_n + m_e) - 4a_F \quad (9.0.2e)$$

$$Z = A \frac{4a_F - c^2 (m_p - m_n + m_e)}{8a_F + 2a_C A^{2/3}} = \frac{A}{2} \frac{4a_F - c^2 (m_p - m_n + m_e)}{4a_F + a_C A^{2/3}} \quad (9.0.2f)$$

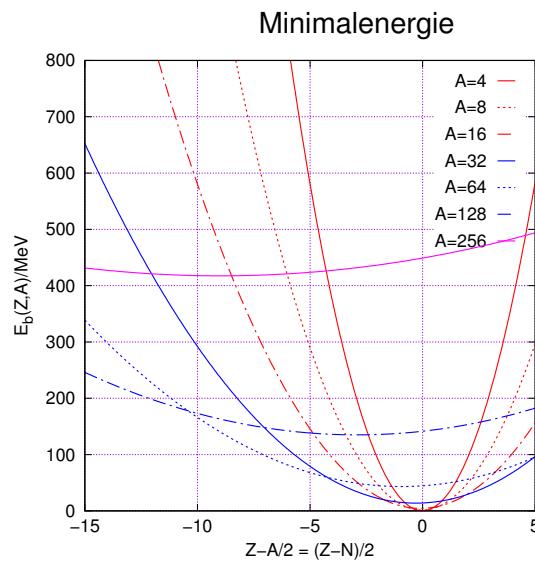


Abb. 9.1.: Lage der Minima nach Hans Bethe und Carl Friedrich von Weizsäcker

Abbildung 9.1 zeigt die Lage der Minima für verschiedene Nukleonenzahlen A . Dargestellt ist die Bindungsenergie E_B als Funktion von $Z - \frac{A}{2} = \frac{Z-N}{2}$.

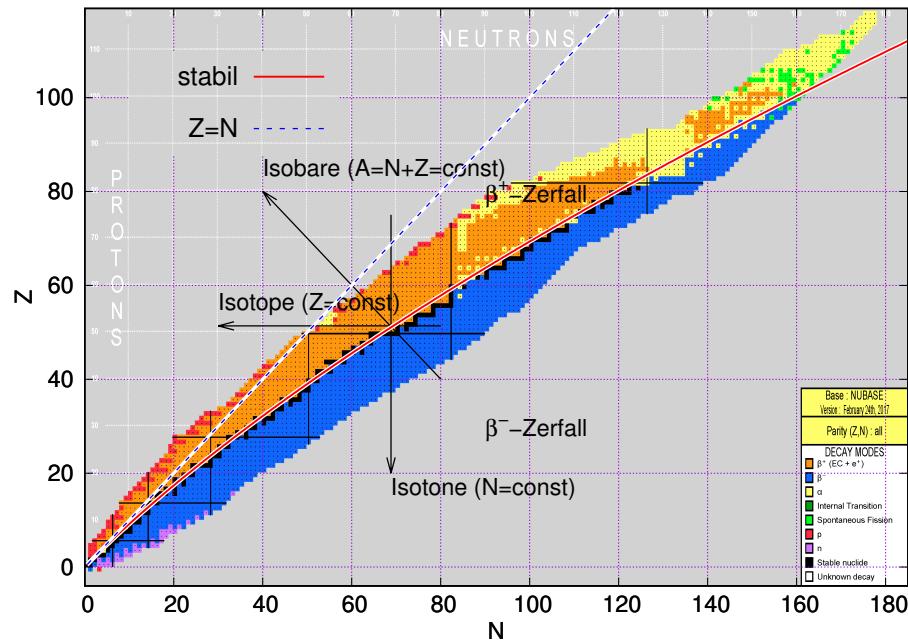


Abb. 9.2.: Stabilitätsbereiche berechnet mit der Bethe-Weizsäcker-Gleichung (Gleichungen (8.5.14) oder (8.5.16)), Nuklidkarte als Hintergrundbild erzeugt mit Nucleus-Amdc [Wap12]

Abbildung 9.2 zeigt die Linie der stabilen Kerne nach Gleichung (9.0.2). Eingezeichnet sind weiter die Bezeichnungen ISOBARE, ISOTOPE und ISOTONE. Mit Gleichung (8.5.18) kann berechnet und dargestellt werden, ob und wie Kerne ineinander umgewandelt werden können (siehe Abbildung 9.3).

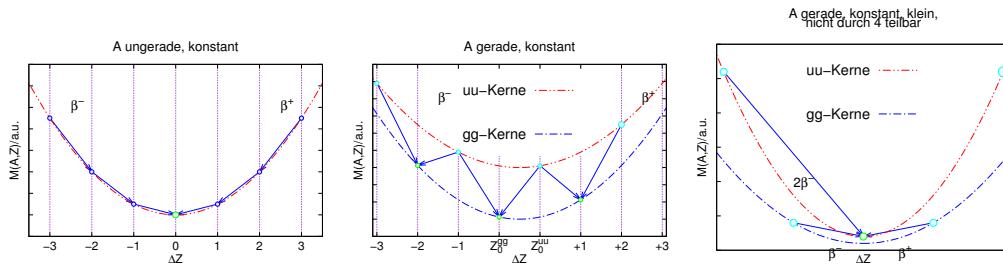


Abb. 9.3.: Stabile Kerne nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 3.3]

Wenn bei der Reaktion von ${}^A_Z X$ nach ${}^{A'}_{Z'} Y$ ein Produkt mit der Masse M_2 entsteht, muss gelten:

$$M({}^A_Z X) \geq M({}^{A'}_{Z'} Y) + M_2 \quad (9.0.3)$$

Nur dann ist ein Zerfall möglich (notwendige Bedingung). Die dazugehörige Reaktion ist:



9.1. Stabilitätskriterien

9.1.1. Mattauch'sche Isobarenregeln

Die Regeln sind nach Josef Mattauch benannt.

- Oberhalb von $Z = 7$ gibt es keine stabilen uu -Kerne
- Elemente mit ungeradem Z besitzen höchstens zwei stabile Isotope, die sich für $Z > 7$ um $\Delta A \geq 2$ unterscheiden
- Für Elemente mit $A = 2n+1$ (ungerade) gibt es in der Regel nur ein stabiles Isobar
- Für Elemente mit $A = 2n$ gibt es für $Z > 7$ keine stabilen isobare uu -Kerne und mindestens zwei stabile gg -Isobare
- β^- -Zerfall



mit

$$\Delta E = (M_X - M_Y + m_e) c^2 + E_{kin} \quad (9.1.2)$$

Wenn $\Delta E < (M_X - M_Y + m_e) c^2$ ist, ist der β^- -Zerfall verboten. Analoges gilt für den β^+ -Zerfall

9.2. Zerfallsgegesetze

Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls sei für alle Atome einer Sorte gleich

$$\lambda = \frac{dP}{dt} \quad (9.2.1)$$

Anzahl Kerne

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N = -A(t) \quad (9.2.2)$$

$A(t)$: Aktivität

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (9.2.3)$$

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \quad (9.2.4)$$

$$A_0 = \lambda N_0 \quad (9.2.5)$$

Zeitkonstante

$$\tau = \langle t \rangle = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \cdot \lambda \cdot N(t) dt = \int_0^\infty t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (9.2.6)$$

Halbwertszeit

$$t_{1/2} = \tau \cdot \ln(2) \quad (9.2.7)$$

$$A_0 = \frac{N_0}{t_{1/2}} \ln(2) \quad (9.2.8)$$

Aktivität \Rightarrow Anzahl der instabilen Kerne (wenn nur eine Sorte vorhanden ist)

9.2.1. Statistik der Zerfälle

Radioaktive Zerfälle werden durch die entstehenden ausgesandten Teilchen oder Quanten charakterisiert. Charakteristisch ist in der Regel, dass eine sehr grosse Anzahl $N_0 \approx N_A$ Atomkerne vorhanden sind, deren Zerfallswahrscheinlichkeit $p \ll 1$ ist [Ble13]. In einer gegebenen Zeitspanne t_{mess} werden im Mittel μ Zerfälle über die Produkte gemessen. Erwartet werden

$$\langle m \rangle = \mu = N_0 p \quad (9.2.9)$$

Zerfälle. m ist die gemessene Anzahl Zerfälle. Die Wahrscheinlichkeit, bei gegebenem Mittelwert μ in N_0 Experimenten $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ Ereignisse zu haben, ist das

Produkt aus der Wahrscheinlichkeit von m Ereignissen, p^m , der Wahrscheinlichkeit, kein Ereignis zu haben $(1-p)^{N_0-m}$ und der Anzahl möglicher Reihenfolgen $\binom{N_0}{m}$, also

$$W_\mu(m) = p^m \cdot (1-p)^{N_0-m} \cdot \binom{N_0}{m} \quad (9.2.10)$$

Wir spalten

$$(1-p)^{N_0-m} = (1-p)^{-m}(1-p)^{N_0} = \left(1 - \frac{\mu}{N_0}\right)^{-m} \left(1 - \frac{\mu}{N_0}\right)^{N_0}$$

auf. Im Grenzfall $N_0 \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{N_0}\right)^{-m} &= 1^{-m} = 1 \\ \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{N_0}\right)^{N_0} &= \exp(-\mu) = e^{-\mu} \\ \binom{N_0}{m} &= \frac{N_0 \cdot (N_0 - 1) \cdot \dots \cdot (N_0 - m + 1)}{m!} \approx \frac{N_0^m}{m!} \end{aligned}$$

Für sehr grosse Werte N_0 und sehr kleines p lautet die POISSON-VERTEILUNG

$$P_\mu(m) = \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} \quad (9.2.11)$$

Dies erhält man, wenn man die Definition von p einsetzt.

Bei gegebener Zerfallskonstante λ und gegebener Messzeit t_{mess} bekommen wir

$$\mu(t_{mess}) = N_0 - N(t_{mess}) = N_0 \left(1 - e^{-\lambda t_{mess}}\right) \quad (9.2.12)$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit für Zerfälle in der Zeit t_{mess} durch

$$p(t_{mess}) = \frac{\mu(t_{mess})}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t_{mess}} \quad (9.2.13)$$

gegeben.

Damit ergibt sich

$$P_{N_0, t_{mess}}(m) = \frac{N_0^m \left(1 - e^{-\lambda t_{mess}}\right)^m}{m!} e^{-N_0 \left(1 - e^{-\lambda t_{mess}}\right)} \quad (9.2.14)$$

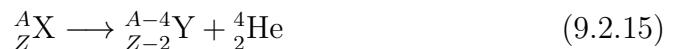
9.2.2. Natürlich vorkommende radioaktive Kerne

Element	Symbol	Strahlungsart	E/MeV	$t_{1/2}/\text{a}$
Tritium	${}^3\text{H}$	β^-	0.0286	12.3
Kalium	${}^{40}\text{K}$	β^-	1.3	$1.5 \cdot 10^9$
Rubidium	${}^{87}\text{Rb}$	β^-	0.275	$5 \cdot 10^{10}$
Iod	${}^{129}\text{I}$	β^-	0.15	$1.7 \cdot 10^7$
Cäsium	${}^{135}\text{Cs}$	β^-	0.21	$3.0 \cdot 10^6$
Blei	${}^{205}\text{Pb}$	α	2.6	$\approx 1.4 \cdot 10^{16}$
Polonium	${}^{209}\text{Po}$	α	4.87	103
Radium	${}^{226}\text{Rd}$	α	4.77	1620
Thorium	${}^{230}\text{Th}$	α	4.5 – 4.7	$8 \cdot 10^4$
Uran	${}^{234}\text{U}$	α	4.6 – 4.8	$2.5 \cdot 10^5$
Uran	${}^{235}\text{U}$	α	4.3 – 4.6	$7.1 \cdot 10^8$
Uran	${}^{238}\text{U}$	α	4.2	$4.5 \cdot 10^9$

Tab. 9.1.: Natürlich vorkommende radioaktive Kerne (nach W. Demtröder [Dem10, Tab. 3.1.]).

Tabelle 9.1 gibt eine Liste von einigen natürlich vorkommenden radioaktiven Isotopen. Beispiele von solchen Reaktionen sind:

- α -Zerfall



- β^- -Zerfall



- β^+ -Zerfall



- γ -Zerfall



9.2.3. Goldene Regel und Lebensdauer

Bei Zerfällen von Kernen (wie auch bei vielen anderen Prozessen in der Natur) spielt nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.] Zufall eine wesentliche Rolle. Die Umwandlung jedes Kernes folgt dabei ohne äusseren Einfluss. Es stellen sich dabei nach J. Bleck-Neuhaus zwei Fragen:

- Wann wandeln sich in einem Ensemble (Probe) pro Zeitintervall Δt die meisten Kerne um? Die Antwort ist bei $t = 0$ und nicht nach einer Wartezeit.

- Welche mittlere Wartezeit haben diejenigen Kerne noch vor sich, die nach der Zeit $t > 0$ noch nicht umgewandelt sind? Die Antwort ist, dass diese die gleiche mittlere Wartezeit τ haben wie zu Beginn oder zu jedem anderen Zeitpunkt.

Angenommen, wir haben zu Beginn $N(0) = N_0$ Atome, die zerfallen können und wir beobachten in der Zeit Δt die Anzahl ΔN Zerfälle, dann ist die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls

$$W(t=0, \Delta t) = \frac{\Delta N}{N_0} = \lambda \Delta t \quad (9.2.19)$$

mit λ der in Gleichung (9.2.12) definierten Zerfallskonstante. Gleichung (9.2.19) gilt, wenn $\Delta t \ll \tau = \frac{1}{\lambda}$. Dann ist die Übergangsrate (oder die Zerfallskonstante)

$$\lambda = \frac{W(t=0, \Delta t)}{\Delta t} \quad (9.2.20)$$

Diese Übergangsrate ist konstant, unabhängig vom Zeitpunkt der Messung. Erklären kann man sie mit der Quantenmechanik und der Störungstheorie nach Paul Dirac. Dazu nimmt man zuerst einen (wahrscheinlich unbekannten) wahren und **zeitunabhängigen** Hamiltonoperator \hat{H} und den **exakten** Eigenzustand ψ_E an

$$\hat{H}\psi_E = E\psi_E \quad (9.2.21)$$

Wäre unser Atomkern in diesem Eigenzustand, dann wäre er stabil und könnte sich nie umwandeln. Alles was sich ändern könnte ist die Phase $\exp(i\frac{E}{\hbar}t)$, die aber bei der Berechnung des Erwartungswertes von ψ_E herausfällt.

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi_E = \hat{H}\psi_E = E\psi_E \quad (9.2.22)$$

Ein radioaktiver Kern kann sich also nie in einem exakten Eigenzustand ψ_E befinden. Er muss sich vielmehr in einem Anfangszustand $\psi_{ini} \neq \psi_E$ befinden, der aber ähnlich zum exakten Zustand $\psi_E \approx \psi_{ini}$ sein kann. ψ_{ini} kann dann keine scharf definierte Energie besitzen. ψ_{ini} ist ein metastabiler Zustand zu einem ungestörten Hamiltonoperator \hat{H}_0

$$\hat{H}_0 |\psi_{ini}^0\rangle = E_{ini}^0 |\psi_{ini}^0\rangle \quad (9.2.23)$$

Dabei soll die hochgestellte 0 einen Eigenzustand zu \hat{H}_0 anzeigen. Die Differenz von \hat{H} und \hat{H}_0 ist der **STÖROOPERATOR**

$$\hat{H}_{WW} = \hat{H} - \hat{H}_0 \quad (9.2.24)$$

Auf jeden Fall ist $[\hat{H}_0, \hat{H}_{WW}] \neq 0$, die beiden sind also nicht vertauschbar. Die zeitabhängige Schrödingergleichung mit $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{WW}$ lautet

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{ini}^0\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{H}_{WW}) |\psi_{ini}^0\rangle = E_{ini}^0 |\psi_{ini}^0\rangle + \hat{H}_{WW} |\psi_{ini}^0\rangle \quad (9.2.25)$$

\hat{H}_{WW} mischt $|\psi_{ini}^0\rangle$ dauernd andere zu $|\psi_{ini}^0\rangle$ orthogonale Zustände zu, erzeugt also eine Übergangswahrscheinlichkeit. Das heisst, dass beispielsweise beim Übergang ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 He$ nach Gleichung (9.2.15) \hat{H}_{WW} die Wellenfunktion $|\psi_{ini}({}^A_Z X)\rangle$

mit der Wellenfunktion $|\psi_{fin}(^{A-4}\text{Y})\rangle + |\psi_{ini}(^4\text{He})\rangle$ mischt¹. \hat{H}_{WW} ist eine Linearkombination aller Eigenzustände ψ_{ini}^0 zu \hat{H}_0 . Von allen diesen Eigenzuständen kommen die beobachtbaren Zustände ψ_{fin} in Frage. Das Betragsquadrat der Beimischungsamplitude ergibt die Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Übergangs. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.] wächst die Wahrscheinlichkeit des Übergangs immer dann besonders schnell, wenn die Endenergie der Zustände gleich der Anfangsenergie ist (in Resonanz). Wichtig ist ferner, dass die Wellenfunktion des α -Teilchens die Bewegung weg vom Mutterkern beschreibt. Aus der mit der Zeit zunehmenden Amplitude kann die Wahrscheinlichkeit des «Quantensprungs» abgelesen werden.

Die goldene Regel wurde von Wolfgang Pauli formuliert und dann von Enrico Fermi so benannt. Sie gibt die Zerfallskonstante als Funktion des Wechselwirkungsoperators (Störoperators) an.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho_E \quad (9.2.26)$$

Die wesentlichen Faktoren nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.] sind

- $M_{fi} = \langle \psi_{fin} | \hat{H}_{WW} | \psi_{ini} \rangle$ Dieses MATRIXELEMENT gibt die Grösse der Koppelung des Endzustandes $|\psi_{fin}\rangle$ mit dem Anfangszustand $|\psi_{ini}\rangle$ an, also wie gross die erwartete Amplitude des Endzustandes bei gegebenem Anfangszustand ist.
- $\rho_E = \frac{dN}{dE}$ Die Phasenraumdichte oder Zustandsdichte gibt an, wie viele der Endzustände dN pro Energie dE unter den Nebenbedingungen der Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung vorhanden sind. Wenn Sie über einen Bach hüpfen wollen muss es sowohl einen Platz am Ausgangsufer haben als auch einen am Zielufer, sonst gelingt der Sprung nicht. Ein Beispiel: Der K -Einfang funktioniert nur für die K -Schale (Elektronenzustand mit $n = 1$, da dieser der einzige ist ohne Knoten im Kern).

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.] beschreibt die GOLDENE REGEL in Gleichung (9.2.26) den spontanen Prozess wie auch einen Prozess als Reaktion auf vorhergehende Aktionen, also den Umkehrprozess. Das Matrixelement M_{fi} ist symmetrisch für den Vorwärts- und den Rückwärtsprozess.

Mit Gleichung (9.2.26) kann der Wirkungsquerschnitt σ und die Zerfallskonstante λ miteinander verknüpft werden. Aus Dimensionsgründen muss die Grösse, die λ in σ überführt die Einheit [Fläche/Zeit] haben. Dies ist die Stromdichte $\mathbf{j} = n\mathbf{v}$ der einlaufenden Teilchen (n ist ein inverses Volumen, \mathbf{v} eine Geschwindigkeit. Wir haben

$$\sigma = \frac{1}{|\mathbf{j}|} \lambda \quad (9.2.27)$$

Die Details, die bei der genauen Ableitung von Gleichung (9.2.27) zu beachten sind, finden Sie in J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.].

Die Energieunschärfe $\Delta E = E - E_{ini}^0$ des Anfangszustandes $|\psi_{ini}\rangle$ bekommt man aus Gleichung (9.2.24)

¹Nur die Summe der Eigenfunktionen aller Produkte ist richtig!

$$\left(\hat{H}_0 + \hat{H}_{WW} \right) |\psi_E\rangle = E |\psi_E\rangle \quad (9.2.28)$$

indem man ψ_{ini} als Linearkombination der ψ_E zu verschiedenen Eigenwerten E schreibt. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.] heisst dies, dass

$$|\psi_E\rangle = |\psi_{ini}\rangle + \text{einlaufende und auslaufende Welle} \quad (9.2.29)$$

ist. Jede laufende Welle hat ein kontinuierliches Energiespektrum, deshalb sind die Eigenwerte E auch kontinuierlich. Vor der Emission müssen sich im Aussenraum alle Wellen mit Eigenwerten um den speziellen betrachteten Eigenwert E auslöschen, das heisst alle Phasen zwischen 0 und 2π müssen gleichverteilt sein. Das heisst, dass es eine bestimmte Mindestenergiebreite geben muss, die Ursache der Energieunschärfe von $|\psi_{ini}\rangle$. Bei einer kleinen Störung (1. Ordnung Störungsrechnung reicht) sind es nur die Wellenfunktionen in einem kleinen Energiebereich um E_{ini}^0 , deren Amplituden sich nach der Emission konstruktiv überlagern können:

$$\frac{\langle \psi_E | \hat{H}_{WW} | \psi_{ini} \rangle}{E - E_{ini}^0} \quad (9.2.30)$$

Die Amplituden nehmen ab, proportional zu $(E - E_{ini}^0)^{-1}$. Der messbare Erwartungswert nimmt dann quadratisch ab, also eine LORENTZ-KURVE. Die Halbwertsbreite der Energieunschärfe ist

$$\Delta E = \hbar \lambda = \frac{\hbar}{\tau} \implies \Delta E \tau = \hbar \quad (9.2.31)$$

Klassisch kann ein ähnliches Resultat für den gedämpften harmonischen Oszillator abgeleitet werden (siehe z.B. O. Marti, *Mechanik - Vorlesungsskript* [Mar14]). Aus $a(t) = A(t) \sin(\omega t) = A_0 \exp(-(\lambda/2)t) \sin(\omega t)$ folgt für das Amplitudenquadrat (proportional zur «Energie») $|A(t)|^2 \propto \exp(-\lambda t)$. Diese Analogie ist nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.] der Grund, warum kurzlebige Teilchen RESONANZEN genannt werden.

10. Radioaktive Strahlung

10.1. Strahlenquellen und Strahlungsarten

10.1.1. α -Strahlung

Bei einem Kernzerfall, also auch bei einem α -Zerfall müssen die Erhaltungssätze gelten.

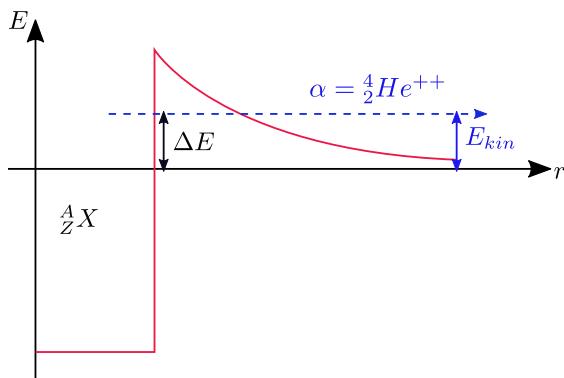


Abb. 10.1.: Energielandschaft beim Alpha-Zerfall.

Abbildung 10.1 zeigt die Energielandschaft beim α -Zerfall. Es gilt für die Massen

$$\Delta M = M(Z, A) - M_1(Z - 2, A - 4) - M_\alpha(2, 4) > 0 \quad (10.1.1)$$

Energie- und Impulserhaltung bei einem ruhenden Mutterkern (Ausgangskern) lauten klassisch

$$M_1 v_1 + M_\alpha v_\alpha = 0 \quad (10.1.2a)$$

$$E_{kin}(M_1) + E_{kin}(M_\alpha) = \Delta M c^2 = \frac{M_1}{2} v_1^2 + \frac{M_\alpha}{2} v_\alpha^2 \quad (10.1.2b)$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit des α -Partikels, wenn keine weiteren Teilchen involviert sind:

$$v_\alpha = -\frac{M_1}{M_\alpha} v_1 \quad (10.1.3)$$

Diese Gleichungen können eingesetzt und wir erhalten

$$\frac{1}{2} M_1 v_1 (v_1 - v_\alpha) = \Delta M c^2 \quad (10.1.4a)$$

$$-\frac{1}{2} M_1 \frac{M_\alpha}{M_1} v_\alpha \left(-\frac{M_\alpha}{M_1} v_\alpha - v_\alpha \right) = \Delta M c^2 \quad (10.1.4b)$$

$$\frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \left(\frac{M_\alpha + M_1}{M_1} - \right) = \Delta M c^2 \quad (10.1.4c)$$

$$v_\alpha^2 = \frac{2M_1}{M_\alpha} \frac{\Delta M c^2}{M_\alpha + M_1} \quad (10.1.4d)$$

oder für Energien

$$E_{kin}(\alpha) = \frac{M_\alpha}{2} v_\alpha^2 = \frac{M_1 \Delta M}{M_\alpha + M_1} c^2 \quad (10.1.5)$$

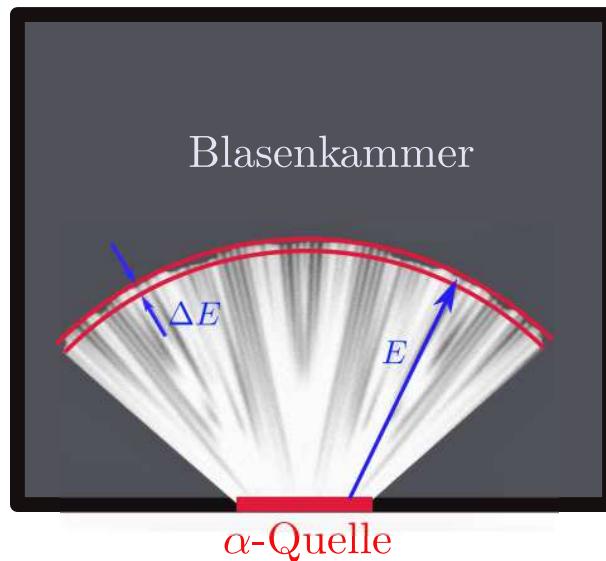


Abb. 10.2.: Skizze der Bahnen von α -Teilchen des $^{212}_{84}\text{Po}$ in einer Blasenkammer, skizziert nach [GMB54]

Aus Messungen analog zur Simulation in Abbildung 10.2 kann mit Gleichung (10.1.5) geschlossen werden, dass ΔM beim α -Zerfall gut definiert ist. Hier wird ausgenutzt, dass der Energieverlust in einer Blasen- oder Nebelkammer proportional zur kinetischen Energie ist. Kommen die α -Teilchen zur Ruhe, können Sie keine Bläschen oder Nebeltröpfchen mehr bilden, sind also nicht mehr sichtbar.

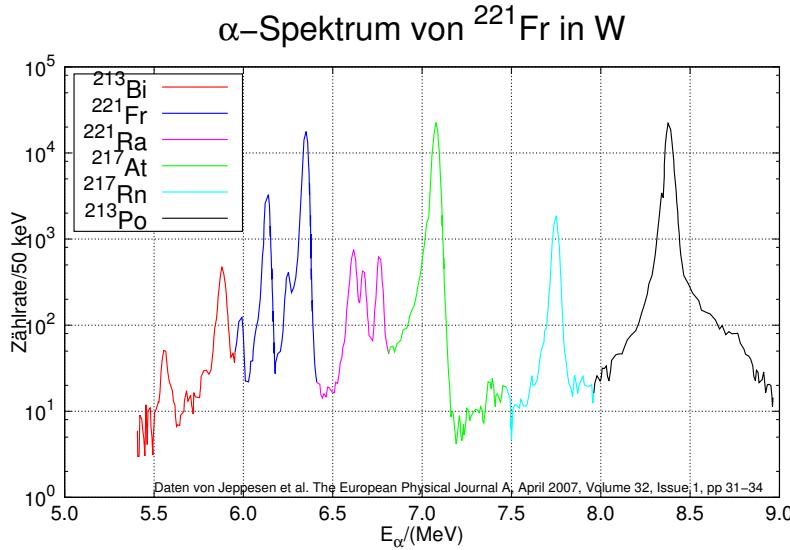


Abb. 10.3.: α -Teilchen beim Zerfall von $^{221}\text{Fr}_{87}$, gezeichnet nach [Jep+07, Fig. 1]

Abbildung 10.3 zeigt Messungen der α -Spektren verschiedener Kerne [Jep+07]. Da alle Spektren Linien zeigen, muss wie oben diskutiert geschlossen werden, dass der α -Zerfall ein Zweikörperproblem ist.

10.1.1.1. Geiger-Nuttall-Geraden bei α -Strahlern

Wenn angenommen wird, dass die Wahrscheinlichkeit eines α -Zerfalls unabhängig von allen Variablen und konstant ist, folgt, dass

$$p(\text{Zerfall}, N) = p(\text{Zerfall})N \implies \frac{dN(t)}{dt} = -p(\text{Zerfall})N = -\frac{1}{\lambda}N(t) \quad (10.1.6)$$

λ ist die Zerfallskonstante. Die Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0 \quad (10.1.7a)$$

$$N(0) = N_0 \quad (10.1.7b)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (10.1.8)$$

Üblicherweise wird die Halbwertszeit angegeben, also die Zeit $t_{1/2}$ bei der $N(t) = N_0/2$ ist. Damit haben wir die Beziehung

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \quad (10.1.9)$$

zwischen der Zerfallskonstante λ und der Halbwertszeit $t_{1/2}$. Aus der Gleichung für den Energieverlust auch relativistischer Elektronen [LSS63; Bet30]

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{Z_1^2 e^4 n_e}{4\pi \varepsilon_0^2 v^2 m_e} \left(\ln \left(\frac{2m_e v^2}{\langle E_b \rangle} \right) - \ln (1 - \beta^2) - \beta^2 \right) \quad (10.1.10)$$

(Z_1 ist die Ladung des Projektils) ergibt sich im nichtrelativistischen Falle $\beta = 0$ die Approximation

$$\frac{dE}{dx} \propto \frac{Z_1^2 n_e}{mv^2} \propto \frac{Z_1^2 \rho}{E_{kin}} \quad (10.1.11)$$

Dabei ist ρ die Massendichte im Target.

Der Erwartungswert der Reichweite ist

$$\langle R \rangle = - \int_{E_0}^0 \frac{dE}{\frac{dE}{dx}} \quad (10.1.12)$$

Daraus und mit einem Korrekturfaktor für die Relativistik¹ folgt, dass die Reichweite proportional zu $E_{kin}^{3/2}$ ist.

Daraus ergibt sich die Geiger-Nuttall-Gleichung [GN11] (nach Hans Geiger und John Nuttall)

$$\ln(\lambda) = A + B \ln(R_\alpha) \quad (10.1.13)$$

wobei A und B für alle Elemente einer Zerfallsreihe gleich seien. R_α ist die Reichweite der α -Teilchen. Diese Gleichung kann mit der Energieabhängigkeit umgeschrieben werden

$$\ln(E_{kin}) = a + b \ln(\lambda) \quad (10.1.14)$$

Das heisst, dass die Zerfallskonstante und die kinetische Energie verknüpft sein müssen.

¹Etwa so: $\ln(v^2/v_0^2) = 2 \ln(v/v_0) \approx 2 \ln(1 + v/v_0) \propto v/v_0 \propto \sqrt{E_{kin}}$

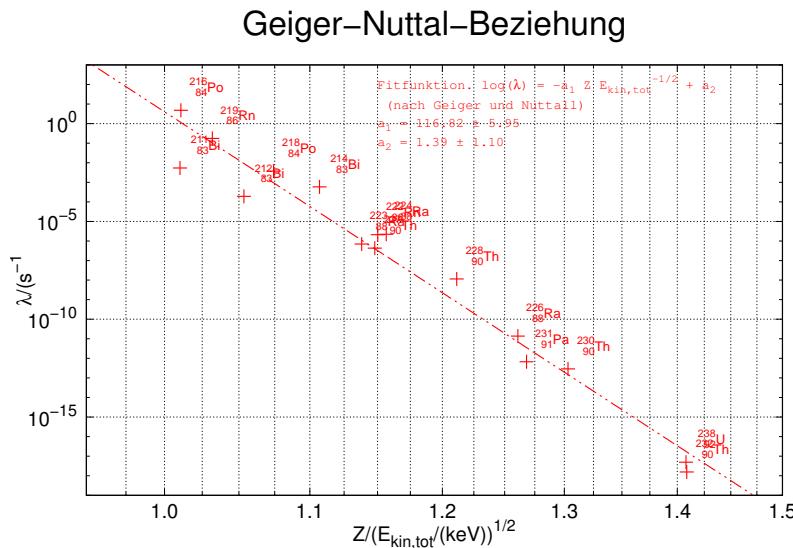


Abb. 10.4.: Geiger-Nuttall-Darstellung [GN11]. Daten aus National Nuclear Data Center, information extracted from the NuDat 2 database, <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/> [Nat17]

Abbildung 10.4 (nach Hans Geiger und John Nuttall) zeigt anhand von experimentellen Daten, dass die empirische Theorie stimmt. Man muss also daraus schliessen, dass die Zerfallskonstante umso grösser ist, je grösser die beobachtete kinetische Energie ist.

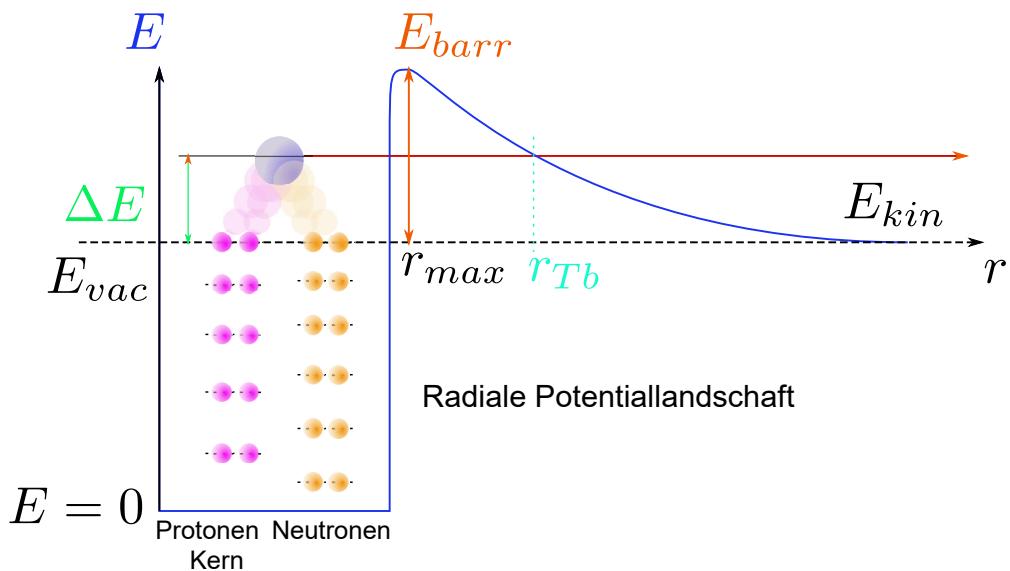


Abb. 10.5.: α -Zerfall, adaptiert aus Demtröder [Dem10, Abb. 3. 16 und 3.17]

Eine mögliche Erklärung ist der Tunneleffekt nach George Gamow [Gam28], wie er in Abbildung 10.5 skizziert ist.

Wir betrachten die Reaktion



Coulomb-Potential (nach Charles Augustin de Coulomb):

$$E_{pot}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_{Kern} Z_\alpha e^2}{r} \quad (10.1.16)$$

Kernradius nach Gleichung (8.1.17) (auch Reichweite der Kernkräfte)

$$r_K = r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

mit $r_0 \approx 1.3 \cdot 10^{-15}$ m = 1.3 fm.

α -Teilchen und Restkern berühren sich wenn

$$r = r_{max} = r_{K,A-4} + r_\alpha \quad (10.1.17)$$

ist. Dann ist die Coulombenergie maximal und die starken Wechselwirkungen sind bei grösserem r unwirksam. Es ist $Z_{TK} = Z - 2$ und $Z_\alpha = 2$ und $A_{TK} = A - 4$ sowie $A_\alpha = 4$.

$$E_{pot}(r_{max}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_{TK} Z_\alpha e^2}{r_0 (A_{TK}^{1/3} + A_\alpha^{1/3})} \quad (10.1.18)$$

Weiter kann mit klassischen Stößen gerechnet werden, also mit reduzierten Massen

$$E_{kin} = E_{kin,TK} + E_{kin,\alpha} = E_{kin} \cdot \frac{m_\alpha}{M_{TK} + m_\alpha} + E_{kin} \cdot \frac{M_{TK}}{M_{TK} + m_\alpha} \quad (10.1.19)$$

und deshalb

$$E_{kin,\alpha} = E_{kin} \cdot \frac{M_{TK}}{M_{TK} + m_\alpha} \quad (10.1.20)$$

E_{kin} kann auch mit Massen ausgedrückt werden

$$E_{kin} = M({}^A_Z \text{X}) c^2 - (M({}^{A-4}_{Z-2} \text{Y}) + M({}^4_2 \alpha)) \quad (10.1.21)$$

Die Tunnelwahrscheinlichkeit für eine Barriere mit konstanter Energie (siehe auch [MG18, Seite 103 ff, Gl. (5.9.15)]) ist

$$\tau \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-\left(2\frac{a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right)} \approx \tau_0 e^{-\left(2\frac{a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right)} \quad (10.1.22)$$

Bei einer nicht konstanten Barriere wird der Exponent durch ein Integral über die Barrierenbreite ersetzt

$$\tau \approx \tau_0 e^{-G} \quad (10.1.23)$$

G heisst Gamow-Faktor [Gam28] (nach George Gamow) und ist für eine konstante Barriere

$G = 2\frac{a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}$. Für eine Barriere mit variabler Potentialhöhe haben wir

$$\begin{aligned}
 G &= 2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{(E_{pot}(r) - E)} dr \\
 &= 2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_{Kern} Z_\alpha e^2}{r} - E \right)} \quad (10.1.24)
 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Integrals unter der Massgabe, dass r_1 der Radius des Kernes ist, r_2 der Ort und bei dem die Coulombenergie gleich E ist (also $r_2 > r_1$), ist

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \cdot \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\arccos \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) - \sqrt{\frac{r_1}{r_2} \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right)} \right] \quad (10.1.25)$$

Wenn $Z_1 = 2$ und $Z_2 = Z - 1$ folgt

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \cdot \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\arccos \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) - \sqrt{\frac{r_1}{r_2} \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right)} \right] \propto \frac{Z-2}{\sqrt{E}} \quad (10.1.26)$$

Abbildung 10.6 ist eine experimentelle Bestätigung des Gamow-Modells (nach George Gamow) des α -Zerfalls, erstellt aus Daten von [Nat17].

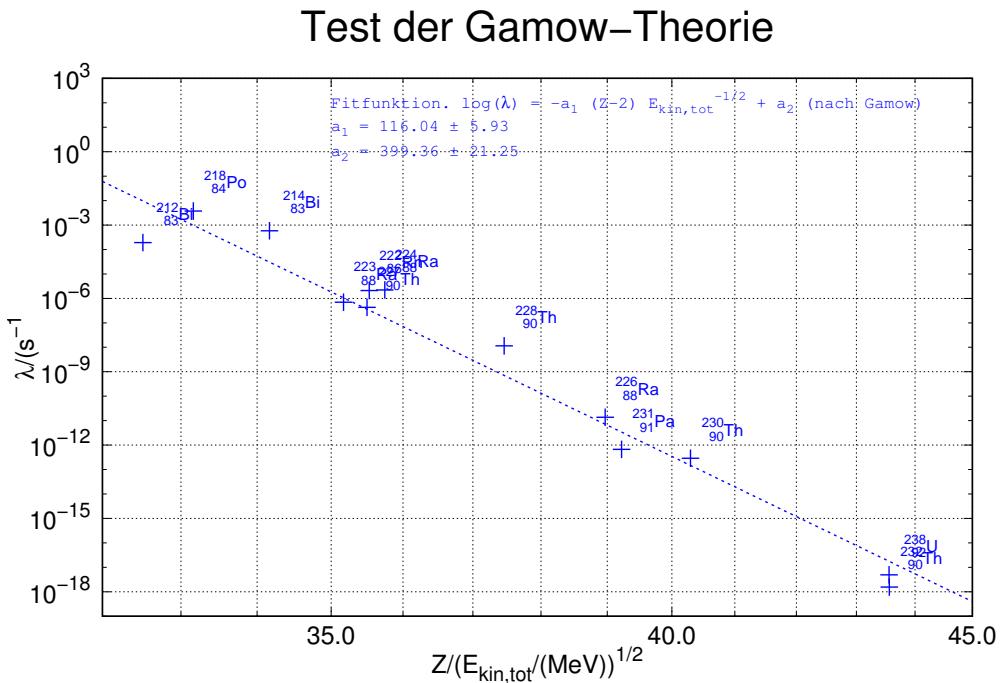


Abb. 10.6.: Gamow-Theorie (nach George Gamow) mit Daten aus National Nuclear Data Center, information extracted from the NuDat 2 database, <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/> [Nat17]

Die Wahrscheinlichkeit einer Emission ergibt sich aus den folgenden Komponenten:

- Der Wahrscheinlichkeit, dass ein α -Teilchen gebildet wird: p_α ,
- der Rate (Stöße/Sekunde) mit der die α -Teilchen die Wand berühren: R_α
- und der Tunnelwahrscheinlichkeit $T \propto \exp(-G)$

Alles zusammengenommen ergibt sich

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\ln(2) t_{1/2}} = p_\alpha R_\alpha T \quad (10.1.27)$$

Die Vorhersage ist:

$$\ln(t_{1/2}) \propto -\ln(\lambda) \propto -G \propto -E_\alpha^{-1/2} \quad (10.1.28)$$

Vergleiche dazu die Abbildung 10.4 mit der Geiger-Nuttall-Beziehung [GN11].

10.1.2. γ -Strahlung

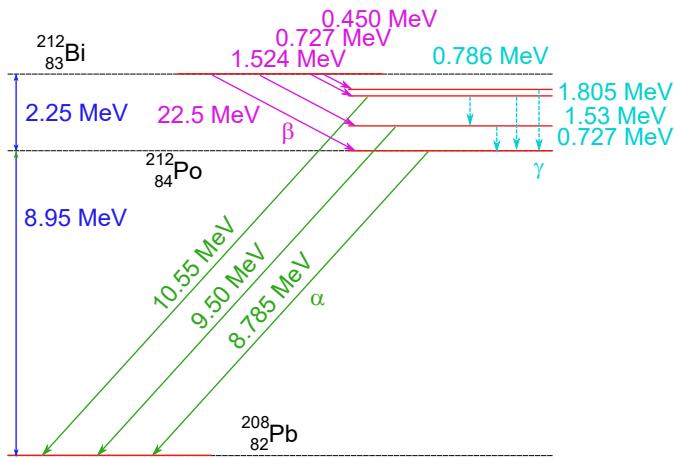


Abb. 10.7.: γ -Strahlung von $^{212}_{84}\text{Po}$ entstanden durch β^- -Zerfall aus $^{212}_{83}\text{Bi}$, adaptiert aus [Dem10, Abb. 3.29] mit Daten der IAEA [Int17]

Abbildung 10.7 zeigt die Energieniveaus beim Zerfall von $^{212}_{83}\text{Bi}$ über den β -Zerfall in angeregte Kernniveaus von $^{212}_{84}\text{Po}$. Diese relaxieren unter Aussendung von γ -Quanten in den Grundzustand. Dieser wie auch angeregte Zustände zerfallen mit α -Teilchen in $^{208}_{82}\text{Pb}$.

Das Beispiel in Abbildung 10.7 zeigt, dass γ -Strahlen entstehen, wenn der Tochterkern in einem energetisch angeregten Zustand gebildet wird, und nicht im Grundzustand.

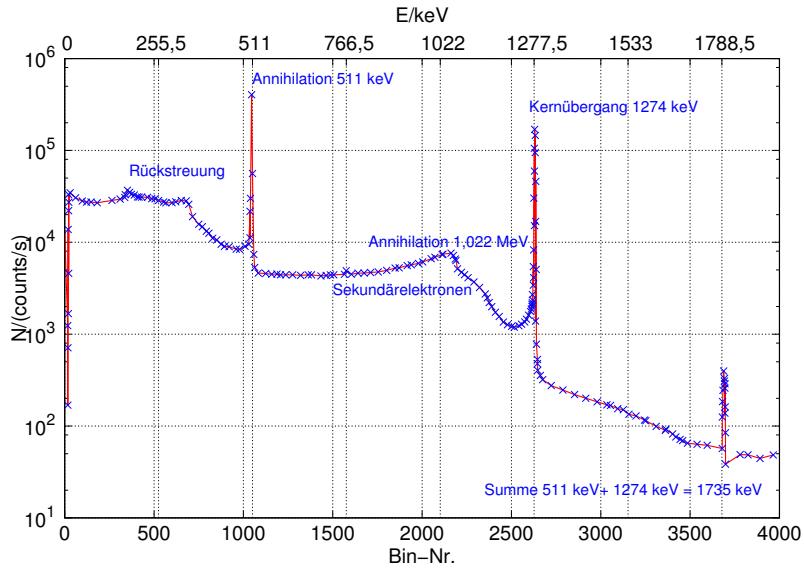
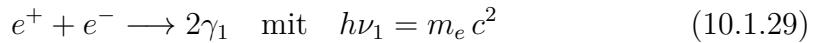


Abb. 10.8.: γ - Spektrum von $^{22}_{10}\text{Ne}$ entstanden durch β^+ -Zerfall aus $^{22}_{11}\text{Na}$, nach Demtröder Band 4, Abb. 3.30 [Dem10]

Abbildung 10.8 zeigt ein typisches γ -Spektrum. Dabei ist nicht nur die erwartete Linie bei 1274 keV zu sehen, sondern auch sogenannte „Vernichtungsstrahlen“ mit zwei γ s in entgegengesetzte Richtungen. Diese treten auf, wenn ein e^- mit einem $e^- = e^+$ reagiert.



Generell treten die Energien

$$h\nu_1, 2h\nu_1, h\nu_\gamma, h\nu_\gamma + h\nu_1, h\nu_\gamma + 2h\nu_1, \dots$$

auf.

10.1.2.1. Multipol-Übergänge

Wir haben gesehen, dass jeder Kern einen Kernspin \mathbf{I} trägt. Wenn ein γ -Quant emittiert wird, müssen die Regeln der Drehimpulserhaltung gelten, also die Auswahlregeln. Das heisst, $\Delta\mathbf{I}$ muss mit dem Drehimpuls des γ -Photons kompensiert werden.

Aus

$$\mathbf{I}_i \longrightarrow \mathbf{I}_f \quad (10.1.30)$$

(i bezeichnet den Anfangszustand und f den Endzustand) folgt, dass für die nach L klassifizierten Moden des elektromagnetischen Spektrums

$$|I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f \quad (10.1.31)$$

gelten muss. Die Multipolentwicklung ergibt sich aus der lokalen Amplitude des

elektromagnetischen Feldes analog zur Multipolentwicklung des elektrostatischen Potentials (siehe z.B. [Mar16], [Jac+89] oder [Wik17])

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho_e(\tilde{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|} d\tilde{\mathbf{r}} \quad (10.1.32)$$

kann analog zu Taylorreihen (Entwicklung nach Potenzen) nach Kugelflächenfunktionen entwickelt werden (siehe auch das Wasserstoffatom in der Atomphysik [MG18])

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \frac{q_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} \quad (10.1.33)$$

mit Entwicklungskoeffizienten, den sphärischen Multipolmomenten

$$q_{\ell,m} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_e(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \tilde{r}^{\ell+1} Y_{\ell,m}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \tilde{r}^2 \sin(\tilde{\theta}) d\tilde{\phi} d\tilde{\theta} d\tilde{r} \quad (10.1.34)$$

Analog kann das elektromagnetische Feld einer Welle in Multipole entwickelt werden. Wir erinnern uns, dass die Amplitude einer sphärischen Kugelwelle durch

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \mathbf{E}_0 \frac{r_0}{r} \quad (10.1.35)$$

gegeben ist, äquivalent zum Fall, dass alle $q_{\ell,m} = 0$ sind ausser $q_{0,0} = Q$. Dann ist

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \quad (10.1.36)$$

Also kann auch die Amplitude einer elektromagnetischen Welle nach Multipolen entwickelt werden (K ist eine vom Einheitensystem abhängige Konstante)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = K \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \frac{\mathbf{E}_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} \quad (10.1.37)$$

mit Entwicklungskoeffizienten, den sphärischen Multipolmomenten

$$\mathbf{E}_{\ell,m} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{E}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \tilde{r}^{\ell+1} Y_{\ell,m}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \tilde{r}^2 \sin(\tilde{\theta}) d\tilde{\phi} d\tilde{\theta} d\tilde{r} \quad (10.1.38)$$

L	2^L	ΔL	Name	Symbol	Paritätserhaltung
0	1	0	Monopol	keines	$0 \rightarrow 0$ verboten
1	2	1	Dipol	E1	nein (-1)
				M1	ja (+1)
2	4	2	Quadrupol	E2	ja (+1)
				M2	nein (-1)
3	8	3	Oktupol	E3	nein (-1)
				M3	ja (+1)
4	16	4	Hexadekupol	E4	nein
				M4	

Tab. 10.1.: Tabelle der Multipolmoden des elektromagnetischen Feldes (nach Demtröder [Dem10, Tab. 3.3])

Tabelle 10.1 zeigt die Bezeichnungen und Entartungen für $L = \ell$. Nach Victor Weisskopf [Wei51] kann die Wahrscheinlichkeit für einen elektrischen Multipolübergang zwischen E_i und E_k im Kern durch

$$A_{ik} \propto \left(\frac{R}{\lambda}\right)^{2L} \quad (10.1.39)$$

beschrieben werden. Dabei ist R die Ausdehnung der Ladungsverteilung und $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega}$. Die Lebensdauer eines Zustandes berechnet sich dann zu

$$\frac{1}{\tau_i} = \sum_{\{k\}} A_{ik} \quad (10.1.40)$$

wobei $\{k\}$ die Menge aller aus dem Zustand $|i\rangle$ zugänglichen energetisch tieferen Zustände $|k\rangle$ ist.

Daraus ergibt sich

$$\tau_i = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{E_\gamma} \frac{1}{S(L)} \left(\frac{\lambda}{R}\right)^{2L} \quad (10.1.41)$$

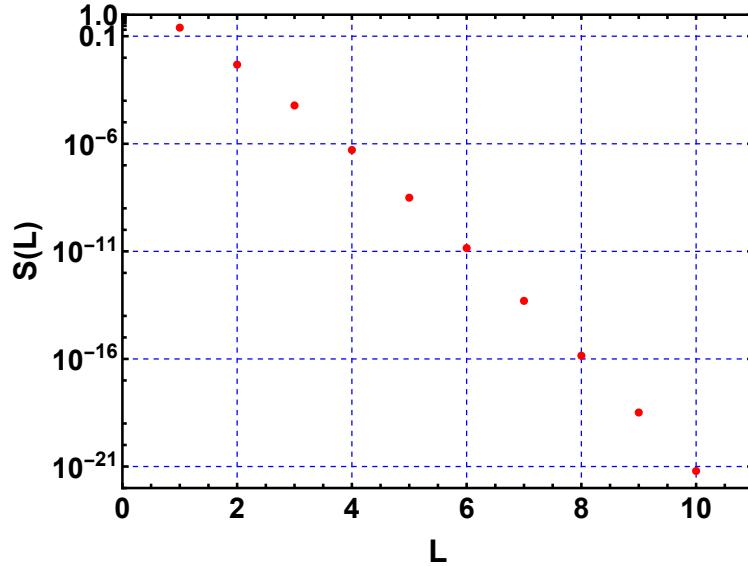
Hier ist

$$\alpha = \frac{1}{137.036} \quad (10.1.42)$$

die Feinstrukturkonstante und $E_\gamma = E_i - E_k$ die Energie des γ -Quants. Weiter ist

$$S(L) = \left(\frac{3}{3+L}\right)^2 \frac{2(L+1)}{L \left[\prod_{n=1}^L (2n+1)\right]^2} \quad (10.1.43)$$

nach W. Demtröder [Dem10, Gl. (3.51)] das statistische Gewicht.

**Abb. 10.9.:** Statistische Gewichte $S(L)$ für Multipolübergänge

Aus Abbildung 10.9 ersieht man, dass nur die einfachsten Multipolübergänge beobachtbar sind. Für Kerne mit $I = 0$ existieren nur Monopole. Das heisst, ein γ -Zerfall ist nicht möglich, da dazu $I > 0$ benötigt wird, damit ein $\Delta I \neq 0$ existieren kann. Dies ist analog zu Antennen für elektromagnetische Strahlung. es braucht einen zeitlich wechselnden elektrischen Dipol, eine Ladung alleine und in Ruhe erzeugt keine Strahlung.

10.1.2.1.1. Multipol-Übergänge und reziproke Übergangswahrscheinlichkeiten (Lebensdauern)

E_γ	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$
0.1 MeV	$1 \cdot 10^{-13}$ s	$1 \cdot 10^{-6}$ s	$1 \cdot 10^2$ s	$1 \cdot 10^9$ s
1 MeV	$1 \cdot 10^{-15}$ s	$1 \cdot 10^{-10}$ s	$1 \cdot 10^{-5}$ s	1 s
10 MeV	$1 \cdot 10^{-18}$ s	$1 \cdot 10^{-15}$ s	$1 \cdot 10^{-12}$ s	$1 \cdot 10^{-9}$ s

Tab. 10.2.: Übergangswahrscheinlichkeiten von Multipolübergängen (nach Demtröder [Dem10, Tab. 3.4])

Analoges zeigt Tabelle 10.2. Weiter ist die Parität der Wellenfunktion wichtig. Darunter versteht man ob sich das Vorzeichen der Wellenfunktion bei der Operation $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ändert ($\Pi = -1$) oder nicht ($\Pi = 1$).

Für magnetische Dipolübergänge berechnet sich die Zerfallszeiten zu

$$\frac{1}{\tau_m} \propto E_\gamma^{2L+1} A_{ik}^{(m)^{2(L-1)/3}} \quad (10.1.44)$$

Verglichen mit elektrischen Multipolübergängen

$$\frac{1}{\tau_e} \propto E_\gamma^{2L+1} A_{ik}^{(m)^{2L/3}} \quad (10.1.45)$$

ergibt sich

$$\frac{\tau_m}{\tau_e} = \frac{A_{ik}^{(m)}}{A_{ik}^{(m)}} \approx 4.5 \cdot A^{2/3} \quad (10.1.46)$$

Magnetische Multipolübergänge mit niedriger Ordnung L sind deshalb weniger wahrscheinlich.

10.1.2.2. Innere Konversion

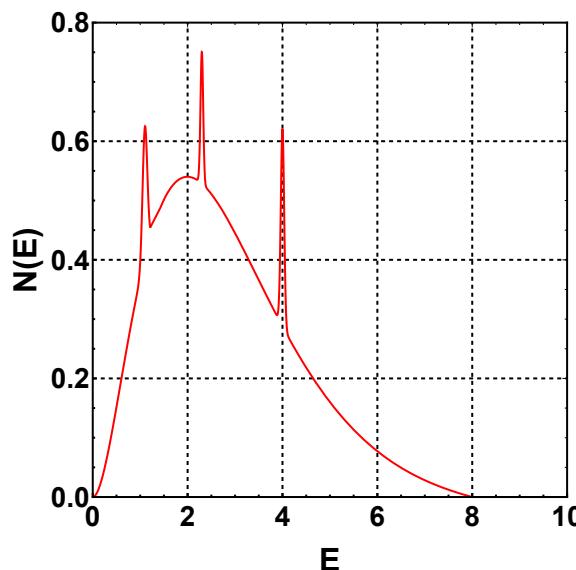


Abb. 10.10.: Skizze des β -Spektrums bei innerer Konversion

Unter innerer Konversion versteht man die Reaktion eines angeregten Kernes, bei dem ein ionisiertes Atom entsteht.



Dieser Prozess heisst auch innerer Photoeffekt. Es entsteht kein Neutrino, da das Elektron aus der Elektronenhülle entfernt wurde und nicht neu gebildet wird.

Für die Energie ergibt sich

$$E_{kin}(e^-) = E({}^A_Z X^*) - E({}^A_Z X^+) - E_B(e^-) \quad (10.1.48)$$

${}^A_Z X^*$ entsteht häufig als Resultat eines β -Zerfalls. Die Signatur dieses Prozesses ist ein kontinuierliches Spektrum des β -Zerfalls überlagert mit einem Linienspektrum (siehe Abbildung 10.10).

10.1.2.3. Innere Paarbildung

Innere Paarbildung liegt zum Beispiel bei der Reaktion



vor.

10.1.3. Isomere

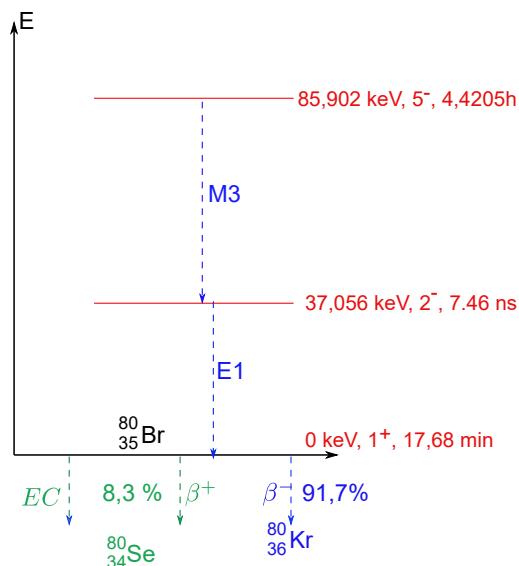


Abb. 10.11.: Isomerzustand ${}^{80}_{35} Br^*$ des instabilen ${}^{80}_{35} Br$ -Grundzustandes, Daten aus [Int17]. EC heisst Electron Capture, Elektroneneinfang. Neben den Niveaus sind die Energien bezogen auf den Grundzustand des ${}^{80}_{35} Br$ angegeben, dann ist I^p , also den Kernspin und die Parität sowie die Lebensdauer τ .

Abbildung 10.11 zeigt mit Daten aus [Int17] die Niveaus und die Lebensdauern und Multipolmoden des Zerfalls des ${}^{80}_{35} Br^*$. Abbildung 10.12 zeigt das Niveau-Schema generiert aus der IAEA-Website.

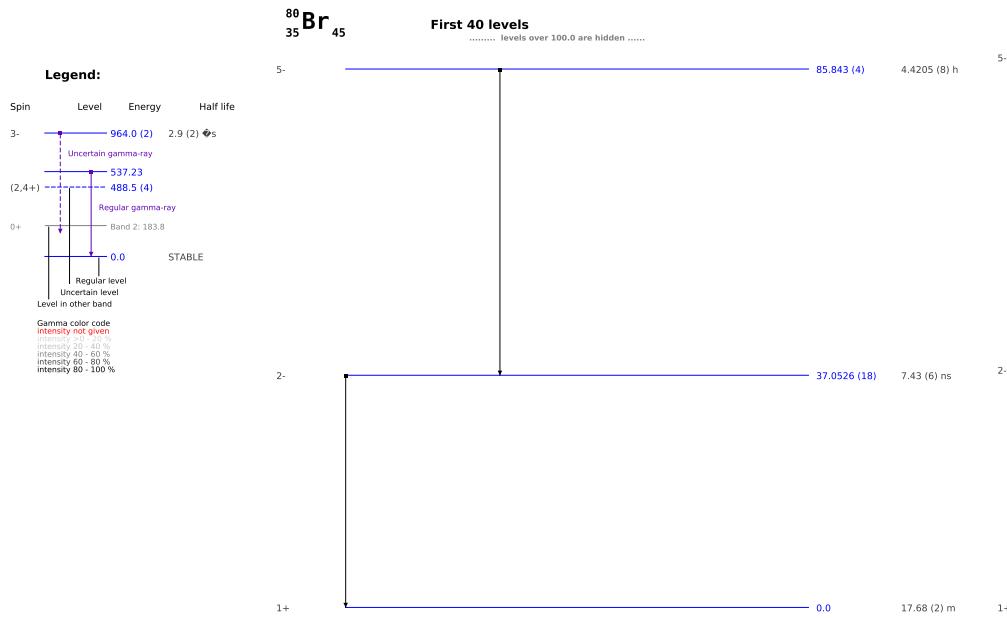


Abb. 10.12.: Niveau-Schema erzeugt mit der IAEA-Website und ihren Tools [Int17].

10.1.4. β -Strahlung

Der β -Zerfall ist ein Beispiel für die Wirkung der schwachen Wechselwirkung und für die Symmetrieverletzung der Parität. Beim β -Zerfall ändert sich die Zahl der Nukleonen A nicht. Beispielreaktionen sind



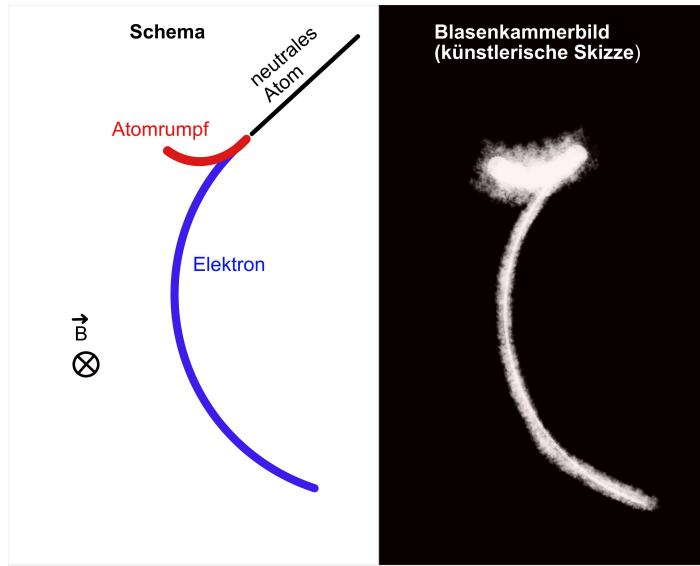


Abb. 10.13.: β -Zerfall eines ruhenden ${}^6_2\text{He}$ -Kerns, inspiriert von Demtröder Band 4, Abb. 3.20 [Dem10]

Abbildung 10.13 zeigt eine Messung eines β -Zerfalls in einer Blasen- oder Nebelkammer. Magnetfelder bewirken über die Lorentzkraft eine Ablenkung geladener Teilchen. Im nichtrelativistischen Falle ist

$$|\mathbf{F}_z| = m \frac{v^2}{r} = |\mathbf{F}_L| = q |\mathbf{v} \times \mathbf{B}| \stackrel{\mathbf{v} \perp \mathbf{B}}{=} q v B \quad (10.1.51)$$

und daraus

$$r = \frac{m v}{q B} = \frac{\sqrt{2m E_{kin}}}{q B} \quad (10.1.52)$$

oder

$$|\mathbf{p}| = q r |\mathbf{B}| \quad (10.1.53)$$

10.1.4.1. Doppelzerfälle

Doppelzerfälle sind Reaktionen von ${}^A_Z\text{X}$ nach ${}^{A-4}_{Z-1}\text{Y}$, die über zwei Wege ablaufen können.



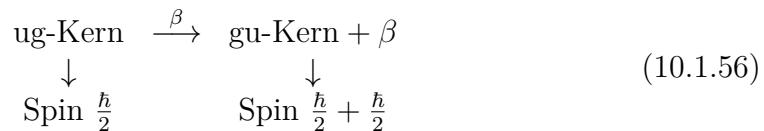
In diesem Reaktionsschema sind die Energien der α -Zerfälle bekannt (2-Körper-Zerfälle), die Energien der beiden β^- -Zerfälle aber nicht (kontinuierliches Spektrum). Experimentell gilt aber:

$$E_{max}(\beta_1^-) + E_{kin}(\alpha_1) = E_{max}(\beta_2^-) + E_{kin}(\alpha_2) = \text{const} = 11.2 \text{ MeV} \quad (10.1.55)$$

unabhängig vom Weg. Das heisst, dass es beim β -Zerfall ein zweites Teilchen geben muss, dessen kinetische Energie verschwinden kann und dessen Ruhemasse sehr klein oder null sein muss.

Durch den β -Zerfall wird aus einem gu-Kern ein ug-Kern. Geradzahlige Nukleonen haben einen ganzzahligen Kernspin, oftmals auch 0. Ungeradzahlige Nukleonen führen zu einem halbzahligem Kernspin, mindestens aber $\hbar/2$.

Wir haben also



Das heisst, wenn wir an Erhaltungssätze glauben, dann ist der β -Zerfall verboten, ausser es existiert ein weiteres elektrisch neutrales sehr leichtes Teilchen mit Spin $\hbar/2$.

Aus Neutral für ohne Ladung und „-ino“ für klein ergibt sich dann das Neutrino, ν .

Wie es Elektron und Positron, also β^- und $\beta^+ = \overline{\beta^-}$, also Teilchen und Antiteilchen, gibt es Neutrino ν und Antineutrino $\overline{\nu}$.

Neutrinos und Elektronen gehören zur gleichen Klasse der Leptonen. Die Zahl der Leptonen ist erhalten, also muss

- mit einem Elektron, einem β^- ein Antineutrino $\overline{\nu}$ und
- mit einem Positron, einem β^+ ein Neutrino ν entstehen.

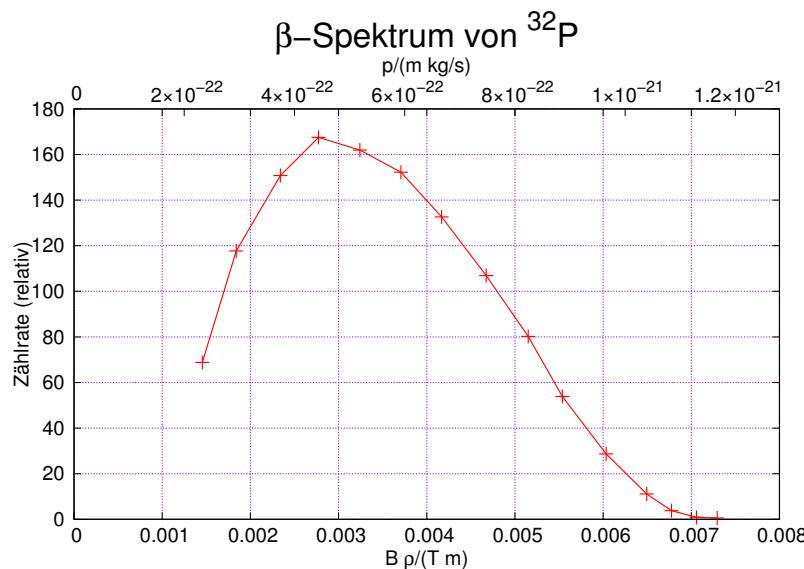


Abb. 10.14.: β -Spektrum von ^{32}P nach Lyman [Lym37]

Wie Abbildung 10.14 zeigt, beobachtet man beim β -Zerfall immer ein kontinuierliches Spektrum und nie ein Linienspektrum. Der β -Zerfall kann deshalb kein Zweikörperzerfall sein, mindestens drei Objekte, die Energie und Impuls tragen können, müssen involviert sein.

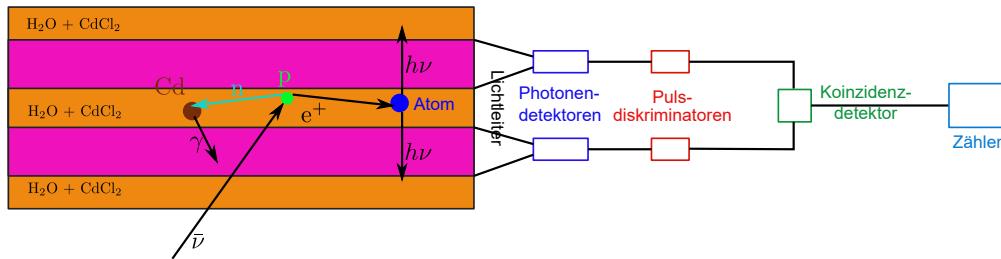


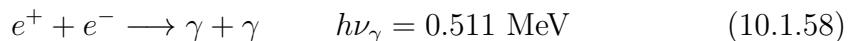
Abb. 10.15.: Nachweis des Antineutrinos, inspiriert von Demtröder Band 4, Abb. 3.21 [Dem10]

Abbildung 10.15 zeigt eine Möglichkeit zum Nachweis von Neutrinos. Die Kombination aus CdCl_2 gelöst in H_2O wird verwendet, um die Detektion von Neutrinos zu vereinfachen.

Das Neutrino reagiert (sehr selten, aber doch ab und zu) mit einem Proton aus dem Wasser.



Dieses Positron reagiert weiter mit einem Elektron, es ANNIHILIERT sich:



Es gibt noch einen zweiten Kanal, den über CdCl_2 . Das Neutron reagiert nach der folgenden Reaktionsgleichung mit $^{113}_{48}\text{Cd}$ (Halbwertszeit $8 \cdot 10^{15}$ a [Int17]):



Dabei bedeutet $^{114}_{48}\text{Cd}^*$ dass der Kern $^{114}_{48}\text{Cd}$ in einem angeregten Kernzustand ist. Die Detektion läuft nun so:

1. Detektiere ein γ bei 511 keV.
2. Detektiere ein zeitverzögertes γ aus der Reaktion mit $^{113}_{48}\text{Cd}$.

Nur diese Kombination garantiert, dass ein Neutrino die Reaktion ausgelöst hat und nicht ein anderer Prozess.

In Abbildung 10.15 sind rechts die einzelphotonenzählenden Detektoren mit einer nachgelagerten Schaltung zur Pulsformung und -diskrimination und einer Koinzidenzschaltung gezeigt.

10.1.4.2. β -Zerfall und Positronenemission

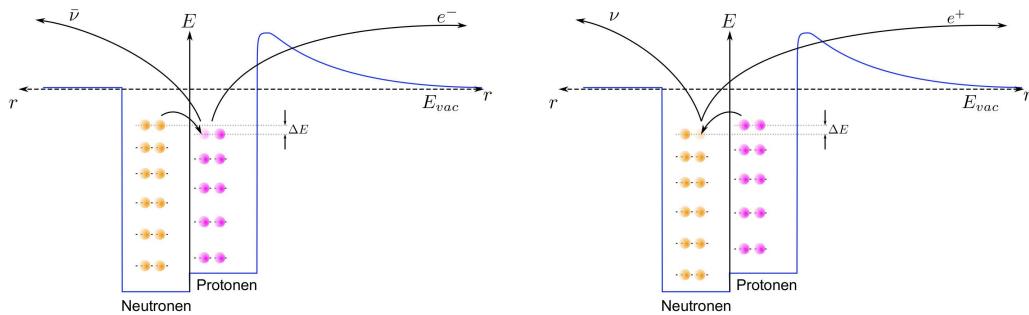


Abb. 10.16.: Umwandlung von Neutronen in Protonen (links) und umgekehrt (rechts), inspiriert von Demtröder Band 4, Abb. 3.22 und Abb. 3.23 [Dem10]

10.1.4.2.1. Umwandlung von n in p Die Ausführungen beziehen sich auf Abbildung 10.16, linke Seite.



$$\Delta E = M({}^A_Z X) - M({}^{A+1}_{Z+1} Y) c^2 \geq (m_{e^-} + m_{\bar{\nu}_e}) c^2 + E_{kin} \quad (10.1.60c)$$

Freie Neutronen, also Neutronen, die nicht in einem Kern sind, zerfallen mit einer Zeitkonstante von $\tau_n = \frac{t_{1/2}}{\ln(2)} = 879.4(4)$ s ($t_{1/2} = 1268.7(8)$ s ([Zyl+20] und [Par20a])) mit der Reaktion



Damit ist auch klar, dass die Masse des Protons mindestens $c^2 \cdot 511$ keV leichter ist als die Masse des Neutrons.

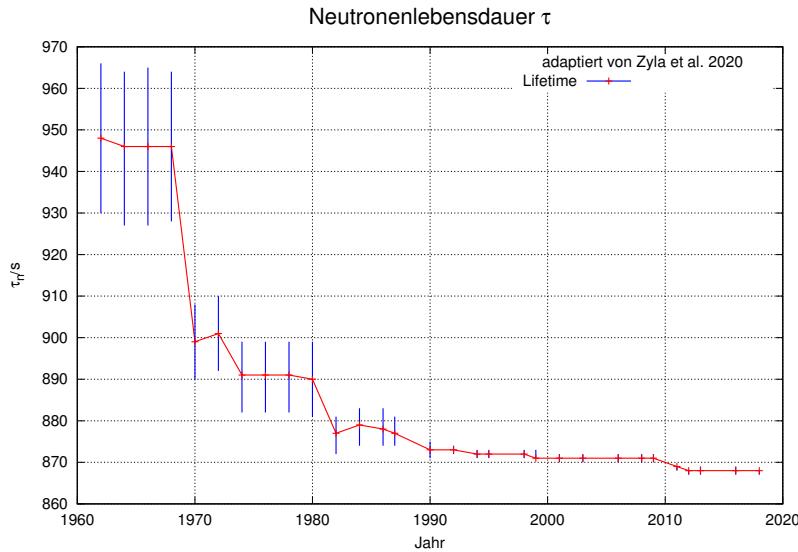


Abb. 10.17.: Zeitliche Entwicklung des Messwertes der Neutronenlebensdauer nach P. A. Zyla u. a., „Review of Particle Physics“ [Zyl+20].

Abbildung 10.17 zeigt die zeitliche Entwicklung der Schätzwerte und der Genauigkeit der LEBENSDAUER DER NEUTRONEN.

10.1.4.2.2. Umwandlung von p in n Die Ausführungen beziehen sich auf Abbildung 10.16, rechte Seite.

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e + E_{kin} \quad (10.1.62a)$$

$${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-1}_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e \quad (10.1.62b)$$

$$\Delta E = M({}^A_Z X) - M({}^{A-1}_{Z-1} Y) c^2 \geq (m_{e^+} + m_{\nu_e}) c^2 + E_{kin} \quad (10.1.62c)$$

Bei diesen Reaktionen sind die Baryonenzahl B und die Leptonenzahl L erhalten.

10.1.4.2.3. Baryonenzahl und Leptonenzahl bei β -Zerfällen Sowohl Neutronen wie Protonen sind Baryonen. Jedes Teilchen zählt als $B = 1$. Elektron und Neutrino sind Leptonen, auch hier zählt jedes Teilchen $L = 1$. Positron und Antineutrino sind Antileptonen, ihre Leptonenzahl ist $L = -1$.

In Gleichung (10.1.60a) sind dies auf der linken Seite ein Neutron und keine Leptonen, also ist

$$B = 1 \text{ und } L = 0 \quad (10.1.63)$$

Auf der rechten Seite haben wir ein Proton, also $B = 1$, ein Elektron ($L = 1$) und ein Antineutrino ($L = -1$). In der Summe also auch

$$B = 1 \text{ und } L = 0 \quad (10.1.64)$$

In Gleichung (10.1.62a) ist die Situation analog, nur dass hier das Neutrino das Lepton und das Positron das Antilepton ist.

10.1.4.3. Fermi-Theorie des β -Zerfalls

Enrico Fermi publizierte 1933 eine Theorie des β -Zerfalls basierend auf quantenmechanischen Zuständen im Inneren der Kerne und für die emittierten Elektronen [Fer33; Fer34]. Die folgende Argumentation folgt Demtröder [Dem10].

Enrico Fermi geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit ein Elektron (oder allg. ein Teilchen) bei der kinetischen Energie E_e im Intervall dE_e zu finden durch

$$W(E_e)dE_e = g_e g_{\bar{\nu}} W_{if} dE_e \quad (10.1.65)$$

ist. dabei sind $g_e(E_e)$ und $g_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}})$ die statistischen Gewichte des Elektrons und des Antineutrinos. Mit statistischen Gewichten ist dabei die Anzahl der bei der Energie $p_j^2/(2m)$ ($j \in \{e, \bar{\nu}\}$) zugänglichen Zustände gemeint. W_{if} ist die Wahrscheinlichkeit (das Matrixelement) für den Übergang des Ausgangszustandes (i : initial state) in den Endzustand (f : final state), also für den Übergang ${}^A\text{X} \rightarrow {}^{A+1}\text{Y}$.

Die Anzahl zugänglicher Zustände für grosse Impulse $p \gg 0$ ist proportional zum Volumen einer Kugelschale mit der Dicke dp und dem Radius p , also

$$g = 4\pi p^2 dp \quad (10.1.66)$$

wobei natürlich relativistisch die Gesamtenergie des Elektrons $E = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_e^2}$ und seine kinetische Energie $E_e = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_e^2} - m_e c^2$ ist. Mit m_e bezeichnen wir hier die Ruhemasse des Elektrons. Die Ableitungen sind gleich, also $dE = c^2 p/E = dE_e$ ist. Den unbekannten Proportionalitätsfaktor können wir am Ende über eine Normierung bestimmen. Damit können die Energie- in Impulsintervalle umgerechnet werden.

Wir wissen, dass wir drei Zerfallsprodukte haben. Da die Gesamtenergie gegeben ist, kann die Energie von zwei Objekten (in Grenzen) und die Richtung der Impulse frei gewählt werden. Hier nehmen wir diese Freiheit für p_e und $p_{\bar{\nu}}$ in Anspruch.

$$g_e = 4\pi p_e^2 dp_e \quad (10.1.67a)$$

$$g_{\bar{\nu}} = 4\pi p_{\bar{\nu}}^2 dp_{\bar{\nu}} \quad (10.1.67b)$$

Aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung für die Gesamtenergie $E_{\bar{\nu}} = \sqrt{m_{\bar{\nu}}^2 c^4 + c^2 p_{\bar{\nu}}^2}$ erhalten wir für kleine Massen $m_{\bar{\nu}} \ll p_{\bar{\nu}}/c$

$$E_{\bar{\nu}} = c p_{\bar{\nu}} \quad (10.1.68)$$

Wenn $E_0 = E_{\bar{\nu}} + E_e$ die für das Elektron und das Antineutrino insgesamt zur Verfügung stehende kinetische Energie ist, gilt

$$p_{\bar{\nu}}^2 = \frac{1}{c^2} (E_0 - E_e)^2 \quad (10.1.69)$$

Da p_e und die kinetische Energie E_e in einer funktionellen Abhängigkeit stehen, kann mit einem Korrekturfaktor a_1 die Wahrscheinlichkeit aus Gleichung (10.1.65) mit den Definitionen aus den Gleichungen (10.1.67) auch so geschrieben werden:

$$W(p_e)dp_e = a_1 W_{if} p_e^2 p_\nu^2 dp_e = a_1 W_{if} p_e^2 \frac{1}{c^2} (E_0 - E_e)^2 dp_e \quad (10.1.70)$$

Aus der bekannten relativistischen Energie-Impulsbeziehung für die Gesamtenergie $E = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_e^2}$ erhalten wir durch Ableiten mit $dE = dE_e$ für die kinetische Energie

$$dE = dE_e = \frac{c^2 p_e}{\sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_e^2}} dp_e = \frac{c^2 p_e}{E} dp_e \implies E dE_e = E dE = c^2 p_e dp_e \quad (10.1.71)$$

und andererseits

$$p_e = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_e^2 c^4} \quad (10.1.72)$$

Wir teilen in Gleichung (10.1.70) $p_e^2 dp_e$ in einen Faktor p_e (Gleichung (10.1.72)) und einen Faktor $p_e dp_e = \frac{1}{c^2} E dE_e$ (Gleichung (10.1.71)) auf. Wir berücksichtigen Gleichung (10.1.69) für p_ν^2 und schieben weiter alle konstanten Faktoren (z.B. c) inklusive a_1 in den Faktor a_2 . Wir erhalten dann

$$W(E_e) dE_e = a_2 W_{if} E \sqrt{E^2 - m_e^2 c^4} (E_0 - E_e)^2 dE_e \quad (10.1.73)$$

Wir ersetzen nun die Gesamtenergie $E = E_e + m_e c^2$ durch die messbare kinetische Energie E_e und erhalten für die Zählrate $N(E_e)$ im Energieintervall dE_e (und der Konstanten a_3) mit $E^2 - m_e^2 c^4 = (E_e + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4$

$$N(E_e) dE_e = a_3 W_{if} (E_e + m_e c^2) \sqrt{E_e^2 + 2m_e c^2 E_e} (E_0 - E_e)^2 dE_e \quad (10.1.74)$$

Wir können Gleichung (10.1.74) für kinetische Energien $E_e < E_0 \ll m_e c^2$ um den Punkt E_0 in eine Reihe entwickeln und erhalten

$$\begin{aligned} N(E_e) dE_e &= \left(a_3 W_{if} (m_e c^2 + E_0) \sqrt{E_0^2 + 2c^2 m_e E_0} \cdot (E_0 - E_e) \right. \\ &\quad \left. + O((E_e - E_0)^2) \right) dE_e \\ &= \left(a_3 W_{if} m_e^2 c^4 \left(1 + \frac{E_0}{m_e c^2} \right) \sqrt{\left(\frac{E_0}{m_e c^2} \right)^2 + 2 \frac{E_0}{m_e c^2} \cdot (E_0 - E_e)} \right. \\ &\quad \left. + O((E_e - E_0)^2) \right) dE_e \quad (10.1.75) \end{aligned}$$

E_0 , a_3 , m_e , c und W_{if} sind alles Konstanten, so dass die Gleichung letztlich wie

$$N(E_e) dE_e \approx a_4 (E_0 - E_e) \quad (10.1.76)$$

Damit ergibt sich mit Gleichung (10.1.70) die Vorhersage

$$\sqrt{\frac{N(p_e)}{p_e^2}} \propto E_0 - E_e \quad (10.1.77)$$

Diese Überlegung steckt hinter der Darstellung in Abbildung 10.18 nach Enrico Fermi und Franz Kurie.

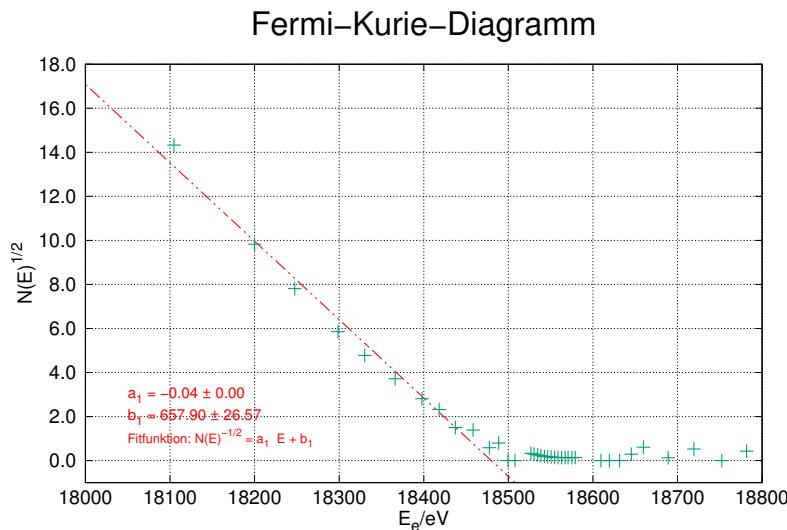


Abb. 10.18.: Fermi-Kurie-Diagramm des β -Zerfalls von ${}^3\text{H}$, nach [Wei+93]

Eine genaue Analyse der maximal beobachteten Elektronenenergie kann zu Aussagen über die Neutrinomasse führen. Abbildung 10.19 zeigt dazu einen Ausschnitt aus Abbildung 10.18.

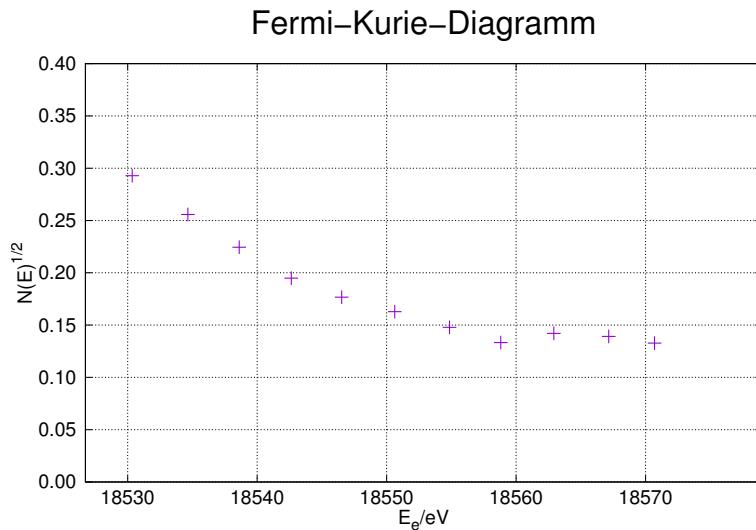


Abb. 10.19.: Fermi-Kurie-Diagramm des β -Zerfalls von ${}^3\text{H}$, nach [Wei+93]

Die Abweichung zu hohen Energien kann unter anderem von der nicht verschwin-

denden Dunkelzählrate der Detektoren herrühren.

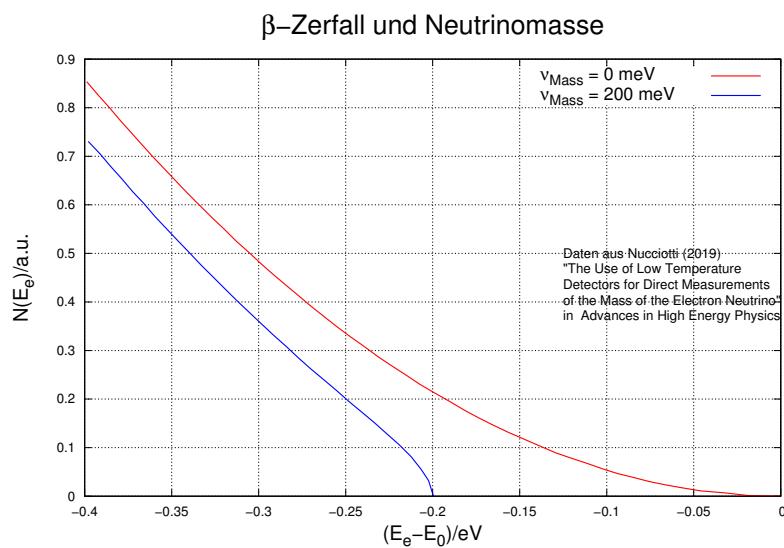


Abb. 10.20.: Erwarteter Verlauf der Zahlendichte von Elektronen bei verschwindender Neutrinomasse und bei $m_{\nu_e} = 200 \text{ meV}$ (Daten aus [Nuc16, Fig. 2]).

Wenn das Elektronneutrino ν_e eine Masse hätte, würde das gemessene Spektrum der Elektronen in der β -Strahlung wie in Abbildung 10.20 aussehen. Die Übersichtsartikel „The Use of Low Temperature Detectors for Direct Measurements of the Mass of the Electron Neutrino“ von A. Nucciotti [Nuc16] und „Current Direct Neutrino Mass Experiments“ G. Drexlin u. a. [Dre+13] geben mehr Details und Informationen.

10.1.4.4. K-Einfang

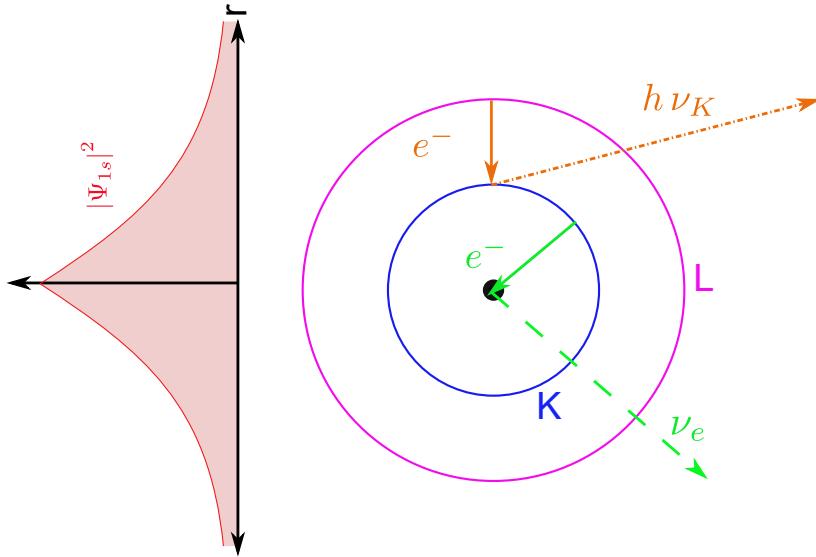


Abb. 10.21.: K-Einfang, nach Demtröder [Dem10, Band 4, Abb. 3.27]

Beim K-EINFANG nach Abbildung 10.21 reagiert ein Elektron im Kern mit einem Proton zu einem Neutron. Dies ist möglich, da der innerste Zustand, der Grundzustand der Elektronen im Coulomb-Potential, am Ort des Kerns eine nicht verschwindende Amplitude hat.

Im Kern gibt es die folgende Reaktion



In einem zweiten Schritt wird das fehlende Elektron in der K-Schale durch eines z.B. aus der L-Schale ersetzt, unter Aussendung eines γ -Quants mit einer wohldefinierten Energie.

Es gilt dann

$$\Delta E = \Delta M c^2 > E_{B,e}(1s) \geq h\nu_k \quad (10.1.79)$$

Weiter ist auch

$$\Delta E = E_{kin}({}^{A-1}_{Z-1} Y) + E_{kin}(\nu_e) \quad (10.1.80)$$

Dabei ist, wie bei jedem 2-Körper-Stoss die kinetische Energie des leichten Teilchens (das ν_e) viel grösser als die kinetische Energie des schwereren Teilchens, also

$$E_{kin}(\nu_e) \gg E_{kin}({}^{A-1}_{Z-1} Y) \quad (10.1.81)$$

10.1.4.5. Energiebilanzen und Zerfallstypen

β^- -Zerfall

$$\Delta M = M\left({}^A_Z X\right) - M\left({}^{A+1}_{Z+1} Y^+\right) > m_e \quad (10.1.82)$$

Zerfall in das positive Ion ${}^{A+1}_{Z+1} Y^+$



$$\left[M\left({}^A_Z X\right) - M\left({}^{A+1}_{Z+1} Y^+\right) \right] \cdot c^2 = m_e c^2 + E_{kin}(e) + E_{kin}(\bar{\nu}_e) \quad (10.1.84)$$

β^+ -Zerfall

$$\Delta M = M\left({}^{A+1}_{Z+1} Y^+\right) - M\left({}^A_Z X\right) > m_e \quad (10.1.85)$$

Zerfall des positiven Ions ${}^{A+1}_{Z+1} Y^+$



$$\left[M\left({}^{A+1}_{Z+1} Y^+\right) - M\left({}^A_Z X\right) \right] \cdot c^2 = E_{kin}(e^+) + E_{kin}(\nu_e) + m_e c^2 \quad (10.1.87)$$

K-Einfang

$$\Delta M < 0 \quad \text{und} \quad |\Delta M| < m_e \quad (10.1.88)$$



$$\begin{aligned} \left[M\left({}^{A+1}_{Z+1} Y^+\right) + m_e - M\left({}^A_Z X\right) \right] \cdot c^2 = \\ \left[M\left({}^{A+1}_{Z+1} Y\right) - M\left({}^A_Z X\right) \right] \cdot c^2 = E_{kin}(\nu_e) + h \cdot \nu_K \end{aligned} \quad (10.1.90)$$

10.1.5. Zerfallsketten

Kerne zerfallen mit den möglichen Moden (α -Teilchen, β -Teilchen, oder was sonst möglich ist) bis am Ende der Kette ein stabiler Kern erscheint. Die Kerne jenseits von Blei ($Z > 82$) zerfallen entlang von vier verschiedenen Zerfallsketten.

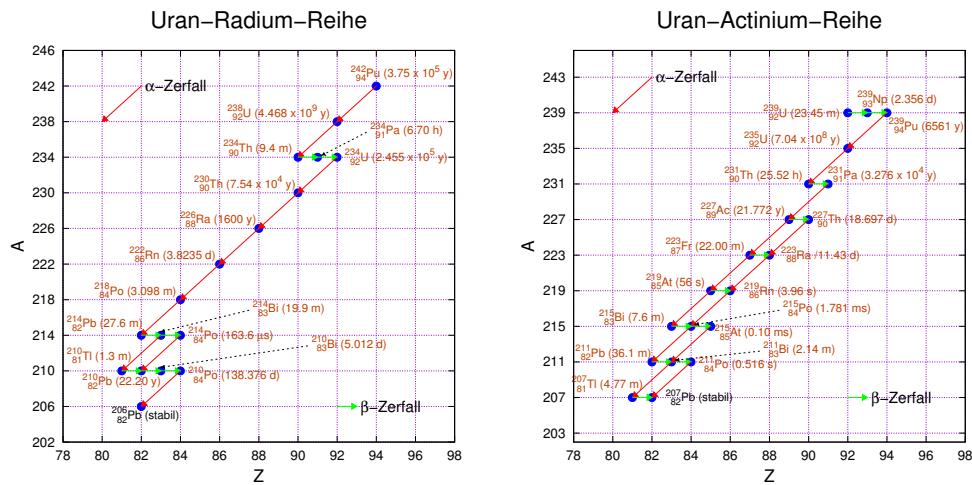


Abb. 10.22.: Zerfallsreihen von Uran nach Radium (links) und Actinium (rechts). Daten aus [Dem10, Abb. 3.12] und National Nuclear Data Center, information extracted from the NuDat 2 database, <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/> [Nat17]

Die linke Seite der Abbildung 10.22 zeigt die URAN-RADIUM-REIHE, die über ^{238}U läuft und bei ^{205}Pb endet. Ein α -Zerfall lässt $N - Z \stackrel{\alpha}{=} \text{const}$. Da die Steigung nicht ganz stimmt, korrigieren β -Zerfälle die Lage. Wenn zwischen zwei Kernen zwei Wege möglich sind, also eine Schleife vorhanden ist, erlaubt dies, die Theorien zweier Zerfallsarten gleichzeitig zu testen. Z.B. zerfällt ^{214}Bi sowohl über ^{214}Po nach ^{210}Bi wie auch über ^{210}Pb . Im ersten Fall folgte auf einen β -Zerfall ein α -Zerfall, im zweiten Fall folgt auf den α -Zerfall der β -Zerfall. Die rechte Seite der Abbildung 10.22 zeigt die URAN-ACTINIUM-REIHE, die über das aus der Kerntechnik bekannte Isotop ^{235}U nach ^{207}Pb läuft. Hier gibt es 5 elementare Schleifen und 3 zusammengesetzte Schleifen.

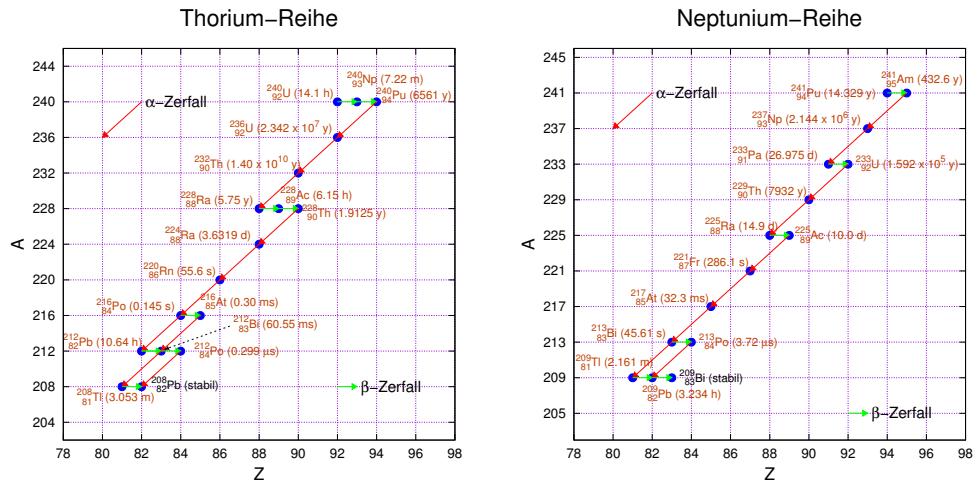


Abb. 10.23.: Zerfallsreihen von Uran nach Thorium (links) und Neptunium (rechts). Daten aus [Dem10, Abb. 3.12] und National Nuclear Data Center, information extracted from the NuDat 2 database, <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/> [Nat17]

Die linke Seite von Abbildung 10.23 zeigt die URAN-THORIUM-REIHE, die über $^{236}_{92}\text{U}$ nach $^{208}_{82}\text{Pb}$ läuft. In dieser Zerfallsreihe gibt es zwei Schlaufen. Die rechte Seite von Abbildung 10.23 zeigt die NEPTUNIUM-REIHE. Sie läuft über $^{237}_{93}\text{Np}$ nach $^{209}_{82}\text{Pb}$. Im Gegensatz zu den anderen drei Reihen enthält diese kein technisch wichtiges Uranisotop. Sie zeigt auch nur eine Schlaufe.

Die Zielkerne der vier Reihen sind $^{205}_{82}\text{Pb}$, $^{207}_{82}\text{Pb}$, $^{208}_{82}\text{Pb}$ und $^{209}_{83}\text{Bi}$.

11. Mensch und Strahlung

Bei der Wechselwirkung von Strahlung mit Materie können einerseits quantitative physikalische Größen (wie Energieeintrag pro Sekunde) oder mit der biologischen Wirkung gewichtete Größen verwendet werden.

Eine erste physikalische Größe ist die TEILCHENFLUSSDICHTE:

$$\Phi = \frac{d^2 N}{dA \cdot dt} \quad [\Phi] = 1 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (11.0.1)$$

Sie gibt an, wie viele Teilchen pro Zeiteinheit und Einheitsfläche auftreten. Der Teilchenfluss ist im Fernfeld im Abstand r immer proportional zu r^{-2} (Erhaltung des Teilchenfluxes).

Mit der AKTIVITÄT wird die Gesamtzahl der Zerfälle in einer Probe angegeben.

$$[A] = 1 \text{ Bq} = 1 \text{ Zerfälle s}^{-1} = 1 \text{ s}^{-1} \quad (11.0.2)$$

Diese Größe ist unabhängig vom Volumen oder der Masse. Die Einheit ist benannt nach **Henri Becquerel**.

Ionisierende Strahlung, die absorbiert wird, deponiert eine gewisse Energie pro Masse. Dies wird durch die ENERGIEDOSIS beschrieben:

$$[D] = 1 \text{ Gy} = 1 \text{ J kg}^{-1} \quad (11.0.3)$$

Die Einheit ist benannt nach **Louis Gray**. Die Wirkung ionisierender Strahlung auf Zellen und Erbgut ist abhängig von der Strahlungsart. Die DOSISLEISTUNG

$$H = D \cdot Q \quad [H] = 1 \text{ Sv} \quad (11.0.4)$$

Diese Einheit ist benannt nach **Rolf Sievert**. Die Dosisleistung ist mit der Energiedosis über den Gewichtsfaktor Q verknüpft (Siehe Tabelle 11.1).

Q	Strahlungsart
1	Röntgen-, Gammastrahlen und Elektronen
2.3	thermische Neutronen
10	schnelle Neutronen, Protonen und einfach geladene Ionen
20	α -Teilchen und schwere Ionen

Tab. 11.1.: Gewichtsfaktoren für ionisierende Strahlung

Nach K. Stierstadt [Sti10a, Abb. 5.10] setzt sich die NATÜRLICHE STRAHLENBELASTUNG in Deutschland aus den folgenden Komponenten zusammen:

0.9 mSv a⁻¹ Radon in Gebäuden

0.4 mSv a⁻¹ terrestrische Strahlung (siehe auch Tabelle 11.2)

0.3 mSv a⁻¹ Nuklide im Körper (ausser Radon)

0.3 mSv a⁻¹ kosmische Strahlung (siehe auch Abbildung 11.1).

0.2 mSv a⁻¹ Radon im Freien (siehe auch Tabelle 11.2)

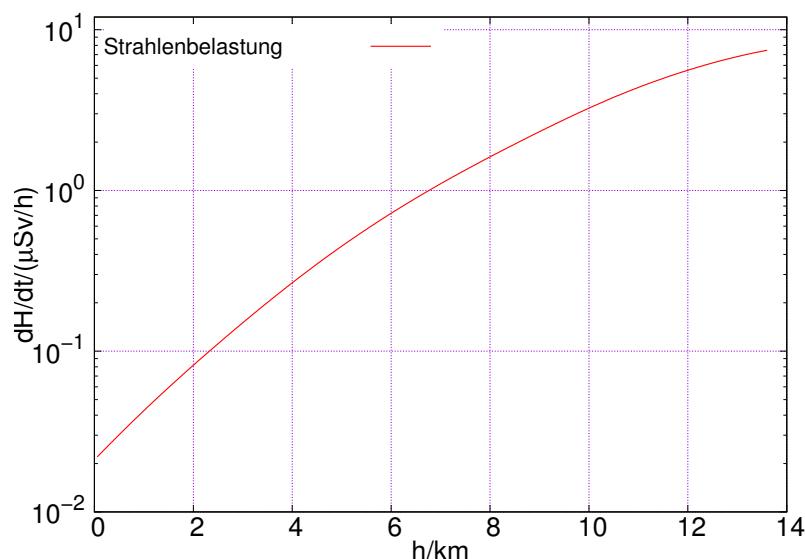


Abb. 11.1.: Höhenstrahlung auf der Erde nach Demtröder [Dem10, Abb8.2]

Abbildung 11.1 zeigt, dass die Strahlenbelastung mit der Höhe zunimmt. Dies gilt insbesondere auch für FLUGREISEN.

Aussenbereiche		Belastung in Häusern	
Gestein	$A/(\text{Bq kg}^{-1})$	Quelle	A
Granit	1000	Radon	$\approx 50 \text{ Bq m}_{\text{Luft}}^{-3}$
Tonschiefer	700	Leitungswasser	$1 - 30 \text{ Bq dm}^{-3}$
Sandstein	350	Kalium im Körper	4500 Bq
Basalt	250		
Gartenerde	400		

Tab. 11.2.: Radioaktivität in der Umwelt

Eine weitere wichtige Komponente der Strahlenbelastung ist die MEDIZINISCHE STRAHLENBELASTUNG. Dazu gehören

2.0 mSv a^{-1} Mittelwert über die Bevölkerung bei Röntgenuntersuchungen

0.1 mSv a^{-1} Nuklearmedizinische Therapien

Zur TECHNISCHEN STRAHLENBELASTUNG nach K. Stierstadt [Sti10a, Kap. 5.2.2] zählen Leuchtziffern, uranhaltige Glasuren von Porzellan und Kacheln, Rauchmelder, Schweißelektroden, Glühstrümpfe für Gaslaternen, Füllstandsmesser, Herzschrittmacher oder Fernsehröhren, unter anderem. Dies führt zu einer Belastung von 0.01 mSv a^{-1} .

Zur KERNTHECHNISCHEN STRAHLENBELASTUNG gehören die Emissionen aus Kernkraftwerken, Beschleunigern, dem Uranbergbau. Im Mittel über die gesamte Bevölkerung war die Belastung nach K. Stierstadt [Sti10a, Kap. 5.2.3] 0.03 mSv a^{-1} .

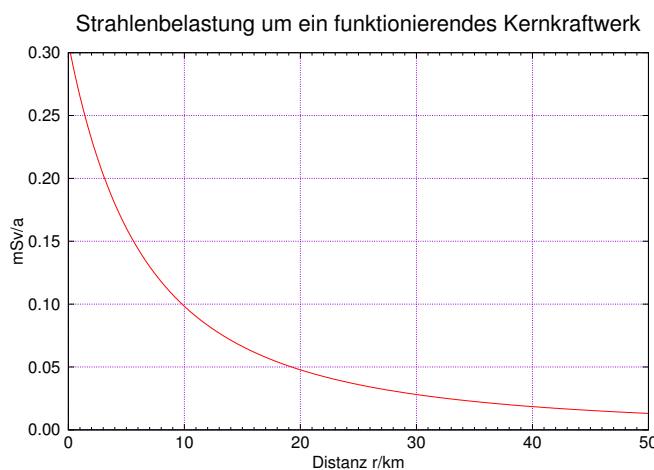


Abb. 11.2.: Dosisleistung in der Nähe eines Kernkraftwerkes nach K. Stierstadt [Sti10a, Abb. 5.12]

Abbildung 11.2 zeigt die zusätzliche Strahlenbelastung um ein Kernkraftwerk im

Normalbetrieb.

Quelle	Strahlungsart	$(dH/dt)_{eff}/(\text{mSv a}^{-1})$
Äussere Exposition - Höhenstrahlung - Erdboden, Gebäude	γ, p, n	0.3 0.4
Innere Exposition Inhalation, Nahrungsaufnahme	${}^3\text{H}, {}^{14}\text{C}$ ${}^{22}\text{Na}, {}^{40}\text{K}, \beta, \gamma$ Uran α, β, γ Rd, Th α, β, γ	0.01 0.17 0.1 – 1.4 0.4
Medizin Kohle- und KK-Werke Beruf	γ, β γ, β	0.5 – 1.6 < 0.003 < 0.3
Total		2.7 – 4.3

Tab. 11.3.: Arten der Strahlenbelastung.

Zusammengefasst ergibt sich nach W. Demtröder [Dem10] die folgende Belastung:

- Natürliche Belastung: 2.4 mSv a^{-1}
- Medizin: 1.9 mSv a^{-1}
- Gesamt: 4.3 mSv a^{-1}

Tabelle 11.3 schlüsselt nochmals die Strahlung auf.

11.1. Wechselwirkung von Strahlung und Gewebe

11.1.1. Dosimeter

11.1.1.1. Füllhalter-Dosimeter

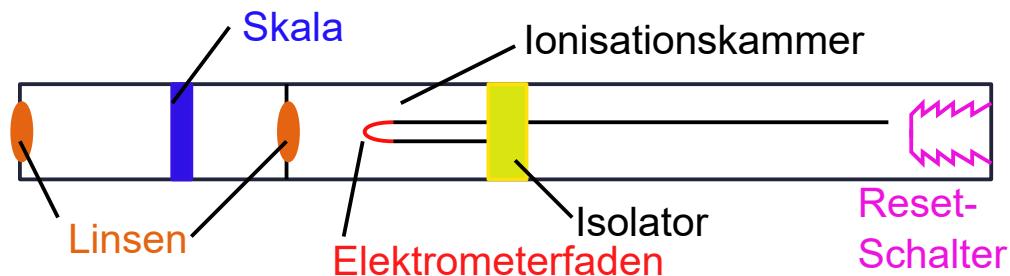


Abb. 11.3.: Aufbau eines Dosimeters nach H. Kiefer und W. Koelzer [KK92] und W. Demtröder [Dem10, Abb. 8.1].

FÜLLHALTER-DOSIMETER wie in Abbildung 11.3 gezeigt werden zur Überwachung der Strahlenexposition verwendet. Das Dosimeter funktioniert wie ein Elektrometer aus der Vorlesung Elektrizität und Magnetismus. In der Ionisationskammer wird das Gas durch ionisierende Strahlung in einen Atomrumpf und ein Elektron aufgespalten. Die Ladung einer dieser Teilchensorten lädt den Elektrometerfaden auf. Dieser lenkt sich gegen seine Elastizität aus. Die Auslenkung ist ein Mass für die auf dem Elektrometerfaden gespeicherte Ladung. Diese ist proportional zur Dosisleistung H .

Ausgelesen wird das Füllhalter-Dosimeter über das Mikroskop bestehend aus den zwei Linsen.

Füllhalter-Dosimeter sind heute von elektronischen Dosimetern (siehe Abschnitt 11.1.1.2).

11.1.1.2. Elektronisches Dosimeter



Abb. 11.4.: Ein elektronisches Dosimeter, so wie es im Fortgeschrittenenpraktikum Physik an der Uni Ulm verwendet wird.

ELEKTRONISCHE DOSIMETER wie in Abbildung 11.4 gezeigt sind die heute üblichen Dosimeter. Einer der Ersten der die Empfindlichkeit von MOS-Transistoren auf ionisierende Strahlung untersuchte war D. C. Sullivan [Sul65]. Aufbauend auf diesen und ähnlichen Erkenntnissen haben W. J. Poch und A. G. Holmes-Siedle [PH70] die Langzeitwirkung von ionisierender Strahlung auf MOS-Transistoren untersucht. In der Publikation von A. Holmes-Siedle [Hol74] wird der Gebrauch von «Floating Gate»-MOS-Transistoren als Dosimeter erwähnt. J. Kassabov; N. Nedev und N. Smirnov [KNS91] gibt eine Darstellung der Änderung der Leitfähigkeit des Kanals eines «Floating Gate»-MOS-Transistors in Abhängigkeit von der Dosisleistung. Eine neue Untersuchung von S. D. Ilić u. a. [Ili+21] befasst sich mit dem Gebrauch eines kommerziellen MOS-Transistors als Dosimeter.

Im Wesentlichen erzeugt ionisierende Strahlung Ladungen auf dem hochisolierten Gate des MOS-Transistors. Zum Auslesen wird dann einfach der Kanalwiderstand gemessen. Mit den notwendigen Kalibrierungen und Korrekturen ergibt sich dann Dosisleistung

11.1.2. Jod

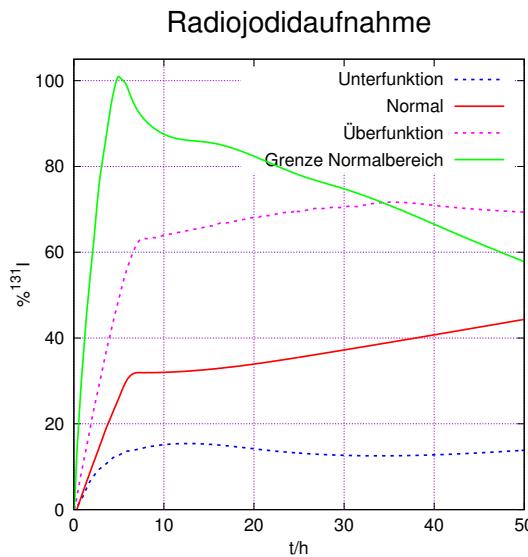


Abb. 11.5.: Radiojodaufnahme der Schilddrüse nach W. Demtröder [Dem10, Band 4, Abb. 8.7].

Die Schilddrüse ist im menschlichen Körper das einzige Organ, das Jod in messbaren Mengen aufnimmt. Die Funktion der Schilddrüse kann sehr leicht über die Gabe von radioaktivem Jod überprüft werden (siehe Abbildung 11.5). Durch Messung der Zerfallsprodukte ausserhalb des Körpers kann die normale Funktion, aber auch die Über- oder die Unterfunktion bestimmt werden.

Ist die Schilddrüse bösartig verändert kann der Tumor über eine Gabe einer genau bemessenen Dosis von radioaktivem Jod sehr gut und mit wenig Nebenwirkungen durch ionisierende Strahlung zerstört werden.

Bei einem REAKTORUNFALL tritt oftmals eine grössere Menge von radioaktivem Jod aus. Dieses wird über die nächsten Tage von Menschen im Umkreis des havarierten Reaktors in der Schilddrüse aufgenommen. Um dies zu verhindern gibt man den Betroffenen eine hohe Dosis nicht radioaktiven Jods um die Schilddrüse zu sättigen. So wird verhindert, dass das radioaktive Jod eingebaut wird und den Organismus über längere Zeit schädigt.

11.1.3. PET: Positronen-Emissions-Tomographie

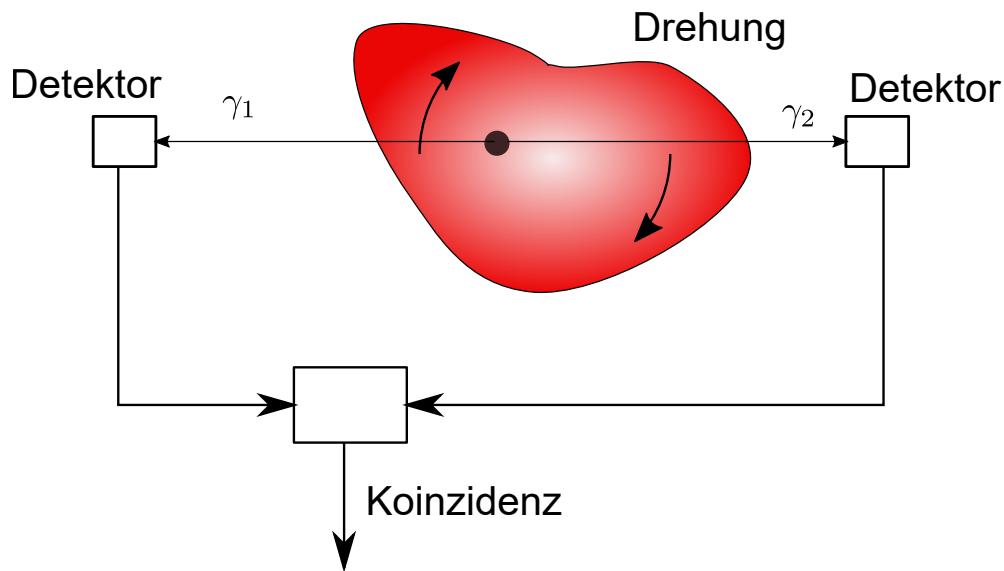


Abb. 11.6.: PET: Positronen-Emissions-Tomographie nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 8.9].

Um zum Beispiel einen Hirntumor genau zu lokalisieren kann einer erkrankten Person ein Mittel gegeben werden, dessen Atom einen β^+ -Zerfall machen [Wik21j]. Wenn dieses Mittel spezifisch an die zu untersuchende Stelle bindet, dann werden die entstehenden Positronen sich innerhalb von wenigen Nanometern mit Elektronen aus Atomhüllen annihilieren. Da der Gesamtimpuls der beiden Teilchen nahe bei Null ist ergeben sich zwei antiparallel emittierte γ -Quanten jeweils mit einer Energie von 511 keV. Durch eine Koinzidenzschaltung kann die Richtung der Emission festgestellt werden. Werden die Detektoren (oder alternativ der Mensch) gedreht, gibt es eine neue Verbindungslinie. Aus vielen Verbindungslinien kann die dreidimensionale Position des Ortes, an dem das Mittel gebunden hat, bestimmt werden.

11.2. Regulierungen

Die Verordnung zum Schutz vor der schädlichen Wirkung ionisierender Strahlen können Sie bei der Universität Ulm erhalten (*Verordnung zum Schutz vor der schädlichen Wirkung ionisierender Strahlung (Strahlenschutzverordnung - StrlSchV)*, Bundesministerium der Justiz und für Verbraucherschutz [Bun18]).

11.3. Anwendungen

11.3.1. Suche nach Spurenelementen

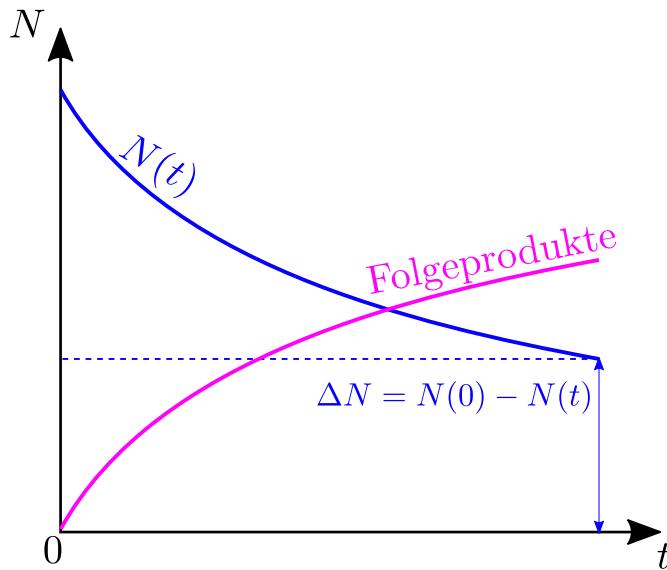


Abb. 11.7.: Suche nach wenigen Atomen nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 8.10].

Die Suche nach Spurenelementen bedeutet die Suche nach wenigen Atomen. Weil jedes zerfallende Atom α -, β - oder γ -Teilchen mit genügend grosser Energie entsendet, können sehr wenige bis einzelne Atome nachgewiesen werden. Durch eine Aktivierung (z.B. Bestrahlung mit Neutronen) sind wirklich wenige Isotope zu bestimmen. Die Isotopenzusammensetzung kann ein Hinweis sein, z.B. wo Zinn abgebaut wurde.

Es gibt heute jedoch Alternativen, die keine radioaktive Aktivierung benötigen. E. Bulska und A. Ruszczyńska [BR17] weisen auf die folgenden Techniken hin.

- Atomspektroskopie (engl. Flame Atomic Absorption Spectroscopy (FAAS))
- Induktiv gekoppelte Plasma-Absorptionsspektroskopie (engl. Inductively coupled plasma atomic emission spectrometry (ICPAES) oder Inductively coupled plasma optical emission spectrometry (ICPOES))
- Induktiv gekoppelte Plasma-Massenspektroskopie (engl. engl. Inductively coupled plasma mass spectrometry (ICPMS))
- Laserablation kombiniert mit induktiv gekoppelte Plasma-Massenspektroskopie (engl. Laser ablation inductively coupled plasma mass spectrometry (LA-ICPMS))
- elektrochemische Techniken
- Totalreflexion-Röntgenfluoreszenz (engl. Total Reflection X-ray Fluorescence (TXRF))

- Aktivierungsanalyse (radioaktiv aktivierte Elemente)

11.3.2. Altersbestimmung

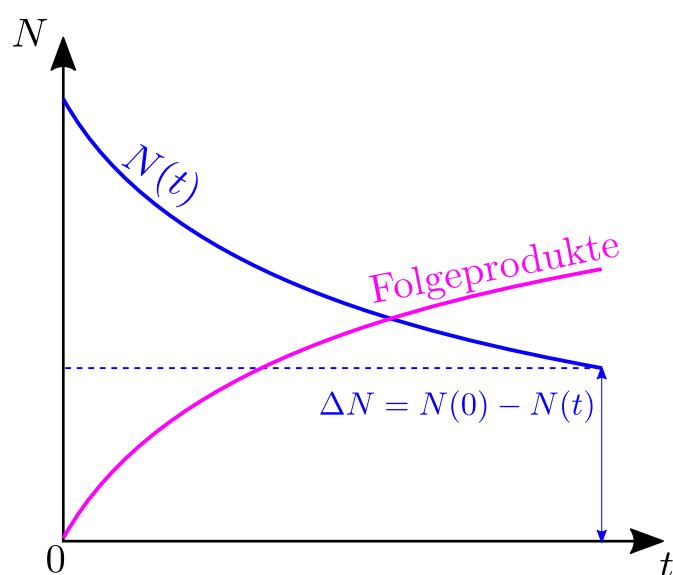


Abb. 11.8.: Altersbestimmung nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 8.11].

Das exponentielle Zerfallsgegesetz für radioaktive Atome (siehe Gleichungen (9.2.3) oder (9.2.4)) erlaubt über lange Zeiten eine ausreichend genaue Altersbestimmung. Abbildung 11.8 zeigt den Zusammenhang zwischen der Zahl $N(t)$ der instabilen Atome und den Folgeprodukten.

11.3.2.1. $^{14}_6\text{C}$ -Methode

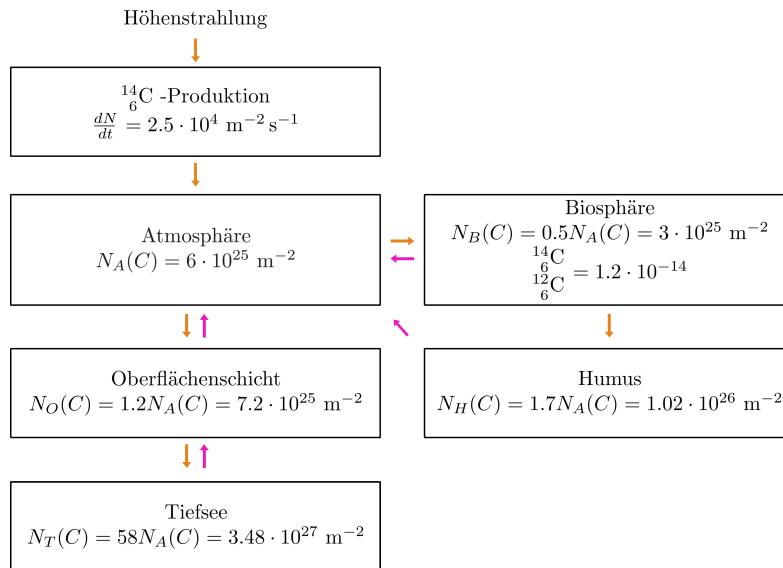


Abb. 11.9.: $^{14}_6\text{C}$ -Methode nach H. Willkomm [Wil76] und W. Demtröder [Dem10, Abb. 8.12]

Eine häufig angewandte Technik ist die $^{14}_6\text{C}$ -Methode. Abbildung 11.9 zeigt die zu berücksichtigenden Prozesse (nach H. Willkomm [Wil76]). Die Quelle des $^{14}_6\text{C}$ -Methode ist die HÖHENSTRAHLUNG. Diese erzeugt in der Atmosphäre eine sich nur langsam ändernde Konzentration von $^{14}_6\text{C}$. Die Atmosphäre ist im Austausch mit der Biosphäre (PHOTOSYNTHESE) und mit der Oberflächenschicht des Meeres. Sterbende Lebewesen tragen das $^{14}_6\text{C}$ in den Humus ein. Dieser wiederum gibt das Gas an die Atmosphäre zurück. Schliesslich tauscht sich die Meeresoberfläche mit der Tiefsee aus. Abbildung 11.9 zeigt die $^{14}_6\text{C}$ -Konzentrationen in den verschiedenen Reservoirs. In jedem Reservoir nimmt die Menge des $^{14}_6\text{C}$ nach den Zerfallsgesetzen ab (siehe Gleichungen (9.2.3) oder (9.2.4)).

Lebewesen (Bäume, Pflanzen, die Fauna) bauen $^{14}_6\text{C}$ während ihrer Lebenszeit ein, und zwar mit dem Anteil, den $^{14}_6\text{C}$ in der Atmosphäre, im Humus oder im Meer hat. Mit dem Ableben wird der Nachschub neuen $^{14}_6\text{C}$ gestoppt. Je länger ein Lebewesen verschieden ist, desto geringer ist der Anteil von $^{14}_6\text{C}$. Mit Hilfe der Zerfallsgesetze kann das Alter bestimmt werden, sofern die Ausgangskonzentration von $^{14}_6\text{C}$ bekannt ist.

Die Ausgangskonzentration von $^{14}_6\text{C}$ kann mit Hilfe der DENDROCHRONOLOGIE kalibriert werden. Einerseits wird in jedem Jahrring die Menge $^{14}_6\text{C}$ des entsprechenden Jahres eingebaut. In späteren Jahren kommt kein $^{14}_6\text{C}$ mehr dazu. Andererseits kann über das Abzählen der Jahrringe das Alter auf ein Jahr genau bestimmt werden.

11.3.2.2. Alter von Gesteinen

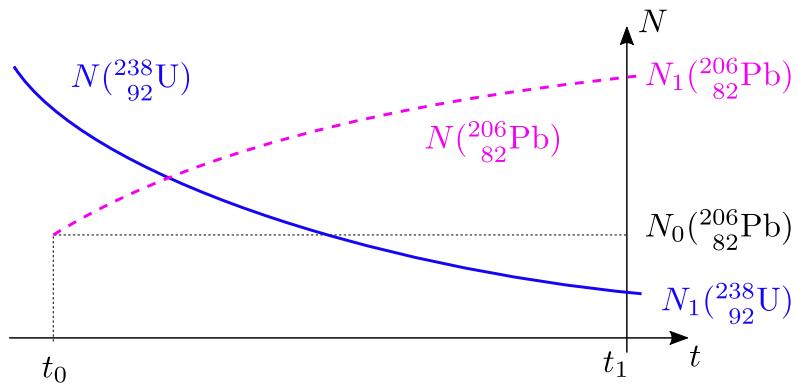


Abb. 11.10.: Altersbestimmung von Gesteinen nach W. Demtröder [Dem10, Abb 8.13]

Die Altersbestimmung für Steine funktioniert analog wie die ^{14}C -Methode. Die Zeitskalen sind sehr viel länger. Es wird angenommen, dass die Menge an ^{238}U und an ^{206}Pb bei der Bildung des Sonnensystems bekannt sind. Dann kann aus dem Verhältnis $N(^{238}\text{U}) / N(^{206}\text{Pb})$ das Alter von Gesteinen bestimmt werden. Der ursprüngliche Gehalt von ^{206}Pb wird über den Anteil von ^{204}Pb bestimmt. ^{204}Pb ist kein Endprodukt einer Zerfallsreihe. Dessen Menge muss deshalb konstant sein. Durch Modellbildung kann das Verhältnis $N(^{206}\text{Pb}) / N(^{204}\text{Pb})$ beim Entstehen der schweren Elemente abgeschätzt werden. Weitere Methoden können bei Wikipedia [Wik21e] oder J. Grotzinger und T. Jordan [GJ17, pp. 201-212] nachgelesen werden.

12. Kernreaktionen

In diesem Kapitel sollen KERNREAKTIONEN besprochen werden. Diese Vorgänge werden auch als REAKTIVE STREUUNG beschrieben.

12.1. Grundlagen

Als erstes Beispiel betrachten wir die reaktive Hochenergiestreuung eines Protons an einem Proton. Der sogenannte Hochenergieprozess



erzeugt aus zwei kollidierenden Protonen ein Proton, ein Neutron und ein positives PION. Die Massenenergie der Produkte ist höher als die Massenenergie der Edukte, das heisst für die kinetische Energie der kollidierenden Protonen gilt

$$\begin{aligned} 2m_p c^2 + E_{kin,tot}(p, p) &= m_p c^2 + m_n c^2 + m_{\pi^+} c^2 + E_{kin,tot}(p, n, \pi^+) \\ \implies E_{kin,tot}(p, p) &> (m_n + m_{\pi^+} - m_p) c^2 \end{aligned} \quad (12.1.2)$$

Der Überschuss ist dann die gesamte kinetische Energie der Produkte. Die Notation ist nicht einheitlich. Manchmal wird auch anstelle von



auch



geschrieben.

Wir interessieren uns hier vor allem für die Spaltung gröserer Kerne. Wir verwenden dazu die Bethe-Weizsäcker-Gleichung (Gleichungen (8.5.14) oder (8.5.16)). Gleichung (9.0.2) sagt voraus, dass schwere Kerne zu einem Rotationsellipsoid deformiert sind. Im Abschnitt 8.5.5 wurde argumentiert, dass deformierte Kerne oszillieren können. Es ist deshalb zu erwarten, dass schwere deformierte Kerne durch spontane Oszillationen instabil werden können und spalten. Diese SPONTANE KERNSPALTUNG wurde beobachtet. Der folgende Ablauf wird angenommen

1. Der sphärische Kern oszilliert und wird elliptisch
2. Die Oberflächenenergie nimmt zu und die Coulombenergie nimmt ab
3. Wenn in diesem Prozess die negative Bindungsenergie negativ wird (die Bindung zu einer Abstossung wird) kann der Kern zerfallen.

Ein Kern bleibt stabil, wenn

$$|\Delta E_0^C| < |\Delta E_0^S| \quad (12.1.4)$$

ist. Mit den Gleichungen (8.5.91) und (8.5.92) können wir einen SPALTBARKEITSPARAMETER definieren

$$X_S = \frac{\Delta E^C}{\Delta E^S} = \frac{\frac{2\epsilon^2}{45} + O(\epsilon^3)}{\frac{4\epsilon^2}{45} + O(\epsilon^3)} \approx \frac{1}{2} \frac{E_0^C}{E_0^S} \quad (12.1.5)$$

X_S ist ein Mass dafür ob sich ein Kern spontan spaltet. Wir kennen die Grenze noch nicht. Nach Hans Bethe und Carl Friedrich von Weizsäcker (Gleichungen (8.5.14) oder (8.5.16)) können wir auch

$$X_S = \frac{a_C Z^2 A^{(-\frac{1}{3})}}{2a_S A^{2/3}} = \frac{a_C}{2a_S} \frac{Z^2}{A} \quad (12.1.6)$$

schreiben. Näherungsweise wird für $\frac{Z^2}{A} \geq 51$ der Spaltbarkeitsparameter $X_S \geq 1$. Die Grenze erhält man, wenn man in Gleichung (12.1.6) $X_S = 1$ setzt und nach Z auflöst. Wir beachten dabei dass $Z > 0$ sein muss.

$$Z_G = \frac{a_S}{a_C} \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{a_C}{a_S} N} \right) \quad (12.1.7)$$

Mit den Gleichungen (8.5.14) und (8.5.16) erhalten wir

$$Z_G(N) = 25.6723 \cdot \left(1 + \sqrt{1 + 0.0779049N} \right) \quad \text{W. Demtröder [Dem10]} \quad (12.1.8a)$$

$$Z_G(N) = 23.3333 \cdot \left(1 + \sqrt{1 + 0.0857143N} \right) \quad \text{A. Das und T. Ferbel [DF09]} \quad (12.1.8b)$$

Abbildung 12.1 zeigt die Grenze spontaner Spaltung nach Hans Bethe und Carl Friedrich von Weizsäcker. Wir erinnern uns daran, dass die Bethe-Weizsäcker-Gleichung (Gleichungen (8.5.14) oder (8.5.16)) eine halbwegs passable empirische Approximation ist, mehr nicht. Wir lernen aus der Abbildung 12.1 dass eine hohe Zahl von Protonen im Vergleich zur Zahl der Neutronen die spontane Spaltung fördert. Und weiter lernen wir, dass solche Ereignisse wahrscheinlich auf der Protonenachse oberhalb der stabilen Isotope zu finden sein werden.

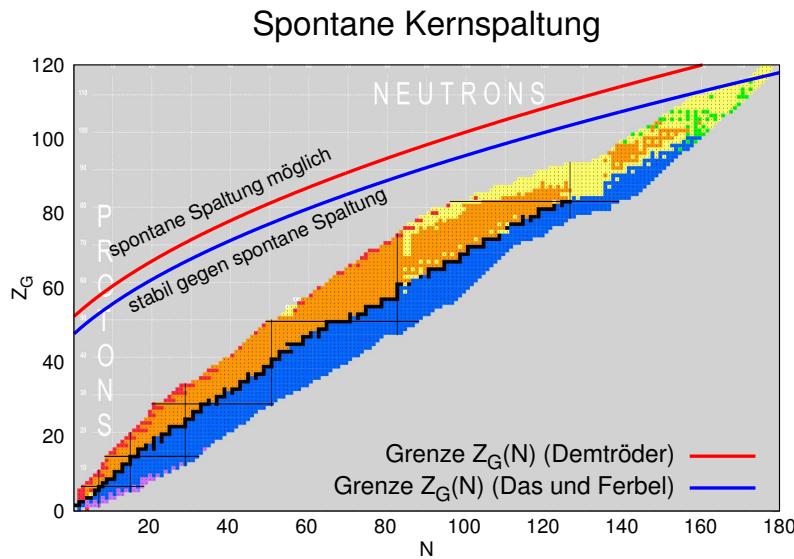


Abb. 12.1.: Bereich möglicher spontaner Kernspaltung (Erstellt mit Daten aus Nucleus-Win [Wap12]). Gezeigt werden die beiden Approximationen der Bethe-Weizsäcker-Gleichung nach W. Demtröder ([Dem10], rot) und nach A. Das und T. Ferbel ([DF09], blau).

Tabelle 12.1 zeigt die gemessene Spaltbarkeitsparameter.

Nuklid	X_S	$T_{1/2}$ (Spaltung)	$T_{1/2}$ (α -Zerfall)
$^{232}_{\text{Th}}$	0.68	$> 10^9$ a	$1.4 \cdot 10^{10}$ a
$^{235}_{\text{U}}$	0.70	$\sim 10^{17}$ a	$7 \cdot 10^8$ a
$^{238}_{\text{U}}$	0.693	$\sim 10^{16}$ a	$4 \cdot 10^9$ a
$^{242}_{\text{Pu}}$	0.71	$\sim 10^{11}$ a	$\sim 4 \cdot 10^5$ a
$^{252}_{\text{Cf}}$	0.74	$6 \cdot 10^1$ a	2.2 a
$^{254}_{\text{Fm}}$	0.76	246 d	3.4 d
$^{255}_{\text{No}}$	0.80	? d	180 s

Tab. 12.1.: Spaltbarkeitsparameter

12.1.1. Kategorien von Kernreaktionen

12.1.1.1. Inelastische Streuung

Wenn bei einer Streuung einer oder mehrere der beteiligten Objekte den inneren Anregungszustand ändern wird dies inelastische Streuung genannt.

$$a(E) + X \longrightarrow X^* + a(E - \Delta E) \quad (12.1.9)$$

Dabei ist $\Delta E = \Delta E_1 + E_{\text{Rückstoss}}(X^*)$ wobei ΔE_1 die Anregungsenergie ist. Die Abregung geschieht dann über

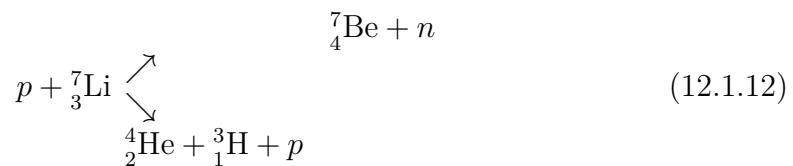
$$X^* \longrightarrow X + \gamma \quad (12.1.10)$$

12.1.1.2. Reaktive Streuung

Unter einer reaktiven Streuung versteht man eine Streuung, bei der eines oder mehrere der beteiligten Teilchen ihren Charakter ändern.

$$a + X \longrightarrow Y + b \quad (\text{auch } b_1 + b_2 + \dots) \quad (12.1.11)$$

Ein Beispiel für eine reaktive Streuung mit zwei möglichen Resultaten gibt Gleichung (12.1.12)



12.1.1.3. Induzierte Spaltung

Otto Hahn und Fritz Straßmann [HS39] (Experiment, Hahn erhielt den Nobelpreis 1944) fanden im Jahre 1939 experimentell eine zu einer Kettenreaktion ausbaubare Kernspaltung. Lise Meitner und Otto Frisch [MF39] fanden eine theoretische Erklärung der experimentellen Befunde. Die untersuchte Reaktion war

$$n + {}_{92}^{238}\text{U} \longrightarrow {}_{93}^{239}\text{U}^* \longrightarrow Y_1^* + Y_2^* + \nu n \quad (12.1.13)$$

Es gelten die folgenden ERHALTUNGSGRÖSSEN:

$$A + 1 = A_1 + A_2 + \nu \quad Z = Z_1 + Z_2 \quad (12.1.14)$$

Die Energieverteilung der Spaltprodukte folgt der Verteilung

$$N(E) = C \sinh \left[\left(\frac{E_{\text{kin}}}{b \cdot \text{MeV}} \right)^{1/2} \right] \cdot \exp \left(-\frac{E_{\text{kin}}}{b \cdot \text{MeV}} \right) \quad (12.1.15)$$

Die Energieverteilung der Spaltneutronen nach Gleichung (12.1.15) ist in Abbildung 12.2 gezeigt.

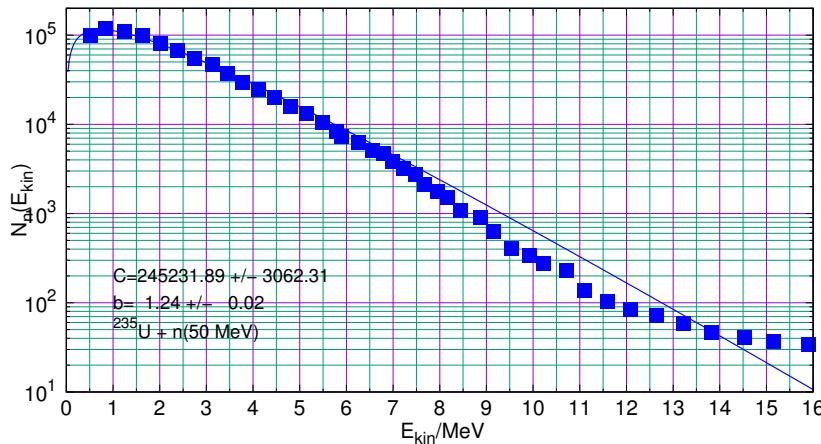


Abb. 12.2.: Energieverteilung der Spaltneutronen bei der Kernspaltung nach [Sta+95, Fig. 5a]. Die Theoriekurve stammt Gleichung (12.1.15).

Die Frage, wann eine Kernspaltung ablaufen kann wurde im Abschnitt 12.1 besprochen. Die Antwort der Bethe-Weizsäcker-Gleichung ist: Zuerst oszilliert der Kern, die Coulombenergie nimmt ab und gleichzeitig die Oberflächenenergie zu. Wenn $\Delta E_0^C < \Delta E_0^S$ ist der Kern stabil.

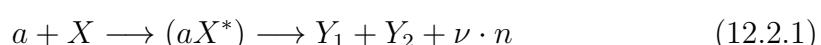
Targetkern X	Compoundkern $X + n$	E_C/MeV	E_b/MeV	$(E_C - E_b)/\text{MeV}$
^{233}U	^{234}U	5.8	7.0	-1.2
^{235}U	^{236}U	5.3	6.4	-1.1
^{234}U	^{235}U	5.8	5.3	+0.5
^{238}U	^{239}U	6.1	5.0	+1.1
^{231}Pa	^{234}Pa	6.2	5.5	+0.7
^{232}Th	^{233}Th	6.8	5.5	+1.3

Tab. 12.2.: Compoundkerne bei der Kernspaltung

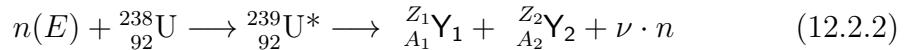
Tabelle 12.2 zeigt mögliche Zwischenprodukte, die bei einer Kernspaltung auftreten können.

12.2. Stossinduzierte Kernspaltung

Für die Kernenergie ist die stossinduzierte Kernspaltung sehr wichtig. Ihr Reaktionsschema ist



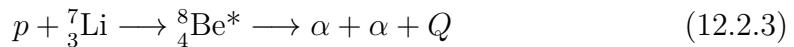
wobei ν die Anzahl Neutronen ist, die bei der Reaktion freigesetzt werden. Ein Beispiel für eine solche Reaktion ist



mit $A_1 + A_2 = 239 - \nu$ und $Z_1 + Z_2 = 92$. Die Schwelle für diese Reaktion ist 1.5 MeV.

12.2.1. Stossinduzierte Spaltung leichter Kerne

In der zeitlichen Abfolge wurde 1932 zuerst die stossinduzierte Spaltung eines leichten Kerns durch John Cockcroft und Ernest Walton entdeckt



Die Reichweite der α -Teilchen in Luft beträgt 8.3 cm. Dies entspricht einer kinetischen Energie von $E_\alpha = 8.63$ MeV.

Damit ist die freigesetzte Energie («Wärmetönung»)

$$Q = 2E_\alpha = 17.26 \text{ MeV} \quad (12.2.4)$$

Auch andere leichte Kerne können stossinduziert gespalten werden. Abbildung 12.3 zeigt die Streuquerschnitte für die Spaltung von mittelschweren Kernen.

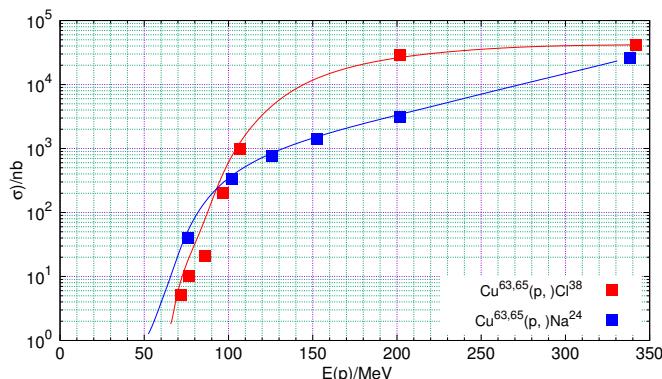


Abb. 12.3.: Spaltquerschnitte mittelschwerer Kerne (nach Batzel and Seaborg [BS51])

12.2.2. Stossinduzierte Kernreaktionen mit α -Teilchen

Die beiden Unterkapitel zeigen Beispiele für stossinduzierte Kernreaktionen ausgelöst durch α -Teilchen.

12.2.2.1. (α, p)-Reaktion

Bei (α, p)-Reaktionen (nach Ernest Rutherford) reagiert ein α -Teilchen (auch ein ${}^4_2\text{He}^{++}$ oder einfach ein ${}^4_2\text{He}$ -Atom.

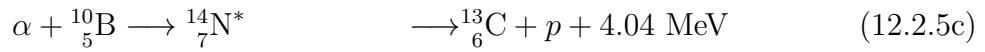
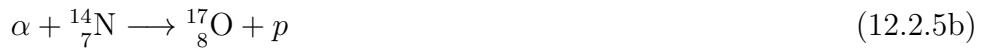
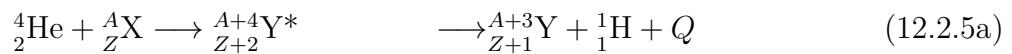
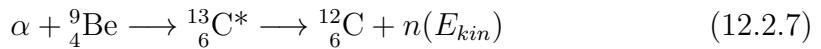


Abbildung 6.6 in W. Demtröder *Experimentalphysik IV, Kern-, Teilchen- und Astrophysik* [Dem10, Abb. 6.6] zeigt ein Beispiel einer Reaktion nach Gleichung (12.2.5b). Die freigesetzte Energie folgt im Allgemeinen der Gleichung

$$Q = E_{kin}(\alpha) + [M(\alpha) + M(X) - M(Y) - M(p)] c^2 \quad (12.2.6)$$

12.2.2.2. (α, n)-Reaktion

Bei einer Reaktion von α -Teilchen mit Beryllium lautet die Gleichung beispielsweise



Eine Messung dazu zeigt Abbildung 12.4.

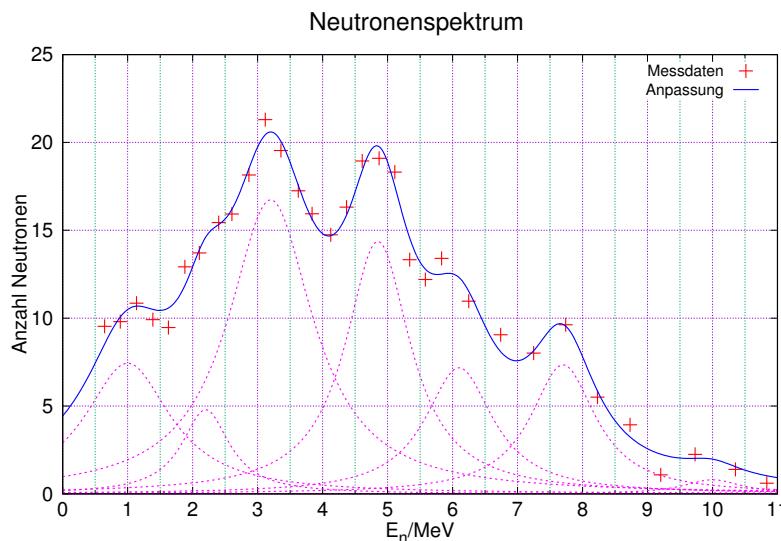
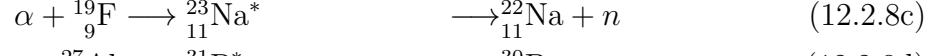
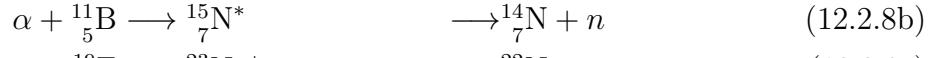
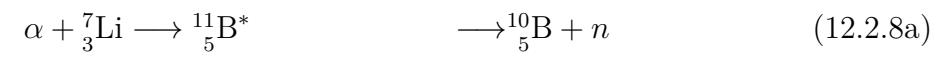


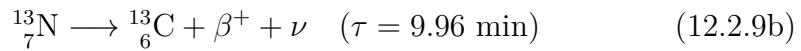
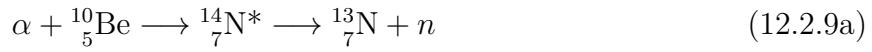
Abb. 12.4.: Neutronenspektrum bei der Reaktion ${}^9_4\text{Be}(\alpha, n){}^{12}_6\text{C}$ nach B. G. Whitmore und W. B. Baker [WB50, Fig. 1].

Weitere Beispiele für (α, n)-Reaktionen sind



12.2.3. Stossinduzierte Radioaktivität

Irène Joliot-Curie und Frédéric Joliot-Curie fanden im Jahre 1934 die stossinduzierte Radioaktivität mit der Reaktion

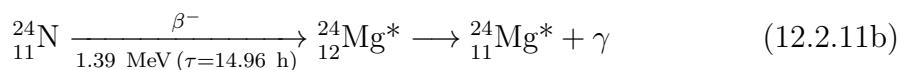


Eine ähnliche Reaktion gibt es auch bei

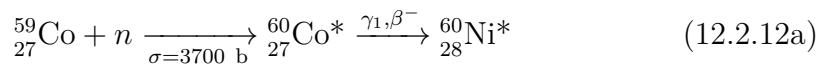


12.2.3.1. (n,γ)-Reaktionen

Die meisten Radionuklide werden durch Neutroneneinfangreaktionen im Kernreaktor erzeugt



Die Bestrahlung kann zum Beispiel auch diese Reaktion erzeugen



Schnelle Neutronen lösen in der Regel eine (n,p)-Reaktion aus. Es kann aber auch zu (α, γ)-Reaktionen kommen.

12.2.3.2. Aktivierung und Aktivität

Wir verwenden die folgenden Definitionen:

ϕ die NEUTRONENFLUSSDICHTE

N_0 die Anzahl stabiler Mutterkerne

σ_a der AKTIVIERUNGSQUERSCHNITT

und erhalten die folgende Differentialgleichung für die Aktivierung

$$\frac{dN}{dt} = \sigma_a \phi (N_0 - N) \quad (12.2.13)$$

Radionuklide zerfallen mit der Zerfallskonstante λ

$$\frac{dN}{dt} = \sigma_a \phi (N_0 - N) - \lambda N = \sigma_a \phi N_0 - (\sigma_a \phi + \lambda) N \quad (12.2.14)$$

Wenn $N_0 \gg N$ ist erhalten wir

$$\frac{dN}{dt} = \sigma_a \phi N_0 - \lambda N \quad (12.2.15)$$

Am Ende der Bestrahlungszeit t_B haben wir

$$N(t_B) = \frac{\sigma_a \phi N_0}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda t_B} \right) \quad (12.2.16)$$

aktivierte Kerne. Den gesamten Verlauf zeigt Abbildung 12.5.

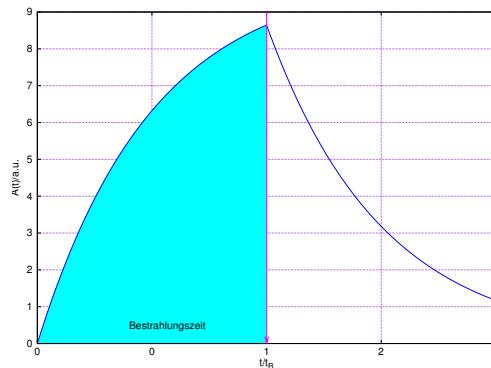


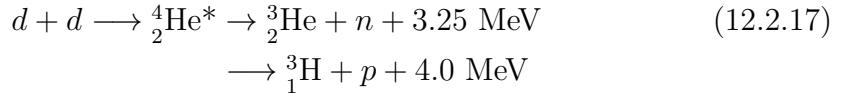
Abb. 12.5.: Aktivierung einer Probe über die Bestrahlungszeit t_B . Die Aktivität $A(t)$ baut sich wie $1 - e^{-\lambda t}$ auf. Sie zerfällt dann mit $e^{-\lambda(t-t_B)}$ (nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 6.12]).

12.2.4. Schwelle

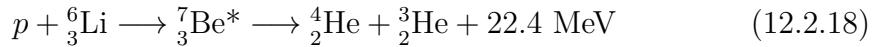
Die meisten Kernreaktionen laufen erst oberhalb einer Schwelle ab. Insbesondere bei positiv geladenen Teilchen muss die Coulombbarriere überwunden werden. Die Reaktion wird durch das Bohrsche Compoundkern-Modell (nach Niels Bohr) beschrieben. Die Edukte stoßen zusammen und bilden einen kurzlebigen Zwischenkern, den Compoundkern. Die Kernreaktion hat die Schritte

1. Fusion
2. Spaltung

Der Vorgang kann als Prozess mit einer Schwelle beschrieben werden. Ein Beispiel für die Fusionsreaktion ist



Ein weiterer möglicher Prozess ist



Bei diesem Prozess muss die

1. Energie des Eingangskanals die Schwelle überschreiten.
2. Dann wird der Ausgangskanal geöffnet.

Die Energiebetrachtung der Reaktion



muss die Schwerpunktsbewegung beinhalten. Wir haben die Beziehungen

$$\text{vorher} \quad E_{kin}(X) = 0 \quad p_X = 0 \quad (12.2.20a)$$

$$E_{kin}(a) = \frac{1}{2}m_a v_a^2 \quad |\mathbf{p}_a| = m_a v_a \quad (12.2.20b)$$

$$\text{nachher} \quad E_{kin}(Y) = \frac{1}{2}m_Y v_Y^2 \quad |\mathbf{p}_Y| = m_Y v_Y \quad (12.2.20c)$$

$$E_{kin}(b) = \frac{1}{2}m_b v_b^2 \quad |\mathbf{p}_b| = m_b v_b \quad (12.2.20d)$$

Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist

$$v_S = \frac{m_X v_X + m_a v_a}{m_X + m_a} = \frac{m_a v_a}{m_X + m_a} \quad (12.2.21)$$

Die Energie der Schwerpunktsbewegung beträgt

$$E_{kin,S} = \frac{1}{2}(m_X + m_a) \cdot v_S^2 = \frac{m_a^2 v_a^2}{2(m_X + m_a)} \quad (12.2.22)$$

Sei Q die benötigte Wärmetonung der Reaktion. Dann ist im Laborsystem

$$E_S = Q + E_{kin,S} = Q + \frac{p_a^2}{2(m_X + m_a)} = E_{kin,a}^{min} \quad (12.2.23)$$

Mit der minimal nötigen Energie

$$E_{kin,a}^{min} = \frac{1}{2m_a} p_{a,min}^2 \quad (12.2.24)$$

ergibt sich für die Wärmetonung

$$Q + E_{kin,a} \frac{m_a}{m_X + m_a} = E_{kin,a} \quad (12.2.25a)$$

$$Q = E_{kin,a} \left(1 - \frac{m_a}{m_X + m_a} \right) = E_{kin,a} \frac{m_X}{m_X + m_a} \quad (12.2.25b)$$

Mit dem Impulssatz haben wir

$$m_a v_a = m_b v_b \cos \theta + m_y v_y \cos \varphi \quad (12.2.26a)$$

$$0 = m_b v_b \sin \theta - m_y v_y \sin \varphi \quad v_b, v_y > 0 \quad (12.2.26b)$$

$$m_y^2 v_y^2 = m_b^2 v_b^2 + m_a^2 v_a^2 - 2 m_a m_b v_a v_b \cos \theta \quad (12.2.26c)$$

$$\text{mit } \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \quad (12.2.26d)$$

Für die Energie haben wir

$$\frac{1}{2} m_a v_a^2 + \underbrace{Q}_{\text{fehlt im Ausgang}} = \frac{1}{2} m_b v_b^2 + \frac{1}{2} m_y v_y^2 \quad (12.2.27)$$

Mit $\frac{1}{2} m_a v_a^2 = \frac{1}{2} m_b v_b^2 + \frac{1}{2} m_y v_y^2 - Q$ erhalten wir für die Wärmetonung

$$Q = \frac{1}{2} m_b v_b^2 - \frac{1}{2} m_a v_a^2 + \frac{1}{2} m_b v_b^2 + \frac{1}{2} m_a v_a^2 - \quad (12.2.28a)$$

$$- \frac{1}{2} 2 m_a m_b v_a v_b \cos \theta \quad (12.2.28b)$$

$$= m_b v_b^2 - m_a m_b v_a v_b \cos \theta \quad (12.2.28c)$$

und

$$Q = \left(\frac{m_a}{m_y} - 1 \right) E_a + \left(\frac{m_b}{m_y} + 1 \right) E_b - \frac{2 \sqrt{m_a m_b}}{m_y} \sqrt{E_a E_b} \cos \theta \quad (12.2.29)$$

Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} \sqrt{E_b} &= \frac{\sqrt{m_a m_b}}{m_y + m_a} \cdot \sqrt{E_a} \\ &\cdot \left[\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{m_y(m_b + m_y)}{m_a \cdot m_b} \left(\frac{Q}{E_a} + 1 - \frac{m_a}{m_y} \right)} \right] \end{aligned} \quad (12.2.30)$$

Es darf nur reelle positive Werte für E_b geben, also muss in Gleichung (12.2.30) die eckige Klammer positiv sein. Wenn $\frac{Q}{E_a} + 1 - \frac{m_a}{m_y} \geq 0$ ist, ist die Wurzel grösser als $\cos(\theta)$: Es gibt nur eine Lösung zum Vorzeichen «+». Wenn $\frac{Q}{E_a} + 1 - \frac{m_a}{m_y} < 0$ ist, gibt es zwei mögliche Lösungen. Dann ist die minimale Anregungsenergie $E_a^{min} = \frac{m_y}{m_a - m_y} Q$. Nur oberhalb dieser Anregungsenergie existieren Lösungen.

12.2.5. Abweichung von der Kugelgestalt im Bethe-Weizsäcker-Modell

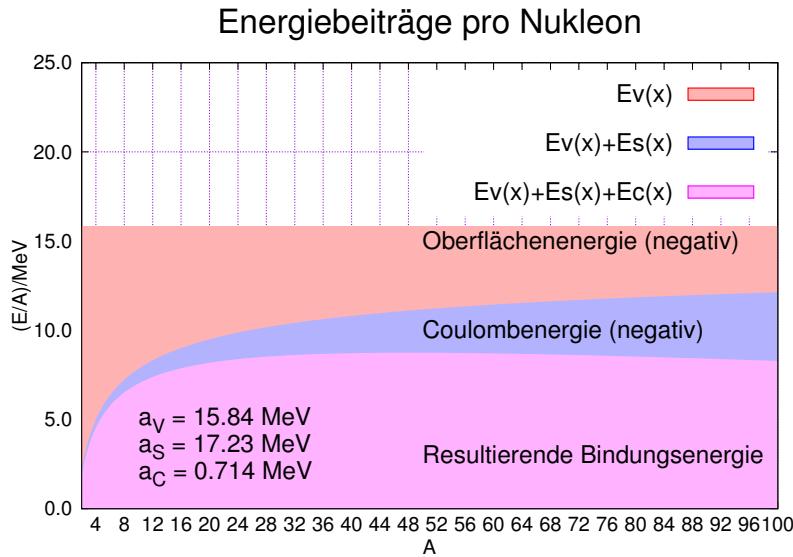


Abb. 12.6.: Relative Beiträge der einzelnen Energieterme im Bethe-Weizsäcker-Modell (Gleichung (8.5.14)) ([Nach Dem10, Band 4, Abb 2.32]).

Abbildung 12.6 zeigt die relativen Beiträge der verschiedenen Terme in der Bethe-Weizsäcker-Gleichung (nach Hans Bethe und Carl Friedrich von Weizsäcker) (8.5.14). Die Volumenenergie wie auch die Fermibeiträge und die Paarenergie hängen nur von der Anzahl der Nukleonen ab, nicht aber von der Form der Kerne, die beiden Summanden

$$E_S = -a_S A^{2/3} \quad \text{Oberflächenenergie} \quad (12.2.31a)$$

$$E_C = -a_C Z^2 A^{-1/3} \quad \text{Coulombenergie} \quad (12.2.31b)$$

hängen von der Form der Kerne ab. Wir modellieren die Kerne als Ellipsoid. Dieses ist durch die relative Halbachse c entlang der Rotationssymmetrie und die beiden weiteren relativen Halbachsen $a < b < c$ senkrecht dazu charakterisiert.

Wenn $a = b = c$ ist haben wir eine Kugel. Wir verwenden nach B. C. Carlson [Car61, Gleichungen (2.6)] die Konvention

$$a \cdot b \cdot c = 1 \quad (12.2.32)$$

Die Gleichung des Ellipsoids lautet dann

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2 \quad (12.2.33)$$

oder mit $a^2 = 1/(bc)$

$$b cx^2 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2 \quad (12.2.34)$$

Nach [Wik20] ist die Oberfläche für ein allgemeines Ellipsoid näherungsweise

$$S \approx 4\pi r^2 \left(\frac{(a b)^{8/5} + (a c)^{8/5} + (b c)^{8/5}}{3} \right)^{5/8} \quad (12.2.35)$$

Mit Gleichung (12.2.32) und $r = 1$ erhalten wir

$$S \approx 4\pi \left(\frac{b^{-8/5} + (b c)^{8/5} + c^{-8/5}}{3} \right)^{5/8} \quad (12.2.36)$$

Bei einem Rotationsellipsoid ist $b = c$. Wir erhalten

$$S \approx 4\pi \left(\frac{2b^{-8/5} + (b)^{16/5}}{3} \right)^{5/8} = \frac{4\pi}{b} \left(\frac{2 + (b)^{24/5}}{3} \right)^{5/8} \quad (12.2.37)$$

Zweitens brauchen wir einen Ausdruck für die Coulombenergie eines Rotationsellipsoids. Hier können wir im Artikel von B. C. Carlson [Car61, Gleichungen (2.5)] verwenden:

$$E_C(a, b, c) = \langle r_1^2 \rangle E_C(1, 1, 1) \quad (12.2.38)$$

wobei $E_C(1, 1, 1)$ die potentielle Energie einer kugelförmigen homogenen Ladungsverteilung ist. Für den Vorfaktor $\langle r_1^2 \rangle$ ergibt sich nach B. C. Carlson [Car61, Gleichungen (3.12)] die Näherungslösung

$$\langle r_1^2 \rangle \approx 1 - \frac{1}{45} (\epsilon^4 - \epsilon^2 \epsilon'^2 + \epsilon'^2) - \frac{2}{2835} (\epsilon^2 + \epsilon'^2) (31\epsilon^4 - 46\epsilon^2 \epsilon'^2 + 31\epsilon'^2). \quad (12.2.39)$$

Dabei ist die numerische Exzentrizität nach B. C. Carlson [Car61, Gleichungen (3.4)] durch

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} \text{ und } \epsilon' = \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}} \leq \epsilon \quad (12.2.40)$$

gegeben. Mit Gleichung (12.2.40) wird Gleichung (12.2.39)

$$\begin{aligned} \langle r_1^2 \rangle &= \frac{1}{2835b^6c^{12}} (30b^{10}c^8 - 28b^8c^{10} - 92b^8c^4 + 2708b^6c^{12} + 245b^6c^6 \\ &\quad + 159b^4c^8 - 30b^4c^2 - 219b^2c^4 + 62). \end{aligned} \quad (12.2.41)$$

Die relevanten Terme aus der Bethe-Weizsäcker-Gleichung (8.5.14) ergeben mit den Korrekturfaktoren $S/(4\pi)$ und $\langle r_1^2 \rangle$

$$\begin{aligned} E'_B &\approx -a_S A^{2/3} \frac{S}{4\pi} - \langle r_1^2 \rangle a_C Z^2 A^{-1/3} \\ &= -a_S A^{2/3} \left(\frac{b^{-8/5} + (b c)^{8/5} + c^{-8/5}}{3} \right)^{5/8} \end{aligned} \quad (12.2.42)$$

12.2.6. Reaktionsquerschnitt

Der Reaktionsquerschnitt einer Reaktion hängt von den folgenden Größen ab:

- der Zahl der Teilchen im Ausgangskanal k : \dot{N}_k ,
- dem Teilchenfluss im Eingangskanal i : $\phi_a(i)$ (Teilchen, die auf dem Target auftreffen),
- der Zahlendichte der Targetkerne: n_X und
- dem Reaktionsvolumen V .

Der differenzielle, energieabhängige Streuquerschnitt $\sigma_{ik}(E)$ beschreibt den Streuquerschnitt vom Eingangskanal i in den Ausgangskanal k . Mit den oben genannten Größen ergibt sich die Zahl der Teilchen im Ausgangskanal zu

$$\dot{N}_k = \sigma_{ik}(E) n_X V \phi_a(i) \quad (12.2.43)$$

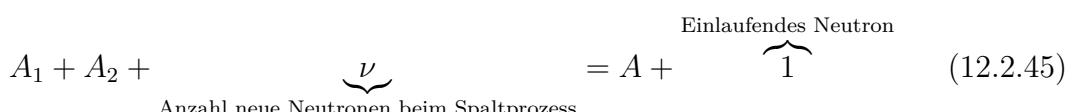
Der differentielle Wirkungsquerschnitt beträgt dann

$$\frac{d}{d\Omega} (\sigma_{ik}(\vartheta, E)) = \frac{1}{n_X V \phi_a(i)} \frac{d\dot{N}_k(\vartheta)}{d\Omega} \quad (12.2.44)$$

12.2.7. Massenverteilung der Spaltprodukte

Die wahrscheinlichste Spaltung ergibt Fragmente mit leicht unterschiedlichen Massen.

Erhaltungsgrößen



$$Z_1 + Z_2 = Z \quad (12.2.46)$$

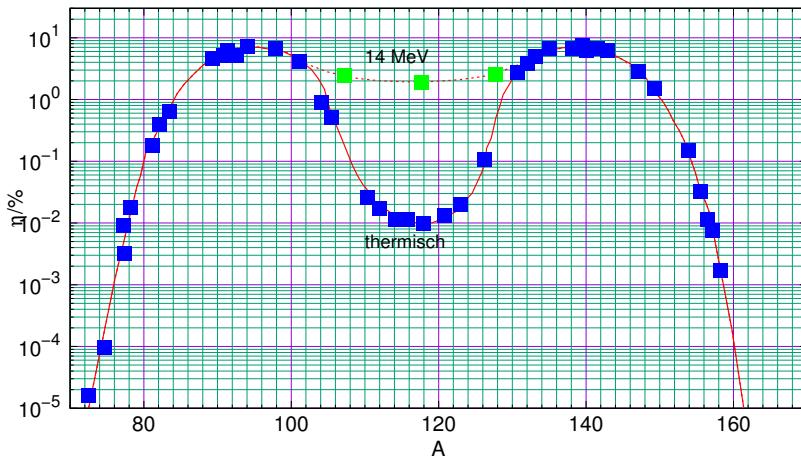


Abb. 12.7.: Massenverteilung der Spaltprodukte bei der Kernspaltung (nach [Dem10, Abb. 6.18]).

Abbildung 12.7 zeigt die Massenverteilung der Spaltprodukte.

12.2.8. Energieausbeute

Näherungsweise ist die Energieverteilung der Spaltneutronen durch Gleichung (12.1.15) gegeben.

$$N(E) = C \cdot \sinh \left[\left(\frac{E_{kin}}{\text{MeV}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot e^{-\frac{E_{kin}}{\text{MeV}}}$$

Die entstehenden Bruchstücke senden γ -Strahlen aus und gleichen so die Nukleonenverteilung durch β^- -Emission aus. Manchmal werden auch Neutronen emittiert. Tabelle 12.3 zeigt die Energiebilanz. Die Energien wurden durch die Messung der Flugzeitmessung bestimmt.

E_{kin} (Spaltprodukte)	167 MeV
E_{kin} (Spaltneutronen)	6 MeV
direkte γ -Strahlung während Spaltung verzögert	7 MeV
γ -Strahlung der Spaltprodukte	6 MeV
β^- -Strahlung der Spaltprodukte	5 MeV
ν -Strahlung	10 MeV
	201 MeV

Tab. 12.3.: Energiebilanz einer Spaltreaktion

12.3. Erhaltungssätze

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, welche Erhaltungssätze bei einer Kernspaltung gelten.

Erstens muss die Nukleonenzahl erhalten sein.

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4 \quad (12.3.1)$$

Die Ladungserhaltung bedeutet für die Zahl der Protonen

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4 \quad (\text{auch } q_1 + q_2 = q_3 + q_4) \quad (12.3.2)$$

Ebenso gilt die Drehimpulserhaltung, da Projektil und Target ja über den Stossparameter b einen quantisierten Drehimpuls haben

$$\mathbf{J}(a + X) = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_X + \mathbf{L}_{aX} = \mathbf{J}(b + Y) = \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_Y + \mathbf{L}_{bY} \quad (12.3.3)$$

bei einer Wechselwirkung mit der Reichweite R gibt es einen maximal möglichen Drehimpuls \mathbf{L}_{aX}^{max}

$$|\mathbf{L}_{aX}| = p_a \cdot b < \mathbf{L}_{aX}^{max} = p_a \cdot R \quad (12.3.4)$$

Hier ist b der Stossparameter. Wegen $L = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$ und $p_a = \sqrt{2m_a E_{kin}}$ ist

$$\mathbf{L}_{aX}^{max} = \hbar\sqrt{\ell_{max}(\ell_{max}+1)} \leq R\sqrt{2m_a E_{kin}} \quad (12.3.5)$$

und daraus ergibt sich

$$\ell_{max}(\ell_{max}+1) \leq \frac{R^2}{\hbar}(2m_a E_{kin}) \quad (12.3.6)$$

sowie

$$\ell_{max}^2 + \ell_{max} - \frac{R^2}{\hbar}(2m_a E_{kin}) \leq 0 \quad (12.3.7)$$

Schliesslich erhalten wir die zwei Lösungen für den maximalen Drehimpuls

$$\ell_{max_{1,2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8\frac{R^2}{\hbar}m_a E_{kin}}}{2} \underset{\text{Physik}}{\approx} \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8\frac{R}{\hbar}m_a E_{kin}} - 1 \right) \quad (12.3.8)$$

Wenn die Ungleichung $\hbar^2 < 8R^2 m_a E_{kin}$ erfüllt ist, ist die Streuung in nullter Ordnung und es gilt

$$\ell_{max} \leq R\sqrt{2m_a E_{kin}} - \frac{1}{2} \quad (12.3.9)$$

mit m_a der reduzierten Masse. Mit den Parametern $a = n$ (Projektil ist ein Neutron), $X = p$ (Ziel ein Proton), der Reichweite $R = 2.6$ fm und der Approximation der beiden Massen zu $\mu = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg ergibt sich

$$\Rightarrow \ell_{max}^{\text{lab}} \leq 0.6\sqrt{E_{kin}/\text{MeV}} - \frac{1}{2} \quad (12.3.10)$$

Im Schwerpunktssystem gilt

$$\ell_{max}^S \leq 0.4\sqrt{E_{kin}^S/\text{MeV}} - \frac{1}{2} \quad (12.3.11)$$

Beispiel: Wenn die kinetische Energie $E_{kin} = 1 \text{ MeV}$ ist, beträgt $\ell_{max}^{lab} \leq 0.6 - 0.5 = 0.1$. Damit ist klar, dass es nur die S -Streuung gibt.

12.3.1. Paritätserhaltung

Bei einem kugelsymmetrischen Potential haben wir

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi) \quad (12.3.12)$$

Eine Spiegelung am Ursprung ergibt, dass $R(r)$ gerade ist und dass

$$Y_\ell^m(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) \quad (12.3.13)$$

- Zustände mit geradem ℓ haben gerade Parität
- Zustände mit ungeradem ℓ haben ungerade Parität

Bei der starken Wechselwirkung ist

$$P_{a+X} = P_a \cdot P_X \cdot (-1)^{\ell_{aX}} = P_{b+Y} = P_b \cdot P_Y \cdot (-1)^{\ell_{bY}} \quad (12.3.14)$$

Proton-Neutron-Streuung

$$I_a = I_X = \frac{1}{2} \quad (12.3.15a)$$

$$P_a = P_X = P_b = P_Y \quad (12.3.15b)$$

Dann ist $(-1)^{\ell_{aX}} = (-1)^{\ell_{bY}}$ und damit $\Delta\ell = \ell_{aX} - \ell_{bY}$, also gerade. Dann muss $\Delta\ell = 2$ sein. Es müssten also ΔI_a und ΔI_X beide gleichzeitig umklappen: Dies ist sehr unwahrscheinlich.

13. Kernenergie

Die folgenden Abschnitte sollen einen kurzen Überblick über die realisierte und geplante Erzeugung elektrischer Energie mit Kernspaltung und Kernfusion geben. Der Abschnitt ist im Wesentlichen qualitativ und gibt Beispiele für Geräte.

13.1. Kernspaltung

Die von Otto Hahn und Fritz Straßmann gefundene Kernspaltung sowie die Erklärung von Lise Meitner und Otto Frisch wurden beide im Jahre 1939 in wissenschaftlichen Artikeln veröffentlicht. [HS39; MF39]. Dies ermöglichte im Prinzip allen, den Effekt zu nutzen. Wirklich erkannt und konsequent durchgeführt haben diese Forschung und Entwicklung die U.S.A. und das Vereinigte Königreich von Grossbritannien. Die Forschung wurde schnell in den USA konzentriert, weit weg vom Kriegsgeschehen in Europa und Asien. Viele der intelligentesten Menschen in Kontinentaleuropa wurden durch die Naziherrschaft und deren Eroberungsfeldzüge gezwungen, den Kontinent Richtung die U.S.A. zu verlassen. Dies waren unter vielen anderen Albert Einstein, Enrico Fermi, Hans Bethe, Otto Frisch, Otto Stern, Victor Weisskopf und Eugene Wigner.

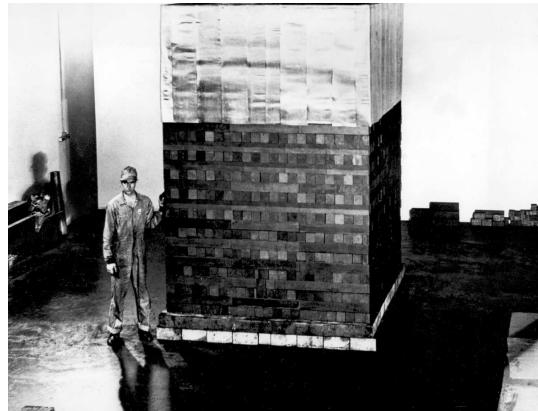


Abb. 13.1.: Stapelversuch beim Chicago Pile-1 unter der Leitung von Enrico Fermi (ENERGY.GOV, Public domain, via Wikimedia Commons, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HD.5A.025_\(10692802156\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HD.5A.025_(10692802156).jpg)).

In Chicago unter den Tribünen des Stagg Field Stadions hat eine Gruppe um Enrico Fermi Versuchsaufbauten zu Reaktoren gebaut. Die Forschungen hatten ergeben, dass Neutronen auf thermische Geschwindigkeiten abgebremst werden mussten um in $^{235}_{92}\text{U}$ effizient Spaltreaktionen für Kettenreaktionen zu starten.

Dieses Abbremsen in einem MODERATOR musste zuerst erkundet werden. Dazu wurden mit 29 verschiedene Anordnungen erprobt. Abbildung 13.1 zeigt einen ersten Versuch.



Abb. 13.2.: Die drei Bilder zeigen die 1., 7. und 10. Schicht des Chicago Pile-1 unter der Tribüne des Stagg Field Stadium (Alle drei Teilbilder ENERGY.GOV, Public domain, via Wikimedia Commons)

Aus diesen Stapelversuchen kristallisierte sich dann die Anordnung der Graphitplatten, des Urans und der sonstigen Einrichtungen heraus. Die Abbildung 13.2 zeigt die ersten Schichten des Reaktors im Stagg Field Stadium. Mit ihm gelang dem Team von Enrico Fermi die erste kontrollierte nukleare Kettenreaktion.

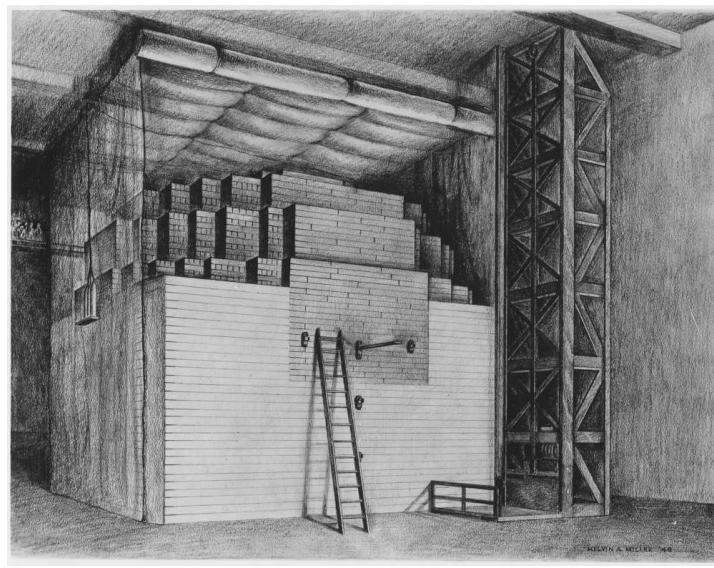


Abb. 13.3.: Erster Uranreaktor Chicago Pile-1 im Stagg Field Stadium in Chicago, um 1942. Zeichnung Melvin A. Miller of the Argonne National Laboratory (Public domain, via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stagg_Field_reactor.jpg)

Der gesamte endgültige Aufbau unter den Tribünen des Stagg Field Stadiums in Chicago ist in Abbildung 13.3 gezeigt. Bemerkenswert ist, dass die dort arbeitenden Menschen nicht geschützt waren. Der Umgang mit so grossen Mengen radioaktivem Material musste erst noch gelernt werden.

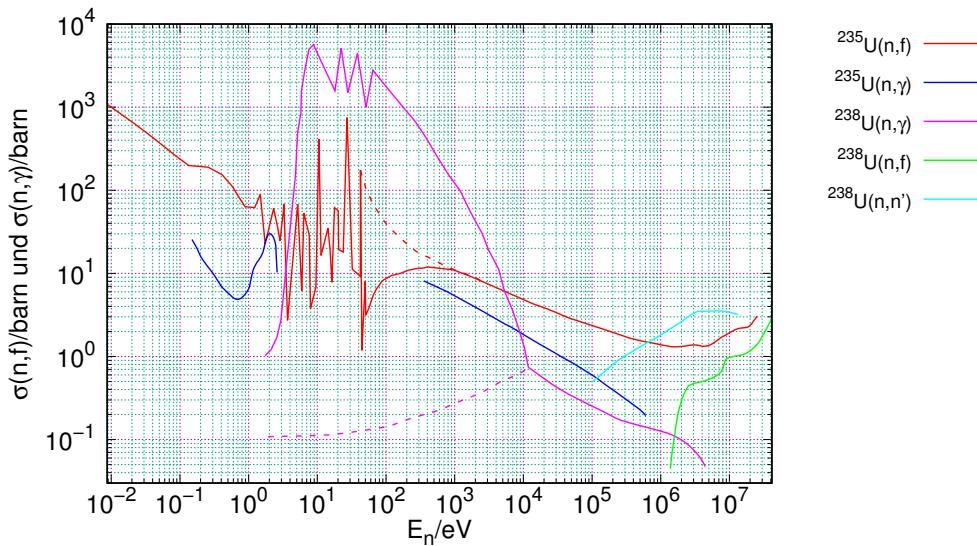


Abb. 13.4.: Streuquerschnitte für $^{238}_{92}\text{U}$ und $^{235}_{92}\text{U}$ für die (n, f) -, (n, γ) - und (n, n') -Reaktionen. (n, f) bedeutet die neutroneninduzierte Spaltung. (nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 8.17]).

G. I. Bell und S. Glasstone [BG70] US Atomic Energy Commission, Washington, DC (United States) (US Atomic Energy Commission) beschreiben die Theorie von Kernreaktoren. Interessant ist auch die Abschätzung der kritischen Masse [Nas00] von Werner Heisenberg, beschrieben durch M. S. el Naschie. Abbildung 13.4 zeigt die Streuquerschnitte für Kernspaltung von $^{238}_{92}\text{U}$ und $^{235}_{92}\text{U}$. Es ist klar, dass kleine Geschwindigkeiten der Neutronen nur bei $^{235}_{92}\text{U}$ zu grossen Querschnitten führen. Deshalb ist es wichtig, Neutronen durch Streuung abzubremsen. Diese Aufgabe übernimmt ein MODERATOR. Ein Moderatormaterial ist ein Material, das Neutronen effizient abremst ohne Reaktionen einzugehen. Aus der Mechanik wissen wir, dass bei einem Stoß eines bewegten Objekts mit einem ruhenden Objekt dann die Energie gleichmäßig verteilt wird wenn die beiden Massen gleich sind. Deshalb muss ein Moderator aus leichten Atomkernen bestehen. Typische Moderatormaterialien sind

leichtes Wasser In H_2O streuen die Protonen im Molekül besonders effizient

schweres Wasser In D_2O oder DOH streut das ^2_1H wegen der geänderten Wechselwirkung die Neutronen besonders gut. Dieser Moderator wird heute kaum mehr gebraucht, da er zu teuer ist.

Graphit In graphitmoderierten Reaktoren ist es die Streuung an $^{12}_6\text{C}$ die die Neutronen abbremst.

Neben der Moderation oder Abbremsung der Neutronen braucht ein Reaktor auch die Möglichkeit, den Neutronenfluss zu steuern. Mögliche Materialien für STEUERSTÄBE sind nach [Wik21b]:

seltene Erden Neben anderen seltenen Erden ist HAFNIUM ein neuerdings häufiger verwendetes Material mit grossem Absorptionsquerschnitt für Neutronen.

höchster Absorptionsquerschnitt Die grössten Absorptionsquerschnitte für Neutronen haben die Materialien SILBER, INDIUM und KADMIUM. Bei Silber ist ein Problem, dass es nicht so häufig in der Erdkruste vorkommt

Bor BOR hat für einen weiten Bereich von Neutronenenergien einen grossen Absorptionsquerschnitt

Kobalt ist auch ein möglicher Kandidat.

Zirkon kann auch in Legierungen verwendet werden.

Lithium kann als flüssiges Metall sowohl moderieren wie auch Wärme abtransportieren.

Xenon Das Edelgas entsteht besonders wenn ein Reaktor abgeschaltet wird. Xenon hat einen grossen Absorptionsquerschnitt für Neutronen.

In der Regel werden keine reinen Materialien sondern Legierungen verwendet, wie kubisches Bornitrid, borierter Stahl, Borkarbid, Zirkondiborid, Titandiborid, Hafniumdiborid oder Disprosiumtitanat sind mögliche Materialien.

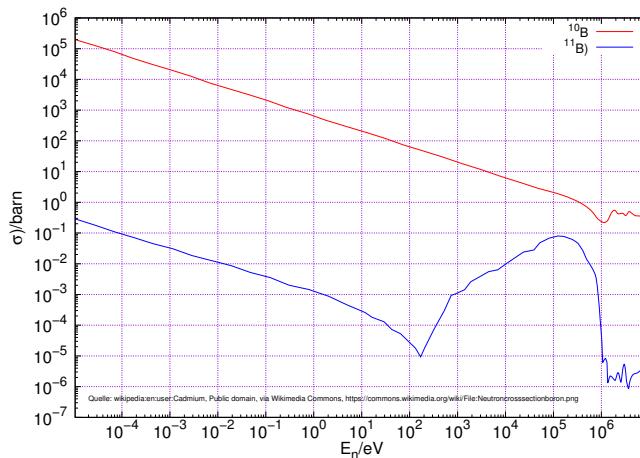


Abb. 13.5.: Absorptionsquerschnitte von ^{10}B und ^{11}B für Neutronen (nach wikipedia:en:user:Cadmium, Public domain, via Wikimedia Commons, Neutroncrosssectionboron.png).

Abbildung 13.5 zeigt die Streuquerschnitte von Bor für Neutronen. ^{10}B hat bei einer Neutronenenergie von 1 eV einen Absorptionsquerschnitt von 464 b. ^{235}U

hat bei der gleichen Energie einen Streuquerschnitt für Spaltung von 62 b. Deshalb ist verständlich, dass Bor den Fluss von Neutronen regulieren kann.

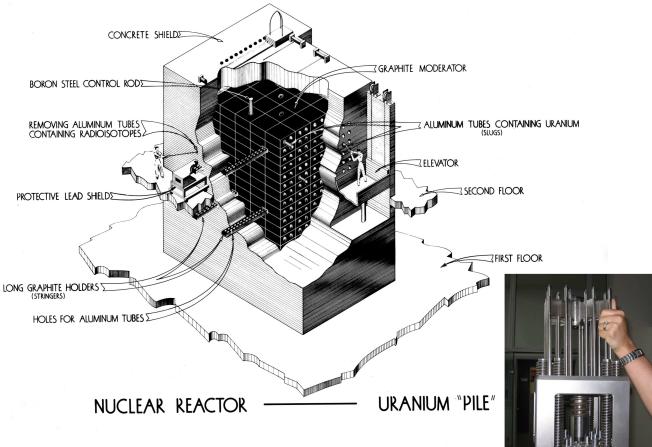


Abb. 13.6.: Kontrollstäbe in einem Reaktor von 1943 und rechts: Bild von Kontrollstäben für einen Druckwasserreaktor (von Wikipedia, links: doe-oakridge, Public domain, via Wikimedia Commons, Nuclear_Reactor_Uranium_Pile_(30502443888).jpg und rechts:Nic Ransby, Public domain, via Wikimedia Commons, PWR_control_rod_assembly.jpg).

Abbildung 13.6 zeigt, wie in einem Reaktor die Steuerstäbe eingebaut werden. Die Linke Seite zeigt eine Skizze eines Reaktors von 1943, die rechte Seite ein Bild von Steuerstäben für einen Druckwasserreaktor. Die Steuerstäbe in graphitmoderierten Reaktoren wie auch in Druckwasserreaktoren werden von oben eingefahren. Dies hat den Vorteil, dass sie im Störfall einfach fallen gelassen werden können.



Abb. 13.7.: Modell von Brennstäben im Siedewasserreaktor von Gundremmingen (Blöcke B und C) (eigene Bilder aus Deutschen Museum München)

In Siedewasserreaktoren werden die Steuerstäbe von unten eingeführt (siehe Abbildung 13.7). Die Dampfblasen im oberen Teil des Siedewasserreaktors verringern mit zunehmender Höhe die Moderationsleistung und verringern die Rate der Kernspaltungen. Die Steuerstäbe von unten kompensieren diesen Effekt zum Teil. Der Nachteil ist, dass sie im Störfall aktiv eingeschoben werden müssen, die Gravitation hilft nicht.

13.1.1. Wie viel Uran braucht es?

Im Betrieb erzeugt das spaltbare Material, also $^{235}_{92}\text{U}$, zwischen zwei und drei Neutronen pro Spaltung. Diese Neutronen haben eine mittlere freie Weglänge ℓ_f für die Spaltreaktion. Wenn die Menge von $^{235}_{92}\text{U}$ klein ist, wenn also der Durchmesser in der Größenordnung der mittleren freien Weglänge ℓ_f ist, werden die meisten Neutronen den Reaktorkern verlassen ohne eine weitere Spaltung zu auszulösen. Die Verluste sind proportional zur Oberfläche, während die Anzahl der möglichen Spaltungen mit dem Volumen steigt. Deshalb ist es notwendig, dass eine Mindestmasse an spaltbarem Material vorhanden ist um die Kettenreaktion aufrechtzuerhalten. Wenn pro Spaltung $2 \leq \nu \leq 3$ Neutronen erzeugt werden und wenn der Faktor $0 \leq a \leq 1$ der erzeugten Neutronen verloren geht, kann eine Gleichung für die kritische Größe aufgestellt werden. Wir brauchen zusätzlich die mittlere Freie Weglänge ℓ_f und die mittlere Geschwindigkeit der Neutronen $\langle v_n \rangle := v$ um die Rate der Reaktionen zu berechnen $\lambda = \frac{v}{\ell_f}$. Zusätzlich muss jedes reagierende Neutron aus dem System entfernt werden. Wir schreiben für die Anzahl Neutronen n im System

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t) &= (n(t) \cdot \nu - n(t) \cdot \nu \cdot a - n(t)) \frac{v}{\ell_f} \\ &= (\nu \cdot (1 - a) - 1) \cdot \frac{v}{\ell_f} \cdot n(t) = \lambda(\nu, a)n(t) \end{aligned} \quad (13.1.1)$$

$\lambda(\nu, a) = (\nu \cdot (1 - a) - 1) \cdot \frac{v}{\ell_f}$ ist die Rate, die sowohl negativ wie auch positiv. Der Grund ist, dass jedes Neutron, das eine Spaltung erzeugt entfernt wird. Die Lösung ist

$$n(t) = n(0) \exp \left((\nu \cdot (1 - a) - 1) \cdot \frac{v}{\ell_f} \cdot t \right) \quad (13.1.2)$$

Wenn $\nu \cdot (1 - a) - 1 < 0$ ist, also $a > \frac{\nu-1}{\nu}$, dann verschwinden zu viele Neutronen aus dem Reaktorkern, die Anzahl Spaltungen nimmt mit der Zeit exponentiell ab. Ist andererseits $\nu \cdot (1 - a) - 1 > 0$ ist, also $a < \frac{\nu-1}{\nu}$, steigt die Anzahl der Neutronen exponentiell an und der Reaktor zerstört sich selber. Mit den Steuerstäben muss das sehr delikate Gleichgewicht eingestellt werden. Dies ist, da die Zeitkonstanten sehr klein sind, so nicht möglich.

Die kritische Masse eines Reaktors ist viel grösser als die kritische Masse einer Bombe. Der Grund ist, dass das spaltbare Material in einem Reaktor viel weniger dicht angeordnet ist. Der Moderator und der Platz für die Steuerstäbe erhöhen die Menge des benötigten Materials. C.-K. Lee [Lee73] gibt eine Rechnung für einen zylindrischen Reaktor. Es gibt andere Paper, die an der Universität Ulm leider

nicht zugänglich sind. C.-K. Lee verwendet die international übliche Theorie der Diffusion von Neutronen in zwei Geschwindigkeitsklassen. Diese Theorie ist auch von G. I. Bell und S. Glasstone [BG70] verwendet worden.

Für Bomben wird eine Kugelgeometrie verwendet. Im American Journal of Physics hat C. F. Chyba und C. R. Milne [CM14] eine einfache Gleichung für kritischen Radius abgeleitet. Diese Gleichung [CM14, Gl. (10)] lautet

$$R_C = \frac{1}{\sqrt{3}\eta} \frac{(2\alpha(\nu - 1) + 1)^{1/3}}{(2\alpha(\nu - 1) + 1)^{1/3} - 1} \ell_f \quad (13.1.3)$$

Hier ist ν die Anzahl Neutronen pro Spaltreaktion. $\nu - 1$ ist die Zahl, die nach einem Spaltvorgang noch übrig ist (das eine ist ja aus dem System entfernt worden). α ist ein Korrekturfaktor für die Neutronendichte, die ja nicht konstant ist in der Kugel. ℓ_f ist die mittlere freie Weglänge für die Spaltreaktion der Neutronen ($\ell_s < \ell_f$ wäre die mittlere freie Weglänge für die Streuung). $\eta = \frac{\ell_f}{\ell_s}$ ist die Anzahl Streuungen eines Neutrons bis es eine Spaltreaktion eingeht. Verwendet wurde hier [CM14, Gl. (8) und (9)] dass die Neutronendichte sich wie

$$n(r) \propto \frac{\sin(r/d)}{r/d} \quad \text{mit } d = \sqrt{\frac{\ell_f \ell_t}{3(\nu - 1)}} \quad (13.1.4)$$

ist mit ℓ_t der gesamten freien Weglänge der Neutronen. Diese Gleichung über-schätzt nach Angabe von C. F. Chyba und C. R. Milne den kritischen Radius. Im gleichen Journal hat B. C. Reed [Ree15] eine weitere Abschätzung angegeben. Zusätzlich hat er aussen liegende Neutronenreflektoren berücksichtigt.

spaltbares Material	ohne Reflektor	Al	BeO	$^{238}_{92}\text{U}$
$^{235}_{92}\text{U}$ $\rho = 19.2 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$	45.9 kg $R_c = 8.3 \text{ cm}$	22.0 kg $R_c = 6.5 \text{ cm}$	8.6 kg $R_c = 4.8 \text{ cm}$	16.5 kg $R_c = 5.9 \text{ cm}$
$^{239}_{94}\text{Pu}$ $\rho = 19.8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$	16.7 kg $R_c = 5.9 \text{ cm}$	9.7 kg $R_c = 4.9 \text{ cm}$	4.9 kg $R_c = 3.9 \text{ cm}$	7.2 kg $R_c = 4.4 \text{ cm}$

Tab. 13.1.: Kritische Massen von $^{235}_{92}\text{U}$ und $^{239}_{94}\text{Pu}$ ohne und mit Neutronenreflektoren. Angegeben sind auch die kritischen Radien R_c . Die Daten stammen von B. C. Reed [Ree15, Tab. I und II].

Tabelle 13.1 gibt einige Zahlenwerte für die kritischen Massen von $^{235}_{92}\text{U}$ und $^{239}_{94}\text{Pu}$. Von letzterem reichen 16.7 kg, also eine Kugel mit einem Durchmesser von 11.8 cm. Dies ist etwas weniger als die Spannbreite einer Hand! Mit BeO reichen sogar 4.9 kg mit einem Durchmesser von 7.8 cm. Hier muss noch die wahrscheinlich nochmals 4 cm dicke Hülle aus dem ziemlich leichten ($\rho = 3 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$) Berylliumoxid mit eingerechnet werden.

In einem weiteren Artikel im American Journal of Physics hat B. C. Reed [Ree18] ein Modell zur Berechnung der Sprengkraft der einer Kernspaltungsbombe veröf-

fentlicht.

13.1.2. Steuerung durch verzögerte Neutronen

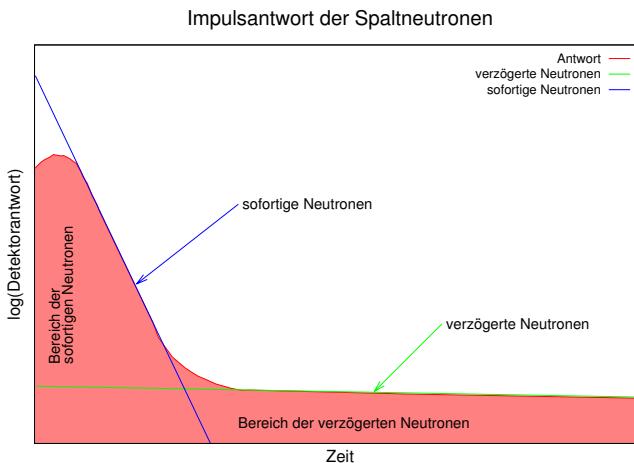


Abb. 13.8.: Impulsantwort der Spaltneutronen nach G. I. Bell und S. Glasstone [BG70, Abb. 10.6].

Zur Regelung von Reaktoren braucht es die verzögerten Neutronen. Abbildung 13.8 zeigt eine Messung von G. I. Bell und S. Glasstone [BG70, Abb. 10.6]. Die Autoren haben in eine unterkritische Masse von $^{235}_{92}\text{U}$ einen Neutronenpuls gesandt und den zeitlichen Verlauf der durch Spaltung erzeugten Neutronen gemessen. Wie schon besprochen entstehen bei jeder Spaltung $2 \leq \nu \leq 3$ Neutronen. Diese Neutronen sind die SOFORTIGEN NEUTRONEN. Mit ihnen ist es fast unmöglich einen Reaktor zu regeln, da dessen Trägheit ein eher unstabiles System ergibt. G. I. Bell und S. Glasstone geben in ihrem Artikel eine detaillierte Analyse des Regelverhaltens eines Reaktors an. Die VERZÖGERTEN NEUTRONEN in Abbildung 13.8 erst ermöglichen die Regelung. Sie werden von instabilen Spaltprodukten emittiert und treten bis einige Minuten nach dem Puls auf.

Ein Reaktor wird mit den sofortigen Neutronen soweit hochgefahren (über die Steuerstäbe) dass er immer noch leicht unternkritisch ist. Dann wird er mit den verzögerten Neutronen kritisch gehalten.

13.1.3. Reaktoren

Im folgenden werden einige Reaktortypen vorgestellt.

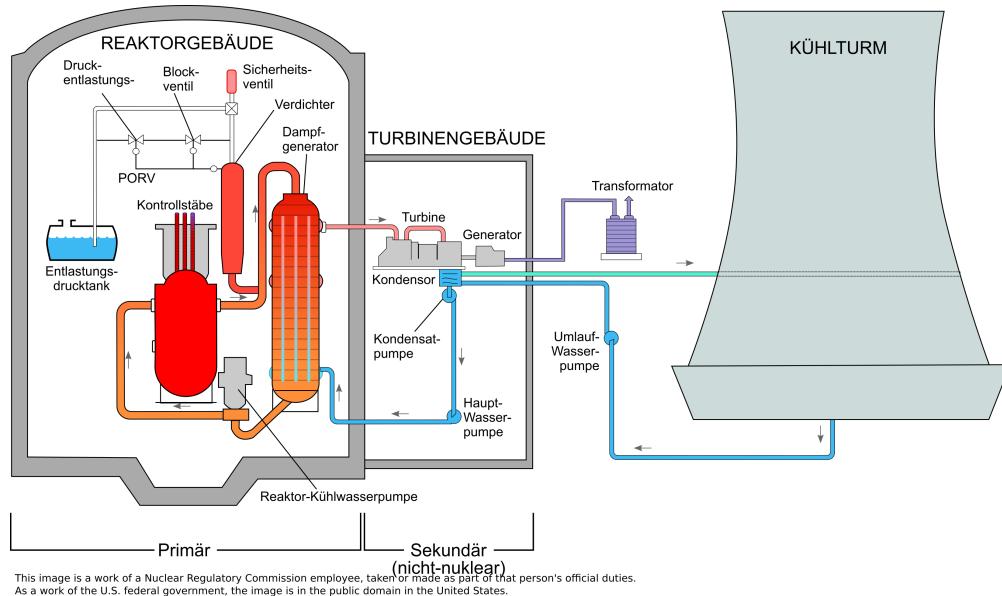
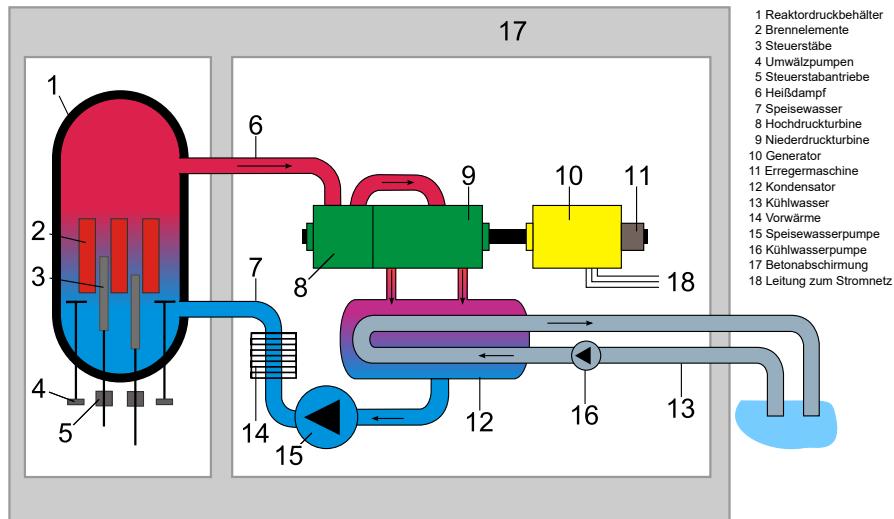


Abb. 13.9.: Schnitt durch einen Druckwasserreaktor (von Wikipedia, Public Domain)

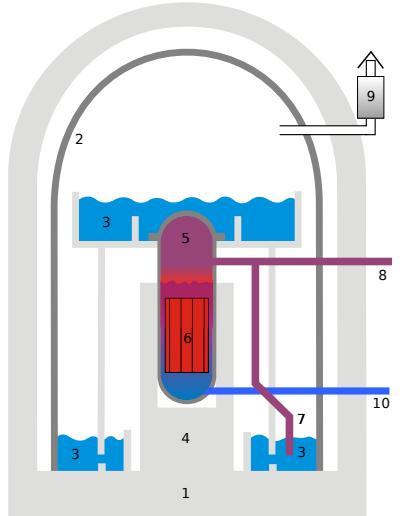
Die meisten Reaktoren in Betrieb sind Druckwasserreaktoren wie einer schematisch in Abbildung 13.9 gezeigt ist. Der Vorteil von Druckwasserreaktoren ist, dass die Turbinen nicht mit radioaktiv kontaminiertem Kühl- und Moderatorwasser in Kontakt kommen. Weiter können die Steuerstäbe unter Mithilfe der Gravitation eingefahren werden. Wie heute üblich sind die Reaktoren mit einer oder mehreren hermetisch dichten Hüllen von der Umwelt getrennt. Um den thermischen Wirkungsgrad zu erhöhen wird der Druck des Abdampfs durch die Kondensatpumpe unter den Atmosphärendruck gesenkt. Das Wasser kondensiert dann einige 10 K unter dem üblichen Siedepunkt von 373.15 K.



Robert Steffens, SVG: Marlus Gancher, Antonsusi, GFDL <<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>>, via Wikimedia Commons
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Boiling_water_reactor_german.svg

Abb. 13.10.: Prinzipbild eines Siedewasserreaktors wie er in Gundremmingen bis Ende 2021 in Betrieb sein wird (von Wikipedia, Robert Steffens, SVG: Marlus Gancher, Antonsusi, GFDL).

Block C in Gundremmingen ist der letzte noch bis Ende 2021 laufende Siedewasserreaktor (siehe Abbildung 13.10). Hier läuft das radioaktiv kontaminierte Wasser durch die Turbine. Dem Vorteil der durch die Dampfphase verbesserten Steuerbarkeit steht die Kontamination der Turbine und der Hilfsantriebe gegenüber. Das mit der Umgebung ausgetauschte Kühlwasser ist aber auch hier getrennt vom kontaminierten Kreislauf. Und weiter müssen die Steuerstäbe aktiv in den Reaktor eingefahren werden.



Stefan-Xp, CC BY-SA 3.0 <<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Reaktorgeb%C3%A4ude.svg>

Abb. 13.11.: Schnitt durch ein Reaktorgebäude. 1: äussere Abschirmung, gegen äussere Einwirkungen, aus Beton mit Stahleinlagen, etwa 1.2 m stark, 2: Stahl-Sicherheitsbehälter (Containment), etwa 4 cm stark, 3: Druckabbaubecken, gefüllt mit Wasser, 4: Abschirmung der radioaktiven Strahlung, 5: Reaktordruckgefäß, aus 20 cm Spezialstahl, 6: gasdicht verschweißte Brennstäbe, aus 0.605 mm starkem Zirkonium enthaltend Uran-Pellets mit einem Durchmesser von 8.19 mm, 7: Dampfablassleitung, 8: Frischdampfabführung, 9: gefiltertes Druckentlastungssystem, 10: Frischwasserzuführung. (von Wikipedia Stefan-Xp).

Abbildung 13.11 zeigt einen Schnitt durch ein Reaktorgebäude mit den unterschiedlichen Hüllen. Das Wasserbecken oben dient auch zum Wechseln der abgebrannten Brennstäbe.



Abb. 13.12.: Containment eines Kernreaktors (eigenes Bild aus dem Deutschen Museum München)

Das Containment in Gundremmingen ist in dem Modell aus dem Deutschen Museum in München in Abbildung 13.12 gezeigt.

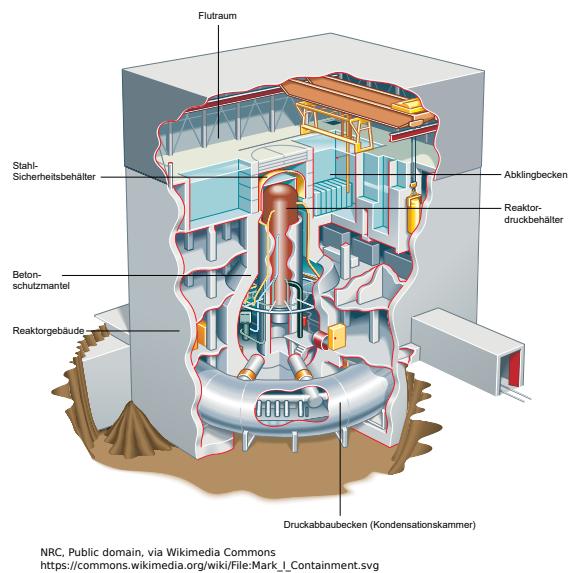
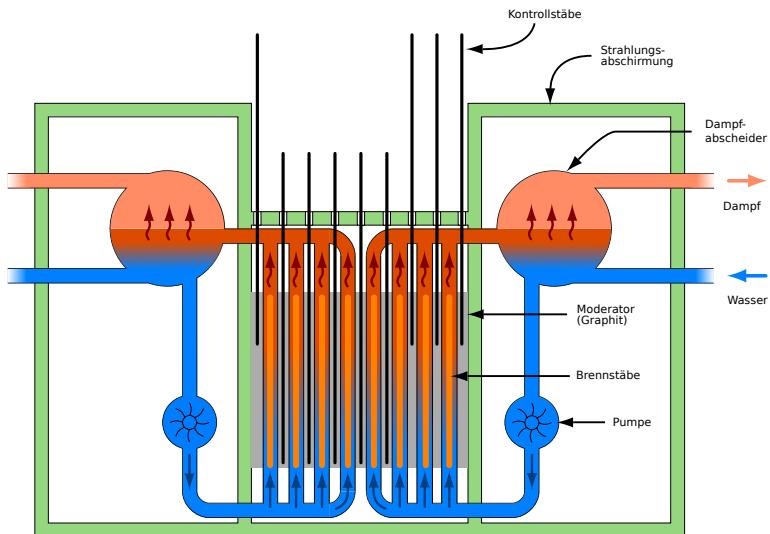


Abb. 13.13.: Siedewasserreaktor vom Typ Mark-I, wie er auch in Fukushima stand (von Wikipedia, NRC, Public domain).

Die Katastrophenreaktoren in Fukushima waren Siedewasserreaktoren so wie sie in Abbildung 13.13 gezeigt werden.



SoftwareHippie, Felix König, Fireice-commonswiki, Sakurambo, Emoscopes, CC BY-SA 3.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RBMK_reactor_schematic_de.svg

Abb. 13.14.: Schema eines graphitmoderierten Reaktors wie er in Tschernobyl verwendet wurde (von Wikipedia, SoftwareHippie, Felix König, Fireice commonswiki, Sakurambo, Emoscopes).

Abbildung 13.14 zeigt das Prinzip des graphitmoderierten Reaktors von Tschernobyl. Nachdem der Reaktor überkritisch wurde, platzten die Kühlwasserleitungen. Wasser im Kontakt mit erhitztem Graphit erzeugt das sogenannte Stadtgas (in Deutschland mit erhitzten Kohlen erzeugt). Diese leicht entzündliche Gas explodierte, zerstörte den Reaktor und verteilte radioaktive Stoffe bis in die hohe Atmosphäre.

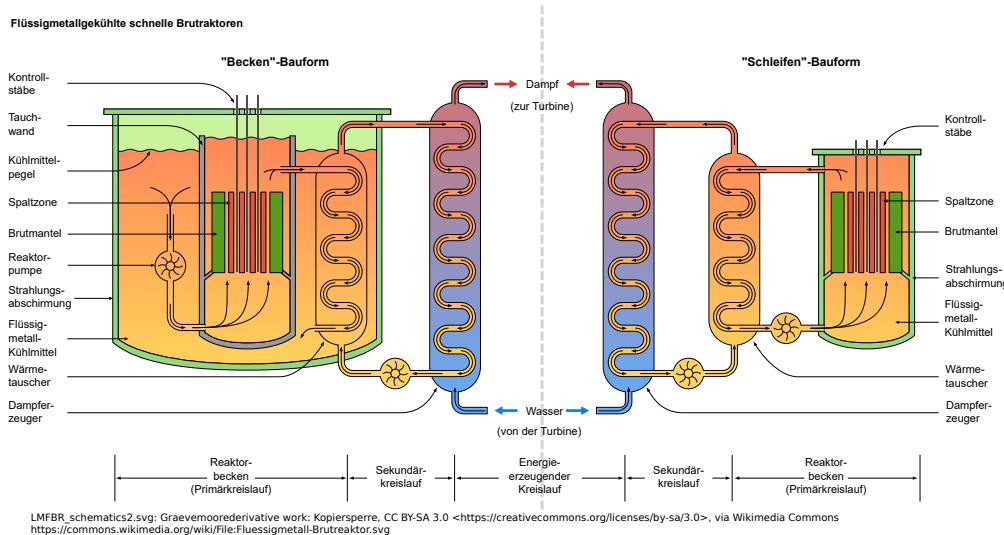


Abb. 13.15.: Schema von Brutreaktoren. Links die Beckenbauform, rechts die Schleifenbauform. (von Wikipedia, LMFBR_schematics2.svg: Graevemooredervative work: Kopiersperre).

Abbildung 13.15 zeigt das Prinzip eines Brutreaktors. Dieser erzeugt neben Wärme auch sehr viel mehr Plutonium wie übliche Reaktortypen. Plutonium kann für Brennelemente (Mischoxid) oder wie Uran für Bomben verwendet werden. Diese Reaktoren sind im Versuchsbetrieb, aber noch nicht in der grosstechnischen Produktion von elektrischer Energie.

13.2. Kernfusion

Die experimentellen Fusionsreaktoren versuchen die Coulombabstossung von Wasserstoff zu überwinden, so dass die beiden Kerne verschmelzen können. Die erhöhte Bindungsenergie von leichten Atomkernen mit grösseren Nukleonenzahlen setzt Energie frei, die über thermische Kraftwerke in elektrische Energie umgewandelt werden soll.

Eine mögliche Reaktion ist



Weitere mögliche Reaktionen werden im folgenden Abschnitt 14 über die Sonne besprochen.

Damit die kinetische Energie die Coulomb-Barriere übertreffen kann muss gelten

$$E_{kin} \geq \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0(a_1 + a_2)} \approx \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \quad (13.2.2)$$

Hier sind a_i die Radien der zu verschmelzenden Kerne approximiert durch $a_i = r_0 A_i^{1/3}$. Für Wasserstoff kann

$$a_1 = a_2 = 1.5 \text{ fm}$$

gesetzt werden. Weiter ist $Z_1 = Z_2 = 1$. Dann muss die kinetische Energie

$$E_{kin} \geq 0.5 \text{ MeV} = 8 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

sein. Dies entspricht einer Temperatur von

$$T \approx \frac{E_{kin}}{K} \approx 6 \cdot 10^9 \text{ K}$$

Nun ist in Gleichung (13.2.2) $a \propto A^{1/3}$. Bei leichten Atomen ist $A \propto Z$. Mit einer hier nicht berechneten Konstante \tilde{C} bekommen wir

$$E_{kin} \geq \tilde{C}(Z_1 Z_2)^{2/3} \quad (13.2.3)$$

Abbildung 13.16 zeigt die minimale kinetische Energie für verschiedene Z_1 und Z_2 .

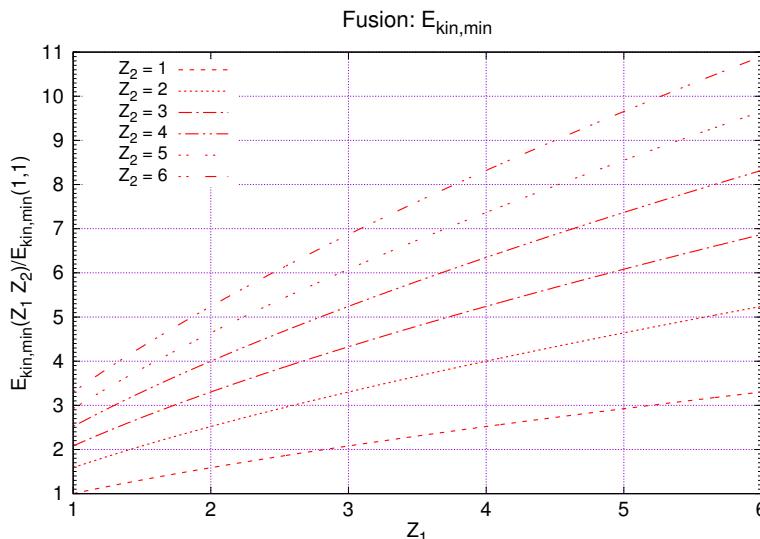


Abb. 13.16.: Minimale kinetische Energie nach Gleichung (13.2.3) zur Überwindung der Coulomb-Barriere, verglichen mit der minimalen kinetischen Energie bei zwei p .

13.2.1. Fusionsreaktoren

Um die Coulombabstossung zu überwinden werden erstens Gase im Plasmazustand (Kerne und Elektronen sind getrennt, aber im gleichen Raumbereich) verwendet. Zweitens sind Temperaturen von 10^7 K und mehr nötig um eine genügend grosse kinetische Energie zu erreichen. Es gibt aber keine Gefäße, die diese Temperaturen aushalten. Deshalb werden Magnetfelder verwendet um das Plasma einzuschliessen. Da es keine Felder über einigen T gibt, müssen die Geräte für den magnetischen Einschluss entsprechend gross sein. Für mehr Informationen siehe auch The ITER

Organization [The18] und EUROfusion consortium+ [EUR18].



Abb. 13.17.: Segment des Tokamaks des Asdex Upgrade 2 (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ASDEX_Upgrade_model_2.jpg, Tiia Monto [CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)])

Die grossen Forschungsgeräte für die Fusionsforschung verwenden heute TOKAMAKS. Abbildung 13.17 zeigt ein Segment des Tokamaks. Die Menschen im Hintergrund können als Längenmassstab dienen.

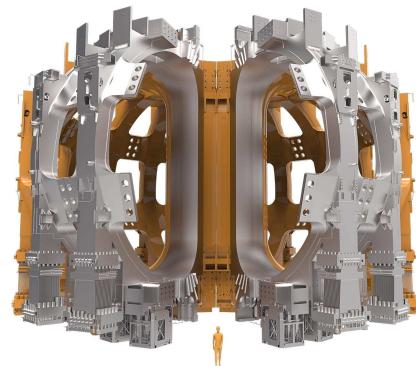


Abb. 13.18.: Größenvergleich Mensch um ITER-Tokamak (Credit © ITER Organization, <http://www.iter.org/>)

Die Spulen des ITER (siehe Abbildung 13.18) sind um einiges grösser als die des Asdex Upgrade 2-Tokamaks in Abbildung 13.17. Die Form aber ist ähnlich.



Abb. 13.19.: Der Tokamak des ITER-Projektes (Credit © ITER Organization, <http://www.iter.org/>)

Der Tokamak des ITER-Projekts ist also einiges grösser, wie Abbildung 13.19 zeigt. Mit diesem Tokamak möchte man eine positive Energiebilanz erreichen.

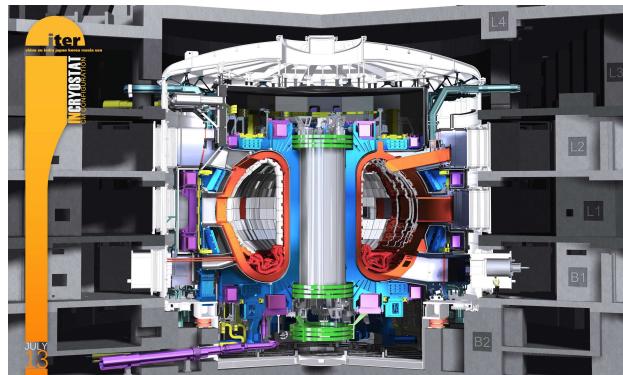


Abb. 13.20.: Darstellung des ITER-Tokamaks mit dem umgebenden Gebäude (Credit © ITER Organization, <http://www.iter.org/>).

Wie ein Kernreaktor muss auch ein Tokamak in ein Gebäude eingebaut werden. Abbildung 13.20 gibt einen Eindruck der Grösse.

13.2.1.1. Magnetfelder in einem Tokamak

Tokamaks verwenden eine Überlagerung toroidalen und poloidalen Magnetfeldern. Die oben gezeigten Spulen erzeugen ein toroidales Magnetfeld. Im Plasma kann über eine horizontal liegende Transformatorwindung ein Strom induziert werden. Dieser erzeugt die poloidale Komponente. Zusammen ergibt sich ein sich windendes Magnetfeld, das das Plasma eingeschlossen hält.

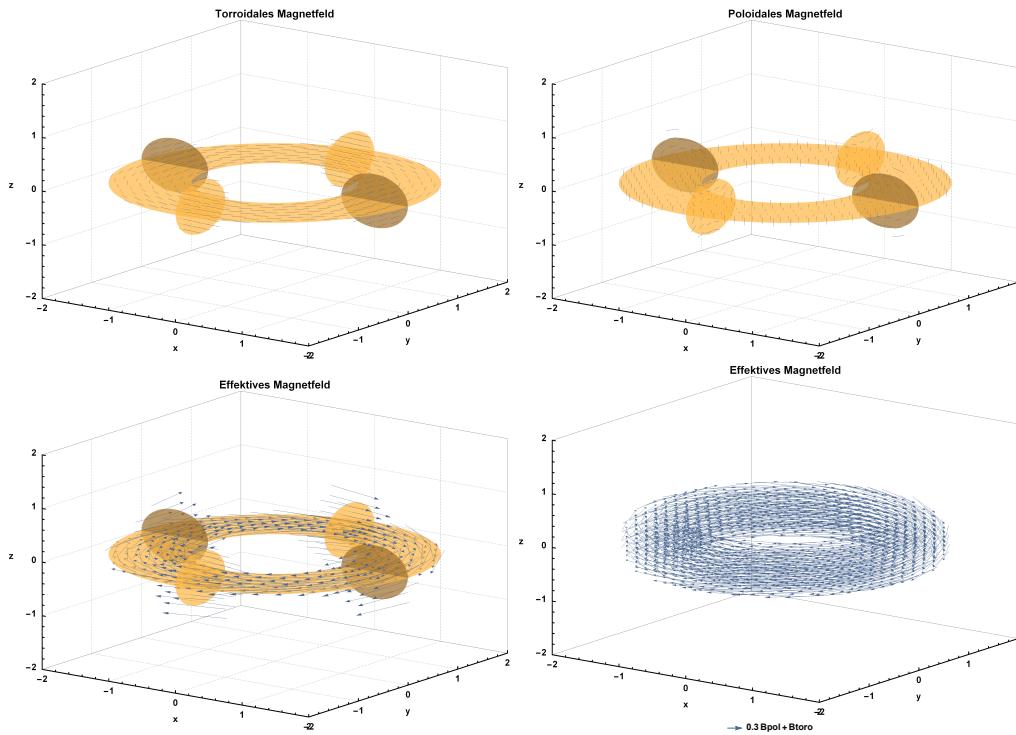


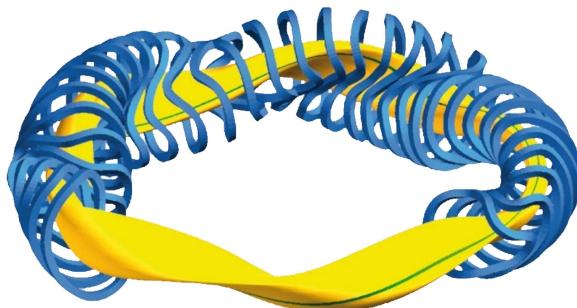
Abb. 13.21.: Darstellung der Magnetfelder in einem Tokamak. Oben links: Toroidales Magnetfeld, oben rechts: Poloidales Magnetfeld, unten links: Effektives Magnetfeld, unten rechts: effektives Magnetfeld ohne Darstellung der Ringgeometrie.

Die einzelnen normierten magnetischen Induktionen in Abbildung 13.21 wurden mit den folgenden Gleichungen berechnet:

$$\frac{B_{tor}(x, y, z)}{B_0} = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.2.4a)$$

$$\frac{B_{pol}(x, y, z)}{B_0} = \begin{pmatrix} -\frac{yz}{\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-1.5)^2+y^2}} \\ -\frac{1.z(\sqrt{x^2+y^2}-1.5)}{\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-1.5)^2+y^2}} \\ \sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-1.5)^2+y^2} \end{pmatrix} \quad (13.2.4b)$$

13.2.2. Weitere Konzepte für Fusionsreaktoren



Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, CC BY 3.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>>, via Wikimedia Commons
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:W7X-Spulen_Plasma_blau_gelb.jpg

Abb. 13.22.: Prinzip des Stellarators (von Wikipedia, Max-Planck Institut für Plasmaphysik).

Je einfacher eine Maschine ist, desto besser lässt sie sich in der Regel beherrschen. Im Jahre 1958 stellte Lyman Spitzer [Spi58] das Konzept eines Stellarators vor. Dieses wurde optimiert und führte zum Wendelstein 7X Design in Abbildung 13.22. In einem Stellarator wird nur eine Sorte Spule verwendet. Die Spulen sind aber sehr viel komplizierter geformt.

13.2.3. Roadmap für Fusionsreaktoren

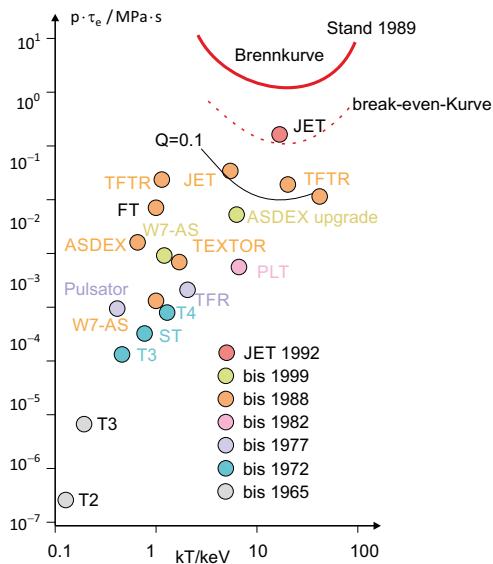
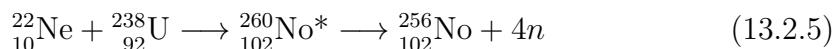


Abb. 13.23.: Roadmap der Kernfusion nach Pinkau et al. [PSW89].

Abbildung 13.23 zeigt eine schon etwas ältere Roadmap für die kontrollierte Fusion. Viel hat sich aber bis heute nicht an der Roadmap geändert.

13.2.4. Transurane

Eine Art extrem endotherme Fusionsreaktion ist zur Herstellung von Transuranen notwendig. Wie im Abschnitt 13.2.1 diskutiert wird eine kinetische Energie benötigt, die die Coulomb-Barriere überwinden kann. Wichtig ist weiter, dass diese Energie in einen Compoundkern transferiert werden muss und dass sie dort genügend lange konzentriert bleibt bevor der Compoundkern zerfällt. Eine mögliche Reaktion (unter vielen) ist



Die GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH [GSI21] ist eine der führenden Institutionen zur Erzeugung und zur Erforschung neuer Transurane.

13.3. Das Abfallproblem

Jedes gross- und auch kleintechnische Gerät zur ENERGIEUMWANDLUNG aus Masse erzeugt eine Vielzahl von aktivierten Kernen. Die nähern sich über einen oder mehrere Schritte dem Grundzustand an. Die Zeitkonstante kann von sehr viel kleiner als eine Sekunde bis zu Jahrmilliarden reichen. Dieser Abschnitt basiert auf dem Buch von K. Stierstadt, *Atommüll - wohin damit?* [Sti10a] und B. L. Cohen, „The Disposal of Radioactive Wastes from Fission Reactors“ [Coh77].

Ebenso entstehen instabile Kerne in der Medizin (Radiotherapie, Röntgengeräte) wie auch in der Technik (Röntgengeräte).

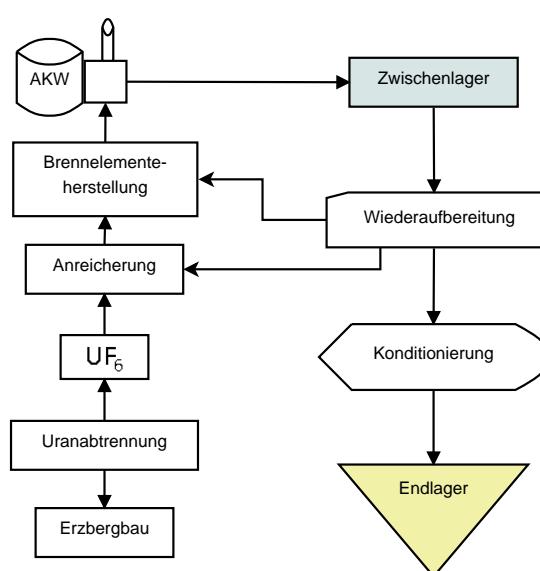


Abb. 13.24.: Abfallzyklus der Kernspaltung

Abbildung 13.24 zeigt schematisch den Stofffluss aus Kernkraftwerken. Abgebrannte Brennelemente werden in einem ersten Schritt im Reaktorgebäude in ein Abklingbecken gebracht. Hochreines Wasser kühlt die Elemente, moderiert die Neutronen und schirmt die Arbeitenden von ionisierender Strahlung ab. Gleichzeitig kann über eine Spurenanalyse des Wassers diagnostiziert werden, ob die Brennelemente strukturell in Ordnung sind.

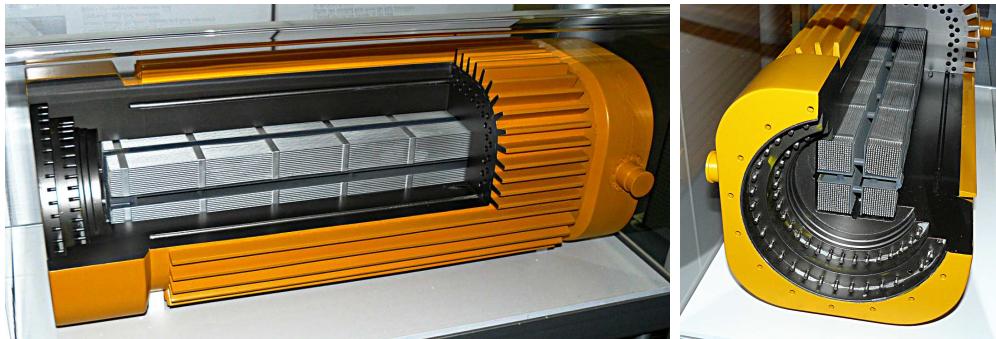


Abb. 13.25.: Modell eines Castors (eigenes Bild aus dem Deutschen Museum München)

Nachdem die kurzlebigen Atomkerne grösstenteils zerfallen sind, werden die Brennelemente unter Wasser in CASTOR-BEHÄLTER verpackt. Abbildung 13.25 zeigt ein Bild eines Castor-Modells. Castoren werden dann in einem Zwischenlager aufbewahrt, bis die Aktivität soweit gefallen ist, dass sie transportiert werden können. In einer Wiederaufbereitungsanlage wird Plutonium extrahiert und $^{235}_{92}\text{U}$ wieder auf den Sollwert angereichert. Spaltprodukte werden abgetrennt und wieder in Castoren verpackt. Die Standorte der Kernkraftwerke bekommen dann die Spaltprodukte zur weiteren Lagerung zurück. Mangels einer gesellschaftlich akzeptierten Lösung zur Lagerung der aktivierten radioaktiven Abfälle werden auch diese Castoren auf Kernkraftwerksgelände gelagert. Plutonium wird entweder zusammen mit Uran zu Brennelementen verarbeitet, oder aber von Kernwaffenmächten zur Herstellung oder Wartung ihres Arsenals verwendet.

Neben diesen Abfallprodukten direkt aus dem Reaktor gibt es aus dem Druckgefäß, bei Siedewasserreaktoren aus den Turbinen, bei Röntgengeräten aus den Röntgenröhren und noch aus vielen anderen Geräten aktivierte Materialien. Fusionsreaktoren sind nach dem Betrieb radioaktiv kontaminiert, da die bei den Kernreaktionen entstehenden Neutronen, überflüssige schnelle Protonen aber auch γ -STRAHLUNG alle Materialien in der Nähe des TOKAMAKS aktivieren. Diese Materialien müssen genau so zwischengelagert werden. Sowohl für die Produkte aus Kernkraftwerken wie auch aus der Technik oder geplanten Fusionsreaktoren gibt es kein gesellschaftlich akzeptiertes Endlagerkonzept.

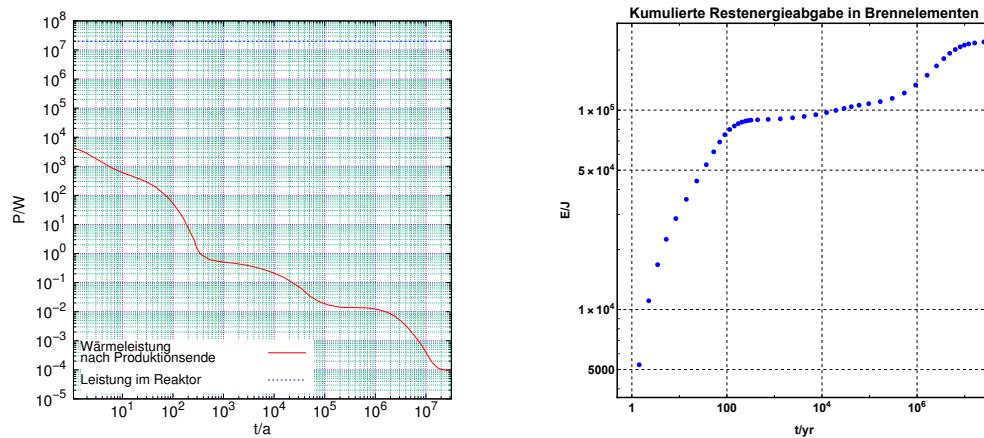


Abb. 13.26.: Links: Restwärmeleistung von Brennelementen nach B. L. Cohen [Coh77] und K. Stierstadt [Sti10a]. Rechts die kumulierte Restenergie über den berechneten Zeitraum.

14. Sonne

Die Sonne ist die einzige langfristige Quelle von Energie für die Erde. Die Strahlung der Sonne erwärmt die Erde über die Temperatur der Hintergrundstrahlung von 2.7 K. Die Strahlung der Sonne beeinflusst nicht nur die Natur sondern auch unsere Kommunikationsverbindungen. Die wichtigsten Kenngrößen der Sonne sind:

- Masse: $1.989 \cdot 10^{30}$ kg
- Sichtwinkel der Sonnenscheibe: $2\alpha = 31'59.2'' \Rightarrow R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^8$ m
- Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi R_{\odot}^3 = 1.3 \cdot 10^{27}$ m³
- mittlere Dichte $\langle\rho\rangle = 1410$ kg m⁻³
- Solarkonstante $K_S = 1360$ W m⁻²
- Leuchtkraft: $L_{\odot} = 3.82 \cdot 10^{26}$ W
- Temperatur der Schwarzkörperstrahlung der Sonne [CO07, p. 360] $T_e = 5777$ K
- Massenverlust pro Zeit: $\frac{dM_{\odot}}{dt} = \frac{L_{\odot}}{c^2} = 4.2 \cdot 10^9$ kg s⁻¹
- Spektralklasse ([Gar94]): G2V
- Absolute Magnitude ([Wil18] und [Oke74]): $M_B = 5.31$ mag, $M_V = 4.80$ mag, $M_K = 5.08$ mag im AB-System.

Die Website des Marshall Space Flight Center [Mar21] gibt einen ersten Einblick in die Physik der Sonne. Ebenso kann der Webauftritt der Stanford University Solar Observatories Group at Stanford University [Sol21] genutzt werden. Aktuelle Bilder der Sonne zeigt das NASA [NAS21].

14.1. Experimentelle Beobachtungen

Wir können keine Messungen auf der Sonne durchführen. Alles was wir wissen stammt von der Untersuchung von elektromagnetischer Strahlung und vom Teilchenstrom aus der Sonne, zusätzlich noch die Beobachtung des Gravitationsfeldes. Historisch am Wichtigsten ist die optische Beobachtung der Sonne im sichtbaren Bereich. Spektroskopie erlaubt Rückschlüsse auf Magnetfelder und Temperaturen. Die Teilchenstrahlung von der Sonne (Protonen, Elektronen, aber auch Neutrinos) verrät einiges über die im Inneren ablaufenden Prozesse. Die Untersuchung der Gravitation gibt Hinweise auf die Masse der Sonne, aber auch auf Inhomogenitäten. Zusätzlich zur Beobachtung von der Erdoberfläche aus wird die Sonne seit über siebzig Jahren vom Weltraum aus beobachtet.

Zu den grundlegenden Messdaten gehört die Solarkonstante $K_S = 1360 \text{ W m}^{-2}$, ein Mass für die abgestrahlte Leistung. Daraus ergibt sich die momentane Leuchtkraft von $L_\odot = 3.82 \cdot 10^{26} \text{ W}$ bei einer Temperatur der äquivalenten Schwarzkörperstrahlung $T_e = 5777 \text{ K}$.

14.1.1. Sonnenflecken

Aus dem griechischen Kulturkreis gibt es aus dem Jahre 467 v. Chr. eine nicht eindeutig zugeordnete Beobachtung von **Anaxagoras**. Um die Wende zum 3 Jahrhundert v. Chr. gibt es von **Theophrastos von Eresos** einen eindeutigen Bericht von einem Sonnenfleck. In etwa der Zeit gibt es auch Berichte über Sonnenflecken aus China. Aus dem persisch-arabischen Kulturraum berichtet **Avicenna**, dass im Jahre 807 ein Sonnenfleck mehrere Tage lang zu sehen gewesen sei. Im westeuropäischen Kulturkreis stammen die ersten publizierten Berichte aus dem Jahre 1611 von **Johannes Fabricius** und 1613 von **Galileo Galilei**. Die meisten Sonnenflecken sind so klein, dass Sie ohne Instrumente nicht beobachtet werden können. Aber es gibt einige die gross genug sind, um sie mit einem **geschützten** Auge zu sehen.

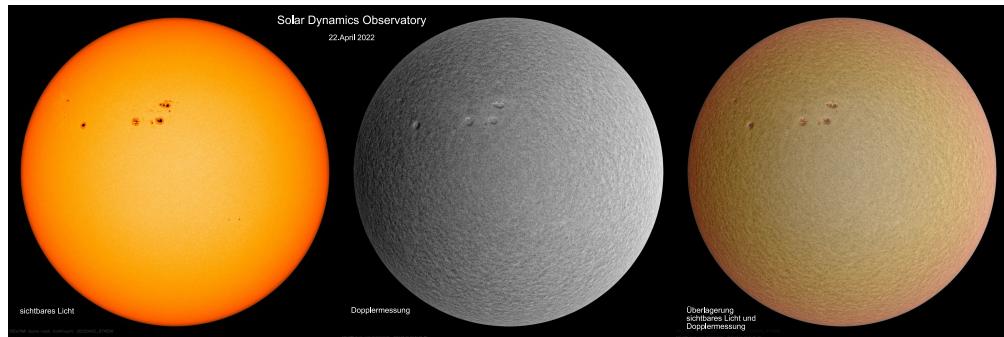


Abb. 14.1.: Messung des Sonnenlichtes und der Sonnenoberfläche durch das SDO. Links ist das sichtbare Licht der Sonne am 22. 4. 2022 gezeigt, in der Mitte das Dopplerbild und rechts eine Überlagerung (Quelle [NP22]).

Abbildung 14.1 zeigt die Oberfläche der Sonne gemessen durch die Sonde SDO der NASA. Die Überlagerungen zeigen, dass Sonnenflecken in Dellen der PHOTOSPHÄRE der Sonne liegen. Aktuelle Bilder der Sonne können auf den Webseiten [NP22] oder [GCM11] gesehen werden.

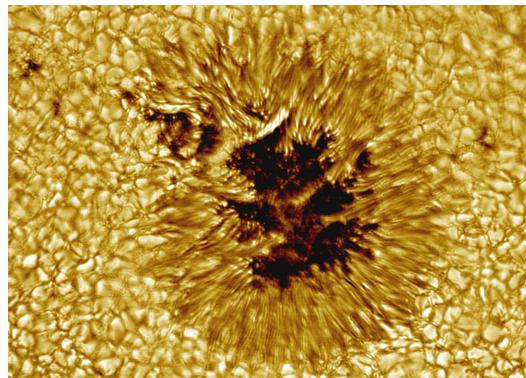


Abb. 14.2.: Sonnenflecken im H_{α} -Spektrum (Credit : Vacuum Tower Telescope, NSO, NOAO, <http://apod.nasa.gov/apod/ap051106.html>)

Abbildung 14.2 zeigt einen Sonnenfleck. Während die Umgebung mit einer Schwarzkörpertemperatur von etwa 5780 K strahlt, sind die dunklen Bereiche bis zu 1500 K kühler. Das Bild zeigt eine schmalbandige Aufnahme im H_{α} -Spektrum. Sie zeigt besonders gut die Verteilung der Wasserstoffatome. Die granulare Struktur deutet auf heftige Turbulenzen hin.

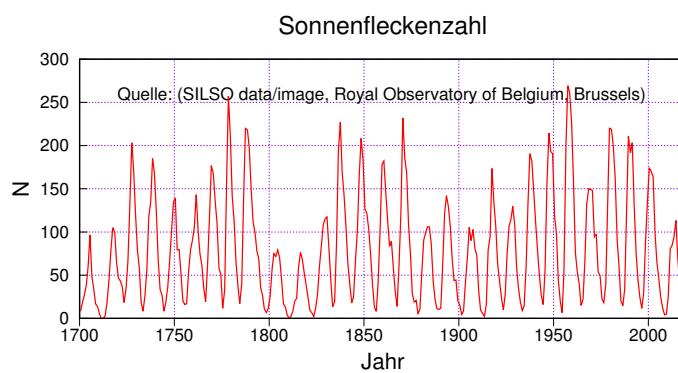


Abb. 14.3.: Zeitliche Entwicklung der Sonnenfleckenzahl (Datenquelle: (SILSO data/image, Royal Observatory of Belgium, Brussels), siehe auch [Loc13])

Die Zahl der Sonnenflecken ist nicht konstant. Abbildung 14.3 zeigt die Schwankung der Zahl seit 1700. Für diese Zeit liegen Beobachtungen der Sonne mit Teleskopen vor. Die Sonnenfleckenzahl scheint mit der Aktivität der Fusionsreaktionen zusammenzuhängen, aber auch mit der Konvektion in der Sonne. Die aktuelle Sonnenfleckenzahl kann bei der NOAA nachgesehen werden ([NOA22]). Ebenso können dort die Daten herunter geladen werden.

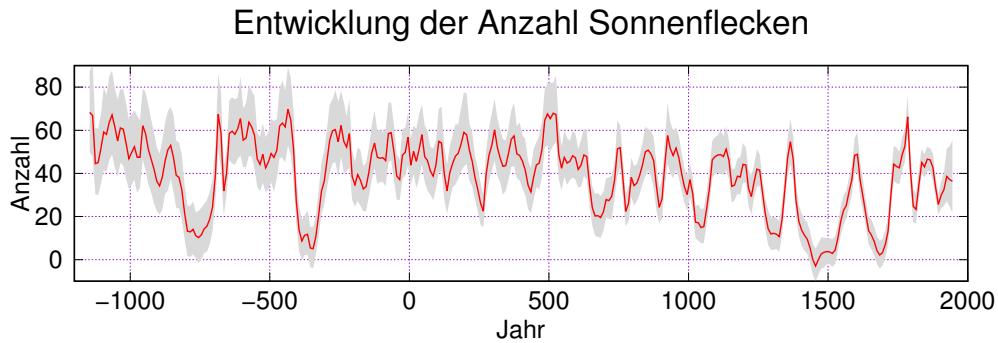


Abb. 14.4.: Historische Sonnenfleckenzahl (I. G. Usoskin u. a. [Uso+14], Daten aus I. G. Usoskin; Hulot und Y. G. Gallet [UHG14]).

I. G. Usoskin u. a. [Uso+14] haben aus ^{14}C -Daten die Anzahl der Sonnenflecken abgeleitet. Abbildung 14.4 zeigt die Daten. Das graue Band gibt die Unsicherheit an.

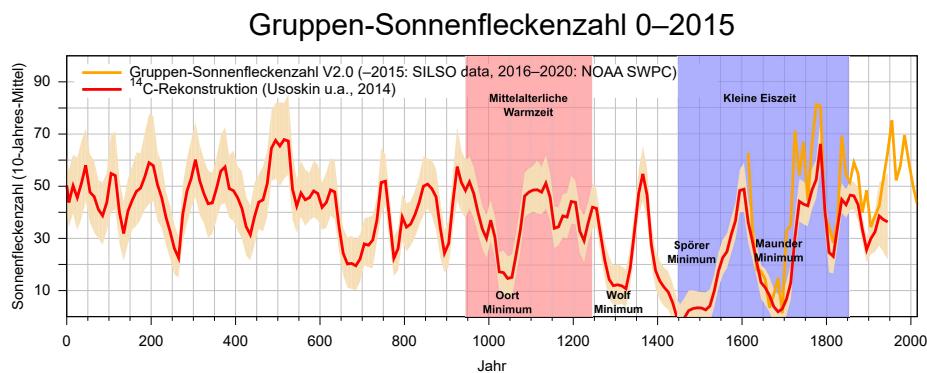


Abb. 14.5.: Historische Sonnenfleckenzahl (I. G. Usoskin u. a. [Uso+14], Daten aus I. G. Usoskin; Hulot und Y. G. Gallet [UHG14] sowie [Loc13], DeWikiMan, CC BY-SA 4.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>>, via Wikimedia Commons).

Abbildung 14.5 zeigt die Daten aus den Abbildungen 14.4 und 14.3 kombiniert. Überlagert ist die Dauer der mittelalterlichen Warmzeit (Klimaoptimum) in Europa sowie die Zeit der sogenannten «kleinen Eiszeit». Die Sonnenfleckenminima scheinen mit diesen Klimaextrema zu korrelieren. Ein kausaler Zusammenhang ist für mich nicht ersichtlich.

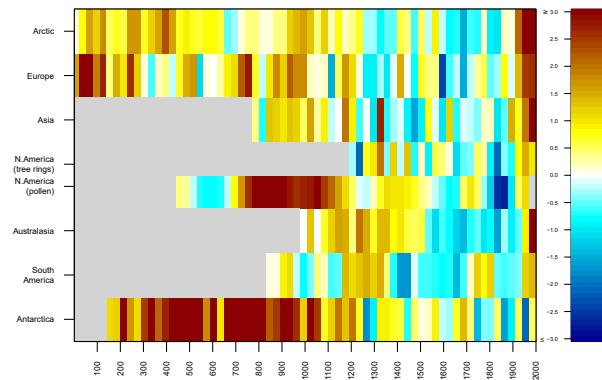


Abb. 14.6.: Historische Sonnenfleckenzahl (Pages 2k Consortium [Pag13], DeWikiMan, CC BY-SA 3.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons).

Abbildung 14.6 zeigt die Temperaturanomalien der letzten 2000 Jahre, aufgeschlüsselt nach Kontinent und Messmethode. Diese Abbildung basierend auf Daten von Pages 2k Consortium [Pag13] zeigt, dass zwischen etwa 1300 bis etwa 1900 die Temperaturen auf der ganzen Erde niedriger waren.

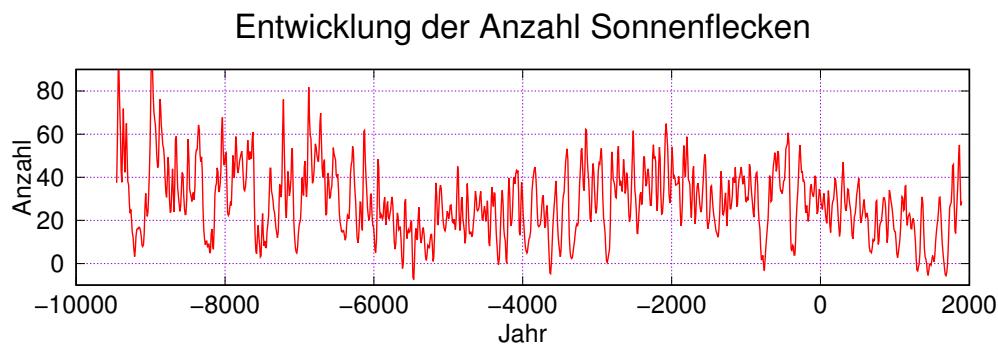


Abb. 14.7.: Sonnenfleckenzahl über 11000 Jahre (S. K. Solanki u. a. [Sol+04]).

Abbildung 14.7 zeigt die rekonstruierte Sonnenfleckenzahl der letzten 11000 Jahre. Die Beschreibung der Rekonstruktion ist in S. K. Solanki u. a. [Sol+04].

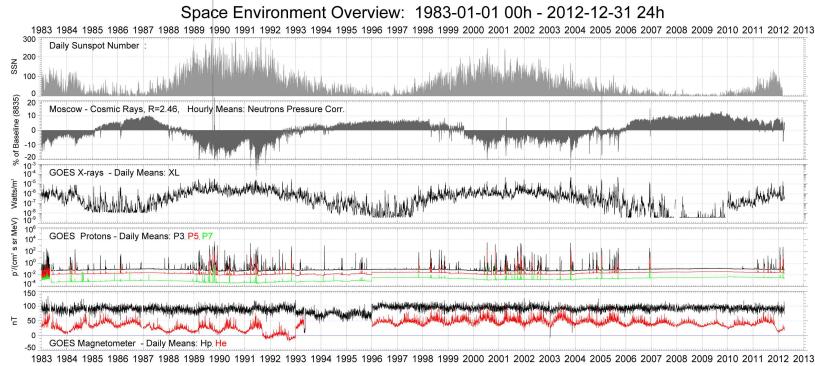


Abb. 14.8.: Schwankung der Zahl der Sonnenflecken (By Daniel Wilkinson (Own work) [CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)], via Wikimedia Commons).

Abbildung 14.12 zeigt die Korrelation der Sonnenfleckenzahl mit unterschiedlichen weiteren Messwerten. Die kosmischen Strahlen zeigen eine eindeutige Antikorrelation zur Sonnenfleckenzahl. Die Röntgenstrahlen wie auch die Zahl der von der Sonne emittierten Protonen steigt mit zunehmender Sonnenfleckenzahl. Dies ist ein Hinweis auf eine höhere Aktivität der Sonne bei höherer Sonnenfleckenzahl. In der magnetischen Induktion gibt es keinen messbaren Effekt der Sonnenfleckenzahl.

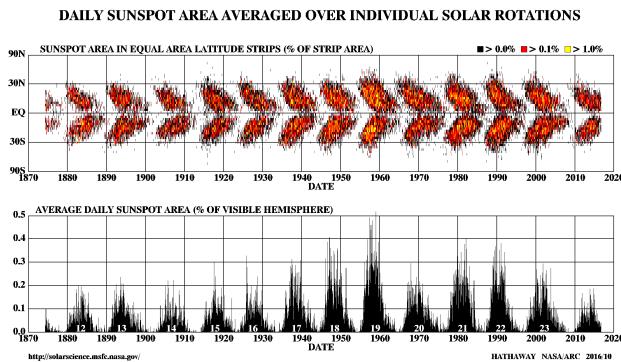


Abb. 14.9.: Bewegung der Sonnenflecken und Sonnenfleckenzahl (NASA <https://solarscience.msfc.nasa.gov/images/bfly.gif> und <https://solarscience.msfc.nasa.gov/SunspotCycle.shtml>, siehe auch D. H. Hathaway [[Hat15](#), Fig. 9])

Die Grafik in Abb. 14.9 zeigt die Bewegung von Sonnenflecken. Horizontal liegt die Zeitachse, vertikal, der Abstand zum Sonnenäquator. Sonnenflecken werden zu Beginn eines Zyklus etwa bei einem Abstand von $(20 \text{ bis } 30)^\circ$ nördlich und südlich des Sonnenäquators gebildet. Mit der Zeit wandern die Sonnenflecken und die Orte an denen neue Flecken gebildet werden Richtung Äquator. Der Zyklus endet wenn

die Sonnenflecken noch wenige Grad vom Äquator entfernt sind. Zusammen ergibt sich ein Muster, das wie die Flügel eines Schmetterlings aussieht. Deshalb wird diese Art der Darstellung im Englischen auch «BUTTERFLY DIAGRAM» genannt. Weitere Informationen zu Sonnenflecken finden sich z.B. in D. H. Hathaway [Hat15] und M. Lockwood [Loc13].

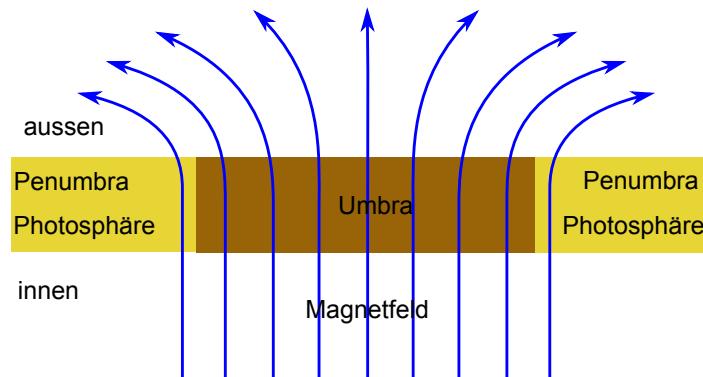


Abb. 14.10.: Struktur von Sonnenflecken (adaptiert aus Demtröder [Dem10, Abb. 10.78])

Schematisch sieht ein einzelner Sonnenfleck wie in Abb. 14.10 aus. Jeder etwas dunklere Fleck ist mit einem aus- oder eintretenden Magnetfeld gekoppelt. Die Richtung des magnetischen Feldes kann auch umgekehrt wie in der Abbildung sein.

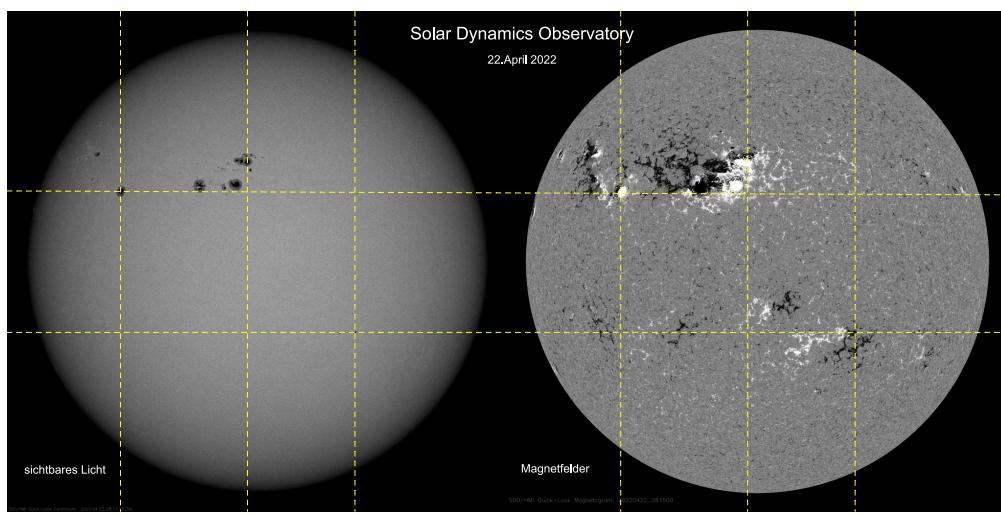


Abb. 14.11.: Bild der SONNE im sichtbaren Bereich (links) und der Magnetfelder (rechts), gemessen durch das SDO. Links ist das sichtbare Licht der Sonne am 22. 4. 2022 gezeigt und rechts die die Magnetfelder (Quelle [NP22]).

In Abbildung 14.11 wird links das Bild der Sonne im sichtbaren Licht gezeigt und rechts dazu das gleichzeitig gemessene Bild der Magnetfelder. Die Daten stammen von dem Satelliten SDO [NP22]. Die Hilfslinien sollen helfen, die relative Lage der Magnetfelder zu den Sonnenflecken zu zeigen.

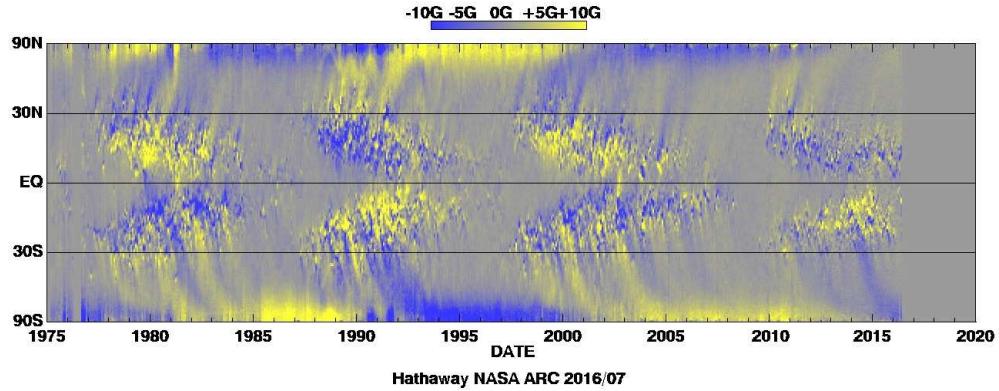


Abb. 14.12.: Differenzielle Rotation der Sonne: Magnetfeldlinien werden aufgewickelt und es gibt periodische Polwechsel (By David Hathaway, NASA Marshall Space Flight Center [Public domain], via Wikimedia Commons)

Das SCHMETTERLINGSDIAGRAMM ist auch in den Magnetfeldstärken sichtbar (siehe Abb. 14.12). Die Darstellung gibt einen ersten Hinweis auf den bipolaren Charakter von SONNENFLECKEN (siehe auch Abb. 14.16). Wie in Abb. 14.9 ist ersichtlich, dass die Sonnenflecken zu Beginn des Zyklus bei ungefähr 30° entstehen und gegen Ende eher in Äquator Nähe. Zusätzlich ist ersichtlich (Magnetfelder in der Polarregion), dass die Sonne ihr Magnetfeld zu Beginn eines Zyklus umpolt. Auch die Erde polt ihr Magnetfeld um, aber nicht nach (10 bis 11) a sondern nach $> 1 \cdot 10^4$ a. Das Fazit ist: Sonnenflecken und die magnetische Struktur der Sonne sind nicht statisch.

14.1.2. Magnetfelder der Sonne

Magnetfelder auf der Sonne (und auf anderen Sternen) werden über den ZEEMAN-EFFEKT gemessen, benannt nach Pieter Zeeman.

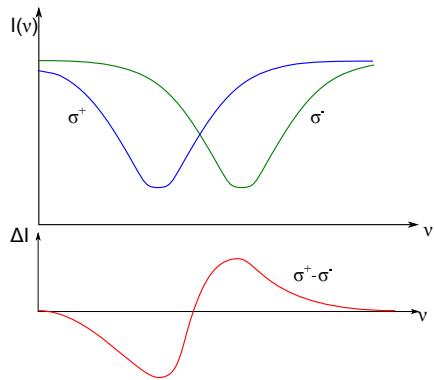


Abb. 14.13.: Messung von Magnetfeldern mit dem ZEEMAN-EFFEKT (nach Demtröder [Dem10, 10.79ab]).

Der klassische Zeeman-Effekt bewirkt eine konstante Frequenzverschiebung. Es gibt ein Zeeman-Triplett mit (siehe [MG19, Kap. 6.5.3., (6.5.50)])

$$\Delta E = g_j \mu_B B_0 \quad (14.1.1)$$

Aus dieser Gleichung kann die Stärke der magnetischen Induktion bestimmt werden. Eine Analyse der Polarisation zusammen mit den beobachteten Stärken in der Umgebung ergeben auch die Richtungen der Magnetfeldlinien [Hal+19].

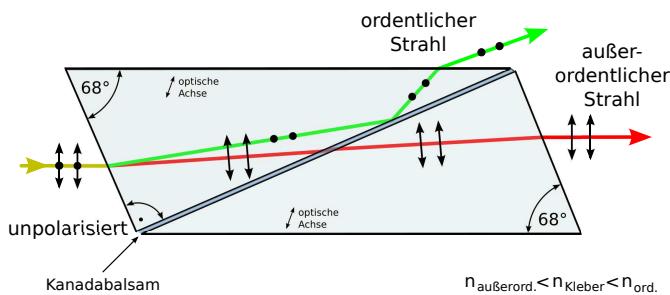


Abb. 14.14.: Aufbau eines Nicols-Prismas zur genauen Polarisation von Licht ([Wik21i] Abbildung: Cepheiden, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons)

Nach G. E. Hale u. a. wird ein vor den Eintrittsspalt eines Spektrometers eine $\lambda/4$ -Platte und ein Nicols-Prisma (siehe Abb. 14.14) gesetzt. Es wird ausgenutzt, dass mit dieser Apparatur (siehe Abb. 14.15) bei einem Magnetfeld, dessen Feldlinien zum Spektrometer zeigen oder deren Richtung maximal 60° zur Sichtlinie gekippt sind, die Richtung der Feldlinie auf den Beobachter zu oder weg bestimmt werden kann.

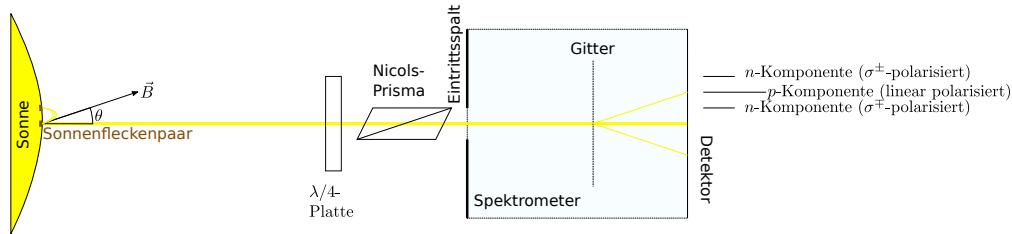


Abb. 14.15.: Messung der Richtung von Magnetfeldern wie in G. E. Hale u. a. ([Hal+19]) beschrieben.

Das ZEEMANN-TRIPLET bestehen aus der zentralen, nicht frequenzverschobenen p -Komponente. Sie ist linear polarisiert. Die beiden um die Energie ΔE verschobenen Seitenlinien des Triplett sind zirkular polarisiert (σ -Polarisation). Dabei ist die Polarisationsrichtung der beiden Komponenten entgegengesetzt. Die $\lambda/4$ -Platte wandelt nun die linear polarisierte p -Komponente in eine zirkular polarisierte Komponente und die beiden n -Komponenten in zwei orthogonal linear polarisierte Komponente um. Mit dem Nicols-Prisma kann nun die höherfrequente oder die niedriger-frequente n -Komponente ausgeblendet werden. Wird die Richtung von \mathbf{B} umgekehrt, wechseln die beiden n -Komponenten ihre Polarisationsrichtung. Nach dem $\lambda/4$ -Plättchen sind die linearen Polarisierungen um 90° gedreht. Nach G. E. Hale u. a. kann bis zu einem Winkel von $\theta < 60^\circ$ die Richtung bestimmt werden. Damit ist dann auch klar, welcher Sonnenfleck ein magnetischer Nordpol und welcher der Südpol ist.

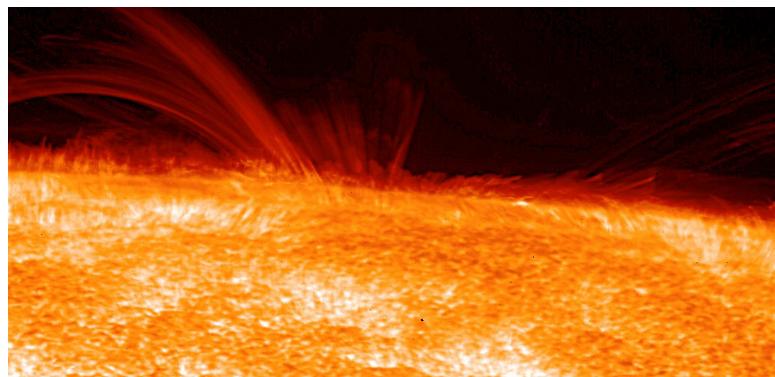


Abb. 14.16.: Magnetfelder und Sonnenfleckenaare
(Hinode JAXA/NASA/PPARC http://www.esa.int/var/esa/storage/images/esa_multimedia/images/2007/03/fine-scale_structure_of_the_chromosphere/9859039-3-eng-GB/Fine-scale_structure_of_the_chromosphere.jpg).

Abbildung 14.16 zeigt eine tangentielle Ansicht eines Sonnenfleckens mit KORONASCHLAUFEN. Ionisierte Teilchen bewegen sich in einer Spiralbahn um die Fluss-

linien und machen sie so sichtbar.

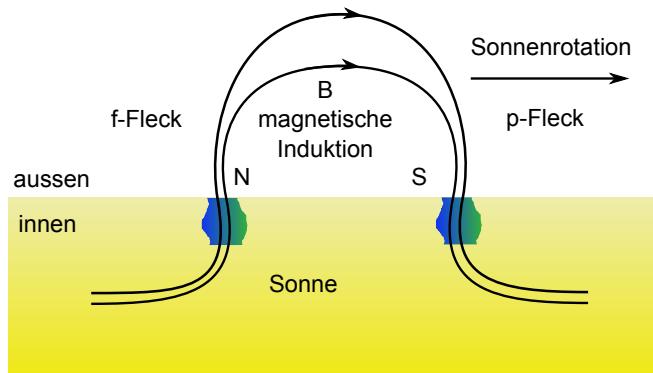


Abb. 14.17.: Magnetfelder und Sonnenfleckenaare (nach Demtröder [Dem10, Abb. 10.81]).

In der Regel treten Sonnenflecken immer in Paaren auf (siehe Abb. 14.17). Dabei ist eines der Paare ein magnetischer Nordpol und der andere ein magnetischer Südpol.



Abb. 14.18.: Magnetfelder und Sonnenfleckenaare: Koronaschlaufen (NASA, http://solarsystem.nasa.gov/multimedia/display.cfm?Category=Planets&IM_ID=191).

Abbildung 14.18 zeigt solch ein Paar von Koronaschlaufen. Aus der Abbildung ist auch ersichtlich, dass es Magnetfeldlinien gibt, die nicht geschlossen sind.

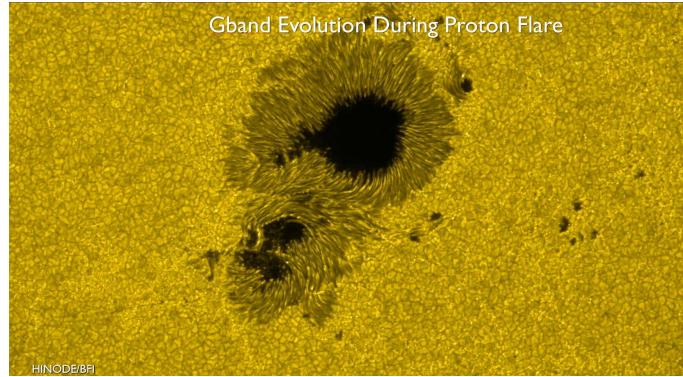


Abb. 14.19.: Magnetfelder und Sonnenfleckenpaare: G-Band-Entwicklung während eines Protonen-Flares (Quelle: Hinode JAXA/NASA http://www.nasa.gov/mission_pages/hinode/solar_022.html). Das G-Band liegt bei 430.5 nm und detektiert die CH-Moleküle in der oberen Photosphäre (M. Kanao u. a. [Kan+15]).

Von oben sehen die Sonnenflecken dunkel aus (siehe Abbildung 14.19). Das G-Band bildet das Element Fe mit der Wellenlänge 430.790 nm. Der Name G-Band stammt von Joseph Fraunhofer. Die Bezeichnungen und Wellenlängen finden Sie im Abschnitt B.2.

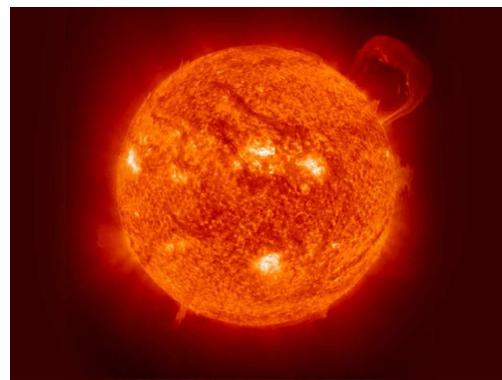


Abb. 14.20.: Protuberanzen (Quelle: NASA/European Space Agency, <http://solarsystem.nasa.gov/multimedia/gallery/PIA03149.jpg>).

Grosse Auswürfe der Sonne heissen PROTUBERANZEN (siehe Abbildung 14.20). In ihnen bewegt sich ionisiertes Gas entlang von Flussschläuchen des Magnetfeldes.

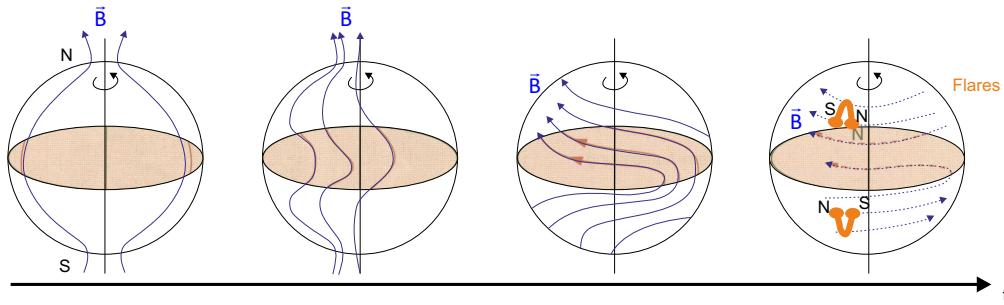


Abb. 14.21.: Magnetfelder und differenzielle Rotation (nach Demtröder [Dem10, Abb. 10.80]).

Durch die Wechselwirkung des magnetisierbaren ionisierten Gases an der Sonnenoberfläche entstehen Flussschläuche, die sich auch deformieren lassen (siehe E. N. Parker „Sunspots and the physics of magnetic flux tubes. I-The general nature of the sunspot. II-Aerodynamic drag“ ([Par79]), D. Degenhardt und B. W. Lites „Sunspots and the physics of magnetic flux tubes. I-The general nature of the sunspot. II-Aerodynamic drag“ ([Par79]) und D. H. Mackay „The Sun’s global magnetic field“ ([Mac12]) sowie Abbildung 14.21). Aus der Analyse der Magnetfeldlinien nach G. E. Hale u. a. ([Hal+19]) und aus der Beobachtung der Bewegung der Sonnenflecken kann so abgeleitet werden, dass die Sonne abhängig von der geographischen Breite eine unterschiedliche Rotationswinkelgeschwindigkeit hat.

Verschiedene Autoren haben den Transport von Flussschläuchen auf der Sonne untersucht, so Y. M. Wang; A. G. Nash und N. R. Sheeley „Magnetic Flux Transport on the Sun“ ([WNS89]), R. B. Leighton „Transport of magnetic fields on the sun.“ ([Lei64]), C. R. DeVore; N. R. Sheeley und J. P. Boris „The concentration of the large-scale solar magnetic field by a meridional surface flow“ ([DSB84]), N. R. Sheeley; C. R. DeVore und J. P. Boris „Simulations of the mean solar magnetic field during sunspot cycle 21“ ([SDB85]) und J. Jiang u. a. „Magnetic flux transport at the solar surface“ ([Jia+14]).



Abb. 14.22.: Künstlerische Darstellung der Stromfläche des Sonnenmagnetfeldes bei einem Wechsel der Magnetfeldpolariität. Diese Stromfläche wird durch das rotierende Sonnenmagnetfeld induziert. Sie reicht über Neptun hinaus. (<https://www.nasa.gov/content/goddard/heliospheric-current-sheet>, NASA).

Am Äquator erzeugt das langsam rotierende Magnetfeld der Sonne einen Strom, der sich in einer Fläche von etwa 10^4 km Dicke in der Ekliptik nach aussen bewegt, bis über Neptun hinaus. In dieser Fläche, Stromfläche genannt, fliessen Ströme mit einer Stromdichte von 10^{-10} A m $^{-2}$. Bis zum Neptun sind das $4.536\,87 \cdot 10^9$ A.

Wenn das Magnetfeld der Sonne seine Polarität wechselt, deformed sich die künstlerisch dargestellte Stromfläche in Abbildung 14.22. um den Wechsel der magnetischen Induktion auszugleichen. Durch die Bewegung der Sonne und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der ionisierten Teilchen ist die Grenze spiralförmig aufgewickelt.

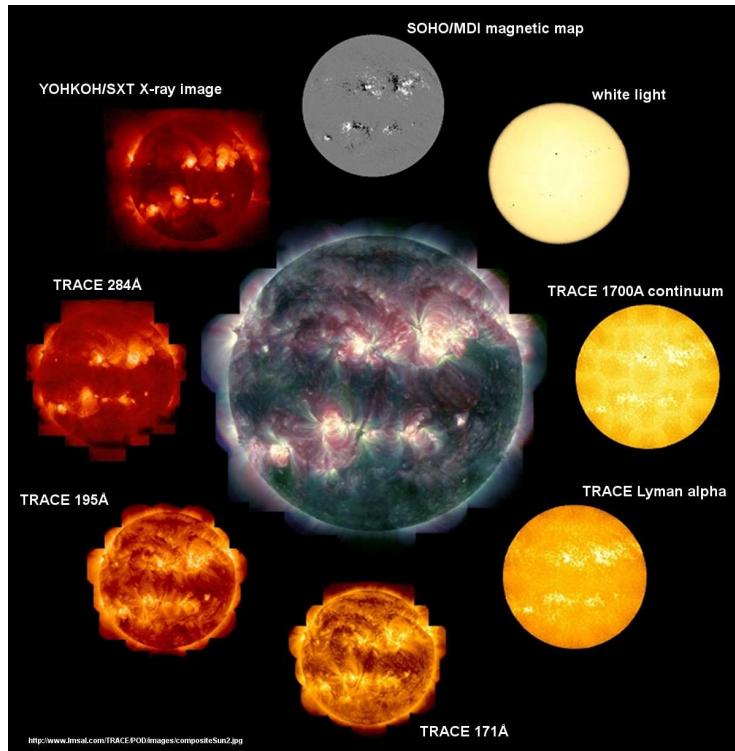


Abb. 14.23.: Sonne mit ihrer Atmosphäre, gesehen von der TRACE-Sonde. Das zentrale Bild zeigt eine dreifarbiges Zusammenstellung der Sonnenkorona, gemessen mit der „Transition Region and Coronal Explorer“-Sonde. Das Mosaik ist aus jeweils 3 Aufnahmen von den 23 möglichen Kanälen zusammengesetzt: Grün, blau und rot entsprechen jeweils den 171 Å (1 MK), 195 Å (1.5 MK), and 284 Å (2 MK) Kanälen. Die äusseren Abbildungen zeigen im Uhrzeigersinn beginnend von oben: SOHO/MDI Magnetfeldkarte, weisses Licht, TRACE 1700A Kontinuum, TRACE Lyman alpha, TRACE 171 Å , TRACE 195 Å , TRACE 284 Å , YOHKOH/SXT Röntgenbild.

(Quelle: The composite was prepared by Joe Covington (Lockheed-Martin Missiles and Space, Palo Alto, <http://soi.stanford.edu/results/SolPhys200/Schrijver/images/compositeSun2.jpg>) The TRACE images may be used without restrictions in publications of any kind. We appreciate an acknowledgement indicating that the Transition Region and Coronal Explorer, TRACE, is a mission of the Stanford-Lockheed Institute for Space Research, and part of the NASA Small Explorer program).

Das Bild der Sonne ist vielfältiger als wie wir es vom sichtbaren Licht her kennen. Abbildung 14.23 zeigt die Sonne in verschiedenen Wellenlängenbereichen von Röntgenstrahlen bis in den UV-Bereich. Zusätzlich ist das Bild im weissen Licht angegeben, das Bild also das wir von der Sonne aus dem täglichen Leben kennen. Ganz oben ist noch eine Magnetfeldkarte gezeigt.



Abb. 14.24.: Sonnenkorona (Credit & Copyright: Alain Maury, Jean-Luc Dauvergne, NASA, <http://apod.nasa.gov/apod/ap100721.html>)

Abbildung 14.24 zeigt die Korona der Sonne. Die Korona ist ein Bereich heissen Gases bei hohen Temperaturen ($T > 1 \cdot 10^6$ K), der aber gegen die starke Emission der Photosphäre ($T \approx 5.777 \cdot 10^3$ K) nicht sichtbar ist.

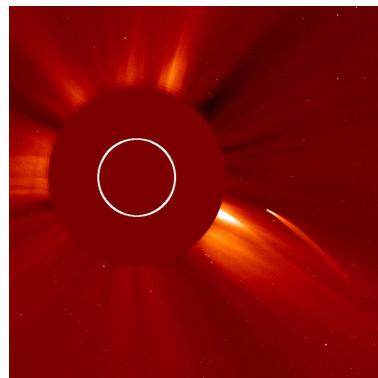


Abb. 14.25.: Bild der Sonnenkorona mit einem Kometen. Aufgenommen am 5. oder 6. Juli 2011 durch SOHO (<https://www.nasa.gov/image-feature/goddard/sun-grazing-comet-of-july-2011>, Credits: ESA&NASA/SOHO).

Abbildung 14.25 zeigt die Korona mit einem Kometen. Die helle Sonne ist durch eine Scheibe im Koronographen abgedeckt.

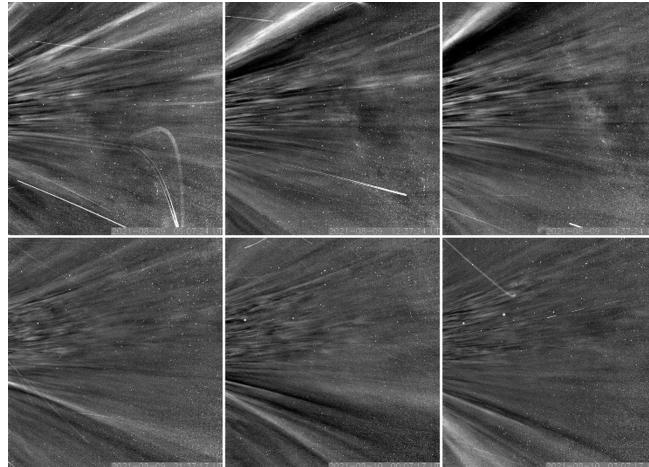


Abb. 14.26.: Details der Sonnenkorona gemessen von der Sonde «Parker Solar Probe». Zu sehen sind sogenannte CORONAL STREAMERS. In der oberen Reihe ist die Sonde über den Streamern, in der unteren Reihe darunter. Deshalb sind die scheinbaren Richtungen unterschiedlich. Die Abbildungen sind jeweils zu unterschiedlichen Zeiten aufgenommen, also auch an unterschiedlichen Orten. (Credits: NASA/Johns Hopkins APL/Naval Research Laboratory, Quelle [[Joh21](#)]).

Die CORONAL STREAMERS in Abbildung 14.26 sind lokale Inhomogenitäten in der Sonnenkorona, die in dieser Auflösung erstmals durch die NASA-Sonde «Parker Solar Probe» gemessen wurden. Eine nicht ganz neue Übersicht gibt die Arbeit „A review of recent studies on coronal dynamics: Streamers, coronal mass ejections, and their interactions“ von Y. Chen ([[Che13](#)]).

14.1.3. Seismik der Sonne

Die Sonne ist ein brodelnder Gasball. Aus der Dopplerverschiebung können die Windgeschwindigkeit an ihrer Oberfläche bestimmt werden (siehe R. B. Leighton; R. W. Noyes und G. W. Simon „Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report.“ ([[LNS62](#)]) oder J. W. Evans und R. Michard „Observational Study of Macroscopic Inhomogeneities in the Solar Atmosphere. III. Vertical Oscillatory Motions in the Solar Photosphere.“ ([[EM62](#)])). Daraus ergibt sich, dass Schallwellen mit sehr niedriger Frequenz um die Sonne laufen. Die periodischen Randbedingungen ergeben wie auch bei einer Trommelmembran Eigenmoden mit Eigenfrequenzen, siehe auch [[Wik21g](#)].

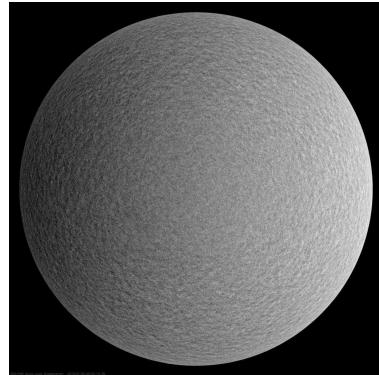


Abb. 14.27.: Radar-Doppleraufnahme der Sonnenoberfläche durch die NASA-Mission SDO (Quelle: NASA https://sdo.gsfc.nasa.gov/assets/img/latest/latest_1024_HMID.jpg).

Abbildung 14.27 zeigt eine Radar-Doppleraufnahme der Sonnenoberfläche, also quasi eine Geschwindigkeitskontrolle. Es ist in der Abbildung sichtbar, dass die Geschwindigkeiten örtlich variieren.

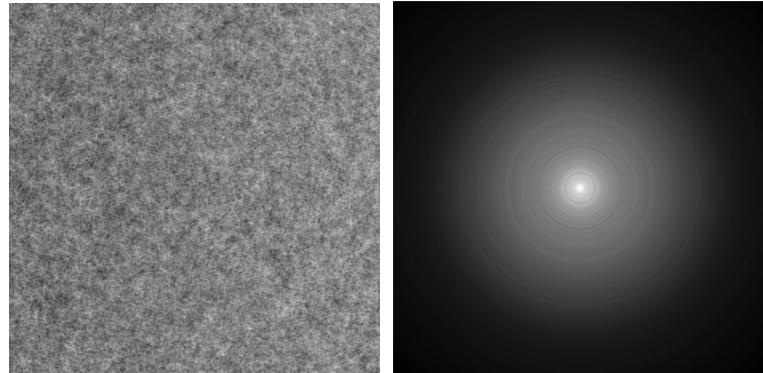


Abb. 14.28.: Linke Seite: Radar-Doppleraufnahme der Sonnenoberfläche durch die NASA-Mission SDO 12.5% \times 12.5%-Ausschnitt aus der Abbildung 14.27 (Quelle: NASA https://sdo.gsfc.nasa.gov/assets/img/latest/latest_4096_HMID.jpg). Rechte Seite: Fouriertransformation des Bildes, gefolgt von einer Summation über alle Winkel.

Abbildung 14.28 zeigt auf der linken Seite eine Vergrößerung der Daten aus Abbildung 14.27. Die rechte Seite zeigt die über alle Richtungen gemittelte Fouriertransformation. Die schwach sichtbaren hellen Kreisen geben die charakteristischen Längen der Strukturen an.

J. Christensen-Dalsgaard u. a. berichten in der Arbeit „The Current State of Solar Modeling“ ([Chr+96]) über Modelle und Berechnungen zu Oszillationen der Sonne (und von anderen Sternen). Sie berichten, dass die Sonne mit einer Periode von 5 min oszilliere.

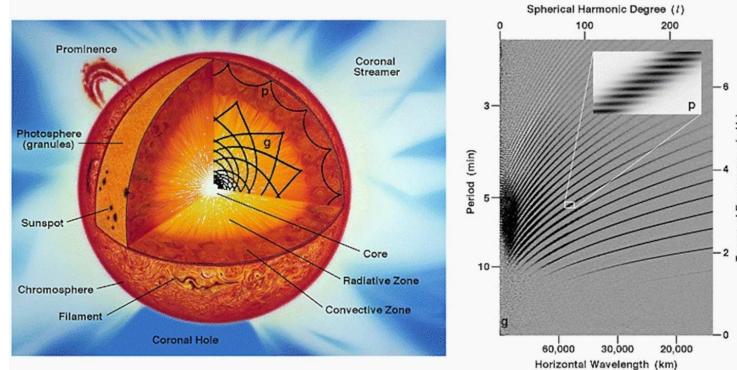


Abb. 14.29.: Schallwellen in der Sonne (<https://soho.nascom.nasa.gov/gallery/Helioseismology mdi004.html> Credits: ESA&NASA/SOHO).

Abbildung 14.29 zeigt, wie man sich die Ausbreitung von Schallwellen in der Sonne vorstellt. Die Ideen sind ähnlich wie die von Inge Lehmann entdeckten Erdbebenwellen [Leh36; Köl01]. Die rechte Seite von Abbildung 14.29 zeigt die Dispersionsrelation der seismischen Wellen auf der Sonne. Die gekrümmten Kurven bedeuten, dass die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit unterschiedlich sind.

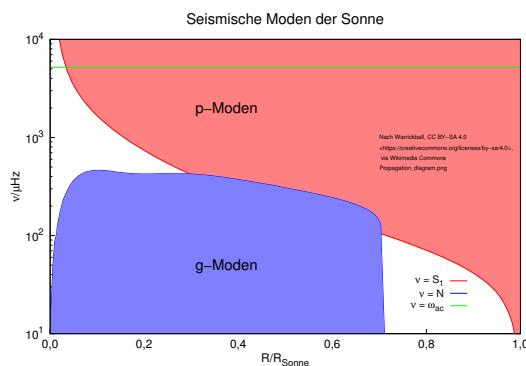


Abb. 14.30.: Ausbreitung seismischer Moden auf der Sonne (nach Warrickball, CC BY-SA 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>, via Wikimedia Commons, Propagation_diagram.png).

Abbildung 14.30 zeigt die Frequenzbereiche der Druckmoden (p-Moden) und der Schweremoden (g-Moden) auf der Sonne. ν_{ac} ist nach Berechnungen die obere

Grenzfrequenz für akustische Moden. Analog zur Erde [Leh64; Leh61] kann aus den unterschiedlichen Frequenzbereichen und aus der Dispersionsrelation auf die Struktur der Sonne geschlossen werden.

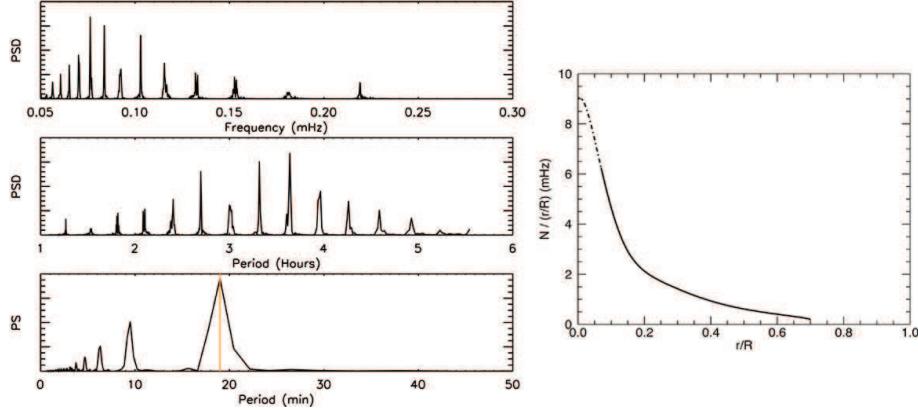


Figure 4. Left: $\ell = 3$ mode power at $r = 0.4R$ shown as a function of frequency (top) or period (middle); Power spectrum of the power spectrum for $\ell = 3$ modes (bottom), with a clear peak around 19 min. Right: truncated gravity-wave cavity (Brunt-Väisälä frequency) due to the inner sphere of radius $0.07R$. This truncation is at the origin of the observed frequency/period shift.

Abb. 14.31.: Frequenzspektrum der Helioseismizität (Allan Sacha Brun, Lucie Alvan, Antoine Strugarek, Stéphane Mathis and Rafael A García, On gravity waves in the Sun, Journal of Physics: Conference Series 440(1), 012043 (2013) 10.1088/1742-6596/440/1/ [Bru+13] (CC-BY-3.0))

Abbildung 14.31 zeigt die Frequenzspektren der seismischen Aktivität auf der Sonne.

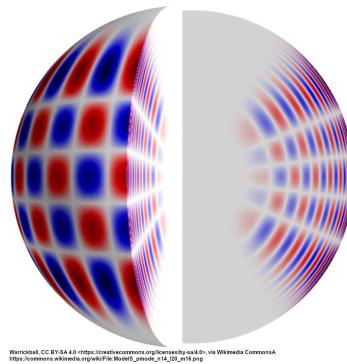


Abb. 14.32.: Schwingungsmodus der Sonne: Druckmode (p-Mode) Ordnung: $n = 14$ (radial), $\ell = 20$ (Winkel θ) und $m = 16$ (Winkel ϕ) (Credits: Warrickball, CC-BY-SA 4.0 viaWikimedia Commons).

Abbildung 14.32 ist eine Visualisierung einer Schwingungsmodus der Sonne. Weitere Informationen gibt das GONG-Netzwerk [Obs19]. Eine tagesaktuelle Ansicht der Sonne gibt es auf der Website <https://sdo.gsfc.nasa.gov/>.

14.2. Modelle

Da es nicht möglich ist, im Inneren der Sonne direkte Messungen durchzuführen müssen Modelle die Funktion der Sonne beschreiben. Diese Modell machen Aussagen über den Energiefluss aus der Sonne, den Fluss und die Zusammensetzung von Neutrinos und anderen Elementarteilchen, das Magnetfeld und die spektralen Eigenschaften. Im Folgenden werden zwei Modelle beschrieben.

14.2.1. Naives Modell des Energiehaushalts

Wir betrachten die Sonne als homogenen Gasball. Aus dem Gravitationsgesetz kann dann über Integration die potentielle Energie berechnet werden:

$$E_{pot} = -\frac{3}{5}G \frac{M_\odot^2}{R_\odot} = -2.35 \cdot 10^{41} \text{ J} \quad (14.2.1)$$

Wenn die Kraft $F \propto r^{-n}$ ist, kann der erweiterte Virialsatz angewendet werden und so die kinetische Energie. Diese wiederum hängt mit der Temperatur zusammen.

$$\langle E_{kin} \rangle = -\frac{1}{n} \langle E_{pot} \rangle \quad (14.2.2)$$

Damit ergibt sich eine kinetische Energie

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} \frac{M_\odot}{\langle m \rangle} \cdot k \langle T \rangle = -\frac{1}{2} E_{pot} = 1.2 \cdot 10^{41} \text{ J} \quad (14.2.3)$$

Dabei ist $\langle m \rangle$ die mittlere Atommasse. Die kinetische Energie besteht nicht nur aus der Translationsenergie sondern auch aus der Rotationsenergie des Gases insgesamt. Diese ist

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \leq \frac{1}{5} M_\odot R_\odot^2 \omega^2 = 1.623 \cdot 10^{36} \text{ J} \quad (14.2.4)$$

Die Rotationsenergie ist vernachlässigbar wenn weniger 0.001 426 % genau gerechnet wird. Die kinetische Energie der Moleküle ist

$$\langle E_{kin,mol} \rangle = \langle E_{kin} \rangle - E_{rot} \quad (14.2.5)$$

Die Temperatur eines Gases mit $\langle E_{kin,mol} \rangle$ ist

$$\frac{3}{2} N_\odot k_B \langle T \rangle = \langle E_{kin,mol} \rangle \implies \langle T \rangle = \frac{2 \langle E_{kin,mol} \rangle}{3 N_\odot k_B} = \frac{2 |E_{pot}|}{3 N_\odot k_B} \quad (14.2.6)$$

Wenn wir annehmen, dass die Masse der Atome die Masse des Wasserstoffatoms ist ($\langle m \rangle = m_{^1\text{H}}$), haben wir

$$N_\odot = \frac{M_\odot}{\langle m \rangle} = 1.187 96 \cdot 10^{57} \quad (14.2.7)$$

und

$$\langle T \rangle = \frac{\langle m \rangle}{3M_{\odot}k} E_{pot} = 4.63 \cdot 10^6 \text{ K} \quad (14.2.8)$$

Bei einem Plasma hätten wir die doppelte Anzahl Teilchen mit der mittleren Masse $\langle m \rangle = \frac{1}{2}(m_p + m_e) \approx \frac{1}{2}m_p \approx \frac{1}{2}m_{^1\text{H}}$. Diese Temperatur ist

$$\langle T \rangle_{Plasma} = \frac{1}{3 \cdot 2N_{\odot}k} E_{pot} = \frac{m_{^1\text{H}}}{3 \cdot 2M_{\odot}k} E_{pot} = 4.63 \cdot 10^6 \text{ K} \quad (14.2.9)$$

$$\langle T_{\odot} \rangle \approx 2.31 \cdot 10^6 \text{ K} \quad (14.2.10)$$

Um den Druck im Zentrum der Sonne abzuschätzen im Modell der homogenen Gaskugel verwenden wir

$$p = G \frac{M_{\odot}^2}{4\pi R_{\odot}^4} \approx 8.96 \cdot 10^{13} \text{ Pa} \quad (14.2.11)$$

und können daraus mit dem idealen Gasgesetz

$$pV = Nk_B \langle T \rangle \quad (14.2.12)$$

die Temperatur berechnen (wir verwenden das Plasma)

$$\langle T \rangle = 3.85 \cdot 10^6 \text{ K} \quad (14.2.13)$$

Wir haben ein ideales Gas wenn $E_{kin} \gg E_{pot}$ ist. Der mittlere Abstand ist

$$\langle d \rangle = \sqrt[3]{\frac{V_{\odot}}{N_{\odot}}} \approx 1 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (14.2.14)$$

und damit die elektrostatische potentielle Energie

$$|E_{pot}| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \langle d \rangle} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt[3]{N/V_{\odot}}} \approx 2.75 \cdot 10^{-18} \text{ J} \quad (14.2.15)$$

Die kinetische Energie kann aus der Temperatur berechnet werden

$$E_{kin} = \frac{3}{2}kT \approx 7.9 \cdot 10^{-17} \text{ J} \quad (14.2.16)$$

Damit ist die kinetische Energie $E_{kin} \approx 36.6 \cdot E_{pot}$, wir haben also wirklich ein ideales Gas.

Alternativ kann bei konstantem Druck, Temperatur und Dichte der Druck aus $\langle p \rangle V = Nk_B \langle T \rangle$ berechnet werden. Mit $V = \frac{M_{\odot}}{\langle \rho \rangle_{\odot}}$ und $N = \frac{M_{\odot}}{\langle m \rangle}$ wird der Druck

$$\langle p \rangle = \frac{N}{V} k \langle T \rangle = \frac{\langle \rho \rangle_{\odot}}{\langle m \rangle} \frac{\langle m \rangle}{3M_{\odot}} |E_{pot}| = \frac{\langle \rho \rangle_{\odot}}{3M_{\odot}} |E_{pot}| \quad (14.2.17)$$

Die mittlere Dichte ist $\langle \rho \rangle = 1400 \text{ kg/m}^3$. Die Sonnenmasse ist $M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Damit ergibt sich

$$\langle p \rangle = \frac{1400}{3 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}} \cdot 2.35 \cdot 10^{41} \text{ J} \approx \frac{3.5 \cdot 10^{44}}{6 \cdot 10^{30}} \text{ Pa} \approx 6 \cdot 10^{13} \text{ Pa} \quad (14.2.18)$$

14.2.2. Realistischeres Modell des Energiehaushalts

Um ein realistischeres Modell des Energiehaushalts zu bekommen brauchen wir ein Differenzialgleichungssystem für eine sphärisch symmetrische Sonne. Aus der Beziehung zwischen der infinitesimalen Druckkraft und der infinitesimalen Gravitationskraft erhalten wir

$$dF_G(r) = G \frac{M(r)}{r^2} dm = G \frac{M(r)}{r^2} \rho(r) dA dr = dF_p = -\frac{dp}{dr} dr dA \quad (14.2.19)$$

$\rho(r)$ ist der radiusabhängige Druck. Damit können wir für die radiale Ableitung des Druckes schreiben

$$\frac{dp(r)}{dr} = -G \frac{M(r)}{r^2} \rho(r) \quad (14.2.20)$$

In einer Kugelschale der Dicke dr liegt die Masse $dM(r)$. Es ergibt sich

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (14.2.21)$$

Das Energiegleichgewicht verlangt, dass die infinitesimale Produktion

$$dP = \epsilon(\rho, T) dM(r) = 4\pi r^2 \epsilon(\rho, T) \rho(r) dr \quad (14.2.22)$$

mit dem Proportionalitätsfaktor $\epsilon(\rho, T)$ der Leistungsdichte der Energieproduktion. Damit ist die Strahlung (der wesentliche Modus des Energietransports)

$$dL_r = L(r + dr) - L(r) = \epsilon(\rho, T) dM(r) \quad (14.2.23)$$

Weiter ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{dL_r(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(\rho, T) \rho(r) \quad (14.2.24)$$

Betrachten wir nur die Strahlung und berücksichtigen wir die Thermodynamik erhalten wir

$$\frac{dT(r)}{dr} = -C \frac{L_r(r)}{4\pi r^2} \frac{k_B}{T^3(r)} \rho(r) = \frac{c_p(r) - c_V(r)}{c_p(r)} \frac{T(r)}{p(r)} \frac{dp(r)}{dr} \quad (14.2.25)$$

Bei einem idealen Gas ist weiterhin

$$p(r) = \frac{k_B T(r)}{m} \rho(r) \quad (14.2.26)$$

Mit den Randbedingungen $M(R) = M_\odot$, $M(0) = 0$, $L(0) = 0$ (keine Dirac-Quelle im Zentrum), $T(R) = T_{\text{gemessen}}$ und $p(R) = 0$ können bei bekannter Zusammensetzung der Atome usw. die Differentialgleichungen

$$\frac{dp(r)}{dr} = -G \frac{M(r)}{r^2} \rho(r) \quad (14.2.27a)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (14.2.27b)$$

$$\frac{dL_r(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(\rho, T) \rho(r) \quad (14.2.27c)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{c_p(p, T) - c_V(p, T)}{c_p(p, T)} \frac{T(r)}{p(r)} \frac{dp(r)}{dr} \quad (14.2.27d)$$

$$p(r) = \frac{k_B T(r)}{m} \rho(r) \quad (14.2.27e)$$

numerisch gelöst werden.

14.2.3. Radiale Struktur der Sonne

Die Sonne ist wie eine Zwiebel aufgebaut. Abbildung 14.33 nach K.-H. Spatschek [Spa03] zeigt eine Skizze der verschiedenen Zonen und der vorherrschenden Transportmechanismen. Aus der Abbildung wird klar, dass unser Modell aus dem Abschnitt 14.2.2 immer noch ungenügend ist.

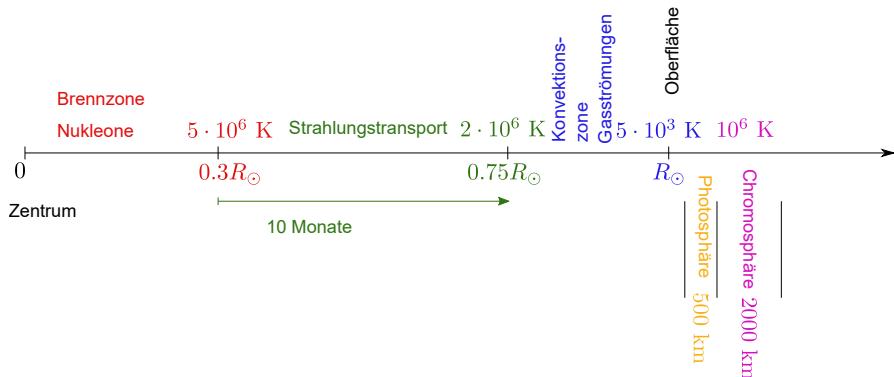


Abb. 14.33.: Querschnitt durch die Sonne mit Transportmechanismen (nach K.-H. Spatschek [Spa03]).

Innen ist die nukleare BRENNZONE. Sie reicht vom Zentrum bis etwa $0.3R_{\odot} = 2.1 \cdot 10^5$ km. Die Temperatur an der Grenze ist $5 \cdot 10^6$ K. Diese ist niedriger als die Temperatur in Fusionsreaktoren auf der Erde. In der Sonne hilft der Druck die Coulombbarriere zu überwinden. Es folgt eine Zone mit Strahlungstransport, die STRAHLUNGSTRANSPORTZONE. Die Gase bewegen sich kaum, es sind die Photonen die die Energie nach aussen transportieren. Die Grenze der Strahlungszone liegt bei $0.75R_{\odot} = 5.2 \cdot 10^5$ km. Die Temperatur ist auf $2 \cdot 10^6$ K gefallen. Von da bis zum Radius der Sonne $R_{\odot} = 6.957 \cdot 10^5$ km wird die Energie über Konvektion transportiert. Diese KONVEKTIONSSZONE wurde von Erika Böhm-Vitense in einer Publikation von 1958 [Böh58] beschrieben. Die Konvektionszone ist der Grund für

die granulare Struktur der Sonnenoberfläche. Die Temperatur an der Grenze ist auf etwa $5.7 \cdot 10^3$ K gesunken.

Würde die Energie der Brennzone nur durch die Konvektion transportiert könnte nur 1 % der gemessenen abgestrahlten Energie aus dem Sonnenzentrum transportiert werden. Das heisst, der Transport muss durch diffusiven Strahlungstransport funktionieren. Die effektive Geschwindigkeit der elektromagnetischen Strahlung ist sehr gering, nämlich 10^7 a.

Oberhalb der Konvektionszone befindet sich die etwa 500 km dicke PHOTOSPHÄRE. In der 2000 km dicken CHRONOSPHÄRE steigt die Temperatur auf 10^6 K an. Obwohl die Temperatur hoch ist, nimmt die Energiedichte wegen der kleinen Zahlendichte oder Massendichte nach aussen ab.

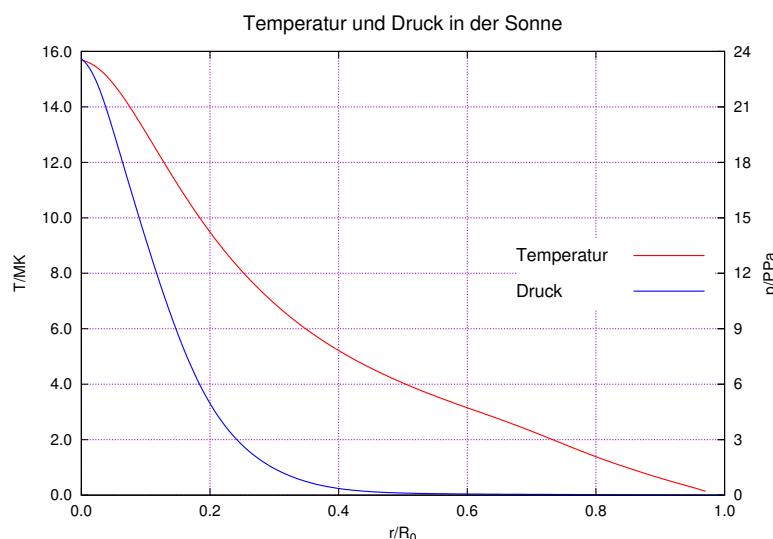


Abb. 14.34.: Temperatur und Druck in der Sonne (nach [CO07, Abb. 11.4] und [BPB01]).

Abbildung 14.34 zeigt den Temperatur- und Druckverlauf in der Sonne. Der Druck nimmt schneller ab als die Temperatur. Der Übergang von der Strahlungstransportzone zur Konvektionszone ist in der Temperatur durch eine kleine Änderung der Steigung sichtbar.

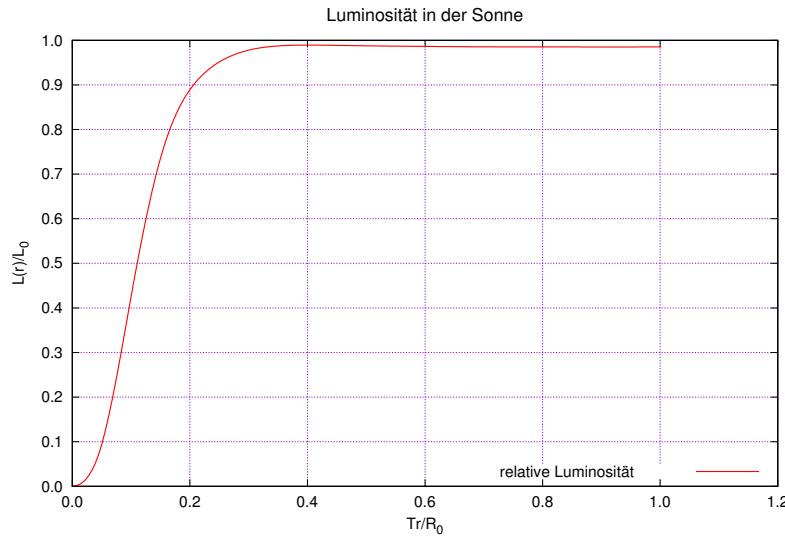


Abb. 14.35.: Luminosität in der Sonne (nach [CO07, Abb. 11.5] und [BPB01]).

Die Luminosität L der Sonne (Abbildung 14.35) nimmt von innen nach aussen zu. Die Ableitung zeigt die Brennzone.

14.2.4. Äussere Sonnenatmosphäre

In diesem Abschnitt soll die äussere Atmosphäre der Sonne noch etwas genauer angeschaut werden. Diese äussere Atmosphäre besteht aus der PHOTOSPHÄRE, der CHROMOSPÄRE und der KORONA. Diese Bereiche werden spektroskopisch untersucht.

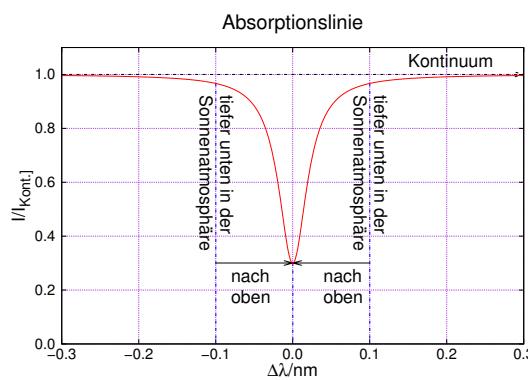


Abb. 14.36.: Quelle der Signale einer Absorptionslinie in der Sonnenatmosphäre (B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Abb. 11.13]).

Abbildung 14.36 skizziert, dass die Photonen im Zentrum einer Absorptionslinie von einem höheren Bereich der Sonnenatmosphäre stammen als die Photonen an

der Flanke. Die Photonen im Kontinuumbereich der Linie stammen von noch tieferen Regionen.

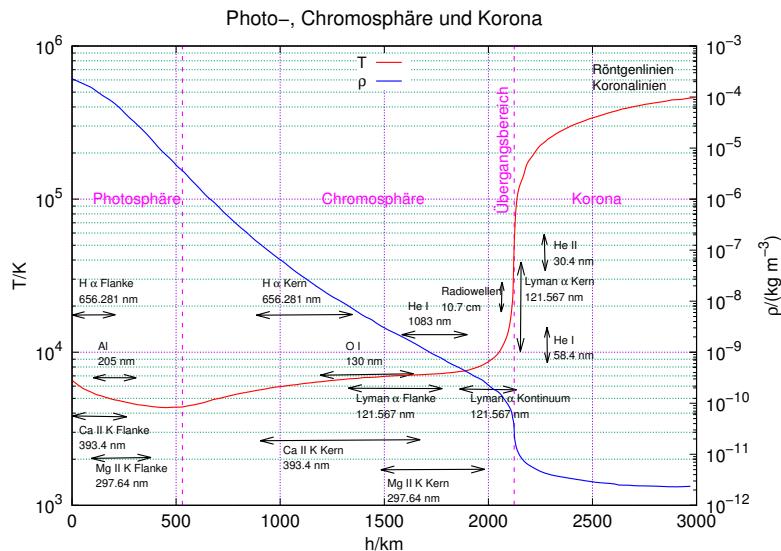


Abb. 14.37.: Äussere Atmosphäre der Sonne nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Abb. 11.18] und [Mur01]). Gezeigt werden der Druck und die Temperatur sowie aus welcher Höhe welche optischen Linien Informationen transportieren.

Die drei Bereiche der Sonnenatmosphäre sind in Abbildung 14.37 gezeigt. Die Korona reicht weiter als 3000 km. Gezeigt sind in der Abbildung charakteristische Wellenlängen und der Höhenbereich aus dem die dort detektierten Photonen stammen. Kern, Flanke oder Kontinuum bezieht sich auf die Bereiche aus der Abbildung 14.36. Aus den Messwerten aus verschiedenen Tiefen kann ein detailliertes Höhenprofil der Physik der Sonnenatmosphäre erstellt werden. Die in Abbildung 14.23 verwendeten Wellenlängen finden sich in Abbildung 14.37 wieder. Damit können Sie die Höhe in der Sonnenatmosphäre zuordnen.

In der KORONA unterscheidet man drei Bereiche

K-Korona K steht für kontinuierlich. Dieser Bereich erzeugt weisses Licht, das von der Streuung an freien Elektronen herröhrt. Dieser Bereich ist zwischen R_{\odot} und $2.3 R_{\odot}$ vom Sonnenmittelpunkt aus. Durch die hohen Temperaturen (ausser an der Grenze zur Chromosphäre) sind alle optischen Linien so extrem dopplerverbreitert, dass sie das Kontinuum bilden.

F-Korona Die F-Korona ist jenseits von $2.3 R_{\odot}$. Das beobachtete Licht stammt von der Streuung an Staubpartikeln. Durch die «grosse» Masse der Staubpartikel ist die Dopplerverschiebung minimal, die Fraunhoferlinien sind wieder sichtbar. Weiter draussen geht die F-Korona ins ZODIAKALLICHT über. Das Zodiakallicht stammt von der Streuung am Staub in der Ekliptikebene.

E-Korona Die E-Korona überlappt mit der K- und der F-Korona. Mit dem Begriff E-Korona werden die Streuung und die Emission an hochionisierten Atomen bezeichnet. Der Ionisationsgrad ist wegen der hohen Temperatur hoch.

Die Korona wird nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, p. 375] durch das Modell von Eugene Parker [Par58; Par60] beschrieben. Eugene Parker stellte ein Modell der Korona basierend auf hydrodynamischen Gleichungen im hydrostatischen Gleichgewicht auf. Die Masse der Korona soll klein sein gegen die Sonnenmasse M_\odot . Dann ist im Bereich der Korona die Gleichung für das hydrodynamische Gleichgewicht des Drucks

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G M_\odot \rho(r)}{r^2} \quad (14.2.28)$$

In einem komplett ionisierten Gas ist die Anzahl der Protonen

$$n(r) \simeq \frac{\rho(r)}{m_p} \quad (14.2.29)$$

Die ideale Gasgleichung sagt

$$p(r) = 2n(r) k_B T(r) \quad (14.2.30)$$

Der Faktor $2 = \mu^{-1}$ stammt von der mittleren Masse $m_p/2$ für das ionisierte Wasserstoffatom bestehend aus den zwei Teilchen Proton und Neutron. Zusammen ergibt sich

$$\frac{d}{dr} (2n(r) k_B T(r)) = -\frac{G M_\odot n(r) m_p}{r^2} \quad (14.2.31)$$

Wenn die Temperatur konstant ist, also $T(r) = T$, bekommen wir eine Differentialgleichung für $n(r)$. deren Lösung ist

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\lambda\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\right) \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{G M_\odot m_p}{2k_B T r_0} \quad (14.2.32)$$

wobei $n(r_0) = n_0$ bei einem Radius r_0 (eine geeignet zu wählende Distanz). Dann ist

$$p(r) = p_0 \exp\left(-\lambda\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\right) \quad \text{mit} \quad p_0 = 2n_0 k_B T \quad (14.2.33)$$

Gleichung (14.2.33) sagt voraus, dass der Druck für $r \rightarrow \infty$ nicht gegen Null geht. Setzt man $T \approx 1.5 \cdot 10^6$ K und $n_0 \approx 1.2 \cdot 10^{11}$ m⁻³ bei $r_0 = 1.4R_\odot$ resultiert der Druck $p(\infty) \approx 1.5 \cdot 10^{-6}$ Pa. Dieser Wert ist viel zu hoch. Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, p. 375] muss die Annahme, dass die Korona im hydrostatischen Gleichgewicht ist aufgegeben werden. Wenn die Korona nicht im Gleichgewicht ist muss es eine Bewegung geben, den SONNENWIND.

Um zu einer dynamischen Gleichung zu kommen verwendet man die Umrechnung

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr}$$

Damit kann die Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht aus [CO07, Gl. 10.5]

$$\rho(r) \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{G M_r \rho(r)}{r^2} - \frac{dp(r)}{dr}$$

umgeschrieben werden

$$\rho(r)v(r) \frac{dv(r)}{dr} = -\frac{G M_r \rho(r)}{r^2} - \frac{dp(r)}{dr} \quad (14.2.34)$$

Die Energieerhaltung führt über die Kontinuitätsgleichung zur Beziehung

$$\text{const} = 4\pi r^2 \rho(r) v(r) \quad (14.2.35)$$

Diese Beziehung beschreibt auch die Massenverlustrate der Sonne. Die Ableitung von Gleichung (14.2.35) muss null sein, also

$$\frac{d}{dr} (\rho(r) v(r) r^2) = 0 \quad (14.2.36)$$

Durch das aufsteigende Gas in der Konvektionszone der Sonne und das Absinken des abgekühlten Gases wird eine Druckwelle erzeugt, die einen Energiefluss

$$\Phi_E = \frac{1}{2} \rho(r) v_w^2(r) v_s(r) \quad (14.2.37)$$

mit $v_s(r)$ der lokalen Schallgeschwindigkeit und $v_w(r)$ der Geschwindigkeit von Teilchen in der Korona um ihre Ruhelage, angetrieben von der Konvektionszone.

Mit $v_s(r) = \sqrt{\frac{\gamma p(r)}{\rho(r)}}$ ([CO07, Gl. 10.84], $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$) und dem idealen Gasgesetz $p(r) = \rho(r) k_B \frac{T}{\mu m_H}$ ergibt sich

$$v_s(r) = \sqrt{\frac{\gamma k_B T(r)}{\mu m_H}} \propto T^{1/2}(r) \quad (14.2.38)$$

Am Entstehungsort ist $v_w < v_s$. Wegen Gleichung (14.2.35) nimmt v_s ab. Es entsteht eine Schockwelle wie bei einem Überschallknall. Durch die Kollisionen in der Schockwelle entsteht ein hoch ionisiertes Gas. Dies bedeutet, dass die CHROMOSPÄRE durch die von der Konvektionszone induzierte Bewegung geheizt wird.

Ionisierte Teilchen und Magnetfelder bedeuten, dass die gewöhnliche Hydrodynamik nicht ausreicht und dass die Physik der MAGNETOHYDRODYNAMIK verwendet werden muss [CO07, p. 378]. Wichtige Größen dabei ist die Energiedichte der magnetischen Induktion

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (14.2.39)$$

sowie die daraus resultierende Maxwellsche Spannung, ein Druck

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (14.2.40)$$

verwendet werden muss. Entlang einer Feldlinie kann es transversale Störungen geben, die als ALFVÉN-WELLE ausbreiten (nach Hannes Alfvén). Dies führt auf eine Ausbreitungsgeschwindigkeit (nach einigen nicht ganz einfachen Berechnungen) von

$$v_m = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \quad (14.2.41)$$

ρ ist die Massendichte. In der Regel sind die Alfvén-Wellen irrelevant, ausser bei schwarzen Flecken mit ihren starken Magnetfeldern.

14.2.5. Energiequellen und nukleare Prozesse

Aus der Gravitationsenergie nach (14.2.1) und dem Virialsatz in den Gleichungen (3.2.13) und (14.2.2) folgt, dass nach Abzug der kinetischen Energie die Energie

$$E_{Kollaps} = -\frac{3}{10}G\frac{M_\odot^2}{R_\odot} = -1.18 \cdot 10^{41} \text{ J} \quad (14.2.42)$$

abgestrahlt wurde. Wenn die Sonne die heutige Leistung von $P_\odot = 3.845 \cdot 10^{26}$ W während der ganzen Lebenszeit gehabt hätte, wäre sie

$$T_\odot = \frac{E_{Kollaps}}{P_\odot} = 5.9 \cdot 10^{14} \text{ s} = 1.9 \cdot 10^7 \text{ a} \quad (14.2.43)$$

alt. Dies ist im Widerspruch zu all dem was wir über die Erdgeschichte wissen. Es muss also weitere Wärmequellen geben, die durch den thermisch erzeugten Druck den Gravitationskollaps aufhalten. Dies sind die verschiedenen Fusionsreaktionen. Die genaue Thermodynamik dieser Reaktionen ist kompliziert. Nach [CO07, p. 307] können die Reaktionsraten in einem engen Temperaturbereich durch Potenzgesetze beschrieben werden. Die Reaktionsraten beschreiben letztlich die Menge umgesetzter Energie. Ohne Coulombabstossung und sonstige «störende» Effekte kann man für eine Zweiteilchenreaktion schreiben

$$r_{ix} \simeq r_0 X_i X_x \rho^{\alpha'} T^\beta \quad (14.2.44)$$

Hier ist r_0 eine Konstante, X_i und X_x sind die Massenanteile der beiden beteiligten Teilchen und α' und β sind das Resultat der Entwicklung der vollständigen Ratengleichung in Potenzreihen. ρ ist die Massendichte. Meistens ist für einen Zweikörperstoss $\alpha' = 2$ und $\beta \simeq 1$ bis 40. Wenn ϵ_0 die freigesetzte Energie pro Reaktion ist, ist die Energie pro Masse und Zeit

$$\epsilon_{ik} = \left(\frac{\epsilon_0}{\rho} \right) r_i x \quad (14.2.45)$$

und zusammen

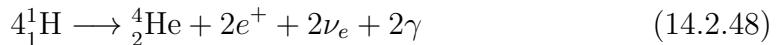
$$\epsilon_{ik} = \epsilon'_0 X_i X_x \rho^\alpha T^\beta \quad (14.2.46)$$

$\alpha = \alpha' - 1$. Die Einheit von $[\epsilon_{ix}] = \text{W kg}^{-1}$. Schliesslich ist die gesamte Energieproduktion pro Masse durch

$$\epsilon = \sum_{\forall(ix)} \epsilon_{ix} \quad (14.2.47)$$

gegeben.

14.2.5.1. *pp*-Prozesse



Diese Reaktion wird als *PP I*-KETTE bezeichnet. Die *PP II*-KETTE erzeugt HELIUM über BERYLLIUM und Lithium, während die *PP III*-KETTE HELIUM über BOR und BERYLLIUM erzeugt.

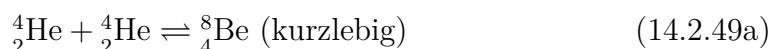
Reaktion (1. Stufe)	Anteil	ΔE	Kette
${}_1^1\text{H} + {}_1^1\text{H} \rightarrow {}_1^2\text{H} + e^+ + \nu_e$	99.75%	1.19 MeV	
${}_1^1\text{H} + {}_1^1\text{H} + e^- \rightarrow {}_1^2\text{H} + \nu_e$	0.25%	1.44 MeV	
Reaktion (2. Stufe)	Anteil	ΔE	
${}_1^2\text{H} + {}_1^1\text{H} \rightarrow {}_2^3\text{He} + \gamma$	100%	5.49 MeV	
Reaktion (3. Stufe)	Anteil	ΔE	
${}_2^3\text{He} + {}_2^3\text{He} \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_1^1\text{H}$	91%	12.85 MeV	<i>PP I</i>
${}_2^3\text{He} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_7^7\text{Be} + \gamma$	9%		
${}_7^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}_3^7\text{Li} + \nu_e$			
${}_3^7\text{Li} + p \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_2^4\text{He}$		25.67 MeV	<i>PP II</i>
${}_2^3\text{He} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_7^7\text{Be} + \gamma$	0.1%		
${}_7^7\text{Be} + {}_1^1\text{H} \rightarrow {}_8^8\text{B} + \gamma$			
${}_8^8\text{B} \rightarrow {}_4^8\text{Be} + e^+ + \nu_e$			
${}_4^8\text{Be} \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_2^4\text{He}$		19.28 MeV	<i>PP III</i>
Energie pro Proton		6.696 24 MeV	

Tab. 14.1.: *pp*-Zyklus auf der Sonne (nach [CO07, p. 309] und [Dem10, p.323])

Tabelle 14.1 gibt eine Zusammenfassung über alle Prozesse, die durch Fusion aus WASSERSTOFF HELIUM machen. Die *PP I*-KETTE erzeugt dabei über 90 % der freigewordenen Energie.

14.2.5.2. Triple- α -Prozess

Die im Abschnitt 14.2.5.1 besprochenen *pp*-Prozesse können nicht allein für die von der Sonne abgestrahlte Energie zuständig sein. Aus spektroskopischen Messungen ist bekannt, dass auch Elemente jenseits von Be in der Sonne vorhanden sein müssen. Insbesondere muss es einen Prozess geben, der ${}_{6}^{12}\text{C}$ über Fusion erzeugt. Dies ist der sogenannte TRIPLE- α -PROZESS geben. Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] gilt



Der Prozess nach (14.2.49) ermöglicht die Entstehung von Kohlenstoff $^{12}_{\text{C}}$. Dieser ist die Grundlage zur Synthese schwererer Elemente, wie sie auf der Sonne beobachtet werden.

14.2.5.3. CNO-Prozess

Der in Abschnitt 14.2.5.2 beschriebene TRIPLE- α -PROZESS bildet die Grundlage zur Synthese weiterer Elemente durch Fusion.

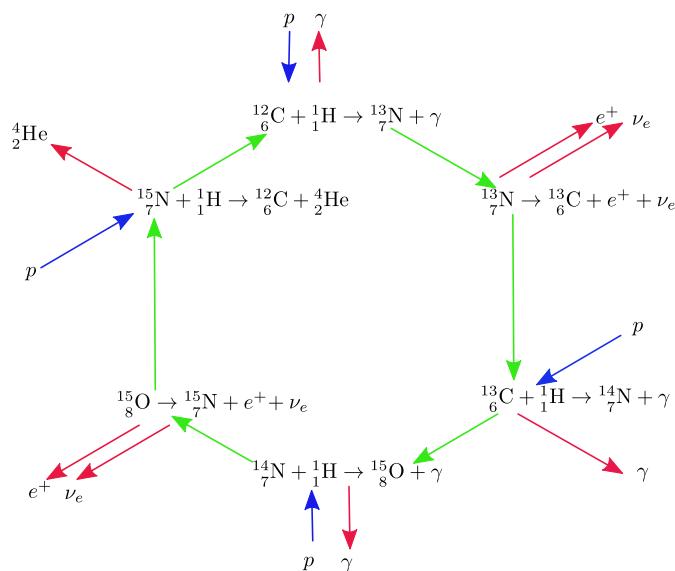


Abb. 14.38.: CNO-ZYKLUS in der Sonne (nach [CO07, p. 311] und [Dem10, p.324]).

Abbildung 14.38 zeigt den CNO-ZYKLUS. In diesem wird in einer Art katalytischer Reaktion Wasserstoff verbrannt, aber nicht durch direkte Fusion sondern durch Anlagerung an schwerere Kerne.

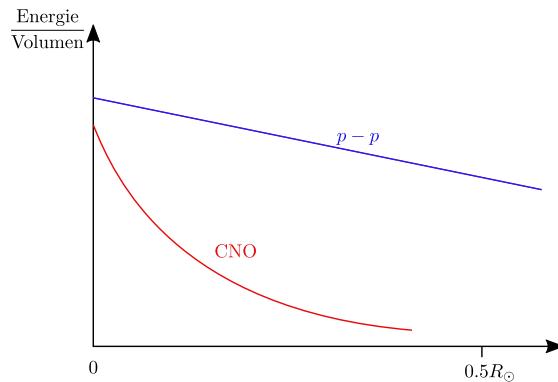


Abb. 14.39.: Energieproduktion der pp - und CNO -Prozesse (nach [Dem10, p.325]).

Diese Reaktion ist bei niedrigen Temperaturen weniger wahrscheinlich als die pp -Prozesse. Abbildung 14.39 zeigt abhängig vom Abstand vom Sonnenzentrum den Anteil der beiden Prozesse. Der Abstand ist dabei ein Mass für die Temperatur.

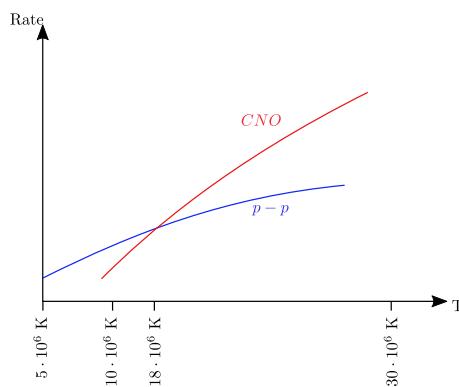


Abb. 14.40.: Temperaturabhängigkeit der Raten für die pp - und CNO -Prozesse (nach [Dem10, p.325]).

Abbildung 14.40 zeigt, dass bei höheren Temperaturen der CNO -PROZESS den pp -PROZESS dominiert. Mit zunehmendem Alter unserer Sonne gibt es weniger WASSERSTOFF. Die Sonne kollabiert leicht unter ihrem Gravitationspotential, die Temperatur (kinetische Energie) steigt und der CNO -PROZESS wird wichtiger und übernimmt die Führung. Das heißt, mit zunehmender Zeit wird die Sonne immer heißer, und deshalb wird auch die mittlere Temperatur der Erde steigen. Die dazugehörige Zeitskala sind Millionen von Jahren, und nicht Jahrzehnte wie beim gerade ablaufenden KLIMAWANDEL.

Bei den Reaktionen der ersten und bei einigen Reaktionen der dritten Stufe der pp -PROZESSE in Tabelle 14.1 sowie beim CNO -PROZESS in Abbildung 14.38 entstehen Neutrinos. Aus den Prozessen und der Leistung der Sonne kann die Neutri-

norate berechnet werden. Jedoch beobachten wir auf der Erde zu wenig Neutrinos. Dies wir als ein Indiz für NEUTRINOOSZILLATIONEN angesehen.

14.2.5.4. Entstehung der Elemente

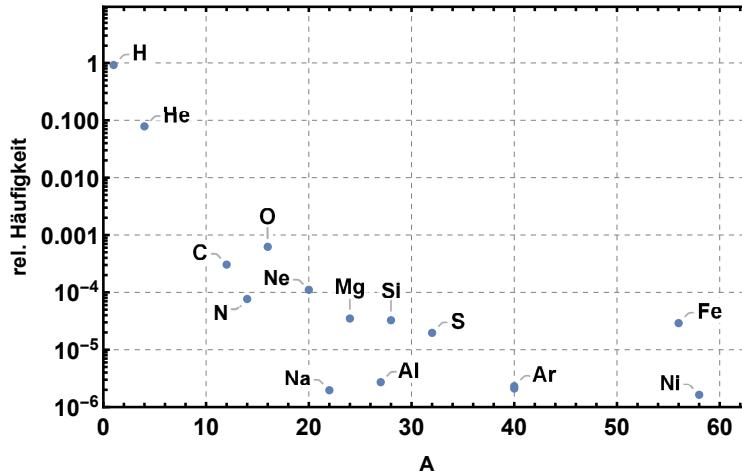
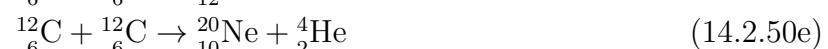


Abb. 14.41.: Elementhäufigkeit in der Sonne (nach [CO07]).

Die HÄUFIGKEITEN DER ELEMENTE (siehe [CO07]) beruht auf der Wahrscheinlichkeit der verschiedenen kernphysikalischen Prozesse, der Stabilität der Ausgangs- und Endkerne dieser Reaktionen und der jeweiligen Energieausbeute. Endotherme Reaktionen sind dabei genau so möglich wie exotherme Reaktionen, nur unwahrscheinlicher.

14.2.5.4.1. Kohlenstoff Nach [CO07] ist KOHLENSTOFF in den folgenden Reaktionen präsent:



Die Reaktionen in den Gleichungen (14.2.50) zeigen wie Elemente bis zu MAGNESIUM und NATRIUM entstehen. Diese Reaktionen können auf der Erde in Beschleunigern untersucht werden. Daraus ergibt sich die Energietönung und weitere Eigenschaften.

14.2.5.4.2. Sauerstoff Aus SAUERSTOFF entstehen nach [CO07] die folgenden Elemente



Analog zu den Reaktionen aus Gleichung (14.2.50) zeigen Reaktionen in den Gleichungen (14.2.51) zeigen wie Elemente bis zu SCHWEFEL und PHOSPHOR entstehen. Es existieren noch viele weitere Reaktionen mit allen möglichen Ausgangskernen. R. V. Wagoner; W. A. Fowler und F. Hoyle haben in ihrer Arbeit „On the Synthesis of Elements at Very High Temperatures“ [WFH67] schon früh eine Zusammenfassung von relevanten Prozessen gegeben. J. A. Johnson; B. D. Fields und T. A. Thompson haben mit dem Übersichtsartikel „The origin of the elements: a century of progress“ [JFT20] kürzlich eine historische Übersicht über dieses Thema publiziert.

15. Teilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung

Die Teilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung sind die ersten Teilchen des STANDARDMODELLS, die hier in diesem Skript besprochen werden. Alle Teilchen des Standardmodells haben die folgenden Eigenschaften (siehe auch [Ble13, Kap. 9, p. 380]).

1. Alle Elementarteilchen können erzeugt oder vernichtet werden.
2. Jegliche Elementarteilchen des gleichen Typs sind vollkommen ununterscheidbar.
3. Zu allen TEILCHEN gibt es ANTITEILCHEN, einige wenige sind ihr eigenes Antiteilchen.

Nach [Ble13, Kap. 9, p. 380] gelten die folgenden Aussagen der Quantenfeldtheorien

1. Materie und Strahlung sind Erscheinungsformen von Wellen oder, allgemeiner, Feldern.
2. Wellenfelder können im leeren Raum existieren, an- und abgeregelt werden.
3. Die Wellenfelder sind quantisiert.
4. Wellenfelder bestehen aus Feldquanten, also aus Elementarteilchen.
5. Feldquanten sind ununterscheidbar.
6. Prozesse zwischen Elementarteilchen bewegen diese in neue Zustände. Diese Prozesse funktionieren ausschliesslich über die An- oder Abregung von Feldern, d.h. der Erzeugung oder Vernichtung (oder der Emission oder Absorption) von Elementarteilchen.
7. Jede elektromagnetische Wechselwirkung (hier), starke oder schwache Wechselwirkung (früher und später) beruht darauf, dass ein Teilchen ein weiteres Teilchen emittiert und dieses vom zweiten absorbiert wird.
8. die ausgetauschten Teilchen können nur virtuelle Zustände einnehmen, d. h. Zustände die den relativistischen Energiesatz $E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$ verletzen.

9. Ein von einem Teilchen ausgesandtes virtuelles Teilchen kann von diesem selbst wieder absorbiert werden. Dies ist die Selbstenergie oder Strahlungskorrektur. Jedes Teilchen ist also von einer Wolke aller möglichen virtuellen Teilchen umgeben. Es kann selber zeitweilig in einem virtuellen Zustand sein und dann anders auf externe Felder reagieren (Renormalisierung von Massen und Ladungen).
10. Auch das Vakuum kann spontan Teilchen in virtuellen Zuständen hervorbringen (Vakuumpolarisation, Vakuumfluktuation).

15.1. Photon

Das PHOTON ist das Quant der ELEKTROMAGNETISCHEN WECHSELWIRKUNG. Albert Einstein beschrieb in „Zur Quantentheorie der Strahlung“ [Ein17] die quantenmechanischen Prozesse der elektromagnetischen Strahlung. Insbesondere beschrieb er die INDUZIERTE EMISSION. Mehr dazu können Sie in O. Marti und M. Gonçalves *Atomphysik* [MG19, Kap. 3.2.2.1.] oder J. Bleck-Neuhaus *Elementare Teilchen* [Ble13, Kasten 9.1] erfahren. Grundlage Einsteins ist die BOLTZMANN-STATISTIK

$$\frac{n^*}{n_0} = e^{-E/(k_B T)} \quad (15.1.1)$$

und das PLANCKSCHE STRAHLUNGSGESETZ

$$\varrho_\nu(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1} d\nu \quad (15.1.2)$$

Weiter verwendet Albert Einstein die Quantenbedingung

$$\Delta E = h\nu = \hbar\omega \quad (15.1.3)$$

Ein angeregtes Elektron (auf einem Energieniveau oberhalb seines Grundzustandes) in einem Atom wird nach Albert Einstein durch den Prozess der SPONTANEN EMISSION abgeregelt. Dieser Prozess hat die Rate

$$\frac{dn^*}{dt} = -An^* \quad (15.1.4)$$

und ist unabhängig von der Feldstärke des STRAHLUNGSFELDES. Angeregt wurde das Elektron durch die INDUZIERTE ABSORPTION. Dieser Prozess hat die Rate

$$\frac{dn^*}{dt} = +B \varrho(\nu, T) n \quad (15.1.5)$$

Die induzierte Absorption ist proportional zum Strahlungsfeld ϱ). Im Gleichgewicht muss die Summe aller Raten verschwinden:

$$\sum \left(\frac{dn^*}{dt} \right) = 0 \quad (15.1.6)$$

Die Gesetze der Absorption und der Emission müssen mit dem Planckschen Strahlungsgesetz vereinbar sein. Die Konsequenz ist:

- Die oben genannten Gesetze gelten nur für

$$h\nu \gg k_B T. \quad (15.1.7)$$

- Es existiert eine notwendige Bedingung:

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \quad (15.1.8)$$

Albert Einstein erkannte, dass die Gesetze der optischen Absorption und der Emission mit dem Planckschen Strahlungsgesetz kompatibel werden, wenn ein dritter Prozess vorhanden ist:

$$\frac{dn^*}{dt} = -B \varrho(\nu, T) n^* \quad (15.1.9)$$

Dieser Prozess ist die von **Albert Einstein** theoretisch entdeckte induzierte Emission. Bei der Behandlung der Absorption und Emission kann die Frequenz des Wellenfeldes eliminiert werden ([Ble13, p. 387]). Wir ersetzen dabei $\nu \rightarrow \frac{E}{\hbar}$. Dann ist $\varrho(\nu, T)d\nu \rightarrow$ die Dichte der Teilchen mit einer Energie im Intervall $dE = h\nu d\nu$ multipliziert mit der dazugehörigen Energie $E = h\nu$.

Einstiens Gesetze könnten auch allein mit Teilchen ohne elektromagnetisches Feld formuliert werden.

Nach **Paul Dirac** wir der Strahlungs-Hamiltonoperator (siehe (5.2.3)) so geschrieben

$$\hat{H}_{rad} = \sum_{k,\sigma} (\hat{n}_{k,\sigma} + 1) \hbar \omega_k \quad (15.1.10)$$

Diese Gesetze sind auch heute die Grundlage der Behandlung elektromagnetischer Strahlung.

Das PHOTON hat einen Spin

$$s_{h\nu} = s_\gamma = \hbar. \quad (15.1.11)$$

Somit ist es ein BOSON.

15.2. Elektron

Während das PHOTON das Austauschteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung ist, ist das ELEKTRON das materiebehaftete und mit einer Ladung versehene leichteste Teilchen der Familie der LEPTONEN. Mehr dazu gibt es auch im Abschnitt 5.2.

Das Elektron hat eine Masse, eine Ladung und einen Spin von

$$m_e = 9.109\,383\,70 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 510.998\,950 \text{ keV/c}^2 \quad (15.2.1a)$$

$$q_e = -e = -1.602\,18 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (15.2.1b)$$

$$s_{z,e} = \frac{1}{2}\hbar \quad (15.2.1c)$$

Das Elektron ist ein FERMION, genau wie alle anderen Teilchen mit halbzahligem Spin. Es besitzt ein mit dem Spin verknüpftes magnetisches Moment

$$\boldsymbol{\mu}_s = g_s \frac{e}{2m_e} \boldsymbol{s} \quad (15.2.2)$$

mit dem g-Faktor

$$-g_s = 2.002\,319\,304\,362\,2. \quad (15.2.3)$$

Die Abweichung

$$a_e = \frac{g_s - 2}{2} = 0.001\,159\,652\,180\,273(28) \quad (15.2.4)$$

ist das ANOMALE MAGNETISCHE MOMENT. Schliesslich ist das ELEKTRON durch die LEPTONENZAHL

$$L = 1 \quad (15.2.5)$$

charakterisiert.

15.3. Feynman-Diagramme

Feynman-Diagramme dienen zur graphischen Veranschaulichung komplizierter quantenmechanischer Rechnungen. Sie erlauben, mit Hilfe der Graphentheorie quantenmechanische Berechnungen zu strukturieren und zu vereinfachen.

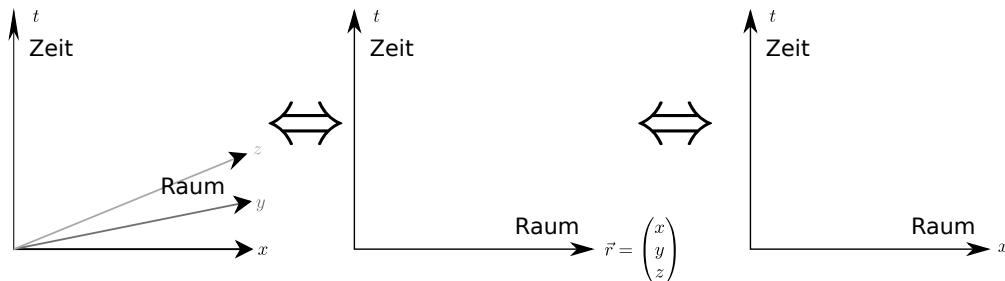


Abb. 15.1.: Koordinatensysteme bei Feynmandiagrammen. Links ist das vierdimensionale Raum-Zeit-Koordinatensystem gezeigt. In der Mitte sind die drei Raumkoordinaten als eine Achse gezeigt mit dem Vektor \vec{r} . Rechts die übliche Darstellung mit einer Raum- und der Zeitkoordinate.

Abbildung 15.1 zeigt das verwendete Koordinatensystem. Es lehnt sich an die Minkowski-Diagramme aus der speziellen Relativitätstheorie an. Die drei Raumkoordinaten werden als eine Koordinate angegeben. Häufig werden die Koordinaten nicht gezeichnet.

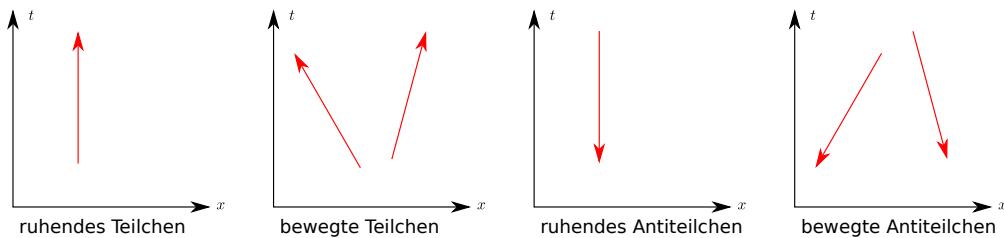


Abb. 15.2.: Weltlinien in Feynmandiagrammen. Links ist ein ruhendes Teilchen zu sehen. In der Mitte sind bewegte Teilchen gezeigt. Wenn wie hier $c = 1$ angenommen ist, können die Teilchen maximal um $\pm 45^\circ$ verkippt sein. Die zweite Abbildung von rechts zeigt ein ruhendes Antiteilchen, ganz rechts sind zwei bewegte Antiteilchen. Formal laufen Antiteilchen in der Zeit zurück.

Teilchen werden in Feynmandiagrammen als Weltlinien im Sinne der Minkowski-Diagramme dargestellt (Abb. 15.2). Ein ruhendes Teilchen hat eine nach oben zeigende Weltlinie. Ein bewegtes Teilchen hat eine Weltlinie, die irgendwo zwischen «nach oben» und einem Winkel von $\pm 45^\circ$ gegen die Senkrechten (t -Achse) entspricht. Antiteilchen laufen in Feynman-Diagrammen in der Zeit rückwärts. Wenn ein Teilchen und nein Antiteilchen annihilieren ergibt sich so eine Kette von gerichteten Strecken, die den gleichen Umlaufsinn haben. Weiter unten wird dies hoffentlich klarer. Ein ruhendes Antiteilchen hat eine nach unten laufende Weltlinie. Ein bewegtes Antiteilchen ist wiederum bis zu $\pm 45^\circ$ zur senkrechten geneigt, aber jetzt von unten gezählt. Photonen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit und sind deshalb exakt um $\pm 45^\circ$ geneigt.

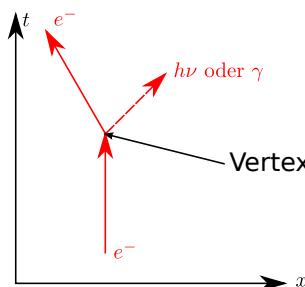


Abb. 15.3.: Ein Vertex ist ein Punkt, an dem sich eine Weltlinie in mehrere aufspaltet, oder umgekehrt. Hier emittiert ein ruhendes Elektron ein Photon nach rechts und bewegt sich dann wegen der Impulserhaltung nach links.

Wenn ein Teilchen mit einem anderen reagiert oder wie in Abbildung 15.3 ein Teilchen sich in zwei aufspaltet (hier emittiert ein Elektron ein Photon) wird der Verbindungspunkt an dem die Reaktion oder Aufspaltung passiert VERTEX

(KNOTEN) genannt. Dieser Begriff stammt aus der Graphentheorie. An Vertices (die Mehrzahl von Vertex) geschehen Reaktionen, die Linien dazwischen transportieren die Teilchen. Es wird auch gesagt, dass die Teilchen propagierte werden. Deshalb werden die Verbindungslien Propagatoren genannt.

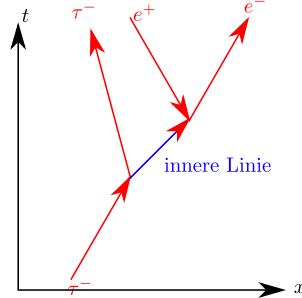


Abb. 15.4.: Eine Linie, die zwei Vertices (Knoten) verbindet heisst eine innere Linie.

Eine Linie, die zwei Vertices (Knoten) verbindet, wird eine INNERE LINIE genannt (siehe Abbildung 15.4). In dieser Abbildung liegt der Input (Ausgangssituation) unten und der Output (Endsituation) oben. Die Linien, die vom Input zu Knoten oder von Knoten zu Outputs führen werden ÄUSSERE LINIEN genannt. Eine innere Linie liegt auch vor, wenn ein Vertex (Knoten) über eine Schlaufe mit sich selber verbunden ist. Alle inneren Linien werden zur Berechnung der Streuung benötigt, die äusseren Linien sind dazu irrelevant.

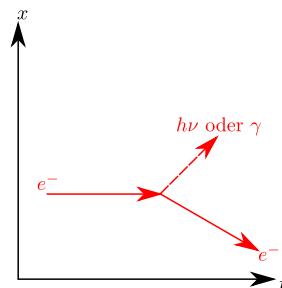


Abb. 15.5.: Orientierung der Feynman-Diagramme mit der Zeit nach rechts und dem Ort nach oben.

Es gibt zwei Möglichkeiten, Feynman-Diagramme zu zeichnen. Abbildung 15.3 verwendete eine Orientierung analog zu den Minkowski-Diagrammen. Oftmals wenn mehrere Reaktionen hintereinander dargestellt werden sollen würde dies sehr hohe Diagramme ergeben. Deshalb ist es auch üblich, die Diagramme an der Winkelhalbierenden der beiden Achsen zu spiegeln. Die Zeit wird dann nach rechts dargestellt, die Raumkoordinaten nach oben (siehe Abbildung 15.5). Ich werde in diesem Skript beide Darstellungsarten verwenden.

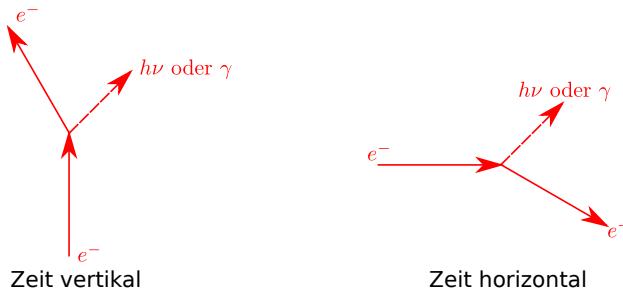


Abb. 15.6.: Feynman-Diagramme ohne Achsen. Links mit der Zeitachse nach oben, rechts mit der Zeitachse nach rechts.

Häufig werden Feynman-Diagramme ohne die Achsen gezeichnet. Abbildung 15.6 zeigt beide Orientierungsvarianten ohne Achsen. Der gezeigte Vorgang ist der gleiche wie in den Abbildungen 15.3 und 15.5. Bei dieser Art Darstellung muss die Achsenlage aus den dargestellten Vorgängen abgeleitet werden.

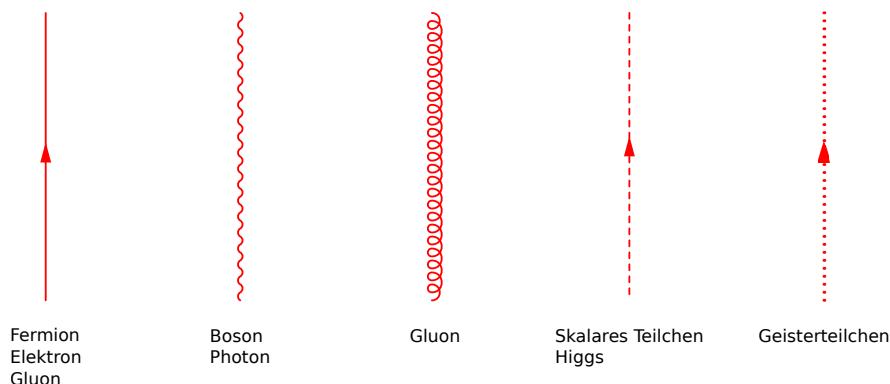


Abb. 15.7.: Teilchentypen in einem Feynman-Diagramm.

Die verschiedenen Arten von Teilchen in einem Feynman-Diagramm werden durch unterschiedliche Linientypen dargestellt. (siehe Abbildung 15.7). Fermionen werden durch eine gerade Linie mit einem Pfeil dargestellt (links, es könnte auch ein Elektron oder Quark sein). Bosonen werden durch Wellenlinien dargestellt (zweites Bild von links, es könnte auch ein Photon sein). Gluonen werden durch eine Spiralfeder dargestellt (mittleres Bild). Skalare Teilchen werden durch eine gestrichelte Linie symbolisiert (zweites Bild von rechts, es könnte auch ein Higgs sein). Geisterteilchen werden durch eine punktierte Linie dargestellt (ganz rechts).

F. van der Veken [Vek21] hat ein sogenanntes «Cheat Sheet» zu Feynman-Diagrammen zusammengestellt.

15.4. Zweite Quantisierung, Fortsetzung

Die folgenden Ausführungen folgen U. Ellwanger [Ell15, Kap. 5.3].

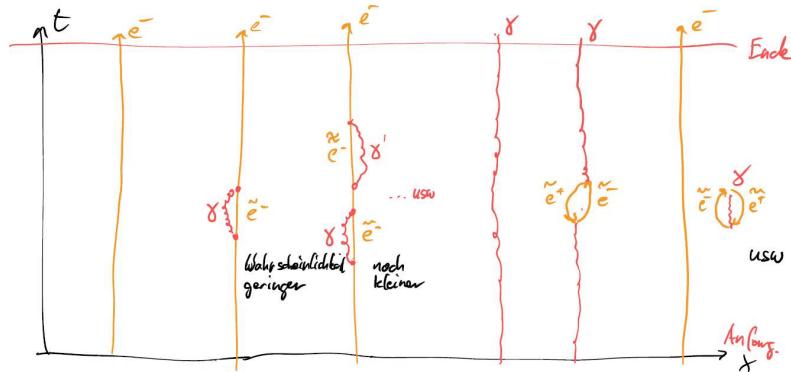


Abb. 15.8.: Feynman-Diagramme in höherer Ordnung (nach Richard Feynman)

Alle Graphen in Abbildung 15.8 sind mögliche Graphen. Aus der Beziehung

$$\Delta E \cdot \Delta T \leq \frac{\hbar}{2} \quad (15.4.1)$$

ersieht man, dass für kurze Zeiten sehr viel Energie zur Verfügung stehen kann. Teilchen, für die die relativistische Energie-Impulsbeziehung verletzt ist, heißen VIRTUELLE TEILCHEN. So wird beim zweiten Elektron von links zwischenzeitlich ein Photon erzeugt und wieder absorbiert. Ausser der Energieerhaltung müssen alle anderen Erhaltungssätze gelten, also Impuls, Drehimpuls, Leptonenzahl und so weiter.

Auch ein Photon kann kurzfristig z. B. in ein Elektron-Positron aufspalten. Es ist sogar möglich dass induziert von einem Elektron ein Elektron-Positron-Photonen-Komplex entsteht ganz rechts in Abbildung 15.8.

Je mehr Knoten (VERTEX) es gibt, desto höher ist die Ordnung und desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit. Für eine Bewegung vom «Anfang» bis zum «Ende» müssen mit ihren Wahrscheinlichkeiten aufsummiert werden. Es zeigt sich, dass das Resultat unendlich ist.

Es gibt zwei Auswege:

1. Gekonnte Ignoranz: Wir sagen, dass das gemessene Elektron schon das mit allen Korrekturen ist, dass das reale Elektron nicht bekannt ist.
2. Gekonntes Abschneiden: Das Problem röhrt vom Faktor $1/r$ im COULOMB-POTENTIAL her. Wir verwenden $1/(r + a)$ mit $a > 0$ und vermeiden damit die Summationsprobleme. Nach der Summation nehmen wir den Grenzwert $\lim_{a \rightarrow 0}$. Dieser Prozess heisst RENORMALISIERUNG.
Möchte man sanft abschneiden, kann auch der Faktor $\exp(-(r - r_0)/a)$ verwendet werden, wieder mit dem Grenzwert $\lim_{a \rightarrow 0}$.

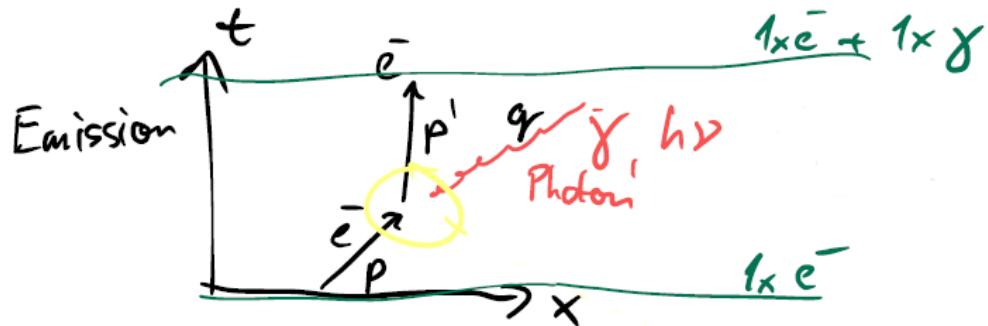


Abb. 15.9.: Emission im Feynmanbild (nach Richard Feynman).

Bei der Emission eines Photons (siehe Abbildung 15.9) wird ein Elektron mit dem Impuls p vernichtet (\hat{a}_p) und eines mit dem Impuls $p - q$ erzeugt (\hat{a}_{p-q}^\dagger). Gleichzeitig wird ein Photon mit dem Impuls q erzeugt (\hat{c}_q^\dagger). Das führt auf den Emissionshamiltonoperator

$$\hat{H}_{Emission} = \hat{a}_{p-q}^\dagger \hat{a}_p \hat{c}_q^\dagger \quad (15.4.2)$$

Am Anfang (unten) und am Ende (oben) haben wir reelle Teilchen, zwischendurch nicht messbare virtuelle Teilchen.

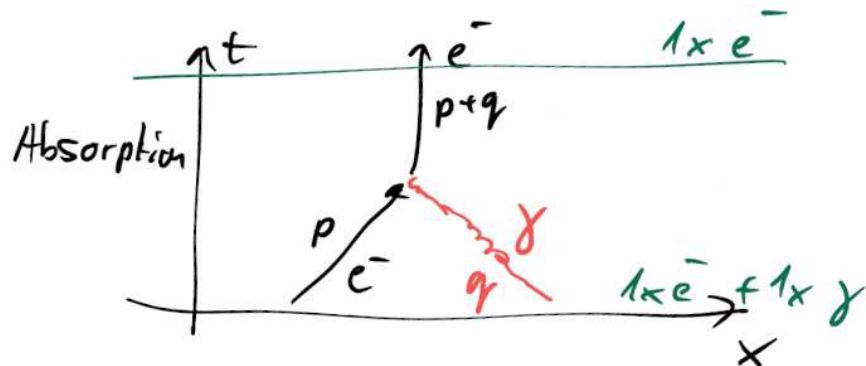


Abb. 15.10.: Absorption im Feynmanbild (nach Richard Feynman)

Analog kann die Absorption eines Photons verstanden werden (siehe Abbildung 15.10). Es wird ein Elektron mit dem Impuls p vernichtet (\hat{a}_p) und eines mit dem Impuls $p + q$ erzeugt (\hat{a}_{p+q}^\dagger). Gleichzeitig wird ein Photon mit dem Impuls q vernichtet (\hat{c}_q). Das führt auf den Absorptionshamiltonoperator

$$\hat{H}_{Absorption} = \hat{a}_{p+q}^\dagger \hat{c}_q \hat{a}_p \quad (15.4.3)$$

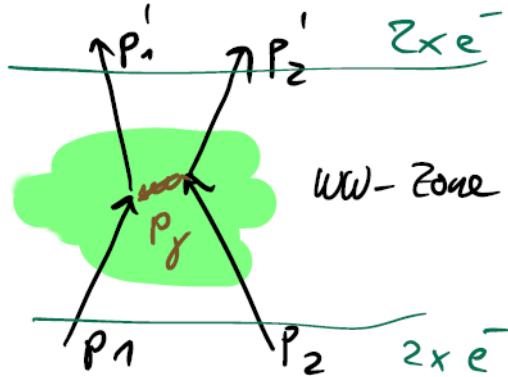


Abb. 15.11.: Streuung im Feynmanbild (nach Richard Feynman)

Zusammen ergibt sich der Streuprozess zweier Elektronen. ein Elektron sendet ein Photon mit dem Impuls q aus und ändert seinen eigenen Impuls um den gleichen Betrag. Ein zweites Elektron absorbiert das Photon und nimmt dessen Impuls q auf.

In Gleichungen lautet der Streuprozess:

$$\mathbf{p}_{p_1} = \mathbf{p}_{p'_1} + \mathbf{p}_\gamma \quad E_{p_1} = E_{p'_1} + E_\gamma \quad \text{Emission} \quad (15.4.4a)$$

$$\mathbf{p}_{p_2} + \mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_{p'_2} \quad E_{p_2} + E_\gamma = E_{p'_2} \quad \text{Absorption} \quad (15.4.4b)$$

Addition

$$\mathbf{p}_{p_1} + \mathbf{p}_{p_2} = \mathbf{p}_{p'_1} + \mathbf{p}_{p'_2} \quad E_{p_1} + E_{p_2} = E_{p'_1} + E_{p'_2} \quad (15.4.4c)$$

Im Schwerpunktssystem ist $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ (das ist die Definition des Schwerpunktssystems). Dann ist auch $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2$. Damit ist aber $E_\gamma = 0$. Andererseits muss der Impuls des Photons nicht null sein, wenn der Streuwinkel $\theta \neq 0$ ist:

$$\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2 \stackrel{\theta \neq 0}{\neq} 0 \quad (15.4.5)$$

Dann ist mit dem Cosinussatz

$$|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1| = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 - 2\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1 \cos(\theta) + \mathbf{p}'_1^2} \quad (15.4.6)$$

oder

$$|\mathbf{p}_\gamma| = |\mathbf{p}_1| \sqrt{2(1 - \cos(\theta))} \quad (15.4.7)$$

Damit müsste die klassisch quantenmechanische Energie des Photons

$$E_{\gamma, \text{klass}} = c |\mathbf{p}_1| \sqrt{2(1 - \cos(\theta))} \neq 0 \quad (15.4.8)$$

Wir können

$$E_\gamma = E_{\gamma, \text{klass}} + \Delta E_\gamma \quad (15.4.9)$$

schreiben. $|\Delta E_\gamma|$ ist dabei die geborgte Energie, die Wahrscheinlichkeit, ein solches Teilchen zur Zeit t zu finden ist

$$P(t) = \frac{|\Delta E|}{\hbar} \exp\left(-\frac{|\Delta E|}{\hbar} t\right) dt \quad (15.4.10)$$

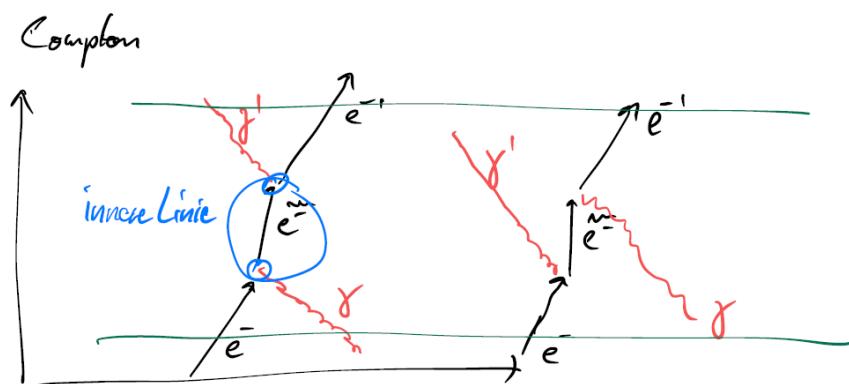


Abb. 15.12.: COMPTONEFFEKT im Feynmanbild (nach Richard Feynman).

15.5. Virtuelle Teilchen

M. McIrvin [McI94] gibt in seiner FAQ über virtuelle Teilchen eine gute Beschreibung, was damit gemeint ist. Er erklärt insbesondere, wie attraktive Kräfte (und auch die intuitiv einfachen repulsiven Kräfte) zustande kommen. Die folgende Darstellung stammt aus dieser Arbeit. Wir nehmen an, dass das Photon hier von links kommt und dass das Teilchen am Ort rechts ein Positron ist.

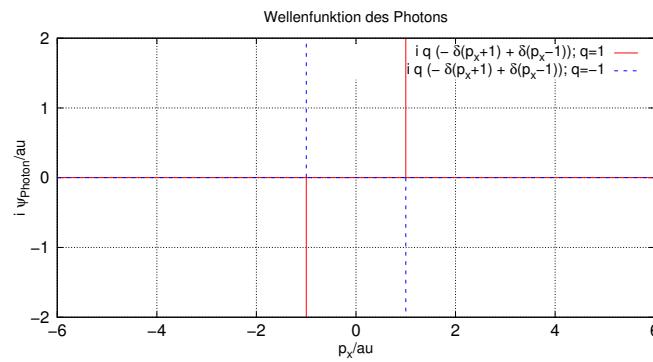


Abb. 15.13.: Vereinfachte Wellenfunktion im Impulsraum von Photonen, die von einem Elektron mit der Ladung $q = \pm e$ ausgehen (nach [McI94]).

Das aussendende Teilchen links in Abbildung 15.13 hat entweder eine positive Ladung (rote Farbe) oder eine negative Ladung (blau).

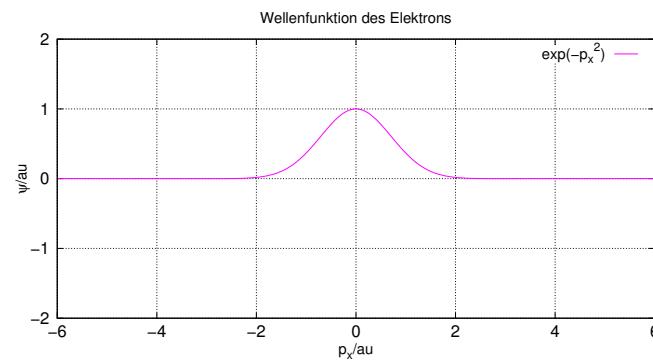


Abb. 15.14.: Wellenfunktion eines Elektrons im Impulsraum (nach [McI94]).

Abbildung 15.14 zeigt die Wellenfunktion des empfangenden Teilchens.

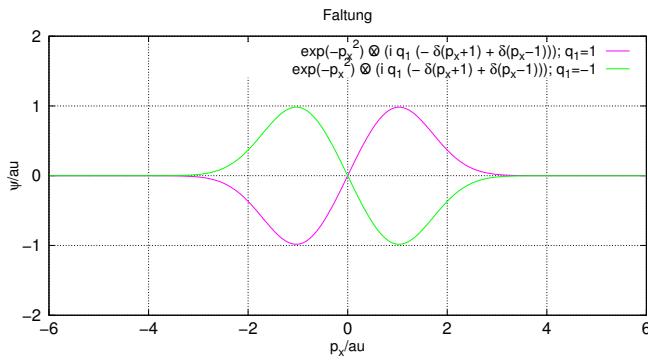


Abb. 15.15.: Die Wechselwirkung ist durch die Faltung der Elektronenwellenfunktion mit der Photonenwellenfunktion gegeben (nach [McI94]).

Die Wechselwirkung (Faltung) der Wellenfunktionen des Photons aus Abbildung 15.13 mit dem Positron aus Abbildung 15.14 ist in Abbildung 15.15 gezeigt.

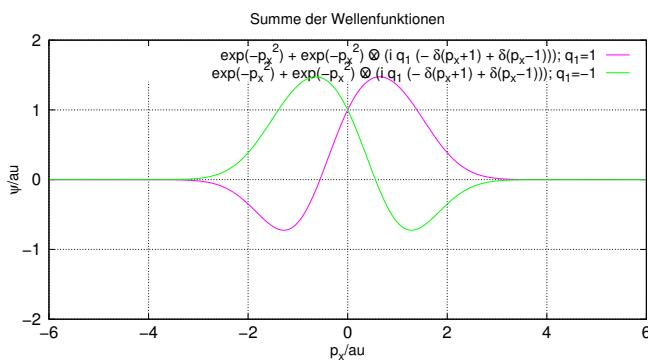


Abb. 15.16.: Addition der nicht wechselwirkenden Wellenfunktion des Elektrons mit der wechselwirkenden Wellenfunktion erster Ordnung (nach [McI94]).

Die Überlagerung der ungestörten Wellenfunktion aus Abbildung 15.14 mit der gestörten Wellenfunktion erster Ordnung aus Abbildung 15.16 ergibt die asymmetrische Wellenfunktion aus Abbildung 15.16.

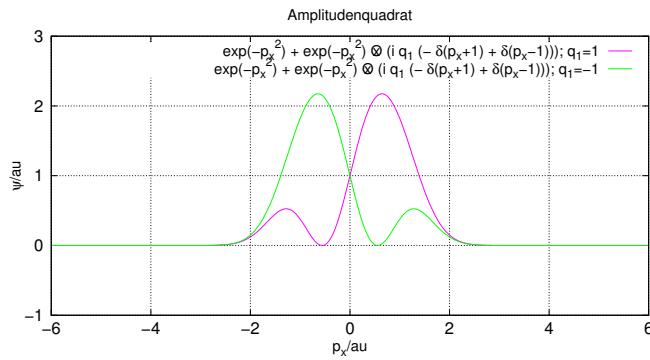


Abb. 15.17.: Amplitudenquadrat (Erwartungswert) der Summe der nicht wechselwirkenden Wellenfunktion des Elektrons mit der wechselwirksenden Wellenfunktion erster Ordnung (nach [McI94]).

Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Resultates ist in Abbildung 15.17 gezeigt. So wie unsere Annahmen waren ergibt sich für ein positives sendendes Teilchen ein Nettompuls nach rechts, also die Abstossung. Für ein negatives sendendes Teilchen ergibt sich ein Nettoimpuls nach links, die Anziehung. In der Rechnung hier bis und mit erster Ordnung wurden einige Feinheiten übergangen. Die korrekte Rechnung ist viel komplizierter.

Abbildungen 15.15 bis 15.17 berücksichtigen nur die möglichen Feynmandiagramme bis zur ersten Ordnung. M. McIrvin [McI94] erklärt, dass man aber alle Diagramme und alle Symmetrien berücksichtigen. Dann stellt sich heraus, dass bei der Summation einer geraden Anzahl virtueller Photonen immer einen Faktor +1 ergibt, während die Summation einer ungeraden Anzahl von Photonen je nachdem ob beide Teilchen die gleiche Ladung haben oder nicht dem Faktor +1 oder -1 ergeben. Durch diese Interferenzen ergibt sich dann die Abstossung gleichnamiger Ladungen und die Anziehung ungleichnamiger Ladungen. Nur durch die Voraussetzung einer unendlichen Summe über alle virtuellen Photonen der beiden geladenen Teilchen umgeht man das Problem, dass das eine Teilchen ja nicht weiß, dass es jetzt in eine Kraftwechselwirkung eintreten wird.

Die Ausführung hier sollte die Ideen erläutern. Sie ist aber keineswegs ein Rezept zur Berechnung. Fragen Sie die Theoretikerin oder den Theoretiker Ihres Vertrauens!

Die Arbeit von O. Passon; T. Zügge und J. Grebe-Ellis „Pitfalls in the teaching of elementary particle physics“ [PZG18] beleuchtet Probleme dieses Zugangs insbesondere beim Unterricht in Gymnasien.

15.6. Rechnen mit Feynman-Diagrammen

In der Quantenelektrodynamik sind Teilchen und Felder duale Objekte. Deshalb kann die elektromagnetische Wechselwirkung gegeben durch das Feld $(\phi, A_x, A_y, A_z)^T$ durch ein Teilchen ersetzt werden.

Richard Feynman fand eine graphische Methode zur Berechnung der unendlichen

Summen. Um die Streuung zu berechnen geht man nach U. Ellwanger [Ell15, Kap. 5.3], J. Bleck-Neuhaus [Ble13] oder T. G. Abbott [Abb21] wie folgt vor:

1. Jeder Vertex (Punkt, in dem ein Photon absorbiert oder emittiert wird) trägt eine **Kopplungskonstante** g und eine **δ -Distribution** (oder -Funktion) bei. Letztere erzwingt die Erhaltung von Energie und Impuls.

Elektron-Photon:

$$g = \frac{q_e}{\sqrt{\varepsilon_0 c \hbar}} \quad (15.6.1)$$

2. Jede innere Linie (virtuelles Teilchen) trägt einen Faktor namens Feynman-Propagator (nach **Richard Feynman**)

$$\mathcal{P}(\tilde{E}, \tilde{p}) = -\hbar [\tilde{E}^2 - ((c\tilde{p})^2 + \tilde{m}^2 c^4)]^{-1} \quad (15.6.2)$$

bei. $[(\tilde{E}^2 - \tilde{p}^2 c^2) - \tilde{m}^2 c^4]^{-1}$ heisst der Energienenner. \tilde{m} ist die **reelle** Masse des virtuellen Austauschteilchens. \tilde{E} und \tilde{p} sind Energie und Impuls im **virtuellen** Zustand.

Bei virtuellen Teilchen ist $\tilde{E}^2 \neq \tilde{p}^2 c^2 + \tilde{m}^2 c^4$! Der Feynman-Propagator gibt also die Virtualität oder die Abweichung der Gesamtenergie vom klassischen Wert an. Oftmals ist für das virtuelle Teilchen $\tilde{E} = 0$.

3. Für jeden Vertex multipliziert man das Resultat mit dem jeweiligen Kopplungsfaktor g . Für jede innere Linie wird mit einem entsprechenden Feynman-Propagator \mathcal{P} multipliziert.
4. Am Ende wird über alle nicht beobachtbaren Variablen integriert. Damit erhält man das Übergangsmatrixelement M_{fi} für **FEYNMANS GOLDENE REGEL**.
5. **FEYNMANS GOLDENE REGEL** ergibt die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit: $\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho_E$, wobei $\rho_E = dN/dE$ die Zustandsdichte ist.
6. Wegen den δ -Funktionen bleibt nach der Integration der sogenannte Energienenner $((\Delta\tilde{E})^2 - (\Delta\tilde{p})^2 c^2) - \tilde{m}^2 c^4$ übrig. $\Delta\tilde{E}$ und $\Delta\tilde{p}$ sind die Energie- und Impulsüberträge.
7. Die Streuamplitude A ist das Produkt der Kopplungsfaktoren, der Feynman-Propagatoren und des Faktors, der für $|\mathbf{p}_i|^2 \ll m_e^2 c^2$ die Grösse $4m_e^2 c^3 \hbar$ hat.
8. Der differenzielle Streuquerschnitt ist dann $d\sigma/d\Omega = P = A^2 (256\pi^2 m_e^2)^{-1}$.

Abbildung 15.18 zeigt die Anwendung für die Streuung von einem Elektron an einem Positron.

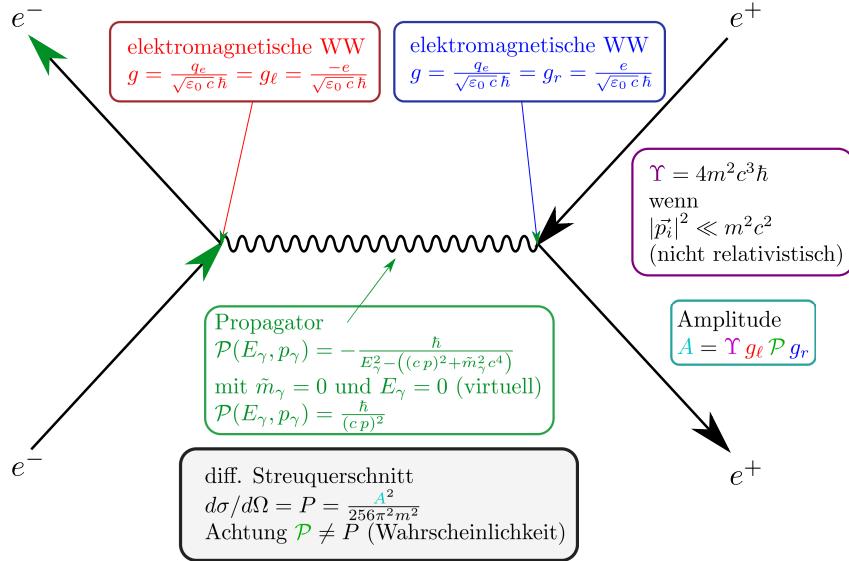


Abb. 15.18.: Berechnung eines einfachen Feynman-Diagramms für die elektromagnetische Wechselwirkung.

Wenn das Austauschteilchen die schwache Wechselwirkung repräsentiert, könnte die Berechnung wie in Abbildung 15.19 gehen.

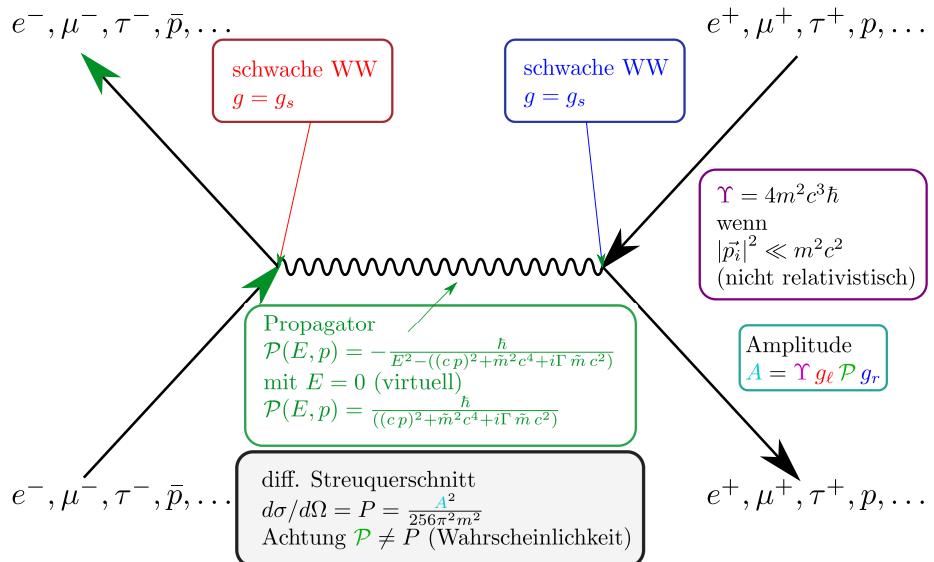


Abb. 15.19.: Berechnung eines einfachen Feynman-Diagramms für die schwache Wechselwirkung.

In T. G. Abbott [Abb21] findet sich auch eine Begründung der Berechnung nach Richard Feynman. Weitere ausgezeichnete Informationen finden Sie bei [Pot21],

<https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~chpotter/particleandnuclearphysics/mainpage.html> ([Pot21, Lecture 5]). A. J. Barr [Bar21] könnte auch helfen.

15.7. Weitere Leptonenfamilien

Das erste bekannte Lepton war das Elektron. Es folgte das Positron, vorhergesagt von Paul Dirac und Ralph Fowler [DF28] und erstmals gemessen von Charles Anderson [And33].

15.7.1. Myonen

Myonen μ wurden in Untersuchungen kosmischer Strahlung zuerst gefunden (siehe R. Brown u. a. [Bro+49]). Diese Teilchen gehören zur Familie der Leptonen.

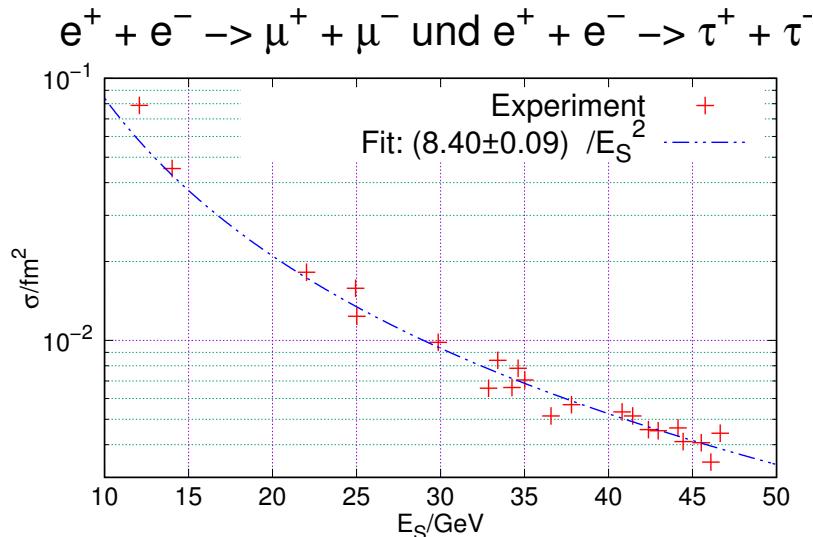


Abb. 15.20.: Stöße von Elektronen und Positronen für die Reaktionen nach Myonen oder nach Tau (nach W. Demtröder [Dem10, abb. 7.4]).

Abbildung 15.20 zeigt die Streuquerschnitte der Reaktionen $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ sowie der Reaktion $e^- + e^+ \rightarrow \tau^- + \tau^+$.

Die Eigenschaften des Myons sind:

- Masse $m_\mu = 1.883\,531\,6 \cdot 10^{-28} \text{ kg} = 105.658\,38 \text{ MeV}/c^2$
- Ladung $q_\mu = -e = -1.602\,18 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Spin $s_{z,\mu} = \frac{1}{2}\hbar$
Das Myon ist ein Fermion.
- Magnetisches Moment $\boldsymbol{\mu}_{\mu,s} = g_\mu \frac{e}{2m_\mu} \boldsymbol{s}$ mit $-g_\mu = 2.002\,331\,841\,4$
- anomales magnetisches Moment (Theorie) $a_\mu = 0.001\,165\,918\,1$

- anomales magnetisches Moment (Experiment) $a_\mu = 0.001\,165\,920\,61(41)$ J. Pretz und [Abi+21; Alb+21a; Alb+21b; Pre21]
- Leptonenzahl $L = 1$

In der Literatur wird oftmals nicht g sondern

$$a = \frac{g - 2}{2} \quad (15.7.1)$$

angegeben. Dann ist

$$g = 2(1 + a) \quad (15.7.2)$$

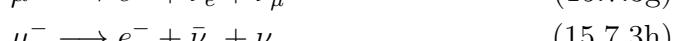
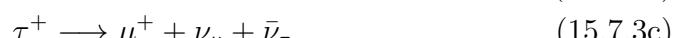
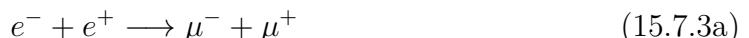
15.7.2. Tau

Das schwerste (und kurzlebigste) Lepton ist das Tau. Seine Eigenschaften sind:

- Masse $m_\tau = 3.168 \cdot 10^{-27}$ kg = 1.777 GeV/c²
- Ladung $q_\tau = -e = -1.602\,18 \cdot 10^{-19}$ C
- Spin $s_{z,\tau} = \frac{1}{2}\hbar$
Das Tau ist ein Fermion.
- anomales magnetisches Moment (Experiment) $a_\tau = -0.052$ bis 0.013 Y. Özgüven u. a. [Özg+17]
- Magnetisches Moment $\mu_{\tau,s} = -g_\tau \frac{e}{2m_\tau} s$ mit $g_\tau = -1.896$ bis 2.026 Y. Özgüven u. a. [Özg+17]
- Leptonenzahl $L = 1$

15.7.3. Symmetrien der Leptonenfamilien

Die bekannten Leptonen zeigen die gleiche Symmetrie wie gewisse Quarks. Dies legte nahe, die Leptonen wie die Quarks in FAMILIEN einzuteilen. Leptonen können mit der SCHWACHEN WECHSELWIRKUNG die Familie wechseln. Mögliche Reaktionen sind:



Die Massen der drei ladungsbehafteten Leptonen sind

$$m_\tau = 1777 \text{ MeV}/c^2 \quad (15.7.4a)$$

$$m_\mu = 105.66 \text{ MeV}/c^2 \quad (15.7.4b)$$

$$m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2 \quad (15.7.4c)$$

Die Zahl der Leptonen ist erhalten, und zwar einzeln für alle Leptonenfamilien.

Elektronen-Familie $\sum L_e = \text{const}$

Myonen-Familie $\sum L_\mu = \text{const}$

Tau-Leptonen-Familie $\sum L_\tau = \text{const}$

Die folgenden Reaktionen sind Beispiele für die Erhaltung der Leptonenzahl

$$n \longrightarrow p + e + \bar{\nu} \quad L_e \quad 0 = 0 + 1 - 1 \quad (15.7.5a)$$

$$e^+ + e^- \longrightarrow \nu + \bar{\nu} \quad L_e \quad (-1) + 1 = 1 + (-1) \quad (15.7.5b)$$

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad L_e \quad 0 = 1 + 0 + (-1) \\ L_\mu \quad 1 = 0 + 1 + 0 \quad (15.7.5c)$$

$$\tau^- \longrightarrow \mu^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu \quad L_\mu \quad 0 = 1 + 0 + (-1) \\ L_\tau \quad 1 = 0 + 1 + 0 \quad (15.7.5d)$$

Die Erhaltung der Leptonenzahl L einer Familie mit den durch i numerierten Teilchen wird so formuliert:

$$\sum_i L_i = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = 0 \quad (15.7.6a)$$

Beispiel

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad (15.7.6b)$$

	Lepton	Leptonenzahl	m/MeV	Lebensdauer
1	e^-	$L_e = +1$	0.511	∞
	e^+	$L_e = -1$	0.511	∞
	ν_e	$L_e = +1$	$< 10^{-6}$	∞
	$\bar{\nu}_e$	$L_e = -1$	$< 10^{-6}$	∞
2	μ^-	$L_\mu = +1$	105.7	$2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$
	μ^+	$L_\mu = -1$	105.7	$2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$
	ν_μ	$L_\mu = +1$	< 0.25	$\infty?$
	$\bar{\nu}_\mu$	$L_\mu = -1$	< 0.25	$\infty?$
3	τ^-	$L_\tau = +1$	1777	$3 \cdot 10^{-13} \text{ s}$
	τ^+	$L_\tau = -1$	1777	$3 \cdot 10^{-13} \text{ s}$
	ν_τ	$L_\tau = +1$	< 35	$\infty?$
	$\bar{\nu}_\tau$	$L_\tau = -1$	< 35	$\infty?$

Tab. 15.1.: Leptonenfamilien

Tabelle 15.1 zeigt nochmals eine Zusammenfassung der Leptonenfamilien.

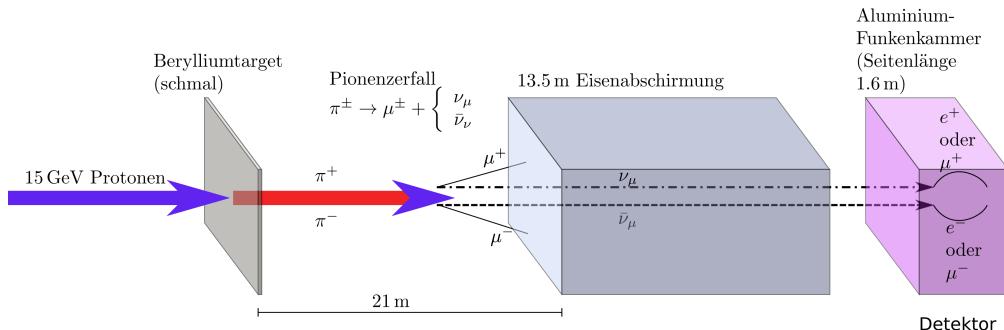
**Abb. 15.21.:** Aufbau der Apparatur zum Nachweis der Existenz zweier Neutrinosorten nach [Dan+62] und [Dem10].

Abbildung 15.21 zeigt eine Skizze des experimentellen Aufbaus, mit dem G. Danby u. a. (Artikel „Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos“ [Dan+62]) zeigen konnten, dass es mindestens zwei Neutrinosorten gibt, also ν_μ und ν_e . Der Nachweis beruht auf der Tatsache, dass Pionen in Myonen zerfallen mit den Reaktionen



Das heisst, in den Reaktionen nach Gleichung (15.7.7) werden da Myonneutrino ν_μ oder sein Antiteilchen $\bar{\nu}_\mu$ erzeugt. Die Myonen werden von der Eisenabschirmung blockiert. Einige wenige Neutrinos reagieren mit den Neutronen oder Protonen von Aluminium der Funkenkammer:



Wären Elektronenneutrinos und Myonneutrinos gleich, müssten nach [Dan+62, Gleichungen (2) und (3)] auch die Reaktionen



aufreten. Die Bahnkrümmungen der geladenen Teilchen im Magnetfeld der Funkenkammer lassen aber eindeutig die Massen von Myonen und Elektronen unterscheiden. G. Danby u. a. [Dan+62] fanden nur Myonen und schlossen deshalb, dass Elektronenneutrinos sich von Myonneutrinos unterscheiden.

Weil Elektronen- und Myonneutrinos unterschiedlich sind kann aus den Reaktionen auch die Leptonenzahl der Neutrinos abgeleitet werden. Aus dem Zerfall des Neutrons $n \longrightarrow p + \beta^- + \bar{\nu}_e$ folgt $L(e^-) = 1$

$$L(\bar{\nu}_e) = -1 \quad (15.7.10)$$

Wenn die Myon-Leptonenzahl des negativen Myons $L_\mu(\mu^-) = 1$ ist, ist entsprechend die Myonleptonenzahl des dazugehörigen μ -Neutrinos

$$L(\bar{\nu}_\mu) = -1 \quad (15.7.11)$$

Für jede Leptonenfamilie gibt es eine Leptonenzahl, also eine für Elektronen L_e , eine für Myonen L_μ und eine für Taus L_τ . Es gilt also für alle Prozesse mit Leptonen

$$\sum L_e = \text{const} \quad (15.7.12a)$$

$$\sum L_\mu = \text{const} \quad (15.7.12b)$$

$$\sum L_\tau = \text{const} \quad (15.7.12c)$$

Dann ist auch die Gesamtleptonenzahl

$$L = L_e + L_\mu + L_\tau = \text{const} \quad (15.7.13)$$

konstant.

16. Starke Wechselwirkung

16.1. Hadronen

Mit dem Begriff HADRONEN werden alle Teilchen zusammengefasst, die durch die STARKE WECHSELWIRKUNG miteinander agieren. PROTONEN und NEUTRONEN sind die ersten Beispiele dazu. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, p. 479] bedeutet Hadron im Griechischen «schwer». Die Hadronen werden in die Baryonen und die Mesonen eingeteilt. Die Baryonen (vom Griechischen für «schwer») haben die Masse des Protons oder sie sind schwerer. Baryonen haben einen halbzahligen Spin. Die Zugehörigkeit zu der Gruppe MESONEN wird durch einen halbzahligen Spin angezeigt. Das Wort Mesonen bedeutet im Griechischen «mittel». Die ersten gefundenen Mesonen waren leichter als das Proton, aber es gibt auch schwerere. Hadronen können sich relativ leicht in andere Hadronen umwandeln. Das einzige scheinbar stabile freie Hadron ist das Proton, die Lebensdauer des Protons liegt nach den gegenwärtigen Messungen über $7.7 \cdot 10^{33}$ a = $2.43 \cdot 10^{41}$ s (K. Abe u. a. [Abe+17]). Wenn das Proton stabil ist, wird die BARYONENZAHL erhalten. Die Gruppe der Hadronen enthält sehr viele Mitglieder, man spricht vom TEILCHEN-ZOO. Die Suche nach der Unterliegenden Struktur führte dann zu den Quarks (siehe Abschnitt 16.3).

16.1.1. Pion

J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 11.1.1.] berichtet, dass Werner Heisenberg im Jahre 1932 vorschlug, dass ein Austauschteilchen die Kraft zwischen Proton und Neutron vermittelte. Er wandte dabei ein Verfahren aus der Quantenchemie an, bei dem ein hin- und her tunnelndes ELEKTRON die chemische Bindung vermittelte. Tunnelnde Teilchen befinden sich in einem verbotenen Energiebereich, in der Tunnelbarriere ist die relativistische Energie- und Impulsbeziehung nicht erfüllt, die Teilchen sind also dort virtuell!

Hideki Yukawa schlug im Jahre 1935 vor, dass es ein solches Teilchen geben müsse. Er machte dabei die folgenden Annahmen für ein Teilchen, das eine Kraft zwischen Neutron und Proton vermittelt:

Ladungserhaltung Die Ladungserhaltung erfordert, dass das Teilchen geladen ist $q = \pm e$.

Drehimpuls Da sowohl Proton wie Neutron Fermionen sind, muss das gesuchte Teilchen einen ganzzahligen Spin haben (Null eingeschlossen), also ein Boson sein.

Masse Das konstante Potential im Kern limitiert die Reichweite der Kraft auf (1 bis 2) fm. Daraus schloss Hideki Yukawa dass die Masse etwa $100 \text{ MeV}/c^2$ sein müsse.

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 11.1.1.] ergibt eine Dimensionsbetrachtung, dass die Verbindung zwischen einer Länge a und einer Masse m mittels Naturkonstanten nur mit der Compton-Wellenlänge möglich ist (klassischer Elektronenradius).

$$a = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2} \implies mc^2 = \frac{\hbar c}{a} \quad (16.1.1)$$

Mit $a = 2$ fm ergibt sich $mc^2 = 100$ MeV. Aus der Energie-Zeit-Unschärfe ergibt sich, dass das Teilchen etwa seine Compton-Wellenlänge weit kommt, also $c\Delta t \approx n$.

Hideki Yukawa schlug das nach ihm benannte Potential für die Wechselwirkung vor,

$$V(r) = \frac{g}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (16.1.2)$$

g ist die Kopplungskonstante und a die Reichweite. Das Potential nach Gleichung (16.1.2) ergibt mit der KLEIN-GORDON-GLEICHUNG eine konsistente Lösung, bei der die Massenenergie des Austauschteilchens gerade der Bindungsenergie entspricht.

Der Energienenner im Feynman-Diagramm (siehe Abschnitt 16.1.2) ist nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 11.1.1.] das Resultat der Fouriertransformation des Yukawa-Potentials.

Das von Hideki Yukawa postulierte Teilchen wurde 1947 gefunden (1937 gab es die Entdeckung des Myons, das fälschlicherweise als Yukawa-Teilchen interpretiert wurde). Die Eigenschaften des Yukawa-Teilchens, jetzt Pion π genannt sind

- Masse $m_{\pi^\pm} = 2.488\,072\,1 \cdot 10^{-28}$ kg = 139.570 61 MeV/c² und das neutrale $m_{\pi^0} = 2.406\,184 \cdot 10^{-28}$ kg = 134.977 MeV/c²
- Ladung $q_{\pi^\pm} = \pm e = \pm 1.602\,18 \cdot 10^{-19}$ C und $q_{\pi^0} = 0$
- Spin $s_{\pi^{\pm,0}} = 0$

Die geladenen wie auch die ungeladenen Pionen sind Bosonen.

- Magnetisches Moment $\mu_{\pi^{\pm,0}} = 0$
- Baryonenzahl $B = 0$ (da es eine Kraft zwischen p oder n und p und n vermittelt, die alle $B = 1$ haben)
- Lebensdauer $\tau_{\pi^\pm} = 26(1)$ ns (schwache Wechselwirkung) und $\tau_{\pi^0} = 0.0853(25)$ fs = $8.52(25) \cdot 10^{-17}$ s (R. Miskimen [Mis11])
- Parität $P_{\pi^+} = P_{\pi^0} = P_{\pi^-} = -1$

Die folgende Liste gibt einige der möglichen Reaktionen an, die zu einer Bildung von Pionen führen:

$\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$	$E_\gamma \gtrsim 150 \text{ MeV}$	(16.1.3a)
$\gamma + n \rightarrow \pi^- + p$	$E_\gamma \gtrsim 150 \text{ MeV}$	(16.1.3b)
$p + p \rightarrow \pi^0 + p + p$	$E_p \gtrsim 180 \text{ MeV}$	(16.1.3c)
$p + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p + n$	$E_p \gtrsim 600 \text{ MeV}$	(16.1.3d)
$p + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + p + p$	$E_p \gtrsim 800 \text{ MeV}$	(16.1.3e)
⋮ :	⋮ :	

Überall ist die Anzahl der erzeugten Pionen durch die Ladungs- und die Energieerhaltung limitiert.

Das neutrale Pion kann nicht in einer Blasenkammer detektiert werden. Es wird auch nicht abgebremst.

Schliesslich ist die Parität aller Pionen negativ, ein Hinweis darauf, dass Pionen zusammengesetzte Teilchen sind.

16.1.2. Δ - und ρ -Teilchen

Wenn Pionen mit Protonen oder Neutronen kollidieren entstehen weitere Teilchen. Nach J. Bleck-Neuhaus, Kap. 11.1.7. [Ble13] treten die folgenden Teilchen auf

$\pi^+ + p \rightarrow \Delta^{++}$	$\rightarrow \pi^+ + p \quad (100 \%)$	(16.1.4a)
$\begin{matrix} \pi^0 + p \\ \pi^+ + n \end{matrix} \rightarrow \Delta^+$	$\rightarrow \begin{cases} \pi^0 + p & (66.6 \%) \\ \pi^+ + n & (33.3 \%) \end{cases}$	(16.1.4b)
$\begin{matrix} \pi^- + p \\ \pi^0 + n \end{matrix} \rightarrow \Delta^0$	$\rightarrow \begin{cases} \pi^- + p & (33.3 \%) \\ \pi^0 + n & (66.6 \%) \end{cases}$	(16.1.4c)
$\pi^- + n \rightarrow \Delta^-$	$\rightarrow \pi^- + n \quad (100 \%)$	(16.1.4d)

Das Δ^+ - Teilchen kann als Resonanz des Protons aufgefasst werden. Mit seiner Lebensdauer von $\tau_\Delta = 6 \cdot 10^{-24} \text{ s}$ ist keine Trajektorie mehr sichtbar. Die Breite des Maximums bei einer Variation der Energie ergibt die Lebensdauer (analog zur natürlichen Linienbreite bei angeregten Elektronen in einem Atom). Da verschiedene Anregungsmechanismen zum gleichen Resonanzteilchen führen (Gleichung (16.1.4)) muss das Δ in seinen verschiedenen Ausprägungen der Ladung jeweils als eigenes Teilchen angesehen werden. Die Masse des Δ ist mit $1232 \text{ MeV}/c^2$ grösser als die der Nukleonen Proton und Neutron.

In den Reaktionen von Pionen mit Nukleonen gibt es weitere Zeichen für Teilchen



Die Masse ist $m_\rho \approx 770 \text{ MeV}/c^2$. Die Halbwertsbreite der Resonanz ergibt $\tau_\rho = 4 \cdot 10^{-24} \text{ s}$.

Weiter wurden auch Antiprotonen und Antineutronen beobachtet, getreu der Aussage, dass es zu Jedem Teilchen auch ein Antiteilchen gibt. Ordnung in das Chaos

brachte die Quark-Theorie (siehe Abschnitt 16.2.4).

16.1.3. Isospin, Baryonenzahl und Ladung

Dieser Abschnitt ist eine Wiederaufnahme der Abschnitte 8.2 und 8.6.2. Der Abschnitt beruht auf J. Bleck-Neuhaus, Kap. 11.2.2. [Ble13].

Die «3»-Komponente des Isospins ist mit der Baryonenzahl B und der Ladung eines Teilchens q über

$$\frac{q}{e} = T_3 + \frac{B}{2} \quad (16.1.6)$$

verknüpft. Für ein Proton $T_3 = \frac{1}{2}$, Baryonenzahl $B = 1$ ergibt sich $\frac{q}{e} = 1$, für das Neutron mit $T_3 = -\frac{1}{2}$, Baryonenzahl $B = 1$ ergibt sich $\frac{q}{e} = 0$. Diese Gleichung gilt für alle Hadronen, wenn wir $B = 0$ für Hadronen mit ganzzahligem Spin (Mesonen) setzen und für Hadronen mit halbzahligem Spin (Baryonen) $B = 1$ setzen. Beim Antiproton (d. h. wir multiplizieren Isospin und Baryonenzahl mit -1) ist $T_3 = -\frac{1}{2}$, Baryonenzahl $B = -1$ ergibt sich $\frac{q}{e} = -1$.

Aus dem Gesagten ergibt sich, dass ein Neutron nicht nur durch sein $T_3 = -\frac{1}{2}$ sondern auch durch seine Baryonenzahl $B = 1$ bestimmt ist. Eine der beiden Kenngrößen reicht nicht.

Bei den Δ -Teilchen haben wir den Isospin $T = \frac{3}{2}$. Das Δ ist ein Isospin-Quadruplett. Wenn $T = \frac{3}{2}$ ist, ergeben sich mit den Baryonenzahlen die Ladungen nach Tabelle 16.1.

T_3	B	$\frac{q}{e}$	Teilchen
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$	Δ^{++}
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$	Δ^+
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$	Δ^0
$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$	Δ^-

Tab. 16.1.: Der Isospin der Δ s ist $T = \frac{3}{2}$. Gezeigt sind die 3-Komponente des Isospins, die Baryonenzahl und die Ladung.

Bei den ρ -Teilchen haben wir den Isospin $T = 1$ und als Mesonen die Baryonenzahl $B = 0$. Das ρ ist ein Isospin-Triplett. Wenn $T = 1$ ist, ergeben sich mit den

Baryonenzahlen die Ladungen nach Tabelle 16.2.

T_3	B	$\frac{q}{e}$	Teilchen
1	0	$1 + \frac{0}{2} = 1$	ρ^+
0	0	$0 + \frac{0}{2} = 0$	ρ^0
-1	0	$-1 + \frac{0}{2} = -1$	ρ^-

Tab. 16.2.: Der Isospin der ρ s ist $T = 1$. Gezeigt sind die 3-Komponente des Isospins, die Baryonenzahl und die Ladung.

J. Bleck-Neuhaus, Kap. 11.2.2. [Ble13] betont, dass diese Darstellung analog zu der Darstellung der Vielelektronenniveaus in der Atomphysik sei. Die Analogie ist nicht perfekt, da selbst bei einer Isospin-Invarianz es immer Störungen durch die elektromagnetische Wechselwirkung (Ladungen) gibt.

Wenn zwei Teilchen interagieren, dann kann der resultierende Isospin mit der bekannten Drehimpulsarithmetik bestimmt werden. In Gleichung (16.1.4) sind die auftretenden Δs angegeben bei der Streuung von Pionen an Nukleonen. Die Pionen sind ein Isospin-Triplett, die Nukleonen ein Dublett. Die Rechnung für den Operator \hat{T}_3 ist analog zur Rechnung für den Operator \hat{j}_z aus der Atomphysik. Wenn zwei Teilchen mit $T = 1$ und $T = \frac{1}{2}$ wechselwirken, kann entweder $T = \frac{3}{2}$ oder $T = \frac{1}{2}$ resultieren. $T_3 = \pm \frac{3}{2}$ ergibt sich nur, wenn beide Isospins parallel sind. Es gibt also nur je eine Möglichkeit, und die war $|\Delta^{++}\rangle \leftrightarrow |\pi^+ p\rangle$ oder $|\Delta^-\rangle \leftrightarrow |\pi^- n\rangle$. Es gibt in Gleichung (16.1.4) nur je eine Möglichkeit für dieses Resultat, in Übereinstimmung mit dem Isospin-Formalismus

Die nächste Stufe ist nach J. Bleck-Neuhaus, Kap. 11.2.2. [Ble13] in jedem Falle eine Überlagerung von hier zwei Möglichkeiten der Realisierung, einerseits durch die Projektion von $T = 1 + \frac{1}{2}$ auf $T_3 = \frac{1}{2}$ und andererseits die beiden Möglichkeiten zu $T = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, also auch $T_3 = \frac{1}{2}$. Tabelle 16.3 listet die sich aus dem

Isospinformalismus (eigentlich Spinformalismus) ergebenden Kombinationen auf.

T_3	Reaktion	Wahrscheinlichkeit	aus Zustand	Linear-kombination
$\frac{3}{2}$	$ \Delta^{++}\rangle \Leftrightarrow \pi^+ p\rangle$	1		
$\frac{1}{2}$	$ \Delta^+\rangle \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} \pi^0 p\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \pi^+ n\rangle$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$	$T = \frac{3}{2}$ mit $T_3 = \frac{1}{2}$ $T = \frac{1}{2}$ mit $T_3 = \frac{1}{2}$	$ \pi^0 p\rangle$ $ \pi^+ n\rangle$
$-\frac{1}{2}$	$ \Delta^0\rangle \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} \pi^0 n\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \pi^- p\rangle$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$	$T = \frac{3}{2}$ mit $T_3 = \frac{1}{2}$ $T = \frac{1}{2}$ mit $T_3 = \frac{1}{2}$	$ \pi^0 n\rangle$ $ \pi^- p\rangle$
$-\frac{3}{2}$	$ \Delta^-\rangle \Leftrightarrow \pi^- n\rangle$	1		

Tab. 16.3.: Ursprung der Wellenfunktionen bei der Bildung der Δ . Die Wahrscheinlichkeit ist das Quadrat der Gewichte. Die Erklärung ist im Text.

Die Zustände zu $T_3 = \frac{1}{2}$ können im Experiment nicht als Überlagerung detektiert werden. Nach J. Bleck-Neuhaus, Kap. 11.2.2. [Ble13] sind die Wechselwirkungen bei der Bildung der Teilchenspuren und die Magnetfelder dafür verantwortlich, dass nur die Projektionen auf eine der beiden Komponenten gemessen werden, aber mit einer Wahrscheinlichkeit, die dem Quadrat des Gewichtes entspricht. Dies ist auch das experimentell gefundene Resultat in Gleichung (16.1.4).

16.2. Symmetrien

Die Physik der Elementarteilchen ist die Physik der Symmetrieeoperationen. Eugene Wigner [Wig37] zeigte, dass aus den Symmetrien des Kern-Hamiltonoperators die Spektren bis zum Molybdän qualitativ erklärbar sind. Bunji Sakita [Sak64] beschrieb darauf aufbauend dass die Elementarteilchen über Symmetrien der speziellen unitären Gruppe SU(6) in sechs komplexen Dimensionen beschrieben werden können.

16.2.1. Lie-Gruppen und -Algebren

Diese Aussagen beruhen auf der Anwendung von LIE-GRUPPEN und LIE-ALGEBREN [Böh11]. Lie-Gruppen wurden von Sophus Lie eingeführt. Eine gute Einführung ist das Buch von Schwindt [Sch13]. Etwas weitergehend ist das Buch von Stillwell (Naive Lie Theory) [Sti10b]. Das Standardmodell [Sei09], grosse vereinheitlichte Theorien (Grand Unified Theories, GUT [Sei09] und String-Theorien [Zwi09] sind Anwendungen von LIE-GRUPPEN und LIE-ALGEBREN.

Eine GRUPPE ist eine Menge G und eine Abbildung, so dass

$$G \times G \rightarrow G \quad \text{und} \quad (g_1 g_2) \rightarrow g_3 = g_1 \times g_2 \quad \text{mit} \quad g_1, g_2, g_3 \in G \quad (16.2.1)$$

Ist die Operation \times , heisst die Gruppe eine MULTIPLIKATIVE GRUPPE, ist die Operation $+$, handelt es sich um eine ADDITIVE GRUPPE.

Es gelten die folgenden Beziehungen

$$g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3 \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad \text{Assoziativität} \quad (16.2.2)$$

$$ge = eg = g \quad \forall g \in G \quad \text{Neutralelement} \quad (16.2.3)$$

$$\forall g \in G \Rightarrow \exists g^{-1} \text{ mit } g^{-1}g = gg^{-1} = e \quad \text{Inverses Element} \quad (16.2.4)$$

und für Abelsche Gruppen

$$g_1g_2 = g_2g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G \quad \text{Kommutativität} \quad (16.2.5)$$

Lie-Gruppen sind MANNIGFALTIGKEITEN, d.h. sie sind kontinuierlich, hinreichend stetig und differenzierbar.

16.2.1.1. Darstellung einer Gruppe

Zu jeder Gruppe G kann man einen Tangentialraum $T(G)$ definieren [Sti10b, Kap. 5]. Als Beispiel betrachten wir die Gruppe $SO(2)$, die spezielle orthogonale Gruppe in zwei Dimensionen. Diese beschreibt die Drehungen um den Koordinatenursprung in der komplexen Ebene.

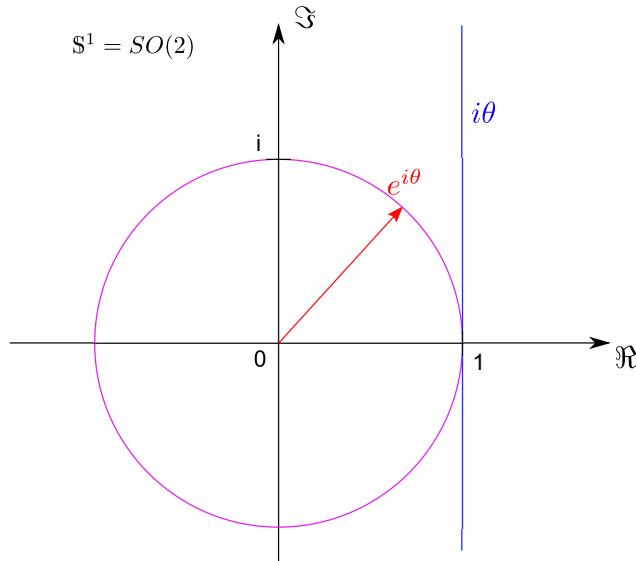


Abb. 16.1.: Tangentialraum zur Gruppe $SO(2)$.

Die Elemente der Gruppe in Abbildung 16.1 sind die Zahlen z mit $zz^* = 1$. Dies sind die Zahlen

$$z(\theta) = e^{i\theta} \text{ mit } \theta \in \mathbb{R} \quad (16.2.6)$$

Die Menge der Zahlen mit $zz^* = 1$ beschreibt eine stetige Kurve in \mathbb{C} . Aus der Mechanik weiss man, dass die Geschwindigkeit senkrecht zum Radius-Vektor der gekrümmten Bahn steht [Mar14, Kap. 4.1.2.4].

Eine DARSTELLUNG EINER GRUPPE ist eine Kombination aus einer Gruppe G und einem Vektorraum V . Elemente aus G wirken auf V als LINEARE OPERATOREN.

Wir bezeichnen die Darstellung mit $T(G)$. Sie soll eine Abbildung von G in den Raum der linearen SELBSTABBILDUNGEN $\text{hom}(V, V)$ eines Vektorraumes V .

$$T : G \rightarrow \text{hom}(V, V) \quad \text{mit} \quad T(g_1, g_2) = T(g_1)T(g_2) \quad g_i \in G \quad (16.2.7)$$

Bei endlichen Dimensionen kann die Abbildung mit Matrizen dargestellt werden. Die triviale Darstellung ist $T(g) = \mathbf{1}$ $g \in G$.

16.2.1.2. Definition einer Lie-Algebra

Eine Lie-Algebra L ist ein Vektorraum, dessen Elemente lineare Operatoren sind. Nach Stillwell [Sti10b, Kap. 4.4] ist eine allgemeine Lie-Algebra ein Vektorraum mit einer bilinearen Operation $[,]$, die die Eigenschaften

$$[X, Y] + [Y, X] = 0 \quad (16.2.8a)$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (16.2.8b)$$

hat.

Diese Eigenschaften erfüllt zum Beispiel der Kommutator

$$\forall A, B \in L \implies [A, B] \in L \quad (16.2.9)$$

Jedes Element dieser Lie-Algebra der Dimension n kann als Linearkombination von n Basisoperatoren E_i geschrieben werden

$$A = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i \quad (16.2.10)$$

Der Vektorraum der Lie-Algebra L kann ein Vektorraum über \mathbb{R} mit reellen α_i oder über \mathbb{C} mit komplexen α_i sein.

Zu ein und derselben Lie-Gruppe G kann es Lie-Algebren mit Vektorräumen über \mathbb{R} oder \mathbb{C} geben. Dies ist eine Frage der DARSTELLUNG.

Wenn

$$[A, B] = 0 \quad \forall A, B \in L \quad (16.2.11)$$

ist, ist die Lie-Algebra ABELSCH. Die DARSTELLUNG der LIE-ALGEBRA ist analog zur Darstellung der Lie-Gruppe. Für einen Operator $A \in L$ definiert man

$$T : L \rightarrow \text{hom}(V, V) \quad \text{mit} \quad T(A_1, A_2) = T(A_1)T(A_2) \quad A_i \in L \quad (16.2.12)$$

Auch wenn L reell ist, kann V komplex sein.

Zu jeder Lie-Gruppe G gibt es eine Lie-Algebra L_G , so dass jedes Element $g \in G$, das kontinuierlich mit dem Neutralelement e verbunden ist, als

$$g = \exp(A), \quad A \in L_G \quad (16.2.13)$$

geschrieben werden kann. Umgekehrt gilt dass

$$\exp(A) \in G \quad \forall A \in L_G \quad (16.2.14)$$

Die Basisoperatoren $E_i \in L_G$ sind die Erzeugenden von G .

16.2.1.2.1. Beispiel Sei $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. \mathbb{R}^+ sei die Zusammenhangskomponente mit dem Neutralelement $e = 1$. Dann gilt

$$\forall g \in \mathbb{R}^+ \implies g = \exp(\lambda) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \quad (16.2.15)$$

\mathbb{R} ist ein eindimensionaler Vektorraum.

Bei $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind alle Elemente in der Zusammenhangskomponente des Neutralelementes $e = 1$.

16.2.1.2.2. Exponentieren einer quadratischen Matrix Sei A eine $n \times n$ -quadratische Matrix. Dann ist

$$e^A = \mathbb{1} + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (16.2.16)$$

Zum Beispiel erhält man mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (16.2.17)$$

die Drehmatrix

$$e^A = e \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (16.2.18)$$

Wenn A eine Diagonalmatrix ist mit den Elementen a_1, a_2, \dots, a_n , dann ist

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{a_n} \end{pmatrix} \quad (16.2.19)$$

Schliesslich gelten die Relationen

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} \quad (16.2.20)$$

und mit den Matrizen A , B und C

$$A = B C B^{-1} \implies e^A = B e^C B^{-1} \quad (16.2.21)$$

16.2.1.3. Lie-Algebren und Darstellungen

Die Darstellung von G kann einen beliebigen Vektorraum \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n verwenden. Wir haben dann für die Lie-Algebra zum Beispiel

$$T(\lambda) = \lambda \mathbb{1}, \quad \lambda \in L_G \quad (16.2.22)$$

analog zur Beziehung $T(g) = g \mathbb{1}$, $g \in G$.

Für eine Lie-Algebra kann es mehrere Darstellungen geben.

Die zur unitären Lie-Gruppe $U(1)$ gehörige Lie-Algebra

$$L = u(1) = \{\lambda i | \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (16.2.23)$$

Da $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, ist L eine reelle Lie-Algebra, auch wenn die Zahlen komplex sind. So wie L definiert ist, ist L isomorph zu \mathbb{R} .

Die Lie-Gruppe $G = U(1)$ gehört zur Lie-Algebra $L = u(1)$ mit

$$U(1) = \{\exp(i\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (16.2.24)$$

Im Gegensatz zur Lie-Algebra $u(1)$ ist die Lie-Gruppe $U(1)$ weder zu \mathbb{R} , noch zu \mathbb{R}^+ oder zu $\mathbb{R}\{0\}$ isomorph, da $U(1)$ 2π -periodisch ist ($\exp(i\lambda) = \exp(i(\lambda + 2\pi n))$, $n \in \mathbb{Z}$).

Für die Lie-Gruppe $U(1)$ können verschiedene Darstellungen gefunden werden. Die einfachste ist für \mathbb{C}^1 . Hier bewirkt die Gruppe einfach eine Multiplikation. Wir haben $T(g) = g$: Damit wird eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ einfach mit $\exp(i\lambda)$ multipliziert.

Die unitäre Lie-Gruppe $U(1)$ kann in zwei reellen Dimensionen im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ durch Drehmatrizen dargestellt werden.

$$T(\exp(i\lambda)) = \begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \quad (16.2.25)$$

Die zu dieser Darstellung der unitären Lie-Gruppe $U(1)$ gehörige Darstellung der Lie-Algebra ist

$$T(i\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (16.2.26)$$

Dass $T(\exp(i\lambda)) = \exp(T(i\lambda))$ ist, kann mit der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion gezeigt werden.

Drehungen in der Ebene werden üblicherweise durch die spezielle orthogonale Gruppe $SO(2)$ beschrieben. Die obige Ableitung zeigt, dass die beiden Lie-Gruppen $U(1)$ und $SO(2)$ isomorph sind. Dazu müssen die Dimensionen der Gruppen gleich sein. Y. Gobeil gibt in seiner Online-Ressource *Dimension of Lie groups* [Gob07]

die Dimensionen an.

Dimension n	Gruppe $SO(n)$	# Gen. $\frac{1}{2}(n(n-1))$	Gruppe $U(n)$	# Gen. n^2	Gruppe $SU(n)$	# Gen. $n^2 - 1$
1	$SO(1)$	—	$U(1)$	1	$SU(1)$	—
2	$SO(2)$	1	$U(2)$	4	$SU(2)$	3
3	$SO(3)$	3	$U(3)$	9	$SU(3)$	8
4	$SO(4)$	6	$U(4)$	16	$SU(4)$	15
5	$SO(5)$	10	$U(5)$	25	$SU(5)$	24
6	$SO(6)$	15	$U(6)$	36	$SU(6)$	35
7	$SO(7)$	21	$U(7)$	49	$SU(7)$	48
8	$SO(8)$	28	$U(8)$	64	$SU(8)$	63

Tab. 16.4.: Dimensionen von Lie-Gruppen nach Y. Gobeil [Gob07] oder P. Thysen und A. Ceulemans [TC17, Tab. 9.3].

Tabelle 16.4 gibt eine Tabelle der Dimensionen von Lie-Gruppen an. Lie-Gruppen mit der gleichen Dimension können, was zu zeigen ist, isomorph sein. Wenn die Summe der Dimensionen von zwei Lie-Gruppen (die können auch gleich sein) der Dimension einer anderen Lie-Gruppe entspricht, könnte unter zu zeigenden Umständen die letztere Lie-Gruppe als Summe der vorherigen geschrieben werden.

16.2.1.4. Isomorphismen

Das bedeutet, dass die gleiche Lie-Gruppe (oder zwei isomorphe Lie-Gruppen) gleichzeitig die folgenden Operationen beschreiben:

1. Die Multiplikation einer Zahl $z \in \mathbb{C}^1$ mit einem Phasenfaktor $\exp(i\lambda)$
2. Die Drehung eines Vektors $r \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in der Ebene

Die Gruppe aller linearer Abbildungen der Ebene (d.h., die Abbildungen, die die Länge eines Vektors nicht ändern) bilden die orthogonale Gruppe $O(2)$. Sie umfasst die Drehungen, Spiegelungen an einer Achse und die Punktspiegelung am Ursprung.

Die spezielle orthogonale Lie-Gruppe $SO(2)$ ist eine Untergruppe von $O(2)$

$$SO(2) \subset O(2) \tag{16.2.27}$$

Wird die orthogonale Gruppe $O(2)$ durch Matrizen dargestellt, gilt für alle Matrizen $A = T(\exp(i\lambda))$

$$|\det A| = 1 \quad A \text{ ist eine Matrix aus der Darstellung von } O(2) \quad (16.2.28a)$$

$$\begin{aligned} \det A = 1 & \quad A \text{ ist eine Matrix aus der Darstellung von } SO(2) \\ & \Rightarrow \text{Drehungen} \end{aligned} \quad (16.2.28b)$$

$$\begin{aligned} \det A = -1 & \quad A \text{ ist eine Matrix aus der Darstellung von } O(2) \setminus SO(2) \\ & \Rightarrow \text{Spiegelungen} \end{aligned} \quad (16.2.28c)$$

Dies kann auch anders formuliert werden: Die Zusammenhangskomponente $O(2)$ mit $\det = +1$ beschreibt die Drehungen, die Zusammenhangskomponente $O(2)$ mit $\det = -1$ beschreibt die Spiegelungen.

Die Lie-Gruppe $SO(2)$ verhält sich zu $O(2)$ wie \mathbb{R}^+ zu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

16.2.1.5. Isomorphismen im unendlichdimensionalen Funktionenraum

Die beiden oben gezeigten Darstellungen der unitären Lie-Gruppe $U(1)$ sind bei weitem nicht die einzigen möglichen Darstellungen.

Beispielsweise kann eine Darstellung von $U(1) \cong SO(2)$ im unendlichdimensionalen Funktionenraum $PR_\phi(\mathbb{R}^2)$ der Funktionen, die $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ abbilden. Diese Funktionen können am Ort (r, ϕ) in eine Taylorreihe bezüglich ϕ entwickelt werden

$$f(r, \phi + \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \phi^n} f(r, \phi) \quad (16.2.29)$$

Wir verwenden die Darstellung

$$T(i\lambda) = \lambda \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (16.2.30)$$

und erhalten

$$T(\exp(i\lambda)) = \exp(T(i\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \phi^n} \quad (16.2.31)$$

Die Darstellung $T(\exp(i\lambda))$ dreht Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ um den Winkel λ .

$$T(\exp(i\lambda)) f = \tilde{f} \quad \text{und} \quad \tilde{f}(r, \phi) = f(r, \phi + \lambda) \quad (16.2.32)$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} [T(\exp(i\lambda))] f &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \phi^n} \right] f(r, \phi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{\partial^n}{\partial \phi^n} f(r, \phi) \right) = f(r, \phi + \lambda) \end{aligned} \quad (16.2.33)$$

Die Erzeugende $E_1 = i \in u(1)$ hat hier die Gestalt

$$T(E_1) = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (16.2.34)$$

Durch eine Multiplikation mit $-i\hbar$ ergibt die Drehimpulsoperatoren in zwei Dimensionen.

16.2.2. Translationen

Hier betrachten wir eine ADDITIVE GRUPPE in zwei Dimensionen mit den Erzeugenden E_1 und E_2 . Translationen sind in zwei Dimensionen keine LIE-GRUPPE. Aber in einem unendlichdimensionalen Vektorraum $PR_{x,y}(\mathbb{R}^2)$ der Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ die die reelle Ebene auf komplexe Zahlen abbilden und bei denen für die Erzeugenden die Kommutatorbeziehung

$$[E_1, E_2] = 0 \quad (16.2.35)$$

gilt gibt es eine Darstellung einer Lie-Gruppe und (mindestens) eine Lie-Algebra. Eine mögliche Darstellung einer Lie-Algebra ist

$$T_2(E_1) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad T_2(E_2) = \frac{\partial}{\partial y} \quad (16.2.36)$$

Da die gemischten zweiten Ableitungen kommutieren, ist (16.2.35) erfüllt. Hätten wir noch mit $-i\hbar$ multipliziert, hätten wir die IMPULSOPERATOREN.

Die Impulsoperatoren sind

$$p_k = -i\hbar T_2(E_k) \quad \text{oder in 3D:} \quad p_k = -i\hbar T_3(E_k) \quad (16.2.37)$$

Wir können weiter schreiben

$$\begin{aligned} T_2(\exp(\alpha E_1 + \beta E_2)) &= \exp(T_2(\alpha E_1 + \beta E_2)) \\ &= \exp\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= \exp\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x}\right) \exp\left(\beta \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &\stackrel{\text{Taylor für } \exp}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\beta^\ell}{\ell!} \frac{\partial^\ell}{\partial y^\ell}\right) \end{aligned} \quad (16.2.38)$$

und dadurch die dazugehörige Lie-Gruppe erhalten.

Nach Taylor ist nun

$$f(x + \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{\partial^k f(v)}{\partial v^k} \Big|_{v=x} \quad (16.2.39)$$

Der Vergleich mit (16.2.38) zeigt, dass

$$T_2(\exp(\alpha E_1 + \beta E_2)) f = \tilde{f} \quad \tilde{f}(x, y) = f(x + \alpha, y + \beta) \quad (16.2.40)$$

Die Beziehungen hier sagen nichts anderes, als dass die Impulsoperatoren mit der Translation verknüpft sind. Dies führt zu den von Emmy Noether entdeckten NOETHER'SCHEN THEOREMEN über Symmetrien und Erhaltungsgrößen.

16.2.3. Drehimpulse in 3 Dimensionen - nicht Abelsche Lie-Gruppen

Wir definieren eine Lie-Algebra $L = so(3)$ in drei reellen Dimensionen mit den drei Erzeugenden E_1, E_2 und E_3 , die die folgenden Beziehungen erfüllen sollen:

$$\begin{aligned} [E_i, E_j] &= -\varepsilon_{i,j,k} E_k & (16.2.41) \\ [E_1, E_2] &= -E_3 & [E_2, E_3] = -E_1 & [E_3, E_1] = -E_2 \end{aligned}$$

Eine mögliche Darstellung in \mathbb{R}^3 ist

$$T_3(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, T_3(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_3(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16.2.42)$$

Dabei ist

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & (i, j, k) \text{ sind eine gerade Permutation von } (1, 2, 3); \\ -1, & (i, j, k) \text{ sind eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3); \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (16.2.43)$$

der ϵ -TENSOR oder das LEVI-CIVITA-SYMBOL¹. Durch Rechnen sieht man, dass

$$\exp(\lambda T(E_1)) = R_x(\lambda) \quad \text{Drehung um die } x\text{-Achse} \quad (16.2.44a)$$

$$\exp(\lambda T(E_2)) = R_y(\lambda) \quad \text{Drehung um die } y\text{-Achse} \quad (16.2.44b)$$

$$\exp(\lambda T(E_3)) = R_z(\lambda) \quad \text{Drehung um die } z\text{-Achse} \quad (16.2.44c)$$

Die $R_i(\lambda)$ sind die Drehmatrizen im kartesischen dreidimensionalen Raum. Zu dieser Lie-Algebra $so(3)$ gehört die nicht-abelsche Lie-Gruppe $SO(3)$

Analog zu zwei Dimensionen kann eine weitere Darstellung gefunden werden, die auf einem unendlichdimensionalen Funktionenraum $PR_{x,y,z}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{C}$ beruht. Die Darstellung der Lie-Algebra ist dann

$$T_\infty(E_1) = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \quad (16.2.45a)$$

$$T_\infty(E_2) = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \quad (16.2.45b)$$

$$T_\infty(E_3) = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \quad (16.2.45c)$$

¹F. Freistetter [Fre21] hat eine gute Begründung gegeben.

Man kann sich leicht überzeugen, dass die Relationen (16.2.45c) bis (16.2.45b) die Kommutationsrelation $[E_i, E_j] = -\varepsilon_{i,j,k}E_k$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ aus (16.2.41) erfüllen. Dies ist also eine äquivalente Darstellung (siehe [MG19, Gl. (6.3.3) - (2.3.5)]) zu der mit den Drehungen

Die Drehimpulsoperatoren sind

$$L_k = -i\hbar T_\infty(E_k) \quad (16.2.46)$$

Wieder wird klar, dass die beiden Darstellungen ein- und derselben Lie-Gruppe Drehungen mit Drehimpulsoperatoren verknüpfen.

Rechnet man die nicht in kartesischen Koordinaten, sondern in Kugelkoordinaten, dann sieht man, dass

$$T_\infty(E_3) = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (16.2.47)$$

ist, analog zum zweidimensionalen Fall. $\exp(\alpha T_\infty(E_3))$ erzeugt also eine Drehung von Funktionen (z.B. Wellenfunktionen) um die z -Achse und den Winkel α .

Allgemein wird eine Drehachse durch den Winkelvektor $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ angegeben. Die Drehachse zeigt in die Richtung $\mathbf{e}_\alpha = \boldsymbol{\alpha}/|\boldsymbol{\alpha}|$, der Drehwinkel ist $\alpha = |\boldsymbol{\alpha}|$. Eine beliebige Drehung ist dann

$$T_\infty(\boldsymbol{\alpha}) = \exp[\alpha_1 T_\infty(E_1) + \alpha_2 T_\infty(E_2) + \alpha_3 T_\infty(E_3)] \quad (16.2.48)$$

Beachten sie, dass die Wahl der z -Richtung willkürlich ist. Erst die Messapparatur legt sie fest.

Es gibt eine weitere (die Dritte hier!) Darstellung der Lie-Algebra $so(3)$ mit dem Vektorraum $V = \mathbb{C}^2$.

$$T_2(E_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2(E_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2(E_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (16.2.49)$$

Diese Matrizen hängen mit den Pauli-Spin-Matrizen σ_k zusammen

$$T_3(E_k) = \frac{i}{2} \sigma_k \quad (16.2.50)$$

Die Darstellung $T_2(E_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, erfüllt die gleichen Kommutationsrelationen wie $T_3(E_i)$ (siehe Gleichung (16.2.42)).

$$[E_i, E_j] = -\varepsilon_{i,j,k}E_k, \quad \{i, j, k\} \in \{1, 2, 3\}$$

In dieser Darstellung erhält man für die exponentierten Erzeugenden

$$\exp(\alpha_1 T_2(E_1)) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) & i \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \\ i \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (16.2.51)$$

$$\exp(\alpha_2 T_2(E_2)) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (16.2.52)$$

$$\exp(\alpha_3 T_3(E_1)) = \begin{pmatrix} \exp\left(i\frac{\alpha_3}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\alpha_3}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (16.2.53)$$

Aus der Darstellung einer Lie-Algebra kann die Darstellung der Lie-Gruppe berechnet werden. Wir hatten vorher schon aus der Lie-Algebra $so(3)$ die Drehungen, also die Lie-Gruppe $SO(3)$ berechnet. Hier wurde nun aus der **identischen** Lie-Algebra $so(3)$ die Lie-Gruppe $SU(2)$ konstruiert.

Im Prinzip sind die Matrizen aus (16.2.51) bis (16.2.53) Drehmatrizen, aber: α_i tritt in jeder Winkelfunktion (dazu gehört auch $\exp(i\beta)!$) mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ auf. Dies heisst, dass in dieser Darstellung die Lie-Gruppe $SU(2)$ **4π -periodisch** ist.

Aber die aus der selben Lie-Algebra konstruierte Lie-Gruppe $SO(3)$ ist 2π -periodisch.

16.2.4. Spinvektoren (magnetisches Moment) und Spinzustand

Das magnetische Moment μ eines Spins ist mit dem Spinvektor $|\chi\rangle$ auf komplizierte Weise verknüpft. Wird der Raum gedreht, gibt $\exp\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i T_3(E_i)\right)$ die Koordinaten im gedrehten Koordinatensystem an. Bei dieser Drehung um den $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ muss auch der Spinzustand gedreht werden. Diese Drehung wird jedoch nicht durch die $SO(3)$ -Symmetrie sondern durch die $SU(2)$ -Symmetrie gegeben, also durch $\exp\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i T_2(E_i)\right)$ gegeben. Einer Drehung in 2 (komplexen) Dimensionen um den Winkel φ entspricht eine Drehung in drei reellen Dimensionen um den Winkel 2φ .

Der Spinvektor $|\chi\rangle$ wird also bei einer Drehung des Raumes um 2π in den Vektor $-|\chi\rangle$ überführt. Nun beschreiben aber die Vektoren $|\chi\rangle$ und $-|\chi\rangle$ den gleichen Spinzustand und damit das gleiche magnetische Moment. Der Grund ist, dass der Unterschied ein Phasenfaktor $\exp(i\pi)$ ist und dass Phasenfaktoren bei der Berechnung von Observablen entfallen. Da die messbare Grösse der Spinzustand ist, der mit dem magnetischen Moment verbunden ist, hat alles seine Richtigkeit.

Die 2π und 4π -Problematik taucht erst auf, wenn verschränkte Zustände erzeugt und manipuliert werden.

16.2.5. Mesonen

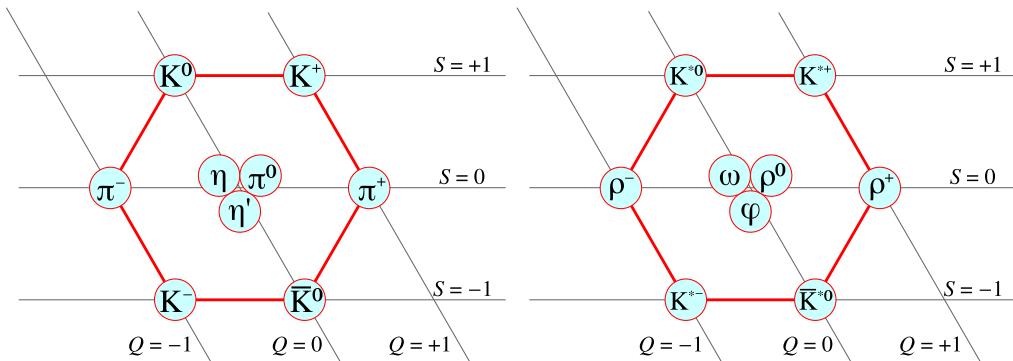


Abb. 16.2.: Mesonennonetts. Die linke Seite zeigt die pseudoskalaren Mesonen mit $S = 0$ und $P = -1$, also $J^P = 0^-$. Die rechte Seite zeigt die Vektormesonen mit $S = 1$ und $P = -1$, also $J^P = 1^-$. (links: User:E2m, User:Stannered [Public domain], via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/13/Meson_nonet-_spin_1.svg, rechts: User:E2m, User:Stannered [Public domain], via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c0/Meson_nonet-_spin_0.svg).

Abbildung 16.2 zeigt die Mesonen-Nonetts für $S = 0$ und $S = 1$. Der Spin des Nonetts deutet auf eine innere Struktur, die Quarks, hin. Die Bezeichnung J^P bezieht sich auf den Gesamtdrehimpuls J , der ja aus dem Bahndrehimpuls L und dem Spin S nach den üblichen Regeln der Quantenmechanik berechnet wird. Die Koordinaten bei der Darstellung sind die Ladung Q und die SELTSAMKEIT oder STRANGENESS, eine zuerst experimentell beobachtete Dimension, die mit der Quark-Theorie aus dem nächsten Abschnitt dann die Begründung fand.

16.3. Quarks

Die Vielfalt der beobachteten Teilchen verwirrte die Welt der Physik zu Beginn der 60-er Jahre. Murray Gell-Mann („A schematic model of baryons and mesons“ [Gel64]) und George Zweig (*CERN preprint 8182/TH401 (1964)* [Zwe64]) stellten ihre Idee vor, die Teilchen mit gruppentheoretischen Methoden zu charakterisieren. Damit konnten Sie verschiedene offene Fragen klären und gleichzeitig Vorhersagen für neue Teilchen machen.

Das schwerwiegendste Problem war das MAGNETISCHE MOMENT DES NEUTRONS. Es war bekannt, dass jedes geladene Teilchen mit einem Spin $\neq 0$ ein magnetisches Moment hatte. Verwirrend war aber, dass das Neutron n als ungeladenes Teilchen ebenso ein magnetisches Moment hatte. Die bekannte Kopplung zwischen den drei Größen Ladung, Spin und magnetisches Moment war hier verletzt.

Wenn aber die Regel allgemein gelten sollte, dass magnetische Momente nur bei spinbehafteten geladenen Teilchen auftreten sollten, musste das Neutron n notwendigerweise zusammengesetzt sein. Wenn es aus n geladenen Teilchen zusammengesetzt sein sollte, gilt

$$\sum_1^n q_i = 0 \quad \sum_1^n \mu_i \neq 0 \quad (16.3.1)$$

Diese Teilchen sollten dann sowohl das NEUTRON wie auch das PROTON beschreiben. Eine mögliche Realisierung könnte mit zwei Teilchen erreicht werden

$$u : \quad I_u = \frac{1}{2}, \quad q_u = \frac{2}{3}e \quad T = \frac{1}{2} \quad T_3 = \frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{3} \quad (16.3.2a)$$

$$d : \quad I_d = \frac{1}{2}, \quad q_d = -\frac{1}{3}e \quad T = \frac{1}{2} \quad T_3 = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{3} \quad (16.3.2b)$$

Die beiden Teilchen, das UP-QUARK, dargestellt durch den Buchstaben u , und das DOWN-QUARK, dargestellt durch den Buchstaben d , müssen wegen den möglichen Drehsymmetrien den Spin $s_{u,d} = \frac{1}{2}\hbar$ haben (siehe Abschnitt 16.2.3). Damit sich aber die beobachteten Ladungen von NEUTRON und PROTON ergeben, muss die Ladung ein Bruchteil der Elementarladung sein. Dies führt dann auf die Frage, was denn Ladung ist. Ohne Antwort auf diese Frage ergibt sich

Proton Das Proton hat die Wellenfunktion

$$|p\rangle = |uud\rangle \quad (16.3.3)$$

Nach Wolfgang Pauli muss der Spin der up-Quarks u antiparallel sein. Damit ergeben sich für den Drehimpuls und die Ladung des Protons

$$I_p = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (16.3.4a)$$

$$q_p = \left(2 \cdot \left(+\frac{2}{3} \right) - \frac{1}{3} \right) e = 1e \quad (16.3.4b)$$

Neutron Das Neutron hat die Wellenfunktion

$$|n\rangle = |ddu\rangle \quad (16.3.5)$$

Nach Wolfgang Pauli muss der Spin der down-Quarks d antiparallel sein. Damit ergeben sich für den Drehimpuls und die Ladung des Neutrons

$$I_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (16.3.6)$$

$$q_n = \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} \right) e = 0e \quad (16.3.7)$$

Allgemein ergeben sich die folgenden Regeln:

Baryonen bestehen aus drei Quarks. Ihr Spin I ist halbzahlig.

Mesonen bestehen aus zwei Quarks. Ihr Spin I ist ganzzahlig.

Hadronen werden durch die Quantenzahlen I (SPIN, eigentlich die 3-Komponente), T (ISOSPIN, die «Familie»), T_3 (3-KOMPONENTE DES ISOSPINS), Q (LADUNG), B (BARYONENZAHL), S (SELTSAMKEIT oder STRANGENESS), C (CHARM), q_c (FARBLADUNG) beschrieben. Es kommen dann noch B' die BOTTOMNESS oder BEAUTY und T' die TOPNESS oder TRUTH als mögliche Quantenzahlen dazu.

Diese Beschreibung (ohne Bottomness und Topness) ist isomorph zur SPEZIELLEN LIE-GRUPPE SU(3). Sie wird im weiteren Verlauf des Textes erklärt.

Es ergab sich die Notwendigkeit, ein weiteres Quark einzuführen, da einige der beobachteten Hadronen sich seltsam benahmen. Deshalb wurde die Eigenschaft SELTSAMKEIT oder STRANGENESS eingeführt. Diese ist ein weiteres Quark, abgekürzt als s -Quark mit seinem Antiteilchen, dem \bar{s} -Quark.

Das s -Quark hat eine Ladung $q_s = -\frac{1}{3}e$, einen Spin $s = \frac{\hbar}{2}$, eine Strangeness $S = -1$. Wie alle anderen Quarks auch hat es eine positive Parität. Die Baryonenzahl ist $B = \frac{1}{3}$.

16.3.1. Experimentelle Hinweise

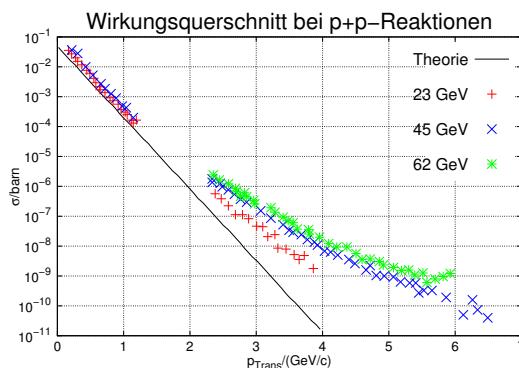


Abb. 16.3.: Streuung $p + p \rightarrow$ Hadronen (nach Jacob und Landshoff [JL78])

Abbildung 16.3 zeigt experimentell gemessene Streuquerschnitte von $p + p \rightarrow$ Hadronen-Reaktionen (oder Streuung). Die ausgezogene Linie beschreibt eine Theorie, bei der das Proton ein nicht teilbares einzelnes Teilchen ist. Es muss also aus den Daten geschlossen werden, dass ein Proton eine innere Struktur hat.

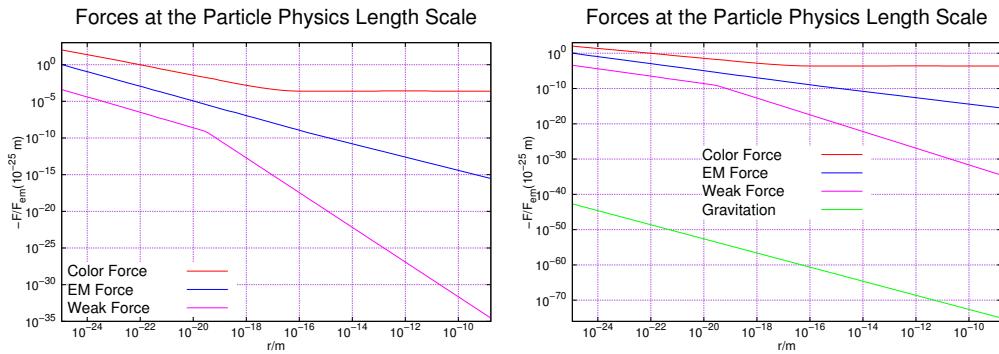


Abb. 16.4.: Stärke und Reichweite fundamentaler Kräfte (nach [Dem10, Abb. 7.25a]). Links ohne die Gravitation, rechts mit ihr.

Abbildung 16.4 skizziert die Stärke und die Reichweite der bekannten FUNDAMENTALEN KRÄFTE. Die Stärke der Kräfte sind auf die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung bei zwei Einheitsladungen im Abstand von 10^{-25} m normiert. Links ist die Gravitation ausgelassen, rechts ist sie dabei.

16.3.2. Hadronen und Quarks

Die in Abschnitt 16.2.5 gezeigten Mesonen sind ein Ausschnitt aus einem ganzen Zoo von Mesonen. Die Struktur der Abbildung 16.2 ergibt sich aus der Quark-Theorie. Im Jahre 2019 waren 139 Mesonen bekannt und für weitere 74 gab es Hinweise (Particle Data Group [Par20b]). Angegeben sind unter anderem der Isospin T , der Gesamtspin I^P , mit P der Parität sowie die Ladung Q/e , die Stran-

geness S und der Charm C .

Name	Symb.	Quarks	Symb.	Quarks	$m/(\text{MeV}/c^2)$	T	I^P	Q/e	S	C
Pion	π^+	$u\bar{d}$	π^-	$d\bar{u}$	139.570 39(16)	1	0^-	+1	0	0
Pion	π^0	$\frac{(u\bar{u}-d\bar{d})}{\sqrt{2}}$	π^0	$\frac{(u\bar{u}-d\bar{d})}{\sqrt{2}}$	134.9768(5)	1	0^-	0	0	0
η -Meson	η	$\frac{(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})}{\sqrt{6}}$	η	$\frac{(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})}{\sqrt{6}}$	547.862(17)	0	0^-	0	0	0
η' -Meson	$\eta' = \eta(958)$	$\frac{(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})}{\sqrt{3}}$	η'	$\frac{(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})}{\sqrt{3}}$	957.78(6)	0	0^-	0	0	0
η (Charm)	$\eta_C = \eta_C(1S)$	$c\bar{c}$	η_C	$c\bar{c}$	2983.9(5)	0	0^-	0	0	0
Kaon	K^+	$u\bar{s}$	K^-	$s\bar{u}$	493.677(17)	$\frac{1}{2}$	0^-	+1	+1	0
Kaon	K^0	$d\bar{s}$	\bar{K}^0	$s\bar{d}$	497.611(13)	$\frac{1}{2}$	0^-	0	+1	0
K-Short	K_S^+	$\frac{(d\bar{s}-s\bar{d})}{\sqrt{2}}$	K_S^+	$\frac{(d\bar{s}-s\bar{d})}{\sqrt{2}}$	497.611(13)	$\frac{1}{2}$	0^-	0	undef.	0
K-Long	K_L^0	$\frac{(d\bar{s}+s\bar{d})}{\sqrt{2}}$	K_L^0	$\frac{(d\bar{s}+s\bar{d})}{\sqrt{2}}$	497.611(13)	$\frac{1}{2}$	0^-	0	undef.	0
D-Meson	D^+	$c\bar{d}$	D^-	$d\bar{c}$	1869.65(5)	$\frac{1}{2}$	0^-	+1	0	+1
D-Meson	D^0	$c\bar{u}$	\bar{D}^0	$u\bar{c}$	1864.83(5)	$\frac{1}{2}$	0^-	0	0	+1
D (seltsam)	D_S^+	$c\bar{s}$	D_S^-	$s\bar{c}$	1964.34(7)	0	0^-	+1	+1	+1

Tab. 16.5.: Tabelle einiger pseudoskalarer Mesonen (nach Particle Data Group [Par20b]).

Tabelle 16.5 zeigt einige der pseudoskalaren Mesonen. Angegeben sind unter anderem der Isospin T , der Gesamtspin I^P , mit P der Parität sowie die Ladung Q/e , die Strangeness S und der Charm C .

Name	Symb.	Quarks	Symb.	Quarks	$m/(\text{MeV}/c^2)$	T	I^P	Q/e	S	C
ρ -Meson	$\rho^+ = \rho(770)^+$	$u\bar{d}$	ρ^-	$d\bar{u}$	775.26(25)	1	1^-	+1	0	0
ρ -Meson	$\rho^0 = \rho(770)^0$	$\frac{(u\bar{u}-d\bar{d})}{\sqrt{2}}$	ρ^0	$\frac{(u\bar{u}-d\bar{d})}{\sqrt{2}}$	775.26(25)	1	1^-	0	0	0
ω -Meson	$\omega = \omega(782)$	$\frac{(u\bar{u}+d\bar{d})}{\sqrt{2}}$	ω	$\frac{(u\bar{u}+d\bar{d})}{\sqrt{2}}$	547.862(17)	0	1^-	0	0	0
ϕ -Meson	$\phi = \phi(1020)$	$s\bar{s}$	ϕ	$s\bar{s}$	1019.461(16)	0	1^-	0	0	0
J/ψ	$J/\psi = J/\psi(1S)$	$c\bar{c}$	J/ψ	$c\bar{c}$	3096.900(6)	0	1^-	0	0	0
Kaon	$K^{*+} = K^*(892)^+$	$u\bar{s}$	K^{*-}	$s\bar{u}$	891.76(25)	$\frac{1}{2}$	1^-	+1	+1	0
Kaon	$K^{*0}0K^*(892)^0$	$d\bar{s}$	\bar{K}^{*0}	$s\bar{d}$	895.55(20)	$\frac{1}{2}$	1^-	0	+1	0
D-Meson	$D^{*+} = D^*(2007)^+$	$c\bar{d}$	D^{*-}	$d\bar{c}$	2010.26(5)	$\frac{1}{2}$	1^-	+1	0	+1
D-Meson	$D^{*0} = D^*(2007)^0$	$c\bar{u}$	\bar{D}^{*0}	$u\bar{c}$	2006.85(5)	$\frac{1}{2}$	1^-	0	0	+1
D (seltsam)	D_S^{*+}	$c\bar{s}$	D_S^{*-}	$s\bar{c}$	2112.1(4)	0	1^-	+1	+1	+1

Tab. 16.6.: Tabelle einiger Vektormesonen (nach Particle Data Group [Par20b]).

Tabelle 16.6 zeigt die Daten einer Auswahl der Vektormesonen.

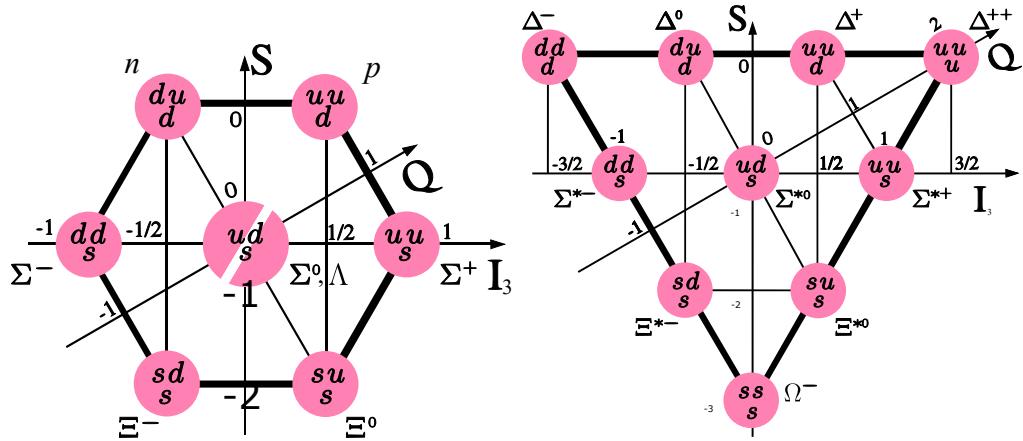


Abb. 16.5.: Links BARYONENOKTETT (Trassiorf [Public domain or Public domain], from Wikimedia Commons, <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/53/Baryon-decuplet.svg>) und rechts das BARYONENDEKUPLETT (Trassiorf [Public domain or Public domain], from Wikimedia Commons, <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ea/Baryon-octet.svg>).

Wie schon angedeutet beruht die Quarktheorie auf der Anwendung von Symmetrieeigenschaften von Lie-Gruppen. Abbildung 16.5 zeigt links das BARYONENOKTETT. Beim BARYONENOKTETT haben die Teilchen einen Spin und eine Parität von $I^P = \left(\frac{1}{2}\right)^+$. Beim BARYONENDEKUPLETT rechts haben die Teilchen einen Spin und eine Parität $I^P = \left(\frac{3}{2}\right)^+$. Gewisse Quarkkombinationen kommen sowohl im BARYONENOKTETT wie auch im BARYONENDEKUPLETT vor. Dann können die entsprechenden Teilchen im BARYONENOKTETT als Grundzustand und im BARYONENDEKUPLETT im angeregten Zustand aufgefasst werden. Zum Beispiel kann das $\Delta^0 |\Delta^0\rangle = |ddu\rangle$ als angeregter Zustand des NEUTRONS $|n\rangle = |ddu\rangle$ verstanden werden. Analog verhält es sich mit dem Proton $|p\rangle = |uud\rangle$ und dem Teilchen Δ^+ .

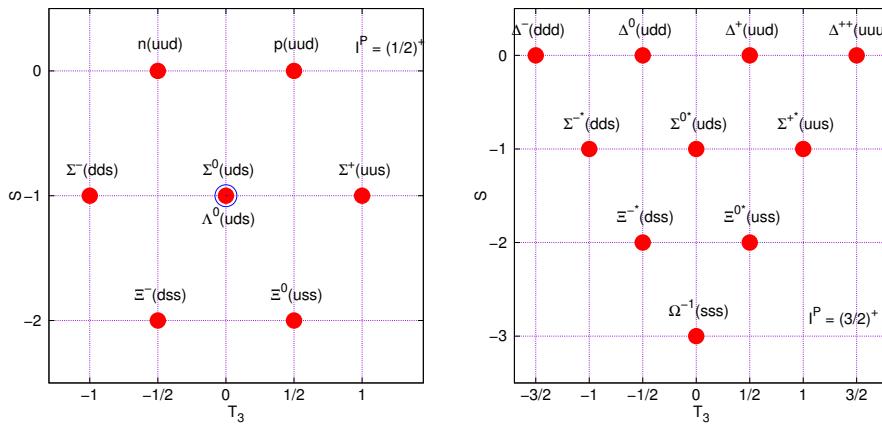


Abb. 16.6.: Quarkmodell für Baryonen (siehe auch [Dem10, Abb. 7.15]).

Abbildung 16.6 zeigt den Inhalt von Abbildung 16.5 noch auf eine andere Art und Weise. Aus der Existenz zum Beispiel des $|\Delta^- \rangle = |ddd\rangle$ mit seinen drei parallelen Quarkspins muss geschlossen werden, dass es noch eine weitere innere Quantenvariable gibt, die bei jedem der drei DOWN-QUARKS unterschiedlich ist. Diese Innere Variable muss drei unterschiedliche Zustände haben. Da das Farbsehen der Menschen auf den Grunfarben rot, grün und blau beruht, also auf drei verschiedenen Rezeptoren, wurde diese innere Variable als FARBLADUNG bezeichnet mit den Eigenwerten ROT, GRÜN und BLAU. Beim Δ^- muss jedes down-Quark eine andere Farbe haben. Aus der Physiologie wissen wir dann, dass die resultierende Farbe bei additiver Farbmischung WEISS ist. In anderen Worten: Die Farbladung manifestiert sich nicht, analog zur Ladung null des NEUTRONS.

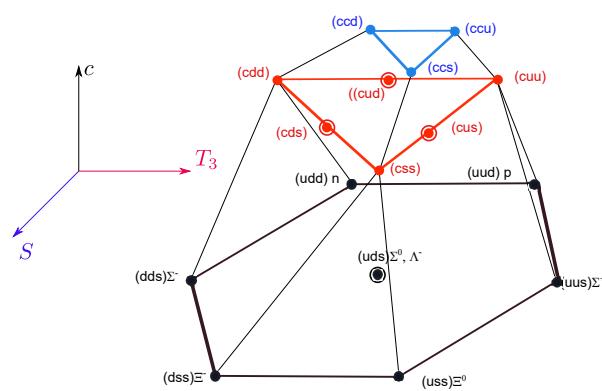


Abb. 16.7.: Baryonenmultiplett bis Charm (siehe auch [Dem10, Abb. 7.16])

Wenn die Quantenzahl CHARM mit berücksichtigt wird, wird der Raum der Teilchen dreidimensional. Damit ergibt sich das in Abb. 16.7 gezeigte BARYONEN-SUPERMULTIPLETT.

Die FARBLADUNG und damit die FARBKRAFT hat die folgenden Eigenschaften:

- Gluonen (das analoge zu Photonen für die Farbkraft) müssen Farbe austauschen.
- Messbare Teilchen sind farblos.
- Die starke Wechselwirkung ist nicht vollständig kompensierte Farbkraft. Dies ist analog zu den LONDON DISPERSIONSKRÄFTEN oder dem anziehenden Teil der VAN-DER-WAALS-KRÄFTE.
- Schliesslich sagen Symmetrieverlegungen in abstrakten Lie-Gruppen dass es die gleiche Anzahl Leptonenfamilien wie Quarkfamilien geben muss.

16.3.3. Warum gibt es drei Quarks?

Dieser Abschnitt ist eine Erinnerung an die Drehimpulsarithmetik. Die folgenden Ausführungen folgen Jan-Markus Schwindt [Sch13]

Drehimpulse $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)^T = (L_1, L_2, L_3)^T$:

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k \quad \epsilon_{ijk}: \text{Levi-Civitta-Symbol} \quad (16.3.8)$$

$$[\mathbf{L}^2, L_i] = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (16.3.9)$$

Definition der Levi-Civitta-Symbole

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (ijk) \text{ eine gerade Permutation von } (123) \text{ ist;} \\ -1, & \text{wenn } (ijk) \text{ eine ungerade Permutation von } (123) \text{ ist;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (16.3.10)$$

Das Gleiche gilt auch für die verallgemeinerten Drehimpulse

$$[J_i, J_j] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} J_k \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (16.3.11)$$

$$[\mathbf{J}^2, J_i] = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (16.3.12)$$

und den Aufsteige- und Absteigeoperatoren

$$J_+ |j, m, \alpha\rangle = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1, \alpha\rangle \quad (16.3.13)$$

$$J_- |j, m, \alpha\rangle = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1, \alpha\rangle \quad (16.3.14)$$

Hier ist α eine weitere Quantenzahl, die neben dem Drehimpuls den Zustand charakterisiert, z.B. n im Zentralpotential

16.3.3.1. Spin

Der Spin ist eine Zustandsgrösse in einem zweidimensionalen komplexen Hilbertraum.

$$s_z = \pm \frac{1}{2}\hbar = m_s \quad s = \frac{1}{2}\hbar \quad \mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \text{ 2D-Hilbertraum} \quad (16.3.15)$$

Die Eigenzustände sind $|z+\rangle = (1, 0)^T$ und $|z-\rangle = (0, 1)^T$ zu $m_s = \pm \frac{\hbar}{2}$. Wir können eine Spinmatrix definieren

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16.3.16)$$

Diese kann als Summe zweier nicht-hermitescher Matrizen aufgefasst werden:

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (16.3.17)$$

Dabei ist S_+ eine Matrix, die den Spinzustand (Eigenwert) um \hbar erhöht. S_- erniedrigt ihn um \hbar .

$$S_- |z+\rangle = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar |z-\rangle \quad (16.3.18a)$$

$$S_+ |z+\rangle = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (16.3.18b)$$

$$S_- |z-\rangle = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (16.3.18c)$$

$$S_+ |z-\rangle = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar |z+\rangle \quad (16.3.18d)$$

Diese Aufspaltung ist analog zu der bekannten Aufspaltung $\cos \beta = (e^{i\beta} + e^{-i\beta})/2$ und $\sin \beta = (e^{i\beta} - e^{-i\beta})/(2i)$ der Winkelfunktionen.

$$S_x = \frac{1}{2} (S_+ + S_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (16.3.19a)$$

$$S_y = \frac{1}{2i} (S_+ - S_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (16.3.19b)$$

Weiter gilt

$$\mathbf{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3\hbar}{4} \mathbb{1} \quad (16.3.20)$$

Die gesamte Wellenfunktion aus Ortsteil und Spinteil wird im Hilbertraum

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\psi \otimes \mathcal{H}_\chi \quad |x\pm\rangle = |x\rangle \otimes |z\pm\rangle \quad (16.3.21)$$

beschrieben. Dabei symbolisiert χ den Spin und ψ die Ortswellenfunktion. $\mathcal{H}_{\psi,\chi}$ ist der jeweils dazugehörige Hilbertraum.

Der Zustand eines Elektrons wird durch eine Ortswellenfunktion mit zwei Komponenten oder durch zwei Ortswellenfunktionen ψ_+ und ψ_- beschrieben. ψ_+ beschreibt den Zustand eines Elektrons mit dem Spin «up». Entsprechend beschreibt ψ_- den Zustand eines Elektrons mit dem Spin «down».

Die Wellenfunktionen sind normiert:

$$\int d^3\mathbf{r} \left(\psi_+^*(\mathbf{r}), \psi_-^*(\mathbf{r}) \right) \cdot \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \int d^3\mathbf{r} \left(|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2 \right) = 1 \quad (16.3.22)$$

Formal werden Sie durch

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle \quad |\chi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (16.3.23)$$

beschrieben.

Bei der Drehimpulsaddition werden vormal zwei Hilberträume der jeweiligen Drehimpulse zu einem neuen Hilbertraum verknüpft.

$$|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle := |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (16.3.24)$$

Der Gesamtdrehimpuls entlang der Richtung i ist

$$J_i := J_{1i} + J_{2i} = J_{1i} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes J_{2i} \quad (16.3.25)$$

Ebenso ergibt sich das Quadrat des Drehimpulses zu

$$\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \quad (16.3.26)$$

Ausgeschrieben erhalten wir

$$[J_i, J_j] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} J_k \quad (16.3.27a)$$

$$[\mathbf{J}^2, J_i] = 0 \quad \forall i \in \{x, y, z\} \quad (16.3.27b)$$

Weiter ergeben sich die Beziehungen

$$[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_1^2] = [\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_2^2] = [\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}^2] = [\mathbf{J}_2^2, \mathbf{J}^2] = 0 \quad (16.3.28)$$

und

$$[\mathbf{J}^2, J_{1i}] \neq 0 \quad (16.3.29a)$$

$$[\mathbf{J}^2, J_{2i}] \neq 0 \quad (16.3.29b)$$

Die Kombination zweier Zustände führt auf einen Zustand der neben den einzelnen Gesamtdrehimpulsen durch den Gesamtdrehimpuls und die Grösse seiner 3-Komponente charakterisiert ist. Es ist üblich, die Schreibweise

$$|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \longrightarrow |(j_1, j_2), j, m\rangle \quad (16.3.30)$$

zu verwenden. Bei der Kombination von mehr als zwei Drehimpulsen kann das

Verfahren auch nacheinander angewandt werden.

Die so entstehenden Koeffizienten (Gewichte) heissen CLEBSCH-GORDAN-KOEFFIZIENTEN (nach Rudolf Clebsch und Paul Gordan). Eine Tabelle dazu findet sich in „Review of Particle Physics“ [Zyl+20] oder in *Clebsch-Gordan Coefficients, Spherical Harmonics, and D Functions* [Par21].

16.3.4. Austauschteilchen

Bei einer über Austauschteilchen vermittelten Wechselwirkung muss bei der starken Wechselwirkung der Drehimpuls und die Parität erhalten sein. Die Analyse ergibt, dass die Austauschteilchen den Drehimpuls und die Parität

$$I = 0 \quad (16.3.31a)$$

$$P = -1 \quad (16.3.31b)$$

haben müssen. Das heisst, die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung sind PSEUDOSKALARE. Dies ist analog zum Drehimpuls, der ein axialer Vektor ist.

Wir wissen, dass PIONEN die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung zwischen PROTONEN und/oder NEUTRONEN sind. Dabei gilt

$$\pi^- \hat{=} (\bar{u}d) \quad T = 1 \quad T_3 = -1 \quad (16.3.32a)$$

$$\pi^+ \hat{=} (u\bar{d}) \quad T = 1 \quad T_3 = +1 \quad (16.3.32b)$$

$$\pi^0 \hat{=} (u\bar{u} + d\bar{d}) \quad T = 1 \quad T_3 = 0 \quad (16.3.32c)$$

In der Sprache der Brackets lauten die Gleichungen

$$|\pi^-\rangle = |\bar{u}d\rangle \quad (16.3.33a)$$

$$|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle \quad (16.3.33b)$$

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle \} \quad (16.3.33c)$$

Wird die STRANGENESS dazugenommen, dann gibt es neben dem π^0 noch zwei weitere Mesonen mit $T_3 = 0$ und $S = 0$:

$$|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \{ |u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle \} \quad (16.3.34a)$$

$$|\eta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ |u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle \} \quad (16.3.34b)$$

Weiter gilt

$$|\langle \pi^0 | | \pi^0 \rangle|^2 = |\langle \eta | | \eta \rangle|^2 = |\langle \eta' | | \eta' \rangle|^2 = 1 \quad (16.3.35)$$

Weiter gibt es seltsame Teilchen, Teilchen deren STRANGENESS ungleich null ist. Dies sind

$$\begin{array}{llll}
 K^+ \hat{=} & (u\bar{s})q & = 1 \cdot eS & = +1 \\
 K^- \hat{=} & (\bar{u}s)q & = -1eS & = -1 \\
 K^0 \hat{=} & (d\bar{s})q & = 0eS & = +1 \\
 \bar{K}^0 \hat{=} & (\bar{d}s)q & = 0eS & = -1
 \end{array} \quad (16.3.36a-d)$$

Angegeben ist hier das Teilchen und seine Quarks, die Ladung und die Strangeness s .

16.3.5. Charm

Bei einer Elektron-Positron-Streuung entsteht ein massereiches Teilchen, das Ψ genannt wurde.



Dieses Ψ kann wieder in ein Elektron-Positron-Paar zerfallen.



Analysiert man die Masse des Ψ , kann diese nicht mit den bekannten up-, down- und strange-Quarks erklärt werden. Man muss schliessen, dass es neben u , d und s noch ein c Quark gibt, das CHARM-QUARK. Die Lebensdauer des Ψ ist viel länger als die Zeit, die man mit der STARKEN WECHSELWIRKUNG bei gegebener Masse erwarten würde. Deshalb muss der Prozess ein Prozess der SCHWACHEN WECHSELWIRKUNG sein.

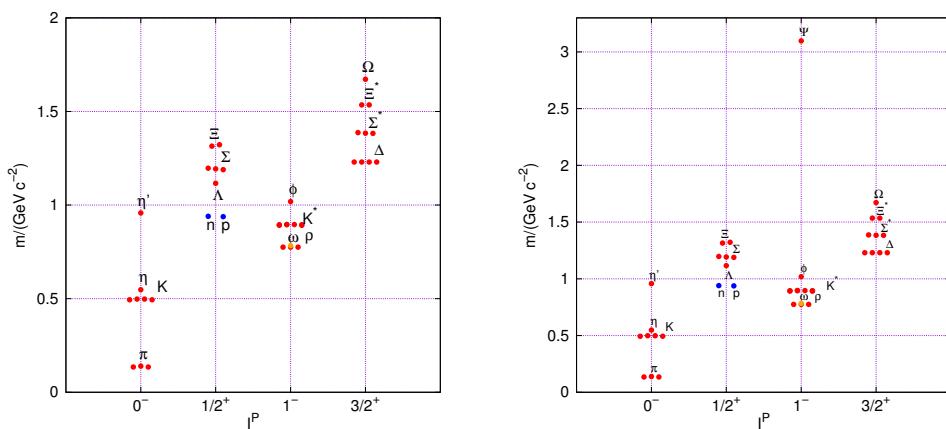


Abb. 16.8.: Klassifizierung von Hadronen nach Spin und Parität I^P und Masse m (siehe auch [Dem10, Abb. 7.12]). Die rechte Darstellung ist identisch mit der linken, ausser dass das Ψ -Meson (mit dem Charm-Quark) mit berücksichtigt ist. Alle Punkte die in der Nähe eines Spinwertes I liegen haben diesen Wert. Die Punkte sind auseinander gezogen worden um die Vielfachheit zu zeigen.

Abbildung 16.8 zeigt, dass die Massen der Hadronen sich in etwa gruppieren. Wenn wir die Gruppe aus Δ , Σ^* , Ξ^* und Ω nehmen, so sieht es aus, wie wenn wir gleichabständige Energieniveaus hätten. Dies kann aber auch erklärt werden, dass nach und nach die leichten u und d -Quarks durch das schwerere s -Quark ersetzt werden. Die Δ hätten dann kein s -Quark, die Σ^* eines, die Ξ^* zwei und das Ω bestünde aus drei s -Quarks. So ist es in Wirklichkeit auch. Da im Wesentlichen die BINDUNGSENERGIEN zwischen den Quarks gleich ist, ergibt der Energieunterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilchen dieser Gruppe die Masse des Strange-Quarks.

Auf der rechten Seite ist das Ψ/J -Meson mit seiner wesentlich höheren Masse angezeigt. Dieses meson besteht aus einem c - und einem \bar{c} -Quark. Damit muss das Charm-Quark eine wesentlich höhere Masse als das Strange-Quark haben.

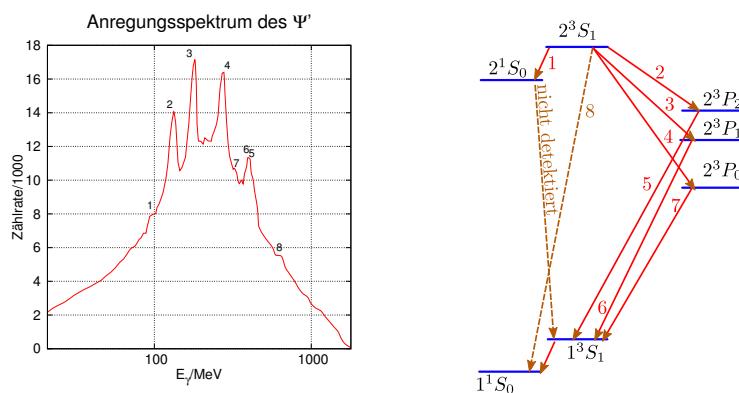


Abb. 16.9.: γ -Spektrum des Ψ' nach E. D. Bloom und C. W. Peck „Physics with the crystal ball detector“ [BP83, Abb. 3] und [Dem10, Abb. 7.13]. Die rechte Seite zeigt das Termspektrum nach [BP83, Abb. 3, Inset].

Abbildung 16.9 zeigt das gemessene Anregungsspektrum des Ψ -Mesons und das dazugehörige Termschema, nach E. D. Bloom und C. W. Peck „Physics with the crystal ball detector“ [BP83, Abb. 3]. Das Termschema für angeregte Zustände von Quarks ist gleich aufgebaut wie jenes für angeregte Elektronenzustände in Atomen.

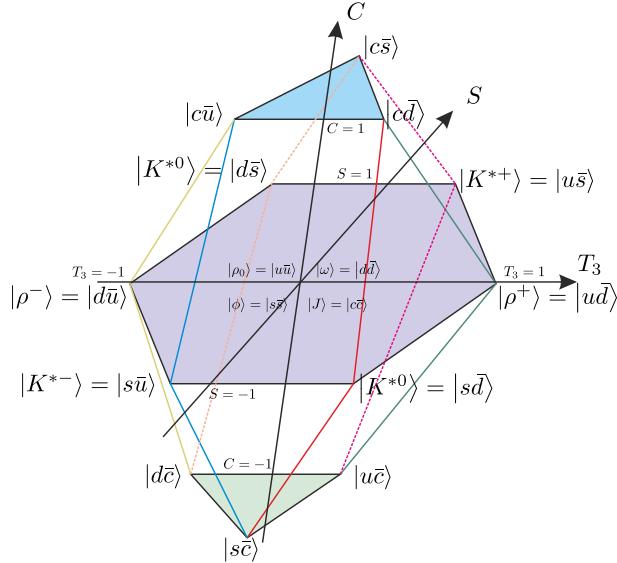


Abb. 16.10.: Mesonensupermultiplett für Mesonen mit der Spinquantenzahl $I = 1$ (nach S. L. Glashow „Quarks with color and flavor“ [Gla75] und W. Demtröder [Dem10, Abb. 7.18]).

Abbildung 16.10 zeigt eine Darstellung der Mesonen mit Strangeness und Charm nach S. L. Glashow „Quarks with color and flavor“ [Gla75]. Die Darstellung der weiteren Quarkfamilien würde einen fünfdimensionalen Raum benötigen.

16.3.6. Quarks und Farbladungen

Murray Gell-Mann und Kazuhiko Nishijima konnten die Ladung Q und die 3-Komponente des Isospins T_3 mit den Quarkquantenzahlen und der Baryonenzahl verknüpfen.

$$Q = \frac{1}{2}(B + U - D + S + C) \quad (16.3.39a)$$

$$T_3 = \frac{1}{2}(U - D) \quad (16.3.39b)$$

In Gleichung (16.3.39) bedeuten

- B** die Baryonenzahl,
- U** die Differenz $U = n(u) - n(\bar{u})$,
- D** die Differenz $D = n(d) - n(\bar{d})$,
- S** die Seltsamkeit $S = n(\bar{s}) - n(s)$ und
- C** der Charm $C = n(c) - n(\bar{c})$

Wie schon angedeutet gibt es noch zwei weitere Quarkquantenzahlen. Damit gibt es die gleiche Anzahl Familien bei Quarks und bei Leptonen. Diese Quantenzahlen sind:

B' die Bottomness (auch Beauty), also die Differenz $B' = n(\bar{b}) - n(b)$ und

T' die Topness² (auch Truth), also die Differenz $T' = n(t) - n(\bar{t})$

Die Quarks t und c sind vom u -Typ, die Quarks s und b vom d -Typ. Der Typ des Quarks wird auch FLAVOUR genannt.

Die beiden Teilchen Ω^- und Δ^{++} in Abbildung 16.6 bestehen aus drei gleichen Quarks. Nach Wolfgang Pauli ist dies nur möglich, wenn es eine weitere Quantenzahl gibt.

Ein weiter Hinweis gab das Verhältnis der Streuquerschnitte der Reaktionen $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ im Vergleich zu $e^- + e^+ \rightarrow$ Hadronen. Die Streuquerschnitte, in dem Zusammenhang auch «Branching Ration» (\mathcal{BR}) oder Verzweigungsverhältnis genannt, sollten proportional zum Quadrat der Summe der Ladung der beteiligten Teilchen sein. Dies heisst, es wird erwartet, dass

$$\frac{\mathcal{BR}(e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen})}{\mathcal{BR}(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)} = \left(\frac{\sum_{\forall \text{Flavour}} Q_i}{e} \right)^2$$

sein sollte. Beobachtet wird jedoch, dass

$$\frac{\mathcal{BR}(e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen})}{\mathcal{BR}(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)} = 3 \left(\frac{\sum_{\forall \text{Flavour}} Q_i}{e} \right)^2 \quad (16.3.40)$$

gefunden wurde. Das experimentelle Resultat von Gleichung (16.3.40) deutet auf eine weitere Quantenzahl mit drei Eigenvektoren hin. Diese Quantenzahl ist die FARBLADUNG mit den Ladungen r (rot), g (grün) und b (blau). Die Antiladungen existieren auch, nämlich $\bar{r} = c$ (Cyan), $\bar{g} = m$ (magenta) und $\bar{b} = y$ (yellow, gelb). Weiter gibt es die Eigenschaft, dass alle beobachtbaren Partikel farblos sein müssen.

Die Kräfte zwischen den Quarks werden durch GLUONEN vermittelt. Diese Wechselwirken mit der Farbladung. Wie ein Proton in ein Neutron übergehen kann am Beginn des Austausches und ein Neutron dann ein Proton wird können Gluonen sowohl farblos oder farbig geladen sein.

Beispiel:

$$\pi^+ = \begin{cases} u_r \bar{d}_r \\ u_g \bar{d}_g \\ u_b \bar{d}_b \end{cases} \quad (16.3.41a)$$

quantenmechanische korrekte Summe der Zustände:

$$\Rightarrow |\pi^+\rangle = \frac{1}{3} \{ |u_r \bar{d}_r\rangle + |u_g \bar{d}_g\rangle + |u_b \bar{d}_b\rangle \} \quad (16.3.41b)$$

²Oftmals wird die Topness auch mit T bezeichnet. Die Notation hier soll eine Verwechslung mit dem Isospin vermeiden.

16.4. Quarkfamilien und -eigenschaften

Die folgenden allgemeinen Regeln gelten für Quarks und deren Wechselwirkungen:

1. Ein Quark wird durch den Quarktyp und die Farbladung festgelegt. Es gibt also z.B. die drei möglichen Up-Quarks u_r , u_g und u_b , also eine rote, grüne und blaue Version.
2. Der Quarktyp kann sich nur durch die schwache Wechselwirkung ändern. Beim Zerfall des Neutrons in ein Proton wandelt sich ein Down-Quark in ein Up-Quark um.
3. Die Farbladung ändert sich, wenn Gluonen wechselwirken. Sowohl die Farbe des Ausgangsquarks wie auch auch die des Zielquarks ändern sich beim Austausch eines Gluons.

Familie		Ladung	Flavour	Masse/MeV
1.	d	$-\frac{1}{3}e$	$T_3 = -\frac{1}{2}$	$4.67^{+0.48}_{-0.17}$
	\bar{d}	$+\frac{1}{3}e$	$T_3 = +\frac{1}{2}$	$4.67^{+0.48}_{-0.17}$
	u	$+\frac{2}{3}e$	$T_3 = +\frac{1}{2}$	$2.16^{+0.49}_{-0.26}$
	\bar{u}	$-\frac{2}{3}e$	$T_3 = -\frac{1}{2}$	$2.16^{+0.49}_{-0.26}$
2.	s	$-\frac{1}{3}e$	$S = -1$	93^{+11}_{-5}
	\bar{s}	$+\frac{1}{3}e$	$S = +1$	93^{+11}_{-5}
	c	$+\frac{2}{3}e$	$C = +1$	1270 ± 20
	\bar{c}	$-\frac{2}{3}e$	$C = -1$	1270 ± 20
3.	b	$-\frac{1}{3}e$	$B' = -1$	4180^{+30}_{-20}
	\bar{b}	$+\frac{1}{3}e$	$B' = +1$	4180^{+30}_{-20}
	t	$+\frac{2}{3}e$	$T' = +1$	$172\,760 \pm 300$
	\bar{t}	$-\frac{2}{3}e$	$T' = -1$	$172\,760 \pm 300$

Tab. 16.7.: Quarkfamilien mit Massen, FLAVOUR-QUANTENZAHLEN und Massen (nach [Zyl21] und [Wik22d]).

Tabelle 16.7 gibt eine Zusammenfassung der möglichen Quarks und deren Antiteilchen mit ihren Ladungen, ihren FLAVOUR-QUANTENZAHLEN und ihren Massen. Nach der Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung von Paul Dirac gibt es neben beobachtbaren Elektronen und Positronen einen See virtueller Elektronen und Positronen, die durch Fluktuationen die Korrekturterme der Quantenelektrodynamik bewirken. Analog gibt es VALENZQUARKS und (virtuelle) SEEQUARKS.

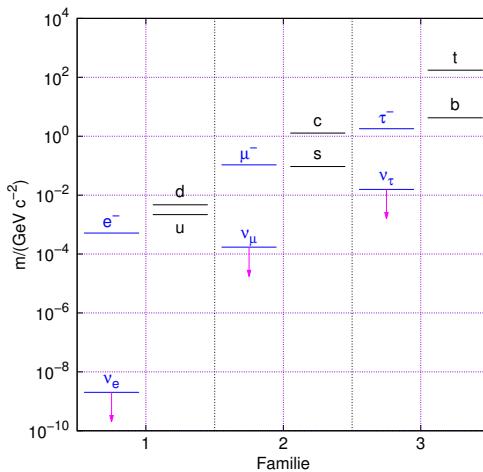


Abb. 16.11.: Massen von Quarks und Leptonen

Abbildung 16.11 zeigt die Massen aller Leptonen und aller Quarks. Die Massen der Neutrinos sind die obere Schranke für deren Massen.

Bemerkung:

Die PROTONENMASSE $938 \text{ MeV}/c^2$ ist viel grösser als die Summe der Quarkmassen von $2m_u + m_d < 35 \text{ MeV}/c^2$. Ein erster Grund dafür ist, dass die Quarks auf einen Bereich von etwa 1 fm beschränkt sind. Ein weiterer Grund ist, dass die Gluonen mit berücksichtigt werden müssen. Und dann haben wir kein statisches System sondern ein dynamisches.

A. Walker-Loud [Wal18] gibt an, dass der Einschluss der Quarks bei einem PROTENENRADIUS von 0.8751 fm für die drei Quarks zusammen über die Heisenberg'sche Unschärferelation auf eine kinetische Energie von 170 MeV führt. Eine über den Daumen gepeilte Grösse ist 1 fm für die drei Quarks auf $\approx 300 \text{ MeV}$. Diese ist die richtige Grössenordnung, aber einen Faktor drei falsch.

A. Walker-Loud [Wal18] führt weiter aus, dass die Wechselwirkung so stark ist, dass der Formalismus der FEYNMAN-DIAGRAMME nicht mehr funktioniert. Es müsse dann die Methode der «LATTICE QCD» verwendet werden. Dies meint, dass analog zu finiten Elemente-Berechnungen bei partiellen Differenzialgleichungen die Gleichungen auf der QUANTENCHROMODYNAMIK auf einem Gitter gelöst werden. Nach A. Walker-Loud [Wal18] kamen die Autoren Y.-B. Yang u. a. [Yan+18] zum Schluss, dass es vier Beiträge gäbe:

Quark-Kondensat Das QUARK-KONDENSAT trage 9 % zur Protonenmasse bei.

Mit dem Quark-Kondensat ist die Mischung aus zwei up- und einem down-Quark sowie dem See aus virtuellen Quarks. Der Beitrag verschwände, hätten Quarks keine Masse.

Energie der Quarks Der Beitrag der Energie der Quarks zur Protonenmasse sei 32 %. Dieser Beitrag stammt von der kinetischen Energie der Quarks

Stärke des gluonischen Feldes Das GLUONISCHE FELD trage 37 % zur Protonenmasse bei. Damit ist die kinetische Energie der Gluonen gemeint.

Anomaler Beitrag der Gluonen Der ANOMALE BEITRAG DER GLUONEN schliesslich liefere 23 % der Protonenmasse. Dieser Beitrag ist ein reiner Quanteneffekt. Er bezieht sich auf die Massenskala der Quantenchromodynamik (QCD) und enthält die Beiträge aller kondensierter Quarks mit allen sechs Flavours, beginnend mit dem up-Quark bis zu dem schwersten Quark, dem top-Quark.

Die Protonenmasse besteht also zu (90 bis 96) % aus der Konsequenz von Quanteneffekten. Allein die Massen der Quarks werden über den Higgs-Mechanismus erzeugt (siehe Abschnitt 18.2).

A. Walker-Loud bemerkt, dass damit mindestens 90 % der sichtbaren Materie im Kosmos Quanteneffekte seien.

17. Schwache Wechselwirkung

Das Charakteristikum der schwachen Wechselwirkung ist, dass sie Erhaltungssätze verletzt, die für die anderen Wechselwirkungen (**ELEKTROMAGNETISCHE WECHSELWIRKUNG**, **STARKE WECHSELWIRKUNG** und **GRAVITATION**) gelten. Die nicht erhaltenen Quantenzahlen sind

- die Parität,
- die Teilchen-Antiteilchen-Symmetrie
- und die Zeitumkehrsymmetrie.

Nur das Produkt aus allen drei zusammen ist erhalten. Soweit wir wissen erhält die schwache Wechselwirkung die **ENERGIE**, den **IMPULS** und den **DREHIMPULS**. Durch die Verletzung von Erhaltungssätzen sind die Prozesse der schwachen Wechselwirkung sehr unwahrscheinlich. Die manifestiert sich in der (relativ) langen Lebensdauer von Zuständen, die durch die **SCHWACHE WECHSELWIRKUNG** zerfallen. Ein Beispiel eines Zerfalls eines Teilchens durch die **SCHWACHE WECHSELWIRKUNG** ist der Zerfall des freien Neutrons in ein Proton.

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \tau \approx 879.4(60) \text{ s} \quad (17.0.1a)$$

$$(dud) \rightarrow (udu) + e^- + \bar{\nu}_e \quad (17.0.1b)$$

Neutronen in Kernen können stabil sein, wenn die Gesamtenergie des Kerns beim Zerfall des Neutrons höher wird als die durch den schwachen Zerfall freiwerdende Energie. Die Reaktion kann auch auf dem Niveau der Quarks beschrieben werden:

$$d \xrightarrow[\text{WW}]{\text{Schwache}} u + e^- + \bar{\nu}_e \quad (17.0.2)$$

Ein weiteres Beispiel für einen Zerfall durch die **SCHWACHE WECHSELWIRKUNG** ist

$$\Sigma^+(uus) \xrightarrow[\text{schwach}]{\text{schwach}} p(uud) + \pi^0(u\bar{u} + d\bar{d}) \quad \tau \approx 8 \cdot 10^{-11} \text{ s} \quad (17.0.3)$$

Hier wandelt sich ein strange-Quark (s) in ein down-Quark (d) um. Der nächste Zerfall

$$\Delta^+(uud) \xrightarrow[\text{stark}]{\text{stark}} p(uud) + \pi^0(u\bar{u} + d\bar{d}) \quad \tau \approx 6 \cdot 10^{-24} \text{ s} \quad (17.0.4)$$

hat eine sehr viel kürzere Lebensdauer. Weiter werden keine Quark-Flavours umgewandelt. Die relevante Wechselwirkung ist die **STARKE WECHSELWIRKUNG**. Seien die Lebensdauern oder Zeitkonstanten der drei Wechselwirkungen durch τ_{stark} , τ_{schwach} , τ_{em} und $\tau_{\text{Gravitation}}$ bezeichnet. Weiter seien die Kopplungskonstanten jeweils α_{stark} , α_{schwach} , α_{em} und $\alpha_{\text{Gravitation}}$. Wir kennen die Verhältnisse

$$\frac{\alpha_{\text{schwach}}}{\alpha_{\text{stark}}} = 10^{-6} \quad (17.0.5a)$$

$$\frac{\alpha_{\text{schwach}}}{\alpha_{\text{em}}} = 10^{-4} \quad (17.0.5b)$$

Daraus leitet sich die Beziehung

$$\frac{\tau_{\text{stark}}}{\tau_{\text{schwach}}} = \left(\frac{\alpha_{\text{schwach}}}{\alpha_{\text{stark}}} \right)^2 \quad (17.0.6)$$

ab. Dann ist

$$\frac{\tau_{\text{em}}}{\tau_{\text{schwach}}} = \left(\frac{\alpha_{\text{schwach}}}{\alpha_{\text{em}}} \right)^2 = (10^{-4})^2 = 10^{-8} \implies \tau_{\text{schwach}} = 10^8 \tau_{\text{em}} \quad (17.0.7)$$

Wenn die relative Stärke der Gravitationskopplungskonstante im Vergleich zur starken Wechselwirkung durch

$$\frac{\alpha_{\text{Gravitation}}}{\alpha_{\text{stark}}} = 10^{-41} \quad (17.0.8)$$

gegeben wäre ([Wik22b]), wäre die Lebensdauer eines gravitationsbedingten Zerfalls

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\text{Gravitation}}}{\tau_{\text{stark}}} &= \left(\frac{\alpha_{\text{stark}}}{\alpha_{\text{Gravitation}}} \right)^2 = (10^{41})^2 = 10^{82} \\ &\implies \tau_{\text{Gravitation}} = 10^{82} \tau_{\text{stark}} \approx 10^{82} \cdot (10^{-24} \text{ bis } 10^{-23}) \text{ s} \\ &= (10^{58} \text{ bis } 10^{59}) \text{ s} = (3 \cdot 10^{50} \text{ bis } 3 \cdot 10^{51}) \text{ a} \end{aligned} \quad (17.0.9)$$

Dies ist wesentlich länger als die bisherige Lebensdauer des Universums von $< 1.4 \cdot 10^{10}$ a.

17.1. Parität

Links und rechts sind in der Natur nicht äquivalent (siehe Abbildung 17.1). Wir nennen dies Paritätsverletzung.



Abb. 17.1.: ROSENKÄFER (*CETONIA AURATA*) im zirkular polarisierten Licht. Bei links-zirkularem Licht glänzt der Panzer, bei rechts-zirkularem Licht ist er dunkel. Der Spiegel hinter dem Käfer ändert die Händigkeit des Lichts (Credit: Jan Pavelka, CC BY-SA 4.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>>, via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b8/Cetonia_in_mirror.jpg).

Das Bild des Rosenkäfers in Abbildung 17.1 zeigt, dass die Natur nicht immer gleich auf Linkshändigkeit und Rechtshändigkeit bei der Wechselwirkung mit Licht reagiert.

Und die Physik, ist sie punktsymmetrisch!? Die folgenden Beobachtungen zeigen, dass dies nicht immer so ist.

- Desoxyribonukleinsäure (DNA) (Erbsubstanz) ist nur rechtshändig
- Neutrinos sind linkshändig
- Antineutrinos sind rechtshändig

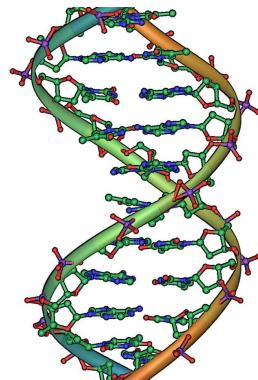


Abb. 17.2.: DNA als symmetriebrechendes Objekt. (Adaptiert von Michael Ströck (mstroeck) [GFDL (www.gnu.org/copyleft/fdl.html) or CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)], via Wikimedia Commons)

Abbildung 17.2 zeigt einen Cartoon der DNA, ein in der Regel nur rechtshändig vorkommendes Biopolymer.

17.1.1. Definition

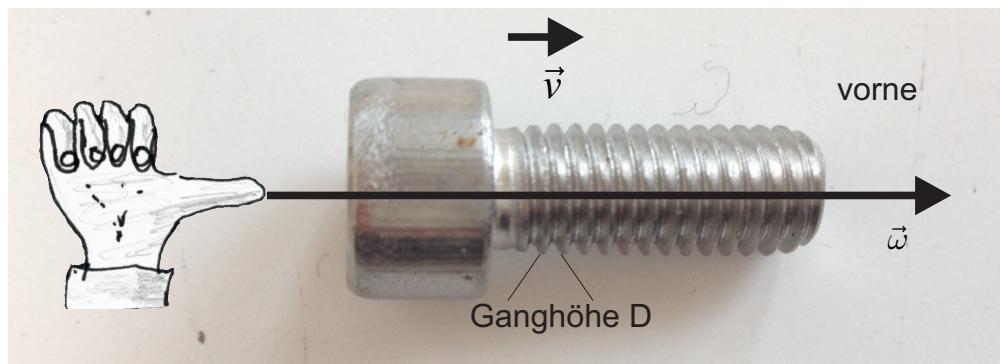


Abb. 17.3.: Definition der Parität (Nach einer Idee aus [Ble13])

Hinter dem Begriff der PARITÄT steht die Frage nach dem Drehsinn einer Schraube. Abbildung 17.3 zeigt anhand einer realen Schraube was gemeint ist. Wichtig ist der Drehsinn repräsentiert durch die Winkelgeschwindigkeit ω , die Ganghöhe des Schraubengewindes D und die resultierende Geschwindigkeit v . Daraus ergeben sich die folgenden Beobachtungen und Definitionen:

Rechtsschraube Geschwindigkeit bei Rechtsschraube $v = +D \frac{\omega}{2\pi}$

Linksschraube Geschwindigkeit bei Linksschraube $v = -D \frac{\omega}{2\pi}$

Parität Die Parität ist so definiert:

$$P = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}}{|\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{v}|} = \begin{cases} +1, & \text{Rechtsschraube, gerade Parität;} \\ -1, & \text{Linksschraube, ungerade Parität.} \end{cases} \quad (17.1.1)$$

Die folgenden Überlegungen zur PARITÄT sind [Ble13] entnommen.

Der PARITÄTSOPERATOR ist folgendermassen definiert:

$$\bar{\psi}(\mathbf{r}) = \hat{P}\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r}) \quad (17.1.2)$$

Wir der PARITÄTSOPERATOR zweimal auf eine Wellenfunktion angewandt, muss sich die originale Wellenfunktion ergeben:

$$\hat{P}^2\psi(\mathbf{r}) = \hat{1}\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \quad (17.1.3)$$

Deshalb müssen die Eigenwerte des Paritätsoperators ± 1 sein, also entweder

$$\psi_+(\mathbf{r}) = +1 \cdot \psi_+(\mathbf{r}) \quad (17.1.4a)$$

$$\psi_-(\mathbf{r}) = -1 \cdot \psi_-(\mathbf{r}) \quad (17.1.4b)$$

Der PARITÄTSOPERATOR ist hermitesch und unitär:

$$\hat{P} = \hat{P}^\dagger = \hat{P}^{-1} \quad (17.1.5)$$

Bewegungsgleichungen sind spiegelsymmetrisch. Das heisst:

$$[\hat{P}, \hat{H}] = 0 \quad (17.1.6)$$

Durch den PARITÄTSOPERATOR wird ein Operators \hat{O} nach $\bar{\hat{O}}$ transformiert

$$\bar{\hat{O}}\bar{\psi}(\mathbf{r}) = \hat{P}(\hat{O}\psi(\mathbf{r})) \quad (17.1.7)$$

Es gilt die Operatoridentität

$$\bar{\hat{O}}\hat{P} = \hat{P}\hat{O} \implies \bar{\hat{O}} = \hat{P}\hat{O}\hat{P} \quad (17.1.8)$$

Wird der Operator des Ortsvektors $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^T$ paritätstransformiert, ändert sich das Vorzeichen des transformierten Operators $\hat{P}\hat{\mathbf{r}}$. Vektoren, die unter einer Paritätstransformation das Vorzeichen ändern heißen POLARE VEKTOREN.

Der Operator des Drehimpulses $\hat{\ell} = (\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z)^T$ hingegen ändert bei einer Paritätstransformation $\hat{P}\hat{\ell}$ sein Vorzeichen nicht. Solche Vektoren werden AXIALE VEKTOREN genannt.

Die gleiche Mathematik steckt auch in PSEUDOZAHLEN. Bitte lesen Sie dazu die Ausführungen im Anhang C.3.

17.1.1.1. Beispiel elektrisches Dipolmoment

- Das magnetische Dipolmoment $\boldsymbol{\mu} = IA$ mit $\mathbf{A} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ist ein axialer Vektor.
- Das elektrische Dipolmoment $\mathbf{p}_{el} = qr$ ist ein polarer Vektor.

- Der Erwartungswert von $\hat{\mathbf{p}}_{el}$ in einem Zustand $|\psi\rangle$ mit definierter Parität P ist null: $\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\psi\rangle = 0$
- Wir haben $\hat{\mathbf{P}}|\psi\rangle = P|\psi\rangle$ und $|\bar{\psi}\rangle = \hat{\mathbf{P}}|\psi\rangle$
- Umformung von $\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\psi\rangle$

$$\langle\bar{\psi}|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\bar{\psi}\rangle = \langle\hat{\mathbf{P}}\psi|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\hat{\mathbf{P}}\psi\rangle = P^* \langle\psi|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\psi\rangle P = P^2 \langle\psi|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\psi\rangle \quad (17.1.9)$$

$$\langle\bar{\psi}|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\bar{\psi}\rangle = \langle\hat{\mathbf{P}}\psi|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\hat{\mathbf{P}}\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\mathbf{P}}^\dagger\hat{\mathbf{p}}_{el}\hat{\mathbf{P}}|\psi\rangle = \langle\psi|-\hat{\mathbf{p}}_{el}|\psi\rangle = -\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\psi\rangle \quad (17.1.10)$$

Also haben wir

$$\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\psi\rangle = -\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\psi\rangle = 0 \quad (17.1.11)$$

Wir erinnern uns: $\hat{\mathbf{r}}$ ändert das Vorzeichen unter einer Paritätstransformation!

- oder

$$\langle\bar{\psi}|\hat{\mathbf{p}}_{el}|\bar{\psi}\rangle = \int \bar{\psi}^* e \mathbf{r} \bar{\psi} d^3\mathbf{r} = e \int |\bar{\psi}(\mathbf{r})|^2 \mathbf{r} d^3\mathbf{r} \quad (17.1.12)$$

und $\bar{\psi}(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r}) = \pm\psi(\mathbf{r})$ sowie $|\bar{\psi}(\mathbf{r})|^2 = |\psi(-\mathbf{r})|^2 = |\psi(\mathbf{r})|^2 \implies |\psi(\mathbf{r})|^2$ ist eine gerade Funktion

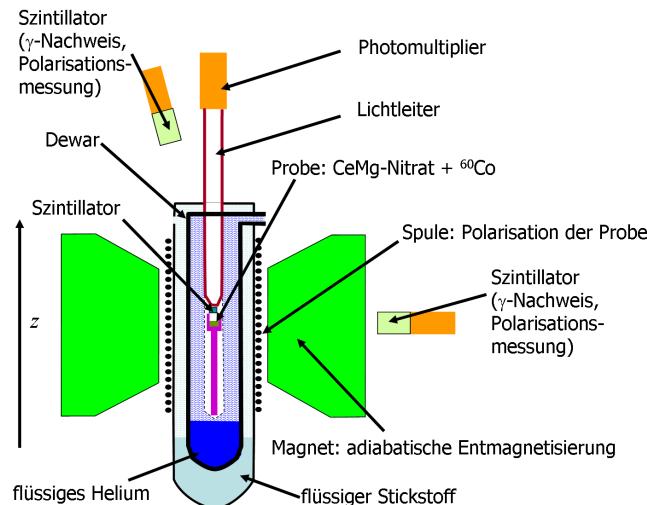
$$\int |\bar{\psi}(\mathbf{r})|^2 \mathbf{r} d^3\mathbf{r} = P^2 \int |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{r} d^3\mathbf{r} = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{r} d^3\mathbf{r} \quad (17.1.13)$$

$$\begin{aligned} \int |\bar{\psi}(\mathbf{r})|^2 \mathbf{r} d^3\mathbf{r} &= \int |\psi(-\mathbf{r})|^2 \mathbf{r} d^3\mathbf{r} \\ &= \int |\psi(\mathbf{r})|^2 (-\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = - \int |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{r} d^3\mathbf{r} \end{aligned} \quad (17.1.14)$$

Das heisst: $|\psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{r} = -|\psi(-\mathbf{r})|^2 (-\mathbf{r})$ ist ungerade!

17.1.2. Messung

Um die Paritätsverletzung zu messen ist es notwendig einen durch die schwache Wechselwirkung verursachten Zerfall zu untersuchen. Dabei bietet sich an, Dreimimpulse oder davon abgeleitete Vektoren zu messen. Chien-Shiung Wu führte das erste Experiment durch, in dem die Paritätsverletzung gemessen wurde. Dieses Experiment wurde in der Arbeit C. S. Wu u. a. „Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay“ [Wu+57] publiziert.



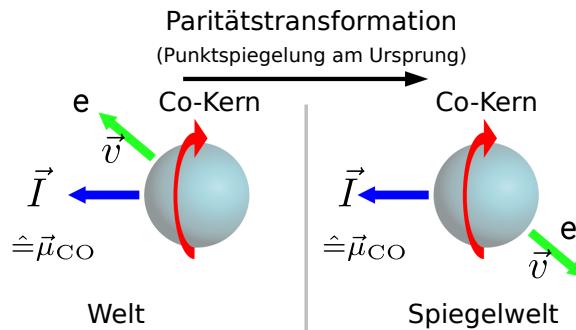
Pen88, Copyrighted free use, via Wikimedia Commons,
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/88/Wu-Experiment_wikipedia.png

Abb. 17.4.: Experiment zur Paritätsverletzung von Chien-Shiung Wu [Wu+57] (Credit: Pen88, Copyrighted free use, via Wikimedia Commons).

Abbildung 17.4 zeigt den experimentellen Aufbau. Ein KRYOSTAT ermöglicht es, ein Material mit magnetischen Kernmomenten, hier $^{60}_{27}\text{Co}$, möglichst gut zu polarisieren. Das Material befindet sich in einer ebenfalls magnetisierbaren Matrix. Szintillatoren erlauben, emittierte γ -Quanten zu detektieren und so die Ausrichtung (Polarisation) der Zerfallsprodukte zu messen. Durch eine Umkehr des magnetischen Feldes wird eine Paritätstransformation erzeugt. Dabei wird die Reaktion



Der resultierende Nickelkern ist angeregt. In der überwiegenden Mehrheit der Fälle (99.88 %) zerfällt die Anregung in zwei Stufen jemeils unter Aussendung eines γ -Quants. Die Energien sind $E_{\gamma,4 \rightarrow 2} = 1.173\,228$ MeV für den Übergang vom $J^\pi = 4^+$ -Niveau ins $J^\pi = 2^+$ -Niveau ($\tau = 3.3$ ps) und $E_{\gamma,2 \rightarrow 0} = 1.332\,501$ MeV ($\tau = 0.735$ ps) (Daten nach [Nat17]). Die restlichen Zerfälle des $^{60}_{27}\text{Co}$ enden im $J^\pi = 2^+$ -Niveau.



nagualdesign, CC0, via Wikimedia Commons

Abb. 17.5.: Paritätstransformation beim Co-Kern (Credit: nagualdesign, CC0, via Wikimedia Commons).

Durch die Umkehrung des Magnetfeldes (siehe Abb. 17.5 auf dem Massstab der Kerne) kehrt sich im Experiment auch die Richtung der maximalen Elektronenemission um. Dies darf bei einer paritätserhaltenden Reaktion nicht geschehen.

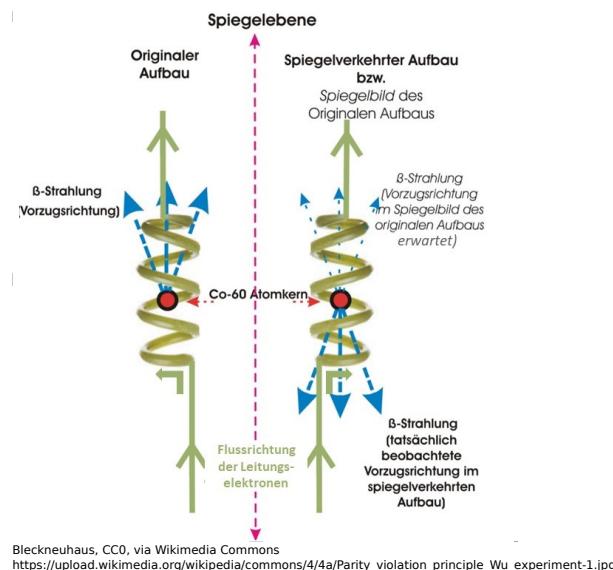


Abb. 17.6.: Prinzip des Experiments zur Paritätsverletzung nach Chien-Shiung Wu [Wu+57] (Credit: Bleckneuhaus, CC0, via Wikimedia Commons).

Abbildung 17.6 zeigt den Effekt mit den verwendeten Magnetfeldern. Erwartet wurde, dass die Paritätstransformation die Emissionsrichtung nicht ändert. Gemessen wurde eine maximale Verletzung der Paritätserhaltung.

Zur Analyse wird die HELIZITÄT verwendet. Ein Teilchen mit Geschwindigkeit \mathbf{v} (oder dem Impuls \mathbf{p}) und dem Spin \mathbf{s} hat die Helizität

$$H = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{s}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{s}| \cdot |\mathbf{p}|} \quad (17.1.16)$$

Es kann ein Operator der Helizität definiert werden, der mit dem HAMILTONOPERATOR kommutiert. Für masselose Teilchen wie das Photon ist die HELIZITÄT das Gleiche wie die CHIRALITÄT und eine Erhaltungsgröße (siehe auch M. Wilkens *Höhere Theoretische Physik - Quantenmechanik II* [Wil15]).

Wenn der Spin eines Elektrons (mit Masse!) mit der Geschwindigkeit $|\mathbf{v}| = v$ parallel zu seiner Flugrichtung ausgerichtet ist, ist $H_{e^-} = 1$. Wenn dieses Teilchen in ein Inertialssystem mit $v^* > v$ transformiert wird, ändert sich die Helizität

$$H_{e^-, v} = 1 \Rightarrow H_{e^-, v^* > v} = -1 \quad (17.1.17)$$

Die Helizität hängt also von der Wahl des Bezugssystems ab. Wenn jedoch die Masse $m_0 = 0$ ist, das heißt wenn $v = c$ ist, gilt diese Aussage nicht mehr. Die CHIRALITÄT andererseits ist durch die γ^5 -Komponente in der Diractheorie gegeben und eine relativistisch erhaltene Größe. Für massebehaftete Teilchen koppelt die CHIRALITÄT die links- und die rechtshändigen Zustände (siehe auch M. Wilkens *Höhere Theoretische Physik - Quantenmechanik II* [Wil15]).

Es können nur Neutrinos ν mit $H = -1$ beobachtet werden. Neutrinos mit positiver Helizität können existieren, aber sie wechselwirken nicht mit normaler Materie.

17.1.3. Universalprinzip bei der Umwandlung von Teilchen

Jedes Teilchen zerfällt in leichtere Teilchen, wenn dies nicht durch Erhaltungssätze verboten ist.

Teilchen	Grund
$h\nu$	stabil, da $m_0 = 0$
$\bar{\nu}_e$	stabil, weil kein leichteres Lepton vorhanden ist
e^-	stabil, weil es das leichteste geladene Teilchen ist
p	stabil(wahrscheinlich) weil es das leichteste Baryon ist

Tab. 17.1.: Tabelle der nach heutigem Wissensstand stabilen Teilchen

Daraus ergeben sich die nach heutigem Wissenstand die in Tabelle 17.1 aufgeführten stabilen Teilchen. Instabile Teilchen zerfallen nach drei verschiedenen Mechanismen. Diese drei beobachteten Zerfallsmöglichkeiten entsprechen den drei Wechselwirkungen (ohne die Gravitation).

$$\Delta^{++} \rightarrow p^+ + \pi^+ \quad \text{starke WW} \quad \tau \approx 10^{-23} \text{ s} \quad (17.1.18a)$$

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad \text{elektromag. WW} \quad \tau \approx (10^{-16} \text{ bis } 10^{-3}) \text{ s} \quad (17.1.18b)$$

$$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^- \quad \text{schwache WW} \quad \tau \approx 1.48 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad (17.1.18c)$$

Gleichung (17.1.18) listet drei Beispiele für alle drei Zerfallsarten auf.

Die beiden Erhaltungsgrößen LEPTONENZAHL L und BARYONENZAHL B sind nach heutigem Wissensstand empirische Erhaltungsgrößen. Es gibt keine Begründung aus allgemeinen Symmetrieverlegungen wie zum Beispiel nach Emmy Noether bei der Energie.

$$\tau_p > 9 \cdot 10^{32} \text{ a} \quad (17.1.19)$$

Trotz der fehlenden theoretischen Begründung ist die BARYONENZAHL B sehr gut erhalten. Nach Gleichung (17.1.19) ist die Lebensdauer eines PROTONS länger als die Lebensdauer des UNIVERSUMS.

17.2. Ladungskonjugation (C-Symmetrie)

Nach [Ble13] gilt die folgende Argumentation

- Ladungssparität bedeutet:

$$[\hat{C}, \hat{H}] = 0 \quad (17.2.1)$$

wegen $\hat{C}^2 = \hat{1}$ sind die Eigenwerte $C = \pm 1$.

- Analog zur Parität: Wenn die Ladungssparität definiert ist, muss $Q_{tot} = 0$ sein!
- Photon: $C_\gamma = -1$ weil elektromagnetische Felder bei der Ladungskonjugation die Richtung wechseln.

Das neutrale Pion π^0 hat $C_\pi = +1$, da es sonst nicht in 2 Photonen zerfallen kann.

Das Positronium: hat $C_{e^+e^-} = \pm 1$ abhängig von Bahndrehimpuls und Gesamtspin.

- $L = S = 0$ (Singulett) folgt $C_{e^+e^-} = +1 \Rightarrow$ Zerfall in 2γ
- $L = 0, S = 1$ (Triplet) folgt $C_{e^+e^-} = -1 \Rightarrow$ Zerfall in $3\gamma \Rightarrow$ mehr Vertices \Rightarrow längere Lebensdauer (Faktor 1000)

- Allgemein ist der Eigenwert von \hat{C} für ein System von mehreren Teilchen gegeben durch

$$\eta_C = (-1)^J \quad (17.2.2)$$

wobei $J = L + S, \dots, |L - S|$ der Gesamtdrehimpuls des Systems ist und L dessen Gesamtbahndrehimpuls sowie S dessen Gesamtspin. Die Addition folgt nach den Regeln der Drehimpulsaddition.

Beim Übergang Neutrino \rightarrow Antineutrino müsste die linkshändige Helizität in die linkshändige Helizität übergehen.

\mathbf{v} ist ein Vektor, \mathbf{s} ein Pseudovektor. Deshalb ändert die Helizität das Vorzeichen.

Die C -Symmetrie ist also verletzt!

Alle Prozesse der schwachen Wechselwirkung verletzen die C -Symmetrie.

17.3. CP-Symmetrie

CP -Symmetrie bei der Neutrino-Antineutrino-Transformation

	ν_e	$\bar{\nu}_e$	
	$H = -1$	$H = +1$	
C	v	\rightarrow	v
	s	\rightarrow	s
P	v	\rightarrow	$-v$
	s	\rightarrow	s
CP	v	\rightarrow	$-v$
	s	\rightarrow	s

Wenn man also die C -Symmetrie mit der P -Symmetrie kombiniert, ist die Neutrino-Antineutrino-Transformation kompatibel.

17.4. Zeitumkehr (T -Symmetrie)

Bis auf die Gesetze der Thermodynamik sind die Gesetze der Physik (Mechanik, Elektrizitätslehre, Atomphysik, Optik) in der Zeit umkehrbar. Auch wenn die Entropie nur zunehmen kann, sind die zugrunde liegenden Gesetze zeitumkehrinvariant.

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 12.4.1.] wird die Zeitumkehrsymmetrie quantenmechanisch durch den Operator \hat{T} beschrieben. Der Operator \hat{T} bewirkt

$$t \xrightarrow{\hat{T}} -t \quad (17.4.1)$$

Ein Ortsvektor ändert sich unter \hat{T} nicht. Die Geschwindigkeit jedoch ändert das Vorzeichen $\mathbf{v} \xrightarrow{\hat{T}} -\mathbf{v}$, da in ihr ja die Zeit steckt. Der Drehimpuls als Kreuzprodukt eines Ortsvektors und eines Impulsvektors ändert ebenso sein Vorzeichen $\mathbf{L} \xrightarrow{\hat{T}} -\mathbf{L}$.

Die Zeitumkehr führt bei der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung auf eine andere Gleichung (siehe A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 11.3.])

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t) \xrightarrow{\hat{T}} -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, -t) = \hat{H} \psi(\mathbf{r}, -t) \quad (17.4.2)$$

In Gleichung 17.4.2 wurde angenommen, dass der Hamiltonoperator als hermitischer Operator reell ist. Die Schrödinger-Gleichung kann nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 11.3.] invariant unter dem Zeitumkehroperator \hat{T} gemacht werden, wenn wir verlangen, dass

$$\psi(\mathbf{r}, t) \xrightarrow{\hat{T}} \psi^*(\mathbf{r}, -t) \quad (17.4.3)$$

ist. Dann ist die konjugiert komplexe Schrödinger-Gleichung

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \psi^*(\mathbf{r}, t)$$

Mit dem Zeitumkehroperator ergibt sich dann

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t) \xrightarrow{\hat{T}} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\mathbf{r}, -t) = \hat{H} \psi^*(\mathbf{r}, -t) \quad (17.4.4)$$

Hier ist die Form der Schrödingergleichung invariant, wenn die Zeitumkehroperation für Wellenfunktionen wie in Gleichung (17.4.3) definiert ist. Der Zeitumkehroperator ist nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 11.3.] ein ANTLINEARER OPERATOR. Da Wellenfunktionen in der Quantenmechanik komplex sein müssen, können sie keine Eigenfunktionen von \hat{T} sein.

A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 11.3.] führen weiter aus, dass wegen dem Prinzip der «DETAILED BALANCE» der Betrag des Transfermatrixelements für den Vorwärtsprozess gleich sei wie der Betrag des Transfermatrixelements des Rückwärtsprozesses, also

$$|M_{i \rightarrow f}| = |M_{f \rightarrow i}| \quad (17.4.5)$$

Daraus folge nach FERMIS GOLDERNER REGEL, dass die Wahrscheinlichkeiten nur noch von den Zustandsdichten der jeweiligen Ausgangszuständen abhängen. Mit der Definition

$$\bar{\psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{T} \psi(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, -t) \quad (17.4.6)$$

ist die Zeitumkehrtransformation eines Operators \hat{O}

$$\bar{\hat{O}}\bar{\psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{T} (\hat{O}\psi(\mathbf{r})) = \hat{O}^\dagger \psi^*(\mathbf{r}, -t) \quad (17.4.7)$$

Bei Erwartungswerten oder Übergangsmatrixelementen gilt

$$\langle \psi | \hat{O} | \varphi \rangle = \langle \varphi | \hat{O}^\dagger | \psi \rangle^* \quad (17.4.8)$$

Messbare Größen sind durch hermitesche Operatoren $\hat{O}^\dagger = \hat{O}$ gegeben. Der Hamiltonoperator genügt dieser Anforderung. Deshalb ist die Quantenmechanik zeitumkehrinvariant.

Doppelte Anwendung des Zeitumkehroperators ergibt

$$\hat{T}^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{T} \psi^*(\mathbf{r}, -t) = \psi^*(\mathbf{r}, -t)^* = \hat{1} \psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) \quad (17.4.9)$$

Das deutet auf die Eigenwerte ± 1 hin.

Bei Spinoren (Spins) wird ein System durch zwei Wellenfunktionen beschrieben

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \psi_\uparrow(\mathbf{r}, t) \quad (17.4.10a)$$

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = +\psi_\downarrow(\mathbf{r}, t) \quad (17.4.10b)$$

Die Pfeile beschreiben den Spinzustand. Die Anwendung des Zeitumkehroperators ergibt

$$\hat{T}(\psi_1(\mathbf{r}, t)) = \psi_{\downarrow}^*(\mathbf{r}, -t) \quad (17.4.11a)$$

$$\hat{T}(\psi_2(\mathbf{r}, t)) = -\psi_{\uparrow}^*(\mathbf{r}, -t) \quad (17.4.11b)$$

Auch hier ergeben sich konjugiert komplexe Wellenfunktionen sowie die Umkehr der Spinkomponenten. Die Änderung des Vorzeichens ergibt sich aus der für Spionen in $U(2)$ übliche halbe Winkel.

17.5. CPT-Symmetrie

$$\begin{aligned} C & \text{ Teilchen-Antiteilchen-Symmetrie} \\ P & \text{ Parität} \\ T & \text{ Zeitumkehr} \end{aligned} \quad (17.5.1)$$

Dadurch dass die Helizität des Neutrinos festgelegt ist werden Elektronen bevorzugt gegen den Spin des Neutrinos emittiert.

Es gibt keine in sich konsistente Theorie, bei der die CPT-Symmetrie verletzt ist

\hat{C} -Symmetrie ist verletzt, da beim Übergang Neutrino \rightarrow Antineutrino linkshändig in linkshändig übergehen müsste (s ist axial, v aber polar)

Alle Prozesse der schwachen WW verletzen die C-Symmetrie

Die $\hat{C} \cdot \hat{P}$ -Symmetrie gilt für Neutrinos.

17.5.1. K^0 -Mesonen

Die Zerfälle der Kaonen verletzen auch die $\hat{C} \cdot \hat{P}$ -Symmetrie.

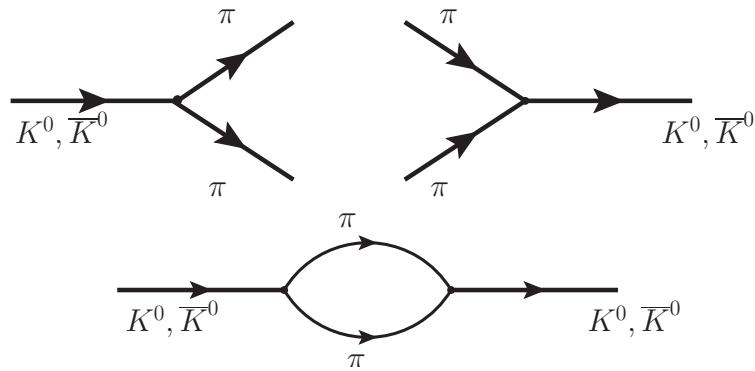


Abb. 17.7.: Feynman-Diagramme des Kaon-Zerfalls (nach [Ble13]).

- Der untere Prozess ermöglicht zum Beispiel eine Umwandlung $\bar{K}^0 \rightarrow K^0$ oder $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$.
- Da der Energieunterschied zwischen K^0 und \bar{K}^0 sehr klein ist ($\Delta E = (m_{K^0} - m_{\bar{K}^0}) c^2 \ll 1$ eV), sind die Schwebungen sichtbar (Strangenessoszillation). Ausser der Schwachen Wechselwirkung sind alle anderen WW gleich.
- Kurzlebiges Kaon K_S^0

$$K_S^0 \xrightarrow{\quad} \pi^+ + \pi^- \quad (17.5.2)$$

$$K_S^0 \xrightarrow{\quad} \pi^0 + \pi^0$$

langlebiges Kaon

$$K_L^0 \xrightarrow{\quad} \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \quad (17.5.3)$$

$$K_L^0 \xrightarrow{\quad} \pi^0 + \pi^0 + \pi^0$$

- K_L^0 und K_S^0 haben die gleiche Masse, aber unterschiedliche Lebensdauern

Parität

$$(17.5.2): \quad P = +1 \quad (17.5.4a)$$

$$(17.5.3): \quad P = -1 \quad (17.5.4b)$$

Da (17.5.2) und (17.5.3) möglich sind \rightarrow CP-Verletzung
Quarkmodell

$$K^0 = (d\bar{s}) \quad \bar{K}^0 = (\bar{d}s) \quad (17.5.5)$$

Schwache WW erlaubt $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$ mit ($s \leftrightarrow \bar{s}$, $d \leftrightarrow \bar{d}$) unter Austausch zweier W-Bosonen

\Rightarrow Mischzustände

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle \} \quad \text{und} \quad \hat{C} \cdot \hat{P} |K_1^0\rangle = +1 |K_1^0\rangle \quad (17.5.6)$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle \} \quad \text{mit} \quad \hat{C} \cdot \hat{P} |K_2^0\rangle = -1 |K_2^0\rangle \quad (17.5.7)$$

Hier wäre

$$|K_1^0\rangle = |K_S^0\rangle \quad (17.5.8a)$$

$$|K_2^0\rangle = |K_L^0\rangle \quad (17.5.8b)$$

Experiment

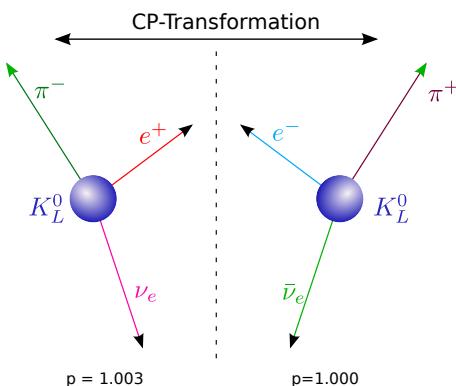


Abb. 17.8.: Semileptonischer Zerfall des K_L^0 -Teilchen. Die Variante mit dem π^- ist leicht wahrscheinlicher. (Zeichnung nach [Dem10, Abb. 7.38])

1. Flugstrecke, bei der die Zeit zum Durchlaufen $\tau \gg \tau_{K_S^0}$ ist
 \Rightarrow Es sollten nur 3π -Zerfälle auftreten. Aber mit Wahrscheinlichkeit $p = 3 \cdot 10^{-3}$ gibt es auch 2π -Zerfälle
2. zu 40.55 % aller Zerfälle ([Zyl21] und P. A. Zyla u. a. [Zyl+20])

$$K_1^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e \quad (17.5.9a)$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \pi^- + e^+ + \nu_e \quad (17.5.9b)$$

oder zu 27.04 % aller Zerfälle

3.

$$K_1^0 \longrightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (17.5.10a)$$

$$\downarrow \\ \pi^- + \mu^+ + \nu_\mu \quad (17.5.10b)$$

(17.5.10a) ist um 1.0033 häufiger als (17.5.10b) \Rightarrow CP-Verletzung

\Rightarrow CP-Verletzung erlaubt absolut das Ladungsvorzeichen zu bestimmen
M. Thomson [Tho11] gibt in seinem Online-Handout https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~thomson/partIIIParticles/handouts/Handout_12_2011.pdf einen guten Überblick über die korrekte quantenmechanische Formulierung der CP-Symmetrie und ihrer Verletzung.

\Rightarrow Wenn $\hat{C}\hat{P}$ verletzt ist, muss auch \hat{T} verletzt sein. Aber: Keine experimentelle Bestätigung

z.B. isoliertes Neutron $\Rightarrow \mathbf{s}$ ist einzige Vorzugsrichtung, d.h. ein magnetisches Drehmoment muss entlang \mathbf{s} liegen.

$$\text{Energie: } W = -\mathbf{d}_n \cdot \mathbf{E} \propto \mathbf{s} \cdot \mathbf{E} \quad (17.5.11)$$

$$\hat{P}(\mathbf{s}, \mathbf{E}) \longrightarrow (\mathbf{s}, -\mathbf{E}) \quad (17.5.12a)$$

$$\hat{T}(\mathbf{s}, \mathbf{E}) \longrightarrow (-\mathbf{s}, \mathbf{E}) \quad (17.5.12b)$$

Wenn das Neutron ein elektrisches Dipolmoment hätte, wäre dies nach [Dem10, p. 210] ein Beweis für die die Verletzung der \hat{T} -Symmetrie. Wenn der Spin oder das E-Feld umgepolt werden ergibt sich ein Energieunterschied von $\Delta W = 2W$. Norman Ramsey hat dies genau nachgemessen und kann eine obere Schranke für das elektrische Dipolmoment des Neutrons von $d_n < 2.3 \cdot 10^{-46}$ C m angeben.

Grösse	\hat{P}	\hat{C}	\hat{T}
Ortsvektor \mathbf{r}	$-\mathbf{r}$	\mathbf{r}	\mathbf{r}
Zeit t	t	t	$-t$
Impuls \mathbf{p}	$-\mathbf{p}$	\mathbf{p}	$-\mathbf{p}$
Drehimpuls \mathbf{L}	\mathbf{L}	\mathbf{L}	$-\mathbf{L}$
Spin \mathbf{s}	\mathbf{s}	\mathbf{s}	$-\mathbf{s}$
elektr. Feld \mathbf{E}	$-\mathbf{E}$	$-\mathbf{E}$	\mathbf{E}
magn. Feld \mathbf{H}	\mathbf{H}	$-\mathbf{H}$	\mathbf{H}

Tab. 17.2.: Symmetrioperationen und Messgrößen.

17.6. G-Symmetrie

Die \hat{C} -Symmetrie ist nur für neutrale, also ladungslose Teilchen definiert. Sie kann zur sogenannten \hat{G} -SYMMETRIE erweitert werden. Bei der \hat{G} -Symmetrie können auch geladene Teilchen (Mesonen) Eigenzustände sein. Der Symmetriekoeffizient ist durch

$$\hat{G} = \hat{C} e^{i\pi T_2} \quad (17.6.1)$$

definiert. \hat{C} ist dabei der Operator der Ladungskonjugation nach Kap. 17.2 definiert. T_2 ist die «2»-Komponente des Isospins, analog zur «2»-Komponente des Spins (die y -Komponente). $\exp(i\pi T_2)$ rotiert die T_3 um die «2»-Achse um den Winkel π . Das Vorzeichen von T_3 kehrt sich um.

Der \hat{G} -Operator verknüpft die Ladungskonjugation (Teilchen-Antiteilchen-Transformation) mit einem Vorzeichenwechsel für die «3»-Komponente des Isospins. In der STARKEN WECHSELWIRKUNG ist der Isospin und die Ladungskonjugation erhalten. Deshalb ist die \hat{G} -Symmetrie auch erhalten.

Die PIONEN bilden ein Triplet. Die \hat{G} -Symmetrie wirkt immer auf alle Elemente eines Multipletts. Multipletts mit einer gemittelten Ladung von Null (gilt für die elektrische Ladung Q , die Baryonenzahl B und die Hyperladung $Y = B + S + C + B' + T'$) sind Eigenzustände von \hat{G} .

Allgemein gilt für den Eigenwert η_G (sofern er existiert)

$$\eta_G = \eta_C (-1)^T \xrightarrow{\eta_C=(-1)^J} (-1)^{J+T} \quad (17.6.2)$$

wobei $J = L + S, \dots, |L - S|$ und L der Gesamtbahndrehimpuls des Systems und S dessen Gesamtspin ist.

17.7. Angabe des Symmetriezustandes

In Datensammlungen wie R. C. Weast und M. J. Astle *Handbook of Chemistry and Physics* [WA80], Mesonen und Baryonentabelle im Abschnitt F, M. Tanabashi u. a. [Tan+18b, p. 1738], Particle Data Group [Par20b] oder Particle Data Group [Par20a] werden die Symmetriezustände wie folgt angegeben

Baryonen $T(J^P)$ (oder wenn der Isospin mit I bezeichnet wird $I(J^P)$). T (I) ist der Isospin, J der GesamtSpin, bei einfachen Teilchen ist I der Spin und P ein Symbol. + bedeutet dass der Eigenwert $\eta_P = +1$ ist. – bezeichnet dementsprechend den Eigenwert $\eta_P = -1$.

geladene Mesonen $T^G(J^P)$ (oder wenn der Isospin mit I bezeichnet wird $I^G(J^P)$). Die Bedeutungen sind wie bei den Baryonen. Zusätzlich ist G der Eigenwert des \hat{G} -Operators, also + für $\eta_G = +1$ und – für $\eta_G = -1$.

ungeladene Mesonen $T^G(J^{PC})$ (oder wenn der Isospin mit I bezeichnet wird $I^G(J^{PC})$). Die Bedeutungen sind wie bei den Baryonen oder den geladenen Mesonen. Zusätzlich ist C der Eigenwert des \hat{C} -Operators, also + für $\eta_C = +1$ und – für $\eta_C = -1$.

Leptonen J Leptonen werden nur durch ihren Spin beschrieben

Photon $T(J^{PC})$ (oder wenn der Isospin mit I bezeichnet wird $I(J^{PC})$) Die Bezeichnungen entsprechen denen bei Baryonen oder (un-)geladenen Mesonen.
In Zahlen $T(J^{PC}) = 0, 1(1^{--})$ [Zyl21].

Graviton $J = 2$ [Zyl21].

Bosonen J bei ungeladenen oder geladenen Eichbosonen (ausser dem Photon)

17.8. Antimaterie

Nach [Ble13]

Antimaterie ist die Sorte *elektrisch geladener* Leptonen, die beim Zerfall des *langlebigen* Kaons häufiger auftritt

Dies kann das Verhalten der Materie beim Urknall und das Überwiegen von Materie erklären.

17.9. Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung

- Die schwache Wechselwirkung wird durch **W- und Z-Bosonen** vermittelt
- Schwache Wechselwirkungen, bei denen elektrische Ladung ausgetauscht wird: Reaktionen geladener Ströme

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (17.9.1)$$

Abbildung 17.9 zeigt das Feynman-Diagramm des Neutronenzerfalls mit einem geladenen schwachen Strom.

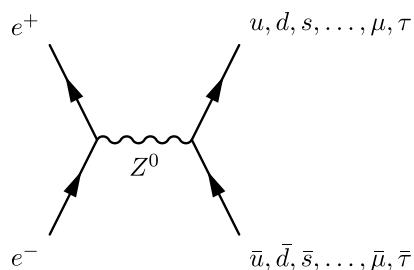


Abb. 17.9.: Schwacher geladener Strom bei Zerfall eines Neutrons

$$\tau^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \quad (17.9.2)$$

Abbildung 17.10 zeigt das Feynman-Diagramm des τ^- -Zerfalls in ein μ^- .

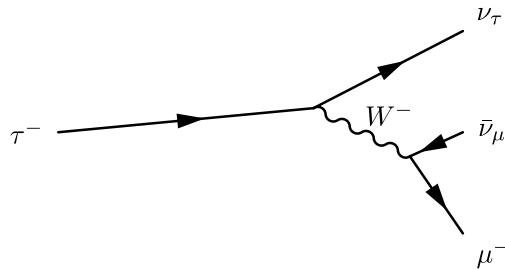


Abb. 17.10.: Schwacher geladener Strom beim τ -Zerfall.

$$\tau^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \quad (17.9.3)$$

Abbildung 17.11 zeigt das Feynman-Diagramm des τ^- -Zerfalls in ein e^- .

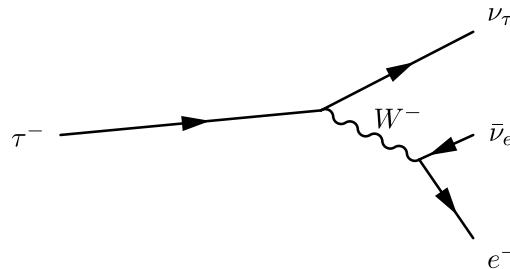


Abb. 17.11.: Schwacher geladener Strom beim τ -Zerfall, hier in ein Elektron und ein Antielektronneutrino.

- Prozesse ohne Ladungsänderung: Reaktionen der neutralen Ströme

$$e^+ + e^- \longrightarrow Z^0 \longrightarrow u + \bar{u} \text{ oder } (d + \bar{d}) \text{ oder } \dots \quad (17.9.4)$$

Abbildung 17.12 zeigt den schwachen Strom bei der Elektron-Positron-Annihilation. Anstelle des Z^0 könnte auch ein γ ausgetauscht werden. In der elektroschwachen Wechselwirkungstheorie sind Z^0 und γ Mischzustände zweier reiner Teilchen W^0 und B .

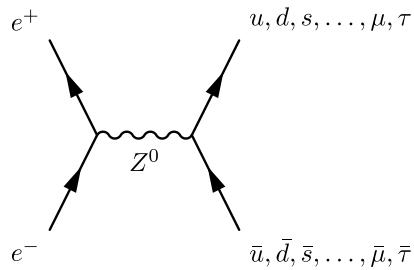


Abb. 17.12.: Schwacher Neutraler Strom bei der Elektron-Positron-Annihilation.

Streuung

$$\nu_\mu + p \longrightarrow \nu_\mu + p \quad (17.9.5)$$

Abbildung 17.13 zeigt den schwachen neutralen Strom bei der Streuung eines Neutrinos an einem Proton.

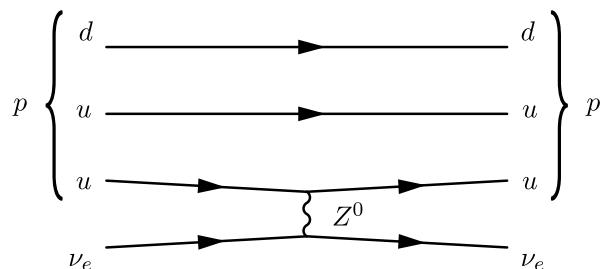


Abb. 17.13.: Schwacher neutraler Strom bei der Streuung eines Neutrinos an einem Proton.

$$\nu_\mu + e^- \longrightarrow \nu_\mu + e^- \quad (17.9.6)$$

Abbildung 17.13 zeigt den schwachen neutralen Strom bei der Streuung eines Neutrinos an einem Proton.

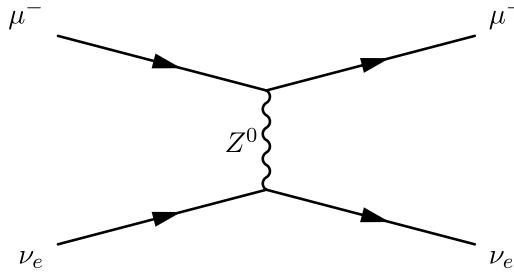


Abb. 17.14.: Schwacher neutraler Strom bei der Streuung eines Neutrinos an einem Myon.

Nach Hideki Yukawa ist

$$R \approx 2 \cdot 10^{-18} \text{ m} \quad (17.9.7)$$

dann ist

$$m \geq \frac{\hbar}{R \cdot c} \approx 1.5 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \hat{=} 80 \text{ GeV} \quad (17.9.8)$$

17.9.1. β -Zerfall und Streuung von Neutrinos

Neutronenzerfall (β -Zerfall) auf Quarkniveau

$$d \longrightarrow u + W^{*-} \quad (17.9.9)$$

$$W^{*-} \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e \quad (17.9.10)$$

Ladung

$$q_{W^-} = -e \quad (17.9.11)$$

Wenn genügend Bindungsenergie vorhanden ist geht auch

$$u \longrightarrow d + W^{*+} \quad (17.9.12a)$$

$$W^{*+} \longrightarrow e^+ + \nu_e \quad (17.9.12b)$$

Analogie zur elektromagnetischen Wechselwirkung

Streuung von Neutrinos mit virtuellen W-Bosonen

$$e_{ein}^- \longrightarrow \nu_{e,aus} + W^{*-} \quad \nu_{e,ein} + W^{*-} \longrightarrow e_{aus}^- \quad (17.9.13)$$

$$\nu_{e,ein} \longrightarrow e_{aus}^- + W^{*+} \quad e_{ein}^- + W^{*+} \longrightarrow \nu_{e,aus} \quad (17.9.14)$$

17.9.2. Reelle W- und Z-Bosonen

$$e^- + e^+ \longrightarrow Z^0 \quad (17.9.15)$$

1982 (Simon van der Meer und Carlo Rubbia)[Arn+83]

$$p + \bar{p} \longrightarrow W^\pm + X \quad (17.9.16)$$

(X: sind weitere Teilchen)

Quarks

$$u + \bar{d} \longrightarrow W^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e \quad (17.9.17a)$$

$$d + \bar{u} \longrightarrow W^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e \quad (17.9.17b)$$

$$u + \bar{u} \longrightarrow Z^0 \longrightarrow \begin{cases} e^+ + e^- \\ \mu^+ + \mu^- \end{cases} \quad (17.9.17c)$$

Boson	Masse in GeV/c^2	Resonanzbreite Γ in GeV
W^\pm	80.2 ± 0.26	2.08 ± 0.07
Z^0	91.18 ± 0.004	2.497 ± 0.004

Nach U. Ellwanger[Ell15] ist

- W^+ und W^- -Bosonen koppeln nur an linkshändige Fermionen (alle Quarks und alle Leptonen einschliesslich Neutrinos).
- W^+ und W^- -Bosonen koppeln nur an rechtshändige fermionische Antiteilchen (alle Quarks und alle Leptonen einschliesslich Neutrinos).
- Linkshändige Quarks und Leptonen haben einen schwachen Isospin.
- Quarks und Leptonen sind in drei Familien eingeteilt

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad (17.9.18)$$

Genau so wie sich Proton und Neutron als zwei Teilchen mit dem Isospin $T = \frac{1}{2}$ und unterschiedlichen T_3 -Komponenten auffassen lassen, lassen sich zum Beispiel u und d über einen **schwachen Isospin** unterscheiden: $T_{w,3}(u) = \frac{1}{2}$, $T_{w,3}(d) = -\frac{1}{2}$.

- Emission und Absorption eines W^\pm wandelt ein Lepton immer in ein Lepton der gleichen Familie um.
- Die Emission oder Absorption eines W^\pm kann ein Quark auch in ein Quark einer anderen Familie umwandeln. Kopplungsstärken werden durch die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix beschrieben.
- W^\pm -Bosonen können in Quark/Antiquarks oder leptonisch zerfallen.
- Die schwache Feinstrukturkonstante kann mit der elektromagnetischen Feinstrukturkonstante mit dem Weinbergwinkel verknüpft werden

$$\alpha_w = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_w} \approx 3.4 \cdot 10^{-2} \implies \theta_W \approx 0.47 \quad (17.9.19)$$

- Rechtshändige Quarks und Leptonen haben keinen schwachen Isospin. Rechtshändige Neutrinos wurden nie beobachtet.
- Quantenfeldtheorie: bosonische Austauschteilchen haben die Masse 0.
Woher röhrt die Masse der W^\pm und der Z^0 -Bosonen?

18. Standardmodell

Das heutige Wissen über Elementarteilchen wird mit dem sogenannten Standardmodell beschrieben. Es ist jedoch klar, dass das Modell noch nicht endgültig ist. Es werden Erweiterungen gesucht.

Erhaltungsgrösse	E.M. WW	schwache WW	starke WW
Energie	ja	ja	ja
Impuls	ja	ja	ja
Drehimpuls	ja	ja	ja
Baryonenzahl B^*	ja	ja	ja
Leptonenzahl L^*	ja	ja	ja
Parität P	ja	nein	ja
Ladungsquantenzahl C	ja	nein	ja
Produkt $C \cdot P$	ja	nein	ja
Zeitspiegelinvarianz T	ja	nein	ja
Produkt $C \cdot P \cdot T$	ja	ja	ja

Tab. 18.1.: Tabelle der Erhaltungsgrößen und der Wechselwirkungen, die sie erfüllen (Mit * markierten rot unterlegten Größen beruhen auf einem empirischen Befund.).

Tabelle 18.1 zeigt die im Standardmodell berücksichtigten ERHALTUNGSGRÖSSEN. Weiter ist angegeben, welche Erhaltungsgrößen von welchen Wechselwirkungen erhalten oder verletzt werden.

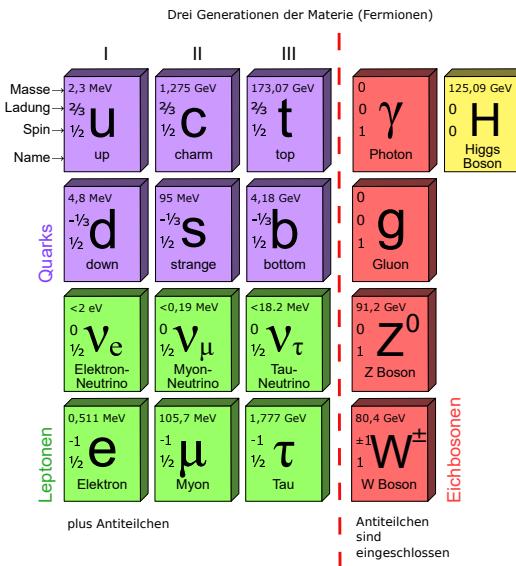


Abb. 18.1.: Elementarteilchen im Standardmodell (MissMJ-derivative work: Polluks [CC BY 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>)], via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/Standard_Model_of_Elementary_Particles-de.svg).

Abbildung 18.1 gruppiert die Teilchen des Standardmodells nach Familien, hauptsächlicher Wechselwirkung und nach Austauschteilchen. Das HIGGS steht dabei als massegenerierendes Teilchen alleine. Links der rot gestrichelten Linie haben die Teilchen einen halbzahligem Spin (FERMIONEN), rechts davon ist der Spin der Austauschteilchen ganzzahlig (BOSONEN).

Fermionen	Familie			Elektr. Ladung	Farbe	Spin
	1	2	3			
Leptonen	ν_e e^-	ν_μ μ^-	ν_τ τ^-	0 -1	— —	1/2 1/2
Quarks	u d	c s	t b	+2/3 -1/3	r,g,b r,g,b	1/2 1/2

Tab. 18.2.: Fermionen unter den Elementarteilchen

Tabelle 18.2 zeigt die nach heutigem Wissenstand grundlegenden FERMIONEN unter den Elementarteilchen. Fermionen (benannt nach Enrico Fermi) sind dies Teilchen mit halbzahligem Spin. In Tabelle 18.2 fehlen noch die bosonischen Aus-

tauschteilchen (benannt nach **Satyendranath Bose** mit ganzzahligem Spin).

Wechselwirkung	koppelt an	Austauschteilchen	Masse/(GeV/ c^2)	I^P
stark	Farbladung	8 Gluonen	0	1^+
elektromagnetisch	elektrische Ladung	1 Photon	0	1^+
schwach	schwache Ladung	$3 W^\pm, Z^0$	80,90	1
Gravitation	Masse	Graviton	0	2

Tab. 18.3.: Teilchen bei den grossen vereinheitlichten Theorien (GUT).

Tabelle 18.3 bezieht sich auf die **Grosse vereinheitlichte Theorie**, auch **Grand Unified Theory (GUT)** genannt. Manche Publikationen zählen wie hier das **GRAVITON** mit, andere lassen es weg.

Die Grundlage aller Theorien der Wechselwirkung von Elementarteilchen ist die **QUANTENFELDTHEORIE**. Sie basiert auf den beiden fundamentalen mathematischen Eigenschaften

1. der **EICHSYMMETRIE** und
2. der **SPONTANEN SYMMETRIEBRECHUNG**

Eine **SYMMETRIEBRECHUNG** tritt immer bei einer energetischen Entartung von Quantenzuständen auf, analog zum Verhalten von Elektronenniveaus in der Atomphysik.

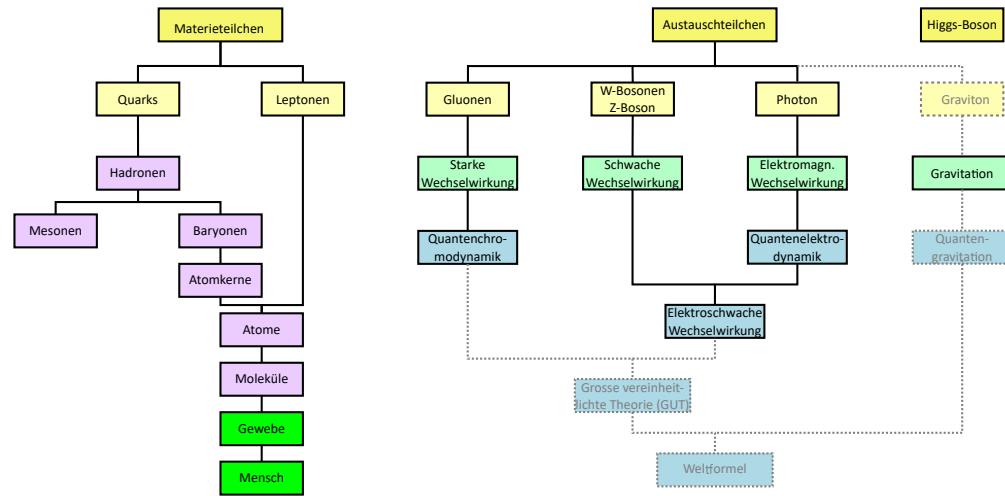


Abb. 18.2.: Grafische Struktur des Zusammenhangs von Teilchen und Theorien (nach [Wik22b]). Gelb sind die Typen der Elementarteilchen und hellgelb die Kategorien der Elementarteilchen. Zusammengesetzte Teilchen sind lila. Wechselwirkungen sind blassgrün, Theorien (oder Modelle) sind blassblau. Grün sind Beispiele übergeordneter Strukturen. Grau gestrichelte Linien und Texte bezeichnen angegedachte Teilch, die noch nicht nachgewiesen sind und Theorien, die noch im Entstehern sind.

Abbildung 18.2 zeigt eine Darstellung der Teilchen und Theorien, soweit sie heute bekannt sind. Hier wird das nicht der Grossen vereinheitlichten Theorie, auch GUT genannt, zugeordnet. Alle vereinigten Wechselwirkungen werden hier WELTFORMEL genannt.

18.1. Quarks und Leptonen

Die folgenden Ausführungen folgen J. Bleck-Neuhaus *Elementare Teilchen* [Ble13, Kap. 13.1.5.].

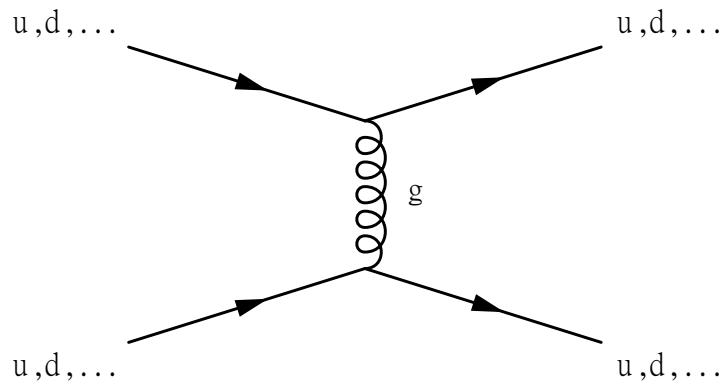


Abb. 18.3.: Feynmandiagramm der Quark-Gluon-Wechselwirkung.

Quarks werden durch die Farbwechselwirkung oder, äquivalent, GLUONEN zusammengehalten. GLUONEN entsprechen den PHOTONEN in der elektromagnetischen Wechselwirkung. Abbildung 18.3 zeigt das Feynman-Diagramm einer solchen Wechselwirkung.

Teilchen wie das $\Delta^{++} = (uuu)$, $\Delta^- = (ddd)$ oder $\Omega^- = (sss)$ mit einem Spin von $I = \frac{3}{2}$ verlangen eine weitere quantenmechanische Variable, die FARBLADUNG. Die Quarks werden nun so geschrieben

$$\text{Quark} \longrightarrow \text{Quark}_{\text{Farbe}} \quad \text{z.B. } u_r \quad (18.1.1)$$

Der Zustandsraum aus drei Farben und drei Antifarben (Komplementärfarben) ist isomorph zum Zustandsraum $SU(3)$ der drei Quarks Up, Down und Strange. Die Gruppe $SU(3)_C$ beschreibt die Drehungen im Farbraum und ist im Gegensatz zu den Drehungen im Konfigurationsraum der Teilchen eine exakt erfüllte Symmetrie. Zur Farbladung gibt es eine Auswahlregel

Nur weisse oder farblose Teilchen können reell, also messbar, sein

Die Farbladung ist mit Quarks verknüpft, die Komplementärfarbe (Antifarb) mit den Antiquarks verknüpft.

Weisse Teilchen ergeben sich also aus

- Bei Baryonen wenn alle drei Farbladungen vorhanden sind (bei Antibaryonen die Antifarbladungen)
- Bei Mesonen wenn die Farbe (beim Quark) und die Komplementärfarbe (Antiquark) vorhanden ist

Jedes Quark besitzt mit gleicher Wahrscheinlichkeit jeden der drei Farbladungszustände.

Neben diesen Forderungen muss jedes Baryon als Fermion in einem komplett anti-

symmetrischen Zustand sein. Insbesondere muss die Vertauschung von zwei Quarks die Wellenfunktion das Vorzeichen wechseln. Die Forderung nach totaler Antisymmetrie limitiert das Baryon zu einer einzigen möglichen Wellenfunktion. Die Quarks sind nun sowohl durch die Forderung nach Antisymmetrie und zusätzlich durch die Gleichverteilung der Farbladungen verschränkt.

Es ist von aussen nicht feststellbar, in welchem Farbladungszustand die Quarks in einem Baryon oder Meson sein kann.

$$\text{Gluonen} \hat{=} \text{Farbe} + \text{Antifarbe}$$

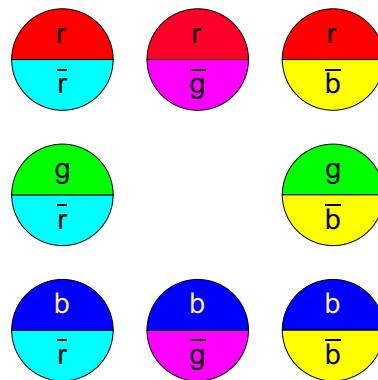


Abb. 18.4.: Farbladung der Gluonen (nach Demtröder [Dem10, Abb. 7.23])

Abbildung 18.4 zeigt die möglichen Farb- und Antifarbkombinationen der Gluonen. Die Forderung, dass alle beobachtbaren Teilchen farblos sind, bewirkt, dass die neunte mögliche Kombination von Farben eine Linearkombination der anderen acht Möglichkeiten ist. Dies ist analog zum Teiler $n - 1$ bei der Berechnung der Standardabweichung von n Werten, da dabei der Mittelwert in die Rechnung eingeht. Deshalb ist der Letzte Wert berechenbar aus dem Mittelwert und allen anderen Werten.

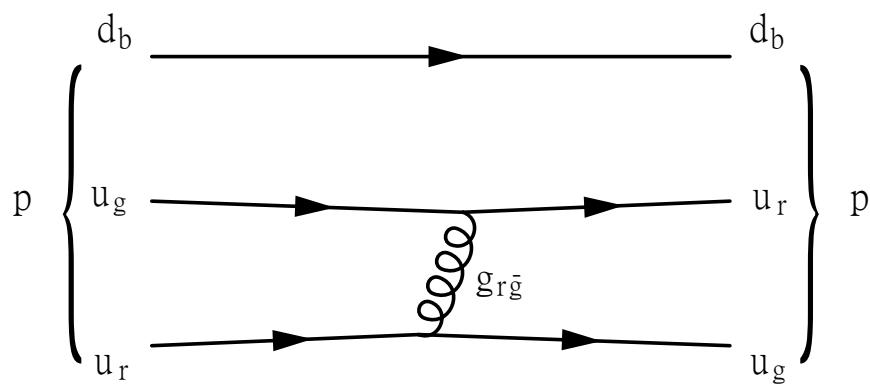


Abb. 18.5.: Feynmandiagramm der Quark-Gluon-Wechselwirkung mit Farbe.

Abbildung 18.5 schliesslich zeigt das Feynman-Diagramm einer Quark-Gluon-Wechselwirkung mit Farbe.

18.2. Higgs-Feld

Dieser Abschnitt folgt Ausführungen von U. Ellwanger in *Vom Universum zum Elementarteilchen* [Ell15]. Der HIGGS-MECHANISMUS wurde von Peter Higgs und François Englert entdeckt und nach Higgs benannt.

Aus der QUANTENFELDTHEORIE wissen wir, dass es zu jedem Teilchen ein Feld gibt, und umgekehrt.

Beispiel: Photon und elektromagnetisches Feld, Gluon und gluonisches Feld (existiert nur innerhalb von Hadronen)

Über den Higgs-Mechanismus kann auf indirektem Weg die Masse von Teilchen erzeugt werden.

Dazu ist ein zusätzliches Boson mit dem Spin 0 notwendig, das HIGGS-BOSON.

Das HIGGS-FELD gehört zum HIGGS-BOSON, und umgekehrt (analog zu Photonen und elektromagnetischem Feld).

Das Gravitationsfeld und das elektrische Feld sind jedoch VEKTORFELDER. Das Higgsfeld ist im Gegensatz dazu ein SKALARES FELD!

Ein konstantes elektrisches Feld wechselwirkt mit einer elektrischen Ladung e und beschleunigt diese.

Analog wechselwirkt ein konstantes Higgs-Feld H über die Kopplungskonstante g_H (der HIGGS-LADUNG) mit einem Teilchen: Die Energie wird um einen konstanten Betrag

$$\Delta E = g_H H \quad (18.2.1)$$

erhöht (analog zu einer konstanten potentiellen Energie). Siehe dazu auch Abbildung 18.6.

g_H ist die Kopplungskonstante des Higgs-Feldes an das HIGGS-BOSON.

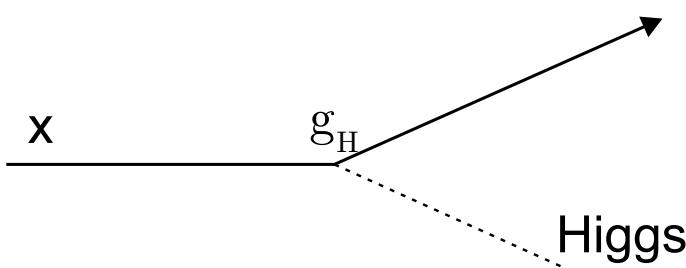


Abb. 18.6.: Emission eines Higgs-Teilchens[Ell15]

Ein masseloses Teilchen ohne Higgs-Feld wird durch die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 \quad (18.2.2)$$

beschrieben. Ein HIGGS-FELD führt zur Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + g_H^2 H^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (18.2.3)$$

Die Wirkung des HIGGS-FELDES auf ein masseloses Teilchen ist ununterscheidbar von der Situation, wenn das Teilchen Masse hätte! Wir definieren die Masse deshalb über

$$m = \frac{g_H H}{c^2} \quad (18.2.4)$$

Wenn es überall im Universum ein konstantes Higgs-Feld gibt, kann durch den HIGGS-MECHANISMUS jede Masse erzeugt werden. Die «HIGGS-LADUNG» gibt den Wert der Masse an.

Die potentielle Energie des elektrischen Feldes ist proportional zu $E_{pot} \propto \mathbf{E}^2$. Im Gleichgewicht befindet sich das System im Energieminimum, also bei $\mathbf{E} = 0$!

Da für die Kraft $F = -\mathbf{grad} E_{pot}$ gilt, bewirken örtlich konstante Felder keine Kräfte. Wenn das örtliche Feld konstant ist, kann die potentielle Energie zwar vom Feld abhängen, die potentielle Energie erzeugt aber keine Kraft.

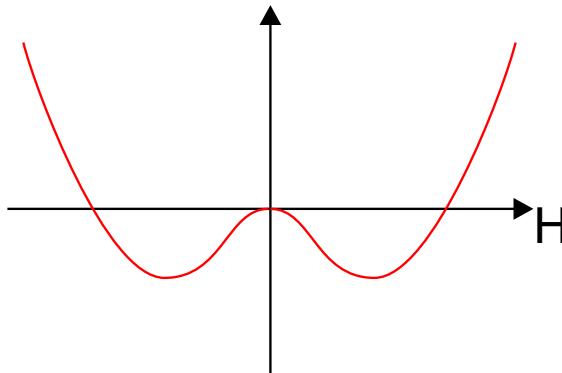


Abb. 18.7.: Potentielle Energie des Higgs-Feldes (nach U. Ellwanger [Ell15]).

Bei skalaren Feldern lassen die Feldgleichungen eine beliebige Abhängigkeit der potentiellen Energie von H zu, also auch

$$E_{pot}(H) = \frac{1}{(\hbar c)^3} \left(-\frac{\mu^2}{2} H^2 + \frac{\lambda_H^2}{4} H^4 \right) \quad (18.2.5)$$

Abbildung 18.7 zeigt eine Skizze dieses Potentials.

Das Potential aus Abbildung 18.7 hat ein Minimum bei

$$H = \pm \frac{\mu}{\lambda_H} \quad (18.2.6)$$

Eines der beiden Minima wird im ganzen Universum realisiert. Alle anderen Werte des Higgs-Feldes bedeuten Instabilität.

Die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung W^\pm - und Z^0 -Bosonen haben eine Masse, da das Higgs-Feld eine potentielle Energie ähnlich wie in der Grafik

(oder der Gleichung) hat und weil das Higgs-Boson zusätzlich eine schwache Ladung hat, also an die schwache Wechselwirkung koppelt.

Für das W^\pm -Boson gilt nach U. Ellwanger [Ell15]

$$g_H = \frac{g_w}{2} \quad \alpha_w = \frac{g_w^2}{4\pi} \quad (18.2.7a)$$

$$m_W = \frac{g_H^2}{c} H = \frac{g_w}{2c^2} H = \frac{\sqrt{\pi\alpha_w}}{c^2} H \quad (18.2.7b)$$

Aus der Masse des W^\pm -Bosons und der Feinstrukturkonstante der schwachen Wechselwirkung folgt der Wert von H

$$H = \frac{2c^2 m_W}{g_w} = \frac{c^2 m_W}{\sqrt{\pi\alpha_w}} = 246 \text{ GeV} = 39.4 \text{ nJ} \quad (18.2.8)$$

Die Kopplung des Z^0 -Bosons ist durch

$$g_z g_w / \cos \theta_W \quad (18.2.9)$$

gegeben.

Die Leptonenmassen werden durch Kopplungskonstanten λ_i gegeben.

$$m_e = \frac{\lambda_e}{c^2} H \quad m_\mu = \frac{\lambda_\mu}{c^2} H \quad m_\tau = \frac{\lambda_\tau}{c^2} H \quad \dots m_{top} = \frac{\lambda_{top}}{c^2} H \quad (18.2.10)$$

Da die Kopplungskonstanten λ_i aus keiner Theorie folgen, ist es nicht möglich, aus einer Theorie auf die Leptonen- oder Quarkmassen schliessen.

Die Masse des HIGGS-BOSON ist

$$m_H = \frac{\mu}{c^2} \quad (18.2.11)$$

Messungen am CERN ergaben

$$m_H \approx 125 \text{ GeV}/c^2 \implies \mu = 125 \text{ GeV} \implies \lambda_H = 0.508 \quad (18.2.12)$$

Die Masse des Higgs führt zu einer Dichte der potentiellen Energie von

$$E_{pot}(H_{min}) = -4.929 \cdot 10^{45} \text{ Jm}^{-3} \quad (18.2.13)$$

Diese Dichte stellt ein grosses **Problem** dar. Das Higgs-Feld hat für die aus der Kosmologie und der Sternbeobachtung benötigte dunkle Energie das falsche Vorzeichen. Weiter ist der betragsmässige Wert um **55 Größenordnungen** grösser als der Wert, der aus der kosmologischen Konstante folgt!

Eine mögliche Lösung wäre, analog zur Allgemeinen Relativitätstheorie, die Einführung eines Analogons zur komsmologischen Konstante von Einstein

$$E_{pot}(H) = \frac{1}{(\hbar c)^3} \left(-\frac{\mu^2}{2} H^2 + \frac{\lambda_H^2}{4} H^4 \right) + C \quad (18.2.14)$$

Das verbleibende Problem ist: C müsste auf 55 Stellen genau einen bestimmten Wert annehmen! Dies ist nach allen wissenschaftlichen Kriterien extrem unwahrscheinlich.

Es gibt die Spekulation, dass die Inflation des Universums durch dessen Bewegung hin zum Minimum des Higgs-Feldes bedingt sein.

18.3. Fazit der Teilchenphysik

Dieser Abschnitt beruht auf J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 15.]. Nach seinen Ausführungen sind die wesentlichen Ergebnisse der Teilchenphysik

Elementarteilchen Es gibt Elementarteilchen. Durch Messung lässt sich weder eine räumliche Ausdehnung noch eine innere Struktur erkennen. Klassisch führen Elementarteilchen zu Problemen wie unendliche Energiedichten. Die moderne Quantenphysik mit ihren ausgefeilten Rechenmethoden (Renormalisierung, ...) ermöglicht erst eine konsistente Behandlung.

Grundtypen von Elementarteilchen Es gibt eine sehr überschaubare Liste von fundamentalen Elementarteilchen, zwei Sorten Fermionen (Leptonen und Quarks) und drei Sorten Bosonen (Gluon, Bosonen der elektroschwachen Wechselwirkung und das Higgs).

Drehimpuls ohne Drehung Punktformige Elementarteilchen können einen Drehimpuls und ein magnetisches Moment (wenn sie geladen sind) haben, ohne dass sie sich drehen oder dass bei einer Ladung ein Strom fliesst. Bei einem geladenen Teilchen mit Spin ist es so, dass das Teilchen so aussieht wie wenn es ein magnetischer Dipol wäre, aber mit etwas mehr als dem Doppelten der Stärke wie ein Kreisstrom mit gleichem Drehimpuls.

Erzeugung und Vernichtung von Elementarteilchen Teilchen können erzeugt und vernichtet werden (wenn die Regeln, d.h. die Erhaltungssätze beachtet werden.) Bei Photonen, dem β -Zerfall und in Spurendetektoren sind diese Erzeugung und/oder Vernichtung sichtbar. Bei Fermionen muss zu jedem Teilchen ein Antiteilchen entstehen (oder umgekehrt). Beschrieben wird dies durch die Erzeugungsoperatoren \hat{a}_A^\dagger und Vernichtungsoperatoren \hat{a}_A für das Teilchen A .

Teilchen und Antiteilchen Es gibt zu jedem Teilchen sein Antiteilchen. Die beiden zusammen wandeln sich exakt in reine Energie um. Dabei bleibt die Zahl der Fermionen konstant (Teilchen positiv und Antiteilchen negativ gezählt). Er gilt für Leptonen und Quarks getrennt. Im Gegensatz zu Fermionen können Bosonen (auch wenn es Antiteilchen gibt) auch alleine erzeugt werden. Ein Antiteilchen hat die gleichen Eigenschaften wie ein Teilchen, ausser dass das Vorzeichen der Ladung sich ändert (Ladungskonjugation \hat{C}), und als ob seine Bewegung gespiegelt verläuft (Paritätsoperation \hat{P}) und also ob sie in der Zeit rückwärts läuft (Zeitumkehroperator \hat{T} , denken Sie an Feynman-Diagramme). Antimaterie gibt es nur in der Quantenfeldtheorie.

Ununterscheidbarkeit für alle und Ausschlussprinzip für Fermionen Elementarteilchen der gleichen Sorte sind vollkommen ununterscheidbar. Für Photonen als Bosonen ist dies leicht einsichtig. Bei Fermionen führt dies auf das Ausschlussprinzip von Wolfgang Pauli. Elementarteilchen dürfen zum Beispiel

nicht nummeriert werden. Mit dem «Gibbs'schen Paradox» in der Thermodynamik (Vertauschung von Gasteilchen darf nicht berücksichtigt werden) war (in Filmdeutsch) ein «Teaser» für die kommende Quantentheorie vorhanden.

Elementarereignis der EM-Wechselwirkung: Photon Das Elementarereignis der elektromagnetischen Wechselwirkung ist die Erzeugung (Aussendung) und die Absorption (Einfang) eines Photons.

$$\hat{H}_{Emission} = \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_\gamma^\dagger \quad (18.3.1)$$

$$\hat{H}_{Absorption} = \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_\gamma \quad (18.3.2)$$

Neben dem Welle-Teilchen-Dualismus ist die Existenz virtueller Teilchen eine grosse Hürde beim Verständnis der Theorie der Elementarteilchen.

Messbare Wirkungen auch aus unphysikalischen Zuständen Die virtuellen Teilchen sind ein Produkt der Rechenmethode. Sie können NIE alleine gemessen werden, es sei denn sie wären zu einem reellen Zustand übergegangen. Wenn zwei Teilchen A und B in die Zustände C und D unter Austausch eines virtuellen Photons (d.h. Emission und Absorption) wechselwirken wird dies in der Quantenmechanik mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (\hat{a} für Teilchen, \hat{c} für Photonen) so beschrieben

$$\hat{H}_{Absorption} \hat{H}_{Emission} = \hat{a}_D^\dagger \hat{a}_B \hat{c}_\gamma \hat{a}_C^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_\gamma^\dagger \quad (18.3.3)$$

Das Coulombgesetz und das elektromagnetische Feld ergeben sich so als Summe einer unendlichen Folge von Elementarprozessen.

Vier Grundkräfte beruhen auf Austauschteilchen in virtuellen Zuständen Alle Austauschteilchen sind Bosonen. Bei Photonen ist die Reichweite wegen der fehlenden Ruhemasse unendlich. Die Austauschteilchen der Farbwechselwirkung, der elektromagnetischen Wechselwirkung und der schwachen Wechselwirkung sind bekannt, bei der Gravitation vermutet man Gravitonen als Austauschteilchen. Experimentelle Evidenzen gibt es noch nicht.

Bildersprache für Austauschprozesse: Feynman-Diagramme Die Bildersprache der Feynman-Diagramme reicht aus um die Rechnungen der Teilchenphysik durchzuführen. Mit der richtigen Technik können so auch gebundene Zustände (Atomphysik) berechnet werden. Obwohl eigentlich alle (unendlich viele) Diagramme aufsummiert werden müssten, reicht es für die heute erforderliche Genauigkeit bis und mit zur 8. Ordnung zu rechnen.

Erhaltungssätze die gelten und gebrochene Symmetrien Die klassischen Erhaltungssätze für Energie, Impuls, Drehimpuls und Ladung gelten auch für Elementarteilchen. Die Symmetrien, aus den sie abgeleitet wurden, \hat{P} (Parität, Raumspiegelung), \hat{C} (Ladungsvorzeichen vertauschen, Teilchen-Antiteilchen) und \hat{T} (Zeitumkehr, auch klassisch nur bei kleiner Teilchenzahl) gelten nur für

die starke und die elektromagnetische Wechselwirkung. Als Produkt (gleichzeitige Anwendung) gelten sie immer.

Teilchen haben weitere Ladungen, Zählweise unklar Neben der aus der klassischen Physik bekannten elektrischen Ladung gibt es noch mehr Ladungen

- die Baryonenladung mit den Werten +1 bei Proton und Neutron, $+\frac{1}{3}$ bei Quarks (und das Negative bei den Antiteilchen)
- die Leptonenladung mit den Werten +1 bei Elektron, Myon, Tau und den dazugehörigen Neutrinos (und das Negative bei den Antiteilchen)
- die Farbladung (auch starke Ladung genannt) mit den Werten r , g und b bei Quarks und Gluonen (und den Komplementärfarben bei Antiteilchen)
- der schwachen Ladung mit den Werten +1 bei Quarks und Leptonen (und das Negative bei den Antiteilchen)

Um die Leptonen und die Quarks zu unterscheiden gibt es noch die ladungsartige FLAVOUR-Quantenzahl mit den Werten:

Quarks es gibt sechs Flavours, nämlich u , d , s , c , b und t

Leptonen es gibt drei Leptonen-Flavours (auch Familien genannt), e mit dem ν_e , μ mit ν_μ und τ

Die schwache Wechselwirkung kann den Quark-Flavour ändern, z.B. im β -Zerfall. Für Neutrinos ist der Leptonen-Flavour auch nicht erhalten (Neutrinooszillationen). In der Summe gibt es bei Fermionen $3 \times 6 = 18$ Quarks (Farbe mal Flavour), $2 \times 3 = 6$ Leptonen (Neutrinos und geladene Leptonen), dann das Gleiche noch als Antiteilchen. Bei den Bosonen gibt es 8 Gluonen, 3 Vektorbosonen für die schwache Wechselwirkung, 1 Boson für die elektromagnetische Wechselwirkung und das Higgs-Teilchen, zusammen 61 Teilchen.

Die Quarks zum Beispiel können nicht fundamental sein, da sie sich ineinander über die schwache Wechselwirkung umwandeln können. Wenn man alles was sich umwandeln lässt nur als ein Teilchen zählt verbleiben unter den Fermionen vier Stück

das Quark q mit sechs Flavour-Zuständen

das Antiquark \bar{q} mit sechs Flavour-Zuständen

das Lepton ℓ mit sechs Flavour-Zuständen

das Antilepton $\bar{\ell}$ mit sechs Flavour-Zuständen

Bei den Bosonen sind nach Sheldon Lee Glashow auch vier fundamentale Teilchen. Bei den geladenen Vektorbosonen wurde nie eine Umwandlung ineinander beobachtet. Aber in der Welt der Teilchen kommen Dubletts eigentlich nicht vor. Sheldon Lee Glashow postulierte, dass es ein W^0 geben müsste, das analog zu den Pionen ein Triplet bilden sollte. Mit einem weiteren Teilchen, dem B wurde dann das Z^0 und das γ zu Überlagerungszuständen (und es wurde vorhergesagt, dass elektrische und schwache Wechselwirkung das

Gleiche wäre.) Weiter wurde mit dem schwachen Isospin $T_{3,s}$ und der Leptonenzahl L die Ladung

$$q = - \left(T_{3,s} + \frac{1}{2}L \right) \quad (18.3.4)$$

bestimmt. Photon γ und Z^0 sind dann durch

$$\gamma = W^0 \sin(\theta_W) + B \cos(\theta_W) \quad (18.3.5a)$$

$$Z^0 = W_0 \cos(\theta_W) + B \sin(\theta_W) \quad (18.3.5b)$$

θ_W ist der Weinberg-Winkel. Das W^0 wechselwirkt mit der unbekannten Kopplungskonstante g der schwachen Wechselwirkung mit $T_{3,s}$. Das B andererseits wechselwirkt mit der unbekannten Kopplungskonstante g' mit der schwachen Hyperladung $\frac{1}{2}L$. Damit das Photon mit ungeladenen Teilchen nicht wechselwirkt muss

$$g \sin(\theta_W) = g' \cos(\theta_W) = Ke \quad (18.3.6)$$

sein. K ist eine vom Einheitensystem abhängige Zahl. Dies balanciert die Wechselwirkungen. Aus der Theorie folgt auch

$$m_{W^\pm} = m_{Z^0} \cos(\theta_W) \quad (18.3.7)$$

Die Massen der Teilchen (oder deren Fehlen) waren unerklärt, bis mit dem Higgs-Mechanismus (**Peter Higgs**) ein Weg gefunden wurde. Das weitere Problem der falschen schwachen Ströme wurde durch das Postulat des Charm-Quarks behoben!

In der Summe gibt es also die

Austauschbosonen W^\pm und W^0 (das B ist ja auch nur eine Überlagerung)

Gluon mit seinen acht Ausprägungen

Higgs für die Massen

Zusammen gibt es also 5 fundamentale Bosonen.

Nach der Zählung gibt es neun Elementarteilchen.

19. Allgemeine Relativitätstheorie

Die allgemeine Relativitätstheorie Albert Einsteins [Ein15a; Ein15d; Ein15c; Ein15b] hat unser Verständnis von Gravitation auf grossen Längenskalen grundlegend verändert. In diesem Abschnitt soll wie in B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] wichtige Zutaten der Theorie plausibel gemacht werden. Eine genauere Abhandlung finden Sie in T. Fließbach [Fli12] oder auch in [Hof97; Wey21; BC10].

Die grundlegende Idee ist das ÄQUIVALENZPRINZIP. Damit ist gemeint, dass verschiedene nicht unterscheidbare physikalische Phänomene durch die gleiche Theorie zu beschreiben sind.

Insbesondere ist gemeint, dass in einem abgeschlossenen Raum (Fahrstuhl) nicht unterschieden werden kann, ob der Fahrstuhl im kraftfeldfreien Raum mit $-g$ beschleunigt wird, oder ob er sich in einem Gravitationsfeld mit dem Feldvektor g befindet. Insbesondere ist klar, dass in einem beschleunigten Fahrstuhl Licht abgelenkt wird. Deshalb muss es auch im Gravitationsfeld abgelenkt werden.

19.1. Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld

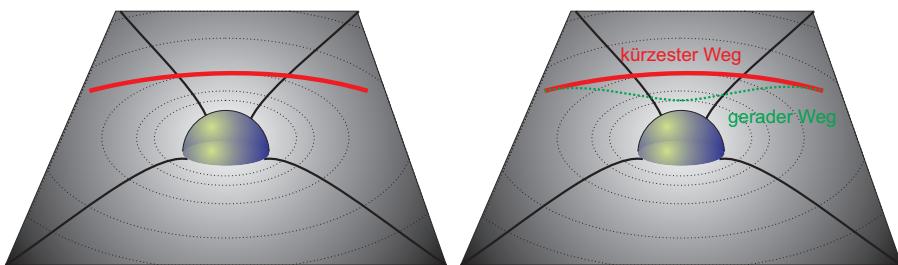


Abb. 19.1.: Lichtablenkung durch Massen (nach Carroll und Ostlie [CO07]).

Abbildung 19.1 zeigt ein Gedankenmodell zur Ablenkung von Licht. Eine Gummimatte im Gravitationsfeld dient als Modell der Raumzeit. Eine grosse Masse im Zentrum deformiert die Gummimatte. Ein vorbeirollender Ball wird durch die Deformation der Gummimatte abgelenkt. Dabei ist der gerade Weg ist länger als der gekrümmte Weg.

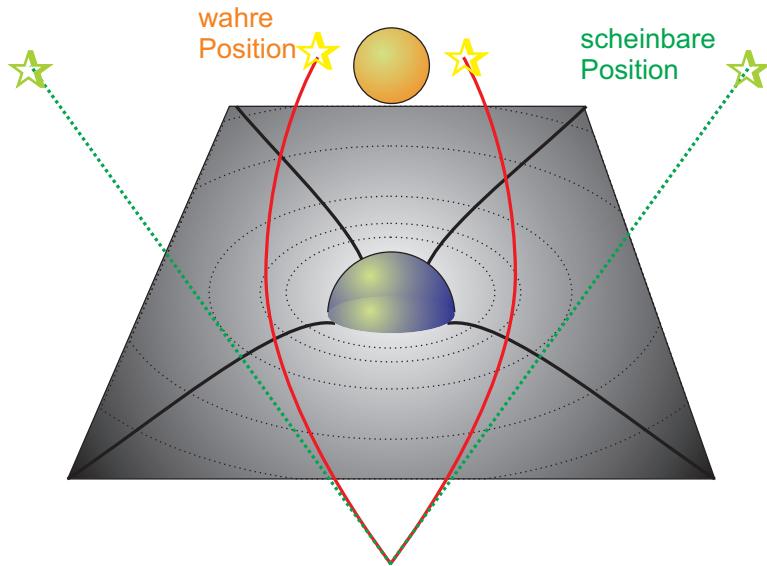


Abb. 19.2.: Gravitationslinse (nach Carroll und Ostlie [CO07]).

Abbildung 19.2 erweitert das Modell der Gravitationsablenkung aus Abbildung 19.1. Zwei Kugeln rollen links und rechts an einer Zentralmasse vorbei. Die linke Kugel wird nach rechts abgelenkt, die rechte nach links. Dies entspricht dem Strahlengang durch eine Sammellinse. Dabei wird das Licht zur schweren Masse hin abgelenkt. Entfernte Sterne sind näher an der Sichtlinie zu einem schweren Stern als sie scheinen. Wir schliessen aus der Richtung des auf die Erde einfallenden Lichts auf die Position des Sterns, nur die Richtung ist wegen der Gravitationswechselwirkung nicht die ursprüngliche Richtung.

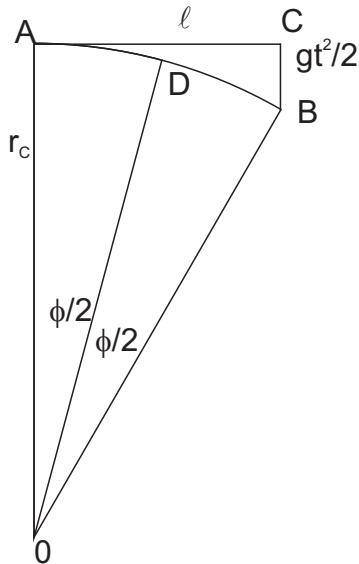


Abb. 19.3.: Skizze zur Berechnung der Ablenkung von Licht.

Abbildung 19.3 zeigt, wie aus dem Einsteinschen Prinzip dass schwere und träge Masse äquivalent sind, die Ablenkung des Lichtes bei kleiner Gravitationsfeldstärke abgeschätzt werden kann.

Die Schwerkraft und die Beschleunigung sind ununterscheidbar wenn $m_{\text{schwer}} = m_{\text{träger}}$ gilt. Das Fallgesetz gilt dann auch für Licht. Aus der Abbildung kann die Beziehung

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \quad (19.1.1)$$

abgelesen werden. Daraus folgt mit dem Fallgesetz

$$\frac{\frac{1}{2}gt^2}{\ell} = \frac{\ell}{2\cos(\phi/2)} \quad (19.1.2)$$

Wenn wir eine kleine Gravitationsfeldstärke annehmen können Winkelfunktionen nach Taylor entwickelt werden. Wir können $\overline{OD} \approx r_C$, $\cos(\phi/2) \approx 1$ und $\ell = ct$ schreiben. Es ergibt sich

$$\frac{gt^2}{2\ell} = \frac{\ell}{2r_C} \Rightarrow r_C = \frac{c^2}{g} \quad (19.1.3)$$

Der Feldvektor der Gravitation kann mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz $q = GM/r^2$ berechnet werden. Wir erhalten für r_C :

$$r_C = \frac{c^2 r^2}{GM} \quad (19.1.4)$$

Auf der Erde ist r_C etwa

$$r_C \approx 1 \cdot 10^{16} \text{ m} \quad \phi = \frac{\ell}{r_C} \approx 1 \cdot 10^{-15} \text{ rad für } \ell = 10 \text{ m} \quad (19.1.5)$$

Auf der Sonne hingegen ist ($g_S = 274 \text{ ms}^{-2}$)

$$r_{C,S} \approx 3.28 \cdot 10^{14} \text{ m} \quad \phi = \frac{r_S}{r_{C,S}} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0.438'' \text{ für } \ell = r_S \quad (19.1.6)$$

Die vorgestellte Rechnung ist eine Schätzung. Eine genaue Rechnung zeigt, dass der Ablenkwinkel durch

$$\varphi = \frac{4GM}{rc^2} \quad (19.1.7)$$

gegeben ist, wobei r der Abstand des einlaufenden Lichtstrahls zur ablenkenden Masse ist.

19.2. Rotverschiebung im Gravitationsfeld

Wenn wir uns vorstellen, dass Licht vom Boden zur Decke eines mit a nach oben beschleunigten Fahrstuhls der Höhe h gesandt wird, dann wird das Licht beim Eintreffen rotverschoben sein. Die Quelle am Boden hat zum Zeitpunkt der Emission eine Geschwindigkeit v_0 . Zu dem Zeitpunkt ist das auch die Geschwindigkeit der Decke. Das Licht soll die Zeit t bis zur Decke benötigen. Die zurückzulegende Distanz ist

$$s = h + \frac{1}{2}at^2 = c \cdot t \quad (19.2.1)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$t = \frac{c}{a} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2ah}{c^2}} \right) \quad (19.2.2)$$

Die physikalisch sinnvolle Lösung ist die mit dem «+».

$$t = \frac{c}{a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2ah}{c^2}} \right) \quad (19.2.3)$$

Die Geschwindigkeit der Decke ist dann

$$\Delta v = v(t) = at = c \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2ah}{c^2}} \right) \approx \frac{ha}{c} + O(a^3) \quad (19.2.4)$$

Mit $\nu \propto c$ und $\Delta\nu \propto -\Delta v$ kann die Rotverschiebung abgeschätzt werden.

Aus der Bewegung eines Fahrstuhls ergibt sich die Rotverschiebung

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{\Delta v}{c} \xrightarrow{a=g} -\frac{gh}{c^2} \approx -2.57 \cdot 10^{-15} \quad (19.2.5)$$

Real gemessen wurden $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -2.46 \cdot 10^{-15}$.

Das allgemeine Resultat ist überall gültig:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}} \quad (19.2.6)$$

Daraus ergibt sich das allgemeine Resultat für Frequenzen:

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}} \quad (19.2.7)$$

Daraus kann der ROTVERSCHIEBUNGSPARAMETER definiert werden:

$$z = \frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\nu_\infty} - 1 = \left(1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}\right)^{-1/2} - 1 \stackrel{r_0 \gg \frac{GM}{c^2}}{\approx} \frac{GM}{r_0 c^2} \quad (19.2.8)$$

Weiter gibt es im GRAVITATIONSFELD eine Zeitverlangsamung

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\infty} = \frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}} \quad (19.2.9)$$

Beispiel: Bei SIRIUS B ergeben sich $R = 5.5 \cdot 10^6$ m und $M = 2.1 \cdot 10^{30}$ kg. Daraus folgt $\Delta t - \Delta t_\infty \approx 1$ s für $\Delta t_\infty = 3600$ s.

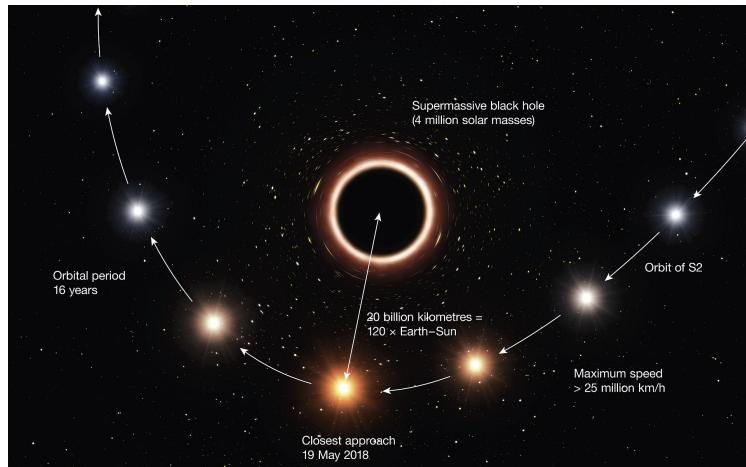


Abb. 19.4.: Zeichnung der Rotverschiebung der Emission des Sterns S2 in der Nähe des zentralen schwarzen Loches unserer Milchstrasse. (Quelle: By ESO/M. Kornmesser - <https://www.eso.org/public/images/eso1825b/>, CC BY 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=71125295>)

In der Nähe von schwarzen Löchern ist die Gravitations-Rotverschiebung messbar. Abbildung 19.4 zeigt die Rotverschiebung des Infrarotsignals des Sterns S2 in der Nähe des zentralen SCHWARZEN LOCHES im Zentrum unserer MILCHSTRASSE. Die Daten stammen aus der Arbeit „Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole“ von R. Abuter u. a. [Abu+18]. Es wurden Daten aus den Instrumenten GRAVITY, SINFONI und NACO verwendet. Diese sind auf dem Teleskop Very Large Telescope des European Southern Observatory (VLT) des ESO montiert [Gen+18].

19.3. Schwarzschildlösung

Karl Schwarzschild gelang es als Erstem die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie geschlossen zu lösen. Eine allgemeine Lösung gibt es auch heute nicht. Karl Schwarzschilds Lösung nahm eine sphärische Symmetrie an.

Der Ausgangspunkt sind Albert Einsteins Gleichungen

$$G = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad (19.3.1)$$

wobei G der EINSTEIN-TENSOR ist, der die Raum-Zeit-Krümmung beschreibt. T ist der ENERGIE-IMPULS-TENSOR

Albert Einstein führt eine abgekürzte Notation ein, die EINSTEIN-NOTATION. Dabei wird über gleichlautende Indizes summiert. In dieser Notation lautet Gleichung (19.3.1):

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (19.3.2)$$

$G_{\mu\nu}$ ist ein RIEMANN-TENSOR (nach Bernhard Riemann). $G_{\mu\nu}$ enthält die ersten Ableitungen des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ zum Quadrat und die zweiten Ableitungen des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ in linearer Form.

Für den ENERGIE-IMPULS-TENSOR gilt

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad (19.3.3)$$

In dieser kompakten Schreibweise bedeutet

$$Y_{\mu|\nu} = \partial_\nu Y_\mu \quad (19.3.4)$$

die kontravariante Ableitung (von Spaltenvektoren). $Y^{\mu||\nu}$ bedeutet die kovariante Ableitung von Y^μ nach x^ν [Flie12, Gl. (15.10) bis (15.12)]. Dann lautet der allgemein relativistische ENERGIE-IMPULS-ERHALTUNGSSATZ nach [Flie12]

$$T_{\mu\nu}^{||\nu} = 0 \quad (19.3.5)$$

Weiter ist dann auch der Riemann-tensor G symmetrisch

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} \quad (19.3.6)$$

und es gilt der Erhaltungssatz

$$G_{\mu\nu}^{||\nu} = 0 \quad (19.3.7)$$

Für schwache stationäre Felder ist näherungsweise

$$G_{00} \approx g_{00} \quad (19.3.8)$$

Dann lauten die Einsteingleichungen für den KRÜMMUNGSTENSOR $R_{\mu\nu}$ und den KRÜMMUNGSSKALAR $R^\mu_\mu = R$

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = -8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (19.3.9)$$

oder auch

$$R_{\mu\nu} = -8\pi \frac{G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right) \quad (19.3.10)$$

Albert Einstein führte dann die KOSMOLOGISCHE KONSTANTE Λ ein, um in einigen Bereichen eine Konvergenz von Lösungen zu erreichen. $\Lambda^{-1/2}$ ist eine Länge. Mit der KOSMOLOGISCHEN KONSTANTE lautet die Feldgleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (19.3.11)$$

Die Kontinuitätsgleichung für den ENERGIE-IMPULS-TENSOR lautet

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (19.3.12)$$

Die infinitesimale relativistische Distanz zwischen zwei Raumzeitpunkten ist durch

$$(\Delta d)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta\ell)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad (19.3.13)$$

gegeben. Die EIGENZEIT ist

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c}. \quad (19.3.14)$$

Der EIGENABSTAND hat die Grösse

$$\mathcal{L} = \sqrt{-(\Delta s)^2} \quad (19.3.15)$$

In sphärischen Koordinaten ist der Abstand

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dr)^2 - (rd\theta)^2 - (r \sin(\theta) d\phi)^2 \quad (19.3.16)$$

Karl Schwarzschild [Sch16] fand für eine kugelförmige Massenanordnung, die nicht rotiert, eine Metrik, die die Einstein'sche Feldgleichung (19.3.1) löst. Nach T. Fließbach [Fli12, Gl. (24.15)] lautet sie

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{2a}{r} \right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2a}{r}} - r^2 \left(d\theta^2 + d\phi^2 \sin^2(\theta) \right) \quad (19.3.17)$$

Dabei ist die Konstante

$$a = \frac{GM}{c^2} \quad (19.3.18)$$

und der Schwarzschildradius

$$r_S = R_S = 2a. \quad (19.3.19)$$

Eingesetzt ergibt sich Schwarzschildmetrik in sphärischen Koordinaten

$$(ds)^2 = \left(cdt \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \right)^2 - \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}} \right)^2 - (rd\theta)^2 - (r \sin(\theta) d\phi)^2 \quad (19.3.20)$$

Für diese Gleichung gibt keine Herleitung.

Die Idee, dass Licht durch Gravitation abgelenkt werden könnte ist älter. Im Jahre 1783 schloss John Michell aus Isaac Newtons Korpuskulartheorie, dass bei einer

Zentralmasse von $m = 500M_{\text{Sonne}}$ Licht nicht mehr entkommen kann. Die klassische Fluchtgeschwindigkeit ist $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$. Die Werte von John Michell stimmen für einen Radius $r = 1477$ km. Für eine Masse mit dem Erdradius müsste $m = 2157M_{\text{Sonne}}$ sein.

Wenn in der Gleichung (19.3.20) der Nenner von dr null ist, divergiert die Metrik. Dies ist bei

$$r = R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (19.3.21)$$

der Fall. R_S ist wie oben der Schwarzschildradius. bei einer sphärisch-symmetrischen Situation ist $d\theta = d\phi = 0$. Dann gilt

$$\frac{(dr)^2}{1 - 2\frac{GM}{rc^2}} = c^2 \left(1 - 2\frac{GM}{rc^2}\right) (dt)^2 \quad (19.3.22)$$

Daraus folgt

$$\frac{dr}{dt} = c \left(1 - 2\frac{GM}{rc^2}\right) = c \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \quad (19.3.23)$$

lokale Lichtgeschwindigkeit, wie sie von $r = \infty$ beobachtet wird.

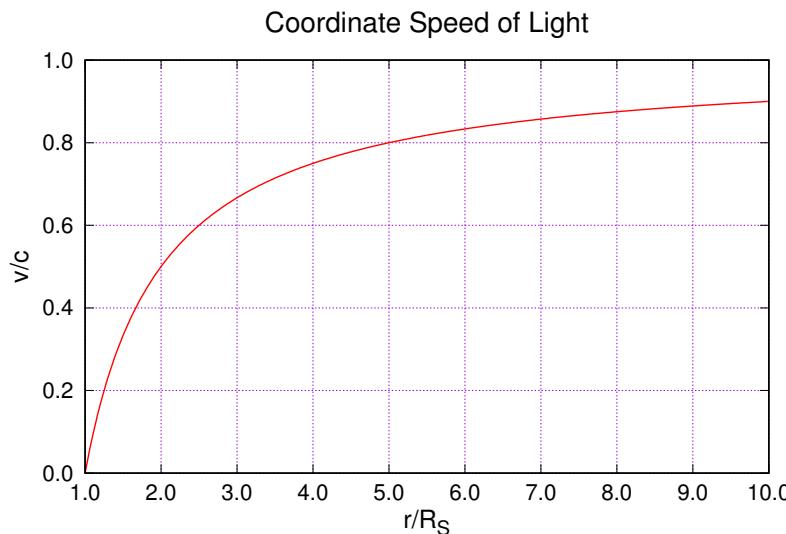


Abb. 19.5.: Lichtgeschwindigkeit in der Nähe des Ereignishorizontes.

Die Eigenzeit eines Objektes, das sich dem Ereignishorizont nähert, bleibt stehen. Für ein Objekt, das in ein schwarzes Loch fällt, sieht es so aus, wie wenn es am Ereignishorizont stehen bliebe.

19.3.1. Schwarze Löcher

Schwarze Löcher sind eine Konsequenz der allgemeinen Relativitätstheorie. Die hier gegebene Darstellung folgt B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07].

Für $r < R_S$ sind alle Weltlinien in räumlichen Bereichen. Reale Partikel können dort nicht existieren. Gleichzeitig werden Objekte in der Nähe des Ereignishorizontes (Schwarzschildradius) grossen Gezeitenkräften unterworfen.

Schwarze Löcher sind dadurch charakterisiert, dass die gesamte Masse innerhalb des Ereignishorizontes angeordnet ist. Es gibt nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] die folgenden Typen von schwarzen Löchern:

Primordiale schwarze Löcher haben Massen von $1 \cdot 10^{-8}$ kg bis $1 \cdot 10^5 M_\odot$. Diese sind in der Anfangsphase des Universums entstanden.

Schwarze Löcher mit sternartigen Massen Diese schwarzen Löcher bilden sich nach dem Kollaps eines genügend schweren Sterns. Die verbleibende Masse von (3 bis 15) M_\odot bildet dann das schwarze Loch. Der verzögerte Kollaps von Neutronensternen kann zu Supernovae führen. Dies ist insbesondere bei Doppelsternen möglich, bei denen der schwerere Neutronenstern dem anderen Stern Masse entzieht.

Mittlere schwarze Löcher (IMBH) haben Massen von (100 bis 1000) M_\odot . Ultra-helle Röntgenquellen scheinen im Zentrum ein IMBH zu haben. Wie diese schwarzen Löcher gebildet werden ist nicht klar. Sie können im Zentrum von Kugelsternhaufen und leichten Galaxien sein.

Superschwere schwarze Löcher (SMBH) haben Massen von ($1 \cdot 10^5$ bis $1 \cdot 10^8$) M_\odot . Diese schwarzen Löcher sind im Zentrum von allen grösseren Galaxien. Deren Eigenschaften werden von den SMBH in ihrem Zentrum vorgegeben.

Rotierende schwarze Löcher werden durch die KERR-METRIK [Fli12, Gl. (48.25)] (nach Roy Kerr) oder weitergehende Metriken beschrieben (siehe B. Carter [Car68] (Gleichungen (10) und (13)) oder M. Bhat; S. Dhurandhar und N. Dadhich [BDD85] (Gleichung (2.1)), wobei in beiden Artikeln $G = c = 1$ gesetzt ist). Allgemeine Kerr-Metriken beinhalten auch die elektrische Ladung (siehe B. Carter [Car68]). Eine Kerr-Metrik für ladungsfreie rotierende Massen ist nach T. Fließbach [Fli12]:

$$ds^2 = +\frac{d^2}{\rho^2} \left(cdt - bd\phi \sin^2(\theta) \right)^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\rho^2 dr^2}{d^2} - \frac{\sin^2(\theta) ((b^2 + r^2) d\phi - bcdt)^2}{\rho^2} \quad (19.3.24)$$

Dabei ist

$$d^2 = r^2 - rR_S + b^2 \quad (19.3.25a)$$

$$\rho^2 = r^2 + b^2 \cos^2(\theta) \quad (19.3.25b)$$

$$b = \frac{L}{Mc} \quad (19.3.25c)$$

L ist der Drehimpuls des schwarzen Loches.

Wenn in Gleichung (19.3.24) die Hilfsvariablen substituiert werden und $L = 0$ gesetzt wird, ergibt sich die Schwarzschildmetrik nach Gleichung (19.3.17).

Wenn in Gleichung (19.3.24) d^2 (siehe Gleichung (19.3.25a)) null ist, dann divergiert die Metrik. Wenn Gleichung (19.3.25a) null ergeben soll, dann gibt es einen ausgezeichneten Radius r_\pm als Lösung dieser Gleichung $0 = r^2 - rR_S + b^2$

$$r_{\pm} = \frac{R_S \pm \sqrt{R_S^2 - 4b^2}}{2} \quad (19.3.26)$$

Mit den Definitionen für b und R_S ergibt sich

$$0 = \frac{GM}{c^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2 c^2}{G^2 M^4}} \right) \quad (19.3.27)$$

Wenn die Wurzel dieser Gleichung den Wert null hat, gibt es für r_{\pm} eine doppelte Lösung. Damit wird die Kerr-Metrik an dem Punkt mehrdeutig. Aus dieser Bedingung ergibt sich eine Grenze für den Drehimpuls L :

$$L \leq L_{max} = \frac{GM^2}{c} \quad (19.3.28)$$

Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] sowie nach M. J. Rees [Ree84] ist $L_{max} = \frac{GM^2}{c}$ der maximal mögliche Drehimpuls eines schwarzen Loches der Masse M .

Geladene schwarze Löcher werden durch die Metrik in Gleichung (19.3.24) gegeben, wobei die Definition von d^2 (siehe Gleichung (19.3.25a)) so geschrieben werden muss (siehe E. R. Harrison [Har76], Gleichung (1). Dort fehlt ein «+».)

$$d^2 = r^2 - rR_S + b^2 + \frac{G}{c^4} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \quad (19.3.29)$$

Wieder wird $d^2 = 0$ gesetzt. Die Lösungen sind nun

$$r_{\pm} = \frac{R_S \pm \sqrt{R_S^2 - 4 \left(b^2 + \frac{G}{c^4} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \right)}}{2} \quad (19.3.30)$$

Mit den Definitionen für b und R_S ergibt sich

$$0 = \frac{GM}{c^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2 c^2}{G^2 M^4} - \frac{1}{GM^2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}} \right) \quad (19.3.31)$$

Wenn die Wurzel dieser Gleichung wieder den Wert null hat, gibt es für r_{\pm} eine doppelte Lösung. Damit wird die Kerr-Metrik an dem Punkt nicht eindeutig. Aus dieser Bedingung ergibt sich eine Grenze für den Drehimpuls L und Q :

$$1 \geq \frac{L^2 c^2}{G^2 M^4} + \frac{1}{GM^2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \quad (19.3.32)$$

oder

$$\frac{G^2 M^4}{c^2} \geq L^2 + \frac{GM^2}{c^2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \quad (19.3.33)$$

Wenn $Q = 0$ ist, folgt Gleichung (19.3.28). Wenn $L = 0$ ist erhalten wir

$$1 \geq \frac{1}{GM^2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \quad (19.3.34)$$

oder

$$Q \leq Q_{max} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 GM^2} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 c L_{max}} \quad (19.3.35)$$

Zusammen

$$L_{max}^2 \geq L^2 + \frac{L_{max}}{4\pi\varepsilon_0 c} Q^2 \quad (19.3.36)$$

Es zeigt sich, dass Schwarze Löcher durch drei Parameter und nur drei Parameter charakterisiert werden:

- Masse
- Drehimpuls
- Ladung

Um ein rotierendes schwarzes Loch wird, wie auch um die Erde, aber in grösserem Masse, die Raumzeit mitgezogen. Wie auch bei Jupiter wird der Ereignishorizont ein Rotationsellipsoid. Ausserhalb gibt es eine torusartige Region, die ERGOSPÄRE, in der der Mitführereffekt so dominant ist, dass nur Bahnen im gleichen Drehsinn wie die Rotationsrichtung des schwarzen Loches möglich sind. Im Gravitationsfeld der Erde beträgt die durch die mitgezogene Raumzeit verursachte zusätzliche Präzession eines Kreisels nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] $0.042'' \text{ a}^{-1}$. Steven Hawking [Haw74] entdeckte, dass schwarze Löcher über Quanteneffekte (Paarerzeugung) Energie verlieren können. Dies führt zu einer Verdampfungszeit eines schwarzen Loches von

$$t_{verdampfen} = 2560\pi^2 \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \left(\frac{M}{h}\right) \approx \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3 \cdot 2 \cdot 10^{67} \text{ a} \quad (19.3.37)$$

Die Zeit ist für schwarze Löcher mit Sternmassen irrelevant. Heute müssten nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] schwarze Löcher mit einer Masse $1.7 \cdot 10^{11} \text{ kg}$ gerade am explodieren sein. Sie hätten eine Strahlungsleistung von $1 \cdot 10^{13} \text{ W}$ und würden Partikel mit einer Energie von 100 MeV emittieren.

19.4. Gravitationslinse

Die Darstellung lehnt sich an [CO07] an.

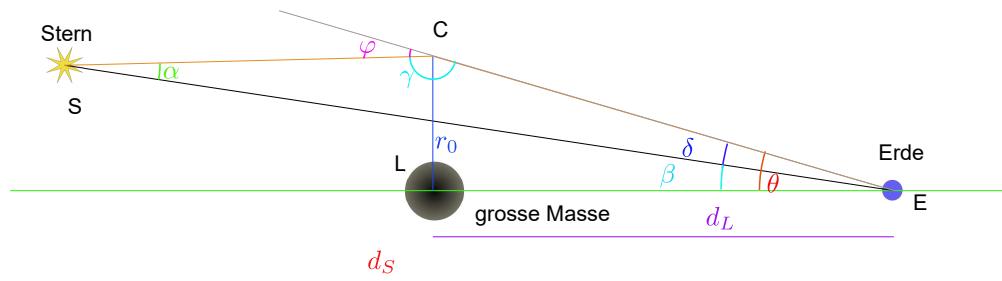


Abb. 19.6.: Geometrie zur Berechnung des Gravitationslinseneffektes.

In Abb. 19.6 verwenden wir im Dreieck ESC den Sinussatz. φ ist die Ablenkung eines Lichtstrahls nach Gleichung (19.1.7).

Um den Sinussatz anzuwenden, bemerken wir

$$\overline{SE} = \frac{d_S}{\cos(\beta)} \quad (19.4.1a)$$

$$\overline{CE} = \frac{d_L}{\cos(\theta)} \quad (19.4.1b)$$

$$\gamma = \pi - \varphi \quad (19.4.1c)$$

$$\delta = \theta - \beta \quad (19.4.1d)$$

$$\alpha = \pi - \gamma - \delta = \pi - (\pi - \varphi) - (\theta - \beta) = \varphi - \theta + \beta \quad (19.4.1e)$$

$$\sin(\theta) = \frac{r_0}{\overline{CE}} = \frac{r_0}{d_L} \cos(\theta) \longrightarrow \cos(\theta) = \frac{d_L}{r_0} \sin(\theta) \quad (19.4.1f)$$

Damit haben wir

$$\frac{\sin(\gamma)}{\overline{SE}} = \frac{\sin(\alpha)}{\overline{CE}} \quad (19.4.2a)$$

$$\frac{\sin(\pi - \varphi)}{\frac{d_S}{\cos(\beta)}} = \frac{\sin(\varphi - \theta + \beta)}{\frac{d_L}{\cos(\theta)}} \quad (19.4.2b)$$

$$\frac{\sin(\varphi) \cos(\beta)}{d_S} = \frac{\sin(\varphi - \theta + \beta) \cos(\theta)}{d_L} \quad (19.4.2c)$$

$$\frac{\sin(\varphi) \cos(\beta)}{d_S} = \frac{\sin(\varphi - \theta + \beta) \frac{d_L}{r_0} \sin(\theta)}{d_L} = \frac{\sin(\varphi - \theta + \beta) \sin(\theta)}{r_0} \quad (19.4.2d)$$

Wir verwenden nun, dass alle Winkel dem Betrage nach viel kleiner als eins sind, also dass der Sinus durch sein Argument und der Cosinus durch 1 ersetzt werden kann.

$$\frac{\varphi}{d_S} = \frac{(\varphi - \theta + \beta) \theta}{r_0} = \frac{\varphi \theta - \theta^2 + \beta \theta}{r_0} \quad (19.4.3a)$$

$$0 = \theta^2 - \theta \beta + \varphi \left(\frac{r_0}{d_S} - \theta \right) \quad (19.4.3b)$$

$$0 = \theta^2 - \theta \beta + \varphi r_0 \left(\frac{1}{d_S} - \frac{\theta}{r_0} \right) \quad (19.4.3c)$$

Aus Abb. 19.6 können wir aus dem rechtwinkligen Dreieck ELC ablesen:

$$\frac{\sin(\theta)}{r_0} = \frac{1}{\overline{CE}} \implies \frac{\theta}{r_0} \approx \frac{1}{d_L} \quad (19.4.4)$$

Damit ist mit $\varphi r_0 = \frac{4GM}{c^2}$ (aus Gleichung (19.1.7))

$$0 = \theta^2 - \theta \beta + \varphi r_0 \left(\frac{1}{d_S} - \frac{1}{d_L} \right) = \theta^2 - \theta \beta + \frac{4GM}{c^2} \left(\frac{1}{d_S} - \frac{1}{d_L} \right) \quad (19.4.5a)$$

$$0 = \theta^2 - \theta \beta - \frac{4GM}{c^2} \left(\frac{d_S - d_L}{d_L d_S} \right) \quad (19.4.5b)$$

Zur Erinnerung: In der Optik erhält man aus $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ mit $g = d_0 - b$

$$f = \frac{b}{d_0} (d_0 - b) \quad (19.4.6)$$

Gleichung (19.4.5b) hat zwei Lösungen. Wir setzen

$$A = \frac{4GM}{c^2} \left(\frac{d_S - d_L}{d_L d_S} \right)$$

und lösen

$$\theta^2 - \theta \beta - A = 0$$

und erhalten

$$\theta_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + A} \quad (19.4.7)$$

Die Summe der beiden Lösungen ist gerade

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + A} + \left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + A} \right) = \beta \quad (19.4.8)$$

Für die Masse bekommen wir bei bekanntem θ_1 und θ_2

$$M = \frac{c^2}{4G} \frac{d_L d_S}{d_S - d_L} (\theta_{1,2}^2 - \theta_{1,2} (\theta_1 + \theta_2)) = -\frac{c^2}{4G} \frac{d_L d_S}{d_S - d_L} \theta_1 \theta_2 \quad (19.4.9)$$

unabhängig von der Lösung. (Setzen Sie $\theta_{1,2} = \theta_1$ oder $\theta_{1,2} = \theta_2$, das Resultat ist gleich)

Wenn $|\beta| < \varphi = \frac{4GM}{r_0 c^2}$ sehr klein ist, sind die Lösungen symmetrisch um eine sehr grosse Masse

$$\theta_{1,2} = \pm \sqrt{A} = \pm \frac{2}{c} \sqrt{GM \left(\frac{d_S - d_L}{d_L d_S} \right)} \quad (19.4.10)$$

Abbildung 19.7 zeigt den Gravitationslinseneffekt des Galaxienclusters 19.7. Die ringförmigen Bilder der entfernten Galaxien werden EINSTEIN-RINGE genannt.



Abb. 19.7.: Das Galaxiencluster SDSS J1038+4849 im Zentrum dieses Hubble-Bildes vergrössert und verzerrt Hintergrundgalaxien. Diese sind als ringförmige Streifen sichtbar und viel weiter weg als SDSS J1038+4849 (Credit NASA/ESA)

In einem Paper berichten I. McDonald u. a., „Kepler K2 Campaign 9 – I. Candidate short-duration events from the first space-based survey for planetary microlensing“ [McD+21] über MICROLENSING durch Planeten oder dunkle Objekte, die vor einem hellen Stern vorbei ziehen. Microlensing ist eine direkte Konsequenz der Allgemeinen Relativitätstheorie. Abbildung 19.8 zeigt die Entdeckung des BRAUNEN ZWERGES OGLE-2015-BLG-1319 durch Microlensing. Die gemessenen Daten stammen aus dem Röntgenbereich (SWIFT) gemessen in einer Erdumlaufbahn, dem sichtbaren Bereich bei 800 nm des OPTICAL GRAVITATIONAL LENSING EXPERIMENT»(Optical Gravitational Lensing Experiment (OGLE)) in Chile und des SPITZER-WELTRAUMTELESKOPS bei 3.6 nm.

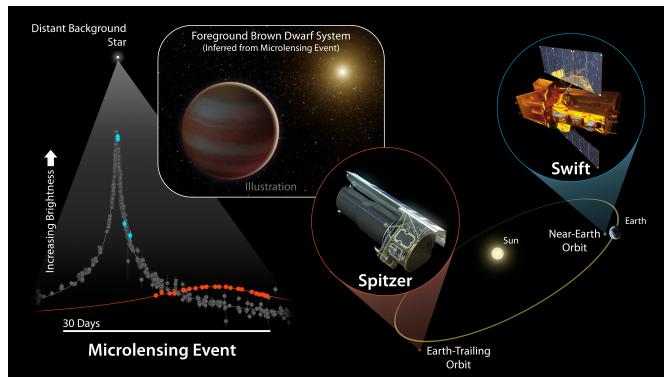


Abb. 19.8.: Der braune Zwerg OGLE-2015-BLG-1319 wurde vom es «OPTICAL GRAVITATIONAL LENSING EXPERIMENT»(OGLE) (graue Punkte), dem SPITZER-WELTRAUMTELESKOP (orange Punkte) und vom Teleskop SWIFT in einer Erdumlaufbahn (blaue Punkte) gemessen (Credits: NASA/JPL-Caltech).

19.5. Gravitationswellendetektoren

Für die Entdeckung der Gravitationswellen wurden Rainer Weiss, Barry Barish und Kip Thorne 2017 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

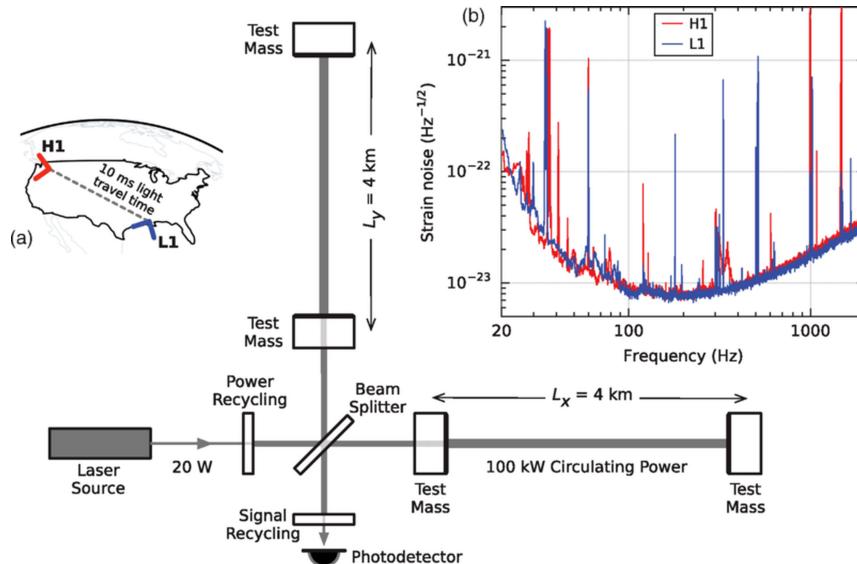


Abb. 19.9.: Gravitationswelleninterferometer LIGO (By Abbott, B. P. et al. - Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger [Abb+16], CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=46922746>).

Eine der Lösungen der Einstein'schen Feldgleichungen sagt Gravitationswellen voraus. Bei Gravitationswellen bleibt die Lichtgeschwindigkeit c konstant, aber der Skalenfaktor des Raumes, d.h. der metrische Tensor, verändert sich lokal. Bei einer Stauchung des Zwischenraumes trifft das Licht eher am zweiten Ort ein, bei einer Dehnung später. Die Störung des metrischen Tensors breitet sich nun mit Lichtgeschwindigkeit aus. Wenn die Wellenlänge gross gegen die Abmessungen des Interferometers ist (siehe auch Abbildung 19.9), dann verstimmt sich ein Arm des Interferometers in charakteristischer Weise. Dabei ändert sich der Abstand der beiden Spiegel um Bruchteile eines Protonendurchmessers. Das Design von LIGO (siehe [Bar18; Tho18; Wei18]) erlaubt, mit enorm hoher Laserleistung zu arbeiten. Es sind im Wesentlichen zwei Fabry-Perot-Interferometer (je etwa 280 Umläufe) gekoppelt über ein Michelson-Interferometer. Details des Aufbaus können Sie aus B. P. Abbott u. a.; B. C. Barish; K. S. Thorne; R. Weiss ([Abb+16; Bar18; Tho18; Wei18]) entnehmen.

Abbildung 19.10 zeigt die Massen der beobachteten Verschmelzungen von schwarzen Löchern in den Gravitationswellendetektoren LIGO und VIRGO. Die meisten beobachteten Ereignisse führten zu schwarzen Löchern mit sternartigen Massen. Das Ereignis GW190521 wurde durch eine Verschmelzung mit einert resultierenden Masse von $142 \text{ M}_{\text{Sonne}}$ ausgelöst. Es ist die erste eindeutige Beobachtung eines mittleren schwarzen Lochs (IBMH).

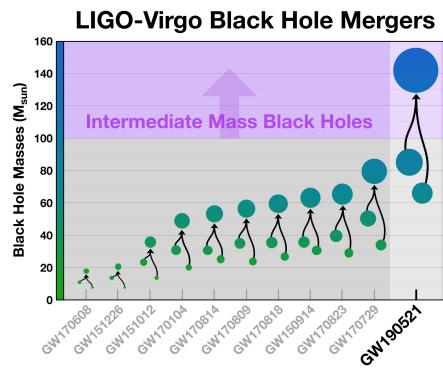


Abb. 19.10.: Durch die Gravitationswellendetektoren LIGO und Virgo beobachtete Verschmelzungen von schwarzen Löchern. (Image credit: LIGO/Caltech/MIT/R. Hurt (IPAC)).

20. Milchstrasse und ihre Sterne

Unsere Milchstrasse ist die im Detail am einfachsten zu untersuchende GALAXIE. Eine Übersicht andererseits ist schwierig zu bekommen, da wir ja inmitten des Geschehens sind. Deshalb ist es sinnvoll auch entferntere Galaxien zu untersuchen und die Erkenntnisse zu kombinieren.

20.1. Sternentwicklung

Die Entwicklung von Sternen in der Milchstrasse ist ein Beispiel für Prozesse, die in vielen Galaxien ablaufen. In Ihrer Arbeit „The efficiency of star formation in galaxies as a function of galaxy size and environment“ [You99] beschreibt Judith Young wie die lokale Umgebung und die Grösse der Galaxien die Sternbildung beeinflusst. Die folgenden Abschnitte zeigen wie Sterne klassifiziert werden und wie wir denken, dass die Entwicklung abläuft.

20.1.1. Masse und Leuchtkraft

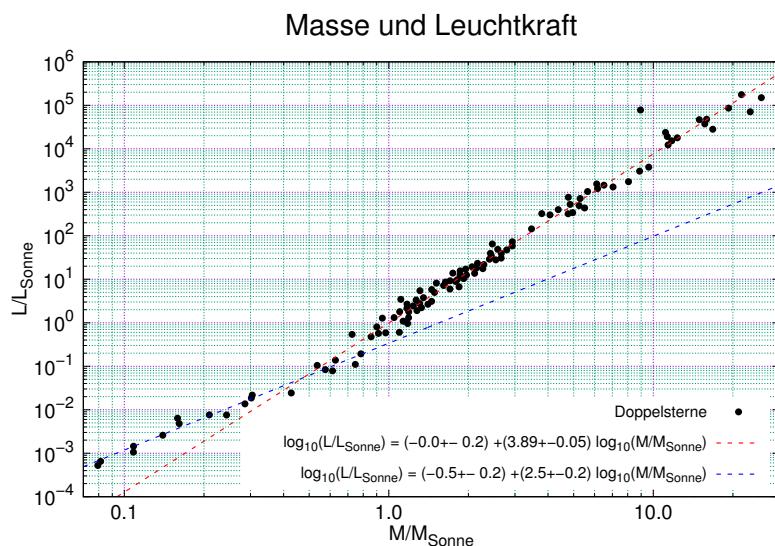


Abb. 20.1.: Zusammenhang zwischen Masse und Leuchtkraft (nach [UB91]).

Mit DOPPELSTERNEN kann der Zusammenhang zwischen Distanz, Masse und Leuchtkraft bestimmt werden (siehe A. Unsöld und B. Baschek *Der neue Kosmos* [UB91]). Der Zusammenhang zwischen der Masse und der Leuchtkraft ist in

Abbildung 20.1 gezeigt. Die Abbildung zeigt, dass es für die betrachteten Sterne zwei Bereiche mit einer unterschiedlichen funktionalen Abhängigkeit gibt:

$$M > M_{\odot} \quad \frac{L}{L_{\odot}} = (1^{+0.6}_{-0.4}) \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.89 \pm 0.05} \quad (20.1.1a)$$

$$M \leq M_{\odot} \quad \frac{L}{L_{\odot}} = (0.32^{+0.18}_{-0.12}) \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2.5 \pm 0.2} \quad (20.1.1b)$$

Für den Massenbereich von $0.05M_{\odot} < M < 100M_{\odot}$ gibt A. Unsöld und B. Baschek [UB91] an, dass

$$L \propto M^{\alpha} \quad (20.1.2)$$

A. Unsöld und B. Baschek geben an, dass die Beziehungen

$$M > 3M_{\odot} \quad \alpha \approx 3 \quad (20.1.3a)$$

$$M < 0.5M_{\odot} \quad \alpha \approx 4 \quad (20.1.3b)$$

seien. Dies ist nicht ganz durch die Daten gegeben, könnte aber aus theoretischen Überlegungen stammen.

20.1.2. Sternspektren und Klassifikation von Sternen

Edward Pickering hatte 1884 mit seinem Katalog «Harvard Photometry» eine erste Klassifizierung vorgenommen. Diese war unvollständig und teilweise nicht korrekt. Die physikalisch korrekt angeordneten Sternklassen wurden Annie Cannon 1922 von der International Astronomical Union (IAU) zum noch heute geltenden Klassifizierungssystem bestimmt. Ihre Klassifizierung beruht auch auf Vorarbeiten

von Williamina Fleming, Antonia Maury und Nettie Farrar.

Spektraltyp	T/K	Klassifikationskriterien
O	50000	Linien hochionisierter Atome: He II, Si IV, N III; H schwach
B0	25000	He II fehlt; He I schwach, Si III, O II; H stärker
A0	10000	He I fehlt; H maximal; Mg II, Si II stark; Fe II, Ti II schwach; Ca II schwach
F0	7600	H schwächer; Ca II stark; ionisierte Metalle Max. bei A5; neutrale Metalle gleich stark
G0	6000	Ca II sehr stark; neutrale Metalle (Fe I) stark
K0	5100	H relativ schwach; neutrale Atome stark; Moleküllanden
M0	3600	Neutrale Atome sehr stark (Ca I); TiO Banden
M5	3000	Ca I sehr stark; TiO stärker
C	3000	Starke Cn-, CH-, C ₂ -Banden; TiO fehlt (ältere Riesensterne)
S	3000	Starke ZrO, YO, LaO Banden; neutrale Atome wie bei K und M (ältere Riesensterne)
L	2000	sehr kalt, dunkelrot, CrH, FeH, H ₂ O, CO, N, K, Rb, Cs, TiO und VO schwächer
T	1300	kalt, Infrarot, starke CH ₄ -Banden, CO schwächer werdend
Y	400	braune Zwerge

Tab. 20.1.: Klassifikation von Sterntypen nach Edward Pickering und Annie Cannon.

Tabelle 20.1 zeigt die Klassifikation von Sternen nach Edward Pickering und Annie Cannon¹.

Junge Sterne befinden sich in den Klassen O, B, Alte Sterne sind in den Klassen K, M, ... zu finden. Die Sonne ist mit ihrer STERNKLASSE G2 V an der Grenze zwischen jungen und alten Sternen. Vielleicht ist die Grenze auch einfach so gewählt, dass alles was jünger als die Sonne ist «jung» ist, und umgekehrt.

Tabelle 20.1 verwendet zur Sternklassifikation Ionisationszustände. Die IONISATIONSZUSTÄNDE der Atome können nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Kap. 8.1.] aus der MAXWELL-BOLTZMANN-GLEICHUNG abgeleitet werden:

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \cdot 4\pi v^2 dv \quad (20.1.4)$$

¹Die Reihenfolge kann mit dem Merksatz «Oh, Be A Fine Girl/Guy – Kiss Me!» gelernt werden

Zur Berechnung der thermischen kinetischen Energie benötigen wir die wahrscheinlichste Geschwindigkeit

$$v_{wahrsch} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (20.1.5)$$

und die Root-Mean-Square (RMS)-Geschwindigkeit.

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad (20.1.6)$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron in einem Atom bei der Energie E zu finden wird durch die BOLTZMANNGLEICHUNG gegeben. Interessant ist hier nur die relative Wahrscheinlichkeit für zwei Niveaus E_a und E_b .

$$\frac{P(E_b)}{P(E_a)} = \frac{\exp\left(-\frac{E_b}{k_B T}\right)}{\exp\left(-\frac{E_a}{k_B T}\right)} = \exp\left(-\frac{(E_b - E_a)}{k_B T}\right) \quad (20.1.7)$$

Bei mehrfach entarteten oder degenerierten Energieniveaus E_a und E_b müssen die GEWICHTSFAKTOREN g_a und g_b verwendet werden. Die modifizierte Wahrscheinlichkeit lautet dann

$$\frac{P(E_b)}{P(E_a)} = \frac{g_b \exp\left(-\frac{E_b}{k_B T}\right)}{g_a \exp\left(-\frac{E_a}{k_B T}\right)} = \frac{g_b}{g_a} \exp\left(-\frac{(E_b - E_a)}{k_B T}\right) \quad (20.1.8)$$

Daraus kann das Verhältnis der Anzahl Atome berechnet werden

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b \exp\left(-\frac{E_b}{k_B T}\right)}{g_a \exp\left(-\frac{E_a}{k_B T}\right)} = \frac{g_b}{g_a} \exp\left(-\frac{(E_b - E_a)}{k_B T}\right) \quad (20.1.9)$$

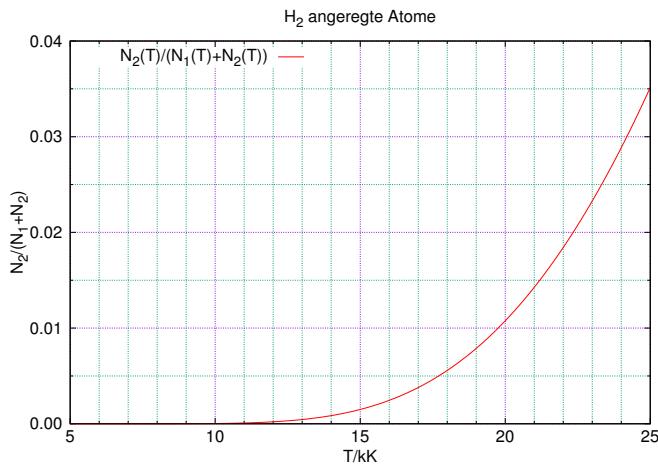


Abb. 20.2.: Anzahl der angeregten H-Atome als Funktion der Temperatur (nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Abb. 8.7]).

Abbildung 20.2 zeigt nach (20.1.9) die Temperaturabhängigkeit der Anzahl der angeregten H-Atome. Für eine genaue Berechnung müssen die verschiedenen IONISATIONSZUSTÄNDE berücksichtigt werden. Aus der statistischen Physik wissen wir, dass die ZUSTANDSSUMME

$$Z = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \exp\left(-\frac{(E_j - E_1)}{k_B T}\right) \quad (20.1.10)$$

die Grundlage aller weiterer Berechnungen ist. Wir nehmen die Werte Z_i und Z_{i+1} für den Anfangs- und den Endzustand an. Daraus ergeben sich nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Kap. 8.1.] die Gleichung für die Zahlenverhältnisse

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_i}{k_B T}\right) \quad (20.1.11)$$

Dabei ist χ_i die Energie um ein Elektron vom i -ten Zustand zu entfernen. n_e ist die Dichte der freien Elektronen. Gleichung (20.1.11) ist die SAHA-GLEICHUNG (nach Meghnad Saha)

Der Druck der freien Elektronen wird mit der idealen Gasgleichung $p_e = n_e k_B T$ aus der SAHA-GLEICHUNG (20.1.11) berechnet

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2k_B T Z_{i+1}}{p_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_i}{k_B T}\right) \quad (20.1.12)$$

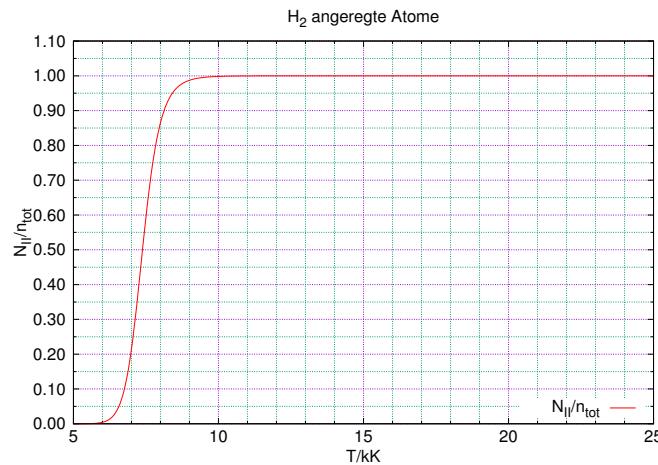


Abb. 20.3.: Saha-Gleichung für den Anteil des ionisierten Wasserstoffs beim Druck der freien Elektronen $p_e = 20$ Pa (analog zu B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Abb. 8.8]).

Die Zustandssumme des ionisierten Wasserstoffs mit $Z_{II} = 1$, $Z_I = 2$ (Spinzustände), der Energie $\chi_I = 13.6$ eV gibt das Verhältnis $\frac{N_{II}}{N_I + N_{II}}$. Diese Grösse ist in Abbildung 20.3 gezeigt.

Um die nicht ionisierten Atome mit zu berücksichtigen werden die BOLTZMANN-GLEICHUNG und die SAHA-GLEICHUNG kombiniert

$$\frac{N_2}{N_{total}} = \left(\frac{\frac{N_2}{N_1}}{1 + \frac{N_2}{N_1}} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{N_{II}}{N_I}} \right) \quad (20.1.13)$$

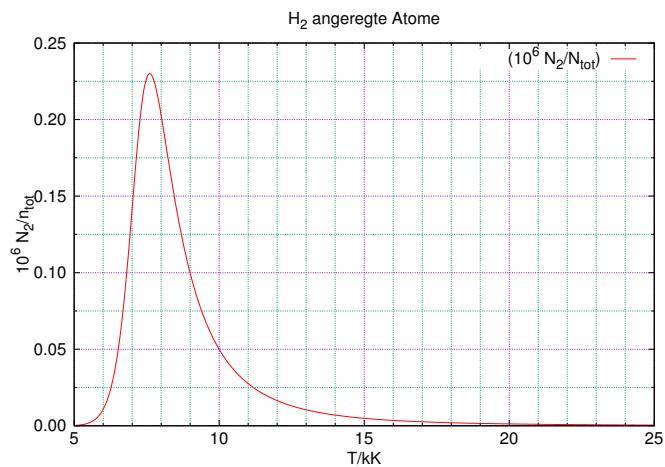


Abb. 20.4.: Stärke der Balmer-Linien beim Druck der freien Elektronen $p_e = 20 \text{ Pa}$ (analog zu B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Abb. 8.9]).

Gleichung (20.1.13) gibt die Stärke der BALMER-LINIEN an. Abbildung 20.4 stellt die Gleichung dar. Das Maximum befindet sich etwa bei 10 000 K.

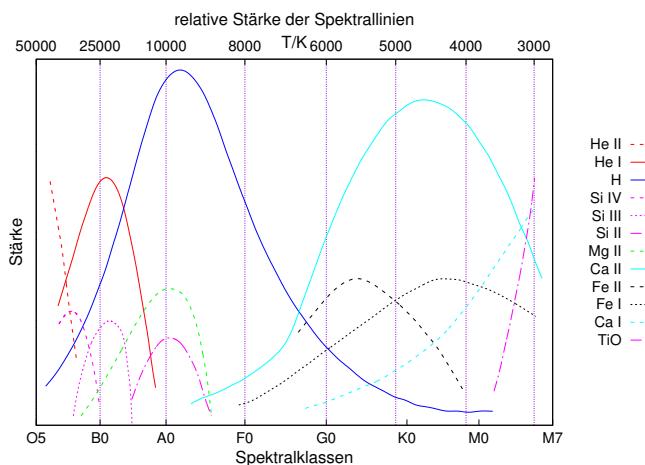


Abb. 20.5.: Linienstärken verschiedener Atome oder Verbindungen in Abhängigkeit von der Temperatur und der Spektralklasse (adaptiert von B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Fig. 8.11]).

Abbildung 20.5 zeigt die Linienstärke verschiedener Atomsorten bei verschiedenen Spektralklassen. Diese Darstellung ist die Grundlage der Spektralklassifikation.

Ternary map for color-T from 500-6000C

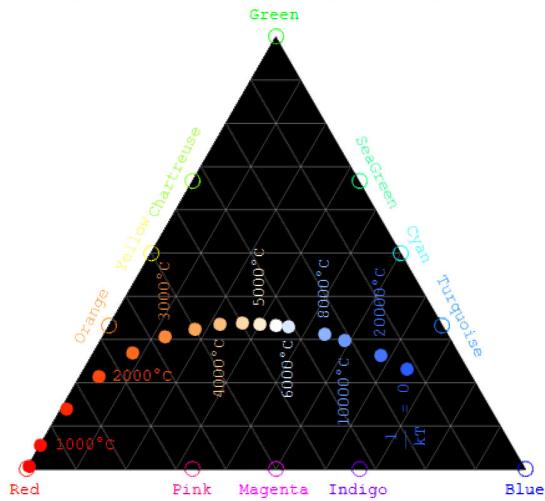


Abb. 20.6.: Sternspektren auf Kamerasensoren (Credit: P. Fraundorf, CC BY-SA 4.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>>, via Wikimedia Commons, TernaryColorTmap.PNG).

Kamerasensoren messen nicht Spektrallinien, sondern die relative Stärke der Farben rot, grün und blau. Abbildung 20.6 zeigt die Lage der verschiedenen Spektralklassen in Roh-Format von Kamera-Sensoren (RAW)-Dateien. Eine professionellere

Variante dieser Methode ist die Verwendung von FARBINDICES U , B und V .

Spektraltyp	$T_{\text{Oberfläche}}/\text{K}$	Farbindex $B - V$	Häufigkeit/%
O5	35000	-0.45	
B0	21000	-0.31	3
B5	13000	-0.17	
A0	9700	-0.00	27
A5	8100	+0.16	
F0	7200	+0.30	10
F5	6500	+0.45	
G0	6000	+0.57	16
G5	5400	+0.7	(\odot)
K0	4700	+0.84	37
K5	4000	+1.11	
M0	3300	+1.24	7
M5	2600	+1.61	

Tab. 20.2.: Spektraltypen. V : Helligkeit (Magnitude) m (bei 550 nm), B : Helligkeit (Magnitude) m (bei 440 nm).

Tabelle 20.2 zeigt die charakteristischen Werte der maximalen Emissionstemperatur der Oberfläche und des Farbindizes $B - V$ für die definierten Spektralklassen.

Symbol	Bezeichnung	Mittenwellenlänge	Bandbreite
U	Ultraviolette Magnitude	365 nm	68 nm
B	Blaue Magnitude	440 nm	98 nm
V	Sichtbare Magnitude	550 nm	89 nm

Tab. 20.3.: Definition der FARBINDICES U , B und V .

Tabelle 20.3 zeigt die Definition der FARBINDICES U , B und V . Üblicherweise werden die beiden Farbindices $U - B = M_U - M_B$ und $B - V = M_B - M_V$ verwendet.

Beachten Sie, dass die Definition für U

$$U = -2.5 \log_{10} \left(\int_0^{\infty} F_{\lambda} S_U(\lambda) d\lambda \right) + C_U \quad (20.1.14)$$

ist. Das Analoge gilt für B und V . Dann ist

$$U - B = -2.5 \log_{10} \left(\frac{\int_0^{\infty} F_{\lambda} S_U(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} F_{\lambda} S_B(\lambda) d\lambda} \right) + C_{U-B} \quad (20.1.15)$$

und analog für $B - V$.

20.1.3. Geburt von Sternen



Abb. 20.7.: Orion Nebel M42, eine Kinderstube für Sterne. Links die Aufnahme der NASA mit dem Hubble-Teleskop, rechts die Aufnahme von Christoph Klinkicht mit dem Teleskop des Fortgeschrittenenpraktikums. (Credits: links: NASA, ESA, T. Megeath (University of Toledo) and M. Robberto (STScI) h <http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2006/01/image/q/> und rechts: Christoph Klinkicht: Zulassungsarbeit zum Lehramt Physik an der Universität Ulm „CCD-Astrophotografie“ [Kli13]).

Sterne entstehen aus Gaswolken wie z.B. dem ORION NEBEL in Abbildung 20.7. James Jeans veröffentlichte in „I. The stability of a spherical nebula“ [Jea02] eine ausführliche Untersuchung zur Stabilität von Gaswolken. Eine homogene Gaswolke ist wegen der statistischen Natur der Gasbewegung gegen einen Gravitationskollaps nicht stabil. Die typische KOLLAPSZEIT beträgt etwa

$$t_{\text{Kollaps}} \approx 7 \cdot 10^6 \text{ a} \quad (20.1.16)$$

Die statistische Natur der Gasbewegung impliziert, dass eine Gaswolke an verschiedenen Orten instabil werden kann. Nach James Jeans und späteren Forschenden beginnt der Kollaps mit einer isothermen Kontraktion. Später wird die dichter werdenden Gaswolke optisch dicht. Durch die Kontraktion senkt sich die Gravitationsenergie der Massen der Gasteilchen. Da Energie erhalten werden muss, kann die freigewordene Energie sich in thermische Strahlung und in eine erhöhte kinetische Energie der Gasteilchen umwandeln: Die Temperatur steigt. Ab einer Temperatur von 100 K ist die Kontraktion ADIABATISCH.

Die steigenden Druckkräfte kompensieren Kollaps. Dies führt zur Dissoziation von H₂-Molekülen. Der Kollaps geht beschleunigt weiter.

Mit **James Jeans** kann die Gasmasse bestimmt werden, die notwendig ist, dass die Gravitation den Gasdruck überwinden kann. Der thermische und der Gravitationsdruck sind:

$$p_{Gas} = \frac{\rho}{\langle m \rangle} kT \quad (20.1.17a)$$

$$p_{grav} = -\frac{3}{8} \frac{GM^2}{\pi R^4} \quad (20.1.17b)$$

Wir bekommen eine Instabilität wenn

$$p_{Gas} + p_{grav} < 0 \quad (20.1.18)$$

ist. Daraus kann die mindestens notwendige Masse berechnet werden

$$M \geq \frac{2kT}{G \langle m \rangle} R \quad (20.1.19)$$

Die Ungleichung (20.1.19) kann für eine homogene sphärische Massenverteilung mit $M = \rho V = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$ in eine Ungleichung für die Dichte

$$\rho \geq \frac{3kT}{2\pi G \langle m \rangle R^2} \quad (20.1.20)$$

oder den Radius

$$R^2 \geq \frac{3kT}{2\pi G \langle m \rangle \rho} \quad (20.1.21)$$

umgewandelt werden. Mit der gleichen Beziehung $M = \rho V = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$ erhält man die notwendige Mindestmasse für einen Gravitationskollaps

$$M \geq \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left(\frac{kT}{G \langle m \rangle} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (20.1.22)$$

Diese Grenze hängt nur von der Dichte und der Temperatur ab, nicht von der Ausdehnung der Gasmasse.

T	1 H/cm ³	10 ² H/cm ³	10 ⁴ H/cm ³	10 ⁶ H/cm ³
5 K	$261M_{\odot}$	$26.1M_{\odot}$	$2.61M_{\odot}$	$0.27M_{\odot}$
10 K	$738M_{\odot}$	$73.8M_{\odot}$	$7.38M_{\odot}$	$0.738M_{\odot}$
100 K	$23300M_{\odot}$	$2330M_{\odot}$	$233M_{\odot}$	$23.3M_{\odot}$

Tab. 20.4.: Mindestmassen für Gravitationskollaps

Tabelle 20.4 zeigt die notwendigen Mindestmassen in Abhängigkeit von der Temperatur und der Dichte von Wasserstoffatomen.

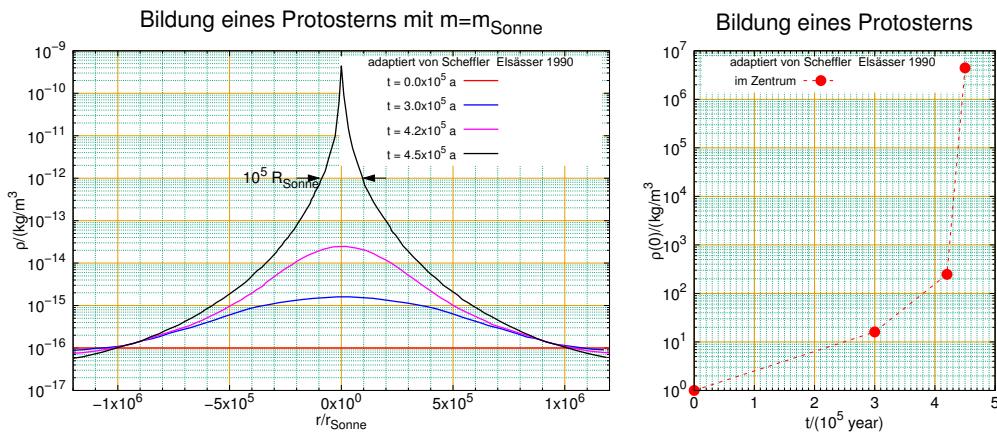


Abb. 20.8.: Kontrahierende Gaswolke. Links die Dichte der Gaswolke im Querschnitt und rechts die Dichte im Zentrum über die Zeit. (adaptiert aus fig:sterne:gaswolke:kollabierend [SE90]).

Die Dichte einer kollabierenden Gaswolke nimmt im Zentrum beim Kollaps sehr schnell zu. Abbildung 20.8 zeigt links zu vier Zeiten den radialen Verlauf der Dichte und rechts die Dichte im Zentrum.

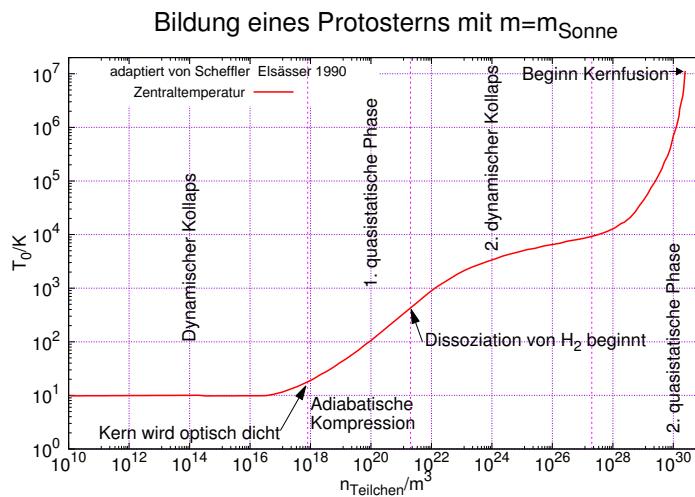


Abb. 20.9.: Temperatur beim Gravitationskollaps (adaptiert aus [SE90]).

Abbildung 20.9 zeigt die Zentraltemperatur eines sich bildenden Sterns als Funktion der Teilchendichte im Kern.



Abb. 20.10.: Bild kollabierender Gaswolken: Pleiades, NGC 1432/35, M45 (Quelle: NASA, ESA and AURA/Caltech, http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/images/hs-2004-20-a-full_jpg.jpg).

Abbildung 20.10 schliesslich zeigt kollabierende Gaswolken in den Plejaden.

20.1.3.1. Drehimpuls

Wenn Sterne aus Gaswolken kollabieren entsteht eine komplizierte Wechselwirkung mit Drehimpulsen und Magnetfeldern. Üblicherweise haben die vorhandenen Magnetfelder Stärken von etwa $10 \cdot 10^{-10}$ T.

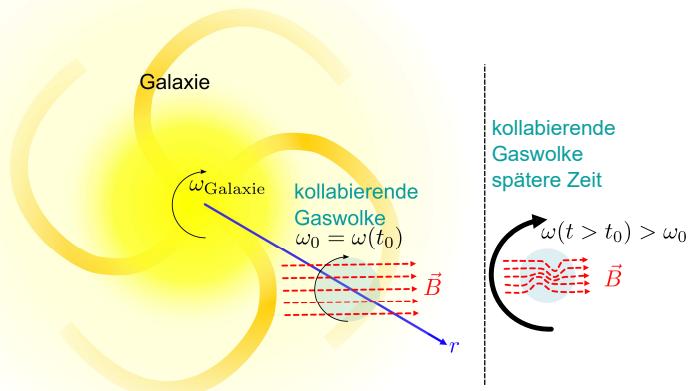


Abb. 20.11.: Kollabierende Gaswolke in einer Galaxie. (adaptiert von W. Demtröder, Kap. 11.2.3.).

Abbildung 20.11 zeigt eine Galaxie mit einer lokalisierten Gaswolke, die kollabiert.

Diese Gaswolke hat ursprünglich die Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = \omega(t_0)$. Wenn die Gaswolke nun geschrumpft ist muss sich der gesamte Drehimpuls des Gases erhalten (ausser es gäbe Kollisionen mit äusseren Objekten). Da der Durchmesser schrumpft (siehe Abbildung 20.8) muss die Winkelgeschwindigkeit als Funktion der Zeit zunehmen: $\omega(t > t_0) > \omega_0$.

Die in der Gaswolke vorhandenen Magnetfelder werden durch ähnliche Prozesse wie bei Protuberanzen (siehe Abschnitt 14.1.2) mitgeführt. Die Wechselwirkung des Magnetfeldes mit dem Gas und mit sich selber bewirkt:

1. dass die Energie der Magnetfelder die Gaswolke gegen einen Kollaps stabilisiert. Die notwendige Masse wird deshalb leicht höher sein.
2. Weiter werden deshalb die Magnetfelder mitgeführt und aufgewickelt.
3. Schliesslich werden durch die aufgewickelten Magnetfelder ionisierte Teilchen im äusseren Bereich beschleunigt und innen gebremst. Drehimpuls wird so von innen nach aussen transportiert.

Der Transport von Drehimpuls ist besonders gut in unserem Sonnensystem sichtbar: Die Sonne beinhaltet 99 % der Gesamtmasse des Sonnensystems, trägt aber nur 1 % des gesamten Drehimpulses. Der überwiegende Anteil des Drehimpulses wird von der Bahnbewegung der Planeten, Planetoiden, Kometen, Asteroiden und sonstigen Objekten in einer Sonnenumlaufbahn getragen. Dabei vermindern die wenigen rückwärts laufenden Objekte den Gesamtdrehimpuls.

20.1.4. Hauptreihe

Wenn die von Edward Pickering begonnenen und von Annie Cannon zusammen mit Williamina Fleming, Antonia Maury und Nettie Farrar vollendete Klassifizierung auf Sterne angewandt wird zeigen sich in Diagrammen der Magnitude gegen den Farbindex Strukturen, die zum besseren Verständnis der Sternentwicklung viel beigetragen haben.

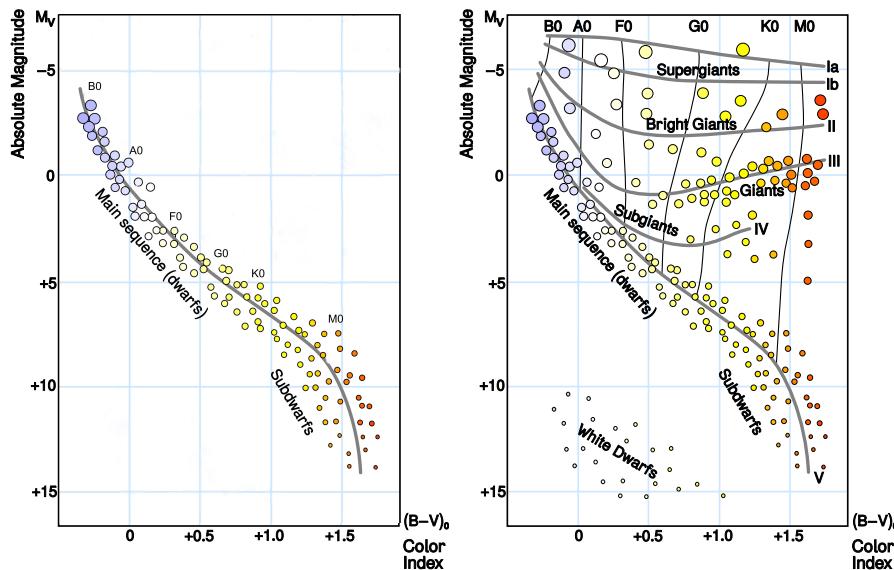


Abb. 20.12.: Links: Lage einer Vielzahl von Sternen im Magnitude gegen $B - V$ -Diagramm, rechts: Farbindex und Magnitude (modifiziertes Diagramm By Rursus (Own work) [GFDL or CC-BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons, File%3AH-R_diagram.svg, kombiniert mit Daten aus [GSZ80]]).

Abbildung 20.12 zeigt links die Lage der Mehrheit der beobachteten Sterne in einem Diagramm Magnitude gegen Farbindex. Diese Struktur wird HAUPTREIHE genannt. Sie beginnt links oben mit grossen und heissen Sternen und endet rechts unten mit ZWERGSTERNEN oder den noch kleineren SUBZWERGSTERNEN. Es gibt noch weitere grössere Sterne. Diese sind in Abbildung 20.12 rechts gezeigt. Eingezeichnet ist bei beiden Darstellungen auch die Sternklassifizierung nach Annie Cannon.

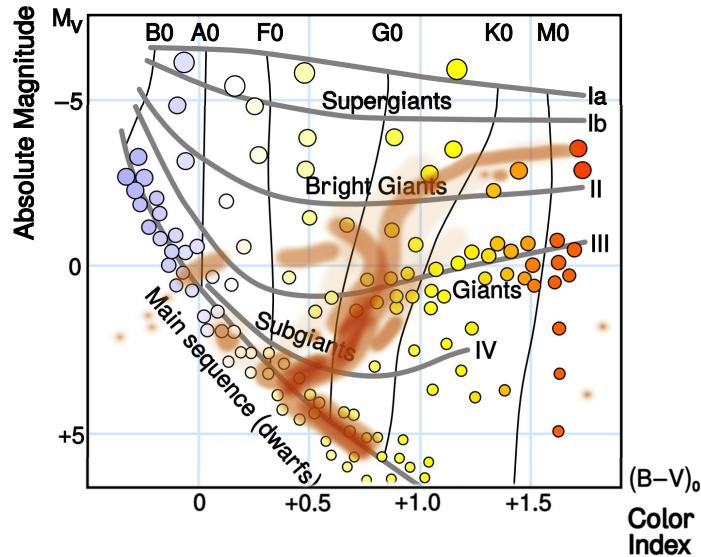


Abb. 20.13.: Farbindex und Magnitude bei der Galaxie M3. Die orange Farbe zeigt die Lage der Sterne in der Galaxie M3. (Bearbeitetes Diagramm By Rursus (Own work) [GFDL or CC-BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons, File%3AH-R_diagram.svg, kombiniert mit Daten aus [GSZ80]]).

Je nach Galaxis treten nur einige der möglichen Sterntypen auf. Abbildung 20.13 zeigt die im Kugelsternhaufen M3 im Sternbild der Hunde vorhandenen Sterntypen. Die orange Farbe markiert diese Sterne.

20.1.4.1. Hertzsprung-Russell-Diagramm

Das Diagramm ist nach Ejnar Hertzsprung, seinem Entdecker und Henry Russell der das Diagramm in die heutige Form gebracht hat. Die horizontale Achse ist dabei der Farbindex $B-V$ oder die Temperatur aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz. Weiter ist dies äquivalent zu den Sternklassen nach Annie Cannon. Die vertikale Achse ist entweder die Magnitude oder die relative Luminosität.

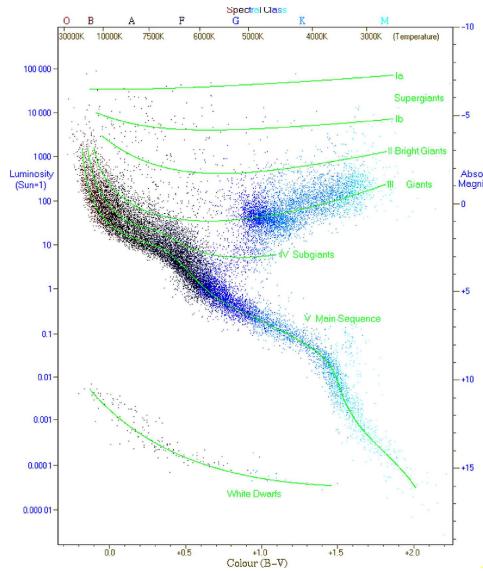


Abb. 20.14.: HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMM (von Richard Powell (The Hertzsprung Russell Diagram) [CC-BY-SA-2.5, via Wikimedia Commons, File:HRDiagram.png]).

Abbildung 20.14 zeigt ein HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMM mit sehr viel mehr Sternen. Die Hauptreihe enthält die meisten Sterne, gefolgt von den Riesensternen oben rechts. Unten links befinden sich die weißen und braunen Zwerge.

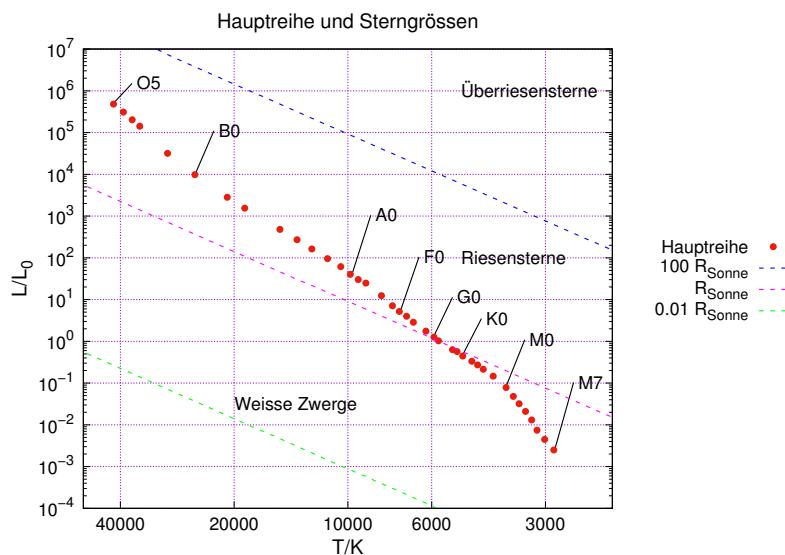


Abb. 20.15.: Temperatur und Masse von Sternen (nach [CO07, Abb. 8.14]).

In Abbildung 20.15 ist nochmals die Hauptreihe eingezeichnet, Zusammen mit der

Lage von Sternen die den Sonnenradius oder das 100-fache bzw. das 0.01-fache des Sonnenradius R_{\odot} haben. Da wo die Linie für $R = R_{\odot}$ die Hauptreihe kreuzt befindet sich unsere Sonne.

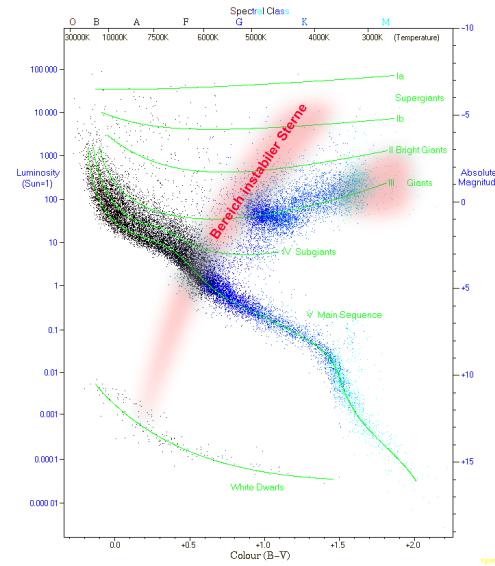


Abb. 20.16.: Bereich instabiler Sterne (nach [CO07, Abb. 8.16] ergänzt von von Richard Powell (The Hertzsprung Russell Diagram) [CC-BY-SA-2.5, via Wikimedia Commons, File:HRDiagram.png]).

Abbildung 20.16 zeigt in blassrot den Bereich instabiler Sterne im HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMM. Sterne ausserhalb dieses Bereiches leben bei kleiner Masse mehrere Milliarden Jahre, bei sehr grosser Masse auch nur einige zehn Millionen Jahre lang. Im Instabilen Bereich ist die Lebensdauer kürzer.

20.1.4.2. Lebensdauer von Sternen

Die Lebensdauer von Sternen hängt von ihrer Masse ab. Je grösser diese ist, desto stärker kollabiert die Ausgangsgaswolke und desto höher ist die Temperatur im Kern, die notwendig ist um einen ausreichenden Gegendruck zu erzeugen. Die Lebensdauer von Sternen beträgt näherungsweise

$$\tau_{\text{HR}} \approx 6 \cdot 10^9 \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^2 \text{ a} \quad (20.1.23)$$

Wir können festhalten, dass mit höherer Masse die Lebensdauer

kürzer wird.

Massenbereich	Bemerkungen
$0.08M_{\odot} < M < 0.25M_{\odot}$	Kleiner Kern mit p-p-Reaktion, Kein CNO-Zyklus \Rightarrow Der Stern endet als WEISSEN ZWERG
$0.25M_{\odot} < M < 1.5M_{\odot}$	p-p-Reaktion in grossem Bereich, bewegt sich auf der Hauptachse nach links oben
$M > 1.5M_{\odot}$	CNO-Zyklus ist Hauptenergiequelle
$M < 1.4M_{\odot}$	He-Flash, der Radius $R \rightarrow 250R$ vergrössert sich vor dem Ende enorm!

Tab. 20.5.: Massenbereiche und die dabei auftretenden haupsächlichen Prozesse der Energieumwandlung.

Tabelle 20.5 listet die dominanten Prozesse der Energieumwandlung abhängig von den Massenbereichen.

20.1.4.3. Hauptreihenentwicklung

Anhand des Hertzsprung-Russell-Diagramms kann man abschätzen, wie alt Sterne sind. Conny Aerts konnte zeigen, dass akustische Schwingungen von Sternen (siehe auch für die Sonne Abschnitt 14.1.3) zur Bestimmung des Alters verwendet werden können [ACK10; Aer+03; Bed+11].

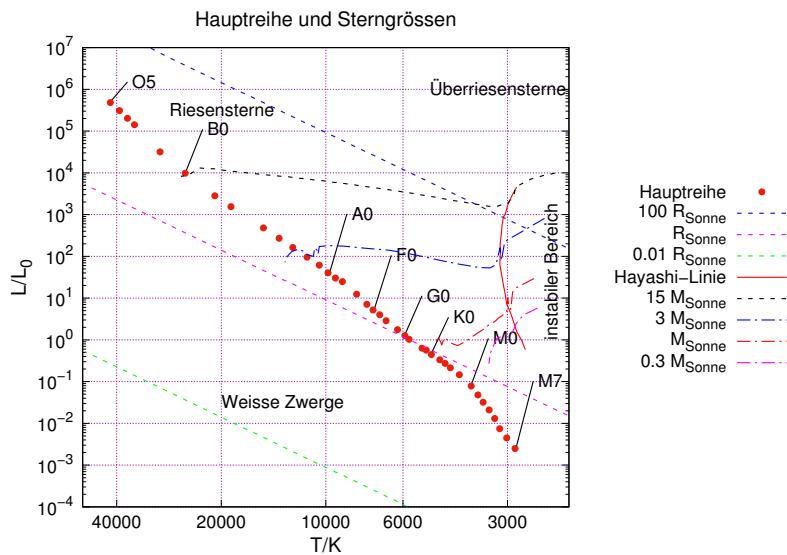


Abb. 20.17.: Weg kollabierender Gaswolken durch das HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMM (Kombination aus Daten von [CO07, Abb. 8.14] und [Dem10, Abb. 11.19]).

Abbildung 20.17 zeigt den Weg von Sternen weg von der Hauptreihe des HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMMS bis zum STERNTOD. Die rote Linie rechts ist die nach Hayashi Chūshirō benannte Hayashi-Linie. Sie trennt den Bereich instabiler, also zerfallender Sterne rechts ab. Abhängig von der Masse sind die Wege eher direkt oder auch gewunden.

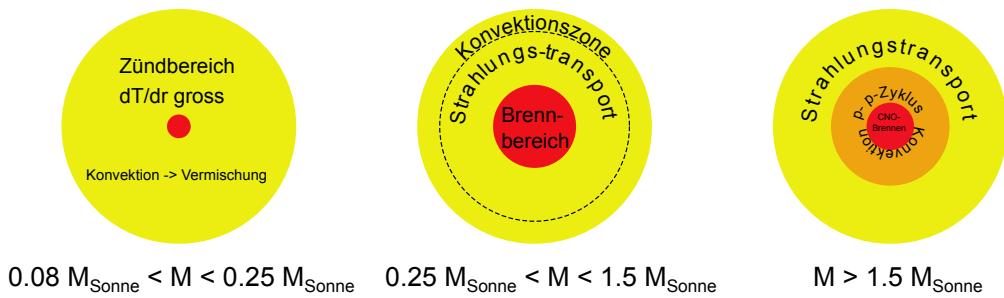


Abb. 20.18.: Hauptreihenentwicklung (nach [Dem10, Abb. 11.21]).

Zuerst soll jedoch die Sternentwicklung auf der HAUPTREIHE beschrieben werden. Abbildung 20.18 zeigt die vorherrschenden Brennmodi abhängig von der Sternmasse. In der Mitte ist die Situation wie bei unserer Sonne gezeigt. Ein relativ grosser Brennbereich für Wasserstoff (P-P-ZYKLUS) im Zentrum wird von einer Strahlungszone gefolgt. Aussern gibt es eine relativ dünne, aber trotzdem voluminöse Schicht mit Konvektion.

Bei massereicheren Sternen (rechts) ist der Brennbereich in zwei Zonen aufgeteilt, innen mit dem bei höheren Temperaturen ablaufenden CNO-ZYKLUS und darum herum den Wasserstoffbrennbereich (P-P-ZYKLUS). Die Strahlungstransportzone reicht bis an die Oberfläche des Sterns.

Bei Sternen, die leichter als $0.25 M_{\odot}$ sind gibt es im Zentrum einen ganz kleinen Brennbereich für Wasserstoff (P-P-ZYKLUS) mit einem sehr starken Temperaturgradienten, gefolgt von einer Konvektionszone. Die Strahlungszone fehlt.

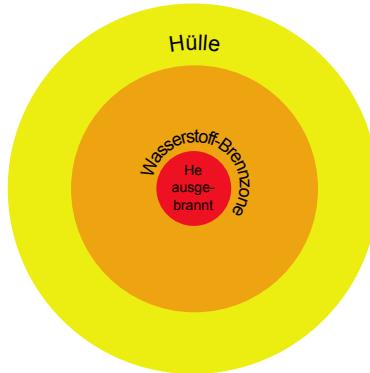


Abb. 20.19.: Hauptreihenentwicklung: Späteres Stadium bei mittlerer Masse (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.22]).

Wenn die Hauptreihenentwicklung abgeschlossen ist und sich der Stern im HERTZ-SPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMM (siehe Abbildung 20.17) nach rechts bewegt, ändert sich die innere Struktur. Der Kern enthält kein brennfähiges Helium mehr. Aussen herum gibt es eine Zone mit Wasserstoffbrennen (P-P-ZYKLUS) gefolgt von einer eher schmalen Hülle.

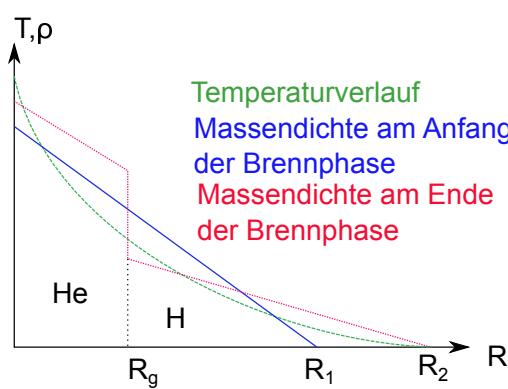


Abb. 20.20.: Hauptreihenentwicklung: Am Ende des Wasserstoffbrennens bei massereichen Sternen (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.23]).

Abbildung 20.20 zeigt schematisch den Temperaturverlauf im Inneren eines Sterns. Weiter zu sehen ist die zu Beginn des Wasserstoffbrennens (P-P-ZYKLUS) linear

nach aussen abnehmende Massendichte sowie der Dichtesprung an der Grenze zwischen dem Helium-reichen Kern und der Wasserstoffhülle am Ende der Prennphase.

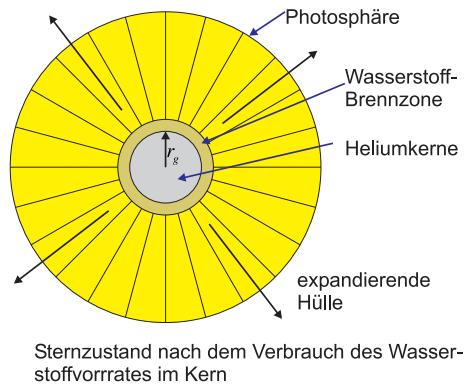


Abb. 20.21.: Sternzustand nach Verbrauch des Wasserstoffvorrates im Kern (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.24]).

Nachdem der Wasserstoffvorrat im Kern aufgebraucht wird muss die Dichte im Zentrum steigen (siehe den Dichteverlauf in der Abbildung 20.20). Abbildung 20.21 skizziert, dass dann die Hülle stark expandiert. Es wird angenommen, dass der Durchmesser der Sonne am Ende ihrer Lebensdauer grösser als der heutige Durchmesser der ERDBAHN sein wird.

20.1.4.4. Nachhauptreihenentwicklung

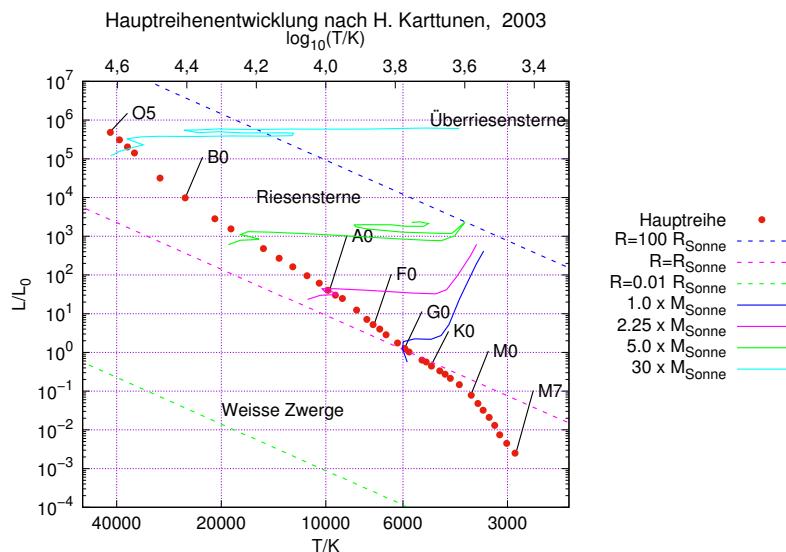


Abb. 20.22.: Nach-Hauptreihenentwicklung nach [Kar03].

Abbildung 20.21 zeigt die Nachhauptreihenentwicklung nach H. Karttunen (*Fundamental Astronomy* [Kar03]). Sterne mit der Masse der Sonne bewegen sich entlang der blauen Linie zu grösserem Durchmesser, aber kleinerer Temperatur und verwandeln sich mit einem He-Flash, einem Lichtblitz, in einen Zergstern. Bei Sternen mit einer Masse $\gtrsim 2 M_{\odot}$ zündet die Helium-Verbrennung im Inneren. Sterne an der unteren Grenze (lila Kurve) beenden dann ihr Leben am Ort der Zündung. Noch schwerere Sterne wandern dann wieder zurück zu höheren Temperaturen (grüne Kurve). Sehr schwere Sterne $\gtrsim 50 M_{\odot}$ kommen nie zum Helium-Zünden.

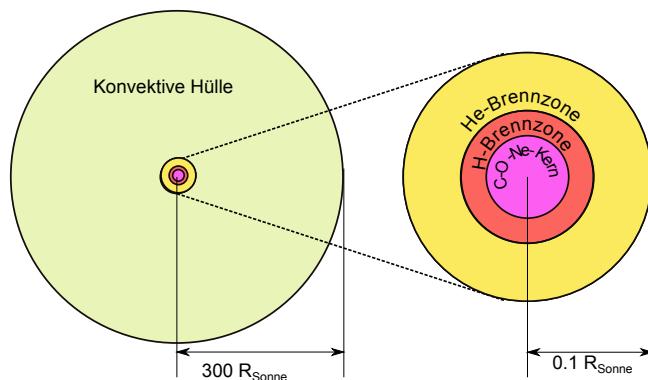


Abb. 20.23.: Entwicklung bei mittlerer Sternmasse (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.26])

Bei einer mittleren Sternmasse (siehe Abbildung 20.23) bläst sich die konvektive Hülle bis zu einem Durchmesser von $\approx 300 R_{\odot}$ auf während der Reststern mit einem C, O und Ne-Kern gefolgt (nach aussen) von einer Wasserstoff-Brennzone und einer He und einer Hülle noch einen Durchmesser von $\approx 0.1 R_{\odot}$ hat.

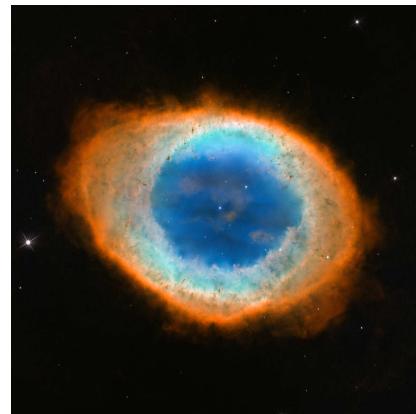


Abb. 20.24.: Ringnebel aus der Leier (NASA, ESA, and the Hubble Heritage (STScI/AURA)-ESA/Hubble Collaboration, http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2013/13/image/b/format/xlarge_web/).

Die abgestossene konvektive Hülle kann in Teleskopbildern gesehen werden. Ein Beispiel zeigt die Abbildung 20.24.

20.1.5. Veränderliche Sterne

1596 entdeckte David Fabricius dass sich der Stern MIRA im Sternbild Walfisch mit einer Periode von ≈ 331 d seine Helligkeit änderte. Erst im ausgehenden 19. Jahrhundert widmete sich Mary Watson Whitney, Direktorin der Sternwarte des Vassar College, Poughkeepsie, New York zusammen mit Caroline Furness der Untersuchung veränderlicher Sterne. Die Resultate wurden von M. W. Whitney und C. E. Furness in „Observations of variable stars made during the years 1901-12“ [WF13] publiziert.

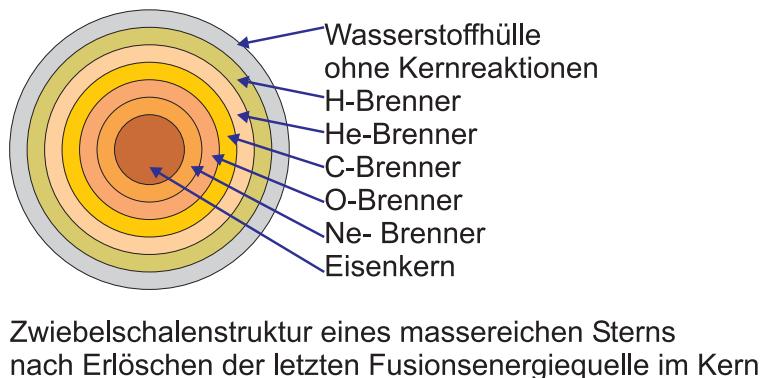
Sterne können ihre Leuchtkraft intern oder extern ändern. Veränderliche Sterne können Periodendauern von fast $1 \cdot 10^4$ d bis hinunter zu weniger als 1 ms haben. Es gibt nach der Website der ESA zum Satelliten HIPPARCOS [ESA22] bis jetzt 11 597 variable Sterne. Die ESA unterscheidet die folgenden Kategorien

- pulsierende variable Sterne
 - CEPHEIDEN, Beispiel δ -Cephei (Hipparchos-Katalog [HIP 110991](#))
 - RR Lyrae (Leier)-ähnliche Sterne, Beispiel RR-Lyrae (Hipparchos-Katalog [HIP 95497](#))
 - RV-Tauri (Stier)-ähnliche Sterne, Beispiel R Scuti im Sternbild Schild (Hipparchos-Katalog [HIP 92202](#))
 - lang-periodische oder Mira variable Sterne, nach α -Ceti im Sternbild Walfisch, genannt Mira (Hipparchos-Katalog [HIP 10826](#)), entdeckt von David Fabricius in 1596
 - halbreguläre variable Sterne, Beispiel Z Ursae Majoris im grossen Wagen (Hipparchos-Katalog [HIP 58225](#))

- R Coronae Borealis-ähnliche Sterne, Beispiel R Coronae im Sternbild nördliche Krone Borealis (Hipparchos-Katalog **HIP 77442**)
- eruptive variable Sterne
 - γ -Cassiopeiae- artige Sterne, Beispiel V960 Tau(ri) im Stier (Hipparchos-Katalog **HIP 26064**)
 - Sich wiederholende Novae, Beispiel Nova CrB 1866 (Hipparchos-Katalog **HIP 78322**)
 - Symbiotische Sterne, Beispiel Z Andromedae im Sternbild Andromeda (Hipparchos-Katalog **HIP 116287**)
- sich abdeckende Doppelsterne, Beispiel β Persei im Sternbild Perseus, auch Algol genannt (Hipparchos-Katalog **HIP 14576**)
- rotierende Sterne, Beispiel RS Canum Venaticorum im Sternbild Jagdhunde (Hipparchos-Katalog **HIP 64293**)

Dazu kommen noch sehr viel schneller sich ändernde Sterne, die PULSARE (siehe Abschnitt [20.1.7.3](#)).

20.1.6. Massive Sterne



Zwiebelschalenstruktur eines massereichen Sterns
nach Erlöschen der letzten Fusionsquelle im Kern

Abb. 20.25.: Zwiebelschalenstruktur eines massereichen Sterns nach Erlöschen der letzten Fusionsquelle im Kern (nach Demtröder [[Dem10](#), Abb. 11.28])

Massive Sterne durchlaufen am Ende ihrer Lebensdauer (siehe auch [20.23](#)) eine sich immer schneller ablaufende Entwicklung. Nachdem H und He sowie die weiteren leichten Atomsorten aufgebraucht sind folgt die Fusion von SAUERSTOFF, das O-Brennen für einige Monate. Dann wird SILIZIUM im sogenannten Si-Brennen in einigen Tagen aufgebraucht. Es bildet sich eine Zwiebelschalenstruktur (siehe Abbildung [20.25](#)). Die abgeworfene Hülle leuchtet hell auf. Der Stern explodiert als **TYP II SUPERNOVA**.

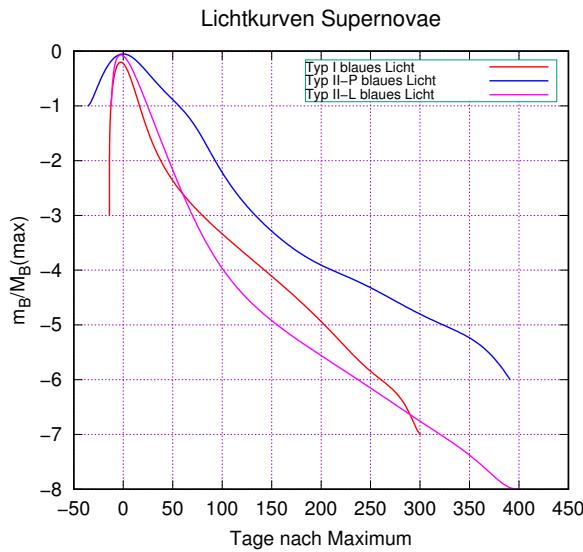


Abb. 20.26.: Lichtkurven von Supernovae nach J. B. Doggett und D. Branch [DB85].

Abbildung 20.26 zeigt den Helligkeitsverlauf von SUPERNOVAE über etwas mehr als ein Jahr. J. B. Doggett und D. Branch unterscheiden in „A comparative study of supernova light curves“ [DB85] drei Arten von SUPERNOVAE, die Typen I, II-P und II-L. SUPERNOVAE können so hell sein, dass sie in einer Millionen Lichtjahre entfernten Galaxie die Galaxie überstrahlen können. Abbildung 20.26 deutet an, dass der Helligkeitsverlauf von SUPERNOVAE universell sein könnte. Bei einigen speziellen Typen von SUPERNOVAES ist dies der Fall, sie können zur absoluten DISTANZMESSUNG verwendet werden.

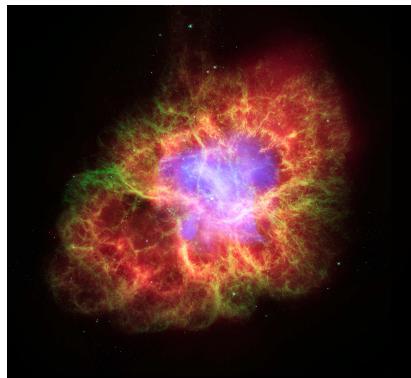


Abb. 20.27.: Supernova-Reste (Krebs-Nebel, Explosion 1054) (NASA, ESA, CXC, JPL-Caltech, J. Hester and A. Loll (Arizona State Univ.), R. Gehrz (Univ. Minn.), and STScI, http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/images/hs-2005-37-b-full_jpg.jpg)

Die abgeworfene Gashülle wie bei der im Jahre 1054 beobachteten Explosion im STERNBILD KREBS bilden eine leuchtende, sich ausdehnende Gaswolke. Abbildung fig:supernova:krebs zeigt ein Bild davon.

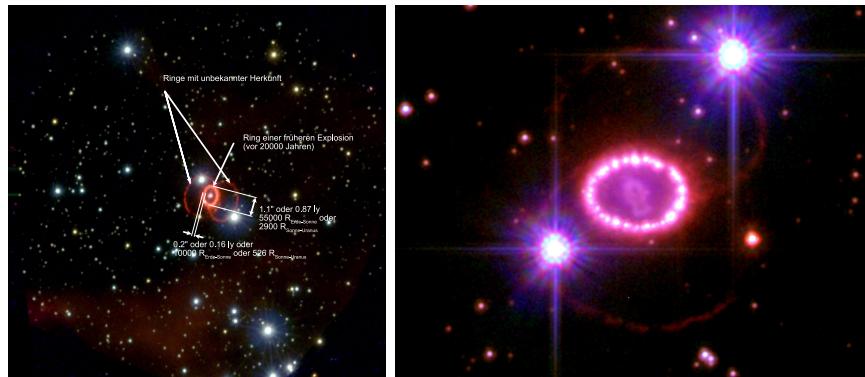


Abb. 20.28.: Supernova 1987A in Magellanscher Wolke 163 000 ly, entfernt, aufgenommen am 6. 12. 2006 durch das Hubble-Space-Telescope. Links eine Übersicht, rechts eine mit Bildverarbeitung geschärfte Aufnahme. Kleiner heller Ring mit Lichtpunkten: Schockwelle, Ringdurchmesser 0.86 ly, Breite 0.2 ly. Zentrum: radioaktive Elemente, vor allem ^{44}Ti Schockwelle, 2 schwache Ringe unbekannter Ursache (NASA, ESA, P. Challis and (rechts) R. Kirschner (Harvard-SmithsonianCenter for Astrophysics)).

Abbildung 20.28 zeigt die Überreste einer Nova aus dem Jahre 1987. Nicht alle beobachteten Strukturen sind verstanden. Heute weiss man, dass der Stern zu

einem Pulsar, also einem Neutronenstern kollabiert ist.

20.1.6.1. Novae

Gegenwärtig unterscheidet man drei Arten von Novae, die ZWERGNOVAE, die KLASSISCHEN NOVAE und die SUPERNOVAE. Die letzteren werden in die SUPERNOVAE TYP I und die SUPERNOVAE TYP II eingeteilt.

20.1.6.1.1. Zwergnovae ZWERGNOVAE entstehen wenn die Akkretionsscheibe eines Binärsystems mit einem weissen Zwerg aufleuchtet (Siehe [CO07, Kap. 18.4, p. 675]). Bei weissen Zwernen leuchtet die Akkretionsscheibe bei einem aktiven Transfer von Materie wesentlich stärker als der Stern selber.

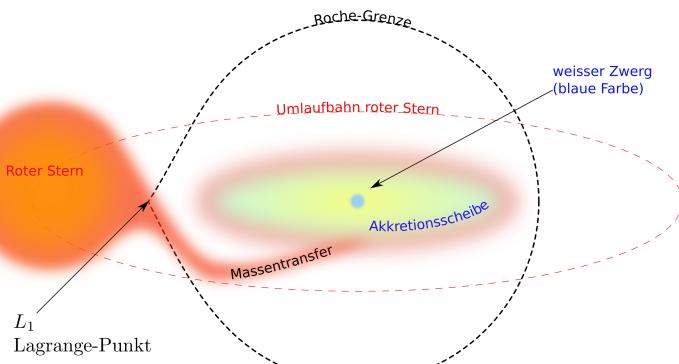


Abb. 20.29.: Symbolische Darstellung einer Akkretionsscheibe eines Binärsystems aus einem roten Stern und einem weißen Zwerg. (Nach [CO07], <https://physics.weber.edu/carroll/> und <https://hubblesite.org/>)

Abbildung 20.29 zeigt eine Darstellung des Akkretionsvorgangs. Da die Umlaufbahn in der Regel elliptisch ist wird die ROCHE-GRENZE (siehe Abschnitt 20.2.1 und Gleichung (20.2.11)).

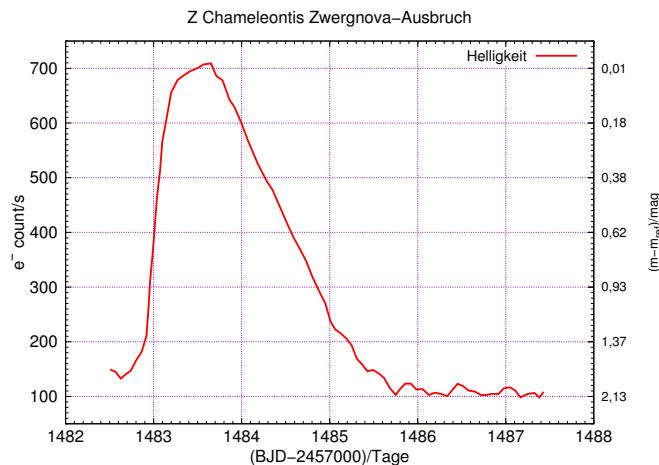


Abb. 20.30.: Helligkeitskurve der ZWERGNOVA Z-Chamaeleontis im Sternbild Chamaeleon (Daten nach J. M. C. Court u. a. [Cou+19, Fig. 3])

Abbildung 20.30 zeigt die Helligkeitskurve der ZWERGNOVA Z-Chamaeleontis. Die Zeit ist im Barycentric Julian Date (BJD) Datumssystem angegeben, ein System das die Zeit im Schwerpunkt des Sonnensystems im Julian Date (JD) Datumssystem misst. Der 1. April 2022 hat die Julian Day Number (JDN) JDN = 2459671.

Das Charakteristikum von ZWERGNOVÆ ist die periodisch steigende Helligkeit. Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, p. 680] gibt es eine alternative Erklärung, die den Übergang von neutralem H zu ionisiertem H beinhaltet. Dies bedeutet eine Änderung der optischen Dichte, aber auch der Wärmeleitung und der Viskosität.

20.1.6.1.2. Klassische Novae Wenn die Akkretionsrate (Rate des Massentransportes) in Doppelsternsystemen grösser ist als in ZWERGNOVÆ, spricht man von einer KLASSISCHEN NOVA. Während sich bei einer Zwergnova die Helligkeit um einige wenige Magnituden ändert (etwa 2 mag) ist die Helligkeitsänderung bei einer klassischen Nova

$$7 \text{ mag} \lesssim \Delta m \lesssim 20 \text{ mag} \quad (20.1.24)$$

einiges grösser. Der Anstieg der Luminosität dauert einige wenige Tage mit einem kurzen Stillstand ungefähr 2 mag unter der maximalen Helligkeit und gefolgt von einem Abfall über etwa hundert Tage. Die maximale Helligkeit ist etwa $10^5 L_\odot$. Es wird eine Energie von etwa 10^{38} J emittiert. Abbildung 20.29 beschreibt auch den Mechanismus einer klassischen Nova.

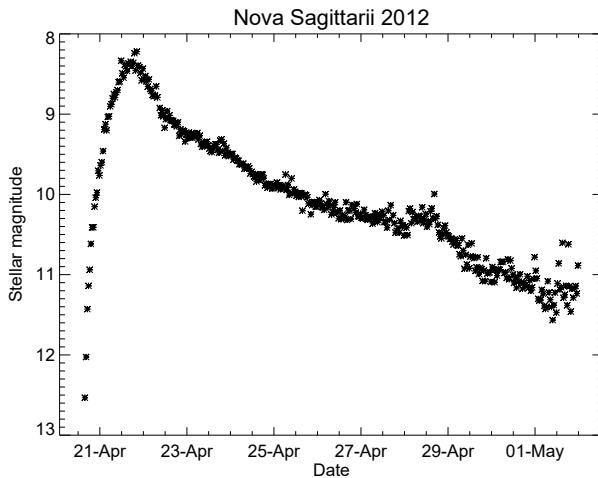


Abb. 20.31.: Helligkeitsverlauf der klassischen Nova Sagittarii 2012 (Quelle: https://stereo.gsfc.nasa.gov/~thompson/nova_sagittarii_2012/ und [Bew+10]).

Abbildung 20.31 zeigt als Beispiel den Helligkeitsverlauf der klassischen Nova Sagittarii 2012 (siehe D. Bewsher u.a. „Determination of the Photometric Calibration and Large-Scale Flatfield of the STEREO Heliospheric Imagers: I. HI-1“ [Bew+10]). Nach einem schnellen Anstieg der Luminosität erfolgt ein langsamer Abfall.

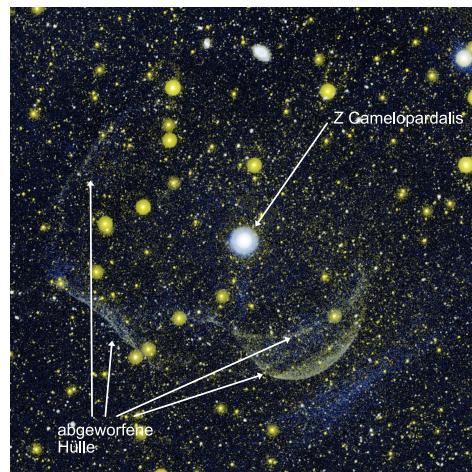


Abb. 20.32.: Überreste der klassischen Supernova Z Camelopardalis, die vor mindestens 220 Jahren explodiert ist. Heute ist Z Camelopardalis eine Zwergnova. (Credit: NASA/JPL, Quelle: <https://www.jpl.nasa.gov/images/pia09220-scene-of-multiple-explosions>).

Abbildung 20.32 zeigt mit den linienförmigen Strukturen die Überreste einer KLAS-

SISCHEN NOVA, die vor mehr als 220 Jahren explodiert sein muss. Dies folgt aus der Distanz zu Z Camelopardalis und aus dem Winkelabstand der Schalenreste zum Zentralgestirn.

Heute ist Z Camelopardalis ein Doppelsternsystem, das weiter als ZWERGNOVA periodische Helligkeitsschwankungen hat.

20.1.6.1.3. Supernovae Im Gegensatz zu KLASSISCHEN NOVAE und ZWERGNOVAE bleibt bei Supernovae kein Doppelsternsystem mehr übrig. Es entstehen entweder NEUTRONENSTERNE (auch in der Form von PULSAREN) oder SCHWARZE LÖCHER.

Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] werden SUPERNOVAE in die folgenden Klassen aufgeteilt:

Typ I Im Licht der Nova können keine H-Linien detektiert werden. Dies deutet auf alte Sterne hin.

Typ Ia Das Licht der Nova zeigt eine starke Si-Absorptionslinie. Diese Supernovae werden nur in Gebieten gefunden, in denen keine Anzeichen einer Neubildung von Sternen zu finden ist. Sie werden in allen Galaxientypen gefunden und zeigen eine bemerkenswerte Einheitlichkeit des Helligkeitsverlaufes.

Typ Ib Das Licht der Nova zeigt starke He-Absorptionslinien. Diese Novae werden nur in Spiralgalaxien in Bereichen mit einer aktiven Sternbildung gefunden.

Typ Ic Das Licht der Nova zeigt keine He-Absorptionslinien. Diese Novae werden wie die Typ Ib Novae nur in Spiralgalaxien in Bereichen mit einer aktiven Sternbildung gefunden.

Typ II Im Licht der Nova werden sehr starke H-Linien detektiert. Diese Novae sind im Maximum der Emission etwa 1.5 mag schwächer als Typ I Supernovae. Nach dem Maxi9mum verringert sich die Helligkeit um sechs bis acht Magnituden pro Jahr. Im Spektrum werden H- Linien und Linien schwererer Elemente gefunden. Typ II Supernovae können anhand des Lichtprofils in zwei Untergruppen aufgeteilt werden:

Typ IIP Diese Novae haben zwischen 30 und 80 Tagen nach dem Maximum ein Plateau (deshalb das P).

Typ IIL Diese Novae haben kein Plateau. Sie sind etwa zehnmal weniger häufig als die Supernovae des Typs IIP.

Die Lichtkurven der verschiedenen Novae-Typen werden in den Abbildungen 2.62 und 20.26 gezeigt(nach J. B. Doggett und D. Branch „A comparative study of supernova light curves“ [DB85]). Neben der Emission von Licht senden Supernovae auch einen sehr starken Neutrinostrahlung aus. Dies ist ein Zeichen, dass Kerne mit einem grossen Neutronenüberschuss oder einem grossen Neutronendefizit gebildet wurden. Dies tritt auf wenn schwere Kerne unter dem Einfluss der enormen Energiefreisetzung der Explosion fusionieren und die verschmolzenen Kerne weit vom Gleichgewicht sind.

Schwere Elemente bis hin zum Uran werden durch die Vereinigung von Neutronensternen und in gewissen Typen von Supernovae gebildet. D. Yong u. a., „r-Process elements from magnetorotational hypernovae“ [Yon+21] berichten über neuere Beobachtungen über die Bildung der schweren Elemente, r-PROCESS-ELEMENTS genannt.

20.1.7. Überreste von Sternen

In diesem Abschnitt sollen die Endzustände von Sternen beschrieben werden.

20.1.7.1. Weisse Zwerge

1844 fand Friedrich Bessel heraus, dass der Stern Sirius eigentlich ein Doppelsternsystem war (nach [CO07, Kap. 16.1]). Dieser zweite Stern (Sirius B) war sehr viel leuchtschwächer als der Hauptstern Sirius A (eine Luminosität von $0.03L_{\text{Sonne}}$ gegen $23.5L_{\text{Sonne}}$ des Hauptsterns.). Es gelang, die gegenseitigen Bahnen und ihre Bahnpараметer zu bestimmen. Daraus ergab sich, dass Sirius B die Masse $M_{\text{Sirius } B} = 1.053(28)M_{\text{Sonne}}$ haben muss. Spektroskopische Untersuchungen (Planck-Spektrum) ergaben eine Oberflächentemperatur von $T_{\text{Sirius } B} = 27\,000$ K. Aus der Temperatur und der Luminosität kann über das Stefan-Boltzmann-Gesetz (nach Josef Stefan und Ludwig Boltzmann)

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4 \quad (20.1.25)$$

der Radius des Sterns bestimmt werden

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T^4}} \quad (20.1.26)$$

bestimmt werden. Mit den oben gegebenen Daten ergibt sich $r = 5.521\,28 \cdot 10^6$ m. Dies ist sehr klein im Vergleich zu $r_{\text{Sonne}} = 6.957 \cdot 10^8$ m. Das heisst, Sirius B hat im Mittel eine Dichte von

$$\langle \rho_{\text{Sirius } B} \rangle = \frac{M_{\text{Sirius } B}}{\frac{4\pi}{3} r_{\text{Sirius } B}^3} = 2.969\,83 \cdot 10^9 \text{ kg m}^{-3} \quad (20.1.27)$$

Dies ist viel grösser als die Werte der Sonne $\langle \rho_{\text{Sonne}} \rangle = 1410 \text{ kg m}^{-3}$.

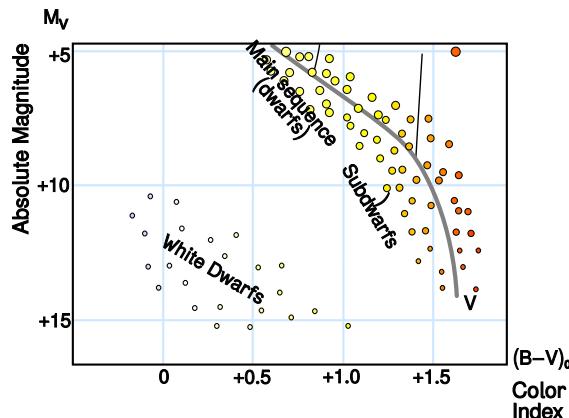


Abb. 20.33.: Lage der weissen Zwerge im HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMM. (Bearbeitetes Diagramm By Rursus (Own work) [GFDL (<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>) or CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)], via Wikimedia Commons, http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AH-R_diagram.svg, kombiniert mit Daten aus [GSZ80]).

Im HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMM (nach Ejnar Hertzsprung und Henry Russell) befinden sich die weissen Zwerge unten links (siehe Abbildung 20.33).

Neben der Dichte ist der Druck im Zentrum ein Anzeichen für den Zustand der Materie im weissen Zwerg. Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] gilt für den Druck im Zentrum

$$p_{\text{Zentrum}} \approx \frac{3}{2} \pi G \rho^2 r^2 \quad (20.1.28)$$

Für Sirius B ist dies $p_{\text{Zentrum}, \text{Sirius } B} = 3.8 \cdot 10^{22}$ Pa. Im Zentrum hat Sirius B nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] eine Temperatur von $T_{\text{Zentrum}, \text{Sirius } B} = 7.6 \cdot 10^7$ K. Dies ist etwa 5× so viel wie die Temperatur der Sonne in deren Zentrum (siehe Abbildung 14.34). bei diesen Temperaturen müsste der CNO-Zyklus über den $p-p$ -Zyklus dominieren. Dann müsste aber die Luminosität von Sirius B grösser als die der Sonne sein. Es wird deshalb geschlossen, dass weisse Zwerge einen Kern aus Kohlenstoff und Sauerstoff haben und das HELIUM und WASSERSTOFF wie ein dünner Ozean die Oberfläche bedecken.

Weisse Zwerge gehören zur Spektralklasse D. Es gibt die Unterklassen (siehe [CO07])

DA Weisse Zwerge von diesem Typ haben eine Masse zwischen 0.42 bis 0.70 M_{Sonne} . Ihr Spektrum ist durch druckverbreiterte H-Linien charakterisiert, ohne andere Linien.

DAV Weisse Zwerge von diesem Typ pulsieren, da sie mit ihrer Oberflächentemperatur von $T = 12\,000$ K im Bereich von Instabilitäten liegen.

DB Weisse Zwerge von diesem Typ haben ein Spektrum mit He-Linien ohne andere Absorptionslinien.

DC Weisse Zwerge von diesem Typ haben ein Planckspektrum ohne Absorptionslinien.

DQ Weisse Zwerge von diesem Typ zeigen C-Linien im Absorptionsspektrum.

DZ Weisse Zwerge von diesem Typ zeigen Absorptionslinien von Metallen.

Die Materie in weissen Zwergen steht unter so grossem Druck, dass die Elektronenzustände der Atome entartet sind. Dies ist nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] der Fall, wenn

$$\frac{T}{\rho^{2/3}} < \mathcal{D} = 1261 \text{ Km}^2 \text{kg}^{-2/3} \quad (20.1.29)$$

ist. \mathcal{D} ist eine charakteristische Konstante. Sirius B ist mit $\frac{T}{\rho^{2/3}} = 37 \text{ Km}^2 \text{kg}^{-2/3}$ weit im Bereich entarteter Materie im Kern, während die Sonne mit $\frac{T}{\rho^{2/3}} = 5500 \text{ Km}^2 \text{kg}^{-2/3}$ noch normale Materie hat. Zur Berechnung der Eigenschaften der Materie benötigt man das Pauli-Prinzip (nach Wolfgang Pauli).

Subrahmanyan Chandrasekhar [Cha31] fand durch vergleichen des Drucks degenerierter Elektronenzustände mit dem Druck im Zentrum von weissen Zwergen.

Der Entartungsdruck der Elektronen ist dann

$$p_{e,deg} = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left(\left(\frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right)^{4/3} \quad (20.1.30)$$

Dabei ist Z die Anzahl der Protonen im Atomkern und A die Anzahl der Nukleonen. m_H ist die Masse der Protonen, während $\rho = M/(4\pi/3 \cdot r^3)$ die Massendichte in der betrachteten Materie ist.

Der Druck kann auch durch Gleichung (20.1.28) berechnet werden. Daraus kann dann die Chandrasekhar-Masse berechnet werden:

$$M_{Ch} = \frac{3\sqrt{2\pi}}{8} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \left(\left(\frac{Z}{A} \right) \frac{1}{m_H} \right)^2 \quad (20.1.31)$$

Dieses Resultat von S. Chandrasekhar [Cha31] kann moch verfeinert werden. Heute ist die anerkannte Chandrasekhar-Masse

$$M_{Ch} = 1.44 M_{Sonne} \quad (20.1.32)$$

Die Sonne wird also zu einem weissen Zwerg werden.

Aus all den Rechnungen kann abgeleitet werden, dass das Produkt

$$M_{weisserZwerg} V_{weisserZwerg} = \text{const} \approx 1.5 \cdot 10^{51} \text{ kg m}^3 \quad (20.1.33)$$

Dies bedeutet, dass ein weisser Zwerg um so kleiner wird, je mehr Masse er hat. Wenn er also interstellaren Staub anzieht, wird er kleiner.

Gleichzeitig wird Energie vom Inneren des weissen Zwerges an die Oberfläche transportiert. Dieser Transport geschieht nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] durch Elektronenleitung und nicht durch Strahlung. Dies resultiert in einer Abkühlzeit von einigen Milliarden Jahren. Bei dieser Abkühlung beginnt die Materie vom Kern aus zu kristallisieren. Die meisten Sterne von der Masse der Sonne enden als erdgrosse kristallisierte Kohlenstoff-Sauerstoff-Blöcke, also quasi als erdgrosse Diamanten.

20.1.7.2. Neutronensterne

Kurz nach der Entdeckung des Neutrons schlugen Walter Baade und Fritz Zwicky [BZ34] vor, dass es Neutronensterne geben sollte, Sterne, deren Dichte so hoch ist, dass geladene Teilchen nicht mehr existieren können, so dass alle Nukleonen Neutronen sind. Wenn Sterne eine grössere Masse als die Chandrasekhar-Masse für weisse Zwerge haben, können die von W. Baade und F. Zwicky beschriebenen Neutronensterne entstehen. 1967 entdeckten Jocelyn Bell Burnell und Antony Hewish den ersten solchen Neutronenstern.

Neutronen sind wie Elektronen Fermionen. Das Pauli-Ausschlussprinzip (nach Wolfgang Pauli) gilt also auch. Dies führt nach einiger Rechnung nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] über den Entartungsdruck der Neutronen zur Gleichung für den Radius eines Neutronensterns.

$$R_{\text{Neutronenstern}} \approx \frac{(19\pi)^{2/3}}{10} \frac{\hbar^2}{GM_{\text{Neutronenstern}}^{1/3}} \left(\frac{1}{m_H}\right)^{8/3} \quad (20.1.34)$$

Wenn $M_{\text{Neutronenstern}} = 1.4M_{\text{Sonne}}$ ist, dann ist $R_{\text{Neutronenstern}} \approx 4400$ m. An der Oberfläche ist der Feldvektor der Gravitation dann $g = 1.86 \cdot 10^{12}$ m/s². Wenn man aus einem Meter Höhe herunter hüpfte, würde man mit $v = 1.9 \cdot 10^6$ m s⁻¹ auf dem «Boden» auftreffen. Die Fluchtgeschwindigkeit wäre klassisch gerechnet $0.64c$.

Unter hohem Druck nehmen Atomkerne immer mehr Neutronen auf. Der sonst übliche β -Zerfall (siehe Abschnitt 10.1.4.2) ist verboten, da es für die entstehenden Elektronen keine unbesetzten Zustände gibt. Ab einer Dichte von $4 \cdot 10^{14}$ kg m⁻³ kann das Energieminimum für Neutronen sich ausserhalb der Kern zu liegen kommen. Ab diesem «Neutronen-Tropfen» (auch Neutron Drip genannt) ist der Neutronenstern ein Dreiphasengemisch aus neutronenreichen Kernen, nichtrelativistische Neutronen in entarteten Zuständen und relativistischen Elektronen ebenfalls in entarteten Zuständen.

Die freien Neutronen bilden eine Flüssigkeit ohne Viskosität, also eine superfluide Flüssigkeit. Wirbel zerfallen nicht mehr. Ab einer Dichte von etwa $4 \cdot 10^{15}$ kg m⁻³ zerfallen die Kerne und Protonen bilden Cooper-Paare: Der Neutronenstern wird

supraleitend.

Phasenübergangsdruck	Zusammensetzung des Neutronensterns	dominanter Entartungsdruck
	Eisenkerne, freie nichtrelativistische Elektronen	Elektronen
$\approx 1 \cdot 10^9 \text{ kgm}^{-3}$	Elektronen werden relativistisch	
	Eisenkerne, freie relativistische Elektronen	Elektronen
$\approx 1 \cdot 10^{12} \text{ kgm}^{-3}$	neutronenreiche Kerne entstehen	
	neutronenreiche Kerne (nicht nur Eisen), freie relativistische Elektronen	Elektronen
$\approx 4 \cdot 10^{14} \text{ kgm}^{-3}$	Neutronentropfen	
	neutronenreiche Kerne (nicht nur Eisen), freie Neutronen, freie relativistische Elektronen	Elektronen
$\approx 4 \cdot 10^{15} \text{ kgm}^{-3}$	neutronenreiche Kerne entstehen	
	neutronenreiche Kerne (nicht nur Eisen), superfluide freie Neutronen, freie relativistische Elektronen	Neutronen
$\approx 2 \cdot 10^{17} \text{ kgm}^{-3}$	Kerne zerfallen	
	superfluide freie Neutronen, supraleitende freie Protonen, freie relativistische Elektronen	Neutronen
$\approx 4 \cdot 10^{17} \text{ kgm}^{-3}$	Pionen entstehen	
	superfluide freie Neutronen, supraleitende freie Protonen, freie relativistische Elektronen, weitere Elementarteilchen, z.B. Pionen	Neutronen

Tab. 20.6.: Phasenübergänge in Neutronensternen nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07]

Tabelle 20.6 listet die theoretisch berechneten Phasenübergänge in Neutronensternen auf.

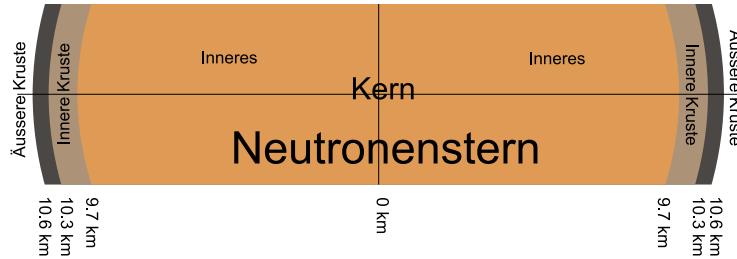


Abb. 20.34.: Querschnitt durch einen Neutronenstern nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07]

Abbildung 20.34 zeigt den Querschnitt durch einen Neutronenstern. Typische Eigenschaften aus Modellen von Neutronensternen sind nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07]:

1. Die äussere Kruste besteht aus schweren Kernen (vorwiegend $^{56}_{26}\text{Fe}$ und je tiefer je neutronenreicher), entweder kristallisiert oder als Ozean. Die Elektronen sind relativistisch und in entarteten Zuständen. Das untere Ende ist dort wo das Neutronentropfen beginnt.
2. Die innere Kruste enthält drei Komponenten, ein Kristallgitter aus Kernen wie $^{118}_{36}\text{Kr}$, superfluide freie Neutronen und relativistische Elektronen in entarteten Zuständen. Das Untere Ende ist dort wo sich die Kerne auflösen.
3. Das Innere besteht überwiegend aus superfluiden Neutronen, etwas weniger superfluide supraleitende Protonen und relativistische Elektronen in entarteten Zuständen.
4. Manchmal gibt es einen festen Kern aus Pionen und anderen Elementarteilchen. Die Dichte eines Neutronensterns mit $M = 1.4M_{\text{Sonne}}$ beträgt etwa $1 \cdot 10^{18} \text{ kg m}^{-3}$.

Neutronensterne sind stabil bis zu einer Masse von $1.4M_{\text{Sonne}}$. Wenn sie schnell rotieren bewirkt die Zentrifugalkraft eine zusätzliche Stabilisierung, so dass die Grenze bei $1.4M_{\text{Sonne}}$ liegt. Wenn der Neutronenstern instabil wird, kollabiert er zu einem SCHWARZEN LOCH.

Wie für weisse Zwerge gibt es für Neutronensterne die Erhaltungsgrösse:

$$M_{\text{Neutronenstern}} V_{\text{Neutronenstern}} = \text{const} \quad (20.1.35)$$

Supraleiter können Magnetfeldlinien einfrieren und so stabilisieren. Deshalb können und haben Neutronensterne Magnetfeldlinien.

Die Oberflächentemperatur von Neutronensternen beträgt etwa $T = 1 \cdot 10^6 \text{ K}$. Aus dem Wien'schen Verschiebungsgesetz (nach Wilhelm Wien) ergibt sich für die Wellenlänge des Emissionsmaximums $\lambda_{\max} = 2.9 \text{ nm}$.

20.1.7.3. Pulsare

Schnell rotierende Neutronensterne mit Magnetfeldern erzeugen elektromagnetische Wellen. 1967 entdeckten Jocelyn Bell Burnell und Antony Hewish einen Pulsar, der sich als Neutronenstern entpuppte. Hewish bekam dafür den Nobelpreis, Bell Burnell nicht. Die Wellen dieser schnell rotierenden Neutronensterne können mit Radioantennen und Radioteleskopen gemessen werden.

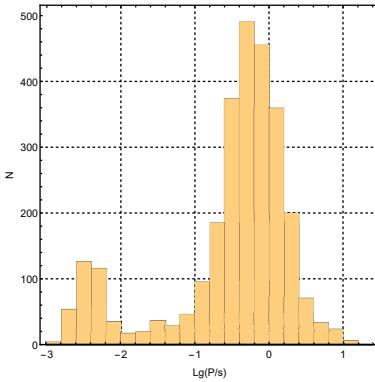


Abb. 20.35.: Rotationsperioden von 2954 Pulsaren. Die Daten stammen von R. N. Manchester u. a. [Man+05] und [Aus19].

Die meisten Pulsare haben Rotationsperioden von (0.25 bis 2) s. Die längste bekannte Periode ist 23.535 378 s des Pulsars (PSR J0250+5854) [Tan+18a]. Die kürzeste gemessene Periode ist 0.001 396 s des Pulsars (PSR J1748-2446ad) [Hes06]. Die Frequenz von Pulsaren kann genau so gut definiert sein wie von Atomuhren. Die Rotationsperiode des Pulsars (PSR 1837-2014) ist auf 15 Stellen bekannt. Die Periodendauer aller Pulsare wird länger, da Pulsare Energie abstrahlen. Der Pulsar (PSR J1801-3210) hat eine Änderung von nur $\frac{dP}{dt} = -4.4 \cdot 10^{-23}$ [Ng+14]. Neben Neutronensternen sind nach B. W. Carroll und D. A. Ostrié [CO07] noch folgende Klassen von Pulsaren bekannt:

1. Doppelsterne: Zwei Neutronensterne könnten sich auf so engen Bahnen umkreisen, dass ihre Bahnperiode nur noch etwa eine Sekunde wäre. Diese Art Pulsare würde nach Kepler die Periodendauer verkleinern. Die Datenbank *ATNF Pulsar Catalogue* [Aus19] listet solche Pulsare auf.
2. Weisse Zwerge oszillieren mit Perioden von (100 bis 1000) s. Die beobachteten Frequenzen sind kürzer. Weisse Zwerge könnten oszillieren. Aber diese Frequenzen sind zu gross. Bei Neutronensternen wären die beobachteten Schwingungsfrequenzen möglich.
3. Rotierende Weisse Zwerge können die benötigten Frequenzen nicht erreichen, wohl aber Neutronensterne.

20.2. Planetensysteme und Exoplaneten

Die Bildung von Exoplaneten läuft nach heutigem Kenntnisstand ab wie in Abschnitt 20.2.1 besprochen. In diesem Kapitel geht es um Methoden der Detektion und um eine Diskussion von ausgewählten Eigenschaften. Viele nützliche Informationen können bei E. Team [Tea95] und bei der NASA [NAS19c] gefunden werden.

20.2.1. Bildung von Planetensystemen

In unserem Planetensystem bewegen sich die schweren Himmelskörper mehr oder weniger in einer Ebene. Die Frage nach der Bildung solcher Systeme kam schon früh auf. Es wurde diskutiert, dass ein Zusammenstoss eines grösseren Himmelskörpers mit der Sonne diese Planeten, Asteroiden, den Kuipergürtel (nach Gerard Peter Kuiper) und auch die Kometen erzeugt haben könnte. Bei den Weiten des Weltalls ist es sehr unwahrscheinlich, dass so ein Prozess auftreten könnte. Andererseits zeigen die Forschungen zu Exoplaneten, gestartet von den beiden Nobelpreisträgern 2019 Didier Queloz und Michel Mayor, dass in unserer näheren Umgebung Planeten eher die Regel als die Ausnahme sind (siehe [Tea95] und [NAS19c]). Anne Young [You01] zeigte, dass die Staub- und Gaswolke, aus der die Planeten entstanden nicht homogen sein konnte. Sie betrachtete dazu ähnlich wie in Abb. 20.36 den Drehimpuls des Sonnensystems und verglich ihn mit dem Drehimpuls einer protoplanaren Staub- und Gaswolke.

Beobachtungen im Weltall deuten darauf hin, dass Sterne aus kollabierenden Gaswolken entstehen (siehe auch Abschnitt 20.1.3). Die Erhaltung des Drehimpulses dieser ausgedehnten Gebilde ist der Schlüssel zum Verständnis der Bildung von scheibenförmigen Objekten. Diese Akkumulationsscheiben sind analog zu den Trümmerscheiben um ältere Sterne.

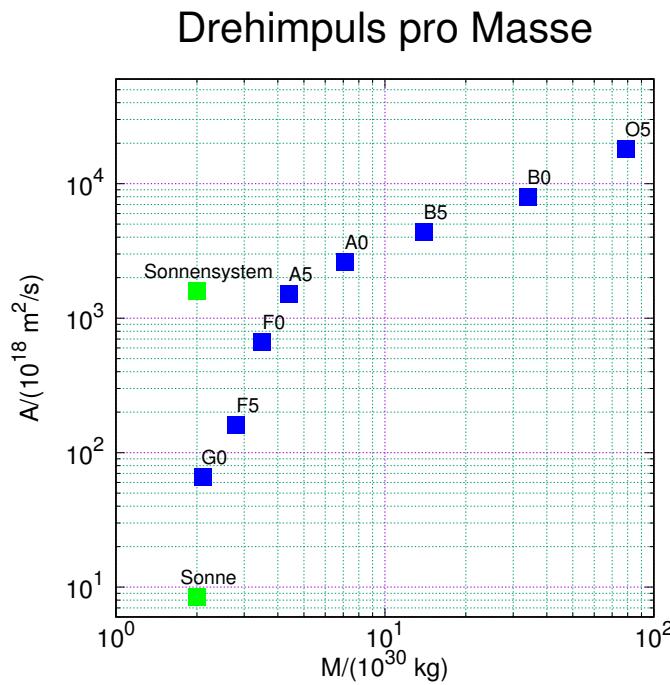


Abb. 20.36.: Mittlerer Drehimpuls und Masse von Sternen (Daten aus [McN65]).

Vergleichen wir nach Carroll und Ostlie [CO07] die Drehimpulse von verschiedenen Sterntypen (siehe Abschnitt 20.1.2) so sehen wir, dass die Sonne (ein G2-Stern) und das Sonnensystem ziemlich aus dem Rahmen fallen. Nach Carroll und Ostlie könnte dies durch Transport von Drehimpulsen durch magnetische Felder gelöst werden. Es könnte aber auch sein, dass die Planeten und sonstigen kleinen Körper nicht berücksichtigt werden.

Innere Planeten sind reich an Eisen und Silizium, während die grossen äusseren Planeten Gasplaneten sind. Die Atmosphären wechseln von leichten Elementen (N_2 und O_2 oder CO_2) zu Gasen wie Methan (CH_4).

Interessant ist die Temperaturverteilung in der Gasscheibe um eine werdende Sonne. Die innere Energie ist proportional zur kinetischen Energie und bei einem idealen Gas proportional zur Temperatur. Die kinetische Energie kann nach dem Virialsatz bei kreisförmigen Bahnen aus der potentiellen Gravitationsenergie berechnet werden. Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, pp. 662-664] kann die Temperatur abgeschätzt werden, indem man in der Projektion einen Kreisring im Abstand r vom Zentrum mit der Breite dr betrachtet. Dieser strahlt thermisch auf zwei Seiten ab. Die Strahlungsleistung ist durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz (siehe [MG19, pp. 43-44, Gl. (3.2.54)]), die kinetische Energie und den Zusammenhang zwischen Energie und Leistung zu berechnen.

$$T = \left(\frac{G M \frac{dM}{dt}}{8\pi \sigma R^3} \right)^{1/4} \left(\frac{R}{r} \right)^{3/4} \quad (20.2.1)$$

In Gleichung (20.2.1) ist σ die STEFAN-BOLTZMANN-KONSTANTE (nach Josef Ste-

fan und Ludwig Boltzmann), R und M der Radius und die Masse des Sterns, r den Beobachtungsort und $\frac{dM}{dt}$ die Rate, mit der Masse zum Stern transferiert wird. Gleichung (20.2.1) sagt also eine $r^{-3/4}$ -Proportionalität der Temperatur T voraus.

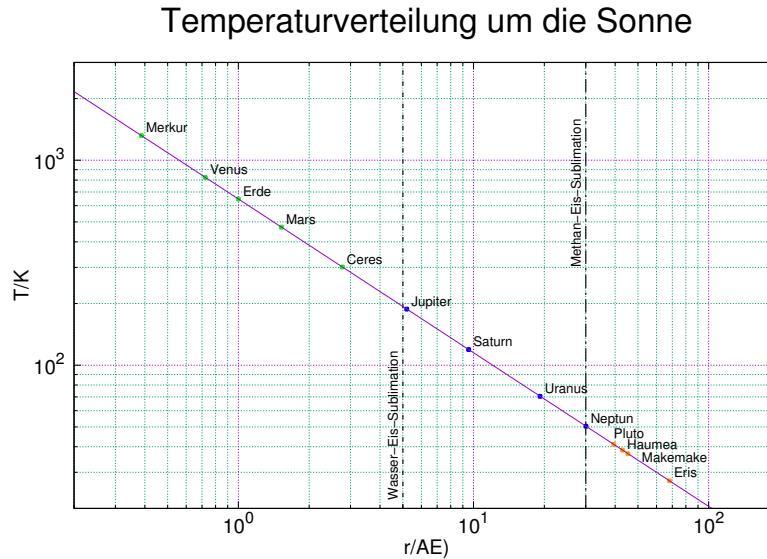


Abb. 20.37.: Temperaturverteilung bei der Entstehung der Planeten nach Carroll und Ostlie [CO07, pp. 662-664] und nach Gleichung (20.2.1). Die vertikalen Linien geben die Grenze der Wassereis- und der Methaneissublimation an. Die Positionen der Himmelskörper sind die heutigen.

Zur Berechnung der Kurve in Abbildung 20.37 wurde in Gleichung (20.2.1) die Werte für die Sonne und die physikalischen Konstanten eingetragen. Geschätzt wurde

$$\frac{dM}{dt} = \frac{M_{\text{Sonne}}}{1 \cdot 10^4 \text{ a}} \quad (20.2.2)$$

Die Zeit von $1 \cdot 10^4$ a ist etwa die Kollapszeit der Gaswolke zur Sonne.

Im Laufe der Bildung der Himmelskörper in einem Planetensystem wurde diese vor allem in der Anfangszeit von anderen Objekten häufig getroffen. Man würde erwarten, dass Himmelskörper eine Mischung von leichten und schwereren Elementen aufweisen würden. Der Mond besteht aber vorwiegend aus schwereren Elementen. Es wird angenommen, dass er durch die Kollision eines Planetesimalen (so etwas wie grosse Zwergplaneten) entstanden ist. Das Gleiche wird von Merkur angenommen. Durch diese Kollisionen können die Rotationsachsen ihre Richtung drehen, oder die Bahnebene kann gekippt werden.

Jupiter, der massereichste Planet wird lokal den gleichen Prozess in Gang gebracht haben.

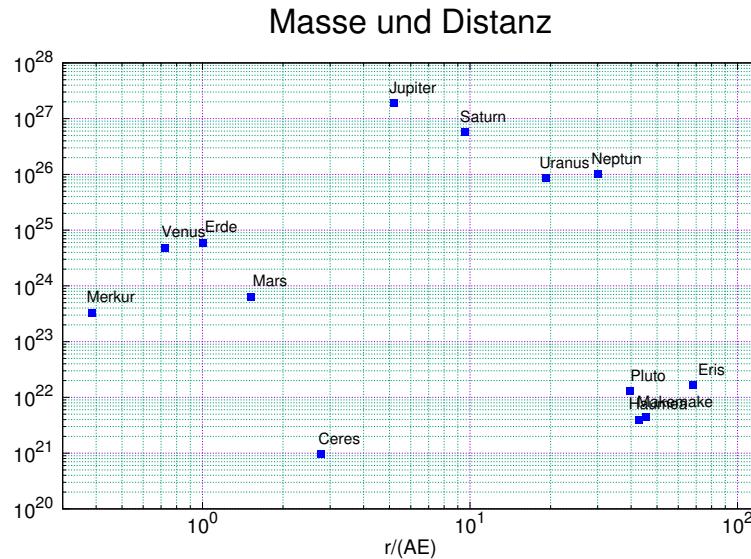


Abb. 20.38.: Distanzabhängigkeit der Masse in unserem Sonnensystem (Daten von [NAS19f]).

Abbildung 20.38 zeigt die Masse der Planeten als Funktion der Distanz. Die Bildung unseres Planetensystems kann in den folgenden Schritten abgelaufen sein:

- Interstellares Gas und Überreste von einer oder mehreren Supernovae hatten im Gebiet unserer Sonne das Jeans-Kriterium (nach James Jeans) erfüllt (siehe Abschnitt 20.1.3). Das interstellare Gas besteht vorwiegend aus WASSERSTOFF und HELIUM. In den Überresten der Supernova jedoch finden sich Elemente bis zu Uran und wahrscheinlich auch noch darüber hinaus. Diese gemischte Gaswolke begann sich nun gravitativ zu zusammenziehen. Es entstand die Sonne.
- Die Gaswolke mit der Dichte ρ und dem Radius R ist in einem vom Zentrum der Milchstrasse aus sich ändernden Geschwindigkeitsfeld mit der Grösse $\frac{dv(r)}{dr}$. Deshalb gibt es bezüglich des Schwerpunktes r_0 der Gaswolke eine Rotation. Wenn $\frac{dv(r)}{dr}$ sich über die Gaswolke kaum ändert, ist die relative Geschwindigkeit

$$v_R(R) = v(r_0 + R) - v(r_0) = v(r_0) + \frac{dv(r_0)}{dr}R - v(r_0) = \frac{dv(r_0)}{dr}R \quad (20.2.3)$$

Dies entspricht einer Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{v_R(R)}{R} = \frac{dv(r_0)}{dr} \quad (20.2.4)$$

Damit hat die Gaswolke bezogen auf ihren Schwerpunkt bei r_0 den Drehimpuls (homogene Kugel!)

$$L_{Gas} = I\omega = \frac{2}{5}MR^2 \frac{dv(r_0)}{dr} = \frac{2}{5} \frac{4\pi}{3} R^3 R^2 \frac{dv(r_0)}{dr} = \frac{8\pi}{15} R^5 \frac{dv(r_0)}{dr} \quad (20.2.5)$$

Dieser Drehimpuls L_{Gas} ist auch der erhaltene Drehimpuls des sich bildenden Sonnensystems. Aus dem Jeans-Kriterium (siehe Abschnitt 20.1.3) ergibt sich die Mindestgrösse des Drehimpulses

$$L_{Gas} \geq \frac{3\sqrt{6}(kT)^{5/2}}{5\pi^{3/2}\rho^{3/2}(G\langle m \rangle)^{5/2}} \left. \frac{dv(r)}{dr} \right|_{r_0} \quad (20.2.6)$$

Wenn die Temperatur des Gases $T = 5$ K ist, die Dichte $42\,000 \text{ cm}^{-3}$ Wasserstoffatome ist und die Gaswolke am Jeans-Kriterium ist, dann ist die Masse etwa eine Sonnenmasse und der Drehimpuls $L_{Gas} = 1.5 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$.

- Das effektive Potential eines Teilchens der Masse m bei der Bewegung im Abstand r um eine zentrale Masse $M(r)$ im mitbewegten Bezugssystem (ZENTRIFUGALPOTENTIAL) ist

$$E_{pot,eff} = -G \frac{m \cdot M(r)}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (20.2.7)$$

Ein Teilchen, das im Abstand R eine Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = \frac{dv}{dr}$ hat, hat im Abstand r die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega(r) = \omega_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad (20.2.8)$$

Wenn wir für eine Punktmasse m $L(m, r) = mr^2\omega = mR^2\omega_0 = mR^2\frac{dv}{dr}$ einsetzen, erhalten wir

$$E_{pot,eff} = -G \frac{m \cdot M(r)}{r} + \frac{mR^4\omega_0^2}{2r^2} \quad (20.2.9)$$

Durch Ableiten bekommen wir das Minimum bei

$$r_{min} = \frac{R^4}{GM} \left(\frac{dv}{dr} \right) \quad (20.2.10)$$

Diese Rechnung gibt eine unrealistisch kleine Distanz.

- Durch Stöße können Körper auf elliptischen Bahnen mit kleinerem Perihel Drehimpuls auf äussere Objekte übertragen.
- Weit draussen, etwa bei 5.5 AU gab es eine lokal erhöhte Dichte: Jupiter entstand.
- Gravitationsinstabilität. Durch Schwankungen der Dichte können Objekte entstehen, die wieder andere Objekte anziehen. Dadurch könnten die Planeten entstanden sein.

- Durch Gravitation und Rotation entstehen Gezeitenkräfte, die das kleinere Objekt, den Mond, zerreißen können und so die Masse des Zentralkörpers erhöhen. Die Grenze heisst ROCHE-GRENZE [CO07, pp. 723-724] (nach 'Edouard Roche)

$$r < 2.456 \left(\frac{\langle \rho_{\text{Planet}} \rangle}{\langle \rho_{\text{Mond}} \rangle} \right)^{1/3} R_{\text{Planet}} \quad (20.2.11)$$

R_{Planet} ist der Radius des Planeten. In der Klammer stehen die respektiven gemittelten Dichten. Wenn ein Mond näher als die ROCHE-GRENZE am Planeten ist, wird er zerrissen. Z.B. liegt die ROCHE-GRENZE bei Saturn ausserhalb der Ringe, d.h. die Ringe sind die Überreste der von Gezeitenkräften zerrissenen Objekte.

Wenn ein Objekt genügend langsam in die Nähe eines grösseren kommt, kann es vom Planetismalen angezogen werden, wenn es sich innerhalb des Hill-Radius befindet [CO07, p. 864]. Der HILL-RADIUS (nach William Hill) ist die Grenze, bei der die Gravitationskraft der Sonne kleiner wird als die Gravitationskraft des Planetismals.

$$R_H = \frac{R}{\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha \equiv \left(\frac{\rho_{\text{Sonne}}}{\rho_P} \right)^{1/3} \frac{R_{\text{Sonne}}}{a} \quad (20.2.12)$$

R ist der Radius des Planetismals, a ist der Abstand des Planetismals zur Sonne und R_{Sonne} der Radius der Sonne. In der Gleichung treten auch die Dichten auf. Auf der Bahn des Jupiters hätte der Hill-Radius eines Objektes mit $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ und einem Radius von 5 km bei $\rho_{\text{Sonne}} = 1410 \text{ kg m}^{-3}$ den Wert $R_H = 9.588 \cdot 10^2 \text{ km}$.

- Die Gasplaneten Jupiter bis Neptun haben alle einen Kern von etwa 10 bis 15 Erdmassen. Sie waren in der Lage, ein eigenes Planeten- und Ringsystem aufzubauen.
- Durch Jupiter wurden Objekte in seiner Nähe auf exzentrische Bahnen gebracht. Diese Objekte konnten dann innerhalb des Hill-Radius von schon vorhandenen Planeten aufgenommen werden. Natürlich gab es auch heftige Kollisionen, z.B. so dass unser Mond entstand.
- Weiter wanderten Objekte näher an die Sonne. Jupiter ist heute 10% näher an der Sonne als zum Zeitpunkt seines Entstehens.
- Die nichtlinearen Kräfte der Gravitation führen zu chaotischen Bahnen und/oder zu Resonanzeffekten. Ein Beispiel ist die 3:2-Resonanz zwischen Neptun und Pluto [CO07, p.868]

20.2.2. Methode der radialen Geschwindigkeitsvariation

Den ersten Hinweis auf einen Planeten, der um einen sonnenähnlichen Stern kreist, fanden Michel Mayor und Didier Queloz im Jahre 1995, indem sie aus der Farbschwankung des Sterns 51 Pegasi auf einen Exoplaneten schlossen [MQ95].

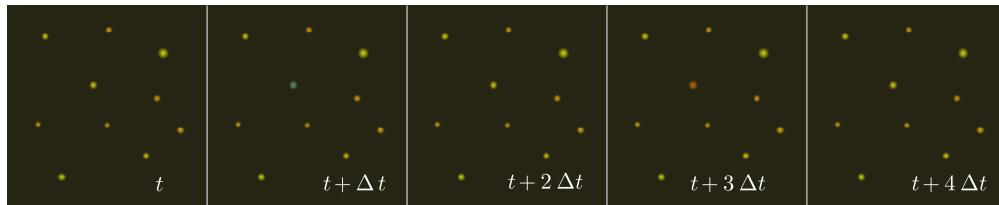


Abb. 20.39.: Effekt eines Exoplaneten. Ein Stern (welcher?) ändert periodisch seine Farbe.

Abbildung 20.42 zeigt eine schematische Abfolge der Farbschwankungen. Wenn charakteristische Emissions- oder Absorptionslinien blauverschoben sind, muss sich wegen des Dopplereffektes (siehe auch [Mar14, Kap. 5.3.5.]) der Stern auf den Beobachter zubewegen, entlang des Sichtradius. Bei einer Rotverschiebung bewegt sich der Stern vom Beobachtenden weg.

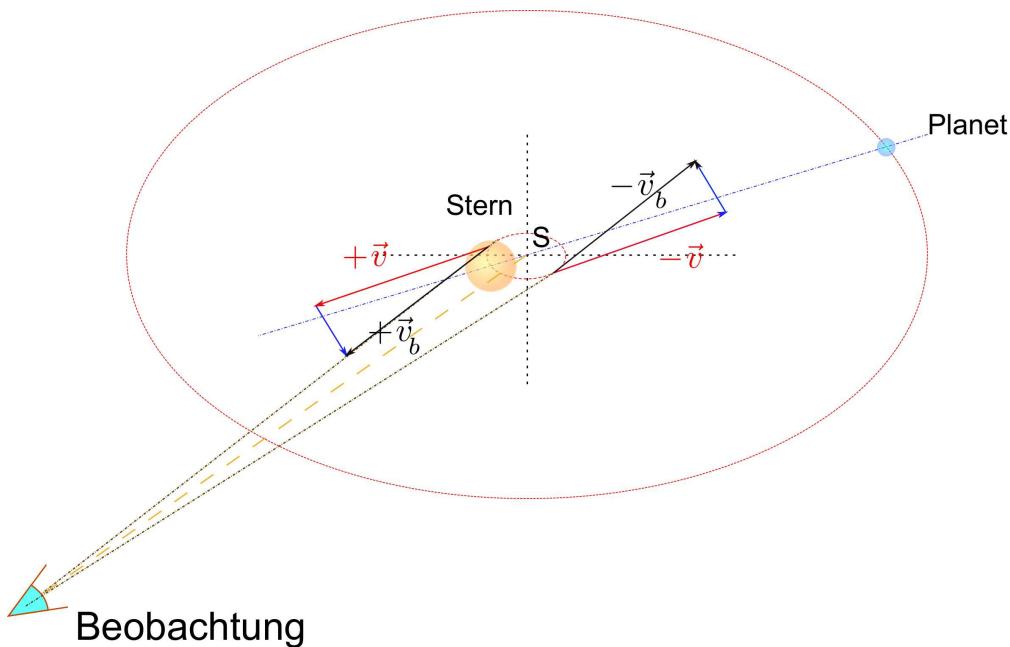


Abb. 20.40.: Skizze der Messung der Radialgeschwindigkeit

Abbildung 20.40 zeigt die Geometrie der Messung. Stern und Planet drehen um einen gemeinsamen Schwerpunkt. Auch wenn der Planet unsichtbar ist, bewegt sich der Stern auf uns zu oder von uns weg. Je nach Lage der Bahnebene ist der Effekt grösser oder kleiner. Durch die Drehimpulserhaltung bei der Bildung der Galaxie und der Sonnensysteme ist es jedoch wahrscheinlich, dass die Drehimpulsvektoren in etwa in die gleiche Richtung zeigen. <https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/1> zeigt eine Animation dieser Methode.

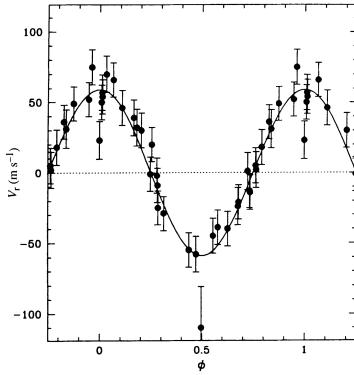


Abb. 20.41.: Radialgeschwindigkeitsmethode. Geschwindigkeitsvariation entlang der Sichtlinie von 51 Pegasi B (aus [Ric14], Fig. 1), <https://www.mdpi.com/2078-1547/5/2/296>, This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>).

Das Problem kann gelöst werden, wenn die Masse des Zentralgestirns bekannt ist und wenn die Masse m_{Pl} des Planeten gegen die Masse des Zentralgestirns m_{ZS} vernachlässigt werden kann. Die Umlaufdauer T wie auch die Amplitude der Geschwindigkeit des Zentralgestirns sind bekannt (Siehe Messung in Abbildung 20.41). Nach [CO07, pp. 848-849] ergibt sich für den Abstand a Zentralgestirn-Exoplanet

$$a = \left(\frac{G T^2 (m_{ZS} + m_{Pl})}{4\pi^2} \right)^{1/3}. \quad (20.2.13)$$

Weiter ergibt sich die Orbitalgeschwindigkeit des Planeten zu

$$v = \frac{2\pi a}{T}. \quad (20.2.14)$$

Schliesslich kann über die Lage des Schwerpunktes bei zwei Massen (siehe [Mar14, Kap. 4.4.2.] aus der gemessenen Geschwindigkeit des Zentralgestirns, aus seiner (z.B. über Spektren, Distanz und Leuchtkraft bestimmten) Masse und der berechneten Orbitalgeschwindigkeit des Planeten die Planetenmasse bestimmt werden. Bei mehreren Planeten wird das Geschwindigkeitsmuster kompliziert. Es kann jedoch durch eine Fourieranalyse in die Beiträge der einzelnen Planeten separiert werden.

Mit dieser Methode wurden nach [Tea95], Stand 15. 7. 2021, 713 Sonnensysteme gefunden mit 960 Planeten. 171 Systeme haben mehrere detektierbare Planeten.

20.2.3. Abschattung

Eine weitere, von der Anzahl her die erfolgreichste Methode ist die Messung der Abschattung des Zentralgestirns durch einen Planeten.

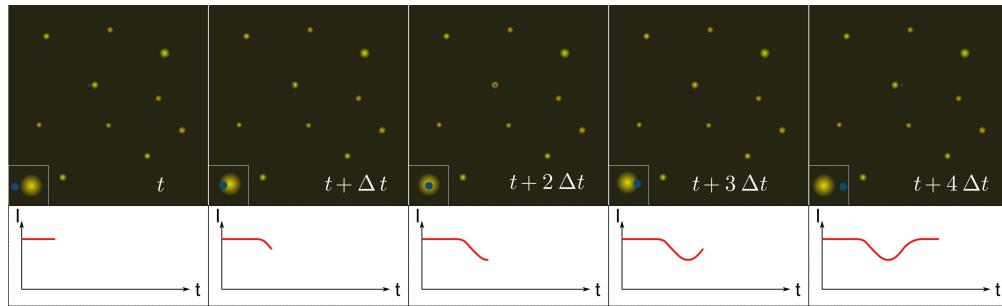


Abb. 20.42.: Beobachtung der Abschattung eines Sternes durch einen Exoplaneten. Unten links ist eine Vergrösserung. Die Graphen zeigen den Verlauf der gemessenen Intensität

Abbildung 20.42 zeigt wie die Abschattung die Helligkeit eines Sterns temporär verringern kann.

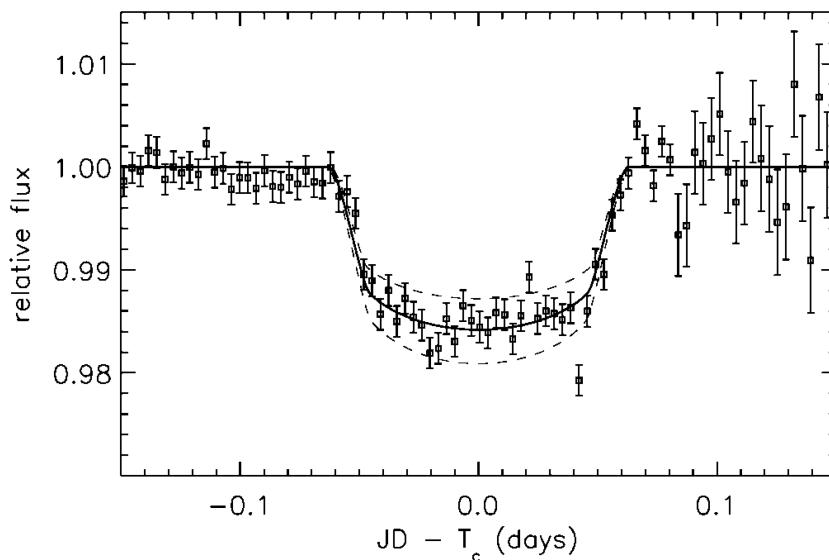


Abb. 20.43.: Abschattungsmethode. Leichte Verringerung der Helligkeit, wenn ein Planet den Stern HD209458 passiert (aus [Ric14], Fig. 2), <https://www.mdpi.com/2078-1547/5/2/296>, This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>).

Abbildung 20.43 zeigt, dass minimalste Schwankungen von 1% oder weniger gemessen werden müssen. Die Schwankungen durch die Turbulenzen in der Erdatmosphäre sind von dieser Größenordnung. Wenn eine übliche CCD-Kamera mit 8 Bit Digitalisierung verwendet wird, ist dies eine Schwankung auf dem zweitletzten Bit. Werden hochwertige Kameras im RAW-Modus verwendet, ist die Bittiefe zwischen

10 und 14 Bit. Entweder werden wissenschaftliche Kameras mit 16 Bit Auflösung auf Berggipfeln oder auf Raumsonden verwendet, oder viele Amateurastronomen filmt den gleichen Stern an verschiedenen Orten. Die Aufnahmen müssen zeitgenau korreliert werden. Korrelierte Schwankungen zeigen, dass es eventuell einen Exoplaneten gibt. Nach der ursprünglichen Entdeckung von M. Mayor und D. Queloz [MQ95] wurden in der Anfangsphase viele Planetensysteme auf diese Art von Amateuren gefunden.

<https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/2> zeigt eine Animation dieser Methode.

Mit dieser Methode wurden nach [Tea95], Stand 15. 7. 2021, 2578 Sonnensysteme gefunden mit 3432 Planeten. 555 Systeme haben mehrere detektierbare Planeten.

20.2.4. Micro-Lensing

Die Methode des Micro-Lensing beruht auf der allgemeinen Relativitätstheorie (siehe auch [BC10; Fli12; Wey21]).

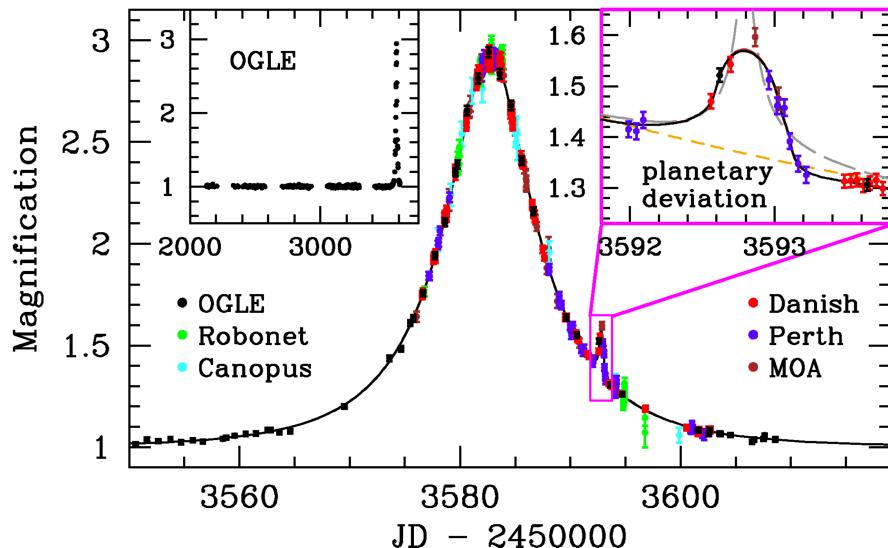


Abb. 20.44.: Micro-Lensing. Die Gravitationslinse führt zu einer leichten Erhöhung der Helligkeit. Der Planet des Sterns stört die Symmetrie. (aus [Ric14, Fig. 3], <https://www.mdpi.com/2078-1547/5/2/296>, This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>).)

Wenn ein Stern mit einem Planeten vor einem weit entfernten leuchtenden Objekt (Quasar, Galaxie, ...) vorbei zieht, wirkt die Masse des Sterns als Linse. Die Helligkeit des weit entfernten Objektes steigt kurzfristig an. Ein eventuell vorhandener Planet wirkt wie eine zweite, schwächere, Linse, die nochmals ganz kurz die Helligkeit des entfernten Objektes erhöht. Eine solche Messkurve zeigt Abbildung 20.44.

Eine Animation dazu finden Sie bei <https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/4>.

Mit dieser Methode wurden nach [Tea95], Stand 15. 7. 2021, 141 Sonnensysteme gefunden mit 157 Planeten. 6 Systeme haben mehrere detektierbare Planeten.

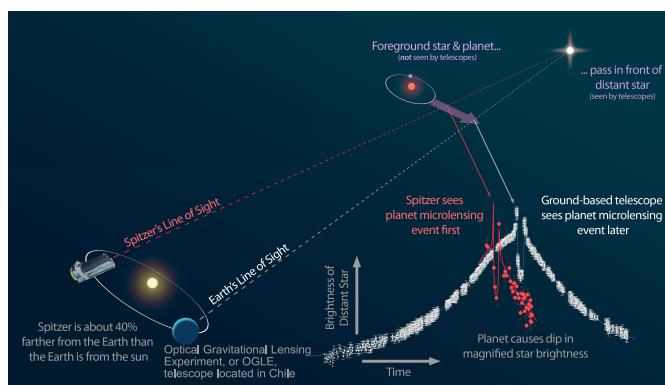


Abb. 20.45.: Geometrie der Tandembeobachtung mit dem Teleskop des «OPTICAL GRAVITATIONAL LENSING EXPERIMENT»(OGLE) und dem SPITZER-WELTRAUMTELESKOP, das etwa 1.4 au von der Erde entfernt auf der Erdumlaufbahn steht (Credit NASA/JPL-Caltech).

In jüngerer Zeit werden vermehrt erdgebundene Teleskope wie das Teleskop des «OPTICAL GRAVITATIONAL LENSING EXPERIMENT»(OGLE) und Weltraumteleskope wie das SPITZER-WELTRAUMTELESKOP verwendet (siehe Abbildung 20.45). Der Zeitunterschied zwischen der Beobachtung des Weltraumteleskopes und des Erdgebundenen Teleskopes kann zur Distanzbestimmung über die Triangulation verwendet werden. Das erdgebundene Teleskop arbeitet mit einer Wellenlänge von 800 nm während das Weltraumteleskop bei 3.6 μm misst. Abbildung 20.46 zeigt die beiden Lichtkurven mit etwas besserer Auflösung.

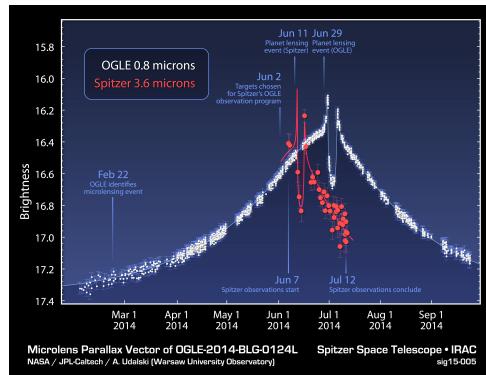


Abb. 20.46.: Das Teleskop des «Optical Gravitational Lensing Experiment»(OGLE) detektiert den Beginn eines Microlensing-Ereignisses. Das Weltraumteleskop Spitzer, etwa 1.4 au von der Erde entfernt, auf der Erdumlaufbahn, sieht das gleiche Ereignis etwas früher (Credit: NASA/JPL-Caltech/Warsaw University Observatory).

20.2.5. Direkte Abbildung

Wenn das Sonnensystem nahe genug an der Erde ist, können Planeten direkt abgebildet werden. Dazu muss das Licht des Zentralgestirns abgeschwächt werden.

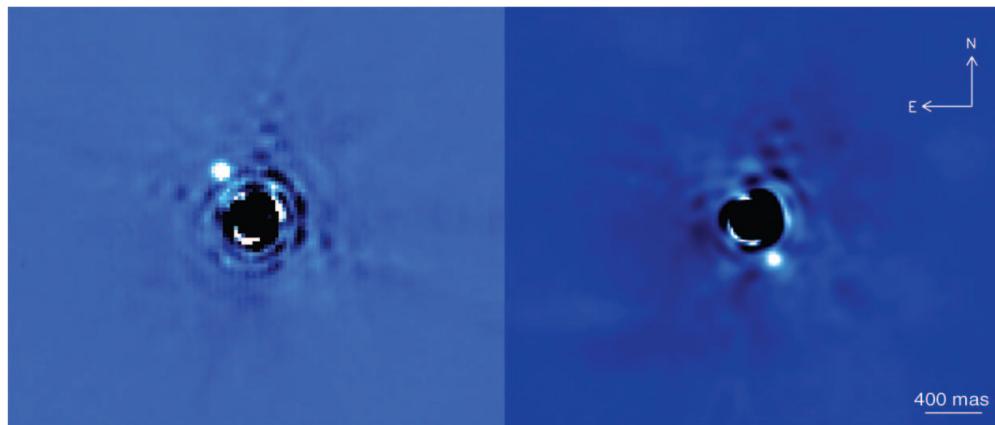


Abb. 20.47.: Direkte Abbildung im Infraroten. Zwei Bilder aufgenommen 2003 und 2009 zeigen, dass β Pictoris einen sich bewegenden Begleiter hat (aus [Ric14, Fig. 4], <https://www.mdpi.com/2078-1547/5/2/296>, This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>).

Abbildung 20.47 zeigt eine Abbildung eines Planeten. <https://exoplanets.org/>

nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/3 zeigt dazu eine Animation.

Mit dieser Methode wurden nach [Tea95], Stand 15. 7. 2021, 110 Sonnensysteme gefunden mit 151 Planeten. 6 Systeme haben mehrere detektierbare Planeten.

20.2.6. Astrometrie

Wenn das Zentralgestirn nahe genug ist, kann die Schwankung der Position durch die Rotation um den gemeinsamen Schwerpunkt mit dem Planeten direkt gemessen werden. <https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/5> zeigt dazu eine Animation.

Mit dieser Methode wurden nach [Tea95], Stand 15. 7. 2021, 3 Sonnensysteme gefunden mit 14 Planeten. Abbildung 20.51 zeigt das Prinzip.

20.2.7. Einordnung der mehr als 4000 bekannten Exoplaneten

Insgesamt wurden nach [Tea95], Stand 15. Juli 2021, 3549 Sonnensysteme gefunden mit 4796 Planeten. 788 Systeme haben mehrere detektierbare Planeten.

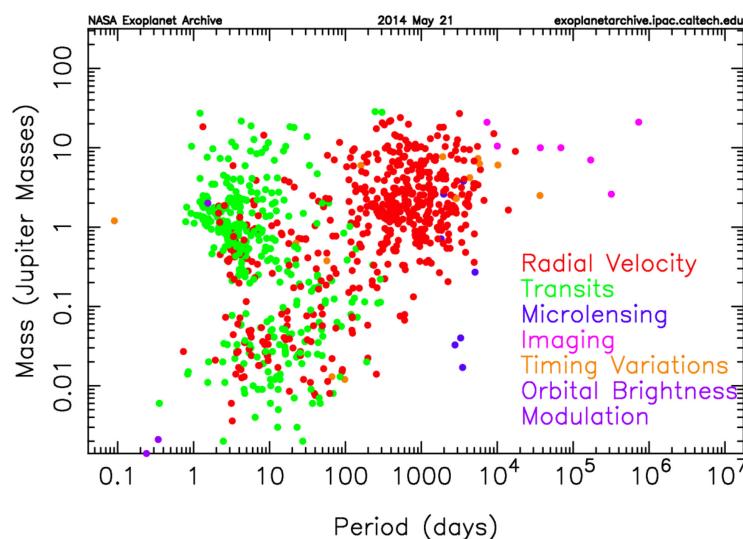


Abb. 20.48.: Vergleich der Methoden. (aus [Ric14, Fig. 4], <https://www.mdpi.com/2078-1547/5/2/296>, This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> und NASA Exoplanet Archive,).

Abbildung 20.48 zeigt eine Zusammenfassung aller gefundenen Exoplaneten.

20.2.8. Atmosphäre von Exoplaneten

Wenn ein Exoplanet vor einem Zentralgestirn vorbei zieht, erzeugt seine Atmosphäre eine leichte Veränderung des Spektrums des Zentralgestirns. Eine Analyse dieser Veränderung und der Vergleich mit dem ungestörten Spektrum erlaubt Rückschlüsse auf die Zusammensetzung der Atmosphäre. Aus der Leuchtkraft des Zentralgestirns und dem berechneten Abstand kann die Temperatur abgeschätzt werden. Bewohnbare Planeten (für Erdlinge) sollten etwa 290 K warm sein und eine sauerstoffhaltige Atmosphäre haben. Mehr Informationen gibt es z.B. bei [NAS19d]

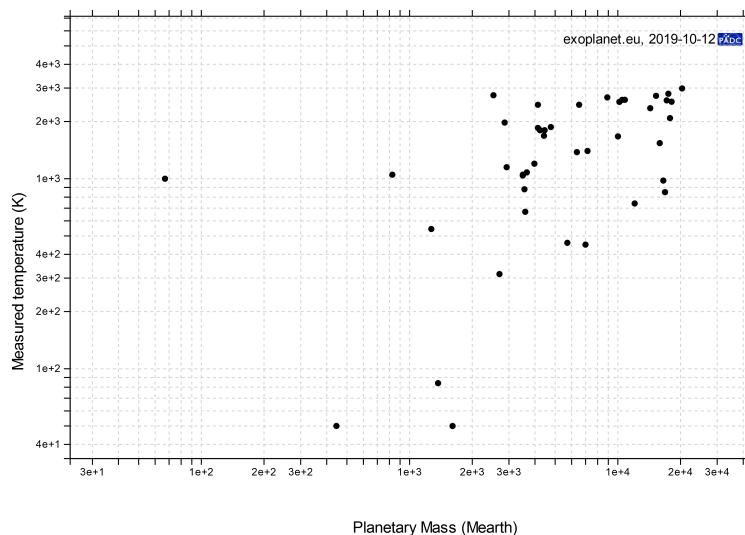


Abb. 20.49.: Masse und Temperatur von Exoplaneten (generiert mit [Tea95], CC-BY 4.0 International, <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fr>).

Abbildung 20.49 zeigt eine Zusammenstellung von 43 Exoplaneten, von denen die Temperatur der Oberfläche bekannt sind. Die Temperatur ist im Bereich (30...2000) K. Bei etwa 300 K ist kein Planet vorhanden.

20.3. Binärsysteme

Binärsysteme sind Systeme mit zwei etwa gleich massereichen Sternen. Wir unterscheiden

- visuelle Doppelsterne,
- astrometrische Doppelsterne,
- Spektroskopische Doppelsterne und
- photometrische Doppelsterne.

20.3.1. Visuelle Doppelsterne

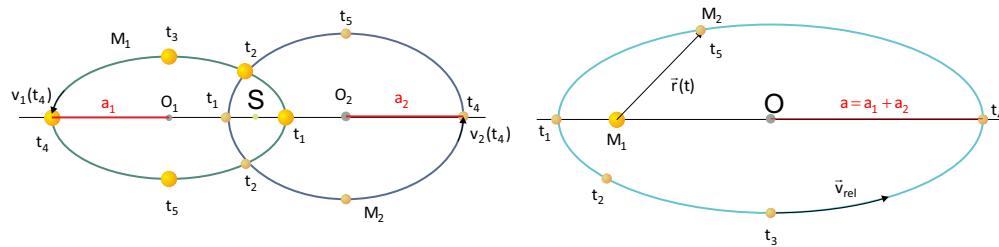


Abb. 20.50.: Schematische Darstellung visueller Doppelsterne (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.6]

Unter visuellen Doppelsternen verstehen wir zwei Sterne, deren Abstand $r > 0.1''$ ist. Dann können die besten optischen Instrumente die beiden Sterne als getrennte Objekte auflösen. Abbildung 20.50 zeigt links die Geometrie, wie Sie real existiert, d.h. dass beide Sterne sich jeweils auf einer Ellipsenbahn bewegen, bei der der gemeinsame Schwerpunkt jeweils im Brennpunkt jeder Ellipse liegt. Die rechte Skizze in 20.50 gibt die Bahngeometrie mit reduzierten Massen an. Der letztere Fall ist äquivalent zum ersten, aber einfacher zu berechnen.

20.3.2. Astrometrische Doppelsterne

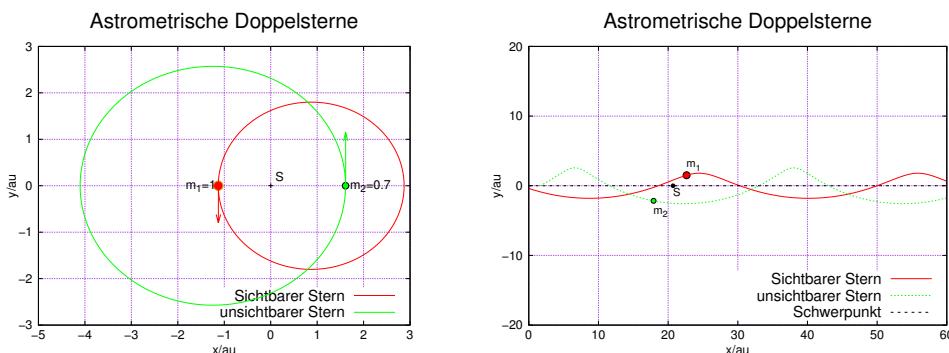


Abb. 20.51.: Gezeigt ist links die Bewegung eines Doppelsternsystems in zufälligen Koordinaten mit $m_2/m_1 = 0.7$. Rechts ist die Bewegung aus der Ferne gezeigt.

Bei astrometrischen Doppelsternen ist nur einer der beiden Sterne sichtbar ist, z.B. weil der zweite Stern ein Neutronenstern oder ein brauner Zwerg ist. Die Position des sichtbaren Sternes schwankt. Da ohne äussere Kräfte sich der Schwerpunkt

eines Doppelsternsystems sich geradlinig bewegt kann man auf die relative Masse des unsichtbaren Begleiters und dessen Abstand schliessen (Siehe Abbildung 20.51).

20.3.3. Spektroskopische Doppelsterne

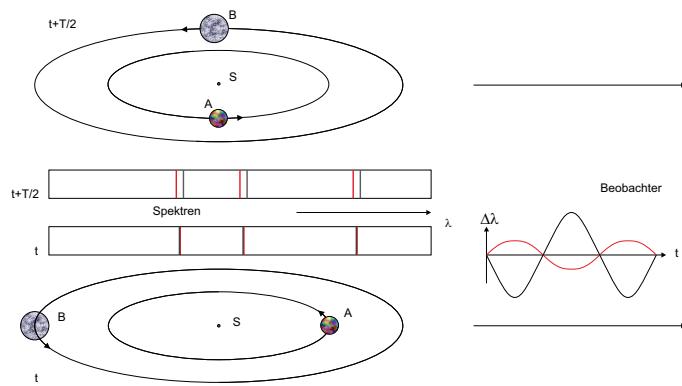


Abb. 20.52.: Skizze spektroskopischer Doppelsterne (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.8])

Wenn die beiden Teile eines Doppelsternsystems winkelmässig so nahe beieinander stehen dass sie in einem Teleskop nicht mehr aufgelöst werden können, dann verraten sie sich immer noch über die Dopplerverschiebung der Spektrallinien. Abbildung 20.52 zeigt die periodische Rot- und Blauverschiebung der Linien. Dabei sind die Spektrallinien der beiden Sterne immer entgegengesetzt verschoben. Die unterschiedliche Maximalverschiebung hängt mit der unterschiedlichen Maximalgeschwindigkeit zusammen. Da der Gesamtimpuls konstant ist kann daraus auf die Massenverhältnisse und die Abstandsverhältnisse geschlossen werden.

20.3.4. Photometrische Doppelsterne

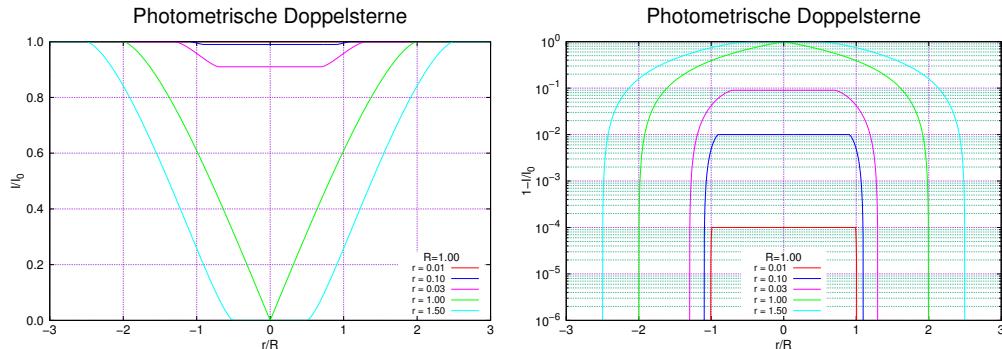


Abb. 20.53.: Helligkeitsverlauf bei photometrischen Doppelsternen in Abhängigkeit des Radius' des dunklen Sterns r . Der helle Stern hat $R = 1$. Links sind die relativen Helligkeiten I/I_0 angegeben, rechts in einer logarithmischen Darstellung $1 - I/I_0$.

Bei PHOTOMETRISCHEN DOPPELSTERNEN schwankt die Helligkeit, wenn der eine Stern vor dem anderen vorbeizieht. In Abbildung 20.53 ist der Fall berechnet, dass ein dunkler Stern um einen hellen Stern kreist (oder umgekehrt).

20.4. Struktur der Milchstrasse

Die Untersuchung und Beobachtung der dreidimensionalen Struktur der Milchstrasse ist schwierig. Wir sehen eine Projektion, aber wir sind mitten drin. Ein analoges Problem ist, wenn man auf einem grossen Platz mit einem Bauwerk in der Mitte seine Position innerhalb einer Menschenmasse bestimmen möchte. Die Frage nach der Struktur der Milchstrasse ist analog zur Frage, wie die Verteilung von Menschen ist, mit dem Problem, dass nicht alle Menschen gesehen werden können, weil sie hinter dem Bauwerk sind.

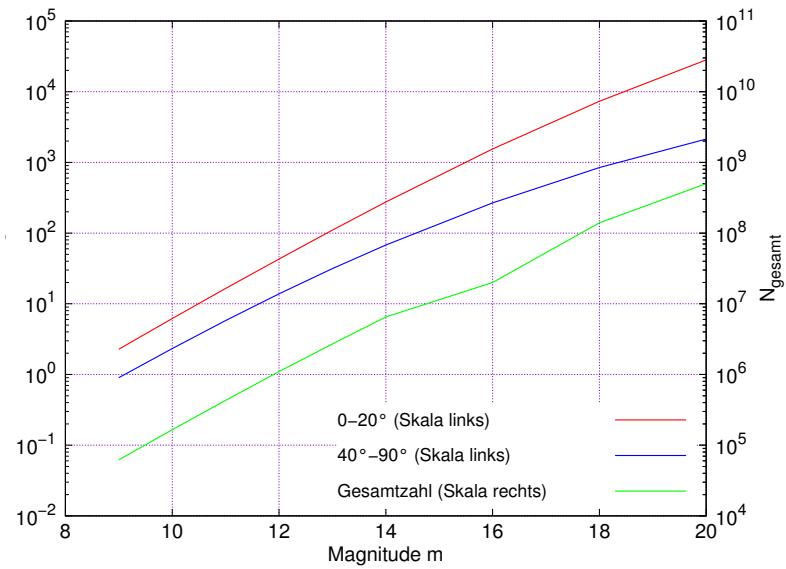


Abb. 20.54.: Anzahl Sterne in der Milchstrasse (nach [Dem10, Tab. 12.3]).

Abbildung 20.54 zeigt die Anzahl der Sterne in verschiedene Richtungen in Abhängigkeit ihrer Magnitude. Unter der Annahme, dass die Sterne eine ähnliche durchschnittliche Helligkeit haben zeigt diese Darstellung ob die Dichte abnimmt. Dies könnte bei der blauen Kurve der Fall sein.

Die Distanz kann mit der Beziehung

$$r = 0.768 \cdot 10^{1.0+0.2*m} \quad (20.4.1)$$

berechnet werden. Dabei wurde die Distanz zur und die Magnitude der WEGA verwendet um den Vorfaktor zu berechnen. Weiter ist die Anzahl der Sterne in einer Schale der Dicke Δr mit der Dichte ρ durch

$$n(r) = \rho * r^2 \Delta r \quad (20.4.2)$$

gegeben.

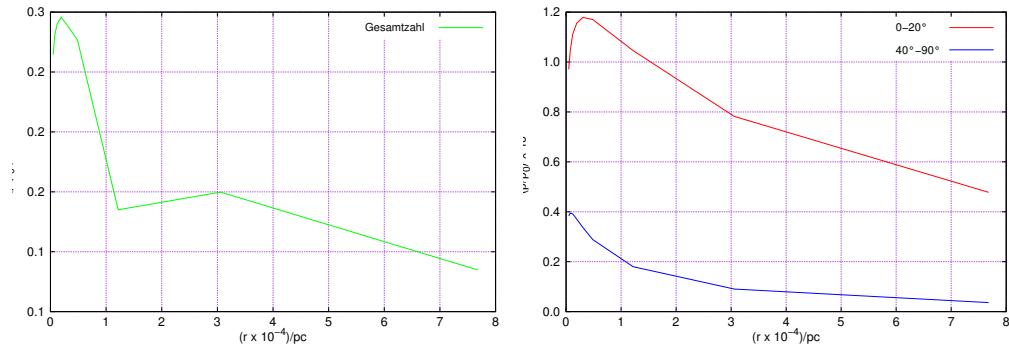


Abb. 20.55.: Links ist die gemittelte Dichte der Sterne in alle Richtungen gezeigt, rechts die Dichte in der Ebene der Milchstrasse ((0 bis 20)°) und in etwa senkrecht zur galaktischen Ebene ((40 bis 90)°) gezeigt.

Abbildung 20.55 zeigt die mit den Daten aus Abbildung 20.54 berechneten Dichten im Gesamten und in zwei Richtungen. Diese Kurven sind Schätzungen. Sie zeigen, dass es in einer kleinen Entfernung eine sehr hohe Dichte hat, das Zentrum der Milchstrasse. Weiter ist ersichtlich, dass die Milchstrasse relativ dünn ist.

20.4.1. Geschwindigkeitsmessung in der Galaxis

In diesem Abschnitt sollen Verfahren zur Messung der Geschwindigkeit von Sternen in der MILCHSTRASSE relativ zum Sonnensystem oder zu galaktischen Koordinaten vorgestellt werden.

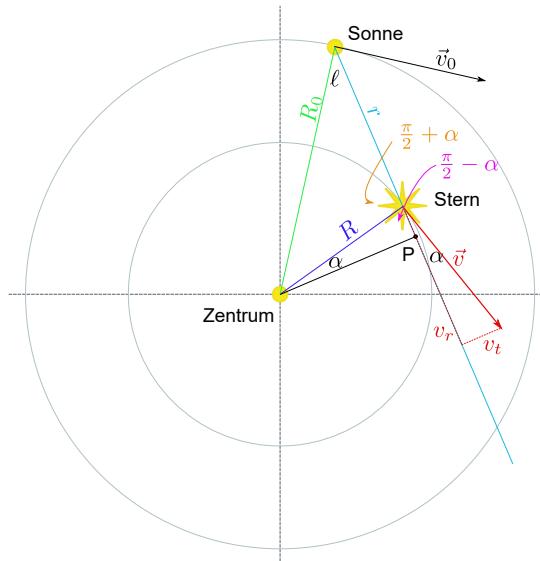


Abb. 20.56.: Geschwindigkeitsmessung in der Galaxis.

Abbildung 20.56 zeigt die Geometrie zur Berechnung von Geschwindigkeiten. Aus ihr liest man die folgenden Beziehungen ab:

$$\frac{\sin(\ell)}{\sin(\pi/2 + \alpha)} = \frac{R}{R_0} \quad (20.4.3a)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{R_0}{R} \sin(\ell) \quad (20.4.3b)$$

sowie

$$r + R \sin(\alpha) = R_0 \cos(\ell) \quad (20.4.3c)$$

$$R \sin(\alpha) = R_0 \cos(\ell) - r \quad (20.4.3d)$$

Damit bekommt man

$$v_r = v \cos(\alpha) - v_0 \sin(\ell) = \omega R \frac{R_0}{R} \sin(\ell) - \omega_0 R_0 \sin(\ell) \quad (20.4.4a)$$

$$v_r = R_0 (\omega - \omega_0) \sin(\ell)$$

$$v_t = v \sin(\alpha) - v_0 \cos(\ell)$$

$$= \omega R \sin(\alpha) - \omega_0 R_0 \cos(\ell) = \omega [R_0 \cos(\ell) - r] - \omega_0 R_0 \cos(\ell)$$

$$v_t = R_0 (\omega - \omega_0) \cos(\ell) - \omega r \quad (20.4.4b)$$

wobei $|\mathbf{v}_0| = \omega_0 R_0$ und $|\mathbf{v}| = R\omega$ ist. Wenn die Geschwindigkeiten v_t und v_r , die Distanzen R_0 und r und der Winkel ℓ bekannt sind, kann so die Winkelgeschwindigkeit der Sonne (ω_0) und des Sterns (ω) um das galaktische Zentrum bestimmt werden.

20.4.2. Oort'sche Gleichung und Oort'sche Konstanten

Die beiden Gleichungen (20.4.4a) und (20.4.4b) können umgeschrieben werden, wenn man ω mit ω_0 in eine Taylor-Reihe entwickelt.

$$\omega \approx \omega_0 + \Delta R \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R=R_0} + O\left(\frac{d^2\omega}{dR^2} \right) \quad (20.4.5)$$

Für nahe Sterne ist $\Delta R = -r \cos(\ell)$. Damit haben wir

$$\omega \approx \omega_0 - r \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R=R_0} \cos(\ell) \quad (20.4.6)$$

Eingesetzt ergeben sich Produkte $\sin(\ell) \cos(\ell)$ und $\cos^2(\ell)$. Beide Produkte führen auf Winkelfunktionen von 2ℓ , wobei bei \cos^2 noch ein konstanter Term vorhanden ist. Weiter wird der Term mit r^2 vernachlässigt, da $r/R_0 \ll 1$ ist. Schliesslich wird $\omega = |\mathbf{v}(R)|/R = v/R$ und $\omega_0 = |\mathbf{v}(R_0)|/R_0 = v_0/R_0$ ersetzt

Die Approximationen für kleine Distanzen $r/R_0 \ll 1$ heißen OORT'SCHE GLEICHUNGEN (nach Jan Hendrik Oort):

$$v_r = r \cdot A \cdot \sin(2\ell) \quad (20.4.7a)$$

$$v_t = r \cdot (A \cdot \cos(2\ell) + B) \quad (20.4.7b)$$

Die Grösse der OORT'sCHEN KONSTANTEN ist ([Bov17])

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{v_0}{R_0} - \left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0} \right] \approx 15.3(4) \text{ km kpc}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (20.4.8a)$$

$$B = -\frac{1}{2} \left[\frac{v_0}{R_0} + \left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0} \right] \approx -11.9(4) \text{ km/kpc} \quad (20.4.8b)$$

Daraus ergeben sich die Relationen

$$A - B = \frac{v_0}{R_0} = \omega_0 \quad (20.4.9a)$$

$$A + B = -\left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0} = R_0 \left(\frac{d\omega}{dR} \right)_{R_0} \quad (20.4.9b)$$

Das galaktische Zentrum ist 8.0(3) kpc von der Sonne entfernt ([Cam+18]). Daraus ergibt sich mit den Oort'schen Konstanten (nach Jan Hendrik Oort)

$$\omega_0 = 8.8 \cdot 10^{-16} \text{ s}^{-1} \quad v_0 = 217.6 \text{ km s}^{-1} \quad (20.4.10a)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dR} \right)_{R_0} = 1.4 \cdot 10^{-17} \text{ kpc}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (20.4.10b)$$

Weiterführende Modelle der Galaxis berücksichtigen die gebrochene Zylindersymmetrie ([Bov17; LZY19]). In einem Koordinatensystem mit dem Nullpunkt im Zentrum der Galaxis mit den Koordinaten der Sonne $(R_0, 0)$ und des Sterns (R, ϕ) kann man vier OORT'sCHE KONSTANTEN definieren ([Bov17]):

$$2A = \frac{1}{R_0} \frac{d \langle v \rangle}{d\phi} - \frac{d^2 \langle v \rangle}{d\phi dR} - \frac{1}{R_0} \frac{d^2 \langle v \rangle}{d\phi dR} \quad A = 15.3(4) \text{ km kpc}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (20.4.11a)$$

$$2B = -\frac{1}{R_0} \frac{d \langle v \rangle}{d\phi} - \frac{d^2 \langle v \rangle}{d\phi dR} + \frac{1}{R_0} \frac{d^2 \langle v \rangle}{d\phi dR} \quad B = -11.9(4) \text{ km kpc}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (20.4.11b)$$

$$2C = -\frac{1}{R_0} \frac{d \langle v \rangle}{dR} + \frac{d^2 \langle v \rangle}{d^2 R} - \frac{1}{R_0} \frac{d^2 \langle v \rangle}{d^2 \phi} \quad C = -3.2(4) \text{ km kpc}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (20.4.11c)$$

$$2K = \frac{1}{R_0} \frac{d \langle v \rangle}{dR} + \frac{d^2 \langle v \rangle}{d^2 R} + \frac{1}{R_0} \frac{d^2 \langle v \rangle}{d^2 \phi} \quad K = -3.3(6) \text{ km kpc}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (20.4.11d)$$

Diese Gleichungen setzen ein zylindrisches galaktozentrisches Koordinatensystem voraus (siehe auch Abschnitt 2.2.5). Die Konstanten beschreiben die folgenden physikalischen Effekte

A lokale azimutale Scherung des Geschwindigkeitsfeldes

- B** Wirbelstärke (Vortizität) des lokalen Geschwindigkeitsfeldes
- C** lokale radiale Scherung des Geschwindigkeitsfeldes
- K** lokale Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes

R. P. Olling und W. Dehnen [OD03] geben eine gute Ableitung der Gleichungen ausgehend von einem Stömungsfeld

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \quad (20.4.12)$$

in der Galaxis. Wegen lokalen Wechselwirkungen hat unsere Sonne die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{0,r}$ gegen dieses Strömungsfeld. Nach R. P. Olling und W. Dehnen kann dann die Geschwindigkeit am Ort \mathbf{r} in diesem Strömungsfeld in einer Approximation erster Ordnung als

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{v}_{0,r} + \mathbf{H}\mathbf{x} + O(\mathbf{x}^2) \quad (20.4.13)$$

geschrieben werden. Dabei wird ein lokales Koordinatensystem verwendet, bei dem die x -Achse in die Richtung $\ell = 0$ im galaktischen Koordinatensystem zeigt und die y -Achse in die Richtung $\ell = \frac{\pi}{2}$.

Der Tensor \mathbf{H} wird am Ort der Sonne (bei $\mathbf{x} = 0$) ausgewertet. Er ist

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=0} = \begin{pmatrix} K + C & A - B \\ A + B & K - C \end{pmatrix} \quad (20.4.14)$$

mit den VERALLGEMEINERTEN OORT'SCHEN KONSTANTEN verknüpft. Die von R. P. Olling und W. Dehnen [OD03] durchgeführten Rechnungen führen auf Gleichung (20.4.11). Weiter geben die Autoren eine Anleitung zur Messung der OORT'SCHEN KONSTANTEN.

R. P. Olling und W. Dehnen [OD03, Tab. 1] weisen darauf hin, dass es drei Klassen von OORT'SCHEN KONSTANTEN gibt

1. Die WAHREN OORT'SCHEN KONSTANTEN A, B, C und K von geschlossenen Umlaufbahnen im Gravitationspotential der Galaxis und ihrem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x})$
2. Die WAHREN LOKALEN OORT'SCHEN KONSTANTEN $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ und \bar{K} im Geschwindigkeitsfeld $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ einer Gruppe benachbarter Sterne
3. Die aus den Fourier-Koeffizienten der scheinbaren Bewegung benachbarter Sterne abgeleiteten Oort'schen Konstanten $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ und \tilde{K} .

Wenn nach R. P. Olling und W. Dehnen [OD03] das Gravitationspotential gegeben durch die Massen der Sterne, des Gases und sonstiger Materie in der Galaxis die Grundlage zur Berechnung der OORT'SCHEN KONSTANTEN ist, dann muss das Vorhandensein DUNKLER MATERIE nach A. Ravi u. a. [Rav+19] sich auf Beschleunigungen von der Sonne benachbarten Sternen auswirken. Die Abweichungen dieser Beschleunigungen von den aus den OORT'SCHEN GLEICHUNGEN bestimmten Werten könnten in diesem Vorschlag für ein Messprogramm Hinweise zum besseren Verständnis dunkler Materie ergeben.

20.4.3. Spiralarme

Wenn wir andere Galaxien anschauen, so finden wir häufig SPIRALARME. Aus den Positionen und Distanzen von Sternen in unserer Galaxie muss man schliessen, dass auch die MILCHSTRASSE Spiralarme hat.



Abb. 20.57.: Die Sombrero-Galaxie M 104 (Credit NASA and The Hubble Heritage Team (STScI/AURA), http://solarsystem.nasa.gov/multimedia/display.cfm?IM_ID=9967).

Abbildung 20.57 zeigt die SOMBREROGALAXIE M 104. Wir erkennen, dass diese Galaxis im Wesentlichen in einer Ebene angeordnet ist, eine Erkenntnis, die wir auch schon aus den Kurven in Abbildung 20.55 gezogen haben. Weiter scheint der Rand der Sombrerogalaxie aus stärker absorbierendem, weniger leuchtendem Material zu bestehen.

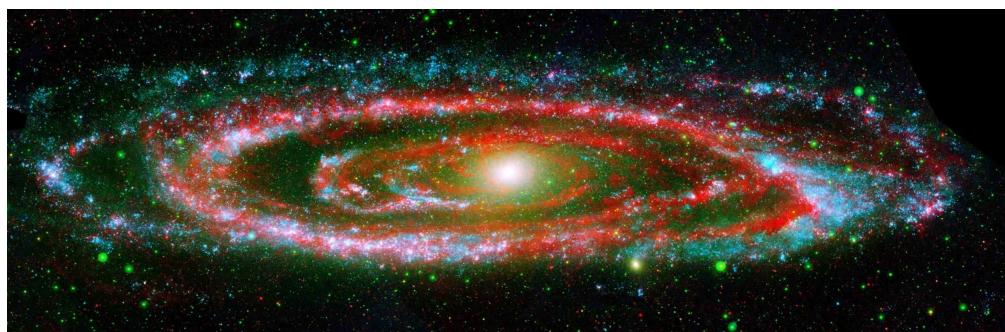


Abb. 20.58.: Spiralarme der ANDROMEDA-GALAXIE M 31 (Credit NASA/JPL-Caltech, <http://photojournal.jpl.nasa.gov/jpeg/PIA08787.jpg>).

Das Falschfarbenbild der ANDROMEDA-GALAXIE M 31 in Abbildung 20.58 zeigt sehr deutliche Spiralarme. Die ANDROMEDA-GALAXIE M 31 ist die unserer MILCHSTRASSE nächste grosse Galaxie. Sie bewegt sich auf die Milchstrasse zu. In einigen

Milliarden Jahren werden sich die ANDROMEDA-GALAXIE M 31 und die Milchstrasse durchdringen. Es besteht dann die Möglichkeit, dass die beiden zentralen schwarzen Löcher sich zu einem noch grösseren Gebilde vereinen.



Abb. 20.59.: Die Galaxie NGC 1275 im Zentrum des Galaxienhaufen A426 im Sternbild Perseus. Der Galaxienhaufen ist etwa $240 \cdot 10^6$ ly entfernt und enthält etwa 500 bis 1000 Galaxien (Credit: NASA, ESA, and L. Frattare (STScI), http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/images/hs-2008-28-c-full_jpg.jpg).

Galaxien bilden Galaxienhaufen, so wie die ANDROMEDA-GALAXIE M 31 und unsere Milchstrasse. Abbildung 20.59 zeigt die Galaxie NGC 1275 im GALAXIENHAUFEN A426. Dieses Gebilde enthält 500 bis 1000 Galaxien.



Abb. 20.60.: Lokale Umgebung der Sonne (Credit: N. Henbest / H. Couper, Jschmied at de.wikipedia, CC BY-SA 2.0 DE <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/deed.en>>, via Wikimedia Commons, Milchstrasse_lokale_blae_25_lj.jpg).

Innerhalb der Milchstrasse sind die Sterne in der Umgebung der SONNE nicht gleichmaessig verteilt. Abbildung 20.60 zeigt die Sonne (grüner Kreis und Schnittpunkt der zwei Linien).

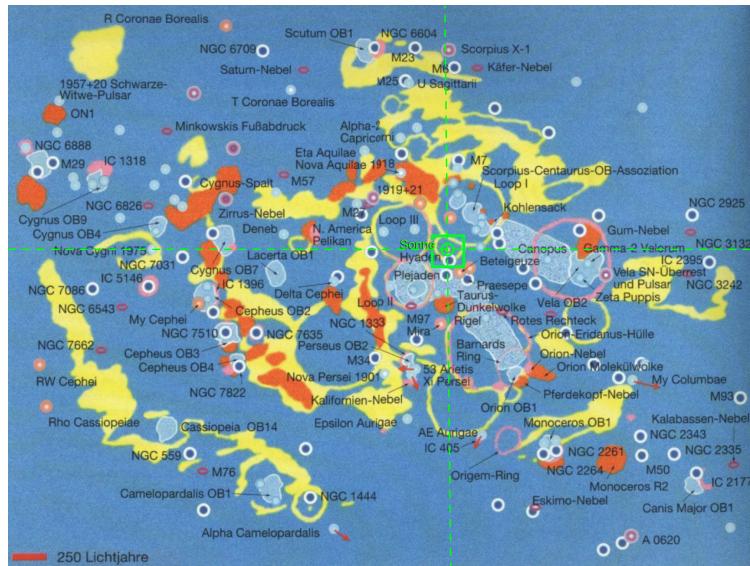


Abb. 20.61.: Lokale Umgebung der Sonne (Credit: N. Henbest / H. Couper, Jschmied at de.wikipedia, CC BY-SA 2.0 DE <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/deed.en>>, via Wikimedia Commons, Milchstrasse_lokale_blaue_250_lj.jpg).

Die grössere Umgebung wird in Abbildung 20.61 gezeigt. Wieder ist die Sonne durch einen grünen Kreis und den Schnittpunkt der zwei Linien markiert. Das grüne Quadrat zeigt die Lage des in Abbildung 20.60 gezeigten Bereiches.

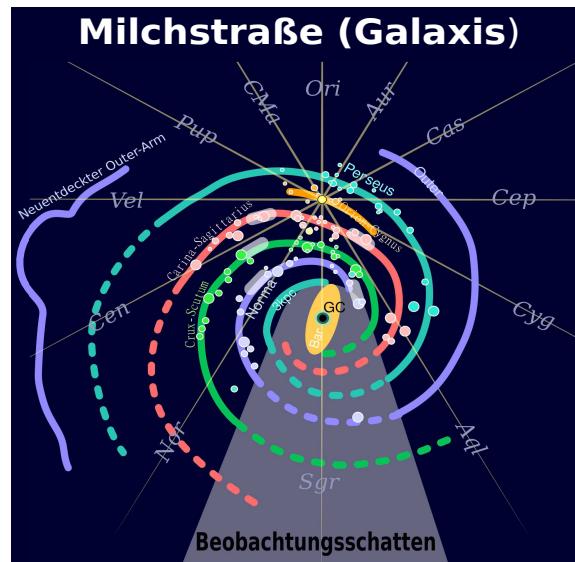


Abb. 20.62.: Schematische Struktur der Milchstrasse (Credit: Milky_Way_Arms.svg: User:Rursusderivative work: Andys, CC BY-SA 3.0 <<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons).

Abbildung 20.62 zeigt die Struktur der BALKENGALAXIS MILCHSTRASSE. Der PERSEUS-ARM und der CRUX-SCUTUM-ARM (auch SCUTUM-CENTAURUS-ARM genannt) beginnen am BALKEN unserer Galaxis. Es gibt noch zwei weitere lange Arme, den CARINA-SAGITTARIUS-ARM und der ÄUSSERE ARM. Von letzterem wurde eine Verlängerung entdeckt. Schliesslich gibt es noch den kleinen ORION-CYGNUS-ARM. In diesem befindet sich unsere SONNE.

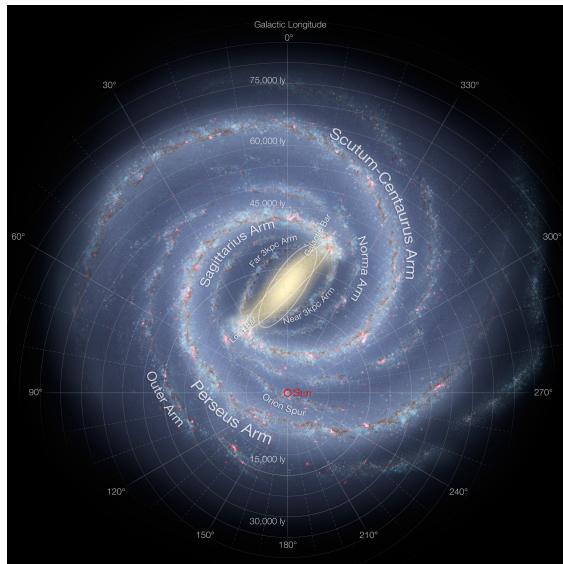


Abb. 20.63.: Struktur der Milchstrasse. Dies ist eine Zeichnung, basierend auf Messungen (Credit: NASA/JPL-Caltech/ESO/R. Hurt, Public domain, via <https://www.eso.org/public/images/eso1339e/>).

Das was in Abbildung 20.62 schematisch skizziert wurde wird in Abbildung 20.63 so gezeichnet dargestellt wie eine Galaxie aussehen würde.



Abb. 20.64.: Seitliche Ansicht der Milchstrasse vom Satelliten COBE aus. Die Wellenlängen von 1.25 μm , 2.2 μm und 3.5 μm sind als blau, grün und rot dargestellt. Die zentrale Verdickung der Milchstrasse ist gut sichtbar (Credit: NASA, GSFC, COBE, Public domain, via Wikimedia Commons).

Abbildung 20.64 zeigt den Kern der Milchstrasse im infraroten Licht, gemessen von dem Satelliten COBE.

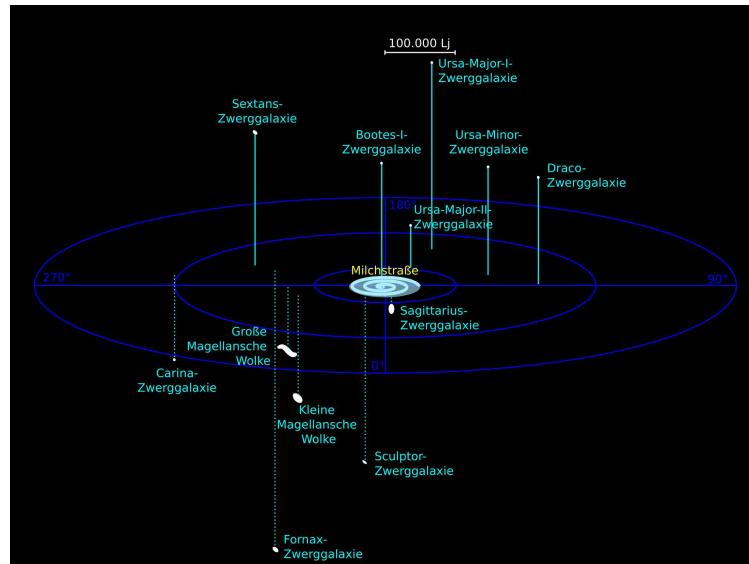


Abb. 20.65.: Begleitgalaxien der Milchstrasse (Credit: This file was derived from: [Satellite_Galaxies.svg](#), CC0, via Wikimedia Commons).

Das grössere Bild ist in Abbildung 20.65 gezeigt. Um die MILCHSTRASSE gruppiert sich eine Anzahl ZWERGGALAXIEN und KUGELSTERNHAUFEN. Die bekanntesten sind die MAGELLANSCHEN WOLKEN.

20.4.4. Kugelsternhaufen



Abb. 20.66.: Kugelsternhaufen M13 (T. Bash, J. Fox, and A. Block/NOAO/AURA/NSF, <http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2008/40/image/c/>).

Kugelsternhaufen wie exemplarisch in Abbildung 20.66 sind lokal gravitativ gebundene Ansammlungen von Sternen. Die gegenseitige Wechselwirkung über «Stöße» führt zu einer kugelsymmetrischen Massendichteverteilung. Kugelsternhaufen finden sich im Halo von Galaxien (siehe auch Abbildung 20.65) und Zwerggalaxien. Nach [CO07, Kap. 13.3] bestehen Kugelsternhaufen aus einigen zehn bis einigen tausend Sternen. Der Kugelsternhaufen M13 aus Abbildung 20.66 besteht aus metallarmen Sternen der POPULATION II. Das bedeutet, dass die Sterne vor langer Zeit entstanden, als das Universum einige Milliarden Jahre alt war.

Es gibt weiter die OFFENEN STERNHAUFEN. Diese bestehen aus POPULATION I-Sternen. Diese enthalten relativ viele Metallatome, sind also relativ jung. OFFENE STERNHAUFEN sind in der Regel kleiner (haben weniger Sterne) als KUGELSTERNHAUFEN.

20.4.5. Schwarzes Loch im Zentrum

Im Zentrum der Milchstrasse befindet sich ein riesiges schwarzes Loch. Dieses wurde in den 1990-er Jahren durch Andrea Ghez und unabhängig davon durch Reinhard Genzel und ihre jeweiligen Arbeitsgruppen entdeckt. Zuvor wurde am 13. 2. und 15. 2. 1974 durch Robert Hanbury Brown und Bruce Balick die energiereiche Radioquelle Sagittarius A* entdeckt. Erste Hinweise darauf entdeckte Karl Guthe Jansky schon 1932.

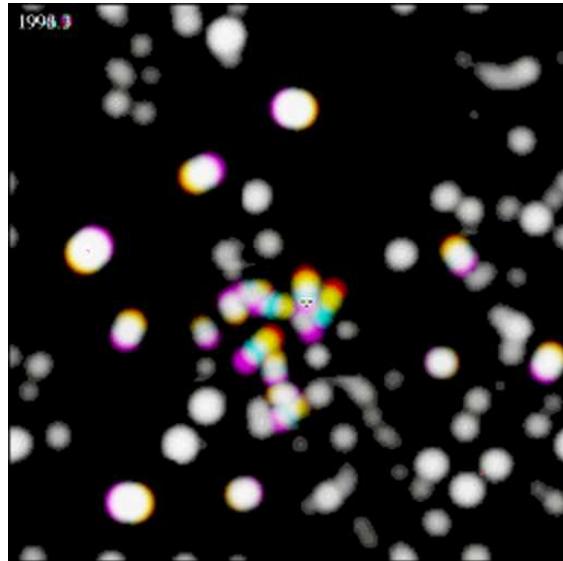


Abb. 20.67.: Infrarotbild des Zentrums der Milchstrasse (Grösse: $(0.5 \text{ pc})^2$) (adaptiert von <http://apod.nasa.gov/apod/ap001220.html>, A. Eckart (U. Koeln) & R. Genzel (MPE-Garching), SHARP I, NTT, La Silla Obs., ESO, siehe auch [Eck+95])

Abbildung 20.67 zeigt eine Überlagerung von Bildern zu den Zeiten 1992-0, 1993-3, 1994-7, 1996-1, 1997-4 und 1998-9. Das Gesichtsfeld ist $(0.5 \text{ pc})^2$. Im Zentrum liegt SgtA*, das galaktische Zentrum, ein vermeintliches schwarzes Loch. Die Bilder wurden im Infrarotbereich aufgenommen. Die höhere Materiedichte im Zentrum der Milchstrasse blockiert sichtbares Licht. Die Sonne z.B. wärmt auch durch Wolken, obwohl sie nicht mehr sichtbar ist.

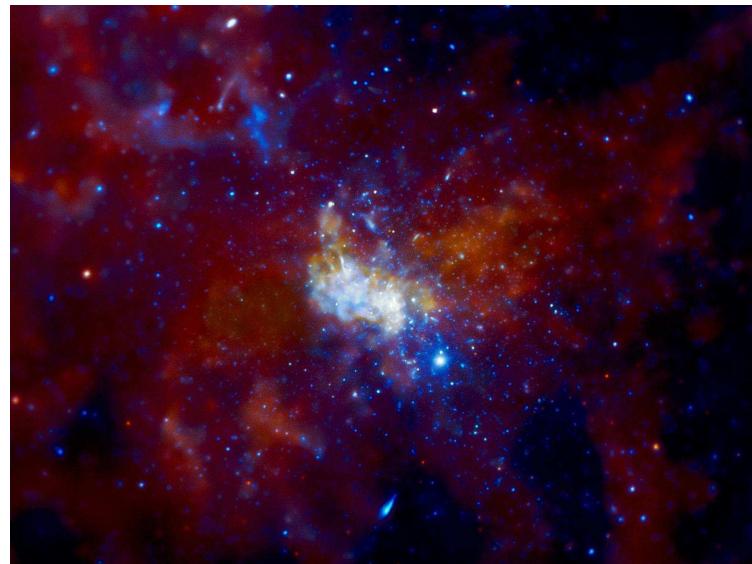


Abb. 20.68.: Bild des Zentrums der Milchstrasse im Röntgenlicht.
(NASA/CXC/MIT/F. Baganoff, R. Shcherbakov et al.
http://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_1559.html)

Abbildung 20.68 zeigt das Zentrum im Röntgenlicht aufgenommen durch CHANDRA. Im Röntgenlicht kann die Aktivität des schwarzen Loches im Zentrum gemessen werden. Wenn Masse vom schwarzen Loch aufgenommen wird, dann wird Röntgenlicht ausgestrahlt.

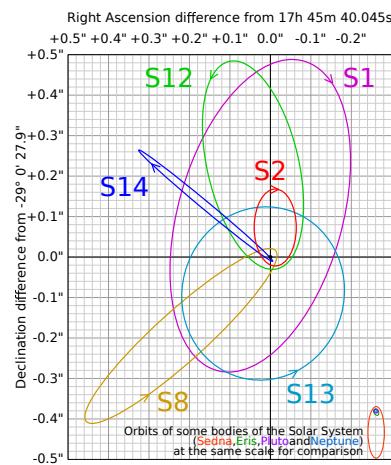


Abb. 20.69.: Umlaufbahnen um das galaktische Zentrum (By Cmglee (Own work) [CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>) or GFDL (<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>)], via Wikimedia Commons, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galactic_center_orbits.svg)

Die berechneten Bahnen um das zentrale schwarze Loch in Abbildung 20.69 stammen aus der Arbeit „SINFONI in the Galactic Center: Young Stars and Infrared Flares in the Central Light-Month“ von F. Eisenhauer u. a. [Eis+05]. Der Stern S2 kommt so nahe an das schwarze Loch, dass im Infraroten eine merkbare Rotverschiebung im Gravitationsfeld zu sehen ist (siehe Abb. 19.4).

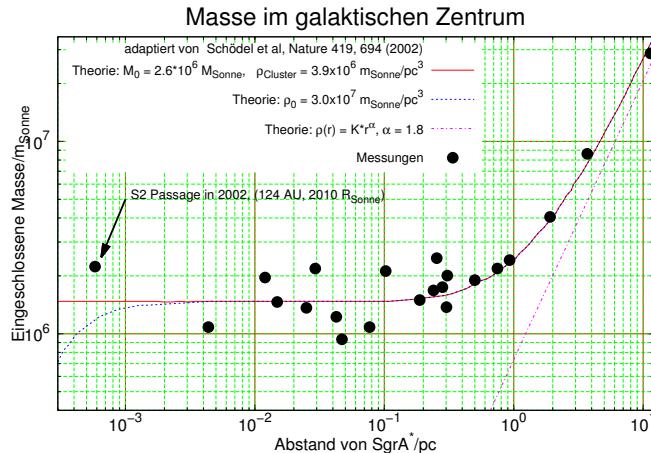


Abb. 20.70.: Masse im Zentrum der Milchstrasse (nach [Sch+02]).

Aus den Bahnparametern der Keplerbahnen (korrigiert um allgemein relativistische Effekte) kann die von der Masse auf einer Bahn umrundete Zentralmasse bestimmt werden. Abbildung 20.70 zeigt die Messwerte zusammen mit verschiedenen Theorien. Die Daten stammen aus „A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way“ von R. Schödel u. a. [Sch+02].

20.4.6. Geschwindigkeit der Sterne

Wenn von Aussen auf Galaxien geschaut wird, kann man anhand der Leuchtkraft die Massendichte und anhand der positionsabhängigen DOPPLERVERSCHIEBUNG die Geschwindigkeit abschätzen. Vera Rubin [RTF78] beobachtete und verstand als Erste, dass die Rotationsraten von Galaxien einige noch nicht verstandene physikalische Effekte verbargen. Die von ihr studierten Rotationskurven (siehe Abb. 20.71) können mit der sichtbaren Masse nicht richtig erklärt werden.

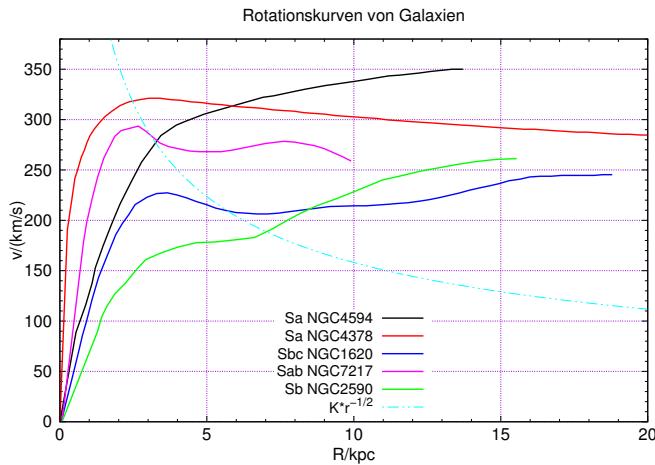


Abb. 20.71.: Rotationskurven von Galaxien. Aufgetragen ist die Geschwindigkeit von Sternen als Funktion des Abstandes zum Zentrum der Galaxis. (Nach [RTF78, Fig. 3] und [Dem10, p. 416])

Abbildung 20.71 basierend auf Daten von V. C. Rubin; N. Thonnard und J. Ford W. K. („Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV - Systematic dynamical properties, SA through SC“ [RTF78]) zeigt für verschiedene Galaxientypen, wie die Sternengeschwindigkeiten mit dem Abstand vom Zentrum sich verhalten. Zum Vergleich ist die erwartete Geschwindigkeit bei einer dominierenden zentralen Masse angezeigt. Die $\frac{K}{r^2}$ -Kurve wird immer erwartet, wenn die Masse bei grösseren Distanzen klein gegen die eingeschlossene Masse ist.

Ein sehr naives Modell kann aus der Identifikation der Gravitation und der Zentripetalkraft hergeleitet werden:

$$F_G = -G \frac{Mm}{r^2} \equiv F_Z = -m \frac{v^2}{r} \quad (20.4.15)$$

Daraus kann mit dem GAUSS'SCHEN GESETZ für die Gravitation

$$M(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}^2 \sin(\theta) d\mathbf{r} d\theta d\phi = 4\pi \int_0^r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}^2 d\mathbf{r} \quad (20.4.16)$$

die Masse bestimmt werden. Über die Geschwindigkeit und deren Ableitung bekommt man

$$\rho(r) = \frac{2v(r)}{4\pi G} \frac{dv(r)}{dr} \frac{1}{r} + \frac{v^2(r)}{4\pi G} \frac{1}{r^2} \quad (20.4.17)$$

Mit Gleichung (20.4.17) kann so aus der beobachteten Geschwindigkeitsverteilung die vom Radius abhängige eingeschlossene Masse bestimmt werden.

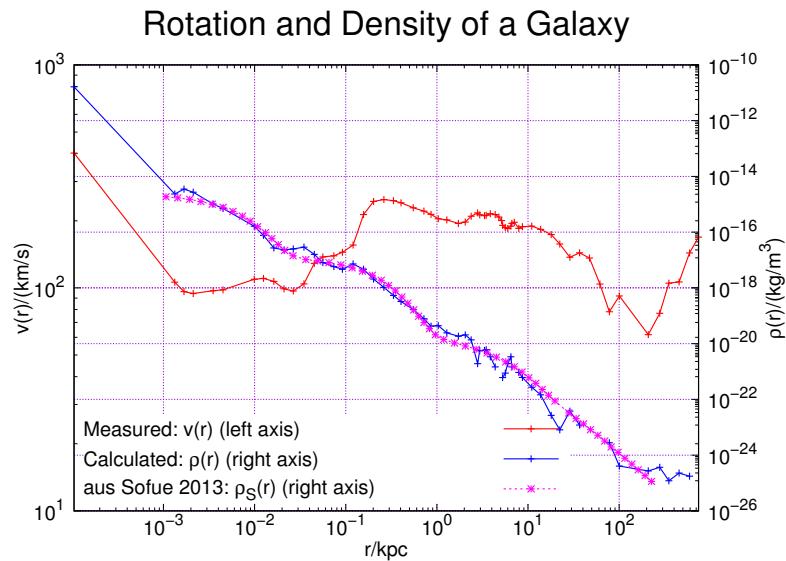


Abb. 20.72.: Rotationsgeschwindigkeit und Massendichteverteilung (Berechnet aus Daten von Y. Sofue [Sof13, Fig. 9]) sowie das Resultat von Y. Sofue [Sof13, Fig. 12, links].

Abbildung 20.72 zeigt in der roten Kurve eine gemessene Geschwindigkeitsverteilung unserer Milchstrasse (Y. Sofue, „Rotation Curve and Mass Distribution in the Galactic Center — From Black Hole to Entire Galaxy —“ [Sof13, Fig. 9]). Die blaue Kurve (Skala rechts) zeigt die mit Gleichung (20.4.17) in einer Excel-Tabelle berechnete Massenverteilung. Die lila Kurve schliesslich ist das Resultat von Y. Sofue [Sof13, Fig. 12, links].

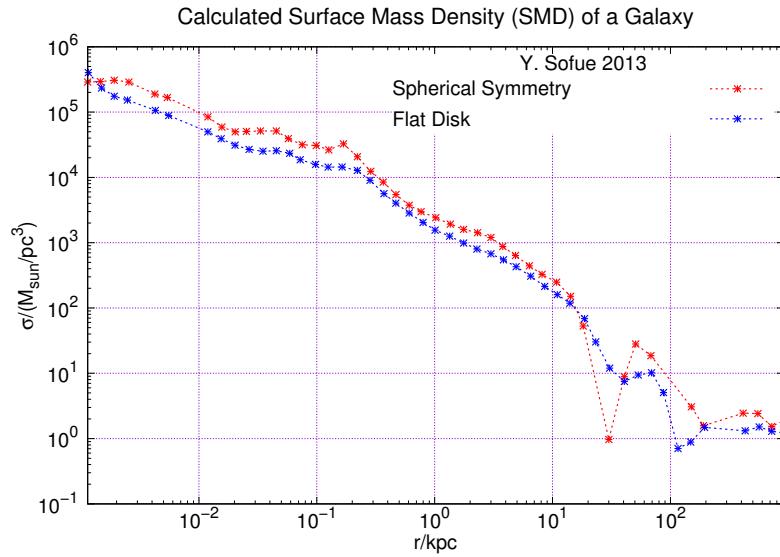


Abb. 20.73.: Rotationsgeschwindigkeit und Flächenmassenverteilung nach Y. Sofue [Sof13, Fig. 13, links]).

Da Galaxien in der Regel eher flache Objekte sind wird in der Astrophysik in der Regel die FLÄCHENMASSENDICHTE σ mit der Einheit kg m^{-2} verwendet. In der englischsprachigen Astrophysikliteratur wird dies als **Surface Mass Density**, Flächenmassendichte (SMD) bezeichnet, oft mit der Einheit $M_\odot \text{pc}^{-2}$. Durch die FLÄCHENMASSENDICHTE hat man eine direkte Korrelation zur lokalen Leuchtstärke einer Galaxis. Die Abbildung 20.73 zeigt zu den Daten aus Abbildung 20.72 die Berechnung von Y. Sofue [Sof13] für zwei Fälle, eine sphärisch symmetrische Massenverteilung und eine flache Scheibe.

20.4.6.1. Dunkle Materie

Die Rotationskurven von Galaxien, auch der unseren, zeigen, dass die sichtbare Materie nicht alles sein kann, was gravitativ wechselwirkt. Diese Materie wird DUNKLE MATERIE genannt. Die Präsidentin J. Stachel der Deutschen Physikalische Gesellschaft hat eine kurze Zusammenfassung der Physik veröffentlicht [Sta13]. Die Zusammenfassung basiert auf den Artikeln „Kinematical and Chemical Vertical Structure of the Galactic Thick disk. II. A Lack of Dark Matter in the Solar Neighborhood“ von C. M. Bidin u. a. [Bid+12] sowie von „On the local dark matter density“ von J. Bovy und S. Tremaine [BT12]. Eine weitere lesbare Darstellung finden Sie in „Dem Dunklen Universum auf der Spur“ von M. Steinmetz und M. Bartelmann [SB10].

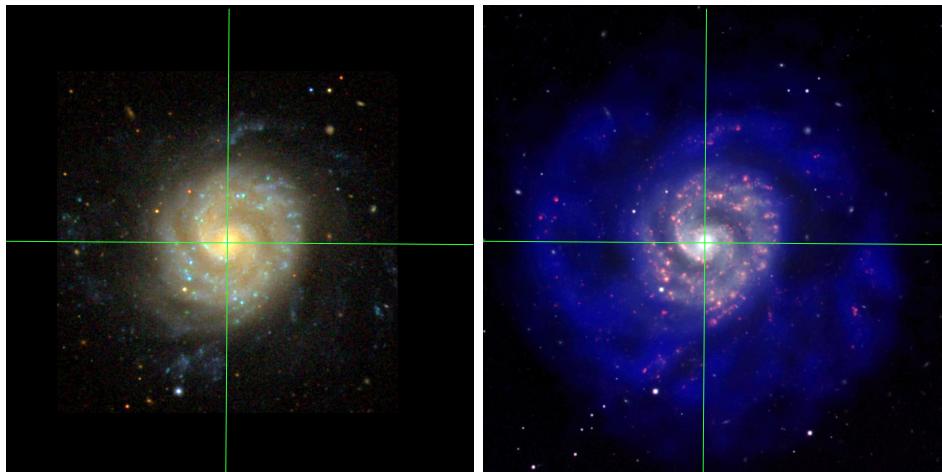


Abb. 20.74.: Links ist ein Bild im sichtbaren Frequenzbereich, rechts eines im Radiowellenbereich (21 cm, H, überlagert mit dem sichtbaren Bild (Credit: Links: Astrophysics Science Division at NASA/GSFC, rechts: T. Burchell and B. Saxton (NRAO/AUI/NSF) from data provided by A. C. Boley and L. van Zee, Indiana University; D. Schade and S. Côté, Herzberg Institute for Astrophysics)

Abbildung 20.74 zeigt im gleichen Massstab links das sichtbare Bild der Galaxis NGC 3596 und rechts in blau das Radiowellenbild auf der Wasserstofffrequenz 21 cm. Die grünen Linien markieren das Zentrum. Es ist offensichtlich, dass mehr Masse da ist als das sichtbare Licht zeigt.

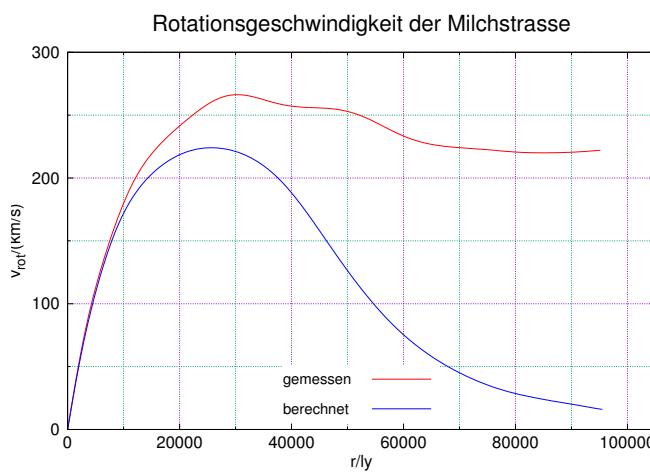


Abb. 20.75.: Gemessene und berechnete Rotationskurve der Milchstrasse (Daten aus [SB10]).

Unter der Annahme einer Zylindersymmetrie (Roatationssymmetrisch um z sowie einer Spiegelsymmetrie an der xy -Ebene) kann aus der beobachteten sichtbaren

Masse die Rotationskurve einer Galaxie berechnet werden. Diese Kurve ist in Abbildung 20.75 in blauer Farbe eingezeichnet.

Aus dem Gravitationsgesetz ergibt sich

$$v(r) = \sqrt{\frac{G M(r)}{r}} \quad (20.4.18)$$

Bei Zylindersymmetrie ergibt sich auf der xy -Ebene und dort repräsentativ für $r = x$ die auf die Ebene projizierte Masse

$$\begin{aligned} v(r) &= \sqrt{\frac{G}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^r \rho(\mathfrak{r}, z) \frac{2(r - \mathfrak{r})}{\sqrt{(r - \mathfrak{r})^2 + z^2}} \mathfrak{r} d\mathfrak{r} dz d\varphi} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi G}{r} \int_0^\infty \int_0^r \rho(\mathfrak{r}, z) \frac{(r - \mathfrak{r})}{\sqrt{(r - \mathfrak{r})^2 + z^2}} \mathfrak{r} d\mathfrak{r} dz} \quad (20.4.19) \end{aligned}$$

Die gemessene Kurve in Abbildung 20.75 ist die rote Kurve. Offensichtlich gibt es Masse, die gravitativ wirksam ist und die nicht elektromagnetisch wechselwirkt.

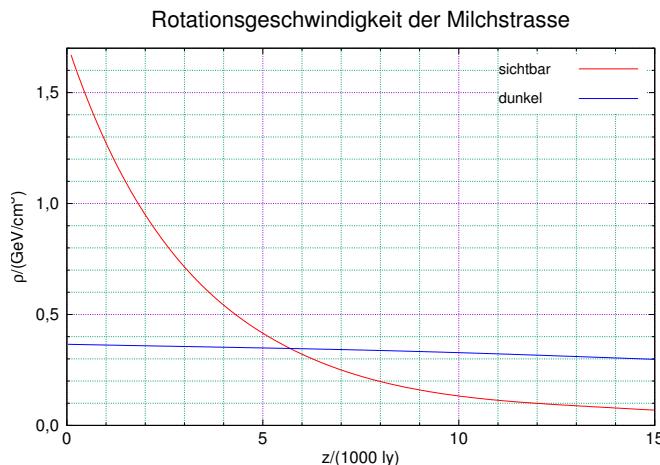


Abb. 20.76.: Dichte der sichtbaren und der dunklen Materie in Abhängigkeit von der Distanz von Ebene der Milchstrasse (Daten aus [Sta13]).

Abbildung 20.76 zeigt die Dichte der sichtbaren und der dunklen Materie über der Ebene der Milchstrasse. Die Milchstrasse hat einen grossen Halo aus dunkler Materie. Durch Präzisionsmessungen der Geschwindigkeit benachbarter Sterne haben A. Ravi u. a. [Rav+19] versucht eine Schätzung der Dichte der dunklen Materie zu erhalten.

Auch für die Physik des Weltalls ist die Dunkle Materie von Bedeutung [Sta14].

21. Universum

In diesem Abschnitt geht es um das grosse Ganze, das Universum.

21.1. Beobachtungen

Alles was wir über das Universum wissen, wissen wir aus Beobachtungen von der Erde aus, oder in jüngster Zeit, aus dem Sonnensystem heraus. Bilder, Spektren und die Analyse von Teilchenströmen und Gravitationswellen sind die verfügbaren Quellen. Es werden Modelle erzeugt, die nicht im Widerspruch zu den Beobachtungen sein sollten.

21.1.1. Olbers' Paradox

Heinrich Olbers erkannte, dass ein unendliches Universum mit homogener Sternverteilung unweigerlich zu einer Lichtkatastrophe führen müsste.



Abb. 21.1.: Olbers' Paradox. Auf kurze Strecken ist der Wald durchsichtig, auf lange jedoch blickdicht.

OLBERS' PARADOX ist eine Erkenntnis für ein klassisches unbegrenztes Universum. Abbildung 21.1 zeigt ein Bild eines Waldes. Egal wie weit die Bäume voneinander stehen, in einem unendlich tiefen Wald gibt es immer eine Distanz, ab der immer ein Stamm die Sicht blockiert, wo man also nicht weiter schauen kann.

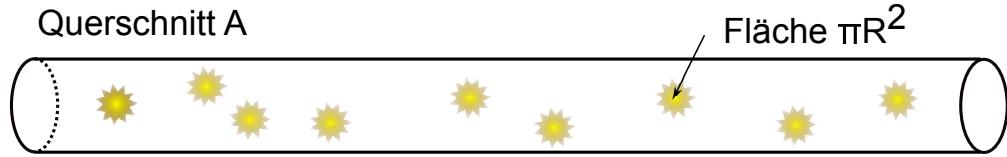


Abb. 21.2.: Skizze zur Berechnung von Olbers' Paradox.

Wenn die Stämme aus Abbildung 21.1 selbst leuchten würden, wäre es sehr hell. Da der Fluss des Lichtes mit r^2 abnimmt, die Zahl der möglichen Sterne aber mit r^2 zunimmt, trägt jede Kugelschale um einen Beobachter das Gleich zur Helligkeit bei. Es gibt unendlich viele Kugelschalen in einem klassischen Universum, also müsste der Nachthimmel unendlich hell sein, egal wie schwach ein Stern leuchtet. Mit Abbildung 21.2 kann dies berechnet werden. Die Anzahl Sterne in $d\Omega$ ist

$$N(r) = nr^2 dr d\Omega \quad (21.1.1)$$

wobei der Abstand r , die Schichtdicke dr und die Zahlendichte der Sterne n ist. Dies führt mit der Fläche $A = \pi R^2$ eines Sternes zur Beziehung für den Abstand r_{max} , wo sich Sterne immer überlappen, der Sichtweite

$$N \cdot \pi R^2 = n \cdot A \cdot r_{max} \cdot \pi R^2 \stackrel{!}{=} A \quad (21.1.2)$$

Damit erhalten wir

$$r_{max} = \frac{1}{n \cdot \pi R^2} \quad (21.1.3)$$

für die Sichtweite. Wenn L mittlere Leuchtkraft der Sterne ist, ist die beobachtete Intensität eines Sterns auf der Erde

$$I_1 = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (21.1.4)$$

Die Anzahl der Sterne zwischen r und $r + dr$ ist

$$dN = n \cdot 4\pi r^2 dr \quad (21.1.5a)$$

$$dI = dN I_1 = dN \frac{L}{4\pi r^2} = n L dr \quad (21.1.5b)$$

$$I(r_{max}) = n L \int_0^{r_{max}} dr = n L r_{max} \quad (21.1.5c)$$

Zur Berechnung der Abdeckung nehmen wir an, dass der mittlere Radius R eines Sterns bekannt sei. Dies führt im Zylinder in Abbildung 21.2 zur effektiven Fläche A_{eff} :

$$A_{eff} = n \cdot A \cdot r_{max} \cdot \pi R^2 \quad (21.1.6)$$

Wir haben eine dichte Abdeckung wenn $A_{eff} = A$ der Querschnittsfläche des Zylinders ist.

$$r_{max} = \frac{1}{(n\pi R^2)} \quad (21.1.7a)$$

$$I(r_{max}) = nLr_{max} = \frac{L}{\pi R^2} \quad (21.1.7b)$$

Unsere Überlegungen gehen von einer Isotropie der Sternverteilung aus. Das Resultat muss unabhängig von Richtung sein; Alles ist gleich hell.

Zum Schluss vergleichen wir das Olbers'sche Resultat mit dem Standardmodell des expandierenden Universums

$$r_{\text{Standard}} = 13.6 \cdot 10^9 \text{ ly} \quad (21.1.8a)$$

$$r_{\text{Olbers}} = 1.7 \cdot 10^{23} \text{ ly} \quad (21.1.8b)$$

Die Sichtweite des Olbers'schen statischen Universums sind viel grösser als die Sichtweite bis zum Urknall.

Wenn wir ein statisches Universum kombiniert mit Absorption hätten, würde das Olbers'sche Paradox gelten.

21.1.2. Unmöglichkeit eines statischen Universums

Die Diskussion im vorherigen Abschnitt 21.1.1 hat gezeigt, dass ein unendliches statisches und homogenes Universum mit einer unendlichen Leuchtdichte einher geht. Wir wissen, dass das Universum durch die allgemeine Relativitätstheorie von Albert Einstein ([Ein15a; Ein15d; Ein15c]) beschrieben werden muss. Arthur Eddington zeigte in seiner Arbeit „On the Instability of Einstein's Spherical World“ [Edd30], dass der Gleichgewichtspunkt eines statischen, sphärisch symmetrischen Universums, so wie es sich Einstein vorgestellt hatte, nicht stabil sei. D. Soares gibt in seinem Paper „Einstein's static universe“ [Soa12] eine leicht verständliche Ableitung der Eddington'schen Argumente. Abbildung 21.3 zeigt die potentielle Energie mit einem Maximum, also einem instabilen Extremum.

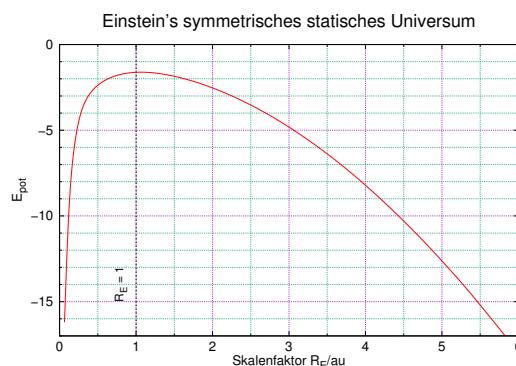


Abb. 21.3.: Verlauf der potentiellen Energie in Einsteins statischem sphärisch symmetrischem Universum (Grafik mit Daten aus [Soa12, Abb. 1])

Ein Universum, das durch die Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben wird kann also nicht statisch und sphärisch symmetrisch sein. Messungen zeigen, dass das Universum expandiert, dann muss es einen Anfang gehabt haben.

21.1.3. Isotropie der Fluchtbewegung

Wenn man die Geschwindigkeiten von fernen Galaxien entlang der Sichtlinie beobachtet, stellt sich heraus, dass viele von uns weg sich bewegen, und zwar um so schneller, je weiter weg diese sind.



Abb. 21.4.: Modell der Expansion im Universum

Abbildung 21.4 veranschaulicht, dass zwei Insekten, die sich auf einem Luftballon befinden, sich trotzdem voneinander weg bewegen, wenn der Ballon aufgepumpt wird. Lokal gibt es keine messbaren Änderungen der Längenskala, global schon.

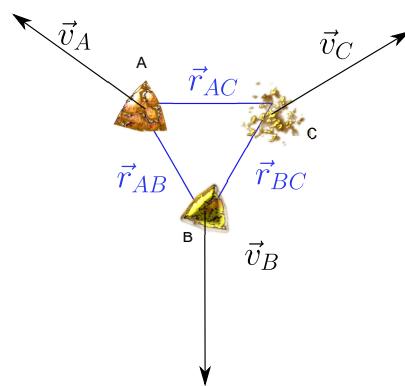


Abb. 21.5.: Skizze zur Isotropie der Ausdehnungsbewegung (nach Demtröder [Dem10, Abb. 12.3]).

Um eine quantitative Aussage zu machen verwenden wir die Skizze in Abbildung 21.5. Es gilt

$$\mathbf{v}_{BC} = \mathbf{v}_{AC} - \mathbf{v}_{AB} \quad (21.1.9)$$

sowie

$$v_{AB} = H_0 r_{AB} \quad v_{AC} = H_0 r_{AC} \quad (21.1.10)$$

Daraus folgt

$$\mathbf{r}_{BC} = \mathbf{r}_{AC} - \mathbf{r}_{AB} \quad (21.1.11a)$$

$$\mathbf{v}_{BC} = \mathbf{v}_{AC} - \mathbf{v}_{AB} \quad (21.1.11b)$$

$$= H_0 (\mathbf{r}_{AC} - \mathbf{r}_{AB}) \quad (21.1.11c)$$

$$= H_0 \mathbf{r}_{BC} \quad (21.1.11d)$$

21.2. Hubble-Gesetz

Durch genaue optische Spektroskopie können mit dem Dopplereffekt die Geschwindigkeiten von Galaxien von uns weg gemessen werden. **Edwin Hubble** [Hub29] entdeckte, dass es einen Zusammenhang zwischen der Fluchtgeschwindigkeit und der Distanz eines Objektes zu uns gibt:

$$v = H \cdot r \quad (21.2.1)$$

H ist die sogenannte «Hubble-Konstante», deren Wert nach neueren Erkenntnissen nicht konstant ist. Ihr heute anerkannter Wert ist:

$$H_0 = 73(7) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (21.2.2)$$

Die Unsicherheit der Grösse der Hubble-Konstante wird ausgedrückt durch die folgende Definition

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \text{ mit } h = 0.5 \dots 1 \quad (21.2.3)$$

In Gleichung (21.2.2) wäre also $h = 0.73$.

21.2.1. Distanzangaben ferner Objekte

Durch die Unsicherheit über die Grösse der Hubble-Konstante sind auch alle anderen Grössen mit dem selben systematischen Fehler behaftet. Unsere Teleskope messen nur Winkel. Wenn also eine Struktur einen gewissen Winkel α weg von einem Objekt im Abstand d beobachtet wird, ist der Abstand für kleine Winkel $r = \alpha d$. Wenn nun der wahre Abstand $d_w = k \cdot d$ ist, dann ist auch $r_w = k \cdot r$. Es ist also der gleich relative systematische Fehler ausgedrückt durch die Konstante k .

Das Hubblegesetz ist so definiert, dass h neben r steht. Dann ist $r \propto h^{-1}$. Damit ist der Korrekturfaktor $k = h^{-1}$. Ein Abstand wird unabhängig vom aktuellen Wert der Hubble-Konstante dann als

$$d = 13h^{-1} \text{ kpc} \quad (21.2.4)$$

angegeben. Der Zahlenwert 13 ist hier ein Platzhalter.

21.3. Struktur

Wenn wir die Struktur des Universums beschreiben sollen, müssen wir berücksichtigen, dass wir das Universum von einem Punkt aus betrachten. Wir können leuchtende Materie sehen (Licht, Röntgenstrahlen, Radiowellen, γ -Strahlen, wir können Geschwindigkeiten messen und wir können Elementarteilchen betrachten. In unserem Universum gibt es eine hierarchische Strukturierung. Es gibt Sonnensysteme, lokale Blasen, Sternhaufen, Galaxien, Galaxienhaufen und Superhaufen. Auf ganz grosser Skala existieren Filamente und Leerstellen, Voids.

21.3.1. Objekte

Objekt	Lineardimension	Mittlere Entfernung der Teilsysteme	Anzahl der Teilsysteme	Masse des Objektes
Kugelsternhaufen	10 – 100 pc		$10^5 – 10^7$	$10^5 – 10^7 M_\odot$
offene Sternhaufen	2 – 20 pc		$10 – 10^3$	
Galaxien	1 – 100 kpc	3 – 5 pc	$10^2 – 10^3$ Kugelsternhaufen, 10^{11} Sterne	$10^6 – 10^{13} M_\odot$
Galaxienhaufen	2 – 10 Mpc	1 Mpc	$10 – 10^4$	$10^{12} – 10^{15} M_\odot$
Superhaufen	$(50 – 150) h^{-1}$ Mpc	$25 h^{-1}$ Mpc	5 – 50	$\sim 10^{16} M_\odot$
Voids	$(25 – 100) h^{-1}$ Mpc	$50 h^{-1}$ Mpc		
Zelluläre Strukturen	$(100 – 200) h^{-1}$ Mpc	$100 h^{-1}$ Mpc		

Tab. 21.1.: Objekte im Universum. $0.4 \leq h \leq 1$ Unsicherheitsfaktor. (nach K.-H. Spatschek, *Astrophysik : eine Einführung in Theorie und Grundlagen* [Spa03]).

Tabelle 21.1 zeigt die Einteilung von Objekten nach dem *Astrophysik : eine Einführung in Theorie und Grundlagen* von K.-H. Spatschek [Spa03]. Superhaufen

sind Ansammlungen von Galaxienhaufen, diese wiederum sind Ansammlungen von Galaxien, offenen Sternhaufen und Kugelsternhaufen. Die letzten drei Objekte bestehen aus Sternen mit ihren Planetensystemen. Es ist wahrscheinlich, dass einzelne Sonnen und/oder Planeten fernab von Galaxien durch die Weiten des Universums ziehen.

21.3.1.1. Galaxien

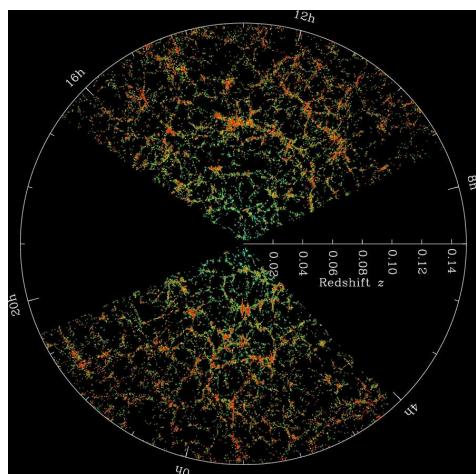


Abb. 21.6.: Verteilung von Galaxien (Credit: M. Blanton and the Sloan Digital Sky Survey., https://www.sdss3.org/science/gallery_sdss_pie2.php)

Abbildung 21.6 zeigt die Verteilung von Galaxien. Die fehlenden Teile beruhen darauf, dass wir nur senkrecht zur Ebene der Milchstrasse, also zur galaktischen Ebene und dort in einem gewissen Winkelbereich eine gute Sicht haben.

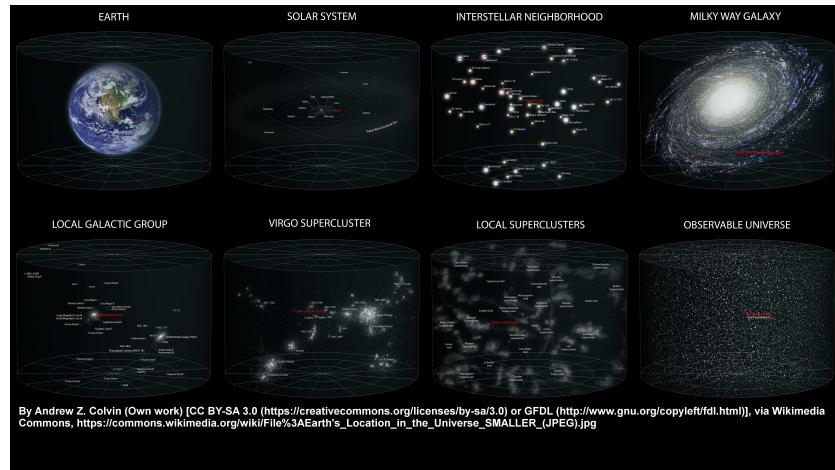


Abb. 21.7.: Position der Erde im Universum (By Andrew Z. Colvin (Own work) [CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>) or GFDL (<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>)], via Wikimedia Commons, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AEarth's_Location_in_the_Universe_SMALLER_\(JPEG\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AEarth's_Location_in_the_Universe_SMALLER_(JPEG).jpg))

Abbildung 21.7 zeigt die Position der Erde im Universum. Wegen der begrenzten Lichtgeschwindigkeit ist die Erde im Zentrum des sichtbaren Universums. Die Erde ist ein Teil des Sonnensystems. Dieses ist in einer lokalen Nachbarschaft eingebettet (Siehe Abbildungen 20.60 und 20.61). Diese Lokale Umgebung ist Teil der Milchstrasse, einer Galaxie. Diese wiederum ist das zweitgrösste Mitglied der lokalen galaktischen Gruppe. Deren grösstes Mitglied ist die ANDROMEDA-GALAXIE. Die lokale Gruppe ist Teil des VIRGO-SUPERCLUSTERS. Dieses ist Teil einer lokalen Gruppe von Superclustern. Deren Positionen bilden Filamente in der grossen Struktur des Universums.

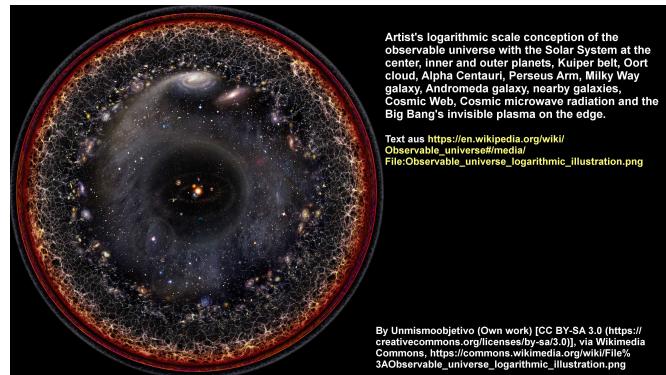


Abb. 21.8.: Logarithmische Darstellung des Universums (By Unmismoobjetivo (Own work) [CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)], via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AObservable_universe_logarithmic_illustration.png)

Die Information von Abbildung 21.7 wird in der Abbildung 21.8 logarithmisch dargestellt. Vom Zentrum aus werden nach aussen die Größenordnungen linear nach oben gezählt. Der Rand des sichtbaren Universums ist aussen, die Erde ist im Zentrum.

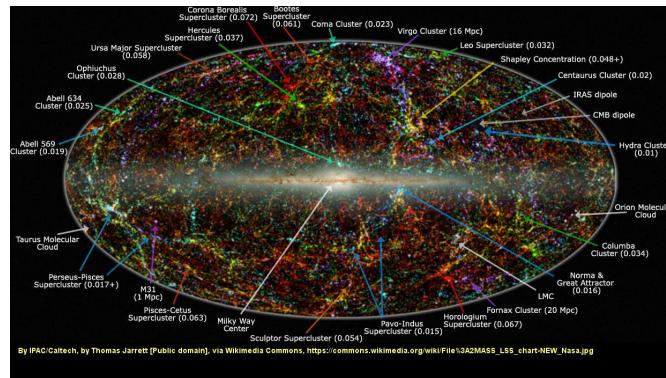


Abb. 21.9.: Struktur des Universums auf grossen Skalen (By IPAC/Caltech, by Thomas Jarrett [Public domain], via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2MASS_LSS_chart-NEW_Nasa.jpg)

Abbildung 21.9 ist eine Darstellung der Milchstrasse und der Filamentstruktur des Universums. Die Skalen der Milchstrasse und der Filamentstruktur stimmen nicht überein.

21.3.1.1.1. Struktur von Galaxien Nach der Arbeit „The Evolution of Galaxy Number Density at $z < 8$ and Its Implications“ von C. J. Conselice u. a. [Con+16] gibt es im sichtbaren Universum mindestens $2_{-0.7}^{+0.6} \cdot 10^{12}$ Galaxien mit $M > 1 \cdot 10^6 M_\odot$ ¹. Das sichtbare Universum ist dabei der Bereich, bei dem der Rotverschiebungspараметer $Z \lesssim 8$ ist. Alle diese Galaxien haben unterschiedliche Größen und Strukturen.

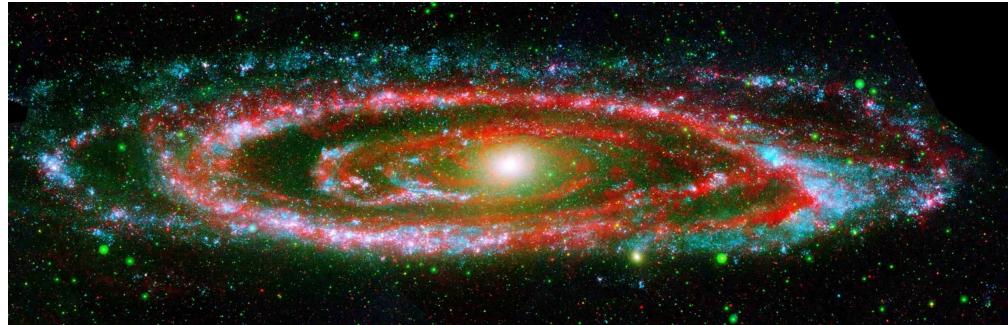


Abb. 21.10.: Bild der Andromeda-Galaxie (NASA/JPL-Caltech, <http://photojournal.jpl.nasa.gov/jpeg/PIA08787.jpg>)

Ein häufig vorkommender Typ von Galaxien sind **SPIRALGALAXIEN** wie die in Falschfarben in Abbildung 21.10 gezeigte **ANDROMEDAGALAXIE**.



Abb. 21.11.: Galaxienhaufen wie A426 (PERSEUS-HAUFEN) sind lokale Ansammlungen von Galaxien. (NASA, ESA, and L. Frattare (STScI), <http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/images/hs-2008-28-c-full.jpg>)

Wie schon erwähnt ist es wahrscheinlich in der Nähe einer Galaxie eine weitere zu finden. Diese Galaxienhaufen wie der in Abbildung 21.11 gezeigte PERSEUSHAUfen sind wichtige Strukturelemente des Universums.

¹Auf jeden Menschen kommen mindestens 200 Galaxien.



Abb. 21.12.: Die Zwerggalaxie M32, Typ E2, ist eine Begleiterin der Andromeda-Galaxie (Tod R. Lauer/NASA, <http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/images/hs-1992-09-a-full.jpg.jpg>).

Es gibt aber auch kleinere Strukturen als Galaxien wie die ANDROMEDA-GALAXIE. Diese ZWERGGALAXIEN wie die Galaxie M32 in Abbildung 21.12 sind häufig Begleiterinnen von grösseren Galaxien.

Obwohl jede Galaxie unterschiedlich ist, gibt es doch klar erkennbare Klassen von Galaxien und Galaxien, die in kein Schema passen.

21.3.1.1.2. Hubble's Galaxienklassifikation Edwin Hubble schlug die im Folgenden vorgestellte Klassifikation von Galaxien vor.

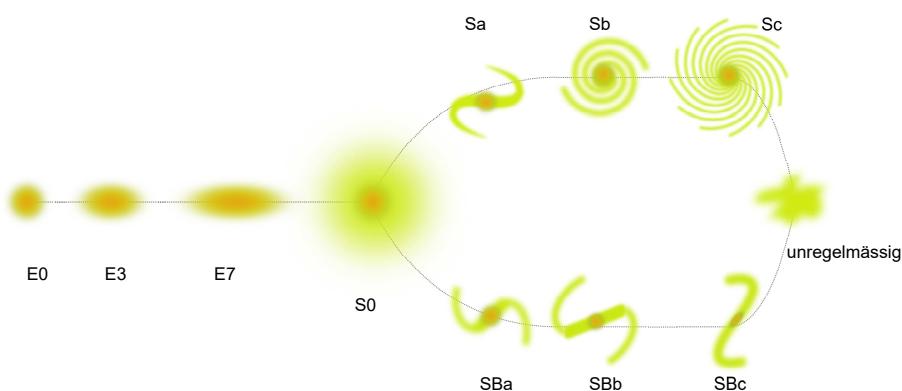


Abb. 21.13.: Klassifikation der Galaxien nach Hubble.

Die Klassifikation nach Hubble (siehe Abbildung 21.13) ist heute noch in Gebrauch. Die Klassen sind:

E0 Kugelförmig ohne Sternscheibe

E1 - E7 Elliptisch mit steigender Elliptizität

S0 Kugelförmig mit unstrukturierter kreisförmiger Scheibe

Sa - Sc Spiralgalaxien mit kugelförmige, Kern und zunehmender Anzahl Armen

SBa - SBc Balkengalaxien mit immer längerem Balken

irregulär Passt nicht in die obigen Kategorien

In Abbildung 21.12 wird die Zwerggalaxie M32 als Typ E2 charakterisiert, also als eine leicht elliptische kompakte Galaxie.

21.3.2. Gekrümmter Raum

Das sich ausdehnende Universum kann als 3D-Oberfläche in einem 4D-Raum modelliert werden. Das Buch *Flatland: A romance of many dimensions* von E. A. Abbott [Abb84; Abb12] beschreibt in seinem zweiten Teil sehr schön, wie man als Wesen einer 2-dimensionalen Welt feststellen kann, dass man in einer dreidimensionalen Welt eingebettet ist. Um den Prozess zu verstehen wird auch beschrieben, wie ein 2D-Wesen in einer 1D-Welt lebt und wie festgestellt werden kann, dass eine 3D-Kugel die 1D-Welt kreuzt. Die Gedanken in diesem Buch können verwendet werden um die Krümmung des Universums zu verstehen.

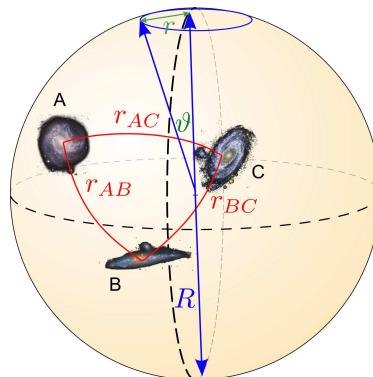


Abb. 21.14.: 2D-Modell eines gekrümmten Raumes eingebettet in 3D.

Wir beginnen mit einer 2D-Welt als Oberfläche einer 3D-Kugel (siehe Abbildung 21.14). Dies ist äquivalent zu einem Luftballon oder dem Schalltrichter einer Posaune. Wir definieren eine Metrik der Kugeloberfläche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \quad (21.3.1a)$$

$$x_1 = R \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \quad (21.3.1b)$$

$$x_2 = R \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \quad (21.3.1c)$$

$$x_3 = R \cdot \cos \vartheta \quad (21.3.1d)$$

Deren Linienelement auf der Oberfläche ist

$$d\ell^2 = R^2 \left[(d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta \cdot (d\varphi)^2 \right] \quad (21.3.2)$$

Dabei ist der Radius der 3D-Kugel R ein SKALENFAKTOR. Am Nordpol (da sind die Überlegungen am einfachsten) haben wir Kreisfläche mit $r = R \sin \vartheta$. Dabei sei $r \ll R$. Das Gebilde ist ein Kreis mit der Oberfläche $A = 2\pi r$ (Umfang, denken Sie an *Flatland: A romance of many dimensions* [Abb84; Abb12]).

Bei einer Änderung des SKALENFAKTORS R ist der neue Radius des Kreises

$$r = \frac{R}{R_0} r_0 \quad (21.3.3)$$

Aus

$$\cos \vartheta = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta} = \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (21.3.4)$$

und

$$r = R \sin \vartheta \implies dr = R \cos \vartheta d\vartheta \quad (21.3.5)$$

erhalten wir auf der 2D-Kugeloberfläche der 3D-Kugel für das Längenelement die Beziehungen

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= R^2 \left[(d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta \cdot (d\varphi)^2 \right] \\ &= R^2 \left[\frac{dr^2}{R^2 \cos^2 \vartheta} + \frac{r^2}{R^2} \cdot (d\varphi)^2 \right] \end{aligned} \quad (21.3.6a)$$

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= R^2 \left[\frac{dr^2}{R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]} + \frac{r^2}{R^2} \cdot (d\varphi)^2 \right] \\ &= \frac{dr^2}{\left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]} + r^2 d\varphi^2 \end{aligned} \quad (21.3.6b)$$

Es zeigt sich, dass hier sich $d\ell$ mit R ändert ohne dass dr sich ändern muss.

Wir führen jetzt die exakt analogen Überlegungen für die 3D-Oberfläche einer 4D-Kugel durch. Die Metrik der Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel ist

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2 \quad (21.3.7a)$$

$$x_1 = R \cdot \sin \psi \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \quad (21.3.7b)$$

$$x_2 = R \cdot \sin \psi \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \quad (21.3.7c)$$

$$x_3 = R \cdot \sin \psi \cos \vartheta \quad (21.3.7d)$$

$$x_4 = R \cdot \cos \psi \quad (21.3.7e)$$

Analog zur 2D-Oberfläche einer 3D-Kugel können wir die orthogonalen Längenelemente in der 3D-Oberfläche der vierdimensionalen Kugel aufschreiben.

$$d\ell_\psi = R \cdot d\psi \quad (21.3.8a)$$

$$d\ell_\vartheta = R \cdot \sin \psi d\vartheta \quad (21.3.8b)$$

$$d\ell_\varphi = R \cdot \sin \psi \sin \vartheta d\varphi \quad (21.3.8c)$$

Wieder ist der Radius der 4D-Kugel R ein **SKALENFAKTOR**. Das Volumen der 3D-Oberfläche ist (analog zur Behandlung der 2D-Oberfläche einer 3D-Kugel)

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi R^3 \sin^2 \psi \sin \vartheta d\psi d\vartheta d\varphi = 2\pi^2 R^3 \quad (21.3.9)$$

Das **LINIENELEMENT** (Abstand zweier Punkte) ist auf der Oberfläche der 4D-Kugel

$$d\ell^2 = d\ell_\psi^2 + d\ell_\vartheta^2 + d\ell_\varphi^2 = R^2 [d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)] \quad (21.3.10)$$

Wie bei der 2D-Oberfläche einer 3D-Kugel ist $r = R \sin \psi$ mit $r \ll R$ auf der 3D-Oberfläche der 4D-Kugel ein «Kreis», in Wirklichkeit eine 3D-Kugel, mit der Oberfläche $A = 4\pi r^2$.

Bei einer Änderung des **SKALENFAKTORS** R ändert sich r , der Radius der 3D-Kugel wie

$$r = \frac{R}{R_0} r_0 \quad (21.3.11)$$

Analog zum Fall der 2D-Oberfläche der 3D-Kugel erhalten wir aus

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (21.3.12)$$

und

$$r = R \sin \psi \implies dr = R \cos \psi d\psi \quad (21.3.13)$$

auf der 3D-Kugeloberfläche der 4D-Kugel für das Längenelement die Beziehungen

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= R^2 [d\psi^2 + \sin^2 \psi \cdot (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)] \\ &= R^2 \left[\frac{dr^2}{R^2 \cos^2 \psi} + \frac{r^2}{R^2} \cdot (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right] \end{aligned} \quad (21.3.14a)$$

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= R^2 \left[\frac{dr^2}{R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]} + \frac{r^2}{R^2} \cdot (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)^2 \right] \\ &= \frac{dr^2}{\left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \end{aligned} \quad (21.3.14b)$$

$$(21.3.14c)$$

Wieder ändert sich hier $d\ell$ mit R ohne dass dr sich ändern muss. Wir haben

also einen Mechanismus gefunden, wie mit einem Skalenfaktor Abstände verändert werden können, ohne dass sich die Form der Metrik ändern muss.

21.3.2.1. Grenzwerte

Aus der im vorherigen Abschnitt 21.3.2 haben wir eine Metrik. Wir hatten dort angenommen, dass der 3D-Raum auf der Oberfläche einer 4D-Kugel sei. Es könnte aber auch sein, dass wir uns auf einer 4D-Posaune befinden.

Lassen wir $R \rightarrow \infty$ gehen erhalten wir die euklidische Metrik eines flachen Raumes zurück.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} d\ell^2 = dr^2 + r^2 [d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2] \quad (21.3.15)$$

In unserer realen Welt ist aber dieser Grenzwert offensichtlich nicht realisiert. Das heisst, wir haben abhängig vom Vorzeichen von $\kappa = R^{-2}$ (komplexe Zahlen sind in der Physik üblich) unterschiedliche Situationen.

Wir definieren die Krümmung des Raumes als

$$\kappa = R^{-2} \quad (21.3.16)$$

und erhalten die Fälle:

Fall $\kappa > 0$: ein sphärisches oder elliptisches Universum

Fall $\kappa = 0$: ein flaches Universum

Fall $\kappa < 0$: ein hyperbolisches Universum

Aus den Beobachtungen von **Edwin Hubble** wissen wir, dass alle weiter entfernten Galaxien sich von uns weg bewegen. Das heisst mit zunehmender Zeit nimmt der Skalenfaktor R zu. Das heisst rückwärts betrachtet, dass es eine Zeit gegeben haben muss, bei der der Skalenfaktor sehr klein oder gar null gewesen sein muss.

$$\lim_{R \rightarrow 0} d\ell^2 = r^2 [d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2] \quad (21.3.17)$$

Der Abstand wird unabhängig von dr und hängt über r nur noch von $d\vartheta$ und $d\varphi$ ab. Es kann geschlossen werden, dass beim Urknall kein Punkt ausgezeichnet ist. Der gekrümmte 3D-Raum eingebettet in eine 4D-Welt hat ein Volumen von $2\pi^2 R^3$, aber er hat keine Begrenzung.

21.3.3. Quasare

Unter den weit entfernten Objekten am Rande des beobachtbaren Universums gibt es **QUASARE** und **AKTIVE GALAXIEN**.

Mit den ersten Radioteleskopen wurden extrem starke Radioquellen im All gefunden. Diese wurden **Quasi-Stellar Radio Source (QUASAR)** genannt. Es gelang dann optische Objekte an der gleichen Stelle zu finden. Das optische Objekt hatte eine sehr schwache relative Magnitude $m = 16$) und gleichzeitig ein stark ausgeschmiertes optisches Spektrum, zuerst ohne erkennbare Linien.

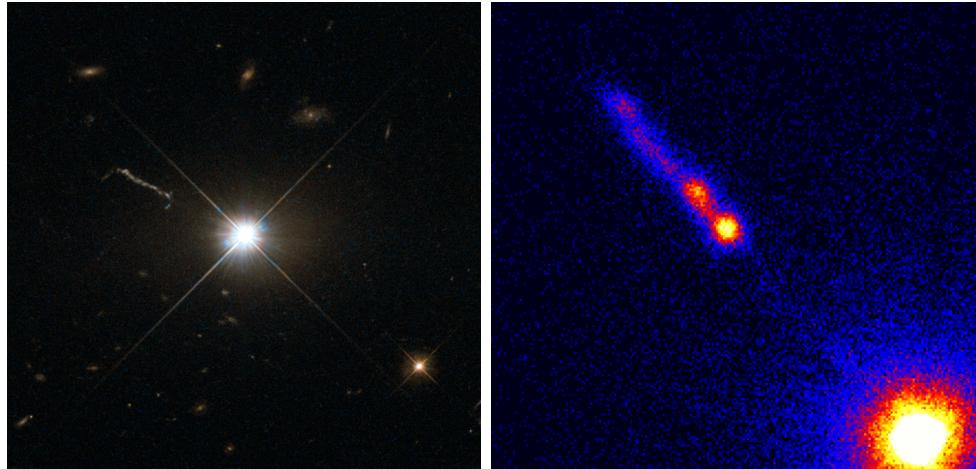


Abb. 21.15.: Links: Bild im sichtbaren Spektralbereich des Quasars 3C273, aufgenommen durch das Hubble-Teleskop (Credit: ESA/Hubble & NASA). Rechts: Röntgenaufnahme des Quasars 3C273 durch Chandra (Bildfeld 24''), (Credit: NASA/CXC/SAO/H.Marshall et al.)

Abbildung 21.15 zeigt eine heutige Aufnahme eines der frühen bekannten Quasars, 3C273. Bei ihm stellte es sich heraus, dass die verschwommenen Linien als Wasserstofflinien angesehen werden konnten, wenn der Rotverschiebungspараметer $z = 0.158$ (nach [CO07]) gesetzt wurde. Daraus folgt, dass $v_{3C273} = 0.146c$ ist. Der Jet aus dem Quasar in Abbildung 21.15 reicht etwa $39h^{-1}$ kpc weit hinaus.

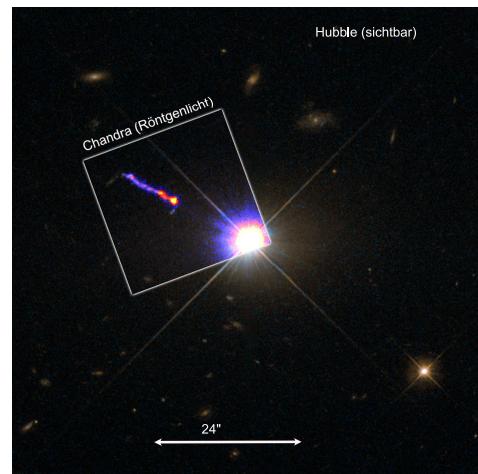


Abb. 21.16.: Bild im sichtbaren Spektralbereich des Quasars 3C273, aufgenommen durch das Hubble-Teleskop (Credit: ESA/Hubble & NASA). überlagert mit einer Röntgenaufnahme durch Chandra , (Credit: NASA/CXC/SAO/H.Marshall et al.)

Abbildung 21.16 zeigt das Röntgenbild überlagert mit dem sichtbaren Bild. Die

intensive Röntgenstrahlung deutet auf ein sehr aktives Objekt hin. Belinda Wilkens [WE87] untersuchten die Emission weicher Röntgenstrahlen und konnten eine universelle Charakteristik finden.

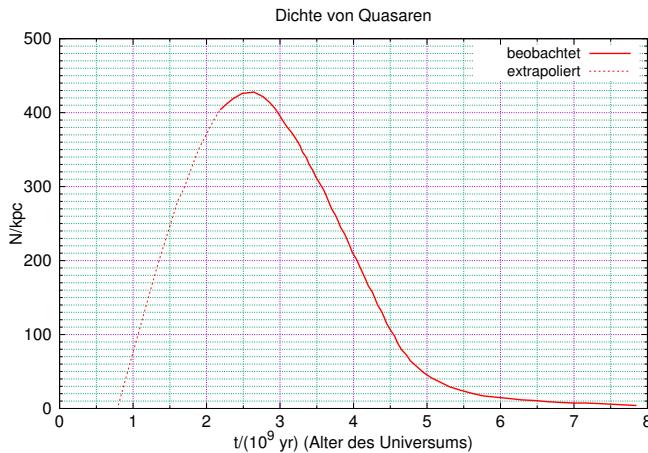


Abb. 21.17.: Dichte von Quasaren als Funktion des Alters des Universums (nach Demtröder Band 4, Abb 12.25 [Dem10]).

Abbildung 21.17 gibt die Anzahl der Quasare als Funktion des Alters an. Wenn wir annehmen, dass das Universum $13 \cdot 10^9$ a alt ist, gibt $(13 \cdot 10^9$ a – Alter) die Distanz an.

Heute kennt man über 46 000 Quasare [CO07, Kap. 28.1, p. 1099]. Quasare werden heute häufig auch Quasi-Stellar Object (QSO) genannt.

21.3.4. Aktive Galaxien

Ein Teil der Quasare sind Galaxien mit einem aktiven Kern, diese werden im Englischen Active Galactic Nucleus (AGN) genannt. Wie alle Galaxien haben auch AKTIVE GALAXIEN ein supermassives schwarzes Loch im Zentrum. Anders als zum Beispiel in der Milchstrasse saugt das schwarze Loch einer aktiven Galaxie viel Masse pro Zeiteinheit an. Dies führt zu starken Beschleunigungen und zur Emission von Radiowellen, sichtbarem Licht und Röntgenstrahlung. Unter [NG16] finden Sie eine englischsprachige Beschreibung des Phänomens. [NG16] sagt, dass der Fall von Materie in ein schwarzes Loch zu einer AKKRETIONSSCHEIBE führt. Gleichzeitig gibt es senkrecht zu dieser Ebene auf beiden Seiten einen Jet mit hoher Geschwindigkeit ausgestossenen Materials (siehe Abb 21.18).

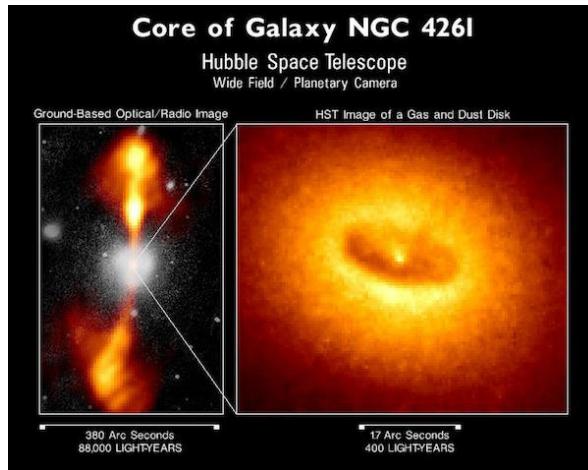


Abb. 21.18.: Links ein optisches Bild der Galaxie NGC 4261 überlagert mit dem Radiowellenbild (weiss). Sichtbar im optischen Bild ist der Jet. Rechts das Bild der Galaxie mit dem Hubble-Teleskop (Credit: NRAO, Cal Tech, Walter Jaffe/Leiden Observatory, Holland Ford/JHU/STScI, and NASA),

Abbildung 21.19 zeigt die Galaxie NGC 4151 im sichtbaren und im Röntgenlicht. Das Röntgenlicht zeigt die Lage des Kerns dieser aktiven Galaxie.

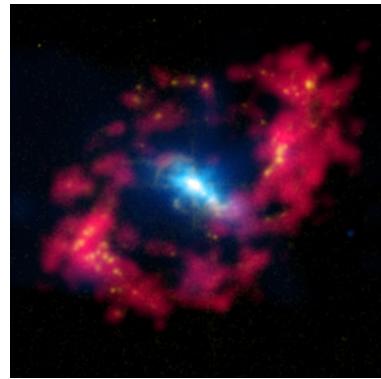


Abb. 21.19.: Überlagerung eines Bildes im sichtbaren Spektrum der Spiralgalaxie NGC 4151 mit einem Röntgenbild von CHANDRA (blau). (Credit: X-ray: NASA/CXC/CfA/J.Wang et al.; Optical: Isaac Newton Group of Telescopes, La Palma/Jacobus Kapteyn Telescope, Radio: NSF/NRAO/VLA)

Abbildung 21.20 zeigt eine Übersichtskarte der bekannten aktiven Galaxien, gemessen mit dem FERMI GAMMA-RAY SPACE TELESCOPE. Der Helle Bereich ist die galaktische Ebene. Oben leicht rechts von der Mitte findet sich der erste entdeckte Quasar 3C273. Die Kreise markieren die aktivsten Galaxien.

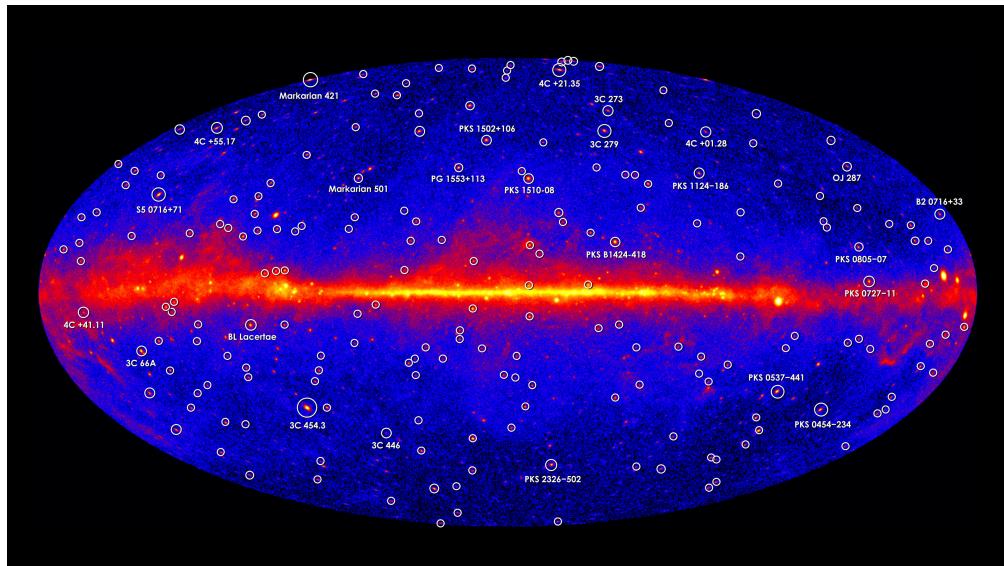


Abb. 21.20.: Übersichtskarte der bekannten aktiven Galaxien gemessen mit dem FERMI GAMMA-RAY SPACE TELESCOPE (Credit: NASA/DOE/Fermi LAT Collaboration).

21.3.5. Galaxienhaufen

Auf grosser Skala im Universum treten Galaxien nie alleine auf. So wie die Andromeda-Galaxie und unsere Milchstrasse Teil der LOKALEN GRUPPE sind, sind andere Galaxien Teil eines Galaxienhaufens (siehe Abb. 21.21).

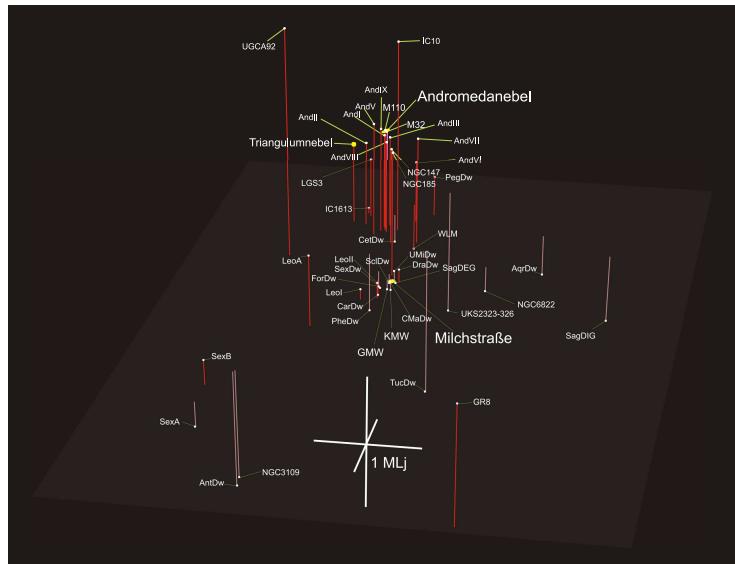


Abb. 21.21.: Räumliche Darstellung der lokalen Gruppe mit den beiden dominierenden Galaxien der Milchstrasse und der Andromeda-Galaxie (Credit: CWitte, CC BY-SA 3.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons, Lokale_gruppe.svg).

Die beiden grössten Galaxien der LOKALEN GRUPPE sind die ANDROMEDA-GALAXIE und die MILCHSTRASSE. Die lokale Gruppe beinhaltet alle Objekte im Umkreis von $(5 \cdot 10^6$ bis $8 \cdot 10^6)$ ly. Sie hat die Form eines Ellipsoids. 95 % der sichtbaren Masse befindet sich in den beiden grössten Galaxien, der Milchstrasse und der Andromeda-Galaxie. Es wird angenommen, dass die lokale Gruppe gravitativ gebunden ist. Die Andromeda-Galaxie bewegt sich auf die Milchstrasse zu, oder umgekehrt. Dies ist ein Zeichen für die Wirkung der Gravitation. Auf dem Weg könnten kleiner Galaxien oder Sternhaufen in die beiden grossen Galaxien integriert werden. L. L. Watkins u. a. [Wat+19] beschreibt in dem Artikel die Abschätzung der Masse der Milchstrasse unter Berücksichtigung der dunklen Materie. Dazu wurde die Bewegung der milchstrassennahen Begleitsternhaufen ausgewertet. Die Keplergesetze erlauben dann eine Abschätzung der Masse. Das Resultat ist $1.5 \cdot 10^9 M_{\odot}$. Es wird vermutet, dass die Andromeda-Galaxie etwa die gleiche Masse hat. Weiter kann die lokale Gruppe in mehrere Untergruppen aufgeteilt werden. Diese beinhalten jeweils Galaxien und Sternhaufen, die nahe beieinander sind.

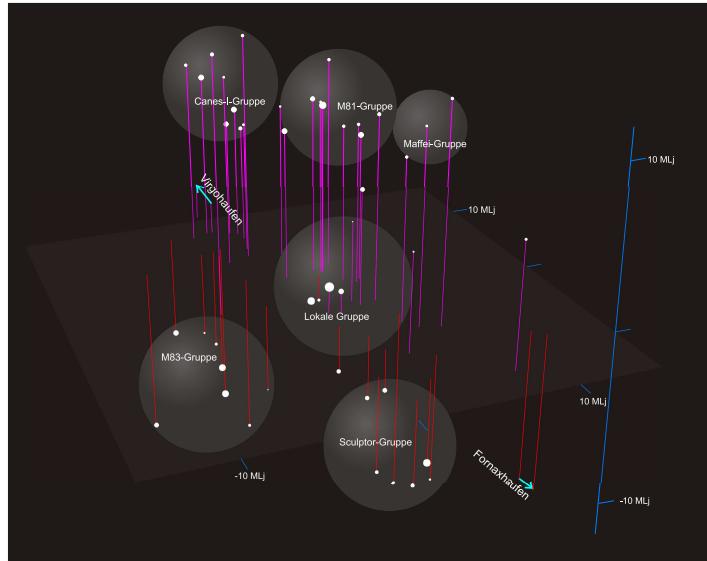


Abb. 21.22.: Galaxiengruppen in der Nachbarschaft der lokalen Gruppe (Credit: CWitte, CC BY-SA 3.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons, Lokale_Gruppe_3D_Nachbarschaft.svg).

In der Nachbarschaft der lokalen Gruppe gibt es weitere Galaxienhaufen (siehe Abb. 21.22). Galaxienhaufen verändern sich auch auf der Zeitskala des Universums nur langsam (siehe auch [NG21]). Sie sind ein Abbild der Fluktuationen im frühen Universum. Während Galaxien durch Supernovaexplosionen Gas verlieren scheinen Cluster dieses zu binden und nicht entweichen zu lassen. Durch die Analyse der Gaszusammensetzung kann die Geschichte der Entstehung der Elemente rekonstruiert werden [NG21]. Die die Galaxienhaufen bindende Gravitationskraft kommt zum überwiegenden Teil von nicht sichtbarer Materie, also von im Sichtbaren nicht detektierbaren, im Röntgenbereich aber messbaren Gaswolken (mehr Masse als alle Sterne zusammen) zwischen den Galaxien und von noch mehr Masse in Form von DUNKLER MATERIE.

Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Kap. 27.3.] haben GALAXIENGRUPPEN die folgenden Eigenschaften:

- Sie haben in der Regel 50 oder weniger Mitglieder (Galaxien).
- Ihr Durchmesser ist $\approx 1.4 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$.
- Die Geschwindigkeit der Mitglieder untereinander variiert um 150 km s^{-1} .
- Die Masse des gesamten Haufens ist um $2 \cdot 10^{13} \text{ h}^{-1} M_{\odot}$ abgeleitet aus dem VIRIALTHEOREM (siehe Abschnitt 3.2).
- Das Verhältnis von Masse zu Luminosität ist $\approx 260 \text{ h} \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}$.

GALAXIENHAUFEN andererseits haben nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Kap. 27.3.] diese Eigenschaften:

- Sie haben in der Regel 50 bis > 1000 Mitglieder (Galaxien).
- Ihr Durchmesser ist $\approx 6 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$.
- Die Geschwindigkeit der Mitglieder untereinander variiert um (800 bis 1000) km s^{-1} .
- Die Masse des gesamten Haufens ist um $1 \cdot 10^{15} \text{ h}^{-1} \text{ M}_\odot$ abgeleitet aus dem VIRIALTHEOREM (siehe Abschnitt 3.2).
- Das Verhältnis von Masse zu Luminosität ist $\approx 400 \text{ h} \frac{M_\odot}{L_\odot}$.

Weiter werden auch SUPERHAUFEN beobachtet, also Haufen von GALAXIENHAUFEN.

21.3.6. Dunkle Materie

Eine wichtige Frage ist die nach der Masse des Universums. Aus der Masse und dem Energiegehalt kann berechnet werden, ob die Grösse des Universums immer zunimmt, ob es statisch ist oder ob es wieder kollabieren kann. Neta Bahcall beschäftigte sich mit der Masse des Universums. Anhand von Daten des HUBBLE-SPACE-TELESKOPS und weiteren Daten berechnete sie einen Schätzwert für die Masse des Universums[Bah16; BB03].

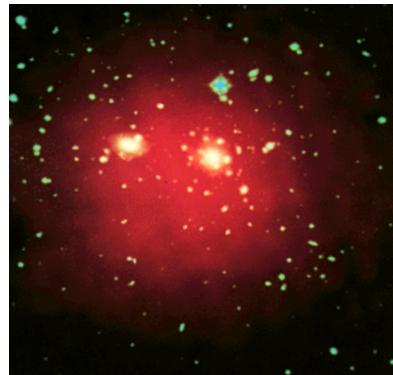


Abb. 21.23.: Coma-Galaxienhaufen (COMA-CLUSTER) mit blau dem sichtbaren Licht und rot dem Röntgenlicht (Credit: Einstein satellite X-ray image, Palomar Sky Survey optical image).

Der Astronom Fritz Zwicky untersuchte im Jahre 1933 den COMA-GALAXIENHAUFEN. Abbildung 21.23 zeigt diesen im Röntgenlicht und im sichtbaren Licht. Fritz Zwicky schloss aus der Bewegung unter Zuhilfenahme des Virialtheorems, dass sehr viel mehr Masse vorhanden sein müsse als durch die Beobachtung angedeutet. Er entdeckte die DUNKLE MATERIE. Dunkle Materie sind keine der in diesem Skript diskutierten Elementarteilchen. Die genau Natur ist nicht klar. Aussichtsreiche Kandidaten sind Weakly Interacting Massive Particle (WIMP)s, deutsch: schwach wechselwirkende schwere Teilchen.

21.3.7. Dunkle Energie

Die aus der Bewegung von Galaxien oder Galaxienhaufen abgeleitete dunkle Materie (Siehe Abschnitte 20.4.6.1 und 21.3.6) bewirkt grosse Gravitationskräfte, die die aus Modellen berechnete Ausdehnung des Universums sehr viel kleiner ausfallen lässt als beobachtet. Die DUNKLE ENERGIE muss postuliert werden, damit der Gravitationsdruck des Universums kompensiert werden kann und es eine Gesamtenergie haben kann, die mit dem gemessenen Zeitverlauf übereinstimmt.

J. Stachel [Sta14] hat eine lesbare Zusammenfassung des Themas veröffentlicht. Abbildungen 21.24 und 21.25 zeigen einen Vergleich gemessener Daten aus A. Conley u. a. [Con+10] mit vier Modellen

de Sitter-Modell mit 100 % dunkler Energie. Willem de Sitter hat ein maximal symmetrisches Universum mit konstanter positiver Krümmung vorgeschlagen.

Einstein-de Sitter-Modell Das Einstein-de Sitter-Modell von Albert Einstein und Willem de Sitter hat eine verschwindende Krümmung. Die kosmologische Konstante ist auch null.

Milne-Modell nach Edward Milne. Dieses Modell beruht auf der speziellen Relativitätstheorie und macht keine Annahmen. Es dient als Referenz.

Λ CDM-Modell Diese Modell, auch das Standard-Modell der Kosmologie genannt, beschreibt das Universum mit sechs Parametern.

- H_0 der Hubble-Konstante
- Ω_b dem Anteil der baryonischen Materie an der Gesamtenergiedichte inklusive dunkler Materie und dunkler Energie)
- Ω_m dem Anteil der Materie (baryonische und dunkle Materie) an der Gesamtenergiedichte inklusive dunkler Materie und dunkler Energie)
- τ der optischen Dichte bis zum Zeitpunkt der Reionisierung
- A_S der Amplitude der Krümmungsfluktuation der skalaren Komponente der ursprünglichen Schwankungen
- n_s der spektrale Index der skalaren Komponente der ursprünglichen Schwankungen

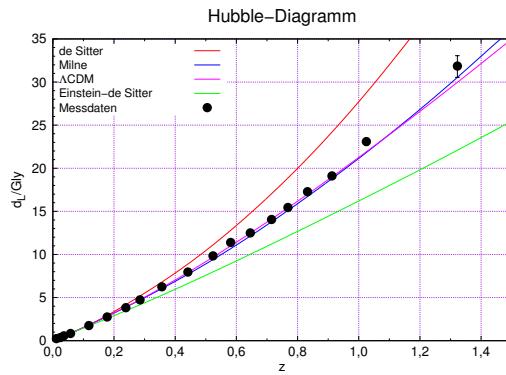


Abb. 21.24.: Dunkle Energie und die Ausdehnung des Universums (Daten aus [Sta14] und [Con+10]).

Die Abbildung 21.25 zeigt die Messdaten als Abweichung vom MILNE-MODELL der Entwicklung des Kosmos.

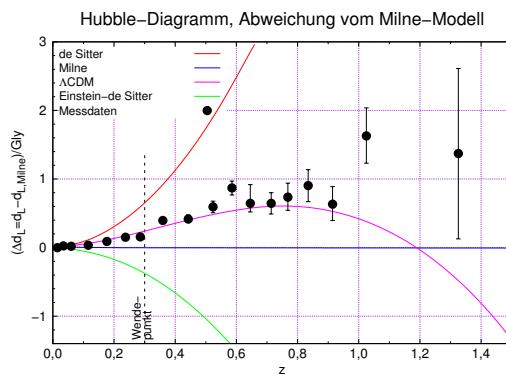


Abb. 21.25.: Dunkle Energie und die Ausdehnung des Universums, Abweichung vom Milne-Modell (Daten aus [Sta14] und [Con+10]).

21.4. Kosmologie

Das Teilgebiet der Kosmologie beschäftigt sich mit der Entwicklung des Universums von Anbeginn. Sie versucht die Gesetze dieser Entwicklung zu ergründen und letztlich auch Voraussagen zur Zukunft zu machen. Die Folien *A Quick Review of Cosmology: The Geometry of Space, Dark Matter, and the Formation of Structure* von H.-W. Rix [Rix22] geben eine gute und kompakte erste Übersicht.

21.4.1. Big-Bang-Theorie

Die Big-Bang-Theorie (siehe z.B. „Relativistic Cosmology with an Introduction to Inflation“ von M. Z. Mughal; I. Ahmad und J. L. G. Guirao [MAG21]) schliesst aus den Beobachtungen von **Edwin Hubble**, dass das Universum zu einem Zeitpunkt vor $(13 \cdot 10^9 - 14 \cdot 10^9)$ a, etwas genauer etwa $13.8 \cdot 10^9$ a begonnen hat. Da das Universum im Prinzip in einem Punkt eingeschlossen war, muss es eine hohe Nullpunktsenergie gehabt haben. Kurz nach der Entstehung war die Temperatur extrem heiß

Anfangszeit bis etwa 4 min wurden die Elemente ${}_1^1\text{H}$, ${}_1^2\text{H}$, ${}_2^4\text{He}$ und etwas Li gebildet.

Schwerere Elemente bis Fe und Ni werden durch Fusion in Sternen gebildet.

Noch schwerere Elemente benötigen SUPERNOVAE zur Entstehung.

Entkopplung Etwa nach $5 \cdot 10^5$ a entkoppeln Licht und Materie. Bis dahin existierten nur gekoppelte Strahlungs-Materie-Quantenzustände. Danach wechseltwirkt Licht nur noch schwach mit Materie (Streuung, Absorption). Es bilden sich neutrale Moleküle.

Galaxien Nach etwa $(1 \cdot 10^7 - 1 \cdot 10^8)$ a bilden sich die ersten Galaxien.

Edwin Hubble stellte das Gesetz

$$v = H \cdot r \quad \text{mit} \quad H = 73(7) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (21.4.1)$$

auf. Das heisst, dass die frühen Galaxien in sehr grosser Distanz beobachtet werden können. Das *James Webb Space Telescope* [Nas22] detektiert deshalb Infrarotstrahlung. Damit können diese frühen Galaxien beobachtet werden.

Die Nobelpreisträger Arno Penzias und Robert Wilson („A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.“ [PW65]) fanden bei einer Mikrowellenantenne mit gekühltem Empfänger eine Rauschtemperatur von 3 K. Diese war nicht durch die Physik des Gerätes zu erklären. In einem gleichzeitig erschienenen Artikel „Cosmic Black-Body Radiation.“ erklären R. H. Dicke u. a. [Dic+65] das Phänomen als die HINTERGRUNDSSTRAHLUNG, die vom Urknall oder Big-Bang übrig geblieben ist.

21.4.2. Anfangsgrösse des Universums

Im folgenden soll die Antwort auf die Frage «Wie gross war das Universum an Anfang?» skizziert werden. Der Artikel „Topics in Cosmology—Clearly Explained by Means of Simple Examples“ von J. de Haro und E. Elizalde [HE22] gibt eine Übersicht über die verschiedenen möglichen Ideen.

Die Energiedichte der HINTERGRUNDSTRAHLUNG (siehe auch E. Gawiser und J. Silk in „The cosmic microwave background radiation“ [GS00] und A. Lasenby in „The Cosmic Microwave Background and Fundamental Physics“ [Las09]) kann wie folgt berechnet werden: Die gesamte Energiedichte (Integral über das Planck-Spektrum, nach Max Planck) ist

$$w(T) = \frac{4\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} T^4 \quad (21.4.2)$$

In Zahlen ist die gesamte Energiedichte bei 2.7 K

$$w(2.7 \text{ K}) = 4 \cdot 10^{-14} \text{ Wsm}^{-3} \quad (21.4.3)$$

Aus der Energiedichte kann nach **Albert Einstein** eine Massendichte berechnet werden:

$$\rho = \frac{w(T)}{c^2} = 4.5 \cdot 10^{-31} \text{ kgm}^{-3} < \rho(R_0) \approx 4 \cdot 10^{-28} \text{ kgm}^{-3} \quad (21.4.4)$$

Sei $\rho(R_0)$ die heutige Massendichte des Universums bei einer Krümmung $R_0 \approx 1 \cdot 10^{26}$ m. Dann gilt

$$\rho(R) \propto R^{-3} w(R) \propto R^{-4} \quad (21.4.5a)$$

für die Energiedichte und die Massendichte. Grund für diesen Unterschied ist die **DOPPLERVERSCHIEBUNG**.

Aus den aktuellen Werten $\rho(R_s) = \rho(R_0) \left(\frac{R_0}{R_s}\right)^3 = w(R_s)c^{-2} = w(R_0) \left(\frac{R_0}{R_s}\right)^4 c^{-2}$ können wir zurück rechnen und erhalten wir für den Wert des Krümmungsradius' beim Übergang von der Strahlungs- zur Massendominanz

$$R_s = 1.125 \cdot 10^7 \text{ ly} \quad (21.4.6)$$

Bei kleinerem Durchmesser ist das Weltall strahlungsdominiert, heute bei einem sehr viel grösseren Durchmesser ist es massedominiert.

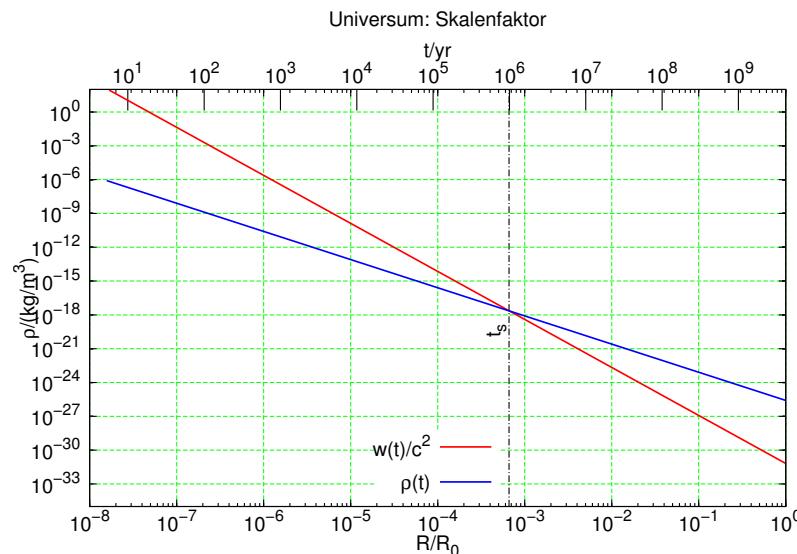


Abb. 21.26.: Massendichte und Skalenfaktor (nach Demtröder [Dem10, Abb 12.5]).

Abbildung 21.26 zeigt die Massendichte als Funktion des Skalenfaktors. Vor der Zeit t_s dominiert die Energiedichte, danach die Massendichte.

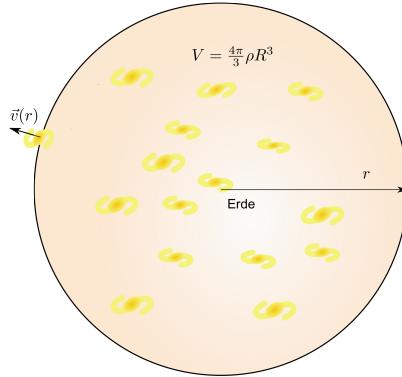


Abb. 21.27.: Volumen und Fluchtgeschwindigkeit von Galaxien (nach [Dem10, Abb. 12.6]).

Abbildung 21.27 zeigt eine Skizze des Universums und der mit dem Abstand zunehmenden Fluchtgeschwindigkeit der Galaxien. Hier soll der Hubble-Parameter und kritische Dichte miteinander verknüpft werden. Wir betrachten eine Kugelschale von Galaxien im Abstand r . Die kinetische Energie kann aus dem Hubble-Gesetz berechnet werden.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mH_0^2r^2 \quad (21.4.7)$$

Die kinetische Energie soll über das Gauss'sche Gesetz mit der potentiellen Energie der eingeschlossenen Masse verknüpft werden:

$$E_{pot} = -G\frac{m \cdot M_{innerhalb}(r)}{r} = -G\frac{4}{3}\pi m\rho r^2 \quad (21.4.8)$$

Wir erhalten die Gesamtenergie

$$E = mr^2 \left[\frac{1}{2}H_0^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho \right] \quad (21.4.9)$$

Wenn die eckige Klammer das Vorzeichen wechselt, ist die kritische Massendichte ($E = 0$) erreicht. Der Inhalt der eckigen Klammer muss null sein. Die kritische Massendichte ist dann

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi} \frac{H_0^2}{G} \quad (21.4.10)$$

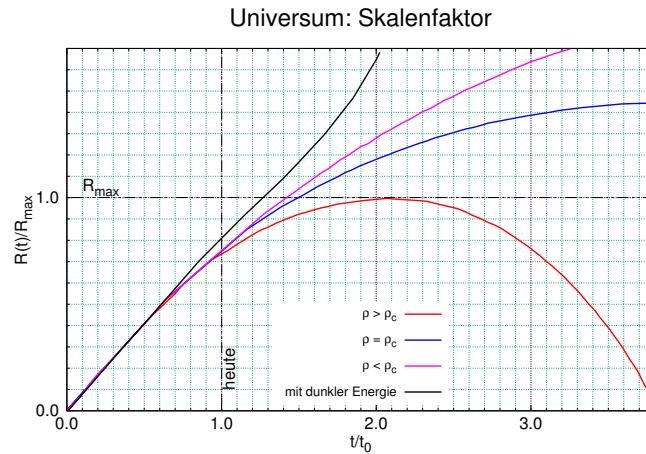


Abb. 21.28.: Zeitabhängigkeit des Skalenparameters (nach Demtröder [Dem10, Abb 12.7]).

Abbildung 21.28 zeigt die Zeitabhängigkeit des Skalenparameters Massendichte ρ im Vergleich zur kritischen Massendichte ρ_c .

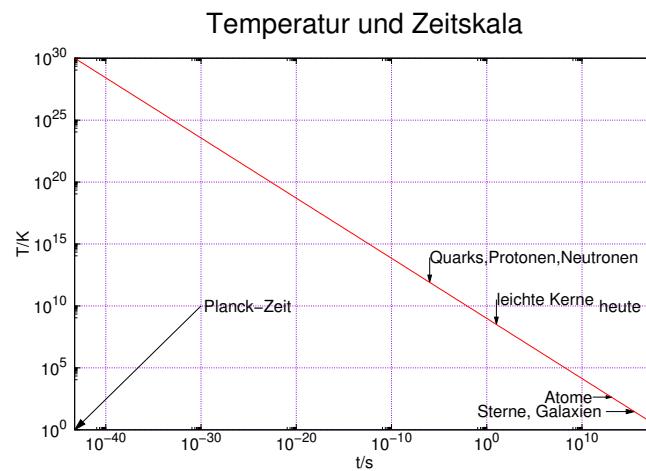


Abb. 21.29.: Zeitskalen in der Astronomie (nach Spatschek, Astrophysik [Spa03] und Ellwanger, Vom Universum zu den Elementarteilchen [Ell15])

Die Physik des Universums ändert sich logarithmisch mit der Zeit vom Urknall. Abbildung 21.29 zeigt die relevanten Zeitskalen. Sie impliziert auch, dass auf dieser Skala der Nullpunkt nicht erreichbar ist. Die Definition der PLANCK-ZEIT ist in

21.4.3 und Gleichung (21.4.13) gegeben.

Zeitabschnitt	Zeit / s	Temperatur / K	Zustand
Planck-Ära	$t = 0$?	Urknall Alle 4 Wechselwirkungen vereinigt
GUT-Ära n	$t = 10^{-43} \dots 10^{-35}$	$T = 10^{32}$	Gravitation entkoppelt (Grand Unification)
Inflationäre Phase	$t = 10^{-35} \dots 10^{-32}$	$T = 10^{28}$	Starke und elektroschwache Wechselwirkung separieren
Quark-Ära	$t = 10^{-32} \dots 10^{-12}$	$T = 10^{25}$	Quark-Gluon-Plasma aus Quarks, Leptonen, Photonen
Ende Quark-Ära	$t = 10^{-12}$		
Hadronen-Ära	$t = 10^{-7} \dots 10^{-4}$		p, n, \bar{p}, \bar{n} gebildet, ν entkoppelt
Leptonen-Ära	$t = 10^{-4} \dots 1$	$T = 10^{12}$	e^- und e^+ zerstrahlen, μ zerfallen
Ende Leptonen-Ära	$t = 1$	$T = 10^{10}$	
Nukleonsynthese	$t = 10$	$T = 3 \cdot 10^9$	He-, D-, Li-Kerne gebildet
Ende Nukleosynthese	$t = 180$	$T = 10^9$	

Tab. 21.2.: Zeittafel des Universums (nach Demtröder [Dem10, Abb 12.9]).

Tabelle 21.2 zeigt die Phasen der Entstehung der Elementarteilchen zu Beginn des Universums. Einen Überblick über die Synthese von Elementarteilchen gibt „Cosmological particle production: a review“ von L. H. Ford [For21].

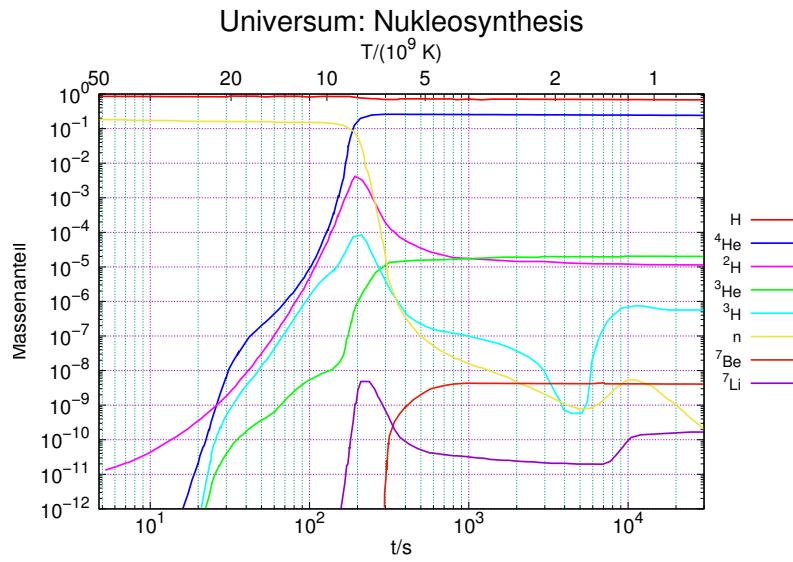


Abb. 21.30.: Häufigkeit der leichten Elemente (Daten von R. V. Wagoner; W. A. Fowler und F. Hoyle [WFH67, Fig. 3]).

Abbildung 21.30 zeigt die Zusammensetzung von Elementen in der Frühzeit des Universums. Die Daten beruhen auf der Arbeit „On the Synthesis of Elements at Very High Temperatures“ von R. V. Wagoner; W. A. Fowler und F. Hoyle [WFH67, Fig. 3].

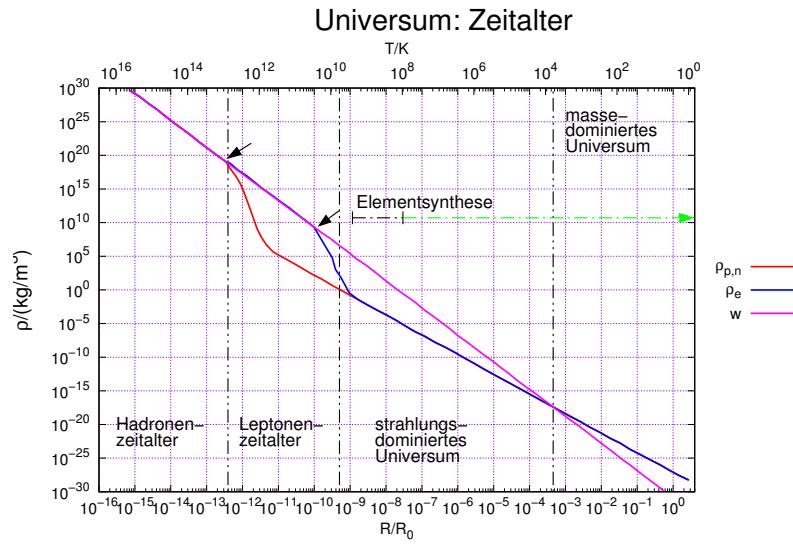


Abb. 21.31.: Epochen im Universum (nach [Dem10, Abb. 12.10], Daten von R. V. Wagoner; W. A. Fowler und F. Hoyle [WFH67, Fig. 1])).

Abbildung 21.31 ist eine Darstellung der verschiedenen Epochen des Universums

nach „On the Synthesis of Elements at Very High Temperatures“ von R. V. Wagoner; W. A. Fowler und F. Hoyle [WFH67, Fig. 1]. Die Daten korrespondieren mit der Tabelle 21.2.

21.4.3. Das frühe Universum

Das frühe Universum wird durch das STANDARDMODELL und die Weiterentwicklung INFLATION beschrieben.

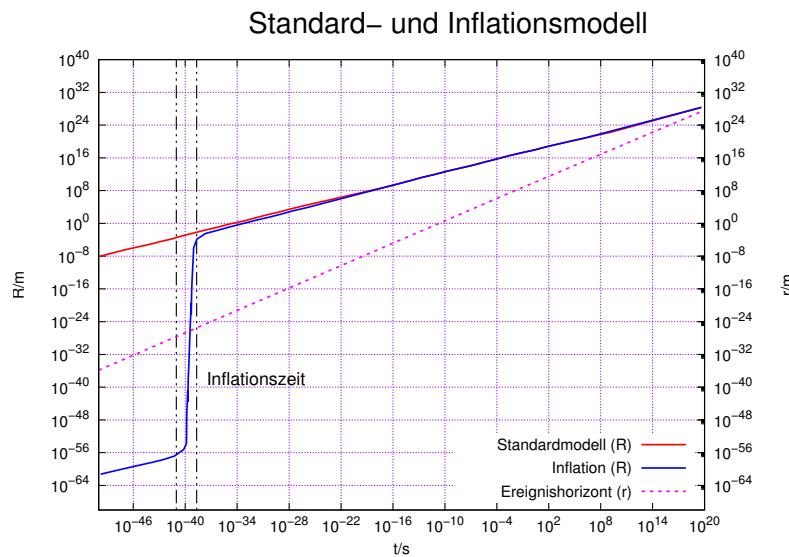


Abb. 21.32.: Standardmodell und Inflationsmodell (nach [Dem10, Abb. 12.17]).

Das Standardmodell der Kosmologie hat Schwierigkeiten die Zusammensetzung des frühen Universums, die beobachteten Geschwindigkeiten und die Expansionsrate zu erklären. Deshalb wurde ein neues Modell mit einer Phase starker Expansion entwickelt. Ein neuerer Überblick darüber findet sich in von J. A. Vazquez; L. E. Padilla und T. Matos [VPM20].

Wichtig sind die Elementarteilchen, wie sie im Abschnitt beschrieben werden. Für das Standardmodell gibt es nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] drei Kategorien:

Leptonen LEPTONEN sind die geladenen Teilchen e^\pm , μ^\pm und τ^\pm , die neutralen massearmen NEUTRINOS ν_e , ν_μ und ν_τ sowie die dazugehörigen Antineutrinos $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$ und $\bar{\nu}_\tau$. Alle Leptonen sind FERMIONEN (Name nach Enrico Fermi).

Quarks Es gibt sechs Sorten von QUARKS u , d , s , c , b und t sowie die Antiteilchen. Jede Quarkart hat drei mögliche FARBLADUNGEN. Quarks sind FERMIONEN. Quarks bilden die Familie der HADRONEN. BARYONEN wie das Proton werden aus drei Quarks gebildet; sie sind FERMIONEN. Mesonen werden aus zwei Quarks gebildet, sie sind BOSONEN.

Austauschteilchen AUSTAUSCHTEILCHEN vermitteln Kraftwechselwirkungen. Es gibt das PHOTON für die elektromagnetische Wechselwirkung, acht Arten von GLUONEN für die starke Wechselwirkung, drei VEKTOREICHBOSONEN (W^\pm und Z^0) für die schwache Wechselwirkung sowie das skalare HIGGS-BOSONBoson, das die Massen erzeugt. Alle AUSTAUSCHTEILCHEN sind BOSONEN.

Elementar-Teilchen	Anzahl Arten	Anzahl Antiteilchen n_{anti}	Anzahl Spinzustände n_{spin}	Freiheitsgrade g	Fermionen-Vorfaktor f	Beitrag zu g_*
Photon	1	1	2	2	1	2.00
Geladene Leptonen	3	2	2	12	$\frac{7}{8}$	10.50
Neutrinos	3	2	1	6	$\frac{7}{8}$	5.25
Quarks	18	2	2	72	$\frac{7}{8}$	63.00
Gluonen	8	1	2	16	1	16.00
Eichbosonen	3	1	3	9	1	9.00
skalares Higgs-Boson	1	1	1	1	1	1.00

Tab. 21.3.: Elementarteilchen im Standardmodell (nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Tab. 30.1]).

Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Kap. 30.1] wird g_* durch die Gleichung

$$g_* = \sum_{i(\text{Bosonen})} g_i + \frac{7}{8} \sum_{j(\text{Fermionen})} g_j \left(\frac{T_\nu}{T} \right)^4 \quad (21.4.11)$$

gegeben. Dabei dürfen nur relativistische Teilchen verwendet werden. Der Faktor $\left(\frac{T_\nu}{T} \right)^4 = \left(\frac{4}{11} \right)^{3/4}$ wird nur für Neutrinos verwendet und nur wenn die Temperatur unter $k_B T \approx 3 \text{ MeV}$ fällt. Gleichung (21.4.11) wird benötigt, um die Temperatur als Funktion der Zeit zu berechnen [CO07, Gl. 29.89]:

$$T(t) = \left(1.81 \cdot 10^{10} \text{ K} s^{1/2} \right) g_*^{-1/4} t^{-1/2} \quad (21.4.12)$$

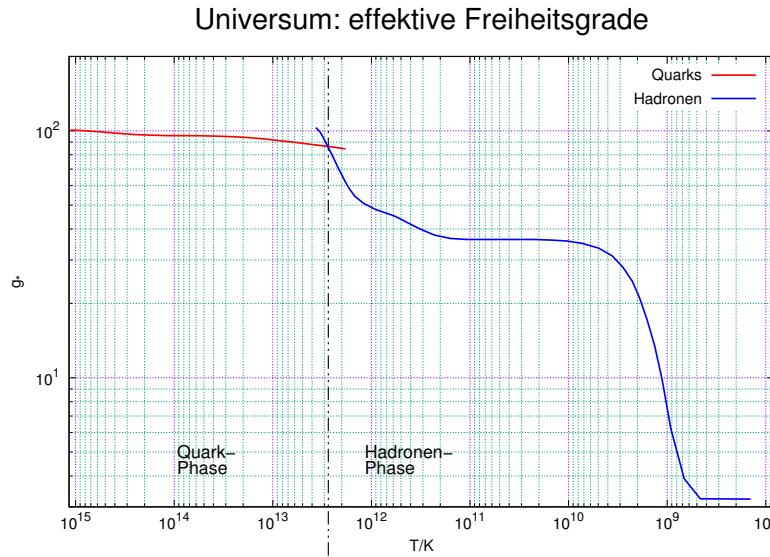


Abb. 21.33.: Freiheitsgrade im frühen Universum nach [CR03, Fig. 2]

Abbildung 21.33 zeigt die Freiheitsgrade der Teilchen im frühen Universum. Je heißer, desto mehr Teilchen werden relativistisch und tragen zur Entropie und inneren Energie bei.

In der Betrachtung ist die DUNKLE ENERGIE und DUNKLE MATERIE nicht berücksichtigt.

Die Grenzen physikalischer Beschreibung werden durch die folgenden Größen beschrieben:

Planck-Zeit: Sie gibt die frühest mögliche Zeit an, die noch beschrieben werden kann.

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.391\,247(60) \cdot 10^{-44} \text{ s} \quad (21.4.13)$$

Planck-Masse: Die kleinsten möglichen schwarzen Löcher werden durch die Planck-Masse gegeben:

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.176\,434(24) \cdot 10^{-8} \text{ kg} \gg m_{\text{Proton}} \quad (21.4.14)$$

Planck-Länge: Das kleinste mögliche schwarze Loch hat (bis auf einen Faktor 2) die Planck-Länge als Schwarzschild-Radius:

$$\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = ct_P \approx 1.616\,255(18) \cdot 10^{-35} \text{ m} \quad (21.4.15)$$

Planck-Temperatur: Die Planck-Temperatur gibt einen Hinweis auf die beim Urknall mögliche Temperatur

$$T_P = \frac{m_P c^2}{k_B} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} = \frac{t_P c^5}{G k_B} \approx 1.416\,784(16) \cdot 10^{32} \text{ K} \quad (21.4.16)$$

Planck-Ladung: Sie gibt eine weitere Definition der Ladung

$$q_P = \sqrt{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx 1.875\,545\,956(41) \cdot 10^{-18} \text{ C} > e \quad (21.4.17)$$

Bei der Planck-Zeit t_P hatte das Universum die Temperatur $T \approx 10^{32}$ K $\stackrel{\wedge}{=} 10^{19}$ GeV. Während die PLANCK-ZEIT t_P und die PLANCK-MASSE m_P die Grenze der Anwendbarkeit der allgemeinen Relativitätstheorie angeben wird die PLANCK-MASSE m_P zusammen mit den beiden anderen Größen sowie der PLANCK-TEMPERATUR und der PLANCK-LADUNG verwendet um ein universelles nur auf Naturkonstanten basierendes Einheitensystem zu definieren. Max Planck merkte an, dass dieses System überall im Universum verstanden würde.

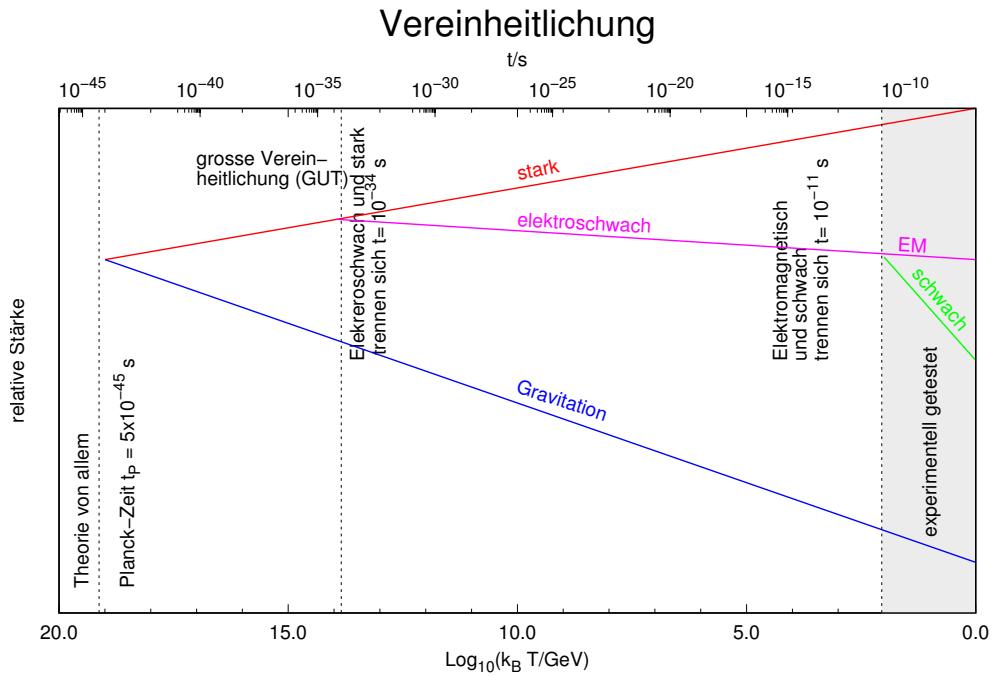


Abb. 21.34.: Grade der Vereinheitlichung verschiedener Kräfte. Die grau hinterlegte Fläche ist der Bereich experimenteller Tests (nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07]).

Das Universum beginnt nach der STANDARDTHEORIE im URKNALL, englisch BIG BANG. Die bestehenden Beobachtungen sprechen jedoch dafür, dass die Standardtheorie nicht stimmen kann:

- Die kosmische HINTERGRUNDSTRAHLUNG ist zu gleichmäßig (das HORIZONTPROBLEM, siehe auch M. Giovannini in „Why CMB Physics?“ [Gio07]

und C. R. Lawrence; D. Scott und M. White „What Have We Already Learned from the Cosmic Microwave Background?“ [LSW99]).

- Nach allem was Messungen hergeben ist die Raum-Zeit des Universums bei nahe flach. Wenn es davon abwiche, dann gäbe es entweder nicht so viele Objekte, oder das Universum wäre schon kollabiert. (das FLACHHEITS-PROBLEM)
- Bei den hohen Energien zu Beginn hätten auch magnetische Monopole ($mc^2 \approx 10^{16}$ GeV) entstehen müssen. Nur ein Experiment fand einmal einen Hinweis auf einen magnetischen Monopol, zu wenig um kompatibel mit der Standardtheorie zu sein (das PROBLEM DER MONOPOLE).

Lösungen könnten die Theorie der INFLATION, des FALSCHEN VAKUUMS oder QUANTENFLUKTUATIONEN sein. Eine andere Frage ist die Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie.

Schliesslich muss eine Theorie auch die grosskaligen Fluktuationen in der Verteilung von Galaxien erklären können.

A. Literaturhinweise

Folgende Bücher und Informationsportale können zur Vorlesung gelesen werden:

Wolfgang Demtröder Experimentalphysik, Band 4 Kern-, Teilchen- und Astro-physik [Dem10]

Permalink: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=311220053>

Ulrich Ellwanger From the universe to the elementary particles : a first introduction to cosmology and the fundamental interactions [Ell12]

Permalink: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=35235657X>

Ulrich Ellwanger Vom Universum zu den Elementarteilchen : eine erste Einführung in die Kosmologie und die fundamentalen Wechselwirkungen [Ell15]

Theo Mayer-Kuckuk Kernphysik : eine Einführung [May02]

Permalink: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=09839374X>

Ashok Das and Thomas Ferbel Introduction to nuclear and particle physics [DF09]

Permalink: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=311263771>

Jörn Bleck-Neuhaus Elementare Teilchen : von den Atomen über das Standard-Modell bis zum Higgs-Boson [Ble13]

Erich Lohrmann Hochenergiephysik [Loh92]

Permalink: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=027687368>

Abraham Seiden Particle physics : a comprehensive introduction [Sei09]

Permalink: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=118641662>

Karl-Heinz Spatschek Astrophysik : eine Einführung in Theorie und Grundlagen [Spa03]

Permalink: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=105864617>

Bradley W. Carroll; Dale A. Ostlie An introduction to modern astrophysics [CO07]

Permalink: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=381290948>

Oliver Montenbruck, Thomas Pfleger Astronomie mit dem Personal Computer [MP99]

Jan-Markus Schwindt Tutorium Quantenmechanik : von einem erfahrenen Tutor - für Physik- und Mathematikstudenten [Sch13]

Permalink: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=393504891>

Manfred Böhm Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik : eine Einführung in die mathematischen Grundlagen [Böh11]

Permalink: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=34625891X>

John Stillwell Naive Lie theory [Sti10b]

Karl Schilcher Quantenelektrodynamik kompakt [Sch19]

Pieter Thyssen und Arnout Ceulemans Shattered symmetry: group theory from the eightfold way to the periodic table [TC17]

Jürgen Brandes; Jan Czerniawski Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie für Physiker und Philosophen : Einstein- und Lorentz-Interpretation, Paradoxien, Raum und Zeit, Experimente [BC10]

Permalink: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=334001927>

Klaus Stierstadt. Unter Mitw. von Günther Fischer Atommüll - wohin damit? [Sti10a]

Permalink: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=333126351>

Jakob Schwichtenberg Physics from Symmetry [Sch15]

IAEA-Website Datenbank mit Hinweisen auf das gesamte veröffentlichte Wissen über Kerne und ihre Eigenschaften.

<https://www-nds.iaea.org/>

IAEA-Interaktive Nuklidkarte Interaktive Nuklidkarte.

<https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>

Joachim Wambsganß Universum für alle [Wam12]

NASA Eclipse Kalender astronomischer Ereignisse und Software zur Beobachtungsplanung. <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SKYCAL/SKYCAL.html> [YC19]

Astropixels Ephemeriden (Daten zur Beobachtung) <http://astropixels.com/ephemeris/ephemeris.html> [Esp21]

Astronomie-Info <https://www.astronomie.info/> [Ver19]

Vorlesung Optik Othmar Marti <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/op-2016-2017/op-2016-2017.pdf>

B. Weitere physikalische Methoden und Begriffe

B.1. Streuung

Differentieller Wirkungsquerschnitt bei Coulomb-Streuung:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\vartheta = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)} \quad (\text{B.1.1})$$

B.1.1. Berechnung

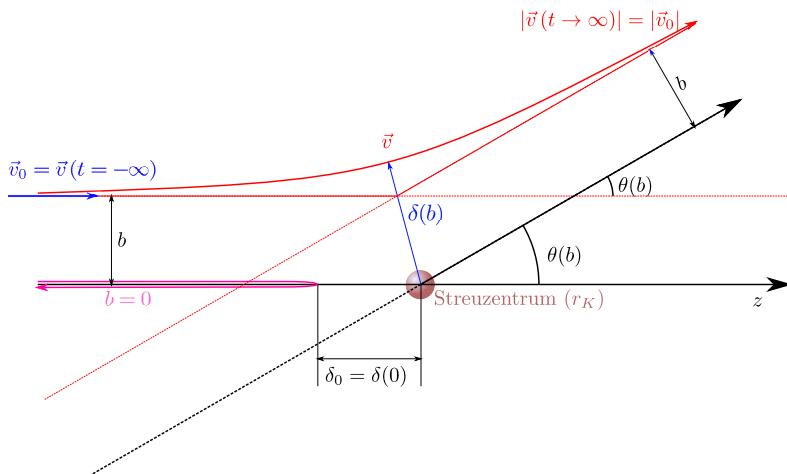


Abb. B.1.: Klassische Berechnung der Streuung (adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.3 [Dem10])

Wir verwenden die reduzierte Masse μ . Für den Drehimpuls haben wir dann

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v}| = \mu v b = \mu \omega r^2 = m \frac{d\phi}{dt} r^2 \quad (\text{B.1.2})$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{vb}{r^2} \quad \Rightarrow \frac{d\phi}{vb} = \frac{dt}{r^2} \quad (\text{B.1.3})$$

\mathbf{n} ist der Einheitsvektor in der Richtung vom Streuzentrum zum Punkt der nächsten Annäherung. Aus Symmetriegründen ist der Winkel zwischen \mathbf{n} und der Geschwindigkeit des einlaufenden Teilchens für $t \rightarrow -\infty$ betragsmäßig gleich dem

Winkel zwischen \mathbf{n} und der Geschwindigkeit des auslaufenden Teilchens für $t \rightarrow \infty$. Der auf \mathbf{n} projizierte Impuls ist dann:

$$p_{-\infty} = -\mu v \sin \frac{\vartheta}{2} \quad p_{+\infty} = \mu v \sin \frac{\vartheta}{2} \quad (\text{B.1.4})$$

Über den ganzen Streuprozess kompensieren sich die Kraftkomponenten senkrecht zu \mathbf{n} . Wir müssen deshalb nur die Projektion der Kraft auf die Richtung \mathbf{n} betrachten, also

$$F_n(t) = |\mathbf{F}|(t) \cos(\phi(t)) \quad (\text{B.1.5})$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \Delta p &= 2\mu v \sin \frac{\vartheta}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} F_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \phi dt \\ &= \int_{\frac{-(\pi-\vartheta)}{2}}^{\frac{\pi-\vartheta}{2}} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 v b} \cos \phi d\phi = \left. \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 v b} \sin \phi \right|_{\frac{-(\pi-\vartheta)}{2}}^{\frac{\pi-\vartheta}{2}} \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 v b} \left(\sin \frac{\pi - \vartheta}{2} - \sin \frac{-(\pi - \vartheta)}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.1.6})$$

Wir bemerken, dass der maximale Winkel ϕ_{max} aus Symmetriegründen für $t \rightarrow \pm\infty$ gleich ist, nämlich ϕ_{max} . Dann ist $\vartheta + 2\phi_{max} = \pi$ oder

$$\phi_{max} = \frac{\pi - \vartheta}{2} \quad (\text{B.1.7})$$

Daraus ergeben sich die in Gleichung (B.1.6) verwendeten Integrationsgrenzen.

Mit $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ folgt:

$$\begin{aligned} \Delta p &= 2 \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 v b} \sin \frac{\pi - \vartheta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\epsilon_0 v b} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ &\stackrel{!}{=} 2\mu v \sin \frac{\vartheta}{2} \\ \Rightarrow \tan \frac{\vartheta}{2} &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu v^2 b} \quad (\text{Streufunktion}) \end{aligned}$$

Aus

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \cdot \frac{1}{b} \quad (\text{B.1.8})$$

folgt:

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\vartheta}{2}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \cdot \cot \frac{\vartheta}{2} \quad (\text{B.1.9a})$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \vartheta} \frac{db}{d\vartheta} \right| \quad (\text{B.1.9b})$$

$$= \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \cdot \cot \frac{\vartheta}{2} \right) \cdot \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \cdot \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right) \quad (\text{B.1.9c})$$

$$= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \quad (\text{B.1.9d})$$

mit $\sin \vartheta = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad (\text{B.1.9e})$$

mit $\frac{1}{2}mv^2 = E_{\text{kin}}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2E_{\text{kin}}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad (\text{Diff. Querschnitt nach Rutherford}) \quad (\text{B.1.9f})$$

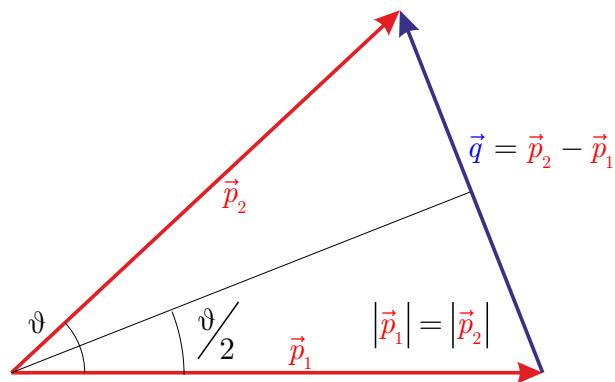


Abb. B.2.: Impulsübertrag nach [Dem10, Abb. 2.10]

Mit dem Impulsübertrag eines elastisch gestreuten Teilchens (siehe Abbildung B.2) folgt mit $|\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}|$:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\vartheta}{2} &= \frac{q}{2|\mathbf{p}|} & E &= \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p^4 = (2mE)^2 \\ \Rightarrow \sin^4 \frac{\vartheta}{2} &= \frac{q^4}{16p^4} = \frac{q^4}{64(mE^4)} = \frac{q^4}{16 \cdot (2mE)^4} \\ \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2 \cdot 2m}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{q^4}\end{aligned}$$

Dabei ist q ein Impuls, der Impulsübertrag.

B.2. Namen der Bänder nach Fraunhofer

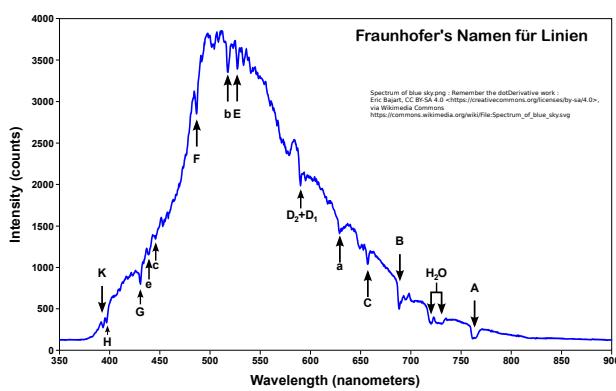


Abb. B.3.: Spektralnamen nach Fraunhofer (Spectrum of blue sky.png : Remember the dotDerivative work : Eric Bajart, CC BY-SA 4.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>>, via Wikimedia Commons)

Abbildung B.3 zeigt die von Joseph Fraunhofer verwendeten Spektralnamen. Diese werden auch heute noch verwendet. Tabelle B.1 zeigt die Linien.

Symbol	Element	Wellenlänge in nm	Symbol	Element	Wellenlänge in nm
y	O ₂	898.765	c	Fe	495.761
Z	O ₂	822.696	F	H β	486.134
A	O ₂	759.370	d	Fe	466.814
B	O ₂	686.719	e	Fe	438.355
C	H α	656.281	G'	H γ	434.047
a	O ₂	627.661	G	Fe	430.790
D1	Na	589.594	G	Ca	430.774
D2	Na	588.997	h	H δ	410.175
D3 oder d	He	587.562	H	Ca ⁺	396.847
e	Hg	546.073	K	Ca ⁺	393.368
E2	Fe	527.039	L	Fe	382.044
b1	Mg	518.362	N	Fe	358.121
b2	Mg	517.270	P	Ti ⁺	336.112
b3	Fe	516.891	T	Fe	302.108
b4	Fe	516.751	t	Ni	299.444
b4	Mg	516.733			

Tab. B.1.: Namen der Fraunhoferlinien (aus [Wik21d]).

C. Mathematische Sätze

C.1. Rechnen mit Vektoren

[Bro+08, p. 190]

Im Folgenden sind \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} und \mathbf{f} Vektoren oder vektorielle Funktionen, a , b , c und f ihre Längen, k eine Zahl und $\varphi(\mathbf{r})$ eine skalare Funktion. Die Komponenten der Vektoren in kartesischen Koordinaten sind

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Für die anderen Vektoren werden die Komponenten analog geschrieben.

C.1.1. Produkte mit Vektoren

Skalarprodukt

$$k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a b \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \quad (\text{C.1.1})$$

Vektorprodukt

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = a b \sin(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \quad (\text{C.1.2})$$

Vertauschung der Reihenfolge (Kommutationsgesetze)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{C.1.3})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{C.1.4})$$

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{C.1.5})$$

Sie sind kollinear, wenn

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{C.1.6})$$

Doppeltes Vektorprodukt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (\text{C.1.7})$$

Spatprodukt oder gemischtes Produkt

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \\
 &= (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \\
 &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} \\
 &= -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \\
 &= -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \\
 &= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - (a_z b_y c_x + a_x b_z c_y + a_y b_x c_z) \quad (\text{C.1.8})
 \end{aligned}$$

Drei Vektoren sind komplanar, wenn

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (\text{C.1.9})$$

Lagrangesche Identität

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{f}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{f})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{C.1.10})$$

Vierfaches Vektorprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{f}) \mathbf{c} - ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}) \mathbf{f} \quad (\text{C.1.11})$$

C.1.2. Ableiten von Vektoren

Ableiten eines Vektors

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{da_x}{dt} \\ \frac{da_y}{dt} \\ \frac{da_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.1.12})$$

Ableitung eines Produktes

$$\frac{d}{dt} (\varphi(t) \mathbf{a}(t)) = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{a} + \varphi \frac{d}{dt} \mathbf{a} \quad (\text{C.1.13})$$

Ableitung des Skalarproduktes

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (\text{C.1.14})$$

Ableitung des Vektorproduktes

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (\text{C.1.15})$$

Ableitung eines Vektors mit konstantem Betrag. Hier ist $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = \text{const.}$ Aus Gleichung (C.1.14) folgt

$$0 = \frac{da^2}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} \perp \mathbf{a} \quad (\text{C.1.16})$$

Taylorentwicklung einer Vektorfunktion

$$\mathbf{a}(t + \tau) = \mathbf{a}(t) + \tau \frac{d\mathbf{a}}{dt} \Big|_t + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \Big|_t + \dots + \frac{\tau^n}{n!} \frac{d^n\mathbf{a}}{dt^n} \Big|_t + \dots \quad (\text{C.1.17})$$

C.1.3. Vektorableitungen bei Skalarfeldern

Ableitung eines skalaren Feldes nach einer Richtung

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{c}) - \varphi(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (\text{C.1.18})$$

Ableitung $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c}$ in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{e}_c in Richtung von \mathbf{c}

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} \quad (\text{C.1.19})$$

Richtungsableitung einer skalaren Funktion im Vergleich zur Richtung mit dem stärksten Abfall (Einheitsvektor \mathbf{n})

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \cos(\angle \mathbf{e}_c, \mathbf{n}) \quad (\text{C.1.20})$$

C.1.4. Vektorableitungen bei Vektorfeldern

Ableitung eines Vektorfeldes \mathbf{a} nach einer Richtung

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (\text{C.1.21})$$

Ableitung $\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c}$ in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{e}_c in Richtung von \mathbf{c}

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} \quad (\text{C.1.22})$$

Richtungsableitung einer Vektorfunktion

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \mathbf{grad} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{c} \cdot \mathbf{div} \mathbf{a} \\ &\quad - \mathbf{a} \cdot \mathbf{div} \mathbf{c} - \mathbf{c} \times \mathbf{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{c}] \end{aligned} \quad (\text{C.1.23})$$

Gradient eines Produktes

$$\mathbf{grad} (\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 \mathbf{grad} \varphi_2 + \varphi_2 \mathbf{grad} \varphi_1 \quad (\text{C.1.24})$$

Kettenregel beim Gradienten

$$\mathbf{grad} \varphi_1 (\varphi_2) = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} \mathbf{grad} \varphi_2 \quad (\text{C.1.25})$$

Gradient eines Skalarproduktes

$$\mathbf{grad} \ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{rot} \mathbf{a} \quad (\text{C.1.26})$$

Gradient eines Skalarproduktes eines konstanten Vektors \mathbf{k} mit einem Ortsvektor \mathbf{r}

$$\mathbf{grad} \ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) = \mathbf{k} \quad (\text{C.1.27})$$

Divergenz eines Produktes

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{grad} \varphi \quad (\text{C.1.28})$$

Divergenz eines Skalarproduktes eines konstanten Vektors \mathbf{k} mit einem Ortsvektor \mathbf{r}

$$\operatorname{div} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{r}|} \quad (\text{C.1.29})$$

Divergenz eines Vektorproduktes

$$\operatorname{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{b} \quad (\text{C.1.30})$$

Rotation eines Produktes

$$\mathbf{rot} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \mathbf{rot} \mathbf{a} + \mathbf{grad} \varphi \times \mathbf{a} \quad (\text{C.1.31})$$

Divergenz eines Vektorproduktes

$$\mathbf{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} \quad (\text{C.1.32})$$

Rotation eines Potentialfeldes

$$\mathbf{rot} (\mathbf{grad} \varphi) = \mathbf{0} \quad \forall \varphi \quad (\text{C.1.33})$$

Divergenz einer Rotation

$$\operatorname{div} (\mathbf{rot} \mathbf{a}) = 0 \quad \forall \mathbf{a} \quad (\text{C.1.34})$$

Rotation einer Rotation

$$\mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{a}) = \mathbf{grad} (\operatorname{div} \mathbf{a}) - \operatorname{div} (\mathbf{grad} \mathbf{a}) \quad (\text{C.1.35})$$

C.2. Vektorsätze

C.2.1. Satz von Gauss

Der SATZ VON K. F. GAUSS (1777-1855) verknüpft ein Volumenintegral mit einem Oberflächenintegral.

Gegeben seien

- eine vektorielle Ortsfunktion $\mathbf{v}(\mathbf{r})$
- eine geschlossene Fläche S , die das Volumen $V(S)$ umschließt.

$$\int_{V(S)} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{C.2.1})$$

Man kann auch schreiben $\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$, wobei $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ der NABLA-OPERATOR ist.

C.2.2. Satz von Green

Der SATZ VON G. GREEN (1793-1841) verknüpft ein Volumenintegral mit einem Oberflächenintegral.

Gegeben seien

- eine skalare Ortsfunktion $\Psi(\mathbf{r})$
- eine geschlossene Fläche S , die das Volumen $V(S)$ umschliesst.

$$\int_{V(S)} \Delta \Psi dV = \int_S \operatorname{grad} \Psi da = \int_S \operatorname{grad} \Psi \mathbf{n} da \quad (\text{C.2.2})$$

Man kann auch schreiben $\operatorname{grad} \Psi = \nabla \Psi$, wobei $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ der NABLA-OPERATOR ist.

C.2.3. Satz von Stokes

Der SATZ VON G. G. STOKES (1819-1903) verknüpft ein Oberflächenintegral mit einem Linienintegral.

Gegeben seien

- eine vektorielle Ortsfunktion $\mathbf{v}(\mathbf{r})$
- eine geschlossener Weg s , der die Oberfläche $a(s)$ umrandet.

$$\int_{a(s)} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot da = \int_{a(s)} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da = \oint_s \mathbf{v} \cdot ds \quad (\text{C.2.3})$$

Man kann auch schreiben $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$, wobei $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ der NABLA-OPERATOR ist.

Dabei wird jedes Flächenelement so umlaufen, dass die entsprechende Normale \mathbf{n} der Bewegung einer Rechtsschraube entspricht.

C.3. Typen von Zahlen, Vektoren und mehr

Wir betrachten hier das Verhalten von mathematischen Objekten bei einer RAUM-SPIEGELUNG (Punktspiegelung am Ursprung) in kartesischen Koordinaten

$$P : f(\mathbf{r}) \rightarrow \tilde{f}(\mathbf{r}) = f(-\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \text{ und } n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.3.1})$$

Die Abbildung wird auch PARITÄTSOPERATION genannt. Die Definition in Gleichung (C.3.1) bezieht sich explizit auf kartesische Koordinaten. Für andere Koordinatensysteme können auch Paritätsoperationen definiert werden.

C.3.1. Skalare

Unter einer Paritätsoperation ändert ein SKALAR oder eine Zahl $a \in \mathbb{R}^1$ sein Vorzeichen nicht. Zahlen stellen Größen dar ohne Richtung. Deshalb kann eine Änderung des Koordinatensystems keinen Einfluss haben.

C.3.2. Vektoren

Bei Vektoren $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) stellt die Länge, ob in einer oder in mehreren Dimensionen eine Richtung dar. Die Paritätsoperation wechselt das Vorzeichen aller Koordinaten. Deshalb ändert die Geschwindigkeit \mathbf{v} bei einer Paritätstransformation die Richtung ins Entgegengesetzte. Die Geschwindigkeit ist wie alle normalen Vektoren ein POLARER VEKTOR¹.

Der Drehimpuls kann als Vektorprodukt $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ geschrieben werden. Sowohl \mathbf{r} wie $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ sind polare Vektoren, die bei einer Paritätstransformation das Vorzeichen (oder die Richtung wechseln. Der Vektor \mathbf{L} des Drehimpulses ändert deshalb seine Richtung nicht. Er gehört zur Klasse der AXIALEN VEKTOREN. Mit dem Drehimpuls sind auch alle analog definierten Größen wie der Spin, die magnetische Induktion oder das Drehmoment axiale Vektoren². Axiale Vektoren werden auch PSEUDOKEVTOREN genannt.

Das Vektorprodukt eines axialen Vektors mit einem axialen Vektor ergibt wieder einen axialen Vektor.

C.3.3. Pseudoskalare

Das Skalarprodukt eines polaren Vektors mit einem polaren Vektor ändert bei einer PARITÄTSTRANSFORMATION das Vorzeichen nicht. Das Resultat ist also ein Skalar. Ebenso ergibt das Skalarprodukt eines axialen Vektors mit einem axialen Vektor einen Zahlenwert, der bei der Paritätstransformation das Vorzeichen nicht ändert.

Wird aber das Skalarprodukt eines polaren Vektors (wie z.B. \mathbf{v}) und eines axialen Vektors (wie z.B. \mathbf{s}) berechnet ändert die resultierende Zahl ihr Vorzeichen bei der Paritätstransformation. Diese Skalarprodukt zwischen axialem und polarem Vektor ergibt einen PSEUDOSKALAR, eine Zahl die bei einer Paritätsoperation das Vorzeichen ändert.

C.3.4. Tensoren und Pseudotensoren

Wie bei Vektoren gibt es neben Tensoren (Objekte die bei einer Paritätstransformation alle Vorzeichen der Komponenten wechseln) auch Pseudotensoren, die die Vorzeichen ihrer Komponenten bei der Paritätsoperation nicht ändern. Das Vektorprodukt kann auch als Pseudotensor aufgefasst werden.

¹Diese Vektoren haben eine umkehrbare Richtung, also eine Polarität.

²Alle diese Größen haben eine Achse, um die die physikalische Größe rotiert, deshalb axialer Vektor.

C.4. Distributionen

C.4.1. Binomialdistribution

Die Poissonsdistribution ist ein Grenzfall der Binomialdistribution [Tay97, Kap. 10 und Kap. 11]. Diese beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Experimenten ν Erfolge (für Zerfälle: Ereignisse) geschehen, wenn p die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ist und $q = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit für kein Ereignis.

$$B_{n,p}(\nu) = \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu} = \binom{n}{\nu} p^\nu (1-p)^{n-\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} p^\nu (1-p)^{n-\nu} \quad (\text{C.4.1})$$

Der Erwartungswert von ν ist

$$\langle \nu \rangle_B = \sum_{\nu=0}^n \nu B_{n,p}(\nu) = \sum_{\nu=0}^n \nu \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} p^\nu (1-p)^{n-\nu} \quad (\text{C.4.2a})$$

$$= \sum_{\nu=1}^n \nu \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} p^\nu (1-p)^{n-\nu} \quad (\text{C.4.2b})$$

$$= \sum_{\nu=1}^n \frac{n(n-1)!}{(\nu-1)!((n-1)-(\nu-1))!} p \cdot p^{\nu-1} (1-p)^{(n-1)-(\nu-1)} \quad (\text{C.4.2c})$$

$$= n p \sum_{\nu=1}^n \frac{(n-1)!}{(\nu-1)!((n-1)-(\nu-1))!} p^{\nu-1} (1-p)^{(n-1)-(\nu-1)} \quad (\text{C.4.2d})$$

$$= n p \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} p^\nu (1-p)^{n-\nu} = n p (p + (1-p))^{n-1} = n p \quad (\text{C.4.2e})$$

Die Standardabweichung kann mit einer ähnlichen Methode berechnet werden. Sie ist

$$\sigma_{\nu,B} = \sqrt{n p q} = \sqrt{n p (1-p)} \quad (\text{C.4.3})$$

C.4.2. Poisson-Distribution

Für den Fall, dass wir sehr viele Versuche (d.h. Atome) $1 \ll n \approx 10^{20}$ und sehr wenige Erfolge (d.h. Zerfälle) haben, also $\nu \ll n$ und dass damit die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses klein ist $1 \gg p \approx 10^{-20}$ geht die Binomialdistribution in die Poisson-Distribution über.

Diese ist durch

$$P_\mu(\nu) = e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!} \quad (\text{C.4.4})$$

gegeben. Deren Mittelwert bei unendlich vielen Versuchen ist

$$\langle \nu \rangle_P = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu P_\mu(\nu) = \sum_{\nu=0}^n \nu e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=1}^n \nu e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!} = \mu e^{-\mu} \sum_{\nu=1}^n \frac{\mu^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \quad (\text{C.4.5a})$$

$$= \mu e^{-\mu} \sum_{\nu=0}^n \frac{\mu^\nu}{\nu!} = \mu e^{-\mu} e^\mu = \mu \quad (\text{C.4.5b})$$

da $\sum_{\nu=0}^n \frac{\mu^\nu}{\nu!} = e^\mu$ die Taylorreihe der Exponentialfunktion ist.

Zur Berechnung der Standardabweichung nutzen wir die Gleichung für die Binomialdistribution und verwenden den Grenzfall zur Poisson-Distribution

$$\sigma_{\nu,B} = \sqrt{n p (1-p)} \stackrel{p \ll 1}{\approx} \sqrt{np} \quad (\text{C.4.6})$$

Auf der anderen Seite wissen wir, dass die Binomialdistribution in die Poisondistribution übergeht, also $\langle \nu \rangle_B = np \stackrel{n \gg 1, p \ll 1}{=} \mu = \langle \nu \rangle_P$. Deshalb ist

$$\sigma_{\nu,P} = \sqrt{\mu} \quad (\text{C.4.7})$$

Eine Zusammenfassung findet sich auch in [Bro+08, Kap. 16.2.3.3].

C.5. Sphärische Trigonometrie

C.5.1. Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen

(Siehe M. Waldmeier, Leitfaden der astronomischen Orts- und Zeitbestimmung [Wal68, pp. 11])

Die folgenden Beziehungen verknüpfen Operationen zwischen Winkelfunktionen.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (\text{C.5.1})$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (\text{C.5.2})$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)} \quad (\text{C.5.3})$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot(\alpha) \cot(\beta) \mp 1}{\cot(\alpha) \pm \cot(\beta)} \quad (\text{C.5.4})$$

$$\sin(\alpha) = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{C.5.5})$$

$$\cos(\alpha) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{C.5.6})$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (\text{C.5.7})$$

$$1 + \cos(\alpha) = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{C.5.8})$$

$$1 - \cos(\alpha) = 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{C.5.9})$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad (\text{C.5.10})$$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (\text{C.5.11})$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (\text{C.5.12})$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (\text{C.5.13})$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (\text{C.5.14})$$

C.5.1.1. Halbwinkelsätze

$$s = \frac{a + b + c}{2} \quad (\text{C.5.15})$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin(b) \cdot \sin(c)}} \quad (\text{C.5.16})$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(s) \cdot \sin(s-a)}{\sin(b) \cdot \sin(c)}} \quad (\text{C.5.17})$$

C.5.2. Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie

a , b und c sind die Seiten eines sphärischen Dreiecks, α , β und γ die gegenüberliegenden Winkel (siehe Abb. C.1).

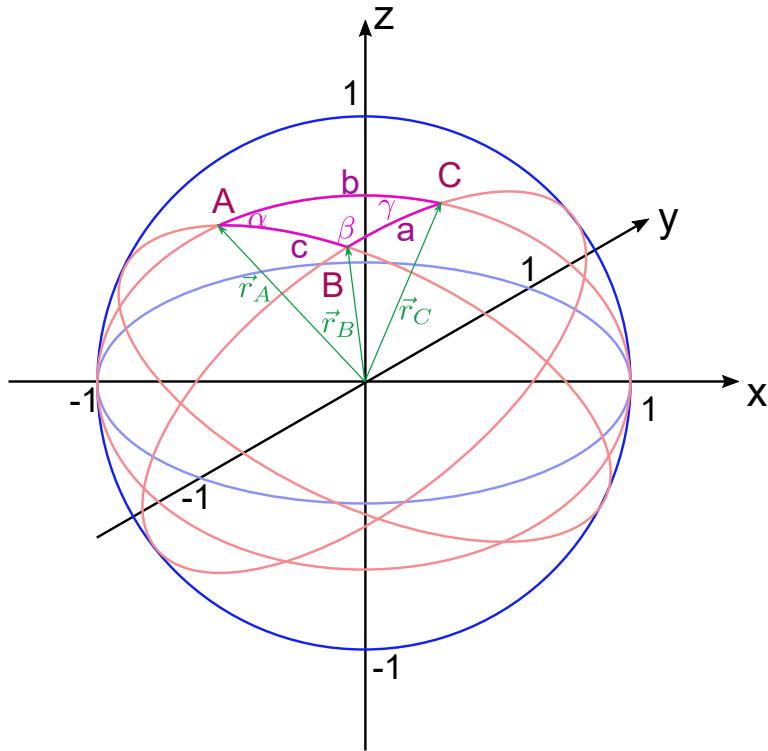


Abb. C.1.: Sphärisches Dreieck auf der Einheitskugel

C.5.2.1. Sinussatz

$$\sin(a) \cdot \sin(\beta) = \sin(b) \cdot \sin(\alpha) \quad (\text{C.5.18})$$

$$\sin(b) \cdot \sin(\gamma) = \sin(c) \cdot \sin(\beta) \quad (\text{C.5.19})$$

$$\sin(c) \cdot \sin(\alpha) = \sin(a) \cdot \sin(\gamma) \quad (\text{C.5.20})$$

C.5.2.2. Cosinusseitensatz

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{C.5.21})$$

$$\cos(b) = \cos(c) \cdot \cos(a) + \sin(c) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\beta) \quad (\text{C.5.22})$$

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma) \quad (\text{C.5.23})$$

C.5.2.3. Cosinuswinkelsatz

$$-\cos(\alpha) = \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) - \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(a) \quad (\text{C.5.24})$$

$$-\cos(\beta) = \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(b) \quad (\text{C.5.25})$$

$$-\cos(\gamma) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(c) \quad (\text{C.5.26})$$

C.5.2.4. Beziehung zwischen vier Stücken

$$\sin(\alpha) \cdot \cot(\beta) = \cot(b) \cdot \sin(c) - \cos(c) \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{C.5.27})$$

$$\sin(\beta) \cdot \cot(\gamma) = \cot(c) \cdot \sin(a) - \cos(a) \cdot \cos(\beta) \quad (\text{C.5.28})$$

$$\sin(\gamma) \cdot \cot(\alpha) = \cot(a) \cdot \sin(b) - \cos(b) \cdot \cos(\gamma) \quad (\text{C.5.29})$$

$$\sin(\alpha) \cdot \cot(\gamma) = \cot(c) \cdot \sin(b) - \cos(b) \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{C.5.30})$$

$$\sin(\beta) \cdot \cot(\alpha) = \cot(a) \cdot \sin(c) - \cos(c) \cdot \cos(\beta) \quad (\text{C.5.31})$$

$$\sin(\gamma) \cdot \cot(\beta) = \cot(b) \cdot \sin(a) - \cos(a) \cdot \cos(\gamma) \quad (\text{C.5.32})$$

C.5.2.5. Beziehung zwischen fünf Stücken

$$\sin(a) \cdot \cos(\beta) = \cos(b) \cdot \sin(c) - \sin(b) \cdot \cos(c) \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{C.5.33})$$

$$\sin(b) \cdot \cos(\gamma) = \cos(c) \cdot \sin(a) - \sin(c) \cdot \cos(a) \cdot \cos(\beta) \quad (\text{C.5.34})$$

$$\sin(c) \cdot \cos(\alpha) = \cos(a) \cdot \sin(b) - \sin(a) \cdot \cos(b) \cdot \cos(\gamma) \quad (\text{C.5.35})$$

$$\sin(a) \cdot \cos(\gamma) = \cos(c) \cdot \sin(b) - \sin(c) \cdot \cos(b) \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{C.5.36})$$

$$\sin(b) \cdot \cos(\alpha) = \cos(a) \cdot \sin(c) - \sin(a) \cdot \cos(c) \cdot \cos(\beta) \quad (\text{C.5.37})$$

$$\sin(c) \cdot \cos(\beta) = \cos(b) \cdot \sin(a) - \sin(b) \cdot \cos(a) \cdot \cos(\gamma) \quad (\text{C.5.38})$$

C.5.2.6. Gaußsche Gleichungen

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{b+c}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{C.5.39})$$

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{b-c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{C.5.40})$$

$$\cos\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{b+c}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{C.5.41})$$

$$\cos\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{b-c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{C.5.42})$$

$$\sin\left(\frac{b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma - \alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{c+a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (\text{C.5.43})$$

$$\sin\left(\frac{b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma - \alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{c-a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (\text{C.5.44})$$

$$\cos\left(\frac{b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma + \alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{c+a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (\text{C.5.45})$$

$$\cos\left(\frac{b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma + \alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{c-a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (\text{C.5.46})$$

$$\sin\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (\text{C.5.47})$$

$$\sin\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (\text{C.5.48})$$

$$\cos\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (\text{C.5.49})$$

$$\cos\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (\text{C.5.50})$$

C.5.2.7. Nepersche Analogien

$$\tan\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)} \tan\left(\frac{c}{2}\right) \quad (\text{C.5.51})$$

$$\tan\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)} \tan\left(\frac{c}{2}\right) \quad (\text{C.5.52})$$

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(a-b)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)} \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (\text{C.5.53})$$

$$\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(a-b)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)} \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (\text{C.5.54})$$

$$\tan\left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right)} \tan\left(\frac{a}{2}\right) \quad (\text{C.5.55})$$

$$\tan\left(\frac{b-c}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right)} \tan\left(\frac{a}{2}\right) \quad (\text{C.5.56})$$

$$\tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(b-c)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(b+c)\right)} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{C.5.57})$$

$$\tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(b-c)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(b+c)\right)} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{C.5.58})$$

$$\tan\left(\frac{c+a}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\right)} \tan\left(\frac{b}{2}\right) \quad (\text{C.5.59})$$

$$\tan\left(\frac{c-a}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\right)} \tan\left(\frac{b}{2}\right) \quad (\text{C.5.60})$$

$$\tan\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(c-a)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(c+a)\right)} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{C.5.61})$$

$$\tan\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(c-a)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(c+a)\right)} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{C.5.62})$$

C.5.3. Das rechtwinklige sphärische Dreieck

Wir setzen $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad

C.5.3.1. Sinussatz

$$\sin(b) = \sin(a) \cdot \sin(\beta) \quad (\text{C.5.63})$$

$$\sin(c) = \sin(a) \cdot \sin(\gamma) \quad (\text{C.5.64})$$

C.5.3.2. Cosinusseitensatz

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) \quad (\text{C.5.65})$$

C.5.3.3. Cosinuswinkelsatz

$$\cos(a) = \cot(\beta) \cdot \cot(\gamma) \quad (\text{C.5.66})$$

$$\cos(b) = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\gamma)} \quad (\text{C.5.67})$$

$$\cos(c) = \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\beta)} \quad (\text{C.5.68})$$

C.5.3.4. Beziehung zwischen vier Stücken

$$\cot(\beta) = \cot(b) \cdot \sin(c) \quad (\text{C.5.69})$$

$$\cot(\gamma) = \cot(c) \cdot \sin(b) \quad (\text{C.5.70})$$

$$\tan(b) = \tan(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \quad (\text{C.5.71})$$

$$\tan(c) = \tan(a) \cdot \cos(\beta) \quad (\text{C.5.72})$$

C.5.3.5. Beziehung zwischen fünf Stücken

$$\sin(a) \cdot \cos(\beta) = \cos(b) \cdot \sin(c) \quad (\text{C.5.73})$$

$$\cos(a) \cdot \sin(b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \cdot \cos(\gamma) \quad (\text{C.5.74})$$

$$\sin(a) \cdot \cos(\gamma) = \cos(c) \cdot \sin(b) \quad (\text{C.5.75})$$

$$\cos(a) \cdot \sin(c) = \sin(a) \cdot \cos(c) \cdot \cos(\beta) \quad (\text{C.5.76})$$

C.5.4. Astronomisches Dreieck

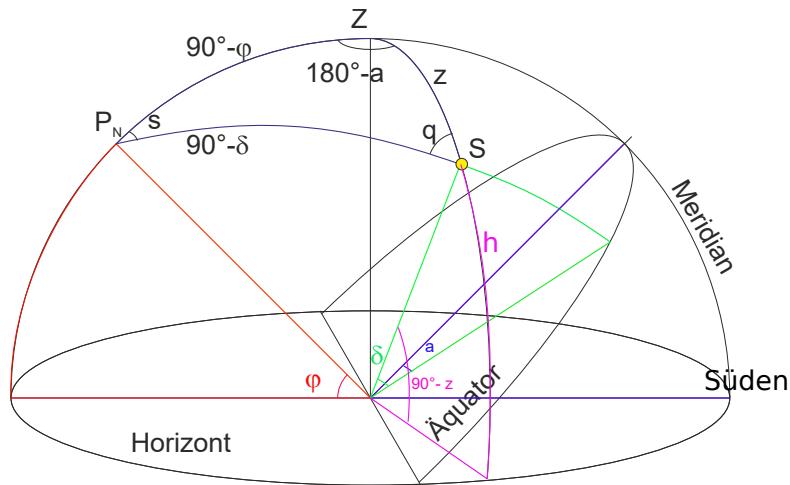


Abb. C.2.: Das astronomische Dreieck

C.5.4.1. Beziehungen zwischen φ , δ , s und z , a

$$\cos(z) = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(s) \quad (\text{C.5.77})$$

$$\cos(z) = \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin^2\left(\frac{s}{2}\right) \quad (\text{C.5.78})$$

$$\sin(z) \cdot \sin(a) = \cos(\delta) \cdot \sin(s) \quad (\text{C.5.79})$$

$$\sin(z) \cos(a) = -\sin(\delta) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\delta) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(s) \quad (\text{C.5.80})$$

$$\cot(a) \cdot \sin(s) = \sin(\varphi) \cdot \cos(s) - \cos(\varphi) \cdot \tan(\delta) \quad (\text{C.5.81})$$

$$\cos(\delta) \cdot \cos(s) = \cos(z) \cdot \cos(\varphi) + \sin(z) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(a) \quad (\text{C.5.82})$$

C.5.4.2. Beziehungen zwischen φ , δ , s und z , q

$$\sin(z) \cdot \sin(q) = \cos(\varphi) \cdot \sin(s) \quad (\text{C.5.83})$$

$$\sin(z) \cdot \cos(q) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\delta) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(s) \quad (\text{C.5.84})$$

C.5.5. Koordinatentransformationen

C.5.5.1. Berechnung von z und a aus δ und s

$$\cot(a) = \frac{\sin(\varphi) \cdot \cos(s) - \tan(\delta) \cdot \cos(\varphi)}{\sin(s)} \quad (\text{C.5.85})$$

$$\cos(z) = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(s) \quad (\text{C.5.86})$$

C.5.5.2. Berechnung von δ und s aus z und a

$$\cot(s) = \frac{\cot(z) \cdot \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot \cos(a)}{\sin(a)} \quad (\text{C.5.87})$$

$$\sin(\delta) = \cos(z) \cdot \sin(\varphi) - \sin(z) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(a) \quad (\text{C.5.88})$$

C.6. Integrale

Die Autoren A. Kempf; D. M. Jackson und A. H. Morales „New Dirac delta function based methods with applications to perturbative expansions in quantum field theory“ [KJM14] zeigten, dass Integrale jeder Funktion, die als Taylorreihe geschrieben werden kann, durch Differenzieren und Grenzwertbildung berechnet werden kann. Diese Erkenntnisse wurden dann in der Arbeit „How to (path-) integrate by differentiating“ [KJM15] weiter vertieft. M. Bischoff zeigte in ihrem Artikel *Revolution in der Analysis* [Bis22], wie dieses Theorem anzuwenden ist. Der folgende Text basiert auf dem Artikel von *Revolution in der Analysis*.

Der Schlüssel des Verfahrens ist die Beziehung

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[f \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) \left(\frac{\exp(b\epsilon) - \exp(a\epsilon)}{\epsilon} \right) \right] \quad (\text{C.6.1})$$

Dabei soll die Funktion $f(x)$ durch die Taylorreihe um 0

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=0} x + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} f(x) \Big|_{x=0} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) \Big|_{x=0} x^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) \Big|_{x=0} x^n \quad (\text{C.6.2}) \end{aligned}$$

gegeben sei. Dann bedeutet $f \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right)$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right) &= f(0) + \frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=0} \frac{\partial}{\partial\epsilon} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x)\Big|_{x=0} \frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2} + \dots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}f(x)\Big|_{x=0} \frac{\partial^n}{\partial\epsilon^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}f(x)\Big|_{x=0} \frac{\partial^n}{\partial\epsilon^n} \quad (\text{C.6.3})
\end{aligned}$$

Damit ist die Integration auf eine Grenzwertbildung und Ableitung zurückgeführt. Gleichung (C.6.3) muss als Operator aufgefasst werden.

Insbesondere nicht analytisch integrierbare Funktionen können so berechnet werden. A. Kempf; D. M. Jackson und A. H. Morales geben in „New Dirac delta function based methods with applications to perturbative expansions in quantum field theory“ [KJM14] an, dass damit sonst nicht oder nur numerisch ineffizient lösbar Pfadintegrale lösbar werden oder entsprechend beschleunigt werden.

In dem Artikel *Revolution in der Analysis* von M. Bischoff [Bis22] wird weiter gezeigt, dass

$$\exp\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)f(\epsilon) = f(\epsilon + 1) \quad (\text{C.6.4})$$

ist. Damit werden die Phasenfunktionen in Pfadintegralen über diesen Trick in der ϵ -Koordinate verschoben. Nach einer Summierung und dem Grenzwertübergang erhält man das Resultat der Integration.

Der Vorteil der Methode ist, dass Ableiten in jedem Falle ein Resultat liefert, während es mehr nicht-integrable Funktionen als integrable gibt.

Versuchliste

1. Versuch Geiger-Müller-Zählrohr	166
2. Versuch Nebelkammer: Ulmer Nebel	173

Abbildungsverzeichnis

2.1.	Teleskop nach Kepler	21
2.2.	Teleskop nach Galilei	22
2.3.	Teleskop nach Newton	23
2.4.	Das 5-Meter-Hale-Teleskop von Mount Palomar	27
2.5.	Spiegelgrösse von Teleskopen	28
2.6.	Parallaktische Montierung	29
2.7.	Coudé-Fokus	29
2.8.	Aufbau eines Radioteleskopes	30
2.9.	Das Radioteleskop von Effelsberg	31
2.10.	Das grosse Radioteleskop in Aricibo	31
2.11.	Reflektivität im Röntgenbereich	32
2.12.	Wolter-Spiegel eines Röntgenteleskopes	33
2.13.	Skizze des ROSAT-Röntgensatelliten	33
2.14.	Wolter-Spiegel des ROSAT-Röntgensatelliten	34
2.15.	Detektor des ROSAT-Röntgensatelliten	34
2.16.	Chandra-Röntgensatelliten	35
2.17.	Röntgenaufnahme und optische Aufnahme	36
2.18.	Beugungsbegrenzung der Auflösung	37
2.19.	Prinzip Long Baseline Interferometry	39
2.20.	Orbits im galaktischen Zentrum	41
2.21.	Aufbau eines Gitterspektrometers	42
2.22.	Beugungsmuster an einem Gitter	43
2.23.	Beugungsmuster eines Einzelpaltes	44
2.24.	Lage der Gitterordnungen	44
2.25.	Beugungsmuster eines Gitters	45
2.26.	Beugungsmuster: Variation des Gitterelementes	45
2.27.	Beugungsmuster: Variation der Linienzahl	46
2.28.	Schematische Darstellung eines Gitter-Reflexionsspektrometers.	46
2.29.	Gitter-Reflexionsspektrometer mit Zeilendetektor.	47
2.30.	Kommerzielles Gitterspektrometer	48
2.31.	Integriertes Gitter-Reflexionsspektrometers mit Zeilendetektor.	49
2.32.	Échelle-Spektrometer	50
2.33.	Échelle-Spektrometer Lage der Spektren	50
2.34.	Spektrum mit Échelle-Spektrometer	51
2.35.	Aufbau des Mach-Zehnder-Interferometers	51
2.36.	Bild des Michelson-Interferometers aus der Vorlesungssammlung	53
2.37.	Aufbau des Michelson-Interferometers.	53
2.38.	Sagnac-Interferometer	55
2.39.	Stokessche Behandlung von Reflexion und Brechung	58
2.40.	Strahlengang bei einem Fabry-Perot-Etalon	59
2.41.	Berechnung des Strahlengangs bei einem Fabry-Perot-Etalon	59

2.42.	Transmission durch ein Fabry-Perot-Etalon	64
2.43.	Reflexion an einem Fabry-Perot-Etalon	64
2.44.	Strahlengang im Michelson-Sterninterferometer	65
2.45.	Intensitäts-Korrelationsinterferometer Hanbury Brown und Twiss	66
2.46.	Empfindlichkeitskurve Hanbury Brown und Twiss-Interferometers	67
2.47.	Sichtwinkel im Hanbury Brown und Twiss-Interferometer	68
2.48.	Astronomische Koordinatensysteme	70
2.49.	Nautisches Dreieck	70
2.50.	Äquatorsystem	71
2.51.	Ekliptikales System	72
2.52.	Galaktisches Koordinatensystem	72
2.53.	Galaktozentrisches Koordinatensystem	73
2.54.	Definition der Parallaxensekunde	75
2.55.	Auflösungsbegrenzung durch Seeing	76
2.56.	ESA Guide Star System	77
2.57.	Brechung in der Atmosphäre	77
2.58.	Distanzmessung mit Triangulation	78
2.59.	Distanzmessung mit Triangulation	78
2.60.	Relative und absolute Magnitude	80
2.61.	Helligkeitskurve von Cepheiden	82
2.62.	Helligkeitskurven von Supernovae	83
2.63.	Supernova in Galaxie	84
2.64.	Distanzmessung mit Doppelsternen	85
3.1.	Von den Griechen zu Kepler	88
3.2.	Schema: Epizyklen	89
3.3.	Epizyklen	90
3.4.	Bahnen der äusseren Planeten von der Ferne gesehen	91
3.5.	Bahnen der äusseren Planeten von der Erde aus gesehen	92
3.6.	2. Keplersches Gesetz	93
3.7.	Newton'sches Gravitationsgesetz	95
3.8.	Keplersche Ellipsenbahn	98
3.9.	Inklination, aufsteigender Knoten und Periapsis	99
3.10.	Masse aus Ellipsenbahnen	100
3.11.	Merkur	103
3.12.	Wolken in der Venusatmosphäre	104
3.13.	Venusoberfläche ohne Wolken	105
3.14.	Erde von Voyager gesehen	106
3.15.	Erstes Bild der Erde von aussen	106
3.16.	Mond vor Erde	107
3.17.	Milanković-Zyklen der Erde	107
3.18.	Bahnexzentrizität zwischen -4000 und 8000	108
3.19.	Erdbahnexzentrizität	109
3.20.	Strahlungsgleichgewicht der Erde	109
3.21.	Energieflüsse in der Erdatmosphäre	110
3.22.	Temperaturschwankungen über letzte 1.8 Millionen Jahre	111
3.23.	Temperatur über die letzten 420000 Jahre	112
3.24.	Temperatur- und CO ₂ -Verlauf	112

3.25.	Temperaturverteilung Erdatmosphäre	113
3.26.	Teilchenzahldichte der Atmosphäre	114
3.27.	Verlauf von Erdbebenwellen	116
3.28.	Magnetpole und geographische Pole	117
3.29.	Magnetfeld der Erde	117
3.30.	Häufigkeit der Meteoriteneinschläge	118
3.31.	Entstehung des Mondes	120
3.32.	Mars mit Valles Marineris	120
3.33.	Mars in seinen jungen Tagen (künstlerisch)	121
3.34.	Partielle Sonnenfinsternis durch Phobos auf dem Mars	122
3.35.	Jupiter	124
3.36.	Galileische Jupitermonde	125
3.37.	Galileische Jupitermonde	126
3.38.	Saturn	127
3.39.	Titan, Saturnmond	128
3.40.	Uranus	129
3.41.	Neptun	130
3.42.	Pluto	132
3.43.	Berge auf Pluto	133
3.44.	Eisvulkane auf Pluto	133
3.45.	Charon, der grösste Mond Plutos	134
3.46.	Zwergplanet Eris	135
3.47.	Haumea mit Hi'iaka und Namaka	135
3.48.	Makemake	136
3.49.	Kuipergürtel und Oort'sche Wolke	137
3.50.	Asteroiden, die die Erdbahn kreuzen	137
3.51.	Ceres	138
3.52.	Oort'sche Wolke	139
4.1.	Relativistische Geschwindigkeit und Beschleunigung	142
4.2.	Kinetische Energie relativistisch und klassisch	143
4.3.	Zurückgelegte Distanz relativistisch und klassisch	144
4.4.	Eigenzeit relativistisch und klassisch	145
4.5.	Zurückgelegte Strecke als Funktion der Eigenzeit	146
4.6.	Wirkungsgrad bei der Streuung	148
4.7.	Elektrostatischer Beschleuniger	149
4.8.	Van-de-Graaff-Generator zur Herstellung von Hochspannung	150
4.9.	Kaskaden-Hochspannungsgenerator	150
4.10.	Skizze eines Driftröhrenbeschleunigers	151
4.11.	Schematischer Aufbau eines Zyklotrons	152
4.12.	Aufbau eines Betatrons	154
4.13.	Schematischer Aufbau eines Synchrotrons	155
4.14.	Prinzip der starken Fokussierung	158
4.15.	Starke Fokussierung	160
4.16.	Fokussierung in Beschleunigern	160
4.17.	Nachsteuerung der magnetischen Induktion	162
4.18.	Teilchenpakete im Beschleuniger	163
4.19.	LHC Layout	164

4.20.	Ionisationskammer: Funktionsweise und Ausgangspuls	165
4.21.	Gas-Ionisationsbereiche	166
4.22.	Photozelle und Photomultiplier	167
4.23.	Szintillationsdetektor: Aufbau	167
4.24.	Spektrum eines Szintillators	168
4.25.	Detektionslimits	169
4.26.	Schema der p+nn+-Fotodiode	169
4.27.	Cerenkov-Effekt	170
4.28.	Berechnung Energie	171
4.29.	Streamer-Kammer	173
4.30.	Mehrdräht-Funkenkammer	174
4.31.	Messung des π^+ -Zerfalls (nach O. Chamberlain u. a. [Cha+50] und W. Demtröder [Dem10].	174
4.32.	Zerfall des Pi-Plus	175
6.1.	Berechnung eines Streuquerschnittes	189
6.2.	Differenzieller Streuquerschnitt	190
6.3.	Aufbau eines Streuversuches	191
6.4.	Wellennatur der Streuung	192
6.5.	Elektronenstreuung im Schwerpunktssystem	194
6.6.	Berechnung der Hofstadter-Streuung	198
6.7.	Formfaktoren verschiedener Ladungsverteilungen	199
6.8.	Verlauf der Streuamplitude der Rutherford-Streuung	200
6.9.	Rutherford- und Mott-Streuung	201
6.10.	Streuung von Bosonen und Fermionen	201
6.11.	Comptoneffekt bei verschiedenen Streuwinkeln	203
6.12.	Paarerzeugung nach Dirac	204
6.13.	Paarvernichtung nach Dirac	205
6.14.	Dominante Streuprozesse	205
6.15.	Streuquerschnitte in Pb	206
7.1.	Verluste beim Durchgang durch Materie	208
7.2.	Streuung von Neutronen an Urankernen	209
8.1.	Rutherfords Streuversuch	212
8.2.	Streuung bei unterschiedlichen Streuparametern	213
8.3.	Coulomb-Streuung an Blei und Gold	215
8.4.	Ladungsdichteverteilung in Kernen	216
8.5.	Fit der Ladungsdichteverteilung bei Ca	217
8.6.	Iterative Methoden	218
8.7.	Streuung von Elektronen an Atomkernen nach Hofstadter	219
8.8.	Streumessung mit Beugung	220
8.9.	Streuung von Elektronen an O	221
8.10.	Definition der Streuebene	227
8.11.	Massedichteverteilung	230
8.12.	Bindungsenergie pro Nukleon: Experiment und Tröpfchenmodell .	234
8.13.	Woods-Saxon-Potential	239
8.14.	Kastenpotential für Neutronen und Protonen	240
8.15.	Vergleich der Potentiale von Neutronen und Protonen	240

8.16.	Nukleonenaufbau der leichten Kerne	241
8.17.	Energie des ersten angeregten Zustandes	242
8.18.	Separationsenergie	247
8.19.	Paarenergie eines Neutronenpaars	248
8.20.	Stabile Isotope	248
8.21.	Vergleich der Kernmodelle	249
8.22.	Bindungsenergie von Kernen	251
8.23.	Bindungsenergie von Kernen, leichte Kerne	251
8.24.	Mittlere Bindungsenergie	252
8.25.	Stabilste Kerne	252
8.26.	Nuklidkarte	253
8.27.	Bezeichnungen in einem Rotationsellipsoid	253
8.28.	Definition der Integrationsfläche	254
8.29.	Definition der Integrationsfläche	255
8.30.	Kernspins	258
8.31.	Messung des gyromagnetischen Verhältnisses nach Rabi	259
8.32.	Messung des magnetischen Moments des Neutrons	260
8.33.	Prinzip der Magnetresonanzmessung	262
9.1.	Lage der Minima nach Bethe-Weizsäcker	270
9.2.	Stabilitätsbereiche	270
9.3.	Stabile Kerne	271
10.1.	Energielandschaft beim Alpha-Zerfall	279
10.2.	Bahnen von α -Teilchen	280
10.3.	α -Zerfall von Fr	281
10.4.	Geiger-Nuttall-Darstellung	283
10.5.	Alpha-Zerfall	283
10.6.	Gamow-Theorie des α -Zerfalls	285
10.7.	Gamma-Zerfall	286
10.8.	γ -Spektrum	287
10.9.	Statistische Gewichte S(L) für Multipolübergänge	290
10.10.	beta-Spektrums bei innerer Konversion	291
10.11.	Isomere und Oktupolübergang	292
10.12.	Oktupolzerfall: Niveauschema	293
10.13.	β -Zerfall	294
10.14.	β -Spektrum von $^{32}_{15}\text{P}$ nach Lyman	295
10.15.	Nachweis des Antineutrinos	296
10.16.	Umwandlung von Neutronen in Protonen und umgekehrt	297
10.17.	Entwicklung der Neutronenlebensdauer	298
10.18.	Fermi-Kurie-Diagramm	301
10.19.	Fermi-Kurie-Diagramm: Hohe Energien	301
10.20.	Neutrinomasse Theoriekurve	302
10.21.	K-Einfang	303
10.22.	Zerfallsreihen von Uran nach Radium und Actinium	305
10.23.	Zerfallsreihen von Uran nach Thorium und Neptunium	306
11.1.	Höhenstrahlung auf der Erde	308
11.2.	Dosisleistung in der Nähe eines KKWs	309

11.3.	Aufbau eines Dosimeters	310
11.4.	Elektronisches Dosimeter	311
11.5.	Radiojodaufnahme der Schilddrüse	312
11.6.	PET: Positronen-Emissions-Tomographie	313
11.7.	Suche nach wenigen Atomen	314
11.8.	Altersbestimmung	315
11.9.	C ₁₄ -Methode	316
11.10.	Altersbestimmung von Gesteinen	317
12.1.	Bereich möglicher exothermer Kernspaltung	321
12.2.	Energieverteilung der Spaltneutronen bei der Kernspaltung	323
12.3.	Spaltquerschnitte mittelschwerer Kerne	324
12.4.	Neutronenspektrum bei stossinduzierter Kernreaktion	325
12.5.	Aktivierung und Aktivität	327
12.6.	Energiebeiträge pro Nukleon	330
12.7.	Massenverteilung der Spaltprodukte bei der Kernspaltung	333
13.1.	Chicago Pile 1, Stapelversuch	337
13.2.	Schichtung des Chicago Pile-1	338
13.3.	Stagg Field Reaktor	338
13.4.	Vergleich der Streuquerschnitte von U-235 mit U-238	339
13.5.	Absorptionsquerschnitt von Bor für Neutronen	340
13.6.	Kontrollstäbe	341
13.7.	Brennstäbe im Kernreaktor	341
13.8.	Impulsantwort der Spaltneutronen	344
13.9.	Druckwasserreaktor	345
13.10.	Siedewasserreaktor	346
13.11.	Reaktorgebäude	347
13.12.	Containment eines Reaktors	348
13.13.	Mark-I Siedewasserreaktor	348
13.14.	Graphitmoderierter Reaktor RBMK	349
13.15.	Brutreaktor	350
13.16.	kinetische Energie und Coulombbarriere	351
13.17.	Tokamak: Asdex Upgrade 2	352
13.18.	Tokamak des ITER-Projektes: Größenvergleich	352
13.19.	Der Tokamak des ITER-Projektes	353
13.20.	ITER-Tokamak im Gebäude	353
13.21.	Magnetfelder im Tokamak	354
13.22.	Prinzip des Stellarators	355
13.23.	Roadmap Kernfusion	355
13.24.	Abfallzyklus der Kernspaltung	356
13.25.	Modell eines Castors	357
13.26.	Restwärmleistung Brennelemente	358
14.1.	Sonne im sichtbaren Licht und Oberfläche	360
14.2.	Sonnenflecken im H _α -Spektrum	361
14.3.	Sonnenfleckenzahl als Funktion der Zeit	361
14.4.	Historische Sonnenfleckenzahl nach der NASA	362
14.5.	Historische Sonnenfleckenzahl nach der NASA	362

14.6. Historische Sonnenfleckenzahl nach der NASA	363
14.7. Sonnenfleckenzahl über 11000 Jahre	363
14.8. Schwankung der Zahl der Sonnenflecken	364
14.9. Bewegung der Sonnenflecken und Sonnenfleckenzahl	364
14.10. Struktur von Sonnenflecken	365
14.11. Sonnenflecken und Magnetfelder	365
14.12. Differenzielle Rotation der Sonne	366
14.13. Messung von Magnetfeldern mit dem Zeeman-Effekt	367
14.14. Nicols-Prisma	367
14.15. Messung der Richtung von Magnetfeldern	368
14.16. Magnetfelder und Sonnenfleckenaare	368
14.17. Magnetfelder und Sonnenfleckenaare	369
14.18. Magnetfelder und Sonnenfleckenaare: Koronaschlaufen	369
14.19. Magnetfelder und Sonnenfleckenaare: G-Band	370
14.20. Protuberanzen	370
14.21. Magnetfelder und differenzielle Rotation	371
14.22. Stromfläche des Sonnenmagnetfeldes	372
14.23. Sonne, gesehen von der TRACE-Sonde	373
14.24. Sonnenkorona	374
14.25. Sonnenkorona mit Kometen	374
14.26. Details der Sonnenkorona	375
14.27. Radar-Doppleraufnahme der Sonnenoberfläche	376
14.28. Radar-Doppleraufnahme der Sonnenoberfläche, Ausschnitt	376
14.29. Schallwellen in der Sonne	377
14.30. Ausbreitung seismischer Moden	377
14.31. Frequenzspektrum der Helioseismizität	378
14.32. Schwingungsmodus der Sonne	378
14.33. Querschnitt durch die Sonne mit Transportmechanismen	382
14.34. Temperatur und Druck in der Sonne	383
14.35. Luminosität in der Sonne	384
14.36. Absorptionslinien in der Sonnenatmosphäre	384
14.37. Äussere Atmosphäre der Sonne	385
14.38. CNO-Zyklus in der Sonne	390
14.39. Energieproduktion der p-p- und CNO-Prozesse	391
14.40. Temperaturabhängigkeit der Raten (p-p- und CNO-Prozesse)	391
14.41. Elementhäufigkeit in der Sonne	392
15.1. Feynman-Diagramme: Koordinatensystem	398
15.2. Feynman-Diagramme: Weltlinien	399
15.3. Feynman-Diagramm: Vertex	399
15.4. Feynman-Diagramm: Innere Linie	400
15.5. Feynman-Diagramm: zweite Orientierung	400
15.6. Feynman-Diagramm ohne Achsen	401
15.7. Feynman-Diagramm: Teilchentypen	401
15.8. Feynman-Diagramme höherer Ordnung	402
15.9. Emission im Feynmanbild	403
15.10. Absorption im Feynmanbild	403
15.11. Streuung im Feynmanbild	404

15.12. Comptoneffekt im Feynmanbild	405
15.13. Wellenfunktion eines Photons vereinfacht im Impulsraum	406
15.14. Wellenfunktion eines Elektrons im Impulsraum	406
15.15. Wechselwirkung Photon mit Elektron	407
15.16. Summe bis zur ersten Ordnung	407
15.17. Amplitudenquadrat bis zur ersten Ordnung	408
15.18. Feynman-Diagramme berechnen: Grafik	410
15.19. Feynman-Diagramme berechnen: massive Austauschteilchen	410
15.20. Stöße von Elektronen und Positronen	411
15.21. Nachweis zweier Neutrinosorten	414
 16.1. SO(2) und der Tangentialraum	423
16.2. Mesonennonetts	433
16.3. Streuung p+p -> Hadronen	435
16.4. Stärke und Reichweite fundamentaler Kräfte	436
16.5. Baryonenoktett	438
16.6. Quarkmodell für Baryonen	439
16.7. Baryonemultiplett bis Charm	439
16.8. Klassifizierung von Hadronen	444
16.9. Spektrum des Psí'	445
16.10. Mesonen-Supermultiplett	446
16.11. Massen von Quarks und Leptonen	449
 17.1. Rosenkäfer im zirkular polarisierten Licht	453
17.2. DNA als Symmetriebrechung	454
17.3. Definition der Parität	454
17.4. Wu-Experiment zur Paritätsverletzung	457
17.5. Paritätstransformation bei Co-Kern	458
17.6. Prinzip des Wu-Experiments	458
17.7. Feynman-Diagramme des Kaon-Zerfalls	464
17.8. Semileptonischer KL0-Zerfall	465
17.9. Neutronenzerfall	468
17.10. Tau-Zerfall und schwacher geladener Strom	469
17.11. Tau-Zerfall, 2. Möglichkeit	469
17.12. Schwacher neutraler Strom	470
17.13. Streuung eines Neutrinos an einem Proton	470
17.14. Streuung eines Neutrinos an einem Myon	471
 18.1. Elementarteilchen im Standardmodell	476
18.2. Teilchen und Wechselwirkungen	478
18.3. Farbe in der Quark-Gluon-Wechselwirkung	479
18.4. Farbladung	480
18.5. Quark-Gluon-Wechselwirkung	480
18.6. Emission eines Higgs-Teilchens	481
18.7. Potentielle Energie des Higgs-Feldes	482
 19.1. Lichtablenkung durch Massen	489
19.2. Gravitationslinse	490
19.3. Berechnung der Ablenkung von Licht	491

19.4.	Rotverschiebung im Gravitationsfeld	493
19.5.	Lichtgeschwindigkeit in der Nähe des Ereignishorizontes	496
19.6.	Berechnung des Gravitationslinseneffektes	499
19.7.	Gravitationslinse	502
19.8.	Dunkler brauner Zwerg wird durch Microlensing sichtbar	502
19.9.	LIGO Gravitationswelleninterferometer	503
19.10.	Durch Gravitationswellen beobachtete Ereignisse	504
20.1.	Masse und Leuchtkraft	505
20.2.	Anzahl angeregt H	509
20.3.	Saha-Gleichung für Wasserstoff	510
20.4.	Stärke der Balmer-Linien	511
20.5.	Linienstärke und Spektralklassen	511
20.6.	Sternspektren auf Kameras	512
20.7.	Orion-Nebel M42, eine Kinderstube von Sternen	514
20.8.	Kontrahierende Gaswolke	516
20.9.	Temperatur beim Gravitationskollaps	516
20.10.	Bild kollabierender Gaswolken	517
20.11.	Kollabierende Gaswolke in Galaxie	517
20.12.	Farbindex und Magnitude	519
20.13.	Farbindex und Magnitude bei M13	520
20.14.	Hertzsprung-Russell-Diagramm	521
20.15.	Temperatur und Masse	521
20.16.	Bereich instabiler Sterne	522
20.17.	Weg kollabierender Gaswolken	524
20.18.	Hauptreihenentwicklung	524
20.19.	Hauptreihenentwicklung: Mittlere Masse	525
20.20.	Hauptreihenentwicklung: Grosse Masse	525
20.21.	Sternzustand nach Verbrauch des Wasserstoffvorrates	526
20.22.	Nach-Hauptreihenentwicklung	526
20.23.	Entwicklung bei mittlerer Sternmasse	527
20.24.	Ringnebel aus der Leier	528
20.25.	Zwiebelschalenstruktur eines massereichen Sterns	529
20.26.	Lichtkurven von Supernovae	530
20.27.	Supernova-Reste (Krebs-Nebel, Explosion 1054)	531
20.28.	Supernova 1987A	531
20.29.	Akkretionsscheibe einer Zwergnova	532
20.30.	Helligkeitskurve einer Zwergnova	533
20.31.	Helligkeitsverlauf einer klassischen Nova	534
20.32.	Überreste einer klassischen Nova	534
20.33.	Lage der weissen Zwerge im HR-Diagramm	537
20.34.	Querschnitt durch einen Neutronenstern	541
20.35.	Rotationsperioden von Pulsaren	542
20.36.	Drehimpuls und Masse von Sternen	544
20.37.	Temperaturverteilung bei Planetenentstehung	545
20.38.	Masse und Distanz	546
20.39.	Beobachtung Radialgeschwindigkeit	549
20.40.	Skizze Messung der Radialgeschwindigkeit	549

20.41. Radialgeschwindigkeitsmethode	550
20.42. Beobachtung Abschattung	551
20.43. Abschattungsmethode	551
20.44. Micro-Lensing	552
20.45. Microlensing mit 2 Teleskopen	553
20.46. Microlensing von Stern und Planet	554
20.47. Direkte Abbildung	554
20.48. Vergleich der Methoden	555
20.49. Masse und Temperatur von Exoplaneten	556
20.50. [Schematische Darstellung visueller Doppelsterne	557
20.51. Astrometrische Doppelsterne	557
20.52. Skizze spektroskopischer Doppelsterne	558
20.53. Photometrische Doppelsterne	559
20.54. Anzahl Sterne in der Milchstrasse	560
20.55. Sterndichte in der Milchstrasse	561
20.56. Geschwindigkeitsmessung in der Galaxis	561
20.57. Galaktische Ebene anhand von M 104	565
20.58. Andromeda-Galaxie M 31	565
20.59. Galaxie NGC 1275 im Galaxienhaufen A426 im Perseus	566
20.60. Lokale Umgebung der Sonne	567
20.61. Lokale Umgebung der Sonne	568
20.62. Schematische Struktur der Milchstrasse	569
20.63. Struktur der Milchstrasse	570
20.64. Seitenansicht der Milchstrasse	570
20.65. Begleitgalaxien der Milchstrasse	571
20.66. Kugelsternhaufen M13	572
20.67. Infrarotbild des Zentrums der Milchstrasse	573
20.68. Bild des Zentrums der Milchstrasse	574
20.69. Umlaufbahnen um das galaktische Zentrum	574
20.70. Masse im Zentrum der Milchstrasse	575
20.71. Rotationskurven von Galaxien	576
20.72. Rotationsgeschwindigkeit und Massendichte	577
20.73. Rotationsgeschwindigkeit und Flächenmassendichte	578
20.74. NGC 3596 - sichtbar und Radiowellen	579
20.75. Rotationsgeschwindigkeit der Milchstrasse	579
20.76. Dichte sichtbarer und dunkler Materie	580
21.1. Olbers' Paradox	581
21.2. Skizze zur Berechnung von Olbers' Paradox	582
21.3. Einsteins statisches sphärisch symmetrisches Universum	583
21.4. Modell Expansion im Universum	584
21.5. Ausdehnungsbewegung	584
21.6. Verteilung von Galaxien	587
21.7. Position der Erde im Universum	588
21.8. Logarithmische Darstellung des Universums	589
21.9. Struktur des Universums auf grossen Skalen	589
21.10. Andromeda-Galaxie	590
21.11. Galaxienhaufen: Perseus-Haufen	590

21.12. Elliptische Zwerggalaxie M32	591
21.13. Klassifikation der Galaxien nach Hubble	591
21.14. Modell des gekrümmten Raumes	592
21.15. Quasar 3C273 sichtbar und Röntgenlicht	596
21.16. Quasar 3C273 Overlay	596
21.17. Dichte von Quasaren	597
21.18. Quasar der Galaxie NGC 4261	598
21.19. Galaxie NGC 4151 mit Quasar	598
21.20. Karte der aktiven Galaxien	599
21.21. Lokale Gruppe	600
21.22. Nachbarschaft der lokalen Gruppe	601
21.23. Coma-Galaxienhaufen	602
21.24. Universum Modelle und dunkle Energie	604
21.25. Universum Modelle und dunkle Energie, Abweichung	604
21.26. Massendichte und Skalenfaktor	606
21.27. Volumen und Fluchtgeschwindigkeit von Galaxien	607
21.28. Zeitabhängigkeit des Skalenparameters	608
21.29. Zeitskalen in der Astronomie	608
21.30. Häufigkeit der leichten Elemente	610
21.31. Epochen im Universum	610
21.32. Vergleich Standardmodell und Inflationsmodell	611
21.33. Freiheitsgrade im frühen Universum	613
21.34. Vereinheitlichungen	614
B.1. Klassische Berechnung der Streuung	619
B.2. Impulsübertrag	621
B.3. Spektralnamen nach Fraunhofer	622
C.1. Sphärisches Dreieck auf der Einheitskugel	634
C.2. Das astronomische Dreieck	639

Tabellenverzeichnis

2.1.	Auflösung typischer Teleskope	38
2.2.	Distanzen und Magnituden	80
2.3.	Beispiele von Distanzen und Magnituden	81
3.1.	Erdähnliche Planeten	102
3.2.	Wirkung von auftreffenden Objekten auf die Erde	119
3.3.	Riesenplaneten	123
3.4.	Einige Zwergeplaneten	131
8.1.	Begriffe aus der Atomphysik	211
8.2.	Isospinzustände bei zwei Nukleonen	224
8.3.	Masse der Nukleonen	231
8.4.	Magische Zahlen Elektronen	242
8.5.	Magische Zahlen Kern	243
8.6.	Gefüllte Schalen im Kastenmodell	244
8.7.	Magische Zahlen im Kastenmodell	244
8.8.	Entartete Niveaus im harmonischen Oszillator	245
8.9.	Entartungen im harmonischen Oszillator	245
8.10.	Magische Zahlen im Kastenmodell	246
8.11.	Kerne und Kernmassen	250
8.12.	Kennzahlen von Nukleonen und Elektron	261
8.13.	Starke Wechselwirkung Austauschwechselwirkung	267
9.1.	Radioaktive Kerne in der Natur	274
10.1.	Multipolmoden des elektromagnetischen Feldes	289
10.2.	Übergangswahrscheinlichkeiten von Multipolübergängen	290
11.1.	Gewichtsfaktoren für ionisierende Strahlung	307
11.2.	Radioaktivität in der Umwelt	308
11.3.	Arten der Strahlenbelastung	310
12.1.	Spaltbarkeitsparameter	321
12.2.	Compoundkerne bei der Kernspaltung	323
12.3.	Energiebilanz einer Spaltreaktion	333
13.1.	Kritische Massen von U-235 und Pu-239	343
14.1.	p-p-Zyklus auf der Sonne	389
15.1.	Leptonenfamilien	414
16.1.	Isospin,Baryonenzahl und Ladung der Delta	420
16.2.	Isospin,Baryonenzahl und Ladung der rho	421

16.3.	Wellenfunktionen bei der Bildung des Delta	422
16.4.	Dimensionen von Lie-Gruppen	427
16.5.	Tabelle einiger pseudoskalarer Mesonen	437
16.6.	Tabelle einiger Vektormesonen	437
16.7.	Quarkfamilien	448
17.1.	Stabile Teilchen	459
17.2.	Symmetrieoperationen und Messgrößen	466
18.1.	Erhaltungsgrößen und Wechselwirkungen	475
18.2.	Fermionen unter den Elementarteilchen	476
18.3.	Grosse vereinheitlichte Theorien	477
20.1.	Klassifikation von Sterntypen	507
20.2.	Spektraltypen	513
20.3.	Definition von U, V und B	513
20.4.	Mindestmassen für Gravitationskollaps	515
20.5.	Massenbereiche und Prozesse in Sternen	523
20.6.	Phasenübergänge in Neutronensternen	540
21.1.	Objekte im Universum	586
21.2.	Zeittafel des Universums	609
21.3.	Elementarteilchen im Standardmodell	612
B.1.	Namen der Fraunhoferlinien	623

Personenregister

Conny Aerts Aerts, Conny Clara, 26. 1. 1966 (Brasschaat, Belgien),

https://de.wikipedia.org/wiki/Conny_Aerts

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Conny_Aerts . 523

Hannes Alfvén Alfvén, Hannes Olof Gösta, 13. 6. 1911 (Norrköping, Schweden)

bis 2. 4. 1995 (Djursholm, Schweden),

https://de.wikipedia.org/wiki/Hannes_Alfv%C3%A9n

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Hannes_Alfv%C3%A9n . 387

Luis Walter Alvarez Alvarez, Luis Walter, 30. 5. 1908 (San Francisco, California,

USA) bis 1. 9. 1988 (Berkeley, California, USA),

https://de.wikipedia.org/wiki/Luis_Walter_Alvarez

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Luis_Walter_Alvarez . 152

Anaxagoras Anaxagoras (Ἀναξαγόρας), 499 v. Chr. (Klazemonai, heute Türkei)

bis etwa 428 v. Chr. (Lampsakos, heute europäischer Teil der Türkei),

<https://de.wikipedia.org/wiki/Anaxagoras> . 360

Charles Anderson Anderson, David «Charles», 3. 9. 1905 (New York City, New

York, USA) bis 11. 1. 1901 (San Marino, California, USA),

https://de.wikipedia.org/wiki/Carl_David_Anderson

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_David_Anderson . 411

Aristarchos von Samos Aristarchos von Samos (Αρίσταρχος ὁ Σάμιος), 310 v. Chr.

(Samos, Griechenland) bis etwa 230 v. Chr.,

https://de.wikipedia.org/wiki/Aristarchos_von_Samos . 88, 90

Aristoteles Aristoteles (Αριστοτέλης), 384 v. Chr. (Stagira, Griechenland) bis et-

wa 322 v. Chr. (Chalkis, Euböa, Griechenland),

<https://de.wikipedia.org/wiki/Aristoteles> . 88

Avicenna Abū ʻAlī al-Husain ibn Abd Allāh ibn Sīnā (ابن سينا) in persisch,

أبو علي الحسين بن عبد الله ابن سينا in arabisch), kurz vor 980 (Afschana bei Buchara,

heute Usbekistan) bis 1037 (Hamadan, Iran),

<https://de.wikipedia.org/wiki/Avicenna>

oder ausführlicher

<https://en.wikipedia.org/wiki/Avicenna> . 360

Walter Baade Baade, Wilhelm Heinrich Walter, 24. 3. 1893 (Schröttinghausen,

Deutschland) bis 25. 6. 1960 (Göttingen, Deutschland)

https://de.wikipedia.org/wiki/Walter_Baade
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Walter_Baade . 539

Neta Bahcall Bahcall, Neta Assaf (נֵטָא אַסָּף בָּהְכָּל), 1942 (Israel)
https://en.wikipedia.org/wiki/Neta_Bahcall . 602

Barry Barish Barish, Barry Clark, 27. 1. 1936 (Omaha, Nebraska, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Barry_Barish
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Barry_Barish . 503

Henri Becquerel Becquerel, Antoine Henri, 15. 12. 1852 (Paris, Frankreich), bis 25. 8. 1908 (Le Croisic, Département Loire-Atlantique, Frankreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Henri_Becquerel
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Becquerel . 307

Jocelyn Bell Burnell Bell Burnell, Susan Jocelyn, 15. 7. 1943 (Lurgan, Northern Ireland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Jocelyn_Bell_Burnell
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Jocelyn_Bell_Burnell . 539, 542

Friedrich Bessel Bessel, Friedrich Wilhelm, 22. 7. 1784 (Minden, Minden-Ravensberg, Deutschland), bis 17. 3. 1846 (Königsberg, Preussen, heute Russland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Wilhelm_Bessel . 536

Hans Bethe Bethe, Hans Albrecht, 2. 7. 1906 (Strassburg, Elsass, heute Frankreich), bis 6. 3. 2005 (Ithaca, New York, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Hans_Bethe
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Hans_Bethe . 207, 234, 270, 320, 330, 337

Erika Böhm-Vitense Böhm-Vitense, Erika, 3. 6. 1923 (Curau, Schleswig-Holstein, Deutschland), bis 21. 1. 2017
https://de.wikipedia.org/wiki/Erika_Böhm-Vitense
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Erika_Böhm-Vitense . 382

Aage Bohr Bohr, Aage Niels, 19. 6. 1922 (Kopenhagen, Dänemark), bis 8. 9. 2009 (Kopenhagen, Dänemark)
https://de.wikipedia.org/wiki/Aage_Niels_Bohr
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Aage_Bohr . 249

Niels Bohr Bohr, Niels Henrik David, 7. 10. 1885 (Kopenhagen, Dänemark), bis 18. 11. 1962 (Kopenhagen, Dänemark)
https://de.wikipedia.org/wiki/Niels_Bohr
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Niels_Bohr . 212, 327

Ludwig Boltzmann Boltzmann, Ludwig Eduard, 10. 2. 1844 (Wien, Österreich), bis 5. 9. 1906 (Duino, Österreich-Ungarn, heute Italien)
https://de.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Boltzmann . 115, 536, 545

Max Born Born, Max, 11. 12. 1882 (Breslau, Preussen, jetzt Polen), bis 5. 1. 1970 (Göttingen, Deutschland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Max_Born
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Born . 196

Satyendranath Bose Bose, Satyendranath (সত্যেন্দ্রনাথ বসু), 1. 1. 1894 (Kalkutta, Britisch-Indien, jetzt Indien), bis 4. 2. 1974 (Kalkutta, Britisch-Indien, jetzt Indien)
https://de.wikipedia.org/wiki/Satyendranath_Bose
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/Satyendra_Nath_Bose . 477

James Bradley Bradley, James, 1692 (Sherbourne, Gloucestershire, England) bis 13. 7. 1762 (Chalford, Gloucestershire, England),
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Bradley . 41

Tycho Brahe Brahe, Tycho auch Brahe, Tyge Ottesen, 1692 (Schloss Knutstorp, Schonen, Dänemark, heute Schweden) bis 24. 10. 1601 (Benátky bei Prag, Königreich Böhmen, heute Tschechien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Tycho_Brahe . 87, 88

Louis-Victor de Broglie Broglie, Louis-Victor Pierre Raymond de, 15. 8. 1892 (Dieppe, Normandie, Frankreich), bis 19. 3. 1987 (Louveciennes, Département Yvelines, Frankreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Louis_de_Broglie
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Louis_de_Broglie . 195, 218

Annie Cannon Cannon, Annie Jump, 11. 12. 1863 (Dover, Delaware, U.S.A.) bis 13. 4. 1941 (Cambridge, Massachusetts, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Annie_Jump_Cannon
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Annie_Jump_Cannon . 506, 507, 518–520

Pavel Alexeevič Čerenkov Čerenkov, Pavel Alexeevič auch Tscherenkov, Pawel Alexejewitsch (Черенков, Павел Алексеевич), 18. 7. 1904 (Nowaja Tschi-gla, Russland) bis 6. 1. 1990 (Moskau, Russland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Pawel_Alexejewitsch_Tscherenkov . 170

James Chadwick Jadwick, James, 20. 10. 1891 (Bollington, Cheshire East, England), bis 24. 7. 1974 (Cambridge, England)
https://de.wikipedia.org/wiki/James_Chadwick
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Chadwick . 208, 216

Subrahmanyan Chandrasekhar Chandrasekhar, Subrahmanyan, 19. 10. 1910 (Lahore, Indien), bis 21. 8. 1995 (Chicago, Illinois, USA)

https://de.wikipedia.org/wiki/Subrahmanyan_Chandrasekhar

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Subrahmanyan_Chandrasekhar . 538

Rudolf Clausius Clausius, Rudolf, 2. 1. 1822 (Koszalin, auch Köslin, Westpommern, heute Polen) bis 24. 8. 1888 (Bonn, Deutschland),

https://de.wikipedia.org/wiki/Rudolf_Clausius. 96

Rudolf Clebsch Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred, 19. 1. 1833 (Königsberg, Preussen, heute Russland) bis 7. 11. 1872 (Göttingen, Deutschland),

https://de.wikipedia.org/wiki/Alfred_Clebsch . 443

John Cockcroft Cockcroft, John Douglas, 27. 5. 1897 (Todmorden, England) bis 18. 9. 1967 (Cambridge, England),

https://de.wikipedia.org/wiki/John_Cockcroft

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/John_Cockcroft . 324

Arthur Compton Compton, Arthur Holly, 10. 9. 1892 (Wooster, Ohio, USA) bis 15. 3. 1962 (Berkeley, California, USA),

https://de.wikipedia.org/wiki/Arthur_Holly_Compton . 202

Charles Augustin de Coulomb de Coulomb, Charles Augustin, 14. 6. 1736 (Angoulême, Frankreich) bis 23. 8. 1806 (Paris, Frankreich),

https://de.wikipedia.org/wiki/Charles_Augustin_de_Coulomb

oder ausführlicher

https://fr.wikipedia.org/wiki/Charles-Augustin_Coulomb . 193, 197, 212, 284

Ernest D. Courant Courant, Ernest David, 26. 3. 1920 (Göttingen, Deutschland) bis 21. 4. 2020 (Ann Arbor, Michigan, USA),

https://de.wikipedia.org/wiki/Ernest_D._Courant . 158

Paul Dirac Dirac, Paul Adrien Maurice, 8. 8. 1902 (Bristol, England), bis 20. 10. 1984 (Tallahassee, Florida, USA)

https://de.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac . 181, 204, 205, 275, 397, 411, 448

Arthur Eddington Eddington, Sir Arthur Stanley, 28. 12. 1882 (Kendal, England), bis 22. 11. 1944 (Cambridge, England)

https://de.wikipedia.org/wiki/Arthur_Stanley_Eddington

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Eddington . 583

Albert Einstein Einstein, Albert, 14. 3. 1879. (Ulm, Deutschland) bis 18. 4. 1955 (Princeton, New Jersey, USA),

https://de.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein . 87, 92, 180, 207, 337, 396, 397, 489, 494, 495, 583, 603, 606

François Englert Englert, François, 6. 11. 1932 (Etterbeek, Belgien),
https://de.wikipedia.org/wiki/François_Englert
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/François_Englert. 481

Loránd Ágoston Eötvös Eötvös, Loránd Ágoston, 27. 7. 1848. (Buda, Ungarn)
bis 8. 4. 1919 (Budapest, Ungarn),
https://de.wikipedia.org/wiki/Loránd_Eötvös. 100

Eudoxos von Knidos Eudoxos von Knidos (Εὔδοξος), 397-390 v. Chr. (Knidos, Kleinasien, heute Türkei) bis nach 345-338 v. Chr. (Knidos, Kleinasien, heute Türkei),
https://de.wikipedia.org/wiki/Eudoxos_von_Knidos. 88, 89

David Fabricius Fabricius, David, 7. 3. 1564 (Esens, Niedersachsen, Deutschland)
bis 7. 5. 1617 (Osteel, Niedersachsen, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/David_Fabricius. 528

Johannes Fabricius Fabricius, Johannes, 8. 1. 1597 (Resterhafen, Niedersachsen, Deutschland) bis 10. 1. 1617 (Dresden, Sachsen, Deutschland),
[https://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Fabricius_\(Astronom\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Fabricius_(Astronom)). 360

Charles Fabry Fabry, Maurice Paul Auguste Charles, 11. 6. 1867 (Marseille, Frankreich) bis 11. 12. 1945 (Paris, Frankreich),
https://de.wikipedia.org/wiki/Charles_Fabry. 57

Nettie Farrar Farrar, Nettie A.. 507, 518

Pierre de Fermat Fermat, Pierre de, 31. 10. - 6. 12. 1607 (Beaumont-de-Lomagne, Frankreich) bis 12. 1. 1665 (Castres, Frankreich),
https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat. 116

Enrico Fermi Fermi, Enrico, 29. 9. 1901 (Rom, Italien), bis 28. 11. 1954 (Chicago, Illinois, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi. 216, 229, 232, 235, 237, 247, 276, 299, 301, 337, 338, 476, 611

Richard Feynman Feynman, Richard Phillips, 11. 5. 1918 (Queens, New York City, New York, USA), bis 15. 2. 1988 (Los Angeles, California, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman. 186, 402–405, 408–410

Williamina Fleming Fleming, Williamina Paton Stevens, 15. 5. 1857 (Dundee, Schottland) bis 21. 5. 1911 (Boston, Massachusetts, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Williamina_Fleming
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Williamina_Fleming. 507, 518

Ralph Fowler Fowler, Ralph Howard, 17. 1. 1889 (Fedsden, Essex, England), bis 28. 7. 1944 (Cambridge, England)
https://de.wikipedia.org/wiki/Ralph_Howard_Fowler
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Ralph_H._Fowler . 411

Joseph Fraunhofer Fraunhofer, Joseph von, 6. 3. 1787 (Straubing, Deutschland), bis 7. 6. 1826 (München, Deutschland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Joseph_von_Fraunhofer . 370, 623

Otto Frisch Frisch, Otto Robert, 1. 10. 1904 (Wien, Österreich) bis 22. 9. 1979 (Cambridge, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Frisch
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Otto_Robert_Frisch . 322, 337

Caroline Furness Furness, Caroline Ellen, 24. 06. 1896 (Cleveland, Ohio, U.S.A.) bis 9. 2. 1936 (New York, New York, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Caroline_Ellen_Furness
oder weniger ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Caroline_Furness . 528

Galileo Galilei Galilei, Galileo, 15. 2. 1564 (Pisa, Italien) bis 29. 12. 1642 (Arcetri bei Florenz, Italien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei . 91, 125, 360

Johann Gottfried Galle Galle, Johann Gottfried, 9. 6. 1812 (Radis, Wittenberg, Deutschland) bis 10. 7. 1910 (Potsdam, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Gottfried_Galle
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Gottfried_Galle . 129

George Gamow Gamow, George Anthony (Гамов, Георгий Антонович), 4. 3. 1904 (Odessa, Russland, heute Ukraine) bis 19. 8. 1968 (Boulder, Colorado, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/George_Gamow
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/George_Gamow . 284, 285

Hans Geiger Geiger, Johannes Wilhelm «Hansfrqq, 30. 9. 1882 (Neustadt an der Haardt, Deutschland) bis 24. 9. 1945 (Potsdam, Deutschland),
[https://de.wikipedia.org/wiki/Hans_Geiger_\(Physiker\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Hans_Geiger_(Physiker))
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/Hans_Geiger . 166, 282, 283

Murray Gell-Mann Gell-Mann, Murray, 15. 9. 1929 (New York City, New York, USA) bis 24. 5. 2019 (Santa Fe, New Mexico, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Murray_Gell-Mann
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Murray_Gell-Mann . 433, 446

Reinhard Genzel Genzel, Reinhard, 24. 3. 1952 (Bad Homburg vor der Höhe, Deutschland),

https://de.wikipedia.org/wiki/Reinhard_Genzel

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Reinhard_Genzel . 572

Walther Gerlach Gerlach, Walther, 1. 8. 1889 (Biebrich am Rhein), bis 10. 8. 1979 (München, Deutschland)

https://de.wikipedia.org/wiki/Walther_Gerlach

oder

https://en.wikipedia.org/wiki/Walther_Gerlach . 180

Andrea Ghez Ghez, Andrea M., 16. 6. 1965 (New York City, New York, USA),

https://de.wikipedia.org/wiki/Andrea_Ghez

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Andrea_M._Ghez . 572

Sheldon Lee Glashow Glashow, Sheldon Lee, 5. 12. 1932 (New York City, New York, USA),

https://de.wikipedia.org/wiki/Sheldon_Lee_Glashow

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Sheldon_Lee_Glashow . 486

Maria Goeppert-Mayer Goeppert-Mayer, Maria Gertrude, 28. 6. 1906 (Kattowitz, Oberschlesien, heute Polen) bis 20. 2. 1972 (San Diego, California, USA),

https://de.wikipedia.org/wiki/Maria_Goeppert-Mayer

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Maria_Goeppert_Mayer . 246, 249

Paul Gordan Gordan, Paul Albert, 29. 4. 1837 (Breslau, Preussen, heute Polen) bis 21. 12. 1912 (Erlangen, Deutschland),

https://de.wikipedia.org/wiki/Paul_Gordan . 443

Robert Jemison Van de Graaff Graaff, Robert Jemison Van de, 20. 12. 1901 (Tuscaloosa, Alabama, USA) bis 16. 12. 1967 (Boston, Massachusetts, USA),

https://de.wikipedia.org/wiki/Robert_Jemison_Van_de_Graaff

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_J._Van_de_Graaff . 149

Louis Gray Gray, Louis Harold, 10. 11. 1905 (London, England), bis 9. 7. 1965 (Northwood, heute London, England)

https://de.wikipedia.org/wiki/Louis_Harold_Gray

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Louis_Harold_Gray . 307

Otto Hahn Hahn, Otto Emil, 8. 3. 1879 (Frankfurt am Main, Deutschland) bis 28. 7. 1986 (Göttingen, Deutschland),

https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Hahn

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Otto_Hahn . 322, 337

Robert Hanbury Brown Hanbury Brown, Robert, 31. 8. 1916 (Aruvankadu, Indien) bis 16. 1. 2002 (Andover, Hampshire, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Robert_Hanbury_Brown
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Hanbury_Brown . 66, 572

Steven Hawking Hawking, Stephen William, 8. 1. 1941 (Oxford, England) bis 14. 3. 2018 (Cambridge, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Stephen_Hawking
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Stephen_Hawking . 499

Hayashi Chūshirō Hayashi Chūshirō (林 忠四郎), 25. Juli 1920 (Kyōto; Japan) bis 28. Februar (Kyōto; Japan),
https://de.wikipedia.org/wiki/Hayashi_Ch%C5%ABshir%C5%8D oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Chushiro_Hayashi . 524

Werner Heisenberg Heisenberg, Werner Karl, 5. 12. 1901 (Würzburg, Deutschland) bis 1. 2. 1976 (München, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg . 181, 185, 197, 221, 238, 339, 417

Herakleides Pontikos Herakleides Pontikos (Ηρακλείδης ὁ Ποντικός), 390 v. Chr. (Herakleia Pontike, Griechenland) bis nach 322 v. Chr.,
https://de.wikipedia.org/wiki/Herakleides_Pontikos . 88

Friedrich Wilhelm Herschel Herschel, Friedrich Wilhelm, 15. 11. 1738 (Hannover, Deutschland) bis 25. 8. 1822 (Slough, Berkshire, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Herschel
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/William_Herschel . 128

Ejnar Hertzsprung Hertzsprung, Ejnar, 8. 10. 1873 (Frederiksberg, Dänemark) bis 21. 10. 1967 (Roskilde, Dänemark),
https://de.wikipedia.org/wiki/Ejnar_Hertzsprung
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Ejnar_Hertzsprung . 520, 537

Antony Hewish Hewish, Antony, 11. 5. 1924 (Fowey, Cornwall, England)
https://de.wikipedia.org/wiki/Antony_Hewish
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Antony_Hewish . 539, 542

Peter Higgs Higgs, Peter Ware, 29. 5. 1929 (Newcastle upon Tyne, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Peter_Higgs
oder ausführlicher
https://de.wikipedia.org/wiki/Peter_Higgs . 481, 487

William Hill Hill, George William, 3. 3. 1838 (New York City, new York, USA) bis 16. 4. 1914 (West Nyack bei New York City, New York, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/George_William_Hill
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/George_William_Hill . 548

Hipparchos von Nicäa Hipparchos von Nicäa ("Ιππαρχος"), 390 v. Chr. (Herakleia Pontike, Griechenland) bis nach 322 v. Chr.,
[https://de.wikipedia.org/wiki/Hipparchos_\(Astronom\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Hipparchos_(Astronom)) . 88

Robert Hofstadter Hofstadter, Robert, 5. 2. 1915 (New York City, New York, USA) bis 17. 11. 1990 (Stanford, California, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Robert_Hofstadter
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Hofstadter. 198, 216, 218, 219, 238

Edwin Hubble Hubble, Edwin, 20. 11. 1889 (Marshfield, Missouri, USA) bis 28. 9. 1953 (San Marino, Kalifornien, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Edwin_Hubble
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Edwin_Hubble. 85, 585, 591, 595, 605

Karl Guthe Jansky Jansky, Karl Guthe, 22. 10. 1905 (Norman, Oklahoma, USA) bis 14. 2. 1950 (Red Bank, New Jersey, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Guthe_Jansky
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Guthe_Jansky . 572

James Jeans Jeans, James Hopwood, 11. 9. 1877 (Ormskirk, Lancashire, England) bis 16. 9. 1946 (Dorking, Surrey, England)
https://de.wikipedia.org/wiki/James_Jeans
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Jeans . 514, 515, 546

Irène Joliot-Curie Joliot-Curie, Irène, 12. 9. 1897 (Paris, Frankreich), bis 17. 3. 1956 (Paris, Frankreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Irène_Joliot-Curie
oder ausführlicher
https://fr.wikipedia.org/wiki/Irène_Joliot-Curie . 326

Frédéric Joliot-Curie Joliot-Curie, Jean Frédéric, 19. 3. 1900 (Paris, Frankreich), bis 14. 8. 1958 (Paris, Frankreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Frédéric_Joliot-Curie
oder ausführlicher
https://fr.wikipedia.org/wiki/Frédéric_Joliot-Curie . 326

Johannes Kepler Kepler, Johannes auch Keppler genannt, 27.12. 1571 (Weil der Stadt, Deutschland) bis 15. 11. 1630 (Regensburg, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler . 87, 92

Roy Kerr Kerr, Roy Patrick, 16. 5. 1934, (Kurow, Neuseeland))
https://de.wikipedia.org/wiki/Roy_Kerr
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Roy_Kerr . 497

Nikolaus Kopernikus Kopernikus, Nikolaus eigentlich Koppernigk, Niklas, 19. 2. 1473 (Toruń oder Thorn, Polen) bis 24. 5. 1543 (Frombork, auch Frauenburg, Polen),
https://de.wikipedia.org/wiki/Nikolaus_Kopernikus . 87, 88, 90

Gerard Peter Kuiper Kuiper, Gerard Peter, eigentlich Kuiper, Gerrit Pieter, 7. 12. 1905 (Harenkarspel, Niederlande) bis 24. 12. 1973 (Mexico City, Mexico),
https://de.wikipedia.org/wiki/Gerard_Peter_Kuiper
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Gerard_Kuiper . 136, 543

Franz Kurie Kurie, Franz Newell Devereux, 6. 2. 1907 (Victor, Colorado, USA), bis 12. 6. 1972 (San Diego, California, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Franz_N._D._Kurie
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Franz_N._D._Kurie . 301

Alfred Landé Landé, Alfred, 13. 12. 1888 (Elberfeld, heute Wuppertal, Deutschland), bis 30. 10. 1976 (Columbus, Ohio, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Alfred_Landé
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_Landé . 257

Ernest Orlando Lawrence Lawrence, Ernest Orlando, 8. 1. 1901 (Canton, South Dakota, USA) bis 27. 8. 1958 (Palo Alto, California, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Ernest_Lawrence
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Ernest_Lawrence . 152

Henrietta Swan Leavitt Leavitt, Henrietta Swan, 4. 7. 1868 (Lancaster, Massachusetts, USA) bis 12. 12. 1921 (Cambridge, Massachusetts, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Henrietta_Swan_Leavitt
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Henrietta_Swan_Leavitt. 81, 82

Inge Lehmann Lehmann, Inge, 13. 5. 1888 (Kopenhagen, Dänemark) bis 21. 2. 1993 (Kopenhagen, Dänemark),
https://de.wikipedia.org/wiki/Inge_Lehmann
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Inge_Lehmann . 116, 377

Sophus Lie Lie, Marius Sophus, 17. 12. 1842 (Nordfjordeid, Norwegen) bis 18. 2. 1899 (Christiania, dann Kristiania, heute Oslo, Norwegen),
https://de.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie . 422

M. Stanley Livingston Livingston, Milton Stanley, 25. 5. 1905 (Broadhead, Wisconsin, USA) bis 25. 8. 1986 (Santa Fe, New Mexico, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/M._Stanley_Livingston
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/M._Stanley_Livingston . 158

Ludwig Mach Mach, Ludwig, 18. 11. 1868 (Prag, Österreich, heute Tschechien) bis 1951,
https://de.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Mach. 51

Josef Mattauch Mattauch, Josef, 21. 11. 1895 (Mährisch-Ostrau, Österreich-Ungarn, heute Tschechien) bis 10. 8. 1971 (Klosterneuburg , Österreich),
https://de.wikipedia.org/wiki/Josef_Mattauch
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Josef_Mattauch . 271

Antonia Maury Maury, Antonia Caetana de Paiva Pereira), 21. 3. 1866 (Cpld-Spring-on-Hudson, New York, U.S.A.) bis 8. 1. 1952 (Dobbs Ferry, New York, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Antonia_Maury
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Antonia_Maury . 507, 518

James Clerk Maxwell Maxwell, James Clerk, 13. 6. 1831 (Edinburgh, Schottland) bis 5. 11. 1879 (Cambridge , England),
https://de.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell . 211

Michel Mayor Mayor, Michel Gustave Édouard, 12. 1. 1942 (Echallens, Waadt, Schweiz)
https://de.wikipedia.org/wiki/Michel_Mayor
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Michel_Mayor . 543, 548

Edwin McMillan McMillan, Edwin Mattison, 18. 9. 1907 (Redondo Beach, California, USA) bis 7. 9. 1991 (El Cerrito, California, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Edwin_Mattison_McMillan
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Edwin_McMillan . 155

Simon van der Meer Meer, Simon van der, 24. 11. 1929 (Den Haag, Niederlande) bis 4. 3. 2011 (Genève, Schweiz),
https://de.wikipedia.org/wiki/Simon_van_der_Meer
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Simon_van_der_Meer . 472

Lise Meitner Meitner, Lise (eigentlich Elise), 7. 11. 1878 (Wien, Österreich) bis 27. 10. 1968 (Cambridge, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Lise_Meitner

oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Lise_Meitner . 322, 337

John Michell Michell, John, 25. 12. 1724 (Eakring, Nottinghamshire, England) bis 21. 4. 1793 (Thornhill, Yorkshire, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/John_Michell
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/John_Michell . 495, 496

Albert Michelson Michelson, Albert Abraham, 19. 12. 1852 (Streino, Preussen, heute Polen) bis 9. 5. 1931 (Pasadena, Kalifornien, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Albert_Abraham_Michelson . 53, 65

Milutin Milanković Milanković, Milutin (Миланковић, Милутин), 28. 5. 1879 (Dalj, Österreich-Ungarn, heute Kroatien) bis 12. 12. 1958 (Belgrad, Jugoslawien, heute Serbien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Milutin_Milanković
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Milutin_Milanković . 107

Edward Milne Milne, Edward Arthur, 14. 2. 1896 (Hull, Yorkshire, England) bis 21. 9. 1950 (Dublin, Irland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Edward_Arthur_Milne
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Edward_Arthur_Milne . 603

Henry Moseley Moseley, Henry, 23. 11. 1887 (Weymouth, Dorset, England), bis 10. 8. 1915 (Gallipoli, Türkei, Schlacht von Gallipoli)
[https://de.wikipedia.org/wiki/Henry_Moseley_\(Physiker\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Henry_Moseley_(Physiker))
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Moseley . 221

Nevill Mott Mott, Nevill Francis, 30. 9. 1905 (Leeds, England) bis 8. 8. 1996 (Milton Keynes, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Nevill_Francis_Mott
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Nevill_Francis_Mott . 200, 201

Ben Mottelson Mottelson, Ben Roy, 9. 7. 1926 (Chicago, Illinois, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Ben_Mottelson
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Ben_Roy_Mottelson . 249

Walther Müller Müller, Walther, 6. 9. 1905 (Hannover, Deutschland) bis 4. 12. 1979 (Walnut Creek, California, USA),
[https://de.wikipedia.org/wiki/Walther_Müller_\(Physiker\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Walther_Müller_(Physiker)) . 166

Isaac Newton Newton, Isaac, 4. 1. 1643 (Woolsthorpe-by-Colsterworth, Lincolnshire, England) bis 31. 3. 1727 (Kensington, heute Stadtteil von London, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton . 87, 92–96, 495

Kazuhiko Nishijima Nishijima, Kazuhiko (西島 和彦), 4. 10. 1926 (Tsuchiura, Japan) bis 15. 2. 2009 (Tokyo, Japan),
https://de.wikipedia.org/wiki/Kazuhiko_Nishijima
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Kazuhiko_Nishijima . 446

Emmy Noether Noether, Amalie Emmy, 23. 03. 1882 (Erlangen, Deutschland) bis 14. 4. 1935 (Bryn Mawr, Pennsylvania, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether . 430, 460

John Nuttall Nuttall, John Mitchell, 21. 07. 1890 (Todmorden, England) bis 28. 1. 1958,
https://de.wikipedia.org/wiki/John_Mitchell_Nuttall . 282, 283

Wilhelm von Ockham Ockham, Wilhelm von, auch William of Ockham oder Occam, 1288 (Ockham, Surrey, England) bis 9. 04. 1347 (München, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_von_Ockham. 90, 92

Heinrich Olbers Olbers, Heinrich Wilhelm Matthias, 11. 10. 1758 (Arbergen bei Bremen, Deutschland) bis 2. 03. 1840 (Bremen, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Wilhelm_Olbers . 581

Mark Oliphant Oliphant, Sir Marcus «Mark» Laurence Elwin, 8. 10. 1901 (Adelaide, Australien) bis 14. 07. 2000 (Canberra, Australien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Mark_Oliphant
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Mark_Oliphant . 155

Jan Hendrik Oort Oort, Jan Hendrik, 28. 04. 1900 (Franeker, Niederlande) bis 5. 11. 1992 (Leiden, Niederlande),
https://de.wikipedia.org/wiki/Jan_Hendrik_Oort
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Jan_Oort . 139, 562, 563

Eugene Parker Parker, Eugene Newman, 10. 06. 1927 (Houghton, Michigan, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Eugene_N._Parker
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Eugene_Parker . 386

Wolfgang Pauli Pauli, Wolfgang Ernst, 25. 04. 1900 (Wien, Österreich), bis 15. 12. 1958 (Zürich, Schweiz)
https://de.wikipedia.org/wiki/Wolfgang_Pauli
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Wolfgang_Pauli . 222, 223, 232, 276, 434, 447, 484, 538, 539

Arno Penzias Penzias, Arnold Allan, 26. 04. 1933 (München, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Arno_Penzias
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Arno_Allan_Penzias . 605

Alfred Perot Perot, Jean-Baptiste Gaspard Gustave Alfred, 3. 11. 1863 (Metz, Frankreich) bis 27. 11. 1925 (Paris, Frankreich),
https://de.wikipedia.org/wiki/Alfred_Pérot
oder ausführlicher
https://fr.wikipedia.org/wiki/Alfred_Perot
Nach der französischen Quelle (hier vertrauenswürdiger) schreibt sich die Familie als Perot und nicht Pérot.. 57

Philolaos Philolaos (Φιλόλαος), 470 v. Chr. bis nach 399 v. Chr. (Griechenland),
<https://de.wikipedia.org/wiki/Philolaos> . 88

Edward Pickering Pickering, Edward Charles, 19. 7. 1846 (Boston, Massachusetts, U.S.A.) bis 3. 2. 1919 (Cambridge, Massachusetts, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Edward_Charles_Pickering
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Edward_Charles_Pickering . 506, 507, 518

Max Planck Planck, Max Karl Ernst Ludwig, 23. 2. 1858 (Kiel, Herzogtum Holstein, Dänemark, heute Deutschland) bis 4. 10. 1947 (Göttingen, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Max_Planck
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Planck . 605, 614

Norman Pogson Pogson, Norman Robert, 23. 3. 1823 (Nottingham, England) bis 23. 6. 1891 (Madras, Indien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Norman_Robert_Pogson
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/N._R._Pogson . 79

Claudius Ptolemäus Ptolemäus, Claudius (Κλαύδιος Πτολεμαῖος), bekannt als Ptolemäus von Alexandria, etwa 100 (in Ägypten) bis etwa 160 (Alexandria, Ägypten),
https://de.wikipedia.org/wiki/Claudius_Ptolemäus . 79, 88–90

Pythagoras Pythagoras (Πυθαγόρας), etwa 570 v. Chr. (Samos, Griechenland) bis etwa 510 v. Chr. (Metapont, Basilicata, Italien),
<https://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras> . 88

Didier Queloz Queloz, Didier Patrick, 23. 2. 1966 (Schweiz)
https://de.wikipedia.org/wiki/Didier_Queloz
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Didier_Queloz . 543, 548

Isidor Rabi Rabi, Isidor Isaac, 29. 7. 1898 (Rymanów, Galizien, Österreich-Ungarn, heute Polen), bis 11. 1. 1988 (New York City, New York, USA)

https://de.wikipedia.org/wiki/Isidor_Isaac_Rabi
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Isidor_Isaac_Rabi . 258, 259

James Rainwater Rainwater, Leo James, 9. 12. 1917 (Council, Idaho, USA) bis 30. 15. 1986 (New York, New York, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/James_Rainwater
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Rainwater. 249

Norman Ramsey Ramsey, Norman Foster, 27. 8. 1915 (Washington, D.C., USA) bis 4. 11. 2011 (Wayland, Middlesex County, Massachusetts, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Norman_Ramsey
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Norman_Foster_Ramsey_Jr. . 466

Bernhard Riemann Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 17. 9. 1826 (Breselenz bei Dannenberg (Elbe), Deutschland), bis 20. 7. 1966 (Selasca bei Verbania am Lago Maggiore, Italien)
https://de.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann . 494

Édouard Roche Roche, Édouard Albert, 17. 10. 1820 (Montpellier, Frankreich), bis 18. 4. 1883 (Montpellier, Frankreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Édouard_Albert_Roche
oder ausführlicher
https://fr.wikipedia.org/wiki/Édouard_Albert_Roche . 548

Wilhelm Conrad Röntgen Röntgen, Wilhelm Conrad, 17. 3. 1845 (Lennep, heute Remscheid, Deutschland) bis 10. 2. 1923 (München, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Conrad_Röntgen . 187

Carlo Rubbia Rubbia, Carlo, 31. 3. 1934 (Gorizia, Italien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Carlo_Rubbia
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Carlo_Rubbia . 472

Vera Rubin Rubin, Vera Florence Cooper, 23. 7. 1928 (Philadelphia, Pennsylvania, USA) bis 25. 12. 2016 (Princeton, New Jersey, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Vera_Rubin
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Vera_Rubin . 575

Henry Russell Russell, Henry Norris, 25. 10. 1877 (Oyster Bay, New York, USA) bis 18. 2. 1957 (Princeton, New Jersey, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Henry_Norris_Russell
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Norris_Russell . 520, 537

Ernest Rutherford Rutherford, Ernest, 30. 8. 1871 (Spring Grove, Nelson, Neuseeland) bis 19. 11. 1937 (Cambridge, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Ernest_Rutherford

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Ernest_Rutherford. 195, 197, 199, 211, 212, 231, 324

Johannes Rydberg Rydberg, Johannes Robert, 8. 11. 1854 (Halmstad, Schweden) bis 28. 12. 1919 (Lund, Schweden),

https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Rydberg

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Rydberg. 221

Georges Sagnac Sagnac, Georges, 14. 10. 1869 (Périgueux, Frankreich) bis 26. 02. 1926 (Meudon-Belleville, Frankreich),

https://de.wikipedia.org/wiki/Georges_Sagnac. 55

Meghnad Saha Saha, Meghnad (মেঘনাদ সাহা) Sāhā, Meghnād, 6. 10. 1893 (Sheoratali, Indien, heute Bangladesh) bis 16. 2. 1956 (Delhi, Indien),

https://de.wikipedia.org/wiki/Meghnad_Saha

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Meghnad_Saha. 509

Bunji Sakita Sakita, Bunji (崎田 文二), 1930 (Präfektur Toyama, Japan) bis 31. 8. 2000 (Japan),

https://de.wikipedia.org/wiki/Bunji_Sakita

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Bunji_Sakita. 422

Erwin Schrödinger Schrödinger, Erwin Rudolf Josef Alexander, 12. 8. 1887 (Wien-Erdberg, Österreich-Ungarn, heute Österreich), bis 4. 1. 1961 (Wien-Alsergrund, Österreich)

https://de.wikipedia.org/wiki/Erwin_Schrödinger

oder

https://en.wikipedia.org/wiki/Erwin_Schrödinger. 196, 235, 243

Karl Schwarzschild Schwarzschild, Karl, 9. 10. 1873 (Frankfurt am Main, Deutschland), bis 11. 5. 1916 (Potsdam, Deutschland)

https://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Schwarzschild. 494, 495

Rolf Sievert Sievert, Rolf Maximilian, 6. 5. 1896 (Stockholm, Schweden), bis 3. 10. 1966 (Stockholm, Schweden)

https://de.wikipedia.org/wiki/Rolf_Sievert

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Rolf_Maximilian_Sievert. 307

Willem de Sitter Sitter, Willem de, 6. 5. 1872 (Sneek, Niederlande), bis 20. 11. 1934 (Leiden, Niederlande)

https://de.wikipedia.org/wiki/Willem_de_Sitter

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Willem_de_Sitter. 603

Hartland Snyder Snyder, Hartland, 1913 (Salt Lake City, Utah, USA) bis 1962,

https://de.wikipedia.org/wiki/Hartland_Snyder. 158

Lyman Spitzer Spitzer, Lyman Jr., 26. 6. 1914 (Toledo, Ohio, USA) bis 31. 3. 1997 (Princeton, New Jersey, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Lyman_Spitzer
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Lyman_Spitzer . 355

Josef Stefan Stefan, Josef, auch Štefan, Jožef, 24. 3. 1835 (St. Peter bei Ebenthal, heute Klagenfurt, Österreich), bis 7. 1. 1893 (Wien, Österreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Josef_Stefan . 115, 536, 544

Otto Stern Stern, Otto M., 17. 2. 1888 (Sohrau, Oberschlesien, Preusse, heute Żory, Polen), bis 17. 8. 1969 (Berkeley, California, U.S.A.)
[https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Stern_\(Physiker\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Stern_(Physiker)) . 180, 337

Fritz Straßmann Straßmann, Friedrich Wilhelm «Fritz», 22. 2. 1902 (Boppard, Deutschland) bis 22. 4. 1980 (Mainz, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Fritz_Straßmann
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Fritz_Strassmann . 322, 337

Theophrastos von Eresos Theophrastos von Eresos (Θεόφραστος), 371 v. Chr. (Eresos, Insel Lesbos, Griechenland) bis etwa 287 v. Chr. (Athen, Griechenland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Theophrastos_von_Eresos
oder ausführlicher
<https://en.wikipedia.org/wiki/Theophrastus> . 360

Jean Thibaud Thibaud, Jean, 12. 5. 1901 (Lyon, Frankreich) bis 22. 5. 1960 (Lyon, Frankreich),
https://de.wikipedia.org/wiki/Jean_Thibaud
oder ausführlicher
https://fr.wikipedia.org/wiki/Jean_Thibaud . 152

J. J. Thomson Thomson, Joseph John , 18. 12. 1856 (Cheetham Hill bei Manchester, England) bis 30. 8. 1940 (Cambridge, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Joseph_John_Thomson
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/J._J._Thomson . 211

Kip Thorne Thorne, Kip Stephen, 17. 6. 1940 (Logan, Utah, USA
https://de.wikipedia.org/wiki/Kip_Thorne
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Kip_Thorne . 503

Clyde Tombaugh Tombaugh, Clyde William, 4. 2. 1906 (Streator, Illinois, USA) bis 17. 1. 1997 (Las Cruces, New Mexico, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Clyde_Tombaugh
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Clyde_Tombaugh . 132

Richard Q. Twiss Twiss, Richard Quintin, 24. 8. 1920 bis 20. 5. 2005,
https://de.wikipedia.org/wiki/Richard_Twiss
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Q._Twiss . 66

Ernest Walton Walton, Ernest Thomas Sinton, 6. 10. 1903 (Dungarvan, County Waterford, Irland) bis 25. 6. 1995 (Nelfast, Nordirland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Ernest_Walton
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Ernest_Walton . 324

Rainer Weiss Weiss, Rainer «Ray», 29. 9. 1932 (Berlin, Deutschland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Rainer_Weiss
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Rainer_Weiss . 503

Victor Weisskopf Weisskopf, Victor Frederick 19. 9. 1908 (Wien, Österreich), bis 22. 4. 2002 (Newton, Massachusetts, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Victor_Weisskopf
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Victor_Weisskopf . 289, 337

Carl Friedrich von Weizsäcker Weizsäcker, Carl Friedrich von, 28. 6. 1912 (Kiel, Deutschland), bis 28. 4. 2007 (Söcking am Starnberger See, Deutschland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_von_Weizsäcker
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_von_Weizsäcker . 234, 270, 320, 330

Vladimir Weksler Weksler, Vladimir Iossifowitsch, auch Veksler, Vladimir Iosifovič (Векслер, Владимир Иосифович), 4. 3. 1907 (Schytomyr, Russland, heute Ukraine) bis 22. 09. 1966 (Moskau, UdSSR, heute Russland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Vladimir_Iossifowitsch_Weksler
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Vladimir_Veksler . 155

Mary Watson Whitney Whitney, Mary Watson, 11. 9. 1847 (Waltham, Massachusetts, USA) bis 21. 1. 1921 (Waltham, Massachusetts, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Mary_Watson_Whitney
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Mary_Watson_Whitney . 528

Rolf Widerøe Widerøe, Rolf, auch Widerøe, Rolf, 11. 7. 1902 (Oslo, Norwegen) bis 16. 2. 1997 (Nussbaumen, Schweiz),
https://de.wikipedia.org/wiki/Rolf_Widerøe
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Rolf_Widerøe . 155

Wilhelm Wien Wien, Wilhelm «Willy» Carl Werner Otto Fritz Franz, 13. 1. 1864 (Gaffken bei Fischhausen im Samland, Ostpreussen, Preussen, heute Russland) bis 30. 8. 1928 (München, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Wien . 212, 541

Eugene Wigner Wigner, Eugene Paul, auch Wigner Jenő Pál, 17. 11. 1902 (Budapest, Österreich-Ungarn, heute Ungarn) bis 1. 1. 1995 (Princeton, New Jersey, USA),

https://de.wikipedia.org/wiki/Eugene_Paul_Wigner

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Eugene_Wigner . 337, 422

Belinda Wilkens Wilkens, Belinda J., geb. Staffordshire, England,

https://en.wikipedia.org/wiki/Belinda_Wilkes . 597

Robert Wilson Wilson, Robert Woodrow, 10. 1. 1936 (Houston, Texas, U.S.A.),

https://de.wikipedia.org/wiki/Robert_Woodrow_Wilson

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Woodrow_Wilson . 605

Chien-Shiung Wu Wu, Chien-Shiung (吳健雄), 13. 5. 1912 (Liuhe, Taicang, Jiangsu, China) bis 11. 10. 1996 (New York City, New York, USA),

https://de.wikipedia.org/wiki/Chien-Shiung_Wu

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Chien-Shiung_Wu . 456–458

Anne Young Young, Anne Sewell, 2. 1. 1871 (Bloomington, Wisconsin, USA) bis 15. 8. 1961 (Claremont, California, USA)

https://en.wikipedia.org/wiki/Anne_Sewell_Young . 543

Judith Young Young, Judith S., 15. 9. 1952 bis 23. 5. 2014

[https://en.wikipedia.org/wiki/Judith_Young_\(astronomer\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Judith_Young_(astronomer)) . 505

Hideki Yukawa Yukawa, Hideki (湯川秀樹), 23. 1. 1907 (Azabu, Tokio (heute: Minato, Tokio), Japan), bis 8. 9. 1981 (Kyōto, Japan)

https://de.wikipedia.org/wiki/Hideki_Yukawa

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Hideki_Yukawa . 267, 268, 417, 418, 471

Pieter Zeeman Zeeman, Pieter, 25. 5. 1865 (Zonnemaire auf der Insel Schouwen-Duiveland, Zeeland, Niederlande), bis 9. 10. 1943 (Amsterdam, Niederlande)

https://de.wikipedia.org/wiki/Pieter_Zeeman

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Pieter_Zeeman . 258, 366

Ludwig Zehnder Zehnder, Ludwig Louis Albert, 4. 5. 1845 (Illnau, Illnau-Effretikon, Schweiz) bis 24. 3. 1948 (Oberhofen, Schweiz),

https://de.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Zehnder . 51

George Zweig Zweig, George, 30. 5. 1937 (Moskau, Russland),

https://de.wikipedia.org/wiki/George_Zweig

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/George_Zweig . 433

Fritz Zwicky Zwicky, Fritz, 14. 2. 1898 (Warna, Fürstentum Bulgarien, heute Bulgarien) bis 8. 2. 1974 (Pasadena, California, USA)

https://de.wikipedia.org/wiki/Fritz_Zwicky

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Fritz_Zwicky . 539, 602

Glossar

Astrophysik Die Physik der Sterne und des Weltalls. [18](#), [19](#)

Ganghöhe Die Ganghöhe ist die Distanz, die sich eine Schraube bei einer Umdrehung um 360° bewegt. Üblicherweise ist dies auch der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gewindefalzen.. [454](#)

Grosse vereinheitlichte Theorie Die grosse vereinheitlichte Theorie, englisch «Grand Unified Theory», abgekürzt GUT, ist ein Versuch, alle drei Wechselwirkungen von Elementarteilchen zu vereinen.. [477](#), [478](#)

Horizontsystem Das natürliche Koordinatensystem für eine beobachtende Person. Die Werte für einen Stern sind an jedem Ort unterschiedlich. Die erste Koordinate ist die Höhe des Sterns über dem Horizont, oder $90^\circ - z$, wobei z Die Distanz zum Zenit ist. Die zweite Koordinate beschreibt die Lage der Ebene durch die Verbindungsgeraden Beobachter-Zenit und durch den Stern. Die Koordinate wird von Süden (0°) aus Richtung Westen (90°) gemessen. [70](#)

Isomer Isomer bedeutet am gleichen Platz. Gemeint sind Kerne, die angeregt sind, also die gleiche Neutronen- und Protonenzahl haben, aber wegen der geänderten Bindungsenergie im angeregten Zustand eine leicht andere Masse haben. [211](#), [292](#)

K-Einfang Elektronen im Grundzustand ($1s$ oder K) haben am Kern eine nicht verschwindende Aufenthaltswahrscheinlichkeit und können so mit Kernbausteinen eine Teilchenreaktion eingehen. [303](#), [304](#)

K-Schale die K -Schale bezeichnet Elektronen im Grundzustand ($1s$ oder K). [207](#)

Kernphysik Befasst sich mit Atomen und deren Kernen. Radioaktivität, Kernenergie, Fusion, Periodensystem und die Auswirkungen auf den Mensch sind das Thema. . [18](#), [19](#)

Radioteleskop Eine in der Regel parabolförmige Spiegelfläche, die die Radiowellen aus einer Richtung auf einen Empfänger konzentriert. [30](#)

Reflektor Teleskop mit einem Spiegel als erstem optischem Element. [27](#)

Refraktor Teleskop mit einer Linse als erstem optischem Element. [27](#)

Swing-By-Manöver Wenn eine Sonde sich einem Planeten ungefähr entlang der Planetenbahn nähert, ist die Relativgeschwindigkeit bei der Annäherung und der Entfernung unterschiedlich. Dazwischen kann die Sonde einen beliebigen

Winkel, besonders einfach ist 180° um den Planeten in dessen Referenzsystem fliegen. Die Geschwindigkeit ist in diesem System bei gleichem Abstand konstant. Bezuglich der Sonne wir aber die Geschwindigkeit des Planeten addiert oder subtrahiert, je nach Annäherungsrichtung. Fliegt die Sonde ursprünglich entgegengesetzt zum Planeten, wird sie beschleunigt, sonst gebremst. Die Energie stammt aus der Gesamtenergie des Planeten. [103](#)

Teilchenphysik Die Physik der Elementarteilchen. Sie behandelt Wechselwirkungen bei hohen Energien ($> 1 \text{ MeV}$), mit einigen Ausnahmen und bei kleinen Strukturen ($< 1 \text{ pm}$). Die Beobachtungen werden mit fortgeschrittenen mathematischen Methoden beschrieben (Gruppentheorie, Quantenelektrodynamik).. [18](#), [19](#)

Treibhauseffekt Erhöhung der Oberflächentemperatur durch unterschiedliche spektrale Absorption und Streuung des einfallenden Lichtes der Sonne und des emittierten Lichtes des Himmelskörpers, üblicherweise bei einer längeren Wellenlänge. Der Name kommt vom analogen Effekt in Gewächshäusern. [104](#)

Triangulation Die Bestimmung einer Distanz mit Hilfe der Winkel-Seiten-Sätze für Dreiecke. [78](#)

Winkelvergrösserung Die Vergrösserung des Winkels eines Lichtstrahls zur optischen Achse eines Teleskopes durch optische Elemente. Je grösser der Winkel zur optischen Achse ist, desto grösser ist das Bild auf der Netzhaut des Auges oder auf dem Sensor einer Kamera. [26](#)

Akronyme

AGN Active Galactic Nucleus. 597

BJD Barycentric Julian Date, gemessen am Schwerpunkt des Sonnensystems von 12:00 UT am Montag den 1. Januar 4713 BC nach dem in die Vergangenheit fortgesetzten Julianischen Kalender oder um 12:00 UT am 24. November 4714 BC im in die Vergangenheit fortgesetzten Gregorianischen Kalender an. Das BJD muss auf der Erde um die Laufzeit des Lichtes ($-500 \text{ s} \leq \Delta t \leq 500 \text{ s}$) korrigiert werden. 533

CERN Centre européenne pour la recherche nucléaire, siehe <https://home.cern/>. 164, 483

DNA Desoxyribonukleinsäure. 453, 454

ESA European Space Agency, siehe <https://www.esa.int>. 77, 117, 124, 127–129, 135, 136, 374, 377, 502, 514, 517, 528, 531, 566, 590, 596

ESO European Southern Observatory, siehe <https://www.eso.org>. 77, 130, 493, 570, 573

FAAS Flame Atomic Absorption Spectroscopy. 314

GUT Grand Unified Theory. 477, 478

IAU International Astronomical Union. 506

ICPAES Inductively coupled plasma atomic emission spectrometry. 314

ICPMS engl. Inductively coupled plasma mass spectrometry. 314

ICPOES Inductively coupled plasma optical emission spectrometry. 314

JAXA Japan Aerospace Exploration Agency, siehe <https://global.jaxa.jp/>. 368, 370

JD Julian Date, gemessen von 12:00 UT am Montag den 1. Januar 4713 BC nach dem in die Vergangenheit fortgesetzten Julianischen Kalender oder um 12:00 UT am 24. November 4714 BC im in die Vergangenheit fortgesetzten Gregorianischen Kalender. 533

JDN Die aus dem Julianischen Datum JD abgeleitete Tageszahl. 533

LA-ICPMS Laser ablation inductively coupled plasma mass spectrometry. 314

NASA National Aeronautics and Space Administration, siehe <https://www.nasa.gov>.
27, 33, 35, 36, 51, 84, 102–107, 117, 120–124, 126–139, 360, 364, 366, 368–
370, 372–377, 502, 514, 517, 528, 531, 534, 543, 553–555, 565, 566, 570, 574,
579, 590, 591, 596, 598, 599

NOAA National Oceanic and Atmospheric Administration, siehe <https://www.noaa.gov>.
107, 361

OGLE Optical Gravitational Lensing Experiment. 502, 553, 554

PPARC Particle Physics and Astronomy Research Council, archivierte Webseiten
<https://web.archive.org/web/20070205222806/http://www.pparc.ac.uk/>. 368

QSO Quasi-Stellar Object. 597

QUASAR Quasi-Stellar Radio Source. 595

RAW Roh-Format von Kamera-Sensoren. 512

RMS Root-Mean-Square. 508

SDO Solar Dynamics Observatory, siehe https://www.nasa.gov/mission_pages/sdo/main/index.html.
360, 365, 366, 376

SMD Surface Mass Density, Flächenmassendichte. 578

TXRF Total Reflection X-ray Fluorescence. 314

VLT Very Large Telescope des European Southern Observatory. 493

WIMP Weakly Interacting Massive Particle. 602

Referenzen

- [Abb+16] B. P. Abbott u. a. „Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger“. In: *Physical Review Letters* 116.6 (6 Feb. 2016), S. 061102. DOI: [10.1103/physrevlett.116.061102](https://doi.org/10.1103/physrevlett.116.061102) (siehe S. 503).
- [Abb84] E. A. Abbott. *Flatland: A romance of many dimensions*. Seeley, London, 1884. EPUB: https://www.gutenberg.org/ebooks/201.epub.images?session_id=f5ce300da203295ecc6ecb57a70cfba4aa41dd2a. URL: <http://www.geom.uiuc.edu/~banchoff/Flatland/> (besucht am 12.03.2022) (siehe S. 592, 593).
- [Abb12] E. A. Abbott. *Flatland - Eine phantastische Geschichte über viele Dimensionen*. Bautz, Traugott, 31. Dez. 2012. 162 S. ISBN: 3883097675. URL: https://www.ebook.de/de/product/20031322/edwin_a_abott_flatland_eine_phantastische_geschichte_ueber_viele_dimensionen.html (siehe S. 592, 593).
- [Abb21] T. G. Abbott. *Feynman Diagrams in Quantum Mechanics*. 27. März 2021. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.357.7678&rep=rep1&type=pdf> (besucht am 27.03.2021) (siehe S. 409, 410).
- [Abe+17] K. Abe u. a. „Search for proton decay via $p \rightarrow e + \pi^0$ and $p \rightarrow \mu + \pi^0$ in 0.31 megaton·years exposure of the Super-Kamiokande water Cherenkov detector“. In: *Physical Review D* 95.1 (Jan. 2017), S. 012004. DOI: [10.1103/physrevd.95.012004](https://doi.org/10.1103/physrevd.95.012004) (siehe S. 417).
- [Abi+21] B. Abi u. a. „Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm“. In: *Physical Review Letters* 126.14 (Apr. 2021), S. 141801. DOI: [10.1103/physrevlett.126.141801](https://doi.org/10.1103/physrevlett.126.141801) (siehe S. 412).
- [Abu+18] R. Abuter u. a. „Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole“. In: *Astronomy & Astrophysics* 615 (Juli 2018), S. L15. DOI: [10.1051/0004-6361/201833718](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833718) (siehe S. 493).
- [ACK10] C. Aerts, J. Christensen-Dalsgaard und D. W. Kurtz. „Asteroseismology“. In: *Nature* (19. Jan. 2010). DOI: [10.1007/978-1-4020-5803-5](https://doi.org/10.1038/nature08933) (siehe S. 523).
- [Aer+03] C. Aerts u. a. „Asteroseismology of HD 129929: Core Overshooting and Nonrigid Rotation“. In: *Science* 300.5627 (2003), S. 1926–1928. ISSN: 0036-8075. DOI: [10.1126/science.1084993](https://doi.org/10.1126/science.1084993) (siehe S. 523).
- [Alb+21a] T. Albahri u. a. „Magnetic-field measurement and analysis for the Muon g-2 Experiment at Fermilab“. In: *Physical Review A* 103.4 (Apr. 2021), S. 042208. DOI: [10.1103/physreva.103.042208](https://doi.org/10.1103/physreva.103.042208) (siehe S. 412).

- [Alb+21b] T. Albahri u. a. „Measurement of the anomalous precession frequency of the muon in the Fermilab Muon g-2 Experiment“. In: *Physical Review D* 103.7 (Apr. 2021), S. 072002. DOI: [10.1103/physrevd.103.072002](https://doi.org/10.1103/physrevd.103.072002) (siehe S. 412).
- [Alv+55] L. W. Alvarez u. a. „Berkeley Proton Linear Accelerator“. In: *Review of Scientific Instruments* 26.2 (1955), S. 111–133. DOI: [10.1063/1.1771253](https://doi.org/10.1063/1.1771253) (siehe S. 152).
- [And33] C. D. Anderson. „The Positive Electron“. In: *Physical Review* 43 (6 März 1933), S. 491–494. DOI: [10.1103/PhysRev.43.491](https://doi.org/10.1103/PhysRev.43.491) (siehe S. 411).
- [Arn+83] G. Arnison u. a. „Experimental observation of lepton pairs of invariant mass around $95\text{ GeV}/c^2$ at the CERN SPS collider“. In: *Physics Letters B* 126.5 (Juli 1983), S. 398–410. ISSN: 0370-2693. DOI: [10.1016/0370-2693\(83\)90188-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90188-0) (siehe S. 472).
- [Aus19] Australia Telescope National Facility. *ATNF Pulsar Catalogue*. 2019. URL: <http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat> (besucht am 16.11.2019) (siehe S. 542).
- [AEE08] F. T. Avignone, S. R. Elliott und J. Engel. „Double beta decay, Majorana neutrinos, and neutrino mass“. In: *Reviews of Modern Physics* 80.2 (2 Apr. 2008), S. 481–516. DOI: [10.1103/RevModPhys.80.481](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.481) (siehe S. 215).
- [BZ34] W. Baade und F. Zwicky. „Cosmic Rays from Super-Novae“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 20.5 (1934), S. 259–263. ISSN: 0027-8424. DOI: [10.1073/pnas.20.5.259](https://doi.org/10.1073/pnas.20.5.259). eprint: <https://www.pnas.org/content/20/5/259.full.pdf>. URL: <https://www.pnas.org/content/20/5/259> (siehe S. 539).
- [BPB01] J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault und S. Basu. „Solar Models: Current Epoch and Time Dependences, Neutrinos, and Helioseismological Properties“. In: *The Astrophysical Journal* 555.2 (Juli 2001), S. 990–1012. DOI: [10.1086/321493](https://doi.org/10.1086/321493) (siehe S. 383, 384).
- [BB03] N. A. Bahcall und P. Bode. „The Amplitude of Mass Fluctuations“. In: *The Astrophysical Journal* 588.1 (März 2003), S. L1–L4. DOI: [10.1086/375503](https://doi.org/10.1086/375503) (siehe S. 602).
- [Bah16] N. A. Bahcall. „The mass density of the Universe“. In: *Dark Universe: Matter, Energy and Gravity*. Cambridge University Press, 3. März 2016. ISBN: 0521822270. URL: https://www.ebook.de/de/product/3852397/the_dark_universe.html (siehe S. 602).
- [Bar18] B. C. Barish. „Nobel Lecture: LIGO and gravitational waves II“. In: *Review of Modern Physics* 90 (4 Okt. 2018), S. 040502. DOI: [10.1103/RevModPhys.90.040502](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.040502). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.040502> (siehe S. 503).
- [Bar+99] J. Barnstedt u. a. „The ORFEUS II Echelle Spectrometer: Instrument description, performance and data reduction“. In: *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* 134.3 (Feb. 1999), S. 561–567. DOI: [10.1051/aas:1999156](https://doi.org/10.1051/aas:1999156) (siehe S. 50).

- [Bar21] A. J. Barr. *Feynman-Diagrams*. Oxford University. 15. Juni 2021. URL: <http://www-pnp.physics.ox.ac.uk/~barra/teaching/feynman.pdf> (siehe S. 411).
- [BS51] R. E. Batzel und G. T. Seaborg. „Fission of Medium Weight Elements“. In: *Physical Review* 82 (5 1951). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.82.607>, S. 607–615. DOI: [10.1103/PhysRev.82.607](https://doi.org/10.1103/PhysRev.82.607). URL: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.82.607> (siehe S. 324).
- [Bed+11] T. R. Bedding u. a. „Gravity modes as a way to distinguish between hydrogen- and helium-burning red giant stars“. In: *Nature* 471.7340 (März 2011), S. 608–611. DOI: [10.1038/nature09935](https://doi.org/10.1038/nature09935) (siehe S. 523).
- [BG70] G. I. Bell und S. Glasstone. *Nuclear Reactor Theory*. US Atomic Energy Commission, Washington, DC (United States). US Atomic Energy Commission, Washington, DC (United States), Okt. 1970. URL: <https://www.osti.gov/biblio/4074688> (siehe S. 339, 343, 344).
- [BF75] B. L. Berman und S. C. Fultz. „Measurements of the giant dipole resonance with monoenergetic photons“. In: *Reviews of Modern Physics* 47.3 (3 Juli 1975), S. 713–761. DOI: [10.1103/revmodphys.47.713](https://doi.org/10.1103/revmodphys.47.713). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.47.713> (siehe S. 264).
- [Bet30] H. Bethe. „Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch Materie“. In: *Annalen der Physik* 397.3 (1930), S. 325–400. ISSN: 1521-3889. DOI: [10.1002/andp.19303970303](https://doi.org/10.1002/andp.19303970303) (siehe S. 282).
- [BWW07] K. Bethge, G. Walter und B. Wiedemann. *Kernphysik*. Springer-Verlag GmbH, 13. Nov. 2007. 404 S. ISBN: 9783540745679. URL: https://www.ebook.de/de/product/19292359/klaus_bethge_gertrud_walter_bernhard_wiedemann_kernphysik.html (siehe S. 199).
- [Bew+10] D. Bewsher u. a. „Determination of the Photometric Calibration and Large-Scale Flatfield of the STEREO Heliospheric Imagers: I. HI-1“. In: *Solar Physics* 264.2 (Juni 2010), S. 433–460. DOI: [10.1007/s11207-010-9582-8](https://doi.org/10.1007/s11207-010-9582-8) (siehe S. 534).
- [BDD85] M. Bhat, S. Dhurandhar und N. Dadhich. „Energetics of the Kerr-Newman black hole by the penrose process“. In: *Journal of Astrophysics and Astronomy* 6.2 (Juni 1985), S. 85–100. ISSN: 0973-7758. DOI: [10.1007/BF02715080](https://doi.org/10.1007/BF02715080). URL: <https://doi.org/10.1007/BF02715080> (siehe S. 497).
- [Bid+12] C. M. Bidin u. a. „Kinematical and Chemical Vertical Structure of the Galactic Thick disk. II. A Lack of Dark Matter in the Solar Neighborhood“. In: *The Astrophysical Journal* 751.1 (Mai 2012), S. 30. DOI: [10.1088/0004-637x/751/1/30](https://doi.org/10.1088/0004-637x/751/1/30) (siehe S. 578).
- [Bis22] M. Bischoff. *Revolution in der Analysis*. 15. Mai 2022. URL: <https://www.spektrum.de/news/ableitung-statt-integral-revolution-der-analysis/2016955> (siehe S. 640, 641).

- [Ble13] J. Bleck-Neuhaus. *Elementare Teilchen*. 2. Aufl. sowie 978-3-642-32578-6 und 978-3-642-32579-3 (ebook). Berlin: Springer, 2013. ISBN: 3-642-32578-5. DOI: [10.1007/978-3-642-32579-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-32579-3) (siehe S. 18, 177, 180–186, 195–199, 201, 212, 224, 225, 261–264, 272, 274, 276, 277, 395–397, 409, 417–422, 454, 455, 460, 461, 464, 468, 478, 484, 617).
- [Bli19] S. M. Blinder. *Solutions of Schrödinger Equation for a Particle in a Finite Spherical Well*. Wolfram Demonstrations Project. 16. Sep. 2019. URL: <https://demonstrations.wolfram.com/SolutionsOfSchroedingerEq> (besucht am 13.05.2022) (siehe S. 239, 240).
- [BP83] E. D. Bloom und C. W. Peck. „Physics with the crystal ball detector“. In: *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 33.1 (1983), S. 143–198. DOI: [10.1146/annurev.ns.33.120183.001043](https://doi.org/10.1146/annurev.ns.33.120183.001043) (siehe S. 445).
- [Böh11] M. Böhm. *Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik: eine Einführung in die mathematischen Grundlagen*. Springer-Lehrbuch. Heidelberg, Berlin: Springer, 2011. ISBN: 9783642203794. DOI: [10.1007/978-3-642-20379-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-20379-4). URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=34625891X> (besucht am 16.10.2017) (siehe S. 422, 618).
- [Böh58] E. Böhm-Vitense. „Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte. Mit 5 Textabbildungen“. In: *Zeitschrift für Astrophysik* 46 (Jan. 1958), S. 108. URL: <http://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1958ZA.....46..108B> (siehe S. 382).
- [Bov17] J. Bovy. „Galactic rotation in Gaia DR1“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* 468.1 (Feb. 2017), S. L63–L67. ISSN: 1745-3925. DOI: [10.1093/mnrasl/slx027](https://doi.org/10.1093/mnrasl/slx027). eprint: <http://oup.prod.sis.lan/mnrasl/article-pdf/468/1/L63/10896236/slx027.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnrasl/slx027> (siehe S. 563).
- [BT12] J. Bovy und S. Tremaine. „On the local dark matter density“. In: *The Astrophysical Journal* 756.1 (Aug. 2012), S. 89. DOI: [10.1088/0004-637x/756/1/89](https://doi.org/10.1088/0004-637x/756/1/89) (siehe S. 578).
- [Bra28] J. Bradley. „IV. A letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and F. R. S. to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. giving an account of a new discovered motion of the fix'd stars“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 35.406 (Dez. 1728), S. 637–661. DOI: [10.1098/rstl.1727.0064](https://doi.org/10.1098/rstl.1727.0064). eprint: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1727.0064> (siehe S. 41).
- [BC10] J. Brandes und J. Czerniawski. *Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie für Physiker und Philosophen: Einstein- und Lorentz-Interpretation, Paradoxien, Raum und Zeit, Experimente*. 4. Aufl. Karlsbad: Verl. Relativistischer Interpretationen, VRI, 2010. ISBN: 978-3-930879-08-3. URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=334001927> (besucht am 16.10.2017) (siehe S. 489, 552, 618).

- [Bro+08] I. N. Bronštein u. a. *Taschenbuch der Mathematik*. 7. Aufl. QA 40/2008 B. Verlag Harri Deutsch, 2008 (siehe S. 625, 632).
- [Bro+49] R. Brown u. a. „Observations with Electron-Sensitive Plates Exposed to Cosmic Radiation“. In: *Nature* 163.4132 (Jan. 1949), S. 47–51. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/163047a0](https://doi.org/10.1038/163047a0) (siehe S. 411).
- [Bru+13] A. S. Brun u. a. „On gravity waves in the Sun“. In: *Journal of Physics: Conference Series* 440.1 (2013). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/440/1/012043>, S. 012043. DOI: [10.1088/1742-6596/440/1/012043](https://doi.org/10.1088/1742-6596/440/1/012043) (siehe S. 378).
- [BR17] E. Bulska und A. Ruszczyńska. „Analytical Techniques for Trace Element Determination“. In: *Physical Sciences Reviews* 2.5 (Mai 2017). DOI: [10.1515/psr-2017-8002](https://doi.org/10.1515/psr-2017-8002) (siehe S. 314).
- [Bun18] Bundesministerium der Justiz und für Verbraucherschutz. *Verordnung zum Schutz vor der schädlichen Wirkung ionisierender Strahlung (Strahlenschutzverordnung - StrlSchV)*. Diese Verordnung dient der Umsetzung der Richtlinie 2013/59/Euratom des Rates vom 5. Dezember 2013 zur Festlegung grundlegender Sicherheitsnormen für den Schutz vor den Gefahren einer Exposition gegenüber ionisierender Strahlung und zur Aufhebung der Richtlinien 89/618/Euratom, 90/641/Euratom, 96/29/Euratom, 97/43/Euratom und 2003/122/Euratom (ABl. L 13 vom 17.1.2014, S. 1) sowie der Umsetzung des Artikels 8d der Richtlinie 2009/71/Euratom des Rates vom 25. Juni 2009 über einen Gemeinschaftsrahmen für die nukleare Sicherheit kerntechnischer Anlagen (ABl. L 172 vom 2.7.2009, S. 18), in der durch die Richtlinie des Rates 2014/87/Euratom vom 8. Juli 2014 zur Änderung der Richtlinie 2009/71/Euratom über einen Gemeinschaftsrahmen für die nukleare Sicherheit kerntechnischer Anlagen (ABl. L 219 vom 25.7.2014, S. 42) geänderten Fassung. 29. Nov. 2018. URL: https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/ethkom/StrlSchV_gesamt_ab_01.01.2019_.pdf (besucht am 27.01.2020) (siehe S. 313).
- [Cam+18] T. Camarillo u. a. „Median Statistics Estimate of the Distance to the Galactic Center“. In: *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 130.984 (Jan. 2018), S. 024101. DOI: [10.1088/1538-3873/aa9b26](https://doi.org/10.1088/1538-3873/aa9b26) (siehe S. 563).
- [Car61] B. C. Carlson. „Ellipsoidal Distributions of Charge or Mass“. In: *Journal of Mathematical Physics* 2.3 (1961), S. 441–450. DOI: [10.1063/1.1703729](https://doi.org/10.1063/1.1703729). eprint: <https://doi.org/10.1063/1.1703729>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.1703729> (siehe S. 330, 331).
- [CO07] B. W. Carroll und D. A. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics*. englisch. Second. San Francisco, Calif., Munich: Addison-Wesley, San Francisco: Pearson, 2007. ISBN: 0-321-44284-9. DOI: [10.1017/9781108380980](https://doi.org/10.1017/9781108380980). URL: [https://ulm.ibs-bw.de/adISWeb/app?service=direct/0/Home/\\$DirectLink&sp=SOPAC00&sp=SAKSWB-IdNr1655295977](https://ulm.ibs-bw.de/adISWeb/app?service=direct/0/Home/$DirectLink&sp=SOPAC00&sp=SAKSWB-IdNr1655295977) (besucht am 13.10.2019) (siehe S. 18, 73, 81, 82, 95, 96, 104, 105, 116, 118, 120, 121, 124, 127–130, 132, 134, 137–139,

- 359, 383–390, 392, 393, 489, 490, 496–499, 507, 509–511, 521, 522, 524, 532, 533, 535–542, 544, 545, 548, 550, 572, 596, 597, 601, 611, 612, 614, 617).
- [Car68] B. Carter. „Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields“. In: *Physical Review* 174 (5 Okt. 1968), S. 1559–1571. DOI: [10.1103/PhysRev.174.1559](https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1559) (siehe S. 497).
- [CER17a] CERN. *LHC Large Hadron Collider*. <http://www.lhc-facts.ch/index.php?page=allgemeines>. 2017. URL: <http://www.lhc-facts.ch/index.php?page=allgemeines> (besucht am 14. 11. 2017) (siehe S. 164).
- [CER17b] CERN. *Terms of Copyright*. <http://copyright.web.cern.ch/>. 2017. URL: <http://copyright.web.cern.ch/> (besucht am 14. 11. 2017) (siehe S. 164).
- [Cha+50] O. Chamberlain u. a. „A Measurement of the Positive π - μ -Decay Lifetime“. In: *Physical Review* 79 (2 1950), S. 394–395. DOI: [10.1103/PhysRev.79.394](https://doi.org/10.1103/PhysRev.79.394) (siehe S. 174, 175).
- [Cha31] S. Chandrasekhar. „XLVIII. The density of white dwarf stars“. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 11.70 (1931), S. 592–596. DOI: [10.1080/14786443109461710](https://doi.org/10.1080/14786443109461710). eprint: <https://doi.org/10.1080/14786443109461710> (siehe S. 538).
- [Cha+13] S. Chase u. a. 2013. URL: <https://www.desy.de/user/projects/Physics/index.html> (besucht am 16. 02. 2021) (siehe S. 18).
- [Che13] Y. Chen. „A review of recent studies on coronal dynamics: Streamers, coronal mass ejections, and their interactions“. In: *Chinese Science Bulletin* 58.14 (Apr. 2013), S. 1599–1624. DOI: [10.1007/s11434-013-5669-6](https://doi.org/10.1007/s11434-013-5669-6) (siehe S. 375).
- [Che60] P. A. Cherenkov. „Radiation from High-Speed Particles“. In: *Science* 131.3394 (1960), S. 136–142. ISSN: 0036-8075. DOI: [10.1126/science.131.3394.136](https://doi.org/10.1126/science.131.3394.136) (siehe S. 170).
- [Chr+96] J. Christensen-Dalsgaard u. a. „The Current State of Solar Modeling“. In: *Science* 272.5266 (Mai 1996), S. 1286–1292. DOI: [10.1126/science.272.5266.1286](https://doi.org/10.1126/science.272.5266.1286) (siehe S. 377).
- [CM14] C. F. Chyba und C. R. Milne. „Simple calculation of the critical mass for highly enriched uranium and plutonium-239“. In: *American Journal of Physics* 82.10 (Okt. 2014), S. 977–979. DOI: [10.1119/1.4885379](https://doi.org/10.1119/1.4885379) (siehe S. 343).
- [Coh77] B. L. Cohen. „The Disposal of Radioactive Wastes from Fission Reactors“. In: *Scientific American* 236.6 (1977), S. 21–31. DOI: [10.1038/scientificamerican0677-21](https://doi.org/10.1038/scientificamerican0677-21). URL: <http://www.jstor.org/stable/24954067> (siehe S. 356, 358).
- [CR03] T. S. Coleman und M. Roos. „Effective degrees of freedom during the radiation era“. In: *Physical Review D* 68 (2 Juli 2003), S. 027702. DOI: [10.1103/PhysRevD.68.027702](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.027702). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.027702> (siehe S. 613).

- [Com+16] J.-P. Combe u. a. „Detection of local H₂O exposed at the surface of Ceres“. In: *Science* 353.6303 (2016). ISSN: 0036-8075. DOI: [10.1126/science.aaf3010](https://doi.org/10.1126/science.aaf3010) (siehe S. 102, 131).
- [Com23a] A. H. Compton. „A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements“. In: *Physical Review* 21.5 (1923), S. 483–502. DOI: [10.1103/PhysRev.21.483](https://doi.org/10.1103/PhysRev.21.483) (siehe S. 202).
- [Com23b] A. H. Compton. „The Spectrum of Scattered X-Rays“. In: *Physical Review* 22 (5 1923), S. 409–413. DOI: [10.1103/PhysRev.22.409](https://doi.org/10.1103/PhysRev.22.409) (siehe S. 202, 203).
- [Con+10] A. Conley u. a. „Supernova Constraints and Systematic Uncertainties from the First Three Years of the Supernova Legacy Survey“. In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 192.1 (Dez. 2010), S. 1. DOI: [10.1088/0067-0049/192/1/1](https://doi.org/10.1088/0067-0049/192/1/1) (siehe S. 603, 604).
- [Con+16] C. J. Conselice u. a. „The Evolution of Galaxy Number Density at $z < 8$ and Its Implications“. In: *The Astrophysical Journal* 830.2 (Okt. 2016), S. 83. DOI: [10.3847/0004-637x/830/2/83](https://doi.org/10.3847/0004-637x/830/2/83). eprint: <https://arxiv.org/pdf/1607.03909.pdf> (siehe S. 590).
- [Cou+19] J. M. C. Court u. a. „The Eclipsing Accreting White Dwarf Z Chamaeleontis as Seen with TESS“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 488.3 (19. Juli 2019), S. 4149–4160. DOI: [10.1093/mnras/stz2015](https://doi.org/10.1093/mnras/stz2015). arXiv: [1907.08458 \[astro-ph.HE\]](https://arxiv.org/abs/1907.08458) (siehe S. 533).
- [Dan+62] G. Danby u. a. „Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos“. In: *Physical Review Letters* 9.1 (Juli 1962), S. 36–44. DOI: [10.1103/physrevlett.9.36](https://doi.org/10.1103/physrevlett.9.36) (siehe S. 414, 415).
- [DF09] A. Das und T. Ferbel. *Introduction To Nuclear And Particle Physics*. 2. Aufl. sowie 981-238-744-7. New Jersey: World Scientific, 2009. ISBN: 978-981-238-744-8. URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=311263771> (besucht am 16.10.2017) (siehe S. 18, 234, 238, 243–246, 320, 321, 461, 462, 617).
- [DL93] D. Degenhardt und B. W. Lites. „The magnetohydrodynamics of umbral flux tubes. I - Theoretical model“. In: *The Astrophysical Journal* 404 (Feb. 1993), S. 383. DOI: [10.1086/172287](https://doi.org/10.1086/172287) (siehe S. 371).
- [Dem10] W. Demtröder. *Experimentalphysik IV, Kern-, Teilchen- und Astrophysik*. 3. Aufl. Band: 4. Kern-, Teilchen- und Astrophysik : mit ... 68 Tabellen, zahlreichen durchgerechneten Beispielen und 104 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen. Springer Verlag, 2010. ISBN: 978-3-642-01597-7. URL: [https://ulm.ibs-bw.de/adISWeb/app?service=direct/0/Home/\\$DirectLink&sp=SOPAC00&sp=SAKSWB-IdNr1381220053](https://ulm.ibs-bw.de/adISWeb/app?service=direct/0/Home/$DirectLink&sp=SOPAC00&sp=SAKSWB-IdNr1381220053) (besucht am 13.10.2019) (siehe S. 18, 66, 148, 149, 151, 163, 165–169, 174, 175, 189–191, 204–206, 208, 209, 211, 218, 221, 224, 226, 227, 230, 234, 240–242, 247, 248, 250–252, 258–262, 271, 274, 283, 286, 287, 289, 290, 294, 296, 297, 299, 303, 305, 306, 308, 310, 312–317, 320, 321, 325, 327, 330, 333, 339, 365, 367, 369, 371, 389–391, 411, 414, 436, 439, 444–446, 465, 466, 480, 517, 524–527, 529, 557, 558, 560, 576, 584, 597, 606–611, 617, 619, 621).

- [DSB84] C. R. DeVore, N. R. Sheeley und J. P. Boris. „The concentration of the large-scale solar magnetic field by a meridional surface flow“. In: *Solar physics* 92.1 (1984), S. 1–14. DOI: [10.1007/bf00157230](https://doi.org/10.1007/bf00157230) (siehe S. 371).
- [Dic+65] R. H. Dicke u. a. „Cosmic Black-Body Radiation.“ In: *The Astrophysical Journal* 142 (Juli 1965), S. 414. DOI: [10.1086/148306](https://doi.org/10.1086/148306) (siehe S. 605).
- [DF28] P. A. M. Dirac und R. H. Fowler. „The quantum theory of the electron“. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 117.778 (1928), S. 610–624. DOI: [10.1098/rspa.1928.0023](https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023) (siehe S. 411).
- [DB85] J. B. Doggett und D. Branch. „A comparative study of supernova light curves“. In: *The Astronomical Journal* 90 (Nov. 1985), S. 2303. DOI: [10.1086/113934](https://doi.org/10.1086/113934) (siehe S. 530, 535).
- [Dre+13] G. Drexlin u. a. „Current Direct Neutrino Mass Experiments“. In: *Advances in High Energy Physics* 2013 (2013), S. 1–39. DOI: [10.1155/2013/293986](https://doi.org/10.1155/2013/293986) (siehe S. 302).
- [Eck+95] A. Eckart u. a. „High Angular Resolution Spectroscopic AND Polarimetric Imaging of the Galactic-center in the Near-infrared“. English. In: *Astrophysical Journal* 445.1, 2 (1995). <http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/187880>, S. 23–26. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/187880](https://doi.org/10.1086/187880). URL: <http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/187880> (siehe S. 573).
- [Edd30] A. S. Eddington. „On the Instability of Einstein’s Spherical World“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 90.7 (Mai 1930), S. 668–678. DOI: [10.1093/mnras/90.7.668](https://doi.org/10.1093/mnras/90.7.668) (siehe S. 583).
- [ES07] J. Eichler und T. Stöhlker. „Radiative electron capture in relativistic ion–atom collisions and the photoelectric effect in hydrogen-like high-Z systems“. In: *Physics Reports* 439.1 (2007), S. 1–99. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.11.003>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015730600442X> (siehe S. 207).
- [Ein15a] A. Einstein. „Die Feldgleichungen der Gravitation“. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* (Jan. 1915), S. 844–847. DOI: [10.1002/3527608958.ch5](https://doi.org/10.1002/3527608958.ch5) (siehe S. 489, 583).
- [Ein15b] A. Einstein. „Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie“. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* (Jan. 1915), S. 831–839. DOI: [10.1002/3527608958.ch4](https://doi.org/10.1002/3527608958.ch4) (siehe S. 489).
- [Ein15c] A. Einstein. „Zur allgemeinen Relativitätstheorie“. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* (Jan. 1915), S. 778–786. DOI: [10.1002/3527608958.ch23](https://doi.org/10.1002/3527608958.ch23) (siehe S. 489, 583).

- [Ein15d] A. Einstein. „Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag)“. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* (Jan. 1915), S. 799–801 (siehe S. 489, 583).
- [Ein17] A. Einstein. „Zur Quantentheorie der Strahlung“. In: *Physikalische Zeitschrift* 18 (1917), S. 121–128 (siehe S. 396).
- [Eis+05] F. Eisenhauer u. a. „SINFONI in the Galactic Center: Young Stars and Infrared Flares in the Central Light-Month“. In: *The Astrophysical Journal* 628.1 (2005). <http://stacks.iop.org/0004-637X/628/i=1/a=246> or <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0502129>, S. 246. DOI: [10.1086/430667](https://doi.org/10.1086/430667). URL: <http://stacks.iop.org/0004-637X/628/i=1/a=246> (siehe S. 575).
- [Eke+15] Z. Eker u. a. „MAIN-SEQUENCE EFFECTIVE TEMPERATURES FROM A REVISED MASS-LUMINOSITY RELATION BASED ON ACCURATE PROPERTIES“. In: *The Astronomical Journal* 149.4 (März 2015), S. 131. DOI: [10.1088/0004-6256/149/4/131](https://doi.org/10.1088/0004-6256/149/4/131) (siehe S. 84, 85).
- [Ell12] U. Ellwanger. *From the universe to the elementary particles : a first introduction to cosmology and the fundamental interactions*. englisch. sowie 3-642-24374-6. Berlin Heidelberg: Springer, 2012. ISBN: 978-3-642-24374-5. URL: <https://rds-ulm.ubs-bw.de/link?id=35235657X> (besucht am 16.10.2017) (siehe S. 18, 617).
- [Ell15] U. Ellwanger. *Vom Universum zum Elementarteilchen*. 3. Aufl. sowie 3-662-46645-7 und 978-3-662-46646-9 (ebook). Heidelberg: Springer, 2015. ISBN: 978-3-662-46645-2. DOI: [10.1007/978-3-662-46646-9](https://doi.org/10.1007/978-3-662-46646-9) (siehe S. 18, 193, 194, 402, 409, 472, 481–483, 608, 617).
- [ESA22] ESA. *Variable Stars*. 15. März 2022. URL: <https://www.cosmos.esa.int/web/hipparcos/variable-stars> (siehe S. 528).
- [Esp21] F. Espenak. *Planetary Ephemeris Data*. 27. Feb. 2021. URL: <http://astropixels.com/ephemeris/ephemeris.html> (siehe S. 618).
- [EUR18] EUROfusion consortium+. *Eurofusion*. <https://www.euro-fusion.org/>. 2018. URL: <https://www.euro-fusion.org/> (siehe S. 352).
- [EM62] J. W. Evans und R. Michard. „Observational Study of Macroscopic Inhomogeneities in the Solar Atmosphere. III. Vertical Oscillatory Motions in the Solar Photosphere.“ In: *The Astrophysical Journal* 136 (Sep. 1962), S. 493. DOI: [10.1086/147403](https://doi.org/10.1086/147403) (siehe S. 375).
- [Fer33] E. Fermi. „Versuch einer Theorie der β -Strahlen.“ In: *La Ricerca Scientifica* 2.12 (1933). DOI: [10.1007/bf01351864](https://doi.org/10.1007/bf01351864) (siehe S. 299).
- [Fer34] E. Fermi. „Versuch einer Theorie der β -Strahlen.“ In: *Zeitschrift für Physik* 88 (1934), S. 161. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01351864> (siehe S. 299).
- [Fli12] T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Bd. 7. Springer, 2012. ISBN: 978-3-8274-3031-1. DOI: [10.1007/978-3-8274-3032-8](https://doi.org/10.1007/978-3-8274-3032-8) (siehe S. 18, 489, 494, 495, 497, 552).

- [For21] L. H. Ford. „Cosmological particle production: a review“. In: *Reports on Progress in Physics* 84.11 (Okt. 2021), S. 116901. DOI: [10.1088/1361-6633/ac1b23](https://doi.org/10.1088/1361-6633/ac1b23). URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6633/ac1b23> (siehe S. 609).
- [FT37] I. Frank und I. Tamm. In: *Comptes Rendus Acad. Sciences U.R.S.S.* 14 (1937), S. 109 (siehe S. 170).
- [Fre21] F. Freistetter. *Epsilon-Tensor*. Spektrum. 18. Juni 2021. URL: <https://www.spektrum.de/kolumnen/epsilon-tensor-warum-kompliziert-manchmal-einfacher-ist/1855837> (besucht am 18.06.2021) (siehe S. 430).
- [Fre04] J. Freund. *Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger*. vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 2004. DOI: [10.3218/3694-7](https://doi.org/10.3218/3694-7) (siehe S. 141).
- [Fro21] F. Frommberger. *Particle Accelerators Around the World*. 23. Apr. 2021. URL: http://www-elsa.physik.uni-bonn.de/accelerator_list.html (siehe S. 164).
- [GCM11] P. T. Gallagher, E. Carley und A. McCloskey. *Solar Images of Today*. School of Physics, Trinity College Dublin. 2011. URL: <https://solarmonitor.org/> (besucht am 22.04.2022) (siehe S. 360).
- [Gam28] G. Gamow. „Zur Quantentheorie des Atomkernes“. In: *Zeitschrift für Physik* 51.3 (1928), S. 204–212. ISSN: 0044-3328. DOI: [10.1007/BF01343196](https://doi.org/10.1007/BF01343196). URL: <https://doi.org/10.1007/BF01343196> (siehe S. 284).
- [Gar94] R. F. Garrison. „A Hierarchy of Standards for the MK Process“. In: *The MK Process at 50 Years: A Powerful Tool for Astrophysical Insight*. Hrsg. von C. J. Corbally, R. O. Gray und R. F. Garrison. Bd. 60. Astronomical Society of the Pacific Conference Series. Jan. 1994, S. 3. (Besucht am 07.11.2019) (siehe S. 359).
- [GS00] E. Gawiser und J. Silk. „The cosmic microwave background radiation“. In: *Physics Reports* 333-334 (Aug. 2000), S. 245–267. DOI: [10.1016/s0370-1573\(00\)00025-9](https://doi.org/10.1016/s0370-1573(00)00025-9) (siehe S. 605).
- [GN11] H. Geiger und J. M. Nuttall. „The ranges of the α particles from various radioactive substances and a relation between range and period of transformation“. In: *Philosophical Magazine*. Series 6 130 (vol. 22 1911), S. 613–621 (siehe S. 282, 283, 286).
- [Gel64] M. Gell-Mann. „A schematic model of baryons and mesons“. In: *Physics Letters* 8.3 (1964), S. 214–215. DOI: [10.1016/S0031-9163\(64\)92001-3](https://doi.org/10.1016/S0031-9163(64)92001-3) (siehe S. 433).
- [GMB54] W. Gentner, H. Maier-Leibnitz und W. Bothe. *An atlas of typical expansion chamber photographs (Atlas typischer Nebelkammerbilder)*. Pergamon, London, 1954. 199 pages (siehe S. 280).

- [Gen+18] R. Genzel u. a. *First Successful Test of Einstein's General Relativity Near Supermassive Black Hole. Culmination of 26 years of ESO observations of the heart of the Milky Way.* 26. Juli 2018. URL: <https://www.eso.org/public/news/eso1825/> (besucht am 11.03.2022) (siehe S. 493).
- [Gio07] M. Giovannini. „Why CMB Physics?“ In: *International Journal of Modern Physics A* 22.16n17 (Juli 2007), S. 2697–2894. DOI: [10.1142/s0217751x07036919](https://doi.org/10.1142/s0217751x07036919). URL: http://cds.cern.ch/record/1026058/files/arXiv:astro-ph_0703730.pdf (siehe S. 614).
- [Gla75] S. L. Glashow. „Quarks with color and flavor“. In: *Scientific American* 233 (1975), S. 38–50. DOI: [10.1038/scientificamerican1075-38](https://doi.org/10.1038/scientificamerican1075-38) (siehe S. 446).
- [Gob07] Y. Gobeil. *Dimension of Lie groups.* McGill University. 2007. URL: <https://www.physics.mcgill.ca/~yangob/groups.pdf> (besucht am 20.06.2022) (siehe S. 426, 427).
- [GJ55] M. Goeppert Mayer und J. H. D. Jensen. *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure.* Structure of matter series. John Wiley & Sons, 1955. URL: <http://books.google.de/books?id=9g9RAAAAMAAJ> (siehe S. 246, 249).
- [GJ61] M. Goeppert Mayer und J. H. D. Jensen. „Nuclear shell structure“. In: *Modern Physics for the Engineer* (1961) (siehe S. 249).
- [Goe50a] M. Goeppert Mayer. „Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model. i. empirical evidence“. In: *Physical Review* 78.1 (1950), S. 16. DOI: [10.1103/physrev.78.16](https://doi.org/10.1103/physrev.78.16) (siehe S. 249).
- [Goe50b] M. Goeppert Mayer. „Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model. II. Theoretical considerations“. In: *Physical Review* 78.1 (1950), S. 22. DOI: [10.1103/physrev.78.22](https://doi.org/10.1103/physrev.78.22) (siehe S. 249).
- [Goe64] M. Goeppert Mayer. „The shell model“. In: *Science* 145.3636 (1964), S. 999–1006. DOI: [10.1126/science.145.3636.999](https://doi.org/10.1126/science.145.3636.999) (siehe S. 249).
- [GJ60] M. Goeppert Mayer und H. D. Jensen. *Elementary theory of nuclear shell structure.* Wiley, 1960 (siehe S. 249).
- [GSZ80] F. Gondolatsch, S. Steinacker und O. Zimmermann. *Astronomie.* Klett, Stuttgart, 1980 (siehe S. 519, 520, 537).
- [GJ17] J. Grotzinger und T. Jordan. *Press/Siever Allgemeine Geologie.* Springer, Jan. 2017. ISBN: 978-3-662-48341-1. DOI: [10.1007/978-3-662-48342-8](https://doi.org/10.1007/978-3-662-48342-8). URL: http://link.springer.com/openurl/pdf?id=doi%5C:10.1007/978-3-662-48342-8_1:PDF (siehe S. 18, 107, 109–116, 118, 120, 317).
- [GSI21] GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH. *Erzeugung neuer Elemente.* 30. Mai 2021. URL: https://www.gsi.de/forschungbeschleuniger/forschung_ein_ueberblick/neue_elemente/erzeugung (siehe S. 356).

- [Had+05] B. Hadinia u. a. „First identification of excited states in Te106 and evidence for isoscalar-enhanced vibrational collectivity“. In: *Physical Review C* 72.4 (Okt. 2005), S. 041303. DOI: [10.1103/physrevc.72.041303](https://doi.org/10.1103/physrevc.72.041303) (siehe S. 264).
- [HS39] O. Hahn und F. Strassmann. „Über den Nachweis und das Verhalten der bei der Bestrahlung des Urans mittels Neutronen entstehenden Erdalkalimetalle“. German. In: *Naturwissenschaften* 27.1 (1939). <https://doi.org/10.1007/BF01488241>, S. 11–15. ISSN: 0028-1042. DOI: [10.1007/BF01488241](https://doi.org/10.1007/BF01488241). URL: [%5Curl%7Bhttps://link.springer.com/article/10.1007/BF01488241%7D](https://link.springer.com/article/10.1007/BF01488241%7D) (siehe S. 322, 337).
- [Hal+19] G. E. Hale u. a. „The Magnetic Polarity of Sun-Spots“. In: *The Astrophysical Journal* 49 (Apr. 1919), S. 153. DOI: [10.1086/142452](https://doi.org/10.1086/142452) (siehe S. 367, 368, 371).
- [HDA67] R. Hanbury Brown, J. Davis und L. R. Allen. „The Stellar Interferometer at Narrabri Observatory-I: A Description of The Instrument and the Observational Procedure“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 137.4 (1967), S. 375–392. DOI: [10.1093/mnras/137.4.375](https://doi.org/10.1093/mnras/137.4.375). eprint: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/137/4/375.full.pdf+html>. URL: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/137/4/375.abstract> (siehe S. 67, 68).
- [HT57] R. Hanbury Brown und R. Q. Twiss. „Interferometry of the Intensity Fluctuations in Light. I. Basic Theory: The Correlation between Photons in Coherent Beams of Radiation“. English. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 242.1230 (1957). <http://www.jstor.org/stable/100432>, S. 300–324. URL: <http://www.jstor.org/stable/100432> (siehe S. 67, 68).
- [Han+67] R. Hanbury Brown u. a. „The Stellar Interferometer at Narrabri Observatory-II: The Angular Diameters of 15 Stars“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 137.4 (1967), S. 393–417. DOI: [10.1093/mnras/137.4.393](https://doi.org/10.1093/mnras/137.4.393). eprint: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/137/4/393.full.pdf+html>. URL: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/137/4/393.abstract> (siehe S. 67, 68).
- [HE22] J. de Haro und E. Elizalde. „Topics in Cosmology—Clearly Explained by Means of Simple Examples“. In: *Universe* 8.3 (März 2022), S. 166. DOI: [10.3390/universe8030166](https://doi.org/10.3390/universe8030166) (siehe S. 605).
- [Har76] E. R. Harrison. „Electrified black holes“. In: *Nature* 264.5586 (Dez. 1976), S. 525–528. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/264525a0](https://doi.org/10.1038/264525a0). URL: <https://doi.org/10.1038/264525a0> (siehe S. 498).
- [Hat15] D. H. Hathaway. „The Solar Cycle“. In: *Living Reviews in Solar Physics* 12.1 (2015). <https://doi.org/10.1007/lrsp-2015-4>, S. 4. ISSN: 1614-4961. DOI: [10.1007/lrsp-2015-4](https://doi.org/10.1007/lrsp-2015-4). URL: <https://doi.org/10.1007/lrsp-2015-4> (siehe S. 364, 365).

- [Haw74] S. W. Hawking. „Black hole explosions?“ In: *Nature* 248.5443 (März 1974), S. 30–31. ISSN: 1476-4687. DOI: [10 . 1038 / 248030a0](https://doi.org/10.1038/248030a0). URL: <https://doi.org/10.1038/248030a0> (siehe S. 499).
- [Hec05] E. Hecht. *Optik*. 4. Aufl. Übersetzt von Dr. Anna Schleitzer. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2005. ISBN: 3-486-27359-0. DOI: [10.1515/9783110526653](https://doi.org/10.1515/9783110526653) (siehe S. 21, 23, 51, 52, 55, 57–59, 65).
- [Hei54] W. Heitler. *The quantum Theory of Radiation*. Oxford University Press, Oxford, 1954 (siehe S. 207).
- [Hes06] J. W. T. Hessels. „A Radio Pulsar Spinning at 716 Hz“. In: *Science* 311.5769 (März 2006), S. 1901–1904. ISSN: 0036-8075. DOI: [10.1126/science.1123430](https://doi.org/10.1126/science.1123430) (siehe S. 542).
- [Heu17] A. Heusler. „Identification of rotating and vibrating tetrahedrons in the heavy nucleus ^{208}Pb “. In: *The European Physical Journal A* 53.11 (Nov. 2017). DOI: [10.1140/epja/i2017-12416-1](https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12416-1) (siehe S. 264).
- [Hey17] C. Heymans. *The Dark Universe*. IOP Publishing, 2017. ISBN: 978-0-7503-1373-5. DOI: [10.1088/978-0-7503-1373-5](https://doi.org/10.1088/978-0-7503-1373-5) (siehe S. 18).
- [Hin96] Hinsch. *Elektronik*. Springer, 1996. DOI: [10.1007/978-3-642-61469-9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61469-9) (siehe S. 169).
- [Hof97] B. Hoffmann. *Einstiens Ideen: das Relativitätsprinzip und seine historischen Wurzeln*. Spektrum, Akad. Verlag, 1997. ISBN: 9783827402523. URL: <https://books.google.de/books?id=tqGVAAAACAAJ> (siehe S. 141, 489).
- [Hof57] R. Hofstadter. „Nuclear and Nucleon Scattering of High-Energy Electrons“. In: *Annual Review of Nuclear Science* 7.1 (1957), S. 231–316. DOI: [10.1146/annurev.ns.07.120157.001311](https://doi.org/10.1146/annurev.ns.07.120157.001311) (siehe S. 216, 217, 220, 238).
- [Hof61] R. Hofstadter. *The electron-scattering method and its application to the structure of nuclei and nucleons*. Internet. The Nobel Prize in Physics 1961, <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/hofstadter-lecture.pdf>. Nobelprize.org. Nobel Media AB 2014, 1961. URL: [%5Curl%7Bhttps://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/hofstadter-lecture.pdf%7D](https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/hofstadter-lecture.pdf) (siehe S. 219).
- [Hol74] A. Holmes-Siedle. „The space-charge dosimeter“. In: *Nuclear Instruments and Methods* 121.1 (Okt. 1974), S. 169–179. DOI: [10.1016/0029-554x\(74\)90153-0](https://doi.org/10.1016/0029-554x(74)90153-0) (siehe S. 311).
- [HH89] Horowitz und Hill. *The Art of Electronics*. Cambridge University Press, 1989. DOI: [10.1119/1.16385](https://doi.org/10.1119/1.16385) (siehe S. 150).
- [Hub29] E. Hubble. „A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 15.3 (1929), S. 168–173. ISSN: 0027-8424. DOI: [10.1073/pnas.15.3.168](https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168). eprint: <https://www.pnas.org/content/15/3/168.full.pdf>. URL: <https://www.pnas.org/content/15/3/168> (siehe S. 585).

- [IAU12] IAU Commission 25. *Redefinition of the Astronomic Unit. Resolution B2*. International Astronomical Union. 2012. URL: https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2012_English.pdf (siehe S. 73).
- [Ili+21] S. D. Ilić u. a. „Recharging process of commercial floating-gate MOS transistor in dosimetry application“. In: *Microelectronics Reliability* (Okt. 2021), S. 114322. DOI: [10.1016/j.microrel.2021.114322](https://doi.org/10.1016/j.microrel.2021.114322) (siehe S. 311).
- [Int21] International Astronomic Union. *Measuring the Universe. The IAU and astronomical units*. 1. Apr. 2021. URL: <https://www.iau.org/public/themes/measuring/> (siehe S. 73).
- [Int17] International Atomic Energy Agency. *Nuclear Data Services - LiveChart of Nuclides*. <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html> (2017-11-07). 2017. URL: [%5Curl%7Bhttps://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html%7D](https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html%7D) (besucht am 07.11.2017) (siehe S. 286, 292, 293, 296).
- [Ipc13] Ipcc - Intergovernmental Panel on Climate Change. *CLIMATE CHANGE 2013: The Physical Science Basis*. 2013. URL: https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/02/WG1AR5_all_final.pdf (besucht am 02.11.2019) (siehe S. 110).
- [Jac+89] M. K. Jackson u. a. „Electron tunneling time measured by photoluminescence excitation correlation spectroscopy“. In: *Applied Physics Letters* 54.6 (1989), S. 552–554. ISSN: 0003-6951. DOI: [10.1063/1.100928](https://doi.org/10.1063/1.100928) (siehe S. 288).
- [JL78] M. Jacob und P. V. Landshoff. „Large transverse momentum and jet studies“. In: *Physics Reports* 48.4 (1978). [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(78\)90177-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(78)90177-1), S. 285–350. ISSN: 0370-1573. DOI: [10.1016/0370-1573\(78\)90177-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(78)90177-1). URL: [%5Curl%7Bhttp://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157378901771%7D](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157378901771%7D) (siehe S. 435).
- [Jea02] J. H. Jeans. „I. The stability of a spherical nebula“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 199.312-320 (Jan. 1902), S. 1–53. DOI: [10.1098/rsta.1902.0012](https://doi.org/10.1098/rsta.1902.0012) (siehe S. 514).
- [Jep+07] H. B. Jeppesen u. a. „Alpha-decay half-life of ^{221}Fr in different environments“. In: *The European Physical Journal A* 32.1 (2007), S. 31–34. ISSN: 1434-601X. DOI: [10.1140/epja/i2007-10011-9](https://doi.org/10.1140/epja/i2007-10011-9) (siehe S. 281).
- [Jia+14] J. Jiang u. a. „Magnetic flux transport at the solar surface“. In: *Space Science Reviews* 186.1-4 (2014), S. 491–523. DOI: [10.1007/978-1-4939-2584-1_17](https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2584-1_17) (siehe S. 371).
- [JFT20] J. A. Johnson, B. D. Fields und T. A. Thompson. „The origin of the elements: a century of progress“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 378.2180 (Aug. 2020), S. 20190301. DOI: [10.1098/rsta.2019.0301](https://doi.org/10.1098/rsta.2019.0301) (siehe S. 393).

- [Joh21] M. Johnson-Groh. *NASA Enters the Solar Atmosphere for the First Time, Bringing New Discoveries*. NASA's Goddard Space Flight Center in Greenbelt, Md. 16. Dez. 2021. URL: <https://www.nasa.gov/feature/goddard/2021/nasa-enters-the-solar-atmosphere-for-the-first-time-bringing-new-discoveries> (besucht am 16.12.2021) (siehe S. 375).
- [Kan+15] M. Kanao u. a. „Hinode SOT Plate Scale Reinvestigated by G-Band Images on the 2012 Transit of Venus“. In: *Solar Physics* 290.5 (Mai 2015), S. 1491–1506. DOI: [10.1007/s11207-015-0675-2](https://doi.org/10.1007/s11207-015-0675-2) (siehe S. 370).
- [Kar03] H. Karttunen. *Fundamental Astronomy*. Physics and Astronomy Online Library. Springer, 2003. ISBN: 9783540001799. URL: <http://books.google.de/books?id=0EhHqww-kgQC> (siehe S. 526, 527).
- [KNS91] J. Kassabov, N. Nedev und N. Smirnov. „Radiation dosimeter based on floating gate MOS transistor“. In: *Radiation Effects and Defects in Solids* 116.1-2 (März 1991), S. 155–158. DOI: [10.1080/10420159108221354](https://doi.org/10.1080/10420159108221354) (siehe S. 311).
- [KJM14] A. Kempf, D. M. Jackson und A. H. Morales. „New Dirac delta function based methods with applications to perturbative expansions in quantum field theory“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 47.41 (Sep. 2014), S. 415204. DOI: [10.1088/1751-8113/47/41/415204](https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/41/415204) (siehe S. 640, 641).
- [KJM15] A. Kempf, D. M. Jackson und A. H. Morales. „How to (path-) integrate by differentiating“. In: *Journal of Physics: Conference Series* 626 (Juli 2015), S. 012015. DOI: [10.1088/1742-6596/626/1/012015](https://doi.org/10.1088/1742-6596/626/1/012015) (siehe S. 640).
- [KK92] H. Kiefer und W. Koelzer. *Strahlen und Strahlenschutz. Vom verantwortungsbewußten Umgang mit dem Unsichtbaren*. Springer, 1992. ISBN: 978-3-642-77548-2. DOI: [10.1007/978-3-642-77548-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-77548-2) (siehe S. 310).
- [Kik+16] N. Kikuchi u. a. „Atomic scattering factor of the ASTRO-H (Hitomi) SXT reflector around the gold's L edges“. In: *Optics Express* 24.22 (Okt. 2016), S. 25548. DOI: [10.1364/oe.24.025548](https://doi.org/10.1364/oe.24.025548). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-24-22-25548> (siehe S. 32).
- [KN29] O. Klein und Y. Nishina. „Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac“. In: 52 (1929), S. 853–868. ISSN: 0044-3328. DOI: [10.1007/bf01366453](https://doi.org/10.1007/bf01366453) (siehe S. 203).
- [Kli13] C. Klinkicht. „CCD-Astrophotografie“. Zulassungsarbeit Lehramt Physik. Universität Ulm, 2013 (siehe S. 514).
- [Köl01] M. Kölbl-Ebert. „Inge Lehmann's paper: “P”“ (1936)“. In: *Episodes* 24.4 (Dez. 2001), S. 262–267. DOI: [10.18814/epiugs/2001/v24i4/007](https://doi.org/10.18814/epiugs/2001/v24i4/007) (siehe S. 116, 377).

- [Las09] A. Lasenby. „The Cosmic Microwave Background and Fundamental Physics“. In: *Space Science Reviews* 148.1-4 (Dez. 2009), S. 329–346. DOI: [10.1007/s11214-009-9616-4](https://doi.org/10.1007/s11214-009-9616-4) (siehe S. 605).
- [LSW99] C. R. Lawrence, D. Scott und M. White. „What Have We Already Learned from the Cosmic Microwave Background?“ In: *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 111.759 (Mai 1999), S. 525–531. DOI: [10.1086/316364](https://doi.org/10.1086/316364) (siehe S. 615).
- [Lee73] C.-K. Lee. „Critical Mass Minimization of a Cylindrical Geometry Reactor by Two Group Diffusion Equation“. In: *Nuclear Engineering and Technology* 5 (2 1973), S. 115–131. ISSN: 2234-358X. eprint: <https://www.koreascience.or.kr/article/JAK0197311921645669.pdf> (siehe S. 342, 343).
- [Lee+06] W. P. Leemans u. a. „GeV electron beams from a centimetre-scale accelerator“. In: 2 (2006), S. 696–699. ISSN: 1745-2473. DOI: [10.1038/nphys418](https://doi.org/10.1038/nphys418) (siehe S. 149).
- [Leh61] I. Lehmann. „S and the Structure of the Upper Mantle“. In: *Geophysical Journal International* 4.s0 (Dez. 1961), S. 124–138. DOI: [10.1111/j.1365-246x.1961.tb06808.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246x.1961.tb06808.x) (siehe S. 116, 378).
- [Leh64] I. Lehmann. „On the travel times of P as determined from nuclear explosions“. In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 54.1 (Feb. 1964), S. 123–139. DOI: [10.1785/bssa0540010123](https://doi.org/10.1785/bssa0540010123). URL: <https://citesearx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.1018.5984&rep=rep1&type=pdf> (siehe S. 116, 378).
- [Leh36] I. Lehmann. „P“. In: *Publications du Bureau Central International de la Séismologie, Toulouse, France* A14 (1936), S. 87–115 (siehe S. 116, 377).
- [Leh87] I. Lehmann. „Seismology in the days of old“. In: *Eos, Transactions American Geophysical Union* 68.3 (1987), S. 33. DOI: [10.1029/eo068i003p00033-02](https://doi.org/10.1029/eo068i003p00033-02). URL: <https://courses.seas.harvard.edu/climate/eli/Courses/EPS281r/Sources/Inner-Core/Lehmann-1988-EOS.pdf> (siehe S. 116).
- [Leh10] I. Lehmann. „On amplitudes of P near the shadow zone“. In: *Annals of Geophysics* 53.1 (Feb. 2010). DOI: [10.4401/ag-4589](https://doi.org/10.4401/ag-4589) (siehe S. 116).
- [Lei64] R. B. Leighton. „Transport of magnetic fields on the sun.“ In: *The Astrophysical Journal* 140 (1964), S. 1547. DOI: [10.1086/148058](https://doi.org/10.1086/148058) (siehe S. 371).
- [LNS62] R. B. Leighton, R. W. Noyes und G. W. Simon. „Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report.“ In: *The Astrophysical Journal* 135 (März 1962), S. 474. DOI: [10.1086/147285](https://doi.org/10.1086/147285) (siehe S. 375).
- [LZY19] C. Li, G. Zhao und C. Yang. „Galactic Rotation and the Oort Constants in the Solar Vicinity“. In: *The Astrophysical Journal* 872.2 (Feb. 2019), S. 205. DOI: [10.3847/1538-4357/ab0104](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab0104). URL: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab0104> (siehe S. 563).

- [LC03] L. Li und C. Chen. „Ice-volcanism due to tidal stress on Europa“. In: *Chinese Science Bulletin* 48.13 (Juli 2003), S. 1390–1392. DOI: [10.1007/bf03184185](https://doi.org/10.1007/bf03184185) (siehe S. 134).
- [LSS63] J. Lindhardt, M. Scharff und E. Schiøtt. „Range concepts and heavy ion ranges“. In: *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 33.14 (1963) (siehe S. 282).
- [LR05] L. E. Lisiecki und M. E. Raymo. „A Pliocene-Pleistocene stack of 57 globally distributed benthic $\delta^{18}\text{O}$ records“. In: *Paleoceanography* 20.1 (2005). DOI: [10.1029/2004PA001071](https://doi.org/10.1029/2004PA001071) (siehe S. 111).
- [Lis99] J. J. Lissauer. „How common are habitable planets?“ In: *Nature* 402 (Dez. 1999), S. C11. DOI: [10.1038/35011503](https://doi.org/10.1038/35011503). URL: <https://doi.org/10.1038/35011503> (siehe S. 119).
- [Loc13] M. Lockwood. „Reconstruction and Prediction of Variations in the Open Solar Magnetic Flux and Interplanetary Conditions“. In: *Living Reviews in Solar Physics* 10.1 (2013). <https://doi.org/10.12942/lrsp-2013-4>, S. 4. ISSN: 1614-4961. DOI: [10.12942/lrsp-2013-4](https://doi.org/10.12942/lrsp-2013-4). URL: <https://doi.org/10.12942/lrsp-2013-4> (siehe S. 361, 362, 365).
- [Loh92] E. Lohrmann. *Hochenergiephysik*. deutsch. 4. Aufl. Stuttgart: Teubner, 1992. ISBN: 3-519-33043-1. DOI: [10.1007/978-3-322-80175-3](https://doi.org/10.1007/978-3-322-80175-3). URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=027687368> (besucht am 16.10.2017) (siehe S. 617).
- [Lym37] E. M. Lyman. „The Beta-Ray Spectra of Radium E and Radioactive Phosphorus“. In: *Physical Review* 51 (1 1937), S. 1–7. DOI: [10.1103/PhysRev.51.1](https://doi.org/10.1103/PhysRev.51.1). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.1> (siehe S. 295).
- [Mac12] D. H. Mackay. „The Sun’s global magnetic field“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 370.1970 (Juli 2012), S. 3151–3168. DOI: [10.1098/rsta.2011.0536](https://doi.org/10.1098/rsta.2011.0536) (siehe S. 371).
- [Man+05] R. N. Manchester u. a. „The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue“. In: *The Astronomical Journal* 129.4 (Apr. 2005), S. 1993–2006. DOI: [10.1086/428488](https://doi.org/10.1086/428488). URL: <https://doi.org/10.1086/428488> (siehe S. 542).
- [Mar21] Marshall Space Flight Center. *Solar Physics*. 31. Mai 2021. URL: https://solarscience.msfc.nasa.gov/the_key.shtml (siehe S. 359).
- [Mar09] O. Marti. *Physikalische Elektronik und Messtechnik*. http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/physikalischeelektronik/phys_elektr/phys_elektr.pdf. Universität Ulm, 2009. URL: http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/physikalischeelektronik/phys_elektr/phys_elektr.pdf (siehe S. 47).

- [Mar14] O. Marti. *Mechanik - Vorlesungsskript*. Vorlesungsskripte Othmar Marti. Universität Ulm, 2014, S. 389. URL: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/krm-2014/krm-2014.pdf> (siehe S. 141–146, 264, 277, 424, 549, 550).
- [Mar16] O. Marti. *Elektrizitätslehre*. <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/el-2016/el-2016.pdf>. Universität Ulm, 2016. URL: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/el-2016/el-2016-OthmarMarti.epub> (siehe S. 150, 158, 160, 187, 288).
- [Mar17] O. Marti. *Optik - Vorlesungsskript*. Vorlesungsskripte Othmar Marti. Universität Ulm, 2017, S. 176. URL: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/op-2016-2017/op-2016-2017.pdf> (siehe S. 21, 23, 43, 47, 51, 52, 57, 78, 116).
- [Mar18] O. Marti. *eigenes Bild*. 2018 (siehe S. 76).
- [MG18] O. Marti und M. Gonçalves. *Atomphysik. Vorlesungsskript*. German. gehalten im Sommersemester 2018. Universität Ulm Institut für Experimentelle Physik, 2018. URL: [%5Curl%7Bhttp://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/ap-2018/ap-2018.pdf%7D](#) (besucht am 10.08.2017). Published, cc-by-sa-4.0 (siehe S. 284, 288).
- [MG19] O. Marti und M. Gonçalves. *Atomphysik. Vorlesungsskript*. German. Universität Ulm Institut für Experimentelle Physik, 2019. URL: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/ap-2019/ap-2019.pdf> (besucht am 11.10.2019). Published, cc-by-sa-4.0 (siehe S. 168, 199, 202, 242, 243, 367, 396, 431, 544).
- [Mat51] R. L. Mather. „Čerenkov Radiation from Protons and the Measurement of Proton Velocity and Kinetic Energy“. In: *Physical Review* 84 (2 Okt. 1951), S. 181–190. DOI: [10.1103/PhysRev.84.181](https://doi.org/10.1103/PhysRev.84.181). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.84.181> (siehe S. 170, 171).
- [Max19] G. Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik 85740 Garching. *Aufbau des Röntgensatelliten ROSAT*. 2019. URL: <https://projects.mpe.mpg.de/heg/rosat/mission/rosat/payload.html> (besucht am 09.09.2019) (siehe S. 33).
- [May02] T. Mayer-Kuckuk. *Kernphysik : eine Einführung*. 7. Aufl. sowie 978-3-519-13223-3. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden: Teubner, 2002. ISBN: 3-519-13223-0. URL: <https://rds-ulm.ubs-bw.de/link?id=09839374X> (besucht am 16.10.2017) (siehe S. 617).
- [MQ95] M. Mayor und D. Queloz. „A Jupiter-mass companion to a solar-type star“. In: 378 (1995), S. 355–359. ISSN: 0028-0836. DOI: [10.1038/378355a0](https://doi.org/10.1038/378355a0) (siehe S. 548, 552).
- [McD+21] I. McDonald u. a. „Kepler K2 Campaign 9 – I. Candidate short-duration events from the first space-based survey for planetary microlensing“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 505.4 (Juli 2021), S. 5584–5602. DOI: [10.1093/mnras/stab1377](https://doi.org/10.1093/mnras/stab1377) (siehe S. 502).

- [McI94] M. McIrvin. 1994. URL: https://www.desy.de/user/projects/Physics/Quantum/virtual_particles.html (siehe S. 405–408).
- [McN65] D. McNally. „The distribution of angular momentum among main sequence stars“. In: *The Observatory* 85 (Aug. 1965), S. 166–169. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1965Obs...85..166M/abstract> (siehe S. 544).
- [MF39] L. Meitner und O. R. Frisch. „Disintegration of Uranium by Neutrons: a New Type of Nuclear Reaction“. In: *Nature* 143 (1939), S. 239–240. DOI: [10.1038/143239a0](https://doi.org/10.1038/143239a0) (siehe S. 322, 337).
- [Mis11] R. Miskimen. „Neutral Pion Decay“. In: *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 61.1 (Nov. 2011), S. 1–21. DOI: [10.1146/annurev-nucl-102010-130426](https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-102010-130426) (siehe S. 418).
- [Mit21] D. P. Mitchell. *Venera 13 Mission zur Venus*. 16. Apr. 2021. URL: http://mentallandscape.com/V_Venera11.htm (siehe S. 105).
- [MP99] O. Montenbruck und T. Pfleger. *Astronomie mit dem Personal Computer*. 3. Aufl. Springer Berlin / Heidelberg, 1999. ISBN: 3-540-66218-9. DOI: [10.1007/3-540-35040-3](https://doi.org/10.1007/3-540-35040-3) (siehe S. 617).
- [MAG21] M. Z. Mughal, I. Ahmad und J. L. G. Guirao. „Relativistic Cosmology with an Introduction to Inflation“. In: *Universe* 7.8 (Juli 2021), S. 276. DOI: [10.3390/universe7080276](https://doi.org/10.3390/universe7080276) (siehe S. 605).
- [Mur01] P. Murdin. *Encyclopedia of astronomy and astrophysics*. Bristol Philadelphia London New York: Institute of Physics Pub. Nature Pub. Group, 2001. ISBN: 0333750888. DOI: [10.1888/033750888](https://doi.org/10.1888/033750888). URL: <http://www.ency-astro.com/> (siehe S. 385).
- [NAS19a] NASA. *Astrometry. Animation*. 2019. URL: <https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/5> (besucht am 12.10.2019) (siehe S. 555).
- [NAS19b] NASA. *Direct Imaging. Animation*. 2019. URL: <https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/3> (besucht am 12.10.2019) (siehe S. 554).
- [NAS19c] NASA. *Exoplanet Exploration*. 2019. URL: <https://exoplanets.nasa.gov/> (besucht am 10.10.2019) (siehe S. 543).
- [NAS19d] NASA. *How to find habitable planets*. 2019. URL: <https://exoplanets.nasa.gov/what-is-an-exoplanet/how-do-we-find-life/> (besucht am 12.10.2019) (siehe S. 556).
- [NAS19e] NASA. *Micro-Lensing. Animation*. 2019. URL: <https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/4> (besucht am 12.10.2019) (siehe S. 553).
- [NAS19f] NASA. *Planets*. Internet. <https://solarsystem.nasa.gov/planets/overview/>. 2019. URL: <https://solarsystem.nasa.gov/planets/overview/> (besucht am 04.10.2019) (siehe S. 102–105, 118, 120, 123, 124, 127, 129–131, 135, 136, 138, 546).

- [NAS19g] NASA. *The radial velocity method. Animation*. 2019. URL: <https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/1> (besucht am 12.10.2019) (siehe S. 549).
- [NAS19h] NASA. *Transit Method. Animation*. 2019. URL: <https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/2> (besucht am 12.10.2019) (siehe S. 552).
- [NAS21] NASA. *Solar Dynamics Observatory Website*. 2. Juni 2021. URL: <https://sdo.gsfc.nasa.gov/> (siehe S. 359).
- [NG16] NASA und Goddard Space Flight Center. *Active Galaxies*. Dez. 2016. URL: https://imagine.gsfc.nasa.gov/science/objects/active_galaxies1.html (besucht am 22.07.2021) (siehe S. 597).
- [NG21] NASA und Goddard Space Flight Center. *Clusters of Galaxies*. 22. Juli 2021. URL: <https://imagine.gsfc.nasa.gov/science/objects/clusters.html> (besucht am 22.07.2021) (siehe S. 601).
- [NJ22] NASA und Jet Propulsion Laboratory. *Perseverance's Mastcam-Z Captures a Phobos Solar Eclipse*. 20. Apr. 2022. URL: <https://www.jpl.nasa.gov/images/pia25179-perseverances-mastcam-z-captures-a-phobos-solar-eclipse> (besucht am 22.04.2022) (siehe S. 122).
- [NJ19] NASA und JPL. *JPL Solar System Dynamics*. Internet. <https://ssd.jpl.nasa.gov/>. 2019. URL: <https://ssd.jpl.nasa.gov/> (besucht am 04.10.2019) (siehe S. 102, 131).
- [NP22] NASA und D. Pesnell. *The Sun Now*. NASA. 22. Apr. 2022. URL: <https://sdo.gsfc.nasa.gov/data/> (besucht am 22.04.2022) (siehe S. 360, 365, 366).
- [Nas22] Nasa and ESA. *James Webb Space Telescope*. 14. März 2022. URL: <https://www.jwst.nasa.gov/> (besucht am 14.03.2022) (siehe S. 605).
- [Nas00] M. S. el Naschie. „Heisenberg's critical mass calculations for an explosive nuclear reaction“. In: *Chaos, Solitons & Fractals* 11.6 (Mai 2000), S. 987–997. DOI: [10.1016/s0960-0779\(99\)00110-1](https://doi.org/10.1016/s0960-0779(99)00110-1) (siehe S. 339).
- [Nat17] National Nuclear Data Center. <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/>. 2017. URL: <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/> (besucht am 09.08.2017) (siehe S. 253, 283, 285, 305, 306, 457).
- [Ng+14] C. Ng u. a. „The High Time Resolution Universe pulsar survey - X. Discovery of four millisecond pulsars and updated timing solutions of a further 12“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 439.2 (Feb. 2014), S. 1865–1883. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/stu067](https://doi.org/10.1093/mnras/stu067) (siehe S. 542).
- [NIS21] NIST. *The NIST Reference of Constants, Units and Uncertainty. CODATA Internationally recommended 2018 values of the Fundamental Physical Constants*. Englisch. Version 2018. NIST. 11. Mai 2021. URL: <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html> (besucht am 11.05.2021) (siehe S. 261).

- [NOA22] NOAA. *Space Weather Prediction Center, National Oceanic and Atmospheric Administration*. 22. Apr. 2022. URL: <https://www.swpc.noaa.gov/products/solar-cycle-progression> (besucht am 22.04.2022) (siehe S. 361).
- [Nuc16] A. Nucciotti. „The Use of Low Temperature Detectors for Direct Measurements of the Mass of the Electron Neutrino“. In: *Advances in High Energy Physics* 2016 (2016), S. 1–41. DOI: [10.1155/2016/9153024](https://doi.org/10.1155/2016/9153024) (siehe S. 302).
- [ODe+10] S. L. O’Dell u. a. „High-resolution x-ray telescopes“. In: *SPIE Proceedings*. Hrsg. von A. M. Khounsay, S. L. O’Dell und S. R. Restaino. SPIE, Aug. 2010. DOI: [10.1117/12.862315](https://doi.org/10.1117/12.862315) (siehe S. 38).
- [Obs19] N. S. Observatory. *Global Oscillation Network Group. Gong-Network*. The National Solar Observatory is operated by the Association of Universities for Research in Astronomy, under a cooperative agreement with the National Science Foundation. 2019. URL: <https://gong.nso.edu/> (besucht am 16.10.2019) (siehe S. 379).
- [Oke74] J. B. Oke. „Absolute Spectral Energy Distributions for White Dwarfs“. In: *Astrophysical Journal Supplement*, 27 (Feb. 1974), S. 21. DOI: [10.1086/190287](https://doi.org/10.1086/190287). URL: <http://articles.adsabs.harvard.edu/full/1974ApJS...27...210/0000021.000.html> (besucht am 07.11.2019) (siehe S. 81, 359).
- [OD03] R. P. Olling und W. Dehnen. „The Oort Constants Measured from Proper Motions“. In: *The Astrophysical Journal* 599.1 (Dez. 2003), S. 275–296. DOI: [10.1086/379278](https://doi.org/10.1086/379278). URL: <https://doi.org/10.1086/379278> (siehe S. 564).
- [Özg+17] Y. Özgüven u. a. „Search for the anomalous electromagnetic moments of tau lepton through electron–photon scattering at CLIC“. In: *Nuclear Physics B* 923 (Okt. 2017), S. 475–490. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2017.08.008](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2017.08.008) (siehe S. 412).
- [Pag13] Pages 2k Consortium. „Continental-scale temperature variability during the past two millennia“. In: *Nature Geoscience* 6.5 (Apr. 2013), S. 339–346. DOI: [10.1038/ngeo1797](https://doi.org/10.1038/ngeo1797) (siehe S. 363).
- [Par58] E. N. Parker. „Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields.“ In: *The Astrophysical Journal* 128 (Nov. 1958), S. 664. DOI: [10.1086/146579](https://doi.org/10.1086/146579) (siehe S. 386).
- [Par60] E. N. Parker. „The Hydrodynamic Theory of Solar Corpuscular Radiation and Stellar Winds.“ In: *The Astrophysical Journal* 132 (Nov. 1960), S. 821. DOI: [10.1086/146985](https://doi.org/10.1086/146985) (siehe S. 386).
- [Par79] E. N. Parker. „Sunspots and the physics of magnetic flux tubes. I-The general nature of the sunspot. II-Aerodynamic drag“. In: *The Astrophysical Journal* 230 (1979), S. 905–923. DOI: [10.1086/157150](https://doi.org/10.1086/157150) (siehe S. 371).
- [Par20a] Particle Data Group. *Particle Data Groupe Live Viewer*. Hrsg. von e. a. Tabanashi M. 25. Feb. 2020. URL: <http://pdglive.lbl.gov/Viewer.action> (siehe S. 297, 467).

- [Par20b] Particle Data Group. *The Review of Particle Physics*. Hrsg. von e. a. Tabanashi M. 25. Feb. 2020. URL: <http://pdg.lbl.gov/> (besucht am 25.02.2020) (siehe S. 436, 437, 467).
- [Par21] Particle Data Group. *Clebsch-Gordan Coefficients, Spherical Harmonics, and D Functions*. 2021. URL: <https://pdg.lbl.gov/2016/reviews/rpp2016-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf> (siehe S. 443).
- [PZG18] O. Passon, T. Zügge und J. Grebe-Ellis. „Pitfalls in the teaching of elementary particle physics“. In: *Physics Education* (15. Nov. 2018). DOI: [10.1088/1361-6552/aadbc7](https://doi.org/10.1088/1361-6552/aadbc7). arXiv: [1811.06230 \[physics.ed-ph\]](https://arxiv.org/abs/1811.06230) (siehe S. 408).
- [PW65] A. A. Penzias und R. W. Wilson. „A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.“ In: *The Astrophysical Journal* 142 (Juli 1965), S. 419. DOI: [10.1086/148307](https://doi.org/10.1086/148307) (siehe S. 605).
- [Per17] M. Perez. *Working Toward 'Seamless' Infrared Maps of Titan*. NASA Website. English. NASA. 27. Juli 2017. URL: <https://www.nasa.gov/image-feature/jpl/working-toward-seamless-infrared-maps-of-titan> (siehe S. 128).
- [Pér96] J.-P. Pérez. *Optik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1996. ISBN: 3-86025-389-1 (siehe S. 21, 51, 52, 57, 59).
- [Pet+99] J. R. Petit u. a. „Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica“. In: *Nature* 399.6735 (Juni 1999), S. 429–436. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/20859](https://doi.org/10.1038/20859). URL: <https://escholarship.org/content/qt7rx4413n/qt7rx4413n.pdf> (besucht am 02.11.2019) (siehe S. 112).
- [PSW89] K. Pinkau, U. Schumacher und H. G. Wolf. „Fortschritte der Fusionsforschung mit magnetischem Plasmaeinschluß“. In: *Physikalische Blätter* 45 (1989). <https://doi.org/10.1002/phbl.19890450202>, S. 41–47. DOI: [10.1002/phbl.19890450202](https://doi.org/10.1002/phbl.19890450202). URL: [%5Curl%7Bhttps://doi.org/10.1002/phbl.19890450202%7D](https://doi.org/10.1002/phbl.19890450202%7D) (siehe S. 355).
- [PS81] G. R. Plattner und I. Sick. „Coherence, interference and the Pauli principle: Coulomb scattering of carbon from carbon“. In: *European Journal of Physics* 2.2 (Apr. 1981), S. 109–113. DOI: [10.1088/0143-0807/2/2/008](https://doi.org/10.1088/0143-0807/2/2/008) (siehe S. 201).
- [PH70] W. J. Poch und A. G. Holmes-Siedle. „The Long-Term Effects of Radiation on Complementary MOS Logic Networks“. In: *IEEE Transactions on Nuclear Science* 17.6 (1970), S. 33–40. DOI: [10.1109/tns.1970.4325764](https://doi.org/10.1109/tns.1970.4325764) (siehe S. 311).
- [Pot21] T. Potter. *Part II Particle and Nuclear Physics*. 27. März 2021. URL: <https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~chpotter/particleandnuclearphysics/mainpage.html> (siehe S. 18, 19, 410, 411).
- [Pre21] J. Pretz. „Anomale Abweichung“. In: *Physik Journal* 20 (6 Juni 2021), S. 17–18 (siehe S. 412).

- [Pyo03] T.-S. Pyo. „IRCS Echelle Spectrograph and Data handling“. In: *Subaru Telescope* (2003). <http://spektroskopie.vdsastro.de/files/pdfs/pyo2003.pdf>. URL: %5Curl%7Bhttp://spektroskopie.vdsastro.de/files/pdfs/pyo2003.pdf%7D (besucht am 06.06.2018) (siehe S. 49).
- [Rav+19] A. Ravi u. a. „Probing Dark Matter Using Precision Measurements of Stellar Accelerations“. In: *Physical Review Letters* 123 (9 Aug. 2019), S. 091101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.123.091101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.091101). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.091101> (siehe S. 564, 580).
- [Ree15] B. C. Reed. „Note on the minimum critical mass for a tamped fission bomb core“. In: *American Journal of Physics* 83.11 (Nov. 2015), S. 969–971. DOI: [10.1119/1.4931721](https://doi.org/10.1119/1.4931721) (siehe S. 343).
- [Ree18] B. C. Reed. „A toy model for the yield of a tamped fission bomb“. In: *American Journal of Physics* 86.2 (Feb. 2018), S. 105–109. DOI: [10.1119/1.5009102](https://doi.org/10.1119/1.5009102) (siehe S. 343).
- [Ree84] M. J. Rees. „Black Hole Models for Active Galactic Nuclei“. In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 22.1 (1984), S. 471–506. DOI: [10.1146/annurev.aa.22.090184.002351](https://doi.org/10.1146/annurev.aa.22.090184.002351). eprint: <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.22.090184.002351>. URL: <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.22.090184.002351> (siehe S. 498).
- [Ric14] K. Rice. „The Detection and Characterization of Extrasolar Planets“. In: *Challenges* 5.2 (2014), S. 296–323. ISSN: 2078-1547. DOI: [10.3390/challe5020296](https://doi.org/10.3390/challe5020296) (siehe S. 550–552, 554, 555).
- [Rix22] H.-W. Rix. *A Quick Review of Cosmology: The Geometry of Space, Dark Matter, and the Formation of Structure*. Max-Planck-Institute for Astronomy, Munich. 14. März 2022. URL: [https://www2.mpihd.mpg.de/homes/rix/cosmo.pdf](https://www2.mpi-hd.mpg.de/homes/rix/cosmo.pdf) (siehe S. 604).
- [Roe18] B. Roeck. *Der Morgen der Welt*. Beck C. H., 2018. 1306 S. ISBN: 978-3-406-74119-7. DOI: [10.17104/9783406741203](https://doi.org/10.17104/9783406741203). URL: https://www.ebook.de/de/product/36295846/bernd_roeck_der_morgen_der_welt.html (besucht am 01.09.2019) (siehe S. 3).
- [RTF78] V. C. Rubin, N. Thonnard und J. Ford W. K. „Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV - Systematic dynamical properties, SA through SC“. In: *Astrophysical Journal, Part 2 - Letters to the Editor* 225 (1978). <http://articles.adsabs.harvard.edu/full/1978ApJ...225L.107R/L000111.000.html>, S. L107–L111. DOI: [10.1086/182804](https://doi.org/10.1086/182804). (Besucht am 06.02.2018) (siehe S. 575, 576).
- [Sak64] B. Sakita. „Supermultiplets of Elementary Particles“. In: *Physical Review* 136 (6B 1964), B1756–B1760. DOI: [10.1103/PhysRev.136.B1756](https://doi.org/10.1103/PhysRev.136.B1756) (siehe S. 422).
- [SE90] H. Scheffler und H. Elsässer. *Physik der Sterne und der Sonne*. BI-Wiss.-Verlag, 1990. ISBN: 9783411141722. URL: <http://books.google.de/books?id=xuR-AAAAIAAJ> (siehe S. 516).

- [Sch19] K. Schilcher. *Quantenelektrodynamik kompakt*. De Gruyter Studium, 2019. 246 S. ISBN: 978-3-11-048858-6. DOI: <http://dx.doi.org/10.1515/9783110488593> (siehe S. 18, 618).
- [Sch+02] R. Schödel u. a. „A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way“. In: *Nature* 419.6908 (2002). <http://dx.doi.org/10.1038/nature01121>, S. 694–696. ISSN: 0028-0836. DOI: <10.1038/nature01121>. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature01121> (siehe S. 575).
- [Sch16] K. Schwarzschild. „Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie“. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. März 1916, S. 424–434. DOI: 10.1007/978-3-642-58084-0_22 (siehe S. 495).
- [Sch15] J. Schwichtenberg. *Physics from Symmetry (Undergraduate Lecture Notes in Physics)*. Springer, 2015. ISBN: 978-3319192000. URL: <https://www.amazon.com/Physics-Symmetry-Undergraduate-Lecture-Notes/dp/3319192000?SubscriptionId=0JYN1NVW651KCA56C102&tag=techkie-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=3319192000> (besucht am 30.10.2017) (siehe S. 18, 141, 618).
- [Sch13] J.-M. Schwindt. *Tutorium Quantenphysik*. deutsch. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2013. ISBN: 978-3-642-37791-4. URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=393504891> (besucht am 16.10.2017) (siehe S. 177, 422, 440, 617).
- [Sei92] P. K. Seidelmann. *Explanatory supplement to the Astronomical Almanac*. Hrsg. von P. K. Seidelmann. Bd. 30. 07. American Library Association, 1992, S. 30–3807–30–3807. ISBN: 978-1891389450. URL: <https://archive.org/details/131123ExplanatorySupplementAstronomicalAl> (besucht am 25.05.2022) (siehe S. 19, 73, 74).
- [Sei09] A. Seiden. *Particle Physics: A Comprehensive Introduction*. Pearson Education, 2009. ISBN: 9788131728567. URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=118641662> (besucht am 16.10.2017) (siehe S. 18, 422, 617).
- [SDB85] N. R. Sheeley, C. R. DeVore und J. P. Boris. „Simulations of the mean solar magnetic field during sunspot cycle 21“. In: *Solar Physics* 98.2 (Aug. 1985), S. 219–239. DOI: <10.1007/bf00152457> (siehe S. 371).
- [Sig03] M. Sigrist. *Quantenmechanik I*. ETH Zürich, Institut für theoretische Physik. 2003. URL: <https://edu.itp.phys.ethz.ch/2007b/ws0203/qm1/script.pdf> (besucht am 13.05.2022) (siehe S. 239).
- [Sim+94] J. I. Simon u. a. „Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets.“ In: *Astronomy and Astrophysics* 282 (Feb. 1994), S. 663. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1994A%5C&A...282..663S/abstract> (besucht am 02.11.2019) (siehe S. 108).

- [Sim90] K. Simonyi. *Kulturgeschichte der Physik*. Akadémiai Kiadó, Budapest und Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin, 1990 (siehe S. 87–90, 211).
- [Sin+22] K. N. Singer u. a. „Large-scale cryovolcanic resurfacing on Pluto“. In: *Nature Communications* 13.1 (März 2022). DOI: [10.1038/s41467-022-29056-3](https://doi.org/10.1038/s41467-022-29056-3) (siehe S. 133, 134).
- [Soa12] D. Soares. „Einstein’s static universe“. In: *Revista Brasileira de Ensino de Fisica* 34.1 (17. März 2012), S. 1302. arXiv: [1203.4513 \[physics.gen-ph\]](https://arxiv.org/abs/1203.4513) (siehe S. 583).
- [Sof13] Y. Sofue. „Rotation Curve and Mass Distribution in the Galactic Center — From Black Hole to Entire Galaxy —“. In: *arXiv.org, e-Print Archive Astrophysics* (2013). DOI: [10.1093/pasj/65.6.118](https://doi.org/10.1093/pasj/65.6.118). arXiv: [1307.8241 \[astro-ph.GA\]](https://arxiv.org/abs/1307.8241) (siehe S. 577, 578).
- [Sol+04] S. K. Solanki u. a. „Unusual activity of the Sun during recent decades compared to the previous 11,000 years“. In: *Nature* 431.7012 (Okt. 2004). Original data: https://www.ncei.noaa.gov/pub/data/paleo/climate_forcing/solar_variability/solanki2004-ssn.txt, S. 1084–1087. DOI: [10.1038/nature02995](https://doi.org/10.1038/nature02995) (siehe S. 363).
- [Sol21] Solar Observatories Group at Stanford University. *Stanford Solar Center*. 31. Mai 2021. URL: <http://solar-center.stanford.edu/about/> (siehe S. 359).
- [Spa03] K.-H. Spatschek. *Astrophysik : eine Einführung in Theorie und Grundlagen*. Stuttgart: Teubner, 2003. ISBN: 3-519-00452-6. DOI: [10.1007/978-3-662-63626-8](https://doi.org/10.1007/978-3-662-63626-8). URL: <https://rds-ulm.ubs-bw.de/link?id=105864617> (besucht am 16.10.2017) (siehe S. 382, 586, 608, 617).
- [Spi58] L. Spitzer. „The Stellarator Concept“. In: *Physics of Fluids* 1.4 (1958), S. 253. DOI: [10.1063/1.1705883](https://doi.org/10.1063/1.1705883) (siehe S. 355).
- [Sta13] J. Stachel. *Dunkle Materie in der Milchstraße*. German. Deutsche Physikalische Gesellschaft. 2013. URL: https://www.dpg-physik.de/veroeffentlichungen/publikationen/physikkonkret/pix/physik_konkret_16.pdf (besucht am 18.07.2021) (siehe S. 578, 580).
- [Sta14] J. Stachel. *Dunkle Energie – eines der größten Rätsel der Kosmologie*. 2014. URL: https://www.dpg-physik.de/veroeffentlichungen/publikationen/physikkonkret/pix/physik_konkret_20.pdf (besucht am 18.07.2021) (siehe S. 580, 603, 604).
- [Sta+95] P. Staples u. a. „Prompt fission neutron energy spectra induced by fast neutrons“. In: *Nuclear Physics A* 591.1 (1995), S. 41–60. ISSN: 0375-9474. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(95\)00119-L](https://doi.org/10.1016/0375-9474(95)00119-L) (siehe S. 323).
- [SB10] M. Steinmetz und M. Bartelmann. „Dem Dunklen Universum auf der Spur“. In: *Spektrum* (Aug. 2010). URL: https://www.spektrum.de/pdf/suw-2010-08-s032-pdf/1038777?file&_wis=1 (siehe S. 578, 579).

- [Sti10a] K. Stierstadt. *Atommüll - wohin damit?* Unter Mitw. von Günther Fischer. Frankfurt M.: Deutsch Harri GmbH, 2010. ISBN: 978-3-8171-1868-7. URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=333126351> (besucht am 16.10.2017) (siehe S. 18, 307, 309, 356, 358, 618).
- [Sti10b] J. Stillwell. *Naive Lie Theory*. New York: Springer, 2010. 232 S. ISBN: 9781441926814. URL: http://www.ebook.de/de/product/13974288/john_stillwell_naive_lie_theory.html (besucht am 30.10.2017) (siehe S. 18, 422–424, 618).
- [Sul65] D. C. Sullivan. „Transient Radiation-Induced Response of MOS Field Effect Transistors“. In: *IEEE Transactions on Nuclear Science* 12.6 (1965), S. 31–37. DOI: <10.1109/tns.1965.4323920> (siehe S. 311).
- [Tam39] I. Tamm. In: *Journal of Physics (U.S.S.R.)* 1 (1939), S. 439 (siehe S. 170).
- [Tan+18a] C. M. Tan u. a. „LOFAR Discovery of a 23.5 s Radio Pulsar“. In: *The Astrophysical Journal* 866.1 (Okt. 2018), S. 54. ISSN: 1538-4357. DOI: <10.3847/1538-4357/aade88> (siehe S. 542).
- [Tan+18b] M. Tanabashi u. a. „Review of Particle Physics“. In: *Physical Review D* 98 (3 Aug. 2018), S. 030001. DOI: <10.1103/PhysRevD.98.030001>. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001> (siehe S. 467).
- [Tay97] J. R. Taylor. *An introduction to error analysis : the study of uncertainties in physical measurements*. 2. Aufl. <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=060293519>, also available on the internet (check legal issues) sowie ISBN 0-935702-75-X und 978-0-935702-75-0. University Science, Sausalito, Calif., 1997. 327 S. ISBN: 0-935702-42-3. DOI: <10.1063/1.882103> (siehe S. 631).
- [Tea95] E. Team. *The Extrasolar Planets Encyclopaedia*. 1995. URL: <http://exoplanet.eu/> (besucht am 10.10.2019) (siehe S. 543, 550, 552, 553, 555, 556).
- [The18] The ITER Organization. *ITER Fusionsreaktor*. <https://www.iter.org/>. 2018. URL: <https://www.iter.org/> (siehe S. 351, 352).
- [Tho11] M. Thomson. *Handout 12 : The CKM Matrix and CP Violation*. Cambridge University High Energy Physics. 2011. URL: https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~thomson/partIIIparticles/handouts/Handout_12_2011.pdf (besucht am 30.06.2021) (siehe S. 466).
- [Tho18] K. S. Thorne. „Nobel Lecture: LIGO and gravitational waves III“. In: *Reviews of Modern Physics* 90 (4 Okt. 2018), S. 040503. DOI: <10.1103/RevModPhys.90.040503>. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.040503> (siehe S. 503).
- [TC17] P. Thyssen und A. Ceulemans. *Shattered symmetry: group theory from the eightfold way to the periodic table*. Oxford University Press, 2017. ISBN: 9780190611392 (siehe S. 18, 427, 618).
- [TM04] P. A. Tipler und G. Mosca. *Physik*. 2. Aufl. ISBN-13: 978-3827411648. Spektrum Verlag, 2004. DOI: <10.1007/978-3-8274-2236-1> (siehe S. 52).

- [UB91] A. Unsöld und B. Baschek. *Der neue Kosmos*. Springer, 1991. ISBN: 9783540537571. DOI: [10.1007/978-3-642-86155-0](https://doi.org/10.1007/978-3-642-86155-0). URL: <http://books.google.de/books?id=f0SMPwAACAAJ> (siehe S. 85, 505, 506).
- [UHG14] I. G. Usoskin, Hulot und Y. G. Gallet. *Solar activity reconstructed for 3 millennia : J/A+A/562/L10*. 2014. URL: <http://cdsarc.u-strasbg.fr/viz-bin/qcat?J/A%20A/562/L10#/article> (besucht am 25.10.2021) (siehe S. 362).
- [Uso+14] I. G. Usoskin u. a. „Evidence for distinct modes of solar activity“. In: *Astronomy & Astrophysics* 562 (Feb. 2014), S. L10. DOI: [10.1051/004-6361/201423391](https://doi.org/10.1051/004-6361/201423391) (siehe S. 362).
- [VPM20] J. A. Vazquez, L. E. Padilla und T. Matos. In: *Revista Mexicana de Física E* 17.1 Jan-Jun (2020), S. 73–91. DOI: [10.31349/RevMexFisE.17.73](https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.17.73). arXiv: [1810.09934 \[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/1810.09934) (siehe S. 611).
- [Vek21] F. van der Veken. *Feynman Diagrams Cheat Sheet. S'Cool LAB Summer Camp 2018 - Standard Model of particle physics II*. English. CERN, Educational Outreach, S'Cool LAB»Events. 11. Juni 2021. URL: <https://indico.cern.ch/event/726779/contributions/2991313/attachments/1642566/2726786/CheatSheet.pdf> (besucht am 11.06.2021) (siehe S. 401).
- [Ver19] Verein Astroinfo. *Astronomie.info*. Hrsg. von A. Barmettler. 2019. URL: <https://www.astronomie.info/> (besucht am 13.10.2019) (siehe S. 618).
- [WFH67] R. V. Wagoner, W. A. Fowler und F. Hoyle. „On the Synthesis of Elements at Very High Temperatures“. In: *Astrophysical Journal* 148 (Apr. 1967), S. 3. DOI: [10.1086/149126](https://doi.org/10.1086/149126) (siehe S. 393, 610, 611).
- [Wal68] M. Waldmeier. *Leitfaden der astronomischen Orts- und Zeitbestimmung*. Verlag Sauerländer Aarau, 1968, S. 90 (siehe S. 77, 632).
- [Wal18] A. Walker-Loud. „Dissecting the Mass of the Proton“. In: *Physics* 11 (Nov. 2018), S. 118. DOI: [10.1103/physics.11.118](https://doi.org/10.1103/physics.11.118) (siehe S. 449, 450).
- [Wam12] J. Wambsgansß. *Universum für alle*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN: 978-3-662-56002-0. DOI: [10.1007/978-3-662-56002-0](https://doi.org/10.1007/978-3-662-56002-0). URL: https://www.ebook.de/de/product/31002836/joachim_wambsganss_universum_fuer_alle.html (siehe S. 18, 618).
- [Wan04] E. P. Wang. *Rutherford Scattering of α -Particles*. MIT. 2004. URL: <http://web.mit.edu/wangfire/pub8.13/rutherpaper.pdf> (siehe S. 212).
- [WNS89] Y. M. Wang, A. G. Nash und N. R. Sheeley. „Magnetic Flux Transport on the Sun“. In: *Science* 245.4919 (Aug. 1989), S. 712–718. DOI: [10.1126/science.245.4919.712](https://doi.org/10.1126/science.245.4919.712) (siehe S. 371).

- [Wap12] A. H. Wapstra. *Nucleus-Win*. English. Software. <http://amdc.in2p3.fr/>, http://amdc.impcas.ac.cn/web/nubdisp_en.html oder <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>. Atomic Mass Data Center, 2012. URL: <http://amdc.in2p3.fr/> (siehe S. 253, 270, 321).
- [Wat+19] L. L. Watkins u. a. „Evidence for an Intermediate-mass Milky Way from Gaia DR2 Halo Globular Cluster Motions“. In: *The Astrophysical Journal* 873.2 (März 2019), S. 118. DOI: [10.3847/1538-4357/ab089f](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab089f) (siehe S. 600).
- [WA80] R. C. Weast und M. J. Astle, Hrsg. *Handbook of Chemistry and Physics*. Bd. 61. CRC Press, 1980 (siehe S. 467).
- [WEI55] H. E. Wegner, R. M. Eisberg und G. Igo. „Elastic Scattering of 40-Mev Alpha Particles from Heavy Elements“. In: *Physical Review* 99.3 (Aug. 1955), S. 825–833. DOI: [10.1103/physrev.99.825](https://doi.org/10.1103/physrev.99.825) (siehe S. 215).
- [Wei+93] C. Weinheimer u. a. „Improved limit on the electron-antineutrino rest mass from tritium β -decay“. In: *Physics Letters B* 300.3 (1993), S. 210–216. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)90355-L](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90355-L). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939390355L> (siehe S. 301).
- [Wei94] M. Weiss. „Introduction to rf linear accelerators“. In: (1994). DOI: [10.5170/CERN-1994-001.913](https://doi.org/10.5170/CERN-1994-001.913). URL: <http://cds.cern.ch/record/261732> (besucht am 03.12.2019) (siehe S. 152).
- [Wei18] R. Weiss. „Nobel Lecture: LIGO and the discovery of gravitational waves I“. In: *Reviews of Modern Physics* 90 (4 Dez. 2018), S. 040501. DOI: [10.1103/RevModPhys.90.040501](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.040501). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.040501> (siehe S. 503).
- [Wei51] V. F. Weisskopf. „Radiative Transition Probabilities in Nuclei“. In: *Physical Review* 83 (5 1951), S. 1073–1073. DOI: [10.1103/PhysRev.83.1073](https://doi.org/10.1103/PhysRev.83.1073). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.83.1073> (siehe S. 289).
- [Wey21] H. Weyl. *Raum. Zeit. Materie: Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie*. J. Springer, 1921. URL: <http://books.google.de/books?id=eiVMAAAAMAAJ> (siehe S. 489, 552).
- [WB50] B. G. Whitmore und W. B. Baker. „The Energy Spectrum of Neutrons from a Po—Be Source“. In: *Physical Review* 78.6 (Juni 1950), S. 799–801. DOI: [10.1103/physrev.78.799](https://doi.org/10.1103/physrev.78.799) (siehe S. 325).
- [WF13] M. W. Whitney und C. E. Furness. „Observations of variable stars made during the years 1901-12“. In: *Publications of the Vassar College Observatory* 3 (Jan. 1913), S. i–219. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1913PVas0...3....1W> (siehe S. 528).

- [Wig37] E. Wigner. „On the Consequences of the Symmetry of the Nuclear Hamiltonian on the Spectroscopy of Nuclei“. In: *Physical Review* 51 (2 1937). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.106>, S. 106–119. DOI: [10.1103/PhysRev.51.106](https://doi.org/10.1103/PhysRev.51.106). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.106> (siehe S. 422).
- [Wik17] Wikipedia. *Multipolentwicklung*. <https://de.wikipedia.org/wiki/Multipolentwicklung>. 2017. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Multipolentwicklung> (besucht am 11.11.2017) (siehe S. 288).
- [Wik19a] Wikipedia. *Ceres*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/\(1\)_Ceres](https://de.wikipedia.org/wiki/(1)_Ceres) (besucht am 09.10.2019) (siehe S. 102, 131, 138).
- [Wik19b] Wikipedia. *Erde*. 2019. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Erde> (besucht am 07.10.2019) (siehe S. 118).
- [Wik19c] Wikipedia. *Eris*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/\(136199\)_Eris](https://de.wikipedia.org/wiki/(136199)_Eris) (besucht am 09.10.2019) (siehe S. 131).
- [Wik19d] Wikipedia. *Eris*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/\(136199\)_Eris](https://de.wikipedia.org/wiki/(136199)_Eris) (besucht am 08.10.2019) (siehe S. 134, 135).
- [Wik19e] Wikipedia. *Haumea*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/\(136108\)_Haumea](https://de.wikipedia.org/wiki/(136108)_Haumea) (besucht am 09.10.2019) (siehe S. 131).
- [Wik19f] Wikipedia. *Haumea*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/\(136108\)_Haumea](https://de.wikipedia.org/wiki/(136108)_Haumea) (besucht am 08.10.2019) (siehe S. 135).
- [Wik19g] Wikipedia. *Jupiter*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Jupiter_\(Planet\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Jupiter_(Planet)) (besucht am 07.10.2019) (siehe S. 124).
- [Wik19h] Wikipedia. *Makemake*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/\(136472\)_Makemake](https://de.wikipedia.org/wiki/(136472)_Makemake) (besucht am 09.10.2019) (siehe S. 131).
- [Wik19i] Wikipedia. *Makemake*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/\(136472\)_Makemake](https://de.wikipedia.org/wiki/(136472)_Makemake) (besucht am 08.10.2019) (siehe S. 136).
- [Wik19j] Wikipedia. *Merkur*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Merkur_\(Planet\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Merkur_(Planet)) (besucht am 07.10.2019) (siehe S. 104).
- [Wik19k] Wikipedia. *Mond*. 2019. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Mond> (besucht am 07.10.2019) (siehe S. 120).
- [Wik19l] Wikipedia. *Neptun*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Neptun_\(Planet\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Neptun_(Planet)) (besucht am 07.10.2019) (siehe S. 130).
- [Wik19m] Wikipedia. *Pluto*. 2019. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Pluto> (besucht am 09.10.2019) (siehe S. 131).
- [Wik19n] Wikipedia. *Saturn*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Saturn_\(Planet\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Saturn_(Planet)) (besucht am 07.10.2019) (siehe S. 127).
- [Wik19o] Wikipedia. *Serrurier Truss. A construction to compensate gravity*. 2019. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Serrurier_truss (besucht am 17.10.2019) (siehe S. 27).
- [Wik19p] Wikipedia. *Uranus*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Uranus_\(Planet\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Uranus_(Planet)) (besucht am 07.10.2019) (siehe S. 129).
- [Wik19q] Wikipedia. *Venus*. 2019. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Venus_\(Planet\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Venus_(Planet)) (besucht am 07.10.2019) (siehe S. 105).

- [Wik20] Wikipedia. *Ellipsoid*. 2020. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipsoid> (besucht am 02.02.2020) (siehe S. 331).
- [Wik21a] Wikipedia. *Bahnelemente einer geneigten Ellipsenbahn*. 1. März 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/L%7B%5C%22a%7Dnge_des_aufsteigenden_Knotens (siehe S. 99).
- [Wik21b] Wikipedia. *Control rod*. 29. Mai 2021. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Control_rod (siehe S. 340).
- [Wik21c] Wikipedia. *Die Himmelsscheibe von Nebra*. 28. Feb. 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Himmelsscheibe_von_Nebra (siehe S. 87).
- [Wik21d] Wikipedia. *Fraunhofer-Linien*. 3. Juni 2021. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Fraunhoferlinie> (siehe S. 623).
- [Wik21e] Wikipedia. *Geochronologie*. 21. Okt. 2021. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Geochronologie> (besucht am 21.10.2021) (siehe S. 317).
- [Wik21f] Wikipedia. *Geschichte der Astronomie*. 28. Feb. 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Geschichte_der_Astronomie#Mesopotamien (siehe S. 87).
- [Wik21g] Wikipedia. *Helioseismology*. 3. Juni 2021. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Helioseismology> (siehe S. 375).
- [Wik21h] Wikipedia. *Kuipergürtel*. 3. Apr. 2021. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kuiperg%7B%5C%22u%7Drtel> (siehe S. 136).
- [Wik21i] Wikipedia. *Nicols-Prisma*. 14. Dez. 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Nicolsches_Prisma (besucht am 14.12.2021) (siehe S. 367).
- [Wik21j] Wikipedia. *Positronen-Emissions-Tomographie*. 2021. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Positronen-Emissions-Tomographie> (siehe S. 313).
- [Wik21k] Wikipedia. *Stonehenge*. 28. Feb. 2021. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Stonehenge> (siehe S. 87).
- [Wik21l] Wikipedia. *Tal-Qadi Temple*. 28. Feb. 2021. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Tal-Qadi_Temple (siehe S. 87).
- [Wik22a] Wikipedia. *Arecibo-Observatorium*. 21. Apr. 2022. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Arecibo-Observatorium> (besucht am 21.04.2022) (siehe S. 31).
- [Wik22b] Wikipedia. *Fundamentale Wechselwirkung*. 15. Jan. 2022. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentale_Wechselwirkung (besucht am 15.01.2022) (siehe S. 452, 478).
- [Wik22c] Wikipedia. *James Bond 007 – GoldenEye*. 10. Apr. 2022. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/James_Bond_007_%E2%80%93_GoldenEye (besucht am 21.04.2022) (siehe S. 31).
- [Wik22d] Wikipedia. *Quark (Physik)*. 14. Jan. 2022. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Quark_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Quark_(Physik)) (besucht am 14.01.2022) (siehe S. 448).

- [Wil15] M. Wilkens. *Höhere Theoretische Physik - Quantenmechanik II*. 2015. URL: http://www.quantum.physik.uni-potsdam.de/teaching/ws2015/qm2/q2_06.pdf (siehe S. 459).
- [WE87] B. J. Wilkes und M. Elvis. „Quasar energy distributions. I - Soft X-ray spectra of quasars“. In: *The Astrophysical Journal* 323 (Dez. 1987), S. 243. DOI: [10.1086/165822](https://doi.org/10.1086/165822). URL: <http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:30248672> (siehe S. 597).
- [Wil21] D. R. Williams. *Earth Fact Sheet*. Hrsg. von NASA. 26. Feb. 2021. URL: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html> (siehe S. 41).
- [Wil76] H. Willkomm. *Altersbestimmungen im Quartär*. Thiemig, 1976 (siehe S. 316).
- [Wil18] C. N. A. Willmer. „The Absolute Magnitude of the Sun in Several Filters“. In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 236.2 (2018), S. 47. DOI: [10.3847/1538-4365/aabfdf](https://doi.org/10.3847/1538-4365/aabfdf). URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4365/aabfdf> (siehe S. 81, 359).
- [Wu+57] C. S. Wu u.a. „Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay“. In: *Physical Review* 105 (4 1957), S. 1413–1415. DOI: [10.1103/PhysRev.105.1413](https://doi.org/10.1103/PhysRev.105.1413) (siehe S. 456–458).
- [Yan+18] Y.-B. Yang u.a. „Proton Mass Decomposition from the QCD Energy Momentum Tensor“. In: *Physical Review Letters* 121.21 (Nov. 2018), S. 212001. DOI: [10.1103/physrevlett.121.212001](https://doi.org/10.1103/physrevlett.121.212001) (siehe S. 449).
- [Yar75] A. Yariv. *Quantum Electronics, 2nd Edition*. John Wiley und Sons, New York., 1975 (siehe S. 23).
- [Yon+21] D. Yong u.a. „r-Process elements from magnetorotational hypernovae“. In: *Nature* 595.7866 (Juli 2021), S. 223–226. DOI: [10.1038/s41586-021-03611-2](https://doi.org/10.1038/s41586-021-03611-2) (siehe S. 536).
- [YC19] A. Young und R. M. Candey. *Astronomical Calendar*. Hrsg. von NASA Eclipse Website. 2019. URL: <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SKYCAL/SKYCAL.html> (siehe S. 618).
- [You01] A. S. Young. „On the Density of the Solar Nebula“. In: *The Astrophysical Journal* 13 (Juni 1901), S. 338. DOI: [10.1086/140826](https://doi.org/10.1086/140826) (siehe S. 543).
- [You99] J. S. Young. „The efficiency of star formation in galaxies as a function of galaxy size and environment“. English. In: *Astrophysical Journal* 514.2, 2 (Apr. 1999), S. L87–L90. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/311942](https://doi.org/10.1086/311942) (siehe S. 505).
- [Zar+09] R. N. Zare u.a. „High-precision optical measurements of $^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$ isotope ratios in organic compounds at natural abundance“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 106.27 (Juni 2009), S. 10928–10932. DOI: [10.1073/pnas.0904230106](https://doi.org/10.1073/pnas.0904230106) (siehe S. 264).
- [Zwe64] G. Zweig. *CERN preprint 8182/TH401 (1964)*. 1964 (siehe S. 433).

- [Zwi09] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2009. ISBN: 9780521880329. DOI: [10.1017/cbo9780511841620](https://doi.org/10.1017/cbo9780511841620). URL: <http://books.google.de/books?id=ih9kI9MEzh0C> (siehe S. 422).
- [Zyl+20] P. A. Zyla u. a. „Review of Particle Physics“. In: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2020.8 (Aug. 2020). DOI: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104>. eprint: <https://academic.oup.com/ptep/article-pdf/2020/8/083C01/34673722/ptaa104.pdf>. URL: <https://academic.oup.com/ptep/article/2020/8/083C01/5891211> (siehe S. 297, 298, 443, 465).
- [Zyl21] P. A. e. Zyla. *The Review of Particle Physics (2021)*. 28. Juni 2021. URL: <https://pdg.lbl.gov/> (siehe S. 231, 448, 465, 468).

Stichwortverzeichnis

- äussere Arm, 569
1a Supernovae Typ, 83–84
3C273, 598
 α -Strahler
 Geiger-Nuttall-Geraden, 281–286
 α -Strahlung, 279–286
 a und z aus δ und s , 640
 a, z
 Beziehungen zu φ, δ, s , 639
 (α,n) -Reaktion, 325–326
 (α,p) -Reaktion, 324–325
A426, 566
A426 (Perseus-Haufen), 590
Abbildung
 direkt
 Exoplaneten, 554–555
Abelsche Lie-Algebra, 424
Aberration, 41–42
Abfallproblem
 Kernspaltung, 356–358
Ablenkung
 Licht im Gravitationsfeld, 489–492
Ablenkung von Licht im Gravitations-
 feld, 489–492
Abschätzung
 n-p-Abstand, 266–267
Abschattung, 550–552
absolute Magnitude, 80
Absorption
 induziert, 396
Abstand
 n-p
 Abschätzung, 266–267
 Periapsis, 99
Abweichung von der Kugelgestalt
 Bethe-Weizsäcker-Modell, 330–332
additive Gruppe, 423, 429
adiabatisch, 514
AE
 Astronomische Einheit, 73–74
Äquanten, 89, 90
Äquatorsystem, 71
Äquivalenzprinzip, 489
äussere Atmosphäre
 Sonne, 384–388
äussere Linie, 400
Airy-Funktion, 63, 69
Akkretionsscheibe, 597
aktive Galaxie, 595
Aktive Galaxien, 597–599
Aktivierung, 326–327
Aktivierungsquerschnitt, 327
Aktivität, 307, 326–327
Albedo, 114
Alfvén-Welle, 387
Algebra
 Lie, 422–429
 Definition, 424–425
Allgemeine Relativitätstheorie, 19, 489–
 504
 Gravitationslinse, 499–502
 schwarze Löcher, 496–499
 Schwarzschildlösung, 494–499
Alternative Methoden
 beugung an Kernen, 221
Altersbestimmung, 315–317
Analogien
 Neper, 637
Andromeda-Galaxie, 565, 566, 588, 591,
 600
Andromedagalaxie, 590
Anfangsgrösse
 Universum, 605–611
Annihilation, 296
anomales magnetisches Moment
 Elektron, 398
Anregungen

- kollektiv, 264
- antilinearer Operator, 462
- Antimaterie, 468
- Antiproton, 200
- Antisymmetrisierung, 182
- Antiteilchen, 181, 395
- Anwendung
 - Strahlung, 314–317
- Approximation
 - Kerne
 - Kastenpotential, 239–241
- Ariel
 - Uranusmond, 129
- Asdex Upgrade 2, 352
- Asteroiden, 121, 130, 137–138
- Asteroidengürtel, 137–138
- Astrometrie, 555
- Astrometrische Doppelsterne, 557–558
- Astronomie, 22
 - Astronomische Beobachtungen, 21–85
 - Astronomische Einheit, 73–74
 - Astronomisches Dreieck, 639
 - Koordinatentransformationen, 640
- Astrophysik
 - Astronomische Beobachtungen, 21–85
 - Einleitung, 19
 - Geschichte, 87–95
 - Himmelsmechanik und unser Sonnensystem, 87–139
 - Längenmasse, 73–75
 - Sonne, 359–393
 - Universum, 581–615
 - Atmosphäre
 - äussere
 - Sonne, 384–388
 - Brechung, 77–78
 - Exoplaneten, 556
 - Atome, 211–268
 - Gesamtmasse im Vergleich zu Kernen, 235
 - Atomkerne, 211–221
 - Atommodell
 - Rutherford, 211–212
 - Atomphysik
 - Atome und Kerne, 211–268
 - Begriffe, 211
 - AU
- Astronomic Unit
 - Astronomische Einheit, 73–74
- Auflösung
 - Teleskop
 - einzel, 36–39
 - Teleskope
 - interferometrisch gekoppelt, 39–41
- aufsteigender Knoten, 99
- Auschlussprinzip, 184
- Ausschlussprinzip
 - Pauli, 223
- Austauschmodell
 - Mesonen, 267–268
- Austauschteilchen, 612
 - schwachen Wechselwirkung, 468–473
 - Starke Wechselwirkung, 443–444
- axialer Vektor, 455, 630
- β -Strahlung, 293–306
 - Doppelzerrfälle, 294–296
- β -Zerfall, 471
 - Fermi-Theorie, 299–302
 - Positronenemission, 297–299
- Bahnparameter
 - Erde
 - Exzentrizität, 107–109
 - Balken, 569
 - Balkengalaxis, 569
 - Balmer
 - Linien, 511
 - Baryonen, 611
 - Baryonen-Supermultiplett, 439
 - Baryonendekuplett, 438
 - Baryonenoktett, 438
 - Baryonenzahl, 417, 435, 460
 - β -Zerfall, 298–299
 - Isospin, 420–422
 - Basiszustände, 183
 - Bausteine
 - Kern, 231
 - Beauty
 - Bottomness, 435
 - Begriffe
 - Atomphysik, 211
 - Beispiel
 - elektrisches Dipolmoment
 - Parität, 455–456

- Lie-Algebra, 425
- Beobachtungen
 - Universum, 581–585
- BepiColombo, 103
- Beryllium, 389
- Beschleuniger
 - Beispiele, 163–164
 - Betatron, 154–155
 - linear, 149–152
 - Synchrotron, 155–162
 - Teilchen, 141–164
 - Zyklotron, 152–153
- Beschleunigung, 142, 143
 - relativistisch, 142
- Bestimmung des Kernradius, 212–216
- β -Zerfällen
 - Leptonenzahl, 298–299
- β -Zerfall
 - Baryonenzahl, 298–299
- Betatron, 154–155
- Bethe-Weizsäcker-Gleichung, 234
- Bethe-Weizsäcker-Modell
 - Kugelgestalt
 - Abweichung, 330–332
- Beugung
 - an Kernen, 218–221
 - alternative Methoden, 221
- Bewegung
 - relativistisch , 141–146
- Beziehung
 - vier Stücke, 635
- Beziehung zwischen fünf Stücken
 - rechteckiges sphärisches Dreieck, 638
- Beziehung zwischen vier Stücken
 - rechteckiges sphärisches Dreieck, 638
- Beziehungen
 - φ, δ, s und z, a , 639
 - φ, δ, s und z, q , 639
 - trigonometrischen Funktionen
 - sphärische Trigonometrie, 632–633
- Big Bang, 614
- Big-Bang-Theorie, 605
- Bildung
 - Planetensysteme, 543–548
- Binärsysteme, 556–559
- Bindungsenergie, 445
- Bindungsenergien
 - Kern, 250–253
- Blasenkammern, 173
- blau, 439
- Bohrsches Magnetom, 180
- Bolometer, 79
- Boltzmann
 - Gleichung, 508, 510
- Boltzmann-Statistik, 396
- Bor, 340, 389
- Born'sche Näherung, 196
- Bose-Einstein-Statistik, 181
- Boson, 397, 611, 612
 - Higgs, 481, 483, 612
 - W
 - reell, 471–473
 - Z
 - reell, 471–473
- Bosonen, 177–186, 476
- Bottomness
 - Beauty, 435
- brauner Zwerg, 502
- Brechung in der Atmosphäre, 77–78
- Bremsstrahlung, 208
- Brennzone, 382
- Butterfly Diagram, 365
 - Schmetterlingsdiagramm, 366
- C-Symmetrie
 - Ladungskonjugation, 460–461
- Carina-Sagittarius-Arm, 569
- Castor-Behälter, 357
- Cepheiden, 81–82, 528
- Čerenkov-Detektoren, 170–172
 - (1) Ceres, 138
 - Cetonia aurata, 453
- CHANDRA, 574
- Chandra, 598
- Charm, 435, 439
 - Quarks, 444–446
- Charm-Quark, 444
- Charon, 134
- Chiralität, 459
- Chromosphäre, 384, 387
- Chronosphäre, 383
- Clebsch-Gordan-Koeffizienten, 443
- CNO-Prozess, 390–392
- CNO-Zyklus, 390, 525

- COBE
 Satellit, 570
- Coma-Cluster, 602
- Coma-Galaxienhaufen, 602
- Compton
 Wellenlänge, 202
- Compton-Effekt, 168, 202–203, 206
- Comptoneffekt, 405
- Cooper-Paar, 183
- Coronal Streamers, 375
- Cosinusseitensatz
 rechteckiges sphärisches Dreieck, 638
 sphärische Trigonometrie, 634
- Cosinuswinkelsatz
 rechteckiges sphärisches Dreieck, 638
 sphärische Trigonometrie, 635
- Coulomb
 Streuung, 619–622
- Coulomb-Potential
 Streuung, 197
- Coulomb-Streuung
 klassisch, 619–622
- Coulombpotential, 402
- CP-Symmetrie, 461
- CPT-Symmetrie, 463–467
- Crux-Scutum-Arm, 569
- δ und s aus z und a , 640
- δ, φ, s
 Beziehungen zu z, a , 639
 Beziehungen zu z, q , 639
- Dank, 18
- Darstellung, 424
 Lie-Algebra, 426–427
- Darstellung einer Gruppe, 423–424
- Definition
 Lie-Algebra, 424–425
 Parität, 454–456
- Δ
 Hadron, 419–420
 Isospin, 420–422
- Δ^0 , 438
- Δ^+ , 438
- Dendrochronologie, 316
- Detailed Balance, 462
- Detektoren, 164–175
 Gravitationswellen, 503–504
- Halbleiter, 169
- Ionisationskammer, 165–167
- Spuren, 172–175
 Funkenkammer, Mehrdraht, 174–175
- Nebelkammer, 172–173
- Photoplatte, 172
- Streamerkammer, 173
- Szintillatoren, 167–169
- Čerenkov, 170–172
- Deuteron, 265–268
- Diagramm
 Hertzsprung-Russell, 520–522
- Diagramme
 Feynmann, 398–401
 Feynman
 Rechnen, 408–411
- Differenzieller Streuquerschnitt, 195–196
- Dione
 Saturnmond, 127
- Dipolmoment
 elektrisch
 Beispiel Parität, 455–456
- Dirac-Theorie, 180–186
- Direkte Abbildung, 554–555
- Distanzangabe
 ferne Objekte, 585–586
- Distanzmessung, 530
 spektroskopisch, 81–85
- Distanzmessung mit optischen Methoden, 78–81
- Doppelsterne, 84–85, 505
 astrometrisch, 557–558
 photometrisch, 559
 spektroskopisch, 558
 visuell, 557
- Doppelzerrfälle
 β -Strahlung, 294–296
- Dopplerverschiebung, 575, 606
- Dosimeter, 310–311
 elektronisch, 311
 Füllhalter, 310–311
 MOS, 311
- Dosisleistung, 307
- down-Quark, 434
- down-Quarks, 439
- Drehimpuls, 451, 517–518

- Kern, 257–264
 Sterne
 Geburt, 517–518
 Drehimpulse in 3 Dimensionen
 nicht Abelsche Lie-Gruppe, 430–
 432
 drei Quarks
 warum?, 440–443
 Dreieck
 astronomisch, 639
 sphärisch
 rechtswinklig, 637–638
 Druckwellen, 116
 Dunkle Energie, 603–604
 dunkle Energie, 613
 Dunkle Materie, 564, 578–580, 602
 Geschwindigkeit der Sterne, 578–
 580
 dunkle Materie, 601, 602, 613
 Dysnomia
 Eris, 134
 Échelle-Spektrometer, 49
 Échelle-Spektrometer, 49–51
 Effekt
 Compton, 202–203
 Zeeman, 366
 Eichsymmetrie, 477
 Eigenabstand, 495
 Eigenzeit, 495
 Einfang
 K, 303
 Einheit
 Astronomische, 73–74
 Einleitung, 17–19
 Astrophysik, 19
 Einstöße von Himmelskörpern
 Auswirkungen, 118–120
 Einordnung
 Exoplaneten, 555
 Einstein-de Sitter-Modell, 603
 Einstein-Notation, 494
 Einstein-Ring, 501
 Einstein-Tensor, 494
 Einteilchenmodelle
 Kern, 235–248
 Ekliptikales System, 72
 elastische Streuung, 192
 elektrisches Dipolmoment
 Beispiel Parität, 455–456
 Elektrisches Moment, 263
 Elektrodynamik
 Repetition und Erweiterung, 193–
 194
 elektromagnetische Wechselwirkung, 396,
 451
 elektromagnetischen Wechselwirkung
 Teilchen, 395–415
 Elektron, 177, 179, 202, 207, 261, 397–
 398, 417
 magnetisches Moment
 anomal, 398
 Elektron-Elektron-Streuung, 194–195
 Elemente
 Entstehung, 392–393
 Kohlenstoff, 392
 Sauerstoff, 393
 Häufigkeit, 392
 eliptikale Breite, 72
 eliptikale Länge, 72
 Ellipsenbahn, 98
 Emission
 spontan, 396
 Energie, 451
 dunkel, 603–604
 Fermi, 237–239
 Energie-Impuls-Erhaltungssatz, 494
 Energie-Impuls-Tensor, 494, 495
 Energieausbeute, 333
 Energiebilanz
 radioaktiver Zerfall, 304
 Energiedosis, 307
 Energiegewinn
 Synchrotron, 160–161
 Energiehaushalt
 Modell
 naiv, 379–381
 realistischer, 381–382
 Energiequellen
 Sonne, 388–393
 Energieumwandlung, 356
 Entstehung
 Elemente, 392–393
 Planetensysteme, 543–548
 Entwicklung
 Sterne, 505–542
 Epizyklen, 88

- Epsilon-Tensor, 177
 ϵ -Tensor, 430
 Epsilon-Tensordichte, 177
 Erdähnliche Planeten
 Umgebung, 101–122
 Erdachse
 Nutation, 107–109
 Präzession, 107–109
 Erdbahn, 526
 Erde, 106–120
 Energiefluss
 Atmosphäre, 109–113
 Mond, 120
 Temperaturverteilung, 113–115
 Treibhauseffekt, 109–113
 Erdinneres, 115–116
 Erdmagnetfeld, 116–118
 Ergospäre, 499
 Erhaltungsgrößen, 322, 475
 Erhaltungssätze
 Kernreaktionen, 334–335
 Erhaltungssatz
 Energie-Impuls, 494
 Eris, 134–135
 Mond
 dysnomia, 134
 Eros, 138
 ESA, 103
 ESO
 VLT
 GRAVITY, 493
 NACO, 493
 SINFONI, 493
 Etalon, 59
 Europa
 Jupitermond, 124
 Exoplaneten, 543–556
 Abschattung, 550–552
 Astrometrie, 555
 Atmosphäre, 556
 direkte Abbildung, 554–555
 Einordnung, 555
 Micro-Lensing, 552–554
 Exoplanethen
 radiale Geschwindigkeitsvariation,
 548–550
 Experimentelle Beobachtungen
 Sonne, 359–379
 Experimentelle Hinweise
 Quarks, 435–436
 Exponentieren einer quadratischen Ma-
 trix, 425
 Extrasolare Körper, 131
 φ, δ, s
 Beziehungen zu z, a , 639
 Beziehungen zu z, q , 639
 Füllhalter-Dosimeter, 310–311
 Fabry-Perot-Etalon, 59
 Fabry-Perot-Interferometer, 57–65, 69
 Fabry-Perot-Resonator, 42
 Fabry-Perot-Spektrometer, 65
 falsches Vakuum, 615
 Familien, 412, 448–450
 Leptonen
 weitere, 411–415
 Quarks und Leptonen, 478–481
 Farbindices, 513
 Farbkraft, 440
 Farbladung, 435, 439, 440, 447, 479,
 611
 Fazit
 Teilchenphysik, 484–487
 Feinstrukturkonstante, 208
 Feld
 Gluonisch, 449
 Higgs, 481–484
 skalar, 481
 vektoriell, 481
 Fermat'sches Prinzip, 116
 Fermi Gamma-Ray Space Telescope,
 598, 599
 Fermi-Energie, 237–239
 Fermi-Theorie
 β -Zerfall, 299–302
 Fermigas-Modell
 Kern, 237–239
 Fermion, 181, 397, 611
 Fermionen, 177–186, 476
 Ferne Objekte
 Distanzangabe, 585–586
 Feynman-Diagramm, 449
 Feynman-Diagramme, 398–401
 Rechnen, 408–411
 Feynman-Graphen
 Rechnen, 408–411
 Finesse, 65

- Finessefaktor, 63, 69
- Flächenmassendichte, 578
- Flachheits-Problem, 615
- Flavour, 447, 486
- Flavour-Quantenzahl, 448
- Fluchtbewegung
 - Isotropie, 584–585
- Flugreisen, 308
- Fokussierung
 - stark, 158–160
- Formalismus
 - Isospin, 221–224
- Formfaktor
 - Ladungsverteilung, 199
- Fouriertransformierte, 199
- Frühes Universum, 611–615
- Fraunhofer
 - namen der Spektrallinien, 622–623
- freie Teilchen, 184–185
- Funkenkammer
 - Mehrdräht, 174–175
 - Spurendetektoren, 174–175
- Funkenzähler, 167
- Funktionenraum
 - unendlichdimensional
 - Isomorphismen, 428–429
- Funktionsweise
 - Teilchenbeschleuniger, 148–149
- Fusion, 350–356
- Fusionsreaktor
 - Roadmap, 355–356
 - Stellerator, 355
- Fusionsreaktoren, 351–356
- γ -Strahlung, 286–293
- (n, γ)-Reaktionen, 326
- G-Symmetrie, 467
- Gürtel
 - Asteroiden, 137–138
- galaktische Breite, 73
- galaktische Länge, 73
- galaktischer Äquator, 72
- Galaktisches System, 72–73
- Galaktozentrisches System, 73
- Galaxie, 505
 - aktiv, 595
 - NGC 2770, 84
- Galaxien, 587–592
 - aktiv, 597–599
- Struktur, 590–591
- Galaxiengruppen, 601
- Galaxienhaufen, 566, 599–602
- Galaxienklassifikation
 - Hubble, 591–592
- Galilei
 - Teleskop, 22
- Galileitransformation, 91
- γ -Strahlung, 357
- Ganymed
 - Jupitermond, 125
- Gaspra, 138
- Gauss, K.F., 628
- Gaußsche Gleichungen, 636
- Gaußsches Gesetz der Elektrodynamik, 79
- Geburt
 - Sterne, 514–518
 - Drehimpuls, 517–518
- Geiger-Nuttall-Geraden
 - α -Strahler, 281–286
- Gekrümmter Raum, 592–597
 - Grenzwerte, 595
- geozentrisches Weltbild, 88
- Geräte, 21–69
- Gerade
 - Geiger-Nuttall
 - α -Strahler, 281–286
- Gesamtmasse
 - Kerne und Atome, 235
- Geschichte, 87–95
 - Griechen, 87–90
 - Kepler, 92–93
 - Kopernikus, 90–92
 - Newton, 93–95
- Geschwindigkeit, 143
 - relativistisch, 142
- Sterne
 - Milchstrasse, 575–580
- Geschwindigkeitsmessung in der Milchstrasse, 561–562
- Geschwindigkeitsverteilung
 - Milchstrasse, 561–562
- Gesetz
 - Gauss, 576
 - Hubble, 585–586
 - Moseley, 221
- Gesetze

- Kepler, 92
 Zentralmasse, 97–101
- Gewebe
 Wechselwirkung mit Strahlung, 310–313
- Gewichtsfaktoren, 508
- Gitterspektrometer, 42–49
- Gleichgung
 Boltzmann, 510
- Gleichung
 Bethe-Weizsäcker, 234
 Boltzmann, 508
 Maxwell-Boltzmann, 507
 Saha, 509, 510
- Gleichungen
 Gauss, 636
 Oort, 562–564
- Gluonen, 443–444, 447, 479, 612
 naomaler Beitrag, 450
- gluonisches Feld, 449
- Goldene Regel, 276, 409
 radioaktiver Zerfall, 274–277
- goldene Regel
 Fermi, 462
- grün, 439
- Graphen
 Feynman
 Rechnen, 408–411
- Gravitation, 94, 451
 Theorie
 Newton, 92
- Gravitationsfeld, 493
 Licht
 Ablenkung, 489–492
 Linse, 499–502
 Rotverschiebung, 492–493
- Gravitationslinse, 499–502
- Gravitationswellen
 Detektoren, 503–504
- Graviton, 477, 478
- GRAVITY
 ESO
 Instrument, 493
- Green, G., 629
- Grenzwerte
 gekrümmter Raum, 595
- Griechen, 87–90
- grosse Halbachse, 94
- Grundlagen
 Kernreaktionen, 319–333
- Gruppe, 422
 Lie, 422–429
- Gruppen
 Darstellung, 423–424
- Guide Stars, 77
- Guide-Stars, 114
- GW190521, 503
- Gyroskop, 56
- Höhenstrahlung, 316
- Hadron
 Δ , 419–420
 ρ , 419–420
- Hadronen, 417–422, 611
 Quarks, 436–440
- Hafnium, 340
- Halbachse
 gross, 94
- Halbleiterdetektoren, 169
- Halbwinkelsätze, 633
- Hamiltonoperator, 459
- Hanbury Brown und Twiss-Interferometer, 66–68
- Harmonischer Oszillator, 241
- harmonischer Oszillator, 180, 184
- Haumea, 135
 Monde
 Hi'iaka, 135
 Namaka, 135
- Hauptreihe, 518–542
- Hauptreihenentwicklung
 Hertzsprung-Russell-Diagramm, 523–526
- Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie, 633–637
- heliozentrisches Weltbild, 88
- Helium, 389, 537, 546
- Helizität, 458, 459
- Hertzsprung-Russell-Diagramm, 520–522, 524, 525, 537
 Hauptreihenentwicklung, 523–526
 Nachhauptreihenentwicklung, 526–528
- Hertzsprung-Russell-Diagramms, 524
- Higgs, 476, 612
 Boson, 481, 483
 Feld, 481–484

- Ladung, 481, 482
- Higgs-Mechanismus, 481, 482
- Hi'iaka
 - Haumea, 135
- Hill-Radius, 548
- Himmelsmechanik, 87–139
- Hintergrundsstrahlung, 605
- Hintergrundstrahlung, 605, 614
- Hinweise
 - Literatur, 617–618
- Hipparchos, 528
- Hofstadter-Streuung, 198–199
- Horizontproblem, 614
- Horizontsystem, 70–71
- Hubble
 - Galaxienklassifikation, 591–592
- Hubble-Gesetz, 585–586
- Hubble-Space-Teleskop, 602
- Hyperfeinstruktur, 257
- Iapetus
 - Saturnmond, 127
- Ida, 138
- Impuls, 451
- Impulsübertrag, 195
- Impulsoperatoren, 429
- Indium, 340
- induzierte Emission, 396
- Induzierte Spaltung, 322–323
- Inelastische Streuung, 322
- Inflation, 611, 615
- Inhalt
 - Vorschau, 18–19
- Inklination, 99
- innere, 400
- Innere Konversion, 291–292
- Innere Paarbildung, 292
- Instrumente
 - Kernphysik, 141–175
 - Teilchenphysik, 141–175
- Integrale, 640–641
- Intensität, 54
- Interferometer, 51–69
 - Fabry-Perot, 57–65
 - Hanbury Brown und Twiss, 66–68
 - Mach-Zehnder, 51–52
 - Michelson, 52–55
 - Sterne, 65–66
 - Sagnac, 55–57
- Spektrometer, 68–69
- Teleskope, 39–41
- Io
 - Jupitermond, 124
- Ionisationskammer, 165–167
- Ionisationszustand, 507, 509
- Isobare, 271
- Isobarenregel
 - Mattauch, 271–272
- Isomere, 292–293
- Isomorphismen, 427–428
 - unendlichdimensionaler Funktionenraum, 428–429
- Isospin, 435
 - 3-Komponente, 435
 - Baryonenzahl, 420–422
 - Formalismus, 221–224
 - Ladung, 420–422
- Isotone, 271
- Isotope, 271
- Isotopeneffekt
 - optische Spektroskopie, 264
- Isotropie der Fluchtbewegung, 584–585
- ITER, 353
- ITER:Tokamak, 352
- Iterative Methoden
 - Ladungsverteilung im Kern, 218
- Jod
 - Schilddrüse, 312
- Jupiter, 124–126
 - Monde, 124–126
 - Europa, 124
 - Ganymed, 125
 - Io, 124
 - Kallisto, 125
 - Jupitermonde, 124–126
- K-Einfang, 303, 304
- K-Einfang, 303
- K-Schale, 207
- K^0 -Mesonen, 463–467
- Kadmium, 340
- Kallisto
 - Jupitermond, 125
- Kasten
 - würfelförmig, 235–237
- Kastenpotential
 - sphärisch

- Kern, 239–241
- Kategorien
 - Kernreaktionen, 322–323
- Kathodenstrahlen, 211
- Kegelschnitt, 92
- Kepler, 92–93
 - 2. Gesetz, 93
 - 3. Gesetz, 93, 94
- Ellipsenbahn, 98
- Teleskop, 21
- Keplersche Gesetze, 92
 - Zentralmasse, 97–101
- Kern
 - Momente, 261–264
- Kerndrehimpulse, 257–258
- Kerne, 211–268
 - Bausteine, 231
 - Beugung
 - alternative Methoden, 221
 - Beugung an, 218–221
 - Bindungsenergien, 250–253
 - Drehimpuls, 257–264
 - Einteilchenmodelle, 235–248
 - Fermigas-Modell, 237–239
 - Gesamtmasse im Vergleich zu Atomen, 235
 - Kastenpotential
 - sphärisch, 239–241
 - Kräfte, 265–268
 - Ladungsverteilung, 216–218
 - Iterative Methoden, 218
 - Lebensdauer, 274–277
 - magnetische Momente, 262–263
 - Masse, 229–231
 - Massendichteverteilung, 229–231
 - Modelle, 229–268
 - Vergleich, 249
 - radioaktive
 - natürlich vorkommend, 274
 - Reaktion
 - Schwelle, 327–329
 - Reaktionen, 319–335
 - Grundlagen, 319–333
 - stossinduziert, 324–326
 - Rotation und Schwingung, 253–257
 - Spaltung
 - induziert, 322–323
 - leichte Kerne, 324
 - stossinduziert, 323–327
 - Spin, 257–264
 - Stabilitätskriterien, 271–272
 - Statistik, 257–264
 - Tröpfchenmodell, 231–235
 - Kernenergie, 337–358
 - Kernfusion, 350–356
 - Kernkräfte, 265–268
 - Kernmagneton, 231, 259
 - Kernmodelle, 229–268
 - Kernphysik, 18, 141–175
 - Fermionen und Bosonen, 177–186
 - Kernenergie, 337–358
 - Kernreaktionen, 319–335
 - Klassische Streutheorie, 619–623
 - Mensch und Strahlung, 307–317
 - Radioaktive Strahlung, 279–306
 - radioaktiver Zerfall, 269–277
 - Streuexperimente, 187–206
 - Wechselwirkung von Teilchen und Materie, 207–209
 - Kernradius
 - Bestimmung, 212–216
 - Kernreaktionen, 319–335
 - Erhaltungssätze, 334–335
 - Grundlagen, 319–333
 - Kategorien, 322–323
 - Paritätserhaltung, 335
 - Schwelle, 327–329
 - stossinduziert, 324–326
 - Kernreaktoren, 344–350
 - Kernsaltung
 - Reaktoren, 344–350
 - Kernspaltung, 337–350
 - Abfallprobl., 356–358
 - spontan, 319
 - stossinduziert, 323–327
 - Kernspin, 227, 257
 - kerntechnische Strahlenbelastung, 309
 - Kerr-Metrik, 497
 - Klassifikation
 - Sterne
 - Spektren, 506–514
 - Klassische Methoden, 619–623
 - Klassische Novae, 533–535
 - klassische Novae, 532, 533, 535
 - Klein-Gordon-Gleichung, 418
 - Kleinere Objekte, 130–139

- Klimawandel, 391
 Knoten, 400
 aufsteigend, 99
 Kohärente Überlagerung
 Streuung, 199–202
 Kohlenstoff, 392
 Entstehung, 392
 Kollapszeit, 514
 Kollektive Anregungen, 264
 Kometen, 130, 138–139
 Konjunktion, 99
 Konvektionszone, 382
 Konversion
 innere, 291–292
 Koordinatensysteme, 70–75
 Äquatorsystem, 71
 Ekliptikales System, 72
 Galaktisches System, 72–73
 Galaktozentrisches System, 73
 Horizontsystem, 70–71
 Koordinatentransformationen
 Astronomisches Dreieck, 640
 Kopernikus, 90–92
 Korona, 384, 385
 Koronaschlaufe, 368
 Kosmologie, 604–615
 kosmologische Konstante, 495
 Kräfte
 fundamental, 436
 Kern, 265–268
 Krümmungsskalar, 494
 Krümmungstensor, 494
 Kraft, 141–145
 Kreisbahn, 94
 Kritische Masse, 342–344
 Kryostat, 457
 Kugelgestalt
 Abweichung
 Bethe-Weizsäcker-Modell, 330–332
 Kugelsternhaufen, 571–572
 Kuipergürtel, 130, 132, 136
 Objekte, 136–137
 Längenmasse
 Astrophysik, 73–75
 Löcher
 schwarze, 496–499
 Lösung
 Schwarzschild, 494–499
 Ladung, 177, 231, 435
 Higgs, 481, 482
 Isospin, 420–422
 Ladungsabhängigkeit
 Nukleon-Nukleon-Streuung, 228–229
 Ladungskonjugation
 C-Symmetrie, 460–461
 Ladungsverteilung
 Formfaktor, 199
 Kern, 216–218
 Iterative Methoden, 218
 Lattice QCD, 449
 Λ CDM-Modell, 603
 Lebensdauer
 Kern, 274–277
 Neutron, 298
 Sterne, 522–523
 Lensing
 Micro, 552–554
 Lepton, 611
 τ , 412
 Leptonen, 397, 478–481
 Leptonenfamilien
 Symmetrien, 412–415
 weitere, 411–415
 Leptonenzahl, 398, 460
 β -Zerfall, 298–299
 Leuchtkraft
 Sterne, 505–506
 Levi-Civita-Symbol, 430
 Levi-Civita-Tensor, 177
 Licht
 Gravitationsfeld
 Ablenkung, 489–492
 Lichtjahr, 74
 ly, 74
 Lie-Algebra, 422–429
 Darstellung, 426–427
 Definition, 424–425
 Lie-Gruppe, 422–429
 nicht Abelsch
 3 Dimensionen, 430–432
 LIGO, 503
 Linearbeschleuniger, 149–152
 lineare Operatoren, 424
 Linie

- äussere, 400
- innere, 400
- Linienelement, 594
- Linse
 - Gravitation, 499–502
 - Literaturhinweise, 617–618
 - lokale Gruppe, 599, 600
 - London Dispersionskräften, 440
 - Lorentz-Kurve, 277
 - Lummer-Gehrcke-Platte, 42
 - ly
 - Lichtjahr, 74
 - μ
 - Myonen, 411–412
 - M 104, 565
 - M 31, 565, 566
 - M32, 591
 - M32:Zwerggalaxie, 591, 592
 - Mach-Zehnder-Interferometer, 51–54
 - Magellansche Wolke
 - gross, 571
 - klein, 571
 - Magnesium, 392
 - Magnetfeld
 - Erde, 116–118
 - poloidal, 353–354
 - Tokamak, 353–354
 - toroidal, 353–354
 - Magnetfelder
 - Sonne, 366–375
 - Steuerung
 - Synchrotron, 161–162
 - Synchrotron
 - Steuerung, 161–162
 - magnetische Momente
 - Kerne, 262–263
 - magnetisches Moment, 177–180, 432
 - Neutron, 433
 - Nukleonen, 259–261
 - Magnetohydrodynamik, 387
 - Magneton
 - Bohr, 180
 - Magnitude
 - absolut, 80
 - relativ, 80
 - Magnituden, 79–81
 - Makemake, 136
 - Mond
 - S/2015 (136472) 1, 136
 - Mannigfaltigkeit, 423
 - Mars, 120–122
 - Masse, 95, 141, 143, 144, 177
 - Kern, 229–231
 - kritisch, 342–344
 - Sterne, 505–506
 - Massenbestimmung
 - Zentralkörper, 100–101
 - Massendichteverteilung
 - Kern, 229–231
 - Massenverteilung
 - Spaltprodukte, 332–333
 - Massive Sterne, 529–542
 - Mastcam-Z
 - Perseverance, 122
 - Materie
 - dunkel, 564, 602
 - Verluste in, 207–208
 - Wechselwirkung mit Neutronen, 208–209
 - Wechselwirkung mit Teilchen, 207–209
 - Mathematische Sätze, 625–641
 - Matrixelement, 276
 - Matrizen
 - Pauli, 178
 - Mattauch'sche Isobarenregeln, 271–272
 - Maxwell-Boltzmann-Gleichung, 507
 - Maxwellgleichungen, 180
 - Maxwellsche Gesetze
 - erstes Gesetz, 79
 - Mayor, Michel, 543, 548
 - medizinische Strahlenbelastung, 308
 - Mehrdräht-Funkenkammer, 174–175
 - Mehrere Streuzentren, 197–198
 - Mehrteilchenmodelle, 249
 - Mensch und Strahlung, 307–317
 - Merkur, 103–104
 - Mesonen, 417, 433
 - K^0 , 463–467
 - Pion, 417–419
 - Mesonen-Austauschmodell, 267–268
 - MESSENGER, 103
 - Messung
 - Parität, 456–459
 - Meteoriten, 130
 - Meteoritenhäufigkeit, 118

- Methode
 Rabi, 258–259
 radiale Geschwindigkeitsvariation, 548–550
- Methode der radialen Geschwindigkeitsvariation, 548–550
- Methoden
 Streuung, 619–623
- Michelson-Interferometer, 52–55
- Michelson-Sterninterferometer, 65–66
- Micro-Lensing, 552–554
- Microlensing, 502
- Milanković-Zyklen, 107
- Milchstrasse, 493, 561, 565, 569, 571, 600
 äussere Arm, 569
 Carina-Sagittarius-Arm, 569
 Crux-Scutum-Arm, 569
 Geschwindigkeit
 Sterne, 575–580
 Geschwindigkeitsverteilung, 561–562
 Orion-Cygnus-Arm, 569
 Scutum-Centaurus-Arm, 569
 Spiralarme, 565–571
 Sterne, 505–580
 Struktur, 559–580
 Zentrum
 Schwarzes Loch, 572–575
- Milne-Modell, 603, 604
- Mira, 528
- Modell
 Energiehaushalt
 naiv, 379–381
 realistischer, 381–382
 Mesonenaustausch, 267–268
- Modelle
 Kern, 229–268
 Sonne, 379–393
- Moderator, 338, 339
- Momente
 elektrisch, 263
 Kerne, 261–264
 magnetisch
 Kerne, 262–263
- Mond, 120
 Erde, 120
 Jupiter, 124–126
- Pluto
 Charon, 134
 Saturn, 127–128
- Monopol-Problem, 615
- Montierung
 parallaktisch, 28
- Montierung von Teleskopen, 28–29
- Moseleysches Gesetz, 221
- Mott'sche Streuformel, 200
- Mott-Streuung, 201
- multiplikative Gruppe, 423
- Multipol-Übergänge, 287–291
 reziproke Übergangswahrscheinlichkeiten, 290–291
- Myonen, 411–412
- (α,n) -Reaktion, 325–326
 (n,γ) -Reaktionen, 326
 $n \rightarrow p$, 297–298
 n-p-Abstand
 Abschätzung, 266–267
- Näherung
 Born, 196
- grad** Nabla-Operator, 629
- Nabla-Operator, 629
- Nachhauptreihenentwicklung
 Hertzsprung-Russell-Diagramm, 526–528
- NACO
 ESO
 Instrument, 493
- Namaka
 Hauma, 135
- Namen
 Spektrum
 Fraunhofer, 622–623
- Natürlich vorkommende radioaktive Kerne, 274
- natürliche Strahlenbelastung, 307
- Natrium, 392
- Nebelkammer, 172–173
 Spurendetektoren, 172–173
- Nepersche Analogien, 637
- Neptun, 129–130
 Mond
 Triton, 130
- Neptunium-Reihe, 306
- Neutrino, 611
- Neutrinooszillationen, 392

- Neutrinos
 Streuung, 471
- Neutron, 221, 222, 231, 261, 417, 434
 Lebensdauer, 298
 magnetisches Moment, 433
- Neutronen, 443
 sofort, 344
 verzögert, 344
 Wechselwirkung mit Materie, 208–209
- Neutronenflussdichte, 326
- Neutronenstern, 535
- Neutronensterne, 539–541
- Neutrons, 438, 439
- Newton, 93–95
 Gravitationstheorie, 92
 Teleskop, 23
- Newton, Isaac, 23
- NGC 1275, 566
- NGC 2770
 Galaxie, 84
- NGC 3079, 35
- NGC 3596, 579
- NGC 4151, 598
- NGC 4261, 598
- Noether'sche Theoreme, 430
- Novae, 532–536
 klassisch, 532–535
 Zergnovae, 532–533, 535
- nukleare Prozesse
 Sonne, 388–393
- Nukleon, 221, 229
- Nukleon-Nukleon-Streuung, 226–229
 Ladungsabhängigkeit, 228–229
 Spinabhängigkeit, 227–228
- Nukleonen, 231
 magnetische Momente, 259–261
- Nutation
 Erdachse, 107–109
- Oberon
 Uranusmond, 129
- Objekte
 klein, 130–139
 Kuipergürtel, 136–137
 Universum, 586–592
- Objektiv, 21
- Ockhams Rasiermesser, 90
- offene Sternhaufen, 572
- OGLE, 502, 553
- OGLE-2015-BLG-1319, 502
- Okular, 21
- Olbers' Paradox, 581–583
- Oort'sche Wolke, 132
- Oort'sche Gleichungen, 562–564
- Oort'sche Konstanten, 563, 564
 Klassen, 564
 verallgemeinert, 564
 wahr, 564
 lokal, 564
- Oort'sche Wolke, 137, 139
- Operator
 antilinear, 462
 Parität, 455
- Opposition, 99
- Optical Gravitational Lensing Experiment, 502, 553
- Optische Methoden
 Distanzmessung, 78–81
- optische Spektroskopie
 Isotopeneffekt, 264
- optische Teleskope, 21–29
- Orion Nebel, 514
- Orion-Cygnus-Arm, 569
- Oszillator
 harmonisch, 180, 184, 241
- (α, p)-Reaktion, 324–325
- $p \rightarrow n$, 298
- p-n-Abstand
 Abschätzung, 266–267
- p-p-Zyklus, 524, 525
- P-Wellen, 116
- Paarbildung, 204–206
 innere, 292
- Paarerzeugung, 204–206
- Paradox
 Olbers, 581–583
- parallaktische Montierung, 28
- Parallax Second
 Parsec, 74–75
- Parallaxensekunde
 Parsec, 74–75
- Parität, 224–226, 454, 455
 Definition, 454–456
 Messung, 456–459
 Schwache Wechselwirkung, 452–460
- Paritätserhaltung, 335

- Kernreaktionen, 335
- Paritätsoperation, 629
- Paritätsoperator, 224, 455
- Paritätstransformation, 630
- Parsec, 74–75
- Pauli-Ausschlussprinzip, 223
- Pauli-Matrizen, 178
- Pauli-Prinzip, 223–224
- Pauliprinzip, 184
- Periapsis, 99
- Periapsisabstand, 99
- Perihel, 99
- Permutation, 177
- Perseus-Arm, 569
- Perseushaufen, 590
- Perseverance, 122
 - Mastcam-Z, 122
- PET
 - Positronen-Emissions-Tomographie, 313
- Phobos, 122
- Phosphor, 393
- Photoeffekt, 180, 206–207
- Photometrische Doppelsterne, 559
- Photomultiplier, 167
- Photon, 177, 179, 180, 202, 396–397, 612
- Photonen, 479
- Photoplatte, 172
 - Spurendetektoren, 172
- Photosphäre, 360, 383, 384
- Photosynthese, 316
- Photozelle, 167
- Pion, 319, 417–419
- Pionen, 174–175, 443, 467
- Planck
 - Strahlungsgesetz, 396
- Planck-Länge, 613
- Planck-Ladung, 614
- Planck-Masse, 613, 614
- Planck-Temperatur, 613, 614
- Planck-Zeit, 608, 613, 614
- Planeten
 - erdähnlich, 101–122
 - Umgebung, 101–122
 - Gas, 123–130
 - Riesenplaneten, 123–130
 - Planetensysteme, 543–556
- Bildung, 543–548
- Planetoiden, 132–137
 - Pluto, 130
 - Pluto, 132–134
 - Charon, 134
 - Mond
 - Charon, 130, 134
 - Planetoid, 130
- Poisson-Verteilung, 273
- polarer Vektor, 455, 630
- Polarisation
 - zirkular, 179
- poloidale Magnetfelder, 353–354
- Population I, 572
- Population II, 572
- Positron, 207
- Positronen-Emissions-Tomographie
 - PET, 313
- Positronenemission
 - β -Zerfall, 297–299
- pp -Prozesse, 389
 - $PP\ I$ -Kette, 389
 - $PP\ II$ -Kette, 389
 - $PP\ III$ -Kette, 389
 - pp -Prozess, 391
- Präzession
 - Erdachse, 107–109
- Primordiale schwarze Löcher, 497
- Prinzip
 - Pauli, 223–224
- Projektil, 197
- Proton, 202, 221, 222, 231, 261, 417, 434, 460
 - Masse, 449
 - Radius, 449
- Protonen, 443
- Protonenmasse, 449
- Protuberanzen, 370
- Proxima Centauri, 74
- Prozess
 - CNO, 390–392
 - Triple- α , 389–390
- Prozesse
 - pp , 389
 - Sonne
 - nuklear, 388–393
 - Stoss, 193–202
- Pseudoskalar, 630

- Pseudoskalare, 443
 Pseudovektor, 630
 Pseudozahlen, 455
 Psi
 Ψ , 444
 Pulsar, 535
 Pulsare, 529, 542
- q, z
 Beziehungen zu φ, δ, s , 639
- QED, 402–405
 Quadrupolmoment, 263–264
 Quantenchromodynamik, 449
 Quantenelektrodynamik, 402–405
 Quantenfeldtheorie, 477, 481
 Quantenfluktuationen, 615
 Quantenmechanische Behandlung
 Streuung, 195–202
 Quantenzahl
 Flavour, 448
 Quantisierung
 Basiszustände, 183
 zweite, 183, 402–405
- Quark
 down, 434
 See, 448
 top, 450
 up, 434
 valenz, 448
 Quark-Kondensat, 449
 Quarks, 433–447, 478–481, 611
 Charm, 444–446
 drei
 warum?, 440–443
 Experimentelle Hinweise, 435–436
 Hadronen, 436–440
 Spin, 441–443
 Quasar, 595
 Quasare, 595–597
 Quellen
 Strahlung, 279–306
 Queloz, Didier, 543, 548
- r-Process-Elements, 536
 Röntgenstrahlung, 187–188
 Röntgenteleskope, 32–36
 Rabi-Methode, 258–259
 Radiale Geschwindigkeitsvariation, 548–550
- Radiale Stabilisierung, 157–158
 Radioaktive Kerne
 natürlich vorkommend, 274
 Radioaktive Strahlung, 279–306
 Altersbestimmung, 315–317
 Radioaktive Zerfälle, 269–277
 Energiebilanz, 304
 Gesetze, 272–277
 goldene Regel, 274–277
 Ketten, 304–306
 Typen, 304
 Radioaktivität
 stossinduziert, 326–327
 Radioteleskope, 30–32
 Rasiermesser
 Ockham, 90
 Raum
 gekrümmt, 592–597
 Raumspiegelung, 629
 Rayleigh-Streuung, 187–188
 Reaktion
 (α, n), 325–326
 (α, p), 324–325
 (n, γ), 326
 Reaktionsquerschnitt, 332
 Reaktive Streuung, 322
 reaktive Streuung, 319
 Reaktoren
 Fusion, 351–356
 Kernspaltung, 344–350
 Reaktorunfall, 312
 rechtwinkliges sphärisches Dreieck, 637–638
- Reell
 W- und Z-Bosonen, 471–473
- Regulierungen
 Strahlung, 313
- Reihe
 Neptunium, 306
 Uran-Actinium, 305
 Uran-Radium, 305
 Uran-Thorium, 306
- Rektaszension, 99
- Relation
 Stokes, 58
- relative Magnitude, 80
- Relativistische Bewegung, 141–146
- Relativitätstheorie

- allgemein, 489–504
 Gravitationslinse, 499–502
 schwarze Löcher, 496–499
 Schwarzschildlösung, 494–499
 Renormalisierung, 402
 Repetition
 Elektrodynamik und Vierervektoren, 193–194
 Resonanz-Spektroskopie, 262–263
 Resonanzen, 277
 Rhea
 Saturnmond, 127
 ρ
 Hadron, 419–420
 Isospin, 420–422
 Riemann-Tensor, 494
 Riesenplaneten
 Umgebung, 123–130
 Ringe
 Saturn, 127
 Roche-Grenze, 532, 548
 Rosenkäfer, 453
 rot, 439
 Rotation
 Kern, 253–257
 Rotverschiebung, 85
 Gravitationsfeld, 492–493
 Rotverschiebungsparameter, 493
 Ruhemasse, 177
 Rutherford
 Atommodell, 211–212
 Streuformel, 199
 Rutherford-Streuung, 195, 197, 200
 s und δ aus z und a , 640
 s, φ, δ
 Beziehungen zu z, a , 639
 Beziehungen zu z, q , 639
 S-Wellen, 116
 S2, 493, 575
 S/2015 (136472) 1
 Makemake, 136
 Sätze
 mathematisch, 625–641
 Sagnac-Interferometer, 55–57
 Saha
 Gleichung, 509, 510
 Saturn, 126–128
 Monde, 127–128
 Dione, 127
 Iapetus, 127
 Rhea, 127
 Thetis, 127
 Titan, 127
 Ringe, 127
 Satz von Gauss, 628
 Satz von Green, 629
 Satz von Stokes, 629
 Sauerstoff, 393, 529
 Entstehung, 393
 Schalenmodell, 241–249
 Scherwellen, 116
 Schilddrüse
 Jod, 312
 Schmetterlingsdiagramm, 366
 Butterfly Diagramm, 366
 Schrödingergleichung, 196
 Schwache Wechselwirkung, 451–473
 Austauschteilchen, 468–473
 Parität, 452–460
 schwache Wechselwirkung, 223, 444,
 451
 Schwarze Löcher, 496–499
 Schwarzes Loch, 535, 541
 primordial, 497
 Zentrum Milchstrasse, 572–575
 schwarzes Loch, 493
 Schwarzschild
 Lösung, 494–499
 Schwarzschildlösung, 494–499
 Schwefel, 393
 Schwelle
 Kernreaktionen, 327–329
 Schwerkraft, 94
 Schwingung
 Energiegewinn, 160–161
 Kern, 253–257
 Synchrotron, 160–161
 Scutum-Centaurus-Arm, 569
 Seeing, 39, 76–77
 Seequarks, 448
 Sehwinkel, 21
 Seismik
 Sonne, 375–379
 Selbstabbildung, 424
 Seltsamkeit, 433, 435
 Strangeness, 435

- Siderische Umlaufzeit, 99
 Signal-Rausch-Verhältnis, 47, 55
 Silber, 340
 Silizium, 529
 SINFONI
 ESO
 Instrument, 493
 Sinussatz
 rechteckiges sphärisches Dreieck, 638
 sphärische Trigonometrie, 634
 Sirius B, 493
 de Sitter-Modell, 603
 Skalar, 630
 Skalenfaktor, 593, 594
 Skalenfaktors, 593, 594
 SN 2007 uy
 Supernova, 84
 SN 2008D
 Supernova, 84
 sofortige Neutronen, 344
 Sombrerogalaxie, 565
 Sonne, 92, 122, 359–393, 567, 569
 Atmosphäre
 äußere, 384–388
 Energiequellen, 388–393
 Experimentelle Beobachtungen, 359–379
 Magnetfelder, 366–375
 Modelle, 379–393
 Prozesse
 nuklear, 388–393
 Seismik, 375–379
 Struktur
 radial, 382–384
 Sonnenfinsternis, 122
 Sonnenflecken, 122, 360–366
 Sonnensystem
 unser, 87–139
 Sonnenwind, 386
 Spaltbarkeitsparameter, 320
 Spaltprodukte
 Massenverteilung, 332–333
 Spaltung
 induziert, 322–323
 Spektren
 Sterne, 506–514
 Spektrometer, 42–51
 Échelle, 49–51
 Gitter, 42–49
 Interferometer, 68–69
 Spektroskopie
 optisch
 Isotopeneffekt, 264
 Resonanz, 262–263
 Spektroskopische Distanzmessung, 81–85
 Spektroskopische Doppelsterne, 558
 Spektrum
 Namen
 nach Fraunhofer, 622–623
 speziellen Lie-Gruppe SU(3), 435
 Sphärische Trigonometrie, 632–640
 sphärische Trigonometrie
 Hauptsätze, 633–637
 Spin, 177–180, 435
 Kern, 257–264
 Quarks, 441–443
 Spinabhängigkeit
 Nukleon-Nukleon-Streuung, 227–228
 Spinvektoren, 432
 Spinzustand, 432
 Spiralarme, 565
 Milchstrasse, 565–571
 Spiralgalaxie, 590
 Spitzer-Weltraumteleskop, 502, 553
 spontane Kernspaltung, 319
 spontane Symmetriebrechung, 477
 Spurendetektoren, 172–175
 Blasenkammern, 173
 Funkenkammer
 Mehrdräht, 174–175
 Nebelkammer, 172–173
 Photoplatte, 172
 Streamerkammer, 173
 Spurenelemente
 Suche, 314–315
 Störeinflüsse, 76–78
 Störoperator, 275
 Stücke
 fünf, Beziehung
 rechteckiges sphärisches Dreieck, 638
 sphärische Trigonometrie, 635
 vier, Beziehung

- rechtwinkliges sphärisches Dreieck, 638
- sphärische Trigonometrie, 635
- Stabilisierung
- radial, 157–158
 - vertikal, 156–157
- Stabilitätskriterien
- Kerne, 271–272
- Standardmodell, 395, 475–487, 611
- Standardtheorie, 614
- Starke Fokussierung, 158–160
- Starke Wechselwirkung, 417–450
- Austauschteilchen, 443–444
- starke Wechselwirkung, 231, 417, 444, 451, 467
- Stars
- Guide, 77
- Statisches Universum
- Unmöglichkeit, 583–584
- Statistik
- Kern, 257–264
 - Zerfälle, 272–273
- Stefan-Boltzmann-Konstante, 544
- Stellerator, 355
- Stephan-Boltzmann-Gesetz, 115
- Sternbild Krebs, 531
- Sterne
- Binärsysteme, 556–559
 - Drehimpuls
 - Geburt, 517–518
 - Geburt, 514–518
 - Hauptreihe, 518–542
 - Hauptreihenentwicklung
 - Hertzsprung-Russell-Diagramm, 523–526 - Hertzsprung-Russell-Diagramm, 520–522
 - Klassifikation
 - Sterne, 506–514 - Lebensdauer, 522–523
 - Masse und Leuchtkraft, 505–506
 - massiv, 529–542
 - Milchstrasse, 505–580
 - Nachhauptreihenentwicklung
 - Hertzsprung-Russell-Diagramm, 526–528 - Neutronensterne, 539–541
 - Novae, 532–536
- Pulsare, 542
- Spektren
- Klassifikation, 506–514
 - Überreste, 536–542
 - veränderlich, 528–529
 - weisse Zwerge, 536–538
- Sternentwicklung, 505–542
- Sternhaufen
- offen, 572
- Sternklasse, 507
- Sternspektren, 506–514
- Sterntod, 524
- Steuerstab, 340
- Steuerung
- Magnetfelder, 161–162
- Stokes, G. G., 629
- Stokesche Relation, 58
- Stossinduzierte Kernreaktionen, 324–326
- Stossinduzierte Kernspaltung, 323–327
- leichte Kerne, 324
- Stossinduzierte Radioaktivität, 326–327
- Stossprozesse, 193–202
- Strahlenquellen, 279–306
- Strahlung
- α , 279–286
 - Anwendung, 314–317
 - Arten, 279–306
 - β , 293–306
 - γ , 286–293
 - Mensch, 307–317
 - Quellen, 279–306
 - radioaktiv, 279–306
 - Regulierungen, 313
 - Wechselwirkung mit Gewebe, 310–313
- Strahlungsarten, 279–306
- Strahlungsfeld, 396
- Strahlungstransportzone, 382
- Strangeness, 433, 435, 443
- Seltsamkeit, 435
- Streamer, 173
- Streamerkammer, 173
- Spurendetektoren, 173
- Streamers:coronal, 375
- Streuexperimente, 187–206
- Streumethoden, 188–193
- Streuquerschnitt

- differenziell, 195–196
- Streuung, 619–622
 - Coulomb, 619–622
 - Coulomb-Potential, 197
 - elastisch, 192
 - Elektron-Elektron, 194–195
 - Hofstadter, 198–199
 - inelastisch, 322
 - Kohärente Überlagerung, 199–202
 - Nukleon-Nukleon, 226–229
 - Ladungsabhängigkeit, 228–229
 - Spinabhängigkeit, 227–228
 - Quantenmechanische Behandlung, 195–202
 - Rayleigh, 187–188
 - reakтив, 322
 - Rutherford, 195
- Streuung von Neutrinos, 471
- Streuzentren
 - mehrere, 197–198
- Streuzentrum, 188
- Struktur
 - Galaxien, 590–591
 - Milchstrasse, 559–580
 - Sonne
 - radial, 382–384
 - Universum, 586–604
- SU(3), 435
- SU(6), 422
- Subzergsternen, 519
- Suche nach Spurenelementen, 314–315
- Superhaufen, 602
- Supernova, 530, 605
 - SN 2007 uy, 84
 - SN 2008D, 84
- Supernovae, 532–536
 - Typ I, 532
 - Typ II, 532
- Supernovae Typ Ia, 83–84
- S-Welle, 228, 229
- Swift, 502
- Symmetrie
 - C, 460–461
 - CP, 461
 - CPT, 463–467
 - G, 467
 - P, 456–459
 - T, 461–463
- Symmetriebrechung, 477
 - spontan, 477
- Symmetrien, 422–433
 - Leptonenfamilien, 412–415
- Symmetriezustand
 - Angabe, 467–468
- Symmetrisierung, 182
- Synchrotron, 155–162
 - Steuerung
 - Magnetfelder, 161–162
- Synchrotronschwingungen, 160–161
- Synodische Umlaufzeit, 99
- Szintillatoren, 167–169
- τ
- Lepton, 412
- T-Symmetrie
 - Zeitumkehr, 461–463
- Target, 188
 - ruhend, 146–148
- Tau, 412
- technischen Strahlenbelastung, 309
- Teilchen, 395
 - frei, 184–185
 - Umwandlung
 - Universalprinzip, 459–460
 - virtuell, 405–408
 - Wechselwirkung mit Materie, 207–209
- Teilchen mit Wechselwirkungen, 185–186
- Teilchen-Zoo, 417
- Teilchenbeschleuniger, 141–164
 - Funktionsweise, 148–149
- Teilchenflussdichte, 307
- Teilchenphysik, 141–175
 - Einleitung, 19
 - Fazit, 484–487
 - Fermionen und Bosonen, 177–186
 - Klassische Streutheorie, 619–623
 - Schwache Wechselwirkung, 451–473
 - Standardmodell, 475–487
 - Starke Wechselwirkung, 417–450
 - Streuexperimente, 187–206
 - Teilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung, 395–415
 - Wechselwirkung von Teilchen und Materie, 207–209
 - Teilchenstrom, 188

- Teleskop, 21, 22
 Galilei, 22
 Kepler, 21
 Newton, 23
- Teleskope, 21–42
 Aberration, 41–42
 Auflösung
 einzelne, 36–39
 interferometrisch gekoppelt, 39–41
 Montierung, 28–29
 optisch, 21–29
 parallaktische Montierung, 28
- Röntgen, 32–36
- Radio, 30–32
- Tensordichte
 Epsilon, 177
- Tensor
 Einstein, 494
 Energie-Impuls, 494
 Epsilon, 177
 Levi-Civita, 177
- Theoreme
 Noether, 430
- Theorie
 Big-Bang, 605
 Dirac, 180–186
 Fermi
 β -Zerfall, 299–302
- Thetis
 Saturnmond, 127
- Titan
 Saturnmond, 127
- Titania
 Uranusmond, 129
- Tokamak, 352, 357
 ITER, 353
 Magnetfelder, 353–354
- Topness
 Truth, 435
- toroidale Magnetfelder, 353–354
- totaler Wirkungsquerschnitt, 188
- Tröpfchenmodell
 Kern, 231–235
- Transformationen
 Koordinaten, 640
 Astronomisches Dreieck, 640
- Translationen, 429–430
- Transurane, 356
- Treibhauseffekt, 109–113
- Triangulation, 78–79
- Trigonometrie
 sphärisch, 632–640
- Triple- α -Prozess, 389, 390
- Triple- α -Prozess, 389–390
- Tripletzustand, 228
- Triton
 Neptunmond, 130, 132
- Truth
 Topness, 435
- Typ II Supernova, 529
- Übergänge
 Multipol, 287–291
- Übergangswahrscheinlichkeiten
 reziprok
 Multipol-Übergänge, 290–291
- Überreste von Sternen, 536–542
- Umbriel
 Uranusmond, 129
- Umgebung
 Planeten
 erdähnlich, 101–122
 Riesenplaneten, 123–130
- Umlaufszeit, 97
 siderisch, 99
- Umlaufzeiten, 99–100
- Umlaufzeit
 synodisch, 99
- Umwandlung von n in p , 297–298
- Umwandlung von p in n , 298
- unendlichdimensionaler Funktionenraum
 Isomorphismen, 428–429
- Universalprinzip
 Umwandlung von Teilchen, 459–460
- Universum, 460, 581–615
 Anfangsgrösse, 605–611
 Beobachtungen, 581–585
 frühes, 611–615
 Galaxien, 587–592
 Galaxienklassifikation
 Hubble, 591–592
 Hubble-Gesetz, 585–586
 Objekte, 586–592
 statisch
 Unmöglichkeit, 583–584

- Struktur, 586–604
- Unmöglichkeit
- statisches Universum, 583–584
- Unschärferelation, 238
- up-Quark, 434
- Uran-Actinium-Reihe, 305
- Uran-Radium-Reihe, 305
- Uran-Thorium-Reihe, 306
- Uranus, 128–129
- Monde
 - Ariel, 129
 - Oberon, 129
 - Titania, 129
 - Umbriel, 129
- Urknall, 614
- Valenzquarks, 448
- van-der-Waals-Kräfte, 440
- Vektor
- axial, 455, 630
 - polar, 455, 630
- Vektoreichbosonen, 612
- Vektorfeld, 481
- Venus, 104–105
- Veränderliche Sterne, 528–529
- Vergleich
- Kernmodelle, 249
- Vergrösserung, 21
- Verluste in Materie, 207–208
- Vertex, 399, 402
- Vertikale Stabilisierung, 156–157
- verzögerte Neutronen, 344
- Vierervektoren
- Repetition und Erweiterung, 193–194
- Virgo, 503
- Virgo-Superclusters, 588
- Virialtheorem, 95–97, 601, 602
- Virtuelle Teilchen, 405–408
- virtuelle Teilchen, 402
- Visuelle Doppelsterne, 557
- Volumenanteil, 232
- Vorschau
- Inhalt, 18–19
- Vulkane, 125
- W-Boson
- reell, 471–473
- würfelförmiger Kasten, 235–237
- Wasserstoff, 389, 391, 537, 546
- Wechselwirkung
- elektromagnetisch, 396
 - Teilchen, 395–415
 - schwach, 223, 412, 444, 451–473
 - stark, 417–450
 - Austauschteilchen, 443–444
 - Strahlung und Gewebe, 310–313
 - Teilchen, 185–186
 - Teilchen, Materie, 207–209
- Wega, 560
- weiss, 439
- Weisse Zwerge, 536–538
- weisser Zwerg, 523
- Weisslichtinterferometer, 65
- Welle-Teilchen-Dualismus, 180
- Wellen
- P, 116
 - S, 116
- Wellenlänge
- Compton, 202
- Weltbild
- geozentrisch, 88
 - heliozentrisch, 88
- Weltformel, 478
- Wideröe-Bedingung, 155
- Wirkungsgrad
- Target
 - ruhend, 146–148
- Wirkungsquerschnitt
- total, 188
- Woods-Saxon-Potential, 239
- z und a aus δ und s , 640
- z, a
- Beziehungen zu φ, δ, s , 639
- z, q
- Beziehungen zu φ, δ, s , 639
- Z-Boson
- reell, 471–473
- Zeeman-Effekt, 366, 367
- Zeemann-Triplett, 368
- Zentralkörper
- Massenbestimmung, 100–101
- Zentralmasse, 97
- Zentrifugalpotential, 547
- Zentripetalkraft, 94
- Zerfälle
- radioaktiv, 269–277

- radioaktive
 - Ketten, 304–306
 - Typen, 304
 - Statistik, 272–273
 - Zerfallsgesetze, 272–277
 - Zerfallsketten, 304–306
 - Zerfallstypen
 - radioaktiv, 304
 - zirkulare Polarisation, 179
 - Zodiakallicht, 385
 - Zustandssumme, 509
 - Zweite Quantisierung, 402–405
 - zweite Quantisierung, 181, 183
 - Zwerg
 - braun, 502
 - Zwergnovae, 535
 - Zwerge
 - weiss, 536–538
 - Zwerggalaxie, 571
 - Zwerggalaxien, 591
 - Zwergnova, 533
 - Zwergnovae, 532–533, 535
 - Zwergsternen, 519
 - Zwischenbild, 21
 - Zyklotron, 152–153
 - Zyklus
 - CNO, 525
 - p-p, 524, 525
- ‘Milchstrasse
- Perseus-Arm, 569