INGENIERIA DE SISTEMAS

3. MODELOS DE CRECIMIENTO Y DE PROPAGACIÓN

1. INTRODUCCIÓN

Los BERP no representan la realidad del comportamiento de sistemas ya que se frenan o desaparecen → CRECIMIENTO LIMITADO

2. CRECIMIENTO SOSTENIDO

REPRODUCCIÓN CELULAR POR DIVISIÓN

→ Cada célula se divide en dos células y así sucesivamente : $\frac{dx(t)}{dt} = 2^t \ln(2) x_0$ con $x_0 \equiv$ número de células en $t=0$

→ También puede representarse de forma continua : $x(t) = 2^t x_0$

⇓

El crecimiento por bipartición es un caso particular de crecimiento exponencial con $K = \ln(2)$ y es una estructura de realimentación positiva

→ predominan estos bucles

↳ TASA DE REPRODUCCIÓN POR INDIVIDUO Y UNIDAD DE TIEMPO $\rightarrow r \equiv$ BERP con $\boxed{K = \ln(r+1)}$

modelable a

3. CRECIMIENTO LIMITADO

CRECIMIENTO LIMITADO → en sistemas reales el crecimiento se mantiene al inicio y con el tiempo se frena o desaparece por algún tipo de limitación

↳ K deja de ser CTE y es una variable dependiente del estado

$$\boxed{K(x) = K_m - \frac{K_m}{x_m}\, x}$$

$K_m, x_m \to$ parámetros del crecimiento limitado

→ En un BERP, $K(x)$ introduce un bucle de realimentación negativa

↓

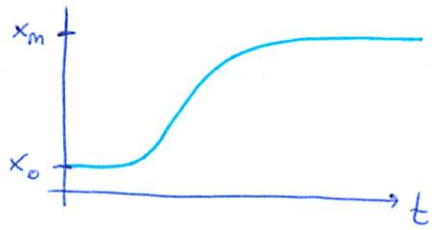
En crecimiento limitado, se llega a una situación de estado estacionario porque en algún instante de tiempo, el bucle de realimentación negativa predomina sobre el positivo. (2 bucles)

CARACTERÍSTICAS DEL CRECIMIENTO LIMITADO

Modelo matemático:

$$\frac{dx(t)}{dt} = K(t)\, x(t)$$

$$K(t) = K_m - \frac{K_m}{x_m}\, x(t)$$



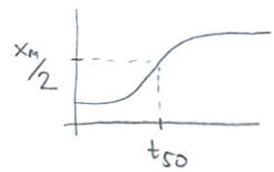
1. El estado del modelo dinámico puede experimentar crecimiento siempre y cuando $0 < x(0) < x_m$
2. El crecimiento modelado siempre finaliza en un estado estacionario representado por x_m
3. El crecimiento limitado viene caracterizado por una dependencia cuadrática entre el flujo y el estado $F(x) = -\frac{K_m}{x_m}x^2 + K_m x$
4. El crecimiento limitado en un sistema con una sola variable de estado es posible porque el estado tiene una influencia positiva sobre el flujo en una primera fase (crecimiento sostenido) y negativa en la segunda (crecimiento asintótico)
5. El crecimiento limitado se formula con una función logística, solución analítica del modelo dinámico dado.

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0\, x_m}{x_0 + (x_m - x_0)\, e^{-K_m t}}}$$ $x_0 \equiv x(0)$

6. El crecimiento limitado tiene una forma característica en S (crecimiento sigmoidal o crecimiento logístico)

7. El punto de inflexión en un crecimiento sigmoidal se puede observar siempre que el estado parta con $x_0 < x_m/2$ y depende de los parámetros x_0, x_m y K_m :

$$\boxed{t_{50} = \frac{1}{K_m} \ln\left(\frac{x_m - x_0}{x_0}\right)}$$

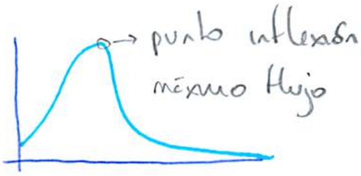


8. El crecimiento sigmoidal es tanto más rápido cuanto mayor sea K_m

9. Los parámetros x_0 y x_m tienen influencias contrarias en el crecimiento sigmoidal

- x_m y K_m constantes : $\uparrow x_0$ crecimiento de menor duración
  $\downarrow x_0$ " mayor "
- x_0 y K_m constantes : $\downarrow x_m$ crecimiento menor amplitud
  $\uparrow x_m$ " mayor "

10. La variable de flujo asociada a un crecimiento limitado tiene la siguiente forma :



DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE PARÁMETROS EN UN CRECIMIENTO SIGMOIDAL

→ Basado en la estimación de parámetros a partir de dos puntos. El valor de x_m se supone determinado por inspección de los datos registrados

1. Elegir los puntos x_1 y x_2, tal que x_1 se haya presentado con anterioridad a x_2

2. Obtener los instantes de tiempo t_1 y t_2 correspondientes

3. Se determina K_m como:

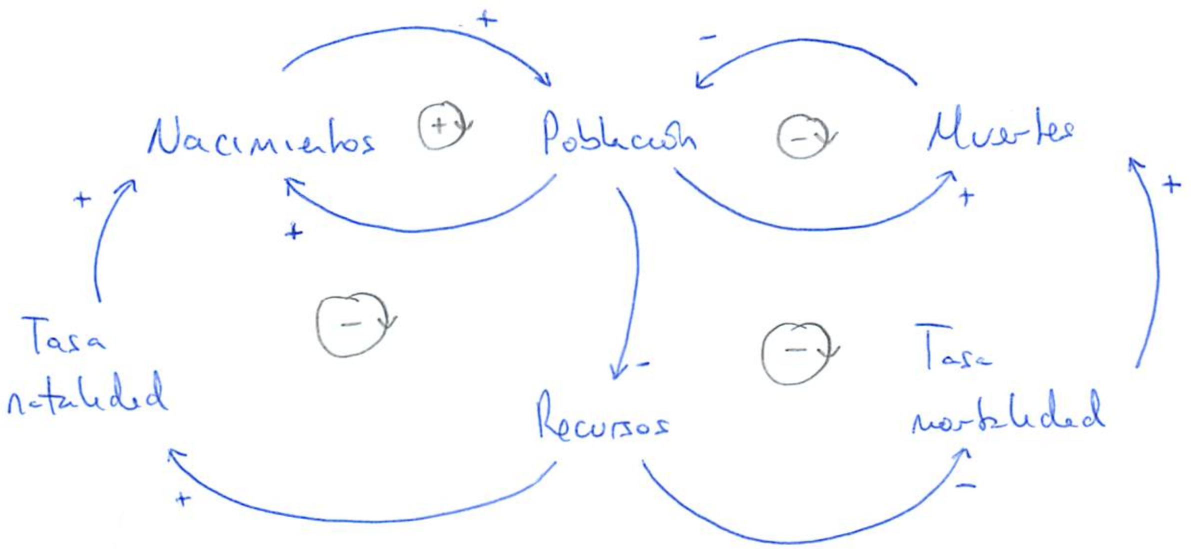
$$\boxed{K_m = \frac{\ln(x_m - x_1) + \ln(x_2) - \ln(x_m - x_2) - \ln(x_1)}{t_2 - t_1}}$$

4. Se determina x_0 como:

$$\boxed{x_0 = \frac{x_m}{1 + e^{\frac{t_1 \ln(x_2) - t_1 \ln(x_m - x_2) - t_2 \ln(x_1) + t_2 \ln(x_m - x_1)}{t_2 - t_1}}}}$$

4. EJEMPLOS DE CRECIMIENTO SIGMOIDAL

CRECIMIENTO SIGMOIDAL DE UNA POBLACIÓN



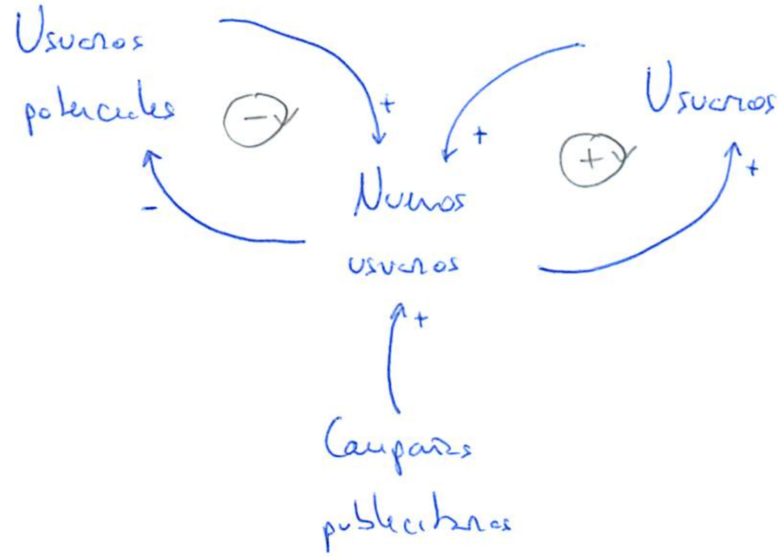
→ Con efecto de la limitación de recursos

* La población crece de forma sostenida hasta que la mortalidad, creciente con el tamaño de la población, iguala a la natalidad, decreciente con la población

CRECIMIENTO SIGMOIDAL DE UN GRUPO DE POBLACIÓN Y DECRECIMIENTO EN EL GRUPO COMPLEMENTARIO

↳ decrecimiento sigmoidal

→ Con la introducción de un producto novedoso → Modelo Bass



* El crecimiento en el número de usuarios es a costa del decrecimiento del grupo de usuarios potenciales → la suma de ambos grupos permanece constante

PROPAGACIÓN DE UN RUMOR

→ Similar al ejemplo anterior entre la población que ya conoce el rumor y los que aún no lo conocen y la propagación basada en el "boca a boca"

PROPAGACIÓN DE UNA ENFERMEDAD TRANSMISIBLE

→ Similar al segundo caso distinguiendo infectados y susceptibles de contraer la enfermedad. Además, se supone población constante, enfermedad suave y población infectada y susceptible homogéneamente mezclada. Además, la propagación es suficientemente rápida para que los infectados lo estén un tiempo amplio

↓

Modelo_SI → Susceptibles e Infectados → Tasa contagio (parámetro)

→ Incidencia (variable flujo)

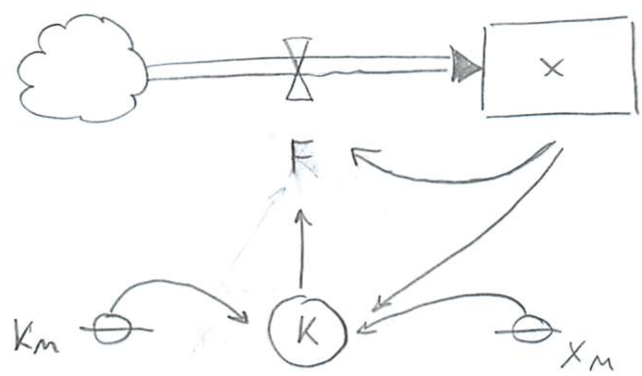
→ Tasa incidencia y Prevalencia (variables auxiliares)

* Se produce un aumento de Infectados y el decrecimiento de Susceptibles mediante la Tasa de Incidencia (valor máximo cuando toda la población inicial está infectada)

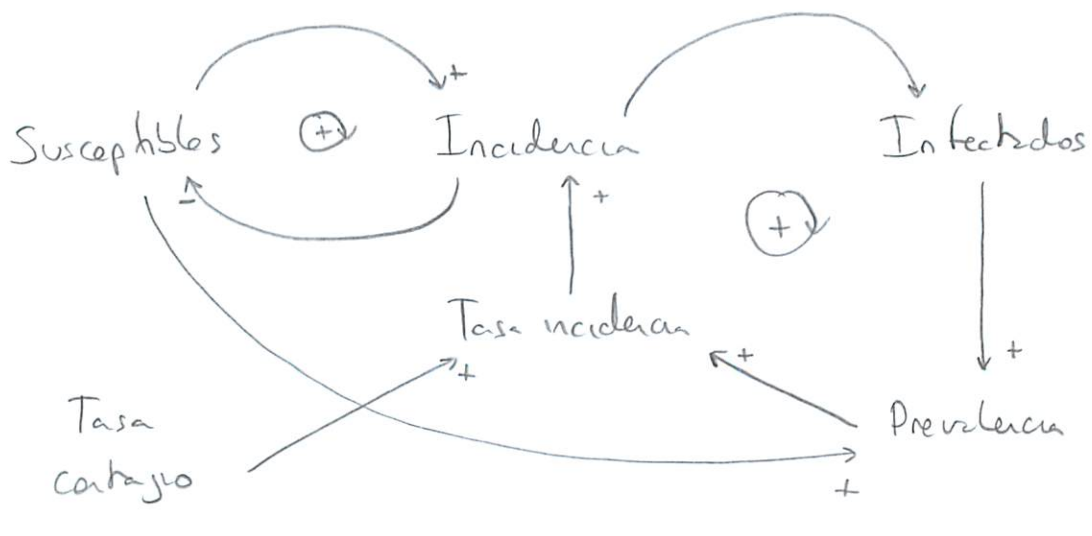
→ Modelo_SI válido para epidemias (toda la población susceptible enferma porque la propagación es alta y los infectados lo están durante todo el tiempo)

↳ Modelo_SIR: incluye a los Recuperados (personas que se recuperan de la enfermedad en un tiempo corto) → un nuevo estado a el sistema + otro parámetro

Diagrama Forrester crecimiento sigmoidal



Modelo SI



INGENIERÍA DE SISTEMAS

Ejercicios propuestos Tema 3

- **Ejercicio 3.1:** En los depósitos a plazo fijo es habitual que los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión no se retiren sino que se reinviertan o añadan al capital inicial, es decir, se capitalicen. De ahí que para determinar el capital final (C_F) resultante de colocar un determinado capital inicial (C_I) a una tasa de interés (i), en tanto por ciento por periodo de inversión, durante un período de tiempo, n veces el periodo de inversión, se aplique la fórmula del interés compuesto:

$$C_F = \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n C_I$$

Justifique que el depósito a plazo fijo también se puede modelar como un proceso de crecimiento del capital inicial. ¿Qué relación guarda la tasa de crecimiento con la tasa de interés? Suponiendo que una persona decide contratar un depósito a plazo fijo con una tasa de interés del 4% anual, ¿cuántos años debería contratar para conseguir duplicar el capital inicial?

- **Ejercicio 3.3:** Un estudio sobre los usuarios de televisión por cable en un determinado país ha arrojado las cifras anuales de la Tabla 3.3. La columna de la izquierda muestra los años pares, desde 1992, en los que existen datos del número de usuarios y la columna de la derecha muestra el correspondiente dato, en millones de personas. La representación gráfica de los datos, véase la Figura 3.9, no permite apreciar todavía cuál será el número máximo de usuarios, pero los operadores de televisión por cable estiman que se situará entre los 9 y 10 millones de personas. Utilice esta información y los datos de la tabla para predecir cómo evolucionará el número de usuarios de televisión por cable hasta el año 2030.

Año	Millones de personas
1992	0.25
1994	0.40
1996	0:70
1998	1.20
2000	1.80
2002	2.50
2004	3.50
2006	4.20
2008	5.50
2010	6.50
2012	7.50

Tabla 3.3: Valores registrados de usuarios de televisión por cable.

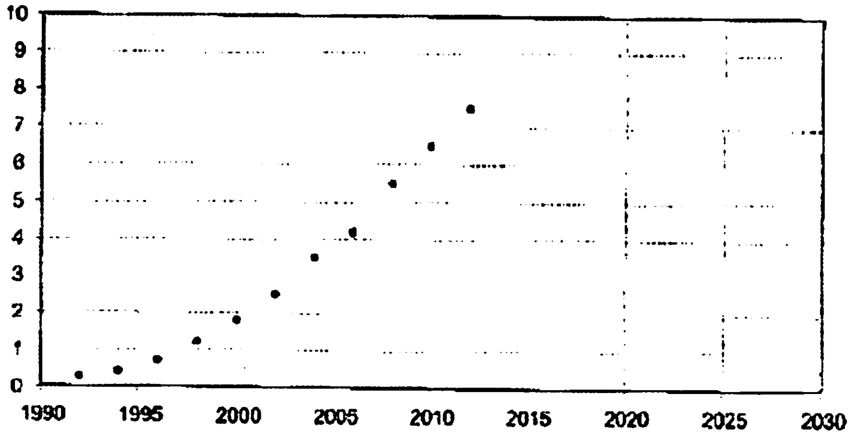


Figura 3.9: Representación gráfica de los valores de la Tabla 3.3.

❑ **Ejercicio 3.4:** Programe en Vensim un modelo de dinámica poblacional básico, donde la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad vengan definidas por las funciones (3.16) y están expresadas en 1/mes. Utilice el modelo para comprobar que, partiendo de cualquier población inicial pequeña, ésta evoluciona de forma sigmoidal hasta un valor próximo a 930 individuos. Tal como se había vaticinado mediante el análisis gráfico en la Figura 3.11.

$$TN(P) = 0.2\frac{500^2}{500^2 + P^2} \quad ; \quad TM(P) = 0.01\frac{500^2 + P^2}{500^2} \qquad (3.16)$$

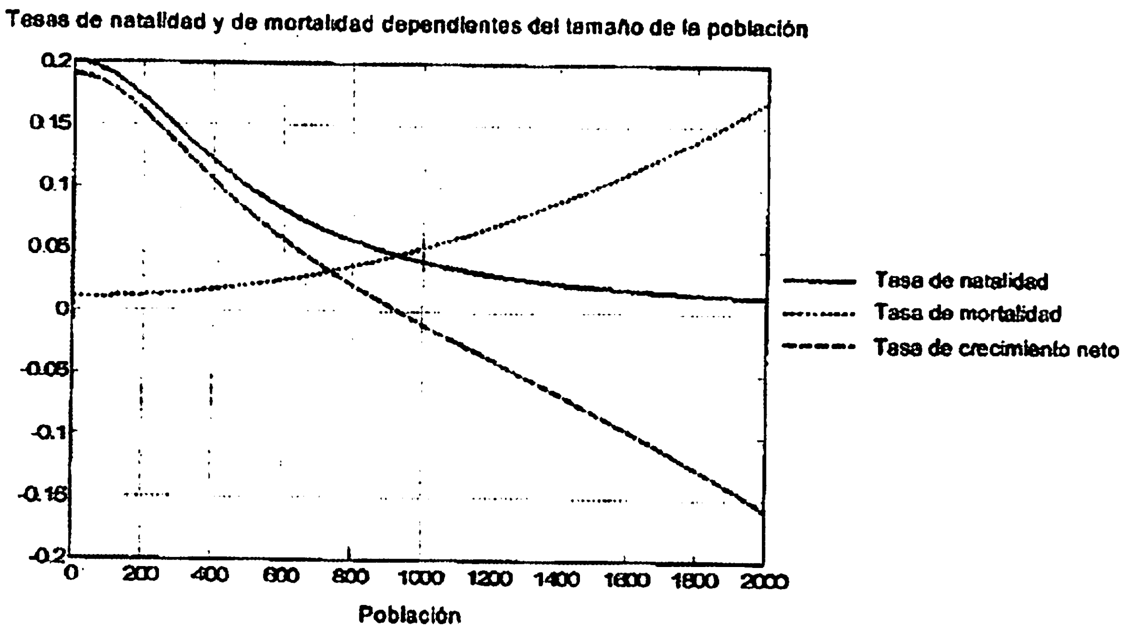


Figura 3.11: Representación gráfica de la tasa de natalidad, de la tasa de mortalidad y de la tasa de crecimiento neto.

❑ **Ejercicio 3.6:** Programe en Vensim el *Modelo Bass* y utilícelo para analizar el efecto del parámetro k_1 y para reproducir situaciones similares a las figuras 3.5, 3.6 y 3.7 aún cuando $x_2(0)$ sea nulo.

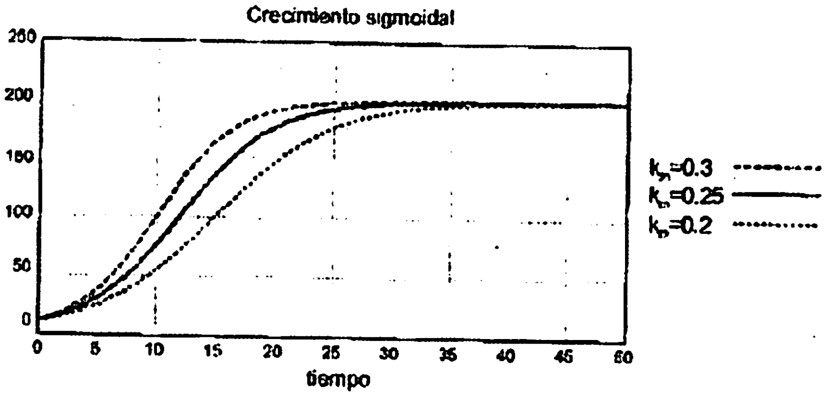


Figura 3.5: Gráfico comparativo del crecimiento sigmoidal para distintos valores de k_m con los mismos estados inicial y final.

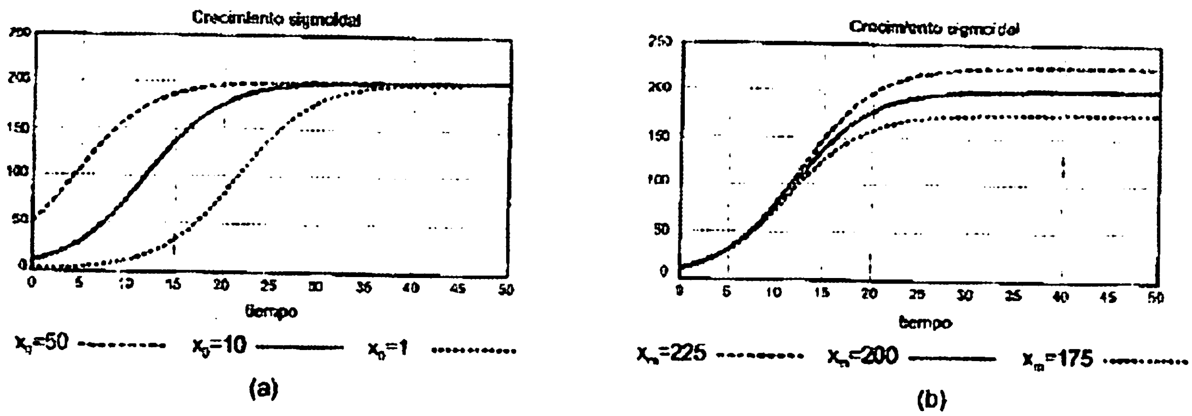


Figura 3.6: Gráfico comparativo del crecimiento sigmoidal para: (a) Distintos valores iniciales con los mismos valores de k_m y x_m; (b) Distintos valores finales con los mismos valores de k_m y x_0.

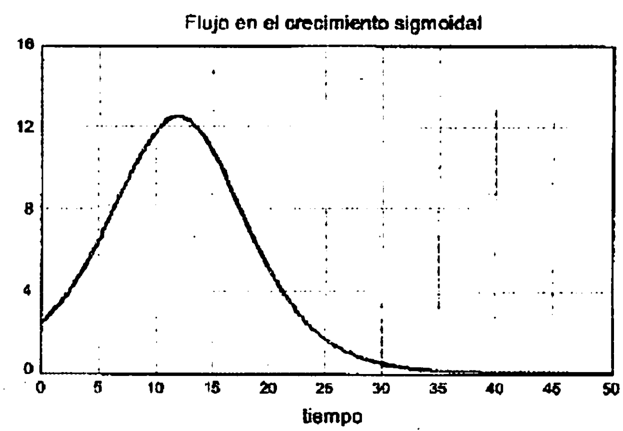


Figura 3.7: Evolución de la variable de flujo en un crecimiento sigmoidal.

❐ **Ejercicio 3.9:** Programe en Vensim este modelo dinámico de propagación de enfermedades transmisibles y utilícelo para reproducir las gráficas de la Figura 3.13.

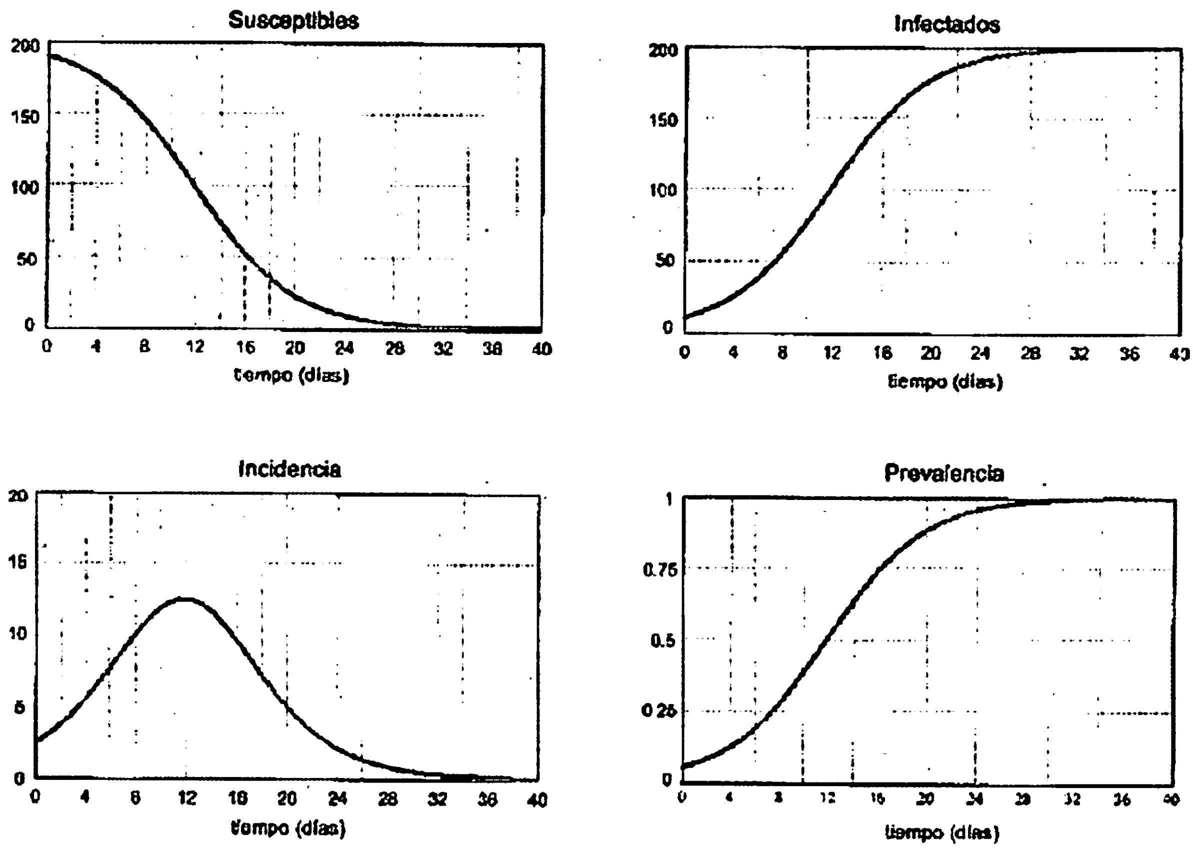


Figura 3.13: Resultados de simulación con el *Modelo_SI*.

INGENIERÍA DE SISTEMAS
EJERCICIOS PROPUESTOS TEMA 3

3.1

Ambas tasas guardan una relación de crecimiento continuo y sostenido. A medida que aumenta el tiempo, y manteniendo la tasa de interés constante, el capital final irá aumentando

Los años necesarios para duplicar el capital inicial son:

$$C_F = \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n C_i \quad ; \quad 2C_i = \left(1 + \frac{4}{100}\right)^n C_i \quad ; \quad 2 = 1'04^n \quad ;$$

$$\sqrt[n]{2} = 1'04 \quad \rightarrow \quad \boxed{n = 18 \text{ años}}$$

3.3

Dado que se trata de un crecimiento limitado, es lógico pensar que para 2030 se tenga un valor cercano al máximo estimado. Por tanto, los parámetros del crecimiento sigmoidal serán

$x_0 = 0'25$

$x_m = 9'5$

$$K_m = \frac{\ln(x_m - x_1) + \ln(x_2) - \ln(x_m - x_2) - \ln(x_1)}{t_2 - t_1}$$

tomando $x(2000) = 1'80$ y $x(2006) = 4'20$;

$$K_m = \frac{\ln(9'5 - 1'8) + \ln(4'2) - \ln(9'5 - 4'2) - \ln(1'8)}{2006 - 2000} = \frac{1'221}{6} = 0'203$$

$$K_m \simeq 0'2$$

Los valores en los años pares siguientes serán:

$$x(t) = \frac{x_0 \, x_m}{x_0 + (x_m - x_0)\, e^{-k_m t}} = \frac{0'25 \cdot 9'5}{0'25 + (9'5 - 0'25)\, e^{-0'2t}} = \frac{2'375}{0'25 + 9'25\, e^{-0'2t}}$$

$x(2014) = 7'282$

$x(2016) = 7'890$

$x(2018) = 8'357$

$x(2020) = 8'702$

$x(2022) = 8'950$

$x(2024) = 9'124$

$x(2026) = 9'245$

$x(2028) = 9'327$

$x(2030) = 9'384$

* el valor de t es el año menos 1990, el origen de los datos analizados