

INGENIERÍA DE SISTEMAS

2. ESTRUCTURAS ELEMENTALES DE REALIMENTACIÓN

1. EL CONCEPTO GENERAL DE REALIMENTACIÓN

REALIMENTACIÓN \rightarrow presente en procesos con toma de decisión \rightarrow corrige la desviación entre lo observado y el objetivo, las acciones tomadas tienen influencia en las observaciones futuras \rightarrow explícito o implícito

\downarrow

proceso controlado: las desviaciones futuras se utilizan hasta alcanzar el objetivo deseado

Situaciones:

1. Un estado acumula un flujo de entrada y genera, a petición, un flujo de salida \rightarrow La entrada tiene un carácter productor por el estado (p) y la salida es consumidor del estado (c)
 2. El estado es a la vez productor y consumidor en el modelo
- \downarrow
- Un bucle de realimentación negativa formado por variable de estado y flujo de salida tiene un efecto estabilizador \rightarrow BUCLE REGULADOR o estabilizador
 - Un bucle de realimentación positiva formado por variable de estado y flujo de entrada tiene carácter desestabilizador \rightarrow BUCLE REFORZADOR

\hookrightarrow La evolución del estado depende de la predominancia de un bucle frente a otro

- Si predominan bucles de realimentación negativa, tienden a mantener invariantes los valores de las variables del sistema y restituirlos cuando se modifican por efecto de perturbaciones externas
- Si predominan los bucles de realimentación positiva, el sistema tiende a crecer sin límites en presencia de una perturbación externa

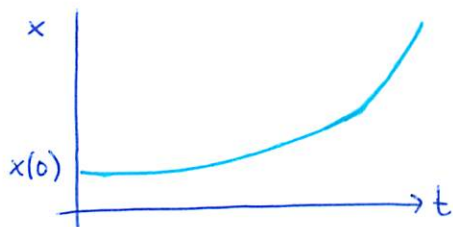
↓

El comportamiento autorregulador del sistema depende de su estructura interna, no de su naturaleza o sus componentes → siempre hay dominancia a la realimentación negativa

2. BUCLE DE REALIMENTACIÓN POSITIVA

BERP → caracterizado por relación ^{positiva} proporcional entre flujo de entrada (único flujo del sistema o flujo neto) y el estado

Modelo matemático → flujo: $F(t) = K \cdot x(t)$ ($K > 0$, no varía)



$$\frac{dx(t)}{dt} = K \cdot x(t) \rightarrow \boxed{x(t) = x(0) e^{Kt}}$$

crecimiento exponencial sostenido

CARACTERÍSTICAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL BERP

1. El estado del BERP manifiesta crecimiento exponencial sostenido siempre que su valor inicial en $t=0$ sea distinto de cero ($x(0) \neq 0$)
2. El estado del BERP manifiesta un crecimiento exponencial sostenido siempre que el parámetro $K > 0$
3. El estado del BERP manifiesta crecimiento exponencial con un tiempo de duplicación (t_d) inversamente proporcional a $K \rightarrow \boxed{t_d \approx \frac{0.7}{K}}$

$t_d \rightarrow$ tiempo que tarda el estado $x(t)$ en duplicarse

4. El crecimiento exponencial de un BERP será tanto más rápido cuanto mayor sea el parámetro $(K) \rightarrow$ TASA DE CRECIMIENTO : tanto por uno de

$K \uparrow \rightarrow t_d \downarrow$ (duplica en crecimiento que experimenta el estado $x(t)$, por menos tiempo) unidad de $x(t)$

5. El comportamiento de un BERP viene descrito en el plano de fase por una línea recta de pendiente positiva, igual a la tasa de crecimiento, que pasa por el origen.

Flujo frente a estado
(derivada del estado frente al estado)

DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE PARÁMETROS EN UN BERP

La trayectoria representa la evolución de los variables fundamentales del bucle elemental

ESTIMACIÓN DE K EN FUNCIÓN DE T_d

1. Tomar dos puntos x_1 y x_2 tales que $x_2 \approx 2x_1$
2. Obtener los instantes de tiempo t_1 y t_2 de esos valores
3. Determinar K como : $K = \frac{0.7}{t_2 - t_1}$ $t_2 - t_1$ sería t_d

ESTIMACIÓN DE K A PARTIR DE DOS PUNTOS \rightarrow a utilizar, salvo indicación

1. Elegir dos puntos x_1 y x_2 del conjunto de datos registrados con $x_2 > x_1$
2. Obtener los valores t_1 y t_2 correspondientes
3. Determinar K como : $K = \frac{\ln(x_2) - \ln(x_1)}{t_2 - t_1}$ \rightarrow utilizar los mismos x_i y t_i

ESTIMACIÓN DE $x(0)$ A PARTIR DE DOS PUNTOS \rightarrow a utilizar en ejercicios salvo indicación contraria

1. Elegir dos puntos x_1 y x_2 tales que $x_2 > x_1$
2. Obtener los valores t_1 y t_2 correspondientes

3. Determinar $x(0)$ como:

$$x(0) = e^{\frac{t_2 \ln(x_1) - t_1 \ln(x_2)}{t_2 - t_1}}$$

ESTIMACIÓN DE $x(0)$ POR MÍNIMOS CUADRADOS SUPONIENDO K

CONOCIDO

1. Formar el conjunto de datos e^{kt_i}
2. Formar el conjunto de datos e^{2kt_i} (primero elevado al cuadrado)
3. Formar el conjunto $x_i e^{kt_i}$ multiplicando los datos registrados por el elemento correspondiente del primer conjunto
4. Sumar los elementos de 2 y 3 y obtener $x(0)$ como su cociente:

$$x(0) = \frac{\sum_{i=1}^m x_i e^{kt_i}}{\sum_{i=1}^m e^{2kt_i}}$$

ESTIMACIÓN DE K POR MÍNIMOS CUADRADOS SUPONIENDO $x(0)$

CONOCIDO

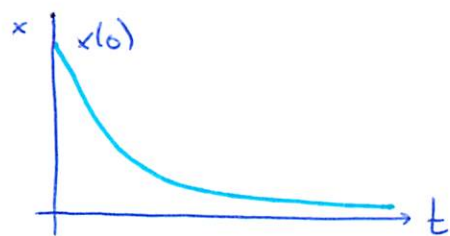
1. Formar el conjunto de datos $\ln(x_i) - \ln(x(0))$
2. Formar el conjunto de datos $t_i (\ln(x_i) - \ln(x(0)))$
3. Formar el conjunto de datos t_i^2
4. Sumar los elementos de 2 y 3 y obtener K como su cociente:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^m t_i (\ln(x_i) - \ln(x(0)))}{\sum_{i=1}^m t_i^2}$$

3. BUCLE DE REALIMENTACIÓN NEGATIVA

BERN \rightarrow caracterizado por relación proporcional negativa entre el flujo (único flujo del sistema o flujo neto) y el estado

Modelo matemático \rightarrow flujo: $F(t) = -K x(t)$ ($K > 0$, no varía)



$$\frac{dx(t)}{dt} = -K x(t) \rightarrow \boxed{x(t) = x(0) e^{-Kt}}$$

decrecimiento exponencial
asintótico

CARACTERÍSTICAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL BERN

1. El estado del BERN manifiesta decrecimiento exponencial asintótico siempre que $x(0) \neq 0$ y $K > 0$
2. El estado del BERN manifiesta decrecimiento exponencial hacia el estado final nulo, con independencia del valor de $K \rightarrow x(t \rightarrow \infty) = 0$
3. El estado del BERN manifiesta decrecimiento exponencial con una velocidad VM inversamente proporcional a $K \rightarrow \boxed{VM \approx \frac{0.7}{K}}$

VM \rightarrow tiempo que tarda el estado $x(t)$ en reducirse a la mitad.

4. El decrecimiento exponencial en un BERN será más rápido cuanto mayor sea el parámetro $K \rightarrow$ TASA DE DECRECIMIENTO: tanto por uno de decrecimiento que experimenta el estado $x(t)$ por unidad de $x(t)$
 $K \uparrow \rightarrow VM \downarrow$ (reduce su valor en menos tiempo)

5. El comportamiento de un BERN viene descrito en el plano de fase por una línea recta de pendiente negativa, de valor absoluto igual a la tasa de decrecimiento que posea por el origen

DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE PARÁMETROS EN UN BERN

En base a la estimación de K y $x(0)$ a partir de dos puntos

1. Elegir dos puntos x_1 y x_2 tal que $x_2 < x_1$

2. Obtener los instantes de tiempo t_1 y t_2 correspondientes

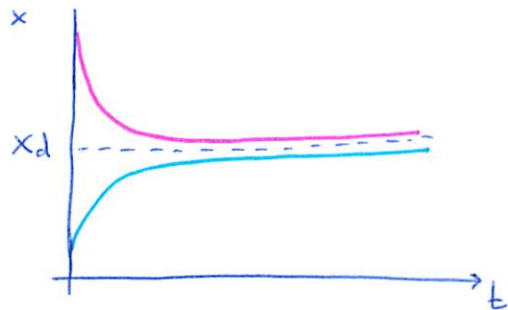
3. Determinar K como: $K = \frac{\ln(x_1) - \ln(x_2)}{t_2 - t_1}$ → diferente en numerador a BERP

4. Determinar $x(0)$ como: $x(0) = e^{\frac{t_2 \ln(x_1) - t_1 \ln(x_2)}{t_2 - t_1}}$ → igual que BERP

4. BUCLE DE CONTROL REALIMENTADO

BECR → sistema elemental que incluye en su estructura un bucle de realimentación negativa. Caracterizado por una relación proporcional entre el flujo y la discrepancia entre el valor deseado por el estado y el valor instantáneo del estado

Modelo matemático → flujo: $F(t) = K(x_d - x(t))$



$K > 0$ y x_d (valor deseado), no varían

$$\frac{dx(t)}{dt} = K(x_d - x(t))$$

$$\hookrightarrow x(t) = x_d - (x_d - x(0))e^{-Kt}$$

CARACTERÍSTICAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL BECR

1. El estado del BECR manifiesta un comportamiento exponencial asintótico siempre que $x(0) \neq x_d$ y $K > 0$

↳ el estado manifiesta crecimiento si $x(0) < x_d$ ■

↳ el estado manifiesta decrecimiento si $x(0) > x_d$ ■

2. El estado del BECR manifiesta un comportamiento exponencial desde $x(0)$ hasta x_d por el estado, con independencia del valor que tenga K
 $\rightarrow x(t \rightarrow \infty) = x_d$
3. El valor absoluto del error en un BECR toma su valor máximo (100%) en $t=0$ y se reduce a la mitad (50%) transcurrido un tiempo (t_{50}) inversamente proporcional al valor de $K \rightarrow \boxed{t_{50} \approx \frac{0.7}{K}}$
4. El valor absoluto del error entre x_d por el estado y el valor instantáneo del BECR toma su valor máximo (100%) en el instante inicial ($t=0$) y se reduce aproximadamente un 63% transcurrido un tiempo (t_{63}) inversamente proporcional a $K \rightarrow \boxed{t_{63} = T = \frac{1}{K}}$
 $T \rightarrow$ constante de tiempo del sistema
5. El estado de un BECR alcanza el valor deseado más rápido cuanto mayor sea $K \rightarrow$ TASA DE RESPUESTA: tanto por uno de crecimiento o decrecimiento que experimenta el estado $x(t)$, por unidad $x(t)$
 $K \uparrow \rightarrow t_{50} \downarrow, t_{63} \downarrow, VM \downarrow$: el estado reduce su valor en menos tiempo.
6. El comportamiento de un BECR viene descrito en el plano de fase por una línea recta de pendiente negativa, de valor absoluto igual a la tasa de respuesta (K), que acaba en el punto x_d del eje de abscisas
7. El comportamiento de un BECR se puede considerar un caso particular de un BECR donde el valor deseado es siempre nulo.

DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE PARÁMETROS EN UN BECA

→ Basado en la estimación de parámetros de dos puntos. El valor de x_d se supone determinado por inspección de los datos registrados

1. Elegir los puntos x_1 y x_2 , tal que x_1 se haya presentado con anterioridad a x_2

2. Obtener los instantes de tiempo t_1 y t_2 correspondientes

3. Se determina K como:

$$K = \frac{\ln(x_d - x_1) - \ln(x_d - x_2)}{t_2 - t_1}$$

4. Se determina $x(0)$ como:

$$x(0) = x_d - e^{\frac{t_2 \ln(x_d - x_1) - t_1 \ln(x_d - x_2)}{t_2 - t_1}}$$

→ Si por inspección de los datos se estiman x_d y $x(0)$, el valor de K se puede estimar a partir de los instantes t_{50} o t_{63}

↳ $x(50\%) = x(0) + 0.5(x_d - x(0))$, el valor obtenido se extrapola a un t con los datos disponibles y después $K \approx \frac{0.5}{t_{50}}$
↳ por t_{63} el proceso es similar y después $K \approx \frac{1}{t_{63}}$

INGENIERÍA DE SISTEMAS

Ejercicios propuestos Tema 2

- ❑ **Ejercicio 2.1:** En base a los bucles analizados en el Tema 1 pronostique cualitativamente, si puede, la evolución natural de:
- 1) La población de ballenas del diagrama de la Figura 1.13.
 - 2) La población del diagrama de la Figura 1.14.
 - 3) El número de hombres y mujeres infectados de la Figura 1.15.
- ❑ **Ejercicio 2.2:** En base a los bucles analizados en el Tema 1 pronostique cualitativamente, si puede, la evolución de:
- 1) El número de vendedores si aumentan considerablemente las ventas reales del diagrama de la Figura 1.17.
 - 2) La temperatura medida si aumenta la temperatura deseada en el diagrama de la Figura 1.18.
 - 3) La temperatura medida si aumenta el factor de pérdidas en el diagrama de la Figura 1.18.
- ❑ **Ejercicio 2.3:** Programe en Vensim un bucle elemental de realimentación positiva y utilícelo para reproducir las figuras 2.4 y 2.5.

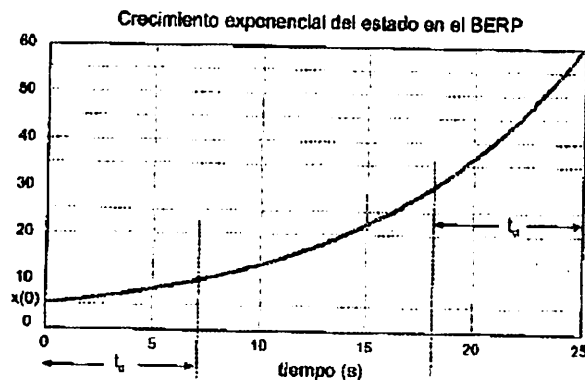


Figura 2.4: Crecimiento exponencial del estado en un bucle elemental de realimentación positiva con tasa de crecimiento $k=0.1/s$. De ahí que el tiempo de duplicación para el estado sea igual a siete unidades de tiempo (segundos).

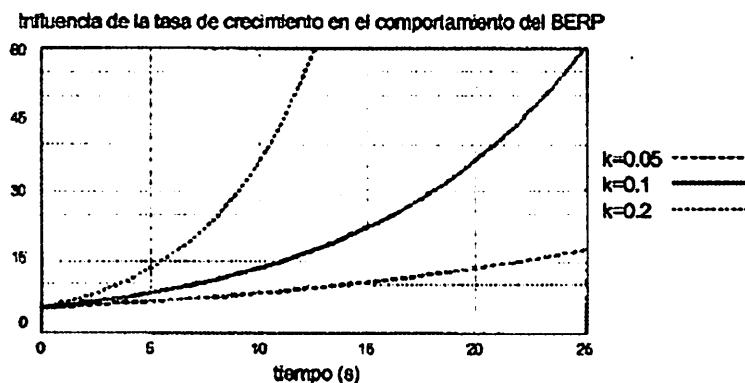


Figura 2.5: Gráfico comparativo entre los comportamientos dinámicos que exhibe el bucle elemental de realimentación positiva a partir del mismo estado inicial, para distintos valores de la tasa de crecimiento.

- **Ejercicio 2.4:** Programe en Vensim un bucle elemental de realimentación negativa y utilícelo para reproducir las figuras 2.8 y 2.9.

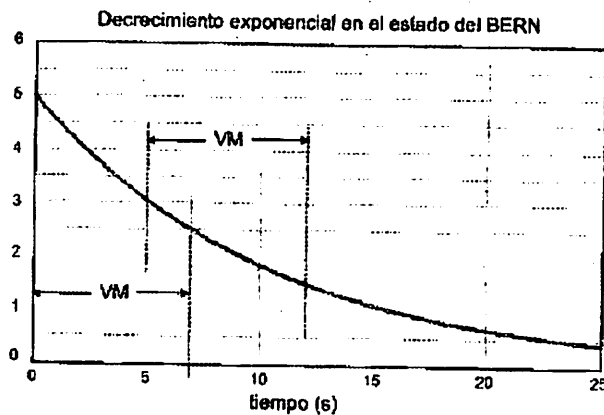


Figura 2.8: Decrecimiento exponencial del estado en un bucle elemental de realimentación negativa con tasa de crecimiento $k=0.1/s$. De ahí que la vida media del estado sea igual a siete unidades de tiempo (segundos).

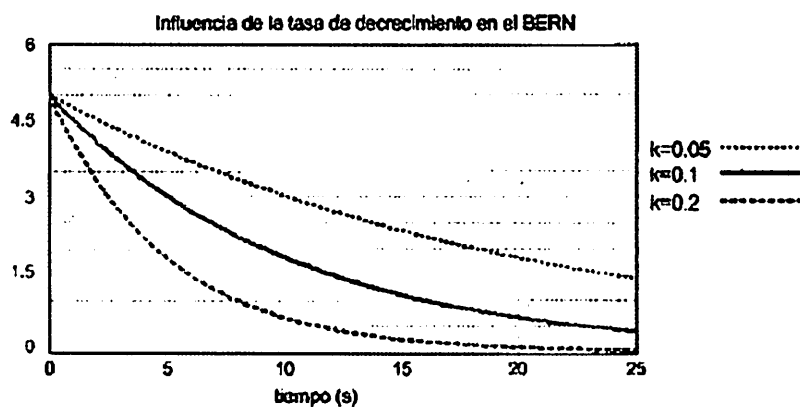


Figura 2.9: Gráfico comparativo entre los comportamientos dinámicos que exhibe el bucle elemental de realimentación negativa a partir del mismo estado inicial, para distintos valores de la tasa de decrecimiento.

- **Ejercicio 2.5:** Programe en Vensim un bucle elemental de control realimentado y utilícelo para reproducir las figuras 2.12 y 2.13.

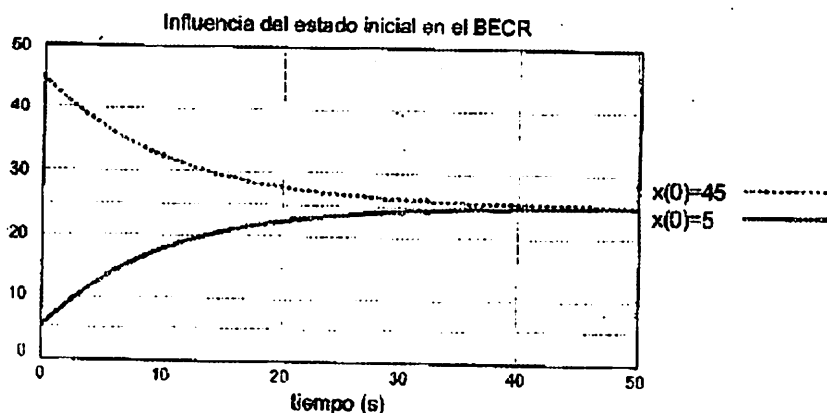


Figura 2.12: Gráfica comparativa entre el crecimiento exponencial y el decrecimiento exponencial exhibido por un mismo BECR debido a la elección de estados iniciales (5 y 45) por encima y por debajo respectivamente del valor deseado, $x_d=25$.

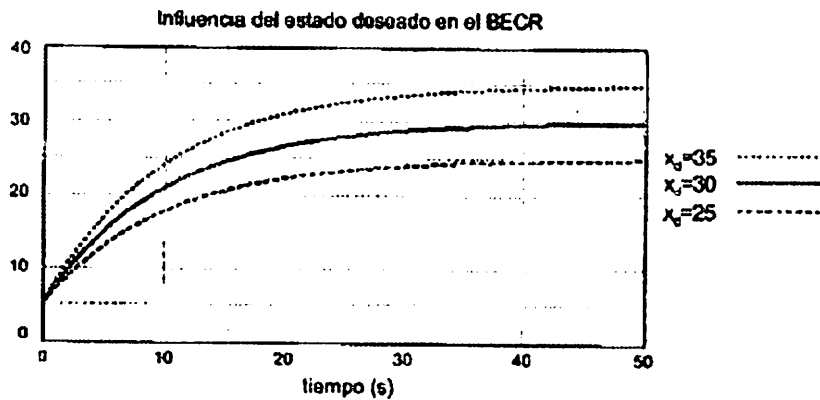


Figura 2.13: Gráfica comparativa entre los crecimientos exponenciales exhibidos por un BECR debido a la elección del mismo estado inicial, $x(0)=5$, y tres valores deseados diferentes (25, 30 y 35).

- **Ejercicio 2.6:** Trazar el diagrama de influencias y el diagrama de Forrester para los tres bucles elementales analizados en este tema. Se recomienda hacer uso del mayor número de variables posibles con tal de dar mayor legibilidad a los diagramas.
- **Ejercicio 2.7:** Las figuras 2.19 y 2.20 muestran respectivamente la evolución del estado y la relación entre el flujo y el estado (trayectoria en el plano de fase) de un bucle elemental de realimentación negativa.

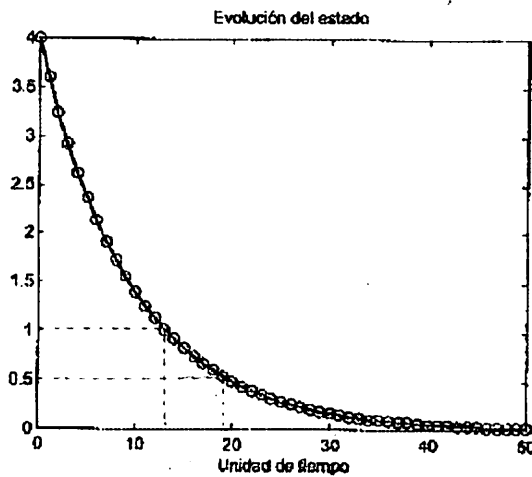


Figura 2.19: Evolución del estado de un bucle elemental de realimentación negativa.

En ambas gráficas están indicados, mediante círculos, los valores de las variables en cada unidad de tiempo y se incluye con trazo continuo la unión de todos ellos. a) Determinar sobre ambas gráficas o sobre la gráfica más adecuada sus parámetros; b) Justificar que el BECR también valdría para simular este comportamiento dinámico. ¿Qué parámetro le falta por estimar respecto al apartado (a)?

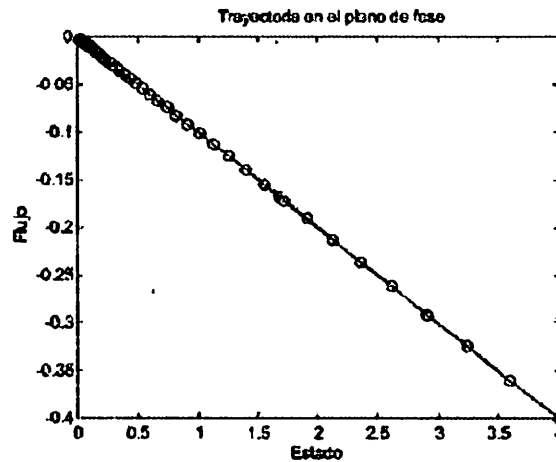


Figura 2.20: Trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental de realimentación negativa.

- **Ejercicio 2.8:** Las figuras 2.21 y 2.22 muestran respectivamente la evolución del estado y la relación entre el flujo y el estado (trayectoria en el plano de fase) de un bucle elemental.

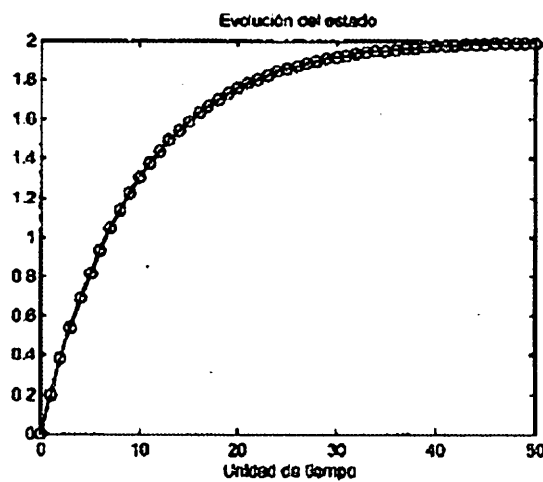


Figura 2.21: Evolución del estado de un bucle elemental.

En ambas gráficas están indicados, mediante círculos, los valores de las variables en cada unidad de tiempo y se incluye con trazo continuo la unión de todos ellos. a) Justificar la estructura que puede tener ese bucle elemental y determinar sobre ambas gráficas o sobre la gráfica más adecuada sus parámetros; b) Podría esbozar cómo habría evolucionado el estado de este bucle si su valor inicial hubiera sido igual a 2. ¿Y si hubiera sido igual a 1?

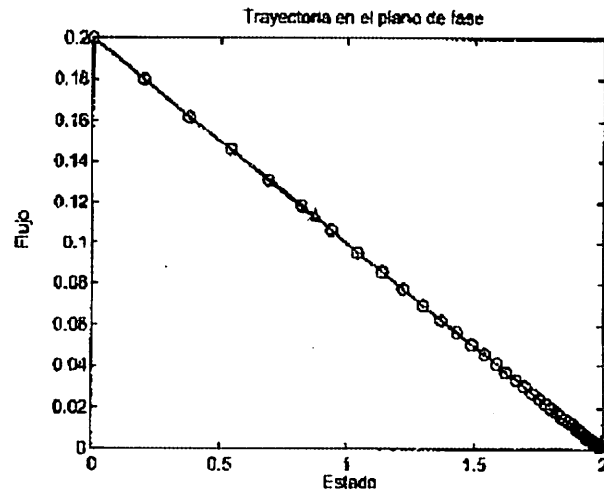


Figura 2.22: Trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental.

- **Ejercicio 2.9:** La Figura 2.23 muestra la evolución del estado de varios bucles elementales. ¿Qué similitudes encuentra entre ellos y a qué parámetro de su estructura elemental se debe la diferencia de comportamiento? Trate de determinar el rango en el que ha podido variar ese parámetro.

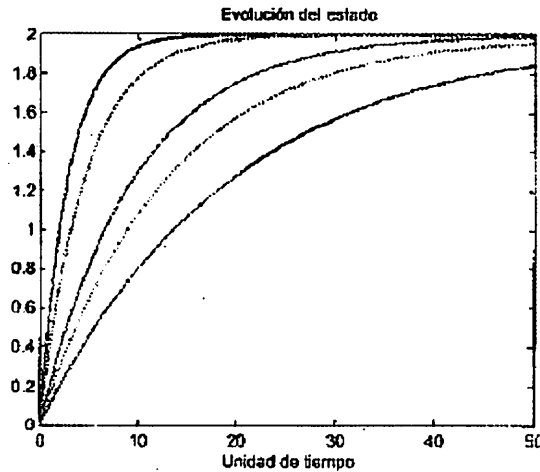


Figura 2.23: Evolución del estado de varios bucles elementales.

INGENIERÍA DE SISTEMAS

EJERCICIOS PROPUESTOS TEMA 2

2.1

1. La población de ballenas aumenta con los nacimientos y disminuye a partir de las muertes y de las ballenas que se pescan. Así cuanto mayor es la población de ballenas, más ballenas a su vez mueren y más ballenas hay para pescar.

Si nacen más ballenas que mueren o se pescan, la población de ballenas aumentará. Por el contrario, si el balance es positivo por las muertes + pesca, las ballenas tenderán a desaparecer. Si se compensan, las ballenas mantendrán la población.

2. La población aumenta con los nacimientos y la inmigración y disminuye con las muertes. A su vez, el aumento de población lleva a más nacimientos y más muertes. Si se quiere un crecimiento sostenido de la población, el balance entre muertes y nacimientos e inmigración debe ser positivo, pero no demasiado grande.

La población inmigrante aumenta cuando los puestos sin cubrir aumentan ya que la propia población activa es limitada y con el aumento de población, los puestos de trabajo aumentan, aumentando las posibilidades de que los puestos de trabajo se queden sin cubrir.

3. El número de hombres (y mujeres) infectados aumenta a medida que la incidencia de la enfermedad aumenta y los hombres que se curan disminuyen.

A su vez, cuanto más aumentan los hombres infectados, mayor incidencia tendrá sobre los mujeres la enfermedad (y viceversa).

Si la incidencia de la enfermedad es mayor que las curas, todos los hombres y mujeres quedarán enfermos y no podrán poblar su sector. Para que la población evolucione a no enfermar, la curación tiene que tener un balance mayor que la incidencia de la enfermedad; aumentando los hombres y mujeres no infectados y disminuyendo así la incidencia de la enfermedad.

2.2

1. Si aumenta el número de ventas considerablemente, el número de vendedores aumentará; aunque no de forma directa. En primer lugar, se tendrá que inducir a una demanda a cubrir y serán necesarios más aprendices de vendedor. Estos aprendices necesitarán un tiempo para aprender y poder pasar a ser vendedores.

Para que el número de vendedores aumentado sea sostenible, es necesario que las ventas se mantengan en un número alto y que estos tengan una capacidad de ventas acorde a la situación.

Si esto no ocurre, los vendedores abandonarán y el tiempo de permanencia disminuirá.

2. Si la temperatura desciende aumenta, la discrepancia con la medida aumentará ya que la temperatura medida se mantendrá en un primer momento. Así, para disminuir la discrepancia y que la temperatura

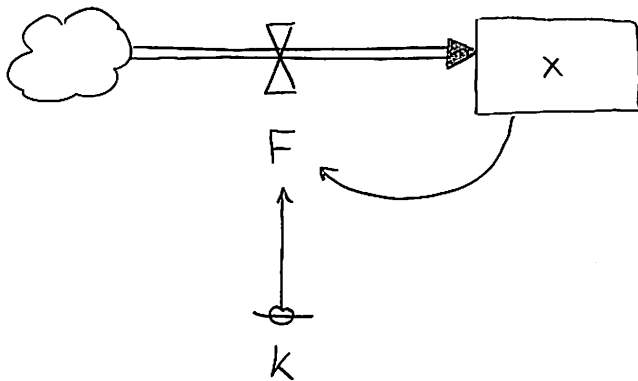
medida alcance la deseada, se generará más calor y se irá acumulando hasta que la temperatura medida se ajuste a la deseada.

3. Si el factor de pérdida aumenta, se perderá más calor y por tanto se acumulará menos calor, disminuyendo la temperatura medida y aumentando la discrepancia con respecto a la temperatura deseada.

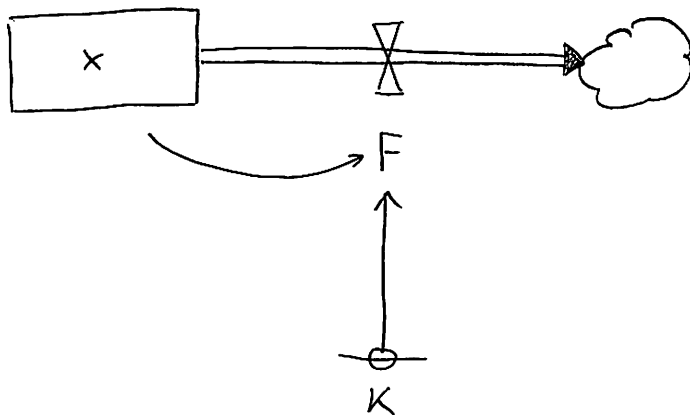
Para neutralizar la discrepancia, tendrá que generarse y acumularse más calor del que se pierde por lo que la temperatura pueda aumentar.

2.6

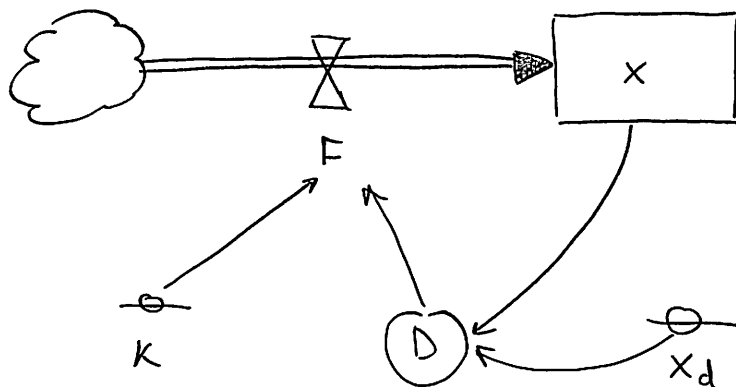
Bucle de realimentación positiva



Bucle de realimentación negativa



Bucle de control realimentado



D es la variable auxiliar que representa la discrepancia, $x_d - x(t)$

2.7

- a) Lo más sencillo es obtener el valor de $x(0)$ de la gráfica de evolución del estado, teniendo $x(0) = 4$

Para calcular K, lo más sencillo es obtenerlo de la pendiente del plano de fase tomando los valores en 0 y 4:

$$K = -\frac{-0.4 - 0}{4 - 0} = \frac{0.4}{4} = 0.1$$

Luego el bucle se caracteriza por la función $x(t) = 4 e^{-0.1t}$

- b) Un BERN es un BECR donde $x_d = 0$ por lo que este campo también podría sumarse igual con el BECR

El parámetro faltante a determinar sería $x_d = 0$, luego

$$x(t) = x_d - (x_d - x(0)) e^{-Kt} = 0 - (0 - 4) e^{-0.1t} = 4 e^{-0.1t}$$

2.8

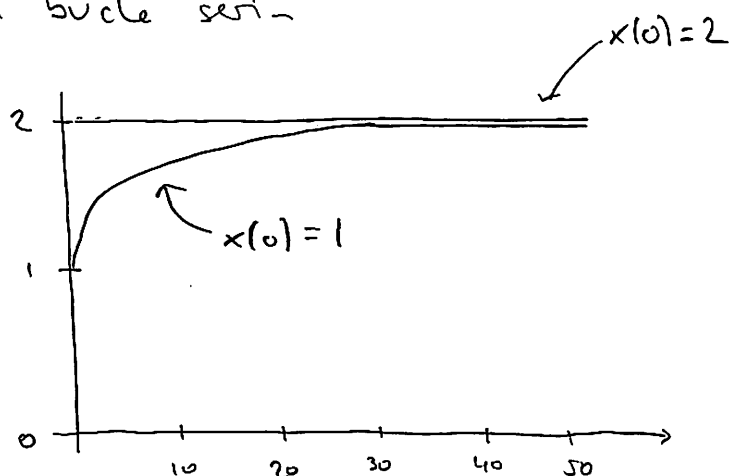
- a) Este bucle es de tipo BECR ya que la evolución del estado crece de forma exponencial pero se limita al valor deseado a medida que avanza el tiempo

Así, los valores del bucle se pueden deducir a partir de la gráfica de evolución del estado, de donde se deduce $x(0)=0$ y $x_d=2$. El valor K se puede tomar de la trayectoria en el plano de fase.

$$K = - \frac{0.2 - 0}{0 - 2} = \frac{0.2}{2} = 0.1$$

luego: $x(t) = 2 - (2 - 0)e^{-0.1t} = \boxed{2 - 2e^{-0.1t}}$

b) Manteniéndose el valor de x_d , la evolución del estado en el bucle será:



2.9

Es un bucle BECR en los que la evolución del estado en todos parte de $x(0)=0$ y $x_d=2$. La diferencia en cada uno de ellos es el valor de K , así cuanto mayor es el valor de K , más rápido se alcanza.

Los valores de K irían del rango desde $K > 0$

