

INGENIERÍA DE SISTEMAS

5. MODELADO MEDIANTE LA DINÁMICA DE SISTEMAS

1. CONCEPTO DE MODELO

MODELO → objeto artificial construido por representar de forma simplificada un fenómeno o sistema real

MODELADO → proceso por el que se construye un modelo de un aspecto problemático de la realidad.

SIMULACIÓN → conjunto de técnicas que permiten analizar sistemas arbitrarios de forma precisa, bajo diferentes condiciones experimentales, haciendo uso de un modelo del sistema

4 tipos de modelos:

↳ MENTALES → son una representación informal de un aspecto de la realidad. Son valiosos porque recogen la experiencia de especialistas y constituyen un punto de partida en otros procesos.

↳ VERBALES → el comportamiento se describe mediante palabras. Los sistemas expertos son ejemplos de modelos verbales formalizados.

↳ FÍSICOS → tratan de imitar al sistema real mediante maquetas para comprobar sus propiedades.

↳ MATEMÁTICOS → las relaciones entre cantidades observadas del sistema se describen mediante relaciones matemáticas.

↓
los más sencillos se resuelven analíticamente, reemplazando los valores simbólicos por numéricos. Los más complejos requieren de la aplicación de métodos numéricos.

CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

1. DETERMINISTA O ESTOCASTICO

↳ Determinista: el nuevo estado queda completamente definido a partir del estado anterior y de los valores instantáneos de sus variables de entrada (señales de entrada y parámetros)

↳ Estocástico: alguna de las variables de entrada (señal o parámetro), es aleatoria (también las variables del modelo calculadas derivadas de variables aleatorias) → estudio evoluciona en términos probabilísticos

→ Las dificultades en la simulación de modelos estocásticos superan realizar hipótesis adecuadas para eliminar la incertidumbre (p.e. sustituir las variables de entrada aleatorias por deterministas) → el modelo no es representativo del sistema; pero sí válido por el objeto de estudio

2. DINÁMICO O ESTÁTICO

↳ Estático: representación del sistema en un instante de tiempo particular o modelo que sirve para representar un sistema en el que el tiempo no juega un papel fundamental

↳ Dinámico: representación de un sistema que evoluciona con el tiempo

→ El modelo estático se describe con ecuaciones algebraicas, en el dinámico intervienen otro tipo de ecuaciones

3. DE TIEMPO CONTINUO, DISCRETO O HÍBRIDO

↳ Tiempo continuo: el valor de las variables de estado puede cambiar infinitas veces en un intervalo finito de tiempo → se describen con ecuaciones algebraicas y diferenciales

↳ Tiempo discreto: los cambios sólo ocurren en instantes separados en el tiempo y sus variables de estado cambian de valor sólo un número finito de veces por unidad de tiempo
→ se describen por conjuntos de ecuaciones algebraicas y en diferencias en instantes de tiempo espaciados de forma equidistante

4. DE VARIABLES CONTINUAS, DISCRETAS O MIXTOS

- ↳ Variables continuas: las variables de estado toman cualquier valor intermedio en sus rangos de variación
- ↳ Variables discretas: las variables de estado están cuantificadas o sólo
↓
o modelo de estados pueden tomar ciertos valores pertenecientes a un conjunto finito
- ↳ Mixto: sistemas en los que es necesario utilizar variables de ambos tipos (continuas y discretas)

PARADIGMA → conjunto de conceptos, leyes y medidas que sirven para definir un conjunto de modelos

↳ DINÁMICA DE SISTEMAS → centra su atención en modelos dinámicos de tiempo continuo donde predominan los aspectos deterministas. Da importancia a las relaciones entre estructuras para modelar su comportamiento

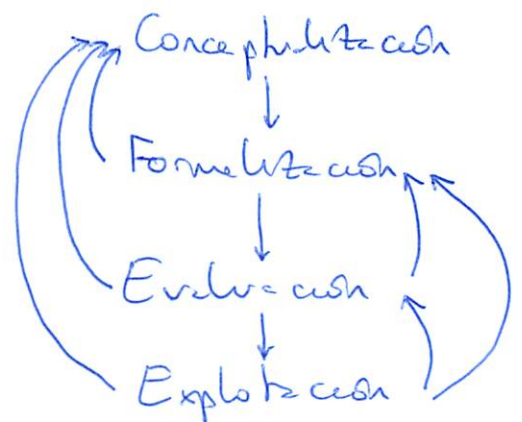
2. FASES DEL MODELADO

1. Conceptualización del problema: se esboza el problema a modelar y se comprueba si es adecuado para ser descrito mediante útiles sistemáticos → se eligen los elementos para su descripción y se analizan

influencias entre ellos → diagrama de influencias

2. Formalización del modelo: se profundiza en las características del problema por convertir el diagrama de influencias en un diagrama de Forrester y escribir las ecuaciones del modelo matemático (susceptible de ser programado)
3. Evaluación del modelo: se somete el modelo a ensayos y análisis para evaluar su validez y calidad. Comprender desde la comprobación de la consistencia lógica de las hipótesis hasta el estudio de las similitudes entre las trayectorias generadas del modelo y las observadas en la realidad. Incluye un análisis de sensibilidad
4. Explotación del modelo: el modelo se usa para analizar políticas alternativas que podrían resolver el problema que se estudia. Éstas se definen mediante escenarios representativos de las diferentes situaciones a las que se enfrentan los usuarios del modelo

→ El proceso de modelado no recorre las fases secuencialmente
↓
Resultado final: modelo aceptable del problema que se está estudiando



2 tipos de información:

- ↳ Registros numéricos de las trayectorias seguidas en el periodo
- ↳ Información variada sobre cómo se producen las interacciones en el sistema

→ Se busca un punto de equilibrio: el problema real es representado por el modelo con el grado de detalle requerido; pero, a su vez, lo más sencillo posible → si se aumenta su complejidad, el modelo no aumenta su rendimiento
↓
descripción modular (si el refinamiento en sub-sistemas no aporta nuevos resultados, no se incorporan)

3. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE UN MODELO

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD → consiste en el estudio sistemático de cómo afectan las variaciones de parámetros y de relaciones funcionales de un modelo a sus salidas
y- que generalmente se tienen pocos datos empíricos + info cualitativa y cuantitativa

→ La forma más simple es modificar los valores numéricos de los parámetros y analizar en qué medida la variación afecta a las salidas del modelo

↳ modelo insensible: si variaciones razonables de los parámetros afectan sensiblemente a las salidas del modelo

↓
inconveniente: las variaciones se realizan por separado y se observan efectos de variaciones conjuntas

↳ formas de análisis más complejas → método Montecarlo

→ El análisis de sensibilidad de las relaciones funcionales es más complejo y no existe un método general

→ El análisis de sensibilidad es un elemento esencial para la evaluación de modelos dando respuesta a la medida en que es insensible a variaciones de su estructura (si resulta robusto) y qué actuaciones serán más efectivas sobre el sistema real modelado.

4. EXPLOTACIÓN DE UN MODELO

EXPLOTACIÓN DEL MODELO \rightarrow consiste en valerse de él para resolver el problema para el cual fue construido

Usos de los modelos

- \rightarrow Modelos predictivos: se emplean para predecir con exactitud los valores que tomarán las magnitudes en instantes de tiempo futuro \rightarrow modelos de gran precisión (generalmente usados en ciencias físicas)
- \rightarrow Modelos de análisis: para evaluar tendencias de evolución de las magnitudes \rightarrow incorporan cierta imprecisión (crecer/decrecer, oscilar, permanecer constante...)
- \rightarrow Modelos instrumentales: para analizar los modos de comportamiento que puede mostrar un sistema \rightarrow se usan como bancos de prueba para aprendizaje (micromundos)
 - crear entornos donde ensayar
 - los políticos para resolver problemas \leftarrow gran importancia actualmente

5. SIMULACIÓN DE UN MODELO

\rightarrow El comportamiento de la mayoría de modelos matemáticos no puede determinarse por resolución analítica sino por simulaciones en computador, generalmente mediante métodos numéricos de resolución de ecuaciones

\rightarrow modelos dinámicos de tiempo continuo con ecuaciones algebraicas y diferenciales

resolución numérica
 \uparrow

MÉTODO DE EULER \rightarrow método simple de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de un valor inicial dado

↓
Requiere una buena elección de $\begin{cases} \text{ventana de simulación} \\ \text{intervalo de simulación} \end{cases}$

→ Para modelos de mayor complejidad se utiliza el método Runge-Kutta

Solución gráfica de una ecuación diferencial de primer orden:

$[a, b] \rightarrow$ intervalo en que hallar la solución $y(t)$ del problema

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Euler \rightarrow aproxima la derivada respecto al tiempo por el cociente de incrementos

- Construir el conjunto finito de puntos $\{(t_k, y_k)\}$, aproximaciones de la solución ($y(t_k) \approx y_k$) \rightarrow dividiendo $[a, b]$ en subintervalos de tamaño Δt

$$t_k = a + k\Delta t, \quad k=0, 1, \dots, M, \quad \Delta t = \frac{b-a}{M}$$

\nearrow cantidad de subintervalos

$\Delta t \equiv$ tamaño del paso de integración o intervalo de simulación

- Se establece la siguiente ley recursiva:

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t, \quad y_{k+1} = y_k + \Delta t \cdot f(t_k, y_k), \quad k=0, 1, \dots, M$$

$$\text{con } y(t_0) = y_0$$

\hookrightarrow aproximación del desarrollo de Taylor de la función

- Se genera una trayectoria aproximada de la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial por medio de una serie de tramos rectos

ERROR DE TRUNCAMIENTO \rightarrow cada tramo recto conlleva un error de aproximación

se puede disminuir reduciendo Δt , aunque aumenta el número de iteraciones y no es garantista \leftarrow

que se va acumulando a la solución, siendo posible que al final del intervalo el valor calculado esté lejos del real

6. LENGUAJES DE MODELADO

→ Los lenguajes de modelado son programas específicos que utilizan su propio conjunto de conceptos, leyes y medios para describir los modelos y simularlos

↳ Professional DYNAMO: el más clásico. Trata ecuaciones de gran dimensión

↳ STELLA, i-think: de amplia capacidad interactiva

↳ PowerSim: permite la interconexión de modelos simultáneamente

↳ Versim: autodocumenta los modelos según se construyen y permite seguir las relaciones causa-efecto a lo largo del modelo.

7. ACCIONES BÁSICAS DE CONTROL

→ En un BECR, los valores deseados se mantienen por ausencia de variables exógenas → si existen, aparecen perturbaciones que el sistema no es capaz de contrarrestar ⇒ estructuras de control realimentado → acción proporcional
↳ acción integral
↳ acción derivativa

ACCIÓN PROPORCIONAL → acción de control que trata de corregir la discrepancia (error) entre el valor deseado de una variable (variable controlada) y su valor actual mediante una señal proporcional al error

$$P(t) = K_p E(t) \quad K_p \equiv \text{ganancia proporcional}$$

ACCIÓN INTEGRAL → trata de corregir el error mediante una señal proporcional al error acumulado

$$I(t) = K_I \int E(t) dt ; \quad \left[\frac{dI(t)}{dt} = K_I E(t) \right]$$

$K_I \equiv$ ganancia integral

Acción DERIVATIVA \rightarrow corrige el error mediante una señal proporcional a la variación del error

$$D(t) = K_D \frac{dE(t)}{dt}$$

$$D(t) = K_D \frac{E(t) - E(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$K_D \equiv$ ganancia derivativa

\downarrow
no es fácil de

Δt a elección del programador

programar, ya que requiere conocer el valor futuro de la señal de error y por eso se usa esa aproximación

Tipos de control más comunes:

\hookrightarrow Control P: proporcional

\hookrightarrow Control PI: proporcional + integral

\hookrightarrow Control PID: proporcional + integral + derivativo

INGENIERÍA DE SISTEMAS

Ejercicios propuestos Tema 5

- ❑ **Ejercicio 5.2:** a) Programe en Vensim el modelo de flujo migratorio y recree en simulación los tres escenarios comentados anteriormente. c) Incorpore un cierto retraso en el flujo migratorio, con o sin aproximación, y valore los efectos que éste tendría sobre el conjunto de las variables del modelo.
- ❑ **Ejercicio 5.5:** El valor de F también se puede determinar por simulación mediante prueba y error o utilizando el modo Synthesim^s de Vensim para valores de F en el rango (0.004 y 0.015). a) Programe en Vensim el modelo descrito por las ecuaciones (1a, 2a y 3a) y utilícelo para reproducir la situación de la Figura 5.11. b) Fije el rango (0.004 y 0.015) para el parámetro F y utilice el modo Synthesim de Vensim para comprobar todas las situaciones intermedias entre los dos escenarios de la Figura 5.10. c) Compruebe que eligiendo otras poblaciones iniciales, las poblaciones siempre evolucionarán a la misma situación de equilibrio de la Figura 5.11, la única posible para esos parámetros:
- ❑ **Ejercicio 5.6:** a) Programe en Vensim el modelo depredador/presa y compruebe que es capaz de generar los resultados de la Figura 5.14. b) Utilícelo también para comprobar que 340 conejos y 20 zorros podrían convivir sin ningún tipo de fluctuación. c) Ayúdese del modo Synthesim de Vensim o de sucesivas simulaciones para explorar todos o parte de los resultados de la Figura 5.15. d) Haga el análisis de sensibilidad del modelo a los otros dos parámetros TNC y TE .
- ❑ **Ejercicio 5.8:** A partir del modelo matemático y lo comentado sobre él, haga una clasificación justificada de las 26 variables del modelo y trace el correspondiente diagrama de Forrester empleando la simbología de la Tabla 1.3 sin aproximaciones en los retrasos. Observación: si tiene dificultad con el ejercicio puede consultar el modelo en Vensim que encontrará a continuación, pero recuerde que esta simbología no es la estándar del diagrama de Forrester.
- ❑ **Ejercicio 5.10:** a) Reproduzca en Vensim los resultados de la Figura 5.25. b) Pruebe a utilizar otros parámetros de control para generar comportamientos ligeramente diferentes del modelo. c) Haga un análisis de sensibilidad respecto a la ganancia integral del modelo con Control PI .