高等代数专题

倪兴程[1]

2025 年 2 月 20 日

[1]Email: 19975022383@163.com

Todo list

目录

Chapter 1

多项式

1.1 多项式带余除法及整除

1.1.1 证明多项式整除性的常用方法

1. 定义法
   要证 $g(x)|f(x)$，去构造 $h(x)$，使得 $f(x)=h(x)g(x)$。常常将 $f(x)$ 分解因式分解出 $g(x)$，剩下的就是 $h(x)$。

2. 带余除法定理
   要证 $g(x)|f(x)$，只要证 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为 0。

3. 准标准式分解法
   要证 $g(x)|f(x)$，只要证它们的准标准分解式中的同一个不可约因式的方幂前者不大于后者。

4. 根法
   要证 $g(x)|f(x)$，只要证在复数域中 $g(x)$ 的根都是 $f(x)$ 的根，重根按重数计算。

1.1.2 例题

定理 1.1. $f(x)=(x+1)^{k+n}+2x(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n$，证明 $x^{k+1}|(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$。

证明. 因为：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^{k+n}+2x(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n \\
&= (x+1)^n\Big[(x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k\Big] \\
&= (x+1)^n[(x+1)+2x]^k
\end{aligned}
$$

因为 $x-1=[2x-(x+1)]$，所以：

$$\begin{aligned}(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}&=[2x-(x+1)](x+1)^n[(x+1)+2x]^k+(x+1)^{k+n+1}\\&=(x+1)^n[2x-(x+1)][(x+1)+2x]^k+(x+1)^{k+n+1}\end{aligned}$$

□

定理 1.2. 证明 $g(x)=1+x^2+\cdots+x^{2n}$ 整除 $f(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}$ 的充分必要条件为 n 是偶数。

证明. 显然：

$$g(x)=\frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2},\ f(x)=\frac{1-(x^4)^{n+1}}{1-x^4}$$

所以：

$$\begin{aligned}g(x)|f(x)&\Leftrightarrow\frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}\Big|\frac{1-(x^4)^{n+1}}{1-x^4}\\&\Leftrightarrow(1+x^2)[1-(x^2)^{n+1}]\Big|[1-(x^4)^{n+1}]\\&\Leftrightarrow(1+x^2)|[1+(x^2)^{n+1}]\\&\Leftrightarrow 1+x^2\text{的根}\pm i\text{都是}1+(x^2)^{n+1}\text{的根}\\&\Leftrightarrow 1+(-1)^{n+1}=0\\&\Leftrightarrow n\text{为偶数}\end{aligned}$$

□

定理 1.3. 设 $f(x),g(x)$ 为数域 K 上的多项式，$n\in\mathbb{Z}$。证明 $f(x)|g(x)$ 的充分必要条件为 $f^n(x)|g^n(x)$。

证明. **(1) 必要性**：若 $f(x)|g(x)$，则存在数域 K 上的多项式 $h(x)$ 使得 $g(x)=h(x)f(x)$，于是 $g^n(x)=h^n(x)f^n(x)$，所以 $f^n(x)|g^n(x)$。

(2) 充分性：将 $f(x),g(x)$ 进行标准分解得到：

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)\cdots p_m^{r_m}(x),\ g(x)=bq_1^{t_1}(x)\cdots q_n^{t_n}(x)$$

于是：

$$f^k(x)=a^kp_1^{kr_1}(x)\cdots p_m^{kr_m}(x),\ g^k(x)=b^kq_1^{kt_1}(x)\cdots q_n^{kt_n}(x)$$

因为 $f^k(x)|g^k(x)$，所以 $f(x)$ 标准分解式中的任一元素 $p_i(x),\ i=1,2,\ldots,m$ 都是 $g(x)$ 标准分解式中的元素（记为 q_{n_i}），同时有 $kr_i\leqslant kt_{n_i}$，即 $r_i\leqslant t_{n_i}$，于是 $f(x)|g(x)$。 □

定理 1.4. $(x^d-1)|(x^n-1)$ 的充分必要条件为 $d|n$。

证明. **(1) 充分性**：由 $d|n$ 可知，存在正整数 k 使得 $n=dk$。于是：

$$x^n-1=x^{dk}-1=\left(x^d\right)^k-1=(x^d-1)[x^{d(k-1)}+\cdots+11]$$

所以 $(x^d-1)|(x^n-1)$。

(2) 必要性：由整数的带余除法定理，设 $n=dq+r$，这里 $r=0$ 或 $0<r<d$。若 $0<r<d$，则：

$$x^n-1=x^{dq+r}-1=x^{dq}x^r-x^r+x^r-1=x^r(x^{dq}-1)+(x^r-1)$$

由充分性可知 $(x^d-1)|(x^{dq}-1)$。而 $(x^d-1)|(x^n-1)$。则 $(x^d-1)|(x^r-1)$。于是 $d\leqslant r$，矛盾。 □

定理 1.5. 设 $h(x),k(x),f(x),g(x)$ 是实系数多项式，且：

$$\begin{aligned}(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x-2)g(x)=0\\(x^2+1)k(x)+(x-1)f(x)+(x+2)g(x)=0\end{aligned}$$

则 $(x^2+1)|f(x)$，且 $(x^2+1)|g(x)$。

证明. 要证 $(x^2+1)|f(x)$ 和 $(x^2+1)|g(x)$，即证 $\pm i$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的根。将 $x=\pm i$ 代入上式可得：

$$\begin{aligned}(i+1)f(i)+(i-2)g(i)=0,\quad (i-1)f(i)+(i+2)g(i)=0\\(-i+1)f(-i)+(-i-2)g(-i)=0,\quad (-i-1)f(-i)+(-i+2)g(-i)=0\end{aligned}$$

解方程可得：

$$f(i)=g(i)=0,\ f(-i)=g(-i)=0$$

所以 $(x-i)|f(x)$，$(x+i)|f(x)$，$(x-i)|g(x)$，$(g+i)|f(x)$。因为 $(x+i,x-i)=1$，所以 $(x+i)(x-i)|f(x)$，$(x+i)(x-i)|f(x)$，即 $(x^2+1)|f(x)$，$(x^2+1)|g(x)$。 □

定理 1.6. 对于任意 $n\in\mathbb{N}^+$，都有 $(x^2+x+1)\Big|[x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}]$。

证明. **方法一**：令 $x^2+x+1=0$，求得它在复数域内的两个根分别为 $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$。将 x_1，x_2 代入到 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 中可得：

$$x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}=x^2x^n+(x+1)\left(x^2\right)^n=0$$

于是 x_1,x_2 也是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 的根，所以 $(x^2+x+1)\Big|[x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}]$。

方法二：设 α 为 $x^2+x+1=0$ 的根，则 $\alpha^2+\alpha+1=0$，两边同乘 $\alpha-1$ 可得 $\alpha^3=1$ 且 $\alpha\neq 1$。于是：

$$\begin{aligned}\alpha^{n+2}+(\alpha+1)^{2n+1}&=\alpha^{n+2}+(-\alpha^2)^{2n+1}\\&=\alpha^{n+2}+(-1)^{2n+1}\alpha^{4n+2}\\&=\alpha^{n+2}-\alpha^{3n}\alpha^{n+2}\\&=0\end{aligned}$$

于是 α 是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}=0$ 的根，所以 $(x^2+x+1)\Big|[x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}]$。 □

定理 1.7. 若 $(s, n+1) = 1$，则 $f(x) = x^{sn} + x^{s(n-1)} + \cdots + x^s + 1$ 可被 $g(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ 整除。

证明. 假设 α 为 $g(x) = 0$ 的根，因为：

$$g(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

所以 $\alpha^{n+1} = 1$ 且 $\alpha \neq 1$。而：

$$f(x) = \frac{1 - (x^s)^{n+1}}{1 - x^s} = \frac{1 - (x^{n+1})^s}{1 - x^s}$$

代入 $\alpha^{n+1} = 1$ 则显然 $f(x) = 0$，即 α 也是 $f(x) = 0$ 的根，$g(x)|f(x)$。但是如果 α 是 $f(x)$ 的根，此时应有 $\alpha^s \neq 1$。若 $\alpha^s = 1$，因为 $(s, n+1) = 1$，则存在 $u, v \in \mathbb{N}$，使得：

$$us + v(n+1) = 1$$

于是 $\alpha = \alpha^{us+v(n+1)} = \alpha^{us}\alpha^{v(n+1)} = \alpha^{us}(\alpha^{n+1})^v = (\alpha^s)^u = 1$，与 $\alpha \neq 1$ 矛盾，所以 $\alpha^s - 1 \neq 0$。 □

定理 1.8. 设 $n \in \mathbb{N}^+$，$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ 都是多项式，并且有：

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 | f_1(x^{n+1}) + x f_2(x^{n+1}) + \cdots + x^{n-1} f_n(x^{n+1})$$

证明 $(x-1)^n | f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$。

证明. 设 $x^{n+1} - 1 = 0$ 的不为 1 的 n 个根分别为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，此时有 $\varepsilon_i^{n+1} - 1 = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$。对 $x^{n+1} - 1 = 0$ 作分解可得 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_n)$，所以：

$$x - \varepsilon_i \Big| x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 \Big| f_1(x^{n+1}) + x f_2(x^{n+1}) + \cdots + x^{n-1} f_n(x^{n+1})$$

于是 $\varepsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ 是 $f_1(x^{n+1}) + x f_2(x^{n+1}) + \cdots + x^{n-1} f_n(x^{n+1}) = 0$ 的根，所以：

$$\begin{cases} f_1(\varepsilon_1^{n+1}) + \varepsilon_1 f_2(\varepsilon_1^{n+1}) + \cdots + \varepsilon_1^{n-1} f_n(\varepsilon_1^{n+1}) = 0 \\ f_1(\varepsilon_2^{n+1}) + \varepsilon_2 f_2(\varepsilon_2^{n+1}) + \cdots + \varepsilon_2^{n-1} f_n(\varepsilon_2^{n+1}) = 0 \\ \vdots \\ f_1(\varepsilon_n^{n+1}) + \varepsilon_n f_2(\varepsilon_n^{n+1}) + \cdots + \varepsilon_n^{n-1} f_n(\varepsilon_n^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} f_1(1) + \varepsilon_1 f_2(1) + \cdots + \varepsilon_1^{n-1} f_n(1) = 0 \\ f_1(1) + \varepsilon_2 f_2(1) + \cdots + \varepsilon_2^{n-1} f_n(1) = 0 \\ \vdots \\ f_1(1) + \varepsilon_n f_2(1) + \cdots + \varepsilon_n^{n-1} f_n(1) = 0 \end{cases}$$

将 $f_i(1),\ i=1,2,\dots,n$ 看作未知数，因为 $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j,\ i\neq j$，所以该线性方程组的系数行列式为：

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{n-1}\\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \cdots & \varepsilon_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(\varepsilon_j-\varepsilon_i)\neq 0$$

所以该线性方程组只有零解，即 $f_i(1)=0,\ i=1,2,\dots,n$。 □

定理 1.9. *求多项式* $f(x)$，*使得* $(x^2+1)|f(x)$ *且* $(x^3+x^2+1)|f(x)+1$。

证明. 由整除的定义，存在多项式 $g(x),h(x)$ 使得

$$f(x)=(x^2+1)g(x)$$
$$f(x)+1=(x^3+x^2+1)h(x)$$

由条件可知 $\pm i$ 是 $f(x)$ 的根，将 $\pm i$ 分别代入上第二式可得：

$$1=-ih(i),\ 1=ih(-i)$$

取 $h(x)=x$ 发现可以满足上式要求，于是 $f(x)=x^4+x^3+x-1$。 □

定理 1.10. *求 7 次多项式* $f(x)$，*使得* $(x-1)^4|f(x)+1$，*且* $(x+1)^4|f(x)-1$。

证明. 因为 $(x-1)^4|f(x)+1$，所以 1 至少是 $f(x)+1$ 的四重根，于是 1 至少是 $f'(x)$ 的三重根，即 $(x-1)^3|f(x)$。同理可得 $(x+1)^3|f'(x)$。因为 $\Big((x-1)^3,(x+1)^2\Big)=1$，所以 $(x-1)^3(x+1)^3|f'(x)$。因为 $f'(x)$ 是六次多项式，可设：

$$f'(x)=\alpha(x-1)^3(x+1)^3$$

其中 α 为常数。对上式积分可得：

$$f(x)=\alpha\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)+c$$

因为 $(x-1)^4|f(x)+1,\ (x+1)^4|f(x)-1$，所以 $f(1)=-1,\ f(-1)=1$，代入上式可解得：

$$\begin{cases}a=\dfrac{35}{16}\\ c=0\end{cases}$$

所以：

$$f(x)=\frac{5}{16}x^7-\frac{21}{16}x^5+\frac{35}{16}x^3-\frac{35}{16}x$$

□