高等代数专题

倪兴程 [1]

2025 年 2 月 20 日

[1]Email: 19975022383@163.com

Todo list

辗转相除法在 latex 里面很难搞，不想打了 8
没搞懂 9
倒根变换需要严格证明 13

目录

第一章 多项式 1
1.1 多项式带余除法及整除 . . . 1
1.1.1 证明多项式整除性的常用方法 . . . 1
1.1.2 例题 . . . 1
1.2 最大公因式与互素多项式 . . . 6
1.2.1 基本定义与定理 . . . 6
1.2.2 题型 . . . 6
1.2.3 例题 . . . 8
1.3 多项式的根 . . . 11
1.3.1 题型 . . . 11
1.3.2 例题 . . . 12
1.3.3 复根、实根、有理根与整数根 . . . 12
1.3.4 三个常用数域上的多项式 . . . 14
1.3.5 多项式的分解 . . . 17

第二章 行列式 19

第三章 矩阵 35
3.1 求矩阵的幂 . . . 36
3.2 求矩阵的逆矩阵 . . . 37
3.2.1 抽象矩阵求逆 . . . 38
3.3 伴随矩阵 . . . 40
3.4 矩阵的秩 . . . 41
3.4.1 初等矩阵 . . . 43

第四章 向量空间 44

Chapter 1

多项式

1.1 多项式带余除法及整除

1.1.1 证明多项式整除性的常用方法

1. 定义法
   要证 $g(x)|f(x)$，去构造 $h(x)$，使得 $f(x)=h(x)g(x)$。常常将 $f(x)$ 分解因式分解出 $g(x)$，剩下的就是 $h(x)$。

2. 带余除法定理
   要证 $g(x)|f(x)$，只要证 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为 0。

3. 准标准式分解法
   要证 $g(x)|f(x)$，只要证它们的准标准分解式中的同一个不可约因式的方幂前者不大于后者。

4. 根法
   要证 $g(x)|f(x)$，只要证在复数域中 $g(x)$ 的根都是 $f(x)$ 的根，重根按重数计算。

1.1.2 例题

定理 1.1. $f(x)=(x+1)^{k+n}+2x(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n$，证明 $x^{k+1}|(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$。

证明. 因为：

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x+1)^{k+n}+2x(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n\\
&=(x+1)^n\Big[(x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k\Big]
\end{aligned}
$$

因为 $x-1=[2x-(x+1)]$，所以：

$$\begin{aligned}(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}&=[2x-(x+1)](x+1)^n\left[(x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k\right]\\&\quad+(x+1)^{k+n+1}\\&=(x+1)^n[2x-(x+1)]\left[(x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k\right]\\&\quad+(x+1)^{k+n+1}\\&=(x+1)^n[(2x)^{k+1}-(x+1)^{k+1}]+(x+1)^{k+n+1}\\&=(2x)^{k+1}(x+1)^n\end{aligned}$$

显然有 $x^{k+1}|(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$。 □

定理 1.2. 证明 $g(x)=1+x^2+\cdots+x^{2n}$ 整除 $f(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}$ 的充分必要条件为 n 是偶数。

证明. 显然：

$$g(x)=\frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2},\ f(x)=\frac{1-(x^4)^{n+1}}{1-x^4}$$

所以：

$$\begin{aligned}g(x)|f(x)&\Leftrightarrow\frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}\Big|\frac{1-(x^4)^{n+1}}{1-x^4}\\&\Leftrightarrow(1+x^2)[1-(x^2)^{n+1}]\Big|[1-(x^4)^{n+1}]\\&\Leftrightarrow(1+x^2)|[1+(x^2)^{n+1}]\\&\Leftrightarrow 1+x^2\text{的根}\pm i\text{都是}1+(x^2)^{n+1}\text{的根}\\&\Leftrightarrow 1+(-1)^{n+1}=0\\&\Leftrightarrow n\text{为偶数}\end{aligned}$$

□

定理 1.3. 设 $f(x),g(x)$ 为数域 K 上的多项式，$n\in\mathbb{Z}$。证明 $f(x)|g(x)$ 的充分必要条件为 $f^n(x)|g^n(x)$。

证明. **(1) 必要性**：若 $f(x)|g(x)$，则存在数域 K 上的多项式 $h(x)$ 使得 $g(x)=h(x)f(x)$，于是 $g^n(x)=h^n(x)f^n(x)$，所以 $f^n(x)|g^n(x)$。

(2) 充分性：将 $f(x),g(x)$ 进行标准分解得到：

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)\cdots p_m^{r_m}(x),\ g(x)=bq_1^{t_1}(x)\cdots q_n^{t_n}(x)$$

于是：

$$f^k(x)=a^kp_1^{kr_1}(x)\cdots p_m^{kr_m}(x),\ g^k(x)=b^kq_1^{kt_1}(x)\cdots q_n^{kt_n}(x)$$

因为 $f^k(x)|g^k(x)$，所以 $f(x)$ 标准分解式中的任一元素 $p_i(x),\ i=1,2,\ldots,m$ 都是 $g(x)$ 标准分解式中的元素（记为 q_{n_i}），同时有 $kr_i\leqslant kt_{n_i}$，即 $r_i\leqslant t_{n_i}$，于是 $f(x)|g(x)$。 □

定理 1.4. $(x^d-1)|(x^n-1)$ 的充分必要条件为 $d|n$。

证明. **(1) 充分性**：由 $d|n$ 可知，存在正整数 k 使得 $n=dk$。于是：

$$x^n-1=x^{dk}-1=\left(x^d\right)^k-1=(x^d-1)[x^{d(k-1)}+\cdots+11]$$

所以 $(x^d-1)|(x^n-1)$。

(2) 必要性：由整数的带余除法定理，设 $n=dq+r$，这里 $r=0$ 或 $0<r<d$。若 $0<r<d$，则：

$$x^n-1=x^{dq+r}-1=x^{dq}x^r-x^r+x^r-1=x^r(x^{dq}-1)+(x^r-1)$$

由充分性可知 $(x^d-1)|(x^{dq}-1)$。而 $(x^d-1)|(x^n-1)$。则 $(x^d-1)|(x^r-1)$。于是 $d\leqslant r$，矛盾。 □

定理 1.5. 设 $h(x),k(x),f(x),g(x)$ 是实系数多项式，且：

$$(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x-2)g(x)=0$$
$$(x^2+1)k(x)+(x-1)f(x)+(x+2)g(x)=0$$

则 $(x^2+1)|f(x)$，且 $(x^2+1)|g(x)$。

证明. 要证 $(x^2+1)|f(x)$ 和 $(x^2+1)|g(x)$，即证 $\pm i$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的根。将 $x=\pm i$ 代入上式可得：

$$(i+1)f(i)+(i-2)g(i)=0,\quad (i-1)f(i)+(i+2)g(i)=0$$
$$(-i+1)f(-i)+(-i-2)g(-i)=0,\quad (-i-1)f(-i)+(-i+2)g(-i)=0$$

解方程可得：

$$f(i)=g(i)=0,\ f(-i)=g(-i)=0$$

所以 $(x-i)|f(x)$，$(x+i)|f(x)$，$(x-i)|g(x)$，$(x+i)|g(x)$。因为 $(x+i,x-i)=1$，所以 $(x+i)(x-i)|f(x)$，$(x+i)(x-i)|f(x)$，即 $(x^2+1)|f(x)$，$(x^2+1)|g(x)$。 □

定理 1.6. 对于任意 $n\in\mathbb{N}^+$，都有 $(x^2+x+1)\Big|[x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}]$。

证明. **方法一**：令 $x^2+x+1=0$，求得它在复数域内的两个根分别为 $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$。将 x_1，x_2 代入到 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 中可得：

$$x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}=x^2x^n+(x+1)\left(x^2\right)^n=0$$

于是 x_1,x_2 也是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 的根，所以 $(x^2+x+1)\Big|[x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}]$。

方法二：设 α 为 $x^2+x+1=0$ 的根，则 $\alpha^2+\alpha+1=0$，两边同乘 $\alpha-1$ 可得 $\alpha^3=1$ 且 $\alpha\neq1$。于是：

$$\begin{aligned}\alpha^{n+2}+(\alpha+1)^{2n+1}&=\alpha^{n+2}+(-\alpha^2)^{2n+1}\\&=\alpha^{n+2}+(-1)^{2n+1}\alpha^{4n+2}\\&=\alpha^{n+2}-\alpha^{3n}\alpha^{n+2}\\&=0\end{aligned}$$

于是 α 是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}=0$ 的根，所以 $(x^2+x+1)\Big|[x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}]$。 □

定理 1.7. 若 $(s,n+1)=1$，则 $f(x)=x^{sn}+x^{s(n-1)}+\cdots+x^s+1$ 可被 $g(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ 整除。

证明. 假设 α 为 $g(x)=0$ 的根，因为：

$$g(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

所以 $\alpha^{n+1}=1$ 且 $\alpha\neq 1$。而：

$$f(x)=\frac{1-(x^s)^{n+1}}{1-x^s}=\frac{1-(x^{n+1})^s}{1-x^s}$$

代入 $\alpha^{n+1}=1$ 则显然 $f(x)=0$，即 α 也是 $f(x)=0$ 的根，$g(x)|f(x)$。但是如果 α 是 $f(x)$ 的根，此时应有 $\alpha^s\neq 1$。若 $\alpha^s=1$，因为 $(s,n+1)=1$，则存在 $u,v\in\mathbb{N}$，使得：

$$us+v(n+1)=1$$

于是 $\alpha=\alpha^{us+v(n+1)}=\alpha^{us}\alpha^{v(n+1)}=\alpha^{us}(\alpha^{n+1})^v=(\alpha^s)^u=1$，与 $\alpha\neq 1$ 矛盾，所以 $\alpha^s-1\neq 0$。 □

定理 1.8. 设 $n\in\mathbb{N}^+$，$f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)$ 都是多项式，并且有：

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1|f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1})$$

证明 $(x-1)^n|f_1(x)f_2(x)f_n(x)$。

证明. 设 $x^{n+1}-1=0$ 的不为 1 的 n 个根分别为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$，此时有 $\varepsilon_i^{n+1}-1=0,\ i=1,2,\ldots,n$。对 $x^{n+1}-1=0$ 作分解可得 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_n)$，所以：

$$x-\varepsilon_i\Big|x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1\Big|f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1})$$

于是 $\varepsilon_i,\ i=1,2,\ldots,n$ 是 $f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1})=0$ 的根，所以：

$$\begin{cases}f_1(\varepsilon_1^{n+1})+\varepsilon_1f_2(\varepsilon_1^{n+1})+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}f_n(\varepsilon_1^{n+1})=0\\ f_1(\varepsilon_2^{n+1})+\varepsilon_2f_2(\varepsilon_2^{n+1})+\cdots+\varepsilon_2^{n-1}f_n(\varepsilon_2^{n+1})=0\\ \vdots\\ f_1(\varepsilon_n^{n+1})+\varepsilon_nf_2(\varepsilon_n^{n+1})+\cdots+\varepsilon_n^{n-1}f_n(\varepsilon_n^{n+1})=0\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}f_1(1)+\varepsilon_1f_2(1)+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}f_n(1)=0\\ f_1(1)+\varepsilon_2f_2(1)+\cdots+\varepsilon_2^{n-1}f_n(1)=0\\ \vdots\\ f_1(1)+\varepsilon_nf_2(1)+\cdots+\varepsilon_n^{n-1}f_n(1)=0\end{cases}$$

将 $f_i(1),\ i=1,2,\dots,n$ 看作未知数，因为 $\varepsilon_i\neq\varepsilon_j,\ i\neq j$，所以该线性方程组的系数行列式为：

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{n-1}\\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \cdots & \varepsilon_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(\varepsilon_j-\varepsilon_i)\neq 0$$

所以该线性方程组只有零解，即 $f_i(1)=0$，于是 $x-1|f_i(x),\ i=1,2,\dots,n$，所以 $(x-1)^n|f_1(x)f_2(x)f_n(x)$。 □

定理 1.9. *求多项式* $f(x)$，*使得* $(x^2+1)|f(x)$ *且* $(x^3+x^2+1)|f(x)+1$。

证明. 由整除的定义，存在多项式 $g(x),h(x)$ 使得

$$f(x)=(x^2+1)g(x)$$
$$f(x)+1=(x^3+x^2+1)h(x)$$

由条件可知 $\pm i$ 是 $f(x)$ 的根，将 $\pm i$ 分别代入上第二式可得：

$$1=-ih(i),\ 1=ih(-i)$$

取 $h(x)=x$ 发现可以满足上式要求，于是 $f(x)=x^4+x^3+x-1$。 □

定理 1.10. *求 7 次多项式* $f(x)$，*使得* $(x-1)^4|f(x)+1$，*且* $(x+1)^4|f(x)-1$。

证明. 因为 $(x-1)^4|f(x)+1$，所以 1 至少是 $f(x)+1$ 的四重根，于是 1 至少是 $f'(x)$ 的三重根，即 $(x-1)^3|f(x)$。同理可得 $(x+1)^3|f'(x)$。因为 $\Big((x-1)^3,(x+1)^3\Big)=1$，所以 $(x-1)^3(x+1)^3|f'(x)$。因为 $f'(x)$ 是六次多项式，可设：

$$f'(x)=\alpha(x-1)^3(x+1)^3$$

其中 α 为常数。对上式积分可得：

$$f(x)=\alpha\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)+c$$

因为 $(x-1)^4|f(x)+1,\ (x+1)^4|f(x)-1$，所以 $f(1)=-1,\ f(-1)=1$，代入上式可解得：

$$\begin{cases}a=\dfrac{35}{16}\\ c=0\end{cases}$$

所以：

$$f(x)=\frac{5}{16}x^7-\frac{21}{16}x^5+\frac{35}{16}x^3-\frac{35}{16}x$$

□

1.2 最大公因式与互素多项式

1.2.1 基本定义与定理

定义 1.1. 设 $f(x), g(x), d(x) \in K[x]$，若：

1. $d(x)|f(x), g(x)$；
2. 若任意的 $\varphi(x)|f(x), g(x)$，都有 $\varphi(x)|d(x)$；

则称 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式。用 $\big(f(x), g(x)\big)$ 表示 $f(x)$ 和 $g(x)$ 首项系数为 1 的最大公因式。

定理 1.11 (最大公因式定理)**.** $K[x]$ 上的任意两个多项式 $f(x), g(x)$ 都有最大公因式，并且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的任意一个最大公因式 $d(x)$ 都可以表示为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，即：

$$\exists\, u(x), v(x) \in K[x],\ u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$

定理 1.12. 若 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$，$g(x) \neq 0$，则 $\big(f(x), g(x)\big) = \big(g(x), r(x)\big)$。

定义 1.2. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$，若 $\big(f(x), g(x)\big) = 1$，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素。

定理 1.13. $\big(f(x), g(x)\big) = 1$ 的充分必要条件为：

$$\exists\, u(x), v(x) \in K[x],\ u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

定理 1.14. 若 $\big(f(x), g(x)\big) = 1$，且 $f(x)|g(x)h(x)$，则 $f(x)|h(x)$。

定理 1.15. 若 $\big(f(x), g(x)\big) = 1$，且 $f(x)|h(x)$，$g(x)|h(x)$，则 $f(x)g(x)|h(x)$。

定理 1.16. 若 $\big(f(x), g(x)\big) = 1$，$\big(f(x), h(x)\big) = 1$，则 $\big(f(x), g(x)h(x)\big) = 1$。

定理 1.17. 数域的扩张不影响最大公因式和互素。

1.2.2 题型

求具体多项式最大公因式

1. 辗转相除法

   (a) 计算 $f(x)$ 除以 $g(x)$，得到商 $q(x)$ 和余数 $r(x)$，即：

   $$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

   其中，$r(x)$ 是多项式的余数，且满足 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$。

   (b) 如果余数 $r(x) = 0$，则 $g(x)$ 就是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式。

   (c) 如果余数 $r(x) \neq 0$，则将 $f(x)$ 赋值为 $g(x)$，将 $g(x)$ 赋值为 $r(x)$，然后返回第 1 步。

2. **因式分解法**
   如果求得 $f(x), g(x)$ 在数域 K 上的标准分解式：
   $$f(x) = ap_1^{r_1}(x) \cdots p_m^{r_m}(x),\ g(x) = bq_1^{t_1}(x) \cdots q_n^{t_n}(x)$$
   二者最大的公共部分即为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式。

证明最大公因式

1. **定义法**
   要证 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式，只要证：
   (a) $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的公因式；
   (b) 以下二者的任意一条：
   - 找到 $u(x), v(x)$ 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$；
   - 对 $f(x), g(x)$ 的任意公因式 $\varphi(x)$，有 $\varphi(x)|d(x)$。
2. **标准分解式法**
   从标准分解式中找最大公因式。
3. **利用最大公因式的性质和等式**

证明多项式的互素

1. **定义法**
   证明 $\big(f(x), g(x)\big) = 1$。
2. 只要证明：
   $$\exists\, u(x), v(x) \in K[x],\ u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$
3. **根法**
   证明在复数域上 $f(x)$ 的根都不是 $g(x)$ 的根（重根按重述计算）。
4. **反证法**
   若 $\big(f(x), g(x)\big) = d(x) \neq 1$，则可以由：
   - $f(x), g(x)$ 有公共根
   - $d(x)|f(x)$，则 $d(x)|g(x)$

   推出矛盾。
5. **互素的性质及等式**
   性质 6、7、8。

1.2.3 例题

求具体多项式的最大公因式

定理 1.18. 设 $f(x)=3x^5+5x^4-4x^3-16x^3-6x^2-5x-6,\ g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$，求：

1. $\big(f(x),g(x)\big)$；
2. 多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=\big(f(x),g(x)\big)$。

辗转相除法在 latex 里面很难搞，不想打了

证明. (1) $\big(f(x),g(x)\big)=x+\frac{2}{3}$。

(2) 将辗转相除法的过程倒推即可求得：

$$u(x)=-\frac{1}{3}(x^2-x-1),\ v(x)=\frac{1}{3}(x^3+2x^2-5x-4)$$ □

证明最大公因式

定理 1.19. 证明：$\big(f(x)h(x),g(x)h(x)\big)=\big(f(x),g(x)\big)h(x)$，其中 $h(x)$ 是首项系数为 1 的多项式。

证明. 令 $d(x)=\big(f(x),g(x)\big)$，则有 $d(x)|f(x),\ d(x)|g(x)$，从而 $d(x)h(x)|f(x)h(x),\ d(x)h(x)|g(x)h(x)$，所以 $\big(f(x),g(x)\big)h(x)$ 是 $f(x)h(x),g(x)h(x)$ 的一个公因式。

因为 $d(x)=\big(f(x),g(x)\big)$，所以

$$\exists\, u(x),v(x)\in K[x],\ u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

于是 $u(x)h(x)f(x)+v(x)h(x)g(x)=d(x)f(x)$，$d(x)h(x)$ 是 $f(x)h(x),g(x)h(x)$ 的最大公因式。因为 $d(x)=\big(f(x),g(x)\big)$，所以它的首项系数为 1，而 $h(x)$ 的首项系数也是 1，于是 $\big(f(x)h(x),g(x)h(x)\big)=\big(f(x),g(x)\big)h(x)$。 □

定理 1.20. 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x),\ g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且有 $ad-bc\neq 0$。证明 $\big(f(x),g(x)\big)=\big(f_1(x),g_1(x)\big)$。

证明. 令 $d(x)=\big(f(x),g(x)\big)$，则有 $d(x)|f(x),\ d(x)|g(x)$，于是 $d(x)|af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x)$，即 $d(x)|f_1(x),g_1(x)$，于是 $\big(f(x),g(x)\big)$ 是 $f_1(x),g_1(x)$ 的一个公因式。

因为 $d(x)=\big(f(x),g(x)\big)$，所以

$$\exists\, u(x),v(x)\in K[x],\ u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

因为 $ad-bc\neq 0$，所以关于 $f(x),g(x)$ 的方程组：

$$\begin{cases} af(x)+bg(x)=f_1(x)\\ cf(x)+dg(x)=g_1(x)\end{cases}$$

有唯一解，可解得：

$$f(x)=\frac{1}{ad-bc}[df_1(x)-bg_1(x)],\ g(x)=\frac{1}{ad-bc}[-cf_1(x)+ag_1(x)]$$

于是：

$$u(x)\frac{1}{ad-bc}[df_1(x)-bg_1(x)]+v(x)\frac{1}{ad-bc}[-cf_1(x)+ag_1(x)]=d(x)$$

化简可得：

$$\frac{du(x)-cv(x)}{ad-bc}f_1(x)+\frac{av(x)-bu(x)}{ad-bc}g_1(x)=d(x)$$

即 $d(x)=\Big(f(x),g(x)\Big)$ 是 $f_1(x),g_1(x)$ 的最大公因式。因为 $\Big(f(x),g(x)\Big)$ 首项系数为 1，所以 $\Big(f(x),g(x)\Big)=\Big(f_1(x),g_1(x)\Big)$。 □

定理 1.21. 设 $f(x),g(x)\in K[x]$，且 $\Big(f(x),g(x)\Big)=1$，又 $\varphi(x)=(x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x)$，$\psi(x)=(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x)$，则 $\Big(\varphi(x),\psi(x)\Big)=x-1$。

证明. 由因式分解可得：

$$\varphi(x)=(x-1)[(x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)]$$
$$\psi(x)=(x-1)[(x+1)f(x)+xg(x)]$$

所以 $x-1$ 是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的一个公因式。由定理 1.19可知：

$$\Big(\varphi(x),\psi(x)\Big)=\Big((x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x),(x+1)f(x)+xg(x)\Big)(x-1)$$

接下来只需证明 $\Big((x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x),(x+1)f(x)+xg(x)\Big)=1$。

考虑以 $f(x),g(x)$ 为自变量的方程组：

$$\begin{cases}\varphi(x)=(x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x)\\ \psi(x)=(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x)\end{cases}$$

其系数行列式为 $-x^3-x^2+2x+1$，由 Cramer 法则可知 □ 没搞懂

定理 1.22. 设 $f(x),g(x)$ 是两个不全为 0 的多项式，则 $\forall\ n\in N$，有 $\Big(f(x),g(x)\Big)^n=\Big(f^n(x),g^n(x)\Big)$。

证明. 令 $d(x)=\Big(f(x),g(x)\Big)$，则存在 $f_1(x),g_1(x)\in K[x]$，使得：

$$f(x)=d(x)f_1(x),\ g(x)=d(x)g_1(x)$$

同时有 $\Big(f_1(x),g_1(x)\Big)=1$，从而 $\Big(f_1^n(x),g_1^n(x)\Big)=1$，所以：

$$\begin{aligned}\Big(f^n(x),g^n(x)\Big)&=\Big(d^n(x)f_1^n(x),d^n(x)g_1^n(x)\Big)\\&=\Big(f_1^n(x),g_1^n(x)\Big)d^n(x)\\&=\Big(f(x),g(x)\Big)^n\end{aligned}$$

其中第一行到第二行利用到了定理 1.19。 □

证明多项式的互素

定理 1.23. 设 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x) \in K[x]$，则：

$$\Big(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\Big) = 1 \Leftrightarrow \Big(f_i(x), g_j(x)\Big) = 1$$

其中 $i = 1, 2, \ldots, m$，$j = 1, 2, \ldots, n$。

证明. **(1) 必要性**：因为 $\Big(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\Big)$，所以 $\exists\ u(x), v(x) \in K[x]$ 使得：

$$u(x)f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x) + v(x)g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x) = 1$$

即：

$$f_i(x)[u(x)f_1(x)\cdots f_{i-1}(x)f_{i+1}(x)\cdots f_m(x)] + g_j(x)[v(x)g_1(x)\cdots g_{j-1}(x)g_{j+1}(x)\cdots g_n(x)] = 1$$

所以 $\Big(f_i(x), g_j(x)\Big) = 1$，其中 $i = 1, 2, \ldots, m$，$j = 1, 2, \ldots, n$。

(2) 充分性：取 $f_1(x)$，因为 $\Big(f_1(x), g_j(x)\Big) = 1$，$i = 1, 2, \ldots, n$，由定理 1.16可得，$\Big(f_1(x), g_1(x)\cdots g_n(x)\Big) = 1$。同理可得对任意的 $i = 1, 2, \ldots, m$，都有 $\Big(f_i(x), g_1(x)\cdots g_n(x)\Big) = 1$，再利用定理 1.16即可得到 $\Big(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\Big) = 1$。 □

定理 1.24. 对 $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$，令 $f_n(x) = x^{n+2} - (x+1)^{2n+1}$，有 $\Big(x^2 + x + 1, f_n(x)\Big) = 1$。

证明. 设 α 是 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根，则 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$，$\alpha^3 = 1$。于是：

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= \alpha^{n+2} - (\alpha+1)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} - (-\alpha^2)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} + \alpha^{4n+2} \\ &= \alpha^{n+2} + \alpha^{3n}\alpha^{n+2} \\ &= 2\alpha^{n+2} \end{aligned}$$

在复数域内求解方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 可得：

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2},\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

所以 $f_n(\alpha) = 2\alpha^{n+2} \neq 0$，即 α 不是 $f_n(x)$ 的根。由上我们得到 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根都不是 $f_n(x)$ 的根，所以 $\Big(x^2 + x + 1, f_n(x)\Big) = 1$。 □

定理 1.25. $f(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1$，$g(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$，其中 $m, n \in \mathbb{N}$，则有：

$$(m, n) = 1 \Leftrightarrow \Big(f(x), g(x)\Big) = 1$$

证明. **(1) 充分性：** 若 $(m,n)=d\neq 1$，设 $m=ds$, $n=dt$，则：

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x^m-1}{x-1}=\frac{x^{ds}-1}{x-1}\\&=\frac{x^d-1}{x-1}[x^{d(s-1)}+x^{d(s-2)}+\cdots+x^d+1]\\&=(x^{d-1}+\cdots+x+1)[x^{d(s-1)}+x^{d(s-2)}+\cdots+x^d+1]\end{aligned}$$

而：

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{x^{dt}-1}{x-1}\\&=\frac{x^d-1}{x-1}[x^{d(t-1)}+x^{d(t-2)}+\cdots+x^d+1]\\&=(x^{d-1}+\cdots+x+1)[x^{d(t-1)}+x^{d(t-2)}+\cdots+x^d+1]\end{aligned}$$

可以发现 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有次数大于 0 的公因式 $x^{d-1}+\cdots+x+1$，与 $\Big(f(x),g(x)\Big)=1$ 矛盾，所以 $(m,n)=1$。

(2) 必要性： 若 $\Big(f(x),g(x)\Big)=d(x)\neq 1$，则 $f(x),g(x)$ 有公共根 α。由 n 次方差公式可得：

$$\alpha^m-1=(\alpha-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)=0$$
$$\alpha^n-1=(\alpha-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=0$$

于是 $\alpha^m=\alpha^n=1$，且有 $\alpha\neq 1$。由 $(m,n)=1$ 可知，存在 $u,v\in\mathbb{N}$ 使得 $um+vn=1$，于是：

$$\alpha=\alpha^{um+vn}=(\alpha^m)^u(\alpha^n)^v=1$$

矛盾，所以 $\Big(f(x),g(x)\Big)=1$，。 □

1.3 多项式的根

定理 1.26. 若 $f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$，则：

$$\frac{f(x)}{\Big(f(x),f'(x)\Big)}=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

1.3.1 题型

重根的证明

1. 互素法
   - 若 $f(x)$ 是一个复多项式，则 $f(x)$ 无重根的充分必要条件是 $\Big(f(x),f'(x)\Big)=1$。
   - 若 $f(x)$ 是一般数域 K 上的多项式，若 $\Big(f(x),f'(x)\Big)=1$，则 $f(x)$ 无重因式，自然无重根。
2. 反证法

1.3.2 例题

定理 1.27. 如果 $f'(x)|f(x)$，证明：$f(x)$ 有 n 重根，其中 $n=\deg f(x)$

证明. 由 $f'(x)|f(x)$，所以 $f'(x)=\Big(f(x),f'(x)\Big)$。因为 $\deg f'(x)=n-1$，则：

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\Big(f(x),f'(x)\Big)}$$

是一次多项式，设 $\varphi(x)=a(x-b)$，$a\neq 0$。由定理 1.26可得 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 有相同的不可约因式，又因为 $\deg f(x)=n$，所以 $f(x)=a(x-b)^n$，$f(x)$ 有 n 重根。 □

定理 1.28. 设 $f(x)$ 是复数域中的 n 次多项式，且 $f(0)=0$，令 $g(x)=xf(x)$，若 $f'(x)|g'(x)$，则 $g(x)$ 有 $n+1$ 重零根。

证明. 由 $f(0)=0$ 可知 0 是 $f(x)$ 的根。因为 $g(x)=xf(x)$，所以 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$。因为 $f'(x)|g'(x)$，所以 $f'(x)|f(x)$。由上一题的结论，$f(x)$ 有 n 重根，又因为 0 是 $f(x)$ 的根，所以 0 就是 $f(x)$ 的 n 重根。设 $f(x)=ax^n$，于是 $g(x)=ax^{n+1}$，即 $g(x)$ 有 $n+1$ 重零根。 □

1.3.3 复根、实根、有理根与整数根

定理 1.29. 设 $f(x)$ 为整系数多项式：

1. 证明：若 $f(1+\sqrt{2})=0$，则 $f(1-\sqrt{2})=0$；
2. 推测结论 (1) 的推广形式（不需要证明）。

证明. (1)$f(x)$ 有因式：

$$[x-(1+\sqrt{2})][x-(1-\sqrt{2})]=x^2-2x-1\in\mathbb{Z}[x]$$

作带余除法，设：

$$f(x)=(x^2-2x-1)q(x)+ax+b$$

其中 $a,b\in\mathbb{Z}$。由 $f(1+\sqrt{2})=0$ 可知，$a(1+\sqrt{2})+b=0$，于是 $a=b=0$，所以 $f(x)=(x^2-2x-1)q(x)$，显然 $f(1-\sqrt{2})=0$。

(2) 若 $f(a+b\sqrt{2})=0$，则 $f(a-b\sqrt{2})=0$，其中 $a,b\in\mathbb{Z}$。 □

定理 1.30. 已知整系数多项式 $f(x)$ 满足 $f(2)f(21)=505$，证明 $f(x)$ 无整数根。

证明. 因为 $f(2)f(21)=505$，所以 $f(2)$ 和 $f(21)$ 都是奇数。假设 α 是 $f(x)$ 的整数根，则 $f(x)=(x-\alpha)q(x)$，其中 $q(x)\in\mathbb{Z}[x]$，则 $2-\alpha,21-\alpha$ 中至少有一个是偶数，于是 $f(2)$ 与 $f(21)$ 中至少有一个是偶数，矛盾，所以 $f(x)$ 无整数根。。 □

定理 1.31. 求一个一元多项式，使它的各根分别等于 $f(x)=5x^4-6x^3+x^2+4$ 的各根减 1。

证明. 令 $y=x-1$，则 $x=y+1$。

$$g(y)=5(y+1)^4-6(y+1)^3+(y+1)^2+4$$

$g(y)$ 即为所求多项式。 □

定理 1.32. 求一个一元多项式，使它的各根分别等于 $f(x)=15x^4-2x^3+11x^2-21x+13$ 的倒数。

证明. 因为 $f(0)=13$，所以 0 不是 $f(x)$ 的根。令 $y=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{y}$。

$$\begin{aligned} y^4f(x)&=y^4\left[15\left(\frac{1}{y}\right)^4-2\left(\frac{1}{y}\right)^3+11\left(\frac{1}{y}\right)^2-21\left(\frac{1}{y}\right)+13\right]\\ &=13y^4-21y^3+11y^2-2y+15\\ &=g(y)\end{aligned}$$

$g(y)$ 即为所求多项式。 □

定理 1.33. 设 $f(x)$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上 $n(n\geqslant 2)$ 次多项式，并且它在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，如果 $f(x)$ 的一个根 α 的倒数 $\frac{1}{\alpha}$ 仍是 $f(x)$ 的根，证明 $f(x)$ 每一个根的倒数也是 $f(x)$ 的根。 倒根变换需要严格证明

证明. 假设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_n\neq 0$。由 $f(x)$ 不可约可得 $a_0\neq 0$，于是 0 不是 $f(x)$ 的根。对 $f(x)$ 作倒根变换，得到多项式：

$$g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

由 $\frac{1}{\alpha}$ 使 $f(x)$ 的根，则 α 是 $g(x)$ 的根。因为 α 也是 $f(x)$ 的根，所以 $\Big(f(x),g(x)\Big)\neq 1$。因为 $f(x)$ 不可约，所以 $f(x)|g(x)$。任取 $f(x)$ 的根 β，则 β 也是 $g(x)$ 的根，于是 $\frac{1}{\beta}$ 是 $f(x)$ 的根。 □

定理 1.34. 求以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为根的有理系数不可约多项式。

证明. 设 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 且以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为根，则 $\sqrt{2}-\sqrt{3},-\sqrt{2}-\sqrt{3},-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 也是 $f(x)$ 的根。令

$$f(x)=[x-(\sqrt{2}+\sqrt{3})][x-(\sqrt{2}-\sqrt{3})][x+(\sqrt{2}+\sqrt{3})][x+(\sqrt{2}-\sqrt{3})]=x^4-10x^2+1$$

接下来证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约。

如果 $f(x)$ 有有理根，必为 ± 1。但 ± 1 都不是 $f(x)$ 的根，所以 $f(x)$ 不能分解一个一次多项式与一个三次多项式的乘积。其次，如果 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上分解为两个二次多项式的乘积，则 $f(x)$ 必可在整系数多项式上分解为两个二次多项式的乘积，即：

$$f(x)=x^4-10x^2+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$。比较两边系数可得：

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+d+ac=-10 \\ ad+bc=0 \\ bd=1 \end{cases}$$

因为 $bd=1$ 且 $bd \in \mathbb{Z}$，所以 $b=d=-1$ 或 $b=d=1$。

当 $b=d=1$ 时，$a=-c$，$c^2=12$，但是 $c \in \mathbb{Z}$，矛盾。

当 $b=d=-1$ 时，$c^2=8$，但是 $c \in \mathbb{Z}$，矛盾。

所以 $f(x)$ 无法分解为两个二次多项式的乘积。

综上，$f(x)$ 既无法分解为一个一次多项式与一个三次多项式的乘积，也无法分解为两个二次多项式的乘积，所以 $f(x)$ 不可约。$f(x)$ 即为所求。 □

1.3.4 三个常用数域上的多项式

复数域

代数基本定理任何 n 次多项式在复数域中恰好有 n 个根。每个次数大于 0 的多项式在复数域上都可以唯一分解为一次因式的乘积。韦达定理

实数域

虚根的共轭也是虚根次数大于 2 的实系数多项式在实数域上是可约的实多项式分解定理

有理数域

如果能够分解为有理系数多项式的乘积则一定可以分解为整系数多项式的乘积根与系数的关系

定理 1.35. *设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 是一个整系数多项式，而 $\frac{r}{s}$ 是一个有理数，其中 r, s 互素，则*

定理 1.36 (艾森斯坦判别法)**.** *设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式，若存在素数 p，使得：*

1. $p \nmid a_n$；
2. $p | a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$；
3. $p^2 \nmid a_0$；

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

定理 1.37. 若 $f(x)$ 是 $n(n>0)$ 次整系数多项式，令 $x=y+a$，$a\in\mathbb{Z}$，得整系数多项式 $g(y)=f(y+a)$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约的充分必要条件是 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约。

定理 1.38. 次数大于 1 的复多项式都是可约的。次数大于 2 的实多项式都是可约的。次数等于 1 的多项式都是不可约的。

题型

1. 整系数多项式在有理数域上可约性的判别
   (a) **方法一：**
   艾森斯坦判别法或对多项式作变换后再使用艾森斯坦判别法
   (b) **方法二：**
   适合抽象的整系数多项式证明不可约
   (c) **方法三：**
   讨论有理根。判断二次或三次有理多项式不可约只需证明它没有有理根，当次数大于 3 时，此结论不再成立。

例题

定理 1.39. 设 p 为素数，则

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}$$

在有理数域上不可约。

证明. 令 $g(x)=p!f(x)$，则 $g(x)$ 的可约性与 $f(x)$ 的可约性是一样的。而：

$$g(x)=x^p+px^{p-1}+\cdots+\frac{p!}{2!}+p!x+p!$$

显然 $g(x)$ 是一个整系数多项式。对于素数 p，有 $p\nmid a_n=1$，$p|a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_1,a_0$，$p^2\nmid a_0=p!$。 □

定理 1.40. 判别多项式 $f(x)=x^5-5x+1$ 在有理数域上是否可约。

证明. 令 $x=y-1$，则 $g(y)=f(y-1)$，即：

$$g(y)=y^5-5y^4+10y^3-10y^2+5$$

取 $p=5$，由艾森斯坦判别法，该多项式在有理数域上不可约。 □

定理 1.41. 关于任意素数 p，多项式：

$$f(x)=px^4+2px^3-px+3p-1$$

在有理数域上不可约。

证明. 因为 p 是一个素数，所以 $3p-1\neq 0$。令 $y=\frac{1}{x}$，则：

$$f(y)=(3p-1)y^4-py^3+2px+p$$

取素数 p，由艾森斯坦判别法，该多项式在有理数域上不可约。 □

定理 1.42. 设 n 是大于 1 的整数，证明 $\sqrt[n]{2008}$ 是无理数。

证明. 令 $f(x)=x^n-2008$，取素数 $p=251$，由艾森斯坦判别法，该多项式在有理数域上不可约，即 $f(x)$ 在有理数域上没有根，而 $\sqrt[n]{2008}$ 是 $f(x)$ 的根，所以 $\sqrt[n]{2008}$ 是无理数。 □

定理 1.43. 设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$，其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是两两互不相同的整数，证明 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

证明. 假设 $f(x)$ 可约，则可设：

$$f(x)=g(x)h(x)$$

其中 $g(x),h(x)$ 为整系数多项式，并且有 $\deg g(x)<\deg f(x)=n$, $\deg h(x)<\deg f(x)=n$。因为 $f(a_i)=-1$，所以 $g(a_i)h(a_i)=-1$, $i=1,2,\ldots,n$，此时有 $g(a_i)=1$, $h(a_i)=-1$ 或 $g(a_i)=-1$, $h(a_i)=1$。无论是哪种情况，都有 $g(a_i)+h(a_i)=0$，即 $g(x)+h(x)$ 有 n 个互不相等的根 $a_1,a_2,\ldots,a_n$，但是 $\deg(g(x)+h(x))<n$，矛盾，所以 $f(x)$ 不可约。 □

定理 1.44. 设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是两两互不相同的整数，证明 $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$ 在有理数域上不可约。

证明. 假设 $f(x)$ 可约，则存在次数大于 0 的首项系数为 1 的整系数多项式 $g(x),h(x)$ 使得：

$$f(x)=g(x)h(x)$$

因为 $f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=1$，则 $g(a_i)=h(a_i)=1$ 或 $g(a_i)=h(a_i)=-1$, $i=1,2,\ldots,n$。若 $g(a_i)=-1$，由 $g(x)$ 是首项系数为 1 的多项式，则存在充分大的 c，使得 $g(c)=0$，从而 $g(x)$ 有实根。这与 $f(x)$ 无实根矛盾，故 $g(a_i)\neq -1$。若 $g(a_i)=1$，因为 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 $g(x)-1,h(x)-1$ 的 n 个互不相同的根，则 $\deg(g(x)-1)\geqslant n$, $\deg(h(x)-1)\geqslant n$。因为 $\deg f(x)=\deg g(x)+\deg h(x)$ 且有 $\deg f(x)=2n$，于是 $\deg(g(x)-1)=\deg(h(x)-1)=n$，所以：

$$g(x)-1=h(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

所以：

$$f(x)=[(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1]^2$$

与 $f(x)$ 的表达式矛盾，所以 $f(x)$ 不可约。 □

1.3.5 多项式的分解

定理 1.45. 求多项式 x^n-1 在复数域上和实数域上的标准分解式。

证明. **(1) 复数域**：在复数域上 x^n-1 有 n 个复根，设：

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,1,\ldots,n-1$$

所以：

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1})$$

(2) 实数域：

$$\begin{aligned}\varepsilon_k\in\mathbb{R}&\Leftrightarrow\sin\frac{2k\pi}{n}=0\\&\Leftrightarrow\frac{2k\pi}{n}=0\text{或}\frac{2k\pi}{n}=\pi\\&\Leftrightarrow k=0\text{或}k=\frac{n}{2}\end{aligned}$$

而：

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon_k}&=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\\&=\cos\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)\\&=\cos\frac{2(n-k)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n}\\&=\varepsilon_{n-k}\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon_k+\varepsilon_{n-k}=2\cos\frac{2k\pi}{n}$，$\varepsilon_k\overline{\varepsilon}_k=1$，当 n 为奇数时，x^n-1 恰有一个实根 $\varepsilon_0=1$，所以：

$$\begin{aligned}x^n-1&=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{\frac{n-1}{2}})(x-\varepsilon_{\frac{n+1}{2}})\cdots(x-\varepsilon_{n-2})(x-\varepsilon_{n-1})\\&=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{\frac{n-1}{2}})(x-\overline{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}})\cdots(x-\overline{\varepsilon}_2)(x-\overline{\varepsilon}_1)\\&=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\overline{\varepsilon}_1)(x-\varepsilon_2)(x-\overline{\varepsilon}_2)\cdots(x-\varepsilon_{\frac{n-1}{2}})(x-\overline{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}})\\&=(x-1)[x^2-(\varepsilon_1+\overline{\varepsilon}_1)x+\varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1][x^2-(\varepsilon_2+\overline{\varepsilon}_2)x+\varepsilon_2\overline{\varepsilon}_2]\cdots\\&\quad[x^2-(\varepsilon_{\frac{n-1}{2}}+\overline{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}})x+\varepsilon_{\frac{n-1}{2}}\overline{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}}]\\&=(x-1)\left(x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}x+1\right)\left(x^2-2\cos\frac{4\pi}{n}x+1\right)\cdots\left(x^2-2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}x+1\right)\\&=(x-1)\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1\right)\end{aligned}$$

当 n 为偶数时，x^n-1 有两个 1 实根 $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_{\frac{n}{2}}=-1$，所以：

$$\begin{aligned}
x^n-1&=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{\frac{n-2}{2}})(x-\varepsilon_{\frac{n}{2}})(x-\varepsilon_{\frac{n+2}{2}})\cdots(x-\varepsilon_{n-2})(x-\varepsilon_{n-1})\\
&=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{\frac{n-2}{2}})(x+1)(x-\overline{\varepsilon}_{\frac{n-2}{2}})\cdots(x-\overline{\varepsilon}+2)(x-\overline{\varepsilon}_1)\\
&=(x-1)(x+1)(x-\varepsilon_1)(x-\overline{\varepsilon}_1)(x-\varepsilon_2)(x-\overline{\varepsilon}_2)\cdots(x-\varepsilon_{\frac{n-2}{2}})(x-\overline{\varepsilon}_{\frac{n-2}{2}})\\
&=(x-1)(x+1)\left(x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}x+1\right)\left(x^2-2\cos\frac{4\pi}{n}x+1\right)\cdots\left(x^2-2\cos\frac{(n-2)\pi}{n}x+1\right)\\
&=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1\right)
\end{aligned}$$

□

定理 1.46. 求多项式 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ 在实数域和复数域中的标准分解式。

证明. 令 $g(x)=(x-1)f(x)$。 □

Chapter 2

行列式

定理 2.1. 求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数，其中：

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ x & 2x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4x \end{vmatrix}$$

定理 2.2. 设 $n \geqslant 2$，证明：如果一个 n 阶行列式 D 中的元素为 1 或 -1，则 D 必为偶数。

证明. 将 D 按行列式的定义展开一共有 $n!$ 项，因为 D 中的元素为 1 或 -1，所以展开式中每一项也只能是 1 或 -1。假设展开式中有 k 项为 -1，则剩余 $n!-k$ 项为 1，所以 $|D|=-k+(n!-k)=n!-2k$。若 k 为偶数，则 $|D|$ 为偶数；若 k 为奇数，则 $|D|$ 也是偶数。综上，D 必为偶数。 □

定理 2.3. 证明元素为 $0,1$ 的三阶行列式 D 的值只能是 $0,\pm1,\pm2$。

证明. □

定理 2.4. 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

证明. 当 $2-x^2=1$ 时，一二两行相同，$|D|=0$，所以 $|D|$ 有因式 $(x-1)(x+1)$。当 $9-x^2=5$ 时，一二两行相同，$|D|=0$，所以 $|D|$ 有因式 $(x-2)(x+2)$。因为 D 是四阶行列式，所以可设 $|D|=k(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$，其中 k 为常数。 □

定理 2.5. 已知五阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$。

证明.

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+2(A_{44}+A_{45}) = 27$$
$$2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+A_{44}+A_{45} = 0$$

或者更换第四行元素使得新行列式的值等于 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$。 □

定理 2.6. 设 n 阶行列式：

$$1$$

证明.

$$A^* = |A|A^{-1}$$

分块矩阵 □

定理 2.7. 已知 $A=(a_{ij})\in M_3(\mathbb{R})$ 满足条件：

1. $a_{ij}=A_{ij}$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式
2. $a_{11}\neq 0$。

计算行列式 $|A|$。

定理 2.8. 计算 $2n$ 阶行列式：

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & c_1 & d_1 & & & \\ & & c_2 & & & d_2 & & \\ & \iddots & & & & & \ddots & \\ c_n & & & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

证明. 利用 Laplace 定理，将第 1 行与第 $2n$ 行展开，得到：

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} (-1)^{1+2n+1+2n} D_{2n-2} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2} = \prod_{i=1}^{n}(a_i d_i - b_i c_i)$$ □

定理 2.9. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

证明. 将该行列式展开：

$$\begin{aligned} D_n &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix} + b_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n} a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} b_i \end{aligned}$$

□

爪形

定理 2.10. 计算 $n+1$ 阶行列式：

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$。

证明. 显然：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\frac{1}{a_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_0-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

□

定理 2.11. 计算 5 阶行列式：

$$D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

证明. 显然：

$$D_5=(1-a)\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a\begin{vmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$=(1-a)D_4+a\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$=(1-a)D_4+aD_3$$

□

定理 2.12. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

证明. 显然：

$$\begin{aligned} D_n &= 5D_{n-1} + (-1)^{1+2}(-2) \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5D_{n-1} + (-1)^{1+2}(-2)(-3) \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5D_{n-1} - 6D_{n-2} \end{aligned}$$

□

定理 2.13. 证明：

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

证明. 第 n 行展开，显然：

$$\begin{aligned} D_n &= 2\cos\alpha D_{n-1} + 1 \times (-1)^{n+n-1} \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\cos\alpha D_{n-1} + (-1)^{2n-1} \cdot 1 \cdot (-1)^{n-1+n-1} D_{n-2} \\ &= 2\cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2} \end{aligned}$$

$$x^2 - 2\cos\alpha x + 1 = 0$$

□

Hessenberg

定理 2.14. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix}$$

证明. 按第一列展开：

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\ &= xD_{n-1} + a_n \\ &= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n \\ &= x^2 D_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^2(xD_{n-3} + a_{n-2}) + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^3 D_{n-3} + x^2 a_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &= \cdots \\ &= x^{n-1}D_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x^{n-i} \\ &= x^{n-1}(x + a_1) + \sum_{i=2}^{n} a_i x^{n-i} \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} \end{aligned}$$

□

定理 2.15. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

证明. 按第一行展开得：

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (-1)^{n-1}$$

□

行和、列和相同

定理 2.16. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

证明. 将所有列都加到第一列可得：

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m \right) (-m)^{n-1} \end{aligned}$$

□

定理 2.17. 设 x_1, x_2, x_3 时方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根，求行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$$

证明. 显然：

$$x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \cdots$$

所以 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$，把所有行都加到第一行，得到：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0$$

□

升阶

定理 2.18. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

其中 $b_1b_2\cdots b_n \neq 0$。

证明. 加边可得：

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \\ &= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)\prod_{i=1}^{n} b_i \end{aligned}$$

□

定理 2.19. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_2x_1 & \cdots & x_nx_1 \\ x_1x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & x_nx_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$$

证明. 加边 $(1, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 可得：

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & x_2x_1 & \cdots & x_nx_1 \\ 0 & x_1x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & x_nx_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1x_n & x_2x_n & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2
\end{aligned}
$$

□

相邻行列元素相差 1

定理 2.20. 计算 n 阶行列式：

$$
D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}
$$

证明. 第 i 行减去第 $i+1$ 行，化下三角。 □

定理 2.21. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

证明. 第 n 行减去第 $n-1$ 行，依次从下往上。 □

Vandermonde 行列式

定理 2.22. 计算行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

证明. 构造行列式：

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} \\ &= A_{15} + xA_{25} + x^2A_{35} + x^3A_{45} + x^4A_{55} \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(x-a)(c-b)(d-b)(x-b)(d-c)(x-c)(x-d) \\ &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \end{aligned}$$

而 $A_{45} = (-1)^{4+5}D = -D$，找 x^3 的系数即可。 □

其它

定理 2.23. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都是 3 维列向量，记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$，已知 $|A| = 1$，求 $|B|$。

证明.

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|B| = |A||C|$$

□

定理 2.24. 设 3 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，且 $|A| = \frac{1}{2}$，求 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$。

证明. 伴随矩阵化为 A^{-1}。 □

定理 2.25. 设 A, B 为 n 阶矩阵，$|A| = 2, |B| = -3$，求 $|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}|$。

证明. 伴随矩阵化逆矩阵。 □

定理 2.26. 设 A, B 分别为 3 阶矩阵与 5 阶矩阵，$|A| = 2,\ |B| = 3$，令：

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (3A)^* \\ (2B)^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

求 $|C|$。

证明. 伴随矩阵化逆矩阵。 □

定理 2.27. 设 A 为三阶矩阵，特征值为 $-1, 0, 1$。令 $B = A^3 - 2A^2 + E$，求 $|B|$ 和 $|B + E|$。

证明. B 的特征值为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1$，$B + E$ 的特征值为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2$。 □

定理 2.28. 设 A 为三阶矩阵，$|A - E| = |A + 2E| = |2A + 3E| = 0$，求 $|A^* - 3E|$。

证明. 求出 A^* 与特征值之间的关系，进行转化。求 A 的特征值。 □

定理 2.29. 设 A, B 为四阶矩阵且二者相似，如果 B^* 的特征值为 $1, -1, 2, 4$，求 $|A^*|$。

证明.

$$|B^*| = -8 = |B|^3,\ |B| = -2 = |A|,\ |A^*| = |A|^3 = -8$$ □

定理 2.30. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，$A^2 + 2A = \mathbf{0}$，$\operatorname{rank}(A) = k$，求 $|A + 3E|$。

证明. 由 $A^2 + 2A = \mathbf{0}$ 可知 A 的特征值为 0 或 -2。A 的相似标准形对角线上有 k 个 -2、$n - 2$ 个 0。 □

定理 2.31. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$，求 $|B|$。

证明. 两边同右乘 A 消去 A^*，可得：

$$3AB = 6B + A,\ 3(A - 2E)B = A$$ □

定理 2.32. α 是一个单位列向量，$A = E - \alpha\alpha^T$，求 $|A|$。

证明. $A\alpha = (E - \alpha\alpha^T)\alpha = \alpha - \alpha\alpha^T\alpha = \alpha - \alpha = \mathbf{0}$，$|A| = 0$。 □

定理 2.33. 设 A, B 为 n 阶矩阵，$A^2 = E,\ B^2 = E,\ |A| + |B| = 0$，求 $|A + B|$。

证明. 由条件可知 $|A|, |B|$ 二者中一个为 1，一个为 -1。

$$|A + B| = |AE + EB| = |AB^2 + A^2B| = |A(B + A)B| = |A||A + B||B| = -|A + B|$$ □

行列式乘法及其应用

定理 2.34. 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ -b & a & -d & c\\ -c & d & a & -b\\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} D^2&=\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ -b & a & -d & c\\ -c & d & a & -b\\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d\\ b & a & d & -c\\ c & -d & a & b\\ d & c & -b & a \end{vmatrix}\\ &=\left|\operatorname{diag}\{a^2+b^2+c^2+d^2,a^2+b^2+c^2+d^2,a^2+b^2+c^2+d^2,a^2+b^2+c^2+d^2\}\right|\\ &=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \end{aligned}$$

所以 $|D|=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$。根据行列式的定义，$|D|$ 中 a^4 系数为 1，所以 $|D|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$。 □

定理 2.35. 证明：

$$D=\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx\\ ay+bz & az+bx & ax+by\\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y \end{vmatrix}$$

证明. 显然：

$$D=\left|\begin{pmatrix} a & b & 0\\ 0 & a & b\\ b & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y \end{pmatrix}\right|=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y \end{vmatrix}$$ □

求解行列式方程

定理 2.36. 求方程：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & -2 & 4 & -8\\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=0$$

的根。

证明. Vandermonde 行列式，显然根为 $1,2,-2$（三次多项式最多三个根）。 □

定理 2.37. 解方程：

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明. 观察法：$x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ □

定理 2.38. 计算行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & y \\ z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$$

证明. 分类讨论，当 $y = z$ 时化为行和相同的行列式。当 $y \neq z$ 时：

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & 0 \\ z & x & \cdots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & 0 \\ z & z & \cdots & z & x-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & y \\ z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} \\ &= (x-y)D_{n-1} + \begin{vmatrix} x-z & y-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-z & 0 \\ z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} \\ &= (x-y)D_{n-1} + y(x-z)^{n-1} \end{aligned}$$

而由 D_n 的转置可以得到：

$$D_n = (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1}$$

于是：

$$\begin{cases} D_n - (x-y)D_{n-1} = y(x-z)^{n-1} \\ D_n - (x-z)D_{n-1} = z(x-y)^{n-1} \end{cases}$$

由 Cramer 法则可以解得：

$$D_n = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}$$

□

定理 2.39. 计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & x_2 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & x_{n-1} & \alpha \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n \end{vmatrix}$$

证明. 当 $\alpha\neq\beta$ 时的情况与上一题可以一样。当 $\alpha=\beta$ 时有：

$$\begin{aligned} D_n&=\begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \alpha & x_2 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & x_{n-1} & \alpha \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & x_n \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & x_2 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha & \alpha & \cdots & x_{n-1} & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & x_n \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -\alpha & x_1-\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\alpha & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n-\alpha \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

定理 2.40. 计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

证明. 加边：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

把前两列的第三行到第 $n+2$ 行全部化为 0。 □

定理 2.41. 求行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

的展开式中正项的数目。

证明. 设正项总数为 x，则负项总数为 $n!-x$。考虑到展开式中每一项不是 1 就是 -1，所以：

$$D = x-(n!-x) = 2x-n!$$

由之前的公式求出 D，代入即可解得 x。 □

定理 2.42. 计算行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1-ax_1y_1 & -ax_1y_2 & \cdots & -ax_1y_n \\ -ax_2y_1 & 1-ax_2y_2 & \cdots & -ax_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ax_ny_1 & -ax_ny_2 & \cdots & 1-ax_ny_n \end{vmatrix}$$

证明. 加边：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 \cdots & y_n & \\ 0 & 1-ax_1y_1 & -ax_1y_2 & \cdots & -ax_1y_n \\ 0 & -ax_2y_1 & 1-ax_2y_2 & \cdots & -ax_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -ax_ny_1 & -ax_ny_2 & \cdots & 1-ax_ny_n \end{vmatrix}$$ □

Chapter 3

矩阵

定理 3.1. 设 α 是一个 3 维列向量，$\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 求 $\alpha^T\alpha$。

证明. 设 $\alpha = (x, y, z)^T$，则：

$$\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$$

于是 $\alpha^T\alpha = x^2 + y^2 + z^2 = 3$。 □

定理 3.2. 设 $A = I - \alpha\alpha^T$，I 为 n 阶单位阵，α 是 n 维非零列向量，证明：

1. $A^2 = A$ 的充要条件为 $\alpha^T\alpha = 1$；

2. 当 $\alpha^T\alpha = 1$ 时，A 不可逆。

证明. (1) 显然：

$$\begin{aligned} A^2 - A &= (I - \alpha\alpha^T)(I - \alpha\alpha^T) - I + \alpha\alpha^T \\ &= I - 2\alpha\alpha^T + \alpha\alpha^T\alpha\alpha^T - I + \alpha\alpha^T \\ &= -\alpha\alpha^T + \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T \\ &= -\alpha\alpha^T + (\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T \\ &= (\alpha^T\alpha - 1)\alpha\alpha^T \end{aligned}$$

因为 $\alpha \neq \mathbf{0}$，所以 $A^2 = A$ 的充分必要条件为 $\alpha^T\alpha = 1$。

(2) 设 A 可逆，则存在矩阵 B，使得 $AB = BA = I$。由 (1) 得 $A^2 = A$，两边同乘 B 可得

$$BA^2 = BAA = A = AB = I$$

而 $\alpha \neq \mathbf{0}$，于是 $A \neq I$，矛盾，所以 A 不可逆。 □

定理 3.3. 设 A, B 为 n 阶方阵，且 $AB = A + B$，证明 $AB = BA$。

证明. 显然：

$$AB - A - B + E = E$$
$$(A - E)(B - E) = E$$

所以 $A - E$ 可逆，$B - E$ 为其逆，于是：

$$(B - E)(A - E) = E$$

所以 $BA - B - A + E = E$，$BA = B + A$，从而 $AB = BA$。 □

3.1 求矩阵的幂

1. 数学归纳法
2. 二项式公式，将矩阵分解为可交换得两个矩阵
3. 将矩阵拆分为列向量的积
4. 将矩阵分块，求分块对角阵的幂
5. 利用相似标准形

定理 3.4. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$，求 A^k。

证明. 数学归纳法。 □

定理 3.5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^k。

证明. (1) 拆分为主对角线、副对角线两个矩阵。(2) 相似。(3) 数学归纳法。 □

定理 3.6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$：

1. 求 A^{99}；

2. 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$，记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。

证明. (1) 求矩阵的相似标准形。

(2) 归纳总结 $B^n = BAn - 1$。 □

定理 3.7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$，计算 A^n。

证明. 划分分块对角阵计算，将两个分块矩阵分别拆分为一个对角阵和另一个矩阵。 □

定理 3.8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，证明 $n \geqslant 3$ 时，有：

$$A^n = A^{n-2} + A^2 - E$$

并且求 A^{100}。

证明. 数学归纳法，证明 $n = 3$ 时成立。假设对 n 成立，证明对 $n+1$ 成立。

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = A(A^{n-2} + A^2 - E) = A^{n-1} + A^3 - A \\ &= A^{n-1} + A + A^2 - E - A = A^{n-1} + A^2 - E \end{aligned}$$

显然有：

$$A^{100} = A^{98} + A^2 - E = A^{96} + 2A^2 - 2E = A^2 + 49A^2 - 49E = 50A^2 - 49E$$ □

定理 3.9. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B = P^{-1}AP$，其中 P 为三阶矩阵，求 $B^{2020} - 2A^2$。

证明. 先计算 A^2。

$$B^{2020} - 2A^2 = P^{-1}A^{2020}P - 2A^2 = P^{-1}(A^2)^{1010}P - 2A^2$$

□

3.2 求矩阵的逆矩阵

定理 3.10. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

证明. 考虑副对角线上的分块逆矩阵。 □

定理 3.11. 已知 $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{-1} 和 A。

证明. $|A^*| = |A|^3$。$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$。 □

定理 3.12. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$。

证明. $AA^* = |A|E$，于是：

$$\left(\frac{1}{|A|}\right) A^E$$

□

定理 3.13. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}，其中 $a_i \neq 0$。

证明. 反序。 □

定理 3.14. 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位阵, 判断 $E-\alpha\alpha^T, E+\alpha\alpha^T, E+2\alpha\alpha^T, E-2\alpha\alpha^T$ 是否可逆。

证明. (1)$Ax = 0$ 有非零解 α，不可逆。其余三个通过特征值判断。 □

3.2.1 抽象矩阵求逆

定理 3.15. 设方阵 A 满足 $A^3 - A^2 + 2A - E = \mathbf{0}$，证明 A 和 $E - A$ 可逆，求逆矩阵。

证明. 显然：

$$A^3 - A^2 + 2A = E,\ A(A^2 - A + 2) = E$$

待定系数法求 $E - A$ 的逆矩阵：

$$(E - A)(-A^2 + aA + bE) = cE$$

将之展开与条件作系数对应。 □

定理 3.16. 设 $A^3 = 2E,\ B = A^2 - 2A + 2E$，证明 B 可逆并求逆矩阵。

证明. 显然：

$$B = A^2 - 2A + A^3 = A(A - E)(A + 2E)$$

证明上式右三个矩阵可逆。A 是显然的，$A^3 - E = E,\ (A-E)(A^2+2A+E) = E,\ A^3+8E = 10E,\ (A + 2E)(A^2 - 2A + 4E) = 10E$。 □

定理 3.17. $A^3 = \mathbf{0}$，则 $E - A, E + A$ 都可逆。

证明. 立方差立方和公式。 □

定理 3.18. 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，求 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$。

证明. 显然：
$$A^{-1}+B^{-1}=B^{-1}BA^{-1}+B^{-1}AA^{-1}=B^{-1}(B+A)A^{-1}$$
□

定理 3.19. 设 n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC=E$，证明有 $CAB=E$。

证明. 由逆矩阵的定义直接可得。 □

定理 3.20. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，且 $A^*X(\frac{1}{2}A^*)^*=8A^{-1}X+E$，求 X。

证明. 因为 $|A|=4$，所以 A 可逆，于是有：

$$A^*=|A|A^{-1}=4A^{-1}$$
$$(\frac{1}{2}A^*)^*=(2A^{-1})^*=|2A^{-1}|(2A^{-1})^{-1}=A$$
$$4A^{-1}XA=8A{-}1X+E$$
□

定理 3.21. 设 $A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 8\end{pmatrix}$，且有 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求 B。

证明. 两边乘 A 得：
$$AB=B+3A$$
两边同乘 A^* 得：
$$A^*AB=A^*B+3AA^*,\ |A|B=A^*B+3|A|E$$
由条件，$|A^*|=8$，所以 $|A|=2$。 □

定理 3.22. 设 A, B 为 3 阶矩阵，满足 $2A^{-1}B=B-4E$，

1. 证明 $A-2E$ 可逆；
2. 若 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 A。

证明. (1) 两边同时乘 A 得：

$$2B=AB-4A$$
$$2B-AB+4E=\mathbf{0}$$
$$(A-2E)(B+bE)=\mathbf{0}$$

待定系数法求解。

(2) 两边同时乘 A 得：

$$2B = AB - 4A,\ 2B = A(B-4E)$$ □

定理 3.23. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$，$B = (E+A)^{-1}(E-A)$，求 $(E+B)^{-1}$。

证明. (1) 两边左乘 $E+A$。

(2) 变形：

$$\begin{aligned} E+B &= (E-A)^{-1}(E-A) + (E+A)^{-1}(E-A) \\ &= (E-A)^{-1}(E+A+E-A) = 2(E-A)^{-1} \end{aligned}$$ □

3.3 伴随矩阵

定理 3.24. 设 A 是 n 阶方阵，满足 $A^m = E$，m 为正整数。设将 A 中的元素 a_{ij} 用其代数余子式 A_{ij} 代替所得到的矩阵为 B，证明 $B^m = E$。

证明. $A^m = AA^{m-1} = E$，所以 A 可逆，于是 $A^* = |A|A^{-1}$ 且 $|A|^m = |A^m| = 1$。于是：

$$\begin{aligned} B^m &= [(A^*)^T]^m = [(|A|A^{-1})^T]^m \\ &= [|A|(A^{-1})^T]^m = [(A^{-1})^T]^m \\ &= [(A^T)^{-1}]^m = [(A^T)^m]^{-1} \\ &= [(A^m)^T]^{-1} = E \end{aligned}$$ □

定理 3.25. 设三阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $A^* = A^T$，若 $a_{11} = a_{12} = a_{i3} > 0$，求 a_{11}。

证明. 由 $A^* = A^T$ 可得 $A = (A^*)^T$,所以 $a_{ij} = A_{ij}$,于是有 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3a_{11}^2 > 0$。

$$AA^* = |A|E,\ AA^T = |A|E,\ |AA^T| = |A|^3,\ |A| = 1$$ □

定理 3.26. 设 A, B 为 n 阶矩阵，分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$，求 C^*。

证明. □

定理 3.27. 设 A 为 n 阶可逆矩，交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，则交换 A^* 的第一列和第二列得到 $-B^*$。

证明. 使用初等矩阵。 □

定理 3.28. 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若 $\operatorname{rank}(A^*)=1$，则有 $a\neq b,\ a+2b=0$。

证明. □

3.4 矩阵的秩

定理 3.29. 讨论 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$ 的秩，$n\geqslant 2$。

证明. 第一列加上所有列，第二行到第 n 行依次减去第一行得到：

$$\begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

1. $a+(n-1)b\neq 0,\ a\neq b,\ \operatorname{rank}(A)=n$；
2. $a=b\neq 0,\ \operatorname{rank}(A)=1$；
3. $a=b=0,\ \operatorname{rank}(A)=0$；
4. $a+(n-1)b=0,\ b\neq 0,\ \operatorname{rank}(A)=n-1$；

□

定理 3.30. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$，且 $\operatorname{rank}(A)=3$，求 k。

证明. 令行列式为 0，讨论求出的 k 是否使得 $\operatorname{rank}(A)=3$。 □

定理 3.31. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价，求 a。

证明. 等价则秩相同，然后题目就化为了上一题。 □

定理 3.32. 设 $Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$，$P$ 为三阶非零矩阵，且满足 $PQ=\mathbf{0}$，证明 $t\neq 6$ 时 $\operatorname{rank}(P)=1$。

证明. 因为 $PQ=\mathbf{0}$，所以 $\mathrm{rank}(P)+\mathrm{rank}(Q)\leqslant 3$。因为 $P\neq\mathbf{0}$，所以 $\mathrm{rank}(P)\geqslant 1$。$t\neq 6$ 时 $\mathrm{rank}(Q)=2$，于是 $\mathrm{rank}(P)=1$。 □

定理 3.33. 设 $A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$，其中 $a_ib_j\neq 0$，求 $\mathrm{rank}(A)$。

证明. 因为：

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

所以 $1\leqslant \mathrm{rank}(A)\leqslant \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\right)=1$。 □

定理 3.34. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，若 $AB=E$，证明 $\mathrm{rank}(B)=m$。

证明. $\mathrm{rank}(AB)=m\leqslant \mathrm{rank}(B)\leqslant m$。 □

定理 3.35. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r_1，$s\times t$ 矩阵 B 的秩为 r_2，$C=\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$，证明 $\mathrm{rank}(C)=r_1+r_2$。

证明. 用定义证明会更快。 □

定理 3.36. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times t$ 矩阵，若 $AB=\mathbf{0}_{m\times t}$，证明 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\leqslant n$。

定理 3.37. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times t$ 矩阵，证明：

$$\mathrm{rank}(AB)\geqslant \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n$$

定理 3.38. 设 A 是一个 n 阶幂等阵，则 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(A-E)=n$。

证明. 因为 $A(A-E)=\mathbf{0}$， □

定理 3.39. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times m$ 阶矩阵，若 $AB=I$，则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=m$。

定理 3.40. 设 α,β 为 3 维非零列向量，$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，证明：

1. $\mathrm{rank}(A)\leqslant 2$；

2. 若 α,β 线性相关，则 $\mathrm{rank}(A)<2$。

证明. (1) 由矩阵和的秩公式：

$$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leqslant \mathrm{rank}(\alpha\alpha^T)+\mathrm{rank}(\beta\beta^T)\leqslant 2$$

(2) 设 $\beta=k\alpha$，则：

$$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(\alpha\alpha^T)\leqslant \mathrm{rank}(\alpha)<2$$ □

3.4.1 初等矩阵

Chapter 4

向量空间

定理 4.1. 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m < n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ 线性无关的充分必要条件为矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ 等价。

证明. 同形矩阵等价的充分必要条件为秩相同。 □

定理 4.2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，向量 β 不是方程组 $Ax = 0$ 的解，证明 $\beta, \beta + \alpha_1, \ldots, \beta + \alpha_t$ 线性无关。

证明. 若存在一组不全为零的 $a_1, a_2, \ldots, a_t$ 使得：

$$a_1\beta + a_2(\beta + \alpha_1) + \cdots + a_t(\beta + \alpha_t) = \mathbf{0}$$

则有：

$$a_1\beta + a_2\beta + a_2\alpha_1 + \cdots + a_t\beta + a_t\alpha_t = \mathbf{0}$$

两边同时乘 A 可得：

$$a_1\beta + a_2\beta + \cdots + a_t\beta = \mathbf{0}$$

作差即可得：

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_t\alpha_t = \mathbf{0}$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 为基础解系，线性无关，所以 $a_1 = a_2 = \cdots = a_t = 0$，于是 $\beta, \beta + \alpha_1, \ldots, \beta + \alpha_t$ 线性无关。 □

定理 4.3. 设 A, B 是两个非零向量且 $AB = \mathbf{0}$，则 A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关。

证明. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times p$ 矩阵，则：

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leqslant n$$

因为 A, B 非零，所以：

$$1 \leqslant \operatorname{rank}(A) < n,\ 1 \leqslant \operatorname{rank}(B) < n$$

结果显然。 □