高等代数专题

倪兴程[1]

2025 年 2 月 20 日

[1]Email: 19975022383@163.com

Todo list

目录

Chapter 1

多项式

1.1 多项式带余除法及整除

1.1.1 证明多项式整除性的常用方法

1. 定义法
   要证 $g(x)|f(x)$，去构造 $h(x)$，使得 $f(x) = h(x)g(x)$。常常将 $f(x)$ 分解因式分解出 $g(x)$，剩下的就是 $h(x)$。

2. 带余除法定理
   要证 $g(x)|f(x)$，只要证 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为 0。

3. 准标准式分解法
   要证 $g(x)|f(x)$，只要证它们的准标准分解式中的同一个不可约因式的方幂前者不大于后者。

4. 根法
   要证 $g(x)|f(x)$，只要证在复数域中 $g(x)$ 的根都是 $f(x)$ 的根，重根按重数计算。

1.1.2 例题

定理 1.1. $f(x) = (x+1)^{k+n} + 2x(x+1)^{k+n-1} + \cdots + (2x)^k(x+1)^n$，证明 $x^{k+1}|(x-1)f(x) + (x+1)^{k+n+1}$。

证明. 因为：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^{k+n} + 2x(x+1)^{k+n-1} + \cdots + (2x)^k(x+1)^n \\
&= (x+1)^n\Big[(x+1)^k + (2x)(x+1)^{k-1} + \cdots + (2x)^k\Big]
\end{aligned}
$$

因为 $x-1=[2x-(x+1)]$，所以：

$$\begin{aligned}(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}&=[2x-(x+1)](x+1)^n\Big[(x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k\Big]\\&\quad+(x+1)^{k+n+1}\\&=(x+1)^n[2x-(x+1)]\Big[(x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k\Big]\\&\quad+(x+1)^{k+n+1}\\&=(x+1)^n[(2x)^{k+1}-(x+1)^{k+1}]+(x+1)^{k+n+1}\\&=(2x)^{k+1}(x+1)^n\end{aligned}$$

显然有 $x^{k+1}|(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$。 □

定理 1.2. 证明 $g(x)=1+x^2+\cdots+x^{2n}$ 整除 $f(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}$ 的充分必要条件为 n 是偶数。

证明. 显然：

$$g(x)=\frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2},\ f(x)=\frac{1-(x^4)^{n+1}}{1-x^4}$$

所以：

$$\begin{aligned}g(x)|f(x)&\Leftrightarrow\frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}\Big|\frac{1-(x^4)^{n+1}}{1-x^4}\\&\Leftrightarrow(1+x^2)[1-(x^2)^{n+1}]\Big|[1-(x^4)^{n+1}]\\&\Leftrightarrow(1+x^2)|[1+(x^2)^{n+1}]\\&\Leftrightarrow 1+x^2\text{的根}\pm i\text{都是}1+(x^2)^{n+1}\text{的根}\\&\Leftrightarrow 1+(-1)^{n+1}=0\\&\Leftrightarrow n\text{为偶数}\end{aligned}$$

□

定理 1.3. 设 $f(x),g(x)$ 为数域 K 上的多项式，$n\in\mathbb{Z}$。证明 $f(x)|g(x)$ 的充分必要条件为 $f^n(x)|g^n(x)$。

证明. **(1) 必要性**：若 $f(x)|g(x)$，则存在数域 K 上的多项式 $h(x)$ 使得 $g(x)=h(x)f(x)$，于是 $g^n(x)=h^n(x)f^n(x)$，所以 $f^n(x)|g^n(x)$。

(2) 充分性：将 $f(x),g(x)$ 进行标准分解得到：

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)\cdots p_m^{r_m}(x),\ g(x)=bq_1^{t_1}(x)\cdots q_n^{t_n}(x)$$

于是：

$$f^k(x)=a^kp_1^{kr_1}(x)\cdots p_m^{kr_m}(x),\ g^k(x)=b^kq_1^{kt_1}(x)\cdots q_n^{kt_n}(x)$$

因为 $f^k(x)|g^k(x)$，所以 $f(x)$ 标准分解式中的任一元素 $p_i(x),\ i=1,2,\ldots,m$ 都是 $g(x)$ 标准分解式中的元素（记为 q_{n_i}），同时有 $kr_i\leqslant kt_{n_i}$，即 $r_i\leqslant t_{n_i}$，于是 $f(x)|g(x)$。 □

定理 1.4. $(x^d-1)|(x^n-1)$ 的充分必要条件为 $d|n$。

证明. **(1) 充分性**：由 $d|n$ 可知，存在正整数 k 使得 $n = dk$。于是：

$$x^n - 1 = x^{dk} - 1 = \left(x^d\right)^k - 1 = (x^d - 1)[x^{d(k-1)} + \cdots + 11]$$

所以 $(x^d - 1)|(x^n - 1)$。

(2) 必要性：由整数的带余除法定理，设 $n = dq + r$，这里 $r = 0$ 或 $0 < r < d$。若 $0 < r < d$，则：

$$x^n - 1 = x^{dq+r} - 1 = x^{dq}x^r - x^r + x^r - 1 = x^r(x^{dq} - 1) + (x^r - 1)$$

由充分性可知 $(x^d - 1)|(x^{dq} - 1)$。而 $(x^d - 1)|(x^n - 1)$。则 $(x^d - 1)|(x^r - 1)$。于是 $d \leqslant r$，矛盾。 □

定理 1.5. 设 $h(x), k(x), f(x), g(x)$ 是实系数多项式，且：

$$\begin{aligned}(x^2+1)h(x) + (x+1)f(x) + (x-2)g(x) = 0\\(x^2+1)k(x) + (x-1)f(x) + (x+2)g(x) = 0\end{aligned}$$

则 $(x^2 + 1)|f(x)$，且 $(x^2 + 1)|g(x)$。

证明. 要证 $(x^2 + 1)|f(x)$ 和 $(x^2 + 1)|g(x)$，即证 $\pm i$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的根。将 $x = \pm i$ 代入上式可得：

$$(i+1)f(i) + (i-2)g(i) = 0, \quad (i-1)f(i) + (i+2)g(i) = 0$$
$$(-i+1)f(-i) + (-i-2)g(-i) = 0, \quad (-i-1)f(-i) + (-i+2)g(-i) = 0$$

解方程可得：

$$f(i) = g(i) = 0,\ f(-i) = g(-i) = 0$$

所以 $(x - i)|f(x)$，$(x + i)|f(x)$，$(x - i)|g(x)$，$(x + i)|g(x)$。因为 $(x + i, x - i) = 1$，所以 $(x + i)(x - i)|f(x)$，$(x + i)(x - i)|f(x)$，即 $(x^2 + 1)|f(x)$，$(x^2 + 1)|g(x)$。 □

定理 1.6. 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$，都有 $(x^2 + x + 1)\Big|[x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1}]$。

证明. **方法一**：令 $x^2 + x + 1 = 0$，求得它在复数域内的两个根分别为 $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$，$x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$。将 x_1，x_2 代入到 $x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1}$ 中可得：

$$x^{n+2} + (x+1)^{2n+1} = x^2x^n + (x+1)\left(x^2\right)^n = 0$$

于是 x_1, x_2 也是 $x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1}$ 的根，所以 $(x^2 + x + 1)\Big|[x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1}]$。

方法二：设 α 为 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根，则 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$，两边同乘 $\alpha - 1$ 可得 $\alpha^3 = 1$ 且 $\alpha \neq 1$。于是：

$$\begin{aligned}\alpha^{n+2} + (\alpha+1)^{2n+1} &= \alpha^{n+2} + (-\alpha^2)^{2n+1}\\&= \alpha^{n+2} + (-1)^{2n+1}\alpha^{4n+2}\\&= \alpha^{n+2} - \alpha^{3n}\alpha^{n+2}\\&= 0\end{aligned}$$

于是 α 是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}=0$ 的根，所以 $(x^2+x+1)\Big|[x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}]$。 □

定理 1.7. 若 $(s,n+1)=1$，则 $f(x)=x^{sn}+x^{s(n-1)}+\cdots+x^s+1$ 可被 $g(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ 整除。

证明. 假设 α 为 $g(x)=0$ 的根，因为：

$$g(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

所以 $\alpha^{n+1}=1$ 且 $\alpha\neq 1$。而：

$$f(x)=\frac{1-(x^s)^{n+1}}{1-x^s}=\frac{1-(x^{n+1})^s}{1-x^s}$$

代入 $\alpha^{n+1}=1$ 则显然 $f(x)=0$，即 α 也是 $f(x)=0$ 的根，$g(x)|f(x)$。但是如果 α 是 $f(x)$ 的根，此时应有 $\alpha^s\neq 1$。若 $\alpha^s=1$，因为 $(s,n+1)=1$，则存在 $u,v\in\mathbb{N}$，使得：

$$us+v(n+1)=1$$

于是 $\alpha=\alpha^{us+v(n+1)}=\alpha^{us}\alpha^{v(n+1)}=\alpha^{us}(\alpha^{n+1})^v=(\alpha^s)^u=1$，与 $\alpha\neq 1$ 矛盾，所以 $\alpha^s-1\neq 0$。 □

定理 1.8. 设 $n\in\mathbb{N}^+$，$f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)$ 都是多项式，并且有：

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1|f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1})$$

证明 $(x-1)^n|f_1(x)f_2(x)f_n(x)$。

证明. 设 $x^{n+1}-1=0$ 的不为 1 的 n 个根分别为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$，此时有 $\varepsilon_i^{n+1}-1=0,\ i=1,2,\ldots,n$。对 $x^{n+1}-1=0$ 作分解可得 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_n)$，所以：

$$x-\varepsilon_i\Big|x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1\Big|f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1})$$

于是 $\varepsilon_i,\ i=1,2,\ldots,n$ 是 $f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1})=0$ 的根，所以：

$$\begin{cases}f_1(\varepsilon_1^{n+1})+\varepsilon_1 f_2(\varepsilon_1^{n+1})+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}f_n(\varepsilon_1^{n+1})=0\\ f_1(\varepsilon_2^{n+1})+\varepsilon_2 f_2(\varepsilon_2^{n+1})+\cdots+\varepsilon_2^{n-1}f_n(\varepsilon_2^{n+1})=0\\ \vdots\\ f_1(\varepsilon_n^{n+1})+\varepsilon_n f_2(\varepsilon_n^{n+1})+\cdots+\varepsilon_n^{n-1}f_n(\varepsilon_n^{n+1})=0\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}f_1(1)+\varepsilon_1 f_2(1)+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}f_n(1)=0\\ f_1(1)+\varepsilon_2 f_2(1)+\cdots+\varepsilon_2^{n-1}f_n(1)=0\\ \vdots\\ f_1(1)+\varepsilon_n f_2(1)+\cdots+\varepsilon_n^{n-1}f_n(1)=0\end{cases}$$

将 $f_i(1),\ i=1,2,\ldots,n$ 看作未知数，因为 $\varepsilon_i\neq\varepsilon_j,\ i\neq j$，所以该线性方程组的系数行列式为：

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{n-1}\\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \cdots & \varepsilon_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(\varepsilon_j-\varepsilon_i)\neq 0$$

所以该线性方程组只有零解，即 $f_i(1)=0$，于是 $x-1|f_i(x),\ i=1,2,\ldots,n$，所以 $(x-1)^n|f_1(x)f_2(x)f_n(x)$。 □

定理 1.9. *求多项式 $f(x)$，使得 $(x^2+1)|f(x)$ 且 $(x^3+x^2+1)|f(x)+1$。*

证明. 由整除的定义，存在多项式 $g(x),h(x)$ 使得

$$f(x)=(x^2+1)g(x)$$
$$f(x)+1=(x^3+x^2+1)h(x)$$

由条件可知 $\pm i$ 是 $f(x)$ 的根，将 $\pm i$ 分别代入上第二式可得：

$$1=-ih(i),\ 1=ih(-i)$$

取 $h(x)=x$ 发现可以满足上式要求，于是 $f(x)=x^4+x^3+x-1$。 □

定理 1.10. *求 7 次多项式 $f(x)$，使得 $(x-1)^4|f(x)+1$，且 $(x+1)^4|f(x)-1$。*

证明. 因为 $(x-1)^4|f(x)+1$，所以 1 至少是 $f(x)+1$ 的四重根，于是 1 至少是 $f'(x)$ 的三重根，即 $(x-1)^3|f(x)$。同理可得 $(x+1)^3|f'(x)$。因为 $\Big((x-1)^3,(x+1)^3\Big)=1$，所以 $(x-1)^3(x+1)^3|f'(x)$。因为 $f'(x)$ 是六次多项式，可设：

$$f'(x)=\alpha(x-1)^3(x+1)^3$$

其中 α 为常数。对上式积分可得：

$$f(x)=\alpha\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)+c$$

因为 $(x-1)^4|f(x)+1,\ (x+1)^4|f(x)-1$，所以 $f(1)=-1,\ f(-1)=1$，代入上式可解得：

$$\begin{cases}a=\dfrac{35}{16}\\ c=0\end{cases}$$

所以：

$$f(x)=\frac{5}{16}x^7-\frac{21}{16}x^5+\frac{35}{16}x^3-\frac{35}{16}x$$

□

1.2 最大公因式与互素多项式

1.2.1 基本定义与定理

定义 1.1. 设 $f(x), g(x), d(x) \in K[x]$，若：

1. $d(x) | f(x), g(x)$；
2. 若任意的 $\varphi(x) | f(x), g(x)$，都有 $\varphi(x) | d(x)$；

则称 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式。用 $\big(f(x), g(x)\big)$ 表示 $f(x)$ 和 $g(x)$ 首项系数为 1 的最大公因式。

定理 1.11 (最大公因式定理). $K[x]$ 上的任意两个多项式 $f(x), g(x)$ 都有最大公因式，并且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的任意一个最大公因式 $d(x)$ 都可以表示为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，即：

$$\exists\, u(x), v(x) \in K[x],\ u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$

定理 1.12. 若 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$，$g(x) \neq 0$，则 $\big(f(x), g(x)\big) = \big(g(x), r(x)\big)$。

定义 1.2. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$，若 $\big(f(x), g(x)\big) = 1$，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素。

定理 1.13. $\big(f(x), g(x)\big) = 1$ 的充分必要条件为：

$$\exists\, u(x), v(x) \in K[x],\ u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

定理 1.14. 若 $\big(f(x), g(x)\big) = 1$，且 $f(x) | g(x)h(x)$，则 $f(x) | h(x)$。

定理 1.15. 若 $\big(f(x), g(x)\big) = 1$，且 $f(x) | h(x)$，$g(x) | h(x)$，则 $f(x)g(x) | h(x)$。

定理 1.16. 若 $\big(f(x), g(x)\big) = 1$，$\big(f(x), h(x)\big) = 1$，则 $\big(f(x), g(x)h(x)\big) = 1$。

定理 1.17. 数域的扩张不影响最大公因式和互素。

1.2.2 题型

求具体多项式最大公因式

1. 辗转相除法

   (a) 计算 $f(x)$ 除以 $g(x)$，得到商 $q(x)$ 和余数 $r(x)$，即：

   $$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

   其中，$r(x)$ 是多项式的余数，且满足 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$。

   (b) 如果余数 $r(x) = 0$，则 $g(x)$ 就是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式。

(c) 如果余数 $r(x) \neq 0$，则将 $f(x)$ 赋值为 $g(x)$，将 $g(x)$ 赋值为 $r(x)$，然后返回第 1 步。

2. **因式分解法**

   如果求得 $f(x), g(x)$ 在数域 K 上的标准分解式：

   $$f(x) = ap_1^{r_1}(x) \cdots p_m^{r_m}(x),\ g(x) = bq_1^{t_1}(x) \cdots q_n^{t_n}(x)$$

   二者最大的公共部分即为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式。

证明最大公因式

1. **定义法**

   要证 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式，只要证：

   (a) $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的公因式；

   (b) 以下二者的任意一条：

   - 找到 $u(x), v(x)$ 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$；
   - 对 $f(x), g(x)$ 的任意公因式 $\varphi(x)$，有 $\varphi(x)|d(x)$。

2. **标准分解式法**

   从标准分解式中找最大公因式。

3. **利用最大公因式的性质和等式**

证明多项式的互素

1. **定义法**

   证明 $\big(f(x), g(x)\big) = 1$。

2. 只要证明：

   $$\exists\, u(x), v(x) \in K[x],\ u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

3. **根法**

   证明在复数域上 $f(x)$ 的根都不是 $g(x)$ 的根（重根按重述计算）。

4. **反证法**

   若 $\big(f(x), g(x)\big) = d(x) \neq 1$，则可以由：

   - $f(x), g(x)$ 有公共根
   - $d(x)|f(x)$，则 $d(x)|g(x)$

   推出矛盾。

5. **互素的性质及等式**

   性质 6、7、8。

1.2.3 例题

求具体多项式的最大公因式

定理 1.18. 设 $f(x)=3x^5+5x^4-4x^3-16x^3-6x^2-5x-6,\ g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$，求：

1. $\Big(f(x),g(x)\Big)$；
2. 多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=\Big(f(x),g(x)\Big)$。

辗转相除法在 latex 里面很难搞，不想打了

证明. (1) $\Big(f(x),g(x)\Big)=x+\frac{2}{3}$。

(2) 将辗转相除法的过程倒推即可求得：

$$u(x)=-\frac{1}{3}(x^2-x-1),\ v(x)=\frac{1}{3}(x^3+2x^2-5x-4)$$ □

证明最大公因式

定理 1.19. 证明：$\Big(f(x)h(x),g(x)h(x)\Big)=\Big(f(x),g(x)\Big)h(x)$，其中 $h(x)$ 是首项系数为 1 的多项式。

证明. 令 $d(x)=\Big(f(x),g(x)\Big)$，则有 $d(x)|f(x),\ d(x)|g(x)$，从而 $d(x)h(x)|f(x)h(x),\ d(x)h(x)|g(x)h(x)$，所以 $\Big(f(x),g(x)\Big)h(x)$ 是 $f(x)h(x),g(x)h(x)$ 的一个公因式。

因为 $d(x)=\Big(f(x),g(x)\Big)$，所以

$$\exists\, u(x),v(x)\in K[x],\ u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

于是 $u(x)h(x)f(x)+v(x)h(x)g(x)=d(x)f(x)$，$d(x)h(x)$ 是 $f(x)h(x),g(x)h(x)$ 的最大公因式。因为 $d(x)=\Big(f(x),g(x)\Big)$，所以它的首项系数为 1，而 $h(x)$ 的首项系数也是 1，于是 $\Big(f(x)h(x),g(x)h(x)\Big)=\Big(f(x),g(x)\Big)h(x)$。 □

定理 1.20. 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x),\ g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且有 $ad-bc\neq 0$。证明 $\Big(f(x),g(x)\Big)=\Big(f_1(x),g_1(x)\Big)$。

证明. 令 $d(x)=\Big(f(x),g(x)\Big)$，则有 $d(x)|f(x),\ d(x)|g(x)$，于是 $d(x)|af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x)$，即 $d(x)|f_1(x),g_1(x)$，于是 $\Big(f(x),g(x)\Big)$ 是 $f_1(x),g_1(x)$ 的一个公因式。

因为 $d(x)=\Big(f(x),g(x)\Big)$，所以

$$\exists\, u(x),v(x)\in K[x],\ u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

因为 $ad-bc\neq 0$，所以关于 $f(x),g(x)$ 的方程组：

$$\begin{cases} af(x)+bg(x)=f_1(x)\\ cf(x)+dg(x)=g_1(x)\end{cases}$$

有唯一解，可解得：

$$f(x)=\frac{1}{ad-bc}[df_1(x)-bg_1(x)],\ g(x)=\frac{1}{ad-bc}[-cf_1(x)+ag_1(x)]$$

于是：

$$u(x)\frac{1}{ad-bc}[df_1(x)-bg_1(x)]+v(x)\frac{1}{ad-bc}[-cf_1(x)+ag_1(x)]=d(x)$$

化简可得：

$$\frac{du(x)-cv(x)}{ad-bc}f_1(x)+\frac{av(x)-bu(x)}{ad-bc}g_1(x)=d(x)$$

即 $d(x)=\Big(f(x),g(x)\Big)$ 是 $f_1(x),g_1(x)$ 的最大公因式。因为 $\Big(f(x),g(x)\Big)$ 首项系数为 1，所以 $\Big(f(x),g(x)\Big)=\Big(f_1(x),g_1(x)\Big)$。 □

定理 1.21. 设 $f(x),g(x)\in K[x]$，且 $\Big(f(x),g(x)\Big)=1$，又 $\varphi(x)=(x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x)$，$\psi(x)=(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x)$，则 $\Big(\varphi(x),\psi(x)\Big)=x-1$。

证明. 由因式分解可得：

$$\varphi(x)=(x-1)[(x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)]$$
$$\psi(x)=(x-1)[(x+1)f(x)+xg(x)]$$

所以 $x-1$ 是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的一个公因式。由定理 1.19可知：

$$\Big(\varphi(x),\psi(x)\Big)=\Big((x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x),(x+1)f(x)+xg(x)\Big)(x-1)$$

接下来只需证明 $\Big((x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x),(x+1)f(x)+xg(x)\Big)=1$。

考虑以 $f(x),g(x)$ 为自变量的方程组：

$$\begin{cases}\varphi(x)=(x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x)\\ \psi(x)=(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x)\end{cases}$$

其系数行列式为 $-x^3-x^2+2x+1$，由 Cramer 法则可知 □

没搞懂

定理 1.22. 设 $f(x),g(x)$ 是两个不全为 0 的多项式，则 $\forall\ n\in N$，有 $\Big(f(x),g(x)\Big)^n=\Big(f^n(x),g^n(x)\Big)$。

证明. 令 $d(x)=\Big(f(x),g(x)\Big)$，则存在 $f_1(x),g_1(x)\in K[x]$，使得：

$$f(x)=d(x)f_1(x),\ g(x)=d(x)g_1(x)$$

同时有 $\Big(f_1(x),g_1(x)\Big)=1$，从而 $\Big(f_1^n(x),g_1^n(x)\Big)=1$，所以：

为什么？需要给出严格证明

$$\begin{aligned}\Big(f^n(x),g^n(x)\Big)&=\Big(d^n(x)f_1^n(x),d^n(x)g_1^n(x)\Big)\\&=\Big(f_1^n(x),g_1^n(x)\Big)d^n(x)\\&=\Big(f(x),g(x)\Big)^n\end{aligned}$$

其中第一行到第二行利用到了定理 1.19。 □

证明多项式的互素

定理 1.23. 设 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x) \in K[x]$，则：

$$\Big(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\Big) = 1 \Leftrightarrow \Big(f_i(x), g_j(x)\Big) = 1$$

其中 $i = 1, 2, \ldots, m$，$j = 1, 2, \ldots, n$。

证明. **(1) 必要性：** 因为 $\Big(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\Big)$，所以 $\exists\ u(x), v(x) \in K[x]$ 使得：

$$u(x)f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x) + v(x)g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x) = 1$$

即：

$$f_i(x)[u(x)f_1(x)\cdots f_{i-1}(x)f_{i+1}(x)\cdots f_m(x)] + g_j(x)[v(x)g_1(x)\cdots g_{j-1}(x)g_{j+1}(x)\cdots g_n(x)] = 1$$

所以 $\Big(f_i(x), g_j(x)\Big) = 1$，其中 $i = 1, 2, \ldots, m$，$j = 1, 2, \ldots, n$。

(2) 充分性： 取 $f_1(x)$，因为 $\Big(f_1(x), g_j(x)\Big) = 1$，$i = 1, 2, \ldots, n$，由定理 1.16可得，$\Big(f_1(x), g_1(x)\cdots g_n(x)\Big) = 1$。同理可得对任意的 $i = 1, 2, \ldots, m$，都有 $\Big(f_i(x), g_1(x)\cdots g_n(x)\Big) = 1$，再利用定理 1.16即可得到 $\Big(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\Big) = 1$。 □

定理 1.24. 对 $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$，令 $f_n(x) = x^{n+2} - (x+1)^{2n+1}$，有 $\Big(x^2 + x + 1, f_n(x)\Big) = 1$。

证明. 设 α 是 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根，则 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$，$\alpha^3 = 1$。于是：

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= \alpha^{n+2} - (\alpha+1)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} - (-\alpha^2)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} + \alpha^{4n+2} \\ &= \alpha^{n+2} + \alpha^{3n}\alpha^{n+2} \\ &= 2\alpha^{n+2} \end{aligned}$$

在复数域内求解方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 可得：

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2},\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

所以 $f_n(\alpha) = 2\alpha^{n+2} \neq 0$，即 α 不是 $f_n(x)$ 的根。由上我们得到 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根都不是 $f_n(x)$ 的根，所以 $\Big(x^2 + x + 1, f_n(x)\Big) = 1$。 □

定理 1.25. $f(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1$，$g(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$，其中 $m, n \in \mathbb{N}$，则有：

$$(m, n) = 1 \Leftrightarrow \Big(f(x), g(x)\Big) = 1$$

证明. **(1) 充分性：** 若 $(m,n)=d\neq 1$，设 $m=ds$，$n=dt$，则：

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x^m-1}{x-1}=\frac{x^{ds}-1}{x-1}\\&=\frac{x^d-1}{x-1}[x^{d(s-1)}+x^{d(s-2)}+\cdots+x^d+1]\\&=(x^{d-1}+\cdots+x+1)[x^{d(s-1)}+x^{d(s-2)}+\cdots+x^d+1]\end{aligned}$$

而：

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{x^{dt}-1}{x-1}\\&=\frac{x^d-1}{x-1}[x^{d(t-1)}+x^{d(t-2)}+\cdots+x^d+1]\\&=(x^{d-1}+\cdots+x+1)[x^{d(t-1)}+x^{d(t-2)}+\cdots+x^d+1]\end{aligned}$$

可以发现 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有次数大于 0 的公因式 $x^{d-1}+\cdots+x+1$，与 $\Big(f(x),g(x)\Big)=1$ 矛盾，所以 $(m,n)=1$。

(2) 必要性： 若 $\Big(f(x),g(x)\Big)=d(x)\neq 1$，则 $f(x),g(x)$ 有公共根 α。由 n 次方差公式可得：

$$\alpha^m-1=(\alpha-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)=0$$
$$\alpha^n-1=(\alpha-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=0$$

于是 $\alpha^m=\alpha^n=1$，且有 $\alpha\neq 1$。由 $(m,n)=1$ 可知，存在 $u,v\in\mathbb{N}$ 使得 $um+vn=1$，于是：

$$\alpha=\alpha^{um+vn}=(\alpha^m)^u(\alpha^n)^v=1$$

矛盾，所以 $\Big(f(x),g(x)\Big)=1$，。 □

1.3 多项式的根

1.3.1 题型

重根的证明

1. 互素法
   - 若 $f(x)$ 是一个复多项式，则 $f(x)$ 无重根的充分必要条件是 $\Big(f(x),f'(x)\Big)=1$。
   - 若 $f(x)$ 是一般数域 K 上的多项式，若 $\Big(f(x),f'(x)\Big)=1$，则 $f(x)$ 无重因式，自然无重根。
2. 反证法

1.3.2 例题

定理 1.26. 如果 $f'(x)|f(x)$，证明：$f(x)$ 有 n 重根，其中 $n=\partial(f(x))$