

高等代数专题

倪兴程¹

2025 年 2 月 20 日

¹Email: 19975022383@163.com

Todo list

辗转相除法在 latex 里面很难搞，不想打了	8
没搞懂	9
倒根变换需要严格证明	13

目录

第一章 多项式	1
1.1 多项式带余除法及整除	1
1.1.1 证明多项式整除性的常用方法	1
1.1.2 例题	1
1.2 最大公因式与互素多项式	6
1.2.1 基本定义与定理	6
1.2.2 题型	6
1.2.3 例题	8
1.3 多项式的根	11
1.3.1 题型	11
1.3.2 例题	12
1.3.3 复根、实根、有理根与整数根	12
1.3.4 三个常用数域上的多项式	14
1.3.5 多项式的分解	17
第二章 行列式	19
第三章 矩阵	35
3.1 求矩阵的幂	36
3.2 求矩阵的逆矩阵	37
3.2.1 抽象矩阵求逆	38
3.3 伴随矩阵	40
3.4 矩阵的秩	41

Chapter 1

多项式

1.1 多项式带余除法及整除

1.1.1 证明多项式整除性的常用方法

1. 定义法

要证 $g(x)|f(x)$ ，去构造 $h(x)$ ，使得 $f(x) = h(x)g(x)$ 。常常将 $f(x)$ 分解因式分解出 $g(x)$ ，剩下的就是 $h(x)$ 。

2. 带余除法定理

要证 $g(x)|f(x)$ ，只要证 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为 0。

3. 准标准式分解法

要证 $g(x)|f(x)$ ，只要证它们的准标准分解式中的同一个不可约因式的方幂前者不大于后者。

4. 根法

要证 $g(x)|f(x)$ ，只要证在复数域中 $g(x)$ 的根都是 $f(x)$ 的根，重根按重数计算。

1.1.2 例题

定理 1.1. $f(x) = (x+1)^{k+n} + 2x(x+1)^{k+n-1} + \cdots + (2x)^k(x+1)^n$ ，证明 $x^{k+1} | (x-1)f(x) + (x+1)^{k+n+1}$ 。

证明. 因为：

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^{k+n} + 2x(x+1)^{k+n-1} + \cdots + (2x)^k(x+1)^n \\ &= (x+1)^n \left[(x+1)^k + (2x)(x+1)^{k-1} + \cdots + (2x)^k \right] \end{aligned}$$

因为 $x - 1 = [2x - (x + 1)]$, 所以:

$$\begin{aligned}
 (x - 1)f(x) + (x + 1)^{k+n+1} &= [2x - (x + 1)](x + 1)^n \left[(x + 1)^k + (2x)(x + 1)^{k-1} + \cdots + (2x)^k \right] \\
 &\quad + (x + 1)^{k+n+1} \\
 &= (x + 1)^n [2x - (x + 1)] \left[(x + 1)^k + (2x)(x + 1)^{k-1} + \cdots + (2x)^k \right] \\
 &\quad + (x + 1)^{k+n+1} \\
 &= (x + 1)^n [(2x)^{k+1} - (x + 1)^{k+1}] + (x + 1)^{k+n+1} \\
 &= (2x)^{k+1} (x + 1)^n
 \end{aligned}$$

显然有 $x^{k+1} | (x - 1)f(x) + (x + 1)^{k+n+1}$. □

定理 1.2. 证明 $g(x) = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n}$ 整除 $f(x) = 1 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{4n}$ 的充分必要条件为 n 是偶数。

证明. 显然:

$$g(x) = \frac{1 - (x^2)^{n+1}}{1 - x^2}, \quad f(x) = \frac{1 - (x^4)^{n+1}}{1 - x^4}$$

所以:

$$\begin{aligned}
 g(x) | f(x) &\Leftrightarrow \frac{1 - (x^2)^{n+1}}{1 - x^2} \Big| \frac{1 - (x^4)^{n+1}}{1 - x^4} \\
 &\Leftrightarrow (1 + x^2)[1 - (x^2)^{n+1}] \Big| [1 - (x^4)^{n+1}] \\
 &\Leftrightarrow (1 + x^2) | [1 + (x^2)^{n+1}] \\
 &\Leftrightarrow 1 + x^2 \text{ 的根 } \pm i \text{ 都是 } 1 + (x^2)^{n+1} \text{ 的根} \\
 &\Leftrightarrow 1 + (-1)^{n+1} = 0 \\
 &\Leftrightarrow n \text{ 为偶数}
 \end{aligned}$$
□

定理 1.3. 设 $f(x), g(x)$ 为数域 K 上的多项式, $n \in \mathbb{Z}$. 证明 $f(x) | g(x)$ 的充分必要条件为 $f^n(x) | g^n(x)$.

证明. **(1) 必要性:** 若 $f(x) | g(x)$, 则存在数域 K 上的多项式 $h(x)$ 使得 $g(x) = h(x)f(x)$, 于是 $g^n(x) = h^n(x)f^n(x)$, 所以 $f^n(x) | g^n(x)$.

(2) 充分性: 将 $f(x), g(x)$ 进行标准分解得到:

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x) \cdots p_m^{r_m}(x), \quad g(x) = bq_1^{t_1}(x) \cdots q_n^{t_n}(x)$$

于是:

$$f^k(x) = a^k p_1^{kr_1}(x) \cdots p_m^{kr_m}(x), \quad g^k(x) = b^k q_1^{kt_1}(x) \cdots q_n^{kt_n}(x)$$

因为 $f^k(x) | g^k(x)$, 所以 $f(x)$ 标准分解式中的任一元素 $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ 都是 $g(x)$ 标准分解式中的元素 (记为 q_{n_i}), 同时有 $kr_i \leq kt_{n_i}$, 即 $r_i \leq t_{n_i}$, 于是 $f(x) | g(x)$. □

定理 1.4. $(x^d - 1) | (x^n - 1)$ 的充分必要条件为 $d | n$.

证明. (1) 充分性: 由 $d|n$ 可知, 存在正整数 k 使得 $n = dk$ 。于是:

$$x^n - 1 = x^{dk} - 1 = (x^d)^k - 1 = (x^d - 1)[x^{d(k-1)} + \cdots + 1]$$

所以 $(x^d - 1)|(x^n - 1)$ 。

(2) 必要性: 由整数的带余除法定理, 设 $n = dq + r$, 这里 $r = 0$ 或 $0 < r < d$ 。若 $0 < r < d$, 则:

$$x^n - 1 = x^{dq+r} - 1 = x^{dq}x^r - x^r + x^r - 1 = x^r(x^{dq} - 1) + (x^r - 1)$$

由充分性可知 $(x^d - 1)|(x^{dq} - 1)$ 。而 $(x^d - 1)|(x^n - 1)$ 。则 $(x^d - 1)|(x^r - 1)$ 。于是 $d \leq r$, 矛盾。□

定理 1.5. 设 $h(x), k(x), f(x), g(x)$ 是实系数多项式, 且:

$$(x^2 + 1)h(x) + (x + 1)f(x) + (x - 2)g(x) = 0$$

$$(x^2 + 1)k(x) + (x - 1)f(x) + (x + 2)g(x) = 0$$

则 $(x^2 + 1)|f(x)$, 且 $(x^2 + 1)|g(x)$ 。

证明. 要证 $(x^2 + 1)|f(x)$ 和 $(x^2 + 1)|g(x)$, 即证 $\pm i$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的根。将 $x = \pm i$ 代入上式可得:

$$(i + 1)f(i) + (i - 2)g(i) = 0, \quad (i - 1)f(i) + (i + 2)g(i) = 0$$

$$(-i + 1)f(-i) + (-i - 2)g(-i) = 0, \quad (-i - 1)f(-i) + (-i + 2)g(-i) = 0$$

解方程可得:

$$f(i) = g(i) = 0, \quad f(-i) = g(-i) = 0$$

所以 $(x - i)|f(x)$, $(x + i)|f(x)$, $(x - i)|g(x)$, $(x + i)|g(x)$ 。因为 $(x + i, x - i) = 1$, 所以 $(x + i)(x - i)|f(x)$, $(x + i)(x - i)|g(x)$, 即 $(x^2 + 1)|f(x)$, $(x^2 + 1)|g(x)$ 。□

定理 1.6. 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 都有 $(x^2 + x + 1) \mid [x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1}]$ 。

证明. 方法一: 令 $x^2 + x + 1 = 0$, 求得它在复数域内的两个根分别为 $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 。将 x_1, x_2 代入到 $x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1}$ 中可得:

$$x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1} = x^2 x^n + (x + 1)(x^2)^n = 0$$

于是 x_1, x_2 也是 $x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1}$ 的根, 所以 $(x^2 + x + 1) \mid [x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1}]$ 。

方法二: 设 α 为 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根, 则 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, 两边同乘 $\alpha - 1$ 可得 $\alpha^3 = 1$ 且 $\alpha \neq 1$ 。于是:

$$\begin{aligned} \alpha^{n+2} + (\alpha + 1)^{2n+1} &= \alpha^{n+2} + (-\alpha^2)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} + (-1)^{2n+1} \alpha^{4n+2} \\ &= \alpha^{n+2} - \alpha^{3n} \alpha^{n+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

于是 α 是 $x^{n+2} + (x+1)^{2n+1} = 0$ 的根, 所以 $(x^2 + x + 1) \mid [x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}]$ 。 \square

定理 1.7. 若 $(s, n+1) = 1$, 则 $f(x) = x^{sn} + x^{s(n-1)} + \cdots + x^s + 1$ 可被 $g(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ 整除。

证明. 假设 α 为 $g(x) = 0$ 的根, 因为:

$$g(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

所以 $\alpha^{n+1} = 1$ 且 $\alpha \neq 1$ 。而:

$$f(x) = \frac{1 - (x^s)^{n+1}}{1 - x^s} = \frac{1 - (x^{n+1})^s}{1 - x^s}$$

代入 $\alpha^{n+1} = 1$ 则显然 $f(x) = 0$, 即 α 也是 $f(x) = 0$ 的根, $g(x) \mid f(x)$ 。但是如果 α 是 $f(x)$ 的根, 此时应有 $\alpha^s \neq 1$ 。若 $\alpha^s = 1$, 因为 $(s, n+1) = 1$, 则存在 $u, v \in \mathbb{N}$, 使得:

$$us + v(n+1) = 1$$

于是 $\alpha = \alpha^{us+v(n+1)} = \alpha^{us}\alpha^{v(n+1)} = \alpha^{us}(\alpha^{n+1})^v = (\alpha^s)^u = 1$, 与 $\alpha \neq 1$ 矛盾, 所以 $\alpha^s - 1 \neq 0$ 。 \square

定理 1.8. 设 $n \in \mathbb{N}^+$, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 都是多项式, 并且有:

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 \mid f_1(x^{n+1}) + xf_2(x^{n+1}) + \cdots + x^{n-1}f_n(x^{n+1})$$

证明 $(x-1)^n \mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 。

证明. 设 $x^{n+1} - 1 = 0$ 的不为 1 的 n 个根分别为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 此时有 $\varepsilon_i^{n+1} - 1 = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。对 $x^{n+1} - 1 = 0$ 作分解可得 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_n)$, 所以:

$$x - \varepsilon_i \mid x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 \mid f_1(x^{n+1}) + xf_2(x^{n+1}) + \cdots + x^{n-1}f_n(x^{n+1})$$

于是 ε_i , $i = 1, 2, \dots, n$ 是 $f_1(x^{n+1}) + xf_2(x^{n+1}) + \cdots + x^{n-1}f_n(x^{n+1}) = 0$ 的根, 所以:

$$\begin{cases} f_1(\varepsilon_1^{n+1}) + \varepsilon_1 f_2(\varepsilon_1^{n+1}) + \cdots + \varepsilon_1^{n-1} f_n(\varepsilon_1^{n+1}) = 0 \\ f_1(\varepsilon_2^{n+1}) + \varepsilon_2 f_2(\varepsilon_2^{n+1}) + \cdots + \varepsilon_2^{n-1} f_n(\varepsilon_2^{n+1}) = 0 \\ \vdots \\ f_1(\varepsilon_n^{n+1}) + \varepsilon_n f_2(\varepsilon_n^{n+1}) + \cdots + \varepsilon_n^{n-1} f_n(\varepsilon_n^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

即:

$$\begin{cases} f_1(1) + \varepsilon_1 f_2(1) + \cdots + \varepsilon_1^{n-1} f_n(1) = 0 \\ f_1(1) + \varepsilon_2 f_2(1) + \cdots + \varepsilon_2^{n-1} f_n(1) = 0 \\ \vdots \\ f_1(1) + \varepsilon_n f_2(1) + \cdots + \varepsilon_n^{n-1} f_n(1) = 0 \end{cases}$$

将 $f_i(1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 看作未知数, 因为 $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$, $i \neq j$, 所以该线性方程组的系数行列式为:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\varepsilon_j - \varepsilon_i) \neq 0$$

所以该线性方程组只有零解, 即 $f_i(1) = 0$, 于是 $x - 1 | f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 所以 $(x - 1)^n | f_1(x)f_2(x)f_n(x)$ 。□

定理 1.9. 求多项式 $f(x)$, 使得 $(x^2 + 1) | f(x)$ 且 $(x^3 + x^2 + 1) | f(x) + 1$ 。

证明. 由整除的定义, 存在多项式 $g(x), h(x)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 1)g(x) \\ f(x) + 1 &= (x^3 + x^2 + 1)h(x) \end{aligned}$$

由条件可知 $\pm i$ 是 $f(x)$ 的根, 将 $\pm i$ 分别代入上第二式可得:

$$1 = -ih(i), \quad 1 = ih(-i)$$

取 $h(x) = x$ 发现可以满足上式要求, 于是 $f(x) = x^4 + x^3 + x - 1$ 。□

定理 1.10. 求 7 次多项式 $f(x)$, 使得 $(x - 1)^4 | f(x) + 1$, 且 $(x + 1)^4 | f(x) - 1$ 。

证明. 因为 $(x - 1)^4 | f(x) + 1$, 所以 1 至少是 $f(x) + 1$ 的四重根, 于是 1 至少是 $f'(x)$ 的三重根, 即 $(x - 1)^3 | f'(x)$ 。同理可得 $(x + 1)^3 | f'(x)$ 。因为 $((x - 1)^3, (x + 1)^3) = 1$, 所以 $(x - 1)^3(x + 1)^3 | f'(x)$ 。因为 $f'(x)$ 是六次多项式, 可设:

$$f'(x) = \alpha(x - 1)^3(x + 1)^3$$

其中 α 为常数。对上式积分可得:

$$f(x) = \alpha \left(\frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x \right) + c$$

因为 $(x - 1)^4 | f(x) + 1$, $(x + 1)^4 | f(x) - 1$, 所以 $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$, 代入上式可解得:

$$\begin{cases} a = \frac{35}{16} \\ c = 0 \end{cases}$$

所以:

$$f(x) = \frac{5}{16}x^7 - \frac{21}{16}x^5 + \frac{35}{16}x^3 - \frac{35}{16}x$$

□

1.2 最大公因式与互素多项式

1.2.1 基本定义与定理

定义 1.1. 设 $f(x), g(x), d(x) \in K[x]$, 若:

1. $d(x)|f(x), g(x)$;
2. 若任意的 $\varphi(x)|f(x), g(x)$, 都有 $\varphi(x)|d(x)$;

则称 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式。用 $(f(x), g(x))$ 表示 $f(x)$ 和 $g(x)$ 首项系数为 1 的最大公因式。

定理 1.11 (最大公因式定理). $K[x]$ 上的任意两个多项式 $f(x), g(x)$ 都有最大公因式, 并且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的任意一个最大公因式 $d(x)$ 都可以表示为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合, 即:

$$\exists u(x), v(x) \in K[x], u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$

定理 1.12. 若 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, $g(x) \neq 0$, 则 $(f(x), g(x)) = (g(x), r(x))$ 。

定义 1.2. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素。

定理 1.13. $(f(x), g(x)) = 1$ 的充分必要条件为:

$$\exists u(x), v(x) \in K[x], u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

定理 1.14. 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 且 $f(x)|g(x)h(x)$, 则 $f(x)|h(x)$ 。

定理 1.15. 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 且 $f(x)|h(x)$, $g(x)|h(x)$, 则 $f(x)g(x)|h(x)$ 。

定理 1.16. 若 $(f(x), g(x)) = 1$, $(f(x), h(x)) = 1$, 则 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$ 。

定理 1.17. 数域的扩张不影响最大公因式和互素。

1.2.2 题型

求具体多项式最大公因式

1. 辗转相除法

(a) 计算 $f(x)$ 除以 $g(x)$, 得到商 $q(x)$ 和余数 $r(x)$, 即:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

其中, $r(x)$ 是多项式的余数, 且满足 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ 。

(b) 如果余数 $r(x) = 0$, 则 $g(x)$ 就是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式。

(c) 如果余数 $r(x) \neq 0$, 则将 $f(x)$ 赋值为 $g(x)$, 将 $g(x)$ 赋值为 $r(x)$, 然后返回第 1 步。

2. 因式分解法

如果求得 $f(x), g(x)$ 在数域 K 上的标准分解式:

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x) \cdots p_m^{r_m}(x), \quad g(x) = bq_1^{t_1}(x) \cdots q_n^{t_n}(x)$$

二者最大的公共部分即为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式。

证明最大公因式

1. 定义法

要证 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式, 只要证:

(a) $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的公因式;

(b) 以下二者的任意一条:

- 找到 $u(x), v(x)$ 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$;
- 对 $f(x), g(x)$ 的任意公因式 $\varphi(x)$, 有 $\varphi(x)|d(x)$ 。

2. 标准分解式法

从标准分解式中找最大公因式。

3. 利用最大公因式的性质和等式

证明多项式的互素

1. 定义法

证明 $(f(x), g(x)) = 1$ 。

2. 只要证明:

$$\exists u(x), v(x) \in K[x], \quad u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

3. 根法

证明在复数域上 $f(x)$ 的根都不是 $g(x)$ 的根 (重根按重数计算)。

4. 反证法

若 $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$, 则可以由:

- $f(x), g(x)$ 有公共根
- $d(x)|f(x)$, 则 $d(x)|g(x)$

推出矛盾。

5. 互素的性质及等式

性质 6、7、8。

1.2.3 例题

求具体多项式的最大公因式

定理 1.18. 设 $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 16x^2 - 5x - 6$, $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$, 求:

1. $(f(x), g(x))$;

2. 多项式 $u(x), v(x)$ 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$ 。

辗转相除法
在 latex 里
面很难搞,
不想打了

证明. (1) $(f(x), g(x)) = x + \frac{2}{3}$ 。

(2) 将辗转相除法的过程倒推即可求得:

$$u(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - x - 1), v(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 2x^2 - 5x - 4) \quad \square$$

证明最大公因式

定理 1.19. 证明: $(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$, 其中 $h(x)$ 是首项系数为 1 的多项式。

证明. 令 $d(x) = (f(x), g(x))$, 则有 $d(x)|f(x)$, $d(x)|g(x)$, 从而 $d(x)h(x)|f(x)h(x)$, $d(x)h(x)|g(x)h(x)$, 所以 $(f(x)h(x), g(x)h(x))$ 是 $f(x)h(x), g(x)h(x)$ 的一个公因式。

因为 $d(x) = (f(x), g(x))$, 所以

$$\exists u(x), v(x) \in K[x], u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$

于是 $u(x)h(x)f(x) + v(x)h(x)g(x) = d(x)f(x)$, $d(x)h(x)$ 是 $f(x)h(x), g(x)h(x)$ 的最大公因式。因为 $d(x) = (f(x), g(x))$, 所以它的首项系数为 1, 而 $h(x)$ 的首项系数也是 1, 于是 $(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$ 。 \square

定理 1.20. 设 $f_1(x) = af(x) + bg(x)$, $g_1(x) = cf(x) + dg(x)$, 且有 $ad - bc \neq 0$ 。证明 $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$ 。

证明. 令 $d(x) = (f(x), g(x))$, 则有 $d(x)|f(x)$, $d(x)|g(x)$, 于是 $d(x)|af(x) + bg(x)$, $cf(x) + dg(x)$, 即 $d(x)|f_1(x), g_1(x)$, 于是 $(f(x), g(x))$ 是 $f_1(x), g_1(x)$ 的一个公因式。

因为 $d(x) = (f(x), g(x))$, 所以

$$\exists u(x), v(x) \in K[x], u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$

因为 $ad - bc \neq 0$, 所以关于 $f(x), g(x)$ 的方程组:

$$\begin{cases} af(x) + bg(x) = f_1(x) \\ cf(x) + dg(x) = g_1(x) \end{cases}$$

有唯一解, 可解得:

$$f(x) = \frac{1}{ad-bc}[df_1(x) - bg_1(x)], \quad g(x) = \frac{1}{ad-bc}[-cf_1(x) + ag_1(x)]$$

于是:

$$u(x)\frac{1}{ad-bc}[df_1(x) - bg_1(x)] + v(x)\frac{1}{ad-bc}[-cf_1(x) + ag_1(x)] = d(x)$$

化简可得:

$$\frac{du(x) - cv(x)}{ad-bc}f_1(x) + \frac{av(x) - bu(x)}{ad-bc}g_1(x) = d(x)$$

即 $d(x) = (f(x), g(x))$ 是 $f_1(x), g_1(x)$ 的最大公因式。因为 $(f(x), g(x))$ 首项系数为 1, 所以 $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$ 。□

定理 1.21. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 且 $(f(x), g(x)) = 1$, 又 $\varphi(x) = (x^3 - 1)f(x) + (x^3 - x^2 + x - 1)g(x)$, $\psi(x) = (x^2 - 1)f(x) + (x^2 - x)g(x)$, 则 $(\varphi(x), \psi(x)) = x - 1$ 。

证明. 由因式分解可得:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (x-1)[(x^2+x+1)f(x) + (x^2+1)g(x)] \\ \psi(x) &= (x-1)[(x+1)f(x) + xg(x)]\end{aligned}$$

所以 $x-1$ 是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的一个公因式。由定理 1.19 可知:

$$(\varphi(x), \psi(x)) = ((x^2+x+1)f(x) + (x^2+1)g(x), (x+1)f(x) + xg(x))(x-1)$$

接下来只需证明 $((x^2+x+1)f(x) + (x^2+1)g(x), (x+1)f(x) + xg(x)) = 1$ 。

考虑以 $f(x), g(x)$ 为自变量的方程组:

$$\begin{cases} \varphi(x) = (x^3-1)f(x) + (x^3-x^2+x-1)g(x) \\ \psi(x) = (x^2-1)f(x) + (x^2-x)g(x) \end{cases}$$

其系数行列式为 $-x^3 - x^2 + 2x + 1$, 由 Cramer 法则可知 □ 没搞懂

定理 1.22. 设 $f(x), g(x)$ 是两个不全为 0 的多项式, 则 $\forall n \in N$, 有 $(f(x), g(x))^n = (f^n(x), g^n(x))$ 。

证明. 令 $d(x) = (f(x), g(x))$, 则存在 $f_1(x), g_1(x) \in K[x]$, 使得:

$$f(x) = d(x)f_1(x), \quad g(x) = d(x)g_1(x)$$

同时有 $(f_1(x), g_1(x)) = 1$, 从而 $(f_1^n(x), g_1^n(x)) = 1$, 所以:

$$\begin{aligned}(f^n(x), g^n(x)) &= (d^n(x)f_1^n(x), d^n(x)g_1^n(x)) \\ &= (f_1^n(x), g_1^n(x))d^n(x) \\ &= (f(x), g(x))^n\end{aligned}$$

其中第一行到第二行利用到了定理 1.19。□

证明多项式的互素

定理 1.23. 设 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x), g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x) \in K[x]$, 则:

$$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)) = 1 \Leftrightarrow (f_i(x), g_j(x)) = 1$$

其中 $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ 。

证明. (1) **必要性:** 因为 $(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))$, 所以 $\exists u(x), v(x) \in K[x]$ 使得:

$$u(x)f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x) + v(x)g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x) = 1$$

即:

$$f_i(x)[u(x)f_1(x)\cdots f_{i-1}(x)f_{i+1}(x)\cdots f_m(x)] + g_j(x)[v(x)g_1(x)\cdots g_{j-1}(x)g_{j+1}(x)\cdots g_n(x)] = 1$$

所以 $(f_i(x), g_j(x)) = 1$, 其中 $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ 。

(2) **充分性:** 取 $f_1(x)$, 因为 $(f_1(x), g_j(x)) = 1, i = 1, 2, \dots, n$, 由定理 1.16 可得, $(f_1(x), g_1(x)\cdots g_n(x)) = 1$ 。同理可得对任意的 $i = 1, 2, \dots, m$, 都有 $(f_i(x), g_1(x)\cdots g_n(x)) = 1$, 再利用定理 1.16 即可得到 $(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)) = 1$ 。□

定理 1.24. 对 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 令 $f_n(x) = x^{n+2} - (x+1)^{2n+1}$, 有 $(x^2 + x + 1, f_n(x)) = 1$ 。

证明. 设 α 是 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根, 则 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \alpha^3 = 1$ 。于是:

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= \alpha^{n+2} - (\alpha+1)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} - (-\alpha^2)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} + \alpha^{4n+2} \\ &= \alpha^{n+2} + \alpha^{3n}\alpha^{n+2} \\ &= 2\alpha^{n+2} \end{aligned}$$

在复数域内求解方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 可得:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

所以 $f_n(\alpha) = 2\alpha^{n+2} \neq 0$, 即 α 不是 $f_n(x)$ 的根。由上我们得到 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根都不是 $f_n(x)$ 的根, 所以 $(x^2 + x + 1, f_n(x)) = 1$ 。□

定理 1.25. $f(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1, g(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$, 其中 $m, n \in \mathbb{N}$, 则有:

$$(m, n) = 1 \Leftrightarrow (f(x), g(x)) = 1$$

证明. (1) 充分性: 若 $(m, n) = d \neq 1$, 设 $m = ds$, $n = dt$, 则:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{x^{ds} - 1}{x - 1} \\ &= \frac{x^d - 1}{x - 1} [x^{d(s-1)} + x^{d(s-2)} + \cdots + x^d + 1] \\ &= (x^{d-1} + \cdots + x + 1) [x^{d(s-1)} + x^{d(s-2)} + \cdots + x^d + 1] \end{aligned}$$

而:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{dt} - 1}{x - 1} \\ &= \frac{x^d - 1}{x - 1} [x^{d(t-1)} + x^{d(t-2)} + \cdots + x^d + 1] \\ &= (x^{d-1} + \cdots + x + 1) [x^{d(t-1)} + x^{d(t-2)} + \cdots + x^d + 1] \end{aligned}$$

可以发现 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有次数大于 0 的公因式 $x^{d-1} + \cdots + x + 1$, 与 $(f(x), g(x)) = 1$ 矛盾, 所以 $(m, n) = 1$ 。

(2) 必要性: 若 $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$, 则 $f(x), g(x)$ 有公共根 α 。由 n 次方差公式可得:

$$\begin{aligned} \alpha^m - 1 &= (\alpha - 1)(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha + 1) = 0 \\ \alpha^n - 1 &= (\alpha - 1)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1) = 0 \end{aligned}$$

于是 $\alpha^m = \alpha^n = 1$, 且有 $\alpha \neq 1$ 。由 $(m, n) = 1$ 可知, 存在 $u, v \in \mathbb{N}$ 使得 $um + vn = 1$, 于是:

$$\alpha = \alpha^{um+vn} = (\alpha^m)^u (\alpha^n)^v = 1$$

矛盾, 所以 $(f(x), g(x)) = 1$ 。□

1.3 多项式的根

定理 1.26. 若 $f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x) \cdots p_s^{r_s}(x)$, 则:

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = ap_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x)$$

1.3.1 题型

重根的证明

1. 互素法

- 若 $f(x)$ 是一个复多项式, 则 $f(x)$ 无重根的充分必要条件是 $(f(x), f'(x)) = 1$ 。
- 若 $f(x)$ 是一般数域 K 上的多项式, 若 $(f(x), f'(x)) = 1$, 则 $f(x)$ 无重因式, 自然无重根。

2. 反证法

1.3.2 例题

定理 1.27. 如果 $f'(x)|f(x)$, 证明: $f(x)$ 有 n 重根, 其中 $n = \deg f(x)$

证明. 由 $f'(x)|f(x)$, 所以 $f'(x) = (f(x), f'(x))$ 。因为 $\deg f'(x) = n - 1$, 则:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$$

是一次多项式, 设 $\varphi(x) = a(x - b)$, $a \neq 0$ 。由定理 1.26 可得 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 有相同的不可约因式, 又因为 $\deg f(x) = n$, 所以 $f(x) = a(x - b)^n$, $f(x)$ 有 n 重根。□

定理 1.28. 设 $f(x)$ 是复数域中的 n 次多项式, 且 $f(0) = 0$, 令 $g(x) = xf(x)$, 若 $f'(x)|g'(x)$, 则 $g(x)$ 有 $n + 1$ 重零根。

证明. 由 $f(0) = 0$ 可知 0 是 $f(x)$ 的根。因为 $g(x) = xf(x)$, 所以 $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ 。因为 $f'(x)|g'(x)$, 所以 $f'(x)|f(x)$ 。由上一题的结论, $f(x)$ 有 n 重根, 又因为 0 是 $f(x)$ 的根, 所以 0 就是 $f(x)$ 的 n 重根。设 $f(x) = ax^n$, 于是 $g(x) = ax^{n+1}$, 即 $g(x)$ 有 $n + 1$ 重零根。□

1.3.3 复根、实根、有理根与整数根

定理 1.29. 设 $f(x)$ 为整系数多项式:

1. 证明: 若 $f(1 + \sqrt{2}) = 0$, 则 $f(1 - \sqrt{2}) = 0$;

2. 推测结论 (1) 的推广形式 (不需要证明)。

证明. (1) $f(x)$ 有因式:

$$[x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})] = x^2 - 2x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$$

作带余除法, 设:

$$f(x) = (x^2 - 2x - 1)q(x) + ax + b$$

其中 $a, b \in \mathbb{Z}$ 。由 $f(1 + \sqrt{2}) = 0$ 可知, $a(1 + \sqrt{2}) + b = 0$, 于是 $a = b = 0$, 所以 $f(x) = (x^2 - 2x - 1)q(x)$, 显然 $f(1 - \sqrt{2}) = 0$ 。

(2) 若 $f(a + b\sqrt{2}) = 0$, 则 $f(a - b\sqrt{2}) = 0$, 其中 $a, b \in \mathbb{Z}$ 。□

定理 1.30. 已知整系数多项式 $f(x)$ 满足 $f(2)f(21) = 505$, 证明 $f(x)$ 无整数根。

证明. 因为 $f(2)f(21) = 505$, 所以 $f(2)$ 和 $f(21)$ 都是奇数。假设 α 是 $f(x)$ 的整数根, 则 $f(x) = (x - \alpha)q(x)$, 其中 $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 则 $2 - \alpha, 21 - \alpha$ 中至少有一个是偶数, 于是 $f(2)$ 与 $f(21)$ 中至少有一个是偶数, 矛盾, 所以 $f(x)$ 无整数根。□

定理 1.31. 求一个一元多项式, 使它的各根分别等于 $f(x) = 5x^4 - 6x^3 + x^2 + 4$ 的各根减 1。

证明. 令 $y = x - 1$, 则 $x = y + 1$ 。

$$g(y) = 5(y+1)^4 - 6(y+1)^3 + (y+1)^2 + 4$$

$g(y)$ 即为所求多项式。 \square

定理 1.32. 求一个一元多项式, 使它的各根分别等于 $f(x) = 15x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 21x + 13$ 的倒数。

证明. 因为 $f(0) = 13$, 所以 0 不是 $f(x)$ 的根。令 $y = \frac{1}{x}$, 则 $x = \frac{1}{y}$ 。

$$\begin{aligned} y^4 f(x) &= y^4 \left[15 \left(\frac{1}{y} \right)^4 - 2 \left(\frac{1}{y} \right)^3 + 11 \left(\frac{1}{y} \right)^2 - 21 \left(\frac{1}{y} \right) + 13 \right] \\ &= 13y^4 - 21y^3 + 11y^2 - 2y + 15 \\ &= g(y) \end{aligned}$$

$g(y)$ 即为所求多项式。 \square

定理 1.33. 设 $f(x)$ 为有理数域 \mathbb{Q} 上 $n(n \geq 2)$ 次多项式, 并且它在 \mathbb{Q} 上不可约, 如果 $f(x)$ 的一个根 α 的倒数 $\frac{1}{\alpha}$ 仍是 $f(x)$ 的根, 证明 $f(x)$ 每一个根的倒数也是 $f(x)$ 的根。

倒根变换需要严格证明

证明. 假设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中 $a_n \neq 0$ 。由 $f(x)$ 不可约可得 $a_0 \neq 0$, 于是 0 不是 $f(x)$ 的根。对 $f(x)$ 作倒根变换, 得到多项式:

$$g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

由 $\frac{1}{\alpha}$ 使 $f(x)$ 的根, 则 α 是 $g(x)$ 的根。因为 α 也是 $f(x)$ 的根, 所以 $(f(x), g(x)) \neq 1$ 。因为 $f(x)$ 不可约, 所以 $f(x) | g(x)$ 。任取 $f(x)$ 的根 β , 则 β 也是 $g(x)$ 的根, 于是 $\frac{1}{\beta}$ 是 $f(x)$ 的根。 \square

定理 1.34. 求以 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 为根的有理系数不可约多项式。

证明. 设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 且以 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 为根, 则 $\sqrt{2} - \sqrt{3}, -\sqrt{2} - \sqrt{3}, -\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 也是 $f(x)$ 的根。令

$$f(x) = [x - (\sqrt{2} + \sqrt{3})][x - (\sqrt{2} - \sqrt{3})][x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})][x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})] = x^4 - 10x^2 + 1$$

接下来证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约。

如果 $f(x)$ 有有理根, 必为 ± 1 。但 ± 1 都不是 $f(x)$ 的根, 所以 $f(x)$ 不能分解一个一次多项式与一个三次多项式的乘积。其次, 如果 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上分解为两个二次多项式的乘积, 则 $f(x)$ 必可在整系数多项式上分解为两个二次多项式的乘积, 即:

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ 。比较两边系数可得：

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d + ac = -10 \\ ad + bc = 0 \\ bd = 1 \end{cases}$$

因为 $bd = 1$ 且 $bd \in \mathbb{Z}$ ，所以 $b = d = -1$ 或 $b = d = 1$ 。

当 $b = d = 1$ 时， $a = -c$ ， $c^2 = 12$ ，但是 $c \in \mathbb{Z}$ ，矛盾。

当 $b = d = -1$ 时， $c^2 = 8$ ，但是 $c \in \mathbb{Z}$ ，矛盾。

所以 $f(x)$ 无法分解为两个二次多项式的乘积。

综上， $f(x)$ 既无法分解为一个一次多项式与一个三次多项式的乘积，也无法分解为两个二次多项式的乘积，所以 $f(x)$ 不可约。 $f(x)$ 即为所求。 \square

1.3.4 三个常用数域上的多项式

复数域

代数基本定理任何 n 次多项式在复数域中恰好有 n 个根。每个次数大于 0 的多项式在复数域上都可以唯一分解为一次因式的乘积。韦达定理

实数域

虚根的共轭也是虚根次数大于 2 的实系数多项式在实数域上是可约的实多项式分解定理

有理数域

如果能够分解为有理系数多项式的乘积则一定可以分解为整系数多项式的乘积根与系数的关系

定理 1.35. 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ 是一个整系数多项式，而 $\frac{r}{s}$ 是一个有理数，其中 r, s 互素，则

定理 1.36 (艾森斯坦判别法). 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式，若存在素数 p ，使得：

1. $p \nmid a_n$;
2. $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$;
3. $p^2 \nmid a_0$;

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

定理 1.37. 若 $f(x)$ 是 $n(n > 0)$ 次整系数多项式, 令 $x = y + a$, $a \in \mathbb{Z}$, 得整系数多项式 $g(y) = f(y + a)$, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{Q} 上可约的充分必要条件是 $g(x)$ 在 \mathbb{Q} 上可约。

定理 1.38. 次数大于 1 的复多项式都是可约的。次数大于 2 的实多项式都是可约的。次数等于 1 的多项式都是不可约的。

题型

1. 整系数多项式在有理数域上可约性的判别

(a) 方法一:

艾森斯坦判别法或对多项式作变换后再使用艾森斯坦判别法

(b) 方法二:

适合抽象的整系数多项式证明不可约

(c) 方法三:

讨论有理根。判断二次或三次有理多项式不可约只需证明它没有有理根, 当次数大于 3 时, 此结论不再成立。

例题

定理 1.39. 设 p 为素数, 则

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^p}{p!}$$

在有理数域上不可约。

证明. 令 $g(x) = p!f(x)$, 则 $g(x)$ 的可约性与 $f(x)$ 的可约性是一样的。而:

$$g(x) = x^p + px^{p-1} + \cdots + \frac{p!}{2!} + p!x + p!$$

显然 $g(x)$ 是一个整系数多项式。对于素数 p , 有 $p \nmid a_n = 1$, $p | a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$, $p^2 \nmid a_0 = p!$. \square

定理 1.40. 判别多项式 $f(x) = x^5 - 5x + 1$ 在有理数域上是否可约。

证明. 令 $x = y - 1$, 则 $g(y) = f(y - 1)$, 即:

$$g(y) = y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 10y^2 + 5$$

取 $p = 5$, 由艾森斯坦判别法, 该多项式在有理数域上不可约。 \square

定理 1.41. 关于任意素数 p , 多项式:

$$f(x) = px^4 + 2px^3 - px + 3p - 1$$

在有理数域上不可约。

证明. 因为 p 是一个素数, 所以 $3p - 1 \neq 0$. 令 $y = \frac{1}{x}$, 则:

$$f(y) = (3p - 1)y^4 - py^3 + 2px + p$$

取素数 p , 由艾森斯坦判别法, 该多项式在有理数域上不可约。□

定理 1.42. 设 n 是大于 1 的整数, 证明 $\sqrt[n]{2008}$ 是无理数。

证明. 令 $f(x) = x^n - 2008$, 取素数 $p = 251$, 由艾森斯坦判别法, 该多项式在有理数域上不可约, 即 $f(x)$ 在有理数域上没有根, 而 $\sqrt[n]{2008}$ 是 $f(x)$ 的根, 所以 $\sqrt[n]{2008}$ 是无理数。□

定理 1.43. 设 $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$, 其中 a_1, a_2, \dots, a_n 是两两互不相同的整数, 证明 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

证明. 假设 $f(x)$ 可约, 则可设:

$$f(x) = g(x)h(x)$$

其中 $g(x), h(x)$ 为整系数多项式, 并且有 $\deg g(x) < \deg f(x) = n$, $\deg h(x) < \deg f(x) = n$. 因为 $f(a_i) = -1$, 所以 $g(a_i)h(a_i) = -1$, $i = 1, 2, \dots, n$, 此时有 $g(a_i) = 1, h(a_i) = -1$ 或 $g(a_i) = -1, h(a_i) = 1$. 无论是哪种情况, 都有 $g(a_i) + h(a_i) = 0$, 即 $g(x) + h(x)$ 有 n 个互不相等的根 a_1, a_2, \dots, a_n , 但是 $\deg(g(x) + h(x)) < n$, 矛盾, 所以 $f(x)$ 不可约。□

定理 1.44. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是两两互不相同的整数, 证明 $f(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1$ 在有理数域上不可约。

证明. 假设 $f(x)$ 可约, 则存在次数大于 0 的首项系数为 1 的整系数多项式 $g(x), h(x)$ 使得:

$$f(x) = g(x)h(x)$$

因为 $f(a_i) = g(a_i)h(a_i) = 1$, 则 $g(a_i) = h(a_i) = 1$ 或 $g(a_i) = h(a_i) = -1$, $i = 1, 2, \dots, n$. 若 $g(a_i) = -1$, 由 $g(x)$ 是首项系数为 1 的多项式, 则存在充分大的 c , 使得 $g(c) = 0$, 从而 $g(x)$ 有实根。这与 $f(x)$ 无实根矛盾, 故 $g(a_i) \neq -1$. 若 $g(a_i) = 1$, 因为 a_1, a_2, \dots, a_n 是 $g(x) - 1, h(x) - 1$ 的 n 个互不相同的根, 则 $\deg(g(x) - 1) \geq n$, $\deg(h(x) - 1) \geq n$. 因为 $\deg f(x) = \deg g(x) + \deg h(x)$ 且有 $\deg f(x) = 2n$, 于是 $\deg(g(x) - 1) = \deg(h(x) - 1) = n$, 所以:

$$g(x) - 1 = h(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

所以:

$$f(x) = [(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1]^2$$

与 $f(x)$ 的表达式矛盾, 所以 $f(x)$ 不可约。□

1.3.5 多项式的分解

定理 1.45. 求多项式 $x^n - 1$ 在复数域上和实数域上的标准分解式。

证明. (1) **复数域:** 在复数域上 $x^n - 1$ 有 n 个复根, 设:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

所以:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_{n-1})$$

(2) **实数域:**

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \sin \frac{2k\pi}{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = 0 \text{ 或 } \frac{2k\pi}{n} = \pi \\ &\Leftrightarrow k = 0 \text{ 或 } k = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

而:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_k &= \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n} \\ &= \cos \left(2\pi - \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{2k\pi}{n} \right) \\ &= \cos \frac{2(n-k)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-k)\pi}{n} \\ &= \varepsilon_{n-k} \end{aligned}$$

因为 $\varepsilon_k + \varepsilon_{n-k} = 2 \cos \frac{2k\pi}{n}$, $\varepsilon_k \bar{\varepsilon}_k = 1$, 当 n 为奇数时, $x^n - 1$ 恰有一个实根 $\varepsilon_0 = 1$, 所以:

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_{\frac{n-1}{2}})(x - \varepsilon_{\frac{n+1}{2}}) \cdots (x - \varepsilon_{n-2})(x - \varepsilon_{n-1}) \\ &= (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_{\frac{n-1}{2}})(x - \bar{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}}) \cdots (x - \bar{\varepsilon}_2)(x - \bar{\varepsilon}_1) \\ &= (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \bar{\varepsilon}_1)(x - \varepsilon_2)(x - \bar{\varepsilon}_2) \cdots (x - \varepsilon_{\frac{n-1}{2}})(x - \bar{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}}) \\ &= (x - 1)[x^2 - (\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1)x + \varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_1][x^2 - (\varepsilon_2 + \bar{\varepsilon}_2)x + \varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_2] \cdots \\ &\quad [x^2 - (\varepsilon_{\frac{n-1}{2}} + \bar{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}})x + \varepsilon_{\frac{n-1}{2}} \bar{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}}] \\ &= (x - 1) \left(x^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} x + 1 \right) \left(x^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{n} x + 1 \right) \cdots \left(x^2 - 2 \cos \frac{(n-1)\pi}{n} x + 1 \right) \\ &= (x - 1) \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(x^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} x + 1 \right) \end{aligned}$$

当 n 为偶数时, $x^n - 1$ 有两个 1 实根 $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_{\frac{n}{2}} = -1$, 所以:

$$\begin{aligned}
 x^n - 1 &= (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_{\frac{n-2}{2}})(x - \varepsilon_{\frac{n}{2}})(x - \varepsilon_{\frac{n+2}{2}}) \cdots (x - \varepsilon_{n-2})(x - \varepsilon_{n-1}) \\
 &= (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_{\frac{n-2}{2}})(x + 1)(x - \bar{\varepsilon}_{\frac{n-2}{2}}) \cdots (x - \bar{\varepsilon} + 2)(x - \bar{\varepsilon}_1) \\
 &= (x - 1)(x + 1)(x - \varepsilon_1)(x - \bar{\varepsilon}_1)(x - \varepsilon_2)(x - \bar{\varepsilon}_2) \cdots (x - \varepsilon_{\frac{n-2}{2}})(x - \bar{\varepsilon}_{\frac{n-2}{2}}) \\
 &= (x - 1)(x + 1) \left(x^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} x + 1 \right) \left(x^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{n} x + 1 \right) \cdots \left(x^2 - 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{n} x + 1 \right) \\
 &= (x - 1)(x + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(x^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} x + 1 \right) \quad \square
 \end{aligned}$$

定理 1.46. 求多项式 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ 在实数域和复数域中的标准分解式。

证明. 令 $g(x) = (x - 1)f(x)$ 。

□

Chapter 2

行列式

定理 2.1. 求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数, 其中:

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ x & 2x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4x \end{vmatrix}$$

定理 2.2. 设 $n \geq 2$, 证明: 如果一个 n 阶行列式 D 中的元素为 1 或 -1 , 则 D 必为偶数。

证明. 将 D 按行列式的定义展开一共有 $n!$ 项, 因为 D 中的元素为 1 或 -1 , 所以展开式中每一项也只能是 1 或 -1 。假设展开式中有 k 项为 -1 , 则剩余 $n! - k$ 项为 1, 所以 $|D| = -k + (n! - k) = n! - 2k$ 。若 k 为偶数, 则 $|D|$ 为偶数; 若 k 为奇数, 则 $|D|$ 也是偶数。综上, D 必为偶数。 \square

定理 2.3. 证明元素为 0, 1 的三阶行列式 D 的值只能是 0, $\pm 1, \pm 2$ 。

证明. \square

定理 2.4. 计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - x^2 \end{vmatrix}$$

证明. 当 $2 - x^2 = 1$ 时, 一二两行相同, $|D| = 0$, 所以 $|D|$ 有因式 $(x - 1)(x + 1)$ 。当 $9 - x^2 = 5$ 时, 一二两行相同, $|D| = 0$, 所以 $|D|$ 有因式 $(x - 2)(x + 2)$ 。因为 D 是四阶行列式, 所以可设 $|D| = k(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$, 其中 k 为常数。 \square

定理 2.5. 已知五阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

求 $A_{41} + A_{42} + A_{43}$ 和 $A_{44} + A_{45}$ 。

证明.

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + 2(A_{44} + A_{45}) = 27$$

$$2(A_{41} + A_{42} + A_{43}) + A_{44} + A_{45} = 0$$

或者更换第四行元素使得新行列式的值等于 $A_{41} + A_{42} + A_{43}$ 和 $A_{44} + A_{45}$ 。 \square

定理 2.6. 设 n 阶行列式:

$$1$$

证明.

$$A^* = |A|A^{-1}$$

分块矩阵 \square

定理 2.7. 已知 $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ 满足条件:

1. $a_{ij} = A_{ij}$, 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式

2. $a_{11} \neq 0$ 。

计算行列式 $|A|$ 。

定理 2.8. 计算 $2n$ 阶行列式:

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & & & & d_2 & \\ & & c_2 & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ c_n & & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

证明. 利用 Laplace 定理, 将第 1 行与第 $2n$ 行展开, 得到:

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} (-1)^{1+2n+1+2n} D_{2n-2} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2} = \prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i) \quad \square$$

定理 2.9. 计算 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

证明. 将该行列式展开:

$$\begin{aligned} D_n &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix} + b_n (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^n a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

□

爪形

定理 2.10. 计算 $n+1$ 阶行列式:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ 。

证明. 显然:

$$\begin{aligned}
 D_{n+1} &= \begin{vmatrix} a_0 - \frac{1}{a_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_0 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
 &= \cdots \\
 &= \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
 &= \prod_{i=1}^n a_i \left(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \quad \square
 \end{aligned}$$

定理 2.11. 计算 5 阶行列式:

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

证明. 显然:

$$\begin{aligned}
 D_5 &= (1-a) \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a \begin{vmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \\
 &= (1-a) D_4 + a \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \\
 &= (1-a) D_4 + a D_3 \quad \square
 \end{aligned}$$

定理 2.12. 计算 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

证明. 显然:

$$\begin{aligned} D_n &= 5D_{n-1} + (-1)^{1+2}(-2) \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5D_{n-1} + (-1)^{1+2}(-2)(-3) \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5D_{n-1} - 6D_{n-2} \end{aligned}$$

□

定理 2.13. 证明:

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix}$$

证明. 第 n 行展开, 显然:

$$\begin{aligned} D_n &= 2 \cos \alpha D_{n-1} + 1 \times (-1)^{n+n-1} \begin{vmatrix} 2 \cos \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cos \alpha D_{n-1} + (-1)^{2n-1} \cdot 1 \cdot (-1)^{n-1+n-1} D_{n-2} \\ &= 2 \cos \alpha D_{n-1} - D_{n-2} \end{aligned}$$

$$x^2 - 2 \cos \alpha x + 1 = 0$$

□

Hessenberg

定理 2.14. 计算 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix}$$

证明. 按第一列展开:

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\ &= xD_{n-1} + a_n \\ &= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n \\ &= x^2D_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^2(xD_{n-3} + a_{n-2}) + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^3D_{n-3} + x^2a_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &= \cdots \\ &= x^{n-1}D_1 + \sum_{i=2}^n a_i x^{n-i} \\ &= x^{n-1}(x + a_1) + \sum_{i=2}^n a_i x^{n-i} \\ &= x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} \end{aligned}$$

□

定理 2.15. 计算 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

证明. 按第一行展开得:

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (-1)^{n-1}$$

□

行和、列和相同

定理 2.16. 计算 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

证明. 将所有列都加到第一列可得:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i - m \right) (-m)^{n-1} \end{aligned}$$

□

定理 2.17. 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根, 求行列式:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$$

证明. 显然:

$$x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \cdots$$

所以 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 把所有行都加到第一行, 得到:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0$$

□

升阶

定理 2.18. 计算 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

其中 $b_1 b_2 \cdots b_n \neq 0$ 。

证明. 加边可得:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}\right) \prod_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

□

定理 2.19. 计算 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + x_1^2 & x_2 x_1 & \cdots & x_n x_1 \\ x_1 x_2 & 1 + x_2^2 & \cdots & x_n x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 x_n & x_2 x_n & \cdots & 1 + x_n^2 \end{vmatrix}$$

证明. 加边 $(1, x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可得:

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & x_2x_1 & \cdots & x_nx_1 \\ 0 & x_1x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & x_nx_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1x_n & x_2x_n & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2
 \end{aligned}$$

□

相邻行列元素相差 1

定理 2.20. 计算 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

证明. 第 i 行减去第 $i+1$ 行, 化下三角。

□

定理 2.21. 计算 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

证明. 第 n 行减去第 $n-1$ 行, 依次从下往上. □

Vandermonde 行列式

定理 2.22. 计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

证明. 构造行列式:

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} \\ &= A_{15} + xA_{25} + x^2A_{35} + x^3A_{45} + x^4A_{55} \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(x-a)(c-b)(d-b)(x-b)(d-c)(x-c)(x-d) \\ &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \end{aligned}$$

而 $A_{45} = (-1)^{4+5}D = -D$, 找 x^3 的系数即可. □

其它

定理 2.23. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都是 3 维列向量, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$, 已知 $|A| = 1$, 求 $|B|$.

证明.

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|B| = |A||C|$$

□

定理 2.24. 设 3 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^* , 且 $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$ 。

证明. 伴随矩阵化为 A^{-1} 。 □

定理 2.25. 设 A, B 为 n 阶矩阵, $|A| = 2, |B| = -3$, 求 $|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}|$ 。

证明. 伴随矩阵化逆矩阵。 □

定理 2.26. 设 A, B 分别为 3 阶矩阵与 5 阶矩阵, $|A| = 2, |B| = 3$, 令:

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (3A)^* \\ (2B)^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

求 $|C|$ 。

证明. 伴随矩阵化逆矩阵。 □

定理 2.27. 设 A 为三阶矩阵, 特征值为 $-1, 0, 1$ 。令 $B = A^3 - 2A^2 + E$, 求 $|B|$ 和 $|B + E|$ 。

证明. B 的特征值为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1$, $B + E$ 的特征值为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2$ 。 □

定理 2.28. 设 A 为三阶矩阵, $|A - E| = |A + 2E| = |2A + 3E| = 0$, 求 $|A^* - 3E|$ 。

证明. 求出 A^* 与特征值之间的关系, 进行转化。求 A 的特征值。 □

定理 2.29. 设 A, B 为四阶矩阵且二者相似, 如果 B^* 的特征值为 $1, -1, 2, 4$, 求 $|A^*|$ 。

证明.

$$|B^*| = -8 = |B|^3, |B| = -2 = |A|, |A^*| = |A|^3 = -8$$

定理 2.30. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, $A^2 + 2A = \mathbf{0}$, $\text{rank}(A) = k$, 求 $|A + 3E|$ 。

证明. 由 $A^2 + 2A = \mathbf{0}$ 可知 A 的特征值为 0 或 -2 。 A 的相似标准形对角线上有 k 个 -2 、 $n - 2$ 个 0。 □

定理 2.31. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 求 $|B|$ 。

证明. 两边同右乘 A 消去 A^* , 可得:

$$3AB = 6B + A, 3(A - 2E)B = A$$

定理 2.32. α 是一个单位列向量, $A = E - \alpha\alpha^T$, 求 $|A|$ 。

证明. $A\alpha = (E - \alpha\alpha^T)\alpha = \alpha - \alpha\alpha^T\alpha = \alpha - \alpha = \mathbf{0}$, $|A| = 0$ 。 □

定理 2.33. 设 A, B 为 n 阶矩阵, $A^2 = E, B^2 = E, |A| + |B| = 0$, 求 $|A + B|$ 。

证明. 由条件可知 $|A|, |B|$ 二者中一个为 1, 一个为 -1 。

$$|A + B| = |AE + EB| = |AB^2 + A^2B| = |A(B + A)B| = |A||A + B||B| = -|A + B| \quad \square$$

行列式乘法及其应用

定理 2.34. 计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} D^2 &= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} \\ &= \left| \text{diag}\{a^2 + b^2 + c^2 + d^2, a^2 + b^2 + c^2 + d^2, a^2 + b^2 + c^2 + d^2, a^2 + b^2 + c^2 + d^2\} \right| \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 \end{aligned}$$

所以 $|D| = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ 。根据行列式的定义, $|D|$ 中 a^4 系数为 1, 所以 $|D| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ 。□

定理 2.35. 证明:

$$D = \begin{vmatrix} ax + by & ay + bz & az + bx \\ ay + bz & az + bx & ax + by \\ az + bx & ax + by & ay + bz \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

证明. 显然:

$$D = \left| \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} \right| = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \quad \square$$

求解行列式方程

定理 2.36. 求方程:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

的根。

证明. Vandermonde 行列式, 显然根为 $1, 2, -2$ (三次多项式最多三个根)。□

定理 2.37. 解方程:

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明. 观察法: $x = a_1, a_2, \dots, a_n$

□

定理 2.38. 计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & y \\ z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$$

证明. 分类讨论, 当 $y = z$ 时化为行和相同的行列式。当 $y \neq z$ 时:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & 0 \\ z & x & \cdots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & 0 \\ z & z & \cdots & z & x-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & y \\ z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} \\ &= (x-y)D_{n-1} + \begin{vmatrix} x-z & y-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-z & 0 \\ z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} \\ &= (x-y)D_{n-1} + y(x-z)^{n-1} \end{aligned}$$

而由 D_n 的转置可以得到:

$$D_n = (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1}$$

于是:

$$\begin{cases} D_n - (x-y)D_{n-1} = y(x-z)^{n-1} \\ D_n - (x-z)D_{n-1} = z(x-y)^{n-1} \end{cases}$$

由 Cramer 法则可以解得:

$$D_n = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}$$

□

定理 2.39. 计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & x_2 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & x_{n-1} & \alpha \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n \end{vmatrix}$$

证明. 当 $\alpha \neq \beta$ 时的情况与上一题可以一样. 当 $\alpha = \beta$ 时有:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \alpha & x_2 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & x_{n-1} & \alpha \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & x_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 - \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n - \alpha \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -\alpha & x_1 - \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & x_2 - \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\alpha & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} - \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n - \alpha \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

定理 2.40. 计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

证明. 加边:

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ 0 & a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

把前两列的第三行到第 $n+2$ 行全部化为 0。 □

定理 2.41. 求行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

的展开式中正项的数目。

证明. 设正项总数为 x , 则负项总数为 $n! - x$ 。考虑到展开式中每一项不是 1 就是 -1 , 所以:

$$D = x - (n! - x) = 2x - n!$$

由之前的公式求出 D ，代入即可解得 x 。

□

定理 2.42. 计算行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 - ax_1y_1 & -ax_1y_2 & \cdots & -ax_1y_n \\ -ax_2y_1 & 1 - ax_2y_2 & \cdots & -ax_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ax_ny_1 & -ax_ny_2 & \cdots & 1 - ax_ny_n \end{vmatrix}$$

证明. 加边：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 1 - ax_1y_1 & -ax_1y_2 & \cdots & -ax_1y_n \\ 0 & -ax_2y_1 & 1 - ax_2y_2 & \cdots & -ax_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -ax_ny_1 & -ax_ny_2 & \cdots & 1 - ax_ny_n \end{vmatrix}$$

□

Chapter 3

矩阵

定理 3.1. 设 α 是一个 3 维列向量, $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 求 $\alpha^T\alpha$ 。

证明. 设 $\alpha = (x, y, z)^T$, 则:

$$\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$$

于是 $\alpha^T\alpha = x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 。

□

定理 3.2. 设 $A = I - \alpha\alpha^T$, I 为 n 阶单位阵, α 是 n 维非零列向量, 证明:

1. $A^2 = A$ 的充要条件为 $\alpha^T\alpha = 1$;

2. 当 $\alpha^T\alpha = 1$ 时, A 不可逆。

证明. (1) 显然:

$$\begin{aligned} A^2 - A &= (I - \alpha\alpha^T)(I - \alpha\alpha^T) - I + \alpha\alpha^T \\ &= I - 2\alpha\alpha^T + \alpha\alpha^T\alpha\alpha^T - I + \alpha\alpha^T \\ &= -\alpha\alpha^T + \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T \\ &= -\alpha\alpha^T + (\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T \\ &= (\alpha^T\alpha - 1)\alpha\alpha^T \end{aligned}$$

因为 $\alpha \neq \mathbf{0}$, 所以 $A^2 = A$ 的充分必要条件为 $\alpha^T\alpha = 1$ 。

(2) 设 A 可逆, 则存在矩阵 B , 使得 $AB = BA = I$ 。由 (1) 得 $A^2 = A$, 两边同乘 B 可得

$$BA^2 = BAA = A = AB = I$$

而 $\alpha \neq \mathbf{0}$, 于是 $A \neq I$, 矛盾, 所以 A 不可逆。

□

定理 3.3. 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $AB = A + B$, 证明 $AB = BA$ 。

证明. 显然:

$$AB - A - B + E = E$$

$$(A - E)(B - E) = E$$

所以 $A - E$ 可逆, $B - E$ 为其逆, 于是:

$$(B - E)(A - E) = E$$

所以 $BA - B - A + E = E$, $BA = B + A$, 从而 $AB = BA$. □

3.1 求矩阵的幂

1. 数学归纳法
2. 二项式公式, 将矩阵分解为可交换得两个矩阵
3. 将矩阵拆分为列向量的积
4. 将矩阵分块, 求分块对角阵的幂
5. 利用相似标准形

定理 3.4. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 求 A^k 。

证明. 数学归纳法。 □

定理 3.5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^k 。

证明. (1) 拆分为主对角线、副对角线两个矩阵。(2) 相似。(3) 数学归纳法。 □

定理 3.6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

1. 求 A^{99} ;
2. 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。

证明. (1) 求矩阵的相似标准形。

(2) 归纳总结 $B^n = BAN - 1$. □

定理 3.7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, 计算 A^n 。

证明. 划分分块对角阵计算, 将两个分块矩阵分别拆分为一个对角阵和另一个矩阵。 □

定理 3.8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 证明 $n \geq 3$ 时, 有:

$$A^n = A^{n-2} + A^2 - E$$

并且求 A^{100} 。

证明. 数学归纳法, 证明 $n = 3$ 时成立。假设对 n 成立, 证明对 $n + 1$ 成立。

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = A(A^{n-2} + A^2 - E) = A^{n-1} + A^3 - A \\ &= A^{n-1} + A + A^2 - E - A = A^{n-1} + A^2 - E \end{aligned}$$

显然有:

$$A^{100} = A^{98} + A^2 - E = A^{96} + 2A^2 - 2E = A^2 + 49A^2 - 49E = 50A^2 - 49E \quad \square$$

定理 3.9. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 其中 P 为三阶矩阵, 求 $B^{2020} - 2A^2$ 。

证明. 先计算 A^2 。

$$B^{2020} - 2A^2 = P^{-1}A^{2020}P - 2A^2 = P^{-1}(A^2)^{1010}P - 2A^2$$

□

3.2 求矩阵的逆矩阵

定理 3.10. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

证明. 考虑副对角线上的分块逆矩阵。 □

定理 3.11. 已知 $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} 和 A 。

证明. $|A^*| = |A|^3$. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. □

定理 3.12. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 求 $(A^*)^{-1}$.

证明. $AA^* = |A|E$, 于是:

$$\left(\frac{1}{|A|}\right)A^E$$
□

定理 3.13. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} , 其中 $a_i \neq 0$.

证明. 反序. □

定理 3.14. 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位阵, 判断 $E - \alpha\alpha^T, E + \alpha\alpha^T, E + 2\alpha\alpha^T, E - 2\alpha\alpha^T$ 是否可逆.

证明. (1) $Ax = 0$ 有非零解 α , 不可逆. 其余三个通过特征值判断. □

3.2.1 抽象矩阵求逆

定理 3.15. 设方阵 A 满足 $A^3 - A^2 + 2A - E = 0$, 证明 A 和 $E - A$ 可逆, 求逆矩阵.

证明. 显然:

$$A^3 - A^2 + 2A = E, A(A^2 - A + 2) = E$$

待定系数法求 $E - A$ 的逆矩阵:

$$(E - A)(-A^2 + aA + bE) = cE$$

将之展开与条件作系数对应. □

定理 3.16. 设 $A^3 = 2E$, $B = A^2 - 2A + 2E$, 证明 B 可逆并求逆矩阵.

证明. 显然:

$$B = A^2 - 2A + A^3 = A(A - E)(A + 2E)$$

证明上式右三个矩阵可逆. A 是显然的, $A^3 - E = E$, $(A - E)(A^2 + 2A + E) = E$, $A^3 + 8E = 10E$, $(A + 2E)(A^2 - 2A + 4E) = 10E$. □

定理 3.17. $A^3 = 0$, 则 $E - A, E + A$ 都可逆.

证明. 立方差立方和公式. □

定理 3.18. 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 求 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 。

证明. 显然:

$$A^{-1}+B^{-1}=B^{-1}BA^{-1}+B^{-1}AA^{-1}=B^{-1}(B+A)A^{-1} \quad \square$$

定理 3.19. 设 n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC=E$, 证明有 $CAB=E$ 。

证明. 由逆矩阵的定义直接可得。 \square

定理 3.20. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $A^*X(\frac{1}{2}A^*)^*=8A^{-1}X+E$, 求 X 。

证明. 因为 $|A|=4$, 所以 A 可逆, 于是有:

$$\begin{aligned} A^* &= |A|A^{-1} = 4A^{-1} \\ (\frac{1}{2}A^*)^* &= (2A^{-1})^* = |2A^{-1}|(2A^{-1})^{-1} = A \\ 4A^{-1}XA &= 8A^{-1}X + E \end{aligned} \quad \square$$

定理 3.21. 设 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且有 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$, 求 B 。

证明. 两边乘 A 得:

$$AB = B + 3A$$

两边同乘 A^* 得:

$$A^*AB = A^*B + 3AA^*, \quad |A|B = A^*B + 3|A|E$$

由条件, $|A^*|=8$, 所以 $|A|=2$ 。 \square

定理 3.22. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 满足 $2A^{-1}B = B - 4E$,

1. 证明 $A - 2E$ 可逆;

2. 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A 。

证明. (1) 两边同时乘 A 得:

$$\begin{aligned} 2B &= AB - 4A \\ 2B - AB + 4E &= \mathbf{0} \\ (A - 2E)(B + 4E) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

待定系数法求解。

(2) 两边同时乘 A 得:

$$2B = AB - 4A, \quad 2B = A(B - 4E) \quad \square$$

定理 3.23. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = (E + A)^{-1}(E - A)$, 求 $(E + B)^{-1}$ 。

证明. (1) 两边左乘 $E + A$ 。

(2) 变形:

$$\begin{aligned} E + B &= (E - A)^{-1}(E - A) + (E + A)^{-1}(E - A) \\ &= (E - A)^{-1}(E + A + E - A) = 2(E - A)^{-1} \end{aligned} \quad \square$$

3.3 伴随矩阵

定理 3.24. 设 A 是 n 阶方阵, 满足 $A^m = E$, m 为正整数。设将 A 中的元素 a_{ij} 用其代数余子式 A_{ij} 代替所得到的矩阵为 B , 证明 $B^m = E$ 。

证明. $A^m = AA^{m-1} = E$, 所以 A 可逆, 于是 $A^* = |A|A^{-1}$ 且 $|A|^m = |A^m| = 1$ 。于是:

$$\begin{aligned} B^m &= [(A^*)^T]^m = [|A|A^{-1}]^m \\ &= [|A|(A^{-1})^T]^m = [(A^{-1})^T]^m \\ &= [(A^T)^{-1}]^m = [(A^T)^m]^{-1} \\ &= [(A^m)^T]^{-1} = E \end{aligned} \quad \square$$

定理 3.25. 设三阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $A^* = A^T$, 若 $a_{11} = a_{12} = a_{13} > 0$, 求 a_{11} 。

证明. 由 $A^* = A^T$ 可得 $A = (A^*)^T$, 所以 $a_{ij} = A_{ij}$, 于是有 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3a_{11}^2 > 0$ 。

$$AA^* = |A|E, \quad AA^T = |A|E, \quad |AA^T| = |A|^3, \quad |A| = 1 \quad \square$$

定理 3.26. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$, 求 C^* 。

证明. \square

定理 3.27. 设 A 为 n 阶可逆矩, 交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B , 则交换 A^* 的第一列和第二列得到 $-B^*$ 。

证明. 使用初等矩阵. \square

定理 3.28. 设 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, 若 $\text{rank}(A^*) = 1$, 则有 $a \neq b$, $a + 2b = 0$ 。

证明.

□

3.4 矩阵的秩

定理 3.29. 讨论 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$ 的秩, $n \geqslant 2$ 。

证明.

□