

# 高等代数专题

倪兴程<sup>1</sup>

2025 年 2 月 20 日

<sup>1</sup>Email: 19975022383@163.com



# Todo list

---

辗转相除法在 latex 里面很难搞，不想打了 . . . . .	8
没搞懂 . . . . .	9
倒根变换需要严格证明 . . . . .	13
A 与 A 的转置特征值相同 . . . . .	47
特征值多项式与矩阵多项式的关系 . . . . .	48

# 目录

---

<b>第一章 多项式</b>	<b>1</b>
1.1 多项式带余除法及整除	1
1.1.1 证明多项式整除性的常用方法	1
1.1.2 例题	1
1.2 最大公因式与互素多项式	6
1.2.1 基本定义与定理	6
1.2.2 题型	6
1.2.3 例题	8
1.3 多项式的根	11
1.3.1 题型	11
1.3.2 例题	12
1.3.3 复根、实根、有理根与整数根	12
1.3.4 三个常用数域上的多项式	14
1.3.5 多项式的分解	17
<b>第二章 行列式</b>	<b>19</b>
<b>第三章 矩阵</b>	<b>35</b>
3.1 求矩阵的幂	36
3.2 求矩阵的逆矩阵	37
3.2.1 抽象矩阵求逆	38
3.3 伴随矩阵	40
3.4 矩阵的秩	41
3.4.1 初等矩阵	43
<b>第四章 向量空间</b>	<b>44</b>
4.0.1 由特征值和特征向量求矩阵	49

# Chapter 1

## 多项式

---

### 1.1 多项式带余除法及整除

#### 1.1.1 证明多项式整除性的常用方法

1. 定义法

要证  $g(x)|f(x)$ ，去构造  $h(x)$ ，使得  $f(x) = h(x)g(x)$ 。常常将  $f(x)$  分解因式分解出  $g(x)$ ，剩下的就是  $h(x)$ 。

2. 带余除法定理

要证  $g(x)|f(x)$ ，只要证  $g(x)$  除  $f(x)$  的余式为 0。

3. 准标准式分解法

要证  $g(x)|f(x)$ ，只要证它们的准标准分解式中的同一个不可约因式的方幂前者不大于后者。

4. 根法

要证  $g(x)|f(x)$ ，只要证在复数域中  $g(x)$  的根都是  $f(x)$  的根，重根按重数计算。

#### 1.1.2 例题

**定理 1.1.**  $f(x) = (x+1)^{k+n} + 2x(x+1)^{k+n-1} + \cdots + (2x)^k(x+1)^n$ ，证明  $x^{k+1} | (x-1)f(x) + (x+1)^{k+n+1}$ 。

证明. 因为：

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^{k+n} + 2x(x+1)^{k+n-1} + \cdots + (2x)^k(x+1)^n \\ &= (x+1)^n \left[ (x+1)^k + (2x)(x+1)^{k-1} + \cdots + (2x)^k \right] \end{aligned}$$

因为  $x - 1 = [2x - (x + 1)]$ , 所以:

$$\begin{aligned}
 (x - 1)f(x) + (x + 1)^{k+n+1} &= [2x - (x + 1)](x + 1)^n \left[ (x + 1)^k + (2x)(x + 1)^{k-1} + \cdots + (2x)^k \right] \\
 &\quad + (x + 1)^{k+n+1} \\
 &= (x + 1)^n [2x - (x + 1)] \left[ (x + 1)^k + (2x)(x + 1)^{k-1} + \cdots + (2x)^k \right] \\
 &\quad + (x + 1)^{k+n+1} \\
 &= (x + 1)^n [(2x)^{k+1} - (x + 1)^{k+1}] + (x + 1)^{k+n+1} \\
 &= (2x)^{k+1} (x + 1)^n
 \end{aligned}$$

显然有  $x^{k+1} | (x - 1)f(x) + (x + 1)^{k+n+1}$ . □

**定理 1.2.** 证明  $g(x) = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n}$  整除  $f(x) = 1 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{4n}$  的充分必要条件为  $n$  是偶数。

证明. 显然:

$$g(x) = \frac{1 - (x^2)^{n+1}}{1 - x^2}, \quad f(x) = \frac{1 - (x^4)^{n+1}}{1 - x^4}$$

所以:

$$\begin{aligned}
 g(x) | f(x) &\Leftrightarrow \frac{1 - (x^2)^{n+1}}{1 - x^2} \Big| \frac{1 - (x^4)^{n+1}}{1 - x^4} \\
 &\Leftrightarrow (1 + x^2)[1 - (x^2)^{n+1}] \Big| [1 - (x^4)^{n+1}] \\
 &\Leftrightarrow (1 + x^2) | [1 + (x^2)^{n+1}] \\
 &\Leftrightarrow 1 + x^2 \text{ 的根 } \pm i \text{ 都是 } 1 + (x^2)^{n+1} \text{ 的根} \\
 &\Leftrightarrow 1 + (-1)^{n+1} = 0 \\
 &\Leftrightarrow n \text{ 为偶数}
 \end{aligned}$$
□

**定理 1.3.** 设  $f(x), g(x)$  为数域  $K$  上的多项式,  $n \in \mathbb{Z}$ . 证明  $f(x) | g(x)$  的充分必要条件为  $f^n(x) | g^n(x)$ .

证明. **(1) 必要性:** 若  $f(x) | g(x)$ , 则存在数域  $K$  上的多项式  $h(x)$  使得  $g(x) = h(x)f(x)$ , 于是  $g^n(x) = h^n(x)f^n(x)$ , 所以  $f^n(x) | g^n(x)$ .

**(2) 充分性:** 将  $f(x), g(x)$  进行标准分解得到:

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x) \cdots p_m^{r_m}(x), \quad g(x) = bq_1^{t_1}(x) \cdots q_n^{t_n}(x)$$

于是:

$$f^k(x) = a^k p_1^{kr_1}(x) \cdots p_m^{kr_m}(x), \quad g^k(x) = b^k q_1^{kt_1}(x) \cdots q_n^{kt_n}(x)$$

因为  $f^k(x) | g^k(x)$ , 所以  $f(x)$  标准分解式中的任一元素  $p_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  都是  $g(x)$  标准分解式中的元素 (记为  $q_{n_i}$ ), 同时有  $kr_i \leq kt_{n_i}$ , 即  $r_i \leq t_{n_i}$ , 于是  $f(x) | g(x)$ . □

**定理 1.4.**  $(x^d - 1) | (x^n - 1)$  的充分必要条件为  $d | n$ .

证明. (1) 充分性: 由  $d|n$  可知, 存在正整数  $k$  使得  $n = dk$ 。于是:

$$x^n - 1 = x^{dk} - 1 = (x^d)^k - 1 = (x^d - 1)[x^{d(k-1)} + \cdots + 1]$$

所以  $(x^d - 1)|(x^n - 1)$ 。

(2) 必要性: 由整数的带余除法定理, 设  $n = dq + r$ , 这里  $r = 0$  或  $0 < r < d$ 。若  $0 < r < d$ , 则:

$$x^n - 1 = x^{dq+r} - 1 = x^{dq}x^r - x^r + x^r - 1 = x^r(x^{dq} - 1) + (x^r - 1)$$

由充分性可知  $(x^d - 1)|(x^{dq} - 1)$ 。而  $(x^d - 1)|(x^n - 1)$ 。则  $(x^d - 1)|(x^r - 1)$ 。于是  $d \leq r$ , 矛盾。  $\square$

定理 1.5. 设  $h(x), k(x), f(x), g(x)$  是实系数多项式, 且:

$$(x^2 + 1)h(x) + (x + 1)f(x) + (x - 2)g(x) = 0$$

$$(x^2 + 1)k(x) + (x - 1)f(x) + (x + 2)g(x) = 0$$

则  $(x^2 + 1)|f(x)$ , 且  $(x^2 + 1)|g(x)$ 。

证明. 要证  $(x^2 + 1)|f(x)$  和  $(x^2 + 1)|g(x)$ , 即证  $\pm i$  是  $f(x)$  和  $g(x)$  的根。将  $x = \pm i$  代入上式可得:

$$(i + 1)f(i) + (i - 2)g(i) = 0, \quad (i - 1)f(i) + (i + 2)g(i) = 0$$

$$(-i + 1)f(-i) + (-i - 2)g(-i) = 0, \quad (-i - 1)f(-i) + (-i + 2)g(-i) = 0$$

解方程可得:

$$f(i) = g(i) = 0, \quad f(-i) = g(-i) = 0$$

所以  $(x - i)|f(x)$ ,  $(x + i)|f(x)$ ,  $(x - i)|g(x)$ ,  $(x + i)|g(x)$ 。因为  $(x + i, x - i) = 1$ , 所以  $(x + i)(x - i)|f(x)$ ,  $(x + i)(x - i)|g(x)$ , 即  $(x^2 + 1)|f(x)$ ,  $(x^2 + 1)|g(x)$ 。  $\square$

定理 1.6. 对于任意  $n \in \mathbb{N}^+$ , 都有  $(x^2 + x + 1) \mid [x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1}]$ 。

证明. 方法一: 令  $x^2 + x + 1 = 0$ , 求得它在复数域内的两个根分别为  $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 。将  $x_1, x_2$  代入到  $x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1}$  中可得:

$$x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1} = x^2 x^n + (x + 1)(x^2)^n = 0$$

于是  $x_1, x_2$  也是  $x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1}$  的根, 所以  $(x^2 + x + 1) \mid [x^{n+2} + (x + 1)^{2n+1}]$ 。

方法二: 设  $\alpha$  为  $x^2 + x + 1 = 0$  的根, 则  $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ , 两边同乘  $\alpha - 1$  可得  $\alpha^3 = 1$  且  $\alpha \neq 1$ 。于是:

$$\begin{aligned} \alpha^{n+2} + (\alpha + 1)^{2n+1} &= \alpha^{n+2} + (-\alpha^2)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} + (-1)^{2n+1} \alpha^{4n+2} \\ &= \alpha^{n+2} - \alpha^{3n} \alpha^{n+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

于是  $\alpha$  是  $x^{n+2} + (x+1)^{2n+1} = 0$  的根, 所以  $(x^2 + x + 1) \mid [x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}]$ 。  $\square$

**定理 1.7.** 若  $(s, n+1) = 1$ , 则  $f(x) = x^{sn} + x^{s(n-1)} + \cdots + x^s + 1$  可被  $g(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$  整除。

证明. 假设  $\alpha$  为  $g(x) = 0$  的根, 因为:

$$g(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

所以  $\alpha^{n+1} = 1$  且  $\alpha \neq 1$ 。而:

$$f(x) = \frac{1 - (x^s)^{n+1}}{1 - x^s} = \frac{1 - (x^{n+1})^s}{1 - x^s}$$

代入  $\alpha^{n+1} = 1$  则显然  $f(x) = 0$ , 即  $\alpha$  也是  $f(x) = 0$  的根,  $g(x) \mid f(x)$ 。但是如果  $\alpha$  是  $f(x)$  的根, 此时应有  $\alpha^s \neq 1$ 。若  $\alpha^s = 1$ , 因为  $(s, n+1) = 1$ , 则存在  $u, v \in \mathbb{N}$ , 使得:

$$us + v(n+1) = 1$$

于是  $\alpha = \alpha^{us+v(n+1)} = \alpha^{us}\alpha^{v(n+1)} = \alpha^{us}(\alpha^{n+1})^v = (\alpha^s)^u = 1$ , 与  $\alpha \neq 1$  矛盾, 所以  $\alpha^s - 1 \neq 0$ 。  $\square$

**定理 1.8.** 设  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  都是多项式, 并且有:

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 \mid f_1(x^{n+1}) + xf_2(x^{n+1}) + \cdots + x^{n-1}f_n(x^{n+1})$$

证明  $(x-1)^n \mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 。

证明. 设  $x^{n+1} - 1 = 0$  的不为 1 的  $n$  个根分别为  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , 此时有  $\varepsilon_i^{n+1} - 1 = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。对  $x^{n+1} - 1 = 0$  作分解可得  $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_n)$ , 所以:

$$x - \varepsilon_i \mid x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 \mid f_1(x^{n+1}) + xf_2(x^{n+1}) + \cdots + x^{n-1}f_n(x^{n+1})$$

于是  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  是  $f_1(x^{n+1}) + xf_2(x^{n+1}) + \cdots + x^{n-1}f_n(x^{n+1}) = 0$  的根, 所以:

$$\begin{cases} f_1(\varepsilon_1^{n+1}) + \varepsilon_1 f_2(\varepsilon_1^{n+1}) + \cdots + \varepsilon_1^{n-1} f_n(\varepsilon_1^{n+1}) = 0 \\ f_1(\varepsilon_2^{n+1}) + \varepsilon_2 f_2(\varepsilon_2^{n+1}) + \cdots + \varepsilon_2^{n-1} f_n(\varepsilon_2^{n+1}) = 0 \\ \vdots \\ f_1(\varepsilon_n^{n+1}) + \varepsilon_n f_2(\varepsilon_n^{n+1}) + \cdots + \varepsilon_n^{n-1} f_n(\varepsilon_n^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

即:

$$\begin{cases} f_1(1) + \varepsilon_1 f_2(1) + \cdots + \varepsilon_1^{n-1} f_n(1) = 0 \\ f_1(1) + \varepsilon_2 f_2(1) + \cdots + \varepsilon_2^{n-1} f_n(1) = 0 \\ \vdots \\ f_1(1) + \varepsilon_n f_2(1) + \cdots + \varepsilon_n^{n-1} f_n(1) = 0 \end{cases}$$



将  $f_i(1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  看作未知数, 因为  $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ ,  $i \neq j$ , 所以该线性方程组的系数行列式为:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\varepsilon_j - \varepsilon_i) \neq 0$$

所以该线性方程组只有零解, 即  $f_i(1) = 0$ , 于是  $x-1|f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 所以  $(x-1)^n|f_1(x)f_2(x)f_n(x)$ 。□

**定理 1.9.** 求多项式  $f(x)$ , 使得  $(x^2+1)|f(x)$  且  $(x^3+x^2+1)|f(x)+1$ 。

证明. 由整除的定义, 存在多项式  $g(x), h(x)$  使得

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+1)g(x) \\ f(x)+1 &= (x^3+x^2+1)h(x) \end{aligned}$$

由条件可知  $\pm i$  是  $f(x)$  的根, 将  $\pm i$  分别代入上第二式可得:

$$1 = -ih(i), \quad 1 = ih(-i)$$

取  $h(x) = x$  发现可以满足上式要求, 于是  $f(x) = x^4 + x^3 + x - 1$ 。□

**定理 1.10.** 求 7 次多项式  $f(x)$ , 使得  $(x-1)^4|f(x)+1$ , 且  $(x+1)^4|f(x)-1$ 。

证明. 因为  $(x-1)^4|f(x)+1$ , 所以 1 至少是  $f(x)+1$  的四重根, 于是 1 至少是  $f'(x)$  的三重根, 即  $(x-1)^3|f'(x)$ 。同理可得  $(x+1)^3|f'(x)$ 。因为  $((x-1)^3, (x+1)^3) = 1$ , 所以  $(x-1)^3(x+1)^3|f'(x)$ 。因为  $f'(x)$  是六次多项式, 可设:

$$f'(x) = \alpha(x-1)^3(x+1)^3$$

其中  $\alpha$  为常数。对上式积分可得:

$$f(x) = \alpha \left( \frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x \right) + c$$

因为  $(x-1)^4|f(x)+1$ ,  $(x+1)^4|f(x)-1$ , 所以  $f(1) = -1$ ,  $f(-1) = 1$ , 代入上式可解得:

$$\begin{cases} a = \frac{35}{16} \\ c = 0 \end{cases}$$

所以:

$$f(x) = \frac{5}{16}x^7 - \frac{21}{16}x^5 + \frac{35}{16}x^3 - \frac{35}{16}x$$

□

## 1.2 最大公因式与互素多项式

### 1.2.1 基本定义与定理

定义 1.1. 设  $f(x), g(x), d(x) \in K[x]$ , 若:

1.  $d(x) | f(x), g(x)$ ;
2. 若任意的  $\varphi(x) | f(x), g(x)$ , 都有  $\varphi(x) | d(x)$ ;

则称  $d(x)$  为  $f(x), g(x)$  的最大公因式。用  $(f(x), g(x))$  表示  $f(x)$  和  $g(x)$  首项系数为 1 的最大公因式。

定理 1.11 (最大公因式定理).  $K[x]$  上的任意两个多项式  $f(x), g(x)$  都有最大公因式, 并且  $f(x)$  和  $g(x)$  的任意一个最大公因式  $d(x)$  都可以表示为  $f(x)$  与  $g(x)$  的一个组合, 即:

$$\exists u(x), v(x) \in K[x], u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$

定理 1.12. 若  $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ,  $g(x) \neq 0$ , 则  $(f(x), g(x)) = (g(x), r(x))$ 。

定义 1.2. 设  $f(x), g(x) \in K[x]$ , 若  $(f(x), g(x)) = 1$ , 则称  $f(x)$  和  $g(x)$  互素。

定理 1.13.  $(f(x), g(x)) = 1$  的充分必要条件为:

$$\exists u(x), v(x) \in K[x], u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

定理 1.14. 若  $(f(x), g(x)) = 1$ , 且  $f(x) | g(x)h(x)$ , 则  $f(x) | h(x)$ 。

定理 1.15. 若  $(f(x), g(x)) = 1$ , 且  $f(x) | h(x)$ ,  $g(x) | h(x)$ , 则  $f(x)g(x) | h(x)$ 。

定理 1.16. 若  $(f(x), g(x)) = 1$ ,  $(f(x), h(x)) = 1$ , 则  $(f(x), g(x)h(x)) = 1$ 。

定理 1.17. 数域的扩张不影响最大公因式和互素。

### 1.2.2 题型

#### 求具体多项式最大公因式

##### 1. 辗转相除法

(a) 计算  $f(x)$  除以  $g(x)$ , 得到商  $q(x)$  和余数  $r(x)$ , 即:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

其中,  $r(x)$  是多项式的余数, 且满足  $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ 。

(b) 如果余数  $r(x) = 0$ , 则  $g(x)$  就是  $f(x)$  和  $g(x)$  的最大公因式。

(c) 如果余数  $r(x) \neq 0$ , 则将  $f(x)$  赋值为  $g(x)$ , 将  $g(x)$  赋值为  $r(x)$ , 然后返回第 1 步。

## 2. 因式分解法

如果求得  $f(x), g(x)$  在数域  $K$  上的标准分解式:

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x) \cdots p_m^{r_m}(x), \quad g(x) = bq_1^{t_1}(x) \cdots q_n^{t_n}(x)$$

二者最大的公共部分即为  $f(x), g(x)$  的最大公因式。

## 证明最大公因式

### 1. 定义法

要证  $d(x)$  是  $f(x), g(x)$  的最大公因式, 只要证:

(a)  $d(x)$  是  $f(x), g(x)$  的公因式;

(b) 以下二者的任意一条:

- 找到  $u(x), v(x)$  使得  $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$ ;
- 对  $f(x), g(x)$  的任意公因式  $\varphi(x)$ , 有  $\varphi(x)|d(x)$ 。

### 2. 标准分解式法

从标准分解式中找最大公因式。

### 3. 利用最大公因式的性质和等式

## 证明多项式的互素

### 1. 定义法

证明  $(f(x), g(x)) = 1$ 。

### 2. 只要证明:

$$\exists u(x), v(x) \in K[x], \quad u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

### 3. 根法

证明在复数域上  $f(x)$  的根都不是  $g(x)$  的根 (重根按重数计算)。

### 4. 反证法

若  $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$ , 则可以由:

- $f(x), g(x)$  有公共根
- $d(x)|f(x)$ , 则  $d(x)|g(x)$

推出矛盾。

### 5. 互素的性质及等式

性质 6、7、8。

## 1.2.3 例题

## 求具体多项式的最大公因式

**定理 1.18.** 设  $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 16x^2 - 5x - 6$ ,  $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$ , 求:

1.  $(f(x), g(x))$ ;

2. 多项式  $u(x), v(x)$  使得  $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$ 。

辗转相除法  
在 latex 里  
面很难搞,  
不想打了

证明. (1)  $(f(x), g(x)) = x + \frac{2}{3}$ 。

(2) 将辗转相除法的过程倒推即可求得:

$$u(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - x - 1), v(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 2x^2 - 5x - 4) \quad \square$$

## 证明最大公因式

**定理 1.19.** 证明:  $(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$ , 其中  $h(x)$  是首项系数为 1 的多项式。

证明. 令  $d(x) = (f(x), g(x))$ , 则有  $d(x)|f(x)$ ,  $d(x)|g(x)$ , 从而  $d(x)h(x)|f(x)h(x)$ ,  $d(x)h(x)|g(x)h(x)$ , 所以  $(f(x)h(x), g(x)h(x))$  是  $f(x)h(x), g(x)h(x)$  的一个公因式。

因为  $d(x) = (f(x), g(x))$ , 所以

$$\exists u(x), v(x) \in K[x], u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$

于是  $u(x)h(x)f(x) + v(x)h(x)g(x) = d(x)f(x)$ ,  $d(x)h(x)$  是  $f(x)h(x), g(x)h(x)$  的最大公因式。因为  $d(x) = (f(x), g(x))$ , 所以它的首项系数为 1, 而  $h(x)$  的首项系数也是 1, 于是  $(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$ 。  $\square$

**定理 1.20.** 设  $f_1(x) = af(x) + bg(x)$ ,  $g_1(x) = cf(x) + dg(x)$ , 且有  $ad - bc \neq 0$ 。证明  $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$ 。

证明. 令  $d(x) = (f(x), g(x))$ , 则有  $d(x)|f(x)$ ,  $d(x)|g(x)$ , 于是  $d(x)|af(x) + bg(x)$ ,  $cf(x) + dg(x)$ , 即  $d(x)|f_1(x), g_1(x)$ , 于是  $(f(x), g(x))$  是  $f_1(x), g_1(x)$  的一个公因式。

因为  $d(x) = (f(x), g(x))$ , 所以

$$\exists u(x), v(x) \in K[x], u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$

因为  $ad - bc \neq 0$ , 所以关于  $f(x), g(x)$  的方程组:

$$\begin{cases} af(x) + bg(x) = f_1(x) \\ cf(x) + dg(x) = g_1(x) \end{cases}$$

有唯一解, 可解得:

$$f(x) = \frac{1}{ad-bc}[df_1(x) - bg_1(x)], \quad g(x) = \frac{1}{ad-bc}[-cf_1(x) + ag_1(x)]$$

于是:

$$u(x)\frac{1}{ad-bc}[df_1(x) - bg_1(x)] + v(x)\frac{1}{ad-bc}[-cf_1(x) + ag_1(x)] = d(x)$$

化简可得:

$$\frac{du(x) - cv(x)}{ad-bc}f_1(x) + \frac{av(x) - bu(x)}{ad-bc}g_1(x) = d(x)$$

即  $d(x) = (f(x), g(x))$  是  $f_1(x), g_1(x)$  的最大公因式。因为  $(f(x), g(x))$  首项系数为 1, 所以  $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$ 。□

**定理 1.21.** 设  $f(x), g(x) \in K[x]$ , 且  $(f(x), g(x)) = 1$ , 又  $\varphi(x) = (x^3 - 1)f(x) + (x^3 - x^2 + x - 1)g(x)$ ,  $\psi(x) = (x^2 - 1)f(x) + (x^2 - x)g(x)$ , 则  $(\varphi(x), \psi(x)) = x - 1$ 。

证明. 由因式分解可得:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (x-1)[(x^2+x+1)f(x) + (x^2+1)g(x)] \\ \psi(x) &= (x-1)[(x+1)f(x) + xg(x)]\end{aligned}$$

所以  $x-1$  是  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  的一个公因式。由定理 1.19 可知:

$$(\varphi(x), \psi(x)) = ((x^2+x+1)f(x) + (x^2+1)g(x), (x+1)f(x) + xg(x))(x-1)$$

接下来只需证明  $((x^2+x+1)f(x) + (x^2+1)g(x), (x+1)f(x) + xg(x)) = 1$ 。

考虑以  $f(x), g(x)$  为自变量的方程组:

$$\begin{cases} \varphi(x) = (x^3-1)f(x) + (x^3-x^2+x-1)g(x) \\ \psi(x) = (x^2-1)f(x) + (x^2-x)g(x) \end{cases}$$

其系数行列式为  $-x^3 - x^2 + 2x + 1$ , 由 Cramer 法则可知 □ 没搞懂

**定理 1.22.** 设  $f(x), g(x)$  是两个不全为 0 的多项式, 则  $\forall n \in N$ , 有  $(f(x), g(x))^n = (f^n(x), g^n(x))$ 。

证明. 令  $d(x) = (f(x), g(x))$ , 则存在  $f_1(x), g_1(x) \in K[x]$ , 使得:

$$f(x) = d(x)f_1(x), \quad g(x) = d(x)g_1(x)$$

同时有  $(f_1(x), g_1(x)) = 1$ , 从而  $(f_1^n(x), g_1^n(x)) = 1$ , 所以:

$$\begin{aligned}(f^n(x), g^n(x)) &= (d^n(x)f_1^n(x), d^n(x)g_1^n(x)) \\ &= (f_1^n(x), g_1^n(x))d^n(x) \\ &= (f(x), g(x))^n\end{aligned}$$

其中第一行到第二行利用到了定理 1.19。□

## 证明多项式的互素

**定理 1.23.** 设  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x), g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x) \in K[x]$ , 则:

$$(f_1(x)f_2(x) \cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x) \cdots g_n(x)) = 1 \Leftrightarrow (f_i(x), g_j(x)) = 1$$

其中  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ 。

**证明.** (1) **必要性:** 因为  $(f_1(x)f_2(x) \cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x) \cdots g_n(x))$ , 所以  $\exists u(x), v(x) \in K[x]$  使得:

$$u(x)f_1(x)f_2(x) \cdots f_m(x) + v(x)g_1(x)g_2(x) \cdots g_n(x) = 1$$

即:

$$f_i(x)[u(x)f_1(x) \cdots f_{i-1}(x)f_{i+1}(x) \cdots f_m(x)] + g_j(x)[v(x)g_1(x) \cdots g_{j-1}(x)g_{j+1}(x) \cdots g_n(x)] = 1$$

所以  $(f_i(x), g_j(x)) = 1$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ 。

(2) **充分性:** 取  $f_1(x)$ , 因为  $(f_1(x), g_j(x)) = 1, i = 1, 2, \dots, n$ , 由定理 1.16 可得,  $(f_1(x), g_1(x) \cdots g_n(x)) = 1$ 。同理可得对任意的  $i = 1, 2, \dots, m$ , 都有  $(f_i(x), g_1(x) \cdots g_n(x)) = 1$ , 再利用定理 1.16 即可得到  $(f_1(x)f_2(x) \cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x) \cdots g_n(x)) = 1$ 。  $\square$

**定理 1.24.** 对  $\forall n \in \mathbb{N}^+$ , 令  $f_n(x) = x^{n+2} - (x+1)^{2n+1}$ , 有  $(x^2 + x + 1, f_n(x)) = 1$ 。

**证明.** 设  $\alpha$  是  $x^2 + x + 1 = 0$  的根, 则  $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \alpha^3 = 1$ 。于是:

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= \alpha^{n+2} - (\alpha+1)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} - (-\alpha^2)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} + \alpha^{4n+2} \\ &= \alpha^{n+2} + \alpha^{3n}\alpha^{n+2} \\ &= 2\alpha^{n+2} \end{aligned}$$

在复数域内求解方程  $x^2 + x + 1 = 0$  可得:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

所以  $f_n(\alpha) = 2\alpha^{n+2} \neq 0$ , 即  $\alpha$  不是  $f_n(x)$  的根。由上我们得到  $x^2 + x + 1 = 0$  的根都不是  $f_n(x)$  的根, 所以  $(x^2 + x + 1, f_n(x)) = 1$ 。  $\square$

**定理 1.25.**  $f(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1, g(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ , 其中  $m, n \in \mathbb{N}$ , 则有:

$$(m, n) = 1 \Leftrightarrow (f(x), g(x)) = 1$$

证明. (1) 充分性: 若  $(m, n) = d \neq 1$ , 设  $m = ds$ ,  $n = dt$ , 则:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{x^{ds} - 1}{x - 1} \\ &= \frac{x^d - 1}{x - 1} [x^{d(s-1)} + x^{d(s-2)} + \cdots + x^d + 1] \\ &= (x^{d-1} + \cdots + x + 1) [x^{d(s-1)} + x^{d(s-2)} + \cdots + x^d + 1] \end{aligned}$$

而:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{dt} - 1}{x - 1} \\ &= \frac{x^d - 1}{x - 1} [x^{d(t-1)} + x^{d(t-2)} + \cdots + x^d + 1] \\ &= (x^{d-1} + \cdots + x + 1) [x^{d(t-1)} + x^{d(t-2)} + \cdots + x^d + 1] \end{aligned}$$

可以发现  $f(x)$  与  $g(x)$  有次数大于 0 的公因式  $x^{d-1} + \cdots + x + 1$ , 与  $(f(x), g(x)) = 1$  矛盾, 所以  $(m, n) = 1$ 。

(2) 必要性: 若  $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$ , 则  $f(x), g(x)$  有公共根  $\alpha$ 。由  $n$  次方差公式可得:

$$\begin{aligned} \alpha^m - 1 &= (\alpha - 1)(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha + 1) = 0 \\ \alpha^n - 1 &= (\alpha - 1)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1) = 0 \end{aligned}$$

于是  $\alpha^m = \alpha^n = 1$ , 且有  $\alpha \neq 1$ 。由  $(m, n) = 1$  可知, 存在  $u, v \in \mathbb{N}$  使得  $um + vn = 1$ , 于是:

$$\alpha = \alpha^{um+vn} = (\alpha^m)^u (\alpha^n)^v = 1$$

矛盾, 所以  $(f(x), g(x)) = 1$ 。□

## 1.3 多项式的根

定理 1.26. 若  $f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x) \cdots p_s^{r_s}(x)$ , 则:

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = ap_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x)$$

### 1.3.1 题型

#### 重根的证明

##### 1. 互素法

- 若  $f(x)$  是一个复多项式, 则  $f(x)$  无重根的充分必要条件是  $(f(x), f'(x)) = 1$ 。
- 若  $f(x)$  是一般数域  $K$  上的多项式, 若  $(f(x), f'(x)) = 1$ , 则  $f(x)$  无重因式, 自然无重根。

##### 2. 反证法

### 1.3.2 例题

**定理 1.27.** 如果  $f'(x)|f(x)$ , 证明:  $f(x)$  有  $n$  重根, 其中  $n = \deg f(x)$

证明. 由  $f'(x)|f(x)$ , 所以  $f'(x) = (f(x), f'(x))$ 。因为  $\deg f'(x) = n - 1$ , 则:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$$

是一次多项式, 设  $\varphi(x) = a(x - b)$ ,  $a \neq 0$ 。由定理 1.26 可得  $f(x)$  与  $\varphi(x)$  有相同的不可约因式, 又因为  $\deg f(x) = n$ , 所以  $f(x) = a(x - b)^n$ ,  $f(x)$  有  $n$  重根。□

**定理 1.28.** 设  $f(x)$  是复数域中的  $n$  次多项式, 且  $f(0) = 0$ , 令  $g(x) = xf(x)$ , 若  $f'(x)|g'(x)$ , 则  $g(x)$  有  $n + 1$  重零根。

证明. 由  $f(0) = 0$  可知 0 是  $f(x)$  的根。因为  $g(x) = xf(x)$ , 所以  $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ 。因为  $f'(x)|g'(x)$ , 所以  $f'(x)|f(x)$ 。由上一题的结论,  $f(x)$  有  $n$  重根, 又因为 0 是  $f(x)$  的根, 所以 0 就是  $f(x)$  的  $n$  重根。设  $f(x) = ax^n$ , 于是  $g(x) = ax^{n+1}$ , 即  $g(x)$  有  $n + 1$  重零根。□

### 1.3.3 复根、实根、有理根与整数根

**定理 1.29.** 设  $f(x)$  为整系数多项式:

1. 证明: 若  $f(1 + \sqrt{2}) = 0$ , 则  $f(1 - \sqrt{2}) = 0$ ;

2. 推测结论 (1) 的推广形式 (不需要证明)。

证明. (1)  $f(x)$  有因式:

$$[x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})] = x^2 - 2x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$$

作带余除法, 设:

$$f(x) = (x^2 - 2x - 1)q(x) + ax + b$$

其中  $a, b \in \mathbb{Z}$ 。由  $f(1 + \sqrt{2}) = 0$  可知,  $a(1 + \sqrt{2}) + b = 0$ , 于是  $a = b = 0$ , 所以  $f(x) = (x^2 - 2x - 1)q(x)$ , 显然  $f(1 - \sqrt{2}) = 0$ 。

(2) 若  $f(a + b\sqrt{2}) = 0$ , 则  $f(a - b\sqrt{2}) = 0$ , 其中  $a, b \in \mathbb{Z}$ 。□

**定理 1.30.** 已知整系数多项式  $f(x)$  满足  $f(2)f(21) = 505$ , 证明  $f(x)$  无整数根。

证明. 因为  $f(2)f(21) = 505$ , 所以  $f(2)$  和  $f(21)$  都是奇数。假设  $\alpha$  是  $f(x)$  的整数根, 则  $f(x) = (x - \alpha)q(x)$ , 其中  $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ , 则  $2 - \alpha, 21 - \alpha$  中至少有一个是偶数, 于是  $f(2)$  与  $f(21)$  中至少有一个是偶数, 矛盾, 所以  $f(x)$  无整数根。□

**定理 1.31.** 求一个一元多项式, 使它的各根分别等于  $f(x) = 5x^4 - 6x^3 + x^2 + 4$  的各根减 1。



证明. 令  $y = x - 1$ , 则  $x = y + 1$ 。

$$g(y) = 5(y+1)^4 - 6(y+1)^3 + (y+1)^2 + 4$$

$g(y)$  即为所求多项式。  $\square$

**定理 1.32.** 求一个一元多项式, 使它的各根分别等于  $f(x) = 15x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 21x + 13$  的倒数。

证明. 因为  $f(0) = 13$ , 所以 0 不是  $f(x)$  的根。令  $y = \frac{1}{x}$ , 则  $x = \frac{1}{y}$ 。

$$\begin{aligned} y^4 f(x) &= y^4 \left[ 15 \left( \frac{1}{y} \right)^4 - 2 \left( \frac{1}{y} \right)^3 + 11 \left( \frac{1}{y} \right)^2 - 21 \left( \frac{1}{y} \right) + 13 \right] \\ &= 13y^4 - 21y^3 + 11y^2 - 2y + 15 \\ &= g(y) \end{aligned}$$

$g(y)$  即为所求多项式。  $\square$

**定理 1.33.** 设  $f(x)$  为有理数域  $\mathbb{Q}$  上  $n(n \geq 2)$  次多项式, 并且它在  $\mathbb{Q}$  上不可约, 如果  $f(x)$  的一个根  $\alpha$  的倒数  $\frac{1}{\alpha}$  仍是  $f(x)$  的根, 证明  $f(x)$  每一个根的倒数也是  $f(x)$  的根。

倒根变换需要严格证明

证明. 假设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , 其中  $a_n \neq 0$ 。由  $f(x)$  不可约可得  $a_0 \neq 0$ , 于是 0 不是  $f(x)$  的根。对  $f(x)$  作倒根变换, 得到多项式:

$$g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

由  $\frac{1}{\alpha}$  使  $f(x)$  的根, 则  $\alpha$  是  $g(x)$  的根。因为  $\alpha$  也是  $f(x)$  的根, 所以  $(f(x), g(x)) \neq 1$ 。因为  $f(x)$  不可约, 所以  $f(x) | g(x)$ 。任取  $f(x)$  的根  $\beta$ , 则  $\beta$  也是  $g(x)$  的根, 于是  $\frac{1}{\beta}$  是  $f(x)$  的根。  $\square$

**定理 1.34.** 求以  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  为根的有理系数不可约多项式。

证明. 设  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  且以  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  为根, 则  $\sqrt{2} - \sqrt{3}, -\sqrt{2} - \sqrt{3}, -\sqrt{2} + \sqrt{3}$  也是  $f(x)$  的根。令

$$f(x) = [x - (\sqrt{2} + \sqrt{3})][x - (\sqrt{2} - \sqrt{3})][x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})][x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})] = x^4 - 10x^2 + 1$$

接下来证明  $f(x)$  在  $\mathbb{Q}[x]$  上不可约。

如果  $f(x)$  有有理根, 必为  $\pm 1$ 。但  $\pm 1$  都不是  $f(x)$  的根, 所以  $f(x)$  不能分解一个一次多项式与一个三次多项式的乘积。其次, 如果  $f(x)$  在  $\mathbb{Q}[x]$  上分解为两个二次多项式的乘积, 则  $f(x)$  必可在整系数多项式上分解为两个二次多项式的乘积, 即:

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

其中  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ 。比较两边系数可得：

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d + ac = -10 \\ ad + bc = 0 \\ bd = 1 \end{cases}$$

因为  $bd = 1$  且  $bd \in \mathbb{Z}$ ，所以  $b = d = -1$  或  $b = d = 1$ 。

当  $b = d = 1$  时， $a = -c$ ， $c^2 = 12$ ，但是  $c \in \mathbb{Z}$ ，矛盾。

当  $b = d = -1$  时， $c^2 = 8$ ，但是  $c \in \mathbb{Z}$ ，矛盾。

所以  $f(x)$  无法分解为两个二次多项式的乘积。

综上， $f(x)$  既无法分解为一个一次多项式与一个三次多项式的乘积，也无法分解为两个二次多项式的乘积，所以  $f(x)$  不可约。 $f(x)$  即为所求。  $\square$

### 1.3.4 三个常用数域上的多项式

#### 复数域

代数基本定理任何  $n$  次多项式在复数域中恰好有  $n$  个根。每个次数大于 0 的多项式在复数域上都可以唯一分解为一次因式的乘积。韦达定理

#### 实数域

虚根的共轭也是虚根次数大于 2 的实系数多项式在实数域上是可约的实多项式分解定理

#### 有理数域

如果能够分解为有理系数多项式的乘积则一定可以分解为整系数多项式的乘积根与系数的关系

**定理 1.35.** 设  $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$  是一个整系数多项式，而  $\frac{r}{s}$  是一个有理数，其中  $r, s$  互素，则

**定理 1.36 (艾森斯坦判别法).** 设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  是整系数多项式，若存在素数  $p$ ，使得：

1.  $p \nmid a_n$ ;
2.  $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ ;
3.  $p^2 \nmid a_0$ ;

则  $f(x)$  在有理数域上不可约。

**定理 1.37.** 若  $f(x)$  是  $n(n > 0)$  次整系数多项式, 令  $x = y + a$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ , 得整系数多项式  $g(y) = f(y + a)$ , 则  $f(x)$  在  $\mathbb{Q}$  上可约的充分必要条件是  $g(x)$  在  $\mathbb{Q}$  上可约。

**定理 1.38.** 次数大于 1 的复多项式都是可约的。次数大于 2 的实多项式都是可约的。次数等于 1 的多项式都是不可约的。

### 题型

#### 1. 整系数多项式在有理数域上可约性的判别

##### (a) 方法一:

艾森斯坦判别法或对多项式作变换后再使用艾森斯坦判别法

##### (b) 方法二:

适合抽象的整系数多项式证明不可约

##### (c) 方法三:

讨论有理根。判断二次或三次有理多项式不可约只需证明它没有有理根, 当次数大于 3 时, 此结论不再成立。

### 例题

**定理 1.39.** 设  $p$  为素数, 则

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^p}{p!}$$

在有理数域上不可约。

证明. 令  $g(x) = p!f(x)$ , 则  $g(x)$  的可约性与  $f(x)$  的可约性是一样的。而:

$$g(x) = x^p + px^{p-1} + \cdots + \frac{p!}{2!} + p!x + p!$$

显然  $g(x)$  是一个整系数多项式。对于素数  $p$ , 有  $p \nmid a_n = 1$ ,  $p | a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ ,  $p^2 \nmid a_0 = p!$ .  $\square$

**定理 1.40.** 判别多项式  $f(x) = x^5 - 5x + 1$  在有理数域上是否可约。

证明. 令  $x = y - 1$ , 则  $g(y) = f(y - 1)$ , 即:

$$g(y) = y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 10y^2 + 5$$

取  $p = 5$ , 由艾森斯坦判别法, 该多项式在有理数域上不可约。  $\square$

**定理 1.41.** 关于任意素数  $p$ , 多项式:

$$f(x) = px^4 + 2px^3 - px + 3p - 1$$

在有理数域上不可约。

证明. 因为  $p$  是一个素数, 所以  $3p - 1 \neq 0$ . 令  $y = \frac{1}{x}$ , 则:

$$f(y) = (3p - 1)y^4 - py^3 + 2px + p$$

取素数  $p$ , 由艾森斯坦判别法, 该多项式在有理数域上不可约。□

**定理 1.42.** 设  $n$  是大于 1 的整数, 证明  $\sqrt[n]{2008}$  是无理数。

证明. 令  $f(x) = x^n - 2008$ , 取素数  $p = 251$ , 由艾森斯坦判别法, 该多项式在有理数域上不可约, 即  $f(x)$  在有理数域上没有根, 而  $\sqrt[n]{2008}$  是  $f(x)$  的根, 所以  $\sqrt[n]{2008}$  是无理数。□

**定理 1.43.** 设  $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$ , 其中  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是两两互不相同的整数, 证明  $f(x)$  在有理数域上不可约。

证明. 假设  $f(x)$  可约, 则可设:

$$f(x) = g(x)h(x)$$

其中  $g(x), h(x)$  为整系数多项式, 并且有  $\deg g(x) < \deg f(x) = n$ ,  $\deg h(x) < \deg f(x) = n$ 。因为  $f(a_i) = -1$ , 所以  $g(a_i)h(a_i) = -1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 此时有  $g(a_i) = 1, h(a_i) = -1$  或  $g(a_i) = -1, h(a_i) = 1$ 。无论是哪种情况, 都有  $g(a_i) + h(a_i) = 0$ , 即  $g(x) + h(x)$  有  $n$  个互不相等的根  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 但是  $\deg(g(x) + h(x)) < n$ , 矛盾, 所以  $f(x)$  不可约。□

**定理 1.44.** 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是两两互不相同的整数, 证明  $f(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1$  在有理数域上不可约。

证明. 假设  $f(x)$  可约, 则存在次数大于 0 的首项系数为 1 的整系数多项式  $g(x), h(x)$  使得:

$$f(x) = g(x)h(x)$$

因为  $f(a_i) = g(a_i)h(a_i) = 1$ , 则  $g(a_i) = h(a_i) = 1$  或  $g(a_i) = h(a_i) = -1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。若  $g(a_i) = -1$ , 由  $g(x)$  是首项系数为 1 的多项式, 则存在充分大的  $c$ , 使得  $g(c) = 0$ , 从而  $g(x)$  有实根。这与  $f(x)$  无实根矛盾, 故  $g(a_i) \neq -1$ 。若  $g(a_i) = 1$ , 因为  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $g(x) - 1, h(x) - 1$  的  $n$  个互不相同的根, 则  $\deg(g(x) - 1) \geq n$ ,  $\deg(h(x) - 1) \geq n$ 。因为  $\deg f(x) = \deg g(x) + \deg h(x)$  且有  $\deg f(x) = 2n$ , 于是  $\deg(g(x) - 1) = \deg(h(x) - 1) = n$ , 所以:

$$g(x) - 1 = h(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

所以:

$$f(x) = [(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1]^2$$

与  $f(x)$  的表达式矛盾, 所以  $f(x)$  不可约。□

## 1.3.5 多项式的分解

**定理 1.45.** 求多项式  $x^n - 1$  在复数域上和实数域上的标准分解式。

**证明.** (1) **复数域:** 在复数域上  $x^n - 1$  有  $n$  个复根, 设:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

所以:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_{n-1})$$

(2) **实数域:**

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \sin \frac{2k\pi}{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = 0 \text{ 或 } \frac{2k\pi}{n} = \pi \\ &\Leftrightarrow k = 0 \text{ 或 } k = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

而:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_k &= \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n} \\ &= \cos \left( 2\pi - \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( 2\pi - \frac{2k\pi}{n} \right) \\ &= \cos \frac{2(n-k)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-k)\pi}{n} \\ &= \varepsilon_{n-k} \end{aligned}$$

因为  $\varepsilon_k + \varepsilon_{n-k} = 2 \cos \frac{2k\pi}{n}$ ,  $\varepsilon_k \bar{\varepsilon}_k = 1$ , 当  $n$  为奇数时,  $x^n - 1$  恰有一个实根  $\varepsilon_0 = 1$ , 所以:

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_{\frac{n-1}{2}})(x - \varepsilon_{\frac{n+1}{2}}) \cdots (x - \varepsilon_{n-2})(x - \varepsilon_{n-1}) \\ &= (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_{\frac{n-1}{2}})(x - \bar{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}}) \cdots (x - \bar{\varepsilon}_2)(x - \bar{\varepsilon}_1) \\ &= (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \bar{\varepsilon}_1)(x - \varepsilon_2)(x - \bar{\varepsilon}_2) \cdots (x - \varepsilon_{\frac{n-1}{2}})(x - \bar{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}}) \\ &= (x - 1)[x^2 - (\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1)x + \varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_1][x^2 - (\varepsilon_2 + \bar{\varepsilon}_2)x + \varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_2] \cdots \\ &\quad [x^2 - (\varepsilon_{\frac{n-1}{2}} + \bar{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}})x + \varepsilon_{\frac{n-1}{2}} \bar{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}}] \\ &= (x - 1) \left( x^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} x + 1 \right) \left( x^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{n} x + 1 \right) \cdots \left( x^2 - 2 \cos \frac{(n-1)\pi}{n} x + 1 \right) \\ &= (x - 1) \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left( x^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} x + 1 \right) \end{aligned}$$

当  $n$  为偶数时,  $x^n - 1$  有两个 1 实根  $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_{\frac{n}{2}} = -1$ , 所以:

$$\begin{aligned}
 x^n - 1 &= (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_{\frac{n-2}{2}})(x - \varepsilon_{\frac{n}{2}})(x - \varepsilon_{\frac{n+2}{2}}) \cdots (x - \varepsilon_{n-2})(x - \varepsilon_{n-1}) \\
 &= (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_{\frac{n-2}{2}})(x + 1)(x - \bar{\varepsilon}_{\frac{n-2}{2}}) \cdots (x - \bar{\varepsilon} + 2)(x - \bar{\varepsilon}_1) \\
 &= (x - 1)(x + 1)(x - \varepsilon_1)(x - \bar{\varepsilon}_1)(x - \varepsilon_2)(x - \bar{\varepsilon}_2) \cdots (x - \varepsilon_{\frac{n-2}{2}})(x - \bar{\varepsilon}_{\frac{n-2}{2}}) \\
 &= (x - 1)(x + 1) \left( x^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} x + 1 \right) \left( x^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{n} x + 1 \right) \cdots \left( x^2 - 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{n} x + 1 \right) \\
 &= (x - 1)(x + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \left( x^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} x + 1 \right) \quad \square
 \end{aligned}$$

**定理 1.46.** 求多项式  $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$  在实数域和复数域中的标准分解式。

证明. 令  $g(x) = (x - 1)f(x)$ 。

□

## Chapter 2

### 行列式

---

**定理 2.1.** 求  $f(x)$  中  $x^4$  与  $x^3$  的系数, 其中:

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ x & 2x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4x \end{vmatrix}$$

**定理 2.2.** 设  $n \geq 2$ , 证明: 如果一个  $n$  阶行列式  $D$  中的元素为 1 或  $-1$ , 则  $D$  必为偶数。

证明. 将  $D$  按行列式的定义展开一共有  $n!$  项, 因为  $D$  中的元素为 1 或  $-1$ , 所以展开式中每一项也只能是 1 或  $-1$ 。假设展开式中有  $k$  项为  $-1$ , 则剩余  $n! - k$  项为 1, 所以  $|D| = -k + (n! - k) = n! - 2k$ 。若  $k$  为偶数, 则  $|D|$  为偶数; 若  $k$  为奇数, 则  $|D|$  也是偶数。综上,  $D$  必为偶数。  $\square$

**定理 2.3.** 证明元素为 0, 1 的三阶行列式  $D$  的值只能是 0,  $\pm 1, \pm 2$ 。

证明.  $\square$

**定理 2.4.** 计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - x^2 \end{vmatrix}$$

证明. 当  $2 - x^2 = 1$  时, 一二两行相同,  $|D| = 0$ , 所以  $|D|$  有因式  $(x - 1)(x + 1)$ 。当  $9 - x^2 = 5$  时, 一二两行相同,  $|D| = 0$ , 所以  $|D|$  有因式  $(x - 2)(x + 2)$ 。因为  $D$  是四阶行列式, 所以可设  $|D| = k(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$ , 其中  $k$  为常数。  $\square$

定理 2.5. 已知五阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

求  $A_{41} + A_{42} + A_{43}$  和  $A_{44} + A_{45}$ 。

证明.

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + 2(A_{44} + A_{45}) = 27$$

$$2(A_{41} + A_{42} + A_{43}) + A_{44} + A_{45} = 0$$

或者更换第四行元素使得新行列式的值等于  $A_{41} + A_{42} + A_{43}$  和  $A_{44} + A_{45}$ 。  $\square$

定理 2.6. 设  $n$  阶行列式:

$$1$$

证明.

$$A^* = |A|A^{-1}$$

分块矩阵  $\square$

定理 2.7. 已知  $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$  满足条件:

1.  $a_{ij} = A_{ij}$ , 其中  $A_{ij}$  是  $a_{ij}$  的代数余子式

2.  $a_{11} \neq 0$ 。

计算行列式  $|A|$ 。

定理 2.8. 计算  $2n$  阶行列式:

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & & & & d_2 & \\ & & c_2 & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ c_n & & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

证明. 利用 Laplace 定理, 将第 1 行与第  $2n$  行展开, 得到:

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} (-1)^{1+2n+1+2n} D_{2n-2} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2} = \prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i) \quad \square$$



**定理 2.9.** 计算  $n$  阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

证明. 将该行列式展开:

$$\begin{aligned} D_n &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix} + b_n (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^n a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

□

爪形

**定理 2.10.** 计算  $n+1$  阶行列式:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

其中  $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ 。

证明. 显然:

$$\begin{aligned}
 D_{n+1} &= \begin{vmatrix} a_0 - \frac{1}{a_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_0 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
 &= \cdots \\
 &= \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
 &= \prod_{i=1}^n a_i \left( a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \quad \square
 \end{aligned}$$

定理 2.11. 计算 5 阶行列式:

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

证明. 显然:

$$\begin{aligned}
 D_5 &= (1-a) \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a \begin{vmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \\
 &= (1-a) D_4 + a \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \\
 &= (1-a) D_4 + a D_3 \quad \square
 \end{aligned}$$

定理 2.12. 计算  $n$  阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

证明. 显然:

$$\begin{aligned} D_n &= 5D_{n-1} + (-1)^{1+2}(-2) \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5D_{n-1} + (-1)^{1+2}(-2)(-3) \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5D_{n-1} - 6D_{n-2} \end{aligned}$$

□

定理 2.13. 证明:

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix}$$

证明. 第  $n$  行展开, 显然:

$$\begin{aligned} D_n &= 2 \cos \alpha D_{n-1} + 1 \times (-1)^{n+n-1} \begin{vmatrix} 2 \cos \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cos \alpha D_{n-1} + (-1)^{2n-1} \cdot 1 \cdot (-1)^{n-1+n-1} D_{n-2} \\ &= 2 \cos \alpha D_{n-1} - D_{n-2} \end{aligned}$$

$$x^2 - 2 \cos \alpha x + 1 = 0$$

□

### Hessenberg

定理 2.14. 计算  $n$  阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix}$$

证明. 按第一列展开:

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\ &= xD_{n-1} + a_n \\ &= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n \\ &= x^2D_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^2(xD_{n-3} + a_{n-2}) + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^3D_{n-3} + x^2a_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &= \cdots \\ &= x^{n-1}D_1 + \sum_{i=2}^n a_i x^{n-i} \\ &= x^{n-1}(x + a_1) + \sum_{i=2}^n a_i x^{n-i} \\ &= x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} \end{aligned}$$

□

定理 2.15. 计算  $n$  阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

证明. 按第一行展开得:

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (-1)^{n-1}$$

□

### 行和、列和相同

**定理 2.16.** 计算  $n$  阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

证明. 将所有列都加到第一列可得:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i - m \right) (-m)^{n-1} \end{aligned}$$

□

**定理 2.17.** 设  $x_1, x_2, x_3$  是方程  $x^3 + px + q = 0$  的三个根, 求行列式:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$$

证明. 显然:

$$x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \cdots$$

所以  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , 把所有行都加到第一行, 得到:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0$$

□

## 升阶

定理 2.18. 计算  $n$  阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

其中  $b_1 b_2 \cdots b_n \neq 0$ 。

证明. 加边可得:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}\right) \prod_{i=1}^n b_i \end{aligned} \quad \square$$

定理 2.19. 计算  $n$  阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + x_1^2 & x_2 x_1 & \cdots & x_n x_1 \\ x_1 x_2 & 1 + x_2^2 & \cdots & x_n x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 x_n & x_2 x_n & \cdots & 1 + x_n^2 \end{vmatrix}$$

证明. 加边  $(1, x_1, x_2, \dots, x_n)$  可得:

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & x_2x_1 & \cdots & x_nx_1 \\ 0 & x_1x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & x_nx_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1x_n & x_2x_n & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2
 \end{aligned}$$

□

### 相邻行列元素相差 1

定理 2.20. 计算  $n$  阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

证明. 第  $i$  行减去第  $i+1$  行, 化下三角。

□

定理 2.21. 计算  $n$  阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

证明. 第  $n$  行减去第  $n-1$  行, 依次从下往上. □

### Vandermonde 行列式

定理 2.22. 计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

证明. 构造行列式:

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} \\ &= A_{15} + xA_{25} + x^2A_{35} + x^3A_{45} + x^4A_{55} \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(x-a)(c-b)(d-b)(x-b)(d-c)(x-c)(x-d) \\ &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \end{aligned}$$

而  $A_{45} = (-1)^{4+5}D = -D$ , 找  $x^3$  的系数即可. □

### 其它

定理 2.23. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  都是 3 维列向量, 记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$ , 已知  $|A| = 1$ , 求  $|B|$ .

证明.

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|B| = |A||C|$$

□



**定理 2.24.** 设 3 阶矩阵  $A$  的伴随矩阵为  $A^*$ , 且  $|A| = \frac{1}{2}$ , 求  $|(3A)^{-1} - 2A^*|$ 。

证明. 伴随矩阵化为  $A^{-1}$ 。 □

**定理 2.25.** 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵,  $|A| = 2, |B| = -3$ , 求  $|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}|$ 。

证明. 伴随矩阵化逆矩阵。 □

**定理 2.26.** 设  $A, B$  分别为 3 阶矩阵与 5 阶矩阵,  $|A| = 2, |B| = 3$ , 令:

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (3A)^* \\ (2B)^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

求  $|C|$ 。

证明. 伴随矩阵化逆矩阵。 □

**定理 2.27.** 设  $A$  为三阶矩阵, 特征值为  $-1, 0, 1$ 。令  $B = A^3 - 2A^2 + E$ , 求  $|B|$  和  $|B + E|$ 。

证明.  $B$  的特征值为  $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1$ ,  $B + E$  的特征值为  $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2$ 。 □

**定理 2.28.** 设  $A$  为三阶矩阵,  $|A - E| = |A + 2E| = |2A + 3E| = 0$ , 求  $|A^* - 3E|$ 。

证明. 求出  $A^*$  与特征值之间的关系, 进行转化。求  $A$  的特征值。 □

**定理 2.29.** 设  $A, B$  为四阶矩阵且二者相似, 如果  $B^*$  的特征值为  $1, -1, 2, 4$ , 求  $|A^*|$ 。

证明.

$$|B^*| = -8 = |B|^3, |B| = -2 = |A|, |A^*| = |A|^3 = -8$$

**定理 2.30.** 设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵,  $A^2 + 2A = \mathbf{0}$ ,  $\text{rank}(A) = k$ , 求  $|A + 3E|$ 。

证明. 由  $A^2 + 2A = \mathbf{0}$  可知  $A$  的特征值为 0 或  $-2$ 。 $A$  的相似标准形对角线上有  $k$  个  $-2$ 、 $n - 2$  个 0。 □

**定理 2.31.** 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 矩阵  $B$  满足  $ABA^* = 2BA^* + E$ , 求  $|B|$ 。

证明. 两边同右乘  $A$  消去  $A^*$ , 可得:

$$3AB = 6B + A, 3(A - 2E)B = A$$

**定理 2.32.**  $\alpha$  是一个单位列向量,  $A = E - \alpha\alpha^T$ , 求  $|A|$ 。

证明.  $A\alpha = (E - \alpha\alpha^T)\alpha = \alpha - \alpha\alpha^T\alpha = \alpha - \alpha = \mathbf{0}$ ,  $|A| = 0$ 。 □

**定理 2.33.** 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵,  $A^2 = E, B^2 = E, |A| + |B| = 0$ , 求  $|A + B|$ 。

证明. 由条件可知  $|A|, |B|$  二者中一个为 1, 一个为  $-1$ 。

$$|A + B| = |AE + EB| = |AB^2 + A^2B| = |A(B + A)B| = |A||A + B||B| = -|A + B| \quad \square$$

## 行列式乘法及其应用

定理 2.34. 计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} D^2 &= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} \\ &= \left| \text{diag}\{a^2 + b^2 + c^2 + d^2, a^2 + b^2 + c^2 + d^2, a^2 + b^2 + c^2 + d^2, a^2 + b^2 + c^2 + d^2\} \right| \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 \end{aligned}$$

所以  $|D| = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ 。根据行列式的定义,  $|D|$  中  $a^4$  系数为 1, 所以  $|D| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ 。□

定理 2.35. 证明:

$$D = \begin{vmatrix} ax + by & ay + bz & az + bx \\ ay + bz & az + bx & ax + by \\ az + bx & ax + by & ay + bz \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

证明. 显然:

$$D = \left| \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} \right| = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \quad \square$$

## 求解行列式方程

定理 2.36. 求方程:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

的根。

证明. Vandermonde 行列式, 显然根为 1, 2, -2 (三次多项式最多三个根)。□

定理 2.37. 解方程:

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明. 观察法:  $x = a_1, a_2, \dots, a_n$

□

定理 2.38. 计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & y \\ z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$$

证明. 分类讨论, 当  $y = z$  时化为行和相同的行列式。当  $y \neq z$  时:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & 0 \\ z & x & \cdots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & 0 \\ z & z & \cdots & z & x-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & y \\ z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} \\ &= (x-y)D_{n-1} + \begin{vmatrix} x-z & y-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-z & 0 \\ z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} \\ &= (x-y)D_{n-1} + y(x-z)^{n-1} \end{aligned}$$

而由  $D_n$  的转置可以得到:

$$D_n = (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1}$$

于是:

$$\begin{cases} D_n - (x-y)D_{n-1} = y(x-z)^{n-1} \\ D_n - (x-z)D_{n-1} = z(x-y)^{n-1} \end{cases}$$

由 Cramer 法则可以解得:

$$D_n = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}$$

□

定理 2.39. 计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & x_2 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & x_{n-1} & \alpha \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n \end{vmatrix}$$

证明. 当  $\alpha \neq \beta$  时的情况与上一题可以一样. 当  $\alpha = \beta$  时有:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \alpha & x_2 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & x_{n-1} & \alpha \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & x_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 - \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n - \alpha \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -\alpha & x_1 - \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & x_2 - \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\alpha & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} - \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n - \alpha \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

定理 2.40. 计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

证明. 加边:

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ 0 & a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

把前两列的第三行到第  $n+2$  行全部化为 0。 □

**定理 2.41.** 求行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

的展开式中正项的数目。

证明. 设正项总数为  $x$ , 则负项总数为  $n! - x$ 。考虑到展开式中每一项不是 1 就是  $-1$ , 所以:

$$D = x - (n! - x) = 2x - n!$$

由之前的公式求出  $D$ ，代入即可解得  $x$ 。

□

**定理 2.42.** 计算行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 - ax_1y_1 & -ax_1y_2 & \cdots & -ax_1y_n \\ -ax_2y_1 & 1 - ax_2y_2 & \cdots & -ax_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ax_ny_1 & -ax_ny_2 & \cdots & 1 - ax_ny_n \end{vmatrix}$$

证明. 加边：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 1 - ax_1y_1 & -ax_1y_2 & \cdots & -ax_1y_n \\ 0 & -ax_2y_1 & 1 - ax_2y_2 & \cdots & -ax_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -ax_ny_1 & -ax_ny_2 & \cdots & 1 - ax_ny_n \end{vmatrix}$$

□

## Chapter 3

### 矩阵

---

**定理 3.1.** 设  $\alpha$  是一个 3 维列向量,  $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  求  $\alpha^T\alpha$ 。

证明. 设  $\alpha = (x, y, z)^T$ , 则:

$$\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$$

于是  $\alpha^T\alpha = x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 。

□

**定理 3.2.** 设  $A = I - \alpha\alpha^T$ ,  $I$  为  $n$  阶单位阵,  $\alpha$  是  $n$  维非零列向量, 证明:

1.  $A^2 = A$  的充要条件为  $\alpha^T\alpha = 1$ ;

2. 当  $\alpha^T\alpha = 1$  时,  $A$  不可逆。

证明. (1) 显然:

$$\begin{aligned} A^2 - A &= (I - \alpha\alpha^T)(I - \alpha\alpha^T) - I + \alpha\alpha^T \\ &= I - 2\alpha\alpha^T + \alpha\alpha^T\alpha\alpha^T - I + \alpha\alpha^T \\ &= -\alpha\alpha^T + \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T \\ &= -\alpha\alpha^T + (\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T \\ &= (\alpha^T\alpha - 1)\alpha\alpha^T \end{aligned}$$

因为  $\alpha \neq \mathbf{0}$ , 所以  $A^2 = A$  的充分必要条件为  $\alpha^T\alpha = 1$ 。

(2) 设  $A$  可逆, 则存在矩阵  $B$ , 使得  $AB = BA = I$ 。由 (1) 得  $A^2 = A$ , 两边同乘  $B$  可得

$$BA^2 = BAA = A = AB = I$$

而  $\alpha \neq \mathbf{0}$ , 于是  $A \neq I$ , 矛盾, 所以  $A$  不可逆。

□

**定理 3.3.** 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 且  $AB = A + B$ , 证明  $AB = BA$ 。

证明. 显然:

$$AB - A - B + E = E$$

$$(A - E)(B - E) = E$$

所以  $A - E$  可逆,  $B - E$  为其逆, 于是:

$$(B - E)(A - E) = E$$

所以  $BA - B - A + E = E$ ,  $BA = B + A$ , 从而  $AB = BA$ . □

### 3.1 求矩阵的幂

1. 数学归纳法
2. 二项式公式, 将矩阵分解为可交换得两个矩阵
3. 将矩阵拆分为列向量的积
4. 将矩阵分块, 求分块对角阵的幂
5. 利用相似标准形

**定理 3.4.** 设  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , 求  $A^k$ 。

证明. 数学归纳法。 □

**定理 3.5.** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $A^k$ 。

证明. (1) 拆分为主对角线、副对角线两个矩阵。(2) 相似。(3) 数学归纳法。 □

**定理 3.6.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ :

1. 求  $A^{99}$ ;
2. 设 3 阶矩阵  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  满足  $B^2 = BA$ , 记  $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  分别表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合。

证明. (1) 求矩阵的相似标准形。

(2) 归纳总结  $B^n = BAN - 1$ . □



**定理 3.7.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ , 计算  $A^n$ 。

证明. 划分分块对角阵计算, 将两个分块矩阵分别拆分为一个对角阵和另一个矩阵。 □

**定理 3.8.** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 证明  $n \geq 3$  时, 有:

$$A^n = A^{n-2} + A^2 - E$$

并且求  $A^{100}$ 。

证明. 数学归纳法, 证明  $n = 3$  时成立。假设对  $n$  成立, 证明对  $n + 1$  成立。

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = A(A^{n-2} + A^2 - E) = A^{n-1} + A^3 - A \\ &= A^{n-1} + A + A^2 - E - A = A^{n-1} + A^2 - E \end{aligned}$$

显然有:

$$A^{100} = A^{98} + A^2 - E = A^{96} + 2A^2 - 2E = A^2 + 49A^2 - 49E = 50A^2 - 49E \quad \square$$

**定理 3.9.** 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = P^{-1}AP$ , 其中  $P$  为三阶矩阵, 求  $B^{2020} - 2A^2$ 。

证明. 先计算  $A^2$ 。

$$B^{2020} - 2A^2 = P^{-1}A^{2020}P - 2A^2 = P^{-1}(A^2)^{1010}P - 2A^2$$

□

## 3.2 求矩阵的逆矩阵

**定理 3.10.** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。

证明. 考虑副对角线上的分块逆矩阵。 □

**定理 3.11.** 已知  $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ , 求  $A^{-1}$  和  $A$ 。

证明.  $|A^*| = |A|^3$ .  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ . □

**定理 3.12.** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ , 求  $(A^*)^{-1}$ .

证明.  $AA^* = |A|E$ , 于是:

$$\left(\frac{1}{|A|}\right)A^E$$
□

**定理 3.13.** 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ , 求  $A^{-1}$ , 其中  $a_i \neq 0$ .

证明. 反序. □

**定理 3.14.** 设  $\alpha$  为  $n$  维单位列向量,  $E$  为  $n$  阶单位阵, 判断  $E - \alpha\alpha^T, E + \alpha\alpha^T, E + 2\alpha\alpha^T, E - 2\alpha\alpha^T$  是否可逆.

证明. (1)  $Ax = 0$  有非零解  $\alpha$ , 不可逆. 其余三个通过特征值判断. □

### 3.2.1 抽象矩阵求逆

**定理 3.15.** 设方阵  $A$  满足  $A^3 - A^2 + 2A - E = 0$ , 证明  $A$  和  $E - A$  可逆, 求逆矩阵.

证明. 显然:

$$A^3 - A^2 + 2A = E, A(A^2 - A + 2) = E$$

待定系数法求  $E - A$  的逆矩阵:

$$(E - A)(-A^2 + aA + bE) = cE$$

将之展开与条件作系数对应. □

**定理 3.16.** 设  $A^3 = 2E$ ,  $B = A^2 - 2A + 2E$ , 证明  $B$  可逆并求逆矩阵.

证明. 显然:

$$B = A^2 - 2A + A^3 = A(A - E)(A + 2E)$$

证明上式右三个矩阵可逆.  $A$  是显然的,  $A^3 - E = E$ ,  $(A - E)(A^2 + 2A + E) = E$ ,  $A^3 + 8E = 10E$ ,  $(A + 2E)(A^2 - 2A + 4E) = 10E$ . □

**定理 3.17.**  $A^3 = 0$ , 则  $E - A, E + A$  都可逆.

证明. 立方差立方和公式. □

**定理 3.18.** 设  $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$  均为  $n$  阶可逆矩阵, 求  $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 。

证明. 显然:

$$A^{-1}+B^{-1}=B^{-1}BA^{-1}+B^{-1}AA^{-1}=B^{-1}(B+A)A^{-1} \quad \square$$

**定理 3.19.** 设  $n$  阶方阵  $A, B, C$  满足  $ABC=E$ , 证明有  $CAB=E$ 。

证明. 由逆矩阵的定义直接可得。 □

**定理 3.20.** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , 且  $A^*X(\frac{1}{2}A^*)^*=8A^{-1}X+E$ , 求  $X$ 。

证明. 因为  $|A|=4$ , 所以  $A$  可逆, 于是有:

$$\begin{aligned} A^* &= |A|A^{-1} = 4A^{-1} \\ (\frac{1}{2}A^*)^* &= (2A^{-1})^* = |2A^{-1}|(2A^{-1})^{-1} = A \\ 4A^{-1}XA &= 8A^{-1}X + E \end{aligned} \quad \square$$

**定理 3.21.** 设  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ , 且有  $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ , 求  $B$ 。

证明. 两边乘  $A$  得:

$$AB = B + 3A$$

两边同乘  $A^*$  得:

$$A^*AB = A^*B + 3AA^*, \quad |A|B = A^*B + 3|A|E$$

由条件,  $|A^*|=8$ , 所以  $|A|=2$ 。 □

**定理 3.22.** 设  $A, B$  为 3 阶矩阵, 满足  $2A^{-1}B = B - 4E$ ,

1. 证明  $A - 2E$  可逆;

2. 若  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 求  $A$ 。

证明. (1) 两边同时乘  $A$  得:

$$\begin{aligned} 2B &= AB - 4A \\ 2B - AB + 4E &= \mathbf{0} \\ (A - 2E)(B + 4E) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

待定系数法求解。

(2) 两边同时乘  $A$  得:

$$2B = AB - 4A, \quad 2B = A(B - 4E) \quad \square$$

**定理 3.23.** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $B = (E + A)^{-1}(E - A)$ , 求  $(E + B)^{-1}$ 。

证明. (1) 两边左乘  $E + A$ 。

(2) 变形:

$$\begin{aligned} E + B &= (E - A)^{-1}(E - A) + (E + A)^{-1}(E - A) \\ &= (E - A)^{-1}(E + A + E - A) = 2(E - A)^{-1} \end{aligned} \quad \square$$

### 3.3 伴随矩阵

**定理 3.24.** 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 满足  $A^m = E$ ,  $m$  为正整数。设将  $A$  中的元素  $a_{ij}$  用其代数余子式  $A_{ij}$  代替所得到的矩阵为  $B$ , 证明  $B^m = E$ 。

证明.  $A^m = AA^{m-1} = E$ , 所以  $A$  可逆, 于是  $A^* = |A|A^{-1}$  且  $|A|^m = |A^m| = 1$ 。于是:

$$\begin{aligned} B^m &= [(A^*)^T]^m = [|A|A^{-1}]^m \\ &= [|A|(A^{-1})^T]^m = [(A^{-1})^T]^m \\ &= [(A^T)^{-1}]^m = [(A^T)^m]^{-1} \\ &= [(A^m)^T]^{-1} = E \end{aligned} \quad \square$$

**定理 3.25.** 设三阶矩阵  $A = (a_{ij})$  满足  $A^* = A^T$ , 若  $a_{11} = a_{12} = a_{13} > 0$ , 求  $a_{11}$ 。

证明. 由  $A^* = A^T$  可得  $A = (A^*)^T$ , 所以  $a_{ij} = A_{ij}$ , 于是有  $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3a_{11}^2 > 0$ 。

$$AA^* = |A|E, \quad AA^T = |A|E, \quad |AA^T| = |A|^3, \quad |A| = 1 \quad \square$$

**定理 3.26.** 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 分块矩阵  $C = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$ , 求  $C^*$ 。

证明.  $\square$

**定理 3.27.** 设  $A$  为  $n$  阶可逆矩, 交换  $A$  的第一行与第二行得到矩阵  $B$ , 则交换  $A^*$  的第一列和第二列得到  $-B^*$ 。

证明. 使用初等矩阵.  $\square$

**定理 3.28.** 设 3 阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ , 若  $\text{rank}(A^*) = 1$ , 则有  $a \neq b$ ,  $a + 2b = 0$ .

证明.

□

### 3.4 矩阵的秩

**定理 3.29.** 讨论  $n$  阶方阵  $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$  的秩,  $n \geq 2$ .

证明. 第一列加上所有列, 第二行到第  $n$  行依次减去第一行得到:

$$\begin{pmatrix} a + (n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

1.  $a + (n-1)b \neq 0$ ,  $a \neq b$ ,  $\text{rank}(A) = n$ ;
2.  $a = b \neq 0$ ,  $\text{rank}(A) = 1$ ;
3.  $a = b = 0$ ,  $\text{rank}(A) = 0$ ;
4.  $a + (n-1)b = 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $\text{rank}(A) = n-1$ ;

□

**定理 3.30.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ , 且  $\text{rank}(A) = 3$ , 求  $k$ .

证明. 令行列式为 0, 讨论求出的  $k$  是否使得  $\text{rank}(A) = 3$ .

□

**定理 3.31.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  等价, 求  $a$ .

证明. 等价则秩相同, 然后题目就化为了上一题.

□

**定理 3.32.** 设  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $P$  为三阶非零矩阵, 且满足  $PQ = \mathbf{0}$ , 证明  $t \neq 6$  时  $\text{rank}(P) = 1$ .

证明. 因为  $PQ = \mathbf{0}$ , 所以  $\text{rank}(P) + \text{rank}(Q) \leq 3$ . 因为  $P \neq \mathbf{0}$ , 所以  $\text{rank}(P) \geq 1$ .  $t \neq 6$  时  $\text{rank}(Q) = 2$ , 于是  $\text{rank}(P) = 1$ .  $\square$

**定理 3.33.** 设  $A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$ , 其中  $a_ib_j \neq 0$ , 求  $\text{rank}(A)$ .

证明. 因为:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

所以  $1 \leq \text{rank}(A) \leq \text{rank} \left( \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \right) = 1$ .  $\square$

**定理 3.34.** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵, 若  $AB = E$ , 证明  $\text{rank}(B) = m$ .

证明.  $\text{rank}(AB) = m \leq \text{rank}(B) \leq m$ .  $\square$

**定理 3.35.** 设  $m \times n$  矩阵  $A$  的秩为  $r_1$ ,  $s \times t$  矩阵  $B$  的秩为  $r_2$ ,  $C = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$ , 证明  $\text{rank}(C) = r_1 + r_2$ .

证明. 用定义证明会更快.  $\square$

**定理 3.36.** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times t$  矩阵, 若  $AB = \mathbf{0}_{m \times t}$ , 证明  $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$ .

**定理 3.37.** 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times t$  矩阵, 证明:

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$$

**定理 3.38.** 设  $A$  是一个  $n$  阶幂等阵, 则  $\text{rank}(A) + \text{rank}(A - E) = n$ .

证明. 因为  $A(A - E) = \mathbf{0}$ ,  $\square$

**定理 3.39.** 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵,  $B$  为  $n \times m$  阶矩阵, 若  $AB = I$ , 则  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = m$ .

**定理 3.40.** 设  $\alpha, \beta$  为 3 维非零列向量,  $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ , 证明:

1.  $\text{rank}(A) \leq 2$ ;

2. 若  $\alpha, \beta$  线性相关, 则  $\text{rank}(A) < 2$ .

证明. (1) 由矩阵和的秩公式:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq \text{rank}(\alpha\alpha^T) + \text{rank}(\beta\beta^T) \leq 2$$

(2) 设  $\beta = k\alpha$ , 则:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(\alpha\alpha^T) \leq \text{rank}(\alpha) < 2$$

$\square$

**3.4.1 初等矩阵**

## Chapter 4

### 向量空间

---

**定理 4.1.** 设  $n$  维列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m < n)$  线性无关, 则  $n$  维列向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  线性无关的充分必要条件为矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  与矩阵  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$  等价。

证明. 同形矩阵等价的充分必要条件为秩相同。  $\square$

**定理 4.2.** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系, 向量  $\beta$  不是方程组  $Ax = 0$  的解, 证明  $\beta, \beta + \alpha_1, \dots, \beta + \alpha_t$  线性无关。

证明. 若存在一组不全为零的  $a_1, a_2, \dots, a_t$  使得:

$$a_1\beta + a_2(\beta + \alpha_1) + \dots + a_t(\beta + \alpha_t) = \mathbf{0}$$

则有:

$$a_1\beta + a_2\beta + a_2\alpha_1 + \dots + a_t\beta + a_t\alpha_t = \mathbf{0}$$

两边同时乘  $A$  可得:

$$a_1\beta + a_2\beta + \dots + a_t\beta = \mathbf{0}$$

作差即可得:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_t\alpha_t = \mathbf{0}$$

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  为基础解系, 线性无关, 所以  $a_1 = a_2 = \dots = a_t = 0$ , 于是  $\beta, \beta + \alpha_1, \dots, \beta + \alpha_t$  线性无关。  $\square$

**定理 4.3.** 设  $A, B$  是两个非零向量且  $AB = \mathbf{0}$ , 则  $A$  的列向量组线性相关,  $B$  的行向量组线性相关。

证明. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times p$  矩阵, 则:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$$

因为  $A, B$  非零, 所以:

$$1 \leq \text{rank}(A) < n, 1 \leq \text{rank}(B) < n$$

结果显然。  $\square$



**定理 4.4.** 设  $n$  阶矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* \neq \mathbf{0}$ , 若  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_4$  是  $Ax = b$  的互不相等的解, 则对应的齐次线性方程组  $Ax = \mathbf{0}$  的基础解系仅含一个非零解向量。

证明. 因为  $A^* \neq \mathbf{0}$ , 则  $\text{rank}(A) \geq 1$ . 由题意  $\text{rank}(A) = \text{rank}(\overline{A}) < n$ . 由伴随矩阵秩与矩阵秩之间的关系可得  $\text{rank}(A^*) = 1, \text{rank}(A) = n - 1$ .  $\square$

矩阵形式如何求解基础解系

**定理 4.5.** 求以  $\beta_1 = (1, -1, 1, 0)^T$ ,  $\beta_2 = (1, 1, 0, 1)^T$ ,  $\beta_3 = (2, 0, 1, 1)^T$  为解向量的齐次线性方程组。

证明. 令  $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 则有:

$$AB = \mathbf{0}, B^T A^T = \mathbf{0}$$

即求  $B^T x = \mathbf{0}$ .  $B^T$  是已知的, 求出的  $x$  即为  $A$  的行向量.  $\square$

**定理 4.6.** 已知非齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解。

1. 证明方程组系数矩阵  $A$  的秩为 2;

2. 求  $a, b$  的秩和方程组的通解。

证明. (1) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是 3 个线性无关的解, 于是  $\alpha_3 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2$  是  $Ax = 0$  线性无关的解, 于是  $4 - \text{rank}(A) \geq 2$ , 即  $\text{rank}(A) \leq 2$ .  $A$  有不等于 0 的二阶子式, 所以  $\text{rank}(A) = 2$ .

(2) 化简行阶梯形矩阵.  $\square$

**定理 4.7.** 设  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 已知  $Ax = b$  存在两个不同的解,

1. 求  $\lambda, a$ ;

2. 求  $Ax = b$  的通解

证明. 直接化简增广矩阵.  $\square$

**定理 4.8.** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ , 当  $a, b$  为多少时, 存在矩阵  $C$  使得  $AC - CA = B$ , 求所有矩阵  $C$ .

证明. 设  $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ , 化为线性方程组. □

**定理 4.9.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$ , 当  $a$  为何值时,  $AX = B$  无解、有唯一解、有无穷多解.

证明. 增广矩阵化简.  $A|B$ . □

**定理 4.10.** 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  是四阶矩阵, 若  $(1, 0, 1, 0)^T$  是  $Ax = 0$  的一个基础解系, 则  $A^*x = 0$  的基础解系为  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ .

证明.  $\text{rank}(A) = 3, |A| = 0, \text{rank}(A^*) = 1$ , 所以基础解系有 3 个元素.  $AA^* = \mathbf{0}$ ,  $A$  的列是解, 但是  $\alpha_1, \alpha_3$  线性相关, 所以是  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . □

**定理 4.11.** 已知三阶矩阵  $A$  的第一行为  $(a, b, c)$ ,  $a, b, c$  不全为 0, 矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ ,  $k$

为常数且  $AB = \mathbf{0}$ , 求  $Ax = \mathbf{0}$  的通解.

证明. 由  $AB = \mathbf{0}$  可知  $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq 3$ . 因为  $A \neq \mathbf{0}, B \neq \mathbf{0}$ , 所以:

$$1 \leq \text{rank}(A), \text{rank}(B) \leq 2$$

若  $\text{rank}(A) = 2$ , 则  $\text{rank}(B) = 1, k = 9$ .

若  $\text{rank}(A) = 1$ , 此时  $Ax = \mathbf{0}$  的同解方程组为  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ , 设  $a \neq 0$ , 可求出通解.

方法二: 讨论  $k$  是否为 9. □

**定理 4.12.** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $\beta = b_1, b_2, \dots, b_n$ , 证明:  $Ax = \mathbf{0}$  的解满足  $\beta x = 0$  的充分必要条件为  $\beta$  可由  $A$  的行向量组线性表示.

**定理 4.13.** 设 4 元齐次线性方程组一为:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组二的通解为  $k_1(0, 1, 1, 0)^T + k_2(-1, 2, 2, 1)^T$ . 一二是否有非零公共解, 若有, 求出所有.

**定理 4.14.** 已知齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解, 求  $a, b, c$  的值.

证明. 第二个方程组一定有无穷多个解, 所以第一个方程组行列式为 0, 解得  $a = 2$ . 求得方程组一的解 (不带系数) 代入方程组二, 解得两种情况, 要验证方程组二的解也是方程组一的解.  $\square$

**定理 4.15.** 设线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程  $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$  有公共解, 求  $a$  与所有公共解.

证明. 将它们联立, 进行增广矩阵的化简.  $\square$

**定理 4.16.** 设  $n$  元线性方程组  $Ax = b$ , 其中:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. 证明  $|A| = (n+1)a^n$ ;
2.  $a$  为何值时, 有唯一解, 并求  $x_1$ ;
3.  $a$  为何值时, 有无穷多解, 求通解.

证明. (1) 递推得到. (2) Cramer 法则求解.  $\square$

**定理 4.17.** 设  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = P^{-1}A^*P$ , 求  $B + 2E$  的特征向量与特征值.

**定理 4.18.** 4 阶方阵满足  $|3E + A| = 0$ ,  $AA^T = 2E$ ,  $|A| < 0$ , 求  $A^*$  的一个特征值.

证明.  $\frac{|A|}{\lambda}$   $\square$

**定理 4.19.**  $n$  阶方阵  $A$  的各列元素之和都是 1, 求一个特征值.

证明. 化为线性方程组有:

$$A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是  $\lambda = 1$  是  $A^T$  的特征值.  $\square$

A 与 A 的  
转置特征值  
相同

**定理 4.20.**  $A$  为  $n$  阶方阵,  $A \neq E$ , 且  $\text{rank}(A+3E) + \text{rank}(A-E) = n$ , 求一个特征值。

证明. 因为  $A \neq E$ , 所以  $\text{rank}(A-E) > 0$ , 所以  $\text{rank}(A+3E) < n$ ,  $|A+3E| = 0$ ,  $-3$ .  $\square$

**定理 4.21.** 设  $A$  为 3 阶实对称矩阵,  $A^2 + 2A = \mathbf{0}$ ,  $\text{rank}(A) = 2$ 。

1. 求  $A$  的所有特征值。

2.  $k$  为何值时,  $A + kE$  为正定矩阵。

特征值多项式与矩阵多项式的关系

证明. (1)  $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ ,  $\lambda$  只能为 0 或  $-2$ 。

(2) 先证明实对称, 正定特征值都大于 0, 于是  $k > 2$ .  $\square$

**定理 4.22.** 设 3 阶实对称矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ ,  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  是  $A$

属于  $\lambda_1$  的一个特征向量, 记  $B = A^5 - 4A^3 + E$ 。

1. 验证  $\alpha_1$  是  $B$  的特征向量, 求  $B$  所有特征值的特征向量。

2. 求  $B$ 。

证明. (1) 可验证  $A$  的特征向量都是  $B$  的特征向量。

(2)  $\square$

**定理 4.23.** 设  $A$  为 2 阶方阵,  $\alpha_1, \alpha_2$  为线性无关的 2 维列向量,  $A\alpha_1 = 0$ ,  $A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ , 求  $A$  的非零特征值。

证明. 两边加上  $2A\alpha_1$  可直接得出结论 1.  $\square$

**定理 4.24.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  的一个特征向量为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 求  $a$ 。

证明. 设对应的特征值为  $\lambda$ , 代入求解。  $\square$

**定理 4.25.** 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$  可逆,  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$  是  $A^*$  的一个特征向量,  $\lambda$  是  $\alpha$  对应的特征值, 求  $a, b, \lambda$ 。

证明. 通过  $AA^* = |A|E$  可得  $A\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha$ , 代入求解即可得到结果。  $\square$

**定理 4.26.** 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  有 3 个线性无关的特征向量, 求  $x, y$  应满足的条件。

证明. 可求出特征值为  $1, -1$ , 其中  $1$  是二重根。  $\square$

**定理 4.27.** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 6 & -6 & b \end{pmatrix}$  有特征值  $-2, 4$ 。

1. 求  $a, b$ ;

2.  $A$  能否相似于对角矩阵

证明. (1) 特征方程求解  $a, b$ . □

#### 4.0.1 由特征值和特征向量求矩阵

**定理 4.28.** 已知 3 阶实对称矩阵  $A$  的特征值为  $1, -1, 0$ , 其中  $1, 0$  的特征向量分别为  $(1, a, 1)^T, (a, a+1, 1)$ , 求矩阵  $A$ 。

证明. 由特征向量的正交性求  $a$ , 再由正交性求另一特征向量, 写为线性方程组求基础解系. □

**定理 4.29.** 设 3 阶实对称矩阵  $A$  的秩为 2,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$  是  $A$  的 2 重特征值, 若  $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (2, 1, 1)^T, \alpha_3 = (-1, 2, -3)^T$  都是  $A$  的属于 6 的特征向量。

1. 求另一特征值与它的特征向量;

2. 求  $A$ 。

证明. 与上题类似, 秩为 2 可求得另一特征值为 0. □

**定理 4.30.** 设  $A$  为 3 阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2$  为  $A$  的分别属于  $-1, 1$  的特征向量,  $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ 。

1. 证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,

2. 令  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 求  $P^{-1}AP$ 。

证明. 设  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}$ , 则:

$$\begin{aligned} k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 &= \mathbf{0} \\ -k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_2 + k_3\alpha_3 &= \mathbf{0} \\ k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 - (-k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_2 + k_3\alpha_3) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

□

**定理 4.31.** 设  $\lambda_1, \lambda_2$  为矩阵  $A$  的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为  $\alpha_1, \alpha_2$ , 则  $\alpha_1$  与  $A(\alpha_1 + \alpha_2)$  线性无关的充分必要条件为

**定理 4.32.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ , 已知  $A$  有 3 个线性无关的特征向量,  $\lambda = 2$  是  $A$

的 2 重特征值, 求可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP$  为为对角矩阵。

证明. 其它都很简单, 注意到  $A$  可对角化并且 2 是二重特征值, 所以几何重数也为 2, 由

$$\dim[\text{Ker}(2E - A)] = 2$$

和秩零度定理可得出  $\text{rank}(2E - A) = 1$ ,  $x, y$  可一次性求出。□

**定理 4.33.** 已知 3 阶方阵  $A$  与 3 维列向量  $X$  使得向量组  $X, AX, A^2X$  线性无关且满足  $A^3X = 3AX - 2A^2X$ 。

1. 记  $P = (X, AX, A^2X)$ , 求 3 阶方阵  $B$  使得  $A = PBP^{-1}$ ;

2. 计算  $|A + E|$ 。

证明. (1) 求解  $AP = PB$ 。(2) 相似矩阵同特征值。□

**定理 4.34.** 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  可对角化, 求  $a$  的值与特征向量。

证明. 可直接求得特征值为 6 和  $-2$ , 其中 6 为二重根, 于是  $\text{rank}(6E - A) = 1$ 。□

**定理 4.35.** 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$  的特征方程有一个 2 重根, 求  $a$  的值, 讨论是否可以  
对角化。

**定理 4.36.**  $n$  阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  求  $A$  的特征值与特征向量。

**定理 4.37.** 设  $A$  为 3 阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为线性无关的 3 维列向量且满足  $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3$ ,  $A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ 。

1. 求矩阵  $B$  使得  $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$ ;

2. 求矩阵  $A$  的特征值与特征向量

证明.  $A, B$  相似 □

**定理 4.38.** 设  $\alpha, \beta$  为 3 维列向量, 若  $\alpha\beta^T$  相似于  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 求  $\beta^T\alpha$ 。

证明. 相似矩阵迹不变 □

**定理 4.39.** 设  $A$  为 3 阶方阵,  $P^{-1}AP = \text{diag}\{1, 1, 2\}$ , 若  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ , 求  $Q^{-1}AQ$ 。

证明.  $Q$  用  $P$  表示。

□

**定理 4.40.** 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$  与  $\text{diag}\{2, b, 0\}$  相似的充分必要条件为  $a = 0, b \in \mathbb{R}$

证明.  $|2E - A| = 0$  解得  $a = 0$ , 代入原矩阵, 发现与  $b$  无关。

□