高等代数专题

倪兴程[1]

2025 年 2 月 20 日

[1]Email: 19975022383@163.com

Todo list

目录

Chapter 1

多项式

1.1 多项式带余除法及整除

1.1.1 证明多项式整除性的常用方法

1. 定义法
   要证 $g(x)|f(x)$，去构造 $h(x)$，使得 $f(x)=h(x)g(x)$。常常将 $f(x)$ 分解因式分解出 $g(x)$，剩下的就是 $h(x)$。

2. 带余除法定理
   要证 $g(x)|f(x)$，只要证 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为 0。

3. 准标准式分解法
   要证 $g(x)|f(x)$，只要证它们的准标准分解式中的同一个不可约因式的方幂前者不大于后者。

4. 根法
   要证 $g(x)|f(x)$，只要证在复数域中 $g(x)$ 的根都是 $f(x)$ 的根，重根按重数计算。

1.1.2 例题

定理 1.1. $f(x)=(x+1)^{k+n}+2x(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n$，证明 $x^{k+1}|(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$。

证明. 因为：

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)^{k+n}+2x(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n\\&=(x+1)^n\Big[(x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k\Big]\end{aligned}$$

因为 $x-1=[2x-(x+1)]$，所以：

$$
\begin{aligned}
(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1} &= [2x-(x+1)](x+1)^n\left[(x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k\right] \\
&\quad +(x+1)^{k+n+1} \\
&= (x+1)^n[2x-(x+1)]\left[(x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k\right] \\
&\quad +(x+1)^{k+n+1} \\
&= (x+1)^n[(2x)^{k+1}-(x+1)^{k+1}]+(x+1)^{k+n+1} \\
&= (2x)^{k+1}(x+1)^n
\end{aligned}
$$

显然有 $x^{k+1}|(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$。 □

定理 1.2. 证明 $g(x)=1+x^2+\cdots+x^{2n}$ 整除 $f(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}$ 的充分必要条件为 n 是偶数。

证明. 显然：

$$g(x)=\frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2},\ f(x)=\frac{1-(x^4)^{n+1}}{1-x^4}$$

所以：

$$
\begin{aligned}
g(x)|f(x) &\Leftrightarrow \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}\Big|\frac{1-(x^4)^{n+1}}{1-x^4} \\
&\Leftrightarrow (1+x^2)[1-(x^2)^{n+1}]\Big|[1-(x^4)^{n+1}] \\
&\Leftrightarrow (1+x^2)|[1+(x^2)^{n+1}] \\
&\Leftrightarrow 1+x^2\text{的根}\pm i\text{都是}1+(x^2)^{n+1}\text{的根} \\
&\Leftrightarrow 1+(-1)^{n+1}=0 \\
&\Leftrightarrow n\text{为偶数}
\end{aligned}
$$

□

定理 1.3. 设 $f(x),g(x)$ 为数域 K 上的多项式，$n\in\mathbb{Z}$。证明 $f(x)|g(x)$ 的充分必要条件为 $f^n(x)|g^n(x)$。

证明. **(1) 必要性**：若 $f(x)|g(x)$，则存在数域 K 上的多项式 $h(x)$ 使得 $g(x)=h(x)f(x)$，于是 $g^n(x)=h^n(x)f^n(x)$，所以 $f^n(x)|g^n(x)$。

(2) 充分性：将 $f(x),g(x)$ 进行标准分解得到：

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)\cdots p_m^{r_m}(x),\ g(x)=bq_1^{t_1}(x)\cdots q_n^{t_n}(x)$$

于是：

$$f^k(x)=a^kp_1^{kr_1}(x)\cdots p_m^{kr_m}(x),\ g^k(x)=b^kq_1^{kt_1}(x)\cdots q_n^{kt_n}(x)$$

因为 $f^k(x)|g^k(x)$，所以 $f(x)$ 标准分解式中的任一元素 $p_i(x),\ i=1,2,\ldots,m$ 都是 $g(x)$ 标准分解式中的元素（记为 q_{n_i}），同时有 $kr_i\leqslant kt_{n_i}$，即 $r_i\leqslant t_{n_i}$，于是 $f(x)|g(x)$。 □

定理 1.4. $(x^d-1)|(x^n-1)$ 的充分必要条件为 $d|n$。

证明. **(1) 充分性**：由 $d|n$ 可知，存在正整数 k 使得 $n = dk$。于是：

$$x^n - 1 = x^{dk} - 1 = \left(x^d\right)^k - 1 = (x^d - 1)[x^{d(k-1)} + \cdots + 11]$$

所以 $(x^d - 1)|(x^n - 1)$。

(2) 必要性：由整数的带余除法定理，设 $n = dq + r$，这里 $r = 0$ 或 $0 < r < d$。若 $0 < r < d$，则：

$$x^n - 1 = x^{dq+r} - 1 = x^{dq}x^r - x^r + x^r - 1 = x^r(x^{dq} - 1) + (x^r - 1)$$

由充分性可知 $(x^d - 1)|(x^{dq} - 1)$。而 $(x^d - 1)|(x^n - 1)$。则 $(x^d - 1)|(x^r - 1)$。于是 $d \leqslant r$，矛盾。 □

定理 1.5. 设 $h(x), k(x), f(x), g(x)$ 是实系数多项式，且：

$$(x^2+1)h(x) + (x+1)f(x) + (x-2)g(x) = 0$$
$$(x^2+1)k(x) + (x-1)f(x) + (x+2)g(x) = 0$$

则 $(x^2+1)|f(x)$，且 $(x^2+1)|g(x)$。

证明. 要证 $(x^2+1)|f(x)$ 和 $(x^2+1)|g(x)$，即证 $\pm i$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的根。将 $x = \pm i$ 代入上式可得：

$$(i+1)f(i) + (i-2)g(i) = 0, \quad (i-1)f(i) + (i+2)g(i) = 0$$
$$(-i+1)f(-i) + (-i-2)g(-i) = 0, \quad (-i-1)f(-i) + (-i+2)g(-i) = 0$$

解方程可得：

$$f(i) = g(i) = 0,\ f(-i) = g(-i) = 0$$

所以 $(x-i)|f(x)$, $(x+i)|f(x)$, $(x-i)|g(x)$, $(x+i)|g(x)$。因为 $(x+i, x-i) = 1$，所以 $(x+i)(x-i)|f(x)$, $(x+i)(x-i)|f(x)$，即 $(x^2+1)|f(x)$, $(x^2+1)|g(x)$。 □

定理 1.6. 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$，都有 $(x^2+x+1)\Big|[x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}]$。

证明. **方法一**：令 $x^2+x+1 = 0$，求得它在复数域内的两个根分别为 $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$。将 x_1, x_2 代入到 $x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}$ 中可得：

$$x^{n+2} + (x+1)^{2n+1} = x^2x^n + (x+1)\left(x^2\right)^n = 0$$

于是 x_1, x_2 也是 $x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}$ 的根，所以 $(x^2+x+1)\Big|[x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}]$。

方法二：设 α 为 $x^2+x+1 = 0$ 的根，则 $\alpha^2+\alpha+1 = 0$，两边同乘 $\alpha - 1$ 可得 $\alpha^3 = 1$ 且 $\alpha \neq 1$。于是：

$$\begin{aligned}\alpha^{n+2} + (\alpha+1)^{2n+1} &= \alpha^{n+2} + (-\alpha^2)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} + (-1)^{2n+1}\alpha^{4n+2} \\ &= \alpha^{n+2} - \alpha^{3n}\alpha^{n+2} \\ &= 0\end{aligned}$$

于是 α 是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}=0$ 的根，所以 $(x^2+x+1)\Big|[x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}]$。 □

定理 1.7. 若 $(s,n+1)=1$，则 $f(x)=x^{sn}+x^{s(n-1)}+\cdots+x^s+1$ 可被 $g(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ 整除。

证明. 假设 α 为 $g(x)=0$ 的根，因为：

$$g(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

所以 $\alpha^{n+1}=1$ 且 $\alpha\neq 1$。而：

$$f(x)=\frac{1-(x^s)^{n+1}}{1-x^s}=\frac{1-(x^{n+1})^s}{1-x^s}$$

代入 $\alpha^{n+1}=1$ 则显然 $f(x)=0$，即 α 也是 $f(x)=0$ 的根，$g(x)|f(x)$。但是如果 α 是 $f(x)$ 的根，此时应有 $\alpha^s\neq 1$。若 $\alpha^s=1$，因为 $(s,n+1)=1$，则存在 $u,v\in\mathbb{N}$，使得：

$$us+v(n+1)=1$$

于是 $\alpha=\alpha^{us+v(n+1)}=\alpha^{us}\alpha^{v(n+1)}=\alpha^{us}(\alpha^{n+1})^v=(\alpha^s)^u=1$，与 $\alpha\neq 1$ 矛盾，所以 $\alpha^s-1\neq 0$。 □

定理 1.8. 设 $n\in\mathbb{N}^+$，$f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)$ 都是多项式，并且有：

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1|f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1})$$

证明 $(x-1)^n|f_1(x)f_2(x)f_n(x)$。

证明. 设 $x^{n+1}-1=0$ 的不为 1 的 n 个根分别为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$，此时有 $\varepsilon_i^{n+1}-1=0,\ i=1,2,\ldots,n$。对 $x^{n+1}-1=0$ 作分解可得 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_n)$，所以：

$$x-\varepsilon_i\Big|x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1\Big|f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1})$$

于是 $\varepsilon_i,\ i=1,2,\ldots,n$ 是 $f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1})=0$ 的根，所以：

$$\begin{cases}f_1(\varepsilon_1^{n+1})+\varepsilon_1f_2(\varepsilon_1^{n+1})+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}f_n(\varepsilon_1^{n+1})=0\\ f_1(\varepsilon_2^{n+1})+\varepsilon_2f_2(\varepsilon_2^{n+1})+\cdots+\varepsilon_2^{n-1}f_n(\varepsilon_2^{n+1})=0\\ \vdots\\ f_1(\varepsilon_n^{n+1})+\varepsilon_nf_2(\varepsilon_n^{n+1})+\cdots+\varepsilon_n^{n-1}f_n(\varepsilon_n^{n+1})=0\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}f_1(1)+\varepsilon_1f_2(1)+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}f_n(1)=0\\ f_1(1)+\varepsilon_2f_2(1)+\cdots+\varepsilon_2^{n-1}f_n(1)=0\\ \vdots\\ f_1(1)+\varepsilon_nf_2(1)+\cdots+\varepsilon_n^{n-1}f_n(1)=0\end{cases}$$

将 $f_i(1),\ i=1,2,\dots,n$ 看作未知数，因为 $\varepsilon_i\neq\varepsilon_j,\ i\neq j$，所以该线性方程组的系数行列式为：

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{n-1}\\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \cdots & \varepsilon_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(\varepsilon_j-\varepsilon_i)\neq 0$$

所以该线性方程组只有零解，即 $f_i(1)=0$，于是 $x-1|f_i(x),\ i=1,2,\dots,n$，所以 $(x-1)^n|f_1(x)f_2(x)f_n(x)$。 □

定理 1.9. *求多项式 $f(x)$，使得 $(x^2+1)|f(x)$ 且 $(x^3+x^2+1)|f(x)+1$。*

证明. 由整除的定义，存在多项式 $g(x),h(x)$ 使得

$$f(x)=(x^2+1)g(x)$$
$$f(x)+1=(x^3+x^2+1)h(x)$$

由条件可知 $\pm i$ 是 $f(x)$ 的根，将 $\pm i$ 分别代入上第二式可得：

$$1=-ih(i),\ 1=ih(-i)$$

取 $h(x)=x$ 发现可以满足上式要求，于是 $f(x)=x^4+x^3+x-1$。 □

定理 1.10. *求 7 次多项式 $f(x)$，使得 $(x-1)^4|f(x)+1$，且 $(x+1)^4|f(x)-1$。*

证明. 因为 $(x-1)^4|f(x)+1$，所以 1 至少是 $f(x)+1$ 的四重根，于是 1 至少是 $f'(x)$ 的三重根，即 $(x-1)^3|f(x)$。同理可得 $(x+1)^3|f'(x)$。因为 $\Big((x-1)^3,(x+1)^3\Big)=1$，所以 $(x-1)^3(x+1)^3|f'(x)$。因为 $f'(x)$ 是六次多项式，可设：

$$f'(x)=\alpha(x-1)^3(x+1)^3$$

其中 α 为常数。对上式积分可得：

$$f(x)=\alpha\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)+c$$

因为 $(x-1)^4|f(x)+1,\ (x+1)^4|f(x)-1$，所以 $f(1)=-1,\ f(-1)=1$，代入上式可解得：

$$\begin{cases}a=\dfrac{35}{16}\\ c=0\end{cases}$$

所以：

$$f(x)=\frac{5}{16}x^7-\frac{21}{16}x^5+\frac{35}{16}x^3-\frac{35}{16}x$$

□

1.2 最大公因式与互素多项式

1.2.1 基本定义与定理

定义 1.1. 设 $f(x), g(x), d(x) \in K[x]$，若：

1. $d(x) | f(x), g(x)$；
2. 若任意的 $\varphi(x) | f(x), g(x)$，都有 $\varphi(x) | d(x)$；

则称 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式。用 $\Big(f(x), g(x)\Big)$ 表示 $f(x)$ 和 $g(x)$ 首项系数为 1 的最大公因式。

定理 1.11 (最大公因式定理). $K[x]$ 上的任意两个多项式 $f(x), g(x)$ 都有最大公因式，并且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的任意一个最大公因式 $d(x)$ 都可以表示为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，即：

$$\exists\, u(x), v(x) \in K[x],\ u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$

定理 1.12. 若 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$，$g(x) \neq 0$，则 $\Big(f(x), g(x)\Big) = \Big(g(x), r(x)\Big)$。

定义 1.2. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$，若 $\Big(f(x), g(x)\Big) = 1$，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素。

定理 1.13. $\Big(f(x), g(x)\Big) = 1$ 的充分必要条件为：

$$\exists\, u(x), v(x) \in K[x],\ u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

定理 1.14. 若 $\Big(f(x), g(x)\Big) = 1$，且 $f(x) | g(x)h(x)$，则 $f(x) | h(x)$。

定理 1.15. 若 $\Big(f(x), g(x)\Big) = 1$，且 $f(x) | h(x)$，$g(x) | h(x)$，则 $f(x)g(x) | h(x)$。

定理 1.16. 若 $\Big(f(x), g(x)\Big) = 1$，$\Big(f(x), h(x)\Big) = 1$，则 $\Big(f(x), g(x)h(x)\Big) = 1$。

定理 1.17. 数域的扩张不影响最大公因式和互素。

1.2.2 题型

求具体多项式最大公因式

1. 辗转相除法

   (a) 计算 $f(x)$ 除以 $g(x)$，得到商 $q(x)$ 和余数 $r(x)$，即：

   $$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

   其中，$r(x)$ 是多项式的余数，且满足 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$。

   (b) 如果余数 $r(x) = 0$，则 $g(x)$ 就是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式。

(c) 如果余数 $r(x) \neq 0$，则将 $f(x)$ 赋值为 $g(x)$，将 $g(x)$ 赋值为 $r(x)$，然后返回第 1 步。

2. **因式分解法**
如果求得 $f(x), g(x)$ 在数域 K 上的标准分解式：
$$f(x) = ap_1^{r_1}(x) \cdots p_m^{r_m}(x),\ g(x) = bq_1^{t_1}(x) \cdots q_n^{t_n}(x)$$
二者最大的公共部分即为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式。

证明最大公因式

1. **定义法**
要证 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式，只要证：
   (a) $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的公因式；
   (b) 以下二者的任意一条：
      - 找到 $u(x), v(x)$ 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$；
      - 对 $f(x), g(x)$ 的任意公因式 $\varphi(x)$，有 $\varphi(x)|d(x)$。
2. **标准分解式法**
从标准分解式中找最大公因式。
3. **利用最大公因式的性质和等式**

证明多项式的互素

1. **定义法**
证明 $\big(f(x), g(x)\big) = 1$。
2. 只要证明：
$$\exists\, u(x), v(x) \in K[x],\ u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$
3. **根法**
证明在复数域上 $f(x)$ 的根都不是 $g(x)$ 的根（重根按重述计算）。
4. **反证法**
若 $\big(f(x), g(x)\big) = d(x) \neq 1$，则可以由：
   - $f(x), g(x)$ 有公共根
   - $d(x)|f(x)$，则 $d(x)|g(x)$

   推出矛盾。
5. **互素的性质及等式**
性质 6、7、8。

1.2.3　例题

求具体多项式的最大公因式

定理 1.18. 设 $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$, $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$，求：

1. $\Big(f(x), g(x)\Big)$；

2. 多项式 $u(x), v(x)$ 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = \Big(f(x), g(x)\Big)$。

辗转相除法在 latex 里面很难搞，不想打了

证明. (1) $\Big(f(x), g(x)\Big) = x + \frac{2}{3}$。

(2) 将辗转相除法的过程倒推即可求得：

$$u(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - x - 1),\ v(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 2x^2 - 5x - 4)$$ □

证明最大公因式

定理 1.19. 证明：$\Big(f(x)h(x), g(x)h(x)\Big) = \Big(f(x), g(x)\Big)h(x)$，其中 $h(x)$ 是首项系数为 1 的多项式。

证明. 令 $d(x) = \Big(f(x), g(x)\Big)$,则有 $d(x)|f(x)$, $d(x)|g(x)$,从而 $d(x)h(x)|f(x)h(x)$, $d(x)h(x)|g(x)h(x)$，所以 $\Big(f(x), g(x)\Big)h(x)$ 是 $f(x)h(x), g(x)h(x)$ 的一个公因式。

因为 $d(x) = \Big(f(x), g(x)\Big)$，所以

$$\exists\, u(x), v(x) \in K[x],\ u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$

于是 $u(x)h(x)f(x) + v(x)h(x)g(x) = d(x)f(x)$，$d(x)h(x)$ 是 $f(x)h(x), g(x)h(x)$ 的最大公因式。因为 $d(x) = \Big(f(x), g(x)\Big)$，所以它的首项系数为 1，而 $h(x)$ 的首项系数也是 1，于是 $\Big(f(x)h(x), g(x)h(x)\Big) = \Big(f(x), g(x)\Big)h(x)$。 □

定理 1.20. 设 $f_1(x) = af(x) + bg(x)$, $g_1(x) = cf(x) + dg(x)$，且有 $ad - bc \neq 0$。证明 $\Big(f(x), g(x)\Big) = \Big(f_1(x), g_1(x)\Big)$。

证明. 令 $d(x) = \Big(f(x), g(x)\Big)$，则有 $d(x)|f(x)$, $d(x)|g(x)$，于是 $d(x)|af(x) + bg(x), cf(x) + dg(x)$，即 $d(x)|f_1(x), g_1(x)$，于是 $\Big(f(x), g(x)\Big)$ 是 $f_1(x), g_1(x)$ 的一个公因式。

因为 $d(x) = \Big(f(x), g(x)\Big)$，所以

$$\exists\, u(x), v(x) \in K[x],\ u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$$

因为 $ad - bc \neq 0$，所以关于 $f(x), g(x)$ 的方程组：

$$\begin{cases} af(x) + bg(x) = f_1(x) \\ cf(x) + dg(x) = g_1(x) \end{cases}$$

有唯一解，可解得：

$$f(x)=\frac{1}{ad-bc}[df_1(x)-bg_1(x)],\ g(x)=\frac{1}{ad-bc}[-cf_1(x)+ag_1(x)]$$

于是：

$$u(x)\frac{1}{ad-bc}[df_1(x)-bg_1(x)]+v(x)\frac{1}{ad-bc}[-cf_1(x)+ag_1(x)]=d(x)$$

化简可得：

$$\frac{du(x)-cv(x)}{ad-bc}f_1(x)+\frac{av(x)-bu(x)}{ad-bc}g_1(x)=d(x)$$

即 $d(x)=\Big(f(x),g(x)\Big)$ 是 $f_1(x),g_1(x)$ 的最大公因式。因为 $\Big(f(x),g(x)\Big)$ 首项系数为 1，所以 $\Big(f(x),g(x)\Big)=\Big(f_1(x),g_1(x)\Big)$。 □

定理 1.21. 设 $f(x),g(x)\in K[x]$，且 $\Big(f(x),g(x)\Big)=1$，又 $\varphi(x)=(x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x)$，$\psi(x)=(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x)$，则 $\Big(\varphi(x),\psi(x)\Big)=x-1$。

证明. 由因式分解可得：

$$\varphi(x)=(x-1)[(x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)]$$
$$\psi(x)=(x-1)[(x+1)f(x)+xg(x)]$$

所以 $x-1$ 是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的一个公因式。由定理 1.19可知：

$$\Big(\varphi(x),\psi(x)\Big)=\Big((x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x),(x+1)f(x)+xg(x)\Big)(x-1)$$

接下来只需证明 $\Big((x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x),(x+1)f(x)+xg(x)\Big)=1$。

考虑以 $f(x),g(x)$ 为自变量的方程组：

$$\begin{cases}\varphi(x)=(x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x)\\ \psi(x)=(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x)\end{cases}$$

其系数行列式为 $-x^3-x^2+2x+1$，由 Cramer 法则可知 □ 没搞懂

定理 1.22. 设 $f(x),g(x)$ 是两个不全为 0 的多项式，则 $\forall\ n\in N$，有 $\Big(f(x),g(x)\Big)^n=\Big(f^n(x),g^n(x)\Big)$。

证明. 令 $d(x)=\Big(f(x),g(x)\Big)$，则存在 $f_1(x),g_1(x)\in K[x]$，使得：

$$f(x)=d(x)f_1(x),\ g(x)=d(x)g_1(x)$$

同时有 $\Big(f_1(x),g_1(x)\Big)=1$，从而 $\Big(f_1^n(x),g_1^n(x)\Big)=1$，所以：

$$\begin{aligned}\Big(f^n(x),g^n(x)\Big)&=\Big(d^n(x)f_1^n(x),d^n(x)g_1^n(x)\Big)\\&=\Big(f_1^n(x),g_1^n(x)\Big)d^n(x)\\&=\Big(f(x),g(x)\Big)^n\end{aligned}$$

其中第一行到第二行利用到了定理 1.19。 □

证明多项式的互素

定理 1.23. 设 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x), g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x) \in K[x]$，则：

$$\Big(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\Big) = 1 \Leftrightarrow \Big(f_i(x), g_j(x)\Big) = 1$$

其中 $i = 1, 2, \dots, m$，$j = 1, 2, \dots, n$。

证明. **(1) 必要性：** 因为 $\Big(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\Big)$，所以 $\exists\ u(x), v(x) \in K[x]$ 使得：

$$u(x)f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x) + v(x)g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x) = 1$$

即：

$$f_i(x)[u(x)f_1(x)\cdots f_{i-1}(x)f_{i+1}(x)\cdots f_m(x)] + g_j(x)[v(x)g_1(x)\cdots g_{j-1}(x)g_{j+1}(x)\cdots g_n(x)] = 1$$

所以 $\Big(f_i(x), g_j(x)\Big) = 1$，其中 $i = 1, 2, \dots, m$，$j = 1, 2, \dots, n$。

(2) 充分性： 取 $f_1(x)$，因为 $\Big(f_1(x), g_j(x)\Big) = 1$，$i = 1, 2, \dots, n$，由定理 1.16可得，$\Big(f_1(x), g_1(x)\cdots g_n(x)\Big) = 1$。同理可得对任意的 $i = 1, 2, \dots, m$，都有 $\Big(f_i(x), g_1(x)\cdots g_n(x)\Big) = 1$，再利用定理 1.16即可得到 $\Big(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\Big) = 1$。 □

定理 1.24. 对 $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$，令 $f_n(x) = x^{n+2} - (x+1)^{2n+1}$，有 $\Big(x^2 + x + 1, f_n(x)\Big) = 1$。

证明. 设 α 是 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根，则 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$，$\alpha^3 = 1$。于是：

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= \alpha^{n+2} - (\alpha+1)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} - (-\alpha^2)^{2n+1} \\ &= \alpha^{n+2} + \alpha^{4n+2} \\ &= \alpha^{n+2} + \alpha^{3n}\alpha^{n+2} \\ &= 2\alpha^{n+2} \end{aligned}$$

在复数域内求解方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 可得：

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2},\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

所以 $f_n(\alpha) = 2\alpha^{n+2} \neq 0$，即 α 不是 $f_n(x)$ 的根。由上我们得到 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根都不是 $f_n(x)$ 的根，所以 $\Big(x^2 + x + 1, f_n(x)\Big) = 1$。 □

定理 1.25. $f(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1$，$g(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$，其中 $m, n \in \mathbb{N}$，则有：

$$(m, n) = 1 \Leftrightarrow \Big(f(x), g(x)\Big) = 1$$

证明. **(1) 充分性**：若 $(m,n)=d\neq 1$，设 $m=ds$，$n=dt$，则：

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{x^m-1}{x-1}=\frac{x^{ds}-1}{x-1}\\
&=\frac{x^d-1}{x-1}[x^{d(s-1)}+x^{d(s-2)}+\cdots+x^d+1]\\
&=(x^{d-1}+\cdots+x+1)[x^{d(s-1)}+x^{d(s-2)}+\cdots+x^d+1]
\end{aligned}$$

而：

$$\begin{aligned}
g(x)&=\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{x^{dt}-1}{x-1}\\
&=\frac{x^d-1}{x-1}[x^{d(t-1)}+x^{d(t-2)}+\cdots+x^d+1]\\
&=(x^{d-1}+\cdots+x+1)[x^{d(t-1)}+x^{d(t-2)}+\cdots+x^d+1]
\end{aligned}$$

可以发现 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有次数大于 0 的公因式 $x^{d-1}+\cdots+x+1$，与 $\big(f(x),g(x)\big)=1$ 矛盾，所以 $(m,n)=1$。

(2) 必要性：若 $\big(f(x),g(x)\big)=d(x)\neq 1$，则 $f(x),g(x)$ 有公共根 α。由 n 次方差公式可得：

$$\begin{aligned}
\alpha^m-1=(\alpha-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)=0\\
\alpha^n-1=(\alpha-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=0
\end{aligned}$$

于是 $\alpha^m=\alpha^n=1$，且有 $\alpha\neq 1$。由 $(m,n)=1$ 可知，存在 $u,v\in\mathbb{N}$ 使得 $um+vn=1$，于是：

$$\alpha=\alpha^{um+vn}=(\alpha^m)^u(\alpha^n)^v=1$$

矛盾，所以 $\big(f(x),g(x)\big)=1$，。 □

1.3 多项式的根

定理 1.26. 若 $f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$，则：

$$\frac{f(x)}{\big(f(x),f'(x)\big)}=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

1.3.1 题型

重根的证明

1. 互素法
   - 若 $f(x)$ 是一个复多项式，则 $f(x)$ 无重根的充分必要条件是 $\big(f(x),f'(x)\big)=1$。
   - 若 $f(x)$ 是一般数域 K 上的多项式，若 $\big(f(x),f'(x)\big)=1$，则 $f(x)$ 无重因式，自然无重根。
2. 反证法

1.3.2 例题

定理 1.27. 如果 $f'(x)|f(x)$，证明：$f(x)$ 有 n 重根，其中 $n=\deg f(x)$

证明. 由 $f'(x)|f(x)$，所以 $f'(x)=\Big(f(x),f'(x)\Big)$。因为 $\deg f'(x)=n-1$，则：

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\Big(f(x),f'(x)\Big)}$$

是一次多项式，设 $\varphi(x)=a(x-b)$，$a\neq 0$。由定理 1.26可得 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 有相同的不可约因式，又因为 $\deg f(x)=n$，所以 $f(x)=a(x-b)^n$，$f(x)$ 有 n 重根。 □

定理 1.28. 设 $f(x)$ 是复数域中的 n 次多项式，且 $f(0)=0$，令 $g(x)=xf(x)$，若 $f'(x)|g'(x)$，则 $g(x)$ 有 $n+1$ 重零根。

证明. 由 $f(0)=0$ 可知 0 是 $f(x)$ 的根。因为 $g(x)=xf(x)$，所以 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$。因为 $f'(x)|g'(x)$，所以 $f'(x)|f(x)$。由上一题的结论，$f(x)$ 有 n 重根，又因为 0 是 $f(x)$ 的根，所以 0 就是 $f(x)$ 的 n 重根。设 $f(x)=ax^n$，于是 $g(x)=ax^{n+1}$，即 $g(x)$ 有 $n+1$ 重零根。 □

1.3.3 复根、实根、有理根与整数根

定理 1.29. 设 $f(x)$ 为整系数多项式：

1. 证明：若 $f(1+\sqrt{2})=0$，则 $f(1-\sqrt{2})=0$；
2. 推测结论 (1) 的推广形式（不需要证明）。

证明. (1)$f(x)$ 有因式：

$$[x-(1+\sqrt{2})][x-(1-\sqrt{2})]=x^2-2x-1\in\mathbb{Z}[x]$$

作带余除法，设：

$$f(x)=(x^2-2x-1)q(x)+ax+b$$

其中 $a,b\in\mathbb{Z}$。由 $f(1+\sqrt{2})=0$ 可知，$a(1+\sqrt{2})+b=0$，于是 $a=b=0$，所以 $f(x)=(x^2-2x-1)q(x)$，显然 $f(1-\sqrt{2})=0$。

(2) 若 $f(a+b\sqrt{2})=0$，则 $f(a-b\sqrt{2})=0$，其中 $a,b\in\mathbb{Z}$。 □

定理 1.30. 已知整系数多项式 $f(x)$ 满足 $f(2)f(21)=505$，证明 $f(x)$ 无整数根。

证明. 因为 $f(2)f(21)=505$，所以 $f(2)$ 和 $f(21)$ 都是奇数。假设 α 是 $f(x)$ 的整数根，则 $f(x)=(x-\alpha)q(x)$，其中 $q(x)\in\mathbb{Z}[x]$，则 $2-\alpha,21-\alpha$ 中至少有一个是偶数，于是 $f(2)$ 与 $f(21)$ 中至少有一个是偶数，矛盾，所以 $f(x)$ 无整数根。。 □

定理 1.31. 求一个一元多项式，使它的各根分别等于 $f(x)=5x^4-6x^3+x^2+4$ 的各根减 1。

证明. 令 $y = x - 1$，则 $x = y + 1$。

$$g(y) = 5(y+1)^4 - 6(y+1)^3 + (y+1)^2 + 4$$

$g(y)$ 即为所求多项式。 □

定理 1.32. 求一个一元多项式，使它的各根分别等于 $f(x) = 15x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 21x + 13$ 的倒数。

证明. 因为 $f(0) = 13$，所以 0 不是 $f(x)$ 的根。令 $y = \frac{1}{x}$，则 $x = \frac{1}{y}$。

$$\begin{aligned} y^4 f(x) &= y^4 \left[15\left(\frac{1}{y}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{y}\right)^3 + 11\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 21\left(\frac{1}{y}\right) + 13 \right] \\ &= 13y^4 - 21y^3 + 11y^2 - 2y + 15 \\ &= g(y) \end{aligned}$$

$g(y)$ 即为所求多项式。 □

定理 1.33. 设 $f(x)$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上 $n(n \geqslant 2)$ 次多项式，并且它在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，如果 $f(x)$ 的一个根 α 的倒数 $\frac{1}{\alpha}$ 仍是 $f(x)$ 的根，证明 $f(x)$ 每一个根的倒数也是 $f(x)$ 的根。

倒根变换需要严格证明

证明. 假设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，其中 $a_n \neq 0$。由 $f(x)$ 不可约可得 $a_0 \neq 0$，于是 0 不是 $f(x)$ 的根。对 $f(x)$ 作倒根变换，得到多项式：

$$g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

由 $\frac{1}{\alpha}$ 使 $f(x)$ 的根，则 α 是 $g(x)$ 的根。因为 α 也是 $f(x)$ 的根，所以 $\Big(f(x), g(x)\Big) \neq 1$。因为 $f(x)$ 不可约，所以 $f(x)|g(x)$。任取 $f(x)$ 的根 β，则 β 也是 $g(x)$ 的根，于是 $\frac{1}{\beta}$ 是 $f(x)$ 的根。 □

定理 1.34. 求以 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 为根的有理系数不可约多项式。

证明. 设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 且以 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 为根，则 $\sqrt{2} - \sqrt{3}, -\sqrt{2} - \sqrt{3}, -\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 也是 $f(x)$ 的根。令

$$f(x) = [x - (\sqrt{2} + \sqrt{3})][x - (\sqrt{2} - \sqrt{3})][x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})][x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})] = x^4 - 10x^2 + 1$$

接下来证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约。

如果 $f(x)$ 有有理根，必为 ± 1。但 ± 1 都不是 $f(x)$ 的根，所以 $f(x)$ 不能分解一个一次多项式与一个三次多项式的乘积。其次，如果 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上分解为两个二次多项式的乘积，则 $f(x)$ 必可在整系数多项式上分解为两个二次多项式的乘积，即：

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

其中 $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$。比较两边系数可得：

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+d+ac=-10 \\ ad+bc=0 \\ bd=1 \end{cases}$$

因为 $bd=1$ 且 $bd\in\mathbb{Z}$，所以 $b=d=-1$ 或 $b=d=1$。

当 $b=d=1$ 时，$a=-c$，$c^2=12$，但是 $c\in\mathbb{Z}$，矛盾。

当 $b=d=-1$ 时，$c^2=8$，但是 $c\in\mathbb{Z}$，矛盾。

所以 $f(x)$ 无法分解为两个二次多项式的乘积。

综上，$f(x)$ 既无法分解为一个一次多项式与一个三次多项式的乘积，也无法分解为两个二次多项式的乘积，所以 $f(x)$ 不可约。$f(x)$ 即为所求。 □

1.3.4 三个常用数域上的多项式

复数域

代数基本定理任何 n 次多项式在复数域中恰好有 n 个根。每个次数大于 0 的多项式在复数域上都可以唯一分解为一次因式的乘积。韦达定理

实数域

虚根的共轭也是虚根次数大于 2 的实系数多项式在实数域上是可约的实多项式分解定理

有理数域

如果能够分解为有理系数多项式的乘积则一定可以分解为整系数多项式的乘积根与系数的关系

定理 1.35. 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 是一个整系数多项式，而 $\frac{r}{s}$ 是一个有理数，其中 r,s 互素，则

定理 1.36 (艾森斯坦判别法)**.** 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式，若存在素数 p，使得：

1. $p\nmid a_n$；
2. $p|a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_1,a_0$；
3. $p^2\nmid a_0$；

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

定理 1.37. 若 $f(x)$ 是 $n(n>0)$ 次整系数多项式，令 $x=y+a$，$a\in\mathbb{Z}$，得整系数多项式 $g(y)=f(y+a)$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约的充分必要条件是 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约。

定理 1.38. 次数大于 1 的复多项式都是可约的。次数大于 2 的实多项式都是可约的。次数等于 1 的多项式都是不可约的。

题型

1. 整系数多项式在有理数域上可约性的判别
   (a) **方法一：**
   艾森斯坦判别法或对多项式作变换后再使用艾森斯坦判别法
   (b) **方法二：**
   适合抽象的整系数多项式证明不可约
   (c) **方法三：**
   讨论有理根。判断二次或三次有理多项式不可约只需证明它没有有理根，当次数大于 3 时，此结论不再成立。

例题

定理 1.39. 设 p 为素数，则

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}$$

在有理数域上不可约。

证明. 令 $g(x)=p!f(x)$，则 $g(x)$ 的可约性与 $f(x)$ 的可约性是一样的。而：

$$g(x)=x^p+px^{p-1}+\cdots+\frac{p!}{2!}+p!x+p!$$

显然 $g(x)$ 是一个整系数多项式。对于素数 p，有 $p\nmid a_n=1$，$p|a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_1,a_0$，$p^2\nmid a_0=p!$。 □

定理 1.40. 判别多项式 $f(x)=x^5-5x+1$ 在有理数域上是否可约。

证明. 令 $x=y-1$，则 $g(y)=f(y-1)$，即：

$$g(y)=y^5-5y^4+10y^3-10y^2+5$$

取 $p=5$，由艾森斯坦判别法，该多项式在有理数域上不可约。 □

定理 1.41. 关于任意素数 p，多项式：

$$f(x)=px^4+2px^3-px+3p-1$$

在有理数域上不可约。

证明. 因为 p 是一个素数，所以 $3p-1\neq 0$。令 $y=\frac{1}{x}$，则：

$$f(y)=(3p-1)y^4-py^3+2px+p$$

取素数 p，由艾森斯坦判别法，该多项式在有理数域上不可约。 □

定理 1.42. 设 n 是大于 1 的整数，证明 $\sqrt[n]{2008}$ 是无理数。

证明. 令 $f(x)=x^n-2008$，取素数 $p=251$，由艾森斯坦判别法，该多项式在有理数域上不可约，即 $f(x)$ 在有理数域上没有根，而 $\sqrt[n]{2008}$ 是 $f(x)$ 的根，所以 $\sqrt[n]{2008}$ 是无理数。 □

定理 1.43. 设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$，其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是两两互不相同的整数，证明 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

证明. 假设 $f(x)$ 可约，则可设：

$$f(x)=g(x)h(x)$$

其中 $g(x),h(x)$ 为整系数多项式，并且有 $\deg g(x)<\deg f(x)=n$, $\deg h(x)<\deg f(x)=n$。因为 $f(a_i)=-1$，所以 $g(a_i)h(a_i)=-1,\ i=1,2,\ldots,n$，此时有 $g(a_i)=1,\ h(a_i)=-1$ 或 $g(a_i)=-1,\ h(a_i)=1$。无论是哪种情况，都有 $g(a_i)+h(a_i)=0$，即 $g(x)+h(x)$ 有 n 个互不相等的根 $a_1,a_2,\ldots,a_n$，但是 $\deg(g(x)+h(x))<n$，矛盾，所以 $f(x)$ 不可约。 □

定理 1.44. 设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是两两互不相同的整数，证明 $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$ 在有理数域上不可约。

证明. 假设 $f(x)$ 可约，则存在次数大于 0 的首项系数为 1 的整系数多项式 $g(x),h(x)$ 使得：

$$f(x)=g(x)h(x)$$

因为 $f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=1$，则 $g(a_i)=h(a_i)=1$ 或 $g(a_i)=h(a_i)=-1,\ i=1,2,\ldots,n$。若 $g(a_i)=-1$，由 $g(x)$ 是首项系数为 1 的多项式，则存在充分大的 c，使得 $g(c)=0$，从而 $g(x)$ 有实根。这与 $f(x)$ 无实根矛盾，故 $g(a_i)\neq -1$。若 $g(a_i)=1$，因为 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 $g(x)-1,h(x)-1$ 的 n 个互不相同的根，则 $\deg(g(x)-1)\geqslant n$, $\deg(h(x)-1)\geqslant n$。因为 $\deg f(x)=\deg g(x)+\deg h(x)$ 且有 $\deg f(x)=2n$，于是 $\deg(g(x)-1)=\deg(h(x)-1)=n$，所以：

$$g(x)-1=h(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

所以：

$$f(x)=[(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1]^2$$

与 $f(x)$ 的表达式矛盾，所以 $f(x)$ 不可约。 □

1.3.5 多项式的分解

定理 1.45. 求多项式 x^n-1 在复数域上和实数域上的标准分解式。

证明. **(1) 复数域**：在复数域上 x^n-1 有 n 个复根，设：

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,1,\ldots,n-1$$

所以：

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1})$$

(2) 实数域：

$$\begin{aligned}\varepsilon_k\in\mathbb{R}&\Leftrightarrow\sin\frac{2k\pi}{n}=0\\&\Leftrightarrow\frac{2k\pi}{n}=0\text{或}\frac{2k\pi}{n}=\pi\\&\Leftrightarrow k=0\text{或}k=\frac{n}{2}\end{aligned}$$

而：

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon_k}&=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\\&=\cos\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)\\&=\cos\frac{2(n-k)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n}\\&=\varepsilon_{n-k}\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon_k+\varepsilon_{n-k}=2\cos\frac{2k\pi}{n}$，$\varepsilon_k\overline{\varepsilon}_k=1$，当 n 为奇数时，x^n-1 恰有一个实根 $\varepsilon_0=1$，所以：

$$\begin{aligned}x^n-1&=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{\frac{n-1}{2}})(x-\varepsilon_{\frac{n+1}{2}})\cdots(x-\varepsilon_{n-2})(x-\varepsilon_{n-1})\\&=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{\frac{n-1}{2}})(x-\overline{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}})\cdots(x-\overline{\varepsilon}_2)(x-\overline{\varepsilon}_1)\\&=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\overline{\varepsilon}_1)(x-\varepsilon_2)(x-\overline{\varepsilon}_2)\cdots(x-\varepsilon_{\frac{n-1}{2}})(x-\overline{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}})\\&=(x-1)[x^2-(\varepsilon_1+\overline{\varepsilon}_1)x+\varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1][x^2-(\varepsilon_2+\overline{\varepsilon}_2)x+\varepsilon_2\overline{\varepsilon}_2]\cdots\\&\quad[x^2-(\varepsilon_{\frac{n-1}{2}}+\overline{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}})x+\varepsilon_{\frac{n-1}{2}}\overline{\varepsilon}_{\frac{n-1}{2}}]\\&=(x-1)\left(x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}x+1\right)\left(x^2-2\cos\frac{4\pi}{n}x+1\right)\cdots\left(x^2-2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}x+1\right)\\&=(x-1)\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1\right)\end{aligned}$$

当 n 为偶数时，x^n-1 有两个 1 实根 $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_{\frac{n}{2}}=-1$，所以：

$$\begin{aligned}
x^n-1&=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{\frac{n-2}{2}})(x-\varepsilon_{\frac{n}{2}})(x-\varepsilon_{\frac{n+2}{2}})\cdots(x-\varepsilon_{n-2})(x-\varepsilon_{n-1})\\
&=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{\frac{n-2}{2}})(x+1)(x-\overline{\varepsilon}_{\frac{n-2}{2}})\cdots(x-\overline{\varepsilon}+2)(x-\overline{\varepsilon}_1)\\
&=(x-1)(x+1)(x-\varepsilon_1)(x-\overline{\varepsilon}_1)(x-\varepsilon_2)(x-\overline{\varepsilon}_2)\cdots(x-\varepsilon_{\frac{n-2}{2}})(x-\overline{\varepsilon}_{\frac{n-2}{2}})\\
&=(x-1)(x+1)\left(x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}x+1\right)\left(x^2-2\cos\frac{4\pi}{n}x+1\right)\cdots\left(x^2-2\cos\frac{(n-2)\pi}{n}x+1\right)\\
&=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1\right)
\end{aligned}$$ □

定理 1.46. 求多项式 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ 在实数域和复数域中的标准分解式。

证明. 令 $g(x)=(x-1)f(x)$。 □

Chapter 2

行列式

定理 2.1. 求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数，其中：

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ x & 2x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4x \end{vmatrix}$$

定理 2.2. 设 $n \geqslant 2$，证明：如果一个 n 阶行列式 D 中的元素为 1 或 -1，则 D 必为偶数。

证明. 将 D 按行列式的定义展开一共有 $n!$ 项，因为 D 中的元素为 1 或 -1，所以展开式中每一项也只能是 1 或 -1。假设展开式中有 k 项为 -1，则剩余 $n! - k$ 项为 1，所以 $|D| = -k + (n! - k) = n! - 2k$。若 k 为偶数，则 $|D|$ 为偶数；若 k 为奇数，则 $|D|$ 也是偶数。综上，D 必为偶数。 □

定理 2.3. 证明元素为 $0, 1$ 的三阶行列式 D 的值只能是 $0, \pm 1, \pm 2$。

证明. □

定理 2.4. 计算行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - x^2 \end{vmatrix}$$

证明. 当 $2 - x^2 = 1$ 时，一二两行相同，$|D| = 0$，所以 $|D|$ 有因式 $(x-1)(x+1)$。当 $9 - x^2 = 5$ 时，一二两行相同，$|D| = 0$，所以 $|D|$ 有因式 $(x-2)(x+2)$。因为 D 是四阶行列式，所以可设 $|D| = k(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$，其中 k 为常数。 □

定理 2.5. 已知五阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

求 $A_{41} + A_{42} + A_{43}$ 和 $A_{44} + A_{45}$。

证明.

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + 2(A_{44} + A_{45}) = 27$$
$$2(A_{41} + A_{42} + A_{43}) + A_{44} + A_{45} = 0$$

或者更换第四行元素使得新行列式的值等于 $A_{41} + A_{42} + A_{43}$ 和 $A_{44} + A_{45}$。 □

定理 2.6. 设 n 阶行列式：

$$1$$

证明.

$$A^* = |A|A^{-1}$$

分块矩阵 □

定理 2.7. 已知 $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ 满足条件：

1. $a_{ij} = A_{ij}$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式
2. $a_{11} \neq 0$。

计算行列式 $|A|$。

定理 2.8. 计算 $2n$ 阶行列式：

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & c_1 & d_1 & & & \\ & & c_2 & & & d_2 & & \\ & \iddots & & & & & \ddots & \\ c_n & & & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

证明. 利用 Laplace 定理，将第 1 行与第 $2n$ 行展开，得到：

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} (-1)^{1+2n+1+2n} D_{2n-2} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2} = \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i)$$ □

定理 2.9. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

证明. 将该行列式展开：

$$\begin{aligned} D_n &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix} + b_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n} a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} b_i \end{aligned}$$

□

爪形

定理 2.10. 计算 $n+1$ 阶行列式：

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$。

证明. 显然：

$$
\begin{aligned}
D_{n+1} &= \begin{vmatrix} a_0-\frac{1}{a_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_0-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
&= \cdots \\
&= \begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n} a_i(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})
\end{aligned}
$$

□

定理 2.11. 计算 5 阶行列式：

$$
D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}
$$

证明. 显然：

$$
\begin{aligned}
D_5 &= (1-a)\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a\begin{vmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \\
&= (1-a)D_4 + a\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \\
&= (1-a)D_4 + aD_3
\end{aligned}
$$

□

定理 2.12. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

证明. 显然：

$$\begin{aligned} D_n &= 5D_{n-1} + (-1)^{1+2}(-2) \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5D_{n-1} + (-1)^{1+2}(-2)(-3) \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5D_{n-1} - 6D_{n-2} \end{aligned}$$

□

定理 2.13. 证明：

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

证明. 第 n 行展开，显然：

$$\begin{aligned} D_n &= 2\cos\alpha D_{n-1} + 1 \times (-1)^{n+n-1} \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\cos\alpha D_{n-1} + (-1)^{2n-1} \cdot 1 \cdot (-1)^{n-1+n-1} D_{n-2} \\ &= 2\cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2} \end{aligned}$$

$$x^2 - 2\cos\alpha x + 1 = 0$$

□

Hessenberg

定理 2.14. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

证明. 按第一列展开：

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\ &= xD_{n-1} + a_n \\ &= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n \\ &= x^2D_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^2(xD_{n-3} + a_{n-2}) + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^3D_{n-3} + x^2a_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &= \cdots \\ &= x^{n-1}D_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x^{n-i} \\ &= x^{n-1}(x+a_1) + \sum_{i=2}^{n} a_i x^{n-i} \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} \end{aligned}$$

□

定理 2.15. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

证明. 按第一行展开得：

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (-1)^{n-1}$$

□

行和、列和相同

定理 2.16. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

证明. 将所有列都加到第一列可得：

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m \right) (-m)^{n-1} \end{aligned}$$

□

定理 2.17. 设 x_1, x_2, x_3 时方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根，求行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$$

证明. 显然：

$$x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \cdots$$

所以 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$，把所有行都加到第一行，得到：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0$$

□

升阶

定理 2.18. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

其中 $b_1 b_2 \cdots b_n \neq 0$。

证明. 加边可得：

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \\ &= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)\prod_{i=1}^{n} b_i \end{aligned}$$

□

定理 2.19. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_2x_1 & \cdots & x_nx_1 \\ x_1x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & x_nx_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$$

证明. 加边 $(1, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 可得：

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & x_2x_1 & \cdots & x_nx_1 \\ 0 & x_1x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & x_nx_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1x_n & x_2x_n & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2
\end{aligned}
$$

□

相邻行列元素相差 1

定理 2.20. 计算 n 阶行列式：

$$
D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}
$$

证明. 第 i 行减去第 $i+1$ 行，化下三角。 □

定理 2.21. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

证明. 第 n 行减去第 $n-1$ 行，依次从下往上。 □

Vandermonde 行列式

定理 2.22. 计算行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

证明. 构造行列式：

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} \\ &= A_{15} + xA_{25} + x^2A_{35} + x^3A_{45} + x^4A_{55} \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(x-a)(c-b)(d-b)(x-b)(d-c)(x-c)(x-d) \\ &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \end{aligned}$$

而 $A_{45} = (-1)^{4+5}D = -D$，找 x^3 的系数即可。 □

其它

定理 2.23. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都是 3 维列向量，记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$，已知 $|A| = 1$，求 $|B|$。

证明.

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|B| = |A||C|$$

□

定理 2.24. 设 3 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，且 $|A| = \frac{1}{2}$，求 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$。

证明. 伴随矩阵化为 A^{-1}。 □

定理 2.25. 设 A, B 为 n 阶矩阵，$|A| = 2, |B| = -3$，求 $|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}|$。

证明. 伴随矩阵化逆矩阵。 □

定理 2.26. 设 A, B 分别为 3 阶矩阵与 5 阶矩阵，$|A| = 2,\ |B| = 3$，令：

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (3A)^* \\ (2B)^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

求 $|C|$。

证明. 伴随矩阵化逆矩阵。 □

定理 2.27. 设 A 为三阶矩阵，特征值为 $-1, 0, 1$。令 $B = A^3 - 2A^2 + E$，求 $|B|$ 和 $|B + E|$。

证明. B 的特征值为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1$，$B + E$ 的特征值为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2$。 □

定理 2.28. 设 A 为三阶矩阵，$|A - E| = |A + 2E| = |2A + 3E| = 0$，求 $|A^* - 3E|$。

证明. 求出 A^* 与特征值之间的关系，进行转化。求 A 的特征值。 □

定理 2.29. 设 A, B 为四阶矩阵且二者相似，如果 B^* 的特征值为 $1, -1, 2, 4$，求 $|A^*|$。

证明.

$$|B^*| = -8 = |B|^3,\ |B| = -2 = |A|,\ |A^*| = |A|^3 = -8$$ □

定理 2.30. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，$A^2 + 2A = \mathbf{0}$，$\mathrm{rank}(A) = k$，求 $|A + 3E|$。

证明. 由 $A^2 + 2A = \mathbf{0}$ 可知 A 的特征值为 0 或 -2。A 的相似标准形对角线上有 k 个 -2、$n - 2$ 个 0。 □

定理 2.31. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$，求 $|B|$。

证明. 两边同右乘 A 消去 A^*，可得：

$$3AB = 6B + A,\ 3(A - 2E)B = A$$ □

定理 2.32. α 是一个单位列向量，$A = E - \alpha\alpha^T$，求 $|A|$。

证明. $A\alpha = (E - \alpha\alpha^T)\alpha = \alpha - \alpha\alpha^T\alpha = \alpha - \alpha = \mathbf{0}$，$|A| = 0$。 □

定理 2.33. 设 A, B 为 n 阶矩阵，$A^2 = E,\ B^2 = E,\ |A| + |B| = 0$，求 $|A + B|$。

证明. 由条件可知 $|A|, |B|$ 二者中一个为 1，一个为 -1。

$$|A + B| = |AE + EB| = |AB^2 + A^2B| = |A(B + A)B| = |A||A + B||B| = -|A + B|$$ □

行列式乘法及其应用

定理 2.34. 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} D^2 &= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} \\ &= \left|\operatorname{diag}\{a^2+b^2+c^2+d^2, a^2+b^2+c^2+d^2, a^2+b^2+c^2+d^2, a^2+b^2+c^2+d^2\}\right| \\ &= (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \end{aligned}$$

所以 $|D|=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$。根据行列式的定义，$|D|$ 中 a^4 系数为 1，所以 $|D|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$。 □

定理 2.35. 证明：

$$D=\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

证明. 显然：

$$D=\left|\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}\right|=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$ □

求解行列式方程

定理 2.36. 求方程：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=0$$

的根。

证明. Vandermonde 行列式，显然根为 $1,2,-2$（三次多项式最多三个根）。 □

定理 2.37. 解方程：

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明. 观察法：$x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ □

定理 2.38. 计算行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & y \\ z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$$

证明. 分类讨论，当 $y = z$ 时化为行和相同的行列式。当 $y \neq z$ 时：

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & 0 \\ z & x & \cdots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & 0 \\ z & z & \cdots & z & x-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & y \\ z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} \\ &= (x-y)D_{n-1} + \begin{vmatrix} x-z & y-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-z & 0 \\ z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} \\ &= (x-y)D_{n-1} + y(x-z)^{n-1} \end{aligned}$$

而由 D_n 的转置可以得到：

$$D_n = (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1}$$

于是：

$$\begin{cases} D_n - (x-y)D_{n-1} = y(x-z)^{n-1} \\ D_n - (x-z)D_{n-1} = z(x-y)^{n-1} \end{cases}$$

由 Cramer 法则可以解得：

$$D_n = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}$$

□

定理 2.39. 计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & x_2 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & x_{n-1} & \alpha \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n \end{vmatrix}$$

证明. 当 $\alpha \neq \beta$ 时的情况与上一题可以一样。当 $\alpha = \beta$ 时有：

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \alpha & x_2 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & x_{n-1} & \alpha \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & x_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & x_2 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha & \alpha & \cdots & x_{n-1} & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & x_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -\alpha & x_1-\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\alpha & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n-\alpha \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

定理 2.40. 计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

证明. 加边：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

把前两列的第三行到第 $n+2$ 行全部化为 0。 □

定理 2.41. 求行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

的展开式中正项的数目。

证明. 设正项总数为 x，则负项总数为 $n!-x$。考虑到展开式中每一项不是 1 就是 -1，所以：

$$D = x-(n!-x) = 2x-n!$$

由之前的公式求出 D，代入即可解得 x。 □

定理 2.42. 计算行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1-ax_1y_1 & -ax_1y_2 & \cdots & -ax_1y_n \\ -ax_2y_1 & 1-ax_2y_2 & \cdots & -ax_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ax_ny_1 & -ax_ny_2 & \cdots & 1-ax_ny_n \end{vmatrix}$$

证明. 加边：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 \cdots & y_n & \\ 0 & 1-ax_1y_1 & -ax_1y_2 & \cdots & -ax_1y_n \\ 0 & -ax_2y_1 & 1-ax_2y_2 & \cdots & -ax_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -ax_ny_1 & -ax_ny_2 & \cdots & 1-ax_ny_n \end{vmatrix}$$ □

Chapter 3

矩阵

定理 3.1. 设 α 是一个 3 维列向量，$\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 求 $\alpha^T\alpha$。

证明. 设 $\alpha = (x, y, z)^T$，则：

$$\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$$

于是 $\alpha^T\alpha = x^2 + y^2 + z^2 = 3$。 □

定理 3.2. 设 $A = I - \alpha\alpha^T$，I 为 n 阶单位阵，α 是 n 维非零列向量，证明：

1. $A^2 = A$ 的充要条件为 $\alpha^T\alpha = 1$；
2. 当 $\alpha^T\alpha = 1$ 时，A 不可逆。

证明. (1) 显然：

$$\begin{aligned} A^2 - A &= (I - \alpha\alpha^T)(I - \alpha\alpha^T) - I + \alpha\alpha^T \\ &= I - 2\alpha\alpha^T + \alpha\alpha^T\alpha\alpha^T - I + \alpha\alpha^T \\ &= -\alpha\alpha^T + \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T \\ &= -\alpha\alpha^T + (\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T \\ &= (\alpha^T\alpha - 1)\alpha\alpha^T \end{aligned}$$

因为 $\alpha \neq \mathbf{0}$，所以 $A^2 = A$ 的充分必要条件为 $\alpha^T\alpha = 1$。

(2) 设 A 可逆，则存在矩阵 B，使得 $AB = BA = I$。由 (1) 得 $A^2 = A$，两边同乘 B 可得

$$BA^2 = BAA = A = AB = I$$

而 $\alpha \neq \mathbf{0}$，于是 $A \neq I$，矛盾，所以 A 不可逆。 □

定理 3.3. 设 A, B 为 n 阶方阵，且 $AB = A + B$，证明 $AB = BA$。

证明. 显然：

$$AB - A - B + E = E$$
$$(A - E)(B - E) = E$$

所以 $A - E$ 可逆，$B - E$ 为其逆，于是：

$$(B - E)(A - E) = E$$

所以 $BA - B - A + E = E$，$BA = B + A$，从而 $AB = BA$。 □

3.1 求矩阵的幂

1. 数学归纳法
2. 二项式公式，将矩阵分解为可交换得两个矩阵
3. 将矩阵拆分为列向量的积
4. 将矩阵分块，求分块对角阵的幂
5. 利用相似标准形

定理 3.4. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$，求 A^k。

证明. 数学归纳法。 □

定理 3.5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^k。

证明. (1) 拆分为主对角线、副对角线两个矩阵。(2) 相似。(3) 数学归纳法。 □

定理 3.6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$：

1. 求 A^{99}；

2. 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$，记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。

证明. (1) 求矩阵的相似标准形。

(2) 归纳总结 $B^n = BAn - 1$。 □

定理 3.7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&4&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&4&2\end{pmatrix}$，计算 A^n。

证明. 划分分块对角阵计算，将两个分块矩阵分别拆分为一个对角阵和另一个矩阵。 □

定理 3.8. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，证明 $n\geqslant 3$ 时，有：

$$A^n=A^{n-2}+A^2-E$$

并且求 A^{100}。

证明. 数学归纳法，证明 $n=3$ 时成立。假设对 n 成立，证明对 $n+1$ 成立。

$$\begin{aligned}A^{n+1}&=AA^n=A(A^{n-2}+A^2-E)=A^{n-1}+A^3-A\\&=A^{n-1}+A+A^2-E-A=A^{n-1}+A^2-E\end{aligned}$$

显然有：

$$A^{100}=A^{98}+A^2-E=A^{96}+2A^2-2E=A^2+49A^2-49E=50A^2-49E$$ □

定理 3.9. 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}AP$，其中 P 为三阶矩阵，求 $B^{2020}-2A^2$。

证明. 先计算 A^2。

$$B^{2020}-2A^2=P^{-1}A^{2020}P-2A^2=P^{-1}(A^2)^{1010}P-2A^2$$

□

3.2 求矩阵的逆矩阵

定理 3.10. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&5&2\\0&0&2&1\\1&-2&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

证明. 考虑副对角线上的分块逆矩阵。 □

定理 3.11. 已知 $A^*=\begin{pmatrix}4&3&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&3&-6\\0&0&-3&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1} 和 A。

证明. $|A^*| = |A|^3$。$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$。 □

定理 3.12. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$。

证明. $AA^* = |A|E$，于是：

$$\left(\frac{1}{|A|}\right) A^E$$ □

定理 3.13. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}，其中 $a_i \neq 0$。

证明. 反序。 □

定理 3.14. 设 α 为 n 维单位列向量,E 为 n 阶单位阵,判断 $E-\alpha\alpha^T, E+\alpha\alpha^T, E+2\alpha\alpha^T, E-2\alpha\alpha^T$ 是否可逆。

证明. (1)$Ax = 0$ 有非零解 α，不可逆。其余三个通过特征值判断。 □

3.2.1 抽象矩阵求逆

定理 3.15. 设方阵 A 满足 $A^3 - A^2 + 2A - E = \mathbf{0}$，证明 A 和 $E - A$ 可逆，求逆矩阵。

证明. 显然：

$$A^3 - A^2 + 2A = E,\ A(A^2 - A + 2) = E$$

待定系数法求 $E - A$ 的逆矩阵：

$$(E - A)(-A^2 + aA + bE) = cE$$

将之展开与条件作系数对应。 □

定理 3.16. 设 $A^3 = 2E,\ B = A^2 - 2A + 2E$，证明 B 可逆并求逆矩阵。

证明. 显然：

$$B = A^2 - 2A + A^3 = A(A - E)(A + 2E)$$

证明上式右三个矩阵可逆。A 是显然的，$A^3 - E = E,\ (A - E)(A^2 + 2A + E) = E,\ A^3 + 8E = 10E,\ (A + 2E)(A^2 - 2A + 4E) = 10E$。 □

定理 3.17. $A^3 = \mathbf{0}$，则 $E - A, E + A$ 都可逆。

证明. 立方差立方和公式。 □

定理 3.18. 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，求 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$。

证明. 显然：

$$A^{-1}+B^{-1}=B^{-1}BA^{-1}+B^{-1}AA^{-1}=B^{-1}(B+A)A^{-1}$$

□

定理 3.19. 设 n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC=E$，证明有 $CAB=E$。

证明. 由逆矩阵的定义直接可得。 □

定理 3.20. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，且 $A^*X(\frac{1}{2}A^*)^*=8A^{-1}X+E$，求 X。

证明. 因为 $|A|=4$，所以 A 可逆，于是有：

$$A^*=|A|A^{-1}=4A^{-1}$$

$$(\frac{1}{2}A^*)^*=(2A^{-1})^*=|2A^{-1}|(2A^{-1})^{-1}=A$$

$$4A^{-1}XA=8A{-}1X+E$$

□

定理 3.21. 设 $A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 8\end{pmatrix}$，且有 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求 B。

证明. 两边乘 A 得：

$$AB=B+3A$$

两边同乘 A^* 得：

$$A^*AB=A^*B+3AA^*,\ |A|B=A^*B+3|A|E$$

由条件，$|A^*|=8$，所以 $|A|=2$。 □

定理 3.22. 设 A, B 为 3 阶矩阵，满足 $2A^{-1}B=B-4E$，

1. 证明 $A-2E$ 可逆；
2. 若 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 A。

证明. (1) 两边同时乘 A 得：

$$2B=AB-4A$$

$$2B-AB+4E=\mathbf{0}$$

$$(A-2E)(B+bE)=\mathbf{0}$$

待定系数法求解。

(2) 两边同时乘 A 得：

$$2B = AB - 4A,\ 2B = A(B-4E) \qquad \square$$

定理 3.23. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$，$B = (E+A)^{-1}(E-A)$，求 $(E+B)^{-1}$。

证明. (1) 两边左乘 $E+A$。

(2) 变形：

$$\begin{aligned} E+B &= (E-A)^{-1}(E-A) + (E+A)^{-1}(E-A) \\ &= (E-A)^{-1}(E+A+E-A) = 2(E-A)^{-1} \end{aligned} \qquad \square$$

3.3 伴随矩阵

定理 3.24. 设 A 是 n 阶方阵，满足 $A^m = E$，m 为正整数。设将 A 中的元素 a_{ij} 用其代数余子式 A_{ij} 代替所得到的矩阵为 B，证明 $B^m = E$。

证明. $A^m = AA^{m-1} = E$，所以 A 可逆，于是 $A^* = |A|A^{-1}$ 且 $|A|^m = |A^m| = 1$。于是：

$$\begin{aligned} B^m &= [(A^*)^T]^m = [(|A|A^{-1})^T]^m \\ &= [|A|(A^{-1})^T]^m = [(A^{-1})^T]^m \\ &= [(A^T)^{-1}]^m = [(A^T)^m]^{-1} \\ &= [(A^m)^T]^{-1} = E \end{aligned} \qquad \square$$

定理 3.25. 设三阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $A^* = A^T$，若 $a_{11} = a_{12} = a_{i3} > 0$，求 a_{11}。

证明. 由 $A^* = A^T$ 可得 $A = (A^*)^T$,所以 $a_{ij} = A_{ij}$,于是有 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3a_{11}^2 > 0$。

$$AA^* = |A|E,\ AA^T = |A|E,\ |AA^T| = |A|^3,\ |A| = 1 \qquad \square$$

定理 3.26. 设 A, B 为 n 阶矩阵，分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$，求 C^*。

证明. $\square$

定理 3.27. 设 A 为 n 阶可逆矩，交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，则交换 A^* 的第一列和第二列得到 $-B^*$。

证明. 使用初等矩阵。 $\square$

定理 3.28. 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$，若 $\mathrm{rank}(A^*)=1$，则有 $a\neq b,\ a+2b=0$。

证明. □

3.4 矩阵的秩

定理 3.29. 讨论 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{pmatrix}$ 的秩，$n\geqslant 2$。

证明. 第一列加上所有列，第二行到第 n 行依次减去第一行得到：

$$\begin{pmatrix}a+(n-1)b&b&\cdots&b\\0&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a-b\end{pmatrix}$$

1. $a+(n-1)b\neq 0,\ a\neq b,\ \mathrm{rank}(A)=n$；
2. $a=b\neq 0,\ \mathrm{rank}(A)=1$；
3. $a=b=0,\ \mathrm{rank}(A)=0$；
4. $a+(n-1)b=0,\ b\neq 0,\ \mathrm{rank}(A)=n-1$；

□

定理 3.30. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}$，且 $\mathrm{rank}(A)=3$，求 k。

证明. 令行列式为 0，讨论求出的 k 是否使得 $\mathrm{rank}(A)=3$。 □

定理 3.31. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 等价，求 a。

证明. 等价则秩相同，然后题目就化为了上一题。 □

定理 3.32. 设 $Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$P$ 为三阶非零矩阵，且满足 $PQ=\mathbf{0}$，证明 $t\neq 6$ 时 $\mathrm{rank}(P)=1$。

证明. 因为 $PQ = \mathbf{0}$，所以 $\mathrm{rank}(P) + \mathrm{rank}(Q) \leqslant 3$。因为 $P \neq \mathbf{0}$，所以 $\mathrm{rank}(P) \geqslant 1$。$t \neq 6$ 时 $\mathrm{rank}(Q) = 2$，于是 $\mathrm{rank}(P) = 1$。 □

定理 3.33. 设 $A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$，其中 $a_ib_j \neq 0$，求 $\mathrm{rank}(A)$。

证明. 因为：

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

所以 $1 \leqslant \mathrm{rank}(A) \leqslant \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\right) = 1$。 □

定理 3.34. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times m$ 矩阵，若 $AB = E$，证明 $\mathrm{rank}(B) = m$。

证明. $\mathrm{rank}(AB) = m \leqslant \mathrm{rank}(B) \leqslant m$。 □

定理 3.35. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r_1，$s \times t$ 矩阵 B 的秩为 r_2，$C = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$，证明 $\mathrm{rank}(C) = r_1 + r_2$。

证明. 用定义证明会更快。 □

定理 3.36. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times t$ 矩阵，若 $AB = \mathbf{0}_{m\times t}$，证明 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) \leqslant n$。

定理 3.37. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times t$ 矩阵，证明：

$$\mathrm{rank}(AB) \geqslant \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - n$$

定理 3.38. 设 A 是一个 n 阶幂等阵，则 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A - E) = n$。

证明. 因为 $A(A - E) = \mathbf{0}$， □

定理 3.39. 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵，B 为 $n \times m$ 阶矩阵，若 $AB = I$，则 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = m$。

定理 3.40. 设 α, β 为 3 维非零列向量，$A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$，证明：

1. $\mathrm{rank}(A) \leqslant 2$；
2. 若 α, β 线性相关，则 $\mathrm{rank}(A) < 2$。

证明. (1) 由矩阵和的秩公式：

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leqslant \mathrm{rank}(\alpha\alpha^T) + \mathrm{rank}(\beta\beta^T) \leqslant 2$$

(2) 设 $\beta = k\alpha$，则：

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\alpha\alpha^T) \leqslant \mathrm{rank}(\alpha) < 2$$ □

3.4.1 初等矩阵

Chapter 4

向量空间

定理 4.1. 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m < n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ 线性无关的充分必要条件为矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ 等价。

证明. 同形矩阵等价的充分必要条件为秩相同。 □

定理 4.2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，向量 β 不是方程组 $Ax = 0$ 的解，证明 $\beta, \beta + \alpha_1, \ldots, \beta + \alpha_t$ 线性无关。

证明. 若存在一组不全为零的 $a_1, a_2, \ldots, a_t$ 使得：

$$a_1\beta + a_2(\beta + \alpha_1) + \cdots + a_t(\beta + \alpha_t) = \mathbf{0}$$

则有：

$$a_1\beta + a_2\beta + a_2\alpha_1 + \cdots + a_t\beta + a_t\alpha_t = \mathbf{0}$$

两边同时乘 A 可得：

$$a_1\beta + a_2\beta + \cdots + a_t\beta = \mathbf{0}$$

作差即可得：

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_t\alpha_t = \mathbf{0}$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 为基础解系，线性无关，所以 $a_1 = a_2 = \cdots = a_t = 0$，于是 $\beta, \beta + \alpha_1, \ldots, \beta + \alpha_t$ 线性无关。 □

定理 4.3. 设 A, B 是两个非零向量且 $AB = \mathbf{0}$，则 A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关。

证明. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times p$ 矩阵，则：

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leqslant n$$

因为 A, B 非零，所以：

$$1 \leqslant \text{rank}(A) < n,\ 1 \leqslant \text{rank}(B) < n$$

结果显然。 □

定理 4.4. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* \neq \mathbf{0}$，若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_4$ 是 $Ax = b$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的基础解系仅含一个非零解向量。

证明. 因为 $A^* \neq \mathbf{0}$，则 $\operatorname{rank}(A) \geqslant 1$。由题意 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\overline{A}) < n$。由伴随矩阵秩与矩阵秩之间的关系可得 $\operatorname{rank}(A^*) = 1, \operatorname{rank}(A) = n - 1$。 □

矩阵形式如何求解基础解系

定理 4.5. 求以 $\beta_1 = (1, -1, 1, 0)^T$，$\beta_2 = (1, 1, 0, 1)^T$，$\beta_3 = (2, 0, 1, 1)^T$ 为解向量的齐次线性方程组。

证明. 令 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，则有：

$$AB = \mathbf{0},\ B^T A^T = \mathbf{0}$$

即求 $B^T x = \mathbf{0}$。B^T 是已知的，求出的 x 即为 A 的行向量。 □

定理 4.6. 已知非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解。

1. 证明方程组系数矩阵 A 的秩为 2；

2. 求 a, b 的秩和方程组的通解。

证明. (1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 个线性无关的解，于是 $\alpha_3 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2$ 是 $Ax = 0$ 线性无关的解，于是 $4 - \operatorname{rank}(A) \geqslant 2$，即 $\operatorname{rank}(A) \leqslant 2$。$A$ 有不为 0 的二阶子式，所以 $\operatorname{rank}(A) = 2$。

(2) 化简行阶梯形矩阵。 □

定理 4.7. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，已知 $Ax = b$ 存在两个不同的解，

1. 求 λ, a；

2. 求 $Ax = b$ 的通解

证明. 直接化简增广矩阵。 □

定理 4.8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$，当 a, b 为多少时，存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$，求所有矩阵 C。

证明. 设 $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，化为线性方程组。 □

定理 4.9. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$，当 a 为何值时，$AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解。

证明. 增广矩阵化简。$A|B$。 □

定理 4.10. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是四阶矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系，则 $A^*x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$。

证明. $\operatorname{rank}(A) = 3, |A| = 0, \operatorname{rank}(A^*) = 1$，所以基础解系有 3 个元素。$AA^* = \mathbf{0}$，$A$ 的列是解，但是 α_1, α_3 线性相关，所以是 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$。 □

定理 4.11. 已知三阶矩阵 A 的第一行为 (a, b, c)，a, b, c 不全为 0，矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$，$k$ 为常数且 $AB = \mathbf{0}$，求 $Ax = \mathbf{0}$ 的通解。

证明. 由 $AB = \mathbf{0}$ 可知 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leqslant 3$。因为 $A \neq \mathbf{0}, B \neq \mathbf{0}$，所以：

$$1 \leqslant \operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B) \leqslant 2$$

若 $\operatorname{rank}(A) = 2$，则 $\operatorname{rank}(B) = 1$，$k = 9$。

若 $\operatorname{rank}(A) = 1$，此时 $Ax = \mathbf{0}$ 的同解方程组为 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$，设 $a \neq 0$，可求出通解。

方法二：讨论 k 是否为 9。 □

定理 4.12. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，$\beta = b_1, b_2, \ldots, b_n$，证明：$Ax = \mathbf{0}$ 的解满足 $\beta x = 0$ 的充分必要条件为 β 可由 A 的行向量组线性表示。

定理 4.13. 设 4 元齐次线性方程组一为：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组二的通解为 $k_1(0,1,1,0)^T + k_2(-1,2,2,1)^T$。一二是否有非零公共解，若有，求出所有。

定理 4.14. 已知齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解，求 a, b, c 的值。

证明. 第二个方程组一定有无穷多个解，所以第一个方程组行列式为 0，解得 $a=2$。求得方程组一的解（不带系数）代入方程组二，解得两种情况，要验证方程组二的解也是方程组一的解。 □

定理 4.15. 设线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 与所有公共解。

证明. 将它们联立，进行增广矩阵的化简。 □

定理 4.16. 设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中：

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. 证明 $|A|=(n+1)a^n$；

2. a 为何值时，有唯一解，并求 x_1；

3. a 为何值时，有无穷多解，求通解。

证明. (1) 递推得到。(2)Cramer 法则求解。 □

定理 4.17. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，求 $B+2E$ 的特征向量与特征值。

定理 4.18. *4* 阶方阵满足 $|3E+A|=0$，$AA^T=2E$，$|A|<0$，求 A^* 的一个特征值。

证明. $\dfrac{|A|}{\lambda}$ □

定理 4.19. n 阶方阵 A 的各列元素之和都是 *1*，求一个特征值。

证明. 化为线性方程组有：

$$A^T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是 $\lambda=1$ 是 A^T 的特征值。 □

A 与 A 的转置特征值相同

定理 4.20. A 为 n 阶方阵，$A \neq E$，且 $\mathrm{rank}(A+3E)+\mathrm{rank}(A-E)=n$，求一个特征值。

证明. 因为 $A \neq E$，所以 $\mathrm{rank}(A-E)>0$，所以 $\mathrm{rank}(A+3E)<n$，$|A+3E|=0$，-3. □

定理 4.21. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，$A^2+2A=\mathbf{0}$，$\mathrm{rank}(A)=2$。

1. 求 A 的所有特征值。
2. k 为何值时，$A+kE$ 为正定矩阵。

特征值多项式与矩阵多项式的关系

证明. (1)$\lambda^2+2\lambda=0$，λ 只能为 0 或 -2。

(2) 先证明实对称，正定特征值都大于 0，于是 $k>2$。 □

定理 4.22. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 属于 λ_1 的一个特征向量，记 $B=A^5-4A^3+E$。

1. 验证 α_1 是 B 的特征向量，求 B 所有特征值的特征向量。
2. 求 B。

证明. (1) 可验证 A 的特征向量都是 B 的特征向量。

(2) □

定理 4.23. 设 A 为 2 阶方阵，α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1=0$, $A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，求 A 的非零特征值。

证明. 两边加上 $2A\alpha_1$ 可直接得出结论 1。 □

定理 4.24. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，求 a。

证明. 设对应的特征值为 λ，代入求解。 □

定理 4.25. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ 可逆，$\alpha=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$ 是 A^* 的一个特征向量，λ 是 α 对应的特征值，求 a,b,λ。

证明. 通过 $AA^*=|A|E$ 可得 $A\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$，代入求解即可得到结果。 □

定理 4.26. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量，求 x,y 应满足的条件。

证明. 可求出特征值为 $1,-1$，其中 1 是二重根。 □

定理 4.27. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & a & 3\\ 6 & -6 & b\end{pmatrix}$ 有特征值 $-2,4$。

1. 求 a,b；
2. A 能否相似于对角矩阵

证明. (1) 特征方程求解 a,b。 □

4.0.1 由特征值和特征向量求矩阵

定理 4.28. 已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1,-1,0$，其中 $1,0$ 的特征向量分别为 $(1,a,1)^T,(a,a+1,1)$，求矩阵 A。

证明. 由特征向量的正交性求 a，再由正交性求另一特征向量，写为线性方程组求基础解系。 □

定理 4.29. 设 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的 2 重特征值，若 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(2,1,1)^T,\lambda_3=(-1,2,-3)^T$ 都是 A 的属于 6 的特征向量。

1. 求另一特征值与它的特征向量；
2. 求 A。

证明. 与上题类似，秩为 2 可求得另一特征值为 0。 □

定理 4.30. 设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于 $-1,1$ 的特征向量，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$。

1. 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，
2. 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$。

证明. 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$，则：

$$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=\mathbf{0}$$
$$-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$$
$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3-(-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_2+k_3\alpha_3)=\mathbf{0}$$

□

定理 4.31. 设 λ_1,λ_2 为矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1,α_2，则 α_1 与 $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件为

定理 4.32. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，已知 A 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 A 的 2 重特征值，求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为为对角矩阵。

证明. 其它都很简单，注意到 A 可对角化并且 2 是二重特征值，所以几何重数也为 2，由

$$\dim[\mathrm{Ker}(2E-A)]=2$$

和秩零度定理可得出 $\mathrm{rank}(2E-A)=1$，x,y 可一次性求出。 □

定理 4.33. 已知 3 阶方阵 A 与 3 维列向量 X 使得向量组 X,AX,A^2X 线性无关且满足 $A^3X=3AX-2A^2X$。

1. 记 $P=(X,AX.A^2X)$，求 3 阶方阵 B 使得 $A=PBP^{-1}$；
2. 计算 $|A+E|$。

证明. (1) 求解 $AP=PB$。(2) 相似矩阵同特征值。 □