你永远不知道一个强迫症能干出什么事情

倪兴程[1]

2024 年 10 月 18 日

[1]Email: 19975022383@163.com

Todo list

域的概念 2
齐次方程组的解与逆矩阵 12
回头改证明，同时注意数域问题 40
Hermitian 转置不改变秩 40
证明有问题 50
Schimidt 正交化链接 65
可逆矩阵行列式链接 71
可逆矩阵行列式链接 72
有空证明 74
存在性证明 78
K^n 子空间为闭集 78
有空证明 87
记得写完以后链接过来，并且在写上下确界与极限的时候就把无穷的情况并进去 . . 103
有空证明 106
记得把单调序列的收敛原理放在这里 108
导数不存在的点一定至少存在两个列导数吗？ 161
补充证明 165
需要再思考如何证明 166
这部分还没证明 166
思考为什么一定得是闭子空间 171
需要证明 171
有空证明 174
有空证明 178
需要证明绝对收敛 185
需要证明 186
有时间思考一下有界集范数有界的证明应该放在什么位置 198
单独把这个证明拎出来，然后把连续可加等于连续线性以及 Hilbert 空间那里的证明放在一起考虑 199
有时间证明线性空间。 200

可列个可列是可列 223
证明未完成，考虑到 borel 代数的等价定义实在太多 224
级数收敛的必要条件 228
没有证完，涉及到半环的现代式定义 237
条件还需要再考虑 254
期望的线性性 276
Jensen 不等式链接 280
期望的线性性质，Lebesgue 积分 281
链接 Lebesgue 积分性质 283
链接独立性条件 284
需要证明对小于的都存在 285
以后写不相关的和的方差，需要注意从乘积期望开始写，还得链接方差线性变换的性质 288
需要写完特征函数 289
需要证明此时一定退化 300
写完变量变换法链接过来 311
期望的性质 312
写完矩阵的秩做链接 312
写完变量变换法链接过来 312
期望的性质 315
需要补充证明，但这里涉及到了 Jordan 标准形，学完再来补。 321
链接独立方差等于和 324
不无偏还未证明 329
多维情形下随机变量的连续映射定理 329
多维情形下随机变量的连续映射定理 329
考虑链接什么过来 332
链接随机变量函数的分布中的增补变量法 336
复相关系数性质 340
链接复相关系数的性质 340
写线性模型的时候再把多重共线性推导链接过来 341
期望的性质 344
证明 347
似然比检验 347
自由度的计算 347
链接全概率公式与条件概率，同时写完测度后重新定义 353
重期望公式 355
随机变量函数的分布 357
行列式等于特征值的积，行列式大于 0 矩阵可逆 359

$A(X^TX)^-A^T$ 的可逆性 363
$A(X^TX)^-A^T$ 的正定性 371
$A(X^TX)^-A^T$ 的正定性 373
T 的可逆性证明 375
正定阵可逆 376
记得证明独立 387
链接线性方程组理论 437
不同 λ_i 之间的线性无关性涉及到广义 Vandermonde 行列式，以后再写 440
确定这里是有相关性而不是不独立吗？ 453
遍历定理 455
回头补方差分析 493
在概率论里完善 Wilcoxon 秩统计量的分布相关理论，然后链接过来 511
没搞懂这里的连续性修正是个什么情况 519
在完成试验设计之后，把多样本位置检验与方差分析部分结合起来 520
记得以后要写多重假设检验的校正问题 527
需要找论文，Patil(1975)，同时需要看统计量的推导过程，为什么单侧检验 535
现在只提供了大样本近似，回头看完论文和原理记得补 535
有机会看看这里平衡与不平衡的不完全区组设计有没有什么区别 536
代码现在是只考虑平衡的 537
有空证明 542
根本没懂原理 545
查资料看 Kendall 的打结是否和 Friedman 一致 546
写完概率论把独立性链接到这里来 548
有机会看看单侧的实际意义，不懂为什么会考虑单侧 549
写完概率论把 Pearson 线性相关系数链接过来。 551

前言

其实这个想法在我大二之初准备全国大学生数学建模竞赛的时候就已经产生。第一次打数模国赛时整篇论文的编排工作由组内成员负责，当时我并不了解 LaTeX 的语法与使用，但由于 IGEM 校园选拔赛要求每位申请数模组的同学提交一篇自己独立完成的数学建模论文，我便开始学习 LaTeX。

本科阶段我曾学习大量数学专业课程，从基础的数学分析、高等代数到后来的随机过程、实变函数与泛函分析。我曾苦于寻找合适的教材（请允许我吐槽一下国内的本科教材，北大版高等代数与华东师大版数学分析简直不是人能看得下去的东西），感谢知乎、csdn 等处各位同学、学长学姐们的分享，我才得以接触到一些适合我的教材。以数学分析为例，我主要以北京大学张筑生教授编写的《数学分析新讲》为学习教材，以苏州大学谢惠民、恽自求等教授编写的《数学分析习题课讲义》为习题册进行查漏补缺，同时也曾阅读复旦大学陈纪修教授、北京大学伍胜健教授编写的《数学分析》，对清华大学于品教授的讲义也曾匆匆一瞥，这些教材都可以称为是国内顶尖的数学分析教材了。可是每本书都有每本书自己的特点，对于任何一本书，以上所列的其他书籍都对其有着一定的补充，曾考虑使用 marginnote 软件将这些书籍整理成一些思维导图，但思来想去还是觉得不如自己动手重新编撰为一本属于自己的教材。首先，思维导图只能援引原著内容，难以进行个性化表述，即使可以，操作与使用起来都有一定的复杂性与不便性；其次，倘若重新整理，内容编排上可按我的个人习惯以及思维过程进行调整，也可引入适当高阶课程中的知识进行更高观点的阐释，不同课程中的交叉部分也很容易集中叙述；同时，LaTeX 的交叉引用（点击即跳转）的功能也十分吸引我；最后，自己编一本书，倘若确实质量不错，也可上传至 Github 或个人主页供后来者一阅。

曾想过在 Bilibili 上录播自己在 SRT 阶段学习到的机器学习、深度学习及生物信息学知识作为分享，同时也可作为自己复习的一手资料，也曾想过利用 csdn、知乎这两个平台发布自己整理的笔记，但终究没有付诸实践，略有遗憾，但我现在做的本科阶段知识的整理，我一定会完成它。

本书打算整理我本科所学的所有数学类课程知识，将伴随着我个人的考研复习进度逐步完成，预计耗时一年半。

倪兴程
2024 年 10 月 18 日于南京农业大学教四楼 B409

目录

前言 iv

第一部分 代数 1

第一章 线性空间 2

1.1 线性空间 . . . 2

1.1.1 线性空间的概念与基本性质 . . . 2

1.1.2 线性相关与线性无关 . . . 4

1.1.3 子空间 . . . 12

1.1.4 线性空间的同构 . . . 19

1.1.5 商空间 . . . 21

1.2 线性映射 . . . 24

1.2.1 线性映射的定义与基本性质 . . . 24

1.2.2 线性映射的矩阵表示 . . . 27

1.3 线性变换 . . . 29

1.3.1 线性变换的性质 . . . 30

1.3.2 线性变换的特征值与特征向量 . . . 31

1.3.3 不变子空间 . . . 34

1.3.4 投影变换 . . . 34

1.4 内积空间 . . . 36

第二章 矩阵 37

2.1 矩阵空间 . . . 37

2.1.1 矩阵的运算 . . . 37

2.1.2 矩阵的行列式 . . . 39

2.1.3 矩阵的秩 . . . 39

2.2 矩阵的向量空间 . . . 40

2.3 线性方程组 . . . 40

2.3.1 初等方法 . . . 42

2.3.2 秩与子空间 42
2.3.3 解的结构 43
2.4 矩阵的等价关系 44
2.4.1 相抵 44
2.4.2 相似 45
2.4.3 合同 45
2.5 相抵的应用 48
2.5.1 广义逆 48
2.5.2 Moore-Penrose 广义逆 51
2.5.3 线性方程组的解 55
2.6 相似的应用 57
2.6.1 特征值与特征向量 57
2.6.2 矩阵的对角化 61
2.6.3 Hermitian 矩阵的对角化 63
2.7 合同的应用——二次型 66
2.7.1 二次型的规范形 67
2.7.2 正定二次型与正定矩阵 69
2.8 特殊矩阵 75
2.8.1 幂等阵 75
2.8.2 正交投影阵 77
2.9 矩阵的分解 78
2.9.1 SVD 分解 78

第二部分 分析学 80

第三章 度量空间 81
3.1 度量空间上的点集 81
3.2 度量空间上点集的性质 83
3.3 稠密、稀疏、可分性、有界性 86
3.3.1 稠密 86
3.3.2 稀疏集 86
3.3.3 可分性 87
3.3.4 有界性 87
3.4 度量空间上的收敛点列 87
3.5 度量空间上的映射 89
3.5.1 一般映射的定义与性质 89
3.5.2 度量空间上的映射 90
3.5.3 映射的连续性 91

3.6 完备的度量空间 92
3.6.1 Cauchy 点列 92
3.6.2 完备度量空间的定义 93
3.6.3 度量空间的完备化定理 94
3.7 完备度量空间的性质 94
3.7.1 子空间的完备性 94
3.7.2 第一型集与第二型集 95
3.7.3 准紧性与全有界性 95
3.7.4 压缩映射原理 98
3.8 紧集与紧度量空间 99
3.8.1 紧集的性质 99
3.8.2 紧度量空间的性质 99
3.8.3 紧集的充要条件 100
3.8.4 紧集上的连续映射 102

第四章 实数序列 103
4.1 实数序列的上下极限 103
4.1.1 上下极限与聚点的关系 103
4.1.2 上下极限与极限的关系 104
4.1.3 上下极限的大小 105
4.1.4 上下极限的运算 105

第五章 数项级数 107
5.1 正项级数 108
5.1.1 收敛原理 108
5.1.2 比较判别法 108
5.1.3 Cauchy 根式判别法 109
5.1.4 比值判别法 110
5.1.5 D'Alembert 判别法 111
5.1.6 Cauchy 积分判别法 113
5.1.7 比较尺度问题 115
5.1.8 Raabe 判别法 115
5.1.9 Gauss 判别法 117
5.2 任意项级数 118
5.2.1 条件收敛的判别 118
5.3 收敛级数的性质 121
5.3.1 收敛级数的可结合性 121
5.3.2 绝对收敛级数的性质 122
5.4 级数乘法 126

第六章 广义积分 **128**
6.1 无穷限积分 128
6.1.1 无穷限积分的定义 128
6.1.2 无穷限积分的计算 129
6.1.3 无穷限积分的收敛原理 130
6.1.4 无穷限积分敛散性的判别法 131
6.2 瑕积分 133
6.2.1 瑕积分的定义 133
6.2.2 瑕积分的计算 134
6.2.3 瑕积分的收敛原理 134
6.2.4 瑕积分敛散性的判别法 135

第七章 函数序列与函数项级数 **136**
7.1 函数序列的收敛 136
7.1.1 逐点收敛 136
7.1.2 一致收敛 137
7.2 函数项级数的收敛 138
7.2.1 逐点收敛 138
7.2.2 一致收敛 138
7.3 极限函数的分析性质 141
7.3.1 连续性 141
7.3.2 定积分 142
7.3.3 微分 143
7.4 幂级数 144
7.4.1 幂级数的收敛半径 144
7.4.2 幂级数和函数的分析性质 146

第八章 Fourier 级数 **148**

第九章 Lebesgue 积分 **150**
9.1 外测度 150
9.1.1 外测度的定义 150
9.1.2 外测度的性质 151
9.1.3 区间的外测度 152
9.2 可测集类 152
9.3 可测函数 155
9.3.1 可测函数的性质 155
9.3.2 可测函数列与一致收敛 155
9.3.3 可测函数与连续函数的关系 156

9.4 积分论 156
9.4.1 一般可测函数的 Lebesgue 积分 157
9.4.2 Riemann 积分与 Lebesgue 积分 158
9.5 微分与不定积分 160
9.5.1 Vitali 定理 160
9.5.2 单调函数的可微性 160
9.5.3 有界变差函数 161
9.5.4 不定积分 165

第十章 赋范线性空间 168
10.1 范数 168
10.2 赋范线性空间作为线性空间的性质 169
10.2.1 基与维数 169
10.2.2 直和 170
10.2.3 商空间 171
10.2.4 有限维赋范线性空间的性质 171
10.3 Banach 空间 174
10.3.1 无限维 Banach 空间的基 175
10.4 Hilbert 空间 175
10.4.1 内积与范数的关系 176
10.4.2 Hilbert 空间中的正交系 178

第十一章 常见度量空间与赋范线性空间 189
11.1 $\mathbb{R}^n$ 189
11.1.1 $\mathbb{R}^n$ 上的距离 189
11.1.2 $\mathbb{R}^n$ 上的范数 190
11.1.3 性质 190
11.2 $\mathbb{C}^n$ 191
11.2.1 $\mathbb{C}^n$ 上的距离 191
11.2.2 $\mathbb{C}^n$ 上的范数 192
11.3 l^p 192
11.3.1 l^p 上的距离 192
11.3.2 l^p 上的范数 193
11.4 l^∞ 193
11.4.1 l^∞ 上的距离 193
11.5 s 194
11.5.1 s 上的距离 194
11.6 S 194
11.6.1 S 上的距离 195

11.7 $C[a,b]$ . . . 195
11.7.1 $C[a,b]$ 上的距离 . . . 195
11.7.2 $C[a,b]$ 上的范数 . . . 196
11.7.3 性质 . . . 196

第十二章 Banach 空间上的有界线性算子 **197**
12.1 线性算子 . . . 197
12.1.1 线性算子的定义 . . . 197
12.1.2 线性算子的连续性 . . . 197
12.1.3 线性算子的有界性 . . . 198
12.1.4 线性算子有界与连续的关系 . . . 199
12.2 有界线性算子空间 . . . 200
12.2.1 有界线性算子空间的范数 . . . 200
12.2.2 有界线性算子空间中的依算子范数收敛 . . . 201
12.2.3 有界线性算子空间中的强收敛 . . . 201
12.2.4 有界线性算子空间的完备性 . . . 202
12.2.5 有界线性算子的乘法 . . . 203
12.3 Banach 空间上有界线性算子的四大定理 . . . 204
12.3.1 开映射定理 . . . 204
12.3.2 逆算子定理 . . . 204
12.3.3 闭图像定理 . . . 205
12.3.4 共鸣定理 . . . 207
12.4 有界线性泛函 . . . 208
12.4.1 有界线性泛函的延拓 . . . 208
12.5 对偶空间与伴随算子 . . . 209
12.5.1 对偶空间 . . . 209

第三部分 概率论 **210**

第十三章 概率测度 **211**
13.1 集合 . . . 211
13.1.1 重要集族 . . . 212
13.1.2 集族的生成 . . . 216
13.1.3 $\mathbb{R}$ 上开集与闭集的构造 . . . 222
13.1.4 Borel σ 域 . . . 223
13.2 测度空间 . . . 224
13.2.1 集函数与测度 . . . 224
13.2.2 外测度 . . . 230

13.2.3 测度的扩张 235
13.3 可测映射与可测函数 238
13.3.1 可测映射 238
13.3.2 可测函数 239
13.3.3 可测函数的收敛性 244
13.4 积分论 251
13.4.1 非负简单函数的积分 251
13.4.2 非负可测函数的积分 254
13.4.3 一般可测函数的积分 257
13.5 L_p 与 L_∞ 266
13.5.1 L_p 266
13.5.2 L_∞ 267
13.5.3 收敛性 269
13.6 不定积分 270
13.6.1 符号测度 270

第十四章 随机变量的数字特征 **272**
14.1 期望 272
14.2 方差 272
14.3 矩 273
14.3.1 原点矩 273
14.3.2 中心矩 274
14.4 协方差 274
14.5 二次型 276
14.6 矩母函数 280
14.7 累积量生成函数 281
14.8 特征函数 282
14.9 Fisher 信息量 286

第十五章 大数定律与中心极限定理 **288**
15.1 大数定律 288
15.1.1 弱大数定律 288
15.2 连续性校正 289
15.2.1 使用原因 289
15.2.2 具体方法 290

第四部分 最优化 **291**

第十六章 凸 **292**

16.0.1 映射的上下极限与半连续性 292

第十七章 规划问题 293

17.1 线性规划 293

17.1.1 线性规划的标准形 293

17.1.2 线性规划解的性质 296

第五部分 不等式 298

第十八章 不等式 299

18.1 Cauchy 不等式 299

18.1.1 实数域上的 Cauchy 不等式 299

18.1.2 复数域上的 Cauchy 不等式 299

18.1.3 内积导出的 Cauchy-Schiwarz 不等式 300

18.1.4 期望形式的 Cauchy-Schiwarz 不等式 300

18.1.5 Rayleigh 商的 Cauchy-Schwarz 不等式 301

18.2 Young's 不等式 301

18.2.1 一般形式 301

18.3 Holder 不等式 302

18.3.1 离散形式的 Holder 不等式 302

18.3.2 积分形式的 Holder 不等式 302

18.4 Minkowski 不等式 305

18.4.1 离散形式的 Minkowski 不等式 305

18.4.2 积分形式的 Minkowski 不等式 306

18.5 Something else 309

18.5.1 Chebyshev 不等式 309

第六部分 统计学 310

第十九章 正态分布与三大抽样分布 311

19.1 多元正态分布 311

19.1.1 多元正态分布的定义 311

19.1.2 多元正态分布的性质 313

19.1.3 矩阵正态分布的定义 320

19.1.4 矩阵正态分布的性质 322

19.2 χ^2 分布，t 分布和 F 分布 323

19.2.1 χ^2 分布 323

19.2.2 t 分布 325

19.2.3 F 分布 325

第二十章 点估计理论 327

20.1 点估计的性质 327

20.1.1 无偏性与渐进无偏性 327

20.1.2 有效性 327

20.1.3 相合性 328

20.2 矩估计 328

20.2.1 矩法 328

20.2.2 矩估计的性质 329

20.3 极大似然估计 330

20.4 一致最小方差无偏估计 330

第二十一章 something 331

21.1 抽样分布 331

21.2 次序统计量 334

21.3 充分统计量 337

21.4 Delta method 337

21.5 主成分分析 337

21.5.1 总体主成分分析 337

21.5.2 样本主成分分析 341

21.5.3 注意事项 341

21.6 因子分析 342

21.6.1 参数估计方法 344

21.6.2 因子旋转 346

21.6.3 模型检验 347

21.6.4 因子得分 348

第二十二章 贝叶斯统计 349

22.1 Basics 349

22.1.1 Group Family 349

22.1.2 Exponential Families 350

22.2 Bayesian 352

22.2.1 Binomial Distribution 353

22.2.2 Normal Distribution 354

22.2.3 Possion Model 356

22.3 Prior Distribution 356

22.3.1 Conjugate Prior Distribution 356

22.3.2 Noninformative Prior Distribution 356

第二十三章 线性模型 **358**
23.1 一般线性模型 358
23.1.1 参数估计 359
23.1.2 约束最小二乘估计 362
23.1.3 实际计算 365
23.1.4 预测 365
23.2 正态线性模型 367
23.2.1 参数估计 367
23.2.2 假设检验 370
23.2.3 置信域 372
23.2.4 区间预测 374
23.3 误差协方差推广 375
23.3.1 广义最小二乘估计 375
23.3.2 最小二乘统一理论 376
23.4 线性回归模型 376
23.4.1 假设检验 378

第二十四章 方差分析 **379**
24.1 固定效应下的单因子方差分析 380
24.1.1 统计模型 380
24.1.2 统计假设 380
24.1.3 偏差平方和的分解 381
24.1.4 检验统计量 382
24.1.5 统计量的分布 385
24.1.6 方差分析表 385
24.1.7 参数估计 385
24.2 多重假设检验 386
24.2.1 对比 387
24.2.2 正交对比 388
24.2.3 Duncan 多重比较法 390
24.2.4 Scheffe 多重比较法 392
24.3 随机效应下的单因子方差分析 392
24.3.1 统计模型 393
24.3.2 统计假设 393
24.3.3 方差分析 393
24.3.4 方差分析表 395
24.3.5 参数估计 395
24.4 可加效应下的两因子方差分析 396

24.4.1 统计模型 . . . 396
24.4.2 统计假设 . . . 397
24.4.3 偏差平方和的分解 . . . 397
24.4.4 检验统计量 . . . 400
24.4.5 统计量的分布 . . . 402
24.4.6 方差分析表 . . . 402
24.4.7 参数估计 . . . 403
24.4.8 多重比较问题 . . . 404
24.4.9 等重复试验情形 . . . 404
24.5 交互效应下的两因子方差分析 . . . 405
24.5.1 统计模型 . . . 405
24.5.2 统计假设 . . . 406
24.5.3 偏差平方和的分解 . . . 406
24.5.4 检验统计量 . . . 408
24.5.5 统计量的分布 . . . 408
24.5.6 方差分析表 . . . 409
24.5.7 参数估计 . . . 409
24.6 随机效应下的两因子方差分析 . . . 410
24.6.1 统计模型 . . . 410
24.6.2 统计假设 . . . 410
24.6.3 方差分析 . . . 410
24.6.4 方差分析表 . . . 412
24.6.5 参数估计 . . . 412
24.7 混合模型下的两因子方差分析 . . . 413
24.7.1 统计模型 . . . 413
24.7.2 统计假设 . . . 414
24.7.3 方差分析 . . . 414
24.7.4 方差分析表 . . . 415
24.7.5 多重比较比较问题 . . . 415
24.7.6 参数估计 . . . 415

第二十五章 部分实施问题 416

25.1 正交拉丁方设计 . . . 416
25.1.1 拉丁方设计 . . . 417
25.1.2 希腊拉丁方设计 . . . 418
25.2 正交表设计 . . . 420

第二十六章 时间序列分析 421
26.1 平稳时间序列 . . . 421
26.1.1 平稳时间序列的性质 . . . 421
26.1.2 线性平稳序列 . . . 427
26.2 线性差分方程理论 . . . 434
26.2.1 差分与位移 . . . 434
26.2.2 线性差分方程 . . . 435
26.2.3 n 阶常系数线性差分方程 . . . 438
26.3 ARIMA . . . 442
26.3.1 AR 模型 . . . 442
26.3.2 MA 模型 . . . 446
26.3.3 ARMA . . . 448
26.3.4 ARIMA 模型 . . . 451
26.4 本科时间序列 . . . 453
26.5 参数估计 . . . 454
26.5.1 平稳序列的数学期望 . . . 454
26.5.2 平稳序列的自协方差 . . . 455
26.6 预测 . . . 456

第七部分 试验设计 457

第二十七章 试验设计基本概念 458

第八部分 抽样调查 459

符号说明 460

第二十八章 抽样调查基本概念 462
28.1 抽样调查的目的 . . . 462
28.2 目标群体、源群体、研究群体 . . . 462
28.3 抽样设计 . . . 463
28.4 抽样框架 . . . 463
28.5 抽样调查随机性的来源 . . . 464
28.5.1 基于模型的方法 . . . 464
28.5.2 基于设计的方法 . . . 464
28.6 概率抽样概述 . . . 464
28.6.1 样本概率 . . . 464
28.6.2 入样概率与抽样权重 . . . 464

第二十九章 简单随机抽样 465

29.1 SRS 的参数估计 465

29.1.1 SRS 总体均值 μ 的估计 466

29.1.2 SRS 总体总量 τ 的估计 466

29.1.3 SRS 总体方差 σ^2 的估计 468

29.2 SRS 阳性率问题 468

29.2.1 阳性率 p 的估计 468

29.2.2 总体方差 σ^2 的估计 469

29.3 SRSWR 的参数估计 469

29.3.1 SRSWR 总体总量 τ 的估计 470

29.4 样本容量的选择 471

29.4.1 总体均值样本容量公式 471

29.4.2 总体阳性率样本容量公式 472

29.5 简单随机抽样适用条件 473

第三十章 回归估计与比例估计 474

30.1 辅助变量 474

30.1.1 辅助变量选择要求 474

30.1.2 辅助变量与个体值的相关性 474

30.2 估计量 476

30.2.1 回归估计量 476

30.2.2 比例估计量 476

30.3 偏差 476

30.3.1 回归估计的偏差 476

30.3.2 比例估计的偏差 476

30.4 均方误差 478

30.4.1 回归估计量的均方误差 478

30.4.2 比例估计量的均方误差 479

30.5 方差 479

30.5.1 回归估计的方差 479

30.5.2 比例估计的方差 480

30.6 置信区间 482

30.6.1 回归估计的置信区间 482

30.6.2 比例估计的置信区间 482

30.7 比例估计样本容量的选择 482

30.8 回归估计、比例估计与 HT 估计的比较 482

第三十一章 标记重捕法 **483**
31.1 假设 . . . 483
31.2 总体总量 t 的估计 . . . 483
31.2.1 点估计 . . . 483
31.2.2 区间估计 . . . 484

第三十二章 分层抽样 **488**
32.1 参数估计 . . . 489
32.1.1 亚群体特征的估计 . . . 489
32.1.2 总体总量 $\hat{\tau}$ 的估计 . . . 489
32.1.3 总体均值 $\hat{\mu}$ 的估计 . . . 490
32.1.4 估计的性质 . . . 490
32.1.5 群体比例问题 . . . 491
32.2 估计方法思考 . . . 491
32.3 分配原则 . . . 492
32.3.1 比例分配 . . . 492
32.3.2 最优分配 . . . 494
32.4 后分层 . . . 496
32.4.1 参数估计 . . . 496
32.5 样本容量 . . . 498

第三十三章 整群抽样 **499**
33.1 一阶整群抽样 . . . 500
33.1.1 参数的无偏估计 . . . 501
33.1.2 参数的比例估计 . . . 502
33.2 二阶抽样 . . . 503
33.2.1 总量的估计 . . . 504
33.2.2 流行率问题 . . . 506
33.3 系统抽样 . . . 506

第九部分 非参数统计学 **507**

第三十四章 单样本位置检验 **508**
34.1 广义符号检验 . . . 508
34.2 Wilcoxon 符号秩检验 . . . 510
34.3 中位数的点估计与置信区间 . . . 512
34.4 符号检验与 Wilcoxon 符号秩检验的比较 . . . 513

第三十五章 两样本位置检验 514
35.1 目的 514
35.2 Brown-Mood 中位数检验 514
35.3 Wilcoxon 秩和检验 516
35.4 Brown-Mood 中位数检验与 Wilcoxon 秩和检验的比较 517
35.5 成对数据差异性检验 517
35.5.1 连续型数据 518
35.5.2 01 型数据的 McNemar 检验 518

第三十六章 多样本位置检验 520
36.1 目的 520
36.2 本章各方法的简单总结 520
36.3 Kruskal-Wallis 检验 520
36.4 Jonckheere-Terpstra 检验 523
36.5 Friedman 秩和检验 526
36.6 Page 检验 529
36.7 Cochran 检验 534
36.8 Durbin 检验 536

第三十七章 Something else 540
37.1 Cox-Stuart 趋势检验 540
37.2 游程检验 541
37.3 分类评分结果一致性判断 545
37.3.1 Cohen's Kappa 系数 545
37.3.2 Kendall 协同系数检验 546
37.4 列联表独立性问题 548
37.4.1 Pearson 近似检验 548
37.4.2 低维列联表的 Fisher 精确检验 549
37.5 似然比检验 550

第三十八章 单调关联性 551
38.1 单调关联性的零假设与备择假设 551
38.2 本章各方法的简单总结 551
38.3 Spearman 秩关联检验 552
38.4 Kendall τ 关联检验 553
38.5 Goodman-Kruskal's γ 关联检验 554
38.6 Sumers' d 关联检验 555

第十部分 机器学习 **556**

第三十九章 集成学习 **557**

39.1 信息论 557
39.1.1 信息量 557
39.1.2 信息熵 558
39.2 决策树 558
39.2.1 算法流程 558
39.3 XGBoost 566
39.3.1 抽象到具体 567

附录 **569**

.1 数域 569
.2 等价关系 569
.3 矩阵 571
.3.1 Kronecker 乘积 571
.3.2 迹 572
.3.3 向量化算子 573
.3.4 平方根阵 574
.4 中英术语表 577
中英术语表 577

后记 **578**

第一部分

代数

Chapter 1

线性空间

1.1 线性空间

1.1.1 线性空间的概念与基本性质

Definition 1.1. 设 S 是一个非空集合，$S \times S$ 是 S 与自身的一个 *Cartesian product*（定义可见定义 .5），则 $f : S \times S \to S$ 称为 S 上一个二元代数运算 *(binary algebraic operation)*，简称为 S 上的一个运算。

线性空间的定义

域的概念

Definition 1.2. 设 X 是一个非空集合，F 是一个域。如果 X 上有一个运算，即 $f : (\alpha, \beta) \to \gamma(\alpha, \beta, \gamma \in X)$，将该运算称为加法 *(addition)*，把 γ 称为 α 与 β 的和 *(sum)*，记作 $\alpha + \beta = \gamma$；同时 F 与 X 有一个运算，即 $g : (k, \alpha) \to \delta(k \in F,\ \alpha, \delta \in X)$，将该运算称为纯量乘法 *(scalar multiplication)*，把 δ 称为 k 与 α 的纯量乘积 *(scalar multiple)*，记作 $k\alpha = \delta$。若上述两个运算还满足以下 8 条运算法则：

1. $\forall\, \alpha, \beta \in X,\ \alpha + \beta = \beta + \alpha$；
2. $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in X,\ (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$；
3. X 中有一个元素，记作 $\mathbf{0}$，称为 X 的零元 *(zero vector)*，它使得：
$$\forall\, \alpha \in X,\ \alpha + \mathbf{0} = \alpha$$
4. 对于任意的 $\alpha \in X$，存在与之对应的 $\beta \in X$，称为 α 的负元 *(additive inverse)*，记作 $-\alpha$，它使得：
$$\alpha + \beta = \mathbf{0}$$
5. F 中的单位元 *(multiplicative identity)* 1 满足 $\forall\, \alpha \in X,\ 1\alpha = \alpha$；
6. $\forall\, \alpha \in X,\ k, l \in F,\ (kl)\alpha = k(l\alpha)$；

7. $\forall\,\alpha \in X,\ k, l \in F,\ (k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$；

8. $\forall\,\alpha, \beta \in X,\ k \in F,\ k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta$。

那么称 X 是域 F 上的一个线性空间 *(linear space)*，称 X 中的元素为向量 *(vector)*。

线性空间的基本性质

Property 1.1.1. 域 F 上的线性空间 X 具有如下性质：

1. X 中的零元是唯一的；

2. X 中每个元素的负元是唯一的；

3. $\forall\,\alpha \in X,\ 0\alpha = \mathbf{0}$；

4. $\forall\,k \in F,\ k\mathbf{0} = \mathbf{0}$；

5. 设 $k \in F,\ \alpha \in X$。如果 $k\alpha = \mathbf{0}$，那么 $k = 0$ 或 $\alpha = \mathbf{0}$。

6. $\forall\,\alpha \in X,\ (-1)\alpha = -\alpha$；

Proof. (1) 假设 X 中有两个零元 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 且 $\mathbf{0}_1 \neq \mathbf{0}_2$，由线性空间运算法则 (3) 可得：

$$\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1,\ \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$$

而由线性空间运算法则 (1) 可得：

$$\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1$$

于是 $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$，产生矛盾，所以 X 中的零元是唯一的。

(2) 任取 X 中的一个元素 α，假设它有两个负元 β_1, β_2。由线性空间运算法则 (4)(3)(2) 可得：

$$(\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = \mathbf{0} + \beta_2 = \beta_2$$
$$(\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = \beta_1 + \mathbf{0} = \beta_1$$

所以 $\beta_1 = \beta_2$，产生矛盾。由 α 的任意性，X 中每个元素的负元都是唯一的。

(3) 由线性空间运算法则 (7) 可得：

$$0\alpha + 0\alpha = (0+0)\alpha = 0\alpha$$

两边同时加上 -0α 可得：

$$0\alpha + 0\alpha + (-0\alpha) = 0\alpha + (-0\alpha)$$

由线性空间运算法则 (2)(4) 和 (3) 可得：

$$0\alpha = \mathbf{0}$$

(4) 由线性空间运算法则 (8) 和 (3) 可得：

$$k\mathbf{0}+k\mathbf{0}=k(\mathbf{0}+\mathbf{0})=k\mathbf{0}$$

两边加上 $-k\mathbf{0}$ 再由线性空间运算法则 (2)(4) 和 (3) 可得：

$$k\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

(5) 如果 $k\neq 0$，依次由线性空间运算法则 (5)、(6) 和线性空间基本性质 (4) 可得：

$$\alpha=1\alpha=(k^{-1}k)\alpha=k^{-1}(k\alpha)=k^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

(6) 由线性空间运算法则 (5) 与 (7) 以及线性空间基本性质 (3) 可得：

$$\alpha+(-1)\alpha=1\alpha+(-1)\alpha=(1-1)\alpha=0\alpha=\mathbf{0}$$

再由负元的定义，$(-1)\alpha=-\alpha$。 □

Definition 1.3. 设 X 是域 F 上的线性空间。由性质 *1.1.1(2)*，定义 $f:(\alpha,\beta)\to\alpha+(-\beta)\in X(\alpha,\beta\in X)$，将该运算称为减法 *(subtraction)*，把 $\alpha+(-\beta)$ 称为 α 与 β 的差 *(difference)*，记作 $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$。

1.1.2 线性相关与线性无关

Definition 1.4. X 是域 F 上的线性空间。按照一定顺序写出的有限多个向量（允许有相同的向量）称为 X 的一个向量组 *(set of vectors)*，如 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$。

Definition 1.5. X 是域 F 上的线性空间。对于 X 中的一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 和 F 中的一组元素 $k_1,k_2,\ldots,k_n$，作纯量乘法和加法得到：

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\in X$$

称该向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的一个线性组合 *(linear combination)*。

Definition 1.6. X 是域 F 上的线性空间。若 $\beta\in X$ 可以表示成向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的一个线性组合，则称 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ **线性表出**。若 $\beta\in X$ 可以由向量集 $W\subseteq X$ 中有限多个向量构成的向量组线性表出，则称 β 可以由向量集 W 线性表出。

Definition 1.7. X 是域 F 上的线性空间。按照如下方式定义 X 中对象的线性相关 *(linearly dependent)* 与线性无关 *(linearly independent)*：

研究对象	线性相关	线性无关
X 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$	F 中有不全为 0 的元素 $k_1,k_2,\dots,k_n$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = \mathbf{0}$	从 $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = \mathbf{0}$ 可以推出 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$
空集		定义空集是线性无关的
X 的非空有限子集	给这个子集的元素一种编号所得的向量组线性相关	给这个子集的元素一种编号所得的向量组线性无关
X 的无限子集 W	W 有一个有限子集线性相关	W 的任一有限子集都线性无关

Property 1.1.2. 设 X 是域 F 上的线性空间，则：

1. 如果 X 中向量组的一个部分组线性相关，那么这个向量组线性相关；
2. 包含 $\mathbf{0}$ 的向量组是线性相关的；
3. 元素个数大于 1 的向量集 W 线性相关当且仅当 W 中至少有一个向量可以由其余向量中的有限多个线性表出，从而 W 线性无关当且仅当 W 中的每一个向量都不能由其余向量中的有限多个线性表出。

Proof. (1) 取 X 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$，其部分组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_m}$，$i_m, m \leqslant n$ 线性相关，即 F 中存在不全为 0 的一组元素 $k_{i_1},k_{i_2},\dots,k_{i_m}$ 使得：

$$k_{i_1}\alpha_{i_1} + k_{i_2}\alpha_{i_2} + \cdots + k_{i_m}a_{i_m} = \mathbf{0}$$

在：

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_n\alpha_n$$

中取 $l_{i_j} = k_{i_j}$，$j = 1,2,\dots,m$，其余系数为 0，则 $l_1,l_2,\dots,l_n$ 不全为 0 同时上式值为 $\mathbf{0}$，即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性相关。

(2) 由性质 1.1.1(4) 可得 $\mathbf{0}$ 作为向量组的部分组是线性相关的，由 (1) 即可得出结果。

(3) 由定义直接得到。 □

Property 1.1.3. 设 X 是域 F 上的线性空间，则：

1. 向量 $\beta \in X$ 可以由向量集 $W \subseteq X$ 线性表出，则表示方法唯一的充分必要条件是 W 线性无关；
2. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性无关，则向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表出的充分必要条件为 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta$ 线性相关。

Proof. (1) **充分性**：因为 β 可以由向量集 W 线性表出，假设此时 β 有以下两种表出方式：

$$\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r + k_{r+1}u_1 + \cdots + k_{r+s}u_s$$
$$\beta = l_1\alpha_1 + \cdots + l_r\alpha_r + l_{r+1}v_1 + \cdots + l_{r+t}v_t$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,u_1,u_2,\ldots,u_s,v_1,v_2,\ldots,v_t\in W,\ k_1,\ldots,k_{r+s},l_1,\ldots.l_{r+t}\in F,\ r,s,t\geqslant 0$。二式作差可得：

$$\mathbf{0}=(k_1-l_1)\alpha_1+\cdots+(k_r-l_r)\alpha_r+k_{r+1}u_1+\cdots+k_{r+s}u_s-l_{r+1}v_1-\cdots-l_{r+t}v_t$$

因为 W 线性无关，所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,u_1,u_2,\ldots,u_s,v_1,v_2,\ldots,v_t$ 线性无关，于是：

$$k_1-l_1=0,\cdots,k_r-l_r=0,k_{r+1}=0,\cdots,k_{r+s}=0,l_{r+1}=0,\ldots,l_{r+t}=0$$

所以两个表出方式完全相同，β 由 W 线性表出的表示方法唯一。

必要性：如果 W 线性相关，则 W 有一个有限子集 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ 线性相关，于是 F 中有不全为 0 的元素 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ 使得：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\mathbf{0}$$

由于 β 可以由 W 线性表出，所以：

$$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n+l_{n+1}v_1+\cdots+l_{n+s}v_s$$

其中 $l_i\in F,\ i=1,2,\ldots,n;\ v_j\in X,\ j=1,2,\ldots,s$。将上两式相加可得：

$$\beta=(l_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(l_n+k_n)\alpha_n+l_{n+1}v_1+\cdots+l_{n+s}v_s$$

因为 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ 不全为 0，所以有序元素组：

$$(l_1,\ldots,l_n,l_{n+1},\ldots,l_{n+s})\neq(l_1+k_1,\ldots,l_n+k_n,l_{n+1},\ldots,l_{n+s})$$

于是 β 由 W 线性表出的方式不唯一，矛盾，所以 W 线性无关。

(2) **充分性**：因为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，所以域 F 中存在不全为 0 的元素 $k_1,k_2,\ldots,k_n,l$ 使得：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n+l\beta=\mathbf{0}$$

若 $l=0$，则域 F 中存在不全为 0 的元素 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ 使得：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\mathbf{0}$$

这与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关矛盾，所以 $l\neq 0$。于是：

$$\beta=-\frac{k_1}{l}\alpha_1-\frac{k_2}{l}\alpha_2-\cdots-\frac{k_n}{l}\alpha_n$$

即向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表出。

必要性：因为 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表出，所以域 F 中存在不全为 0 的元素 $k_1,k_2,\ldots,k_n,l$ 使得：

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$$

移项即可得到：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n-\beta=\mathbf{0}$$

因为 $-1\neq 0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$ 线性相关。 □

极大线性无关组与秩

Definition 1.8. 设 X 是域 F 上的一个线性空间。向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 中的一个部分组若满足下述条件：

1. 本身线性无关；
2. 若该部分组不等于向量组，则从向量组的其余向量中任取一个向量添加进该部分组都将使部分组线性相关。若该部分组等于向量组，则跳过此条件。

则称该部分组是向量组的一个极大线性无关组 *(maximal linearly independent system)*。

Definition 1.9. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的每一个向量都可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 线性表出，那么称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 线性表出。如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 和向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 可以互相线性表出，则称两个向量组等价 *(equivalent)*，记作：

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r\}$$

Theorem 1.1. X 是域 K 上的一个线性空间。X 中向量组的等价是 X 中向量组的一个等价关系。

Proof. (1) 反身性与 (2) 对称性显然成立。

(3) 传递性：若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 线性表出，且向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 可以由向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ 线性表出，于是有：

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} k_{j_i}\beta_j,\ i = 1, 2, \ldots, s \quad \beta_j = \sum_{l=1}^{t} q_{l_j}\gamma_l,\ j = 1, 2, \ldots, r$$

于是：

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} k_{j_i} \left(\sum_{l=1}^{t} q_{l_j}\gamma_l \right) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{t} k_{j_i}q_{l_j}\gamma_l = \sum_{l=1}^{t} \left(\sum_{j=1}^{r} k_{j_i}q_{l_j} \right) \gamma_l,\ i = 1, 2, \ldots, s$$

即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ 线性表出。传递性得证。 □

Theorem 1.2. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，则：

1. 若向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表出，同时 $r > s$，那么向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 线性相关；
2. 若向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表出，同时向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 线性无关，就有 $r \leqslant s$；
3. 等价的线性无关的向量组所含向量的个数相同。

Proof. (1) 考虑方程：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_r\beta_r = \mathbf{0}$$

因为向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表出，所以：

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1s}\alpha_s \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2s}\alpha_s \\ \vdots \\ \beta_r = a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \cdots + a_{rs}\alpha_s \end{cases}$$

则有：

$$\begin{aligned} k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_r\beta_r &= k_1(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1s}\alpha_s) \\ &\quad + k_2(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2s}\alpha_s) + \cdots \\ &\quad + k_r(a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \cdots + a_{rs}\alpha_s) \\ &= (k_1a_{11} + k_2a_{21} + \cdots + k_ra_{r1})\alpha_1 \\ &\quad + (k_1a_{12} + k_2a_{22} + \cdots + k_ra_{r2})\alpha_2 + \cdots \\ &\quad + (k_1a_{1s} + k_2a_{2s} + \cdots + k_ra_{rs})\alpha_s \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

将上式看作 $k_1, k_2, \ldots, k_r$ 的线性方程，考虑如下齐次线性方程组：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因为 $s < r$，由定理 2.5可知上述齐次线性方程组必有非零解。取它的一个非零解 $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$，由性质 1.1.1(3) 和线性空间运算法则 (3) 即可得：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_r\beta_r = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_s = \mathbf{0}$$

于是向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 线性相关。

(2) 是 (1) 的逆否命题。

(3) 可由 (2) 直接得到。 □

Property 1.1.4. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，则：

1. 一个向量组与它的任意一个极大线性无关组等价；
2. 一个向量组的任意两个极大线性无关组等价；
3. 一个向量组的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相同。

Proof. (1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 是一个向量组，任取它的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}$。显然 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表出。由极大线性无关组的定义与性质 1.1.3(2) 的充分性可直接得到 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可以由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}$ 线性表出。

(2) 由 (1) 以及向量组等价的对称性与传递性可直接推出。

(3) 由定理 1.2(3) 直接得到。 □

Definition 1.10. 向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩 *(rank)*。把向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的秩记作 $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$。全由零向量组成的向量组的秩规定为 0。

Property 1.1.5. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，则：

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是它的秩等于它所含向量的个数。

2. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 线性表出，那么：

$$\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} \leqslant \operatorname{rank}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r\}$$

3. 等价的向量组具有相等的秩。

Proof. (1) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关 $\iff$ 极大线性无关组就是自身 $\iff$ 秩等于所含向量的个数。

(2) 任取向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}$，再取向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 的一个极大线性无关组 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_m}$。因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 线性表出，所以 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}$ 可以由 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_m}$ 线性表出，因为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}$ 线性无关，由定理 1.2(2) 可得，$n \leqslant m$，即 $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} \leqslant \operatorname{rank}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r\}$。

(3) 由 (2) 可直接推得。 □

基与维数

Definition 1.11. 设 X 是域 F 上的一个线性空间。X 中的向量集 S 若满足下述条件：

1. 本身线性无关；

2. X 中的每一个向量都可以由 S 中有限多个向量线性表出。

则称 S 是向量组的一个基 *(basis)*。

Theorem 1.3. 任一域 F 上的任一线性空间 X 都有一组基。

该定理的证明不提供，涉及 Zorn 引理。

Definition 1.12. X 是域 F 上的线性空间。如果 X 的一组基是由有限多个向量组成的，那么称 X 是有限维的 *(finite-dimensional)*；如果 X 有一组基含有无穷多个向量，则称 X 是无限维的 *(infinite-dimensional)*。

Theorem 1.4. 如果域 F 上的线性空间 X 是有限维的，那么 X 的任意两个基所含向量的个数相同。

Proof. 由有限维线性空间的定义，X 存在一组基只有有限多个向量，记为 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$。再取 X 的一组基 S，从中取出 $n+1$ 个向量 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{n+1}$（考虑 S 可能含有无数个向量的情况）。因为 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是 X 的基，所以 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{n+1}$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表出。因为 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性无关，所以 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{n+1}$ 线性相关，而此时 S 也应线性相关，矛盾，所以 S 中的元素小于 $n+1$ 个。设 $S=\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m\}$，则 S 与 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 都线性无关且二者等价，由定理 1.2(3)，它们具有相同的秩，即所含向量个数相同。由 S 的任意性与向量组等价的传递性、对称性，X 的任意两个基所含向量的个数相同。 □

Corollary 1.1. 如果域 F 上的线性空间 X 是无限维的，那么 X 的任意一组基都含有无穷多个向量。

Proof. 如果 X 有一组基由有限多个向量组成，那么 X 也是一个有限维线性空间，而有限维线性空间所有基所含向量的个数都相同，那么 X 就不可能有一组基含有无穷多个向量，与无穷维线性空间的定义矛盾。 □

Definition 1.13. X 是域 F 上的线性空间。如果 X 是有限维的，那么把 X 的基所含向量的个数称为 X 的维数 *(dimension)*，记作 $\dim V$；如果 X 是无限维的，那么记 $\dim V=+\infty$。

Property 1.1.6. 设 X 是域 F 上的 n 维线性空间，则：

1. X 中任意 $n+1$ 个向量都线性相关。
2. 任意 n 个线性无关的向量都是 X 的一组基；
3. 如果 X 中任一向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是 X 的一组基；
4. X 中任意一个线性无关的向量组都可以扩充成 X 的一组基。

Proof. (1) 任意 $n+1$ 个向量都可以由一组基线性表出，而每一组基所含向量个数都是 n，由定理 1.2(1)，这 $n+1$ 个向量线性相关。

(2) 任取 X 中 n 个线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$，对任意的 $\beta\in X$，由上一个定理，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta$ 线性相关。由性质 1.1.3(2)，β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表出。由基的定义，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是 X 的一组基。由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 的任意性，命题成立。

(3) 取 X 的一组基 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$，则 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表出。由性质 1.1.5(2)，$n=\operatorname{rank}\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}\leqslant\operatorname{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}\leqslant n$，所以 $\operatorname{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}=n$，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性无关。由 (2)，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是 X 的一组基。

(4) 任取 X 中一个线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$，若 $r=n$，由 (2) 可知，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ 是 X 的一组基；若 $r<n$，则 X 中必定存在一个元素不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ 线性表出，将其记为 α_{r+1}，否则的话 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ 就是 X 的一组基，进而 X 的维数应是 r，矛盾。不断重复上述过程即可得到一个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$，这就是 X 的一组基。 □

坐标与坐标变换

Definition 1.14. X 是域 F 上的 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是 X 的一组基，由性质 *1.1.3(1)* 可知 X 中任一向量 α 由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表出的方式唯一：

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$$

把系数构成的 n 元有序数组写成列向量的形式，得到 $(a_1,a_2,\dots,a_n)^T$，该列向量被称为 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 下的坐标 *(coordinate)*。

接下来我们要讨论的是 X 中某一向量在不同基下的坐标之间有什么关系，首先我们需要定义什么叫不同的基。

Definition 1.15. X 是域 F 上的 n 维线性空间。X 中的两个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 如果满足 $\alpha_i=\beta_i$，$i=1,2,\dots,n$，那么称这两个向量组**相等**。

Definition 1.16. X 是域 F 上的 n 维线性空间。给定 V 的两个基：

$$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \quad \beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是 V 的一组基，所以有：

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

模仿矩阵乘法的定义将上式写作：

$$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

将上式右端的矩阵记作 A，称它是基 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 的过渡矩阵 *(transition matrix)*。于是上式可以写作：

$$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)A$$

由于这种写法是模仿矩阵乘法的定义，所以矩阵乘法所满足的运算法则对于这种写法也成立。

Theorem 1.5. X 是域 F 上的 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是 X 的一组基，且向量组 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 满足：

$$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)A$$

则 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 是 X 的一组基当且仅当 A 是可逆矩阵。

Proof. 由可得：

齐次方程组的解与逆矩阵

$$
\begin{aligned}
\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\text{是 } X \text{ 的一组基} &\iff \text{由}\sum_{i=1}^{n} k_i\beta_i = \mathbf{0}\text{可推出}k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0 \\
&\iff \text{由}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)A\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}\text{可推出}k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0 \\
&\iff \text{由}A\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}\text{可推出}k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0 \\
&\iff \text{齐次线性方程组}Ax = \mathbf{0}\text{只有零解} \\
&\iff A\text{可逆}
\end{aligned}
$$

□

Theorem 1.6. X 是域 F 上的 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 是 X 上的两个基，A 是由基 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 的过渡矩阵。若 X 中向量 α 在这两个基下的坐标分别为：

$$x = (x_1,x_2,\dots,x_n)^T,\ y = (y_1,y_2,\dots,y_n)^T$$

则有：

$$y = A^{-1}x$$

Proof. 因为：

$$
\begin{aligned}
\alpha &= (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)(x_1,x_2,\dots,x_n)^T \\
&= (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)(y_1,y_2,\dots,y_n)^T \\
&= (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)A(y_1,y_2,\dots,y_n)^T
\end{aligned}
$$

所以：

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)^T = A(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$$

即 $x = Ay$。因为 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 是 X 上的两个基，所以 A 可逆，于是 $y = A^{-1}x$。 □

1.1.3 子空间

子空间的定义及其判别

Definition 1.17. X 是域 F 上的一个线性空间，E 是 X 的一个非空子集。若 E 对于 X 上的加法和纯量乘法也构成域 F 上的一个线性空间，则称 E 是 X 的一个线性子空间 *(linear subspace)*，简称为子空间 *(subspace)*。

Theorem 1.7. X 是域 F 上的一个线性空间，E 是 X 的一个非空子集。E 是 X 的一个子空间的充分必要条件是 E 对 X 中的加法和纯量乘法封闭，即：

$$\alpha, \beta \in E \Rightarrow \alpha + \beta \in E$$
$$k \in F, \alpha \in E \Rightarrow k\alpha \in E$$

Proof. **(1) 必要性**：因为 E 是 X 的子空间，由子空间的定义，E 中的加法和纯量乘法就是 X 中的加法和纯量乘法，由加法和纯量乘法的定义，E 对 X 中的加法和纯量乘法封闭。

(2) 充分性：由条件可知此时已经对 E 定义了加法和纯量乘法，且就是 X 中的加法和纯量乘法，还需要证明的是 E 对于它自身的加法和纯量乘法满足线性空间的八条运算法则。对 $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in E$, $\forall\, k, l \in F$：

1. 因为 $\alpha, \beta, \gamma \in E$，所以 $\alpha, \beta, \gamma \in X$，对于 X 上的加法，有 $\alpha+\beta = \beta+\alpha$, $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$，而 X 上的加法就是 E 上的加法，所以 E 上的加法满足线性空间运算法则 (1)(2)；同理，E 上的纯量乘法满足线性空间运算法则 (5)(6)(7)(8)；

2. 因为 E 不是空集，所以存在 $\delta \in E$。因为 $\delta \in X$，所以由 X 中的纯量乘法可得 $0\delta = \mathbf{0}_X \in E$。对任意的 $\alpha \in E$，有 $\alpha \in X$，根据 X 中的加法有 $\alpha + \mathbf{0}_X = \alpha$，于是 $\mathbf{0}_X$ 是 E 中的零元，即 E 满足线性空间运算法则 (3)；

3. 因为 E 对纯量乘法封闭，所以 $(-1)\alpha \in E$。因为 $\alpha + (-1)\alpha = [1 + (-1)]\alpha = 0\alpha = \mathbf{0}$（第一步到第二步由 1，第三步到第四步因为 $\alpha \in X$），所以 $(-1)\alpha$ 是 α 的负元，即 E 满足线性空间运算法则 (4)。

□

子空间的性质

Theorem 1.8. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，E 是 X 的任意一个子空间，则有 $\dim(E) \leqslant \dim(X)$。$X$ 是有限维时等号成立当且仅当 $E = X$。

Proof. 由性质 1.1.6(4) 可得，E 的一组基可以扩充成 X 的一组基，所以 $\dim(E) \leqslant \dim(X)$。当 $E = X$ 时，显然 $\dim(E) = \dim(X)$。当 $\dim(E) = \dim(X)$ 时，由性质 1.1.6(2) 可知 E 的一组基就是 X 的一组基，所以 X 中的任一向量可以由 E 的基线性表出，于是 $X \subseteq E$，从而 $E = X$。 □

张成的子空间

Definition 1.18. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in X$，称：

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i : k_i \in F \right\}$$

为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ **张成的线性子空间**，记作 $< \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n >$。

Property 1.1.7. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in X$。$< \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n >$ 具有如下性质：

1. $< \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n >$ 是 X 的一个子空间；
2. $< \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n >$ 是 X 中包含 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的最小的子空间；
3. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的极大线性无关组是 $< \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n >$ 的基；
4. $\dim < \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n >= \operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$；
5. 若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in X$，则有：
$$< \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n >=< \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m > \iff \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$$
6. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 X 的一组基，则 $X =< \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n >$。

Proof. (1) 显然 $< \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n >$ 中的元素对 X 中的加法与纯量乘法封闭。

(2) 由子空间对加法与纯量乘法的封闭性，包含 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的子空间必然包含 $< \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n >$。

(3) 显然。

(4) 由 (3) 直接得到。

(5) 充分性显然，必要性由反证法可得。

(6) 显然。 □

子空间的交与和

Theorem 1.9. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，I 是一个指标集，对任意的 $i \in I$ 有 X_i 是 X 的子空间，则
$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{\alpha : \alpha \in X_i, \ \forall\, i \in I\}$$
也是 X 的子空间。

Proof. 任取 $\alpha, \beta \in \bigcap_{i \in I} X_i$ 和 $k_1, k_2 \in F$。对任意的 $i \in I$，因为 X_i 是 X 的子空间，$\alpha, \beta \in X_i$，所以 $k_1\alpha + k_2\beta \in X_i$，于是 $k_1\alpha + k_2\beta \in \bigcap_{i \in I} X_i$。由定理 1.7可知 $\bigcap_{i \in I} X_i$ 是 X 的子空间。 □

Definition 1.19. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的子空间。定义：
$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i : \alpha_i \in X_i \right\}$$

Theorem 1.10. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的子空间，$n \in \mathbb{N}^+$，则 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 也是 X 的子空间。

Proof. 任取 $\alpha, \beta \in X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 和 $k_1, k_2 \in F$，则：

$$\alpha = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n, \quad \beta = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$$

其中 $\gamma_i, \delta_i \in X_i$，$i = 1, 2, \ldots, n$，于是：

$$k_1\alpha + k_2\beta = \sum_{i=1}^{n}(k_i\gamma_i + k_2\delta_i)$$

因为 X_i 是 X 的子空间，所以 $k_i\gamma_i + k_2\delta_i \in X_i$，$i = 1, 2, \ldots, n$，于是 $k_1\alpha + k_2\beta \in X_1 + X_2 + \cdots + X_n$。由定理 1.7可得 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 是 X 的子空间。 □

Lemma 1.1. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in X$，则：

$$< \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m > + < \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n > = < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n >$$

Proof. 由子空间与子空间和的定义可直接得到。 □

Theorem 1.11. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，X_1, X_2 为 X 的有限维子空间，则 $X_1 \cap X_2$，$X_1 + X_2$ 也是有限维的，并且有：

$$\dim(X_1) + \dim(X_2) = \dim(X_1 + X_2) + \dim(X_1 \cap X_2)$$

Proof. 显然 $X_1 \cap X_2$ 是有限维的，设 $X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ 的维数分别为 n_1, n_2, m。取 $X_1 \cap X_2$ 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，把它分别扩充为 X_1 和 X_2 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_1-m}$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n_2-m}$。由性质 1.1.7(6) 和引理 1.1可得：

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_1-m} > + < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n_2-m} > \\ &= < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n_2-m} > \end{aligned}$$

根据性质 1.1.7(4) 可得 $\dim(X_1 + X_2) < n_1 + n_2 - m$，即 $X_1 + X_2$ 是有限维的。

设：

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + l_1\beta_1 + \cdots + l_{n_1-m}\beta_{n_1-m} + q_1\gamma_1 + \cdots + q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} = \mathbf{0}$$

于是：

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + l_1\beta_1 + \cdots + l_{n_1-m}\beta_{n_1-m} = -(q_1\gamma_1 + \cdots + q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m})$$

左边属于 X_1，右边属于 X_2，所以它们属于 $X_1 \cap X_2$。于是右边的向量也可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出，即：

$$(q_1\gamma_1 + \cdots + q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}) = p_1\alpha_1 + \cdots + p_m\alpha_m$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n_2-m}$ 是 X_2 的一组基，所以：

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_{n_2-m} = p_1 = p_2 = \cdots = p_m = 0$$

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n_1-m}$ 是 X_1 的一组基，所以：

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=l_1=l_2=\cdots=l_{n_1-m}=0$$

于是 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n_2-m}$ 线性无关。由基的定义，它们是 X 的一组基，于是有：

$$\begin{aligned}\dim(X_1+X_2)&=m+n_1-m+n_2-m\\&=\dim(X_1\cap X_2)+\dim(X_1)-\dim(X_1\cap X_2)+\dim(X_2)-\dim(X_1\cap X_2)\\&=\dim(X_1)+\dim(X_2)-\dim(X_1\cap X_2)\end{aligned}$$

即：

$$\dim(X_1)+\dim(X_2)=\dim(X_1+X_2)+\dim(X_1\cap X_2)$$ □

子空间的直和

Definition 1.20. 设 X 是域 F 上的线性空间，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是 X 的子空间。如果 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 中的每个向量 α 都能唯一地表示为：

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\ \alpha_i\in X_i$$

则称和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 为直和 *(direct sum)*，记为 $X_1\oplus X_2\oplus\cdots\oplus X_n$，也可以写作 $\oplus_{i=1}^{n}X_i$。若 $X=X_1\oplus X_2$，则称 X_2 为 X_1 的补空间 *(complement)*。

Theorem 1.12. 设 X 是域 F 上的线性空间，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是 X 的有限维子空间，则下列命题等价：

1. 和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 是直和；
2. 和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 中零向量的表示方法唯一；
3. $X_i\cap\left(\sum\limits_{j\neq i}X_j\right)=\mathbf{0},\ i,j=1,2,\ldots,n$；
4. $\dim(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\dim(X_1)+\dim(X_2)+\cdots+\dim(X_n)$；
5. $X_i,\ i=1,2,\ldots,n$ 的基合起来是和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的一组基。

前三条在 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是无限维子空间时也成立。

Proof. $1\Rightarrow 2$：由直和的定义是显然的。

$2\Rightarrow 3$：任取 $\alpha\in X_i\cap\left(\sum\limits_{j\neq i}X_j\right)$。因为 $\alpha\in X_i$，X_i 是一个子空间，所以 $-\alpha\in X_i$。因为 $\alpha\in\left(\sum\limits_{j\neq i}X_j\right)$，所以 α 可表示为：

$$\alpha=\sum_{j\neq i}\alpha_j,\ j=1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots n$$

于是：

$$\mathbf{0}=\alpha+(-\alpha)=-\alpha+\sum_{j\neq i}\alpha_j$$

因为 $\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}+\cdots+\mathbf{0}$，所以 $-\alpha=\mathbf{0}$，$\alpha=\mathbf{0}$。由 α 的任意性，$X_i\cap\left(\sum\limits_{j\neq i}X_j\right)=\mathbf{0}$，$i,j=1,2,\ldots,n$。

$3\Rightarrow 1$：假设和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 不是直和，则存在 $\alpha\in X_1+X_2+\cdots+X_n$ 有两种表示方式，设：

$$\alpha=\sum_{i=1}^n\alpha_i=\sum_{i=1}^n\beta_i,\quad \alpha_i,\beta_i\in X_i,\ \alpha_i\neq\beta_i$$

则：

$$\alpha_i-\beta_i=\sum_{j\neq i}(\beta_j-\alpha_j),\quad i,j=1,2,\ldots,n$$

注意到左边属于 X_i，右边属于 $\sum\limits_{j\neq i}X_j$，所以：

$$\alpha_i-\beta_i\in X_i\cap\left(\sum_{j\neq i}X_j\right)=\mathbf{0}$$

于是 $\alpha_i=\beta_i$，矛盾，因此和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 是直和。

$1\Rightarrow 4$：因为和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 是直和，由 (3) 可得 $X_i\cap\left(\sum\limits_{j\neq i}X_j\right)=\mathbf{0}$，$i,j=1,2,\ldots,n$。由定理 1.11可得：

$$\begin{aligned}\dim\left(\sum_{i=1}^nX_i\right)&=\dim\left(X_1+\sum_{i=2}^nX_i\right)=\dim(X_1)+\dim\left(\sum_{i=2}^nX_i\right)-\dim\left(X_1\cap\sum_{i=2}^nX_i\right)\\&=\dim(X_1)+\dim\left(\sum_{i=2}^nX_i\right)\end{aligned}$$

注意到：

$$X_2\cap\sum_{i=3}^nX_i\subset X_2\cap\left(X_1+\sum_{i=3}^nX_i\right)=\mathbf{0}$$

所以：

$$\dim\left(\sum_{i=2}^nX_i\right)=\dim(X_2)+\dim\left(\sum_{i=3}^nX_i\right)$$

由数学归纳法可得：

$$\dim(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\dim(X_1)+\dim(X_2)+\cdots+\dim(X_n)$$

$4\Rightarrow 5$：在 X_i 中取一组基 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{ir_i}$，$i=1,2,\ldots,n$，由引理 1.1和性质 1.1.7(6) 可得：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^nX_i&=<\alpha_{11},\alpha_{12},\ldots,\alpha_{1r_1}>+<\alpha_{21},\alpha_{22},\ldots,\alpha_{2r_2}>+\cdots+<\alpha_{n1},\alpha_{n2},\ldots,\alpha_{nr_n}>\\&=<\alpha_{11},\alpha_{12},\ldots,\alpha_{1r_1},\alpha_{21},\alpha_{22},\ldots,\alpha_{2r_2},\ldots,\alpha_{n1},\alpha_{n2},\ldots,\alpha_{nr_n}>\end{aligned}$$

因为：

$$\dim(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\dim(X_1)+\dim(X_2)+\cdots+\dim(X_n)=\sum_{i=1}^{n}r_i$$

所以 $\alpha_{ij},\ i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,r_i$ 线性无关，否则的话，由性质 1.1.7(4) 可得 $\dim(X_1+X_2+\cdots+X_n)<\sum\limits_{i=1}^{n}r_i$，矛盾。由性质 1.1.6(2) 可知 $\alpha_{ij},\ i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,r_i$ 是 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的一组基，即 $X_i,\ i=1,2,\ldots,n$ 的基合起来是和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的一组基。

$5\Rightarrow 1$：在 X_i 中取一组基 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{ir_i},\ i=1,2,\ldots,n$，则 $\alpha_{ij},\ i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,r_i$ 是 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的一组基。设:

$$\mathbf{0}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\ \alpha_i\in X_i$$

则有：

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i}k_{ij}\alpha_{ij}=\mathbf{0}$$

$k_{ij}\in F$。因为 $\alpha_{ij},\ i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,r_i$ 是 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的一组基，所以 $k_{ij}=0,\ i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,r_i$，于是 $\alpha_i=\mathbf{0}$，即和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 中零向量的表示方法唯一，由 (2) 可得和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 是直和。 □

Theorem 1.13. 设 X 是域 F 上的线性空间，则 X 的任一子空间 E 都有补空间。

Proof. **(1)** $\dim(X)=n<+\infty$：取 E 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$，把它扩充为 X 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-m}$，由引理 1.1和性质 1.1.7(6) 可知：

$$\begin{aligned}X&=<\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-m}>\\&=<\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m>+<\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-m}>=E+W\end{aligned}$$

其中 $W=<\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-m}>$。因为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-m}$ 线性无关，由性质 1.1.2(1) 可知 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-m}$ 线性无关，所以 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-m}$ 是 W 的一组基。于是 E 的一组基和 W 的一组基合起来就是 X 的一组基。由定理 1.12(5) 可知 $X=E\oplus W$，于是 W 是 E 的补空间。

(2) $\dim(X)=+\infty$：考虑商空间 X/E，设其一组基为 $\alpha_i+E,\ i\in I$，其中 I 是一个指标集。由推论 1.2可知 $\alpha_i,\ i\in I$ 线性无关。令：

$$W=\left\{\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i:k_i\in F,\ n\in\mathbb{N}^+\right\}$$

显然 $\alpha_i,\ i\in I$ 是 W 的一组基。下面证明 W 是 E 的一个补空间。

任取 $\alpha\in X$，因为 $\alpha_i+E,\ i\in I$ 是 X/E 的一组基，所以：

$$\alpha+E=\sum_{i=1}^{m}l_i\alpha_i+E,\ l_j\in F$$

即：

$$\alpha - \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i \in E$$

于是 α 可以表示为 E 和 W 中两个元素的和。由 α 的任意性，$X = E + W$。

任取 $\beta \in W \cap E$，因为 $\beta \in W$，所以：

$$\beta = \sum_{i=1}^{t} p_i a_i,\ p_i \in F$$

又因为 $\beta \in E$，所以：

$$E = \beta + E = \sum_{i=1}^{t} p_i a_{r_i} + E = \sum_{i=1}^{t} p_i (a_i + E)$$

因为 $\alpha_i + E,\ i \in I$ 线性无关，所以 $p_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, t$（$E$ 是 X/E 的零元），于是 $\beta = \mathbf{0}$。由定理 1.12(3) 可知 $X = E \oplus W$，W 是 E 的补空间。

综上，X 的任一子空间 E 都有补空间。 □

1.1.4 线性空间的同构

Definition 1.21. 设 X, Y 为域 F 上的线性空间。如果存在 X 到 Y 的一个双射 σ，使得对于任意的 $\alpha, \beta \in X$，$k_1, k_2 \in F$，有：

$$\sigma(k_1\alpha + k_2\beta) = k_1\sigma(\alpha) + k_2\sigma(\beta)$$

则称 σ 是 X 到 Y 的一个同构映射 *(isomorphism)*，此时称 X 与 Y 同构 *(isomorphic)*，记作 $X \cong Y$。

Property 1.1.8. 设 X, Y 为域 F 上的线性空间，且 X, Y 同构，σ 是 X 到 Y 的同构映射，则：

1. $\sigma(\mathbf{0}_X) = \mathbf{0}_Y$；
2. 对于任意的 $\alpha \in X$，有 $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$；
3. 对于任意的 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in X$，$k_1, k_2, \ldots, k_n \in F$，有：
$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i \sigma(\alpha_i)$$
4. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in X$ 线性相关当且仅当 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \ldots, \sigma(\alpha_n)$ 线性相关；
5. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 X 的一组基，则 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \ldots, \sigma(\alpha_n)$ 是 Y 的一组基；
6. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 X 的一组基，则 $\alpha \in X$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的坐标和 $\sigma(\alpha) \in Y$ 在基 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \ldots, \sigma(\alpha_n)$ 下的坐标相同。

7. 若 E 是 X 的一个子空间，则 $\sigma(E)$ 是 Y 的一个子空间。若 $\dim(E)=n<+\infty$，则 $\dim\sigma(E)=n$；

8. 线性空间的同构是一个等价关系，其等价类被称为同构类。

Proof. (1) 任取 $\alpha\in X$，由性质 1.1.1(3) 和同构映射的定义可得 $\sigma(\mathbf{0}_X)=\sigma(0\alpha)=0\sigma(\alpha)=\mathbf{0}_Y$。

(2) 由性质 1.1.1(6) 可知 $\sigma(-\alpha)=\sigma[(-1)\alpha]=(-1)\sigma(\alpha)=-\sigma(\alpha)$。

(3) 由同构映射的定义直接可得。

(4) 设：

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=\mathbf{0}_X,\ k_i\in F$$

由 (3) 和 (1) 可得：

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\sigma(\alpha_i)=\sigma(\mathbf{0}_X)=\mathbf{0}_Y$$

若 k_i 不全为 0，即 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in X$ 或 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\ldots,\sigma(\alpha_n)$ 线性相关，显然此时另一个也线性相关。

(5) 由 (4) 可得 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\ldots,\sigma(\alpha_n)$ 线性无关。任取 $\beta\in Y$，因为 σ 是一个满射，则存在 $\alpha\in X$ 使得 $\sigma(\alpha)=\beta$。因为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 X 的一组基，所以存在 $k_1,k_2,\ldots,k_n\in F$ 使得：

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i$$

由 (3) 可得：

$$\beta=\sigma(\alpha)=\sigma\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{n}k_i\sigma(\alpha_i)$$

于是 β 可由 $\sigma(\alpha_i),\ i=1,2,\ldots,n$ 线性表出。由 β 的任意性，$\sigma(\alpha_i),\ i=1,2,\ldots,n$ 是 Y 的一组基。

(6) 由 (3)(5) 直接得到。

(7) 任取 $\alpha,\beta\in\sigma(E)$，$k_1,k_2\in F$，考虑 $k_1\alpha+k_2\beta$。因为 σ 是 X 到 Y 的一个双射，所以对于 α,β，存在 $a,b\in X$ 满足 $\sigma(a)=\alpha,\ \sigma(b)=\beta$。因为 E 是 X 的一个子空间，所以 $k_1a+k_2b\in E$，于是 $\sigma(k_1a+k_2b)=k_1\alpha+k_2\beta\in\sigma(E)$，所以 $\sigma(E)$ 是 Y 的一个子空间。由 (5) 可直接得到有限维情况下 E 与 $\sigma(E)$ 之间的维数关系。

(8) 反身性由恒等映射保证，对称性由双射保证，传递性由复合映射可直接得到。 □

Theorem 1.14. 设 X,Y 为域 F 上的有限维线性空间，则 X 与 Y 同构的充分必要条件为它们的维数相同，于是维数是有限维线性空间同构类的完全不变量。

Proof. **(1) 必要性：** 由性质 1.1.8(5) 直接得到。

(2) 充分性： 设二者维数都是 n，取 X 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 和 Y 的一组基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$。令：

$$\sigma:\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\longrightarrow\sum_{i=1}^{n}k_i\beta_i$$

显然它是一个线性映射并且是一个双射，于是 X 与 Y 同构。 □

1.1.5 商空间

商空间的定义

Theorem 1.15. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，L 是 E 的子空间。对于 $\forall\ x,y \in X$，若 $x-y \in L$，则称 x,y 是等价的，记为 $x \sim y$。该关系是一个等价关系。对于该关系的任意等价类 α，任取 $x \in \alpha$，α 可由 $\{x+y : y \in L\}$ 来表示，简记为 $x+L$。

Proof. 任取 $x,y,z \in X$。

(1) 因为 $x-x=\mathbf{0} \in L$，所以该关系满足自反性。

(2) 若 $x \sim y$，即 $x-y \in L$，因为 L 是一个子空间，所以 $y-x=(-1)(x-y) \in L$，于是 $y \sim x$，该关系满足对称性。

(3) 若 $x \sim y$，$y \sim z$，则有 $x-y \in L$，$y-z \in L$，因为 L 是一个线性空间，所以 $x-z=(x-y)+(y-z) \in L$，即 $x \sim z$。该关系满足传递性。

综上，该关系是一个等价关系。

下证明表示方法的正确性。

对任意的 $a \in \alpha$，因为 $x \in \alpha$，所以 $x-a \in L$，于是存在 $z \in L$ 使得 $x-a=-z$，即 $a=x+z$。 □

Theorem 1.16. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，L 是 X 的子空间，$\hat{X}$ 为 X 中所有等价类构成的集合，确定等价类的关系为定理 1.15中的关系。对任意的 $\alpha,\beta \in \hat{X}$，$k \in F$，在 $\hat{X}$ 中定义线性运算如下：

$$\alpha+\beta=x+y+L,\ x \in \alpha,\ y \in \beta$$

$$k\alpha=kx+L,\ x \in \alpha$$

则 $\hat{X}$ 成为一个线性空间，称其为 X 关于 L 的商空间 *(quotient space)*，记作 X/L。

Proof. 先证明上述线性运算与 x,y 的选择无关。

(1) 任取 $x' \in \alpha$，$y' \in \beta$，满足 $x \neq x'$，$y \neq y'$。于是有：

$$x'+y'+L=x+y+(x'-x)+(y'-y)+L$$

因为 $x,x' \in \alpha$，$y,y' \in \beta$，所以 $x'-x, y'-y \in L$，于是 $x'+y'+L=x+y+L$。

(2) 任取 $x' \in \alpha$，满足 $x \neq x'$。于是有：

$$kx'+L=kx+k(x'-x)+L$$

因为 $x,x' \in \alpha$，所以 $x'-x \in L$。因为 L 是线性空间，所以 $k(x'-x) \in L$，于是 $kx'+L=kx+L$。

下证明 $\hat{X}$ 是一个线性空间。

1. 任取 $\hat{X}$ 中的两个元素 $\alpha = x + L$, $\beta = y + L$。因为 $x, y \in X$，X 是一个线性空间，所以 $x + y = y + x$，于是 $\alpha + \beta = x + y + L = y + x + L = \beta + \alpha$。由 α, β 的任意性，$\hat{X}$ 上的加法满足线性空间运算法则 (1)；

2. 任取 $\hat{X}$ 中的三个元素 $\alpha = x + L$, $\beta = y + L$, $\gamma = z + L$。因为 $x, y, z \in X$，X 是一个线性空间，所以 $(x + y) + z = x + (y + z)$，于是 $(\alpha + \beta) + \gamma = (x + y) + z + L = x + (y + z) + L = \alpha + (\beta + \gamma)$。由 α, β, γ 的任意性，$\hat{X}$ 上的加法满足线性空间运算法则 (2)；

3. 任取 $\alpha = x + L \in \hat{X}$，则 $\alpha + \mathbf{0} + L = x + \mathbf{0} + L = x + L = \alpha$，于是 $\mathbf{0} + L$ 是 $\hat{X}$ 中的零元。$\hat{X}$ 上的加法满足线性空间运算法则 (3)；

4. 任取 $\alpha = x + L \in \hat{X}$，则 $\alpha + -x + L = x + (-x) + L = \mathbf{0} + L$，于是 $-x + L$ 是 α 的负元。由 α 的任意性，$\hat{X}$ 上的加法满足线性空间运算法则 (4)；

5. 任取 $\alpha = x + L \in \hat{X}$。因为 $x \in X$，X 是一个线性空间，所以 $1x = x$，于是 $1\alpha = 1x + L = x + L = \alpha$。由 α 的任意性，$\hat{X}$ 上的纯量乘法满足线性空间运算法则 (5)；

6. 任取 $\alpha = x + L \in \hat{X}$, $k, l \in F$。因为 $x \in X$，X 是一个线性空间，所以 $(kl)x = k(lx)$，于是 $(kl)\alpha = (kl)x + L = k(lx) + L = k(l\alpha)$。由 α, k, l 的任意性，$\hat{X}$ 上的纯量乘法满足线性空间运算法则 (6)；

7. 任取 $\alpha = x + L \in \hat{X}$, $k, l \in F$。因为 $x \in X$，X 是一个线性空间，所以 $(k+l)x = kx+lx$，于是 $(k + l)\alpha = (k + l)x + L = kx + lx + L = k\alpha + l\alpha$。由 α, k, l 的任意性，$\hat{X}$ 上的纯量乘法满足线性空间运算法则 (7)；

8. 任取 $\hat{X}$ 中的两个元素 $\alpha = x + L$, $\beta = y + L$。因为 $x, y \in X$，X 是一个线性空间，所以 $k(x + y) = ky + kx$，于是 $k(\alpha + \beta) = k(x + y) + L = kx + ky + L = k\beta + k\alpha$。由 α, β, k 的任意性，$\hat{X}$ 上的加法满足线性空间运算法则 (8)。

综上，$\hat{X}$ 是一个线性空间。 □

商空间的性质

Theorem 1.17. 设 X 是域 F 上的一个有限维线性空间，E 是 X 的一个子空间，则：

$$\dim(X/E) = \dim(X) - \dim(E)$$

Proof. 设 $\dim(X) = n$, $\dim(E) = m$，取 E 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，把它扩充为 X 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$。任取 $\beta + W \in X/E$，因为 $\beta \in X$，于是：

$$\beta + E = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i + E = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i + \sum_{i=m+1}^{n} k_i\alpha_i + E = \sum_{i=m+1}^{n} k_i\alpha_i + E$$

其中 $k_i \in F$, $i=1,2,\dots,n$。上式表明，对任意的 $\beta+W \in X/E$，都可以用 α_i+W, $i=m+1,m+2,\dots,n$ 的线性组合表示。下证明它们线性无关。

设：

$$\sum_{i=m+1}^{n} k_i\alpha_i + E = E$$

则 $\sum\limits_{i=m+1}^{n} k_i\alpha_i \in E$，于是存在 $l_j \in F$, $j=1,2,\dots,m$ 使得：

$$\sum_{j=1}^{m} l_j\alpha_j = \sum_{i=m+1}^{n} k_i\alpha_i$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性无关，所以 $k_i=l_j=0$, $i=m+1,m+2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,m$，因此 α_i+W, $i=m+1,m+2,\dots,n$ 线性无关，即它们是 X/E 的一组基，$\dim(X/E)=n-m=\dim(X)-\dim(E)$。 □

Definition 1.22. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，E 是 X 的一个子空间。若 X/E 是有限维的，则称 $\dim(X/E)$ 是 E 在 X 中的余维数 *(codimension)*，记作 $\operatorname{codim} E$。

标准映射

Definition 1.23. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，E 是 X 的一个子空间，定义映射：

$$\pi : \alpha \longrightarrow \alpha + E,\ \forall\, \alpha \in X$$

称之为标准映射 *(canonical mapping)*。

Property 1.1.9. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，E 是 X 的一个子空间，π 是 X 到 X/E 的标准映射，则 π 具有如下性质：

1. X/E 中的一个元素 $\alpha+E$ 在 π 下的原像是：

$$\{\alpha+\beta : \beta \in E\}$$

2. π 是一个满射。当且仅当 E 是零空间时，π 是一个双射；
3. π 是一个线性映射；
4. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in X$ 线性相关，则 $\pi(\alpha_1),\pi(\alpha_2),\dots,\pi(\alpha_n)$ 线性相关。

Proof. (1) 显然：

$$\begin{aligned}\gamma \in \pi^{-1}(\alpha+E) &\iff \gamma+E=\alpha+E \iff \gamma-\alpha \in E\\ &\iff \exists\, \beta \in E,\ \gamma=\alpha+\beta \iff \gamma \in \{\alpha+\beta : \beta \in E\}\end{aligned}$$

(2) 满射是显然的结论。当 E 是零空间时，π 是 X 上的恒等变换，恒等变换显然是双射。当 π 是双射时，π 是一个单射，即对任何的 $\alpha+E \in X/E$，有且仅有 $\alpha \in X$ 使得 $\pi(\alpha)=\alpha+E$，也即不存在 $\beta \in X$, $\beta \neq \alpha$，使得 $\beta-\alpha \in E$，此时 E 只能为零空间。

(3) $\forall\, \alpha, \beta \in X,\ k_1, k_2 \in F$，有：

$$\pi(k_1\alpha + k_2\beta) = k_1\alpha + k_2\beta + E = k_1\alpha + E + k_2\alpha + E = k_1\pi(\alpha) + k_2\pi(\beta)$$

于是 π 是一个线性映射。

(4) 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关，所以存在不全为零的 $k_1, k_2, \ldots, k_n \in F$ 使得：

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = \mathbf{0}$$

由 (3) 可得：

$$\pi\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i\pi(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i + E = E$$

于是 $\pi(\alpha_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$ 线性相关。 □

Corollary 1.2. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，E 是 X 的一个子空间。若 $\{\alpha_i + W : i \in I\}$ 是 X/E 的一组基，I 是一个指标集，则 $\alpha_i,\ i \in I$ 线性无关。

Proof. 就 X/E 是无限维的给出证明，有限维情况类似。

若此时 $\alpha_i,\ i \in I$ 线性相关，则存在 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}$ 线性相关，其中 $n \in \mathbb{N}^+$。由性质 1.1.9(4) 可得 $\alpha_{i_j} + W,\ j = 1, 2, \ldots, n$ 线性相关，于是 $\{\alpha_i + W : i \in I\}$ 线性相关，矛盾。 □

1.2 线性映射

1.2.1 线性映射的定义与基本性质

Definition 1.24. 设 X, Y 是域 F 上的线性空间，X 到 Y 上的一个映射 $\mathcal{T}$ 如果对任意的 $\alpha, \beta \in X$ 和任意的 $k_1, k_2 \in F$，有：

$$\mathcal{T}(k_1\alpha + k_2\beta) = k_1\mathcal{T}\alpha + k_2\mathcal{T}\beta$$

则称 $\mathcal{T}$ 是 X 到 Y 的一个线性映射 *(linear mapping)*。若 $Y = X$，则称 $\mathcal{T}$ 为 X 上的线性变换 *(linear transformation)*；若 $Y = F$，则称 $\mathcal{T}$ 为 X 上的线性函数 *(linear function)*。

线性映射空间与线性映射的运算

Definition 1.25. 设 X, Y 是域 F 上的线性空间，将 X 到 Y 的所有线性映射组成的集合记为 $\mathrm{Hom}(X, Y)$。设 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，$k \in F$，定义线性映射的加法与纯量乘法如下：

$$(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)\alpha = \mathcal{T}_1\alpha + \mathcal{T}_2\alpha,\ \forall\, \alpha \in X$$
$$(k\mathcal{T}_1)\alpha = k\mathcal{T}_1\alpha,\ \forall\, \alpha \in X$$

容易验证 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 成为域 F 上的一个线性空间。$X = Y$ 时将 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 简记为 $\mathrm{Hom}(X)$。

Definition 1.26. 设 X, Y 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，定义线性映射的减法如下：

$$\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 + (-\mathcal{T}_2)$$

Definition 1.27. 设 X, Y 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T} \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，若对任意的 $\alpha \in X$，有 $\mathcal{T}\alpha = \mathbf{0}_Y$，则称 $\mathcal{T}$ 为 X 到 Y 的零映射 *(zero mapping)*，记作 $\mathcal{O}$。

Definition 1.28. 设 X, Y, Z 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T}_1 \in \mathrm{Hom}(X, Y), \mathcal{T}_2 \in \mathrm{Hom}(Z, Y)$，定义线性映射乘法如下：

$$\forall\, \alpha \in X,\ (\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\alpha = \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1\alpha)$$

Definition 1.29. 设 X, Y 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T}_1 \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，若存在 $\mathcal{T}_2 \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ 使得 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{I}_Y$，$\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{I}_X$，则称 $\mathcal{T}_1$ 是可逆的，$\mathcal{T}_2$ 是 $\mathcal{T}_1$ 的逆映射。

Theorem 1.18. 设 X, Y, Z 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T}_1 \in \mathrm{Hom}(X, Y), \mathcal{T}_2 \in \mathrm{Hom}(Z, Y)$，则 $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 \in \mathrm{Hom}(X, Z)$。

Proof. 只需注意到对任意的 $\alpha, \beta \in X$，$k_1, k_2 \in F$，有：

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)(k_1\alpha + k_2\beta) &= \mathcal{T}_2[\mathcal{T}_1(k_1\alpha + k_2\beta)] = \mathcal{T}_2(k_1\mathcal{T}_1\alpha + k_2\mathcal{T}_1\beta)\\ &= k_1\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1\alpha) + k_2\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1\beta) = k_1(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\alpha + k_2(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\beta\end{aligned}$$ □

Definition 1.30. 设 X, Y 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T}$ 是 X 到 Y 上的一个线性映射，分别称：

$$\{\alpha \in X : \mathcal{T}\alpha = \mathbf{0}_Y\}, \quad \{\mathcal{T}\alpha : \alpha \in X\}$$

为 $\mathcal{T}$ 的核 *(kernel)* 与象 *(image)*，将它们分别记作 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Im}\,\mathcal{T}$。

线性空间的性质

Property 1.2.1. 设 X, Y 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T}$ 是 X 到 Y 上的线性映射，则：

1. 若 $\mathcal{T}$ 可逆，则 $\mathcal{T}$ 是 X 到 Y 上的同构映射；
2. $\mathcal{T}\mathbf{0}_X = \mathbf{0}_Y$；
3. 对于任意的 $\alpha \in X$，有 $\mathcal{T}(-\alpha) = -\mathcal{T}\alpha$；
4. 对于任意的 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in X$，$k_1, k_2, \ldots, k_n \in F$，有：

$$\mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i\mathcal{T}\alpha_i$$

这表明，如果 X 是有限维的，那么只要知道 X 的一组基在 $\mathcal{T}$ 下的象，那么 X 中所有向量在 $\mathcal{T}$ 下的象就都确定了；

5. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in X$ 线性相关，则 $\mathcal{T}\alpha_1, \mathcal{T}\alpha_2, \ldots, \mathcal{T}\alpha_n$ 线性相关；

6. $\operatorname{Ker} \mathcal{T}$ 和 $\operatorname{Im} \mathcal{T}$ 分别是 X 和 Y 的子空间；

7. $\mathcal{T}$ 是单射当且仅当 $\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \mathbf{0}_X$；

8. $\mathcal{T}$ 是满射当且仅当 $\operatorname{Im} \mathcal{T} = Y$。

9. $X/\operatorname{Ker} \mathcal{T}$ 与 $\operatorname{Im} \mathcal{T}$ 在映射：
$$\sigma : \alpha + \operatorname{Ker} \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}\alpha$$
下同构；

10. 若 X 是有限维的，则 $\operatorname{Ker} \mathcal{T}$ 和 $\operatorname{Im} \mathcal{T}$ 都是有限维的，且有：
$$\dim(X) = \dim(\operatorname{Ker} \mathcal{T}) + \dim(\operatorname{Im} \mathcal{T})$$

11. 若 $\dim(X) = \dim Y = n < +\infty$，则 $\mathcal{T}$ 是单射当且仅当 $\mathcal{T}$ 是满射；

12. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in X$，则有 $\mathcal{T} < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > = < \mathcal{T}\alpha_1, \mathcal{T}\alpha_2, \ldots, \mathcal{T}\alpha_n >$；

Proof. (1)(2)(3)(4)(5)(8) 证明都是显然的，只需参考性质 1.1.8即可，这是因为线性映射只比同构映射少了双射这一条件，所以同构映射不涉及双射条件的性质对于线性映射也成立。

(6) 任取 $\alpha, \beta \in \operatorname{Ker} \mathcal{T}$ 和 $k_1, k_2 \in F$，则有：
$$\mathcal{T}(k_1\alpha + k_2\beta) = k_1\mathcal{T}\alpha + k_2\mathcal{T}\beta = \mathbf{0}$$
于是 $k_1\alpha + k_2\beta \in \operatorname{Ker} \mathcal{T}$，所以 $\operatorname{Ker} \mathcal{T}$ 是 X 的子空间。

任取 $\mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\beta \in \operatorname{Im} \mathcal{T}$ 和 $k_1, k_2 \in F$，则有：
$$k_1\mathcal{T}\alpha + k_2\mathcal{T}\beta = \mathcal{T}(k_1\alpha + k_2\beta)$$
因为 X 是一个线性空间，所以 $k_1\alpha + k_2\beta \in X$，于是 $\mathcal{T}(k_1\alpha + k_2\beta) \in \operatorname{Im} \mathcal{T}$，因此 $\operatorname{Im} \mathcal{T}$ 是 Y 的子空间。

(7) **充分性**：假设此时 $\mathcal{T}$ 不是单射，则存在 $\mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\beta \in \mathcal{T}$ 使得 $\mathcal{T}\alpha = \mathcal{T}\beta$ 且 $\alpha \neq \beta$，而此时 $\mathcal{T}\alpha - \mathcal{T}\beta = \mathcal{T}(\alpha - \beta) = \mathbf{0}_Y$，由已知条件可得 $\alpha - \beta = \mathbf{0}_X$，即 $\alpha = \beta$，矛盾。

必要性：由 (2) 可知 $\mathcal{T}\mathbf{0}_X = \mathbf{0}_Y$，因为 $\mathcal{T}$ 是一个单射，所以 $\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \mathbf{0}_X$。

(9) 先证明 σ 是一个映射。若 $\alpha + \operatorname{Ker} \mathcal{T} = \beta + \operatorname{Ker} \mathcal{T}$，则 $\alpha - \beta \in \operatorname{Ker} \mathcal{T}$，即 $\mathcal{T}(\alpha - \beta) = \mathcal{T}\alpha - \mathcal{T}\beta = \mathbf{0}_Y$，于是 $\mathcal{T}\alpha = \mathcal{T}\beta$，所以 σ 是一个映射。

任取 $\alpha + \operatorname{Ker} \mathcal{T}, \beta + \operatorname{Ker} \mathcal{T} \in X/\operatorname{Ker} \mathcal{T}$ 和 $k_1, k_2 \in F$，则有：
$$\begin{aligned}\sigma[k_1(\alpha + \operatorname{Ker} \mathcal{T}) + k_2(\beta + \operatorname{Ker} \mathcal{T})] &= \sigma(k_1\alpha + k_2\beta + \operatorname{Ker} \mathcal{T}) = \mathcal{T}(k_1\alpha + k_2\beta) \\ &= k_1\mathcal{T}\alpha + k_2\mathcal{T}\beta = k_1\sigma(\alpha + \operatorname{Ker} \mathcal{T}) + k_2(\beta + \operatorname{Ker} \mathcal{T})\end{aligned}$$
所以 σ 是一个线性映射。

显然 σ 是一个满射。

若存在 $\alpha + \operatorname{Ker} \mathcal{T}, \beta + \operatorname{Ker} \mathcal{T} \in X$ 满足 $\alpha + \operatorname{Ker} \mathcal{T} \neq \beta + \operatorname{Ker} \mathcal{T}$ 且 $\mathcal{T}\alpha = \mathcal{T}\beta$，则此时有 $\mathcal{T}(\alpha - \beta) = \mathcal{T}\alpha - \mathcal{T}\beta = \mathbf{0}_Y$，所以 $\alpha - \beta \in \operatorname{Ker} \mathcal{T}$，即 $\alpha + \operatorname{Ker} \mathcal{T} = \beta + \operatorname{Ker} \mathcal{T}$，矛盾，因此 σ 是个单射。

综上，σ 是一个双射且是一个线性映射，于是 $X/\operatorname{Ker} \mathcal{T}$ 与 $\operatorname{Im} \mathcal{T}$ 在 σ 下同构。

(10) 因为 X 是有限维的，由定理 1.17可知 $X/\operatorname{Ker} \mathcal{T}$ 和 $\operatorname{Ker} \mathcal{T}$ 都是有限维的。由定理 1.14和 (9) 可知 $\dim(X/\operatorname{Ker} \mathcal{T}) = \dim(\operatorname{Im} \mathcal{T})$，于是 $\operatorname{Im} \mathcal{T}$ 也是有限维的。由定理 1.17可得：

$$\dim(\operatorname{Im} \mathcal{T}) = \dim(X/\operatorname{Ker} \mathcal{T}) = \dim(X) - \dim(\operatorname{Ker} \mathcal{T})$$

(11) 由 (7)(10)(6) 和定理 1.8可得：

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\text{是单射} &\iff \operatorname{Ker} \mathcal{T} = \mathbf{0}_X \iff \dim(\operatorname{Ker} \mathcal{T}) = 0 \\ &\iff \dim Y = \dim(X) = \dim(\operatorname{Im} \mathcal{T}) \iff \mathcal{T}\text{是满射} \end{aligned}$$

(12) 由 (4) 可得；

$$\begin{aligned} < \mathcal{T}\alpha_1, \mathcal{T}\alpha_2, \dots, \mathcal{T}\alpha_n > &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{T}\alpha_i : c_i \in F \right\} = \left\{ \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i \right) : c_i \in F \right\} \\ &= \mathcal{T} < \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > \end{aligned}$$

□

Definition 1.31. 设 X, Y 是域 F 上的线性空间，X 是有限维的，$\mathcal{T} \in \operatorname{Hom}(X, Y)$，由性质 *1.2.1(10)* 可知 $\operatorname{Ker}(\mathcal{T}), \operatorname{Im}(\mathcal{T})$ 都是有限维的，称 $\dim(\operatorname{Ker} \mathcal{T})$ 为 $\mathcal{T}$ 的零度 *(nullity)*，称 $\dim(\operatorname{Im} \mathcal{T})$ 为 $\mathcal{T}$ 的秩，记为 $\operatorname{rank}(\mathcal{T})$。

Definition 1.32. 设 X, Y 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T} \in \operatorname{Hom}(X, Y)$，称 $Y/\operatorname{Im} \mathcal{T}$ 为 $\mathcal{T}$ 的余核 *(cokernel)*。

Theorem 1.19. 设 X, Y 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T} \in \operatorname{Hom}(X, Y)$，则 $\mathcal{T}$ 是满射当且仅当 $\operatorname{Coker} \mathcal{T} = \mathbf{0}$。

Proof. $\mathcal{T}$ 是满射 $\iff \operatorname{Im} \mathcal{T} = Y \iff Y/\operatorname{Im} \mathcal{T} = \mathbf{0}$。这里的 $\mathbf{0}$ 实际上是商空间的零元，也即 Y。 □

1.2.2 线性映射的矩阵表示

Definition 1.33. 设 X, Y 分别为域 F 上的 m 维、n 维线性空间，$\mathcal{T}$ 是 X 到 Y 的一个线性映射。由性质 *1.2.1(4)* 可知 $\mathcal{T}$ 被它在 X 的一组基上的作用所决定。取 X 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和 Y 的一组基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$，则：

$$(\mathcal{T}\alpha_1, \mathcal{T}\alpha_2, \dots, \mathcal{T}\alpha_m) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

将 $(\mathcal{T}\alpha_1,\mathcal{T}\alpha_2,\ldots,\mathcal{T}\alpha_m)$ 记作 $\mathcal{T}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$，将上式右端矩阵记为 A，称 A 为 $\mathcal{T}$ 在 X 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 和 Y 的基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 下的矩阵。若 $X=Y$，取 $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ 为 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$，称 A 为 $\mathcal{T}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 下的矩阵。

Theorem 1.20. 设 X,Y 分别为域 F 上的 m 维、n 维线性空间，则映射 $\sigma:\mathcal{T}\in \mathrm{Hom}(X,Y)\longrightarrow \mathcal{T}$ 在 X 的一组基和 Y 的一组基下的矩阵 A 是 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 到 $M_{n\times m}(F)$ 的一个同构映射，于是有：

$$\mathrm{Hom}(X,Y)\cong M_{n\times m}(F),\quad \dim[\mathrm{Hom}(X,Y)]=\dim(X)\dim(Y)=mn$$

Proof. 任取 X 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 和 Y 的一组基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$。

任意的 $\mathcal{T}\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ 都存在对应的 $A\in M_{n\times m}(F)$ 使得：

$$(\mathcal{T}\alpha_1,\mathcal{T}\alpha_2,\ldots,\mathcal{T}\alpha_m)=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)A$$

因为 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 是 Y 的一组基，由性质 1.1.3(1) 可知 $T\alpha_i$ 由 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 表出的方式唯一，所以 A 是唯一的。

任取 $B=(b_{ij})\in M_{n\times m}(F)$，令：

$$\mathcal{T}:\alpha=\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i\in X\longrightarrow\sum_{i=1}^{m}a_i\sum_{j=1}^{n}b_{ji}\beta_j\in Y$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 是 X 的一组基，由性质 1.1.3(1) 可知 α 由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 表出的方式唯一，所以 $\mathcal{T}$ 是一个映射。显然 $\mathcal{T}$ 是一个线性映射。因为：

$$(\mathcal{T}\alpha_1,\mathcal{T}\alpha_2,\ldots,\mathcal{T}\alpha_m)=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)B$$

所以 B 是 $\mathcal{T}$ 在 X 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 和 Y 的基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 下的矩阵。因为 $\mathcal{T}$ 满足：

$$\mathcal{T}\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ji}\beta_j,\quad i=1,2,\ldots,m$$

且 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 是 X 的一组基，由性质 1.2.1(4) 可知 B 所对应的 $\mathcal{T}$ 是唯一的。

综上，存在 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 到 $M_{n\times m}(K)$ 上的一个双射 σ。

任取 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2\in\mathrm{Hom}(X,Y)$，$\sigma(\mathcal{T}_1)=C$，$\sigma(\mathcal{T}_2)=D$，则对任意的 $k_1,k_2\in F$ 有：

$$\begin{aligned}
&[(k_1\mathcal{T}_1+k_2\mathcal{T}_2)\alpha_1,(k_1\mathcal{T}_1+k_2\mathcal{T}_2)\alpha_2,\ldots,(k_1\mathcal{T}_1+k_2\mathcal{T}_2)\alpha_m]\\
=&(k_1\mathcal{T}_1\alpha_1+k_2\mathcal{T}_2\alpha_1,k_1\mathcal{T}_1\alpha_2+k_2\mathcal{T}_2\alpha_2,\ldots,k_1\mathcal{T}_1\alpha_m+k_2\mathcal{T}_2\alpha_m)\\
=&(k_1\mathcal{T}_1\alpha_1,k_1\mathcal{T}_1\alpha_2,\ldots,k_1\mathcal{T}_1\alpha_m)+(k_2\mathcal{T}_2\alpha_1,k_2\mathcal{T}_2\alpha_2,\ldots,k_2\mathcal{T}_2\alpha_m)\\
=&k_1(\mathcal{T}_1\alpha_1,\mathcal{T}_1\alpha_2,\ldots,\mathcal{T}_1\alpha_m)+k_2(\mathcal{T}_2\alpha_1,\mathcal{T}_2\alpha_2,\ldots,\mathcal{T}_2\alpha_m)\\
=&k_1(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)C+k_2(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)D=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)(k_1C+k_2D)
\end{aligned}$$

即:

$$\sigma(k_1\mathcal{T}_1+k_2\mathcal{T}_2)=k_1C+k_2D=k_1\sigma(\mathcal{T}_1)+k_2\sigma(\mathcal{T}_2)$$

所以 σ 是一个线性映射。

综上，映射 $\sigma : \mathcal{T} \in \mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{T}$ 在 X 的一组基和 Y 的一组基下的矩阵 A 是 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 到 $M_{n\times m}(F)$ 的一个同构映射，$\mathrm{Hom}(X,Y) \cong M_{n\times m}(F)$，由定理 1.14可得 $\dim[\mathrm{Hom}(X,Y)] = mn = \dim(X)\dim(Y)$。 □

向量在线性映射下象的坐标

Theorem 1.21. 设 X,Y 分别为域 F 上的 m 维、n 维线性空间，$\mathcal{T}$ 是 X 到 Y 的一个线性映射，$\mathcal{T}$ 在 X 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 和 Y 的一组基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 下的矩阵为 A，向量 α 在 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 下的坐标为 x，则 $\mathcal{T}\alpha$ 在 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 下的坐标为 Ax。

Proof. 显然：

$$\mathcal{T}\alpha = \mathcal{T}[(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)x] = [\mathcal{T}\alpha_1,\mathcal{T}\alpha_2,\ldots,\mathcal{T}\alpha_m]x = (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)Ax$$ □

1.3 线性变换

Definition 1.34. 设 X 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T} \in \mathrm{Hom}(X)$，定义 $\mathcal{T}$ 的正整数指数幂如下：

$$\mathcal{T}^n = \underbrace{\mathcal{T}\cdot\mathcal{T}\cdots\mathcal{T}}_{n\text{个}\mathcal{T}},\ n \in \mathbb{N}^+$$

若 $\mathcal{T}$ 可逆，还可以定义 $\mathcal{T}$ 的负整数指数幂如下：

$$\mathcal{T}^{-n} = (\mathcal{T}^{-1})^n,\ n \in \mathbb{N}^+$$

Definition 1.35. 设 X 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T} \in \mathrm{Hom}(X)$。

1. 若对任意的 $\alpha \in X$，有 $\mathcal{T}\alpha = \alpha$，则称 $\mathcal{T}$ 为 X 到 Y 的恒等变换 *(identity transformation)*，记作 $\mathcal{I}$；
2. 给定 $k \in F$，若对任意的 $\alpha \in X$，有 $\mathcal{T}\alpha = k\alpha$，则称 $\mathcal{T}$ 为 X 上的数乘变换 *(scalar transformation)*，记作 $\mathcal{K}$；
3. 若 E 和 W 是 X 的子空间，且有 $X = E \oplus W$，若对任意的 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \in X$，$\alpha_1 \in E$，$\alpha_2 \in W$，有：
$$\mathcal{T}\alpha = \alpha_1$$
则称 $\mathcal{T}$ 为平行于 W 在 E 上的投影变换 *(projection transformation)*，记为 $\mathcal{P}_E$。
4. 若 $\mathcal{T}^2 = \mathcal{I}$，则称 $\mathcal{T}$ 为对合变换 *(involution)*；
5. 若 $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T}$，则称 $\mathcal{T}$ 为幂等变换 *(idempotent transformation)*；
6. 若存在 $n \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\mathcal{T}^n = \mathcal{O}$，则称 $\mathcal{T}$ 为幂零变换 *(nilpotent transformation)*，使得 $\mathcal{T}^n = \mathcal{O}$ 成立的最小正整数 n 被称为是 $\mathcal{T}$ 的幂零指数 *(nilpotent index)*。

Definition 1.36. 设 X 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2 \in \mathrm{Hom}(X)$。若 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{O}$，则称 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 正交。

1.3.1 线性变换的性质

线性变换保持的矩阵运算

Theorem 1.22. 线性变换对其对应的矩阵保持加法、纯量乘法和乘法的运算。

Proof. 设 X 分别为域 F 上的 n 维线性空间，$\sigma : \mathcal{T} \in \mathrm{Hom}(X) \longrightarrow \mathcal{T}$ 在 X 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 下的矩阵。加法和纯量乘法的结论由定理 1.20可得。取 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathrm{Hom}(X)$, $\sigma(\mathcal{T}_1) = A$, $\sigma(\mathcal{T}_2) = B$，于是有：

$$\begin{aligned}
&[(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\alpha_1, (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\alpha_2, \ldots, (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\alpha_n] = [\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\alpha_1), \mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\alpha_2), \ldots, \mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\alpha_n)] \\
=&\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\alpha_1, \mathcal{T}_2\alpha_2, \ldots, \mathcal{T}_2\alpha_n) = \mathcal{T}_1[(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)B] = (\mathcal{T}_1\alpha_1, \mathcal{T}_1\alpha_2, \ldots, \mathcal{T}_1\alpha_n)B \\
&= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)AB
\end{aligned}$$

于是 $\sigma(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2) = AB$，即线性变换对其对应的矩阵保持乘法运算。 □

线性变换在不同基下的矩阵的关系

Theorem 1.23. 设 X 是域 F 上的 n 维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 是 X 的两组基, P 为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的过渡矩阵, $\mathcal{T} \in \mathrm{Hom}(X)$, 则 $\mathcal{T}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的矩阵 A 与在 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 下的矩阵 B 满足：

$$B = P^{-1}AP$$

Proof. 由已知条件可得：

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}\alpha_1, \mathcal{T}\alpha_2, \ldots, \mathcal{T}\alpha_n) &= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A \\
(\mathcal{T}\beta_1, \mathcal{T}\beta_2, \ldots, \mathcal{T}\beta_n) &= (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)B \\
(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) &= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)P
\end{aligned}$$

设 P 的列向量为 $P_1, P_2, \ldots, P_n$，所以：

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{T}\beta_1, \mathcal{T}\beta_2, \ldots, \mathcal{T}\beta_n) \\
=&\{\mathcal{T}[(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)P_1], \mathcal{T}[(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)P_2], \ldots, \mathcal{T}[(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)P_n]\} \\
=&\{[\mathcal{T}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)]P_1, [\mathcal{T}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)]P_2, \ldots, [\mathcal{T}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)]P_n\} \\
=&(\mathcal{T}\alpha_1, \mathcal{T}\alpha_2, \ldots, \mathcal{T}\alpha_n)P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)AP = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)P^{-1}AP
\end{aligned}$$

由定理 1.20可知 $\mathcal{T}$ 在 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 下的矩阵是唯一的，所以 $B = P^{-1}AP$。 □

Theorem 1.24. 设 X 是域 F 上的一个 n 维线性空间, $\mathcal{T} \in \mathrm{Hom}(X)$ 在 X 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A，则 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\mathcal{T})$。

Proof. 由性质 1.2.1(12) 可得：

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\mathcal{T}) &= \dim(\operatorname{Im}\mathcal{T}) = \dim(\mathcal{T}X) = \dim(\mathcal{T} < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n >) \\ &= \dim < \mathcal{T}\alpha_1, \mathcal{T}\alpha_2, \ldots, \mathcal{T}\alpha_n >\end{aligned}$$

因为 $\dim(X) = n$，由定理 1.14可知 $X \cong F^n$，映射：

$$\sigma : \sum_{i=1}^{n} b_i\beta_i \longrightarrow (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$$

是 X 到 F^n 的一个同构映射。注意到：

$$(\mathcal{T}\alpha_1, \mathcal{T}\alpha_2, \ldots, \mathcal{T}\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A$$

$T\alpha_i$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的坐标就是 A 的第 i 列，所以 $\sigma(\mathcal{T}\alpha_i) = A_i$，其中 A_i 表示 A 的第 i 列，于是由性质 1.2.1(12) 可得 $\sigma < \mathcal{T}\alpha_1, \mathcal{T}\alpha_2, \ldots, \mathcal{T}\alpha_n > = < A_1, A_2, \ldots, A_n >$，所以由性质 1.1.8(7) 可得：

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\mathcal{T}) &= \dim < \mathcal{T}\alpha_1, \mathcal{T}\alpha_2, \ldots, \mathcal{T}\alpha_n > = \dim(\sigma < \mathcal{T}\alpha_1, \mathcal{T}\alpha_2, \ldots, \mathcal{T}\alpha_n >) \\ &= \dim < A_1, A_2, \ldots, A_n > = \operatorname{rank}(A)\end{aligned}$$

□

由上述两个定理，我们可以给出如下定义：

Definition 1.37. 设 X 是域 F 上的 n 维线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 X 的一组基，$\mathcal{T} \in \operatorname{Hom}(X)$，$A$ 是 $\mathcal{T}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的矩阵 A。定义：

$$\operatorname{rank}(\mathcal{T}) = \operatorname{rank}(A), \quad \det(\mathcal{T}) = \det(A), \quad \operatorname{tr}(\mathcal{T}) = \operatorname{tr}(A)$$

称 A 的特征多项式为 $\mathcal{T}$ 的特征多项式。

1.3.2 线性变换的特征值与特征向量

Definition 1.38. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，$\mathcal{T} \in \operatorname{Hom}(X)$。若 X 中存在非零向量 ξ，F 中存在元素 λ，使得：

$$\mathcal{T}\xi = \lambda\xi$$

则称 λ 是 $\mathcal{T}$ 的一个特征值，ξ 是 $\mathcal{T}$ 属于特征值 λ 的一个特征向量。

Theorem 1.25. 设 X 是域 F 上的一个 n 维线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 X 的一组基，$\mathcal{T} \in \operatorname{Hom}(X)$，$A$ 是 $\mathcal{T}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的矩阵，则：

1. λ 是 $\mathcal{T}$ 的特征值 $\iff$ λ 是 A 的特征值；
2. ξ 是 $\mathcal{T}$ 属于 λ 的特征向量 $\iff$ ξ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的坐标是 A 属于 λ 的特征向量。

Proof. 设 ξ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的坐标为 x，由定理 1.21可知若 $\mathcal{T}\xi = \lambda\xi$ 则有 $Ax = \lambda x$。当 $Ax = \lambda x$ 时，$\mathcal{T}\xi$ 与 $\lambda\xi$ 坐标相同，即二者相等。于是有

$$\mathcal{T}\xi = \lambda\xi \iff Ax = \lambda x$$

□

Property 1.3.1. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，$\mathcal{T} \in \mathrm{Hom}(X)$，$\lambda$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个特征值，则：

1. $\mathcal{T}$ 属于特征值 λ 的特征向量构成 X 的一个子空间，称该子空间为 $\mathcal{T}$ 属于特征值 λ 的特征子空间，记为 X_λ；
2. $X_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{T})$；
3. 若 $\dim(X) = n$，则 $\dim(X_\lambda) = n - \mathrm{rank}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{T})$；
4. $\mathcal{T}$ 属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

Proof. (1) 任取 $\mathcal{T}$ 属于 λ 的两个特征向量 ξ_1, ξ_2 以及域 F 上的任意两个元素 k_1, k_2，则：

$$\mathcal{T}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = k_1\mathcal{T}\xi_1 + k_2\mathcal{T}\xi_2 = k_1\lambda\xi_1 + k_2\lambda\xi_2 = \lambda(k_1\xi_1 + k_1\xi_2)$$

所以 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 也是 $\mathcal{T}$ 属于 λ 的特征向量，由定理 1.7可知 $\mathcal{T}$ 属于 λ 的特征向量构成 X 的一个子空间。

(2) $\xi \in X_\lambda \iff \mathcal{T}\xi = \lambda\xi \iff (\mathcal{T} - \lambda\mathcal{I})\xi = \mathbf{0} \iff \xi \in \mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{T})$。

(3) 由定理 1.14,设 σ 是 X 到 F^n 的同构映射,它将 X 中的元素映射到在基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的坐标，记 $\mathcal{T}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A。由定理 1.25可知 $\sigma(X_\lambda)$ 等于齐次线性方程组 $(\lambda I_n - A)x = \mathbf{0}$ 的解空间 W，根据性质 2.3.1(3)、性质 1.1.8(7) 和定理 1.20可得：

$$\dim(X_\lambda) = \dim[\sigma(X_\lambda)] = \dim(W) = n - \mathrm{rank}(\lambda I_n - A) = n - \mathrm{rank}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{T})$$

(4) 设 σ 是 X 中的向量到它在基 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 下的坐标的同构映射。由性质 2.6.1(2)、定理 1.25和性质 1.1.8(4) 立即可得。 □

Definition 1.39. 设 X 是域 F 上的一个线性空间，$\mathcal{T} \in \mathrm{Hom}(X)$，$\lambda$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个特征值，称 λ 作为 $\mathcal{T}$ 的特征多项式的根的重数称为 λ 的代数重数，将 X_λ 的维数称为 λ 的几何重数。

线性变换的对角化

Definition 1.40. 设 X 是域 F 上的一个 n 维线性空间，$\mathcal{T} \in \mathrm{Hom}(X)$，若 X 中存在一组基使得 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵是对角矩阵，则称 $\mathcal{T}$ 可对角化。

Theorem 1.26. 设 X 是域 F 上的一个 n 维线性空间，$\mathcal{T} \in \mathrm{Hom}(X)$，$\mathcal{T}$ 可对角化当且仅当：

1. X 中存在一组基使得 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵可对角化；
2. $\mathcal{T}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$；
3. X 中存在由 $\mathcal{T}$ 的特征向量构成的一组基；

4. $\mathcal{T}$ 属于不同特征值的特征子空间的维数之和为 n；

5. X 可表为 $\mathcal{T}$ 属于不同特征值的特征子空间的直和；

6. $\mathcal{T}$ 的特征多项式在 $F[\lambda]$ 中可分解为：

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{r_m}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ 两两不等且 $\mathcal{T}$ 的每个特征值 λ_i 的几何重数等于它的代数重数，$i=1,2,\ldots,m$。

此时 $(\mathcal{T}\xi_1,\mathcal{T}\xi_2,\ldots,\mathcal{T}\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$，$\lambda_i$ 为 ξ_i 所属的特征值，$A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ 被称为 $\mathcal{T}$ 的**标准形**。除了主对角线上元素的排列顺序外，A 是由 $\mathcal{T}$ 唯一决定的。

Proof. (1) 必要性显然。设 $\mathcal{T}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 下的矩阵 A 可对角化，即存在可逆矩阵 P 与对角矩阵 Λ 使得 $A=P\Lambda P^{-1}$，设 P 的列为 $P_1,P_2,\ldots,P_n$，于是有：

$$\begin{gathered}(\mathcal{T}\alpha_1,\mathcal{T}\alpha_2,\ldots,\mathcal{T}\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A\\(\mathcal{T}\alpha_1,\mathcal{T}\alpha_2,\ldots,\mathcal{T}\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P\Lambda P^{-1}\\(\mathcal{T}\alpha_1,\mathcal{T}\alpha_2,\ldots,\mathcal{T}\alpha_n)P=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P\Lambda\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}&[(\mathcal{T}\alpha_1,\mathcal{T}\alpha_2,\ldots,\mathcal{T}\alpha_n)P_1,(\mathcal{T}\alpha_1,\mathcal{T}\alpha_2,\ldots,\mathcal{T}\alpha_n)P_2,\ldots,(\mathcal{T}\alpha_1,\mathcal{T}\alpha_2,\ldots,\mathcal{T}\alpha_n)P_n]\\=&[(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P_1,(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P_2,\ldots,(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P_n]\Lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\{\mathcal{T}[(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P_1],\mathcal{T}[(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P_2],\ldots,\mathcal{T}[(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P_n]\}\\=&[(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P_1,(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P_2,\ldots,(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P_n]\Lambda\end{aligned}$$

由定理 1.5可知 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P_1,(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P_2,\ldots,(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P_n$ 还是 X 的一组基，于是 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵是对角矩阵 Λ，$\mathcal{T}$ 可对角化，充分性得证。

(2) 由 $\mathcal{T}$ 可对角化的定义可得：

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}\text{可对角化}\iff\mathcal{T}\text{在 }X\text{ 的基}\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\text{下的矩阵为}\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}\\\iff&(\mathcal{T}\xi_1,\mathcal{T}\xi_2,\ldots,\mathcal{T}\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}\\\iff&(\mathcal{T}\xi_1,\mathcal{T}\xi_2,\ldots,\mathcal{T}\xi_n)=(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2,\ldots,\lambda_n\xi_n)\\\iff&\mathcal{T}\xi_i=\lambda_i\xi_i\iff\mathcal{T}\text{有 }n\text{ 个线性无关的特征向量}\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\end{aligned}$$

(3) 由 (2) 和性质 1.1.6(2) 立即可得。

(4) 由 (1) 可得 $\mathcal{T}$ 可对角化当且仅当存在 X 的一组基 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ 使得 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵 A 可对角化，设 σ 是 X 中的向量到它在基 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ 下的坐标的同构映射。由定理 2.27(2) 可知 A 的特征子空间维数之和为 n，根据性质 1.1.8(7) 可知 $\mathcal{T}$ 属于不同特征值的特征子空间的维数之和为 n。

(5) 设 $\mathcal{T}$ 全部的不同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$。由 (4)、性质 1.3.1(4) 和性质 1.1.6(2) 可得：

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\text{可对角化} &\iff \sum_{i=1}^{m} \dim(X_{\lambda_i}) = n \\
&\iff X_{\lambda_i}, i = 1, 2, \ldots, m\text{的基合起来是 } n \text{ 个线性无关的向量} \\
&\iff X_{\lambda_i}, i = 1, 2, \ldots, m\text{的基合起来是 } X \text{ 的一组基} \\
&\iff X = X_{\lambda_1} \oplus X_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus X_{\lambda_m}
\end{aligned}$$

(6) 由 (1) 和定理 2.27(3) 立即可得。 □

1.3.3 不变子空间

Definition 1.41. 设 X 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T}$ 是 X 上的一个线性变换，E 是 X 的一个子空间。若对于任意的 $\alpha \in E$ 都有 $\mathcal{T}\alpha \in E$，则称 E 是 X 的一个不变子空间 *(invariant subspace)*，简称为 $\mathcal{T}$-子空间。

Property 1.3.2. 设 X 是域 F 上的线性空间，$\mathcal{T}$ 是 X 上的一个线性变换，则：

1. X、X 的零子空间是 $\mathcal{T}$-子空间，称二者为**平凡的**$\mathcal{T}$-子空间；
2. $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}), \mathrm{Im}(\mathcal{T})$ 和 $\mathcal{T}$ 的特征子空间是 $\mathcal{T}$-子空间；
3.

Proof. (1)(2) 显然 □

1.3.4 投影变换

Property 1.3.3. 设 X 是域 F 上的线性空间，E 和 W 是 X 的子空间，且有 $X = E \oplus W$，$\mathcal{P}_E$ 是平行于 W 在 E 上的投影变换，$\mathcal{P}_W$ 是平行于 E 在 W 上的投影变换，则：

1. $\mathcal{P}_E$ 是线性变换；
2. $\mathcal{P}_E$ 是幂等变换；
3. 幂等变换 $\mathcal{T} \in \mathrm{Hom}(X)$ 是平行于 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}$ 在 $\mathrm{Im}\,\mathcal{T}$ 上的投影变换，此时 $X = \mathrm{Im}\,\mathcal{T} \oplus \mathrm{Ker}\,\mathcal{T}$；
4. $\mathcal{P}_E$ 与 $\mathcal{P}_W$ 正交；
5. $\mathcal{P}_E + \mathcal{P}_W = \mathcal{I}$；
6. 若 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathrm{Hom}(X)$，$\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是正交的幂等变换，且 $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = \mathcal{I}$，则 $X = \mathrm{Im}\,\mathcal{T}_1 \oplus \mathrm{Im}\,\mathcal{T}_2$，并且有 $\mathcal{T}_1$ 是平行于 $\mathrm{Im}\,\mathcal{T}_2$ 在 $\mathrm{Im}\,\mathcal{T}_1$ 上的投影，$\mathcal{T}_2$ 是平行于 $\mathrm{Im}\,\mathcal{T}_1$ 在 $\mathrm{Im}\,\mathcal{T}_2$ 上的投影；
7. 平行于 W 在 E 上的投影变换是唯一的。

Proof. (1) 任取 $\alpha,\beta\in X$ 和 $k_1,k_2\in F$，其中 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta=\beta_1+\beta_2$，$\alpha_1,\beta_1\in E$，$\alpha_2,\beta_2\in W$，于是有：

$$\mathcal{P}_E(k_1\alpha+k_2\beta)=\mathcal{P}_E[(k_1\alpha_1+k_2\beta_1)+(k_1\alpha_2+k_2\beta_2)]=k_1\alpha_1+k_2\beta_1=k_1\mathcal{P}_E\alpha+k_2\mathcal{P}_E\beta$$

所以 $\mathcal{P}_E$ 是线性变换。

(2) 任取 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in X$，$\alpha_1\in E$，$\alpha_2\in W$，则：

$$\mathcal{P}_E(\mathcal{P}_E\alpha)=\mathcal{P}_E(\alpha_1)=\alpha_1=\mathcal{P}_E\alpha$$

所以 $\mathcal{P}_E$ 是幂等变换。

(3) 任取 $\alpha\in X$，则 $\mathcal{T}\alpha\in\operatorname{Im}\mathcal{T}$。因为：

$$\mathcal{T}(\alpha-\mathcal{T}\alpha)=\mathcal{T}\alpha-\mathcal{T}^2\alpha=\mathcal{T}\alpha-\mathcal{T}\alpha=\mathbf{0}$$

所以 $\alpha-\mathcal{T}\alpha\in\operatorname{Ker}\mathcal{T}$。因为 $\alpha=\mathcal{T}\alpha+\alpha-\mathcal{T}\alpha$，所以 $X=\operatorname{Im}\mathcal{T}+\operatorname{Ker}\mathcal{T}$。

任取 $\beta\in\operatorname{Im}\mathcal{T}\cap\operatorname{Ker}\mathcal{T}$，则存在 $\gamma\in X$ 使得 $\mathcal{T}\gamma=\beta$，且有 $\mathcal{T}\beta=\mathbf{0}$，于是：

$$\mathbf{0}=\mathcal{T}\beta=\mathcal{T}(\mathcal{T}\gamma)=\mathcal{T}^2\gamma=\mathcal{T}\gamma=\beta$$

所以 $\operatorname{Im}\mathcal{T}\cap\operatorname{Ker}\mathcal{T}=\mathbf{0}$，由定理 1.12(3) 可知 $X=\operatorname{Im}\mathcal{T}\oplus\operatorname{Ker}\mathcal{T}$。

记 $\operatorname{Im}\mathcal{T}=E$，$\operatorname{Ker}\mathcal{T}=W$，对上述 $\alpha=\mathcal{T}\alpha+\alpha-\mathcal{T}\alpha$，有 $\mathcal{P}_E\alpha=\mathcal{T}\alpha$。由 α 的任意性，$\mathcal{T}=\mathcal{P}_E$。

(4) 任取 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in X$，$\alpha_1\in E$，$\alpha_2\in W$，则：

$$\mathcal{P}_E(\mathcal{P}_W\alpha)=\mathcal{P}_E\alpha_2=\mathbf{0},\ \mathcal{P}_W(\mathcal{P}_E\alpha)=\mathcal{P}_W\alpha_2=\mathbf{0}$$

所以 $\mathcal{P}_E\mathcal{P}_W=\mathcal{P}_W\mathcal{P}_E=\mathcal{O}$，即 $\mathcal{P}_E$ 与 $\mathcal{P}_W$ 正交。

(5) 任取 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in X$，$\alpha_1\in E$，$\alpha_2\in W$，则：

$$(\mathcal{P}_E+\mathcal{P}_W)\alpha=\mathcal{P}_E\alpha+\mathcal{P}_W\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\alpha$$

于是 $\mathcal{P}_E+\mathcal{P}_W=\mathcal{I}$。

(6) 任取 $\alpha\in X$，则 $\alpha=(\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2)\alpha=\mathcal{T}_1\alpha+\mathcal{T}_2\alpha$，所以 $X=\operatorname{Im}\mathcal{T}_1+\operatorname{Im}\mathcal{T}_2$。

任取 $\beta\in\operatorname{Im}\mathcal{T}_1\cap\operatorname{Im}\mathcal{T}_2$，则存在 $\gamma,\delta\in X$ 使得 $\mathcal{T}_1\gamma=\beta$，$\mathcal{T}_2\delta=\beta$，于是有 $\beta=\mathcal{T}_1\gamma=\mathcal{T}_1^2\gamma=\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1\gamma)=\mathcal{T}_1\beta$。因为 $\mathcal{T}_1$ 与 $\mathcal{T}_2$ 正交，所以：

$$\mathcal{T}_1\beta=\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\delta)=(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\delta=\mathbf{0}$$

于是 $\beta=\mathbf{0}$，即 $\operatorname{Im}\mathcal{T}_1\cap\operatorname{Im}\mathcal{T}_2=\mathbf{0}$。由定理 1.12可得 $X=\operatorname{Im}\mathcal{T}_1\oplus\operatorname{Im}\mathcal{T}_2$。

任取 $\varepsilon=\mathcal{T}_1\varepsilon_1+\mathcal{T}_2\varepsilon_2\in X$，其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in X$。因为 $\mathcal{T}_1$ 与 $\mathcal{T}_2$ 正交、$\mathcal{T}_1$ 是幂等变换，所以显然有：

$$\mathcal{T}_1\varepsilon=\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1\varepsilon_1+\mathcal{T}_2\varepsilon_2)=\mathcal{T}_1^2\varepsilon_1+(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\varepsilon_2=\mathcal{T}_1\varepsilon_1$$

于是 $\mathcal{T}_1$ 是平行于 $\operatorname{Im}\mathcal{T}_2$ 在 $\operatorname{Im}\mathcal{T}_1$ 上的投影。$\mathcal{T}_2$ 同理。

(7) 若存在另一平行于 W 在 E 上的投影变换，则它与 $\mathcal{P}_E$ 的作用完全相同，于是二者相等，唯一性得证。 □

Corollary 1.3. 设 X 是域 F 上的线性空间，由性质 *1.3.3(3)* 可得到如下推论：

1. 若 $X = E \oplus W$，$\mathcal{P}_E$ 为平行于 W 在 E 上的投影变换，则：

$$E = \operatorname{Im} \mathcal{P}_E,\ W = \operatorname{Ker} \mathcal{P}_E$$

2. X 的任一子空间 E 是平行于 E 的一个补空间在 E 上的投影变换的象；

3. X 的任一子空间 E 是平行于 E 在 E 的一个补空间上的投影变换的核。

Proof. (1) 任取 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \in X$, $\alpha_1 \in E$, $\alpha_2 \in W$，则 $\mathcal{P}_E \alpha = \alpha_1 \in E$，所以 $\operatorname{Im} \mathcal{P}_E \subset E$。任取 $\beta \in E$，有 $\mathcal{P}_E \beta = \beta \in \operatorname{Im} \mathcal{P}_E$，所以 $E \subset \operatorname{Im} \mathcal{P}_E$。因此 $E = \operatorname{Im} \mathcal{P}_E$。

任取 $\gamma \in W$，有 $\mathcal{P}_E \gamma = \mathbf{0}$，所以 $\gamma \in \operatorname{Ker} \mathcal{P}_E$，于是 $W \subset \operatorname{Ker} \mathcal{P}_E$。任取 $\delta = \delta_1 + \delta_2 \in \operatorname{Ker} \mathcal{P}_E$, $\delta_1 \in E$, $\delta_2 \in W$，则 $\mathcal{P}_E \delta = \delta_1 = \mathbf{0}$，所以 $\delta = \delta_2 \in W$，于是 $\operatorname{Ker} \mathcal{P}_E \subset W$。因此 $W = \operatorname{Ker} \mathcal{P}_E$。

(2) 由定理 1.13可知 E 必定存在一个补空间 W，于是 $X = E \oplus W$，由 (1) 即可得到 $E = \operatorname{Im} \mathcal{P}_E$。

(3) 与 (2) 类似可得。 □

1.4 内积空间

内积空间的定义

Definition 1.42. 设 X 为实（复）数域 K 上的线性空间。若 X 中任意一对元素 x, y 都对应于 K 中的一个数，记为 (x, y)，满足：

1. 线性性：$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$，这里 $z \in X$。

2. 对称性：当 K 为实数域时，$(x, y) = (y, x)$；当 K 为复数域时，$(x, y) = \overline{(y, x)}$。

3. 非负性：$(x, x) \geqslant 0$，等号成立当且仅当 $x = \mathbf{0}$。

那么就称 X 为实（复）内积空间 *(inner product space)*，称 (x, y) 为元素 x, y 的内积 *(inner product)*。

Chapter 2

矩阵

2.1 矩阵空间

Definition 2.1. 由 $s \cdot m$ 个数排成 s 行、m 列的一张表称为一个 $s \times m$矩阵 *(matrix)*，通常用大写英文字母表示，其中的每一个数称为这个矩阵的一个元素，第 i 行与第 j 列交叉位置的元素称为矩阵的 (i, j) 元，记作 $A(i; j)$。一个 $s \times m$ 矩阵可以简单地记作 $A_{s\times m}$。如果矩阵 A 的 (i, j) 元是 a_{ij}，那么可以记作 $A = (a_{ij})$。如果一个矩阵的行数和列数相同，则称它为方阵，n 行 n 列的方阵也成为 n 阶矩阵。对于两个矩阵 A 和 B，如果它们的行数都等于 s 且列数都等于 m，同时还有 $A(i; j) = B(i; j), i = 1, 2, \dots, s,\ j = 1, 2, \dots, m$，那么称 A 和 B 相等，记作 $A = B$。

2.1.1 矩阵的运算

加减法与数量乘法

Definition 2.2. 将数域 K 上所有 $s \times m$ 矩阵组成的集合记作 $M_{s\times m}(K)$，当 $s = m$ 时，$M_{s\times s}(K)$ 可以简记作 $M_s(K)$。在 $M_{s\times m}(K)$ 中定义如下运算：

1. 加法：
$$\forall\ A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{s\times m}(K),\ A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

2. 纯量乘法：
$$\forall\ k \in K,\ \forall\ A = (a_{ij}),\ kA = (ka_{ij})$$

那么 $M_{s\times m}(K)$ 构成一个线性空间。

Proof. 首先证明如上定义的加法和纯量乘法对 $M_{s\times m}(K)$ 是封闭的。由数域中加法和乘法的封闭性，$a_{ij} + b_{ij} \in K$，$ka_{ij} \in K$ $i = 1, 2, \dots, s$，$j = 1, 2, \dots, m$，所以如上定义的加法与纯量乘法对 $M_{s\times m}(K)$ 是封闭的。

接下来证明如上定义的加法和纯量乘法满足线性空间中的 8 条运算法则：

1. 因为数域内的数满足加法交换律与加法结合律，所以 $M_{s\times m}(K)$ 上的加法满足线性空间运算法则 (1)(2)；

2. 取一个元素全为 0 的 $s\times m$ 矩阵，将其记作 $\mathbf{0}$，显然对 $\forall\, A\in M_{s\times m}(K)$，有 $A+\mathbf{0}=A$，因此 $M_{s\times m}(K)$ 中存在零元且它就是元素全为 0 的 $s\times m$ 矩阵，称其为零矩阵 (zero matrix)，就记作 $\mathbf{0}$。因此，$M_{s\times m}(K)$ 上的加法满足线性空间运算法则 (3)；

3. 对 $\forall\, A\in M_{s\times m}(K)$，取 $-A=(-a_{ij})$，则有 $A+(-A)=(a_{ij}-a_{ij})=\mathbf{0}$。由 A 的任意性，$M_{s\times m}(K)$ 中的每个元素都具有负元，将 $\forall\, A\in M_{s\times m}(K)$ 的负元就记作 $-A$。因此，$M_{s\times m}(K)$ 上的加法满足线性空间运算法则 (4)；

4. 因为数域内的数满足乘法结合律和乘法分配律，同时它们乘 1 的积是自身，所以 $M_{s\times n}$ 上的纯量乘法满足线性空间运算法则 (5)(6)(7)(8)。

证明完毕。 □

Definition 2.3. 定义 $M_{s\times m}(K)$ 上矩阵的减法如下：设 $A,B\in M_{s\times m}(K)$，则：

$$A-B\overset{def}{=}A+(-B)$$

乘法

Definition 2.4. 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$，令 $C=(c_{ij})_{s\times m}$，其中：

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\ i=1,2,\ldots,s,\ j=1,2,\ldots,m$$

则矩阵 C 称作矩阵 A 与 B 的乘积，记作 $C=AB$。

初等变换

Definition 2.5. 称以下变换为矩阵的初等行变换 *(elementary row operation)*：

1. 把一行的倍数加到另一行上；

2. 互换两行的位置；

3. 用一个非零数乘某一行。

称以下变换为矩阵的初等列变换 *(elementary column operation)*：

1. 把一列的倍数加到另一列上；

2. 互换两列的位置；

3. 用一个非零数乘某一列。

2.1.2 矩阵的行列式

2.1.3 矩阵的秩

Definition 2.6. 矩阵 A 的列向量组的秩称为 A 的**列秩**，行向量组的秩称为 A 的**行秩**

Lemma 2.1. 阶梯形矩阵 J 的行秩与等于列秩且都等于非零行数，J 的主元所在的行构成行向量组的一个极大线性无关组，主元所在列构成列向量组的一个极大线性无关组。

Lemma 2.2. 矩阵的初等行变换不改变行秩，初等列变换不改变列秩。

Proof. 证明三种变换前后的向量组是等价的，由性质 1.1.5(3) 即可得出结论。列变换的情况可由转置与行变换的结论得到。 □

Lemma 2.3. 矩阵的初等行变换不改变矩阵列向量组之间的线性相关性：

1. 设矩阵 A 经过初等行变换变成矩阵 B，则 A 的列向量组线性相关当且仅当 B 的列向量组线性相关；
2. 设矩阵 A 经过初等行变换变成矩阵 B，若 B 的第 $j_1, j_2, \ldots, j_r$ 列构成 B 的列向量组的一个极大线性无关组，则 A 的第 $j_1, j_2, \ldots, j_r$ 也构成 A 的一个极大线性无关组[1]；
3. 初等行变换不改变列秩。

Proof. (1) 将矩阵 A, B 看作齐次线性方程组的矩阵，则 $Ax = \mathbf{0}$ 和 $Bx = \mathbf{0}$ 同解，于是 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解当且仅当 $Bx = \mathbf{0}$ 有非零解，即 A 的列向量组线性相关当且仅当 B 的列向量组线性相关。

(2)A 的第 $j_1, j_2, \ldots, j_r$ 列经过初等行变换构成 B 的第 $j_1, j_2, \ldots, j_r$ 列，由 (1) 可知它们线性无关。任取其它列第 l 列，则 A 的第 $j_1, j_2, \ldots, j_r, l$ 列经过初等行变换构成 B 的第 $j_1, j_2, \ldots, j_r, l$ 列，因为 B 的第 $j_1, j_2, \ldots, j_r$ 列构成 B 的列向量组的一个极大线性无关组，所以 B 的第 $j_1, j_2, \ldots, j_r, l$ 列线性相关，由 (1) 可知 A 的第 $j_1, j_2, \ldots, j_r, l$ 列也线性相关，所以 A 的第 $j_1, j_2, \ldots, j_r, l$ 列构成 A 的一个极大线性无关组。

(3) 由 (2) 直接得到。 □

Theorem 2.1. 任意矩阵的行秩都等于列秩。

Proof. 任取矩阵 A，记 A 的阶梯形矩阵为 J。由引理 2.2可知则 A 的行秩等于 J 的行秩，由引理 2.1可知 J 的行秩等于 J 的列秩，由引理 2.3(3) 可知 J 的列秩等于 A 的列秩，于是 A 的行秩等于 A 的列秩。由 A 的任意性，结论成立。 □

Definition 2.7. 矩阵 A 的行秩和列秩统称为矩阵 A 的秩，记为 $\text{rank}(A)$。

Corollary 2.1. 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩。

Proof. 由引理 2.2和定理 2.1立即得到。 □

[1]与引理 2.1联合起来提供了求矩阵列向量组的极大线性无关组的方法。

2.2 矩阵的向量空间

Definition 2.8. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in M_{m\times n}(K)$，将：

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i : k_i \in K\right\} \overset{def}{=} \mathcal{M}(A)$$

Theorem 2.2. 设 $A \in M_{m\times n}(K)$，则：

$$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(AA^T)$$

Proof. 由定义，显然 $\mathcal{M}(AA^T) \subset \mathcal{M}(A)$。对于任意的 $x \perp \mathcal{M}(AA^T)$，有 $x^T AA^T = \mathbf{0}$，于是 $||A^T x||^2 = x^T AA^T x = 0$，即 $A^T x = \mathbf{0}$，于是 $x \perp \mathcal{M}(A)$。 □

回头改证明，同时注意数域问题

Theorem 2.3. 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$，则有：

$$\mathrm{rank}(AA^H) = \mathrm{rank}(A^H A) = \mathrm{rank}(A)$$

Proof. 由性质 2.3.1(3) 可知只需证明方程 $A^H Ax = \mathbf{0}$ 与 $Ax = \mathbf{0}$ 同解。注意到 $Ax = \mathbf{0}$ 则必然有 $A^H Ax = \mathbf{0}$，而若 $A^H Ax = \mathbf{0}$，则必有 $x^H A^H Ax = ||Ax|| = 0$，所以 $Ax = \mathbf{0}$。于是：

$$n - \mathrm{rank}(A^H A) = n - \mathrm{rank}(A)$$

所以：

$$\mathrm{rank}(A^H A) = \mathrm{rank}(A)$$

Hermitian 转置不改变秩

同理可得：

$$\mathrm{rank}(AA^H) = \mathrm{rank}(A^H) = \mathrm{rank}(A)$$

于是有：

$$\mathrm{rank}(AA^H) = \mathrm{rank}(A^H A) = \mathrm{rank}(A)$$ □

2.3 线性方程组

Definition 2.9. 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为 n 个未知数，若一个方程具有如下形式：

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

其中，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为系数 *(coefficient)*，b 为常数项 *(constant term)*，则称该方程为线性方程 *(linear equation)*。由 m 个形如上式的方程组成的方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

被称为 n 元线性方程组 *(system of linear equations, SLE)*。由矩阵乘法的定义，该方程组也可以写作矩阵形式：

$$Ax = b$$

其中：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definition 2.10. 给定线性方程组 $Ax = b$，称如下矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

为该线性方程组的增广矩阵 *(augmented matrix)*，记为 $[A|b]$。

Definition 2.11. 一个矩阵被称为行阶梯形矩阵 *(row echelon form, REF)*，如果它满足以下条件：

1. 所有零行（全为零的行）位于非零行的下方；

2. 若某一行非零，则该行的首个非零元素（称为主元 *(pivot)*）位于该行之前所有行的主元右侧。

一个矩阵被称为简化行阶梯形矩阵 *(reduced row echelon form, RREF)*，如果满足以下条件：

1. 它是阶梯形矩阵；

2. 每个非零行的主元都是 1；

3. 每个主元所在列的其他元素均为 0。

Theorem 2.4. 任意一个矩阵都可以经过一系列初等行变换化成行阶梯形矩阵，进而可以经过一系列初等行变换化成简化行阶梯形矩阵。

Definition 2.12. 设增广矩阵化简后变为阶梯形矩阵，称每一行主元所在列所对应的未知数为主变量 *(pivot variable)*，同时称非主元所在列对应的未知数为自由未知量 *(free variable)*。

2.3.1 初等方法

Theorem 2.5. 数域 K 上的 n 元线性方程组的解的情况只有三种可能：

1. **无解**：增广矩阵化成的阶梯形方程出现 $0=d$ 且 $d\neq 0$；
2. 有解：
   (a) **唯一解**：阶梯形矩阵的非零行数 r 等于未知量个数 n；
   (b) **无穷多解**：阶梯形矩阵的非零行数 r 小于未知量个数 n；

这导致：

1. 数域 K 上 n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件为：系数矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵中非零行数 $r<n$；
2. 数域 K 上 n 元齐次线性方程组的方程数 m 若小于未知量数 n，则一定有非零解。

2.3.2 秩与子空间

Theorem 2.6. 数域 K 上 n 元线性方程组 $Ax=b$（即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=b$，其中 α_i 为 A 的列向量）有解的充分必要条件为：

1. $b\in<\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n>$；
2. $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}([A|b])$；

进一步可得唯一解与无穷多解的判别方法：

1. **唯一解**：$\operatorname{rank}(A)=n$；
2. **无穷多解**：$\operatorname{rank}(A)<n$。

这导致齐次线性方程组有非零解的充分必要条件为 $\operatorname{rank}(A)<n$。

Proof. (1) 显然。

(2) 由性质 1.1.7(4) 可得 $Ax=b$ 有解 $\iff b\in<\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n>\iff<\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta>=<\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n>\iff \dim<\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta>=\dim<\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n>\iff \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}([A|b])$。

(3) 若 $\operatorname{rank}(A)=n$，则阶梯形矩阵的非零行数 $r=n$，由定理 2.5可得此时有唯一解。

(4) 与 (3) 类似。 □

2.3.3 解的结构

齐次线性方程组

Property 2.3.1. 数域 K 上 n 元齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的解具有如下性质：

1. 若 α, β 是解，对任意的 $c_1, c_2 \in K$，$k_1\alpha + k_2\beta$ 也是解；
2. 解空间 W 构成 K^n 的一个子空间；
3. 解空间 W 满足 $\dim(W) = n - \operatorname{rank}(A)$。

Proof. (1)$A(k_1\alpha + k_2\beta) = k_1 A\alpha + k_2 A\beta = \mathbf{0}$。

(2) 由 (1) 立即可得。

(3) 设 A 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，$A$ 的行数为 m。定义线性映射 $\mathcal{T} : \alpha \longrightarrow A\alpha$，则 $\mathcal{T}$ 是 K^n 到 $\mathbb{K}^m$ 的一个线性映射。于是有：

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{T}) = \{\alpha \in K^n : \mathcal{T}\alpha = \mathbf{0}\} = \{\alpha \in K^n : A\alpha = \mathbf{0}\} = W$$
$$\operatorname{Im}(\mathcal{T}) = \{A\alpha : \alpha \in K^n\} =< \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n >$$

所以由性质 1.1.7(4) 可得：

$$\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{T}) = \dim(W)$$
$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \dim < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n >= \dim(\operatorname{Im}\mathcal{T})$$

由性质 1.2.1(10) 即可得到：

$$\dim(K^n) = \dim(\operatorname{Ker}\mathcal{T}) + \dim(\operatorname{Im}\mathcal{T}) = \dim(W) + \operatorname{rank}(A)$$

即 $n = \dim(W) + \operatorname{rank}(A)$。 □

Definition 2.13. 设数域 K 上 n 元齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解，称它的解空间 W 的一组基为基础解系 *(fundamental solution set)*。

非齐次线性方程组

Property 2.3.2. 数域 K 上 n 数域 K 上 n 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解具有如下性质：

1. 若 α, β 是解，则 $\alpha - \beta$ 为 $Ax = \mathbf{0}$ 的解；
2. 设 W 为 $Ax = \mathbf{0}$ 的解空间，若 α 是 $Ax = b$ 的解，则对任意的 $\beta \in W$，$\alpha + \beta$ 也是 $Ax = b$ 的解；
3. 设 W 为 $Ax = \mathbf{0}$ 的解空间，则 $Ax = b$ 的解集 U 可以表示为：

$$U = \{\alpha + \beta : \beta \in W\}$$

其中 α 为 $Ax = b$ 的任意一个解；

4. $Ax = b$ 的解唯一当且仅当 $Ax = \mathbf{0}$ 的解空间为零空间。

Proof. (1)$A(\alpha - \beta) = A\alpha - A\beta = b - b = \mathbf{0}$。

(2)$A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta = b + \mathbf{0} = b$。

(3) 由 (1)(2) 可得。

(4) 由 (3) 立即可得。 □

2.4 矩阵的等价关系

2.4.1 相抵

Definition 2.14. $A, B \in M_{s\times m}(K)$，如果满足下述条件中的任意一个：

1. A 能够通过初等行变换和初等列变换变成 B；
2. 存在数域 K 上的 s 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_t$ 与 m 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ 使得：
$$P_t \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_n = B$$
3. 存在数域 K 上的 s 阶可逆矩阵 P 与 m 阶可逆矩阵 Q 使得：
$$PAQ = B$$

则称 A 与 B 相抵 *(equivalent)*。

上述三个条件显然是等价的。

Theorem 2.7. 相抵是 $M_{s\times m}(K)$ 上的一个等价关系。在相抵关系下，矩阵 A 的等价类称为 A 的**相抵类**。

Proof. 证明是显然的。 □

Theorem 2.8. 设 $A \in M_{s\times m}(K)$，且 $\mathrm{rank}(A) = r$。如果 $r > 0$，那么 A 相抵于如下形式的矩阵：
$$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
称该矩阵为 A 的**相抵标准形**。如果 $r = 0$，则 A 相抵于零矩阵，此时称零矩阵为 A 的**相抵标准形**。

Proof. 一个矩阵通过初等行变换一定可以变成一个简化行阶梯型矩阵，再由初等列变换即可得到上述矩阵。 □

Theorem 2.9 (相抵的完全不变量)**.** $A, B \in M_{s\times m}(K)$，$A$ 与 B 相抵当且仅当它们的秩相同。

Proof. **(1) 必要性：** 初等行变换和初等列变换不改变矩阵的秩。

(2) 充分性： 若 A, B 的秩相同，则它们的相抵标准形相同。因为相抵是一个等价关系，由等价关系的对称性与传递性即可得到 A 与 B 相抵。 □

2.4.2 相似

Definition 2.15. $A, B \in M_n(K)$。如果存在可逆矩阵 $P \in M_n(K)$，使得：

$$P^{-1}AP = B$$

则称 A 与 B 相似 *(similar)*。

Theorem 2.10. 相似是 $M_n(K)$ 上的一个等价关系。在相似关系下，矩阵 A 的等价类称为 A 的**相似类**。

Proof. 证明是显然的。 □

Property 2.4.1 (相似的不变量)**.** 相似的矩阵具有相同的行列式值、秩、迹、特征多项式、特征值（包括重数相同）。

Proof. 设 $A, B \in M_n(K)$ 且 A 与 B 相似，于是存在可逆矩阵 $P \in M_n(K)$ 使得 $P^{-1}AP = B$。

(1)$|A| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}|\,|B|\,|P| = |P^{-1}|\,|P|\,|B| = |B|$。

(2) 初等行变换与初等列变换不改变矩阵的秩。

(3) 由性质 .3.2(3) 可得 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(BPP^{-1}) = \mathrm{tr}(B)$。

(4)(5) 参考定理 2.25。 □

2.4.3 合同

Definition 2.16. $A, B \in M_n(K)$。如果存在可逆矩阵 $C \in M_n(K)$，使得：

$$C^T AC = B$$

则称 A 与 B 合同 *(congruent)*，记作 $A \cong B$。如果对称矩阵 A 合同于一个对角矩阵，那么称这个对角矩阵为 A 的一个**合同标准形**。

Theorem 2.11. 合同是 $M_n(K)$ 上的一个等价关系。在合同关系下，矩阵 A 的等价类称为 A 的**合同类**。

Proof. 证明是显然的。 □

Definition 2.17. 对 n 阶矩阵的行作初等行变换，再对该矩阵的同样标号的列作相同的初等列变换，这种变换被称为**成对初等行、列变换**。

Lemma 2.4. $A, B \in M_n(K)$，则 A 合同于 B 当且仅当 A 经过一系列成对初等行、列变换可以变成 B，此时对 I 作其中的初等列变换即可得到可逆矩阵 C，使得 $C^T AC = B$。

Proof. 由可逆矩阵的初等矩阵分解，可得：

$$\begin{aligned} A \cong B &\iff \text{存在数域 } K \text{ 上的可逆矩阵 } C\text{，使得} C^T AC = B \\ &\iff \text{存在数域 } K \text{ 上的初等矩阵 } P_1, P_2, \ldots, P_t \text{ 使得} \\ &\qquad C = P_1 P_2 \cdots P_t \\ &\qquad P_t^T \cdots P_2^T P_1^T A P_1 P_2 \cdots P_t = B \end{aligned}$$

□

Theorem 2.12. 数域 K 上的任一对称矩阵都合同于一个对角矩阵。

Proof. 对数域 K 上对称矩阵的阶数 n 作数学归纳法，。

当 $n=1$ 时，因为矩阵合同于自身，同时一阶矩阵都是对角矩阵，所以结论成立。

假设 $n-1$ 阶对称矩阵都合同于对角矩阵，考虑 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$。

情形一： $a_{11}\neq 0$

把 A 写成分块矩阵的形式，然后对 A 作初等行变换与初等列变换可得：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & A_1 \\ A_1^T & A_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & A_1 \\ \mathbf{0} & A_2-a_{11}^{-1}A_1^TA_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2-a_{11}^{-1}A_1^TA_1 \end{pmatrix}$$

于是有：

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -a_{11}^{-1}A_1^T & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & A_1 \\ A_1^T & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}A_1 \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2-a_{11}^{-1}A_1^TA_1 \end{pmatrix}$$

因为 A 是一个对称矩阵，所以 A_2 是一个对称矩阵，于是：

$$(A_2-a_{11}^{-1}A_1^TA_1)^T = A_2^T - a_{11}^{-1}A_1^T(A_1^T)^T = A_2 - a_{11}^{-1}A_1^TA_1$$

所以 $A_2-a_{11}^{-1}A_1'A_1$ 是 $n-1$ 阶对称矩阵。由归纳假设可知存在可逆矩阵 $C\in M_{n-1}(K)$ 使得 $C^T(A_2-a_{11}^{-1}A_1'A_1)C=D$，其中 D 是一个对角矩阵，即：

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2-a_{11}^{-1}A_1^TA_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$$

于是有：

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -a_{11}^{-1}A_1 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & A_1 \\ A_1^T & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}A_1 \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$$

因为：

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}A_1 \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}A_1 \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -a_{11}^{-1}A_1 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

并且：

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}A_1 \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$$

是一个可逆矩阵，所以 A 合同于对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$$

情形二： $a_{11}=0$, **存在** $i\neq 1$ **使得** $a_{ii}\neq 0$

把 A 的第 $1,i$ 行呼唤，再把所得矩阵的第 $1,i$ 列呼唤，得到的矩阵 B 的 $(1,1)$ 元即为 $a_{ii}\neq 0$。根据情形一的讨论，B 合同于一个对角矩阵。因为 B 是由 A 作成对初等行、列变换得到的，由引理 2.4可得 $A\cong B$。由合同的传递性，A 也合同于一个对角矩阵。

情形三：$a_{ii}=0,\ \forall\, i=1,2,\dots,n$，**存在** $a_{ij}\neq 0,\ i\neq j$

把 A 的第 j 行加到第 i 行上，再把所得矩阵的第 j 列加到第 i 列上，得到的矩阵 E 的 (i,i) 元即为 $2a_{ij}\neq 0$。由情形二的讨论，E 合同于一个对角矩阵。因为 E 是由 A 作成对初等行、列变换得到的，由引理 2.4可得 $A\cong E$。由合同的传递性，A 也合同于一个对角矩阵。

情形四：$A=\mathbf{0}$

因为 $\mathbf{0}$ 是一个对角矩阵，所以结论显然成立。 □

Theorem 2.13. 设对角矩阵 B 是对称矩阵 A 的合同标准形，则 B 对角线上不为 0 的元素的个数等于 A 的秩。

Proof. 因为 $A\cong B$，所以存在可逆矩阵 C 使得 $C^TAC=B$，于是 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$。 □

实对称矩阵的合同规范形

Theorem 2.14. 对于任意的对称矩阵 $A\in M_n(\mathbb{R})$，A 都合同于对角矩阵 $\operatorname{diag}\{1,1,\dots,1,-1,-1,\dots,-1,0,0,\dots,0\}$，系数为 1 的平方项个数称为 A 的正惯性指数 *(positive inertia index)*，系数为 -1 的平方项个数称为 A 的负惯性指数 *(negative inertia index)*，这个对角矩阵称为 A 的**合同规范形**。

Proof. 任取矩阵 $A\in M_n(\mathbb{R})$，由定理 2.12可得 A 合同一个对角矩阵 B。对 B 作成对初等行、列变换可将 B 对角线上的元素重新排列，使得正值在前，负值在中间，零值在最后，如此得到对角矩阵 C，C 可写作：

$$C=\begin{pmatrix}
c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & c_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & -c_{p+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -c_{p+2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_r & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

其中 $c_1,c_2,\dots,c_r>0$。再对 C 作成对初等行、列变换，即先对第 i 行除 $\sqrt{c_i}$，再对第 i 列

除 $\sqrt{c_i}$, $i=1,2,\ldots,n$，即可得到对角矩阵 D：

$$D=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&-1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&0&-1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&-1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

由引理 2.4可得，$D\cong C$，$C\cong B$，又因为 $A\cong B$，由合同的传递性与对称性即可得 $A\cong D$。由 A 的任意性结论得证。 □

复对称矩阵的合同规范形

Theorem 2.15. 对于任意的 $A\in M_n(\mathbb{C})$，A 都合同于对角矩阵 $\mathrm{diag}\{1,1,\ldots,1,0,0,\ldots,0\}$，这个对角矩阵称为 A 的合同规范形。

Proof. 任取矩阵 $A\in M_n(\mathbb{C})$，由定理 2.12可得 $A\cong B=\mathrm{diag}\{b_1,b_2,\ldots,b_r,0,0,\ldots,0\}$，其中 r 是矩阵 B 的秩，$b_1,b_2,\ldots,b_r\neq 0$。设 $b_j=r_j\cos\theta_j+ir_j\sin\theta_j$, $\theta_j\in[0,2\pi)$, $j=1,2,\ldots,r$。因为：

$$\left[\sqrt{r_j}\left(\cos\frac{\theta_j}{2}+i\sin\frac{\theta_j}{2}\right)\right]^2=b_j$$

将 $\sqrt{r_j}\left(\cos\frac{\theta_j}{2}+i\sin\frac{\theta_j}{2}\right)$ 记作 $\sqrt{b_j}$，作成对初等行、列变换，即先对第 j 行除 $\sqrt{b_j}$，再对第 j 列除 $\sqrt{b_j}$，则可得到矩阵 $C=\mathrm{diag}\{1,1,\ldots,1,0,0\ldots,0\}$，其中 1 的个数为 r。由引理 2.4可得，$B\cong C$。因为 $A\cong B$，由合同的传递性，$A\cong C$。由 A 的任意性，结论成立。 □

2.5 相抵的应用

2.5.1 广义逆

Definition 2.18. 设 $A\in M_{m\times n}(K)$，一切满足方程组：

$$AXA=A$$

的矩阵 X 都被称为是 A 的广义逆 *(generalized inverse)*，记为 A^-。

Theorem 2.16. 设非零矩阵 $A \in M_{m\times n}(K)$，$\operatorname{rank}(A) = r$ 且：

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q$$

其中 P, Q 分别为数域 K 上的 m 阶可逆矩阵和 n 阶可逆矩阵，则矩阵方程：

$$AXA = A$$

一定有解，且其通解可表示为：

$$X = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1}$$

其中 B, C, D 分别为数域 K 上任意的 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 矩阵。

Proof. 若 X 是上述矩阵方程的一个解，则：

$$P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} QXP \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q$$
$$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} QXP \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

将 QXP 写作如下分块矩阵的形式：

$$QXP = \begin{pmatrix} H & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

其中 H, B, C, D 分别为数域 K 上任意的 $r \times r$, $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 矩阵。于是：

$$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

所以 $H = I_r$，因此：

$$X = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1}$$ □

Property 2.5.1. 设 $A, \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{m\times q}(K)$, $C \in M_{p\times n}(K)$，则广义逆 A^- 具有如下性质：

1. A^- 唯一的充分必要条件为 A 可逆，此时 $A^- = A^{-1}$；
2. $\operatorname{rank}(A^-) \geqslant \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AA^-) = \operatorname{rank}(A^-A)$；

3. 若 $\mathcal{M}(B) \subset \mathcal{M}(A), \mathcal{M}(C) \subset \mathcal{M}(A^T)$，则 $C^T A^- B$ 与 A^- 的选择无关；证明有问题

4. $A(A^T A)^- A^T$ 与 $(A^T A)^-$ 的选择无关；

5. $A(A^T A)^- A^T A = A$, $A^T A(A^T A)^- A^T = A^T$；

6. 若 A 对称，则 $[(A)^-]^T = (A)^-$；

7. 若存在 α 使得 $c = A^T \alpha$，则 $c^T(A^T A)^- A^T A = c^T$。

Proof. (1) **充分性**：若 A 可逆，则 $r = n$，由 A^- 的通解公式，显然此时 A^- 唯一。

必要性：若 A^- 唯一，则 $r = n$，显然此时 A 可逆。

(2) 由 A^- 的通解公式，$\text{rank}(A^-) \geqslant r = \text{rank}(A)$。因为：

$$AA^- = P\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} QQ^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} I_r & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} p^{-1}$$

$$A^-A = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1}P\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ C & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q$$

显然，$\text{rank}(AA^-) = \text{rank}(A^-A) = \text{rank}(A) = r$。

(3) 由已知条件，存在矩阵 D_1, D_2 使得 $B = AD_1$, $C = A^T D_2$，于是：

$$C^T A^- B = D_2^T AA^- AD_1 = D_2^T AD_1$$

(4) 由性质 2.8.2(2) 可知 $A(A^T A)^- A^T$ 是向 $\mathcal{M}(A)$ 的正交投影阵，由性质 1.3.3(7) 和定理 1.20可得 $A(A^T A)^- A$ 是唯一的，与 $(A^T A)^-$ 的选择无关。

(5) 设 $B = A(A^T A)^- A^T A - A$，则：

$$\begin{aligned}
B^T B &= \{A^T A[(A^T A)^-]^T A^T - A^T\}[A(A^T A)^- A^T A - A] \\
&= A^T A[(A^T A)^-]^T A^T A(A^T A)^- A^T A - A^T A[(A^T A)^-]^T A^T A \\
&\quad - A^T A(A^T A)^- A^T A + A^T A \\
&= A^T A[(A^T A)^-]^T A^T A - A^T A[(A^T A)^-]^T A^T A - A^T A + A^T A = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

所以 $B = \mathbf{0}$（考虑 $B^T B$ 主对角线上的元素），于是 $A(A^T A)^- A^T A = A$。

设 $C = A^T A(A^T A)^- A^T - A^T$，则：

$$\begin{aligned}
CC^T &= [A^T A(A^T A)^- A^T - A^T]\{A[(A^T A)^-]^T A^T A - A\} \\
&= A^T A(A^T A)^- A^T A[(A^T A)^-]^T A^T A - A^T A(A^T A)^- A^T A \\
&\quad - A^T A[(A^T A)^-]^T A^T A + A^T A \\
&= A^T A[(A^T A)^-]^T A^T A - A^T A - A^T A[(A^T A)^-]^T A^T A + A^T A = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

所以 $C = \mathbf{0}$，于是 $A^T A(A^T A)^- A^T = A^T$。

(6) 此时有：

$$AXA = A \iff A^TX^TA^T = A^T \iff AX^TA = A$$

(7) 由 (5) 可得：

$$c^T(A^TA)^-A^TA = \alpha^TA(A^TA)^-A^TA = \alpha^TA = c^T$$ □

2.5.2 Moore-Penrose 广义逆

Definition 2.19. 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$。若 $X \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ 满足：

$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ (AX)^H = AX \\ (XA)^H = XA \end{cases}$$

则称 X 为 A 的 *Moore-Penrose* 广义逆，记作 A^+，上述方程组被称为 A 的 *Penrose* 方程组。

满秩分解导出的广义逆

Theorem 2.17. 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$，则 A 的 *Penrose* 方程组一定有唯一解。对 A 进行满秩分解，设 $A = BC$，其中 B, C 分别为列满秩矩阵与行满秩矩阵，则 A 的 *Penrose* 方程组的解可表示为：

$$X = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

Proof. 由定理 2.3可知 $(B^HB)^{-1}, (CC^H)^{-1}$ 存在，将上述 X 代入 A 的 Penrose 方程组可得：

$$\begin{aligned}
XAX &= C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^HBCC^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H \\
&= C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H = X \\
AXA &= BCC^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^HBC = BC = A \\
(AX)^H &= X^HA^H = B[(B^HB)^{-1}]^H[(CC^H)^{-1}]^HCC^HB^H \\
&= B[(B^HB)^{-1}]^H[(CC^H)^{-1}]^HCC^HB^H \\
&= B[(B^HB)^H]^{-1}[(CC^H)^H]^{-1}CC^HB^H \\
&= B(B^HB)^{-1}(CC^H)^{-1}CC^HB^H \\
&= B(B^HB)^{-1}B^H \\
&= B(CC^H)(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H = AX \\
(XA)^H &= A^HX^H = C^HB^HB[(B^HB)^{-1}]^H[(CC^H)^{-1}]^HC \\
&= C^H(CC^H)^{-1}C = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}(B^HB)C = XA
\end{aligned}$$

于是 X 与 A 的 Penrose 方程组相容，所以 X 是解。 □

奇异值分解导出的广义逆

Theorem 2.18. 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$，则有：

$$A^+ = Q\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^H$$

其中 P, Q, Λ 为 A 的奇异值分解中相关矩阵。

Proof. 将之代入到 A 的 Penrose 方程组中可得：

$$\begin{aligned} AQ\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^H A &= P\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q^H Q\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^H P\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q^H \\ &= P\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q^H = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^H AQ\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^H &= Q\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^H P\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q^H Q\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^H \\ &= Q\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^H \end{aligned}$$

$$AQ\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^H = Q\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^H A = I$$

因为 I 是 Hermitian 矩阵，于是 $Q\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^H$ 与 A 的 Penrose 方程组相容，所以它是解。 □

Moore-Penrose 广义逆的性质

Property 2.5.2. 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$，则 A 的 *Moore-Penrose* 广义逆 A^+ 具有如下性质：

1. A^+ 是唯一的；
2. $(A^+)^+ = A$；
3. $(A^+)^H = (A^H)^+$；
4. $\mathrm{rank}(A^+) = \mathrm{rank}(A)$；
5. 若 A 是一个 *Hermitian* 矩阵，则：

   $$A^+ = Q\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q^H$$

   其中 Λ 为 A 的非零特征值构成的对角矩阵，Q 是一个正交矩阵；
6. 若 α 是一个非零向量，则 $\alpha^+ = \frac{\alpha^H}{||\alpha||^2}$；

7. $I - A^+A \geqslant \mathbf{0}$；

8. $(A^HA)^+ = A^+(A^H)^+$；

9. $A^+ = (A^HA)^+A^H = A^H(AA^H)^+$。

Proof. (1) 设 X_1, X_2 都是 A 的 Penrose 方程组的解，则：

$$\begin{aligned}
X_1 &= X_1AX_1 = X_1(AX_2A)X_1 = X_1(AX_2)(AX_1) \\
&= X_1(AX_2)^H(AX_1)^H = X_1(AX_1AX_2)^H = X_1X_2^H(AX_1A)^H \\
&= X_1X_2^HA^H = X_1(AX_2)^H = X_1AX_2 = X_1(AX_2A)X_2 \\
&= (X_1A)(X_2A)X_2 = (X_1A)^H(X_2A)^HX_2 = (X_2AX_1A)^HX_2 \\
&= (X_2A)^HX_2 = X_2AX_2 = X_2
\end{aligned}$$

所以 Penrose 方程组的解是唯一的。

(2) 由 Penrose 方程的对称性可直接得到。

(3) 由 A^+ 的奇异值分解表示（定理 2.18）可得：

$$\begin{aligned}
(A^+)^H &= \left[Q\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}P^H\right]^H = P\begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^H Q^H \\
&= P\begin{pmatrix} (\Lambda^{-1})^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^H = P\begin{pmatrix} (\Lambda^H)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^H
\end{aligned}$$

将其代入 A^H 的 Penrose 方程组可得：

$$\begin{aligned}
A^H(A^+)^HA^H &= Q\begin{pmatrix} \Lambda^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}P^HP\begin{pmatrix} (\Lambda^H)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^HQ\begin{pmatrix} \Lambda^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}P^H \\
&= Q\begin{pmatrix} \Lambda^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}P^H = A^H \\
(A^+)^HA^H(A^+)^H &= P\begin{pmatrix} (\Lambda^H)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^H\begin{pmatrix} \Lambda^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}P^HP\begin{pmatrix} (\Lambda^H)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^H \\
&= P\begin{pmatrix} (\Lambda^H)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^H = (A^+)^H \\
[A^H(A^+)^H]^H &= [(A^+)^HA^H]^H = A^+A = I
\end{aligned}$$

因为 I 是 Hermitian 矩阵，于是 $(A^+)^H$ 与 A^H 的 Penrose 方程组相容，所以 $(A^+)^H = (A^H)^+$。

(4) 由 A^+ 的奇异值分解表示（定理 2.18）显然可得 $\operatorname{rank}(A^+) = \operatorname{rank}(\Lambda)$，而 $\operatorname{rank}(\Lambda) = \operatorname{rank}(A)$，所以有 $\operatorname{rank}(A^+) = \operatorname{rank}(A)$。

(5) 因为 A 是一个 Hermitian 矩阵，由性质 2.6.2(3) 可知存在正交矩阵 Q 使得：

$$A = Q\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^H$$

将 $Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H$ 代入 A 的 Penrose 方程组可得：

$$\begin{aligned}AQ\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^HA &= Q\begin{pmatrix}\Lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^HQ\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^HQ\begin{pmatrix}\Lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H\\ &= Q\begin{pmatrix}\Lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H = A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^HAQ\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H &= Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^HQ\begin{pmatrix}\Lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^HQ\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H\\ &= Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H\end{aligned}$$

$$\left[AQ\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H\right]^H = \left[Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^HA\right]^H = Q\begin{pmatrix}I & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H$$

因为 $Q\begin{pmatrix}I & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H$ 是 Hermitian 矩阵，于是 $Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H$ 与 A 的 Penrose 方程组相容，所以 $Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H = A^+$。

(6) 将 $\frac{\alpha^H}{||\alpha||^2}$ 代入 α 的 Penrose 方程组可得：

$$\begin{gathered}\alpha\frac{\alpha^H}{||\alpha||^2}\alpha = \alpha\\ \frac{\alpha^H}{||\alpha||^2}\alpha\frac{\alpha^H}{||\alpha||^2} = \frac{\alpha^H}{||\alpha||^2}\\ \left(\alpha\frac{\alpha^H}{||\alpha||^2}\right)^H = \left(\frac{\alpha^H}{||\alpha||^2}\alpha\right)^H = 1\end{gathered}$$

显然 $\dfrac{\alpha^H}{||\alpha||^2} = \alpha^+$。

(7) 由 A^+ 的奇异值分解表示（定理 2.18）可得：

$$\begin{aligned}I - A^+A = I - Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}P^HP\begin{pmatrix}\Lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H &= I - Q\begin{pmatrix}I & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H\\ = I - \begin{pmatrix}I & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & I\end{pmatrix} &\cong \begin{pmatrix}I & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由定理 2.43(3) 的第三条可知 $I - A^+A \geqslant \mathbf{0}$。

(8) 由 (3) 可得：

$$\begin{aligned}A^+(A^H)^+ = A^+(A^+)^H &= Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}P^HP\begin{pmatrix}(\Lambda^H)^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^HQ^H\\ &= Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1}(\Lambda^H)^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H = \begin{pmatrix}\Lambda^{-1}(\Lambda^H)^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由 A 的奇异值分解（定理 2.47）可得：

$$
\begin{aligned}
A^HA=&\left[P\begin{pmatrix}\Lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H\right]^H P\begin{pmatrix}\Lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H\\
=&Q\begin{pmatrix}\Lambda^H & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}P^HP\begin{pmatrix}\Lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H=\begin{pmatrix}\Lambda^H\Lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

将 $A^+(A^H)^+$ 代入 A^HA 的 Penrose 方程组中即可验证得到 $(A^HA)^+=A^+(A^H)^+$。

(9) 由 (8)、(3) 和 A^+ 的奇异值分解表示（定理 2.18）可得：

$$
\begin{aligned}
(A^HA)^+A^H&=A^+(A^H)^+A^H=A^+(A^+)^HA^H\\
&=Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}P^HP\begin{pmatrix}(\Lambda^H)^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^HQ\begin{pmatrix}\Lambda^H & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}P^H\\
&=Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}P^H=A^+\\
A^H(AA^H)^+&=A^H(A^H)^+A^+=A^H(A^+)^HA^+\\
&=Q\begin{pmatrix}\Lambda^H & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}P^HP\begin{pmatrix}(\Lambda^H)^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^HQ\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}P^H\\
&=Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}P^H=A^+
\end{aligned}
$$

□

2.5.3 线性方程组的解

Theorem 2.19. 数域 K 上 n 元非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有解的充分必要条件为对 A 的任一广义逆 A^- 都有：

$$\beta=AA^-\beta$$

Proof. **(1) 必要性**：若 $Ax=\beta$ 有解，取其一个解 α，于是对 A 的任一广义逆有：

$$\beta=A\alpha=AA^-A\alpha=AA^-\beta$$

(2) 充分性：若此时对 A 的任一广义逆 A^- 有 $\beta=AA^-\beta$，则方程组可化为：

$$Ax=AA^-\beta$$

容易看出 $A^-\beta$ 就是 $Ax=\beta$ 的一个解。 □

齐次方程组解的结构

Theorem 2.20. 若数域 K 上 n 元齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 有解，则它的通解为：

$$x=(I_n-A^-A)y$$

其中 A^- 是 A 的任意一个给定的广义逆，y 取遍 K^n 中的列向量。

Proof. 任取 $y \in K^n$，有：

$$A(I_n - A^- A)y = Ay - AA^- Ay = Ay - Ay = \mathbf{0}$$

所以对任意的 $y \in K^n$，$(I_n - A^- A)y$ 都是 $Ax = \mathbf{0}$ 的解。

若 η 是 $Ax = \mathbf{0}$ 的一个解，则：

$$(I_n - A^- A)\eta = \eta - A^- A\eta = \eta - A^- \mathbf{0} = \eta$$

所以 $Ax = \mathbf{0}$ 的任意一个解 x 都可以表示为 $(I_n - A^- A)x$ 的形式。

综上，$Ax = \mathbf{0}$ 的通解为 $x = (I_n - A^- A)y$。 □

非齐次方程组解的结构

Theorem 2.21 (结构 1)**.** *若数域 K 上 n 元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 有解，则它的通解为：*

$$x = A^- \beta + (I_n - A^- A)y$$

其中 A^- 是 A 的任意一个给定的广义逆，y 取遍 K^n 中的列向量。

Proof. 由定理 2.19的充分性可知对于给定的这一 A^-，$A^- \beta$ 为 $Ax = \beta$ 的一个特解，而由定理 2.20可知齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的通解为 $(I_n - A^- A)y$，由性质 2.3.2(3) 可得 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = A^- \beta + (I_n - A^- A)y$。 □

Theorem 2.22 (结构 2)**.** *若数域 K 上 n 元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 有解，则它的通解为：*

$$x = A^- \beta$$

A^- 取遍 A 的所有广义逆。

Proof. 由定理 2.19的充分性可知对于任意的 A^-，$A^- \beta$ 都是 $Ax = \beta$ 的解。

对于 $Ax = \beta$ 的任意一个解 y，由定理 2.21可知存在 A 的一个广义逆 G 和 K^n 上的一个列向量 z，使得：

$$y = G\beta + (I_n - GA)z$$

因为 $\beta \neq \mathbf{0}$，所以 $\beta^H \beta \neq 0$，于是存在数域 K 上的矩阵 $B = z(\beta^H \beta)^{-1}\beta^H$ 使得 $B\beta = z$，于是：

$$y = G\beta + (I_n - GA)B\beta = [G + (I_n - GA)B]\beta$$

因为：

$$\begin{aligned} A[G + (I_n - GA)B]A &= AGA + A(I_n - GA)BA \\ &= A + ABA - AGABA \\ &= A + ABA - ABA = A \end{aligned}$$

所以 $G + (I_n - GA)B$ 是 A 的一个广义逆，即 $Ax = \beta$ 的任一解可以表示为 $A^- \beta$。 □

Theorem 2.23. 在数域 K 上相容线性方程组 $Ax=\beta$ 的解集中，$x_0=A^+\beta$ 为长度最小者。

Proof. 由定理 2.21可知，$Ax=\beta$ 的通解可以表示为：

$$x=A^+\beta+(I-A^+A)y$$

于是：

$$\begin{aligned}||x|| &= [A^+\beta+(I-A^+A)y]^H[A^+\beta+(I-A^+A)y]\\ &= ||x_0||+\beta^H(A^+)^H(I-A^+A)y\\ &\quad +y^H(I-A^+A)^HA^+\beta+y^H(I-A^+A)^H(I-A^+A)y\\ &= ||x_0||+2\beta^H(A^+)^H(I-A^+A)y+||(I-A^+A)y||\end{aligned}$$

由性质 2.5.2(9) 可得：

$$\begin{aligned}(A^+)^H(I-A^+A) &= (A^+)^H-(A^+)^HA^+A=(A^H)^+-(A^H)^+A^+A\\ &= (A^H)^+-[A(A^H)]^+A=\mathbf{0}\end{aligned}$$

于是有 $2\beta^H(A^+)^H(I-A^+A)y=0$。因为 $||(I-A^+A)y||\geqslant 0$，等号成立当且仅当 $(I-A^+A)y=\mathbf{0}$，所以 $x=A^+\beta=x_0$ 时长度最小。 □

2.6 相似的应用

2.6.1 特征值与特征向量

Definition 2.20. $A\in M_n(K)$。如果 K^n 中存在非零列向量 α，使得：

$$A\alpha=\lambda\alpha,\ \lambda\in K$$

则称 λ 是 A 的一个特征值 *(eigenvalue)*，α 是 A 属于特征值 λ 的一个特征向量 *(eigenvector)*。

求解特征值与特征向量

Definition 2.21. $A\in M_n(K)$，称 $|\lambda I-A|$ 为 A 的特征多项式 *(characteristic polynomial)*。

Theorem 2.24. $A\in M_n(K)$，则：

1. λ 是 A 的一个特征值当且仅当 λ 是 A 的特征多项式在数域 K 中的一个根；
2. α 是 A 属于特征值 λ 的一个特征向量当且仅当 α 是齐次线性方程组 $(\lambda I-A)x=\mathbf{0}$ 的一个非零解。

Proof. 显然：

$$
\begin{aligned}
& \lambda\text{是}A\text{的一个特征值，}\alpha\text{是}A\text{属于}\lambda\text{的一个特征向量} \\
\Longleftrightarrow\ & A\alpha=\lambda\alpha,\ \alpha\neq\mathbf{0},\ \lambda\in K \\
\Longleftrightarrow\ & (\lambda I-A)\alpha=\mathbf{0},\ a\neq\mathbf{0},\ \lambda\in K \\
\Longleftrightarrow\ & \alpha\text{是齐次线性方程组}(\lambda I-A)x=\mathbf{0}\text{的一个非零解，}\lambda\in K \\
\Longleftrightarrow\ & |\lambda I-A|=0,\ \alpha\text{是齐次线性方程组}(\lambda I-A)x=\mathbf{0}\text{的一个非零解，}\lambda\in K \\
\Longleftrightarrow\ & \lambda\text{是多项式}|\lambda I-A|\text{在}K\text{中的一个根，} \\
& \alpha\text{是齐次线性方程组}(\lambda I-A)x=\mathbf{0}\text{的一个非零解，}\lambda\in K
\end{aligned}
$$

□

特征向量的性质

Property 2.6.1. $A\in M_n(K)$，其特征向量具有如下性质：

1. 设 λ 是 A 的一个特征值，则 A 属于 λ 的所有特征向量构成 K^n 的一个子空间。因此，把齐次线性方程组 $(\lambda I-A)x=\mathbf{0}$ 的解空间称为 A 属于 λ 的特征子空间 *(eigenspace)*，记为 W_λ；

2. A 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

Proof. (1) 任取 $k_1,k_2\in K$ 和 A 属于特征值 λ 的两个特征向量 α,β，则

$$A(k_1\alpha+k_2\beta)=k_1A\alpha+k_2A\beta=k_1\lambda\alpha+k_2\lambda\beta=\lambda(k_1\alpha+k_2\beta)$$

于是 $k_1\alpha+k_2\beta$ 也是 A 属于特征值 λ 的特征向量。由定理 1.7可知 A 属于 λ 的所有特征向量构成 K^n 的一个子空间。

(2) 我们来证明：设 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ 是 $A\in M_n(K)$ 的不同的特征值，$a_{j1},a_{j2},\dots,a_{jr_j}$ 是 A 属于 λ_j 的线性无关的特征向量，$j=1,2,\dots,m$，则向量组：

$$a_{11},a_{12},\dots,a_{1r_1},a_{21},a_{22},\dots,a_{2r_2},a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mr_m}$$

线性无关。

1. 证明对 $n=2$ 成立：对于 λ_1 和 λ_2 的线性无关的特征向量 $a_{11},a_{12},\dots,a_{1r_1}$ 和 $a_{21},a_{22},\dots,a_{2r_2}$，设：

$$k_1a_{11}+k_2a_{12}+\cdots+k_{r_1}a_{1r_1}+l_1a_{21}+l_2a_{22}+\cdots+l_{r_2}a_{2r_2}=\mathbf{0}$$

两边同乘 A 可得：

$$k_1Aa_{11}+k_2Aa_{12}+\cdots+k_{r_1}Aa_{1r_1}+l_1Aa_{21}+l_2Aa_{22}+\cdots+l_{r_2}Aa_{2r_2}=\mathbf{0}$$
$$k_1\lambda_1a_{11}+k_2\lambda_1a_{12}+\cdots+k_{r_1}\lambda_1a_{1r_1}+l_1\lambda_2a_{21}+l_2\lambda_2a_{22}+\cdots+l_{r_2}\lambda_2a_{2r_2}=\mathbf{0}$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 λ_1, λ_2 不全为 0。设 $\lambda_2 \neq 0$，在上上上个式子两端乘以 λ_2（若 $\lambda_2 = 0$，则同乘 λ_1）得：

$$k_1\lambda_2 a_{11} + k_2\lambda_2 a_{12} + \cdots + k_{r_1}\lambda_2 a_{1r_1} + l_1\lambda_2 a_{21} + l_2\lambda_2 a_{22} + \cdots + l_{r_2}\lambda_2 a_{2r_2} = \mathbf{0}$$

于是：

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_2)a_{11} + k_2(\lambda_1 - \lambda_2)a_{12} + \cdots + k_{r_1}(\lambda_1 - \lambda_2)a_{1r_1} = \mathbf{0}$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以：

$$k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + \cdots + k_{r_1} a_{1r_1} = \mathbf{0}$$

因为 $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r_1}$ 线性无关，所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{r_1} = 0$，从而：

$$l_1 a_{21} + l_2 a_{22} + \cdots + l_{r_2} a_{2r_2} = \mathbf{0}$$

因为 $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2r_2}$ 线性无关，所以 $l_1 = l_2 = \cdots = l_{r_2} = 0$。

综上，向量组 $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r_1}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2r_2}$ 线性无关。

2. 归纳假设：假设对 n 个不同的特征值都有上述结论（即 n 个不同特征值的线性无关的特征向量构成的向量组线性无关），下面来证明对 $n+1$ 个不同的特征值也成立。

设：

$$k_{11}a_{11} + k_{12}a_{12} + \cdots k_{1r_1}a_{1r_1} + \cdots + k_{nr_n}a_{nr_n} + l_1 a_{(n+1)1} + l_2 a_{(n+1)2} + \cdots + l_{r_{n+1}} a_{(n+1)r_{n+1}} = \mathbf{0}$$

两边同乘 A 可得：

$$\begin{aligned}
&k_{11}Aa_{11} + k_{12}Aa_{12} + \cdots k_{1r_1}Aa_{1r_1} + \cdots + k_{nr_n}Aa_{nr_n} \\
&+l_1 Aa_{(n+1)1} + l_2 Aa_{(n+1)2} + \cdots + l_{r_{n+1}} Aa_{(n+1)r_{n+1}} = \mathbf{0} \\
&k_{11}\lambda_1 a_{11} + k_{12}\lambda_1 a_{12} + \cdots k_{1r_1}\lambda_1 a_{1r_1} + \cdots + k_{nr_n}\lambda_n a_{nr_n} \\
&+l_1\lambda_{n+1} a_{(n+1)1} + l_2\lambda_{n+1} a_{(n+1)2} + \cdots + l_{r_{n+1}}\lambda_{n+1} a_{(n+1)r_{n+1}} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

2.1.$\lambda_{n+1} \neq 0$：若 $\lambda_{n+1} \neq 0$，则在上上上式两边同乘 λ_{n+1} 可得：

$$\begin{aligned}
&k_{11}\lambda_{n+1} a_{11} + k_{12}\lambda_{n+1} a_{12} + \cdots k_{1r_1}\lambda_{n+1} a_{1r_1} + \cdots + k_{nr_n}\lambda_{n+1} a_{nr_n} \\
&+l_1\lambda_{n+1} a_{(n+1)1} + l_2\lambda_{n+1} a_{(n+1)2} + \cdots + l_{r_{n+1}}\lambda_{n+1} a_{(n+1)r_{n+1}} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

于是有：

$$k_{11}(\lambda_{n+1} - \lambda_1)a_{11} + k_{12}(\lambda_{n+1} - \lambda_1)a_{12} + \cdots k_{1r_1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1)a_{1r_1} + \cdots + k_{nr_n}(\lambda_{n+1} - \lambda_n)a_{nr_n} = \mathbf{0}$$

由归纳假定 $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r_1}, \ldots, a_{nr_n}$ 线性无关，所以

$$k_{11}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) = k_{12}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) = \cdots = k_{1r_1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) = \cdots = k_{nr_n}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$$

因为 λ_i，$i = 1, 2, \ldots, n$ 之间互不相同，所以 $\lambda_{n+1} - \lambda_1, \lambda_{n+1} - \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1} - \lambda_n$ 不为 0，于是 $k_{11} = k_{12} = \cdots = k_{1r_1} = \cdots = k_{nr_n} = 0$，所以：

$$l_1 a_{(n+1)1} + l_2 a_{(n+1)2} + \cdots + l_{r_{n+1}} a_{(n+1)r_{n+1}} = \mathbf{0}$$

因为 $a_{(n+1)1}, a_{(n+1)2}, \ldots, a_{(n+1)r_{n+1}}$ 线性无关，所以有 $l_1 = l_2 = \cdots = l_{r_{n+1}} = 0$。

综上 $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r_1}, \ldots, a_{nr_n}, a_{(n+1)1}, a_{(n+1)2}, \ldots, a_{(n+1)r_{n+1}}$ 线性无关。

2.2.$\lambda_{n+1} = 0$：若 $\lambda_{n+1} = 0$，则此时有：

$$
\begin{aligned}
& k_{11}\lambda_1 a_{11} + k_{12}\lambda_1 a_{12} + \cdots k_{1r_1}\lambda_1 a_{1r_1} + \cdots + k_{nr_n}\lambda_n a_{nr_n} \\
& + l_1\lambda_{n+1} a_{(n+1)1} + l_2\lambda_{n+1} a_{(n+1)2} + \cdots + l_{r_{n+1}}\lambda_{n+1} a_{(n+1)r_{n+1}} \\
= {} & k_{11}\lambda_1 a_{11} + k_{12}\lambda_1 a_{12} + \cdots k_{1r_1}\lambda_1 a_{1r_1} + \cdots + k_{nr_n}\lambda_n a_{nr_n} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

由归纳假定 $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r_1}, \ldots, a_{nr_n}$ 线性无关，所以 $k_{11}\lambda_1 = k_{12}\lambda_1 = \cdots = k_{1r_1}\lambda_1 = \cdots = k_{nr_n}\lambda_n = 0$。因为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 都不是 0（$\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n+1$ 互不相同，已经有 $\lambda_{n+1} = 0$ 了），所以 $k_{11} = k_{12} = \cdots = k_{1r_1} = \cdots = k_{nr_n} = 0$，于是有：

$$
l_1 a_{(n+1)1} + l_2 a_{(n+1)2} + \cdots + l_{r_{n+1}} a_{(n+1)r_{n+1}} = \mathbf{0}
$$

因为 $a_{(n+1)1}, a_{(n+1)2}, \ldots, a_{(n+1)r_{n+1}}$ 线性无关，所以有 $l_1 = l_2 = \cdots = l_{r_{n+1}} = 0$。

综上，$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r_1}, \ldots, a_{nr_n}, a_{(n+1)1}, a_{(n+1)2}, \ldots, a_{(n+1)r_{n+1}}$ 线性无关。

假设存在属于不同特征值的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关，则有：

$$
k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}
$$

其中 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 不全为 0。注意到 $\alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ 可由其对应特征值的特征子空间中的一组基线性表出，于是有：

$$
\alpha_i = \sum_{n=1}^{r_i} l_n \beta_{in}
$$

其中 $\beta_{in},\ n = 1, 2, \ldots, r_i$ 为 α_i 对应特征值的特征子空间的一组基，所以：

$$
\sum_{i=1}^{m} k_i \sum_{n=1}^{r_i} l_n \beta_{in} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{r_i} k_i l_n \beta_{in} = \mathbf{0}
$$

而 $\beta_{in},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ n = 1, 2, \ldots, r_i$ 是线性无关的，所以：

$$
k_i l_n = 0,\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, m,\ n = 1, 2, \ldots, r_i
$$

因为 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 不全为 0，所以存在一组 l_n 全为 0，于是 α_i 中存在零向量，而特征向量不是零向量，矛盾。 □

Theorem 2.25. 相似的矩阵有相同的特征多项式，进而有相同的特征值（包括重数相同）。

Proof. 设 $A, B \in M_n(K)$ 且 A 与 B 相似，于是存在可逆矩阵 $P \in M_n(K)$ 使得 $P^{-1}AP = B$，就有：

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - B| &= |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}\lambda I P - P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}|\,|\lambda I - A|\,|P| = |\lambda I - A|
\end{aligned}
$$

□

几何重数与代数重数

Definition 2.22. $A \in M_n(K)$，λ 是 A 的一个特征值。把 A 属于 λ 的特征子空间的维数叫作 λ 的几何重数 *(geometric multiplicity)*，把 λ 作为 A 的特征多项式的根的重数叫作 λ 的代数重数 *(algebraic multiplicity)*。

Theorem 2.26. $A \in M_n(K)$，λ_1 是 A 的一个特征值，则 λ_1 的几何重数不超过它的代数重数。

Proof. 设 A 属于特征值 λ_1 的特征子空间 W_1 的维数为 r。在 W_1 中取一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$，把它扩充为 K^n 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-r}$。令：

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-r})$$

则 P 是数域 K 上的 n 阶可逆矩阵，并且有：

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1}(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_r, A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_{n-r}) \\
&= P^{-1}(\lambda_1\alpha_1, \lambda_1\alpha_2, \dots, \lambda_1\alpha_r, A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_{n-r}) \\
&= (\lambda_1\varepsilon_1, \lambda_1\varepsilon_2, \dots, \lambda_1\varepsilon_r, P^{-1}A\beta_1, P^{-1}A\beta_2, \dots, P^{-1}A\beta_{n-r}) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 I_r & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

由定理 2.25可得：

$$\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda I_r - \lambda_1 I_r & -B \\ \mathbf{0} & \lambda I_{n-r} - C \end{vmatrix} \\
&= |\lambda I_r - \lambda_1 I_r|\,|\lambda I_{n-r} - C| \\
&= (\lambda - \lambda_1)^r |\lambda I_{n-r} - C|
\end{aligned}$$

即 λ_1 的几何重数小于或等于 r，也即 λ_1 的几何重数小于或等于它的代数重数。 □

2.6.2 矩阵的对角化

Definition 2.23. 如果 n 阶矩阵 A 能够相似于一个对角矩阵,那么称 A 可对角化 *(diagonalizable)*。

研究矩阵是否可对角化是为了计算矩阵的幂，因为对角矩阵的幂是很好计算的。

Theorem 2.27. $A \in M_n(K)$ 可对角化的充分必要条件为

1. A 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$；
2. A 的属于不同特征值的特征子空间的维数之和等于 n；
3. A 的特征多项式的全部复根都属于 K，且 A 的每个特征值的几何重数等于它的代数重数；

4. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ 是 A 全部的不同的特征值，则：

$$K^n = W_{\lambda_1}\oplus W_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_m}$$

此时令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，则：

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$$

其中 λ_i 是 α_i 所属的特征值，$i=1,2,\ldots,n$。上述对角矩阵称为 A 的**相似标准形**，除了主对角线上元素的排列次序外，A 的相似标准形是唯一的；

Proof. (1) 显然：

$$\begin{aligned}
&A\text{与对角矩阵}D=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}\text{相似, 其中}\lambda_i\in K,\ i=1,2,\ldots,n\\
\Longleftrightarrow\ &\text{如果存在可逆矩阵 }P\in M_n(K)\text{，使得}P^{-1}AP=D\\
&\text{即}AP=PD\\
&\text{即}A(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)D\\
&\text{即}(A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\ldots,\lambda_n\alpha_n)\\
\Longleftrightarrow\ &K^n\text{中有 }n\text{ 个线性无关的列向量}\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\text{使得}A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i,\ i=1,2,\ldots,n
\end{aligned}$$ □

(2) **充分性**：由性质 2.6.1(2) 和 (1) 的充分性可直接得出。

必要性：设 A 的所有不同的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$，它们的几何重数分别为 $r_1,r_2,\ldots,r_m$。若此时 A 的属于不同特征值的特征子空间的维数之和不等于 n，由定理 2.26可知此时 $r_1+r_2+\cdots+r_m<n$，那么 A 没有 n 个线性无关的特征向量，由 (1) 的必要性可得 A 不可以对角化。

(3) **充分性**：由 (2) 的充分性可直接得到。

必要性：因为 A 可对角化，由可对角化的定义可知 A 相似于：

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\ldots,\lambda_m)\in M_n(K)$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ 是 A 的全部不同的特征值，每个特征值重复的次数为对应特征子空间的维数，λ_i 对应特征子空间的维数记为 r_i，$i=1,2,\ldots,m$。因为相似的矩阵具有相同的特征多项式，所以：

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{r_m}$$

于是 A 的特征多项式的根为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$。因为 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\ldots,\lambda_m)\in M_n(K)$，所以 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\in K$，于是 A 的特征多项式的全部根都属于 K 且每一个特征值的代数重数等于它的几何重数。

(4) 由 (2)、性质 2.6.1(2)、性质 1.1.6和定理 1.12(5) 可得：

$$
\begin{aligned}
A\text{可对角化} &\iff \sum_{i=1}^{m} \dim(W_{\lambda_i}) = n \\
&\iff W_{\lambda_i}, i = 1, 2, \ldots, m\text{的基合起来是 } n \text{ 个线性无关的向量} \\
&\iff W_{\lambda_i}, i = 1, 2, \ldots, m\text{的基合起来是 } K^n \text{ 的一组基} \\
&\iff K^n = W_{\lambda_1} \oplus W_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_m}
\end{aligned}
$$

2.6.3 Hermitian 矩阵的对角化

Definition 2.24. 若对于 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$，存在一个 n 阶正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ = B$，则称 A **正交相似于** B。

Theorem 2.28. 正交相似是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的一个等价关系。

Theorem 2.29. $A \in M_n(\mathbb{C})$。若 A 正交相似与一个对角矩阵 D，则 A 一定是 *Hermitian* 矩阵。

Proof. 因为 A 正交相似于 D，所以存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = D$，即 $A = QDQ^{-1}$，于是有：

$$
A^H = (QDQ^{-1})^H = (Q^{-1})^H D^H Q^H = (Q^H)^H DQ^{-1} = QDQ^{-1} = A
$$

所以 A 是一个 Hermitian 矩阵。 □

Corollary 2.2. 正交相似一定相似，相似不一定正交相似。

Proof. 设非 Hermitian 矩阵 A 相似于一个对角矩阵 D，若 A 正交相似于 D，则 A 得是一个 Hermitian 矩阵，而 A 不是一个 Hermitian 矩阵。 □

Property 2.6.2. 设 *Hermitian* 矩阵 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$，则：

1. A 的特征多项式的每一个根都是实数，从而都是 A 的特征值；
2. A 属于不同特征值的特征向量是正交的；
3. A 一定正交相似于由它的特征值构成的对角矩阵；
4. A 与 B 正交相似的充分必要条件为 A 与 B 相似。

Proof. (1) 设 λ 是 A 的特征多项式的任意一个根，将 A 看作是复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵，取 A 属于特征值 λ 的一个特征向量 α，考虑 $\mathbb{C}^n$ 中的内积，有：

$$
\begin{aligned}
(A\alpha, \alpha) &= (\lambda\alpha, \alpha) = \lambda(\alpha, \alpha) \\
(\alpha, A\alpha) &= (\alpha, \lambda\alpha) = \overline{\lambda}(\alpha, \alpha) \\
(A\alpha, \alpha) = (A\alpha)^H \alpha &= \alpha^H A^H \alpha = \alpha^H A\alpha = (\alpha, A\alpha)
\end{aligned}
$$

所以 $\lambda(\alpha,\alpha)=\overline{\lambda}(\alpha,\alpha)$。因为 α 是特征向量，所以 $\alpha\neq\mathbf{0}$，于是 $\lambda=\overline{\lambda}$，因此 λ 是一个实数。由 λ 的任意性，结论成立。

(2) 设 λ_1,λ_2 是 A 的不同的特征值（由 (1) 得它们都是实数），α_1,α_2 分别是 A 属于 λ_1,λ_2 的一个特征向量，考虑 $\mathbb{C}^n$ 上的标准内积：

$$\begin{aligned}\lambda_1(\alpha_1,\alpha_2)&=(\lambda_1\alpha_1,\alpha_2)=(A\alpha_1,\alpha_2)=A(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,A^H\alpha_2)\\&=(\alpha_1,A\alpha_2)=(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=\overline{\lambda_2}(\alpha_1,\alpha_2)=\lambda_2(\alpha_1,\alpha_2)\end{aligned}$$

于是有 $(\lambda_1-\lambda_2)(\alpha_1,\alpha_2)=0$。因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $(\alpha_1,\alpha_2)=0$。

(3) 对 n 作数学归纳法。

当 $n=1$ 时，$(1)^{-1}A(1)=A$，结论成立。

假设对于 $n-1$ 阶的实对称矩阵都成立，考虑 n 阶实对称矩阵 A。

由 (2) 可知 A 必有特征值，取 A 的一个特征值 λ_1 和 A 属于 λ_1 的一个特征向量 η_1，满足 $||\eta_1||=1$。把 η_1 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基并进行 Schimidt 正交化和单位化，可得到 $\mathbb{C}^n$ 的一个标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$。令：

$$Q_1=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$$

显然 Q_1 是一个正交矩阵，于是有 $Q_1^{-1}Q_1=(Q_1^{-1}\eta_1,Q_1^{-1}\eta_2,\ldots,Q_1^{-1}\eta_n)=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$。注意到：

$$Q_1^{-1}AQ_1=Q_1^{-1}(A\eta_1,A\eta_2,\ldots,A\eta_n)=(Q_1^{-1}\lambda\eta_1,Q_1^{-1}A\eta_2,\ldots,Q_1^{-1}A\eta_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1&\alpha\\\mathbf{0}&B\end{pmatrix}$$

因为 $(Q_1^{-1}AQ_1)^H=Q_1^HA^H(Q_1^{-1})^H=Q_1^{-1}A(Q_1^H)^H=Q_1^{-1}AQ_1$，所以 $Q_1^{-1}AQ_1$ 是一个对称阵，于是 $\alpha=\mathbf{0}$，B 是一个 $n-1$ 阶 Hermitian 矩阵。由归纳假设，存在 $n-1$ 阶正交矩阵 Q_2 使得 $Q_2^{-1}BQ_2=\mathrm{diag}\{\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n\}$。令：

$$Q=Q_1\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&Q_2\end{pmatrix}$$

则：

$$Q^HQ=\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&Q_2^H\end{pmatrix}Q_1^HQ_1\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&Q_2\end{pmatrix}=I$$

即 Q 是一个正交矩阵。同时：

$$\begin{aligned}Q^{-1}AQ&=\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&Q_2^H\end{pmatrix}Q_1^HAQ_1\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&Q_2^H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&Q_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&Q_2^HBQ_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathrm{diag}\{\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n\}\end{pmatrix}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}\end{aligned}$$

所以 A 正交相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$。由 $AQ=Q\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ 可以得到 $\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的特征值。

综上，结论成立。

(4) **必要性**：正交相似也是相似。

充分性：因为 A 与 B 相似，由定理 2.25可知 A 与 B 有相同的特征值（包括重数）$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$。由 (3) 可得 A 与 B 都正交相似于 $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$（考虑 λ_i 的顺序的话只需要更改 Q 中列向量的顺序）。因为正交相似具有对称性与传递性，所以 A 正交相似于 B。 □

求解正交矩阵 Q

Theorem 2.30. *对于 Hermitian 矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$，求正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵的步骤如下：*

1. *求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$；*

2. *对于每一个特征值 λ_i，求得其特征子空间的一组基 $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{r_i i}$，并对它们进行 Schmidt 正交化与单位化，得到 $\eta_{1i}, \eta_{2i}, \ldots, \eta_{r_i i}$；*

3. *令 $Q = (\eta_{11}, \eta_{21}, \ldots, \eta_{r_1 1}, \ldots, \eta_{r_m m})$，$Q$ 即为所求。*

Proof. 由可知 η_{ij}，$i = 1, 2, \ldots, r_j$，$j = 1, 2, \ldots, m$ 是 A 属于 λ_j 的特征值。根据性质 2.6.2(2) 可知：

Schimidt 正交化链接

$$
\begin{aligned}
Q^{-1}AQ &= Q^H(A\eta_{11}, A\eta_{21}, \ldots, A\eta_{r_1 1}, \ldots, A\eta_{r_m m}) \\
&= \begin{pmatrix} \eta_{11}^H \\ \eta_{21}^H \\ \vdots \\ \eta_{r_1 1}^H \\ \vdots \\ \eta_{r_m m}^H \end{pmatrix} (\lambda_1\eta_{11}, \lambda_1\eta_{21}, \ldots, \lambda_1\eta_{r_1 1}, \ldots, \lambda_m\eta_{r_m m}) \\
&= \operatorname{diag}\{\lambda_1\eta_{11}^H\eta_{11}, \lambda_1\eta_{21}^H\eta_{21}, \ldots, \lambda_1\eta_{r_1 1}^H\eta_{r_1 1}, \ldots, \lambda_m\eta_{r_m m}^H\eta_{r_m m}\} \\
&= \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \ldots, \lambda_m\}
\end{aligned}
$$

□

实对称矩阵特征值的极值性质

Theorem 2.31. *设 $A \in M_n(\mathbb{R})$，A 的特征值从大到小记作 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ 为对应的标准正交化特征向量，则：*

$$
\max_{x \neq \mathbf{0}} \frac{x^T A x}{x^T x} = \lambda_1 = \varphi_1^T A \varphi_1 \quad \min_{x \neq \mathbf{0}} \frac{x^T A x}{x^T x} = \lambda_n = \varphi_n^T A \varphi_n
$$

Proof. 由性质 2.6.2(3) 可知存在一个正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} = \Lambda$。对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$，因为 Q 为正交矩阵，Q 可逆，所以关于 y 的非齐次线性方程组 $Qy = x$

有唯一解，于是对于这个存在且唯一的 y，有：

$$\frac{x^TAx}{x^Tx}=\frac{y^TQ^TAQy}{y^TQ^TQy}=\frac{y^T\Lambda y}{y^Ty}=\frac{\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iy_i^2}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}\leqslant\lambda_1\frac{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}=\lambda_1$$

$$\frac{x^TAx}{x^Tx}=\frac{y^TQ^TAQy}{y^TQ^TQy}=\frac{y^T\Lambda y}{y^Ty}=\frac{\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iy_i^2}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}\geqslant\lambda_n\frac{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}=\lambda_n$$

当 y 为 $(1,0,0,\ldots,0)^T$ 时第一式取等号，当 y 为 $(0,0,\ldots,0,1)^T$ 时第二式取等号，此时 x 分别为 φ_1 和 φ_n。 □

2.7 合同的应用——二次型

Definition 2.25. 数域 K 上的一个 n 元二次型 *(quadratic form)*是系数在 K 中的 n 个变量的二元齐次多项式，它的一般形式为：

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$，$1\leqslant i,j\leqslant n$。矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

被称为二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 的矩阵，它是一个对称矩阵，主对角元依次是 $x_1^2,x_2^2,\ldots,x_n^2$ 的系数，(i,j) 元是 x_ix_j 系数的一半，其中 $i\neq j$。令：

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$$

则二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 可写作 x^TAx。

Definition 2.26. 令 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，$y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$，可逆矩阵 $C\in M_n(K)$，则关系式 $x=Cy$ 称为变量 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\ldots,y_n$ 的一个非退化线性变换 *(invertible linear transformation)*。如果 C 是一个正交矩阵，则称变量变换 $x=Cy$ 为一个正交变换 *(orthogonal transformation)*。

Definition 2.27. 对于数域 K 上的两个 n 元二次型 x^TAx 与 y^TAy，如果存在一个非退化线性变换 $x=Cy$，把 x^TAx 变成 y^TBy，那么称二次型 x^TAx 与 y^TBy **等价**，记作 $x^TAx\cong y^TBy$。如果二次型 x^TAx 等价于一个只含平方项的二次型，那么称这个只含平方项的二次型是 x^TAx 的一个**标准形**。

Theorem 2.32. 数域 K 上两个 n 元二次型 x^TAx 与 y^TBy 等价当且仅当 n 阶对称矩阵 A 与 B 合同，于是二次型的等价也是一个等价关系。

Proof. **(1) 充分性：** 因为 $A \cong B$，所以存在可逆矩阵 C 使得 $C^TAC = B$。作非退化线性变换 $x = Cy$，可得到 $(Cy)^TA(Cy) = y^TC^TACy = y^TBy$，所以 $x^TAx \cong y^TBy$。

(2) 必要性： 因为 $x^TAx \cong y^TBy$，所以存在非退化线性变换 $x = Cy$，C 是一个可逆矩阵，把 x^TAx 变为 y^TBy，即 $(Cy)^TA(Cy) = y^TC^TACy = y^TBy$，所以 $C^TAC = B$，即 $A \cong B$。

因为合同是一个等价关系，显然可得二次型的等价也是一个等价关系。 □

Theorem 2.33. 数域 K 上任一 n 元二次型都等价于一个只含平方项的二次型。

Proof. 当二次型的矩阵是对角矩阵时该二次型只含平方项，由定理 2.12与定理 2.32可立即得出结论。 □

Theorem 2.34. 设 n 元二次型 x^TAx 的矩阵 A 合同于对角矩阵 $D = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，即存在可逆矩阵 C 使得 $C^TAC = D$。令 $x = Cy$，则可以得到 x^TAx 的一个标准形：

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$$

Proof. 将 $x = Cy$ 代入可得：

$$x^TAx = (Cy)^TA(Cy) = y^TC^TACy = y^TDy = \sum_{i=1}^{n} d_iy_i^2$$ □

Theorem 2.35. 数域 K 上 n 元二次型 x^TAx 的任一标准形中，系数不为 0 的平方项个数等于它的矩阵 A 的秩。

Proof. 设 n 元二次型 x^TAx 经过非退化线性变换 $x = Cy$ 化成标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$，其中 $d_1, d_2, \ldots, d_r$ 都不为 0，则：

$$C^TAC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0\}$$

于是 $\mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0\}$ 是 A 的一个合同标准形。由定理 2.13可得 $\mathrm{rank}(A) = r$。 □

Definition 2.28. 称二次型 x^TAx 的矩阵 A 的秩为二次型 x^TAx 的秩。

2.7.1 二次型的规范形

实二次型的规范形

Definition 2.29. 实数域上的二次型称为**实二次型**。由定理 *2.14*可知 n 元实二次型 x^TAx 的矩阵 A 合同于一个对角矩阵 $\mathrm{diag}\{1, 1, \ldots, 1, -1, -1, \ldots, -1, 0, 0, \ldots, 0\}$，再由定理 *2.32*可知经过一个适当的非退化线性变换可以将 x^TAx 化作：

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - z_{p+2}^2 - z_r^2$$

称此形式为二次型 x^TAx 的**规范形**，其特征为：只含平方项且平方项系数为 $1,-1,0$，系数为 1 的平方项在最前面，系数为 -1 的平方项在中间，系数为 0 的平方项在最后。实二次型 x^TAx 的规范形被两个自然数 p 和 r 决定。

Theorem 2.36 (Sylvester's Law of Inertia)**.** n 元实二次型 x^TAx 的规范形是唯一的。

Proof. 设 n 元实二次型 x^TAx 的秩为 r，假设 x^TAx 分别经过非退化线性变换 $x=Cy$ 和 $x=Bz$ 变成两个规范形：

$$x^TAx = y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-y_{p+2}^2-\cdots-y_r^2$$
$$x^TAx = z_1^2+z_2^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-z_{q+2}^2-\cdots-z_r^2$$

要证规范形唯一，即证 $p=q$。

由 $x=Cy$ 和 $x=Bz$ 可知，经过非退化线性变换 $z=(B^{-1}C)y$ 后有：

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-z_{q+2}^2-\cdots-z_r^2 = y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-y_{p+2}^2-\cdots-y_r^2$$

记 $D=B^{-1}C=(d_{ij})$。假设 $p>q$，我们想找到变量 $y_1,y_2,\ldots,y_n$ 的一组取值，使得上式右端大于 0，而左端小于或等于 0，从而产生矛盾。令：

$$y=(y_1,y_2,\ldots,y_p,0,0,\ldots,0)^T$$

其中 $y_1,y_2,\ldots,y_p$ 是待定的实数，使得变量 $z_1,z_2,\ldots,z_q$ 的值全为 0。因为 $z=Dy$，所以：

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因为 $p>q$,所以上述齐次线性方程组有非零解,即存在非零向量 $y=(y_1,y_2,\ldots,y_p,0,0,\ldots,0)^T$ 使得 $z_1=z_2=\cdots=z_q=0$。此时有：

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-z_{q+2}^2-\cdots-z_r^2 \leqslant 0$$
$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-y_{p+2}^2-\cdots-y_r^2 > 0$$

矛盾。因此 $p\leqslant q$。同理可得 $q\leqslant p$，于是 $p=q$，规范形唯一。 □

Definition 2.30. 在实二次型 x^TAx 的规范形中，系数为 1 的平方项个数 p 称为 x^TAx 的正惯性指数，系数为 -1 的平方项个数 $r-p$ 称为 x^TAx 的负惯性指数，正惯性指数减去负惯性指数所得的差 $2p-r$ 称为 x^TAx 称为 x^TAx 的符号差 *(signature)*。

Theorem 2.37. 两个 n 元实二次型等价

$\iff$ 它们的规范形相同

$\iff$ 它们的秩相等，并且正惯性指数也相等。

Proof. 第一条由定理 2.36以及二次型等价的传递性、对称性可直接得到（必要性的证明中需要考虑规范形的定义，然后使用定理 2.36），第二条是显然的。 □

显然矩阵 A 的正惯性指数与负惯性指数就等于二次型 x^TAx 的正惯性指数与负惯性指数，也等于 A 的合同标准形主对角线上大于 0 的元素的个数与小于 0 的个数。

Theorem 2.38. 两个 n 阶实对称矩阵合同 $\Longleftrightarrow$ 它们的秩相等，并且正惯性指数也相等。

Proof. 由定理 2.32可得矩阵合同等价于各自对应的二次型等价，再由定理 2.37可得两个二次型的秩与正惯性指数都相等。因为矩阵的秩与正惯性指数等于对应的二次型的秩与正惯性指数，所以结论成立。 □

复二次型的规范形

Definition 2.31. 复数域上的二次型称为**复二次型**。由定理 *2.15*可知 n 元复二次型 x^TAx 的矩阵 A 合同于一个对角矩阵 $\mathrm{diag}\{1,1,\ldots,1,0,0,\ldots,0\}$，再由定理 *2.32*可知经过一个适当的非退化线性变换可以将 x^TAx 化作：

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2$$

称此形式为二次型 x^TAx 的**规范形**，其特征为：只含平方项且平方项系数为 $1,0$，系数为 1 的平方项在前面，系数为 0 的平方项在后面。

Theorem 2.39. 复二次型 x^TAx 的规范形是唯一的。

Proof. 复二次型 x^TAx 的规范形完全由它的秩 r 所决定。 □

Theorem 2.40. 两个 n 元复二次型等价

$\Longleftrightarrow$ 它们的规范形相同

$\Longleftrightarrow$ 它们的秩相等。

Proof. 第一条由定理 2.39以及二次型的传递性、对称性可直接得到（必要性的证明中需要考虑规范形的定义，然后使用定理 2.39），第二条是显然的。 □

2.7.2 正定二次型与正定矩阵

Definition 2.32. 如果对 $\mathbb{R}^n$ 中任意非零列向量 α，都有 $\alpha^TA\alpha>0$，则称 n 元实二次型 x^TAx 是正定 *(positive definite)*的。

Definition 2.33. 若实二次型 x^TAx 是正定的，则称实对称矩阵 A 是正定的，并称 A 为正定矩阵 *(positive definite matrix)*，记为 $A>0$。

Theorem 2.41. n 元实二次型 x^TAx 是正定的当且仅当它的正惯性指数等于 n。

Proof. **(1) 必要性**：设 x^TAx 是正定的，作非退化线性变换 $x = Cy$ 化成规范形：

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - y_r^2$$

如果 $p < n$，则 y_n^2 的系数为 0 或 -1，取 $y = (0, 0, \ldots, 1)^T$，则有 $y^TC^TACy = -y_n^2$ 为 0 或 -1，取 $\alpha = Cy$ 即有 $\alpha^TA\alpha$ 为 0 或 -1，与二次型 x^TAx 的正定性矛盾，所以 $p = n$。

(2) 充分性：设 x^TAx 的正惯性指数等于 n，则可以作一个非退化线性变换 $x = Cy$ 将该二次型化作规范形：

$$y^TC^TACy = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$

因为矩阵 C 可逆，所以关于 y 的齐次线性方程组 $C^{-1}x = \mathbf{0}$ 只有零解。任取非零向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，则 $C^{-1}\alpha$ 不是零向量，令 $y = C^{-1}\alpha$，于是 $\alpha^T(C^{-1})^TC^TACC^{-1}\alpha > 0$，即 $\alpha^TA\alpha > 0$。由 α 的任意性，x^TAx 是正定的。 □

Theorem 2.42. 由上述定理可得到如下推论：

1. 对于 n 元实二次型 x^TAx，下述说法等价：
    - x^TAx 是正定的；
    - x^TAx 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$；
    - x^TAx 的标准形中的 n 个系数都大于 0；
2. 与正定二次型等价的实二次型也是正定的；
3. 对于 n 阶实对称矩阵 A，下述说法等价：
    - A 是正定的；
    - A 的正惯性指数为 n；
    - $A \cong I$；
    - A 的合同标准形中主对角元都大于 0；
    - A 的特征值都大于 0；
    - A 的顺序主子式都大于 0。
4. 与正定矩阵合同的实对称矩阵也是正定矩阵。
5. 正定矩阵的行列式大于 0；

Proof. (1)1 $\iff$ 2：由上一定理，x^TAx 正定当且仅当它的正惯性指数为 n，而 x^TAx 的正惯性指数为 n 当且仅当它的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$。

2 $\Rightarrow$ 3：由标准形化规范形的步骤，若 x^TAx 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$，则其标准形中的 n 个系数必然都大于 0；

3 $\Rightarrow$ 2：当 x^TAx 的标准形中的 n 个系数都大于 0 时，也必然可以将其化为 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$。

(2) 由 (4)、定理 2.32和正定矩阵的定义可直接得到。

(3)$1 \Rightarrow 2$：因为 A 是正定的，所以 n 元二次型 x^TAx 是正定的，由上一定理可得 x^TAx 的正惯性指数为 n。因为 A 的正惯性指数等于 x^TAx 的正惯性指数，所以 A 的正惯性指数为 n。

$2 \Rightarrow 3$：因为 A 的正惯性指数为 n，由矩阵正惯性指数的定义，A 合同于 I。

$3 \Rightarrow 4$：因为 A 合同于 I，由合同规范形的定义，I 是 A 的合同规范形，由合同标准型化合同规范形的步骤，A 的合同标准型中主对角元都大于 0。

$4 \Rightarrow 5$：由性质 2.6.2(3) 可知 $A \cong \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$，其中 λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ 是 A 的特征值。显然 $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 是 A 的一个合同标准型，因为 A 的合同标准型中主对角元都大于 0，所以 A 的特征值都大于 0。

$5 \Rightarrow 2$：显然。

$2 \Rightarrow 1$：由定理 2.32、上一定理和矩阵正定的定义可直接得到。

$1 \Rightarrow 6$：设 n 阶实对称矩阵 A 是正定的，则对于 $k = 1, 2, \ldots, n-1$，把 A 写成分块矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} A_k & B_1 \\ B_1^T & B_2 \end{pmatrix}$$

其中 $|A_k|$ 是 A 的 k 阶顺序主子式。在 $\mathbb{R}^k$ 中任取一个非零向量 δ，因为 A 是正定矩阵，所以：

$$\begin{pmatrix} \delta \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} \delta \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & B_1 \\ B_1^T & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \delta^T A_k \delta > 0$$

由 δ 的任意性，A_k 是正定矩阵。由 (5)，$|A_k| > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $|A| > 0$。

$6 \Rightarrow 1$：对实对称矩阵 A 的阶数 n 作数学归纳法。

当 $n = 1$ 时，因为 A 的顺序主子式都大于 0，所以 A 的唯一一个元素大于 0，显然此时 A 是正定矩阵。

假设对于 $n-1$ 阶实对称矩阵命题为真，考虑 n 阶实对称矩阵 $A = (a_{ij})$，将其写作分块矩阵的形式：

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{n-1} 是 $n-1$ 阶实对称矩阵，因为 A_{n-1} 的所有顺序主子式是 A 的 1 到 $n-1$ 阶顺序主子式，它们都大于 0，由归纳假设可得 A_{n-1} 是正定的。根据 (5) 可知 A_{n-1} 可逆。由 (3) 的第三条可知存在可逆矩阵 $C \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ 使得 $C^TA_{n-1}C = I$。因为：

可逆矩阵行列式链接

$$\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ -\alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix}$$

注意到：

$$\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ -\alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} I & (-\alpha^T A_{n-1}^{-1})^T \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

且：

$$\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ -\alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

可逆，所以 A 合同于矩阵：

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

因为：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} I & \mathbf{0} \\ -\alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| \end{aligned}$$

所以 $|A_{n-1}|(a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha) = |A| > 0$，而 $|A_{n-1}| > 0$，所以 $a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha > 0$。因为：

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} C^T A_{n-1} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

而：

$$B = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

主对角线上的元素都大于 0，由 (3) 的第四条可知 B 是一个正定矩阵。因为 $|C|1 = |C| \neq 0$，所以：

可逆矩阵行列式链接

$$\begin{pmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

可逆。于是：

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

合同于 B。根据合同的传递性，A 合同于正定矩阵 B。由 (4)，A 是一个正定矩阵。

(4) 设 A 是一个正定矩阵，B 是一个实对称矩阵且合同于 A。由 (3) 的第三条可知 A 合同于 I，根据合同的传递性，B 也合同于 I。再由 (3) 的第三条可得 B 也是一个正定矩阵。

(5) 设 A 是一个正定矩阵，由 (3) 的第三条可得 $A \cong I$，即存在可逆矩阵 C，使得 $C^T AC = I$，于是：

$$|C^T AC| = |C^T|\,|A|\,|C| = |A|\,|C|^2 = 1$$

因为 $|C|^2 > 0$，所以 $|A| > 0$。 □

半正定二次型与半正定矩阵

Definition 2.34. 如果对 $\mathbb{R}^n$ 中任意非零列向量 α, 都有 $\alpha^T A\alpha \geqslant 0$, 则称 n 元实二次型 $x^T Ax$ 是半正定 *(positive semidefinite)* 的。

Definition 2.35. 若实二次型 $x^T Ax$ 是半正定的，则称实对称矩阵 A 是半正定的，并称 A 为半正定矩阵 *(positive semidefinite matrix)*，记为 $A \geqslant 0$。

Theorem 2.43. 由上述定理可得到如下推论：

1. 对于 n 元实二次型 $x^T Ax$，$\operatorname{rank}(A) = r$，下述说法等价：
   - $x^T Ax$ 是半正定的；
   - $x^T Ax$ 的正惯性指数等于 r；
   - $x^T Ax$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$；
   - $x^T Ax$ 的标准形中的 n 个系数都非负；
2. 与半正定二次型等价的实二次型也是半正定的；
3. 对于 n 阶实对称矩阵 A，$\operatorname{rank}(A) = r$，下述说法等价：
   - A 是半正定的；
   - A 的正惯性指数为 r；
   - $A \cong \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$；
   - A 的合同标准形中主对角元都非负；
   - A 的特征值都非负；
   - A 的主子式都非负。
4. 与半正定矩阵合同的实对称矩阵也是半正定矩阵。
5. 半正定矩阵的行列式为 0；

Proof. (1)$1 \Rightarrow 3$：作非退化线性变换 $x = Cy$ 把 $x^T Ax$ 化作规范形：

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - y_r^2$$

若 $p < r$，取 $\alpha = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$，其中只有第 r 位为 1，则 $(C\alpha)^T A(C\alpha) = \alpha C^T AC\alpha = -1$，与 $x^T Ax$ 的非负定性矛盾，所以 $p = r$。

$3 \Rightarrow 2$：显然。

$2 \Rightarrow 4$：显然。

$4 \Rightarrow 1$：作非退化线性变换 $x = Cy$ 把 x^TAx 化作一个标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$，其中 $d_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$。任取 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 且 $\alpha \neq \mathbf{0}$。因为 C 可逆，所以 $C^{-1}x = \mathbf{0}$ 只有零解，于是 $C^{-1}\alpha = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \neq \mathbf{0}$，所以：

$$(C^{-1}\alpha)^T C^T A C C^{-1}\alpha = \sum_{i=1}^{n} d_i b_i^2 \geqslant 0$$

而：

$$(C^{-1}\alpha)^T C^T A C C^{-1}\alpha = \alpha^T (C^{-1})^T C^T A C C^{-1}\alpha = \alpha^T (C^T)^{-1} C^T A C C^{-1}\alpha = \alpha^T A\alpha$$

所以 $\alpha^T A\alpha \geqslant 0$。由 α 的任意性，x^TAx 半正定。

(2) 由 (4)、定理 2.32和半正定矩阵的定义可直接得到。

(3)$1 \Rightarrow 2$：因为 A 是半正定的，所以 x^TAx 是半正定的。由 (1) 的第二条，x^TAx 的正惯性指数等于 r，而 A 的正惯性指数等于 x^TAx 的正惯性指数，所以 A 的正惯性指数为 r。

$2 \Rightarrow 3$：因为 A 的正惯性指数为 r，由矩阵正惯性指数的定义，$A \cong \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$。

$3 \Rightarrow 4$：因为 $A \cong C = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$，所以 C 是 A 的合同规范形。由合同标准形化合同规范形的步骤，A 的合同标准形中主对角元都大于 0。

$4 \Rightarrow 5$：由性质 2.6.2(3) 可知 $A \cong \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$，其中 $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ 是 A 的特征值。显然 $\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 是 A 的一个合同标准型，因为 A 的合同标准型中主对角元都非负，所以 A 的特征值都非负。

$5 \Rightarrow 2$：因为 $\mathrm{rank} = r$，所以 A 的相似标准形主对角线上的元素有且只有 r 个非零，由条件它们也非负，于是它们为正数，显然此时 A 的正惯性指数为 r。

$2 \Rightarrow 1$：由定理 2.32、(1) 的第二条和矩阵半正定的定义可直接得到。

$1 \Rightarrow 6$：

有空证明

$6 \Rightarrow 5$：

(4) 设 A 是一个半正定矩阵，B 是一个实对称矩阵且合同于 A。由 (3) 的第三条可知 $A \cong C = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$，根据合同的传递性，$B \cong C$。再由 (3) 的第三条可得 B 也是一个半正定矩阵。

(5) 设 A 是一个 n 阶半正定矩阵，由 (3) 的第三条，存在可逆矩阵 C 使得：

$$C^T A C = B = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

而 $\mathrm{rank}(B) = r$，因为可逆变换不改变矩阵的秩，所以 $\mathrm{rank}(A) = r < n$，于是 $|A| = 0$。 □

负定矩阵

Definition 2.36. 如果对 $\mathbb{R}^n$ 中任意非零列向量 α，都有 $\alpha^T A\alpha < 0$，则称 n 元实二次型 x^TAx 是负定 *(negative definite)*的。

Definition 2.37. 若实二次型 $x^T Ax$ 是负定的，则称实对称矩阵 A 是负定的，并称 A 为负定矩阵 *(negative definite matrix)*，记为 $A < 0$。

Theorem 2.44. 对称矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 负定的充分必要条件为：它的奇数阶顺序主子式都小于 0，偶数阶顺序主子式都大于 0。

Proof. 设 $|A_k|$ 为 A 的 k 阶顺序主子式，由定理 2.42(3) 的第六条：

$$\begin{aligned} & A\text{是负定矩阵} \\ \iff & (-A)\text{是正定矩阵} \\ \iff & (-1)^k|A_k| > 0 \\ \iff & \begin{cases} |A_k| > 0, & k\text{为偶数} \\ |A_k| < 0, & k\text{为奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

□

2.8 特殊矩阵

2.8.1 幂等阵

Definition 2.38. 若矩阵 $A \in M_n(K)$ 满足 $A^2 = I_n$，则称 A 为幂等矩阵 *(idempotent matrix)*。

Theorem 2.45. $A^- A, AA^-, I - A^- A, I - AA^-$ 都是幂等阵。

Proof. 代入广义逆方程即可得出结论。 □

Property 2.8.1. 设 $A \in M_n(K)$ 是一个幂等阵，$\mathrm{rank}(A) = r$，则：

1. A 的特征值只能是 1 或 0；
2. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rank}(A)$；
3. A幂等 $\iff \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(I_n - A) = n$；
4. 若 A 是 *Hermitian* 矩阵，则存在秩为 r 的 $B \in M_n(K)$ 使得 $A = B(B^H B)^{-1} B^H$；
5. 若 A 是 *Hermitian* 矩阵，则 $A^+ = A$。

Proof. (1) 设 λ 为 A 的一个特征值，φ 为对应的特征向量，因为 A 是一个幂等阵，所以 $A^2\varphi = A\varphi = \lambda\varphi$，又因为：

$$A^2\varphi = AA\varphi = A\lambda\varphi = \lambda A\varphi = \lambda^2\varphi$$

所以 $(\lambda^2 - \lambda)\varphi = \mathbf{0}$。因为 φ 是特征向量，所以 $\varphi \neq \mathbf{0}$，于是 $\lambda^2 - \lambda = 0$，即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 0$。由 λ 的任意性，结论成立。

(2) 因为 $\mathrm{rank}(A)=r$，所以存在可逆矩阵 P,Q 使得：

$$A=P\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}P_1 & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}=P_1Q_1$$

其中 P_1 为 $n\times r$ 矩阵，Q_1 为 $r\times n$ 矩阵，于是 $A=P_1Q_1$。因为 A 是一个幂等阵，所以：

$$P\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q$$
$$\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1 & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}Q_1P_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

即 $Q_1P_1=I_r$。由性质 .3.2(3) 可得：

$$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(P_1Q_1)=\mathrm{tr}(Q_1P_1)=\mathrm{tr}(I_r)=r=\mathrm{rank}(A)$$

(3) **必要性**：因为 A 是一个幂等阵，所以 $(I_n-A)(I_n-A)=I_n-2A+A^2=I_n-A$，即 I_n-A 也是一个幂等阵。由性质 .3.2(1) 和 (2) 可知：

$$n=\mathrm{tr}(I_n)=\mathrm{tr}(I_n-A+A)=\mathrm{tr}(I_n-A)+\mathrm{tr}(A)=\mathrm{rank}(I_n-A)+\mathrm{rank}(A)$$

充分性：因为 $\mathrm{rank}(A)=r$，由性质 2.3.1(3) 可知存在齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 存在 $n-r$ 个线性无关的解，它们是 A 的特征值 0 的特征向量。因为 $\mathrm{rank}(I_n-A)=n-r$，所以齐次线性方程组 $(I_n-A)x=\mathbf{0}$ 有 $n-r$ 个线性无关的解，即 $Ax=x$ 有 $n-r$ 个线性无关的解，A 的特征值 1 有 $n-r$ 个线性无关的特征向量，于是存在可逆矩阵 P 使得：

$$A=P\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}P^{-1}$$

所以 $A^2=A$，A 是一个幂等阵。

(4) 因为 A 是 Hermitian 幂等阵，由性质 2.6.2(3) 与 (1)(2) 可得存在正交阵 $Q=\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\end{pmatrix}$ 使得：

$$A=Q\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q^H=\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1^H\\ Q_2^H\end{pmatrix}=Q_1Q_1^H=Q_1(Q_1^HQ_1)^{-1}Q_1^H$$

因为 Q_1 是正交矩阵 Q 的前 r 列构成的矩阵，所以 Q_1 的列向量组线性无关，$\mathrm{rank}(Q_1)=r$。于是取 $B=Q_1$ 即可。

(5) 因为 A 是一个 Hermitian 幂等阵，由性质 2.5.2(5) 和 (1) 可得：

$$A^+ = Q\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q^H$$

令 $X = A^+$，将其代入关于 A^+ 的 Penrose 方程组可知相容。由性质 2.5.2(2)(1) 即可得 $A = A^+$。 □

2.8.2 正交投影阵

Definition 2.39. 设 $x \in K^n$，E 是 K^n 的一个子空间。对 x 作分解：

$$x = y + z,\ y \in E,\ z \in E^{\perp}$$

则称 y 为 x 在 E 上的**正交投影**。若 P 为 n 阶方阵，且对任意的 $x \in K^n$，都有 $y = Px \in E$ 和 $x - y \in E^{\perp}$，则称 P 为向 E 的正交投影矩阵 *(orthogonal projection matrix)*。

Property 2.8.2. 设 P_1, P_2 为两个正交投影阵，$A \in M_{m\times n}(K)$，P_A 是向 $\mathcal{M}(A)$ 的正交投影阵，则：

1. $\mathrm{rank}(P_A) = \mathrm{rank}(A)$；
2. $P_A = A(A^TA)^- A^T$；
3. $P \in M_n(K)$ 为正交投影阵当且仅当 P 为对称幂等阵；
4. $I_m - P_A$ 是对称幂等阵；
5. $P \in M_n(K)$ 为正交投影阵当且仅当对任意的 $x \in K^n$ 有：
$$||x - Px|| = \inf_{u\in\mathcal{M}(P)} ||x - u||$$
6. $P = P_1 + P_2$ 为正交投影阵 $\iff$ $P_1P_2 = P_2P_1 = \mathbf{0}$；
7. 当 $P_1P_2 = P_2P_1 = \mathbf{0}$ 时，$P = P_1 + P_2$ 为向 $\mathcal{M}(P_1) \oplus \mathcal{M}(P_2)$ 上的正交投影阵；
8. $P = P_1P_2$ 为正交投影阵 $\iff$ $P_1P_2 = P_2P_1$；
9. 当 $P_1P_2 = P_2P_1$ 时，$P = P_1P_2$ 为向 $\mathcal{M}(P_1) \cap \mathcal{M}(P_2)$ 上的正交投影阵；
10. $P = P_1 - P_2$ 为正交投影阵 $\iff$ $P_1P_2 = P_2P_1 = P_2$；
11. 当 $P_1P_2 = P_2P_1 = P_2$ 时，$P = P_1 - P_2$ 为向 $\mathcal{M}(P_1) \oplus \mathcal{M}(P_2)^{\perp}$ 上的正交投影阵。

Proof. (1) 因为对任意的 $x \in K^n$ 有 $P_Ax \in \mathcal{M}(A)$，所以 $\mathcal{M}(P_A) \subseteq \mathcal{M}(A)$。对任意的 $y \in \mathcal{M}(A)$，存在 $x \in K^n$ 有 $P_Ax = y$（只要取 $x = y + z$，z 是 $\mathcal{M}(A)^{\perp}$ 中的一个向量即可），于是 $\mathcal{M}(A) \subseteq \mathcal{M}(P_A)$，所以 $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(P_A)$。由性质 1.1.7(4) 可得：

$$\mathrm{rank}(P_A) = \dim[\mathcal{M}(P_A)] = \dim[\mathcal{M}(A)] = \mathrm{rank}(A)$$

存在性证明

(2) 由 $\mathcal{M}(A)$ 的定义可知 $\mathcal{M}(A)$ 是 K^m 的子空间，根据定理 1.13和性质 1.1.7(4) 可知存在 $\mathcal{M}(A)$ 的补空间，且这个补空间的维数为 $m-\text{rank}(A)$。取补空间的一组正交于 A 的列向量组的基$b_1, b_2, \ldots, b_{m-\text{rank}(A)}$，则该补空间等于由这组基构成列向量组的矩阵 B 的列空间，即 $\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A)^{\perp}$。于是对任意的 $x \in K^m$ 有：

$$x = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A\alpha + B\beta$$

$$P_A x = P_A A\alpha + P_A B\beta = A\alpha, \quad \forall\, \alpha \in K^{\text{rank}(A)}, \beta \in K^{m-\text{rank}(A)}$$

所以：

$$\begin{cases} P_A A = A \\ P_A B = \mathbf{0} \end{cases}$$

由第二个方程可以得到 P_A^T 的每一列都与 B 的每一列正交，于是 $\mathcal{M}(P_A^T) \subseteq \mathcal{M}(B)^{\perp} = \mathcal{M}(A)$，于是存在矩阵 C 使得 $P_A^T = AC$。将该式代入第一个方程可得到 $C^T A^T A = A$，即 $A^T A C = A^T$，因为该方程是相容的，由定理 2.22可知 C 的通解为 $(A^T A)^- A^T$，于是 $P_A^T = A(A^T A)^- A^T$。由性质 2.5.1(6) 可得 $P_A = A(A^T A)^- A^T$。

(3) **充分性**：由 (2) 和性质 2.8.1(4) 立即得出。

必要性：设 P 是向 $\mathcal{M}(A)$ 的正交投影阵。对称性由 (2) 和性质 2.5.1(6) 得出。由性质 2.5.1(5) 可知：

$$P^2 = A(A^T A)^- A^T A (A^T A)^- A^T = A(A^T A)^- A^T$$

即 P 幂等，于是 P 是一个对称幂等阵。

(4) 由 (3) 可知 P_A 是对称幂等阵，显然 $I_m - P_A$ 也是对称幂等阵。

K^n 子空间为闭集

(5) 显然 $\mathcal{M}(B)$ 是一个凸闭集，由定理 10.11立即可得。

□

2.9 矩阵的分解

2.9.1 SVD 分解

Theorem 2.46. 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$，则 $AA^H, A^H A$ 是半正定矩阵。

Proof. 设 λ_i，$i = 1, 2, \ldots, n$ 是矩阵 $A^H A$ 的特征值，ξ_i 是对应的特征向量，则：

$$A^H A\xi_i = \lambda_i \xi_i \to \xi_i^H A^H A \xi_i = \lambda_i \xi_i^H \xi_i \to ||A\xi_i||^2 = \lambda_i ||\xi_i||^2$$

由于左式非负，所以右式非负，而 $||\xi_i||^2$ 非负，因此 λ_i 非负，由定理 2.43(3) 的第五条可知 AA^T 是半正定矩阵。 □

Theorem 2.47. 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$，$\text{rank}(A) = r$，则存在两个正交矩阵 $P \in M_m(\mathbb{C})$, $Q \in M_n(\mathbb{C})$ 使得：

$$A = P \begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q^H$$

其中 $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$，$\lambda_i > 0$，$\lambda_i^2$ 为 A^HA 的正特征值。

Proof. 由定理 2.3可知 $\mathrm{rank}(A^HA) = \mathrm{rank}(A)$。于是 A^HA 确实有 r 个正特征值。因为 A^HA 是一个 Hermitian 矩阵，由性质 2.6.2可知存在正交矩阵 $Q \in M_n(\mathbb{C})$ 使得：

$$Q^HA^HAQ = \begin{pmatrix} \Lambda^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

记 $B = AQ$，则：

$$B^HB = \begin{pmatrix} \Lambda^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

这表明 B 的列向量相互正交，且前 r 个列向量的长度分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$，后 $n-r$ 个列向量为零向量，于是存在一个正交矩阵 $P \in M_m(\mathbb{C})$ 使得：

$$B = P\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

因为 $B = AQ$，所以：

$$A = P\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^{-1} = P\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^H$$

□

Definition 2.40. 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$，$\mathrm{rank}(A) = r$，$A^HA$ 的正特征值为 λ_i，$i = 1, 2, \ldots, r$，称 $\delta_i = \sqrt{\lambda_i}$ 为矩阵 A 的奇异值 *(singular value)*。

第二部分

分析学

Chapter 3

度量空间

Definition 3.1. 设 X 为一个非空集合。若对任意的 $x, y \in X$，都 $\exists\, \rho(x, y) \in \mathbb{R}$ 与 x，y 对应，且满足以下三个条件（即距离公理）：

1. 非负性：$\rho(x, y) \geqslant 0$，等号成立当且仅当 $x = y$。

2. 对称性：$\rho(x, y) = \rho(y, x)$。

3. 三角不等式：$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y),\ \forall\, z \in X$。

则称 ρ 是 X 上的一个距离，X 是以 ρ 为距离的度量空间 *(metric space)*，记为 (X, ρ)。度量空间中的元素又称之为点。

3.1 度量空间上的点集

本节首先定义邻域的概念，然后由邻域得到内点、界点、外点、聚点、孤立点的定义，再由这五个点得到开核、导集、边界、闭包的定义，从而进一步讨论开集、闭集以及子空间。

邻域的定义

Definition 3.2. 度量空间 (X, ρ) 中的点集

$$\{P \in X : \rho(P, P_0) < \delta\} \qquad (\delta > 0)$$

被称之为点 P_0 的 δ邻域 *(neighbourhood)*[1]，记为 $U(P_0, \delta)$。

上式定义的邻域也称为开邻域。若在上式中取小于等于号，则称之为闭邻域，用 $\bar{U}(P, \delta)$ 表示。下面如果不作特殊说明，涉及到邻域时都指开邻域。

[1] 此处的邻域不再具有 $\mathbb{R}^n$ 中那样的球形几何直观。

内、外、界点定义

Definition 3.3. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。若对于点 $P\in X$，存在 $U(P)\subset E$，则称点 P 为 E 的内点 *(interior point)*。

Definition 3.4. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。若点 $P\in X$ 为 E^c 的内点，则称点 P 为 E 的外点 *(exterior point)*。

Definition 3.5. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。若对于点 $P\in X$，它的任意邻域中都既有 E 中的点，又有 E^c 中的点，则称点 P 为 E 的界点 *(boundary point)*。

聚点与孤立点定义

Definition 3.6. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。若点 $P\in X$ 满足以下任一条件：

1. P 的任何邻域内都存在无穷个 E 中的点。
2. P 的任何邻域内都存在一个 E 中异于 P 的点。
3. E 中有一个极限为 P 的点列（极限的定义参考定义 3.23）。

则 P 是 E 的一个聚点 *(limit point)*。

这三个条件实际上是等价的：

Proof. (1) $\to$ (2) 显然，(3) $\to$ (1) 显然，下证 (2) $\to$ (3)。取 $\delta_n=\frac{1}{n}$，在 $U(P,\delta_n)$ 中至少有一点 P_n，$P_n\in E$ 且 $P_n\neq P$，显然 $\{P_n\}\to P$。 □

Definition 3.7. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。若点 $P\in E$ 但不是 E 的聚点，即存在 P 的邻域 $U(P)$，使得 $E\cap U(P)=\{P\}$，则称 P 为 E 的孤立点 *(isolated point)*。

开核、导集、边界、闭包的定义

Definition 3.8. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。E 的全体内点所组成的集合称为 E 的内核 *(interior)*，记为 $\mathring{E}$。

Definition 3.9. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。E 的全体聚点所组成的集合称为 E 的导集 *(derived set)*，记为 E'。

Definition 3.10. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。E 的全体界点所组成的集合称为 E 的边界 *(boarder)*，记为 ∂E。

Definition 3.11. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。$E\cup E'$ 称为 E 的闭包 *(closure)*，记为 $\overline{E}$。

开集、闭集的定义

Definition 3.12. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。若 $E=\mathring{E}$，则称 E 是一个开集 *(open set)*。

Definition 3.13. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。若 $E'\subset E$，则称 E 是一个闭集 *(closed set)*。

子空间

Definition 3.14. (X, ρ_X) 是一个度量空间。若 $E \subset X$，且在 E 上定义距离 ρ_E 使得 E 中任意点对 x, y 之间的距离 $\rho_E(x, y) = \rho_X(x, y)$，则称 E 是 X 的一个子空间 *(subspace)*。

Definition 3.15. 若 E 是度量空间 (X, ρ) 的一个子空间，且 E 是一个开集，则称 E 是 X 的一个开子空间 *(open subspace)*。

Definition 3.16. 若 E 是度量空间 (X, ρ) 的一个子空间，且 E 是一个闭集，则称 E 是 X 的一个闭子空间 *(closed subspace)*。

3.2 度量空间上点集的性质

邻域的性质

Property 3.2.1. (X, ρ) 是一个度量空间，$P \in X$，则有：

1. $\forall\, \delta > 0,\ P \in U(P, \delta)$。
2. $\forall\, \delta_1, \delta_2 > 0,\ \exists\, \delta_3 > 0,\ U(P, \delta_3) \subset U(P, \delta_1) \cap U(P, \delta_2)$。
3. $\forall\, P_0 \in X,\ P_0 \neq P,\ \exists\, U(P), U(P_0),\ U(P) \cap U(P_0) = \varnothing$。
4. $\forall\, P_0 \in U(P),\ \exists\, U(P_0) \subset U(P)$，即开邻域是开集。
5. $\forall\, P_0 \in \left(\bar{U}(P)\right)',\ P_0 \in \bar{U}(P_0)$，即闭邻域是闭集。

Proof. (2) 取 $\delta_3 < min(\delta_1, \delta_2)$。(3) 取 $\delta \in (0, \frac{\rho(P,P_0)}{2})$。

(4) 要使得 $U(P_0) \subset U(P)$，则 $\forall\, x \in U(P_0)$，$\rho(x, P) < \delta_P$，而 $\rho(x, P) < \rho(x, P_0) + \rho(P_0, P) < \delta_{P_0} + \rho(P_0, P)$，故只要使 $\delta_{P_0} + \rho(P_0, P) < \delta_P$ 即可。

(5) 对任意的 $P_0 \in \left(\bar{U}(P)\right)'$，$\exists\, \bar{U}(P)$ 中的点列 $\{P_n\} \to P_0$。若 $P_0 \notin \bar{U}(P)$，则 $\rho(P_0, P) > \delta_P$。取 $\varepsilon = \rho(P_0, P) - \delta_P$，则必然 $\exists\, N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时，有 $\rho(P_n, P_0) < \varepsilon$，那么 $\rho(P_n, P) > \delta_P$，即 $P_n \notin U(P)$，矛盾。因此 $P_0 \in \bar{U}(P)$。由 P_0 的任意性，闭邻域是闭集。 □

内外界聚孤立五点的性质

Theorem 3.1. (X, ρ) 是一个度量空间，$E \subset X$。E 的界点不是聚点就是孤立点。

Proof. 若 P 是 E 的一个界点，则它的任意邻域中都既有 E 中的点，又有 E^c 中的点。若它的任意邻域中都只含有有限个 E 中的点，则一定存在一个邻域，使得只有自身属于 E，那么它是一个孤立点；若它的任意邻域中都含有无限个 E 中的点，由聚点定义，它是一个聚点。 □

关于内外界聚孤立五点的总结

$$
\text{度量空间}(X,\rho)\text{中的点与 } E \text{ 的关系可分为}\begin{cases}\text{内点}\\ \text{界点}\\ \text{外点}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\text{聚点}\\ \text{孤立点}\\ \text{外点}\end{cases}
$$

开核、导集、边界、闭包的性质

Theorem 3.2. (X,ρ) 是一个度量空间，$E \subset X$。$(\mathring{E})^c = \overline{E^c}$。

Proof. $\overline{E^c} = E^c \cup (E^c)'$。

对任意的 $P \in \overline{E^c} \cap \mathring{E}$，应有 $P \in (E^c)'$，即 P 的任意邻域中都有 E^c 中的点，而这与 $P \in \mathring{E}$ 矛盾，由 P 的任意性有 $\overline{E^c} \cap \mathring{E} = \varnothing$，即 $\overline{E^c} \subset (\mathring{E})^c$；

对任意的 $P \in (\mathring{E})^c$，应有 $P \in (\mathring{E^c}) \cup \partial E$。若 $P \in (\mathring{E^c})$，显然 $P \in (\mathring{E^c}) \subset E^c \subset \overline{E^c}$；若 $P \in \partial E$，要么 $P \in E$，要么 $P \notin E$，如果此时 $P \in E$，则由界点定义它必然是 E^c 的聚点，即 $P \in \overline{E^c}$；如果此时 $P \notin E$，则 $P \in E^c$，即 $P \in \overline{E^c}$。由 P 的任意性有 $(\mathring{E})^c \subset \overline{E^c}$。

综上 $(\mathring{E})^c = \overline{E^c}$。 □

Theorem 3.3. (X,ρ) 是一个度量空间，$E \subset X$。$\partial E = \partial E^c$。

Proof. 由定义直接可得。 □

Theorem 3.4. (X,ρ) 是一个度量空间，$E \subset X$。$\overline{\overline{E}} = \overline{E}$。

Proof. $\overline{\overline{E}} = \overline{E} \cup (\overline{E})'$，由定理 3.8，$\overline{E}$ 是闭集，因此 $(\overline{E})' \subset \overline{E}$，即 $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$。 □

Theorem 3.5. (X,ρ) 是一个度量空间，$A \cup B \subset X$。若 $A \subset B$，则 $\mathring{A} \subset \mathring{B}$，$A' \subset B'$，$\overline{A} \subset \overline{B}$。

Proof. 由内点、聚点的定义直接可得。 □

Theorem 3.6. (X,ρ) 是一个度量空间，$A \cup B \subset X$。$(A \cup B)' = A' \cup B'$。

Proof. $A \subset (A \cup B)$，$B \subset (A \cup B)$，由定理 3.5可知，$A' \subset (A \cup B)'$，$B' \subset (A \cup B)'$，因此 $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$。

另一方面，对任意的 $P \in (A \cup B)'$，应有 $P \in A' \cup B'$。否则就有 $P \notin A'$ 且 $P \notin B'$，因此存在 $U_1(P)$ 和 $U_2(P)$ 使得 $U_1(P)$ 中不含除了 P 以外的 A 中的点、$U_2(P)$ 中不含除了 P 以外的 B 中的点，由邻域的性质，存在 $U_3(P)$ 使得其内不含除了 P 以外 $A \cup B$ 中的点，而这与 $P \in (A \cup B)'$ 矛盾。由 P 的任意性有 $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$。

综上 $(A \cup B)' = A' \cup B'$。 □

Theorem 3.7. (X,ρ) 是一个度量空间，$A \cup B \subset X$。$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

Proof. 由定理 3.6：

$$\overline{A}\cup\overline{B}=A\cup A'\cup B\cup B'=(A\cup B)\cup(A'\cup B')=(A\cup B)\cup(A\cup B)'=\overline{A\cup B}\qquad\square$$

Theorem 3.8. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。$\mathring{E}$ 是开集，E' 和 $\overline{E}$ 都是闭集。

Proof. (1)$\mathring{E}$ 是开集：对任意的 $P\in\mathring{E}$，存在 $U(P)\subset E$，对任意的 $Q\in U(P)$，存在 $U(Q)\subset U(P)\subset E$，因此 $Q\in\mathring{E}$，即存在 $U(P)\subset\mathring{E}$，P 是 $\mathring{E}$ 的内点。由 P 的任意性，$\mathring{E}$ 是开集。

(2)E' 是闭集：对任意的 $P\in(E')'$，由聚点定义，任意 $U(P)$ 中都含有 E' 中的点，任取 $Q\in U(P)\cap E'$，任意 $U(Q)$ 都含 E 中的点，而 $Q\in U(P)$，由邻域的性质，存在 $U(Q)\subset U(P)$，因此任意 $U(P)$ 中都含有 E 中的点，即 P 是 E 的聚点，$P\in E'$。由 P 的任意性与 P 的选取方式，E' 是闭集。

(3)$\overline{E}$ 是闭集：$\overline{E}=E\cup E'$，由定理 3.6，$(\overline{E})'=E'\cup(E')'$，显然 $E'\subset\overline{E}$，而 E' 是闭集，$(E')'\subset E'\subset\overline{E}$。因此，$(\overline{E})'\subset\overline{E}$，即 $\overline{E}$ 是闭集。 $\square$

开集、闭集的性质

Theorem 3.9. 对于度量空间 (X,ρ)，X 和 $\varnothing$ 是唯二既开又闭的集合。

开集与闭集的互补性

Theorem 3.10. (X,ρ) 是一个度量空间，$E\subset X$。若 E 是开集，则 E^c 是闭集；若 E 是闭集，则 E^c 是开集。

Proof. E 是开集：$\forall\, P\in(E^c)'$，应有 $P\notin E$，即 P 不会是 E 的内点。否则由内点定义，存在 $U(P)$ 使得 $U(P)\subset E$，即 $U(P)$ 中不含 E^c 中的点，这与点 $P\in(E^c)'$ 矛盾。由 P 的任意性有 $E'\subset E$，即 E^c 是闭集。

E 是闭集：$\forall\, P\in E^c$，应有 P 是 E^c 的一个内点。否则任意 $U(P)$ 中都存在 E 中的点，则 P 应该是 E 的一个聚点，而此时 $P\in E^c$，与 E 是闭集矛盾。由 P 的任意性有 $E^c=(\mathring{E^c})$，即 E^c 是开集。 $\square$

开集与闭集的交与并

Theorem 3.11. (X,ρ) 是一个度量空间。*(1)* 任意个开集的并是开集；*(2)* 有限个开集的交是开集；*(3)* 任意个闭集的交是闭集；*(4)* 有限个闭集的并是闭集。

Proof. (1) 对于在任意个开集的并集中的点 P，P 必属于其中一个开集，因而存在一个邻域 $U(P)$ 使得其中的点都在那个开集中，进而 $U(P)$ 都在任意个开集的并集中，即 P 是任意个开集的并集的内点。由 P 的任意性，任意个开集的并集是开集。[2]

[2]这里使用纯文字说明是因为考虑该定理对不可数个集合也成立，当集合不可数的时候是无法给集合编号的。

(2) 设这有限个开集为 $A_i, i=1,2,\ldots,n$。对任意的 $P \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$，则 P 是所有 A_i 的内点，因此存在 $U_i(P) \subset A_i$。由邻域的性质，存在 $U(P)$ 满足 $U(P) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i(P) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$，因此 P 是 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 的内点。由 P 的任意性，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 是开集。

(3)(4) 可由定理 3.10以及 De-Morgan law 在 (1)(2) 的基础上直接得出。 □

3.3 稠密、稀疏、可分性、有界性

3.3.1 稠密

Definition 3.17. (X,ρ) 是一个度量空间，$A \cup B \subset X$。若 $A \subset \overline{B}$，则称 B 在 A 中稠密 *(dense)*。

稠密性等价定义

Theorem 3.12. (X,ρ) 是一个度量空间，$A \cup B \subset X$。以下四个命题等价：

1. B 在 A 中稠密。
2. 对任意的 $x \in A$，x 的任意邻域中都存在 B 中的点。
3. 对任意的 $x \in A$，B 中存在一个点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x（点列收敛的定义参考定义 *3.23*）。
4. 对任意的 $\varepsilon > 0$，B 中每个点的 ε 开球邻域的并包含了 A。

Proof. (1) $\to$ (2) 因为 $\overline{B} = B \cup B'$，所以若 $x \in A$，则 $x \in B$ 或 $x \in B'$，此时显然 (2) 成立。

(2) $\to$ (3) 显然。（点列中元素可重复出现）

(3) $\to$ (4) 若此时 (4) 不成立，即存在 $x \in A$ 对于某个 ε，满足条件 x 不在任何 B 中点的 ε 开球邻域内，则存在 $U(x)$ 使得 $U(x)$ 中不含 B 中的点，那么 (3) 也不可能成立，矛盾。

(4) $\to$ (1) 对任意的 $x \in A$，如果 $x \notin \overline{B}$，那么存在 $U(x,\delta)$ 使得 $U(x,\delta)$ 中不含 B 中的点，记 x 与 B 中点之间的最小距离为 ρ，此时只要取 $\varepsilon < \rho$，x 就不在那些邻域的并集中了，矛盾。由 x 的任意性，$A \subset \overline{B}$。 □

3.3.2 稀疏集

Definition 3.18. (X,ρ) 是一个度量空间，A 是 X 的一个子集。若 A 在 X 的任何一个非空开集中均不稠密，则称 A 为 X 中的稀疏集 *(nowhere dense set)*。

稀疏集等价定义

下述定理中的邻域既可以是开邻域也可以是闭邻域：

Theorem 3.13. 度量空间 (X,ρ) 的子集 A 为稀疏集的充分必要条件是：对任意的 $x \in X$ 和 x 的任意邻域 $U(x)$，存在一个包含于邻域 $U(x)$ 的邻域 $U(y)$ 使得：

$$A \cap U(y) = \varnothing$$

Proof. **(1) 开邻域：**

充分性：假设此时 A 在 X 中的某非空开集 B 中稠密，则 $B \subset \overline{A}$。任取 $x \in B$ 和 $U(x) \subset B$，则 $x \in \overline{A}$。如果此时存在包含于 $U(x)$ 的 $U(y)$ 使得题目条件成立，则 $y \notin \overline{A}$，这与 $y \in U(y) \subset U(x) \subset B \subset \overline{A}$ 矛盾。

必要性：若 A 是稀疏集，则 A 在 $U(x)$ 中不稠密。由稠密的等价定义 (2)，$\exists\, y \in U(x)$, $\exists\, U(y) \subset U(x)$ 使得 $A \cap U(y) = \varnothing$。

(2) 闭邻域：

充分性：

必要性： □ 有空证明

3.3.3 可分性

Definition 3.19. (X, ρ) 是一个度量空间，$A \subset X$。若存在可列集 $B \subset X$ 使得 B 在 A 中稠密，则称 A 是可分的 *(separable)*。若 X 中存在一个在 X 中稠密的可列子集，则称 X 是可分的度量空间。

3.3.4 有界性

Definition 3.20. (X, ρ) 是一个度量空间，$E \subset X$。定义

$$\delta_E = \sup_{x,y \in E} \rho(x, y)$$

为点集 E 的直径 *(diameter)*。

Definition 3.21. (X, ρ) 是一个度量空间，$E \subset X$。若 $\delta_E < +\infty$，则称 E 是 (X, ρ) 中的有界集 *(bounded set)*。

有界集的等价定义

Definition 3.22. (X, ρ) 是一个度量空间，$E \subset X$。如果 E 包含在 X 中某个点的闭邻域或开邻域内，则称 E 是 (X, ρ) 中的有界集。

二者的等价性很直观：

Proof. (1) $\to$ (2)：任取 $x \in X$，取 $\delta = \delta_E$ 构造闭邻域 $U(x, \delta)$ 或取 $\delta = \delta_E + \varepsilon (\forall\, \varepsilon > 0)$ 构造开邻域 $U(x, \delta)$。

(2) $\to$ (1)：设关于该点的开邻域或闭邻域半径为 δ，显然 $\delta_E \leqslant 2\delta$。 □

3.4 度量空间上的收敛点列

Definition 3.23. $\{x_n\}$ 是度量空间 (X, ρ) 中的一个点列 *(sequence of points)*，如果对任意的 $\varepsilon > 0$，$\exists\, N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时有：

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon$$

则称 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,ρ) 中的收敛点列 *(convergent sequence of points)*，x 是点列 $\{x_n\}$ 的极限 *(limit)*。

收敛点列的性质

极限的唯一性

Theorem 3.14. $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,ρ) 中的一个收敛点列。$\{x_n\}$ 的极限是唯一的。

Proof. 假设极限不唯一，$\{x_n\}$ 既收敛到 a 又收敛到 b，则对任意的 $\varepsilon>0$，$\exists\, N_1\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N_1$ 时有 $\rho(x_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}$；$\exists\, N_2\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N_2$ 时有 $\rho(x_n,b)<\frac{\varepsilon}{2}$。取 $N=max\{N1,N2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\rho(a,b)\leqslant\rho(a,x_n)+\rho(x_n,b)<\varepsilon$$

即 $a=b$。 □

有界性

Theorem 3.15. $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,ρ) 中的一个收敛点列。对任意的 $y\in X$，数列 $\{\rho(x_n,y)\}$ 有界。

Proof. 设 $\{x_n\}\to x$，由距离的定义：

$$\rho(x_n,y)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x,y)$$

由于 $\{x_n\}$ 收敛，所以对 $\varepsilon=1$：

$$\exists\, N\in\mathbb{N}^+,\ \forall\, n>N,\ \rho(x_n,x)<\varepsilon=1$$

取 $K=\max\{\rho(x_1,x),\rho(x_2,x),\ldots,\rho(x_N,x),1\}$，则有：

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^+,\ \rho(x_n,y)\leqslant K+\rho(x,y)$$

即数列 $\{\rho(x_n,y)\}$ 有界。 □

Corollary 3.1. $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,ρ) 中的一个收敛点列。若将其看作点集，则 $\{x_n\}$ 是有界点集。

Proof. 任取 $y\in X$，数列 $\{\rho(x_n,y)\}$ 有界，即 $\exists\,\delta>0$，$\forall\, n\in\mathbb{N}^+$，$\rho(x_n,y)<\delta$，则 $\{x_n\}\subset U(y,\delta)$。 □

子列的收敛性

Definition 3.24. $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,ρ) 中的一个点列，而

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$$

是一串严格递增的自然数，则

$$x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < x_{n_{k+1}} < \cdots$$

也形成一个 (X, ρ) 中的点列，我们把 $\{x_{n_k}\}$ 称之为点列 $\{x_n\}$ 的一个子列 *(subsequence)*。

Theorem 3.16. $\{x_n\}$ 是度量空间 (X, ρ) 中的一个收敛点列，则它的任何子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛，并且与 $\{x_n\}$ 有同样的极限。反之，若 $\{x_n\}$ 的任何子列都收敛，则 $\{x_n\}$ 本身也收敛。

Proof. (1) 设 $\{x_n\}$ 的极限为 x，则对任意的 $\varepsilon > 0$，$\exists\, N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时有

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon$$

当 $k > N$ 时就有 $n_k \geqslant k > N$，也就有

$$\rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$$

(2)$\{x_n\}$ 也是它自己的一个子列。 □

3.5 度量空间上的映射

3.5.1 一般映射的定义与性质

Definition 3.25. 设 X, Y 是任意给定的集合。如果对于任意的 $x \in X$，都存在唯一地 $f(x) \in Y$ 与之对应，则称对应关系 f 是一个从 X 到 Y 的映射 *(mapping)*。对任何 $E \subset Y$，称：

$$f^{-1}(E) = \{x : f(x) \in E\}$$

为集合 B 在映射 f 下的原像 *(preimage)*[3]。

Theorem 3.17. 设 X, Y 是任意给定的集合，f 是一个从 X 到 Y 的映射。集合的原像有下列性质：

1. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$，$f^{-1}(Y) = X$；
2. 若 $E_1 \subset E_2 \subset Y$，则 $f^{-1}(E_1) \subset f^{-1}(E_2)$；
3. 对任意的 $E \subset Y$，$[f^{-1}(E)]^c = f^{-1}(E^c)$；
4. 设 T 是一个指标集，对 $\{A_t \in Y : t \in T\}$，有：

$$f^{-1}\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = \bigcup_{t \in T} f^{-1}(A_t), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) = \bigcap_{t \in T} f^{-1}(A_t)$$

[3]原像与逆无关。

Proof. (1)(2) 是显然的，下证 (3)(4)。

(3) 对任意的 $x \in [f^{-1}(E)]^c$，有 $x \notin f^{-1}(E)$，即 $f(x) \notin E$，所以 $x \in f^{-1}(E^c)$。由 x 的任意性，$[f^{-1}(E)]^c \subset f^{-1}(E^c)$。对任意的 $x \in f^{-1}(E^c)$，有 $f(x) \in E^c$，所以 $x \notin f^{-1}(E)$，于是 $x \in [f^{-1}(E)]^c$。由 x 的任意性，$f^{-1}(E^c) \subset [f^{-1}(E)]^c$。综上，$[f^{-1}(E)]^c = f^{-1}(E^c)$。

(4) 对任意的 $x \in f^{-1}\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right)$，有 $f(x) \in \bigcup\limits_{t\in T} A_t$，即存在 $t \in T$，使得 $f(x) \in A_t$，$x \in f^{-1}(A_t)$，于是 $x \in \bigcup\limits_{t\in T} f^{-1}(A_t)$。由 x 的任意性，$f^{-1}\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right) \subset \bigcup\limits_{t\in T} f^{-1}(A_t)$。对任意的 $x \in \bigcup\limits_{t\in T} f^{-1}(A_t)$，则存在 $t \in T$，使得 $x \in f^{-1}(A_t)$，于是 $x \in f^{-1}\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right)$。由 x 的任意性，$\bigcup\limits_{t\in T} f^{-1}(A_t) \subset f^{-1}\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right)$。综上，$f^{-1}\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right) = \bigcup\limits_{t\in T} f^{-1}(A_t)$。交的情形同理可证。 □

3.5.2 度量空间上的映射

Definition 3.26. (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 都是度量空间。若对任意的 $x \in X$，都 $\exists\, y \in Y$ 与之对应，则称这个对应是一个 X 到 Y 的映射，用符号 T 表示。称集合

$$\{x \in X : Tx \in E \subset Y\}$$

为集合 E 在映射 T 下的原像。

单射、满射、双射

Definition 3.27. (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 都是度量空间，T 是一个 X 到 Y 的映射。如果对任意的 $y \in Tx$，只有唯一的 x 使得 $Tx = y$，那么称映射 T 为单射 *(injective function)*。

Definition 3.28. (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 都是度量空间，T 是一个 X 到 Y 的映射。如果对任意的 $y \in Y$，都存在 X 中的 x 使得 $Tx = y$，那么称映射 T 为满射 *(surjective function)*。

Definition 3.29. (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 都是度量空间，T 是一个 X 到 Y 的映射。如果 T 既是单射，又是满射，则称之为双射 *(bijective function)*。

逆映射

Definition 3.30. (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 都是度量空间，T 是一个 X 到 Y 的双射。则对任意的 $y \in Y$，都存在唯一的 $x \in X$ 使得 $Tx = y$，此时可以得到一个新的映射，它将 Y 映成 X，称这个映射为 T 的逆映射 *(inverse mapping)*。

Theorem 3.18. (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 都是度量空间，T 是一个 X 到 Y 的映射。T 存在逆映射的充要条件是 T 是一个双射。

复合映射

Definition 3.31. (X, ρ_X)、(Y, ρ_Y) 和 (Z, ρ_z) 都是度量空间，T_1 是一个 X 到 Y 的映射，T_2 是一个 Y 到 Z 的映射。定义映射 T_3 满足 $T_3 x = T_2(T_1 x)$，其中 $x \in X$，则称映射 T_3 是映射 T_1 和映射 T_2 的复合映射 *(composite mapping)*。

复合映射的概念也可以推广到多个映射的复合。

等距映射

Definition 3.32. (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 都是度量空间，T 是一个 X 到 Y 的双射。若对任意的 $x, y \in X$，有 $\rho_X(x, y) = \rho_Y(Tx, Ty)$，则称 T 是 X 到 Y 上的等距映射 *(isometry)*。如果存在一个 X 到 Y 上的等距映射，则称 X 和 Y 等距 *(isometric)*。

3.5.3 映射的连续性

Definition 3.33. (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 都是度量空间，T 是一个 X 到 Y 的映射，$x_0 \in X$。若对任意的 $\varepsilon > 0$，$\exists\, \delta > 0$，使得对 X 中一切满足条件 $\rho(x_0, x) < \delta$ 的 x，都有 $\rho_Y(Tx_0, Tx) < \varepsilon$，则称 T 在 x_0 处是连续的 *(continuous)*。

邻域式定义

Definition 3.34. T 在 x_0 处连续：对 Tx_0 的任意 ε 邻域 U，必有 x_0 的某个 δ 邻域 V 使得 $TV \subset U$。

点列式定义

Theorem 3.19. (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 都是度量空间，T 是一个 X 到 Y 的映射，那么 T 在 $x_0 \in X$ 处连续的充分必要条件为：当 $x_n \to x_0$ 时，$Tx_n \to Tx_0$。

Proof. 必要性显然。

充分性：若此时 T 在 x_0 不连续，那么 $\exists\, \varepsilon > 0$，$\forall\, \delta > 0$，都存在满足条件 $\rho_X(x_0, x) < \delta$ 的点 x 使得 $\rho_Y(Tx_0, Tx) \geqslant \varepsilon$，因此可取一个点列 $\{x_n\}$，满足 $\rho_X(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$。注意到此时满足 $x_n \to x$ 但不满足 $Tx_n \to Tx_0$，矛盾。 □

连续映射的定义

Definition 3.35. T 是一个 (X, ρ_X) 到 (Y, ρ_Y) 的映射，若 T 在 X 的每一点都连续，则称 T 是 X 上的连续映射 *(continuous mapping)*。

连续映射的拓扑式等价定义

Theorem 3.20. 度量空间 (X, ρ_X) 到 (Y, ρ_Y) 上的映射 T 是 X 上连续映射的充要条件为：

1. Y 中任意开集 E 的原像 $T^{-1}E$ 是 X 中的开集。
2. Y 中任意闭集 E 的原像 $T^{-1}E$ 是 X 中的闭集。

Proof. (1) 必要性：设 T 是连续映射，$M \subset Y$ 是一个开集，如果 $T^{-1}M = \varnothing$，则 $T^{-1}M$ 是开集；若 $T^{-1}M \neq \varnothing$，任取 $x \in T^{-1}M$，令 $Tx = y$，则 $y \in M$，因为 M 是开集，所以存

在 y 的 ε 邻域 U，使得 $U \subset M$，由 T 的连续性，存在 x 的 δ 邻域 V，使得 $TV \subset U$，因此 $V \subset T^{-1}U \subset T^{-1}M$，即 x 是 $T^{-1}M$ 的内点。由 x 的任意性，$T^{-1}M$ 是 X 中的开集。

充分性：对任意的 $x \in X$ 及 Tx 的任意 ε 邻域 U，由邻域的性质，U 是一个开集，因此 $T^{-1}U$ 是 X 中的开集。因为 x 是 $T^{-1}U$ 的内点，所以存在 x 的某个 δ 邻域 V，使得 $V \subset T^{-1}U$，因此 $TV \subset U$，即 T 在 x 处连续。由 x 的任意性，T 是 X 上的连续映射。

(2) 由定理 3.17(3)，利用 (1) 易证 (2)。 □

同胚映射

Definition 3.36. (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 都是度量空间，T 是一个 X 到 Y 的双射。若 T 和 T^{-1} 都是连续映射，则称 T 是 X 到 Y 上的同胚映射 *(homeomorphism mapping)*。如果存在一个 X 到 Y 上的同胚映射，则称 X 和 Y 同胚 *(homeomorphic)*。

3.6 完备的度量空间

3.6.1 Cauchy 点列

Definition 3.37. (X, ρ) 是一个度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的点列。若对任意的 $\varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}^+$，当 $n, m > N$ 时，有：

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

则称点列 $\{x_n\}$ 是一个柯西点列 *(Cauchy sequence)* 或基本点列 *(foundamental sequence)*。

Cauchy 点列的性质

Theorem 3.21. (X, ρ_X) 是一个度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的收敛点列，则 $\{x_n\}$ 是一个 *Cauchy* 点列。

Proof. 令 $n < m$。因为 $\{x_n\}$ 是 X 中的收敛点列，假设其极限为 x，则对任意的 $\varepsilon > 0$，$\exists\, N_1 \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N_1$ 时有 $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$；$\exists\, N_2 \in \mathbb{N}^+$，当 $m > N_2$ 时有 $\rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$。取 $N = max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，有

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即点列 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 点列。 □

该定理的逆命题不正确，考虑有理数集按绝对值距离构成的度量空间中的 Cauchy 点列。

Theorem 3.22. (X, ρ) 是一个度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的 *Cauchy* 点列。若它的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛，则其本身也收敛，并且极限相同。

Proof. 设 $\{x_{n_k}\}$ 极限为 x，则

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x)$$

对任意的 $\varepsilon > 0$，因为 x_{n_k} 收敛于 x，所以 $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}^+$，使得当 $k > N_1$ 时，有 $\rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$。又因 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列，因此 $\exists\, N_2 \in \mathbb{N}^+$，使得当 $n, k > N_2$ 时，有 $\rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$。取 $N = max\{N_1, N_2\}$，当 $n, k > N$ 时，即有

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ □

Theorem 3.23. *度量空间中的任何 Cauchy 点列都是有界的。*

Proof. 设 (X, ρ) 是一个度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列，则对任意的 $\varepsilon > 0$，$\exists\, N \in \mathbb{N}^+$，当 $n, m > N$ 时，有：

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

取 $m = N + 1$，令 $\alpha = \max\limits_{i=1,2,\ldots,N} \rho(x_m, x_i)$，$\delta = max\{\varepsilon, \alpha\}$，则 $\{x_n\}$ 中的所有点都在闭邻域 $\overline{U}(x_m, \delta)$ 中。由定义 3.22，$\{x_n\}$ 有界。 □

3.6.2 完备度量空间的定义

Definition 3.38. *(X, ρ) 是一个度量空间。若 X 中的任意 Cauchy 点列 $\{x_n\}$ 都收敛到 X 中的某一点，则称 X 是一个完备的 (complete) 度量空间。*

完备度量空间的等价定义

下列定理是 Cantor's Intersection Theorem 的一个变体：

Theorem 3.24 (闭球套定理)**.** *(X, ρ) 是一个度量空间。X 完备的充分必要条件为对任何满足下列条件的一列闭邻域 $\{E_n = \overline{U}(x_n, \delta_n)\}$：*

1. $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$

2. $\{\delta_n\} \to 0$

X 中都存在唯一的 x 满足 $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^+} E_n$。

Proof. 充分性：任取 X 中的一个 Cauchy 点列 $\{x_n\}$。因为 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 点列，所以对任意的 $\varepsilon > 0$，$\exists\, N \in \mathbb{N}^+$，$\forall\, n, m > N$，$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$。取 $\{N_k\}$ 使得 N_k 是使得 $\rho(x_m, x_n) < \dfrac{1}{2^k}$ 的临界条件，取 $x_{n_k} > N_k$，$x_{n_k+1} > N_{k+1}$，即可产生一个子列 $\{x_{n_k}\}$，满足：

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$$

取闭邻域列：

$$\left\{ E_k = \bar{U}\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}} \right) \right\}$$

显然：

$$\forall\, y \in E_{k+1},\ \rho(y, x_{n_k}) \leqslant \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

所以 $E_k \supset E_{k+1}$。由题目条件，此时存在唯一的 $x \in X$ 满足 $x \in E_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}^+$。下证 $\{x_n\} \to x$。

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \frac{1}{2^{k-1}}$$

因为 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 点列，因此当 n 和 k 足够大时，上式右端两项均趋于 0。因此 $\{x_n\} \to x$。由 $\{x_n\}$ 的任意性，X 是一个完备的度量空间。

必要性中的存在性：在每个 E_n 中取一点 y_n 构成点列 $\{y_n\}$。设 $m > n$，因为 $E_m \subset E_n$，所以 $y_m \in E_n$，于是有：

$$\rho(y_n, y_m) \leqslant \delta_n \to 0$$

因此 $\{y_n\}$ 是一个 Cauchy 点列。因为 X 完备，所以 $\{y_n\} \to x \in X$。对任意的 $n_0 \in \mathbb{N}^+$，当 $n > n_0$ 时，$y_n \in E_n \subset E_{n_0}$。又因为闭邻域 E_{n_0} 是闭集，因此 $x \in E_{n_0}$。由 n_0 的任意性，$x \in E_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$。

必要性中的唯一性：若还有一点 y 满足上述条件，则：

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, y_n) + \rho(y_n, y) \to 0$$

唯一性显然得证。 □

3.6.3 度量空间的完备化定理

Theorem 3.25. (X, ρ_X) 是一个度量空间，则一定存在一个完备度量空间 (Y, ρ_Y)，使得 X 与 Y 的一个稠密子空间等距同构，并且 Y 在等距同构的意义下是唯一的[4]。

证明太复杂，不提供。

3.7 完备度量空间的性质

3.7.1 子空间的完备性

Theorem 3.26. 完备度量空间 (X, ρ_X) 的子空间 M 是完备度量空间的充要条件为 M 是 X 中的一个闭子空间。

Proof. 必要性：因为 M 是完备子空间，则对任意的 $x \in M'$，存在 M 中的一个收敛点列 $\{x_n\} \to x$。因为收敛点列也是 Cauchy 点列，而此时 Cauchy 点列在 M 中收敛，所以 $x \in M$。由 x 的任意性，$M' \subset M$，故 M 是一个闭集，即 M 是 X 的一个闭子空间。

充分性：任取 $\{x_n\}$ 为 M 中的一个 Cauchy 点列，那么它也是 X 中的 Cauchy 点列，因此 $\exists\, x \in X$ 使得 $\{x_n\} \to x$，即 x 是 M 的一个聚点。又因 M 是 X 的一个闭子空间，所以

[4]这里的唯一性是指，如果存在另一个完备度量空间 (Z, ρ_Z) 使得 X 与 Z 的一个稠密子空间等距同构，则 Y 与 Z 等距同构。

$x \in M$，即 Cauchy 点列 $\{x_n\}$ 收敛于 M 中的一点。由 $\{x_n\}$ 的任意性，M 是完备的度量空间。 □

3.7.2 第一型集与第二型集

Definition 3.39. 设 A 是度量空间 (X, ρ) 的子集。若 A 可表示为至多可列个稀疏集的并，则称 A 是第一型集 *(set of first category)*。反之则为第二型集 *(set of second category)*。

Theorem 3.27. 任何完备的度量空间都是第二型集。

Proof. 假设不成立，即存在完备的度量空间 X 使得 X 是第一型集。也就是说 $X = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} F_i$，其中 F_i, $\forall\, i \in \mathbb{N}^+$ 是稀疏集。因为 F_1 是稀疏集，由稠密性等价定义 (2)，$\exists\, x_1 \in X$，使得闭邻域 $U(x_1, r_1)$ 中不含 F_1 中的点。对于闭邻域 $U(x_1, r_1)$，由于 F_2 是稀疏集，因此 $\exists\, x_2 \in U(x_1, r_1)$，使得闭邻域 $U(x_2, r_2)$ 中不含 F_2 中的点。如此重复下去，实际上可以取 $r_n \in (0, \frac{1}{n})$（对于某个固定的半径，在这个半径内交集为空，那么在更小的半径内交集也为空），便可以得到一个闭球套：

$$U(x_1, r_1) \supset U(x_2, r_2) \supset \cdots \supset U(x_n, r_n) \supset \cdots$$

且 $\{r_n\} \to 0$。由完备度量空间的闭球套定理，存在一个点 $x \in U(x_n, r_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$。而由闭球套的取法，$x \notin X$，矛盾。 □

3.7.3 准紧性与全有界性

准紧性的定义

Definition 3.40. (X, ρ) 是一个度量空间，A 是 X 的一个子集。如果 A 的每个点列都有一个收敛子列收敛于 X 中的某一点，则称 A 是准紧集 *(precompact set)*。

准紧集的性质

Property 3.7.1. 准紧集的子集也是准紧集。

全有界集的定义

Definition 3.41. (X, ρ) 是一个度量空间，A 和 B 都是 X 的子集，ε 是一个给定的正数。如果对任意的 $x \in A$，都 $\exists\, y \in B$，使得 $\rho(x, y) < \varepsilon$，则称 B 是 A 的一个 ε-网。即：以 B 中的点为中心，ε 为半径的所有开邻域的并包含了 A。

Definition 3.42. (X, ρ) 是一个度量空间，A 是 X 的子集。如果对任意的 $\varepsilon > 0$，X 中总存在 A 的 ε-网，且该 ε-网只有有限个点，则称 A 是全有界集 *(totally bounded set)*。

全有界集的性质

Property 3.7.2. 全有界集具有如下性质：

(1) 任何有限集都是全有界集。

(2) 全有界集的子集也是全有界集。

(3) 设 A 是一个全有界集，则对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在 A 的一个有限子集成为 A 的一个 ε-网。

(4) 全有界集有界且可分。

Proof. (1)(2) 是显然的。

(3) 因为 A 是一个全有界集，所以对任意的 $\varepsilon > 0$，存在一个 A 的 $\frac{\varepsilon}{2}$-网 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$。依次取 $a_i \in A$ 使得 $a_i \in U(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$，$i = 1, 2, \ldots, n$，则 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 即构成 A 的一个 ε-网：

$$\forall\, a \in U\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right),\ \rho(a, a_i) \leqslant \rho(a, x_i) + \rho(x_i, a_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

(4) 设 (X, ρ) 是给定的度量空间，A 是一个全有界集。由全有界集定义，A 应有一个 1-网 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$。则：

$$\forall\, a \in A,\ \exists\, x_k \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},\ \rho(a, x_k) < 1$$

故（下式中 x_k 是与点 a 对应的 1-网中的点）：

$$\forall\, a \in A,\ \rho(a, x_1) \leqslant \rho(a, x_k) + \rho(x_k, x_1) < 1 + \max_{k=1,2,\ldots,n} \rho(x_k, x_1)$$

记 $\max\limits_{k=1,2,\ldots,n} \rho(x_k, x_1) = K$，则 $\forall\, a \in A,\ a \in U(x_1, 1 + K)$，所以 A 是有界的。

因为 A 是一个全有界集，所以对任意的 $\varepsilon = \frac{1}{n}$，$n \in \mathbb{N}^+$，$X$ 中都存在 A 的一个只含有限个点的 ε-网 B_n。记：

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

显然 B 是可列的。对任意的 $x \in A$，$\exists\, x_n \in B_n \subset B$，$\rho(x, x_n) < \frac{1}{n}$，$\forall\, n \in \mathbb{N}^+$。因此点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x。由 x 的任意性和稠密性的等价命题 3，B 在 A 中稠密。综上，A 是可分的。 □

准紧性与全有界性的关系

以下定理说明了完备度量空间中准紧性与全有界性的关系，即二者在完备度量空间中是等价的：

Theorem 3.28. (X, ρ) 是一个度量空间。

(1) 如果 $A \subset X$ 准紧，则 A 全有界。

(2) 如果 X 是完备的，则当 A 全有界时，A 也必定准紧。

Proof. (1) 如果 A 不是全有界集，则 $\exists\, \varepsilon > 0$，使得 A 没有只有有限点的 ε-网。任取 $x_1 \in A$，则 $\exists\, x_2 \in A$ 使得 $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$，否则 $\{x_1\}$ 就是 A 的一个 ε-网。同理，$\exists\, x_3 \in A$ 使得 $\rho(x_3, x_j) \geqslant \varepsilon,\ j = 1, 2$，否则 $\{x_1, x_2\}$ 就是 A 的一个 ε-网。重复这一步骤就得到点列 $\{x_n\}$，当 $m \neq n$ 时，$\rho(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon$。由柯西收敛准则 $\{x_n\}$ 显然没有收敛的子列，这与 A 的准紧性矛盾。

(2) 任取 A 中的点列 $\{x_n\}$。如果 $\{x_n\}$ 中只有有限个互不相同的元素，则 $\{x_n\}$ 显然有收敛的子列。如果 $\{x_n\}$ 中有无限个互不相同的元素，记这些元素构成的集合为 B_0。由全有界集性质 (2)，B_0 也是全有界集。由全有界集性质 (3)，B_0 中存在有限个元素使得以它们为球心，$\frac{1}{2}$ 为半径的开邻域的并包含 B_0，显然 B_0 中至少存在一个点 y_1 使得以它为半径，$\frac{1}{2}$ 为半径的开邻域包含了无穷多个 A 中的点。记被 y_1 包含的这无穷多个点构成的集合为 B_1，显然 B_1 的直径小于 1。因为 B_1 是 B_0 的子集，所以 B_1 也是全有界的，重复上述论证，则存在 $B_2 \subset B_1$，使得 B_2 中含有 B_1 无穷多个元素且 B_2 的直径小于 $\frac{1}{2}$。依次类推，可以得到一系列集合满足如下条件：

1. $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$。
2. B_n 的直径小于 $\frac{1}{2^{n-1}}$。
3. 每个 B_n 中都含有 $\{x_n\}$ 中无限个元素。

取 $x_{n_k} \in B_k,\ n_{k+1} > n_k,\ k \in \mathbb{N}^+$，便得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$。显然 $\{x_{n_k}\}$ 是一个 Cauchy 点列：

$$\forall\, p > q,\ x_{n_p} \in B_p \subset B_q,\ \rho(x_{n_p}, x_{n_q}) < \frac{1}{2^{q-1}} \to 0$$

因为 X 完备，所以 $\{x_{n_k}\}$ 在 X 中收敛。由 $\{x_n\}$ 的任意性，A 准紧。 □

Corollary 3.2. 度量空间中的准紧集是有界且可分的。

Theorem 3.29. (X, ρ) 是完备的度量空间，$A \subset X$。A 为准紧集的充分必要条件是对任意的 $\varepsilon > 0$，A 都有准紧的 ε-网。

Proof. (1) 必要性：A 就是它自身的准紧的 ε-网。

(2) 充分性：若对任意的 $\varepsilon > 0$，A 都有准紧的 ε-网 B。因为 B 准紧，同时 X 完备，所以 B 全有界，即 B 有只有有限个元素的 ε-网 $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$。则：

$$\forall\, a \in A,\ \rho(a, c_i) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, c_i),\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$$

可以选取 c_i 和 $b \in B$ 使得 $\rho(a, b) < \varepsilon,\ \rho(b, c_i) < \varepsilon$（先选择 b，再根据 b 即可选得 c_i）。也就是说，$\forall\, a \in A,\ \exists\, c_i \in \{c_1, c_2, \ldots, c_n\},\ \rho(a, c_i) < 2\varepsilon$。以 $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ 中的点为中心，2ε 为半径构成的 2ε-网必然是 A 的一个 2ε-网。由 ε 的任意性，A 全有界。又因为 X 是完备的，所以 A 准紧。 □

3.7.4　压缩映射原理

不动点的定义

Definition 3.43. 若点 φ 在映射 T 的作用下满足 $T\varphi=\varphi$，则称 φ 是映射 T 的一个不动点 *(fixed point)*。

压缩映射的定义

Definition 3.44. (X,ρ) 是一个度量空间，T 是 X 到 X 的一个映射，如果存在一个数 α，$0\leqslant\alpha<1$，使得对任意的 $x,y\in X$，有：

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)$$

则称 T 是一个压缩映射 *(contraction mapping)*。

压缩映射原理

Theorem 3.30. (X,ρ) 是一个完备的度量空间，T 是 X 到 X 的一个压缩映射，那么 T 有且只有一个不动点。

Proof. (1) 存在性：任取 $x_0\in X$，令 $x_n=T^nx_0$，由此产生一个点列 $\{x_n\}$。下面我们来证明这个点列是一个 Cauchy 点列，它的极限就是一个不动点。

$$\begin{aligned}\rho(x_{m+1},x_m)&=\rho(Tx_m,Tx_{m-1})\leqslant\alpha\rho(x_m,x_{m+1})\\&=\cdots\\&=\alpha^{m-1}\rho(Tx_1,Tx_0)\leqslant\alpha^m\rho(x_1,x_0)\end{aligned}$$

取 $n>m$，由距离的三角不等式：

$$\begin{aligned}\rho(x_m,x_n)&\leqslant\rho(x_m,x_{m+1})+\cdots+\rho(x_{n-1},x_n)\\&\leqslant(\alpha^m+\alpha^{m+1}+\cdots+\alpha^{n-1})\rho(x_0,x_1)\\&=\alpha^m\frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha}\rho(x_0,x_1)\\&<\frac{\alpha^m}{1-\alpha}\rho(x_0,x_1)\end{aligned}$$

因为 $0\leqslant\alpha<1$，所以当 m 足够大的时候，$\rho(x_m,x_n)\to 0$，即 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列。又因为 X 完备，所以 $\{x_n\}\to x\in X$。由三角不等式：

$$\rho(x,Tx)\leqslant\rho(x,x_m)+\rho(x_m,Tx)\leqslant\rho(x,x_m)+\alpha\rho(x_{m-1},x)$$

当 $m\to+\infty$ 时上式右端趋于 0，因此 $\rho(x,Tx)=0$，即 $Tx=x$，T 存在一个不动点。

(2) 唯一性：假设 T 还有一个不动点 y，则

$$\rho(x,y)=\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)$$

因为 $0\leqslant\alpha<1$，所以 $\rho(x,y)=0$，即 $x=y$，唯一性得证。 □

压缩映射原理有一个推广：

Theorem 3.31. T 是完备度量空间 X 到自身的映射，如果存在常数 α 及自然数 n_0，$0\leqslant\alpha<1$，使得对任意 $x,y\in X$，有：

$$\rho(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\leqslant\alpha\rho(x,y)$$

那么 T 在 X 中有且只有一个不动点。

Proof. 存在性：T^{n_0} 满足压缩映射原理的条件，因此 T^{n_0} 有且只有一个不动点 x_0。下证 x_0 也是 T 在 X 中唯一的不动点。因为

$$T^{n_0}(Tx_0)=T^{n_0+1}x_0=T(T^{n_0}x_0)=Tx_0$$

所以 Tx_0 是 T^{n_0} 的一个不动点，由不动点的唯一性，$Tx_0=x_0$，所以 x_0 是 T 的一个不动点。

唯一性：若 T 存在另一个不动点 x_1，则

$$T^{n_0}x_1=T^{n_0-1}Tx_1=T^{n_0-1}x_1=\cdots=Tx_1=x_1$$

即 x_1 也是 T^{n_0} 的一个不动点，由 T^{n_0} 不动点的唯一性，$x_0=x_1$。 □

3.8 紧集与紧度量空间

Definition 3.45. (X,ρ) 是一个度量空间，A 是 X 的一个子集。如果 A 的每个点列都有一个收敛子列收敛于 A 中的某一点，则称 A 是紧集 *(compact set)*。若 X 是紧集，则称 X 是紧度量空间 *(compact metric space)*。

3.8.1 紧集的性质

Theorem 3.32. 度量空间中的紧集是有界且可分的。

Proof. 因为准紧集是有界可分的，且紧集必然是准紧集，所以紧集也是有界可分的。 □

3.8.2 紧度量空间的性质

完备性

Theorem 3.33. 任一度量空间中的紧集都是完备的。紧度量空间是完备度量空间。

Proof. 设 X 是一个紧集，$\{x_n\}$ 是 X 中的一个 Cauchy 点列。由紧集定义可得出 $\{x_n\}$ 存在收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$，设 $\{x_{n_k}\} \to a$，则：

$$\rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) \to 0$$

于是 $\{x_n\} \to a$。由 $\{x_n\}$ 的任意性，X 是完备的。 □

Theorem 3.34. (X, ρ) 是一个度量空间，$\{E_n\}$ 是 X 中的一列非空紧集，满足：

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \ldots$$

则 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \neq \varnothing$。

Proof. 在每个 E_n 中选择一点 x_n，构成序列 $\{x_n\}$。因为 $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$，$x_n \in E_n \subset E_1$，又 E_1 是紧集，所以 $\{x_n\}$ 存在子列 $\{x_{n_k}\} \to x_0 \in E_1$。对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，当 $n_k > n$ 时，有 $x_{n_k} \in E_{n_k} \subset E_n$，又因收敛点列必为 Cauchy 点列、$E_n$ 完备，所以 $x_0 \in E_n$。由 n 的任意性，$x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$，所以 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \neq \varnothing$。 □

3.8.3 紧集的充要条件

有限覆盖

Definition 3.46. (X, ρ) 是一个度量空间，A 是 X 的子集，$\{G_i\}_{i \in I}$（其中 I 是一个指标集）是 X 中某些开集组成的集族。如果：

$$A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$$

则称 $\{G_i\}_{i \in I}$ 为 A 的开覆盖 *(open cover)*。如果 I 是有限集，则称 $\{G_i\}_{i \in I}$ 为 A 的有限开覆盖 *(finite open cover)*。

Theorem 3.35 (有限覆盖定理). 度量空间 (X, ρ) 的子集 A 是紧集的充分必要条件是从 A 的任一开覆盖 $\{G_i\}_{i \in I}$ 中必可选出一个有限子覆盖。

Proof. (1) 必要性：先来证明 $\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in A,\ \exists\, i \in I,\ U(x, \varepsilon) \in G_i$。若不成立，则：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in A,\ \forall\, i \in I,\ U(x, \varepsilon) \notin G_i$$

依次选择 $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$，$n \in \mathbb{N}^+$，即可构造出序列 $\{x_n\}$ 满足其中的每个元素都不在任何 G_i 中。因为 A 是紧集，所以 $\{x_n\}$ 存在收敛于 A 中某点 x_0 的子列 $\{x_{n_k}\}$。又因为 $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} G_i$，所以 $\exists\, i \in I$，$x_0 \in G_i$。于是可取充分大的 k 使得 $U\left(x_{n_k}, \dfrac{1}{2^{n_k}}\right) \subset G_i$，这与 x_{n_k} 的取法矛盾。

记使上述命题成立的 $\varepsilon = \varepsilon_0$。因为 A 是紧集，则 A 也是全有界集，故能选择 A 中有限个点，使得对任意的 $\varepsilon > 0$，这有限个点的开 ε 邻域能够包含整个 A。取 $\varepsilon = \varepsilon_0$，此时只要对这有限个点的开邻域选择对应的 G_i，即可选出有限子覆盖。

(2) 充分性：设 $\{x_n\}$ 是 A 中的一个点列。如果 $\{x_n\}$ 没有子列在 A 中收敛，则：

$$\forall\, y \in A,\ \exists\, \delta_y > 0,\ \exists\, n_y \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > n_y,\ x_n \notin U(y, \delta_y)$$

显然 $\{U(y, \delta_y) : y \in A\} \supset A$，因此可以选择 A 中有限个点，分别记为 $y_1, y_2, \ldots, y_{n_0}$，使得 $\{U(y_i, \delta_y) : i = 1, 2, \ldots, n_0\} \supset A$。则当 $n \geqslant \max\{n_{y_1},\ n_{y_2}, \ldots, n_{y_{n_0}}\}$ 时，$x_n \notin A$，与 $\{x_n\} \in A$ 矛盾。 □

有限交

Definition 3.47. $\mathscr{F}$ 是度量空间 (X, ρ) 中的一个集族。如果从 $\mathscr{F}$ 中选择任意有限个集合，它们都有非空的交集，则称 $\mathscr{F}$ 具有有限交性质。

Theorem 3.36. 度量空间 (X, ρ) 的闭子集 A 是紧集的充分必要条件是 A 中具有有限交性质的闭子集族 $\mathscr{F}$ 有非空的交。

Proof. 设 $\mathscr{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ 是一个具有有限交性质的闭子集族。

(1) 必要性：假设该闭子集族的交集为空集。令 $G_i = X \backslash F_i$，则 $\{G_i\}_{i \in I}$ 为开集族。由：

$$\bigcup_{i \in I} G_i = \bigcup_{i \in I} (X \backslash F_i) = X \backslash \bigcap_{i \in I} F_i = X$$

可知 $\{G_i\}_{i \in I} \supset A$。因为 A 是紧集，所以可从 $\{G_i\}_{i \in I}$ 中选择出 A 的有限子覆盖 $\{G_{i_j}\}_{j=1}^{n}$。所以：

$$\bigcap_{j=1}^{n} F_j = \bigcap_{j=1}^{n} (X \backslash G_{i_j}) = X \backslash \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j} \subset X \backslash A$$

又因为 $F_{i_j} \subset A$，所以：

$$\bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} \subset A$$

综合上两式可得：

$$\bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} \subset (X \backslash A) \cap A = \varnothing$$

这与 $\mathscr{F}$ 具有有限交性质矛盾。

(2) 充分性：设闭集 A 中任一具有有限交性质的闭子集族具有非空的交。我们用有限覆盖定理来证明 A 是一个紧集。设 $\{G_i\}_{i \in I}$ 为 A 的任一开覆盖，令 $F_i = A \backslash G_i$，因为 A 是闭集，所以 F_i 也是闭集。因为：

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} (A \backslash G_i) = A \backslash \bigcup_{i \in I} G_i = \varnothing$$

所以，A 的闭子集族 $\{F_i\}_{i \in I}$ 不具有有限交性质，否则的话根据假设应有 $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \neq \varnothing$。于是存在有限子集族 $\{F_{i_j}\}_{j=1}^{n}$ 使得：

$$\bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} = \varnothing$$

它对应的开集族 $\{F_{i_j}\}_{j=1}^{n}$ 则满足：

$$\bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j} = \bigcup_{j=1}^{n} (A \backslash F_{i_j}) = A \backslash \bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} = A$$

即 $\{G_{i_j}\}$ 是 A 的一个有限开覆盖，于是 A 是紧集。 □

3.8.4 紧集上的连续映射

Theorem 3.37. 设 (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 为度量空间，A 是 X 中的紧集，T 是 A 到 Y 上的连续映射，则 TA 是 Y 中的紧集。

Proof. 设 $\{y_n\}$ 为 TA 中的一个点列，则有 X 中的点列 $\{x_n\}$ 使得 $y_n = Tx_n$，$n \in \mathbb{N}^+$。因为 A 是紧集，所以 $\{x_n\}$ 存在子列 $\{x_{n_k}\} \to x_0 \in A$。因为 T 连续，所以：

$$\lim_{k \to +\infty} y_{n_k} = \lim_{k \to +\infty} Tx_{n_k} = T\left(\lim_{k \to +\infty} x_{n_k}\right) = Tx_0 \in TA$$

所以 TA 是紧集。 □

Definition 3.48. 设 (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 为度量空间，T 是 X 到 Y 上的映射。若对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在只与 ε 有关的 $\delta > 0$，使得对任意的 $x, y \in X$，只要 $\rho_X(x, y) < \delta$，就有 $\rho_Y(Tx, Ty) < \varepsilon$，则称 T 在 X 上一致连续 *(uniformly continuous)*。

Corollary 3.3. 设 (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 为度量空间，A 是 X 中的紧集，T 是 A 到 Y 上的连续泛函，则：

1. T 在 A 上有界；
2. T 在 A 上可达到其上、下确界；
3. T 在 A 上一致连续。

Proof. (1) 由于 TA 是紧集，而紧集是全有界集，全有界集有界，所以 T 在 A 上有界。

(2) 因为 TA 是紧集，而紧集是完备的，所以 TA 是闭集，T 在 A 上可达到其上、下确界。

(3) 假设此时 T 不一致连续，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及点列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset A$，使得：

$$\rho_X(x_n, y_n) \to 0,\ \rho_Y(Tx_n, Ty_n) \geqslant \varepsilon_0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$$

因为 A 是紧集，所以 $\{x_n\}$ 存在子列 $\{x_{n_k}\} \to x_0 \in A$，即 $\rho_X(x_{n_k}, x_0) \to 0$，于是：

$$\rho_X(y_{n_k}, x_0) \leqslant \rho_X(y_{n_k}, x_{n_k}) + \rho_X(x_{n_k}, x_0) \to 0$$

因为 T 是连续的，所以：

$$\rho_Y(Tx_{n_k}, Tx_0) \to 0,\ \rho_Y(Ty_{n_k}, Tx_0) \to 0$$

于是

$$\rho_Y(Tx_{n_k}, Ty_{n_k}) \leqslant \rho_Y(Tx_{n_k}, Tx_0) + \rho_Y(Tx_0, Ty_{n_k}) \to 0$$

与第一个式子中的第二部分矛盾，所以 T 一致连续。 □

Chapter 4

实数序列

4.1 实数序列的上下极限

定义

Definition 4.1. 对于实数序列 $\{x_n\}$，我们将

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k = \sup_n \inf_{k\geqslant n} x_k$$

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k = \inf_n \sup_{k\geqslant n} x_k$$

分别称之为 $\{x_n\}$ 的下极限 *(lower limit)*和上极限 *(upper limit)*。

我们知道不是所有实数序列都有极限，但任意实数序列在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中都有上下极限。
不难注意到：

$$\inf_{k\geqslant n} x_k, \quad \sup_{k\geqslant n} x_k$$

分别为单调递增序列与单调递减序列，而单调序列在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中都存在极限、上下确界。

记得写完以后链接过来，并且在写上下确界与极限的时候就把无穷的情况并进去

4.1.1 上下极限与聚点的关系

聚点介于上下极限之间

Theorem 4.1. 实数序列 $\{x_n\}$ 的任何聚点 ξ 都介于 $\eta = \underline{\lim}\, x_n$ 和 $\zeta = \overline{\lim}\, x_n$ 之间。

Proof. 任取实数序列的一个聚点 ξ，由聚点定义可知，$\{x_n\}$ 中存在一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足：

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \xi$$

令：

$$y_k = \inf_{n\geqslant k} x_n, \quad z_k = \sup_{n\geqslant k} x_n$$

显然有：

$$y_k \leqslant x_{n_k} \leqslant z_k$$

因为 $n_k \geqslant k$，所以对上式取极限即为：

$$\eta \leqslant \xi \leqslant \zeta \qquad \square$$

上下极限也是聚点

Theorem 4.2. 实数序列 $\{x_n\}$ 的下极限 $\eta = \underline{\lim}\, x_n$ 和上极限 $\zeta = \overline{\lim}\, x_n$ 是其自身的两个聚点。

Proof. 下给出下极限的证明，上极限可类似得出。

若 $\{x_n\}$ 下方无界，则存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得：

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = -\infty$$

于是 $-\infty$ 成为实数序列 $\{x_n\}$ 的一个聚点。

当 $\{x_n\}$ 下方有界时，记：

$$y_k = \inf_{n\geqslant k} x_n$$

由下确界的定义可知，存在 x_{n_k} 满足：

$$y_k \leqslant x_{n_k} \leqslant y_k + \frac{1}{k}$$

对上式取极限即为：

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} y_k = \eta = \underline{\lim}\, x_n \qquad \square$$

4.1.2 上下极限与极限的关系

Theorem 4.3. 设 $\{x_n\}$ 是实数序列，则以下三条陈述互相等价：

1. $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \xi$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \xi$;
3. $\{x_n\}$ 只有一个聚点。

Proof. (2) → (3) 和 (3) → (1) 是显然的，下证 (1) → (2)。

令：

$$y_n = \inf_{k\geqslant n} x_k, \quad z_n = \sup_{k\geqslant n} x_k$$

则显然有：

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

又因为：

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = \xi$$

由夹逼定理可得：

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi \qquad \square$$

4.1.3 上下极限的大小

Theorem 4.4. 设 $\{x_n\}$ 是实数序列，

1. 如果 $\varliminf x_n > \lambda$，则 $\exists\, N \in \mathbb{N}^+$, $\forall\, n > N$, $x_n > \lambda$。

2. 如果 $\varliminf x_n < \rho$，则 $\forall\, N \in \mathbb{N}^+$, $\exists\, n > N$, $x_n < \rho$。

3. 如果 $\varlimsup x_n < \rho$，则 $\exists\, N \in \mathbb{N}^+$, $\forall\, n > N$, $x_n < \rho$。

4. 如果 $\varlimsup x_n > \lambda$，则 $\forall\, N \in \mathbb{N}^+$, $\exists\, n > N$, $x_n > \lambda$。

证明是容易的，利用上下极限定义中的 sup 和 inf 即可。同时从 $\mathbb{R}$ 的紧性来讲的话，上面这个定理也是很容易记住的。

4.1.4 上下极限的运算

Theorem 4.5. 设 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 都是实数序列，则只要以下各式等号或不等号两侧的式子都有意义，则式子成立。

1. 上下极限的加法运算：

$$
\begin{aligned}
\varliminf u_n + \varliminf v_n &\leqslant \varliminf (u_n + v_n) \\
&\leqslant \begin{cases} \varlimsup u_n + \varliminf v_k \\ \varliminf u_n + \varlimsup v_k \end{cases} \\
&\leqslant \varlimsup (u_n + v_n) \\
&\leqslant \varlimsup u_n + \varlimsup v_n
\end{aligned}
$$

2. 上下极限的减法运算：

$$
\begin{aligned}
-\varliminf u_n &= \varlimsup (-u_n) \\
-\varlimsup u_n &= \varliminf (-u_n)
\end{aligned}
$$

3. 上下极限的乘法运算：

$$
\begin{aligned}
\varliminf u_n \cdot \varliminf v_n &\leqslant \varliminf (u_n \cdot v_n) \\
&\leqslant \begin{cases} \varlimsup u_n \cdot \varliminf v_k \\ \varliminf u_n \cdot \varlimsup v_k \end{cases} \\
&\leqslant \varlimsup (u_n \cdot v_n) \\
&\leqslant \varlimsup u_n \cdot \varlimsup v_n
\end{aligned}
$$

4. 上下极限的分式运算（$\varliminf u_n > 0$）：

$$\frac{1}{\varliminf u_n} = \varlimsup \frac{1}{u_n}$$
$$\frac{1}{\varlimsup u_n} = \varliminf \frac{1}{u_n}$$

5. 上下极限与极限混合的加法运算（$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$）：

$$\varliminf(u_n + v_n) = u + \varliminf v_n$$
$$\varlimsup(u_n + v_n) = u + \varlimsup v_n$$

6. 上下极限与极限混合的乘法运算（$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u > 0,\ v_n \geqslant 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$）：

$$\varliminf(u_n \cdot v_n) = u \cdot \varliminf v_n$$
$$\varlimsup(u_n \cdot v_n) = u \cdot \varlimsup v_n$$

7. 上下极限的不等式性（$u_n \leqslant v_n$）：

$$\varliminf u_n \leqslant \varliminf v_n$$
$$\varlimsup u_n \leqslant \varlimsup v_n$$

有空证明

Chapter 5

数项级数

Definition 5.1. 设 $a_n \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}^+$。我们把记号：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为以 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 为项的级数 *(series)*。把 $\{S_n\}$：

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的部分和序列 *(sequence of partial sums)*。如果 $\{S_n\}$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，同时将级数的值记为 $\{S_n\}$ 的极限。

本章的目的即为讨论确定级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 敛散性的方法。

级数与序列的关系

级数和序列其实是相通的。我们通过部分和序列来定义级数的敛散性与级数的和，反过来，关于序列极限的问题也可以转化为级数的相应问题。具体来讲：

1. 序列 $\{a_n\}$ 的敛散性与级数 $a_1 + \sum\limits_{i=1}^{+\infty}(a_{i+1} - a_i)$ 的敛散性相同。

2. 序列 $\{a_n\} \to a$ 可以转化为级数 $a_1 + \sum\limits_{i=1}^{+\infty}(a_{i+1} - a_i) = a$。

级数的柯西收敛原理

可根据序列的 Cauchy 收敛原理给出如下级数的 Cauchy 收敛原理：

Theorem 5.1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件为：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n, m > N,\ m > n,\ \left|\sum_{i=n}^{m} a_i\right| < \varepsilon$$

绝对收敛与条件收敛

我们注意到，当级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 必定也收敛，这点可以由级数的 Cauchy 收敛原理及绝对值的三角不等式来证明。因此：

Definition 5.2. 对级数的收敛做如下划分：

(1) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛 *(absolute convergence)*。

(2) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 发散，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 条件收敛 *(conditional convergence)*。

如果一个级数的各项都是非负的，那么显然它的敛散性会更好讨论一点。故我们首先来讨论各项都非负的级数的敛散性问题，再去讨论任意项级数的敛散性问题。

在此之前先给出一个很容易证得的定理：

Theorem 5.2. 级数的运算满足线性性。

5.1 正项级数

Definition 5.3. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的每一项都是非负数，则称该级数为正项级数 *(positive series)*。

5.1.1 收敛原理

记得把单调序列的收敛原理放在这里

显然正项级数的部分和序列是单调递增序列。由单调序列的收敛原理，有如下定理：

Theorem 5.3. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件为它的部分和序列 $\{S_n\}$ 有上界。

5.1.2 比较判别法

以下方法我们称之为比较判别法 (comparison test)。

一般形式

Theorem 5.4. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 都是正项级数。

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛，且 $\exists\, N\in\mathbb{N}^+$, $\forall\, n>N$, $a_n\leqslant cb_n$, $c\in[0,+\infty)$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 也收敛。

2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散，且 $\exists\, N\in\mathbb{N}^+$, $\forall\, n>N$, $a_n\geqslant cb_n$, $c\in(0,+\infty]$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 也发散。

Proof. (1) 若条件得到满足，则：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} cb_n \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} cb_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n + c\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\end{aligned}$$

显然 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 有上界，因此收敛。

(2) 若此时 a_n 收敛，则：

$$\exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ b_n \leqslant \frac{1}{c}a_n,\ \frac{1}{c} \in [0, +\infty)$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 就应该收敛，矛盾。 □

极限形式

Theorem 5.5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都是正项级数。且有：

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \gamma,\ 0 \leqslant \gamma \leqslant +\infty$$

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛且 $\gamma < +\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散且 $\gamma > 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

Proof. (1) 若条件得到满足，取 $\varepsilon < +\infty$，则 $\exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N, a_n < (\gamma + \varepsilon)b_n$。

(2) 若条件得到满足，取 $\varepsilon < \frac{\gamma}{2}$，则 $\exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N, a_n > (\gamma - \varepsilon)b_n$。 □

5.1.3 Cauchy 根式判别法

以下定理我们称之为 Cauchy's根式判别法 (root test)。该判别法的实质其实就是将 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r^n$ 作比较。当 $r < 1$ 时，由收敛准则易证 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r^n$ 收敛。

一般形式

Theorem 5.6. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是正项级数。

1. 若 $\exists\, r<1$, $\exists\, N\in\mathbb{N}^+$, $\forall\, n>N$, $\sqrt[n]{a_n}<r$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛[1]。

2. 若对于无穷个 n 有 $\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

Proof. (1) 若条件满足，则 $\forall\, n>N$, $a_n<r^n$。由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

(2) 由条件，S_n-S_{n-1} 不趋向于 0，那么 $\{S_n\}$ 也就不收敛。 □

上下极限形式

Theorem 5.7. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是正项级数。且：

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n}=q$$

1. 若 $q<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

2. 若 $q>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

极限形式

Theorem 5.8. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是正项级数。且：

$$\lim\ \sqrt[n]{a_n}=q$$

1. 若 $q<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

2. 若 $q>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

5.1.4 比值判别法

Definition 5.4. 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$，如果 $\exists\, N\in\mathbb{N}^+$, $\forall\, n>N$, $a_n>0$，则称该级数为严格正项级数 *(strictly positive series)*。

针对严格正项级数的敛散性问题，有如下的比值判别法 (ratio test)。

Theorem 5.9. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 是严格正项级数。

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，且 $\exists\, N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时满足：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

---

[1] 思考能否去掉 r，直接写 $\sqrt[n]{a_n}<1$。

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛。

2. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散，且 $\exists N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时满足：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也发散。

Proof. (1) 由题目条件可得：

$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \leqslant \frac{b_{N+2}}{b_{N+1}}, \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \leqslant \frac{b_{N+3}}{b_{N+2}}, \cdots, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

作乘法即可得：

$$\frac{a_{n+1}}{a_{N+1}} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_{N+1}}$$

即：

$$a_{n+1} \leqslant \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} b_{n+1}, \forall n > N$$

由比较判别法即可得出 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

(2) 类似 (1)。 □

5.1.5 D'Alembert 判别法

以下定理我们称之为 D'Alembert 判别法。该判别法的实质其实就是将 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ 作比较。当 $r < 1$ 时，由收敛准则易证 $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ 收敛。

一般形式

Theorem 5.10. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是严格正项级数。

1. 若 $\exists r < 1, \exists N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时满足：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

2. 若 $\exists N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 满足[2]：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

[2]思考能否像柯西根式判别法一样写成对无穷个 n 都成立。

上下极限形式

Theorem 5.11. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是严格正项级数。

1. 如果：
$$\varlimsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

2. 如果：
$$\varliminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

极限形式

Theorem 5.12. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是严格正项级数。且：
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

1. 若 $q < 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

2. 若 $q > 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

D'Alembert 判别法与 Cauchy 根式判别法的比较

Theorem 5.13. *(1)* $\varlimsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \varlimsup \sqrt[n]{a_n} < 1$；*(2)* $\varliminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \varlimsup \sqrt[n]{a_n} > 1$。即能用 *D'Alembert* 判别法判别的，一定也能用 *Cauchy* 根式判别法判别。

Proof. 只需利用下列关系：
$$\begin{aligned}
\varliminf \frac{a_{n+1}}{a_n} &\leqslant \varliminf \sqrt[n]{a_n} \\
&\leqslant \varlimsup \sqrt[n]{a_n} \\
&\leqslant \varlimsup \frac{a_{n+1}}{a_n}
\end{aligned}$$
下给出证明。

(1) 设：
$$\varlimsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \xi$$
取 $\lambda > \xi$，则 $\exists\, N \in \mathbb{N}^+$, $\forall\, n > N$，使得：
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda$$

即有：

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}a_{N+1}} \\ &< \sqrt[n]{\lambda^{n-N-1}a_{N+1}} \\ &= \lambda^{1-\frac{N-1}{n}}\sqrt[n]{a_{N+1}}\end{aligned}$$

于是有：

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \lim_{n\to+\infty}\lambda^{1-\frac{N-1}{n}}\sqrt[n]{a_{N+1}} = \lambda$$

可以取 $\lambda\to\xi$，就有：

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \xi = \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(2) 设：

$$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \xi$$

取 $\lambda<\xi$，则 $\exists\, N\in\mathbb{N}^+,\ \forall\, n>N$，使得：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda$$

即有：

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}a_{N+1}} \\ &> \sqrt[n]{\lambda^{n-N-1}a_{N+1}} \\ &= \lambda^{1-\frac{N-1}{n}}\sqrt[n]{a_{N+1}}\end{aligned}$$

于是有：

$$\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \geqslant \lim_{n\to+\infty}\lambda^{1-\frac{N-1}{n}}\sqrt[n]{a_{N+1}} = \lambda$$

可以取 $\lambda\to\xi$，就有：

$$\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \geqslant \xi = \underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$ □

5.1.6 Cauchy 积分判别法

本节介绍 Cauchy’s积分判别法 (Integral test)。

Lemma 5.1. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负。记

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[F(n+1)-F(n)]$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 同收敛。

Proof. (1) 如果广义积分收敛，则：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}[F(i+1)-F(i)] &= \lim_{n\to+\infty}F(n+1)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_1^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此级数收敛。

(2) 如果级数收敛，对任意的 $H>0$，令 $N=[H]$（取整函数），则：

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{H\to+\infty}\int_1^{H}f(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \lim_{H\to+\infty}\int_1^{N+1}f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\int_1^{N+1}f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}[F(n+1)-F(n)]\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}[F(n+1)-F(n)]\end{aligned}$$

因此广义积分收敛。 □

Theorem 5.14. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调下降且非负，则级数：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)$$

与广义积分：

$$\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

同敛态。

Proof. (1) 如果广义积分收敛，则级数：

$$\sum_{n=2}^{+\infty}[F(n)-F(n-1)]$$

收敛，由 $f(x)$ 单调下降且非负，有：

$$f(n)\leqslant\int_{n-1}^{n}f(x)\,\mathrm{d}x=F(n)-F(n-1)$$

由比较判别法，级数收敛。

(2) 如果广义积分发散，则级数：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[F(n+1)-F(n)]$$

发散，由 $f(x)$ 单调下降且非负，有：

$$f(n) \geqslant \int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = F(n+1)-F(n)$$

由比较判别法，级数发散。 □

5.1.7 比较尺度问题

由柯西积分判别法，我们可以很容易地判断以下级数是否收敛：

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$。
2. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$。
3. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$。
4. $\cdots$

上述级数在 $p>1$ 时都收敛，反之发散。

我们会谈论比较尺度的问题，简单来讲就是说对于一个级数的敛散性问题，如果 a 判别法无法判别但 b 判别法可以，那么 b 的比较尺度应该是更加精细的。这个问题局限于判别法，但也不局限于判别法，如何理解呢？D'Alembert 判别法和 Raabe 判别法的背后其实都是比较判别法，方法是一样的，但选取的比较级数不一样，也带来了它们比较尺度的不一样。上面这句话不是很直观，我们来看上面提到的由柯西积分法带来的三个级数（其实不止三个，按照换元积分法的规则，可以利用的级数能够无穷无尽地写下去）。可以看出，越往下写，通项在 n 相同时就会变得越大。也就是说它的尺度会变得更精细，之前无法判断为收敛的现在可以了。

5.1.8 Raabe 判别法

以下定理我们称之为 Raabe 判别法。该判别法的实质其实就是将 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 作比较。当 $p>1$ 时，由 Cauchy 积分判别法易证 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 收敛。

一般形式

Theorem 5.15. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是严格正项级数。

1. 如果 $\exists q>1$, $\exists N\in\mathbb{N}^+$，使得对任意的 $n>N$ 有：

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant q$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛。

2. 如果 $\exists N\in\mathbb{N}^+$，使得对任意的 $n>N$ 有：

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散。

Proof. (1) 所给的条件等价于对任意的 $n>N$ 有：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant 1+\frac{q}{n}$$

取 $p\in\mathbb{R}$ 满足 $1<p<q$，取级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$，令 $b_n=\frac{1}{n^p}$。当 n 足够大的时候，有：

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}}&=\frac{(n+1)^p}{n^p}\\&=(1+\frac{1}{n})^p\\&=1+\frac{p}{n}+O(\frac{1}{n^2})\\&<1+\frac{q}{n}\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}\end{aligned}$$

由比值判别法可得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛。

(2) 所给的条件等价于对任意的 $n>N$ 有：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$$

由比值判别法可得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散。 □

上下极限形式

Theorem 5.16. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 是严格正项级数。

1. 如果：

$$\varliminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛。

2. 如果：

$$\overline{\lim} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

极限形式

Theorem 5.17. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是严格正项级数。且：

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=q$$

1. 若 $q>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。
2. 若 $q<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

5.1.9 Gauss 判别法

下面介绍 Gauss 判别法，它可以概括 D'Alembert 判别法与 Raabe 判别法，在比较尺度上能够达到 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 的精度。

Theorem 5.18. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是严格正项级数。若：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\nu}{n\ln n}+o(\frac{1}{n\ln n})$$

则：

1. 若 $\lambda>1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛；若 $\lambda<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散；
2. 若 $\lambda=1$，$\mu>1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛；若 $\lambda=1$，$\mu<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散；
3. 若 $\lambda=1$，$\mu=1$，$\nu>1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛；若 $\lambda=1$，$\mu=1$，$\nu<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

Proof. (1) 可以归结为 D'Alembert 判别法；(2) 可以归结为 Raabe 判别法；

(3) 我们以级数：

$$\sum_{n=2}^{+\infty} b_n=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$$

作为比较的尺度。计算可得：

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{(n+1)(\ln(n+1))^p}{n(\ln n)^p} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^p \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^p \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n\ln n}+o(\frac{1}{n\ln n})\right)^p \\ &= 1+\frac{1}{n}+\frac{p}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\end{aligned}$$

其中第三行到第四行利用了泰勒展开。

回归原级数，如果 $\lambda=\mu=1$，$\nu>1$，则可以选取 $p\in\mathbb{R}$，使得：

$$1<p<\nu$$

当 n 足够大的时候，就有：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant\frac{b_n}{b_{n+1}}$$

此时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛，由比值判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛。

如果 $\lambda=\mu=1$，$\nu<1$，则可以选取 $p\in\mathbb{R}$，使得：

$$\nu<p<1$$

当 n 足够大的时候，就有：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant\frac{b_n}{b_{n+1}}$$

此时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散，由比值判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散。 □

5.2 任意项级数

本节讨论任意项级数 (arbitrary series)，即不对各项的正负性做出要求的级数。

5.2.1 条件收敛的判别

Abel 引理

Lemma 5.2. 设 α_i,β_i，$i=1,2,\ldots,p$ 是实数，且：

$$B_k=\sum_{i=1}^{k}\beta_i,\ k=1,2,\ldots,p$$

则有：

1. $\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i = \sum\limits_{i=1}^{p-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_pB_p$

2. 如果 $\{\alpha_i\}$ 单调，并且有：

$$|B_k|\leqslant L,\ k=1,2,\ldots,p$$

那么就有：

$$\left|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i\right|\leqslant L\left(|\alpha_1|+2|\alpha_p|\right)$$

(1) 这个公式又称为阿贝尔变换 (Abel transformation)、分部求和公式 (summation by parts)。之所以被称之为分部求和公式，是因为它可以写为如下形式：

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\Delta B_i=\alpha_jB_j\Big|_{j=0}^{p}-\sum_{i=1}^{p-1}B_i\Delta\alpha_i$$

其中：

$$\begin{gathered}a_0=0,\quad B_0=0\\ \Delta B_k=B_k-B_{k-1}=\beta_k,\quad k=1,2,\ldots,p,\\ \Delta\alpha_i=\alpha_{i+1}-\alpha_i,\quad i=1,2,\ldots,p-1\end{gathered}$$

Proof. 记 $B_0=0$，于是有：

(1)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i&=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(B_i-B_{i-1})\\ &=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iB_i-\sum_{i=1}^{p}\alpha_iB_{i-1}\\ &=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iB_i-\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_{i+1}B_i\\ &=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iB_i-\sum_{i=1}^{p-1}\alpha_{i+1}B_i\\ &=\sum_{i=1}^{p-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_pB_p\end{aligned}$$

(2) 下第三行到第四行利用了 $\{\alpha_i\}$ 的单调性。

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{p-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_pB_p\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{p-1}|\alpha_i-\alpha_{i+1}|\,|B_i|+|\alpha_p|\,|B_p| \\
&\leqslant L\left(\sum_{i=1}^{p-1}|\alpha_i-\alpha_{i+1}|+|\alpha_p|\right) \\
&= L\left(|\alpha_1-\alpha_p|+|\alpha_p|\right) \\
&\leqslant L\left(|\alpha_1|+2|\alpha_p|\right)
\end{aligned}
$$

□

Dirichlet 判别法

Theorem 5.19. 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$，如果：

1. 序列 $\{a_n\}$ 单调收敛于 0；
2. 序列 $\{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\}$ 有界；

那么级数收敛。

Proof. 我们来估计：

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_ib_i\right|$$

令：

$$B_k=\sum_{i=1}^{n+k}b_i$$

因为序列 $\{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\}$ 有界，因此有：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_i\right|\leqslant L,\ n\in\mathbb{N}^+$$

也就有：

$$|B_k|=\left|\sum_{i=1}^{n+k}b_i-\sum_{i=1}^{n}b_i\right|\leqslant 2L$$

因为 $\{\alpha_i\}$ 单调，于是：

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_ib_i\right|\leqslant 2L(|\alpha_{n+1}|+2|\alpha_{n+p}|)$$

又因为 $\{\alpha_i\} \to 0$，显然对任意的 $\varepsilon > 0$，当 n 足够大时可以有：

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| < \varepsilon$$

由 Cauchy 收敛准则，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛。 □

Abel 判别法

Theorem 5.20. 对于级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$，如果：

1. 序列 $\{a_n\}$ 单调有界；
2. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛；

那么级数收敛。

Proof. 因为 $\{a_n\}$ 单调有界，由实数序列的单调收敛原理，可以设：

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$$

则序列 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0。又因级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，所以序列 $\{\sum_{i=1}^{n} b_i\}$ 有界。由 Dirichlet 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a) b_n$ 收敛。又因为级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a b_n$ 收敛，而：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n - a) b_n + a b_n] = \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n - a) b_n] + \sum_{n=1}^{+\infty} a b_n$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛。 □

Leibniz 判别法

Theorem 5.21. 设序列 $\{a_n\}$ 单调且收敛于 0，则以下级数收敛：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

Proof. 使用 Dirichlet 判别法可直接证得。 □

5.3 收敛级数的性质

5.3.1 收敛级数的可结合性

Theorem 5.22. 设有收敛级数：

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

如果把这个级数的若干个相继的项归并为一项，即将该级数变为如下形式：

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+(a_{n_k+1}+a_{n_k+2}+\cdots+a_{n_{k+1}})+\cdots$$

则结合后的级数仍然收敛，且与原级数有相等的和。

Proof. 结合后级数的部分和序列是原级数部分和序列的子列。 □

如果原级数为定号级数（即正项级数或负项级数），逆命题也成立。若不定号，考虑级数：

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

这个级数当然是收敛的，但级数：

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

显然还是发散的。

5.3.2 绝对收敛级数的性质

可交换性

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 是一个级数，我们对其进行重排，即把该序列中的所有项无重复、无遗漏地改变一个顺序重新排出来。用符号表示即为：

$$\alpha_n^{'}=\alpha_{\varphi(n)}$$

其中 φ 是一个从 $\mathbb{N}^+$ 到 $\mathbb{N}^+$ 的双射。

Theorem 5.23. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛，则重排后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^{'}$ 也绝对收敛，并且二者值相等。

Proof. 我们先来讨论正项级数，再来讨论任意项级数：

(1) 正项级数：

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为绝对收敛的正项级数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^{'}$ 也是一个正项级数。由题目条件，显然可得：

$$\sum_{n=1}^{N}a_n^{'}\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}a_n,\ \forall\ N\in\mathbb{N}^+$$

由正项级数的收敛原理，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^{'}$ 收敛。由极限的不等式性也有：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^{'}\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$$

反之，可认为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是由级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{'}$ 重排后的结果，因此也可得到：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{'}$$

于是：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{'}$$

(2) 任意项级数：设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为绝对收敛的任意项级数。令：

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2},\ q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2},\ n \in \mathbb{N}^+$$

显然有：

$$0 \leqslant p_n \leqslant |a_n|,\ 0 \leqslant q_n \leqslant |a_n|,\ n \in \mathbb{N}^+$$

取比较级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$，由正项级数的比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ 都是正项收敛级数。由 (1)，任意重排后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n^{'}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n^{'}$ 也都收敛，并且有：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n^{'} = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} q_n^{'} = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n$$

因此级数：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n^{'}| = \sum_{n=1}^{+\infty} (p_n^{'} - q_n^{'})$$

由级数的线性运算也收敛，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{'}$ 绝对收敛，并且有：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{'} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (p_n^{'} - q_n^{'}) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n^{'} - \sum_{n=1}^{+\infty} q_n^{'} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - \sum_{n=1}^{+\infty} q_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (p_n - q_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n
\end{aligned}$$

第一行到第二行利用级数的线性运算，第二行到第三行利用 (1) 的结果，第三行到第四行再次利用级数的线性运算。 □

条件收敛级数并不满足可交换性

Theorem 5.24. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是一个条件收敛级数，则对任意的 $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$，都存在 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的一个重排级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{'}$，使：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{'} = \xi$$

Proof. (1) 对于 $\xi \in \mathbb{R}$：

令：

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2},\ q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2},\ n \in \mathbb{N}^+$$

显然 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ 都是正项级数，并且有：

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n| + a_n}{2} = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n| - a_n}{2} = 0$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n| + a_n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n| - a_n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$$

前两个公式可由 Cauchy 收敛准则的必要性推得。接下来来考察序列：

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

令 P_n 表示这个序列中第 n 个非负项，以 Q_n 表示其中第 n 个负项的绝对值。则 $\{P_n\}$ 是 $\{p_n\}$ 去除一部分值为 0 的项后剩下的子序列（去除的是 $a_n \leqslant 0$ 导致 $p_n = 0$ 的项），$\{Q_n\}$ 是 $\{q_n\}$ 去除所有值为 0 的项后剩下的子序列（即 $a_n \geqslant 0$ 导致 $q_n = 0$ 的项）。由 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 作为实数序列与作为级数项的收敛性，可得到：

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} Q_n = 0$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_n = \sum_{n=1}^{+\infty} Q_n = +\infty$$

同时注意到，$\{P_n\}$ 与 $\{-Q_n\}$ 的各项其实都是原本 $\{a_n\}$ 中的某项。我们依次考察 $P_1, P_2, \ldots$ 中的各项，设 P_{m_1} 是第一个满足以下条件的项（存在性由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P_n = +\infty$ 保证）：

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_{m_1} > \xi$$

再依次考察 $Q_1, Q_2, \ldots$ 中的各项，设 Q_{n_1} 是第一个满足以下条件的项（存在性由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Q_n = +\infty$ 保证）：

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - Q_2 - \cdots - Q_{n_1} < \xi$$

再考虑考察 $P_{m_1+1}, P_{m_1+2}, \ldots$ 中的各项，设 P_{m_2} 是第一个满足以下条件的项：

$$\begin{gathered}P_1+P_2+\cdots+P_{m_1}-Q_1-Q_2-\cdots-Q_{n_1}\\+P_{m_1+1}+P_{m_1+2}+\cdots+P_{m_2}>\xi\end{gathered}$$

不断重复下去，我们可以得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的一个重排级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n'$：

$$\begin{gathered}P_1+P_2+\cdots+P_{m_1}-Q_1-Q_2-\cdots-Q_{n_1}\\+P_{m_1+1}+P_{m_1+2}+\cdots+P_{m_2}-Q_{n_1+1}-Q_{n_1+2}-\cdots-Q_{n_2}\\ \vdots\end{gathered}$$

令 R_k 和 L_k 分别表示级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n'$ 末项为 P_{m_k} 的部分和与末项为 Q_{n_k} 的部分和，则由：

$$\begin{gathered}|R_k-\xi|\leqslant P_{m_k},\ k=2,3,\ldots,\\|L_k-\xi|\leqslant Q_{n_k},\ k=1,2,3,\ldots,\end{gathered}$$

而：

$$\lim_{n\to+\infty} P_{m_k}=\lim_{n\to+\infty} Q_{n_k}=0$$

所以：

$$\lim_{n\to+\infty} R_k=\lim_{n\to+\infty} L_k=\xi$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n'$ 的任意一个部分和 S_n' 必定介于一对 R_k 和 L_k 之间（因为 P_{m_k} 和 Q_{n_k} 都是取的第一个满足条件的），且随着 n 的增大，可以让 k 也随之增大直至无穷。因此由夹逼定理：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'=\xi$$

(2) 对于 ξ 为正无穷或负无穷的情况，仅对正无穷情况进行讨论，负无穷类似：

任取一个单调上升且趋于无穷的实数数列 $\{\xi_n\}$。沿用 (1) 中的记号。设 P_{m_1} 是第一个满足以下条件的项（存在性由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P_n=+\infty$ 保证）：

$$P_1+P_2+\cdots+P_{m_1}>\xi_1$$

再依次考察 $Q_1, Q_2, \ldots$ 中的各项，设 Q_{n_1} 是第一个满足以下条件的项（存在性由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Q_n=+\infty$ 保证）：

$$P_1+P_2+\cdots+P_{m_1}-Q_1-Q_2-\cdots-Q_{n_1}<\xi_1$$

再考虑考察 $P_{m_1+1}, P_{m_1+2}, \ldots$ 中的各项，设 P_{m_2} 是第一个满足以下条件的项：

$$\begin{gathered}P_1+P_2+\cdots+P_{m_1}-Q_1-Q_2-\cdots-Q_{n_1}\\+P_{m_1+1}+P_{m_1+2}+\cdots+P_{m_2}>\xi_2\end{gathered}$$

不断重复下去，我们可以得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的一个重排级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{'}$：

$$\begin{gathered}P_1+P_2+\cdots+P_{m_1}-Q_1-Q_2-\cdots-Q_{n_1}\\+P_{m_1+1}+P_{m_1+2}+\cdots+P_{m_2}-Q_{n_1+1}-Q_{n_1+2}-\cdots-Q_{n_2}\\\vdots\end{gathered}$$

而这个重排级数显然满足：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{'}=+\infty$$

□

5.4 级数乘法

本节介绍级数乘法 (series multiplication)。

对于两个无穷级数：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

它们的乘积可以写作如下形式：

$$\begin{matrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots\\a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots\\\vdots & \vdots & \vdots & \\a_ib_1 & a_ib_2 & a_ib_3 & \cdots\\\vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

这些数可以用很多种方式排成数列。

我们称以下排列方式为三角形排列：

$$a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_1b_3,a_2b_2,a_3b_1,a_1b_4\ldots$$

称以下排列方式为正方形排列：

$$a_1b_1,a_1b_2,a_2b_2,a_2b_1,a_1b_3,a_2b_3,a_3b_3\ldots$$

Theorem 5.25. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 绝对收敛，并且：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n=A,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n=B$$

则这两个级数的无穷乘积中的元素 a_ib_j 按任意方式排列成的级数都是绝对收敛的，并且其和为 AB。

Proof. 设 $a_{i_k}b_{j_k}$，$k \in \mathbb{N}^+$ 是 a_ib_j，$i, j \in \mathbb{N}^+$ 的任意一种排列。把 $i_1, i_2, \ldots, i_n$，$j_1, j_2, \ldots, j_n$ 中最大的记为 N，则：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |a_{i_k}b_{j_k}| &\leqslant \sum_{i=1}^{N} |a_i| \sum_{j=1}^{N} |b_j| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| \sum_{j=1}^{+\infty} |b_j|\end{aligned}$$

由极限的不等式性：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{i_k}b_{j_k}$$

绝对收敛。按正方形形式重排该级数可得到：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{i_k}b_{j_k} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{+\infty} b_i\right) \\ &= AB\end{aligned}$$

□

Chapter 6

广义积分

我们之前讨论了作为积分和的极限的定积分：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{|P|\to 0} \sigma(f, P, \xi)$$

为了构造积分和，需要限制积分区间 $[a, b]$ 是有界的；为了积分和具有有穷的极限，又必须限制被积函数 f 是有界的。

本章将从两方面突破原有的限制，去讨论广义积分 (improper integral)，即讨论具有无穷积分限的积分（无穷限积分）以及无界函数的积分（瑕积分）。

6.1 无穷限积分

6.1.1 无穷限积分的定义

单侧无穷限

Definition 6.1. 设函数 f 在 $[a, +\infty]$ 上（或在 $[-\infty, b]$ 上）有定义，并且对任意 $H > a$（或 $H' < b$），f 在 $[a, H]$ 上（或在 $[H', b]$ 上）可积。如果存在有穷极限：

$$\lim_{H\to+\infty} \int_a^H f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\lim_{H'\to-\infty} \int_{H'}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

则称 f 在 $[a, +\infty]$（或 $[-\infty, b]$）上广义可积，或者说无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$（或 $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$）收敛，并记：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{H\to+\infty} \int_a^H f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{H'\to-\infty} \int_{H'}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

若不存在有穷极限，则称无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$（或 $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$）发散。

双侧无穷限

Definition 6.2. 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上有定义。如果 $\exists\, c \in \mathbb{R}$，使得下列两个积分：

$$\int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

都收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，并定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

实际上，所定义的积分值并不依赖于 c 的选择。

Proof. 若对于某个 c，$\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则对任意的 $c'\in\mathbb{R}$，有：

$$\int_{c'}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{c'}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛。同理 $\int_{-\infty}^{c'} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，并且有：

$$\int_{-\infty}^{c'} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{c'} f(x)\,\mathrm{d}x$$

于是：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{c'} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c'}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{c'} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c'}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

双侧无穷限的柯西主值

Definition 6.3. 如果极限：

$$\lim_{H\to+\infty}\int_{-H}^{H} f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，则称无穷限积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 在柯西主值意义下收敛，称上述极限为无穷限积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的柯西主值，记为：

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{H\to+\infty}\int_{-H}^{H} f(x)\,\mathrm{d}x$$

6.1.2 无穷限积分的计算

单侧无穷限

Theorem 6.1. 设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上（或在 $(-\infty,b]$ 上）有定义并且连续，而函数 F 是 f 在 $[a,+\infty)$ 上的（或在 $(-\infty,b]$ 上的）原函数，如果存在（有穷或无穷的）极限：

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)\quad\left(F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)\right)$$

那么就有：

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_{a}^{+\infty}$$
$$\left[\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(-\infty)=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}\right]$$

Proof. 对任意 $H > a$（或 $H' < b$），有：

$$\int_a^H f(x)\,\mathrm{d}x = F(H) - F(a) \quad \left(\int_{H'}^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(H')\right)$$

取 $H \to +\infty$（或 $H' \to -\infty$）可得：

$$\lim_{H\to+\infty}\int_a^H f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{H\to+\infty} F(H) - F(a) \quad \left[\lim_{H'\to-\infty}\int_{H'}^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{H'\to-\infty} F(H')\right]$$

即：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$
$$\left[\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^b\right]$$

□

双侧无穷限

Theorem 6.2. 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上有定义并且连续，而函数 F 是 f 在 $\mathbb{R}$ 上的原函数，如果存在极限：

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) \quad F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

且 $F(+\infty) - F(-\infty)$ 有意义，那么就有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

Proof. 由双侧无穷限积分的定义，$\exists\, c \in \mathbb{R}$ 使得：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F(c) - F(-\infty) + F(+\infty) - F(c) \\ &= F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\end{aligned}$$

□

6.1.3 无穷限积分的收敛原理

仅讨论 $[a, +\infty)$ 上的情况。

Theorem 6.3. 无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件为：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \Delta > 0,\ \forall\, H' \geqslant H > \Delta,\ \left|\int_H^{H'} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

Proof. 按照无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的定义，它是函数：

$$\Phi(H) = \int_a^H f(x)\,\mathrm{d}x$$

在 $H \to +\infty$ 时的极限，由函数极限的收敛原理即可得到无穷限积分的收敛原理。 □

绝对收敛与条件收敛

我们注意到，当无穷限积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛时，无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 必定也收敛，这点可以由无穷限积分的收敛原理来证明。

Definition 6.4. 如果无穷限积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，则称无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛；如果无穷限积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散，但无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则称无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛。

6.1.4 无穷限积分敛散性的判别法

仅讨论 $[a,+\infty)$ 上的情况。

绝对收敛

Theorem 6.4. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义，在其任何闭子区间 $[a,H]$ 上可积，并且有：

$$\exists\,\Delta > a,\ \forall\,x \in [\Delta,+\infty),\ |f(x)| \leqslant g(x)$$

若无穷限积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，那么无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛。

Proof. 因为非负函数 $g(x)$ 的无穷限积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，由无穷限积分的收敛原理可得：

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\Delta > 0,\ \forall\,H' \geqslant H > \Delta,\ \int_H^{H'} g(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

于是：

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\Delta > 0,\ \forall\,H' \geqslant H > \Delta,\ \int_H^{H'} |f(x)|\,\mathrm{d}x \int_H^{H'} g(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

由收敛原理，无穷限积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，即 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛。 □

条件收敛

Theorem 6.5 (Dirichlet 判别法)**.** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义，在其任何闭子区间 $[a,H]$ 上可积，并且有：

1. $\exists\,\Delta > a$ 使得 $f(x)$ 在 $[\Delta,+\infty)$ 上单调，同时：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

2. $\exists\,K \geqslant 0$ 使得：

$$\forall\,x \in [a,+\infty),\ \left|\int_a^H g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant K$$

那么积分：

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛。

Proof. 对充分大的 H 和 H'，我们来估计：

$$\left|\int_H^{H'} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

因为 $f(x)$ 在 $[\Delta,+\infty)$ 上单调，所以当 H 和 H' 充分大时，$f(x)$ 在 $[H,H']$ 上单调，又因为 $g(x)$ 在 $[H,H']$ 上可积，由第二中值定理可得：

$$\exists\,\xi\in[H,H'],\ \int_H^{H'} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(H)\int_H^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x + f(H')\int_{\xi}^{H'} g(x)\,\mathrm{d}x$$

由 $g(x)$ 积分的有界性可得：

$$\left|\int_H^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{H} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^{H} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2K$$

同理可得：

$$\left|\int_{\xi}^{H'} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2K$$

于是：

$$\begin{aligned}
\left|\int_H^{H'} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|f(H)\int_H^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x + f(H')\int_{\xi}^{H'} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|f(H)\int_H^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|f(H')\int_{\xi}^{H'} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= |f(H)|\left|\int_H^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x\right| + |f(H')|\left|\int_{\xi}^{H'} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant 2K[|f(H)| + |f(H')|]
\end{aligned}$$

因为：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

所以：

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,M>0,\ \forall\,H,H'>M,\ |f(H)|<\frac{\varepsilon}{4K},\ |f(H')|<\frac{\varepsilon}{4K}$$

于是：

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,M>0,\ \forall\,H,H'>M,\ \left|\int_H^{H'} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

由无穷限积分的收敛原理，$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。 □

Theorem 6.6 (Abel 判别法)**.** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义，在其任何闭子区间 $[a,H]$ 上可积，并且有：

1. $\exists\,\Delta>a$ 使得 $f(x)$ 在 $[\Delta,+\infty)$ 上单调并且有界；

2. $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

那么积分：

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛。

Proof. 因为 $f(x)$ 在 $[\Delta,+\infty)$ 上单调有界，所以 $f(x)$ 有有穷的极限：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

那么函数 $f(x)-l$ 在 $[\Delta,+\infty)$ 上单调趋于 0。因为 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\exists\, K \geqslant 0$ 使得：

$$\forall\, x \in [a,+\infty),\ \left|\int_a^H g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant K$$

由 Dirichlet 判别法，无穷限积分：

$$\int_a^{+\infty} [f(x)-l]g(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛。因为 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\int_a^{+\infty} lg(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，于是：

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} [f(x)-l]g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} lg(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛。 □

6.2 瑕积分

Definition 6.5. 若函数 f 在 a 点邻近无界，则称 a 为 f 的瑕点。

6.2.1 瑕积分的定义

瑕点单侧

Definition 6.6. 设函数 f 在 $[a,b)$ 上（或在 $(a,b]$ 上）有定义，并设对任何的 $0<\eta<b-a$，f 在 $[a,b-\eta]$ 上（或在 $[a+\eta,b]$ 上）可积，如果存在有穷极限：

$$\lim_{\eta\to0+}\int_a^{b-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\lim_{\eta\to0+}\int_{a+\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

则称 f 在 $[a,b)$ 上（或在 $(a,b]$ 上）广义可积，或者说积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，并定义：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0+}\int_a^{b-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0+}\int_{a+\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

瑕点双侧

Definition 6.7. 设 $a < c < b$，函数 f 在 $[a,c)$ 和 $(c,b]$ 上有定义，并且对任何 $0 < \eta < c-a$，$0 < \eta' < b-c$，f 在 $[a,c-\eta]$ 和 $[c+\eta',b]$ 上都可积。如果下列两个积分：

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

都收敛，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，并定义：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

瑕点双侧的柯西主值

Definition 6.8. 如果极限：

$$\lim_{\eta\to 0+}\left(\int_a^{c-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\eta}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

存在，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 在柯西主值意义下收敛，称上述极限为瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的柯西主值，记为：

$$VP\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0+}\left(\int_a^{c-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\eta}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

6.2.2 瑕积分的计算

6.2.3 瑕积分的收敛原理

仅讨论 $[a,b)$ 上的情况。

Theorem 6.7. 瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件为：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, \eta,\eta',\ 0 < \eta' < \eta < \delta,\ \left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

Proof. 按照瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的定义，它是函数：

$$\Phi(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x$$

在 $\eta \to 0+$ 时的极限，由函数极限的收敛原理即可得到无穷限积分的收敛原理。 □

绝对收敛与条件收敛

我们注意到，当瑕积分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛时，瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 必定也收敛，这点可以由瑕积分的收敛原理来证明。

Definition 6.9. 如果瑕积分积分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛；如果瑕积分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散，但瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛。

6.2.4 瑕积分敛散性的判别法

仅讨论 $[a, b)$ 上的情况。

绝对收敛

Theorem 6.8. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上有定义，在其任何闭子区间 $[a, b-\eta]$ 上可积，并且有：

$$\exists\, \delta > a,\ \forall\, x \in [b-\delta, b),\ |f(x)| \leqslant g(x)$$

若瑕积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，那么瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛。

Chapter 7

函数序列与函数项级数

本章讨论各项都是 x 的函数的序列：

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$$

同时也讨论各项都是 x 的函数的级数：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

Definition 7.1. 使得函数序列或函数项级数收敛的 x 的集合，被称为序列或级数的收敛域 *(domian of convergence)*。

7.1 函数序列的收敛

7.1.1 逐点收敛

极限函数的定义

Definition 7.2. 设 $D \subset \mathbb{R}$。如果函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的收敛域包含了 D，那么：

$$\forall\, x \in D,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$$

可以定义一个函数：

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x),\ f : D \to \mathbb{R}$$

我们把函数 f 称之为函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集合 D 上的极限函数 *(limit function)*。

函数序列逐点收敛的定义

Definition 7.3. 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集合 E 上逐点收敛 *(pointwise convergence)* 于函数 $f(x)$ 是指：

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

7.1.2 一致收敛

函数序列一致收敛的定义

Definition 7.4. 设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集合 E 上逐点收敛于函数 $f(x)$。如果：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ \forall\, x \in E,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集合 E 上一致收敛 *(uniform convergence)*于函数 $f(x)$，记为：

$$f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} f(x) \quad (n \to +\infty)$$

函数序列一致收敛的等价叙述

Theorem 7.1. 设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集合 E 上逐点收敛于函数 $f(x)$。记：

$$\rho(f_n(x), f(x)) = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$$

则以下三条陈述等价：

1. 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集合 E 上一致收敛于函数 $f(x)$。
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho(f_n(x), f(x)) = 0$。
3. 对任何序列 $\{x_n\} \subset E$，都有：
$$\lim_{n \to +\infty} [f_n(x_n) - f(x_n)] = 0$$

Proof. (1) → (2) 和 (2) → (3) 是显然的。下证 (3) → (1)：

假设 (1) 不成立，则

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+,\ \exists\, n > N,\ \exists\, x \in E,\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$$

取一个固定地 $\varepsilon > 0$，令 $n_0 = 0$，则 $\exists\, n_k \in \mathbb{N}^+$，$n_k > n_{k-1} + 1$，且 $x_{n_k} \in E$，使得：

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geqslant \varepsilon$$

显然 $\{x_{n_k}\}$ 这个序列不满足 (3) 的条件，矛盾。 □

函数序列一致收敛的柯西原理

以上判别一个函数列是否一致收敛到一个极限函数的方法都需要提前求出极限函数，而以下柯西原理则不需要提前知道极限函数的形式：

Theorem 7.2. 设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的各项在集合 E 上都有定义，则这个函数序列在 E 上一致收敛于某个极限函数的充要条件是：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n, m > N,\ m > n,\ \forall\, x \in E,\ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Proof. 必要性：由三角不等式是显然的。

充分性：由条件，对任意的 $x \in E$，$f_n(x)$ 构成一个 $\mathbb{R}$ 上的柯西序列，因此可定义一个极限函数：

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x), \forall\, x \in E$$

同时，由题目条件可得：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ \forall\, p \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, x \in E,\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

在上式中取 $p \to +\infty$ 即可得到：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ \forall\, x \in E,\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

即 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$。 □

7.2　函数项级数的收敛

7.2.1　逐点收敛

函数项级数逐点收敛的定义

Definition 7.5. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在集合 E 上逐点收敛于函数 $f(x)$ 是指：

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ \left|\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

7.2.2　一致收敛

函数项级数一致收敛的定义

Definition 7.6. 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在集合 E 上逐点收敛于函数 $f(x)$。如果：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ \forall\, x \in E,\ \left|\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在集合 E 上一致收敛于函数 $f(x)$。

函数项级数一致收敛的柯西原理

Theorem 7.3. 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在集合 E 上有定义，则这个函数序列在 E 上一致收敛于某个极限函数的充要条件是：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n, m > N,\ m > n,\ \forall\, x \in E,\ \left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right| < \varepsilon$$

Proof. 必要性：由三角不等式是显然的。

充分性：由条件，对任意的 $x \in E$，$\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$ 构成一个 $\mathbb{R}$ 上的柯西序列，因此可定义一个极限函数 $f(x)$ 使得：

$$\forall\, x \in E,\ f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

同时，由题目条件可得：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ \forall\, p \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, x \in E,\ \left|\sum_{i=1}^{n+p} f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right| < \varepsilon$$

在上式中取 $p \to +\infty$ 即可得到：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ \forall\, x \in E,\ |f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)| \leqslant \varepsilon$$

即函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$。 □

Corollary 7.1. 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ 在集合 E 上一致收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在集合 E 上也一致收敛。

Proof. 由三角不等式即可证得。 □

请注意这里没有说二者一致收敛的对象是一样的!!!

函数项级数绝对一致收敛的判别法

Theorem 7.4 (Weierstrass 判别法)**.** 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在集合 E 上有定义。如果存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$，满足：

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, x \in E,\ |f_n(x)| \leqslant x_n$$

则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在集合 E 上绝对一致收敛。称正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 为优级数。

Proof. 因为数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛，所以：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n, m > N,\ m > n,\ \left|\sum_{i=n+1}^{m} x_i\right| = \sum_{i=n+1}^{m} x_i < \varepsilon$$

也就有：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n, m > N,\ m > n,\ \forall\, x \in E,\ \sum_{i=n+1}^{m} |f_n(x)| \leqslant \sum_{i=n+1}^{m} x_i < \varepsilon$$

由函数项级数收敛的柯西原理，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ 一致收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 绝对一致收敛。 □

函数项级数条件一致收敛的判别法

Theorem 7.5 (Dirichlet 判别法). 对函数项级数：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x), \quad x \in E$$

如果：

1. 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 对每个取定的 $x \in E$ 都是单调的，并且该函数序列在 E 上一致地趋于 0；
2. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ 的部分和序列在 E 上一致有界：

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, x \in E,\ \left|\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right| \leqslant L$$

则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 E 上条件一致收敛。

Proof. 利用 Abel 引理来估计：

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)g_i(x)\right|$$

因为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ 的部分和序列在 E 上一致有界，所以：

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}^+,\ m > n,\ \forall\, x \in E,\ \left|\sum_{i=n+1}^{m} g_i(x)\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right| + \left|\sum_{i=1}^{m} g_i(x)\right| \leqslant 2L$$

又因函数序列 $\{f_n(x)\}$ 对每个取定的 $x \in E$ 都是单调的，由 Abel 引理：

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}^+,\ m > n,\ \forall\, x \in E,\ \left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)g_i(x)\right| \leqslant 2L(|f_{n+1}(x)| + 2|f_m(x)|)$$

因为函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致地趋于 0，所以：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ \forall\, x \in E,\ |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6L}$$

于是有：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n, m > N,\ m > n,\ \forall\, x \in E,\ \left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)g_i(x)\right| < \varepsilon$$

由函数项级数一致收敛的柯西原理，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 E 上条件一致收敛。 □

Theorem 7.6 (Abel 判别法)**.** 对函数项级数：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x), \quad x \in E$$

如果：

1. 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 对每个取定的 $x \in E$ 都是单调的，并且该函数序列在 E 上一致有界；
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, x \in E,\ |f_n(x)| \leqslant M$$
2. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ 在 E 上一致收敛：

则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 E 上条件一致收敛。

Proof. 因为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ 在 E 上一致收敛，则：

$$\forall\, \varepsilon' > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n, m > N,\ m > n,\ \left|\sum_{i=n+1}^{m} g_i(x)\right| < \varepsilon'$$

又因函数序列 $\{f_n(x)\}$ 对每个取定的 $x \in E$ 都是单调的，由 Abel 引理：

$$\forall\, x \in E,\ \left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)g_i(x)\right| \leqslant \varepsilon'(|f_{n+1}(x)| + 2|f_m(x)|) \leqslant 3M\varepsilon'$$

对任意的 $\varepsilon > 0$，可以选取 $\varepsilon' > 0$ 使得：

$$3M\varepsilon' < \varepsilon$$ □

7.3 极限函数的分析性质

本节来讨论，一致收敛的函数序列或函数项级数需要满足怎样的条件，才能使得它们的极限函数拥有与它们一样的分析性质。在这里讨论的分析性质为：连续性、定积分、微分。

7.3.1 连续性

极限函数的连续性

Theorem 7.7. 设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于函数 $f(x)$。当函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项在 I 上都连续时，$f(x)$ 在 I 上也连续。

Proof. 任取 $x_0 \in I$, $x \in I$，可得：

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

因为 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于函数 $f(x)$，所以：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ \forall\, x \in I,\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

于是：

$$\exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

又因为 $\{f_n(x)\}$ 的每一项都在 I 上连续，所以：

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in \{x \in I : |x - x_0| < \delta\},\ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

取 $n \to +\infty$ 即可得到：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in \{x : |x - x_0| < \delta\},\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

即 $f(x)$ 在 x_0 处连续。由 x_0 的任意性，$f(x)$ 在 I 上连续。 □

Theorem 7.8. 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于函数 $f(x)$。当函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 的每一项在 I 上连续时，$f(x)$ 在 I 上也连续。

7.3.2 定积分

逐项积分定理

Theorem 7.9. 设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$。当函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项在 $[a, b]$ 上都连续时，有：

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x \right] = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

Proof. 因为 $\{f_n(x)\}$ 的每一项都在 $[a, b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 也连续，于是 $f(x)$ 可积。由积分中值定理：

$$\exists\, \xi \in [a, b],\ \left| \int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\, \mathrm{d}x \right| \leqslant (b - a)|f_n(\xi) - f(\xi)|$$

因为 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$，所以对任意的 $\varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}^+$, $\forall\, n > N$, $|f_n(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon$，此时即有：

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

也即：

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x \right] = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

□

Theorem 7.10. 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于函数 $f(x)$。当函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 的每一项在 I 上连续时，有：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right]=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

7.3.3　微分

逐项微分定理

Theorem 7.11. 若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 满足：

1. $\{f_n(x)\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 上都连续可微；
2. 导函数序列 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $\varphi(x)$；
3. $\{f_n(x)\}$ 至少在某一点 $x_0\in[a,b]$ 收敛：

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)=y_0\in\mathbb{R}$$

那么函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于某个在 $[a,b]$ 连续可微的函数 $f(x)$，并且有：

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)=\varphi(x)$$

Proof. 因为 $\{f_n(x)\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 上都连续可微，所以导函数序列 $\{f_n'(x)\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 上都连续，于是 $\{f_n'(x)\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 上都可积，就有：

$$\forall\, x\in[a,b],\ \forall\, n\in\mathbb{N}^+,\ f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x} f_n'(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{7.1}$$

由此可得：

$$\begin{aligned}|f_m(x)-f_n(x)| &\leqslant |f_m(x_0)-f_n(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{x}[f_m'(\xi)-f_n'(\xi)]\,\mathrm{d}\xi\right|\\ &\leqslant |f_m(x_0)-f_n(x_0)|+(b-a)\sup_{\xi\in[a,b]}|f_m'(\xi)-f_n'(\xi)|\end{aligned}$$

因为 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 处收敛、导函数序列 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，所以：

$$\begin{gathered}\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, N\in\mathbb{N}^+,\ \forall\, m,n>N,\ m>n\\ |f_m(x_0)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad \sup_{\xi\in[a,b]}|f_m'(\xi)-f_n'(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\end{gathered}$$

于是：

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, N\in\mathbb{N}^+,\ \forall\, m,n>N,\ m>n,\ \forall\, x\in[a,b],\ |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

由柯西收敛准则，$\{f_n(x)\}$ 一致收敛。设 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛的对象为 $f(x)$，在(7.1)中取 $n \to +\infty$ 可得：

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

对其求导即可得：

$$f'(x) = \varphi(x)$$

□

Theorem 7.12. *若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 满足：*

1. *$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 的每一项在 $[a,b]$ 上都连续可微；*
2. *部分和序列的导函数序列 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} f_n'(x)\right\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $\varphi(x)$；*
3. *$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 至少在某一点 $x_0 \in [a,b]$ 收敛：*

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x_0)\right] = y_0 \in \mathbb{R}$$

那么函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于某个在 $[a,b]$ 连续可微的函数 $f(x)$，并且有：

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = f'(x) = \varphi(x)$$

7.4 幂级数

本节考察如下形式的函数项级数（称之为幂级数 (power series)）：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

7.4.1 幂级数的收敛半径

Theorem 7.13 (Cauchy-Hadamard identity)**.** *对于幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$，记：*

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}}$$

则该幂级数对任意的 $x \in \{x : |x - x_0| < \rho\}$ 绝对收敛，对任意的 $x \in \{x : |x - x_0| > \rho\}$ 发散，称 ρ 为收敛半径 (radius of convergence)。

Proof. 对于：

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0|\,\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}$$

由柯西根式判别法，当：

$$|x-x_0|\,\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

时，该幂级数绝对收敛。当：

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} > 1$$

时，有：

$$\exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ |a_n(x-x_0)^n| > 1$$

即该幂级数的项不收敛于 0，不满足级数收敛的必要条件，所以该幂级数发散。 □

Theorem 7.14. 幂级数的收敛半径也可由下式计算：

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Proof. 由比值判别法，当：

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n}\right| < 1$$

时，即：

$$|x-x_0| < \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

时，该幂级数绝对收敛。当：

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n}\right| > 1$$

时，有：

$$\exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ |a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}| > |a_n(x-x_0)^n|$$

即该幂级数的项不收敛于 0，不满足级数收敛的必要条件，所以该幂级数发散。 □

Theorem 7.15. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 ρ，$[x_0-r, x_0+r]$ 是包含于 $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ 中的任何闭区间，则该幂级数在 $[x_0-r, x_0+r]$ 上绝对一致收敛。

Proof. 在闭区间 $[x_0-r, x_0+r]$ 上，取级数：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| r^n$$

因为 $r < \rho$，所以上正项级数收敛。因为：

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, x \in [x_0-r, x_0+r],\ |a_n(x-x_0)^n| \leqslant |a_n| r^n$$

由 Weierstrass 判别法，该幂级数在 $[x_0-r, x_0+r]$ 上绝对一致收敛。 □

7.4.2 幂级数和函数的分析性质

连续性

Theorem 7.16. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 ρ，则和函数：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

在开区间 $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ 内处处连续。若它还在 $x=x_0-\rho$ 处（或在 $x=x_0+\rho$ 处）收敛，则该幂级数在闭区间 $[x_0-\rho, x_0]$ 上（或在闭区间 $[x_0, x_0+\rho]$ 上）一致收敛，所以和函数 $f(x)$ 在 $x=x_0-\rho$ 处右连续（或在 $x=x_0+\rho$ 处左连续）。即：幂级数的和函数在幂级数收敛域的每一点都连续。

Proof. 任取 $c\in(x_0-\rho, x_0+\rho)$，则必然 $\exists\ r$ 使得 $c\in[x_0-r, x_0+r]$，并且幂级数在 $[x_0-r, x_0+r]$ 上绝对一致收敛。因为幂级数的每一项都是幂函数，所以每一项都在 $[x_0-r, x_0+r]$ 上连续，于是和函数 $f(x)$ 在 $[x_0-r, x_0+r]$ 上连续，由此 $f(x)$ 在 c 点连续。由 c 的任意性，$f(x)$ 在开区间 $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ 内处处连续。

将幂级数写成如下形式：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\rho^n\left(\frac{x-x_0}{\rho}\right)^n$$

注意到：

1. 对于 $x\in[x_0, x_0+\rho]$，函数序列 $\left\{\left(\dfrac{x-x_0}{\rho}\right)^n\right\}$ 单调下降并且一致有界：

$$1\geqslant\frac{x-x_0}{\rho}\geqslant\left(\frac{x-x_0}{\rho}\right)^2\geqslant\cdots\geqslant\left(\frac{x-x_0}{\rho}\right)^n\geqslant\cdots$$

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\rho^n$ 收敛。

由 Abel 判别法，可以判断幂级数在闭区间 $[x_0, x_0+\rho]$ 上一致收敛。因为幂级数的每一项都是幂函数，所以每一项都在 $[x_0, x_0+\rho]$ 上连续，于是和函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\rho]$ 上连续，由此 $f(x)$ 在 $x_0+\rho$ 左连续。右连续的证明同理可得。综上，幂级数的和函数在幂级数收敛域的每一点都连续。 □

定积分

Theorem 7.17. 幂级数在任何包含于收敛域的闭区间上都可以逐项积分。

Proof. 由幂级数和函数的连续性可直接得到。 □

微分

Theorem 7.18. 由幂级数逐项求导所得到的级数：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

与原级数有相同的收敛半径。

Proof. 由：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^n = (x-x_0)\left[\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}\right]$$

可以看出 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ 的收敛域相同，所以它们的收敛半径相同。因为：

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim}(\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{|a_n|}) = \lim\sqrt[n]{n}\cdot\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}$$

所以幂级数逐项求导所得到的级数与原级数有相同的收敛半径。 □

Theorem 7.19. 在幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 收敛域的内部，和函数具有任意阶的导数，并且它的各阶导数可以通过级数逐项求导来计算。

Proof. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 ρ，那么幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ 的收敛半径也是 ρ。对任意的 $c\in(x_0-\rho,x_0+\rho)$，可以选取 $0<r<\rho$，使得 $c\in(x_0-r,x_0+r)$。因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ 在 $[x_0-r,x_0+r]$ 上一致收敛，并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的每一项都连续可微，所以和函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在 $[x_0-r,x_0+r]$ 上连续可微，且有：

$$f'(c) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_nc^{n-1}$$

由 c 的任意性可得：

$$\forall\ x\in(-\rho,\rho),\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

在上述结论下使用数学归纳法即可证明关于任意阶导数的论断。 □

Chapter 8

Fourier 级数

考察在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上所有 Riemann 可积的函数构成的集合 $\mathscr{R}$。

对任意的 $f, g \in \mathscr{R}$, $a \in \mathbb{R}$，定义如下的加法和数量乘法：

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (af)(x) = af(x)$$

则 $\mathscr{R}$ 成为一个实线性空间。

在 $\mathscr{R}$ 上按如下方式定义内积：

$$(f, g) = \rho \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

如果两个函数 $f, g \in \mathscr{R}$ 满足条件 $(f, g) = 0$，则称这两个函数是正交的。

考察函数系 $\{\varphi_n(x)\}$，若其中的函数两两正交，则称该函数系是正交的。若函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 满足条件：

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

则称该函数系是规范正交的。

取 $\mathscr{R}$ 中一个规范正交函数系 $\{\varphi_n(x)\}$，若函数 $f \in \mathscr{R}$ 能够展开成以下形式的级数：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x)$$

以 $\varphi_k(x)$ 乘上式两边可得：

$$f(x)\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x)\varphi_k(x)$$

若上式右端的级数可以逐项积分，就能得到：

$$(f, \varphi_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\varphi_n, \varphi_k) = c_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

即：

$$c_k = (f, \varphi_k),\ k = 0, 1, 2, \dots$$

上式被称为函数 f 关于正交函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的 Euler-Fourier 公式，按照该公式计算系数，然后做成级数：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x)$$

称该级数为函数 f 关于正交函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的 Fourier 级数。

Definition 8.1. 我们把函数系：

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots, \cos(nt), \sin(nt), \dots$$

称之为周期为 2π 的基本三角函数系。

Proof.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sin(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(nt)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\cos(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\{\cos[(m+n)t] + \cos[(m-n)t]\}\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2(m+n)}\sin[(m+n)t]\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)}\sin[(m-n)t]\Big|_{-\pi}^{\pi}, & m \neq n \\ \frac{1}{2(m+n)}\sin[(m+n)t]\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}t\Big|_{-\pi}^{\pi}, & m = n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{2}\{\cos[(m+n)t] - \cos[(m-n)t]\}\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{2(m+n)}\sin[(m+n)t]\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)}\sin[(m-n)t]\Big|_{-\pi}^{\pi}, & m \neq n \\ -\frac{1}{2(m+n)}\sin[(m+n)t]\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}t\Big|_{-\pi}^{\pi}, & m = n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\{\sin[(m+n)t] - \sin[(m-n)t]\}\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{2(m+n)}\cos[(m+n)t]\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)}\cos[(m-n)t]\Big|_{-\pi}^{\pi}, & m \neq n \\ -\frac{1}{2(m+n)}\cos[(m+n)t]\Big|_{-\pi}^{\pi}, & m = n \end{cases} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Chapter 9

Lebesgue 积分

本章讨论 Lebesgue 积分。

在前半部分作好定义 Lebesgue 积分的所有准备工作，即讨论 $\mathbb{R}^n$ 上的测度。

是一种映射，它把集合映射到某一个实数，是一种将几何空间的度量（长度、面积、体积）和其他常见概念（如大小、质量和事件的概率）广义化后产生的概念。

我们的目的是建立一种定义[1]在 $\mathbb{R}^n$ 上的测度，使它满足以下的：

公理 1. *对于 $\mathbb{R}^n$ 上的某一集合族 $\mathcal{F}$（待定义），测度 m 有如下性质：*

1. *非负性：对任意的 $E \in \mathcal{F}$，$m(E) \geqslant 0$。*
2. *可列可加性：若 $E_n \in \mathcal{F}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$，且对任意的 $i, j \in \mathbb{N}^+$, $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \varnothing$，则有 $m(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} E_i) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} m(E_i)$。*
3. *正则性：单位立方体 $[0,1]^n \subset \mathcal{F}$ 且它的测度 $m([0,1]^n) = 1$。*

9.1 外测度

9.1.1 外测度的定义

Definition 9.1. *设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的任一点集，E 的 Lebesgue 定义为所有能够覆盖 E 的开区间列的体积总和的下确界。即：*

$$m^*(E) = \inf_{E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} I_i} \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i|$$

需要注意如下事项：

1. 必须是无穷多个开区间的体积总和的下确界。如果将定义改为有限个：取 E 为 $[0,1]$ 内的有理数集，若 E 被有限个开区间覆盖，即 $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$，那么 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$ 一定覆盖 $[0,1]$

[1]这里的定义并不是函数的定义域那种含义的定义，可以证明实数直线上存在不可测集合，这里类似于概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$，实数直线是类似样本空间的概念。

（反证法，有理数集的稠密性），即这种定义下 E 的外测度等于 1。同理，$[0,1]$ 内无理数集的外测度也为 1，由测度公理 (2)，$[0,1]$ 的测度为 2，而由测度公理 (3)，$[0,1]$ 的测度应为 1，矛盾。

2. 定义虽然是无穷多个开区间，但实际仍可以是有限的，因为可以取空集（就比如概率论可列可加性推有限可加性）。

3. 体积总和可以是 $+\infty$。

9.1.2 外测度的性质

Property 9.1.1. *外测度有以下三条基本性质：*

1. $m^*(E) \geqslant 0$，*等号成立当且仅当* $E = \varnothing$。

2. *若* $A \subset B$，*则有* $m^*(A) \leqslant m^*(B)$。

3. $m^*(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{+\infty} m^*(A_i)$。

Proof. (1) 显然成立。

(2) 对于满足条件 $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} I_i$ 的任意开区间列 $\{I_i,\ i \in \mathbb{N}^+\}$，必然有 $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} I_i$，又因为 $m^*(A)$ 是长度总和的下确界，那么就有：

$$m^*(A) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i|$$

由下确界的保号性即可推得：

$$m^*(A) \leqslant \inf_{B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} I_i} \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| = m^*(B)$$

(3) 从单个 A_i 开始着手考虑。因为外测度是下确界，对任意 $\varepsilon > 0$ 和每个 $A_n, n \in \mathbb{N}^+$，都存在一个开区间列 $\{I_{ni},\ i \in \mathbb{N}^+\}$ 使[2]：

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |I_{ni}| < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},\ A_n \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_{ni}$$

那么就有（第一个不等式是因为外测度是下确界，第二个不等式是上式的求和形式）：

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} |I_{ni}| < \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$$

由 ε 的任意性，有：

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} |I_{ni}| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n)$$

□

[2] $\frac{\varepsilon}{2^n}$ 是一种为了在求和后得到 ε 的常用规范化取法，这是因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

9.1.3 区间的外测度

Theorem 9.1. 区间的外测度就是区间的体积，即 $m^*(I) = |I|$。

从直观上这一点很好理解，如果 $m^*(I) > |I|$，则必然能找到一个体积总和更小的开区间列覆盖 I；如果 $m^*(I) < |I|$，则 I 必然没有被对应的开区间列全覆盖。

Proof. (1) 对任意区间 I，必存在一个开区间 I' 使 $I \subset I'$ 且 $|I'| < |I| + \varepsilon$。那么就有（第一个不等式是因为外测度是下确界）：

$$m^*(I) \leqslant |I'| < |I| + \varepsilon$$

由 ε 的任意性，即有：

$$m^*(I) \leqslant |I|$$

(2) 如果 $m^*(I) < |I|$，由外测度定义，必存在一个开区间列 $\{A_i\}$，使 $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} |A_i| < |I|$，而这是不可能的。 □

9.2 可测集类

在这一节里，我们来讨论 $\mathbb{R}^n$ 上什么样的集合是可测的。先给出以下总结：

1. 外测度为 0 的集合都可测，称为零测集。
2. 零测集的任何子集都可测，并且仍然是零测集。
3. 有限个或可数个零测集的并可测，并且仍然是零测集。
4. 区间都可测，并且测度为其体积。
5. 开集和闭集都可测。
6. Borel 集都可测。

零测集

Definition 9.2. 外测度为 0 的集合称之为零测集 *(null set)*。

Theorem 9.2. 零测集都可测。

Proof. 任取一个零测集 E，对任意的 $T \in \mathbb{R}^n$，有：

$$\begin{aligned} m^*(T) &\geqslant m^*(T \cap E^c) \\ &= 0 + m^*(T \cap E^c) \\ &= m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \end{aligned}$$

又因：

$$T = (T \cap E) \cup (T \cap E^c)$$

由外测度性质 (3)：

$$m^*(T) \leqslant m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

因此：

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

即 E 可测。由 E 的任意性，零测集都可测。 □

Theorem 9.3. 零测集的任何子集都可测，并且仍然是零测集。

Proof. 由外测度性质 (2)，零测集的任何子集的外测度都为 0，即它们都是零测集，而零测集可测，所以零测集的任何子集都可测。 □

Theorem 9.4. 有限个或可数个零测集的并可测，并且仍然是零测集。

Proof. 由外测度的次可列可加性可得有限个或可数个零测集的外测度为 0，即它们都是零测集，而零测集可测，所以有限个或可数个零测集的并可测。 □

区间

Theorem 9.5. 区间都可测，并且 $m(I) = |I|$。

Proof. □

开闭集

Theorem 9.6. 开集闭集都可测。

Proof. □

Borel 代数

Definition 9.3. 设 Σ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集族，则称所有包含 Σ 的 σ 代数的交集为 Σ 产生的 σ 代数。

Definition 9.4. 由 $\mathbb{R}^n$ 中全体开集组成的集类生成的 σ 代数称为，记为 $\mathscr{B}$，其中的元素被称为博雷尔集 *(Borel set)*。

Theorem 9.7. 博雷尔集都是可测的。

Proof. 开集都是可测的。 □

可测集类的通性

Definition 9.5. 设集合 G 可表示成一列开集 $\{G_i\}$ 的交集：

$$G = \bigcap_{i=1}^{+\infty} G_i$$

则称 G 为 G_δ 型集。

Definition 9.6. 设集合 F 可表示成一列闭集 $\{F_i\}$ 的并集：

$$F = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i$$

则称 F 为 F_σ 型集。

Theorem 9.8. 设 E 是任意可测集，则一定存在 G_δ 型集 G 使 $E \subset G$，且 $m(G \setminus E) = 0$。

Proof. (1) 先证对任意的 $\varepsilon > 0$，存在开集 G，使 $E \subset G$，且 $m(G \setminus E) < \varepsilon$。

对于测度有限的集合 E，由测度定义，存在一列开区间 $\{I_i\}$，使得 $E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$，并且有：

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m(E) + \varepsilon$$

令 $G = \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$，则 G 是开集，并且 $E \subset G$。同时由外测度性质 (2) 和 (3)：

$$m(E) \leqslant m(G) = \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m(E) + \varepsilon$$

因此：

$$m(G \setminus E) = m(G) - m(E) < \varepsilon$$

若 $m(E) = \infty$，则 E 一定可表示为可列个互不相交并且测度有限的可测集的并集，即 $E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$。对每个 E_i 应用上面的结果，可找到开集 G_i 使 $E_i \subset G_i$，并且有 $m(G_i) < m(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$。令 $G = \bigcup_{i=1}^{+\infty} G_i$，则 G 是开集，$E \subset G$，并且有：

$$G \setminus E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} G_i \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} (G_i \setminus E_i)$$

$$m(G \setminus E) \leqslant m\left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} (G_i \setminus E_i)\right] \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(G_i \setminus E_i) < \varepsilon$$

(2) 依次取 $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+$，由 (1) 可知存在开集 G_n 使得 $E \subset G_n$，且 $m(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$。令 $G = \bigcap_{i=1}^{+\infty} G_i$，则 G 为 G_δ 型集，$E \subset G$，且有：

$$m(G \setminus E) \leqslant m(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$$

对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立，即 $m(G \setminus E) = 0$。 $\square$

Theorem 9.9. 设 E 是任意可测集，则一定存在 F_σ 型集 F 使 $F \subset E$，且 $m(E \setminus F) = 0$。

Proof. 因为 E 可测，所以 E^c 也可测。那么存在 G_δ 型集 G，使得 $E^c \subset G$，且 $m(G \setminus E^c) = 0$。令 $F = G^c$，则显然 F 是一个 F_σ 型集，且有 $F \subset E$，同时有：

$$m(E \setminus F) = m(E \setminus G^c) = m(E \cap G) = m(G \setminus E^c) = 0$$ $\square$

9.3 可测函数

9.3.1 可测函数的性质

Theorem 9.10. 设 $f(x)$ 是可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，则对于 $a\in\overline{\mathbb{R}}$，$E(f=a)$ 可测。

Proof. 只需注意到：

$$E(f=a)=E(f\geqslant a)\setminus E(f>a)$$

$$E(f=+\infty)=\bigcap_{n=1}^{+\infty}E(f>n)\quad E(f=-\infty)=\bigcap_{n=1}^{+\infty}E(f<-n)$$

□

限制与延拓

Theorem 9.11. 关于可测函数的限制与延拓有如下结论：

1. 设 $f(x)$ 是可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，E_1 是 E 的可测子集，则 $f(x)$ 限制在 E_1 上时也是可测函数。

2. 设 $f(x)$ 在可测集 $E_i, i=1,2,\ldots,n$，$n\in\mathbb{N}^+$ 上都是可测函数，则 $f(x)$ 延拓在 $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ 上时也是可测函数。

Proof. (1) 只需注意到：

$$E_1(f>a)=E_1\cap E(f>a)$$

(2) 只需注意到：

$$E(f>a)=\bigcup_{i=1}^{n}E_i(f>a)$$

□

Corollary 9.1. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列可测函数，若 $F(x)=\lim\limits_{n}f_n(x)$ 几乎处处[3]存在，则 $F(x)$ 是 E 上的可测函数。

9.3.2 可测函数列与一致收敛

Theorem 9.12 (叶戈罗夫定理)**.** 设 $m(E)<+\infty$，$\{f_n\}$ 是 E 上一列 *a.e.* 收敛于一个 *a.e.* 有限的函数 f 的可测函数。对任意的 $\delta>0$，$\exists\ E_\delta\subset E$，使得 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛，且 $m(E\setminus E_\delta)<\delta$。

即 $m(E)<+\infty$ 时，a.e. 收敛在收敛对象 a.e. 有限的时候基本上一致收敛。

---

[3] 设 π 是一个与集合 E 中的点 x 有关的命题，如果 $\exists\ M\subset E$，$mM=0$，使得 π 在 $E\setminus M$ 上成立，则称 π 在 E 上几乎处处成立，记为 πa.e.（almost everywhere）于 E。

9.3.3 可测函数与连续函数的关系

连续函数都是可测函数

Theorem 9.13. 可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数是可测函数。

Proof. 任取一个定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数 f，a 是任意实数。由 f 的连续性：

$$\forall\, x \in E(f > a),\ \exists\, U(x),\ U(x) \cap E \subset E(f > a)$$

令 $G = \bigcup\limits_{x \in E(f>a)} U(x)$，则：

$$G \cap E = \left[\bigcup_{x \in E(f>a)} U(x)\right] \cap E = \bigcup_{x \in E(f>a)} [U(x) \cap E] \subset E(f > a)$$

反之显然有：

$$E(f > a) \subset G \cap E$$

因此 $E(f > a) = G \cap E$。由于 G 是开集，E 是可测集，所以 $E(f > a)$ 是可测集。由 a 的任意性，f 是 E 上的可测函数。由 f 的任意性，命题成立。 □

a.e. 有限的可测函数基本上连续

Theorem 9.14 (卢津定理)**.** 设 $f(x)$ 是 E 上 *a.e.* 有限的可测函数。对任意的 $\delta > 0$，存在闭子集 $F_\delta \subset E$，使得 $f(x)$ 在 F_δ 上连续，并且 $m(E \setminus F_\delta) < \delta$。

因该定理中函数限制在闭集上连续这一条件有时应用起来不太方便，下给出卢津定理的另一种形式：

Theorem 9.15. 设 $f(x)$ 是 $E \subset R$ 上 *a.e.* 有限的可测函数，则对任意的 $\delta > 0$，存在闭集 $F \subset E$ 及定义在整个 R 上的连续函数 $g(x)$ (F 和 $g(x)$ 依赖于 δ)，使得在 F 上 $f(x) = g(x)$，并且 $m(E \setminus F) < \delta$。

9.4 积分论

Theorem 9.16 (Levi theorem)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$\{f_n\}$ 是 E 上一列非负可测函数，对任意的 $x \in E$，$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$，令 $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$，$\forall\, x \in E$，则：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x\right] = \int_E \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proof. 显然 $f(x)$ 在 E 上非负可测且对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，$f_n(x) \leqslant f(x)$，所以：

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+,\ \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$$

由极限的不等式性可得：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x\right]\leqslant\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$$

任取 E 上一非负简单函数 $\varphi(x)$ 满足条件：对任意的 $x\in E.\ \varphi(x)\leqslant f(x)$。任取 $0<c<1$，令 $E_n=E(f_n\geqslant c\varphi)$，则 E_n 是 E 的可测子集，$E_n\subset E_{n+1}$，$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}E_n=E$ 且：

$$\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{E_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{E_n} c\varphi(x)\,\mathrm{d}x\geqslant c\int_{E_n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

所以：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x\right]\geqslant c\left[\lim_{n\to+\infty}\int_{E_n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right]=c\int_E\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

由 c 的任意性和上确界的不等式性可得：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x\right]\geqslant\int_E\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

由 $\varphi(x)$ 的任意性和上确界的不等式性可得：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x\right]\geqslant\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$$

综上：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x\right]=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

9.4.1 一般可测函数的 Lebesgue 积分

Theorem 9.17 (Lebesgue 积分的线性性). *若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 E 上的 Lebesgue 可积函数，则对任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\alpha f(x)+\beta g(x)$ 也在 E 上 Lebesgue 可积，且：*

$$\int_E[\alpha f(x)+\beta g(x)]\,\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_E g(x)\,\mathrm{d}x$$

Proof. 因为 $f(x),g(x)$ 在 E 上 Lebesgue 可积，所以 f^+,f^-,g^+,g^- 在 E 上 Lebesgue 可积。由非负可测函数 Lebesgue 积分的线性性质，$\alpha f^++\beta g^+$，$\alpha f^-+\beta g^-$ 也在 E 上 Lebesgue 可积。于是：

$$0\leqslant(\alpha f+\beta g)^+=\max\{\alpha f+\beta g,0\}\leqslant\max\{\alpha f,0\}+\max\{\beta g,0\}=(\alpha f)^++(\beta g)^+$$
$$0\leqslant(\alpha f+\beta g)^-=\max\{-\alpha f-\beta g,0\}\leqslant\max\{-\alpha f,0\}+\max\{-\beta g,0\}=(\alpha f)^-+(\beta g)^-$$

所以 $(\alpha f+\beta g)^+,(\alpha f+\beta g)^-$ 在 E 上 Lebesgue 可积。由：

$$\int_E[\alpha f(x)+\beta g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_E[\alpha f(x)+\beta g(x)]^+\,\mathrm{d}x+\int_E[\alpha f(x)+\beta g(x)]^-\,\mathrm{d}x$$

可得 $\alpha f+\beta g$ 在 E 上 Lebesgue 可积。因为：

$$\alpha f=(\alpha f)^+-(\alpha f)^-,\ \beta g=(\beta g)^+-(\beta g)^-$$
$$\alpha f+\beta g=(\alpha f+\beta g)^+-(\alpha f+\beta g)^-$$

所以：

$$(\alpha f+\beta g)^{+}+(\alpha f)^{-}+(\beta g)^{-}=(\alpha f+\beta g)^{-}+(\alpha f)^{+}+(\beta g)^{+}$$

由非负可测函数 Lebesgue 积分的线性性质可得：

$$\begin{aligned}&\int_E(\alpha f+\beta g)^{+}(x)\,\mathrm{d}x+\int_E(\alpha f)^{-}(x)\,\mathrm{d}x+\int_E(\beta g)^{-}(x)\,\mathrm{d}x\\=&\int_E(\alpha f+\beta g)^{-}(x)\,\mathrm{d}x+\int_E(\alpha f)^{+}(x)\,\mathrm{d}x+\int_E(\beta g)^{+}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

移项可得：

$$\begin{aligned}&\int_E(\alpha f+\beta g)^{+}(x)\,\mathrm{d}x-\int_E(\alpha f+\beta g)^{-}(x)\\=&\int_E(\alpha f)^{+}(x)\,\mathrm{d}x-\int_E(\alpha f)^{-}(x)+\int_E(\beta g)^{+}(x)\,\mathrm{d}x-\int_E(\beta g)^{-}(x)\end{aligned}$$

由非负可测函数 Lebesgue 积分的线性性质即可得：

$$\int_E[\alpha f(x)+\beta g(x)]\,\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_E g(x)\,\mathrm{d}x$$

□

9.4.2 Riemann 积分与 Lebesgue 积分

本节就一元函数的情形讨论 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系。将一元函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分和 Lebesgue 积分分别记为：

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ (L)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Lebesgue 积分是 Riemann 积分的推广，但不是 Riemann 反常积分的推广。

先对 Riemann 积分做一个简单回顾。

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个有界函数，当 $x\in[a,b]$ 时有 $|f(x)|\leqslant M$。对于任意的 $n\in\mathbb{N}^{+}$，作 $[a,b]$ 的分割：

$$P^{(n)}:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

$|P|$ 表示分割 P 的最大区间长度。函数 $f(x)$ 在每一个子区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上有有穷的上确界与下确界，分别记为：

$$M_k=\sup_{[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\},\ m_k=\inf_{[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\},\ \omega_k=M_k-m_k$$

将 Darboux 上和和下和分别记为：

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,\ U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$$

将 Darboux 上积分和下积分分别记为：

$$\overline{I}=\sup_P\{U(f,P)\},\ \underline{I}=\inf_P\{L(f,P)\}$$

由 Riemann 积分的结论，记：

$$\omega(x)=\lim_{\delta\to0^{+}}\sup\{|f(y)-f(z)|:y,z\in(x-\delta,x+\delta)\cap[a,b]\}$$

Theorem 9.18. $\omega(x)=0$ 的充要条件为 $f(x)$ 在 x 处连续。

Theorem 9.19. 令 E 为所有的划分 $P^{(n)}, n\in\mathbb{N}^+$ 的全体分点构成的集合，则 E 是可测集且 $m(E)=0$。

Theorem 9.20. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数，则：

$$(L)\int_{[a,b]}\omega(x)\,\mathrm{d}x=\overline{I}-\underline{I}$$

Proof. 令：

$$h_n(x)=\begin{cases}M_k^{(n)}-m_k^{(n)}, & x_{k-1}^{(n)}<x<x_k^{(n)}\\ 0, & x\text{为 } P^{(n)} \text{ 的分点}\end{cases}$$

显然 $h_n(x)$ 是一个非负简单函数，并且当 $x\in[a,b]$ 时有 $0\leqslant h_n(x)\leqslant 2M$，同时对任意的 $x\in[a,b]\backslash E$，有 $h_n(x)\to\omega(x)$，即 $h_n(x)\to\omega(x)$ a.e. 于 $[a,b]$。由有界收敛定理可得：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[(L)\int_{[a,b]}h_n(x)\,\mathrm{d}x\right]=(L)\int_{[a,b]}\omega(x)\,\mathrm{d}x$$

由非负简单函数 Lebesgue 积分的定义和 Riemann 积分结论：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left[(L)\int_{[a,b]}h_n(x)\,\mathrm{d}x\right]&=\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(M_i^{(n)}-m_i^{(n)})(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}M_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})\right]-\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}m_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})\right]\\&=\overline{I}-\underline{I}\end{aligned}$$

所以：

$$(L)\int_{[a,b]}\omega(x)\,\mathrm{d}x=\overline{I}-\underline{I}$$

□

Theorem 9.21. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个有界函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积的充要条件为 $f(x)$ 连续 *a.e.* 于 $[a,b]$，即 $f(x)$ 的不连续点构成一个零测集。

Proof. 由 Riemann 积分结论、非负可测函数的性质 (7) 以及 $\omega(x)=0$ 与函数 $f(x)$ 连续性的关系可得：

$$\begin{aligned}f(x)\text{在}[a,b]\text{上 Riemann 可积}&\Leftrightarrow\overline{I}=\underline{I}\\&\Leftrightarrow(L)\int_{[a,b]}\omega(x)\,\mathrm{d}x=0\\&\Leftrightarrow\omega(x)=0\text{ a.e. 于}[a,b]\\&\Leftrightarrow f(x)\text{连续 a.e. 于}[a,b]\end{aligned}$$

□

Theorem 9.22. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个有界函数。若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 *Lebesgue* 可积，且：

$$(L)\int_{[a,b]}f(x)\,\mathrm{d}x=(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proof. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点构成一个零测集。 □

9.5 微分与不定积分

9.5.1 Vitali 定理

Definition 9.7. 设 $E \subset \mathbb{R}$，$\mathcal{V}$ 是一个长度为正的区间族。若对于任意的 $x \in E$ 和任意的 $\varepsilon > 0$，都存在区间 $I_x \in \mathcal{V}$ 使得 $x \in I_x$ 且 $mI_x < \varepsilon$，则称 $\mathcal{V}$ 依 *Vitali* 意义覆盖 E，简称 $\mathcal{V}$ 为 E 的 *V*-覆盖。

Theorem 9.23. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 且 $m^*(E) < +\infty$，$\mathcal{V}$ 为 E 的 *V*-覆盖，则可选出区间列 $\{I_n\} \subset \mathcal{V}$，使得 I_n 之间互不相交，同时有：

$$m\left(E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} I_n\right) = 0$$

9.5.2 单调函数的可微性

Definition 9.8. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数，$x_0 \in [a,b]$。如果存在数列 $h_n \to 0 (h_n \neq 0)$ 使得极限：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = \lambda$$

存在（λ 可为 $\pm\infty$），则称 λ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的一个列导数，记为 $Df(x_0) = \lambda$。

Theorem 9.24. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处存在导数 $f'(x_0)$ 的充要条件为 $f(x)$ 在点 x_0 处的一切列导数都相等。

Lemma 9.1. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的严格增函数，

1. 如果对于 $E \subset [a,b]$ 中的每一个点 x，都至少有一个列导数 $Df(x) \leqslant p (p \geqslant 0)$，则 $m^*[f(E)] \leqslant pm^*(E)$；
2. 如果对于 $E \subset [a,b]$ 中的每一个点 x，都至少有一个列导数 $Df(x) \geqslant q (q \geqslant 0)$，则 $m^*[f(E)] \geqslant qm^*(E)$。

Theorem 9.25 (Lebesgue theorem)**.** 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的单调函数，则：

1. $f(x)$ 存在有限导数 $f'(x)$*a.e.* 于 $[a,b]$；
2. $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积；
3. 如果 $f'(x)$ 为增函数，则有：

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(b) - f(a)$$

Proof. 设 $f(x)$ 为增函数，减函数同理。

令：

$$E = \{x : f'(x)\text{不存在}\}$$

于是对任意的 $x_0 \in E$，总有两个列导数 □

导数不存在的点一定至少存在两个列导数吗？

9.5.3 有界变差函数

Definition 9.9. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数。如果对于 $[a,b]$ 上的一切划分 P，都有：

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\right\}$$

为一个有界数集（其中 $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$ 为划分的分点），则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数，并称：

$$\sup_P \left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\right\}$$

为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差，记为 $\bigvee_a^b(f)$。用一个划分作成的和数：

$$\bigvee = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

称为 $f(x)$ 在此划分下对应的变差。

有界变差关于区间的可加性

Theorem 9.26. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界变差，则也在其任意子区间 $[a_1,b_1]$ 上有界变差。

Proof. 对 $[a_1,b_1]$ 取任意一个划分：

$$P_1 : a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b_1$$

其对应的变差为 $\bigvee$。此时取 $[a,b]$ 的一个划分；

$$P_2 : a = y_0 < y_1 = x_0 < \cdots < y_{n+1} = x_n < y_{n+2} = b$$

其对应的变差为 $\bigvee_1$，则显然有：

$$\bigvee \leqslant \bigvee_1 \leqslant \bigvee_a^b(f)$$

由上确界的不等式性即可得：

$$\bigvee_{a_1}^{b_1}(f) \leqslant \bigvee_a^b(f)$$

即 $f(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上有界变差。 □

Lemma 9.2. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的函数。对于 $[a,b]$ 上的任一划分，若增加分点，则变差不减；若减少分点，则变差不增。

Proof. 对 $[a,b]$ 取任意一个划分：

$$P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

其对应的变差为：

$$\bigvee_1 = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

若此时增加一个分点 $x_m = c$，则划分变为：

$$P_2 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < c < x_{m+1} \cdots < x_n = b$$

其对应的变差为：

$$\bigvee_2 = \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=m+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_m)| + |f(x_{m+1}) - f(c)|$$

两个变差的差为：

$$\bigvee_2 - \bigvee_1 = |f(x_{m+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_m)| - |f(x_{m+1}) - f(x_m)|$$

由绝对值的三角不等式，显然有 $\bigvee_2 > \bigvee_1$。

增加多个分点的情况可直接由增加单个分点的结论推得，减少分点的情况可直接由增加分点的结论推得。 □

Theorem 9.27. 设 $a < c < b$，$f(x)$ 分别在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上有界变差，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也有界变差，同时有：

$$\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f)$$

Proof. 对 $[a,b]$ 取任意一个划分：

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

其对应的变差记为 $\bigvee$。对其再插入一个分点 c，记 $[a,c]$ 上的变差为 $\bigvee_1$，$[c,b]$ 上的变差为 $\bigvee_2$，则：

$$\bigvee \leqslant \bigvee_1 + \bigvee_2$$

由上确界的不等式性，依次对 $\bigvee_1, \bigvee_2, \bigvee$ 取关于划分的上确界可得：

$$\bigvee_a^b(f) \leqslant \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f)$$

因为 $f(x)$ 分别在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上有界变差，所以 $\bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f) < +\infty$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也有界变差。

对 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 分别任取两个划分：

$$P_1 : a = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = c,\ P_2 : c = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < x_n = b$$

相应的变差分别为：

$$\bigvee_1 = \sum_{i=1}^{m} |f(y_i) - f(y_{i-1})|,\ \bigvee_2 = \sum_{i=1}^{n} |f(z_i) - f(z_{i-1})|$$

将上述两部分合并起来，则得到了一个 $[a,b]$ 上的划分，所以：

$$\bigvee_1 + \bigvee_2 \leqslant \bigvee_a^b(f)$$

由上确界的不等式性，依次对 $\bigvee_1, \bigvee_2$ 取关于划分的上确界可得：

$$\bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f) \leqslant \bigvee_a^b(f)$$

所以：

$$\bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f) = \bigvee_a^b(f)$$ □

有界变差与有界的关系

Theorem 9.28. *设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界变差，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。*

Proof. 对于任意的 x 满足 $a \leqslant x \leqslant b$，有：

$$\bigvee = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant \bigvee_a^b(f)$$

于是：

$$|f(x)| - |f(a)| \leqslant |f(x) - f(a)| \leqslant \bigvee_a^b(f)$$

即：

$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + \bigvee_a^b(f)$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界变差，所以 $\bigvee_a^b(f) < +\infty$。若 $f(x)$ 在点 a 处无界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的所有变差中的第一项 $|f(x_1) - f(a)|$ 都无界，$f(x)$ 不可能在 $[a,b]$ 上有界变差，所以 $|f(a)| < +\infty$。综上，$|f(x)| < +\infty$。由 x 的任意性，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。 □

有界变差函数的运算

Theorem 9.29. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都有界变差,$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,则 $\alpha f(x)+\beta g(x)$, $f(x)g(x)$, $|f(x)|$ 也在 $[a,b]$ 上有界变差。

Proof. (1)$\alpha f(x)+\beta g(x)$:

令 $s(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$，由绝对值的三角不等式：

$$|s(x_{m+1})-s(x_m)| \leqslant |\alpha|\,|f(x_{m+1})-f(x_m)|+|\beta|\,|g(x_{m+1})-g(x_m)|$$

所以：

$$\bigvee_a^b(s) \leqslant |\alpha|\bigvee_a^b(f)+|\beta|\bigvee_a^b(g)$$

因为 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都有界变差，所以 $\bigvee_a^b(s)<+\infty$，即 $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界变差。

(2) 令 $p(x)=f(x)g(x)$，设 $A=\sup|f(x)|$, $B=\sup|g(x)|$。因为有界变差函数都有界，所以 $A, B<+\infty$，于是：

$$\begin{aligned}
|p(x_m+1)-p(x_m)| &= |f(x_{m+1})g(x_{m+1})-f(x_m)g(x_m)| \\
&= |f(x_{m+1})g(x_{m+1})-f(x_m)g(x_{m+1})+f(x_m)g(x_{m+1})-f(x_m)g(x_m)| \\
&\leqslant |f(x_{m+1})g(x_{m+1})-f(x_m)g(x_{m+1})|+|f(x_m)g(x_{m+1})-f(x_m)g(x_m)| \\
&\leqslant B|f(x_{m+1})-f(x_m)|+A|g(x_{m+1})-g(x_m)|
\end{aligned}$$

所以：

$$\bigvee_a^b(p) \leqslant B\bigvee_a^b(f)+A\bigvee_a^b(g)<+\infty$$

即 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界变差。

(3) 因为：

$$\Big||f(x_{m+1})|-|f(x_m)|\Big| \leqslant |f(x_{m+1}-f(x_m))|$$

所以：

$$\bigvee_a^b(|f|) \leqslant \bigvee_a^b(f)<+\infty$$

于是 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上有界变差。 □

Theorem 9.30 (Jordan 分解定理)**.** $[a,b]$ 上的任一有界变差函数 $f(x)$ 都可表示为两个增函数的差。

Proof. 由定理 9.27，函数：

$$g(x)=\bigvee_a^x,\ x\in[a,b]$$

是 $[a,b]$ 上的增函数。令：

$$h(x)=g(x)-f(x)$$

对于任意的 x_1, x_2 满足 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$，有：

$$
\begin{aligned}
h(x_2) - h(x_1) &= g(x_2) - g(x_1) - [f(x_2) - f(x_1)] \\
&= \bigvee_{x_1}^{x_2}(f) - [f(x_2) - f(x_1)] \\
&\geqslant |f(x_2) - f(x_1)| - [f(x_2) - f(x_1)] \geqslant 0
\end{aligned}
$$

所以 $h(x)$ 为单调增函数。综上，$f(x)$ 可表示为 $g(x) - h(x)$，其中 $g(x), h(x)$ 都是增函数。 □

Corollary 9.2. 有界变差函数至多有可数个不连续点。

Proof. 单调函数至多有可数个不连续点。 □ 补充证明

Corollary 9.3. 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数，则：

1. $f(x)$ 存在导数 $f'(x)$*a.e.* 于 E。
2. $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积。

Proof. 由定理 9.25、极限的可加运算和积分的可加运算可立即得到。 □

9.5.4 不定积分

Definition 9.10. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 *Lebesgue* 可积，则 $[a, b]$ 上的函数：

$$
F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C
$$

称为 $f(x)$ 的一个不定积分，其中 C 为任意常数。

Definition 9.11. 设 $F(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数。若对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对 $[a, b]$ 中互不相交的任意有限个开区间 (a_i, b_i)，$i = 1, 2, \ldots, n$，只要 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$，就有：

$$
\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon
$$

则称 $F(x)$ 为 $[a, b]$ 上的绝对连续函数。

绝对连续函数的性质

Property 9.5.1. 设 $f(x), g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的绝对连续函数，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则：

1. $f(x)$ 是一致连续的；
2. $f(x)$ 是有界变差的。
3. $\alpha f(x) + \beta g(x), f(x)g(x), \dfrac{1}{f(x)}$（除法中 $f(x) \neq 0$）也是绝对连续函数；

Proof. (1) 由绝对连续函数的定义，对任意的 $\varepsilon > 0$，当 $x, y \in [a,b]$ 且 $|x-y| < \delta$ 时，就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$，即 $f(x)$ 是一致连续的。

(2)

需要再思考如何证明

(3)(a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}^+$ 是 $[a,b]$ 上互不相交的有限个开区间。

$\alpha f(x) + \beta g(x)$：

由绝对值的三角不等式可得：

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha f(b_i) + \beta g(b_i) - \alpha f(a_i) - \beta g(a_i)| \leqslant |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| + |\beta| \sum_{i=1}^{n} |g(b_i) - g(a_i)|$$

$f(x)g(x)$：

因为 $f(x), g(x)$ 是绝对连续函数，由 (1) 可得它们都是一致连续的，从而在 $[a,b]$ 上连续。因为连续函数在闭区间上有界，设 $|f(x)| \leqslant M_1, |g(x)| \leqslant M_2$, $x \in [a,b]$。所以：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| &= \sum_{i=1}^{n} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(b_i) + f(a_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(b_i)| + \sum_{i=1}^{n} |f(a_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| \\
&\leqslant M_2 \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| + M_1 \sum_{i=1}^{n} |g(b_i) - g(a_i)|
\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{f(x)}$：

因为存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \leqslant M$, $x \in [a,b]$，所以

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{f(b_i)} - \frac{1}{f(a_i)} \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f(a_i) - f(b_i)}{f(a_i)f(b_i)} \right|$$

由因为 $f(x)$ 是绝对连续函数，所以对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 δ_i，当 $b_i - a_i < \delta_i$ 时，有：

$$|f(a_i) - f(b_i)| < \frac{\varepsilon |f(a_i)f(b_i)|}{n}$$

于是对任意的 $\varepsilon > 0$，只要取 $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$，就有：

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{f(b_i)} - \frac{1}{f(a_i)} \right| < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

□

Theorem 9.31. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 *Lebesgue* 可积，则其不定积分 $F(x)$ 为绝对连续函数，$F'(x)$ 存在 *a.e.* 于 $[a,b]$ 且 $F'(x) = f(x)$ *a.e.* 于 $[a,b]$。

这部分还没证明

Proof. 任取 $[a,b]$ 上互不相交的有限个开区间 (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}^+$。因为开区间

都是可测集，所以 (a_i, b_i) 可测，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ 可测。由 Lebesgue 积分的线性性质，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)| &= \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{(a_i,b_i)} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{(a_i,b_i)}|f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)}|f(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 Lebesgue 积分的绝对连续性，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $m\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i)\right] = \sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ 时，就有：

$$\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)}|f(x)|\,\mathrm{d}x < \delta$$

即：

$$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)| < \delta$$

所以 $F(x)$ 是绝对连续函数。 □

Theorem 9.32. 设 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，且 $F'(x) = 0$ *a.e.* 于 $[a,b]$，则 $F(x)$ 为一常数。

Theorem 9.33. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 *Lebesgue* 可积，则存在绝对连续函数 $F(x)$ 使得 $F'(x) = f(x)$ *a.e.* 于 $[a,b]$。

Theorem 9.34. 设 $F(x)$ 时 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则 $F'(x)$ 存在 *a.e.* 于 $[a,b]$ 且 $F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，同时有：

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} F'(t)\,\mathrm{d}t$$

Corollary 9.4. $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数的充要条件为 $F(x)$ 是一个 *Lebesgue* 可积函数的不定积分。

Chapter 10

赋范线性空间

距离空间 X 到实数或复数域上的映射被称之为泛函。

首先来讨论赋范线性空间，然后在此基础上讨论 Banach 空间、Hilbert 空间以及它们上面的线性算子。

10.1 范数

范数的定义

Definition 10.1. 设 X 是实或者复线性空间，如果对于 X 中的每个元素 x，都有一个实数与之对应，记为 $||x||$，且满足：

1. 非负性：$||x|| \geqslant 0$，等号成立当且仅当 $x = \mathbf{0}$。
2. 数乘：$||\alpha x|| = |\alpha|\ ||x||$，$\alpha \in \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$。
3. 三角不等式：$||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$。

则称 X 为实或复的赋范线性空间 *(normed linear space)*，$||x||$ 为元素 x 的范数 *(norm)*。

赋范线性空间中的距离

Definition 10.2. 对于赋范线性空间 X，我们定义下式来衡量 X 中元素 x 和 y 之间的距离：

$$\rho(x,y) = ||x-y||$$

下验证它的确符合距离的定义：

Proof. (1) 非负性可由范数的非负性直接验证。

(2) 对称性：$\rho(x,y) = ||x-y|| = |-1|\ ||x-y|| = ||y-x|| = \rho(y,x)$。

(3) 三角不等式：$\rho(x,y) = ||x-y|| = ||x-z+z-y|| \leqslant ||x-z|| + ||z-y|| = \rho(x,z)+\rho(z,y)$。 □

赋范线性空间中点列的收敛

赋范线性空间有了距离，自然也就有了点列收敛的概念。

Definition 10.3. 赋范线性空间 X 中，若点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x，则称 $\{x_n\}$依范数收敛 *(convergence in norm)*于 x，也称 $\{x_n\}$强收敛 *(strong convergence)*于 x。

范数的性质

范数有如下几个性质：

Property 10.1.1. *(1)* 范数是连续泛函。*(2)* 依范数收敛满足线性运算法则。

证明性质 (1) 成立之前先证明一个不等式。

Lemma 10.1. 对于赋范线性空间 X，$x, y \in X$，有：

$$| \, ||x|| - ||y|| \, | \leqslant ||x - y||$$

Proof. $||x|| = ||x-y+y|| \leqslant ||x-y|| + ||y||$，即 $||x|| - ||y|| \leqslant ||x-y||$；$||y|| = ||y-x+x|| \leqslant ||x-y|| + ||x||$，即 $-||x-y|| \leqslant ||x|| - ||y||$。

综上，$-||x-y|| \leqslant ||x|| - ||y|| \leqslant ||x-y||$，即 $| \, ||x|| - ||y|| \, | \leqslant ||x-y||$。 □

下面我们来证明范数的性质：

Proof. (1) 由引理 10.1，$| \, ||x_n|| - ||x|| \, | \leqslant ||x_n - x||$。因此当 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x 时，$||x_n|| \to ||x||$。

(2) 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是赋范线性空间 X 中的点列，且 $\{x_n\} \to x$，$\{y_n\} \to y$，$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 中的点列，且 $\{a_n\} \to a$, $\{b_n\} \to b$，由范数的定义：

$$\begin{aligned} ||a_n x_n + b_n y_n - (ax+by)|| &\leqslant ||a_n x_n - ax|| + ||b_n y_n - by|| \\ &= ||a_n x_n - a_n x + a_n x - ax|| + ||b_n y_n - b_n y + b_n y - by|| \\ &\leqslant |a_n| \, ||x_n - x|| + |a_n - a| \, ||x|| + |b_n| \, ||y_n - y|| + |b_n - b| \, ||y|| \end{aligned}$$

由 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的收敛性以及 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的收敛性立即可得 $\{a_n x_n + b_n y_n\} \to ax + bx$。 □

10.2 赋范线性空间作为线性空间的性质

10.2.1 基与维数

Definition 10.4. 若赋范线性空间 X 中存在 n $(n \geqslant 1)$ 个元素 $e_1, e_2, \ldots, e_n$，使得任意的 $x \in X$ 都能唯一地表示成

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$$

的形式，则称 $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ 是 X 的一组基，称 $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ 是 x 在基 $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ 下的坐标，称 n 为 X 的维数，称 X 是 n 维赋范线性空间。所有的 n 维赋范线性空间统称为有限维赋范线性空间 *(finite dimensional normed linear space)*，非有限维的赋范线性空间统称为无限维赋范线性空间 *(infinite dimensional normed linear space)*。

10.2.2 直和

Theorem 10.1. 设 $L_1,L_2,\dots,L_n$ 都是赋范线性空间，X 是 $L_1,L_2,\dots,L_n$ 的直和，即：

$$X = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n$$

可在 X 中定义如下范数：

$$||x|| = ||x_1|| + ||x_2|| + \cdots + ||x_n||$$
$$||x||_1 = \max_i ||x_i||$$
$$||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

这里 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in X$，$x_i \in L_i (i = 1,2,\dots,n)$。$X$ 按照这些范数都构成赋范线性空间。

Proof. 证明略去，太过简单。 □

Theorem 10.2. 如果 $L_1,L_2,\dots,L_n$ 都是 *Banach* 空间，X 是 $L_1,L_2,\dots,L_n$ 的直和，则 X 按照定理 10.1也成为 *Banach* 空间。

Proof. (1) 对于范数 $||x||$，在 X 中任取 Cauchy 点列 $\{x_m\}$，记：

$$x_m = \sum_{i=1}^{n} y_m^i, \quad y_m^i \in L_i,\ m \in \mathbb{N}^+,\ i = 1,2,\dots,n$$

因为 $\{x_m\}$ 是 Cauchy 点列，所以对于 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}^+$, $\forall\, j,k > N$，有：

$$\begin{aligned} ||x_j - x_k|| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} (y_j^i - y_k^i)\right\| \\ &= \sum_{i=1}^{n} ||y_j^i - y_k^i|| < \varepsilon \end{aligned}$$

于是 $||y_j^i - y_k^i|| < \varepsilon$，即 $\{y_m^i\}$ 也构成 Cauchy 点列，其中 $i = 1,2,\dots,n$。因为 $L_1,L_2,\dots,L_n$ 都是 Banach 空间，同时 $\{y_m^i\} \subset L_i$，所以存在 $y_i \in L_i$，使得 $\{y_m^i\} \to y_i$。令 $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$，显然 $y \in X$。则：

$$x_m - y = \sum_{i=1}^{n} (y_m^i - y_i) \to 0 \quad (m \to +\infty)$$

即 $\{x_m\} \to y \in X$。由 $\{x_m\}$ 的任意性，X 是完备的，所以 X 是一个 Banach 空间。

(2) 与 (1) 几乎完全一样，只是由 $\max_i ||y_j^i - y_k^i|| < \varepsilon$ 导出 $\{y_m^i\}$ 是 Cauchy 点列。

(3) 由：

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} ||y_j^i - y_k^i||^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} ||y_j^i - y_k^i||$$

可导出 $\{y_m^i\}$ 是 Cauchy 点列。 □

10.2.3 商空间

Definition 10.5. 当 L 是 X 的闭子空间时，可在商空间 X/L 中引进范数：对任意的 $\xi \in X/L$，令： 思考为什么一定得是闭子空间

$$||\xi|| = \inf_{x \in \xi} ||x||$$

Proof. (1) 非负性与 (2) 数乘显然，(3) 三角不等式由下确界的性质也易得。 □

Theorem 10.3. 当 X 是 *Banach* 空间，L 是 X 的闭子空间时，X/L 也是 *Banach* 空间。

Proof. 任取 X/L 中的一个 Cauchy 点列 $\{\xi_n\}$。对于 ξ_n，存在 $x_n \in \xi_n$，使得 $\xi_n = x_n + L$。由 Cauchy 点列的性质，对于 $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n, m > N$，有：

$$||\xi_m - \xi_n|| = ||x_m - x_n + L|| = \inf_{x \in x_m - x_n + L} ||x|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

因为 $x_m - x_n + L \subset X$，由下确界的定义，X 中必然存在元素 y_m, y_n 使得 □ 需要证明

10.2.4 有限维赋范线性空间的性质

等距同构与拓扑同构

Definition 10.6. 设 X 和 Y 都是赋范线性空间，如果满足条件：

1. X 和 Y 作为线性空间是同构的。

2. 从 X 到 Y 的同构映射 T 是等距的（同胚的）。

则称 X 和 Y 等距同构 *(isometric isomorphism)*（拓扑同构 *(topological isomorphism)*）。

Lemma 10.2. 若 X 和 Z 拓扑同构，Y 和 Z 也拓扑同构，则 X 和 Z 拓扑同构。

Proof. 由同构的传递性及两个连续映射的复合也是连续映射可立即推出。 □

Theorem 10.4. 任意两个同为实或复的 n 维赋范线性空间必拓扑同构。

Proof. 实：由引理 10.2，只需证明任意 n 维赋范线性空间与 $\mathbb{R}^n$ 拓扑同构。

任取一个 n 维赋范线性空间 X。下证 X 和 $\mathbb{R}^n$ 之间存在一个双射。

设 X 是一个实的 n 维赋范线性空间，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 是 X 的一个基。定义一个映射 $T : \mathbb{R}^n \mapsto X$ 如下（$\xi \in \mathbb{R}^n$）：

$$T\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

由于 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 是 X 的一个基，所以 $T\xi$ 的表出方式唯一，即 T 是一个单射。其次对任意的 $y \in X$，它必然能由 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 线性表出，因此有 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$，使得 $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i e_i = T\eta$，因此 T 是一个满射。

映射 T 保持线性运算是显然的。

综上，X 和 $\mathbb{R}^n$ 作为线性空间是同构的。

下证映射 T 是连续映射：

$$\begin{aligned}
||T\xi - T\eta|| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i) e_i \right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i| \, ||e_i|| \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= M \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

由上式，显然 T 是一个连续映射。

下证 T^{-1} 是一个连续映射。

要证 T^{-1} 是一个连续映射，即证 $\forall\, x, y \in X$，$\exists\, a \geqslant 0$ 使得：

$$||T^{-1}x - T^{-1}y|| \leqslant a||x - y||$$

因为已经证得 T 是一个双射且保持线性运算，所以只需证：

$$||T^{-1}x|| \leqslant a||x||$$

即：

$$\exists\, m > 0, \ \frac{||x||}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \geqslant m$$

由此想到单位球面。对 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in X$，令：

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = ||x||$$

当 $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面上时，即 $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1$ 时，有 $||x|| \neq 0$。因为若此时 $||x|| = 0$，则 x 是赋范线性空间 X 的零元，那么也就有 $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \mathbf{0}$。因为 $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1$，所以 ξ_i 不全为零，即 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 线性相关。而 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 是 X 的一组基，是线性无关的。由此产生矛盾，也就是说此时 $||x|| \neq 0$。又因为单位球面是一个有界闭集（若某个聚点不在单位球面上，那么单位球面上收敛到这个聚点的点列从某项开始也不会在单位球面上，矛盾），$\mathbb{R}^n$ 上的有界闭集是紧集，所以定义在其上的连续函数可以取到最小值，所

以 $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ 在单位球面上有正的下确界 m，即 $||x|| \geqslant m$。对任意的 $x \in X$ 进行单位化，即取 x' 满足：

$$x' = \frac{x}{\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

那么就有 $||x'|| \geqslant m$，即：

$$||x|| \geqslant m \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

于是：

$$||T^{-1}x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{||x||}{m}$$

因此：

$$||T^{-1}x - T^{-1}y|| = ||T^{-1}(x-y)|| \leqslant \frac{||x-y||}{m}$$

复：类似，证明与 $\mathbb{C}^n$ 拓扑同构。 □

Corollary 10.1. *(1) 任一 $n \in \mathbb{N}^+$ 维赋范线性空间都是完备的。(2) 任一赋范线性空间 X 的 $n \in \mathbb{N}^+$ 维子空间都是完备的，从而是闭子空间。*

Proof. (1) 取 n 维赋范线性空间 X。因为 X 与 $\mathbb{R}^n$ 是拓扑同构的，那么 X 与 $\mathbb{R}^n$ 之间存在一个双射 $T: X \to \mathbb{R}^n$，且 T 和 T^{-1} 是连续的。任取 X 上的一个 Cauchy 点列 $\{x_n\}$，$Tx_n = y_n \in \mathbb{R}^n$。

下证 $\{y_n\}$ 也是一个柯西序列。

即证对任意的 $\varepsilon > 0$，$\exists\, N \in \mathbb{N}^+$，当 $n, m > N$ 时，有 $\rho(y_n, y_m) < \varepsilon$。

因为 T 是连续的，所以对上述 ε，$\exists\, \delta > 0$，当 $\rho(x_n, x_m) < \delta$ 时，有 $\rho(y_n, y_m) < \varepsilon$。而 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列，因此对上述 δ，$\exists\, N' \in \mathbb{N}^+$，当 $n, m > N$ 时，有 $\rho(x_n, x_m) < \delta$。所以取 $N = N'$ 即可满足条件。因此 $\{y_n\}$ 是一个柯西序列。

因为 $\mathbb{R}^n$ 是完备的，所以 $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^n$。那么就有：

$$\lim_{n\to+\infty} T^{-1}y_n = T^{-1} \lim_{n\to+\infty} y_n = T^{-1}y$$

因为 T 是双射，那么 $\exists\, x \in X$ 使得 $x = T^{-1}y$。因为：

$$\lim_{n\to+\infty} T^{-1}y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n$$

所以 $\{x_n\} \to x \in X$。由 $\{x_n\}$ 的任意性，X 是完备的。

(2) 完备性由 (1) 可直接得到。因为完备，所以任一 Cauchy 点列收敛。因为任一收敛点列都是 Cauchy 点列，所以聚点都在其内，从而是闭子空间。 □

Riesz 引理

Lemma 10.3. 设 X_0 是赋范线性空间 X 的真闭子空间，那么对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $x_0 \in X$，满足 $||x_0|| = 1$，且对任意的 $x \in X_0$，有：

$$||x_0 - x|| \geqslant 1 - \varepsilon$$

Proof. 当 $\varepsilon \geqslant 1$ 时结论是显然的。下证 $\varepsilon < 1$ 时结论成立。

因为 X_0 是 X 的真子空间，所以 $\exists\, x_1 \in X \backslash X_0$。记：

$$d = \inf_{x \in X_0} ||x - x_1||$$

因为 X_0 是闭的，所以 $d > 0$。因为 $\varepsilon < 1$，因此 $\frac{d}{1-\varepsilon} > d$。由下确界的定义，存在 $x_2 \in X_0$，使得：

$$d \leqslant ||x_2 - x_1|| < \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

令 $x_0 = \frac{x_1 - x_2}{||x_1 - x_2||}$，则 $||x_0|| = 1$。对任意的 $x \in X_0$，注意到 $x_2 \in X_0$，因此有 $||x_1 - x_2||x + x_2 \in X_0$，于是有：

$$\begin{aligned} ||x - x_0|| &= \left\| x - \frac{x_1 - x_2}{||x_1 - x_2||} \right\| \\ &= \frac{1}{||x_1 - x_2||} \left\| \Big(||x_1 - x_2||x + x_2 \Big) - x_1 \right\| \\ &\geqslant \frac{d}{||x_1 - x_2||} \\ &> 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

□

有限维赋范线性空间的判别

Definition 10.7. X 是一个赋范线性空间，若 X 的任一有界闭集是紧的，则称 X 是 *局部紧的 (locally compact)*。

Theorem 10.5. 赋范线性空间 X 是有限维的的充分必要条件为 X 是局部紧的。

Proof. 必要性：设 X 是 n 维实赋范线性空间，由定理 10.4，X 与 $\mathbb{R}^n$ 拓扑同构。因此 X 中的有界闭集映成 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集，反之亦然（闭集由连续映射保证，有界）。而 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集是紧的，因为 $\mathbb{R}^n$ 到 X 上的映射是连续映射，于是 X 中的任一有界闭集也是紧的（连续映射把紧集映射为紧集）。所以 X 是局部紧的。

有空证明

充分性：若此时 X 是无限维的。取 $S = \{x : ||x|| = 1\}$ 为 X 的单位球面 □

10.3 Banach 空间

Definition 10.8. 完备的赋范线性空间称之为 *Banach 空间 (Banach space)*。

10.3.1 无限维 Banach 空间的基

Definition 10.9. 设 X 是一个无限维的 *Banach* 空间，X 中的点列 $\{e_n\}$ 如果满足：X 中的任一元素 x 可唯一地表示成

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n e_n$$

其中 ξ_n 为实数或复数，仅与 x 有关，且右端的级数依 X 中的范数收敛，则称 $\{e_n\}$ 为 X 的 *Schauder* 基或简称基。

Theorem 10.6. 具有 *Schauder* 基的 *Banach* 空间可分。

Proof. 设 X 为具有 Schauder 基 $\{e_n\}$ 的 Banach 空间。取 X 的一个子集 E，E 是以下点构成的集合：

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i e_i : n \in \mathbb{N}^+, r_i \in \mathbb{Q}\right\}$$

任取 $x \in X$，则 x 可表示为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \xi_i e_i$。在 E 中取点列 $\{x_n\}$，其中:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_{in} e_i$$

$$\eta_{in} \in \mathbb{Q}, \lim_{n\to+\infty} \eta_{in} = \xi_i$$

因为：

$$\begin{aligned}
||x_n - x|| &= \left\|\sum_{i=1}^{n}(\eta_{in} - \xi_i)e_i - \sum_{i=n+1}^{+\infty} \xi_i e_i\right\| \\
&\leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n}(\eta_{in} - \xi_i)e_i\right\| + \left\|\sum_{i=n+1}^{+\infty} \xi_i e_i\right\|
\end{aligned}$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \xi_n e_n$ 依 X 中的范数收敛，所以后一项由 Cauchy 收敛准则趋于 0，而前一项显然趋于 0，所以 $\{x_n\} \to x$，且 $x_n \in E, \forall\, n \in \mathbb{N}^+$。因此 x 是 E 的一个聚点。由 x 的任意性，$X \subset \overline{E}$。而 E 是可数集合，因此 X 可分。 □

10.4 Hilbert 空间

Definition 10.10. 设 X 是一个内积空间（可参考定义 *1.42*），在其上可定义如下范数：

$$||x|| = \sqrt{(x,x)}$$

那么 X 成为赋范线性空间。若 X 是完备的，则称其为*Hilbert 空间 (Hilbert space)*。若 X 不完备，则称其为*准 Hilbert 空间 (pre-Hilbert space)*。

下证这个定义满足范数的定义：

Proof. (1) 非负性和 (2) 数乘可分别由内积的定义 (3) 和 (1) 立刻得出。

(3) 三角不等式：由内积形式的 Cauchy-Schwarz 不等式（即不等式 3），可得：

$$
\begin{aligned}
||x+y||^2 &= |(x+y,x+y)| \\
&= |(x,x+y)+(y,x+y)| \\
&\leqslant |(x,x+y)|+|(y,x+y)| \\
&\leqslant \sqrt{(x,x)(x+y,x+y)}+\sqrt{(y,y)(x+y,x+y)} \\
&= \sqrt{||x||^2||x+y||^2}+\sqrt{||y||^2||x+y||^2} \\
&= ||x||\;||x+y||+||y||\;||x+y||
\end{aligned}
$$

两边除 $||x+y||$，即有：

$$||x+y|| \leqslant ||x||+||y|| \qquad \square$$

内积是连续函数

设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是内积空间 X 中的点列，且分别依范数收敛于 $x,y\in X$，注意到：

$$
\begin{aligned}
|(x_n,y_n)-(x,y)| &= |(x_n,y_n)-(x_n,y)+(x_n,y)-(x,y)| \\
&= |(x_n,y_n-y)+(x_n-x,y)| \\
&\leqslant |(x_n,y_n-y)|+|(x_n-x,y)| \\
&\leqslant ||x_n||\;||y_n-y||+||x_n-x||\;||y||
\end{aligned}
$$

由 $\{x_n\}$ 收敛，可得到 $||x_n||$ 有界。于是上式极限为 0，即内积是连续函数。

10.4.1　内积与范数的关系

极化恒等式

如下公式反映了内积和范数之间的关系，被称为极化恒等式 (polarization identity)。第一个公式针对于实内积空间，第二个针对于复内积空间。

$$(x,y)=\frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2)$$

$$(x,y)=\frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2+i||x+iy||^2-i||x-iy||^2)$$

Proof. (1) 从右式开始推：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2) &= \frac{1}{4}[(x+y,x+y)-(x-y,x-y)] \\
&= \frac{1}{4}[(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)-(x,x)-(x,-y)-(-y,x)-(-y,-y)] \\
&= \frac{1}{4}[(x,x)+(x,y)+(x,y)+(y,y)-(x,x)+(x,y)+(x,y)-(y,y)] \\
&= \frac{1}{4}[(x,y)+(x,y)+(x,y)+(x,y)] \\
&= (x,y)
\end{aligned}
$$

(2) 注意此时：

$$\begin{aligned}(x+y,x+y)&=(x,x+y)+(y,x+y)\\&=\overline{(x+y,x)}+\overline{(x+y,y)}\\&=\overline{(x,x)+(y,x)}+\overline{(x,y)+(y,y)}\\&=(x,x)+\overline{(y,x)}+\overline{(x,y)}+(y,y)\\&=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\end{aligned}$$

上式第三行到第四行使用了 $\overline{a+b}=\overline{a}+\overline{b}$。接下来同样从右式开始推：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2+i||x+iy||^2-i||x-iy||^2)\\=&\frac{1}{4}[(x+y,x+y)-(x-y,x-y)+i(x+iy,x+iy)-i(x-iy,x-iy)]\\=&\frac{1}{4}[(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)-(x,x)-(x,-y)-(-y,x)-(-y,-y)]+\\&\frac{1}{4}i[(x,x)+(x,iy)+(iy,x)+(iy,iy)-(x,x)-(x,-iy)-(-iy,x)-(-iy,-iy)]\\=&\frac{1}{4}[2(x,y)+2(y,x)+2i(x,iy)+2i(iy,x)]\\=&\frac{1}{4}[2(x,y)+2(y,x)+2(x,y)-2(y,x)]\\=&(x,y)\end{aligned}$$

□

中线公式

Lemma 10.4. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续实值函数，且对任意的 $a_1,a_2\in\mathbb{R}$，有：

$$f(a_1+a_2)=f(a_1)+f(a_2)$$

则对任意的 $a\in\mathbb{R}$，有：

$$f(a)=af(1)$$

Proof. 由条件，对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$、有：

$$f(1)=f\left(n\frac{1}{n}\right)=nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

于是对任意的 $\frac{n}{m}\in\mathbb{Q}^+$，有：

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=nf\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{n}{m}f(1)$$

又因：

$$f(0)=f(2\times 0)=2f(0),f(0)=0$$
$$f(0)=f(a-a)=f(a)+f(-a)=0,f(a)=-f(a)$$

于是对任意的 $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^+$，有：

$$f(-\frac{n}{m}) = -\frac{n}{m} f(1)$$

综上对任意的 $x \in \mathbb{Q}$ 成立。对任意的 $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\exists \{x_n\} \in \mathbb{Q}$, $\{x_n\} \to x$，由 f 的连续性，即有：

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n f(1) = x f(1)$$

所以对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 成立。 □

Theorem 10.7 (中线公式)**.** 设 X 是内积空间，则对任意的 $x, y \in X$，由 X 的内积导出的范数 $||\cdot||$ 满足：

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

该公式被称为中线公式。反之，如果 X 是赋范线性空间，X 的范数满足上式，则可以在 X 中定义内积 $(\cdot,\cdot)$ 使 X 成为内积空间，且其范数就是由内积 $(\cdot,\cdot)$ 导出的。

Proof. (1) 先证明内积导出的范数满足上述公式：

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 + ||x-y||^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) \\ &= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y) \\ &= 2(x,x) + 2(y,y) \\ &= 2||x||^2 + 2||y||^2 \end{aligned}$$

有空证明

(2) 反之，利用极化恒等式来定义内积，接下来需要证明该定义满足内积的三个条件。 □

10.4.2 Hilbert 空间中的正交系

Definition 10.11. X 是一个内积空间，$x, y \in X$，$M, N \subset X$。若 $(x,y) = 0$，则称 x 与 y 正交 *(orthogonal)*，记为 $x \perp y$。若 x 与 M 中任一元素正交，则称 x 与 M 正交，记为 $x \perp M$。若 $\forall\, x \in M$ 以及 $\forall\, y \in N$ 有 $x \perp y$，则称 M 与 N 正交，记为 $M \perp N$。称 $\{x \in X : x \perp M\}$ 为 M 的正交余 *(orthogonal complement)*，记为 $M^\perp$。

内积空间中的勾股定理

Theorem 10.8. X 是一个内积空间，其中的元素 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 互相正交。记 $x = \sum_{i=1}^n x_i$，则有：

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^n ||x_i||^2$$

Proof. 由内积的线性运算性质，可以得到：

$$||x||^2 = \left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n (x_i, x_i) = \sum_{i=1}^n ||x_i||^2$$ □

Theorem 10.9. X 是一个内积空间。如果 $x \in X$ 与 X 中的一个稠密子集 E 正交，则 $x = \mathbf{0}$。

Proof. 因为 E 在 X 中稠密，所以存在 $\{x_n\} \in E$ 使得 $\{x_n\} \to x$。由内积的连续性：

$$(x, x) = \left(x, \lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty}(x, x_n) = 0$$

由内积的定义即可得到 $x = \mathbf{0}$。 □

Theorem 10.10. X 是一个内积空间，$E \subset X$。$E^{\perp}$ 是 X 的闭子空间。

Proof. 设 α, β 为 X 对应数域中的两个数，$\forall\, x, y \in E^{\perp}$，则对任意的 $z \in E$ 有：

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0$$

所以 $\alpha x + \beta y \in E^{\perp}$，故 $E^{\perp}$ 是 X 的子空间。

任取 $x \in \overline{E^{\perp}}$，则存在 $E^{\perp}$ 中的点列 $\{x_n\} \to x$。任取 $y \in E$，由内积的连续性可以得到：

$$(x, y) = \left(\lim_{n\to+\infty} x_n, y\right) = \lim_{n\to+\infty}(x_n, y) = 0$$

所以 $x \perp E$，即 $x \in E^{\perp}$。由 x 的任意性，$E^{\perp}$ 是闭集。

综上，$E^{\perp}$ 是 X 的闭子空间。 □

Definition 10.12. X 是一个内积空间，$E \subset M$，$x \in X$。如果 $\exists\, y \in E$ 使得：

$$||x - y|| = \inf_{z\in E} ||x - z||$$

则称 y 是 x 在 M 中的一个最佳逼近元 *(best approximation element)*。

Definition 10.13. X 是一个内积空间，$E \subset M$。若对任意的 $x, y \in E$，$\dfrac{x+y}{2} \in E$，则称 E 为凸集 *(convex set)*。若 E 还是一个闭集，则称 E 为凸闭集 *(convex closed set)*。

Theorem 10.11. X 是一个 *Hilbert* 空间，E 是 X 中的凸闭集。对任意的 $x \in X$ 在 E 中存在唯一的最佳逼近元。

Proof. 任取 $x \in X$，记：

$$\inf_{z\in E} ||x - z|| = a$$

存在性：由下确界的定义，可从 E 中得到一个点列 $\{y_n\}$ 满足：

$$\lim_{n\to+\infty} ||x - y_n|| = a$$

下证 $\{y_n\}$ 是一个 Cauchy 点列。令 $n > m$，由中线公式可得到：

$$\begin{aligned}||y_n - y_m||^2 &= ||y_n - x + x - y_m||^2 \\ &= 2||y_n - x||^2 + 2||x - y_m||^2 - ||2x - y_m - y_n||^2 \\ &= 2||y_n - x||^2 + 2||x - y_m||^2 - 4\left\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\right\|^2\end{aligned}$$

因为 E 是 X 中的闭凸集，$y_m, y_n \in E$，所以 $\frac{y_m+y_n}{2} \in E$，进而有：

$$\left\|x - \frac{y_m+y_n}{2}\right\|^2 \geqslant a^2$$

又因 $n, m \to +\infty$ 时，有：

$$||y_n - x||^2 \to a^2,\ ||x - y_m||^2 \to a^2$$

由上述：

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty} ||y_n - y_m||^2 &\leqslant \lim_{m\to+\infty} \left(2||y_n - x||^2 + 2||x - y_m||^2 - 4a^2\right) \\ &= \lim_{m\to+\infty} 2||y_n - x||^2 + \lim_{m\to+\infty} 2||x - y_m||^2 - 4a^2 = 2a^2 + 2a^2 - 4a^2 = 0\end{aligned}$$

故 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 点列。因为 X 是完备的，所以 $\{y_n\} \to y \in X$。又因 E 是闭集，所以 $y \in E$。由范数的连续性：

$$||x - y|| = \left\|x - \lim_{n\to+\infty} y_n\right\| = \lim_{n\to+\infty} ||x - y_n|| = a$$

所以 y 是 x 在 E 中的最佳逼近元。

唯一性：假设 x 在 E 中存在另一最佳逼近元 y'，由中线公式：

$$\begin{aligned}||y - y'||^2 &= ||y - x + x - y'||^2 \\ &= 2||y - x||^2 + 2||x - y'||^2 - 4\left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 0\end{aligned}$$

所以 $||y - y'|| = 0$。由范数的性质，$y = y'$。 □

Theorem 10.12. *X 是一个 Hilbert 空间，E 是 X 中的闭子空间。对任意的 $x \in X$，存在下述唯一的正交分解：*

$$x = y + z, \quad y \in E,\ z \in E^{\perp}$$

称 y 为 x 在 E 中的正交投影 (orthogonal projection)。

Proof. 存在性：因为 E 是 X 中的闭子空间，所以 E 是一个凸闭集，x 在 E 中存在唯一的最佳逼近元 y，记 $||x - y|| = a$。因为 $y \in E$，所以对任一实（或复）数 λ 以及 $\forall\, u \in E$，有 $y + \lambda u \in E$，故：

$$\begin{aligned}a^2 &\leqslant ||x - (y + \lambda u)||^2 \\ &= \Big(x - (y + \lambda u), x - (y + \lambda u)\Big) \\ &= \Big((x - y) - \lambda u, (x - y) - \lambda u\Big) \\ &= ||x - y||^2 - \overline{\lambda}(x - y, u) - \lambda(u, x - y) + |\lambda|^2||u||^2\end{aligned}$$

取 $\lambda = \frac{(x-y,u)}{||u||^2}$，上式即可化为：

$$a^2 \leqslant a^2 - \frac{|(x-y,u)|^2}{||u||^2} - \frac{|(x-y,u)|^2}{||u||^2} + \frac{|(x-y,u)|^2}{||u||^4}||u||^2 = a^2 - \frac{|(x-y,u)|^2}{||u||^2}$$

所以：

$$|(x-y,u)|^2 \leqslant 0$$

因此 $(x-y,u)=0$。由 u 的任意性，$(x-y)\perp E$。令 $z=x-y$，即有：

$$x = y + z, \quad y \in E,\ z \in E^{\perp}$$

唯一性: 假设此时存在另一分解 $x = y' + z'$, $y' \in E, z' \in E^{\perp}$，则 $y+z = y'+z'$，也即 $y - y' = z' - z$。因为 $(y-y') \in E$，$(z'-z) \in E^{\perp}$，所以 $(y-y') = (z'-z) \in E \cap E^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$，故 $y = y'$, $z = z'$。 □

Definition 10.14. 设 $\{e_n\}$ 为内积空间 X 中的元素系，且满足：

$$(e_m, e_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

则称 $\{e_n\}$ 是 X 中的一个规范正交系 *(orthogonal system)*。对任意的 $x \in X$，称 $c_n = (x, e_n)$ 为 x 关于 $\{e_n\}$ 的第 n 个傅里叶系数 *(Fourier coefficient)*，称 $\{(x, e_n)\}$ 为 x 关于 $\{e_n\}$ 的傅里叶系数集 *(set of Fourier coefficients)*。

Theorem 10.13. *X 是一个内积空间，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 是 X 中的一个规范正交系，$E = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$。对任意的 $x \in X$，x 在 E 上的正交投影为：*

$$y = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$$

Proof. E 显然是一个闭集，又因为 E 是一个子空间，所以对任意的 $x \in X$，有唯一的正交分解：

$$x = y + z, \quad y \in E,\ z \in E^{\perp}$$

因为 $y \in E$，所以：

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

由规范正交系的定义可以得到：

$$y = \sum_{i=1}^{n} (y, e_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i - \sum_{i=1}^{n} (z, e_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$$ □

Theorem 10.14 (Bessel inequality)**.** *X 是一个 Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 是 X 中的一个规范正交系。对任意的 $x \in X$，有：*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2 \leqslant ||x||^2$$

Proof. x 在 $\text{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 中存在正交投影 y 满足：

$$y = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$$

由内积空间的勾股定理，$||y|| \leqslant ||x||$，故：

$$\begin{aligned}
||y||^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i, \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big((x, e_i) e_i, (x, e_i) e_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 (e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 \leqslant ||x||
\end{aligned}$$

由极限的不等式性，令 $n \to +\infty$ 即可得到结果。 □

Theorem 10.15 (Parseval's identity)**.** X 是一个 *Hilbert* 空间，$\{e_n\}$ 是 X 中的一个规范正交系，数列 $\{c_n\} \in l^2$。存在唯一的 $x \in X$，使得 $\{c_n\}$ 是 x 关于 $\{e_n\}$ 的 *Fourier* 系数集，且等式：

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2$$

成立，该等式称为 *Parseval's identity*。

Proof. **(1) 存在性**：构建点列 $\left\{ x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i \right\}$，设 $m > n$，则有：

$$||x_m - x_n||^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} c_i e_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=n+1}^{m} c_i e_i, \sum_{i=n+1}^{m} c_i e_i \right) = \sum_{i=n+1}^{m} |c_i|^2 (e_i, e_i) = \sum_{i=n+1}^{m} |c_i|^2$$

因为数列 $\{c_n\} \in l^2$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} |c_i|^2$ 收敛，故当 $m, n \to +\infty$ 时，$||x_m - x_n||^2 \to 0$，因此 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列。又因为 X 完备，所以 $\{x_n\} \to x \in X$。

由内积的连续性，对任意的 $i_0 \in \mathbb{N}^+$，有：

$$(x, e_{i_0}) = \left(\lim_{n \to +\infty} x_n, e_{i_0} \right) = \lim_{n \to +\infty} (x_n, e_{i_0})$$

由 $\{x_n\}$ 的定义可知，当 $n \geqslant i_0$ 时，$(x_n, e_{i_0}) = c_{i_0}$，所以：

$$(x, e_{i_0}) = c_{i_0}$$

将上述等式中的 i_0 换成 n，即有 $(x, e_n) = c_n$，所以 $\{c_n\}$ 是 x 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数集。又因为：

$$||x_n||^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 (e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$$

利用范数的连续性即可得到：

$$\lim_{n\to\infty}||x_n||^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2$$
$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{+\infty}|c_i|^2$$

(2) 唯一性：由推论 10.3给出。 □

Definition 10.15. X 是一个内积空间,$\{e_n\}$ 是 X 中的一个规范正交系。如果对任意的 $x\in X$, *Parseval's identity*：

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}|(x,e_n)|^2$$

恒成立，则称 $\{e_n\}$ 是完备的。

Definition 10.16. X 是一个内积空间,$\{e_n\}$ 是 X 中的一个规范正交系。如果对任意的 $x\in X$, 由 $(x,e_n)=0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^+$ 可推出 $x=\mathbf{0}$，则称 $\{e_n\}$ 是完全的 *(compelete)*。

Theorem 10.16. *X 是一个内积空间，$\{e_n\}$ 是 X 中的一个规范正交系。则下列性质等价：*

1. $\{e_n\}$ 是完备的。

2. 对任意的 $x\in X$，有：

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}(x,e_n)e_n$$

3. 对任意的 $x,y\in X$，有：

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}$$

且上式右端级数绝对收敛。

Proof. 我们按照 $1\Rightarrow 2\Rightarrow 3\Rightarrow 1$ 的顺序来证明等价性。

(1) 设 $x \in X$，则对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，有：

$$
\begin{aligned}
\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\| &= \left(x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i, x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right) \\
&= \left(x, x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i, x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right) \\
&= \overline{\left(x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i, x\right)}-\sum_{i=1}^{n}\Big((x,e_i)e_i, x-\sum_{j=1}^{n}(x,e_i)e_i\Big) \\
&= \overline{(x,x)-\sum_{i=1}^{n}\Big((x,e_i)e_i, x\Big)}-\sum_{i=1}^{n}\overline{\Big(x-\sum_{j=1}^{n}(x,e_i)e_i, (x,e_i)e_i\Big)} \\
&= (x,x)-\sum_{i=1}^{n}\overline{\Big((x,e_i)e_i, x\Big)}-\sum_{i=1}^{n}\overline{\Big(x, (x,e_i)e_i\Big)}+\sum_{i=1}^{n}\overline{\Big((x,e_i)e_i, (x,e_i)e_i\Big)} \\
&= (x,x)-\sum_{i=1}^{n}\Big(x, (x,e_i)e_i\Big)-\sum_{i=1}^{n}\Big((x,e_i)e_i, x\Big)+\sum_{i=1}^{n}\Big((x,e_i)e_i, (x,e_i)e_i\Big) \\
&= (x,x)-\sum_{i=1}^{n}\overline{(x,e_i)}(x,e_i)-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)(e_i,x)+\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)\overline{(x,e_i)} \\
&= ||x||^2-\sum_{i=1}^{n}\overline{(x,e_i)}(x,e_i)-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)\overline{(x,e_i)}+\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)\overline{(x,e_i)} \\
&= ||x||^2-\sum_{i=1}^{n}\overline{(x,e_i)}(x,e_i) \\
&= ||x||^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2
\end{aligned}
$$

因为 $\{e_n\}$ 是完备的，所以 Parseval’s identity 成立，于是有：

$$
\lim_{n\to+\infty}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\| = \lim_{n\to+\infty}\left[||x||^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\right]=0
$$

即：

$$
x=\sum_{n=1}^{+\infty}(x,e_n)e_n
$$

(2) 任取 $x, y \in X$，取点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 使得：

$$
x_n=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i,\ y_n=\sum_{i=1}^{n}(y,e_i)e_i
$$

显然 $\{x_n\} \to x$，$\{y_n\} \to y$。因为：

$$
\begin{aligned}
(x_n, y_n) &= \left(\sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i, \sum_{i=1}^{n} (y, e_i) e_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) \left(e_i, \sum_{j=1}^{n} (y, e_j) e_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) \sum_{j=1}^{n} \overline{(y, e_j)} (e_i, e_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) \overline{(y, e_i)}
\end{aligned}
$$

由内积的连续性可得：

$$
(x, y) = \lim_{n \to +\infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \to +\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} (x, e_i) \overline{(y, e_i)} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} (x, e_n) \overline{(y, e_n)}
$$

(3) 取 $y = x$ 即有：

需要证明绝对收敛

$$
||x||^2 = (x, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x, e_n) \overline{(x, e_n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2 \qquad \square
$$

Theorem 10.17. 如果 X 是一个 *Hilbert* 空间，则 $\{e_n\}$ 是完全的与上述三个命题也等价。

Proof. 我们设这个命题为 4，接下来来证明 $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$。

(1) 因为对任意的 $x \in X$，有 $(x, e_n) = 0$，所以对任意的 $y \in X$，有：

$$
(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x, e_n) \overline{(y, e_n)} = 0
$$

所以 $x = \mathbf{0}$。即由 $(x, e_n) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^+$ 能推得 $x = \mathbf{0}$，所以 $\{e_n\}$ 是完全的。

(2) 任取 $x \in X$。由 Bessel inequality，$\{(x, e_n)\} \in l^2$。因为 X 是一个 Hilbert 空间，由 Parseval's identity，存在 $y \in X$，使得 $\{(x, e_n)\}$ 是 y 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数集，且：

$$
||y||^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2
$$

而 $\{(x, e_n)\}$ 也是 x 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数集，所以 $x - y$ 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数满足 $(x, e_n) - (x, e_n) = 0$。因为 $\{e_n\}$ 是完全的，所以 $x - y = \mathbf{0}$，即 $x = y$，于是：

$$
||x||^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2 \qquad \square
$$

Corollary 10.2. 设内积空间 X 中存在完备的规范正交系，则 X 可分。

Proof. 设 $\{e_n\}$ 是 X 中完备的规范正交系，则对任意的 $x \in X$，有：

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty}(x, e_n)e_n$$

所以由 $\{e_n\}$ 张成的子空间在 X 中稠密，所以 $\{e_n\}$ 以有理数为系数的所有可能的线性组合构成的集在 X 中也稠密，且可列，于是 X 可分。 □

Corollary 10.3. 定理 10.15中使得 *Parseval's identity* 成立的元素是唯一的。

Proof. 设 X 是一个 Hilbert 空间，$\{c_n\} \in l^2$，$\{e_n\}$ 是 X 中的一个规范正交系，$x, x' \in X$ 且有：

$$||x||^2 = ||x'||^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|^2$$

需要证明

□

Schmidt 正交化

Theorem 10.18 (Schmidt 正交化)**.** 设 $E = \{x_n\}$ 是内积空间 X 中的一个可列子集，则由 E 必可作出一个规范正交系 $\{e_n\}$，使得 E 张成的子空间与 $\{e_n\}$ 张成的子空间相同。

Proof. 取 $y_1 \neq \mathbf{0}$ 且 $y_1 \in E$，令：

$$e_1 = \frac{y_1}{||y_1||}$$

则 $||e_1|| = 1$。取 $y_2 \in E$ 与 e_1 线性无关，令：

$$h_2 = y_2 - (y_2, e_1)e_1$$

则 $h_2 \neq \mathbf{0}$，否则的话就有 $y_2 = (y_2, e_1)e_1$，即 y_2 与 e_1 线性相关，与 y_2 的取法矛盾。因为 $(y_2, e_1)e_1$ 是 y_2 在 e_1 上的正交投影，所以 $h_2 = y_2 - (y_2, e_1)e_1 \perp e_1$。令：

$$e_2 = \frac{h_2}{||h_2||}$$

则 $||e_2|| = 1$, $e_2 \perp e_1$。取 y_3 与 e_1, e_2 线性无关，令：

$$h_3 = y_3 - (y_3, e_1)e_1 - (y_3, e_2)e_2$$

与前面相似，$h_3 \neq \mathbf{0}$。因为 $(y_3, e_1)e_1 - (y_3, e_2)e_2$ 是 y_3 在 $\mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ 上的正交投影，所以 $h_3 \perp e_j$, $j = 1, 2$。令：

$$e_3 = \frac{h_3}{||h_3||}$$

则 $||e_3|| = 1$, $e_i \perp e_j$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, $i \neq j$。

重复上述步骤，假设已作好相互正交且范数为 1 的元素 $e_1, , e_2, \ldots, e_n$。取 $y_{n+1} \in E$ 与 $e_1, , e_2, \ldots, e_n$ 线性无关，令：

$$h_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}(y_{n+1}, e_i)e_i$$

则 $h_{n+1} \neq \mathbf{0}$，且有 $h_{n+1} \perp e_i$，$i = 1, 2, \dots, n$。再令：

$$e_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{||h_{n+1}||}$$

于是得到 $n+1$ 个相互正交且范数均为 1 的元素 $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$。由归纳法，可以得到最多含可列个元素的规范正交系 $\{e_n\}$。

接下来证明 $\{x_n\}$ 张成的子空间 L 与 $\{e_n\}$ 张成的子空间 L' 相同。

从 e_n, h_n 的取法可以看出，e_n 可以由 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ 线性表出，由归纳法可得出 $L' \subset L$。反之，仍由 e_n, h_n 的取法可以看出，x_n 可由 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性表出，由归纳法可得出 $L \subset L'$。于是 $L = L'$。 □

Theorem 10.19. 可分的内积空间 X 必存在完备的规范正交系。

Proof. 因为 X 可分，所以 X 中有可列的稠密子集 $\{x_n\}$。由 Schmidt 正交化定理，利用 $\{x_n\}$ 可以建立规范正交系 $\{e_n\}$，且 $\{x_n\}$ 与 $\{e_n\}$ 张成的子空间相同。因为 $\{x_n\}$ 在 X 中稠密，所以任取 $y \in X$，存在 $\{x_n\}$ 中的点列 $\{y_n\}$ 使得 $\{y_n\} \to y$。因为 x_n 可由 $\{e_n\}$ 线性表出，所以 $\{y_n\}$ 可由 $\{e_n\}$ 线性表出，于是 $\{y_n\} \subset \operatorname{span}\{e_n,\ n \in \mathbb{N}^+\}$。把 y_n 用 $\{e_n\}$ 线性表出，就可以得到：

$$y_k = \sum_{n=1}^{+\infty} (y_k, e_n) e_n,\ k \in \mathbb{N}^+$$

因为：

$$\begin{aligned}
\left\| y - \sum_{n=1}^{+\infty} (y, e_n) e_n \right\| &\leqslant ||y - y_k|| + \left\| y_k - \sum_{n=1}^{+\infty} (y, e_n) e_n \right\| \\
&= ||y - y_k|| + \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} (y_k, e_n) e_n - \sum_{n=1}^{+\infty} (y, e_n) e_n \right\| \\
&= ||y - y_k|| + \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} (y_k - y, e_n) e_n \right\|
\end{aligned}$$

又：

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} (y_k - y, e_n) e_n \right\| &= \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (y_k - y, e_n) e_n, \sum_{n=1}^{+\infty} (y_k - y, e_n) e_n \right)} \\
&= \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} (y_k - y, e_n) \overline{(y_k - y, e_n)}} \\
&= \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |(y_k - y, e_n)|^2}
\end{aligned}$$

由 Bessel inequality 可得：

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} (y_k - y, e_n) e_n \right\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |(y_k - y, e_n)|^2} \leqslant ||y_k - y||$$

于是有：

$$\left\| y - \sum_{n=1}^{+\infty}(y, e_n)e_n \right\| \leqslant 2||y - y_k|| \to 0 \quad (k \to +\infty)$$

即：

$$\left\| y - \sum_{n=1}^{+\infty}(y, e_n)e_n \right\| = 0w$$

所以：

$$y = \sum_{n=1}^{+\infty}(y, e_n)e_n$$

由 y 的任意性，$\{e_n\}$ 是完备的。 □

可分 Hilbert 空间的同构性

Theorem 10.20. 实（或复）可分 *Hilbert* 空间与实（或复）l^2 空间等距同构，所以所有实（或复）可分 *Hilbert* 空间彼此等距同构。

Proof. 设 X 为实（或复）可分 Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 是 X 中的一个完备规范正交系。任取 $x \in X$，$\{c_n\}$ 是 x 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数集。作 X 到 l^2 中的映射：

$$T : Tx = \{c_n\}$$

(1) 由 Parseval's identity，T 是一个双射。

(2) 任取 $x, y \in X$，α, β 为 X 对应数域中的两个数，则：

$$T(\alpha x + \beta y) = \{(\alpha x + \beta y, e_n)\} = \{\alpha(x, e_n) + \beta(y, e_n)\} = \alpha Tx + \beta Ty$$

综上两点，T 是 X 到 l^2 中的同构映射。

任取 $x, y \in X$，由 $\{e_n\}$ 的完备性可得：

$$\begin{aligned}
||x - y||^2 &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}(x - y, e_n)e_n, \sum_{n=1}^{+\infty}(x - y, e_n)e_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(x - y, e_n)\overline{(x - y, e_n)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}|(x - y, e_n)|^2 \\
&= ||Tx - Ty||^2
\end{aligned}$$

所以 $||x - y|| = ||Tx - Ty||$，即 X 与 l^2 空间等距。

综上，X 与 l^2 等距同构。由 X 的任意性以及等距同构的传递性，所有实（或复）可分 Hilbert 空间彼此等距同构。 □

Chapter 11

常见度量空间与赋范线性空间

这章讨论各种常见的度量空间与赋范线性空间，讨论它们上具体的一些距离、范数。

11.1 $\mathbb{R}^n$

Definition 11.1. 记 $\mathbb{R}^n$ 为所有 n 维实向量 $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ 构成的线性空间。

11.1.1 $\mathbb{R}^n$ 上的距离

Definition 11.2. 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ 和向量 $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ 之间的距离为：

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

则 $(\mathbb{R}^n, \rho)$ 是一个度量空间，称该距离为欧几里得距离，简称为欧氏距离。

下证明上式定义的距离满足距离公理：

Proof. (1) 显然 $\rho \in R$；(2) 非负性直接可得；(3) 对称性直接可得；

(4) 三角不等式：由不等式 1，可得：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2
\end{aligned}$$

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n), y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n), z=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意三点，在上式中令 $a_i=(\xi_i-\zeta_i), b_i=(\zeta_i-\eta_i)$，则

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\zeta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

即

$$\rho(x,y)\leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y)$$ □

收敛的含义

Theorem 11.1. $\mathbb{R}^n$ 在欧氏距离下的收敛等价于按坐标收敛。

Proof. 由下式可立即推出：

$$\max_i|\xi_i-\eta_i|\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|$$ □

11.1.2 $\mathbb{R}^n$ 上的范数

Definition 11.3. 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ 的范数为：

$$||x||=\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

则 $\mathbb{R}^n$ 成为一个赋范线性空间。

下证明上式定义的范数满足范数定义：

Proof. (1)$||x||\in\mathbb{R}$、(2) 非负性和 (3) 数乘显然，(4) 三角不等式的证明可见欧式距离三角不等式的证明。 □

依范数收敛的含义

Theorem 11.2. $\mathbb{R}^n$ 中依范数收敛等价于按坐标收敛。

Proof. 依范数收敛等价于按欧氏距离收敛。 □

11.1.3 性质

可分性

Theorem 11.3. $\mathbb{R}^n$ 是可分的。

Proof. 坐标由有理数构成的点的全体是 $\mathbb{R}^n$ 的一个可列稠密子集。 □

11.2 $\mathbb{C}^n$

Definition 11.4. 记 $\mathbb{C}^n$ 为所有 n 维复向量 $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ 构成的线性空间。

11.2.1 $\mathbb{C}^n$ 上的距离

Definition 11.5. 在 $\mathbb{C}^n$ 中定义向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ 和向量 $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ 之间的距离为：

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

则 $(\mathbb{C}^n, \rho)$ 是一个度量空间。

下证明上式定义的距离满足距离公理：

Proof. (1) 显然 $\rho \in R$；(2) 非负性直接可得；(3) 对称性直接可得；

(4) 三角不等式：由不等式 2，可得：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\overline{(a_i + b_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)(\overline{a_i} + \overline{b_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i\overline{a_i} + a_i\overline{b_i} + b_i\overline{a_i} + b_i\overline{b_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(a_i\overline{b_i}) + \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| + \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{k} |b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2
\end{aligned}$$

设 $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意三点，在上式中令 $a_i = (\xi_i - \zeta_i), b_i = (\zeta_i - \eta_i)$，则

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \zeta_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |\zeta_i - \eta_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

即

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

□

收敛的含义

Theorem 11.4. $\mathbb{C}^n$ 在欧氏距离下的收敛等价于按坐标收敛。

Proof. 由下式可立即推出：

$$\max_i |\xi_i - \eta_i| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|$$ □

11.2.2 $\mathbb{C}^n$ 上的范数

Definition 11.6. 在 $\mathbb{C}^n$ 中定义元素 $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ 的范数为：

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

则 $\mathbb{C}^n$ 成为一个赋范线性空间。

下证明上式定义的范数满足范数定义：

Proof. (1)$||x|| \in \mathbb{R}$、(2) 非负性和 (3) 数乘显然，(4) 三角不等式的证明可见距离三角不等式的证明。 □

依范数收敛的含义

Theorem 11.5. $\mathbb{C}^n$ 中依范数收敛等价于按坐标收敛。

Proof. 依范数收敛等价于按距离收敛。 □

11.3 l^p

Definition 11.7. 记 $l^p(1 \leqslant p < \infty)$ 为全体满足下列不等式的实或复数列 $\{\xi_n\}$ 构成的集合：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$$

11.3.1 l^p 上的距离

Definition 11.8. 在 l^p 中定义元素 $x = \{x_n\}$ 和元素 $y = \{y_n\}$ 之间的距离为：

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

则 (l^p, ρ) 是一个度量空间。

下证明上式定义的距离满足距离公理：

Proof. (1)$\rho \in R$：由不等式 18可得：

$$|x_n - y_n|^p \leqslant \Big(|x_n| + |y_n|\Big)^p \leqslant 2^{p-1}\Big(|x_n|^p + |y_n|^p\Big)$$

于是：

$$\rho(x,y) \leqslant \left[\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{p-1}\Big(|x_n|^p + |y_n|^p\Big)\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[2^{p-1}\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^p + 2^{p-1}\sum_{n=1}^{+\infty}|y_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

由 l^p 空间定义，$\rho \in \mathbb{R}$。(2) 非负性直接可得；(3) 对称性直接可得；(4) 三角不等式：设 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 是任意的三个实或复有界数列。$p=1$ 时可由绝对值的三角不等式或模长的三角不等式立即得到，$p>1$ 时在 Minkowski 不等式（即不等式 13）

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

中取 $\xi_i = x_i - z_i, \eta_i = z_i - y_i$ 即可立即得到。 □

11.3.2 l^p 上的范数

Definition 11.9. 在 l^p 中定义元素 $x = \{x_n\}$ 的范数为：

$$||x|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

则 l^p 成为一个赋范线性空间。

下证明上式定义的范数满足范数定义：

Proof. (1)$||x|| \in \mathbb{R}$、(2) 非负性和 (3) 数乘显然，(4) 三角不等式的证明可由 Minkowski 不等式（即不等式 13）直接得到。 □

11.4 l^{∞}

记 l^{∞} 为全体实或复有界序列构成的集合。

11.4.1 l^{∞} 上的距离

Definition 11.10. 在 l^{∞} 中定义元素 $x = \{x_n\}$ 和元素 $y = \{y_n\}$ 之间的距离为：

$$\rho(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

则 (l^{∞}, ρ) 是一个度量空间。

下证明上式定义的距离满足距离公理：

Proof. (1)$\rho \in R$ 可由三角不等式和序列的有界性推出；(2) 非负性直接可得；(3) 对称性直接可得；

(4) 三角不等式：设 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 是任意的三个实或复有界序列。由三角不等式可得：

$$\begin{aligned}|x_n - y_n| &\leqslant |x_n - z_n| + |z_n - y_n| \\ &\leqslant \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_n - z_n| + \sup_{i\in\mathbb{N}} |z_n - y_n| \\ &= \rho(x,z) + \rho(z,y)\end{aligned}$$

因此：

$$\rho(x,y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

□

11.5 s

记 s 为全体实或复数列 $\{\xi_n\}$ 构成的集合。

11.5.1 s 上的距离

Definition 11.11. *在 s 中定义定义元素 $x = \{x_n\}$ 和元素 $y = \{y_n\}$ 之间的距离为：*

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

则 (s,ρ) 是一个度量空间。

下证明上式定义的距离满足距离公理：

Proof. (1) 由比较判别法，$\rho < \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$，于是 $\rho \in \mathbb{R}$; (2) 非负性直接可得; (3) 对称性直接可得; (4) 三角不等式：设 $x = \{x_n\}, y = \{y_n\}, z = \{z_n\}$ 是任意的三个实或复有界数列。考虑函数 $f(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}, t \in (0,+\infty)$，该函数是单调增函数。由 $|x_i - y_i| < |x_i - z_i| + |z_i - y_i|, i \in \mathbb{N}^+$，有：

$$\begin{aligned}\frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} &\leqslant \frac{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \\ &= \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \\ &\leqslant \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{|z_i - y_i|}\end{aligned}$$

将上式对 i 求和即有：

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

□

11.6 S

记 S 为定义在测度有限的可测集 F 上的一切 $a.e.$ 有限的可测函数构成的集合。

11.6.1 S 上的距离

Definition 11.12. 在 S 中定义定义元素 $x=x(t)$ 和元素 $y=y(t)$ 之间的距离为：

$$\rho(x,y)=\int_F \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,\mathrm{d}x$$

则 (S,ρ) 是一个度量空间。

下证明上式定义的距离满足距离公理：

11.7 $C[a,b]$

Definition 11.13. 记 $C[a,b]$ 为闭区间 $[a,b]$ 上全体实值或复值连续函数构成的集合。

11.7.1 $C[a,b]$ 上的距离

Definition 11.14. 在 $C[a,b]$ 中定义元素 $x=x(t)$ 和元素 $y=y(t)$ 之间的距离为：

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$$

则 $(C[a,b],\rho)$ 是一个度量空间。

下证明上式定义的距离满足距离公理：

Proof. (1)$\rho\in R$ 可由三角不等式和连续函数的有界性推出；(2) 非负性直接可得；(3) 对称性直接可得；

(4) 三角不等式：设 $x(t),y(t),z(t)$ 是 $[a,b]$ 上任意的三个连续函数。由绝对值的三角不等式或模长的三角不等式：

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\leqslant |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\ &\leqslant \max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a,b]}|z(t)-y(t)|\\ &=\rho(x,z)+\rho(z,y)\end{aligned}$$

因此：

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$$ □

收敛的含义

Theorem 11.6. $C[a,b]$ 在上述距离下的收敛等价于一致收敛。

Proof. 证明太过简单，略去。 □

11.7.2 $C[a,b]$ 上的范数

Definition 11.15. 在 $C[a,b]$ 中定义元素 $x=x(t)$ 的范数为：

$$||x|| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$$

则 $C[a,b]$ 成为一个赋范线性空间。

下证明上式定义的范数满足范数定义：

Proof. (1)$||x|| \in \mathbb{R}$、(2) 非负性和 (3) 数乘显然，(4) 三角不等式的证明可由最大值的加法运算得到。 □

依范数收敛的含义

Theorem 11.7. $C[a,b]$ 中依范数收敛等价于一致收敛。

Proof. 依范数收敛等价于按距离收敛。 □

11.7.3 性质

可分性

Theorem 11.8. $C[a,b]$ 是可分的。

Proof. 由伯恩斯坦定理，$[a,b]$ 上有理系数多项式的全体是 $C[a,b]$ 的一个可列稠密子集。 □

完备性

Theorem 11.9. $C[a,b]$ 是完备的。

Proof. 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的一个 Cauchy 点列，于是对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $m,n > N$ 时，有 $\rho(x_m,x_n) < \varepsilon$，即 $|x_m(t) - x_n(t)|$ 对 $t \in [a,b]$ 一致的成立。由函数序列一致收敛的 Cauchy 原理与函数序列极限函数的连续性定理，$\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于某连续函数 x_0，而 $C[a,b]$ 中一致收敛与按距离收敛是等价的，所以 $\{x_n\} \to x_0 \in C[a,b]$，即 $C[a,b]$ 完备。 □

Chapter 12

Banach 空间上的有界线性算子

12.1 线性算子

12.1.1 线性算子的定义

Definition 12.1. 设 X 和 Y 都是实（复）线性空间，T 是由 X 的某个子空间 E 到线性空间 Y 的一个映射，如果对任意的 $x, y \in E$，有：

$$T(x+y) = Tx + Ty$$

则称 T 是可加的。若对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$（或 $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$）即 $\forall\, x \in E$，有：

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

则称 T 是齐次的。称可加齐次映射为线性算子 *(linear operator)*。

12.1.2 线性算子的连续性

Definition 12.2. 设 X 和 Y 都是实（复）的赋范线性空间，T 是由 X 的某个子空间 E 到线性空间 Y 的线性算子。如果 T 是连续的，则称 T 为连续线性算子 *(continuous linear operator)*。

连续可加等价于连续线性

Theorem 12.1. 设 X 和 Y 都是实赋范线性空间，T 是由 X 的某个子空间 E 到线性空间 Y 的连续可加算子，则 T 是连续线性算子。

Proof. 由可加性可以得到：

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, x \in X,\ T(nx) = nTx$$

所以 T 对正整数集满足齐次性。

取 $x_1 = \dfrac{x}{n}$，代入上式可得：

$$Tx = nT\left(\frac{x}{n}\right)$$

即：

$$T\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{Tx}{n}$$

所以 T 对正有理数集满足齐次性。

取 $\mathbf{0}_X \in X$，由 T 对正有理数的齐次性，$T\mathbf{0}_X = T(2 \times \mathbf{0}_X) = 2T\mathbf{0}_X$，所以 $T\mathbf{0}_X = \mathbf{0}_Y$。由 T 的可加性可得：

$$T\mathbf{0}_X = T[x + (-x)] = Tx + T(-x) = \mathbf{0}_Y \in Y$$

即：

$$T(-x) = -Tx$$

所以 T 对有理数集满足齐次性。

因为任意无理数都可用一个有理数序列去逼近，由 T 的连续性，显然 T 对无理数集也满足齐次性。

综上，T 是一个连续线性算子。 □

Theorem 12.2. 设 X 和 Y 都是复赋范线性空间，T 是由 X 的某个子空间 E 到线性空间 Y 的连续可加算子，且 $T(ix) = iTx$，则 T 是连续线性算子。

Proof. 设 $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$，由定理 12.1：

$$\begin{aligned} T(ax) &= T[(a_1 + ia_2)x] = T(a_1x + ia_2x) = T(a_1x) + T(ia_2x) \\ &= a_1Tx + iT(a_2x) = a_1Tx + ia_2Tx = (a_1 + ia_2)Tx = aTx \end{aligned}$$ □

12.1.3 线性算子的有界性

Definition 12.3. 如果 T 将 E 中的任一有界集映射为 Y 中的有界集，则称 T 是有界线性算子 *(bounded linear operator)*。如果存在 E 中的有界集 A，使得 TA 是 Y 中的无界集，则称 T 是无界线性算子 *(unbounded linear operator)*。

线性算子有界的等价定义

Theorem 12.3. 设 X 和 Y 都是实赋范线性空间，T 是由 X 的某个子空间 E 到线性空间 Y 的线性算子，则 T 有界的充分必要条件为：

$$\exists\, M > 0,\ \forall\, x \in E,\ ||Tx|| \leqslant M||x||$$

有时间思考一下有界集范数有界的证明应该放在什么位置

Proof. (1) 充分性：任取 $A \subset E$ 是一个有界集，则：

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, x \in A,\ ||x|| \leqslant K$$

因此：

$$\exists\, M > 0,\ \exists\, K > 0,\ \forall\, x \in A,\ ||Tx|| \leqslant M||x|| \leqslant MK$$

所以 TA 是 Y 中的有界集。由 A 的任意性，T 有界。

(2) 必要性：在 E 中取单位球面 $S = \{x \in E : ||x|| = 1\}$，显然 S 有界，因此 TS 有界。于是：

$$\exists\, M > 0,\ \forall\, x \in S,\ ||Tx|| \leqslant M$$

设 x 为 E 中任意非 $\mathbf{0}$ 的元素，则：

$$\frac{x}{||x||} \in S$$

所以有：

$$\left\| T\left(\frac{x}{||x||}\right) \right\| \leqslant M$$

由 T 的齐次性：

$$||Tx|| \leqslant M||x||$$

因为 X 中的零元必然被线性算子 T 映射为 Y 中的零元，所以当 $x = \mathbf{0}$ 时，Tx 必然是 Y 中的零元，上式显然也成立。 □

单独把这个证明拎出来，然后把连续可加等于连续线性以及 Hilbert 空间那里的证明放在一起考虑

12.1.4 线性算子有界与连续的关系

Theorem 12.4. *设 X 和 Y 都是实赋范线性空间，T 是由 X 的某个子空间 E 到线性空间 Y 的线性算子，则以下陈述等价：*

1. *T 连续。*
2. *T 在 E 中某给定点 x_0 连续。*
3. *T 有界。*

Proof. (1) $\to$ (2) 是显然的。下证 (2) $\to$ (3)。

因为 T 在 x_0 连续，因此对 $\varepsilon = 1,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in E$，当 $||x - x_0|| \leqslant \delta$ 时，有：

$$||Tx - Tx_0|| = ||T(x - x_0)|| \leqslant \varepsilon = 1$$

任取 $x_1 \neq x_0$，且 $x_1 \in E$，因为：

$$\left\| \frac{\delta(x_1 - x_0)}{||x_1 - x_0||} \right\| = \delta \leqslant \delta$$

所以：

$$\left\| T\left[\frac{\delta(x_1 - x_0)}{||x_1 - x_0||} \right] \right\| \leqslant 1$$

作变形即有：

$$||T(x_1 - x_0)|| \leqslant \frac{1}{\delta}||x_1 - x_0||$$

因为 X 中的零元必然被线性算子 T 映射为 Y 中的零元，所以

$$||T(x_0 - x_0)|| = 0 = \frac{1}{\delta}||x_0 - x_0||$$

所以对任意的 $x \in E$，有：

$$||T(x-x_0)|| \leqslant \frac{1}{\delta}||x-x_0||$$

因此 T 定义在 $E-x_0$ 上的时候是有界的，而 $E-x_0$ 实际上就是 E，所以 T 是有界的。

(3) → (1)：设 $\{x_n\} \in E$，且有 $\{x_n\} \to x \in E$，因为 T 有界，所以 $\exists\, M$ 使得：

$$||Tx_n - Tx|| = ||T(x_n - x)|| \leqslant M||x_n - x||$$

对任意的 $\varepsilon > 0$，要使 $||Tx_n - Tx|| < \varepsilon$，只需 $||x_n - x|| < \dfrac{\varepsilon}{M}$，所以 T 连续。 □

12.2 有界线性算子空间

12.2.1 有界线性算子空间的范数

Theorem 12.5. 设 X 和 Y 都是赋范线性空间，用 $\mathscr{B}(X,Y)$ 表示 X 到 Y 上的所有有界线性算子构成的空间[1]。在 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中定义线性运算如下：

$$(T_1+T_2)x = T_1x + T_2x$$
$$(\alpha T)x = \alpha Tx$$

其中 $T, T_1, T_2 \in \mathscr{B}(X,Y)$，$\alpha$ 是一个数。$\mathscr{B}(X,Y)$ 在该线性运算下构成一个线性空间。定义 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中的范数如下：

$$\forall\, T \in \mathscr{B}(X,Y),\ ||T|| = \sup_{\{x\in X: x\neq \mathbf{0}\}} \frac{||Tx||}{||x||}$$

则 $\mathscr{B}(X,Y)$ 构成一个赋范线性空间。

有时间证明线性空间。

Proof. (1) 非负性和 (2) 数乘是显然的。

(3) 三角不等式：

$$\begin{aligned} ||T_1+T_2|| &= \sup_{\{x\in X: x\neq \mathbf{0}\}} \frac{||(T_1+T_2)x||}{||x||} \\ &\leqslant \sup_{\{x\in X: x\neq \mathbf{0}\}} \frac{||T_1x||+||T_2x||}{||x||} \\ &\leqslant \sup_{\{x\in X: x\neq \mathbf{0}\}} \frac{||T_1x||}{||x||} + \sup_{\{x\in X: x\neq \mathbf{0}\}} \frac{||T_2x||}{||x||} \\ &= ||T_1|| + ||T_2|| \end{aligned}$$

□

如上定义的范数公式有如下性质：

Theorem 12.6. *(1)* $\forall\, x \in X,\ ||Tx|| \leqslant ||T||\ ||x||$。*(2)* $||T|| = \sup_{\{x\in X: ||x||\leqslant 1\}} ||Tx|| = \sup_{\{x\in X: ||x||=1\}} ||Tx||$。

证明是显然的，(1) 中只需再验证 X 中的零元，(2) 可由范数定义中的数乘与线性算子的数乘直接推出。

[1]若不作特殊说明，有界线性算子的定义域均假定为 X。

12.2.2 有界线性算子空间中的依算子范数收敛

Definition 12.4. 设 $\{T_n\} \in \mathscr{B}$。若 $\{T_n\}$ 依 $\mathscr{B}$ 中的范数收敛于 $T \in \mathscr{B}$，即：

$$\lim_{n\to+\infty} ||T_n - T|| = 0$$

则称 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 T 或 $\{T_n\}$ 依一致算子拓扑收敛于 T。

依算子范数收敛与一致收敛的等价性

Theorem 12.7. 设 $\{T_n\} \in \mathscr{B}(X, Y)$。$\{T_n\}$ 依一致算子拓扑收敛于 $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ 的充分必要条件为 $\{T_n\}$ 在 X 中的任意有界集上一致收敛于 T。

Proof. (1) 必要性：任取 $A \subset X$ 为有界集。由 A 的有界性：

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, x \in A,\ ||x|| \leqslant K$$

因此：

$$||T_n x - Tx|| = ||(T_n - T)x|| \leqslant ||T_n - T||\ ||x|| \leqslant K||T_n - T||$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty} ||T_n - T|| = 0$ 可得：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ ||T_n - T|| < \frac{\varepsilon}{K}$$

于是：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ \forall\, x \in A,\ ||T_n x - Tx|| < \varepsilon$$

(2) 充分性：在 X 中取单位球面 $S = \{x \in X : ||x|| = 1\}$。显然 S 是一个有界集，由一致收敛可得：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ \forall\, x \in X,\ ||T_n x - Tx|| < \varepsilon$$

于是：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > N,\ ||T_n - T|| = \sup_{x\in X, ||x||=1} ||T_n x - Tx|| \leqslant \varepsilon$$

即 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛到 T。 □

由以上定理，$\{T_n\}$ 依算子收敛于 T 又称为 $\{T_n\}$ 依一致算子拓扑收敛于 T。

12.2.3 有界线性算子空间中的强收敛

Definition 12.5. 设 $\{T_n\} \in \mathscr{B}(X, Y)$。若：

$$\forall\, x \in X,\ \lim_{n\to+\infty} ||T_n x - Tx|| = 0$$

则称 $\{T_n\}$强收敛 *(strong convergence)*到 T 或依强算子拓扑收敛于 T。

12.2.4 有界线性算子空间的完备性

Theorem 12.8. 若 Y 是 *Banach* 空间，则 $\mathscr{B}(X,Y)$ 也是 *Banach* 空间。

Proof. 设 $\{T_n\}$ 是 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中的一个 Cauchy 点列，那么：

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}^+,\ \forall\,n,m>N,\ m>n,\ ||T_m-T_n||<\varepsilon$$

此时有：

$$\forall\,x\in X,\ ||T_mx-T_nx||\leqslant||T_m-T_n||\,||x||<\varepsilon||x||$$

因此 $\{T_nx\}$（x 为定值）是 Y 中的 Cauchy 点列。因为 Y 完备，所以 $\{T_nx\}$ 在 Y 中收敛于一个元素，记为 y，即：

$$\lim_{n\to+\infty}T_nx=y$$

定义算子 $T:Tx=y$，即：

$$Tx=\lim_{n\to+\infty}T_nx=y$$

下证明 T 是定义在 X 上而值域包含在 Y 中的有界线性算子，且是 $\{T_n\}$ 依一致算子拓扑收敛的极限。其中 T 定义域与值域是显然的。

设 $x_1,x_2\in X$，可得（第一行到第二行利用了 T_n 的可加性，第二行到第三行利用了范数极限的可加运算）：

$$\begin{aligned}T(x_1+x_2)&=\lim_{n\to+\infty}T_n(x_1+x_2)\\&=\lim_{n\to+\infty}(T_nx_1+T_nx_2)\\&=\lim_{n\to+\infty}T_nx_1+\lim_{n\to+\infty}T_nx_2\\&=Tx_1+Tx_2\end{aligned}$$

可加性得证。设 $x_3\in X$，α 是一个数，可得（第二步到第三步利用了 T_n 的齐次性，第三步到第四步利用了范数极限的数乘运算）：

$$T(\alpha x_3)=\lim_{n\to+\infty}T_n(\alpha x_3)=\lim_{n\to+\infty}\alpha T_nx_3=\alpha\lim_{n\to+\infty}T_nx_3=\alpha Tx_3$$

齐次性得证。综上，T 是线性算子。

注意到：

$$|\,||T_n||-||T_m||\,|\leqslant||T_n-T_m||\to0$$

所以 $\{||T_n||\}$ 是 Cauchy 序列。因此 $\{||T_n||\}$ 有界，即：

$$\exists\,M>0,\ \forall\,n\in\mathbb{N}^+,\ ||T_n||\leqslant M$$

由范数的连续性：

$$||Tx||=||\lim_{n\to+\infty}T_nx||\leqslant\lim_{n\to+\infty}||T_n||\,||x||\leqslant M||x||$$

有界性得证。

因为：

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}^{+},\ \forall\,n,m>N,\ m>n,\ \forall\,x\in X,\ ||T_m x-T_n x||<\varepsilon||x||$$

在上式中取 $m\to+\infty$，可得（第一步到第二步利用范数的连续性，第三步到第四步利用 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中线性运算的定义，注意到此时已经证得 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$）：

$$\lim_{m\to+\infty}||T_m x-T_n x||=||\lim_{m\to+\infty}T_m x-T_n x||=||Tx-T_n x||=||(T-T_n)x||\leqslant\varepsilon\,||x||$$

此时即有：

$$\forall\,x\in X,\ \frac{||(T-T_n)x||}{||x||}\leqslant\varepsilon$$

也即 $||T-T_n||\to0$。依一致算子拓扑收敛得证。

综上，$\mathscr{B}(X,Y)$ 是 Banach 空间。 □

12.2.5 有界线性算子的乘法

Definition 12.6. 设 X,Y,Z 都是赋范线性空间。对 $T_1\in\mathscr{B}(X,Y)$，$T_2\in\mathscr{B}(Y,Z)$，定义 T_1 与 T_2 的算子乘积 *(product of operators)*T_2T_1 如下：

$$\forall\,x\in X,\ (T_2T_1)x=T_2(T_1x)$$

T^n 表示 n 个 T 相乘，T^0 表示单位算子 I。

算子乘法的性质

Property 12.2.1. 设 X,Y,Z,K 都是赋范线性空间。

1. 结合律：

$$(T_3T_2)T_1=T_3(T_2T_1),\ (\alpha T_2)T_1=\alpha T_2T_1,\ T_2(\alpha T_1)=\alpha(T_2T_1)$$

   这里 $T_1\in\mathscr{B}(X,Y)$，$T_2\in\mathscr{B}_(Y,Z)$，$T_3\in\mathscr{B}(Z,K)$。

2. 分配律：

$$T_3(T_1+T_2)=T_3T_1+T_3T_2,\ (T_2+T_3)T_1=T_2T_1+T_3T_1$$

   第一个式子中 $T_1,T_2\in\mathscr{B}(X,Y)$，$T_3\in\mathscr{B}(Y,Z)$。
   第二个式子中 $T_3,T_2\in\mathscr{B}(Y,Z)$，$T_1\in\mathscr{B}(X,Y)$。

3. 当 $T_1\in\mathscr{B}(X,Y)$，$T_2\in\mathscr{B}(Y,Z)$ 时，$T_2T_1\in\mathscr{B}(X,Z)$，且有 $||T_2T_1||\leqslant||T_2||\,||T_1||$。

Proof. 只证 (3)。(1)(2) 证了没多大意思。对任意的 $x\in X$，有：

$$||T_2T_1x||=||T_2(T_1)x||\leqslant||T_2||\,||T_1x||\leqslant||T_2||\,||T_1||\,||x||$$

即：

$$\frac{||T_2T_1x||}{||x||}\leqslant||T_2||\,||T_1||$$

由上确界的不等式性可得：

$$||T_2T_1||\leqslant||T_2||\,||T_1||$$ □

12.3 Banach 空间上有界线性算子的四大定理

12.3.1 开映射定理

Definition 12.7. 设 X 和 Y 都是赋范线性空间。如果映射 T 把 X 中的任何开集映成 Y 中的开集，则称 T 为开映射 *(open mapping)*。

Theorem 12.9 (开映射定理)**.** *设 X 和 Y 都是 Banach 空间。如果有界线性算子 T 把 X 映成 Y 中的某个第二型集 F，则：*

1. $\exists\, K > 0,\ \forall\, y \in Y,\ \exists\, x \in X,\ Tx = y,\ ||x|| \leqslant K||Tx||$。

2. T 是一个开映射。

12.3.2 逆算子定理

Theorem 12.10. *设 X 和 Y 都是 Banach 空间。如果有界线性算子 T 把 X 映成 Y 中的某个第二型集 F 且 T 是单射，则 T 存在有界逆算子。*

Proof. 由开映射定理，T 是满射，所以 T 是双射，因此 T^{-1} 存在。任取 Y 中一个有界集，记为 E，由开映射定理：

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, y \in E,\ ||T^{-1}y|| \leqslant K||y||$$

因为 E 有界，所以 $\exists\, M > 0,\ ||y|| \leqslant M$，于是 $\forall\, y \in E,\ ||T^{-1}y|| \leqslant KM$，即 $T^{-1}E$ 是一个有界集。由 E 的任意性，T^{-1} 将任意有界集映成有界集，故 T^{-1} 有界。 □

等价范数的定义

Definition 12.8. X 是一个线性空间，$||\cdot||_1,\ ||\cdot||_2$ 是定义在 X 上的两个范数，X 按照这两个范数均为赋范线性空间。若：

$$\exists\, K_1, K_2 > 0,\ \forall\, x \in X,\ K_1||x||_1 \leqslant ||x_2|| \leqslant K_2||x||_1$$

则称范数 $||\cdot||_1,\ ||\cdot||_2$ 等价。

等价范数与拓扑同构

Theorem 12.11. *X 是一个线性空间，$||\cdot||_1,\ ||\cdot||_2$ 是定义在 X 上的两个范数，X 按照这两个范数均为赋范线性空间。$(X, ||\cdot||_1)$ 与 $(X, ||\cdot||_2)$ 拓扑同构的充分必要条件为 $||\cdot||_1,\ ||\cdot||_2$ 等价。*

Proof. 设 T 为 X 上的单位算子，显然 T 是一个线性算子。

必要性：因为 $(X, ||\cdot||_1)$ 与 $(X, ||\cdot||_2)$ 拓扑同构，所以 T 连续，进而 T 有界，即 $\exists\, K_2 > 0,\ \forall\, x \in X,\ ||Tx|| \leqslant K_2||x||$，也即 $||x||_2 \leqslant K_2||x||_1$。因为 T^{-1} 连续，所以 T^{-1}

有界，即 $\exists\, M>0,\ \forall\, x\in X,\ ||T^{-1}x||\leqslant M||x||$，即 $||x||_1\leqslant M||x||_2$，令 $K_1=\frac{1}{M}$ 即可得到 $K_1||x||_1\leqslant||x||_2$。综上，$\exists\, K_1,K_2>0,\ \forall\, x\in X,\ K_1||x||_1\leqslant||x_2||\leqslant||x||_1$，即范数 $||\cdot||_1$，$||\cdot||_2$ 等价。

充分性：任取 $(X,||\cdot||_1)$ 中的一个有界集 E，有 $\exists\, M>0,\ \forall\, x\in E,\ ||x||_1<M$。因为范数 $||\cdot||_1$，$||\cdot||_2$ 等价，所以 $\exists\, K_2>0,\ \forall\, x\in(X,||\cdot||_1),\ ||Tx||=||x||_2\leqslant K_2||x||_1=K_2M$，即 T 是有界线性算子，所以 T 连续。同理，T^{-1} 也是连续有界线性算子。综上，$(X,||\cdot||_1)$ 与 $(X,||\cdot||_2)$ 拓扑同构。 □

Corollary 12.1. $(X,||\cdot||_1)$ 与 $(X,||\cdot||_2)$ 都是 *Banach* 空间。若：

$$\exists\, K>0,\ \forall\, x\in X,\ ||x||_2\leqslant K||x||_1$$

则 $||\cdot||_1$，$||\cdot||_2$ 等价，$(X,||\cdot||_1)$ 与 $(X,||\cdot||_2)$ 拓扑同构。

Proof. 设 T 为 X 上的单位算子，显然 T 是一个双射并且是一个线性算子。由条件中的不等式可知 T 有界，因此 T 连续。$(X,||\cdot||_2)$ 是 Banach 空间，所以 $(X,||\cdot||_2)$ 是第二型集。因为 T 把 $(X,||\cdot||_1)$ 映成第二型集 $(X,||\cdot||_2)$ 且 T 是单射，由逆算子定理，T^{-1} 存在且有界。易证 T^{-1} 也是一个线性算子，因此 T^{-1} 连续。综上，$(X,||\cdot||_1)$ 与 $(X,||\cdot||_2)$ 拓扑同构，从而 $||\cdot||_1$，$||\cdot||_2$ 等价。 □

12.3.3 闭图像定理

若 X 和 Y 都是赋范线性空间，则在下列讨论中，X 和 Y 的直和 $X\oplus Y$ 中的范数均定义为：$||(x,y)||=||x||+||y||,\ (x,y)\in X\oplus Y$。

图像的定义

Definition 12.9. X 和 Y 都是线性空间，T 是定义在 X 的某个子空间 E 上且值域包含在 Y 中的线性算子。$X\oplus Y$ 中所有形如 $(x,Tx),\ x\in E$ 的元素构成的集合 $\{(x,Tx)\}$ 称为 T 的图像 *(graph)*，记为 G_T。

闭算子的定义

Definition 12.10. X 和 Y 都是线性空间，T 是定义在 X 的某个子空间 E 上且值域包含在 Y 中的线性算子。如果 T 的图像 G_T 是 $X\oplus Y$ 中的闭子空间，则称 T 为闭算子 *(closed operator)*。

Theorem 12.12. X 和 Y 都是赋范线性空间，T 是定义在 X 的某个子空间 E 上且值域包含在 Y 中的线性算子。T 为闭算子的充分必要条件为：对任意的 $\{x_n\}\subset E$，若 $\{x_n\}\to x\in X$，$\{Tx_n\}\to y\in Y$，则 $(x,y)\in G_T$。

Proof. 充分性：任取 $(x,y)\in\overline{G_T}$，则：

$$\exists\,\{x_n\}\in E,\ \{(x_n,Tx_n)\}\to(x,y)$$

由 $X \oplus Y$ 中范数的定义可得到：

$$||(x, y) - (x_n, Tx_n)|| = ||(x - x_n, y - Tx_n)|| = ||x - x_n|| + ||y - Tx_n|| \to 0$$

所以 $\{x_n\} \to x$，$\{Tx_n\} \to y$，$(x, y) \in G_T$。由 (x, y) 的任意性，T 是闭算子。

必要性：对任意的 $\{x_n\} \subset E$，若 $\{x_n\} \to x \in X$，$\{Tx_n\} \to y \in Y$，就有：

$$||(x, y) - (x_n, Tx_n)|| = ||(x - x_n, y - Tx_n)|| = ||x - x_n|| + ||y - Tx_n|| \to 0$$

所以 $\{(x_n, Tx_n)\} \to (x, y)$。因为 T 是闭算子，所以 $(x, y) \in G_T$。 □

有界线性算子何时是闭算子

Theorem 12.13. X 和 Y 都是赋范线性空间，T 是定义在 X 的某个子空间 E 上且值域包含在 Y 中的有界线性算子。T 是闭算子的充分必要条件为 E 是 X 的闭子空间。

Proof. 充分性：任取 $(x, y) \in \overline{G_T}$，则 $\exists \{(x_n, y_n)\} \in G_T$ 并且 $\{(x_n, y_n)\} \to (x, y)$。由 $X \oplus Y$ 中范数的定义可得到 $\{x_n\} \to x$，$\{Tx_n\} \to y$。由于 E 是 X 的闭子空间，所以 $x \in E$。因为 T 是有界线性算子，所以 T 是连续的，于是 $Tx = y$，$(x, y) \in G_T$。由 (x, y) 的任意性，T 是闭算子。

必要性：任取 $x \in \overline{E}$，则 $\exists \{x_n\} \in E$ 并且 $\{x_n\} \to x$。因为 T 是一个有界线性算子，所以 T 连续，所以 $\{Tx_n\} \to Tx$。由 $X \oplus Y$ 中范数的定义，$\{(x_n, Tx_n)\} \to (x, y)$。因为 T 是一个闭算子，所以 $(x, y) \in G_T$，即 $x \in E$，故 E 是 X 的闭子空间。 □

闭的线性算子何时有界

Theorem 12.14 (closed graph theorem)**.** 设 X 和 Y 都是 *Banach* 空间，T 是 X 到 Y 的线性算子。T 有界的充分必要条件为 T 是闭算子。

Proof. 充分性：因为 X 和 Y 都是 Banach 空间，所以 $X \oplus Y$ 也是 Banach 空间。因为 T 是闭算子，所以 G_T 是 $X \oplus Y$ 的闭子空间，于是 G_T 也是 Banach 空间。定义 G_T 到 X 的算子 $\tilde{T}$：

$$\tilde{T}(x, Tx) = x$$

显然 $\tilde{T}$ 是一个满映射。若 $\tilde{T}$ 不是一个单射，则 $\exists\, x \in X$ 使得 $\exists\, y_1, y_2 \in Y$，$y_1 \neq y_2$，$Tx = y_1, Tx = y_2$，那么 T 就不是一个映射，所以 $\tilde{T}$ 是一个单射。于是 $\tilde{T}$ 是一个双射。

设 a 是一个数，$(y, Ty) \in G_T$。由 T 的线性性可推出：

$$\tilde{T}[(x, Tx) + (y, Ty)] = \tilde{T}(x + y, Tx + Ty) = \tilde{T}[x + y, T(x + y)] = x + y = \tilde{T}(x, Tx) + \tilde{T}(y, Ty)$$
$$\tilde{T}[a(x, Tx)] = \tilde{T}(ax, aTx) = \tilde{T}(ax, Tax) = ax = a\tilde{T}(x, Tx)$$

即 $\tilde{T}$ 是一个线性算子。

由逆算子定理，$\tilde{T}$ 存在有界的逆算子 $\tilde{T}^{-1}$。于是对任意的 $x \in X$，因为 $(x, Tx) = \tilde{T}^{-1}x$，所以：

$$||(x, Tx)|| \leqslant ||\tilde{T}^{-1}||\ ||x||$$

即：

$$||Tx|| \leqslant ||\tilde{T}^{-1}||\ ||x||$$

所以 T 有界。

必要性：任取 $(x,y) \in \overline{G_T}$，则 $\exists\, \{(x_n,y_n)\} \in G_T$ 并且 $\{(x_n,y_n)\} \to (x,y)$。由 $X \oplus Y$ 中范数的定义可得到 $\{x_n\} \to x$, $\{Tx_n\} \to y$。因为 T 有界，所以 T 连续，于是 $\{Tx_n\} \to Tx = y$，所以 $(x,y) \in G_T$。由 (x,y) 的任意性，G_T 是闭子空间，T 是闭算子。 □

12.3.4 共鸣定理

Definition 12.11. 设 X 是一个线性空间，T 是定义在 E 上的泛函。若对任意的 $x,y \in X$，有：

$$T(x+y) \leqslant Tx + Ty$$

则称 T 是次可加的。若对任意的 $\alpha \geqslant 0$ 和 $\forall\, x \in X$，有：

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

则称 T 是正齐次的。

Theorem 12.15 (resonance theorem)**.** $\{T_i : i \in I\}$ 是 *Banach* 空间 X 到赋范线性空间 Y 上的有界线性算子族。若：

$$\forall\, x \in X,\ \sup_{i \in I} ||T_i x|| < +\infty$$

则 $\{||T_i|| : i \in I\}$ 有界，即 $\{T_i : i \in I\}$ 一致有界。

Theorem 12.16. $\{T_n\}$ 是 *Banach* 空间 X 到 *Banach* 空间 Y 上的有界线性算子列。$\{T_n\}$ 按强算子拓扑收敛于某一算子 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ 的充分必要条件为：

1. $\{T_n\}$ 一致有界。

2. 存在 X 中的稠密子集 E，使得对任意的 $x \in E$，$\{T_n x\}$ 在 Y 中收敛。

此时还有：

$$||T|| \leqslant \varliminf ||T_n||$$

Proof. 必要性： □

Theorem 12.17. 设 X,Y 都是 *Banach* 空间，则 $\mathscr{B}(X,Y)$ 关于算子列按强算子拓扑收敛是完备的。

12.4 有界线性泛函

12.4.1 有界线性泛函的延拓

Definition 12.12. 设 X 是一个线性空间，f_1 和 f_2 分别为定义在 X 的子空间 E_1 和 E_2 上的线性泛函。如果满足：

1. $E_1 \subset E_2$
2. $\forall\, x \in E_1,\ f_1(x) = f_2(x)$

则称 f_2 是 f_1 在 E_2 上的一个延拓 *(continuation)*。

Theorem 12.18. 设 E 是实线性空间 X 的子空间，f 是定义在 E 上的实线性泛函，g 是定义在 X 上的次可加正齐次泛函，f 和 g 之间满足：

$$\forall\, x \in E,\ f(x) \leqslant g(x)$$

则必定存在定义在 X 上的实线性泛函 F，满足：

1. F 是 f 在 X 上的一个延拓；
2. 当 $x \in X$ 时，有 $F(x) \leqslant g(x)$。

Corollary 12.2. 设 f 是复赋范线性空间 X 上的有界线性泛函，令：

$$\varphi(x) = \operatorname{Re} f(x),\ \forall\, x \in X$$

则 φ 是 X 上的有界实线性泛函，且：

$$f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$$
$$||\varphi|| \leqslant ||f||$$

Theorem 12.19 (Hahn-Banach theorem). 设 E 是赋范线性空间 X 的子空间，f 是定义在 E 上的有界线性泛函，则 f 可以延拓到整个 X 上且保持范数不变。

Corollary 12.3. 设 E 是赋范线性空间 X 的子空间，$x_0 \in X \backslash E$。若：

$$d(x_0, E) = \inf_{x \in E} ||x_0 - x|| = \delta > 0$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f，使得：

$$||f|| = 1,\ f(x_0) = \delta$$

而对任意的 $x \in E$，有 $f(x) = 0$。

于是有：

1. $x_0 \in \overline{E}$ 的充分必要条件为：对 X 上任一满足对任意的 $x \in E$，都有 $f(x) = 0$ 的有界线性泛函 f，有 $f(x_0) = 0$。

2. 设 $x_0 \in X$，$E \subset X$，则 x_0 可以用 E 中元素的线性组合以任意精度逼近的充分必要条件是对 X 上任一有界线性泛函 f，当对任意的 $x \in E$，都有 $f(x) = 0$ 时，$f(x_0) = 0$。

Proof. (2) **充分性**：如果此时 $x_0 \notin \overline{E}$，则 $d(x_0, E) > 0$，由前述，存在 X 上的有界线性泛函 f，对任意的 $x \in E$，有 $f(x) = 0$，且 $f(x_0) = d(x_0, E) > 0$，矛盾。

必要性：若 $x_0 \in E$，在这种情况下则显然 $f(x_0) = 0$；若 $x_0 \in E'$，则存在 $\{x_n\} \subset E$，使得 $\{x_n\} \to x_0$。由有界线性算子的连续性可得：

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$$

(3) 设 E_1 是由 E 张成的子空间，x_0 可以用 E 中元素的线性组合以任意精度逼近的充分必要条件是 $x_0 \in \overline{E_1}$。由 (2) 可得，$x_0 \in \overline{E_1}$ 的充分必要条件为：对 X 上任一满足对任意的 $x \in E_1$，都有 $f(x) = 0$ 的有界线性泛函 f，有 $f(x_0) = 0$。因为对 E 生成的子空间 E_1 满足该条件，则显然对 E 也满足（只要把 E 中某个元素的系数取为 1，其它元素系数取为 0 即可）。 □

Corollary 12.4. 设 X 是赋范线性空间，且 $X \neq \{\mathbf{0}\}$，则对任意的 $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}$，存在 X 上的有界线性泛函 f 使得：

$$||f|| = 1,\ f(x_0) = ||x_0||$$

Proof. $\{\mathbf{0}\}$ 是 X 的一个子空间，由上一个推论可直接得到对任意的 $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}$，存在 X 上的有界线性泛函 f 使得：

$$||f|| = 1,\ f(x_0) = d(x_0, \{\mathbf{0}\}) = ||x_0 - \mathbf{0}|| = ||x_0||$$ □

12.5 对偶空间与伴随算子

12.5.1 对偶空间

Definition 12.13. 将 X 上所有有界线性泛函构成的赋范线性空间称为 X 的对偶空间 *(dual space)*，记为 $E*$。

Theorem 12.20. $E*$ 依一致算子拓扑收敛是 *Banach* 空间。

Proof. 根据定义，$E* = \mathscr{B}(E, K)$，其中 K 为复数域或实数域。因为 K 完备，所以 $E*$ 也完备，即 $E*$ 是一个 Banach 空间。 □

第三部分

概率论

Chapter 13

概率测度

13.1 集合

Theorem 13.1 (De-Morgan law)**.** 设 $\{A_n,\ n \in I\}$ 是一个集族，则有如下 *De-Morgan law*：

$$\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in I} A_n^c,\quad \left(\bigcap_{n\in I} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in I} A_n^c$$

Proof. 对于第一个等式有：

$$x \in \left(\bigcup_{n\in I} A_n\right)^c \Leftrightarrow \forall\, n \in I,\ x \notin A_n \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n\in I} A_n^c$$

对于第二个等式有：

$$x \in \left(\bigcap_{n\in I} A_n\right)^c \Leftrightarrow \exists\, n \in I,\ x \notin A_n \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n\in I} A_n^c$$

□

Definition 13.1. 设 $\{A_n, n \in \mathbb{N}^+\}$ 为一个集合序列，

1. 若 $A_n \subset A_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$，则称 $\{A_n\}$ 为单调递增的集合序列，记为 $A_n \uparrow$，定义：

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

2. 若 $A_n \supset A_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$，则称 $\{A_n\}$ 为单调递减的集合序列，记为 $A_n \downarrow$，定义：

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

单调递增和单调递减的集合序列统称为单调的集合序列。

Definition 13.2. 设 $\{A_n, n \in \mathbb{N}^+\}$ 为一个集合序列，其上下极限定义如下：

$$\varliminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k,\quad \varlimsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$$

若：

$$\varliminf_{n\to+\infty} A_n = \varlimsup_{n\to+\infty} A_n$$

则认为 $\{A_n, n \in \mathbb{N}^+\}$ 极限存在，记：

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \varliminf_{n\to+\infty} A_n = \varlimsup_{n\to+\infty} A_n$$

Theorem 13.2. 设 $\{A_n, n \in \mathbb{N}^+\}$ 为一个集合序列，其上下极限具有如下等价定义：

$$\varliminf_{n\to+\infty} A_n = \{x : \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n \geqslant N,\ x \in A_n\}$$
$$\varlimsup_{n\to+\infty} A_n = \{x : \forall\, N \in \mathbb{N}^+,\ \exists\, n \geqslant N,\ x \in A_n\}$$

Proof. 对于下极限来讲：

$$x \in \varliminf_{n\to+\infty} A_n \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^+,\ x \in \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \Leftrightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n \geqslant N,\ x \in A_n$$

对于上极限来讲：

$$x \in \varlimsup_{n\to+\infty} A_n \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}^+,\ x \in \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \Leftrightarrow \forall\, N \in \mathbb{N}^+,\ \exists\, n \geqslant N,\ x \in A_n$$ □

Theorem 13.3. 设 $\{A_n, n \in \mathbb{N}^+\}$ 为一个集合序列，则其下极限包含于上极限，即：

$$\varliminf_{n\to+\infty} A_n \subseteq \varlimsup_{n\to+\infty} A_n$$

Proof. 利用上下极限的等价定义可直接得出结论。 □

13.1.1 重要集族

π 系、半环、环、域

Definition 13.3. 如果 X 上的非空集族 $\mathscr{A}$ 对交的运算是封闭的，即：

$$\forall\, A, B \in \mathscr{A},\ A \cap B \in \mathscr{A}$$

则称 $\mathscr{A}$ 是一个 π 系。

Definition 13.4. 如果 X 上的非空集族 $\mathscr{A}$ 满足：

1. 对交的运算封闭；
2. 若 $A, B \in \mathscr{A}$ 且 $B \subseteq A$，则存在有限个两两不交的 $\{C_i \in \mathscr{A} : i = 1, 2, \ldots, n\}$，使得：

$$A \backslash B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

则称 $\mathscr{A}$ 为半环 *(semiring)*。

Definition 13.5. 如果 X 上的非空集族 $\mathscr{A}$ 对并和差的运算是封闭的，即对任意的 $A, B \in \mathscr{A}$：

1. $A \cup B \in \mathscr{A}$；

2. $A \backslash B \in \mathscr{A}$。

则称 $\mathscr{A}$ 为环 *(ring)*。

Definition 13.6. 如果 X 上的非空集族 $\mathscr{A}$ 对交和补的运算是封闭的，且 X 也在其中，即：

1. $\forall\, A, B \in \mathscr{A}$，$A \cap B \in \mathscr{A}$；

2. $\forall\, A \in \mathscr{A}$，$A^c \in \mathscr{A}$；

3. $X \in \mathscr{A}$。

则称 $\mathscr{A}$ 为域 *(field of sets)* 或代数 *(algebra of sets)*。

Theorem 13.4. 半环必是 π 系，环必是半环，域必是环。

Proof. (1) 半环必是 π 系可直接由半环的定义得出。

(2) 设 $\mathscr{A}$ 是一个环，$A, B \in \mathscr{A}$，由集合的运算可得：

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus [(A \backslash B) \cup (B \backslash A)]$$

因为 $\mathscr{A}$ 是一个环，所以 $A\backslash B, B\backslash A \in \mathscr{A}$，$[(A\backslash B) \cup (B\backslash A)] \in \mathscr{A}$，$A \cup B \in \mathscr{A}$，所以 $A \cap B = (A \cup B) \setminus [(A\backslash B) \cup (B\backslash A)] \in \mathscr{A}$，即 $\mathscr{A}$ 对交的运算是封闭的。

因为 $\mathscr{A}$ 是一个环，对差的运算封闭，所以取 $C = A\backslash B$ 即有 $A\backslash B = C \in \mathscr{A}$。

(3) 设 $\mathscr{A}$ 是一个域，$A, B \in \mathscr{A}$，由集合的运算可得：

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathscr{A}$$
$$A\backslash B = A \cap B^c \in \mathscr{A}$$

即 $\mathscr{A}$ 是一个环。 □

单调系、λ 系、σ 环、σ 域

Definition 13.7. 如果集族 $\mathscr{A}$ 中的所有单调序列 $\{A_n\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n \in \mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 为单调系 *(monotone class)*。

Definition 13.8. 如果 X 上的集族 $\mathscr{A}$ 满足：

1. $X \in \mathscr{A}$；

2. 若 $A, B \in \mathscr{A}$，$B \subseteq A$，则有 $A\backslash B \in \mathscr{A}$；

3. 单调递增集合序列 $\{A_n\}$ 的极限 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$。

则称 $\mathscr{A}$ 为 λ 系。

Property 13.1.1. λ 系对补封闭。

Proof. 设 $\mathscr{A}$ 是一个 λ 系，任取 $A \in \mathscr{A}$，由 λ 系的定义可知 $\mathscr{A}$ 对差封闭，所以有 $A^c = X \backslash A \in \mathscr{A}$，即 λ 系对补封闭。 □

Definition 13.9. 如果 X 上的集族 $\mathscr{A}$ 满足：

1. 若 $A, B \in \mathscr{A}$，则 $A \backslash B \in \mathscr{A}$；
2. 若 $A_n \in \mathscr{A}, \forall n \in \mathbb{N}^+$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$。

则称 $\mathscr{A}$ 为 σ 环。

Definition 13.10. 如果 X 上的集族 $\mathscr{A}$ 满足：

1. $X \in \mathscr{A}$；
2. 若 $A \in \mathscr{A}$，则 $A^c \in \mathscr{A}$；
3. 若 $A_n \in \mathscr{A}, \forall n \in \mathbb{N}^+$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$。

则称 $\mathscr{A}$ 为 σ 域。

Theorem 13.5. σ 域是域。

Proof. 设 $\mathscr{A}$ 是一个 σ 域，$A, B \in \mathscr{A}$。由 σ 域的定义，$\mathscr{A}$ 对补的运算封闭并且 $X \in \mathscr{A}$。因为：

$$A \cap B = (A^c \cup B^c \cup \varnothing \cup \cdots)^c$$

由 σ 域的定义，$A \cap B \in \mathscr{A}$。综上，$\mathscr{A}$ 是一个域。 □

Theorem 13.6. λ 系是单调系，σ 域是 λ 系。

Proof. (1) 设 $\mathscr{A}$ 是一个 λ 系。由 λ 系的定义，$\mathscr{A}$ 中单调递增的集合序列必在 $\mathscr{A}$ 中有极限。任取 $\mathscr{A}$ 中的单调递减序列 $\{A_n\}$，由性质 13.1.1可知 $\{A_n^c\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的一个单调递增序列，于是有：

$$\lim_{n \to +\infty} A_n^c = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c \in \mathscr{A}$$

所以：

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c \right)^c = X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c \right) \in \mathscr{A}$$

即 $\{A_n\}$ 在 $\mathscr{A}$ 中有极限。由 $\{A_n\}$ 的任意性，$\mathscr{A}$ 中单调递减的集合序列也必在 $\mathscr{A}$ 中有极限。综上，$\mathscr{A}$ 是一个单调系。由 $\mathscr{A}$ 的任意性，λ 系是单调系。

(2) 因为 σ 域是域，所以 σ 域是环，因此对差的运算封闭。显然 σ 域满足 λ 系定义中的 (1) 和 (3)。 □

集族的关系总结

上面提到的集族之间有如下关系：

$$\sigma\text{ 域} \subset \text{域} \subset \text{环} \subset \text{半环} \subset \pi\text{ 系}$$

$$\sigma\text{ 域} \subset \lambda\text{ 系} \subset \text{单调系}$$

Theorem 13.7. 一个对可列并运算封闭的环是 σ 环。

Proof. 环对差的运算封闭。 □

Theorem 13.8. 一个包含 X 的环是域。

Proof. 设 $\mathscr{A}$ 是一个环且 $X \in \mathscr{A}$。任取 $A, B \in \mathscr{A}$ 可得：

$$A \cap B = (A \cup B)\backslash[(A\backslash B) \cup (B\backslash A)]$$

因为 $\mathscr{A}$ 是一个环，所以 $A\backslash B \in \mathscr{A}$，$B\backslash A \in \mathscr{A}$，$(A\backslash B) \cup (B\backslash A) \in \mathscr{A}$，$A \cup B \in \mathscr{A}$，于是 $A \cap B \in \mathscr{A}$。由 A, B 的任意性，$\mathscr{A}$ 对交的运算封闭。

因为 $A^c = X\backslash A$，所以 $A^c \in \mathscr{A}$。由 A 的任意性，$\mathscr{A}$ 对补的运算封闭。

综上，$\mathscr{A}$ 是一个域，即一个包含 X 的环是域。 □

Theorem 13.9. 一个既是单调系又是域的集族必是 σ 域。

Proof. 设 $\mathscr{A}$ 既是单调系又是域。因为 $\mathscr{A}$ 是一个域，所以对补的运算封闭且 $X \in \mathscr{A}$。任取 $A_n \in \mathscr{A}$，$n \in \mathbb{N}^+$，因为域是环，所以 $\mathscr{A}$ 对有限并封闭，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$，$\forall\, n \in \mathbb{N}^+$。因为 $\mathscr{A}$ 是单调系，所以单调递增集合序列：

$$\left\{B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\}$$

的极限：

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$$

由 $\{A_n\}$ 的任意性，$\mathscr{A}$ 对可列并封闭。综上，$\mathscr{A}$ 是一个 σ 域，即一个既是单调系又是域的集族必是 σ 域。 □

Theorem 13.10. 一个既是 λ 系又是 π 系的集族必是 σ 域。

Proof. 设 $\mathscr{A}$ 既是 λ 系又是 π 系。因为 $\mathscr{A}$ 是 λ 系，所以 $X \in \mathscr{A}$。任取 $A \in \mathscr{A}$，则 $A^c = X\backslash A$，由 λ 系定义的第二个条件，$A^c \in \mathscr{A}$。由 A 的任意性，$\mathscr{A}$ 对补的运算封闭。又因为 $\mathscr{A}$ 是一个 π 系，所以 $\mathscr{A}$ 对交的运算封闭。综上可知 $\mathscr{A}$ 是一个域。因为 λ 系是单调系，所以 $\mathscr{A}$ 既是域又是单调系，于是 $\mathscr{A}$ 是 σ 域。 □

Theorem 13.11. 一个包含 X 的 σ 环是 σ 域。

Proof. 设 $\mathscr{A}$ 是 σ 域，$A \in \mathscr{A}$。因为 $X \in \mathscr{A}$，$A^c = X\backslash A$，而 σ 环对差的运算封闭，所以 $\mathscr{A}$ 对补的运算封闭。又因为 σ 环对可列并封闭，所以 $\mathscr{A}$ 是 σ 域，即一个包含 X 的 σ 环是 σ 域。 □

13.1.2 集族的生成

Definition 13.11. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 X 上的集族，$\mathscr{B}$ 是环（或单调系，或 λ 系，或 σ 域）。若：

1. $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$；

2. 对 X 上任意的另一环（或单调系，或 λ 系，或 σ 域）$\mathscr{C}$，若 $\mathscr{A}\subset\mathscr{C}$，就有 $\mathscr{B}\subset\mathscr{C}$。

则称 $\mathscr{B}$ 是由集族 $\mathscr{A}$ 生成的环（或单调系，或 λ 系，或 σ 域），即由集族 $\mathscr{A}$ 生成的环（或单调系，或 λ 系，或 σ 域）是包含 $\mathscr{A}$ 的最小的环（或单调系，或 λ 系，或 σ 域），将由集族 $\mathscr{A}$ 生成的环、单调系、λ 系和 σ 域分别记作 $r(\mathscr{A})$, $m(\mathscr{A})$, $l(\mathscr{A})$, $\sigma(\mathscr{A})$。

Theorem 13.12. 由任何集族 $\mathscr{A}$ 生成的环、单调系、λ 系和 σ 域都存在。

Proof. 设 $\mathscr{B}$ 为 X 的所有子集构成的集族，则 $\mathscr{B}$ 是一个 σ 域，所以 $\mathscr{B}$ 是一个环（或单调系，或 λ 系）并且有 $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$。把所有包含集族 $\mathscr{A}$ 的环（或单调系，或 λ 系，或 σ 域）的全体记为 $\mathbf{A}$，则 $\mathscr{B}\in\mathbf{A}$，于是 $\mathbf{A}$ 非空。记：

$$\mathscr{C}=\bigcap_{\mathscr{D}\in\mathbf{A}}\mathscr{D}$$

下证 $\mathscr{C}$ 是一个环（或单调系，或 λ 系，或 σ 域）。

(1) 任取 $A,B\in\mathscr{C}$，则对任意的 $\mathscr{D}\in\mathbf{A}$，有 $A,B\in\mathscr{D}$。因为 $\mathscr{D}$ 是一个环，所以 $A\cup B\in\mathscr{D}$, $A\backslash B\in\mathscr{D}$。由 $\mathscr{D}$ 的任意性，$A\cup B\in\mathscr{C}$, $A\backslash B\in\mathscr{C}$，所以 $\mathscr{C}$ 是一个环。

(2) 任取单调集合序列 $\{A_n\}\subset\mathscr{C}$，则对任意的 $\mathscr{D}\in\mathbf{A}$，有 $\{A_n\}\subset\mathscr{D}$。因为 $\mathscr{D}$ 是单调系，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n\in\mathscr{D}$。由 $\mathscr{D}$ 的任意性，$\lim\limits_{n\to+\infty}A_n\in\mathscr{C}$。由 $\{A_n\}$ 的任意性，$\mathscr{C}$ 是一个单调系。

(3) 因为任意的 $\mathscr{D}\in\mathbf{A}$ 都是 λ 系，所以 $X\in\mathscr{C}$。任取 $A,B\in\mathscr{C}$, $B\subset A$，则对任意的 $\mathscr{D}\in\mathbf{A}$，有 $A\backslash B\in\mathscr{D}$。由 $\mathscr{D}$ 的任意性，$A\backslash B\in\mathscr{C}$。由 A,B 的任意性，$\mathscr{C}$ 对包含关系的差运算封闭。任取单调递增集合序列 $\{A_n\}\subset\mathscr{C}$，则对任意的 $\mathscr{D}\in\mathbf{A}$，有 $\{A_n\}\subset\mathscr{D}$。因为 $\mathscr{D}$ 是 λ 系，所以 $\mathscr{D}$ 是单调系，于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n\in\mathscr{D}$。由 $\mathscr{D}$ 的任意性，$\lim\limits_{n\to+\infty}A_n\in\mathscr{C}$。由 $\{A_n\}$ 的任意性，$\mathscr{C}$ 对单调递增集合序列的极限是封闭的。综上，$\mathscr{C}$ 是一个 λ 系。

(4) 因为任意的 $\mathscr{D}\in\mathbf{A}$ 都是 σ 域，所以 $X\in\mathscr{C}$。任取 $A\in\mathscr{C}$，则对任意的 $\mathscr{D}$，有 $A\in\mathscr{D}$。因为 $\mathscr{D}$ 是 σ 域，所以 $A^c\in\mathscr{D}$。由 $\mathscr{D}$ 的任意性，$A^c\in\mathscr{C}$。由 A 的任意性，$\mathscr{C}$ 对补的运算封闭。任取集合序列 $\{A_n\}\subset\mathscr{C}$，则对任意的 $\mathscr{D}$，有 $\{A_n\}\in\mathscr{D}$。因为 $\mathscr{D}$ 是 σ 域，所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n\in\mathscr{D}$。由 $\mathscr{D}$ 的任意性，$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n\in\mathscr{C}$。由 $\{A_n\}$ 的任意性，$\mathscr{C}$ 对可列并的运算封闭。综上，$\mathscr{C}$ 是一个 σ 域。 □

Theorem 13.13. 如果 $\mathscr{A}$ 是半环，则：

$$r(\mathscr{A})=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i : A_i\in\mathscr{A};\ A_i\cap A_j=\varnothing,\forall\, i\neq j\right\}$$

Proof. 令：

$$\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i : A_i\in\mathscr{A};\ A_i\cap A_j=\varnothing,\forall\, i\neq j\right\}$$

由 $\mathscr{B}$ 的定义，$\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$（$n=1$）。因为环对有限并封闭，所以包含 $\mathscr{A}$ 的环必然包含 $\mathscr{B}$。若证得 $\mathscr{B}$ 是一个环，则可得到 $r(\mathscr{A})=\mathscr{B}$。

任取 $A,B\in\mathscr{B}$，则存在 $m,n\in\mathbb{N}^+$ 和互不相交的 $A_1,A_2,\dots,A_m\in\mathscr{A}$、互不相交的 $B_1,B_2,\dots,B_n\in\mathscr{A}$ 使得：

$$A=\overset{m}{\underset{i=1}{\cup}}A_i,\ B=\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}}B_i$$

于是：

$$A\backslash B=A\cap B^c=\overset{m}{\underset{i=1}{\cup}}(A_i\cap B^c)=\overset{m}{\underset{i=1}{\cup}}\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}(A_i\cap B_j^c)=\overset{m}{\underset{i=1}{\cup}}\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}[A_i\backslash(A_i\cap B_j)]$$

因为 $\mathscr{A}$ 是半环，由定理 13.4和 π 系的定义可知 $\mathscr{A}$ 对交封闭，所以对任意的 i,j 有 $A_i\cap B_j\in\mathscr{A}$ 且 $A_i\cap B_j\subset A_i$，于是存在互不相交的 $C_{ij1},C_{ij2},\dots,C_{ijr_{ij}}\in\mathscr{A}$ 使得：

$$A_i\backslash(A_i\cap B_j)=\overset{r_{ij}}{\underset{k=1}{\cup}}C_{ijk}$$

于是：

$$\begin{aligned}
A\backslash B&=\overset{m}{\underset{i=1}{\cup}}\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}[A_i\backslash(A_i\cap B_j)]=\overset{m}{\underset{i=1}{\cup}}\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}\overset{r_{ij}}{\underset{k=1}{\cup}}C_{ijk}\\
&=\overset{m}{\underset{i=1}{\cup}}(C_{111}\cup C_{112}\cdots\cup C_{11r_{11}})\cap(C_{121}\cup C_{122}\cdots\cup C_{12r_{12}})\cdots\\
&=\overset{m}{\underset{i=1}{\cup}}\left\{\overset{r_{11}}{\underset{j=1}{\cup}}[C_{11j}\cap(C_{121}\cup C_{122}\cdots\cup C_{12r_{12}})]\right\}\cap(C_{131}\cup C_{132}\cdots\cup C_{13r_{13}})\cdots\\
&=\overset{m}{\underset{i=1}{\cup}}\left[\overset{r_{11}}{\underset{j=1}{\cup}}\overset{r_{12}}{\underset{k=1}{\cup}}(C_{11j}\cap C_{12k})\right]\cap(C_{131}\cup C_{132}\cdots\cup C_{13r_{13}})\cdots\\
&=\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}}\underset{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\prod_{k=1}^n\{1,2,\dots,r_{ik}\}}{\cup}\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}C_{ijk_j}
\end{aligned}$$

因为 $\mathscr{A}$ 是半环，对交封闭，所以 $\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}C_{ijk_j}\in\mathscr{A}$。因为 $C_{ij1},C_{ij2},\dots,C_{ijr_{ij}}$ 互不相交，所以 $\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}C_{ijk_j}$ 互不相交（给定一组 $k_1^{(1)},k_2^{(1)},\dots,k_n^{(1)}$，得到 $\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}C_{ijk_j^{(1)}}$。考虑 $A\backslash B$ 中另一个参与并集运算的 $\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}C_{ijk_j^{(2)}}$，它所对应的 $k_1^{(2)},k_2^{(2)},\dots,k_n^{(2)}$ 必然不同于 $k_1^{(1)},k_2^{(1)},\dots,k_n^{(1)}$，于是存在 a,b 使得 $k_a^{(1)}\neq k_b^{(2)}$。注意到 $C_{ijk_a^{(1)}}\cap C_{ijk_b^{(2)}}=\varnothing$，所以 $\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}C_{ijk_j^{(1)}}$ 和 $\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}C_{ijk_j^{(2)}}$ 不相交。由 $k_1^{(1)},k_2^{(1)},\dots,k_n^{(1)}$ 和 $k_1^{(2)},k_2^{(2)},\dots,k_n^{(2)}$ 的任意性即可得结论），于是有 $A\backslash B\in\mathscr{B}$，即 $\mathscr{B}$ 对差封闭。

考虑：

$$A\cup B=B\cup(A\backslash B)=B\cup\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}}\underset{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\prod_{k=1}^n\{1,2,\dots,r_{ik}\}}{\cup}\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}C_{ijk_j}\right)$$

因为 $B\cap(A\backslash B)=\varnothing$，所以：

$$B\cap\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}}\underset{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\prod_{k=1}^n\{1,2,\dots,r_{ik}\}}{\cup}\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}}C_{ijk_j}\right)=\varnothing$$

于是 $A\cup B\in\mathscr{B}$。

综上，$\mathscr{B}$ 对并和差封闭，所以 $\mathscr{B}$ 是一个环。 $\square$

Theorem 13.14. 若 $\mathscr{A}$ 是域，则 $\sigma(\mathscr{A})=m(\mathscr{A})$。

Proof. 因为 $\sigma(\mathscr{A})$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的 σ 域，所以 $\sigma(\mathscr{A})$ 也是包含 $\mathscr{A}$ 的单调系。因为 $m(\mathscr{A})$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的最小的单调系，所以 $m(\mathscr{A})\subset\sigma(\mathscr{A})$。

下证 $\sigma(\mathscr{A})\subset m(\mathscr{A})$，由定理 13.9可得一个既是单调系又是域的集族必是 σ 域，所以证得 $m(\mathscr{A})$ 是一个域即可得到 $\sigma(\mathscr{A})\subset m(\mathscr{A})$。又因为 $\mathscr{A}$ 是域，所以 $X\in\mathscr{A}$，同时 $X\in m(\mathscr{A})$，由定理 13.8可得一个包含 X 的环是域，所以只需证明 $m(\mathscr{A})$ 是一个环。

对任意的 $A\in\mathscr{A}$，有 $A\in m(\mathscr{A})$。令：

$$\mathscr{B}_A=\{B:B,A\cup B,A\backslash B\in m(\mathscr{A})\}$$

任取 $\mathscr{B}_A$ 中一个单调不减序列 $\{B_n\}$，则对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$，有 $B_n\in m(\mathscr{A})$，于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}B_n\in m(\mathscr{A})$。考虑：

$$A\cup\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A\cup B_n)$$

则 $\{A\cup B_n\}$ 也是一个单调不减序列，同时对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$，有 $A\cup B_n\in m(\mathscr{A})$，所以：

$$A\cup\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right)\in m(\mathscr{A})$$

考虑：

$$A\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right)=\bigcap_{n=1}^{+\infty}(A\backslash B_n)$$

则 $\{A\backslash B_n\}$ 是一个单调不增序列，同时对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$，有 $A\backslash B_n\in m(\mathscr{A})$，所以：

$$A\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right)\in m(\mathscr{A})$$

由 $\{B_n\}$ 的任意性，$\mathscr{B}_A$ 对单调不减序列的极限封闭。

任取 $\mathscr{B}_A$ 中的一个单调不增序列 $\{C_n\}$，则对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$，有 $C_n\in m(\mathscr{A})$，于是 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}C_n\in m(\mathscr{A})$。考虑：

$$A\cup\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n\right)=\bigcap_{n=1}^{+\infty}(A\cup C_n)$$

则 $\{A\cup C_n\}$ 也是一个单调不增序列，同时对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$，有 $A\cup C_n\in m(\mathscr{A})$，所以：

$$A\cup\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}C_n\right)\in m(\mathscr{A})$$

考虑：

$$A\backslash\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}C_n\right)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A\backslash C_n)$$

则 $\{A\backslash C_n\}$ 是一个单调不减序列，同时对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$，有 $A\backslash C_n\in m(\mathscr{A})$，所以：

$$A\backslash\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}C_n\right)\in m(\mathscr{A})$$

由 $\{C_n\}$ 的任意性，$\mathscr{B}_A$ 对单调不增序列的极限封闭。

综上，$\mathscr{B}_A$ 是一个单调系。因为 $\mathscr{A}$ 是一个域，由定理 13.4可知 $\mathscr{A}$ 是一个环，所以 $\mathscr{A}$ 对并和差封闭，即 $\mathscr{A}$ 中任意元素与 A 的并集和差集都在 $\mathscr{A}$ 中，根据生成的定义，$\mathscr{A} \in m(\mathscr{A})$，即 $\mathscr{A}$ 中任意元素与 A 的并集和差集都在 $m(\mathscr{A})$ 中，再加上它们本身也都在 $m(\mathscr{A})$ 中，所以 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}_A$。由 $m(\mathscr{A})$ 的定义，$m(\mathscr{A}) \subset \mathscr{B}_A$，于是：

$$A \in \mathscr{A},\ B \in m(\mathscr{A}) \Rightarrow A \cup B, A\backslash B \in m(\mathscr{A})$$

对任意的 $B \in m(\mathscr{A})$，令：

$$\mathscr{D}_B = \{A : A, A \cup B, A\backslash B \in m(\mathscr{A})\}$$

任取 $\mathscr{D}_A$ 中一个单调不减序列 $\{A_n\}$，则对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，有 $A_n \in m(\mathscr{A})$，于是 $\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n \in m(\mathscr{A})$。考虑：

$$B \cup \left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n\right) = \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} (B \cup A_n)$$

则 $\{B \cup A_n\}$ 也是一个单调不减序列，同时对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，有 $B \cup A_n \in m(\mathscr{A})$，所以：

$$B \cup \left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n\right) \in m(\mathscr{A})$$

考虑：

$$B\backslash \left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n\right) = \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cap}} (B\backslash A_n)$$

则 $\{B\backslash A_n\}$ 是一个单调不增序列，同时对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，有 $B\backslash A_n \in m(\mathscr{A})$，所以：

$$B\backslash \left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n\right) \in m(\mathscr{A})$$

由 $\{A_n\}$ 的任意性，$\mathscr{D}_B$ 对单调不减序列的极限封闭。

任取 $\mathscr{D}_B$ 中的一个单调不增序列 $\{D_n\}$，则对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，有 $D_n \in m(\mathscr{A})$，于是 $\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cap}} D_n \in m(\mathscr{A})$。考虑：

$$B \cup \left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cap}} D_n\right) = \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cap}} (B \cup D_n)$$

则 $\{B \cup D_n\}$ 也是一个单调不增序列，同时对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，有 $B \cup D_n \in m(\mathscr{A})$，所以：

$$B \cup \left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cap}} D_n\right) \in m(\mathscr{A})$$

考虑：

$$B\backslash \left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cap}} D_n\right) = \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} (B\backslash D_n)$$

则 $\{B\backslash D_n\}$ 是一个单调不减序列，同时对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，有 $B\backslash D_n \in m(\mathscr{A})$，所以：

$$B\backslash \left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cap}} D_n\right) \in m(\mathscr{A})$$

由 $\{D_n\}$ 的任意性，$\mathscr{D}_B$ 对单调不增序列的极限封闭。

综上，$\mathscr{D}_B$ 是一个单调系。由证明 $\mathscr{B}_A$ 是单调系时 A 的任意性以及：

$$A \in \mathscr{A},\ B \in m(\mathscr{A}) \Rightarrow A \cup B, A \backslash B \in m(\mathscr{A})$$

可知 $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}_B$，由生成的定义，$m(\mathscr{A}) \subset \mathscr{D}_B$，再根据 $\mathscr{D}_B$ 定义中 B 的任意性可得：

$$A, B \in m(\mathscr{A}) \Rightarrow A \cup B, A \backslash B \in m(\mathscr{A})$$

所以 $m(\mathscr{A})$ 是一个环。 □

Corollary 13.1. 如果 $\mathscr{A}$ 是域，$\mathscr{B}$ 是单调系，则：

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{B} \Rightarrow \sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{B}$$

并且该推论与上一定理等价。

Proof. **(1) 必要性**：因为 $\mathscr{A}$ 是域，所以 $\sigma(\mathscr{A}) = m(\mathscr{A})$。因为 $\mathscr{B}$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的单调系，由生成的定义，$\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{B}$。

(2) 充分性：由 $\mathscr{B}$ 的任意性和生成的定义直接可得。 □

Theorem 13.15. 如果 $\mathscr{A}$ 是 π 系，则 $\sigma(\mathscr{A}) = l(\mathscr{A})$。

Proof. 由定理 13.6可知 $\sigma(\mathscr{A})$ 是一个 λ 域，由生成的定义可得 $\mathscr{A} \subset \sigma(\mathscr{A})$，于是 $l(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{A})$。下证 $\sigma(\mathscr{A}) \subset l(\mathscr{A})$。由生成的定义 $\mathscr{A} \subset l(\mathscr{A})$，若证得 $l(\mathscr{A})$ 是一个 σ 域，则可得 $\sigma(\mathscr{A}) \subset l(\mathscr{A})$。由定理 13.10可知只需证明 $l(\mathscr{A})$ 是一个 π 系。

对任意的 $A \in \mathscr{A}$，令：

$$\mathscr{B}_A = \{B : B, A \cap B \in l(\mathscr{A})\}$$

因为 $l(\mathscr{A})$ 是 λ 系，所以 $X \in l(\mathscr{A})$，而 $A \cap X = A \in \mathscr{A}$，由生成的定义，$A \cap X \in l(\mathscr{A})$，于是 $X \in \mathscr{B}_A$。

任取 $B, C \in \mathscr{B}_A$ 且 $B \subset C$，则有 $B, C \in l(\mathscr{A})$，于是 $C \backslash B \in l(\mathscr{A})$。注意到：

$$A \cap (C \backslash B) = (A \cap C) \backslash (A \cap B)$$

因为 $B, C \in \mathscr{B}_A$，所以 $A \cap B, A \cap C \in l(\mathscr{A})$。因为 $B \subset C$，所以 $A \cap B \subset A \cap C$，由 λ 系的定义可得 $(A \cap C) \backslash (A \cap B) \in l(\mathscr{A})$，即 $A \cap (C \backslash B) \in l(\mathscr{A})$，所以 $C \backslash B \in \mathscr{B}_A$。

任取 $\mathscr{B}_A$ 中的一个单调不减的集合列 $\{B_n\}$，则有 $B_n \in l(\mathscr{A}), A \cap B_n \in l(\mathscr{A})$ 对 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立，于是 $\{B_n\}$ 是 $l(\mathscr{A})$ 中单调不减的集合列。由 λ 系的定义可知：

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in l(\mathscr{A})$$

考虑：

$$A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap B_n)$$

因为 $\{B_n\}$ 单调不减，所以 $\{A\cap B_n\}$ 是 $l(\mathscr{A})$ 中单调不减的集合列，由 λ 系的定义可得：

$$A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right)\in l(\mathscr{A})$$

综上，$\mathscr{B}_A$ 是一个 λ 系。因为 $\mathscr{A}$ 是一个 π 系，所以 $\mathscr{A}$ 对交封闭，于是对任意的 $D\in\mathscr{A}$ 有 $D,A\cap D\in l(\mathscr{A})$，即 $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}_A$，由生成的定义可得 $l(\mathscr{A})\subset\mathscr{B}_A$。这说明：

$$A\in\mathscr{A},B\in l(\mathscr{A})\Rightarrow A\cap B\in l(\mathscr{A})$$

对任意的 $B\in l(\mathscr{A})$，令：

$$\mathscr{C}_B=\{A:A,B\cap A\in l(\mathscr{A})\}$$

因为 $l(\mathscr{A})$ 是 λ 系，所以 $X\in l(\mathscr{A})$，而 $B\cap X=B\in l(\mathscr{A})$，由生成的定义，$B\cap X\in l(\mathscr{A})$，于是 $X\in\mathscr{C}_B$。

任取 $D,E\in\mathscr{C}_B$ 且 $D\subset E$，则有 $D,E\in l(\mathscr{A})$，于是 $E\backslash D\in l(\mathscr{A})$。注意到：

$$B\cap(D\backslash E)=(B\cap D)\backslash(B\cap E)$$

因为 $D,E\in\mathscr{C}_B$，所以 $B\cap D,B\cap E\in l(\mathscr{A})$。因为 $D\subset E$，所以 $B\cap D\subset B\cap E$，由 λ 系的定义可得 $(B\cap D)\backslash(B\cap E)\in l(\mathscr{A})$，即 $B\cap(D\backslash E)\in l(\mathscr{A})$，所以 $D\backslash E\in\mathscr{C}_B$。

任取 $\mathscr{C}_B$ 中的一个单调不减的集合列 $\{C_n\}$，则有 $C_n\in l(\mathscr{A}),B\cap C_n\in l(\mathscr{A})$ 对 $n\in\mathbb{N}^+$ 成立，于是 $\{C_n\}$ 是 $l(\mathscr{A})$ 中单调不减的集合列。由 λ 系的定义可知：

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}C_n\in l(\mathscr{A})$$

考虑：

$$B\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}C_n\right)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}(B\cap C_n)$$

因为 $\{C_n\}$ 单调不减，所以 $\{B\cap C_n\}$ 是 $l(\mathscr{A})$ 中单调不减的集合列，由 λ 系的定义可得：

$$B\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}C_n\right)\in l(\mathscr{A})$$

综上，$\mathscr{C}_B$ 是一个 λ 系。由：

$$A\in\mathscr{A},B\in l(\mathscr{A})\Rightarrow A\cap B\in l(\mathscr{A})$$

可知 $\mathscr{A}\subset\mathscr{C}_B$，所以 $l(\mathscr{A})\subset\mathscr{C}_B$。由 $\mathscr{C}_B$ 的定义可知 $l(\mathscr{A})$ 对交封闭，所以 $l(\mathscr{A})$ 是一个 π 系。 □

Corollary 13.2. 如果 $\mathscr{A}$ 是 π 系，$\mathscr{B}$ 是 λ 系，则：

$$\mathscr{A}\subset\mathscr{B}\Rightarrow\sigma(\mathscr{A})\subset\mathscr{B}$$

并且该推论与上一定理等价。

Proof. **(1) 必要性**：因为 $\mathscr{A}$ 是 π 系，所以 $\sigma(\mathscr{A})=l(\mathscr{A})$。因为 $\mathscr{B}$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的 λ 系，由生成的定义，$\sigma(\mathscr{A})\subset\mathscr{B}$。

(2) 充分性：由 $\mathscr{B}$ 的任意性和生成的定义直接可得。 □

13.1.3 $\mathbb{R}$ 上开集与闭集的构造

Definition 13.12. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的开集，如果开区间 $(\alpha,\beta) \subset E$ 且 $\alpha, \beta \notin E$，则称 (α,β) 为 E 的构成区间 *(component interval)*。

Theorem 13.16. $\mathbb{R}$ 上任一非空开集 E 可以表示为至多可列个不相交的构成区间的并集。

Proof. 该定理的证明分为如下三步：

1. E 的任意两个不同的构成区间不相交；
2. E 中的任意一点必含在一个构成区间中；
3. E 的所有构成区间的并集为 E 且构成区间至多可列。

(1) 任取 E 的两个不同的构成区间 (α_1,β_1)，(α_2,β_2)，若这两个构成区间相交，则 $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ 这四个点至少有一个点在另一个构成区间内，从而在 E 中，这与构成区间的定义矛盾，所以 (α_1,β_1), (α_2,β_2) 不相交。由 (α_1,β_1), (α_2,β_2) 的任意性可得 E 的任意两个不同的构成区间必不相交。

(2) 任取 $x \in E$，记：

$$\mathscr{A} = \{(\alpha,\beta) : x \in (\alpha,\beta) \subset E\}$$

因为 E 是开集，所以 $\mathscr{A} \neq \varnothing$。取：

$$\alpha_0 = \inf\{\alpha : (\alpha,\beta) \in \mathscr{A}\},\ \beta_0 = \sup\{\beta : (\alpha,\beta) \in \mathscr{A}\}$$

作开区间 (α_0,β_0)，显然有 $x \in (\alpha_0,\beta_0)$。下面证明 (α_0,β_0) 是一个构成区间。

任取 $x_1 \in (\alpha_0,\beta_0)$，则 $\alpha_0 < x_1 < \beta_0$。由上下确界的定义，存在 $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2) \in \mathscr{A}$ 使得 $x_1 \in (\alpha_1,\beta_2)$，其中 $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \beta_1 < \beta_0$（若不满足，则 $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)$ 无交集，x 必然不可能同时存在于这两个区间之中，这与 $\mathscr{A}$ 的定义矛盾）。因为 $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2) \in \mathscr{A}$，所以 $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2) \subset E$，于是 $(\alpha_1,\beta_2) \subset E$，$x_1 \in E$，即 $(\alpha_0,\beta_0) \subset E$。

若 $\alpha_0 \in E$，因为 E 是一个开集，所以必然存在一个 $\varepsilon > 0$ 使得 $(\alpha_0-\varepsilon,\alpha_0+\varepsilon) \subset E$，取 $\beta_3 \in (x,\beta_0)$，则 $(\alpha_0-\varepsilon,\beta_3) \subset E$ 且 $x \in (\alpha_0-\varepsilon,\beta_3)$，那么就有 $(\alpha_0-\varepsilon,\beta_3) \in \mathscr{A}$，这与 α_0 是下确界矛盾，于是 $\alpha_0 \notin E$。同理，$\beta_0 \notin E$。

综上，(α_0,β_0) 是一个构成区间。

由先前 x 的任意性可得对于任意的 $x \in E$，x 必含在 E 的一个构成区间中，具体的构成区间由上述 α_0,β_0 的产生过程给出。

(3) 由 (2) 可知 E 中任意一点必含在一个构成区间中，对 E 中所有的点取其对应的构成区间的并集即可得到所有构成区间的并集为 E。由有理数在实数系中的稠密性，各构成区间必含有一个有理数。由 (1) 可得不同的构成区间不相交，于是每个构成区间可由其中包含的一个有理数来表示，而有理数是可列的，所以 E 的构成区间至多可列。 □

Corollary 13.3. $\mathbb{R}$ 上的闭集是从 $\mathbb{R}$ 上挖掉至多可列个互不相交的开区间所得到的集合。

Proof. 设闭集 $E \subset \mathbb{R}$，由定理 3.10可知 E^c 是一个开集，则 E^c 可表示为其构成区间的并集，于是 $E = \mathbb{R} \backslash E^c$ 是从 $\mathbb{R}$ 上挖掉至多可列个互不相交的开区间所得到的集合。 □

13.1.4 Borel σ 域

Definition 13.13. 设 $\mathbb{R}$ 上所有有限开区间构成的集合为 $\mathcal{C}$，称 $\sigma(\mathcal{C})$ 为博雷尔 σ 域 *(Borel σ-field)*，记作 $\mathcal{B}$。$\mathcal{B}$ 中的元素被称为博雷尔集。

Lemma 13.1. $\mathbb{R}$ 上任意开集可以表示为至多可列个有限开区间的并集。

Proof. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个开集，取 E 的一个构成区间 (α, β)。

(1) $\alpha = -\infty, \beta \in \mathbb{R}$：此时有：

$$(\alpha, \beta) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\beta - n, \beta)$$

(2) $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$：此时有：

$$(\alpha, \beta) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (2 - n, 1 + n)$$

(3) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$：此时其自身即为有限开区间。

(4) $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = +\infty$：此时有：

$$(\alpha, \beta) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\alpha, \alpha + n)$$

上述结果表明开集的构成区间可由至多可列个有限开区间的并集表示，由定理 13.16可知开集至多由可列个构成区间的并集表示，因为，所以 $\mathbb{R}$ 上任意开集可以表示为至多可列个有限开区间的并集。 □

可列个可列是可列

Theorem 13.17. $\mathbb{R}$ 中的开集、闭集和区间（有限或无穷）都是 *Borel* 集。

Proof. 由引理 13.1和 σ 域对可列并封闭可得开集是 Borel 集。

$\mathbb{R}$ 上的闭集可表示为实直线挖去一些开区间后剩下的部分，而开区间都是开集，从而都是 Borel 集，由引理 13.1可知它们也都能表示为至多可列个有限开区间的并集。可将差运算转化为交与补的运算，由定理 13.1又可将交运算转化为并与补的运算，因为 σ 域对可列并与补封闭，所以闭集是 Borel 集。

开区间是开集，闭区间是闭集，它们都是 Borel 集，剩余区间可以由这二者进行并与补的运算得到，因为 σ 域对可列并与补封闭，所以区间也是 Borel 集。 □

Theorem 13.18. $\mathcal{B}$ 有如下等价定义：

1. 设 $\mathbb{R}$ 上所有开集构成的集合为 $\mathcal{O}$，则 $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}$；

2. $\mathcal{B} = \sigma(\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\})$；

3. $\mathcal{B} = \sigma(\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$。

Proof. (1) 因为有限开区间都是开集，所以 $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$，于是有 $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{O})$，由生成的定义可得 $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{O})$。

由引理 13.1可知对 $\mathbb{R}$ 中的任意一个开集，它都可以表示为至多可列个有限开区间的并集，所以 $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$，由生成的定义可得 $\sigma(\mathcal{O}) \subset \mathcal{B}$。

综上，$\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}$。

(2) 对于任意的 $(a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$，取 $(-\infty,a],(-\infty,b]$ 即有 $(a,b] = (-\infty,b]\backslash(-\infty,a] \in \sigma(\{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\})$，所以有 $\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\} \subset \sigma(\{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\})$。由生成的定义，$\sigma(\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}) \subset \sigma(\{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\})$。

对于任意的 $(-\infty,a]$, $a \in \mathbb{R}$,因为 σ 域对可列并封闭,并且 $(a-n,a] \in \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立，所以：

$$(-\infty,a] = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(a-n,a] \in \sigma(\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\})$$

由生成的定义，$\sigma(\{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\}) \subset \sigma(\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\})$。

综上，$\sigma(\{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\})$。

对 $(-\infty,a]$ 取补集即可得到 $(a,+\infty)$，于是 $\{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \subset \sigma(\{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\})$，因为所有有限开区间都可以由 $\{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ 中两个元素的差集来表示，所以 $\mathcal{C} \subset \sigma(\{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\})$。由生成的定义，$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\})$。

注意到对任意的 $(a,+\infty), a \in \mathbb{R}$ 都可由有限开区间的可列并表示，于是有 $\{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \subset \sigma(\mathcal{C})$。由生成的定义，$\sigma(\{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}) \subset \sigma(\mathcal{C})$ □

证明未完成，考虑到 borel 代数的等价定义实在太多

Definition 13.14. 定义:

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma(\mathcal{B}, -\infty, +\infty)$$

Theorem 13.19. $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ 有如下等价定义：

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} &= \sigma([-\infty,a) : a \in \mathbb{R}) \\ &= \sigma([-\infty,a] : a \in \mathbb{R}) \\ &= \sigma((a,+\infty] : a \in \mathbb{R}) \\ &= \sigma([a,+\infty] : a \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Proof. (1) 对任意的 $a \in \mathbb{R}$，有：

$$[-\infty,a) = \{-\infty\} \cup (-\infty,a) \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$$

由生成的定义：

$$\sigma([-\infty,a) : a \in \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$$

□

13.2 测度空间

13.2.1 集函数与测度

Definition 13.15. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 上的一个集族。称定义在 $\mathscr{A}$ 上并且取值非负的函数为非负集函数。

Definition 13.16. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 上的集族，μ 是定义在其上的非负集函数。

1. 如果对 $\mathscr{A}$ 中任意互不相交的 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，有：

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

则称 μ 具有有限可加性 *(finite additivity)*；

2. 如果对 $\mathscr{A}$ 中任意的 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，有：

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

则称 μ 具有次有限可加性 *(finite subadditivity)*；

3. 如果对任意的 $A, B \in \mathscr{A}$，$A \subset B$，$B \backslash A \in \mathscr{A}$，只要 $\mu(A) < +\infty$，就有：

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$$

则称 μ 具有可减性 *(reducibility)*；

4. 若对任意的 $A, B \in \mathscr{A}$，$A \subset B$，有 $\mu(A) \leqslant \mu(B)$，则称 μ 具有单调性 *(monotonicity)*；

5. 若对 $\mathscr{A}$ 中任意互不相交的集合序列 $\{A_n\}$，只要 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$，就有：

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

则称 μ 具有可列可加性 *(countably additivity)*；

6. 若对 $\mathscr{A}$ 中任意的集合序列 $\{A_n\}$，只要 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$，就有：

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

则称 μ 具有次可列可加性 *(countably subadditivity)*；

7. 若对任意的 $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$ 且 $A_n \uparrow A \in \mathscr{A}$，有：

$$\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

则称 μ 具有下连续性 *(continuity from below)*；

8. 若对任意的 $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$ 且 $A_n \downarrow A$，$\mu(A_1) < +\infty$，有：

$$\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

则称 μ 具有上连续性 *(continuity from above)*。

Definition 13.17. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 上的集族，$\varnothing \in \mathscr{A}$。如果 $\mathscr{A}$ 上的非负集函数 μ 满足：

1. $\mu(\varnothing) = 0$；
2. μ 具有可列可加性。

则称 μ 为 $\mathscr{A}$ 上的测度 *(measure)*。如果对任意的 $A \in \mathscr{A}$ 有 $\mu(A) < +\infty$，则称测度 μ 是有限的；如果对任意的 $A \in \mathscr{A}$，存在 $\mathscr{A}$ 中的集合序列 $\{A_n\}$，满足 $\mu(A_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}^+$，使得 $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$，则称测度 μ 是 σ 有限的。

Theorem 13.20. 测度具有有限可加性与可减性。

Proof. 设 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度。

(1) 任取互不相交的 $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$，由 μ 的可列可加性可得：

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cdots) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + 0 = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

由 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的任意性，μ 具有有限可加性。

(2) 任取 $A, B \in \mathscr{A}$，$A \subset B$，$B \backslash A \in \mathscr{A}$，$\mu(A) < +\infty$，显然 $(B \backslash A) \cap A = \varnothing$，由测度的有限可加性：

$$\mu(B) = \mu[(B \backslash A) \cup A] = \mu(B \backslash A) + \mu(A)$$

即：

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$$

于是 μ 具有可减性。 □

Definition 13.18. 设 X 是一个集合，$\mathscr{F}$ 是 X 的一些子集生成的 σ 域，μ 是 $\mathscr{F}$ 上的测度。称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为测度空间 *(measure space)*。若 $A \in \mathscr{F}$ 且 $\mu(A) = 0$，则称 A 为零测集。若 $\mathscr{F}$ 中零测集的子集还属于 $\mathscr{A}$，则称测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是完全测度空间 *(complete measure space)*。若测度空间 $(X, \mathscr{F}, P)$ 满足 $P(X) = 1$，则称其为概率空间 *(probability space)*，对应的 P 叫做**概率测度**，$\mathscr{F}$ 中的元素叫做事件 *(event)*，$P(A)$ 叫做事件 A 发生的概率。

半环上的测度

Theorem 13.21. 半环 $\mathscr{A}$ 上有有限可加性的非负集函数 μ 必有单调性和可减性。

Proof. (1) 设 $A, B \in \mathscr{A}$，$A \subset B$。因为 $\mathscr{A}$ 是一个半环，所以存在互不相交的 $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathscr{A}$ 使得：

$$B \backslash A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

由 μ 的有限可加性可得：

$$\mu(B) = \mu\left[A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)\right] = \mu(A) + \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \geqslant \mu(A)$$

所以 μ 有单调性。

(2) 由 (1) 可得：

$$\mu(B\backslash A)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}C_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)=\mu(B)-\mu(A)$$

于是 μ 有可减性。 □

Theorem 13.22. 半环 $\mathscr{A}$ 上有可列可加性的非负集函数 μ 具有次可列可加性、下连续性和上连续性。

Proof. 因为 μ 具有可列可加性，所以：

$$\mu(\varnothing)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(\varnothing)$$

于是 $\mu(\varnothing)=0$ 或 $\mu(\varnothing)=+\infty$。

(1) $\mu(\varnothing)=0$：此时 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度。

下连续性：设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中一个单调递增的集合序列且有 $A_n\uparrow A$，$A_0=\varnothing$。由 μ 的可列可加性和有限可加性（定理 13.20）可得：

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\mu\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A_n\backslash A_{n-1})\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n\backslash A_{n-1})\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\backslash A_{i-1})\right]=\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)\end{aligned}$$

下连续性得证。

上连续性：设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中一个单调递减的集合序列且有 $A_n\downarrow A$，$\mu(A_1)<+\infty$。由 μ 的可列可加性可得：

$$\mu(A_n)=\mu\left\{A\cup\left[\bigcup_{i=n}^{+\infty}(A_i\backslash A_{i+1})\right]\right\}=\mu(A)+\sum_{i=n}^{+\infty}\mu(A_i\backslash A_{i+1})$$

因为 $\mathscr{A}$ 是一个半环且 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的集合序列，所以存在互不相交的 $C_1,C_2,\dots,C_{k_n}\in\mathscr{A}$ 使得：

$$A_n\backslash A_{n+1}=\bigcup_{i=1}^{k_n}C_i$$

由 μ 的有限可加性可得：

$$\mu(A_n)=\mu(A)+\sum_{i=n}^{+\infty}\mu(A_i\backslash A_{i+1})=\mu(A)+\sum_{i=n}^{+\infty}\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k_i}C_j\right)=\mu(A)+\sum_{i=n}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k_i}\mu(C_j)$$

注意到：

$$\mu(A_1)=\mu(A)+\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k_i}\mu(C_j)<+\infty$$

所以级数：

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k_i}\mu(C_j)$$

收敛。由级数收敛的必要性条件可得：

级数收敛的必要条件

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=n}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k_i}\mu(C_j)\right]=0$$

于是有：

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)=\mu(A)+\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=n}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k_i}\mu(C_j)\right]=\mu(A)$$

上连续性得证。

次可列可加性：设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的一个集合序列，由生成的定义可知 $\{A_n\}$ 也是 $r(\mathscr{A})$ 中的一个集合序列，令 $A_0=\varnothing$。由环的定义可得：

$$\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\in r(\mathscr{A}),\ A_n\backslash\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\in\mathscr{A}$$

因为环也是半环（定理 13.4），再根据定理 13.13可得存在互不相交的 $C_{n1},C_{n2},\ldots,C_{nk_n}\in\mathscr{A}$ 使得：

$$A_n\backslash\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i=\bigcup_{i=1}^{k_n}C_{ni}$$

同理，存在互不相交的 $D_{n1},D_{n2},\ldots,D_{nl_n}\in\mathscr{A}$ 使得：

$$A_n\backslash\bigcup_{i=1}^{k_n}C_{ni}=\bigcup_{i=1}^{l_n}D_{ni}$$

显然 $C_{n1},C_{n2},\ldots,C_{nk_n},D_{n1},D_{n2},\ldots,D_{nl_n}$ 互不相交，同时有：

$$A_n=\left(\bigcup_{i=1}^{k_n}C_{ni}\right)\bigcup\left(\bigcup_{i=1}^{l_n}D_{ni}\right)$$

由 μ 的可列可加性与有限可加性（定理 13.20）：

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)&=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{i=1}^{k_n}C_{ni}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\mu(C_{ni})\\&\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\mu(C_{ni})+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{l_n}\mu(D_{ni})\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k_n}C_{ni}\right)+\mu\left(\bigcup_{i=1}^{l_n}D_{ni}\right)\right]\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu\left[\left(\bigcup_{i=1}^{k_n}C_{ni}\right)\bigcup\left(\bigcup_{i=1}^{l_n}D_{ni}\right)\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)\end{aligned}$$

次可列可加性得证。

(2) $\mu(\varnothing)=+\infty$：此时显然满足所有条件。 □

Theorem 13.23. 半环上的测度具有单调性、可减性、次可列可加性、下连续性和上连续性。

Proof. 测度具有非负性和可列可加性，由定理 13.22可知半环上的测度具有次可列可加性、下连续性和上连续性。由定理 13.20可知可列可加性蕴含有限可加性，所以根据定理 13.21可知半环上的测度具有单调性和可减性。 □

Theorem 13.24. 设 μ 是环 $\mathscr{A}$ 上的非负集函数，则：

$$
\begin{aligned}
&(1)\mu\text{可列可加}\\
\Leftrightarrow&(2)\mu\text{次可列可加且有限可加}\\
\Leftrightarrow&(3)\mu\text{下连续且有限可加}\\
\Rightarrow&(4)\mu\text{上连续}
\end{aligned}
$$

Proof. 由定理 13.4可知环是半环，所以根据定理 13.23可得三个必要性成立，下分别证明两个充要性。

(1) 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的一个互不相交的集合序列。由 μ 的次可列可加性可得：

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

由定理 13.21可知 μ 具有单调性，因为 μ 具有有限可加性，所以对任意的 $m \in \mathbb{N}^+$ 有：

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \geqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$$

于是由极限的不等式性可得：

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

所以有：

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

即 μ 可列可加。

(2) 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的一个互不相交的集合序列，显然有：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \uparrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

由 μ 的有限可加性与下连续性可得：

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

即 μ 可列可加。 □

13.2.2 外测度

Definition 13.19. 设 X 是一个集合，τ 是 X 的所有子集构成的集族 $\mathscr{A}$ 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的函数，如果：

1. $\tau(\varnothing)=0$；

2. 若 $A\subset B$ 且 $A,B\in\mathscr{A}$，则有 $\tau(A)\leqslant\tau(B)$；

3. τ 具有次可列可加性。

则称 τ 为 X 上的外测度 *(exterior measure)*。

Theorem 13.25. 外测度具有次有限可加性。

Proof. 设 X 是一个集合，$\mathscr{A}$ 是 X 的所有子集构成的集族，τ 是 X 上的外测度。任取 $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathscr{A}$，由 τ 的次可列可加性可得：

$$\tau\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\tau(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cdots)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\tau(A_i)+0=\sum_{i=1}^{n}\tau(A_i)$$

由 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 的任意性，τ 具有次有限可加性。 □

Theorem 13.26. 设 X 是一个集合，$\mathscr{A}$ 是 X 的所有子集构成的集族，则 $\mathscr{A}$ 上的测度 τ 一定是 X 上的外测度。

Proof. 显然 $\mathscr{A}$ 是一个 σ 域。由定理 13.5可知 $\mathscr{A}$ 是一个域，根据定理 13.4可知 $\mathscr{A}$ 是一个半环，所以 τ 是半环上的测度。由定理 13.23可知 τ 具有单调性和次可列可加性。因为 τ 是一个测度，所以 $\tau(\varnothing)=0$。综上，τ 是 X 上的外测度。 □

Theorem 13.27. 设 $\mathscr{A}$ 是一个包含 $\varnothing$ 的集族，μ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个非负集函数且满足 $\mu(\varnothing)=0$，若对于任意的 $A\in\mathscr{A}$ 有：

$$\tau(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(B_n):B_n\in\mathscr{A},\ A\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right\}$$

则 τ 是一个外测度，称 τ 为由 μ 生成的外测度。

Proof. (1) 因为 $\varnothing=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\varnothing$，所以：

$$0\leqslant\tau(\varnothing)\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(\varnothing)=0$$

所以 $\tau(\varnothing)=0$。

(2) 设 $A\subset B$ 且 $A,B\in\mathscr{A}$，对于满足条件：

$$B\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n$$

的 $\{B_n\}$，自然有：

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

所以：

$$\tau(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n)$$

对右边取下确界即有 $\tau(A) \leqslant \tau(B)$。

(3) 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的一个集合序列。若存在 $n_0 \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\tau(A_{n_0}) = +\infty$，则由 τ 的定义和 (2) 可得：

$$\tau\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leqslant +\infty = \tau(A_{n_0}) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(A_n)$$

即 τ 具有次可列可加性。

若 $\tau(A_n) < +\infty$ 对 $n \in \mathbb{N}^+$ 都成立，任取 $\varepsilon > 0$，对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，存在 $\mathscr{A}$ 中的一个集合序列 $\{B_{ni}\}$ 使得：

$$A_n \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_{ni}, \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(B_{ni}) < \tau(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

于是：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(B_{ni}) < \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(A_n) + \varepsilon$$

由 $\{B_{n_i}\}$ 的取法，显然：

$$\tau\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(B_{ni})$$

由 ε 的任意性可得：

$$\tau\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(A_n)$$

即 τ 具有次可列可加性。

综上，τ 是一个外测度。 □

Definition 13.20 (Caratheodory condition)**.** 设 X 是一个集合，$\mathscr{A}$ 是 X 的所有子集构成的集族，τ 是 X 上的外测度。称满足条件：

$$\tau(T) = \tau(T \cap A) + \tau(T \cap A^c), \ \forall\, T \in \mathscr{A}$$

的集合 $A \in \mathscr{A}$ 为 τ可测集 *(measurable set)*。将由所有 τ 可测集构成的集族记作 $\mathscr{A}_\tau$。

Lemma 13.2. 设 X 是一个集合，$\mathscr{A}$ 是 X 的所有子集构成的集族，τ 是 X 上的外测度。集合 $E \in \mathscr{A}_\tau$ 的充要条件是对与 $\forall\, A \subset E, \forall\, B \subset E^c$，总有：

$$\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$$

Proof. 必要性：对任意的 $A \subset E$, $\forall\, B \subset E^c$，取 $T = A \cup B$，因为 $E \in \mathscr{A}_\tau$，那么对于这个 T，应有：

$$\tau(A \cup B) = \tau(T) = \tau(T \cap E) + \tau(T \cap E^c) = \tau(A) + \tau(B)$$

充分性：对任意的 $T \in \mathscr{A}$，$\exists\, A \subset E$, $\exists\, B \subset E^c$，使得 $T = A \cup B$，那么就有：

$$\tau(T) = \tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B) = \tau(T \cap E) + \tau(T \cap E^c)$$

由 T 的任意性，$E \in \mathscr{A}_\tau$。 □

Property 13.2.1. 设 X 是一个集合，$\mathscr{A}$ 是 X 的所有子集构成的集族，τ 是 X 上的外测度。$\mathscr{A}_\tau$ 具有如下性质：

1. $\varnothing, X \in \mathscr{A}_\tau$；
2. $S \in \mathscr{A}_\tau$ 的充要条件是 $S^c \in \mathscr{A}_\tau$；
3. 设 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ 是 τ 可测集，则有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i \in \mathscr{A}_\tau$，并且当 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ 互不相交时可得：
$$\tau\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \tau(S_i)$$
4. 设 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ 是 τ 可测集，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i \in \mathscr{A}_\tau$；
5. 设 $S_1, S_2 \in \mathscr{A}_\tau$，则 $S_1 \backslash S_2 \in \mathscr{A}_\tau$；
6. 设 $\{S_n\}$ 是一列 τ 可测集，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} S_n \in \mathscr{A}_\tau$，并且当 $\{S_n\}$ 互不相交时可得：
$$\tau\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_i\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(S_i)$$
7. 设 $\{S_n\}$ 是一列 τ 可测集，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} S_n \in \mathscr{A}_\tau$。

Proof. (1) 代入定义直接可得。

(2) 若 $S \in \mathscr{A}_\tau$，对任意的 $T \in \mathscr{A}$，则有：

$$\begin{aligned}\tau(T) = \tau(T \cap S) + \tau(T \cap S^c) &= \tau[T \cap (S^c)^c] + \tau(T \cap S^c) \\ &= \tau(T \cap S^c) + \tau[T \cap (S^c)^c]\end{aligned}$$

(3) 因为 $S_1 \in \mathscr{A}_\tau$，对任意的 T 都有：

$$\tau(T) = \tau(T \cap S_1) + \tau(T \cap S_1^c) \tag{13.1}$$

因为 $S_2 \in \mathscr{A}_\tau$，对于 $\tau(T \cap S_1^c)$ 有：

$$\tau(T \cap S_1^c) = \tau[(T \cap S_1^c) \cap S_2] + \tau[(T \cap S_1^c) \cap S_2^c] \tag{13.2}$$

将(13.2)式代入(13.1)式，再由定理 13.1，得到：

$$\begin{aligned}\tau(T) &= \tau(T\cap S_1)+\tau[(T\cap S_1^c)\cap S_2]+\tau[(T\cap S_1^c)\cap S_2^c]\\ &= \tau(T\cap S_1)+\tau[(T\cap S_1^c)\cap S_2]+\tau[T\cap (S_1\cup S_2)^c]\end{aligned}$$

由于 $T\cap S_1\subset S_1$，$(T\cap S_1^c)\cap S_2\subset S_1^c$，满足引理 13.2条件，因此上式的前两项可以合并：

$$\begin{aligned}\tau(T\cap S_1)+\tau[(T\cap S_1^c)\cap S_2] &= \tau[(T\cap S_1)\cup(T\cap S_1^c\cap S_2)]\\ &= \tau\{T\cap[S_1\cup(S_1^c\cap S_2)]\}\\ &= \tau\{T\cap[(S_1\cup S_1^c)\cap(S_1\cup S_2)]\}\\ &= \tau[T\cap(S_1\cup S_2)]\end{aligned}$$

那么就有：

$$\tau(T)=\tau[T\cap(S_1\cup S_2)]+\tau[T\cap(S_1\cup S_2)^c]$$

由 T 的任意性，$S_1\cup S_2\in\mathscr{A}_\tau$。

当 $S_1\cap S_2=\varnothing$ 时，显然 $S_2\subset S_1^c$，那么就有 $T\cap S_2\subset S_1^c$，由引理 13.2：

$$\begin{aligned}\tau[T\cap(S_1\cup S_2)] &= \tau[(T\cap S_1)\cup(T\cap S_2)]\\ &= \tau(T\cap S_1)+\tau(T\cap S_2)\end{aligned}$$

由数学归纳法，$\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} S_i\in\mathscr{A}_\tau$ 且当 $S_1,S_2,\ldots,S_n$ 互不相交时可得：

$$\tau\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} S_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\tau(S_i)$$

(4) 由定理 13.1以及 (2)(3) 直接得到：

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} S_i=\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} S_i^c\right)^c\in\mathscr{A}_\tau$$

(5) $S_1\backslash S_2=S_1\cap S_2^c$，由 (2)(4) 可知 $S_1\backslash S_2\in\mathscr{A}_\tau$。

(6) 设 $\{S_n\}$ 互不相交。由 (3) 可得对任意的 n，$\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} S_i\in\mathscr{A}_\tau$，那么对任意的 $T\in\mathscr{A}$，就有（第一行到第二行利用外测度的单调性，第二行到第三行利用 (3)）：

$$\begin{aligned}\tau(T) &= \tau\left[T\cap\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} S_i\right)\right]+\tau\left[T\cap\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} S_i\right)^c\right]\\ &\geqslant \tau\left[T\cap\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} S_i\right)\right]+\tau\left[T\cap\left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} S_n\right)^c\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\tau(T\cap S_i)+\tau\left[T\cap\left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} S_n\right)^c\right]\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$，有（第一行到第二行利用极限的不等式性，第二行到第三行利用外测度的次可列可加性）：

$$
\begin{aligned}
\tau(T) &\geqslant \sum_{i=1}^{n}\tau(T\cap S_i)+\tau\left[T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)^c\right]\\
&\geqslant \sum_{i=1}^{+\infty}\tau(T\cap S_i)+\tau\left[T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)^c\right]\\
&\geqslant \tau\left[\bigcup_{i=1}^{+\infty}(T\cap S_i)\right]+\tau\left[T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)^c\right]\\
&= \tau\left[T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)\right]+\tau\left[T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)^c\right]
\end{aligned}
\tag{13.3}
$$

又因：

$$T=\left[T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)\right]\cup\left[T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)^c\right]$$

由外测度的次有限可加性（定理 13.25）可得：

$$\tau(T)\leqslant\tau\left[T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)\right]+\tau\left[T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)^c\right]$$

因此：

$$\tau(T)=\tau\left[T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)\right]+\tau\left[T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)^c\right]$$

由 T 的任意性，$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}S_n$ 可测。

令 $T=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}S_n$，代入公式 (13.3) 式，则：

$$
\begin{aligned}
\tau\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right) &\geqslant \sum_{i=1}^{+\infty}\tau\left[\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)\cap S_i\right]+\tau\left[\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)^c\right]\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\tau(S_i)
\end{aligned}
$$

但是由外测度的次可列可加性有：

$$\tau\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\tau(S_n)$$

因此：

$$\tau\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\tau(S_n)$$

若 $\{S_n\}$ 不满足互不相交，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}S_n$ 可被表示为互不相交的可数个集合的并：

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n=S_1\cup(S_2\backslash S_1)\cup[S_3\backslash(S_1\cup S_2)]\cdots$$

由 (5) 和之前 $\{S_n\}$ 互不相交时的论述即可得 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}S_n\in\mathscr{A}_\tau$。

(7) 由定理 13.1和 (2) 可知：

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}S_n=\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n^c\right)^c\in\mathscr{A}_\tau$$

□

Theorem 13.28. 设 X 是一个集合，$\mathscr{A}$ 是 X 的所有子集构成的集族，τ 是 X 上的外测度。$(X, \mathscr{A}_\tau, \tau)$ 是一个完全测度空间。

Proof. 由性质 13.2.1(6) 和外测度的定义可知 τ 是 $\mathscr{A}_\tau$ 上的测度。任取 $A \in \mathscr{A}$ 满足 $\tau(A) = 0$，对任何的 $E \in \mathscr{A}$，由外测度的单调性和非负性可得 $\tau(E \cap A) = 0$，于是由外测度的单调性可得：

$$\tau(E) \geqslant \tau(E \cap A^c) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap A^c)$$

因为 $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$，由外测度的次可列可加性可得：

$$\tau(E) \leqslant \tau(E \cap A) + \tau(E \cap A^c)$$

于是有：

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap A^c)$$

由 E 的任意性，$A \in \mathscr{A}_\tau$，即 τ 的零测集都属于 $\mathscr{A}_\tau$。由外测度的单调性，零测集的子集都是零测集，所以 τ 的零测集的子集都属于 $\mathscr{A}_\tau$，$(X, \mathscr{A}_\tau, \tau)$ 是一个完全测度空间。 □

13.2.3 测度的扩张

Definition 13.21. 设 μ, τ 分别为集族 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 上的测度，并且有 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$。如果对任意的 $A \in \mathscr{A}$ 都有 $\mu(A) = \tau(A)$，则称 τ 是 μ 在 $\mathscr{B}$ 上的扩张 *(extension)*。

Lemma 13.3. 设 X 是一个集合，$\mathscr{A}$ 是 X 上的一个 π 系，如果 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的测度 μ, τ 满足：

1. 对任意的 $A \in \mathscr{A}$，有 $\mu(A) = \tau(B)$；
2. 存在 $\mathscr{A}$ 中互不相交的集合序列 $\{A_n\}$ 使得：

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = X,\ \mu(A_n) < +\infty,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$$

则对任何的 $A \in \sigma(\mathscr{A})$，有 $\mu(A) = \tau(A)$。

Proof. 对任意的 $B \in \mathscr{A}$ 且 $\mu(B) < +\infty$，令：

$$\mathscr{C} = \{A \in \sigma(\mathscr{A}) : \mu(A \cap B) = \tau(A \cap B)\}$$

下证明 $\mathscr{C}$ 是一个 λ 系。

(1) 因为 $\sigma(\mathscr{A})$ 是一个 σ 域，所以 $X \in \sigma(\mathscr{A})$，于是有 $\mu(X \cap B) = \mu(B)$, $\tau(X \cap B) = \tau(B)$。由条件 (1)，因为 $B \in \mathscr{A}$，所以 $\mu(X \cap B) = \tau(X \cap B) = \mu(B) = \tau(B)$，于是 $X \in \mathscr{C}$。

(2) 任取 $C, D \in \mathscr{C}$ 且有 $C \subset D$，于是有 $\mu(C \cap B) = \tau(C \cap B)$, $\mu(D \cap B) = \tau(D \cap B)$。考虑 $D \backslash C$，则：

$$\mu[(D \backslash C) \cap B] = \mu[(D \cap B) \backslash (C \cap B)]$$

因为 $C \subset D$，所以 $C \cap B \subset D \cap B$，由测度的有限可加性即可得：

$$\mu[(D \backslash C) \cap B] = \mu[(D \cap B) \backslash (C \cap B)] = \mu(D \cap B) - \mu(C \cap B)$$

因为 $B\in\mathscr{A}$，所以 $D\cap B, C\cap B\in\mathscr{A}$，由测度的有限可加性即可得到：

$$\mu[(D\backslash C)\cap B]=\mu(D\cap B)-\mu(C\cap B)=\tau(D\cap B)-\tau(C\cap B)=\tau[(D\backslash C)\cap B]$$

所以 $D\backslash C\in\mathscr{C}$。

(3) 任取 $\mathscr{C}$ 中一个单调不减的集合序列 $\{C_n\}$，则有 $\mu(C_n\cap B)=\tau(C_n\cap B)$ 对 $n\in\mathbb{N}^+$ 成立。令 $C_0=\varnothing\in\mathscr{C}$，由测度的可列可加性、有限可加性即可得到：

$$\begin{aligned}\mu\left[\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}C_n\right)\cap B\right]&=\mu\left\{\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty}(C_n\backslash C_{n-1})\right]\cap B\right\}=\mu\left\{\bigcup_{n=1}^{+\infty}[(C_n\backslash C_{n-1})\cap B]\right\}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu[(C_n\backslash C_{n-1})\cap B]=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu[(C_n\cap B)\backslash(C_{n-1}\cap B)]\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}[\mu(C_n\cap B)-\mu(C_{n-1}\cap B)]=\sum_{n=1}^{+\infty}[\tau(C_n\cap B)-\tau(C_{n-1}\cap B)]\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\tau[(C_n\cap B)\backslash(C_{n-1}\cap B)]=\sum_{n=1}^{+\infty}\tau[(C_n\backslash C_{n-1})\cap B]\\&=\tau\left\{\bigcup_{n=1}^{+\infty}[(C_n\backslash C_{n-1})\cap B]\right\}=\tau\left\{\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty}(C_n\backslash C_{n-1})\right]\cap B\right\}\\&=\tau\left[\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}C_n\right)\cap B\right]\end{aligned}$$

于是：

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}C_n\in\mathscr{C}$$

综上，$\mathscr{C}$ 是一个 λ 系。

因为 $\mathscr{A}$ 是一个 π 系，对交封闭，所以 $\mathscr{A}\subset\mathscr{C}$。由推论 13.2可知 $\sigma(\mathscr{A})\subset\mathscr{C}$，于是任意的 $A\in\sigma(\mathscr{A})$ 对任意的 $B\in\mathscr{A}$ 且 $\mu(B)<+\infty$，有：

$$\mu(A\cap B)=\tau(A\cap B)$$

取条件 (2) 中的集合序列 $\{A_n\}$，由测度的可列可加性可得：

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\mu\left[A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)\right]=\mu\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A_n\cap A)\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n\cap A)=\sum_{n=1}^{+\infty}\tau(A_n\cap A)\\&=\tau\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A_n\cap A)\right]=\tau\left[A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)\right]=\tau(A)\end{aligned}$$

□

Theorem 13.29. 对于半环 $\mathscr{A}$ 上的测度 μ，存在 $\sigma(\mathscr{A})$ 上 μ 的扩张 τ。若存在 $\mathscr{A}$ 中互不相交的集合序列 $\{A_n\}$ 使得：

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n=X,\ \mu(A_n)<+\infty,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^+$$

则 τ 是唯一的且是由 μ 生成的外测度。

Proof. 取 τ 为由 μ 生成的外测度。证明分成以下三步：

1. 证明对于任意的 $A\in\mathscr{A}$，有 $\mu(A)=\tau(A)$；

2. 证明 τ 是 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的测度：

   (a) 对任何的 $A,B\in\mathscr{A}$，有：

$$\tau(B)\geqslant\tau(B\cap A)+\tau(B\cap A^c)$$

   (b) 设 $\mathscr{F}$ 是 X 的所有子集构成的集族，$\mathscr{F}_\tau$ 是 τ 可测集，则 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}_\tau$。

3. 满足定理条件时 τ 是唯一的。

(1) 取任意的 $A\in\mathscr{A}$，对任意满足 $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$ 的 $\mathscr{A}$ 中的集合序列 $\{A_n\}$，由半环上测度的次可列可加性和单调性（定理 13.23）可得：

$$\mu(A)=\mu\left[A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)\right]=\mu\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A\cap A_n)\right]\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A\cap A_n)\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)$$

由下确界的不等式性可得：

$$\mu(A)\leqslant\inf\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n):A_n\in\mathscr{A},\ A\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right\}=\tau(A)$$

再取 $B_1=A,\ B_n=\varnothing,\ \forall\,n\geqslant2$，有：

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(B_n)\geqslant\inf\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n):A_n\in\mathscr{A},\ A\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right\}=\tau(A)$$

于是有 $\mu(A)=\tau(A)$。

(2.a) 因为 $\mathscr{A}$ 是半环，所以存在互不相交的 $\{C_n\}\subset\mathscr{A}$ 使得：

$$B\cap A^c=B\backslash A=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$$

由 (1) 可得 $\mu(B)=\tau(B)$，根据半环对交的封闭性与测度的有限可加性可得：

$$\begin{aligned}\tau(B)=\mu(B)&=\mu[(B\cap A)\cup(B\cap A^c)]=\mu(B\cap A)+\mu(B\cap A^c)\\&=\mu(B\cap A)+\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}C_i\right)=\mu(B\cap A)+\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)\end{aligned}$$

因为：

$$B\cap A^c\subset\bigcup_{i=1}^{n}C_i$$

而半环对包含的差封闭

没有证完，涉及到半环的现代式定义

(2.b) 即要证对任意的 $A\in\mathscr{A}$ 和任意的 $B\in\mathscr{F}$，有：

$$\tau(B)=\tau(B\cap A)+\tau(B\cap A^c)$$

$\square$

13.3 可测映射与可测函数

13.3.1 可测映射

Definition 13.22. 称 X 和其上的一个 σ 域 $\mathscr{A}$ 为可测空间 *(measurable space)*，记为 $(X, \mathscr{A})$。

Definition 13.23. 设 $(X, \mathscr{A})$ 和 $(Y, \mathscr{B})$ 为可测空间，f 是一个 X 到 Y 的映射。如果 $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$，则称 f 为从 $(X, \mathscr{A})$ 到 $(Y, \mathscr{B})$ 的可测映射 *(measurable map)*，称 $\sigma(f) = f^{-1}(\mathscr{B})$ 为使映射 f 可测的最小 σ 域。

Lemma 13.4. 设 X, Y 为两个集合，f 为一个 X 到 Y 的映射，$\mathscr{A} \subset Y$，则：

$$\sigma[f^{-1}(\mathscr{A})] = f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$$

Proof. 先证 $f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$ 是一个 σ 域。

(1) 因为 $\sigma(\mathscr{A})$ 是一个 σ 域，所以 $Y \in \sigma(\mathscr{A})$，于是 $X \in f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$。

(2) 任取 $A \in f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$，设 $f(A) = B$。由定理 3.17(3) 可得，$A^c = [f^{-1}(B)]^c = f^{-1}(B^c)$。因为 $\sigma(\mathscr{A})$ 是一个 σ 域，$B \in \sigma(\mathscr{A})$，所以 $B^c \in \sigma(\mathscr{A})$，所以 $A^c \in f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$。由 A 的任意性，$f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$ 对补的运算封闭。

(3) 任取集合序列 $\{A_n\} \subset f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$，$f(A_n) = B_n \in \sigma(\mathscr{A})$，由定理 3.17(4) 可得：

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)$$

因为 $\sigma(\mathscr{A})$ 是一个 σ 域，$B_n \in \sigma(\mathscr{A}), \forall\, n \in \mathbb{N}^+$，所以：

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \sigma(\mathscr{A})$$

于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$。由 $\{A_n\}$ 的任意性，$f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$ 对可列并的运算封闭。

综上，$f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$ 是一个 σ 域。由生成的定义，$\mathscr{A} \subset \sigma(\mathscr{A})$，由定理 3.17(2) 可得 $f^{-1}(\mathscr{A}) \subset f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$，即 $f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$ 是一个包含 $f^{-1}(\mathscr{A})$ 的 σ 域，所以 $\sigma[f^{-1}(\mathscr{A})] \subset f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$。

令：

$$\mathscr{B} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]\}$$

下证 $\mathscr{B}$ 是一个 σ 域。

(1) 因为 $\sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]$ 是一个 σ 域，所以 $X \in \sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]$。由定理 3.17(1) 可得 $f^{-1}(Y) = X \in \sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]$，所以 $Y \in \mathscr{B}$。

(2) 任取 $B \in \mathscr{B}$。由定理 3.17(3) 可得 $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$。因为 $\sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]$ 是一个 σ 域，$f^{-1}(B) \in \sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]$，所以 $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c \in \sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]$，即 $B^c \in \mathscr{B}$。由 B 的任意性，$\mathscr{B}$ 对补的运算封闭。

(3) 任取 $\{B_n\} \subset \mathscr{B}$。由定理 3.17(4) 可得：

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(B_i)$$

因为 $B_n \in \mathscr{B}, \forall\, n \in \mathbb{N}^+$，所以 $f^{-1}(B_n) \in \sigma[f^{-1}(\mathscr{A})], \forall\, n \in \mathbb{N}^+$。因为 $\sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]$ 是一个 σ 域，所以：

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(B_n) \in \sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]$$

于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathscr{B}$。由 $\{B_n\}$ 的任意性，$\mathscr{B}$ 对可列并的运算封闭。

综上，$\mathscr{B}$ 是一个 σ 域。因为 $f^{-1}(\mathscr{A}) \subset \sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]$，所以 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$。由生成的定义，$\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{B}$。任取 $C \in f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})]$，则存在 $A \in \sigma(\mathscr{A})$ 使得 $C = f^{-1}(A)$，因为 $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{B}$，所以 $A \in \mathscr{B}$，于是 $C = f^{-1}(A) \in \sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]$。由 C 的任意性，$f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})] \subset \sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]$。

综上，$f^{-1}[\sigma(\mathscr{A})] = \sigma[f^{-1}(\mathscr{A})]$。 □

Theorem 13.30. 设 $\mathscr{B}$ 是 Y 上的任一集族，$(X,\mathscr{A}), (Y,\sigma(\mathscr{B}))$ 是两个可测空间，则映射 f 为一个 $(X,\mathscr{A})$ 到 $(Y,\sigma(\mathscr{B}))$ 的可测映射的充分必要条件为：

$$f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$$

Proof. 由可测映射的定义：

$$f \text{ 为一个 } (X,\mathscr{A}) \text{ 到 } (Y,\sigma(\mathscr{B})) \text{ 的可测映射} \Leftrightarrow f^{-1}[\sigma(\mathscr{B})] \subset \mathscr{A} \Leftrightarrow \sigma[f^{-1}(\mathscr{B})] \subset \mathscr{A}$$

(1) 必要性： 若 $\sigma[f^{-1}(\mathscr{B})] \subset \mathscr{A}$，则 $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \sigma[f^{-1}(\mathscr{B})] \subset \mathscr{A}$。

(2) 充分性： 若 $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$，因为 $\mathscr{A}$ 是一个 σ 域，由生成的定义可知 $\sigma[f^{-1}(\mathscr{B})] \subset \mathscr{A}$。 □

Theorem 13.31. 设 g 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 到可测空间 $(Y,\mathscr{B})$ 的可测映射，f 是可测空间 $(Y,\mathscr{B})$ 到可测空间 $(Z,\mathscr{C})$ 的可测映射，则 $f \circ g$ 是 $(X,\mathscr{A})$ 到 $(Z,\mathscr{C})$ 的可测映射。

Proof. 因为 g 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 到可测空间 $(Y,\mathscr{B})$ 的可测映射，所以 $g^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$。因为 f 是可测空间 $(Y,\mathscr{B})$ 到可测空间 $(Z,\mathscr{C})$ 的可测映射，所以 $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{B}$。由定理 3.17(2) 可得：

$$(f \circ g)^{-1}(\mathscr{C}) = g^{-1}[f^{-1}(\mathscr{C})] \subset g^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$$ □

13.3.2 可测函数

可测函数的定义

Definition 13.24. 从可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 到可测空间 $(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ 的可测映射称为 $(X,\mathscr{A})$ 上的可测函数 *(measurable function)*。特别的，从可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 到可测空间 $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 的可测映射称为 $(X,\mathscr{A})$ 上的有限值可测函数或随机变量 *(random variable, r.v.)*。

Theorem 13.32. f 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的可测函数的充要条件为：

1. 对任意的 $a \in \mathbb{R}$，$\{f < a\} \in \mathscr{A}$。
2. 对任意的 $a \in \mathbb{R}$，$\{f \leqslant a\} \in \mathscr{A}$。

3. 对任意的 $a \in \mathbb{R}$，$\{f > a\} \in \mathscr{A}$。

4. 对任意的 $a \in \mathbb{R}$，$\{f \geqslant a\} \in \mathscr{A}$。

Proof. (1) 由定理 13.19中 $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ 的等价定义 (1) 以及定理 13.30可得：

$$
\begin{aligned}
f\text{是可测函数} &\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}) \subset \mathscr{A} \\
&\Leftrightarrow \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ f^{-1}\Big([-\infty, \alpha)\Big) \in \mathscr{A} \\
&\Leftrightarrow \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \{f < a\} \in \mathscr{A}
\end{aligned}
$$

(2)(3)(4) 同理，只需在 (1) 的第一行到第二行的过程中使用定理 13.19涉及到的对应的 $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ 的等价定义。 □

Corollary 13.4. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为可测空间 $(X, \mathscr{A})$ 上的可测函数，则 $\{f < g\}, \{f \leqslant g\}, \{f = g\} \in \mathscr{A}$。

Proof. 因为：

$$\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [\{f < r\} \cap \{g > r\}]$$

而：

$$\{f < r\} \cap \{g > r\} = \Big(\{f \geqslant r\} \cup \{g \leqslant r\}\Big)^c$$

由定理 13.32可知右式在 $\mathscr{A}$ 中，于是有：

$$\{f < g\} \in \mathscr{A}$$

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对称性，$\{g < f\} \in \mathscr{A}$，那么就有 $\{f \leqslant g\} = \{g < f\}^c \in \mathscr{A}$。因为：

$$
\begin{aligned}
\{f = g\} &= \{f \leqslant g\} \backslash \{f < g\} \\
&= \{f \leqslant g\} \cap \{f < g\}^c \\
&= \Big(\{f \leqslant g\}^c \cup \{f < g\}\Big)^c
\end{aligned}
$$

所以 $\{f = g\} \in \mathscr{A}$。 □

可测函数的运算

Theorem 13.33. 可测空间 $(X, \mathscr{A})$ 上集合 $A \in \mathscr{A}$ 的指示函数 I_A 是可测函数。

Lemma 13.5. $(X, \mathscr{A})$ 是一个可测空间。对任何 $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ 和任何的 $A, B \in \mathscr{A}$，只要 $a + b$ 有意义，那么 $aI_A + bI_B$ 是可测函数。

Theorem 13.34. 若 f, g 是可测空间 $(X, \mathscr{A})$ 上的可测函数，则：

1. 对任意的 $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$，若对任意的 $x \in X$，$\alpha f + \beta g$ 有意义，则 $\alpha f + \beta g$ 是可测函数；

2. fg 是可测函数；

3. 若对任意的 $x \in X$，有 $g(x) \neq 0$，则 f/g 是可测函数。

Theorem 13.35. $\{f_n(x)\}$ 是可测空间 $(X, \mathscr{A})$ 上的一列可测函数，则：

$$\inf_n f_n(x),\ \sup_n f_n(x),\ \varliminf_{n\to+\infty} f_n(x),\ \varlimsup_{n\to+\infty} f_n(x)$$

也是可测函数。

可测函数与简单函数

Definition 13.25. 对于空间 X，如果存在有限个互不相交的集合 $\{A_i \subset X : i = 1, 2, \ldots, n\}$ 满足：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$$

则称 $\{A_i \subset X : i = 1, 2, \ldots, n\}$ 为 X 的一个**有限分割**。如果 $A_i \in \mathscr{A}$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$，则称 $\{A_i \subset X : i = 1, 2, \ldots, n\}$ 为可测空间 $(X, \mathscr{A})$ 的一个**有限可测分割**。当 $\{A_n \in \mathscr{A}\}$ 是一个互不相交可列集合且满足：

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = X$$

时，称 $\{A_n\}$ 为可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 的一个**可列可测分割**。

Definition 13.26. 对于可测空间 $(X, \mathscr{A})$ 上的函数 $\varphi : X \to \mathbb{R}$，如果存在有限可测分割 $\{A_i \in \mathscr{A} : i = 1, 2, \ldots, n\}$ 和 $\{a_i \in \mathbb{R} : i = 1, 2, \ldots, n\}$ 使得：

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x)$$

其中 $I_{A_i}(x)$ 为表示 x 是否在 A_i 中的指示函数，则称 $\varphi(x)$ 为简单函数 *(simple function)*。

Property 13.3.1. 简单函数具有如下性质：

1. 简单函数是可测函数；

2. 设 $\varphi(x), \psi(x)$ 为简单函数，可分别表示为：

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i I_{E_i}(x), \quad \psi(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j I_{F_j}(x)$$

   则对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)$ 也是简单函数，且可以表示为：

$$\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha c_i + \beta d_j) I_{E_i \cap F_j}(x)$$

3. 如果 f 是可测空间 $(X, \mathscr{A})$ 上的可测函数，则 f 为简单函数的充分必要条件为它的值域是有限个实数组成的集合。

Proof. (1) 由可测函数的定义立即可得。

(2) 因为：

$$\begin{aligned}\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)&=\alpha\sum_{i=1}^{m}c_iI_{E_i}(x)+\beta\sum_{j=1}^{n}d_jI_{F_j}(x)\\&=\alpha\sum_{i=1}^{m}c_i\sum_{j=1}^{n}I_{E_i\cap F_j}(x)+\beta\sum_{j=1}^{n}d_j\sum_{i=1}^{m}I_{E_i\cap F_j}(x)\\&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha c_iI_{E_i\cap F_j}(x)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\beta d_jI_{E_i\cap F_j}(x)\\&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha c_i+\beta d_j)I_{E_i\cap F_j}(x)\end{aligned}$$

并且有 $\{E_i\cap F_j : i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n\}$ 是 X 的有限可测分割，由此可知结论成立。

(3) 必要性由简单函数的定义即可立即得到。设 f 的值域为 $\{a_i : i=1,2,\ldots,n\}$，因为 f 是可测函数，由定理 13.32可得 $\{f=a_i\}\in\mathscr{A}$，于是 f 可表为：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_iI_{\{f=a_i\}}(x),\quad X=\bigcup_{i=1}^{n}\{f=a_i\},\quad \{f=a_i\}\cap\{f=a_j\}=\varnothing,\ \forall\, i\neq j$$

所以 f 为简单函数，充分性得证。 □

Definition 13.27. 设 $f(x)$ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的可测函数，令：

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant 0\\ 0, & f(x)<0\end{cases}$$

$$f^-(x)=-\min\{f(x),0\}=\begin{cases}-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ 0, & f(x)>0\end{cases}$$

分别称 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 为 $f(x)$ 的正部和负部。

Theorem 13.36. 设 $f(x)$ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的可测函数，则 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 也是可测函数。

Proof. 由可测函数的定义，$g(x)=0$ 是一个可测函数。因为 $\max\{f(x),0\}=\sup\{f(x),g(x)\}$，由定理 13.35可知此时 $f^+(x)$ 是可测函数。同理，$f^-(x)$ 也是可测函数。 □

Theorem 13.37. *(1)* 若 $f(x)$ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的非负可测函数，则存在简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}$，使得对任意 $x\in X$，$\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)$, $n\in\mathbb{N}^+$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=f(x)$。

(2) 若 $f(x)$ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的可测函数，则存在可测简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}$，使得对任意 $x\in X$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=f(x)$。若 $f(x)$ 有界，则上述收敛可以是一致收敛。

Proof. (1) 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，将 $[0,n]$ 分为 $n2^n$ 份，令：

$$E_{nj} = \left\{x \in X : \frac{j-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{j}{2^n}\right\}, \quad j = 1,2,\ldots,n2^n$$
$$E_n = \{x : f(x) \geqslant n\}, \quad n = 1,2,\ldots$$

作函数列：

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^n}, & x \in E_{nj} \\ n, & x \in E_n \end{cases} j = 1,2,\ldots,n2^n;\ n = 1,2,\ldots$$

则 $\varphi_n(x)$ 是简单函数，并且有：

$$\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leqslant f(x), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$$

设 $x \in X$，若 $f(x) < +\infty$，则当 $n > f(x)$ 时有：

$$0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) \leqslant 2^{-n}$$

若 $f(x) = +\infty$，则 $\varphi_n(x) = n$，$n = 1,2,\ldots$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x)$。

(2) $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$，若 $f(x)$ 是可测函数，由定理 13.36可知 $f^+(x), f^-(x)$ 也是可测函数。由 (1)，存在可测简单函数列 $\{\varphi_n^+(x)\}$ 和 $\{\varphi_n^-(x)\}$，使得对任意的 $x \in X$，有：

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n^+(x) = f^+(x),\ \lim_{n\to+\infty} \varphi_n^-(x) = f^-(x)$$

令 $\varphi_n(x) = \varphi_n^+(x) - \varphi_n^-(x)$，由定理 13.34可知 $\{\varphi_n(x)\}$ 是可测简单函数列，且对任意的 $x \in X$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x)$。

若 $f(x)$ 有界，设 $\sup\limits_{x\in E}\{|f(x)|\} = M$，则由 (1) 的证明过程，当 $n > M$ 时有：

$$\sup_{x\in X}\{|f^+(x) - \varphi_n^+(x)|\} \leqslant \frac{1}{2^n}$$
$$\sup_{x\in X}\{|f^-(x) - \varphi_n^-(x)|\} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

因此：

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in X}\{|f(x) - \varphi_n(x)|\} &= \sup_{x\in X}\{|f^+(x) - f^-(x) - \varphi_n^+(x) + \varphi_n^-(x)|\} \\
&\leqslant \sup_{x\in X}\{|f^+(x) - \varphi_n^+(x)| + |f^-(x) - \varphi_n^-(x)|\} \\
&\leqslant \sup_{x\in X}\{|f^+(x) - \varphi_n^+(x)|\} + \sup_{x\in X}\{|f^-(x) - \varphi_n^-(x)|\} \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

所以 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)$。 □

13.3.3 可测函数的收敛性

Lemma 13.6. 若 f, g 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，$\{|f-g| \geqslant \varepsilon\} \in \mathscr{F}$。

Proof. 因为：

$$\{|f-g| \geqslant \varepsilon\} = \{f-g \geqslant \varepsilon\} \cup \{f-g \leqslant -\varepsilon\} = \{f \geqslant g+\varepsilon\} \cup \{f \leqslant g-\varepsilon\}$$

因为 g 是可测函数，由定理 13.32可得 $g+\varepsilon$ 和 $g-\varepsilon$ 也是可测函数。由推论 13.4可知 $\{f \geqslant g+\varepsilon\}, \{f \leqslant g-\varepsilon\} \in \mathscr{F}$。因为 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域，所以：

$$\{|f-g| \geqslant \varepsilon\} = \{f \geqslant g+\varepsilon\} \cup \{f \leqslant g-\varepsilon\} \in \mathscr{F}$$ □

几乎处处收敛

Definition 13.28. 设 $\{f_n\}$ 和 f 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数，如果：

$$\mu\left(\left\{\lim_{n\to+\infty} f_n \neq f\right\}\right) = 0$$

则称可测函数列 $\{f_n\}$ *a.e.* 以 f 为极限，记为 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$。若此时还有 f 有限 *a.e.* 于 X，则称 $\{f_n\}$ *a.e.* 收敛到 f。若 $(X, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间，称 $\{f_n\}$ *a.e.* 收敛到 f 为 $\{f_n\}$ 几乎必然收敛到 f，记作 $f_n \xrightarrow{a.s.} f$

Theorem 13.38. 设 $\{f_n\}$ 和 f 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数，$\{f_n\}$ *a.e.* 收敛于 f 的充分必要条件为对任意的 $\varepsilon > 0$，有[1]：

$$\mu\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$

Proof. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \neq f(x)$，则有：

$$\exists\, k \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, N \in \mathbb{N}^+,\ \exists\, n \geqslant N,\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}$$

于是：

$$\left\{\lim_{n\to+\infty} f_n \neq f\right\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{n=m}^{+\infty}\left\{|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right\}$$

(1) 充分性：此时由半环上测度的次可列可加性（定理 13.23）可得：

$$\begin{aligned}\mu\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{n=m}^{+\infty}\left\{|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right\}\right) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\mu\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{n=m}^{+\infty}\left\{|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right\}\right) = 0\end{aligned}$$

[1] 从今往后，对任何的 $\varepsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}^+$，$f_n(x) - f(x)$ 没有定义的 $x \in X$ 也计入集合 $\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}$

(2) 必要性：对任意取定的 $\varepsilon > 0$，若：

$$x \in \overline{\lim_{n\to+\infty}}\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}$$

则：

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^+,\ \exists\, n \geqslant m,\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$$

即：

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq f(x)$$

于是对这个 ε，有：

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{\lim_{n\to+\infty} f_n \neq f\right\}$$

因为 f_n, f 都是可测函数，由引理 13.6可知 $\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\} \in \mathscr{F}$。因为 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域，对可列并封闭，所以：

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\} = \bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{n=m}^{+\infty}\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\} \in \mathscr{F}$$

由测度的单调性可得：

$$\mu\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$

□

几乎一致收敛

Definition 13.29. 设 $\{f_n\}$ 和 f 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数。如果对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $A \in \mathscr{F}$ 使得 $\mu(A) < \varepsilon$ 且：

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\notin A}|f_n(x) - f(x)| = 0$$

则称 $\{f_n\}$ 几乎一致收敛到 f，记为 $f_n \xrightarrow{a.u.} f$。

Theorem 13.39. 设 $\{f_n\}$ 和 f 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数，$f_n \xrightarrow{a.u.} f$ 的充分必要条件为对任意的 ε 有：

$$\lim_{m\to+\infty}\mu\left(\bigcup_{n=m}^{+\infty}\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$

Proof. **(1) 必要性**：因为 $\{f_n\} \xrightarrow{\text{a.u.}} f$，所以：

$$\forall\, \delta > 0,\ \exists\, A \in \mathscr{F},\ \mu(A) < \delta,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, m \in \mathbb{N}^+,\ \forall\, n > m,\ \sup_{x\notin A}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

即：

$$\forall\, \delta > 0,\ \exists\, A \in \mathscr{F},\ \mu(A) < \delta,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, m \in \mathbb{N}^+,\ A^c \subset \bigcap_{n=m}^{+\infty}\{|f_n - f| < \varepsilon\}$$

于是：

$$\forall\, \delta > 0,\ \exists\, A \in \mathscr{F},\ \mu(A) < \delta\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, m \in \mathbb{N}^+,\ \bigcup_{n=m}^{+\infty}\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\} \subset A$$

因为 f_n 和 f 都是可测函数，由引理 13.6可知 $\{|f_n-f|\geqslant\varepsilon\}\in\mathscr{F}$。因为 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域，对可列并封闭，所以：

$$\bigcup_{n=m}^{+\infty}\{|f_n-f|\geqslant\varepsilon\}\in\mathscr{F}$$

由测度的单调性可得：

$$\mu\left(\bigcup_{n=m}^{+\infty}\{|f_n-f|\geqslant\varepsilon\}\right)<\mu(A)<\delta$$

所以：

$$\forall\,\delta>0,\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,m\in\mathbb{N}^+,\ \mu\left(\bigcup_{n=m}^{+\infty}\{|f_n-f|\geqslant\varepsilon\}\right)<\delta$$

即对任意的 $\varepsilon>0$，有（上式前面的两个任意用集合语言来描述就是两个交运算，这是可以交换顺序的，所以有了如下结论）：

$$\lim_{m\to+\infty}\mu\left(\bigcup_{n=m}^{+\infty}\{|f_n-f|\geqslant\varepsilon\}\right)=0$$

(2) 充分性：对任意的 $\delta>0$，由所给条件，对 $k\in\mathbb{N}^+$ 有：

$$\lim_{m\to+\infty}\mu\left(\bigcup_{n=m}^{+\infty}\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right\}\right)=0$$

于是存在 $\{m_k\}$ 使得：

$$\mu\left(\bigcup_{n=m_k}^{+\infty}\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right\}\right)<\frac{\delta}{2^k}$$

取：

$$A=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{n=m_k}^{+\infty}\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right\}$$

由引理 13.6可得 $A\in\mathscr{F}$，于是根据半环上测度的次可列可加性（定理 13.23）可得：

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{n=m_k}^{+\infty}\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right\}\right)\\&\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\mu\left(\bigcup_{n=m_k}^{+\infty}\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right\}\right)<\delta\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}A^c&=\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{n=m_k}^{+\infty}\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right\}\right)^c=\bigcap_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=m_k}^{+\infty}\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right\}\right)^c\\&=\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{n=m_k}^{+\infty}\left\{|f_n-f|<\frac{1}{k}\right\}\end{aligned}$$

所以若 $x\notin A$，则对任意的 $k\in\mathbb{N}^+$，当 $n\geqslant m_k$ 时就有：

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}$$

由上确界的不等式性，此时即：

$$\forall\,k\in\mathbb{N}^+,\ \exists\,m_k\in\mathbb{N}^+,\ \forall\,n\geqslant m_k,\ \sup_{x\notin A}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{k}$$

也即：

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\notin A}|f_n(x)-f(x)|=0$$

所以 $f_n\xrightarrow{\text{a.u.}}f$。 □

依测度收敛

Definition 13.30. 设 $\{f_n\}$ 和 f 时测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数。如果对任意的 $\varepsilon > 0$ 都有：

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}) = 0$$

则称可测函数列 $\{f_n\}$依测度收敛 *(convergent in measure)*到 f，记为 $f_n \xrightarrow{\mu} f$。若 $(X, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间，称 $f_n \xrightarrow{P} f$ 为 $\{f_n\}$依概率收敛 *(convergent in probability)*到 f。

依分布收敛

Theorem 13.40. 设 $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$，$F$ 为 $\mathbb{R}$ 上非降右连续实值函数。对任意的 $a, b \in \mathbb{R}$，令：

$$\mu\Big((a, b]\Big) = \begin{cases} F(b) - F(a), & a < b \\ 0, & a \geqslant b \end{cases}$$

则 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度。

Definition 13.31. 称 $\mathbb{R}$ 上非降右连续实值函数 F 为。若 F 还满足：

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

则称 F 为分布函数 *(distribution function, d.f.)*。

Theorem 13.41. 设 f 是概率空间 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量，对任意的 $x \in \mathbb{R}$，令：

$$F(x) = P(f \leqslant x)$$

则 F 是一个分布函数。

Proof. (1) 由条件可得：

$$F(x) = P(f \leqslant x) = P(\{f \leqslant x\})$$

是一个非降的实值函数。

(2) 注意到：

$$\{f \leqslant x\} = \lim_{n \to +\infty} \left\{f \leqslant x + \frac{1}{n}\right\}$$

考虑集族：

$$\left\{X_n = \left\{f \leqslant x + \frac{1}{n}\right\}\right\}$$

则 $\{X_n\}$ 是一个单调不增的集族，有：

$$\lim_{n \to +\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left\{f \leqslant x + \frac{1}{n}\right\}$$

由半环上测度的上连续性（定理 13.23）可得：

$$
\begin{aligned}
F(x) &= P(\{f \leqslant x\}) = P\left(\lim_{n\to+\infty}\left\{f \leqslant x + \frac{1}{n}\right\}\right) = P\left(\lim_{n\to+\infty} X_n\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} P(X_n) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\left\{f \leqslant x + \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{h\to+0} F(x+h)
\end{aligned}
$$

所以 $F(x)$ 是右连续的。

(3) 注意到 f 是一个实值函数，由半环上测度的上连续性与下连续性（定理 13.23）可得：

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} F(x) &= \lim_{x\to-\infty} P(f \leqslant x) = P(f \leqslant -\infty) = P(\varnothing) = 0 \\
\lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty} P(f \leqslant x) = P(f \leqslant +\infty) = P(X) = 1
\end{aligned}
$$

□

Definition 13.32. 设 f 是概率空间 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量，F 是一个分布函数。若对任意的 $x \in \mathbb{R}$，都有：

$$F(x) = P(f \leqslant x)$$

则称 *r.v.* f 的分布函数是 F，也说成 f 服从 F，记为 $f \sim F$。若 f 是从概率空间 $(X, \mathscr{F}, P)$ 到可测空间 $(Y, \mathscr{A})$ 的可测映射，称：

$$P(f^{-1}A),\ \forall\, A \in \mathscr{A}$$

为 f 的概率分布 *(probability distribution)*。

Definition 13.33. 设 $\{f_n \sim F_n\}$ 是概率空间 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量序列，F 是一个分布函数。若对于 F 的每一个连续点 x 都有：

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称 $\{f_n\}$ 依分布收敛 *(convergent in distribution)*，记为 $f_n \xrightarrow{d} F$。若此时概率空间 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量 $f \sim F$，则称随机变量序列 $\{f_n\}$ 依分布收敛到 f，记为 $f_n \xrightarrow{d} f$。

收敛性之间的关系

Theorem 13.42. 设 $\{f_n\}$ 和 f 为测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数，则：

1. $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ 可推出 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 和 $f_n \xrightarrow{\mu} f$；
2. 若 $\mu(X) < +\infty$，则 $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ 等价于 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$；
3. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 当且仅当对 $\{f_n\}$ 的任一子列，存在该子列的子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得 $f_{n_k} \xrightarrow{a.u.} f$；
4. $f_n \xrightarrow{P} f$ 可推出 $f_n \xrightarrow{d} f$。

Proof. (1) 对任意的 $n \in \mathbb{N}^{+}$ 和任意的 $\varepsilon > 0$，由推论 13.4可得 $\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}$ 是可测集，因为 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域，对可列并、可列交封闭，所以：

$$\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\} \in \mathscr{F},\ \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\} \in \mathscr{F}$$

因为：

$$\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\} \subset \bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}$$
$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\} \subset \bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}$$

由测度的单调性可得：

$$\mu(\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mu\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}\right)$$
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}\right)$$

因为 $f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$，由极限的不等式性和测度的非负性可得：

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mu(\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$
$$0 \leqslant \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$

所以：

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}) = 0,\ \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$

即 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $f_n \xrightarrow{a.e.} f$。

(2) 设 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$，令：

$$\left\{X_n = \bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}\right\}$$

显然 $\{X_n\}$ 是一个单调不增序列，其极限为：

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}$$

由半环上测度的上连续性可得（定理 13.23）：

$$\mu\left(\lim_{n\to+\infty} X_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(X_n)$$

于是：

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}\right)$$

所以：

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$

即 $f_n \xrightarrow{a.u.} f$，再结合 (1) 即可得出结论。

(3)

(4) 记 F 为 f 的分布函数，F_n 为 f_n 的分布函数。因为 $f_n \xrightarrow{P} f$，所以对任意的 $\varepsilon > 0$，有：

$$\lim_{n\to+\infty} P(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = 0$$

对任意的 $x \in X$、任意的 $\varepsilon > 0$ 和任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，有：

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= P(f_n \leqslant x) \\
&\leqslant P(f_n \leqslant x, |f_n - f| < \varepsilon) + P(f_n \leqslant x, |f_n - f| \geqslant \varepsilon) \\
&\leqslant P(f \leqslant x + \varepsilon) + P(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)
\end{aligned}$$

第二行到第三行第一式的变化是因为：

$$|f_n - f| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f_n - f < \varepsilon \to f < f_n + \varepsilon$$

而 $f_n \leqslant x$，于是变为 $f \leqslant x + \varepsilon$。该条件比原条件宽松，所以是小于等于号。由极限的不等式性可得：

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) \leqslant P(f \leqslant x + \varepsilon) + \lim_{n\to+\infty} P(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = P(f \leqslant x + \varepsilon)$$

由 ε 的任意性可得：

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) \leqslant F(x)$$

对任意的 $x \in X$、任意的 $\varepsilon > 0$ 和任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，又有：

$$\begin{aligned}
P(f \leqslant x - \varepsilon) &\leqslant P(f \leqslant x - \varepsilon, |f_n - f| < \varepsilon) + P(f \leqslant x - \varepsilon, |f_n - f| \geqslant \varepsilon) \\
&\leqslant P(f_n \leqslant x) + P(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)
\end{aligned}$$

由极限的不等式性可得：

$$P(f \leqslant x - \varepsilon) \leqslant \lim_{n\to+\infty} P(f_n \leqslant x) + \lim_{n\to+\infty} P(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} F_n(x)$$

于是：

$$P(f \leqslant x - 0) \leqslant \lim_{n\to+\infty} F_n(x)$$

若 $F(x)$ 在 x 处连续，就有：

$$P(f \leqslant x - 0) = F(x - 0) = F(x)$$

所以：

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x) \tag{13.4}$$

即 $f_n \xrightarrow{d} f$。 □

13.4 积分论

13.4.1 非负简单函数的积分

Definition 13.34. 设 $\varphi(x)$ 为测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的一个非负简单函数，即 X 可表示为有限个互不相交的集合 $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathscr{F}$ 的并，且在 $E_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ 上 $\varphi(x) = c_i \geqslant 0$，即：

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i I_{E_i}(x)$$

其中 $I_{E_i}(x)$ 为表示 x 是否在 E_i 中的示性函数。对于任意的 $A \in \mathscr{F}$，将 $\varphi(x)$ 在 A 上的积分定义为：

$$\int_A \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A \cap E_i)$$

Property 13.4.1. 设 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 为测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的非负简单函数，可分别表示为：

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i I_{E_i}(x), \quad \psi(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j I_{F_j}(x)$$

则：

1. $\varphi(x)$ 的所有表达式在任意的 $A \in \mathscr{F}$ 上的积分值相同；

2. 对于任意的 $A \in \mathscr{F}$，有：
$$\int_A \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu \geqslant 0$$

3. 若 $A \in \mathscr{F}$ 且 $\mu(A) = 0$，则有：
$$\int_A \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu = 0$$

4. 设 $A, B \in \mathscr{F}$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则：
$$\int_{A \cup B} \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu = \int_A \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu + \int_B \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu$$

5. 对任意的 $A \in \mathscr{F}$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 且 $\alpha, \beta \geqslant 0$：
$$\int_A [\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)] \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_A \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu + \beta \int_A \psi(x) \, \mathrm{d}\mu$$

6. 取 $A \in \mathscr{F}$，若对任意的 $x \in A$ 有 $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$，则有：
$$\int_A \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_A \psi(x) \, \mathrm{d}\mu$$

7. 设 $\{A_n\} \subset \mathscr{F}$，$A_n \uparrow E \in \mathscr{F}$，则：
$$\lim_{n \to +\infty} \left[\int_{A_n} \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu \right] = \int_E \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu$$

8. 取 $A \in \mathscr{F}$，若非负简单函数列 $\varphi_n(x) \uparrow$ 且对任意的 $x \in A$ 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x) \geqslant \psi(x)$，则有：

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\int_A \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right] \geqslant \int_A \psi(x)\,\mathrm{d}\mu$$

Proof. (1) 由性质 13.3.1(3)，将 $\varphi(x)$ 表示为：

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k I_{\{f=a_k\}}(x)$$

其中 $\{a_k : k = 1, 2, \ldots, p\}$ 为 $\varphi(x)$ 的值域，所以 $p \leqslant m$。对任意的 i 和 k，显然有：

$$E_i \subset \{f = a_k\} \quad \text{或} \quad E_i \cap \{f = a_k\} = \varnothing$$

当 $E_i \subset \{f = a_k\}$ 时有 $c_i = a_k$。由测度的有限可加性可得：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} c_i\mu(A\cap E_i) &= \sum_{i=1}^{m} c_i\mu[(A\cap E_i)\cap X] = \sum_{i=1}^{m} c_i\mu\left[(A\cap E_i)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i\mu\left[\bigcup_{k=1}^{p}(A\cap E_i\cap A_k)\right] = \sum_{i=1}^{m} c_i\sum_{k=1}^{p}\mu(A\cap E_i\cap A_k) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{E_i\subset\{f=a_k\}} c_i\mu(A\cap E_i\cap A_k) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{E_i\subset\{f=a_k\}} a_k\mu(A\cap E_i\cap A_k) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} a_k\mu(A\cap E_i\cap A_k) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m} a_k\mu(A\cap A_k\cap E_i) \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_k\sum_{i=1}^{m}\mu(A\cap A_k\cap E_i) = \sum_{k=1}^{p} a_k\mu\left[\bigcup_{i=1}^{m}(A\cap A_k\cap E_i)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_k\mu\left[(A\cap A_k)\cap\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right)\right] = \sum_{k=1}^{p} a_k\mu[(A\cap A_k)\cap X] \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_k\mu(A\cap A_k)
\end{aligned}$$

(2) 由非负简单函数积分的定义和测度的非负性直接可得。

(3) 由非负简单函数积分的定义和测度的非负性以及半环上测度的单调性（定理 13.23）直接可得。

(4) 由非负简单函数积分的定义、测度的有限可加性可得：

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B}\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{n} c_i\mu[(A\cup B)\cap E_i] = \sum_{i=1}^{n} c_i\mu[(A\cap E_i)\cup(B\cap E_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i[\mu(A\cap E_i)+\mu(B\cap E_i)] = \sum_{i=1}^{n} c_i\mu(A\cap E_i) + \sum_{i=1}^{n}\mu(B\cap E_i) \\
&= \int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_B \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

(5) 由性质 13.3.1(2) 可得 $\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)$ 也是非负简单函数。由非负简单函数积分的定义和测度的有限可加性可得：

$$\begin{aligned}
\int_A[\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)]\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha c_i+\beta d_j)\mu[A\cap(E_i\cap F_j)] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\alpha c_i\left[\sum_{j=1}^{n}\mu(A\cap E_i\cap F_j)\right]+\sum_{j=1}^{n}\beta d_j\left[\sum_{i=1}^{m}\mu(A\cap E_i\cap F_j)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\alpha c_i\mu(A\cap E_i)+\sum_{j=1}^{n}\beta d_j\mu(A\cap F_j) \\
&= \alpha\sum_{i=1}^{m}c_i\mu(A\cap E_i)+\beta\sum_{j=1}^{n}d_j\mu(A\cap F_j) \\
&= \alpha\int_A\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu+\beta\int_A\psi(x)\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

(6) 因为 $\varphi(x),\psi(x)$ 是非负简单函数，由性质 13.3.1(2) 可知 $\varphi(x)-\psi(x)$ 也是非负简单函数。根据 (5)(2) 可得：

$$\begin{aligned}
\int_A\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_A[\psi(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,\mathrm{d}\mu=\int_A\psi(x)\,\mathrm{d}\mu+\int_A[\varphi(x)-\psi(x)]\,\mathrm{d}\mu \\
&\geqslant \int_A\psi(x)\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

(7) 由非负简单函数积分的定义、极限的线性性和半环上测度的下连续性（定理 13.23）可得：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_{A_n}\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{m}c_i\mu(A_n\cap E_i)\right]=\sum_{i=1}^{m}c_i\mu(E\cap E_i)=\int_E\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu$$

(8) 对任意的 $\alpha\in(0,1)$，记 $A_n(\alpha)=\{\varphi_n\geqslant\alpha\psi\}\cap A$。由性质 13.3.1(1) 可知 $\{\varphi_n\},\psi(x)$ 是可测函数，根据定理 13.34(1) 可得 $\alpha\psi(x)$ 也是可测函数。由推论 13.4可知 $A_n(\alpha)\in\mathscr{F}$。设 $\varphi_n(x)$ 可表示为：

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{p_n}a_{nk}I_{E_{nk}}$$

其中 $\{E_{nk}\}$ 是 X 的有限可测分割。因为：

$$\varphi_nI_{A_n(\alpha)}=\sum_{k=1}^{p_n}a_{nk}I_{E_{nk}\cap A_n(\alpha)},\ E_{nk}\cap A_n(\alpha)\in\mathscr{F}$$

所以 $\varphi_nI_{A_n(\alpha)}$ 也是一个非负简单函数。同理，$\psi I_{A_n(\alpha)}$ 也是一个非负简单函数。因为 $\varphi\geqslant\varphi_nI_{A_n(\alpha)}\geqslant\alpha\psi I_{A_n(\alpha)}$，由 (6) 和 (5) 可得：

$$\begin{aligned}
\int_A\varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu &\geqslant \int_A\varphi_n(x)I_{A_n(\alpha)}\,\mathrm{d}\mu\geqslant\int_A\alpha\psi(x)I_{A_n(\alpha)}\,\mathrm{d}\mu \\
&= \alpha\int_A\psi(x)I_{A_n(\alpha)}\,\mathrm{d}\mu=\alpha\sum_{j=1}^{n}d_j\mu[A\cap F_j\cap A_n(\alpha)]
\end{aligned}$$

因为 $\varphi_n \uparrow$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x) \geqslant \psi(x)$ 对任意 $x \in A$ 成立，所以 $A_n(\alpha) \uparrow A$，即 $A \cap F_j \cap A_n(\alpha) \uparrow A \cap F_j$。由极限的不等式性、线性性和半环上测度的下连续性（定理 13.23）可得：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left[\int_A \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right] &\geqslant \alpha\sum_{j=1}^{n} d_j \lim_{n\to+\infty}\mu[A\cap F_j\cap A_n(\alpha)]\\ &= \alpha\sum_{j=1}^{n} d_j\mu(A\cap F_j) = \alpha\int_A \psi(x)\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

再取 $\alpha \to 1$ 即可得到结论。注意上式两个 n 的区别，不想再去写另外的字母了，懒。同时需要注意这里必须要引入 α，否则等于的情况就可能不成立。 □

13.4.2 非负可测函数的积分

Definition 13.35. 设 $f(x)$ 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的一个非负可测函数，对于任意的 $A \in \mathscr{F}$，将 $f(x)$ 在 A 上的积分定义为：

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{\varphi(x)}\left\{\int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi(x)\text{是非负简单函数，且}\ \forall\, x\in A,\ \varphi(x)\leqslant f(x)\right\}$$

若 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$，则称 $f(x)$ 在 A 上可积。

Property 13.4.2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的非负可测函数，则：

1. 若 $f(x)$ 是非负简单函数，则其在非负简单函数下定义的积分值与在非负可测函数下定义的积分值相同；
2. 对于任意的 $A \in \mathscr{F}$，$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0$；
3. 若 $\mu(A) = 0$ 且 $A \in \mathscr{F}$，则 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0$；
4. 对于任意的 $A \in \mathscr{F}$，若 $\{f_n\}$ 是非负简单函数列且 $f_n \uparrow f$，则：
$$\begin{aligned}\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{j=0}^{n2^n-1}\frac{j}{2^n}\mu\left[\left\{\frac{j}{2^n}\leqslant f<\frac{j+1}{2^n}\right\}\cap A\right]+n\mu[\{f\geqslant n\}\cap A]\right\}\end{aligned}$$
5. 设 $A, B \in \mathscr{F}$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则：
$$\int_{A\cup B} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_B f(x)\,\mathrm{d}\mu$$
6. 对任意的 $A \in \mathscr{F}$，任取 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，有：

条件还需要再考虑
$$\int_A [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}\mu = \alpha\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu + \beta\int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu$$
7. 若 $f(x) \leqslant g(x)$ *a.e.* 于 $A \in \mathscr{F}$，则 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu$；

8. 若 $f(x)=g(x)$ *a.e.* 于 $A\in\mathscr{F}$，则 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu=\int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu$；

9. 取 $A\in\mathscr{F}$，若 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$，则 $f(x)$ 有限 *a.e.* 于 A；

10. 取 $A\in\mathscr{F}$，$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu=0$ 的充分必要条件为 $f(x)=0$ *a.e.* 于 A。

Proof. (1) 由非负可测函数积分的定义和性质 13.4.1(6) 直接可得。

(2) 由非负可测函数积分的定义和性质 13.4.1(2) 直接可得。

(3) 由非负可测函数积分的定义和性质 13.4.1(3) 直接可得。

(4) 由非负可测函数积分的定义和所给条件可知对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$ 有：

$$\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\leqslant\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

由极限的不等式性可得：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]\leqslant\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

对任意满足 $\varphi\leqslant f$ 的非负简单函数 $\varphi(x)$，有：

$$\lim_{n\to+\infty}f_n=f\geqslant\varphi$$

于是由性质 13.4.1(8) 可得：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]\geqslant\int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu$$

由上确界的不等式性可得：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]\geqslant\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

于是就有：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]=\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

由定理 13.37(1) 可得到积分值的具体表示。

(5) 设 $\varphi(x)$ 是 $A\cup B$ 上任一满足 $\varphi\leqslant f$ 的非负简单函数，于是由性质 13.4.1(4) 可得：

$$\int_{A\cup B}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_A\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_B\varphi(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_A f(x)\,\mathrm{d}x+\int_B f(x)\,\mathrm{d}x$$

由上确界的不等式性可得：

$$\int_{A\cup B}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_A f(x)\,\mathrm{d}x+\int_B f(x)\,\mathrm{d}x$$

另一方面：

$$\int_{A\cup B}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{A\cup B}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_A\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_B\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

由上确界的不等式性又可得：

$$\int_{A\cup B}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_A f(x)\,\mathrm{d}x+\int_B f(x)\,\mathrm{d}x$$

所以：

$$\int_{A\cup B} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x + \int_B f(x)\,\mathrm{d}x$$

(6) 取非负简单函数列 $\{f_n\},\{g_n\}$ 满足 $f_n \uparrow f, g_n \uparrow g$，由极限的线性性质可得：

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha \lim_{n\to+\infty} f_n + \beta \lim_{n\to+\infty} g_n = \alpha f + \beta g$$

于是 $\alpha f_n + \beta g_n \uparrow \alpha f + \beta g$。由 (2)、极限的线性性质和性质 13.4.1(5) 可得：

$$\begin{aligned}
\int_A [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to+\infty}\left\{\int_A [\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)]\,\mathrm{d}\mu\right\} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[\alpha \int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_A g_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right] \\
&= \alpha \lim_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right] + \beta \lim_{n\to+\infty}\left[\int_A g_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right] \\
&= \alpha \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

(7) 令 $A_1 = \{f \leqslant g\}$，$A_2 = \{f > g\}$，因为 f, g 都是非负简单函数，由性质 13.3.1(1) 可知 f, g 都可测，所以根据推论 13.4可得 $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$，同时有：

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing,\ A_1 \cup A_2 = A,\ \mu(A_2) = 0$$

由 (4)(3) 可得：

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_{A_1\cup A_2} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{A_1} f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{A_2} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{A_1} f(x)\,\mathrm{d}\mu \\
\int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_{A_1\cup A_2} g(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{A_1} g(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{A_2} g(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{A_1} g(x)\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

对于满足 $\varphi \leqslant f$ 的非负简单函数 $\varphi(x)$，必然也有 $\varphi \leqslant g$，于是由非负可测函数积分的定义可得：

$$\int_{A_1} f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{A_1} g(x)\,\mathrm{d}\mu$$

也即：

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu$$

(8) 由 (7) 立即可得。

(9) 令 $A_\infty = \{f = +\infty\}$。对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，令：

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n, & x \in A_\infty \\ 0, & x \in A\backslash A_\infty \end{cases}$$

因为 f 是可测函数，由定理 13.32可得 $A_\infty \in \mathscr{F}$，因此 $\varphi_n(x)$ 是非负简单函数。由非负可测函数积分的定义可得：

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_A \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu = n\mu(A_\infty) \geqslant 0$$

所以：

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+,\ 0 \leqslant \mu(A_\infty) \leqslant \frac{1}{n}\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

因为 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu < +\infty$，所以 $\mu(A_\infty) = 0$，即 $f(x)$ 有限 a.e. 于 A。

(10) 必要性：对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，令：

$$A_n = \left\{ f \geqslant \frac{1}{n} \right\}, \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in A_n \\ 0, & x \in A \backslash A_n \end{cases}$$

因为 f 是可测函数，所以 $A_n \in \mathscr{F}$，因此 $\varphi_n(x)$ 是非负简单函数。于是：

$$0 = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_A \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\mu(A_n) \geqslant 0$$

所以对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $\mu(A_n) = 0$。因为：

$$\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

由半环上测度的次可列可加性（定理 13.23）以及测度的非负性可得 $\mu(f > 0) = 0$，即 $f(x) = 0$ a.e. 于 A。

充分性：函数 $g(x) = 0,\ \forall\, x \in A$ 的积分为 0，由 (7) 立即可证得充分性。 □

13.4.3 一般可测函数的积分

Definition 13.36. 设 $f(x)$ 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数，$A \in \mathscr{F}$。若 $\int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu$ 和 $\int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\mu$ 中至少一个有限，则称 $f(x)$ 在 A 上**积分存在**，将 $f(x)$ 在 A 上的积分定义为：

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\mu$$

若 $\int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu$ 和 $\int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\mu$ 都有限，则称 $f(x)$ 在 A 上**可积**。

Property 13.4.3. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数，则：

1. 若 $A \in \mathscr{F}$，$\mu(A) = 0$，则 A 上的任何实值函数 $f(x)$ 都在 A 上可积，并且有 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0$；
2. 若 f 在 $A \in \mathscr{F}$ 上积分存在，则 $|\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu| \leqslant \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu$；
3. 若 f 在 $A \in \mathscr{F}$ 上积分存在（可积），则 f 在 A 的满足 $B \in \mathscr{F}$ 的子集 B 上也积分存在（可积）；
4. f 在 $A \in \mathscr{F}$ 上可积的充分必要条件为 $|f|$ 可积；
5. 若 f 在 $A \in \mathscr{F}$ 上可积，则 $|f| < +\infty$ *a.e.* 于 A；
6. 若 f, g 在 $A \in \mathscr{F}$ 上积分存在，对 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\int_A \alpha f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_A \beta g(x)\,\mathrm{d}\mu$ 有意义，则 $\alpha f + \beta g$ 有定义 *a.e.* 于 A，其积分存在且：

$$\int_A [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu$$

7. 若 f, g 在 $A \in \mathscr{F}$ 上积分存在且 $f \leqslant g$ *a.e.* 于 A，则：

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu$$

8. 若 f, g 在 $A \in \mathscr{F}$ 上积分存在且 $f = g$ *a.e.* 于 A，则：

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu$$

9. 若 $f = 0$ *a.e.* 于 $A \in \mathscr{F}$，则 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0$；若 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0$ 且 $f \geqslant 0$ *a.e.* 于 A，则 $f = 0$ *a.e.* 于 A；

10. f, g 都是 X 上的可积函数且对任意的 $A \in \mathscr{F}$ 有 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu$,则 $f \leqslant g$ *a.e.* 于 X；

11. f, g 都是 X 上的可积函数且对任意的 $A \in \mathscr{F}$ 有 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu$,则 $f = g$ *a.e.* 于 X；

Proof. (1) 任选 A 上的一个实值函数 $f(x)$。因为 A 是一个非空零测集，由性质 13.4.2(3) 可知：

$$\int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\mu = 0$$

于是：

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\mu = 0$$

(2) 由性质 13.4.2(6)(2)、绝对值的三角不等式可得：

$$\begin{aligned}
\left|\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu\right| &= \left|\int_A [f^+(x) - f^-(x)]\,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\mu\right| \\
&\leqslant \int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_A [f^+(x) + f^-(x)]\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

(3) 任取 $B \subset A$ 且 $B \in \mathscr{F}$。因为 $f(x)$ 在 A 上积分存在,所以 $\int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu$ 和 $\int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\mu$ 至少有一个有限。设 $\int_A f^+(x)\,\mathrm{d}x$ 有限，另一种情况可对称讨论。由性质 13.4.2(5)(2) 可得：

$$+\infty > \int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_B f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_{A\setminus B} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_B f^+(x)\,\mathrm{d}\mu$$

故 $f(x)$ 在 B 上积分存在。由 B 的任意性，命题成立。

(4) 由性质 13.4.2(6) 可得：

$$\begin{aligned}
f\text{可积} &\Leftrightarrow \int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu, \int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \int_A [f^+(x) + f^-(x)]\,\mathrm{d}\mu = \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(5) 因为 f 是一个可测函数，由定理 13.36可知 f^+, f^- 也是可测函数。由定理 13.32可得 $\{f^+ = +\infty\}, \{f^- = +\infty\} \in \mathscr{F}$。因为 f 可积，所以：

$$\int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu, \int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\mu < +\infty$$

由性质 13.4.2(9) 可得 $\mu[\{f^+ = +\infty\} \cap A] = \mu[\{f^- = +\infty\} \cap A] = 0$，于是由测度的有限可加性可得：

$$\begin{aligned}\mu(\{|f| = +\infty\} \cap A) &= \mu\Big\{[\{f^- = +\infty\} \cap A] \cup [\{f^+ = +\infty\} \cap A]\Big\} \\ &= \mu[\{f^- = +\infty\} \cap A] + \mu[\{f^+ = +\infty\} \cap A] = 0\end{aligned}$$

即 $|f| < +\infty$ a.e. 于 A。

(6)

(7) 因为 $f \leqslant g$ a.e. 于 A，所以 $f^+ \leqslant g^+$ a.e. 于 A，$f^- \geqslant g^-$ a.e. 于 A。由性质 13.4.2(7) 可得：

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A g^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_A g^-(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu$$

(8) 由 (7) 立即可得。

(9) 第一个结论由性质 13.4.2(10) 显然成立，下证第二个结论。若此时不满足 $f = 0$ a.e. 于 A，则 $\mu(\{f > 0\} \cap A) > 0$，于是：

$$\mu\left[\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left\{f > \frac{1}{n}\right\}\right) \cap A\right] > 0$$

考虑集合序列：

$$A_n = \left(\bigcup_{i=1}^{n}\left\{f > \frac{1}{i}\right\}\right) \cap A = \left\{f > \frac{1}{n}\right\} \cap A, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$$

显然 $\{A_n\}$ 是一个单调递增序列，且由 σ 域的定义以及定理 13.32可得 $A_n \in \mathscr{F}$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立。于是：

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left\{f > \frac{1}{n}\right\}\right) \cap A \in \mathscr{F}$$

由半环上测度的下连续性（定理 13.23）可得：

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) > 0$$

由极限的性质可知存在 $N \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\mu(A_N) > 0$，即 $\mu\left(\{f > \frac{1}{N}\} \cap A\right) > 0$。依次根据 (8) 和性质 13.4.2(6)、非负简单函数积分的定义、性质 13.4.2(7)、非负简单函数积分的定义可得：

$$\begin{aligned}\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_A f(x) I_{\{f \geqslant 0\}}\,\mathrm{d}\mu = \int_A f(x)(I_{\{f>0\}} + I_{\{f=0\}})\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_A f(x) I_{\{f>0\}}\,\mathrm{d}\mu + \int_A f(x) I_{\{f=0\}}\,\mathrm{d}\mu = \int_A f(x) I_{\{f>0\}}\,\mathrm{d}\mu \\ &\geqslant \int_A f(x) I_{A_N}\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_A \frac{1}{N} I_{A_N}\,\mathrm{d}\mu = \frac{\mu(A_N)}{N} > 0\end{aligned}$$

矛盾。

(10) 取 $\{f>g\}$，因为 f,g 都是可测函数，由推论 13.4可知 $\{f>g\}\in\mathscr{F}$。根据 (3) 可知：

$$\int_{\{f>g\}} f(x)\,\mathrm{d}\mu, \int_{\{f>g\}} g(x)\,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$$

于是由条件和 (6) 有：

$$\int_{\{f>g\}} f(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_{\{f>g\}} g(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{\{f>g\}} [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}\mu \leqslant 0$$

因为 $f>g$，由 (7) 可得：

$$\int_{\{f>g\}} [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0$$

所以有：

$$\int_{\{f>g\}} [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}\mu = 0$$

因为 $f>g$ 在 $\{f>g\}$ 上恒成立，由 (9) 可得 $f-g=0$ a.e. 于 $\{f>g\}$，所以 $\mu(\{f>g\})=0$，即 $f\leqslant g$ a.e. 于 X。

(11) 由 (10) 立即可得。 □

Theorem 13.43 (积分的绝对连续性). 设 $f(x)$ 是测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的可积函数，对于任意的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得对于任意的 $A\subset\mathscr{F}$，只要 $\mu(A)<\delta$，就有：

$$\int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

Proof. 由 f 可积和性质 13.4.3(4) 可知 $|f|$ 可积。由性质 13.4.2可知存在非负简单函数列 $\{f_n\}$ 满足 $f_n\uparrow|f|$ 且：

$$\int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]$$

所以对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}^+$ 使得：

$$\int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \int_A f_N(x)\,\mathrm{d}\mu$$

取 f_N 在 A 上的最大值 M，由非负简单函数积分的定义可得：

$$\int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2} + M\mu(A)$$

所以对于这个 ε 而言，只要取 $\delta<\dfrac{\varepsilon}{2M}$ 即可。 □

note 13.1. 以上定理之所以被称之为绝对连续性，是因为该定理表明，如果将集合看作自变量，用差集的测度定义集合之间的距离，固定的函数 f 在该集合上的积分为因变量，则这个从自变量到因变量的函数 g 一定是绝对连续的。

Theorem 13.44 (Levi theorem). 设 $f(x),\{f_n\}$ 是测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的可测函数。若 $f,\{f_n\}$ *a.e.* 非负于 $A\in\mathscr{F}$ 且 $f_n\uparrow f$ *a.e.*，$f,\{f_n\}$ 在 A 上的积分都存在，则：

$$\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

Proof. 由性质 13.4.3(8)，可仅对 $f, \{f_n\}$ 是非负可测函数且 $f_n \uparrow f$ 讨论。对每个 $n \in \mathbb{N}^+$ 作非负简单函数列 $\{f_{nm}\}$ 使得当 $m \to +\infty$ 时有 $f_{nm} \uparrow f_n$，令 $g_k(x) = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant k} f_{nk}(x)$。

(1) g_k **是非负简单函数：** □

Theorem 13.45. 设 $f(x)$ 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数。若 f 在任意的 $A \in \mathscr{F}$ 上的积分都存在，则对任一可列可测分割 $\{A_n\}$ 有：

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

Proof. 构造函数列：

$$f_n(x) = f(x) I_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}$$

则有：

$$f_n^+ \uparrow f^+,\ f_n^- \uparrow f^-$$

由定理 13.33和定理 13.34(2) 可知 f_n 是可测函数，于是由定理 13.36可得 f_n^+, f_n^- 是非负可测函数。根据定理 13.44可知：

$$\int_X f_n^+(x)\,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_X f^+(x)\,\mathrm{d}\mu, \quad \int_X f_n^-(x)\,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_X f^-(x)\,\mathrm{d}\mu$$

而由性质 13.4.2(5)(10) 可得：

$$\begin{aligned}
\int_X f_n^+(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_n} f_n^+(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_n} f_n^+(x)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_n} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu \\
\int_X f_n^-(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_n} f_n^-(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_n} f_n^-(x)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_n} f^-(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f^-(x)\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

于是由极限的线性性质可得：

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_X f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_X f^-(x)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left[\int_X f_n^+(x)\,\mathrm{d}\mu\right] - \lim_{n \to +\infty} \left[\int_X f_n^-(x)\,\mathrm{d}\mu\right] \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} \left[\int_{A_i} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu\right]\right\} - \lim_{n \to +\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} \left[\int_{A_i} f^-(x)\,\mathrm{d}\mu\right]\right\} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} \left[\int_{A_i} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_{A_i} f^-(x)\,\mathrm{d}\mu\right]\right\} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} \left[\int_{A_i} f(x)\,\mathrm{d}\mu\right]\right\} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu\right]
\end{aligned}$$

□

Theorem 13.46 (Fatou Lemma)**.** 设 $\{f_n\}$ 是测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的可测函数列，$A\in\mathscr{F}$，$\{f_n\}$ 在 A 上 *a.e.* 非负，则：

$$\int_A\left[\varliminf_{n\to+\infty}f_n(x)\right]\mathrm{d}\mu\leqslant\varliminf_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]$$

Proof. 令 $g_k(x)=\inf\limits_{n\geqslant k}f_n(x)$，则 $g_k\uparrow\varliminf\limits_{n\to+\infty}f_n$。因为 $\{f_n\}$ 是可测函数列，由定理 13.35可知 $\{g_k\}$ 也是可测函数列。因为 $\{f_n\}$ 在 A 上 a.e. 非负，根据半环上测度的次可列可加性、单调性（定理 13.23）和测度的非负性可得：

$$\mu\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty}(\{f_n<0\}\cap A)\right]\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(\{f_n<0\}\cap A)=0$$

所以 $\{g_k\}$ 非负 a.e. 于 A，于是 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}f_n$ 非负 a.e. 于 A。由定理 13.35可知 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}f_n$ 是可测函数，所以由定理 13.44可得：

$$\int_A\left[\varliminf_{n\to+\infty}f_n(x)\right]\mathrm{d}\mu=\int_A\left[\lim_{k\to+\infty}g_k(x)\right]\mathrm{d}\mu=\lim_{k\to+\infty}\left[\int_A g_k(x)\,\mathrm{d}\mu\right]$$

因为：

$$g_k(x)\leqslant f_n(x),\ \forall\, n\geqslant k$$

由性质 13.4.3(7) 可得：

$$\int_A g_k(x)\,\mathrm{d}\mu\leqslant\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu,\ \forall\, n\geqslant k$$

所以：

$$\int_A g_k(x)\,\mathrm{d}\mu\leqslant\inf_{n\geqslant k}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]$$

由极限的不等式性可得：

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\int_A g_k(x)\,\mathrm{d}\mu\right]\leqslant\lim_{k\to+\infty}\left\{\inf_{n\geqslant k}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]\right\}=\varliminf_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]$$

即：

$$\int_A\left[\varliminf_{n\to+\infty}f_n(x)\right]\mathrm{d}\mu\leqslant\varliminf_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]$$ □

Corollary 13.5. 设 $\{f_n\}$ 是测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的可测函数列，$A\in\mathscr{F}$。

1. 若存在上述测度空间上的在 A 上可积的函数 g 使得 $f_n\geqslant g$ *a.e.* 于 A 对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$ 成立，则 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$ 的积分存在且：

$$\int_A\left[\varliminf_{n\to+\infty}f_n(x)\right]\mathrm{d}\mu\leqslant\varliminf_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]$$

2. 若存在上述测度空间上的在 A 上可积的函数 g 使得 $f_n\leqslant g$ *a.e.* 于 A 对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$ 成立，则 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$ 的积分存在且：

$$\int_A\left[\varlimsup_{n\to+\infty}f_n(x)\right]\mathrm{d}\mu\geqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]$$

Proof. (1) 构造 a.e. 非负的可测函数列 $\{h_n = f_n - g\}$（定理 13.34(1)），由性质 13.4.3(8) 可将 $\{h_n\}$ 就看做非负可测函数。根据下极限的性质、性质 13.4.2(6) 和定理 13.46可得：

$$\int_A \left[\varliminf_{n\to+\infty} h_n(x)\right] \mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \left[\int_A h_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]$$

由下极限的性质：

$$\varliminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \varliminf_{n\to+\infty} [h_n(x) + g(x)] = \varliminf_{n\to+\infty} h_n(x) + g(x)$$

同时由定理 13.35可得 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} h_n(x)$ 是一个非负可测函数。因为 $g(x)$ 可积，由性质 13.4.3(6) 可得：

$$\int_A \left[\varliminf_{n\to+\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}\mu = \int_A \left[\varliminf_{n\to+\infty} h_n(x) + g(x)\right] \mathrm{d}\mu = \int_A \left[\varliminf_{n\to+\infty} h_n(x)\right] \mathrm{d}\mu + \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu$$

同理可得：

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to+\infty} \left[\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu\right] &= \varliminf_{n\to+\infty} \left\{\int_A [h_n(x) + g(x)]\,\mathrm{d}\mu\right\} \\
&= \varliminf_{n\to+\infty} \left[\int_A h_n(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu\right] \\
&= \varliminf_{n\to+\infty} \left[\int_A h_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right] + \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{gathered}
\int_A \left[\varliminf_{n\to+\infty} h_n(x)\right] \mathrm{d}\mu + \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \left[\int_A h_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right] + \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu \\
\int_A \left[\varliminf_{n\to+\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]
\end{gathered}$$

(2) 构造 a.e. 非负的可测函数列 $\{h_n = g - f_n\}$，与 (1) 的证明类似。 □

Theorem 13.47 (Lebesgue 控制收敛定理)**.** *设 $\{f_n\}$ 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数列。若存在 $A \in \mathscr{F}$ 上的非负可积函数 g 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 有 $|f_n| \leqslant g$ a.e. 于 A，则 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 蕴含：*

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right] = \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

Proof. **(1) a.e.** 由性质 13.4.3(8)、极限与上下极限的关系、推论 13.5(1)、上下极限的性质和推论 13.5(2) 可得：

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_A \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}\mu = \int_A \left[\varliminf_{n\to+\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}\mu \\
&\leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right] \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right] \\
&\leqslant \int_A \left[\varlimsup_{n\to+\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}\mu = \int_A \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}\mu \\
&= \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

于是有：

$$\varliminf_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]=\varlimsup_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]=\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

由极限与上下极限的关系可得：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\right]=\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

(2) μ 由定理 13.42(3)(1) 和 (1) 立即可得。 □

Corollary 13.6 (Lebesgue 有界收敛定理)**.** 设 $\{f_n\}$ 和 f 是测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的可测函数，$A\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(A)<+\infty$。若存在 $M>0$ 使得对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$ 有 $|f_n|\leqslant M$ *a.e.* 于 A，则 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 或 $f_n\xrightarrow{\mu}f$ 蕴含：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu\right]=\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

Proof. 令 $g\equiv M$，于是 g 在 A 上可积。由定理 13.47直接可得结论。 □

Theorem 13.48. 设 f 是由测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 到可测空间 $(Y,\mathscr{C})$ 上的可测映射，对于任意的 $A\in\mathscr{C}$，令 $\nu(A)=\mu[f^{-1}(A)]$。

1. $(Y,\mathscr{C},\nu)$ 是一个测度空间；
2. 对 $(Y,\mathscr{C},\nu)$ 上的任何可测函数 g 和任意 $B\in\mathscr{C}$，只要

$$\int_B g(y)\,\mathrm{d}\nu,\qquad \int_{f^{-1}(B)} g\circ f\,\mathrm{d}\mu$$

之一有意义，则二者一定相等。

Proof. (1) 因为 μ 是测度，所以 μ 具有非负性，从而 ν 也是一个非负集函数。由定理 3.17(1) 和 $\mu(\varnothing)=0$ 可知 $\nu(\varnothing)=0$。任取 $\mathscr{C}$ 中互不相交的集合序列 $\{A_n\}$ 且满足 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n\in\mathscr{C}$，由定理 3.17(4) 可知：

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\mu\left[f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)\right]=\mu\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty}f^{-1}(A_n)\right]$$

因为 f 是一个映射，$\{A_n\}$ 互不相交，所以 $\{f^{-1}(A_n)\}$ 也互不相交。由测度的可列可加性：

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu[f^{-1}(A_n)]=\sum_{n=1}^{+\infty}\nu(A_n)$$

所以 ν 是可测空间 $(Y,\mathscr{C})$ 上的一个测度，即 $(Y,\mathscr{C},\nu)$ 是一个测度空间。

(2) **非负简单函数**：取 $(Y,\mathscr{C},\nu)$ 上的非负简单函数 g：

$$g(y)=\sum_{i=1}^{n}a_iI_{A_i}(y),\quad a_i\geqslant 0,\ A_i\in\mathscr{C},\ i=1,2,\ldots,n,\ \bigcup_{i=1}^{n}A_i=Y$$

于是：

$$\int_B g(y)\,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i \nu(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu[f^{-1}(A_i \cap B)]$$

由定理 3.17(4) 可得：

$$\begin{aligned}\int_{f^{-1}(B)} g \circ f\,\mathrm{d}\mu &= \int_{f^{-1}(B)} g[f(x)]\,\mathrm{d}\mu = \int_{f^{-1}(B)} \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}[f(x)]\,\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{f^{-1}(B)} I_{A_i}[f(x)]\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{f^{-1}(B)} I_{f^{-1}(A_i)}\,\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu[f^{-1}(A_i) \cap f^{-1}(B)] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu[f^{-1}(A_i \cap B)]\end{aligned}$$

即：

$$\int_B g(y)\,\mathrm{d}\nu = \int_{f^{-1}(B)} g \circ f\,\mathrm{d}\mu$$

非负可测函数：取 $(Y, \mathscr{C}, \nu)$ 上的非负可测函数 g，由定理 13.37(1) 可知存在非负简单函数列 $\{g_n\}$ 使得 $g_n \uparrow g$。由非负简单函数时的情形我们得到：

$$g_n \circ f = g_n[f(x)] = \sum_{i=1}^{j_n} a_{ni} I_{A_{ni}}[f(x)] = \sum_{i=1}^{j_n} a_{ni} I_{f^{-1}(A_{ni})}, \quad \bigcup_{i=1}^{j_n} A_{ni} = Y$$

其中 $a_{ni} > 0$，$A_{ni} \in \mathscr{C}$。由可测函数的定义，$f^{-1}(A_{ni}) \in \mathscr{F}$，所以 $g_n \circ f$ 也是一个非负简单函数。因为 $g_n \uparrow g$，所以有 $g_n \circ f \uparrow g \circ f$，由定理 13.44和非负简单函数时的结论可得：

$$\begin{aligned}\int_B g(y)\,\mathrm{d}\nu &= \int_B \left[\lim_{n\to+\infty} g_n(y)\right] \mathrm{d}\nu = \lim_{n\to+\infty} \left[\int_B g_n(y)\,\mathrm{d}\nu\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\int_{f^{-1}(B)} g_n \circ f\,\mathrm{d}\mu\right] = \int_{f^{-1}(B)} \left[\lim_{n\to+\infty} g_n \circ f\right] \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{f^{-1}(B)} g \circ f\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

一般可测函数：取 $(Y, \mathscr{C}, \nu)$ 上的一般可测函数 g，由非负可测函数时的情形可得：

$$\begin{aligned}\int_B g(y)\,\mathrm{d}\nu &= \int_B g^+(y)\,\mathrm{d}\nu - \int_B g^-(y)\,\mathrm{d}\nu \\ &= \int_{f^{-1}(B)} g^+ \circ f\,\mathrm{d}\mu - \int_{f^{-1}(B)} g^- \circ f\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{f^{-1}(B)} (g \circ f)^+\,\mathrm{d}\mu - \int_{f^{-1}(B)} (g \circ f)^- dif\mu \\ &= \int_{f^{-1}(B)} g \circ f\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

□

note 13.2. *以上定理是积分的变量替换定理，和 Riemann 积分中的换元积分法是一样的。若对 $g(x)$ 的直接积分不太好求，可以将 $g(x)$ 变为 $g[f(x)]$ 来求积分。*

13.5 L_p 与 L_∞

13.5.1 L_p

Definition 13.37. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一个测度空间，$p>1$，$E\in\mathscr{F}$，f,g 是 E 上的可测函数。定义等价关系 $\sim$：$f\sim g\Leftrightarrow f=g$ *a.e.* 于 E，将商空间：

$$\left\{f:\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}x<+\infty\right\}/\sim$$

称之为 E 上的 $L_p(X,\mathscr{F},\mu)$ 空间，简记为 $L_p(E)$。

Property 13.5.1. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一个测度空间，$p>1$，$E\in\mathscr{F}$，则 $L_p(E)$ 是一个线性空间。

Proof. 由不等式 18和性质 13.4.2(6) 直接得到。 □

$L_p(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的距离

Definition 13.38. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一个测度空间，$p>1$，$E\in\mathscr{F}$。在 $L_p(E)$ 中定义元素 $x=x(t)$ 和元素 $y=y(t)$ 之间的距离为：

$$\rho(x,y)=\left[\int_E |x(t)-y(t)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

则 $(L_p(E),\rho)$ 是一个度量空间。

下证明上式定义的距离满足距离公理：

Proof. (1) $\rho\in R$：由不等式 18可得：

$$|x(t)-y(t)|^p\leqslant\Big[|x(t)|+|y(t)|\Big]^p\leqslant 2^{p-1}\Big[|x(t)|^p+|y(t)|^p\Big]$$

于是：

$$\rho(x,y)\leqslant\left[2^{p-1}\int_E|x(t)|^p\,\mathrm{d}\mu+2^{p-1}\int_E|y(t)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

由 $L_p(X,\mathscr{F},\mu)$ 空间定义，$\rho\in\mathbb{R}$。(2) 非负性由性质 13.4.2(2)(10) 直接可得；(3) 对称性直接可得；(4) 三角不等式：设 $x(t),y(t),z(t)\in L_p(E)$。$p=1$ 时可由绝对值的三角不等式立即得到，$p>1$ 时，由 Minkowski 不等式（即不等式 14）可得到：

$$\left[\int_E|x(t)-z(t)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\int_E|x(t)-y(t)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_E|y(t)-z(t)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

即：

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$$ □

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的范数

Definition 13.39. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个测度空间，$p > 1$，$E \in \mathscr{F}$。在 $L_p(E)$ 中定义元素 $x = x(t)$ 的范数为：

$$||x||_p = \left[\int_E |x(t)|^p \, \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}$$

则 $L_p(X, \mathscr{F}, \mu)(E)$ 成为一个赋范线性空间。

Proof. (1) 由 $L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$ 的定义即可得到 $||x|| \in \mathbb{R}$。(2) 非负性由性质 13.4.2(2)(10) 直接得到。(3) 数乘由性质 13.4.2(6) 直接得到，(4) 三角不等式的证明可由 Minkowski 不等式（即不等式 14）直接得到。 □

13.5.2 L_∞

Definition 13.40. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个测度空间，f 是 $\mathscr{F}$ 上的一个可测函数，令：

$$G(f) = \Big\{c > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > c\}) = 0\Big\}$$

称：

$$||f||_\infty = \begin{cases} \inf G(f), & G(f) \neq \varnothing \\ +\infty, & G(f) = \varnothing \end{cases}$$

为 f 的无穷范数，也称其为 f 的本性上确界 *(essential supremum)*。

Theorem 13.49. 无穷范数具有如下等价定义：

$$||f||_\infty = \inf_{me=0} \sup_{x \in E \setminus e} |f(x)|$$

Proof. 等价性由定义可直接证得，略去。 □

Definition 13.41. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个测度空间，$E \in \mathscr{F}$，f, g 是 E 上的可测函数。定义等价关系 $\sim$：$f \sim g \Leftrightarrow f = g$ *a.e.* 于 E，称商空间 $\{f : ||f||_\infty < +\infty\}/\sim$ 为 E 上的 L_∞ 空间，简记为 $L_\infty(E)$。

Property 13.5.2. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个测度空间，$E \in \mathscr{F}$，则 $L_\infty(E)$ 是一个线性空间。

Proof. 任取 $x, y \in L_\infty(E)$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。因为 x, y 各自除了一个零测集外有界，由由半环上测度的次有限可加性（定理 13.23中的次可列可加性推得这两个零测集的并集也是零测集，于是 $\alpha x + \beta y$ 在除了一个零测集以外的空间上作的是 $\mathbb{R}$ 中的加减乘除，于是 $\alpha x + \beta y$ 除了一个零测集外有界，所以 $\alpha x + \beta y \in L_\infty(E)$，即 $L_\infty(E)$ 是一个线性空间。 □

L_∞ 上的距离

Definition 13.42. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一个测度空间，$E\in\mathscr{F}$。在 $L_\infty(E)$ 中定义元素 $x=x(t)$ 和元素 $y=y(t)$ 之间的距离为：

$$\rho(x,y)=||x-y||_\infty$$

则 $(L_\infty(E),\rho)$ 是一个度量空间。

下证明上式定义的距离满足距离公理：

Proof. (1) $\rho\in R$: 因为 L_∞ 是一个线性空间，所以 $x-y\in L_\infty(E)$，由定义可得 $||x-y||_\infty\in\mathbb{R}$。

(2) 非负性：由无穷范数的定义：

$$\|x-y\|_\infty\geqslant 0.$$

且有 $\|x-y\|_\infty=0$ 当且仅当有 $|x(t)-y(t)|=0$ a.e. 于 E，即 $x=y$。

(3) 对称性显然。

(4) 三角不等式：取任意 $x,y,z\in L_\infty(E)$。由无穷范数等价定义以及下确界定义，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $E_1,E_2\subset E$，$\mu(E_1)=\mu(E_2)=0$，使得：

$$\sup_{t\in E\setminus E_1}|x(t)-z(t)|\leqslant\rho(x,z)+\frac{\varepsilon}{2},\quad \sup_{t\in E\setminus E_2}|z(t)-y(t)|\leqslant\rho(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}$$

由半环上测度的次有限可加性（定理 13.23中的次可列可加性推得），$\mu(E_1\cup E_2)\leqslant\mu(E_1)+\mu(E_2)=0$，所以：

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&\leqslant\sup_{t\in E\setminus(E_1\cup E_2)}|x(t)-y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in E\setminus(E_1\cup E_2)}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in E\setminus(E_1\cup E_2)}|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in E\setminus E_1}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in E\setminus E_2}|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)+\varepsilon\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可得到：

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

□

L_∞ 上的范数

Definition 13.43. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一个测度空间，$E\in\mathscr{F}$。在 $L_\infty(E)$ 中定义元素 $x=x(t)$ 的范数为：

$$||x||=||x||_\infty$$

则 $L_\infty(E)$ 成为一个赋范线性空间。

下证明上式定义的范数满足范数定义：

Proof. (1) $||x|| \in \mathbb{R}$ 由 $L_\infty(E)$ 空间的定义直接可得。(2) 非负性和 (3) 数乘由无穷范数的定义是显然的。

(4) 三角不等式：由本性上确界定义可得：

$$|x(t)| \leqslant ||x||_\infty,\ |y(t)| \leqslant ||y||_\infty$$

a.e. 于 E，所以：

$$|x(t)+y(t)| \leqslant |x(t)|+|y(t)| \leqslant ||x||_\infty + ||y||_\infty$$

a.e. 于 E。于是 $||x(t)||_\infty + ||y(t)||_\infty \in G(x+y)$，所以：

$$||x+y||_\infty = \inf G(x+y) \leqslant ||x||_\infty + ||y||_\infty$$ □

13.5.3 收敛性

Theorem 13.50. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个测度空间，$E \in \mathscr{F}$，$1 \leqslant p \leqslant +\infty$。若 $\{f_n\} \subset L_p(E)$ 且：

$$m > n,\ \lim_{n\to+\infty} ||f_m - f_n||_p = 0$$

则存在 $f \in L_p(E)$ 使得 $\{f_n\}$ 依范数收敛于 f，即在 $L_p(E)$ 中引入范数导出的距离时，$L_p(E)$ 是一个 *Banach* 空间。

Proof. □

Definition 13.44. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个测度空间，$E \in \mathscr{F}$，$1 \leqslant p \leqslant +\infty$，$\{f_n\} \subset L_p(E)$，$f \in L_p(E)$。若：

$$\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_p = 0$$

则称 $\{f_n\}$（p 阶）**平均收敛**到 f，记为 $f_n \xrightarrow{L_p} f$。

Theorem 13.51. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个测度空间，$E \in \mathscr{F}$，$1 \leqslant p \leqslant +\infty$，$\{f_n\} \subset L_p(E)$，$f \in L_p(E)$。

1. 若 $f_n \xrightarrow{L_p} f$，则 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 且 $||f_n||_p \to ||f||_p$；
2. 若 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$，则：

$$||f_n||_p \to ||f||_p \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{L_p} f$$

Proof. (1) 设 $f_n \xrightarrow{L_p} f$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，由性质 13.4.2(7) 可得：

$$\begin{aligned}\mu(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) &= \int_{\{|f_n - f|\geqslant\varepsilon\}} \mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\{|f_n - f|\geqslant\varepsilon\}} \frac{|f_n - f|^p}{\varepsilon^p}\,\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^p}\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n - f|^p\,\mathrm{d}\mu = \frac{||f_n - f||_p^p}{\varepsilon^p}\end{aligned}$$

而 $||f_n - f|| \to 0$，所以：

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(||f_n - f|| \geqslant \varepsilon) = 0$$

即 $f_n \xrightarrow{\mu} f$。由不等式 17可得：

$$\Big| ||f_n||_p - ||f||_p \Big| \leqslant ||f_n - f||_p$$

于是 $||f_n||_p \to ||f||_p$。

(2) 充分性由 (1) 直接得到，下证必要性。 □

13.6 不定积分

13.6.1 符号测度

Definition 13.45. 设 $(X, \mathscr{F})$ 是一个可测空间，称从 $\mathscr{F}$ 到 $\overline{R}$ 的集函数 φ 为符号测度 *(signed measure)*，若 φ 满足：

1. $\varphi(\varnothing) = 0$；
2. φ 具有可列可加性。

若对任意的 $A \in \mathscr{F}$ 有 $|\varphi(A)| < +\infty$，则称 φ 是有限的；若存在 X 的可列可测分割 $\{A_n\} \subset \mathscr{F}$ 满足对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 有 $|\varphi(A_n)| < +\infty$，则称 φ 是 σ 有限的。

Property 13.6.1. 设 $(X, \mathscr{F})$ 是一个可测空间，其上的符号测度 φ 具有如下性质：

1. φ 具有有限可加性；
2. φ 只可能出现以下两种情况中的一种：
$$\forall\ A \in \mathscr{F},\ -\infty < \varphi(A) \leqslant +\infty$$
$$\forall\ A \in \mathscr{F},\ -\infty \leqslant \varphi(A) < +\infty$$
3. 若 $A, B \in \mathscr{F}$，$B \subseteq A$ 且 $|\varphi(A)| < +\infty$，则 $|\varphi(B)| < +\infty$；
4. 若 $\{A_n\}$ 两两不交且满足：
$$\left|\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)\right| < +\infty$$
则有：
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\varphi(A_n)| < +\infty$$

Proof. (1) 由符号测度的定义显然可得。

(2) 设 $A, B \in \mathscr{F}$ 且 $\varphi(A) = +\infty, \varphi(B) = -\infty$，则由 (1) 可得：

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B \backslash A) = \varphi(B) + \varphi(A \backslash B)$$

要使得上式有意义，$\varphi(A\cup B)$ 必须既等于 $+\infty$ 又等于 $-\infty$，矛盾。

(3) 由 (1) 可得 $\varphi(A)=\varphi(B)+\varphi(A\backslash B)$，当 $|\varphi(A)|<+\infty$ 时，上式有意义必须满足 $|\varphi(B)|<+\infty$。

(4) 记：

$$A_n^+=\begin{cases}\varnothing, & \varphi(A_n)\leqslant 0\\ A_n, & \varphi(A_n)>0\end{cases}\quad A_n^-=\begin{cases}A_n, & \varphi(A_n)\leqslant 0\\ \varnothing, & \varphi(A_n)>0\end{cases}$$

则：

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n=\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n^+\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n^-\right)$$

由 (3) 可得：

$$\left|\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n^+\right)\right|<+\infty,\quad \left|\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n^-\right)\right|<+\infty$$

因为 $\{A_n\}$ 互不相交，由 $\{A_n^+\},\{A_n^-\}$ 的构造方式显然二者内部互不相交且二者之间也互不相交，于是：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}|\varphi(A_n)|&=\sum_{n=1}^{+\infty}[|\varphi(A_n^+)|+|\varphi(A_n^-)|]=\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(A_n^+)+\sum_{n=1}^{+\infty}|\varphi(A_n^-)|\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(A_n^+)+\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(A_n^-)\right|=\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n^+\right)+\left|\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n^-\right)\right|<+\infty\end{aligned}\qquad\square$$

Chapter 14

随机变量的数字特征

14.1 期望

Definition 14.1. 设 X 是一个随机变量，具有分布函数 $F(x)$。若 X 的积分有限，则称：

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}F(x)$$

为 X 的数学期望 *(mathematical expectation)*。

14.2 方差

Property 14.2.1. 设 X,Y 是随机变量，则：

1. $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2$；

2. $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)]+\mathrm{Var}[\mathrm{E}(X|Y)]$；

3. $\mathrm{Var}(X\pm Y)=\mathrm{Var}(X)\pm\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Var}(Y)$，若 X,Y 不相关，则有 $\mathrm{Var}(X\pm Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$；

Proof. (1) 设 $\mathrm{E}(X)=\mu$，由方差的定义：

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}[(X-\mu)^2]=\mathrm{E}(X^2-2\mu X+\mu^2)=\mathrm{E}(X^2)-2\mu^2+\mu^2=\mathrm{E}(X^2)-\mu^2$$

(2) 由 (1) 可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)]&=\mathrm{E}\{\mathrm{E}(X^2|Y)-[\mathrm{E}(X|Y)]^2\}\\
&=\mathrm{E}[\mathrm{E}(X^2|Y)]-\mathrm{E}\{[\mathrm{E}(X|Y)]^2\}\\
&=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}\{[\mathrm{E}(X|Y)]^2\}\\
\mathrm{Var}[\mathrm{E}(X|Y)]&=\mathrm{E}\{[\mathrm{E}(X|Y)]^2\}-\{\mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)]\}^2\\
&=\mathrm{E}\{[\mathrm{E}(X|Y)]^2\}-[\mathrm{E}(X)]^2
\end{aligned}$$

于是：

$$\mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(X|Y)] = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \mathrm{Var}(X)$$

(3) 由方差的定义可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X \pm Y) &= \mathrm{E}[X \pm Y - \mathrm{E}(X \pm Y)]^2 \\ &= \mathrm{E}\{[X - \mathrm{E}(X) \pm [Y - \mathrm{E}(Y)]]\}^2 \\ &= \mathrm{E}\{[X - \mathrm{E}(X)]^2 \pm 2[X - \mathrm{E}(X)][Y - \mathrm{E}(Y)] + [Y - \mathrm{E}(Y)]^2\} \\ &= \mathrm{Var}(X) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Var}(Y)\end{aligned}$$

□

14.3 矩

14.3.1 原点矩

Definition 14.2. 设 X 是一个随机变量，$n \in \mathbb{N}^+$。若数学期望：

$$\mu_n = \mathrm{E}(X^n)$$

存在，则称 μ_n 为 X 的 n 阶原点矩 *(raw moment)*。

Definition 14.3. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$。若数学期望：

$$\mu_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i^{\alpha_i}\right)$$

存在，则称 $\mu_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ 为 $\mathbf{X}$ 的阶数为 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 的原点矩。

Theorem 14.1. 设 X 是一个随机变量，$m \in \mathbb{N}^+$。若 X 的 m 阶原点矩 μ_m 存在，则 X 具有所有不超过 m 阶的原点矩。

Proof. 取任意的 $n < m$ 且 $n \in \mathbb{N}^+$，则显然：

$$|x^n| \leqslant \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ |x^m|, & |x| > 1 \end{cases}$$

于是 $|x^n| \leqslant 1 + |x^m|$。因为 X 有 m 阶中心矩，所以：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^m| p(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

于是：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n p(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} (|x|^m + 1) p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m p(x)\,\mathrm{d}x + 1 < +\infty$$

所以 X 具有 n 阶原点矩。由 n 的任意性，结论成立。 □

14.3.2 中心矩

Definition 14.4. 设 X 是一个随机变量，$\mu_1 = \mathrm{E}(X)$，$n \in \mathbb{N}^+$。若数学期望：

$$\nu_n = \mathrm{E}[(X - \mu_1)^n]$$

存在，则称 ν_n 为 X 的 n 阶中心矩 *(central moment)*。

Definition 14.5. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量，$\mu = \mathrm{E}(\mathbf{X})$，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$。若数学期望：

$$\nu_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \mu_i)^{\alpha_i}\right]$$

存在，则称 $\nu_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ 为 $\mathbf{X}$ 的阶数为 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 的中心矩。

Theorem 14.2. 随机变量 X 的中心矩 ν_n 与原点矩 μ_n 之间存在如下关系：

$$\nu_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mu_i(-\mu_1)^{n-i}$$

Proof. 由中心矩的定义可得：

$$\nu_n = \mathrm{E}[(X - \mu_1)^n] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X^i(-\mu_1)^{n-i}\right] = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mu_i(-\mu_1)^{n-i} \qquad \square$$

14.4 协方差

Definition 14.6. 随机向量 $\mathbf{X}$ 与随机向量 $\mathbf{Y}$ 的协方差 *(covariance)*矩阵定义为：

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{X} - \mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(\mathbf{Y} - \mathrm{E}(\mathbf{Y})\Big)^T\Big]$$

若 $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$，则可将 $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 简写为 $\mathrm{Cov}(\mathbf{X})$。

Definition 14.7. 设 X, Y 是两个随机变量，则：

1. 若 $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$，称 X, Y 正相关 *(positively correlated)*；
2. 若 $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$，称 X, Y 负相关 *(negatively correlated)*；
3. 若 $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$，称 X, Y 不相关 *(uncorrelated)*。

Property 14.4.1. 协方差矩阵具有如下性质：

1. X 是一个 n 维随机向量，则 $\mathrm{tr}[\mathrm{Cov}(\mathbf{X})] = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(\mathbf{X}_i)$；
2. X 是一个 n 维随机向量，则 $\mathrm{Cov}(\mathbf{X})$ 是半正定的对称矩阵；
3. 设 A 和 B 分别为 $p \times n$ 和 $q \times m$ 非随机矩阵，$\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 分别为 n 维、m 维随机向量，则：

$$\mathrm{Cov}(A\mathbf{X}, B\mathbf{Y}) = A\,\mathrm{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})B^T$$

4. 若 $\mathbf{X}$ 是一个常数项量，$\mathbf{Y}$ 是一个随机向量，则 $\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\mathbf{0}$；

5. 设 $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}$ 为随机向量，则：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathbf{X}+\mathbf{Y},\mathbf{Z})&=\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Z})+\mathrm{Cov}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})\\ \mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}+\mathbf{Z})&=\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y})+\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\end{aligned}$$

6. $\mathrm{Cov}(\mathbf{X})=\mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)-[\mathrm{E}(\mathbf{X})][\mathrm{E}(\mathbf{X})]^T$。

Proof. (1) $\mathrm{Cov}(\mathbf{X})$ 在 (i,i) 位置上的元素为：

$$\mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{X}_i-\mathrm{E}(\mathbf{X}_i)\Big)\Big(\mathbf{X}_i-\mathrm{E}(\mathbf{X}_i)\Big)^T\Big]=\mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{X}_i-\mathrm{E}(\mathbf{X}_i)\Big)^2\Big]=\mathrm{Var}(\mathbf{X}_i)$$

所以 $\mathrm{tr}[\mathrm{Cov}(\mathbf{X})]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(\mathbf{X}_i)$。

(2) 因为：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathbf{X})_{(i,j)}&=\mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{X}_i-\mathrm{E}(\mathbf{X}_i)\Big)\Big(\mathbf{X}_j-\mathrm{E}(\mathbf{X}_j)\Big)^T\Big]\\ &=\mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{X}_j-\mathrm{E}(\mathbf{X}_j)\Big)\Big(\mathbf{X}_i-\mathrm{E}(\mathbf{X}_i)\Big)^T\Big]\\ &=\mathrm{Cov}(\mathbf{X})_{(j,i)}\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{Cov}(\mathbf{X})$ 是一个对称矩阵。

取 n 维非随机向量 c，设 $Y=c^T\mathbf{X}$ 则有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y)&=\mathrm{Var}(c^T\mathbf{X})\\ &=\mathrm{E}\Big[\Big(c^T\mathbf{X}-\mathrm{E}(c^T\mathbf{X})\Big)\Big(c^T\mathbf{X}-\mathrm{E}(c^T\mathbf{X})\Big)\Big]\\ &=\mathrm{E}\Big[\Big(c^T\mathbf{X}-c^T\,\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(c^T\mathbf{X}-c^T\,\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)^T\Big]\\ &=\mathrm{E}\Big\{c^T\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big[c^T\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big]^T\Big\}\\ &=c^T\,\mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)^T\Big]c\\ &=c^T\,\mathrm{Cov}(\mathbf{X})c\geqslant 0\end{aligned}$$

由 c 的任意性，$\mathrm{Cov}(\mathbf{X})$ 是半正定的。

(3) 类似于 (2) 中的推导，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(A\mathbf{X},B\mathbf{Y})&=\mathrm{E}\Big[\Big(A\mathbf{X}-\mathrm{E}(A\mathbf{X})\Big)\Big(B\mathbf{Y}-\mathrm{E}(B\mathbf{Y})\Big)^T\Big]\\ &=A\,\mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(\mathbf{Y}-\mathrm{E}(\mathbf{Y})\Big)^T\Big]B^T\\ &=A\,\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y})B^T\end{aligned}$$

(4) 由协方差的定义直接可得；

(5) 由可得：

期望的线性性

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(\mathbf{X}+\mathbf{Y},\mathbf{Z}) &= \mathrm{E}\left[\Big(\mathbf{X}+\mathbf{Y}-\mathrm{E}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})\Big)\Big(\mathbf{Z}-\mathrm{E}(\mathbf{Z})\Big)^T\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\Big(\mathbf{X}+\mathbf{Y}-\mathrm{E}(\mathbf{X})-\mathrm{E}(\mathbf{Y})\Big)\Big(\mathbf{Z}-\mathrm{E}(\mathbf{Z})\Big)^T\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(\mathbf{Z}-\mathrm{E}(\mathbf{Z})\Big)^T+\Big(\mathbf{Y}-\mathrm{E}(\mathbf{Y})\Big)\Big(\mathbf{Z}-\mathrm{E}(\mathbf{Z})\Big)^T\right] \\
&= \mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(\mathbf{Z}-\mathrm{E}(\mathbf{Z})\Big)^T\Big]+\mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{Y}-\mathrm{E}(\mathbf{Y})\Big)\Big(\mathbf{Z}-\mathrm{E}(\mathbf{Z})\Big)^T\Big] \\
&= \operatorname{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Z})+\operatorname{Cov}(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) \\
\operatorname{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}+\mathbf{Z}) &= \mathrm{E}\left[\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(\mathbf{Y}+\mathbf{Z}-\mathrm{E}(\mathbf{Y}+\mathbf{Z})\Big)^T\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(\mathbf{Y}+\mathbf{Z}-\mathrm{E}(\mathbf{Y})-\mathrm{E}(\mathbf{Z})\Big)^T\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(\mathbf{Y}-\mathrm{E}(\mathbf{Y})\Big)^T+\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(\mathbf{Z}-\mathrm{E}(\mathbf{Z})\Big)^T\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(\mathbf{Y}-\mathrm{E}(\mathbf{Y})\Big)^T\right]+\mathrm{E}\left[\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(\mathbf{Z}-\mathrm{E}(\mathbf{Z})\Big)^T\right] \\
&= \operatorname{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y})+\operatorname{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Z})
\end{aligned}
$$

(6) 显然：

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(\mathbf{X}) &= \mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)^T\Big] = \mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\mathbf{X}^T-\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\mathrm{E}(\mathbf{X})^T\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\Big(\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})\Big)\mathbf{X}^T\Big]-\mathrm{E}[\mathbf{X}-\mathrm{E}(\mathbf{X})]\,\mathrm{E}(\mathbf{X})^T = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)-[\mathrm{E}(\mathbf{X})][\mathrm{E}(\mathbf{X})]^T \qquad \square
\end{aligned}
$$

14.5 二次型

Definition 14.8. $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量，$A=(a_{ij})$ 为 n 阶非随机实对称阵，则随机变量：

$$\mathbf{X}^T A\mathbf{X}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j$$

称为 $\mathbf{X}$ 的二次型。

随机变量二次型的均值

Theorem 14.3. $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量，$\mathrm{E}(\mathbf{X})=\mu$，$\operatorname{Cov}(\mathbf{X})=\Sigma$，则：

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}^T A\mathbf{X})=\mu^T A\mu+\operatorname{tr}(A\Sigma)$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathbf{X}^T A\mathbf{X}) &= \mathrm{E}[(\mathbf{X}-\mu+\mu)^T A(\mathbf{X}-\mu+\mu)] \\
&= \mathrm{E}[(\mathbf{X}-\mu)^T A(\mathbf{X}-\mu)] + \mathrm{E}[(\mathbf{X}-\mu)^T A\mu] + \mathrm{E}[\mu^T A(\mathbf{X}-\mu)] + \mathrm{E}(\mu^T A\mu) \\
&= \mathrm{E}\{\mathrm{tr}[(\mathbf{X}-\mu)^T A(\mathbf{X}-\mu)]\} + \mu^T A\mu \\
&= \mathrm{E}\{\mathrm{tr}[A(\mathbf{X}-\mu)(\mathbf{X}-\mu)^T]\} + \mu^T A\mu \\
&= \mathrm{tr}\,\mathrm{E}[A(\mathbf{X}-\mu)(\mathbf{X}-\mu)^T] + \mu^T A\mu \\
&= \mathrm{tr}\{A\,\mathrm{E}[(\mathbf{X}-\mu)(\mathbf{X}-\mu)^T]\} + \mu^T A\mu \\
&= \mathrm{tr}(A\Sigma) + \mu^T A\mu
\end{aligned}$$

第二行到第三行利用到了 $\mathrm{E}(\mathbf{X})=\mu$ 以及 $(\mathbf{X}-\mu)^T A(\mathbf{X}-\mu)=\mathrm{tr}[(\mathbf{X}-\mu)^T A(\mathbf{X}-\mu)]$，后式成立是因为 $(\mathbf{X}-\mu)^T A(\mathbf{X}-\mu)$ 是一个标量，标量的迹自然等于自身。第三行到第四行使用到了性质 .3.2(3)。 □

独立随机变量二次型的方差

Theorem 14.4. 设随机变量 $X_i,\ i=1,2,\ldots,n$ 相互独立, $\mathrm{E}(X_i)=\mu_i$, $\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2$, $\nu_k^{(i)}=\mathrm{E}[(X_i-\mu_i)^k]$, $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$, $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)^T$, $A=(a_{ij})$ 为 n 阶非随机实对称阵, $a=(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})^T$, $b=(\nu_3^{(1)}a_{11},\nu_3^{(2)}a_{22},\ldots,\nu_3^{(n)}a_{nn})^T$, 则:

$$\mathrm{Var}(\mathbf{X}^T A\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2\nu_4^{(i)} + \sigma^4[2\,\mathrm{tr}(A^2) - 3a^T a] + 4\sigma^2\mu^T A^2\mu + 4\mu^T Ab$$

Proof. 由性质 14.2.1(1) 可得:

$$\mathrm{Var}(\mathbf{X}^T A\mathbf{X}) = \mathrm{E}[(\mathbf{X}^T A\mathbf{X})^2] - [\mathrm{E}(\mathbf{X}^T A\mathbf{X})]^2$$

由题设可知:

$$\mathrm{E}(\mathbf{X})=\mu,\ \mathrm{Var}(\mathbf{X})=\sigma^2 I$$

根据定理 14.3可得:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{E}(\mathbf{X}^T A\mathbf{X})]^2 &= [\mathrm{tr}(A\sigma^2 I)+\mu^T A\mu]^2 = [\sigma^2\,\mathrm{tr}(A)+\mu^T A\mu]^2 \\
&= \sigma^4[\mathrm{tr}(A)]^2 + 2\sigma^2\,\mathrm{tr}(A)\mu^T A\mu + (\mu^T A\mu)^2
\end{aligned}$$

同时:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}^T A\mathbf{X})^2 &= [(\mathbf{X}-\mu+\mu)^T A(\mathbf{X}-\mu+\mu)]^2 \\
&= [(\mathbf{X}-\mu)^T A(\mathbf{X}-\mu) + 2\mu^T A(\mathbf{X}-\mu) + \mu^T A\mu]^2 \\
&= [(\mathbf{X}-\mu)^T A(\mathbf{X}-\mu)]^2 + 4[\mu^T A(\mathbf{X}-\mu)]^2 + (\mu^T A\mu)^2 \\
&\quad + 4(\mathbf{X}-\mu)^T A(\mathbf{X}-\mu)\mu^T A(\mathbf{X}-\mu) + 2(\mathbf{X}-\mu)^T A(\mathbf{X}-\mu)\mu^T A\mu \\
&\quad + 4\mu^T A(\mathbf{X}-\mu)\mu^T A\mu
\end{aligned}$$

令 $\mathbf{Y}=\mathbf{X}-\mu$，则有 $\mathrm{E}(\mathbf{Y})=\mathbf{0}$，再由定理 14.3可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(\mathbf{X}^TA\mathbf{X})^2]=&\,\mathrm{E}[(\mathbf{Y}^TA\mathbf{Y})^2]+4\,\mathrm{E}[(\mu^TA\mathbf{Y})^2]+(\mu^TA\mu)^2\\&+4\,\mathrm{E}(\mathbf{Y}^TA\mathbf{Y}\mu^TA\mathbf{Y})+2\mu^TA\mu\sigma^2\,\mathrm{tr}(A)\end{aligned}$$

考虑：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(\mathbf{Y}^TA\mathbf{Y})^2]&=\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_{ij}a_{kl}\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j\mathbf{Y}_k\mathbf{Y}_l\right)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_{ij}a_{kl}\,\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j\mathbf{Y}_k\mathbf{Y}_l)\end{aligned}$$

作分类讨论：

1. i,j,k,l 互不相同，则 $\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j\mathbf{Y}_k\mathbf{Y}_l)=E(\mathbf{Y}_i)E(\mathbf{Y}_j)E(\mathbf{Y}_k)E(\mathbf{Y}_l)=0$；
2. i,j,k,l 中存在某两个值相同：
   - 此时另外两个不同，则 $\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j\mathbf{Y}_k\mathbf{Y}_l)=0$；
   - 此时另外两个也相同（即 $i=j,k=l$ 或 $i=k,j=l$ 或 $i=l,j=k$），则 $\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j\mathbf{Y}_k\mathbf{Y}_l)=\sigma^4$。
3. i,j,k,l 中存在某三个值相同，则 $\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j\mathbf{Y}_k\mathbf{Y}_l)=0$；
4. i,j,k,l 相同，则 $\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j\mathbf{Y}_k\mathbf{Y}_l)=\nu_4^{(i)}$。

于是：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(\mathbf{Y}^TA\mathbf{Y})^2]&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_{ij}a_{kl}\,\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j\mathbf{Y}_k\mathbf{Y}_l)\\&=\sum_{i=1}^n a_{ii}^2\nu_4^{(i)}+\sigma^4\left(\sum_{i\neq k}a_{ii}a_{kk}+\sum_{i\neq j}a_{ij}^2+\sum_{i\neq j}a_{ij}a_{ji}\right)\\&=\sum_{i=1}^n a_{ii}^2\nu_4^{(i)}+\sigma^4\left(\sum_{i\neq k}a_{ii}a_{kk}+2\sum_{i\neq j}a_{ij}^2\right)\end{aligned}$$

因为：

$$\sum_{i\neq k}a_{ii}a_{kk}=[\mathrm{tr}(A)]^2-a^Ta$$

$$\sum_{i\neq j}a_{ij}^2=\mathrm{tr}(AA^T)-a^Ta=\mathrm{tr}(A^2)-a^Ta$$

所以：

$$\mathrm{E}[(\mathbf{Y}^TA\mathbf{Y})^2]=\sum_{i=1}^n a_{ii}^2\nu_4^{(i)}+\sigma^4\{[\mathrm{tr}(A)]^2+2\,\mathrm{tr}(A^2)-3a^Ta\}$$

由定理 14.3和性质 .3.2(3) 可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(\mu^T A\mathbf{Y})^2] &= \mathrm{E}(\mu^T A\mathbf{Y}\mu^T A\mathbf{Y}) = \mathrm{E}(\mathbf{Y}^T A\mu\mu^T A\mathbf{Y}) = \operatorname{tr}(A\mu\mu^T A\sigma^2 I)\\ &= \sigma^2\operatorname{tr}(A\mu\mu^T A) = \sigma^2\operatorname{tr}(\mu^T A^2\mu) = \sigma^2\mu^T A^2\mu\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathbf{Y}^T A\mathbf{Y}\mu^T A\mathbf{Y}) &= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_{kl}\mu_k\mathbf{Y}_l\right)\\ &= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_{ij}a_{kl}\mu_k\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j\mathbf{Y}_l\right)\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_{ij}a_{kl}\mu_k\,\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j\mathbf{Y}_l)\end{aligned}$$

和之前的讨论类似，可以得到：

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j\mathbf{Y}_l) = \begin{cases}\nu_3^{(i)}, & i=j=l\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$$

于是有：

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y}^T A\mathbf{Y}\mu^T A\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ii}\nu_3^{(i)}a_{ki}\mu_k$$

令 $b=(\nu_3^{(1)}a_{11},\nu_3^{(2)}a_{22},\ldots,\nu_3^{(n)}a_{nn})^T$，则：

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y}^T A\mathbf{Y}\mu^T A\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ii}\nu_3^{(i)}a_{ki}\mu_k = \mu^T Ab$$

将以上求得的期望值全部代入，即可得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(\mathbf{X}^T A\mathbf{X})^2] &= \mathrm{E}[(\mathbf{Y}^T A\mathbf{Y})^2] + 4\,\mathrm{E}[(\mu^T A\mathbf{Y})^2] + (\mu^T A\mu)^2\\ &\quad + 4\,\mathrm{E}(\mathbf{Y}^T A\mathbf{Y}\mu^T A\mathbf{Y}) + 2\mu^T A\mu\sigma^2\operatorname{tr}(A)\\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}^2\nu_4^{(i)} + \sigma^4\{[\operatorname{tr}(A)]^2 + 2\operatorname{tr}(A^2) - 3a^T a\}\\ &\quad + 4\sigma^2\mu^T A^2\mu + (\mu^T A\mu)^2 + 4\mu^T Ab + 2\mu^T A\mu\sigma^2\operatorname{tr}(A)\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\mathbf{X}^T A\mathbf{X}) &= \mathrm{E}[(\mathbf{X}^T A\mathbf{X})^2] - [\mathrm{E}(\mathbf{X}^T A\mathbf{X})]^2\\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}^2\nu_4^{(i)} + \sigma^4\{[\operatorname{tr}(A)]^2 + 2\operatorname{tr}(A^2) - 3a^T a\}\\ &\quad + 4\sigma^2\mu^T A^2\mu + (\mu^T A\mu)^2 + 4\mu^T Ab + 2\mu^T A\mu\sigma^2\operatorname{tr}(A)\\ &\quad - \sigma^4[\operatorname{tr}(A)]^2 - 2\sigma^2\operatorname{tr}(A)\mu^T A\mu - (\mu^T A\mu)^2\\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}^2\nu_4^{(i)} + \sigma^4[2\operatorname{tr}(A^2) - 3a^T a] + 4\sigma^2\mu^T A^2\mu + 4\mu^T Ab\end{aligned}$$

□

14.6 矩母函数

Definition 14.9. 设 X 是一个随机变量。称*:*

$$M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

为 X 的矩母函数 *(moment-generating function, m.g.f.)*，其中 $t \in \mathbb{R}$。

Definition 14.10. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量。称*:*

$$M_{\mathbf{X}}(t) = \mathrm{E}(e^{t^T \mathbf{X}})$$

为 $\mathbf{X}$ 的矩母函数，其中 $t \in \mathbb{R}^n$。

Property 14.6.1. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量，则其矩母函数 $M_{\mathbf{X}}(t)$ 具有如下性质：

1. $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) = 1$；
2. $M_{\mathbf{X}}(t) \geqslant e^{t^T \mu}$，其中 μ 是 $\mathbf{X}$ 的均值向量；
3. 矩母函数与概率分布之间存在一个双射，即 $M_{\mathbf{X}}(t) = M_{\mathbf{Y}}(t)$ 当且仅当 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 具有相同的概率分布；
4. 设 m 维随机向量 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ 彼此独立，α_i 为常数，β_i 为 m 维常数向量，则 $\mathbf{Y} = \sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i \mathbf{X}_i + \beta_i)$ 的特征函数为：
$$M_{\mathbf{Y}}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{t^T \beta_i} M_{\mathbf{X}_i}(\alpha_i t)$$
5. $M_X^{(n)}(0) = \mu_n$，其中 X 是一个随机变量，μ_n 是 X 的 n 阶原点矩；
6. $M_{\mathbf{X}}(t)$ 有如下幂级数展开：
$$M_{\mathbf{X}}(t) = \sum_{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n} \mu_{m_1, m_2, \ldots, m_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i^{m_i}}{m_i!}$$

Proof. (1)$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) = \mathrm{E}(e^0) = 1$。

Jensen 不等式链接

(2) 由 Jensen 不等式直接可得。

(3)

(4) 由矩母函数定义可得：

$$M_{\mathbf{Y}}(t) = \mathrm{E}(e^{t^T \mathbf{Y}}) = \mathrm{E}\left(\exp\left\{t^T \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \mathbf{X}_i + \beta_i)\right\}\right) = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\alpha_i t^T \mathbf{X}_i}\right) \prod_{i=1}^{n} e^{t^T \beta_i}$$

因为 $\mathbf{X}_i$ 互相独立，所以 $\alpha_i \mathbf{X}_i$ 也相互独立，于是有：

$$M_{\mathbf{Y}}(t) = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\alpha_i t^T \mathbf{X}_i}\right) \prod_{i=1}^{n} e^{t^T \beta_i} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(e^{\alpha_i t^T \mathbf{X}_i}\right) \prod_{i=1}^{n} e^{t^T \beta_i} = \prod_{i=1}^{n} e^{t^T \beta_i} M_{\mathbf{X}_i}(\alpha_i t)$$

(5) 将 e^{tX} 展开为幂级数：

$$M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \mathrm{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n X^n}{n!}\right)$$

于是：

$$M_X^{(n)}(t) = \mathrm{E}\left(X^n + \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{t^m X^m}{m!}\right) = \mu_n + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{t^m}{m!}\mu_m$$

所以：

$$M_X^{(n)}(0) = \mathrm{E}(X^n) = \mu_n$$

(6) 由可得：

期望的线性性质，Lebesgue 积分

$$\begin{aligned}
M_{\mathbf{X}}(t) = \mathrm{E}(e^{t^T\mathbf{X}}) &= \mathrm{E}\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{X}_i\right\}\right) = \mathrm{E}\left[\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{X}_i\right)^m\right] \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{X}_i\right)^m\right] = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \mathrm{E}\left(\sum_{\sum_{i=1}^{n} m_i = m} \frac{m!}{m_1! m_2! \cdots m_n!} \prod_{i=1}^{n} (t_i \mathbf{X}_i)^{m_i}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \sum_{\sum_{i=1}^{n} m_i = m} \frac{m!}{m_1! m_2! \cdots m_n!} \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n} (t_i \mathbf{X}_i)^{m_i}\right] \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sum_{i=1}^{n} m_i = m} \frac{1}{m_1! m_2! \cdots m_n!} \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i^{m_i}\right) \prod_{i=1}^{n} t_i^{m_i} \\
&= \sum_{(m_1,m_2,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n} \mu_{m_1,m_2,\ldots,m_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i^{m_i}}{m_i!}
\end{aligned}$$

□

14.7 累积量生成函数

Definition 14.11. 设 X 是一个随机变量。称 $K_X(t) = \log M_X(t)$ 为 X 的累积量生成函数 *(cumulant-generating function, c.g.f.)*，其中 $t \in \mathbb{R}$。

Definition 14.12. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量。称 $K_{\mathbf{X}}(t) = \log M_{\mathbf{X}}(t)$ 为 $\mathbf{X}$ 的累积量生成函数，其中 $t \in \mathbb{R}^n$。

Definition 14.13. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量。因为：

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{(m_1,m_2,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{m_1! m_2! \cdots m_n!} \prod_{i=1}^{n} t_i^{m_i} \mu_{m_1,m_2,\ldots,m_n} \\
&= 1 + \sum_{\substack{(m_1,m_2,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n \\ (m_1,m_2,\ldots,m_n \neq \mathbf{0})}} \frac{1}{m_1! m_2! \cdots m_n!} \prod_{i=1}^{n} t_i^{m_i} \mu_{m_1,m_2,\ldots,m_n}
\end{aligned}$$

由对数函数的幂级数展开可得：

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{X}}(t) &= \log\left(1 + \sum_{\substack{(m_1,m_2,\dots,m_n)\in\mathbb{N}^n \\ (m_1,m_2,\dots,m_n\neq\mathbf{0})}} \frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_n!}\prod_{i=1}^{n} t_i^{m_i}\mu_{m_1,m_2,\dots,m_n}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}\left(\sum_{\substack{(m_1,m_2,\dots,m_n)\in\mathbb{N}^n \\ (m_1,m_2,\dots,m_n\neq\mathbf{0})}} \frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_n!}\prod_{i=1}^{n} t_i^{m_i}\mu_{m_1,m_2,\dots,m_n}\right)^j \end{aligned}$$

Property 14.7.1.

14.8 特征函数

Definition 14.14. 设 X 是一个随机变量。称*:*

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX})$$

为 X 的特征函数 *(characteristic function, c.f.)*，其中 $t \in \mathbb{R}$。

Definition 14.15. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量。称*:*

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \mathrm{E}(e^{it^T\mathbf{X}})$$

为 $\mathbf{X}$ 的特征函数，其中 $t \in \mathbb{R}^n$。

Definition 14.16. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 $m \times n$ 随机矩阵。称*:*

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \mathrm{E}\Big[\exp\Big(i\,\mathrm{tr}(t^T\mathbf{X})\Big)\Big]$$

为 $\mathbf{X}$ 的特征函数，其中 $t \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$。

Property 14.8.1. 设 $X, Y, X_1, X_2, \dots, X_n$ 是随机变量，$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$，$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 为常数，则：

1. X 的特征函数 $\varphi_X(t)$ 存在；

2. $|\varphi_X(t)| \leqslant \varphi_X(0) = 1$；

3. $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$；

4. 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立，则 $Y = \sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k X_k + \beta_k)$ 的特征函数为：

$$\varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{it\beta_k}\varphi_{X_k}(\alpha_k t)$$

5. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立的充分必要条件为：

$$\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t_i)$$

6. 特征函数与概率分布之间存在一个双射，即 $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ 当且仅当 X 与 Y 具有相同的概率分布。

7. 若 $\mathrm{E}(X^n)$ 存在，则 $\varphi_X^{(n)}(t)$ 存在，且对 $1 \leqslant k \leqslant n$ 有：

$$\mathrm{E}(X^k) = i^{-k} \varphi_X^{(k)}(0)$$

特别的：

$$\mathrm{E}(X) = -i\varphi_X'(0),\ \mathrm{Var}(X) = -\varphi_X''(0) + [\varphi_X'(0)]^2$$

8. 若 $\varphi_X(t)$ 在 $t = 0$ 处最高有 n 阶导数，如果 n 为奇数，则 X 具有所有不超过 $n-1$ 阶的原点矩；若 n 为偶数，则 X 具有所有不超过 n 阶的原点矩；

9. $\varphi_X(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续；

10. $\varphi_X(t)$ 是半正定的，即对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 及任意的 $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 和任意的 $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{C}^n$，令 $A = [\varphi_X(t_i - t_j)] \in M_n(\mathbb{C})$，则有：

$$c^T A \overline{c} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \varphi_X(t_i - t_j) \geqslant 0$$

Proof. (1) 因为：

$$e^{itX} = \cos(tX) + i\sin(tX)$$

所以 $|e^{itX}| = 1$，于是：

链接 Lebesgue 积分性质

$$\left|\mathrm{E}(e^{itX})\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| p(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

所以 $\varphi_X(t)$ 存在。

(2) 可以发现：

$$\varphi_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

再由 (1) 的证明过程即可得出结论。

(3) 因为：

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) = \mathrm{E}[\cos(tX) + i\sin(tX)] = \mathrm{E}[\cos(tX)] + i\,\mathrm{E}[\sin(tX)]$$

所以：

$$\overline{\varphi_X(t)} = \mathrm{E}[\cos(tX)] - i\,\mathrm{E}[\sin(tX)] = \mathrm{E}[\cos(-tX)] + i\,\mathrm{E}[\sin(-tX)] = \varphi_X(-t)$$

(4) 因为 X_k 相互独立，所以 $e^{it(\alpha_k X_k+\beta_k)}$ 之间也相互独立，$k=1,2,\ldots,n$，于是有：

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= \mathrm{E}\left[\exp\left(it\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k X_k+\beta_k)\right)\right] = \mathrm{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{it(\alpha_k X_k+\beta_k)}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathrm{E}[e^{it(\alpha_k X_k+\beta_k)}] = \prod_{k=1}^{n} e^{it\beta_k}\,\mathrm{E}(e^{it\alpha_k X_k}) = \prod_{k=1}^{n} e^{it\beta_k}\varphi_{X_k}(\alpha_k t)\end{aligned}$$

(5) **必要性**：因为 X_k 相互独立，所以 $e^{it_k X_k}$ 相互独立，$k=1,2,\ldots,n$。由随机向量特征函数的定义可得：

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n) &= \mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}t_k X_k\right)\right] = \mathrm{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{it_k X_k}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathrm{E}(e^{it_k X_k}) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t_k)\end{aligned}$$

充分性：因为：

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n) &= \mathrm{E}\left[\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}t_k X_k\right)\right]\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}t_k x_k\right)p(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(t_i) &= \prod_{k=1}^{n}\mathrm{E}(e^{it_k X_k})\\ &= \prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_k x_k}p(x_k)\,\mathrm{d}x_k\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}t_k x_k\right)p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

若两式相等，则有：

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n) = p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$$

链接独立性条件

由可得 X_k，$k=1,2,\ldots,n$ 相互独立。

(6)

(7) 因为 $\mathrm{E}(X^n)$ 存在，所以：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^n p(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

于是：

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} i^n x^n e^{itx}p(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|x|^n p(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

所以：

$$\varphi_X^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i^n x^n e^{itx}p(x)\,\mathrm{d}x$$

存在。由定理 14.1可知对 $1 \leqslant k \leqslant n$ 有 $\mathrm{E}(X^k)$ 存在，于是：

$$\varphi_X^{(k)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} i^k x^k p(x)\,\mathrm{d}x = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)\,\mathrm{d}x = i^k\,\mathrm{E}(X^k)$$

也存在。

(8) 注意到：

$$\varphi_X^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i^n x^n e^{itx} p(x)\,\mathrm{d}x$$

因为 $\varphi_X(t)$ 在 $t = 0$ 处最高具有 n 阶导数，于是：

$$|\varphi_X^{(n)}(0)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} i^n x^n p(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\,\mathrm{d}x\right| < +\infty$$

当 $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ 时，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n p(x)\,\mathrm{d}x > |\varphi_X^{(n)}(0)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

所以 $\mathrm{E}(X^n)$ 不一定存在。当 $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^+$ 时，有：

需要证明对小于的都存在

$$|\varphi_X^{(n)}(0)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n p(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

存在，于是 $\mathrm{E}(X^n)$ 存在。由定理 14.1可知，此时 X 具有所有不超过 n 阶的原点矩。

(9) 对任意的 $t, h \in \mathbb{R}$ 和 $a > 0$，有：

$$\begin{aligned}
|\varphi(t+h) - \varphi(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i(t+h)x} - e^{itx}] p(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ihx} - 1) e^{itx} p(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |(e^{ihx} - 1) e^{itx}| p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ihx} - 1||e^{itx}| p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ihx} - 1| p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{a} |e^{ihx} - 1| p(x)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant a} |e^{ihx} - 1| p(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{-a}^{a} |e^{ihx} - 1| p(x)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant a} (|e^{ihx}| + 1) p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{a} |e^{ihx} - 1| p(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_{|x|\geqslant a} p(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$，可以先选定一个充分大的 a，使得：

$$2\int_{|x|\geqslant a} p(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$$

对任意的 $x \in [-a, a]$，只要取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2a}$，则当 $|h| < \delta$ 时，就有：

$$\begin{aligned}
|e^{ihx} - 1| &= \left|e^{ihx} - e^{i\frac{hx}{2}} e^{i\frac{-hx}{2}}\right| = \left|e^{i\frac{hx}{2}} (e^{i\frac{hx}{2}} - e^{i\frac{-hx}{2}})\right| \\
&= \left|e^{i\frac{hx}{2}}\right| \left|e^{i\frac{hx}{2}} - e^{i\frac{-hx}{2}}\right| \\
&= \left|e^{i\frac{hx}{2}} - e^{i\frac{-hx}{2}}\right| \\
&= \left|\cos\frac{hx}{2} + i\sin\frac{hx}{2} - \cos\frac{-hx}{2} - i\sin\frac{-hx}{2}\right| \\
&= \left|2i\sin\frac{hx}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{hx}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{hx}{2}\right| \leqslant ha < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

于是对任意的 $t \in \mathbb{R}$，有：

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| < \int_{-a}^{a} \frac{\varepsilon}{2} p(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_{|x| \geqslant a} p(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即 $\varphi_X(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。

(10) 显然：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \varphi_X(t_i - t_j) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_k \bar{c}_j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t_k - t_j)x} p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_k \bar{c}_j e^{i(t_k - t_j)x} p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k e^{it_k x}\right) \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j e^{-it_j x}\right) p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k e^{it_k x}\right) \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{c_k e^{it_k x}}\right) p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{it_k x}\right|^2 p(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

14.9 Fisher 信息量

Definition 14.17. 设 $\mathbf{X}$ 是测度空间 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上的一个随机向量，其分布由 n 维参数 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ 决定，$\mathbf{X}$ 的概率函数为 $f(\mathbf{X}; \theta)$。若 $f(\mathbf{X}; \theta)$ 满足如下正则条件：

1. $f(\mathbf{X}; \theta)$ 关于 θ 的偏导数 *a.e.* 存在；

2. 对 $f(\mathbf{X}; \theta)$ 在 X 上的积分关于 θ 任一分量求导时都可以交换求导与积分的顺序；

3. $f(\mathbf{X}; \theta)$ 的定义域与 θ 无关。

则称：

$$[I(\theta)]_{ij} = \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial \ln f(\mathbf{X}; \theta)}{\partial \theta_i}\right)\left(\frac{\partial \ln f(\mathbf{X}; \theta)}{\partial \theta_j}\right)\right]$$

为 $\mathbf{X}$ 的*Fisher 信息矩阵 (Fisher information matrix, FIM)*。

note 14.1. *Fisher* 信息量（即一维情况的信息矩阵）用来表明随机变量 $\mathbf{X}$ 携带的关于参数 θ 的信息。如果它比较大，表示平均下来 θ 的微小变化会给 $\mathbf{X}$ 的分布带来较大的变化，即 $\mathbf{X}$ 的分布很依赖 θ 的具体取值，所以携带了较多关于 θ 的信息。

Property 14.9.1. 设 $\mathbf{X}$ 是测度空间 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上的一个随机向量，其 *Fisher* 信息矩阵具有如下性质：

1. *Fisher* 信息矩阵可以看作协方差矩阵：

$$I(\theta) = \operatorname{Cov}\left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta}\right]$$

2. 若 $\ln f(\mathbf{X};\theta)$ 有关于 θ 的所有二阶导数，且对该二阶导数在 X 上的积分关于 θ 任一分量求导时都可以交换求导与积分的顺序，则：

$$[I(\theta)]_{ij} = -\operatorname{E}\left[\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right]$$

Proof. (1) 由正则条件可得：

$$\begin{aligned}
\operatorname{E}\left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i}\right] &= \int_X \frac{\frac{\partial f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i}}{f(\mathbf{X};\theta)} f(\mathbf{X};\theta)\,\mathrm{d}\mu = \int_X \frac{\partial f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i}\,\mathrm{d}\mu \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta_i}\int_X f(\mathbf{X};\theta)\,\mathrm{d}\mu = \frac{\partial 1}{\partial \theta_i} = 0
\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 和正则条件可得：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta_j}\operatorname{E}\left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i}\right] &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \theta_j}\int_X \frac{\partial \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i} f(\mathbf{X};\theta)\,\mathrm{d}\mu &= 0 \\
\int_X \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i} f(\mathbf{X};\theta)\right]\mathrm{d}\mu &= 0 \\
\int_X \left[\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} f(\mathbf{X};\theta) + \frac{\partial \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i}\frac{\partial f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_j}\right]\mathrm{d}\mu &= 0 \\
\int_X \left[\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} f(\mathbf{X};\theta) + \frac{\partial \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i}\frac{\partial \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_j} f(\mathbf{X};\theta)\right]\mathrm{d}\mu &= 0 \\
\operatorname{E}\left[\left(\frac{\partial \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i}\right)\left(\frac{\partial \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_j}\right)\right] &= -\operatorname{E}\left[\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right]
\end{aligned}$$

其中倒数第三行到倒数第二行是因为：

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i} f(\mathbf{X};\theta) = \frac{\frac{\partial f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i}}{f(\mathbf{X};\theta)} f(\mathbf{X};\theta) = \frac{\partial f(\mathbf{X};\theta)}{\partial \theta_i}$$

□

Chapter 15

大数定律与中心极限定理

15.1 大数定律

15.1.1 弱大数定律

Definition 15.1. 设 $\{X_n\}$ 是一个随机变量序列，若

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i)$$

则称 $\{X_n\}$ 服从弱大数定律 *(weak law of large numbers)*。

Theorem 15.1 (Markov's Weak Law of Large Numbers)**.** 设 $\{X_n\}$ 是一个随机变量序列，若：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] = 0$$

则 $\{X_n\}$ 服从弱大数定律。

Proof. 由不等式 19可知对任意的 $\varepsilon > 0$ 有：

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \to 0 \quad \square$$

Corollary 15.1. 由 *Markov's Weak Law of Large Numbers* 可以推出：

1. *(Chebyshev's Weak Law of Large Numbers)* 设 $\{X_n\}$ 为一列互不相关的随机变量，若对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，有 $\operatorname{Var}(X_i) \leqslant c < +\infty$，则 $\{X_n\}$ 服从弱大数定律。

2. *(Bernoulli's Weak Law of Large Numbers)* 设 $\{X_n\}$ 为一列独立同两点分布 $b(1,p)$ 的随机变量，则 $\{X_n\}$ 服从弱大数定律。

以后写不相关的和的方差，需要注意从乘积期望开始写，还得链接方

Proof. (1) 因为 $\{X_n\}$ 互不相关，所以：

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(X_i)\leqslant\frac{1}{n^2}nc=\frac{c}{n}\to 0$$

(2) 由两点分布的性质或者 (1) 直接可得。 □

Proof. □ 需要写完特征函数

Theorem 15.2 (Strong Law of Large Numbers)**.** 设 $\{X_n\}$ 为一列独立同分布的随机变量，服从的分布的均值为 μ 且满足 $\mathrm{E}(|X_i|)<+\infty$，则有：

$$P\left(\lim_{n\to+\infty}\bar{X}_n\neq\mu\right)=0$$

即 $\bar{X}_n\xrightarrow{a.e.}\mu$。

15.2 连续性校正

15.2.1 使用原因

由中心极限定理，独立同分布的随机变量序列 X_i，$i=1,2\ldots,n$ 的和 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 将在随机变量个数 $n\to+\infty$ 时服从正态分布，因此，在某些情况下，我们可以利用正态分布 CDF(Cumulative Distribution Function) 值来近似一些难以计算的离散型随机变量 (Discrete Variable) 的 CDF 值。

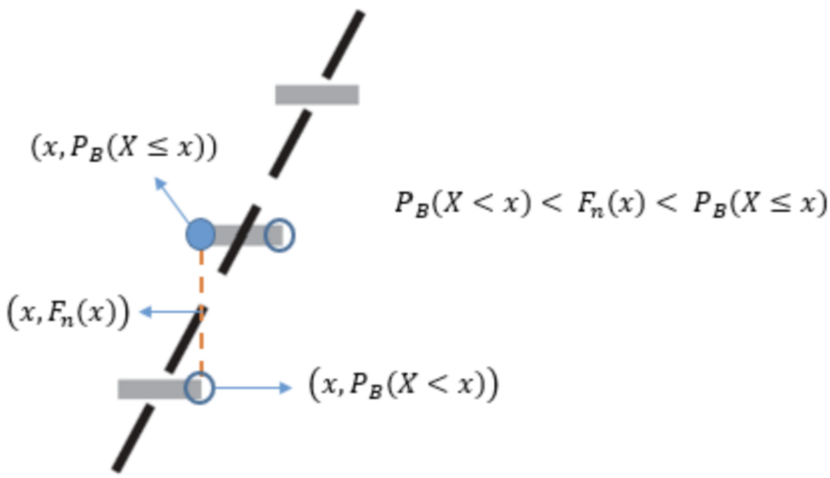

图 15.1: 连续型、离散型随机变量 CDF 图

对于离散型随机变量，常出现 $P(X<x)\neq P(X\leqslant x)$，而对于连续型随机变量 (Continuous Variable)，二者的值是相等的，因此，CDF 值的近似将出现以下问题：

1. 使用正态分布 CDF 值近似 $P(X\leqslant x)$ 时近似值偏小。
2. 使用正态分布 CDF 值近似 $P(X<x)$ 时近似值偏大。

而我们会想要得到一个一致的近似，即对于以上两个近似，结果总是一致地偏大或偏小，这样利于分析。

15.2.2 具体方法

- 根据近似的分布选择一个 $\alpha \in (-1, 1)$，一般选择 $\pm\frac{1}{2}$。
- 使用正态分布 CDF 值 $F(\frac{x+\alpha-\mu}{\sigma})$ 近似 $P(X < x)$ 与 $P(X \leqslant x)$。

第四部分

最优化

Chapter 16

凸

Definition 16.1. 设 E 是欧氏空间 X 中的一个点集，若任意两点 $x_1, x_2 \in E$ 的连线上的所有点 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in E$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，则称 E 为凸集。

Definition 16.2. 设 X 是一个欧氏空间，$x_1, x_2 \in X$。若存在 α_1, α_2 满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $i = 1, 2$，使得 $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$，则称 x 为 x_1, x_2 的凸组合 *(convex combination)*。若 $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2$，称其为严格凸组合 *(strictly convex combination)*。

Definition 16.3. 设 E 是欧式空间 X 中的一个凸集，$x \in E$。若 x 不能表示为 E 中不同的两点的严格凸组合，则称 x 是 E 的一个极点 *(extreme point)*。

Definition 16.4. 对于广义

16.0.1 映射的上下极限与半连续性

Definition 16.5. (X, ρ) 是一个度量空间，E 是 X 的子空间，f 是 E 到 $\mathbb{R}$ 上的映射。对于 E 中的任一聚点 a，定义：

$$\liminf_{x \to a} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\inf\{f(x) : x \in U(a, \varepsilon)\} \backslash \{a\} \Big)$$
$$\limsup_{x \to a} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\sup\{f(x) : x \in U(a, \varepsilon)\} \backslash \{a\} \Big)$$

Definition 16.6. (X, ρ) 是一个度量空间，f 是 X 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的映射。若：

$$\limsup_{x \to a} f(x) \leqslant f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在 a 点上半连续 *(upper semicontinuous)*。若：

$$\liminf_{x \to a} f(x) \leqslant f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在 a 点。

Chapter 17

规划问题

17.1 线性规划

17.1.1 线性规划的标准形

线性规划问题的数学模型有各种不同的形式，如：

1. 最大化或最小化目标函数；
2. 约束条件有 $\leqslant$, $\geqslant$ $=$ 三种情况；
3. 决策变量一般有非负性要求，但有时又可能没有。

为了以统一的方式求解线性规划问题，规定了一种线性规划的标准形式，非标准形可以转化为标准形。

Definition 17.1. *规定线性规划问题的***标准形式***为：*

1. *最大化目标函数；*
2. *约束条件为等式且右端常数项非负；*
3. *决策变量非负。*

于是线性规划问题可以写为如下矩阵形式：

$$\max z = C^T X$$

$$s.t. \begin{cases} AX = \beta \\ X \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

*称 $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ 为***价值向量***，其中每个分量为***价值系数***，β 为***资源向量***。系数矩阵 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 行满秩，即 $\operatorname{rank}(A) = m$。称 A 的秩 m 为 LP 问题的***阶数***，A 的列数 n 为 LP 问题的***维数***。*

Theorem 17.1. 每个线性规划问题都可以化成标准形式。

Proof. 考虑每种不符合标准形式的情况：

最小化目标函数：若 LP 问题的目标函数为：

$$\min z = C^T X$$

则可将其转化为：

$$\max z' = -C^T X$$

显然转化前后的 LP 问题是等价的。

约束条件右端常数项为负数：若 LP 问题的约束条件为 $Ax = \beta$ 和 $\alpha^T x = b < 0$，则可将其转化为：

$$\begin{pmatrix} A \\ -\alpha^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \beta \\ -b \end{pmatrix}$$

显然转化前后的 LP 问题是等价的。

约束条件中含 $\leqslant$：若 LP 问题的约束条件为 $Ax = \beta$ 和 $\alpha^T x \leqslant b$，则可将约束条件转化为：

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \alpha^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ b \end{pmatrix}$$

$$X' = (X, y)^T \geqslant \mathbf{0}$$

显然转化前后的 LP 问题是等价的。称新引入的变量 y 为松弛变量 (slack variable)。

约束条件中含 $\geqslant$：若 LP 问题的约束条件为 $Ax = \beta$ 和 $\alpha^T x \geqslant b$，则可将约束条件转化为：

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \alpha^T & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ b \end{pmatrix}$$

$$X' = (X, y)^T \geqslant \mathbf{0}$$

显然转化前后的 LP 问题是等价的。称新引入的变量 y 为剩余变量 (surplus variable)。

决策变量中含负值变量：若 LP 问题为：

$$\max z = (C, c)^T (X, x)^T$$

$$s.t. \begin{cases} (A, \alpha)(X, x)^T = \beta \\ X \geqslant \mathbf{0} \\ x < 0 \end{cases}$$

则作变换 $x' = -x$，将该 LP 问题转化为：

$$\max z = (C, -c)^T (X, x')^T$$

$$s.t. \begin{cases} (A, -\alpha)(X, x')^T = \beta \\ X' = (X, x')^T \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

显然转化前后的 LP 问题是等价的。

决策变量中含自由变量[1]：若 LP 问题为：

$$\max z = (C, c)^T (X, x)^T$$
$$s.t. \begin{cases} (A, \alpha)(X, x)^T = \beta \\ X \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

可引入新变量 x_1, x_2，将该 LP 问题转化为：

$$\max z = (C, c, -c)^T (X, x_1, x_2)^T$$
$$s.t. \begin{cases} (A, \alpha, -\alpha)(X, x_1, x_2)^T = \beta \\ X' = (X, x_1, x_2)^T \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

显然转化前后的 LP 问题是等价的。 □

标准形的基本解

Definition 17.2. 对于标准形 *LP* 问题中约束条件的系数矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，称由其列向量组的一个基 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_m}$ 构成的矩阵 $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_m})$ 为该 *LP* 问题的一个**基矩阵**（简称**基**），其中的每一个向量 α_{i_j}，$j = 1, 2, \ldots, m$ 称为该 *LP* 问题的**基向量**，A 中剩余的 $n-m$ 个列向量 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_{n-m}}$ 称为**非基向量**。分别称基向量对应的变量和非基向量对应的变量为**基变量**、**非基变量**。分别称所有基变量构成的向量 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ 和非基变量构成的向量 $(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-m}})$ 为**基变矢**、**非基变矢**。对系数矩阵 A 的列向量、决策变量 x 和资源向量 $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ 作顺序的重排，可以得到：

$$\begin{aligned}&(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_m}, \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_{n-m}})(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-m}})^T \\ =\ &(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_m}, b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_{n-m}})^T\end{aligned}$$

将该方程重新写作：

$$(B, C)(X_1, X_2)^T = \beta'$$

其中 B 对应基矩阵，C 对应非基向量构成的矩阵，X_1 为基变矢，X_2 为非基变矢。令 $X_2 = \mathbf{0}$，可得出方程的一个解：

$$\begin{cases} X_1 = B^{-1}\beta' \\ X_2 = \mathbf{0} \end{cases}$$

称该解为约束方程组的一个关于基矩阵 B 的**基本解**，也称之为该标准形 *LP* 问题的一个基本解。若基本解中存在基变量值为 0，则称之为**退化基本解**。若某个基本解达到标准形 *LP* 问题的最优解，则称之为**最优基本解**。称满足非负性约束 $X \geqslant \mathbf{0}$ 的基本解为基本可行解 *(basic feasible solution)*，若它是退化的，则称之为**退化基本可行解**。称基本可行解对应的基矩阵为**可行基**，称最优基本解对应的基矩阵为**最优基**。

[1] 即对该变量的取值无任何要求。

17.1.2 线性规划解的性质

Lemma 17.1. 对于 m 阶 n 维标准形 *LP* 问题，$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$、$E$ 分别为其系数矩阵和可行域，则 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ 是基本可行解的充分必要条件为：对于 $I = \{i : x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$，由 a_i, $i \in I$ 构成的向量组线性无关。

Proof. **必要性**：由基本可行解的定义直接得到。

充分性： □

Property 17.1.1. 线性规划的解具有如下性质：

1. *LP* 问题解的可行域是凸集；
2. *LP* 问题的基本可行解与可行域的极点一一对应；
3. **线性规划基本定理**
   - 若 *LP* 问题有可行解，则必有基本可行解；
   - 若 *LP* 问题有最优解，则必有最优基本解。
4. 若 *LP* 问题的可行域不是空集，则可行域至少有一个极点；
5. *LP* 问题可行域的极点必为有限多个。

Proof. 设 m 阶 n 维 LP 问题如下：

$$\max z = C^T X$$

$$s.t. \begin{cases} AX = \beta \\ X \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

其可行域为 E，$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$。

(1) 显然：

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \beta, x \geqslant \mathbf{0}\}$$

任取 $x_1, x_2 \in E$，则对任意的 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 有：

$$A[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \alpha A x_1 + (1-\alpha)Ax_2 = \alpha\beta + (1-\alpha)\beta = \beta$$

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geqslant 0$$

所以 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in E$，$E$ 是一个凸集。

(2) **基本可行解必是极点**：要证基本可行解 x 必是极点，即证 x 不能表示为 E 内不同的两点 x_1, x_2 的严格凸组合。假设 x 可以表示为 x_1, x_2 的严格凸组合，即存在 $0 < \alpha < 1$，使得 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$。因为 x 是基本解，所以 x 的非基变量都为 0，于是 x_1, x_2 对应部分也都为 0。设 x 对应的基矩阵是 B，则 $x = B^{-1}\beta$，此时也必有 $x_1 = x_2 = B^{-1}\beta$（考

虑基本解的求解过程，B 对应的非基变量全为 0），于是 $x = x_1 = x_2$，所以 x 不可以表示为可行域内不同的两点的严格凸组合，矛盾，x 是极点。

极点必是基本可行解: 要证极点 x 必是基本可行解,即证存在基矩阵 B 使得 $x = B^{-1}\beta$。由极点定义，x 不能表示为 E 内不同的两点 x_1, x_2 的严格凸组合，即不存在 $0 < \alpha < 1$ 和 E 内不同的两点 x_1, x_2 使得 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$，$\square$

第五部分

不等式

Chapter 18

不等式

这章讨论各种常见不等式。

18.1 Cauchy 不等式

18.1.1 实数域上的 Cauchy 不等式

Theorem 18.1. 若 $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$，则有如下不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

Proof. 取 $\lambda \in \mathbb{R}$：

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i + \lambda b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

将 λ 看作自变量，a_i, b_i 为常数。由判别式可得：

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$ □

18.1.2 复数域上的 Cauchy 不等式

Theorem 18.2. 若 $a_i, b_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, n$，则有如下不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$$

Proof. 由复数模的性质可得到

$$|a_i b_i| = |a_i||b_i|$$

然后使用实数域上的 Cauchy 不等式即可立即得到结果。 □

18.1.3 内积导出的 Cauchy-Schiwarz 不等式

Theorem 18.3. 设 X 是一个实或复内积空间，$x, y \in X$，则有如下不等式：

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y)$$

下给出复数域内的证明，实数域的证明显然类似。

Proof. 设 $x, y \in X$。对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$，有：

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) \geqslant 0$$

即：

$$(x,x) + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda(y,x) + |\lambda|^2(y,y) \geqslant 0$$

令 $\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$，得到：

$$(x,x) - 2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)^2}(y,y) \geqslant 0$$
$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y)$$ □

18.1.4 期望形式的 Cauchy-Schiwarz 不等式

Theorem 18.4. 设 $\mathrm{E}(X^2) < +\infty$, $\mathrm{E}(Y^2) < +\infty$，则有：

$$|\mathrm{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)}$$

等号成立的充要条件为存在不全为 0 的常数 a, b 使得 $aX + bY = 0$ *a.s.* 成立。

Proof. 对任意的常数 a, b，由性质 13.4.2(2)(6) 可知二次型：

$$\mathrm{E}[(aX+bY)^2] = a^2\,\mathrm{E}(X^2) + 2ab\,\mathrm{E}(XY) + b^2\,\mathrm{E}(Y^2) = (a,b)\Sigma(a,b)^T \geqslant 0$$

其中：

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{E}(X^2) & \mathrm{E}(XY) \\ \mathrm{E}(XY) & \mathrm{E}(Y^2) \end{pmatrix}$$

所以 Σ 是一个半正定矩阵，由定理 2.43 第三条的 (6) 可知 $|\Sigma| \geqslant 0$，即 $|\mathrm{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)}$。等号成立当且仅当 Σ 退化，当且仅当有不全为 0 的常数 a, b 使得 $\mathrm{E}[(aX+bY)^2] = 0$（$\Sigma$ 退化时列向量线性相关，存在不全为 0 的 a, b 使得 $\Sigma(a,b)^T = \mathbf{0}$，即 $(a,b)\Sigma(a,b)^T = 0$；当存在不全为 0 的 a, b 使得 $\mathrm{E}[(aX+bY)^2] = 0$ 时，$(a,b)\Sigma(a,b)^T = 0$，），由性质 13.4.2(10) 可知此时当且仅当有不全为 0 的常数 a, b 使得 $aX + bY = 0$ a.s.。 □

需要证明此时一定退化

18.1.5 Rayleigh 商的 Cauchy-Schwarz 不等式

Theorem 18.5. 设 A 为 $n\times n$ 实正定矩阵，$a\in\mathbb{R}^n$，则有：

$$\sup_{b\neq\mathbf{0}}\frac{(a^Tb)^2}{b^TAb}=a^TA^{-1}a$$

Proof. 由于 A 是正定矩阵，所以存在可逆的 $A^{1/2}$。令 $x=A^{1/2}b$，即 $b=A^{-1/2}x$，则：

$$\frac{(a^Tb)^2}{b^TAb}=\frac{(a^TA^{-1/2}x)^2}{x^Tx}=\frac{[(A^{-1/2}a)^Tx]^2}{\|x\|^2}$$

记 $u=A^{-1/2}a$，由不等式 3有：

$$|(u,x)|^2\leqslant\|u\|^2\cdot\|x\|^2$$

于是：

$$\frac{[(A^{-1/2}a)^Tx]^2}{\|x\|^2}\leqslant\|A^{-1/2}a\|^2=(A^{-1/2}a)^T(A^{-1/2}a)=a^TA^{-1}a$$

即：

$$\sup_{b\neq\mathbf{0}}\frac{(a^Tb)^2}{b^TAb}=a^TA^{-1}a$$ □

18.2 Young's 不等式

18.2.1 一般形式

Theorem 18.6. 设 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a,b>0$，$p,q\in\mathbb{R}$ 且 $p,q>1$，满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则有如下不等式：

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

等号成立当且仅当 $a^p=b^q$。

Proof. $f(x)=e^x$ 是一个凸函数，因此对任意的 $t\in(0,1)$：

$$e^{tx+(1-t)y}\leqslant te^x+(1-t)e^y$$

等号成立当且仅当 $x=y$。令 $\frac{1}{p}=t$，利用上式则有：

$$ab=e^{\ln(a)+\ln(b)}=e^{\frac{\ln(a^p)}{p}+\frac{\ln(b^q)}{q}}\leqslant\frac{1}{p}e^{\ln(a^p)}+\frac{1}{q}e^{\ln(b^q)}=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$ □

因为对数函数单调增，所以等号成立当且仅当 $a^p=b^q$。

18.3 Holder 不等式

18.3.1 离散形式的 Holder 不等式

有穷级数形式

Theorem 18.7. 设 $\xi_i, \eta_i, i = 1, 2, \ldots, n$ 同为实数或复数，$1 < p, q < +\infty$，满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则有如下不等式：

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i \eta_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Proof. 在 Young's 不等式（即不等式 6）中取：

$$a = \frac{|\xi_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad b = \frac{|\eta_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

即有：

$$\frac{|\xi_i||\eta_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{|\xi_i|^p}{p\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)} + \frac{|\eta_i|^q}{q\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^q\right)}$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i \eta_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^p}{p\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^q}{q\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^q\right)} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

无穷级数形式

Theorem 18.8. 设 $\xi_i, \eta_i, i \in \mathbb{N}^+$ 同为实数或复数，$1 < p, q < +\infty$，满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则有如下不等式：

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\xi_i \eta_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Proof. 证明过程与有穷级数几乎一样，只是把求和中的 n 改为 $+\infty$ 的区别。 □

18.3.2 积分形式的 Holder 不等式

Theorem 18.9. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个测度空间，$E \in \mathscr{F}$，$1 < p, q < +\infty$，满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$f \in L_p(E)$, $g \in L_q(E)$，则有如下不等式：

$$\int_E |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \left[\int_E |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_E |g(x)|^q \, \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}$$

等号成立当且仅当存在不全为 0 的 $\alpha, \beta \geqslant 0$ 使得：

$$\alpha |f|^p = \beta |g|^q \ a.e. \text{ 于 } E$$

Proof. **(1)** $f(x)=0$ **和** $g(x)=0$ **都不 a.e. 于** E：在 Young's 不等式（即不等式 6）中取：

$$a=\frac{|f(x)|}{\left[\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}},\quad b=\frac{|g(x)|}{\left[\int_E |g(x)|^q \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}}$$

即有：

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{\left[\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_E |g(x)|^q \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{|f(x)|^p}{p\left[\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]}+\frac{|g(x)|^q}{q\left[\int_E |g(x)|^q \,\mathrm{d}\mu\right]}$$

两边进行积分可得：

$$\int_E\frac{|f(x)g(x)|}{\left[\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_E |g(x)|^q \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}}\,\mathrm{d}\mu\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$
$$\int_E |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\left[\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_E |g(x)|^q \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\int_E |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}\mu\leqslant\left[\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_E |g(x)|^q \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}$$

由 Young's 不等式可知等号成立当且仅当：

$$\frac{|f(x)|^p}{\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu}=\frac{|g(x)|^q}{\int_E |g(x)|^q \,\mathrm{d}\mu}$$
$$|f(x)|^p\int_E |g(x)|^q \,\mathrm{d}\mu=|g(x)|^q\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu$$

但使用 Young's 不等式接下来的是积分的操作，我们只需要积分保持不等号即可，所以由性质 13.4.2(7) 可知 Young's 不等式得到的那个不等式只要 a.e. 成立即可，即上式只要 a.e. 成立即可。

(2) $f(x)=0$ **或** $g(x)=0$ **a.e. 于** E：$|f(x)g(x)|=0$ a.e. 于 E，由性质 13.4.2(10) 可得 $\int_E |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}\mu=0$，再根据性质 13.4.2(2) 可得 $\int_A |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu, \int_E |g(x)|^q \,\mathrm{d}\mu\geqslant 0$，于是不等式成立。

以上两种情况都可以推导出存在不全为 0 的 $\alpha,\beta\geqslant 0$ 使得：

$$\alpha|f|^p=\beta|g|^q \text{ a.e. 于 } E$$

即等号成立时上式也成立，下面证明反过来也对。当上不等式成立时，进行分类讨论。

(1) $f(x)=0$ **或** $g(x)=0$ **a.e. 于** E：仅对 $|f(x)|=0$ a.e. 于 E 的情况进行证明，$g(x)=0$ a.e. 于 E 的情况可对称得到。此时 $|f(x)|^p=0$ 和 $|f(x)g(x)|$ 都 a.e. 于 E，于是由性质 13.4.2(10) 可得：

$$\int_E |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}\mu=0,\ \int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu=0$$

所以：

$$\int_E |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}\mu=\left[\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_E |g(x)|^q \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}=0$$

(2) $f(x)=0$ 和 $g(x)=0$ **都不 a.e. 于** E：设 $\alpha \neq 0$，对 $\beta \neq 0$ 的情况可对称得到。此时有：

$$|f|^p = \frac{\beta}{\alpha}|g|^q \text{ a.e. 于 } E$$

所以：

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-p} |g(x)|^{\frac{q}{p}+1}$$

因为 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，所以 $\frac{q}{p}+1=q$，于是由性质 13.4.2(6) 可得：

$$\int_E |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}\mu = \int_E \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-p} |g(x)|^q\,\mathrm{d}\mu = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-p} \int_E |g(x)|^q\,\mathrm{d}\mu$$

对 $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ 两边积分，由性质 13.4.2(8)(6) 可得：

$$\begin{gathered}
\int_E \alpha|f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu = \int_E \beta|g(x)|^q\,\mathrm{d}\mu \\
\alpha\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu = \beta\int_E |g(x)|^q\,\mathrm{d}\mu \\
\frac{\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu}{\int_E |g(x)|^q\,\mathrm{d}\mu} = \frac{\beta}{\alpha} \\
\left[\frac{\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu}{\int_E |g(x)|^q\,\mathrm{d}\mu}\right]^{-p} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-p}
\end{gathered}$$

将其代入到之前的式子可得：

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}\mu &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-p} \int_E |g(x)|^q\,\mathrm{d}\mu \\
&= \left[\frac{\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu}{\int_E |g(x)|^q\,\mathrm{d}\mu}\right]^{-p} \int_E |g(x)|^q\,\mathrm{d}\mu \\
&= \left[\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_E |g(x)|^q\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

□

Theorem 18.10. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一个测度空间，$E\in\mathscr{F}$，$1<p,q<+\infty$，满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。对任意的 $f\in L_p(E)$，$g\in L_q(E)$，$h\in L_1(E)$，在 $L_1(E), L_p(E)$ 和 $L_q(E)$ 中引入范数：

$$||f||_p = \left[\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}},\ ||g||_q = \left[\int_E |g(x)|^q\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}},\ ||h||_1 = \int_E |h(x)|\,\mathrm{d}\mu$$

则积分形式的 *Holder* 不等式可写为：

$$||fg||_1 \leqslant ||f||_p\, ||g||_q$$

其中 $fg\in L_1(E)$ 由 $f\in L_p(E), g\in L_q(E)$ 以及积分形式的 *Holder* 不等式保证。

note 18.1. 范数是对于空间内的元素定义的，所以写范数的时候首先要保证元素在这个空间内，这里做的其实是一个假设并验证的过程，假设在空间内，然后计算，由结果发现确实是在空间内的。

Theorem 18.11. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个测度空间，$E \in \mathscr{F}$。对任意的 $f \in L_1(E)$，$g \in L_\infty(E)$，在 $L_\infty(E)$ 和 $L_1(E)$ 中分别定义范数为元素的无穷范数和：

$$||f||_1 = \int_E |f(x)| \,\mathrm{d}\mu$$

则有：

$$||fg||_1 \leqslant ||f||_1 \, ||g||_\infty$$

Proof. 由性质 13.4.2(8)(6) 和无穷范数的定义可得：

$$||fg||_1 = \int_E |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E |f(x)| \, ||g||_\infty \,\mathrm{d}\mu = ||g||_\infty \int_E |f(x)| \,\mathrm{d}\mu = ||f||_1 \, ||g||_\infty \quad \square$$

其中 $fg \in L_1(E)$ 由 $f \in L_1(E), g \in L_\infty(E)$ 以及上式保证。

18.4 Minkowski 不等式

18.4.1 离散形式的 Minkowski 不等式

有穷级数形式

设 $\xi_i, \eta_i, i = 1, 2, \ldots, n$ 同为实数或复数，$1 \geqslant p < +\infty$，则有如下不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proof. 当 $p = 1$ 时结论显然成立。当 $p > 1$ 时，取 $p, q \in \mathbb{R}$ 且 $p, q > 1$，满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，由 Holder 不等式（即不等式 7）：

$$\sum_{i=1}^n |\xi_i| |\xi_i + \eta_i|^{\frac{p}{q}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{i=1}^n |\eta_i| |\xi_i + \eta_i|^{\frac{p}{q}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

因此：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\xi_i + \eta_i|^p &= \sum_{i=1}^n \left[|\xi_i + \eta_i| \, |\xi_i + \eta_i|^{p-1}\right] \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \left[(|\xi_i| + |\eta_i|) |\xi_i + \eta_i|^{\frac{p}{q}}\right] \\
&= \sum_{i=1}^n |\xi_i| |\xi_i + \eta_i|^{\frac{p}{q}} + \sum_{i=1}^n |\eta_i| |\xi_i + \eta_i|^{\frac{p}{q}} \\
&\leqslant \left[\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \cdot \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

上式第一行到第二行需要注意到 $p-1=\frac{p}{q}$。两边同除 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$（若其为 0 则结论显然也成立）即有：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\qquad\square$$

无穷级数形式

设 $\xi_i,\eta_i,i=1,2,\dots,n$ 同为实数或复数，$1\geqslant p<+\infty$，则有如下不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{+\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{+\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{+\infty}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proof. 证明过程与有穷级数几乎一样，只是把求和中的 n 改为 $+\infty$ 的区别。 □

18.4.2　积分形式的 Minkowski 不等式

Theorem 18.12. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一个测度空间，$1\leqslant p<+\infty$，$E\in\mathscr{F}$，$f,g\in L_p(E)$，则有如下不等式：

$$\left[\int_E|f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\int_E|f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_E|g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

且：

1. $p=1$ 时等号成立当且仅当 $fg\geqslant 0$ *a.e.* 于 E；

2. $p>1$ 时等号成立当且仅当存在不全为 0 的 $\alpha,\beta\geqslant 0$ 使得 $\alpha f=\beta g$。

Proof. **(1)** $p=1$：由绝对值的三角不等式以及性质 13.4.2(6) 直接可得。等号成立当且仅当 $f(x)g(x)\geqslant 0$，考虑到性质 13.4.2(8)，只要 $f(x)g(x)\geqslant 0$ a.e. 于 E 即可。

(2) $p>1$：当 $|f(x)+g(x)|=0$ a.e. 于 E 时，由性质 13.4.2(10) 可知 $\left[\int_E|f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}=0$，根据性质 13.4.2(2) 可得结论成立。此时由性质 13.4.2(2)(10) 可知等号成立当且仅当 $f=0$ a.e. 于 E 且 $g=0$ a.e. 于 E，该条件可推出存在不全为 0 的 $\alpha,\beta\geqslant 0$ 使得 $\alpha f=\beta g$ a.e. 于 E。

当 $|f(x)+g(x)|=0$ 不 a.e. 于 E 时，取 $q\in\mathbb{R}$ 且 $q>1$，满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，由 Holder 不等式（即不等式 9）：

$$\int_E|f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}\mu\leqslant\left[\int_E|f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_E|f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\int_E|g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}\mu\leqslant\left[\int_E|g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_E|f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}$$

注意到 $p+q=pq$，所以 $q(p-1)=qp-q=p$，因此由绝对值的三角不等式以及性质 13.4.2(6) 可得：

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)+g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_E |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int_E \Big[|f(x)|+|g(x)|\Big]\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_E |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu + \int_E |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \left\{\left[\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_E |g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\right\}\left[\int_E |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

两边同除 $\left[\int_E |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}$ 即有：

$$\left[\int_E |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_E |g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

由放缩的过程注意到等号成立当且仅当 Holder 不等式取等且 $f(x)g(x)\geqslant 0$ a.e. 于 E，而 Holder 不等式取等当且仅当存在不全为 0 的 $\alpha,\beta\geqslant 0$ 和不全为 0 的 $\gamma,\delta\geqslant 0$ 使得：

$$\alpha|f|^p=\beta|f+g|^p,\ \gamma|g|^p=\delta|f+g|^p \text{ a.e. 于 } E$$

因为此时 $f(x),g(x)$ 同号 a.e. 于 E，所以也即存在不全为 0 的 $\alpha,\beta\geqslant 0$ 和不全为 0 的 $\gamma,\delta\geqslant 0$ 使得：

$$\alpha f=\beta(f+g),\ \gamma g=\delta(f+g) \text{ a.e. 于 } E$$

该条件可推出存在不全为 0 的 $\alpha,\beta\geqslant 0$ 使得 $\alpha f=\beta g$ a.e. 于 E。

接下来证明存在不全为 0 的 $\alpha,\beta\geqslant 0$ 使得 $\alpha f=\beta g$ a.e. 于 E 也可推出等式成立。仅对 $\alpha\neq 0$ 的情况进行证明，$\beta\neq 0$ 的情况可对称得到。

(1) $|f(x)+g(x)|=0$ a.e. 于 E：此时可得到 $g=0$ a.e. 于 E，进而得到 $f=0$ a.e. 成立。由性质 13.4.2(10) 可得：

$$\left[\int_E |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_E |g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} = 0$$

(2) $|f(x)+g(x)|=0$ 不 a.e. 于 E：此时可得到：

$$f=\frac{\beta}{\alpha}g \text{ a.e. 于 } E$$

于是由性质 13.4.2(6)(8) 可得：

$$\begin{aligned}\left[\int_E |f(x)+g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} &= \left[\int_E \left|\frac{\beta+\alpha}{\alpha}g(x)\right|^p \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{\beta+\alpha}{\alpha}\left[\int_E |g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{\beta}{\alpha}\left[\int_E |g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_E |g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\int_E \left|\frac{\beta}{\alpha}g(x)\right|^p \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_E |g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_E |g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

□

Theorem 18.13. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个测度空间，$1 \leqslant p < +\infty$，$E \in \mathscr{F}$。对任意的 $f, g \in L_p(E)$，在 $L_p(E)$ 空间中引入范数：

$$||f||_p = \left[\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

则积分形式的 *Minkowski* 不等式可写为：

$$||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p$$

Theorem 18.14. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个测度空间，$E \in \mathscr{F}$。在 $L_\infty(E)$ 中定义范数为元素的无穷范数，则有：

$$||f+g||_\infty \leqslant ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Proof. 由绝对值的三角不等式以及上确界的性质：

$$\sup_{x \in E \setminus e} |f(x)+g(x)| \leqslant \sup_{x \in E \setminus e} [|f(x)|+|g(x)|] \leqslant \sup_{x \in E \setminus e} |f(x)| + \sup_{x \in E \setminus e} |g(x)|$$

由下确界的性质即可得：

$$||f+g||_\infty \leqslant ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

□

Theorem 18.15. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个测度空间，$1 \leqslant p \leqslant +\infty$，$E \in \mathscr{F}$。对任意的 $f, g \in L_p(E)$，有：

$$||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p, \quad \Big|||f||_p - ||g||_p\Big| \leqslant ||f-g||_p$$

Proof. 第一式由不等式 15和不等式 11直接推出。第二式只需注意到：

$$\begin{aligned}||f||_p &= ||f-g+g||_p \leqslant ||f-g||_p + ||g||_p \\ ||g||_p &= ||g-f+f||_p \leqslant ||g-f||_p + ||f||_p = ||f-g||_p + ||f||_p\end{aligned}$$

□

18.5 Something else

Theorem 18.16. 对于所有 $a, b \in \mathbb{R}$ 及 $p \geq 1$，有不等式

$$|a+b|^p \leqslant \Big(|a|+|b|\Big)^p \leqslant 2^{p-1}\Big(|a|^p+|b|^p\Big).$$

Proof. 第一式显然成立。令 $a, b \in \mathbb{R}$，并设 $x = |a|$ 和 $y = |b|$（显然 $x, y \geqslant 0$）。考虑函数

$$f(t) = t^p, \quad t \geq 0$$

由于 $p \geqslant 1$，函数 $f(t)$ 是凸函数。根据凸函数的定义，对于任意 $x, y \geq 0$ 和 $\lambda \in [0,1]$ 有

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

取 $\lambda = \frac{1}{2}$，则上式变为：

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^p \leqslant \frac{x^p + y^p}{2}$$

将上式两边同时乘以 2^p，得到

$$(x+y)^p \leqslant 2^{p-1}\Big(x^p + y^p\Big)$$

将 $x = |a|$ 和 $y = |b|$ 代回，即得所需的不等式。 $\square$

18.5.1 Chebyshev 不等式

Theorem 18.17. 设 X 是一个随机变量，其数学期望和方差都存在，则对任意的 $\varepsilon > 0$，有：

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Proof. 设 X 的分布函数为 $F(x)$，则：

$$\begin{aligned}
P(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon) &= \int_{\{x:|x-\mathrm{E}(X)|\geqslant\varepsilon\}} \mathrm{d}F(x) \\
&\leqslant \int_{\{x:|x-\mathrm{E}(X)|\geqslant\varepsilon\}} \frac{|x-\mathrm{E}(X)|^2}{\varepsilon^2}\,\mathrm{d}F(x) \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty} |x-\mathrm{E}(X)|^2\,\mathrm{d}F(x) \\
&= \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

$\square$

第六部分

统计学

Chapter 19

正态分布与三大抽样分布

19.1　多元正态分布

19.1.1　多元正态分布的定义

Definition 19.1. 若一个随机向量 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 满足以下概率密度函数：

$$p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})}$$

则称其为一个正态随机向量，记作 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu},\ \Sigma)$。其中，$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$，$\Sigma \in M_n(\mathbb{R})$ 且 $\Sigma > 0$。

Theorem 19.1. 对于正态随机向量的概率密度函数，$\boldsymbol{\mu}$ 和 Σ 分别是 $\mathbf{X}$ 的均值向量和协方差矩阵。

Proof. 令：

$$\mathbf{Y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$$

则有 $\mathbf{X} = \Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu}$，由求随机变量函数的分布中的变量变换法可知[1]：

写完变量变换法链接过来

$$p(\mathbf{Y}) = p(\Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu})|\mathbf{J}|$$

其中 $\mathbf{J}$ 为变换的 Jacobi 行列式：

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial \mathbf{Y}_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial \mathbf{Y}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \mathbf{X}_n}{\partial \mathbf{Y}_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathbf{X}_n}{\partial \mathbf{Y}_n} \end{vmatrix} = \det \Sigma^{\frac{1}{2}} = (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}$$

那么 $\mathbf{Y}$ 的概率密度函数为：

$$p(\mathbf{Y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mathbf{Y}_i^2}{2}}$$

[1]这是由于 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 的变换是一个线性变换，线性变换让 $\mathbf{X}$ 关于 $\mathbf{Y}$ 有连续偏导数，同时这个线性变换可逆，满足变量变换法的两大条件。

对 $\mathbf{Y}_i$ 求边缘分布可得 $\mathbf{Y}_i \sim N(0,\ 1)$，并且可以发现 $\mathbf{Y}$ 的 n 个分量的联合密度等于每个分量密度函数的乘积，于是 $\mathbf{Y}$ 的各个分量相互独立，所以有：

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{0},\ Cov(\mathbf{Y}) = \mathbf{I}$$

结合 $\mathbf{Y}$ 与 $\mathbf{X}$ 的关系，由性质 14.4.1可得：

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu},\ Cov(\mathbf{X}) = \Sigma \qquad \square$$

Definition 19.2. 正态随机向量 $\mathbf{X}$ 的概率密度函数也可写作：

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det\Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}]}$$

Proof. 只需注意到二次型的迹就是自身以及性质 .3.2：

$$(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) = \operatorname{tr}[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})] = \operatorname{tr}[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}] \qquad \square$$

多元正态分布的等价定义

Definition 19.3. $\mathbf{X}$ 为 n 维随机向量。若存在矩阵 $A \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ 使得 $\mathbf{X} = A\mathbf{U} + \boldsymbol{\mu}$，其中 $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_r)^T$，$\mathbf{U}_i \sim N(0,1)$ 且互相独立，$\boldsymbol{\mu}$ 为 n 维非随机实向量，则称 $\mathbf{X}$ 为服从均值为 $\boldsymbol{\mu}$、协方差矩阵为 $\Sigma = AA^T$ 的多元正态向量，记为 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，其中 $\Sigma \geqslant 0$。若 $|\Sigma| = 0$，则称此时的分布为**奇异正态分布**。

Theorem 19.2. $\mathbf{X}$ 是一个随机向量，其协方差矩阵为正定矩阵，则 $\mathbf{X}$ 满足定义 *19.1*的充分必要条件是满足定义 *19.3*，即两种正态分布的定义在随机向量的协方差矩阵是正定矩阵的情形下是等价的。

Proof. **(1) 充分性：** 设 $\mathbf{X}$ 满足定义 19.3，因为 $\mathbf{U}$ 中的元素服从标准正态分布且彼此独立，所以有：

$$\mathrm{E}(\mathbf{U}) = \mathbf{0},\ \mathrm{Cov}(\mathbf{U}) = I$$

同时：

$$p(\mathbf{U}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mathbf{U}_i^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}[\det\mathrm{Cov}(\mathbf{U})]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{U}^T[\mathrm{Cov}(\mathbf{U})]^{-1}\mathbf{U}}$$

期望的性质

因为 $\mathbf{X} = A\mathbf{U} + \boldsymbol{\mu}$，由和性质 14.4.1(3)(4)(5) 可得：

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu},\ \mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = AA^T$$

写完矩阵的秩做链接

因为 $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) > 0$，由定理 2.42可得 $\operatorname{rank}[\mathrm{Cov}(\mathbf{X})] = n$。因为 $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$，所以 $\operatorname{rank}(A) = n$，即 $r = n$，A 是一个 n 阶可逆矩阵，于是 $\mathbf{U} = A^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})$。由求随机变量函数的分布中的变量变换法可知：

写完变量变换法链接过来

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{X}) &= P[A^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})]|\mathbf{J}| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\{\det \mathrm{Cov}[A^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})]\}^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad \cdot e^{-\frac{1}{2}[A^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})]^T\{\mathrm{Cov}[A^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})]\}^{-1}[A^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})]}|\det A^{-1}| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}[\det \mathrm{Cov}(\mathbf{X})]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T[\mathrm{Cov}(\mathbf{X})]^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})}
\end{aligned}
$$

即 $\mathbf{X}$ 满足定义 19.4。

(2) 必要性： 设 $\mathbf{X}$ 满足定义 19.1，此时只要选择 $A = \Sigma^{\frac{1}{2}}$ 即可得到 $\mathbf{X}$ 满足定义 19.3。 □

19.1.2 多元正态分布的性质

Theorem 19.3. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，$\Sigma \geqslant 0$，$B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，$c \in \mathbb{R}^n$，则 $\mathbf{Y} = B\mathbf{X} + c \sim N(B\boldsymbol{\mu} + c, B\Sigma B^T)$。

Proof. 因为 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，由定义 19.3可得，存在 $A \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$，$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ 使得：

$$\mathbf{X} = A\mathbf{U} + \boldsymbol{\mu},\ AA^T = \Sigma,\ U \sim N(\mathbf{0}, I)$$

于是：

$$\mathbf{Y} = B(A\mathbf{U} + \boldsymbol{\mu}) + c = BA\mathbf{U} + B\boldsymbol{\mu} + c$$

注意到 $BA(BA)^T = BAA^TB^T = B\Sigma B^T$，由定义 19.3可得 $\mathbf{Y} \sim N(B\boldsymbol{\mu} + c, B\Sigma B^T)$。 □

Corollary 19.1. 由上述定理可以得到如下推论：

1. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，$\Sigma > 0$，则 $\mathbf{Y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X} \sim N_n(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\mu}, I_n)$；
2. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 I_n)$，$Q$ 为正交矩阵，则 $Q\mathbf{X} \sim N_n(Q\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 I_n)$；
3. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，$c \in \mathbb{R}^n$，则 $c^T\mathbf{X} \sim N(c^T\boldsymbol{\mu}, c^T\Sigma c)$；
4. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$，$\Sigma = (\sigma_{ij})$，则 $\mathbf{X}_i \sim N(\mu_i, \sigma_{ii})$，$i = 1, 2, \ldots, n$。
5. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$，$\Sigma = (\sigma_{ij})$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$，则有 $(\mathbf{X}_{i_1}, \mathbf{X}_{i_2}, \ldots, \mathbf{X}_{i_k})^T \sim N(\boldsymbol{\mu}_0, \Sigma_0)$，其中：

$$
\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{pmatrix} \mu_{i_1} \\ \mu_{i_2} \\ \vdots \\ \mu_{i_k} \end{pmatrix},\quad
\Sigma_0 = \begin{pmatrix}
\sigma_{i_1i_1} & \sigma_{i_1i_2} & \cdots & \sigma_{i_1i_k} \\
\sigma_{i_2i_1} & \sigma_{i_2i_2} & \cdots & \sigma_{i_2i_k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sigma_{i_ki_1} & \sigma_{i_ki_2} & \cdots & \sigma_{i_ki_k}
\end{pmatrix}
$$

Proof. (1) 由性质 .3.5(3) 可知 $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ 是对称阵，所以：

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma(\Sigma^{-\frac{1}{2}})^T = \Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}} = I_n$$

(2) 显然：

$$Q\sigma^2 I Q^T = \sigma^2 Q Q^T = \sigma^2 I_n$$

(3) 可直接得到；

(4) 对 $\mathbf{X}_i$，取 $c = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$，其中 c 的第 i 位为 1 其余全是 0，于是：

$$c^T \mathbf{X} = \mathbf{X}_i,\ c^T \boldsymbol{\mu} = \mu_i,\ c^T \Sigma c = \sigma_{ii}$$

所以 $\mathbf{X}_i \sim N(\mu_i, \sigma_{ii}),\ i = 1, 2, \ldots, n$。

(5) 取：

$$A = \begin{pmatrix} e_{i_1}^T \\ e_{i_2}^T \\ \vdots \\ e_{i_k}^T \end{pmatrix}$$

其中 e_{i_j} 为单位列向量，只在第 i_j 位取 1，其余位置上元素为 0，$j = 1, 2, \ldots, k$。于是有：

$$A\boldsymbol{\mu} = (\mu_{i_i}, \mu_{i_2}, \ldots, \mu_{i_k})^T = \mu_0$$

$$A\Sigma A^T = \begin{pmatrix} e_{i_1}^T \Sigma e_{i_1} & e_{i_1}^T \Sigma e_{i_2} & \cdots & e_{i_1}^T \Sigma e_{i_k} \\ e_{i_2}^T \Sigma e_{i_1} & e_{i_2}^T \Sigma e_{i_2} & \cdots & e_{i_2}^T \Sigma e_{i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{i_k}^T \Sigma e_{i_1} & e_{i_k}^T \Sigma e_{i_2} & \cdots & e_{i_k}^T \Sigma e_{i_k}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{i_1 i_1} & \sigma_{i_1 i_2} & \cdots & \sigma_{i_1 i_k} \\ \sigma_{i_2 i_1} & \sigma_{i_2 i_2} & \cdots & \sigma_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{i_k i_1} & \sigma_{i_k i_2} & \cdots & \sigma_{i_k i_k} \end{pmatrix} = \Sigma_0$$

由上一定理可得 $(\mathbf{X}_{i_1}, \mathbf{X}_{i_2}, \ldots, \mathbf{X}_{i_k})^T \sim N(\boldsymbol{\mu}_0, \Sigma_0)$。 □

Theorem 19.4. 设 $\mathbf{X}$ 是一个随机向量，则 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ 当且仅当它的特征函数为：

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \exp\left(it^T \boldsymbol{\mu} - \frac{t^T \Sigma t}{2}\right),\ t \in \mathbb{R}^n$$

Proof. 若 $X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，则由定义 19.3 可知，存在矩阵 $A \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ 使得 $\mathbf{X} = A\mathbf{U} + \boldsymbol{\mu}$，其中 $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_r)^T$，$\mathbf{U}_i \sim N(0, 1)$ 且互相独立，$\boldsymbol{\mu}$ 为 n 维非随机实向量，$\Sigma = AA^T$。由性质 14.8.1(5) 可得：

$$\varphi_{\mathbf{U}}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\mathbf{U}_i}(t_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{t_i^2}{2}} = e^{-\frac{t^T t}{2}},\ t \in \mathbb{R}^n$$

于是：

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{X}}(t) &= \mathrm{E}(e^{it^T \mathbf{X}}) = \mathrm{E}[e^{it^T (A\mathbf{U} + \boldsymbol{\mu})}] = e^{it\boldsymbol{\mu}} \mathrm{E}(e^{it^T A\mathbf{U}}) \\ &= e^{it^T \boldsymbol{\mu}} \varphi_{\mathbf{U}}(A^T t) = e^{it^T \boldsymbol{\mu}} e^{-\frac{t^T A A^T t}{2}} = e^{it^T \boldsymbol{\mu}} e^{-\frac{t^T \Sigma t}{2}} = \exp\left(it^T \boldsymbol{\mu} - \frac{t^T \Sigma t}{2}\right) \end{aligned}$$

由性质 14.8.1(6)，概率分布与特征函数之间是一一对应的关系，于是结论成立。 □

Theorem 19.5. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量，则 $\mathbf{X}$ 服从 n 维多元正态分布的充分必要条件为对于任意的 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，$\alpha^T \mathbf{X}$ 服从正态分布。

Proof. **(1) 必要性：**由推论 19.1(3) 直接得到。

(2) 充分性：由定理 19.4可知此时 $\alpha^T\mathbf{X}$ 的特征函数为：

$$\varphi_{\alpha^T\mathbf{X}}(t) = \exp\left(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right)$$

其中 μ 和 σ^2 分别为 $\alpha^T\mathbf{X}$ 的均值与方差。由和性质 14.4.1(3) 可得： 期望的性质

$$\mu = \mathrm{E}(\alpha^T\mathbf{X}) = \alpha^T\,\mathrm{E}(\mathbf{X}),\ \sigma^2 = \mathrm{Cov}(\alpha^T\mathbf{X}) = \alpha^T\,\mathrm{Cov}(\mathbf{X})\alpha$$

于是有：

$$\varphi_{\alpha^T\mathbf{X}}(t) = \exp\left(it\alpha^T\,\mathrm{E}(\mathbf{X}) - \frac{t\alpha^T\,\mathrm{Cov}(\mathbf{X})\alpha t}{2}\right)$$

由 α 的任意性，上式可写作：

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\beta) = \exp\left(i\beta^T\,\mathrm{E}(\mathbf{X}) - \frac{\beta^T\,\mathrm{Cov}(\mathbf{X})\beta}{2}\right)$$

由性质 14.8.1(6) 和定理 19.4可知 $\mathbf{X}$ 服从多元正态分布。 □

Lemma 19.1. 设 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 分别为 m 维正态随机向量和 n 维正态随机向量且相互独立，则：

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix} \sim N_{m+n}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathrm{Cov}(\mathbf{Y})\end{pmatrix}\right)$$

Proof. 由定义 19.1即可得到。 □

Theorem 19.6. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_{\mathbf{X}})$ 和 $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\nu}, \Sigma_{\mathbf{Y}})$ 且相互独立，则 $\mathbf{X}+\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\nu}, \Sigma_{\mathbf{X}}+\Sigma_{\mathbf{Y}})$。

Proof. 因为：

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y} = \begin{pmatrix}I_n & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix}$$

由引理 19.1和定理 19.3即可得到结论。 □

Theorem 19.7. 设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，其中：

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}\end{pmatrix}$$

则对任意的 $m \leqslant n$，$\mathbf{X} = (\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_m})^T$，$\mathbf{X_j}$ 是 r_j 维随机向量，$\sum\limits_{j=1}^{m} r_j = n$，若 $\mathbf{X_j}$ 不相关，则 $\mathbf{X_j}$ 相互独立，$j = 1, 2, \ldots, m$。即对于服从正态分布的随机变量或随机向量而言，不相关和独立等价。

Proof. 由推论 19.1(5) 可知 $\mathbf{X_j}=(X_{j1},X_{j2},\dots,X_{jr_j})^T\sim N_{r_j}(\mu_j,\Sigma_j)$。由定理 19.4可知：

$$\varphi_{\mathbf{X_j}}(t_j)=\exp\left(it_j^T\mu_j-\frac{t_j^T\Sigma_jt_j}{2}\right),\ t_j\in\mathbb{R}^{r_j}$$

将 $\boldsymbol{\mu}$ 和 Σ 写成分块的形式：

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_m\end{pmatrix},\quad\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}&\cdots&\Sigma_{1m}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}&\cdots&\Sigma_{2m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\Sigma_{m1}&\Sigma_{m2}&\cdots&\Sigma_{mm}\end{pmatrix}$$

因为 $\mathbf{X_j}$ 不相关，所以 $\mathrm{Cov}(\mathbf{X_j},\mathbf{X_k})=\Sigma_{jk}=\mathbf{0}$，$j\neq k$，$j,k=1,2,\dots,m$。于是：

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_1&\mathbf{0}&\cdots&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\Sigma_2&\cdots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\cdots&\Sigma_m\end{pmatrix}$$

由定理 19.4可得：

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{X}}(t)&=\exp\left(it\boldsymbol{\mu}-\frac{t^T\Sigma t}{2}\right)=\exp\left[i\sum_{j=1}^m t_j^T\mu_j-\frac{\sum_{j=1}^m t_j^T\Sigma_jt_j}{2}\right]\\&=\prod_{j=1}^m\exp\left(it_j\mu_j-\frac{t_j^T\Sigma_jt_j}{2}\right)=\prod_{j=1}^m\varphi_{\mathbf{X_j}}(t_j)\end{aligned}$$

由性质 14.8.1(5) 可知 $\mathbf{X_j}$ 相互独立，$j=1,2,\dots,m$。 □

正态随机向量的二次型

Theorem 19.8. 设 $\mathbf{X}\sim N_n(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$，$\Sigma>0$，$A$ 为 n 阶非随机实对称阵，则：

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}^TA\mathbf{X})=\boldsymbol{\mu}^TA\boldsymbol{\mu}+\mathrm{tr}(A\Sigma),\ \mathrm{Var}(\mathbf{X}^TA\mathbf{X})=2\,\mathrm{tr}[(A\Sigma)^2]+4\boldsymbol{\mu}^TA\Sigma A\boldsymbol{\mu}$$

Proof. 期望可直接由定理 14.3得到。记 $\mathbf{Y}=\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}$，由推论 19.1(1) 可知 $\mathbf{Y}\sim N_n(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\mu},I_n)$，根据定理 19.7，$\mathbf{Y}$ 的各分量相互独立。注意到 $\mathbf{Y}$ 的各分量的三阶中心矩和四阶中心矩分别为 0 和 3，由定理 14.4、性质 .3.5(3) 和性质 .3.2(3) 可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathbf{X}^TA\mathbf{X})&=\mathrm{Var}(\mathbf{Y}^T\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y})\\&=3\sum_{i=1}^n(\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}})_{ii}^2+2\,\mathrm{tr}(\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}})-3\sum_{i=1}^n(\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}})_{ii}^2\\&\quad+4\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\mu}\\&=2\,\mathrm{tr}(\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma A\Sigma^{\frac{1}{2}})+4\boldsymbol{\mu}^TA\Sigma A\boldsymbol{\mu}\\&=2\,\mathrm{tr}(A\Sigma A\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}})+4\boldsymbol{\mu}^TA\Sigma A\boldsymbol{\mu}\\&=2\,\mathrm{tr}[(A\Sigma)^2]+4\boldsymbol{\mu}^TA\Sigma A\boldsymbol{\mu}\end{aligned}$$

□

Theorem 19.9. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，$\Sigma > 0$，则 $(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_n$。

Proof. 因为 $\Sigma > 0$，所以存在 $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$。由推论 19.1(1) 可得：

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \sim N_n(\mathbf{0}, I_n)$$

于是根据性质 .3.5(1) 和 (3) 可得：

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) &= (\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \\ &= (\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T(\Sigma^{-\frac{1}{2}})^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \\ &= [\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})]^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_n\end{aligned}$$

□

Theorem 19.10. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, I_n)$，$A \in M_n(K)$ 是一个非随机实对称矩阵，则 $\mathbf{X}^TA\mathbf{X} \sim \chi^2_{r,\boldsymbol{\mu}^TA\boldsymbol{\mu}}$ 的充分必要条件为 A 是一个幂等阵且 $\mathrm{rank}(A) = r$。

Proof. **(1) 充分性：**因为 A 是一个幂等阵，由性质 2.8.1(1) 可知 A 的特征值只能为 0 或 1。根据性质 2.6.2(3) 可知存在正交矩阵 Q 使得：

$$A = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q$$

令 $\mathbf{Y} = Q\mathbf{X}$，由推论 19.1(2) 可知 $\mathbf{Y} \sim N_n(Q\boldsymbol{\mu}, I_n)$。对 $\mathbf{Y}$ 和 Q 进行分块：

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix}\mathbf{Y_1} \\ \mathbf{Y_2}\end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix}Q_1 \\ Q_2\end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{Y_1}$ 为 r 维随机向量，Q_1 为 $r \times n$ 矩阵，所以：

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^TA\mathbf{X} &= \mathbf{X}^TQ^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q\mathbf{X} = \mathbf{X}^TQ^T\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q\mathbf{X} \\ &= \mathbf{Y}^T\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix}\mathbf{Y_1}^T & \mathbf{Y_2}^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{Y_1} \\ \mathbf{Y_2}\end{pmatrix} = \mathbf{Y_1}^T\mathbf{Y_1} \sim \chi^2_{r,\lambda}\end{aligned}$$

其中：

$$\lambda = (Q_1\boldsymbol{\mu})^TQ_1\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^TQ_1^TQ_1\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^TA\boldsymbol{\mu}$$

这是因为推论 19.1(5) 和：

$$A = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q = Q^T\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix}Q_1^T & Q_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1 \\ Q_2\end{pmatrix} = Q_1^TQ_1$$

(2) 必要性：设 $\mathrm{rank}(A) = t$。因为 A 是 Hermitian 矩阵，由性质 2.6.2(3) 可知存在正交阵 Q 使得：

$$A = Q^{-1}\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q$$

其中 $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t\}$，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ 是 A 的非零特征值。若能证得 $\lambda_i = 1$，$i = 1, 2, \ldots, t$ 且 $t = r$，则 A 是一个幂等阵且 $\mathrm{rank}(A) = r$。注意到：

$$\mathbf{X}^T A \mathbf{X} = \mathbf{X}^T Q^T \begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q \mathbf{X}$$

令 $\mathbf{Y} = Q\mathbf{X}$，由推论 19.1(2) 可知 $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n) \sim N_n(Q\boldsymbol{\mu}, I_n)$，根据定理 19.7可得 $\mathbf{Y}_j$ 之间彼此独立。令 $c = Q\boldsymbol{\mu} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$，由推论 19.1(5) 可知 $\mathbf{Y}_j \sim N(c_j, 1)$。而：

$$\mathbf{X}^T A \mathbf{X} = \mathbf{Y}^T \begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{Y} = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j \mathbf{Y}_j^2$$

由性质 14.8.1(4) 和性质 19.2.1(3) 可知：

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{X}^T A \mathbf{X}}(t) &= \prod_{j=1}^{t} \varphi_{\lambda_j \mathbf{Y}_j^2}(t) = \prod_{j=1}^{t} (1 - 2it)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ \frac{i\lambda_j t c_j^2}{1 - 2i\lambda_j t} \right\} \\ &= (1 - 2it)^{-\frac{t}{2}} \prod_{j=1}^{t} \exp\left\{ \frac{i\lambda_j t c_j^2}{1 - 2i\lambda_j t} \right\} \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{X}^T A \mathbf{X} \sim \chi^2_{r, \boldsymbol{\mu}^T A \boldsymbol{\mu}}$，所以：

$$\varphi_{\mathbf{X}^T A \mathbf{X}}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{r}{2}} \exp\left\{ \frac{it\boldsymbol{\mu}^T A \boldsymbol{\mu}}{1 - 2it} \right\}$$

由性质 14.8.1(6) 可知：

$$(1 - 2it)^{-\frac{t}{2}} \prod_{j=1}^{t} \exp\left\{ \frac{i\lambda_j t c_j^2}{1 - 2i\lambda_j t} \right\} = (1 - 2it)^{-\frac{r}{2}} \exp\left\{ \frac{it\boldsymbol{\mu}^T A \boldsymbol{\mu}}{1 - 2it} \right\}$$

所以 $t = r$，同时有：

$$\sum_{j=1}^{t} \frac{i\lambda_j t c_j^2}{1 - 2i\lambda_j t} = \frac{it\boldsymbol{\mu}^T A \boldsymbol{\mu}}{1 - 2it}$$

即：

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{t} \frac{i\lambda_j t c_j^2}{1 - 2i\lambda_j t} &= \frac{1}{1 - 2it} it\boldsymbol{\mu}^T Q^T \begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q\boldsymbol{\mu} \\ \sum_{j=1}^{t} \frac{\lambda_j c_j^2}{1 - 2i\lambda_j t} &= \frac{1}{1 - 2it} c^T \begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} c \\ \sum_{j=1}^{t} \frac{\lambda_j c_j^2}{1 - 2i\lambda_j t} &= \frac{1}{1 - 2it} \sum_{j=1}^{t} \lambda_j c_j^2 \\ \frac{\lambda_j c_j^2}{1 - 2i\lambda_j t} &= \frac{\lambda_j c_j^2}{1 - 2it},\ j = 1, 2, \ldots, t \end{aligned}$$

所以 $\lambda_j = 1$。 □

Corollary 19.2. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，$\Sigma > 0$，$A \in M_n(K)$ 是一个非随机实对称矩阵，则 $\mathbf{X}^T A\mathbf{X} \sim \chi^2_{r,\boldsymbol{\mu}^T A\boldsymbol{\mu}}$ 的充分必要条件为 $A\Sigma A = A$，$\mathrm{rank}(A) = r$。

Proof. 因为 $\Sigma > 0$，所以存在 $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$。考虑随机向量 $\mathbf{Y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}$，由定理 19.3可知 $\mathbf{Y} \sim N_n(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\mu}, I_n)$。注意到：

$$\mathbf{X}^T A\mathbf{X} = \mathbf{X}^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}$$

由性质 .3.5(3) 可得：

$$\mathbf{X}^T A\mathbf{X} = \mathbf{X}^T(\Sigma^{-\frac{1}{2}})^T\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X} = \mathbf{Y}\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y}$$

由定理 19.10可得 $\mathbf{Y}\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y} \sim \chi^2_{r,\boldsymbol{\mu}^T A\boldsymbol{\mu}}$ 的充分必要条件为 $\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}$ 是一个对称阵且：

$$(\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}})^2 = \Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}},\ \mathrm{rank}(\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}) = r,\ (\Sigma^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^T A\boldsymbol{\mu}$$

第三式显然成立。因为 $\Sigma > 0$，所以 $\mathrm{rank}(\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}) = \mathrm{rank}(A)$。注意到：

$$\begin{aligned}(\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}})^2 = \Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}} &\Leftrightarrow \Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow \Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma A\Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow A\Sigma A = A\end{aligned}$$

□

Theorem 19.11. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, I_n)$，$A \in M_n(K)$ 是一个实对称矩阵，$B \in M_{m\times n}(K)$。若 $BA = \mathbf{0}$，则 $B\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{X}^T A\mathbf{X}$ 相互独立。

Proof. 因为 A 是一个实对称矩阵，由性质 2.6.2(3) 可知存在正交矩阵 Q 使得：

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$，$\lambda_i \neq 0$，$i = 1, 2, \ldots, r$，$\mathrm{rank}(A) = r$。因为 $BA = \mathbf{0}$，所以有 $BQQ^T AQ = BAQ = \mathbf{0}$，于是：

$$BQ\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

设：

$$C = BQ = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

则：

$$BQ\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}\Lambda & \mathbf{0} \\ C_{21}\Lambda & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

于是有 $C_{11} = \mathbf{0}$，$C_{21} = \mathbf{0}$。对 C 和 Q 做对应分块：

$$C = BQ = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & C_1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}$$

于是：

$$B = CQ^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} = C_1 Q_2^T$$

而：

$$A = Q\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q^T = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} = Q_1 \Lambda Q_1^T$$

记 $\mathbf{Y} = Q^T\mathbf{X}$，由推论 19.1(2) 可得：

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y_1} \\ \mathbf{Y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^T\mathbf{X} \\ Q_2^T\mathbf{X} \end{pmatrix} \sim N_n(Q^T\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 I_n)$$

由定理 19.7可知 $\mathbf{Y_1}$ 与 $\mathbf{Y_2}$ 独立。因为：

$$B\mathbf{X} = C_1 Q_2^T \mathbf{X} = C_1 \mathbf{Y_2}$$
$$\mathbf{X}^T A \mathbf{X} = \mathbf{X}^T Q_1 \Lambda Q_1^T \mathbf{X} = \mathbf{Y_1}^T \Lambda \mathbf{Y_1}$$

所以 $B\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{X}^T A\mathbf{X}$ 独立。 □

Corollary 19.3. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，$\Sigma > 0$，$A$ 为 n 阶对称阵。若 $C\Sigma A = \mathbf{0}$，则 $C\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{X}^T A\mathbf{X}$ 独立。

Proof. □

Theorem 19.12. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, I_n)$，$A, B$ 为 n 阶对称阵。若 $AB = \mathbf{0}$，则 $\mathbf{X}^T A\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{X}^T B\mathbf{X}$ 独立。

Proof. 因为 $AB = \mathbf{0}$ 且 A, B 都是对称阵，所以 $BA = B^T A^T$ □

19.1.3 矩阵正态分布的定义

密度函数定义

Definition 19.4. 若 $m \times n$ 随机矩阵 $\mathbf{X}$ 满足以下概率密度函数：

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{mn}{2}} (\det U)^{\frac{n}{2}} (\det V)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}[V^{-1}(X-M)^T U^{-1}(X-M)]}$$

其中，$M \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，$U \in M_m(\mathbb{R})$，$V \in M_n(\mathbb{R})$，$U, V > 0$。此时称 $\mathbf{X}$ 服从矩阵正态分布，记作 $\mathbf{X} \sim MN(M, U, V)$。

向量化定义

Definition 19.5. 若随机矩阵 $\mathbf{X}$ 满足 $\operatorname{vec}(\mathbf{X}) \sim N(\operatorname{vec}(M), V \otimes U)$，其中，$M \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，$U \in M_m(\mathbb{R})$，$V \in M_n(\mathbb{R})$，$U, V \geqslant 0$。此时称 $\mathbf{X}$ 服从矩阵正态分布，记作 $\mathbf{X} \sim MN(M, U, V)$。

Theorem 19.13. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 $m \times n$ 随机矩阵，其行协方差矩阵 U 和列协方差矩阵 V 都是正定矩阵，则 $\mathbf{X}$ 满足定义 *19.4*的充分必要条件为满足定义 *19.5*。

Proof. 由性质 .3.2(3)、性质 .3.3(1)(2)、性质 .3.1(2)(3) 可得：

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}[V^{-1}(\mathbf{X}-M)^T U^{-1}(\mathbf{X}-M)] &= \operatorname{tr}[(\mathbf{X}-M)^T U^{-1}(\mathbf{X}-M)V^{-1}] \\
&= \operatorname{vec}(\mathbf{X}-M)^T \operatorname{vec}[U^{-1}(\mathbf{X}-M)V^{-1}] \\
&= \operatorname{vec}(\mathbf{X}-M)^T[(V^{-1})^T \otimes U^{-1}] \operatorname{vec}(\mathbf{X}-M) \\
&= \operatorname{vec}(\mathbf{X}-M)^T[(V^T)^{-1} \otimes U^{-1}] \operatorname{vec}(\mathbf{X}-M) \\
&= \operatorname{vec}(\mathbf{X}-M)^T(V^{-1} \otimes U^{-1}) \operatorname{vec}(\mathbf{X}-M) \\
&= [\operatorname{vec}(\mathbf{X})-\operatorname{vec}(M)]^T(V\otimes U)^{-1}[\operatorname{vec}(\mathbf{X})-\operatorname{vec}(M)]
\end{aligned}$$

因为 $\det(V\otimes U)=(\det V)^m(\det U)^n$，所以 $(\det U)^{\frac{n}{2}}(\det V)^{\frac{m}{2}}$ 可化作 $[\det(V\otimes U)]^{\frac{1}{2}}$。 □

需要补充证明，但这里涉及到了 Jordan 标准形，学完再来补。

Corollary 19.4. 如果正态随机矩阵 $\mathbf{X}\sim MN(M,U,V)$ 中的每个元素都服从标准正态分布，则 $M=\mathbf{0}$, $V\otimes U=I_{mn}$。

由此我们看到，M 就是正态随机矩阵 X 的均值矩阵，仍然不明确的是 U,V 到底是什么，只能说 $V\otimes U$ 对应着 X 被向量化后的协方差矩阵，那就先来研究一下 $\operatorname{Cov}(\mathbf{X}_{ij},\mathbf{X}_{kl})$ 到底对应着 $V\otimes U$ 中的哪个元素。联想正态随机向量中两个元素的协方差在协方差矩阵中的位置，我们需要找到 $\mathbf{X}_{ij}$ 和 $\mathbf{X}_{kl}$ 在 $\operatorname{vec}(\mathbf{X})$ 中的索引，注意到向量化算子 vec 是按列拉直，那么 $\mathbf{X}_{ij}$ 和 $\mathbf{X}_{kl}$ 分别在 $\operatorname{vec}(\mathbf{X})$ 的第 $(j-1)m+i$ 位和第 $(l-1)m+k$ 位，于是有：

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{X}_{ij},\mathbf{X}_{kl})=(V\otimes U)_{(j-1)s+i,(l-1)s+k}=V_{jl}U_{ik}$$

如果 U 是一个对角阵，那么 $i\neq k$ 时有 $U_{ik}=0$，就会导致：

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{X}_{ij},\mathbf{X}_{kl})=V_{jl}U_{ik}=0,\ i\neq k$$

这表明此时只要 X 中的元素处于不同行，它们就不相关。

如果 V 是一个对角阵，那么 $j\neq l$ 时有 $V_{jl}=0$，就会导致：

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{X}_{ij},\mathbf{X}_{kl})=V_{jl}U_{ik}=0,\ j\neq l$$

这表明此时只要 X 中的元素处于不同列，它们就不相关。

对于元素 $\mathbf{X}_{ij}$，有：

$$\operatorname{Var}(\mathbf{X}_{ij})=\operatorname{Cov}(\mathbf{X}_{ij},\mathbf{X}_{ij})=V_{jj}U_{ii}$$

这表明此时协方差由 $V_{jj}U_{ii}$ 控制。

对于同一行的元素，有：

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{X}_{ij},\mathbf{X}_{il})=V_{jl}U_{ii}$$

这表明此时协方差由 V_{jl} 控制。

对于同一列的元素，有：

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{X}_{ij},\mathbf{X}_{kj})=V_{jj}U_{ik}$$

这表明此时协方差由 U_{ik} 控制。

线性变换定义

Definition 19.6. $\mathbf{X}$ 为 $m\times n$ 随机矩阵。若存在矩阵 $A\in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{m\times p}(K)$ 使得 $\mathbf{X}=B\mathbf{Y}A^T+M$，其中 $\mathbf{Y}$ 是一个 $p\times q$ 随机矩阵，$\mathbf{Y}_{ij}\sim N(0,1)$ 且互相独立，$i=1,2,\dots,p$, $j=1,2,\dots,q$，$M\in M_{p\times q}(\mathbb{R})$，则称 $\mathbf{X}$ 服从矩阵正态分布，记作 $X\sim MN(M,U,V)$。其中，$U=BB^T$, $V=AA^T$。

Theorem 19.14. $\mathbf{X}$ 是一个 $m\times n$ 随机矩阵，则 $\mathbf{X}$ 满足定义 *19.5*的充分必要条件是满足定义 *19.6*。

Proof. **(1) 必要性：**设 $\mathbf{X}$ 满足定义 19.6，由 $\mathbf{Y}$ 的定义可知：

$$\mathrm{vec}(\mathbf{Y})\sim N_{pq}(\mathbf{0},I_{pq})$$

由性质 .3.3(1)(3) 可得：

$$\mathrm{vec}(\mathbf{X})=\mathrm{vec}(B\mathbf{Y}A^T+M)=\mathrm{vec}(B\mathbf{Y}A^T)+\mathrm{vec}(M)=(A\otimes B)\,\mathrm{vec}(\mathbf{Y})+\mathrm{M}$$

由性质 14.4.1(3) 和性质 .3.1(4)(2) 可得：

$$\mathrm{E}[\mathrm{vec}(\mathbf{X})]=\mathrm{E}[(A\otimes B)\,\mathrm{vec}(\mathbf{Y})+\mathrm{M}]=(A\otimes B)\,\mathrm{E}[\mathrm{vec}(\mathbf{Y})]+\mathrm{M}=\mathrm{M},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[\mathrm{vec}(\mathbf{X})]&=\mathrm{Cov}[(A\otimes B)\,\mathrm{vec}(\mathbf{Y})]\\&=(A\otimes B)\,\mathrm{Cov}[\mathrm{vec}(\mathbf{Y})](A\otimes B)^T\\&=(A\otimes B)I_{pq}(A^T\otimes B^T)\\&=AA^T\otimes BB^T.\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{vec}(\mathbf{X})=(A\otimes B)\,\mathrm{vec}(\mathbf{Y})+\mathrm{M}$，而 $\mathrm{vec}(\mathbf{Y})\sim N_{pq}(\mathbf{0},I_{pq})$，由定理 19.3可知：

$$\mathrm{vec}(\mathbf{X})\sim N(\mathrm{vec}(M),AA^T\otimes BB^T)$$

令 $V=AA^T$, $U=BB^T$，则有 $\mathrm{vec}(\mathbf{X})\sim N(\mathrm{vec}(M),V\otimes U)$，即 $\mathbf{X}$ 满足定义 19.5。

(2) 充分性：设 $\mathbf{X}$ 满足定义 19.5，因为 $U,V\geqslant 0$，所以存在 $U^{\frac{1}{2}}$ 和 $V^{\frac{1}{2}}$，令 $B=U^{\frac{1}{2}},A=V^{\frac{1}{2}}$，于是 $\mathrm{vec}(\mathbf{X})\sim N(\mathrm{vec}(M),V\otimes U)$ 可写作 $\mathrm{vec}(\mathbf{X})\sim N(\mathrm{vec}(M),AA^T\otimes BB^T)$。设 $\mathbf{Y}$ 是一个随机矩阵，其中的每一个元素都服从标准正态分布且互相独立，则 $\mathrm{vec}(\mathbf{X})=(A\otimes B)\,\mathrm{vec}(\mathbf{Y})+\mathrm{M}$。由性质 .3.3(1)(3) 可知：

$$\mathrm{vec}(\mathbf{X})=\mathrm{vec}(B\mathbf{Y}A^T+M)$$

于是 $\mathbf{X}=B\mathbf{Y}A^T+M$，即 $\mathbf{X}$ 满足定义 19.6。 □

19.1.4 矩阵正态分布的性质

Theorem 19.15. 设 $\mathbf{X}$ 为 $m\times n$ 随机矩阵且服从矩阵正态分布 $MN(M,U,V)$,$P\in M_{s\times m}(R)$, $Q\in M_{n\times t}(R)$，则 $P\mathbf{X}Q^T\sim$

Proof. 由定义 19.6可知 $\mathbf{X} = B\mathbf{Y}A^T + M$，于是：

$$PXQ^T = PB\mathbf{Y}A^TQ^T + PMQ^T$$

此时 $PBB^TP^T = PUP^T$, $QAA^TQ^T = QVQ^T$，由定义 19.6即可得到结论。 □

19.2 χ^2 分布，t 分布和 F 分布

19.2.1 χ^2 分布

Definition 19.7. 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, I_n)$，则随机变量 $\mathbf{Y} = X^TX$ 的分布称为自由度为 n、非中心参数为 $\lambda = \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu}$ 的 χ^2 分布，记为 $\mathbf{Y} \sim \chi^2_{n,\lambda}$。当 $\lambda = 0$ 时，称 $\mathbf{Y}$ 的分布为中心 χ^2 分布，记为 $Y \sim \chi^2_n$。

Property 19.2.1. χ^2 分布具有如下性质：

1. 设 $Y_i \sim \chi^2_{n_i,\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ 相互独立，则：

$$\sum_{i=1}^k Y_i \sim \chi^2_{n,\lambda}, \quad 其中 n = \sum_{i=1}^k n_i,\ \lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$$

2. 设 $Y \sim \chi^2_{n,\lambda}$，则 $\mathrm{E}(Y) = n + \lambda$, $\mathrm{Var}(Y) = 2n + 4\lambda$；

3. 设 $Y \sim \chi^2_{n,\lambda}$，$\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, I_n)$, $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$，则：

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{\frac{it\lambda}{1 - 2it}\right\}$$

Proof. (1) 设 $Y_i = \mathbf{X_i}^T\mathbf{X_i}$，其中 $\mathbf{X_i} \sim N_{n_i}(\boldsymbol{\mu_i}, I_{n_i})$。令 $\mathbf{X} = (\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_k})^T$，则有

$$\sum_{i=1}^k Y_i = \sum_{i=1}^k \mathbf{X_i}^T\mathbf{X_i} = (\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_k})(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_k})^T = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$$

因为 Y_i 相互独立，所以 $\mathbf{X_i}$ 也相互独立，于是 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, I_n)$，其中：

$$n = \sum_{i=1}^k n_i,\ \boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu_1}, \boldsymbol{\mu_2}, \ldots, \boldsymbol{\mu_n})^T$$

因此有：

$$\sum_{i=1}^k Y_i \sim \chi^2_{n,\lambda},\ \lambda = \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\mu_i}^T\boldsymbol{\mu_i} = \sum_{i=1}^k \lambda_i$$

(2) 因为 $Y \sim \chi^2_{n,\lambda}$，由定义可知 Y 可以表示为：

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2,\ X_i \sim N(\mu_i, 1),\ \sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \lambda$$

其中 X_i 相互独立。由性质 14.2.1(1) 可知：

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i^2)=\sum_{i=1}^{n}\{\mathrm{Var}(X_i)+[\mathrm{E}(X_i)]^2\}=\sum_{i=1}^{n}(1+\mu_i^2)=n+\lambda$$

因为 X_i 相互独立，由可知：

链接独立方差等于和

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)&=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i^2)=\sum_{i=1}^{n}\{\mathrm{E}(X_i^4)-[\mathrm{E}(X_i^2)]^2\}\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i^4)-\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{E}(X_i^2)]^2\end{aligned}$$

由性质 14.2.1(1) 可知：

$$\mathrm{E}(X_i^2)=\mathrm{Var}(X_i)+[\mathrm{E}(X_i)]^2=1+\mu_i^2$$

所以：

$$\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{E}(X_i^2)]^2=\sum_{i=1}^{n}(\mu_i^4+2\mu_i^2+1)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i^4+2\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2+n=\sum_{i=1}^{n}\mu_i^4+2\lambda+n$$

而：

$$\mathrm{E}(X_i^4)=\mu_i^4+6\mu_i^2+3$$

于是：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y)&=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i^4)-\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{E}(X_i^2)]^2\\&=\sum_{i=1}^{n}\mu_i^4+6\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2+3n-\sum_{i=1}^{n}\mu_i^4-2\lambda-n\\&=6\lambda+3n-2\lambda-n=2n+4\lambda\end{aligned}$$

(3) 因为 $\mathbf{X}\sim N_n(\boldsymbol{\mu},I_n)$，由定理 19.7可知 $\mathbf{X}_i$ 相互独立，所以 $\mathbf{X}_i^2$ 相互独立。因为 $\mathbf{Y}=\mathbf{X}^T\mathbf{X}=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i^2$，由性质 14.8.1(4) 可知：

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\mathbf{X}_i^2}(t)$$

下面来求 $\varphi_{\mathbf{X}_i^2}$。

由推论 19.1(5) 可知 $\mathbf{X}_i\sim N(\mu_i,1)$，于是：

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{X}_i^2}(t)&=\mathrm{E}(e^{it\mathbf{X}_i^2})\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{x^2-2\mu_ix+\mu_i^2}{2}+itx^2\right\}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}(1-2it)+\mu_ix-\frac{\mu_i^2}{2}\right\}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu_i^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}(1-2it)+\mu_ix\right\}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

这是一个 Gaussian 积分，由 Gaussian 积分公式可得：

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{X}_i^2}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu_i^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}(1-2it)+\mu_i x\right\} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu_i^2}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{1-2it}} e^{\frac{\mu_i^2}{2-4it}} = (1-2it)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{\mu_i^2}{2-4it} - \frac{\mu_i^2}{2}\right\} \\ &= (1-2it)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{it\mu_i^2}{1-2it}\right\}\end{aligned}$$

于是：

$$\varphi_{\mathbf{Y}} = \prod_{i=1}^{n} (1-2it)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{it\mu_i^2}{1-2it}\right\} = (1-2it)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{\frac{it\lambda}{1-2it}\right\}$$

□

19.2.2 t 分布

Definition 19.8. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi_n^2$ 且 X 与 Y 独立，则称：

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

为自由度是 n 的 t 变量，其分布称为自由度为 n 的 t 分布，记为 $T \sim t_n$。

19.2.3 F 分布

Definition 19.9. 设随机变量 $X \sim \chi_m^2$, $Y \sim \chi_n^2$ 且 X 与 Y 独立，则称：

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

为自由度是 m 和 n 的 F 变量，其分布称为自由度为 m 和 n 的 F 分布，记为 $F \sim F_{m,n}$。

Property 19.2.2. F 分布具有如下性质：

1. 若 $F \sim F_{m,n}$，则有 $\frac{1}{F} \sim F_{n,m}$；
2. 若 $T \sim t_n$，则有 $T^2 \sim F_{1,n}$；
3. $F_{m,n}(1-\alpha) = \dfrac{1}{F_{n,m}(\alpha)}$；

Proof. (1) 由 F 分布的定义直接可得。

(2) 设：

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

其中 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi_n^2$ 且 X 与 Y 独立，于是：

$$T^2 = \frac{X^2}{Y/n} = \frac{X^2/1}{Y/n}$$

注意到 $X^2 \sim \chi_1^2$ 且有 X^2 与 Y 独立，由 F 分布的定义即可得到 $T^2 \sim F_{1,n}$。

(3) 由分位数的定义：

$$
\begin{gathered}
P[F > F_{m,n}(1-\alpha)] = 1-\alpha \\
P\left[\frac{X/m}{Y/n} > F_{m,n}(1-\alpha)\right] = 1-\alpha \\
P\left[\frac{Y/n}{X/m} < \frac{1}{F_{m,n}(1-\alpha)}\right] = 1-\alpha \\
P\left[\frac{Y/n}{X/m} \geqslant \frac{1}{F_{m,n}(1-\alpha)}\right] = \alpha \\
P\left[\frac{Y/n}{X/m} > \frac{1}{F_{m,n}(1-\alpha)}\right] = \alpha
\end{gathered}
$$

即：

$$
F_{m,n}(1-\alpha) = \frac{1}{F_{n,m}(\alpha)}
$$

□

Chapter 20

点估计理论

20.1 点估计的性质

Definition 20.1. 设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为从某个总体 F_θ 中抽取的样本，$g(\theta)$ 是总体参数 θ 的实值函数，它是一个待估量 *(estimand)*。若将某一样本的函数 $\delta(\mathbf{X})$ 作为 $g(\theta)$ 的估计，称这种估计方式为点估计 *(point estimation)*，$\delta(\mathbf{X})$ 为 $g(\theta)$ 的估计量 *(estimator)*。

20.1.1 无偏性与渐进无偏性

Definition 20.2. 设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为从总体 $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ 中抽取的样本，$g(\theta)$ 是定义在参数空间 Θ 上的已知函数，$\delta(\mathbf{X})$ 是 $g(\theta)$ 的一个估计量。如果：

$$\forall\, \theta \in \Theta,\ \mathrm{E}(\delta(\mathbf{X})) = g(\theta)$$

则称 $\delta(\mathbf{X})$ 为 $g(\theta)$ 的一个无偏估计 *(unbiased estimation)*。

Definition 20.3. 对 $n \in \mathbb{N}^+$，设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为从总体 $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ 中抽取的样本，$g(\theta)$ 是定义在参数空间 Θ 上的已知函数，$\delta_n(\mathbf{X})$ 是 $g(\theta)$ 的一个估计量。如果：

$$\forall\, \theta \in \Theta,\ \lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}(\delta_n(\mathbf{X})) = g(\theta)$$

则称 $\delta_n(\mathbf{X})$ 为 $g(\theta)$ 的一个渐进无偏估计 *(asymptotically unbiased estimation)*。

20.1.2 有效性

Definition 20.4. 设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为从总体 $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ 中抽取的样本,$\delta_1(\mathbf{X}), \delta_2(\mathbf{X})$ 是 $g(\theta)$ 的两个不同的无偏估计量，若：

$$\forall\, \theta \in \Theta,\ \mathrm{Var}(\delta_1(\mathbf{X})) \leqslant \mathrm{Var}(\delta_2(\mathbf{X}))$$

且至少存在一个 $\theta \in \Theta$ 使得小于号成立，则称估计量 $\delta_1(\mathbf{X})$ 比 $\delta_2(\mathbf{X})$ 有效。

20.1.3 相合性

Definition 20.5. 对 $n \in \mathbb{N}^+$，设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为从总体 $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ 中抽取的样本，$\delta_n(\mathbf{X})$ 是 $g(\theta)$ 的一个估计量。若 $\delta_n(\mathbf{X}) \xrightarrow{P} g(\theta)$，即对任意的 $\varepsilon > 0$，有：

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\delta_n(\mathbf{X}) - g(\theta)| \geqslant \varepsilon) = 0$$

则称 $\delta_n(\mathbf{X})$ 是 $g(\theta)$ 的弱相合估计 *(weakly consistent estimation)*。若 $\delta_n(\mathbf{X}) \xrightarrow{a.e.} g(\theta)$，即：

$$P\left[\lim_{n \to +\infty} \delta_n(\mathbf{X}) \neq g(\theta)\right] = 0$$

则称 $\delta_n(\mathbf{X})$ 是 $g(\theta)$ 的强相合估计 *(strongly consistent estimation)*。

20.2 矩估计

20.2.1 矩法

Definition 20.6. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是从总体 F 中抽取的简单样本，将：

$$\mu_{nk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad \nu_{nk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_{n1})^k$$

分别称为样本 k 阶原点矩和样本 k 阶中心矩。

Theorem 20.1. ν_{nk} 与原点矩 μ_{nk} 之间存在如下关系：

$$\nu_{nk} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mu_{ni}(-\mu_{n1})^{k-i}$$

Proof. 由样本中心矩的定义可得：

$$\begin{aligned}\nu_{nk} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_{n1})^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}X_i^j(-\mu_{n1})^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^j(-\mu_{n1})^{k-j} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mu_{nj}(-\mu_{n1})^{k-j}\end{aligned}$$ □

Definition 20.7. 设有总体分布族 $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$，$g(\theta)$ 是定义在 Θ 上的实值函数，它可以表示为总体分布的一些矩的函数，即：

$$g(\theta) = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_t)$$

设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是从上述总体分布族中抽取的简单样本，将 f 中的总体矩用样本矩代替，得到：

$$\delta(\mathbf{X}) = f(\mu_{n1}, \mu_{n2}, \dots, \mu_{ns}, \nu_{n1}, \nu_{n2}, \dots, \nu_{nt})$$

则 $\delta(\mathbf{X})$ 成为 $g(\theta)$ 的一个点估计，称 $\delta(\mathbf{X})$ 为 $g(\theta)$ 的矩估计 *(moment estimation)*，这种求矩估计量的方法称为矩法 *(method of moments)*。

20.2.2 矩估计的性质

Property 20.2.1. 矩估计具有如下性质：

1. 样本 k 阶原点矩 μ_{nk} 是总体 k 阶原点矩 μ_k 的无偏估计、强相合估计；

2. $k=1$ 时，样本 k 阶中心矩 ν_{nk} 是总体 k 阶中心矩 ν_k 的无偏估计，对 $k \geqslant 2$，ν_{nk} 不是 ν_k 的无偏估计。ν_{nk} 是 ν_k 的强相合估计；

3. 若待估量 $g(\theta)$ 可以表示为一些总体原点矩的线性组合时，即：
$$g(\theta)=\sum_{i=1}^{n} c_i \mu_{m_i},\ m_i \in \mathbb{N}^+$$
则其矩估计：
$$\delta(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{n} c_i \mu_{n m_i},\ m_i \in \mathbb{N}^+$$
是 $g(\theta)$ 的无偏估计；

4. 若待估量 $g(\theta)$ 满足：
$$g(\theta)=f(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_t)$$
其中 f 是一个连续函数，则：
$$\delta(\mathbf{X})=f(\mu_{n1},\mu_{n2},\ldots,\mu_{ns},\nu_{n1},\nu_{n2},\ldots,\nu_{nt})$$
是 $g(\theta)$ 的强相合估计；

Proof. (1) 由：
$$\mathrm{E}(\mu_{nk})=\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i^k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_k=\mu_k$$
可得无偏性。

由定理 15.2可得：
$$\mu_{nk}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{\text{a.e.}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k)=\mu_k$$

(2)由定理 14.2可得： 不无偏还未证明
$$\nu_k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mu_i(-\mu_1)^{k-i}=f(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k)$$
所以 ν_k 是 $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k$ 的连续函数。由、(1)、定理 20.1可得： 多维情形下随机变量的连续映射定理
$$\nu_{nk}=f(\mu_{n1},\mu_{n2},\ldots,\mu_{nk}) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k)=\nu_k$$

(3) 由 (1) 直接可得。

(4) 由、(1)(2) 直接可得。 □ 多维情形下随机变量的连续映射定理

20.3 极大似然估计

Definition 20.8. 设 $f(\mathbf{X};\theta)$ 为样本 $\mathbf{X}=(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_n)$ 的概率函数，$\mathcal{X}$ 是样本空间。当 $\mathbf{X}$ 固定的时候，把 $f(\mathbf{X};\theta)$ 看作 θ 的函数，称该函数为似然函数 *(likelihood function)*，记为：

$$L(\theta;\mathbf{X})=f(\mathbf{X};\theta),\ \theta\in\Theta,\ \mathbf{X}\in\mathcal{X}$$

称 $\ell(\theta;\mathbf{X})=\ln L(\theta;\mathbf{X})$ 为对数似然函数。

Definition 20.9. 设 $\mathbf{X}=(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_n)$ 是从参数分布族 $\mathcal{F}=\{f(x;\theta):\theta\in\Theta\}$ 中抽取的简单样本，$L(\theta;\mathbf{X})$ 是似然函数。若存在统计量 $\delta(\mathbf{X})$ 使得：

$$L[\delta(\mathbf{X});\mathbf{X}]=\max_{\theta\in\Theta}L(\theta;\mathbf{X}),\ \forall\ \mathbf{X}\in\mathcal{X}$$

或等价地使得：

$$\ell[\delta(\mathbf{X});\mathbf{X}]=\max_{\theta\in\Theta}\ell(\theta;\mathbf{X}),\ \forall\ \mathbf{X}\in\mathcal{X}$$

则称 $\delta(\mathbf{X})$ 是 θ 的极大似然估计 *(maximum likelihood estimation, MLE)*。称：

$$\frac{\mathrm{d}L(\theta;\mathbf{X})}{\mathrm{d}\theta_i}=0$$

为似然方程 *(likelihood equation)*。

Property 20.3.1. 最大似然估计具有如下性质：

1. 最大似然估计具有不变性，即：若 θ 的 *MLE* 为 θ^*，则 θ 的任一可测函数 $g(\theta)$ 的 *MLE* 为 $g(\theta^*)$；
2. 若样本分布为指数族，只要似然方程组的解是自然参数空间的内点，则解必唯一且是 *MLE*；
3. 若 $T(\mathbf{X})$ 是 θ 的充分统计量且 θ 的 *MLE* $\delta(\mathbf{X})$ 唯一存在，则 $\delta(\mathbf{X})$ 必为 $T(\mathbf{X})$ 的函数；

20.4 一致最小方差无偏估计

Chapter 21

something

21.1 抽样分布

Theorem 21.1. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *i.i.d.* $\sim N(\mu, \sigma^2)$,$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *i.i.d.* $\sim N(\nu, \sigma^2)$,$X_1, X_2, \ldots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 相互独立，$\overline{X}, \overline{Y}$ 为样本均值，S_X^2, S_Y^2 为样本方差，则：

1. $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{m}\right)$；

2. $\dfrac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}$；

3. $\overline{X}$ 与 S_X^2 独立；

4. $\dfrac{\sqrt{m}(\overline{X}-\mu)}{S_X} \sim t_{m-1}$；

5. $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu-\nu)}{S_w}\sqrt{\dfrac{mn}{m+n}} \sim t_{m+n-2}$，其中：

$$(m+n-2)S_w^2 = (m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2$$

6. 若 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *i.i.d.* $\sim N(\mu, \sigma_1^2)$，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *i.i.d.* $\sim N(\nu, \sigma_2^2)$，其它条件不变，则：

$$\frac{S_X^2\sigma_2^2}{S_Y^2\sigma_1^2} \sim F_{m-1,n-1}$$

Proof. 令 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)^T$，$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$。因为 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ i.i.d. $\sim N(\nu, \sigma^2)$，所以 $\mathbf{X} \sim N_m(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_m)$，$\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\nu}, \Sigma_n)$，其中：

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix},\ \Sigma_m = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \nu \\ \nu \\ \vdots \\ \nu \end{pmatrix},\ \Sigma_n = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

(1) 令 m 维行向量 $c=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)$，由定理 19.3可知：

$$\overline{X}=c\mathbf{X}\sim N(c\boldsymbol{\mu},c\Sigma c^T)$$

而：

$$c\boldsymbol{\mu}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu}{m}=\mu,\ c\Sigma c^T=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma^2}{m^2}=\frac{\sigma^2}{m}$$

所以 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{m}\right)$。

考虑链接什么过来

(2) 由 Schmidit 正交化可知存在正交矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{m}}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{pmatrix}$$

令 $\mathbf{Z}=A\mathbf{X}$，由推论 19.1(2) 可知 $\mathbf{Z}\sim N_m(A\boldsymbol{\mu},\sigma^2 I_m)$。由推论 19.1(4) 可知 $\mathbf{Z}_i\sim N(\mu_i,\sigma^2)$，其中：

$$\mu_i=\mu\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$$

因为 A 是一个正交矩阵，所以：

$$\mu_i=\sqrt{m}\mu\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{m}}a_{ij}=\sqrt{m}\mu\left(\frac{1}{\sqrt{m}},\frac{1}{\sqrt{m}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{m}}\right)(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{im})^T=0$$

由定理 19.3即可得：

$$\frac{\mathbf{Z}_i}{\sigma}\sim N(0,1),\ \forall\, i=1,2,\ldots,m$$

因为 $\mathbf{Z}=A\mathbf{X}$，所以：

$$\mathbf{Z}_1=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m}X_i=\sqrt{m}X$$

因为：

$$\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{Z}_i^2=\mathbf{X}^TA^TA\mathbf{X}=\mathbf{X}^T\mathbf{X}=\sum_{i=1}^{m}X_i^2$$

于是：

$$(m-1)S_X^2=\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{m}X_i^2-m\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{Z}_i^2-\mathbf{Z}_1^2=\sum_{i=2}^{m}\mathbf{Z}_i^2$$

所以：

$$\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2}=\sum_{i=2}^{m}\left(\frac{\mathbf{Z}_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2_{m-1}$$

(3) 由 (2) 的证明过程可得 $\mathbf{Z}\sim N_m(A\boldsymbol{\mu},\sigma^2 I_m)$，根据定理 19.7可知 $\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2,\ldots,\mathbf{Z}_m$ 相互独立。而：

$$S_X^2=\frac{\sum_{i=2}^{m}\mathbf{Z}_i^2}{(m-1)},\ \overline{X}=\frac{\mathbf{Z}_1}{\sqrt{m}}$$

所以 S_X^2 与 $\overline{X}$ 独立。

(4) 对 $\overline{X}$ 进行标准化可得：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{m}}}=\frac{\sqrt{m}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$$

由 (2) 和 (3) 进一步可得：

$$\frac{\frac{\sqrt{m}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2(m-1)}}}=\frac{\sqrt{m}(\overline{X}-\mu)}{S_X}\sim t_{m-1}$$

(5) 由 (1)（得到 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 的分布）、$X_1,X_2,\ldots,X_m$ 与 $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ 相互独立（得到二维随机向量 $(\overline{X},\overline{Y})$ 的分布）和定理 19.3（对 $(\overline{X},\overline{Y})$ 用二维行向量 $(1,-1)$ 做线性变换）可得：

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu-\nu,\frac{\sigma^2}{m}+\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

于是：

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu-\nu)}{\sqrt{\frac{m+n}{mn}\sigma^2}}\sim N(0,1)$$

由 (2) 可得：

$$\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{m-1},\quad\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$$

由性质 19.2.1(1) 可得：

$$\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{m+n-2}$$

于是：

$$\frac{(m+n-2)S_w^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{m+n-2}$$

由 (3) 可得 $\overline{X}$ 与 S_X^2 独立、$\overline{Y}$ 与 S_Y^2 独立，所以：

$$\frac{\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu-\nu)}{\sqrt{\frac{m+n}{mn}\sigma^2}}}{\sqrt{\frac{(m+n-2)S_w^2}{\sigma^2(m+n-2)}}}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu-\nu)}{S_w}\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\sim t_{m+n-2}$$

(6) 由 (2) 可知：

$$\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2_{m-1},\quad\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2_{n-1}$$

因为 $X_1,X_2,\ldots,X_m$ 和 $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ 相互独立，所以上两式也相互独立。由 F 分布的定义即可得：

$$\frac{\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_1^2(m-1)}}{\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_2^2(n-1)}}=\frac{S_X^2\sigma_2^2}{S_Y^2\sigma_1^2}\sim F_{m-1,n-1}$$

□

21.2 次序统计量

Definition 21.1. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为从总体中抽取的样本，将其按大小排列为 $X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$，称 $(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ 为样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的次序统计量 *(order statistics)*。

次序统计量的联合分布

Theorem 21.2. 设总体的密度函数为 $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为从总体中抽取的简单样本。令 $Y_i = X_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$，则次序统计量 $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ 的联合密度为：

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{cases} n! f(y_1) f(y_2) \cdots f(y_n), & y_1 < y_2 < \cdots < y_n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

Proof. 在 $\mathbb{R}^n$ 中划分 $n!$ 个区域，每个区域分别对应着一个 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ 使得 $x_{i1} < x_{i2} < \cdots < x_{in}$，因为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的排列一共有 $n!$ 种，所以这 $n!$ 个区域加上包括等于号的一些零测集就构成了整个 $\mathbb{R}^n$。因为次序统计量的密度函数也是在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个概率测度，则可以对每个划分的区域求 $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ 的概率测度，再对所有区域求和，即可得到次序统计量的联合密度。这个过程类似于全概率公式。

任取一个上述区域 A 作变换：

$$y_j = x_{i_j},\ j = 1, 2, \ldots, n,\ x_{i1} < x_{i2} < \cdots < x_{in}$$

则该变换的 Jacobi 行列式为 $|\mathbf{J}| = |I_n| = 1$，因为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是简单样本，所以在该区域上的：

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n | A) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i), & y_1 < y_2 < \cdots < y_n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由区域的任意性可得在整个 $\mathbb{R}^n$ 上：

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{cases} n! f(y_1) f(y_2) \cdots f(y_n), & y_1 < y_2 < \cdots < y_n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

□

部分次序统计量的联合分布

Lemma 21.1. 设总体的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为从总体中抽取的简单样本，则有：

$$\int \cdots \int_{a < x_1 < \cdots < x_n < b} f(x_1) \cdots f(x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{n!}[F(b) - F(a)]^n$$

其中 $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$。

Proof. 因为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同分布，所以：

$$\int_a^b \cdots \int_a^b f(x_1)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \left[\int_a^b f(x_1)\,\mathrm{d}x_1\right]^n = [F(b)-F(a)]^n$$

在这个区域上对 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的排序结果一共有 $n!$ 种（不考虑等于的情况，测度为 0，不影响积分结果），每种排序都是等可能的，于是结论成立。 □

Theorem 21.3. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为从总体中抽取的简单样本，总体的分布函数和密度函数分别为 $F(x), f(x)$，则样本次序统计量中任意 m 个分量 $Y_{(i_1)}, Y_{(i_2)}, \ldots, Y_{(i_m)}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ 的联合密度为：

$$\begin{aligned} g(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_m}) = n!\prod_{j=1}^m f(y_{i_j})\frac{1}{(i_1-1)!}F^{i_1-1}(y_{i_1})\frac{1}{(n-i_m)!}[1-F(y_{i_m})]^{n-i_m} \\ \left\{\prod_{k=2}^m \frac{1}{(i_k-i_{k-1}-1)!}[F(y_{i_k})-F(y_{i_{k-1}})]^{i_k-i_{k-1}-1}\right\} \end{aligned}$$

Proof. 注意到 $Y_{(i_1)}, Y_{(i_2)}, \ldots, Y_{(i_m)}$ 的联合密度是次序统计量的边缘密度,所以由引理 21.1可得：

$$\begin{aligned} g(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_m}) &= \int\cdots\int_{-\infty<y_1<\cdots<y_n<+\infty} n! f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n)\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{i_1-1} \\ &\quad \mathrm{d}y_{i_1+1}\cdots\mathrm{d}y_{i_2-1}\,\mathrm{d}y_{i_2+1}\cdots\mathrm{d}y_{i_m-1}\,\mathrm{d}y_{i_m+1}\cdots\mathrm{d}y_n \\ &= n!\prod_{j=1}^m f(y_{i_j}) \int\cdots\int_{-\infty<y_1<\cdots<y_{i_1}} f(y_1)\cdots f(y_{i_1-1})\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{i_1-1} \\ &\quad \times \int\cdots\int_{y_{i_1}<y_{i_1+1}<y_{i_1+2}<\cdots<y_{i_2}} f(y_{i_1+1})\cdots f(y_{i_2-1})\,\mathrm{d}y_{i_1+1}\cdots\mathrm{d}y_{i_2-1} \\ &\quad \cdots\cdots \\ &\quad \times \int\cdots\int_{y_{i_m}<y_{i_m+1}<y_{i_m+2}<\cdots<+\infty} f(y_{i_m+1})\cdots f(y_n)\,\mathrm{d}y_{i_m+1}\cdots\mathrm{d}y_n \\ &= n!\prod_{j=1}^m f(y_{i_j})\frac{1}{(i_1-1)!}F^{i_1-1}(y_{i_1})\frac{1}{(i_2-i_1-1)!}[F(y_{i_2})-F(y_{i_1})]^{i_2-i_1-1} \\ &\quad \cdots\frac{1}{(n-i_m)!}[1-F(y_{i_m})]^{n-i_m} \\ &= n!\prod_{j=1}^m f(y_{i_j})\frac{1}{(i_1-1)!}F^{i_1-1}(y_{i_1})\frac{1}{(n-i_m)!}[1-F(y_{i_m})]^{n-i_m} \\ &\quad \left\{\prod_{k=2}^m \frac{1}{(i_k-i_{k-1}-1)!}[F(y_{i_k})-F(y_{i_{k-1}})]^{i_k-i_{k-1}-1}\right\} \end{aligned}$$

□

极差的分布

Theorem 21.4. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为从总体中抽取的简单样本，总体的分布函数和密度函数分别为 $F(x), f(x)$，样本的次序统计量为 $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$，则对于任意的 $i, j = 1, 2, \ldots, n$ 满足 $i < j$，令 $V = Y_j - Y_i$，则有：

$$g(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, v) \,\mathrm{d}u$$

其中：

$$g(u,v) = \begin{cases} \dfrac{n! f(u) f(u+v)}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} F^{i-1}(u)[F(u+v) - F(u)]^{j-i-1} \\ \qquad [1 - F(u+v)]^{n-j}, & v > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

链接随机变量函数的分布中的增补变量法

Proof. 使用增补变量法，做变换：

$$\begin{cases} U = Y_i \\ V = Y_j - Y_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_i = U \\ Y_j = V + U \end{cases}$$

该变换的 Jacobi 行列式为：

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

由定理 21.3可得 (Y_i, Y_j) 的联合密度：

$$g(y_i, y_j) = \begin{cases} \dfrac{n! f(y_i) f(y_j)}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} F^{i-1}(y_i)[F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1} \\ \qquad [1 - F(y_j)]^{n-j}, & y_i < y_j \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

于是：

$$g(u,v) = \begin{cases} \dfrac{n! f(u) f(u+v)}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} F^{i-1}(u)[F(u+v) - F(u)]^{j-i-1} \\ \qquad [1 - F(u+v)]^{n-j}, & v > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

所以：

$$g(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, v) \,\mathrm{d}u$$

□

Corollary 21.1. 次序统计量 $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ 极差的分布为：

$$g(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, v) \,\mathrm{d}u$$

其中：

$$g(u,v) = \begin{cases} n(n-1) f(u) f(u+v)[F(u+v) - F(u)]^{n-2}, & v > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

21.3 充分统计量

Definition 21.2. 设 X 的分布族为 $\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，$\Theta$ 是参数空间。令 $T=T(\mathbf{X})$ 为一个统计量。若 $P(\mathbf{X}|T(\mathbf{X}))$ 与 θ 无关，则称 $T(\mathbf{X})$ 为 θ 的充分统计量 *(sufficient statistics)*。

21.4 Delta method

Delta method 可以给出随机变量函数的近似方差。

Theorem 21.5. 设随机向量 $\mathbf{X}$ 的均值为 $E(\mathbf{X})$，方差为 $Var(\mathbf{X})$，现有另一随机变量 $g(\mathbf{X})$，则该随机变量有如下近似方差：

$$Var[g(\mathbf{X})]\approx\nabla g\left[E(\mathbf{X})\right]^{\top}Cov(\mathbf{X})\,\nabla g\left[E(\mathbf{X})\right]$$

Proof. 将 $g(\mathbf{X})$ 在 $g\left[E(\mathbf{X})\right]$ 处进行泰勒展开：

$$g(\mathbf{X})\approx g\left[E(\mathbf{X})\right]+\nabla g\left[E(\mathbf{X})\right]^{\top}\left[\mathbf{X}-E(\mathbf{X})\right]$$

对此式求方差：

$$Var\left[g(\mathbf{X})\right]\approx Var\left[\nabla g\left[E(\mathbf{X})\right]^{\top}\mathbf{X}\right]=\nabla g\left[E(\mathbf{X})\right]^{\top}Cov(\mathbf{X})\,\nabla g\left[E(\mathbf{X})\right]$$ □

Corollary 21.2. 设随机变量 X 的均值为 $E(X)$，方差为 $Var(X)$，现有另一随机变量 $g(X)$，则该随机变量有如下近似方差：

$$Var\left[g(X)\right]\approx g'\left[E(X)\right]^{2}Var(X)$$

Theorem 21.6. 设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 独立同分布于 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知 σ^2 已知，若 $\mu\sim N(\theta,\tau^2)$，求 μ 的后验分布。

Proof. 由 □

21.5 主成分分析

主成分分析 (principal component analysis, PCA)的目的是：对数据进行一个线性变换，在最大程度保留原始信息的前提下去除数据中彼此相关的信息。反映在变量上就是说，对所有的变量进行一个线性变换，使得变换后得到的变量彼此之间不相关，并且是所有可能的线性变换中方差最大的一些变量（我们认为方差体现了信息量的大小）。

21.5.1 总体主成分分析

Definition 21.3. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量，其均值向量为 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$、协方差矩阵为 $\Sigma=(\sigma_{ij})$，$i,j=1,2,\ldots,n$。对 $\mathbf{X}$ 进行一个线性变换 $\mathcal{T}$ 得到一个 n 维随机向量

$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$，$\mathcal{T}$ 的矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

若：

1. $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y})$ 是一个对角矩阵，即 $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) = 0,\ i \neq j$；
2. $\mathbf{Y}_1$ 是所有对 $\mathbf{X}$ 进行线性变换后得到的随机变量中方差最大的随机变量，$\mathbf{Y}_2$ 是与 $\mathbf{Y}_1$ 不相关的所有对 $\mathbf{X}$ 进行线性变换后得到的随机变量中方差第二大的随机变量，以此类推。

则分别称 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ 是第一、第二、……、第 n 主成分。

这一定义是否足够？

Theorem 21.7. 若不对 $\mathcal{T}$ 的矩阵 A 作出相应的限制，对 $\mathbf{X}$ 进行线性变换后得到的 $\mathbf{Y}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ 的方差可以任意大。

Proof. 由性质 14.4.1(3) 可知：

$$\mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i) = \mathrm{Cov}(\mathbf{Y})_{(i,i)} = \mathrm{Cov}(A\mathbf{X})_{(i,i)} = (A\Sigma A^T)_{i,i} = \alpha_i \Sigma \alpha_i^T$$

若 $\mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i) > 0$，取矩阵 $B = kA$，$\mathbf{Z} = kA\mathbf{X}$，则：

$$\mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i) = (k\alpha_i)\Sigma(k\alpha_i)^T = k^2 \alpha_i \Sigma \alpha_i$$

改变 k 的值，即可对 $\mathbf{Y}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ 的方差进行任意的放缩。 □

因此，我们需要对 A 进行相应的限制，在这里我们人为地选择要求 A 是一个正交矩阵，也就是让 $\alpha_i \alpha_i^T = 1$。

Definition 21.4. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量，其均值向量为 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$、协方差矩阵为 $\Sigma = (\sigma_{ij}),\ i, j = 1, 2, \ldots, n$。对 $\mathbf{X}$ 进行一个线性变换 $\mathcal{T}$ 得到一个 n 维随机向量 $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$，$\mathcal{T}$ 的矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

若：

1. $AA^T = I$；

2. $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y})$ 是一个对角矩阵，即 $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) = 0,\ i \neq j$；

3. $\mathbf{Y}_1$ 是所有对 $\mathbf{X}$ 进行线性变换后得到的随机变量中方差最大的随机变量，$\mathbf{Y}_2$ 是与 $\mathbf{Y}_1$ 不相关的所有对 $\mathbf{X}$ 进行线性变换后得到的随机变量中方差第二大的随机变量，以此类推。

则分别称 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ 是第一、第二、……、第 n 主成分。

Theorem 21.8. 设 $\mathbf{X}$ 是一个 n 维随机向量，Σ 是其协方差矩阵，Σ 的特征值[1]从大到小记作 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$，$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 为对应的标准正交化特征向量，则 $\mathbf{X}$ 的第 i 个主成分以及其方差为：

$$\mathbf{Y}_i = \varphi_i^T \mathbf{X},\ \mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i) = \varphi_i^T \Sigma \varphi_i = \lambda_i$$

Proof. 考虑到：

$$\mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i) = \alpha_i \Sigma \alpha_i^T, \quad \mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) = \alpha_i \Sigma \alpha_j^T$$

求解主成分的过程即为求解：

$$\alpha_i = \arg\max \alpha_i \Sigma \alpha_i^T$$
$$\mathrm{s.t.} \begin{cases} ||\alpha_i|| = 1, & i = 1, 2, \dots, n \\ \alpha_i \Sigma \alpha_j = 0, & j < i \end{cases}$$

由定理 2.31可知上述结论成立。 □

Definition 21.5. 将第 i 个主成分 $\mathbf{Y}_i$ 与变量 $\mathbf{X}_j$ 的相关系数 $\rho(\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_j)$ 称为因子负荷量 *(factor loading)*。可推得：

$$\rho(\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_j) = \frac{\sqrt{\lambda_i}\alpha_{ij}}{\sqrt{\sigma_{jj}}},\ i, j = 1, 2, \dots, n$$

推导 21.1. 由相关系数的定义：

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_j) &= \frac{\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i)\,\mathrm{Var}(\mathbf{X}_j)}} = \frac{\mathrm{Cov}(\alpha_i \mathbf{X}, e_j^T \mathbf{X})}{\sqrt{\lambda_i \sigma_{jj}}} \\ &= \frac{\alpha_i \Sigma e_j}{\sqrt{\lambda_i \sigma_{jj}}} = \frac{e_j^T \Sigma \alpha_i}{\sqrt{\lambda_i \sigma_{jj}}} = \frac{e_j^T \lambda_i \alpha_i}{\sqrt{\lambda_i \sigma_{jj}}} = \frac{\sqrt{\lambda_i}\alpha_{ij}}{\sqrt{\sigma_{jj}}} \end{aligned}$$

Property 21.5.1. 总体主成分具有如下性质：

1. $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}) = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$；

2. $\mathbf{Y}$ 的方差之和等于 $\mathbf{X}$ 的方差之和，即 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{ii}$；

[1]若特征多项式有重根，则标准正交化特征向量组不唯一，主成分也不唯一。

3. 第 i 个主成分与原变量的因子负荷量满足：

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{jj}\rho^2(\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_j) = \lambda_i$$

4. 原变量的第 j 个分量与所有主成分的因子负荷量满足：

$$\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_j) = 1$$

Proof. (1) 由定理 21.8直接可得。

(2) 由性质 14.4.1(3) 和性质 .3.2(3) 可得：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i) &= \mathrm{tr}[\mathrm{Cov}(\mathbf{Y})] = \mathrm{tr}[\mathrm{Cov}(A\mathbf{X})] = \mathrm{tr}(A\Sigma A^T) \\ &= \mathrm{tr}(\Sigma A^T A) = \mathrm{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(\mathbf{X}_i)\end{aligned}$$

(3) 由推导 21.1可得：

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{jj}\rho^2(\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \alpha_{ij}^2 = \lambda_i \alpha_i \alpha_i^T = \lambda_i$$

(4) 因为 A 是正交矩阵，所以 A 可逆，于是 $\mathbf{X}$ 可以表示为 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ 的线性组合，所以二者的复相关系数为 1。由可直接得出结论。 □

复相关系数性质

Definition 21.6. 称第 i 个主成分 $\mathbf{Y}_i$ 的方差与所有主成分方差之和为 $\mathbf{Y}_i$ 的方差贡献率，记为 η_i，即：

$$\eta_i = \frac{\lambda_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j}$$

将：

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

称为主成分 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_k$ 的累计方差贡献率。

Definition 21.7. 称主成分 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_k$ 与变量 $\mathbf{X}_j$ 之间的复相关系数的平方 R^2 为 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_k$ 对 $\mathbf{X}_j$ 的贡献率，其计算公式为：

$$R^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i \alpha_{ij}^2}{\sigma_{ii}}$$

链接复相关系数的性质

推导 21.2. 由推导 *21.1*和直接可得。

由前述，我们一般通过选择主成分的个数来实现对数据的降维，即选择主成分的个数使它们的累计方差贡献率达到一定比例（一般为 85%）。

21.5.2 样本主成分分析

假设对 n 维随机变量 $\mathbf{X}$ 进行 m 次独立观测，得到 m 个 n 维样本 $x_1, x_2, \ldots, x_m$。在样本主成分分析中，我们使用样本来估计 $\mathbf{X}$ 的协方差矩阵，即：

$$S = (s_{ij}),\ s_{ij} = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(x_{ki} - \hat{\mathbf{X}}_i)(x_{kj} - \hat{\mathbf{X}}_j),\ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

其中：

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ji},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

其余步骤与总体主成分分析一致。

21.5.3 注意事项

多重共线性问题

当原始变量出现多重共线性时，PCA 的效果会受到影响，这是因为重复的信息在方差占比中重复进行了计算。我们可以通过计算协方差矩阵的最小特征值来判断是否出现多重共线性的情况。若最小特征值趋于 0，则需要对纳入研究的变量进行考察与筛选。

写线性模型的时候再把多重共线性推导链接过来

相关矩阵导出主成分

上面我们都是对协方差矩阵的特征值分解进行计算，但在现实中，我们可能会对数据进行标准化处理来消除量纲带来的影响，注意到标准化后数据的协方差矩阵即为相关矩阵，此时将相关矩阵作对应的特征值分解即可。但需要注意：标准化后**各变量方差相等均为 1，损失了部分信息**，所以会使得**标准化后的各变量在对主成分构成中的作用趋于相等**。因此，取值范围在同量级的数据建议使用协方差矩阵直接求解主成分，若变量之间数量级差异较大，再使用相关矩阵求解主成分。

具体算法

Algorithm 1 主成分分析（PCA）

Input: 原始数据矩阵 $\mathbf{X}$
Output: 主成分得分 $\mathbf{Y}$，选定的主成分个数 k
if 变量量纲差异明显 **then**
    标准化：$\mathbf{Z} = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$
else
    保留原始数据 $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$
end if
if 存在多重共线性（最小特征值 ≈ 0） **then**
    删除或合并相关变量
else
    保留原始变量
end if
计算协方差矩阵：$\Sigma = \mathrm{cov}(\mathbf{Z})$
对 Σ 进行特征值分解：$\Sigma = A\Lambda A^T$
初始化 $k \leftarrow 1$, 累计贡献率 $\leftarrow 0$
repeat
    选择第 k 个主成分
    更新累计贡献率
    if 累计贡献率 $<$ 阈值 **then**
        $k \leftarrow k+1$
    end if
until 累计贡献率 $\geq$ 阈值
计算主成分得分：$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}A_k$（$A_k$ 维矩阵 A 的前 k 行构成的矩阵）
输出 $\mathbf{Y}$ 和 k

21.6 因子分析

因子分析 (factor analysis)的目的是从多个高度相关的观测变量中提取出少数几个潜在因子 (latent factor)，这些因子代表了变量背后的共通结构，从而实现降维并提升可解释性。

假设对一组学生进行了以下六门课程的测试：语文、英语、数学、物理、化学、生物，发现语文和英语成绩之间高度相关，数学、物理、化学、生物也彼此高度相关。此时可以猜测：这些成绩可能是由两个更基本的“能力”决定的，比如语言能力和理科能力。通过因子分析就可以提取出这两个潜在因子，并发现语文和英语主要由“语言能力”因子决定，理科四门主要由“理科能力”因子解释。这样就可以用两个因子有效地概括了六个变量的结构，同时让模型更易解释、更简洁。

Definition 21.8. 设 $\mathbf{X}$ 是一个可观测的 m 维随机向量，$\mathrm{E}(\mathbf{X})=\boldsymbol{\mu}$，$\mathrm{Cov}(\mathbf{X})=\Sigma=(\sigma_{ij})$。因子分析的数学模型为：

$$\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}+AF+\varepsilon$$
$$\begin{cases}\mathrm{E}(F)=\mathbf{0},\ \mathrm{Cov}(F)=I_n\\ \mathrm{E}(\varepsilon)=\mathbf{0},\ \mathrm{Cov}(\varepsilon)=D=\mathrm{diag}\{\sigma_1^2,\sigma_2^2,\dots,\sigma_m^2\}\\ \mathrm{Cov}(F,\varepsilon)=\mathbf{0}\end{cases}$$

其中 $F=(f_1,f_2,\dots,f_n)^T$ 是不可观测的 n 维随机变量，ε 是不可观测的 m 维随机变量，分别称 F 和 ε 为公共因子 *(common factor)* 和特殊因子 *(specific factor)*。$A=(a_{ij})$ 是一个非随机矩阵，a_{ij} 表示公共因子 f_j、随机变量 $\mathbf{X}_i$ 的因子载荷。$a_{1j},a_{2j},\dots,a_{ij}$ 中至少有两个不为 0，否则可将 f_i 并入到 ε_i 中去；ε_i 也仅出现在 $\mathbf{X}_i$ 的表达式中。

Property 21.6.1. 上述因子分析模型具有如下性质：

1. $\Sigma=AA^T+D$；
2. 模型不受单位影响。若 $\mathbf{X}^*=C\mathbf{X}$，则有：
$$\mathbf{Y}=C\boldsymbol{\mu}+CAF+C\varepsilon=\boldsymbol{\mu}^*+A^*F+\varepsilon^*$$
3. 因子载荷不唯一；
4. $\mathrm{Cov}(\mathbf{X},F)=A$，即 $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}_i,F_j)=a_{ij}$
5. 令 $h_i^2=\sum_{j=1}^n a_{ij}^2$，则有：
$$\mathrm{Var}(\mathbf{X}_i)=\sigma_{ii}=\sum_{j=1}^n a_{ij}^2+\sigma_i^2=h_i^2+\sigma_i^2,\ i=1,2,\dots,m$$
6. 令 $g_j^2=\sum_{i=1}^m a_{ij}^2$，则有：
$$\sum_{i=1}^m \mathrm{Var}(\mathbf{X}_i)=\sum_{j=1}^n g_j^2+\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Proof. (1) 由性质 14.4.1(3)(4)(5) 可得：

$$\begin{aligned}\Sigma=\mathrm{Cov}(\mathbf{X})&=\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\mu}+AF+\varepsilon,\boldsymbol{\mu}+AF+\varepsilon)\\&=\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu}+AF+\varepsilon)+\mathrm{Cov}(AF,\boldsymbol{\mu}+AF+\varepsilon)+\mathrm{Cov}(\varepsilon,\boldsymbol{\mu}+AF+\varepsilon)\\&=\mathrm{Cov}(AF,\boldsymbol{\mu})+\mathrm{Cov}(AF)+\mathrm{Cov}(AF,\varepsilon)+\mathrm{Cov}(\varepsilon,\boldsymbol{\mu})+\mathrm{Cov}(\varepsilon,AF)+\mathrm{Cov}(\varepsilon)\\&=A\,\mathrm{Cov}(F)A^T+A\,\mathrm{Cov}(F,\varepsilon)+\mathrm{Cov}(\varepsilon,F)A^T+D\\&=AA^T+D\end{aligned}$$

(2) 显然。

(3) 取正交矩阵 Q，令 $A^* = AQ$，$F^* = Q^T F$，由、性质 14.4.1(3) 则依然有： 期望的性质

$$\mathrm{E}(F^*) = Q^T \mathrm{E}(F) = \mathbf{0},\ \mathrm{Cov}(F^*) = Q^T \mathrm{Cov}(F) Q = I_n,\ \mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + A^* F^* + \varepsilon$$

(4) 由性质 14.4.1(3)(4)(5) 可得：

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}, F) = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\mu} + AF + \varepsilon, F) = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\mu}, F) + \mathrm{Cov}(AF, F) + \mathrm{Cov}(\varepsilon, F) = A$$

(5) 由 (1) 即可得到结论。

(6) 由性质 14.4.1(1)、(1) 和性质 .3.2(1) 可得：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Var}(\mathbf{X}_i) = \mathrm{tr}[\mathrm{Cov}(\mathbf{X})] = \mathrm{tr}(AA^T + D) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} g_j^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\end{aligned}$$

□

Definition 21.9. 称 h_i^2 为变量 $\mathbf{X}_i$ 的公共方差 *(common variance)*，它反映了公共因子对 $\mathbf{X}_i$ 的方差贡献度。称 σ_i^2 为 $\mathbf{X}_i$ 的特殊方差 *(specific variance)*，它反映了特殊因子 ε_i 对 $\mathbf{X}_i$ 的方差贡献度。g_j^2 可视为公共因子 f_j 对 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m$ 的总方差贡献度。

21.6.1 参数估计方法

主成分法

方法 21.1. 设观测变量 $\mathbf{X}$ 的协方差矩阵 Σ，它的特征值从大到小依次为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$，对应的单位正交特征向量分别为 $l_1, l_2, \ldots, l_m$。于是 Σ 有分解式：

$$\Sigma = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1^T \\ l_2^T \\ \vdots \\ l_m^T \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i l_i l_i^T$$

由性质 *14.4.1(2)* 和定理 *2.43(3)* 的第五条可知 $\lambda_m \geqslant 0$。当最后 $m - n$ 个特征值较小时，Σ 有如下近似：

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i l_i l_i^T \approx \sum_{i=1}^{n} \lambda_i l_i l_i^T + \hat{D} = \hat{A}\hat{A}^T + \hat{D}$$

其中：

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} l_1 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} l_n \end{pmatrix},\ \hat{D} = \mathrm{diag}(\Sigma - \hat{A}\hat{A}^T)$$

与 *PCA* 一样，一般通过使 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \Big/ \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i\right)$ 大于一定比例来选择 n 的具体值。

主因子法

方法 21.2. 令 $AA^T=\Sigma-D$。取 $\hat{\sigma}_1^2,\hat{\sigma}_2^2,\ldots,\hat{\sigma}_m^2$ 为特殊方差的合理初始估计（*(1)* 全零，*(2)* 取 $\max\limits_{j\neq i}\sigma_{ij}$），则有：

$$\widehat{AA^T}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}-\hat{\sigma}_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\hat{\sigma}_2^2 & \cdots & \sigma_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mm}-\hat{\sigma}_m^2\end{pmatrix}$$

取 $\widehat{AA^T}$ 前 n 个大于 0 的特征值，从大到小依次为 $\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,\ldots,\hat{\lambda}_n$，对应的单位正交特征向量为 $\hat{l}_1,\hat{l}_2,\ldots,\hat{l}_n$，则有近似的：

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}\sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{l}_1 & \cdots & \sqrt{\hat{\lambda}_n}\hat{l}_n\end{pmatrix}$$

令 $\hat{\sigma}_i^2=\sigma_{ii}-\hat{h}_i^2$，继续上面的迭代过程以得到稳定的近似解。

Algorithm 2 主因子法求解因子分析

1: **Input:** 协方差矩阵 Σ，初始特殊方差估计 $\hat{\sigma}_1^2,\ldots,\hat{\sigma}_m^2$，目标因子数 n
2: **Output:** 因子载荷矩阵估计 $\hat{A}$，特殊方差估计 $\hat{\sigma}_i^2$
3: 初始化 $\hat{\sigma}_i^2$ 为合理值
4: **repeat**
5: 　构造矩阵 $\widehat{AA^T}=\Sigma-\mathrm{diag}(\hat{\sigma}_1^2,\ldots,\hat{\sigma}_m^2)$
6: 　对 $\widehat{AA^T}$ 做特征值分解，得到部分特征值 $\hat{\lambda}_1\geqslant\cdots\geqslant\hat{\lambda}_n$，及对应单位正交特征向量 $\hat{l}_1,\ldots,\hat{l}_n$
7: 　构造因子载荷矩阵估计：$\hat{A}=(\hat{a}_{ij})=\begin{pmatrix}\sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{l}_1 & \cdots & \sqrt{\hat{\lambda}_n}\hat{l}_n\end{pmatrix}$
8: 　令 $\hat{h}_i^2=\sum\limits_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}^2$，更新 $\hat{\sigma}_i^2=\sigma_{ii}-\hat{h}_i^2$，$i=1,2,\ldots,m$
9: **until** 特殊方差估计 $\hat{\sigma}_i^2$ 收敛或达到最大迭代次数

正态分布假设下的极大似然估计法

推导 21.3. 若假设 $F\sim N_n(\mathbf{0},I_n)$，$\varepsilon\sim N_m(\mathbf{0},D)$，因为 F 和 ε 不相关，由定理 *19.7*可知 F 和 ε 独立。由定理 *19.15*和定理 *19.6*可得 $\mathbf{X}\sim N_m(\boldsymbol{\mu},AA^T+D)$。对 $\mathbf{X}$ 进行简单抽样获得 s 个样本，由定理 *19.6*和定理 *19.3*可得这 s 个样本的均值 $\bar{\mathbf{X}}\sim N_n\left(\boldsymbol{\mu},\frac{1}{s}(AA^T+D)\right)$。若样本均值为 $\bar{x}$，则似然函数为：

$$L(A,D)=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}|\det[\frac{1}{s}(AA^T+D)]|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\bar{x}-\boldsymbol{\mu})^T\left[\frac{1}{s}(AA^T+D)\right]^{-1}(\bar{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

对数似然函数省去常数项即为：

$$\begin{aligned}\ln L(A,D) &= -\frac{1}{2}\ln\left\{\left|\det\left[\frac{1}{s}(AA^T+D)\right]\right|\right\} - \frac{1}{2}(\bar{x}-\boldsymbol{\mu})^T\left[\frac{1}{s}(AA^T+D)\right]^{-1}(\bar{x}-\boldsymbol{\mu}) \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1}{s^m}\left|\det(AA^T+D)\right|\right\} - \frac{s}{2}(\bar{x}-\boldsymbol{\mu})^T(AA^T+D)^{-1}(\bar{x}-\boldsymbol{\mu})\end{aligned}$$

21.6.2 因子旋转

为了提高因子的可解释性，我们希望每个因子对观测变量的影响是集中且明显的，即一个因子主要对少数几个变量有显著影响，对其余变量几乎没有作用。这种结构反映在因子载荷矩阵 A 上即为 A 每一列的元素 a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$ 不是均匀地分布在中间水平，而是趋于两极分化：其绝对值要么接近于 0，要么较大。这样可以使得每个因子更容易被识别和解释——因为它只与一小组变量高度相关。这种结构等价于希望载荷矩阵 A 的每一列具有稀疏性，从而便于赋予因子明确的语义标签。

推导 21.4. 由性质 21.6.1(3) 可知在初步求得因子载荷矩阵 A 后，可以使用一个正交矩阵右乘 A，此时仍能得到一个因子模型。使用正交矩阵来右乘 A 相当于是对因子 F 进行旋转变换，我们可以通过不断旋转 F 来得到更加稀疏的因子载荷矩阵，从而提高因子的可解释性。

如何旋转？怎么衡量旋转后因子载荷矩阵的优良性？

令：

$$d_{ij}^2 = \frac{a_{ij}^2}{h_i^2}, \quad i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n$$

d_{ij}^2 衡量了因子 j 对观测变量 $\mathbf{X}_i$ 的影响，且消除了 a_{ij} 的正负号带来的差异和各观测变量在因子载荷大小上的不同带来的差异。定义第 j 列 p 个数据 d_{ij}^2, $i=1,2,\ldots,m$ 的方差为：

$$\begin{aligned}V_j &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(d_{ij}^2-\bar{d}_j)^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(d_{ij}^2-\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m}d_{ij}^2\right) \\ &= \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{m}d_{ij}^4 - m\frac{1}{m^2}\left(\sum_{i=1}^{m}d_{ij}^2\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{m^2}\left[m\sum_{i=1}^{m}d_{ij}^4 - \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}d_{ij}^2\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{m^2}\left[m\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ij}^4}{h_i^4} - \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ij}^2}{h_i^2}\right)^2\right]\end{aligned}$$

若 V_j 越大，则第 j 个因子对观测变量的影响越集中。定义因子载荷矩阵 A 的方差为：

$$V = \sum_{j=1}^{n}V_j = \frac{1}{m^2}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[m\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ij}^4}{h_i^4} - \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ij}^2}{h_i^2}\right)^2\right]\right\}$$

若 V 越大，则表明因子对观测变量的影响越集中。

综上，我们只需使得旋转后得到的因子载荷矩阵 A 的方差 V 达到最大即可。

21.6.3 模型检验

由上面的讨论可以看出，潜在因子的数目是一个超参数，也是一个非常重要的参数，我们该如何选择呢？有没有什么办法能够确定这一超参数的值？

推导 21.5. 在正态性假设下（仍需假设 $\mathbf{X}$ 是 n 维正态随机向量），我们可以对求解后的因子分析模型进行似然比检验。

设样本数为 p，分别为 $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_p}$，都独立同分布于 $\mathrm{N}_m(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$。构建似然比检验假设：

$$H_0 : \Sigma = AA^T + D, \quad H_1 : \Sigma \text{为其它任一正定矩阵}$$

由定义 *19.2* 可得此时备择假设下的对数似然函数为：

$$\begin{aligned} L_1 &= \sum_{i=1}^{p} \ln \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tr}[(\mathbf{X_i}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X_i}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}]} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left\{ -\frac{m}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\det \Sigma) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}[(\mathbf{X_i} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X_i} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}] \right\} \\ &= -\frac{p}{2} \left\{ m \ln(2\pi) + \ln(\det \Sigma) + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \operatorname{tr}[(\mathbf{X_i} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X_i} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}] \right\} \end{aligned}$$

上式可以化为[2]：

$$L_1(\Sigma) = -\frac{p}{2} \left[m \ln(2\pi) + \ln(\det \Sigma) + \operatorname{tr}(S\Sigma^{-1}) \right]$$

其中 S 为样本协方差阵。这个似然函数在 $\Sigma = S$ 时取最大值，于是： 证明

$$L_1 = -\frac{p}{2} [m \ln(2\pi) + \ln(\det S) + p]$$

同理，此时原假设下的似然函数值为：

$$L_2 = -\frac{p}{2} \left[m \ln(2\pi) + \ln(\det \hat{\Sigma}) + \operatorname{tr}(S\hat{\Sigma}) \right]$$

其中 $\hat{\Sigma} = \hat{A}\hat{A}^T - \hat{D}$。

由似然比检验原理可知： 似然比检验

$$-2[L_2(\Sigma) - L_1(\Sigma)] \sim \chi^2_{df}$$

当

$$p[\ln(\det \hat{\Sigma}) + \operatorname{tr}(S\hat{\Sigma}) - \ln(\det S) - p] > \chi^2_{0.95}(df)$$

时应拒绝原假设，即 n 个因子不足以解释数据，应增大因子个数。其中 $\chi^2_{0.95}(df)$ 为分布的 0.95 分位数。 自由度的计算

[2] 样本因子分析时需要注意使用协方差矩阵的无偏估计。

21.6.4 因子得分

在拟合得到因子载荷矩阵后，我们可以反过来求解各样本因子的取值，这样一来就可以根据因子值去进行进一步的分析。例如在开头的例子里，我们可以得到每个学生语言能力与理科能力的值，进而可以进行分类或选择。因子得分有两种计算方式。

加权最小二乘法

推导 21.6. 考虑加权最小二乘函数：

$$\varphi(F) = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} - AF)^T D^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} - AF)$$

求：

$$\hat{F} = \arg\min \varphi(F)$$

由极值的必要条件得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(F)}{\partial F} &= -2A^T D^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} - AF) = 0 \\ A^T D^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) &= A^T D^{-1} AF \\ F &= (A^T D^{-1} A)^{-1} A^T D^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

需要注意 $A^T D^{-1} A$ 的可逆性。

若认为 $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}_m(\boldsymbol{\mu} + AF, D)$，则上述解得的 F 也是极大似然估计的结果。

Definition 21.10. 称加权最小二乘法得到的因子得分为 *Bartlett* 因子得分。

从求解过程可以看出，该方法实际上是对特殊方差更大的变量施以更宽容的残差值。

回归法

推导 21.7. 设：

$$f_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ji} \mathbf{X}_i + \varepsilon_j,\ \mathrm{Cov}(\mathbf{X}_i, \varepsilon_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

由性质 *21.6.1(4)* 和性质 *14.4.1(3)(5)* 可知：

$$a_{ij} = \mathrm{Cov}(\mathbf{X}_i, f_j) = \mathrm{Cov}\left(\mathbf{X}_i, \sum_{k=1}^{m} b_{jk}\mathbf{X}_k + \varepsilon_j\right) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_{ik} b_{jk}$$

令 $B = (b_{ij})$，则有：

$$A = \Sigma B^T$$

于是 $B = A^T \Sigma^{-1}$，需要注意 Σ 的可逆性。回归法的因子得分即为：

$$F = A^T \Sigma^{-1} \mathbf{X}$$

Chapter 22

贝叶斯统计

22.1 Basics

Definition 22.1. *A set G of elements is called a group if it satisfies the following four conditions.*

1. *There is defined an operation, group multiplication, which with any two elements $a, b \in G$ associates an element c of G. The element c is called the product of a and b and is denoted ab;*
2. *Group multiplication obeys the associative law, which means $(ab)c = a(bc)$;*
3. *There exists an element $e \in G$, called the identity, such that $ae = ea = a, \ \forall \ a \in G$;*
4. *For each element $a \in G$, there exists an element $a^{-1} \in G$ which called its inverse, such that $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.*

Definition 22.2. *A class G of transformations is called a transformation group if it is closed under both composition and inversion.*

Theorem 22.1. *A transformation group is a group.*

22.1.1 Group Family

Definition 22.3. *A group family of distributions is a family obtained by subjecting a random vector with a fixed distribution to a transformation group.*

Property 22.1.1. *A group family is independent of which of its members is takn as starting distribution.*

Proof. Let $\mathbf{X}$ denote an n-dimensional random vector characterized by a specific distribution F. The group family G is formed by applying a transformation group T to $\mathbf{X}$. Let $\mathbf{Y}$ be an element of G that is distinct from $\mathbf{X}$. The distribution F can be derived by applying the transformation T to $\mathbf{Y}$. For any $\mathbf{Z} \in G$, there exists a transformation $\mathcal{T}_1 \in T$ such that $\mathbf{X} = \mathcal{T}_1\mathbf{Z}$. Given that $\mathbf{Y} \in G$, there also exists a transformation $\mathcal{T}_2 \in T$ such that $\mathbf{Y} = \mathcal{T}_2\mathbf{X}$. Consequently, we can express $\mathbf{Y}$ as $\mathbf{Y} = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\mathbf{Z}$. Since T is a transformation group, it follows that $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 \in T$. Therefore, the inverse $(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)^{-1} \in T$, which implies that $\mathbf{Z} = (\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)^{-1}\mathbf{Y} \in F$. This leads to the conclusion that $G \subset F$. By a similar argument, one can establish that $F \subset G$, thereby concluding that $G = F$. This indicates that the family is invariant with respect to the choice of representative element. □

Definition 22.4 (Location-scale families). *Let* $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$ *be an* n*-dimensional random vector with a fixed joint distribution function* F. *We define the following families of distributions based on affine transformations of* $\mathbf{X}$*:*

- ***Location family:*** *For any constant vector* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$*, define a shifted random vector* $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + a$. *The distribution function of* $\mathbf{Y}$ *is given by:*

$$P(\mathbf{Y}_1 \leqslant y_1, \mathbf{Y}_2 \leqslant y_2, \ldots, \mathbf{Y}_n \leqslant y_n) = F(y_1 - a_1, y_2 - y_2, \ldots, y_n - a_n)$$

  The collection of all such distributions for a fixed F *and varying* a *is called a* location family.

- ***Scale family:*** *For any constant vector* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *with all* $b_i > 0$*, define the scaled random vector* $\mathbf{Y} = b \otimes \mathbf{X}$ *(element-wise multiplication). Then the distribution function of* $\mathbf{Y}$ *is:*

$$P(\mathbf{Y}_1 \leqslant y_1, \mathbf{Y}_2 \leqslant y_2, \ldots, \mathbf{Y}_n \leqslant y_n) = F\left(\frac{y_1}{b_1}, \frac{y_2}{b_2}, \ldots, \frac{y_n}{b_n}\right)$$

  The collection of such distributions for fixed F *and varying* b *is called a* scale family.

- ***Location-scale family:*** *When both a shift and scaling are applied simultaneously, we define the transformed vector as:*

$$\mathbf{Y} = a + b \otimes \mathbf{X}$$

  where $a \in \mathbb{R}^n$ *is a location vector and* $b \in \mathbb{R}^n$ *is a scale vector with strictly positive entries. The resulting collection of distributions for all such transformations of a fixed* F *forms a* location-scale family.

22.1.2 Exponential Families

Definition 22.5. *A family* $\{P_\theta\}$ *of distributions is said to form an* n*-dimensional* exponential family *if the distributions* P_θ *have densities of the form:*

$$p(x; \theta) = \exp\left[\sum_{i=1}^{n} \theta_i T_i(x) - f(\theta)\right] h(x)$$

with respect to some common measure μ. *In this context,* θ_i *belongs to the set of real numbers,* f *and* T_i *are functions that take real values, and* x *is a point in the support of the density.*

Definition 22.6. *The set Ξ of points θ for which holds that:*

$$\int \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i T_i(x)\right] \mathrm{d}\mu < +\infty$$

is called the natural parameter space *and θ is called the* natural parameter. *In the function above, $h(x)$ is absorbed into $\mu(x)$.*

Theorem 22.2. *Ξ is convex.*

Proof. Let θ, ϑ be two different points in Ξ. For any $\alpha \in (0,1)$, it follows from 不等式 9 that:

$$\begin{aligned}
&\int \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}[\alpha\theta_i + (1-\alpha)\vartheta_i]T_i(x)\right\} \mathrm{d}\mu \\
=&\int \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha\theta_i T_i(x)\right] \exp\left[\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)\vartheta_i T_i(x)\right] \mathrm{d}\mu \\
\leqslant&\left\{\int \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i T_i(x)\right] \mathrm{d}\mu\right\}^{\alpha} \left\{\int \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i T_i(x)\right] \mathrm{d}\mu\right\}^{1-\alpha} < +\infty
\end{aligned}$$

□

Definition 22.7. *When neither the T_i's nor the θ_i's satisfy a linear constraint, the exponential family is said to be* minimal. *If the θ's are related in a nonlinear way, it forms a* curved exponential family.

Theorem 22.3. *For any intergrable function f and any θ in the interior of Ξ, the intergral:*

$$\int f(x) \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i T_i(x)\right] h(x)\, \mathrm{d}\mu$$

is continuous and has derivatives of all orders with respect to the θ's, and these can be obtained by differentiating under the integral sign.

Property 22.1.2. *The exponential families has the following properties:*

1. *Exponential families have natural conjugate priors;*
2. *$T_i(x)$'s are sufficient statistics for θ;*
3. $\mathrm{E}(T_i) = \dfrac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_i}$, $\mathrm{Cov}(T_i, T_j) = \dfrac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}$;

Proof. (1)The likelihood corresponding to a sequence $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ of i.i.d observations is:

$$p(y|\theta) \propto \prod_{i=1}^{m} \exp\left[\sum_{j=1}^{n}\theta_j T_j(y_i) - f(\theta)\right] = \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i \sum_{j=1}^{m} T_i(y_j) - mf(\theta)\right]$$

If θ's pdf is specified as:

$$p(\theta) \propto \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i\alpha_i - g(\theta)\right]$$

We have:

$$p(\theta|y) \propto \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left[\sum_{j=1}^{m}T_i(y_j)+\alpha_i\right]-[mf(\theta)+g(\theta)]\right\}$$

which completes the proof.

(2)The conclusion can be obtained from **??**.

(3)Because:

$$\int \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i T_i(x)-f(\theta)\right]h(x)\,\mathrm{d}\mu=1$$

From 定理 22.3, we can derive:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\int \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i T_i(x)-f(\theta)\right]h(x)\,\mathrm{d}\mu=0$$

$$\int\left[T_i(x)-\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta_i}\right]\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i T_i(x)-f(\theta)\right]h(x)\,\mathrm{d}\mu=0$$

$$\int T_i(x)\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i T_i(x)-f(\theta)\right]h(x)\,\mathrm{d}\mu=\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta_i}\int \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i T_i(x)-f(\theta)\right]h(x)\,\mathrm{d}\mu$$

$$\mathrm{E}(T_i)=\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta_i}$$

Taking the partial derivative with respect to θ_j of the above equation gives:

$$\int T_i(x)\left[T_j(x)-\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta_j}\right]\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i T_i(x)-f(\theta)\right]h(x)\,\mathrm{d}\mu=\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}$$

$$\int T_i(x)T_j(x)p(x|\theta)\,\mathrm{d}\mu-\int T_i(x)\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta_j}p(x|\theta)\,\mathrm{d}\mu=\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}$$

$$\mathrm{E}(T_iT_j)-\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta_j}\mathrm{E}(T_i)=\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}$$

$$\mathrm{E}(T_iT_j)-\mathrm{E}(T_i)\,\mathrm{E}(T_j)=\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}$$

$$\mathrm{Cov}(T_i,T_j)=\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}$$

□

22.2 Bayesian

The process of Bayesian data analysis can be idealized by dividing it into the following three stes:

1. Setting up a full probability model which means a joint probability distribution for all observable quantities in a problem.

2. Conditioning on observed data: calculating and interpreting the appropriate posterior distribution——the conditional probability distribution of the unobserved

Theorem 22.4.

链接全概率公式与条件概率，同时写完测度后重新定义

Definition 22.8. *The parameters associated with the prior distribution are termed hyperparameters.*

Definition 22.9. *The highest posterior density region is defined as the set of values that encompasses $100(1-\alpha)\%$ of the posterior probability, characterized by the property that the density within this region is never less than that outside of it.*

A central interval of posterior probability, within the context of a $100(1-\alpha)\%$ interval, denotes the range of values that includes exactly $100(\alpha/2)\%$ of the posterior probability on each side.

22.2.1 Binomial Distribution

$$p(y|\theta) = \mathrm{Binom}(y|n,\theta) = \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}$$

Theorem 22.5. *When the prior distribution for the parameter θ is specified as uniform over the interval $[0,1]$, the resulting posterior distribution for the binomial model is characterized by a Beta distribution, specifically $\mathrm{Beta}(y+1, n-y+1)$. In this context, y denotes the number of observed successes, while n represents the total number of trials conducted. Letting $\tilde{y}$ represent the result of a new trial which is exchangeable with the first n, then:*

$$P(\tilde{y}=1|y) = \frac{y+1}{n+2}$$

Proof. As 定理 22.4 shows:

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)} \propto p(\theta)p(y|\theta) = p(y|\theta) = \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y} \propto \theta^y(1-\theta)^{n-y}$$

Since the prior distribution $p(\theta)$ is uniform over $[0,1]$, we have $p(\theta)=1$ for $\theta \in [0,1]$. Therefore, the posterior distribution is proportional to the likelihood:

$$p(\theta|y) \propto \theta^y(1-\theta)^{n-y}$$

This is the kernel of a Beta distribution. The probability density function of the Beta distribution with parameters α and β is given by:

$$p(\theta;\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

for $\theta \in [0,1]$, where $B(\alpha,\beta)$ is the Beta function, which acts as the normalization constant.

Comparing this with the posterior kernel $\theta^y(1-\theta)^{n-y}$, we identify $\alpha = y+1$ and $\beta = n-y+1$. Therefore, the posterior distribution of θ is:

$$\theta|y \sim \mathrm{Beta}(y+1, n-y+1)$$

Now consider a new trial result $\tilde{y}$ that is exchangeable with the original n trials. The predictive probability of success in the new trial is given by the expectation of θ under the posterior distribution:

$$\begin{aligned} P(\tilde{y}=1|y) &= \int_0^1 P(\tilde{y}=1|\theta,y)p(\theta|y)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 \theta p(\theta|y)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{E}(\theta|y) = \frac{y+1}{n+2} \end{aligned}$$

which completes the proof. □

Theorem 22.6. *The Beta distribution is the conjugate prior for the binomial likelihood. Specifically, if the prior distribution of the success probability θ is $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$, and the data consist of y successes in n Bernoulli trials, then the posterior distribution of θ is $\mathrm{Beta}(\alpha+y,\beta+n-y)$.*

Proof. Assume that the prior distribution of θ follows a Beta distribution with hyperparameters α and β, so that:

$$p(\theta) \propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

The likelihood function for observing y successes out of n trials in a binomial experiment is:

$$p(y|\theta) \propto \theta^{y}(1-\theta)^{n-y}$$

Applying 定理 22.4, the posterior distribution is given by:

$$\begin{aligned} p(\theta|y) &\propto p(\theta)p(y|\theta) \\ &\propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\theta^{y}(1-\theta)^{n-y} \\ &\propto \theta^{\alpha+y-1}(1-\theta)^{\beta+n-y-1} \end{aligned}$$

This expression matches the kernel of a Beta distribution with updated parameters. Therefore, the posterior distribution is:

$$\theta|y \sim \mathrm{Beta}(\alpha+y,\beta+n-y)$$

This confirms that the Beta distribution is conjugate to the binomial likelihood, completing the proof. □

22.2.2 Normal Distribution

Known Variance

Theorem 22.7. *When the variance is known, the normal distribution is the conjugate prior for the mean μ of a normal likelihood. Specifically, suppose there are n i.i.d observations $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ and the likelihood is $y_i|\mu \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, where σ^2 is known. If the prior for μ is $\mu \sim \mathrm{N}(\nu,\tau^2)$, then the posterior distribution of μ is also normal:*

$$\mu|y \sim \mathrm{N}\left(\frac{n\tau^2\bar{y}+\sigma^2\nu}{n\tau^2+\sigma^2}, \frac{\sigma^2\tau^2}{n\tau^2+\sigma^2}\right)$$

where $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ *is the sample mean.*

Proof.

$$
\begin{aligned}
p(\mu|y) \propto p(\mu)p(y|\mu) \propto \exp&\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2 + \frac{(\mu-\nu)^2}{\tau^2}\right]\right\} \\
\propto \exp&\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 2y_i\mu + \mu^2) + \frac{(\mu-\nu)^2}{\tau^2}\right]\right\} \\
\propto \exp&\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{n\mu^2 - 2n\bar{y}\mu}{\sigma^2} + \frac{(\mu-\nu)^2}{\tau^2}\right]\right\} \\
= \exp&\left[-\frac{n\tau^2\mu^2 - 2n\tau^2\bar{y}\mu + \sigma^2(\mu^2 - 2\nu\mu + \nu^2)}{2\sigma^2\tau^2}\right] \\
\propto \exp&\left[-\frac{(n\tau^2+\sigma^2)\mu^2 - 2(n\tau^2\bar{y} + \sigma^2\nu)\mu}{2\sigma^2\tau^2}\right] \\
= \exp&\left[-\frac{\mu^2 - 2\dfrac{n\tau^2\bar{y}+\sigma^2\nu}{\sigma^2+\tau^2}\mu}{\dfrac{2\sigma^2\tau^2}{n\tau^2+\sigma^2}}\right] \\
\propto \exp&\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(\mu - \dfrac{n\tau^2\bar{y}+\sigma^2\nu}{\sigma^2+\tau^2}\right)^2}{\dfrac{\sigma^2\tau^2}{n\tau^2+\sigma^2}}\right]
\end{aligned}
$$

□

Theorem 22.8. *The posterior distribution of a future observation* $\tilde{y}$ *is:*

$$
\tilde{y}|y \sim \mathrm{N}\left(\frac{n\tau^2\bar{y}+\sigma^2\nu}{n\tau^2+\sigma^2}, \frac{\sigma^2\tau^2}{n\tau^2+\sigma^2} + \sigma^2\right)
$$

Proof. Let:

$$
\mu_1 = \frac{n\tau^2\bar{y}+\sigma^2\nu}{n\tau^2+\sigma^2}, \quad \sigma_1^2 = \frac{\sigma^2\tau^2}{n\tau^2+\sigma^2}
$$

Given that the value of $\tilde{y}$ is independent of y when conditioned on μ, we can express the conditional probability as follows:

$$
\begin{aligned}
p(\tilde{y}|y) &= \int p(\tilde{y}|\mu, y)p(\mu|y)\,\mathrm{d}\mu = \int p(\tilde{y}|\mu)p(\mu|y)\,\mathrm{d}\mu \\
&\propto \int \exp\left[-\frac{(\tilde{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\exp\left[-\frac{(\mu-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]\mathrm{d}\mu
\end{aligned}
$$

The above expression can be interpreted as the marginal density of the bivariate normal distribution $(\tilde{y}, \mu)$ with respect to $\tilde{y}$. According to 推论 19.1(4), it follows that $\tilde{y}$ is normally distributed. Utilizing and 性质 14.2.1, we derive the following results: 重期望公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\tilde{y}|y) &= \mathrm{E}[\mathrm{E}(\tilde{y}|\mu, y)|y] = \mathrm{E}[\mathrm{E}(\tilde{y}|\mu)|y] = \mathrm{E}(\mu|y) = \mu_1 \\
\mathrm{Var}(\tilde{y}|y) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(\tilde{y}|\theta, y)|y] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(\tilde{y}|\theta, y)|y] = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(\tilde{y}|\theta)|y] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(\tilde{y}|\theta)|y] \\
&= \mathrm{E}(\sigma^2|y) + \mathrm{Var}(\mu|y) = \sigma_1^2 + \sigma^2
\end{aligned}
$$

□

Known Mean

Theorem 22.9. *When the mean is known, the inverse-gamma distribution is the conjugate prior for the variance σ^2 of a normal likelihood. Specifically, suppose there are n i.i.d observations $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ and the likelihood is $y_i|\mu \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, where μ is known. If the prior for σ^2 is $\sigma^2 \sim \text{Inv-Gamma}(\alpha, \lambda)$, then the posterior distribution of σ^2 is:*

$$\sigma^2|y \sim \text{Inv-Gamma}\left[\frac{n}{2} + \alpha, \lambda + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2\right]$$

Proof.

$$\begin{aligned} p(\sigma^2|y) &\propto p(\sigma^2)p(y|\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma^2}\right)\sigma^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2\right] \\ &= (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-\alpha-1}\exp\left[-\frac{2\lambda + \sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned}$$

□

22.2.3 Possion Model

Theorem 22.10. *The gamma distribution is the conjugate prior for the possion likelihood. Specifically, suppose there are n i.i.d observations $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ and the likelihood is $y_i|\lambda \sim \text{Possion}(\lambda)$. If the prior for λ is $\lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, then the posterior distribution of λ is:*

$$\lambda|y \sim \text{Gamma}\left(\alpha + n\bar{y}, \beta + n\right)$$

Proof. $p(\lambda|y) \propto p(\lambda)p(y|\lambda) \propto \lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}\lambda^{n\bar{y}}e^{-n\lambda} = \lambda^{\alpha+n\bar{y}-1}e^{-(\beta+n)\lambda}$. □

22.3 Prior Distribution

22.3.1 Conjugate Prior Distribution

Definition 22.10. *If $\mathcal{F}$ is a class of sampling distributions $p(y|\theta)$, and $\mathcal{P}$ is a class of prior distributions for θ, then the class $\mathcal{P}$ is conjugate for $\mathcal{F}$ if:*

$$\forall\ p(\cdot|\theta) \in \mathcal{F} \text{ and } p(\cdot) \in \mathcal{P},\ p(\theta|y) \in \mathcal{P}$$

The set of all probability functions that share the same functional form as the likelihood is referred to as the natural conjugate prior families.

22.3.2 Noninformative Prior Distribution

Jeffreys' Invariance Principle

The Jeffreys' invariance principle posits that the prior distribution should remain invariant when subjected to a transformation of the coordinate system for the parameter vector.

Definition 22.11. *In accordance with Jeffreys' invariance principle, the prior distribution for the parameter vector θ is proportional to* $|\det[I(\theta)]|^{\frac{1}{2}}$.

Prior Distribution for the Location-Scale Family

Theorem 22.11. *The location parameter can be conceptualized as the particular instantiation of the same parameter across various origins. Consequently, it is posited that the prior distribution of the location parameter ought not to be influenced by the selection of origin. In accordance with this principle, the prior distribution for the location parameter should be formulated as follows:*

$$p(\theta) \propto 1$$

Similarly, the scale parameter can be interpreted as the specific realization of the same parameter across different scales, so we believe that the prior distribution of the scale parameter should not depend on the choice of scale. In alignment with this principle, the prior distribution for the scale parameter should be articulated as follows:

$$p(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$$

Proof. Initially, we will assume that θ serves as a location parameter. In accordance with the aforementioned principle, we can express the following relationship:

$$p(\theta) = p(\theta + \alpha), \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$$

This implies that $p(\theta)$ must be a constant across the real line.

Next, we consider the case of a scale parameter, where we define $\tau = \dfrac{\theta}{\alpha}$, with $\alpha > 0$. Referring to , we need to establish the following equation: 随机变量函数的分布

$$p(\tau) = p(\alpha\tau)\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right| = p(\alpha\tau)\alpha = p(\theta)$$

From this, we derive:

$$\frac{p(\alpha\tau)}{p(\theta)} = \frac{1}{\alpha}$$

This leads us to conclude that:

$$p(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$$

□

Chapter 23

线性模型

23.1 一般线性模型

Definition 23.1. 称以下模型为线性模型 *(linear model)*：

$$\begin{cases} y = X\beta + \varepsilon \\ \mathrm{E}(\varepsilon) = \mathbf{0} \\ \mathrm{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n \end{cases}$$

其中 y 为 $n \times 1$ 观测向量，X 为 $n \times p$ 设计矩阵，β 为 $p \times 1$ 未知参数向量，ε 为随机误差，σ^2 为误差方差。

Definition 23.2. 称方程 $X^T X\beta = X^T y$ 为正则方程 *(normal equation)*。

Theorem 23.1. 对于定义 *23.1*，$\hat{\beta} = (X^T X)^- X^T y$ 是其唯一的最小二乘解。

Proof. 注意到：

$$\begin{aligned} Q(\beta) &= ||y - X\beta||^2 = (y - X\beta)^T (y - X\beta) \\ &= y^T y - y^T X\beta - \beta^T X^T y - \beta^T X^T X\beta \\ &= y^T y - 2y^T X\beta - \beta^T X^T X\beta \\ \frac{\partial y^T X\beta}{\beta} &= X^T y, \quad \frac{\partial \beta^T X^T X\beta}{\beta} = 2X^T X\beta \\ \frac{\partial Q(\beta)}{\partial \beta} &= 2X^T y - 2X^T X\beta = 0 \\ X^T X\beta &= X^T y \end{aligned}$$

由定理 2.2和定理 2.6(1) 可知方程 $X^T X\beta = X^T y$ 是相容的，根据定理 2.22可知其通解为：

$$\hat{\beta} = (X^T X)^- X^T y$$

其中 $(X^T X)^-$ 是 $X^T X$ 的任意一个广义逆矩阵。

对任意的 β，有：

$$\begin{aligned} Q(\beta) &= ||y - X\beta||^2 = ||y - X\hat{\beta} + X\hat{\beta} - X\beta||^2 = ||y - X\hat{\beta} + X(\hat{\beta} - \beta)||^2 \\ &= ||y - X\hat{\beta}||^2 + ||X(\hat{\beta} - \beta)||^2 + 2(y - X\hat{\beta})^T X(\hat{\beta} - \beta) \end{aligned}$$

注意到正则方程即为：

$$X^T(y - X\beta) = \mathbf{0}$$

于是：

$$2(y - X\hat{\beta})^T X(\hat{\beta} - \beta) = 2[X^T(y - X\hat{\beta})]^T(\hat{\beta} - \beta) = 0$$

所以：

$$Q(\beta) = ||y - X\hat{\beta}||^2 + ||X(\hat{\beta} - \beta)||^2$$

上第二项总是非负的，由范数的性质其为 0 当且仅当 $X\hat{\beta} = X\beta$，即当且仅当 $X^TX\beta = X^TX\hat{\beta} = X^Ty$，所以使 $Q(\beta)$ 达到最小值的 β 必为正则方程的解 $\hat{\beta} = (X^TX)^- X^Ty$。 □

推导 23.1. 若 $\mathrm{rank}(X) = p$，则 X 的列向量组线性无关。考虑二次型 y^TX^TXy，$y^TX^TXy = 0 \Leftrightarrow ||Xy|| = 0 \Leftrightarrow Xy = \mathbf{0}$，而 X 的列向量是线性无关的，所以不存在非零向量的 y 使得 $Xy = \mathbf{0}$，于是 y^TX^TXy 是一个正定二次型，X^TX 是一个正定矩阵。由定理 *2.42(3)* 的第五点和可得 X^TX 可逆。此时 $\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^Ty$，称 $\hat{\beta}$ 为 β 的最小二乘估计 *(least squares estimate, LSE)*。

行列式等于特征值的积，行列式大于 0 矩阵可逆

23.1.1 参数估计

回归系数

Definition 23.3. 若存在 $n \times 1$ 向量 α 使得 $\mathrm{E}(\alpha^Ty) = c^T\beta$ 对一切的 β 成立，则称 $c^T\beta$ 为可估函数 *(estimable function)*。

Property 23.1.1. 对于定义 *23.1*，$c^T\beta$ 和 $d^T\beta$ 是可估函数，$\hat{\beta}$ 是正则方程的解，则：

1. 使 $c^T\beta$ 成为可估函数的全体向量 c 构成 $\mathcal{M}(X^T)$；
2. 若 $c_1^T\beta$ 和 $c_2^T\beta$ 都是可估函数，则对任意常数 a_1, a_2，$a_1c_1^T\beta + a_2c_2^T\beta$ 也是可估函数；
3. 线性无关的可估函数组最多有 $\mathrm{rank}(X)$ 个可估函数；
4. $c^T\hat{\beta}$ 与 $(X^TX)^-$ 的选择无关；
5. $c^T\hat{\beta}$ 为 $c^T\beta$ 的无偏估计；
6. $\mathrm{Var}(c^T\hat{\beta}) = \sigma^2c^T(X^TX)^-c$，$\mathrm{Cov}(c^T\hat{\beta}, d^T\hat{\beta}) = \sigma^2c^T(X^TX)^-d$，且与 $(X^TX)^-$ 的选择无关；
7. $c^T\hat{\beta}$ 是 $c^T\beta$ 唯一的 *BLUE*；

8. 设 $\varphi_i = c_i^T\beta$, $i = 1, 2, \ldots, k$ 都是可估函数，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$，则 $\varphi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\varphi_i$ 也是可估的，且 $\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c_i^T\hat{\beta}$ 是 φ 的 *BLUE*。

Proof. (1) $c^T\beta$ 是可估函数 $\Leftrightarrow$ 存在 $n \times 1$ 向量 α 使得 $\mathrm{E}(\alpha^T y) = \alpha^T \mathrm{E}(y) = \alpha^T X\beta = c^T\beta$ 对一切的 β 成立 $\Leftrightarrow c = X^T\alpha$。

(2) 由 (1) 直接可得。

(3) 由 (1) 直接可得。

(4) 因为 $c^T\beta$ 可估，由 (1) 可知存在 $n \times 1$ 向量 α 使得 $c = X^T\alpha$，于是：

$$c^T\hat{\beta} = \alpha^T X(X^T X)^- X^T y$$

由性质 2.5.1(4) 即可得出结论。

(5) 因为 $c^T\beta$ 可估，由 (1) 可知存在 $n \times 1$ 向量 α 使得 $c = X^T\alpha$，根据性质 2.5.1(7) 可得：

$$\mathrm{E}(c^T\hat{\beta}) = \mathrm{E}[c^T(X^T X)^- X^T y] = c^T(X^T X)^- X^T X\beta = c^T\beta$$

(6) 因为 $c^T\beta, d^T\beta$ 是可估函数，由 (1) 可知存在 α, γ 使得 $c = X^T\alpha, d = X^T\gamma$。由性质 14.4.1(3) 和性质 2.5.1(6)(7) 可知：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(c^T\hat{\beta}, d^T\hat{\beta}) &= \mathrm{Cov}[c^T(X^T X)^- X^T y, d^T(X^T X)^- X^T y] \\
&= c^T(X^T X)^- X^T \mathrm{Cov}(y) X[(X^T X)^-]^T d \\
&= c^T(X^T X)^- X^T \sigma^2 I_n X(X^T X)^- d \\
&= \sigma^2 c^T(X^T X)^- d
\end{aligned}$$

在上第三行中把 c^T, d 展开为 $\alpha^T X, X^T\gamma$，由性质 2.5.1(4) 即可知 $\mathrm{Cov}(c^T\hat{\beta}, d^T\hat{\beta})$ 与 $(X^T X)^-$ 的选择无关。

(7) 无偏性由 (5) 可得，线性性由正则方程可知，下证方差最小。设 $a^T y$ 为 $c^T\beta$ 的任一无偏估计，由 (1) 的过程可知 $c = X^T a$。根据性质 2.5.1(6) 和 (6) 可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(a^T y) - \mathrm{Var}(c^T\hat{\beta}) &= \sigma^2[a^T a - c^T(X^T X)^- c] \\
&= \sigma^2[a^T - c^T(X^T X)^- X^T][a - X(X^T X)^- c] \\
&= \sigma^2 ||a - X(X^T X)^- c||^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

上式第一行到第二行是由于性质 2.5.1(7)：

$$\begin{aligned}
&[a^T - c^T(X^T X)^- X^T][a - X(X^T X)^- c] \\
=&a^T a - a^T X(X^T X)^- c - c^T(X^T X)^- X^T a + c^T(X^T X)^- X^T X(X^T X)^- c \\
=&a^T a - c^T(X^T X)^- c - c^T(X^T X)^- c + c^T(X^T X)^- c \\
=&a^T a - c^T(X^T X)^- c
\end{aligned}$$

由范数的性质可知 $\mathrm{Var}(a^Ty) = \mathrm{Var}(c^T\hat{\beta})$ 当且仅当 $a = X(X^TX)^-c$，由性质 2.5.2(3) 可知 $a = X(X^TX)^-c \Leftrightarrow a^T = c^T(X^TX)^-X^T \Leftrightarrow a^Ty = c^T(X^TX)^-X^Ty = c^T\hat{\beta}$。

(8) 因为 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ 都是可估函数，所以存在 $b_1, b_2, \ldots, b_k$ 使得 $\mathrm{E}(b_i^Ty) = c_i^T\beta$，于是：

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i b_i^T y\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathrm{E}(b_i^T y) = \sum_{i=1}^k \alpha_i c_i^T \beta = \sum_{i=1}^k a_i\varphi_i = \varphi$$

所以取 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^k \alpha_i b_i$ 即可得到 $\mathrm{E}(\alpha^Ty) = \varphi$，$\varphi$ 是可估的。

由 (5) 可得 $c_i^T\hat{\beta}$ 是 $c_i^T\beta$ 的无偏估计，所以：

$$\mathrm{E}(\hat{\varphi}) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i c_i^T\hat{\beta}\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathrm{E}(c_i^T\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i c_i^T\beta = \varphi$$

即 $\hat{\varphi}$ 是一个无偏估计。

令 $c = \sum\limits_{i=1}^k \alpha_i c_i$，则 $\varphi = c^T\beta$。设 γ^Ty 是 φ 的一个无偏估计，于是由 (7) 可得：

$$\mathrm{Var}(\gamma^Ty) - \mathrm{Var}(c^T\hat{\beta}) = \sigma^2||\gamma - X(X^TX)^-c||^2$$

上式等于 0 $\Leftrightarrow \gamma^Ty = c^T\hat{\beta} = \hat{\varphi}$，即 $\hat{\varphi}$ 是唯一的 BLUE。 □

Definition 23.4. *对于定义 23.1，若 $c^T\beta$ 是可估函数，称 $c^T\hat{\beta}$ 为 $c^T\beta$ 的 LSE，其中 $\hat{\beta}$ 为正则方程的解。*

残差

Definition 23.5. *称 $\hat{e} = y - X\hat{\beta}$ 为残差向量 (residual vector)，称 $\hat{e}^T\hat{e}$ 为残差平方和 (sum of squared residuals, SSE)，记为 SSE。*

Property 23.1.2. *对于定义 23.1，$\hat{\beta}$ 为正则方程的解，则残差向量 $\hat{e}$ 满足：*

1. $\mathrm{E}(\hat{e}) = 0,\ \mathrm{Cov}(\hat{e}) = \sigma^2(I - P_X)$；
2. $SSE = y^T(I_n - P_X)y$。

Proof. (1) 由性质 2.8.2(2) 可知向 $\mathcal{M}(X)$ 的正交投影阵 $P_X = X(X^TX)^-X^T$，根据性质 2.8.2(4) 可知 $I_n - P_X$ 是对称幂等阵，所以由性质 14.4.1(3) 可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\hat{e}) &= \mathrm{E}(y - X\hat{\beta}) = \mathrm{E}[I_ny - X(X^TX)^-X^Ty] = (I_n - P_X)\mathrm{E}(y)\\ &= (I_n - P_X)X\beta = (X - X)\beta = 0\\ \mathrm{Cov}(\hat{e}) &= \mathrm{Cov}[(I_n - P_X)y] = (I_n - P_X)\mathrm{Cov}(y)(I_n - P_X)^T\\ &= (I_n - P_X)\mathrm{Cov}(y)(I_n - P_X) = \sigma^2(I_n - P_X)\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 的证明过程可知：

$$\hat{e} = (I_n - P_X)y$$

且 $I_n - P_X$ 是一个对称幂等阵，于是：

$$\hat{e}^T\hat{e} = y^T(I_n - P_X)^T(I_n - P_X)y = y^T(I_n - P_X)(I_n - P_X)y = y^T(I_n - P_X)y$$ □

误差方差

Theorem 23.2. 对于定义 *23.1*，$\hat{\beta}$ 为正则方程的解，$\mathrm{rank}(X) = r$，则：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-r}$$

是 σ^2 的无偏估计。

Proof. 注意到 $(I_n - P_X)X = X - X = \mathbf{0}$，由性质 23.1.2(2) 和定理 14.3可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(SSE) &= \mathrm{E}[y^T(I_n - P_X)y] = \beta^T X^T (I_n - P_X) X\beta + \mathrm{tr}[(I_n - P_X)\sigma^2 I_n] \\ &= \sigma^2 \,\mathrm{tr}(I_n - P_X)\end{aligned}$$

由性质 2.8.2(4)、性质 2.8.1(2)(3) 和性质 2.8.2(1) 可得：

$$\mathrm{tr}(I_n - P_X) = \mathrm{rank}(I_n - P_X) = n - \mathrm{rank}(P_X) = n - \mathrm{rank}(X) = n - r$$

即：

$$\mathrm{E}\left(\frac{SSE}{n-r}\right) = \sigma^2$$

□

Definition 23.6. 称 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的 *LSE*。

23.1.2 约束最小二乘估计

Theorem 23.3. 对于定义 *23.1*，假设：

$$A\beta = b, \quad A \in M_{k\times p}(K), \quad \mathrm{rank}(A) = k, \quad \mathcal{M}(A^T) \subseteq \mathcal{M}(X^T)$$

且 $A\beta = b$ 相容，则：

$$\hat{\beta}_A = \hat{\beta} - (X^TX)^- A^T[A(X^TX)^- A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b)$$

为 β 在约束 $A\beta = b$ 下的约束 *LS* 解，$A\hat{\beta}_A$ 为 $A\beta$ 的约束 *LSE*。

Proof. 使用 Lagrange 乘子法构造辅助函数（λ 为 Lagrange 乘子，乘子前加上系数 2 是为了下面不出现分数，对结果没有影响）：

$$\begin{aligned}F(\beta,\lambda) &= ||y - X\beta||^2 + 2\lambda^T(A\beta - b) \\ &= y^Ty - y^TX\beta - \beta^TX^Ty + \beta^TX^TX\beta + 2\lambda^TA\beta - 2\lambda^Tb\end{aligned}$$

于是：

$$\frac{\partial F(\beta,\lambda)}{\partial \beta} = -2X^Ty + 2X^TX\beta + 2A^T\lambda$$

令上式为 0，得到：

$$X^TX\beta = X^Ty - A^T\lambda$$

于是约束下的解即为方程组：

$$\begin{cases} X^TX\beta = X^Ty - A^T\lambda \\ A\beta = b \end{cases}$$

的解，将其记为 $\hat{\beta}_A, \hat{\lambda}$。因为 $\mathcal{M}(A^T) \subseteq \mathcal{M}(X^T)$，所以方程组是相容的。由定理 2.22可知：

$$\hat{\beta}_A = (X^TX)^-X^Ty - (X^TX)^-A^T\hat{\lambda} = \hat{\beta} - (X^TX)^-A^T\hat{\lambda}$$

代入方程组的第二个方程可得：

$$A\hat{\beta} - A(X^TX)^-A^T\hat{\lambda} = b$$

由可知：

$A(X^TX)^-A^T$ 的可逆性

$$\hat{\lambda} = [A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b)$$

于是：

$$\hat{\beta}_A = \hat{\beta} - (X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b)$$

下证明这个解确实是最小二乘解。

做分解：

$$\begin{aligned} ||y - X\beta||^2 &= ||y - X\hat{\beta} + X(\hat{\beta} - \beta)||^2 \\ &= ||y - X\hat{\beta}||^2 + 2(y - X\hat{\beta})^TX(\hat{\beta} - \beta) + (\hat{\beta} - \beta)^TX^TX(\hat{\beta} - \beta) \end{aligned}$$

由性质 2.5.1(5)(6) 可得：

$$\begin{aligned} (y - X\hat{\beta})^TX(\hat{\beta} - \beta) &= y^TX(\hat{\beta} - \beta) - \hat{\beta}^TX^TX(\hat{\beta} - \beta) \\ &= y^TX(\hat{\beta} - \beta) - [(X^TX)^-Xy]^TX^TX(\hat{\beta} - \beta) \\ &= y^TX(\hat{\beta} - \beta) - y^TX^T(X^TX)^-X^TX(\hat{\beta} - \beta) \\ &= y^TX(\hat{\beta} - \beta) - y^TX^T(\hat{\beta} - \beta) = 0 \end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned} ||y - X\beta||^2 &= ||y - X\hat{\beta}||^2 + (\hat{\beta} - \beta)^TX^TX(\hat{\beta} - \beta) \\ &= ||y - X\hat{\beta}||^2 + (\hat{\beta} - \hat{\beta}_A + \hat{\beta}_A - \beta)^TX^TX(\hat{\beta} - \hat{\beta}_A + \hat{\beta}_A - \beta) \\ &= ||y - X\hat{\beta}||^2 + ||X(\hat{\beta} - \hat{\beta}_A)||^2 + ||X(\hat{\beta}_A - \beta)||^2 + 2(\hat{\beta} - \hat{\beta}_A)^TX^TX(\hat{\beta}_A - \beta) \end{aligned}$$

由性质 2.5.1(6)(7) 以及 $\mathcal{M}(A^T) \subseteq \mathcal{M}(X^T)$ 可得：

$$\begin{aligned} (\hat{\beta} - \hat{\beta}_A)^TX^TX(\hat{\beta}_A - \beta) &= [(X^TX)^-A^T\hat{\lambda}]^TX^TX(\beta_A - \beta) = \hat{\lambda}^TA(X^TX)^-X^TX(\beta_A - \beta) \\ &= \hat{\lambda}^TA(\beta_A - \beta) = \hat{\lambda}^T(A\beta_A - A\beta) = 0 \end{aligned}$$

所以：

$$||y - X\beta||^2 = ||y - X\hat{\beta}||^2 + ||X(\hat{\beta} - \hat{\beta}_A)||^2 + ||X(\hat{\beta}_A - \beta)||^2$$

即对任意满足 $A\beta = b$ 的 β 都有：

$$||y - X\beta||^2 \geqslant ||y - X\hat{\beta}||^2 + ||X(\hat{\beta} - \hat{\beta}_A)||^2$$

等号成立当且仅当 $\beta = \hat{\beta}_A$，于是 $\hat{\beta}_A$ 是 LSE。 □

误差方差

Theorem 23.4. 在定理 *23.3*的假设下，在参数区域 $A\beta = b$ 上，

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{||y - X\hat{\beta}_A||^2}{n-r+k} = \frac{SSE_A}{n-r+k}$$

是 σ^2 的无偏估计。

Proof. 由定理 23.3可知：

$$\mathrm{E}(||y - X\hat{\beta}_A||^2) = \mathrm{E}[||y - X\hat{\beta}||^2 + ||X(\hat{\beta} - \hat{\beta}_A)||^2] = \mathrm{E}(||y - X\hat{\beta}||^2) + \mathrm{E}[||X(\hat{\beta} - \hat{\beta}_A)||^2]$$

根据定理 23.2可知：

$$\mathrm{E}(||y - X\hat{\beta}||^2) = (n-r)\sigma^2$$

由性质 2.5.1(6)(7)、$\mathcal{M}(A^T) \subseteq \mathcal{M}(X^T)$

$$\begin{aligned}
||X(\hat{\beta} - \hat{\beta}_A)|| &= (\hat{\beta} - \hat{\beta}_A)^T X^T X(\hat{\beta} - \hat{\beta}_A) \\
&= \{(X^TX)^- A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b)\}^T \\
&\quad \cdot X^TX(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \\
&= (A\hat{\beta} - b)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}A(X^TX)^- \\
&\quad \cdot X^TX(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \\
&= (A\hat{\beta} - b)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}A(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \\
&= (A\hat{\beta} - b)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b)
\end{aligned}$$

因为 $\mathcal{M}(A^T) \subseteq \mathcal{M}(X^T)$，所以由性质 23.1.1(1) 可知 $A\beta$ 的每一个元素都是可估函数，于是由定理 14.3和性质 23.1.1(5)(6) 可知：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(||X(\hat{\beta} - \hat{\beta}_A)||) &= \mathrm{E}\{(A\hat{\beta} - b)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b)\} \\
&= (A\beta - b)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\beta - b) \\
&\quad + \mathrm{tr}\{[A(X^TX)^-A^T]^{-1}\,\mathrm{Cov}(A\hat{\beta} - b)\} \\
&= \mathrm{tr}\{[A(X^TX)^-A^T]^{-1}\sigma^2 A(X^TX)^-A^T\} = \sigma^2\,\mathrm{tr}(I_k) = k\sigma^2
\end{aligned}$$

所以：

$$\mathrm{E}(||y - X\hat{\beta}_A||^2) = (n-r+k)\sigma^2$$

即在参数区域 $A\beta = b$ 上，

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{||y - X\hat{\beta}_A||^2}{n-r+k}$$

是 σ^2 的无偏估计。 □

23.1.3 实际计算

Theorem 23.5. 对于无约束条件以及约束 $A\beta = \mathbf{0}$，有：

$$SSE = ||y - X\hat{\beta}||^2 = y^Ty - \hat{\beta}^TX^Ty$$
$$SSE_A = ||y - X\hat{\beta}_A||^2 = y^Ty - \hat{\beta}_A^TX^Ty$$

Proof. 由性质 2.5.1(5) 可知：

$$\begin{aligned} SSE &= (y - X\hat{\beta})^T(y - X\hat{\beta}) = y^Ty - y^TX\hat{\beta} - \hat{\beta}^TX^Ty + \hat{\beta}^TX^TX\hat{\beta} \\ &= y^Ty - 2\hat{\beta}^TX^Ty + \hat{\beta}^TX^TX(X^TX)^-X^Ty = y^Ty - 2\hat{\beta}^TX^Ty + \hat{\beta}^TX^Ty \\ &= y^Ty - \hat{\beta}^TX^Ty \end{aligned}$$

由定理 23.3可知：

$$\begin{cases} X^TX\hat{\beta}_A = X^Ty - A^T\hat{\lambda} \\ A\hat{\beta}_A = \mathbf{0} \end{cases}$$

其中 λ 为 Lagrange 乘子，于是有：

$$\begin{aligned} SSE_A &= (y - X\hat{\beta}_A)^T(y - X\hat{\beta}_A) = y^Ty - y^TX\hat{\beta}_A - \hat{\beta}_A^TX^Ty + \hat{\beta}_A^TX^TX\hat{\beta}_A \\ &= y^Ty - \hat{\beta}_A^TX^Ty + \hat{\beta}_A^TX^TX\hat{\beta}_A - \hat{\beta}^TX^Ty = y^Ty - \hat{\beta}_A^TX^Ty + \hat{\beta}_A^T(X^TX\hat{\beta}_A - X^Ty) \\ &= y^Ty - \hat{\beta}_A^TX^Ty - \hat{\beta}_A^TA^T\hat{\lambda} = y^Ty - \hat{\beta}_A^TX^Ty \end{aligned}$$

□

Definition 23.7. 称 $\hat{\beta}^TX^Ty$ 为回归平方和 *(regression sum of suqares, RSS)*，记为 $RSS(\beta)$。称 $\hat{\beta}_A^TX^Ty$ 为约束条件 $A\beta = \mathbf{0}$ 下的回归平方和，记为 $RSS_A(\beta)$。

note 23.1. 回归平方和表示了数据平方和 y^Ty 中能够由因变量 y 与自变量 $X_1, X_2, \ldots, X_p$ 的线性关系解释的部分。

23.1.4 预测

假设要预测 m 个点 $x_{0i} = (x_{0i1}, x_{0i2}, \ldots, x_{0ip})$，$i = 1, 2, \ldots, m$，它们所对应的因变量为 $y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0m}$。已知 y_{0i} 和历史数据服从同一个线性模型，即：

$$y_0 = X_0\beta + \varepsilon_0, \quad \mathrm{E}(\varepsilon_0) = \mathbf{0}, \quad \mathrm{Cov}(\varepsilon_0) = \sigma^2 I_m$$
$$y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0m} \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_{011} & x_{012} & \cdots & x_{01p} \\ x_{021} & x_{022} & \cdots & x_{02p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{0m1} & x_{0m2} & \cdots & x_{0mp} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{01} \\ \varepsilon_{02} \\ \vdots \\ \varepsilon_{0m} \end{pmatrix}$$

假设 $\mathcal{M}(X_0^T) \subseteq \mathcal{M}(X^T)$。

被测量与历史数据无关

推导 23.2. 此时使用 $\mathrm{E}(y_0)=X_0\beta$ 的估计 $X_0\hat{\beta}=X_0(X^TX)^-X^Ty$ 去进行预测。

由定理 2.2可知 $\mathcal{M}(X^T)=\mathcal{M}(X^TX)$，于是 $\mathcal{M}(X_0^T)\subseteq\mathcal{M}(X^T)=\mathcal{M}(X^TX)$，由性质 *2.5.1(3)* 可知 $X_0(X^TX)^-X^Ty$ 与广义逆 $(X^TX)^-$ 的选择无关。

因为 $\mathcal{M}(X_0^T)\subseteq\mathcal{M}(X^T)$，所以 $X_0\beta$ 是可估的，它具有可估函数的性质。但需注意，因为 y_0 也是一个随机变量，所以这里的无偏性指的是 $\mathrm{E}(\hat{y}_0-y_0)=0$。

被测量与历史数据相关

推导 23.3. 在某些情况下，y_0 和 y 确实具有一定的相关性，用 $\mathrm{Cov}(\varepsilon,\varepsilon_0)=\sigma^2V^T$ 来度量它们之间的相关性，此时有：

$$\mathrm{Cov}[(y,y_0)^T]=\mathrm{Cov}[(\varepsilon,\varepsilon_0)^T]=\sigma^2\begin{pmatrix}I_n & V^T\\ V & I_m\end{pmatrix}$$

Definition 23.8. 记 $\hat{y}=Cy$ 是 y 的一个线性无偏估计，称：

$$\mathrm{PMSE}(\hat{y})=\mathrm{E}[(\hat{y}-y)^TA(\hat{y}-y)]$$

为广义预测均方误差 *(generalized prediction MSE, PMSE)*，其中 $A>0$。

Theorem 23.6. y_0 在广义预测均方误差意义下的最优线性无偏估计为：

$$\hat{y}_0=X_0\hat{\beta}+V(y-X\hat{\beta})$$

其中 $\hat{\beta}$ 为正则方程的解。

Proof. 令 $\hat{y}_0=Cy$ 是一个无偏估计，由性质 13.4.3(6) 和性质 14.4.1(3) 可得：

$$\hat{y}_0-y_0=Cy-X_0\beta-\varepsilon_0=CX\beta+C\varepsilon-X_0\beta-\varepsilon_0=(CX-X_0)\beta+C\varepsilon-\varepsilon_0$$

$$\mathrm{E}(\hat{y}_0-y_0)=(CX-X_0)\beta=\mathbf{0}\text{对一切 }\beta\text{ 成立}\iff CX=X_0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(C\varepsilon-\varepsilon_0)&=\mathrm{E}[(C\varepsilon-\varepsilon_0)(C\varepsilon-\varepsilon_0)^T]=\mathrm{E}(C\varepsilon\varepsilon^TC^T-C\varepsilon\varepsilon_0^T-\varepsilon_0\varepsilon^TC^T+\varepsilon_0\varepsilon_0^T)\\&=\mathrm{E}(C\varepsilon\varepsilon^TC^T)-\mathrm{E}(C\varepsilon\varepsilon_0^T)-\mathrm{E}(\varepsilon_0\varepsilon^TC^T)+\mathrm{E}(\varepsilon_0\varepsilon_0^T)\\&=C\,\mathrm{E}(\varepsilon\varepsilon^T)C^T-\mathrm{Cov}(C\varepsilon,\varepsilon_0)-\mathrm{Cov}(\varepsilon_0,C\varepsilon)+\mathrm{Cov}(\varepsilon_0)\\&=C\,\mathrm{Cov}(\varepsilon)C^T-2\,\mathrm{Cov}(C\varepsilon,\varepsilon_0)+\sigma^2I_m\\&=\sigma^2CC^T-2C\,\mathrm{Cov}(\varepsilon,\varepsilon_0)+\sigma^2I_m\\&=\sigma^2CC^T-2\sigma^2CV^T+\sigma^2I_m=\sigma^2(CC^T-2CV^T+I_m)\end{aligned}$$

由定理 14.3和性质 .3.2(2) 可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{PMSE}(\hat{y}_0)&=\mathrm{E}[(\hat{y}_0-y)^TA(\hat{y}_0-y)]=\mathrm{E}[(C\varepsilon-\varepsilon_0)^TA(C\varepsilon-\varepsilon_0)]\\&=\mathrm{tr}[A\sigma^2(CC^T-2CV^T+I_m)]=\sigma^2\,\mathrm{tr}[A(CC^T-2CV^T+I_m)]\end{aligned}$$

接下来的目标就是求解：

$$\min_C \mathrm{PMSE}(\hat{y}_0), \quad \mathrm{s.t.}\, CX = X_0$$

使用 Lagrange 乘子法，构造辅助函数（不引入 X_0 是因为它是常数，对结果没影响）：

$$F(C, \Lambda) = \sigma^2 \operatorname{tr}[A(CC^T - 2CV^T + I_m)] - 2\operatorname{tr}(CX\Lambda)$$

其中 Λ 是 Lagrange 乘子。由矩阵求导和性质 3.2(1) 可得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,\mathrm{PSME}(\hat{y}_0)}{\partial C} &= \sigma^2\frac{\partial\operatorname{tr}(ACC^T)}{\partial C} - 2\sigma^2\frac{\partial\operatorname{tr}(ACV^T)}{\partial C} - 2\frac{\partial\operatorname{tr}(CX\Lambda)}{\partial C} \\ &= \sigma^2 2AC - 2\sigma^2 AV - 2\Lambda^T X^T\end{aligned}$$

令上式为 0 可得：

$$\begin{aligned}\sigma^2 AC &= \sigma^2 AV + \Lambda^T X^T \\ C &= V + \frac{A^{-1}\Lambda^T X^T}{\sigma^2}\end{aligned}$$

代入 $CX = X_0$ 可得：

$$VX + \frac{A^{-1}\Lambda^T X^T X}{\sigma^2} = X_0\Lambda^T X^T X = \sigma^2 A(X_0 - VX)X^T X\Lambda = \sigma^2(X_0^T - X^T V^T)A^T$$

由定理 2.2可知 $\mathcal{M}(X^T) = \mathcal{M}(X^T X)$，而 $\mathcal{M}(X_0^T) \subseteq \mathcal{M}(X^T)$，所以上式等式右边矩阵的每一列都在 $\mathcal{M}(X^T X)$ 中，即方程组是相容的。由定理 2.22可得：

$$\Lambda = \sigma^2(X^T X)^-(X_0^T - X^T V^T)A^T$$

于是由性质 2.5.1(6) 可得：

$$\begin{aligned}C &= V + A^{-1}A(X_0 - VX)(X^T X)^- X^T = V + (X_0 - VX)(X^T X)^- X^T \\ &= X_0(X^T X)^- X^T + V[I_n - X(X^T X)^- X^T]\end{aligned}$$

由性质 2.5.1(3)(4) 可知 C 是唯一的，与 $(X^T X)^-$ 的选择无关。所以：

$$\hat{y}_0 = X_0(X^T X)^- X^T y + V[I_n - X(X^T X)^- X^T]y = X_0\hat{\beta} + V(y - X\hat{\beta})$$

为 y_0 在广义预测均方误差意义下的最优线性无偏估计。 □

23.2 正态线性模型

23.2.1 参数估计

Definition 23.9. 称以下模型为正态线性模型 *(normal linear model)*：

$$\begin{cases} y = X\beta + \varepsilon \\ \varepsilon \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n) \end{cases}$$

其中 y 为 $n \times 1$ 观测向量，X 为 $n \times p$ 设计矩阵，β 为 $p \times 1$ 未知参数向量，ε 为随机误差，σ^2 为误差方差。

Property 23.2.1. 对于定义 *23.9*，设 $c^T\beta$ 为可估函数，则：

1. *LS* 估计 $c^T\hat{\beta}$ 是 $c^T\beta$ 的 *MLE*，$\tilde{\sigma}^2 = \dfrac{n-r}{n}\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的 *MLE*。若模型在定理 *23.3*的约束下，则 *LS* 估计 $c^T\hat{\beta}_A$ 是 $c^T\beta$ 的 *MLE*，$\tilde{\sigma}_A^2 = \dfrac{n-r+k}{n}\hat{\sigma}_A^2$ 是 σ^2 的 *MLE*；
2. $c^T\hat{\beta} \sim N[c^T\beta, \sigma^2 c^T(X^TX)^- c]$，$\dfrac{(n-r)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \dfrac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-r}$；
3. $c^T\hat{\beta}$ 与 $\hat{\sigma}^2$ 相互独立；
4. $T_1 = y^Ty$, $T_2 = X^Ty$ 为完全充分统计量；
5. $c^T\hat{\beta}$ 是 $c^T\beta$ 唯一的 *MVUE*，$\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 唯一的 *MVUE*。

Proof. (1) 对于定义 23.9，其似然函数为：

$$L(\beta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}||y-X\beta||^2\right)$$

于是对数似然函数为：

$$\ln L(\beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}||y-X\beta||^2$$

固定 σ^2 时，由最小二乘法原理可知：

$$||y-X\hat{\beta}||^2 = \min ||y-X\beta||^2$$

当 $\beta = \hat{\beta}$ 时有：

$$\ln L(\hat{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}||y-X\hat{\beta}||^2$$

由极值点的必要条件可知：

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\hat{\beta}, \sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{||y-X\hat{\beta}||^2}{2\sigma^4}$$
$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}||y-X\hat{\beta}||^2$$

时对数似然函数取极值，注意到：

$$\frac{\mathrm{d}^2\ln L(\hat{\beta}, \sigma^2)}{\mathrm{d}(\sigma^2)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{||y-X\hat{\beta}||^2}{\sigma^6}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\ln L(\hat{\beta}, \sigma^2)}{\mathrm{d}(\sigma^2)^2}\right|_{\sigma^2=\tilde{\sigma}^2} = \frac{n^3}{2||y-X\hat{\beta}||^4} - \frac{||y-X\hat{\beta}||^2 n^3}{||y-X\hat{\beta}||^6}$$
$$= \frac{n^3}{2||y-X\hat{\beta}||^4} - \frac{n^3}{||y-X\hat{\beta}||^4} = -\frac{n^3}{2||y-X\hat{\beta}||^4} < 0$$

于是此处取极大值。因为：

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}||y-X\hat{\beta}||^2 = \frac{n-r}{n}\hat{\sigma}^2$$

所以 $\tilde{\sigma}^2$ 是 σ^2 的 MLE。由上可知 $\hat{\beta}$ 是 β 的 MLE，根据性质 20.3.1(1) 可得 $c^T\hat{\beta}$ 是 $c^T\beta$ 的 MLE。

约束条件下的情况与上述证明过程类似。

(2) 因为 $\varepsilon \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$，而 $c^T\hat{\beta} = c^T(X^TX)^-X^Ty = c^T(X^TX)^-X^T(X\beta+\varepsilon)$。因为 $c^T\beta$ 是可估函数，所以由性质 23.1.1(1) 可知存在 α 使得 $c = X^T\alpha$，根据性质 2.5.1(7) 可知：

$$c^T(X^TX)^-X^TX\beta = c^T\beta$$

由性质 2.5.1(6)(7) 可知：

$$c^T(X^TX)^-X^T[c^T(X^TX)^-X^T]^T = c^T(X^TX)^-X^TX(X^TX)^-c = c^T(X^TX)^-c$$

于是由定理 19.3可得：

$$c^T\hat{\beta} \sim \mathrm{N}[c^T\beta, c^T(X^TX)^-c]$$

因为 $(I_n - P_X)X = \mathbf{0}$，根据性质 2.8.2(4) 可得 $I_n - P_X$ 是对称阵，所以由性质 23.1.2(2) 可知：

$$\begin{aligned}
\frac{n-r}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{e}^T\hat{e}}{\sigma^2} &= \frac{y^T(I_n-P_X)y}{\sigma^2} \\
&= \frac{(X\beta+\varepsilon)^T(I_n-P_X)(X\beta+\varepsilon)}{\sigma^2} \\
&= \frac{(X\beta+\varepsilon)^T(I_n-P_X)X\beta + (X\beta+\varepsilon)^T(I_n-P_X)\varepsilon}{\sigma^2} \\
&= \frac{(X\beta+\varepsilon)^T(I_n-P_X)\varepsilon}{\sigma^2} = \frac{\beta^TX^T(I_n-P_X)\varepsilon + \varepsilon^T(I_n-P_X)\varepsilon}{\sigma^2} \\
&= \frac{\beta^T[(I_n-P_X)^TX]^T\varepsilon + \varepsilon^T(I_n-P_X)\varepsilon}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon^T(I_n-P_X)\varepsilon}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$，由定理 19.15可知 $\dfrac{\varepsilon}{\sigma} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, I_n)$。根据性质 2.8.2(4) 可知 $I_n - P_X$ 是对称幂等阵，由性质 2.8.1(3) 和性质 2.8.2(1) 可得 $\mathrm{rank}(I_n - P_X) = n - r$，于是根据定理 19.10可得：

$$\frac{n-r}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 = \frac{\varepsilon^T(I_n-P_X)\varepsilon}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-r}$$

(3) 由性质 23.1.2(2) 可知：

$$c^T\hat{\beta} = c^T(X^TX)^-X^Ty, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{y^T(I_n-P_X)y}{n-r}$$

由性质 2.8.2(4) 可知 $I_n - P_X$ 为对称阵，所以 $\dfrac{I_n - P_X}{n-r}$ 也是对称阵。因为：

$$\begin{aligned}
c^T(X^TX)^-X^T\frac{I_n-P_X}{n-r} &= \frac{1}{n-r}c^T(X^TX)^-X^T(I_n-P_X) \\
&= \frac{1}{n-r}c^T(X^TX)^-[(I_n-P_X)X]^T = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

由定理 19.11可知 $c^T\hat{\beta}$ 与 $\hat{\sigma}^2$ 独立。

(4) □

23.2.2 假设检验

Theorem 23.7. 对于定义 *23.9*，假设：

$$A\beta = b, \quad A \in M_{k\times p}(K), \quad \text{rank}(A) = k, \quad \mathcal{M}(A^T) \subseteq \mathcal{M}(X^T)$$

且 $A\beta = b$ 相容，则：

1. 似然比检验 $H_0 : A\beta = b,\ H_1 : A\beta \neq b$ 的似然比为：

$$\lambda(y) = \left(\frac{SSE_A}{SSE}\right)^{\frac{n}{2}}$$

2. $\dfrac{SSE_A - SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{k,\alpha}$，其中：

$$\alpha = \frac{(A\beta - b)^T[A(X^TX)^- A^T]^{-1}(A\beta - b)}{\sigma^2}$$

3. $SSE_A - SSE$ 与 SSE 相互独立；

4. 当 $A\beta = b$ 为真时，

$$F = \frac{(SSE_A - SSE)/k}{SSE/(n-r)} \sim F_{k,n-r}$$

   且上式左侧为 $\lambda(y)$ 的单调增函数；

5. 似然比检验 $H_0 : A\beta = b,\ H_1 : A\beta \neq b$ 的拒绝域为 $\{F : F > F_{k,n-r}(\alpha)\}$。

Proof. (1) 由性质 23.2.1(1) 可知：

$$\begin{aligned}
\sup_{\beta,\sigma} L(\beta, \sigma^2; y) &= L(\hat{\beta}, \tilde{\sigma}^2; y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\tilde{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{||y - X\hat{\beta}||^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{||y - X\hat{\beta}||^2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{n||y - X\hat{\beta}||^2}{2||y - X\hat{\beta}||^2}\right) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{||y - X\hat{\beta}||^2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} ||y - X\hat{\beta}||^{-n} \\
\sup_{A\beta=b,\sigma^2} L(\beta, \sigma^2; y) &= L(\hat{\beta}_A, \tilde{\sigma}^2_A; y) = \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} ||y - X\hat{\beta}_A||^{-n}
\end{aligned}$$

于是：

$$\lambda(y) = \frac{L(\hat{\beta}, \tilde{\sigma}^2; y)}{L(\hat{\beta}_A, \tilde{\sigma}^2_A; y)} = \left(\frac{SSE_A}{SSE}\right)^{\frac{n}{2}}$$

(2) 根据性质 2.5.1(6)(7) 和性质 2.8.2(4) 以及 $(I_n - P_X)X = \mathbf{0}$ 对 SSE_A 作分解：

$$
\begin{aligned}
SSE_A = ||y - X\hat{\beta}_A||^2 &= \left\| y - X\{\hat{\beta} - (X^TX)^- A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b)\} \right\|^2 \\
&= \left\| y - X\hat{\beta} + X(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \right\|^2 \\
&= ||y - X\hat{\beta}||^2 + 2(y - X\hat{\beta})^T X(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \\
&\quad + \{X(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b)\}^T \\
&\quad \cdot X(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \\
&= ||y - X\hat{\beta}||^2 + 2[y - X(X^TX)^-X^Ty]^T X(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \\
&\quad + (A\hat{\beta} - b)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}A(X^TX)^-X^T \\
&\quad \cdot X(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \\
&= ||y - X\hat{\beta}||^2 + 2[(I_n - P_X)y]^T X(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \\
&\quad + (A\hat{\beta} - b)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}A(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \\
&= ||y - X\hat{\beta}||^2 + 2y^T(I_n - P_X)X(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \\
&\quad + (A\hat{\beta} - b)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \\
&= ||y - X\hat{\beta}||^2 + (A\hat{\beta} - b)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b)
\end{aligned}
$$

所以有：

$$
SSE_A - SSE = (A\hat{\beta} - b)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b)
$$

由性质 23.2.1(2) 可知：

$$
A\hat{\beta} - b \sim \mathrm{N}_k[A\beta - b, \sigma^2 A(X^TX)^-A^T]
$$

根据可知 $A(X^TX)^-A^T$ 存在平方根阵及平方根阵的逆矩阵，由推论 19.1(1) 可知： $A(X^TX)^-A^T$ 的正定性

$$
\frac{[A(X^TX)^-A^T]^{-\frac{1}{2}}}{\sigma}(A\hat{\beta} - b) \sim \mathrm{N}_k\{[A(X^TX)^-A^T]^{-\frac{1}{2}}(A\beta - b), I_n\}
$$

于是由 χ^2 分布的定义可得：

$$
\frac{SSE_A - SSE}{\sigma^2} = \frac{\{[A(X^TX)^-A^T]^{-\frac{1}{2}}(A\hat{\beta} - b)\}^T[A(X^TX)^-A^T]^{-\frac{1}{2}}(A\hat{\beta} - b)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{k,\alpha}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \{[A(X^TX)^-A^T]^{-\frac{1}{2}}(A\beta - b)\}^T[A(X^TX)^-A^T]^{-\frac{1}{2}}(A\beta - b) \\
&= (A\beta - b)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\beta - b)
\end{aligned}
$$

(3) 由性质 23.1.2(2) 可知 $SSE = y^T(I_n - P_X)y$，由 (2) 的过程可得：

$$
\begin{aligned}
SSE_A - SSE &= (A\hat{\beta} - b)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - b) \\
&= [A(X^TX)^-X^Ty - b]^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}[A(X^TX)^-X^Ty - b] \\
&= y^TX(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}A(X^TX)^-X^Ty \\
&\quad - 2b^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}A(X^TX)^-X^Ty + b^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}b
\end{aligned}
$$

因为 $(I_n - P_X)X = \mathbf{0}$，由性质 2.8.2(4) 可得：

$$\begin{aligned}&(I_n - P_X)X(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}A(X^TX)^-X^T = \mathbf{0}\\&2b^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}A(X^TX)^-X^T(I_n - P_X)\\=&2b^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}A(X^TX)^-[(I_n - P_X)X]^T = \mathbf{0}\end{aligned}$$

于是根据定理 19.11和定理 19.12可知 $SSE_A - SSE$ 与 SSE 独立。

(4) 当 $A\beta = b$ 为真时，由 (2) 可知 $\dfrac{SSE_A - SSE}{\sigma^2} \sim \chi_k^2$。根据 (3) 和性质 23.2.1(2) 可得：

$$\frac{(SSE_A - SSE)/(k\sigma^2)}{SSE/[(n-r)\sigma^2]} = \frac{(SSE_A - SSE)/k}{SSE/(n-r)} \sim F_{k,n-r}$$ □

由 (1) 可得：

$$\frac{(SSE_A - SSE)/k}{SSE/(n-r)} = \frac{n-r}{k}[\lambda^{\frac{2}{n}}(y) - 1]$$

所以它是 $\lambda(y)$ 的单调增函数。

(5) 由 (1)(4) 可立即得出。

23.2.3 置信域

置信椭球

Theorem 23.8. 对于定义 *23.9*，若不能接受假设 $A\beta = \mathbf{0}$，则 $A\beta$ 置信度为 $1-\alpha$ 的置信椭球为：

$$\{A\beta : (A\beta - A\hat{\beta})^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\beta - A\hat{\beta}) \leqslant k\hat{\sigma}^2F_{k,n-r}(\alpha)\}$$

Proof. 由性质 23.2.1(2) 可知：

$$A\hat{\beta} \sim \mathrm{N}[A\beta, \sigma^2A(X^TX)^-A^T]$$

所以：

$$\frac{A\hat{\beta} - A\beta}{\sigma} \sim \mathrm{N}[\mathbf{0}, A(X^TX)^-A^T]$$

因为：

$$[A(X^TX)^-A^T]^{-1}A(X^TX)^-A^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1} = [A(X^TX)^-A^T]^{-1}$$

所以由推论 19.2可知：

$$\frac{(A\hat{\beta} - A\beta)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - A\beta)}{\sigma^2} \sim \chi_k^2$$

根据性质 23.2.1(2)(3) 可得：

$$\begin{aligned}&\frac{(A\hat{\beta} - A\beta)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - A\beta)}{k\sigma^2}\Big/\frac{(n-r)\hat{\sigma}^2}{(n-r)\sigma^2}\\=&\frac{(A\hat{\beta} - A\beta)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta} - A\beta)}{k\hat{\sigma}^2} \sim F_{k,n-r}\end{aligned}$$

所以对任意的 $0<\alpha<1$，有：

$$P\left[\frac{(A\hat{\beta}-A\beta)^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\hat{\beta}-A\beta)}{k\hat{\sigma}^2}\leqslant F_{k,n-r}(\alpha)\right]=1-\alpha$$

即 $A\beta$ 置信度为 $1-\alpha$ 的置信椭球为：

$$\{A\beta:(A\beta-A\hat{\beta})^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\beta-A\hat{\beta})\leqslant k\hat{\sigma}^2F_{k,n-r}(\alpha)\}$$ □

note 23.2. 这里其实是一个未知方差构造 F 分布的思想。

Scheffe 置信区间

Theorem 23.9. 对于定义 23.9，对任何可估函数 $l^T\beta$，其中 $l\in\mathcal{M}(A^T)$ 且 $l\neq\mathbf{0}$，其置信度为 $1-\alpha$ 的同时置信区间为：

$$l^T\hat{\beta}\pm[k\hat{\sigma}^2F_{k,n-r}(\alpha)l^T(X^TX)^-l]^{\frac{1}{2}}$$

Proof. 由定理 23.8、与不等式 5可知：

$A(X^TX)^-A^T$ 的正定性

$$\begin{aligned}1-\alpha&=P\left[(A\beta-A\hat{\beta})^T[A(X^TX)^-A^T]^{-1}(A\beta-A\hat{\beta})\leqslant k\hat{\sigma}^2F_{k,n-r}(\alpha)\right]\\&=P\left\{\sup_{b\neq\mathbf{0}}\frac{[(A\hat{\beta}-A\beta)^Tb]^2}{b^TA(X^TX)^-A^Tb}\leqslant k\hat{\sigma}^2F_{k,n-r}(\alpha)\right\}\\&=P\left\{\frac{[(A\hat{\beta}-A\beta)^Tb]^2}{b^TA(X^TX)^-A^Tb}\leqslant k\hat{\sigma}^2F_{k,n-r}(\alpha),\text{对任意的}b\neq\mathbf{0}\right\}\\&=P\left\{|(A\hat{\beta}-A\beta)^Tb|\leqslant[k\hat{\sigma}^2F_{k,n-r}(\alpha)b^TA(X^TX)^-A^Tb]^{\frac{1}{2}},\text{对任意的}b\neq\mathbf{0}\right\}\\&=P\left\{|\hat{\beta}^TA^Tb-\beta^TA^Tb|\leqslant[k\hat{\sigma}^2F_{k,n-r}(\alpha)b^TA(X^TX)^-A^Tb]^{\frac{1}{2}},\text{对任意的}b\neq\mathbf{0}\right\}\end{aligned}$$

记 $A^Tb=l$，因为 $\mathcal{M}(A^T)\subseteq\mathcal{M}(X^T)$，由性质 23.1.1(1) 可知 $l^T\beta$ 也是一个可估函数，于是有：

$$1-\alpha=P\left\{|l^T\hat{\beta}-l^T\beta|\leqslant[k\hat{\sigma}^2F_{k,n-r}(\alpha)l^T(X^TX)^-l]^{\frac{1}{2}},\text{对任意的}l\in\mathcal{M}(A^T)\text{且}l\neq\mathbf{0}\right\}$$ □

Bonferroni 置信区间

Theorem 23.10. 对于定义 23.9，记 A 的行分别为 $a_1^T,a_2^T,\ldots,a_k^T$，则 $a_i^T\beta$ 置信度为 $1-\alpha$ 的 *Bonferroni* 置信区间为：

$$a_i^T\hat{\beta}\pm t_{n-r}\left(\frac{\alpha}{2k}\right)[\hat{\sigma}^2a_i^T(X^TX)^-a_i]^{\frac{1}{2}}$$

Proof. 由定理 23.8可得当 $k=1$ 时有：

$$\begin{aligned}1-\alpha&=P\left\{(a_i^T\beta-a_i^T\hat{\beta})^T[a_i^T(X^TX)^-a_i]^{-1}(a_i^T\beta-a_i^T\hat{\beta})\leqslant\hat{\sigma}^2F_{1,n-r}(\alpha)\right\}\\&=P\left\{(a_i^T\beta-a_i^T\hat{\beta})^2\leqslant\hat{\sigma}^2F_{1,n-r}(\alpha)[a_i^T(X^TX)^-a_i]\right\}\end{aligned}$$

由性质 19.2.2(2) 可知 $F_{1,n-r}=t^2_{n-r}$，因为服从 t 分布的变量可取负值而服从 F 分布的变量只能为正值，所以上式把平方变成绝对值时应修改对应的 α 为 $\frac{a}{2}$，即此时：

$$1-\alpha=P\left\{|a_i^T\beta-a_i^T\hat{\beta}|\leqslant t_{n-r}\left(\frac{\alpha}{2}\right)[\hat{\sigma}^2a_i^T(X^TX)^-a_i]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

由 Bonferroni 校正法可得出结论。 □

比较

推导 23.4. *Scheffe* 区间与 *Bonferroni* 区间哪个更好？由二者的公式可以看出只需选择：

$$\min\left\{[k\hat{\sigma}^2F_{k,n-r}(\alpha)]^{\frac{1}{2}},\hat{\sigma}t_{n-r}\left(\frac{\alpha}{2k}\right)\right\}$$

对应的方法即能得到更短的置信区间。

23.2.4 区间预测

Theorem 23.11. 延续 *section 23.1.4*处的定义，假设 $\varepsilon\sim\mathrm{N}(0,\sigma^2I_n)$，$\varepsilon_0\sim\mathrm{N}(0,\sigma^2I_m)$，且有

$$\mathrm{Cov}[(y,y_0)^T]=\mathrm{Cov}[(\varepsilon,\varepsilon_0)^T]=\sigma^2\begin{pmatrix}I_n & V^T\\ V & I_m\end{pmatrix}$$

则 $y_0^{(i)}$ 的 *Scheffe* 置信区间与 *Bonferroni* 置信区间分别为：

$$\hat{y}_0^{(i)}\pm[m\hat{\sigma}^2F_{m,n-r}(\alpha)T_{ii}]^{\frac{1}{2}},\quad \hat{y}_0^{(i)}\pm t_{n-r}\left(\frac{\alpha}{2m}\right)\hat{\sigma}(T_{ii})^{\frac{1}{2}}$$

其中 $y_0^{(i)},\hat{y}_0^{(i)}$ 表示的是 $y_0,\hat{y}_0$ 的第 i 个分量，$\hat{y}_0$ 由定理 *23.6*给出，T_{ii} 表示矩阵 T 的 i,i 元，$T=(X_0-VX)(X^TX)^-(X_0-VX)^T+I_m-VV^T$。

Proof. 由定理 23.6、定理 19.3、性质 14.4.1(3)(5) 和性质 2.5.1(6)(7)(5) 可得：

$$\hat{y}_0=X_0\hat{\beta}+V(y-X\hat{\beta})\sim\mathrm{N}_m(X_0\beta,\sigma^2VV^T)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\hat{y}_0)&=\mathrm{Cov}(Cy)=C\,\mathrm{Cov}(y)C^T=\sigma^2CC^T\\
&=\sigma^2[X_0(X^TX)^-X^T+V-VX(X^TX)^-X^T]\\
&\quad\cdot[X(X^TX)^-X_0^T+V^T-X(X^TX)^-X^TV^T]\\
&=\sigma^2[X_0(X^TX)^-X^TX(X^TX)^-X_0^T+X_0(X^TX)^-X^TV^T\\
&\quad-X_0(X^TX)^-X^TX(X^TX)^-X^TV^T+VX(X^TX)^-X_0^T\\
&\quad+VV^T-VX(X^TX)^-X^TV^T-VX(X^TX)^-X^TX(X^TX)^-X_0^T\\
&\quad-VX(X^TX)^-X^TV^T+VX(X^TX)^-X^TX(X^TX)^-X^TV^T]\\
&=\sigma^2[X_0(X^TX)^-X_0^T+X_0(X^TX)^-X^TV^T-X_0(X^TX)^-X^TV^T\\
&\quad+VX(X^TX)^-X_0^T+VV^T-VX(X^TX)^-X^TV^T\\
&\quad-VX(X^TX)^-X_0^T-VX(X^TX)^-X^TV^T+VX(X^TX)^-X^TV^T]\\
&=\sigma^2[X_0(X^TX)^-X_0^T+VV^T-VX(X^TX)^-X^TV^T]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\hat{y}_0, y_0) &= \mathrm{Cov}[X_0\hat{\beta} + V(y - X\hat{\beta}), y_0] = \mathrm{Cov}[Vy + (X_0 - VX)\hat{\beta}, y_0] \\ &= V\,\mathrm{Cov}(y, y_0) + (X_0 - VX)\,\mathrm{Cov}(\hat{\beta}, y_0) \\ &= V\,\mathrm{Cov}(y, y_0) + (X_0 - VX)\,\mathrm{Cov}[(X^TX)^{-}X^Ty, y_0] \\ &= V\,\mathrm{Cov}(y, y_0) + (X_0 - VX)(X^TX)^{-}X^T\,\mathrm{Cov}\,\mathrm{Cov}(y, y_0) \\ &= [V + (X_0 - VX)(X^TX)^{-}X^T]\,\mathrm{Cov}(y, y_0) \\ &= \sigma^2[V + (X_0 - VX)(X^TX)^{-}X^T]V^T\end{aligned}$$

令 $A = X_0(X^TX)^{-}X_0^T + VV^T - VX(X^TX)^{-}X^TV^T$，$B = [V + (X_0 - VX)(X^TX)^{-}X^T]V^T$，所以：

$$\begin{pmatrix}\hat{y}_0 \\ y_0\end{pmatrix} \sim \mathrm{N}_{m+n}\left[\begin{pmatrix}X_0\beta \\ X_0\beta\end{pmatrix}, \sigma^2\begin{pmatrix}A & B \\ B^T & I_m\end{pmatrix}\right]$$

由定理 19.3可知：

$$\hat{y}_0 - y_0 = (1, -1)\begin{pmatrix}\hat{y}_0 \\ y_0\end{pmatrix} \sim \mathrm{N}_m\{\mathbf{0}, \sigma^2[(X_0 - VX)(X^TX)^{-}(X_0 - VX) + I_m - VV^T]\}$$

令 $T = (X_0 - VX)(X^TX)^{-}(X_0 - VX)^T + I_m - VV^T$，仿照定理 23.8中的推导能得到此时 $\hat{y}_0 - y_0$ 置信度为 $1 - \alpha$ 的置信椭球为：

$$[\hat{y}_0 - y_0 : (\hat{y}_0 - y_0)^T(T)^{-1}(\hat{y}_0 - y_0) \leqslant m\hat{\sigma}^2F_{m,n-r}(\alpha)]$$

其中 T 的可逆性由保证。

T 的可逆性证明

由上述置信椭球，仿照定理 23.9的推导，在其中取 b 为标准基向量即可得到 $y_0^{(i)}$ 的 Scheffe 置信区间为：

$$\hat{y}_0^{(i)} \pm [m\hat{\sigma}^2F_{m,n-r}(\alpha)T_{ii}]^{\frac{1}{2}}$$

同理可得到 $y_0^{(i)}$ 的 Bonferroni 置信区间为：

$$\hat{y}_0^{(i)} \pm t_{n-r}\left(\frac{\alpha}{2m}\right)\hat{\sigma}(T_{ii})^{\frac{1}{2}} \qquad \square$$

23.3 误差协方差推广

在很多情况下线性模型误差的协方差矩阵都不是 $\sigma^2 I_n$ 的形式。

23.3.1 广义最小二乘估计

Definition 23.10. 称以下模型为广义线性模型 *(generalized linear model)*：

$$\begin{cases} y = X\beta + \varepsilon \\ \mathrm{E}(\varepsilon) = \mathbf{0} \\ \mathrm{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2\Sigma \end{cases}$$

其中 y 为 $n \times 1$ 观测向量，X 为 $n \times p$ 设计矩阵，β 为 $p \times 1$ 未知参数向量，ε 为随机误差，$\sigma^2\Sigma$ 为误差协方差矩阵且 $\Sigma > 0$。

推导 23.5. 因为 $\Sigma > 0$，所以存在 $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$。令：

$$y^* = \Sigma^{-\frac{1}{2}} y, \quad X^* = \Sigma^{-\frac{1}{2}} X, \quad \varepsilon^* = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \varepsilon$$

由性质 *14.4.1(3)* 可知定义 *23.10* 可化作：

$$\begin{cases} y^* = X^* \beta + \varepsilon^* \\ \mathrm{E}(\varepsilon^*) = \mathbf{0} \\ \mathrm{Cov}(\varepsilon^*) = \sigma^2 I_n \end{cases}$$

于是我们可以将广义线性模型化作线性模型来处理，由于可估函数的定义与协方差矩阵无关，所以对于线性模型与正态线性模型的那些结论，广义线性模型也可得到。

23.3.2 最小二乘统一理论

23.4 线性回归模型

Definition 23.11. 设因变量 Y 和自变量 $X_1, X_2, \ldots, X_{p-1}$ 满足：

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_{p-1} X_{p-1} + e$$

若对因变量 Y 和自变量 $X_1, X_2, \ldots, X_{p-1}$ 进行了 n 次观察，得到 n 组数据，它们满足：

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_{p-1} x_{ip-1} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

记：

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p-1} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np-1} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

且假设 $\mathrm{rank}(X) = p$，$\mathrm{E}(\varepsilon) = \mathbf{0}$，$\mathrm{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$，则得到线性回归模型 *(linear regression model)*：

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad \mathrm{E}(\varepsilon) = \mathbf{0}, \quad \mathrm{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$$

称 β_0 为常数项，$\beta_I = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1})^T$ 为回归系数。若记 $X = (\mathbf{1}_n, \tilde{X})$，其中 $\mathbf{1}_n$ 为由 n 个 1 构成的列向量，则线性回归模型可被改写为：

$$y = \mathbf{1}_n \beta_0 + \tilde{X} \beta_I + \varepsilon, \quad \mathrm{E}(\varepsilon) = \mathbf{0}, \quad \mathrm{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$$

推导 23.6. 由定理 *2.46* 可知 $X^T X$ 是一个半正定阵。若存在不为零向量的 α 使得 $\alpha^T X^T X \alpha = 0$，则有 $||X\alpha|| = 0$，即 $X\alpha = \mathbf{0}$。而 $\mathrm{rank}(X) = p$，所以 $\alpha = \mathbf{0}$，矛盾，于是 $X^T X$ 是一个正定阵，它是可逆的。

正定阵可逆

Definition 23.12. 对于定义 *23.11*，若 $\varepsilon \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$，则称此时的线性回归模型为**正态线性回归模型**。

中心化与标准化处理

Definition 23.13. 对于定义 23.11，记：

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad s_j^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

称：

$$\begin{aligned} y_i = \gamma_0 + \beta_1(x_{i1} - \bar{x}_1) + \beta_2(x_{i2} - \bar{x}_2) + \cdots + \beta_{p-1}(x_{ip-1} - \bar{x}_{p-1}) + \varepsilon_i \\ y = \gamma_0 \mathbf{1}_n + \tilde{X}_c \beta_I + \varepsilon, \quad \mathrm{E}(\varepsilon) = \mathbf{0}, \quad \mathrm{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n \end{aligned}$$

为**中心化线性回归模型**,其中 $\gamma_0 = \beta_0 + \bar{x}^T\beta_I$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{p-1})^T$,$\tilde{X}_c = \left(I_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T\right)\tilde{X}$ 被称为**中心化设计阵**，第二行是第一行的矩阵表示。

称：

$$\begin{aligned} y_i = \alpha_0 + \beta_1^0\frac{x_{i1} - \bar{x}_1}{s_1} + \beta_2^0\frac{x_{i2} - \bar{x}_2}{s_2} + \cdots + \beta_{p-1}^0\frac{x_{ip-1} - \bar{x}_{p-1}}{s_{p-1}} + \varepsilon_i \\ y = \alpha_0 \mathbf{1}_n + Z\beta_S + \varepsilon, \quad \mathrm{E}(\varepsilon) = \mathbf{0}, \quad \mathrm{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n \end{aligned}$$

为**标准化线性回归模型**，其中 $\alpha_0 = \beta_0, \beta_i^0 = s_i\beta_i$，$Z$ 为经过中心化和标准化的设计阵，第二行是第一行的矩阵表示。

Theorem 23.12. 对于中心化和标准化后的线性回归模型，设 $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_{p-1})$ 为正则方程的解，则有以下结论：

1. $\mathbf{1}_n^T\tilde{X}_c = \mathbf{0}$;
2. $\hat{\gamma}_0 = \bar{y} = \hat{\beta}_0 + \bar{x}^T\hat{\beta}_I$;
3. $\mathbf{1}_n^T Z = \mathbf{0}$;
4. $R = Z^T Z$，其中 R 为回归自变量之间的相关系数矩阵；
5. $\hat{\alpha}_0 = \bar{y}$;
6. $\hat{\beta}_i^0 = s_i\hat{\beta}_i$;
7. 三种模型的经验回归方程分别为：

$$\begin{aligned} \text{一般模型：} \hat{Y} &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \cdots + \hat{\beta}_{p-1} X_{p-1} \\ \text{中心化模型：} \hat{Y} &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\beta}_1(X_1 - \bar{x}_1) + \hat{\beta}_2(X_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \hat{\beta}_{p-1}(X_{p-1} - \bar{x}_{p-1}) \\ \text{标准化模型：} \hat{Y} &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}_1^0\frac{X_1 - \bar{x}_1}{s_1} + \hat{\beta}_2^0\frac{X_2 - \bar{x}_2}{s_2} + \cdots + \hat{\beta}_{p-1}^0\frac{X_{p-1} - \bar{x}_{p-1}}{s_{p-1}} \end{aligned}$$

Proof. 直接代入正则方程观察即可。 □

23.4.1 假设检验

Definition 23.14. 对于定义 *23.12*，称假设检验：

$$H_0:\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_{p-1}=0,\quad H_1:\text{至少有一个回归系数不为}0$$

为回归方程的显著性检验。称：

$$H_0:\beta_i=0,\quad H_1:\beta_i\neq 0$$

为回归系数 β_i 的显著性检验。

Theorem 23.13. 对于定义 *23.12*，回归方程的显著性检验的统计量和拒绝域为：

$$F=\frac{\hat{\beta}_I^T\tilde{X}_c^Ty/(p-1)}{SSE/(n-p)},\quad \{F:F>F_{p-1,n-p}(\alpha)\}$$

回归系数 β_i 的显著性检验的统计量和拒绝域为：

$$t=\frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{c_{ii}}\hat{\sigma}},\quad \{t:|t|>t_{n-p}(\alpha/2)\}$$

Proof. (1) 可以发现此时的假设检验即为在定理 23.7中取 $A=(\mathbf{0},I_{p-1})$，$b=\mathbf{0}$ 时的情况。原假设下模型变为：

$$y_i=\beta_0+\varepsilon_i,\quad i=1,2,\ldots,n$$

此时设计阵为 $\mathbf{1}_n$，正则方程为 $n\hat{\beta}_0=n\bar{y}$，$\hat{\beta}=\bar{y}$，由定理 23.5可得 $SSE_A=y^Ty-\bar{y}\mathbf{1}_n^Ty=y^Ty-\bar{y}n\bar{y}=y^Ty-n\bar{y}^2$。备择假设下根据定理 23.12(2) 可得：

$$SSE=y^Ty-\hat{\beta}^TX^Ty=y^Ty-\hat{\gamma}_0n\bar{y}-\hat{\beta}_I^T\tilde{X}_c^Ty=y^Ty-n\bar{y}^2-\hat{\beta}_I^T\tilde{X}_c^Ty$$

于是有：

$$SSE_A-SSE=y^Ty-n\bar{y}^2-(y^Ty-n\bar{y}^2-\hat{\beta}_I^T\tilde{X}_c^Ty)=\hat{\beta}_I^T\tilde{X}_c^Ty$$

由定理 23.7(5) 即可得出结论。

(2) 仿照性质 23.2.1(2) 的证明过程可知：

$$\hat{\beta}\sim\mathrm{N}_p[\beta,\sigma^2(X^TX)^{-1}]$$

记 $C=(X^TX)^{-1}=(c_{ij})$，由推论 19.1(5) 可得：

$$\hat{\beta}_i\sim\mathrm{N}(\beta_i,\sigma^2c_{ii})$$

所以当 H_0 成立时有：

$$\frac{\hat{\beta}_i}{\sigma\sqrt{c_{ii}}}\sim\mathrm{N}(0,1)$$

由性质 23.2.1(2) 可知：

$$\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-r}$$

所以：

$$\frac{\hat{\beta}_i}{\sigma\sqrt{c_{ii}}}\Big/\sqrt{\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2(n-p)}}=\frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{c_{ii}}\hat{\sigma}}\sim t_{n-p}$$

□

Chapter 24

方差分析

这章讨论方差分析问题。方差分析的目的是判断因子的水平不同是否会对试验结果造成显著差异。

按因子数对方差分析进行分类

可按试验的因子数对方差分析进行分类：

1. 单因子方差分析：讨论单个因子的水平变动对试验结果造成的影响。

2. 多因子方差分析：讨论多个因子的水平变动对试验结果的影响，也讨论多个因子水平的组合对试验结果造成的额外影响。

按因子水平的选取方式对方差分析进行分类

可按因子水平的选取方式对方差分析进行分类：

1. 固定效应模型：试验中选择的因子的水平是在试验前由试验人按主观意图指定好的，只希望得到适用于这些水平的结论。在多因子方差分析中可进一步分类：
    - 可加效应模型：仅讨论各因子对试验结果影响的大小。
    - 交互效应模型：不仅讨论各因子对试验结果影响的大小，也讨论因子的水平组合对试验结果造成的额外影响。

2. 随机效应模型：试验中选择的因子的水平是从全部可能的水平中随机选择的一个样本，希望得到适用于全部水平（无论是否参与试验）的结论。

3. 混合模型：仅存在于多因子方差分析，部分因子的水平在试验前由试验人按主观意图指定，另一部分因子的水平是随机选定的。

24.1 固定效应下的单因子方差分析

水平	观测值			
A_1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n_1}
A_2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n_2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_a	y_{a1}	y_{a2}	$\cdots$	y_{an_a}

表 24.1: 固定效应下的单因子试验数据

其中 y_{ij} 表示在第 i 个水平 A_i 下第 j 次重复试验的观察值。记 $n=\sum\limits_{i=1}^{a} n_i$。

24.1.1 统计模型

假设一个数据 y 由两部分组成：

1. 因子的影响部分 μ，随因子水平的变化而变化。
2. 试验的随机误差 ε，假设所有随机误差来自同一个正态总体 $N(0,\sigma^2)$。

则统计模型可写作：

$$\begin{cases} y_{ij}=\mu_i+\varepsilon_{ij} \\ \text{诸}\varepsilon_{ij} \quad \text{i.i.d. } N(0,\sigma^2) \end{cases} \qquad i=1,2,\ldots,a,\ j=1,2,\ldots,n_i$$

还可将统计模型写成意义更清晰的形式，记：

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} n_i\mu_i, \quad \tau_i=\mu_i-\mu,\ i=1,2,\ldots,a$$

称 μ 为一般平均（这里表示因子 A 的这 a 个水平对数据的一般影响），τ_i 为因子 A 第 i 个水平 A_i 的效应。那么统计模型即可改写为：

$$\begin{cases} y_{ij}=\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij} \\ \text{诸}\varepsilon_{ij} \quad \text{i.i.d. } N(0,\sigma^2) \\ s.t. \quad \sum\limits_{i=1}^{a} n_i\tau_i=0 \end{cases} \qquad i=1,2,\ldots,a,\ j=1,2,\ldots,n_i$$

24.1.2 统计假设

由上述统计模型，方差分析即需要判断 $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_a$ 是否相同。如果我们对这 a 个参数两两进行比较，一共需要检验 $\binom{a}{2}$ 个不同的假设。对于其中一个假设，如果控制犯第一类错误的概率是 $\alpha=0.05$ 并且这些检验是相互独立的，则错误地拒绝这 $\binom{a}{2}$ 个假设中至少

一个假设的概率为 $1-(0.95)^{\binom{a}{2}}$。当 $a=5$ 时，这个概率就已经达到了 40%。这种方式会大大提高犯第一类错误的概率。

为了控制犯第一类错误的概率，我们应该直接检验如下假设：

$$\begin{cases} H_0: \tau_1=\tau_2=\cdots=\tau_a=0, \\ H_1: \tau_i \neq 0 \quad \text{至少对一个 } i \text{ 不成立} \end{cases}$$

24.1.3 偏差平方和的分解

记：

$$y_{..}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \quad \bar{y}_{..}=\frac{y_{..}}{n}, \quad y_{i.}=\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \quad \bar{y}_{i.}=\frac{y_{i.}}{n_i},\ i=1,2,\ldots,a$$

全部数据之间的差异可用下述总偏差平方和表示：

$$SST=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2$$

引起数据 y_{ij} 之间差异的原因有两点：

1. 因子 A 的 a 个水平对试验结果的影响不同。
2. 试验具有误差。

为了区分并比较这两个原因对数据的影响，需要对 SST 进行分解：

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}[(y_{ij}-\bar{y}_{i.})+(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}2(y_{ij}-\bar{y}_{i.})(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}) \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2+\sum_{i=1}^{a}n_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2+2\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}) \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2+\sum_{i=1}^{a}n_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 \end{aligned}$$

SSe

记：

$$\varepsilon_{..}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}, \quad \bar{\varepsilon}_{..}=\frac{\varepsilon_{..}}{n}, \quad \varepsilon_{i.}=\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}, \quad \bar{\varepsilon}_{i.}=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}$$

因此在上偏差平方和的分解中，第一项可写作：

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_{i.})^2$$

因为该项完全是由误差引起的，所以称之为误差平方和或组内差异，记作 SSe。

SSA

因为：

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..} &= \mu+\tau_i+\bar{\varepsilon}_{i.}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_k}(\mu+\tau_k+\varepsilon_{kj}) \\
&= \mu+\tau_i+\bar{\varepsilon}_{i.}-\frac{1}{n}\left(n\mu+\sum_{k=1}^{a}n_k\tau_k+\varepsilon_{..}\right) \\
&= \mu+\tau_i+\bar{\varepsilon}_{i.}-\frac{1}{n}\left(n\mu+\varepsilon_{..}\right) \\
&= \tau_i+\bar{\varepsilon}_{i.}-\bar{\varepsilon}_{..}
\end{aligned}$$

所以：

$$\sum_{i=1}^{a}n_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2=\sum_{i=1}^{a}n_i(\tau_i+\bar{\varepsilon}_{i.}-\bar{\varepsilon}_{..})^2$$

其中的随机误差都是平均过的，期望值不变而且方差缩小了。所以这个平方和虽然受到水平变动和随机误差两方面的影响，但是当因子 A 的不同水平对试验结果有显著差异的时候，它主要受到因子 A 水平变动的影响。所以称该平方和为因子的平方和或组间差异，记作 SSA。

总偏差平方和分解公式

综上，总偏差平方和有如下分解公式：

$$SST=SSA+SSe$$

24.1.4 检验统计量

关于 ε 的一些结论

下给出关于 ε 的一些结论：

$$\bar{\varepsilon}_{i.}\sim N(0,\frac{\sigma^2}{n_i}),\quad \bar{\varepsilon}_{..}\sim N(0,\frac{\sigma^2}{n})$$
$$E(\varepsilon_{ij}^2)=\sigma^2,\quad E(\bar{\varepsilon}_{i.}^2)=\frac{\sigma^2}{n_i},\quad E(\bar{\varepsilon}_{..}^2)=\frac{\sigma^2}{n},\quad E(\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..})=\frac{\sigma^2}{n},\quad E(\varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}_{i.})=\frac{\sigma^2}{n_i}$$

Proof. 正态分布的两个结论可直接由独立正态随机变量的线性运算求得。

$$\begin{aligned}
E(\bar{\varepsilon}_{ij}^2) &= Var(\bar{\varepsilon}_{ij})+[E(\bar{\varepsilon}_{ij})]^2=\sigma^2 \\
E(\bar{\varepsilon}_{i.}^2) &= Var(\bar{\varepsilon}_{i.})+[E(\bar{\varepsilon}_{i.})]^2=\frac{\sigma^2}{n_i} \\
E(\bar{\varepsilon}_{..}^2) &= Var(\bar{\varepsilon}_{..})+[E(\bar{\varepsilon}_{..})]^2=\frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

下求 $E(\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..})$：

$$\begin{aligned}
E(\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..}) &= E\left[\left(\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{kj}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n_i n}E\left[\left(\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}\right)\left(\sum_{k\neq i}\sum_{j=1}^{n_k}\varepsilon_{kj}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n_i n}E\left[\left(\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}\right)^2\right] + \frac{1}{n_i n}E\left[\left(\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}\right)\left(\sum_{k\neq i}\sum_{j=1}^{n_k}\varepsilon_{kj}\right)\right]
\end{aligned}$$

因为 ε_{ij} 彼此独立，所以上式中第二项为 0：

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}\right)\left(\sum_{k\neq i}\sum_{j=1}^{n_k}\varepsilon_{kj}\right)\right] = E\left(\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}\right)E\left(\sum_{k\neq i}\sum_{j=1}^{n_k}\varepsilon_{kj}\right) = 0$$

所以：

$$\begin{aligned}
E(\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..}) &= \frac{1}{n_i n}E\left[\left(\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n_i n}E\left(\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}^2 + \sum_{k\neq j}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\right) \\
&= \frac{1}{n_i n}\left[\sum_{j=1}^{n_i}E(\varepsilon_{ij}^2) + \sum_{k\neq j}E(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik})\right] \\
&= \frac{1}{n_i n}\left[n_i\sigma^2 + \sum_{k\neq j}E(\varepsilon_{ij})E(\varepsilon_{ik})\right] \\
&= \frac{1}{n}\sigma^2
\end{aligned}$$

下求 $E(\varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}_{i.})$：

$$\begin{aligned}
E(\varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}_{i.}) &= E\left(\varepsilon_{ij}\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\varepsilon_{ik}\right) \\
&= E\left(\frac{1}{n_i}\varepsilon_{ij}^2 + \frac{1}{n_i}\sum_{k\neq j}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\right) \\
&= \frac{1}{n_i}\left[E(\varepsilon_{ij}^2) + \sum_{k\neq j}E(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik})\right] \\
&= \frac{1}{n_i}\left[\sigma^2 + \sum_{k\neq j}E(\varepsilon_{ij})E(\varepsilon_{ik})\right] \\
&= \frac{\sigma^2}{n_i}
\end{aligned}$$

□

SSA 的期望

下求 SSA 的期望：

$$
\begin{aligned}
E(SSA) &= E\left[\sum_{i=1}^{a} n_i(\tau_i + \bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{a} n_i(\tau_i^2 + \bar{\varepsilon}_{i.}^2 + \bar{\varepsilon}_{..}^2 + 2\tau_i\bar{\varepsilon}_{i.} - 2\tau_i\bar{\varepsilon}_{..} - 2\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{a} n_i\tau_i^2 + \sum_{i=1}^{a} n_i E(\bar{\varepsilon}_{i.}^2) + \sum_{i=1}^{a} n_i E(\bar{\varepsilon}_{..}^2) - 2\sum_{i=1}^{a} n_i E(\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..}) \\
&= \sum_{i=1}^{a} n_i\tau_i^2 + \sum_{i=1}^{a} n_i \frac{\sigma^2}{n_i} + \sum_{i=1}^{a} n_i \frac{\sigma^2}{n} - 2\sum_{i=1}^{a} n_i \frac{\sigma^2}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{a} n_i\tau_i^2 + (a-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

SSe 的期望

下求 SSe 的期望：

$$
\begin{aligned}
E(SSe) &= E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.})^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} E[(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.})^2] \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} E(\varepsilon_{ij}^2 + \bar{\varepsilon}_{i.}^2 - 2\varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}_{i.}) \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} \left(\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n_i} - \frac{2\sigma^2}{n_i}\right) \\
&= (n-a)\sigma^2
\end{aligned}
$$

构建统计量

称 $\frac{SSA}{a-1}$ 为因子 A 的均方和，记为 MSA；称 $\frac{SSe}{n-a}$ 为误差均方和，记为 MSe。

由前述，MSe 是 σ^2 的无偏估计，而当零假设成立时，MSA 也是 σ^2 的一个无偏估计。如果二者比值很大，即 MSA 比 MSe 大很多（$\sum\limits_{i=1}^{a} \tau_i^2$ 很大），我们就有理由怀疑零假设。由此构建统计量：

$$
F = \frac{MSA}{MSe} = \frac{\frac{SSA}{a-1}}{\frac{SSe}{n-a}}
$$

在该统计量的情况下，H_0 的拒绝域是右向单尾的。下求该统计量的分布。

24.1.5 统计量的分布

上述统计量服从如下分布：

$$F \sim F(a-1,\ n-a)$$

所以 H_0 在显著性水平为 α 时的拒绝域为：

$$F > F_{1-\alpha}(a-1,\ n-a)$$

24.1.6 方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 值
因子 A	SSA	$f_A = a-1$	$\frac{SSA}{a-1}$	$F = \frac{MSA}{MSe}$
误差	SSe	$f_e = n-a$	$\frac{SSe}{n-a}$	
总	SST	$f_T = n-1$		

表 24.2: 固定效应下单因子试验方差分析表

平方和公式可按下列公式计算：

$$\begin{cases} SST = \sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{n} \\ SSA = \sum\limits_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{y_{..}^2}{n} \\ SSe = SST - SSA \end{cases}$$

24.1.7 参数估计

固定效应下的单因素方差分析有三类参数：μ，诸 τ_i 和 σ^2。下讨论这三类参数的点估计与区间估计问题。

点估计

参数的点估计如下：

$$\hat{\sigma^2} = MSe$$

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..},\ i = 1, 2, \ldots, a$$

其中 $\hat{\mu}$, $\hat{\tau}_i$ 是使用最小二乘估计得到的。

Proof. 分别用 $\hat{\mu}$, $\hat{\tau}_i$ 表示 μ 与诸 τ_i 的估计，用 $\hat{y}_{ij}=\hat{\mu}+\hat{\tau}_i$ 表示 y_{ij} 的估计，$i=1,2,\ldots,a,\ j=1,2,\ldots,n_i$。损失函数为：

$$L=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\hat{y}_{ij})^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\hat{\mu}-\hat{\tau}_i)^2$$

最小二乘解需要满足：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial \hat{\mu}}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \hat{\tau}_i}=0,\quad i=1,2,\ldots,a\\ \sum\limits_{i=1}^{a}n_i\hat{\tau}_i=0\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}\hat{\mu}=\bar{y}_{..}\\ \hat{\tau}_i=\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..},\ i=1,2,\ldots,a\end{cases}$$

□

区间估计

$\mu_i=\mu+\tau_i$:

$$\bar{y}_{i.}\pm t_{1-\alpha}(n-a)\sqrt{\frac{MSe}{n_i}}$$

τ_i:

$$\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\pm t_{1-\alpha}(n-a)\sqrt{MSe\left(\frac{1}{n_i}-\frac{1}{n}\right)}$$

$\mu_i-\mu_j=\tau_i-\tau_j$:

$$\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{j.}\pm t_{1-\alpha}(n-a)\sqrt{MSe\left(\frac{1}{n_i}-\frac{1}{n_j}\right)}$$

24.2　多重假设检验

当方差分析拒绝零假设，认为因子的不同水平对实验结果的影响有显著差异时，随之而来的问题就是到底哪几个因子之间是有显著差异的，此时就需要进行比较。但是如果对于每一对水平都使用通常的 t 检验的话，将大大提高整个检验问题犯第一类错误的概率（见 section 24.1.2）。本节先介绍一般的对比，再介绍等重复情况下的 Duncan 多重比较法与一般情形下的 Scheffe 多重比较法。

24.2.1 对比

对比的定义

Definition 24.1. 对比是指因子诸效应的一个线性组合：

$$\begin{cases} c = \sum\limits_{i=1}^{a} c_i\tau_i, \\ s.t. \quad \sum\limits_{i=1}^{a} c_i = 0 \end{cases}$$

因为 $\mu_i = \mu + \tau_i$，所以对比也可表示为：

$$\begin{cases} c = \sum\limits_{i=1}^{a} c_i\mu_i, \\ s.t. \quad \sum\limits_{i=1}^{a} c_i = 0 \end{cases}$$

全体对比构成一个 $a-1$ 维线性空间：

$$\{\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_a)' : \sum_{i=1}^{a} c_i = 0\}$$

目的

我们此时希望检验假设：

$$H_0 : \sum_{i=1}^{a} c_i\mu_i = 0, \quad s.t. \sum_{i=1}^{a} c_i = 0$$

假设的检验方法

由固定效应下的单因子方差分析的统计模型 section 24.1.1，可知：

$$\sum_{i=1}^{a} c_i\bar{y}_{i.} \sim N(\sum_{i=1}^{a} c_i\mu_i, \sum_{i=1}^{a} \frac{c_i^2\sigma^2}{n_i})$$

定义对比的平方和为：

$$SSc = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{a} c_i\bar{y}_{i.}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{a} \frac{c_i^2}{n_i}}$$

当 H_0 成立时，$\frac{SSc}{\sigma^2}$ 是一个标准正态变量的平方，也就是说它服从 $\chi^2(1)$。所以，当 H_0 成立的时候，统计量

记得证明独立

$$F = \frac{SSc}{MSe} \sim \mathrm{F}(1,\ n-a)$$

MSe 是 σ^2 的无偏估计，而当 H_0 成立时，SSc 也是 σ^2 的无偏估计。如果 F 值很大，则有理由怀疑零假设（从 $\left(\sum\limits_{i=1}^{a} c_i\bar{y}_{i.}\right)^2$ 较大这一点怀疑它的期望不为 0）。所以 H_0 的拒绝域是右向单尾的，显著性水平为 α 时的拒绝域为：

$$F = \frac{SSc}{MSe} > F_{1-\alpha}(1,\ n-a)$$

24.2.2 正交对比

仅讨论等重复情况下对比系数向量标准化（即模长为 1）的正交对比。

正交对比的定义

对比有一种特殊情况，即正交对比：

Definition 24.2. $c = \sum_{i=1}^{a} c_i\mu_i$ 和 $d = \sum_{i=1}^{a} d_i\mu_i$ 是两个对比。若：

$$\sum_{i=1}^{a} c_i d_i = 0$$

则称这两个对比为正交对比。

目的

由对比空间的维数可知，线性无关的正交对比组最多有 $a-1$ 个对比。而正交对比即是为了检验任意 $a-1$ 个对比的值是否为 0：

$$\begin{aligned} c^1 &= \sum_{i=1}^{a} c_{1,i}\mu_i \\ c^2 &= \sum_{i=1}^{a} c_{2,i}\mu_i \\ &\cdots\cdots \\ c^{(a-1)} &= \sum_{i=1}^{a} c_{a-1,i}\mu_i \end{aligned}$$

假设的检验方法

只需注意到此时：

$$SScj = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{a} c_{j,i}\bar{y}_{i.}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{a} \frac{c_{j,i}^2}{m}} = m\left(\sum_{i=1}^{a} c_{j,i}\bar{y}_{i.}\right)^2$$

剩余步骤与对比一样。

正交对比与 SSA 的关系

上述对比的一个无偏估计为：

$$\hat{c}^1 = \sum_{i=1}^{a} c_{1,i}\bar{y}_{i.}$$

$$\hat{c}^2 = \sum_{i=1}^{a} c_{2,i}\bar{y}_{i.}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\hat{c}^{(a-1)} = \sum_{i=1}^{a} c_{a-1,i}\bar{y}_{i.}$$

令：

$$\hat{c}^a = \sum_{i=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{a}}\bar{y}_{i.}$$

需要注意这并不是一个对比。

注意到：

$$(\hat{c}^1, \hat{c}^2, \ldots, \hat{c}^a)' = A(\bar{y}_{1.}, \bar{y}_{2.}, \ldots, \bar{y}_{a.})'$$

这之中的矩阵 A 是一个正交矩阵。所以：

$$(\hat{c}^1)^2 + (\hat{c}^2)^2 + \cdots + (\hat{c}^a)^2 = \sum_{i=1}^{a} \bar{y}_{i.}^2$$

于是：

$$\begin{aligned}
(\hat{c}^1)^2 + (\hat{c}^2)^2 + \cdots + (\hat{c}^{a-1})^2 &= \sum_{i=1}^{a} \bar{y}_{i.}^2 - \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{a} \bar{y}_{i.}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a} \left(\frac{y_{i.}}{m}\right)^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{\sum_{i=1}^{a} m\bar{y}_{i.}}{m}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{m^2} - \frac{y_{..}^2}{am^2} \\
&= \frac{1}{m} SSA
\end{aligned}$$

再由：

$$SScj = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{a} c_{j,i}\bar{y}_{i.}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{a} \frac{c_{j,i}^2}{m}} = \frac{(\hat{c}^j)^2}{\frac{1}{m}} = m(\hat{c}^j)^2$$

所以：

$$SSc1 + SSc2 + \cdots + SSc(a-1) = SSA$$

24.2.3 Duncan 多重比较法

在很多问题中，我们往往不知道要如何构造适当的对比，也有可能检验 $a-1$ 个以上的比较，此时对比的相关方法就无法使用了。接下来介绍这种情况下的一种解决方案，即 Duncan 多重比较法，它只适用于等重复情况。

目的

检验 $H_0: \mu_i = \mu_j,\ \forall\, i \neq j$。

p 级极差的定义

Definition 24.3. 将 a 个水平下观察值的平均值 $\bar{y}_{1.}, \bar{y}_{2.}, \ldots, \bar{y}_{a.}$ 从小到大排序。如果其中任意两个数在排序后中间还有 $p-2,\ p \geqslant 2$ 个数，那么这两个数的差称为 p 级极差，记为 R_p。

统计量及其分布

设 f 为 SSe 的自由度，m 为重复次数，则 Duncan 多重比较法的统计量为：

$$r(p,f) = \frac{R_p}{\sqrt{\dfrac{MSe}{m}}}$$

在 $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a$ 即 $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a$ 的情况下，$r(p,f)$ 与 $\mu,\ \sigma^2$ 无关。

Proof. 将 $r(p,f)$ 分子分母同除 σ 可得：

$$r(p.f) = \frac{\dfrac{R_p}{\sigma/\sqrt{m}}}{\sqrt{\dfrac{MSe}{\sigma^2}}}$$

注意到分母：

$$\frac{MSe}{\sigma^2} = \frac{1}{f}\frac{SSe}{\sigma^2}$$

是一个服从 $\chi^2(f)$ 分布变量的 $\dfrac{1}{f}$ 倍，其分布与 $\mu,\ \sigma^2$ 无关。

在零假设成立的情况下：

$$\frac{\bar{y}_{i.} - \mu}{\sigma/\sqrt{m}} \sim N(0,\ 1)$$

这个分布与 $\mu,\ \sigma^2$ 无关，所以分子：

$$\frac{R_p}{\sigma/\sqrt{m}} = \max\left(\frac{\bar{y}_{1.} - \mu}{\sigma/\sqrt{m}}, \ldots, \frac{\bar{y}_{a.} - \mu}{\sigma/\sqrt{m}}\right) - \min\left(\frac{\bar{y}_{1.} - \mu}{\sigma/\sqrt{m}}, \ldots, \frac{\bar{y}_{a.} - \mu}{\sigma/\sqrt{m}}\right)$$

也与 $\mu,\ \sigma^2$ 无关。

综上，此时 $r(p,f)$ 与 $\mu,\ \sigma^2$ 无关。 □

检验原理

当 $\mu_i = \mu_j$ 不成立时，对应的 R_p 会较大。因此当 $r(p, f)$ 较大时，有理由怀疑零假设。所以 H_0 的拒绝域是右向单尾的，显著性水平为 α 时的拒绝域为：

$$r(p, f) > r_{1-\alpha}(p, f)$$

即：

$$R_p > r_{1-\alpha}(p, f)\sqrt{\frac{MSe}{m}}$$

$r(p, f)$ 分布的 Monte Carlo 模拟

Algorithm 3 Duncan 多重比较法统计量分布的蒙特卡洛模拟

Input: m, a, p, f, N ▷ 组内重复次数、组数、极差的级数、SSe 的自由度、模拟次数
Output: $r(p, f)$ 的模拟分布
初始化模拟值存储向量：$List \leftarrow \emptyset$
for $i \leftarrow 1$ to N **do**
    生成 a 个随机数 $x_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, a$
    计算 $\frac{R_p}{\sigma/\sqrt{m}}$：
$$\frac{R_p}{\sigma/\sqrt{m}} = \max_{i=1,2,\ldots,a}\{x_i\} - \min_{i=1,2,\ldots,a}\{x_i\}$$
    从 $\chi^2(f)$ 中产生一个样本记为 χ^2
    计算 $r(p, f)$：
$$r(p, f) = \frac{\frac{R_p}{\sigma/\sqrt{m}}}{\sqrt{\chi^2/f}}$$
    将 $r(p, f)$ 加入 $List$
end for
返回 $List$

检验步骤

将 $\bar{y}_{1.}, \bar{y}_{2.}, \ldots, \bar{y}_{a.}$ 从小到大排序为 $\bar{y}^1, \bar{y}^2, \ldots, \bar{y}^a$。令：

$$r_{1-\alpha}(p, f)\sqrt{\frac{MSe}{m}} = R_p^*$$

按以下顺序进行比较：

$$\bar{y}^a - \bar{y}^1 \text{与 } R_a^* \text{ 进行比较}$$
$$\bar{y}^a - \bar{y}^2 \text{与 } R_{a-1}^* \text{ 进行比较}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\bar{y}^a - \bar{y}^{a-1} \text{与 } R_2^* \text{ 进行比较}$$
$$\bar{y}^{a-1} - \bar{y}^1 \text{与 } R_{a-1}^* \text{ 进行比较}$$
$$\bar{y}^{a-1} - \bar{y}^2 \text{与 } R_{a-2}^* \text{ 进行比较}$$
$$\cdots\cdots$$

直到全部 $\binom{a}{2}$ 对水平均值比较完为止。

24.2.4 Scheffe 多重比较法

Scheffe 证明了，在固定效应下的单因子方差分析统计模型下（即 section 24.1.1），对显著性水平 α，一切对比 c 的值同时满足不等式：

$$|\hat{c} - c| = \left|\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.} - c\right| \leqslant \sqrt{(a-1)F_{1-\alpha}(a-1,\ n-a)MSe\sum_{i=1}^{a}\frac{c_i^2}{n_i}}$$

的概率等于 $1-\alpha$。也就是说，$H_0 : \sum_{i=1}^{a} c_i\mu_i = 0$ 的拒绝域都是：

$$|\hat{c}| > \sqrt{(a-1)F_{1-\alpha}(a-1,\ n-a)MSe\sum_{i=1}^{a}\frac{c_i^2}{n_i}}$$

24.3 随机效应下的单因子方差分析

水平	观测值			
A_1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n_1}
A_2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n_2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_a	y_{a1}	y_{a2}	$\cdots$	y_{an_a}

表 24.3: 随机效应下的单因子试验数据

其中 y_{ij} 表示在第 i 个水平 A_i 下第 j 次重复试验的观察值。记 $n = \sum_{i=1}^{a} n_i$。

24.3.1 统计模型

随机效应下的单因子方差分析统计模型为：

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \\ \text{诸}\tau_i \quad \text{i.i.d. } N(0, \sigma_\tau^2) \\ \text{诸}\varepsilon_{ij} \quad \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2) \\ \text{诸}\varepsilon_{ij}\text{、诸}\tau_i\text{相互独立} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, a,\ j = 1, 2, \cdots, n_i$$

称 μ 为一般平均（这里表示因子对数据的一般影响），τ_i 为因子 A 的第 i 个水品的随机效应。

24.3.2 统计假设

随机效应下单因素方差分析检验的统计假设为：

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_\tau^2 = 0 \\ H_1 : \sigma_\tau^2 > 0 \end{cases}$$

需要注意的是，此时拒绝零假设意味着因子的全部水平（不论是否参与过试验）之间有显著差异。

24.3.3 方差分析

偏差平方和的分解

由于与固定效应情况下三个平方和的定义完全相同，所以随机效应下偏差平方和分解公式与之前一模一样。

$$SST = SSA + SSe$$

$$SSA = \sum_{i=1}^{a} n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$$

$$SSe = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.})^2$$

各平方和的期望

先计算 SSA 与 SSe 的期望。

$$E(SSe) = (n-a)\sigma^2,\ E(SSA) = \left(n - \frac{\sum\limits_{i=1}^{a} n_i^2}{n} \right) \sigma_\tau^2 + (a-1)\sigma^2$$

Proof. (1) 因为数据结构的形式完全一样，所以 SSe 的期望与固定效应情形下的一模一样。

(2) 注意到 τ_i 的形式发生变化，$E(SSA)$ 需要重新求解。

$$
\begin{aligned}
\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} &= \mu + \tau_i + \bar{\varepsilon}_{i.} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_k}(\mu + \tau_k + \varepsilon_{kj}) \\
&= \mu + \tau_i + \bar{\varepsilon}_{i.} - \frac{1}{n}\left(n\mu + \sum_{k=1}^{a} n_k\tau_k + \varepsilon_{..}\right) \\
&= \tau_i - \frac{\sum\limits_{k=1}^{a} n_k\tau_k}{n} + \bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(SSA) &= E\left[\sum_{i=1}^{a} n_i\left(\tau_i - \frac{\sum\limits_{k=1}^{a} n_k\tau_k}{n} + \bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..}\right)^2\right] \\
&= E\left\{\sum_{i=1}^{a} n_i\left[\tau_i^2 + \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{a} n_k\tau_k}{n}\right)^2 + \bar{\varepsilon}_{i.}^2 + \bar{\varepsilon}_{..}^2 - 2\tau_i\frac{\sum\limits_{k=1}^{a} n_k\tau_k}{n} + 2\tau_i\bar{\varepsilon}_{i.} - 2\tau_i\bar{\varepsilon}_{..} - 2\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..}\right]\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{a} n_iE(\tau_i^2) + \sum_{i=1}^{a} n_iE(\bar{\varepsilon}_{i.}^2) + \sum_{i=1}^{a} n_iE(\bar{\varepsilon}_{..}^2) - 2\sum_{i=1}^{a} n_iE(\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..}) - \frac{\sum\limits_{i=1}^{a} n_i^2E(\tau_i^2)}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{a} n_i\sigma_\tau^2 + \sum_{i=1}^{a} n_i\frac{\sigma^2}{n_i} + \sum_{i=1}^{a} n_i\frac{\sigma^2}{n} - 2\sum_{i=1}^{a} n_i\frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{a} n_i^2\sigma_\tau^2}{n} \\
&= \left(n - \frac{\sum_{i=1}^{a} n_i^2}{n}\right)\sigma_\tau^2 + (a-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

□

统计量及其分布

称 $\frac{SSA}{a-1}$ 为因子 A 的均方和，记为 MSA；称 $\frac{SSe}{n-a}$ 为误差均方和，记为 MSe。

由前述，MSe 是 σ^2 的无偏估计，而当零假设成立时，MSA 也是 σ^2 的一个无偏估计。如果二者比值很大，即 MSA 比 MSe 大很多（$\left(\frac{n^2-\sum_{i=1}^{a} n_i^2}{n(a-1)}\right)\sigma_\tau^2$ 很大），我们就有理由怀疑零假设。由此构建统计量：

$$
F = \frac{MSA}{MSe} = \frac{\frac{SSA}{a-1}}{\frac{SSe}{n-a}}
$$

在该统计量的情况下，H_0 的拒绝域是右向单尾的。

由于在假设 H_0 成立时，随机效应模型与固定效应模型的观察值 y_{ij} 的数据结构的形式完全一样，所以在随机效应模型中仍然有：

$$
F \sim F(a-1,\ n-a)
$$

拒绝域

综上所述，显著性水平为 α 时的拒绝域为：

$$F > F_{1-\alpha}(a-1,\ n-a)$$

24.3.4 方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 值
因子 A	SSA	$f_A = a-1$	$\frac{SSA}{a-1}$	$F = \frac{MSA}{MSe}$
误差	SSe	$f_e = n-a$	$\frac{SSe}{n-a}$	
总	SST	$f_T = n-1$		

表 24.4: 随机效应下单因子试验方差分析表

平方和公式可按下列公式计算：

$$\begin{cases} SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{n} \\ SSA = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{y_{..}^2}{n} \\ SSe = SST - SSA \end{cases}$$

24.3.5 参数估计

我们此时关心方差分量的估计。

点估计

由 SSA、SSe 期望的计算，可给出各方差分量的无偏点估计如下：

$$\hat{\sigma^2} = MSe$$

$$\hat{\sigma^2}_\tau = \frac{n(a-1)(MSA - MSe)}{n^2 - \sum_{i=1}^{a} n_i^2}$$

这里需要注意的是，$\hat{\sigma^2}_\tau$ 有可能小于 0，这是由估计方法决定的。

区间估计

考虑 σ^2 的区间估计。因为：

$$\frac{SSe}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-a)$$

所以显著性水平为 α 时，σ^2 的置信区间为：

$$\left(\frac{SSe}{\chi^2_{\alpha/2}(n-a)},\ \frac{SSe}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-a)}\right)$$

24.4 可加效应下的两因子方差分析

可加效应模型一般不必进行重复实验，每个水平组合下只做一次实验就够了。

因子 B / 因子 A	B_1	B_2	$\cdots$	B_b
A_1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1b}
A_2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2b}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_a	y_{a1}	y_{a2}	$\cdots$	y_{ab}

表 24.5: 无重复两因子试验数据表

其中 y_{ij} 表示在因子 A 的第 i 个水平 A_i 和因子 B 的第 j 个水平 B_j 下试验的观察值。记 $n = ab$。

24.4.1 统计模型

假设一个数据 y 由两部分组成：

1. 因子组合 (A_i, B_j) 的影响部分 μ_{ij}，随因子水平组合的变化而变化。

2. 试验的随机误差 ε，假设所有随机误差来自同一个正态总体 $N(0, \sigma^2)$。

则统计模型可写作：

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij} \\ \text{诸}\varepsilon_{ij} \quad \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2) \\ i = 1, 2, \ldots, a,\ j = 1, 2, \ldots, b \end{cases}$$

还可将统计模型写成意义更清晰的形式，记：

$$\mu = \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \mu_{ij}$$

$$\bar{\mu}_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{b} \mu_{ij}, \quad \tau_i = \bar{\mu}_{i\cdot} - \mu, \quad i = 1, 2, \ldots, a$$

$$\bar{\mu}_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{a} \mu_{ij}, \quad \beta_j = \bar{\mu}_{\cdot j} - \mu, \quad j = 1, 2, \ldots, b$$

称 μ 为一般平均，表示 ab 个总体的均值的平均值。称 τ_i 为因子 A 第 i 个水平 A_i 的主效应。称 β_j 为因子 B 第 j 个水平 B_j 的主效应。那么统计模型即可改写为：

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \\ \text{诸}\varepsilon_{ij} \quad \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2) \\ s.t. \quad \sum\limits_{i=1}^{a} \tau_i = 0, \quad \sum\limits_{j=1}^{b} \beta_j = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, a, \ j = 1, 2, \ldots, b \end{cases}$$

24.4.2 统计假设

可加效应下的两因子方差分析需要检验如下两个零假设：

$$\begin{cases} H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0, \\ H_{02} : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0 \end{cases}$$

24.4.3 偏差平方和的分解

记：

$$y_{..} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij}, \quad \bar{y}_{..} = \frac{y_{..}}{ab}$$
$$y_{i.} = \sum_{j=1}^{b} y_{ij}, \quad \bar{y}_{i.} = \frac{y_{i.}}{b}, \quad i = 1, 2, \ldots, a$$
$$y_{.j} = \sum_{i=1}^{a} y_{ij}, \quad \bar{y}_{.j} = \frac{y_{.j}}{a}, \quad j = 1, 2, \ldots, b$$

全部数据之间的差异可用下述总偏差平方和表示：

$$SST = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$$

引起数据 y_{ij} 之间差异的原因有三点：

1. 因子 A 的 a 个水平对试验结果的影响不同。

2. 因子 B 的 b 个水平对试验结果的影响不同。

3. 试验具有误差。

为了区分并比较这三个原因对数据的影响，需要对 SST 进行分解：

$$\begin{aligned}
SST &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left[(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})+(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})+(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})^2 \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..}) \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..}) \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})
\end{aligned}$$

由定义可发现上式后三项为 0（第三项需要注意交换求和顺序）。

SSe

记：

$$SSe=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})^2$$

$$\varepsilon_{..}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\varepsilon_{ij},\quad \bar{\varepsilon}_{..}=\frac{\varepsilon_{..}}{ab}$$

$$\varepsilon_{i.}=\sum_{j=1}^{b}\varepsilon_{ij},\quad \bar{\varepsilon}_{i.}=\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\varepsilon_{ij},\quad i=1,2,\dots,a$$

$$\varepsilon_{.j}=\sum_{i=1}^{a}\varepsilon_{ij},\quad \bar{\varepsilon}_{.j}=\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\varepsilon_{ij},\quad j=1,2,\dots,b$$

$$\bar{\tau}=\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\tau_i=0,\quad \bar{\beta}=\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\beta_j=0$$

则有：

$$\begin{aligned}
SSe &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\mu+\tau_i+\beta_j+\varepsilon_{ij}-\mu-\tau_i-\bar{\beta}-\bar{\varepsilon}_{i.}-\mu-\bar{\tau}-\beta_j-\bar{\varepsilon}_{.j}+\mu+\bar{\tau}+\bar{\beta}+\bar{\varepsilon}_{..})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_{i.}-\bar{\varepsilon}_{.j}+\bar{\varepsilon}_{..})^2
\end{aligned}$$

因为该项完全是由误差引起的，所以称之为误差平方和。

SSA

记：

$$SSA = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = b\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$$

可以发现：

$$\begin{aligned}
SSA &= b\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \\
&= b\sum_{i=1}^{a}(\mu + \tau_i + \bar{\beta} + \bar{\varepsilon}_{i.} - \mu - \bar{\tau} - \bar{\beta} - \bar{\varepsilon}_{..})^2 \\
&= b\sum_{i=1}^{a}(\tau_i + \bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2
\end{aligned}$$

其中的随机误差都是平均过的，期望值不变而且方差缩小了。所以这个平方和虽然受到水平变动和随机误差两方面的影响，但是当因子 A 的不同水平对试验结果有显著差异的时候，它主要受到因子 A 水平变动的影响。所以称该平方和为因子 A 的平方和。

SSB

记：

$$SSB = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 = a\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$$

可以发现：

$$\begin{aligned}
SSB &= a\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 \\
&= a\sum_{j=1}^{b}(\mu + \bar{\tau} + \beta_j + \bar{\varepsilon}_{.j} - \mu - \bar{\tau} - \bar{\beta} - \bar{\varepsilon}_{..})^2 \\
&= a\sum_{j=1}^{b}(\beta_j + \bar{\varepsilon}_{.j} - \bar{\varepsilon}_{..})^2
\end{aligned}$$

其中的随机误差都是平均过的，期望值不变而且方差缩小了。所以这个平方和虽然受到水平变动和随机误差两方面的影响，但是当因子 B 的不同水平对试验结果有显著差异的时候，它主要受到因子 B 水平变动的影响。所以称该平方和为因子 B 的平方和。

总偏差平方和分解公式

综上，总偏差平方和有如下分解公式：

$$SST = SSA + SSB + SSe$$

24.4.4 检验统计量

关于 ε 的一些结论

下给出关于 ε 的一些结论：

$$\bar{\varepsilon}_{i.} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{b}), \quad \bar{\varepsilon}_{.j} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{a}), \quad \bar{\varepsilon}_{..} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{ab})$$
$$E(\varepsilon_{ij}^2) = \sigma^2, \quad E(\bar{\varepsilon}_{i.}^2) = \frac{\sigma^2}{b}, \quad E(\bar{\varepsilon}_{.j}^2) = \frac{\sigma^2}{a}, \quad E(\bar{\varepsilon}_{..}^2) = \frac{\sigma^2}{ab}$$
$$E(\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..}) = \frac{\sigma^2}{ab}, \quad E(\varepsilon_{.j}\bar{\varepsilon}_{..}) = \frac{\sigma^2}{ab}$$

Proof. 正态分布的三个结论可直接由独立正态随机变量的线性运算求得。

$$E(\bar{\varepsilon}_{ij}^2) = Var(\bar{\varepsilon}_{ij}) + [E(\bar{\varepsilon}_{ij})]^2 = \sigma^2$$
$$E(\bar{\varepsilon}_{i.}^2) = Var(\bar{\varepsilon}_{i.}) + [E(\bar{\varepsilon}_{i.})]^2 = \frac{\sigma^2}{b}$$
$$E(\bar{\varepsilon}_{.j}^2) = Var(\bar{\varepsilon}_{.j}) + [E(\bar{\varepsilon}_{.j})]^2 = \frac{\sigma^2}{a}$$
$$E(\bar{\varepsilon}_{..}^2) = Var(\bar{\varepsilon}_{..}) + [E(\bar{\varepsilon}_{..})]^2 = \frac{\sigma^2}{ab}$$

下求 $E(\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..})$：

$$\begin{aligned}
E(\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..}) &= E\left[\left(\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\varepsilon_{ij}\right)\left(\frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\varepsilon_{ij}\right)\right] \\
&= \frac{1}{ab^2}E\left(\sum_{j=1}^{b}\varepsilon_{ij}^2\right) \\
&= \frac{1}{ab^2}\sum_{j=1}^{b}E(\varepsilon_{ij}^2) \\
&= \frac{\sigma^2}{ab}
\end{aligned}$$

下求 $E(\varepsilon_{.j}\bar{\varepsilon}_{..})$：

$$\begin{aligned}
E(\varepsilon_{.j}\bar{\varepsilon}_{..}) &= E\left[\left(\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\varepsilon_{ij}\right)\left(\frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\varepsilon_{ij}\right)\right] \\
&= \frac{1}{a^2b}E\left(\sum_{i=1}^{a}\varepsilon_{ij}^2\right) \\
&= \frac{1}{ab^2}\sum_{i=1}^{a}E(\varepsilon_{ij}^2) \\
&= \frac{\sigma^2}{ab}
\end{aligned}$$

□

SSA 的期望

下求 SSA 的期望：

$$
\begin{aligned}
E(SSA) &= E\left[b\sum_{i=1}^{a}(\tau_i+\bar{\varepsilon}_{i.}-\bar{\varepsilon}_{..})^2\right]\\
&= E\left[b\sum_{i=1}^{a}(\tau_i^2+\bar{\varepsilon}_{i.}^2+\bar{\varepsilon}_{..}^2+2\tau_i\bar{\varepsilon}_{i.}-2\tau_i\bar{\varepsilon}_{..}-2\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..})\right]\\
&= b\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2+b\sum_{i=1}^{a}E(\bar{\varepsilon}_{i.}^2)+b\sum_{i=1}^{a}E(\bar{\varepsilon}_{..}^2)-\frac{2b}{ab^2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}E(\varepsilon_{ij}^2)\\
&= b\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2+ba\frac{\sigma^2}{b}+ab\frac{\sigma^2}{ab}-\frac{2b}{ab^2}ab\sigma^2\\
&= b\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2+(a-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

SSB 的期望

下求 SSB 的期望：

$$
\begin{aligned}
E(SSB) &= E\left[a\sum_{j=1}^{b}(\beta_j+\bar{\varepsilon}_{.j}-\bar{\varepsilon}_{..})^2\right]\\
&= E\left[a\sum_{j=1}^{b}(\beta_j^2+\bar{\varepsilon}_{.j}^2+\bar{\varepsilon}_{..}^2+2\beta_j\bar{\varepsilon}_{.j}-2\beta_j\bar{\varepsilon}_{..}-2\bar{\varepsilon}_{.j}\bar{\varepsilon}_{..})\right]\\
&= a\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2+a\sum_{j=1}^{b}E(\bar{\varepsilon}_{.j}^2)+a\sum_{j=1}^{b}E(\bar{\varepsilon}_{..}^2)-\frac{2a}{a^2b}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}E(\varepsilon_{ij}^2)\\
&= a\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2+ab\frac{\sigma^2}{a}+ab\frac{\sigma^2}{ab}-\frac{2a}{a^2b}ab\sigma^2\\
&= a\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2+(b-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

SSe 的期望

下求 SSe 的期望（把均值展开，利用独立性就可以得到结果）：

$$
\begin{aligned}
E(SSe) &= E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_{i.}-\bar{\varepsilon}_{.j}+\bar{\varepsilon}_{..})^2\right]\\
&= E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\varepsilon_{ij}^2+\bar{\varepsilon}_{i.}^2+\bar{\varepsilon}_{.j}^2+\bar{\varepsilon}_{..}^2-2\varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}_{i.}-2\varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}_{.j}+2\varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}_{..}+2\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{.j}-2\bar{\varepsilon}_{i.}\bar{\varepsilon}_{..}-2\bar{\varepsilon}_{.j}\bar{\varepsilon}_{..})\right]\\
&= (a-1)(b-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

构建统计量

称 $\frac{SSA}{a-1}$ 为因子 A 的均方和，记为 MSA；称 $\frac{SSB}{b-1}$ 为因子 B 的均方和，记为 MSB；称 $\frac{SSe}{(a-1)(b-1)}$ 为误差均方和，记为 MSe。

由前述，MSe 是 σ^2 的无偏估计，而当零假设成立时，MSA 和 MSB 也是 σ^2 的一个无偏估计。如果 MSA、MSB 与 MSe 比值很大，即 MSA、MSB 比 MSe 大很多（$b\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2$，$a\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2$ 很大），我们就有理由怀疑零假设。。由此构建统计量：

$$F_A = \frac{MSA}{MSe} = \frac{\frac{SSA}{a-1}}{\frac{SSe}{(a-1)(b-1)}}$$
$$F_B = \frac{MSB}{MSe} = \frac{\frac{SSB}{b-1}}{\frac{SSe}{(a-1)(b-1)}}$$

在这些统计量的情况下，H_{01}，H_{02} 的拒绝域是右向单尾的。下求统计量的分布。

24.4.5 统计量的分布

上述统计量服从如下分布：

$$F_A \sim F(a-1,\ (a-1)(b-1))$$
$$F_B \sim F(b-1,\ (a-1)(b-1))$$

所以 H_{01}，H_{02} 在显著性水平为 α 时的拒绝域为：

$$F_A > F_{1-\alpha}(a-1,\ (a-1)(b-1))$$
$$F_B > F_{1-\alpha}(b-1,\ (a-1)(b-1))$$

24.4.6 方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 值
因子 A	SSA	$f_A = a-1$	$\frac{SSA}{a-1}$	$F = \frac{MSA}{MSe}$
因子 B	SSB	$f_B = b-1$	$\frac{SSB}{b-1}$	$F = \frac{MSB}{MSe}$
误差	SSe	$f_e = (a-1)(b-1)$	$\frac{SSe}{(a-1)(b-1)}$	
总	SST	$f_T = ab-1$		

表 24.6: 无重复可加效应下两因子试验方差分析表

平方和公式可按下列公式计算：

$$\begin{cases} SST = \sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{ab} \\ SSA = \sum\limits_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{b} - \frac{y_{..}^2}{ab} \\ SSB = \sum\limits_{j=1}^{b} \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab} \\ SSe = SST - SSA - SSB \end{cases}$$

24.4.7 参数估计

可加效应下的两因子方差分析有四类参数：μ，诸 τ_i，诸 β_j 和 σ^2。下讨论这四类参数的点估计问题。

点估计

参数的点估计如下：

$$\hat{\sigma^2} = MSe$$

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..},\ i = 1, 2, \ldots, a$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..},\ j = 1, 2, \ldots, b$$

其中 $\hat{\mu}$, $\hat{\tau}_i$, $\hat{\beta}_j$ 是使用最小二乘估计得到的。

Proof. 分别用 $\hat{\mu}$, $\hat{\tau}_i$, $\hat{\beta}_j$ 表示 μ，诸 τ_i 和诸 β_j 的估计，用 $\hat{y}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j$ 表示 y_{ij} 的估计，$i = 1, 2, \ldots, a$, $j = 1, 2, \ldots, b$。损失函数为：

$$L = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j)^2$$

最小二乘解需要满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \hat{\mu}} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \hat{\tau}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, a \\ \dfrac{\partial L}{\partial \hat{\beta}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, b \\ \sum\limits_{i=1}^{a} \hat{\tau}_i = 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{b} \hat{\beta}_j = 0 \end{cases}$$

上式即可解出结果。 □

24.4.8 多重比较问题

如果此时某因子显著，则需要对它的各水平均值采用 Duncan 多重比较法去判断哪些水平之间存在显著差异。此时的水平均值即为在另一因子各水平下的均值。

24.4.9 等重复试验情形

等重复试验下的方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 值
因子 A	SSA	$f_A = a - 1$	$\frac{SSA}{a-1}$	$F = \frac{MSA}{MSe}$
因子 B	SSB	$f_B = b - 1$	$\frac{SSB}{b-1}$	$F = \frac{MSB}{MSe}$
误差	SSe	$f_e = abm - a - b + 1$	$\frac{SSe}{f_e}$	
总	SST	$f_T = abm - 1$		

表 24.7: 可加效应下两因子等重复试验方差分析表

其中 m 为重复实验次数。平方和公式可按下列公式计算：

$$
\begin{cases}
SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m} y_{ijk}^2 - \frac{y_{\ldots}^2}{abm} \\
SSA = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{bm} - \frac{y_{\ldots}^2}{abm} \\
SSB = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j.}^2}{am} - \frac{y_{..}^2}{abm} \\
SSe = SST - SSA - SSB
\end{cases}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
y_{\ldots} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m} y_{ijk} \\
y_{i..} &= \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m} y_{ijk}, \quad i = 1, 2, \ldots, a \\
y_{.j.} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{m} y_{ijk}, \quad j = 1, 2, \ldots, b
\end{aligned}
$$

参数估计

参数的点估计如下：

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...}$$
$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...},\ i = 1, 2, \ldots, a$$
$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...},\ j = 1, 2, \ldots, b$$

多重比较问题

此时的 Duncan 多重比较过程与无重复试验的情况完全一样，只是需要注意：

$$A : R_p > r_{1-\alpha}(p, f)\sqrt{\frac{MSe}{bm}}$$
$$B : R_p > r_{1-\alpha}(p, f)\sqrt{\frac{MSe}{am}}$$

24.5 交互效应下的两因子方差分析

仅讨论等重复情形。

因子 A \ 因子 B	B_1	B_2	$\cdots$	B_b
A_1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11m}$	$y_{121}, y_{122}, \ldots, y_{12m}$	$\cdots$	$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1bm}$
A_2	$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21m}$	$y_{221}, y_{222}, \ldots, y_{22m}$	$\cdots$	$y_{2b1}, y_{2b2}, \ldots, y_{2bm}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1m}$	$y_{a21}, y_{a22}, \ldots, y_{a2m}$	$\cdots$	$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abm}$

表 24.8: 等重复两因子试验数据表

其中 y_{ijk} 表示在因子 A 的第 i 个水平 A_i 和因子 B 的第 j 个水平 B_j 下第 k 次重复试验的观察值。

24.5.1 统计模型

由可加效应下的两因子方差分析模型（见 section 24.4.1），如果：

$$\mu_{ij} \neq \mu + \tau_i + \beta_j$$

则记：

$$(\tau\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \tau_i + \beta_j), \quad i = 1, 2, \ldots, a,\ j = 1, 2, \ldots, b$$

称 $(\tau\beta)_{ij}$ 为因子 A 的水平 A_i 和因子 B 的水平 B_j 的交互效应。它表示两个因子的主效应之外，由于水平搭配而引起的新的效应。所有交互效应的全体称为交互作用，记为 AB 或

A×B。交互效应应满足如下条件：

$$\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}=0,\quad i=1,2,\ldots,a$$
$$\sum_{i=1}^{a}(\tau\beta)_{ij}=0,\quad j=1,2,\ldots,b$$

此时的统计模型即为：

$$\begin{cases} y_{ijk}=\mu+\tau_i+\beta_j+(\tau\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijk} \\ \text{诸}\varepsilon_{ijk}\quad \text{i.i.d. } N(0,\sigma^2) \\ s.t.\quad \sum\limits_{i=1}^{a}\tau_i=0,\quad \sum\limits_{j=1}^{b}\beta_j=0 \\ \qquad\ \sum\limits_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}=0,\quad \sum\limits_{i=1}^{a}(\tau\beta)_{ij}=0 \\ i=1,2,\ldots,a,\ j=1,2,\ldots,b,\ k=1,2,\ldots,m \end{cases}$$

24.5.2 统计假设

交互效应下的两因子方差分析需要检验如下三个零假设：

$$\begin{cases} H_{01}:\tau_1=\tau_2=\cdots=\tau_a=0, \\ H_{02}:\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_b=0 \\ H_{03}:(\tau\beta)_{ij}=0,\ \forall\, i,j \end{cases}$$

24.5.3 偏差平方和的分解

记：

$$y_{\ldots}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}y_{ijk},\quad \bar{y}_{\ldots}=\frac{y_{\ldots}}{abm}$$
$$y_{i..}=\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}y_{ijk},\quad \bar{y}_{i..}=\frac{y_{i..}}{bm},\quad i=1,2,\ldots,a$$
$$y_{.j.}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{m}y_{ijk},\quad \bar{y}_{.j.}=\frac{y_{.j.}}{am},\quad j=1,2,\ldots,b$$
$$y_{ij.}=\sum_{k=1}^{m}y_{ijk},\quad \bar{y}_{ij.}=\frac{y_{ij.}}{m}$$

全部数据之间的差异可用下述总偏差平方和表示：

$$SST=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2$$

引起数据 y_{ij} 之间差异的原因有四点：

1. 因子 A 的 a 个水平对试验结果的影响不同。

2. 因子 B 的 b 个水平对试验结果的影响不同。

3. 因子 A 和因子 B 的交互作用。

4. 试验具有误差。

为了区分并比较这四个原因对数据的影响，需要对 SST 进行分解：

$$\begin{aligned}
SST &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}[(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})]^2 \\
&= bm\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2+am\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2+m\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2
\end{aligned}$$

仿照单因子方差分析、可加效应下的两因子方差分析的做法，仍可以分别定义：

$$\begin{aligned}
SSA &= bm\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 = bm\sum_{i=1}^{a}(\tau_i+\bar{\varepsilon}_{i..}-\bar{\varepsilon}_{...})^2 \\
SSB &= am\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2 = am\sum_{j=1}^{b}(\beta_j+\bar{\varepsilon}_{.j.}-\bar{\varepsilon}_{...})^2 \\
SSAB &= m\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2 = m\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}[(\tau\beta)_{ij}+\bar{\varepsilon}_{ij.}-\bar{\varepsilon}_{i..}-\bar{\varepsilon}_{.j.}+3\bar{\varepsilon}_{...}]^2 \\
SSe &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(\varepsilon_{ijk}-\bar{\varepsilon}_{ij.})^2
\end{aligned}$$

分别称如上公式为：因子 A 的偏差平方和、因子 B 的偏差平方和、因子 A 与因子 B 的交互作用的偏差平方和、误差平方和。

总偏差平方和分解公式

综上，总偏差平方和有如下分解公式：

$$SST = SSA + SSB + +SSAB + SSe$$

24.5.4 检验统计量

仿照单因子方差分析、可加效应下的两因子方差分析的做法，仍可以求得有关 ε 的一系列结论，以及各偏差平方和的期望。这里直接列出结论：

$$E(SSA) = (a-1)\sigma^2 + bm\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2$$

$$E(SSB) = (b-1)\sigma^2 + am\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2$$

$$E(SSAB) = (a-1)(b-1)\sigma^2 + m\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2$$

$$E(SSe) = ab(m-1)\sigma^2$$

称 $\frac{SSA}{a-1}$ 为因子 A 的均方和，记为 MSA；称 $\frac{SSB}{b-1}$ 为因子 B 的均方和，记为 MSB；称 $\frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$ 为因子 A 与因子 B 的交互作用的均方和，记为 MSAB；称 $\frac{SSe}{ab(m-1)}$ 为误差均方和，记为 MSe。

由前述，MSe 是 σ^2 的无偏估计，而当零假设成立时，MSA、MSB、MSAB 也是 σ^2 的一个无偏估计。如果 MSA、MSB、MSAB 与 MSe 比值很大，即 MSA、MSB、MSAB 比 MSe 大很多（$b\sum\limits_{i=1}^{a}\tau_i^2$，$a\sum\limits_{j=1}^{b}\beta_j^2$，$m\sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2$ 很大），我们就有理由怀疑零假设。由此构建统计量：

$$F_A = \frac{MSA}{MSe} = \frac{\frac{SSA}{a-1}}{\frac{SSe}{ab(m-1)}}$$

$$F_B = \frac{MSB}{MSe} = \frac{\frac{SSB}{b-1}}{\frac{SSe}{ab(m-1)}}$$

$$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSe} = \frac{\frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}}{\frac{SSe}{ab(m-1)}}$$

在这些统计量的情况下，H_{01}，H_{02}，H_{03} 的拒绝域是右向单尾的。下求统计量的分布。

24.5.5 统计量的分布

上述统计量服从如下分布：

$$F_A \sim F(a-1,\ ab(m-1))$$

$$F_B \sim F(b-1,\ ab(m-1))$$

$$F_{AB} \sim F((a-1)(b-1),\ ab(m-1))$$

所以 H_{01}，H_{02} 在显著性水平为 α 时的拒绝域为：

$$F_A > F_{1-\alpha}(a-1,\ ab(m-1))$$

$$F_B > F_{1-\alpha}(b-1,\ ab(m-1))$$

$$F_{AB} > F_{1-\alpha}((a-1)(b-1),\ ab(m-1))$$

24.5.6 方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 值
因子 A	SSA	$f_A = a-1$	$\frac{SSA}{a-1}$	$F = \frac{MSA}{MSe}$
因子 B	SSB	$f_B = b-1$	$\frac{SSB}{b-1}$	$F = \frac{MSB}{MSe}$
交互作用 AB	SSAB	$f_{AB} = (a-1)(b-1)$	$\frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$	$F = \frac{MSAB}{MSe}$
误差	SSe	$f_e = ab(m-1)$	$\frac{SSe}{ab(m-1)}$	
总	SST	$f_T = abm-1$		

表 24.9: 等重复交互效应下两因子试验方差分析表

平方和公式可按下列公式计算：

$$
\begin{cases}
SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abm} \\
SSA = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{bm} - \frac{y_{...}^2}{abm} \\
SSB = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j.}^2}{am} - \frac{y_{...}^2}{abm} \\
SSAB = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij.}^2}{m} - \frac{y_{...}^2}{abm} - SSA - SSB \\
SSe = SST - SSA - SSB - SSAB
\end{cases}
$$

24.5.7 参数估计

交互效应下的两因子方差分析有五类参数：μ，诸 τ_i，诸 β_j，诸 $(\tau\beta)_{ij}$ 和 σ^2。下讨论这五类参数的点估计问题。

点估计

参数的点估计如下：

$$
\begin{gathered}
\hat{\sigma^2} = MSe \\
\hat{\mu} = \bar{y}_{...} \\
\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}, \quad \hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} \\
\widehat{(\tau\beta)}_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...} \\
i = 1, 2, \ldots, a, \ j = 1, 2, \ldots, b
\end{gathered}
$$

证明过程与之前类似。

24.6 随机效应下的两因子方差分析

仅讨论等重复、有交互作用情形。

因子 B / 因子 A	B_1	B_2	$\cdots$	B_b
A_1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11m}$	$y_{121}, y_{122}, \ldots, y_{12m}$	$\cdots$	$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1bm}$
A_2	$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21m}$	$y_{221}, y_{222}, \ldots, y_{22m}$	$\cdots$	$y_{2b1}, y_{2b2}, \ldots, y_{2bm}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1m}$	$y_{a21}, y_{a22}, \ldots, y_{a2m}$	$\cdots$	$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abm}$

表 24.10: 等重复两因子试验数据表

其中 y_{ijk} 表示在因子 A 的第 i 个水平 A_i 和因子 B 的第 j 个水平 B_j 下第 k 次重复试验的观察值。

24.6.1 统计模型

此时的统计模型为：

$$\begin{cases} y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \\ \text{诸}\varepsilon_{ijk} \quad \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2) \\ \text{诸}\tau_i \quad \text{i.i.d. } N(0, \sigma_\tau^2) \\ \text{诸}\beta_j \quad \text{i.i.d. } N(0, \sigma_\beta^2) \\ \text{诸}(\tau\beta)_{ij} \quad \text{i.i.d. } N(0, \sigma_{\tau\beta}^2) \\ \text{诸}\varepsilon_{ijk}\text{、诸}\tau_i\text{、诸}\beta_j\text{、诸}(\tau\beta)_{ij}\text{相互独立} \\ i = 1, 2, \ldots, a, \ j = 1, 2, \ldots, b, \ k = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

24.6.2 统计假设

此时需要检验如下三个零假设：

$$\begin{cases} H_{01} : \sigma_\tau^2 = 0, \\ H_{02} : \sigma_\beta^2 = 0 \\ H_{03} : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0 \end{cases}$$

24.6.3 方差分析

偏差平方和的分解

由于与交互效应情况下五个平方和的定义完全相同，所以随机效应下偏差平方和分解公式与之前一模一样。

$$SST = SSA + SSB + SSAB + SSe$$

$$SSA = bm\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 = bm\sum_{i=1}^{a}(\tau_i + \bar{\varepsilon}_{i..} - \bar{\varepsilon}_{...})^2$$

$$SSB = am\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 = am\sum_{j=1}^{b}(\beta_j + \bar{\varepsilon}_{.j.} - \bar{\varepsilon}_{...})^2$$

$$SSAB = m\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 = m\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}[(\tau\beta)_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij.} - \bar{\varepsilon}_{i..} - \bar{\varepsilon}_{.j.} + 3\bar{\varepsilon}_{...}]^2$$

$$SSe = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}(\varepsilon_{ijk} - \bar{\varepsilon}_{ij.})^2$$

各平方和的期望

这里直接列出各平方和的期望，证明是容易的。

$$E(SSA) = (a-1)\sigma^2 + m(a-1)\sigma_{\tau\beta}^2 + (a-1)bm\sigma_\tau^2$$

$$E(SSB) = (b-1)\sigma^2 + m(b-1)\sigma_{\tau\beta}^2 + (b-1)am\sigma_\beta^2$$

$$E(SSAB) = (a-1)(b-1)\sigma^2 + m(a-1)(b-1)\sigma_{\tau\beta}^2$$

$$E(SSe) = ab(m-1)\sigma^2$$

统计量及其分布

称 $\frac{SSA}{a-1}$ 为因子 A 的均方和，记为 MSA；称 $\frac{SSB}{b-1}$ 为因子 B 的均方和，记为 MSB；称 $\frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$ 为因子 A 与因子 B 的交互作用的均方和，记为 MSAB；称 $\frac{SSe}{ab(m-1)}$ 为误差均方和，记为 MSe。

由前述，MSe 是 σ^2 的无偏估计。在 H_{01} 成立时，MSA 是 $\sigma^2 + m\sigma_{\tau\beta}^2$ 的无偏估计；在 H_{02} 成立时，MSA 是 $\sigma^2 + m\sigma_{\tau\beta}^2$ 的无偏估计；在 H_{03} 成立时，MSAB 是 σ^2 的无偏估计。如果 MSA 与 MSAB 比值很大，则有理由怀疑 H_01；如果 MSB 与 MSAB 比值很大，则有理由怀疑 H_02；如果 MSAB 与 MSe 比值很大，则有理由怀疑 H_03。由此构建统计量：

$$F_A = \frac{MSA}{MSAB} = \frac{\frac{SSA}{a-1}}{\frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}}$$

$$F_B = \frac{MSB}{MSAB} = \frac{\frac{SSB}{b-1}}{\frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}}$$

$$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSe} = \frac{\frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}}{\frac{SSe}{ab(m-1)}}$$

在这些统计量的情况下，H_{01}，H_{02}，H_{03} 的拒绝域是右向单尾的。

由于在假设 H_{01}，H_{02}，H_{03} 成立时，随机效应模型与可加效应模型的观察值 y_{ijk} 的数据结构的形式完全一样，所以在随机效应模型中仍然有：

$$F_A \sim F(a-1,\ (a-1)(b-1))$$
$$F_B \sim F(b-1,\ (a-1)(b-1))$$
$$F_{AB} \sim F((a-1)(b-1),\ ab(m-1))$$

拒绝域

综上所述，显著性水平为 α 时的拒绝域为：

$$F_A > F_{1-\alpha}(a-1,\ (a-1)(b-1))$$
$$F_B > F_{1-\alpha}(b-1,\ (a-1)(b-1))$$
$$F_{AB} > F_{1-\alpha}((a-1)(b-1),\ ab(m-1))$$

24.6.4 方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 值
因子 A	SSA	$f_A = a-1$	$\frac{SSA}{a-1}$	$F = \frac{MSA}{MSAB}$
因子 B	SSB	$f_B = b-1$	$\frac{SSB}{b-1}$	$F = \frac{MSB}{MSAB}$
交互作用 AB	SSAB	$f_{AB} = (a-1)(b-1)$	$\frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$	$F = \frac{MSAB}{MSe}$
误差	SSe	$f_e = ab(m-1)$	$\frac{SSe}{ab(m-1)}$	
总	SST	$f_T = abm-1$		

表 24.11: 等重复、有交互作用的随机效应下两因子试验方差分析表

平方和公式可按下列公式计算：

$$\begin{cases} SST = \sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{j=1}^{b}\sum\limits_{k=1}^{m} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abm} \\ SSA = \sum\limits_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{bm} - \frac{y_{...}^2}{abm} \\ SSB = \sum\limits_{j=1}^{b} \frac{y_{.j.}^2}{am} - \frac{y_{...}^2}{abm} \\ SSAB = \sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{j=1}^{b} \frac{y_{ij.}^2}{m} - \frac{y_{...}^2}{abm} - SSA - SSB \\ SSe = SST - SSA - SSB - SSAB \end{cases}$$

24.6.5 参数估计

我们此时关心方差分量的估计。

点估计

由 SSA、SSB、SSAB、SSe 期望的计算，可给出各方差分量的无偏点估计如下：

$$\hat{\sigma^2} = MSe$$
$$\hat{\sigma^2}_\tau = \frac{MSA - MSAB}{bm}$$
$$\hat{\sigma^2}_\beta = \frac{MSB - MSAB}{am}$$
$$\hat{\sigma^2}_{\tau\beta} = \frac{MSAB - MSe}{m}$$

24.7 混合模型下的两因子方差分析

仅讨论等重复情形。

因子 B / 因子 A	B_1	B_2	$\cdots$	B_b
A_1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11m}$	$y_{121}, y_{122}, \ldots, y_{12m}$	$\cdots$	$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1bm}$
A_2	$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21m}$	$y_{221}, y_{222}, \ldots, y_{22m}$	$\cdots$	$y_{2b1}, y_{2b2}, \ldots, y_{2bm}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1m}$	$y_{a21}, y_{a22}, \ldots, y_{a2m}$	$\cdots$	$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abm}$

表 24.12: 等重复两因子试验数据表

其中 y_{ijk} 表示在因子 A 的第 i 个水平 A_i 和因子 B 的第 j 个水平 B_j 下第 k 次重复试验的观察值。设因子 A 是固定地，因子 B 是随机的。

24.7.1 统计模型

此时的统计模型为：

$$\begin{cases} y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \\ \text{诸}\varepsilon_{ijk} \quad \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2) \\ \text{诸}\beta_j \quad \text{i.i.d. } N(0, \sigma_\beta^2) \\ \text{诸}(\tau\beta)_{ij} \quad \text{i.i.d. } N(0, \frac{a-1}{a}\sigma_{\tau\beta}^2) \\ \sum\limits_{i=1}^{a} \tau_i = 0, \quad \sum\limits_{i=1}^{a} (\tau\beta)_{ij} = 0 \\ \text{诸}(\tau\beta)_{ij}\text{彼此之间是不相关的} \\ i = 1, 2, \ldots, a, \ j = 1, 2, \ldots, b, \ k = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

这里 $(\tau\beta)_{ij}$ 的方差写成这样是为了让底下的计算更加简洁。

24.7.2 统计假设

此时需要检验如下三个零假设：

$$\begin{cases} H_{01}: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0, \\ H_{02}: \sigma_\beta^2 = 0 \\ H_{03}: \sigma_{\tau\beta}^2 = 0 \end{cases}$$

24.7.3 方差分析

偏差平方和的分解

公式仍然成立：

$$SST = SSA + SSB + SSAB + SSe$$

各平方和的期望

这里直接列出各平方和的期望。

$$E(MSA) = \sigma^2 + m\sigma_{\tau\beta}^2 + \frac{bm\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$$
$$E(MSB) = \sigma^2 + am\sigma_\beta^2$$
$$E(MSAB) = \sigma^2 + m\sigma_{\tau\beta}^2$$
$$E(MSe) = \sigma^2$$

统计量及其分布

统计量及其分布如下：

$$F_A = \frac{MSA}{MSAB} \sim F(a-1,\ (a-1)(b-1))$$
$$F_B = \frac{MSB}{MSe} \sim F(b-1,\ ab(m-1))$$
$$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSe} \sim F((a-1)(b-1),\ ab(m-1))$$

拒绝域

显著性水平为 α 时的拒绝域为：

$$F_A > F_{1-\alpha}(a-1,\ (a-1)(b-1))$$
$$F_B > F_{1-\alpha}(b-1,\ ab(m-1))$$
$$F_{AB} > F_{1-\alpha}((a-1)(b-1),\ ab(m-1))$$

24.7.4 方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 值
因子 A（固定）	SSA	$f_A = a-1$	$\frac{SSA}{a-1}$	$F = \frac{MSA}{MSAB}$
因子 B（随机）	SSB	$f_B = b-1$	$\frac{SSB}{b-1}$	$F = \frac{MSB}{MSe}$
交互作用 AB	SSAB	$f_{AB} = (a-1)(b-1)$	$\frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$	$F = \frac{MSAB}{MSe}$
误差	SSe	$f_e = ab(m-1)$	$\frac{SSe}{ab(m-1)}$	
总	SST	$f_T = abm-1$		

表 24.13: 等重复、有交互作用的混合模型下两因子试验方差分析表

平方和公式可按下列公式计算：

$$\begin{cases} SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abm} \\ SSA = \sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i..}^2}{bm} - \frac{y_{...}^2}{abm} \\ SSB = \sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j.}^2}{am} - \frac{y_{...}^2}{abm} \\ SSAB = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{ij.}^2}{m} - \frac{y_{...}^2}{abm} - SSA - SSB \\ SSe = SST - SSA - SSB - SSAB \end{cases}$$

24.7.5 多重比较比较问题

如果固定因子 A 显著，则可使用 Duncan 多重比较法，但此时需要注意拒绝域应修改为如下形式：

$$A : R_p > r_{1-\alpha}(p,f)\sqrt{\frac{MSAB}{bm}}$$

24.7.6 参数估计

点估计

下给出混合模型参数的点估计：

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...}, \quad \hat{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}, \quad i = 1,2,\dots,a$$

$$\hat{\sigma^2} = MSe, \quad \hat{\sigma^2}_{\beta} = \frac{MSB - MSe}{am}, \quad \hat{\sigma^2}_{\tau\beta} = \frac{MSAB - MSe}{m}$$

Chapter 25

部分实施问题

前几节介绍的方法都要求每个水平组合至少做一次试验，如果考虑因子间的交互作用，对每个水平组合还要做重复试验。这就导致当因子数较多或者因子水平书较多时，试验总次数会非常多。这就提出了一个问题：如何做到只对全部水平组合的一部分做试验，也能比较因子的各水平对试验结果是否有显著差异、不同因子间是否有交互作用？这就是全因子试验的部分实施问题。

25.1 正交拉丁方设计

本节介绍一种在无交互效应、各因子水平数相等情况下的部分实施问题的解决方案。设每个因子有 n 个水平，一共有 k 个因子。

原理

要使得在对任一因子的效应作比较时能够消除其它因子水平变动对数据的影响，就需要保证：在任一因子的任一水平下，其它因子的每个水平都重复相同次数。此时称这些因子彼此之间正交。

Definition 25.1. 由 p 个不同符号排成的 p 阶方阵中，如果每行的 p 个元素不同，每列的 p 个元素也不同，则称这个方阵为一个 p 阶拉丁方。如果两个 p 阶拉丁方重叠时，第一个拉丁方中的任一元素与第二个拉丁方中的每个元素都相遇且只相遇一次，则称这一对拉丁方相互正交。

下面的第一个方阵就是一个 3 阶拉丁方，第二个矩阵表示一对正交拉丁方重叠。

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A\alpha & B\beta & C\gamma \\ B\gamma & C\alpha & A\beta \\ C\beta & A\gamma & B\alpha \end{pmatrix}$$

我们可以发现，拉丁方中的元素作为某一个因子的不同水平时，互相正交的拉丁方满足因子间正交。由此产生了正交拉丁方设计。

行因子 \ 列因子	C_1	C_2	$\cdots$	C_n
R_1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
R_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_n	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

表 25.1: k 因子各 n 水平正交拉丁方设计表

上表中 $\cdots$ 部分表示 $k-2$ 个互相正交的拉丁方重叠后矩阵位置上的对应元素。因为拉丁方之间是正交的，所以不同的拉丁因子之间是正交的，而每个拉丁因子与行因子、列因子也是正交的，列因子与行因子显然正交，所以该试验方案可以被用作 k 因子各 n 水平的研究，其中需要做 n^2 次试验，每一次试验使用到的因子水平即为上表每一个单元中的 $k-2$ 个拉丁方因子水平与其行列因子水平的组合。

三因子正交拉丁方设计又称拉丁方设计，四因子正交拉丁方设计又称希腊-拉丁方设计，涉及到四个以上因子的正交拉丁方设计称为超方设计。下对拉丁方设计与希腊-拉丁方设计做详细介绍。

25.1.1 拉丁方设计

拉丁方设计命名的由来是因为其中拉丁方的元素用拉丁字母来表示。

行因子 \ 列因子	C_1	C_2	C_3
R_1	A	B	C
R_2	B	C	A
R_3	C	A	B

表 25.2: 拉丁方设计表

统计模型

$$\begin{cases} y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + \varepsilon_{ijk} \\ \text{诸}\varepsilon_{ijk} \quad \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2) \\ s.t. \quad \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i = 0, \quad \sum\limits_{j=1}^{p} \tau_j = 0, \quad \sum\limits_{k=1}^{p} \beta_k = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, p, \ j = 1, 2, \ldots, p, \ k = 1, 2, \ldots, p \end{cases}$$

其中 y_{ijk} 是在行因子第 i 个水平、列因子第 k 个水平和拉丁因子第 j 个水平下试验的观察值。μ 为一般平均，α_i 是行因子第 i 个水平的效应，τ_j 是拉丁因子第 j 个水平的效应，β_k

是列因子第 k 个水平的效应。需要注意的是，因为拉丁方设计的缘故，三个下标之间不是独立的。

方差分析

$$SST = SS_{拉丁} + SS_{行} + SS_{列} + SSe$$

来源	平方和	自由度	均方和	F 值
拉丁因子	$SS_{拉丁}$	$p-1$	$MS_{拉丁} = \frac{SS_{拉丁}}{p-1}$	$F = \frac{MS_{拉丁}}{MS_e}$
行因子	$SS_{行}$	$p-1$	$MS_{行} = \frac{SS_{行}}{p-1}$	$F = \frac{MS_{行}}{MS_e}$
列因子	$SS_{列}$	$p-1$	$MS_{列} = \frac{SS_{列}}{p-1}$	$F = \frac{MS_{列}}{MS_e}$
误差	SS_e	$(p-2)(p-1)$	$MS_e = \frac{SS_e}{(p-2)(p-1)}$	
总和	SS_T	p^2-1		

表 25.3: 拉丁方设计方差分析表

其中：

$$\begin{cases} SST = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{p^2} \\ SS_{行} = \sum_{i=1}^{p} \frac{y_{i..}^2}{p} - \frac{y_{...}^2}{p^2} \\ SS_{列} = \sum_{k=1}^{p} \frac{y_{..k}^2}{p} - \frac{y_{...}^2}{p^2} \\ SS_{拉丁} = \sum_{j=1}^{p} \frac{y_{.j.}^2}{p} - \frac{y_{...}^2}{p^2} \\ SSe = SST - SS_{行} - SS_{列} - SS_{拉丁} \end{cases}$$

多重比较问题

此时的 Duncan 多重比较过程需要注意：

$$R_p > r_{1-\alpha}(p,f)\sqrt{\frac{MSe}{p}}$$

25.1.2 希腊拉丁方设计

希腊-拉丁方设计命名的由来是因为其中拉丁方的元素分别用拉丁字母和希腊字母来表示。

行因子 \ 列因子	C_1	C_2	C_3
R_1	$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$
R_2	$B\gamma$	$C\alpha$	$A\beta$
R_3	$C\beta$	$A\gamma$	$B\alpha$

表 25.4: 希腊-拉丁方设计表

统计模型

$$\begin{cases} y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \phi_k + \beta_l + \varepsilon_{ijk} \\ \text{诸}\varepsilon_{ijkl} \quad \text{i.i.d. } N(0,\sigma^2) \\ s.t. \quad \sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_i = 0, \quad \sum\limits_{j=1}^{p}\tau_j = 0, \quad \sum\limits_{k=1}^{p}\pi_k = 0, \quad \sum\limits_{l=1}^{p}\beta_l = 0 \\ i = 1,2,\ldots,p, \; j = 1,2,\ldots,p, \; k = 1,2,\ldots,p, \; l = 1,2,\ldots,p \end{cases}$$

其中 y_{ijkl} 是在行因子第 i 个水平、列因子第 l 个水平、拉丁因子第 j 个水平和希腊因子第 k 个水平下试验的观察值。μ 为一般平均，α_i 是行因子第 i 个水平的效应，τ_j 是拉丁因子第 j 个水平的效应，ϕ_k 是希腊因子第 k 个水平的效应，β_l 是列因子第 l 个水平的效应。需要注意的是，因为希腊-拉丁方设计的缘故，四个下标之间不是独立的。

方差分析

$$SST = SS_{\text{拉丁}} + SS_{\text{希腊}} + SS_{\text{行}} + SS_{\text{列}} + SSe$$

来源	平方和	自由度	均方和	F 值
拉丁因子	$SS_{\text{拉丁}}$	$p-1$	$MS_{\text{拉丁}} = \frac{SS_{\text{拉丁}}}{p-1}$	$F = \frac{MS_{\text{拉丁}}}{MS_e}$
希腊因子	$SS_{\text{希腊}}$	$p-1$	$MS_{\text{希腊}} = \frac{SS_{\text{希腊}}}{p-1}$	$F = \frac{MS_{\text{希腊}}}{MS_e}$
行因子	$SS_{\text{行}}$	$p-1$	$MS_{\text{行}} = \frac{SS_{\text{行}}}{p-1}$	$F = \frac{MS_{\text{行}}}{MS_e}$
列因子	$SS_{\text{列}}$	$p-1$	$MS_{\text{列}} = \frac{SS_{\text{列}}}{p-1}$	$F = \frac{MS_{\text{列}}}{MS_e}$
误差	SS_e	$(p-3)(p-1)$	$MS_e = \frac{SS_e}{(p-3)(p-1)}$	
总和	SS_T	p^2-1		

表 25.5: 拉丁方设计方差分析表

其中：

$$
\begin{cases}
SST = \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{p}\sum\limits_{l=1}^{p} y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{p^2} \\
SS_{行} = \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{y_{i...}^2}{p} - \frac{y_{....}^2}{p^2} \\
SS_{列} = \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{y_{...l}^2}{p} - \frac{y_{....}^2}{p^2} \\
SS_{拉丁} = \sum\limits_{j=1}^{p} \frac{y_{.j..}^2}{p} - \frac{y_{....}^2}{p^2} \\
SS_{希腊} = \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{y_{..k.}^2}{p} - \frac{y_{....}^2}{p^2} \\
SSe = SST - SS_{行} - SS_{列} - SS_{拉丁} - SS_{希腊}
\end{cases}
$$

多重比较问题

此时的 Duncan 多重比较过程需要注意：

$$R_p > r_{1-\alpha}(p, f)\sqrt{\frac{MSe}{p}}$$

25.2 正交表设计

设一个试验问题有 k 个因子，每个因子有 n 个水平（分别称为 0 水平，1 水平，……，$n-1$ 水平），全部水平组合有 n^k 个。本节简要讨论当 n 为素数时，用 n 水平正交表实现它的部分实施的方法。

Theorem 25.1. *当 n 为素数时，存在 $n-1$ 个相互正交的 n 阶拉丁方。*

由上述组合数学中的定理，n^k 设计中任意两个因子的交互作用，例如 AB，都快可以被分解为 $n-1$ 个分量，即 AB 分量、A^2B 分量，……，$A^{n-1}B$ 分量，两因子交互作用的自由度为 $(n-1)^2$，每个分量的自由度为 $n-1$

Definition 25.2. *如果一个矩阵满足下述条件：*

1. *任意一列中不同数字的重复数相等。*
2. *任意两列同行数字构成若干数对，每个数对的重复数也相等。*

则称其为一个正交表，记为 $L_r(n^c)$，其中 L 为正交表符号，r 表示正交表行数，c 表示正交表列数，n 表示正交表中不同数字的个数。

任意两列的交互作用列是表中另外一列，列名相乘时用指数法则模 2 取余。交互效应列的数字由主效应列相乘得到。同行主效应列构成的数组代表一个试验点，也代表着因子的主效应的估计量的对比的代数符号。

Chapter 26

时间序列分析

26.1 平稳时间序列

Definition 26.1. 如果时间序列 $\{X_t\} = \{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ 满足：

1. 对任何的 $t \in \mathbb{N}$，有 $\mathrm{E}(X_t^2) < +\infty$；
2. 对任何的 $t \in \mathbb{N}$，有 $\mathrm{E}(X_t) = \mu$；
3. 对任何的 $t, s \in \mathbb{N}$，有 $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathrm{E}[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] = \gamma(t-s)$，其中 $\gamma(t-s)$ 是 $t-s$ 的实值函数，被称为 $\{X_t\}$ 的自协方差函数 *(auto-covariance function)*。

则称 $\{X_t\}$ 是一个平稳时间序列 *(stationary time series)*。

26.1.1 平稳时间序列的性质

线性变换

Theorem 26.1. 平稳时间序列 $\{X_t\}$ 经过线性变换后得到的还是平稳时间序列。

Proof. 只需证明 $\{Y_t = aX_t + b : t \in \mathbb{N}\}$ 对任意的 $a, b \in \mathbb{R}$ 是平稳时间序列。设 $\mathrm{E}(X_t) = \mu$。

(1) 对于线性变换后时间序列的期望，有：

$$\mathrm{E}(Y_t) = \mathrm{E}(aX_t + b) = a\mu + b$$

(2) 对于线性变换后时间序列的二阶原点矩，有：

$$\mathrm{E}(Y_t^2) = \mathrm{Var}(Y_t) + [\mathrm{E}(Y_t)]^2 = a^2\gamma(0) + (a\mu + b)^2 < +\infty \qquad \square$$

(3) 对于线性变换后时间序列的协方差，有：

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = \mathrm{E}[(aX_t + b - a\mu - b)(aX_s + b - a\mu - b)] = a^2\gamma(t-s)$$

平稳时间序列的谱函数

Definition 26.2. 设平稳时间序列 $\{X_t\}$ 的自协方差函数为 $\gamma(n)$。

1. 若存在 $[-\pi,\pi]$ 上单调不减且右连续的函数 $F(\lambda)$ 使得：

$$\gamma(n)=\int_{[-\pi,\pi]} e^{in\lambda}\,\mathrm{d}F(\lambda),\quad F(-\pi)=0,\ k\in\mathbb{Z}$$

   则称 $F(\lambda)$ 为 $\{X_t\}$ 或 $\{\gamma(n)\}$ 的谱分布函数 *(spectral distribution function)*，简称为**谱函数**；

2. 若存在 $[-\pi,\pi]$ 上的非负函数 $f(\lambda)$ 使得：

$$\gamma(n)=\int_{[-\pi,\pi]} f(\lambda)e^{in\lambda}\,\mathrm{d}\lambda,\quad n\in\mathbb{Z}$$

   则称 $f(\lambda)$ 为 $\{X_t\}$ 或 $\{\gamma(n)\}$ 的谱密度函数 *(spectral density function)*，简称为**谱密度**。

Theorem 26.2 (Herglotz theorem)**.** 平稳时间序列的谱函数存在且唯一。

正交与不相关

Definition 26.3. 设 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 是平稳时间序列。

1. 若对任何的 $s,t\in\mathbb{N}$，有 $\mathrm{E}(X_tY_s)=0$，则称 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ **正交**。
2. 若对任何的 $s,t\in\mathbb{N}$，有 $\mathrm{Cov}(X_t,Y_s)=0$，则称 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ **不相关**。

Theorem 26.3. 对于期望为 0 的平稳时间序列，正交性和不相关性等价。

Proof. 若 $\mu=0$，则：

$$\mathrm{Cov}(X_t,X_s)=\mathrm{E}[(X_t-\mu)(X_s-\mu)]=\mathrm{E}(X_tX_s)$$

□

Theorem 26.4. 设 $\gamma_X(t)$ 和 $\gamma_Y(t)$ 分别是平稳时间序列 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 的自协方差函数。记 $\mu_X=\mathrm{E}(X_t)$，$\mu_Y=\mathrm{E}(Y_t)$，定义：

$$Z_t=X_t+Y_t,\ t\in\mathbb{N}$$

则：

1. 若 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 正交，则 $\{Z_t\}$ 是平稳时间序列，有自协方差函数：

$$\gamma_Z(t)=\gamma_X(t)+\gamma_Y(t)-2\mu_X\mu_Y,\ t\in\mathbb{N}$$

2. 若 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 不相关，则 $\{Z_t\}$ 是平稳时间序列，有自协方差函数：

$$\gamma_Z(t)=\gamma_X(t)+\gamma_Y(t),\ t\in\mathbb{N}$$

Proof. 因为对任意的 $t \in \mathbb{N}$，有 $(X_t + Y_t)^2 \leqslant 2X_t^2 + 2Y_t^2$，所以：

$$\mathrm{E}(Z_t^2) \leqslant 2\,\mathrm{E}(X_t^2) + 2\,\mathrm{E}(Y_t^2) < +\infty$$

显然：

$$\mathrm{E}(Z_t) = \mathrm{E}(X_t) + \mathrm{E}(Y_t) = \mu_X + \mu_Y$$

与 t 无关。因为：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_t, Z_s) &= \mathrm{Cov}(X_t + Y_t, X_s + Y_s) \\ &= \mathrm{Cov}(X_t, X_s) + \mathrm{Cov}(X_t, Y_s) + \mathrm{Cov}(Y_t, X_s) + \mathrm{Cov}(Y_t, Y_s)\end{aligned}$$

(1) 由于 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 正交，所以 $\mathrm{E}(X_tY_s) = \mathrm{E}(X_sY_t) = 0$，于是由性质 14.4.1(6) 可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_t, Z_s) &= \gamma_X(t-s) + \gamma_Y(t-s) + \mathrm{E}(X_tY_s) - \mathrm{E}(X_t)\,\mathrm{E}(Y_s) + \mathrm{E}(X_sY_t) - \mathrm{E}(Y_t)\,\mathrm{E}(X_s) \\ &= \gamma_X(t-s) + \gamma_Y(t-s) - 2\mu_X\mu_Y\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{Cov}(Z_t, Z_s)$ 只与 $(t-s)$ 有关。综上，$\{Z_t\}$ 是平稳时间序列，且

$$\gamma_Z(t) = \gamma_X(t) + \gamma_Y(t) - 2\mu_X\mu_Y,\ t \in \mathbb{N}$$

(2) 因为 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 不相关，所以 $\mathrm{Cov}(X_t, Y_s) = 0 = \mathrm{Cov}(Y_t, X_s) = 0$，于是：

$$\mathrm{Cov}(Z_t, Z_s) = \mathrm{Cov}(X_t, X_s) + \mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = \gamma_X(t-s) + \gamma_Y(t-s)$$

所以 $\mathrm{Cov}(Z_t, Z_s)$ 只与 $(t-s)$ 有关。综上，$\{Z_t\}$ 是平稳时间序列，且

$$\gamma_Z(t) = \gamma_X(t) + \gamma_Y(t),\ t \in \mathbb{N}$$ □

Theorem 26.5. 设 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 是正交的平稳时间序列，且 $\mathrm{E}(X_t) = \mathrm{E}(Y_t) = 0$，$c$ 是常数，定义：

$$Z_t = X_t + Y_t + c, \quad t \in \mathbb{Z}$$

1. 如果 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 分别有谱函数 $F_X(\lambda)$ 和 $F_Y(\lambda)$，则平稳时间序列 $\{Z_t\}$ 有谱函数 $F_Z(\lambda) = F_X(\lambda) + F_Y(\lambda)$；
2. 如果 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 分别有谱密度 $f_X(\lambda)$ 和 $f_Y(\lambda)$，则平稳时间序列 $\{Z_t\}$ 有谱密度 $f_Z(\lambda) = f_X(\lambda) + f_Y(\lambda)$。

Proof. 有定理 26.3和定理 26.4可知 $\{Z_t\}$ 是平稳时间序列且有自协方差函数：

$$\gamma_Z(n) = \gamma_X(n) + \gamma_Y(n)$$

(1) 此时有：

$$\begin{aligned}\gamma_Z(n) &= \gamma_X(n) + \gamma_Y(n) \\ &= \int_{[-\pi,\pi]} e^{in\lambda}\,\mathrm{d}F_X(\lambda) + \int_{[-\pi,\pi]} e^{in\lambda}\,\mathrm{d}F_Y(\lambda) \\ &= \int_{[-\pi,\pi]} e^{in\lambda}\,\mathrm{d}[F_X(\lambda) + F_Y(\lambda)]\end{aligned}$$

(2) 此时有：

$$
\begin{aligned}
\gamma_Z(n) &= \gamma_X(n) + \gamma_Y(n) \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} f_X(\lambda) e^{in\lambda}\,\mathrm{d}\lambda + \int_{[-\pi,\pi]} f_Y(\lambda) e^{in\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} [f_X(\lambda) + f_Y(\lambda)] e^{in\lambda}\,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
$$

□

自协方差函数

Property 26.1.1. 平稳时间序列的自协方差函数具有如下基本性质：

1. **对称性**：$\forall\, n \in \mathbb{N}$，$\gamma(n) = \gamma(-n)$；

2. **半正定性**：对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，n 阶自协方差矩阵：

$$
\Gamma_n = \begin{pmatrix}
\gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\
\gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0)
\end{pmatrix}
$$

是半正定矩阵；

3. **有界性**：$|\gamma(n)| \leqslant |\gamma(0)|$ 对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

Proof. (1) 由协方差的定义：

$$
\gamma(n) = \mathrm{E}[(X_{t+n} - \mu)(X_t - \mu)] = \mathrm{E}[(X_t - \mu)(X_{t+n} - \mu)] = \gamma(-n)
$$

(2) 任取 n 维实数向量 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ 有：

$$
\begin{aligned}
a^T \Gamma_n a &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \gamma_{i-j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j\, \mathrm{E}[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j (X_i - \mu)(X_j - \mu) \right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - \mu) \right]^2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

(3) 对任意的 $n \in \mathbb{N}$，由不等式 4可得：

$$
\begin{aligned}
|\gamma(n)| &= \Big| \mathrm{E}[(X_{n+1} - \mu)(X_1 - \mu)] \Big| \\
&\leqslant \sqrt{\mathrm{E}[(X_{n+1} - \mu)^2]\, \mathrm{E}[(X_1 - \mu)^2]} \\
&= \sqrt{\gamma(0)\gamma(0)} = |\gamma(0)|
\end{aligned}
$$

□

Definition 26.4. 任何满足上述三个基本性质的实数序列都被称为**非负定序列**。

Theorem 26.6. 设 Γ_n 是平稳时间序列 $\{X_t\}$ 的 n 阶自协方差矩阵。

1. 如果 $\{X_t\}$ 的谱密度 $f(\lambda)$ 存在，则对任何的 $n \geqslant 1$，Γ_n 正定；
2. 如果当 $n \to +\infty$ 时有 $\gamma(n) \to 0$，则对任何的 $n \geqslant 1$，Γ_n 正定。

Proof. (1) 任取 n 维实向量 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \neq \mathbf{0}$， □

自相关函数

Definition 26.5. $\{X_t\}$ 是一个平稳时间序列，称平稳时间序列：

$$Y_t = \frac{X_t - \mu}{\sqrt{\gamma(0)}},\ t \in \mathbb{N}$$

为 $\{X_t\}$ 的标准化序列。称 $\{Y_t\}$ 的自协方差函数 $\rho(t)$ 为 $\{X_t\}$ 的自相关函数 *(auto-correlation function)*。因为自协方差函数都是非负定序列，所以 $\rho(t)$ 也是非负定序列。

Theorem 26.7. 设 $\{X_t\}$ 的自协方差函数为 $\gamma(t)$，$\{Y_t\}$ 是 $\{X_t\}$ 的标准化序列同时它的自协方差函数为 $\rho(t)$，则：

$$\rho(t) = \frac{\gamma(t)}{\gamma(0)},\ t \in \mathbb{N}$$

Proof. 显然 $\mu_Y = \mathrm{E}(Y_t) = 0$，由自协方差函数的定义：

$$\rho(t) = \mathrm{E}[(Y_t - \mu_Y)(Y_0 - \mu_Y)] = \mathrm{E}(Y_t Y_0) = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X_t - \mu}{\sqrt{\gamma(0)}}\right)\left(\frac{X_0 - \mu}{\sqrt{\gamma(0)}}\right)\right] = \frac{\gamma(t)}{\gamma(0)}$$ □

线性相关

Definition 26.6. 对于随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$,若存在非零的 n 维实向量 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ 使得：

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - \mu)\right] = 0$$

则称 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 线性相关。

Lemma 26.1. 对称阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 退化的充分必要条件为存在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 α 使得 $\alpha^T A \alpha = 0$。

Proof. **(1) 充分性**：由实对称矩阵的正交相似，有 $Q^T A Q = B$，其中 Q 是正交矩阵，$B = \mathrm{diag}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ 是主对角线上为 A 特征值的对角矩阵。假设此时 A 可逆，则它的所有特征值都不为 0（否则就有 $|A| = |Q^T B Q| = |Q^T|\,|B|\,|Q| = |B| = 0$）。由题设存在非零向量 α 使得 $\alpha^T A \alpha = 0$，因为 Q 是正交矩阵，所以 Q^{-1} 可逆，于是 $Q^{-1}x = \mathbf{0}$ 只有零解，所以 $Q^{-1}\alpha \neq \mathbf{0}$。设 $Q^{-1}\alpha = \beta = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$，则有：

$$\beta^T B \beta = \alpha^T (Q^{-1})^T B Q^{-1} \alpha = \alpha^T (Q^T)^{-1} B Q^{-1} \alpha = \alpha^T A \alpha = 0$$

注意到：

$$\beta^T B\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2$$

所以有：

$$\sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2 = 0$$

但是此时 b_i 都不是 0，若上式成立需要 y_i 都为 0，这就与 $\beta \neq \mathbf{0}$ 矛盾，所以 A 退化。

(2) 必要性： 如果 A 退化，则存在非零向量 α 使得 $A\alpha = \mathbf{0}$，显然此时 $\alpha^T A\alpha = 0$。 □

Theorem 26.8. $\{X_t\}$ 是一个平稳时间序列，Γ_n 是 $\{X_t\}$ 的 n 阶自协方差矩阵，则 Γ_n 退化的充要条件是对任意的 $t \in \mathbb{N}$，$X_{t+1}, X_{t+2}, \ldots, X_{t+n}$ 线性相关。

Proof. 由引理 26.1可知 Γ_n 退化的充要条件是存在非零的 n 维实向量 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ 使得 $\alpha^T\Gamma_n\alpha = 0$，而：

$$\begin{aligned}
\alpha^T\Gamma_n\alpha &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{E}[(X_i-\mu)(X_j-\mu)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{E}[(X_{t+i}-\mu)(X_{t+j}-\mu)] \\
&= \operatorname{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(X_{t+i}-\mu)\right]^2 = \operatorname{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(X_{t+i}-\mu)\right]^2 + 0 \\
&= \operatorname{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(X_{t+i}-\mu)\right]^2 + \left\{\operatorname{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(X_{t+i}-\mu)\right]\right\}^2 = \operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(X_{t+i}-\mu)\right]
\end{aligned}$$

由随机变量线性相关的定义结论得证。 □

Theorem 26.9. $\{X_t\}$ 是一个平稳时间序列，Γ_n 是 $\{X_t\}$ 的 n 阶自协方差矩阵。若 Γ_n 退化，只要 $m > n$，则有 Γ_m 退化，也即若 $X_{t+1}, X_{t+2}, \ldots, X_{t+n}$ 线性相关，只要 $m > n$，则有 $X_{t+1}, X_{t+2}, \ldots, X_{t+m}$ 线性相关。

Proof. 由定义 26.6与定理 26.8可直接得出，只需在方差公式中取 $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_m = 0$ 即可。 □

最小序列

Definition 26.7. 用 $L^2(X)$ 表示平稳时间序列 $\{X_t\}$ 中有限个随机变量线性组合的全体：

$$L^2(X) = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} : a_i \in \mathbb{R},\ t_i \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}^+\right\}$$

Property 26.1.2. $L^2(X)$ 有如下性质：

1. $L^2(X) \subset L^2$；
2. 在 $L^2(X)$ 中定义内积 $(X, Y) = \operatorname{E}(XY)$，则 $L^2(X)$ 成为一个 *Hilbert* 空间。

Definition 26.8. 设 $\{X_t\}$ 是平稳序列，用 H_x 表示 $L^2(X)$，用 $H_x(s)$ 表示 $\{X_t : t \neq s\}$ 产生的 *Hilbert* 空间。若存在 $s \in \mathbb{Z}$ 使得 $H_x \neq H_x(s)$，则称 $\{X_t\}$ 是**最小序列**。

Property 26.1.3. 设 $\{X_t\}$ 是平稳序列，有谱密度 $f(\lambda)$，则：

1. 若 $\{X_t\}$ 是最小序列，则对所有的 $t \in \mathbb{Z}$ 有 $H_x \neq H_x(s)$；
2. $\{X_t\}$ 是最小序列的充分必要条件为：

$$\int_{[-\pi,\pi]} \frac{\mathrm{d}\lambda}{f(\lambda)} < +\infty$$

3. 若 $f(\lambda)$ 连续且恒正，则 $\{X_t\}$ 是最小序列。

长短记忆

Definition 26.9. 根据自协方差函数 $\gamma(n)$ 收敛到 0 的速度将平稳时间序列 $\{X_t\}$ 分为**长记忆序列**和**短记忆序列**

对实数 $d < 0.5$，若：

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\gamma(n)}{n^{2d-1}} > 0$$

即 $\gamma(n)$ 与 n^{2d-1} 是同阶无穷小，则称 $\{X_t\}$ 是长记忆序列。

26.1.2 线性平稳序列

白噪声

Definition 26.10. 设 $\{\varepsilon_t\}$ 是一个平稳时间序列。如果对任何的 $s, t \in \mathbb{N}$，有：

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t) = \mu, \ \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \begin{cases} \sigma^2, & t = s \\ 0, & t \neq s \end{cases}$$

则称 $\{\varepsilon_t\}$ 是白噪声 *(white noise)*，记作 $WN(\mu, \sigma^2)$。当 $\{\varepsilon_t\}$ 是独立序列时，称 $\{\varepsilon_t\}$ 是**独立白噪声**；当 $\mu = 0$ 时，称 $\{\varepsilon_t\}$ 是**零均值白噪声**；当 $\mu = 0$，$\sigma^2 = 1$ 时，称 $\{\varepsilon_t\}$ 是**标准白噪声**；当 ε_t 服从正态分布时，称 $\{\varepsilon_t\}$ 是**正态白噪声**。

有限滑动平均

Definition 26.11. $\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是 $WN(0, \sigma^2)$。称：

$$X_t = a_0\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + a_q\varepsilon_{t-q}$$

是白噪声 $\{\varepsilon_t\}$ 的有限滑动平均 *(finite moving average)*，其中 $q \in \mathbb{N}$，$a_0, a_1, \ldots, a_q$ 为常数。

Theorem 26.10. $\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是 $WN(0, \sigma^2)$，则该白噪声的有限滑动平均：

$$X_t = a_0\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + a_q\varepsilon_{t-q}$$

构成的序列 $\{X_t\}$ 具有如下均值与自协方差函数：

$$\mathrm{E}(X_t) = 0,\ \gamma(n) = \begin{cases} \sigma^2 \sum\limits_{i=0}^{q-n} a_i a_{i+n}, & 0 \leqslant n \leqslant q \\ 0, & n > q \end{cases},\ t, n \in \mathbb{Z}$$

Proof. 由有限滑动平均的定义，对于 $\{X_t\}$ 的期望有：

$$\mathrm{E}(X_t) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=0}^{q} a_i\varepsilon_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{q} a_i \mathrm{E}(\varepsilon_{t-i}) = 0,\ t \in \mathbb{Z}$$

对于 $\{X_t\}$ 的自协方差函数，当 $n > q$ 时，$t + n - i > t - j$ 恒成立，由白噪声的定义可得 $\mathrm{E}(\varepsilon_{t+n-i}\varepsilon_{t-j}) = 0,\ \forall\, i, j = 0, 1, 2, \ldots, q$，于是 $\gamma(n) = 0$。当 $0 \leqslant n \leqslant q$ 时，有：

$$\begin{aligned}
\gamma(n) &= \mathrm{E}(X_{t+n}X_t) \\
&= \mathrm{E}[(a_n\varepsilon_t + a_{n+1}\varepsilon_{t-1} + \cdots + a_q\varepsilon_{t+n-q})(a_0\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + a_{q-n}\varepsilon_{t+n-q})] \\
&= \mathrm{E}(a_na_0\varepsilon_t^2 + a_{n+1}a_1\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + a_qa_{q-n}\varepsilon_{t+n-q}^2) \\
&= \sum_{i=0}^{q-n} a_ia_{i+n} \mathrm{E}(\varepsilon_{t-i}^2) = \sum_{i=0}^{q-n} a_ia_{i+n}\sigma^2
\end{aligned}$$

综上可得：

$$\gamma(n) = \begin{cases} \sigma^2 \sum\limits_{i=0}^{q-n} a_i a_{i+n}, & 0 \leqslant n \leqslant q \\ 0, & n > q \end{cases},\ n \in \mathbb{N}$$

□

单边滑动平均

Definition 26.12. $\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是 $WN(0, \sigma^2)$。称：

$$X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\varepsilon_{t-i},\ t \in \mathbb{Z}$$

是白噪声 $\{\varepsilon_t\}$ 的**单边滑动平均**，其中 $a_0, a_1, \ldots$ 为常数。它表明当前的观测 X_t 只与 t 时刻以及之前时刻的白噪声相关，与 t 时刻之后的白噪声无关。

无穷滑动平均

Definition 26.13. $\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是 $WN(0, \sigma^2)$，$\{a_n\} \in l^1$。称：

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i\varepsilon_{t-i}$$

是白噪声 $\{\varepsilon_t\}$ 的无穷滑动平均 *(infinite moving average)*。

Theorem 26.11. $\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是 $WN(0, \sigma^2)$，则该白噪声的无穷滑动平均：

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \varepsilon_{t-i}$$

构成的序列 $\{X_t\}$ 是平稳序列且具有如下均值与自协方差函数：

$$\mathrm{E}(X_t) = 0,\ \gamma(n) = \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{i+n}$$

Proof. 由性质 13.4.2(4)(6) 可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i \varepsilon_{t-i}|\right) &= \mathrm{E}\left[\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=-n}^{n} |a_i||\varepsilon_{t-i}|\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}\left(\sum_{i=-n}^{n} |a_i||\varepsilon_{t-i}|\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=-n}^{n} |a_i| \,\mathrm{E}(|\varepsilon_{t-i}|)\right] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i| \,\mathrm{E}(|\varepsilon_{t-i}|)
\end{aligned}$$

由不等式 4可得：

$$\mathrm{E}(|\varepsilon_{t-i}|) = \left|\mathrm{E}(|\varepsilon_{t-i}| \cdot 1)\right| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}(\varepsilon_{t-i}^2)\,\mathrm{E}(1)} = \sigma$$

于是：

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i \varepsilon_{t-i}|\right) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i| \,\mathrm{E}(|\varepsilon_{t-i}|) \leqslant \sigma \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i| < +\infty$$

由性质 13.4.2(9) 可得对任意的 $t \in \mathbb{Z}$，X_t a.e. 有限，即：

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \varepsilon_{t-i}$$

右式 a.e. 收敛。取控制函数 $\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i \varepsilon_{t-i}|$，由定理 13.47和性质 13.4.3(6) 可得

$$\mathrm{E}(X_t) = \mathrm{E}\left[\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=-n}^{n} a_i \varepsilon_{t-i}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\mathrm{E}\left(\sum_{i=-n}^{n} a_i \varepsilon_{t-i}\right)\right] = 0$$

对 $t, s \in \mathbb{Z}$ 定义：

$$\varphi_n = \sum_{i=-n}^{n} a_i \varepsilon_{t-i}, \quad \psi_n = \sum_{j=-n}^{n} a_j \varepsilon_{s-j}$$

则有 $\varphi_n \psi_n \to X_t X_s$，因为对任意的 $t, s \in \mathbb{Z}$，X_t a.e. 有限，所以 $X_t X_s$ a.e. 有限。由性质 13.4.2(4)(6) 可得：

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_i a_j \varepsilon_{t-i}\varepsilon_{s-j}|\right) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_i a_j| \,\mathrm{E}(|\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{s-j}|)$$

由不等式 4可得：

$$\mathrm{E}(|\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{s-j}|) = \left|\mathrm{E}(|\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{s-j}|)\right| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}(\varepsilon_{t-i}^2)\,\mathrm{E}(\varepsilon_{s-j}^2)} = \sigma^2$$

于是：

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|a_i a_j \varepsilon_{t-i}\varepsilon_{s-j}|\right) \leqslant \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|a_i a_j| = \sigma^2 \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty}|a_i|\right)^2 < +\infty$$

取控制函数 $\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty}|a_i a_j \varepsilon_{t-i}\varepsilon_{s-j}|$，由定理 13.47和性质 13.4.3(6) 可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathrm{E}(X_t X_s) = \mathrm{E}\left(\lim_{n\to+\infty}\varphi_n\psi_n\right) &= \lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}(\varphi_n\psi_n)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=-n}^{n}a_i\varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=-n}^{n}a_j\varepsilon_{s-j}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}\left(\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}a_i a_j\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{s-j}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}a_i a_j\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{s-j})\right]\\
&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_i a_{i-(t-s)}\sigma^2 = \sigma^2\sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_i a_{i+(t-s)}
\end{aligned}$$

上式最后一步是因为 $t-i=s-j$ 时期望才不为 0，并且 n 是逐渐变大趋于无穷，所以也不用考虑 n 为定值时 t,s 相差过大导致索引越界的问题。由协方差公式可以看出其只与 $t-s$ 相关。

注意到：

$$\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2\sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_i^2$$

因为 $l^1 \subset l^2$，$\{a_n\} \in l^1$，所以上式也收敛。

综上，$\{X_t\}$ 是一个平稳序列。 □

线性平稳序列

Definition 26.14. $\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是 $WN(0,\sigma^2)$，$\{a_n\} \in l^2$。称：

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_i\varepsilon_{t-i}$$

构成的序列 $\{X_t\}$ 为线性平稳序列 *(linearly stationary series)*。

—

Property 26.1.4. $\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是 $WN(0,\sigma^2)$，$\{a_n\} \in l^2$。线性平稳序列：

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_i\varepsilon_{t-i}$$

具有如下性质：

1. 线性平稳序列是平稳序列，且有：

$$\mathrm{E}(X_t)=0,\ \gamma(n)=\sigma^2\sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_ia_{i+n}$$

2. 对于自协方差函数 $\gamma(n)$，有：

$$\lim_{n\to\infty}\gamma(n)=0$$

3. 线性平稳序列的谱密度为（$\{a_n\}$ 为实数列）：

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_je^{ij\lambda}\right|^2,\quad \lambda\in[-\pi,\pi]$$

4. 自协方差矩阵 Γ_n 是正定矩阵；

Proof. (1) 在 L^2 空间中定义内积 $(X,Y)=\mathrm{E}(XY)$，定义：

$$\varphi_n=\sum_{i=-n}^{n}a_i\varepsilon_{t-i}$$

则对 $m<n,\ n\to+\infty$ 有：

$$||\varphi_n-\varphi_m||^2=\left\|\sum_{i=m+1}^{n}a_i\varepsilon_{t-i}+\sum_{i=-n}^{-m-1}a_i\varepsilon_{t-i}\right\|^2=\sigma^2\left(\sum_{i=m+1}^{n}a_i^2+\sum_{i=-n}^{-m-1}a_i^2\right)\to0$$

由定理 13.50可知 $X_t\in L_2$。由内积的连续性和性质 13.4.3(6) 可得：

$$\mathrm{E}(X_t)=(X_t,1)=\lim_{n\to+\infty}(\varphi_n,1)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}(\varphi_n)=0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_t,X_s)=\mathrm{E}(X_tX_s)&=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=-n}^{n}a_i\varepsilon_{t-i},\sum_{i=-n}^{n}a_i\varepsilon_{s-i}\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}\left(\sum_{i=-n}^{n}a_i\varepsilon_{t-i}\sum_{j=-n}^{n}a_j\varepsilon_{s-j}\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}\left(\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}a_ia_j\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{s-j}\right)\\&=\sigma^2\sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_ia_{i+(t-s)}\end{aligned}$$

上式倒数第二步到最后一步和定理 26.11中是一样的，同时平稳性的分析也与之一样，故省略。

(2) 由不等式 1可得：

$$
\begin{aligned}
|\gamma(n)| &= \sigma^2\Big|\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{i+n}\Big| \leqslant \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i a_{i+n}| \\
&= \sigma^2 \sum_{|i|\leqslant n/2} |a_i||a_{i+n}| + \sigma^2 \sum_{|i|>n/2} |a_i||a_{i+n}| \\
&\leqslant \sigma^2 \left(\sum_{|i|\leqslant n/2} a_i^2 \sum_{|i|\leqslant n} a_{i+n}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sigma^2 \left(\sum_{|i|>n/2} a_i^2 \sum_{|i|>n} a_{i+n}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sigma^2 \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^2 \sum_{|i|\leqslant n/2} a_{i+n}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sigma^2 \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^2 \sum_{|i|>n/2} a_{i+n}^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

注意到 $|i| \leqslant \dfrac{n}{2}$ 时 $\dfrac{n}{2} \leqslant i+n \leqslant \dfrac{3n}{2}$，所以有：

$$
\sum_{|i|\leqslant n/2} a_{i+n}^2 \leqslant \sum_{|i|>n/2} a_i^2
$$

结合 $\{a_n\} \in l^2$ 即可得：

$$
|\gamma(n)| \leqslant 2\sigma^2 \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^2 \sum_{|i|>n/2} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2\sigma^2 \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|i|>n/2} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0
$$

(3) 设随机变量 Y 在 $[-\pi,\pi]$ 上服从均匀分布，定义 $\varepsilon_n = e^{inY}$, $n \in \mathbb{Z}$，于是有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\varepsilon_n) &= \int_{[-\pi,\pi]} \frac{1}{2\pi} e^{iny}\,\mathrm{d}y = \frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{2\pi i n} \\
&= \frac{\cos(n\pi) + i\sin(n\pi) - \cos(-n\pi) - i\sin(-n\pi)}{2\pi i n} \\
&= \frac{2i\sin(n\pi)}{2\pi i n} = 0, \quad n \neq 0 \\
\mathrm{E}(\varepsilon_n) &= \int_{[-\pi,\pi]} \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}y = 1, \quad n = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\varepsilon_n \overline{\varepsilon}_m) &= \mathrm{E}(e^{i(n-m)Y}) = \int_{[-\pi,\pi]} \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)y}\,\mathrm{d}y = \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{2\pi i(n-m)} \\
&= \frac{\cos[(n-m)\pi] + i\sin[(n-m)\pi] - \cos[-(n-m)\pi] - i\sin[-(n-m)\pi]}{2\pi i(n-m)} \\
&= \frac{2i\sin[(n-m)\pi]}{2\pi i(n-m)} = 0, \quad n \neq m \\
\mathrm{E}(\varepsilon_n \overline{\varepsilon}_m) &= \mathrm{E}(e^{i(n-m)y}) = \int_{[-\pi,\pi]} \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}y = 1, \quad n = m
\end{aligned}
$$

即：

$$
\mathrm{E}(\varepsilon_n) = \delta_n, \quad \mathrm{E}(\varepsilon_n \overline{\varepsilon}_m) = \delta_{n-m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}
$$

令：

$$
Z_n = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \varepsilon_{n-j} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{i(n-j)Y}, \quad n \in \mathbb{Z}
$$

由内积的连续性和性质 13.4.3(6) 可得：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z_n) = (Z_n, 1) &= \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j\varepsilon_{n-j}, 1\right) = \left[\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{j=k}^{-k} a_j\varepsilon_{n-j}\right), 1\right] \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{j=-k}^{k} a_j\varepsilon_{n-j}, 1\right) = \lim_{k\to+\infty}\mathrm{E}\left(\sum_{j=-k}^{k} a_j\varepsilon_{n-j}\right) \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left[\sum_{j=-k}^{k}\mathrm{E}(a_j\varepsilon_{n-j})\right] = a_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z_n\overline{Z}_m) = (Z_n, Z_m) &= \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j\varepsilon_{n-j}, \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j\varepsilon_{m-j}\right) \\
&= \left[\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{j=-k}^{k} a_j\varepsilon_{n-j}\right), \lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{j=-k}^{k} a_j\varepsilon_{m-j}\right)\right] \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{j=-k}^{k} a_j\varepsilon_{n-j}, \sum_{j=-k}^{k} a_j\varepsilon_{m-j}\right) = \lim_{k\to+\infty}\mathrm{E}\left(\sum_{j=-k}^{k} a_j\varepsilon_{n-j}\sum_{l=-k}^{k} a_l\varepsilon_{m-l}\right) \\
&= \lim_{k\to+\infty}\mathrm{E}\left(\sum_{j=-k}^{k}\sum_{l=-k}^{k} a_j\varepsilon_{n-j}a_l\varepsilon_{m-l}\right) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j a_{j+(n-m)}
\end{aligned}
$$

另一方面又有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z_n\overline{Z}_m) &= \mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{i(n-j)Y}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-i(m-k)Y}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{i(n-j)y}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-i(m-k)y}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{-ijy}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{iky}\right)e^{i(n-m)y}\,\mathrm{d}y \\
\frac{1}{2\pi} &= \int_{[-\pi,\pi]}\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{-ijy}\right|^2 e^{i(n-m)y}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

所以有：

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j a_{j+(n-m)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{-ijy}\right|^2 e^{i(n-m)y}\,\mathrm{d}y \\
\sigma^2\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j a_{j+n} &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{-ijy}\right|^2 e^{iny}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

由 (1) 可得：

$$\gamma(n)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_je^{-ijy}\right|^2 e^{iny}\,\mathrm{d}y$$

所以有：

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_je^{-ij\lambda}\right|^2=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_je^{ij\lambda}\right|^2$$

(4) 由 (3) 和定理 26.6立即可得。 □

26.2 线性差分方程理论

26.2.1 差分与位移

Definition 26.15. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，称 $\Delta f(x)=f(x)-f(x-1)$ 为 $f(x)$ 在 x 处的 1 阶**差分**，称 Δ 为**差分算子**，对 $n-1$ 阶差分后的函数再进行一次 1 阶差分运算称为 n 阶差分，记 $\Delta^n f(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 阶差分，则：

$$\Delta^n f(x)=\Delta^{n-1}f(x)-\Delta^{n-1}f(x-1)$$

将 $\mathcal{B}f(x)=f(x-1)$ 称为 $f(x)$ 在 x 处的 1 步**位移**，称 $\mathcal{B}$ 为位移算子，对 $n-1$ 步位移后的函数再进行一次 1 步位移运算称为 n 步位移，记 $\mathcal{B}^n f(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 步位移，则：

$$\mathcal{B}^n f(x)=f(x-n)$$

Property 26.2.1. 设 $f(x),g(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，α,β 是任意常数，$\mathcal{B}$ 为位移算子。差分算子 Δ 和位移算子 $\mathcal{B}$ 具有如下性质：

1. *差分算子是线性算子，即：*

$$\Delta[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha\Delta f(x)+\beta\Delta g(x)$$

2. $\Delta[f(x)g(x)]=\Delta f(x)g(x)+\Delta g(x)\mathcal{B}f(x)$;
3. $\Delta\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\Delta f(x)\mathcal{B}g(x)-\Delta g(x)\mathcal{B}f(x)}{g(x)\mathcal{B}g(x)}$;
4. $\mathcal{B}\alpha=\alpha$;
5. *位移算子是线性算子，即：*

$$\mathcal{B}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha\mathcal{B}f(x)+\beta\mathcal{B}g(x)$$

6. *对于多项式* $\varphi(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i$，$\psi(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}b_ix^i$ *的乘积* $A(x)=\varphi(x)\psi(x)$，*有：*

$$A(\mathcal{B})f(x)=\varphi(\mathcal{B})[\psi(\mathcal{B})f(x)]=\psi(\mathcal{B})[\varphi(\mathcal{B})f(x)]$$

7. 差分算子与位移算子具有如下关系：

$$\Delta^n = (I-\mathcal{B})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \mathcal{B}^i$$
$$\mathcal{B}^n = (I-\Delta)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \Delta^i$$
$$\Delta\mathcal{B} = \mathcal{B}\Delta$$

Proof. (1)(4)(5)(7) 是显然的。

(2) 注意到：

$$\begin{aligned}\Delta[f(x)g(x)] &= f(x)g(x) - f(x-1)g(x-1)\\ &= f(x)g(x) - f(x-1)g(x) + g(x)f(x-1) - g(x-1)f(x-1)\\ &= [f(x)-f(x-1)]g(x) + [g(x)-g(x-1)]f(x-1)\\ &= \Delta f(x)g(x) + \Delta g(x)\mathcal{B}f(x)\end{aligned}$$

(3) 注意到：

$$\begin{aligned}\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x-1)}{g(x-1)} = \frac{f(x)g(x-1) - f(x-1)g(x)}{g(x)g(x-1)}\\ &= \frac{f(x)g(x-1) - f(x-1)g(x-1) + f(x-1)g(x-1) - f(x-1)g(x)}{g(x)\mathcal{B}g(x)}\\ &= \frac{[f(x)-f(x-1)]g(x-1) - [g(x)-g(x-1)]f(x-1)}{g(x)\mathcal{B}g(x)}\\ &= \frac{\Delta f(x)\mathcal{B}g(x) - \Delta g(x)\mathcal{B}f(x)}{g(x)\mathcal{B}g(x)}\end{aligned}$$

(6) 注意到：

$$A(x) = \varphi(x)\psi(x) = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j}$$

所以：

$$\begin{aligned}A(\mathcal{B})f(x) &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j \mathcal{B}^{i+j} f(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j \mathcal{B}^i\mathcal{B}^j f(x)\\ &= \sum_{i=0}^{m} a_i\mathcal{B}^i\left[\sum_{j=0}^{n} b_j\mathcal{B}^j f(x)\right] = \varphi(\mathcal{B})[\psi(\mathcal{B})f(x)]\end{aligned}$$

同理可证 $A(\mathcal{B})f(x) = \psi(\mathcal{B})[\varphi(\mathcal{B})f(x)]$。 □

26.2.2 线性差分方程

Definition 26.16. 称方程：

$$x_m + a_1(m)x_{m-1} + a_2(m)x_{m-2} + \cdots + a_n(m)x_{m-n} = f(m)$$

为关于 $\{x_m\}$ 的 n 阶线性差分方程，其中 $f(x), a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ 为定义在 $\mathbb{Z}$ 上的函数，且 $a_n(x) \neq 0$ 在 $x \in \mathbb{Z}$ 恒成立。当 $f(x) = 0$ 时，称上述方程为关于 $\{x_m\}$ 的 n 阶齐次线性差分方程。

note 26.1. 这里的线性指的是方程关于 $\{x_m\}$ 是线性的。$x_m - \sin(x_{m-1})$ 不是一个线性方程。

推导 26.1. 定义算子：

$$L(x_m) = I + a_1(m)\mathcal{B}x_m + a_2(m)\mathcal{B}^2x_m + \cdots + a_n(m)\mathcal{B}^n x_m$$

则线性差分方程可表示为：

$$L(x_m) = f(m)$$

Theorem 26.12. 初值问题：

$$L(x_m) = f(m),\ x_0 = y_0,\ x_1 = y_1,\ \cdots,\ x_{n-1} = y_{n-1}$$

有唯一的解。

Proof. 注意到关系：

$$x_m + a_1(m)x_{m-1} + a_2(m)x_{m-2} + \cdots + a_n(m)x_{m-n} = f(m),\ \forall\, m \geqslant n$$
$$x_m = -\frac{x_{m+n}}{a_n(m+n)} - \frac{a_1(m)x_{m+n-1}}{a_n(m+n)} - \cdots - \frac{a_{n-1}x_{m+1}}{a_n(m+n)} + \frac{f(m)}{a_n(m+n)},\ \forall\, m < 0$$

于是当如上 n 个初始值给定时，$\{x_m\}$ 的所有值都可以由上述递推关系唯一得到。 □

Definition 26.17. 若存在不全为 0 的常数 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 使得序列 $\{x_m^{(1)}\}, \{x_m^{(2)}\}, \ldots, \{x_m^{(k)}\}$ 满足：

$$c_1x_m^{(1)} + c_2x_m^{(2)} + \cdots + c_kx_m^{(k)} = 0,\ \forall\, m \in \mathbb{Z}$$

则称这些序列**线性相关**，否则就称这些序列**线性无关**。

Definition 26.18. 称矩阵：

$$C(m) = \begin{pmatrix} x_m^{(1)} & x_m^{(2)} & \cdots & x_m^{(k)} \\ \mathcal{B}x_m^{(1)} & \mathcal{B}x_m^{(2)} & \cdots & \mathcal{B}x_m^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{B}^{k-1}x_m^{(1)} & \mathcal{B}^{k-1}x_m^{(2)} & \cdots & \mathcal{B}^{k-1}x_m^{(k)} \end{pmatrix}$$

为序列 $\{x_m^{(1)}\}, \{x_m^{(2)}\}, \ldots, \{x_m^{(k)}\}$ 的 ***Casorati* 矩阵**，将 $\det C(m)$ 称为其 ***Casorati* 行列式**。

Theorem 26.13. 若序列 $\{x_m^{(1)}\}, \{x_m^{(2)}\}, \ldots, \{x_m^{(k)}\}$ 线性相关，则其 *Casorati* 行列式 $\det C(m)$ 在 $m \in \mathbb{Z}$ 上恒为 0。

Proof. 因为 $\{x_m^{(1)}\},\{x_m^{(2)}\},\dots,\{x_m^{(k)}\}$ 线性相关，所以存在不全为 0 的常数 $c_1,c_2,\dots,c_k$ 使得

$$c_1x_m^{(1)}+c_2x_m^{(2)}+\cdots+c_kx_m^{(k)}=0,\ \forall\, m\in\mathbb{Z}$$

链接线性方程组理论

于是以 $C(m)$ 为系数矩阵的线性方程组有非零解。由可知 $\det C(m)=0$ 在 $m\in\mathbb{Z}$ 上恒成立。 □

Corollary 26.1. 若存在 $m\in\mathbb{Z}$ 使得 $\det C(m)\neq 0$，则序列 $\{x_m^{(1)}\},\{x_m^{(2)}\},\dots,\{x_m^{(k)}\}$ 线性无关。

齐次线性差分方程解的一般理论

Theorem 26.14. 如果 $\{x_m^{(1)}\},\{x_m^{(2)}\},\dots,\{x_m^{(k)}\}$ 是 n 阶常系数齐次线性差分方程 $L(x_m)=0$ 的 k 个解，则它们的线性组合：

$$\{x_m=c_1x_m^{(1)}+c_2x_m^{(2)}+\cdots+c_kx_m^{(k)}\}$$

也是解，其中 c_i 为任意常数，$i=1,2,\dots,k$。

Proof. 因为 $x_m^{(j)}$，$j=1,2,\dots,k$ 是 $L(x_m)=0$ 的解，所以：

$$x_m^{(j)}+a_1x_{m-1}^{(j)}+\cdots+a_nx_{m-n}^{(j)}=0$$

于是：

$$\sum_{j=1}^{k}x_m^{(j)}+a_1\sum_{j=1}^{k}x_{m-1}^{(j)}+\cdots+a_n\sum_{j=1}^{k}x_{m-n}^{j}=0$$

即：

$$x_m+a_1x_{m-1}+\cdots+a_nx_{m-n}=0$$ □

Theorem 26.15. n 阶齐次线性差分方程 $L(x_m)=0$ 一定存在 n 个线性无关的解。

Proof. 由定理 26.12可知 $L(x_m)=0$ 满足初值条件：

$$\begin{cases} x_0=1,\ x_1=0,\ \dots,\ x_{n-1}=0 \\ x_0=0,\ x_1=1,\ \dots,\ x_{n-1}=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_0=0,\ x_1=0,\ \dots,\ x_{n-1}=1 \end{cases}$$

的解一定存在，由推论 26.1可知这 n 个解线性无关。 □

Theorem 26.16. 设 $\{x_m^{(1)}\},\{x_m^{(2)}\},\dots,\{x_m^{(n)}\}$ 是 n 阶齐次线性差分方程 $L(x_m)=0$ 的 n 个线性无关的解，则方程的通解可以表示为：

$$x_m=c_1x_m^{(1)}+c_2x_m^{(2)}+\cdots+c_nx_m^{(n)},\ \forall\, m\in\mathbb{Z}$$

其中 $c_1,c_2,\dots,c_n$ 是任意常数。

Proof. 因为 $\{x_m^{(1)}\},\{x_m^{(2)}\},\dots,\{x_m^{(n)}\}$ 线性无关，由定理 26.13可知存在 $m\in\mathbb{Z}$ 使得 Casorati 行列式 $\det C(m)\neq 0$，于是此时的 Casorati 矩阵 $C(n)$ 可逆。任取 $L(x_m)=0$ 的一个解 $\{y_m\}$，则 $y_m,\mathcal{B}y_m,\dots,\mathcal{B}^{n-1}y_m$ 是确定的数，于是关于 $(c_1,c_2,\dots,c_n)^T$ 的线性方程组：

$$\begin{pmatrix} x_m^{(1)} & x_m^{(2)} & \cdots & x_m^{(n)} \\ \mathcal{B}x_m^{(1)} & \mathcal{B}x_m^{(2)} & \cdots & \mathcal{B}x_m^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{B}^{n-1}x_m^{(1)} & \mathcal{B}^{n-1}x_m^{(2)} & \cdots & \mathcal{B}^{n-1}x_m^{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_m \\ \mathcal{B}y_m \\ \vdots \\ \mathcal{B}^{n-1}y_m \end{pmatrix}$$

存在唯一解 $(c_1^*,c_2^*,\dots,c_n^*)^T$，即在这 n 个位置处 $\{y_m\}$ 可以由 $\{x_m^{(1)}\},\{x_m^{(2)}\},\dots,\{x_m^{(n)}\}$ 线性表出。令：

$$z_m=c_1^*x_m^{(1)}+c_2^*x_m^{(2)}+\cdots+c_n^*x_m^{(n)},\ \forall\, m\in\mathbb{Z}$$

则 $\{z_m\}$ 在这 n 个位置处的值等于 $\{y_m\}$ 对应位置上的值，且 $\{z_m\}$ 可以由 $\{x_m^{(1)}\},\{x_m^{(2)}\},\dots,\{x_m^{(n)}\}$ 线性表出。而由定理 26.12可知 $L(x_m)=0$ 的解由任意的 n 个初始值唯一确定，于是 $\{y_m\}$ 就是 $\{z_m\}$，所以它也可以由 $\{x_m^{(1)}\},\{x_m^{(2)}\},\dots,\{x_m^{(n)}\}$ 线性表出。由 $\{y_m\}$ 的任意性，结论成立。 □

Corollary 26.2. n 阶齐次线性差分方程的所有解构成一个 n 维线性空间。

Definition 26.19. 称 n 阶齐次线性差分方程的任意 n 个线性无关的解为其**基本解组**。

非齐次线性差分方程解的一般理论

Theorem 26.17. n 阶非齐次线性差分方程 $L(x_m)=f(m)$ 任意两个解的差是 n 阶齐次线性差分方程 $L(x_m)=0$ 的解。

Theorem 26.18. n 阶非齐次线性差分方程 $L(x_m)=f(m)$ 任意一个解与 n 阶齐次线性差分方程 $L(x_m)=0$ 任意一个解的和还是 $L(x_m)=f(m)$ 的解。

Theorem 26.19. 设 $\{x_m^{(1)}\},\{x_m^{(2)}\},\dots,\{x_m^{(n)}\}$ 是 n 阶齐次线性差分方程 $L(x_m)=0$ 的基本解组，$\{y_m\}$ 是 n 阶非齐次线性差分方程 $L(x_m)=f(m)$ 的一个解，则 $L(x_m)=f(m)$ 的通解可表示为：

$$x_m=y_m+c_1x_m^{(1)}+c_2x_m^{(2)}+\cdots+c_nx_m^{(n)},\ \forall\, m\in\mathbb{Z}$$

Proof. 对任意的 $\{y_m\}$，由定理 26.17和定理 26.16可知 $L(x_m)=f(m)$ 的任意一个解可以表示为上述形式。由 $\{y_m\}$ 的任意性可得出结论。 □

26.2.3 n 阶常系数线性差分方程

Definition 26.20. 若 n 阶线性差分方程：

$$x_m+a_1(m)x_{m-1}+a_2(m)x_{m-2}+\cdots+a_n(m)x_{m-n}=f(m)$$

中 $a_1(x),a_2(x),\dots,a_n(x)$ 都是常数，则称上述方程为关于 $\{x_m\}$ 的 n 阶常系数线性差分方程。

常系数齐次线性差分方程解的一般理论

推导 26.2. 取一个一阶常系数齐次线性差分方程 $x_m + a_1 x_{m-1} = 0$，可以看出该方程的通解为 $x_m = C(-a_1)^m, \forall\, m \in \mathbb{Z}$，其中 C 为任意常数。受此启发，我们对于 n 阶常系数齐次线性差分方程寻找指数形式的解。

Definition 26.21. 称：

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

为 n 阶常系数齐次线性差分方程：

$$x_m + a_1 x_{m-1} + a_2 x_{m-2} + \cdots + a_n x_{m-n} = 0$$

的**特征方程**，等号左边关于 λ 的多项式被称为**特征多项式**，记为 $l(\lambda)$。

Theorem 26.20. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 是 n 阶常系数齐次线性差分方程 $L(x_m) = 0$ 的特征方程 $l(\lambda) = 0$ 的解，其重数分别为 $r_1, r_2, \ldots, r_s$，则 $L(x_m) = 0$ 的通解可以表示为：

$$x_m = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} c_{ij} m^j \lambda_i^m, \ \forall\, m \in \mathbb{Z}$$

其中 c_{ij}，$i = 1, 2, \ldots, s$，$j = 0, 1, \ldots, r_i - 1$ 为常数。

Proof. **情况一：**此时特征方程有 n 个互不相同的实根，分别设为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$。将 $\{\lambda_i^m\}$，$i = 1, 2, \ldots, n$ 代入 $L(x_m) = 0$ 中可以发现：

$$\begin{aligned}&\lambda_i^m + a_1\lambda_i^{m-1} + a_2\lambda_i^{m-2} + \cdots + a_n\lambda_i^{m-n}\\ =&\lambda_i^{m-n}(\lambda_i^n + a_1\lambda_i^{n-1} + a_2\lambda_i^{n-2} + \cdots + a_n) = 0\end{aligned}$$

所以它们就是 $L(x_m) = 0$ 的解。由 n 阶线性差分方程的定义，$a_n \neq 0$，所以 $\lambda_i \neq 0$。于是有：

$$\det C(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1^{-1} & \lambda_2^{-1} & \cdots & \lambda_n^{-1} \\ \lambda_1^{-2} & \lambda_2^{-2} & \cdots & \lambda_n^{-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{-(n-1)} & \lambda_2^{-(n-1)} & \cdots & \lambda_n^{-(n-1)} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

由推论 26.1可知这 n 个解线性无关，所以构成一个基本解组。

情况二：此时特征方程存在重实根。假设根 λ_i 的重数为 r_i，代入可知 $\{\lambda_i^m\}$ 是 $L(x_m) = 0$

的解。下证明对 $1 \leqslant b \leqslant r_i - 1$ 且 $b \in \mathbb{N}^+$，$\{m^b\lambda_i^m\}$ 都是 $L(x_m) = 0$ 的解。设 $a_0 = 1$，则：

$$\begin{aligned}
&m^b\lambda_i^m + a_1(m-1)^b\lambda_i^{m-1} + \cdots + a_n(m-n)^b\lambda_i^{m-n}\\
=&\sum_{k=0}^{n} a_k(m-k)^b\lambda_i^{m-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j} m^j(-k)^{b-j}\lambda_i^{m-k}\\
=&\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{b} a_k\binom{b}{j} m^j(-k)^{b-j}\lambda_i^{m-k} = \sum_{j=0}^{b}\sum_{k=0}^{n} a_k\binom{b}{j} m^j(-k)^{b-j}\lambda_i^{m-k}\\
=&\sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j} m^j\sum_{k=0}^{n} a_k(-k)^{b-j}\lambda_i^{m-k} = \lambda_i^m\sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j} m^j\sum_{k=0}^{n} a_k(-k)^{b-j}\lambda_i^{-k}
\end{aligned}$$

取函数 $f(\lambda_i) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\lambda_i^{-k}$，则：

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(-k)^{b-j}\lambda_i^{-k}$$

可以表示为 $f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \ldots, f^{(b-j)}(\lambda_i)$ 的线性组合。考虑特征多项式 $l(\lambda_i)$：

$$l(\lambda_i) = \lambda_i^n + a_1\lambda_i^{n-1} + a_2\lambda_i^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda_i + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_i^{n-k} = \lambda_i^n f(\lambda_i)$$

于是有：

$$f(\lambda_i) = \frac{l(\lambda_i)}{\lambda_i^n}$$

所以 $f^{(b-j)}(\lambda_i)$ 可以由 $l(\lambda_i), l'(\lambda_i), \ldots, l^{(b-j)}(\lambda_i)$ 线性表出。于是：

$$\begin{aligned}
&m^b\lambda_i^m + a_1(m-1)^b\lambda_i^{m-1} + \cdots + a_n(m-n)^b\lambda_i^{m-n}\\
=&\lambda_i^m\sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j} m^j\sum_{k=0}^{n} a_k(-k)^{b-j}\lambda_i^{-k} = \lambda_i^m\sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j} m^j g[l(\lambda_i), l'(\lambda_i), \ldots, l^{(b-j)}(\lambda_i)]
\end{aligned}$$

其中 g 是 $l(\lambda_i), l'(\lambda_i), \ldots, l^{(b-j)}(\lambda_i)$ 的线性函数。因为 λ_i 是特征方程的 r_i 重根，所以：

$$l(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{r_i} h(\lambda) = 0$$

求导可知 $l(\lambda_i) = l'(\lambda_i) = \cdots = l^{(b-j)}(\lambda_i) = 0$，所以 $g = 0$，即：

$$m^b\lambda_i^m + a_1(m-1)^b\lambda_i^{m-1} + \cdots + a_n(m-n)^b\lambda_i^{m-n} = 0$$

所以 $\{m^b\lambda_i^m\}$, $b = 0, 1, 2, \ldots, r_i - 1$ 都是 $L(x_m) = 0$ 的解。

若 $\{m^b\lambda_i^m\}$, $b = 0, 1, 2, \ldots, r_i - 1$ 线性相关，则存在不全为 0 的 $c_1, c_2, \ldots, c_{r_i}$ 使得：

$$c_1\lambda_i^m + c_2 m\lambda_i^m + \cdots + c_{r_i} m^{r_i-1}\lambda_i^m = \lambda_i^m(c_1 + c_2 m + \cdots + c_{r_i} m^{r_i-1}) = 0$$

对任意的 $m \in \mathbb{Z}$ 成立。由 n 阶线性差分方程的定义，$a_n \neq 0$，所以 $\lambda_i \neq 0$，于是需要上式中关于整数 m 的多项式恒等于 0，此时应有 $c_1 = c_2 = \cdots = c_{r_i} = 0$，矛盾，所以 $\{m^b\lambda_i^m\}$, $b = 0, 1, 2, \ldots, r_i - 1$ 线性无关。

不同 λ_i 之间的线性无关性涉及到广义 Vandermonde 行列式，以

情形三：此时特征方程存在一对共轭复根 $a+bi, a-bi$，令：

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2},\ \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

则：

$$(a+bi)^m = (\rho e^{i\theta})^m = \rho^m[\cos(m\theta) + i\sin(m\theta)],\ \forall\ m \in \mathbb{Z}$$
$$(a-bi)^m = (\rho e^{-i\theta})^m = \rho^m[\cos(m\theta) - i\sin(m\theta)],\ \forall\ m \in \mathbb{Z}$$

都是 $L(x_m)$ 的解。

综上可得出定理的结论。 □

常系数齐次线性差分方程解的收敛性

推导 26.3. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 为 n 阶常系数齐次线性差分方程 $L(x_m)=0$ 的特征方程 $l(\lambda)=0$ 的解。

(1) λ_i **都在单位圆内：**此时存在 α 使得：

$$\min\{|\lambda_i| : i = 1, 2, \ldots, s\} < \alpha < 1$$

于是 $L(x_m)=0$ 的任何解 $\{x_m\}$ 满足：

$$|x_m| = \left|\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} c_{ij} m^j \lambda_i^m\right| \leqslant \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} |c_{ij} m^j|\,|\lambda_i^m| \leqslant \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} |c_{ij} m^j| \alpha^m$$

由指数函数 α^m 与幂函数 m^j 的收敛速度比较可得：

$$\lim_{m\to+\infty} |x_m| = 0$$

此时称 $\{x_m\}$ **以负指数收敛到** 0。

(2) λ_i **在单位圆上：**设 $\lambda_i = a+bi$，由定理 26.20可知此时 $L(x_m)=0$ 有解：

$$x_m = \cos(m\theta) + i\sin(m\theta),\ \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right),\ \forall\ m \in \mathbb{Z}$$

当 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 时，这个解不收敛，是一个周期解。

(3) λ_i **在单位圆外：**显然此时存在发散于 $+\infty$ 的解。

常系数非齐次线性差分方程解的一般理论

Theorem 26.21. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 是 n 阶常系数齐次线性差分方程 $L(x_m)=0$ 的特征方程 $l(\lambda)=0$ 的互异根，其重数分别为 $r_1, r_2, \ldots, r_s$，n 阶常系数非齐次线性差分方程 $L(x_m)=f(m)$ 的一个特解为 $\{y_m\}$，则 $L(x_m)=f(m)$ 的通解可以表示为：

$$x_m = y_m + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} c_{ij} m^j \lambda_i^m,\ \forall\ m \in \mathbb{Z}$$

其中 c_{ij}，$i=1,2,\ldots,s$，$j=0,1,\ldots,r_i-1$ 为常数。

Proof. 由定理 26.19和定理 26.20可直接得到。 □

26.3 ARIMA

26.3.1 AR 模型

Definition 26.22. 如果 $\{\varepsilon_t\}$ 是 $\mathrm{WN}(0,\sigma^2)$，实数 $a_1,a_2,\ldots,a_p(a_p\neq 0)$ 使得多项式 $A(z)=0$ 的根都在单位圆外：

$$A(z)=1-\sum_{i=1}^{p}a_iz^i\neq 0,\quad \forall\,|z|\leqslant 1$$

则称 p 阶常系数线性差分方程：

$$X_t=\sum_{i=1}^{p}a_iX_{t-i}+\varepsilon_t$$

为 p **阶自回归模型**，简记为 $\mathrm{AR}(p)$ 模型。称满足 $\mathrm{AR}(p)$ 模型的平稳时间序列 $\{X_t\}$ 为 $\mathrm{AR}(p)$ 序列，称 $a_1,a_2,\ldots,a_p$ 为 $\mathrm{AR}(p)$ 模型的**自回归系数**，多项式 $A(z)=0$ 的根都在单位圆外这一条件被称为**稳定性条件**，分别称 $A(z)$ 和 $A(\mathcal{B})$ 为 $\mathrm{AR}(p)$ 模型的**特征多项式**和**自回归系数多项式**。可以用 $A(\mathcal{B})$ 将模型改写为 $A(\mathcal{B})X_t=\varepsilon_t$。

推导 26.4. $A(z)=0$ 的解为 p 阶常系数线性差分方程特征方程：

$$\lambda^p-a_1\lambda^{p-1}-\cdots-a_{p-1}\lambda-a_p=0$$

的解的倒数。取特征方程的任一根 λ_j，则：

$$A\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)=1-\sum_{i=1}^{p}a_i\frac{1}{\lambda_j^i}=\frac{1}{\lambda_j^p}(\lambda_j^p-a_1\lambda_j^{p-1}-\cdots-a_{p-1}\lambda_j-a_p)=0$$

所以上述稳定性条件即为要求 p 阶常系数线性差分方程特征方程的根都在单位圆内。

Theorem 26.22. 设 $\mathrm{AR}(p)$ 模型的特征多项式 $A(z)=0$ 有 s 个互异根 $z_1,z_2,\ldots,z_s$，根的重数分别为 $r_1,r_2,\ldots,r_s$，$1<\rho<\min\limits_i\{|z_i|\}$，则：

1. $\mathrm{AR}(p)$ 模型的唯一平稳解是：

   $$X_t=\sum_{i=0}^{+\infty}\psi_i\varepsilon_{t-i}$$

   其中 ψ_i 为 $A^{-1}(z)$ 在 $\{z:|z|\leqslant\rho\}$ 内展开的幂级数的系数，称之为 ***Wold* 系数**，对 $j<0$ 定义 $\psi_j=0$，那么它具有递推公式：

   $$\psi_0=1,\quad \psi_j=\sum_{i=1}^{p}a_i\psi_{j-i},\,\forall\,j\geqslant 1$$

2. $\mathrm{AR}(p)$ 模型的通解为：

   $$\sum_{i=0}^{+\infty}\psi_i\varepsilon_{t-i}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1}c_{ij}t^jz_i^{-t}$$

   其中 c_{ij} 为任意常数；

3. AR(p) 模型的任一解都以负指数阶的速度收敛到平稳解，$\min_i |z_i|$ 越大，收敛越快。

Proof. (1) 由复变函数的知识，$A^{-1}(z)$ 在 $\{z : |z| \leqslant \rho\}$ 内解析，即 $A^{-1}(z)$ 有如下展开：

$$A^{-1}(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i z^i, \quad |z| \leqslant \rho$$

且这个级数是绝对收敛的。由绝对收敛性可知 $|\psi_i z^i| \to 0$，即 $|\psi_i| = o(\rho^{-i})$，所以 $\{\psi_i\} \in l^1$，由定理 26.11可知 $\{X_t\}$ 是平稳序列。

令 $a_0 = -1$，对 $k < 0$ 定义 $\psi_k = 0$。注意到：

$$\begin{aligned} A(\mathcal{B})X_t &= \left(1 - \sum_{i=1}^{p} a_i \mathcal{B}^i\right) X_t = \left(-a_0 - \sum_{i=1}^{p} a_i \mathcal{B}^i\right) X_t = -\sum_{i=0}^{p} a_i \mathcal{B}^i X_t \\ &= -\sum_{i=0}^{p} a_i X_{t-i} = -\sum_{i=0}^{p} a_i \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-i-j} = -\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{p} a_i \psi_j \varepsilon_{t-i-j} \\ &= -\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{p} a_i \psi_{j-i} \varepsilon_{t-j} = -\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{p} a_i \psi_{j-i}\right)\varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

因为 $\{\psi_i\} \in l^1$，所以对 $|z| \leqslant 1$ 级数 $\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j z^j$ 是良定义的。由：

$$\begin{aligned} 1 = A(z)A^{-1}(z) &= \left(1 - \sum_{i=1}^{p} a_i z^i\right) A^{-1}(z) = -\sum_{i=0}^{p} a_i z^i \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j z^j \\ &= -\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{+\infty} a_i z^i \psi_j z^j = -\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{p} a_i \psi_j z^{i+j} = -\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{p} a_i \psi_{j-i}\right) z^j \end{aligned}$$

最后一步是求和换元后的结果。对比系数可得（递推公式）：

$$-\sum_{i=0}^{p} a_i \psi_{-i} = 1, \quad -\sum_{i=0}^{p} a_i \psi_{j-i} = 0,\ \forall\, j \geqslant 1$$

于是：

$$A(\mathcal{B})X_t = -\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{p} a_i \psi_{j-i}\right)\varepsilon_{t-j} = -\sum_{i=0}^{p} a_i \psi_{-i} \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{p} a_i \psi_{j-i}\right)\varepsilon_{t-j} = \varepsilon_t$$

所以 $\{X_t\}$ 是解。

设还有另一平稳解 $\{Y_t\}$，即 $A(\mathcal{B})Y_t = \varepsilon_t$ 且 $A^{-1}(\mathcal{B})$ 存在，则：

$$Y_t = A^{-1}(\mathcal{B})\varepsilon_t = A^{-1}(\mathcal{B})A(\mathcal{B})X_t = X_t$$

综上，$\{X_t\}$ 是 AR(p) 模型唯一的平稳解。

(2) 由 (1)、定理 26.19与定理 26.20即可得通解为：

$$X_t + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} c_{ij} t^j z_i^t = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} c_{ij} t^j z_i^{-t}$$

(3) 由 (1)(2) 可得对于 AR(p) 模型的任一解 $\{Y_t\}$ 有：

$$|X_t - Y_t| = \left|\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} c_{ij} t^j z_i^{-t}\right| \leqslant O\left[\left(\min_i\{|z_i|\}\right)^{-t}\right] \qquad \square$$

note 26.2. 上述定理给了我们一个产生 AR(p) 序列的方式。先任意选择 p 个初始值，然后根据自回归系数产生序列 $\{Y_t\}$。因为任意的 $\{Y_t\}$ 都以负指数阶的速度收敛到平稳解，取一个较大的 m 然后令 $X_t = Y_{m+t}$ 即可得到近似的 AR(p) 序列 $\{X_t\}$。

Property 26.3.1. AR(p) 序列 $\{X_t\}$ 具有如下性质：

1. 对任意的 $i \geqslant 1$ 且 $i \in \mathbb{N}^+$，X_t 与 ε_{t+i} 不相关；
2. $\gamma(n) = \sigma^2 \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \psi_i \psi_{i+n}$；
3. *(Yule-Walker 方程)* $\{X_t\}$ 的自协方差函数满足：

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \Gamma_n \alpha,\ \gamma(0) = \boldsymbol{\gamma}_n^T \alpha + \sigma^2, \quad n \geqslant p$$

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n) \end{pmatrix},\ \Gamma_n = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_p, 0, 0, \ldots, 0)^T$$

4. AR(p) 序列的自协方差函数和自相关函数满足和 AR(p) 模型相对应的常系数齐次线性差分方程：

$$\gamma(n) = a_1\gamma(n-1) + a_2\gamma(n-2)\cdots + a_p\gamma(n-p)$$
$$\rho(n) = a_1\rho(n-1) + a_2\rho(n-2)\cdots + a_p\rho(n-p)$$

5. $\{X_t\}$ 的自协方差函数与自相关函数具有拖尾性，即 $\gamma(n)$ 和 $\rho(n)$ 始终不为 0，且二者的模随着 n 的增大指数衰减到 0；
6. $\{X_t\}$ 具有如下谱密度函数：

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j e^{ij\lambda}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi|A(e^{i\lambda})|^2}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

7. $\{X_t\}$ 的自协方差矩阵为正定矩阵；
8. $\{X_t\}$ 是最小序列；

Proof. (1) 因为 $\mathrm{E}(\varepsilon_{t+i})=0$，由性质 13.4.2(9) 可知 ε_{t+i} a.e. 有限，由定理 26.11可知 X_t a.e. 有限，于是 $X_t\varepsilon_{t+i}$ 良定义。根据性质 13.4.2(4)(6) 可知：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|\psi_j\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+i}|\right)&=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{n}|\psi_j\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+i}|\right)=\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{j=0}^{n}\psi_j\,\mathrm{E}(|\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+i}|)\right]\\&=\sum_{j=0}^{+\infty}|\psi_j|\,\mathrm{E}(|\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+i}|)\end{aligned}$$

由不等式 4可知：

$$\mathrm{E}(|\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+i}|)=\Big|\mathrm{E}(|\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+i}|)\Big|\leqslant\sqrt{\mathrm{E}(\varepsilon_{t-j}^2)\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t+i}^2)}=\sigma^2$$

因为 $\{\psi_i\}\in l^1$，所以：

$$\mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|\psi_j\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+i}|\right)\leqslant\sigma^2\sum_{j=0}^{+\infty}|\psi_j|<+\infty$$

取控制函数 $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}|\psi_j\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+i}|$，由定理 13.47和性质 13.4.2(6) 可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_t\varepsilon_{t+i})&=\mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+i}\right)=\mathrm{E}\left[\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\psi_j\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+i}\right)\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{n}\psi_j\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+i}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{j=0}^{n}\psi_j\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+i})\right]=0\end{aligned}$$

(2) 由性质 26.1.4(1) 和定理 26.22(1) 立即可得。

(3) 由 AR(p) 模型的定义可得：

$$\begin{pmatrix}X_t\\X_{t+1}\\\vdots\\X_{t+n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_{t-1}&X_{t-2}&\cdots&X_{t-n}\\X_t&X_{t-1}&\cdots&X_{t-n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\X_{t+n-2}&X_{t+n-3}&\cdots&X_{t-1}\end{pmatrix}\alpha+\begin{pmatrix}\varepsilon_t\\\varepsilon_{t+1}\\\vdots\\\varepsilon_{t+n-1}\end{pmatrix}$$

于是：

$$X_{t-1}\begin{pmatrix}X_t\\X_{t+1}\\\vdots\\X_{t+n-1}\end{pmatrix}=X_{t-1}\begin{pmatrix}X_{t-1}&X_{t-2}&\cdots&X_{t-n}\\X_t&X_{t-1}&\cdots&X_{t-n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\X_{t+n-2}&X_{t+n-3}&\cdots&X_{t-1}\end{pmatrix}\alpha_n+X_{t-1}\begin{pmatrix}\varepsilon_t\\\varepsilon_{t+1}\\\vdots\\\varepsilon_{t+n-1}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_n=\Gamma_n\alpha,\quad n\geqslant p$$

第二行是对第一行取期望的结果。对于 $\gamma(0)$，由 (1) 可得：

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \mathrm{E}(X_t^2) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \varepsilon_t\right)^2 = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i}\right)^2 + \mathrm{E}(\varepsilon_t)^2 \\ &= \alpha^T \Gamma_n \alpha + \sigma^2 = \alpha^T \boldsymbol{\gamma}_n + \sigma^2, \quad n \geqslant p\end{aligned}$$

(4) 由 (3) 和定理 26.7立即可得。

(5) 由定理 26.20和 (4) 可知 $\gamma(n)$ 和 $\rho(n)$ 的通解都具有如下形式：

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{r_i-1} c_{ij} n^j \lambda_i^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 为对应常系数齐次线性差分方程的特征方程的根，c_{ij} 为任意常数。若 c_{ij} 全为 0，则 $\gamma(0), \rho(0)$ 都为 0，所以它们不可能全为 0. 由 AR(p) 序列的定义，$|\lambda_i| < 1$，因为 $a_p \neq 0$，所以 $\lambda_i \neq 0$，由此可得 $\gamma(n)$ 和 $\rho(n)$ 始终不为 0。由指数函数与幂函数的收敛速度比较可知 $\gamma(n)$ 和 $\rho(n)$ 的模随着 n 的增大将以指数阶的速度减小。

(6) 由性质 26.1.4可知：

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j e^{ij\lambda} \right|^2$$

根据定理 26.22(1) 中的论述，有：

$$A^{-1}(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i z^i, \quad |z| \leqslant \rho$$

因为 $|e^{i\lambda}| = 1 < \rho$，所以：

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j e^{ij\lambda} = A^{-1}(e^{i\lambda})$$

于是：

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| A^{-1}(e^{i\lambda}) \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi |A(e^{i\lambda})|^2}$$

(7) 由性质 26.1.4(4) 立即可得。 □

26.3.2 MA 模型

Definition 26.23. 设 $\{\varepsilon_t\}$ 是 WN$(0, \sigma^2)$，实数 $b_1, b_2, \ldots, b_q (b_q \neq 0)$ 使得多项式 $B(z) = 0$ 的根都在单位圆内：

$$B(z) = 1 + \sum_{i=1}^{q} b_i z^i \neq 0, \quad \forall\, |z| < 1$$

则称：

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} b_i \varepsilon_{t-i}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

为 q **阶滑动平均模型**，简记为 MA(q) 模型。称满足 MA(q) 模型的平稳时间序列 $\{X_t\}$ 为 MA(q) 序列。若 $B(z) \neq 0$ 对 $|z| \leqslant 1$ 成立，则称对应的 MA(q) 模型为**可逆的 MA(q) 模型**，相应的 MA(q) 序列为**可逆的 MA(q) 序列**。可以用 $B(\mathcal{B})$ 将模型改写为 $X_t = B(\mathcal{B})\varepsilon_t$。对于可逆的 MA($q$) 模型，$B^{-1}(z)$ 有如下展开：

$$B^{-1}(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i z^i, \quad |z| \leqslant 1$$

于是在可逆情况下还可以将模型改写为：

$$\varepsilon_t = B^{-1}(\mathcal{B})X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i X_{t-i}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Theorem 26.23. 设零均值平稳时间序列 $\{X_t\}$ 有自协方差函数 $\{\gamma(n)\}$，则 $\{X_t\}$ 是 MA(q) 序列的充分必要条件为：

$$\gamma(q) \neq 0, \quad \gamma(k) = 0, \, \forall \, |k| > q$$

Property 26.3.2. MA(q) 序列 $\{X_t\}$ 具有如下性质：

1. 令 $b_0 = 1$，则：

$$\mathrm{E}(X_t) = 0, \quad \gamma(n) = \begin{cases} \sigma^2 \sum\limits_{i=0}^{q-n} b_i b_{i+n}, & 0 \leqslant k \leqslant q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

2. $\{X_t\}$ 的自协方差函数 $\gamma(n)$ 和自相关函数 $\rho(n)$ 都具有截尾性，即对任意的 $k > q$ 有 $\gamma(k) = \rho(k) = 0$；

3. 若 $\{X_t\}$ 可逆，对 $j < 0$ 定义 $\psi_j = 0$，那么 $\{\psi_n\}$ 具有递推公式：

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_j = -\sum_{i=1}^{q} b_i \psi_{j-i}, \, \forall \, j \geqslant 1$$

4. $\{X_t\}$ 具有谱密度：

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{q} b_j e^{ij\lambda} \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} |B(e^{i\lambda})|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

5. $\{X_t\}$ 的自协方差矩阵为正定矩阵；

6. 若 $\{X_t\}$ 可逆，则 $\{X_t\}$ 是最小序列；若 $\{X_t\}$ 不可逆，则 $\{X_t\}$ 不是最小序列；

Proof. (1) 由定理 26.10立即可得。

(2) 由 (1) 立即得出。

(3) 对 $k<0$ 定义 $\psi_k=0$，因为 $\{X_t\}$ 可逆，所以：

$$
\begin{aligned}
1=B(z)B^{-1}(z) &= \left(1+\sum_{i=1}^{q}b_i z^i\right)B^{-1}(z)=\sum_{i=0}^{q}b_i z^i\sum_{j=0}^{+\infty}\psi_j z^j \\
&=\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{+\infty}b_i z^i\psi_j z^j=\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{q}b_i\psi_j z^{i+j}=\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{q}b_i\psi_{j-i}\right)z^j
\end{aligned}
$$

对比系数可得（递推公式）：

$$
\sum_{i=0}^{q}b_i\psi_{-i}=1,\quad \sum_{i=0}^{q}b_i\psi_{j-i}=0,\ \forall\, j\geqslant 1
$$

(4) 由性质 26.3.1(6) 和 $B(z)$ 的定义立即可得。

(5) 由 (4) 和定理 26.6立即可得。 □

26.3.3 ARMA

Definition 26.24. 设 $\{\varepsilon_t\}$ 是 $\mathrm{WN}(0,\sigma^2)$，实系数多项式 $A(z)=0$ 和 $B(z)=0$ 没有公共根且满足 $b_0=1$，$a_pb_q\neq 0$ 和：

$$
A(z)=1-\sum_{i=1}^{p}a_i z^i\neq 0,\ |z|\leqslant 1\quad B(z)=\sum_{i=0}^{q}b_i z^i\neq 0,\ |z|<1
$$

则称差分方程：

$$
X_t=\sum_{i=1}^{p}a_iX_{t-i}+\sum_{i=0}^{q}b_i\varepsilon_{t-i}
$$

为**自回归滑动平均模型**，简称为 $\mathrm{ARMA}(p,q)$ 模型。称满足 $\mathrm{ARMA}(p,q)$ 模型的平稳时间序列 $\{X_t\}$ 为 $\mathrm{ARMA}(p,q)$ 序列。可以用 $A(\mathcal{B})$ 与 $B(\mathcal{B})$ 将模型改写为 $A(\mathcal{B})X_t=B(\mathcal{B})\varepsilon_t$。若要求 $B(z)$ 在单位圆上也没有根，则称此时的 $\mathrm{ARMA}(p,q)$ 模型为**可逆的** $\mathrm{ARMA}(p,q)$ **模型**，相应的 $\mathrm{ARMA}(p,q)$ 序列为**可逆的** $\mathrm{ARMA}(p,q)$ **序列**。对于可逆的 $\mathrm{ARMA}(p,q)$ 模型，令 $z_1,z_2,\ldots,z_s$ 为 $B(z)=0$ 的全部互异根，$1<\rho<\min\limits_i\{|z_i|\}$，则 $B^{-1}(z)A(z)$ 在 $\{z:|z|\leqslant\rho\}$ 内解析，从而有如下展开式：

$$
B^{-1}(z)A(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}\varphi_i z^i,\quad |z|\leqslant\rho
$$

且这个级数式绝对收敛的。由绝对收敛性可知 $|\psi_i z^i|\to 0$，即 $|\psi_i|=o(\rho^{-i})$，所以 $\{\psi_i\}\in l^1$。在 $A(\mathcal{B})X_t=B(\mathcal{B})\varepsilon_t$ 两边同乘 $B^{-1}(\mathcal{B})$ 即可将模型改写为：

$$
\varepsilon_t=B^{-1}(\mathcal{B})A(\mathcal{B})=\sum_{i=0}^{+\infty}\varphi_iX_{t-i}
$$

若不对 $A(z)$ 的根与 $B(z)$ 的根做任何限制，称差分方程 $A(\mathcal{B})X_t=B(\mathcal{B})\varepsilon_t$ 为**广义的** $\mathrm{ARMA}(p,q)$ **模型**。

Theorem 26.24. 在 $\text{ARMA}(p,q)$ 模型中，设 $A(z)=0$ 有 s 个互异根 $z_1,z_2,\ldots,z_s$，根的重数分别为 $r_1,r_2,\ldots,r_s$，$1<\rho<\min\limits_i\{|z_i|\}$，则：

1. $\text{ARMA}(p,q)$ 模型的唯一平稳解是：

$$X_t=\sum_{i=0}^{+\infty}\psi_i\varepsilon_{t-i}$$

其中 ψ_i 为 $\Phi(z)=A^{-1}(z)B(z)$ 在 $\{z:|z|\leqslant\rho\}$ 内展开的幂级数的系数，称之为 ***Wold* 系数**，对 $j<0$ 定义 $\psi_j=0$，对 $j>q$ 定义 $b_j=0$，那么它具有递推公式：

$$\psi_0=1,\quad \psi_j=b_j+\sum_{i=1}^{p}a_i\psi_{j-i},\ \forall\, j\geqslant 1$$

2. $\text{ARMA}(p,q)$ 模型的通解为：

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\psi_i\varepsilon_{t-i}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1}c_{ij}t^jz_i^{-t}$$

其中 c_{ij} 为任意常数；

3. $\text{ARMA}(p,q)$ 模型的任一解都以负指数阶的速度收敛到平稳解，$\min\limits_i|z_i|$ 越大，收敛越快。

Proof. (1) 因为 $A(z)$ 满足平稳性条件，所以存在 $\rho>1$ 使得在 $\{z:|z|\leqslant\rho\}$ 内 $A^{-1}(z)B(z)$ 解析，从而有展开式：

$$\Phi(z)=A^{-1}(z)B(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}\psi_iz^i,\quad |z|\leqslant\rho$$

且这个级数是绝对收敛的。由绝对收敛性可知 $|\psi_iz^i|\to 0$，即 $|\psi_i|=o(\rho^{-i})$，所以 $\{\psi_i\}\in l^1$，由定理 26.11可知 $\{X_t\}$ 是平稳序列。在

$$X_t=\sum_{i=0}^{+\infty}\psi_i\varepsilon_{t-i}$$

两边同乘 $A(\mathcal{B})$ 即可得到 $A(\mathcal{B})X_t=B(\mathcal{B})\varepsilon_t$，所以 $\{X_t\}$ 是 $\text{ARMA}(p,q)$ 模型的平稳解。

设还有另一平稳解 $\{Y_t\}$，即 $A(\mathcal{B})Y_t=B(\mathcal{B})\varepsilon_t$ 且 $A^{-1}(\mathcal{B})$ 存在，则：

$$Y_t=A^{-1}(\mathcal{B})B(\mathcal{B})\varepsilon_t=X_t$$

综上，$\{X_t\}$ 是 $\text{ARMA}(p,q)$ 模型唯一的平稳解。

定义 $a_0=-1$，则：

$$\begin{aligned}A(z)\Phi(z)&=\left(1-\sum_{i=1}^{p}a_iz^i\right)\Phi(z)=-\sum_{i=0}^{p}a_iz^i\sum_{j=0}^{+\infty}\psi_jz^j\\&=-\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{+\infty}a_iz^i\psi_jz^j=-\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{p}a_i\psi_jz^{i+j}=-\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{p}a_i\psi_{j-i}\right)z^j\end{aligned}$$

最后一步是求和换元后的结果。又有：

$$A(z)\Phi(z)=B(z)=\sum_{i=0}^{q}b_iz^i$$

对比系数可得（递推公式）：

$$-\sum_{i=0}^{p}a_i\psi_{-i}=b_0,\quad -\sum_{i=0}^{p}a_i\psi_{j-i}=b_i,\ \forall\, j\geqslant 1$$

(2) 由 (1)、定理 26.19与定理 26.20即可得通解为：

$$X_t+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1}c_{ij}t^jz_i^t=\sum_{i=0}^{+\infty}\psi_i\varepsilon_{t-i}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1}c_{ij}t^jz_i^{-t}$$

(3) 由 (1)(2) 可得对于 ARMA(p,q) 模型的任一解 $\{Y_t\}$ 有：

$$|X_t-Y_t|=\left|\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1}c_{ij}t^jz_i^{-t}\right|\leqslant O\left[\left(\min_i\{|z_i|\}\right)^{-t}\right]$$ □

note 26.3. 上述定理给了我们一个产生 ARMA(p,q) 序列的方式。先任意选择 p 个初始值，然后根据自回归系数和白噪声序列产生序列 $\{Y_t\}$。因为任意的 $\{Y_t\}$ 都以负指数阶的速度收敛到平稳解，取一个较大的 m 然后令 $X_t=Y_{m+t}$ 即可得到近似的 ARMA(p,q) 序列 $\{X_t\}$。

Property 26.3.3. ARMA(p,q) 序列 $\{X_t\}$ 具有如下性质：

1. 对任意的 $i\geqslant 1$ 且 $i\in\mathbb{N}^+$，X_t 与 ε_{t+i} 不相关；

2. $\gamma(n)=\sigma^2\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\psi_i\psi_{i+n}$；

3. *(Yule-Walker 方程)* $\{X_t\}$ 的自协方差函数满足：

$$\gamma(n)-\sum_{i=1}^{p}a_i\gamma(n-i)=\begin{cases}\sigma^2\sum\limits_{i=n}^{q}b_i\psi_{i-n}, & 1\leqslant n\leqslant q\\ 0 & n>q\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\gamma(q+1)\\ \gamma(q+2)\\ \vdots\\ \gamma(q+p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma(q) & \gamma(q-1) & \cdots & \gamma(q-p+1)\\ \gamma(q+1) & \gamma(q) & \cdots & \gamma(q-p+2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma(q+p-1) & \gamma(q+p-2) & \cdots & \gamma(q)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_p\end{pmatrix}$$

记上述矩阵为 $\Gamma_{p,q}$；

4. $\{X_t\}$ 的自协方差函数与自相关函数具有截尾性，即对任意的 $k>q$ 有 $\gamma(k)=\rho(k)=0$，且二者的模随着 n 的增大指数衰减；

5. $\{X_t\}$ 具有谱密度：

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{+\infty}\psi_j e^{ij\lambda}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\frac{B(e^{i\lambda})}{A(e^{i\lambda})}\right|^2$$

6. $\{X_t\}$ 的自协方差矩阵为正定矩阵；

Proof. (1) 由定理 26.24(1) 和性质 26.3.1(1) 立即可得。

(2) 由定理 26.24(1) 和性质 26.1.4(1) 立即可得。

(3) 对 $j<0$ 定义 $\psi_j=0$，则：

$$\begin{aligned}
\gamma(n) = \mathrm{E}(X_t X_{t-n}) &= \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \sum_{i=0}^{q} b_i \varepsilon_{t-i}\right) X_{t-n}\right] \\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} X_{t-n}\right) + \mathrm{E}\left(\sum_{i=0}^{q} b_i \varepsilon_{t-i} X_{t-n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} a_i \gamma(n-i) + \mathrm{E}\left(\sum_{i=0}^{q} b_i \varepsilon_{t-i} \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-n-j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} a_i \gamma(n-i) + \sigma^2 \sum_{j=0}^{q} b_j \psi_{j-n} = \sum_{i=1}^{p} a_i \gamma(n-i) + \sigma^2 \sum_{j=n}^{q} b_j \psi_{j-n}
\end{aligned}$$

(4) 截尾性由 (3) 立即得出。由不等式 1、(2) 和定理 26.24(1) 中的 $|\psi_i| = o(\rho^{-1})$ 可得：

$$\begin{aligned}
|\gamma(n)| &= \left|\sigma^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \psi_{i+n}\right| \leqslant \sigma^2 \sum_{i=0}^{+\infty} |\psi_i||\psi_{i+n}| \leqslant \sigma^2 \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_{i+n}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant c_0 \left(\sum_{i=n}^{+\infty} \rho^{-2i}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant c_1 \rho^{-n}
\end{aligned}$$

于是自协方差函数与自相关函数的模随着 n 的增大指数衰减。

(5) 由性质 26.1.4(3) 和 $\Phi(z)$ 的定义立即可得。

(6) 由 (5) 和定理 26.6立即可得。 □

26.3.4 ARIMA 模型

Definition 26.25. 设 $\{\varepsilon_t\}$ 是 $\mathrm{WN}(0,\sigma^2)$，实系数多项式 $A(z)=0$ 和 $B(z)=0$ 没有公共根且满足 $b_0=1$，$a_p b_q \neq 0$ 和：

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p} a_i z^i \neq 0,\ |z| \leqslant 1 \quad B(z) = \sum_{i=0}^{q} b_i z^i \neq 0,\ |z| < 1$$

则称差分方程：

$$A(\mathcal{B})(1-\mathcal{B})^d X_t = B(\mathcal{B})\varepsilon_t$$

为 ***ARIMA* 模型**，记为 $\mathrm{ARMA}(p,d,q)$ 模型。若 $Y_t = (1-\mathcal{B})^d X_t$ 是 $\mathrm{ARMA}(p,q)$ 序列，则称 $\{X_t\}$ 是$\mathrm{ARIMA}(p,d,q)$ **序列**。

Theorem 26.25. ARIMA(p,d,q) 模型的通解为：

$$X_t=\sum_{i=0}^{d-1}c_it^i+\sum_{n_{d-1}=1}^{t}\cdots\sum_{n_1=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}Y_i$$

其中 c_i 为随机变量。

Proof. 当 $k=1$ 时，给定初值 X_0，有：

$$X_t=X_{t-1}+Y_t=X_{t-2}+Y_{t-1}+Y_t=\cdots=X_0+\sum_{i=1}^{t}Y_i=X_0t^0+\sum_{i=1}^{t}Y_i$$

即 $k=1$ 时结论成立。设 $k=d-1$ 时结论成立，即：

$$X_t=\sum_{i=1}^{d-2}c_it^i+\sum_{n_{d-2}=1}^{t}\cdots\sum_{n_1=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}Y_i$$

则 $k=d$ 时有：

$$Y_t=(1-\mathcal{B})^dX_t=(1-\mathcal{B})^{d-1}(1-\mathcal{B})X_t$$

令 $(1-\mathcal{B})X_t=X_t-X_{t-1}=Z_t$，由归纳假设可知：

$$Z_t=\sum_{i=1}^{d-2}c_i't^i+\sum_{n_{d-2}=1}^{t}\cdots\sum_{n_1=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}Y_i$$

所以：

$$\begin{aligned}
X_t&=X_{t-1}+Z_t=X_{t-2}+Z_{t-1}+Z_t=X_0+\sum_{i=1}^{t}Z_i\\
&=X_0+\sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{j=1}^{d-2}c_j'i^j+\sum_{n_{d-2}=1}^{i}\cdots\sum_{n_1=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1}Y_j\right)\\
&=X_0+\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{d-2}c_j'i^j+\sum_{i=1}^{t}\sum_{n_{d-2}=1}^{i}\cdots\sum_{n_1=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1}Y_j\\
&=X_0+\sum_{j=1}^{d-2}\sum_{i=1}^{t}c_j'i^j+\sum_{n_{d-1}=1}^{t}\sum_{n_{d-2}=1}^{n_{d-1}}\cdots\sum_{n_1=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1}Y_j\\
&=X_0t^0+\sum_{i=1}^{d-1}C_it^i+\sum_{n_{d-1}=1}^{t}\sum_{n_{d-2}=1}^{n_{d-1}}\cdots\sum_{n_1=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1}Y_j\\
&=\sum_{i=0}^{d-1}C_it^i+\sum_{n_{d-1}=1}^{t}\cdots\sum_{n_1=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}Y_i
\end{aligned}$$

倒数第三行到倒数第二行使用了多项式的结论，其中 C_i 由 $\{X_t\}$ 初始的 d 个值决定。 □

单位根模型

Definition 26.26. 称 ARIMA$(p,1,q)$ 模型为**单位根模型**。

26.4 本科时间序列

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} x_t}{n}$$

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{n-k},\ \hat{\gamma}(0) = s^2$$

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}$$

acf(x, lag=) 虚线为自相关系数 2 倍标准差位置

平稳性检验

1. 时序图观察
2. 自相关系数图 acf 函数，应呈现出迅速衰减向 0

白噪声检验

同均值同方差不相关

Theorem 26.26. 如果一个时间序列是白噪声，得到一个观察期数为 n 的观察序列 $\{x_t\}$，那么有：

$$\hat{\rho}_k \sim \mathrm{N}\left(0, \frac{1}{n}\right),\ \forall\ k \neq 0$$

近似成立。

推导 26.5. 构建假设：

1. 原假设：延迟期数小于或等于 m 期的序列值之间相互独立，即：

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_m = 0$$

2. 备择假设：延迟期数小于或等于 m 期的序列值之间有相关性，即：

确定这里是有相关性而不是不独立吗？

$$\text{至少存在某个}\rho_k \neq 0,\ k \leqslant m$$

构建 Q 统计量：

$$Q = n\sum_{k=1}^{m} \hat{\rho}_k^2$$

若原假设成立，则 $\hat{\rho}_k^2$ 之间也彼此独立，于是：

$$Q = \sum_{k=1}^{m} (\sqrt{n}\hat{\rho}_k)^2 \sim \chi_m^2$$

当原假设不成立时，Q 统计量的值应该偏大，于是拒绝域取 χ_m^2 分布的上 α 分位点。

Box 和 *Ljung* 为了弥补小样本情况时 Q 统计量效果较差的问题，推导出了 *LB* 统计量：

$$LB = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}\right) \sim \chi_m^2$$

两种检验的代码为 *Box.test(x, type=, lag=)*

26.5 参数估计

26.5.1 平稳序列的数学期望

点估计

Definition 26.27. 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是平稳序列 $\{X_t\}$ 的观测值，$\mu = \mathrm{E}(X_t)$ 的点估计定义为：

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Theorem 26.27. 设平稳序列 $\{X_t\}$ 有均值 μ 和自协方差函数 $\{\gamma(n)\}$，则：

1. $\bar{X}_n$ 是 μ 的无偏估计；
2. 如果 $\gamma(n) \to 0$，则 $\bar{X}_n$ 是 μ 的相合估计；
3. 如果 $\{X_t\}$ 是严平稳遍历序列，则 $\bar{X}_n$ 是 μ 的强相合估计。

Proof. (1) 显然。

(2) 注意到：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(\bar{X}_n-\mu)^2] &= \mathrm{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right)^2\right] = \mathrm{E}\left\{\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{n^2}\mathrm{E}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right]^2\right\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma(j-i) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=-n+1}^{n-1}(n-|i|)\gamma(i) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{i=-n+1}^{n-1}(n-|i|)|\gamma(i)| \\
&\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{i=-n+1}^{n-1}n|\gamma(i)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=-n+1}^{n-1}|\gamma(i)| \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n}|\gamma(i)|
\end{aligned}$$

由无穷小序列的平均值序列也是无穷小序列可得 $\mathrm{E}[(\bar{X}_n-\mu)^2] \to 0$，由不等式 19和 (1) 可知对任意的 $\varepsilon > 0$ 有：

$$P(|\bar{X}_n-\mu| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{E}[(\bar{X}_n-\mu)^2]}{\varepsilon^2} \to 0, \quad n \to +\infty$$

所以 $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$，即 $\bar{X}_n$ 是 μ 的相合估计。

(3) 由遍历定理立即可得。 □ 遍历定理

Corollary 26.3. 对于线性平稳序列，$\bar{X}_n$ 是均值 μ 的无偏估计、相合估计和强相合估计。

Proof. 由性质 26.1.4(1)(5) 立即可得。 □

分布

Theorem 26.28. 设 $\{\varepsilon_t\}$ 是独立同分布的 $\mathrm{WN}(0, \sigma^2)$，平稳序列 $\{X_t\}$ 由：

$$X_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

定义。若 $\{X_t\}$ 的谱密度：

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j e^{ij\lambda} \right|^2$$

在 $\lambda = 0$ 处连续且 $f(0) \neq 0$，则 $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ 依分布收敛到 $\mathrm{N}[0, 2\pi f(0)]$。

Corollary 26.4. 若 $\{\psi_n\} \in l^1$，$\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \neq 0$，则 $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ 依分布收敛到 $\mathrm{N}[0, 2\pi f(0)]$，其中：

$$2\pi f(0) = \gamma(0) + 2\sum_{i=1}^{+\infty} \gamma(i)$$

26.5.2 平稳序列的自协方差

Definition 26.28. 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是平稳序列 $\{X_t\}$ 的观测值，$\gamma(k)$ 的点估计有如下两种定义：

$$\hat{\gamma}(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n-k} (x_i - \bar{x}_n)(x_{i+k} - \bar{x}_n) \\ \dfrac{1}{n-k} \sum\limits_{i=1}^{n-k} (x_i - \bar{x}_n)(x_{i+k} - \bar{x}_n) \end{cases}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

而对于 $-(n-1) \leqslant k < 0$，定义 $\hat{\gamma}(k) = \hat{\gamma}(-k)$。

定义 $\{X_t\}$ 自相关函数 $\rho(k)$ 的点估计为：

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}$$

Theorem 26.29. 对于平稳序列 $\{X_t\}$ 自协方差函数 $\gamma(k)$ 的两种点估计，有：

1. 若 $\gamma(k) \to 0$，则 $\hat{\gamma}(k)$ 是 $\gamma(k)$ 的渐进无偏估计，即：

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}[\hat{\gamma}(k)] = \gamma(k)$$

2. 若 $\{X_t\}$ 是严平稳遍历序列，则 $\hat{\gamma}(k)$ 和 $\hat{\rho}(k)$ 分别为 $\gamma(k)$ 和 $\rho(k)$ 的强相合估计，即：

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{\gamma}(k) = \gamma(k),\ a.e. \qquad \lim_{n \to +\infty} \hat{\rho}(k) = \rho(k),\ a.e.$$

26.6 预测

第七部分

试验设计

Chapter 27

试验设计基本概念

1. 响应变量 (response)：衡量实验结果好坏的指标。
    - 定量响应变量。
    - 定性响应变量。
2. 因子 (factor)：影响响应变量的因素。
3. 水平：试验中因子所处的各个状态称之为因子的水平。
4. 完全随机化设计：为了控制未作为因子考虑的其它因素，所有试验应按随机顺序进行，使得试验设计成为一个完全随机化设计。

析因问题，试验点，p^k 设计

第八部分

抽样调查

符号说明

符号		说明
N		总体中个体的总数
n		样本单元个数
Y_k	$k = 1, 2, \ldots, N$	总体中个体的值
y_k	$k = 1, 2, \ldots, n$	样本中样本单元的值
$p(s)$		样本概率
π_k	$k = 1, 2, \ldots, N$	个体的入样概率
w_k	$k = 1, 2, \ldots, N$	个体的抽样权重
τ		总量
μ		均值
σ^2		方差
s^2		样本方差
Z_i	$i = 1, 2, \ldots, N$	表示个体是否入样的示性变量
Q_i	$i = 1, 2, \ldots, N$	个体在样本中出现的次数
p		阳性率
d		误差幅度
X_k	$k = 1, 2, \ldots, N$	总体中个体对应的辅助变量值
x_k	$k = 1, 2, \ldots, n$	样本中样本单元对应的辅助变量值
B		比例估计系数
H		分层抽样总层数
h	$h = 1, 2, \ldots, H$	层下标
S_h	$h = 1, 2, \ldots, H$	某一层中所有个体构成的集合
N_h	$h = 1, 2, \ldots, H$	层中个体的总数
n_h	$h = 1, 2, \ldots, H$	层中的样本数
Y_{hj}	$h = 1, 2, \ldots, H,\ j = 1, 2, \ldots, N_h$	层中个体的值
y_{hj}	$h = 1, 2, \ldots, H,\ j = 1, 2, \ldots, n_h$	层中样本单元的值
c_h	$h = 1, 2, \ldots, H$	层中抽样的平均成本

表 27.1: 符号说明表

Chapter 28

抽样调查基本概念

28.1 抽样调查的目的

抽样调查最直接的主要任务，就是根据测得的样本（样本需要能够反应总体的差异）数量指标 $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，对总体 $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\}$ 的一些数字特征进行估计。如估计：

1. 总体均值$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$, 总体总量$\tau = \sum_{i=1}^{N} Y_i$。

2. [1]总体方差$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \mu)^2$。

3. 总体中满足某一特征的单元所占比例 p。

4. 总体分布的分位数。

28.2 目标群体、源群体、研究群体

- 目标群体：研究者希望对其进行描述或推断的群体。

- 源群体：研究者实际用于选择样本的群体，通常是目标群体的一个子集或一个接近目标群体的群体。

- 研究群体：抽样后的样本

[1]这里指的是有限总体的方差，我们在抽样调查中认为有限总体也相当于一个样本，以样本方差公式计算其方差。在无限总体的情况下，分母取 N。

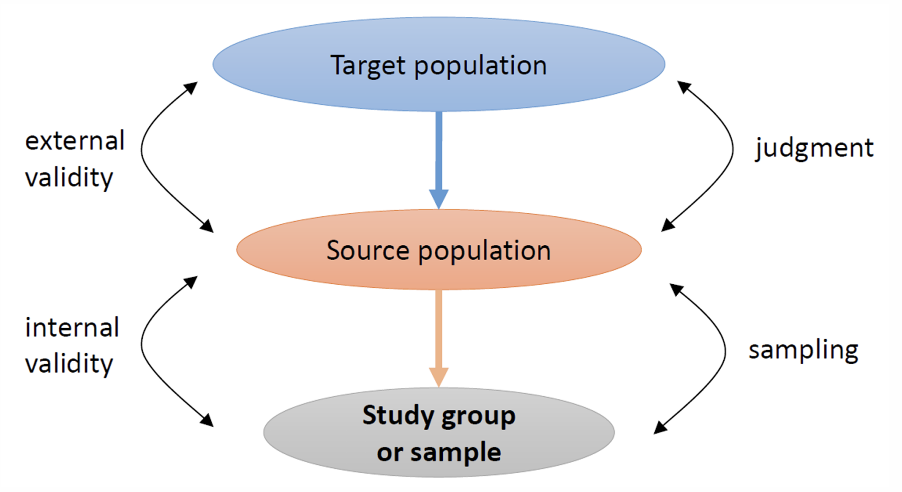

图 28.1: 群体

28.3 抽样设计

- 抽样设计
  - 概率抽样
    - 简单随机抽样
    - 分层抽样
    - 整群抽样
  - 非概率抽样
    - 方便抽样
    - 雪球抽样
    - 判断抽样

- 概率抽样样本是随机产生的，非概率抽样样本不是随机产生的。
- 非概率抽样无法判断样本是否具备代表性，也就无法确定抽样误差。但在一定程度上可以说明总体的特征。
- 方便抽样是选择最容易获得的样本作为研究对象。
- 雪球抽样是先选择一个较小的样本，再让这个样本中的样本单元去提供一些样本。
- 判断抽样是研究人员从总体中选择自己认为最能代表总体的个体作为样本。

28.4 抽样框架

对可以选择作为样本单元的群体单位列出的名册或排序编号，用以确定总体的抽样范围和结构。

28.5 抽样调查随机性的来源

28.5.1 基于模型的方法

绝大多数统计学课程是基于模型的 (model-based approch)，它将总体看作是背后随机变量的实现，随机性来源于随机变量的取值。

28.5.2 基于设计的方法

抽样调查是基于设计的 (design-based approch)，它将总体中个体的值看作为定值，而随机性来源于是否抽到该个体。

28.6 概率抽样概述

28.6.1 样本概率

记一个可能的样本为 s，记在抽样设计下出现这个样本的概率[2]为 $p(s)$，应有 $\sum\limits_{s} p(s) = 1$。

28.6.2 入样概率与抽样权重

对于任意个体 Y_k，该个体的入样概率 π_k 记为 $\sum\limits_{Y_k \in s} p(s)$，该个体的抽样权重 w_k 定义为 $\frac{1}{\pi_k}$，表示该个体可以代表总体里的多少个个体。若每个个体的抽样权重都一样，则称产生的样本为自加权 (self-weighting)样本。

[2]样本出现的概率未必是等可能的。

Chapter 29

简单随机抽样

简单随机抽样分为不放回型简单随机抽样 (simple random sampling, SRS)与放回型简单随机抽样 (simple random sampling with replacement, SRSWR)两种。我们通常更喜欢不放回抽样，因为同一个个体在样本中多次出现并不能提供额外的信息，同时有放回抽样会导致估计量的方差更大。

简单随机抽样意味着每个样本出现的概率是一样的，即 $p(s)$ 一致，那么每个个体的入样概率也是一致的（样本出现概率一致时每个个体的入样概率服从古典概型）。

29.1 SRS 的参数估计

SRS 中 Z 的相关性质

Theorem 29.1. *SRS 中表示个体是否入样的示性变量具有如下性质：*

$$E(Z_i) = \frac{n}{N}$$
$$Var(Z_i) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)$$
$$Cov(Z_i, Z_j) = \frac{-n}{N(N-1)}\left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

Proof. 每个个体被抽到的概率为：

$$\pi_k = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}$$

由此可知个体示性变量的期望：

$$E(Z_i) = 1 \times P(Z_i = 1) = 1 \times \pi_i = \frac{n}{N}$$

注意到 $E(Z_i^2) = 0 \times P(Z_i^2 = 0) + 1 \times P(Z_i^2 = 1) = P(Z_i = 1) = E(Z_i)$，即有：

$$Var(Z_i) = E(Z_i^2) - E^2(Z_i) = E(Z_i)\,(1 - E(Z_i)) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

注意到 $E(Z_iZ_j) = P(Z_i = 1,\ Z_j = 1)$，所以：

$$Cov(Z_i, Z_j) = E(Z_iZ_j) - E(Z_i)E(Z_j) = \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} - E^2(Z_i) = \frac{-n}{N(N-1)}\left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad \square$$

29.1.1 SRS 总体均值 μ 的估计

点估计及点估计的性质

Theorem 29.2. 在 *SRS* 中中利用样本均值可对总体均值 μ 给出如下点估计：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_iZ_i$$

该点估计具有如下性质：

$$E(\hat{\mu}) = \mu,\ Var(\hat{\mu}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{\sigma^2}{n}$$

$$\widehat{Var}(\hat{\mu}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{s^2}{n}\text{是关于}Var(\hat{\mu})\text{的无偏估计。}$$

其中方差的计算见下文总体总量方差的推导，由方差的性质即可推导出总体均值的方差。[1]

区间估计

Theorem 29.3. 由大数定律，大样本下有：

$$\frac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{Var(\hat{\mu})}} \sim N(0,\ 1)$$

所以 *SRS* 中总体均值 μ 的区间估计如下：

$$\hat{\mu} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\mu})}$$

由于 $Var(\hat{\mu})$ 的计算中涉及未知参数 σ^2，以 $\widehat{Var}(\hat{\mu})$ 代替，因此置信度为 $(1-\alpha)$ 的估计的双侧置信区间为：

$$\hat{\mu} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\mu})}$$

29.1.2 SRS 总体总量 τ 的估计

点估计

利用样本均值进行估计

Definition 29.1. 在 *SRS* 中利用样本均值可对总体总量 τ 给出如下点估计：

$$\hat{\tau} = N\hat{\mu} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_iZ_i$$

[1] $(1 - \frac{n}{N})$ 被称之为有限群体校正分数 (finite population correction fraction, FPC)，有放回抽样或 N 远大于 n 时不需要 FPC。

Horvitz-Thompson 估计量（HT 估计量）

Definition 29.2. *在 SRS 中引入抽样权重可给出关于 τ 的 HT 估计：*

$$\hat{\tau} = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i = \sum_{i=1}^{N} w_i Y_i Z_i$$

点估计的性质

Theorem 29.4. *关于 SRS 总体总量 τ 的点估计有如下性质：*

$$E(\hat{\tau}) = \tau$$

$$Var(\hat{\tau}) = N^2\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma^2}{n}, \quad \widehat{Var}(\hat{\tau}) = N^2\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s^2}{n}$$

下给出点估计估计量方差公式的证明。

Proof. 将方差展开可得到：

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\tau}) &= Var\left(\sum_{i=1}^{N} w_i Y_i Z_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N} Var(w_i Y_i Z_i) + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N} Cov(w_i Y_i Z_i, w_j Y_j Z_j)\\
&= \sum_{i=1}^{N} w_i^2 Y_i^2 Var(Z_i) + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N} w_i Y_i w_j Y_j Cov(Z_i, Z_j)
\end{aligned}$$

注意到 $w_i = \frac{N}{n}$ 并代入 Z_i 相关性质的公式可以得到：

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\tau}) &= \sum_{i=1}^{N} w_i^2 Y_i^2 Var(Z_i) + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N} w_i Y_i w_j Y_j Cov(Z_i, Z_j)\\
&= \frac{N}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[(N-1)Y_i^2 - \sum_{j=i+1}^{N} 2Y_iY_j\right]\\
&= \frac{N}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(N-1)Y_i^2 - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N} 2Y_iY_j\right]\\
&= \frac{N}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(N-1)Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{N} Y_i^2\right]\\
&= \frac{N}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\left[N\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)^2\right]\\
&= \frac{N^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - N\mu^2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{\tau}) &= \frac{N^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - 2N\mu^2 + N\mu^2\right) \\
&= \frac{N^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{N} Y_i + N\mu^2\right) \\
&= \frac{N^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\mu)^2 \\
&= \frac{N^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\sigma^2
\end{aligned}
$$

□

区间估计

Theorem 29.5. 由大数定律，大样本下有：

$$\frac{\hat{\tau}-\tau}{\sqrt{Var(\hat{\tau})}} \sim N(0,\ 1)$$

所以 *SRS* 中总体总量 τ 的区间估计如下：

$$\hat{\tau} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\tau})}$$

由于 $Var(\hat{\tau})$ 的计算中涉及未知参数 σ^2，以 $\widehat{Var}(\hat{\tau})$ 代替，因此置信度为 $(1-\alpha)$ 的估计的双侧置信区间为：

$$\hat{\tau} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\tau})}$$

29.1.3 SRS 总体方差 σ^2 的估计

Definition 29.3. 在 *SRS* 中利用样本方差可对总体方差 σ^2 给出如下点估计：

$$\hat{\sigma^2} = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\hat{\mu})^2 Z_i$$

29.2 SRS 阳性率问题

阳性率问题是前述问题的一种特殊形式，Y_i 只能在 0 和 1 中取值。因此阳性率 p 即为总体均值 μ。

29.2.1 阳性率 p 的估计

点估计

Definition 29.4. 在 *SRS* 中利用样本阳性率可给出阳性率 p 的点估计如下：

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i Z_i$$

该点估计具有如下性质：

$$E(\hat{p}) = p, \quad Var(\hat{p}) = \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma^2}{n}, \quad \widehat{Var}(\hat{p}) = \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s^2}{n}$$

区间估计

Theorem 29.6. 由大数定律，大样本下有：

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{Var(\hat{p})}} \sim N(0,\ 1)$$

所以 *SRS* 中阳性率 p 的区间估计如下：

$$\hat{p} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(\hat{p})}$$

由于 $Var(\hat{p})$ 的计算中涉及未知参数 σ^2，以 $\widehat{Var}(\hat{p})$ 代替，因此置信度为 $(1-\alpha)$ 的估计的双侧置信区间为：

$$\hat{p} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{p})}$$

上述计算公式需要满足 $n\hat{p} \geqslant 5$ 和 $n(1-\hat{p}) \geqslant 5$，即大样本条件。

29.2.2 总体方差 σ^2 的估计

总体方差 σ^2 与总体均值 p 的关系

由于 $Y_i^2 = Y_i$，可得：

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - p)^2 = \frac{N}{N-1}p(1-p)$$

点估计

Definition 29.5. 在 *SRS* 中利用样本方差可对总体方差 σ^2 给出如下点估计：

$$\hat{\sigma^2} = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{p})^2 = \frac{n}{n-1}\hat{p}(1-\hat{p})$$

29.3 SRSWR 的参数估计

SRSWR 中 Q 的相关性质

Theorem 29.7. *SRSWR* 中表示个体在样本中出现次数的变量 Q_i 具有如下性质：

$$\overrightarrow{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_N) \sim \mathit{Multi}\left(n,\ \overbrace{\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}\right)}^{N\text{个}\ \frac{1}{N}}\right)$$

$$Q_i \sim \mathit{Binom}\left(n,\ \frac{1}{N}\right)$$

$$E(Q_i) = \frac{n}{N},\ Var(Q_i) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right),\ Cov(Q_i,\ Q_j) = -\frac{n}{N^2}$$

Proof. 由多项分布性质：多项分布随机变量的一维边际分布是二项分布，因此上第二、三式成立。下证第四式，将 Q_i 分解为独立二项分布随机变量的和，有：

$$\begin{aligned} Cov(Q_i,\ Q_j) &= Cov\left[\sum_{k=1}^{n} I_i(k),\ \sum_{l=1}^{n} I_j(l)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} Cov[I_i(k),\ I_j(l)] \\ &= \sum_{k=l} Cov[I_i(k),\ I_j(l)] + \sum_{k\neq l} Cov[I_i(k),\ I_j(l)] \end{aligned}$$

由二项分布随机变量的独立性，后一项为 0：

$$Cov(Q_i,\ Q_j) = \sum_{k=1}^{n} Cov[I_i(k),\ I_j(k)] = \sum_{k=1}^{n} \{E[I_i(k)I_j(k)] - E[I_i(k)]E[I_j(k)]\}$$

由于同一次伯努利实验中不可能出现两个结果，所以前一项为 0：

$$Cov(Q_i,\ Q_j) = -\sum_{k=1}^{n} E[I_i(k)]E[I_j(k)] = -np_ip_j = -\frac{n}{N^2}$$

□

29.3.1 SRSWR 总体总量 τ 的估计

Theorem 29.8. *在 SRS 中中利用样本均值可对总体总量 τ 给出如下点估计：*

$$\hat{\tau} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_iQ_i$$

该点估计具有如下性质：

$$E(\hat{\tau}) = \tau,\ Var(\hat{\tau}) = \frac{N(N-1)}{n}\sigma^2$$

Proof. 将方差展开可得到：

$$\begin{aligned} Var(\hat{\tau}) &= Var\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N} Q_iY_i\right) \\ &= \frac{N^2}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 Var(Q_i) + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N} Y_iY_jCov(Q_i, Q_j)\right] \\ &= \frac{N^2}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2\frac{n}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right) + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N} Y_iY_j\frac{-n}{N^2}\right] \\ &= \frac{N}{n}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2\left(1-\frac{1}{N}\right) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N} 2Y_iY_j\right] \end{aligned}$$

此处使用平方和公式（该技巧常用）：

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{\tau}) &= \frac{N}{n}\left\{\sum_{i=1}^{N} Y_i^2\left(1-\frac{1}{N}\right)-\frac{1}{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)^2-\sum_{i=1}^{N} Y_i^2\right]\right\} \\
&= \frac{N}{n}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

此处使用 $N\mu^2$ 并进行加减凑项（该技巧常用）：

$$
Var(\hat{\tau}) = \frac{N}{n}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - N\mu^2\right) = \frac{N}{n}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - 2N\mu^2 + N\mu^2\right)
$$

此处使用 $N\mu = \sum_{i=1}^{N} Y_i$（该技巧常用）：

$$
Var(\hat{\tau}) = \frac{N}{n}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{N} Y_i + N\mu^2\right) = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\mu)^2 = \frac{N(N-1)}{n}\sigma^2 \qquad \square
$$

29.4 样本容量的选择

抽样分布的方差决定置信区间的长度，样本容量增大的时候抽样分布的方差减小，置信区间变窄。

注意事项

通过控制总体均值的置信区间长度去选择样本容量而不从总体总量来考虑，因为总体总量的方差计算中还会涉及到 N^2，这对于无穷总体是无法进行计算的。无穷总体时忽略被 FPC。

误差幅度 MOE

置信区间的半径称之为误差幅度 (margin of error, MOE)。

29.4.1 总体均值样本容量公式

Theorem 29.9. 待估参数为总体均值时有如下样本容量公式：

$$
n_{SRS} = \frac{1}{\frac{d^2}{u^2\sigma^2}+\frac{1}{N}}, \quad n_{SRSWR} = \frac{u^2\sigma^2}{d^2}
$$

其中 u 为求解区间估计过程中选择的正态分布分位数。

上式中二者有关系（又称为两步法）：

$$
\frac{1}{n_{SRS}} = \frac{1}{n_{SRSWR}} + \frac{1}{N}
$$

公式涉及到总体方差真实值 σ^2，解决方案：

1. 使用历史数据的样本方差代替 σ^2。
2. 由正态分布的性质，在 $\mu \pm 2\sigma$ 范围内应包含了 97.7% 的样本，因此，我们使用样本的极差来近似 4σ：用样本极差除 4 替代 σ。但是这个时候又涉及到极差从何而来的问题，因为是先确定样本容量再去做抽样，没有样本怎么来的极差呢？查阅资料得到样本的大致分布范围。

29.4.2 总体阳性率样本容量公式

Theorem 29.10. *待估参数为总体阳性率时有如下样本容量公式：*

$$n_{SRS} = \frac{Np(1-p)}{\frac{d^2}{u^2}(N-1) + p(1-p)}, \quad n_{SRSWR} = \frac{u^2 p(1-p)}{d^2}$$

其中 u 为求解区间估计过程中选择的正态分布分位数。

但这里需要注意，阳性率问题两步法不能用，与理论公式不等。

公式涉及到阳性率的真实值 p，解决方法：

1. 有根据的推测，使用历史数据来替代真实阳性率。
2. 取 $p = 0.5$，最大化样本容量，进行保守估计。
3. 如果获取额外样本的代价大于开始一次抽样的代价（也就意味着最大化样本容量带来的代价大于去做一次抽样来估计一下真实值的代价），那在没有历史数据的情况下可以自己去抽样。

阳性率问题下理论公式难以推导的情况

蒙特卡罗，代码如下：

```r
sample_size_p <- function(p, N, n, conf, repeat.times=10000) {
  moe_mc_help <- function(p, N, n, conf, repeat.times) {
    alpha <- 1 - conf
    u <- qnorm(1 - alpha / 2)
    X <- rep(c(0, 1), times = c(round(N * (1 - p)), round(N * p)))
    phat <- NULL
    for (i in 1:repeat.times) {
      x <- sample(X, n)
      phat <- append(phat, mean(x))
    }
    v <- var(phat)
    moe <- sqrt(v) * u
```

```
    moe
  }
  data.frame(n, sapply(n, moe_mc_help, p=p, N=N, conf=conf,
                       repeat.times=repeat.times))
}
set.seed(1234)
sample_size_p(0.15, 3000, 860:880, 0.95)
```

29.5 简单随机抽样适用条件

1. 可使用的额外信息较少。
2. 研究多元关系，没有特别特殊的理由使用别的抽样方法。

Chapter 30

回归估计与比例估计

本章介绍回归估计 (regression estimate)与比例估计 (ratio estimate)，回归估计认为个体值 y 与某个变量 x（即辅助变量 (auxiliary variable)）之间存在如下关系：

$$y = B_1 x + B_0$$

比例估计中取 $B_0 = 0$，因此它可以看作为回归估计的一个特例。先来介绍辅助变量。

30.1 辅助变量

在回归估计中我们通过辅助变量去得到我们想要的估计值。

30.1.1 辅助变量选择要求

辅助变量需要满足以下条件：

1. 辅助变量的获得需要简单快捷。如果它的值都很难得到或者得不到那根本没办法作回归估计。

2. 辅助变量需要和个体值之间存在高度的线性相关性，在比例估计中我们还要求二者线性方程中的截距为 0（如果存在截距那截距就会是一个偏倚）。

选择好辅助变量并获取数据后，可以去做辅助变量与样本单元值的线性回归，来检验是否满足高度线性相关性（这里其实假设了数据满足正态分布）。在比例估计中我们还要去检验截距是否为 0。如果线性回归后的截距很小但不显著，我们可以认为满足要求；如果截距较大但不显著，我们认为是样本随机性带来的问题，可以认为截距满足为 0 的条件。

30.1.2 辅助变量与个体值的相关性

Theorem 30.1. 对于辅助变量与个体值的相关性，有如下结论：

$$Corr(\bar{x}, \bar{y}) = Corr(X, Y)$$

Proof. 将协方差进行展开：

$$
\begin{aligned}
Cov(\bar{x},\bar{y}) &= Cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}X_iZ_i, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}Y_jZ_j\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N}X_iY_iVar(Z_i) + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}X_iY_jCov(Z_i,Z_j)\right]\\
&= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{nN}\frac{1}{N-1}\left[(N-1)\sum_{i=1}^{N}X_iY_i - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}X_iY_j\right]\\
&= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{nN}\frac{1}{N-1}\left[(N-1)\sum_{i=1}^{N}X_iY_i - \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X_iY_j - \sum_{i=1}^{N}X_iY_i\right)\right]\\
&= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{nN}\frac{1}{N-1}\left(N\sum_{i=1}^{N}X_iY_i - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X_iY_j\right)\\
&= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{nN}\frac{1}{N-1}\left(N\sum_{i=1}^{N}X_iY_i - \sum_{i=1}^{N}X_i\sum_{j=1}^{N}Y_j\right)\\
&= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}X_iY_i - N\mu_X\mu_Y\right)\\
&= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}X_iY_i - 2N\mu_X\mu_Y + N\mu_X\mu_Y\right)\\
&= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}X_iY_i - \sum_{i=1}^{N}X_i\mu_Y - \sum_{i=1}^{N}Y_i\mu_X + N\mu_X\mu_Y\right)\\
&= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_iY_i - X_i\mu_Y - Y_i\mu_X + \mu_X\mu_Y)\\
&= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_iY_i - X_i\mu_Y - Y_i\mu_X + \mu_X\mu_Y)}{N-1}\\
&= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y)}{N-1}\\
&= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{n}Cov(X,Y)
\end{aligned}
$$

所以：

$$
\begin{aligned}
Corr(\bar{x},\bar{y}) &= \frac{Cov(\bar{x},\bar{y})}{\sqrt{Var(\bar{x})Var(\bar{y})}}\\
&= \frac{(1-\frac{n}{N})\frac{1}{n}Cov(X,Y)}{\sqrt{(1-\frac{n}{N})^2\frac{1}{n^2}Var(X)Var(Y)}}\\
&= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}\\
&= Corr(X,Y)
\end{aligned}
$$

□

30.2 估计量

30.2.1 回归估计量

Definition 30.1. 比例估计量有如下计算公式（其中 μ_X 和 τ_X 是已知的）：

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{s_y\hat{R}}{s_x}, \quad \hat{B}_0 = \bar{y} - \hat{B}_1\bar{x}$$

$$\hat{\mu}_{Y_{reg}} = \hat{B}_1\mu_X + \hat{B}_0 = \hat{B}_1(\mu_X - \bar{x}) + \bar{y}, \quad \hat{\tau}_{Y_{reg}} = \hat{B}_1\tau_X + \hat{B}_0$$

30.2.2 比例估计量

Definition 30.2. 比例估计量有如下计算公式（其中 μ_X 和 τ_X 是已知的）：

$$\hat{B} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\tau_y}{\tau_x}$$

$$\hat{\mu}_{Yr} = \hat{B}\mu_X, \quad \hat{\tau}_{Yr} = \hat{B}\tau_X$$

其中 $\hat{B}$ 是比例系数 B 的估计[1]，对于 B 的真实值，应有 $B = \frac{\mu_Y}{\mu_X} = \frac{\tau_Y}{\tau_X}$。[2]

30.3 偏差

30.3.1 回归估计的偏差

由回归估计量计算公式显然可知回归估计是有偏的。

30.3.2 比例估计的偏差

Theorem 30.2. 比例估计量是有偏的，偏差如下：

$$bias(\hat{\mu}_{Yr}) = E(\hat{\mu}_{Yr}) - \mu_Y = Cov(-\hat{B}, \bar{x})$$

$$bias(\hat{\tau}_{Yr}) = E(\hat{\tau}_{Yr}) - \tau_Y = Cov(-\hat{B}, \bar{x})N$$

上式不便于计算，可以用下式进行估计：

$$bias(\hat{\mu}_{Yr}) \approx \frac{1}{\mu_X}[BVar(\bar{x}) - Cov(\bar{x},\bar{y})] = \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{n\mu_X}[B\sigma_X^2 - Corr(X,Y)\sigma_X\sigma_Y]$$

$$bias(\hat{\tau}_{Yr}) \approx \frac{\tau_X}{\mu_X^2}[BVar(\bar{x}) - Cov(\bar{x},\bar{y})] = \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\tau_X}{n\mu_X^2}[B\sigma_X^2 - Corr(X,Y)\sigma_X\sigma_Y]$$

[1]这是一个有偏估计!!!

[2]依据辅助变量的选择原则，X 与 Y 之间需要满足线性关系且截距为 0，B 其实就是线性关系中的斜率，同时证明了 $Corr(\bar{x},\bar{y}) = Corr(X,Y)$，因此 $\hat{B}$ 和 B 既可以由均值来表示也可以由总体总量来表示。

Proof. 将协方差分解：

$$
\begin{aligned}
Cov(-\hat{B},\bar{x}) &= -Cov(\hat{B},\bar{x}) \\
&= -\left[E(\hat{B}\bar{x}) - E(\hat{B})E(\bar{x})\right] \\
&= -\left[E\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{x}\right) - E(\hat{B})\mu_X\right] \\
&= E(\hat{\mu}_{Yr}) - E(\bar{y}) \\
&= E(\hat{\mu}_{Yr}) - \mu_Y
\end{aligned}
$$

下证近似公式：

$$
\begin{aligned}
bias(\hat{\mu}_{Yr}) &= E(\hat{B}\mu_X) - \mu_Y \\
&= \mu_X E\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}} - \frac{\mu_Y}{\mu_X}\right) \\
&= \mu_X E\left(\frac{\bar{y}}{\mu_X}\frac{\mu_X}{\bar{x}} - \frac{\mu_Y}{\mu_X}\right) \\
&= \mu_X E\left(\frac{\bar{y}}{\mu_X} - \frac{\bar{y}}{\mu_X}\frac{\bar{x}-\mu_X}{\bar{x}} - \frac{\mu_Y}{\mu_X}\right) \\
&= \mu_X E\left(\frac{\bar{y}}{\mu_X}\frac{\mu_X-\bar{x}}{\bar{x}}\right) \\
&= \mu_X E\left(\frac{\bar{y}}{\mu_X}\frac{\mu_X-\bar{x}}{\bar{x}}\frac{\mu_X}{\bar{x}}\frac{\bar{x}}{\mu_X}\right) \\
&= \mu_X E\left[\frac{\bar{y}}{\mu_X^2}(\mu_X-\bar{x})\frac{\mu_X}{\bar{x}}\right] \\
&= \mu_X E\left[\frac{\bar{y}}{\mu_X^2}(\mu_X-\bar{x})\left(1-\frac{\bar{x}-\mu_X}{\bar{x}}\right)\right] \\
&= \mu_X E\left\{\frac{\bar{y}}{\mu_X^2}\left[(\mu_X-\bar{x}) + \frac{(\bar{x}-\mu_X)^2}{\bar{x}}\right]\right\} \\
&= \mu_X E\left[\frac{-\bar{y}(\bar{x}-\mu_X)}{\mu_X^2} + \frac{\bar{y}(\bar{x}-\mu_X)^2}{\mu_X^2\bar{x}}\right] \\
&= \frac{1}{\mu_X} E\left[\frac{\bar{x}}{\bar{y}}(\bar{x}-\mu_X)^2 - (\bar{x}-\mu_X)\bar{y}\right] \\
&= \frac{1}{\mu_X}\left\{E[\hat{B}(\bar{x}-\mu_X)^2] - E[\bar{y}(\bar{x}-\mu_X)]\right\} \\
&= \frac{1}{\mu_X}\left\{E[(\hat{B}-B+B)(\bar{x}-\mu_X)^2] - Cov(\bar{x},\bar{y})\right\} \\
&= \frac{1}{\mu_X}\left\{E[(\hat{B}-B)(\bar{x}-\mu_X)^2 + B(\bar{x}-\mu_X)^2] - Cov(\bar{x},\bar{y})\right\}
\end{aligned}
$$

由于 $E\left[(\hat{B}-B)(\bar{x}-\mu_X)^2\right]$ 极小（严谨证明不提供），因此:

$$
\begin{aligned}
bias(\hat{\mu}_{Yr}) &\approx \frac{1}{\mu_X}\left\{E[B(\bar{x}-\mu_X)^2] - Cov(\bar{x},\bar{y})\right\} \\
&= \frac{1}{\mu_X}\left[BVar(\bar{x}) - Cov(\bar{x},\bar{y})\right]
\end{aligned}
$$

□

由此，在以下情况比例估计的偏倚会较小：

1. n 较大。
2. $\frac{n}{N}$ 较大。
3. μ_X 较大。
4. σ_x 较小。
5. R 接近 ± 1。

30.4 均方误差

30.4.1 回归估计量的均方误差

Theorem 30.3. 回归估计量的均方误差为：

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\mu}_{Y_{reg}}) &= E\left\{\left[\bar{y} + \hat{B}_1(\mu_X - \bar{x}) - \mu_Y\right]^2\right\} \\
&\approx Var(\bar{d}) \\
&= \left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{\sigma_d^2}{n}
\end{aligned}$$

其中：

$$d_i = y_i - \left[\mu_Y + B_1(x_i - \mu_X)\right]$$

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}[y_i - \mu_Y - B_1(x_i - \mu_X)]^2 = (1 - R^2)\sigma_Y^2$$

Proof. 下求 $E(d)$：

$$E(d) = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} y_i - N\mu_Y - B_1\sum_{i=1}^{N} x_i + B_1 N\mu_X\right] = 0$$

因此：

$$\begin{aligned}
\sigma_d^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \mu_Y - B_1(x_i - \mu_X)\right]^2 \\
&= \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu_Y)^2 + \sum_{i=1}^{N} B_1^2(x_i - \mu_X)^2 - \sum_{i=1}^{N} 2B_i(y_i - \mu_Y)(x_i - \mu_X)\right] \\
&= \sigma_Y^2 + B_1^2\sigma_X^2 - 2B_1R\sigma_X\sigma_Y
\end{aligned}$$

而：

$$B_1 = \frac{\sigma_Y R}{\sigma_X}$$

所以：

$$\sigma_d^2=\sigma_Y^2+B_1^2\sigma_X^2-2B_1R\sigma_X\sigma_Y=\sigma_Y^2+\frac{\sigma_Y^2R^2}{\sigma_X^2}\sigma_X^2-2\frac{\sigma_YR}{\sigma_X}R\sigma_X\sigma_Y=\sigma_Y^2-R^2\sigma_Y^2=(1-R^2)\sigma_Y^2$$

□

由此，在以下情况 $MSE(\hat{\mu}_{Y_{reg}})$ 较小：

1. n 较大。
2. $\frac{n}{N}$ 较大。
3. σ_Y 较小。
4. R 接近 ±1。

30.4.2 比例估计量的均方误差

Theorem 30.4. 比例估计量的均方误差为：

$$\begin{aligned}MSE(\hat{\mu}_{Yr})&\approx E\left[(\bar{y}-B\bar{x})^2\right]\\&=\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma_Y^2-2BR\sigma_X\sigma_Y+B^2\sigma_X^2}{n}\\&\approx Var(\hat{\mu}_{Yr})\end{aligned}$$

证明过程可见 David and Sukhatme, 1974。

30.5 方差

30.5.1 回归估计的方差

Theorem 30.5. 回归估计的方差为：

$$Var(\hat{\mu}_{Y_{reg}})=Var(\bar{d})=\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma_d^2}{n}=\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{(1-R^2)\sigma_Y^2}{n}$$

定义 $e_i=y_i-(\hat{B}_1x_i+\hat{B}_0)$ 可得：

$$\widehat{Var}(\hat{\mu}_{Y_{reg}})=\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s_e^2}{n}$$

这里 s_e^2 可取两种计算公式：

$$s_e^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n e_i^2=\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{(1-\hat{R}^2)s_y^2}{n},\quad s_e^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n e_i^2$$

第二种是考虑回归估计有两个待估参数，自由度为 $n-2$，这样子做修正了回归中自由度的问题。

由上述总结：

$$
\begin{aligned}
\widehat{Var_1}(\hat{\mu}_{Y_{reg}}) &= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(\hat{B}_1x_i+\hat{B}_0)\right]^2 \\
\widehat{Var_2}(\hat{\mu}_{Y_{reg}}) &= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(\hat{B}_1x_i+\hat{B}_0)\right]^2
\end{aligned}
$$

30.5.2 比例估计的方差

由 Delta method（见定理 21.5），注意到关系：

$$
\begin{aligned}
\hat{B} &= \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = g(\bar{x},\bar{y}) \\
\hat{\mu}_{Yr} &= \hat{B}\mu_X = g(\hat{B}) \\
\hat{\tau}_{Yr} &= \hat{\mu}_{Yr}\frac{\tau_X}{\mu_X} = \hat{\mu}_{Yr}N
\end{aligned}
$$

可得以下比例估计量的近似方差 ($R = Corr(X,Y)$)：

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{B}) &\approx \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma_Y^2-2BR\sigma_X\sigma_Y+B^2\sigma_X^2}{n\mu_X^2} = \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma_\varepsilon^2}{n\mu_X^2} \\
\widehat{Var}(\hat{B}) &\approx \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s_y^2-2\hat{B}\hat{R}s_xs_y+\hat{B}^2s_x^2}{n\bar{x}^2} = \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s_e^2}{n\bar{x}^2} \\
Var(\hat{\mu}_{Yr}) &\approx \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma_Y^2-2BR\sigma_X\sigma_Y+B^2\sigma_X^2}{n} = \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} \\
\widehat{Var_1}(\hat{\mu}_{Yr}) &\approx \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s_y^2-2\hat{B}\hat{R}s_xs_y+\hat{B}^2s_x^2}{n} = \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s_e^2}{n} \\
Var(\hat{\tau}_{Yr}) &\approx N\left(N-n\right)\frac{\sigma_Y^2-2BR\sigma_X\sigma_Y+B^2\sigma_X^2}{n} = N(N-n)\frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} \\
\widehat{Var_1}(\hat{\tau}_{Yr}) &\approx N(N-n)\frac{s_y^2-2\hat{B}\hat{R}s_xs_y+\hat{B}^2s_x^2}{n} = N(N-n)\frac{s_e^2}{n}
\end{aligned}
$$

再给出第二种总体均值、总体总量比例估计量抽样分布方差的估计：

$$
\begin{aligned}
\widehat{Var_2}(\hat{\mu}_{Yr}) = \widehat{Var}(\hat{B}\mu_X) = \widehat{Var}(\hat{B})\mu_X^2 &\approx \left(1-\frac{n}{N}\right)\left(\frac{\mu_X}{\bar{x}}\right)^2\frac{s_e^2}{n} \\
\widehat{Var_2}(\hat{\tau}_{Yr}) &\approx N(N-n)\left(\frac{\mu_X}{\bar{x}}\right)^2\frac{s_e^2}{n}
\end{aligned}
$$

下给出上述公式中所有等式的推导。

Proof. 从模型的角度，根据 MSE 的估计来看（最后一行是使用了 SRS 均值的方差公式）：

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{\mu}_{Yr}) &\approx MSE(\hat{\mu}_{Yr}) \approx E\left[(\bar{y}-B\bar{x})^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i - B\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right] \\
&= E\left\{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-Bx_i)\right]^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\varepsilon_i = y_i - Bx_i,\ \mu_\varepsilon = E(\varepsilon_i) = 0
$$

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{\mu}_{Yr}) &\approx E\left\{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-Bx_i)\right]^2\right\} \\
&= E\left[(\bar{\varepsilon})^2\right] \\
&= E\left[(\bar{\varepsilon}-0)^2\right] \\
&= E\left[(\bar{\varepsilon}-\mu_\varepsilon)^2\right] \\
&= Var(\bar{\varepsilon}) \\
&= \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma_\varepsilon^2}{n}
\end{aligned}
$$

对于 σ_ε^2：

$$
\begin{aligned}
\sigma_\varepsilon^2 &= \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}y_i^2 + B^2\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - 2B\sum_{i=1}^{N}x_i yi\right] \\
&= \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu_Y+\mu_Y)^2 + B^2\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_X+\mu_X)^2 - 2B\sum_{i=1}^{N}x_i yi\right] \\
&= \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu_Y)^2 + 2\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu_Y)\mu_Y + N\mu_Y^2\right. \\
&\quad \left. + B^2\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_X)^2 + 2B^2\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_X)\mu_X + B^2N\mu_X^2 - 2B\sum_{i=1}^{N}x_i y_i\right] \\
&= \sigma_Y^2 + B^2\sigma_X^2 + \frac{1}{N-1}\left[N\mu_Y^2 + B^2N\mu_X^2 - 2B\sum_{i=1}^{N}x_i y_i\right] \\
&= \sigma_Y^2 + B^2\sigma_X^2 + \frac{1}{N-1}\left[N\mu_Y^2 + B^2N\mu_X^2 - 2B\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_X+\mu_X)(y_i-\mu_Y+\mu_Y)\right] \\
&= \sigma_Y^2 + B^2\sigma_X^2 + \frac{1}{N-1}\left[N\mu_Y^2 + B^2N\mu_X^2 - 2B\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y) - 2BN\mu_X\mu_Y\right] \\
&= \sigma_Y^2 + B^2\sigma_X^2 - 2BCov(X,Y) + \frac{1}{N-1}\left[N\mu_Y^2 + B^2N\mu_X^2 - 2BN\mu_X\mu_Y\right]
\end{aligned}
$$

因为：

$$
B = \frac{\mu_Y}{\mu_X}
$$

所以：

$$
\begin{aligned}
N\mu_Y^2 + B^2N\mu_X^2 - 2BN\mu_X\mu_Y &= N\mu_Y^2 + \frac{\mu_Y^2}{\mu_X^2}N\mu_X^2 - 2\frac{\mu_Y}{\mu_X}N\mu_X\mu_Y \\
&= 2N\mu_Y^2 - 2N\mu_Y^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

也就有：

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_Y^2 - 2BR\sigma_X\sigma_Y + B^2\sigma_X^2$$

令 $e_i = y_i - \hat{B}x_i$，将它看作为 ε_i 的估计，则有：

$$s_e^2 = s_y^2 - 2\hat{B}\hat{R}s_xs_y + \hat{B}^2s_x^2 \qquad \square$$

30.6 置信区间

30.6.1 回归估计的置信区间

由于比例估计量抽样分布的方差公式中存在未知量，大样本情况下可得如下估计的置信区间：

$$\hat{\mu}_{Y_{reg}} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\mu}_{Y_{reg}})}$$

30.6.2 比例估计的置信区间

由于比例估计量抽样分布的方差公式中存在未知量，大样本情况下可得如下估计的置信区间：

$$
\begin{gathered}
\hat{B} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{Var}(\hat{B})} \\
\hat{\mu}_{Yr} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\mu}_{Yr})} \\
\hat{\tau}_{Yr} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\tau}_{Yr})}
\end{gathered}
$$

30.7 比例估计样本容量的选择

$$n_r = \frac{Nu^2\sigma_\varepsilon^2}{u^2\sigma_\varepsilon^2 + Nd^2}$$

30.8 回归估计、比例估计与 HT 估计的比较

回归估计与比例估计是有偏的，但它们的方差比 HT 估计小很多，MSE 更小。

Chapter 31

标记重捕法

不对标记重捕法的具体操作进行介绍，高中都学过。

下给出标记重捕法 (tag recapture)的符号说明。

1. X：初始样本容量，即被标记数据。
2. y：被重捕的样本数。
3. x：重捕样本中被标记的数量。
4. t：总体总量。

31.1 假设

1. 种群是封闭的，种群数量在标记与重捕期间没有增减。
2. 每个样本都是来自种群的简单随机样本。
3. 两次样本独立。
4. 标记不能丢失。

即：重捕个体中已标记个体的比例与种群中已标记个体的比例相等。

31.2 总体总量 t 的估计

31.2.1 点估计

Theorem 31.1. 标记重捕法中总体总量 τ 的点估计如下：

$$\hat{t} = \frac{y}{x}X$$

它有如下性质：

$$Var(\hat{t}) = \frac{(yX)^2}{E^3(x)}\frac{(t-y)(t-X)}{t(t-1)}, \quad \widehat{Var}(\hat{t}) = \frac{Xy(X-x)(y-x)}{x^3}$$

Proof. 在标记重捕法中，$x \sim H(y, X, t)$。因此可得：

$$E(x) = \frac{yX}{t},\ Var(x) = \frac{yX(t-y)(t-X)}{t^2(t-1)}$$

而：

$$\hat{t} = yX\frac{1}{x}$$

所以由定理 21.5：

$$\begin{aligned}
Var(\hat{t}) &= Var\left(yX\frac{1}{x}\right) \\
&= (yX)^2 Var\left(\frac{1}{x}\right) \\
&\approx (yX)^2\left[\frac{-1}{E^2(x)}\right]^2 Var(x) \\
&= \frac{(yX)^2}{E^4(x)}\frac{yX}{t}\frac{(t-y)(t-X)}{t(t-1)} \\
&= \frac{(yX)^2}{E^3(x)}\frac{(t-y)(t-X)}{t(t-1)}
\end{aligned}$$

用 x 替代 $E(x)$（相当于是一次简单随机抽样，利用无偏性），然后考虑 t 较大时的近似，最后还剩一个 t，用 $\hat{t}$ 带入进行计算，即可得到：

$$\begin{aligned}
\widehat{Var}(\hat{t}) &= \frac{(yX)^2}{x^3}\frac{(t-y)(t-X)}{t(t-1)} \\
&\approx \frac{(yX)^2}{x^3}\frac{(t-y)(t-X)}{t^2} \\
&= \frac{(yX)^2}{x^3}\left(1-\frac{X}{t}\right)\left(1-\frac{y}{t}\right) \\
&\approx \frac{Xy(X-x)(y-x)}{x^3}
\end{aligned}$$

□

极端情况下的修正

在极端情况下，x 可能为 0 或很小，那么 $\widehat{Var}(\hat{t})$ 就会无限大，此时作如下修正（即不带入 $\hat{t}$，而是代入 $\tilde{t}$）：

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= \frac{(X+1)(y+1)}{x+1} - 1 \\
\widehat{Var}(\tilde{t}) &= \frac{(X+1)(y+1)(y-x)(X-x)}{(x+1)^2(x+2)}
\end{aligned}$$

31.2.2 区间估计

正态近似求置信区间

由点估计方差公式，易得如下估计的总体总量地置信区间：

$$\hat{t} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{Var}(\hat{t})},\quad \tilde{t} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{Var}(\tilde{t})}$$

正态近似置信区间可能存在的问题

正态近似置信区间可能会存在：置信区间左端点小于两次捕捉到的总数的现象，这显然是不合理的。

Pearsonχ^2 检验求置信区间

由标记重捕法使用条件，第一次被捕到和第二次被捕到这两件事情是独立的，由此可构建如下的列联表：

	第二次捕获: 是	第二次捕获: 否
第一次捕获：是	a	b
第一次捕获：否	c	d

表 31.1: 标记重捕法的列联表示意图

在这个表里，a, c, b 显然都是已知的，只有 d 是未知的。可以通过给 d 赋值的方式，去检验列联表行列变量之间是否独立（参考 section 37.4.1），选择合适的 d 值（即让独立性检验结果显著的 d 值）作为置信区间。

似然比检验

由样本可计算出 $\hat{t}$，然后可以构建如下假设：

$$H_0 : \theta = \hat{t} \quad H_1 : \theta = \theta_A$$

进行似然比检验（参考 section 37.5）。置信区间为拒绝零假设的 θ_A 构成的区间，即比 $\hat{t}$ 更适合作为模型参数的 θ_A 构成置信区间。

bootstrap 求置信区间

在第二个样本中进行 bootstrap，有放回的抽取 y 个样本，计算每个样本对总体总量的估计值 $\hat{t}$，重复 N 次。将 N 个 $\hat{t}$ 从小到大排序，在此基础上取分位点即产生置信区间，

代码

以上四种方法的代码如下：

```
tag_recapture_CI <- function(a, b, c, d, alpha = 0.05,
  method = c("normal", "chisq", "fisher", "likelihood", "bootstrap"),
  x.correct = FALSE, N = 1000, seed = 42) {
  # Ensure the 'method' parameter is valid
  method <- match.arg(method)

```

```r
  if (method == "chisq") {
    # Pearson's Chi-squared test
    p.values <- sapply(d, function(d_i) {
      chisq.test(matrix(c(a, b, c, d_i), nrow = 2, byrow = TRUE),
                 correct = FALSE)$p.value
    })
    valid_d <- d[p.values > alpha]
    if (length(valid_d) == 0) {
      stop("No values satisfy the p-value > alpha condition.")
    }
    return(sum(c(a, b, c)) + range(valid_d))

  } else if (method == "fisher"){
    # Fisher's exact test
    p.values <- sapply(d, function(d_i) {
      fisher.test(matrix(c(a, b, c, d_i), nrow = 2, byrow = TRUE))$p.value
    })
    valid_d <- d[p.values > alpha]
    if (length(valid_d) == 0) {
      stop("No values satisfy the p-value > alpha condition.")
    }
    return(sum(c(a, b, c)) + range(valid_d))

  } else if (method == "normal") {
    # Normal approximation method
    X <- a + b
    y <- a + c
    x <- a
    if (x.correct) {
      t_hat <- (X + 1) * (y + 1) / (x + 1) - 1
      V_hat <- ((X + 1) * (y + 1) * (y - x) * (X - x)) / ((x + 1)^2 * (x + 2))
    } else {
      t_hat <- y * X / x
      V_hat <- y * X * (y - x) * (X - x) / x^3
    }
    CI_lower <- t_hat - qnorm(1 - alpha / 2) * sqrt(V_hat)
```

```r
    CI_upper <- t_hat + qnorm(1 - alpha / 2) * sqrt(V_hat)
    return(c(CI_lower, CI_upper))

  } else if (method == "bootstrap") {
    # Bootstrap method
    set.seed(seed)
    sample.frame <- c(rep(1, a), rep(0, c)) # Construct sample frame
    bootstrap_estimates <- replicate(N, {
      sampled <- sample(sample.frame, a + c, replace = TRUE)
      x_boot <- sum(sampled)
      (a + b) * (a + c) / x_boot
    })
    CI <- quantile(bootstrap_estimates, probs = c(alpha / 2, 1 - alpha / 2))
    return(floor(CI))

  } else if (method == "likelihood") {
    # Likelihood method
    t_hat <- (a + b) * (a + c) / a
    ll_max <- dhyper(a, a + b, t_hat - (a + b), a + c, log = TRUE)
    ll <- sapply(d, function(d_i) {
      dhyper(a, a + b, d_i, a + c, log = TRUE)
    })
    valid_d <- d[2 * (ll_max - ll) < qchisq(1 - alpha, df = 1)]
    if (length(valid_d) == 0) {
      stop("No values satisfy the likelihood condition.")
    }
    return(a + b + range(valid_d))
  }
}
```

Chapter 32

分层抽样

分层抽样与分类型辅助变量息息相关。其核心为：

把目标群体分为 H 个亚群体 (stratum)。亚群体之间不重叠，它们构成整个群体（每个个体属于且只属于某个亚群体）。在每个亚群体中通过概率抽样的方法进行独立抽样，然后汇集信息进行群体估计。

当亚群体内的个体值趋于一致时，分层抽样有意义。

为什么要使用分层抽样

分层抽样相比于 SRS 具有如下优势：

1. 分层抽样可以避免因为不同类型的样本对研究结果会产生显著差异从而导致的严重样本选择偏倚。

2. 分层抽样过程有可能更易于管理，同时可以降低成本。

3. 分层抽样不仅可以估计群体的特征，还可以估计亚群体特征。

4. 样本数相同的情况下，分层抽样通常比 SRS 更加精确。当亚群体内的个体值趋于一致时，该结论尤其正确。

分层随机抽样基本设置

1. 必须知道每个 $N_h,\ h=1,2,\ldots,H$。

2. 在每一个层里面独立地使用 SRS。

公式	含义
$\tau_h = \sum_{j=1}^{N_h} Y_{hj}$	第 h 层的总量
$\tau = \sum_{h=1}^{H} \tau_h$	总体总量
$\mu_h = \frac{\sum_{j=1}^{N_h} Y_{hj}}{N_h}$	第 h 层的均值
$\mu = \frac{\sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{N_h} Y_{hj}}{N}$	总体均值
$\sigma_h^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N_h}(Y_{hj}-\mu_h)^2}{N_h-1}$	第 h 层的方差
$\sigma^2 = \frac{\sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{N_h}(Y_{hj}-\mu)^2}{N-1}$	总体方差

表 32.1: 分层抽样部分计算公式

32.1 参数估计

32.1.1 亚群体特征的估计

因为分层随机抽样在亚群体中为简单随机抽样，由简单随机抽样的估计公式即有如下公式：

$$\hat{\mu}_h = \frac{1}{n_h}\sum_{j=1}^{n_h} y_{hj}$$

$$\hat{\tau}_h = \frac{N_h}{n_h}\sum_{j=1}^{n_h} y_{hj} = N_h\hat{\mu}_h$$

$$\hat{\sigma_h^2} = s_h^2 = \frac{1}{n_h-1}\sum_{j=1}^{n_h}(y_{hj}-\hat{\mu}_h)^2$$

32.1.2 总体总量 $\hat{\tau}$ 的估计

计算公式

$$\hat{\tau}_{str} = \sum_{h=1}^{H}\hat{\tau}_h = \sum_{h=1}^{H} N_h\bar{y}_h$$

抽样权重形式

$$\hat{\tau}_{str} = \sum_{h=1}^{H} N_h\bar{y}_h = \sum_{h=1}^{H}\frac{N_h}{n_h}\sum_{j=1}^{n_h} y_{hj} = \sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{n_h}\frac{N_h}{n_h}y_{hj} = \sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{n_h} w_{hj}y_{hj}$$

32.1.3 总体均值 $\hat{\mu}$ 的估计

计算公式

$$\hat{\mu}_{str} = \frac{\hat{\tau}_{str}}{N} = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{H} N_h \bar{y}_h$$

抽样权重形式

只需注意到 $N = \sum\limits_{h=1}^{H}\sum\limits_{j=1}^{n_h} w_{hj}$：

$$\hat{\mu}_{str} = \frac{\sum\limits_{h=1}^{H}\sum\limits_{j=1}^{n_h} w_{hj} y_{hj}}{\sum\limits_{h=1}^{H}\sum\limits_{j=1}^{n_h} w_{hj}}$$

32.1.4 估计的性质

无偏性

无偏性是显然的：在每一层里面使用的是简单随机抽样，而简单随机抽样的估计量是无偏的，总和也自然是无偏的。

方差

由各层样本之间的独立性以及每层中的抽样实际是 SRS，立即可得如下分层随机抽样估计量的方差公式：

$$Var(\hat{\tau}_{str}) = \sum_{h=1}^{H} N_h^2 \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right)\frac{\sigma_h^2}{n_h}$$

$$\widehat{Var}(\hat{\tau}_{str}) = \sum_{h=1}^{H} N_h^2 \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_h^2}{n_h}$$

$$Var(\hat{\mu}_{str}) = \sum_{h=1}^{H} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right)\frac{\sigma_h^2}{n_h}$$

$$\widehat{Var}(\hat{\mu}_{str}) = \sum_{h=1}^{H} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_h^2}{n_h}$$

其中：

$$\sigma_h^2 = \frac{1}{N_h - 1}\sum_{j=1}^{N_h}(Y_{hj} - \mu_h)^2$$
$$s_h^2 = \frac{1}{N_h - 1}\sum_{j=1}^{n_h}(y_{hj} - \bar{y}_h)^2$$

置信区间

$$\hat{\mu}_{str} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\mu}_{str})},\ \hat{\tau}_{str} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{Var})(\hat{\tau}_{str})}$$

自由度问题

当使用 t 置信区间的时候，如果各层之间方差是齐的，那么自由度即为 $n-H$。如果方差不齐，则使用 Satterwaithe approximation 来估计自由度：

$$Dof = \left(\sum_{h=1}^{H} a_h s_h^2\right)^2 \div \sum_{h=1}^{H}\frac{(a_h s_h^2)^2}{(n_h - 1)}$$

其中：

$$a_h = \frac{N_h(N_h - n_h)}{n_h}$$

32.1.5 群体比例问题

$$\hat{p}_{str} = \sum_{h=1}^{H}\frac{N_h}{N}\hat{p}_h$$
$$\widehat{Var}(\hat{p}_{str}) = \sum_{h=1}^{H}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right)\frac{\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{n-1}$$

32.2 估计方法思考

在分层抽样中，如果使用如下公式估计 μ：

$$\tilde{\mu}_{str} = \frac{\sum\limits_{h=1}^{H}\sum\limits_{j=1}^{n_h} y_{hj}}{n}$$

均值

讨论阳性率问题。

该方法的总体均值为：

$$\begin{aligned}
E(\tilde{\mu}_{str}) &= E\left(\frac{\sum\limits_{h=1}^{H}\sum\limits_{j=1}^{n_h} y_{hj}}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{H} E\left(\sum_{j=1}^{N_h} Y_{hj}Z_{hj}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{N_h} Y_{hj}E(Z_{hj}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{H} E(Z_{hj})\sum_{j=1}^{N_h} Y_{hj} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{H} \frac{n_h}{N_h} N_h p_h \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{H} n_h p_h
\end{aligned}$$

而真实的总体均值为：

$$\mu = \frac{\tau}{N} = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{H} N_h p_h$$

如果想要无偏，则显然需要满足：

$$\frac{n_h}{N_h} = \frac{n}{N}$$

32.3 分配原则

分层随机抽样要考虑两个问题：

1. 如何定义层？
2. 每个层里面样本量是多少？

32.3.1 比例分配

比例分配 (proportional allocation)是指在分层抽样中令 $\pi_{hj} = \frac{n}{N} = \frac{n_h}{N_h}$，$h = 1, 2, \ldots, H$，$j = 1, 2, \ldots, N_h$。这种分配方式不会出现极端情况，即样本几乎都出自某一层的现象。

比例分配与 SRS 的比较

可以注意到此时所有单元的入样概率都一样。

由总体均值、总体总量估计量的计算公式可知：比例分配与 SRS 对于总体均值、总体总量估计的期望是一样的，即估计量的期望是一样的。但是两种方式对于总体均值、总体总量估计的方差不一样。在 n 相同的情况下，$Var(\tilde{\mu}_{str})$, $Var(\tilde{\tau}_{str})$ 通常比 $Var(\hat{\mu}_{srs})$, $Var(\hat{\tau}_{str})$ 小。

Proof. 从方差分析的角度去分析。因为两种估计方式中总体总量的估计都是总体均值估计的 N 倍，所以只需证明总体均值的情况即可。

回头补方差分析

由 $\dfrac{n_h}{N_h} = \dfrac{n}{N}$ 可得：

$$Var(\tilde{\tau}_{str}) = \sum_{h=1}^{H} N_h^2 \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{\sigma_h^2}{n_h} = \sum_{h=1}^{H} N_h \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{N}{n} \sigma_h^2 = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{N}{n} \sum_{h=1}^{H} N_h \sigma_h^2$$

从理论角度看待 SSe，即计算总体而非样本的 SSe，可得到：

$$SSe = \sum_{h=1}^{H} \sum_{j=1}^{N_h} (Y_{hj} - \mu_h)^2 = \sum_{h=1}^{H} (N_h - 1)\sigma_h^2$$

所以：

$$Var(\tilde{\tau}_{str}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{N}{n} \sum_{h=1}^{H} N_h \sigma_h^2 = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{N}{n} \left(SSe + \sum_{h=1}^{H} \sigma_h^2\right)$$

而：

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\tau}_{srs}) &= N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\sigma^2}{n} \\
&= \frac{N^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{SST}{N-1} \\
&= \frac{N^2}{n(N-1)} \left(1 - \frac{n}{N}\right) (SSA + SSe) \\
&= \frac{N^2}{n(N-1)} \left(1 - \frac{n}{N}\right) SSA + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{N}{n} \left(\frac{N}{N-1} SSe\right) \\
&= \frac{N^2}{n(N-1)} \left(1 - \frac{n}{N}\right) SSA + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{N}{n} \left(SSe + \frac{1}{N-1} SSe\right) \\
&= \frac{N^2}{n(N-1)} \left(1 - \frac{n}{N}\right) SSA + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{N}{n} \left(SSe + \sum_{h=1}^{H} \frac{N_h - 1}{N-1} \sigma_h^2\right) \\
&= \frac{N^2}{n(N-1)} \left(1 - \frac{n}{N}\right) SSA + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{N}{n} \left[SSe + \sum_{h=1}^{H} \left(\frac{N-1}{N-1} - \frac{N - N_h}{N-1}\right) \sigma_h^2\right] \\
&= \frac{N^2}{n(N-1)} \left(1 - \frac{n}{N}\right) SSA + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{N}{n} \left(SSe + \sum_{h=1}^{H} \sigma_h^2\right) + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{N}{n} \left[\sum_{h=1}^{H} \left(-\frac{N - N_h}{N-1}\right) \sigma_h^2\right] \\
&= Var(\tilde{\tau}_{str}) + \frac{N^2}{n(N-1)} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \left[SSA - \sum_{h=1}^{H} \left(1 - \frac{N_h}{N}\right) \sigma_h^2\right]
\end{aligned}$$

由上式可以看出，如果比例分配估计量的方差比 SRS 估计量的方差大，则需要：

$$SSA < \sum_{h=1}^{H}\left(1-\frac{N_h}{N}\right)\sigma_h^2$$

而这种情况在实践中几乎见不到。 □

从以上推导中也可以看出，组间差异越大，即 SSA 越大，比例分配估计量的方差比 SRS 估计量的方差小得越多，也即精确得更多。而如果每一个层中的方差很大，即 σ_h^2 很大，有可能会使比例分配估计量的方差大于 SRS 估计量的方差，所以在选择分层的时候，要使层内差异小。综上，层间差异大、层内差异小时，比例分配下的分层随机抽样比 SRS 效果更好。

32.3.2 最优分配

在考虑分配方式的时候有如下三点主要因素：

1. 每层中的个体总数 N_h。
2. 层内差异 σ_h^2。
3. 在每个层内抽样的平均成本 c_h。

显然，比例分配没有考虑第二点和第三点。

成本一致最小化方差

当不同层之间抽样成本一致的时候，可以最小化估计量方差。可以将问题转化为：

$$\min f(\overrightarrow{n}) = Var(\hat{\tau}_{str}) = \sum_{h=1}^{H} N_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{\sigma_h^2}{n_h}$$
$$s.t. \quad \sum_{h=1}^{H} n_h = n$$

可得最佳分配 (optimal allocation)方案为：

$$n_k = \frac{nN_k\sigma_k}{\sum\limits_{h=1}^{H} N_h\sigma_h}, \quad k=1,2,\dots,H$$

Proof. 使用 Lagrange 乘子法求解。引入 Lagrange 乘子 λ 即有：

$$f(\overrightarrow{n}) = \sum_{h=1}^{H} N_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{\sigma_h^2}{n_h}$$
$$g(\overrightarrow{n}) = \sum_{h=1}^{H} n_h - n$$
$$h(\overrightarrow{n}) = f(\overrightarrow{n}) + \lambda g(\overrightarrow{n})$$

对 f 求偏导可得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial n_h} &= -\frac{N_h^2\sigma_h^2}{N_h n_h} - \left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{N_k^2\sigma_h^2}{n_k^2} \\ &= -\frac{N_h\sigma_h^2}{n_h} - \frac{N_h^2\sigma_h^2}{n_h^2} + \frac{N_h\sigma_h^2}{n_h} \\ &= -\frac{N_h^2\sigma_h^2}{n_h^2}\end{aligned}$$

所以：

$$\nabla f(\overrightarrow{n}) = (-\frac{N_1^2\sigma_1^2}{n_1^2}, -\frac{N_2^2\sigma_2^2}{n_2^2}, \dots, -\frac{N_H^2\sigma_H^2}{n_H^2})$$
$$\nabla g(\overrightarrow{n}) = (1, 1, \dots, 1)$$

当 f 取最小值时有：

$$\frac{\partial h(\overrightarrow{n})}{\partial \overrightarrow{n}} = (-\frac{N_1^2\sigma_1^2}{n_1^2}+\lambda, -\frac{N_2^2\sigma_2^2}{n_2^2}+\lambda, \dots, -\frac{N_H^2\sigma_H^2}{n_H^2}+\lambda) = (0, 0, \dots, 0)$$
$$\sum_{h=1}^{H} n_h = n$$

解得：

$$n_h = \frac{N_h\sigma_h}{\sqrt{\lambda}}, \quad h = 1, 2, \dots, H$$

此时：

$$n = \sum_{h=1}^{H} n_h = \frac{\sum\limits_{h=1}^{H} N_h\sigma_h}{\sqrt{\lambda}}$$

于是：

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\sum\limits_{h=1}^{H} N_h\sigma_h}{n}$$

所以：

$$n_k = \frac{nN_k\sigma_k}{\sum\limits_{h=1}^{H} N_h\sigma_h}, \quad k = 1, 2, \dots, H \qquad \square$$

成本不一致最小化方差

如果不同层之间抽样成本不一致，且总抽样成本为：

$$c = c_0 + \sum_{h=1}^{H} c_h n_h$$

可以将问题转化为：

$$\min f(\overrightarrow{n}) = Var(\hat{\tau}_{str}) = \sum_{h=1}^{H} N_h^2 \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{\sigma_h^2}{n_h}$$
$$s.t. \quad c - c_0 - \sum_{h=1}^{H} c_h n_h = 0$$

则最佳分配方案为：

$$n_k = \frac{(c-c_0)N_k\sigma_k}{\sum\limits_{h=1}^{H} N_h\sigma_h\sqrt{c_h}} \frac{1}{\sqrt{c_k}}, \quad k = 1, 2, \ldots, H$$

从上式中可看出，需要在个数多或方差大得层中分配更多的个体（方差大需要更多的个体来获得有代表性的样本），在成本高的层中分配较少的个体。

固定方差最小化成本

如果不同层之间抽样成本不一致，且总抽样成本为：

$$c = c_0 + \sum_{h=1}^{H} c_h n_h$$

此时如果固定方差最小化成本，则最佳分配方案为：

$$n_k = n\frac{\frac{N_k\sigma_k}{\sqrt{c_k}}}{\sum\limits_{h=1}^{H} \frac{N_h\sigma_h}{\sqrt{c_h}}}, \quad k = 1, 2, \ldots, H$$

若计算出来 $n_k > N_k$，则令 $n_k = N_k$。

32.4 后分层

当使用了 SRS 后发现获取的样本比较极端时（比如研究人群体重，获得的样本中 90% 都是男性），此时使用后分层 (poststratification)，即先进行 SRS，然后将获得的样本分层。

32.4.1 参数估计

总体均值 μ 的估计

$$\hat{\mu}_{poststr} = \sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N} \bar{y}_h$$

$$Var(\hat{\mu}_{poststr}) = E[Var(\hat{\mu}_{str}|\overrightarrow{n})] \approx \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N} \sigma_h^2 + \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{H} \left(1 - \frac{N_h}{N}\right) \sigma_h^2$$

下证明：(1) 后分层估计量 $\hat{\mu}_{poststr}$ 是无偏估计；(2) 如上后分层方差公式正确。

Proof. (1) 后分层估计量的计算公式本质和分层随机抽样一样，因此是无偏的。

(2) 由方差分解公式：

$$Var(\hat{\mu}_{poststr}) = Var(E[\hat{\mu}_{str}|\overrightarrow{n}]) + E[Var(\hat{\mu}_{str}|\overrightarrow{n})]$$

而：

$$\begin{aligned}
E[\hat{\mu}_{str}|\overrightarrow{n}] &= E\left(\sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{N_h}\frac{Y_{hj}Z_{hj}}{n}\right) \\
&= \sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{N_h}\frac{Y_{hj}}{n}E(Z_{hj}) \\
&= \sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{N_h}\frac{Y_{hj}n_h}{nN_h} \\
&= \sum_{h=1}^{H}\frac{n_h}{n}\sum_{j=1}^{N_h}\frac{Y_{hj}}{N_h} \\
&= \sum_{h=1}^{H}\frac{n_h}{n}\mu_h
\end{aligned}$$

可以看出上式是一个定值，所以：

$$Var(E[\hat{\mu}_{str}|\overrightarrow{n}]) = 0$$

于是：

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\mu}_{poststr}) &= E[Var(\hat{\mu}_{str}|\overrightarrow{n})] \\
&= E\left[\sum_{h=1}^{H}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{\sigma_h^2}{n_h}\right] \\
&= \sum_{h=1}^{H}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\sigma_h^2\left[E\left(\frac{1}{n_h}\right)-\frac{1}{N_h}\right]
\end{aligned}$$

由定理 21.5，利用泰勒展开，令 $E(n_h)=\mu$，即有：

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{n_h}\right) &\approx E\left[\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu^2}(n_h-\mu)+\frac{2}{\mu^3}\frac{(n_h-\mu)^2}{2!}\right] \\
&= \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^3}Var(n_h)
\end{aligned}$$

由后分层原理，显然可以得到：

$$n_h \sim \text{Hyper}(n, N_h, N)$$

$$E(n_h) = \frac{nN_h}{N},\ Var(n_h) = \frac{nN_h(N-n)(N-N_h)}{N^2(N-1)}$$

于是：

$$E\left(\frac{1}{n_h}\right) = \frac{N}{nN_h} + \left(\frac{N}{nN_h}\right)^2 \left(1 - \frac{N_h}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$$

将上式代入 $Var(\hat{\mu}_{poststr})$ 即可得到：

$$Var(\hat{\mu}_{poststr}) \approx \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{H} \frac{N_h}{N} \sigma_h^2 + \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{H} \left(1 - \frac{N_h}{N}\right) \sigma_h^2 \qquad \square$$

32.5 样本容量

忽略 FPC

当 $\frac{n_h}{N_h}$, $h = 1, 2, \ldots, H$ 小的时候，忽略层内的 FPC，令：

$$Var(\hat{\mu}_{str}) = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{H} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \frac{n}{n_h} \sigma_h^2 = \frac{v}{n}$$

则 MOE 为 $u\sqrt{\frac{v}{n}}$，可得：

$$n = \frac{u^2 v}{d^2}$$

不忽略 FPC

如果 $\frac{n_h}{N_h}$, $h = 1, 2, \ldots, H$ 较大，则考虑层内的 FPC 或使用 Monte Carlo 算法。

Chapter 33

整群抽样

整群抽样 (cluster sampling)将所有个体划分为 N 个群 (cluster)，称群为初级抽样单元 (primary sampling units, psus)或抽样单位，然后通过 SRS 对群进行抽样，在抽出的每个群中使用独立的抽样方法得到最终的样本，称个体为二级抽样单元 (secondary sampling units, ssus)或观察单位。在整群抽样中，ssu 只有在它属于的 psu 被选中时才会有可能被包含在样本中。

整群抽样与 SRS、分层抽样的比较

1. 整群抽样中抽出的样本不如 SRS 得到的样本有代表性。因为群的划分往往是依据于地理信息等进行的，群内的差异往往较小，群间的差异可能较大。此时因为仅从抽中的群中抽样而未在别的群中抽样，样本就可能缺少代表性，即 SRS 样本单元比整群抽样样本单元提供的信息更多。

2. 整群抽样不同于分层抽样的地方是它并不选取辅助变量，虽然层的概念类似于群的概念，但群不由辅助变量产生，也就导致了样本代表性较低的结果。分层随机抽样中，$Var(\hat{\mu}_Y)$ 在群内差异小群间差异大的情况下较小，整群抽样中，$Var(\hat{\mu}_Y)$ 在群内差异大群间差异小的情况下较小（因为此时样本单元提供的信息更多），在实践中只能通过扩大群的个数来提高精确度。

3. 整群抽样会使抽样更加便捷，单位价格上信息更多。

整群抽样的分类

1. 一阶整群抽样 (one-stage cluster sampling)：一旦某个 psu 被选中，该 psu 中的 ssu 全部被选中。

2. 二阶整群抽样 (two-stage cluster sampling)：某个 psu 被选中后，还需对其中的所有 ssu 进行一次抽样，若此次抽中则包含在样本中。

什么情况下使用整群抽样

1. 当构建包含所有个体的抽样框架十分困难或根本做不到（此时就无法做到直接对个体进行抽样），但若把所有个体分为若干个群，构建包含所有群的抽样框架并对群进行抽样并不困难时，适合使用整群抽样。

2. 当目标群体在个体角度来讲分布广泛，调查成本太高，但可以将样本分群使一个群内的样本分布集中，从而可以降低抽样成本时，适合使用整群抽样。

33.1 一阶整群抽样

由一阶整群抽样的定义，选中某个 psu 后该 psu 中的所有 ssu 进入样本。

符号说明

符号	说明
N	总群数
n	抽样群数
M_i	第 i 个 psu 中的 ssu 个数
$M=\sum_{i=1}^{N} M_i$	ssu 的总数
y_{ij}	第 i 个 psu 中第 j 个样本单元的数值
$\mu_i=\sum_{j=1}^{M_i} \frac{y_{ij}}{M_i}$	第 i 个 psu 中的均值
$\mu=\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} \frac{y_{ij}}{M}$	总体均值
$\tau_i=\sum_{j=1}^{M_i} y_{ij}$	第 i 个 psu 中的总量
$t_i=\sum_{j=1}^{M_i} y_{ij}$	入样的第 i 个 psu 中的总量
$\tau=\sum_{i=1}^{N} \tau_i$	总体总量
$\sigma_i^2=\sum_{j=1}^{M_i} \frac{(y_{ij}-\mu_i)^2}{M_i-1}$	第 i 个 psu 中的方差
$\sigma_{psu}^2=\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N}\left(\tau_i-\frac{\tau}{N}\right)^2$	psu 间的方差
$\sigma_M^2=\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N}\left(M_i-\frac{M}{N}\right)^2$	psu 间 ssu 个数的方差
$\sigma^2=\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} \frac{(y_{ij}-\mu)^2}{M-1}$	总体方差
$R=\frac{\sum_{i=1}^{N}(M_i-\frac{M}{N})(\tau_i-\frac{\tau}{N})}{(N-1)\sigma_M\sigma_{psu}}$	M_i 与 τ_i 的回归系数

表 33.1: 符号说明表

一阶整群抽样的相关参数有两种估计方式，分别为无偏估计与比例估计。虽然无偏估计具有无偏性，但经过模拟研究，当群内总体总量与群内个体数量成正比时，比例估计的方差会比无偏估计小很多，此时应选择比例估计量对参数进行估计。

33.1.1 参数的无偏估计

总体总量的估计

可给出如下关于总体总量的估计：

$$
\begin{aligned}
\hat{\tau} &= \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{M_i} w_{ij}y_{ij} \\
Var(\hat{\tau}) &= N^2\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma_{psu}^2}{n} = N(N-n)\frac{\sigma_{psu}^2}{n} \\
\widehat{Var}(\hat{\tau}) &= N^2\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s_{psu}^2}{n} = N(N-n)\frac{s_{psu}^2}{n} \\
s_{psu}^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-\frac{\hat{\tau}}{N}\right)^2
\end{aligned}
$$

总体均值的估计

可给出如下关于总体均值的估计：

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \frac{\hat{\tau}}{M} \\
Var(\hat{\mu}) &= Var\left(\frac{\hat{\tau}}{M^2}\right) = \frac{N^2}{M^2}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma_{psu}^2}{n} \\
\widehat{Var}(\hat{\mu}) &= \widehat{Var}\left(\frac{\hat{\tau}}{M^2}\right) = \frac{N^2}{M^2}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s_{psu}^2}{n}
\end{aligned}
$$

33.1.2 参数的比例估计

由：

$$
\mu = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M_i} y_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\tau_i}{\sum_{i=1}^{N}M_i} = \frac{\tau}{M}
$$

可设：

$$
\mu = \frac{\tau}{M} = B
$$

将 τ_i 看作样本单元值，将 M_i 看作辅助变量，可得到如下关于参数的比例估计：

$$
\begin{aligned}
\hat{B} = \hat{\mu}_r = \frac{\hat{\tau}}{\hat{M}} = \frac{\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i}{\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i} \\
Var(\hat{B}) = \frac{1}{M^2} Var(\hat{\tau}_r) \approx \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\sigma_{psu}^2 - 2BR\sigma_M\sigma_{psu} + B^2\sigma_M^2}{n(\frac{M}{N})^2} \\
\widehat{Var}(\hat{B}) \approx \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{s_{psu}^2 - 2\hat{B}\hat{R}s_{psu}s_M + \hat{B}^2 s_M^2}{n(\frac{\sum_{i=1}^{n} M_i}{n})^2} \\
\widehat{Var}_1(\hat{\mu}_r) = \frac{1}{M^2} N\left(N - n\right) \frac{s_e^2}{n} \\
\widehat{Var}_1(\hat{\tau}_r) = N\left(N - n\right) \frac{s_e^2}{n} \\
s_e^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(t_i - \hat{B}M_i\right)^2
\end{aligned}
$$

33.2 二阶抽样

整群抽样抽到群则群中所有单元进入样本，二阶抽样需要继续对每个群进行第二次抽样，抽中则进入样本，即我们只在选中的 psu 中选择一部分 ssu。

符号说明

符号	说明
N	总群数
n	抽样群数
J	每个群中分层的层数
M_{ij}	抽出的第 i 个群第 j 个层个体的总数
m_{ij}	从抽出的第 i 个群第 j 个层抽出来的样本单元总数
M_i	抽出的第 i 个群个体的总数
M	个体总数
Y_{ijk}	第 i 个群第 j 个层的第 k 个个体的值
y_{ijk}	抽出的第 i 个群第 j 个层的第 k 个样本的值
$\bar{y}_{ij}$	第 i 个群第 j 个层样本的均值
μ_{ij}	第 i 个群第 j 个层的均值
τ_i	第 i 个群的总体总量
t_i	入样的第 i 个群的总体总量
τ	总体总量
σ_{ij}^2	第 i 个群第 j 个层的方差
p_{ij}	第 i 个群第 j 个层的流行率
p_i	第 i 个群的流行率
p	总流行率
Z_i	表示第 i 个群是否被抽中的示性变量

表 33.2: 符号说明表

33.2.1 总量的估计

可得到如下关于总量的估计：

$$\hat{t}_i = \sum_{j=1}^{J} \frac{M_{ij}}{m_{ij}} \sum_{k=1}^{m_{ij}} y_{ijk}$$

$$\hat{\tau} = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{t}_i = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J} \frac{M_{ij}}{m_{ij}} \sum_{k=1}^{m_{ij}} y_{ijk}$$

$$E(\hat{t}_i) = t_i,\ E(\hat{\tau}) = \tau$$

$$Var(\hat{\tau}) = \frac{N^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\tau_i - \frac{\tau}{N}\right)^2 + \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} \frac{M_{ij}^2}{m_{ij}} \left(1 - \frac{m_{ij}}{M_{ij}}\right) \left(\frac{1}{M_{ij}-1}\right) \sum_{k=1}^{M_{ij}} (Y_{ijk} - \mu_{ij})^2$$

$$\widehat{Var}(\hat{\tau}) = \frac{N^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{t}_i - \frac{\hat{\tau}}{N}\right)^2 + \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J} \frac{M_{ij}^2}{m_{ij}} \left(1 - \frac{m_{ij}}{M_{ij}}\right) \left(\frac{1}{m_{ij}-1}\right) \sum_{k=1}^{m_{ij}} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2$$

无偏性的证明

由分层随机抽样总体总量估计量的无偏性，可以得到此时 $\hat{\tau}_i$ 的无偏性，进而可以证明 $\hat{\tau}$ 是无偏的：

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\tau}) &= E[E(\hat{\tau}|\overrightarrow{Z})] = E\left[E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{t}_i|\overrightarrow{Z}\right)\right] = E\left[E\left(\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N}Z_i\hat{\tau}_i\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}Z_iE(\hat{\tau}_i)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}Z_i\tau_i\right] = \sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}\tau_iE(Z_i) = \sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}\tau_i\frac{n}{N} = \sum_{i=1}^{N}\tau_i = \tau
\end{aligned}
$$

方差公式的证明

由方差的分解，可以得到：

$$
Var(\hat{\tau}) = Var[E(\hat{\tau}|\overrightarrow{Z})] + E[Var(\hat{\tau}|\overrightarrow{Z})]
$$

由 SRS 的结论，可以得到：

$$
Var[E(\hat{\tau}|\overrightarrow{Z})] = Var\left[E\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}Z_i\hat{\tau}_i|\overrightarrow{Z}\right)\right] = Var\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}Z_i\tau_i\right) = N^2\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma_\tau^2}{n}
$$

$$
\sigma_\tau^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\tau_i - \frac{\tau}{N}\right)^2
$$

由方差的分解，可以得到：

$$
E[Var(\hat{\tau}|\overrightarrow{Z})] = E\left\{E(\hat{\tau}^2|\overrightarrow{Z}) - E^2[\hat{\tau}|\overrightarrow{Z}]\right\}
$$

而：

$$
\begin{aligned}
E[\hat{\tau}^2|\overrightarrow{Z}] - E[\hat{\tau}|\overrightarrow{Z}]^2 &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}Z_i\hat{\tau}_i\right)^2\right] - \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{N}{n}Z_i\tau_i\right)^2 \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{N^2}{n^2}Z_i^2\hat{\tau}_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\frac{N^2}{n^2}Z_iZ_j\hat{\tau}_i\hat{\tau}_j\right) \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{N^2}{n^2}Z_i^2\tau_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\frac{N^2}{n^2}Z_iZ_j\tau_i\tau_j\right) \\
&= \frac{N^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{N}Z_i^2E(\hat{\tau}_i^2) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}Z_iZ_jE(\hat{\tau}_i\hat{\tau}_j) - \sum_{i=1}^{N}Z_i^2\tau_i^2 - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}Z_iZ_j\tau_i\tau_j\right) \\
&= \frac{N^2}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N}Z_i^2E^2(\hat{\tau}_i) + \sum_{i=1}^{N}Z_i^2Var(\hat{\tau}_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}Z_iZ_jE(\hat{\tau}_i)E(\hat{\tau}_j)\right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^{N}Z_i^2\tau_i^2 - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}Z_iZ_j\tau_i\tau_j\right] \\
&= \frac{N^2}{n^2}\sum_{i=1}^{N}Z_i^2Var(\hat{\tau}_i)
\end{aligned}
$$

由 Z_i 的性质可得：

$$E[Var(\hat{\tau}|\overrightarrow{Z})] = E\left(\frac{N^2}{n^2}\sum_{i=1}^{N} Z_i^2 Var(\hat{\tau}_i)\right) = \frac{N^2}{n^2}\sum_{i=1}^{N} E(Z_i^2) Var(\hat{\tau}_i) = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N} Var(\hat{\tau}_i)$$

由分层随机抽样层内方差的公式：

$$E[Var(\hat{\tau}|\overrightarrow{Z})] = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}\frac{M_{ij}^2}{m_{ij}}\left(1-\frac{m_{ij}}{M_{ij}}\right)\sigma_{ij}^2$$

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{1}{M_{ij}-1}\right)\sum_{k=1}^{M_{ij}}(y_{ijk}-\mu_{ij})^2$$

所以：

$$Var(\hat{\tau}) = \frac{N^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\tau_i-\frac{\tau}{N}\right)^2+\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}\frac{M_{ij}^2}{m_{ij}}\left(1-\frac{m_{ij}}{M_{ij}}\right)\left(\frac{1}{M_{ij}-1}\right)\sum_{k=1}^{M_{ij}}(Y_{ijk}-\mu_{ij})^2$$

33.2.2 流行率问题

关于流行率问题，有如下结论：

$$\hat{p}_i = \frac{\hat{t}_i}{M_i}$$

$$\hat{p} = \frac{\hat{\tau}}{M} = \frac{N}{nM}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J}\frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_{k=1}^{m_{ij}} y_{ijk}$$

$$Var(\hat{\tau}) = \frac{N^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\tau_i-\frac{\tau}{N}\right)^2+\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}\frac{M_{ij}^2}{m_{ij}}\left(1-\frac{m_{ij}}{M_{ij}}\right)\frac{M_{ij}p_{ij}(1-p_{ij})}{M_{ij}-1}$$

$$\widehat{Var}(\hat{\tau}) = \frac{N^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{t}_i-\frac{\hat{\tau}}{N}\right)^2+\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J}\frac{M_{ij}^2}{m_{ij}-1}\left(1-\frac{m_{ij}}{M_{ij}}\right)\hat{p}_{ij}(1-\hat{p}_{ij})$$

由 $\hat{\tau}_i$ 和 $\hat{\tau}$ 的无偏性，显然 $\hat{p}_i$ 和 $\hat{p}$ 也是无偏估计。由一般情况下 $Var(\hat{\tau})$ 的计算公式，也容易得到流行率问题下 $Var(\hat{\tau})$ 的计算公式。

33.3 系统抽样

抽样框绘制很困难的时候系统抽样是一种特殊的整群抽样

第九部分

非参数统计学

Chapter 34

单样本位置检验

34.1 广义符号检验

目的

给定某样本，检验给定值 q_0 与总体的 π 分位点 Q_π 之间的关系。

适用条件

总体是连续型的。离散型分位点的定义会导致下述统计量不服从对应的二项分布。

原理

记一组样本中大于 q_0 的单元的个数为 s^+，小于 q_0 的单元的个数为 s^-。若零假设成立（即 q_0 确实为总体的 π 分位点），则从总体中任取一个元素，它小于 q_0 的概率应为 π，那么对于任意一组样本来讲，应有 $K \sim \mathrm{Binom}(s^+ + s^-, \pi)$，其中 K 为 s^- 背后的随机变量。

零假设

$H_0 : Q_\pi = q_0$

大样本近似

当 n 较大时，可认为 $Z \sim N(0, 1)$，其中 $Z = \dfrac{K - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}$，其中 n 为样本中不等于 q_0 的单元的个数，由此可在求 p 值时近似计算标准正态分布的累积概率值。

注意事项

需要去除样本中值为 q_0 的单元，这部分单元对推断没有帮助。

备择假设	p 值	解释
$H_1 : Q_\pi > q_0$	$P_{H_0}(K \leqslant s^-)$	在零假设下，二项分布变量小于当前样本 s^- 的概率太小，说明 s^- 太小应变大，即分位点的值应比 N 大
$H_1 : Q_\pi < q_0$	$P_{H_0}(K \geqslant s^-)$	略
$H_1 : Q_\pi \neq q_0$	$2\min\{P_{H_0}(K \leqslant s^-), P_{H_0}(K \geqslant s^-)\}$	略

表 34.1: 对 $H_0 : Q_\pi = q_0$ 的检验

尚存疑惑

为什么 p 值是这样的呢？

代码

```r
sign.test <- function(x, q0, pi, exact = FALSE,
                      alternative = c("two.sided", "greater", "less")) {
  alternative <- match.arg(alternative)
  s_pos <- sum(x > q0)
  STATISTIC <- sum(x < q0)
  n <- s_pos + STATISTIC
  STATISTIC <- setNames(STATISTIC, "s_neg")
  hypothesis_message <- switch(alternative,
                               "greater" = paste("Q0 >", pi),
                               "less" = paste("Q0 <", pi),
                               "two.sided" = paste("Q0 !=", pi))
  if (exact) {
    METHOD <- "Sign Test (Exact)"
    p.value <- switch(alternative,
                      "greater" = pbinom(q = STATISTIC, size = n, prob =
                      ↪  pi),
                      "less" = pbinom(q = STATISTIC-1, size = n, prob =
                      ↪  pi, lower.tail = FALSE),
                      "two.sided" = 2 * min(pbinom(q = STATISTIC-1, size
                      ↪  = n, prob = pi, lower.tail = FALSE),
                                            pbinom(q = STATISTIC, size =
                                            ↪  n, prob = pi)))
```

```
  } else {
    METHOD <- "Sign Test (Approximate)"
    z_score <- (STATISTIC - n * pi) / sqrt(n * pi * (1 - pi))
    p.value <- switch(alternative,
                      "greater" = pnorm(z_score, lower.tail = TRUE),
                      "less" = pnorm(z_score, lower.tail = FALSE),
                      "two.sided" = 2 * min(pnorm(z_score), 1 -
                       ↪ pnorm(z_score)))
  }

  RVAL <- list(statistic = STATISTIC, p.value = p.value,
               data.name = deparse(substitute(x)),
               method = METHOD, alternative = hypothesis_message)
  class(RVAL) <- "htest"
  RVAL
}
```

34.2 Wilcoxon 符号秩检验

目的

给定某样本，检验给定值 M_0 与总体的中位数 M 之间的关系。

适用条件

总体分布是连续且对称的。连续是为了避免样本中出现重复值影响秩分配，对称则是秩推断成立的必要条件，见下文34.2。

符号秩的计算

设样本中每个单元的取值为 X_i，$i = 1, 2, \dots, n$。

1. 对 $i = 1, 2, \dots, n$，计算 $d_i = |X_i - M_0|$。
2. 对 d_i 进行排序，找出它们的秩 R_i。
3. 计算 $W^+ = \sum\limits_{i \in \{i: X_i - M_0 > 0\}} R_i$，$W^- = \sum\limits_{i \in \{i: X_i - M_0 < 0\}} R_i$。

原理

由于总体是对称的，那么对于任意一个元素，首先它出现在 M_0 两边的可能性是相等的，其次它出现在 M_0 两边对称位置的可能性是相等的，由此在零假设成立的条件下，W^+

和 W^- 应相差不大，且二者满足关系：$W^+ + W^- = \frac{n(n+1)}{2}$，因此，当其中之一很小时，应怀疑零假设。若想对 p 值精确求解，见。

在概率论里完善 Wilcoxon 秩统计量的分布相关理论，然后链接过来

零假设

$H_0 : M = M_0$

备择假设	统计量 W	p 值
$H_1 : M > M_0$	W^-	$P(W \leqslant w)$
$H_1 : M < M_0$	W^+	$P(W \leqslant w)$
$H_1 : M \neq M_0$	$\min\{W^-, W^+\}$	$2P(W \leqslant w)$

表 34.2: Wilcoxon 符号秩检验

大样本近似

可求出 Wilcoxon 符号秩检验统计量的期望和方差分别为：

$$E(W) = \frac{n(n+1)}{4} \qquad Var(W) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$

当 n 较大时，由中心极限定理，可认为 $Z \sim N(0,1)$，其中 $Z = \dfrac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}}$，由此可在求 p 值时近似计算标准正态分布的累积分布值。

打结

若数据中含有相同的数字，称之为打结的情况。结的个数为重复出现的数值的个数，结中数值的秩为它们升序排序后位置的平均值。如果结多了，大样本近似公式就不准，要进行修正，同时，如果数据中有结则必须使用大样本近似。修正后的公式为：

$$Z = \frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W) - \frac{\sum_{i=1}^{g}(\tau_i^3 - \tau_i)}{48}}} \sim N(0,1)$$

举例：对于数据 $\{2, 2, 5, 8, 8.8, 1, 1, 1, 1\}$，一共有 3 个结，$\tau_1 = 2$（两个 2），$\tau_2 = 3$（三个 8），$\tau_3 = 4$（四个 1）。称 τ 为结统计量。

代码

```r
wilcox.test(x, alternative = c("two.sided", "less", "greater"), mu = M0,
    exact = NULL, correct = TRUE)
```

34.3 中位数的点估计与置信区间

适用条件

总体分布是连续且对称的。

中位数点估计公式

我们称 $\{\frac{X_i+X_j}{2},\ i \leqslant j\}$ 为 Walsh 平均，然后使用 Walsh 平均的中位数估计总体的中位数，该统计量称为 Hodges-Lehmann 估计量（简称 HT 估计量）。

$$\hat{\theta} = \text{median}\{\frac{X_i + X_j}{2},\ i \leqslant j\}$$

中位数区间估计原理

注意到如下关系：

$$W^+ = \left|\{\frac{X_i + X_j}{2} > M_0,\ i \leqslant j\}\right|$$

该关系也有关于 W^- 的对称版本。对 Walsh 平均从小到大排序，记为 $W_{(1)}, W_{(2)}, \ldots, W_{(N)}, N = \frac{n(n+1)}{2}$。因为想要取两个 Walsh 平均构成一个中位数的区间估计，那么就要去掉左端和右端部分的 Walsh 平均，而 Walsh 平均的个数是与符号秩统计量 W 是相关的，左端去掉的 Walsh 平均的个数可以看作 W^- 的实现值，右端去掉的 Walsh 平均的个数可以看作 W^+ 的实现值，那么就给予了区间估计成立的概率值。

因此，给出中位数 M 的 $(1-\alpha)$ 置信区间为：

$$(W_{k+1}, W_{N-k}),\ k\text{满足}P(W^- \leqslant k) \leqslant \frac{\alpha}{2}\text{与}P(W^- \leqslant k+1) > \frac{\alpha}{2}$$

注意到上式利用了 W^- 与 W^+ 的对称性。

在大样本下，可以近似得到：

$$k \approx \frac{n(n+1)}{4} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

为什么要用 Walsh 平均

Walsh 平均可以增大样本数量，如果就用原样本去估计置信区间，在样本数较小的情况下，置信区间会变得很大，不够精确。

代码

```r
wilcox.test(x, exact = NULL, correct = TRUE, conf.int = FALSE, conf.level
↪   = 0.95))
```

34.4 符号检验与 Wilcoxon 符号秩检验的比较

在数据满足 Wilcoxon 符号秩检验的适用条件时，由于 Wilcoxon 符号秩检验不仅利用了符号信息，也利用了距离信息，因此会更准确。

Chapter 35

两样本位置检验

35.1 目的

通过检验样本中位数的一致性来判断样本的差异性。中位数是某种意义上的“平均”。

35.2 Brown-Mood 中位数检验

目的

检验两个样本 X 和 Y 的中位数 M_X, M_Y 是否相同。

原理

记样本 X 与 Y 分别为 $X_1, X_2, \ldots, X_m$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$。将两样本混合求得混合后的中位数 M_{XY}。若两样本中位数相同，则混合后的中位数应也等于二者的中位数，那么两个样本中大于 M_{XY} 的单元的个数应该大致一样。可构建如下表格：

	X 样本	Y 样本	总和
单元大于 M_{XY} 的个数	a	b	p
单元小于 M_{XY} 的个数	c	d	q
总和	m	n	N

表 35.1: $2 * 2$ 列联表矩阵

令 A 表示表中 a 背后的随机变量，在 m、n、p 固定的情况下，A 服从超几何分布 H(p, m, N)（在四个边际和中任意三个固定的情况下，都有 $2 * 2$ 列联表中的一个值其背后的随机变量服从超几何分布），有如下概率：

$$P(A = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{N}{p}}$$

若 A 过大或过小，考虑到此时 p 是固定的，那么 X 样本中大于 M_{XY} 单元的个数离 Y 样本中大于 M_{XY} 单元的个数就会很远，就应怀疑零假设。

零假设

$H_0 : M_X = M_Y$

备择假设	p 值
$H_1 : M_X > M_Y$	$P(A \geqslant a)$
$H_1 : M_X < M_Y$	$P(A \leqslant a)$
$H_1 : M_X \neq M_Y$	$2\min\{P(A \geqslant a), P(A \leqslant a)\}$

表 35.2: 对 $H_0 : M_X = M_Y$ 的检验

大样本近似

由超几何分布的期望与方差，在大样本情况下可认为有如下关系：

$$Z = \frac{A - \frac{pm}{N}}{\sqrt{\frac{pm(N-p)(N-m)}{N^3}}} \sim N(0,1)$$

对于双边假设检验，在大样本情况下，可选取检验统计量与 p 值如下：

$$K = \frac{(2a-m)^2(m+n)}{mn} \sim \chi^2(1),\ p = P(K \geqslant k)$$

注意事项

若有和 M_{XY} 值相同的单元，可将其去除，也可将其归于任何一类使得检验变得保守一点。

代码

以下代码需要输入 x 满足一定的格式：数据是两列，第一列为观测值，第二列用 1, 2 来表示其属于 X 或 Y 样本，1 表示属于 X 样本。以下代码也提供了样本中有和 M_{XY} 值相同的单元情况下的处理方案，omit 表示去除与 M_{XY} 值相同的单元，less 表示将其归于小于 M_{XY} 值的一类，greater 表示将其归于大于 M_{XY} 值值的一类。

```
brown.mood.test <- functions(data,
      alternative = c("two.sided", "less", "greater"),
      ties.method = c("omit", "less", "greater")){
  M_AB <- median(data[,1])
  switch(ties.method,
         omit = {data <- data[data[, 1] != M_AB,]},
```

```
            less = {data[data[, 1] == M_AB, 1] = M_AB - 1},
            greater = {data[data[, 1] == M_AB, 1] = M_AB + 1})

    C <- matrix(nr = 2, nc = 2)
    C[1, 1] <- sum(data[data[, 2] == 1, 1] > M_AB)
    C[1, 2] <- sum(data[data[, 2] == 2, 1] > M_AB)
    C[2, 1] <- sum(data[data[, 2] == 1, 1] < M_AB)
    C[2, 2] <- sum(data[data[, 2] == 2, 1] < M_AB)

    fisher.test(C, alt=alternative, conf.int = FALSE)
}
```

35.3 Wilcoxon 秩和检验

目的

检验两个样本 X 和 Y 的中位数 M_X，M_Y 是否相同。

适用条件

需要两总体的分布有类似形状，但并不需要对称。

Wilcoxon 秩和统计量

记样本 X 与 Y 分别为 $X_1, X_2, \ldots, X_m$，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$。把两个样本混合起来并从小到大排序，令 R_{X_i} 和 R_{Y_j} 分别表示单元 X_i、单元 Y_i 在混合样本中的秩，则称

$$W_X = \sum_{i=1}^{m} R_{X_i},\ W_Y = \sum_{j=1}^{n} R_{Y_j}$$

为 Wilcoxon 秩和统计量。

在零假设下，令 R_i 表示 Y 中第 i 个样本在混合后的秩，可得如下性质：

$$P(R_i = k)\frac{1}{N},\ k = 1, 2, \ldots, N;\ i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$P(R_i = k,\ R_j = l) = \begin{cases} \frac{1}{N(N-1)} & k \neq l; \\ 0 & k = l. \end{cases}$$

$$E(R_i) = \frac{N+1}{2},\ Var(R_i) = \frac{N^2-1}{12},\ Cov(R_i,\ R_j) = -\frac{N+1}{12}(i \neq j)$$

$$E(W_Y) = \frac{n(N+1)}{2},\ Var(W_Y) = \frac{mn(N+1)}{12}$$

原理

若零假设成立，在两总体分布有类似形状时 W_X 与 W_Y 应比较接近，当其中之一很大或很小时，应怀疑零假设。

零假设

$H_0: M_X = M_Y$

备择假设	统计量 K	p 值
$H_1: M_X > M_Y$	W_Y	$P(K \leqslant k)$
$H_1: M_X < M_Y$	W_X	$P(K \leqslant k)$
$H_1: M_X \neq M_Y$	$\min\{W_X, W_Y\}$	$2P(K \leqslant k)$

表 35.3: Wilcoxon 秩和检验

大样本近似

由 W_Y 的期望与方差，在大样本下可认为：

$$Z = \frac{W_Y - E(W_Y)}{\sqrt{Var(W_Y)}} \sim N(0,1) \tag{35.1}$$

若存在打结的情况，只能使用大样本近似，且应对正态近似公式进行修正（其中 τ 为结统计量）：

$$Z = \frac{W_Y - E(W_Y)}{\sqrt{Var(W_Y) - \frac{mn(\sum_{i=1}^{g}\tau_i^3 - \sum_{i=1}^{g}\tau_i)}{12(m+n)(m+n-1)}}} \sim N(0,1) \tag{35.2}$$

代码

```
wilcox.test(x, y, alternative = c("two.sided", "less", "greater"), exact
↪  = NULL, correct = TRUE)
```

35.4 Brown-Mood 中位数检验与 Wilcoxon 秩和检验的比较

在数据满足 Wilcoxon 秩和检验的适用条件时，由于 Wilcoxon 符号秩检验不仅利用了符号信息，也利用了距离信息，因此会更准确。

35.5 成对数据差异性检验

目的： 检验成对数据间是否有显著差异。

适用条件:

1. 每一对数据来自可比较的对象。
2. 每一对数据彼此之间是独立的。。

35.5.1 连续型数据

原理

记两组观测值分别为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$。对应元素作差，则检验退化为单样本中位数检验。令 M_D 表示 $X_i - Y_i$ 的中位数，则有以下检验类型:

零假设	备择假设
$H_0 : M_D = M_0$	$H_0 : M_D > M_0$
$H_0 : M_D = M_0$	$H_0 : M_D < M_0$
$H_0 : M_D = M_0$	$H_0 : M_D \neq M_0$

表 35.4: 检验类型

代码

下述 sign.test 的代码参考第509页。mu 值的都是想要检验的二者之间的差异值，wilcox.test 可以给出一定置信度下二者差异值的点估计与区间估计。

```
sign.test(x-y, mu, 0.5, exact = FALSE, alternative = c("two.sided", "less", "greater"), )
wilcox.test(x, y, alternative = c("two.sided", "less", "greater"), mu = 0, paired = TRUE, exact = NULL, correct = TRUE, conf.int = FALSE, conf.level = 0.95)
```

35.5.2 01 型数据的 McNemar 检验

假设

H_0 : 无显著差异; H_1 : 有显著差异

原理

记两组观测值分别为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$。记:

$$n_X = |\{i : X_i = 1,\ Y_i = 0\}|\,,\ n_Y = |\{i : Y_i = 1,\ X_i = 0\}|$$

McNemar 检验统计量为：

$$K = \frac{(n_X - n_Y)^2}{n_X + n_Y}$$

在零假设成立的条件下该统计量近似服从 $\chi^2(1)$，而在大样本的情况下，它的平方根近似服从标准正态分布。如果有差异，那么统计量的值应该是偏大的，因此只考虑上侧的单侧检验问题，有如下 p 值：

$$p = F_{\chi^2}(K \geqslant k)$$

代码

没搞懂这里的连续性修正是个什么情况

```
mcnemar(x, y, correct=TRUE)
```

Chapter 36

多样本位置检验

36.1 目的

在完成试验设计之后，把多样本位置检验与方差分析部分结合起来

利用样本中各响应值的位置信息，判断各水平间是否存在差异或某种趋势。

36.2 本章各方法的简单总结

1. 所有方法都要求各水平的总体分布之间是相似的，仅仅是位置参数可能有些差异。

2. Kruskal-Wallis 与 Friedman、Durbin 对称，都是检验各水平响应值的位置参数是否一致（即各水平在该响应值下是否有差异）。Kruskal 是在各水平不相关的情况下使用的，Freidman 是在完全区组设计下、各水平之间由于区组问题不独立时使用的，而 Durbin 是在不完全区组设计下、各区组之间独立时使用的。同时 Kruskal-Wallis、Durbin 要求数据是连续型的，Friedman 则无此类要求。

3. Jonckheere-Terpstra 与 page 对称，都是检验各水平响应值的位置参数是否有顺序关系，Jonckheere-Terpstra 是在各水平不相关的情况下使用的，page 是在完全区组设计下、各水平之间由于区组问题不独立时使用的。同时 Jonckheere-Terpstra 要求数据是连续型的，page 则无此类要求。

4. Cochran 与 Friedman 对应，Cochran 是完全区组设计、二元响应情况下检验各水平是否存在差异的方法。

5. Friedman 与下一章 Kendall 检验是一致的。Kendall 一般用在判断评估者的主观评估是否一致，而 Friedman 则是客观的判断水平之间是否有差异。

36.3 Kruskal-Wallis 检验

适用条件

各响应值在水平间和水平内是独立的，水平之间分布是相似的，数据是连续型的。

假设

假设 k 个水平有分布函数 $F_i(x) = F(x-\theta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$，则检验假设可写为：

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n \Leftrightarrow H_1 : \text{至少有一个等号不成立}$$

原理

将所有水平的响应值混合后排序，得到每一个响应值对应于所有数据的秩，类似于方差分析中 MSA 的构成，若水平间的秩和差异大，则应怀疑零假设。由此构建以下 Kruskal-Wallis 统计量（其中 $\bar{R}_i$ 表示第 i 个水平秩的平均值，$\bar{R}$ 表示所有响应值秩的平均值）：

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{R}_i - \bar{R})^2 = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

如果备择假设成立，那么统计量的值应该是偏大的，因此只考虑上侧的单侧检验问题。

若想求精确结果，需要满足数据中不存在结（即数据中不存在相同的数值），对每种秩分配计算对应的 H 值，便能得到此时统计量 H 的分布。

大样本近似

在大样本的情况下，若零假设成立，有如下近似分布：

$$H \sim \chi^2_{(k-1)}$$

打结

若存在打结的情况，将 H 作以下修正，然后利用大样本近似公式进行计算：

$$H_C = \frac{H}{1 - \sum\limits_{i=1}^{g} (\tau_i^3 - \tau_i)/(N^3 - N)}$$

代码

这是 R 语言 stats 包中的函数，只提供大样本近似，并且不包含连续性修正。x 表示各水平的 response 值，g 对应于 factor 标签。也可以只传入 x，此时 x 需要是一个包含所有水平响应值的列表，各水平之间分隔开。

```
kruskal.test(x, g)
```

以下是自编代码，x 表示各水平的 response 值，y 对应于 factor 标签。也可以只传入 x，此时 x 需要是一个数据框，第一列是 response 值，第二列是 factor 标签。提供精确检验、大样本近似、连续性修正与打结校正功能。精确检验需要 gtools 包，同时测试了一下一个水平 8 个数据一共 24 个数据 permutation 就要占到 14 个 G 的内存以上，慎用精确检验。

```r
kruskal_wallis.test <- function(x, y = NULL, exact = FALSE, correct = FALSE) {
  if (is.data.frame(x) && ncol(x) == 2) {
    DNAME <- deparse(substitute(x))
    y <- x[, 2]
    x <- x[, 1]
  } else if (is.vector(x)) {
    if (is.null(y))
      stop("Error: x must have two columns or y is provided.")
    if (length(y) != length(x))
      stop("Error: x and y must have the same length.")
    DNAME <- paste(deparse(substitute(x)), "and", deparse(substitute(y)))
  } else {
    stop("Error: x must be a data frame with 2 columns or a vector.")
  }
  METHOD <- "Kruskal-Wallis test"
  TIES <- table(x)
  if (any(TIES > 1)) {
    ties <- TRUE
  } else {ties <- FALSE}
  unique_y <- sort(unique(y))
  rank_x <- rank(x)
  R_i <- sapply(unique_y, function(i) sum(rank_x[y == i]))
  n_i <- sapply(unique_y, function(i) sum(y == i))
  N <- length(x)
  STATISTIC <- setNames((12 / (N * (N + 1)) * sum(R_i^2 / n_i) - 3 * (N + 1))
                        / (1 - sum(TIES^3 - TIES) / (N^3 - N)), "H")
  if (!exact || ties) {
    df <- length(unique_y) - 1
    if (!correct) {
      p_value <- pchisq(STATISTIC, df = df, lower.tail = FALSE)
    } else {
      METHOD <- paste(METHOD, "with continuity correction")
      p_value <- pchisq(STATISTIC - 0.5, df = df, lower.tail = FALSE)
    }
  } else {
```

```
    H.cal <- function(rank_x, y) {
      R_i <- sapply(unique_y, function(i) sum(rank_x[y == i]))
      (12 / (N * (N + 1)) * sum(R_i^2 / n_i) - 3 * (N + 1))
    }
    METHOD <- sub("test", "exact test", METHOD, fixed = TRUE)
    library(gtools)
    all_permutations <- permutations(N, N)
    Hs <- sapply(1:nrow(all_permutations), function(i) {
      H.cal(all_permutations[i, ], y)
    })
    p_value <- mean(Hs >= STATISTIC)
  }
  RVAL <- list(statistic = STATISTIC, p.value = p_value,
               method = METHOD, data.name = DNAME)
  class(RVAL) <- "htest"
  RVAL
}
```

36.4 Jonckheere-Terpstra 检验

目的

检验水平的位置参数是否呈现出上升趋势，若想检验是否呈现出下降趋势，改变水平顺序就行了。

适用条件

各响应值在水平间和水平内是独立的，水平之间分布是相似的，数据是连续型的。这里与 Kruskal-Wallis 检验的条件是一样的。

假设

假设 k 个水平有分布函数 $F_i(x) = F(x - \theta_i)$，$i = 1, 2, \ldots, k$，则检验假设可写为：

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n \Leftrightarrow H_1 : \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_n$$

原理

假设一共有 k 个水平，每个水平中有 n_i 个响应值 $(i = 1, 2, \ldots, k)$，响应值用 X_{ij} 表示 $(i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n_i)$，由此构建以下 JT 统计量 (J)：

$$
U_{ij} = |X_{ia} < X_{jb},\ a = 1, 2, \ldots, n_i,\ b = 1, 2, \ldots, n_j|
$$

$$
J = \sum_{i<j} U_{ij}
$$

在备择假设成立的情况下，某个水平中的观测值会比后面水平中的观测值小，水平间的 U_{ij} 会比较大，J 也会比较大。因此在 J 比较大的时候，有理由怀疑零假设。由此可看出这里只考虑上侧的单侧检验问题。

若想求精确检验的结果，需要满足数据中没有结（即所有数据中没有相同的数值），然后对每一种秩分配情况计算 J 的值（秩的大小关系便反映了数据之间的大小关系），即可得到 J 的精确分布。

大样本近似

在 $\min\limits_{i} n_i \to +\infty$ 时，有以下近似公式：

$$
Z = \frac{J - (N^2 - \sum\limits_{i=1}^{k})/4}{\sqrt{[N^2(2N+3) - \sum\limits_{i=1}^{k} n_i^2(2n_i+3)]/72}} \sim N(0,\ 1)
$$

打结

当数据中存在相同数值时，要进行修正：

$$
U_{ij} = |X_{ia} < X_{jb},\ a = 1, 2, \ldots, n_i,\ b = 1, 2, \ldots, n_j| + \frac{1}{2}|X_{ia} = X_{jb},\ a = 1, 2, \ldots, n_i,\ b = 1, 2, \ldots, n_j|
$$

$$
J = \sum_{i<j} U_{ij}
$$

代码

x 表示各水平的 response 值，y 对应于 factor 标签。也可以只传入 x，此时 x 需要是一个数据框，第一列是 response 值，第二列是 factor 标签。提供精确检验、大样本近似、连续性修正与打结校正功能。精确检验需要 gtools 包，同时测试了一下一个水平 8 个数据一共 24 个数据 permutation 就要占到 14 个 G 的内存以上，慎用精确检验。

```
JT.test <- function(x, y = NULL, exact = FALSE, correct = FALSE) {
  if (is.data.frame(x) && ncol(x) == 2) {
```

```
    DNAME <- deparse(substitute(x))
    y <- x[, 2]
    x <- x[, 1]
  } else if (is.vector(x)) {
    if (is.null(y))
      stop("Error: x must have two columns or y is provided.")
    if (length(y) != length(x))
      stop("Error: x and y must have the same length.")
    DNAME <- paste(deparse(substitute(x)), "and", deparse(substitute(y)))
  } else {
    stop("Error: x must be a data frame with 2 columns or a vector.")
  }
  J.cal <- function(x, y, k) {
    U <- 0
    for (i in 1:(k - 1)) {
      for (j in (i + 1):k) {
        xi <- x[y==i]
        xj <- x[y==j]
        ties <- sum(outer(xi, xj, "==") * 1)
        U <- U + sum(outer(xi, xj, "<") * 1) + ties / 2
      }
    }
    U
  }
  METHOD <- "Jonckheere-Terpstra test"
  k <- max(y)
  U <- 0
  for (i in 1:(k - 1)) {
    for (j in (i + 1):k) {
      xi <- x[y==i]
      xj <- x[y==j]
      ties <- sum(outer(xi, xj, "==") * 1)
      if (ties > 0) {exact <- FALSE}
      U <- U + sum(outer(xi, xj, "<") * 1) + ties / 2
    }
  }
  STATISTIC <- setNames(U, "J")
  if (!exact) {
```

```r
    ni <- table(y)
    N <- sum(ni)
    Z <- (STATISTIC - (N^2 - sum(ni^2)) / 4) / sqrt((N^2 * (2 * N + 3) -
    ↪  sum(ni^2 * (2 * ni + 3))) / 72)
    if (!correct) {
      p_value <- pnorm(Z, lower.tail = FALSE)
    } else {
      p_value <- pnorm(Z - 0.5, lower.tail = FALSE)
      METHOD <- paste(METHOD, "with continuity correction")
    }
  } else {
    METHOD <- sub("test", "exact test", METHOD, fixed = TRUE)
    library(gtools)
    n <- length(x)
    all_permutations <- permutations(n, n)
    JTs <- sapply(1:nrow(all_permutations), function(i) {
      J.cal(all_permutations[i, ], y, k)
    })
    p_value <- mean(JTs >= STATISTIC)
  }
  RVAL <- list(statistic = STATISTIC, p.value = p_value,
               method = METHOD, data.name = DNAME)
  class(RVAL) <- "htest"
  RVAL
}
```

36.5 Friedman 秩和检验

适用条件

各水平间并不独立（因为还有区组的影响），采用完全区组设计，水平之间分布是相似的，连续型与离散型数据都可以。

假设

假设 k 个水平有分布函数 $F_i(x) = F(x-\theta_i)$，$i = 1, 2, \ldots, k$，则检验假设可写为：

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n \Leftrightarrow H_1 : \text{至少有一个等号不成立}$$

原理

假设有 k 个水平、b 个区组。

因为各区组之间是有影响的，无法把各响应值混在一起排序。选择在各个区组内计算所有响应值的秩，R_{ij} 表示在第 j 个区组中水平 i 的秩，$R_i = \sum_{j=1}^{b} R_{ij}$，$i = 1, 2, \ldots, k$，定义如下 Friedman 统计量:

$$Q = \frac{12}{bk(k+1)} \sum_{i=1}^{k} (R_i - \frac{b(k+1)}{2})^2 = \frac{12}{bk(k+1)} \sum_{i=1}^{k} R_i^2 - 3b(k+1)$$

易证 $\frac{b(k+1)}{2} = \bar{R}_i$（只需注意此时秩是针对区组内而言）。在零假设成立的情况下，各水平之间的秩和与均值相比不应相差过大，也就是 Q 值不应太大，若 Q 值过大，则有理由怀疑零假设。由此可看出这里只考虑上侧的单侧检验问题。

大样本近似

在大样本的情况下（$b \to +\infty$），若零假设成立，有如下近似分布：

$$Q \sim \chi^2_{(k-1)}$$

打结

在某个区组存在结的时候，利用下式进行修正（其中 τ_{ij} 表示第 j 个区组的第 i 个结统计量）：

$$Q_C = \frac{Q}{1-C},\ C = \frac{\sum_{i,j} (\tau_{ij}^3 - \tau_{ij})}{bk(k^2-1)}$$

成对数据的比较

类似于邓肯多重比较法，有时需要比较某两个水平之间是否存在差异，那么在大样本的情况下，如果零假设为：i 水平与 j 水平之间没有差异，那么如果下式成立（其中 α 是检验的显著性水平）：

$$\left| R_i - R_j > Z_{\frac{\alpha^*}{2}} \sqrt{b(k+1)k/6} \right|$$
$$\alpha^* = \frac{\alpha}{k(k-1)/2}$$

则可拒绝零假设。可以看出这是一个很保守的检验，α^* 其实是做了多重假设检验的校正。

记得以后要写多重假设检验的校正问题

代码

以下是自编代码，提供精确计算、大样本近似、连续性修正与打结校正功能。x 可以是一个三列的数据框，第一列表示 response 值，第二列表示 factor，第三列表示 block。x 也可以是一个向量，表示 response，此时必须传入 factor 和 block。

```r
friedman.test <- function(x, factor = NULL, block = NULL,
                          exact = FALSE, correct = FALSE) {
  if (is.data.frame(x)) {
    if (ncol(x) == 3) {
      response <- x[[1]]
      factor <- x[[2]]
      block <- x[[3]]
      DNAME <- deparse(substitute(x))
    }
  } else if (is.vector(x)) {
    if (is.null(factor) || is.null(block)) {
      stop("Error: factor and block must be provided when x is a vector.")
    }
    response <- x
    DNAME <- paste(deparse(substitute(x)), ", ",
                   deparse(substitute(factor)), " and ",
                   deparse(substitute(block)), sep = "")
  } else {
    stop("Error: x must be either a data frame with three columns or a vector.")
  }
  Q.call <- function(ranks, factors) {
    R_i <- tapply(ranks, factors, sum)
    12 / (b * k * (k + 1)) * sum(R_i^2) - 3 * b * (k + 1)
  }
  METHOD <- "Friedman rank sum test"
  k <- length(unique(factor))
  b <- length(unique(block))
  rank <- ave(response, block, FUN = rank)
  STATISTIC <- setNames(Q.call(rank, factor), "Q")
  TIES <- unlist(tapply(response, block, table))
  if (any(sapply(TIES, function(x) any(x > 1)))) {
    ties <- TRUE
  } else {ties <- FALSE}
  if (!exact || ties) {
    Qc <- STATISTIC / (1 - sum(TIES^3 - TIES) / (b * k * (k^2 - 1)))
```

```r
      if (!correct) {
        p_value <- pchisq(Qc, k - 1, lower.tail = FALSE)
      } else {
        p_value <- pchisq(Qc - 0.5, k - 1, lower.tail = FALSE)
        METHOD <- paste(METHOD, "with continuity correction")
      }
  } else {
    METHOD <- sub("test", "exact test", METHOD, fixed = TRUE)
    library(gtools)
    possible_ranks <- permutations(k, k)
    all_combinations <- permutations(nrow(possible_ranks), b,
    ↪  repeats.allowed = TRUE)
    Qs <- sapply(1:nrow(all_combinations), function(i) {
      b_combs <- possible_ranks[all_combinations[i, ], ]
      rank_i <- as.vector(b_combs)
      Q.call(rank_i, factor)
    })
    p_value <- mean(Qs >= STATISTIC)
  }
  RVAL <- list(statistic = STATISTIC, p.value = p_value,
               method = METHOD, data.name = DNAME)
  class(RVAL) <- "htest"
  RVAL
}
```

36.6 Page 检验

目的

检验水平的位置参数是否呈现出上升趋势，若想检验是否呈现出下降趋势，改变水平顺序就行了。

适用条件

各水平间并不独立（因为还有区组的影响），采用完全区组设计，水平之间分布是相似的，离散型数据与连续型数据都可以。

假设

假设 k 个水平有分布函数 $F_i(x) = F(x-\theta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$，则检验假设可写为：

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n \Leftrightarrow H_1 : \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_n$$

原理

假设有 k 个水平、b 个区组。

因为各区组之间是有影响的，无法把各响应值混在一起排序。选择在各个区组内计算所有响应值的秩，R_{ij} 表示在第 j 个区组中水平 i 的秩，$R_i = \sum\limits_{j=1}^{b} R_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, k$，定义如下 Page 统计量：

$$L = \sum_{i=1}^{k} iR_i$$

如果备择假设是正确的，那么对 R_i 进行加权求和可以对统计量起到一个放大的作用，那么 L 就会很大。因此在 L 比较大的时候，有理由怀疑零假设。由此可看出这里只考虑上侧的单侧检验问题。

若想求精确检验的结果，需要满足数据中没有结（即每个区组中都没有相同的数值），然后对每一种秩分配情况计算 L 的值（秩的大小关系便反映了数据之间的大小关系），即可得到 L 的精确分布。

大样本近似

在大样本的情况下（$b \to +\infty$），有如下正态近似：

$$Z = \frac{L - \mu_L}{\sigma_L} \sim N(0,\ 1)$$
$$\mu_L = \frac{bk(k+1)^2}{4},\ \sigma_L^2 = \frac{b(k^3-k)^2}{144(k-1)}$$

打结

若存在打结的情况，需要对正态近似的 σ_L^2 作如下修正（其中 τ_{ij} 表示第 j 个区组的第 i 个结统计量）：

$$\sigma_L^2 = k(k^2-1)\frac{bk(k^2-1) - \sum_i \sum_j (\tau_{ij}^3 - \tau_{ij})}{144(k-1)}$$

对区组、水平进行重复时的 page 检验

在区组和水平之间不存在交互作用，并且所有 $(i,\ j)$ 位置的重复数都相同时（假设都是 n），有如下正态近似（也考虑了到打结的修正）：

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{L-\mu_L}{\sigma_L} \sim N(0,\ 1) \\
\mu_L &= \frac{nbk(k+1)(nk+1)}{4} \\
\sigma_L^2 &= nk(k^2-1)\frac{nbk(n^2k^2-1)-\sum_i\sum_j(\tau_{ij}^3-\tau_{ij})}{144(nk-1)}
\end{aligned}
$$

代码

以下是自编代码，提供重复、精确计算、大样本近似、连续性修正与打结校正功能。当对区组与水平进行重复时，x 必须是一个数据框，每一列是一次重复的结果，也必须传入 factor 与 block，此时只提供大样本近似。当不进行重复时，x 可以是一个三列的数据框，第一列表示 response 值，第二列表示 factor，第三列表示 block。请注意，检验顺序与输入的 factor 顺序是一致的，建议对照二维表**逐行**输入（行是水平，检验顺序即为行的顺序，列是区组）。如果出现打结的情况，结统计量按照计算公式进行计算，L 统计量的秩部分取结的平均秩（例：数据为 1、1、3、4，有重复值 1，则秩为 1.5、1.5、3、4）。

```r
page.test <- function(x, factor = NULL, block = NULL,
                      exact = FALSE, correct = FALSE,
                      repeated = FALSE) {
  if (repeated) {
    if (exact) {
      stop("Error: exact cannot be TRUE when repeated is TRUE.")
    }
    if (!is.data.frame(x) || ncol(x) == 1) {
      stop("Error: x must be a data frame with more than one column when repeated is TRUE.")
    }
    if (is.null(factor) || is.null(block)) {
      stop("Error: factor and block must be provided when repeated is TRUE.")
    }
    DNAME <- paste(deparse(substitute(x)), ", ",
                   deparse(substitute(factor)), " and ",
                   deparse(substitute(block)), sep = "")
  } else {
    if (is.data.frame(x)) {
```

```
    if (ncol(x) == 3) {
      response <- x[[1]]
      factor <- x[[2]]
      block <- x[[3]]
      DNAME <- deparse(substitute(x))
    }
  } else if (is.vector(x)) {
    if (is.null(factor) || is.null(block)) {
      stop("Error: factor and block must be provided when x is a vector.")
    }
    response <- x
    DNAME <- paste(deparse(substitute(x)), ", ",
                   deparse(substitute(factor)), " and ",
                   deparse(substitute(block)), sep = "")
  } else {
    stop("Error: x must be either a data frame with three columns or a vector.")
  }
}
L.call <- function(ranks, factors, num_fac) {
  R_i <- tapply(ranks, factors, sum)
  sum(seq_len(num_fac) * R_i)
}
compute_z <- function(statistic, k, b, repeat_n, ties){
  mu <- repeat_n * b * k * (k + 1)^2 / 4
  sigma2 <- repeat_n * k * (k^2 - 1) *
    (repeat_n * b * k * (repeat_n^2 * k^2 - 1) - sum(ties^3 - ties)) /
    (144 * (repeat_n * k - 1))
  (statistic - mu) / sqrt(sigma2)
}
METHOD <- "Page test"
k <- length(unique(factor))
b <- length(unique(block))
if (repeated) {
  repeat_n <- ncol(x)
  Ls <- sapply(1:repeat_n, function(repeat_idx) {
    response <- x[[repeat_idx]]
```

```
      rank <- ave(response, block, FUN = rank)
      L.call(rank, factor, k)
    })
    STATISTIC <- setNames(sum(Ls), "L")
    TIES <- unlist(sapply(1:repeat_n, function(repeat_idx) {
      unlist(tapply(x[[repeat_idx]], block, table))
    }))
    Z <- compute_z(STATISTIC, k, b, repeat_n, TIES)
    if (!correct) {
      p_value <- pnorm(Z, lower.tail = FALSE)
    } else {
      p_value <- pnorm(Z - 0.5, lower.tail = FALSE)
      METHOD <- paste(METHOD, "with continuity correction")
    }
  } else {
    rank <- ave(response, block, FUN = rank)
    STATISTIC <- setNames(L.call(rank, factor, k), "L")
    TIES <- unlist(tapply(response, block, table))
    if (any(sapply(TIES, function(x) any(x > 1)))) {
      ties <- TRUE
    } else {ties <- FALSE}
    if (!exact || ties) {
      Z <- compute_z(STATISTIC, k, b, 1, TIES)
      if (!correct) {
        p_value <- pnorm(Z, lower.tail = FALSE)
      } else {
        p_value <- pnorm(Z - 0.5, lower.tail = FALSE)
        METHOD <- paste(METHOD, "with continuity correction")
      }
    } else {
      METHOD <- sub("test", "exact test", METHOD, fixed = TRUE)
      library(gtools)
      possible_ranks <- permutations(k, k)
      all_combinations <- permutations(nrow(possible_ranks), b,
      ↪  repeats.allowed = TRUE)
      Ls <- sapply(1:nrow(all_combinations), function(i) {
        b_combs <- possible_ranks[all_combinations[i, ], ]
        rank_i <- as.vector(b_combs)
```

```
      L.call(rank_i, factor, k)
    })
    p_value <- mean(Ls >= STATISTIC)
  }
 }
 RVAL <- list(statistic = STATISTIC, p.value = p_value,
              method = METHOD, data.name = DNAME)
 class(RVAL) <- "htest"
 RVAL
}
```

36.7 Cochran 检验

目的

检验完全区组设计、二元响应情况下，各水平之间是否存在差异。

适用条件

完全区组设计，二元响应。

假设

假设 k 个水平有分布函数 $F_i(x) = F(x-\theta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$，则检验假设可写为：

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n \Leftrightarrow H_1 : \text{至少有一个等号不成立}$$

原理

假设有 k 个水平、b 个区组。

令 L_j 表示第 j 个区组中为 1 的数目的总和，N_i 表示第 i 个水平中为 1 的数目的总和，即 $L_j = \sum\limits_{i=1}^{k} x_{ij}$, $j = 1, 2,\ b$, $N_i = \sum\limits_{j=1}^{b} x_{ij}$, $i = 1, 2,\ k$。

在零假设成立的情况下，各水平之间无差异，那么对于每个 j 而言，L_j 个 1 在所有水平中出现的概率是相同的，这个概率依赖于具体的 L_j。由此定义如下 Cochran 统计量：

$$Q = \frac{k(k-1)\sum\limits_{i=1}^{k}(N_i - \bar{N})^2}{kN - \sum\limits_{j=1}^{b} L_j^2} = \frac{k(k-1)\sum\limits_{i=1}^{k} N_i^2 - (k-1)N^2}{kN - \sum\limits_{j=1}^{b} L_j^2}$$

其中 $\bar{N} = \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} N_i$, $N = \sum\limits_{i=1}^{k} N_i$。易证，若 $L_j = 0$ 或 $L_j = k$，那么这个区组的数据可以删除，对 Q 值没有影响（与前面的原理是相合的）。

若想进行精确检验

需要找论文，Patil(1975)，同时需要看统计量的推导过程，为什么单侧检验

大样本近似

在大样本的情况下（$b \to +\infty$），若零假设成立，有如下近似分布：

$$Q \sim \chi^2_{(k-1)}$$

代码

以下是自编代码，需要传入一个数据框，行为水平列为区组。提供大样本近似与连续性修正。

现在只提供了大样本近似，回头看完论文和原理记得补

```r
cochran.test <- function(x, exact = FALSE, correct = FALSE) {
  if (!is.data.frame(x)) {
    stop("Error: x must be a data frame.")
  }
  DNAME <- deparse(substitute(x))
  METHOD <- "Cochran test"
  Ni <- apply(x, 1, sum)
  Lj <- apply(x, 2, sum)
  N <- sum(Ni)
  k <- nrow(x)
  STATISTIC <- (k * (k-1) * sum(Ni^2) - (k - 1) * N^2) / (k * N - sum(Lj^2))
  STATISTIC <- setNames(STATISTIC, "Q")
  if (!exact) {
    if (!correct){
      p_value <- pchisq(STATISTIC, k - 1, lower.tail = FALSE)
    } else {
      p_value <- pchisq(STATISTIC - 0.5, k - 1, lower.tail = FALSE)
      METHOD <- paste(METHOD, "with continuity correction")
    }
  } else {
    METHOD <- sub("test", "exact test", METHOD, fixed = TRUE)
    # exact test
  }

  RVAL <- list(statistic = STATISTIC, p.value = p_value,
               method = METHOD, data.name = DNAME)
  class(RVAL) <- "htest"
```

```
  RVAL
}
```

36.8 Durbin 检验

适用条件

不完全区组设计，水平之间分布是相似的，数据是连续型的。

假设

假设 k 个水平有分布函数 $F_i(x) = F(x - \theta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$，则检验假设可写为：

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n \Leftrightarrow H_1 : \text{至少有一个等号不成立}$$

原理

有机会看看这里平衡与不平衡的不完全区组设计有没有什么区别

假设有 k 个水平、b 个区组，每个区组中含 t 个处理，每个处理出现在 r 个区组中。因为各区组之间是有影响的，无法把各响应值混在一起排序。选择在各个区组内计算所有响应值的秩，R_{ij} 表示在第 j 个区组中水平 i 的秩，$R_i = \sum_j R_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, k$，定义如下 Durbin 统计量:

$$D = \frac{12(k-1)}{rk(t^2-1)} \sum_{i=1}^{k} (R_i - \frac{r(t+1)}{2})^2 = \frac{12(k-1)}{rk(t^2-1)} \sum_{i=1}^{k} R_i^2 - \frac{3r(k-1)(t+1)}{t-1}$$

在零假设成立的情况下，各水平之间的秩和与均值相比不应相差过大，也就是 D 值不应太大，若 D 值过大，则有理由怀疑零假设。由此可看出这里只考虑上侧的单侧检验问题。同时，可以看出 Durbin 统计量在完全区组设计 ($t = k$, $r = b$) 的时候和 Friedman 统计量是完全一样的。

大样本近似

在大样本的情况下（$r \to +\infty$），若零假设成立，有如下近似分布：

$$D \sim \chi^2_{(k-1)}$$

在某个区组存在结的时候，利用下式进行修正（其中 τ_{ij} 表示第 j 个区组的第 i 个结统计量）：

$$D_C = \frac{(k-1)\sum_{i=1}^{k}(R_i - \frac{r(t+1)}{2})^2}{A - C}$$

$$A = \sum_i \sum_j R_{ij}^2, \; C = \frac{bt(t+1)^2}{4}$$

代码

以下是自编代码，会检查输入的数据是否满足不完全区组设计的平衡性。提供精确计算、大样本近似、连续性修正与打结校正功能。x 可以是一个三列的数据框，第一列表示 response 值，第二列表示 factor，第三列表示 block。x 也可以是一个向量，表示 response，此时必须传入 factor 和 block。

代码现在是只考虑平衡的

```r
durbin.test <- function(x, factor = NULL, block = NULL,
                        exact = FALSE, correct = FALSE) {
  if (is.data.frame(x)) {
    if (ncol(x) == 3) {
      response <- x[[1]]
      factor <- x[[2]]
      block <- x[[3]]
      DNAME <- deparse(substitute(x))
    }
  } else if (is.vector(x)) {
    if (is.null(factor) || is.null(block)) {
      stop("Error: factor and block must be provided when x is a vector.")
    }
    response <- x
    DNAME <- paste(deparse(substitute(x)), ", ",
                   deparse(substitute(factor)), " and ",
                   deparse(substitute(block)), sep = "")
  } else {
    stop("Error: x must be either a data frame with three columns or a vector.")
  }
  num_r <- table(factor)
  num_t <- table(block)
  if (length(unique(num_r)) != 1) {
    stop("Error: The design is not balanced.
         Each treatment must appear in the same number of blocks.")
  }
  if (length(unique(num_t)) != 1) {
    stop("Error: The design is not balanced.
         Each block must contain the same number of treatments.")
  }
```

```r
D.call <- function(ranks, factors) {
  R_i <- tapply(ranks, factors, sum)
  12 * (k - 1) / (r * k * (t^2 - 1)) * sum(R_i^2) -
    3 * r * (k - 1) * (t + 1) / (t - 1)
}
METHOD <- "Friedman rank sum test"
k <- length(unique(factor))
b <- length(unique(block))
r <- as.numeric(num_r[1])
t <- as.numeric(num_t[1])
rank <- ave(response, block, FUN = rank)
STATISTIC <- setNames(D.call(rank, factor), "D")
TIES <- unlist(tapply(response, block, table))
if (any(sapply(TIES, function(x) any(x > 1)))) {
  ties <- TRUE
} else {ties <- FALSE}
if (!exact || ties) {
  Dc <- (k - 1) * sum((tapply(rank, factor, sum) - r * (t + 1) / 2)^2) /
    (sum(rank^2) - b * t * (t + 1)^2 / 4)
  if (!correct) {
    p_value <- pchisq(Dc, k - 1, lower.tail = FALSE)
  } else {
    p_value <- pchisq(Dc - 0.5, k - 1, lower.tail = FALSE)
    METHOD <- paste(METHOD, "with continuity correction")
  }
} else {
  METHOD <- sub("test", "exact test", METHOD, fixed = TRUE)
  library(gtools)
  possible_ranks <- permutations(t, t)
  all_combinations <- permutations(nrow(possible_ranks), b, repeats.allowed = TRUE)
  Ds <- sapply(1:nrow(all_combinations), function(i) {
    b_combs <- possible_ranks[all_combinations[i, ], ]
    rank_i <- as.vector(b_combs)
    D.call(rank_i, factor)
  })
  p_value <- mean(Ds >= STATISTIC)
```

```r
  }
  RVAL <- list(statistic = STATISTIC, p.value = p_value,
               method = METHOD, data.name = DNAME)
  class(RVAL) <- "htest"
  RVAL
}
```

Chapter 37

Something else

37.1 Cox-Stuart 趋势检验

目的

查看某组数据是否有递增、递减的趋势。

检验原理

把样本分成前后两段，若样本大小为奇数，则去除最中间的单元。把前后两段相同位置的元素组成对子，以每个对子两个元素差的正负性衡量增减。

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$$

$$\text{对子：}(x_i, x_{i+c}),\ c = \begin{cases} n/2 & n \equiv 0 \mod 2 \\ (n+1)/2 & n \not\equiv 0 \mod 2 \end{cases}$$

$$D_i = x_i - x_{i+c}$$

$$\text{令} s^+ = |\{D_i : D_i > 0\}|,\ s^- = |\{D_i : D_i < 0\}|$$

若数据无趋势，s^- 与 s^+ 应服从 Binom$(s^+ + s^-, 0.5)$，则检验退化为符号检验。以下 p 值计算与广义符号检验略有差异，这是因为 p 取 0.5 时二项分布是对称分布。

检验的数学语言（与表 37.1 对应）

假设独立观测值序列 $X_i \sim F(x - \theta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

1. $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n \Leftrightarrow H_1 : \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_n$

2. $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n \Leftrightarrow H_1 : \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n$

3. $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n \Leftrightarrow H_1 : \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_n$ 或 $\theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n$

备择假设	统计量 K	p 值
H_1 : 有增长趋势	s^+	$P(K \leqslant k)$
H_1 : 有减少趋势	s^-	$P(K \leqslant k)$
H_1 : 有趋势	$\min\{s^+, s^-\}$	$2P(K \leqslant k)$

表 37.1: Cox-stuart 趋势检验

代码

```r
Cox_Stuart <- function(y) {
    n <- length(y)
    c <- ifelse(n %% 2 == 0, n / 2, (n + 1) / 2)
    D <- y[(c + 1):n] - y[1:c]
    s_neg <- sum(D < 0)
    s_pos <- sum(D > 0)
    s <- min(s_neg, s_pos)
    text <- ifelse(s_pos - s_neg > 0, "Increasing with", "Decreasing with")
    cat(text, 'p_value =', pbinom(s, c, 0.5))
}
```

37.2 游程检验

目的

检验一组数据是否是随机出现的。

适用条件

数据的顺序有意义且是离散的，若不离散，可以中位数为间隔，利用符号函数将数据转换为二元数据。

游程的定义

游程是来自于同一总体的样本所构成的一个或一个以上相同符号连续出现的片段。例：对于数据

$$0000110111000$$

在这组数据中，一共有 5 个游程（3 个 0 游程，2 个 1 游程）。

游程数的分布

有空证明

令 R 表示游程数，可以证明：

$$P(R=2k)=\frac{2\binom{m-1}{k-1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(R=2k+1)=\frac{\binom{m-1}{k-1}\binom{n-1}{k}+\binom{m-1}{k}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(R)=\frac{2mn}{m+1}+1 \quad Var(R)=\frac{2mn(2mn-m-n)}{(m+n)^2(m+n-1)}$$

游程检验原理

若数据是随机的，那么游程数不应过多也不应过少，若过多，则呈现出混合倾向，若过少，则呈现出聚集倾向。

备择假设	统计量 K	p 值
H_1 : 数据有聚集趋势	R	$P(K \leqslant k)$
H_1 : 数据有混合趋势	R	$P(K \geqslant k)$
H_1 : 数据有趋势	R	$2\min P(K \leqslant k),\ P(K \geqslant k)$

表 37.2: 随机性的游程检验

代码

tseries 包中的 runs.test

需要注意，该函数只提供大样本近似，并且输入值必须转换为因子，同时，要去除经过符号函数转换后值为 0 的数据。

```r
library(tseries)
# median <- median(x)
# x <- factor(sign(x[x != median]-median))
runs.test(x, alternative = c("two.sided", "less", "greater"))
```

自编版

```r
runs.test <- function(x, alternative = c("two.sided", "less", "greater"),
↪  exact = TRUE, correct = FALSE) {

  alternative <- match.arg(alternative)
  DNAME <- deparse1(substitute(x))
```

```r
METHOD <- "Runs test"

# Calculate runs
runs <- sum(diff(x) != 0) + 1

# Calculate sample sizes
N <- length(x)
n <- sum(x)  # Number of 1s in x
m <- N - n  # Number of 0s in x

# Functions for cumulative probability
pruns <- function(runs, m, n, lower.tail = TRUE){
  p <- 0
  if (lower.tail){
    for (i in 1:runs){
      if (i %% 2 == 0){
        k <- i / 2
        p <- p + 2 * choose(m - 1, k - 1) *
          choose(n - 1, k - 1) /
          choose(m + n, n)
      }else{
        k <- (i - 1) / 2
        p <- p + (choose(m - 1, k - 1) * choose(n - 1, k) +
                    choose(m - 1, k) * choose(n - 1, k - 1)) /
          choose(m + n, n)
      }
    }
  }else{
    for (i in (runs + 1):(m+n)){
      if (i %% 2 == 0){
        k <- i / 2
        p <- p + 2 * choose(m - 1, k - 1) *
          choose(n - 1, k - 1) /
          choose(m + n, n)
      }else{
        k <- (i - 1) / 2
        p <- p + (choose(m - 1, k - 1) * choose(n - 1, k) +
                    choose(m - 1, k) * choose(n - 1, k - 1)) /
```

```
          choose(m + n, n)
      }
    }
  }
  return(p)
}

if (exact){
  METHOD <- sub("test", "exact test", METHOD, fixed = TRUE)
  # Exact p-value calculation
  p.value <- switch(alternative,
                    two.sided = 2 * min(pruns(runs, m, n),
                                        pruns(runs - 1, m, n, lower.tail = FALSE)),
                    less = pruns(runs, m, n),
                    greater = pruns(runs, m, n, lower.tail = FALSE))
}else{
  # Normal approximation
  E_R <- (2 * m * n) / N + 1
  Var_R <- (2 * m * n * (2 * m * n - N)) / (N^2 * (N - 1))
  z <- (runs - E_R) / sqrt(Var_R)

  if (correct){
    METHOD <- paste(METHOD, "with continuity correction")
    # Apply continuity correction
    z <- runs - E_R
    CORRECTION <- switch(alternative,
                         two.sided = sign(z) * 0.5,
                         greater = 0.5,
                         less = -0.5)
    z <- (z - CORRECTION) / sqrt(Var_R)
    # p-value using normal approximation
    p.value <- switch(alternative,
                      two.sided =  2 * min(pnorm(z),
                                           pnorm(z, lower.tail = FALSE)),
                      less = pnorm(z),
                      greater = pnorm(z, lower.tail = FALSE))
```

```r
    }else{
      p.value <- switch(alternative,
                        two.sided =  2 * min(pnorm(z),
                                            pnorm(z, lower.tail = FALSE)),
                        less = pnorm(z),
                        greater = pnorm(z, lower.tail = FALSE))
    }
  }

  alternative <- switch(alternative,
                        two.sided = "The data lacks randomness.",
                        less = "The data has a tendency to cluster.",
                        greater = "The data has a tendency to mix.")

  # Create output in htest format
  RVAL <- list(statistics = setNames(runs, "runs"),
               alternative = alternative, method = METHOD,
               data.name = DNAME, p.value = p.value)
  class(RVAL) <- "htest"
  RVAL
}

# median <- median(x)
# x <- na.omit(ifelse(x > median, 1, ifelse(x < median, 0, NA)))
runs.test(x, alternative = "two.sided",
          exact = TRUE, correct = FALSE)
```

37.3 分类评分结果一致性判断

37.3.1 Cohen’s Kappa 系数

根本没懂原理

评判标准

1. < 0.4 一致性很差
2. 0.4 – 0.6 中度一致
3. 0.6 – 0.8 具有较高的一致性

4. >0.8 具有极高的一致性

代码

```r
library(psych)
cohen.kappa(x)
```

37.3.2 Kendall 协同系数检验

目的

检验 b 次对 k 个个体的评估是随机的（不相关的）还是一致的。

适用条件

完全区组设计，离散型数据（打分，排序），主观性的数据一般使用 Kendall 检验。

假设

$$H_0: \text{这些评估是不相关的或是随机的},\ H_1: \text{这些评估是一致的}$$

原理

这里其实是把 b 个评估者看作是区组，把被评分的个体看作了水平。所有的计算和 Friedman 秩和检验一样（参考第527页），只是 Kendall 协同系数 W 要在 Friedman 统计量 Q 的基础上再除 $b(k-1)$（大样本近似与打结的情况都可参考 Friedman 秩和检验）。

查资料看 Kendall 的打结是否和 Friedman 一致

为什么这么做呢？我们想看的是对个体的评估是否是随机的，那么如果是随机的，各个体获得的评分总秩和应该是较相近的。其实还是看各水平之间是否有差异，但并不是它们本身的差异，而是在被评估者打分以后，在打分上是否呈现出各水平的差异。其实我们在这里是默认个体之间是有差异的，如果评估结果有差异那么就不随机，评估结果没有差异那就是随机的评估。

代码

以下是自编代码，提供精确计算、大样本近似、连续性修正与打结校正功能。x 可以是一个三列的数据框，第一列表示 response 值，第二列表示 factor，第三列表示 block。x 也可以是一个向量，表示 response，此时必须传入 factor 和 block。

```r
kendall.test <- function(x, factor = NULL, block = NULL,
                         exact = FALSE, correct = FALSE) {
  if (is.data.frame(x)) {
    if (ncol(x) == 3) {
```

```
      response <- x[[1]]
      factor <- x[[2]]
      block <- x[[3]]
      DNAME <- deparse(substitute(x))
    }
  } else if (is.vector(x)) {
    if (is.null(factor) || is.null(block)) {
      stop("Error: factor and block must be provided when x is a vector.")
    }
    response <- x
    DNAME <- paste(deparse(substitute(x)), ", ",
                   deparse(substitute(factor)), " and ",
                   deparse(substitute(block)), sep = "")
  } else {
    stop("Error: x must be either a data frame with three columns or a vector.")
  }
  W.call <- function(ranks, factors) {
    R_i <- tapply(ranks, factors, sum)
    (12 / (b * k * (k + 1)) * sum(R_i^2) - 3 * b * (k + 1)) / (b * (k - 1))
  }
  METHOD <- "Kendall test"
  k <- length(unique(factor))
  b <- length(unique(block))
  rank <- ave(response, block, FUN = rank)
  STATISTIC <- setNames(W.call(rank, factor), "W")
  TIES <- unlist(tapply(response, block, table))
  if (any(sapply(TIES, function(x) any(x > 1)))) {exact = FALSE}
  if (!exact) {
    Wc <- STATISTIC / (1 - sum(TIES^3 - TIES) / (b * k * (k^2 - 1)))
    if (!correct) {
      p_value <- pchisq(Wc * b * (k - 1), k - 1, lower.tail = FALSE)
    } else {
      p_value <- pchisq(Wc * b * (k - 1) - 0.5, k - 1, lower.tail = FALSE)
      METHOD <- paste(METHOD, "with continuity correction")
```

```
    }
  } else {
    METHOD <- sub("test", "exact test", METHOD, fixed = TRUE)
    library(gtools)
    possible_ranks <- permutations(k, k)
    all_combinations <- permutations(nrow(possible_ranks), b,
        repeats.allowed = TRUE)
    Ws <- sapply(1:nrow(all_combinations), function(i) {
      b_combs <- possible_ranks[all_combinations[i, ], ]
      rank_i <- as.vector(b_combs)
      W.call(rank_i, factor)
    })
    p_value <- mean(Ws >= STATISTIC)
  }
  RVAL <- list(statistic = STATISTIC, p.value = p_value,
               method = METHOD, data.name = DNAME)
  class(RVAL) <- "htest"
  RVAL
}
```

37.4 列联表独立性问题

检验列联表的行列变量之间是否是独立的。

假设

$$H_0: \text{行变量与列变量是独立的} \Leftrightarrow H_1: \text{行变量与列变量是相关的}$$

37.4.1 Pearson 近似检验

原理

假设行变量有 r 个取值，列变量有 c 个取值，列联表中频数记为 n_{ij}，$i = 1, 2, \ldots, r$，$j = 1, 2, \ldots, c$，行频数总和 $n_{i\cdot} = \sum_j n_{ij}$，列频数总和 $n_{\cdot j} = \sum_i n_{ij}$，频数总和 $n = \sum_{i,j} n_{ij}$，列联表中第 ij 个格子的理论频数为 E_{ij}，行变量取第 i 个值的概率为 $p_{i\cdot}$，列变量取第 j 个值的概率为 $p_{\cdot j}$，一个观测值被分配到列联表中第 ij 个格子的理论概率为 p_{ij}。

写完概率论把独立性链接到这里来

若行变量与列变量独立，由随机变量的独立性，有：

$$p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}, \; E_{ij} = p_{\cdot j} n_{i\cdot}$$

但由于 $p_{\cdot j}$ 是理论值无法预知，用 $\frac{n_{\cdot j}}{n}$ 来代替，那么 $E_{ij} = \hat{p_{\cdot j}} n_{i\cdot} = \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}$。由此构建以下 Pearson$\chi^2$ 统计量：

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

如果零假设不成立，那么 n_{ij} 与 E_{ij} 的值相差就会比较大，统计量的值也会偏大。若统计量的值过大，则有里有怀疑零假设。由此可看出这里只考虑上侧的单侧检验问题。

大样本近似

在大样本的情况下，若零假设成立，有如下近似分布：

$$Q \sim \chi^2_{(r-1)(c-1)}$$

37.4.2 低维列联表的 Fisher 精确检验

假定五个边际频数都是固定的，在零假设成立的情况下，这个具体的列联表出现的条件概率（给定边际频数的情况下，因此是条件概率）只依赖于四个频数中的任意一个，且该概率满足超几何分布：

$$P = \frac{\binom{n_{1\cdot}}{n_{11}} \binom{n_{2\cdot}}{n_{21}}}{\binom{n}{n_{\cdot 1}}}$$

	B1	B2	总和
A1	n_{11}	n_{12}	$n_{1\cdot}$
A2	n_{21}	n_{22}	$n_{2\cdot}$
总和	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	n

表 37.3: 二维列联表

若零假设成立，那么任何一个关于 n_{ij} 的尾概率 $P(n_{ij} \leqslant a)$，$P(n_{ij} \geqslant b)$，$1 - P(a < n_{ij} < b)$ 都不应该太小或太大。若尾概率太小或太大，则有理由怀疑零假设。由此可以看出这里其实是涉及备择假设的方向问题的，可以单侧也可以双侧。

有机会看看单侧的实际意义，不懂为什么会考虑单侧

代码

Pearson 近似检验

直接将列联表矩阵输入以下函数即可。

```
chisq.test(x)
```

Fisher 精确检验

直接将列联表矩阵输入以下函数即可。

```
fisher.test(x, alternative="two.sided")
```

37.5 似然比检验

假设

$$H_0 : \theta \in \Theta_1 \quad H_1 : \theta \notin \Theta_1$$

原理

Definition 37.1. 称：

$$\lambda(y) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; y)}{\sup_{\theta \in \Theta_1} L(\theta; y)}$$

为，其中 $L(\theta; y)$ 为似然函数。

推导 37.1. 若 $\lambda(y)$ 较大，则说明 $\theta \in \Theta_1$ 时出现数据 y 的可能性较小，于是拒绝域应形如 $\{y : \lambda(y) \geqslant c\}$。可以寻找统计量 $T(y)$，它是 $\lambda(y)$ 的单调增函数，于是检验的拒绝域可取为 $\{y : T(y) \geqslant c\}$。

Chapter 38

单调关联性

单调关联性 (association) 与单调相关性 (correlation) 是否是同一个东西呢？

它们并不一样。单调关联性仅从秩的角度来衡量两个变量是否同增同减或一增一减，单调相关性除了增减性以外，还要求增减之间存在线性关系，即一个变量增大或减小一个单位，另一个变量是否会固定地增大或减小某个单位的数值。考虑语言习惯问题，本章仍使用相关性来称呼关联性。

写完概率论把 Pearson 线性相关系数链接过来。

38.1 单调关联性的零假设与备择假设

$$H_0: X\text{和}Y\text{不相关},\begin{cases} H_1: X\text{和}Y\text{正相关} \\ H_1: X\text{和}Y\text{负相关} \\ H_1: X\text{和}Y\text{相关} \end{cases}$$

38.2 本章各方法的简单总结

1. Spearman 秩相关检验与 Kendall 秩相关检验中的 τ_a 都可以用作连续变量的相关性检验。

2. Kendell's τ_b 与 τ_c 都可以用作有序分类变量的相关性检验，但在列联表行列数目 r 和 c 差别较大时，使用 τ_c 更合适。

3. Goodman-Kruskal's τ 检验针对分类有序变量。

4. Somers' d 检验针对分类有序变量，与前面几种方法的不同是：前几种方法的两个变量 X 和 Y 是对称的，而 Somers' 检验把其中一个变量看作自变量，另一个看作因变量，它可以度量自变量对因变量的影响。

38.3 Spearman 秩关联检验

原理

记 x_i 在 X 样本中的秩为 R_i，y_i 在 Y 样本中的秩为 S_i，$d_i^2 = (R_i - S_i)^2$，$\bar{R} = E(R) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i$，$barS = E(S) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$。

显然，若很多 d_i^2 很大，那么两个变量之间可能是负相关；若很多 d_i^2 很小，那么两个变量之间可能是正相关。类似 Pearson 相关系数，定义以下 Spearman 检验统计量：

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^{n}(S_i - \bar{S})^2}} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

由 Cauchy 不等式，显然有 $-1 \leqslant r_s \leqslant 1$。

在样本不大且没有结的时候，可以使用精确检验：固定 R_i 从小到大，此时 S_i 的排序情况共有 $n!$ 种可能，对每一种可能计算 r_s，即可得到 r_s 的精确分布。

大样本的情况

大样本时没有近似分布，采用 Monte Carlo 模拟，固定随机数种子，随机抽取 m 个 S_i 可能的排序情况，对这 m 个情况计算 r_s 值，得到近似的分布。

打结

若 X 或 Y 样本中存在相同的数据，则称之为打结的情况。记 u_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ 和 v_j, $j = 1, 2, \ldots, q$ 分别为 X 和 Y 样本中结统计量的值，记：

$$U = \sum_{j=1}^{p}(u_j^3 - u_j),\ V = \sum_{j=1}^{q}(v_j^3 - v_j)$$

则此时修正过的 Spearman 检验统计量定义为：

$$r_s = \frac{n(n^2 - 1) - 6\sum_{i=1}^{n}(R_i - S_i)^2 - 6(U + V)}{\sqrt{[n(n^2 - 1) - 12U]\,[n(n^2 - 1) - 12V]}}$$

在样本量比较大时，有：

$$Z = r_s\sqrt{n - 1} \sim N(0,\ 1)$$

有结的时候没有精确分布，只能使用上式的大样本近似。

代码

```
cor.test(x, y,
alternative = c("two.sided", "less", "greater"),
method = "spearman"
exact = NULL, continuity = FALSE)
```

38.4 Kendall τ 关联检验

协同

对于样本 X_i, Y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$，从中任取两对作积 $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)$，若乘积大于 0，则称对子 $(X_i,\ Y_i)$ 和 $(X_j,\ Y_j)$ 是协同的 (concordant)，它们具有相同的倾向，若乘积小于 0，则称对子是不协同的 (disconcordant)，它们有相反的倾向。令：

$$\Psi(X_i, X_j, Y_i, Y_j) = \begin{cases} 1, & (X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0 \\ 0, & (X_i - X_j)(Y_i - Y_j) = 0 \\ -1, & (X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0 \end{cases}$$

原理

定义 Kendall τ 相关系数为：

$$\tau_a = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Psi(X_i, X_j, Y_i, Y_j) = \frac{K}{\binom{n}{2}} = \frac{n_c - n_d}{\binom{n}{2}}$$

其中 n_c 表示协同的对子的数目，而 n_d 表示不协同的对子的数目。

由定义可以看出，τ_a 取值在 $-1 \sim 1$ 之间，τ_a 越大，协同的对子数目越多，两个变量越有可能正相关；τ_a 越小，不协同的对子数目越多，两个变量越有可能负相关。

在计算时，可以把成对数据 $(X_i,\ Y_i)$ 按第一个变量从小到大排序，然后就可以只用 Y_i 的大小关系或者秩来计算 n_c 和 n_d 了。

在样本量不太大并且没有结的时候，可以按如下方法求精确检验结果：把成对数据 $(X_i,\ Y_i)$ 按第一个变量从小到大排序，此时 Y_i 的排序情况共有 $n!$ 种可能，对每一种可能计算 τ_a，即可得到 τ_a 的精确分布。

大样本近似

在零假设成立的情况下，当 $n \to +\infty$ 时，有如下近似分布：

$$Z = K\sqrt{\frac{18}{n(n-1)(2n+5)}} \sim N(0,\ 1)$$

打结

若 X 或 Y 样本中存在相同的数据，则称之为打结的情况。记 u_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ 和 v_i, $i = 1, 2, \ldots, q$ 分别为 X 和 Y 样本中结统计量的值，此时有如下修正后的检验统计量：

$$\tau_b = \frac{n_c - n_d}{\sqrt{\left[\frac{n(n-1)}{2} - \sum_i u_i(u_i-1)/2\right]\left[\frac{n(n-1)}{2} - \sum_i v_i(v_i-1)/2\right]}}$$

有结的时候没有精确分布，只能使用下式的大样本近似：

$$Z=\frac{n_c-n_d}{\sqrt{[n(n-1)(2n+5)-t_u-t_v]/18+t_1+t_2}}\sim N(0,\ 1)$$

$$t_u=\sum_i u_i(u_i-1)(2u_i+5)$$

$$t_v=\sum_i v_i(v_i-1)(2v_i+5)$$

$$t_1=\frac{1}{2n(n-1)}\sum_i u_i(u_i-1)\sum_j v_j(v_j-1)$$

$$t_2=\frac{1}{9n(n-1)(n-2)}\sum_i u_i(u_i-1)(u_i-2)\sum_j v_j(v_j-1)(v_j-2)$$

有序分类变量情况下的 τ_c

假设 X 和 Y 是有序分类变量，分别由 r 个和 c 个有序水平，将观测数据的频数放入一个列联表中，令 n_ij, $i=1,2,\dots,r$, $j=1,2,\dots,c$ 为列联表中的对应元素，则 Kendall's τ_c 的定义和其渐进均方差为：

$$\tau_c=\frac{2q(n_c-n_d)}{n^2(q-1)}$$

$$\text{ASE}=\frac{2q}{(q-1)n^2}\sqrt{\sum_{ij}n_{ij}(C_{ij}-D_{ij})^2-4(n_c-n_d)^2/n}$$

$$q=\min(r,c)$$

$$C_{ij}=\sum_{i'>i}\sum_{j'>j}n_{i'j'}+\sum_{i'<i}\sum_{j'<j}n_{i'j'}$$

$$D_{ij}=\sum_{i'>i}\sum_{j'<j}n_{i'j'}+\sum_{i'<i}\sum_{j'>j}n_{i'j'}$$

其取值范围也在 $-1\sim 1$ 之间，同时有如下大样本近似：

$$\frac{\tau_c}{\text{ASE}}\sim N(0,\ 1)$$

代码

```r
cor.test(x, y,
alternative = c("two.sided", "less", "greater"),
method = "kendall"
exact = NULL, continuity = FALSE)
```

38.5 Goodman-Kruskal's γ 关联检验

原理

假设 X 和 Y 是有序分类变量，分别由 r 个和 c 个有序水平，将观测数据的频数放入一个列联表中，令 n_ij, $i=1,2,\dots,r$, $j=1,2,\dots,c$ 为列联表中的对应元素，则 Goodman-Kruskal 关联检验统计量 G（也是相关系数的一个点估计）的定义和其近似分布为：

$$G=\frac{n_c-n_d}{n_c+n_d}$$
$$\frac{G}{Var(G)}\sim N(0,\ 1)$$
$$Var(G)\approx\frac{16}{(P+Q)^4}\sum_{i,j}n_{ij}(PC_{ij}-QD_{ij})^2$$
$$P=2n_c,\ Q=2n_d$$
$$C_{ij}=\sum_{i'>i}\sum_{j'>j}n_{i'j'}+\sum_{i'<i}\sum_{j'<j}n_{i'j'},\ D_{ij}=\sum_{i'>i}\sum_{j'<j}n_{i'j'}+\sum_{i'<i}\sum_{j'>j}n_{i'j'}$$

代码

```r
library(DescTools)
GoodmanKruskalGamma(x, y, )
```

38.6 Sumers' d 关联检验

原理

假设 X 和 Y 是有序分类变量，分别由 r 个和 c 个有序水平，将观测数据的频数放入一个列联表中，令 n_ij, $i=1,2,\dots,r$, $j=1,2,\dots,c$ 为列联表中的对应元素。

Somers 定义了 $d(C|R)$ 与 $d(R|C)$，前者将行变量 X 看作自变量，后者把列变量 Y 看作自变量，下面仅介绍 $d(C|R)$，$d(R|C)$ 的情况只需要把列联表转置即可得到相应的结果。$d(C|R)$ 的定义及其渐近均方差为：

$$d(C|R)=\frac{2(n_c-n_d)}{n(n-1)-\sum_i^r R_i(R_i-1)}=\frac{P-Q}{D_r}$$
$$\text{ASE}=\frac{2}{D_r^2}\sqrt{\sum_{i,j}n_{ij}\left[D_r(C_{ij}-D_{ij})-(P-Q)(n-R_i)\right]^2}$$
$$R_i=\sum_{j=1}^{c}n_{ij},\ D_r=n^2-\sum_{i}^{r}R_i^2$$
$$P=2n_c,\ Q=2n_d$$
$$C_{ij}=\sum_{i'>i}\sum_{j'>j}n_{i'j'}+\sum_{i'<i}\sum_{j'<j}n_{i'j'},\ D_{ij}=\sum_{i'>i}\sum_{j'<j}n_{i'j'}+\sum_{i'<i}\sum_{j'>j}n_{i'j'}$$

在大样本情况下有如下近似：

$$\frac{d(C|R)}{\text{ASE}}\sim N(0,\ 1)$$

第十部分

机器学习

Chapter 39

集成学习

本章介绍集成学习 (ensemble learning)算法。首先介绍信息量与信息熵，然后介绍两种主流的大类方法，并对每个大类内部的具体算法作阐释。

39.1 信息论

39.1.1 信息量

我们想要找一个函数 $I(x)$ 来对事件产生的信息量 (information quantity)进行定量的分析，其中 x 代表着一个事件。显然信息量具有如下两个性质：

1. 一件事发生的概率越小，那么这件事发生后产生的信息量越大；

2. 如果两件事情独立，那么这两件事情都发生所产生的信息量应该等于每件事情各自发生产生的信息量之和。

由 (1)，$I(x)$ 需要与 x 发生的概率呈反比；由 (2)，$I(x)$ 应具有对数的形式，因为如果 $f(x) = \log\Big(\Pr(x)\Big)$，将 x, y 两个互相独立的事件同时发生的概率记为 $\Pr(x, y)$、产生的信息量记为 $f(x, y)$，那么：

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \log\Big(\Pr(x, y)\Big) = \log\Big(\Pr(x)\Pr(y)\Big) \\
&= \log\Big(\Pr(x)\Big) + \log\Big(\Pr(y)\Big) \\
&= f(x) + f(y)
\end{aligned}
$$

综合考虑以上两点，我们给出如下信息量的定义：

Definition 39.1. 一件事情发生所产生的信息量定义为它发生概率倒数的对数，即 $I(x) = -\log\Big(\Pr(\mathrm{x})\Big)$。对数底的选择是任意的，但在信息论中普遍使用 2 作为对数的底。

39.1.2 信息熵

Definition 39.2. 信息熵 *(information entropy)*是可能产生的信息量的期望。设 X 是一个离散型随机变量，有 n 个取值，分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，则 X 的信息熵 $H(X)$ 为：

$$\begin{aligned} H(X) &= E[I(X)] = E\left[-\log_2\Big(\Pr(X)\Big)\right] \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\Pr(X = x_i)\log_2[\Pr(X = x_i)] \end{aligned}$$

称由样本计算得到的信息熵为经验熵 *(empirical entropy)*。

信息熵同样表征了不确定性的大小（思考是为什么）。

条件熵

Definition 39.3. 条件熵 *(conditional entropy)*是给定一定条件下某个随机变量的信息熵。设 X, Y 是两个离散型随机变量，各自有 n 个和 m 个取值，分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \ldots, y_m$，则 X 在 Y 下的条件熵 $H(X|Y)$ 为：

$$\begin{aligned} H(X|Y) = E[I(X|Y)] &= E\left[\sum_{i=1}^{m}\Pr(Y = y_i)I(X|Y = y_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Pr(Y = y_i)E\left[I(X|Y = y_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Pr(Y = y_i)E\left[-\log_2\Big(\Pr(X|Y = y_i)\Big)\right] \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\Pr(Y = y_i)\sum_{j=1}^{n}\Pr(X = x_j|Y = y_i)\log_2\Big[\Pr(X = x_j|Y = y_i)\Big] \end{aligned}$$

X 在 $Y = y_i$ 下的条件熵 $H(X|Y = y_i)$ 为：

$$\begin{aligned} H(X|Y = y_i) &= E[I(X|Y = y_i)] \\ &= E\left[-\log_2\Big(\Pr(X|Y = y_i)\Big)\right] \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\Pr(X = x_j|Y = y_i)\log_2\Big[\Pr(X = x_j|Y = y_i)\Big] \end{aligned}$$

39.2 决策树

39.2.1 算法流程

啊啊啊

Algorithm 4 分类决策树生成算法

Input: 训练数据集 $\mathcal{D}$, 特征集 $\mathcal{F}$, 最大深度 $D_{\max}$, 内部节点划分最小样本数 N_{split}, 叶节点最小样本数 N_{leaf}, 最小纯度变化 $\Delta_{\min}$
Output: 决策树决策字典 T
初始化决策树当前深度 $d \leftarrow 0$
function DecisionTree($\mathcal{D}, \mathcal{F}, D_{\max}, d, N_{\text{split}}, N_{\text{leaf}}, \Delta_{\min}$)
  if $|\mathcal{D}| < N_{\text{split}}$ **or** $d = D_{\max}$ **then**
    MajorityClass($\mathcal{D}$) 计算 $\mathcal{D}$ 中所占比例最大的标签，Table($\mathcal{D}$) 对 $\mathcal{D}$ 中的各标签数目进行计数
    return { type: "leaf", prediction: MajorityClass($\mathcal{D}$), tabu: Table($\mathcal{D}$) }
  end if
  if 所有样本在 $\mathcal{D}$ 中属于同一类别 **then**
    return { type: "leaf", prediction: MajorityClass($\mathcal{D}$), tabu: Table($\mathcal{D}$) }
  end if
  if $\mathcal{F} = \varnothing$ **or** 数据集中所有样本在 $\mathcal{F}$ 上取值均相同 **then**
    return { type: "leaf", prediction: MajorityClass($\mathcal{D}$), tabu: Table($\mathcal{D}$) }
  end if
  选择最优划分特征 $F \in \mathcal{F}$，分类特征先使用 FindBestBinarySpilt（可选），然后使用 SelectBestFeature，连续型特征使用 FindBestSpiltContinue，再使用 SelectBestFeature，记其划分带来的纯度变化为 δ
  if $\delta < \Delta_{\min}$ **then**
    return { type: "leaf", prediction: MajorityClass($\mathcal{D}$), tabu: Table($\mathcal{D}$) }
  end if
  初始化决策字典 $T \leftarrow$ { type: "node", feature: F, purity: δ, branches: {}}
  for 特征 F 中每个可能的分支取值 F_i **do**
    定义子集 $\mathcal{D}_i = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid x[F] = F_i\}$，使用 PrePruning（可选）
    if $|\mathcal{D}_i| < N_{\text{leaf}}$ **then**
      T.branches[F_i] $\leftarrow$ { type: "leaf", prediction: MajorityClass($\mathcal{D}_i$), tabu: Table($\mathcal{D}_i$) }
    else
      T.branches[F_i] $\leftarrow$ DecisionTree($\mathcal{D}_i, \mathcal{F} \setminus F, D_{\max}, d+1, N_{\text{split}}, N_{\text{leaf}}, \Delta_{\min}$)
    end if
  end for
  return T
end function
使用 PostPruning（可选）
使用 CCPVal（可选）

Algorithm 5 回归决策树生成算法

Input: 训练数据集 $\mathcal{D}$, 特征集 $\mathcal{F}$, 最大深度 $D_{\max}$, 内部节点划分最小样本数 N_{split}, 叶节点最小样本数 N_{leaf}, 最小纯度变化 $\Delta_{\min}$
Output: 决策树决策字典 T
初始化决策树当前深度 $d \leftarrow 0$
function DecisionTree($\mathcal{D}, \mathcal{F}, D_{\max}, d, N_{\text{split}}, N_{\text{leaf}}, \Delta_{\min}$)
    if $|\mathcal{D}| < N_{\text{split}}$ **or** $d = D_{\max}$ **then**
        Mean($\mathcal{D}$) 计算 $\mathcal{D}$ 中目标变量的均值
        return { type: "leaf", prediction: Mean($\mathcal{D}$), tabu: $|\mathcal{D}|$ }
    end if
    if 所有样本在 $\mathcal{D}$ 中属于同一类别 **then**
        return { type: "leaf", prediction: Mean($\mathcal{D}$), tabu: $|\mathcal{D}|$ }
    end if
    if $\mathcal{F} = \varnothing$ **or** 数据集中所有样本在 $\mathcal{F}$ 上取值均相同 **then**
        return { type: "leaf", prediction: Mean($\mathcal{D}$), tabu: $|\mathcal{D}|$ }
    end if
    选择最优划分特征 $F \in \mathcal{F}$, 分类特征先使用 FindBestBinarySpilt（可选），然后使用 SplitScoreContinue，连续型特征使用 FindBestSpiltContinue，再使用 SelectScoreContinue，记其划分带来的纯度变化为 δ
    if $\delta < \Delta_{\min}$ **then**
        return { type: "leaf", prediction: Mean($\mathcal{D}$), tabu: $|\mathcal{D}|$ }
    end if
    初始化决策字典 $T \leftarrow$ { type: "node", feature: F, purity: δ, branches: {}}
    for 特征 F 中每个可能的分支取值 F_i **do**
        定义子集 $\mathcal{D}_i = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid x[F] = F_i\}$，使用 PrePruning（可选）
        if $|\mathcal{D}_i| < N_{\text{leaf}}$ **then**
            T.branches[F_i] $\leftarrow$ { type: "leaf", prediction: Mean($\mathcal{D}$), tabu: $|\mathcal{D}|$ }
        else
            T.branches[F_i] $\leftarrow$ DecisionTree($\mathcal{D}_i, \mathcal{F} \setminus F, D_{\max}, d+1, N_{\text{split}}, N_{\text{leaf}}, \Delta_{\min}$)
        end if
    end for
    return T
end function
使用 PostPruning（可选）
使用 CCPVal（可选）

Algorithm 6 选择最优特征（分类特征）

Input: 训练数据集 $\mathcal{D}$, 特征集 $\mathcal{F}$, 信息准则 Criterion
Output: 最优特征 F^*，最优特征对应的评分 BestScore
function SelectBestFeature($\mathcal{D}, \mathcal{F}$, Criterion)
  初始化最大评分 BestScore $\leftarrow -\infty$
  初始化最优特征 $F^* \leftarrow \varnothing$
  for 每个特征 $F \in \mathcal{F}$ **do**
    计算特征 F 的取值集合 $V_F = (F_i)$
    if Criterion = Information Gain **then**
      计算数据集 $\mathcal{D}$ 中目标变量 Y 的经验熵 $H(Y)$（$\mathcal{D}_i$ 为目标变量取值为 y_i 的样本的集合，$i = 1, 2, \ldots, n$）：

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{|\mathcal{D}_i|}{|\mathcal{D}|} \log_2 \left(\frac{|\mathcal{D}_i|}{|\mathcal{D}|} \right)$$

      计算数据集 $\mathcal{D}$ 按照 F 取值划分后的条件熵（$\mathcal{D}_{F_i}$ 为变量 $F = F_i$ 的样本的集合，$\mathcal{D}_{F_ij}$ 为 $\mathcal{D}_{F_i}$ 中目标变量 $Y = y_j$ 的样本的集合）：

$$H(Y|F) = \sum_{i=1}^{|V_F|} \frac{|\mathcal{D}_{F_i}|}{|\mathcal{D}|} \sum_{j=1}^{n} \frac{|\mathcal{D}_{F_ij}|}{|\mathcal{D}_{F_i}|} \log_2 \left(\frac{|\mathcal{D}_{F_ij}|}{|\mathcal{D}_{F_i}|} \right)$$

      计算信息增益 $G(F) = H(Y) - H(Y \mid F)$
      设定当前评分 Score $= G(F)$
    else if Criterion = Information Gain Ratio **then**
      计算信息增益 $G(F)$
      计算特征熵 $H(F) = -\sum_{i=1}^{|V_F|} \frac{|\mathcal{D}_{F_i}|}{|\mathcal{D}|} \log_2 \left(\frac{|\mathcal{D}_{F_i}|}{|\mathcal{D}|} \right)$
      计算信息增益率 $GR(F) = \dfrac{G(F)}{H(F) + \epsilon}$ ▷ ε 保证数值稳定
      设定当前评分 Score $= GR(F)$
    else if Criterion = Gini Index **then**
      计算基尼指数：

$$Gini(F) = \sum_{i=1}^{|V_F|} \frac{|\mathcal{D}_{F_i}|}{|\mathcal{D}|} Gini(\mathcal{D}_v) = \sum_{i=1}^{|V_F|} \frac{|\mathcal{D}_{F_i}|}{|\mathcal{D}|} \sum_{j=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{|D_{F_ij}|}{|D_{F_i}|} \right)^2 \right]$$

      设定当前评分 Score $= -Gini(F)$ ▷ 基尼指数越小越好
    end if
    if Score > BestScore **then**
      BestScore $\leftarrow$ Score
      $F^* \leftarrow F$
    end if
  end for
  return F^*, BestScore
end function

Algorithm 7 对连续特征的处理

Input: 训练数据集 $\mathcal{D}$, 连续特征 F
Output: 最优划分点 t^*
function FindBestSplitContinue($\mathcal{D}, F$)
 令 $V_F = \{x[F] \mid (x, y) \in \mathcal{D}\}$ 为 F 的所有取值
 将 V_F 按升序排序
 初始化最优分割点 $t^* \leftarrow \varnothing$
 初始化最大评分 BestScore $\leftarrow -\infty$
 for 每个相邻取值 $(v_i, v_{i+1}) \in V_F$ **do**
  计算候选划分点 $t = \frac{v_i+v_{i+1}}{2}$
  将数据集 $\mathcal{D}$ 根据 $F \leqslant t$ 划分为 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$
  计算划分后的评分 Score =SplitScoreContinue($\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$)
  if Score $>$ BestScore **then**
   BestScore $\leftarrow$ Score
   $t^* \leftarrow t$
  end if
 end for
 return t^*
end function

Algorithm 8 对分类变量的二分处理

Input: 训练数据集 $\mathcal{D}$, 分类特征 F
Output: 最优二分子集 S^*
function FindBestBinarySplit($\mathcal{D}, F$)
 令 $V_F = \{x[F] \mid (x, y) \in \mathcal{D}\}$ 为 F 的所有取值
 令 $\mathcal{P}(V_F)$ 为 V_F 的所有可能的非空真子集
 初始化最优二分子集 $S^* \leftarrow \varnothing$
 初始化最大评分 BestScore $\leftarrow -\infty$
 for 每个可能的二分子集 $S \subset V_F$ **do**
  将数据集 $\mathcal{D}$ 根据 $x[F] \in S$ 与 $x[F] \notin S$ 划分为 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$
  计算划分后的评分 Score =SplitScoreContinue($\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$)
  if Score $>$ BestScore **then**
   BestScore $\leftarrow$ Score
   $S^* \leftarrow S$
  end if
 end for
 return S^*
end function

Algorithm 9 计算回归问题的分划得分

Input: 训练数据集 $\mathcal{D}$, 二分后的子集 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$
Output: 当前划分的得分 Score
function SplitScoreContinue($\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$)
  计算两个子集的均方误差：

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{|\mathcal{D}_1|} \sum_{(x,y)\in\mathcal{D}_1} y,\ \mathrm{MSE}_1 = \frac{1}{|\mathcal{D}_1|} \sum_{(x,y)\in\mathcal{D}_1} (y-\bar{y}_1)^2$$
$$\bar{y}_2 = \frac{1}{|\mathcal{D}_2|} \sum_{(x,y)\in\mathcal{D}_2} y,\ \mathrm{MSE}_2 = \frac{1}{|\mathcal{D}_2|} \sum_{(x,y)\in\mathcal{D}_2} (y-\bar{y}_2)^2$$

  计算整体加权均方误差：

$$\mathrm{Score} = -\left(\frac{|\mathcal{D}_1|}{|\mathcal{D}|}\mathrm{MSE}_1 + \frac{|\mathcal{D}_2|}{|\mathcal{D}|}\mathrm{MSE}_2\right)$$

  return Score
end function

Algorithm 10 预剪枝：利用验证集比较划分前后的误差

Input: 当前节点训练数据 $\mathcal{D}$，当前节点验证数据 $\mathcal{D}_{val}$，当前决策路径 T
Output: 是否继续划分（True/False）
function PrePruning($\mathcal{D}, \mathcal{D}_{val}, T$)
  计算不划分的验证误差：不划分则当前节点化为叶节点，叶节点数值由 $\mathcal{D}$ 决定，于是该条决策路径确定，可据此计算 $\mathcal{D}_{val}$ 中在该条决策路径上的样本的误差 e_1。
  计算划分后的验证误差（加权平均误差）：若划分，将划分后的节点化为叶节点，叶节点数值由 $\mathcal{D}$ 决定，于是该条决策路径确定，可据此计算 $\mathcal{D}_{val}$ 中在该条决策路径上的样本的加权平均误差 e_2。
  if $e_2 < e_1$ **then**
    return True ▷ 候选划分能降低验证误差，继续划分
  else
    return False ▷ 划分后误差未降低，不划分，将当前节点作为叶节点
  end if
end function

Algorithm 11 后剪枝算法

Input: 已生成的决策树 T，验证数据集 $\mathcal{D}_{val}$
Output: 剪枝后的决策树 T^*
function PostPruning($T, \mathcal{D}_{val}$)
  for 树 T 中的每个内部节点 N（按照树的深度自底向上的顺序） **do**
    计算节点 N 的当前子树在验证集 $\mathcal{D}_{val}$ 上的误差 E_{subtree}
    将节点 N 暂时替换为叶节点，计算替换后的树在验证集上的误差 E_{pruned}
    if $E_{\text{pruned}} \leqslant E_{\text{subtree}}$ **then** ▷ 等于也要剪枝，这是基于奥卡姆剃刀准则
      将节点 N 永久替换为叶节点
    else
      恢复节点 N 的原始子树结构
    end if
  end for
  return 剪枝后的决策树 T
end function

Algorithm 12 代价复杂度剪枝 (Cost-Complexity Pruning with Validation)

Input: 验证集 $\mathcal{D}_{val}$, 未剪枝完全生长的初始决策树 T_0
Output: 最优子树 T^*
function CCPVal($\mathcal{D}_{val}, T_0$)
  初始化候选树集 $\mathcal{T} \leftarrow \{T_0\}$
  初始化代价复杂度序列 $\alpha \leftarrow \emptyset$
  令 $T \leftarrow T_0$
  while T 不是一棵只有根节点的树 **do**
    for 每个内部节点 t in T **do**
      计算训练集子树 T_t（以 t 为根）的损失 $R(T_t)$
      计算节点 t 的剪枝指标:

$$\alpha_t = \frac{R(T_t) - R(t)}{|T_t| - 1}$$

    end for
    令 $\alpha_{\min} = \min \alpha_t$，将 $\alpha_{\min}$ 加入序列 α，找到其对应节点 t^*，将 T_{t^*} 剪去，令其变为叶节点，得到新树 T'
    更新 $T \leftarrow T'$ 并加入候选树集：$\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T} \cup \{T\}$
  end while
  令 $T^* = \arg\min_{T_i \in \mathcal{T}} \text{Error}(T_i, \mathcal{D}_{val})$，其中 $\text{Error}(T_i, \mathcal{D}_{val})$ 是树 T_i 在验证集 $\mathcal{D}_{val}$ 上的误差
  return T^*
end function

1. ID3= 分类决策树生成 + 信息增益。
2. C4.5= 分类决策树生成 + 信息增益率 + 连续变量处理 + 缺失值处理 + 两种剪枝策略。
3. CART= 分类/回归决策树生成 +Gini 系数 + 分类变量二分处理 + 连续变量处理 + 回归时的变量选择问题 + 缺失值处理 + 三种剪枝策略。
4. 算法前面的 if 判断是为了不让决策树过于复杂而使用的正则化技术以及无法再分枝时的决策树生长终止条件。
5. 决策树最终得到的即为决策字典 T，只需按照键的顺序往下走，即可得到样本的预测值或预测类别。
6. 记录 tabu 是为了计算特征重要性以及分类问题时的预测概率（预测概率由该叶节点中训练集真实标签等于叶节点标签的样本比例）。
7. 信息增益率考虑了特征熵，缓解了信息增益偏好类似于编号一类的特征的问题。
8. Gini 指数计算方便，不涉及对数运算，提高了运算效率。
9. 标准 CART 中无论是连续型特征还是分类型特征都划分成两类，于是它构成二叉树，二叉树可以提高效率。
10. 标准 CART 每个特征都可以使用多次，不需要每次递归时去除上一次使用的特征。
11. 预剪枝是一种正则化手段，但是它容易欠拟合，因为当前没必要的分支可能在接下来的分支中提高预测精度。后剪枝也是一种正则化技术，它平衡了欠拟合与过拟合，但是运算效率最低，毕竟要完全生成树然后对完全生成树的每一个内部节点进行计算。
12. 代价复杂度剪枝考虑代价：
$$C_\alpha(T) = R(T) + \alpha|T|$$
其中 $R(T)$ 为树 T 对于训练集的误差，$|T|$ 表示树 T 的叶节点数目，表征树 T 的复杂度，α 是一个超参数，平衡训练集误差与正则化项的重要性。对于一个内部节点 $t \in T$，我们要判断是否要对其进行剪枝，也就是看剪枝前后以该节点为根节点的子树的代价变化（剪枝前很容易理解，即不看 t 节点之前的树，把 t 当作根节点考虑子树；剪枝后则 t 变为叶节点，只需考虑 t 这个叶节点的代价）。显然剪枝前后的代价分别为：
$$C_\alpha(T_t) = R(T_t) + \alpha|T_t|,\ C_\alpha(t) = R(t) + \alpha$$
若 $C_\alpha(t) \leqslant C_\alpha(T_t)$，则进行剪枝。$R(T_t)$ 和 $R(t)$ 都是固定值，显然随着 α 的增大，$C_\alpha(T_t)$ 会越来越大，所以我们要考虑的临界情况为：
$$R(T_t) + \alpha|T_t| = R(t) + \alpha \longrightarrow \alpha = \frac{R(t) - R(T_t)}{|T_t| - 1}$$

计算树 T 中所有内部节点的临界 α 值，将其从小到大排序为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，若剪掉 α_1 对应的节点，则对于当前问题，新的树将是 $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2)$ 中的最优树，这是因为剩余的节点中最小的临界值也是 α_2，当 $\alpha \geqslant \alpha_2$ 时，因为 $\alpha_2 \leqslant \alpha$，则 α_2 对应的节点也应该被剪掉。于是我们就可以使用递归的方案，求出 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 对应的 n 棵树，然后用验证集测试它们的性能，选择最优的一个作为剪枝的结果。

13. Sklearn 中实现的代价复杂度剪枝并没有使用验证集验证，而是设置最大的 α 值，将节点的临界值从小到大排序得到 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，剪枝剪到 $\alpha_i > \alpha$ 为止，即对 $\alpha_i \leqslant \alpha$ 的所有节点都进行剪枝。

39.3 XGBoost

假设一共有 m 个基模型，分别为 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$，$n$ 个样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$，则 XGBoost 模型的损失函数、正则项和目标函数分别为：

$$L = \sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, \hat{y}_i^{(m)}),\ R = \sum_{i=1}^{m} \Omega(f_i)$$
$$Obj = L + R = \sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, \hat{y}_i^{(m)}) + \sum_{i=1}^{m} \Omega(f_i)$$

第 t 步的目标函数为：

$$\begin{aligned}
Obj &= \sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, \hat{y}_i^{(t)}) + \sum_{i=1}^{t} \Omega(f_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, \hat{y}_i^{(t-1)} + f_t(x_i)) + \sum_{i=1}^{t-1} \Omega(f_i) + \Omega(f_t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, \hat{y}_i^{(t-1)} + f_t(x_i)) + \Omega(f_t) + C
\end{aligned}$$

因为 C 是一个常数，所以可以直接扔掉。我们的目标是最优化目标函数，方式是通过引入新的一个基模型 $f_t(x)$，所以要研究 $f_t(x)$ 对于每一个样本具体取怎样的值能够使目标函数值降低，换句话说就是，$f_t(x_i)$ 该在损失函数 l 的第二个分量上往前或往后走多少？由此我们想到 Taylor 展开，Taylor 展开其实就是表示自变量变化一定值后函数值的变化。将目标函数进行二阶展开来近似可以得到：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Obj} &\approx \sum_{i=1}^{n} \left[\ell(y_i, \hat{y}_i^{(t-1)}) + g_i f_t(x_i) + \frac{1}{2} h_i f_t^2(x_i)\right] + \Omega(f_t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} h_i f_t^2(x_i) + g_i f_t(x_i)\right] + \Omega(f_t) + \sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, \hat{y}_i^{(t-1)})
\end{aligned}$$

其中：

$$g_i = \frac{\partial \ell(y_i, z)}{\partial z}\Big|_{z=\hat{y}_i^{(t-1)}}, \quad h_i = \frac{\partial^2 \ell(y_i, z)}{\partial z^2}\Big|_{z=\hat{y}_i^{(t-1)}}$$

考虑到此时已经拟合成功了 $t-1$ 个基模型，上式最后一项是一个常数，所以也可以扔掉，于是我们的目标函数变为了：

$$\text{Obj}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}h_i f_t^2(x_i)+g_i f_t(x_i)\right]+\Omega(f_t)$$

39.3.1 抽象到具体

上面我们进行的讨论都带着 f_t，f_t 是一个抽象的模型，接下来要选择一个具体的基模型去讨论，也就是说，我们得选择一个具体的基模型去训练，用这个目标函数去指导基模型的最优化问题。在原始论文中陈天奇选择了回归决策树模型，接下来我们也使用该模型去进行介绍。

陈天奇在回归决策树模型中使用了如下的正则项：

$$\Omega(f)=\gamma T+\lambda\sum_{i=1}^{T}\omega_i^2$$

其中 γ,λ 是控制惩罚强度的超参数，T 是模型叶节点的数量，ω_i 是这棵树第 i 个叶节点的输出值。记 $q(x)$ 为一个函数，它将样本 x 映射到 x 属于的叶节点的编号，也就是说 $q(x_i)=j$ 表示 x_i 这个样本最后被划分到了树的第 j 个叶节点，该样本的训练输出值为 ω_j。记 $I_j=\{i:q(x_i)=j\}$，于是上述的抽象目标函数在回归决策树下的具体目标函数为：

$$\begin{aligned}\text{Obj}&=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}h_i f_t^2(x_i)+g_i f_t(x_i)\right]+\Omega(f_t)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}h_i w_{q(x_i)}^2+g_i w_{q(x_i)}\right]+\gamma T+\lambda\sum_{i=1}^{T}\omega_i^2\\&=\sum_{j=1}^{T}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i\in I_j}h_i+\lambda\right)w_j^2+\left(\sum_{i\in I_j}g_i\right)\omega_j\right]+\gamma T\end{aligned}$$

Algorithm 13 XGBoost 第 t 步生成回归树 f_t

Input: 样本集 $\mathcal{D}=\{(x_i,y_i)\}$，当前预测值 $\{\hat{y}_i^{(t-1)}\}$，正则项参数 γ,λ
Output: 本轮生成的回归树 f_t
计算损失函数的一阶导数与二阶导数：
for 每个样本 $i=1,\dots,n$ **do**
  计算 $g_i=\left.\dfrac{\partial \ell(y_i,z)}{\partial z}\right|_{z=\hat{y}_i^{(t-1)}}$
  计算 $h_i=\left.\dfrac{\partial^2 \ell(y_i,z)}{\partial z^2}\right|_{z=\hat{y}_i^{(t-1)}}$
end for
初始化根节点：
将所有样本分配到根节点，计算节点的 $G=\sum_i g_i$，$H=\sum_i h_i$
计算当前节点的最优输出 $\omega=-\frac{G}{H+\lambda}$，当前目标函数值为 $\text{Obj}=-\frac{1}{2}\frac{G^2}{H+\lambda}+\gamma$
递归分裂节点：
function SplitNode(Node, $\mathcal{D}$)
  初始化 BestScore $=-\infty$, Split $=$ FALSE, F^*, s^*
  for 每个特征 F **do**
    for 每个候选分裂点 s **do**
      将样本根据 $x[F]<s$ 分成左右子集 $\mathcal{D}_L,\mathcal{D}_R$
      分别计算 G_L,H_L,G_R,H_R
      计算当前分裂的目标函数值增益：

$$\text{Gain}=\text{Obj}-\text{Obj}_L-\text{Obj}_R=\frac{1}{2}\left(\frac{G_L^2}{H_L+\lambda}+\frac{G_R^2}{H_R+\lambda}-\frac{(G_L+G_R)^2}{H_L+H_R+\lambda}\right)-\gamma$$

      if Gain>0 **then**
        Split $=$ TRUE
        if Gain$>BestScore$ **then**
          $F^*=F,\ s^*=s$
        end if
      end if
    end for
  end for
  if Split=TRUE **then**
    用最佳划分点分裂当前节点，得到 LeftChild 和 RightChild
    SplitNode(LeftChild, $\mathcal{D}_L$)
    SplitNode(RightChild, $\mathcal{D}_R$)
  end if
end function
return 构造出的回归树 f_t

附录

.1 数域

Definition .4. 复数集的一个子集 K 如果满足：

1. $1 \in K$；
2. $a, b \in K \Rightarrow a \pm b, ab \in K$，$a, b \in K$ 且 $b \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} \in K$。

则称 K 是一个数域 *(number filed)*。

Theorem .1. 任意数域都包含有理数域。

Proof. 任取数域 K，由数域的定义可得 $1 \in K$，那么根据数域对其内数加法与减法的封闭性，$\mathbb{Z} \subseteq K$。于是任意分数 $\frac{a}{b} \in K,\ b \neq 0$，即 $\mathbb{Q} \subseteq K$。 □

.2 等价关系

Definition .5. 对于任意两个非空集合 S, M，称：

$$\{(a, b) : a \in S,\ b \in M\}$$

为集合 S 与集合 M 的笛卡尔积 *(Cartesian product)*，记为 $S \times M$。其中两个元素 (a_1, b_1) 与 (a_2, b_2) 如果满足 $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$，则称二者相等，记作 $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$。

Definition .6. 设 S 是一个非空集合，把 $S \times S$ 的一个子集 W 叫作 S 上的一个二元关系 *(binary relation)*。如果 $(a, b) \in W$，则称 a 与 b 有 W 关系；如果 $(a, b) \notin W$，则称 a 与 b 没有 W 关系。当 a 与 b 有 W 关系时，记作 aWb，或 $a \sim b$。

Definition .7. 集合 S 上的一个二元关系 $\sim$ 如果具有如下性质：对 $\forall\, a, b, c \in S$，有：

1. $a \sim a$（反身性）；
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$（对称性）；
3. $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$（传递性）。

那么称 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系 *(equivalence relationship)*。

Definition .8. 设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系，$a \in S$，令：

$$\overline{a} \overset{\text{def}}{=} \{x \in S : x \sim a\}$$

称 $\overline{a}$ 是由 a 确定的等价类 *(equivalence class)*，称 a 是等价类 $\overline{a}$ 的一个代表。

Property .2.1. 等价类具有如下基本性质：

1. $a \in \overline{a}$;
2. $x \in \overline{a} \Leftrightarrow x \sim a$;
3. $x \sim y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$。

Proof. (1) 等价关系具有反身性。(2) 由等价类的定义可直接得出。

(3) **充分性**：因为 $x \in \overline{x}$ 且 $\overline{x} = \overline{y}$，所以 $x \in \overline{y}$，由 $\overline{y}$ 的定义，$x \sim y$。

必要性：任取 $a \in \overline{x}$，则 $a \sim x$。因为 $x \sim y$，由等价关系的传递性，$a \sim y$，即 $a \in \overline{y}$。由 a 的任意性，$\overline{x} \subseteq \overline{y}$。同理可证得 $\overline{y} \subseteq \overline{x}$，所以 $\overline{x} = \overline{y}$。 □

Corollary .1. 用不同代表表示的等价类是一样的，即代表的选择与等价类本身无关。

Proof. 由等价类基本性质 (3) 可直接得到。 □

Theorem .2. 设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系。对 $\forall\, a, b \in S$，有 $\overline{a} = \overline{b}$ 或 $\overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing$。

Proof. 如果 $\overline{a} \neq \overline{b}$，假设此时 $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \varnothing$，取 $c \in \overline{a} \cap \overline{b}$，则有 $c \sim a$ 且 $c \sim b$。由等价关系的对称性与传递性可得 $a \sim b$，根据等价类的基本性质 (3)，此时应有 $\overline{a} = \overline{b}$，矛盾，所以 $\overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing$。 □

Definition .9. 如果集合 S 可以表示为一些非空子集的并集，且这些子集不相交，即：

$$\exists\, S_i \subseteq S,\ \bigcup_{i \in I} S_i = S,\ S_i \cap S_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j \in I$$

其中 I 是指标集。称集合 $\{S_i : i \in I\}$ 是 S 的一个划分 *(partition)*，记作 $\pi(S)$。

Theorem .3. 设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系，则所有等价类组成的集合是 S 的一个划分，记作 $\pi_\sim(S)$。

Proof. 对 $\forall\, a_i \in S$，其中 i 是指标集，有 $a_i \in \overline{a_i}$，于是 $S = \bigcup_{i \in I} \overline{a_i}$。由定理 .2可得，若 $i \neq j$，$\overline{a_i} \cap \overline{a_j} = \varnothing$，从而所有等价类组成的集合是 S 的一个划分。 □

Definition .10. 设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系，所有等价类组成的集合称为 S 对于关系 $\sim$ 的商集 *(quotient set)*。

Definition .11. 设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系，一种量或者一种表达式如果对于同一个等价类里的元素是相等的，那么称这种量或表达式是一个**不变量**；恰好能完全绝对等价类的一组不变量称为**完全不变量**。

.3 矩阵

.3.1 Kronecker 乘积

Definition .12. 给定两个矩阵 $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$ 和 $B\in M_{p\times q}(K)$，它们的 *Kronecker* 乘积 $A\otimes B$ 是一个大小为 $mp\times nq$ 的矩阵，定义为：

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

$a_{ij}B$ 表示矩阵 B 乘以标量 a_{ij}，$i=1,2,\ldots,m$，$j=1,2,\ldots,n$。

Property .3.1. *Kronecker* 乘积具有如下性质：

1. $I_m\otimes I_n=I_{mn}$；

2. 设 $A\in M_{m\times n}(K)$，$B\in M_{p\times q}(K)$，$C\in M_{n\times k}(K)$，$D\in M_{q\times r}(K)$，则 $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$；

3. 设 $A\in M_m(K)$，$B\in M_n(K)$，则 $A\otimes B$ 可逆的充分必要条件为 A,B 都可逆，此时有：

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$$

4. 设 $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$，$B=(b_{kl})\in M_{p\times q}(K)$，则 $(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$；

Proof. (1) 由 Kronecker 乘积的定义：

$$I_m\otimes I_n=\begin{pmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \end{pmatrix}=I_{mn}$$

(2) 由 Kronecker 乘积的定义：

$$
\begin{aligned}
(A\otimes B)(C\otimes D) &= \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}D & c_{12}D & \cdots & c_{1k}D \\ c_{21}D & c_{22}D & \cdots & c_{2k}D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}D & c_{n2}D & \cdots & c_{nk}D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}c_{i1}BD & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}c_{i2}BD & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}c_{ik}BD \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}c_{i1}BD & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}c_{i2}BD & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}c_{ik}BD \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{mi}c_{i1}BD & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{mi}c_{i2}BD & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{mi}c_{ik}BD \end{pmatrix} \\
&= (AC)\otimes(BD)
\end{aligned}
$$

(3) **必要性**：假设此时 A 不可逆，则存在非零向量 x 使得 $Ax=\mathbf{0}$。取非零向量 y，则 $(x\otimes y)$ 不是一个零向量。由 (2) 可得：

$$(A\otimes B)(x\otimes y) = (Ax)\otimes(By) = \mathbf{0}\otimes(By) = \mathbf{0}$$

因为 $A\otimes B$ 可逆，所以不存在非零向量 z 使得 $(A\otimes B)z=\mathbf{0}$，但此时有 $(A\otimes B)(x\otimes y)=\mathbf{0}$，矛盾，所以 A 可逆。同理可得 B 可逆。

充分性：由 (1)(2) 可得：

$$
\begin{aligned}
(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1}) = (AA^{-1})\otimes(BB^{-1}) = I_m\otimes I_n = I_{mn} \\
(A^{-1}\otimes B^{-1})(A\otimes B) = (A^{-1}A)\otimes(B^{-1}B) = I_m\otimes I_n = I_{mn}
\end{aligned}
$$

所以 $A\otimes B$ 可逆，逆矩阵就是 $(A^{-1}\otimes B^{-1})$。

(4) 对任意的 $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant p$, $1\leqslant l\leqslant q$，元素 $a_{ij}b_{kl}$ 在 $A\otimes B$ 中的行标为 $(i-1)p+k$，列标为 $(j-1)q+l$。于是 $a_{ij}b_{kl}$ 在 $(A\otimes B)^T$ 中的列标为 $(i-1)p+k$，行标为 $(j-1)q+l$。而 $A^T\otimes B^T$ 列标为 $(i-1)p+k$、行标为 $(j-1)q+l$ 的元素为 $a_{ij}b_{kl}$，于是 $(A\otimes B)^T = A^T\otimes B^T$。 □

.3.2 迹

Definition .13. $A=(a_{ij})\in M_n(K)$ 的主对角线上的元素之和称为 A 的迹 *(trace)*，记作 $\mathrm{tr}(A)$，即：

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Property .3.2. 设 $A,B\in M_n(K)$, $k\in K$，矩阵的迹具有如下性质：

1. $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$；

2. $\mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}(A)$；

3. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$。

Proof. (1)(2) 是显然的；

(3) 显然：

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \mathrm{tr}(BA)$$ □

.3.3 向量化算子

Definition .14. 设 $A = (a_{ij}) \in M_{s\times m}(K)$，则：

$$\begin{aligned} \mathrm{vec}(A) &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{s1}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{s2}, \dots, a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{sm})^T \\ \mathrm{rvec}(A) &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}, \dots, a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sm}) \end{aligned}$$

称 vec 与 rvec 为向量化算子。

交换矩阵的定义及其性质

Definition .15. 对 $A \in M_{s\times m}(K)$，存在唯一的 $K_{sm} \in M_{sm\times sm}(K)$，使得：

$$K_{sm}\,\mathrm{vec}(A) = \mathrm{vec}(A^T)$$

称 K_{sm} 为交换矩阵 *(commutation matrix)*。

向量化算子的性质

Property .3.3. 向量化算子具有如下性质：

1. 设 $A, B \in M_{s\times m}(K)$，则 $\forall\, k_1, k_2 \in K, \mathrm{vec}(k_1A + k_2B) = k_1\,\mathrm{vec}(A) + k_2\,\mathrm{vec}(B)$，即向量化算子是线性算子；

2. 设 $A, B \in M_{s\times m}(K)$，则 $\mathrm{tr}(A^TB) = \mathrm{vec}(A)^T\,\mathrm{vec}(B)$；

3. 设 $A \in M_{s\times m}(K)$，$B \in M_{m\times n}(K)$，$C \in M_{n\times p}(K)$，$\mathrm{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\,\mathrm{vec}(B)$；

Proof. (1) 是显然的；

(2) 因为：

$$\mathrm{tr}(A^TB) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s} a_{ji}b_{ji}$$

所以：

$$\begin{aligned}\operatorname{vec}(A)^T\operatorname{vec}(B) &= (a_{11},a_{21},\ldots,a_{s1},a_{12},a_{22},\ldots,a_{s2},\ldots,a_{1m},a_{2m},\ldots,a_{sm})\\ &\quad\cdot(b_{11},b_{21},\ldots,b_{s1},b_{12},b_{22},\ldots,b_{s2},\ldots,b_{1m},b_{2m},\ldots,b_{sm})^T\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s}a_{ji}b_{ji}\\ &= \operatorname{tr}(A^TB)\end{aligned}$$

(3) 设 $B=(B_1,B_2,\ldots,B_n)$，$C=(C_1,C_2,\ldots,C_p)$，则 ABC 的第 k 列：

$$\begin{aligned}ABC[:,k] &= A(B_1,B_2,\ldots,B_n)C_k = A\sum_{i=1}^{n}B_ic_{ik}\\ &= (c_{1k}A,c_{2k}A,\ldots,c_{nk}A)\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\\vdots\\B_n\end{pmatrix} = (C_k^T\otimes A)\operatorname{vec}(B)\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}\operatorname{vec}(ABC) = \begin{pmatrix}ABC[:,1]\\ABC[:,2]\\\vdots\\ABC[:,p]\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}(C_1^T\otimes A)\operatorname{vec}(B)\\(C_2^T\otimes A)\operatorname{vec}(B)\\\vdots\\(C_p^T\otimes A)\operatorname{vec}(B)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}C_1^T\otimes A\\C_2^T\otimes A\\\vdots\\C_p^T\otimes A\end{pmatrix}\operatorname{vec}(B) = (C^T\otimes A)\operatorname{vec}(B)\end{aligned}$$

□

.3.4 平方根阵

Definition .16. 设对称阵 $A\in M_n(\mathbb{R})$，其特征值记为 λ_i，$i=1,2,\ldots,n$。因为 A 是一个实对称阵，由**??***(3)* 可知存在正交矩阵 Q 使得 $A=Q^T\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}Q$。若 $A\geqslant 0$，由定理 *2.43(3)* 的第五条可知 $\lambda_i\geqslant 0$，$i=1,2,\ldots,n$，记：

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}=\operatorname{diag}\{\lambda_1^{\frac{1}{2}},\lambda_2^{\frac{1}{2}},\ldots,\lambda_n^{\frac{1}{2}}\}$$

称：

$$A^{\frac{1}{2}}=Q^T\Lambda^{\frac{1}{2}}Q$$

为 A 的**平方根阵**。

Property .3.4. 设对称阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A \geqslant 0$，$A^{\frac{1}{2}}$ 具有如下性质：

1. $(A^{\frac{1}{2}})^2 = A$；
2. $A^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$；
3. $A^{\frac{1}{2}}$ 是对称阵；

Proof. 由 $A^{\frac{1}{2}}$ 的定义，有 $A^{\frac{1}{2}} = Q^T \Lambda^{\frac{1}{2}} Q$ 和 $A = Q^T \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} Q$，其中 Q 是一个正交矩阵，$\Lambda^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}\{\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \lambda_2^{\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_n^{\frac{1}{2}}\}$，$\lambda_i$，$i = 1, 2, \ldots, n$ 为 A 的特征值。

(1) 显然：

$$(A^{\frac{1}{2}})^2 = Q^T \Lambda^{\frac{1}{2}} Q Q^T \Lambda^{\frac{1}{2}} Q = Q^T (\Lambda^{\frac{1}{2}})^2 Q = Q^T \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} Q = A$$

(2) 因为 Q 是正交矩阵，所以 $Q^T = Q^{-1}$。于是：

$$Q A^{\frac{1}{2}} Q^{-1} = \Lambda^{\frac{1}{2}}$$

由??的必要性可知，$\lambda_i^{\frac{1}{2}}$ 为 $A^{\frac{1}{2}}$ 的特征值，而 $\lambda_i \geqslant 0$，由定理 2.43(3) 的第五条可知 $A^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$。

(3) 显然：

$$(A^{\frac{1}{2}})^T = (Q^T \Lambda^{\frac{1}{2}} Q)^T = Q^T (\Lambda^{\frac{1}{2}})^T Q = Q^T \Lambda^{\frac{1}{2}} Q = A^{\frac{1}{2}}$$

□

平方根阵的逆矩阵

Theorem .4. 设对称阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$，其特征值记为 λ_i，$i = 1, 2, \ldots, n$。因为 A 是一个实对称阵，由??*(3)* 可知存在正交矩阵 Q 使得 $A = Q^T \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} Q$。若 $A > 0$，由定理 *2.42(3)* 的第五条可知 $\lambda_i > 0$，$i = 1, 2, \ldots, n$，记：

$$\Lambda^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}\{\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \lambda_2^{-\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_n^{-\frac{1}{2}}\}$$

则：

$$A^{-\frac{1}{2}} = Q^T \Lambda^{-\frac{1}{2}} Q$$

是 $A^{\frac{1}{2}}$ 的逆矩阵。

Proof. 显然：

$$A^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} = Q^T \operatorname{diag}\{\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \lambda_2^{\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_n^{\frac{1}{2}}\} Q Q^T \operatorname{diag}\{\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \lambda_2^{-\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_n^{-\frac{1}{2}}\} Q = I$$ □

Property .3.5. 设对称阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A > 0$，$A^{\frac{1}{2}}$ 具有如下性质：

1. $(A^{-\frac{1}{2}})^2 = A^{-1}$；
2. $A^{-\frac{1}{2}} > 0$；
3. $A^{-\frac{1}{2}}$ 是对称阵；

Proof. 由 $A^{-\frac{1}{2}}$ 的定义，有 $A^{-\frac{1}{2}} = Q^T \Lambda^{-\frac{1}{2}} Q$ 和 $A = Q^T \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} Q$，其中 Q 是一个正交矩阵，$\Lambda^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}\{\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \lambda_2^{-\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_n^{-\frac{1}{2}}\}$，$\lambda_i$，$i = 1, 2, \ldots, n$ 为 A 的特征值。

(1) 显然：

$$(A^{-\frac{1}{2}})^2 = Q^T \Lambda^{-\frac{1}{2}} Q Q^T \Lambda^{-\frac{1}{2}} Q = Q^T \operatorname{diag}\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}\} Q$$

而：

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (Q^T \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} Q)^{-1} = Q^{-1} \operatorname{diag}\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}\} (Q^T)^{-1} \\ &= Q^T \operatorname{diag}\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}\} Q \end{aligned}$$

所以 $(A^{-\frac{1}{2}})^2 = A^{-1}$。

(2) 因为 Q 是正交矩阵，所以 $Q^T = Q^{-1}$。于是：

$$Q A^{-\frac{1}{2}} Q^{-1} = \Lambda^{-\frac{1}{2}}$$

由**??**的必要性可知，$\lambda_i^{-\frac{1}{2}}$ 为 $A^{-\frac{1}{2}}$ 的特征值，而 $\lambda_i > 0$，由定理 2.42(3) 的第五条可知 $A^{\frac{1}{2}} > 0$。

(3) 显然：

$$(A^{-\frac{1}{2}})^T = (Q^T \Lambda^{-\frac{1}{2}} Q)^T = Q^T (\Lambda^{-\frac{1}{2}})^T Q = Q^T \Lambda^{-\frac{1}{2}} Q = A^{-\frac{1}{2}}$$

□

.4 中英术语表

符号	英文全称	中文含义	首次出现页码
c.f.	characteristic function	特征函数	282
c.g.f.	cumulant-generating function	累积量生成函数	281
d.f.	distribution function	分布函数	247
FIM	Fisher information matrix	Fisher 信息矩阵	286
FPC	finite population correction fraction	有限群体校正分数	466
LSE	least squares estimate	最小二乘估计	359
m.g.f.	moment-generating function	矩母函数	280
MLE	maximum likelihood estimation	极大似然估计	330
MOE	margin of error	误差幅度	471
PCA	principal component analysis	主成分分析	337
PMSE	generalized prediction MSE	广义预测均方误差	366
psus	primary sampling units	初级抽样单元	499
r.v.	random variable	随机变量	239
REF	row echelon form	行阶梯形矩阵	41
RREF	reduced row echelon form	简化行阶梯形矩阵	41
RSS	regression sum of suqares	回归平方和	365
SLE	system of linear equations	线性方程组	41
SRS	simple random sampling	不放回型简单随机抽样	465
SRSWR	simple random sampling with replacement	放回型简单随机抽样	465
SSE	sum of squared residuals	残差平方和	361
ssus	secondary sampling units	二级抽样单元	499

后记

1：就像当时说弄个大模型，后来想想毫无使用价值，太中二了

2：确实，我估摸着只有以下几句话比较有效

1. 6；
2. 笨蛋；
3. 猪脑子；
4. 你好好想想；
5. 6，用你的猪脑子好好想想，这对吗；
6. 好好好
7. 晚安，为什么不说晚安
8. 你真不知道吗；
9. 无语，好好好