高等代数专题

倪兴程 [1]

2025 年 2 月 20 日

[1]Email: 19975022383@163.com

Todo list

目录

Chapter 1

向量空间

定理 1.1. 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m < n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ 线性无关的充分必要条件为矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ 等价。

证明. 同形矩阵等价的充分必要条件为秩相同。 □

定理 1.2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，向量 β 不是方程组 $Ax = 0$ 的解，证明 $\beta, \beta + \alpha_1, \ldots, \beta + \alpha_t$ 线性无关。

证明. 若存在一组不全为零的 $a_1, a_2, \ldots, a_t$ 使得：

$$a_1\beta + a_2(\beta + \alpha_1) + \cdots + a_t(\beta + \alpha_t) = \mathbf{0}$$

则有：

$$a_1\beta + a_2\beta + a_2\alpha_1 + \cdots + a_t\beta + a_t\alpha_t = \mathbf{0}$$

两边同时乘 A 可得：

$$a_1\beta + a_2\beta + \cdots + a_t\beta = \mathbf{0}$$

作差即可得：

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_t\alpha_t = \mathbf{0}$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 为基础解系，线性无关，所以 $a_1 = a_2 = \cdots = a_t = 0$，于是 $\beta, \beta + \alpha_1, \ldots, \beta + \alpha_t$ 线性无关。 □

定理 1.3. 设 A, B 是两个非零向量且 $AB = \mathbf{0}$，则 A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关。

证明. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times p$ 矩阵，则：

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leqslant n$$

因为 A, B 非零，所以：

$$1 \leqslant \operatorname{rank}(A) < n,\ 1 \leqslant \operatorname{rank}(B) < n$$

结果显然。 □

定理 1.4. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* \neq \mathbf{0}$，若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_4$ 是 $Ax = b$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的基础解系仅含一个非零解向量。

证明. 因为 $A^* \neq \mathbf{0}$，则 $\operatorname{rank}(A) \geqslant 1$。由题意 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\overline{A}) < n$。由伴随矩阵秩与矩阵秩之间的关系可得 $\operatorname{rank}(A^*) = 1, \operatorname{rank}(A) = n - 1$。 □

矩阵形式如何求解基础解系

定理 1.5. 求以 $\beta_1 = (1, -1, 1, 0)^T$，$\beta_2 = (1, 1, 0, 1)^T$，$\beta_3 = (2, 0, 1, 1)^T$ 为解向量的齐次线性方程组。

证明. 令 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，则有：

$$AB = \mathbf{0},\ B^T A^T = \mathbf{0}$$

即求 $B^T x = \mathbf{0}$。B^T 是已知的，求出的 x 即为 A 的行向量。 □

定理 1.6. 已知非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解。

1. 证明方程组系数矩阵 A 的秩为 2；
2. 求 a, b 的秩和方程组的通解。

证明. (1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 个线性无关的解，于是 $\alpha_3 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2$ 是 $Ax = 0$ 线性无关的解，于是 $4 - \operatorname{rank}(A) \geqslant 2$，即 $\operatorname{rank}(A) \leqslant 2$。$A$ 有不为 0 的二阶子式，所以 $\operatorname{rank}(A) = 2$。

(2) 化简行阶梯形矩阵。 □

定理 1.7. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，已知 $Ax = b$ 存在两个不同的解，

1. 求 λ, a；
2. 求 $Ax = b$ 的通解

证明. 直接化简增广矩阵。 □

定理 1.8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$，当 a, b 为多少时，存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$，求所有矩阵 C。

证明. 设 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，化为线性方程组。 □

定理 1.9. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$，当 a 为何值时，$AX=B$ 无解、有唯一解、有无穷多解。

证明. 增广矩阵化简。$A|B$。 □

定理 1.10. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是四阶矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$。

证明. $\operatorname{rank}(A)=3, |A|=0, \operatorname{rank}(A^*)=1$，所以基础解系有 3 个元素。$AA^*=\mathbf{0}$，$A$ 的列是解，但是 α_1,α_3 线性相关，所以是 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$。 □

定理 1.11. 已知三阶矩阵 A 的第一行为 (a,b,c)，a,b,c 不全为 0，矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & k\end{pmatrix}$，$k$ 为常数且 $AB=\mathbf{0}$，求 $Ax=\mathbf{0}$ 的通解。

证明. 由 $AB=\mathbf{0}$ 可知 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\leqslant 3$。因为 $A\neq\mathbf{0}, B\neq\mathbf{0}$，所以：

$$1\leqslant \operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\leqslant 2$$

若 $\operatorname{rank}(A)=2$，则 $\operatorname{rank}(B)=1$，$k=9$。

若 $\operatorname{rank}(A)=1$，此时 $Ax=\mathbf{0}$ 的同解方程组为 $ax_1+bx_2+cx_3=0$，设 $a\neq 0$，可求出通解。

方法二：讨论 k 是否为 9。 □

定理 1.12. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$\beta=b_1,b_2,\dots,b_n$，证明：$Ax=\mathbf{0}$ 的解满足 $\beta x=0$ 的充分必要条件为 β 可由 A 的行向量组线性表示。

定理 1.13. 设 4 元齐次线性方程组一为：

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_3-x_4=0\end{cases}$$

齐次线性方程组二的通解为 $k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$。一二是否有非零公共解，若有，求出所有。

定理 1.14. 已知齐次线性方程组：

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\ 2x_1+3x_2+5x_3=0\\ x_1+x_2+ax_3=0\end{cases},\quad \begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值。

证明. 第二个方程组一定有无穷多个解，所以第一个方程组行列式为 0，解得 $a=2$。求得方程组一的解（不带系数）代入方程组二，解得两种情况，要验证方程组二的解也是方程组一的解。 □

定理 1.15. 设线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 与所有公共解。

证明. 将它们联立，进行增广矩阵的化简。 □

定理 1.16. 设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中：

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. 证明 $|A|=(n+1)a^n$；

2. a 为何值时，有唯一解，并求 x_1；

3. a 为何值时，有无穷多解，求通解。

证明. (1) 递推得到。(2)Cramer 法则求解。 □

定理 1.17. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，求 $B+2E$ 的特征向量与特征值。