9.3.2 平衡二叉树（AVL）

1、 什么是平衡二叉树

若一棵二叉树中每个节点的左、右子树的高度至多相差1,则称此二叉树为平衡二叉树（AVL）。

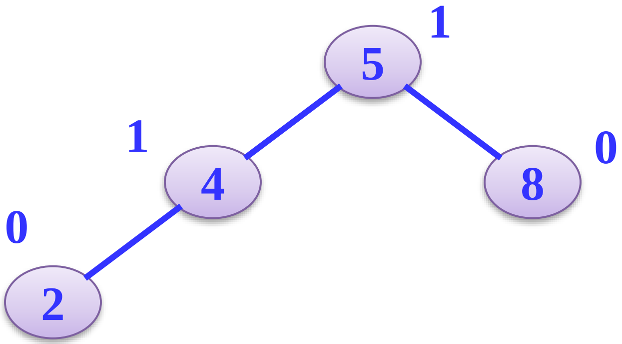
平衡因子：该节点左子树的高度减去右子树的高度。

若一棵二叉树中所有节点的平衡因子的绝对值小于或等于1,该二叉树称为平衡二叉树。

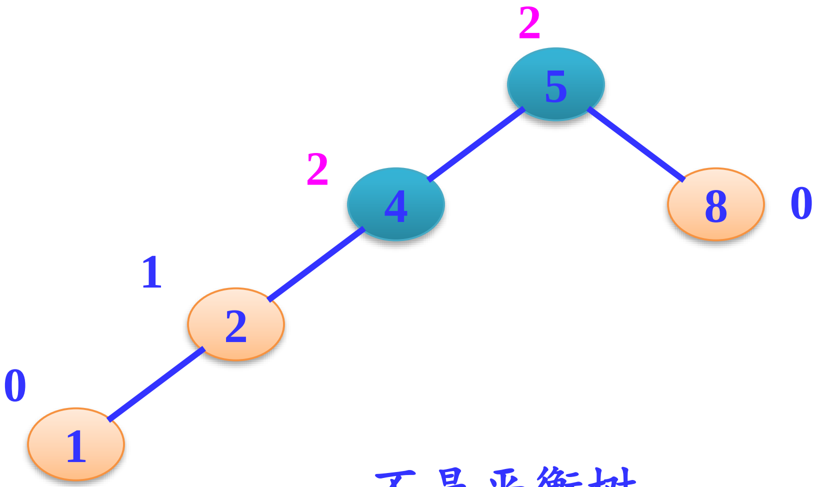
二叉排序树

所有节点的平衡因子的绝对值≤1：结构约束

平衡二叉树



是平衡树



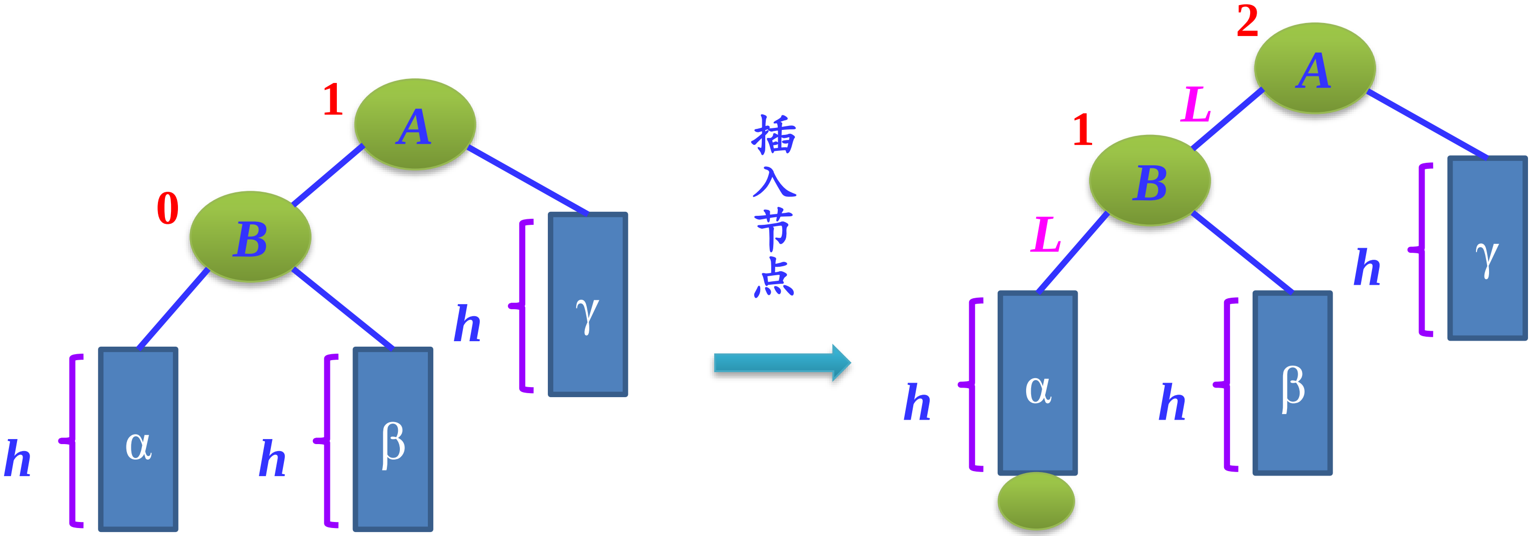
不是平衡树

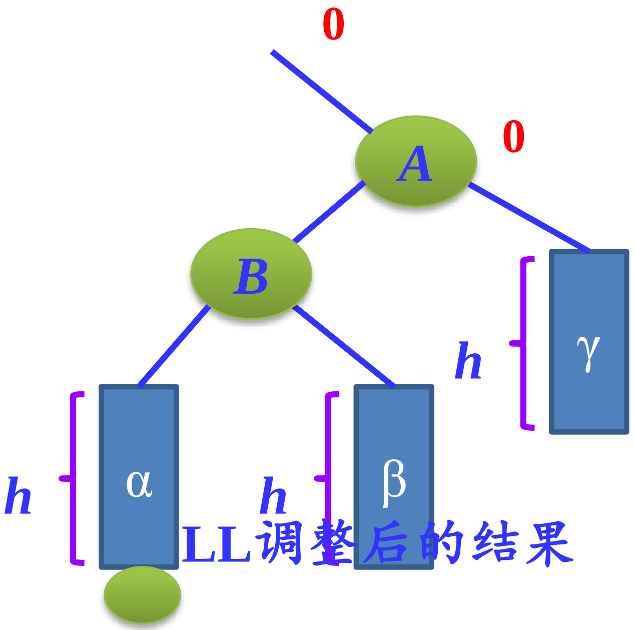
2、平衡二叉树的插入调整

平衡二叉树中插入新节点方式与二叉排序树相似，只是插入后可能破坏了平衡二叉树的平衡性，解决方法是**调整**。

调整操作可归纳为4种情况。

（1）LL型调整

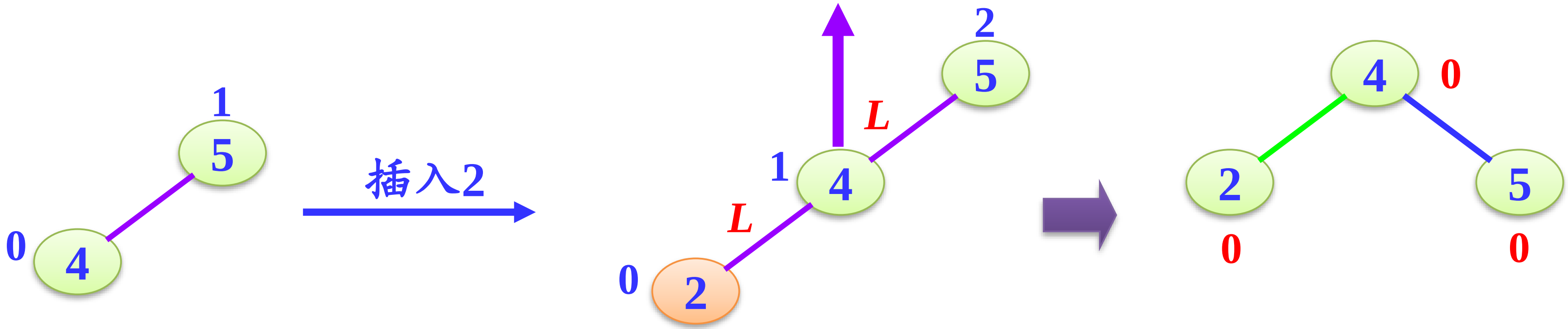




LL型调整过程：

- B节点带左子树α一起上升
- A节点成为B的右孩子
- 原来B节点的右子树β作为A的左子树

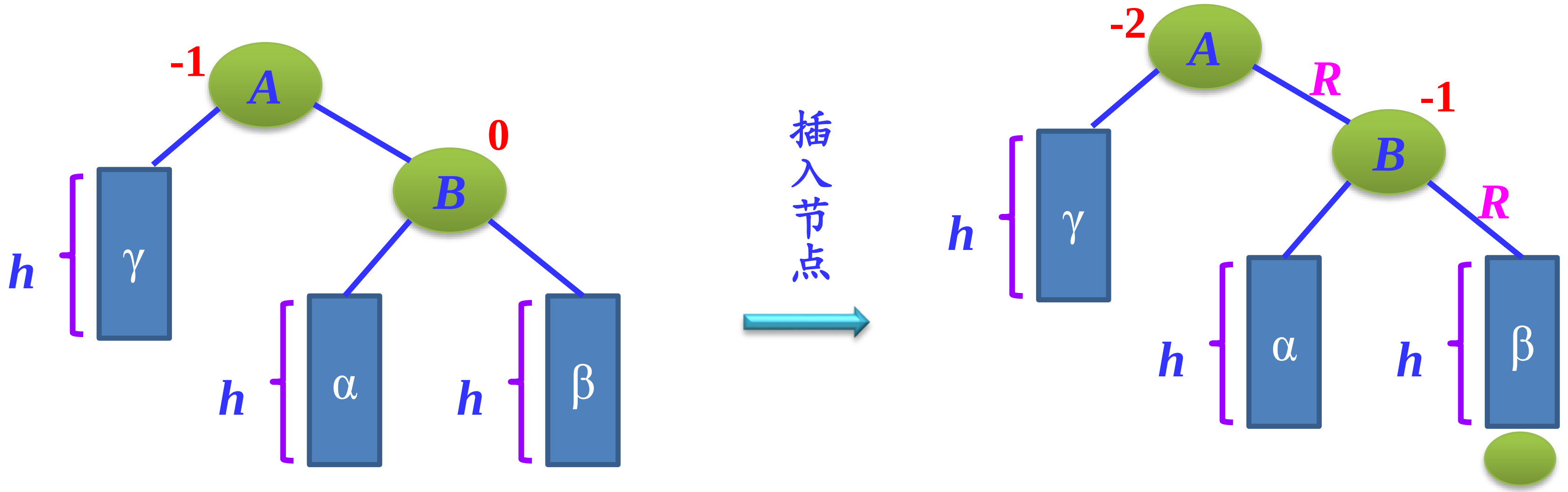
AVL树LL调整演示

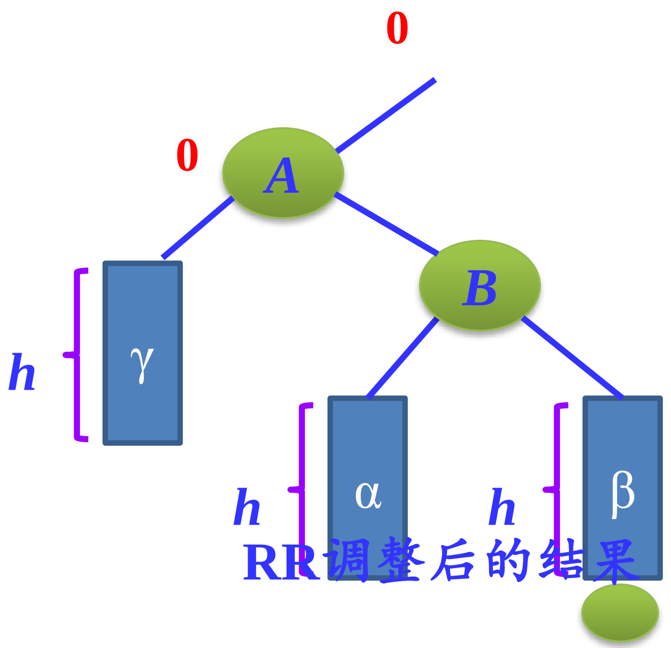


插入关键字2的结果

调整完毕

（2）RR型调整

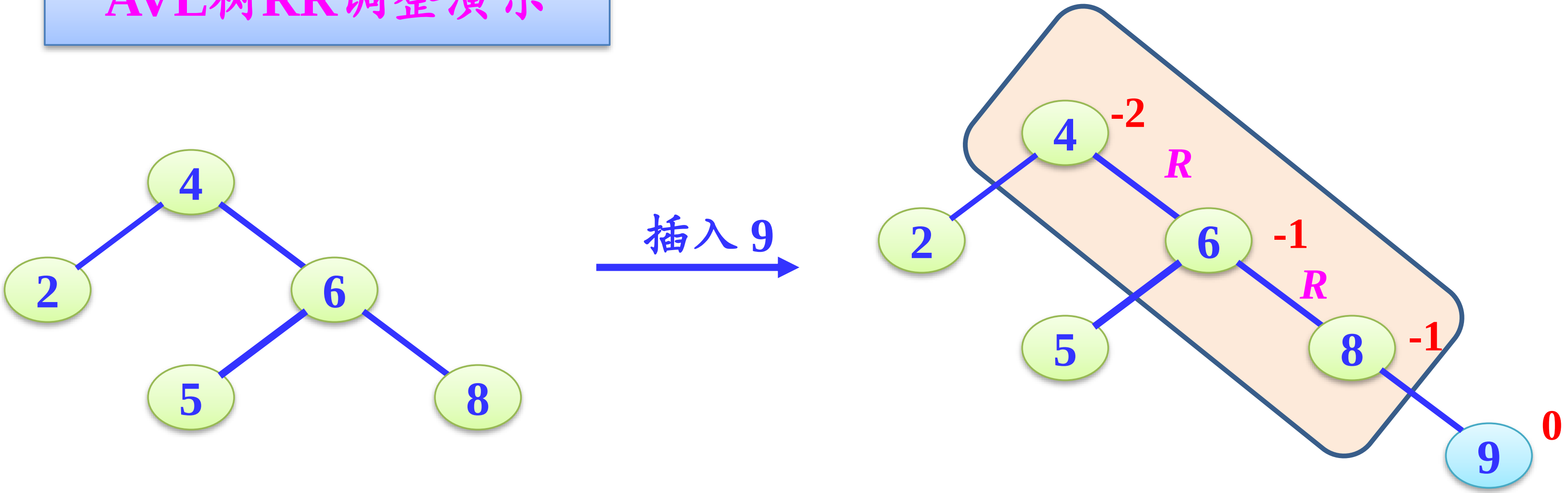


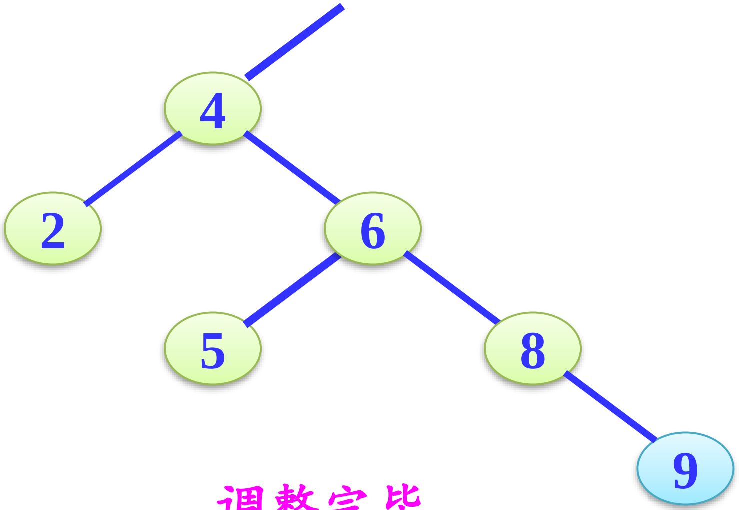


RR型调整过程：

- B节点带右子树β一起上升
- A节点成为B的左孩子
- 原来B节点的左子树α作为A的右子树

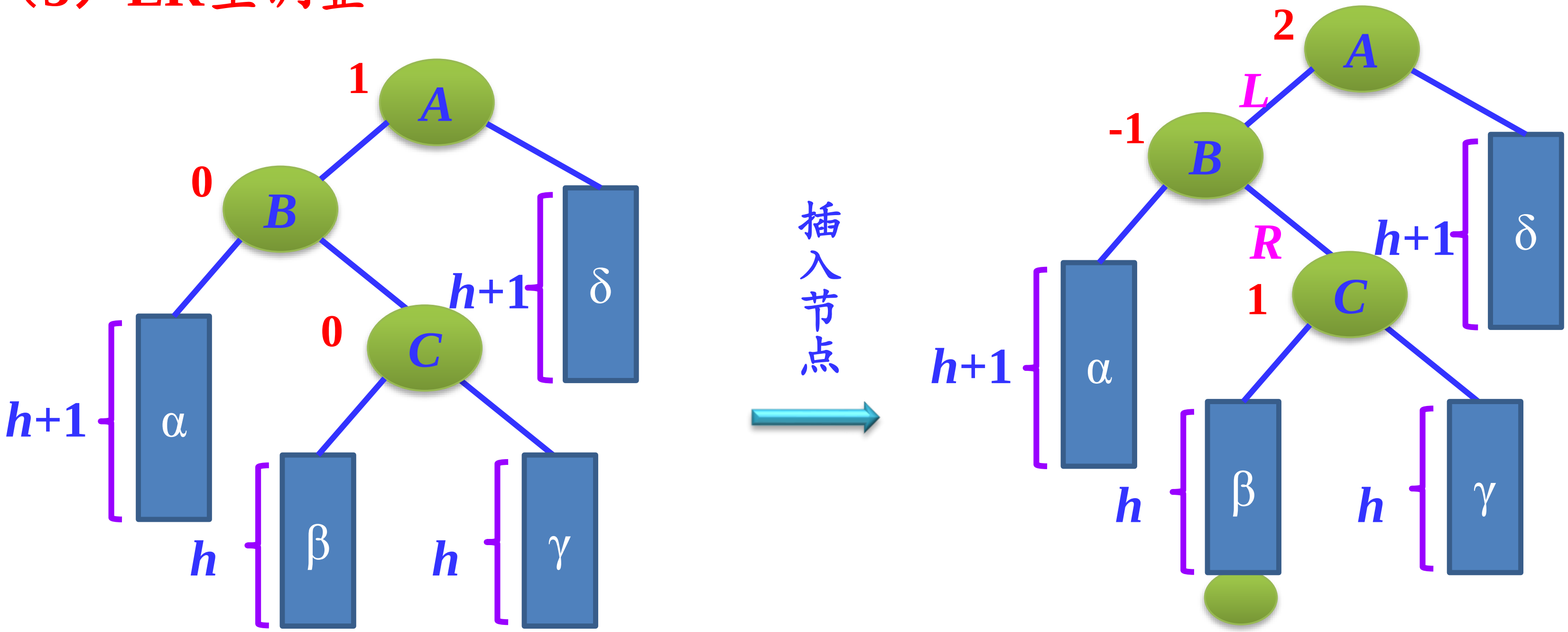
AVL树RR调整演示

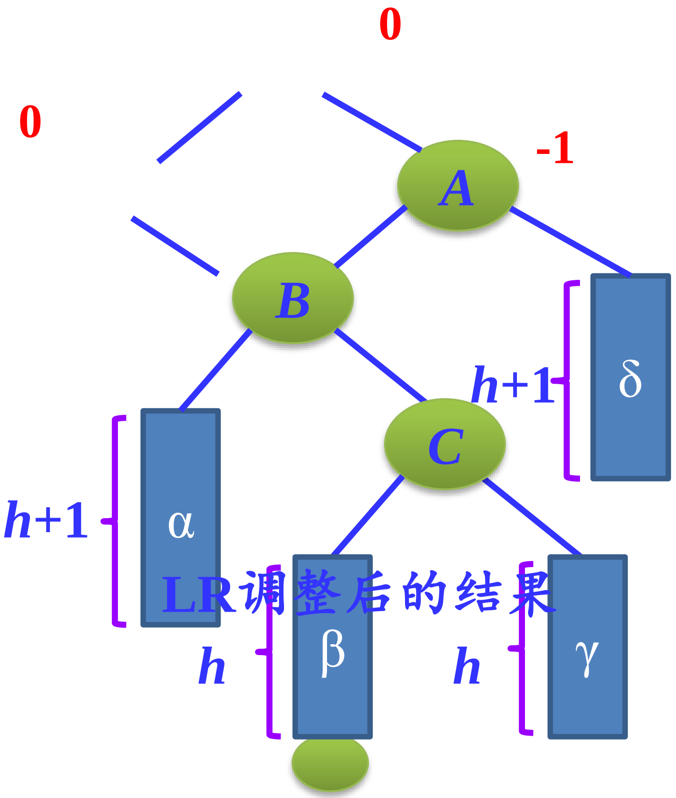




调整完毕

（3）LR型调整

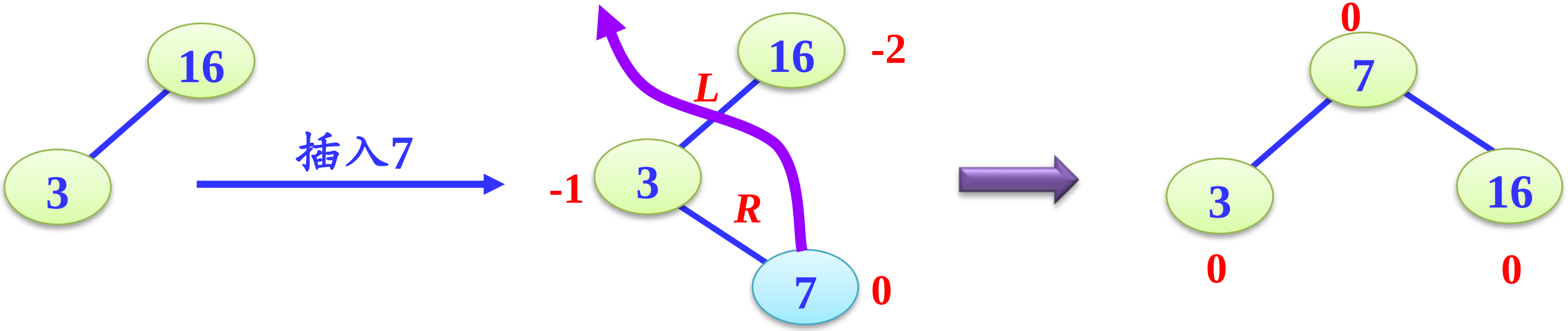




LR型调整过程：

- C节点穿过A、B节点上升
- B节点成为C的左孩子，A节点成为C的右孩子
- 原来C节点的左子树β作为B的右子树；原来C节点的右子树γ作为A的左子树

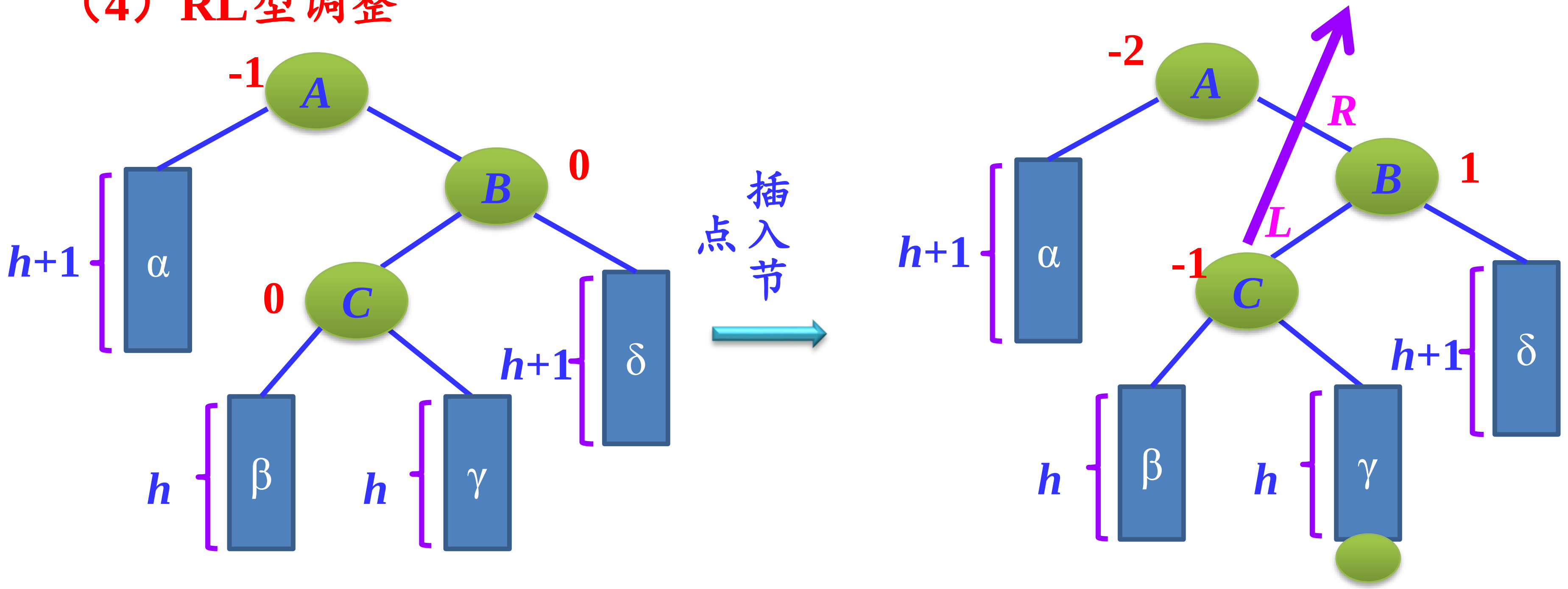
AVL树LR调整演示



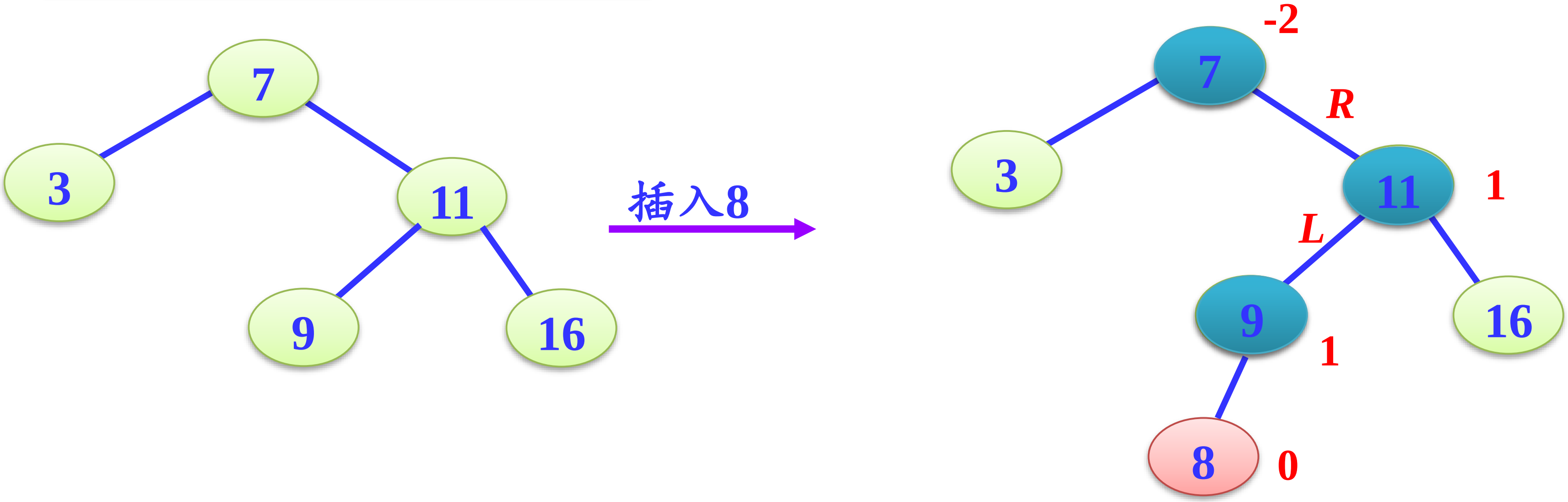
插入关键字7的结果

调整完毕

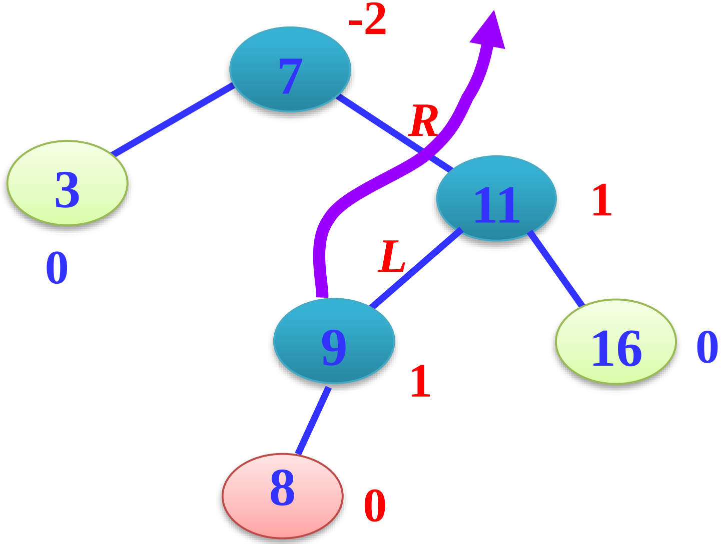
（4）RL型调整



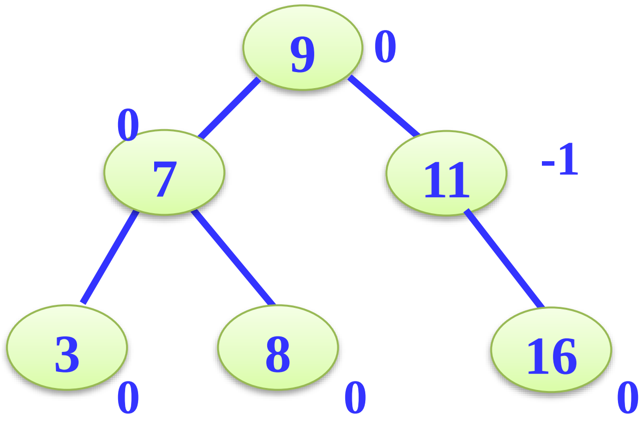
AVL树RL调整演示



插入关键字8的结果

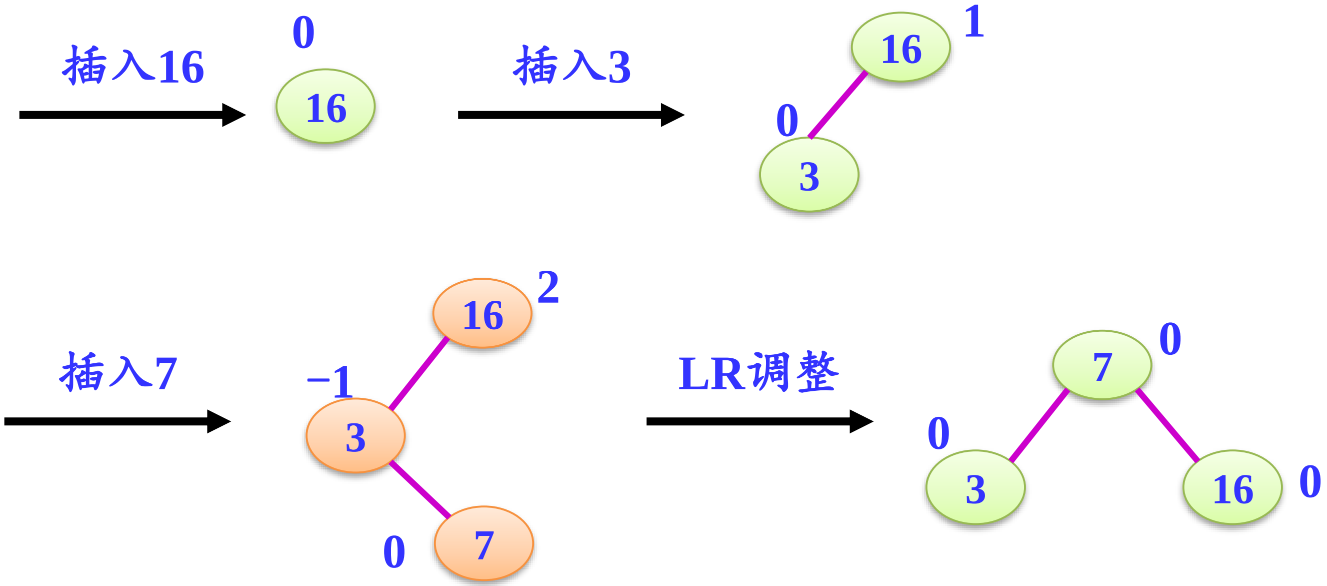


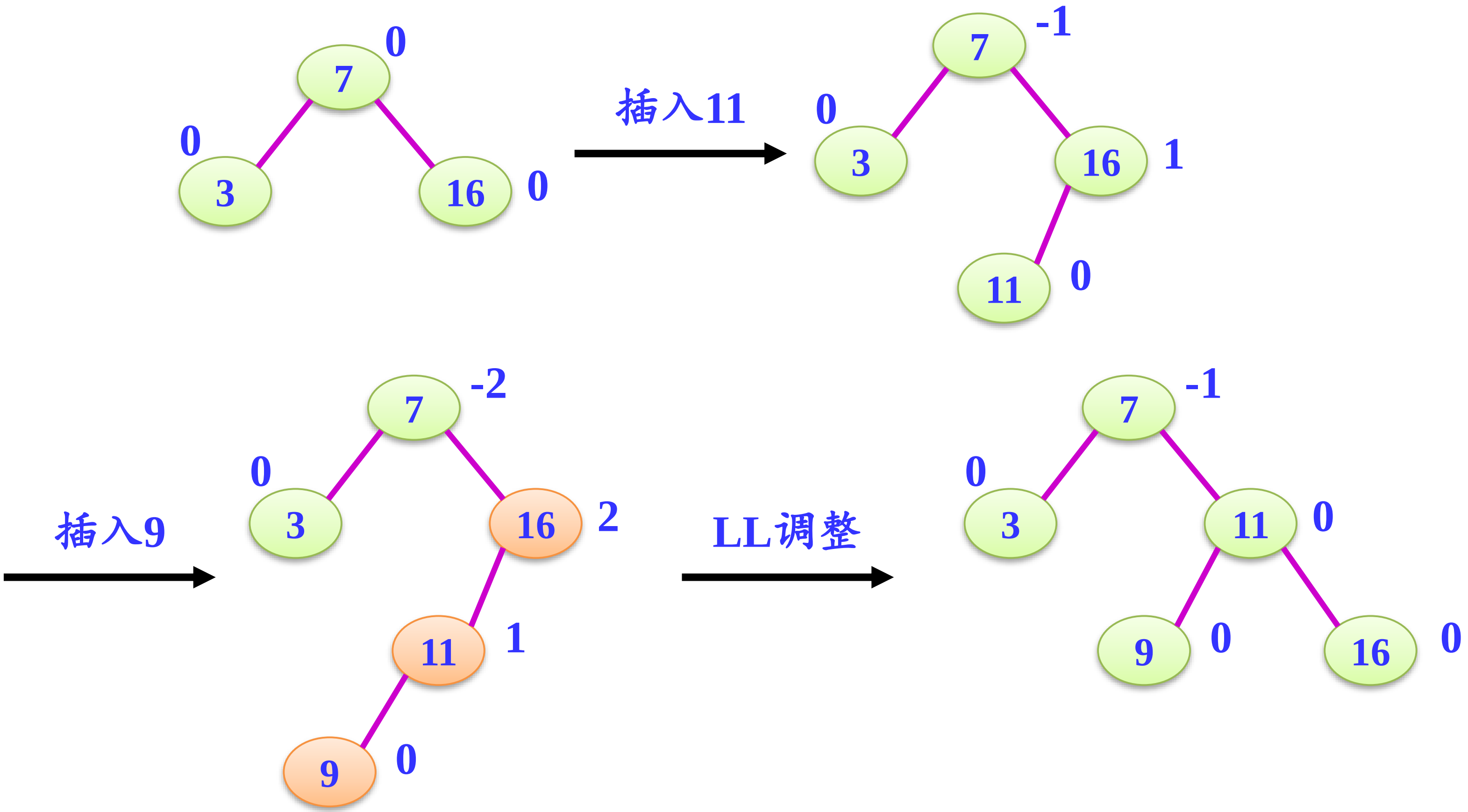
RL调整

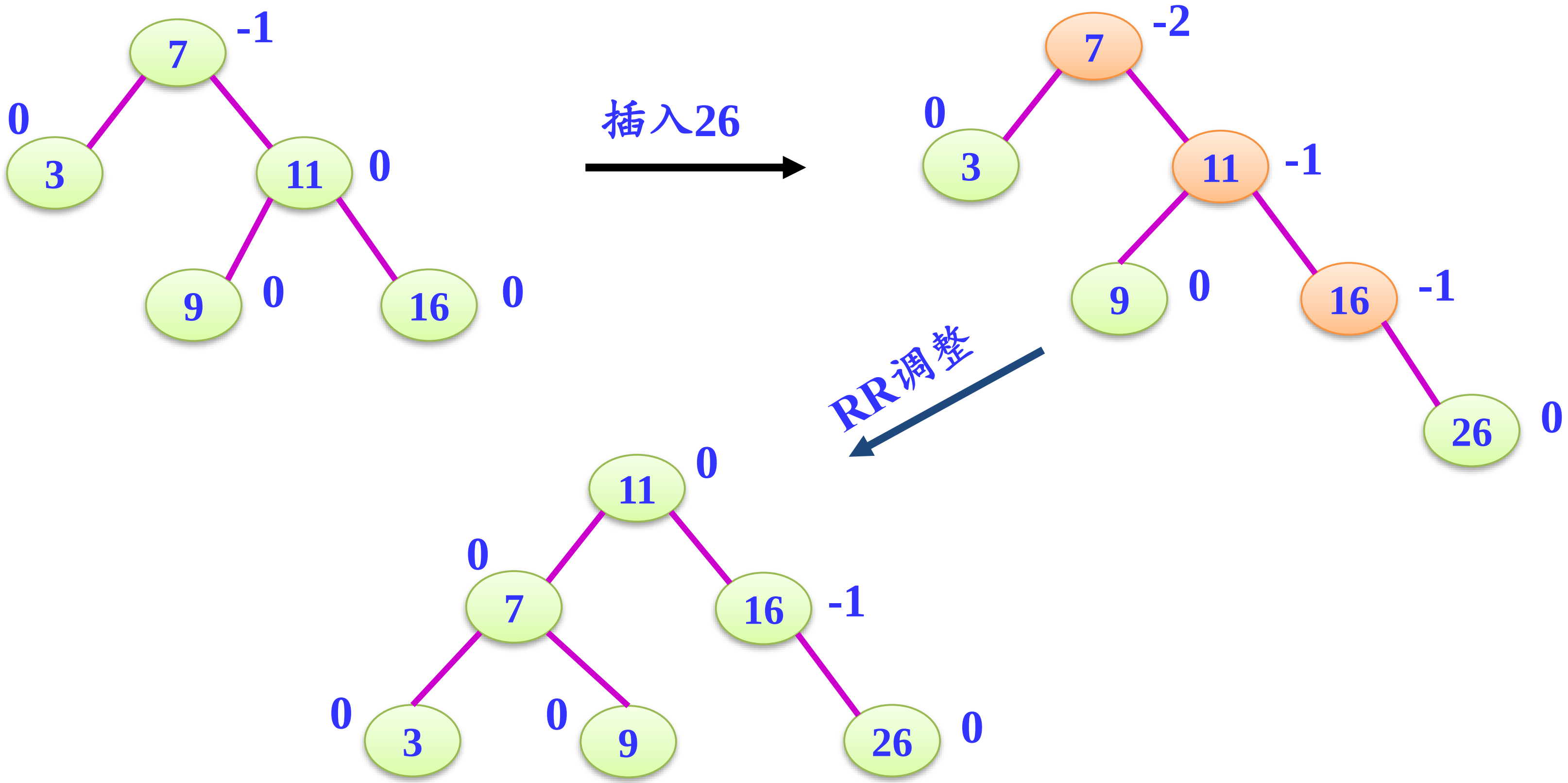


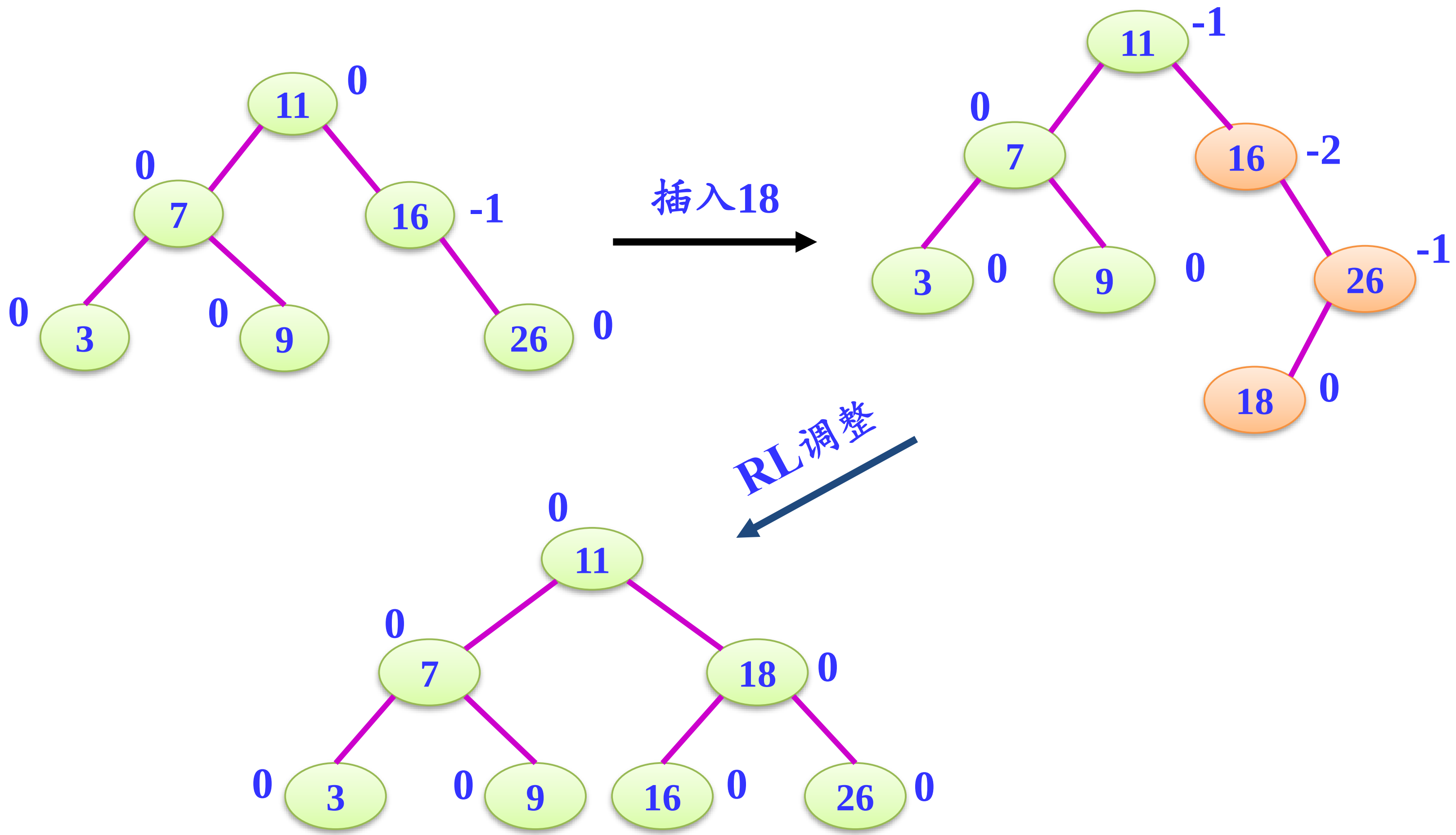
调整完毕

【例9-3】 输入关键字序列{16，3，7，11，9，26，18，14，15}，给出构造一棵AVL树的步骤。

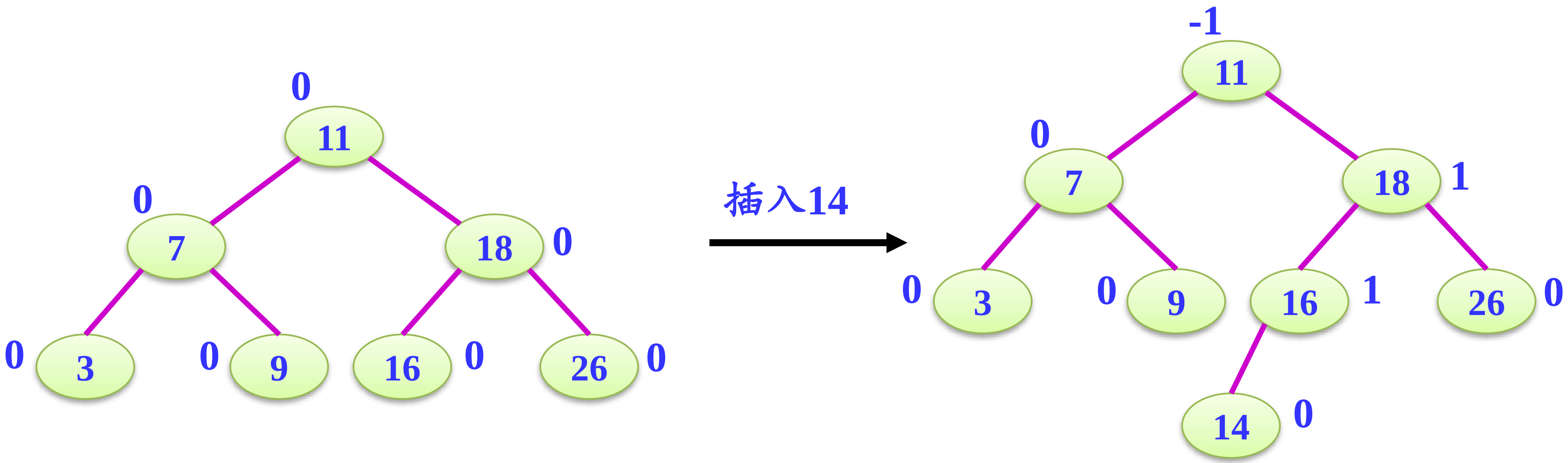


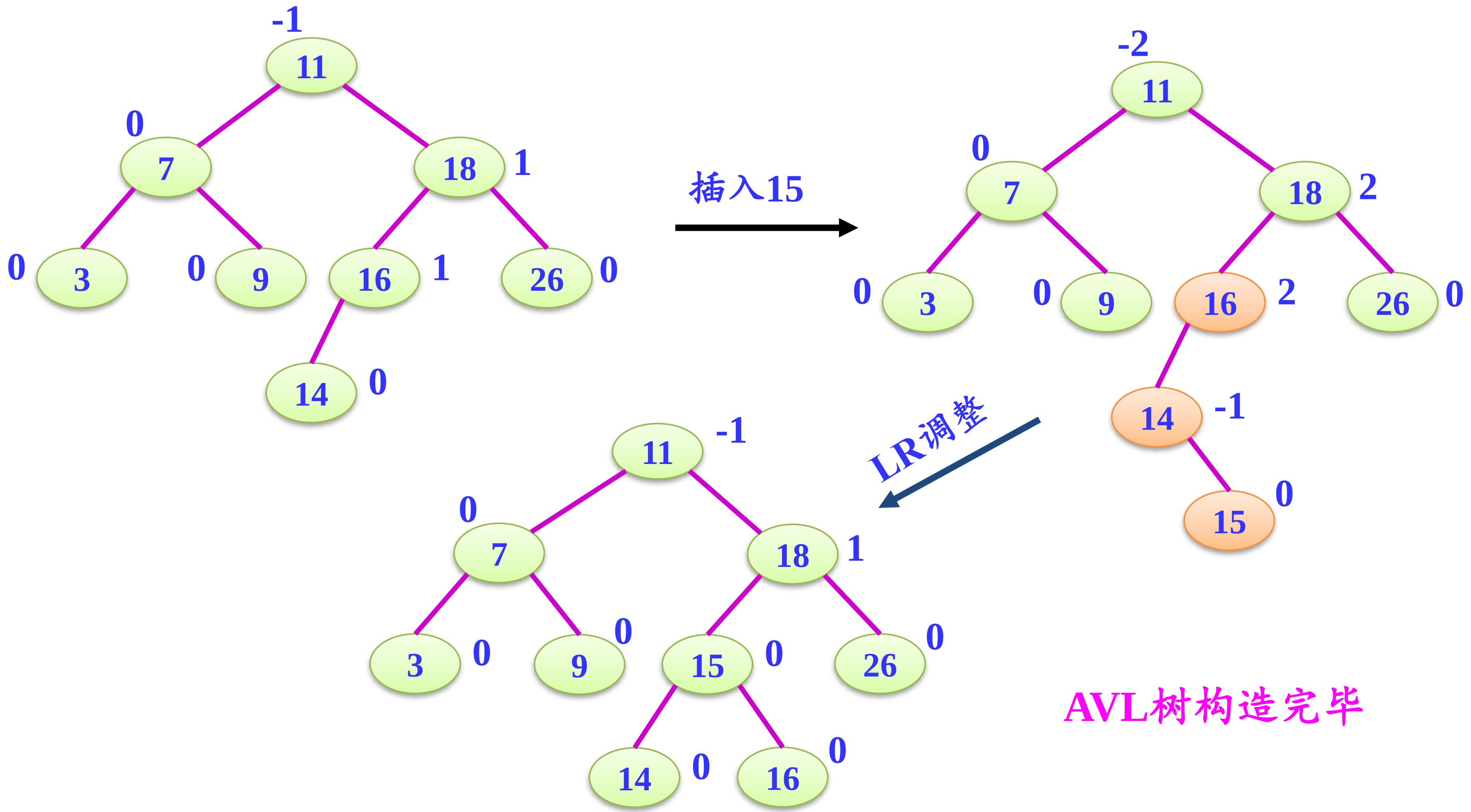

插入11
插入9
LL调整
7
3
16
11
9
0
-1
1
-2
2


插入26
RR调整
7
-1
0
3
11
0
9
0
16
0
7
-2
0
3
11
-1
9
0
16
-1
26
0
11
0
0
7
16
-1
0
3
0
9
26
0



插入18
RL调整
11
0
7
0
16
-1
3
0
9
0
26
0
11
-1
7
0
16
-2
3
0
9
0
26
-1
18
0
11
0
7
0
18
0
3
0
9
0
16
0
26
0


0
11
0
7
18
0
0
3
0
9
16
0
26
0
插入14
-1
11
0
7
18
1
0
3
0
9
16
1
26
0
14
0



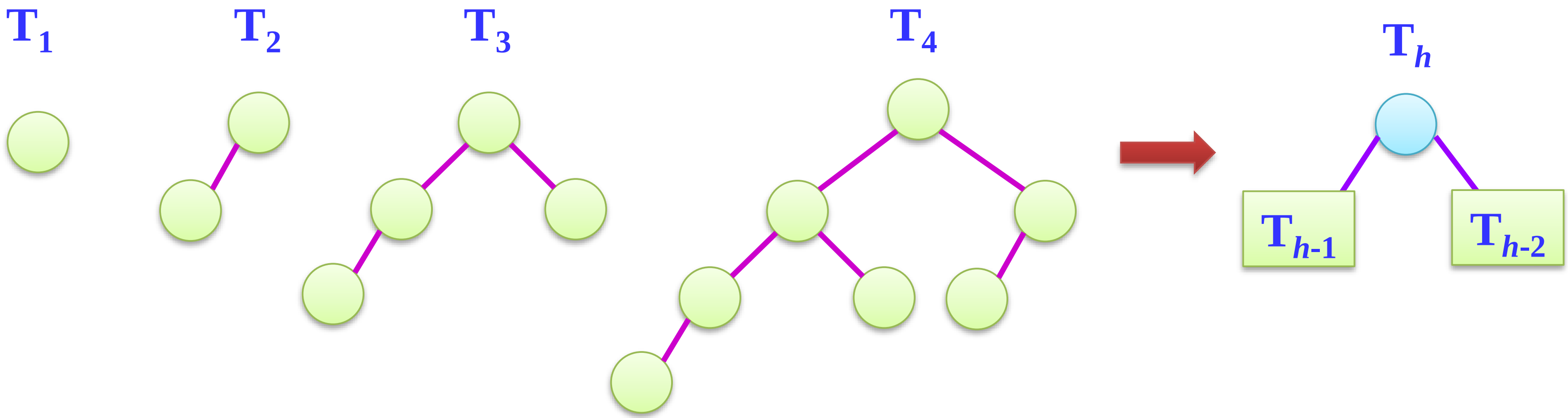
-1
11
0
7
18
1
0
3
0
9
16
1
26
0
14
0
插入15
-2
11
0
7
18
2
0
3
0
9
16
2
26
0
14
-1
15
0
LR调整
11
-1
0
7
18
1
3
0
9
0
15
0
26
0
14
0
16
0
AVL树构造完毕

3、平衡二叉树的查找

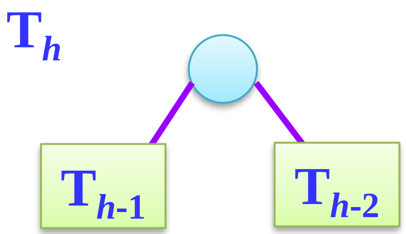
在平衡二叉树上进行查找的过程和在二叉排序树上进行查找的过程完全相同，因此在平衡二叉树上进行查找关键字的比较次数不会超过平衡二叉树的高度。

在最坏的情况下，普通二叉排序树的查找长度为O(n)。那么，平衡二叉树的情况又是怎样的呢？

构造一系列的平衡二叉树T_1，T_2，T_3，…，其中，T_h表示高度为h且节点数尽可能少的平衡二叉树，下图所示的T_1，T_2，T_3、T_4和T_h。



节点个数n最少的平衡二叉树



设$N(h)$为T_h的节点数，从图中可以看出有下列关系成立：

$$N(1)=1，N(2)=2，N(h)=N(h-1)+N(h-2)+1$$

当$h>1$时，此关系类似于定义Fibonacci数的关系：

$$F(1)=1，F(2)=1，F(h)=F(h-1)+F(h-2)$$

⇓

通过检查两个序列的前几项就可发现两者之间的对应关系：

$$N(h)=F(h+2)-1$$

由于Fibonacci数满足渐近公式：$F(h)=\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{h}$

其中，$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

故由此可得近似公式：$N(h)=\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{h+2}-1\approx 2^{h}-1$

即：$h\approx\log_2(N(h)+1)$

↓

含有n个节点的平衡二叉树的平均查找长度为$O(\log_2 n)$。

思考题

平衡二叉树和二叉排序树相比，有什么优点？

——本讲完——