7.2 二叉树的概念

7.2.1 二叉树的定义

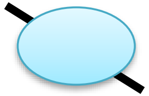
递归定义

二叉树是有限的节点集合。

- 这个集合或者是空。
- 或者由一个根节点和两棵互不相交的称为左子树和右子树的二叉树组成。

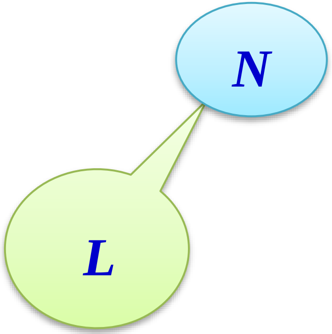
二叉树的5种基本形态：

①空树

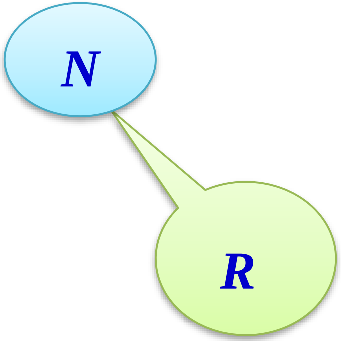


②只含根节点

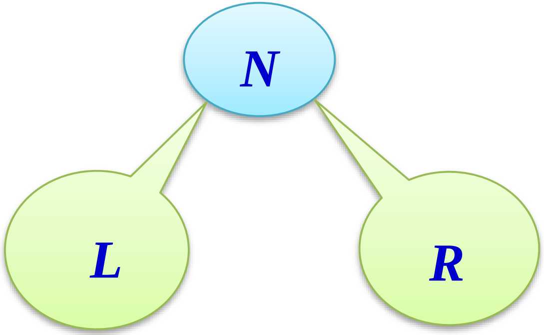
③右子树为空树



④左子树为空树



⑤左右子树均不为空树



二叉树是可以采用树的逻辑结构表示法，其4种表示法如下：

- 树形表示法
- 文氏图表示法
- 凹入表示法
- 括号表示法

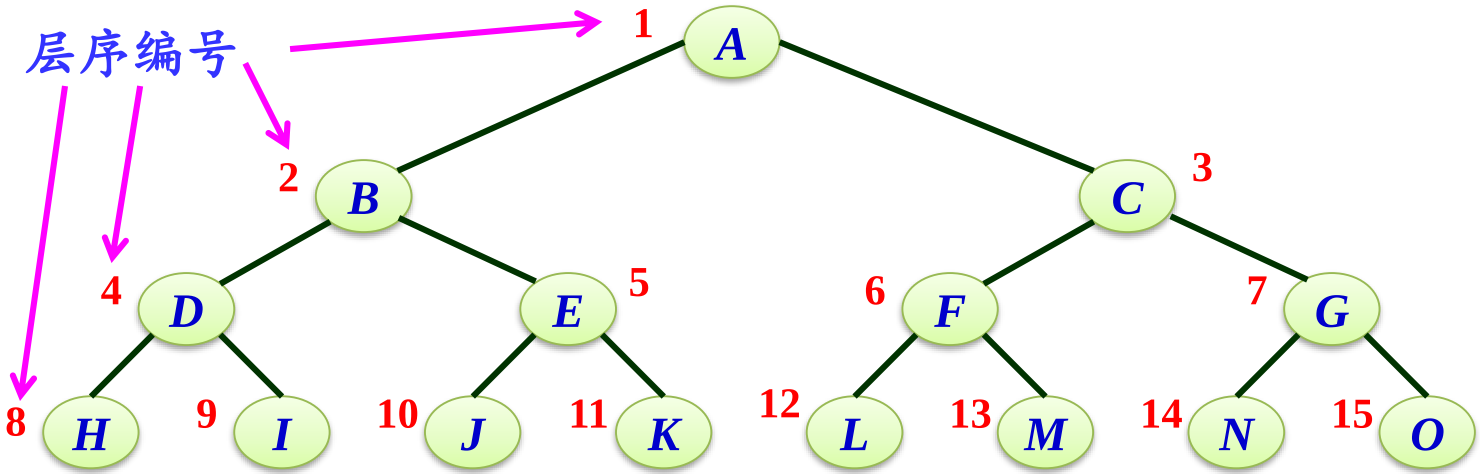
思考题：

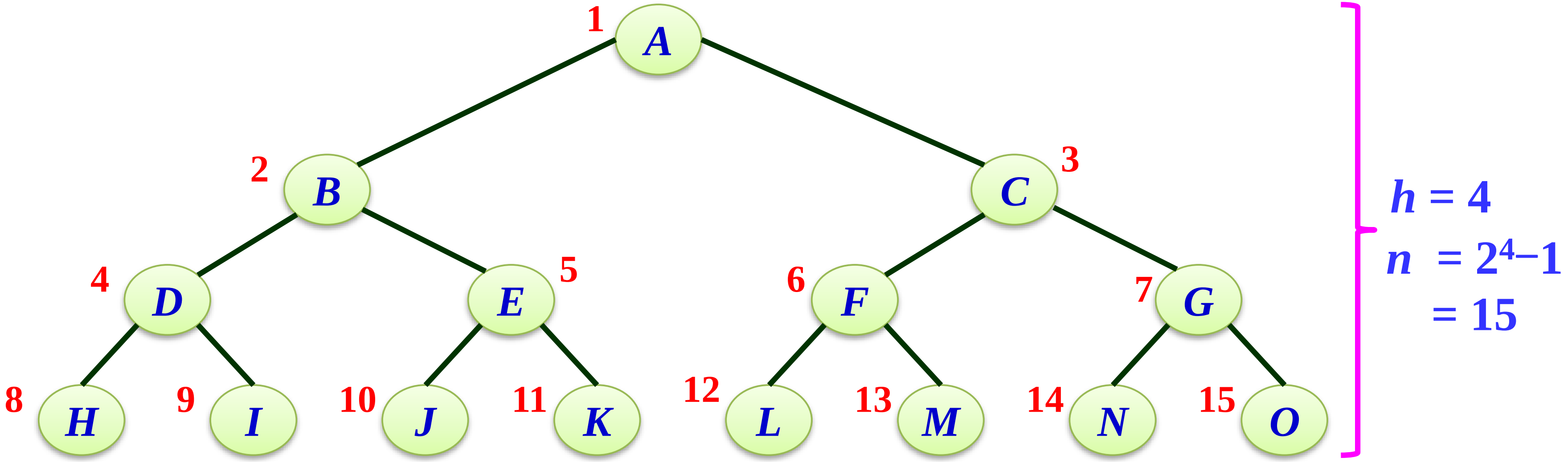
二叉树和2次树有什么区别？

两种特殊的二叉树

❶ **满二叉树**：在一棵二叉树中：

- 如果所有分支节点都有双分节点；
- 并且叶节点都集中在二叉树的最下一层。





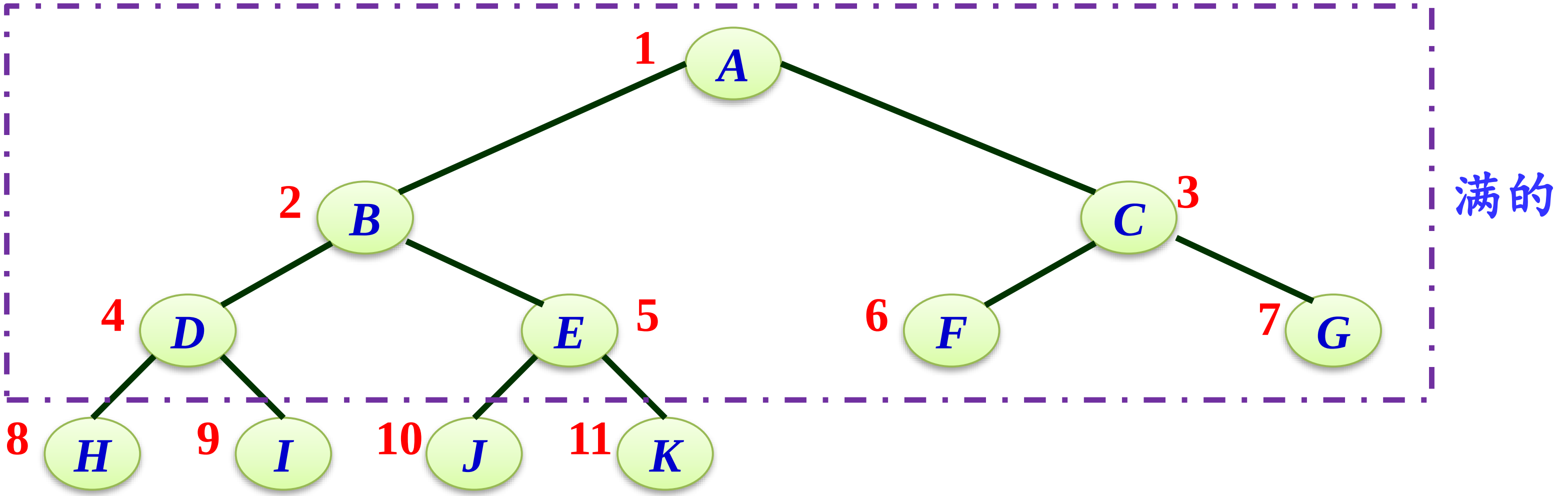
层序编号：$1 \sim 2^h-1$

满二叉树：在一棵二叉树中：

- 高度为h的二叉树恰好有2^h-1个节点。

❷ **完全二叉树：**在一棵二叉树中：

- 最多只有下面两层的节点的度数小于2
- 并且最下面一层的叶节点都依次排列在该层最左边的位置上。



完全二叉树实际上是对应的满二叉树删除叶节点层最右边若干个节点得到的。

7.2.2 二叉树性质

性质1 非空二叉树上叶节点数等于双分支节点数加1。即：$n_0=n_2+1$。

度之和 = 分支数

度之和 = n_1+2n_2

分支数 = $n-1$

$n = n_0+n_1+n_2$

$$n_0+n_1+n_2-1=n_1+2n_2 \Rightarrow n_0=n_2+1$$

求解方法归纳

求解二叉树的节点个数问题： 通常利用二叉树的性质1，即$n_0=n_2+1$来求解这类问题，常利用以下关系求解：

$$n=n_0+n_1+n_2$$

$$\text{度之和}=n-1$$

$$\text{度之和}=n_1+2n_2$$

所以有：

$$n=n_1+2n_2+1$$

性质2 非空二叉树上第i层上至多有2^{i-1}个节点（$i \geq 1$）。

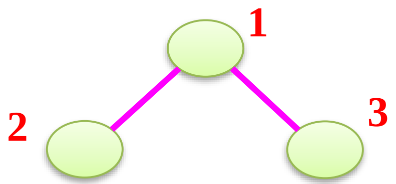
由树的性质2可推出。

性质3 高度为h的二叉树至多有2^h-1个节点（$h \geq 1$）。

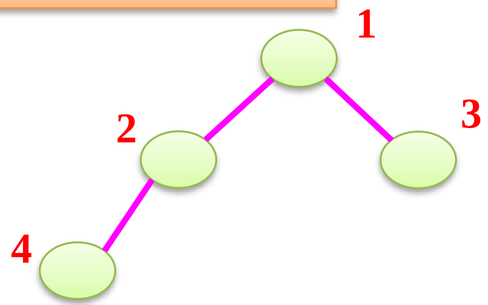
由树的性质3可推出。

性质4 完全二叉树性质（含n为节点）：

❶ n_1=0或者n_1=1。n_1可由n的奇偶性确定：



n为奇数 ⇨ n_1=0



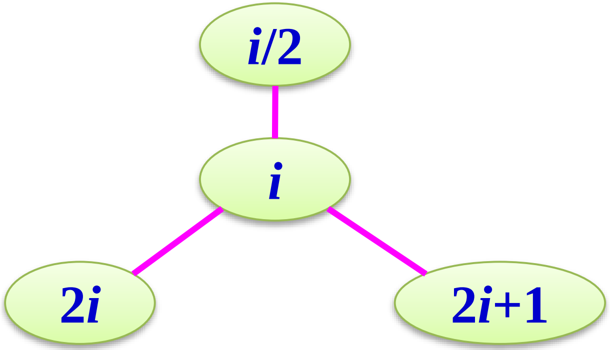
n为偶数 ⇨ n_1=1

❷ 若$i \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$，则编号为$i$的节点为分支节点，否则为叶节点。

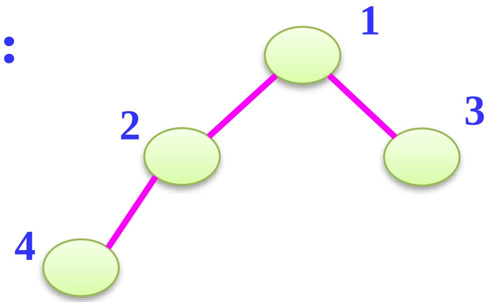
- n=3 ⇨ $\lfloor n/2 \rfloor$=1，编号为1的是分支节点；编号为2、3的是叶节点
- n=4 ⇨ $\lfloor n/2 \rfloor$=2，编号为1、2的是分支节点；编号为3、4的是叶节点

❸ 除树根节点外，若一个节点的编号为i，则它的双亲节点的编号为$\lfloor i/2 \rfloor$。

❹ 若编号为i的节点有左孩子节点，则左孩子节点的编号为$2i$；若编号为i的节点有右孩子节点，则右孩子节点的编号为$2i+1$。



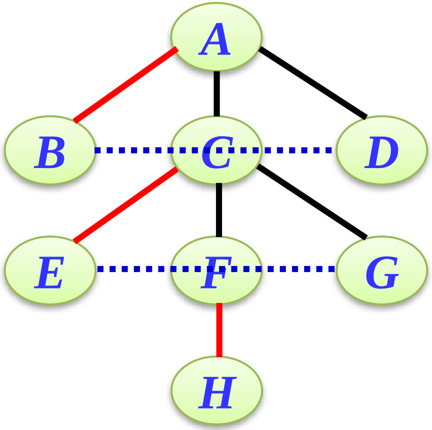
例如：

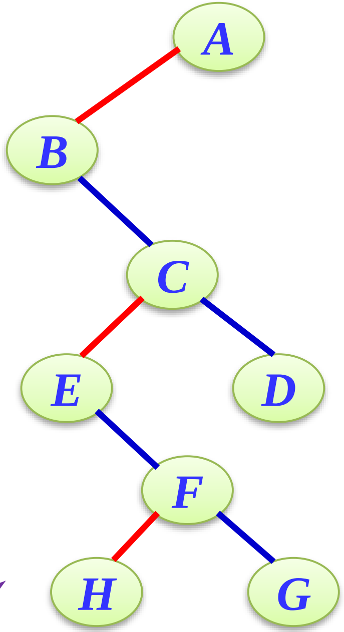


7.2.3 二叉树与树、森林之间的转换

1、森林、树转换为二叉树

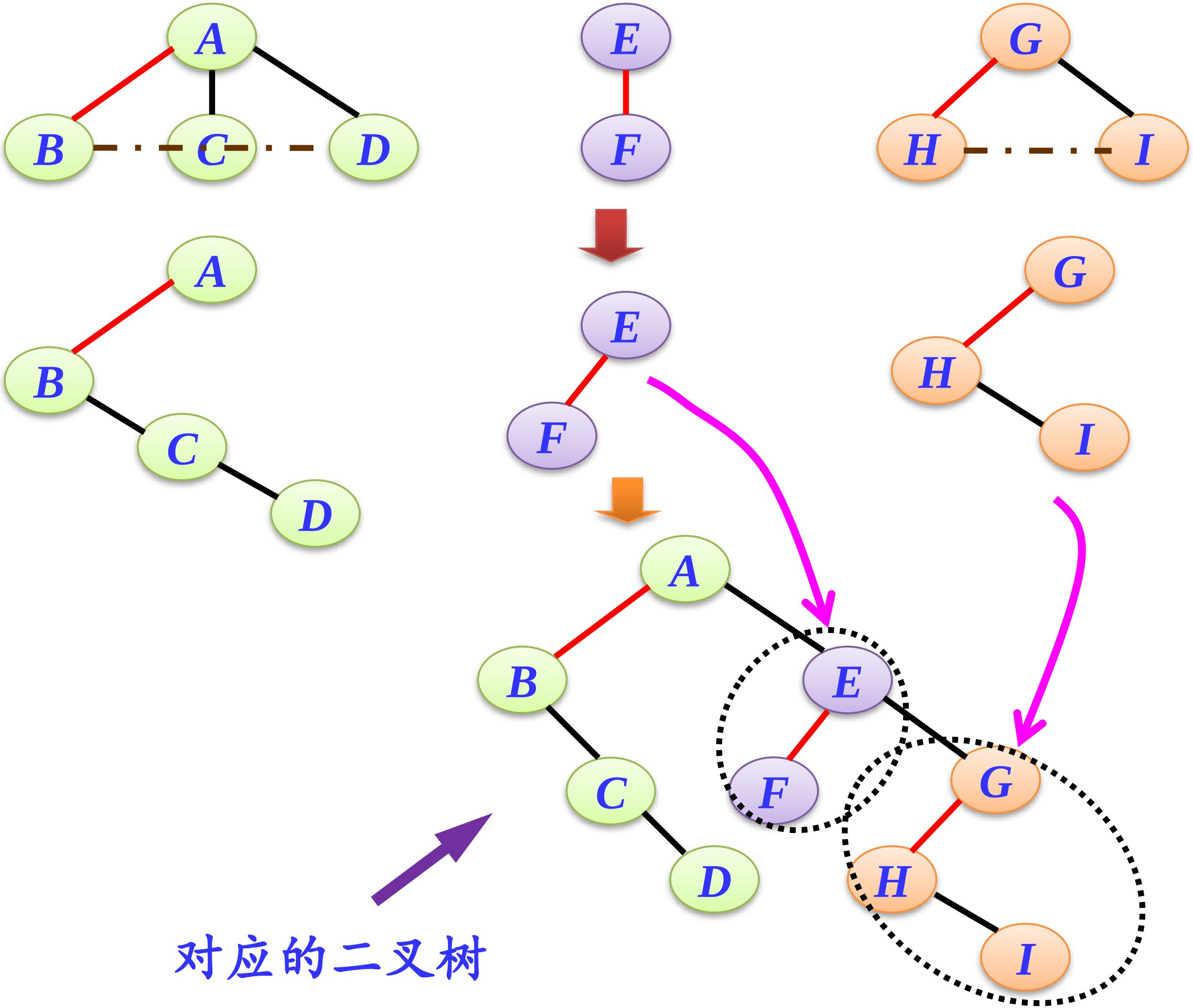
- 一颗树转换为二叉树



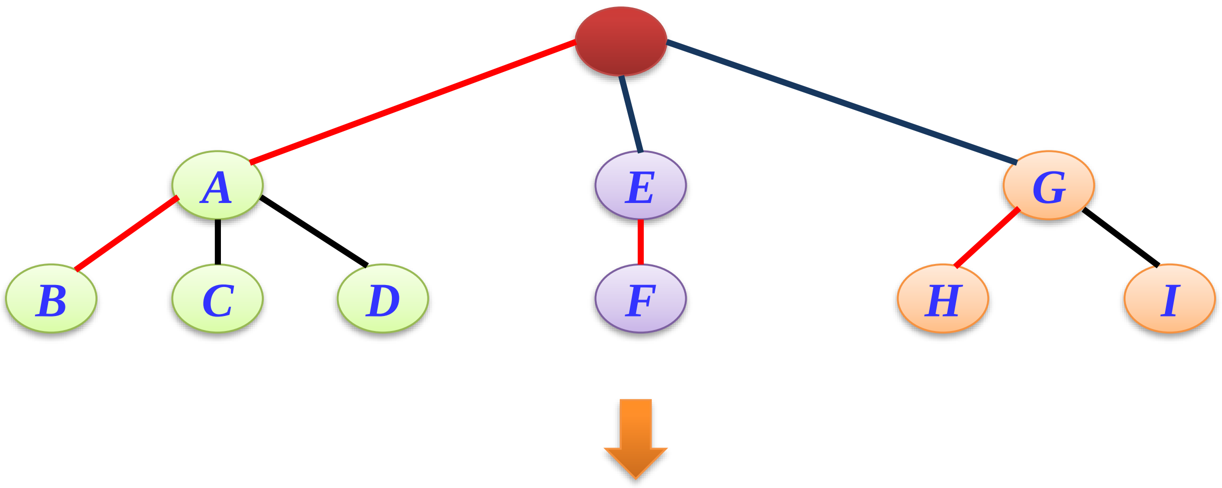


对应的二叉树

- 多颗树转换为一颗二叉树



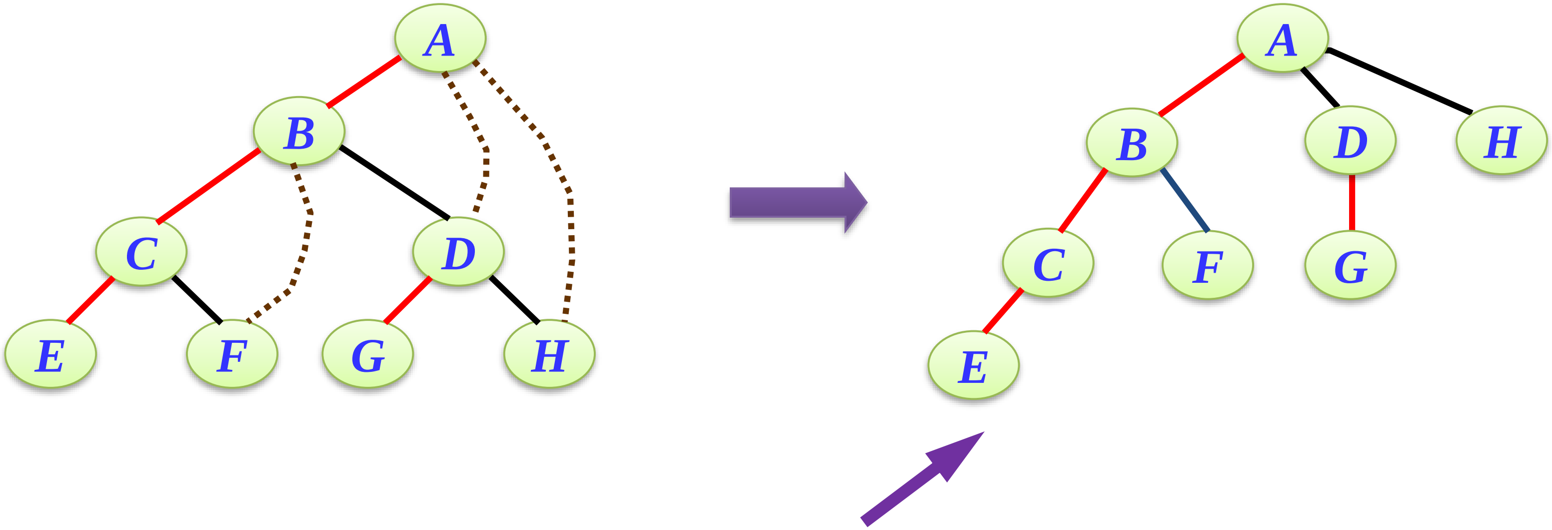
或者



按一颗树的方法转换，再删除增加的节点

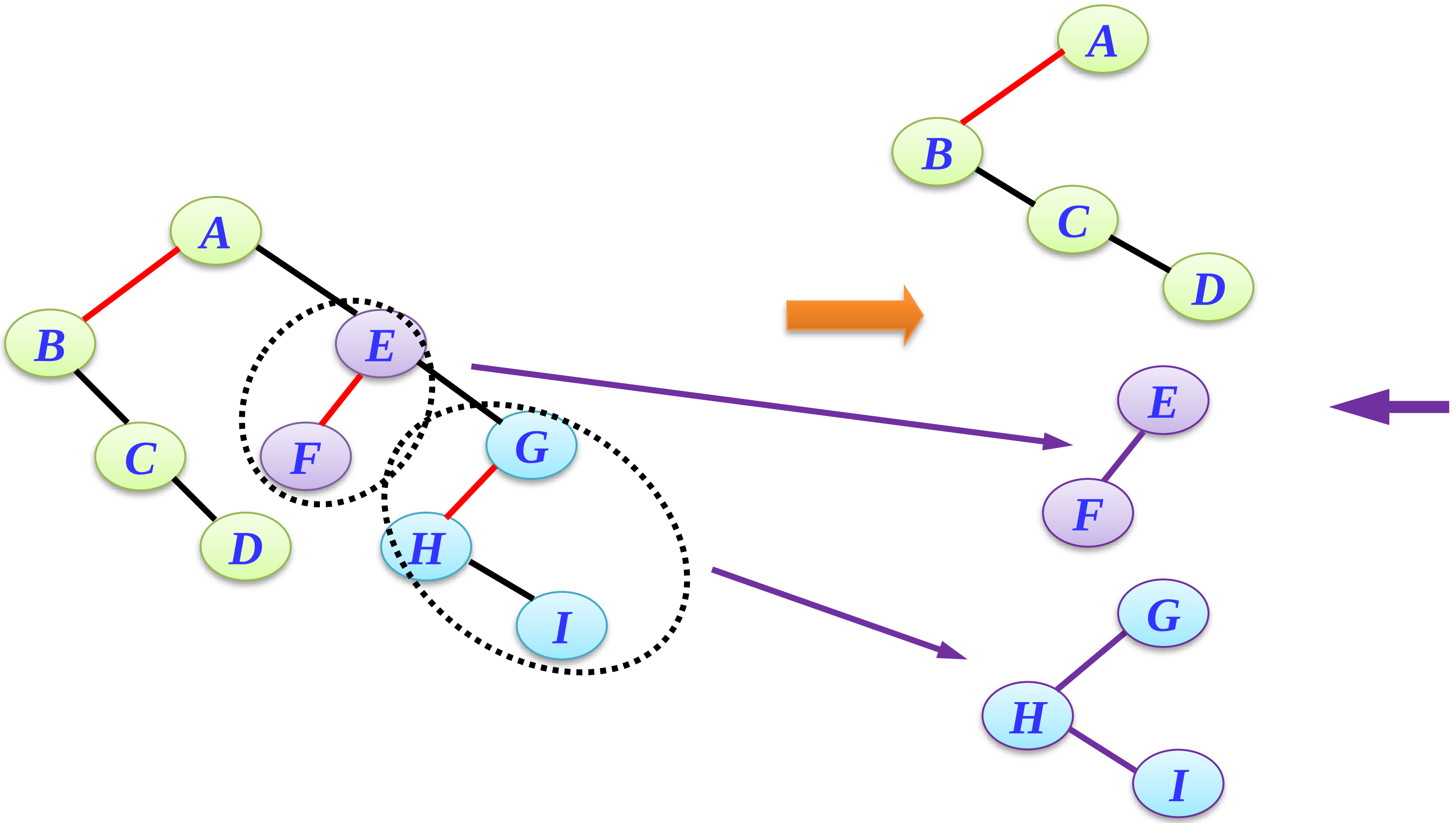
2、二叉树还原为森林、树

- 将一棵二叉树还原为一棵树

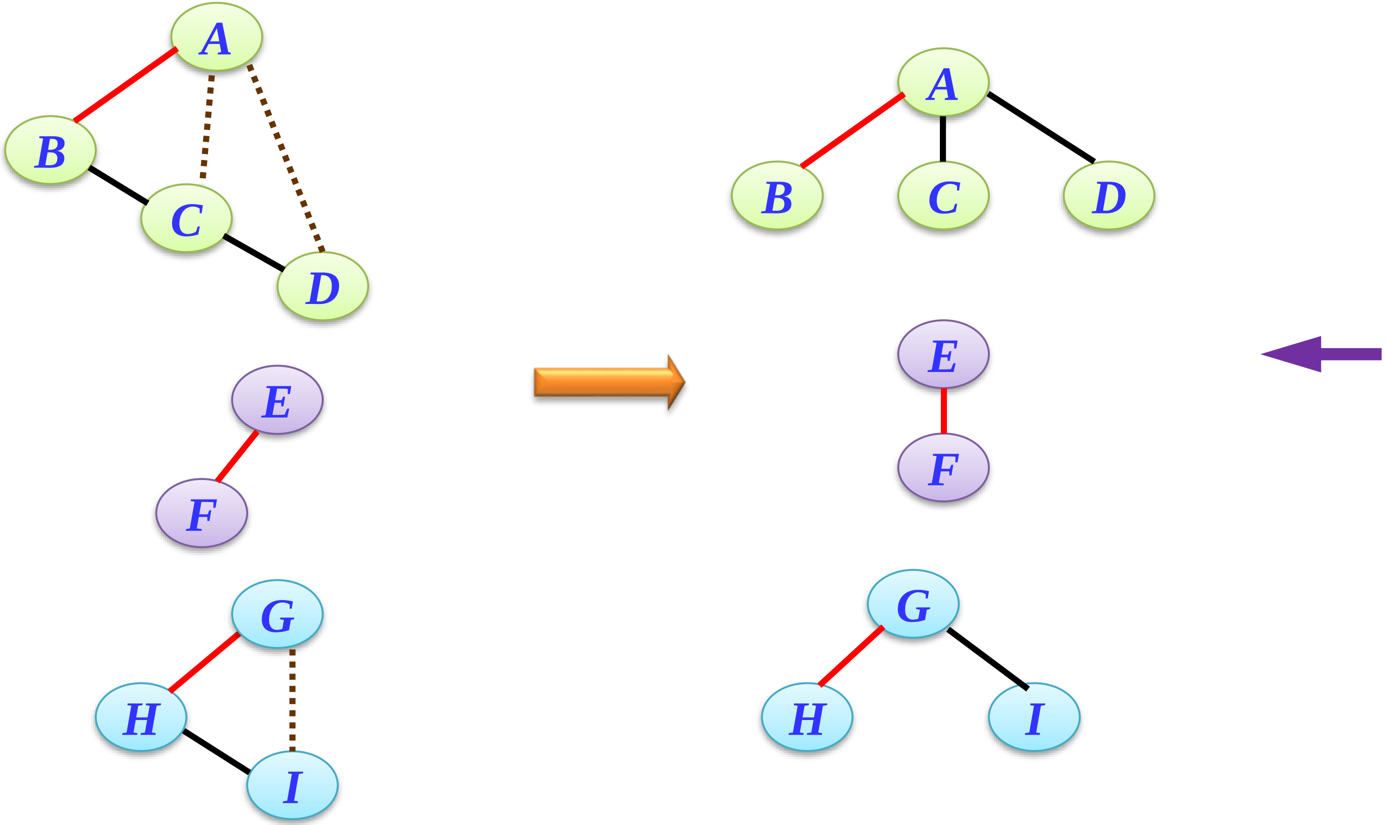


还原的树

- 将一棵二叉树还原为多棵树



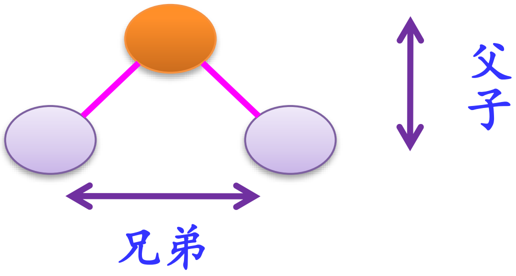
转换为3棵二叉树



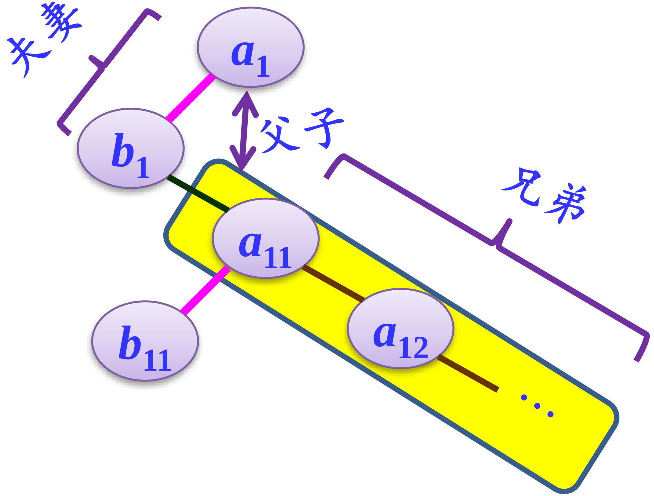
还原为3棵树

【例】设计一棵二叉树，表示夫妻、父子和兄弟3种关系。

二叉树表示的关系：



如何表示3种关系？



实际上，是赋予左右分支不同的语义

——本讲完——