第7章 树和二叉树

7.1 树的概念

7.1.1 树的定义

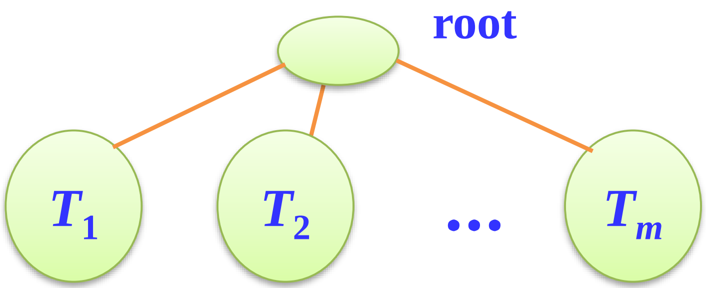
树形式化定义：T={D，R}。D是包含n个节点的有限集合（n≥0）。当n=0时为空树，否则关系R满足以下条件：

- 有且仅有一个节点d_0∈D，它对于关系R来说没有前趋节点，节点d_0称作树的根节点。
- 除根节点外，每个节点有且仅有一个前趋节点。
- D中每个节点可以有零个或多个后继节点。

树的递归定义： 树是由n（$n \geq 0$）个节点组成的有限集合（记为T）。其中：

- 如果n=0，它是一棵空树，这是树的特例；
- 如果n>0，其中存在一个唯一节点作为树的根节点（root），其余节点可分为m（$m \geq 0$）个互不相交的有限子集T_1、T_2、…、T_m，而每个子集本身又是一棵树，称为根节点root的子树。

⇨ 树中所有节点构成一种层次关系！

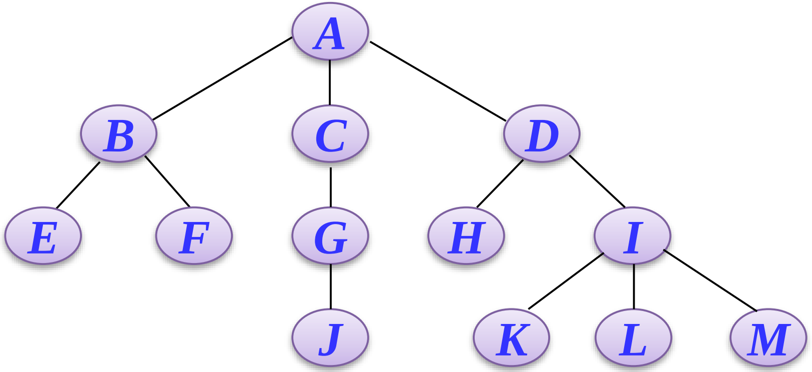


思考题

请你列出几个现实生活中属于树形结构的数据。

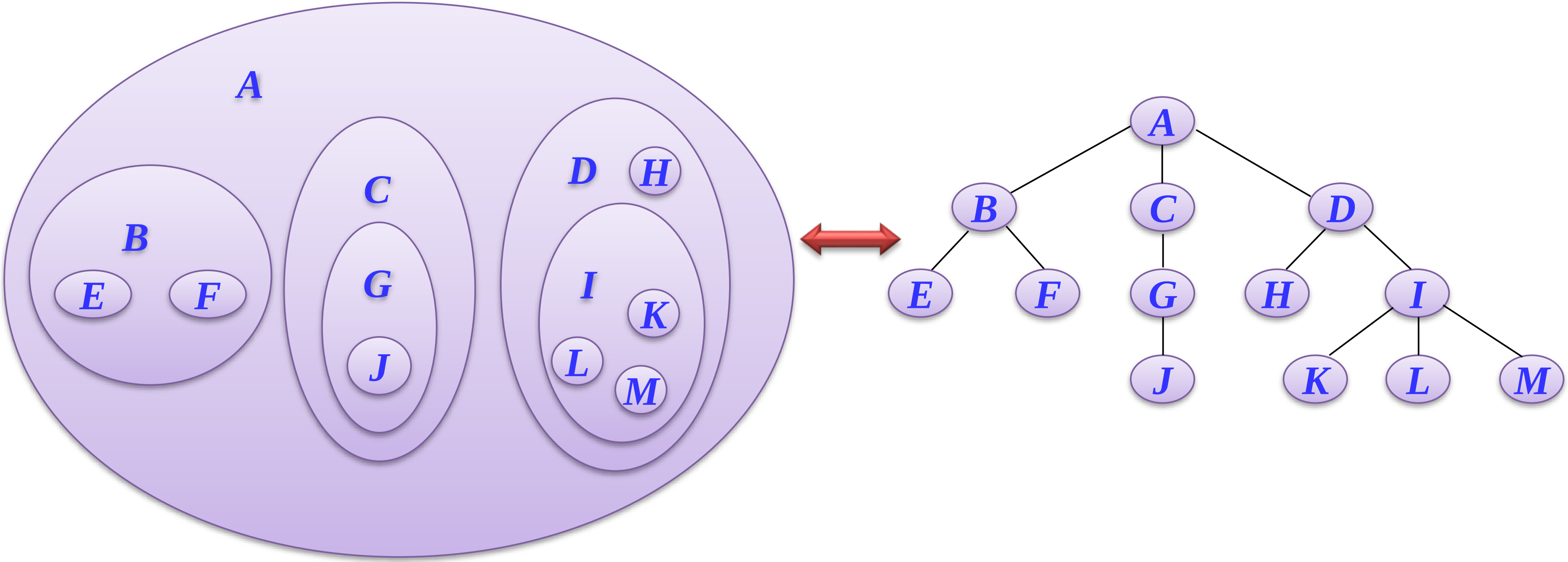
7.1.2 树的（逻辑）表示

（1）树形表示法。使用一棵倒置的树表示树结构，非常直观和形象。



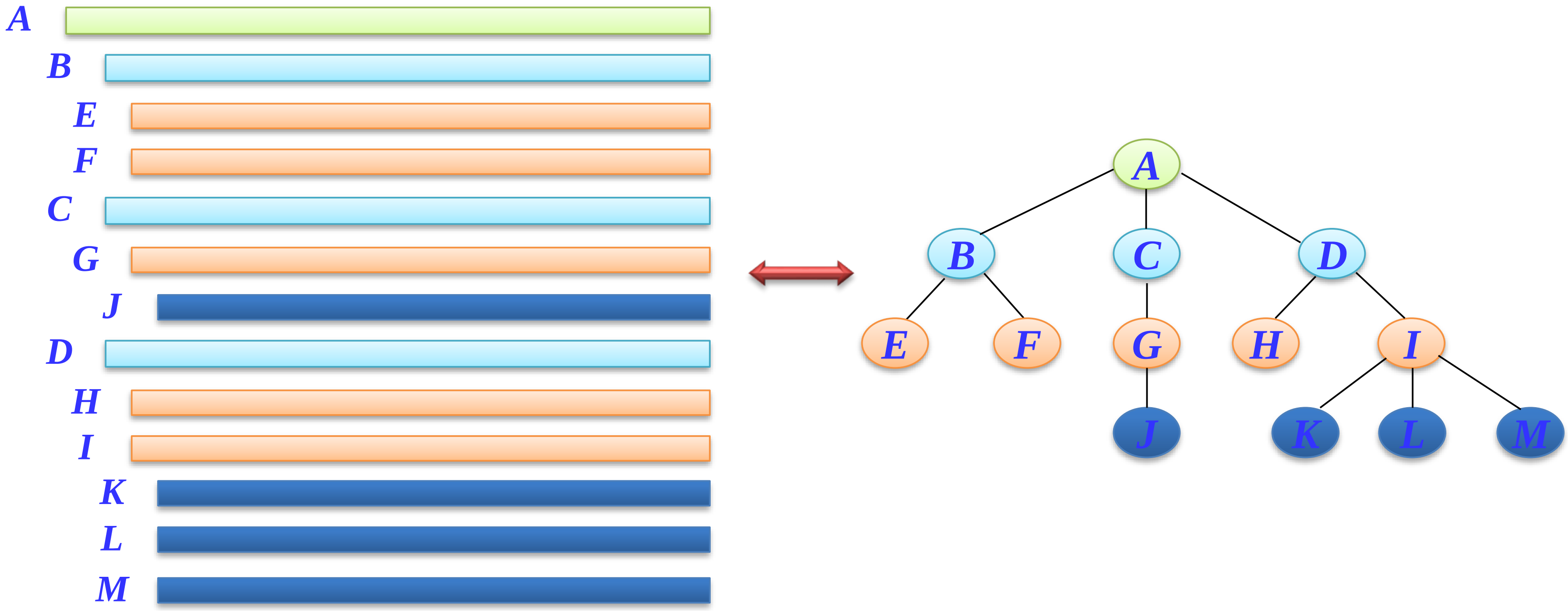
逻辑结构表示1

（2）文氏图表示法。使用集合以及集合的包含关系描述树结构。



逻辑结构表示2

（3）凹入表示法。使用线段的伸缩关系描述树结构。

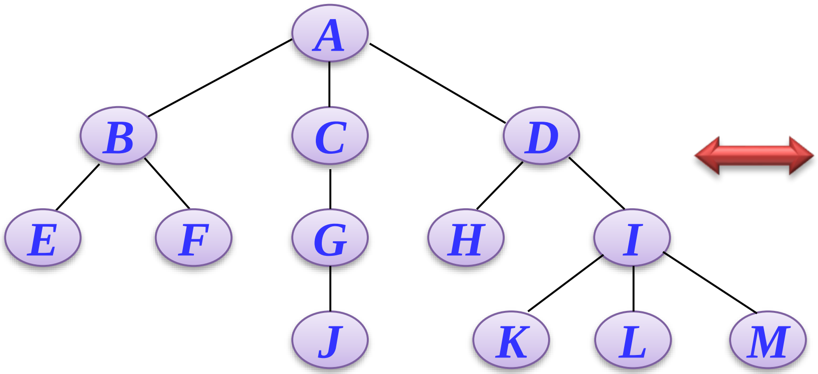


逻辑结构表示3

（4）括号表示法。用一个字符串表示树。

基本形式:

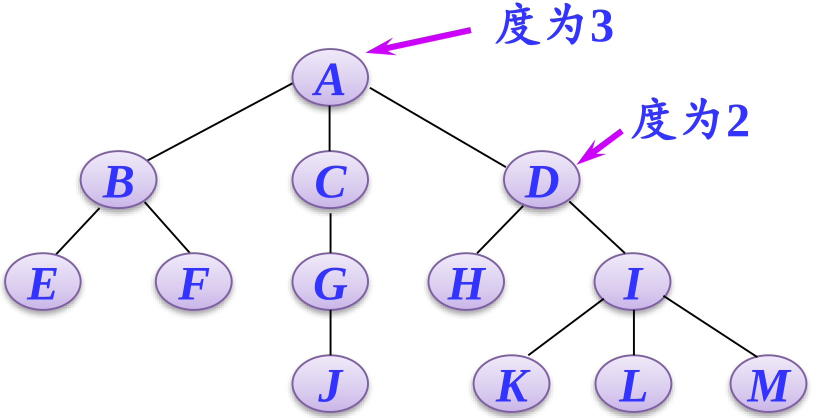
根(子树1，子树2，…，子树m)



A(B(E,F)，C(G(J))，D(H，I(K，L，M)))

7.1.3 树的基本术语

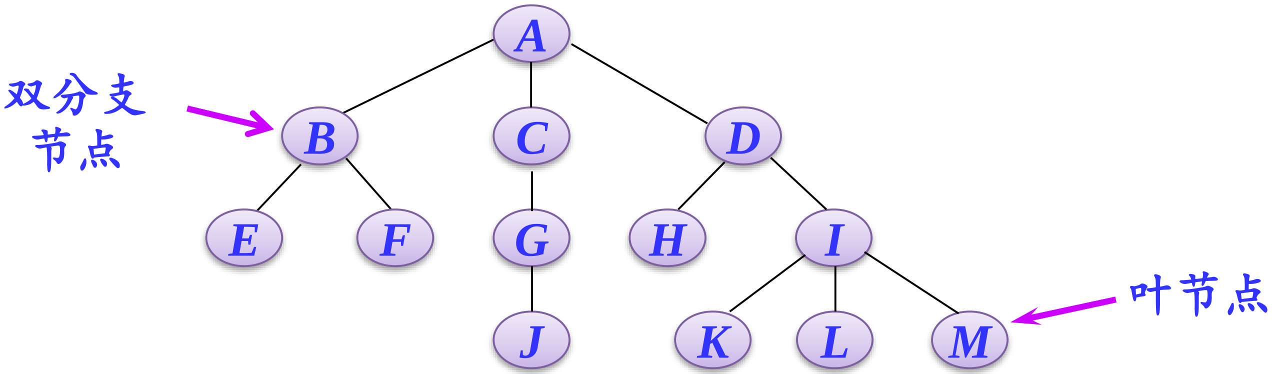
1、节点的度与树的度：树中一个节点的子树的个数称为该节点的度。树中各节点的度的最大值称为**树的度**，通常将度为m的树称为**m次树**或者**m叉树**。



3次树

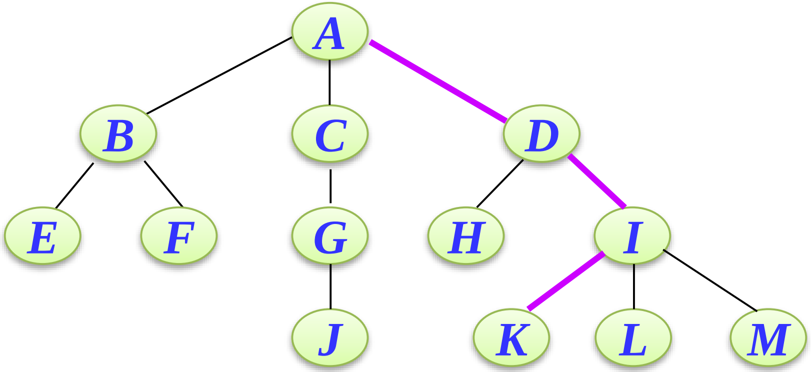
2、分支节点与叶节点：度不为零的节点称为非终端节点，又叫分支节点。度为零的节点称为终端节点或叶节点（或叶子节点）。

度为1的节点称为单分支节点；度为2的节点称为双分支节点，依此类推。



3、路径与路径长度： 两个节点d_i和d_j的节点序列（d_i，d_{i1}，d_{i2}，…，d_j）称为路径。其中<d_x，d_y>是分支。

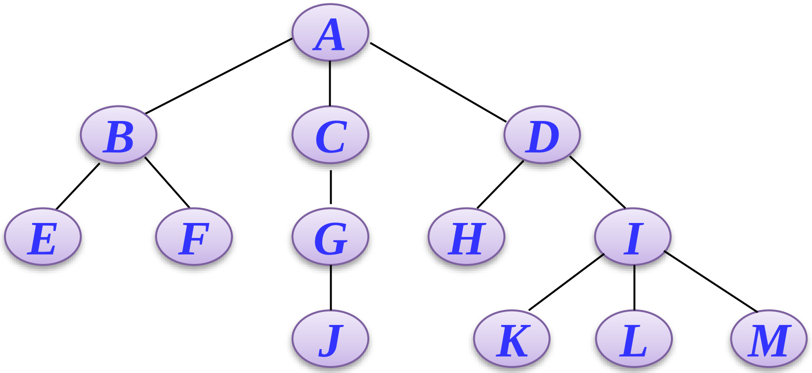
路径长度等于路径所通过的节点数目减1（即路径上分支数目）。



A到K的路径为A, D, I, K,
其长度为3

4、孩子节点、双亲节点和兄弟节点：在一棵树中，每个节点的后继，被称作该节点的**孩子节点**（或子女节点）。相应地，该节点被称作孩子节点的**双亲节点**（或父母节点）。

具有同一双亲的孩子节点互为**兄弟节点**。



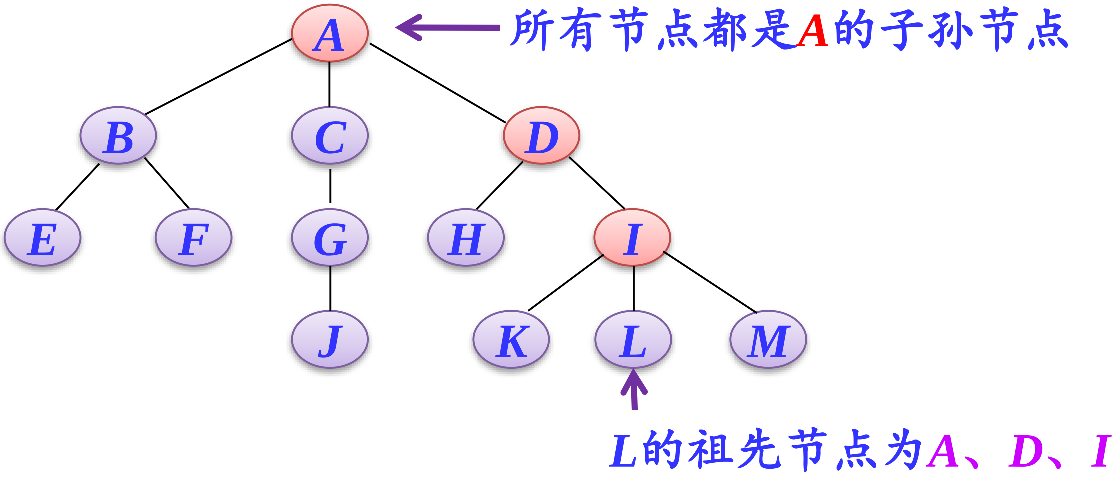
A的孩子节点有B、C、D

B、C、D的双亲节点为A

B、C、D的互为兄弟节点

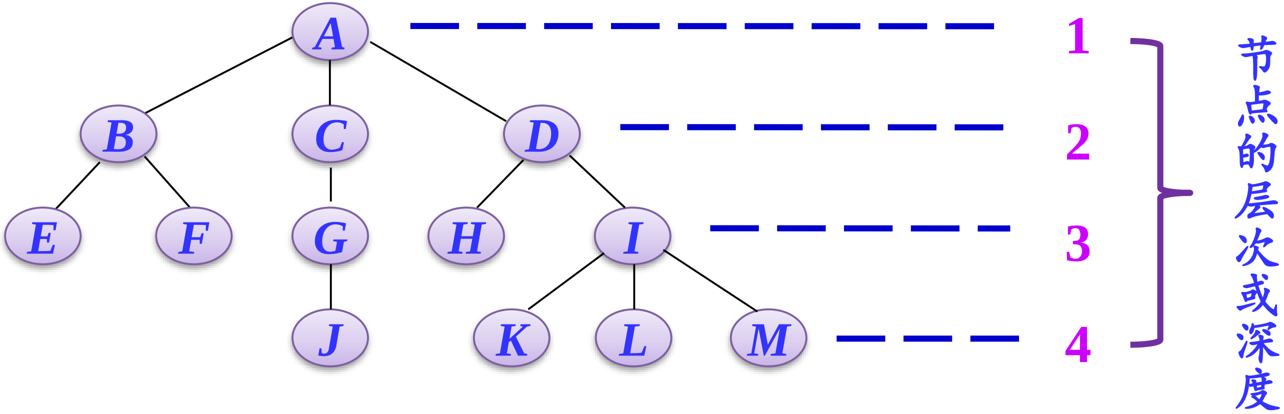
5、子孙节点和祖先节点：在一棵树中，一个节点的所有子树中的节点称为该节点的**子孙节点**。

从根节点到达一个节点的路径上经过的所有节点被称作该节点的**祖先节点**。



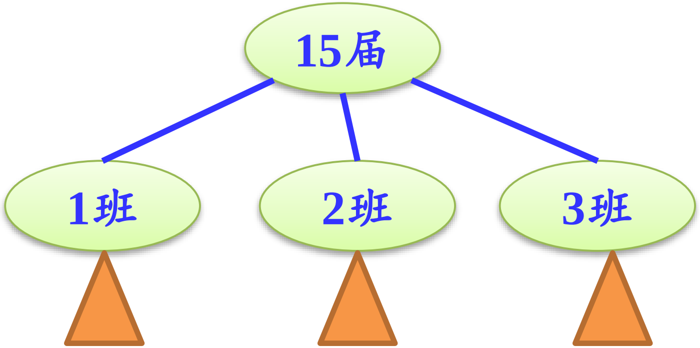
6、节点的层次和树的高度：树中的每个节点都处在一个层次上。节点的层次从树根开始定义，根节点为第1层，它的孩子节点为第2层，以此类推，一个节点所在的层次为其双亲节点所在的层次加1。

树中节点的最大层次称为树的**高度**（或树的**深度**）。

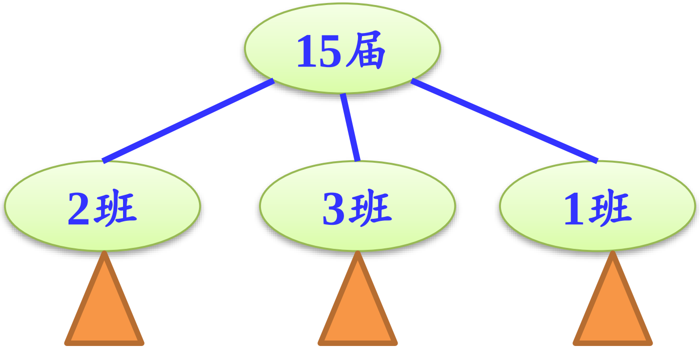


树的高度为4

7、有序树和无序树：若树中各节点的子树是按照一定的次序从左向右安排的，且相对次序是不能随意变换的，则称为有序树，否则称为无序树。



有序树



无序树

8、森林： *n*（*n*>0）个互不相交的树的集合称为**森林**。

只要把树的根节点删去就成了森林。

反之，只要给n棵独立的树加上一个节点，并把这n棵树作为该节点的子树，则森林就变成了一颗树。

独木也成林！！！

7.1.4 树的性质

性质1 树中的节点数等于所有节点的度数加1。

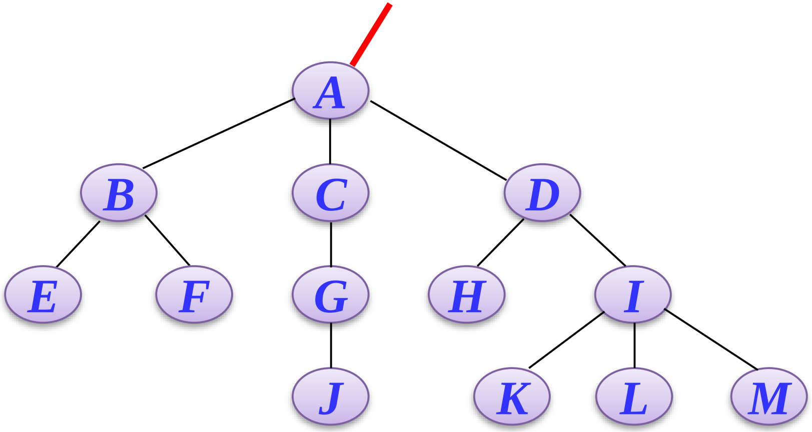
❶ 树中每个分支计为一个节点的度 ⇨

所有节点的度之和＝分支数

❷ 根节点加上一个分支，这样分支数与节点数相同 ⇨ 实际分支数 $=n-1$

⬇

n=度之和+1



【例7-1】一棵度为4的树T中，若有20个度为4的节点，10个度为3的节点，1个度为2的节点，10个度为1的节点，则树T的叶子节点个数是________。

A.41　　B.82　　C.113　　D.122

注：本题为2010年全国考研题

节点个数表示：n为总节点个数，n_i为度为i（$0 \leqslant i \leqslant m$）的节点个数

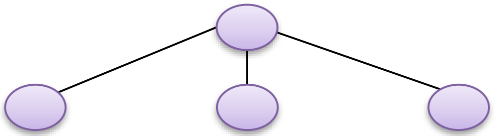
$n = n_0+n_1+n_2+n_3+n_4 = n_0+10+1+10+20 = n_0+41$。

$n-1$ = 度之和 = $n_1+2n_2+3n_3+4n_4 = 122$，得$n = 123$。

$n_0 = n-41 = 123-41 = 82$。

答案为B。

性质2 度为m的树中第i层上至多有m^{i-1}个节点（$i \geqslant 1$）。



度为3的树第2层至多有3个节点

性质3 高度为h的m次树至多有 $\dfrac{m^h-1}{m-1}$ 个节点。

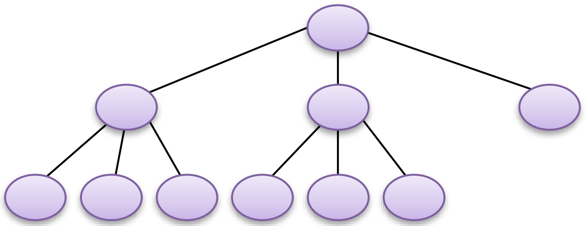
m次树每层最多节点数：

- 第1层：1
- 第2层：m^1
- 第3层：m^2
- …
- 第h层：m^{h-1}

$$\left.\begin{array}{l} 1 \\ m^1 \\ m^2 \\ \cdots \\ m^{h-1} \end{array}\right\} \dfrac{m^h-1}{m-1}$$

性质4 具有n个节点的m次树的最小高度为$\lceil \log_m(n(m-1)+1) \rceil$。

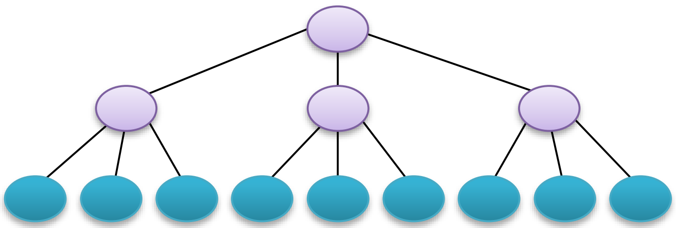
n=10，m=3



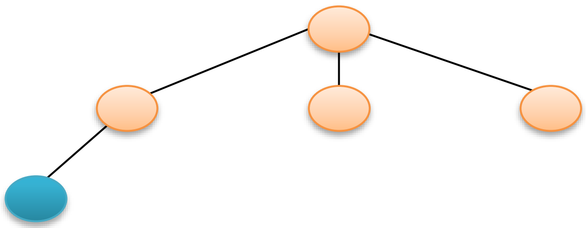
$$最小高度=\lceil \log_3(10\times(3-1)+1) \rceil$$
$$=\lceil \log_3 21 \rceil$$
$$=3$$

【例7-2】含n个节点的3次树的最小高度是多少？最大高度是多少？

解：设含n个节点的3次树的最小高度为h：

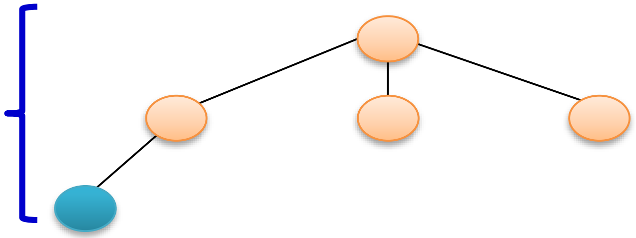


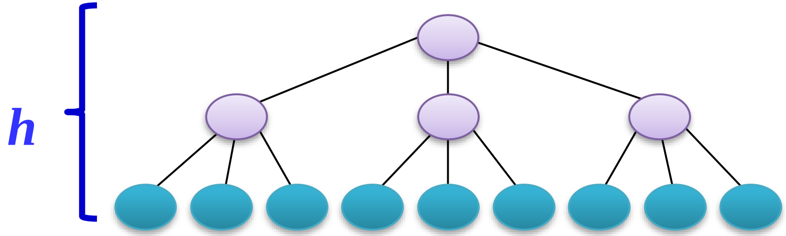
m=3，h=3：最多节点情况



m=3，h=3：最少节点情况

推广到高度h





最少节点情况，节点个数：

$$1+3^1+3^2+\cdots+3^{h-2}+1$$

最多节点情况，节点个数：

$$1+3^1+3^2+\cdots+3^{h-1}$$

则有：

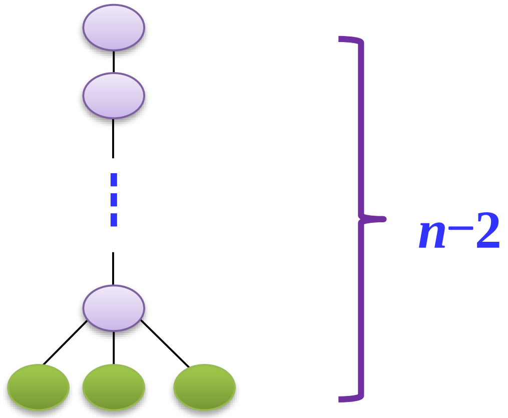
$$1+3^1+3^2+\cdots+3^{h-2} < n \leqslant 1+3^1+3^2+\cdots+3^{h-1}$$

$$(3^{h-1}-1)/2 < n \leqslant (3^h-1)/2$$

$$3^{h-1} < 2n+1 \leqslant 3^h$$

即：$h=\lceil \log_3(2n+1) \rceil$。

最大高度？



最大高度为$n-2$（某一层有3个节点，其他每层只有一个节点）。

——本讲完——