8.8 AOE网与关键路径

1、什么是AOE网

- 用一个带权有向图（DAG）描述工程的预计进度。
- 顶点表示事件，有向边表示活动，边*e*的权*c*(*e*)表示完成活动*e*所需的时间（比如天数）。
- 图中入度为0的顶点表示工程的开始事件（如开工仪式），出度为0的顶点表示工程结束事件。

↓

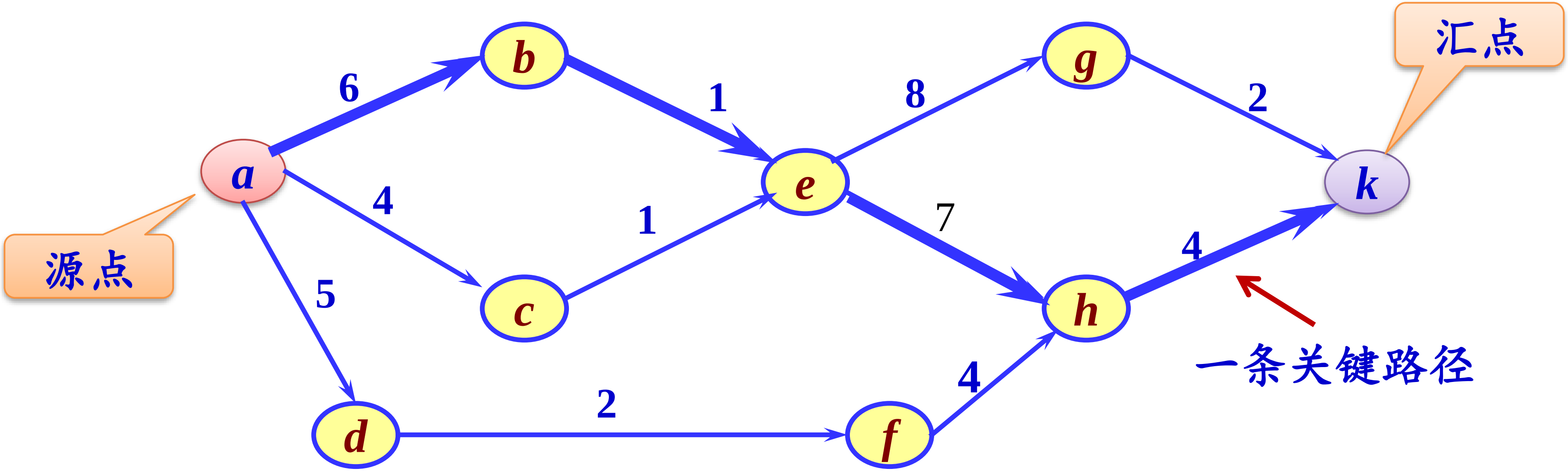
AOE网（Activity On Edge）

2、什么是关键路径

从AOE网中源点到汇点的最长路径，具有最大长度的路径叫**关键路径**。

关键路径是由**关键活动**构成的，关键路径可能不唯一。

关键路径演示



关键路径为源点到汇点的最长路径，这样转变为查找图中最长路径问题。

求解过程可以通过修改Dijkstra算法来实现吗？

这里的给出的求解方法：

求一个AOE的关键路径

↓

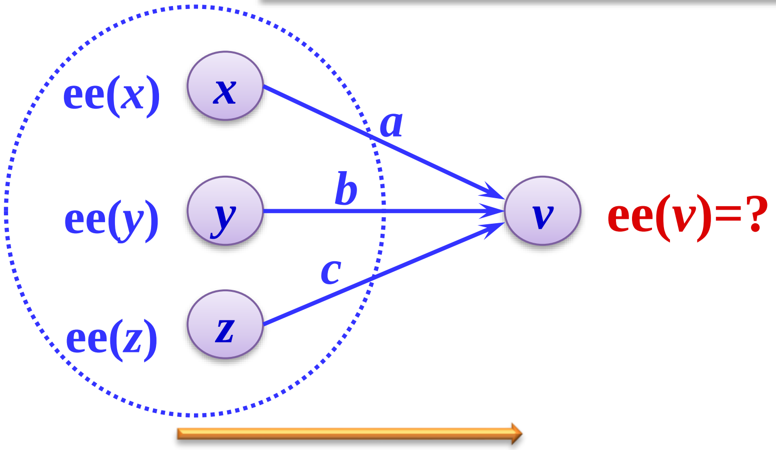
求AOE的中的关键活动

3、求关键路径的过程

（1）事件的最早开始和最迟开始时间

事件v的最早开始时间：规定源点事件的最早开始时间为0。定义图中任一事件v的最早开始时间（early event）ee(v)等于x、y、z到v所有路径长度的最大值：

ee(v)=0	当v为源点时
ee(v)=MAX{ee(x)+a，ee(y)+b，ee(z)+c}	否则



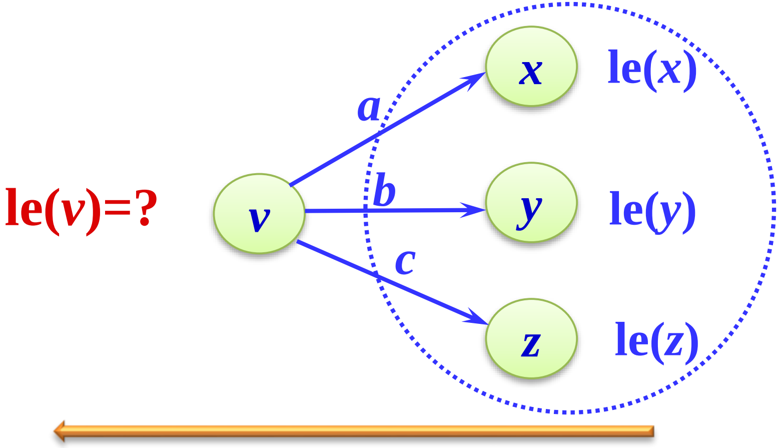
从左向右推进计算

这是为什么源点要唯一！

事件v的最迟开始时间：定义在不影响整个工程进度的前提下，事件v必须发生的时间称为v的最迟开始时间（late event），记作le(v)。le(v)应等于ee(y)与v到汇点的最长路径长度之差：

le(v)=ee(v)　　　　当v为汇点时

le(v)=MIN{le(x)−a，le(y)−b，le(z)−c} 否则



从右向左推进计算

这是为什么汇点要唯一！

（2）活动的最早开始时间和最迟开始时间

活动a的最早开始时间e(a)指该活动起点x事件的最早开始时间，即：

$e(a)=\mathrm{ee}(x)$

活动a的最迟开始时间l(a)指该活动终点y事件的最迟开始时间与该活动所需时间之差，即：

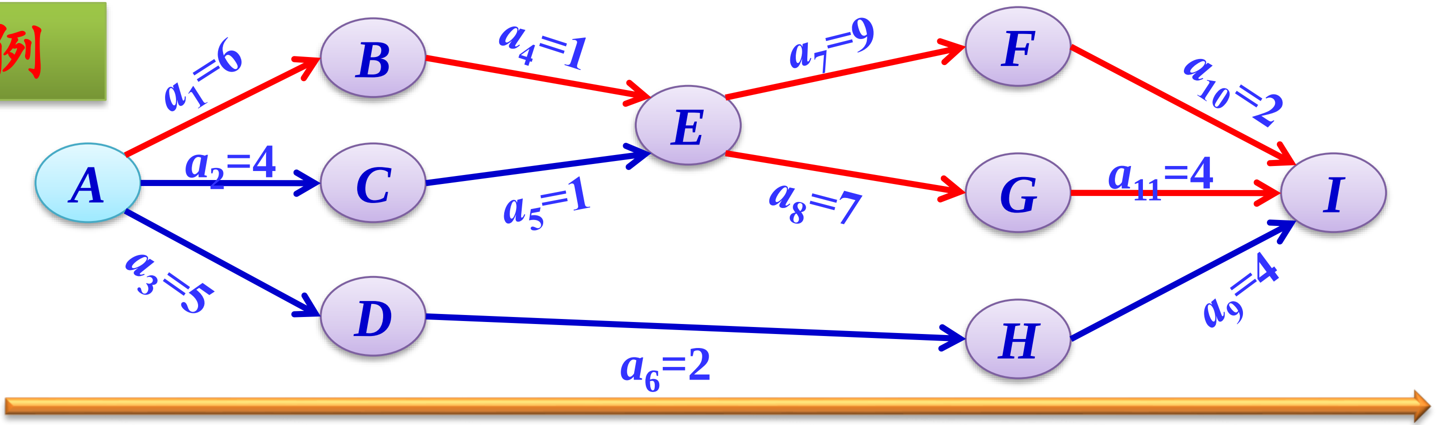
$l(a)=\mathrm{le}(y)-c$

（3）求关键活动

对于每个活动a，求出$d(a)=l(a)-e(a)$，若$d(a)$为0，则称活动a为关键活动。

对关键活动来说，不存在富余时间。

示例



先进行拓扑排序，假设拓扑序列为：*ABCDEFGHI*

计算各事件的ee(v)如下：

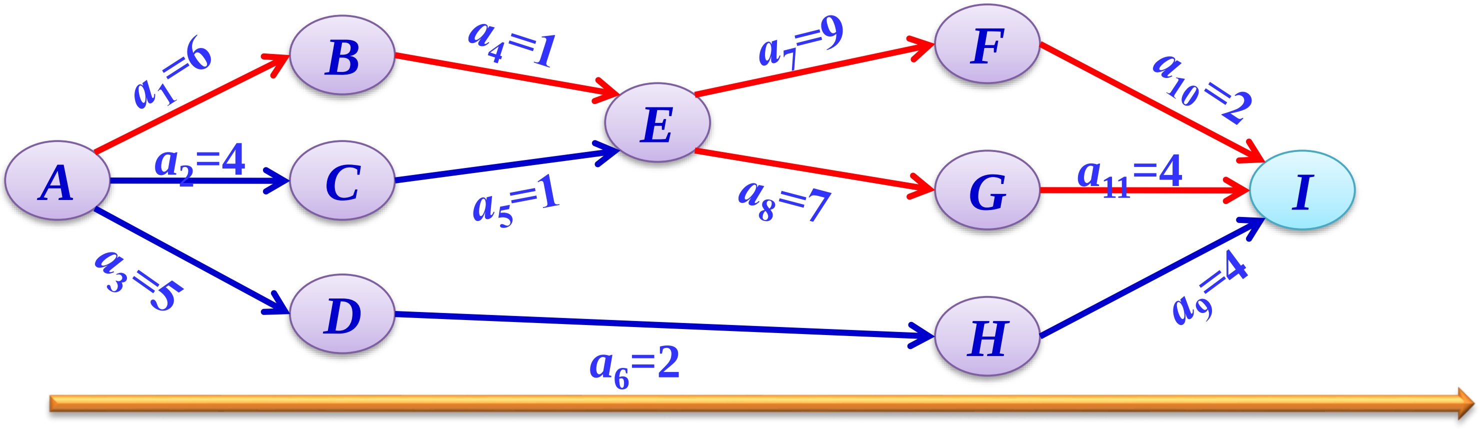
ee(A)=0

ee(B)=ee(A)+c(a_1)=6

ee(C)=ee(A)+c(a_2)=4

ee(D)=ee(A)+c(a_3)=5

ee(E)=MAX(ee(B)+c(a_4)，ee(C)+c(a_5)}=MAX{7，5}=7



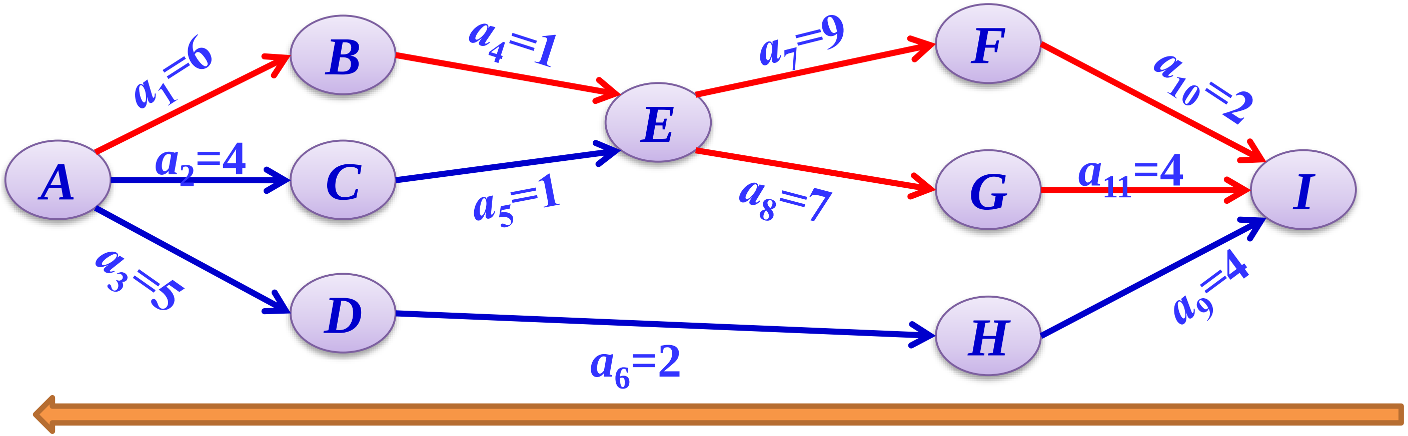
$\mathrm{ee}(F)=\mathrm{ee}(E)+\mathrm{c}(a_7)=16$

$\mathrm{ee}(G)=\mathrm{ee}(E)+\mathrm{c}(a_8)=14$

$\mathrm{ee}(H)=\mathrm{ee}(D)+\mathrm{c}(a_6)=7$

$\mathrm{ee}(I)=\mathrm{MAX}\{\mathrm{ee}(F)+\mathrm{c}(a_{10}),\ \mathrm{ee}(G)+\mathrm{c}(a_{11}),\ \mathrm{ee}(H)+\mathrm{c}(a_9)\}$

$=\mathrm{MAX}(18,\ 18,\ 11\}=18$



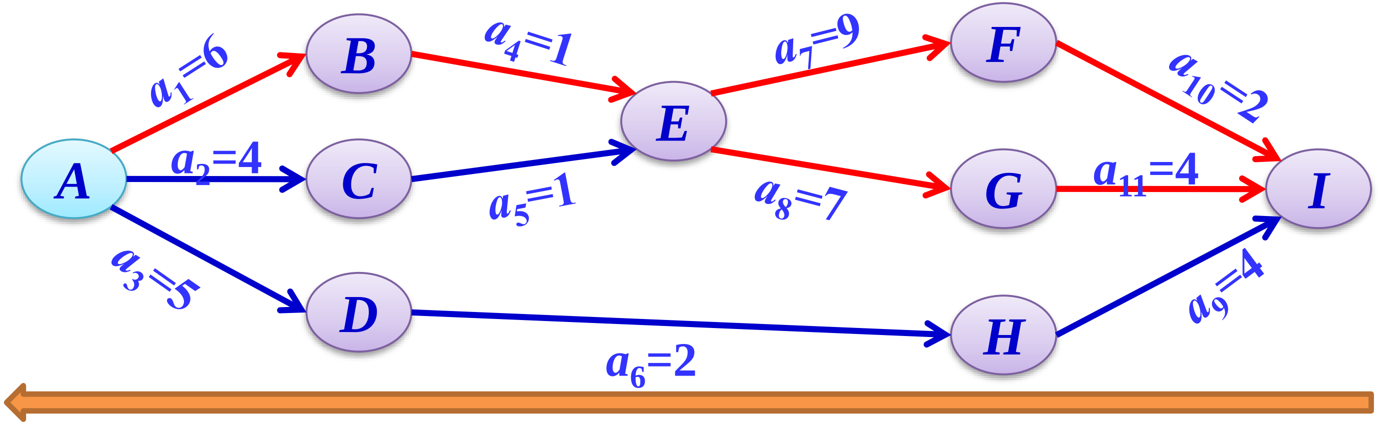
拓扑序列为*ABCDEFGHI*，按拓扑逆序*IHGFEDCBA*计算各事件的le(v)如下：

$\mathrm{le}(I)=\mathrm{ee}(I)=18$

$\mathrm{le}(H)=\mathrm{le}(I)-\mathrm{c}(a_9)=14$

$\mathrm{le}(G)=\mathrm{le}(I)-\mathrm{c}(a_{11})=14$

$\mathrm{le}(F)=\mathrm{le}(I)-\mathrm{c}(a_{10})=16$



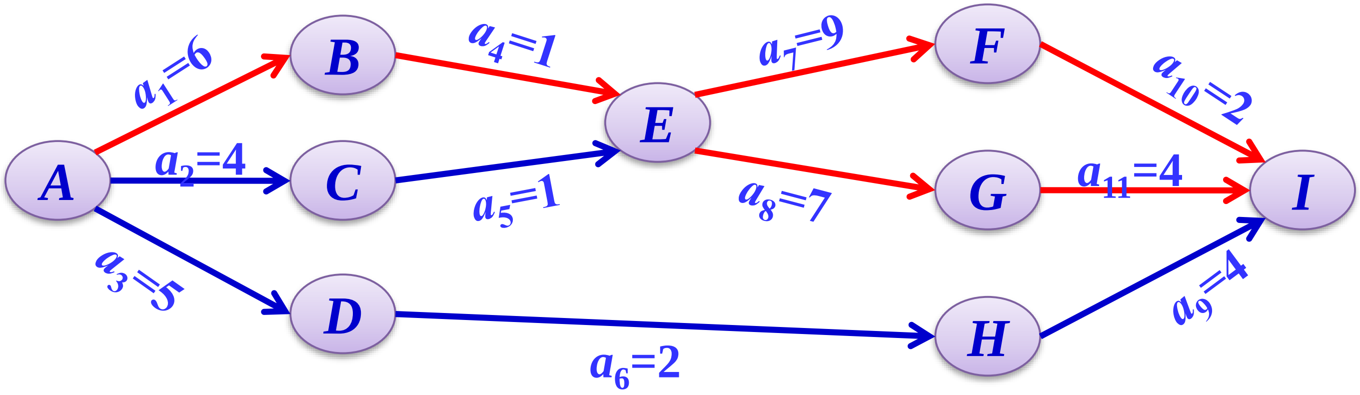
$\mathrm{le}(E)=\mathrm{MIN}(\mathrm{le}(F)-\mathrm{c}(a_7),\ \mathrm{le}(G)-\mathrm{c}(a_8)\}=\{7,\ 7\}=7$

$\mathrm{le}(D)=\mathrm{le}(H)-\mathrm{c}(a_6)=12$

$\mathrm{le}(C)=\mathrm{le}(E)-\mathrm{c}(a_5)=6$

$\mathrm{le}(B)=\mathrm{le}(E)-\mathrm{c}(a_4)=6$

$\mathrm{le}(A)=\mathrm{MIN}(\mathrm{le}(B)-\mathrm{c}(a_1),\ \mathrm{le}(C)-\mathrm{c}(a_2),\ \mathrm{le}(D)-\mathrm{c}(a_3)\}=\{0,\ 2,\ 7\}=0$



计算各活动的e(a)、l(a)和d(a)如下：

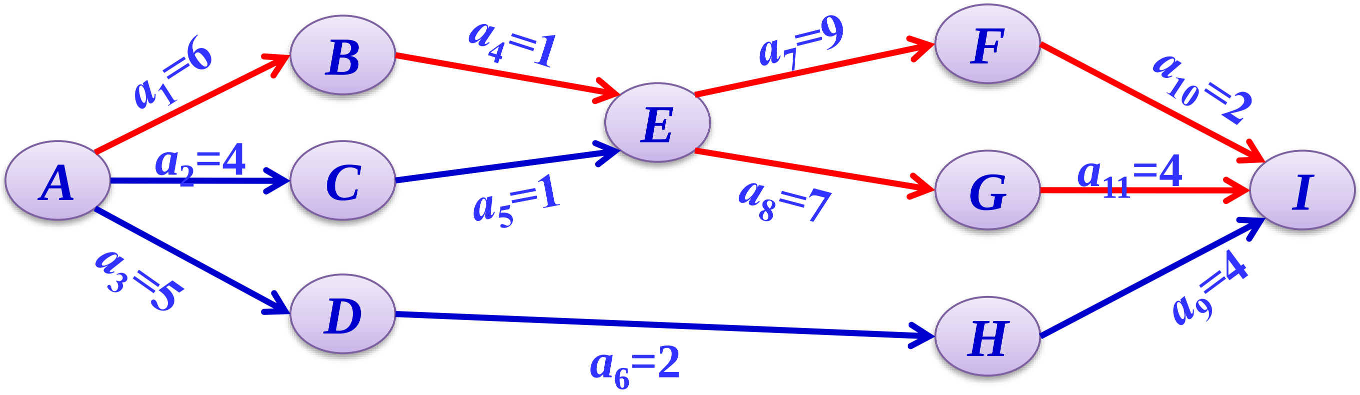
活动a_1：e(a_1)=ee(A)=0，l(a_1)=le(B)-6=0，d(a_1)=0

活动a_2：e(a_2)=ee(A)=0，l(a_2)=le(C)-4=2，d(a_2)=2

活动a_3：e(a_3)=ee(A)=0，l(a_3)=le(D)-5=7，d(a_3)=7

活动a_4：e(a_4)=ee(B)=6，l(a_4)=le(E)-1=6，d(a_4)=0

活动a_5：e(a_5)=ee(C)=4，l(a_5)=le(E)-1=6，d(a_5)=2



活动a_6：e(a_6)=ee(D)=5， l(a_6)=le(H)-2=12， d(a_6)=7

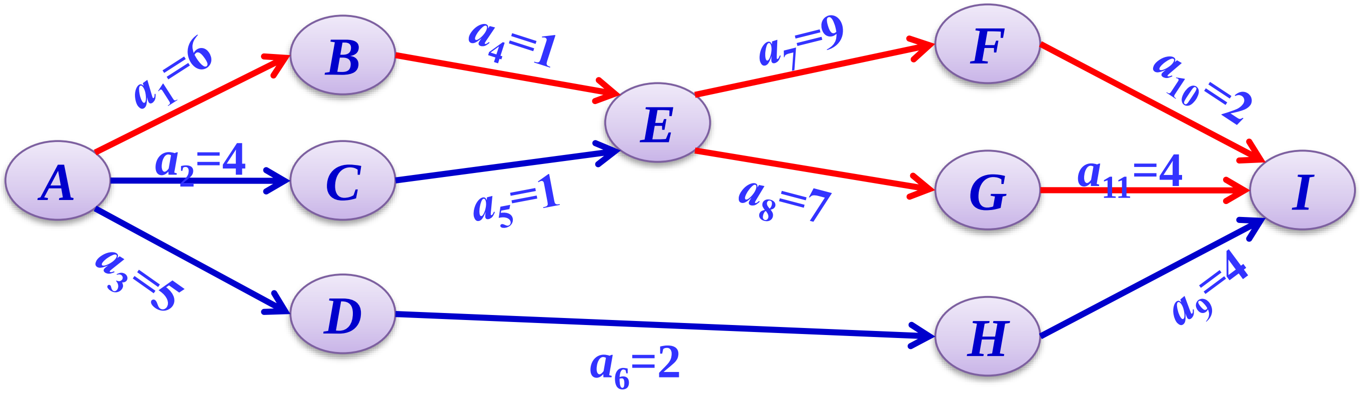
活动a_7：e(a_7)=ee(E)=7， l(a_7)=le(F)-9=7， d(a_7)=0

活动a_8：e(a_8)=ee(E)=7， l(a_8)=le(G)-7=7， d(a_8)=0

活动a_9：e(a_9)=ee(H)=7， l(a_9)=le(G)-4=10， d(a_9)=3

活动a_{10}：e(a_{10})=ee(F)=16， l(a_{10})=le(I)-2=16， d(a_{10})=0

活动a_{11}：e(a_{11})=ee(G)=14， l(a_{11})=le(I)-4=14， d(a_{11})=0



由此可知，关键活动有a_{11}、a_{10}、a_8、a_7、a_4、a_1，因此关键路径有两条：$A—B—E—F—I$和$A—B—E—G—I$。

思考题

在一个AOE网中，缩短任一关键活动的时间，是否会缩短整个工程的时间？

——本讲完——