西南交通大学 2011 年研究生入学试题解析

试题名称：电磁场与波

一、简答题（50 分）

（1）为什么导体内部不存在静电场？

答： 因为导体的电导率很大，良导体，如铜、铁等 $10^7\sigma/m$ 量级，如果导体内部存在静电场，则导体内部势必存在很大的电流。假设导体的总电荷量不发生改变，那么根据电荷守衡定律，需要导体内部 $\nabla\cdot\vec{J}$，那电流密度的散度为 0，这与导体内部存在大的环路电流相矛盾，所以，导体内部不存在静电场。从另一方面来看，如果导体内部存在电场，那么，很大的感应电流会趋使导体内的自由电子向着电场高电位方向流动，假设感应电流的强度很大，那么，电流的流动会建立起新的感应场，感应场

的方向与原电场强度相等，方向相反，电流停止运动，这时导体内部不存在静电场，即以为总场均达到平衡，静电场不存在，宏观上感应场建立时间非常短，所以可以认为，导体内部总是没有静电场的。

（2）平面波极化特性指的是什么？简述线极化平面波，左旋圆极化波，右旋圆极化波的含义及特点。

答：电场强度的方向（或电场强度矢量端点的轨迹）随时间变化的规律称为电磁波的极化特性。

线极化平面波：在空间任一固定点，电场强度矢量的端点随时间的变化，轨迹为一条直线的平面波为线极化平面波。特点：空间正负的电场向量具有相同或相反（0，π）的相位关系。

左旋圆极化波:电场强度矢量的方向随时间

不断地旋转，大小不变的电磁波叫圆极化波。

当 t 增加时，夹角 α 不断减少，合成波矢量随着时间的旋转方向与传播方向是左手旋转关系的平面波叫做左旋圆极化波。特点：当场分量空间正交，时间相差 π/2（Ey 超前 Ex π/2 相位），振幅相等│Ex│=│Ey│

右旋圆极化波：电场强度矢量的方向随时间不断变化，当 t 增加时夹角 α 不断增加，合成波矢量随着时间的旋转方向与传播方向是右手旋转关系的平面波叫做右旋圆极化波。特点：当场分量空间正交，相位差 π/2（Ex 超前 Ey π/2 相位），振幅相等│Ex│=│Ey│

（3）简述波的色散现象

答：色散现象是由于电磁波的相速和频率有关引起的，含有信号的电磁波总有一定的频带密度，那么信号经过一定长度的传

输后，不同频率当量的相速不同导致接收点到达信号的延时不同，从而使达到信号出现频率分离的特点，这种相速度随频率的改变而改变的现象叫做波的色散现象。

（4）驻波比的定义是什么？驻波比 S 与反射系数 R 的关系是什么？

答：驻波比是驻波的腹点幅度比上驻波的谷点幅值，即$\rho = \frac{V_{\max}}{V_{\min}}$。

驻波比表征了能量及反射的情况，驻波比与反射系数的关系为$\rho = \frac{1+|R|}{1-|R|}$。

（5）平行极化波的含义是什么？它与电波传播工程中的水平极化波的定义有什么不同？

答：电场分量方向与入射面平行的极化波叫做平面极化波。在电波传播过程中水平极化

波指的是电场分量与地面平行的电磁波，不同之处在于平行极化波是相对于入射面定义的。水平极化波是相对于大地定义的。

二、证明题：

1、证明波导中的工作波长，波导波长与截止波长之间满足下列关系：

$$\frac{1}{\lambda_g{}^2}+\frac{1}{\lambda_c{}^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

证明：已知波导中的电磁波的波长为

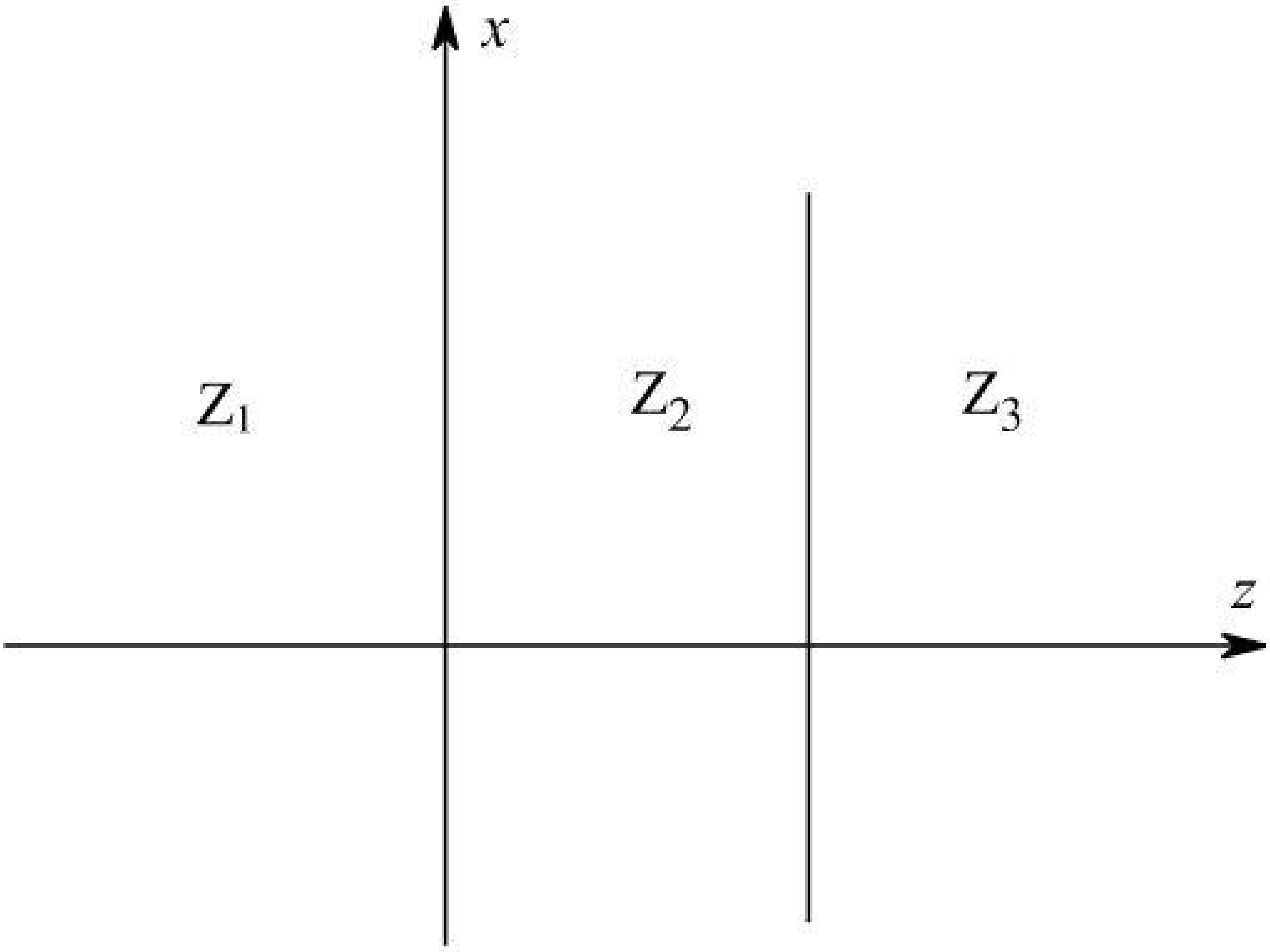
$$\lambda_g=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \qquad \rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda_g{}^2}=\frac{1}{\lambda^2}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2\right]=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda_c{}^2} \qquad \rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda_g{}^2}+\frac{1}{\lambda_c{}^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

2、（20 分）设某种多层介质有三种介质组成，平面波自第一种介质沿 z 方向向多层介质边界正投射。介质 2 的厚度为 d，平面波在其中的传播常数为 k_2，如图所示，假定 R_{12} 为介质 1 与介质 2 形成的边界反射系数，R_{23} 为介质 2 与介质 3 形成的边界反射系数，证明在 z=0 处的总反射系数可以写成

$$R=\frac{(R_{12}+R_{23})+j(R_{12}-R_{23})\tan k_2 d}{(1+R_{12}R_{23})+j(1-R_{12}R_{23})\tan k_2 d}$$



提示： 在 z=0 处的输入波阻抗为

$$Z_m = Z_2 \frac{Z_3 + jZ_2 \tan k_2 d}{Z_2 + jZ_3 \tan k_2 d}$$，其中 Z_1， Z_2，

Z_3 分别为三种介质的波阻抗。

证明： $R_{12} = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, R_{23} = \dfrac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}$

式中 Z1、Z2、Z3 为三种介质的波阻抗

$$Z_1 = \frac{1 - R_{12}}{1 + R_{12}} Z_2$$

$$Z_3 = \frac{1 + R_{23}}{1 - R_{23}} Z_2$$

$$Z_{in} = Z_2 \frac{Z_3 + jZ_2 \tan k_2 d}{Z_2 + jZ_3 \tan k_2 d}$$

$$= Z_2 \frac{1 - R_{23} + j(1 - R_{23}) \tan k_2 d}{1 - R_{23} + j(1 + R_{23}) \tan k_2 d}$$

若反射系数为：将带入得，

$$R=\frac{\left(R_{12}+R_{23}\right)+j(R_{12}-R_{23})\tan k_2 d}{\left(1+R_{12}R_{23}\right)+j(1-R_{12}R_{23})\tan k_2 d}$$

三、计算题（70 分）

1、（15 分）设真空中平面波的磁场强度瞬时值为 $H(y,t)=e_z\cos(6\pi\times10^8 t+2\pi y)A/m$**，已知真空中的波阻抗** $Z_0=377\Omega$**，求该平面波的频率、波长、相位常数、相速、电场强度复矢量以及复能流密度。**

解： $\omega=6\pi\times10^8 rad/s$

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{\omega}{c}=2\pi rad/s$$

推出 $f=\dfrac{\omega}{2\pi}=3\times10^8 Hz$

波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=1m$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = 3\times 10^8 m/s$$

磁场瞬时值为:

$$H(y,t) = \vec{e}_z \cos\left(6\pi\times 10^8 t + 2\pi y\right) A/m$$

这是向-y 方向传播的平面波，因此，电场强度的瞬时值为:

$$E(y,z) = \vec{e}_x \eta_0 \cos\left(6\pi\times 10^8 t + 2\pi y\right) A/m$$

$$\eta_0 = 120\pi = 377\Omega$$

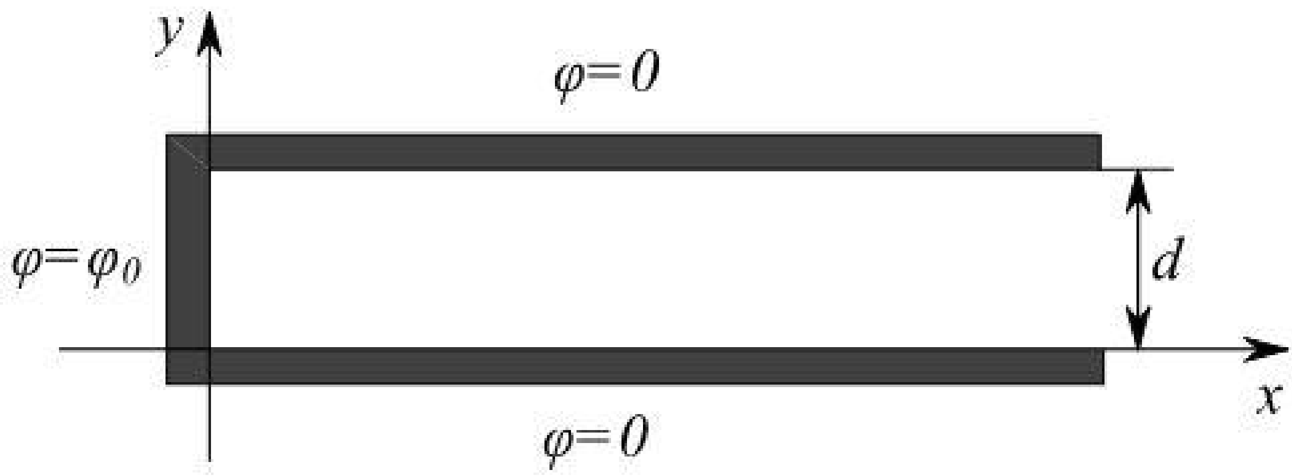
电场强度复矢量为:

$$\vec{E}(y) = \vec{e}_x \frac{y_0}{\sqrt{2}} e^{j\pi y} \left(V/m\right)$$

复能流密矢量

$$S_c = E\times H^* = -e_y \frac{y_0}{2} = -e_y 60\pi\left(W/m^2\right)$$

2、（30 分）两个相互平行的半无限大接地导体平面（沿 z 轴无限延伸），间距为 d，其有限端被电位 φ_0 的导电平面封闭，且与半无限大接地导体平面绝缘，如图所示，求三个导体平面形成的槽中的电位分布。



提示：电位 φ 满足二维拉普拉斯方程：

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$，**用分离变量法求解，并利用傅立叶级数的正交性，例如**

$$\int_0^d \sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right)dy$$

$$=\begin{cases} \dfrac{d}{2} & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

来求出各个模式的系数。

解： 电 位 函 数 满 足 拉 普 拉 斯 方 程：

$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$，用分离变量法求解：

令 $\mu=X(x)Y(y)$，代入式中，两边同时处

以 $X(x)Y(y)$，得

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda\text{，即}\begin{cases} X''-\lambda X=0 \\ Y''+\lambda Y=0 \end{cases}$$

原问题边界条件为：$\begin{cases} \mu\big|_{y=0}=0 \\ \mu\big|_{y=d}=0 \\ \mu\big|_{x=0}=\varphi_0 \end{cases}$，

解 $Y''+\lambda Y=0$ 得：

（1）$\lambda>0$，

$Y(y)=\left(C_1\cos\sqrt{\lambda}y+C_2\sin\sqrt{\lambda}x\right)$，代入

$\mu\big|_{y=0}=0$
的边界条件：
$\mu\big|_{y=d}=0$

推出 $C_1=0$

$Y(y)=C_2\sin\sqrt{\lambda}y\big|_{y=d}=0$

即 $C_2\sin\sqrt{\lambda}d=0$

$C_2\neq 0$，仅有　$\sin\sqrt{\lambda}d=0$

$$\Rightarrow\sqrt{\lambda}=\frac{m\pi}{d}(m=1,2....)$$

即 $\lambda=\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2(m=1,2....)$

（2）$\lambda=0$　　　$Y(y)=C_1y+C_2$

代入边界条件可知

$C_1=C_2=0$　　该解无意义，舍去。

（3）$\lambda < 0$

$$Y(y) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} y} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda} y}$$

代入边界条件可得

$C_1 = C_2 = 0$　　该解无意义，舍去。

最终 $\lambda = \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 > 0 \left(m = 1, 2....\right)$

将 λ 代入方程 $X(x)$ 的方程，有

$$X(x) = D_1 e^{\frac{m\pi}{d}x} + D_2^{-\frac{m\pi}{d}x} \left(m = 1, 2....\right)$$

有无穷远的边界条件为 0 可知，上式中的常

数 $D_1 = 0$，即 $X(x) = D_2^{-\frac{m\pi}{d}x}$。

$$\Rightarrow \mu(x, y) = C_m e^{-\frac{m\pi}{d}x} \sin\left(\frac{m\pi}{d} y\right) . \left(m = 1, 2....\right)$$

$$\varphi_0 = \mu(x, y)\Big|_{x=0} = C_m \sin\left(\frac{m\pi}{d} y\right) \qquad ①$$

利用傅里叶的正交性

$$\int_0^d \varphi_0 \sin\frac{n\pi y}{d}dy$$

$$=\int_0^d C_m \sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right)dy$$

$$=\begin{cases} C_m\dfrac{d}{2} & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_m=\frac{2}{d}\int_0^d \varphi_0 \sin\frac{m\pi y}{d}dy$$

$$=\begin{cases} \dfrac{4\varphi_0}{m\pi} & m\text{为奇数} \\ 0 & m\text{为偶数} \end{cases}$$

则槽内电位分布为：

$$\varphi(x,y)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\varphi_0}{m\pi}e^{-\frac{m\pi}{d}x}\sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right)$$

$$(m=1,3,5.....)$$

3、（**25** 分）一直电子的电荷大小为q，质量为m，在$t=0$的时刻它以速度$v=e_y v_0$进入均匀电场为$E=e_0 E_0$，均匀磁场为$B=e_x B_0$的区域，假定在$t=0$的时刻电子的位置坐标为$(x_0=1, y_0=2, z_0=3)$，求电子在任意时刻t的位置，并求出当时间$t \ll \frac{m}{qB_0}$,情况下（即$\frac{qB_0}{m}t \approx 0$）电子的近似轨迹。

提示：洛伦兹力公式为：$\vec{F}=-q(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B})$，

牛顿定律为

$$F=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d(v_x e_x+v_y e_y+v_z e_z)}{dt};$$

位置适量与速度的关系为：

$$\frac{dx}{dt}=v_x\text{，}\quad \frac{dy}{dt}=v_y\quad\text{，}\quad \frac{dz}{dt}=v_z$$

当$\alpha\approx 0$，$\cos\alpha\approx 1-\frac{1}{2}\alpha^2$**时，**

解析：已知洛伦兹力公式为

$$\vec{F}=-q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$=m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\frac{d\left(v_xe_x+v_ye_y+v_ze_z\right)}{dt}$$

$$=m\begin{pmatrix}\frac{d^2x}{dt^2}\\ \frac{d^2y}{dt^2}\\ \frac{d^2z}{dt^2}\end{pmatrix}$$

$$=-q\begin{pmatrix}0\\0\\E_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ V_x & V_y & V_z\\ B_0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 \\ B_0 V_z \\ -B_0 V_y - qE_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \dfrac{dz}{dt} \\ -B_0 \dfrac{dy}{dt} - qE_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lclc} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 & & \dfrac{dx}{dt} = V_x \big|_0 = 0 & x_0 = 1 \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = B_0\dfrac{dz}{dt} & ① & \dfrac{dy}{dt} = V_y \big|_0 = 0 & y_0 = 2 \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -B_0\dfrac{dy}{dt} - qE_0 & ② & \dfrac{dz}{dt} = V_z \big|_0 = 0 & z_0 = 3 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x(t) = 1$$

将①，②两边求导得：

$$\begin{cases} m\dfrac{d^3y}{dt^3} = B\dfrac{d^2z}{dt^2} & ③ \\ m\dfrac{d^3z}{dt^3} = -B\dfrac{d^2y}{dt^2} & ④ \end{cases}$$

由②，③得：由①，④得

$$\begin{cases} m\dfrac{d^3y}{dt^3} = \dfrac{B_0}{m}\left(-B_0\dfrac{dy}{dt} - qE_0\right) \\ m\dfrac{d^3z}{dt^3} = -\dfrac{B_0{}^2}{m}\dfrac{dz}{dt} & ⑤ \end{cases}$$

对⑤两边积分，为：$m\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{B_0}{m}z$。

特征多项式为：$r^2=-\frac{B_0}{m^2}$，即 $r_{1,2}=\pm j\frac{B_0}{m}$。

可见，⑤式通解为：

$$z(t)=Ae^{\left(j\frac{B_0}{m}t\right)}+Be^{\left(-j\frac{B_0}{m}t\right)}$$
$$=C\cos\left(\frac{B_0}{m}t\right)+D\sin\left(\frac{B_0}{m}t\right)$$

代入 $z(0)=3$，$\frac{dz}{dt}\Big|_{t=0}=0$，得

$$z(t)=3\cos\left(\frac{B_0}{m}t\right)。$$

代入①，得 $y(t)=3\sin\left(\frac{B_0}{m}t\right)+C_1t+C_2$

代入 $y(0)=2$　$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=v_0$ 和②式，得

$$y(t)=3\sin\left(\frac{B_0}{m}t\right)+v_0t+2$$

得电子运动轨迹为：

$$\begin{cases} x(t)=1 \\ y(t)=3\sin\left(\dfrac{B_0}{m}t\right)+\left(v_0+qE_0\right)t+2 \\ z(t)=3\cos\left(\dfrac{B_0}{m}t\right) \end{cases}$$

当 $t \ll \dfrac{m}{qB_0}$ 时

$$\begin{cases} x(t)=1 \\ y(t)=\left(v_0+qE_0+\dfrac{3B_0}{m}\right)t+2 \\ z(t)=3\left(1-\dfrac{{B_0}^2}{2m^2}t^2\right) \end{cases}$$