

# 西南交通大学 2015 年研究生入学试题解析

## 试题名称：管理运筹学一

一、选择题（16 分，共 8 小题）（答在试卷上的内容无效）

1.在线性规划模型中，满足约束条件和非负条件的解称为（B）。

A.基本解                      B.可行解

C.基本可行解                D.最优解

**解析：**取一组包含  $m$  个线性无关的系数向量组成的基，令其余非基变量等于 0 的解就是基本解；可行解是指满足约束条件和非负约束的解；基本可行解是指在同时满足约束条件方程和非负约束的基本解；最优解是指使目标函数达最优的解。因此选 B。

2.在统筹图中，某一关键工序的总时差一定（C）该工序的单时差。

A.不大于    D.不小于    C.等于    D.不确定

**解析：**这是关键工序的性质之一即关键工序总时差一定为 0，单时差也一定为 0，因此总时差等于单时差，故选 C。

3.若定义  $x_i = \begin{cases} 1, & \text{投资项目 } A_i \\ 0, & \text{不投资项目 } A_i \end{cases}, i=1,2$ ，一下

那个约束条件准确表达“投资  $A_1$  的前提是必须投资  $A_2$ ”。(D)

A.  $x_1 + x_2 \leq 1$

B.  $x_1 + x_2 \geq 0$

C.  $x_1 - x_2 = 0$

D.  $x_1 - x_2 \leq 0$

**解析：**这是对 0-1 规划的约束条件的考查。

要表示“投资  $A_1$  的前提是必须投资  $A_2$ ”，则有  $x_1 \leq x_2$ ，即  $x_1 - x_2 \leq 0$ 。当左端为 1 时，右端必为 1，这就清楚表达了“投资  $A_1$  的前提是必须投资  $A_2$ ”。因此选 D。

4.将一个指派问题的费用矩阵的某行各元素都加上常数  $k$  得到一个新的矩阵，这一新矩

阵对应着一个新的指派问题，则（A）。

A.新问题与原问题有相同的最优解；

B.新问题最优目标值大于原问题最优目标函数值；

C.新问题最优解等于原问题最优解加上  $k$ ；

D.新问题最优解小于原问题最优解。

**解析：**这是对指派问题解法的考查。在元素上都加常数  $k$ ，这样做以后其目标函数值与原目标函数值仅仅相差一个  $k$ ，而最优解是相同的。（详见寇伟华版运筹学 154-155 页）

5.将连接六个城市的部分道路改造为高速公路，使各个城市均能通达，又要使高速公路的总长度最小，该问题属于（B）。

A.最短路问题

B.最小生成树问题

C.中国邮路问题

D.哈密顿问题

**解析：**采用排除法：A.题目要求使各个城市均能通达，而非仅仅两点之间的最短路问题，



及时最短路的解法 Dijkstra 算法中能求出所有任意两点最短路，但与题意不符，应注意甄别，这也是命题人设置的“陷阱”所在； C. 中国邮路问题是指每条路都要走，求总路程最小的问题； D. 曼哈顿问题指由指定的起点前往指定的终点，途中经过所有其他节点且只经过一次。显然题目中“均能通达”、“总长最小”属于最小生成树问题。

6. 有向图  $D=(V, E)$ , 顶点  $v_1$  至  $v_j$  的最短路径是  $P^*_{lj}=v_1...v_i...v_j$  及其长度为  $W(P^*_{lj})$ ,  $P^*_{lj}$  子路  $P^*_{li}=v_1...v_i$  的长度为  $W(P^*_{li})$ 。若  $W(P^*_{li})$  表示  $v_1$  至  $v_i$  的最短路长度，则有 (A)

A.  $W(P^*_{lj}) > W(P_{li})$

B.  $W(P_{li}) > W(P^*_{lj})$

C.  $W(P^*_{li}) = W(P_{li})$

$$D. W(P_{li}^*) < W(P_{li})$$

**解析：**在解答此题前，务必须知  $W(P_{lj}^*)$ 、 $W(P_{li})$ 、 $W(P_{li}^*)$  这三者的含义， $W(P_{lj}^*)$  表示 1 到  $j$  之间最短路的权值(长度)； $W(P_{li})$  表示 1 到  $i$  之间路的权值（注意：未必是最短的，这也是考点所在）； $W(P_{li}^*)$  表示的是 1 到  $i$  之间的最短路的权值。因此由最短路含义可知， $V_1$  沿路径  $P$  到  $V_i$  的最短路必然包含于  $V_1$  沿路径  $P$  到  $V_j$  的最短路中。综上所述，整条路长度的最短路  $W(P_{lj}^*)$  必然大于其子路  $W(P_{li})$ ，即有：

$$W(P_{lj}) \geq W(P_{lj}^*) > W(P_{li}) \geq W(P_{li}^*)$$

（此不等式即为命题人之意图）

7.关于增广链，以下叙述正确的有（B）。

A.增广链是一条从源点到汇点的有向路，这条路上各边的方向必须一致；

B.增广链上的前向边必须是非饱和边，后向边必须是流量大于零的边；

C. 增广链上的前向边必须是流量小于容量的边，后向边必须是流量等于零的边；

D. 增广链上的前向边必须是流量等于零的边，后向边必须是流量大于零的边。

**解析：**这是对增广链的考查。根据前向边和后向边的定义，自然得出答案 B。

8.对确定存储模型，同样的生产条件下，相同的时间段内，允许缺货的订货次数比不允许缺货时的次数（C）。

A.不变 B.增加 C.减少 D.不一定

**解析：**这是对存储模型的考查。显然，如果允许缺货，表明可以多等一段时间再进货，因此在相同时段，允许缺货的订货次数比不允许缺货的次数要少。

## 二、判断分析题（20 分，共 5 小题）（答在试卷上的内容无效）

（每小题 4 分，其中判断正确 2 分，改错或简述理由 2 分）

1. 如果一个线性规划问题有可行解，则一定有最优解。（错）

**解析：**有可行解，不一定有最优解。因为可能存在可行域无界的情况，这是目标函数若是求最大化，就是无界解，也就是无最优解。

2. 整数规划问题的目标函数值不优于其对应的线性规划问题的最优值。（正确）

**解析：**整数规划的解题思想是切割凑整，把带小数的最优解“舍入化整”。（详见寇伟华版运筹学 163—164 页）

3. 图  $G = (V, E)$ ，若边数等于顶点数减 1，则  $G$  为树。（错误）

**解析：**寇伟华教材对树的定义是：无回路且



能连通的无向图  $G$  称为树。由定义可知是要求的是无向图，若图为有向图，则不满足树条件。

4.图  $G$  中任两个顶点之间恰有一条边相关联，则称图  $G$  为连通图。（错）

**解析：**在无向图中，任意两点之间恰有一条边相关联是完备图而非连通图。

5.网络计划的优化就是根据总成本最低的要求，确定最优总工期。（错）

**解析：**网络计划的优化是针对工程费用和时间一起考虑，制定最少工程费的方案。

**三.建模题（每题 15 分，共 60 分）（答在试卷上的内容无效）**

1.某航空公司正准备增加其中心机场的往来航班，因此需要雇佣更多的服务人员。不同时段有最少需要服务人员数(如表 1 所示)，有 5 种排班方式，每 8 小时一班。5 中排班



方式如下。

排班 1: 6:00~14:00, 即早上 6 点开始上班;

排班 2: 8:00~16:00, 即早上 8 点开始上班;

排班 3: 12:00~20:00, 即中午 12 点开始上班;

排班 4: 16:00~24:00, 即下午 4 点开始上班;

排班 5: 22:00~6:00, 即晚上 10 点开始上班。

表 1

时段	6:00 ~ 8:00	8:00 ~ 10:00	10:00 ~ 12:00	12:00 ~ 14:00	14:00 ~ 16:00	16:00 ~ 18:00	18:00 ~ 20:00	20:00 ~ 22:00	22:00 ~ 00:00	00:00 ~ 6:00
最少需要人数	48	79	65	87	64	73	82	43	52	15

已知五个班每人每天工资分别为 170、160、175、180、195 元，请为航空公司构建一个数学模型，以寻求使每天使用的服务人员费用最小的排班方案。（不用求解）

已知五个班每人每天工资分别为 170、160、175、180、195 元，请为航空公司构建一个数学模型，以寻求使每天使用的服务人员费用最小的排班方案。（不用求解）

**解析：**排班问题并不难，但此题属于“交叉”型排班问题，与经典的“接续式”排班问题不同，应注意甄别，命题人利用考生的惯性思维出题，此题极其容易做错。

**解：**设  $x_i$  是在第  $i$  个排班上班的人数。根据题意得：

$$\min z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 \geq 48 \\ x_1 + x_2 \geq 79 \\ x_1 + x_2 \geq 65 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 87 \\ x_2 + x_3 \geq 64 \\ x_3 + x_4 \geq 73 \\ x_3 + x_4 \geq 82 \\ x_4 \geq 43 \\ x_4 + x_5 \geq 52 \\ x_5 \geq 15 \\ x_i \geq 0 \text{ 且为整数, } i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

→ 化简得：

$$s.t. \begin{cases} x_1 \geq 48 \\ x_1 + x_2 \geq 79 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 87 \\ x_2 + x_3 \geq 64 \\ x_3 + x_4 \geq 82 \\ x_4 \geq 43 \\ x_4 + x_5 \geq 52 \\ x_5 \geq 15 \\ x_i \geq 0 \text{ 且为整数, } i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

#### 四、应用题（94 分，共 4 小题）（答在试卷上的内容无效）

1、（30 分）由产地 1、2、3 向销地 A、B、C 供应某种物资，由产地运往销地的单位物资运费（单位：10 元/t）、各产地的产量、各销地的销量（单位：t）如表 2 所示。又知产地的物资若有剩余，将发生存储费用，三个产地单位物资的存储费用分别为 5,4,3.又假



定产地 2 的物资至少运出 38t，产地 3 的物资至少运出 27t。分别回答下列问题：

（1）试用差值法确定该问题的可行解和目标函数值，并判断该可行解是否为最优解；

（2）本问题是否一定存在最优运输方案？并说明原因（不用求解）

（3）将本问题归结为最小费用最大流问题，并建立相应的运输网络模型；

（4）在（1），（3）的基础上，用最小费用最大流算法求本问题的最优调运方案。（只写详细思路，不用求解）

表 2

销地 产地	A	B	C	产量
1	1	2	2	20
2	1	4	5	40
3	2	3	3	30
销量	30	20	20	

**解析：**本题是对表上作业法的考查。首先看到这是一个不平衡运输问题，销量为 70，产量为 90，虚设一个销地 D，销量为 20；由于产地 2 的物资至少运出 38t，即表明不能运到销地 D（因 D 此时实际上存储地）设其费用为 M，同时将产地 2 拆分为 2 和 2\*，产量分别为 38 和 2；同理产地 3 的物资至少运出 27t，即表明不能运到销地 D，设其费用为 M，同时将产地 2 拆分为 3 和 3\*，产量分别为 27 和 3。

**解：**(1)根据解析，得出以下运输平衡表：

销地 产地	A	B	C	D	产量
1	1	2	2	5	20
2	1	4	5	M	38
2*	1	4	5	4	2
3	2	3	3	M	27
3*	2	3	3	3	3
销量	30	20	20	20	

用差值法求得初始可行解（括号中数字）如下：

销地 产地	A	B	C	D	产量
1	1	2	2 (3)	5 (17)	20
2	1 (28)	4 (10)	5	M	38
2*	1 (2)	4	5	4	2
3	2	3 (10)	3 (17)	M	27
3*	2	3	3	3 (3)	3
销量	30	20	20	20	

此时可行解为：

$$(x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{42}, x_{43}, x_{54}) \\ = (3, 17, 28, 10, 2, 10, 17, 3)$$

目标函数值：

$$z = 2 \times 3 + 5 \times 17 + 1 \times 28 + 4 \times 10 + 1 \times 2 + 3 \times 10 + 3 \times 17 + \\ 3 \times 3 = 251$$

利用闭回路法求得非基变量检验数（括号中数字）如下：

销地 产地	A	B	C	D	产量
1	1 (2)	2 (0)	2	5	20
2	1	4	5 (1)	M (M-7)	38
2*	1	4 (0)	5 (1)	4 (-3)	2
3	2 (2)	3	3	M (M-6)	27
3*	2 (5)	3 (3)	3 (3)	3	3
销量	30	20	20	20	

由于存在负检验数，所以此可行解不是最优解。

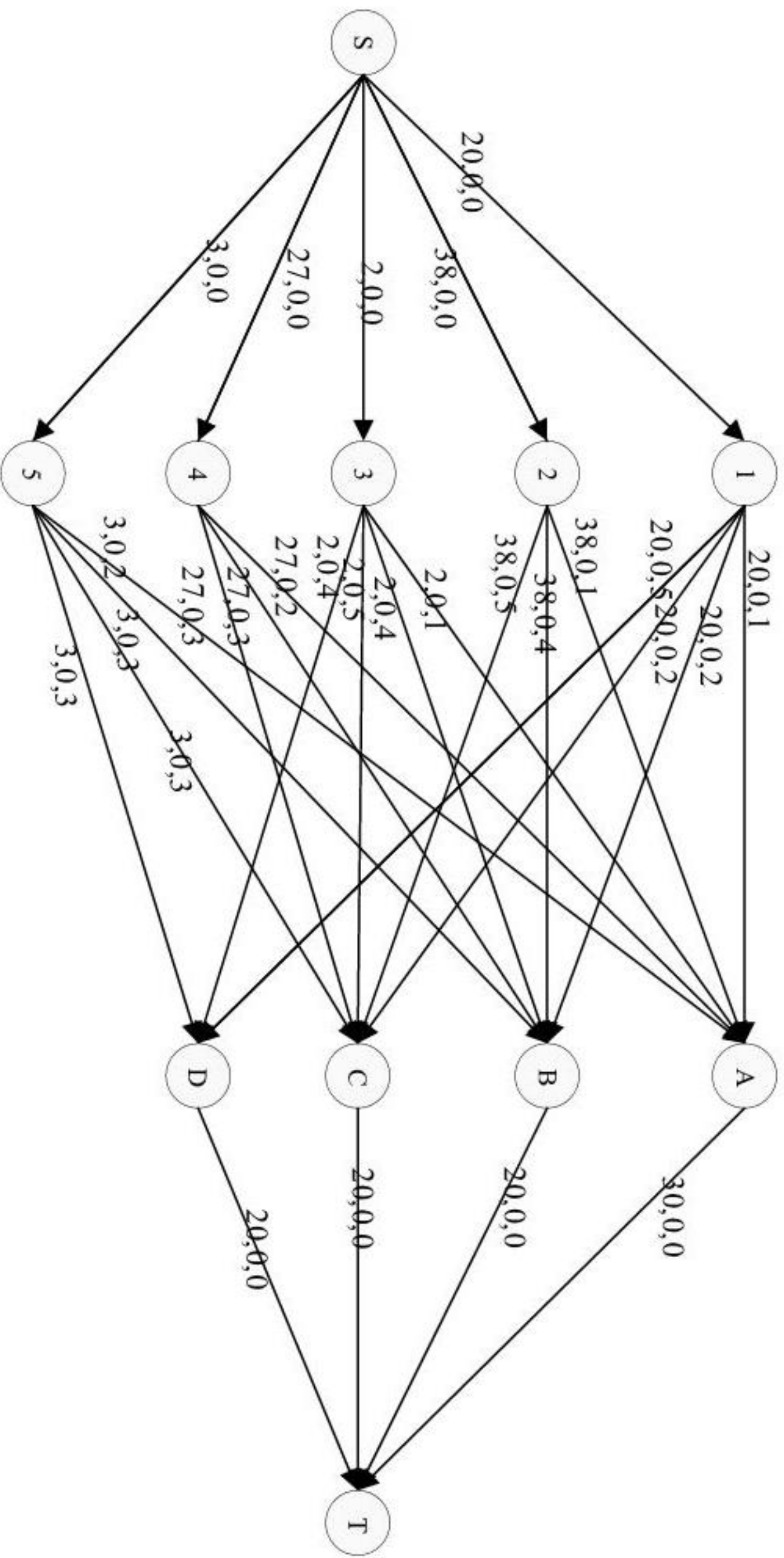
(注：该问利用差值法求解可行解答案有多种，主要有两种原因：①清华版本的差值法找的是每行每列两个最小元素只差，寇玮华版本的找的是每行每列最小和次小的元素之差，其实两种方法均能求出可行解，也无迭代出最优解速率的快慢之分，细心的读者可能已经发现本套红宝书已经使用过这两种方法，并无优劣之分；②在行列中有相同差值的时候，一般来说选择变量序号较小的行或列迭代的快。所以不必纠结于运输问题的可行解



或最优解是否与自己一致，目标函数值相同即可；同时，一般来说命题人设置题目时也会选择有多个最优解的答案，并不拘泥于答案的唯一性。这一点，考生可从历年真题运输问题中发现该规律。)

(2) ①首先，针对方程约束，运输问题构建的方程组从线性代数角度可知其秩为  $m+n-1$ ，即必有解；②其次，针对目标函数，在其以上可知有解的条件下，因为运输问题目标函数为  $\min$  型，且每个变量都大于等于 0，所以目标函数有下界（从高等数学上理解类似于单调增、有下界必有极限）。

(3) 模型如下（弧旁数字表示容量和运费）：



(4) 基本思路:

- a、借用第 (1) 中的可行解, 将数字添加到网络图中分别作为每条边的流量;
- b、求出最大流;
- c、构造伴随网络, 看是否存在负费用增流圈, 若没有即得最优解, 若有转下一步;
- d、在负费用增流圈中进行流量调整;
- e、重复步骤 c 直到得到最优解。

2、(26 分) 下表 (表 3) 为某一约束条件为“ $\leq$ ”的线性规划问题的最有单纯型表, 其中  $x_4, x_5$  为松弛变量。

表 3

$C_j$							
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
	$x_3$	5/2	0	1/2	1	1/2	0
	$x_1$	5/2	1	-1/2	0	-1/6	1/3
$\sigma_j$			0	-4	0	-4	-2

要求: (1) 写出原线性规划问题及其对偶问题的数学模型;

- (2) 直接由最有表写出对偶问题的最优解;
- (3) 当其他条件不变时, 约束条件右端项  $b_1$  在何范围内变化, 上述最优基不变;
- (4) 当约束条件右端的  $b_2=2$  时, 最优解如何改变? (写出计算过程)
- (5) 若以单价 2.5 购入第一种资源是否值得, 为何? 若有人愿意购买第二种资源应要加多少, 为何?

**解析:** 本题是对单纯型法和灵敏度分析的综合考查。

**解:** (1) 因为  $x_4, x_5$  为松弛变量, 所以其价值系数即  $C_4, C_5$  均为 0, 根据  $x_4, x_5$  的检验数可得:

$$0 - 1/2 \times c_3 - c_1 \times (-1/6) = -4;$$

$$0 - 0 \times c_3 - c_1 \times 1/3 = -2;$$



$$c_2 - 1/2 \times c_3 + c_1 \times 1/3 = -4;$$

解得  $c_1 = 6$ ,  $c_2 = -2$ ,  $c_3 = 10$ 。

$$\text{因为: } B^{-1}A_{ij} = A'_{ij}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{求得: } A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}。$$

$$\text{因为 } B^{-1}b = b', b' = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix},$$

$$\text{求得 } b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}。$$

所原线性规划问题模型为:

$$\max z = 6x_1 - 2x_2 + 10x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

其对偶问题模型为：

$$\min f = 5u_1 + 10u_2$$

$$s.t. \begin{cases} 3u_2 \geq 6 \\ u_1 - u_2 \geq -2 \\ 2u_1 + u_2 \geq 10 \\ u_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

(2) 对偶变量的最优解就是松弛变量对应的检验数的相反数，即  $U^* = (4, 2)$

$$(3) \max\left(\frac{-5/2}{1/2}\right) \leq \Delta b_1 \leq \min\left(\frac{-5/2}{-1/6}\right),$$

即  $-5 \leq \Delta b_1 \leq 15$ ， $0 \leq b_1 \leq 20$ 。

$$(4) -15/2 \leq \Delta b_2 \leq +\infty, \text{ 则 } b_2 \geq 5/2,$$

即  $b_2 = 2$  时超出了其灵敏度范围，应重新计

算最优解：

$$b' = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

将新的  $b$  值带入到最优表中再利用对偶单纯性法进行迭代：

$C_j$			6	-2	10	0	0
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
10	$x_3$	$5/2$	0	$1/2$	1	$1/2$	0
6	$x_1$	$-1/6$	1	$-1/2$	0	$-1/6$	$1/3$
$C_j - Z_j$			0	-4	0	-4	-2
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
10	$x_3$	$7/3$	1	0	1	$1/3$	$1/3$
-2	$x_2$	$1/3$	-2	1	0	$1/3$	$-2/3$
$C_j - Z_j$			-8	0	0	$-8/3$	$-14/3$

最终得出新的最优解  $x_3 = 7/3$ ， $x_2 = 1/3$

(5) 第一种资源的影子价格是 4，因此以单

价 2.5 购入值得。若出卖第二种资源，则至少要价 2，因为第二种资源的影子价格为 2。

3. (20 分) 某汽车加油站只有一个加油罐，汽车到达为泊松流，加油时间服从负指数分布。平均到达率和平均服务率分别为  $\lambda$  和  $\mu$ 。已知汽车排队等待（不含服务时间）1 小时的损失费用为 C 元，加油站空闲 1 小时损失费用为 2C 元。试分别回答一下问题：

(1) 加完油的汽车离开加油站是否为泊松流？为什么？

(2) 汽车来加油站不用等待就可以加油的概率；

(3) 设加油站每 12min 到达 1 辆汽车，加油站对每辆汽车的加油时间为 3min，问汽车在加油站的平均等待时间、平均停留时间，及汽车平均排队数；

(4) 求使总的损失费（包括顾客排队等待



的损失费和服务机构空闲时的损失费) 最小的最大服务强度  $\rho$ 。

**解析：**本题考查的时排队论。应当弄清各个参数之间的关系及其计算公式。

**解：**(1) 泊松流的特征为：

- a、平稳性。在时间  $t$  内平均到达的顾客数只与时间  $t$  的长短有关，而与起点时间无关。
- b、无后效性。在时间  $t$  内到达  $n$  个顾客这一事件，与起始时刻以前发生的事件相互独立、互不关联。
- c、普通性。在充分小的时间间隔中，最多有一个到达发生，有两个或两个以上到达发生的概率很小，以致可以忽略。

在加油站加完油的车是依次离开，并且是先加完先离开，离开顺序已定，没有随机性，并且当前车是否能离开还受前车离开时间的影响，因此，离开加油站的车就不是泊松

流。

$$(2) \quad P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu};$$

$$(3) \quad \lambda = 5 \text{ 辆/h}, \quad \mu = 20 \text{ 辆/h},$$

$$\rho = \frac{5}{20} = 0.25,$$

$$\text{队长 } L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0.25}{1 - 0.25} = \frac{1}{3},$$

$$\text{排队长 } L_q = L - \rho = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$\text{所以平均等待时间 } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{60}$$

即是一分钟，平均停留时间为：

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

即是 4 分钟。

汽车平均排队数就是排队长  $L_q = 1/12$ 。

(4) 设总的损失费用为：

$$F(\rho) = Lq \times Wq \times C + (1 - \rho) \times 2C \times 1$$

并利用  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  消去  $\lambda$  化简得：

$$F(\rho) = \frac{C\rho^4}{\lambda(1-\rho)^2} + 2C(1-\rho)$$

再对  $\rho$  求导数得：

令  $F'(\rho) = 0$ ，解得  $\rho = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda}}$ （因为

$\rho < 1$ ，所以舍掉  $\rho = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda}}$ ）

4.（18分）某运输公司有 500 辆卡车，在超负荷运输的情况下，年利润为 24 万元/辆，但其完好率仅为 0.4；在正常负荷情况下年利润为 16 万元/辆，完好率为 0.8.公司希望在四年内合理安排每年年初分配正常机器在不同负荷下运输的卡车数量，使四年末仍

有 180 辆卡车保持完好，并获利最多。试采用动态规划的方法帮助该公司制定分配计划。

**解析：**本题考查的是动态规划解决实际问题。关键是正确划分阶段和写出状态转移方程。

**解：**这是一个 4 阶段决策过程，阶段  $k$  表示第  $k$  年度。令  $s_k$ —第  $k$  年初正常的车辆；

$x_k$ —第  $k$  年初分配在高负荷工作的车辆；

$w_k(s_k, x_k)$ — $s_k$  辆车辆在第  $k$  年的产生的利润：

$$w_k(s_k, x_k) = 24x_k + 16(s_k - x_k) = 16s_k + 8x_k;$$

$$\begin{aligned} T_k(s_k, x_k) &= s_{k+1} \\ &= 0.4x_k + 0.8(s_k - x_k) = 0.8s_k - 0.4x_k; \end{aligned}$$

$f_k(s_k)$ —当第  $k$  年初有  $s_k$  辆车正常时，从第  $k$  年至第 4 年的利润最高，递归方程为：

$$\begin{cases} f_5(s_5) = 0 \\ f_k(s_k) = \max \{16s_k + 8x_k + f_{k+1}(s_{k+1})\}, k \in 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

在此假设  $s_k$ ,  $x_k$  均为连续变量

$$f_4(x_4) = \max \{16s_4 + 8x_4\}, x_4 \in [0, s_4]$$

$$s_5 = 0.8s_4 - 0.4x_4 = 180$$

$$x_4 = 2s_4 - 450$$

可知  $x_4^* = 2s_4 - 450$ ,

$$f_4(s_4) = 32s_4 - 3600$$

第二阶段:

$$f_3(x_3) = \max \{16s_3 + 8x_3 + f_4(s_4)\}, x_3 \in [0, s_3]$$

$$s_4 = 0.8s_3 - 0.4x_3。$$

于是

$$\begin{aligned} f_3(x_3) &= \max \{16s_3 + 8x_3 + 32(0.8s_3 - 0.4x_3) - 3600\} \\ &= 41.6s_3 - 8.64x_3 - 3600 \end{aligned}$$



可知:  $x_3^* = 62$ ,  $f_3(s_3) = 41.6s_3 - 3600$

第三阶段:

$$f_2(x_2) = \max \{16s_2 + 8x_2 + f_3(x_3)\}, x_2 \in [0, s_2]$$

$$s_3 = 0.8s_2 - 0.4x_2。$$

于是

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &= \max \{16s_2 + 8x_2 + 41.6(0.8s_2 - 0.4x_2) - 3600\} \\ &= 49.28s_2 - 8.64x_2 - 3600 \end{aligned}$$

可知  $x_2^* = 0$ ,  $f_2(s_2) = 49.28s_2 - 3600$

第四阶段:

$$f_1(x_1) = \max \{16s_1 + 8x_1 + f_2(x_2)\}, x_1 \in [0, s_1]$$

$$s_2 = 0.8s_1 - 0.4x_1, \quad s_1 = 500。$$

于是

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \max \{16s_1 + 8x_1 + 49.28(0.8s_1 - 0.4x_1) - 3600\} \\ &= 55.42s_1 - 11.712x_1 - 3600 \end{aligned}$$

$$x_1^* = 0, \quad f_1(s_1) = 24112。$$

反向追踪回去

$$s_1 = 500, \quad s_2 = 400, \quad s_3 = 320, \quad s_4 = 256。$$

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 62。$$

可以看出，前三年全部车辆投入正常负荷情况下工作，第四年投入 62 辆高负荷工作，这样可保证第 5 年初有 180 辆完好且利润最大，最大利润为 24112 万元。