试题代码：923

西南交通大学 2008 年硕士研究生

入学考试试题

试题名称：材料力学

考试时间：2008 年 1 月

考生请注意：

1.本试题共___题，共___页，满分___分，请认真检查；

2.答题时，直接将答题内容写在考场提供的答题纸上，答在试卷上的内容无效；

3.请在答题纸上按要求填写试题代码和试题名称；

4.试卷不得拆开，否则遗失后果自负。

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

（1）通过低碳钢的材料力学常规拉伸试验，可以获得低碳钢材料的应力-应变关系曲线，该曲线中的应力是指低碳钢试件试验段横截面上的______。

A、真实应力　　　　B、名义应力

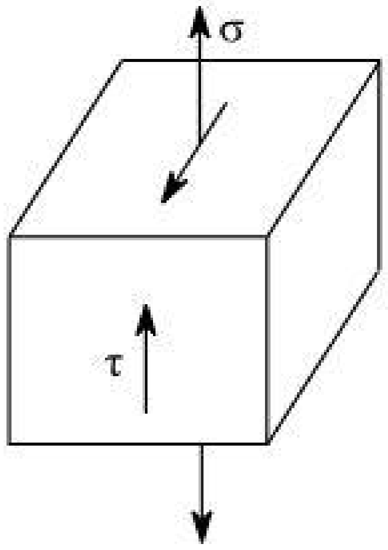
C、屈服应力　　　　D、极限应力

（2）圆棒状铸铁试件在材料力学常规扭转试验中的破坏原因是________。

A、拉伸破坏　　　　B、压缩破坏

C、剪切破坏　　　　D、塑性破坏

（3）下图所示应力状态（数值上$\sigma=15MPa$，$\tau=15MPa$）是______。



A、单向应力状态

B、平面应力状态

C、三向应力状态

D、纯剪切应力状态

（4）下列关于疲劳破坏的说法，错误的是__________。

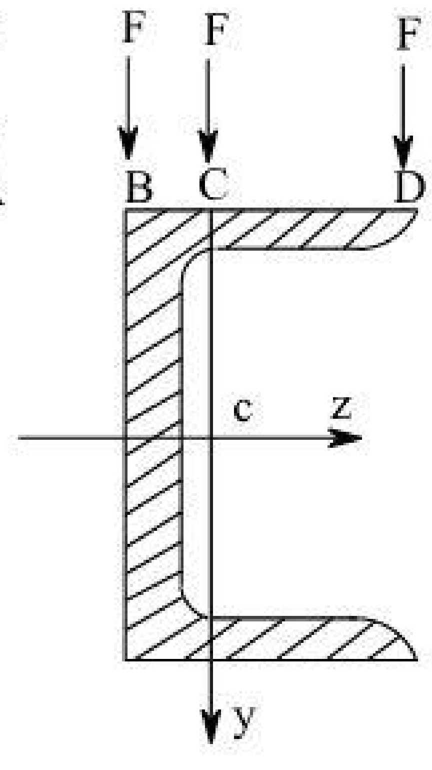
A、金属材料构件在交变应力的作用下，才引起疲劳破坏

B、金属材料构件中裂纹源的形成和裂纹扩展阶段占构件疲劳寿命的绝大部分

C、疲劳破坏的最终结果是金属材料构件出现骤然的脆断

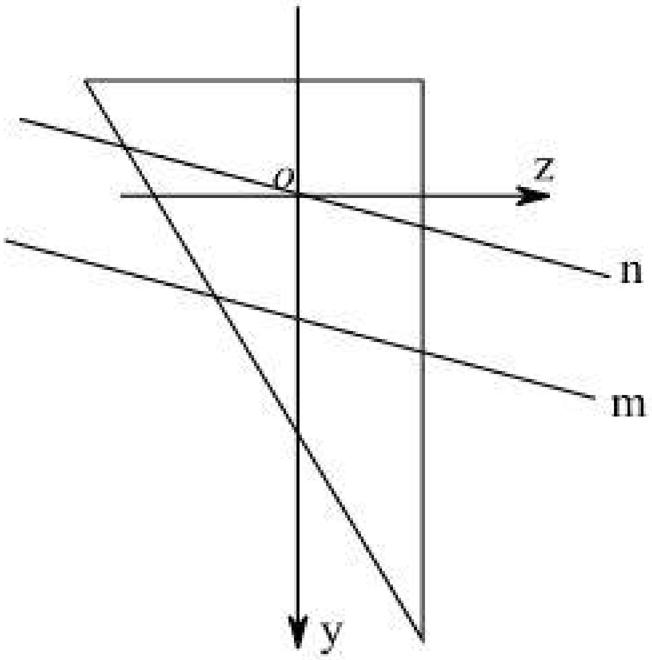
D、疲劳破坏时金属材料构件在高应力下（如 $\sigma < \sigma_S$）发生的缓慢塑性破坏

（5）如图所示，横截面的等直悬臂梁，当其自由端荷载位于图上的 A、B、C、D 那个位置时，梁有可能发生平面弯曲_______。



（6）如图所示横截面（形心为 O）的梁在纯弯曲时（弯矩为 M_Z），其中性轴应力图中的 y,z,m,n 轴中的哪一根轴。（$I_{yz} > 0$），正确

的答案是________。



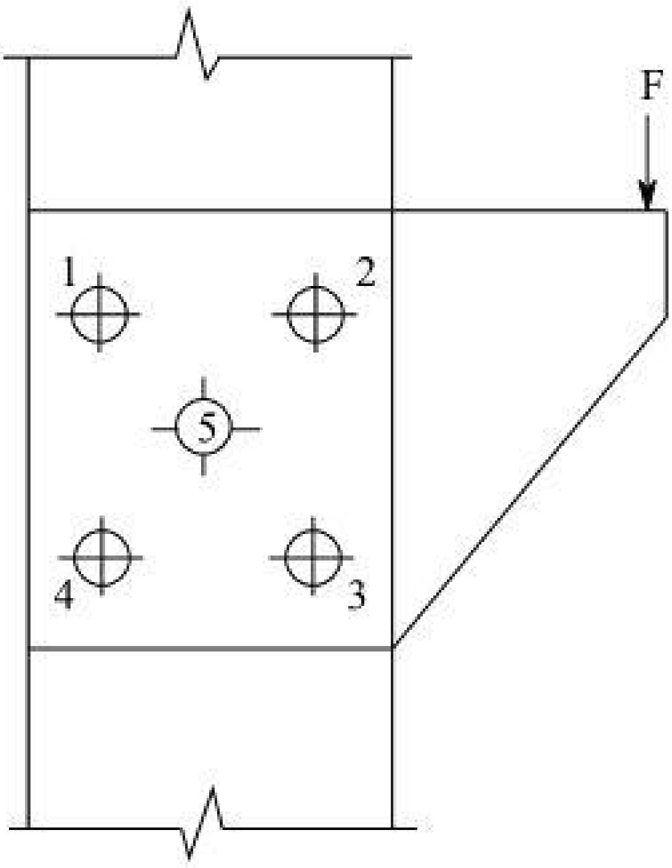
A、y 轴

B、Z 轴

C、m 轴

D、n 轴

（7）图示铆钉组连接件，1，2，3，4 号铆钉呈正方形排列，5 号铆钉位于正中央，各个铆钉的直径相同，在力 F 的作用下，按连接件的实用计算方法，下列说法正确的是__________。



A、各个铆钉的受力相等

B、1 号铆钉的受力最大，5 号铆钉的受力最小

C、2 号铆钉的受力最大，5 号铆钉的受力最小

D、1 号铆钉受力大，3 号铆钉的受力最小

（8）在两端铰支的细长压杆稳定分析中，其临界应力 σ_{Cr} 不得超过压杆材料的_______。

A、屈服强度　　　　B、弹性极限

C、比例极限　　　　D、强度极限

（9）在横力弯曲下，符合国家标准的工字钢梁，在危险截面应_____。

A、按 $\sigma_{\max} \le [\sigma]$ 校核上下表面的正应力

B、按 $\tau_{\max} \le [\tau]$ 校核中性层的切应力

C、按第三强度理论校核翼缘与腹板连接处的复杂应力

D、除了按 $\sigma_{\max} \le [\sigma]$ 校核上下表面的正应力，按 $\tau_{\max} \le [\tau]$ 校核中性层的切应力，还应该按第三强度理论校核翼缘与腹板的连接处的复杂应力。

E、只需按校核上下表面的正应力，按

$\tau_{\max} \le [\tau]$校核中性层的切应力就可以了。

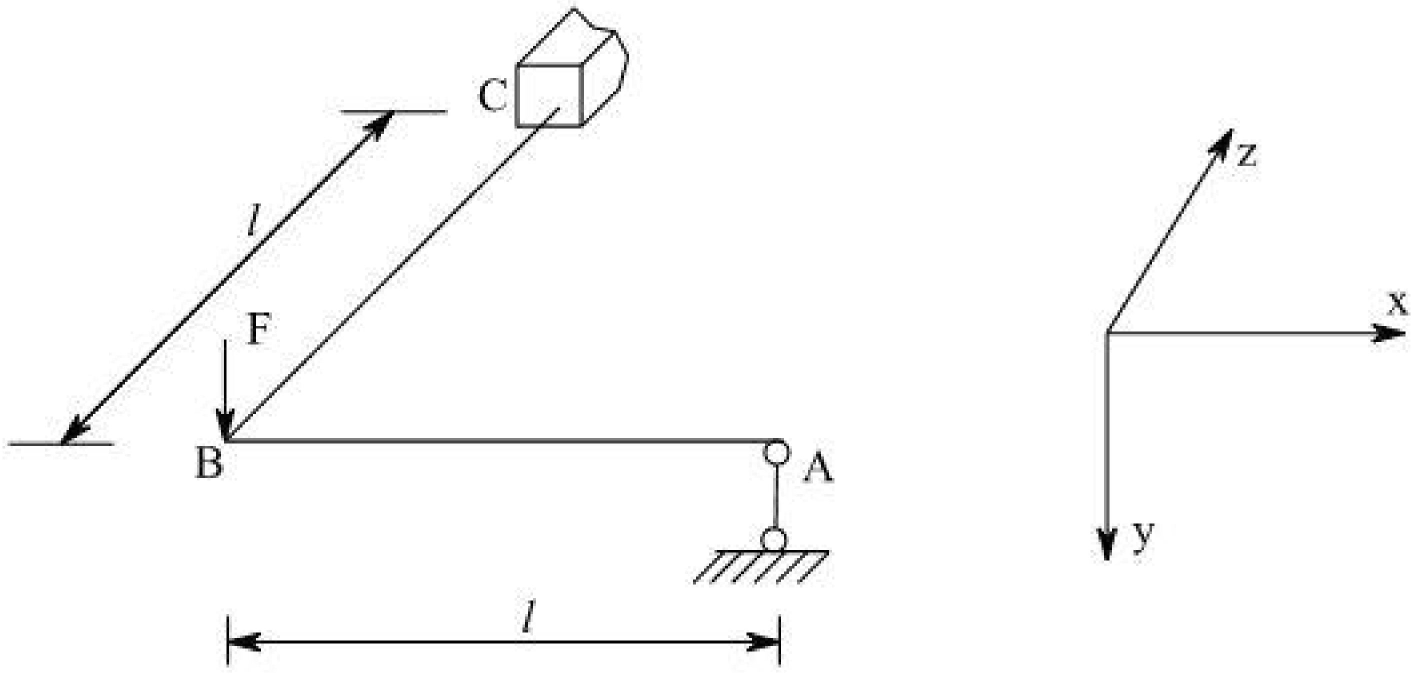
（10）图示刚架在 C 处固定，在 B 处有一荷载 F 作用，对于 BC 段，下列表述最合适的是________。

A、BC 段将发生弯扭组合变形；

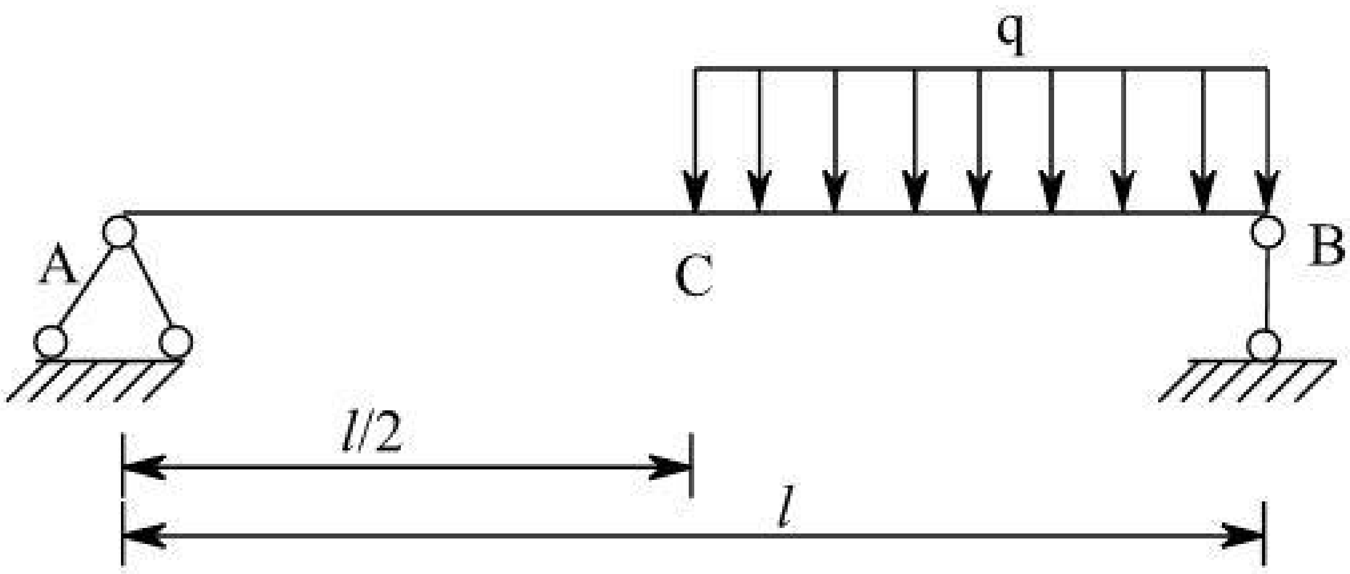
B、BC 段将发生横力弯曲；

C、BC 段有剪力和弯矩，但没有轴力；

D、要求解出 BC 段的内力，必须把 A 处的多于约束解除掉，才能求解。

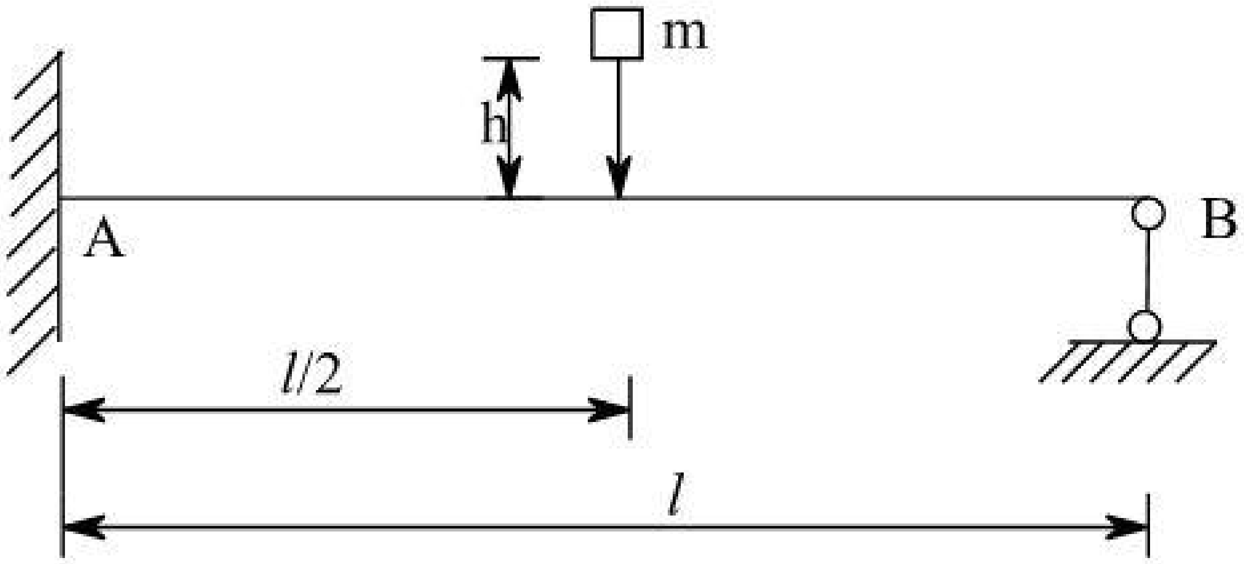


二、（15 分）作出下图简支梁的剪力图和弯矩图，CB 段作用有向下的均布荷载 q。

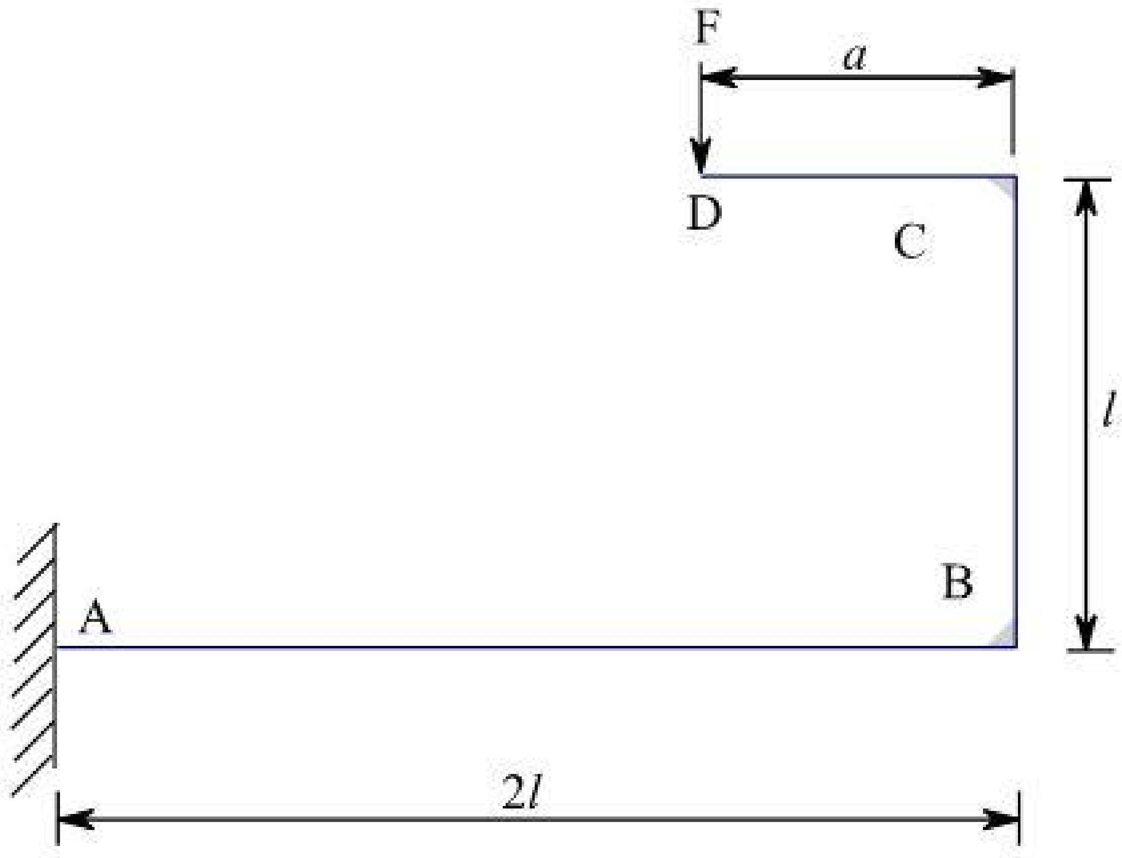


三、（15 分）图示弯曲刚度为 EI 的梁 AB，梁长度为 l，有一个质量为 m 的物体从高度 h 处自由落到梁的跨中位置，与梁顶面发生冲击，求梁中的最大弯矩。

设 $EIh = mgl^3$，g 为重力加速度。



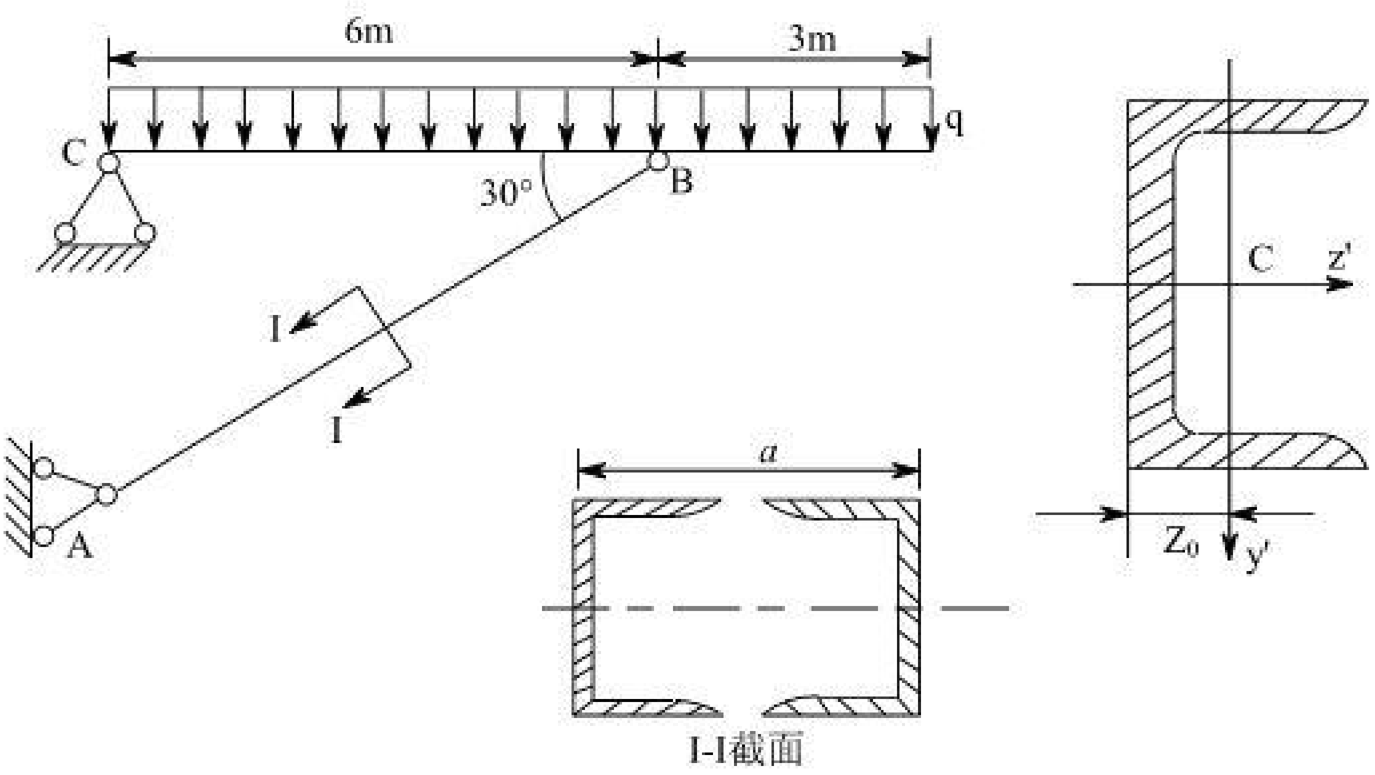
四、（15 分）平面刚架各杆的 EI 为常数，证明当 $a/l = 4/5$ 时 D 点的水平位移为 0，不计轴力和剪力对变形的影响。



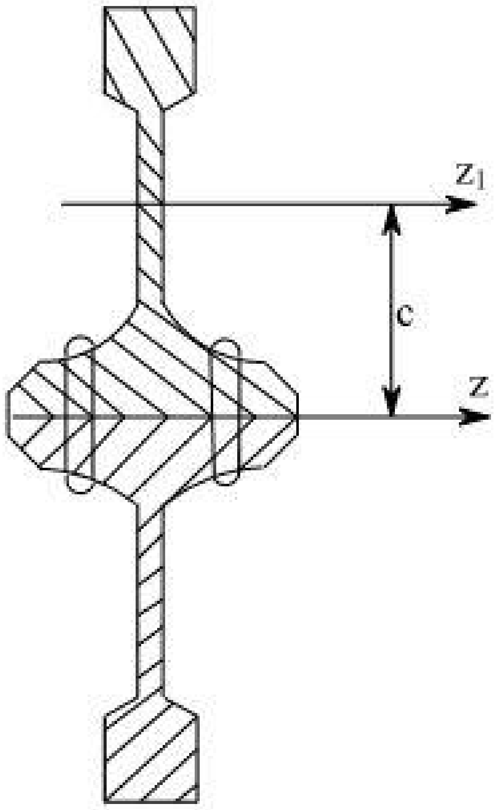
五、（20 分）图示结构，$E = 206MPa$，$\sigma_p = 200MPa$，AB 杆两端为球铰，求能使AB 杆达到最大临界应力的槽钢两外表面的间距 a 的值，并根据 AB 杆的临界荷载的 $1/3$ 确定荷载 q 的许可值 $[q]$。AB 杆由两根 10 号槽钢（通过焊接等办法）构成了一个整体的箱型截面杆件，10 号槽钢的参数为：

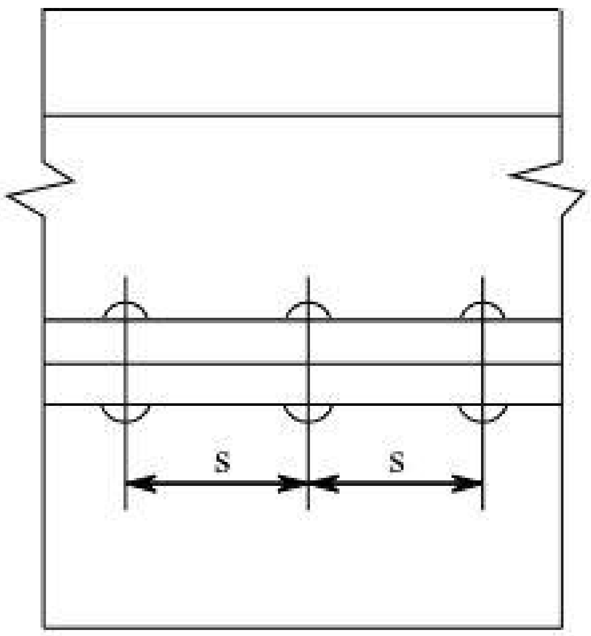
$A = 12.74cm^2$（横截面面积）

$I_{Z'} = 198.3cm^4, I_{Y'} = 25.6cm^4$,
$z_0 = 1.52cm$，形心为c。



六、（20 分）两根钢轨铆接成组合梁，其连接情况如图，每根钢轨的横截面积 $A=8000mm^2$，形心距离底边的高度 $c=80mm$，每一根钢轨对其自身形心轴的惯性矩 $I_{Z1}=1600\times10^4 mm^4$，铆钉间距 $s=150mm$，铆钉直径 $d=20mm$，铆钉许用切应力 $[\tau]=95MPa$，若梁内剪力 $F_s=50kN$，试校核该铆钉的剪切强度。不考虑上、下钢轨之间的摩擦。



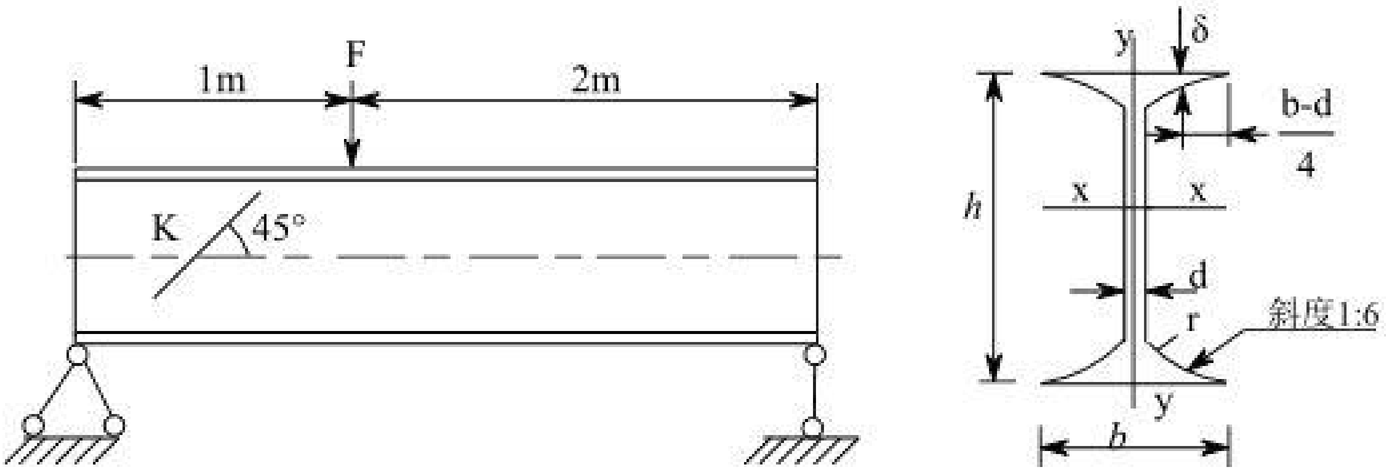


七、（20 分）在图示$28a$工字钢梁的中性层上的K点处，与轴线成45°方向贴有应变片。今测得$\varepsilon_{45^\circ}=-2.6\times10^{-4}$，已知$E=210GPa,\nu=0.28$。试求梁所承受的荷载$F$。已知$28a$工字钢的参数为：

$$h=280mm,b=122mm,d=8.5mm,$$
$$\delta=13.7mm,r=10.5mm$$

横截面积为：

$$A=55.45cm^2,I_x=7114cm^4,$$
$$I_x/S_x=24.62cm,I_y=345cm^4$$



八、（15 分）试证明各向同性材料的三个弹性常数之间存在关系：$G=\dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$。

西南交通大学2008年硕士研究生入学考试

材料力学详细解析

一、选择题（共10小题，每小题3分，共30分）

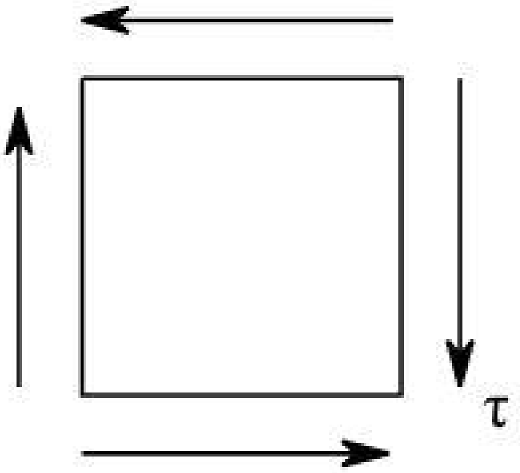
（1）通过低碳钢的材料力学常规拉伸试验，可以获得低碳钢材料的应力-应变关系曲线，该曲线中的应力是指低碳钢试件试验段横截面上的______。

A、真实应力　　　　B、名义应力

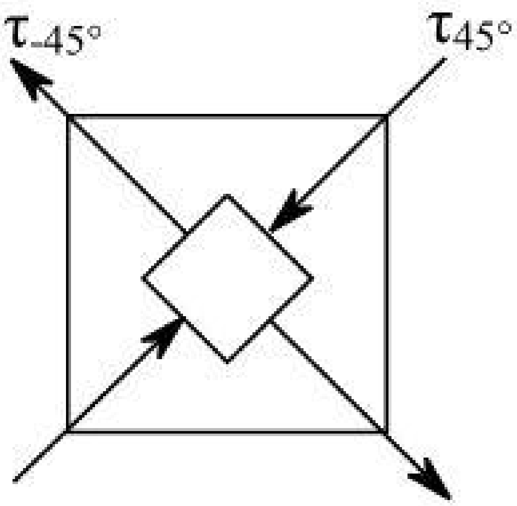
C、屈服应力　　　　D、极限应力

解析：选择B根据低碳钢的$\sigma-\varepsilon$曲线，其纵坐标$\sigma=\dfrac{F}{A}$实际上是名义应力，亦称为工程应力，因为超过屈服阶段以后，试件横截面面积显著缩小，仍用原面积求得的应力并不代表试件横截面的真实应力。此外，曲线的横坐标其实代表的是名义应变。

（2）圆棒状铸铁试件在材料力学常规扭转试验中的破坏原因是_______。



1-a



1-b

A、拉伸破坏　　　　B、压缩破坏

C、剪切破坏　　　　D、塑性破坏

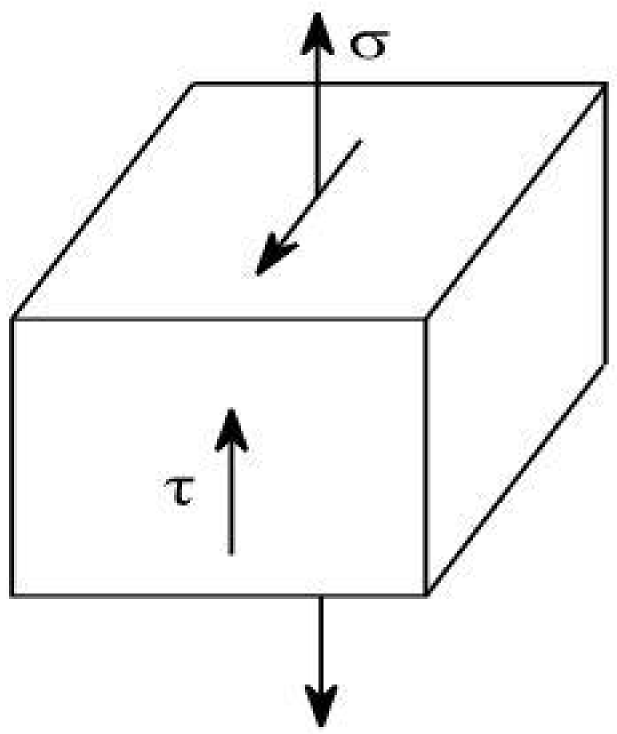
解析：选择 A

1-a 图所示为试件表面一点的受力状态，其主应力如 1-b 所示，在-45°方向上有主拉应力，且$\sigma_{-45°}=\tau$，由于铸铁的拉伸强度低于剪切强度，故沿-45°方向上产生拉伸破坏。

在圆杆扭转试验中，低碳钢的剪切强度低于拉伸强度，一般会发生剪切破坏；而铸铁的

拉伸强度低于剪切强度，其一般发生拉伸破坏。此结论可推广到塑性材料和脆性材料中。

（3）下图所示应力状态（数值上



$\sigma = 15MPa, \tau = 15MPa$）是______。

A、单向应力状态

B、平面应力状态

C、三向应力状态

D、纯剪切应力状态

解析：选择 B

方法一：计算法

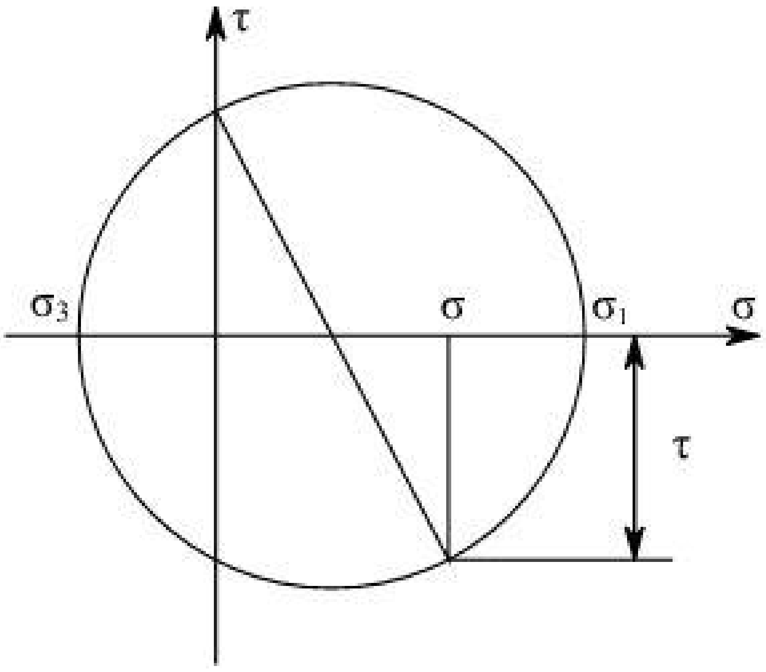
$$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = \begin{cases} \dfrac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \\ \dfrac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

从而处于平面应力状态。

方法二：应力圆法



做应力圆如图，由应力圆可以直观的看出该点处于平面应力状态。

判断单元体处于何种应力状态时，不是简单的看图上所给的力处于几个平面，而是分析三个主应力的大小来进行判断。此两种

判别方法要掌握。

（4）下列关于疲劳破坏的说法，错误的是__________。

A、金属材料构件在交变应力的作用下，才引起疲劳破坏

B、金属材料构件中裂纹源的形成和裂纹扩展阶段占构件疲劳寿命的绝大部分

C、疲劳破坏的最终结果是金属材料构件出现骤然的脆断

D、疲劳破坏时金属材料构件在高应力下（如 $\sigma < \sigma_S$）发生的缓慢塑性破坏

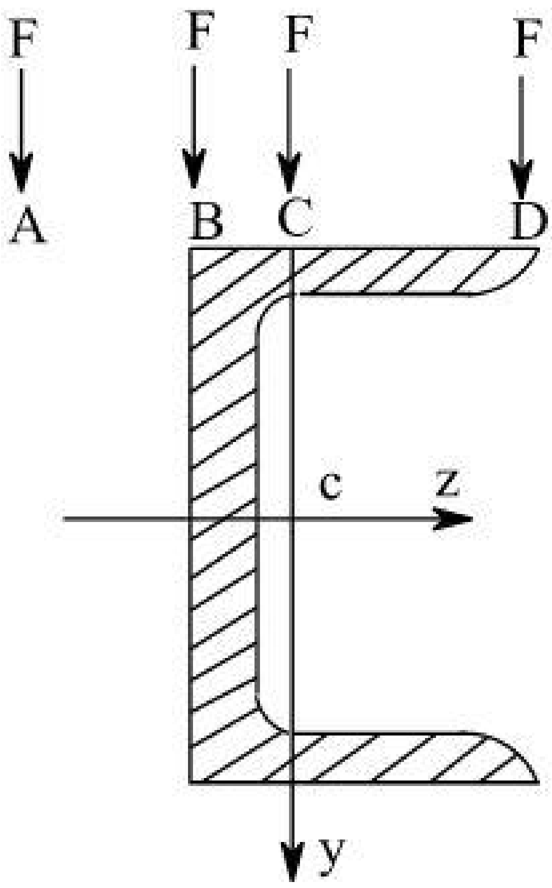
解析：选择 D

金属材料若长期处于交变应力之下，在最大工作应力远低于材料的屈服强度，且不产生明显的塑性变形情况下，也有可能发生骤然的断裂，这种破坏称为疲劳破坏。

其主要特征为：①构件内的最大工作应力远远低于静荷载下材料的极限强度或屈服强度，②即使是塑性比较好的钢材，疲劳破坏也是在没有明显的塑性变形条件下突然发生的，③疲劳破坏的端口表面呈现两个截然不同的两个区域，其一是光滑区，其一是晶粒状的粗糙区。近代实验研究证明，疲劳破坏实质上是构件在交变应力下，由疲劳裂纹源的形成，疲劳裂纹的扩展以及最后脆断这三个阶段组成的破坏过程。

（5）如图所示，横截面的等直悬臂梁，当其自由端荷载位于图上的 A、B、C、D 那个位置

时，梁有可能发生平面弯曲________。



解析：选择 A

为使梁只发生弯曲而不发生扭转，梁上的横向外力所在的平面必须通过截面的弯曲中心，即剪切中心。要平弯的充分条件是：F 过弯心+F 平行于形心主惯性轴之一。

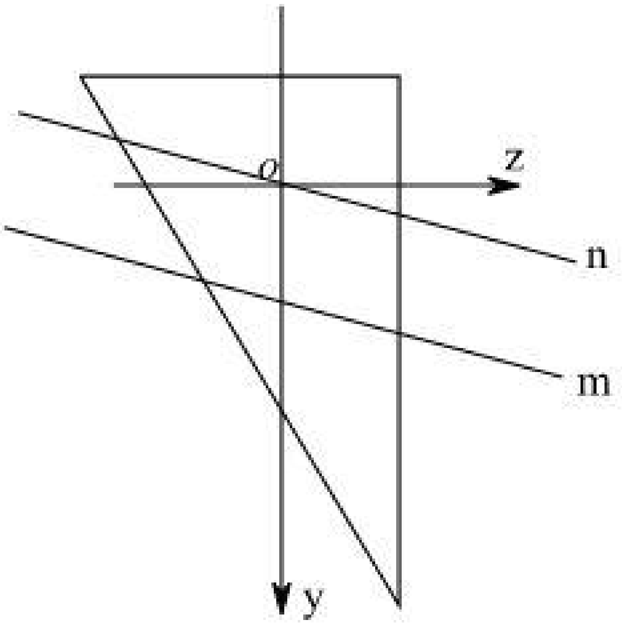
（6）如图所示横截面（形心为 O）的梁在纯弯曲时（弯矩为 M_Z），其中性轴应力图中的 y,z,m,n 轴中的哪一根轴。（$I_{yz}>0$），正确的答案是________。

A、y 轴

B、Z 轴

C、m 轴

D、n 轴



解析：选择 D。

对于纯弯曲，中性轴必过形心。考虑中性轴与 y 轴夹角 θ：$\tan\theta=\dfrac{M_Z I_Z+M_y I_{yz}}{M_y I_Z+M_z I_{yz}}$

令 $M_y=0$，由已知 $I_{yz}>0$，而 I_z 恒大于0，故由上式 $\tan\theta>0$ 且非无穷大，可得 $0<\theta<90°$ 故中性轴为 n 轴。

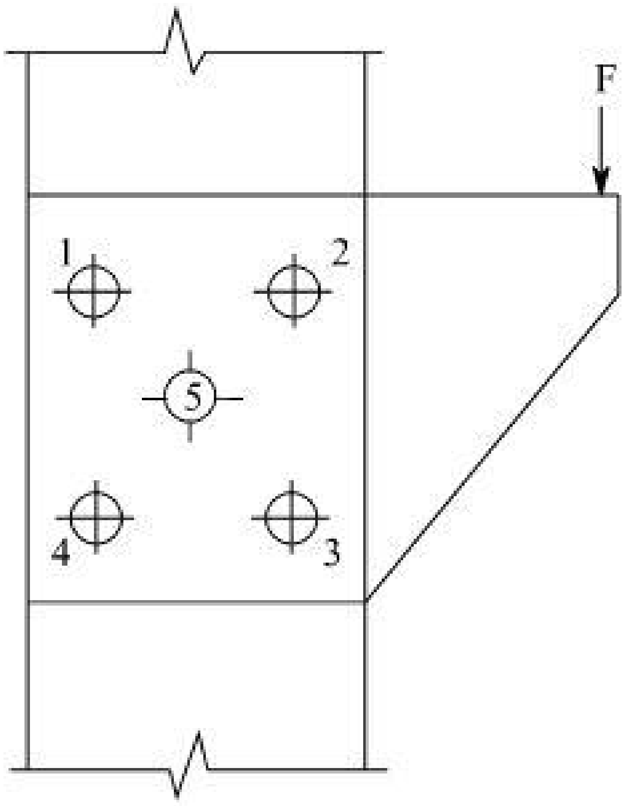
（7）图示铆钉组连接件，1，2，3，4 号铆钉呈正方形排列，5 号铆钉位于正中央，各个铆钉的直径相同，在力 F 的作用下，按连接件的实用计算方法，下列说法正确的是__________。

A、各个铆钉的受力相等

B、1 号铆钉的受力最大，5 号铆钉的受力最小

C、2 号铆钉的受力最大，5 号铆钉的受力最小

D、1 号铆钉受力大，3 号铆钉的受力最小



解析： 选择 B

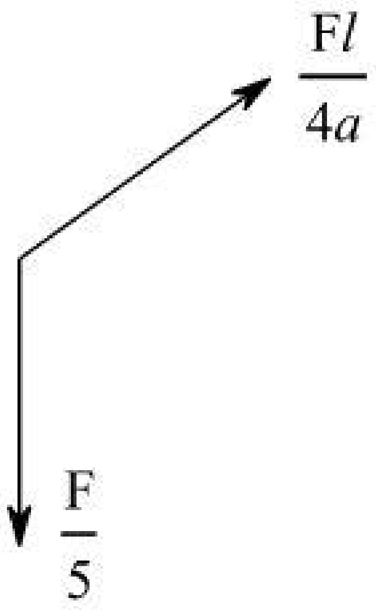
受力如图所示，力 F 对五个螺栓产生向下的剪力和顺时针的力偶作用，其中 $\sum F_i (i=1,2,3,4,5)$ 共同抵抗剪力 F，$\sum F_i' (i=1,2,3,4)$ 共同抵抗力偶矩 $M=Fl$，由受力图分析可以知道，2,4 受力最大，5 受力最小。

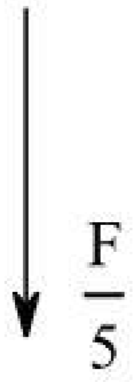
另：此题出题不严谨，仅供思考。

对于受力最小情况，不一定为 5 号铆钉，也

有可能为 1 号铆钉。令 1 号至 5 号铆钉间距为 a

对于 1 号：　　　　　　　　对于 5 号：





在 $\frac{Fl}{4a}=\frac{F}{5}\sqrt{2}$ 即 $\frac{l}{a}=\frac{4\sqrt{2}}{5}\approx 1.13$ 时两铆钉受力相同，

当确保 $\frac{l}{a}>\frac{4\sqrt{2}}{5}$ 时才有 5 号铆钉受力最小。

当然若从题目给的比例关系看，不存在错误。

（8）在两端铰支的细长压杆稳定分析中，其临界应力 σ_{Cr} 不得超过压杆材料的________。

A、屈服强度　　　　　　B、弹性极限

C、比例极限　　　　　D、强度极限

解析：选择 C

由于在推导中心受压直杆临界力的欧拉公式时，假定材料是在线弹性范围内工作的，因此压杆在临界力 F_{cr} 作用下的应力也不得超过材料的比例极限 σ_p

（9）在横力弯曲下，符合国家标准的工字钢梁，在危险截面应__________。

A、按 $\sigma_{\max} \le [\sigma]$ 校核上下表面的正应力

B、按 $\tau_{\max} \le [\tau]$ 校核中性层的切应力

C、按第三强度理论校核翼缘与腹板连接处的复杂应力

D、除了按 $\sigma_{\max} \le [\sigma]$ 校核上下表面的正应力，按 $\tau_{\max} \le [\tau]$ 校核中性层的切应力，还应该按第三强度理论校核翼缘与腹板的连接

处的复杂应力。

E、只需按校核上下表面的正应力，按 $\tau_{\max} \leq [\tau]$ 校核中性层的切应力就可以了。

解析：选择 E

对符合国家标准的型钢来说，并不需要对腹板和翼缘交点处的点进行校核，因为型钢截面在腹板和翼缘交接处有圆弧，且工字钢翼缘的内边处有 1:6 的斜坡从而增加了交界处的截面宽度，这就保证了在截面的上下边缘处的正应力和中性轴上的切应力都不超过许用应力的情况下，腹板和翼缘交界处的点一般不会发生强度不够的问题，但是对于自行设计的由三块钢板焊接而成的组合工字梁，就要校核腹板和翼缘交界处的临近各点的强度。

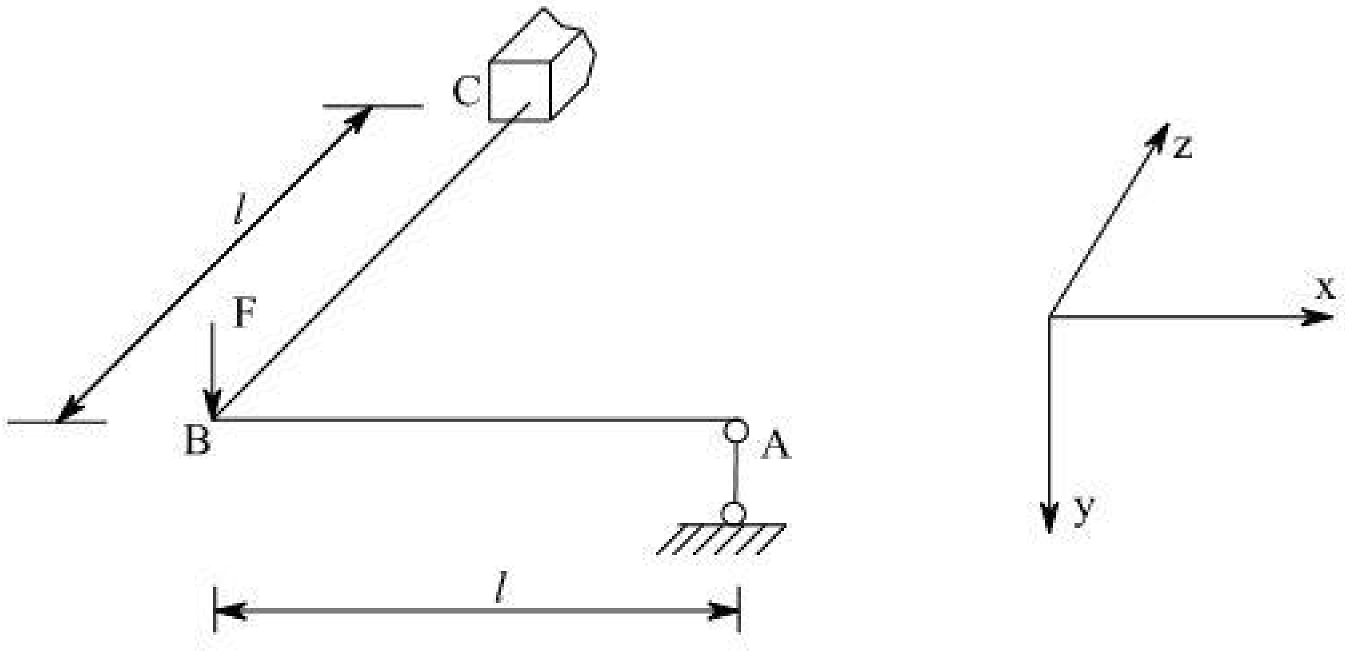
（10）图示刚架在 C 处固定，在 B 处有一荷载 F 作用，对于 BC 段，下列表述最合适的是________。

A、BC 段将发生弯扭组合变形；

B、BC 段将发生横力弯曲；

C、BC 段有剪力和弯矩，但没有轴力；

D、要求解出 BC 段的内力，必须把 A 处的多于约束解除掉，才能求解。



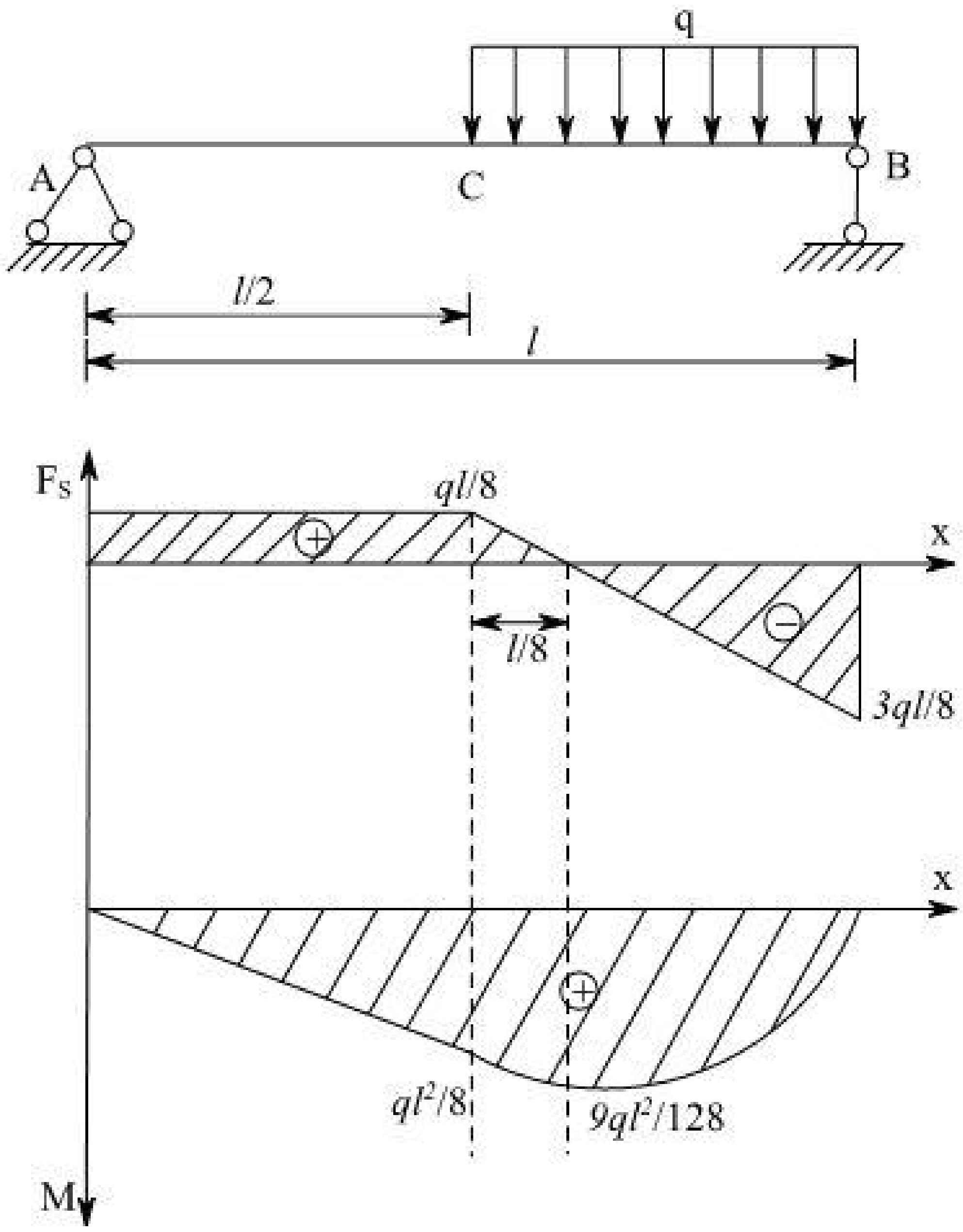
解析：选择 A

对于 A，B 选项，显然 A 处有支座反力，故 BC 发生的弯扭组合变形，所以 A 正确，B 错误。对于 C 选项，BC 段还有扭矩，不是

很完整，故不选。对于 D 选项，错误之处在于“必须”二字，因为只要去点一个约束就可以，把 A 处的多于约束解除掉，并不是必须的。

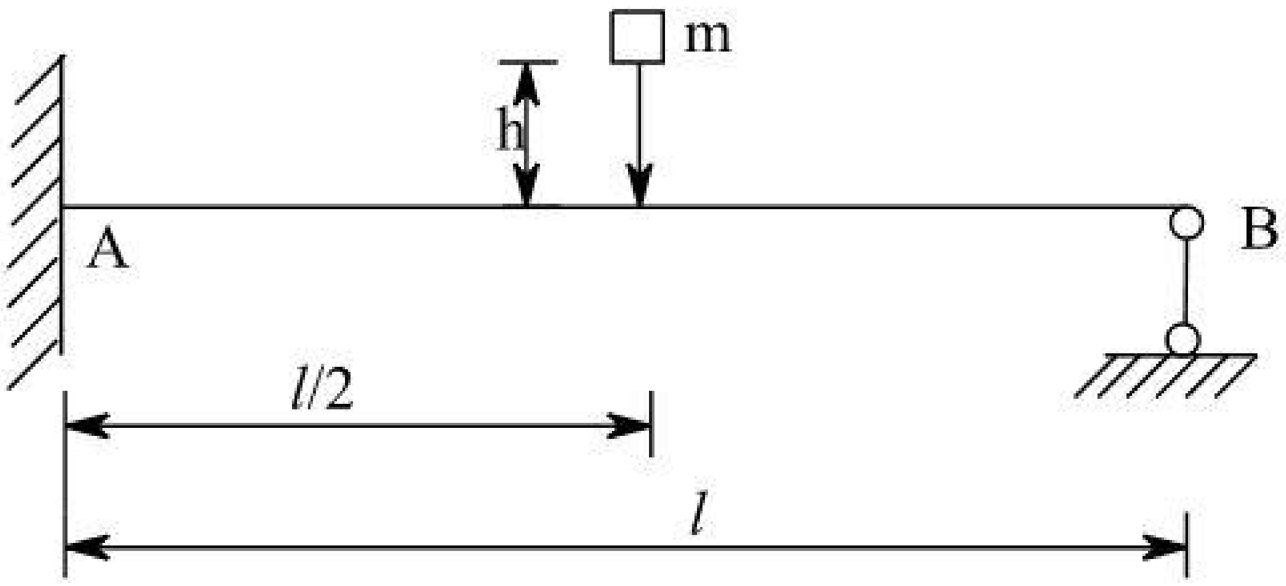
本题选择的是最合适的一个选项，故要认真琢磨。

二、（15 分）作出下图简支梁的剪力图和弯矩图，CB 段作用有向下的均布荷载 q。



三、（15 分）图示弯曲刚度为 EI 的梁 AB，梁长度为 l，有一个质量为 m 的物体从高度 h 处自由落到梁的跨中位置，与梁顶面发生冲击，求梁中的最大弯矩。

设 $EIh = mgl^3$，g 为重力加速度。

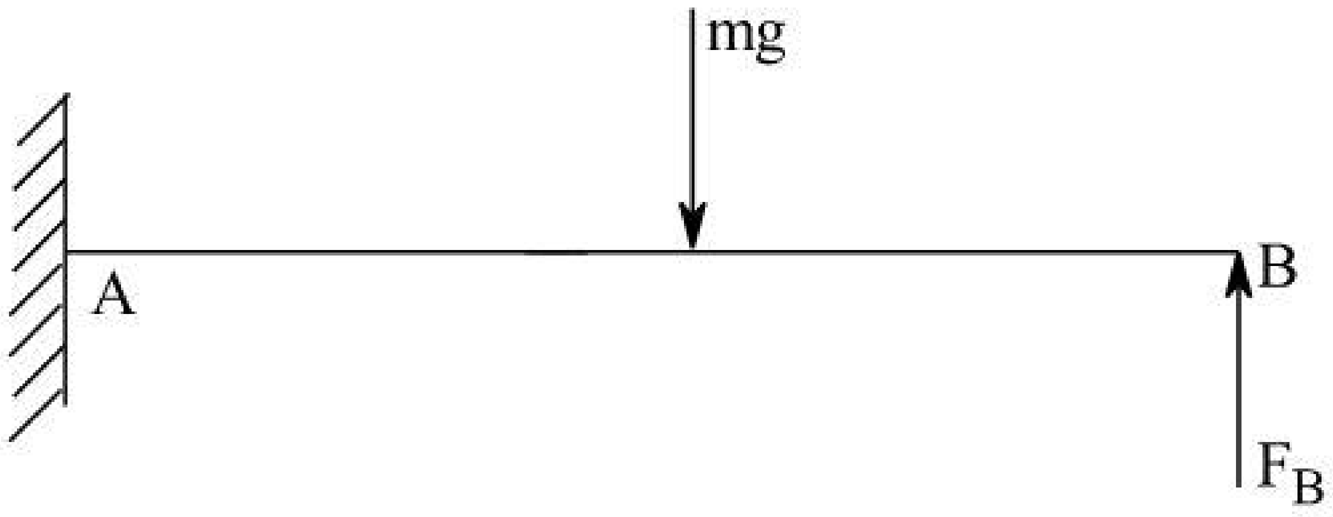


分析：此问题显然为动荷载问题，问题的关键是求出动荷载因数 K_d，而在冲击荷载作用下 $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$，故转化为求解对应的静荷载作用下的位移 Δ_{st}

解答过程： 首先把动荷载转化为对应的静荷

载如图所示，结构为一次超静定，首先解除多于约束，这里我们解除 B 端的竖向约束，而代之以竖向力 F_b，可得基本静定系如图：

（1）：求出 B 点支座反力



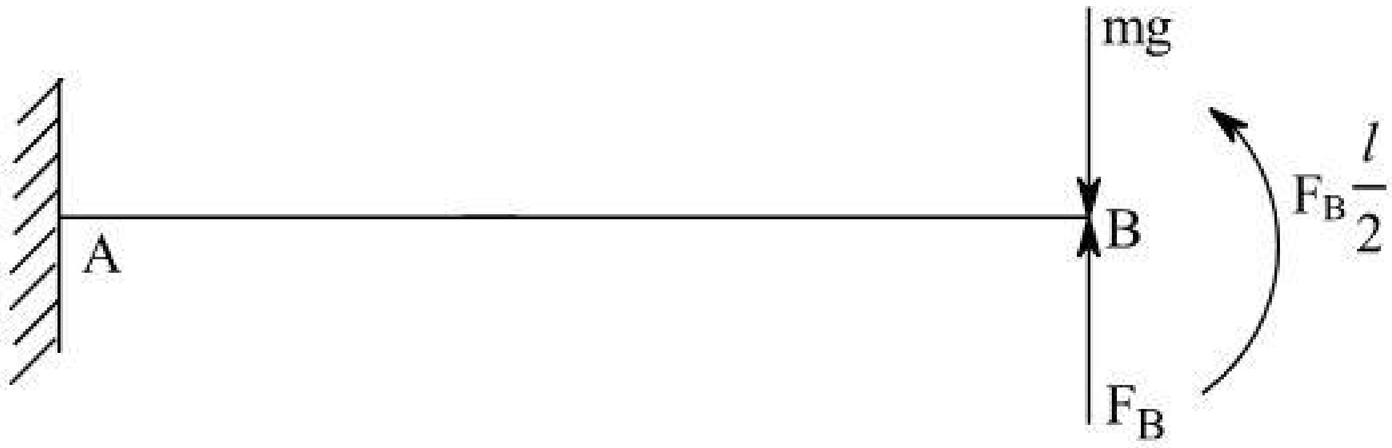
B 点处的变形相容条件是 B 点在静荷载 mg 和 F_b 作用下位移为 0。

即：$\omega_{B(mg)}+\omega_{B(F_b)}=0$

由挠度和转角表及叠加原理可得：

$$\frac{mg\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI}+\frac{mg\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI}\cdot\frac{l}{2}=\frac{F_bl^3}{3EI}$$

解得：$F_b = \dfrac{5}{16}mg$



（2）求出梁跨中点处的静位移Δ_{st}

把力简化到梁跨中点处，则梁跨中点处受力如图所示（F_b转为一个竖向力和一个逆时针方向的弯矩）则由叠加原理：

$$\Delta_{st} = \frac{\frac{11}{16}mg\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} - \frac{\frac{5}{32}mgl\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI} = \frac{7}{768}h$$

（3）求动荷载因数

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h \cdot 768}{7h}} = 15.9$$

（4）求静力作用的最大弯矩

$$M_{\max,st}=\frac{6}{32}mgl$$

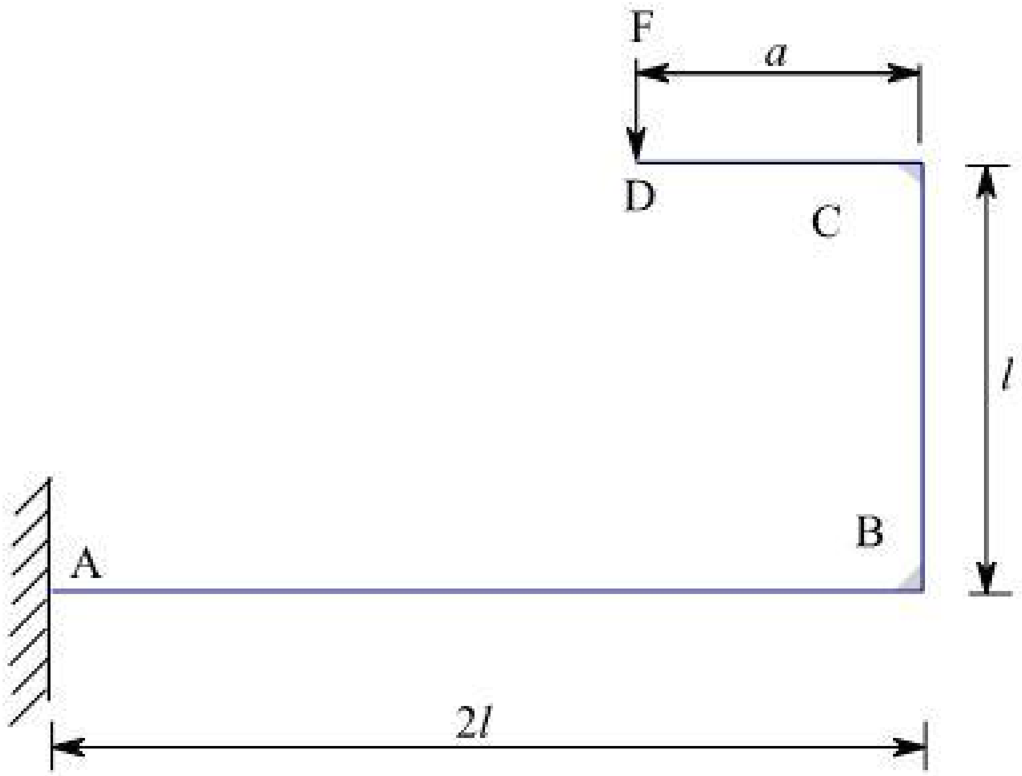
（5）得出最后结论，在冲击荷载作用下的最大弯矩为：

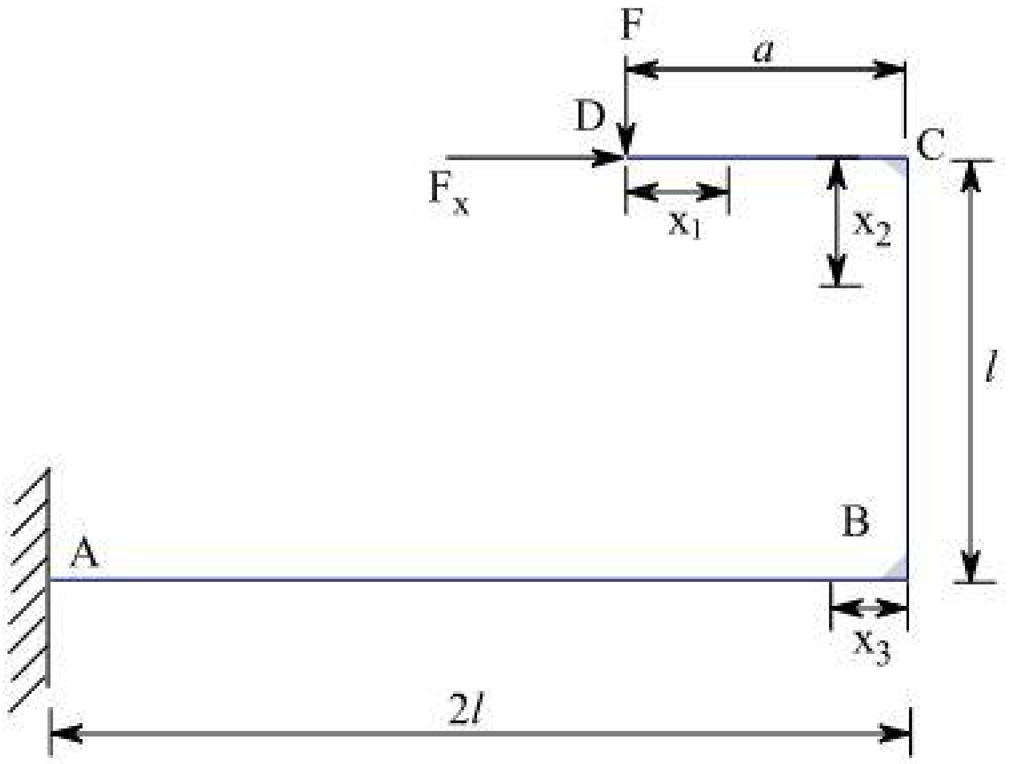
$$M_{\max,d}=K_d M_{\max,st}=15.9\times\frac{6}{32}mgl=3mgl$$

知识点：1、思路很重要，看到冲击问题，首先要想到求出静荷载作用下的静位移。

2、求跨中位移的方法，特别是 F_b 向跨中的简化，很多同学忽略了弯矩。当然跨中挠度也可以由挠度方程求得，但比较麻烦。

四、（15 分）平面刚架各杆的 EI 为常数，证明当 $a/l=4/5$ 时 D 点的水平位移为 0，不计轴力和剪力对变形的影响。





解析： 虚设水平力 $F_x = 0$ 如图，用能量法求 D 点的位移。各段列弯矩方程并对其求偏导数得：

DC：段 $(0 \le x_1 \le a)$ $M(x_1) = -F \cdot x_1$

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial F_x}=0$$

CB：段 $(0 \le x_2 \le l)$ $M(x_2)=Fa-F_x \cdot x_2$

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial F_x}=-x_2$$

BA：段 $(0 \le x_2 \le 2l)$

$M(x_3)=-F(x_3-a)-F_x l$ $\qquad \dfrac{\partial M(x_3)}{\partial F_x}=-l$

由题设，我们假设 D 点水平位移为 0，则可列方程如下：

$$\begin{aligned}\Delta_{Bx} &= \sum \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_x} \\ &= \frac{1}{EI}\int_0^l (Fa-F_x \cdot x_2)(-x_2)dx_2+\frac{1}{EI}\int_0^{2l}\left[-F(x_3-a)-F_x \cdot l\right](-l)dx_3 \\ &= \frac{-Fa}{EI}\int_0^l x_2 dx_2+\frac{Fl}{EI}\int_0^{2l}(x_3-a)dx_3=0\end{aligned}$$

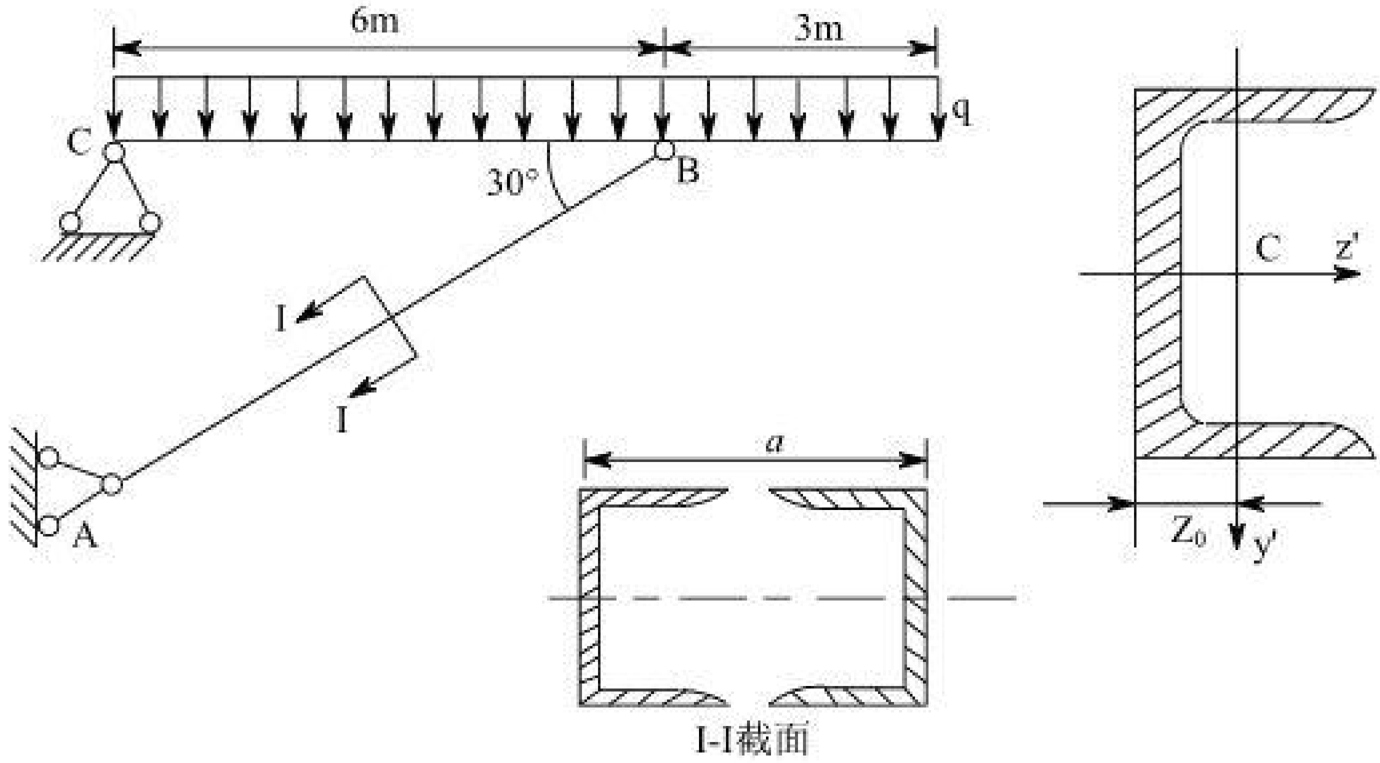
可以解出 $a/l=4/5$

故当 $a/l=4/5$ 时，D 点的水平位移为 0。

五、（20 分）图示结构，$E=206MPa$，$\sigma_p=200MPa$，AB 杆两端为球铰，求能使 AB 杆达到最大临界应力的槽钢两外表面的间距 a 的值，并根据 AB 杆的临界荷载的 $1/3$ 确定荷载 q 的许可值 $[q]$。AB 杆由两根 10 号槽钢（通过焊接等办法）构成了一个整体的箱型截面杆件，10 号槽钢的参数为：

$A=12.74cm^2$（横截面面积）

$I_{Z'}=198.3cm^4, I_{Y'}=25.6cm^4, z_0=1.52cm,$形心为c。

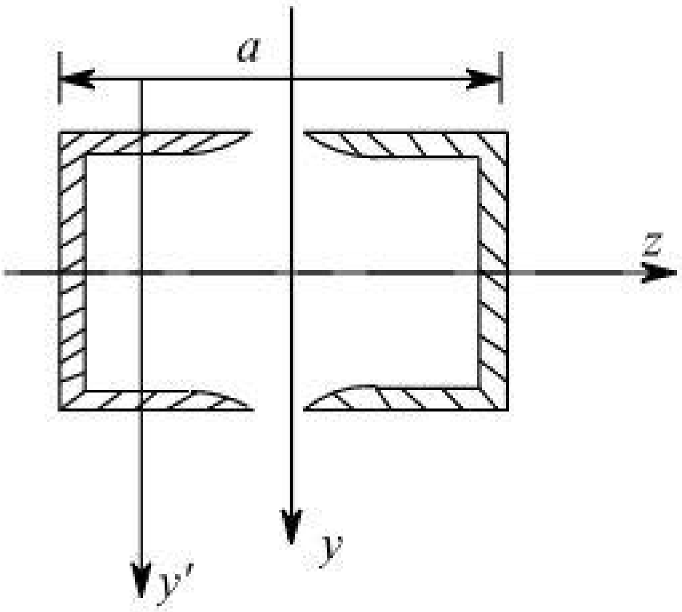


解析：（1）当截面的I_z=I_y时，AB 的临界应力将达到最大。

而其中 $I_z = 2I_{z'} = 2\times 198.3cm^4 = 396.6cm^4$

$$I_y = 2\times I_{y'} + 2A(\frac{a}{2} - z_0)^2 = 2\times 25.6 + 2\times 12.74\times(\frac{a}{2} - 1.52)^2$$

于是可以解得： $a = 10.4cm$



（2）此时

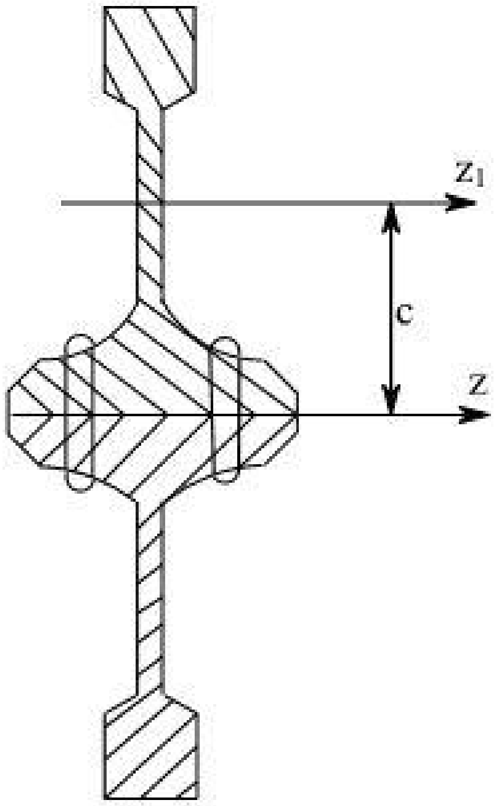
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{3.14^2\times 206\times 10^9\times 396.6\times 10^{-8}}{\left(12/\sqrt{3}\right)^2} = 168kN$$

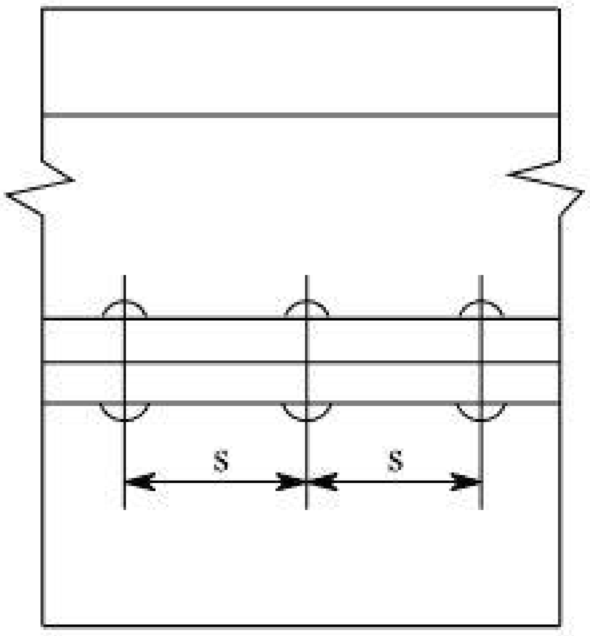
$$\left[F_{cr}\right] = \frac{168kN}{3} = 56kN$$

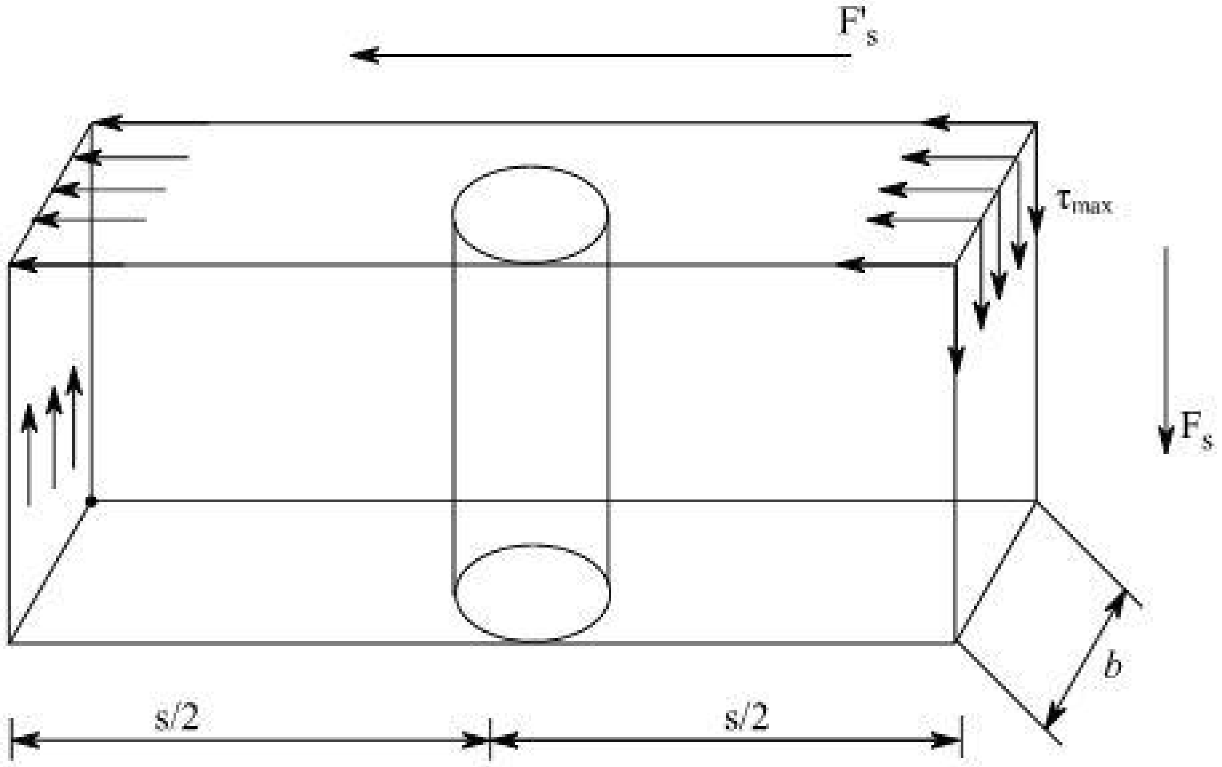
（3）由梁 CB 的平衡条件：$\sum M_C = 0$ 可以知道：$3\times[F_{cr}] = \frac{1}{2}[q]\times 9^2$

从而可以得到：$[q] \le 4.15 kN/m$

六、（20 分）两根钢轨铆接成组合梁，其连接情况如图，每根钢轨的横截面积 $A = 8000mm^2$，形心距离底边的高度 $c = 80mm$，每一根钢轨对其自身形心轴的惯性矩 $I_{Z1} = 1600\times 10^4 mm^4$，铆钉间距 $s = 150mm$，铆钉直径 $d = 20mm$，铆钉许用切应力 $[\tau] = 95MPa$，若梁内剪力 $F_s = 50kN$，试校核该铆钉的剪切强度。不考虑上、下钢轨之间的摩擦。







分析：要校核该铆钉的剪切强度，那么铆钉必然要受到剪切作用，很多同学想不通为何铆钉会受到剪切作用？这就成为解题的关键之处。

解析：如图2，取铆钉两侧各距$\dfrac{s}{2}$的两端来，

设F_S方向如图所示。再取此段梁的下半部

分研究，如图3，梁在中性轴处产生最大的

剪应力$\tau_{\max}$，而这些竖直方向的剪应力组成

了F_S，水平方向上的剪应力就组成了$F_S^{'}$。

对于组合截面，由图1可以得到：

$$I_z = 2I_{z'} + 2\cdot A\cdot c^2 = 2\times1600\times10^4 + 2\times8000\times80^2 = 134.4\times10^{-6}m^4$$

中性轴处任一点的静矩为：

$$S_z^* = 8000\times80 = 64\times10^{-5}m^3$$

由$\tau_{\max} = \dfrac{F_S\cdot S_z^*}{I_z\cdot b}$可以得到：

$$F_S^{'} = \tau_{\max}\cdot bs = \frac{F_S\cdot S_z^*\cdot s}{I_z}$$

最后可以得到铆钉的剪切应力为：

$$\tau = \frac{F_S^{'}}{2A} = \frac{F_S \cdot S_z^* \cdot s}{2I_z \cdot A} = \frac{50\times10^3\times64\times10^{-5}\times0.15\times4}{134.4\times10^{-6}\times3.14\times0.02^2\times2} = 57MPa$$

$$\tau = 57MPa < [\tau] = 95MPa$$

即剪切强度满足条件。

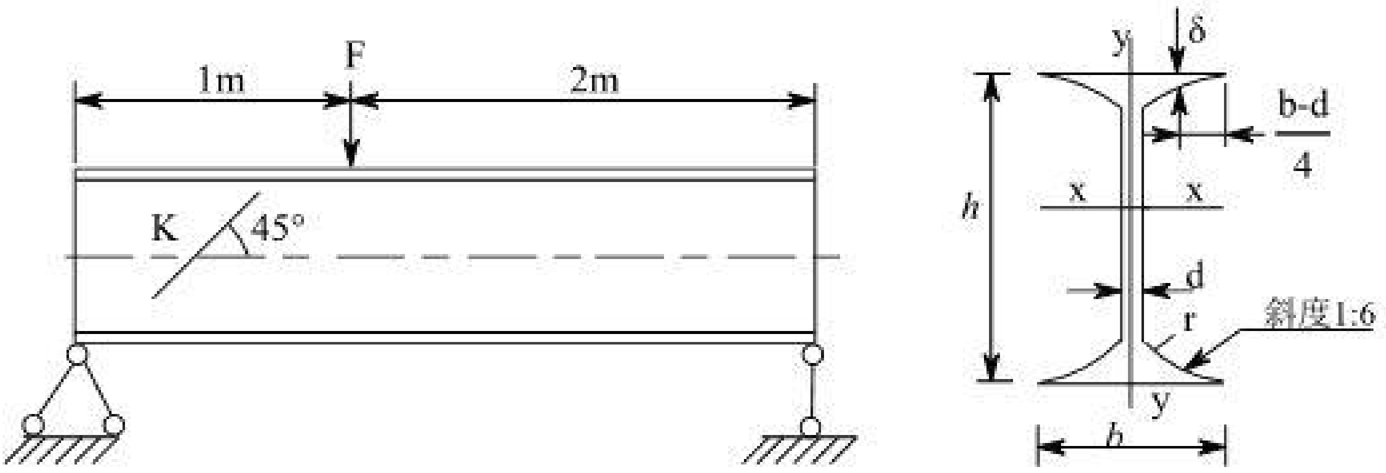
七、（20 分）在图示 $28a$ 工字钢梁的中性层上的 K 点处，与轴线成 45°方向贴有应变片。今测得 $\varepsilon_{45^\circ} = -2.6\times10^{-4}$，已知 $E = 210GPa, \nu = 0.28$。试求梁所承受的荷载 F。已知 $28a$ 工字钢的参数为：

$h = 280mm, b = 122mm, d = 8.5mm,$

$\delta = 13.7mm, r = 10.5mm$ 横截面积为：

$A = 55.45cm^2, I_x = 7114cm^4,$

$I_x/S_x = 24.62cm, I_y = 345cm^4$。



分析：本题目由应变反求外力，可分析单元体的受力，找出应变和外力的关系，进而求解

解答：取中性轴 K 点处的一个单元体分析。其处于纯剪切状态，受力如图，其中

$$\tau_{\max}=\frac{F_S\cdot S_z^*}{I_z\cdot b}=\frac{{}^{2}\!/\!{}_{3}F}{{}^{I_x}\!/\!{}_{S_x}\cdot d}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$\sigma_{45^\circ}=-\tau_{\max},\sigma_{-45^\circ}=\tau_{\max}$$

故

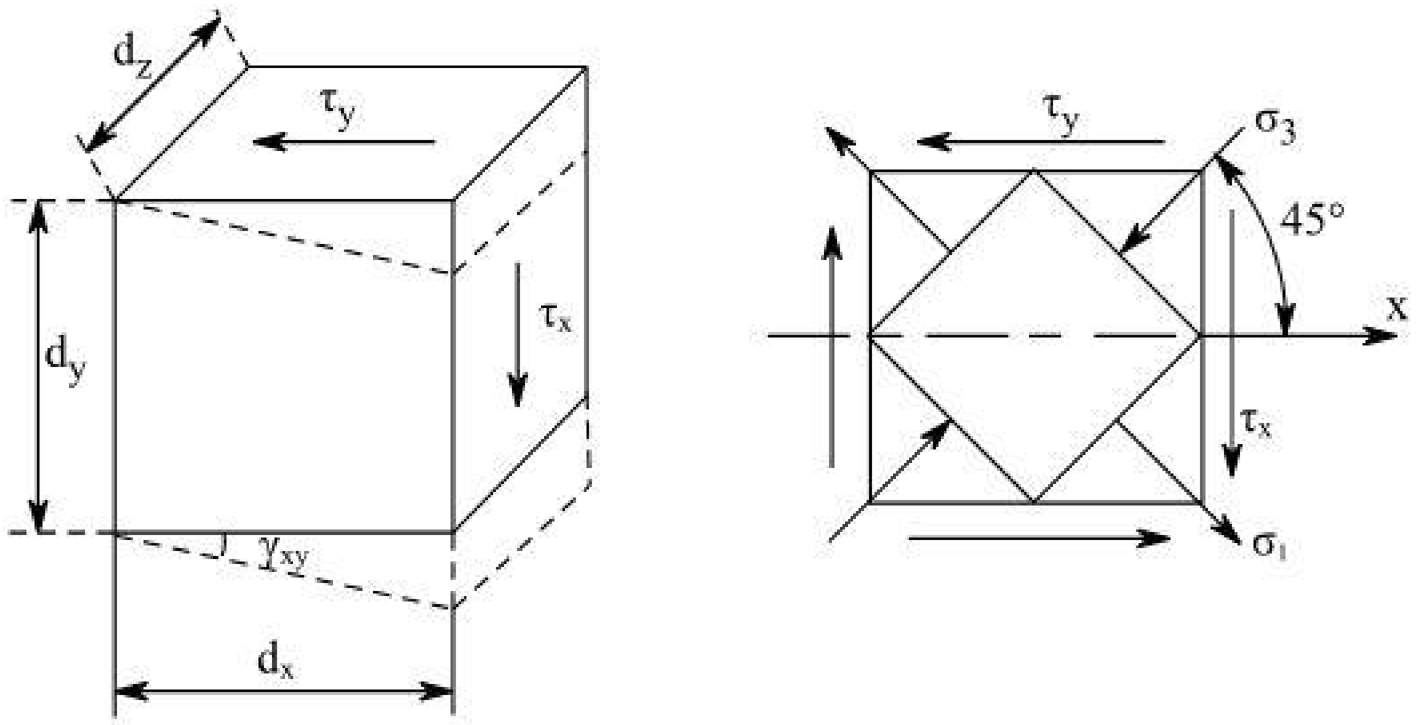
$$\varepsilon_{45}=\frac{1}{EI}\left(\sigma_{45}-\nu\sigma_{-45}\right)=\frac{1}{E}\left(-\tau_{\max}-\nu\tau_{\max}\right)=\frac{-\tau_{\max}}{E}(1+\nu)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

从而由①②式可得：

$$F=\frac{\varepsilon_{45}\cdot E\cdot I_x/S_x\cdot d}{-(1+\nu)\cdot 2/3}=133.9kN$$

八、（15 分）试证明各向同性材料的三个弹性常数之间存在关系：$G=\frac{E}{2(1+\upsilon)}$。



证明如下：

（1）设单元体处于纯剪切状态，如图所示。在线弹性的范围内切应力和切应变成正比的剪切胡可定律是：$\gamma_{xy}=\frac{\tau_x}{G}$

在小变形的条件下，单元体左右两个面

的相对错动量为$\gamma_{xy}dx$，单元体内积聚的应变能在数值上等于切向力$\tau_x dydz$在位移$\gamma_{xy}dx$上做作的功，从胡克定律可以看出τ_x与γ_{xy}成线性关系，从而得到应变能密度为

$$dU=\frac{1}{2}\left(\tau_x dydz\right)\left(\gamma_{xy}dx\right)=\frac{\tau_x^2}{2G}dxdydz$$

因此得单元体的应变能密度为

$$u=\frac{dU}{dV}=\frac{dU}{dxdydz}=\frac{\tau_x^2}{2G}$$

（2）纯剪应力状态也可用主单元体来表示，如图所示，根据应力圆分析，其主应力为$\sigma_1=\tau_x,\sigma_2=0,\sigma_3=-\tau_x$。将他们代入应变能密度的表达式，可得：

$$u=\frac{1}{2E}\left[\tau_x^2+\left(-\tau_x\right)^2+2\nu\tau_x^2\right]=\frac{1+\nu}{E}\tau_x^2$$

（3）以上两步所得到的应变能密度，虽然表达式不同，但它们表示的是同一个量，所以这两个不同表达式表示的应变能密度是相等的：

$$u=\frac{\tau_x^2}{2G}=\frac{\left(1+\nu\right)}{E}\tau_x^2$$

则有：$G=\dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$