西南交通大学 2016 年研究生入学试题解析 考试科目:信号与系统一

一、选择题

1.下列系统中,属于线性时不变系统的是(D)

A.
$$y(k)+k\cdot y(k-1)=f(k)$$

B.
$$y'(t)+e^{-t}\cdot y(t)=f(t)$$

C.
$$y'(t) + y(t) \cdot y(t-1) = f(t)$$

D.
$$y'(t)+2y(t)=f'(t)-2f(t-1)$$

解析:对于n阶线性时不变系统,若输入为f(t),输出为y(t),则系统输入输出方程是线性常系数微分方程,一般表示形式为:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} \frac{d^{k} y(t)}{dt^{k}} = \sum_{k=0}^{m} b_{k} \frac{d^{k} x(t)}{dt^{k}},$$

对于一般 N 阶差分方程:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y [n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x [n-k]$$

所以A、B、C均不满足。

2.下列系统中,属于稳定的因果系统的是(B)

A.
$$y_f(t) = f(-t)$$

B.
$$y_f(t) = f(k) \cdot f(k-1)$$

C.
$$y_f(k) = (k-2)f(k)$$

D.
$$y_f(k) = f(1-k)$$

解析: 因果系统:输出里的时间大于等于输入里的时间

对于选项 A, 当t=-1时,输出为 $y_f(-1)$,

即 $t_{y_f} = -1$, 输入 f(1) 即 $t_f = 1$, 此时

 $t_{y_f} < t_f$, 所以是非因果系统, 同理 D 也是非因果系统。

稳定系统是指:有界的输入得到有界的输出。

对于 C 选项:

$$y_f(k) = (k-2)f(k) = kf(k)-2f(k)$$

其中kf(k)无界。

3.下列表达式中正确的是(C)

A.
$$f(t)*\delta(at) = f(t)$$

B.
$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0)$$

C.
$$f(t)*\delta'(t) = f'(t)$$

D.
$$f(t) \cdot \delta'(t) = f(0) \cdot \delta'(t)$$

解析: A. 因为
$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$
, 所以

$$f(t)*\delta(at) = \frac{1}{|a|} \cdot f(t)$$

B.
$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$$

D.
$$f(t) \cdot \delta'(t) = f(0) \cdot \delta'(t) - f'(t) \cdot \delta(t)$$

4.已知信号 f(t) 的单边拉氏变换为 $\frac{1}{s^2}$,则

信号的象函数为 $\frac{1}{s^2}e^{-st_0}$ 的原函数是(D)

A.
$$t - t_0$$

$$B.(t-t_0)u(t)$$

$$C.t \cdot u(t-t_0)$$

$$D.(t-t_0)u(t-t_0)$$

解析:象函数为 $\frac{1}{s^2}e^{-st_0}$,含有 e^{-st_0} 项,则

原函数在时域有时移,即向右时移了 t_0 个单

位。先求 $\frac{1}{s^2}$ 的反变换,结果为tu(t),则原

式的反变换为 $(t-t_0)u(t-t_0)$ 。

5.
$$x(n) = e^{-j(\frac{2\pi}{3})n} + e^{-j(\frac{4\pi}{3})n}$$
, 该序列是
(B)

A.非周期序列

B.周期N = 3

C.周期
$$N = \frac{3}{8}$$

和信号的周期。

D.周期 N = 24

解析:离散序列的周期的求法: $\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{N}{m}$ 为

有理数,则周期是N。对于多个离散信号组成的和信号 $x(n)=x_1(n)+x_2(n)$,每单个信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的周期有最小公倍数,且最小公倍数为整数,则该最小公倍数即为

对于 $x_1(n) = e^{-j\left(\frac{2\pi}{3}\right)n}$, $\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{3}{1}$, 所以 $T_1 = 3$,

同理
$$x_2(n) = e^{-j\left(\frac{4\pi}{3}\right)n}$$
, $\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{3}{2}$, $T_2 = 3$

 T_1 =3 和 T_2 =3 最小公倍数为 3,所以周期为 3。

(若对求指数形式的周期不熟练,可通过欧拉公式, 先将指数形式转化成三角函数形式)

6.一周期信号
$$x(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-5n)$$
,其傅里

叶变换 $X(j\omega)$ 为(A)

A.
$$\frac{2\pi}{5} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{5} \right)$$

B.
$$\frac{5}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{5} \right)$$

$$C.10\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-10\pi k)$$

D.
$$\frac{1}{10\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{\pi k}{10} \right)$$

解析: 傅里叶变换

$$\mathcal{F}\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\right| = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right),\,$$

本题T=5

7.已知周期电流 $i(t) = 2\sqrt{3}\cos t + 2\sqrt{2}\cos 2t$,

则该电流信号的平均功率 P_{τ} 为(D)

A. 20W

B.9W C.5W

解析: 用定义
$$P_T = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

$$P_{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[12\cos^{2}t + 8\cos^{2}2t + 8\sqrt{6}\cos t \cos 2t \right] dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[6(1 + 2\cos 2t) + 4(1 + 2\cos 4t) + 8\sqrt{6}\cos t\cos 2t \right] dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[10 + 12 \cos 2t + 8 \cos 4t + 8\sqrt{6} \cos t \cos 2t \right] dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{20T}{2T}$$

=10

8.欲使信号通过系统后只产生相位变化,则 该系统一定是(C)

A.高通滤波网络

B.带通滤波网络

C.全通网络

D.最小相移网络

解析:全通滤波器是指在全频带范围内,信号的幅值不会改变,也就是全频带内幅值增益恒等于 1.一般全通滤波器用于移相,对输入信号的相位进行改变,理想情况是相移与频率成正比,相当于一个时间延时系统.

9.有一信号 y(n) 的 z 变换的表达式为

$$Y(z) = \frac{1}{(1-3z^{-1})} + \frac{1}{(1-5z^{-1})}$$
, 如果其 z 变换的

收敛域为3<|z|<5,则Y(z)的反变换

$$y(n)$$
为(C)

$$A.(3)^{n} u(n) + 2(5)^{n} u(n)$$

B.
$$(3)^n u(n) + 2(5)^n u(-n-1)$$

$$C.(3)^n u(n) - 2(5)^n u(-n-1)$$

D.
$$-(3)^n u(-n-1)-2(5)^n u(-n-1)$$

解析: z变换的收敛域为3<|z|<5,则原

序列由是一个左边序列和一个右边序列组

成的双边序列。对于
$$3<|z|$$
, $\frac{1}{(1-3z^{-1})}$ 反

变换后是一个右边序列,即为: $(3)^n u(n)$,

对于
$$|z|$$
<5, $\frac{1}{\left(1-5z^{-1}\right)}$ 反变换后是一个左

边序列,即为: $-2(5)^n u(-n-1)$

10.一系统函数
$$H(s) = \frac{e^s}{s+1}$$
, $Re\{s\} > -1$,

该系统是(C)

A.因果稳定

B.因果不稳定

C.非因果稳定

D.非因果不稳定

解析: $H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{e^s}{s+1}$, 收敛域是

 $\text{Re}\{s\}>-1$, 收敛域包含 $j\omega$ 轴, 所以是稳

定系统。对
$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{e^s}{s+1}$$
直接取拉

氏 反 变 换 , $h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$, 在

-1 < t < 0 不等于零,所以不是因果系统。

(因果稳定系统的收敛域位于最右边极点的右边,但是相反的结论一般不成立,除非系统函数是有理的。)

二、某因果线性时不变系统当输入 $x_1(n)=u(n)$

时,全响应为
$$y_1(n) = \left(\frac{9}{2}3^n - \frac{1}{2}\right)u(n)$$
,在输

$$\lambda$$
 $x_2(n)=u(n-1)$, 全 响 为

$$y_2(n) = \left(\frac{7}{2}3^n - \frac{1}{2}\right)u(n)$$
, \Re :

- (1) 系统的单位冲激响应h(n);
- (2) 系统的零输入响应 $y_{zi}(n)$;
- (3) 当输入 $x_3(n) = (-1)^n u(n)$ 时,系统的 零状态响应。

解:系统的全响应=零状态响应+零输入响

应, 即:
$$Y(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z)$$

零状态响应: $Y_{zs}(z) = X(z)H(z)$, 改变输入只会改变零状态响应。

对输入和全响应取 z 变换,则有:

$$X_1(z) = \frac{z}{z-1}$$
, $Y_1(z) = \frac{9}{2} \frac{z}{z-3} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-1}$,
 $X_2(z) = \frac{1}{z-1}$, $Y_2(z) = \frac{7}{2} \frac{z}{z-3} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-1}$

全响应

$$\begin{cases} Y_{1}(z) = Y_{zs1}(z) + Y_{zi}(z) = X_{1}(z)H(z) + Y_{zi}(z) \\ Y_{2}(z) = Y_{zs2}(z) + Y_{zi}(z) = X_{2}(z)H(z) + Y_{zi}(z) \end{cases}$$

解得:
$$H(z) = \frac{Y_1(z) - Y_2(z)}{X_1(z) - X_2(z)} = \frac{z}{z - 3}$$

取反变换则有: $h(n)=(3)^n u(n)$

(2) 零状态响应:

$$Y_{zs1}(z) = X_1(z)H(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-3)}$$

则:

$$\frac{Y_{zs1}(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-3)} = \frac{3}{2} \frac{1}{z-3} - \frac{1}{2} \frac{1}{z-1}$$

即:
$$Y_{zs1}(z) = \frac{3}{2} \frac{z}{z-3} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-1}$$

取反变换则有:
$$y_{zs1}(n) = \left[\frac{3}{2}(3)^n - \frac{1}{2}\right]u(n)$$

所以零输入响应:

$$y_{zi}(n)=y(n)-y_{zs1}(n)=(3)^{n+1}u(n)$$

(3) 对输入取 z 变换,则有 $X_3(z) = \frac{z}{z+1}$ 零状态响应:

$$Y_{zs3}(z) = X_3(z)H(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-3)}$$

则:

$$\frac{Y_{zs3}(z)}{z} = \frac{z}{(z+1)(z-3)} = \frac{3}{4} \frac{1}{z-3} + \frac{1}{4} \frac{1}{z+1}$$

$$\mathbb{P}: Y_{zs3}(z) = \frac{3}{4} \frac{z}{z-3} + \frac{1}{4} \frac{z}{z+1}$$

取反变换则有:

$$y_{zs3}(z) = \left[\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4}(3)^n\right]u(n)$$

- 三、已知一个因果连续线性时不变系统可用
- 二阶常系数微分方程来描述,且已知:
- 1.若输入信号 $x(t)=e^{-2t}$, 其输出信号为

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-2t}$$

- 2.系统的一个极点为 s=-3 ,一个零点为 s=1
- 3. 系统的单位冲激响应 h(t) 的初始值 $h(0^+)=-1$,且不含冲激项

试求: (1) 系统函数 H(s),判断系统稳定性并说明理由;

- (2) 系统单位冲激响应h(t);
- (3) 写出描述系统的微分方程。

解: (1) 由题意可设系统函数为:

$$H(s) = \frac{A(s-1)}{(s+3)(s+a)}$$

单位冲激响应的初始值:

$$h(0^+) = \lim_{s \to +\infty} sH(s) = \lim_{s \to +\infty} \frac{As(s-1)}{(s+3)(s+a)} = -1$$

即
$$A = -1$$

对于因果连续线性时不变系统输入是复指

数型号
$$e^{st}$$
,响应 $y(t)=H(s)e^{st}$,

则有:
$$\frac{3}{2}e^{-2t}=H(-2)e^{-2t}$$
,

所以:
$$H(-2) = \frac{1-(-2)}{(3-2)(a-2)} = \frac{3}{2}$$
,

得: a = 4

所以:
$$H(s) = \frac{1-s}{(s+3)(s+4)}$$
,

极点 $s_1 = -3$ 、 $s_2 = -4$ 均在左半平面,为稳定系统

(2)
$$H(s) = \frac{1-s}{(s+3)(s+4)} = \frac{4}{s+3} - \frac{5}{s+4}$$
,

取反变换则有:
$$h(t) = \lfloor 4e^{-3t} - 5e^{-4t} \rfloor u(t)$$

(3)
$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

$$=\frac{1-s}{(s+3)(s+4)}=\frac{1-s}{s^2+7s+12},$$

则有:
$$(s^2+7s+12)Y(s)=(1-s)F(s)$$

反变换则有:

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=f(t)-f'(t)$$

四、己知因果 LTI 系统的方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} + by(t)$$

$$= \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

若输入x(t)=1时,输出为y(t)=0.5,输

入
$$x(t) = te^{-t}u(t)$$
 时,输出为

$$y(t) = e^{-t} \sin t u(t)$$
。回答下列问题:

- (1) 确定 a、b 的值并求 H(s) 表达式及其收敛域;
- (2)该系统的自由响应一定是暂态响应吗?说明理由。
 - (3) 求该系统的逆系统的阶跃响应;
- (4) 若该系统与因果 LTI 系统 S 并联得到的系统具有 S(t) 的冲激响应,求系统 S 的单位冲激响应函数。

解:(1)对微分方程的两边同时取拉氏变换, 有:

$$(s^2 + as + b)Y(s) = (s^2 + 2s + 1)F(s)$$

系统函数;
$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + as + b}$$

对
$$x(t) = te^{-t}u(t)$$
, $y(t) = e^{-t}\sin tu(t)$ 同

时取拉氏变换:
$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 2}$$

比较系数得: a=2、b=2,

系统函数为;
$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 2}$$
, 收敛域

为
$$Re\{s\}>-1$$

- (2)暂态响应是指时间趋于无穷时,响应 为零的分量。自由响应只与系统的结构有关 系,其中可能包含有暂态响应或稳态响应, 不一定是暂态响应。
 - (3) 逆系统的响应函数为

$$H^{-1}(s) = \frac{1}{H(s)},$$

设G(s)为逆系统的阶跃响应,则有即为:

$$G(s) = \frac{1}{s} \cdot H^{-1}(s)$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 2s + 1} = \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s}$$

取反变换则有:

$$g(t) = \left[-te^{-t} - e^{-t} + 2 \right] u(t)$$

(4)设因果 LTI 系统 S 的系统函数为

$$H_1(s)$$
, 则有 $H(s)+H_1(s)=1$

所以:

$$H_1(s)=1-H(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}=\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

取反变换则有 $h_1(t) = e^{-t} \sin t u(t)$

五、在如图所示的系统中, $h_{\rm I}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$,

$$h_2(t) = \frac{\sin 3\pi t}{\pi t}$$
 。 若输入信号

$$x(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$
,求系统的输出

信号 y(t)

$$x(t)$$

$$h_{1}(t)$$

$$+$$

$$h_{2}(t)$$

$$p(t)$$

$$p(t)$$

$$m(t)$$

$$m(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}, \quad h_{2}(t) = \frac{\sin 3\pi t}{\pi t}$$

$$x(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\cos 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\cos 2\pi t}{\pi t}$$

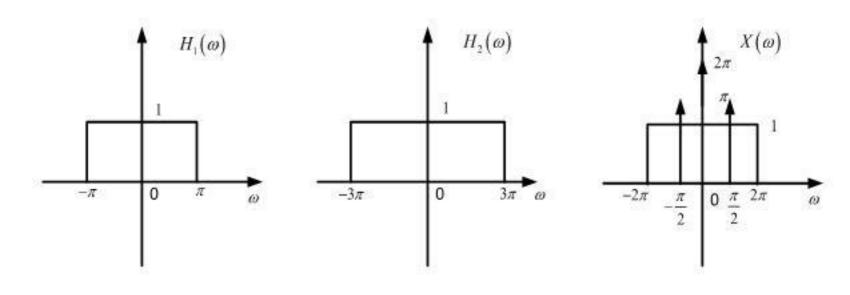
$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\cos 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\cos 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\cos 2\pi t}{\pi t}$$

$$\pi(t)$$

频谱图如下:



由题意可得:

$$y(t) = \lfloor x(t) - x(t) * h_1(t) \rfloor * h_2(t)$$

两边同时取傅里叶变换则有:

$$Y(\omega) = [X(\omega) - X(\omega)H_1(\omega)]H_2(\omega)$$

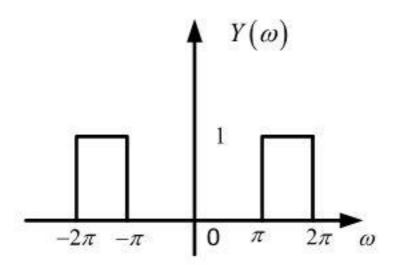
即:

$$Y(\omega) = X(\omega)H_{2}(\omega) - X(\omega)H_{1}(\omega)H_{2}(\omega)$$
$$=X(\omega) - X(\omega)H_{1}(\omega)$$

又因为
$$X(\omega)H_1(\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

$$+\pi \left| \delta \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right) + \delta \left(\omega - \frac{\pi}{2} \right) \right| + g_{2\pi} (\omega)$$

故解得
$$Y(\omega)=g_{4\pi}(\omega)-g_{2\pi}(\omega)$$



取反变换则有:
$$y(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} - \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

六、考虑一信号 x(t), 其傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 假设给出以下条件:

(1) x(t)是实值且非负的;

(2)
$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\left(1+j\omega\right)X(j\omega)\right\}=Ae^{-2t}u(t),$$

且A与t无关;

(3)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(j\omega) \right|^2 d\omega = 2\pi .$$

求x(t)的闭合表达式。

解:根据条件(2),对方程两边同时取傅里 叶变换则有:

$$(1+j\omega)X(j\omega) = \frac{A}{2+j\omega}$$

即:
$$X(j\omega) = \frac{A}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

$$=A\left(\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}\right)$$

取反变换则有:
$$x(t)=A(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

帕斯瓦尔定理:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(j\omega) \right|^2 d\omega$$

根据条件 (3), 得到
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 1$$
,

$$\mathbb{E} : \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A \left(e^{-t} - e^{-2t} \right) u \left(t \right) \right]^2 dt = 1,$$

$$A^{2} \int_{0}^{+\infty} \left(e^{-2t} + e^{-4t} - 2e^{-3t} \right) dt = 1,$$

有:
$$A^2 \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-4t} + \frac{2}{3}e^{-3t} \right) \Big|_0^{+\infty} = 1$$

解得 $A=\pm 2\sqrt{3}$, 又有 x(t) 是实值且非负

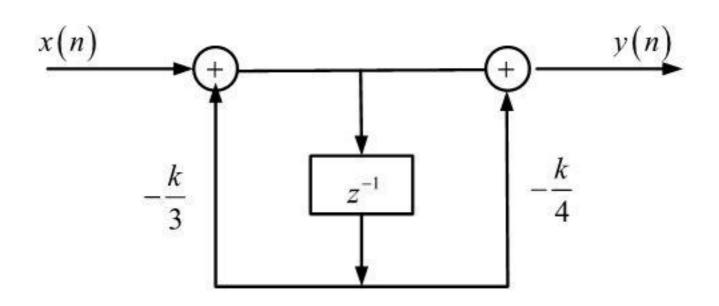
的,故
$$x(t)=2\sqrt{3}(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

七、某因果离散系统的结构框图如题所示:

- (1) 写出系统的系统函数H(z);
- (2) k为何值时,该系统是稳定的?
- (3) 当 k=1 时, 求系统单位冲激响应 h(n);

(4) 当
$$k=1$$
时, $x(n)=\delta(n)-\left(\frac{1}{4}\right)^nu(n)$,

试求y(n)。



解:(1)设第一个加法器的输出为F(z),

则有:

$$\begin{cases} F(z) = X(z) - \frac{k}{3} z^{-1} F(z) \\ Y(z) = F(z) - \frac{k}{4} z^{-1} F(z) \end{cases}$$

$$\mathbb{P}H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z - \frac{k}{4}}{z + \frac{k}{3}}$$

(2)
$$H(z) = \frac{z - \frac{k}{4}}{z + \frac{k}{3}}$$
, 极点为 $z_0 = -\frac{k}{3}$,

系统稳定则
$$0 < \left| -\frac{k}{3} \right| \le 1$$
,即

$$k \in [-3,0) \cup (0,3]$$

(3)
$$k=1$$
 $\exists H(z) = \frac{z-\frac{1}{4}}{z+\frac{1}{3}}$,

$$\frac{H(z)}{z} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z} + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{z + \frac{1}{3}}$$

取反变换为:

$$h(n) = -\frac{3}{4}\delta(n) + \frac{7}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

(4)
$$x(n) = \delta(n) - \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$
,

则
$$X(z) = 1 - \frac{z}{z - \frac{1}{4}}$$
, $H(z) = \frac{z - \frac{1}{4}}{z + \frac{1}{3}}$
所以 $Y(z) = X(z)H(z) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z + \frac{1}{3}}$,

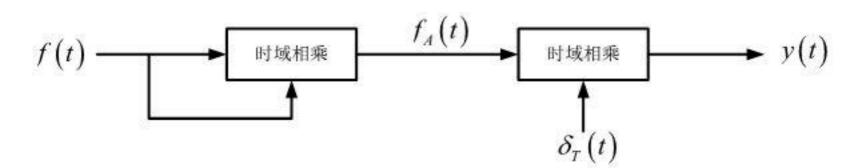
取反变换有

$$y(n) = -\frac{3}{4}\delta(n) + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

八、已知系统如图所示, 其输出信号

$$f(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$
, $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$,

$$T_s = 0.5$$
 秒



(1)求信号 $f_A(t)$ 的频谱函数 $F_A(j\omega)$ 的频谱图;

(2) 求输出信号 y(t) 的频谱函数 $Y(j\omega)$, 并画出 $Y(j\omega)$ 的频谱图;

(3) 能否从输出信号 y(t) 恢复信号 $f_A(t)$? 若能恢复,请详细说明恢复过程,若不能恢复,则说明理由。

解: (1) 根据题意可得 $f_A(t) = f(t) \cdot f(t)$,

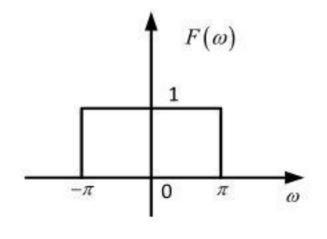
$$f(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

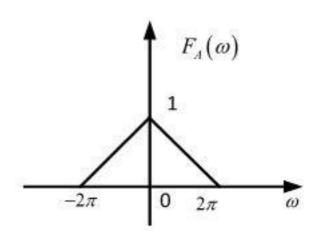
取傅里叶变换则有:

$$F_{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F(\omega),$$

$$F(\omega)=g_{2\pi}(\omega)$$
,

则有:





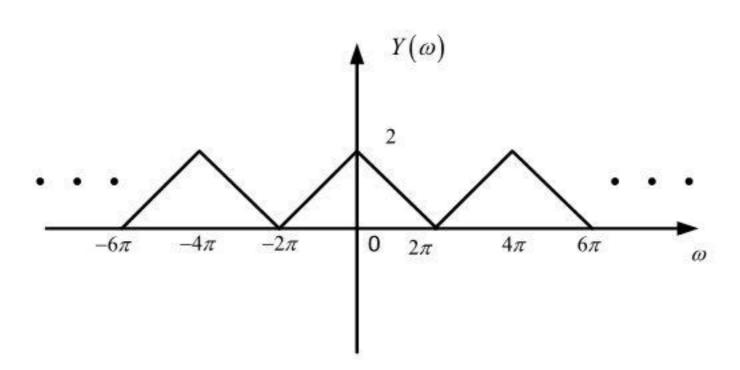
(2) 由题意可得:
$$y(t) = f_A(t) \cdot \delta_T(t)$$

取傅里叶变换:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F_A(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

即:
$$Y(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_A(\omega - n\omega_s)$$
,

 $T_s = 0.5s$,则 $\omega_s = 4\pi$, $Y(j\omega)$ 的频谱图为:



(3) $y(t)=f_A(t)\cdot\delta_T(t)$, 满足奈奎斯特抽样定理, 则可以恢复信号 $f_A(t)$ 。将 y(t)通

过一个低通滤波器 $H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$,

其幅度谱和相位谱如下图所示:

