No.01 运动的描述

一、选择题

1.对于沿曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：()

（A）切向加速度必不为零

（B）法向加速度必不为零（拐点处除外）

（C）由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零

（D）若物体作匀速率运动，其总加速度必为零

（E）若物体的加速度$\vec{a}$为恒矢量，它一定作匀变速率运动

【解题过程】因物体在作匀速率曲线运动时，切向加速度为零，故（A）错；只有质点的法向加速度不恒等于零时，质点作曲线运动，故（B）正确；对于非圆周运动，法向分速度不为零，法向加速度也不为零，故（C）错；

物体在作匀速圆周运动时切向加速度为零，但法向加速度不为零，故（D）错；物体作抛体运动时，加速度恒定，在加速度方向上速度是均匀变化的，但合成速度不是均匀变化的，故（E）错。

选（B）。

2.一小球沿斜面向上运动，其运动方程为 $S=5+12t-t^2$（SI），则小球运动到最高点的时刻应是（）

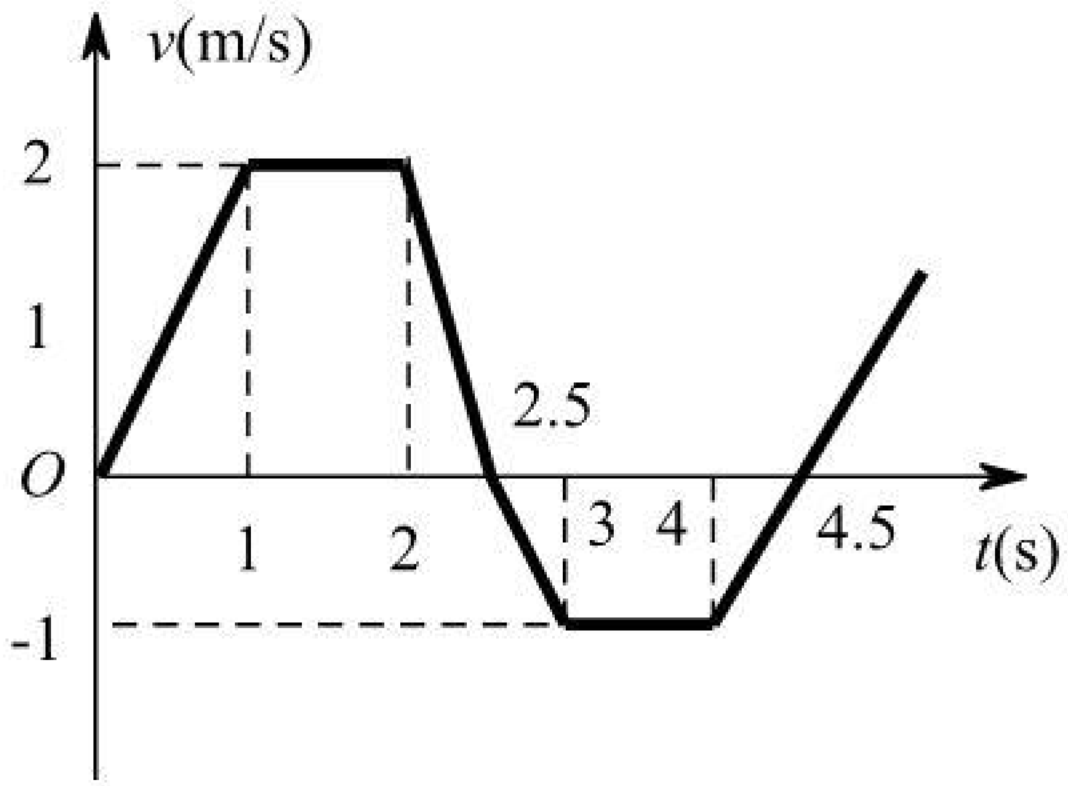
（A）$t=4s$　　（B）$t=3s$

（C）$t=6s$　　（D）$t=5s$

【解题过程】 小球运动速度的大小 $v=\dfrac{ds}{dt}=12-2t$，当小球运动到最高点时 $v=0$，即 $12-2t=0$，$t=6s$，故选（C）。

3.一质点沿 x 轴作直线运动，其 $v-t$ 曲线如图所示。若 $t=0$ 时质点位于坐标原点，则

$t=4.5s$ 时，质点在 x 轴上的位置为（）



（A）0　　　　（B）$5m$

（C）$2m$　　　（D）$-2m$

【解题过程】质点在 x 轴上的位置即为这段时间内 $v-t$ 图曲线下的面积的代数和。

$$x=\int_0^{4.5} v dt=\frac{1}{2}(1+2.5)\times 2-\frac{1}{2}(1+2)\times 1$$

$=2(m)$，故选（C）。

4.一质点在平面上作一般曲线运动，其瞬时速度为 $\vec{v}$，瞬时速率为 v，某一段时间内的平均速度为 $\overline{\vec{v}}$，平均速率为 $\overline{v}$，它们之间关

系正确的有（）

（A）$|\vec{v}|=v,|\bar{\vec{v}}|=\bar{v}$　　（B）$|\vec{v}|\neq v,|\bar{\vec{v}}|\neq\bar{v}$

（C）$|\vec{v}|\neq v,|\bar{\vec{v}}|=\bar{v}$　　（D）$|\vec{v}|=v,|\bar{\vec{v}}|\neq\bar{v}$

【解题过程】因一般情况下$|\Delta\vec{r}|\neq\Delta s$，故

$|\bar{\vec{v}}|\neq\bar{v}$。

因$\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\Delta\vec{r}|=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta s$，

所以$|\vec{v}|=\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|=\dfrac{ds}{dt}=v$。

选（D）。

5.一质点从静止（$t=0$）出发，沿半径为$R=3m$的圆周运动，切向加速度大小保持不变，为$a_\tau=3m/s^2$，若t时刻，其总加速度$\vec{a}$恰与半径成45°角，则（）

（A）$t=4s$　　（B）$t=1s$

（C）$t=6s$　　　（D）$t=5s$

【解题过程】设法向加速度为a_n，质点圆周运动的速率为v，则$\tan\alpha=\dfrac{a_\tau}{a_n}$，即$\tan45^\circ=\dfrac{3}{a_n}$，解得$a_n=3$。又因$a_n=\dfrac{v^2}{R}=3$，所以$v=3$，故经历的时间为$t=\dfrac{v}{a_\tau}=1s$。选（B）。

6.在相对地面静止的坐标系内，A、B 二船都以 2m/s 的速率匀速行驶，A 船沿x轴正向，B 船沿y轴正向。今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系（x、y方向单位矢量用$\vec{i}$、$\vec{j}$表示），那么在 A 船上的坐标系中，B 船的速度（以 m/s 为单位）为（）

（A）$2\vec{i}+2\vec{j}$　　　（B）$-2\vec{i}+2\vec{j}$

（C）$-2\vec{i}-2\vec{j}$　　　（D）$2\vec{i}-2\vec{j}$

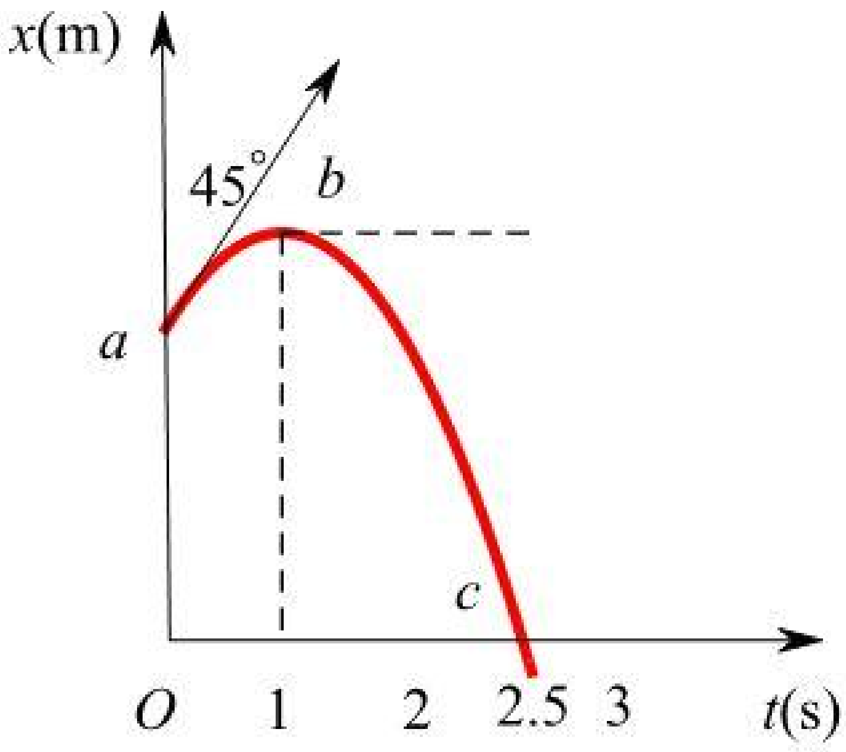
【解题过程】 由题知 $\vec{v}_{B对地}=2\vec{j}\left(m/s\right)$，

$\vec{v}_{A对地}=2\vec{i}\left(m/s\right)$，故

$\vec{v}_{B对A}=\vec{v}_{B对地}-\vec{v}_{A对地}=-2\vec{i}+2\vec{j}\left(m/s\right)$，选（B）。

二、填空题

1.一质点的位置随时间的变化关系如图所示。图中曲线 abc 为抛物线的一部分，曲线在 a 点处的切线与 x 轴的夹角是 45°。该质点作的是_____（选填：曲线运动，一般变速直线运动，匀变速直线运动），其速度随时间的变化关系为_____，运动学方程为_____。



【解题过程】

设抛物线方程为 $x = at^2 + bt + c$，由图知 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = b = \tan 45^\circ = 1$，且 $-\dfrac{b}{2a} = 1$，则 $a = -\dfrac{1}{2}$，又 $2.5^2 a + 2.5b + c = 0$，则 $c = \dfrac{5}{8}$。

故运动方程为 $x = -\dfrac{1}{2}t^2 + t + \dfrac{5}{8}$。

速度 $v = \dfrac{dx}{dt} = -t + 1$，加速度 $a = \dfrac{dv}{dt} = -1$，

故该质点作匀变速直线运动。

2.在 x 轴上作变加速直线运动的质点，已知其初速度为 v_0，初始位置为 x_0，加速度

$a=Ct^2$（其中C为常量），则其速度与时间的关系为_____，运动学方程为_____。

【解题过程】由$a=\dfrac{dv}{dt}=Ct^2$，分离变量并积分得$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t Ct^2dt$，即$v=\dfrac{C}{3}t^3+v_0$。

又由$v=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{C}{3}t^3+v_0$，分离变量积分得

$$\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t\left(\frac{C}{3}t^3+v_0\right)dt,$$

即$x=\dfrac{C}{12}t^4+v_0t+x_0$。

3.一做平面的运动质点，t时刻位于(x,y)处，其速度大小为_____。

【解题过程】因$v_x=\dfrac{dx}{dt}$，$v_y=\dfrac{dy}{dt}$，故速度的大小为$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$。

4.一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为$\vec{r}=at^2\vec{i}+bt^2\vec{j}$（其中$a$、$b$为常量），则该质点的轨迹方程为_____。

【解题过程】由质点的运动方程可得其参数方程为$\begin{cases}x=at^2\\y=bt^2\end{cases}$，消去时间$t$可得轨迹方程为$y=\dfrac{b}{a}x$，为一条直线。

5.在表达式$\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$中，位置矢量是_____；位移矢量是_____。

【解题过程】位置矢量是$\vec{r}$，位移矢量是$\Delta\vec{r}$。

6.某发动机工作时，主轴边缘一点作圆周运动的运动方程为$\theta=t^3+3t^2+4t+3$（SI），当$t=2s$时，该点的角速度为_____，角加速度为_____。

【解题过程】角速度$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=3t^2+6t+4$，

角加速度$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=6t+6$，故当$t=2s$时，

该点的角速度为$\omega=28rad/s$，角加速度

为$\alpha=18rad/s^2$。

7.轮船在水上以相对于水的速度$\vec{v}_1$航行，水

流速度为$\vec{v}_2$，一人相对于甲板以速度$\vec{v}_3$行走。

如果人相对于岸静止，则$\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$和$\vec{v}_3$的关系

是______。

【解题过程】由题知$\vec{v}_{船对水}=\vec{v}_1$，$\vec{v}_{水对岸}=\vec{v}_2$，

$\vec{v}_{人对船}=\vec{v}_3$，$\vec{v}_{人对岸}=\vec{0}$。故

$\vec{v}_{人对船}+\vec{v}_{船对水}+\vec{v}_{水对岸}=\vec{v}_{人对岸}$，

即$\vec{v}_3+\vec{v}_2+\vec{v}_1=\vec{0}$。

三、计算题

1. 一质点沿半径为0.10m的圆周运动，其角

速度$\omega=3t^2+4$（SI），求：

（1）在$t=2s$时，质点切向加速度的大小？

（2）在$t=2s$时，质点法向加速度的大小？

（3）在$t=2s$时，质点总加速度的大小？

（4）求质点转动角度随时间的变化关系（已知初始时刻质点角位置$\theta_0=0$）。

【解题过程】因角加速度为$\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}=6t$，故当$t=2s$时，角速度为$\omega=16rad/s$，角加速度为$\alpha=12rad/s^2$。

（1）切向加速度为$a_\tau=R\alpha=1.2m/s^2$。

（2）法向加速度为$a_n=R\omega^2=25.6m/s^2$。

（3）总加速度大小为

$$a=\sqrt{(a_n)^2+(a_\tau)^2}=25.63m/s^2。$$

（4）由$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=3t^2+4$，分离变量积分得

$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \left(3t^2+4\right)dt$，即 $\theta = t^3 + 4t$ 。

2.一物体悬挂在弹簧上作竖直振动，其加速度为 $a=-3ky^2$，式中 k 为常数，y 是以平衡位置为原点所测得的坐标，假定振动的物体在坐标 y_0 处的速度为 v_0，试求：速度 v 与坐标 y 的函数关系式。

【解题过程】

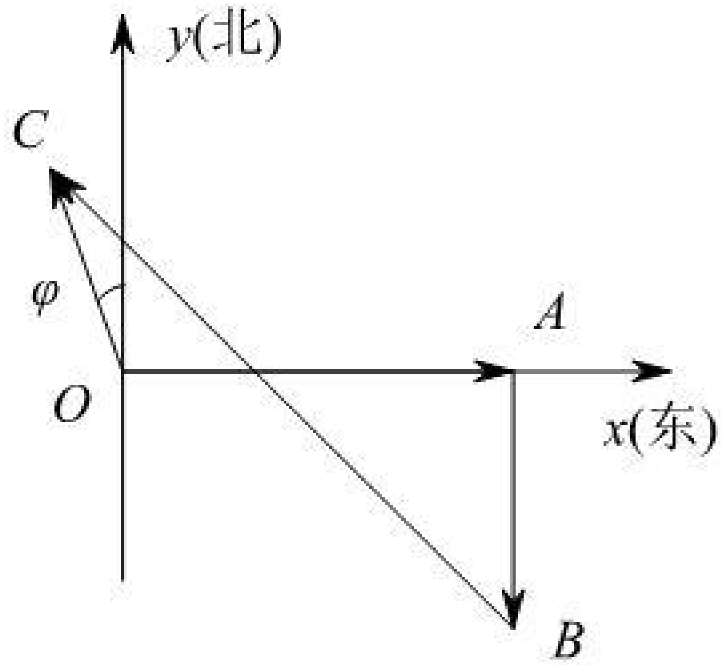
由 $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dt}=v\dfrac{dv}{dy}=-3ky^2$，分离变量积分得 $\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{y_0}^{y} -3ky^2 dy$，即 $\dfrac{1}{2}\left(v^2-v_0^2\right)=-k\left(y^3-y_0^3\right)$。所以速度 v 与坐标 y 的函数关系式为

$v^2 = v_0^2 + 2ky_0^3 - 2ky^3$ 。

3.一个人自原点出发，10s 内向东走 15m，又 10s 内向南走 10m，再 25s 内向正西北走 30m。

求在这 45s 内，（1）这个人的位移（要求画出相应矢量图）;（2）平均速度的大小和方向;（3）平均速率。

【解题过程】建立如图所示坐标系。



（1）45s 内这个人的位移为

$$\Delta\vec{r} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC}$$
$$= 15\vec{i} - 10\vec{j} + 30\cos 45^\circ\left(-\vec{i} + \vec{j}\right)$$
$$= -6.21\vec{i} + 11.21\vec{j}$$

（2）平均速度的大小为

$$\left|\overline{\vec{v}}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{\sqrt{6.21^2 + 11.21^2}}{45} = 0.28m/s \ ,$$

方向为

$$\varphi = \arctan\frac{|\Delta x|}{\Delta y} = \arctan\frac{6.21}{11.21} = 29^\circ,$$

北偏西29°。

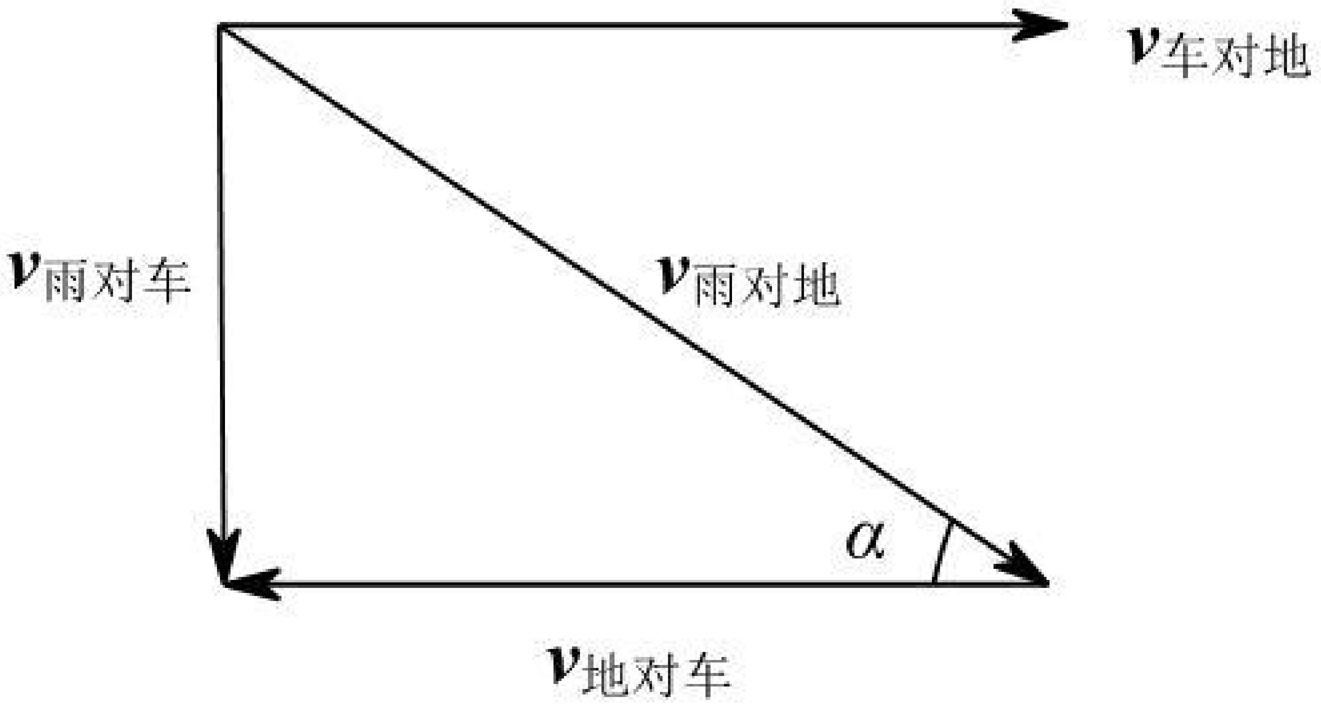
（3）45s 内人走的路程为

$\Delta s = 15 + 10 + 30 = 55m$，

所以平均速率为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{55}{45} = 1.22m/s。$$

4．一辆带篷的卡车，雨天在平直公路上行驶，司机发现：车速过小时，雨滴从车后斜向落入车内；车速过大时，雨滴从车前斜向落入车内。已知雨滴相对地面的速度大小为v，方向与水平面夹角为α，试问：（1）车速为多大时，雨滴恰好不落入车内？（2）此时雨滴相对车厢的速度为多大？要求画出相应矢量图说明。



【解题过程】（1）根据相对运动速度规律有$\vec{v}_{雨对车}=\vec{v}_{雨对地}+\vec{v}_{地对车}$，则根据题意，相应矢量图如图所示。则要使雨滴恰好不落入车内，由矢量图可知，车速与雨滴在水平方向的分量相等，即

$v_{车对地}=v_{雨对地}\cos\alpha=v\cos\alpha$。

（2）此时雨滴相对车厢的速度大小由矢量图知：$v_{雨对车}=v\sin\alpha$，方向与车顶篷垂直竖直向下。

NO.2 动量、动量守恒定律

一、选择题

1.一质点在力$F=5m\left(5-2t\right)$（SI）的作用下作直线运动，$t=0$时刻，质点的速率为$4m\cdot s^{-1}$，式中m为质点的质量。当$t=5s$时，质点的速率为（）

（A）$4m\cdot s^{-1}$　　（B）$-50m\cdot s^{-1}$

（C）0　　（D）$50m\cdot s^{-1}$

【解题过程】 由$a=\dfrac{F}{m}=5\left(5-2t\right)$，又$a=\dfrac{dv}{dt}=5\left(5-2t\right)$，分离变量积分得$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^5 5\left(5-2t\right)dt$，解得$v=4m\cdot s^{-1}$，选（A）。

2.炮车发射炮弹，炮弹与炮车质量分别为m和M，炮弹出口时与地面的夹角为θ，相对

于地面速率为v，不计炮车与地面间的摩擦，则炮弹出口时炮车的反冲速度大小为（）

（A）$\dfrac{mv\cos\theta}{M}$　　（B）$\dfrac{mv\cos\theta}{m+M}$

（C）$\dfrac{mv\cos\theta}{M-m}$　　（D）$\dfrac{mv}{M}$

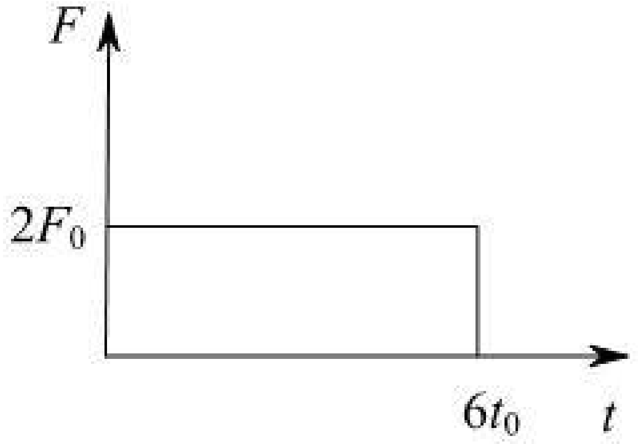
【解题过程】以炮车、炮弹系统为研究对象，以地面为参考系，忽略地面摩擦力，系统在水平方向动量守恒，设炮弹出口时，炮车相对于地面的速度为v_x，则有

$Mv_x+mv\cos\theta=0$，解得$v_x=-\dfrac{mv\cos\theta}{M}$（负号表示炮身后退），故选（A）。

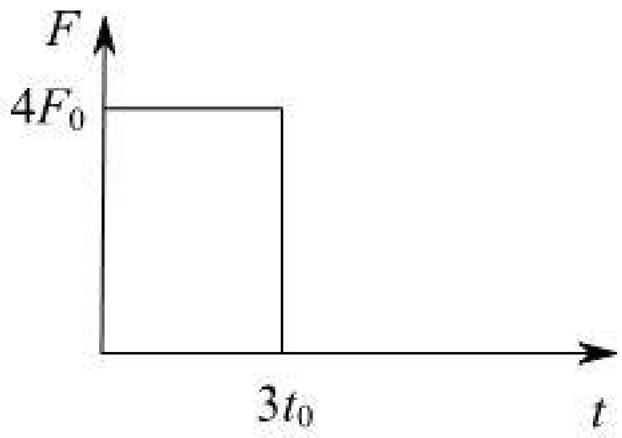
3.如图所示为一物体在一次碰撞中受力的大小随时间变化的三个图像。根据冲量的定义，对三种情况的冲量的大小，它们的关系是（）

（A）$a<b=c$　　（B）$a>b=c$

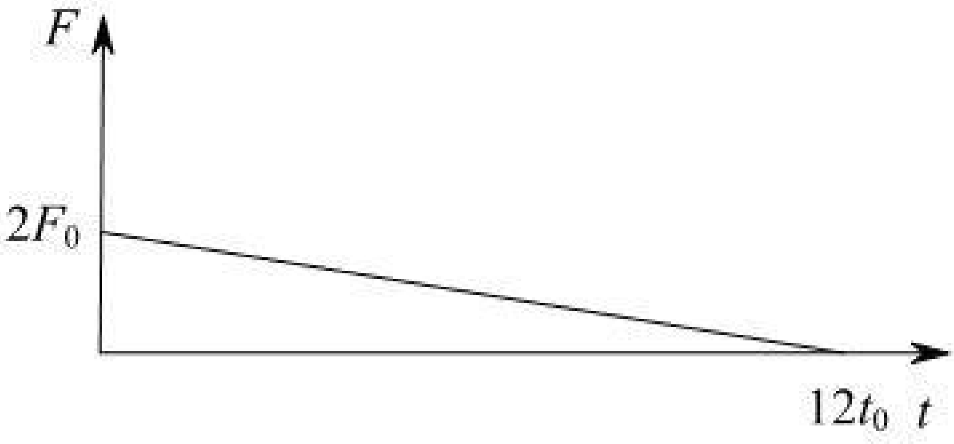
（C）$a=b=c$　　（D）$a=b<c$



（a）



（b）



（c）

【解题过程】冲量是力对时间的积分，故 $F-t$ 曲线下的面积即为冲量的数值，故

$a=b=c$，选（C）。

4.假设一个乒乓球和一个保龄球向你滚来。都具有相同的动量，然后你用相同的力将两
只球停住，比较停住两只球所用的时间间隔（）

(A) 停住乒乓球所用的时间间隔较短

(B) 停住两只球所用的时间间隔相同

(C) 停住乒乓球所用的时间间隔较长

(D) 条件不足，不能确定

【解题过程】根据动量定理$I=F\Delta t=\Delta p$，乒乓球和保龄球动量的改变量相同，受到的作用力相同，所以力的作用时间相同，选（B）。

5.在$t=0$时刻，一恒力$\vec{F}$开始作用在一正在外层空间沿x轴运动的石块上。石块继续沿此轴运动。对$t>0$的时刻，下面的哪一个函

数有可能表示石块的位置：（）

（A）$x=4t-3$

（B）$x=-4t^2+6t-3$

（C）$x=4t^3+6t-3$

（D）$x=-4t^4+6t^2-3t$

【解题过程】根据$F=ma$，$\vec{F}$是恒力，所以加速度a为常数。由$a=\dfrac{dv}{dt}$，分离变量并积分得$v=v_0+at$，再由$v=v_0+at=\dfrac{dx}{dt}$，分离变量积分得$x=x_0+v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$。故$x$是$t$的二次函数，选（B）。

6.两个质量相等的小球由一轻弹簧相连接，再用一细绳悬挂于天花板上，处于静止状态，如图所示。将绳子剪断的瞬间，球 1 和球 2 的加速度分别为（）

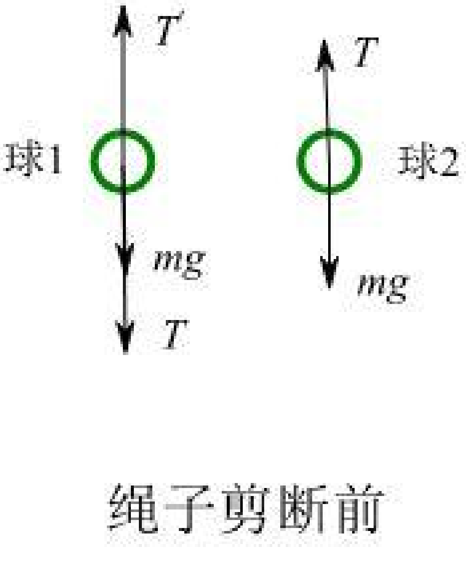
（A） $a_1 = g, a_2 = g$

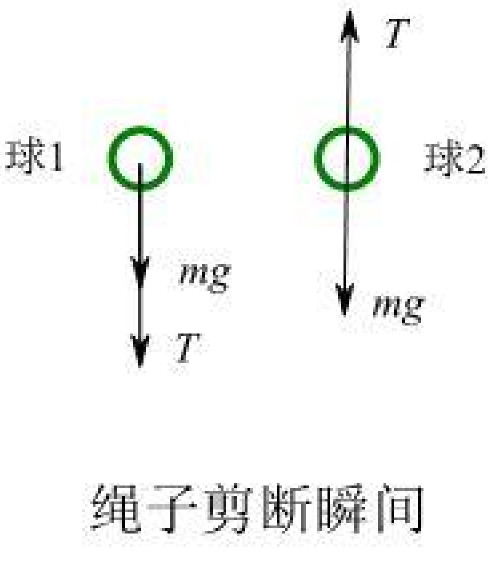
（B） $a_1 = 0, a_2 = g$

（C） $a_1 = g, a_2 = 0$

（D） $a_1 = 2g, a_2 = 0$

【解题过程】以两小球为研究对象，其绳子剪断前后受力分析如图所示。





绳子剪断前：$\begin{cases} T = mg \\ T' = T + mg \end{cases}$；绳子剪断瞬间，

弹簧的拉力不变，绳子拉力消失，有：

$\begin{cases} T = mg \\ T + mg = ma_1 \end{cases}$，故$\begin{cases} a_1 = 2g \\ a_2 = 0 \end{cases}$。选（D）。

二、填空题

1.物块 A 和 B 具有如图所示的运动方向，其动量大小分别为：$9kg \cdot m/s$ 和 $4kg \cdot m/s$。

（a）在光滑地面上，由 A 和 B 组成的系统，其质心运动方向为_____（填：向左、向右）。

（b）如果在碰撞中两物块粘合在一起，它们的运动方向为_____（填：向左、向右）。

（c）如果碰撞后两物块不粘合在一起，而物块 A 最终向左运动，则物块 A 的动量是_____（填：小于、大于、等于）物体 B 的动量。

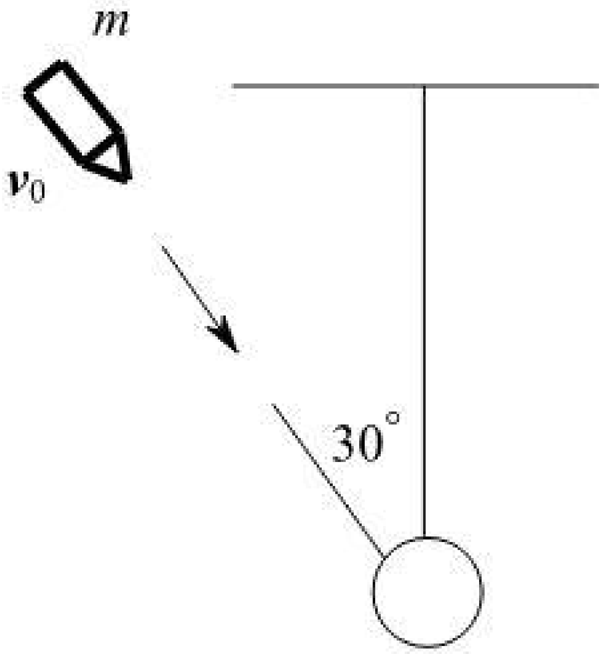
【解题过程】（a）将物块 A、B 看成一个系统，由质心速度公式

$v_C = \dfrac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \dfrac{9-5}{m_A + m_B} > 0$（取向右为正），即两物块系统的质心的运动方向为向右。

（b）碰撞前后动量守恒，碰前系统的总动量为 $p_1 = 9-4 = 5kg\cdot m/s$，方向向右，故碰后粘合在一起质心的运动方向为向右。

（c）碰撞前后动量守恒，若 A 要向左运动，为保持系统的总动量仍为 $5kg\cdot m/s$ 方向向右，则由 $m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$ 有 $m_A v_A' = 5 - m_B v_B' < 0$，即 B 的动量始终比 A 的动量大 $5kg\cdot m/s$。

2.质量为 20g 的子弹，以 $450m\cdot s^{-1}$ 的速率沿图示方向射入一原来静止的质量为 980g 的摆球中，摆线长度不可伸缩，则子弹射入后与摆球一起运动的速度大小 $v=$______。



【解题过程】将子弹与小球视为一个系统。系统在水平方向不受外力作用，因此系统水平方向的动量守恒，即 $m_2v_{2x}=\left(m_1+m_2\right)v$，

故 $v=\dfrac{m_2v_{2x}}{m_1+m_2}=\dfrac{m_2v_2\sin 30^\circ}{m_1+m_2}$

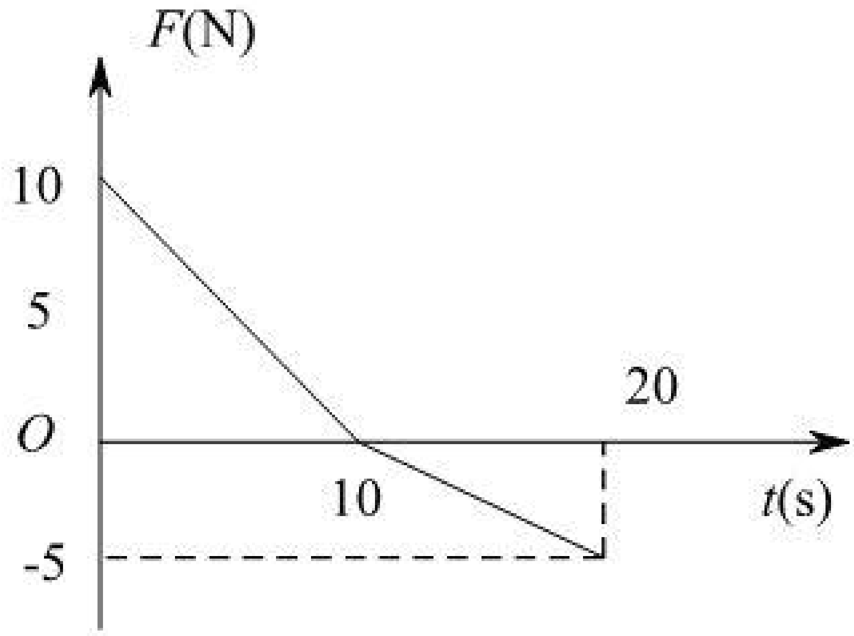
$=\dfrac{20\times10^{-3}\times450\times0.5}{\left(20+980\right)\times10^{-3}}=4.5m/s$。

3.一质量为 5kg 的物体，其所受的作用力 F 随时间的变化关系如图所示。设物体从静止开始沿直线运动，则 20 秒末物体的速率 $v=$ ______。

【解题过程】由动量定理得 $\int F dt = mv - 0$，

即 $\frac{1}{2}\times 10\times 10-\frac{1}{2}\times 5\times 10=5v$，

解得 $v=5m\cdot s^{-1}$。



4.静水中停泊着两只质量皆为 M 的小船。第一只船在左边，其上站一质量为 m 的人，该人以水平向右速度 $\vec{v}$ 从第一只船跳到其右

边的第二只船上，然后又以同样的速率$\vec{v}$水平向左地跳回到第一只船上。（若不计水的阻力，所有速度都相对地面而言。）此后

（1）第一只船运动的速度为$\vec{v}_1 =$ ______；

（2）第二只船运动的速度为$\vec{v}_2 =$ ____。

【解题过程】分别考虑两次跳动过程：

第一次跳动过程：先将左船与人视作一个系统，该系统水平方向动量守恒。设人跳离左船后，左船的速度为$\vec{v}_1$，有$m\vec{v} + M\vec{v}_1 = 0$；

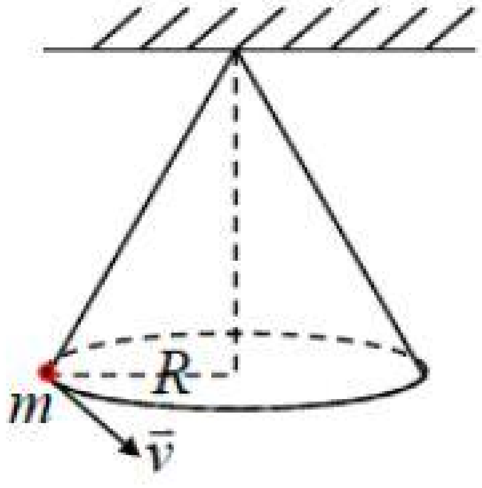
再将人与右船视为一个系统，该系统也满足水平方向动量守恒。设人跳上右船后，右船速度为$\vec{v}_2$，有$m\vec{v} = \left(M + m\right)\vec{v}_2$。

第二次跳动过程：先将右船与人视为一个系统，并设人跳离右船后，右船速度变为$\vec{v}_2'$，根据动量守恒，有$\left(M + m\right)\vec{v}_2 = M\vec{v}_2' - m\vec{v}$；

再将人与左船视为一个系统，并设人跳上左船后，左船速度变为$\vec{v}_1'$，根据动量守恒定律，有$M\vec{v}_1-m\vec{v}=\left(M+m\right)\vec{v}_1'$。

联立解得$\vec{v}_1'=-\dfrac{2m\vec{v}}{M+m}$，$\vec{v}_2'=\dfrac{2m\vec{v}}{M}$。

5.如图所示，圆锥摆的摆球质量为m，速率为v，圆周半径为R。当摆球在轨道上运动半周时，摆球所受重力冲量的大小为_____；当摆球在轨道上运动一周时，摆球所受拉力冲量的大小为_____。



【解题过程】摆球的重力是一个大小和方向都不变的恒力，因此，摆球在轨道上运动半周时，摆球所受重力的冲量为：

$$\left|\vec{I}\right| = \int_0^{\frac{T}{2}} mgdt = mg\frac{T}{2}$$，又 $T = \dfrac{2\pi R}{v}$，

故 $\left|\vec{I}\right| = \dfrac{mg\pi R}{v}$。

摆球运动一周，根据动量定理合外力的冲量为零，重力冲量为 $I_G = \dfrac{2mg\pi R}{v}$，故小球所受拉力冲量的大小为：$I_T = \dfrac{2mg\pi R}{v}$。

6.一吊车底板上放一质量为 10kg 的物体，若吊车底板加速上升，加速度大小为 $a = 3 + 5t$（SI），则 2 秒内吊车底板给物体的冲量大小 $I =$ ______；2 秒内物体动量的增量大小 $\Delta p =$ ______。

【解题过程】由运动学规律得 2 秒末物体运动速度为

$$v = v_0 + \int adt = 0 + \int_0^2 (3+5t)dt = 16m/s$$

因吊车加速上升，故吊车底板给物体的作用

力为变力 F，由动量定理

$I=\int(F-mg)dt=\Delta(mv)$ 得 2 秒内吊车底板给物体的冲量大小

$$I=\int Fdt=\Delta(mv)+\int_0^2 mgdt$$

$$=10\times16+\int_0^2 10\times9.8dt=356N\cdot s$$

2 秒内物体动量的增量大小

$\Delta p=mv_2-mv_1=10\times16-0=160N\cdot s$。

7.一质量为 1kg 的物体，静止置于水平地面上，物体与地面之间的静摩擦系数 $\mu_0=0.20$，滑动摩擦系数 $\mu=0.16$，现对物体施一水平拉力 $F=t+0.96$（SI），则 2 秒末物体的速度大小 $v=$ ______。（g 取 $9.8m\cdot s^{-2}$）

【解题过程】在 $0-1s$ 内，因 $F<mg\mu_0$，未

拉动物体。

在 $1-2s$ 内，物体移动，合力冲量为

$$I=\int_1^2(t+0.96)dt-\mu mg(t_2-t_1)=0.89N\cdot s$$

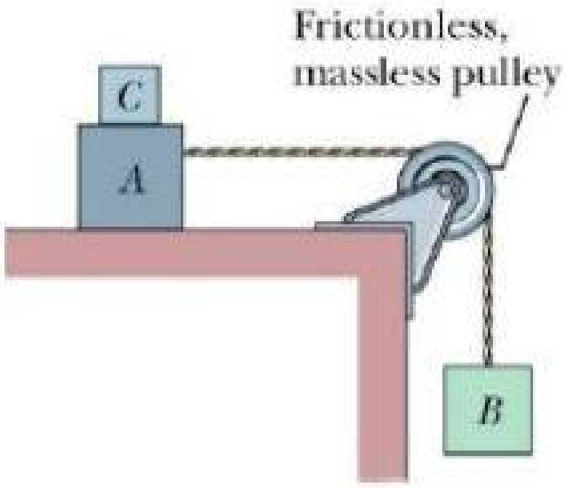
由动量定理得 $I=mv-0$，则 2 秒末物体的速度大小为 $v=\dfrac{I}{m}=0.89m/s$。

四、计算题

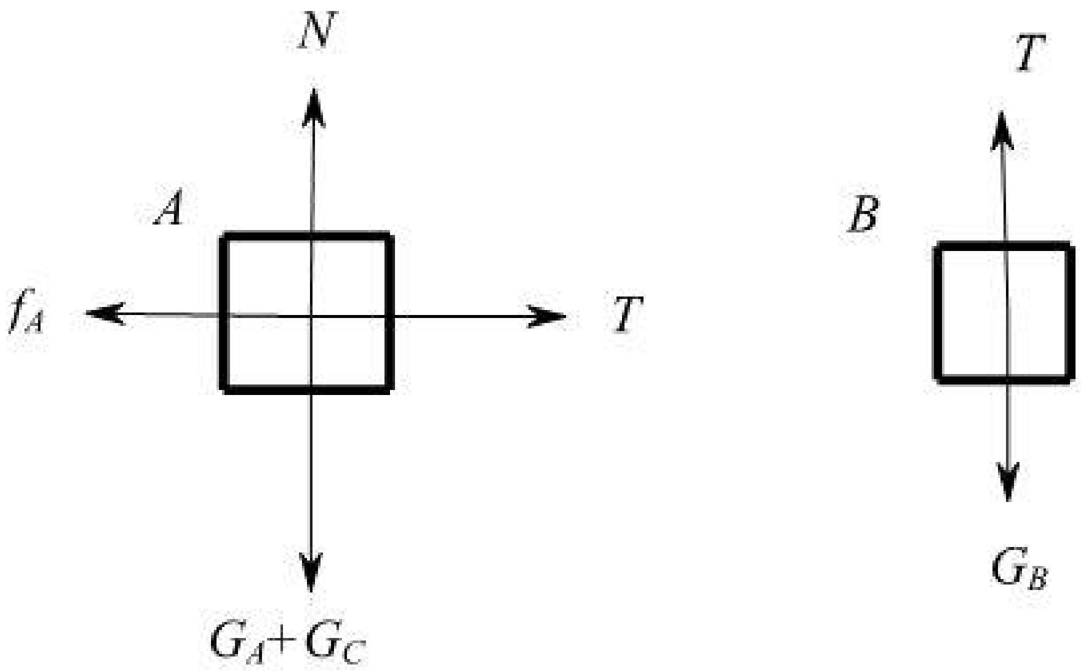
1.如图所示，物块 A 与 B 的重量分别为 44N 和 22N。如果 A 与桌面间的 μ_s 是 0.2，

（a）为了防止 A 滑动，C 的最小重量应为多少？

（b）若 C 突然被吊离 A，而 A 与桌面间的 μ_s 是 0.15，A 的加速度为多少？（g 取 $9.8m\cdot s^{-2}$）



【解题过程】取向右为正方向，受力分析如图所示。



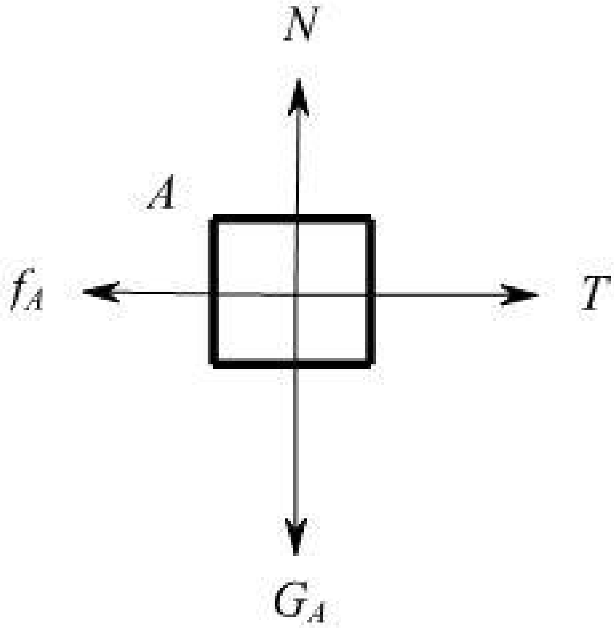
（a）要防止 A 滑动，则应有 $f_A \geq T$，

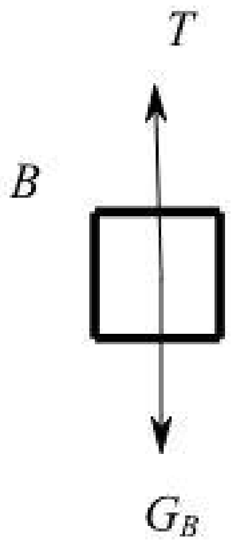
$N = G_A + G_C$，$T = G_B$，$f_A = \mu_s N$，联立

解得

$G_C \geq 66N$。

（b）若 C 突然被吊离 A，受力分析如图所示。

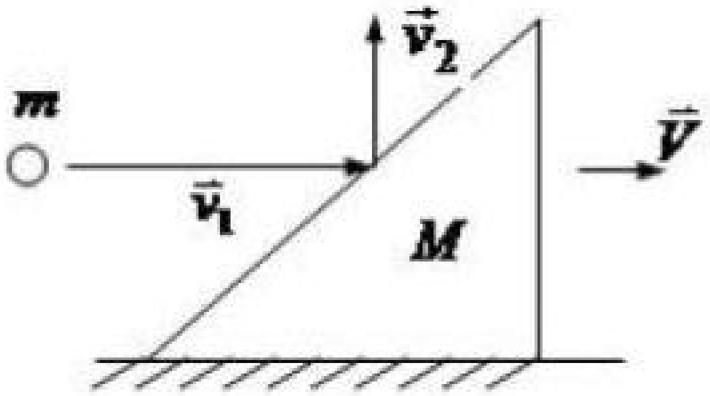




由牛顿运动定律可得$\begin{cases} T-f_A=m_Aa \\ N=G_A \\ f_A=\mu_sN \\ G_B-T=m_Ba \end{cases}$，代入数据解得$a=2.33m/s^2$。

2.如图所示，质量为M的滑块正沿着光滑水平地面向右滑动，一质量为m的小球水平向右飞行，以速度$\vec{v}_1$（对地）与滑块斜面相碰，碰后竖直向上弹起，速率为$\vec{v}_2$（对地）。若碰

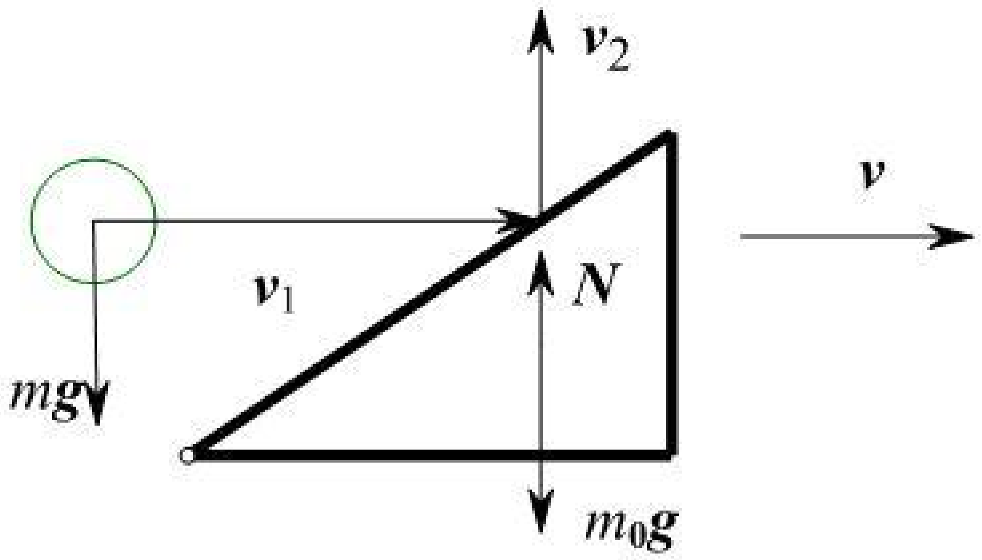
撞时间为Δt，试计算此过程中滑块对地的平均作用力和滑块速度增量的大小。



【解题过程】以M和m系统为研究对象，系统在水平方向上不受外力作用，动量守恒。以地面为参考系，则有$mv_1+Mv=M(v+\Delta v)$，式中：v为碰撞前M的速率，Δv为M的速率的增量。解得

$$\Delta v=\frac{mv_1}{M}$$。

在竖直方向，系统动量不守恒。如图所示，系统所受外力有N、Mg和mg。



由动量定理：$\left(N-Mg-mg\right)\Delta t=mv_2$，

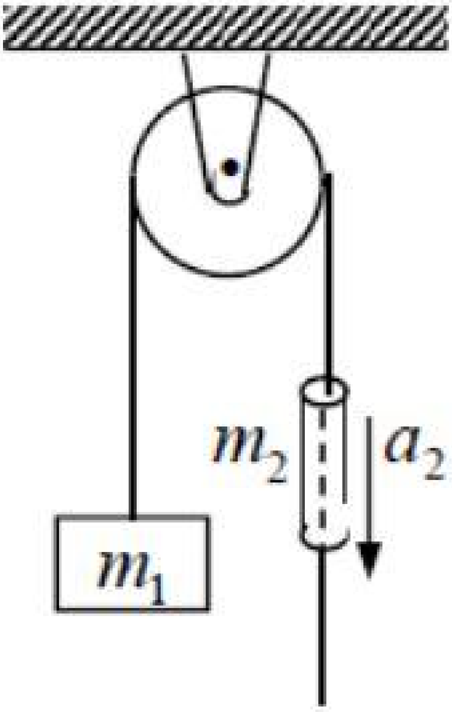
$N=\dfrac{mv_2}{\Delta t}+Mg+mg$，根据牛顿第三定律，

滑块对地的平均作用力的大小为

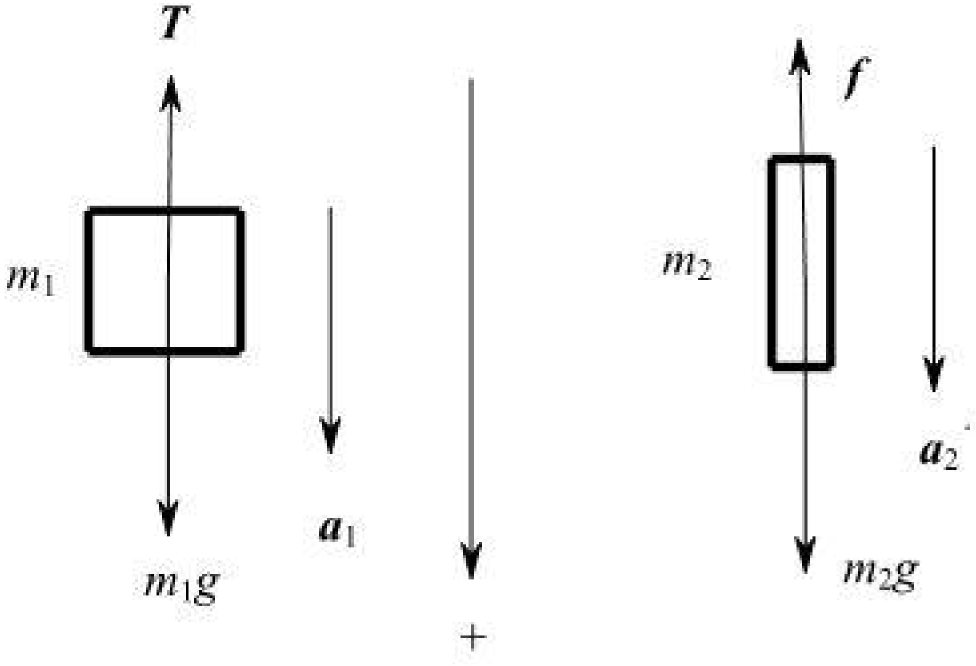
$\bar{F}=N=\dfrac{mv_2}{\Delta t}+Mg+mg$，方向竖直向下。

3.一条轻绳跨过摩擦可被忽略的轻滑轮，在绳的一端挂一质量为m_1的物体，在另一侧有一质量为m_2的环。求当环相对于绳以恒定的加速度a_2沿绳向下滑动时，物体和环相对于地面的加速度各是多少？环与绳间的

摩擦力多大?



【解题过程】m_1、m_2受力及它们相对于地面的加速度如图所示。



以地面为参考系，以竖直向下为正方向，分别对m_1、m_2和轻绳应用牛顿运动定律，则

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 \\ m_2 g - f = m_2 a_2' \\ T = f \end{cases}$$，由各相对加速度关系有

$a_2' = a_2 - a_1$。联立以上 4 式，解得

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g + m_2 a_2}{m_1 + m_2},$$

$$a_2' = \frac{m_1 a_2 - (m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2},$$

$$T = \frac{m_1 m_2 (2g - a_2)}{m_1 + m_2} = f。$$

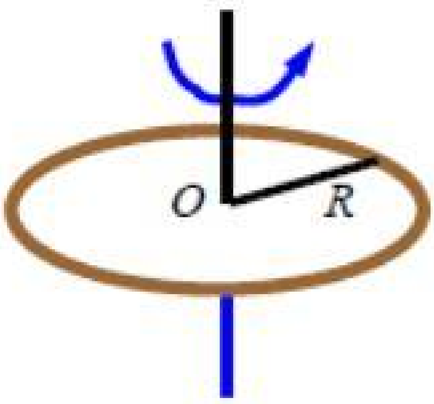
讨论：（1）当 $a_2 = 0$ 时，$a_2' = -a_1$，表示 m_1 和 m_2 都挂在绳子上一起运动。

（2）当 $a_2 = 2g$ 时，$T = f = 0$，表明柱体与绳子间无摩擦力，$a_1 = g$，$a_2' = g$，m_1 和 m_2 均自由下落。

NO.3 角动量 角动量守恒定律

一、选择题

1.有两个半径相同、质量相等的细圆环 A 和 B。A 环的质量分布均匀，B 环的质量分布不均匀。它们对通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为J_A和J_B，则（）



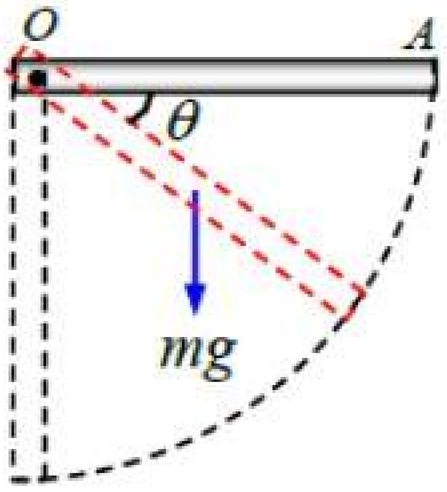
（A）$J_A > J_B$　　　　（B）$J_A < J_B$

（C）$J_A = J_B$

（D）不能确定J_A、J_B哪个大

【解题过程】细圆环的转动惯量与质量是否均匀分布无关，$J = \int dmR^2 = mR^2$，故选（C）。

2.均匀细棒 OA 可绕通过其一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，如图所示。今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆动到竖直位置的过程中，下述说法哪一种是正确的？（）



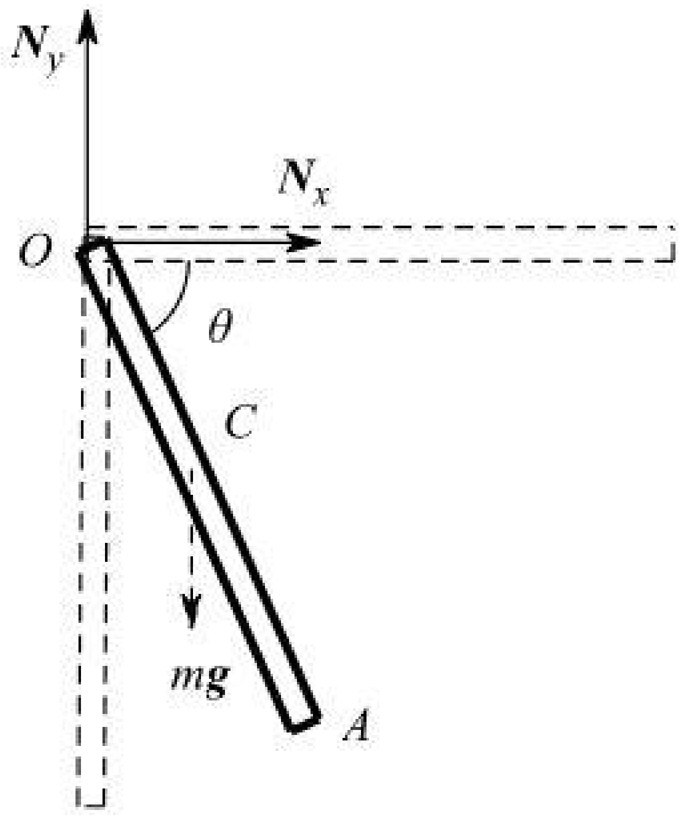
（A）角速度从大到小，角加速度从小到大

（B）角速度从小到大，角加速度从大到小

（C）角速度从大到小，角加速度从大到小

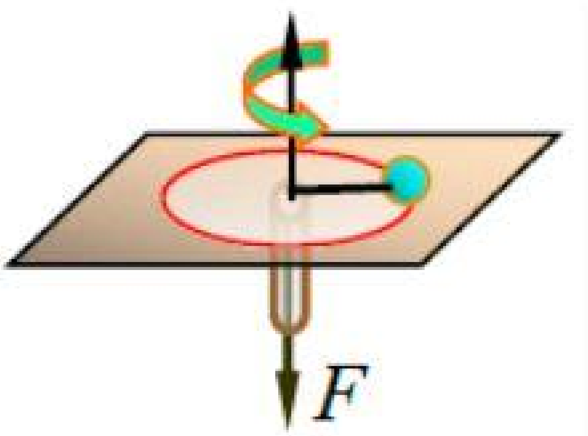
（D）角速度从小到大，角加速度从小到大

【解题过程】设棒长l，质量m，对O轴转动惯量为J，在下摆到与水平方向夹角为θ位置时受力如图所示。



由转动定律：$mg\dfrac{l}{2}\cos\theta = J\beta$，在下摆过程中$\theta$增大，角加速度$\beta$减小，角速度$\omega$增大。选（B）。

3.绳的一端系一质量为m的小球，在光滑的水平桌面上作匀速圆周运动。若从桌面中心孔向下缓慢拉绳子，则小球的（）



（A）角动量不变，角速度增加

（B）角动量增加，角速度增加

（C）角动量不变，角速度减小

（D）角动量减小，角速度减小

【解题过程】从桌面中心孔向下拉绳子，半径r减小，故由$v=r\omega$知角速度增加，由于拉力通过力心，故角动量守恒，选（A）。

4.关于力矩有以下几种说法：

（1）对某个定轴而言，内力矩不会改变刚体的角动量

（2）作用力和反作用力对同一轴的力矩之和必为零

（3）质量相等，形状和大小不同的两个刚体，在相同力矩的作用下，它们的角加速度一定相等

在上述说法中（）

（A）只有（2）是正确的

（B）（1）、（2）是正确的

（C）（2）、（3）是正确的

（D）（1）、（2）、（3）都是正确的

【解题过程】由牛顿第三定律，内力成对出现，一对内力等大、反向且在同一直线上，对同一轴的力矩之和必为零，不会改变刚体对轴的角动量。而质量相等，但形状大小不同的刚体对同轴的转动惯量可能不同，所以在相同的力矩作用下，角加速度不一定相等。所以上述说法中只有（1）（2）正确。选（B）。

5.质量为m的小孩站在半径为R的水平平台边缘上，平台可以绕通过其中心的竖直光滑固定轴自由转动，转动惯量为J。平台和小孩开始时静止。当小孩突然以相对于地面为v的速率在台边缘沿逆时针转向走动时，此平台相对于地面旋转的角速度和旋转方向分别为（）

（A）$\omega=\dfrac{mRv}{J}$，逆时针

（B）$\omega=\dfrac{mRv}{J}$，顺时针

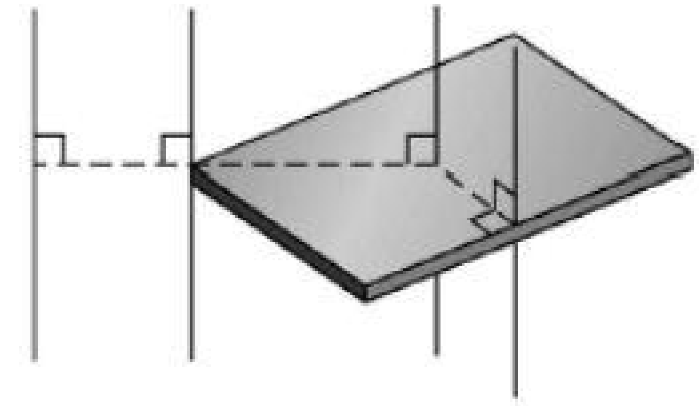
（C）$\omega=\dfrac{mRv}{J+mR^2}$，顺时针

（D）$\omega=\dfrac{mRv}{J+mR^2}$，逆时针

【解题过程】平台和小孩系统所受外力矩为零，对轴的角动量守恒。即 $0=mRv+J\omega$，解得 $\omega=-\dfrac{mvR}{J}$，方向为顺时针，选（B）。

二、填空题

1.右图表示一个刚体（一边比另一边长）和四个供选择的垂直于刚体表面的转轴。根据刚体对各轴的转动惯量 J，由大到小对各轴排序______。



【解题过程】由平行轴定理$J_D = J_C + md^2$

可知$(1)>(2)>(4)>(3)$。

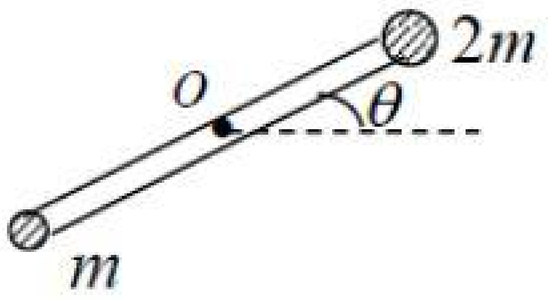
2.已知地球的质量为m，太阳的质量为M，地心与日心的距离为R，引力常数为G，则地球绕太阳作圆周运动的角动量为______。

【解题过程】设地球绕太阳做圆周运动的速率为v，轨道角动量为L，由万有引力定律和牛顿运动定律$G\frac{mM}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$可得

$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$，$L = mvR = m\sqrt{GMR}$。

3.一长为l、质量可以忽略的直杆，两端分别

固定有质量为$2m$和m的小球，杆可绕通过其中心 O 且与杆垂直的水平光滑固定轴在铅直平面内转动。开始杆与水平方向成某一角度θ，处于静止状态，如图所示。释放后，杆绕 O 轴转动。则当杆转到水平位置时，该系统所受的合外力矩的大小$M=$_______，此时该系统角加速度的大小$\beta=$_______。



【解题过程】以$2m$小球重力的力矩方向（垂直向里）为正方向，则

$$M=2mg\frac{l}{2}\cos\theta-mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$=mg\cdot\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$J=2m\left(\frac{l}{2}\right)^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$M=J\beta\Rightarrow\beta=\frac{2g}{3l}\cos\theta$$。

当杆转到水平位置时，$\theta=0^\circ$，则 $M=\frac{1}{2}mgl$，

$$\beta=\frac{2g}{3l}$$。

4.一水平的匀质圆盘，可绕通过盘心的铅直光滑自由转动。圆盘质量为 M，半径为 R，对轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$。当圆盘以角速度 ω_0 转动时，有一质量为 m 的子弹沿盘的直径方向射入而嵌在盘的边缘上，子弹射入后，圆盘的角速度为 $\omega=$______。

【解题过程】系统未受外力矩作用，对固定轴角动量守恒有：

$$\frac{1}{2}MR^2\cdot\omega_0=\left(\frac{1}{2}MR^2+mR^2\right)\omega$$，解得

$\omega=\dfrac{M\omega_0}{M+2m}$。

5.一质量为 m 的质点沿着一条空间曲线运动，该曲线在直角坐标系下的定义式为 $\vec{r}=a\cos\omega t\vec{i}+b\sin\omega t\vec{j}$，其中 a、b、ω 皆为常数。则此质点所受的对原点的力矩 $\vec{M}=$________；该质点对原点的角动量 $\vec{L}=$________。

【解题过程】由题意可得质点的速度和加速度分别为

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-a\omega\sin\omega t\vec{i}+b\omega\cos\omega t\vec{j},$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-a\omega^2\cos\omega t\vec{i}-b\omega^2\sin\omega t\vec{j}\text{。}$$

质点所受合力为 $\vec{F}=m\vec{a}$，则 $\vec{F}$ 对原点的力矩为

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a\cos\omega t & b\sin\omega t & 0\\ -ma\omega^2\cos\omega t & -b\omega^2\sin\omega t & 0\end{vmatrix}=0$$

质点对原点的角动量为

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a\cos\omega t & b\sin\omega t & 0\\ -ma\omega\sin\omega t & mb\omega\cos\omega t & 0\end{vmatrix}=m\omega ab\vec{k}$$

6.哈雷彗星绕太阳运动的轨道是一个椭圆。它离太阳最近的距离是 $r_1=8.75\times10^{10}m$，此时它的速率是 $v_1=5.46\times10^4 m\cdot s^{-1}$。它离太阳最远时的速率是 $v_2=9.08\times10^2 m\cdot s^{-1}$，这时它离太阳的距离 $r_2=$_____。

【**解题过程**】由只受有心力作用的系统对力

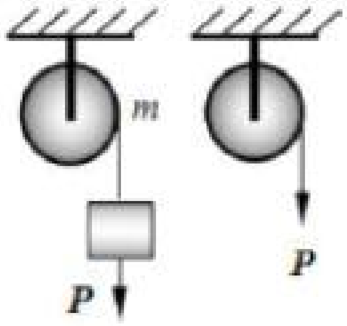
心的角动量守恒，得

$$mv_1r_1 = mv_2r_2,$$

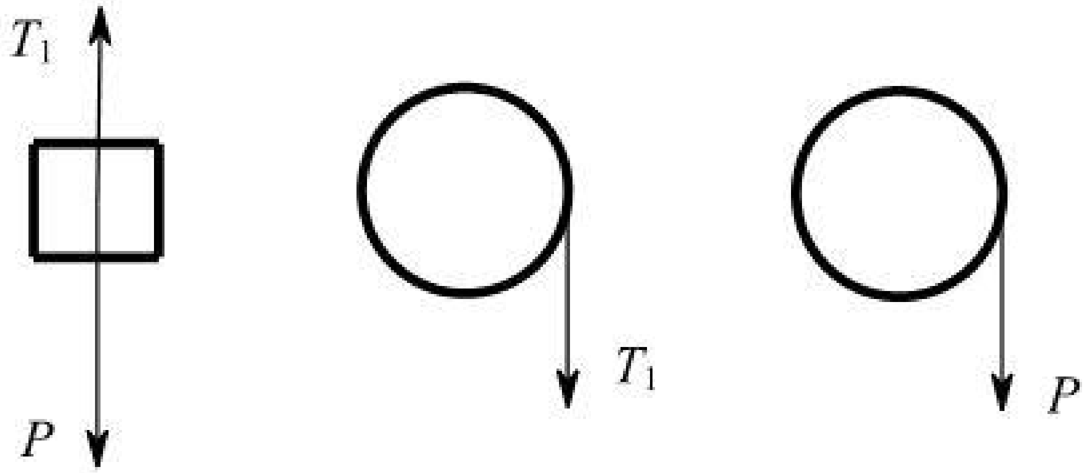
故 $r_2 = \dfrac{v_1r_1}{v_2} = \dfrac{8.75\times10^{10}\times5.46\times10^4}{9.08\times10^2}$

$= 5.26\times10^{12}(m)$。

7.一根轻绳绕在有水平转轴的定滑轮上，滑轮的质量为 m，绳下端挂有一物体。物体所受的重力为 P，滑轮的角加速度为 β。现在将物体去掉，代之以与 P 相等的力直接向下拉绳，如图所示，则滑轮的角加速度将______。（选填项：增大，不变，减少）



【解题过程】受力分析如图所示。



$$\begin{cases} P-T_1=ma \\ T_1R=J\beta_1 \end{cases} \Rightarrow \beta_1=\frac{T_1R}{J}=\frac{(P-ma)R}{J},$$

$PR=J\beta_2 \Rightarrow \beta_2=\dfrac{PR}{J}$，故

$\beta_1<\beta_2$，则滑轮的角加速度将增大。

三、计算题

1.一质量m、长为L、质量非均匀分布的细杆，绕过一端端点并垂直于杆的轴转动，其杆上的质量密度与离轴的距离成正比，求该杆对转轴的转动惯量。（要求：用微元分析法）

【解题过程】设杆的质量密度与离轴的距离之间的关系为$\rho = kx$，在离轴x的距离处取一质量元dm， $dm = \rho dx = kxdx$，则杆对转轴的转动惯量为

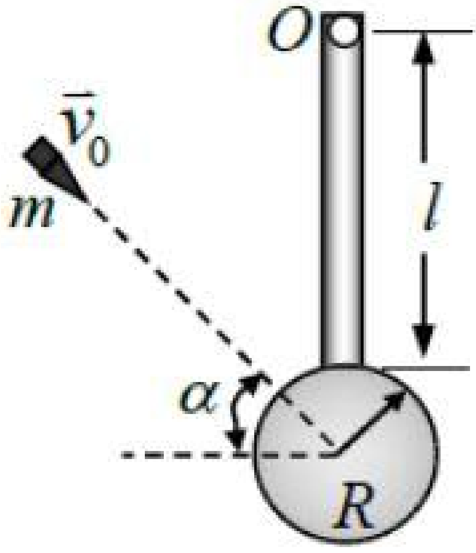
$$J = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 kxdx = \frac{kL^4}{4},$$

因$\int dm = \int_0^L kxdx = \frac{kL^2}{2} = m$，

故杆对转轴的转动惯量为$J = \frac{mL^2}{2}$。

2.如图所示，一半径为R的匀质小木球固结在一长度为l的匀质细棒的下端，且可绕水平光滑固定轴 O 转动，今有一质量为m，速度为$\vec{v}_0$的子弹，沿着与水平面成α角的方向射向球心，且嵌于球心。已知小木球、细棒对通过 O 水平轴的转动惯量的总和为J。求

子弹嵌入球心后系统的共同角速度。

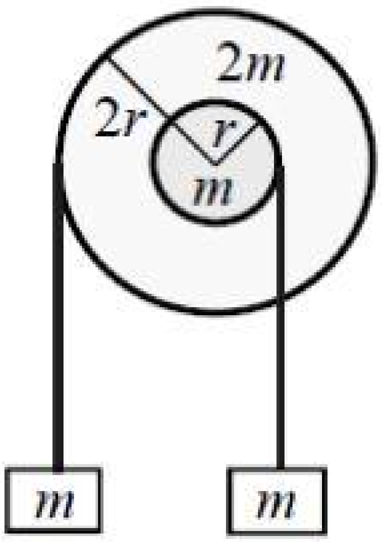


【解题过程】子弹射入木球过程中，子弹、细棒和木球组成的系统所受合外力矩为零，系统对轴的角动量守恒，故 $m(l+R)v_0\cos\alpha=\left[J+m(l+R)^2\right]\omega$，解得木球和子弹共同转动的角速度为

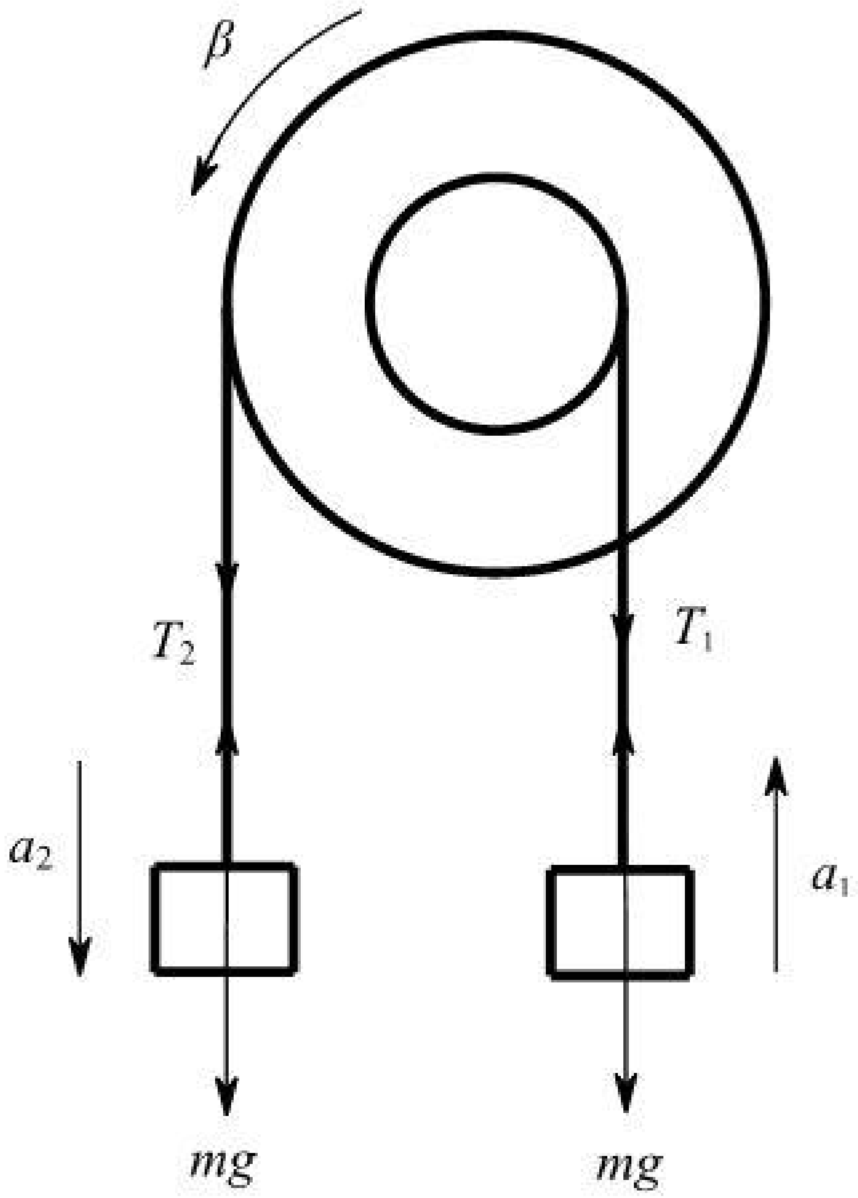
$$\omega=\frac{m(l+R)v_0\cos\alpha}{J+m(l+R)^2}。$$

3.质量分别为 m 和 $2m$、半径分别为 r 和 $2r$ 的两个均匀圆盘，同轴地黏在一起，可以绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动，对转轴的转动惯量为 $9mr^2/2$，大小圆

盘边缘都绕有绳子，绳子下端都挂一质量为 m 的重物，如图所示。求盘的角加速度的大小。



【解题过程】各物体受力分析如图所示。

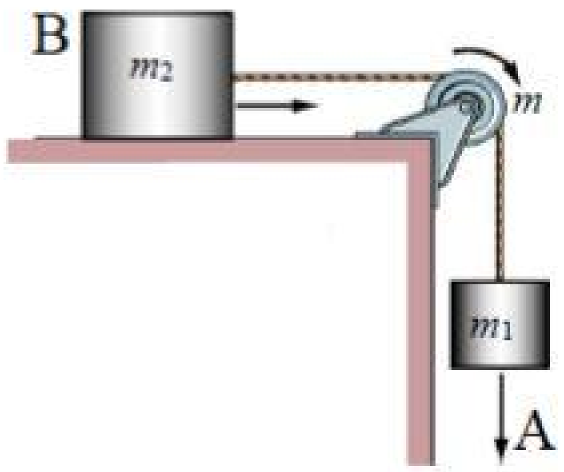


由质点运动牛顿定律和刚体定轴转动定律列方程如下（设逆时针转动方向为正）：

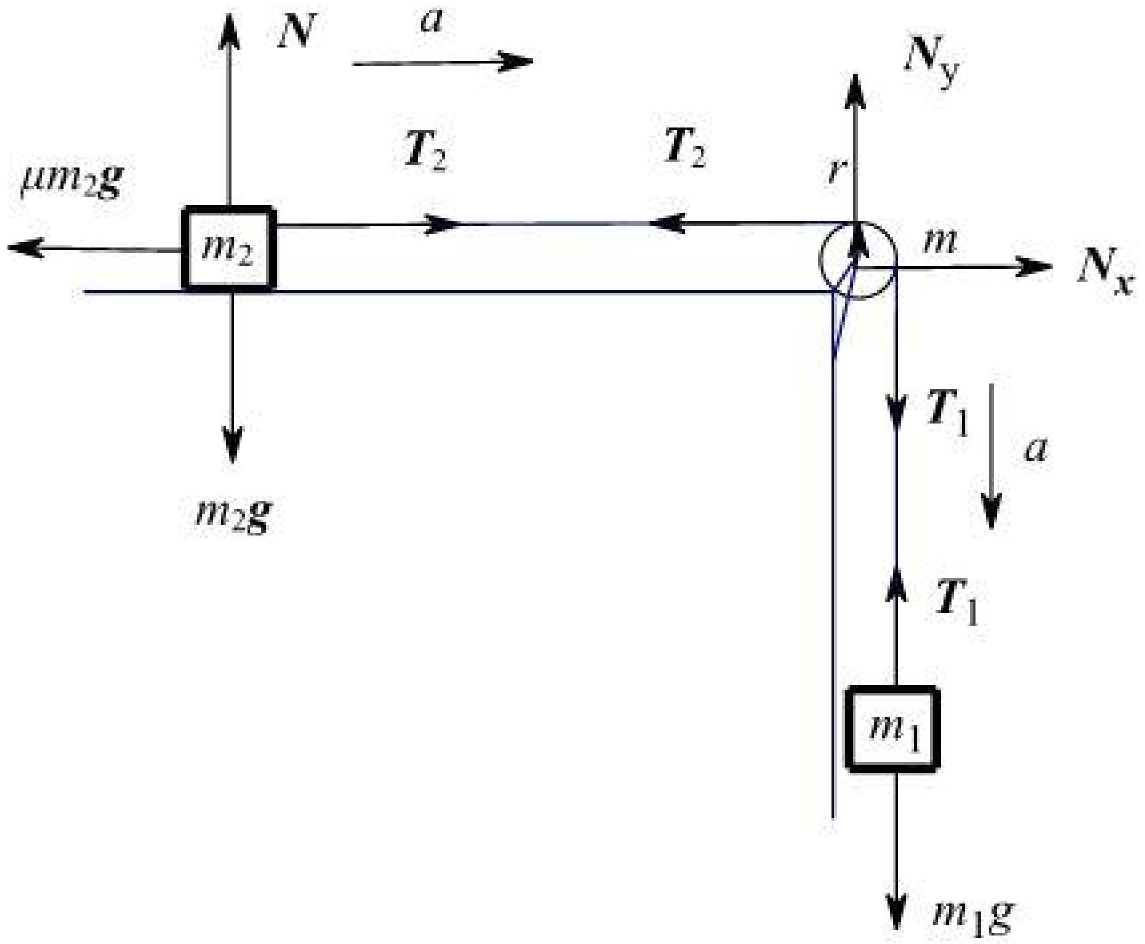
$$\begin{cases} mg - T_2 = ma_2 \\ T_1 - mg = ma_1 \\ T_2 \cdot 2r - T_1 \cdot r = \dfrac{9}{2} mr^2 \beta \end{cases}$$

，绳和圆盘间无相对滑动有 $a_2 = 2r\beta$，$a_1 = r\beta$。联立解得盘的角加速度的大小为 $\beta = \dfrac{2g}{19r}$。

4.如图所示，两物体 A 和 B 的质量分别为 m_1 和 m_2，滑轮质量为 m，半径 R，可视为均质圆盘。已知物体 B 与桌面间的滑动摩擦系数为 μ，不计轴承摩擦，求物体 A 下落的加速度和两段绳中张力。



【**解题过程**】分别以m_1、m_2和滑轮为研究对象，受力情况如图所示。



分别对m_1、m_2用牛顿第二定律，对滑轮用转动定律，再考虑角量和线量的关系，列方程如下：

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 - \mu m_2 g = m_2 a \\ (T_1 - T_2)R = \dfrac{1}{2} mR^2 \beta \\ a = R\beta \end{cases},$$

解方程得$\begin{cases} a = \dfrac{(m_1 - \mu m_2)g}{m_1 + m_2 + m/2} \\ T_1 = m_1 g - \dfrac{m_1(m_1 - \mu m_2)g}{m_1 + m_2 + m/2} \\ T_2 = \mu m_2 g + \dfrac{m_2(m_1 - \mu m_2)g}{m_1 + m_2 + m/2} \end{cases}$。

NO.4 机械能 机械能守恒定律

一、选择题

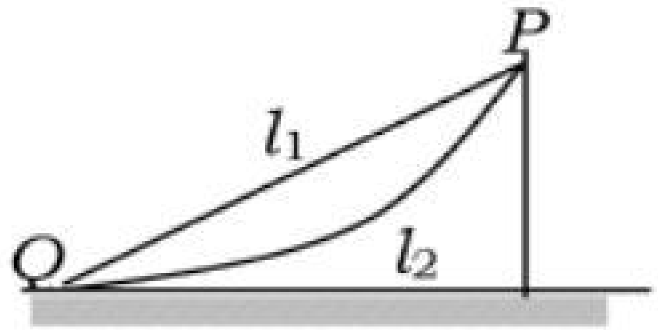
1.如图所示，一个小球先后两次从 P 点由静止开始，分别沿着光滑的固定斜面l_1和圆弧面l_2下滑。则小球滑到两面的底端Q时（）

（A）动量相同，动能也相同

（B）动量相同，动能不同

（C）动量不同，动能也不同

（D）动量不同，动能相同



【解题过程】小球先后两次从 P 点由静止开始沿着光滑的固定斜面l_1和圆弧面l_2下滑，小球和固定斜面l_1、小球和圆弧面l_2组成的系统机械能守恒。小球两种情况下到达底端

的速度大小相同，方向不同，所以动量不同，动能相同。选（D）。

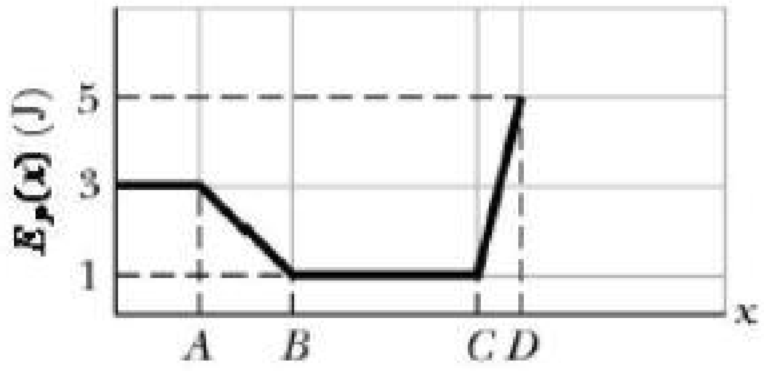
2.如图为一个质点在其中作一维运动的系统势能—位置（E_p-x）图。将区域AB、BC和CD中对质点作用力的绝对值按大小排序，正确的是：（）

（A）$\left|F_{AB}\right|>\left|F_{CD}\right|>\left|F_{BC}\right|$

（B）$\left|F_{AB}\right|>\left|F_{BC}\right|>\left|F_{CD}\right|$

（C）$\left|F_{CD}\right|>\left|F_{BC}\right|>\left|F_{AB}\right|$

（D）$\left|F_{CD}\right|>\left|F_{AB}\right|>\left|F_{BC}\right|$



【解题过程】 因为 $F_{保}=-\dfrac{dE_p}{dx}$，即是

$E_p - x$ 的斜率。从图上看，应该有：

$|F_{CD}| > |F_{AB}| > |F_{BC}|$，选（D）。

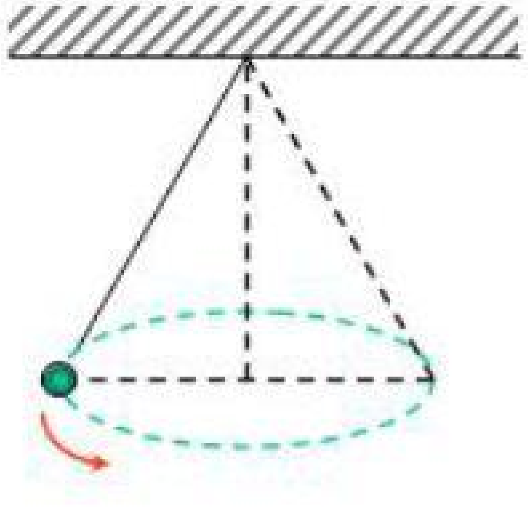
3.如图所示，圆锥摆的小球在水平面内作匀速率圆周运动，判断下列说法中正确的是( )

（A）重力和绳子的张力对小球都不作功

（B）重力和绳子的张力对小球都作功

（C）重力对小球作功，绳子张力对小球不作功

（D）重力对小球不作功，绳子张力对小球作功



【解题过程】小球受到拉力和重力，重力与拉力始终与速度垂直，故都不做功，选（A）。

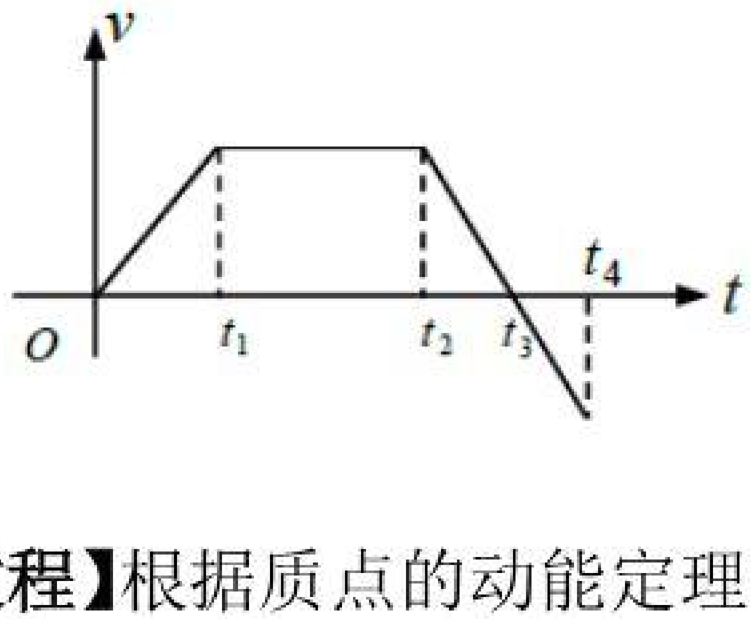
4.一个作直线运动的物体，其速度 v 与时间 t 的关系曲线如图所示。设时刻 t_1 至 t_2 间外力作功为 W_1；时刻 t_2 至 t_3 间外力作的功为 W_2；时刻 t_3 至 t_4 间外力作功为 W_3，则（）

（A）$W_1 > 0, W_2 < 0, W_3 < 0$

（B）$W_1 = 0, W_2 < 0, W_3 > 0$

（C）$W_1 > 0, W_2 < 0, W_3 > 0$

（D）$W_1 = 0, W_2 < 0, W_3 < 0$



【解题过程】根据质点的动能定理 $W = \Delta E_k$，

t_1~t_2 间，v 不变，$\Delta E_k = 0$，所以 $W_1 = 0$；

$t_2 \sim t_3$ 间，v 减小，$\Delta E_k < 0$，$W_2 < 0$；

$t_3 \sim t_4$ 间，$|v|$ 增大，$\Delta E_k > 0$，$W_3 > 0$。选（B）。

5.质量为 m 的一艘宇宙飞船，关闭发动机返回地球时，可认为该飞船只在地球的引力场中运动。已知地球质量为 M，万有引力恒量为 G，则当它从距地球中心 R_1 处下降到 R_2 处时，飞船增加的动能应等于（）

（A）$\dfrac{GMm}{R_2}$

（B）$\dfrac{GMm}{R_2^2}$

（C）$GMm\dfrac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$

（D）$GMm\dfrac{R_1 - R_2}{R_1^2}$

【解题过程】选飞船和地球为系统，忽略其

他星球的影响，只有保守内力作功，系统机械能守恒：$E_{k1}-G\frac{mM}{R_1}=E_{k2}-G\frac{mM}{R_2}$，飞船的动能增量为

$$\Delta E_k=E_{k2}-E_{k1}=G\frac{mM}{R_2}-G\frac{mM}{R_1}$$

$$=GMm\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}$$

选（C）。

6.一个质点同时在几个力作用下的位移为 $\Delta\vec{r}=4\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$（SI），其中一个力为恒力 $\vec{F}=6\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$（SI），则此力在该位移过程中所作的功为（）

（A）38J　　（B）10J

（C）50J　　（D）-50J

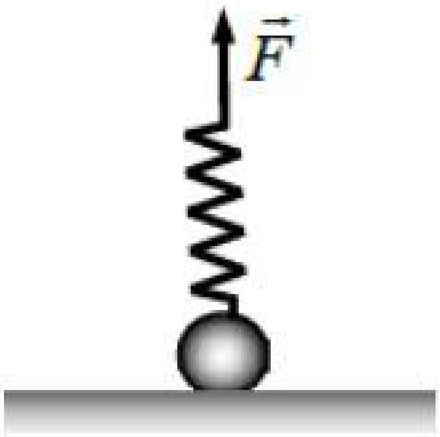
【解题过程】由功的定义

$$A=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=\left(6\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}\right)\cdot\left(4\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}\right)$$
$$=24+20+6=50J$$

选（C）。

二、填空题

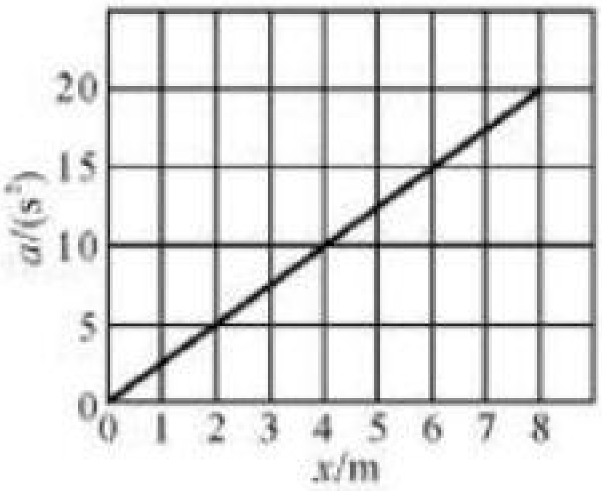
1.今有一劲度系数为k的轻弹簧，竖直放置，下端悬一质量为m的小球。初始状态，弹簧为原长，小球恰好与地接触。今将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止，在此过程中外力作功为______。



【解题过程】外力为：$F=kx$，此力为变力。物体m脱离地面的条件是$kx_0=mg$，所以

外力作的功为$W=\int_0^{x_0}kxdx=\dfrac{(mg)^2}{2k}$。

2.一块 10kg 的砖头沿 x 轴运动。它的加速度与位置的关系如图所示。在砖头从 $x=0$ 运动至 $x=8.0\ \ \mathrm{m}$ 的过程中，加速的力对它所做净功 $A=$______J。



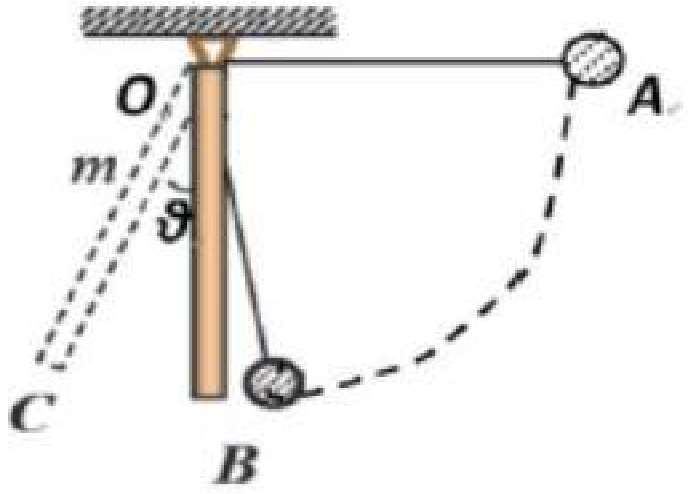
【解题过程】由图可以得出：

$$a=\frac{5}{2}x\Rightarrow F=ma=\frac{5}{2}mx,$$

$$A=\int_0^8 Fdx=\int_0^8\frac{5}{2}mxdx=800(J)。$$

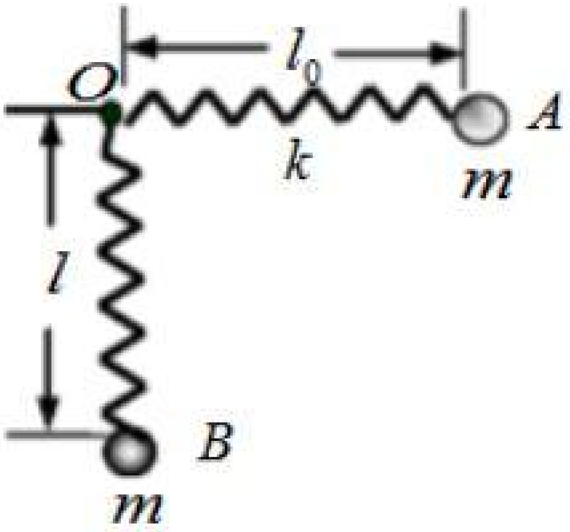
3.如图所示，长为 l、质量为 m 的均匀细杆可绕水平光滑固定轴 O 转动，开始时杆静止在竖直位置 B 处。另一质量也为 m 的小球，用长也为 l 的轻绳系于 O 轴上。现将小球在竖直平面内拉到水平位置 A 处，然后放手，小

球自由下摆。当小球下摆到细杆的位置时与杆下端发生完全非弹性碰撞，此碰撞过程满足_____。随后二者共同沿顺时针摆动，此摆动过程满足_____。（选填：动量守恒，角动量守恒，机械能守恒）



【解题过程】动量守恒；机械能守恒。

4.如图所示，质量为 m 的小球系在劲度系数为 k 的轻弹簧一端，弹簧的另一端固定在 O 点。初始时，弹簧在水平位置，原长为 l_0 处于自然状态。小球由位置 A 释放，下落到 O 点正下方位置 B 时，弹簧的长度变为 l，则小球到 B 点时的速度大小为_____。

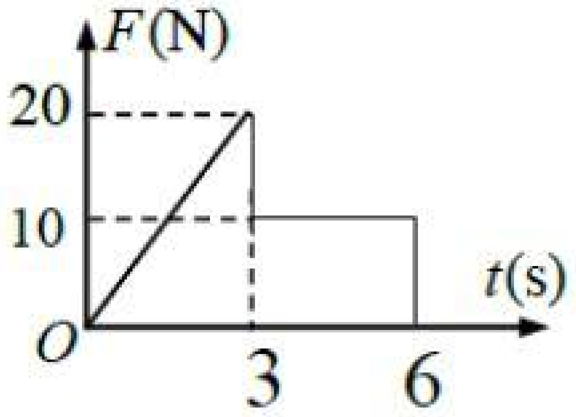


【解题过程】以小球、弹簧和地球组成的系统为研究对象，系统在小球运动过程中只有保守内力—弹力作功，系统机械能守恒。设B点重力势能为零，弹簧原长弹性势能为零，则对于A点，机械能为：mgl，对于B点，机械能为：$\frac{1}{2}k(l-l_0)^2+\frac{1}{2}mv_B^2$，由系统机械能守恒有：

$mgl=\frac{1}{2}k(l-l_0)^2+\frac{1}{2}mv_B^2$，所以 $v_B=\sqrt{2gl-\frac{k}{m}(l-l_0)^2}$。

5.一质量为$m=4kg$的物体，在0到6秒内，

受到如图所示的变力F的作用，由静止开始沿x轴正向运动，而力的方向始终为x轴的正方向，求6秒内变力F所做的功为_____。



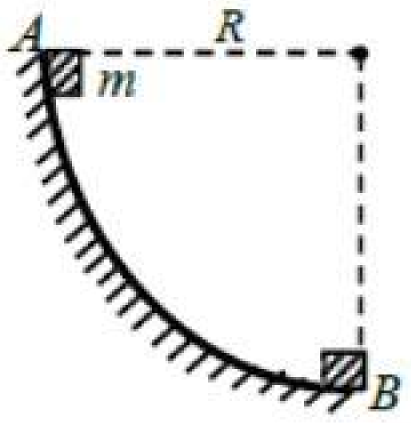
【解题过程】 $F-t$ 曲线下的面积为：$S=\frac{1}{2}\times3\times20+3\times10=60$，它就等于$0-6s$内$F$对质点的冲量，根据动能定理，这个冲量是等于其动量的增量。即：

$I=60=mv_6-0\Rightarrow v_6=15m/s$，再根据动能定理：

$$A=\frac{1}{2}mv_6^2-0=\frac{1}{2}\times4\times15^2=450\left(J\right)。$$

6.如图所示，质量$m=2kg$的物体从静止开始，沿1/4圆弧从A滑到B，在B处速度的

大小为$v=6m\cdot s^{-1}$，已知圆的半径$R=4m$，则物体从 A 到 B 的过程中摩擦力对它所作的功$A=$ ______。



【解题过程】以 B 点为重力势能零点，由功能原理$A_{外}+A_{内非保守}=\Delta E$，摩擦力作的功为

$$A=\frac{1}{2}mv^2-mgR$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\times 6^2-2\times 9.8\times 4=-42.4(J)$$

7.一质量为m的质点在指向圆心的平方反比力$F=-k/r^2$的作用下，作半径为r的圆周运动，此质点的速度$v=$ ______。若取距

圆心无穷远处为势能零点，它的机械能 $E=$ ______。

【解题过程】 由牛顿第二定律 $-\dfrac{k}{r^2}=m\dfrac{v^2}{r}$

可得指点的速度大小 $v=\sqrt{\dfrac{k}{mr}}$。

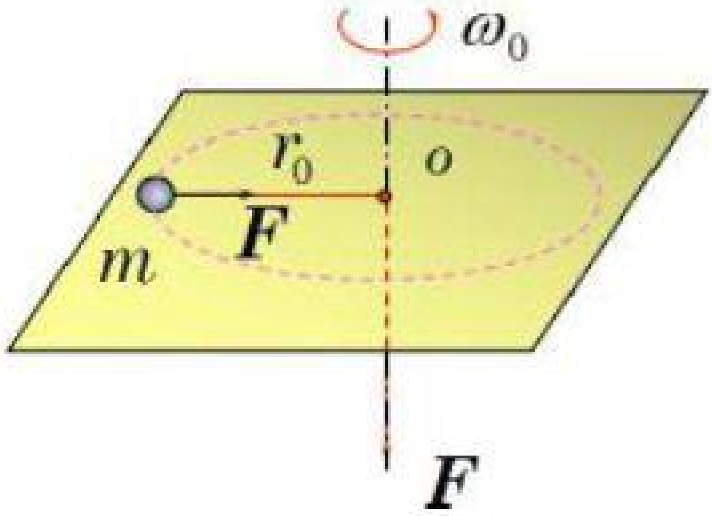
以无穷远处为势能零点，质点的势能为 $E_p=\int_r^{\infty}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_r^{\infty}-\dfrac{k}{r^2}dr=-\dfrac{k}{r}$，

质点的动能为 $E_k=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{k}{2r}$，所以质点的机械能 $E=E_k+E_p=\dfrac{k}{2r}-\dfrac{k}{r}=-\dfrac{k}{2r}$。

三、计算题

1.细绳一端连接一质量 m 小球，另一端穿过水平桌面上的光滑小孔，小球以角速度 ω_0 转动，用力 F 拉线，使转动半径从 r_0 减小到 $r_0/2$。求：（1）小球的角速度；（2）拉力 F

做的功。



【解题过程】（1）由于线的张力过轴，小球受的合外力矩为 0，角动量守恒。

$$\begin{cases} L_0 = L \\ J_0\omega_0 = J\omega \\ mr_0^2\omega_0 = mr^2\omega \\ r = \dfrac{r_0}{2} \end{cases}$$

，所以 $\omega = 4\omega_0$，半径减小角速度增加。

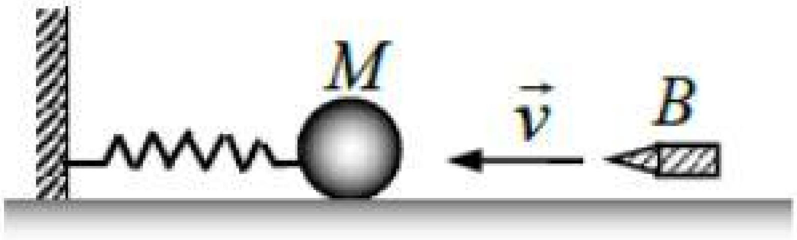
（2）由动能定理：

$$W = E_k - E_{k0} = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J_0\omega_0^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{r_0}{2}\right)^2(4\omega_0)^2 - \frac{1}{2}mr_0^2\omega_0^2$$

$$= \frac{3}{2}mr_0^2\omega_0^2$$

2.一质量为M的弹簧振子，水平放置静止在平衡位置，如图所示，一质量为m的子弹以水平速度$\bar{v}$射入振子中，并随之一起运动。如果水平面光滑，求弹簧的最大势能。



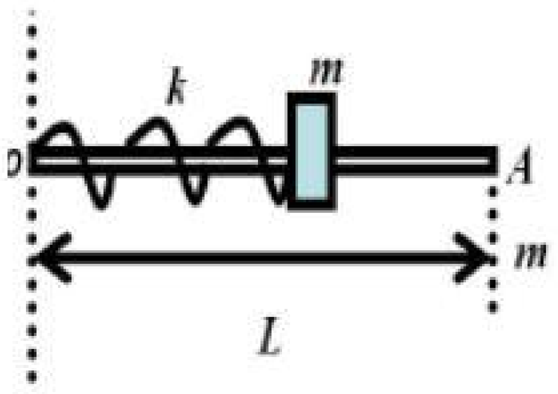
【解题过程】先以m和M为研究对象，忽略它们碰撞过程中弹簧因形变而产生的力，系统动量守恒。设碰后二者共同运动的速率为u，由动量守恒定律$mv=(m+M)u$，得

$$u=\frac{m}{m+M}v。$$

再以m、M和弹簧为研究对象，$A_{外}=0$，系统机械能守恒，最大势能等于初动能，即

$$E_{p\max}=\frac{1}{2}(m+M)u^2=\frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m+M}。$$

3.有一个细杆长L，质量为m，可以绕竖直轴在水平面内转动。有一质量也为m的环套在杆上，可以在其上无摩擦滑动，环与劲度系数为k的轻弹簧连接，轻弹簧的另一端连接在O点。系统最初静止，在外力矩作用下绕竖直轴无摩擦转动。当环缓慢滑到端点A时，系统角速度为ω。求：（1）当“环缓慢”滑到端点A时，环的动能是多少？（2）当“环缓慢”滑到端点A时，细杆的动能是多少？（3）当“环缓慢”滑到端点A时，弹簧的势能是多少？（要求以弹簧原长为势能零点）（4）当“环缓慢”滑到端点A时，外力矩做功是多少？



【解题过程】（1）环的动能：$E_k=\dfrac{1}{2}m\left(\omega L\right)^2$

（2）细杆的动能：

$$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2\omega^2=\frac{1}{6}m\left(\omega L\right)^2$$

（3）由 $k\Delta x=m\omega^2L$ 得

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2=\frac{\left(m\omega^2L\right)^2}{2k}$$

（4）环、细杆和弹簧组成的系统非刚体，缓慢滑动，不计环沿杆径向运动的动能。

$A_{外}+A_{内}=\Delta E_k$，

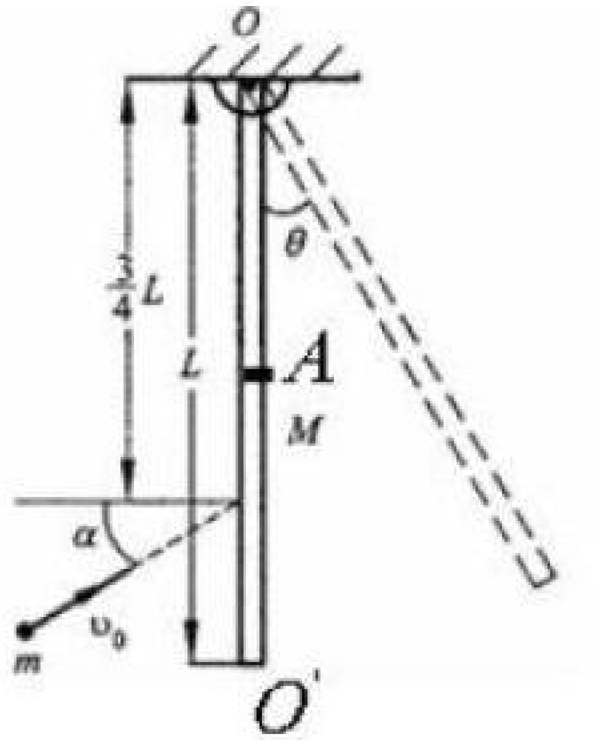
$A_{内}=A_{弹}=-\int_0^{\Delta x}kxdx=-\dfrac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2$，

$A_{外}-\dfrac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}mL^2+mL^2\right]\omega^2$　，

$k\Delta x=m\omega^2L$，

联立解得 $A_{外}=\dfrac{2}{3}mL^2\omega^2+\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(m\omega^2L\right)^2}{k}$ 。

4.面对综合性力学问题，常常需要将其划分为若干阶段来分析处理，明确每个阶段的研究对象和力学定律是求解的关键。如图所示，一质量为M，长度为L的均匀细棒自由下垂，并且可以绕固定点O自由转动。现有一质量为m的小泥团以速度$\vec{v}_0$与水平方向夹角为α击中棒长的3/4处，并粘在其上。若求细棒摆到最高点时与竖直方向的夹角θ，填表写出必要的求解方程。



划分出两个阶段		
研究对象		
守恒定律名称		
适用条件		
列出方程		

【解题过程】（1）以细棒和小泥团为研究对象，碰撞过程不受外力矩作用，系统角动量守恒。设碰后角速度为 ω，则有

$$mv_0\cos\alpha\times\frac{3}{4}L=J\omega,$$

其中

$$J=\frac{1}{3}ML^2+m\left(\frac{3}{4}L\right)^2=\frac{1}{3}ML^2+\frac{9}{16}mL^2$$

解得 $\omega=\dfrac{mv_0\cos\alpha\times\frac{3}{4}L}{J}$。

（2）细棒向上摆动过程中，以细棒、泥团和地球为研究对象，只有保守内力做功，系统机械能守恒。设在细棒竖直下垂时重力势能为零，则有

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = Mg\cdot\frac{L}{2}(1-\cos\theta)+\frac{3}{4}mgL\left(1-\cos\theta\right)$$

解得 $\theta = \arccos\left(1-\dfrac{J\omega^2}{MgL+\dfrac{3}{2}mgL}\right)$。

NO.5 狭义相对论

一、选择题

1.在狭义相对论中下列说法中哪些是正确的？（　　）

（1）一切运动物体相对观察者的速度都不能大于真空中的光速。

（2）质量、长度、时间的测量结果都是随物体与观察者的相对运动状态而改变的。

（3）在一惯性系中发生于同一时刻、不同地点的两个事件在其他一切惯性系中也是同时发生的。

（4）惯性系中的观察者观察一个与他作匀速度相对运动的时钟时，会看到这时钟比与他相对静止的相同的时钟走得慢些。

（A）（1）（3）（4）　　（B）（1）（2）（4）

（C）（1）（2）（3）　　（D）（2）（3）（4）

【解题过程】真空中的光速是一切物体运动

速度的极限，也是能量与信号传递速度的极限，故（1）正确。

长度、时间、质量是与观察者参考系有关相对量，故（2）正确。

在一个惯性系中同时异地发生的事件，在其他惯性系中必然是不同时的，故（3）错误。

在一切时间测量中，原时最短。故（4）正确。

选（B）。

2.两个惯性系 S 和 S'，沿 x（x'）轴方向作匀速相对运动。设在 S' 系中某点先后发生两个事件，用静止于该系的钟测出两事件的时间间隔为 τ_0，而用固定在 S 系的钟测出这两个事件的时间间隔为 τ。又在 S' 系 x' 轴上放置一静止于该系，长度为 l_0 的细杆，从 S 系测得此杆的长度为 l，则（　　）

（A）$\tau < \tau_0; l < l_0$　　（B）$\tau < \tau_0; l > l_0$

（C）$\tau > \tau_0; l > l_0$　　　（D）$\tau > \tau_0; l < l_0$

【解题过程】在一切时间测量中，原时最短，故$\tau > \tau_0$；在一切长度测量中，原长最长，故$l < l_0$，选（D）。

3.一宇宙飞船相对于地以$0.8c$（c表示真空中光速）的速度飞行。一光脉冲从船尾传到船头，飞船上的观察者测得飞船长度为90m，地球上的观察者测得光脉冲从船尾发出和到达船头两事件的空间间隔为（　　）

（A）90m　　　（B）54m

（C）150m　　　（D）270m

【解题过程】设地球参考系为K系，飞船参考系为K'系，K'系相对于K系沿x方向以$u = 0.8c$的速度飞行。由洛伦兹变换$x = \gamma\left(x' + ut'\right)$得地球上的观察者测量两事

件的空间间隔为

$$\Delta x=\gamma\left(\Delta x'+u\Delta t'\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}}\left(90+0.8\times3\times10^8\times\frac{90}{3\times10^8}\right)$$

$$=270(\mathrm{m})$$

选（D）。

4.在参考系 K 中，有两个静止质量都是 m_0 的粒子 A 和 B，分别以速度 v 沿同一直线相向运动，相碰后合在一起成为一个粒子，则其静止质量 M_0 的值为（c 表示真空中光速）

（　　）

（A）$2m_0$　　　　（B）$2m_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$

（C）$\dfrac{2m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$　　　　（D）$\dfrac{m_0}{2}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$

【解题过程】由动量守恒定律可知，在 K 系中两粒子碰后生成的粒子静止不动，由能量守恒定律 $M_0c^2 = 2mc^2$，可得

$$M_0 = 2m = 2\gamma m_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$，选（C）。

5.把一个静止质量为 m_0 的粒子，由静止加速到 $0.6c$（c 为真空中光速），其动能和需作的功分别为（　　）

（A）$E_k = 0.18m_0c^2, A = 0.18m_0c^2$

（B）$E_k = 0.225m_0c^2, A = 0.225m_0c^2$

（C）$E_k = 0.25m_0c^2, A = 0.25m_0c^2$

（D）$E_k = 1.25m_0c^2, A = 1.25m_0c^2$

【解题过程】初动能 $E_{k0} = 0$，末动能 $E_k = mc^2 - m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2$，

即 $E_k=\left(\gamma-1\right)m_0c^2=0.25m_0c^2$ 。（其中

$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\dfrac{5}{4}$）

需作的功为 $A=E_k-E_{k0}=E_k=0.25m_0c^2$

选（C）。

6.观察者甲以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$ 的速度相对于静止的观察者乙运动，若甲携带一长度为 l 、截面积为 S ，质量为 m 的棒，这根棒的长度方向与运动方向相同。则甲乙测得此棒的密度之比为（　　）

（A）3:1　　（B）4:1

（C）1:4　　（D）1:1

【解题过程】棒相对于甲静止，故甲测得其密度 $\rho_{甲}=\dfrac{m}{lS}$；

棒相对于乙运动，故乙测得的棒长、质量及

密度分别为$l' = l\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}l$，

$m' = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = 2m$，$\rho_{乙} = \frac{m'}{l'S} = \frac{4m}{lS}$，

故甲乙测得此棒的密度之比为$1:4$，选 C。

7.一火箭的固有长度为L，相对于地面作匀速直线运动的速度为v_1，火箭上有一个人从火箭的后端向火箭前端上的一个靶子发射一颗相对于火箭的速度为v_2的子弹。在火箭上测得子弹从射出到击中靶的时间间隔是（c表示真空中光速）（　　）

（A）$\frac{L}{v_1+v_2}$　　　（B）$\frac{L}{v_2}$

（C）$\dfrac{L}{v_1 - v_2}$　　（D）$\dfrac{L}{v_1\sqrt{1-\left(\dfrac{v_1}{c}\right)^2}}$

【解题过程】在火箭上测得子弹从射出到击中靶的时间间隔，火箭的固定长度和子弹相对于火箭的速度都在同一个参考系中，故时间间隔为$\dfrac{L}{v_2}$，选（B）。

二、填空题

1. α 粒子在加速器中被加速接近光速，当其质量为静止质量的 4 倍时，其动能为静止能量的_____倍。

【解题过程】根据已知条件：

$m = \gamma m_0 = 4m_0 \Rightarrow \gamma = 4$，而

$E_k = mc^2 - m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2$

$= 3m_0c^2 = 3E_0$

故动能为静止能量的 3 倍。

2.有一速度为u的宇宙飞船沿x轴正方向飞行，飞船头尾各有一个脉冲光源发出光波。处于船尾的观察者测得船头光源发出的光脉冲的传播速度大小为_____；处于船头的观察者测得船尾光源发出的光脉冲的传播速度大小为_____。

【解题过程】由光速不变原理可知在所有惯性系中，真空中的光速都恒为c，与光源或观察者的运动无关，故光脉冲的传播速度恒为c。

3. μ子是一种基本粒子，在相对于μ子静止的坐标系中测得其寿命为$\tau_0 = 2\times10^{-6}s$。如果μ子相对于地球的速度为$v = 0.998c$（c为真空中光速），则在地球坐标系中测出的μ子的寿命$\tau =$_____。

【解题过程】

$$\tau=\gamma\tau_0=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\tau_0=3.16\times10^{-5}s。$$

4.一宇航员要到离地球为 5 光年的星球去旅行。如果宇航员希望把这路程缩短为 3 光年，则他所乘的火箭相对于地球的速度应为 ________。

【解题过程】原长$\Delta l=5$光年，根据尺缩公式$\Delta l'=\gamma^{-1}\Delta l=\Delta l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=3$，故可推出

$$v=\frac{4}{5}c。$$

5.匀质细棒静止时的质量为m_0，长度为l_0，当它沿棒长方向作高速的匀速直线运动时，测得它的长为l，那么，该棒的运动速度$v=$ ________，该棒所具有的动能$E_k=$ ________。

【解题过程】由尺缩公式

$$l=\gamma^{-1}l_0=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}l_0 \text{ 可得 } v=c\sqrt{1-\frac{l^2}{l_0^2}},$$

该棒所具有的动能为

$$E_k=mc^2-m_0c^2=(\gamma-1)m_0c^2$$

$$=\left(\frac{l_0}{l}-1\right)m_0c^2。$$

6.（1）在速率为 $v=$_____的情况下粒子的动量等于非相对论动量的两倍。

（2）在速率为 $v=$_____的情况下粒子的相对论动能等于它的静止能量。

【解题过程】（1）粒子相对论动量 $p=mv=\gamma m_0v$，非相对论动量 $p_0=m_0v$，由题意，

$p=2p_0$，$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=2$，于是$v=\dfrac{\sqrt{3}c}{2}$。

（2）粒子的相对论动能

$E_k=mc^2-m_0c^2=(\gamma-1)m_0c^2$，

静止能量$E_0=m_0c^2$，

由题意$E_k=E_0$，即$\gamma-1=1$，

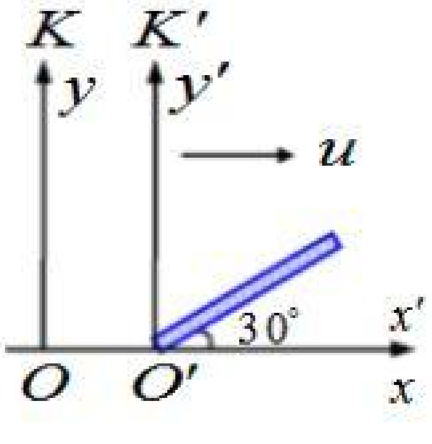
$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=2$，所以有$v=\dfrac{\sqrt{3}c}{2}$。

7.狭义相对论的两条基本原理是______和______。

【解题过程】狭义相对论的两条基本原理是狭义相对性原理和光速不变原理。

三、计算题

1. K 系与 K' 系是坐标轴相互平行的两个惯性系，K' 系相对于 K 系沿 ox 轴正方向匀速运动。一根刚性尺 L 静止在 K' 系中，与 $o'x'$ 轴成 30° 角。今在 K 系中观察得该尺与 ox 轴成 45° 角，求：（1）K' 系相对于 K 系的速度。（2）在 K 系中，尺的投影长度 Δx 和 Δy 。



【解题过程】(1) 尺在 K' 系中静止，尺长是固有长度。它在 x' ，y' 轴上投影分别为 $\Delta x'$ 和 $\Delta y'$ ；在 K 系中，尺的投影分别为 Δx 和

Δy，由题设条件有 $\dfrac{\Delta y'}{\Delta x'}=\tan 30^\circ$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\tan 45^\circ$，又由尺缩效应有 $\Delta y=\Delta y'$，

$$\Delta x=\Delta x'\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}，$$

于是 $\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}=\dfrac{\tan 30^\circ}{\tan 45^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

则 K' 系相对于 K 系的速度为 $u=\sqrt{\dfrac{2}{3}}c$。

（2）在 K 系中，尺的投影长度 Δx 和 Δy：

$$\Delta y'=\Delta y=L\sin 30^\circ=\frac{1}{2}L，$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan 45^\circ \Rightarrow \Delta x=\Delta y=\frac{1}{2}L。$$

2.观察者甲和乙分别静止于两个惯性参照系 K 和 K' 中，甲测得在同一地点发生的两个事件的时间间隔为 4s，而乙测得这两个事件的时间间隔为 5s，求：（1）K' 相对于 K 的

运动速度。（2）乙测得这两个事件发生的地点的距离。

【解题过程】（1）甲测得同一地点发生的两个事件的时间间隔为固有时间：$\Delta t = 4s$，

乙测得两事件的时间间隔为观测时间：

$\Delta t' = 5s$

由钟慢效应 $\Delta t = \gamma^{-1}\Delta t'$，即：

$$\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} = \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{4}{5},$$

可得 K' 相对于 K 的运动速度为 $u = \frac{3}{5}c$。

（2）由洛伦兹变换 $x' = \gamma\left(x - ut\right)$，乙测得两事件的坐标差为 $\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - u\Delta t\right)$，由题意 $\Delta x = 0$ 有：

$$\Delta x' = -\frac{u\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = -\frac{0.6c\times 4}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}$$

$$=-3c=-9\times10^{8}\left(\mathrm{m}\right)，$$

即两事件的距离为：

$$L=\left|\Delta x'\right|=-9\times10^{8}\left(\mathrm{m}\right)。$$

3.两个静止质量相同的粒子，一个处于静止状态，另一个的总能为其静能的 4 倍，当此两粒子发生碰撞粘合在一起，变成一个复合粒子，求复合粒子的静止质量与碰撞前单个粒子的静止质量之比。

【解题过程】根据已知条件：

$$E=mc^{2}=\gamma m_{0}c^{2}=4m_{0}c^{2}$$

$$\Rightarrow\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}=4$$

$$\Rightarrow v=\frac{\sqrt{15}}{4}c$$

两粒子在碰撞前后能量守恒：

$$m_0c^2+4m_0c^2=Mc^2\Rightarrow M=5m_0,$$

动量守恒：

$$mv=MV\Rightarrow 4m_0v=5m_0V$$

$$\Rightarrow V=\frac{4}{5}v=\frac{\sqrt{15}}{5}c,$$

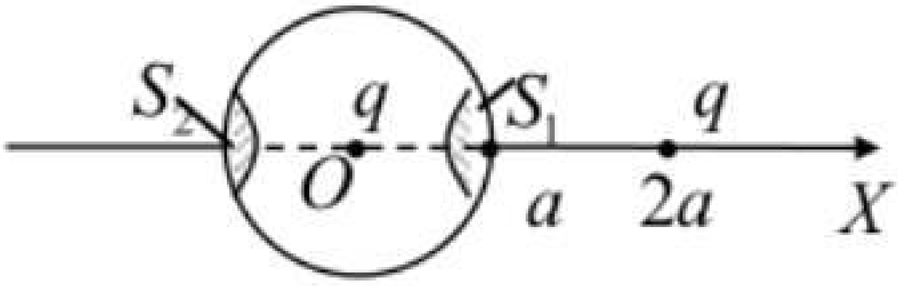
则 $M=\gamma' M_0\Rightarrow 5m_0=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}M_0$

$$\Rightarrow \frac{M_0}{m_0}=5\times\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}=5\times\frac{\sqrt{10}}{5}=\sqrt{10}\text{。}$$

NO.6　电场强度

一选择题

1.有两个点电荷电量都是$+q$，相距为$2a$。今以左边的点电荷所在处为球心，以a为半径作一球形高斯面，在球面上取两块相等的小面积S_1和S_2，其位置如图所示。设通过S_1和S_2的电场强度通量分别为Φ_1和Φ_2，通过整个球面的电场强度通量为Φ_S，则（）



（A）$\Phi_1 > \Phi_2, \Phi_S = q/\varepsilon_0$；

（B）$\Phi_1 < \Phi_2, \Phi_S = q/\varepsilon_0$

（C）$\Phi_1 = \Phi_2, \Phi_S = q/\varepsilon_0$

（D）$\Phi_1 < \Phi_2, \Phi_S = 2q/\varepsilon_0$

【解题过程】 根据高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum \frac{q}{\varepsilon_0}$ 和场强叠加原理有在小面积 S_1 处，$E_1 = 0$，$\Phi_1 = 0$；在小面积 S_2 处，$E_2 \neq 0$，$\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{S}_2 > 0$，所以 $\Phi_1 < \Phi_2$，而通过整个球面的电场强度通量 $\Phi_S = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$，故选（B）。

2.两个同心均匀带电球面，半径分别为 R_a 和 R_b（$R_a < R_b$），所带电量分别为 Q_a 和 Q_b，设某点与球心相距 r，当 $R_a < r < R_b$ 时，该点的电场强度的大小为：（）

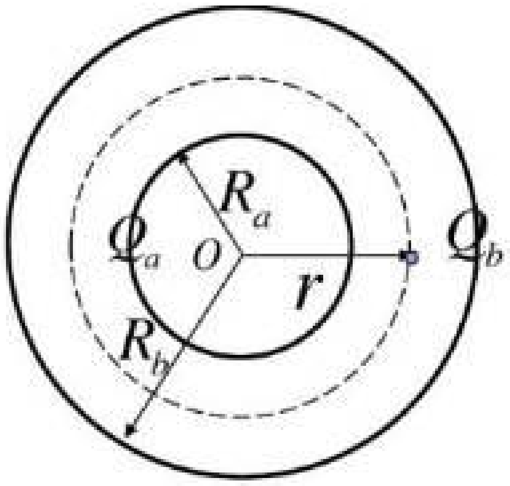
（A）$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_a}{r^2}$

（B）$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q_a-Q_b}{r^2}$

（C）$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\dfrac{Q_a}{r^2}+\dfrac{Q_b}{R_b^2}\right)$

（D）$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\dfrac{Q_a+Q_b}{r^2}\right)$

【解题过程】



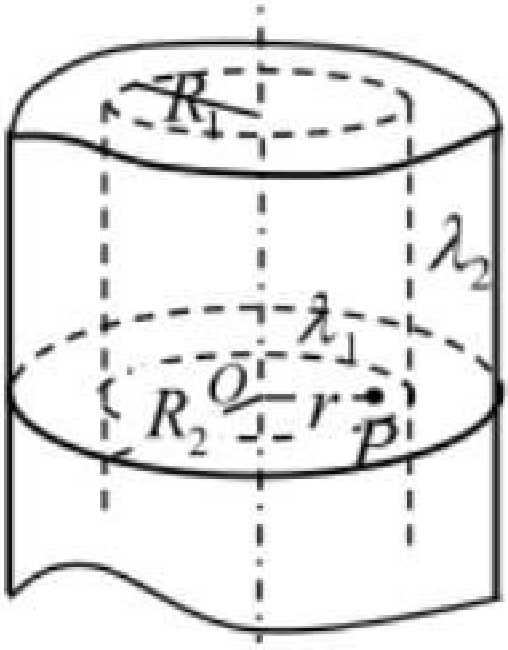
球面内外的电场强度分布为

$$E=\begin{cases}0 & (r<R)\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R)\end{cases}$$

，作半径为 r 的同心球面，根据高斯定理，球面上的电场强度

大小为：$E=\dfrac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，选（A）。

3.如图所示，两个“无限长”的、半径分别为 R_1 和 R_2 的共轴圆柱面均匀带电，轴线方向单位长度上的带电量分别为 λ_1 和 λ_2，则在内圆柱面里面、距离轴线为 r 的 P 点的电场强度大小（）



(A) $\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$

(B) $\dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 R_1}+\dfrac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 R_2}$

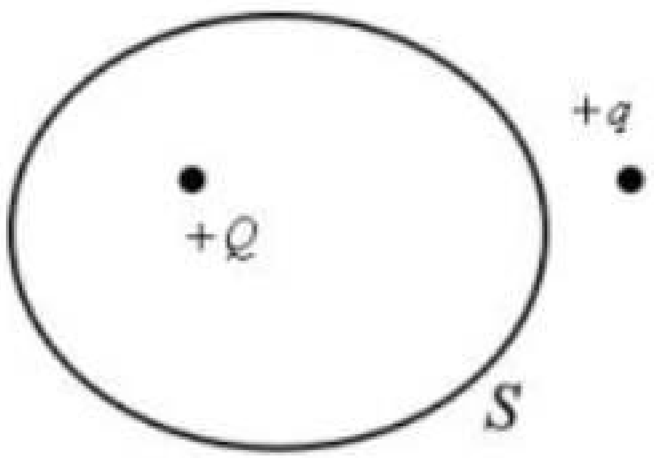
(C) 0

(D) $\dfrac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

【解题过程】过点 P 作高斯面，由高斯定理，

$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi rlE = 0$，所以 $E=0$，选（C）。

4.点电荷被封闭曲面包围，从无穷远处引入另一点电荷至曲面外一点，如图所示，则引入前后：（）



（A）穿过 S 的电场强度通量不变，曲面上各点场强不变

（B）穿过 S 的电场强度通量变化，曲面上

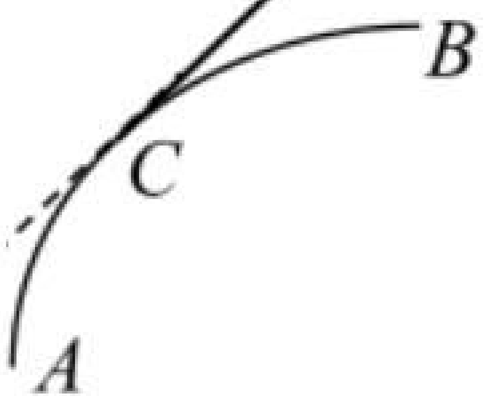
各点场强不变

（C）穿过 S 的电场强度通量不变，曲面上各点场强变化

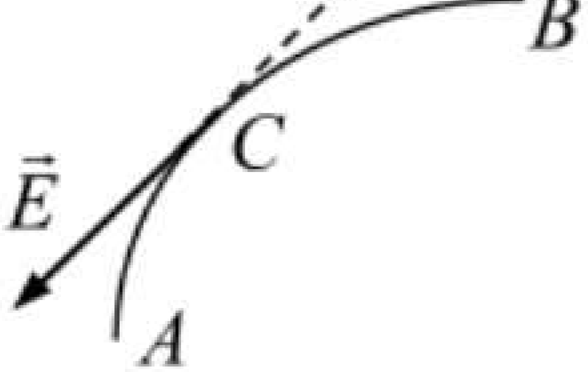
（D）穿过 S 的电场强度通量变化，曲面上各点场强变化

【解题过程】在闭合曲面内的电场强度通量就等于电荷的电量，故穿过 S 的电场强度通量不变。选 C。

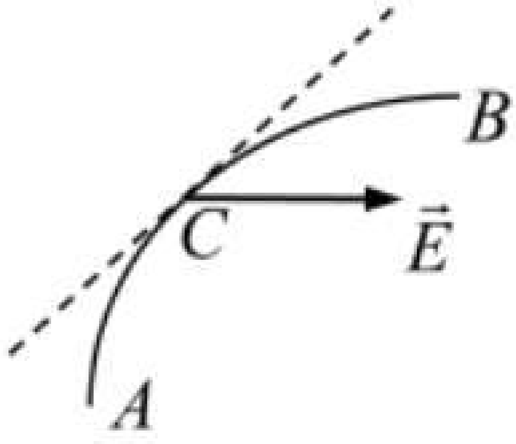
5.一个带正电荷的质点，在电场力作用下从 A 点出发经 C 点运动到 B 点，其运动轨迹如图所示。若质点运动的速率是递减的，下面关于 C 点场强方向的四个图示中正确的是（）

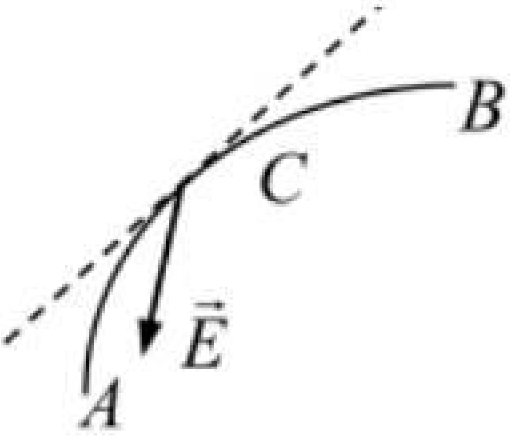


(A)



(B)





【解题过程】点电荷受电场力$\vec{F}=q\vec{E}=m\vec{a}$，质点作曲线运动，法向加速度为$a_n$不为零，则$\vec{F}$、$\vec{E}$不可能沿切向；又因质点速率递减，$a_t$一定与运动方向相反，所以选 D。

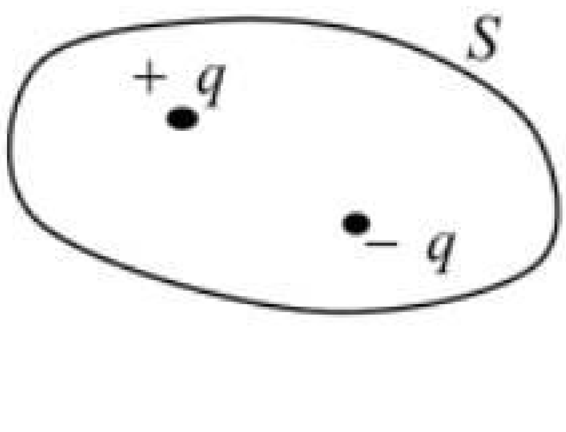
二、填空题

1.有一个球形的橡皮膜气球，电荷q均匀地分布在球面上，在此气球被吹大的过程中，被气球表面掠过的点（该点与球中心距离为r），其电场强度的大小将由______变为______。

【解题过程】由高斯定理可知，均匀带电球

面内部场强为零，外部任意一点场强 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$。在气球被吹大的过程中，被气球掠过的点都从球外变为球内，因此其场强大小由 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 变为零。

2.如图，若点电荷 q 和 $-q$ 被包围在高斯面 S 内，则通过该高斯面的电通量 $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=$ ______，式中 $\vec{E}$ 为______处的场强。



【解题过程】根据高斯定理，通过高斯面 S 的电通量为：

$\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}=0$ 式中 $\vec{E}$ 是 S

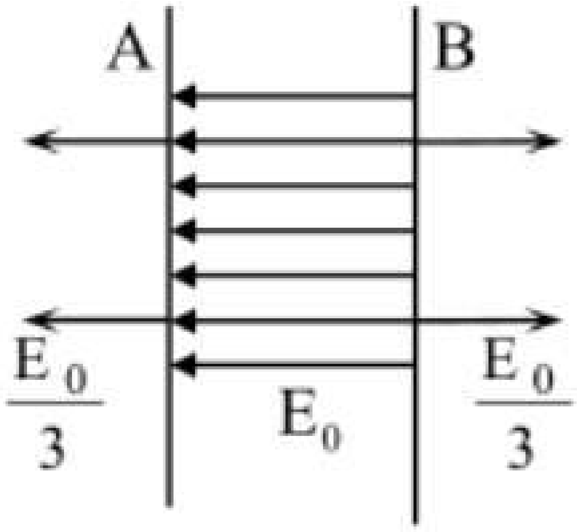
面上各处的场强。

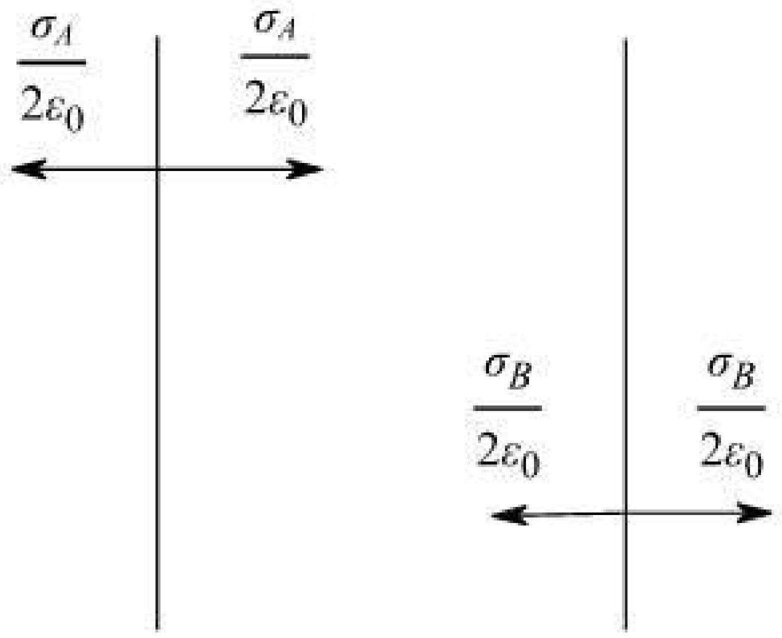
3.两根无限长的均匀带电直线相互平行，相距为$2a$，线电荷密度分别为$+\lambda$和$-\lambda$，每单位长度的带电直线受的作用力是_____。

【解题过程】电荷线密度为λ的一根无限长均匀带电直线在另一根直线处的场强为$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 2a}$，因此，单位长度的带电直线受电场力的大小为$F=\lambda E=\dfrac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$，该电场力是相互吸引力。

4.A、B 为真空中两个平行的“无限大”均匀带电平面，已知两平面间的电场强度大小都为E_0，两平面外侧电场强度大小都为$E_0/3$，方向如图。设场强方向向右为正，则 A、B 两平面上的电荷面密度分别为$\delta_A=$_____，

$\delta_B =$______。





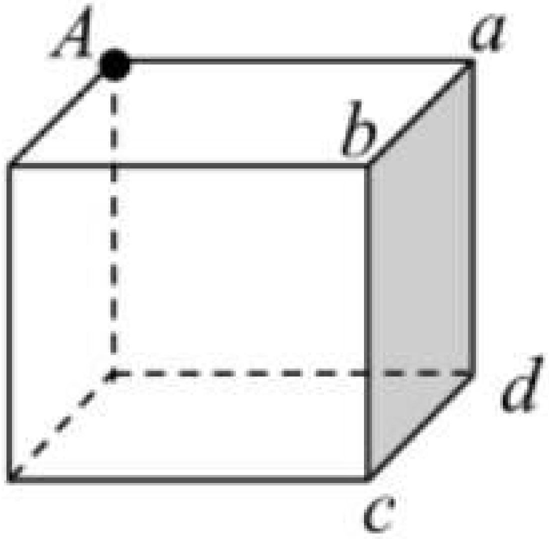
【解题过程】设 A、B 两板的电荷面密度分别为σ_A、σ_B（均匀为正），各自在两侧产生的场强大小和方向如图所示。由场强叠加原理及题设条件可知（设向右为正）

$\frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}=\frac{1}{3}E_0$，$\frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}=E_0$，联立

解得 $\sigma_A = -\dfrac{2\varepsilon_0 E_0}{3}$（负号说明与题设相反，

即 $\sigma_A < 0$），$\sigma_B = \dfrac{3\varepsilon_0 E_0}{3}$。

5.如图所示，一点电荷 q 位于正方体的 A 角上，则通过侧面 $abcd$ 的电通量 $\Phi_e =$ ______。



【解题过程】以 A 为中心可以有 8 个同样的立方体将 A 包围。每一个立方体中，对于 A 所在的每一个平面（有 3 个），电通量为零；A 不在的每一个平面（有 3 个），电通量不为零、由高斯定理，点电荷发出的电力线共

$\dfrac{q}{\varepsilon_0}$条，平面$abcd$是包围 A 的大立方体表

面积的$\dfrac{1}{24}$，所以通过$abcd$的电通量为：

$\Phi_e = \dfrac{q}{24\varepsilon_0}$。

6.若一表面的面积矢量为：$\vec{S} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$（1）如果电场$\vec{E} = 3\vec{i}$，则电场穿过该表面的电通量$\Phi_1 =$_____；（2）如果电场$\vec{E} = 2\vec{k}$，则电场穿过该表面的电通量$\Phi_2 =$_____。

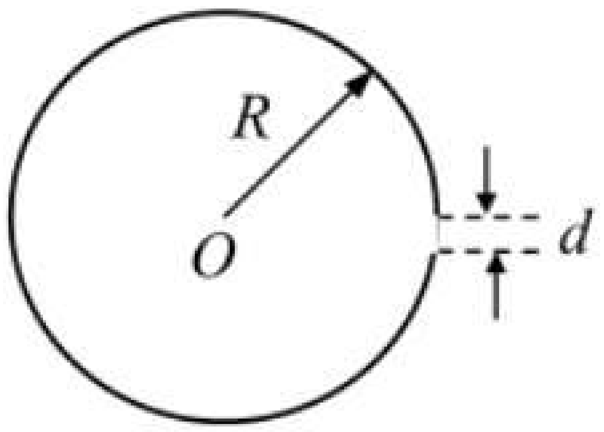
【解题过程】根据（1）

$$\Phi_1 = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{S} = 3\vec{i} \cdot \left(-3\vec{i} + 2\vec{j}\right) = -9Wb$$

（2）

$$\Phi_2 = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{S} = 2\vec{k} \cdot \left(-3\vec{i} + 2\vec{j}\right) = 0$$

7.一半径为R的带有一缺口的细圆环，缺口长度为d（$d \ll R$）环上均匀带正电，总电量为q，如图所示。则圆心O处的场强大小为$E=$_____，场强方向为：_____。



【解题过程】带正电、有缺口的细圆环相当于一个均匀带电的细圆环和长为d、带负电且电荷线密度与圆环相同的直线的叠加。均匀带电的细圆环在O点产生的场强为零，而带负电的缺口在O点产生的场强大小为（$d \ll R$，带电缺口视为点电荷）：

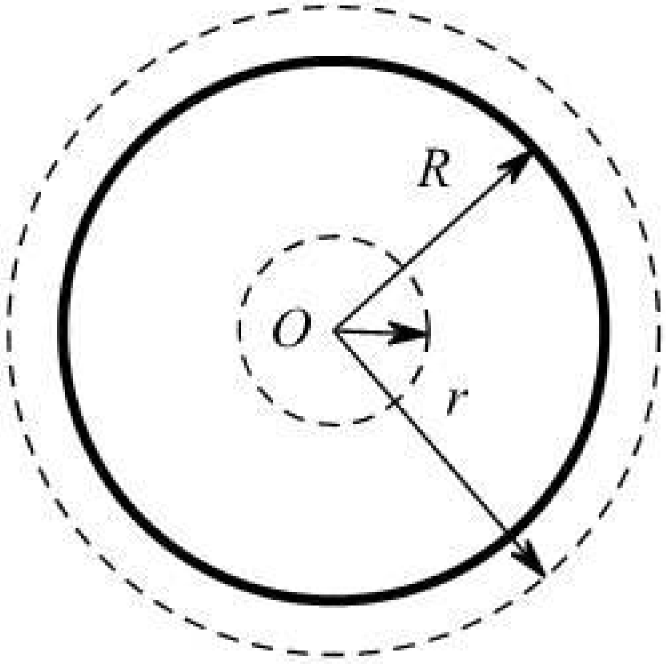
$$E_0 = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q/(2\pi R - d)}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot d$$

$$=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2\left(2\pi R-d\right)}\approx\frac{qd}{8\pi^2\varepsilon_0 R^3},$$

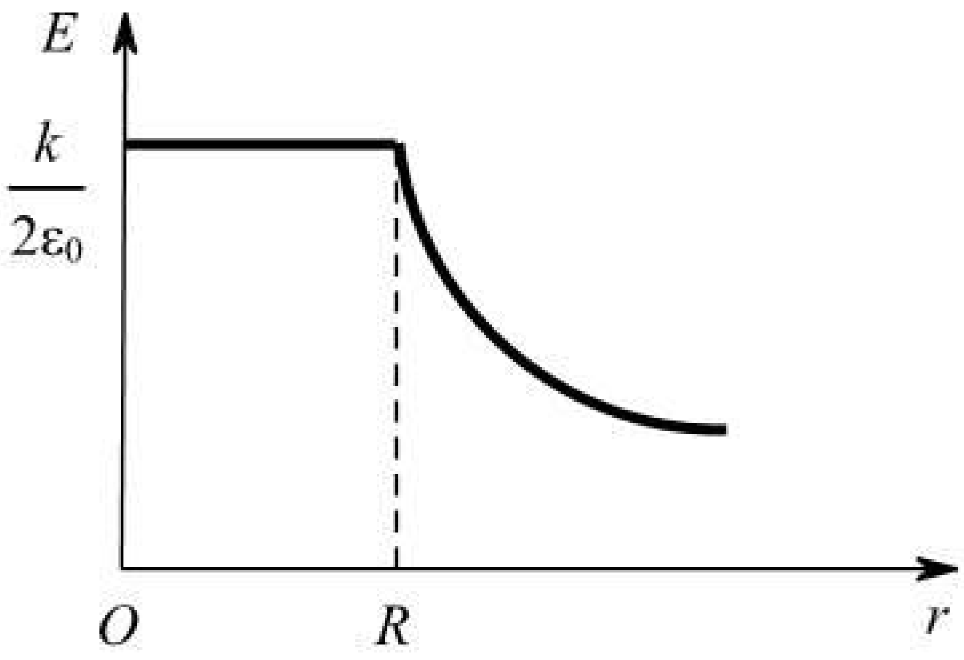
场强方向为从 O 点指向缺口中心点。

三、计算题

1.半径为 R 的带电球体，电荷体密度 $\rho=\dfrac{k}{r}$（k 为常数，r 为离球心的距离，$r\le R$），求球体内外的电场分布。



（a）



（b）

【解题过程】由对称性分析，场强$\vec{E}$的分布具有球对称性，即$\vec{E}$的方向沿径向（$\rho>0$时向外，$\rho<0$时向内），大小由r决定。作半径为r的同心球面为高斯面（图（a）），由高斯定理$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=E4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$，

$r>R$时

$$\sum q_{内}=\int \rho dV=\int_0^R \frac{k}{r}4\pi r^2 dr=2\pi kR^2$$

得 $E_{外}=\dfrac{2\pi kR^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2}\propto\dfrac{1}{r^2}$

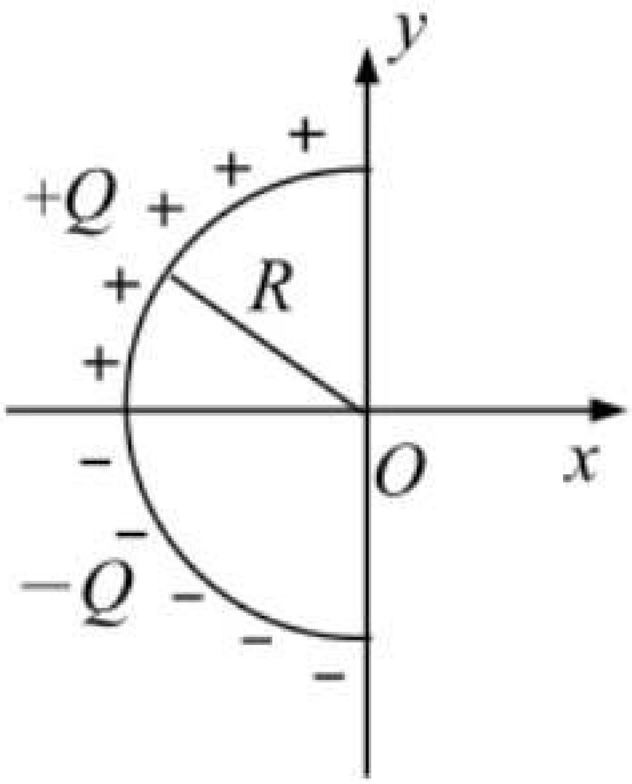
$r<R$ 时

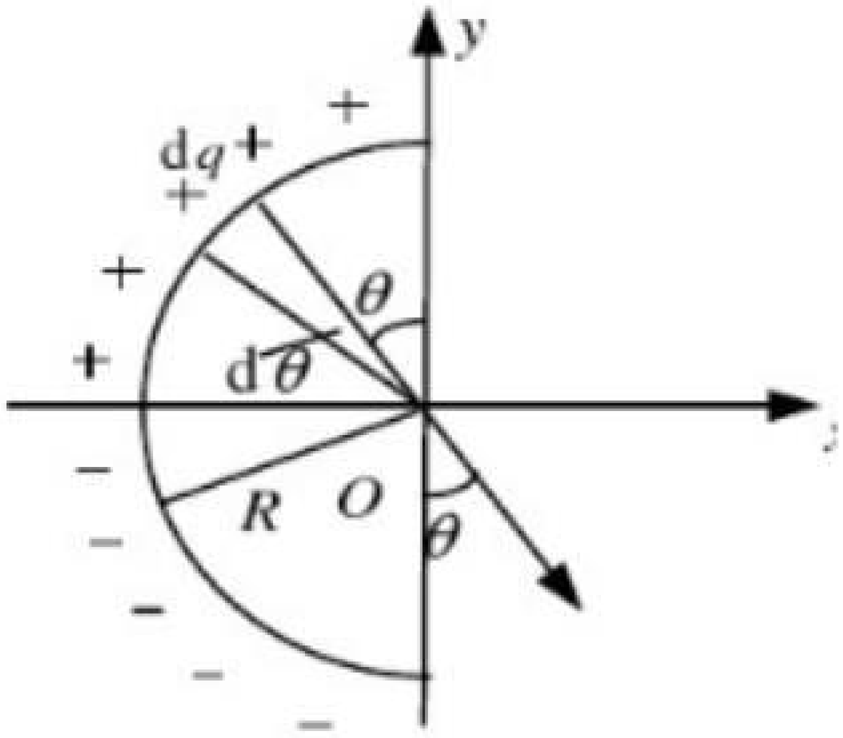
$$\sum q_{内}=\int\rho dV=\int_0^r\frac{k}{r}4\pi r^2dr=2\pi kr^2$$

得 $E_{内}=\dfrac{2\pi kr^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{k}{2\varepsilon_0}$。

$E-r$ 曲线如图（b）所示。

2.一个细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形，沿其上半部分均匀分布有电荷 $+Q$，沿其下半部分均匀分布有电荷 $-Q$，如图所示。试求圆心 O 处的电场强度。





【解题过程】把所有电荷都当作正电荷处理，

在θ处取微小电荷$dq = \lambda dl = \dfrac{2Qd\theta}{\pi}$

它在O处产生场强

$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}d\theta$$

按θ角变化，将dE分解成两个分量：

$$dE_x=dE\sin\theta=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\sin\theta d\theta ,$$

$$dE_y=-dE\cos\theta=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\cos\theta d\theta$$

对各分量分别积分，积分时考虑到一半是负

电荷

$$E_x=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta d\theta\right]=0$$

所以

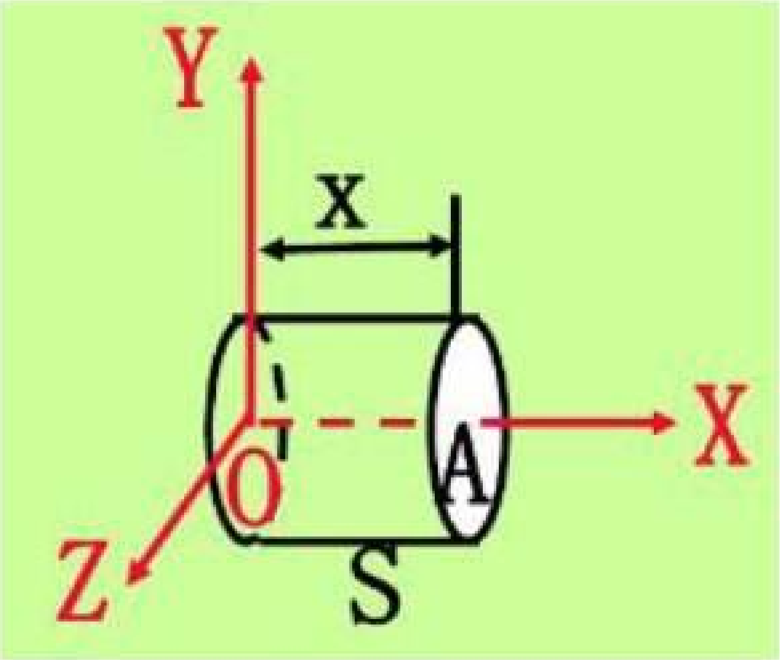
$$E_y=\frac{-Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta d\theta\right]=-\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}=-\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}\vec{j}$$

3.设电荷体密度沿 x 轴方向按余弦规律 $\rho=\rho_0\cos x$ 分布在整个空间，式中 ρ 为电荷体密度，ρ_0 为其幅值，试求空间的电场强度分布。

【解题过程】该电荷分布可视为由一系列垂直于 x 轴的无限大均匀带电薄板构成，各薄板的电荷密度由薄板位置决定。

场强分布特点：$\begin{cases}\vec{E}=E(x)\vec{i}\\ E(0)=0\end{cases}$



高斯面 S：底面积为 A 的闭合圆柱面，其轴线平行于 x 轴，一端在 YOZ 平面内。则有

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{右底} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(x)A\ ,$$

$$\frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^x \rho\cdot A dx = \frac{\rho_0 A}{\varepsilon_0}\sin x$$

由高斯定理得 $E(x) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\sin x$

由对称性知，这个结果也适用于 $x<0$ 的区域，因此对整个空间有：

$$\vec{E} = E(x)\vec{i} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\sin x\vec{i}\ 。$$

NO.7 电势

一、选择题

1.关于静电场中某点电势值的正负，下列说法中正确的是：（　　）

（A）电势值的正负取决于置于该点的试验电荷的正负

（B）电势值的正负取决于电势零点的选取

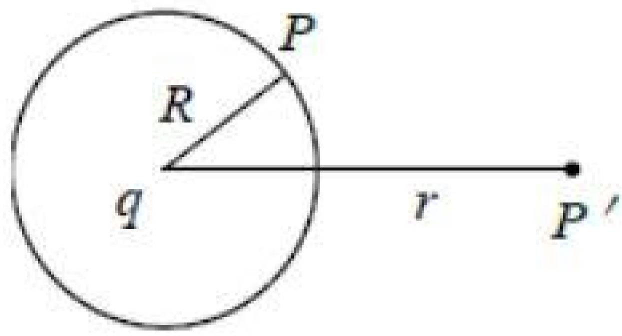
（C）电势值的正负取决于产生电场的电荷的正负

（D）电势值的正负取决于电场力对试验电荷作功的正负

【解题过程】电势值是相对的，其正负只取决于电势零点的选取。选（B）。

2.如图，在点电荷 q 的电场中，选取以 q 为中心、R 为半径的球面上一点 P 处作电势零点，则与点电荷 q 距离为 r 的 P' 点的电势为

（　　）



（A）$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R}\right)$

（B）$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

（C）$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-R)}$

（D）$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r}\right)$

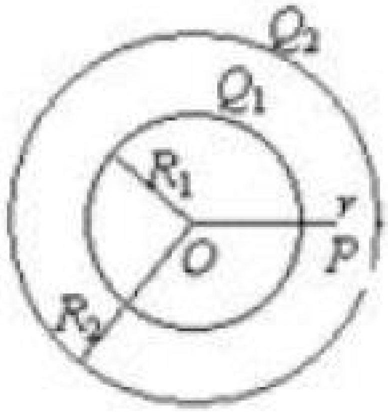
【解题过程】电势差根据定义式

$$\Delta U_{P'\to P}=U_{P'}-U_P=\int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_r^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right),$$

选（A）。

3.如图所示，两个同心的均匀带电球面，内球面半径为R_1、带电荷Q_1，外球面半径为R_2、带有电荷Q_2。设无穷远处为电势零点，则在两个球面之间、距离球心为r处的P点的电势U为：（　　）



（A）$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1+Q_2}{r}$

（B）$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q_1}{R_1}+\dfrac{Q_2}{R_2}\right)$

（C）$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q_1}{R_1}+\dfrac{Q_2}{r}\right)$

（D）$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q_1}{r}+\dfrac{Q_2}{R_2}\right)$

【解题过程】根据高斯定理，内球面内的场强 $E_1=0$，内外球面之间的场强 $E_2=\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，外球面外部场强 $E_3=\dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$。

故在两个球面之间、距离球心为 r 处的 P 点的电势 U 为

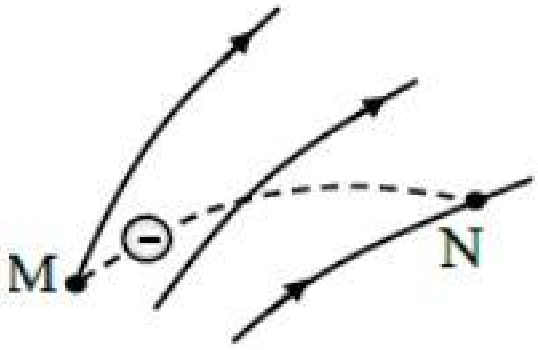
$$U=\int_r^{R_2}E_2dr+\int_{R_2}^{R_\infty}E_3dr$$

$$=\int_r^{R_2}\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{R_2}^{R_\infty}\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r}+\frac{Q_2}{R_2}\right),$$

选（D）。

4.已知某电场的电场线分布情况如图所示。现观察到一负电荷从 M 点移到 N 点。有人根据这个图作出下列几点结论，其中哪点是不正确的？（　　）



（A）电场强度 $E_M > E_N$

（B）电势 $U_M > U_N$

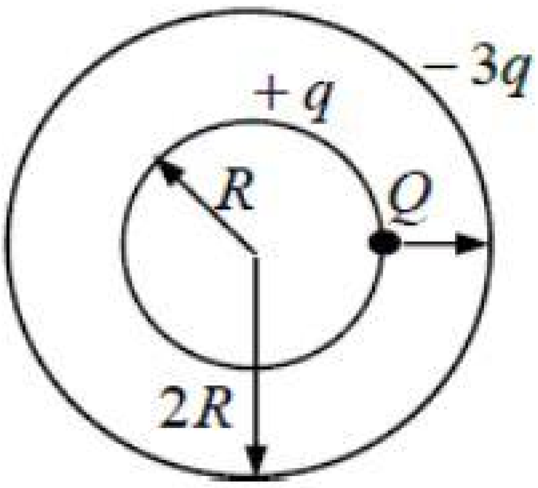
（C）电场力的功 $A > 0$

（D）电势能 $W_M < W_N$

【解题过程】 由图中电场线的疏密可知 $E_M > E_N$，再由场强与电势的关系 $\vec{E} = -\nabla U$ 可得电场方向沿电势降低方向，即有 $U_M > U_N$，又电场力做功 $A = -q\left(U_M - U_N\right) < 0$，而由 $A = -\left(W_N - W_M\right) < 0$ 知电势能 $W_M < W_N$。

选（C）。

5.在真空中半径分别为 R 和 $2R$ 的两个同心球面，其上分别均匀地带有电量 $+q$ 和 $-3q$ 。现将一电量为 $+Q$ 的带电粒子从内球面处由静止释放，则该粒子达到外球面时的动能为:（　　）



（A）$\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$　　（B）$\dfrac{3qQ}{8\pi\varepsilon_0 R}$

（C）$\dfrac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 R}$　　（D）$\dfrac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R}$

【解题过程】由高斯定理易得 $R<r<2R$ 时

$E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，

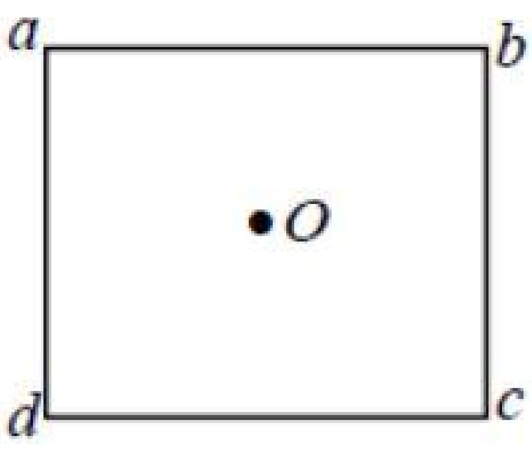
$$U_R - U_{2R} = \int_R^{2R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R},$$

由动能定理

$$E_k = A_R - A_{2R} = \left(U_R - U_{2R}\right) Q = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R},$$

选（D）。

6.边长为l的正方形，在其四个顶点上放有等量的电荷。若正方形中心 O 处的场强值和电势都等于零，则（　　）



（A）顶点a、b、c、d处都是正电荷

（B）顶点a、b处是正电荷，c、d处是负电荷

（C）顶点a、c处是正电荷，b、d处是负

电荷

（D）顶点 a 、b 、c 、d 处都是负电荷

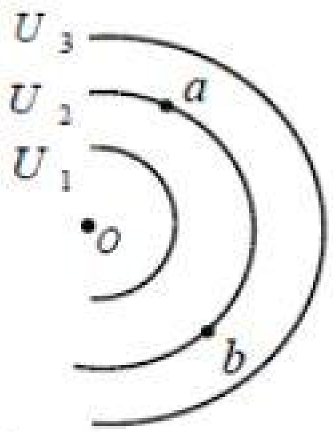
【解题过程】 $E=0$

$$\Rightarrow \frac{q_a-q_c}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{l}/2\right)^2}=\frac{q_b-q_d}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{l}/2\right)^2}=0$$

$U=\dfrac{q_a+q_c+q_b+q_d}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{l}/2\right)}=0$，故选（C）。

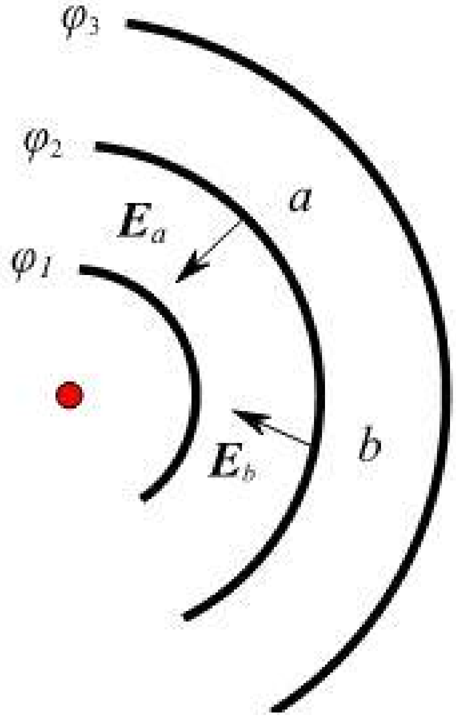
二、填空题

1.图中所示为静电场的等势（位）线图，已知 $U_1<U_2<U_3$，在图上画出 a 、b 两点的电场强度的方向，并比较它们的大小，E_a _____ E_b（选填：<、=、>）

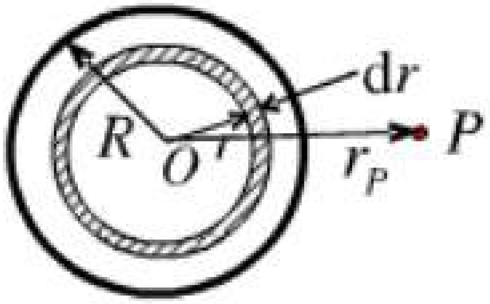


【解题过程】电场强度方向如图所示。

$E_a = E_b$。



2.一半径为R的绝缘实心球体，非均匀带电，电荷体密度为$\rho = \dfrac{\rho_0}{r}$（r为离球心的距离，ρ_0为常量）。设无限远处为电势零点。则球外（$r > R$）各点的电势分布为$U =$_____。

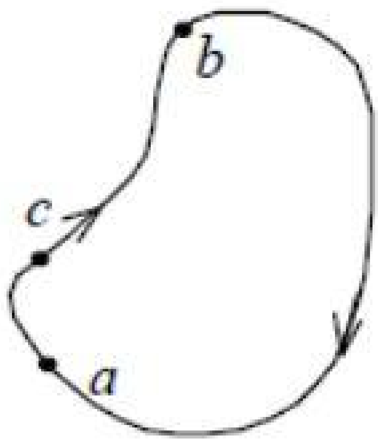


【解题过程】在非均匀带电绝缘实心球体内作一半径为r厚度为dr的同心薄球壳，如图

所示。则由均匀带电球面外电势分布有：

$$U_P=\int_0^R\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_0^R\frac{\frac{\rho_0}{r}\cdot 4\pi r^2dr}{4\pi\varepsilon_0 r_p}=\frac{R^2\rho_0}{2\varepsilon_0 r_p}$$ 。

3. 静电场中有一质子（带电荷 $e=1.6\times10^{-19}C$）沿图示路径从 a 点经 c 点移动到 b 点时，电场力作功 $-8.0\times10^{-15}J$ 。则当质子从 b 点沿另一路径回到 a 点过程中，电场力作功 $A=$______；若设 a 点电势为零，则 b 点电势 $U_b=$______。



【解题过程】因电场力做功与路径无关，故质子从 b 点沿另一路径回到 a 点的过程中，

电场力做功

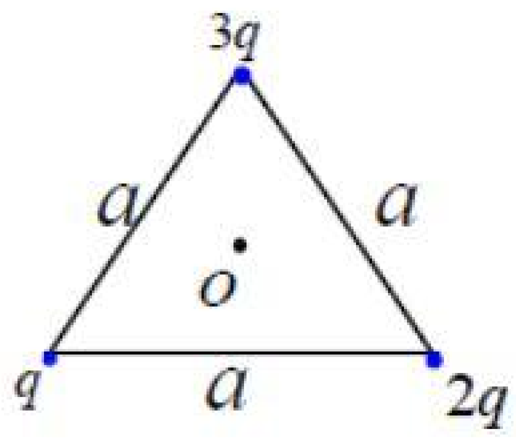
$$A=\int_{ba} e\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_{acb} e\vec{E}\cdot d\vec{l}=8.0\times10^{-15}J$$

由静电场中某点电势定义有：b 点电势

$$U_b=\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{\int_b^a e\vec{E}\cdot d\vec{l}}{e}$$

$$=\frac{8\times10^{-15}}{1.6\times10^{-19}}=5.0\times10^4 V$$ 。

4.图示为一边长均为a的等边三角形，其三个顶点分别放置着电量为q、$2q$、$3q$的三个正点电荷，若将一电量为Q的正点电荷从无穷远处移至三角形的中心 O 处，则外力需作功$A=$_____。



【解题过程】以无限远处为零电势点，则由电势叠加原理，中心 O 处电势为：

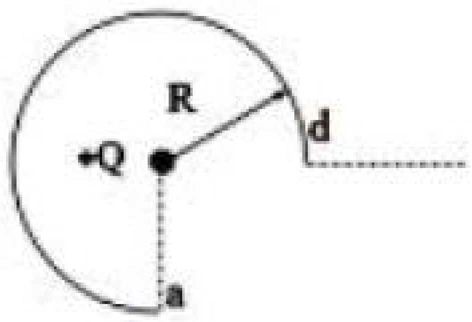
$$U_o=\frac{q+2q+3q}{4\pi\varepsilon_0\dfrac{a}{\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{3}q}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

将Q从无穷远处移到 O 点，电场力的功为

$A_{\infty 0}=Q\left(U_\infty-U_o\right)=-QU_o$，外力的功为

$$A_{外}=-A_{\infty 0}=QU_o=\frac{3\sqrt{3}Qq}{2\pi\varepsilon_0 a}\text{。}$$

5.如图所示，电量为q的试验电荷，在电量为$+Q$的点电荷产生的电场中，沿半径为R的$3/4$圆弧轨道由a点移到d点，电场力做功为_____，再从d点移到无穷远处的过程中，电场力做功为_____。



【解题过程】由于a点和d点电势相等，故试验电荷从a点移到d点电场力做功为0。再从d点移到无穷远处的过程中，电场力做功为$A = qU_{d\infty} = q\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$。

6. 已知某静电场的电势函数$U = 3x - 6x^2y - 5y^2$（SI）。由场强与电势梯度的关系式可得点$(1,2,0)$处的电场强度$\vec{E} =$___$\vec{i} +$___$\vec{j} +$___$\vec{k}$（SI）。

【解题过程】电场强度与电势梯度的关系为

$\vec{E} = -\dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$，由此可得

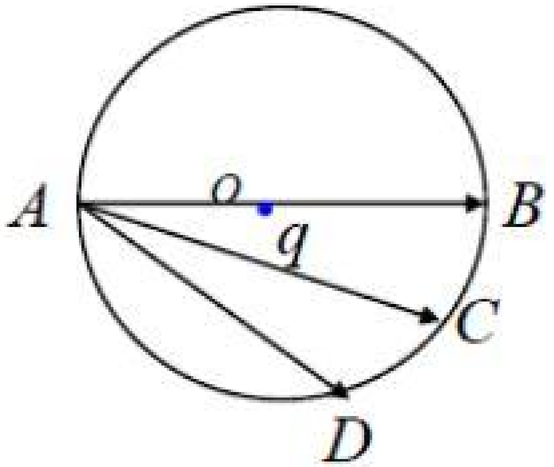
$$\vec{E} = -(3 - 12xy)\vec{i} - (-6x^2 - 10y)\vec{j}$$

$=\left(12xy-3\right)\vec{i}+\left(6x^{2}+10y\right)\vec{j}$，

在点$\left(1,2,0\right)$处电场强度为

$\vec{E}=21\vec{i}+26\vec{j}+0\vec{k}$。

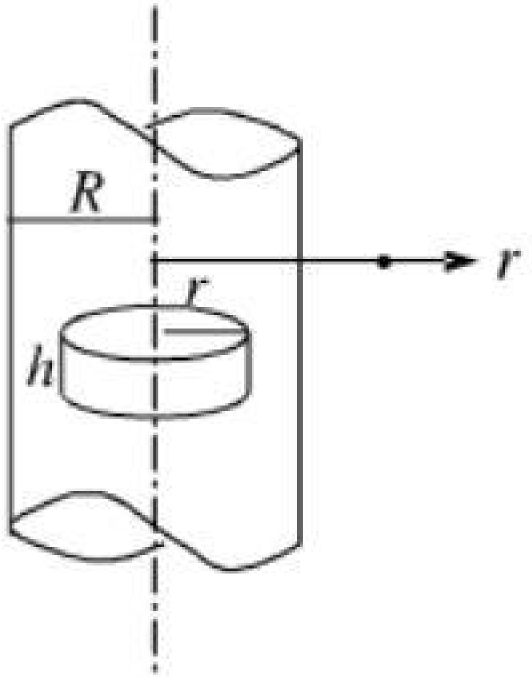
7.一电量为q的点电荷位于圆心 O 处，A、B、C、D 为同一圆周上的四点，如图所示，现将一试验电荷q_{0}从 A 点分别移动到 B、C、D 各点，做的功分别为A_{1}、A_{2}、A_{3}。则有A_{1}__A_{2}__A_{3}。（选填>、<、=）



【解题过程】A、B、C、D 四点电势相等，故从 A 到各点电场力不做功，故$A_{1}=A_{2}=A_{3}$。

三、计算题

1. 一半径为 R 的“无限长”圆柱形带电体，其电荷体密度为 $\rho = Ar$（$r \le R$），式中 A 为常量。试求：（1）圆柱体内、外各点场强大小分布；（2）选圆柱轴线处为电势零点，计算圆柱体内、外各点的电势分布。



【解题过程】（1）取半径为 r、高为 h 的高斯圆柱面，如图所示。面上各点场强大小为 E 并垂直于柱面，则穿过该柱面的电场强度通量为：$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi rhE$

为求高斯面内的电荷，$r < R$ 时，取一半径

为 r'，厚 dr'、高 h 的薄圆筒，其电荷为 $\rho dV = 2\pi Ahr'^2 dr'$，则 $r < R$ 包围在高斯面内的总电荷为

$$\int_V \rho dV = \int_0^r 2\pi Ahr'^2 dr' = 2\pi Ahr^3/3$$

由高斯定理得 $2\pi rhE = \dfrac{2\pi Ahr^3}{3\varepsilon_0}$，

解得 $E = \dfrac{Ar^2}{3\varepsilon_0}$，（$r \le R$）

$r > R$ 时，包围在高斯面内总电荷为

$\int_V \rho dV = \int_0^R 2\pi Ahr'^2 dr' = \dfrac{2\pi AhR^3}{3}$,由高斯定理 $2\pi rhE = \dfrac{2\pi AhR^3}{3\varepsilon_0}$,解得 $E = \dfrac{AR^3}{3\varepsilon_0 r}$（$r > R$）

（2）由电势定义式计算电势分布

$r \le R$ 时

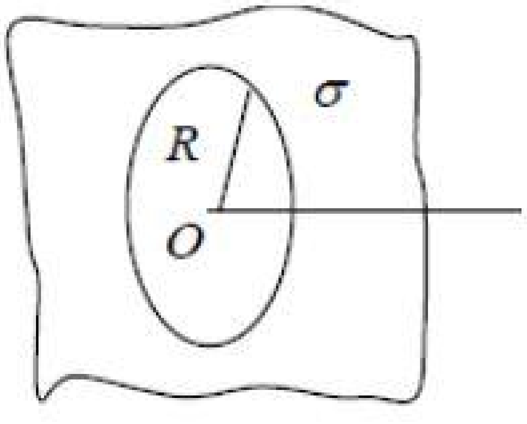
$$U=\int_r^l Edr=\int_r^R \frac{A}{3\varepsilon_0}r^2dr+\int_R^l \frac{AR^3}{3\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

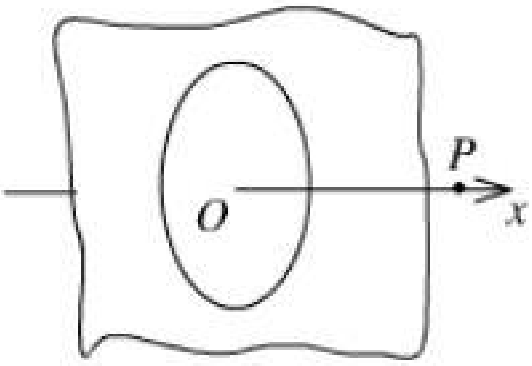
$$=\frac{A}{9\varepsilon_0}\left(R^3-r^3\right)+\frac{AR^3}{3\varepsilon_0}\ln\frac{l}{R}$$

$r>R$ 时

$$U=\int_r^l Edr=\int_r^l \frac{AR^3}{3\varepsilon_0}\frac{dr}{r}=\frac{AR^3}{3\varepsilon_0}\ln\frac{l}{r}\text{。}$$

2.一“无限大”平面，中部有一半径为 R 的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为 σ 。如图所示，试求通过小孔中心 O 并与平面垂直的直线上各点的场强和电势（选 O 点的电势为零）。





【解题过程】将题中的电荷分布看作面密度为σ的大平面和面密度为$-\sigma$的圆盘叠加的结果。

选x轴垂直于平面，坐标原点O在圆盘中心，

大平面在x处产生的场强为$\vec{E}_1=\dfrac{\sigma x}{2\varepsilon_0|x|}\vec{i}$，

圆盘在该处的场强为

$$\vec{E}_2=\frac{-\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\vec{i}\ ,$$

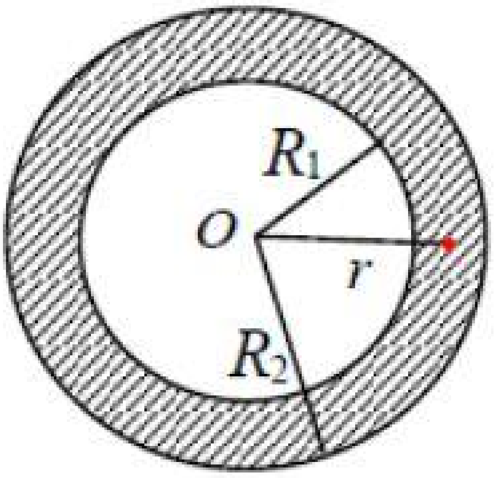
则$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\dfrac{\sigma x}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}\vec{i}$

利用电势的定义有$U=\int_x^0\vec{E}\cdot d\vec{l}$，

这里$d\vec{l}=dx\cdot\vec{i}$，所以，该点电势为

$$U=\int_x^0\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{R^2+x^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R-\sqrt{R^2+x^2}\right)$$

3.图示为一个均匀带电的球层，其电荷体密度为ρ，球层内表面半径为R_1，外表面半径为R_2。设无穷远处为电势零点，求球层中半径为r处的电势。（利用电势叠加原理解此题）



【解题过程】从电荷分布可知，空间电场具有球对称性，由高斯定理可知空腔内$E_1=0$，故带电球壳层的空腔是等势区。

对于球壳层内的一点 P，$R_1\le r\le R_2$，作一过该点半径为r的高斯球面，设该高斯球面

所围的电量为q，为计算q，可在球壳层内取半径为$r' \to r' + dr'$的薄球层。其电荷为

$$dq = \rho 4\pi r'^2 dr'$$，

$$q = \int_{R_1}^{r} \rho 4\pi r'^2 dr' = \frac{4}{3}\pi\rho\left(r^3 - R_1^3\right)$$

由高斯定理有

$$4\pi r^2 E_2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi\rho\left(r^3 - R_1^3\right),$$

$$E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right), \quad R_1 \le r \le R_2$$

当$r > R_2$时，作半径为r的高斯球面，设该高斯球面所围的电量为Q，则

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot 4\pi r'^2 dr' = \frac{4}{3}\pi\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right),$$

所以$4\pi r^2 E_3 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = \dfrac{4}{3\varepsilon_0}\pi\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)$，

$$E_3 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\left(R_2^3 - R_1^3\right), \quad r > R_2$$

可利用电势与场强的积分关系来确定空间的电势分布。

当 $r \le R_1$ 时，

$$U_1 = \int_r^{R_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r}$$
$$= 0 + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\left(R_2^3 - R_1^3\right)dr$$
$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

当 $R_1 \le r \le R_2$ 时，

$$U_2 = \int_r^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r}$$
$$= \int_r^{R_2} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\left(R_2^3 - R_1^3\right)dr$$
$$= \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2 - r^2 - \frac{2R_1^3}{r}\right)$$

当 $r > R_2$ 时，

$$U_3=\int_r^{\infty}\vec{E}_3\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_r^{\infty}\frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\left(R_2^3-R_1^3\right)dr$$

$$=\frac{\rho}{3\varepsilon_0 r}\left(R_2^3-R_1^3\right)$$

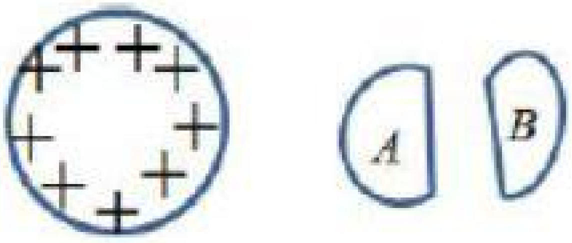
故球层中半径为r处的电势为

$$U_2=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2-r^2-\frac{2R_1^3}{r}\right)。$$

NO.8　导体 介质中的静电场

一、选择题

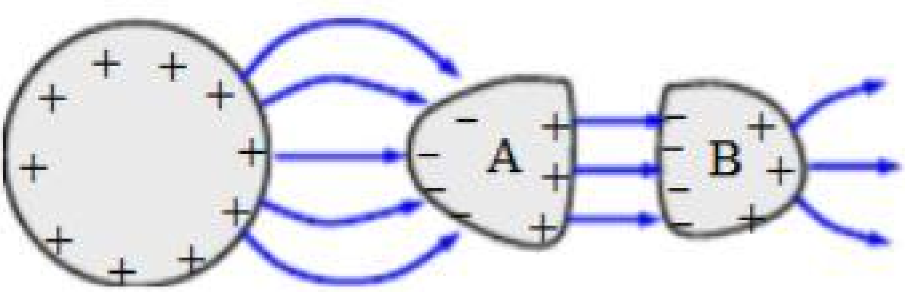
1.把 A、B 两块不带电的导体放在一带正电导体的电场中，如图所示。设无限远处为电势零点，A 的电势为U_A，B 的电势为U_B，则（）



（A）$U_B > U_A \neq 0$　　（B）$U_B < U_A$

（C）$U_B = U_A$　　（D）$U_B > U_A = 0$

【解题过程】电力线如图所示，电力线指向电势降低的方向，所以$U_B < U_A$。选（B）。



2.半径分别为 R 和 r 的两个金属球，相距很远。用一根细长导线将两球连接在一起并使它们带电。在忽略导线的影响下，两球表面的电荷面密度之比为（）

（A）r/R　　（B）R^2/r^2

（C）r^2/R^2　　（D）R/r

【解题过程】两个金属球用导线相接意味着它们的电势相等，设它们各自带电为 q_1、q_2，选无穷远处为电势零点，那么有：$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$，对该等式变形为

$\frac{q_1\cdot R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{q_2\cdot r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\Rightarrow\sigma_1 R=\sigma_2 r$，即面电荷密度与半径成反比，所以选（A）。

3.在一个孤立的导体球壳内，若在偏离球中心处放一个点电荷，则在球壳内、外表面上

将出现感应电荷，其分布将是：()

（A）内表面均匀，外表面也均匀

（B）内表面均匀，外表面不均匀

（C）内表面不均匀，外表面均匀

（D）内表面不均匀，外表面也不均匀

【解题过程】（1）如果点电荷偏离球心，电力线不是从球心发出，在内表面附近，必须垂直于球的内表面（静电平衡的要求），所以，球壳内的电场强度分布不再具有球对称性，球壳内表面上的电荷分布不再是均匀的了。

（2）外表面是等势面，且外表面曲率半径相等，所以电荷面密度相等，电荷均匀分布。

选（C）。

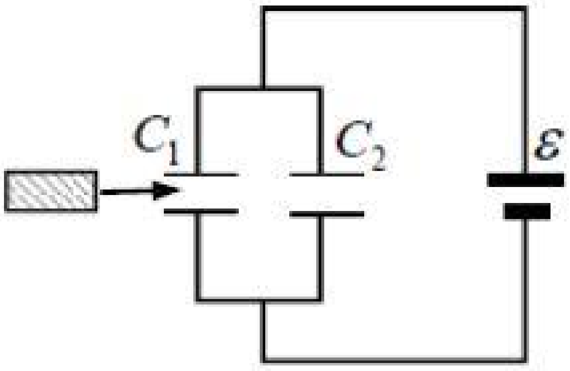
4. C_1 和 C_2 两空气电容器并联以后接电源充电，在电源保持联接的情况下，在 C_1 中插入一电介质板，则（）

（A）C_1 极板上电量增加，C_2 极板上电量减少

（B）C_1 极板上电量增加，C_2 极板上电量不变

（C）C_1 极板上电量减少，C_2 极板上电量增加

（D）C_1 极板上电量减少，C_2 极板上电量不变



【解题过程】保持电源联接，则电容器上的电压不变。在 C_1 中插入介质板，则 C_1 增大，C_2 不变。由 $C=\dfrac{q}{U}$ 知 $q_1=C_1U$ 增大，

$q_2 = C_2U$ 不变。选（B）。

5.一平行板电容器充电后仍与电源连接，若用绝缘手柄将电容器两极板间距离拉大，则极板上的电荷 Q、电场强度的大小 E 和电场能量 W 将发生如下变化（）

（A）Q 增大，E 增大，W 增大

（B）Q 增大，E 增大，W 减小

（C）Q 增大，E 减小，W 增大

（D）Q 减小，E 减小，W 减小

【解题过程】不断开电源，使电容器两极板间距离拉大，极板上电势差 U 将保持不变。由 $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ 得电容值减小，由 $Q = CU$ 得极板上的电荷 Q 减小，由 $E = \frac{U}{d}$ 得电场强度

E减小，由$W=\dfrac{1}{2}CU^2$得电场能量W减小，

选（D）。

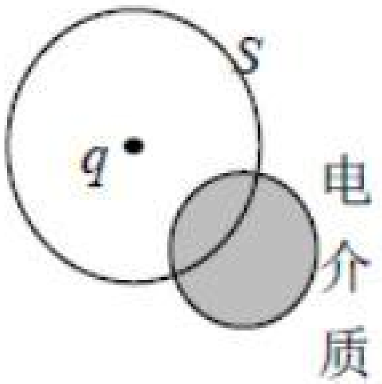
6.在一点电荷的静电场中，一块电介质如图所示，以点电荷所在处为球心，作一球形闭合面，则对此球形闭合面：( )

（A）高斯定理成立，但不能用它求出闭合面上各点的场强

（B）高斯定理成立，且可用它求出闭合面上各点的场强

（C）由于电介质不对称分布，高斯定理不成立

（D）即使电介质对称分布，高斯定理也不成立



【解题过程】 由 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum\left(q+q'\right)$，

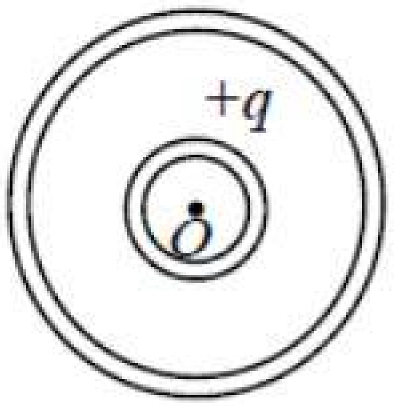
$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q$ 知只有在高斯面上的电场强度呈对称性分布时，才能用高斯定理求解出面上各点的电场分布，选（A）。

二、填空题

1.在一不带电荷的导体球壳的球心处放一点电荷，并测量球壳内外的场强分布。如果将此点电荷从球心移到球壳内其它位置，重新测量球壳内外的场强分布，则将发现球壳内场强分布将_____（选填变化、不变），球壳外的场强将_____（选填变化、不变）。

【解题过程】 变化，不变。

2.两同心导体球壳，内球壳带电量 $+q$，外球壳带电量 $-2q$。静电平衡时，外球壳的内表面带电量为_____；外表面带电量为_____。



【解题过程】根据静电平衡条件和电荷守恒定律可知内表面带电量为$-q$，外表面带电量为$-q$。

3.地球表面附近的电场强度约为100N/C，方向垂直地面向下，假设地球上的电荷都均匀分布在地球表面上，则地面的电荷面密度$\sigma=$ _____ C/m^2，是_____号电荷（选填正、负）。（$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}C\cdot^2 N^{-1}\cdot m^{-2}$）

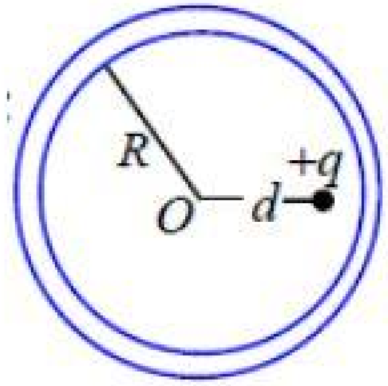
【解题过程】将地球视为导体，由导体表面场强和电荷面密度的关系$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$可知，地面的电荷面密度为

$$\sigma = \varepsilon_0 E = 8.85 \times 10^{-12} \times 100$$

$$= 8.85 \times 10^{-10} \left(C \cdot m^{-2} \right),$$

因为 $\vec{E}$ 的方向垂直向下，所以是负电荷。

4.一个未带电的空腔导体球壳，内半径为 R 。在腔内离球心的距离为 d 处（ $d < R$ ），固定一电量为 $+q$ 的点电荷，用导线把球壳接地后，再把地线撤去。选无穷远处为电势零点，则球心 O 处的电势为_____。



【解题过程】由静电感应知内表面感应电荷 $-q$ ，外表面感应电荷 $+q$ ，用导线把球壳接地后，外表面电荷为 0，故球心处的电势为

$$U_O=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{R}\right)。$$

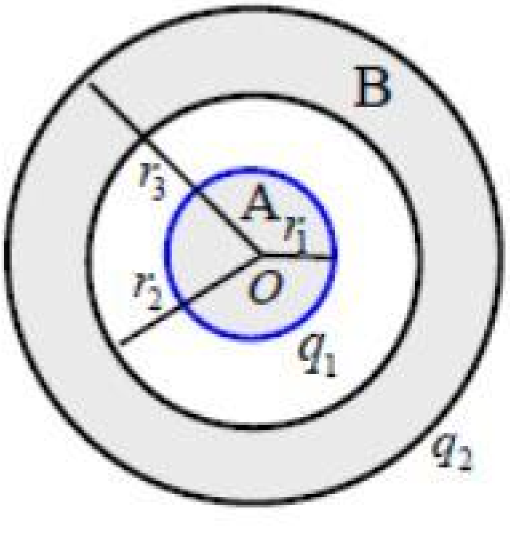
5.三个半径相同的金属小球，其中甲、乙两球带有等量同号电荷，丙球不带电。已知甲、乙两球间距离远大于本身直径，它们之间的静电力为F。现用带绝缘柄的丙球先与甲球接触，再与乙球接触，然后移去，则此后甲、乙两球间的静电力为_____。

【解题过程】设原来甲乙两球各自带电量为q，则$F=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$。丙球与它们接触后，甲带电$\frac{q}{2}$，乙带电$\frac{3q}{4}$，两球间的静电力为

$$F'=\frac{\left(\frac{q}{2}\right)\times\left(\frac{3q}{4}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{3}{8}F。$$

6. 一半径 $r_1 = 5cm$ 的金属球 A，带电荷 $q_1 = +2.0\times10^{-8}C$，另一内半径为 $r_2 = 10cm$、外半径为 $r_3 = 15cm$ 的金属球壳 B，带电荷 $q_2 = +4.0\times10^{-8}C$，两球同心放置，如图所示。若以无穷远处为电势零点，则 A 球电势 $U_A =$ ______，B 球电势 $U_B =$ ______。

（$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9 \frac{N\cdot m^2}{C^2}$）



【解题过程】由于静电感应，金属球 A 表面带净电荷 $q_1 = +2.0\times10^{-8}C$，金属球壳 B 内

表面带静电荷$q_{内}=-2.0\times10^{-8}C$，外表面带净电荷$q_{外}=q_1+q_2=+6.0\times10^{-8}C$，则

A 求电势为

$$U_A=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{q_{外}}{4\pi\varepsilon_0 r_3}=5400V\ ,$$

B 球电势为

$$U_B=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_3}+\frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r_3}+\frac{q_{外}}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$$

$$=\frac{q_{外}}{4\pi\varepsilon_0 r_3}=3600V\ 。$$

7. 一平行板电容器，充电后与电源保持联接，然后使两极板间充满相对介电常数为ε_r的各向同性均匀电介质，这时两极板上的电量是原来的_____倍，电场强度是原来的_____倍，电容是原来的_____倍，电场能量是原来的_____倍；如果充电后先断开电源，再使两

极板间充满相对介电常数为ε_r的各向同性均匀电介质，则：两极板上的电量是原来的_____倍，电场强度是原来的_____倍，电容是原来的_____倍，电场能量是原来的_____倍。

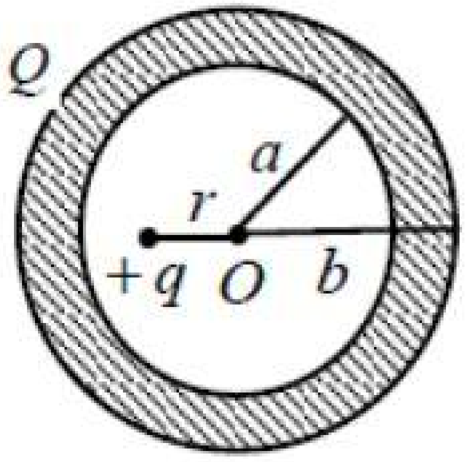
【解题过程】由题知U不变，由$C=\varepsilon_r\varepsilon_0\dfrac{S}{d}$，$Q=CU$知电容是原来的$\varepsilon_r$倍，电量$Q$是原来的$\varepsilon_r$倍，由$E=\dfrac{U}{d}$知电场强度是原来的1倍，由$W=\dfrac{1}{2}CU^2$知电场能量是原来的$\varepsilon_r$倍。

充电后断开电源再充入电介质，电容器极板上的电荷Q不变，由$E=\dfrac{U}{d}$，$U=\dfrac{Qd}{\varepsilon S}$知电场强度为原来的$\dfrac{1}{\varepsilon_r}$倍，由$C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{\varepsilon S}{d}$知

电容是原来的ε_r倍，由$W=\frac{1}{2}CU^2$知电场能量是原来的$\frac{1}{\varepsilon_r}$倍。

三、计算题

1.如图所示，一内半径为a、外半径为b的金属球壳，带有电量Q，在球壳空腔内距离球心r处有一点电荷q，设无限远处为电势零点，试求：（1）球壳内外表面上的电荷；（2）球心 O 点处，由球壳内表面上电荷产生的电势；（3）球心 O 点处的总电势。



【解题过程】（1）由静电感应和高斯定理可知，球壳内表面带电$-q$，外表面带电$q+Q$。

（2）球壳内表面上分布不均匀，但距球心 O 点都是a，由电势叠加原理，在 O 点产生的电势为：$U=\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$。

（3）由电势叠加原理，球心 O 处电势由点电荷q、内表面电荷$-q$、外表面电荷$q+Q$，共同产生，为

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\text{。}$$

2.一圆柱形电容器，内圆柱半径为R_1，外圆柱半径为R_2，长为$L\left[L\gg\left(R_1-R_2\right)\right]$，两圆柱之间充满相对介质常数为$\varepsilon_r$的各向同性均匀介质。设内外圆柱单位长度上带电量

（即电荷线密度）分别为λ和$-\lambda$，求：（1）电容器的电容；（2）电容器储存的能量。

【解题过程】（1）由高斯定理可得两圆柱间场强大小为：$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$，方向沿径向。

两圆柱间电势差为：

$$U_1-U_2=\int_{R_1}^{R_2}Edr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

根据电容的定义，得

$$C=\frac{Q}{U_1-U_2}$$

$$=\frac{\lambda L}{\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$$

（2）电容器储存的能量为

$$W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{\lambda^2L^2}{2\times\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_rL}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}=\frac{\lambda^2L\ln\frac{R_2}{R_1}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

3.一电容为C的空气平行板电容器，接端电压为U的电源充电后随即断开。试求把两个极板间距离增大至n倍外力所做的功。

【解题过程】断开电源后电容器极板上所带电荷$Q=CU$将保持不变，而电容值由$C=\frac{\varepsilon_0S}{d}$得$C'=\frac{\varepsilon_0S}{nd}=\frac{C}{n}$。

电容器储存的静电能（电场能量）由$W=\frac{1}{2}Q^2/C$得$W'=\frac{1}{2}Q^2/C'=\frac{1}{2}\cdot\frac{nQ^2}{C}$，

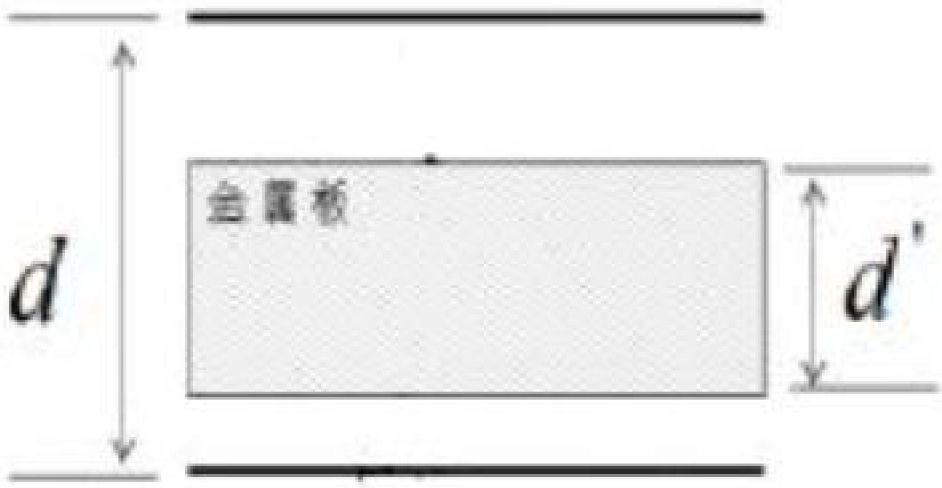
$$\Delta W=W'-W$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{nQ^2}{C}-\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}(n-1)$$

能量增加来源于拉开极板间距离时外力所做的功，故

$$A=\Delta W=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}(n-1)=\frac{1}{2}CU^2(n-1)$$。

4.有一平行板空气电容器，极板的面积均为S，极板间距为d，把厚度为d'（$d'<d$）的金属平板平行于极板插入电容器内（不与极板接触）。（1）试计算插入金属平板后电容器的电容；（2）给电容器充电到电势差为U_0后，断开电源，再把金属平板从电容器中抽出，外界要作多少功？



【解题过程】（1）金属板插入之前，电容器

的电容为$C_1=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$，金属平板平行于极板插入之后，由于金属板内的场强始终为零，实际效果相当于电容器两极板的距离变为$d-d'$，电容器的电容变为$C_2=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d-d'}$。

（2）充电后断开电源，则电容器极板上电量保持不变。把金属平板从电容器抽出，外界做的功就等于电容器电场能的改变。

断开电源时，电容器电场能为$W_1=\dfrac{Q^2}{2C_2}$

把金属平板从电容器抽出后，电容器电场能为$W_2=\dfrac{Q^2}{2C_1}$

由功能原理有外界做的功

$$A=W_2-W_1=\frac{Q^2}{2C_1}-\frac{Q^2}{2C_2}=\frac{Q^2 d'}{2\varepsilon_0 S}$$

又电容器极板上电量为

$$Q = C_2 U_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d'} U_0$$

所以外界做的功为

$$A = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C_1} - \frac{Q^2}{2C_2}$$

$$= \frac{Q^2 d'}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_0 S d'}{2\left(d - d'\right)^2} U_0^2$$

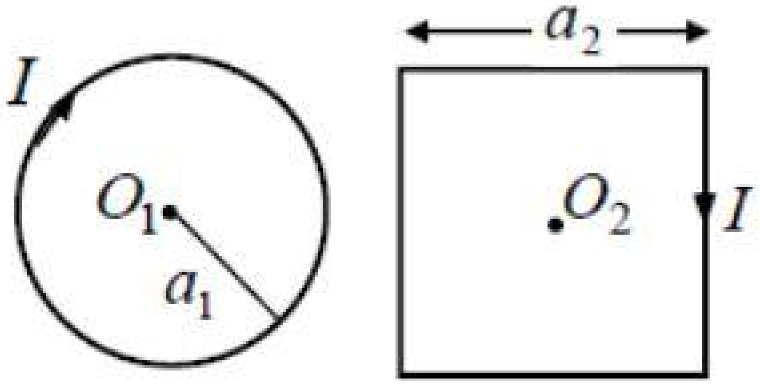
NO.9　磁感应强度

一、选择题

1.载流的圆形线圈（半径 a_1）与正方形线圈（边长 a_2）通有相同电流 I。若两个线圈的中心 O_1、O_2 处的磁感应强度大小相同，则半径 a_1 与边长 a_2 之比 $a_1:a_2$ 为（）

（A）$1:1$　　（B）$\sqrt{2}\pi:8$

（C）$\sqrt{2}\pi:4$　　（D）$\sqrt{2}\pi:1$



【解题过程】 圆电流在其中心产生的磁感应强度 $B_1=\dfrac{\mu_0 I}{2a_1}$

正方向线圈在其中心产生的磁感应强度

$$B_2 = 4\times\frac{\mu_0 I}{4\pi\times\frac{a_2}{2}}\left(\cos 45^\circ - \cos 135^\circ\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I}{\pi a_2}$$

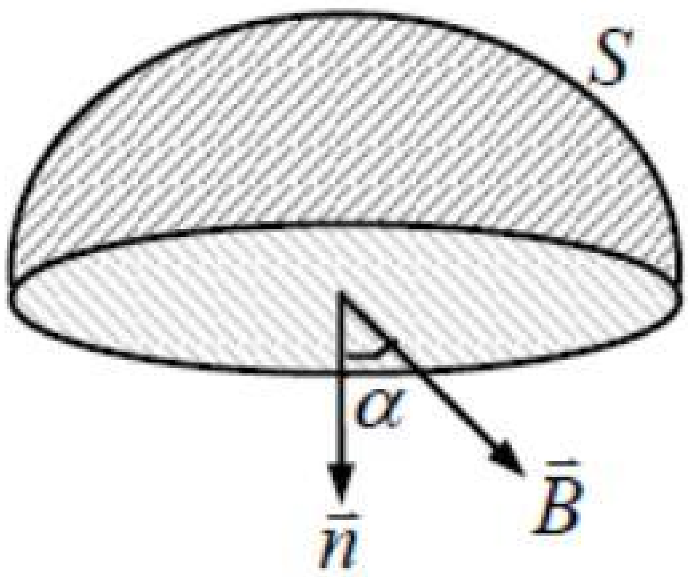
由题意 $B_1 = B_2$，即 $\frac{\mu_0 I}{2a_1} = 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I}{\pi a_2}$，

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$，选（B）。

2.在磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中作一半径为 r 的半球面 S，S 边线所在平面的法线方向单位矢量 $\vec{n}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角为 α，则通过半球面 S 的磁通量为（）

（A）$-\pi r^2 B\sin\alpha$　　（B）$\pi r^2 B$

（C）$-\pi r^2 B\cos\alpha$　　（D）$2\pi r^2 B$



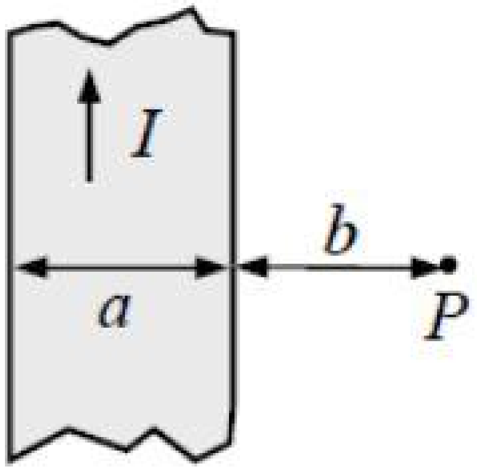
【解题过程】$\Phi_{底}=\vec{B}\cdot\vec{S}=\pi r^2 B\cos\alpha$，因为$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$，所以

$\Phi_{半球}=-\Phi_{底}=-\pi r^2 B\cos\alpha$，选（C）。

3.有一无限长通有电流、宽度为a、厚度不计的扁平铜片，电流I在铜片上均匀分布，在铜片外与铜片共面、离铜片右边缘b处的P点（如图所示）的磁感应强度$\vec{B}$的大小为（ ）

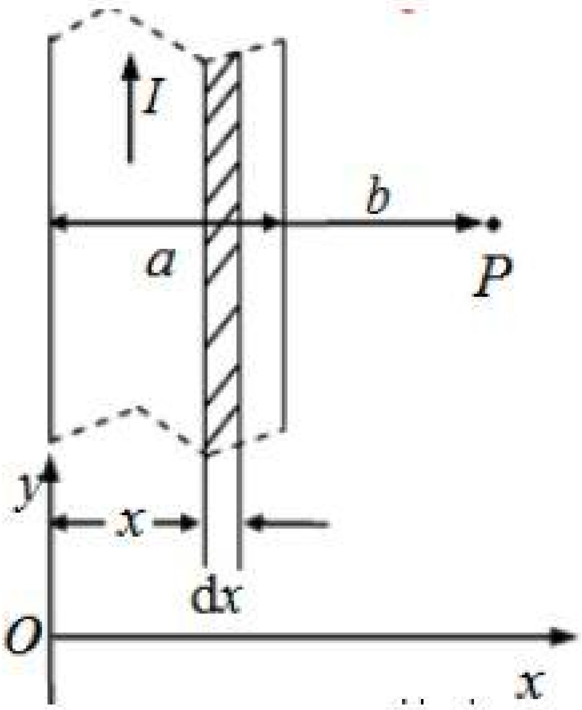
（A）$\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\dfrac{a+b}{b}$　　（B）$\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$

（C）$\dfrac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln\dfrac{a+b}{b}$　　（D）$\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\left(\dfrac{1}{2}a+b\right)}$



【解题过程】建立如图 Ox 坐标轴，在坐标 x 处取宽度为 dx 的窄条电流 $dI=\dfrac{I}{a}dx$，它在 P 点产生的磁感应强度为

$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2\pi\left(a+b-x\right)}=\frac{\mu_0 I dx}{2\pi a\left(a+b-x\right)}$$



P 点的磁感应强度大小为

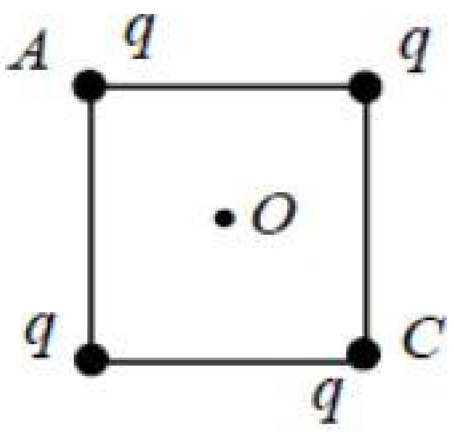
$$B=\int dB=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_0^a \frac{dx}{(a+b-x)}$$

$=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\dfrac{a+b}{b}$，选（A）。

4.如图，边长为a的正方形的四个角上固定有四个电荷均为q的点电荷。此正方形以角速度ω绕 AC 轴旋转时，在中心 O 点产生的磁感应强度大小为B_1；此正方形同样以角速度ω绕过 O 点垂直于正方形平面的轴旋转时，在 O 点产生的磁感应强度的大小为B_2，则B_1与B_2间的关系为（）

（A）$B_1=B_2$　　（B）$B_1=\frac{1}{2}B_2$

（C）$B_1=2B_2$　　（D）$B_1=\frac{B_2}{4}$



【解题过程】四个角上固定的四个电荷均为 q 的点电荷，旋转时形成圆形电流，故由磁场叠加原理可得：

$$B_1 = 2\times\frac{\mu_0}{2\left(\sqrt{2}a/2\right)}\cdot\frac{\omega q}{2\pi}=\frac{\mu_0\omega q}{\sqrt{2}\pi a}$$（只有 2 个电荷旋转形成圆形电流）

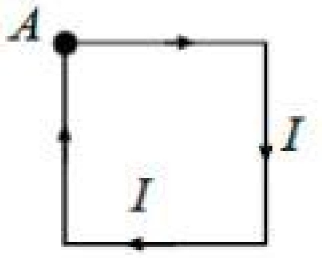
$$B_2 = 4\times\frac{\mu_0}{2\left(\sqrt{2}a/2\right)}\cdot\frac{\omega q}{2\pi}=\frac{2\mu_0\omega q}{\sqrt{2}\pi a}$$（4 个电荷旋转都要形成圆形电流）

所以 $B_1=\frac{1}{2}B_2$,选（B）。

5.边长为 l 的正方形线圈中通有电流 I ,此线圈在 A 点（见图）产生的磁感应强度 B 为( )

（A）$\dfrac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l}$

（C）$\dfrac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}$　　（D）以上均不对



【解题过程】 通过 A 点的两条边在 A 点产生的磁感应强度为 0，另两条边的磁感应强度相等，则由直导线电流磁场和磁场叠加原理有线圈在 A 点产生的磁感应强度大小

$$B = 2\times\frac{\mu_0 I}{4\pi l}\left(\cos 45^\circ - \cos 90^\circ\right) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l},$$

选（C）。

6.若要使半径为 $4\times10^{-3}m$ 的裸铜线表面的磁感应强度为 $7.0\times10^{-5}T$，其铜线中需要通

过的电流为（$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7} T\cdot m\cdot A^{-1}$）（）

（A）$0.14A$　　　（B）$2.8A$

（C）$14A$　　　（D）$1.4A$

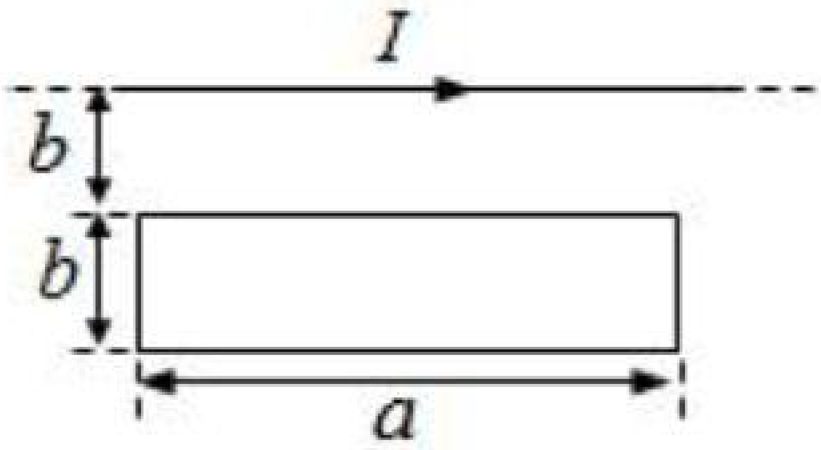
【解题过程】由圆形电流磁场分布有铜线表面磁感应强度大小为$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$，所以铜线中需要通过的电流为

$$I=\frac{2\pi RB}{\mu_0}=\frac{2\pi\times4\times10^{-3}\times7\times10^{-5}}{4\pi\times10^{-7}}$$

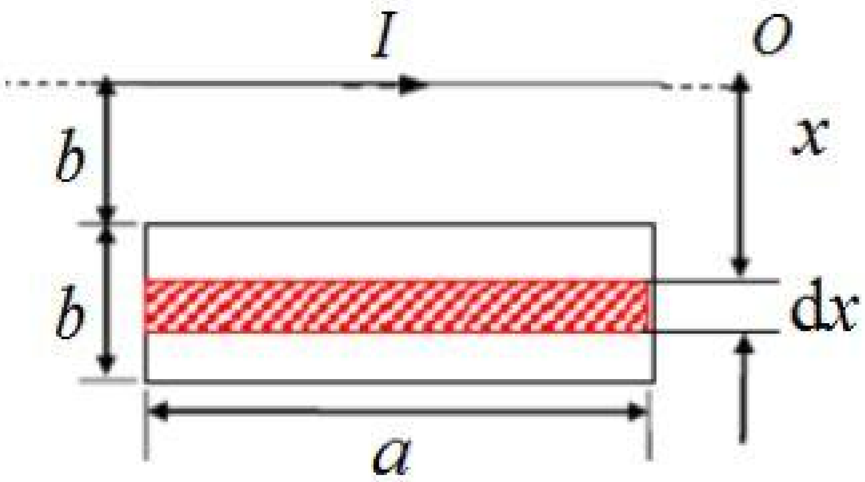
$=1.4(A)$，选（D）。

二、填空题

1.在一根通有电流I的长直导线旁，与之共面地放着一个长，宽各为a和b的矩形线框，线框的长边与载流长直导线平行，且二者相距为b，如图所示，在此情况下，线框内的磁通量_____。



【解题过程】



在线圈内距长直导线 x 处取矩形面积元

$ds = adx$，

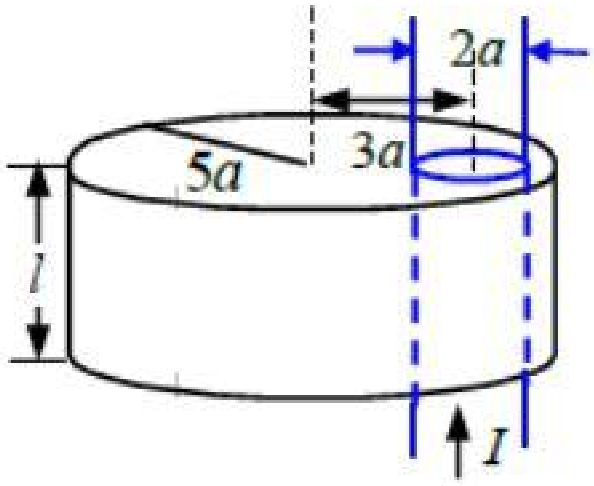
通过该面积元的磁通量为

$$d\Phi = Bds = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} adx,$$

通过线框的总磁通量大小为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_b^{2b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} adx = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \ln 2。$$

2.一半径为a的无限长直载流导线，沿轴向均匀地流有电流I。若做一个半径为$R=5a$、高为l的柱形曲面，已知此柱形曲面的轴与载流导线的轴平行且相距$3a$（如图），则$\vec{B}$在圆柱侧面S上的积分$\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=$______。



【解题过程】圆柱侧面S和上下底面组成封闭曲面，直电流的磁力线不穿过上下底面，即

$$\iint_{上底}\vec{B}\cdot d\vec{S}=\iint_{下底}\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

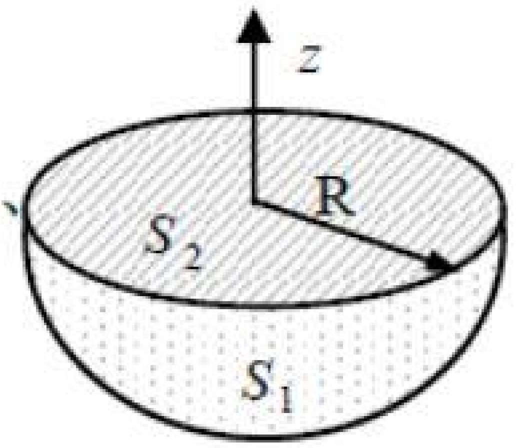
由磁场的高斯定理

$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$=\iint_{上底}\vec{B}\cdot d\vec{S}+\iint_{下底}\vec{B}\cdot d\vec{S}+\iint_{S}\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

可得$\iint_{S}\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$。

3.一磁场的磁感应强度为$\vec{B}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}(T)$，则通过一半径为$R$、开口向$z$正方向的半球壳表面的磁通量为_____Wb。

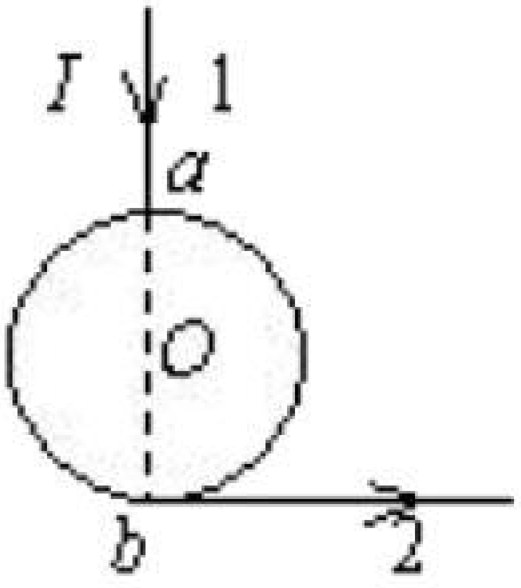


【解题过程】如图所示，半径为R的半球面S_1和半径为R的圆平面S_2组成一个封闭曲面S。

由磁场的高斯定理$\oint_{S}\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$知：

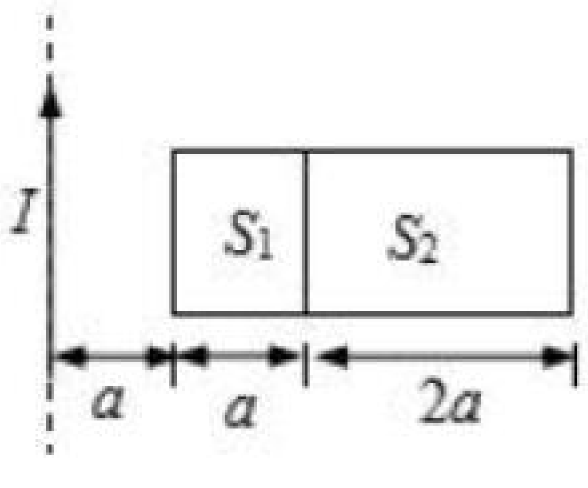
$$
\begin{aligned}
\Phi &= \int_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_{S_2} \vec{B}\cdot d\vec{S} \\
&= -\int_{S_2} \left(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\right)\cdot dS\vec{k} \\
&= -S_2 c = -\pi R^2 c
\end{aligned}
$$

4.电流由长直导线 l 沿半径方向经 a 点流入一电阻均匀的圆环，再由 b 点沿切向从圆环流出，经长导线 2 返回电源（如图）。已知直导线上电流强度为 I，圆环的半径为 R，且 a、b 与圆心 O 三点在同一直线上。直电流 1 在 O 点产生的磁感应强度大小为_____，直电流 2 在 O 点产生的磁感强度大小为_____，圆环电流在 O 点产生的磁感强度大小为_____。



【解题过程】根据有限长直导线产生的磁场公式可以得到，直电流 1 在 O 点产生的磁感应强度为 0，直电流 2 在 O 点产生的磁感应强度大小为 $\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$，圆环电流在 O 点产生的磁感应强度为 0。

5.如图所示，在无限长直载流导线的右侧有面积为 S_1 和 S_2 的两个矩形回路。两个回路与长直载流导线在同一个平面内，并且矩形回路的一边与长直载流导线平行。通过面积为 S_1 的矩形回路的磁通量与通过面积为 S_2 的矩形回路的磁通量之比为_____。



【解题过程】设矩形的另一边长为 h，则

$$\Phi_1=\int_a^{2a}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}hdx=\frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\ln 2,$$

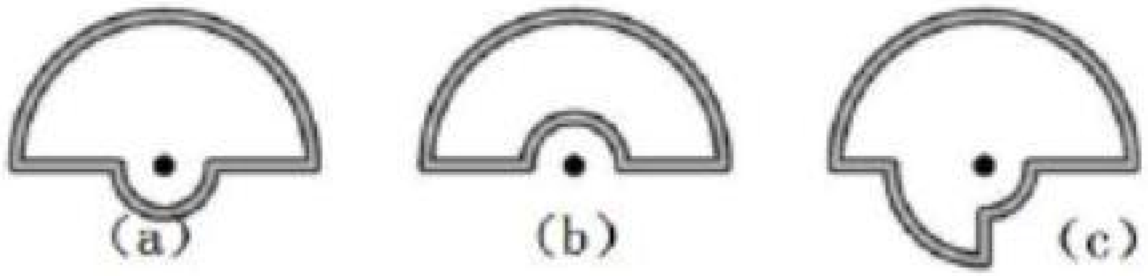
$$\Phi_2=\int_{2a}^{4a}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}hdx=\frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\ln 2,$$

故$\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2}=1:1$。

6.一个电量为q的点电荷以ω的角速度绕着O点做半径为r的圆周运动，其等效的圆线圈电流强度为______，O 点磁感强度大小为______。

【解题过程】一个电荷绕轴转动相当于电流为：$I=\dfrac{q\omega}{2\pi}$，O 点磁感应强度大小为$B=\dfrac{\mu_0 q\omega}{4\pi r}$。

7.如图所示三个电流，在曲率中心（图中小点）激发的磁感应强度B的大小顺序为______。



【解题过程】 $a > c > b$。

三、计算题

1.已知空间各处的磁感强度 $\vec{B}$ 都沿 y 轴正方向，而且磁场是均匀的，大小为 $B = 1T$。求下列三种情形，穿过一面积为 $2m^2$ 的平面的磁通量。（1）平面与 yz 平面平行；（2）平面与 xz 平面平行；（3）平面与 x 轴平行，又与 z 轴成 45° 角。

【解题过程】（1）平面与 yz 平面平行时，则其法线与 x 轴平行，有磁通量 $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = 0$。

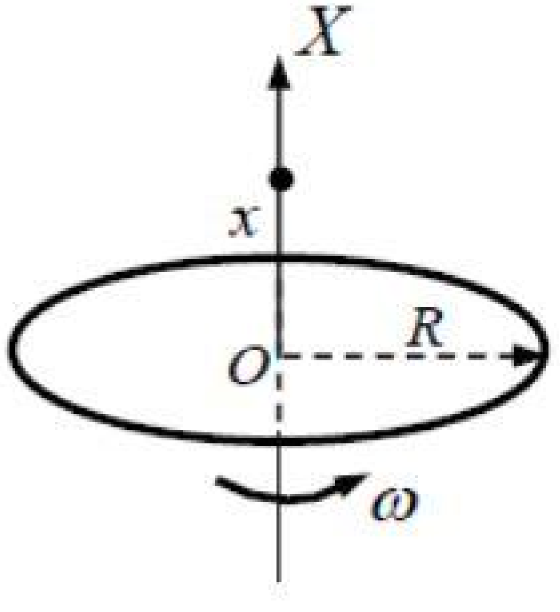
（2）平面与 xz 平面平行时，则其法线与 $\vec{B}$ 垂直，有磁通量 $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \pm 2Wb$。

（3）平面与x轴平行，又与z轴成45°角，其法线与$\vec{B}$的夹角为45°或135°，故由磁通量

$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos45^\circ=1.41Wb$，

或$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos135^\circ=-1.41Wb$。

2.如图所示，半径为R，电荷线密度为λ（$\lambda>0$）的均匀带电的圆环，绕过圆心与圆环平面垂直的轴以角速度ω转动，求圆环轴线上距离环心为x的任一点的$\vec{B}$的大小及其方向。



【解题过程】绕过圆心与圆平面垂直的轴以角速度ω转动，均匀带电的圆线圈电流为

$$I=\frac{q}{T}=\frac{2\pi R\lambda}{2\pi/\omega}=R\lambda\omega,$$

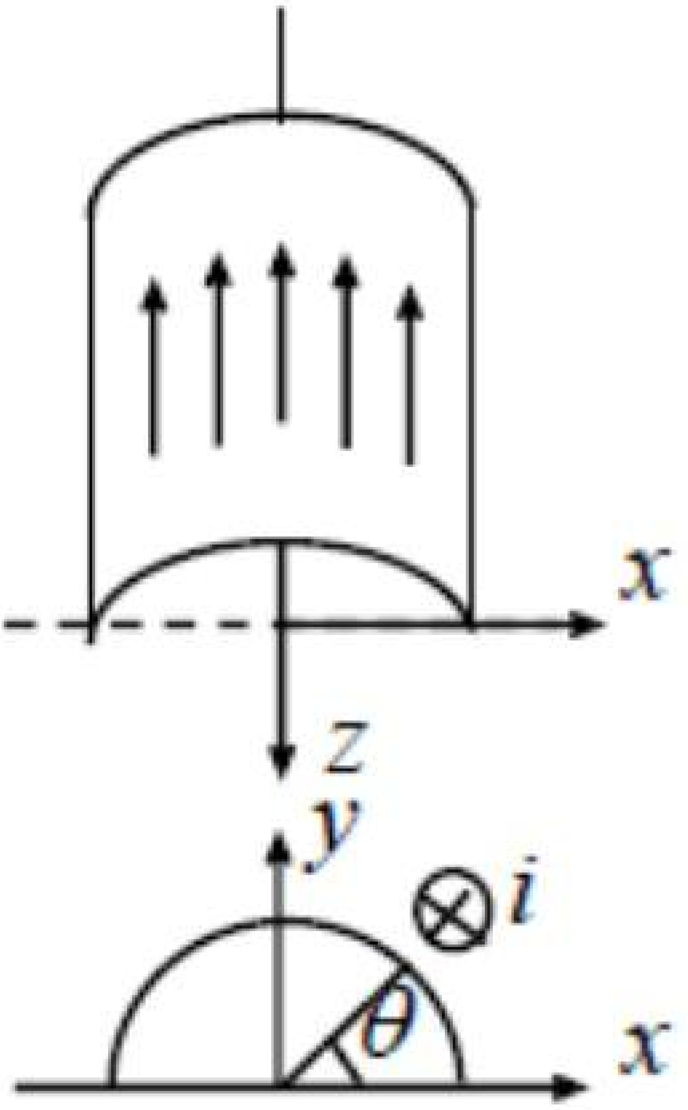
由典型电流：通电圆环轴线上任一点磁感应强度

有轴线上任一点$\vec{B}$的大小：

$$B=B_x=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 R^3\lambda\omega}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}},$$

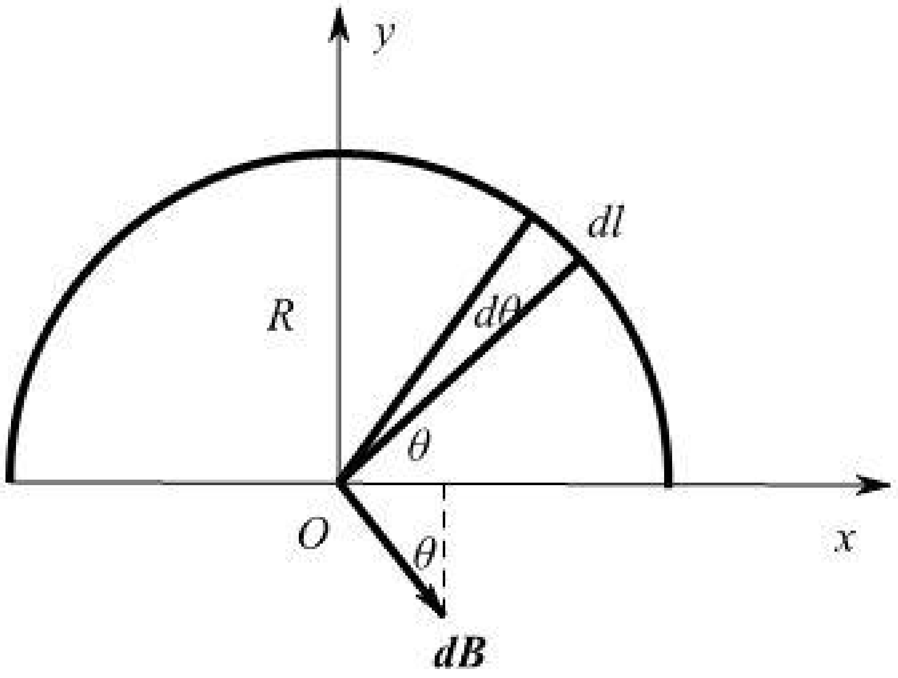
$\vec{B}$的方向与x轴正向一致。

3.在一无限长的半圆筒形的金属薄片中，沿轴向流有电流，在垂直电流方向的圆弧上单位长度的电流为$i=k\sin\theta$，其中k为常量，θ如图所示。求半圆筒轴线上的磁感强度。



【解题过程】设半圆筒的半径为R，线元dl流过的电流为dI，

$dI = idl = k\sin\theta dl = k\sin\theta \cdot Rd\theta$， 它在轴线上产生的$dB$方向如图，



$dB=\dfrac{\mu_0 dI}{2\pi R}$，由对称性可知 $B_y=0$，

$dB_x=dB\sin\theta=\dfrac{\mu_0 dI}{2\pi R}\sin\theta$，

$B=B_x=\int_0^{\pi}\dfrac{\mu_0 k}{2\pi}\sin^2\theta d\theta=\dfrac{\mu_0 k}{4}$，

方向沿 x 轴正方向。

NO.10 安培环路定律 磁力 磁介质

一、选择题

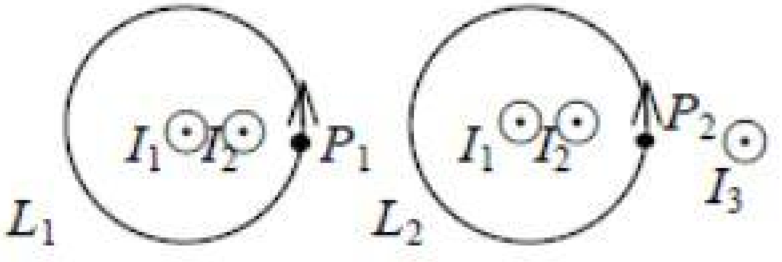
1.在图（a）和（b）中各有一半径相同的圆形回路L_1、L_2，圆周内有电流I_1、I_2，其分布相同，且均在真空中，但在（b）图中L_2回路外有电流I_3，P_1、P_2为两圆形回路上的对应点，则：（　　）

（A）$\oint_{L_1}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint_{L_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}$，$B_{P_1}=B_{P_2}$

（B）$\oint_{L_1}\vec{B}\cdot d\vec{l}\neq\oint_{L_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}$，$B_{P_1}=B_{P_2}$

（C）$\oint_{L_1}\vec{B}\cdot d\vec{l}\neq\oint_{L_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}$，$B_{P_1}\neq B_{P_2}$

（D）$\oint_{L_1}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint_{L_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}$，$B_{P_1}\neq B_{P_2}$



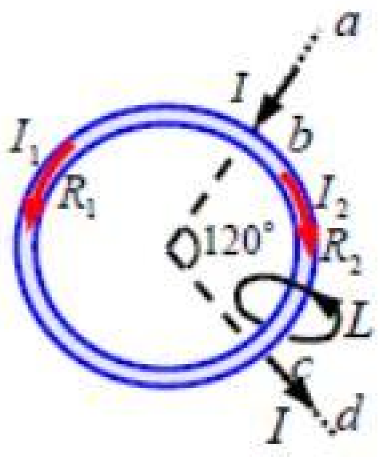
(a)　　(b)

【解题过程】B 的环流只与回路中所包围的电流有关，与外面的电流无关，但是回路上的磁感应强度却是所有电流在那一点产生的磁场的叠加，所以选（D）。

2.如图所示，两根直导线 ab 和 cd 沿半径方向被接到一截面处处相等的铁环上，稳恒电流 I 从 a 端流入而从 d 端流出，则磁感应强度 $\vec{B}$ 沿图中闭合路径 L 的积分 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$ 等于（　　）

（A）$\mu_0 I$　　（B）$\frac{1}{3}\mu_0 I$

（C）$\frac{2}{3}\mu_0 I$　　（D）$\frac{1}{4}\mu_0 I$



【解题过程】电流 I 从 b 点分流，$I=I_1+I_2$。

设铁环总电阻为 R，由电阻公式有

$R=\rho\dfrac{l}{S}$，$R_1=\dfrac{2}{3}R$，$R_2=\dfrac{1}{3}R$，又因 $U_b=U_c$，即 $\dfrac{2}{3}RI_1=\dfrac{1}{3}RI_2$，得 $I_2=\dfrac{2I}{3}$，所以 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\dfrac{2}{3}\mu_0 I$。选（C）。

3.取一闭合积分回路 L，使三根载流导线穿过它所围成的面。现改变三根导线之间的相互间隔，但不超出积分回路，则（　　）

（A）回路 L 内的 $\sum I$ 不变，L 上各点的 $\vec{B}$ 改变

（B）回路 L 内的 $\sum I$ 不变，L 上各点的 $\vec{B}$ 不变

（C）回路 L 内的 $\sum I$ 改变，L 上各点的 $\vec{B}$ 不变

（D）回路 L 内的 $\sum I$ 改变，L 上各点的 $\vec{B}$ 改变

【解题过程】因改变三根导线之间的相互间隔，但不超出积分回路，则安培回路内电流的代数和 $\sum I$ 不变；空间各点磁场与电流的位置有关，所以 L 上各点的 $\vec{B}$ 改变。选（B）。

4.真空中电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 与电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 之间的相互作用是这样进行的：（　　）

（A）$I_1 d\vec{l}_1$ 与 $I_2 d\vec{l}_2$ 直接进行作用，且服从牛顿第三定律

（B）由 $I_1 d\vec{l}_1$ 产生的磁场与 $I_2 d\vec{l}_2$ 产生的磁场之间相互作用，且服从牛顿第三定律

（C）由 $I_1 d\vec{l}_1$ 产生的磁场与 $I_2 d\vec{l}_2$ 产生的磁场之间相互作用，但不服从牛顿第三定律

（D）由 $I_1 d\vec{l}_1$ 产生的磁场与 $I_2 d\vec{l}_2$ 进行作用，或由 $I_2 d\vec{l}_2$ 产生的磁场与 $I_1 d\vec{l}_1$ 进行作用，且不服从牛顿第三定律

【解题过程】两个电流之间的相互作用是通过磁场进行的，不服从牛顿第三定律。由安培定律，一个电流元所受的力决定与另一个电流元在该电流元处产生的磁场及电流元本身，即 $d\vec{F}_{12} = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2$ 或 $d\vec{F}_{21} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$，选（D）。

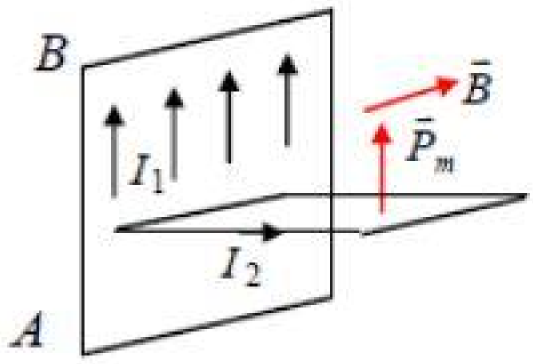
5.如图所示，一固定的载流大平板，在其附近，有一载流小线框能自由转动或平动。线框平面与大平板垂直，大平板的电流与线框中电流方向如图所示，则通电线框的运动情况从大平板向外看是：（　　）

（A）靠近大平板 AB

（B）逆时针转动

（C）顺时针转动

（D）离开大平板向外运动



【解题过程】因载流大平板产生的磁场平行于平板，方向如图所示。则线圈在磁场中所受的磁力矩 $\vec{M}=\vec{P}_m\times\vec{B}$，故知：磁力矩方向垂直并指向载流大平板，所以从平板向外看，线圈逆时针转动，选（B）。

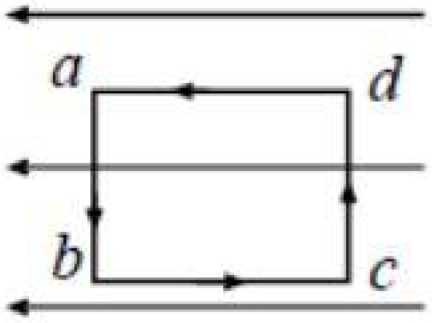
6.如图，匀强磁场中有一矩形通电线圈，它的平面与磁场平行，在磁场作用下，线圈发生转动，其方向是（　　）

（A）ab 边转处纸外，cd 边转入纸内

（B）ab 边转入纸内，cd 边转出纸外

（C）ab 边转入纸内，cd 边转出纸外

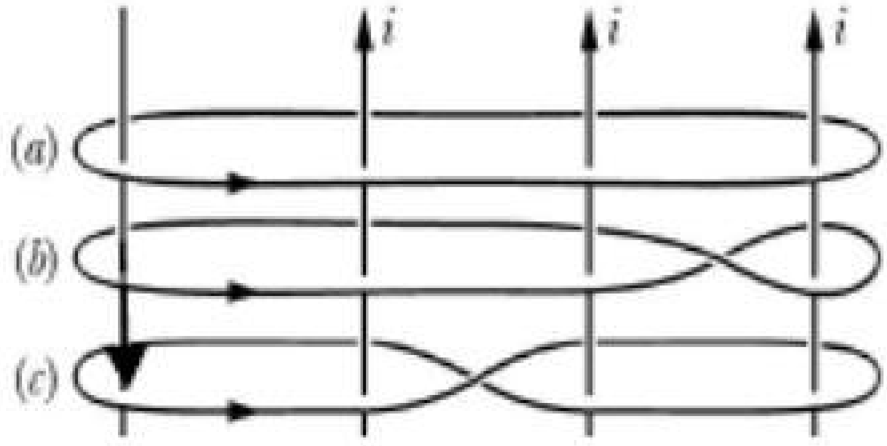
（D）ab 边转出纸外，cd 边转入纸内



【解题过程】由左手定则可知 ab 边所受安培力方向指向纸内，cd 边所受安培力方向指向纸外，ad 、bc 边电流方向与磁场方向平行，不受安培力作用，故转动方向为：ab 边转入纸内，cd 边转出纸外，故选（B）。

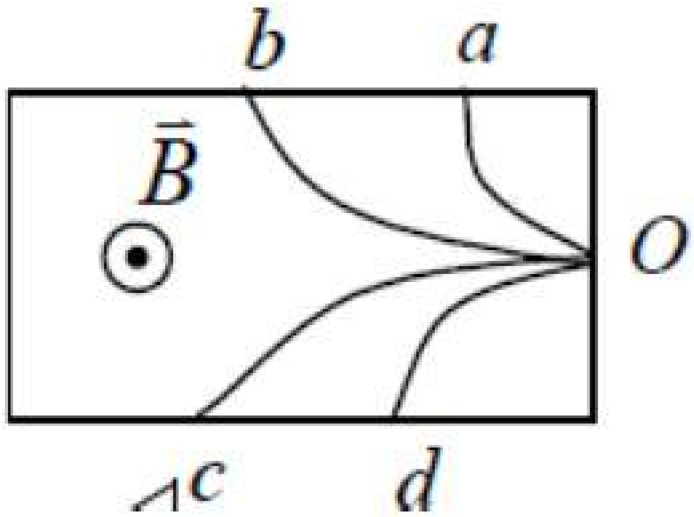
二、填空题

1.如图有四个同样的电流 i 和三条包围它们的安培路径。则 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$ 的值分别为：（a）______；（b）_______；（c）______。



【解题过程】由安培环路定理可得（a）$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\mu_0 i$；（b）$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$；（c）$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = -2\mu_0 i$。

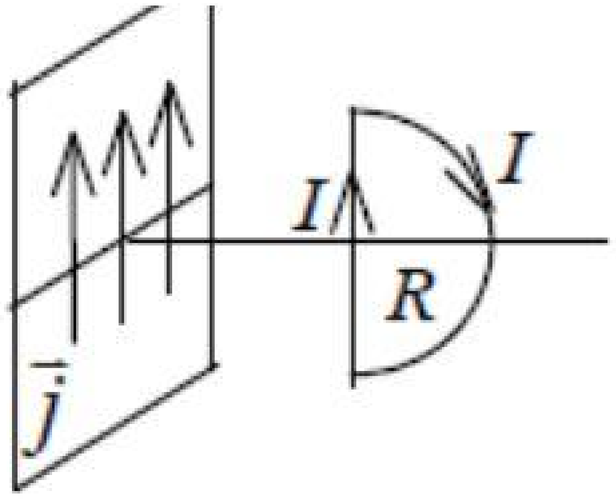
2.图为四个带电粒子在 O 点沿相同方向垂直于磁感线射入均匀磁场后的偏转轨迹的照片。磁场方向垂直纸面向外，轨迹所对应的四个粒子的质量相等，电荷大小也相等，则其中动能最大的带负电的粒子的轨迹是______。



【解题过程】由洛伦兹力公式，形成轨迹 Oc、Od 的粒子带负电。$R=\dfrac{mv}{qB} \Rightarrow mv = qBR$，

$E_k=\frac{(mv)^2}{2m}=\frac{(qBR)^2}{2m}$，故动能最大的带负电的粒子的轨迹是$Oc$。

3.如图，在面电流密度为$\vec{j}$的均匀载流无限大平板附近，有一载流为I半径为R的半圆形刚性线圈，线圈平面与载流大平板垂直，与$\vec{j}$平行线圈所受磁力矩为_____，受力为_____。



【解题过程】均匀载流无限大平板附近磁场方向垂直半圆形刚性线圈向里，载流为I半径为R的半圆形刚性线圈磁矩$\vec{p}_m$垂直半圆

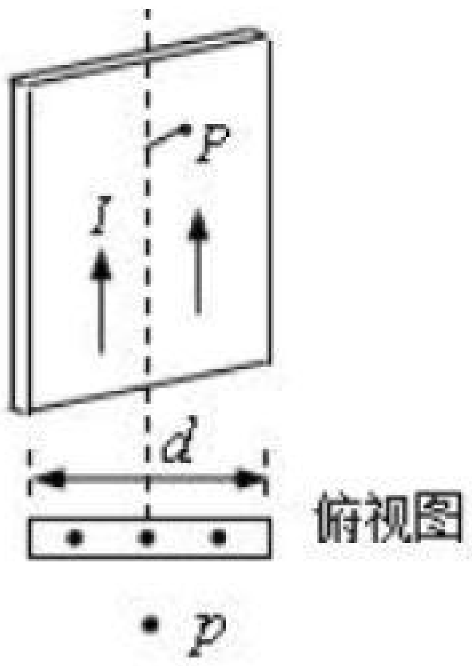
形刚性线圈向里，由$\vec{M}=\vec{p}_m\times\vec{B}$有与$\vec{j}$平行半圆形刚性线圈所受磁力矩为$M=\frac{1}{2}\pi R^2 I\times B\sin 0^\circ=0$。

由安培定律与$\vec{j}$平行半圆形刚性线圈直边和弯曲边所受力大小相等，方向相反，为与$\vec{j}$平行半圆形刚性线圈受力为0。

4.有一半径为R的单匝圆线圈，通以电流I，若将该导线弯成匝数$N=2$的平面圆线圈，导线长度不变，并通以同样的电流，则线圈中心的磁感强度是原来的____倍，线圈的磁矩是原来的_____倍。

【解题过程】由$B=\frac{\mu_0 NI}{2R}$，$p_m=NI\pi R^2$，知磁感应强度是原来的4倍，磁矩是原来的$\frac{1}{2}$。

5.如图所示，在宽度为d的导体薄片上有电流I沿此导体长度方向流过，电流在导体宽度方向均匀分布。导体外在导体薄片中线附近处P点的磁感应强度$\vec{B}$的大小为_____。

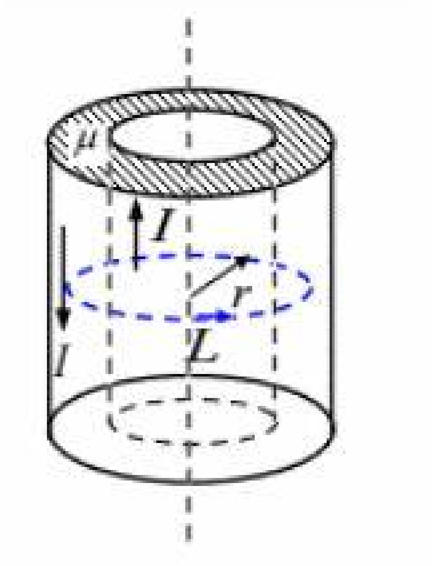


【解题过程】设P点到薄片的距离为r，因为$r \ll d$，故可视为无限大平面电流。根据安培环路定理，得$B=\frac{1}{2}\mu_0 i=\frac{1}{2}\mu_0\frac{I}{d}$。

6.长直电缆由一个圆柱导体和一共轴圆筒状导体组成，两导体中有等值反向均匀电流I通过，其间充满磁导率为μ的均匀磁介质。则介质中离中心轴距离为r的某点处的磁场

强度大小 $H=$______，磁感应强度的大小 $B=$______。

【解题过程】



以轴线为圆心，r 为半径作一圆形回路，由有磁介质时安培环路定理 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_{内} I_0$

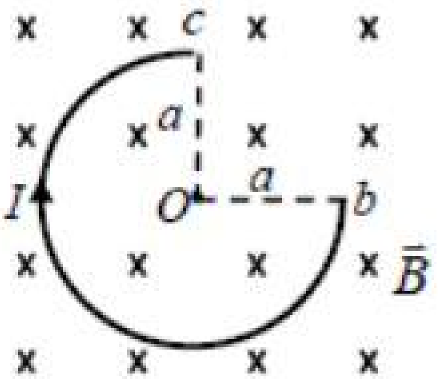
可得：

$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=H\cdot 2\pi r=I$，于是 r 处磁场强度大小为：$H=\dfrac{I}{2\pi r}$

又 $B=\mu H$，故 r 处磁感应强度大小为：

$B=\mu H=\dfrac{\mu I}{2\pi r}$。

7.如图所示，在真空中有一半径为a的3/4圆弧形的导线，其中通以稳恒电流I，导线置于均匀外磁场$\vec{B}$中，且$\vec{B}$与导线所在平面垂直，则该载流导线bc所受的磁力大小为______。



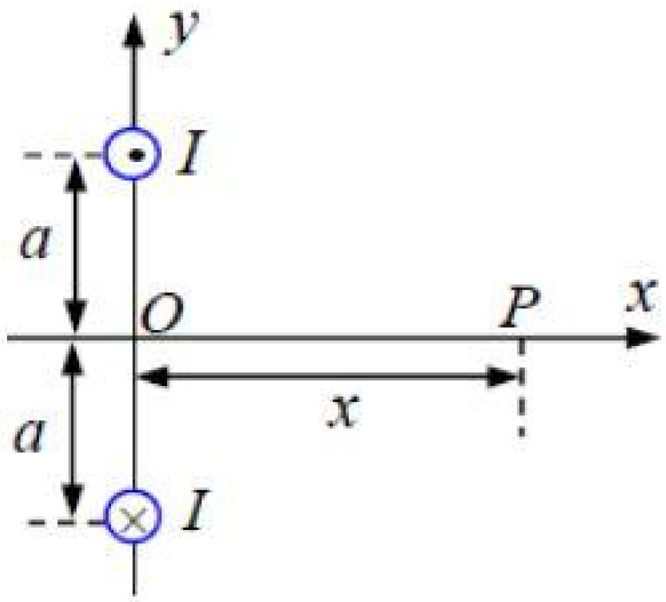
【解题过程】在均匀磁场中，载流圆弧bc所受的磁力与通以同样电流的弦线$\overline{bc}$所受的磁力大小相等，其大小由安培定律可得：

$F = BI\sqrt{2}a = \sqrt{2}aBI$。

三、计算题

1.图示为两条穿过y轴且垂直于$x-y$平面

的平行长直导线的俯视图，两条导线皆通有电流I，但方向相反，它们到x轴的距离皆为a。请推导出x轴上P点处的磁感应强度$\vec{B}(x)$的表达式。

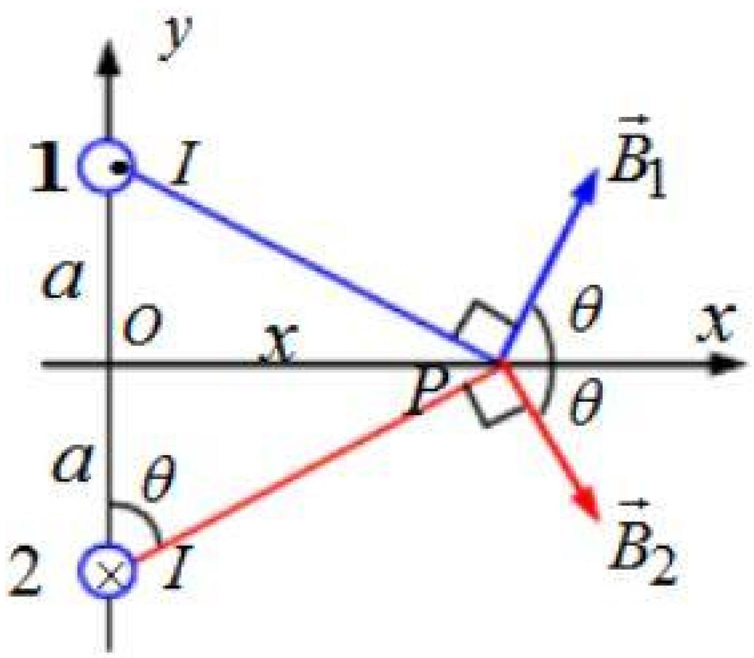


【解题过程】由安培环路定理$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I$可得：导线1和导线2在P点产生的磁感应强度大小分别为：

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2+x^2}}$$

方向如图所示。



由二者叠加，可得：

$$B_x = B_{1x} + B_{2x}$$

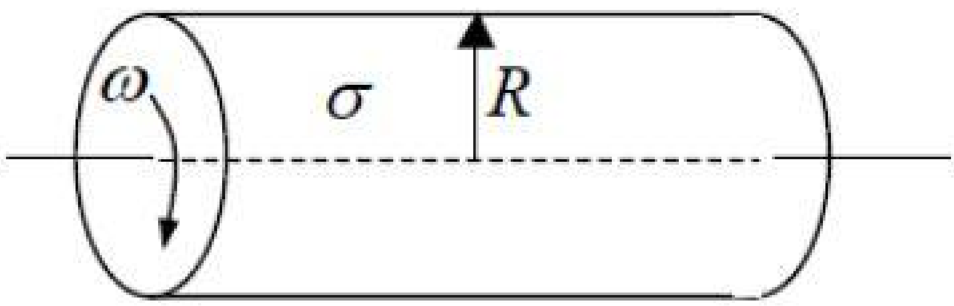
$$= 2 \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{\pi\left(a^2 + x^2\right)}$$

$B_y = 0$，$\vec{B}(x) = \dfrac{\mu_0 I a}{\pi\left(a^2 + x^2\right)}\vec{i}$ 。

2.如图所示，一半径为 R 的均匀带电无限长直圆筒，电荷面密度为 σ ，该筒以角速度 ω 绕其轴线匀速旋转，试求圆筒内部的磁感应

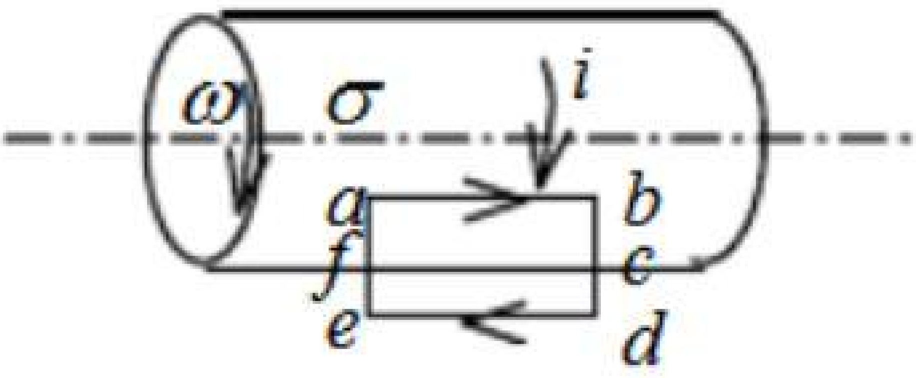
强度。



【解题过程】如图所示，圆筒旋转时相当于圆筒上具有同向的面电流密度i，

$$i=\frac{2\pi R\sigma\omega}{2\pi}=R\sigma\omega$$

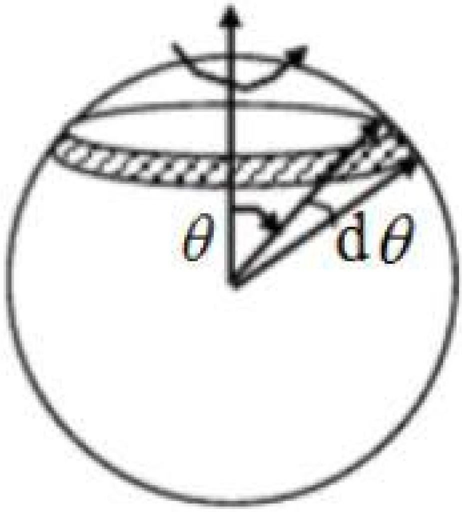
作矩形有向闭合环路如图所示，从电流分布的对称性分析可知，在$\overline{ab}$上各点$\vec{B}$的大小和方向均相同，而且$\vec{B}$的方向平行于$\overline{ab}$，在$\overline{bc}$和$\overline{fa}$上各点$\vec{B}$的方向与线元垂直，在$\overline{de}$，$\overline{fe}$，$\overline{cd}$上各点$\vec{B}=0$。



应用安培环路定理可$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I$得$B\cdot\overline{ab}=\mu_0 i\overline{ab}$，$B=\mu_0 i=\mu_0 R\sigma\omega$，圆筒内部为均匀磁场，磁感强度的大小为$B=\mu_0 R\sigma\omega$，方向平行于轴向朝右。

3.半径为R的均匀薄金属球壳，其上均匀分布有电荷，密度为σ，球壳绕过球心的轴以角速度ω转动。（1）求球壳旋转产生的电流在球心处产生的磁场；（2）求球壳旋转产生的电流的磁矩。

（$\int\sin^3 x dx=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$）



【解题过程】（1）金属球壳面电荷密度为σ，

则球面角宽度为 $d\theta$ 的一个带状面元（阴影）上的电荷 $dq=\sigma 2\pi R\sin\theta\cdot Rd\theta$，它旋转相当于电流 $dI=\frac{\omega}{2\pi}dq=\sigma R^2\omega\sin\theta d\theta$，面元的半径为 $r=R\sin\theta$，面元到球心的距离为 $d=R\cos\theta$，利用电流圆环的轴线上的磁场公式，则该面元电流在球心处产生的磁场为

$$dB=\frac{\mu_0 r^2 dI}{2\left(r^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\sigma\mu_0 R^4\omega\sin^3\theta d\theta}{2\left(R^2\sin^2\theta+R^2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

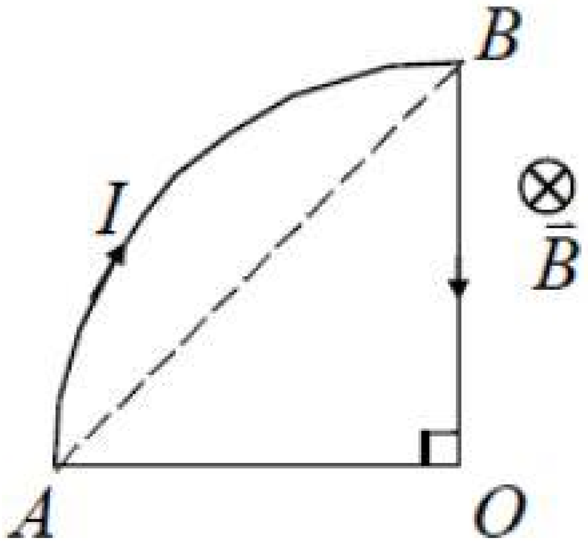
$$=\frac{\sigma\mu_0 R\omega\sin^3\theta d\theta}{2}$$

则球壳旋转产生的电流在球心处产生的磁场为：$B=\int_0^{\pi}\frac{\sigma\mu_0 R\omega\sin^3\theta d\theta}{2}=\frac{2\sigma\mu_0 R\omega}{3}$。

（2）金属球壳面电荷密度为σ，则球面角宽度为$d\theta$ 的一个带状面元（阴影）上的电荷 $dq=\sigma 2\pi R\sin\theta\cdot Rd\theta$，它旋转相当于电流 $dI=\dfrac{\omega}{2\pi}dq=\sigma R^2\omega\sin\theta d\theta$，其磁矩为 $dp_m=\pi\left(R\sin\theta\right)^2 dI=\pi\sigma R^4\omega\sin^3\theta d\theta$，所以球壳旋转产生的电流的磁矩为

$$p_m=\pi\sigma R^4\omega\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=\frac{4\pi\sigma\omega R^4}{3}\text{。}$$

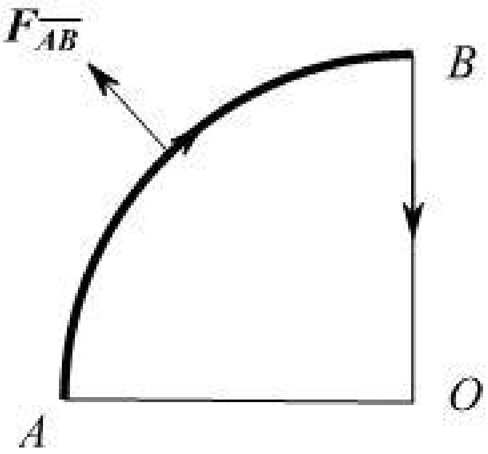
4.一线圈由半径为 0.2m 的$1/4$圆弧和相互垂直的二直线组成，通以电流 2A，把它放在磁感应强度为 0.5T 的均匀磁场中（磁感应强度$\vec{B}$ 的方向如图所示）。求：（1）线圈平面与磁场垂直时，圆弧AB 所受的磁力。（2）线圈平面与磁场成60° 角时，线圈所受的磁力矩。



【解题过程】（1）在均匀磁场中，弦线$\overline{AB}$所受的磁力与弧线AB通以同样的电流所受的磁力相等。由安培定理得

$$F_{AB}=F_{\overline{AB}}$$
$$=\sqrt{2}RIB=\sqrt{2}\times 0.2\times 2\times 0.5$$
$$=0.283(N)$$

方向与AB弧线垂直，与OB夹角为45°，如图所示。



（2）线圈的磁矩：

$$\vec{P}_m = IS\vec{n} = 2\times\frac{1}{4}\pi\times0.2^2\vec{n} = 2\pi\times10^{-2}\vec{n}\text{，}$$

$\vec{n}$ 与 $\vec{B}$ 夹角为$\left(90^\circ-60^\circ\right)=30^\circ$，

所受磁力大小为

$$M = P_m B\sin30^\circ$$

$$=2\pi\times10^{-2}\times0.5\times\frac{1}{2}$$

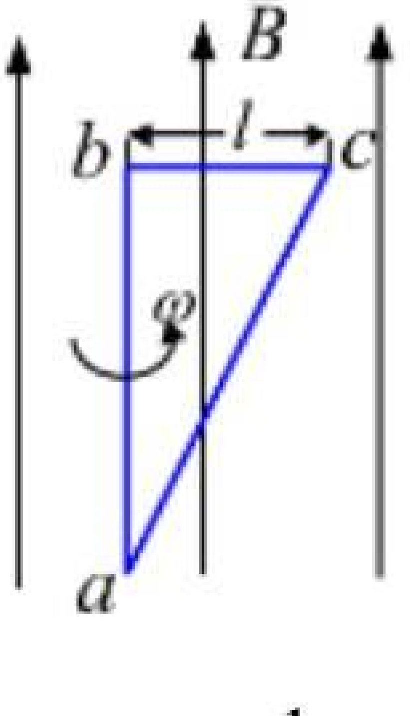
$$=1.57\times10^{-2}\left(N\cdot m\right)$$

$\vec{M}$ 的方向将驱使线圈法线 $\vec{n}$ 转向与 $\vec{B}$ 平行。

NO.11 电磁感应

一、选择题

1.如图所示，直角三角形金属框架 abc 放在均匀磁场中，磁场 $\vec{B}$ 平行于 ab 边，bc 的边长为 l。当金属框架绕 ab 边以匀角速度 ω 转动时，abc 回路中的感应电动势 ε 和 a、c 两点的电势差 U_a-U_c 分别为：（）



（A）$\varepsilon=0, U_a-U_c=\frac{1}{2}B\omega l^2$

（B）$\varepsilon=B\omega l^2, U_a-U_c=-\frac{1}{2}B\omega l^2$

（C）$\varepsilon=0, U_a-U_c=-\frac{1}{2}B\omega l^2$

（D）$\varepsilon = B\omega l^2, U_a - U_c = \frac{1}{2}B\omega l^2$

【解题过程】任意时刻

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\Delta abc} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} + \varepsilon_{ca} = 0$$

因为$\varepsilon_{ab} = 0$，所以

$$\varepsilon_{ca} = -\varepsilon_{bc} = -\int_b^c \vec{v}\times\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_0^l vB\sin 90^\circ dl\cos 0^\circ$$

$$= -\int_0^l \omega lBdl = -\frac{1}{2}B\omega l^2$$

$U_a - U_c = \varepsilon_{ca} = -\frac{1}{2}B\omega l^2$，选（C）。

2.下面几种情况下，闭合回路里不可能产生感应电流的是（）

（A）闭合回路所处的磁场发生变化

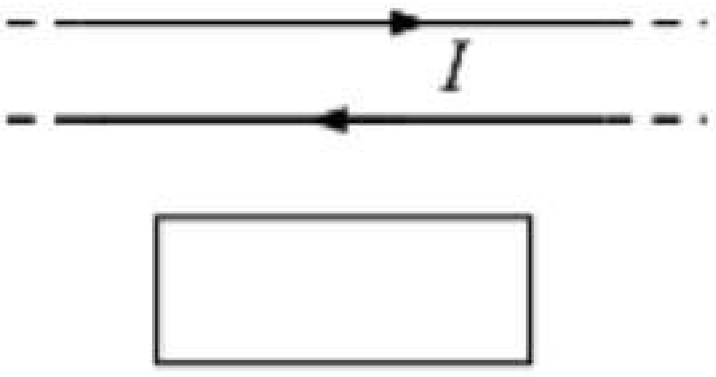
（B）闭合回路在匀强磁场中平动

（C）在磁场中闭合回路所包围的面积发生变化

（D）闭合回路在匀强磁场中转动

【解题过程】只有当穿过回路的磁通量发生变化时，才有可能有电磁感应现象产生，B 所描述的情况中，穿过闭合回路的磁通量始终不变。所以肯定不会产生电磁感应，更加不会有感应电流。选（B）。

3.两根无限长平行直导线载有大小相等方向相反的电流 I，I 以 $\frac{dI}{dt}$ 的变化率增长，一矩形线圈位于导线平面内（如图），则：（）



（A）线圈中无感应电流

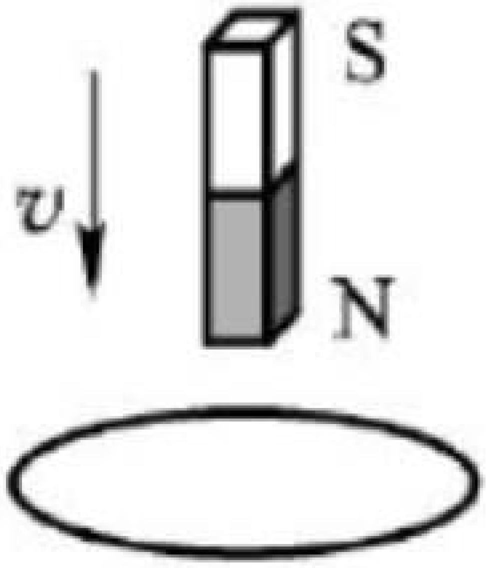
（B）线圈中感应电流为顺时针方向

（C）线圈中感应电流为逆时针方向

（D）线圈中感应电流方向不确定

【解题过程】因$\frac{dI}{dt}>0$，在回路产生的垂直于纸面向外的磁场增强，根据楞次定律，回路中产生的感应电流应为顺时针方向，用以反抗原来磁通量的增加。故选（B）。

4.如图所示，有一从高处落下的条形磁铁，它穿过一个闭合线圈时，二者相互作用的情况为（）



（A）磁铁接近线圈和离开线圈时都相互吸引

（B）磁铁接近线圈和离开线圈都相互排斥

（C）磁铁接近线圈时相互吸引，离开时相互排斥

（D）磁铁接近线圈时相互排斥，离开时相互吸引

【解题过程】（D）。

5.将形状完全相同的铜环和木环静止放置，并使通过两环面的磁通量随时间的变化率相等，则不计自感时（）

（A）铜环中有感应电动势，木环中无感应电动势

（B）铜环中感应电动势大，木环中感应电动势小

（C）铜环中感应电动势小，木环中感应电动势大

（D）两环中感应电动势相等

【解题过程】由$\varepsilon=-\dfrac{d\Phi}{dt}$知由于两环面的磁通量随时间的变化率相等，故两环中感应电动势相等，选（D）。

6.半径为a的圆线圈置于磁感应强度为$\vec{B}$的均匀磁场中，线圈平面与磁场方向垂直，

线圈电阻为 R；当把线圈转动使其法向与 $\vec{B}$ 的夹角 $\alpha=60^{\circ}$ 时，线圈中通过的电荷与线圈面积及转动所用的时间的关系是（）

（A）与线圈面积成正比，与时间无关

（B）与线圈面积成正比，与时间成正比

（C）与线圈面积成反比，与时间成反比

（D）与线圈面积成反比，与时间无关

【解题过程】线圈中通过的感应电荷

$$q=\frac{1}{R}\Delta\Phi=\frac{1}{R}\left(BS\cos 60^{\circ}-BS\cos 0^{\circ}\right)$$

$=-\dfrac{\pi a^2 B}{2R}$，故线圈中通过的电荷与线圈面积 πa^2 成正比，与时间无关。选（A）。

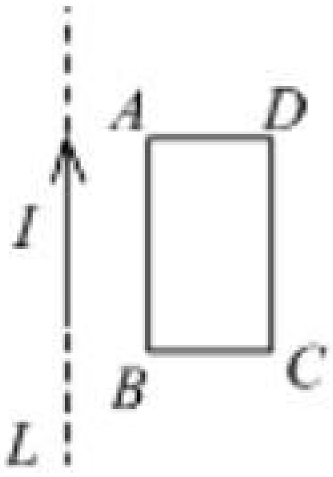
二、填空题

1.将条形磁铁插入与冲击电流计串联的金属环中时，有 $q=2.0\times10^{-5}C$ 的电荷通过电流计。若连接电流计的电路总电阻 $R=25\Omega$，则穿过环的磁通的变化 $\Delta\Phi=$ ______。

【解题过程】$q=\frac{\Delta\Phi}{R}$，

$$\Delta\Phi=R|q|=25\times2.0\times10^{-5}=5\times10^{-4}(Wb)$$

2.如图所示，在一长直导线 L 中通有电流 I，$ABCD$ 为一矩形线圈，它与 L 皆在纸面内，且 AB 边与 L 平行。当矩形线圈在纸面内向右移动时，线圈中感应电动势方向为_____；当矩形线圈绕 AD 边旋转，当 BC 边已离开纸面正向外运动时，线圈中感应电动势方向为_____。（选填顺时针、逆时针）



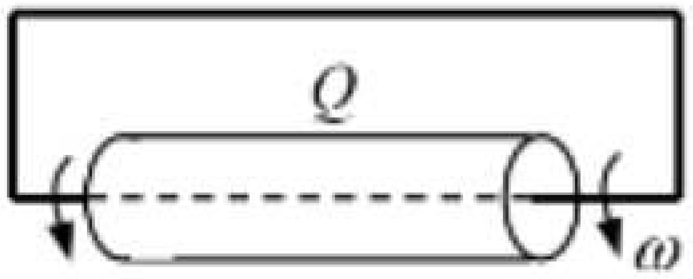
【解题过程】由楞次定律：顺时针方向；顺时针方向。

3.在磁感应强度为 $\vec{B}$ 的磁场中，以速率 v 垂直切割磁力线的一长度为 L 的金属杆，相

当于_____，它的电动势 $\varepsilon=$_____，产生此电动势的非静电力是______。

【解题过程】一个电源；vBL；洛伦兹力。

4.如图所示，电量 Q 均匀分布在一半径为 R、长为 L（$L\gg R$）的绝缘长圆筒上。一单匝矩形线圈的一个边与圆筒的轴线重合。若筒以角速度 $\omega=\omega_0\left(1-\dfrac{t}{t_0}\right)$ 线性减速旋转，则线圈中的感应电流为_____。

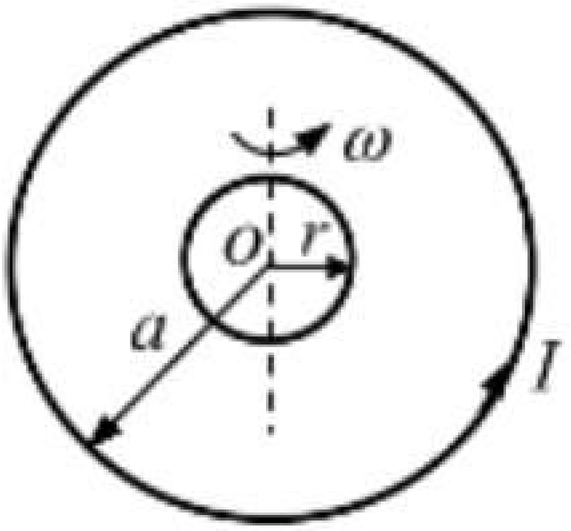


【解题过程】因圆筒内磁感应强度方向平行于单匝线圈平面，则

$\Phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int B\cos\dfrac{\pi}{2}dS=0$，所以

$\varepsilon_i=\dfrac{d\Phi}{dt}=0$，$I=\dfrac{\varepsilon_i}{R}=0$。

5.如图所示，一半径为r的很小的金属圆环，在初始时刻与一半径为a（$a \gg r$）的大金属圆环共面且同心。在大圆环中通以恒定的电流I，方向如图，如果小圆环以角速度ω绕其任一方向的直径转动，并设小圆环的电阻为R，则任一时刻t通过小圆环的磁通量$\Phi =$______；小圆环中的感应电流$i =$______。



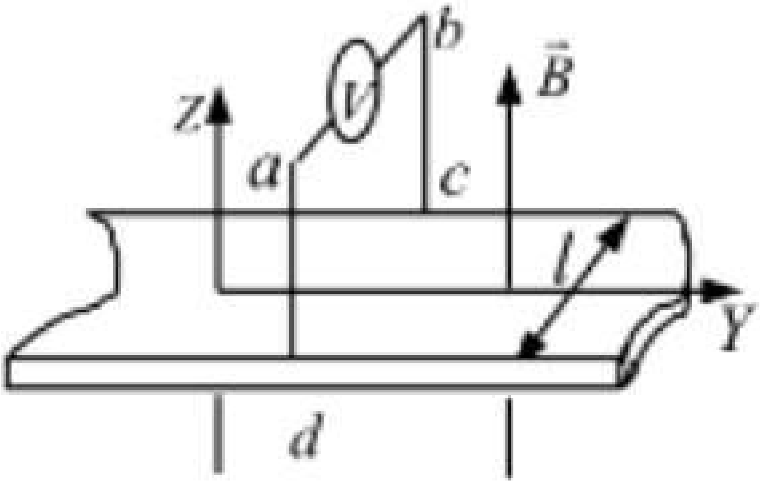
【解题过程】半径$a \gg r$，小圆环区域可视为均匀磁场，则通过小圆环的磁通量

$$\Phi \approx B_0 S \cos \omega t = \frac{\mu_0 I}{2a} \cdot \pi r^2 \cdot \cos \omega t$$

小圆环中的感应电流

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I \omega}{2Ra} \cdot \pi r^2 \cdot \sin \omega t$$

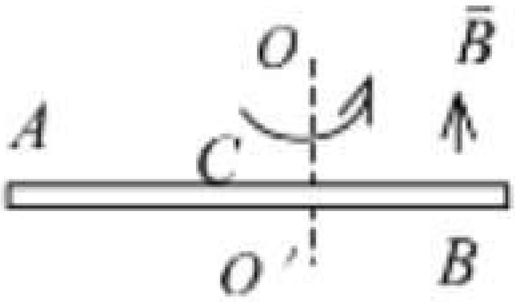
6.一无限长直导体薄板宽度为l，板面与Z轴垂直，板的长度方向沿Y轴，板的两侧与一个伏特计相接，如图。整个系统放在磁感应强度为$\vec{B}$的均匀磁场中，$\vec{B}$的方向沿Z轴正方向，如果伏特计与导体平板均以速度$\vec{v}$向Y轴正方向移动，则伏特计指示的电压值为______。



【解题过程】 在伏特计与导体平板以速度$\vec{v}$向Y轴正方向移动中，感应电动势$\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{dc}$，整个$abcda$回路$\sum\varepsilon=0$，$i=0$，所以伏特计指示$V=0$。

7.如图所示，长为L的导体棒AB在均匀磁场$\vec{B}$中绕通过C点的垂直于棒长且沿磁场方向的OO'轴转动（角速度ω'与B'同方

向），BC 的长度为棒长的 $\frac{1}{3}$，则 $U_{BC}=$ _____，$U_{AC}=$_____，$U_{AB}=$_____。



【解题过程】在 CB 上取长度微元 dx，它离 C 点的距离为 x，则 dx 两端的电势差由动生电动势公式可求得：

$$d\varepsilon_i=\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{x}=vBdx=\omega Bxdx,$$

所以 C、B 两端的电势差为

$$U_{BC}=\int_0^{\frac{L}{3}}\omega Bxdx=\frac{1}{2}\omega Bx^2\bigg|_0^{\frac{L}{3}}=\frac{1}{18}\omega BL^2$$

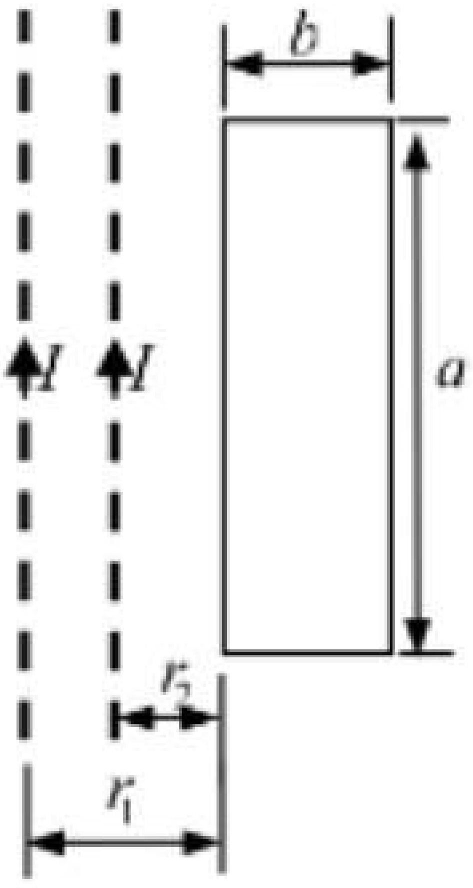
C、A 两端的电势差为

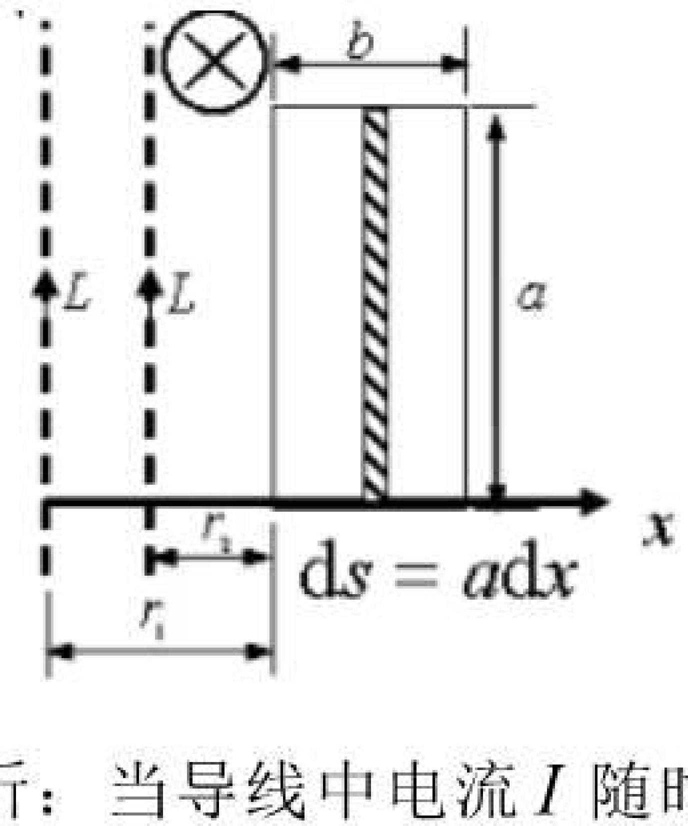
$$U_{AC}=\int_0^{\frac{2L}{3}}\omega Bxdx=\frac{4}{18}\omega BL^2$$

A、B 两端的电势差为 $U_{AB}=\frac{1}{6}\omega BL^2$。

三、计算题

1.如图所示，两条平行长直载流导线和一个矩形导线框共面，且导线框的一个边与长直导线平行，到两长直导线的距离分别为 r_1 、 r_2 。已知两导线中电流都为 $I = I_0 \sin \omega t$，其中 I_0 和 ω 为常数，t 为时间。导线框长为 a，宽为 b，求导线框中的感应电动势大小和方向。





【解题过程】分析：当导线中电流 I 随时间变化时，穿过矩形线圈的磁通量也将随时间发生变化，用法拉第电磁感应定律

$\varepsilon=-\dfrac{d\Phi}{dt}$ 计算感应电动势，其中磁通量 $\Phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}$，$\vec{B}$ 为两导线产生的磁场的叠加。

解：无限长直电流激发的磁感应强度为 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$。取坐标 Ox 垂直于导线，坐标原点取在矩形导线框的左边框上，坐标正方向为水平向右。取回路的绕行方向为顺时针。由场强的叠加原理可得 x 处的磁感应强度大小 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\left(r_1+x\right)}+\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\left(r_2+x\right)}$，垂直纸面向里。

通过微分面积 $dS=adx$ 的磁通量为

$$d\Phi=\vec{B}\cdot d\vec{S}=BdS$$

$$=\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi\left(r_1+x\right)}+\frac{\mu_0 I}{2\pi\left(r_2+x\right)}\right]adx$$

通过矩形线圈的磁通量为

$$\Phi=\int_0^b\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi\left(r_1+x\right)}+\frac{\mu_0 I}{2\pi\left(r_2+x\right)}\right]adx$$

$$=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(\ln\frac{r_1+b}{r_1}+\ln\frac{r_2+b}{r_2}\right)I_0\sin\omega t$$

感生电动势 $\varepsilon_i=-\frac{d\Phi}{dt}$

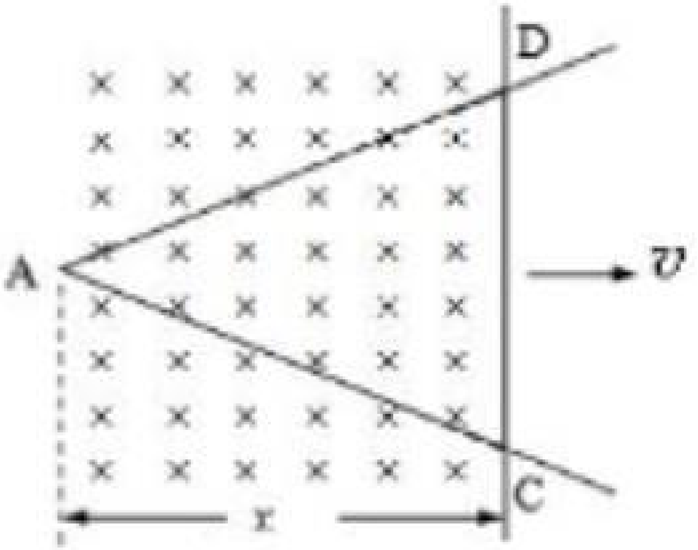
$$=-\frac{\mu_0\omega a}{2\pi}\left(\ln\frac{r_1+b}{r_1}+\ln\frac{r_2+b}{r_2}\right)I_0\cos\omega t$$

$$=-\frac{\mu_0\omega a}{2\pi}I_0\left[\ln\frac{\left(r_1+b\right)\left(r_2+b\right)}{r_1 r_2}\right]\cos\omega t$$

$\varepsilon_i>0$ 时，回路中感应电动势的实际方向为顺时针；$\varepsilon_i<0$ 时，回路中感应电动势的实际方向为逆时针。

2.将等边三角形平面回路 $ACDA$ 放在磁感应强度为 $\vec{B}=\vec{B}_0 t$ （其中 $\vec{B}_0$ 为常矢量）的均匀磁场中，回路平面垂直于磁场方向，如图所示。回路的 CD 段为滑动导线，以匀速 v 远离 A 端运动，且始终保持回路为

等边三角形。设滑动导线 CD 到 A 端的垂直距离为 x，且初始位置为 $x=0$。试求回路 $ACDA$ 中的感应电动势 ε 和时间 t 的关系。



【解题过程】

$$\Phi_m=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_S B_0 t dS$$

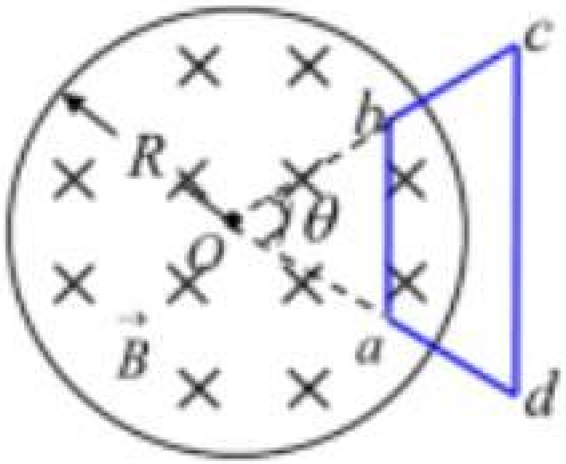
$$=B_0 t\int_S dS=B_0 tS=B_0 tx^2\tan 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}B_0 v^2 t^3$$

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-\sqrt{3}B_0 v^2 t^2\text{。}$$

3.均匀磁场 $\vec{B}$ 被限制在半径 $R=10cm$ 的无限长圆柱空间内，方向垂直纸面向里，取一固定的等腰梯形回路 $abcd$，梯形所在平

面的法向与圆柱空间的轴平行，位置如图所示。设磁场以 $\frac{dB}{dt}=1T/s$ 的匀速率减少，已知 $\theta=\frac{1}{3}\pi$，$\overline{Oa}=\overline{Ob}=6cm$，求等腰梯形回路中感生电动势的大小和方向。



【解题过程】由法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-S\frac{dB}{dt}$$

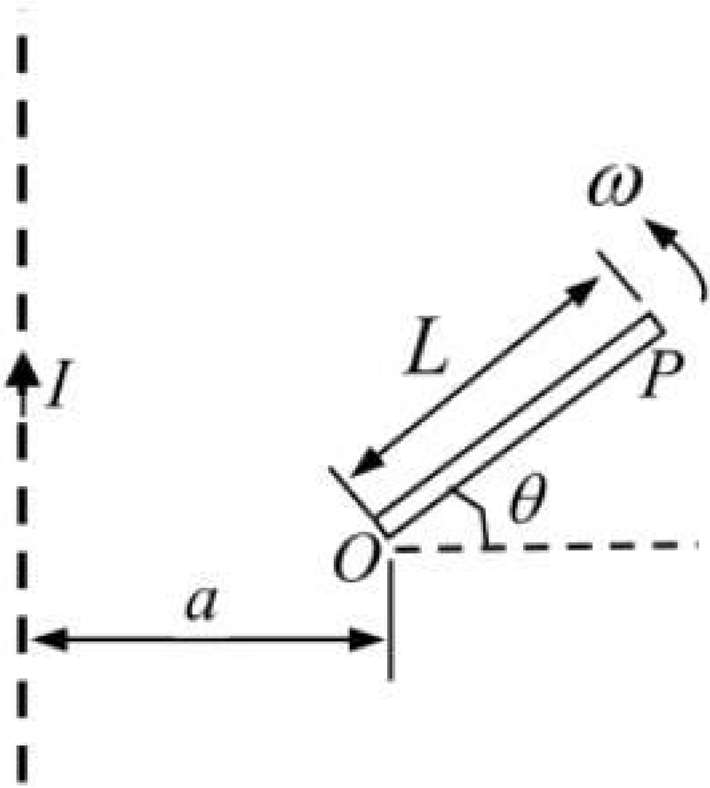
$$=-\left(\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}\overline{ab}\cdot\overline{oa}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right)\frac{dB}{dt}$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\times0.1\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times0.06\times0.06\cos\frac{\pi}{6}\right)\times(-1)$$

$$=3.68\times10^{-3}(V)$$

顺时针绕向。

4.如图所示，导线L以角速度ω绕其端点O旋转。已知导线L与电流I在共同的平面内，O点到长直电流I的距离为a，且$a>L$。求导线L在与水平方向成θ角时的动生电动势大小和方向，并说明O和P哪端电势高。



【解题过程】分析：载流长直导线产生磁场，导线L绕O旋转切割磁力线。由于切割是不均匀的磁场，而且导体各处的运动速度不同，所以要微分运动导线，先由动生电动势公式计算线元dl的两端的动生电动势$d\varepsilon_i$，再积分计算整段的总动生电动势。

解：取 OP 方向为导线的正方向，在导线 OP 上某处取极小的一段线元 $d\vec{l}$ ，方向为 OP 方向。线元运动的速度大小为 $v = l\omega$ 。由于 $\vec{v}$ 、 $\vec{B}$ 、 $d\vec{l}$ 互相垂直。所以 $d\vec{l}$ 两端的动生电动势

$$d\varepsilon = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l} = -vBdl = -B\omega l dl$$ 。

将载流长直导线在该处激发磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\left(a + l\cos\theta\right)}$$

代入，积分得 L 导线在与水平方向成 θ 角时的动生电动势：

$$\varepsilon_i = \int_{OP} d\varepsilon_i = -\frac{\omega\mu_0 I}{2\pi}\int_0^L \frac{l dl}{a + l\cos\theta}$$

$$= \frac{\omega\mu_0 I}{2\pi\cos^2\theta}\int_0^L \frac{a + l\cos\theta - a}{a + l\cos\theta} d\left(l\cos\theta\right)$$

$$= -\frac{\omega\mu_0 I}{2\pi\cos^2\theta}\left(L\cos\theta - a\ln\frac{a + L\cos\theta}{a}\right)$$

动生电动势的方向由 P 指向 O 。