西南交通大学 2014 年硕士研究生招生

入学考试试卷

试题代码：601

试题名称：高等数学

考试时间：2014 年 1 月

考生请注意：

1、本试题共三大题，共 4 页，满分 150 分，请认真检查；

2、答题时，直接将试题内容写在考场提供的答题纸上，答在试卷上的内容无效；

3、请在答题纸上按要求填写试题代码和试题名称；

4、本试题不得拆开，拆开后遗失后果自负。

一、选择

1.设函数 $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则 $x=0$

是 $f(x)$ 的（　）。

A 跳跃间断点　　B 可去间断点

C 连续的　　D 三类间断点

2.当 $D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1, 1\le y\le 2\}$ 时，则

$\iint\limits_D \dfrac{x}{x^2+y^2+2}dxdy=$（　）。

A 2　　B $\dfrac{1}{4}$　　C $\dfrac{1}{2}$　　D 0

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 是（　）。

A 条件收敛　　B 绝对收敛

C 发散　　D 不能确定

4.设$z=f(x,y)$在p点有定义，则$f(x,y)$在p点连续是$f(x,y)$在p点有偏导数的（　）。

A 充分条件　　　　B 充要条件

C 必要条件

D 既非充分条件也非必要条件

5.设L为区域$D:0\le x\le \pi, 0\le y\le \sin x$的正向边界，则

$\oint_L e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]=$（　）。

A $-\frac{3}{2}\pi$　　　　B $-\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$

C $-\frac{1}{5}$　　　　D $-\frac{1}{5}e^{\pi}$

6.设$f(x)=3x^3+x^2|x|$，则$f^{(n)}(0)$存在的最高阶n为（　）。

A 0　　　　B 1

C 2　　　　　　　　　D 3

7.曲线 $y=(x-1)^3$ 的拐点是（　）。

A $(-1,8)$　　　　　　　B $(2,1)$

C $(0,-1)$　　　　　　　D $(1,0)$

8.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则（　）。

A $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ 收敛；

B $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)$ 收敛；

C $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n+b_n)$ 收敛；

D $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛；

9. 设 $f(x,y)$ 是有界闭合区域 $D: x^2+y^2 \le a^2$ 上的连读函数，则当 $a \to 0$ 时，$\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 的极限（　）。

A 不存在　　B 等于 $f(0,0)$

C 等于 $f(1,1)$　　D 等于 $f(1,0)$

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x-y)}{x+y} =$（　）。

A 1　　B ∞

C 0　　D 不存在

二、填空

1.幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 的收敛半径是（　）。

2.设 $z=xy^2+\sin(x+y)$，则 $dz=$（　）。

3. $\int_0^x f(t)dt = e^x$，其中 $f(x)$ 连续，则 $f(0)=$（　）。

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n =$（　）。

5.积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$ 的值等于（　）。

6.直线 $\begin{cases} y+2=0 \\ x+2z-7=0 \end{cases}$ 上的点到 $(0,-1,1)$ 最短距离为（　）。

7.函数 $\varphi(x)=\int_0^x (t^3-t)dt$ 的极小值为（　）。

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和函数是（　）。

9.已知二阶线性非齐次微分方程的两个特解为 $y_1 = 1+x+x^3$，$y_2 = 2-x+x^3$，相应的齐次方程的一个特解为 $\overline{y}=x$，方程满足初始条件 $y(0)=5, y'(0)=-2$ 的特解为（　）。

三、解答下列各题

1.设$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$。

2.计算下列积分

（1）$\int xe^{-x^2}dx$；

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{1+\sin x}dx$；

3.求微分方程的通解

$ydx+(1+y)xdy=e^y dy$。

4. 求经过点 $A(-1,0,4)$ 且与直线

$L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}, L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$

都相交的直线方程。

5.计算$\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$ 其中 L

为点 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的曲线 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$。

6.设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1 \\ x^3, & -1\le x\le 2 \\ 12x-16, & x>2\end{cases}$

（1）写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式；

（2）$g(x)$ 是否有间断点、不可导点，如有，指出这些点。

7.将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

8.计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega} zdv$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $z=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)$ 所围成的立体。

西南交通大学 2014 年硕士研究生招生入学试题解析

试题代码：601

试题名称：高等数学

一、选择

1.设函数 $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）。

A 跳跃间断点　　B 可去间断点

C 连续的　　D 三类间断点

答案：C

解析：本题考查对于函数的连续性的理解与应用，对于该题，要根据函数的连续性的定义与性质进行选择与判断即可。

解： 已知 $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \quad\quad x=0 \end{cases}$，

那么 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}=f(0)$，

那么 $x=0$ 是 $f(x)$ 的连续点。

2.当 $D=\{(x,y)\,|\,-1\leq x\leq 1, 1\leq y\leq 2\}$ 时，则

$\iint\limits_{D}\dfrac{x}{x^2+y^2+2}dxdy=$（ ）。

A 2　　　　B $\dfrac{1}{4}$

C $\dfrac{1}{2}$　　　　D 0

答案： D

解析： 本题考查对于函数的积分的求解，对于该题，要根据被积函数的奇偶性以及积分区间的对称性来进行积分的求解即可。

解： 由于被积函数 $\dfrac{x}{x^2+y^2+2}$ 是关于 x 的奇函数，

积分区间 $D=\{(x,y)\big|-1\le x\le 1,1\le y\le 2\}$ 关于 y 轴对称，

那么 $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2+2}dxdy=0$。

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是（　）。

A 条件收敛　　　　B 绝对收敛

C 发散　　　　D 不能确定

答案： C

解析： 本题考查对于级数的收敛性的判断，对于该题，根据级数的收敛性的性质与条件进行选择与判断即可。

解：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\cdots$$

$$+(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}})+\cdots,$$

一般项

$$v_m=\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}$$

$$>\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}=\frac{1}{2},$$

所以v_m不趋近于 0，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

4.设$z=f(x,y)$在p点有定义，则$f(x,y)$在p点连续是$f(x,y)$在p点有偏导数的（　）。

A 充分条件　　　B 充要条件

C 必要条件

D 既非充分条件也非必要条件

答案：D

解析：本题考查对于函数的连续性以及函数的偏导数之间的关系的理解，对于该题，根据函数的偏导数的性质进行选择与判断即可。

解：对于多元函数来说，$f(x,y)$ 在 P 点连续与 $f(x,y)$ 在 P 点有偏导数之间没有必然的关系，即 $f(x,y)$ 在 P 点连续是 $f(x,y)$ 在 P 点有偏导数既非充分条件也非必要条件。

5.设 L 为区域 $D:0\le x\le\pi,0\le y\le\sin x$ 的正向边界，则

$\oint_L e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]=$（　）。

A $-\frac{3}{2}\pi$　　B $-\frac{1}{5}(e^\pi-1)$　　C $-\frac{1}{5}$　　D $-\frac{1}{5}e^\pi$

答案：B

解析：本题考查对于函数的曲线积分的求解与应用，对于该题，要先根据格林公式对原始进行转化，然后进行积分求解即可。

解：已知 L 为区域

$D:0\le x\le \pi,0\le y\le \sin x$ 的正向边界，

$$\oint_L e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$$

$$=\iint_D[(\sin y-y)e^x-\sin ye^x]dxdy$$

$$=-\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}ye^x dy$$

$$=-\int_0^\pi \frac{\sin^2 xe^x}{2}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^\pi e^x dx+\frac{1}{4}\int_0^\pi e^x\cos 2xdx$$

$$=-\frac{e^x}{20}(5-2\sin 2x-\cos 2x)\Big|_0^\pi$$

$$=-\frac{1}{5}(e^\pi-1)$$

6.设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶 n 为（　）。

A 0　　B 1

C 2　　D 3

答案： C

解析：本题考查对于函数的多阶导数的求解以及对于函数的导数的基本性质的理解与应用，对于该题，要根据函数导数的定义来建立等式，进而判断函数导数是否存在。

解：已知 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，

那么

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3}{x}=0\ ,$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3}{x}=0\ ,$$

那么 $f'(0)=0$，

则有 $f'(x)=9x^2+2x|x|$；

那么

$$f_+''(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{11x^2}{x}=0$$

$$f''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{7x^2}{x}=0,$$

那么 $f''(0)=0$，

则有 $f''(x)=18x+4|x|$；

那么

$$f'''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{22x}{x}=22$$

，

$$f'''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{14x}{x}=14$$

那么 $f'''(0)$ 不存在。

7.曲线 $y=(x-1)^3$ 的拐点是（　）。

A $(-1,8)$　　B $(2,1)$

C $(0,-1)$　　D $(1,0)$

答案：D

解析：本题考查对于曲线的拐点的判断，对于该题，要先求解出函数二阶导数，然后根据二阶导数的正负来进行函数的拐点的判断。

解：已知 $y=(x-1)^3$，那么 $y'=3(x-1)^2$，

$y''=6(x-1)$，

令 $y''=6(x-1)=0$ 可得 $x=1$，

当 $x<1$ 时，$y''<0$，当 $x>1$ 时，$y''>0$，

那么曲线 $y=(x-1)^3$ 的拐点是 $(1,0)$。

8.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则（　）。

A $\sum_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)$ 收敛；

B $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)$ 收敛；

C $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n+b_n)$ 收敛；

D $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛；

答案：D

解析：本题考查对于级数的收敛性的性质的理解与应用，对于该题。根据常数项级数的性质来选择判断即可。

解：根据常数项级数的性质可知，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 收敛。

9. 设 $f(x,y)$ 是有界闭合区域 $D:x^2+y^2\leq a^2$ 上的连读函数，则当 $a\to 0$ 时，$\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 的极限（ ）。

A 不存在　　　　B 等于 $f(0,0)$

C 等于 $f(1,1)$　　　D 等于 $f(1,0)$

答案：B

解析：本题考查对于函数的积分的性质的理解与应用，对于该题，根据函数积分以及无穷小量之间的关系进行选择判断即可。

解： 已知 $f(x,y)$ 是有界闭合区域 $D: x^2+y^2 \le a^2$ 上的连读函数，

那么

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{\pi a^2}\iint_D f(x,y)dxdy$$
$$=\lim_{a\to 0}\frac{f(x,y)}{\pi a^2}\iint_D dxdy$$
$$=\lim_{a\to 0} f(x,y)=f(0,0)$$

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x-y)}{x+y}=$（　）。

A 1　　　　　　　　　B ∞

C 0　　　　　　　　　D 不存在

答案： D

解析： 本题考查对于函数，对于该题，要根据函数极限的定义，根据不同的路径来进行极限的求解，进而判断极限是否存在。

解： 设 $y=x$，那么 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 0}{2x}=0$，

设 $y=kx$，那么 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1-k)x}{(1+k)x}=\dfrac{1-k}{1+k}$，

那么 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x-y)}{x+y}$ 不存在。

二、填空

1.幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$ 的收敛半径是（　）。

答案： $R=1$

解析：本题考查对于幂函数的收敛半径以及收敛域的理解与求解，对于该题，可以根据比值审敛法进行收敛域和收敛半径的求解。

解：令 $u_n(x)=\frac{1}{n}x^n$，

则由比值审敛法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}x^{n+1}/\frac{1}{n}x^n\right|=|x|,$$

令 $|x|<1$，幂级数绝对收敛，于是收敛半径 $R=1$。

2.设 $z=xy^2+\sin(x+y)$，则 $dz=$（　）。

答案：

$dz=[y^2+\cos(x+y)]dx+[2xy+\cos(x+y)]dy$

解析：本题考查对于函数的微分的求解，对于该题，要先求解出函数的偏导数，然后写

出函数的微分即可。

解： 已知 $z = xy^2 + \sin(x+y)$，

那么

$$\frac{dz}{dx} = y^2 + \cos(x+y), \frac{dz}{dy} = 2xy + \cos(x+y)$$

那么

$$dz = [y^2 + \cos(x+y)]dx + [2xy + \cos(x+y)]dy$$

3. $\int_0^x f(t)dt = e^x$，其中 $f(x)$ 连续，则 $f(0) =$（ ）。

答案： 1

解析： 本题考查对于函数的积分的性质的理解与应用，对于该题，根据函数积分的性质以及已知条件进行求解即可。

解： 由于 $\int_0^x f(t)dt = e^x$，

等式两边对 x 求导可得 $f(x) = e^x$，

那么 $f(0)=1$。

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=$（　）。

答案： e

解析：本题考查对于极限的求解，对于该题，要根据重要极限来进行极限的求解。

解： $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$。

5.积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$ 的值等于（　）。

答案： $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}$

解析：本题考查对于函数积分的求解，对于该题，要变换积分次序，然后进行积分求解即可。

解：根据题意可得积分区域为

$0\le x\le 2, x\le y\le 2$，

那么 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=\int_0^2 dy\int_0^y e^{-y^2}dx$

$$=\int_0^2 ye^{-y^2}dy$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}$$

6.直线$\begin{cases} y+2=0 \\ x+2z-7=0 \end{cases}$上的点到$(0,-1,1)$最短距离为（　　）。

答案： $\sqrt{6}$

解析：本题考查对于点到线的距离的求解与应用，对于该题，要先根据题意写出距离公式，然后判断最短距离。

解：已知$\begin{cases} y+2=0 \\ x+2z-7=0 \end{cases}$,

那么此直线上任一点(x,y,z)到点$(0,-1,1)$的距离为：

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(7-2z)^2+1+(z-1)^2}$$

$=\sqrt{5z^2-30z+51}$

$=\sqrt{5(z-3)^2+6}$

那么当$z=3$时，此距离最小，此时最短距离

为$\sqrt{6}$。

7.函数$\varphi(x)=\int_0^x(t^3-t)dt$的极小值为（　）。

答案： $\varphi(1)=-\dfrac{1}{4}$

解析：本题考查对于函数的导数和积分的求解与应用，对于该题，要先求解出函数的导数，然后进行函数的极值的判断即可。

解：已知$\varphi(x)=\int_0^x(t^3-t)dt$，

那么令$\varphi'(x)=x^3-x=0$，可得$x=0,1$，

当$0<x<1$时，$\varphi'(x)<0$，当$x>1$时，

$\varphi'(x)>0$，

那么$x=1$为函数的极小值点，

此时

$$\varphi(1)=\int_0^1(t^3-t)dt=[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2]\bigg|_0^1=-\frac{1}{4}\text{。}$$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$的和函数是（　　）。

答案： $-\ln(1-x)+C$

解析： 本题考查对于函数的幂级数的展开式的理解与应用，对于该题，根据幂级数的展开方法进行展开求解即可。

解： 令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，

则有 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

那么 $f'(x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}x^n dx=\frac{1}{1-x}$，

$f(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)+C$。

9.已知二阶线性非齐次微分方程的两个特解为 $y_1=1+x+x^3$， $y_2=2-x+x^3$，相应的齐次方程的一个特解为 $\overline{y}=x$，方程满足初始条件 $y(0)=5,y'(0)=-2$ 的特解为（ ）。

答案： $y=5-2x+x^3$

解析：本题考查对于微分方程的性质的理解与应用，对于该题，要根据微分方程的性质来进行求解。

解：已知二阶线性非齐次微分方程的两个特解为 $y_1=1+x+x^3$， $y_2=2-x+x^3$，相应的齐次方程的一个特解为 $\overline{y}=x$，

那么该二阶线性非齐次微分方程的通解为

$y = C_1 + C_2 x + x^3$，

那么$\begin{cases} y(0) = C_1 = 5 \\ y'(0) = C_2 = -2 \end{cases}$可得$\begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = -2 \end{cases}$，

那么$y = 5 - 2x + x^3$。

三、解答下列各题

1.设$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$。

解析：本题考查对于参数方程的导数的求解，对于该题，根据参数方程的求导方法进行求解即可。

解：已知$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$，

那么$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_t'}{x_t'} = \dfrac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t$。

2.计算下列积分

（1）$\int xe^{-x^2}dx$；

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$；

解析：本题考查对于函数积分的求解，对于该题，根据函数积分公式以及积分方法进行积分求解即可。

解：（1）$\int xe^{-x^2}dx$

$$=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C;$$

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\cos(x-\frac{\pi}{2})}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

3.求微分方程的通解

$ydx+(1+y)xdy=e^y dy$ 。

解析：本题考查对于微分方程的求解，对于该题，要先将原式进行化简，然后进行微分方程的求解即可。

解： $ydx+(1+y)xdy=e^y dy$

$$\Rightarrow ydx=[e^y-(1+y)x]dy$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{e^y-(1+y)x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{e^y}{y}-\frac{(1+y)x}{y}$$

令 $\frac{dx}{dy}=-\frac{(1+y)x}{y}$ 可得 $x=c\cdot\frac{e^y}{y}$，

将 c 用 $c(y)$ 替换并代入原式得

$x=\frac{1}{2}\frac{e^y}{y}+\frac{c}{ye^y}$。

4. 求经过点 $A(-1,0,4)$ 且与直线 $L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3},L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 都相交的直线方程。

解析：本题考查对于空间方程的理解与应用，对于该题，要先假设出两交点，然后建立直线方程，进而判断直线方程。

解： 设所求直线与两直线的交点分别为

$(t,2t,3t)$，$(1+2s,-2+s,3+4s)$，

则这两点与 $A(-1,0,4)$ 的连线是重合的，

即 $(t+1,2t,3t-4)$，

$=k(2+2s,-2+s,4s-1)$

可以解得 $t=-\frac{31}{9},k=\frac{17}{9},s=-\frac{28}{17}$，

那么连线方向为 $(22,62,129)$，

所求直线方程为 $\frac{x+1}{22}=\frac{y}{62}=\frac{z-4}{129}$。

5.计算 $\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$ 其中 L 为点 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的曲线 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$。

解析：本题考查对于曲线积分的求解，对于该题，要根据格林公式进行积分式的化简，然后进行积分的求解即可。

解：设 $P(x,y)=x^2+2xy$,

$Q(x,y)=x^2+y^4$，

由于 $\frac{dP(x,y)}{dy}=2xy=\frac{dQ(x,y)}{dx}$，

那么积分与路径无关，

则有 $\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$

$=\int_{(0,0)}^{(0,1)}(x^2+y^4)dy+\int_{(0,1)}^{(1,1)}(x^2+2xy)dx$

$=\frac{1}{5}y^5\Big|_0^1+(\frac{1}{3}x^3+x^2)\Big|_0^1$

$=\frac{23}{15}$

6.设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\ x^3, & -1\le x\le 2\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$

（1）写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式；

（2）$g(x)$ 是否有间断点、不可导点，如有，指出这些点。

解析：本题考查对于函数的反函数以及函数的连续性的理解与应用，对于该题，根据反函数的定义进行表达式的求解，然后判断函数的连续性即可。

解：（1）设 $y=f(x)$，

由于 $x<-1$ 时，$y=f(x)=1-2x^2$，

那么 $x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}},y<-1$，

当 $-1\le x\le 2$ 时，$y=f(x)=x^3$，

那么 $x=\sqrt[3]{y},-1\le y\le 8$，

当 $x>2$ 时，$y=f(x)=12x-16$，

那么 $x=\dfrac{y+16}{12},y>8$，

所以 $f(x)$ 的反函数

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}},x<-1\\ \sqrt[3]{x},-1\le x\le 8\\ \dfrac{x+16}{12},x>8\end{cases}$$ 。

（2） $\lim\limits_{x\to(-1)^-} g(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-} -\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$

$=-1=g(-1)$，

$\lim\limits_{x\to 8^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 8^+}\dfrac{x+16}{12}=2=g(2)$，

那么函数在 $x=-1,8$ 处连续，

则函数在 $(-\infty,+\infty)$ 连续；

由于 $-1\le y\le 8$ 时， $g(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 不可导，所以 $x=0$ 是函数的不可导点，

$$g'_-(-1)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}+1}{x+1}=\frac{1}{4},$$

$$g'_+(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}=-1,$$

那么 $x=-1$ 是函数的不可导点，

$$g'_{-}(8)=\lim_{x\to 8^{-}}\frac{g(x)-g(8)}{x-8}$$

$$=\lim_{x\to 8^{-}}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\frac{1}{12},$$

$$g'_{+}(8)=\lim_{x\to 8^{+}}\frac{g(x)-g(8)}{x-8}$$

$$=\lim_{x\to 8^{+}}\frac{\frac{x+16}{12}-2}{x-8}=\frac{1}{12},$$

那么$x=8$是函数的可导点，

所以函数在$(-\infty,+\infty)$连续，$x=-1$，$x=0$

为函数的不可导点。

7.将函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的

幂级数，并求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和。

解析：本题考查对于函数的幂级数的展开式的理解与应用，对于该题，根据幂级数的展开方法进行展开求解即可。

解：（1）由于 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$，

那么 $f'(x)=\dfrac{-2}{1+4x^2}$，

那么 $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx$，

$=\int_0^x \dfrac{-2}{1+4x^2}dx=-\arctan 2x$

那么 $f(x)=f(0)-\arctan 2x$

$=\dfrac{\pi}{4}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}2^{2n+1}x^{2n+1}$，

那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}-f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{4}$。

8.计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}zdv$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $z=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)$ 所围成的立体。

解析：本题考查对于三重积分的求解，对于该题，要先将原积分转化为柱坐标形式，然

后进行积分求解即可。

解： 已知Ω是由球面$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$z=\frac{1}{3}(x^2+y^2)$所围成的立体，

那么$I=\iiint_\Omega zdv=\iiint_\Omega z\rho d\rho dzd\theta$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}d\rho\int_{\sqrt{4-\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{3}}zdz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(\frac{\rho^4}{18}-\frac{\rho^2}{2}+2)d\rho$$

$$=\frac{16\sqrt{3}}{5}\pi$$