1 概率的性质与计算

1.（1）设事件 A,B 互不相容，且 $P(A)=p$，$P(B)=q$，则 $P(\overline{A}\overline{B})=$ _____。

（2）已知 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，则 $P(A|B)=$ _____。

【解题过程】（1）由题知 $AB=\varnothing$，故

$$P(\overline{A}\overline{B})=P\left(\overline{A\cup B}\right)$$
$$=1-P(A\cup B)$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$
$$=1-p-q$$

（2）$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

$=0.7-P(AB)=0.5$

故 $P(AB)=0.2$。

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.2}{0.4}=0.5。$$

2. 设 A,B 为两件事，且 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.8$。问

（1）在什么条件下 $P(AB)$ 取得最小值，最小值是什么？

（2）在什么条件下 $P(AB)$ 取得最大值，最大值是什么？

【解题过程】由加法公式

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 可得

（1）当 $P(A\cup B)=1$ 时，$P(AB)$ 取得最小值，最小值为 0.2；

（2）当 B 包含 A 时为最大值，$P(A\cup B)=P(B)=0.8$，所以最大值为 0.4。

3.（1）若概率 $P(AB)=0$，则必有（ ）

① $AB=\varnothing$

②事件 A 与 B 互斥

③事件 A 与 B 对立

④ $P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)$

（2）袋中有 2 白 1 红共 3 只质量、大小相同的球，甲先任取一球，观察后放回；然后乙再任取一球，则二人取相同颜色球的概率为（）

① $\frac{1}{9}$　② $\frac{2}{9}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{5}{9}$

【解题过程】（1）因 $P(AB)=0$，

故 $P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=P(A)+P(B)$

④正确。

（2）所求概率为 $p=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$，

④正确。

4.设 A、B 为两事件，且 $P\left(A\right)=0.5$，

$P\left(B\right)=0.7$，$P\left(A\cup B\right)=0.8$，试求

$P\left(A-B\right)$，$P\left(B-A\right)$。

【解题过程】

因 $P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8$

故 $P(AB)=0.4$。

$P\left(A-B\right)=P(A)-P(AB)=0.5-0.4=0.1$

$P\left(B-A\right)=P(B)-P(AB)=0.7-0.4=0.3$

5.在 $0,1,2,\cdots,9$ 这 10 个数中任取 4 个，能排成 4 位偶数的概率是多少？

关注微信公众号：古德校园

【解题过程】从$0,1,2,\cdots,9$这 10 个数中任取 4 个组成没有重复数字的四位数，基本事件总数$n=A_{10}^4$，能排成一个 4 位偶数的基本事件的个数$m=A_9^3+A_4^1A_8^1A_8^2$，所以能排成一个 4 位偶数的概率为

$$p=\frac{A_9^3+A_4^1A_8^1A_8^2}{A_{10}^4}=\frac{41}{90}。$$

6.在 60 件产品中有 30 件是一等品，20 件是二等品，10 件是三等品。从中任取 3 件，试求：（1）3 件都是一等品的概率；

（2）2 件是一等品、1 件是二等品的概率；

（3）一等品、二等品、三等品各有一件的概率。

【解题过程】（1）$p=\dfrac{C_{30}^3}{C_{60}^3}=\dfrac{7}{59}$；

（2）$p=\dfrac{C_{30}^2C_{20}^1}{C_{60}^3}=\dfrac{15}{59}$；

（3）$p=\dfrac{C_{30}^1C_{20}^1C_{10}^1}{C_{60}^3}=\dfrac{300}{1711}$。

7. 取一个边长为$2a$的正方形及其内切圆，随机地向正方形内丢了一粒豆子，求豆子落入园内的概率。

【解题过程】记“豆子落入圆内”为事件A，

则$P(A)=\dfrac{\text{圆面积}}{\text{正方形面积}}=\dfrac{\pi a^2}{4a^2}=\dfrac{\pi}{4}$

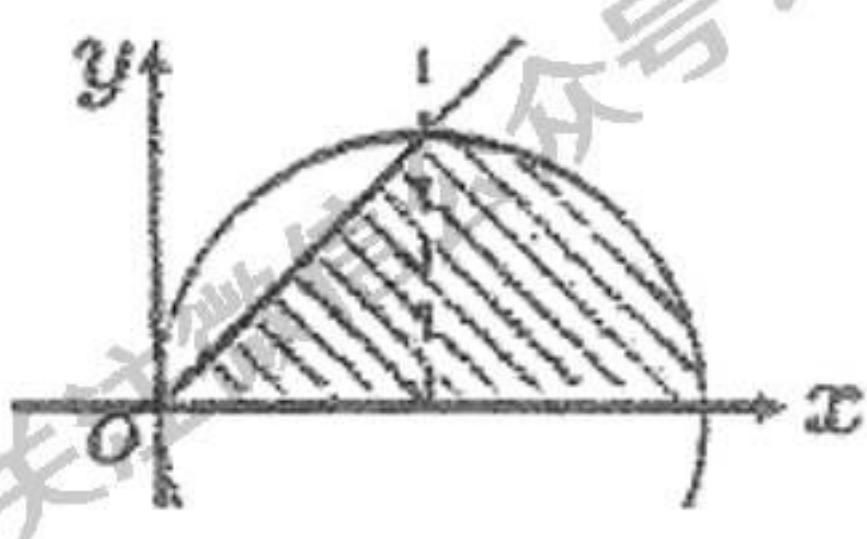
8. n个朋友随机地围绕圆桌就坐，试问其中两个人一定要坐在一起（即座位相邻）的概率是多少？

【解题过程】n个朋友随机地围绕圆桌就

坐可能的情况为$\frac{n!}{n}=(n-1)!$，将两人绑定在一起有两种情况，而$(n-1)$个人随机围绕圆桌坐的可能情况为$\frac{(n-1)!}{n-1}=(n-2)!$，则两人坐在一起的情况为$2(n-2)!$，所求概率为$p=\frac{2(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{2}{n-1}$。

9.随机地向半圆$0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a为正常数）内投一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比。试求原点和该点的连线与x轴的夹角小于$\pi/4$的概率。

【解题过程】



如图，样本空间为中心在$(a,0)$处，半径为a的上半圆，其面积为$m(\Omega)=\frac{1}{2}\pi a^2$，设$A$表示事件“原点与该点的连线与$x$轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$”，则$m(A)=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2$，所以所求概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{\pi+2}{2\pi}。$$

10.将 10 根绳的 20 个头任意两两相接，试

关注微信公众号：古德校园

求事件 $A=$ “恰结成 10 个圈”，$B=$ “恰结成 1 个圈”的概率。

【解题过程】

$$P(A)=\frac{1}{19}\cdot\frac{1}{17}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{1\times3\times5\times\cdots\times19},$$

$$P(B)=\frac{2^9\times(10-1)!}{(20-1)!}=\frac{2^9\times9!}{19!}。$$

2 条件概率

1.设 10 件产品中含有 4 件次品，今从中任取 2 件，发现其中一件是次品，则另一件也是次品的概率为_____。

【解题过程】设“所取 2 件产品中有 1 件是次品”为事件 A，“2 件都是次品”为事件 B，

则 $P(AB)=\dfrac{C_4^2}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{15}$，

$$P(A)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}+\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3},$$

在发现其中一件是次品，另一件也是次品的概率为：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{5}$。

2.甲组有 2 男生 1 女生，乙组有 1 男生 2 女生。今从甲组随机抽一人编入乙组，然后再从乙组随机抽一人编入甲组，求：

（1）甲组仍为 2 男生 1 女生的概率；

（2）甲组为 3 男生的概率。

【解题过程】（1）所求概率为

$$p=\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12};$$

（2）所求概率为 $p=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$。

3.甲、乙两个篮球运动员，投篮命中率分别为 0.7 及 0.6，每人各投了 3 次，求二人进球数相等的概率。

【解题过程】所求概率为：

$$\begin{aligned}p&=0.3^3\times0.4^3+C_3^1 0.7\times0.3^2\times C_3^1 0.6\times0.4^2\\&+C_3^2 0.7^2\times0.3\times C_3^2 0.6^2\times0.4+0.7^3\times0.6^3\\&=0.32076\end{aligned}$$

关注微信公众号：古德校园

4.设有来自三个地区的各 10 名，15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份，7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份：（1）试求先抽到的一份是女生表的概率 p；（2）已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表得概率 q。

【解题过程】设 B_1,B_2,B_3 分别表示报名表来自三个地区。

（1）设 A_1 表示先抽到的一份是女生表，则

$$P(A_1)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1|B_i)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{25}=\frac{29}{90}$$

（2）设 $\overline{A}_2$ 表示抽到的第二份是男生表，

则所求概率为：$P(A_1|\overline{A}_2)=\dfrac{P(A_1\overline{A}_2)}{P(\overline{A}_2)}$，

其中 $P(\overline{A}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(\overline{A}_2|B_i)$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{20}{25}=\frac{61}{90}$$

$$P(A_1\overline{A}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1\overline{A}_2|B_i)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_7^1C_8^1}{C_{15}^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_5^1C_{20}^1}{C_{25}^2}=\frac{2}{9}$$

故 $P(A_1|\overline{A}_2)=\dfrac{P(A_1\overline{A}_2)}{P(\overline{A}_2)}=\dfrac{2/9}{61/90}=\dfrac{20}{61}$。

5. 已知一个家庭有 3 个小孩，且其中一个为女孩，求至少有一个男孩的概率（小孩

为男为女是等可能的）。

【解题过程】设 A 表示“其中一个为女孩”，B 表示“至少有一个男孩”.

故 $P(A)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$，

$$P(AB)=C_3^1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{6}{8},$$

那么在其中一个为女孩的条件下至少有一个男孩的概率为：

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{6}{7}.$$

6.将两信息分别编码为 A 和 B 传递出来，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01.信息 A 与 B 传递的频繁程度为 $2:1$。若接收站收到的信息是 A，试问原发信息是 A 的概率是多少？

【解题过程】设 A_1，A_2 分别表示发出 A，B。B_1，B_2 分别表示收到 A,B。

$$P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(B_1)}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\times 0.98}{\frac{2}{3}\times 0.98+\frac{1}{3}\times 0.01}=0.9949$$

7.猎人在距离动物 100 米处射击这只动物，击中动物的概率为 0.6；如果第一次未击中，再进行第二次射击，由于动物的逃跑而使距离变为 150 米；如果第二次未击中，又

关注微信公众号：古德校园

进行第三次射击，此时猎人与动物的距离变为 200 米。假定猎人击中动物的概率与猎人和动物的距离成反比，求猎人最多射击三次就可以击中动物的概率。

【解题过程】因击中的概率与距离成反比，设第 i 次击中的概率为 p_i，距离为 d_i，则

$$p_i = \frac{k}{d_i}, d_1 = 100, p_1 = 0.6, \therefore k = 60.$$

$p_2 = 0.4,\ p_3 = 0.3$。

A 表示“猎人击中动物”，A_i 表示“在第 i 次击中”$(i = 1,2,3)$，则由题得

$$A = A_1 + \overline{A_1}A_2 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3, P(A_1) = 0.6,$$

$$P(A_2 / \overline{A_1}) = p_2 = 0.4,$$

$$P(\overline{A_2} / \overline{A_1}) = 1 - 0.4 = 0.6,$$

$$P(A_3 / \overline{A_1}\,\overline{A_2}) = p_3 = 0.3,$$

由乘法公式得猎人最多三次就可以击中动物的概率为：

$$P(A) = P(A_1 + \overline{A_1}A_2 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$

$$= P(A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 / \overline{A_1}) +$$

$$P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} / \overline{A_1})P(A_3 / \overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$= 0.6 + 0.4 \times 0.4 + 0.4 \times 0.6 \times 0.3 = 0.832$$ 。

3 事件的独立性

1.三人独立地破译一个密码，他们能破译的概率分别为$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，求将此密码破译处的概率。

【解题过程】设A_i表示第i人能破译，$i=1,2,3$，则密码被破译的概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$
$$=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$$
$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})。$$
$$=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=0.6$$

2.（1）将 3 粒黄豆随机地放入 4 个杯子，则杯子中盛黄豆最多为一粒的概率为（）。

A$\frac{3}{32}$　　B$\frac{3}{8}$　　C$\frac{1}{16}$　　D$\frac{1}{8}$

（2）三次独立的试验中，成功的概率相同，已知至少成功一次的概率为$\frac{19}{27}$，则每次试验成功的概率为_____。

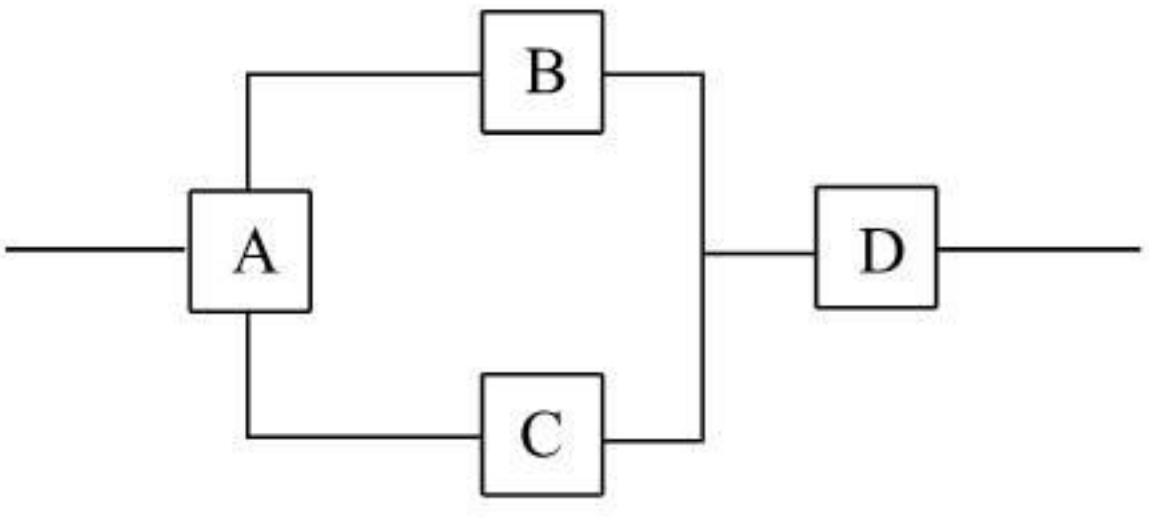
【解题过程】（1）$p=\frac{4\times3\times2}{4^3}=\frac{3}{8}$。

（2）设每次试验成功的概率为p，则至少成功一次的概率为$1-(1-p)^3=\frac{19}{27}$，解得$p=\frac{1}{3}$。

3.用 4 个整流二极管组成如图所示的示意系统。设系统各元件能正常工作是相互独立的，且每个整流二极管的可靠度（即能保持正常工作的概率）为 0.4，试求该系统的

关注微信公众号：古德校园

可靠度。



【解题过程】系统的可靠度为：

$$P\left(A\left(B\cup C\right)D\right)=P(ABD\cup ACD)$$

$$=P(ABD)+P(ACD)-P(ABCD)$$

$$=0.4^3+0.4^3-0.4^4=0.1024$$。

4.设一枚深水炸弹击沉一潜水艇的概率为$\frac{1}{3}$，击伤的概率为$\frac{1}{2}$，击不中的概率为$\frac{1}{6}$。并设击伤两次也会导致潜水艇下沉。求施放 4 枚深水炸弹能击沉潜水艇的概率。（提示：先求出击不沉的概率。）

【解题过程】设 A 为“潜艇未被击沉”，等价于“炸弹未击中潜艇或仅一枚炸弹击伤潜艇”，则 $P(A)=\left(\frac{1}{6}\right)^4+C_4^1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{13}{1296}$，

故击沉的概率为: $p=1-P(A)=\frac{1283}{1296}$。

5.某智囊团由 9 名顾问组成，每名顾问的意见正确率都是 0.7，现以简单多数意见作决策，则决策的正确率为多少？

【解题过程】设 A_i 为“i 个人意见正确”$(i=1,2,\cdots,9)$， B 表示“决策正确”。那么决策真确率为

$$P(B)=P(A_5)+P(A_6)+P(A_7)+P(A_8)+P(A_9)$$
$$=C_9^5 0.7^5\times 0.3^4+C_9^6 0.7^6\times 0.3^3$$
$$+C_9^7 0.7^7\times 0.3^2+C_9^8 0.7^8\times 0.3+0.7^9$$
$$=0.9\text{。}$$

6.一个学生想借一本书，决定到 3 个图书馆去借，每个图书馆有无此书是等可能的。如有，是否借出也是等可能的。设 3 个图书馆有无此书，是否借出是相互独立的，试求此学生借到此书的概率。

【解题过程】设 A 表示“该生能借到此书”，B_i 表示“从第 i 馆借到此书” $(i=1,2,3)$，

则 $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。

由于 3 个图书馆有无此书，是否借出是相互独立的，故

$$P(B_1B_2)=P\left(B_1B_3\right)=P(B_2B_3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

$P(B_1B_2B_3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$. 于是

$$P(A)=P(B_1+B_2+B_3)$$
$$=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)-P(B_1B_2)$$
$$-P\left(B_1B_3\right)-P\left(B_2B_3\right)+P\left(B_1B_2B_3\right)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{37}{64}\text{。}$$

或者

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3})$$
$$=1-(1-\frac{1}{4})^3=\frac{37}{64}$$

7.有 3 架飞机，一架长机，两架僚机。一同飞往某目的地进行轰炸，但要到达目的地一定要有无线电导航，而只有长机有此设备。一旦到达目的地，各机将独立进行轰

关注微信公众号：古德校园

炸，且每架飞机炸毁目标的概率均为 0.3.在达到目的地之前，必须经过高射炮阵地上空，此时任一架飞机被击落的概率为 0.2.求目标被炸毁的概率。

【解题过程】设 B_0 表示“没有飞机到达目的地”，B_1 表示“只有长机达到目的地”，B_2 表示“长机和一架僚机到达目的地”，B_3 表示“三架飞机到达目的地”，A 表示“目标被炸毁”。则 $P(B_0)=0.2^3$，

$P(B_1)=0.8\times0.2^2=0.032$，

$P(B_2)=0.8\times0.8\times0.2\times2=0.256$，

$P(B_3)=0.8\times0.8\times0.8=0.512$，

$P(A|B_0)=0$，$P(A|B_1)=0.3$，

$P(A|B_2)=0.3+0.3-0.3^2=0.51$，

$P(A|B_3)=0.3+0.3+0.3-3\times0.3^2+0.3^3$
$=0.657$

故由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$$
$$=0.2^3\times0+0.032\times0.3+0.256\times0.51$$
$$+0.512\times0.657=0.48$$

4 离散型随机变量

1.有 3 只球，4 只盒子，盒子的编号为 1,2,3,4.将球逐个独立的、随机的放入 4 只盒子中去。以 X 表示其中至少有一只球的盒子最小号码（例如 $X=3$ 表示第 1 号、第 2 号盒子是空的，第 3 号盒子至少有一只球），试求 X 的分布律与分布函数。

【解题过程】 $X=1,2,3,4$，当 $X=4$ 时即 4 个小球都在 4 号盒子中，故

$$P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64};$$

当 $X=3$ 时即至少有一个球在 3 号盒子中，其他球在 4 号盒子中，也就是小球都在 3，4 号中的概率减去小球只在 4 号盒子中的概率，故 $P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{64}=\frac{7}{64}$；

当 $X=2$ 时即至少有一只球在 2 号盒子中，其他球在 3，4 号盒子中，其概率为小球都在 2，3，4 号盒子中的概率减去球只在 3，4 号盒子中的概率，故

$$P(X=2)=\left(\frac{3}{4}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{19}{64};$$

当 $X=1$ 时 $P(X=1)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{37}{64}$。

所以分布律为 $P(X=1)=\frac{37}{64}$，

$P(X=2)=\frac{19}{64}$，$P(X=3)=\frac{7}{64}$，

$P(X=4)=\frac{1}{64}$；

关注微信公众号：古德校园

分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, x<1\\ \frac{37}{64}, 1\le x<2\\ \frac{7}{8}, 2\le x<3\\ \frac{63}{64}, 3\le x<4\\ 1, x\ge 4\end{cases}$。

2.（1）设每次试验成功的概率为p（$0<p<1$），重复进行实验直到第n次才取得r（$1\le r\le n$）次成功的概率为_____。

（a）$C_{n-1}^{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$

（b）$C_n^r p^r(1-p)^{n-r}$

（c）$C_{n-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r+1}$

（d）$p^r(1-p)^{n-r}$

（2）若随机变量X的概率函数为$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{c\cdot k!}$，$(\lambda>0;k=1,2,3,\cdots)$，则$c=$（ ）

①$e^{-\lambda}$　②e^{λ}　③$e^{-\lambda}-1$　④$e^{\lambda}-1$

【解题过程】（1）所求概率为

$p=C_{n-1}^{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$，选（a）。

（2）由泊松分布可知$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}$，又因

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{c\cdot k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{c\cdot k!}-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}e^{\lambda}-\frac{1}{c}=1$，解

得$c=e^{\lambda}-1$，选④。

3.某教科书出版了 2000 册，因装订等原因造成错误的概率为 0.001,试求在这 2000 册书中恰有 5 册错误的概率。

【解题过程】令 X 为 2000 册书中错误的册数，则 $X \sim B(2000, 0.001)$ 。利用泊松近似计算，$\lambda = np = 2000 \times 0.001 = 2$ 。

则 $P(X=5) \approx \dfrac{e^{-2} \cdot 2^5}{5!} = 0.0018$ 。

4.在区间 $[0, a]$ 上任意投掷一个质点，以 X 表示这个质点的坐标。设这个质点落在 $[0, a]$ 中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比例。试求 X 的分布函数。

【解题过程】设 $F(x)$ 为 X 的分布函数，

当 $x<0$ 时，$F(x) = P(X \le x) = 0$

当 $x>a$ 时，$F(x)=1$

当 $0 \le x \le a$ 时，$P(0 \le X \le x) = kx$（k 为常数）

由于 $P(0 \le X \le a) = 1$，

故 $ka = 1$，$k = \dfrac{1}{a}$，

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$= P(X<0) + P(0 \le X \le x) = \frac{x}{a}$$

所以 $F(x) = \begin{cases} 0, x<0 \\ \dfrac{x}{a}, 0 \le x \le a \\ 1, x>a \end{cases}$ 。

5.设某机场每天有 200 架飞机在此降落，任一飞机在某一时刻降落的概率设为 0.02，且设各飞机降落是相互独立的。试问该机

关注微信公众号：古德校园

场需配备多少条跑道，才能保证某一时刻飞机需立即降落而没有空闲跑道的概率小于 0.01（每条跑道只能允许一架飞机降落）？

【解题过程】设 X 为某一时刻需立即降落的飞机数，则 $X \sim B(200, 0.02)$，设机场需配备 N 条跑道，则有 $P(X > N) < 0.01$，

即 $\sum_{k=N+1}^{200} C_{200}^{k} 0.02^{k} (0.98)^{200-k} < 0.01$，利用泊松近似 $\lambda = np = 200 \times 0.02 = 4$，

$$P(X > N) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e^{-4} 4^{k}}{k!} < 0.01,$$

查表得 $N \geq 9$。故机场至少应配备 9 条跑道。

6.将一枚硬币连抛 5 次，假设 5 次中至少有一次国徽不出现，试求国徽出现的次数与不出现次数之比 Y 的概率分布。

【解题过程】令 X 表示 5 次中至少有一次国徽不出现的情况下国徽不出现的次数，$X = 1, 2, 3, 4, 5$。令 A_i 表示 5 次中国徽不出现 i 次，$i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$。

5 次中至少有一次国徽不出现的概率：

$p(A_0) = 1 - \frac{1}{2^5} = \frac{31}{32}$；则

$$P(Y = 4) = P(X = 1)$$

$$= P(A_1 | A_0) = \frac{P(A_1 A_0)}{P(A_0)} = \frac{5}{31};$$

$$P(Y = \frac{3}{2}) = P(X = 2)$$

$$= P(A_2 | A_0) = \frac{P(A_2 A_0)}{P(A_0)} = \frac{10}{31};$$

$$P(Y=\frac{2}{3})=P(X=3)$$

$$=P(A_3|A_0)=\frac{P(A_3A_0)}{P(A_0)}=\frac{10}{31};$$

$$P(Y=\frac{1}{4})=P(X=4)$$

$$=P(A_4|A_0)=\frac{P(A_4A_0)}{P(A_0)}=\frac{5}{31};$$

$$P(Y=0)=P(X=5)$$

$$=P(A_5|A_0)=\frac{P(A_5A_0)}{P(A_0)}=\frac{1}{31}。$$

所以Y的概率分布为：

$$Y\sim\begin{pmatrix} 4 & 3/2 & 2/3 & 1/4 & 0 \\ 5/31 & 10/31 & 10/31 & 5/31 & 1/31 \end{pmatrix}。$$

关注微信公众号：古德校园

5 连续型随机变量

1. 已知连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$ ， $x\in(-\infty,+\infty)$ ，求（1）常数 A 和 B ；（2） $p(-1<X<1)$ （3）概率密度 $f(x)$ 。

【解题过程】

（1）由于 $F(-\infty)=A-\frac{\pi}{2}B=0$ ，

$F(+\infty)=A+\frac{\pi}{2}B=1$ ，

解得 $A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{\pi}$ 。

（2） $p(-1<X<1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{2}$ 。

（3）由于 $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$ ，故概率密度函数 $f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ， $x\in(-\infty,+\infty)$ 。

2.（1）若随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{a}{1+x^2}$ （ $-\infty<x<+\infty$ ），则 $a=$ _____； $P(X>0)=$ _____； $P(X=0)=$ _____。

（2）设随机变量服 X 从指数分布，则随机变量 $Y=\max(X,2003)$ 的分布函数_____。

（a）是连续函数

（b）恰好有一个间断点

（c）是阶梯函数

（d）至少有两个间断点

【解题过程】（1）由$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2}dx=1$，解得$a=\frac{1}{\pi}$；

$P(X>0)=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{2}$；

$P\left(X=0\right)=0$。

（2）选（b）。

3.已知随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且关于未知数y的一元二次方程$y^2+4y+X=0$无实根的概率为$\frac{1}{2}$，则μ的值为多少。

【解题过程】由题知$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，故

$P(16-4X<0)=P(X>4)$

$=P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{4-\mu}{\sigma})=1-\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}$

故$\frac{4-\mu}{\sigma}=0$，$\mu=4$。

4．某种电子元件在电源电压不超过$200V$，$200V\sim240V$及超过$240V$的 3 种情况下，损坏率依次为 0.1,0.001,0.2，设电源电压$X\sim N(220,25^2)$，试求：（1）此种电子元件的损坏率；（2）此种电子元件损坏时，电源电压在$200V\sim240V$的概率。

【解题过程】

设$A_1=\{电源电压不超过200V\}$,

$A_2=\{电源电压在200\sim240V\}$,

$A_3=\{电源电压超过240V\}$,

关注微信公众号：古德校园

$B=\{$电子元件损坏$\}$。

由 $\dfrac{X-220}{25}\sim N(0,1)$ 可得

$$P(A_1)=P\{X\le 200\}$$
$$=P\left\{\frac{X-220}{25}\le\frac{200-220}{25}\right\}$$
$$=\Phi(-0.8)=1-\Phi(0.8)=0.2119$$
$$P(A_2)=P\{200\le X\le 240\}$$
$$=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.5762$$
$$P(A_3)=P\{X>240\}$$
$$=1-P(X\le 240)$$
$$=1-\Phi(\frac{240-220}{25})$$
$$=1-\Phi(0.8)=0.2119$$

（1）由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B/A_i)$$
$$=0.2119\times 0.1+0.5762\times 0.001+0.2119\times 0.2$$
$$=0.06415$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(A_2/B)$$
$$=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)}$$
$$=\frac{0.5762\times 0.001}{0.06415}=0.00898$$

5.设我国某城市男子的身高（以 cm 计）服从 $N(168,36)$ 的正态分布，试求：

（1）该市男子身高在 170cm 以上的概率。

（2）为使 99%以上的男子上公共汽车不致在车门上沿碰头，当地的公共汽车门框应设计成多少厘米的高度？

【解题过程】

（1）$P\left(X>170\right)=1-P(X\le 170)$

$$=1-P\left(\frac{X-168}{6}\le\frac{170-168}{6}\right)$$

$$=1-\Phi(\frac{1}{3})=0.488$$

（2）设门框应设计成 h 厘米，则 $P(X\le h)$

$$=P(\frac{X-168}{6}\le\frac{h-168}{6})$$

$$=\Phi\left(\frac{h-168}{6}\right)>99\%$$

查表得 $\frac{h-168}{6}\ge 2.33$，$h\ge 181.98$。

6．对某地抽样的结果表明，考生的外语成绩 X（按百分之计）近似服从正态分布，平均 72 分，96 分以上的考生占 2.38%。求考生外语成绩在 60 以上的概率。

【解题过程】设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，

由题知 $\mu=72$，

且 $P(X>96)=1-P(X\le 96)$

$$=1-\Phi(\frac{96-72}{\sigma})=0.0238,$$

则 $\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.9762,\ \frac{24}{\sigma}=1.98$，$\sigma\approx 12$。

所以 $P(X>60)=1-P(X\le 60)$

$$=1-\Phi(\frac{60-72}{12})=1-\Phi(-1)$$

$$=\Phi(1)=0.8413$$

。

长江微信公众号：古德校园

6 随机变量的函数的分布

1.（1）设 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $Y=3-2X\sim$_____

（2）若随机变量 X 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1\end{pmatrix}$，记 $Y=2X+1$，$Z=X^2-1$，则随机变量 Y 与 Z 的概率分布列分别为：_____；_____。

【解题过程】（1）$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $3-2X\sim N\left(3-2\mu,4\sigma^2\right)$。

（2）$Y=2X+1\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3 & 5\\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1\end{pmatrix}$，

$Z=X^2-1\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0.3 & 0.6 & 0.1\end{pmatrix}$。

2.（1）设 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Y=3X+1$ 的分布函数 $G(y)$ 为（）

（A）$F(\frac{1}{3}y-\frac{1}{3})$

（B）$F(3y+1)$

（C）$3F(y)+1$

（D）$\frac{1}{3}F(y)-\frac{1}{3}$

（2）设 $X\sim N(0,1)$，令 $Y=-X-2$，则 $Y\sim$（）

（A）$N(-2,-1)$

（B）$N(0,1)$

（C）$N(-2,1)$

（D）$N(2,1)$

【解题过程】（1）$G(y)=P\left(Y\le y\right)$

$=P\left(3X+1\le y\right)$

$=P\left(X\le\dfrac{y-1}{3}\right)=F\left(\dfrac{y-1}{3}\right)$

选（A）。

（2）$X\sim N(0,1)$，$Y=-X-2\sim N(-2,1)$，

选（C）。

3．设随机变量 X 具有分布律为：

X	$-\dfrac{\pi}{3}$	0	$\dfrac{\pi}{3}$
p_k	0.3	0.2	0.5

试求 $Y=\dfrac{3}{4}X$ 和 $Z=\cos X$ 的分布律及分布函数。

【解题过程】（1）Y 是离散型随机变量，

其可能取值为 $-\dfrac{\pi}{4},0,\dfrac{\pi}{4}$，

且 $P(Y=-\dfrac{\pi}{4})=P(X=-\dfrac{\pi}{3})=0.3$，

$P(Y=0)=P(X=0)=0.2$，

$P(Y=\dfrac{\pi}{4})=P(X=\dfrac{\pi}{3})=0.5$，

即 Y 的分布律为

Y	$-\dfrac{\pi}{4}$	0	$\dfrac{\pi}{4}$
p	0.3	0.2	0.5

Y 的分布函数为

关注微信公众号：古德校园

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, y<-\dfrac{\pi}{4}\\ 0.3, -\dfrac{\pi}{4}\le y<0\\ 0.5, 0\le y<\dfrac{\pi}{4}\\ 1, y\ge\dfrac{\pi}{4}\end{cases}。$$

（2）Z 是离散型随机变量，其可能取值为 $\frac{1}{2},1$，且 $P(Z=\frac{1}{2})=P(X=-\frac{\pi}{3})+P(X=\frac{\pi}{3})$

$=0.3+0.5=0.8$,

$P(Z=1)=P(X=0)=0.2$，

即 Z 的分布律为

Z	$\frac{1}{2}$	1
p	0.8	0.2

Z 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}0, z<\dfrac{1}{2}\\ 0.8, \dfrac{1}{2}\le z<1\\ 1, z\ge 1\end{cases}$。

4．设在一段时间内进入某一商店的顾客人数 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，每个顾客购买某种物品的概率为 p，并且各个顾客是否购买该种物品相互独立，求进入商店的顾客购买这种物品的人数 Y 的分布律。

【解题过程】由题知

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}, m=0,1,2,\cdots,$$

购买某种物品的人数为 Y，在进入商店的

人数 $X=m$ 的条件下，$Y\sim B(m,p)$，即

$$P(Y=k/X=m)$$
$$=C_m^k p^k(1-p)^{m-k},k=0,1,2,\cdots$$

由全概率公式有

$$P(Y=k)$$
$$=\sum_{m=k}^{\infty}P(X=m)P(Y=k/X=m)$$
$$=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}\bullet C_m^k p^k(1-p)^{m-k}$$
$$=e^{-\lambda}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\lambda^m}{k!(m-k)!}p^k(1-p)^{m-k}$$
$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{m-k}}{(m-k)!}$$
$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)}$$
$$=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!},k=0,1,2,\cdots$$

所以 Y 服从泊松分布，$Y\sim P(\lambda p)$。

5.设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$。试求：（1）$Y=e^X$ 的概率密度。（2）$Z=2X^2+1$ 的概率密度。（3）$W=|X|$ 的概率密度。

【解题过程】(1)因 X 的概率密度是

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty,$$

$Y=g(X)=e^X$ 是单调增函数，

又 $X=h(Y)=\ln Y$，反函数存在，

且 $\alpha=\min\{g(-\infty),g(\infty)\}=\min\{0,+\infty\}=0$，

$\beta=\max\{g(-\infty),g(\infty)\}=\max\{0,+\infty\}=+\infty$

所以 Y 的概率密度为

关注微信公众号：古德校园

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{y},0<y<+\infty \\ 0,\text{其他} \end{cases}$$

（2） $z<1$时 $F_Z(z)=P(Z\le z)=0$；

当 $z\ge 1$时，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)$$
$$=P(2X^2+1\le z)$$
$$=P(-\sqrt{\frac{z-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{z-1}{2}})$$
$$=F_X(\sqrt{\frac{z-1}{2}})-F_X(-\sqrt{\frac{z-1}{2}})$$

故 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0,z<1 \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\pi(z-1)}}e^{-\frac{z-1}{4}},z\ge 1 \end{cases}$$

（3）因 W 的分布函数为

$$F_W(w)=P(W\le w)=P(\left|X\right|\le w),$$

当 $w<0$时， $F_W(w)=0$；

当 $w\ge 0$时，

$$F_W(w)\ =P(\left|X\right|\le w)$$
$$=P(-w\le X\le w)$$
$$=\int_{-w}^{w}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx。$$

所以 W 的概率密度为：当 $w<0$时，

$$f_W(w)=[F_W(w)]'=0'=0；$$

当 $w\ge 0$时，

$$f_W(w)=[F_W(w)]'$$
$$=\left(\int_{-w}^{w}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{w^2}{2}}$$

6. 设随机变量 X 的概率密度为

$f(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$，试求 $Y=X^2$ 的概率密度。

【解题过程】当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$$
$$=P(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y})$$
$$=\int_0^{\sqrt{y}} 2xe^{-x^2}dx=1-e^{-y}$$

故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}e^{-y}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases}。$$

关注微信公众号：古德校园

7 多维随机变量

1.设连续型二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}C(1-x)y,0\le x\le 1,0\le y\le x\\0,others\end{cases}$$

试确定常数C，并求(X,Y)的边缘概率密度及概率$P\left\{\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2}\right\}$。

【解题过程】（1）由规范性可得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1,$$

$$C\int_0^1 dx\int_0^x(1-x)ydy=1,\quad C=24。$$

（2）当$0\le y\le 1$时，有

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\int_y^1 24(1-x)ydx$$

$$=12y^3-24y^2+12y$$

所以Y的边缘概率密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}12y^3-24y^2+12y,0\le y\le 1\\0,others\end{cases}。$$

当$0\le x\le 1$时，有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\int_0^x 24(1-x)ydy$$

$$=12x^2(1-x)$$

所以X的边缘概率密度为:

$$f_X(x)=\begin{cases}12x^2(1-x),0\le x\le 1\\0,others\end{cases}。$$

（3）$P\left\{\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2}\right\}$。

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dx\int_0^x 24(1-x)ydy=\frac{67}{256}$$

2.（1）若二维随机变量(X,Y)的联合概率分布为

X \ Y	−1	0	1
−1	0.08	a	0.12
1	0.12	b	0.18

且X与Y相互独立，则$a=$_____，$b=$_____。

（2）设区域$D:|x|\le 1,|y|\le 1$，二维随机变量(X,Y)在D上服从均匀分布，则它的联合密度函数$f(x,y)=$_____；$P\left(|X|+|Y|\le 1\right)=$_____。

【解题过程】（1）由题可知$0.2(0.2+a)=0.08$，$0.2(0.3+b)=0.12$，解得$a=0.2,b=0.3$。

（2）$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4},|x|\le 1,|y|\le 1\\0,others\end{cases}$；

$P\left(|X|+|Y|\le 1\right)=\frac{1}{2}$。

3. 设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-x-2y},x\ge 0,y\ge 0\\0,\text{其他}\end{cases}$，试求：（1）常数$A$；

（2）Y的边缘概率密度；

（3）$P(X<Y)$。

【解题过程】（1）由规范性可得：

关注微信公众号：古德校园

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1,$$

$$A\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx\int_{0}^{+\infty} e^{-2y}dy = 1,$$

$$(-Ae^{-x})\Big|_{0}^{+\infty}(-\frac{1}{2}e^{-2y})\Big|_{0}^{+\infty} = 1, A = 2。$$

（2）当 $y \geq 0$ 时，有

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x-2y}dx = 2e^{-2y}$$

当 $y < 0$ 时，有 $f_Y(y) = 0$。所以 Y 的边缘概率密度为: $f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, y \geq 0 \\ 0, y < 0 \end{cases}$。

（3）$P(X < Y)$

$$= \int_{0}^{+\infty} dx\int_{x}^{+\infty} 2e^{-x-2y}dy$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cdot(-e^{-2y})\Big|_{x}^{+\infty} dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx = \frac{1}{3}$$

4. 某班车起点站上车人数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $p(0 < p < 1)$。且每位乘客中途下车与否相互独立。计中途下车的人数为 Y。（1）求在发车时车上有 n 个乘客的条件下，中途有 m 个人下车的概率；（2）求 (X,Y) 的联合概率分布。

【解题过程】(1) 在发车时车上有 n 个乘客的条件下，中途有 m 个人下车的概率为：

$$P\{Y = m / X = n\}$$

$$= C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

$$0 \leq m \leq n, n = 0,1,2,\cdots$$

（2）(X,Y) 的联合概率分布为：

$$P\{X=n,Y=m\}$$
$$=P\{Y=m/X=n\}\bullet P\{X=n\}$$
$$=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\bullet\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},$$
$$0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots$$

5. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N\left(0,3,2,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$，试写出其边缘概率密度函数。

【解题过程】因为二维正态分布的边缘分布仍然是正态分布，所以 $X\sim N(0,2)$，$Y\sim N(3,\frac{1}{3})$。

即 $f_X(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}},-\infty<x<+\infty$，

$$f_Y(y)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{3(y-3)^2}{2}},-\infty<y<+\infty。$$

关注微信公众号：古德校园

8 条件分布与独立性

1.设离散型随机变量 X 和 Y 的联合分布律为：

X \ Y	1	2	3
1	0.2	0	0.2
2	0.2	0.2	0.2

试求：（1）当 $Y=1$ 时，X 的条件分布律；

（2）当 $X=2$ 条件时，Y 的条件分布律；

(3) $P(Y=3/X=1)$。

【解题过程】（1）当 $Y=1$ 时，X 的条件分布律为：

$$P\{X=1/Y=1\}$$
$$=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}$$
$$=\frac{0.2}{0.2+0.2}=0.5$$

$$P\{X=2/Y=1\}$$
$$=\frac{P\{X=2,Y=1\}}{P\{Y=1\}}$$
$$=\frac{0.2}{0.2+0.2}=0.5$$

（2）当 $X=2$ 条件时，Y 的条件分布律为：

$$P\{Y=1/X=2\}$$
$$=\frac{P\{X=2,Y=1\}}{P\{X=2\}}$$
$$=\frac{0.2}{0.2+0.2+0.2}=\frac{1}{3}$$

$$P\{Y=2/X=2\}$$

$$=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{X=2\}}$$

$$=\frac{0.2}{0.2+0.2+0.2}=\frac{1}{3}$$

$$P\{Y=3/X=2\}$$

$$=\frac{P\{X=2,Y=3\}}{P\{X=2\}}$$

$$=\frac{0.2}{0.2+0.2+0.2}=\frac{1}{3}$$

(3) $P\{Y=3/X=1\}$

$$=\frac{P\{X=1,Y=3\}}{P\{X=2\}}$$

$$=\frac{0.2}{0.2+0.2}=0.5$$

2.设离散型随机变量 X 和 Y 的联合分布律为：

X \ Y	0	1
0	0.4	b
1	a	0.1

若随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，试求 a 、 b 。

【解题过程】由题可得：

$P\{X=0\}=0.4+b$，

$P\{X+Y=1\}=b+a$，

又随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，故

关注微信公众号：古德校园

$$P\{X=0, X+Y=1\}$$
$$=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$$

即$\begin{cases} b=(0.4+b)(b+a) \\ a+b+0.4+0.1=1 \end{cases}$,

解得$a=0.1, b=0.4$。

3.设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} 1, |y|<x, 0<x<1 \\ 0, others \end{cases}$试求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$及$P\left\{Y>\frac{1}{2}\middle|X>\frac{1}{2}\right\}$。

【解题过程】 Y的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases} \int_y^1 1dx+\int_{-y}^1 1dx=2, -1<y<1 \\ 0, 其他 \end{cases},$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \frac{1}{2}, |y|<x, 0<x<1 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

X的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases} \int_{-x}^{x} 1dy=2x, 0<x<1 \\ 0, 其他 \end{cases},$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2x}, |y|<x, 0<x<1 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

$$P\left\{Y>\frac{1}{2}\middle|X>\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{P\left\{X>\frac{1}{2},Y>\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}}$$

$$=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{2}}^{x}1dy}{\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{-x}^{x}1dy}=\frac{1}{6}$$

4.若二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}kx,0\le x\le 1,|y|\le x\\0,others\end{cases}$

（1）求k值；

（2）求两个边缘概率密度 $f_X(x)$ 及 $f_Y(y)$；

（3）讨论随机变量 X 与 Y 的相互独立性；

（4）求概率 $P(X\le 0.5)$ 及 $P(X+Y\ge 1)$。

【解题过程】

（1）由 $\int_0^1 dy\int_y^1 kxdx+\int_{-1}^0 dy\int_{-y}^1 kxdx=1$

解得 $k=\frac{3}{2}$。

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_y^1\frac{3}{2}xdx+\int_{-y}^1\frac{3}{2}xdx\\=\frac{3}{2}(1-y^2),-1\le y\le 1\\0,others\end{cases}$$

关注微信公众号：古德校园

（3）因 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不相互独立。

（4）$P(X\leq 0.5)$

$$=\int_0^{0.5}dy\int_y^{0.5}\frac{3}{2}xdx+\int_{-0.5}^{0}dy\int_{-y}^{0.5}\frac{3}{2}xdx$$

$$=\frac{1}{8}$$

$$P(X+Y\geq 1)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{1-x}^{x}\frac{3}{2}xdy=\frac{5}{16}。$$

5.设二维连续型随机变量 (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度及在 $Y=y(0<y<1)$ 条件下的条件概率密度函数分别为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}5y^4,0<y<1\\0,其他\end{cases}$$

$$f_{X/Y}(x/y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{y^3},0<x<y<1\\0,其他\end{cases}$$ 试求：

(1) $f_{Y|X}(y|x)$；

(2) $P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}$。

【解题过程】

（1）因为 $f_{X/Y}(x/y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$，

故 $f(x,y)=f_{X/Y}(x/y)\cdot f_Y(y)$

$$=\begin{cases}15x^2y,0<x<y<1\\0,其他\end{cases},$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_x^1 15x^2ydy=\dfrac{15}{2}x^2(1-x^2),0<x<1\\0,others\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^2},0<x<y<1\\0,others\end{cases}$$

（2） $P(X>0.5)=\int_0^{0.5}dx\int_x^1 15x^2ydy=\frac{17}{64}$ 。

6.设 X 与 Y 是相互独立的随机变量，$X\sim U(0,1)$，$Y\sim E(2)$。写出二维随机变量(X,Y)的联合密度函数 $f(x,y)$，并求t的二次方程 $t^2+2Xt+Y^2=0$ 有实根的概率。

【解题过程】

（1）由题知：$f_X(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\0,其他\end{cases}$，

$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y},y>0\\0,其他\end{cases}$，故

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y},0<x<1,y>0\\0,其他\end{cases}$$

（2）要使二次方程 $t^2+2Xt+Y^2=0$ 有实根，则 $4X^2-4Y^2\geq 0$, 即

$(X+Y)(X-Y)\geq 0$.则

$P\{(X+Y)(X-Y)\geq 0\}$

$=P\{X+Y\geq 0,\ X-Y\geq 0\}$

$+P\{X+Y\leq 0,X-Y\leq 0\}$

$=\int_0^1 dx\int_0^x 2e^{-2y}dy+0=\frac{1}{2}(e^{-2}+1)$

7.在打靶训练中，设弹着点 $A(X,Y)$ 的坐标 X 和 Y 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，规定点 A 落在区域 $D_1=\{(x,y)/x^2+y^2>4\}$ 内得 0 分，点 A 落在区域

关注微信公众号：古德校园

$D_2=\left\{(x,y)/1<x^2+y^2\le 4\right\}$ 内得 1 分，

点 A 落在区域 $D_3=\left\{(x,y)/x^2+y^2\le 1\right\}$ 得

2 分。以 Z 记打靶的得分。

（1）写出 X,Y 的联合概率密度函数；

（2）求随机变量 Z 的分布律。

【解题过程】（1）由题知：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},$$

X 和 Y 相互独立，所以

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}。$$

（2）随机变量 Z 的分布律为：

$$P\left\{Z=2\right\}=P\left\{(X,Y)\in D_3\right\}$$

$$=\iint\limits_{D_3}f(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho d\rho$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d(-\frac{1}{2}\rho^2)$$

$$=1-e^{-\frac{1}{2}}$$

同理得：$P\left\{Z=1\right\}=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2}$；

$$P\left\{Z=0\right\}=1-P\left\{Z=2\right\}-P\left\{Z=1\right\}=e^{-2}$$

8.若二维随机变量 (ξ,η) 的联合概率密度函

数为 $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(2x+y)},x>0,y>0\\0,others\end{cases}$ 试求：

（1）常数 A；

（2）$P\{\xi<2,\eta<1\}$；

（3）ξ的边际分布；

（4）$P\{\xi+\eta<2\}$；

（5）$P\{\xi<2|\eta<1\}$；

（6）ξ与η是否独立。

【解题过程】（1）由规范性可得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1,$$

$A\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}e^{-(2x+y)}dy=1$，解得$A=2$。

（2）因(ξ,η)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)},x>0,y>0\\0,others\end{cases},$$

故$P\{\xi<2,\eta<1\}$

$$=\int_0^2 2e^{-2x}dx\int_0^1 e^{-y}dy=(e^{-1}-1)(e^{-4}-1)。$$

（3）ξ的边缘分布为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\infty}2e^{-(2x+y)}dy=2e^{-2x},x>0\\0,others\end{cases}$$

η的边缘分布为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\infty}2e^{-(2x+y)}dx=e^{-y},y>0\\0,others\end{cases}。$$

（4）$P\{\xi+\eta<2\}$

$$=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}2e^{-(2x+y)}dy$$

$$=e^{-4}-2e^{-2}+1$$

关注微信公众号：古德校园

（5） $P\left\{\xi<2\middle|\eta<1\right\}$

$$=\frac{P(\xi<2,\eta<1)}{P(\eta<1)}$$

$$=\frac{(e^{-1}-1)(e^{-4}-1)}{\int_0^{\infty}dx\int_0^1 2e^{-(2x+y)}dy}$$

$$=\frac{1-e^{-4}}{2}$$

（6）因 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 ξ 与 η 相互独立。

9 多维随机变量函数的分布

1.（1）二维随机变量(X,Y)的联合概率分布为

X \ Y	-1	0	1
1	0.1	0.2	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0.2	0.2	0

则随机变量$X+Y$的概率分布列为_____。

（2）若随机变量X的概率函数为$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$，随机变量$Y\sim B(2,0.5)$，且$X$与$Y$相互独立，则随机变量$Y-X$与$XY$的概率函数分别为：_____；_____。

【解题过程】

（1）$X+Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0\end{pmatrix}$。

（2）$Y-X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{3}{20} & \frac{3}{10} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}$，

$XY\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{3}{10} & \frac{3}{20}\end{pmatrix}$。

2. 设随机变量X与Y相互独立，$X\sim U(0,1)$，$Y\sim U(0,2)$，试求

（1）$Z=X+Y$的概率密度函数；

（2）$P(X>Y)$。

【解题过程】（1）因$X\sim U(0,1)$，$Y\sim U(0,2)$，故

关注微信公众号：古德校园

$$f_X(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\0,\text{其他}\end{cases},$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2},0<y<2\\0,\text{其他}\end{cases}$$

$Z=X+Y$， $Z\in(0,3)$，且 X 与 Y 相互独立，则

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2},0<x<1,0<y<2\\0,\text{其他}\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}$$
$$=P\{X+Y\le z\}$$
$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

①当 $z<0$ 时 $F_Z(z)=0$；

②当 $0\le z<1$ 时

$$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{4}z^2;$$

③当 $1\le z<2$ 时

$$F_Z(z)=\int_0^1 dx\int_0^{z-x}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}z-\frac{1}{4};$$

④当 $2\le z<3$ 时

$$F_Z(z)=1-\int_{z-2}^1 dx\int_{z-x}^2\frac{1}{2}dy=1-\frac{1}{4}(z-3)^2;$$

⑤当 $z\ge 3$ 时 $F_Z(z)=1$。

所以 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, z<0\\ \frac{1}{4}z^2, 0\le z<1\\ \frac{1}{2}z-\frac{1}{4}, 1\le z<2\\ 1-\frac{1}{4}(z-3)^2, 2\le z<3\\ 1, z\ge 3\end{cases},$$

Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, z<0\text{或}z\ge 3\\ \frac{1}{2}z, 0\le z<1\\ \frac{1}{2}, 1\le z<2\\ -\frac{1}{2}(z-3), 2\le z<3\end{cases}。$$

（2）$P(X>Y)=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{2}dy=\frac{1}{4}$。

3.设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率密度函数分别为：$f_X(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$，

$f_Y(y)=\begin{cases}1, 0<y<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$。试求：

（1）$Z=X+Y$；

（2）$M=\max(X,Y)$；

（3）$N=\min(X,Y)$ 的概率密度函数。

【解题过程】（1）因 X 与 Y 相互独立，

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0, \text{其他}\end{cases},$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, 0<y<1\\ 0, \text{其他}\end{cases},$$

关注微信公众号：古德校园

故 $f(x,y)=\begin{cases}2x,0<x<1,0<y<1\\0,\ 其他\end{cases}$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

①当 $z<0$ 时 $F_Z(z)=0$；

②当 $0\le z<1$ 时

$$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}2xdy=\frac{1}{3}z^3;$$

③当 $1\le z<2$ 时

$$F_Z(z)=1-\int_{z-1}^1 dx\int_{z-x}^1 2xdy=-\frac{1}{3}z^3+z^2-\frac{1}{3}$$

④当 $z\ge 2$ 时 $F_Z(z)=1$。

所以 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0,z<0\\\frac{1}{3}z^3,0\le z<1\\-\frac{1}{3}z^3+z^2-\frac{1}{3},1\le z<2\\1,z\ge 2\end{cases}$$

Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}0,z<0或z\ge 2\\z^2,0\le z<1\\2z-z^2,1\le z<2\end{cases}$$

（2） X 与 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}x^2,0<x<1\\0,其他\end{cases},$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}y,0<y<1\\0,其他\end{cases},$$

那么 $F_{\max}(z)=\begin{cases} z^3, 0<z<1 \\ 0, 其他 \end{cases}$，

$$f_{\max}(z)=\begin{cases} 3z^2, 0<z<1 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

（3）$F_{\min}(z)=\begin{cases} z+z^2-z^3, 0<z<1 \\ 0, 其他 \end{cases}$，

$$f_{\min}(z)=\begin{cases} 1+2z-3z^2, 0<z<1 \\ 0, 其他 \end{cases}$$。

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim B(1,0.3)$，$Y \sim U(-1,1)$，记 $Z=X+Y$。试求 Z 的概率密度函数（提示：先利用全概率公式求 Z 的分布函数）。

【解题过程】由题得：

$$P(Z \le z)=P(X+Y \le z)$$
$$=P(X+Y \le z / X=0)P(X=0)$$
$$+P(X+Y \le z / X=1)P(X=1)$$
$$=P(Y \le z)\cdot 0.7+P(Y \le z-1)\cdot 0.3$$

（1）当 $z<-1$ 时 $P(Z \le z)=0$；

（2）当 $-1 \le z<0$ 时

$$P(Z \le z)=0.7\int_{-1}^{z}\frac{1}{2}dy+0=0.35(z+1) \quad ;$$

（3）当 $0 \le z<1$ 时

$$P(Z \le z)$$
$$=0.7\int_{-1}^{z}\frac{1}{2}dy+0.3\int_{-1}^{z-1}\frac{1}{2}dy$$
$$=0.5z+0.35$$

（4）当 $1 \le z<2$ 时

$$P(Z \le z)=0.7\cdot 1+0.3\int_{-1}^{z-1}\frac{1}{2}dy=0.15z+0.7$$

（5）当 $z \ge 2$ 时

关注微信公众号：古德校园

$P(Z \le z) = 0.7 \cdot 1 + 0.3 \cdot 1 = 1$。

所以 Z 的分布函数为：

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, z < -1 \\ 0.35(z+1), -1 \le z < 0 \\ 0.5z + 0.35, 0 \le z < 1 \\ 0.15z + 0.7, 1 \le z < 2 \\ 1, z \ge 2 \end{cases}$$

Z 的概率密度函数为：

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, z < -1 \text{或} z \ge 2 \\ 0.35, -1 \le z < 0 \\ 0.5, 0 \le z < 1 \\ 0.15, 1 \le z < 2 \end{cases}$$ 。

5. 设随机变量 X 与 Y 的分布律分别为

X	-1 0 1	0 1
	1/4 1/2 1/4	1/2 1/2

已知 $P(XY=0)=1$，试求 $Z = X + Y$、$M = \max(X, Y)$ 的分布律。

【解题过程】因为 $P(XY=0)=1$，所以 $P(XY \ne 0) = 0$，所以可以得 X 与 Y 的联合分布律为

X \ Y	0	1	
-1	1/4	0	1/4
0	0	1/2	1/2
1	1/4	0	1/4
	1/2	1/2	

(1) Z 的取值为 $-1, 0, 1, 2$。那么 $Z = X + Y$ 的分布律为

$P(Z=-1)=P(X=-1,Y=0)=\frac{1}{4}$,

$P(Z=0)$

$=P(X=-1,Y=1)+P(X=0,Y=0)$,

$=0$

$P(Z=1)=P(X=0,Y=1)$

$+P(X=1,Y=0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

$P(Z=2)=P(X=1,Y=1)=0$

(2)令 $Z=M=\max(X,Y)$,

Z 的取值为 $-1,0,1$,

那么 $M=\max(X,Y)$ 的分布律为

$P(Z=-1)=0$,

$P(Z=0)=P(X=-1,Y=0)$

$+P(X=0,Y=0)=\frac{1}{4}$,

$P(Z=1)=P(X=-1,Y=1)$

$+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)$。

$+P(X=1,Y=0)=\frac{3}{4}$

6.设 X 与 Y 是随机变量，且

$P(X\geq 0,Y\geq 0)=\frac{3}{7}$,

$P(X\geq 0)=P(Y\geq 0)=\frac{4}{7}$,

试求 $P\{\max(X,Y)>0\}$。

【解题过程】

$P\{\max(X,Y)>0\}$

$=P\{X\geq 0\text{或}Y\geq 0\}$

$=P\{X\geq 0\}+P\{Y\geq 0\}-P\{X\geq 0,\ \ Y\geq 0\}$

关注微信公众号：古德校园

$=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$。

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N\left(0,\sigma^2\right)(\sigma>0)$，求随机变量 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度。

【解题过程】因为 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N\left(0,\sigma^2\right)(\sigma>0)$，故

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

（1）当 $z<0$ 时 $F_Z(z)=0$；

（2）当 $z\geq 0$ 时 $F_Z(z)=P\left\{\sqrt{x^2+y^2}\leq z\right\}$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leq z^2}f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}dt\int_0^z\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr$$

$=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$。

所以 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度为：

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}},z\geq 0\\ 0,z<0\end{cases}。$$

10 数学期望与方差

1. 若 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，（$|x|<+\infty$），则 $D(X)=$_____。

【解题过程】 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$，

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=2$，

$DX=EX^2-(EX)^2=2$。

2. 若随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0,x\le 0\\ \frac{x}{4},0<x\le 4\\ 1,x>4\end{cases}$$

，则数学期望 $E(X)=$_____；方差 $D(X)=$_____。

【解题过程】 概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4},0<x\le 4\\ 0,others\end{cases},$$

$EX=\int_0^4 x\cdot\frac{1}{4}dx=2$，

$EX^2=\int_0^4 x^2\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{16}{3}$，

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}$。

3. 若随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim U(-1,1)$，$Y\sim e(4)$，则 $E(X+Y)=$_____；$E(XY)=$_____；$D(X+Y)=$_____。

【解题过程】 由题知 $EX=0$，$DX=\frac{1}{3}$，

关注微信公众号：古德校园

$EY=\frac{1}{4}$， $DY=\frac{1}{16}$。

故 $E(X+Y)=EX+EY=\frac{1}{4}$，

$E(XY)=EXEY=0$，

$D(X+Y)=DX+DY=\frac{1}{3}+\frac{1}{16}=\frac{19}{48}$。

4.若相互独立的随机变量 X 与 Y 满足 $E(X)=E(Y)=1$ ， $D(X)=2$ ， $D(Y)=4$，则 $E\left[\left(X+Y\right)^2\right]=$_____。

【解题过程】

$$E\left[\left(X+Y\right)^2\right]$$
$$=D\left(X+Y\right)+\left[E(X+Y)\right]^2$$
$$=DX+DY+\left(EX+EY\right)^2$$
$$=2+4+\left(1+1\right)^2=10$$ 。

5.把 3 个球放入两个盒子中，假设每个球放入每个盒子的可能性相同，试求放入第一个盒子中的球的个数的数学期望和方差。

【解题过程】设放入第一个盒子中的球的个数为 X， X 可能的取值为 $0,1,2,3$。

$P(X=0)=\frac{1}{8}$， $P(X=1)=\frac{3}{8}$，

$P(X=2)=\frac{3}{8}$， $P(X=3)=\frac{1}{8}$，

故 $EX=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$，

$EX^2=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=3$ ，

$DX=EX^2-(EX)^2=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$。

6.若随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$ 则下列式子中正确的是（）。

① $E(2X-1)=2np$

② $E(2X+1)=4np+1$

③ $D(2X-1)=4np(1-p)-1$

④ $D(2X-1)=4np(1-p)$

【解题过程】 由题知 $EX=np$，$DX=np(1-p)$。

则 $E(2X-1)=2EX-1=2np-1$，

$E(2X+1)=2EX+1=2np+1$，

$D(2X-1)=4DX=4np(1-p)$，选④。

7.若随机变量 X 服从区间 $(0,4)$ 上的均匀分布，则 $E(e^X)=$（）。

① e^2　　② e^4

③ $4(e^4-1)$　　④ $\frac{1}{4}(e^4-1)$

【解题过程】 由题知 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4},0<x<4\\0,others\end{cases}$，

故 $E(e^X)=\int_0^4 e^x\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}(e^4-1)$。

选④。

8. 设随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x,x\le 0\\\frac{1}{2}e^{-x},x>0\end{cases}$，试求 $|X|$ 的数学期望及方差。

【解题过程】

关注微信公众号：古德校园

$$E(|X|)=\int_{-\infty}^{0}(-x)\cdot\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-x}dx=1$$

$$E\left(|X|^2\right)=\int_{-\infty}^{0}(-x)^2\cdot\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-x}dx$$

$$=2$$

$$D(|X|)=E\left(|X|^2\right)-\left(E(|X|)\right)^2=2-1=1$$ 。

9.已知 X 为随机变量，且有 $E\left(\frac{X}{2}-1\right)=1$，

$D\left(-\frac{X}{2}+1\right)=2$，试求 X^2 的数学期望。

【解题过程】由期望的性质可得：

$E\left(\frac{X}{2}-1\right)=\frac{1}{2}EX-1=1$， 即 $EX=4$ 。

由方差的性质可得：

$D\left(-\frac{X}{2}+1\right)=\frac{1}{4}DX=2$,即 $DX=8$。

又 $D(X)=E(X^2)-(EX)^2$，

故 $E(X^2)=D(X)+(EX)^2=8+4^2=24$ 。

10.10 个人随机的进入 15 个房间，每个房间容纳的人数不限，考虑每个人进入每个房间是等可能的，且各人是否进入房间相互独立。设 X 表示有人的房间数，求 EX 。（提示：引入 $(0-1)$ 变量刻画第 i 个房间是否有人）。

【解题过程】设 $X_i=\begin{cases}1,\text{第i房间有人}\\0,\text{第i房间没有人}\end{cases}$，

则 $p\left(X_i=0\right)=\left(\frac{14}{15}\right)^{10}$，

$p\left(X_i=1\right)=1-\left(\frac{14}{15}\right)^{10}$，

$X = X_1 + \cdots + X_{15}$ 且 X_i 同分布，

$$E(X_i) = 1 - \left(\frac{14}{15}\right)^{10},$$

则由期望的性质可得：

$$EX = 15E(X_i) = 15\left[1 - \left(\frac{14}{15}\right)^{10}\right]$$

$= 7.4758$。

11.设连续型随机变量 X 的概率密度为

$f_X(x) = \begin{cases} ax+b, 0<x<1 \\ 0, 其他 \end{cases}$，又知 X 的数学期望 $E(X) = \frac{1}{3}$，试求：

（1）常数 a,b；

（2）$E(3X+8), E(X^2+1)$。

【解题过程】（1）由规范性得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 (ax+b)dx = 1,$$

即 $\frac{1}{2}a + b = 1$。又 $E(X) = \frac{1}{3}$，

故 $EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x(ax+b)dx = \frac{1}{3}$，

即 $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{3}$。解得 $a = -2, b = 2$。

12.在国际市场上，每年对我国某种产品出口的需求量 X（单位：t）是一个随机变量，且 $X \sim U(2000, 4000)$。若每出口 $1(t)$ 可得外汇 3 万元，如果销售不出去，每吨需要保养费 1 万元。问应组织多少货源，才能使得平均收益最大？

【解题过程】记 Y 为要出口的此种商品量，

关注微信公众号：古德校园

收益为 $\eta = H(X) = \begin{cases} 3y, x \geq y \\ 3x-(y-x), x < y \end{cases}$。

而 $E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx = \frac{1}{2000}\int_{2000}^{4000} h(x)dx$

$= \frac{1}{2000}\int_{2000}^{y}(4x-y)dx + \frac{1}{2000}\int_{y}^{4000} 3ydx$

$= \frac{1}{1000}\left[-y^2 + 7000y - 4\times 10^6\right]$,

对上式求导，并令 $(E\eta)' = 0$，可得当 $y = 3500$ 时达到最大值，因此组织 3500 吨此商品，才能使平均收益最大。

11 多维随机变量的数字特征

1.（1）若随机变量 X 与 Y 满足

$D(X)=D(Y)=3$，

相关系数 $\rho(X,Y)=-\dfrac{1}{2}$，

则 $D(X-Y)=$_____；

$D(3X+2Y)=$_____。

（2）若随机变量 X 与 Y 满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$，则协方差 $Cov(X,Y)=$_____。

【解题过程】

（1）$\rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

$=\dfrac{Cov(X,Y)}{3}=-\dfrac{1}{2}, Cov(X,Y)=-\dfrac{3}{2}$。

$D(X-Y)$

$=DX+DY-2Cov(X,Y)$，

$=3+3-2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=9$

$D(3X+2Y)$

$=9DX+4DY+12Cov(X,Y)$

$=9\times3+4\times3+12\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=21$

（2）由题可得

$D(X+Y)$

$=DX+DY+2Cov(X,Y)$

$=D(X-Y)$

$=DX+DY-2Cov(X,Y)$

故 $Cov(X,Y)=0$。

关注微信公众号：古德校园

2.（1）若随机变量 X 与 Y 满足 $Y=1-\frac{X}{2}$，则相关系数 $R(X,Y)=$（）

①1　②-1　③0.5　④-0.5

(2) 随机变量 X 与 Y 的协方差 $Cov(X,Y)=0$ 是 X 与 Y 相互独立的（）条件。

①充要　②充分

③必要　④既非充分又非必要

【解题过程】

（1）$R(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

$$=\frac{E(XY)-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{D\left(1-\frac{X}{2}\right)}}$$

$$=\frac{E(X-\frac{X^2}{2})-EXE(1-\frac{X}{2})}{\frac{1}{2}\sqrt{DX}\sqrt{DX}}$$

$$=\frac{EX-\frac{1}{2}EX^2-EX(1-\frac{1}{2}EX)}{\frac{1}{2}DX}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}DX}{\frac{1}{2}DX}=-1$$

选②。

（2）选③。

3.一箱零件共有 100 件，其中一、二、三等品分别为 80 件，10 件，10 件，现从中随机抽取一件，记

$$X_i=\begin{cases}1,\text{抽到}i\text{等品}\\0,\ \text{其他}\end{cases},\ i=1,2,3,$$

试求：（1）X_1与X_2的联合分布律；

（2）$\mathrm{cov}(X_1,X_2)$。

【解题过程】(1)设事件A_i = “抽到i等品”，$i=1,2,3$。由题意知A_1,A_2,A_3两两互不相容，且$P(A_1)=0.8$，$P(A_2)=P(A_3)=0.1$。易得X_1与X_2的联合分布律为：

$P(X_1=0,X_2=0)=P(A_3)=0.1$，

$P(X_1=0,X_2=1)=P(A_2)=0.1$，

$P(X_1=1,X_2=0)=P(A_1)=0.8$。

（2）由于X_1,X_2均服从$(0-1)$分布，所以有$EX_1=0.8,EX_2=0.1$，

$$E\left(X_1X_2\right)=0\times0\times0.1+0\times1\times0.1+1\times0\times0.8+1\times1\times0=0$$。

$$\mathrm{cov}\left(X_1,X_2\right)=E(X_1X_2)-E\left(X_1\right)E\left(X_2\right)=0-0.8\times0.1=-0.08$$

4.设X，Y为随机变量，已知$D(X)=25$，$D(Y)=36$，$\rho_{XY}=0.4$，试求$Cov(X,Y)$，$D(X+Y)$。

【解题过程】由题可知

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{Cov(X,Y)}{30}=0.4,$$

故$Cov(X,Y)=12$；

$$D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)=25+36+2\times12=85$$

关注微信公众号：巨德校园

5.已知随机变量(X,Y)服从二维正态分布，其边缘分布分别是一维正态分布$N(1,3^2)$，$N(0,4^2)$，且X与Y的相关系数为$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$。试求：

（1）Z的数学期望和方差；

（2）X与Z的相关系数ρ_{XZ}；

（3）X与Z是否相互独立，为什么？

【解题过程】

（1）$EZ=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)$

$=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{2}\times0=\frac{1}{3}$，

由 $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{Cov(X,Y)}{12}=-\frac{1}{2}$，

可得$Cov(X,Y)=-6$，

$DZ=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)$

$=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}Cov(X,Y)$。

$=\frac{1}{9}\times9+\frac{1}{4}\times16+\frac{1}{3}\times(-6)=3$

（2）$\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}$

$=\frac{Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}$

$=\frac{\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}$

$=\frac{\frac{1}{3}\times9+\frac{1}{2}\times(-6)}{3\times\sqrt{3}}=0$

(3)由 $Cov(X,Y)=EXY-EXEY=-6$ 可得

$EXY=-6$。

$$EXZ=E\left(\frac{X^2}{3}+\frac{XY}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}E(X^2)+\frac{1}{2}E\left(XY\right)$$

$$=\frac{9+1}{3}+\frac{1}{2}\times\left(-6\right)=\frac{1}{3}$$

$EXEZ=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，故 $E(XZ)=EXEZ$，

即 X 与 Z 相互独立。

6.设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且 X_1 服从区间 $(0,5)$ 上均匀分布，X_2 服从正态分布 $N\left(0,4\right)$，X_3 服从参数为 2 的泊松分布，试求 $Y=X_1-2X_2+3X_3$ 的方差。

【解题过程】由题知：$DX_1=\frac{25}{12}$，$DX_2=4,DX_3=2$,由方差的性质可得：由于随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，

$$DY=D(X_1-2X_2+3X_3)$$

$$=D(X_1)+4D(X_2)+9D(X_3)$$

$$=\frac{25}{12}+4\times4+9\times2=\frac{433}{12}。$$

7. 设 $W=\left(aX+3Y\right)^2$，$EX=EY=0$，$DX=4$，$DY=16$，$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$。试求常数 a 使得 EW 为最小，并求 EW 的最小值。

【解题过程】由题知：

$$EX^2=DX+\left(EX\right)^2=4,$$

关注微信公众号：古德校园

$EY^2 = DY + (EY)^2 = 16$,

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

$$= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{2\times 4} = -\frac{1}{2}$$

则 $E(XY) = -4$。

$$E(W) = E[(aX + 3Y)^2]$$

$$= E\left(a^2X^2 + 9Y^2 + 6aXY\right)$$

$$= a^2EX^2 + 9EY^2 + 6aE(XY)$$

$$= 4a^2 + 9\times 16 + (-4)\times 6a$$

$$= 4(a-3)^2 + 108$$。

所以当 $a = 3$ 时 EW 最小，最小值为 108。

8.设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为：

X	0	1
p_k	1/3	2/3

Y	-1	0	1
p_k	1/3	1/3	1/3

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$。

（1）求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

（2）求 $Z = XY$ 的概率分布；

（3）求 X 与 Y 的相关系数。

【解题过程】（1）由 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$，

得 $P\{X^2 \neq Y^2\} = 0$，所以

$$P\{X=0,Y=-1\}$$
$$=P\{X=0,Y=1\}$$
$$=P\{X=1,Y=0\}$$
$$=0$$

故(X,Y)的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

(2) $Z=XY$ 的可能取值为 $-1,0,1$。由(X,Y)的概率分布可得 $Z=XY$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
p	1/3	1/3	1/3

(3) 由 X,Y,Z 的概率分布得 $EX=\frac{2}{3},DX=\frac{2}{9}$ ， $EY=0,DX=\frac{2}{3}$ ，

$EZ=E(XY)=0$,

所以$\operatorname{cov}(X,Y)=0,\rho_{XY}=0$。

关注微信公众号：古德校园

12 中心极限定理与抽样分布

1.某种电池的寿命 X（单位：h）服从正态分布 $N\left(300,35^2\right)$。（1）求寿命大于 250 小时的概率，（2）求 x，使寿命在 $300\pm x$ 之间的概率不小于 0.9。

【解题过程】

(1) $P\left(X>250\right)$

$$=1-\Phi\left(\frac{250-300}{35}\right)$$

$$=1-\Phi\left(-\frac{10}{7}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{10}{7}\right)\approx 0.9234$$

(2) $P\left(a-x<X<a+x\right)$

$$=\Phi\left(\frac{x}{35}\right)-\Phi\left(-\frac{x}{35}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{x}{35}\right)-1\geq 0.9$$

则 $\Phi\left(\frac{x}{35}\right)\geq 0.95=\Phi\left(1.645\right)$，

$x\geq 57.575$。

2. 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是一个随机变量，平均每箱重 50 千克，标准差 5 千克。若用最大载重量为 5 吨的卡车承运，说明每辆车最多可装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0.977？注：$\Phi\left(2\right)=0.977$。

【解题过程】设 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是装运 i

箱的重量（单位：千克），n 为所求的箱数，由条件知，可把 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 视为独立同分布的随机变量，而 n 箱的总重量 $T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 是独立同分布随机变量之和，由条件知：$E(X_i) = 50$，

$\sqrt{D(X_i)} = 5$，

$E(T_n) = 50n, \sqrt{D(T_n)} = 5\sqrt{n}$，依中心极限定理，当 n 较大时，$\dfrac{T_n - 50n}{5\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

故箱数 n 取决于条件

$$
\begin{aligned}
&P\{T_n \le 5000\} \\
&= P\{\frac{T_n - 50n}{5\sqrt{n}} \le \frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\} \\
&\approx \Phi\left(\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977 \\
&= \Phi(2)
\end{aligned}
$$

因此可从 $\dfrac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2$ 解出 $n < 98.0199$，

即最多可装 98 箱。

3.从一批灯泡中任意抽出 10 只测量寿命，所得数据如下（单位：小时）：

1450,1360,1520,1530,1470,
1440,1560,1380,1460,1430

试求：样本均值、样本标准差、极差以及变异系数。

关注微信公众号：古德校园

【解题过程】样本均值：

$$\bar{X}=\frac{1450+1360+1520+1530+1470+1440+1560+1380+1460+1430}{10}=1460$$

样本标准差：$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{(1450-1460)^2+(1360-1460)^2+(1520-1460)^2+\cdots+(1430-1460)^2}{10-1}}=63.6$$

极差$=1560-1360=200$

变异系数$C_r=\frac{S}{\bar{X}}=\frac{63.6}{1460}=0.0436$。

4．设总体 $X \sim N(2,1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自于总体 X 的一组样本。试求：$P\{1 < X < 3\}, P\{1 < \bar{X} < 3\}$。

【解题过程】因 $X \sim N(2,1)$ 所以

$$P\{1 < X < 3\}$$
$$= \Phi\left(\frac{3-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{1}\right)$$
$$= 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

因 $\bar{X} \sim N\left(2, \frac{1}{9}\right)$ 所以

$$P\{1 < \bar{X} < 3\}$$
$$= \Phi\left(\frac{3-2}{\frac{1}{3}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\frac{1}{3}}\right)。$$
$$= 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$$

5．设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自于总体 X 的一组样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_5$ 是来自于总体 Y 的一组样本，$X \sim N(10,4)$，$Y \sim N(20,4)$，且 X 与 Y 相互独立。试求 $P(\bar{Y} - \bar{X} > 11)$。

【解题过程】由题知 $\bar{Y} - \bar{X} \sim \left(10, \frac{6}{5}\right)$，

所以 $P(\bar{Y} - \bar{X} > 11)$

关注微信公众号：古德校园

$$=1-\Phi\left(\frac{11-10}{\sqrt{\frac{6}{5}}}\right)$$

$$=1-\Phi(0.91)$$

$$=1-0.8186$$

$$=0.1814$$

6.在总体 $N(12,4)$ 中随机抽取一容量为 4 的样本 X_1,X_2,X_3,X_4。试求：（1）样本均值与总体均值之差的绝对值大于 1 的概率；（2）$P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4)>15\}$，$P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4)<10\}$。

【解题过程】(1) 由题知 $\bar{X}\sim N(12,1)$，

$$P\left\{\left|\bar{X}-12\right|>1\right\}=1-P\left\{11\le\bar{X}\le13\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{11-12}{1}\le\frac{\bar{X}-12}{1}\le\frac{13-12}{1}\right\}$$

$$=2-2\Phi(1)=0.3174$$

（2）$P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4)>15\}$

$$=1-P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4)\le15\}$$

$$=1-P\left\{\bigcap_{i=1}^{4}X_i\le15\right\}$$

$$=1-\prod_{i=1}^{4}P\{X_i\le15\}$$

$$=1-\left[\Phi\left(\frac{15-12}{2}\right)\right]^4$$

$$=0.2416$$

$$P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4)<10\}$$

$$=1-P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4)\ge10\}$$

$$=1-P\left\{\bigcap_{i=1}^{4}X_i\geq 10\right\}$$

$$=1-\prod_{i=1}^{4}P\{X_i\geq 10\}$$

$$=1-\left\{1-\left[\Phi\left(\frac{10-12}{2}\right)\right]\right\}^4$$

$$=0.4990$$

7. （1）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的一组样本，$\bar{X}$ 为样本均值，s^2 为样本方差，则下列统计量中服从 $\chi^2(n)$ 分布的是（）。

（A）$\dfrac{\bar{X}-\mu}{s}\sqrt{n-1}$

（B）$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

（C）$\dfrac{\bar{X}-\mu}{s}\sqrt{n}$

（D）$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

（2）设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 是来自 X 的简单随机样本，则统计量 $Y=\dfrac{2\left(X_1^2+\cdots+X_5^2\right)}{X_6^2+\cdots+X_{15}^2}$ 服从的分布是_____。

（3）设 $X\sim N(0,1)$，随机抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\sim$ _____，

关注微信公众号：古德校园

$\frac{n\bar{X}^2}{S^2} \sim$ ——。

【解题过程】（1）$\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，故

$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$，选（D）。

（2）$\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$，故

$$Y=\frac{\left(X_1^2+\cdots+X_5^2\right)/5}{\left(X_6^2+\cdots+X_{15}^2\right)/10}$$

$$=\frac{2\left(X_1^2+\cdots+X_5^2\right)}{X_6^2+\cdots+X_{15}^2} \sim F(5,10)$$

（3）因 $\bar{X} \sim N(0,\frac{1}{n})$，$\bar{X}\sqrt{n} \sim N(0,1)$，

$n\bar{X}^2 \sim \chi^2(1)$，$\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \sim \chi^2(n)$，

故 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2 \sim \chi^2(n-1)$。

又 $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$，

故 $\frac{n\bar{X}^2}{(n-1)S^2/(n-1)}=\frac{n\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1,n-1)$。

8.设总体 $X \sim N(0,4)$，$X_1,X_2,\cdots X_5$ 是来自 X 的简单随机样本。

（1）$Y=aX_1^2+b(X_2+X_3)^2+c(X_4-X_5)^2$，试确定常数 a,b,c，使 Y 服从卡方分布并确定自由度；

（2）$Z=\frac{\alpha\left(X_1+X_2\right)}{\beta\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$，试确定常数 α，β，使 Z 服从 t 分布并确定自由度；

（3）设 $X_1, X_2, \cdots X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，证明 $\dfrac{(n-1)X_i^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$。

【解题过程】（1）因为 $X_i \sim N(0,4)$，所以 $\dfrac{X_1}{2} \sim N(0,1)$，$\dfrac{X_2 + X_3}{\sqrt{2 \times 4}} \sim N(0,1)$，$\dfrac{X_4 - X_5}{\sqrt{2 \times 4}} \sim N(0,1)$，由卡方分布的定义知

$$\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_2 + X_3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{X_4 - X_5}{2\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2(3)$$

，因此 $a = \dfrac{1}{4}$，$b = \dfrac{1}{8}$，$c = \dfrac{1}{8}$。自由度为 3。

（2）$\dfrac{X_1 + X_2}{2\sqrt{2}} \sim N(0,1)$，$\dfrac{X_3}{2} \sim N(0,1)$，$\dfrac{X_4}{2} \sim N(0,1)$，

所以 $\dfrac{\dfrac{X_1 + X_2}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{X_3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{X_4}{2}\right)^2}{2}}} \sim t(2)$，

因此 $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，自由度为 2。

（3）因为 $X_i \sim N(0,1)$，所以 $X_i^2 \sim \chi^2(1)$，$\sum_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$，

故 $\dfrac{X_i^2 / 1}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2 / (n-1)} \sim F(1, n-1)$，

关注微信公众号：古德校园

即 $\dfrac{(n-1)X_i^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$。

9. 设 $X_1, X_2, \cdots X_5$ 是取自标准正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，试求 k 使得

$$P\left\{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}} \le k\right\} = 0.90。$$

【解题过程】 因为 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$，

$X_3^2+X_4^2+X_5^2 \sim \chi^2(3)$，

故 $\dfrac{\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{3}}} \sim t(3)$，

由题 $1-P\{t(3) > t_\alpha(3)\} = 0.9$，

$P\{t(3) > t_\alpha(3)\} = 0.1$，

故 $t_{0.1}(3) = 1.6377$，那么 $\sqrt{\dfrac{3}{2}}k = 1.6377$，

$k = 1.3371$。

13 点估计及评选标准

1.设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，X 的概率密度为

$$f(x,a)=\begin{cases} ax^{-2}, 0<a<x<\infty \\ 0, 其他 \end{cases},$$

其中 a 是未知参数，若得样本值为

$0.1, 0.2, 0.9, 0.8, 0.7, 0.7$

试求参数 a 的极大似然估计值。

【解题过程】由于似然函数

$L(a)=L(0.1,0.2,0.9,0.8,0.7,0.7;a)$

$=(0.1\times0.2\times0.9\times0.8\times0.7\times0.7)^{-2}\cdot a^6$

$=20085.5a^6$，要使 $L(a)$ 达到最大，只需 a 尽可能地小，而 $0<a<x_1, x_2, \cdots, x_n$，所以 a 的最大似然函数估计值为 $\hat{a}=\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$。

2.设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数。已知取得了样本值 $x_1=1, x_2=2, x_3=1, x_4=3$。试求参数 θ 的矩估计值和极大似然估计值。

【解题过程】（1）θ 的矩估计值为：

$$EX=\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=\bar{X}=\frac{7}{4}$$

,解得 $\hat{\theta}=\frac{5}{8}$。

（2）似然函数为：

关注微信公众号：古德校园

$$L(\theta)=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot(1-\theta)^2\cdot\theta^2,$$

$$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+3\ln(1-\theta),$$

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{5}{\theta}-\dfrac{3}{1-\theta}=0$ 得 $\hat{\theta}=\dfrac{5}{8}$。

3.总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1},0\le x\le 1\\ 0,others\end{cases},$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本。

求（1）θ 的矩估计；

（2）θ 的极大似然估计。

【解题过程】

（1）$EX=\int_0^1 x\cdot\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，

令 $\bar{X}=EX=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，解得 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$。

（2）似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}$$

$$=(\sqrt{\theta})^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1},0\le x_i\le 1$$

对似然函数取对数：

$$\ln L(\theta)=n\ln(\sqrt{\theta})+\left(\sqrt{\theta}-1\right)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right),$$

得对数似然方程：

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\left[\frac{n}{\sqrt{\theta}}+\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)\right],$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，解得 $\hat{\theta}=\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}\right)^2$。

4. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{a}{2}xe^{-\frac{x^2}{\lambda}},x>0\\0,x\le 0\end{cases}$，其中 $\lambda>0$，且 λ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的随机样本，

（1）试求常数 a；

（2）求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$。

【解题过程】

（1）因 $\int_0^{\infty}\frac{a}{2}xe^{-\frac{x^2}{\lambda}}dx$

$=\int_0^{\infty}-\frac{a\lambda}{4}e^{-\frac{x^2}{\lambda}}d\left(-\frac{x^2}{\lambda}\right)$，

$=-\frac{a\lambda}{4}=1$

故 $a=-\frac{4}{\lambda}$。

（2）由题知 $f(x)=\begin{cases}-\frac{2}{\lambda}xe^{-\frac{x^2}{\lambda}},x>0\\0,x\le 0\end{cases}$，似然函数为：

$L(\lambda)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$

$=(-1)^n\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n(x_1\cdot x_2\cdots x_n)e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{\lambda}}$，

关注微信公众号：古德校园

两边对 λ 求导得：

$$\frac{dL(\lambda)}{d\lambda}=(-1)^n(2)^n(x_1\cdot x_2\cdots x_n)\left[-\frac{n}{\lambda^{n+1}}+\frac{1}{\lambda^n}\cdot\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{\lambda^2}\right]e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{\lambda}}$$

当 $\frac{dL(\lambda)}{d\lambda}=0$ 即 $\lambda=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}$，所以 λ 的最大似然估计量

$\hat{\lambda}=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}$。

5.设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，X 的概率密度为：

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, 0<x<1\\ 1-\theta, 1\le x<2\\ 0, 其他\end{cases}$$，其中 θ 是未知参数 $0<\theta<1$，记 K 为样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中小于 1 的个数，试求：

（1）θ 的矩估计量；

（2）θ 的最大似然估计量。

【解题过程】

（1）由于

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x;\theta)dx$$

$$=\int_0^1 \theta x dx+\int_1^2 (1-\theta)x dx,$$

$$=\frac{3}{2}-\theta$$

令 $\frac{3}{2}-\theta=\bar{X}$,解得 $\theta=\frac{3}{2}-\bar{X}$，所以 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{3}{2}-\bar{X}$。

（2）似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\theta^K(1-\theta)^{n-K},$$

取对数得

$$\ln L(\theta)=K\ln\theta+(n-K)\ln(1-\theta),$$

两边对 θ 求导得 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{K}{\theta}-\frac{(n-K)}{1-\theta}$，

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$ 得 $\theta=\frac{K}{n}$，

关注微信公众号：古德校园

θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{K}{n}$。

6.设总体$X\sim e(\theta)$，其中$\theta>0$，抽取样本$X_1,X_2,\cdots X_n$，证明$\bar{X}$是θ的无偏估计量，但$\bar{X}^2$却不是θ^2的无偏估计量。

【解题过程】

$$E\left(\bar{X}\right)=E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{n\cdot\theta}{n}=\theta$$

而$E\left(\bar{X}^2\right)$

$$=D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)+\left(E\bar{X}\right)^2$$

$$=\frac{\theta^2}{n^2}+\theta^2=\left(\frac{1}{n^2}+1\right)\theta^2$$

故$\bar{X}$是θ的无偏估计量，但$\bar{X}^2$却不是θ^2的无偏估计量。

7.设$X_1,X_2,\cdots X_n$为来自总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的简单随机样本，记$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2,T=\bar{X}^2-\dfrac{1}{n}S^2$。

（1）证明T是μ^2的无偏估计量；

（2）当$\mu=0,\sigma=1$时，求$D\left(T\right)$。

【解题过程】（1）由题设有

$$E\left(T\right)=E\left(\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)$$

$$=E\left(\bar{X}^2\right)-E\left(\frac{1}{n}S^2\right)$$

$$=E\left(\bar{X}^2\right)-\frac{1}{n}E\left(S^2\right)$$

$$=E\left(\bar{X}^2\right)-\frac{\sigma^2}{n}。$$

又 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，

从而

$$E\left(\bar{X}^2\right)=D\left(\bar{X}^2\right)+\left[E\left(\bar{X}\right)\right]^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2 \quad ,$$

所以

$$E(T)=E\left(\bar{X}^2\right)-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}=\mu^2$$

故 T 是 μ^2 的无偏估计量。

（2）因为 $\mu=0,\sigma=1$，

所以 $E(T)=\mu^2=0$，$\bar{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right)$，

又 $T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2$，

则 $D(T)=E\left(T^2\right)-\left[E(T)\right]^2=E\left(T^2\right)$

$$=E\left(T^2\right)=E\left(\bar{X}^4-\frac{2}{n}\bar{X}^2S^2+\frac{1}{n^2}S^4\right)$$

记 $Y=\frac{\bar{X}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，

则 $E\left(Y^4\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$=-\frac{x^3}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{\infty}^{-\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=3E\left(Y^2\right)=3$$

关注微信公众号：古德校园

$$E\left(\bar{X}^4\right)=\frac{3}{n^2},$$

且 $E\left(\bar{X}^2S^2\right)=E\left(\bar{X}^2\right)\cdot E\left(S^2\right)$

$$=\left[D\left(\bar{X}\right)+\left(E\left(\bar{X}\right)\right)^2\right]\cdot 1=\frac{1}{n}+0=\frac{1}{n}$$

又 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，则

$$D\left[(n-1)S^2\right]=(n-1)^2D\left(S^2\right)=2(n-1)$$

于是 $D\left(S^2\right)=\frac{2}{n-1}$，从而有

$$E\left(S^4\right)=D\left(S^2\right)+\left[E\left(S^2\right)\right]^2$$

$$=\frac{2}{n-1}+1=\frac{n+1}{n-1},$$

故 $D(T)=E\left(\bar{X}^4-\frac{2}{n}\bar{X}^2S^2+\frac{1}{n^2}S^4\right)$

$$=E\left(\bar{X}^4\right)-\frac{2}{n}E\left(\bar{X}^2S^2\right)+\frac{1}{n}E\left(S^4\right)$$

$$=\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n+1}{n-1}=\frac{2}{n(n-1)}。$$

14 区间估计与假设检验

1.设轮胎的寿命服从正态分布，为估计某种轮胎的平均寿命，现随机的抽取 12 只轮胎使用，测得它们的寿命如下（单位：万公里）：4.68,4.85,4.32,4.85,4.61,5.02,5.20,4.60,4.58,4.72,4.38,4.70，试求这种轮胎平均寿命的置信水平为 99%的置信区间。

【解题过程】由于正态分布标准差未知，可使用 t 分布求均值的置信区间。经计算有：$\bar{x}=4.7092$， $S^2=0.0615$，$\alpha=1-0.99=0.01$，查 t 分布表知 $t_{0.005}(11)=3.1058$。这种轮胎平均寿命的置信水平为 99%的置信区间为 $\left(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=$

$$\left(4.7092-\frac{3.1058\times\sqrt{0.0615}}{\sqrt{12}},4.7092+\frac{3.1058\times\sqrt{0.0615}}{\sqrt{12}}\right)$$

$=(4.4869,4.9315)$。

2.已知某种白炽灯的寿命 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，在一批该种灯泡中随机的抽取 10 只，测得其寿命如下（单位:小时）：1067,919,1196,785,1126,936,918,1156,920,948，试求未知参数 μ,σ^2,σ 的置信水平为 95%的置信区间。

【解题过程】已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$n=10$， $1-\alpha=95\%$， $t_{\frac{\alpha}{2}}(9)=2.2622$。由题知 $\bar{x}=997.1$， $S^2=155742.9$，μ 的置信水平为 95%的置信区间为：

关注微信公众号：古德校园

$$\left(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

$$=\left(997.1-\frac{\sqrt{155742.9}\times 2.2622}{\sqrt{10}},997.1+\frac{\sqrt{155742.9}\times 2.2622}{\sqrt{10}}\right)$$

$=(714.58,1279.62)$。

通过查 χ^2 分布表可知 $\chi_{\frac{\alpha}{2}}{}^2(9)=19.022$，

$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(9)=2.700$，所以 σ^2 的置信水平为

95%的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)}\right)$$

$$=\left(\frac{9\times 155742.9}{19.022},\frac{9\times 155742.9}{2.700}\right)$$

$=(73687.63,519143)$

标准差 σ 的置信水平为 95%的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi_{\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)}},\frac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)}}\right)$$

$=(271.45,720.52)$。

3.设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，已知 $\sum_{i=1}^{15}x_i=8.7$，

$\sum_{i=1}^{15}x_i{}^2=25.05$，试求 μ 和 σ 的置信度为

0.95 的区间估计。

【解题过程】由题知：$n=15$，

$$\bar{X}=\frac{8.7}{15}=0.58,S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$=\frac{25.05-15\times 0.58^2}{15-1}=1.43,\quad \alpha=0.05,$$

通过查表得 $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2}(14)=26.119$，

$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2}(14)=5.629$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(14)=2.1448$，

故 μ 的置信度为 0.95 的区间估计为：

$$\left(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

$$=\left(0.58-\frac{\sqrt{1.43}\times 2.1448}{\sqrt{15}},0.58+\frac{\sqrt{1.43}\times 2.1448}{\sqrt{15}}\right)$$

$$=(-0.0822,1.2422)$$

σ 的置信度为 0.95 的区间估计为：

$$\left(\frac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2}(n-1)}},\frac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2}(n-1)}}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{14}\times\sqrt{1.43}}{\sqrt{26.119}},\frac{\sqrt{14}\times\sqrt{1.43}}{\sqrt{5.629}}\right)$$

$$=(0.875,1.886)$$

关注微信公众号：古德校园

4.设正态总体 X 的标准差为 1，由来自 X 的简单随机样本建立的数学期望 μ 的 0.95 置信区间，求（1）当样本容量为 25 时置信区间的长度 L；（2）为使置信区间的长度不大于 0.5，应取最小的样本容量是多少。注：$\mu_{0.025}=1.96$。

【解题过程】

（1）由题知：$\sigma=1,n=25,\ \mu_{0.025}=1.96$，

故 $L=2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}=2\times\frac{1}{\sqrt{25}}\times 1.96=0.784$。

（2）由题知：$L=2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\le 0.5$，即

$2\times\frac{1}{\sqrt{n}}1.96\le 0.5$，解得$n\ge 61.47$，所以

应取最小的样本容量是 62。

5.从一批保险丝中抽取 10 根试验其熔化时间，熔化时间服从正态分布，结果为 42，65,75,78,71,59,57,68,54,55.问是否可以认为这批保险丝熔化时间的方差不大于 80？

（$\alpha=0.05,\chi^2_{0.05}(9)=16.919$）

【解题过程】由题得：$\bar{X}=62.4$，$S^2=121.82$，$n=10$，问题是检验假设$H_0:\sigma^2\le 80$。

(1) $H_0:\sigma^2\le 80=\sigma_0{}^2$;(2)选统计量$\chi^2$并计算其值

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2}=\frac{9\times 121.82}{80}=13.705$$

（3）对于给定的$\alpha=0.05$，查χ^2分布表得临界值$\chi^2(n-1)=\chi^2_{0.05}(9)=16.919$；

（4）因$\chi^2=13.705<16.919=\chi^2_{0.05}$，故接受$H_0$，即可认为方差不大于 80。

6.设某商场的日营业额为 X 万元，已知在正常情况下 X 服从正态分布$N(3.864,0.2^2)$，十一黄金周的前五天营业额分别为：4.28,4.40,4.42,4.35,4.37（万元）。假设标准差不变，问十一黄金周是否显著增加了商场的营业额？（取$\alpha=0.01$）

【解题过程】假设 H_0：$\mu=\mu_0=3.864$ 在 H_0 成立的条件下，统计量：

$$\mu=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\left|\frac{4.364-3.864}{\frac{\sqrt{0.2}}{\sqrt{5}}}\right|=2.5$$

因为 $|\mu|>\mu_0$ 所以十一黄金周显著增加了商场的营业额。

7.某传媒公司欲调查电视台综艺节目的收视率 p，若取置信水平为 95%，要求其置信区间的长度不超过 0.04，试问至少应该调查多少用户？

【解题过程】这是关于二点分布比例 p 的置信区间问题，p 的 $1-\alpha$ 置信区间长度为 $2\mu_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$，因 $\bar{x}\in(0,1)$，故 $\bar{x}(1-\bar{x})\le 0.25$，即 p 的 $1-\alpha$ 置信区间长度不会超过 $\frac{\mu_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$。

令 $\frac{\mu_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\le 0.04$ 解得 $n\ge\left(\frac{\mu_{1-\alpha/2}}{0.04}\right)^2=\left(\frac{1.96}{0.04}\right)^2=2401$。所以需要对 2401 个用户作调查。

8.设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自服从 $[0,\theta]$ 上均匀分布总体的样本，记

$Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$。

关注微信公众号：古德校园

证明：$P\left\{\alpha^{\frac{1}{n}}<\frac{Y}{\theta}\leq 1\right\}=1-\alpha$，并利用这个结论给出$\theta$的$1-\alpha$水平置信区间估计。

【解题过程】

（1）因为$Y=\max\left\{X_1,X_2,\cdots,X_n\right\}$，

其分布函数为$F_Y\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\theta^n},0\leq x_i\leq\theta\\0,\text{其他}\end{cases}$，

则$P\left\{\alpha^{\frac{1}{n}}<\frac{Y}{\theta}\leq 1\right\}=P\left\{\alpha^{\frac{1}{n}}\theta<Y\leq\theta\right\}$

$=F_Y\left(\theta\right)-F_Y\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\theta\right)=1-\alpha$。

（2）由于似然函数为$L\left(\theta\right)=\frac{1}{\theta^n}$，要使$L\left(\theta\right)$达到最大，只需$\theta$尽可能地小，而$\theta\geq x_1,x_2,\cdots,x_n$，所以$\theta$的最大似然函数估计量为$\hat{\theta}=\max\left\{X_1,X_2,\cdots,X_n\right\}$。

由于$P\left\{\alpha^{\frac{1}{n}}<\frac{Y}{\theta}\leq 1\right\}=1-\alpha$

故$P\left\{\hat{\theta}\leq\theta<\hat{\theta}\alpha^{-\frac{1}{n}}\right\}=1-\alpha$，

故θ的$1-\alpha$水平置信区间为$[\hat{\theta},\hat{\theta}\alpha^{-\frac{1}{n}})$。