1 概率的性质与计算

1.一批产品共有 200 件，其中有 6 件废品，求（1）任取 3 件产品恰有 1 件是废品的概率；（2）任取 3 件产品没有废品的概率；（3）任取 3 件产品中废品不少于 2 件的概率。

【解题思路】考查等可能概型（古典概型），这种概型需具备两个条件，一是实验的样本空间只包有含限个元素，二是试验中每个基本事件发生的可能性相同。设实验 E 的样本空间由 n 个样本点构成，A 为 E 的任意一个事件，且包含 m 个样本点，则事件 A 出现的概率为：$P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{A\text{所包含样本点的个数}}{\text{样本点总数}}$。

【解题过程】设事件 A_i 表示“取出的 3 件产品中恰有 i 件废品”（ $i=0,1,2,3$ ），由概率的古典定义得（1）$P(A_1)=\dfrac{C_6^1C_{194}^2}{C_{200}^3}\approx 0.0855$；（2）$P(A_0)=\dfrac{C_{194}^3}{C_{200}^3}\approx 0.9122$；

（3）$P(A_2+A_3)=\dfrac{C_6^2C_{194}^1+C_6^3}{C_{200}^3}\approx 0.0023$。

2.设 A 、 B 是两事件，且 $P(A)=0.4$， $P(B)=0.8$。问

（1）在什么条件下 $P(AB)$ 取得最小值，最小值是什么？

（2）在什么条件下 $P(AB)$ 取得最大值，最大值是什么？

【解题思路】考查对两个事件加法公式的应用，即对于任意两事件 A 和 B ，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.则可变形为 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$ 。

由题知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.8$，根据 $P(A\cup B)$ 的情况则可以判断取得最小值、最大值的条件。

【解题过程】由加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

可得（1）当 $P(A\cup B)=1$ 时，$P(AB)$ 取得最小值，最小值为 0.2；

（2）当 B 包含 A 时为最大值，$P(A\cup B)=P(B)=0.8$，所以最大值为 0.4。

3.将 3 枚 1 角的硬币随机投入到 4 个杯子中，则在同一个杯子中至多有 2 角钱的概率为（）。

① $\frac{3}{8}$；　② $\frac{9}{16}$；　③ $\frac{3}{4}$；　④ $\frac{15}{16}$

袋中有 2 白 1 红共 3 只质量、大小相同的球，甲先任取一球，观察后放回；然后乙再任取一球，则二人取相同颜色球的概率为（）

① $\frac{1}{9}$；　② $\frac{2}{9}$；　③ $\frac{4}{9}$；　④ $\frac{5}{9}$

【解题思路】考查古典概型。

【解题过程】

（1）“同一个杯子中至多有 2 角钱”包含两种情况，一是三枚硬币均在 3 个不同的杯子中，二是两枚硬币在同一个杯子中，另一枚在一个杯子中。故所求概率为

$$p=\frac{4\times 3\times 2+C_3^2\times C_4^1\times C_3^1}{4\times 4\times 4}=\frac{15}{16}$$。选④。

（2）所求概率为 $p=\frac{C_2^1\times C_2^1+C_1^1\times C_1^1}{C_3^1\times C_3^1}=\frac{5}{9}$，故选④。

4.设 A 、 B 为两事件，且 $P(A)=0.5$ ， $P(B)=0.7$ ， $P(A\cup B)=0.8$ ，

试求 $P(A-B)$ ， $P(B-A)$ 。

【解题思路】考查概率的性质：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ ， $P(A-B)=P(A)-P(AB)$ 。

【解题过程】由题知 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.7-P(AB)=0.8$ ，

故 $P(AB)=0.4$ ，所以 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.4=0.1$

$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.7-0.4=0.3$

5.在 $0,1,2,\cdots,9$ 这 10 个数中任取 4 个，能排成 4 位偶数的概率是多少？

【解题思路】考查古典概型。

【解题过程】从 $0,1,2,\cdots,9$ 这 10 个数中任取 4 个，共有 $A_{10}^{4}=5040$ 种取法，这四个数能排成 4 位偶数则要分两类讨论：当最高位为偶数时，则有 $C_4^1C_4^1A_8^2=896$ 种取法，当最高位为奇数时，则有 $C_5^1C_5^1A_8^2=1400$ 种取法。故所求概率为 $p=\dfrac{896+1400}{5040}=\dfrac{41}{90}$ 。

6.在 60 件产品中有 30 件是一等品，20 件是二等品，10 件是三等品。从中任取 3 件，试求：（1）3 件都是一等品的概率；（2）2 件是一等品、1 件是二等品的概率；

（3）一等品、二等品、三等品各有一件的概率。

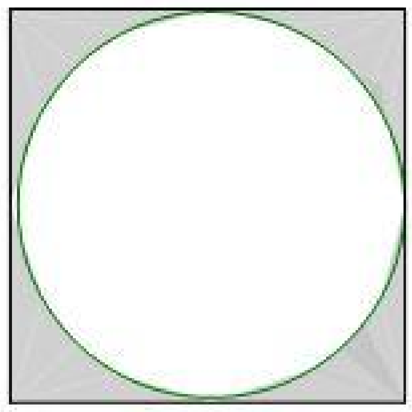
【解题思路】考查古典概型。

【解题过程】

（1）所求概率为 $p_1=\dfrac{C_{30}^3}{C_{60}^3}=\dfrac{7}{59}$ ；　　（2）所求概率为 $p_2=\dfrac{C_{30}^2C_{20}^1}{C_{60}^3}=\dfrac{15}{59}$ ；

（3）所求概率为 $p_3 = \dfrac{C_{30}^{1}C_{20}^{1}C_{10}^{1}}{C_{60}^{3}} = \dfrac{300}{1711}$。

7. 取一个边长为 $2a$ 的正方形及其内切圆（如图），随机地向正方形内丢了一粒豆子，求豆子落入圆内的概率。



【解题思路】考查几何概型的应用，即如果一个实验可能出现的结果虽然有无限多个，但全部可能结果的集合（即样本空间）可以用一个有度量的几何区域（如长度、面积、体积）来表示，而且每次实验中每个可能结果的出现是等可能的，那么对于定义在样本空间上的任何一件事 A，其发生的概率为 $P(A) = \dfrac{|S_A|}{|S|}$，其中 $|S|$ 是样本空间的几何度量，$|S_A|$ 是事件 A 所对应的几何度量。

【解题过程】

记“豆子落入圆内”为事件 A，则 $P(A) = \dfrac{\text{圆面积}}{\text{正方形面积}} = \dfrac{\pi a^2}{4a^2} = \dfrac{\pi}{4}$。

8. n 个朋友随机地围绕圆桌就坐。试问其中两个人一定要坐在一起（即座位相邻）的概率是多少？

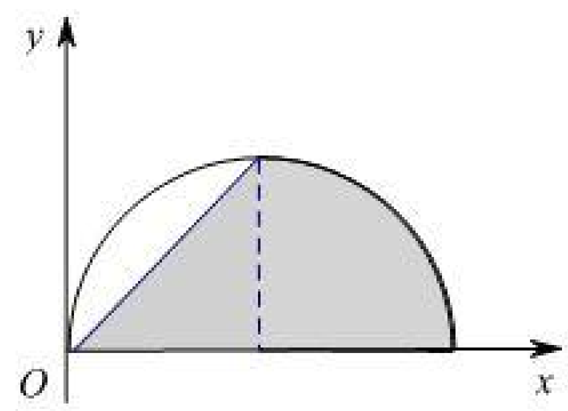
【解题思路】首先明确这是一个环状排列的问题。这种排列无首尾之分，而我们熟悉的是状排列问题。环状排列一种，相当于线状排列 n 种。

【解题过程】设 A 表示“n 个朋友随机地围绕圆桌就坐，其中甲、乙两人一定坐在一起”，

则有 $\frac{2!(n-1)!}{n-1}$ 种排法。故所求概率为 $p=\frac{\frac{2!(n-1)!}{n-1}}{\frac{n!}{n}}=\frac{2}{n-1}$ 。

9.随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ （a 为正常数）内投一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比。试求原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$ 的概率。

【解题思路】考查几何概型的应用，即如果一个实验可能出现的结果虽然有无限多个，但全部可能结果的集合（即样本空间）可以用一个有度量的几何区域（如长度、面积、体积）来表示，而且每次实验中每个可能结果的出现是等可能的，那么对于定义在样本空间上的任何一件事 A，其发生的概率为 $P(A)=\frac{|S_A|}{|S|}$,其中 $|S|$ 是样本空间的几何度量，$|S_A|$ 是事件 A 所对应的几何度量。



【解题过程】如图，样本空间为中心在 $(a,0)$ 处，半径为 a 的上半圆，其面积为 $m(\Omega)=\frac{1}{2}\pi a^2$，设 A 表示事件“原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$”，则 $m(A)=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2$，所以所求概率为 $P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{\pi+2}{2\pi}$ 。

2 条件概率

1.已知 $P(\overline{A})=0.3$， $P(B)=0.4$， $P(A\overline{B})=0.5$，求条件概率 $P(B/A\cup\overline{B})$。（提示：利用条件概率的定义式）

【解题思路】考查条件概率的定义，设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。再根据加法公式和分配律计算即可。

【解题过程】由已知可求得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.3=0.7，\ P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2$$

根据条件概率公式可得

$$P(B/A\cup\overline{B})=\frac{P((A\cup\overline{B})\cap B)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB\cup\varnothing)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$$

$$=\frac{0.2}{0.7+0.6-0.5}=\frac{1}{4}。$$

2.为防止意外，在矿区内同时安装了甲、乙两种报警系统。每种报警系统单独使用时，甲系统有效的概率为 0.92，乙系统有效的概率为 0.93，且在甲系统失灵的条件下，乙系统有效的概率为 0.85，求（1）在发生意外时，矿区内至少有一个报警系统有效的概率；（2）在乙系统失灵的条件下，甲系统有效的概率。

【解题思路】考查条件概率在实际中的应用。

【解题过程】

（1）设 A 表示“甲系统有效”， B 表示“乙系统有效”。由已知可得：

$P(A)=0.92$，$P(B)=0.93$，$P(B/\overline{A})=0.85$，

又 $P(B/\overline{A})=\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\dfrac{0.93-P(AB)}{1-0.92}=0.85$

所以 $P(AB)=0.862$。

那么在发生意外时，矿区内至少有一个报警系统有效的概率为:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.92+0.93-0.862=0.998$$

（2）在乙系统失灵的条件下，甲系统有效的概率为：

$$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\frac{0.92-0.862}{1-0.93}\approx 0.83\text{。}$$

3.甲、乙两个篮球运动员，投篮命中率分别为 0.7 及 0.6，每人各投了 3 次，求二人进球数相等的概率。

【解题思路】二人进球数相等分四种情况，一是二人均没有进球，二是二人均进一球，三是二人均进两球，四是二人均进三球。分别求出四种情况的概率，然后相加即为二人进球数相等的概率。

【解题过程】

记 A_i 为"甲进球 i 次" $i=0,1,2,3$，记 B_j 为"乙进球 j 次" $j=0,1,2,3$，记 H 为"二人进球数相等"。则 $P(A_0)=(1-0.7)^3=\dfrac{27}{1000}$，

$P(A_1)=C_3^1 0.7(1-0.7)^2=\dfrac{189}{1000}$，$P(A_2)=C_3^2 0.7^2(1-0.7)=\dfrac{441}{1000}$，

$P(A_3)=0.7^3=\dfrac{343}{1000}$，$P(B_0)=(1-0.6)^3=\dfrac{8}{125}$，$P(B_1)=C_3^1 0.6(1-0.6)^2=\dfrac{36}{125}$

$P(B_2)=C_3^2 0.6^2(1-0.6)=\dfrac{54}{125}$，$P(B_3)=0.6^3=\dfrac{27}{125}$

故二人进球数相等的概率为

$$P(H)=P(A_0)P\left(B_0\right)+P\left(A_1\right)P\left(B_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(B_2\right)+P\left(A_3\right)P\left(B_3\right)$$
$$=\frac{27}{1000}\times\frac{8}{125}+\frac{189}{1000}\times\frac{36}{125}+\frac{441}{1000}\times\frac{54}{125}+\frac{343}{1000}\times\frac{27}{125}=0.32076$$

4.设有来自三个地区的各 10 名，15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份，7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份：

（1）试求先抽到的一份是女生表的概率 p；（2）已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q。

【解题思路】考查全概率公式和贝叶斯公式。

【解题过程】设 B_1,B_2,B_3 分别表示报名表来自三个地区。

（1）设 A_1 表示先抽到的一份是女生表，

则 $P(A_1)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1|B_i)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{7}{15}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{25}=\dfrac{29}{90}$；

（2）设 $\overline{A}_2$ 表示抽到的第二份是男生表，

则所求概率为：$P(A_1|\overline{A}_2)=\dfrac{P(A_1\overline{A}_2)}{P(\overline{A}_2)}$，

其中 $P(\overline{A}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(\overline{A}_2\,|B_i)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{20}{25}=\frac{61}{90}$，

$$P(A_1\overline{A}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1\overline{A}_2\,|B_i)=\frac{1}{3}\times\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_7^1C_8^1}{C_{15}^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_5^1C_{20}^1}{C_{25}^2}=\frac{2}{9},$$

故 $P(A_1\,|\overline{A}_2)=\frac{P(A_1\overline{A}_2)}{P(\overline{A}_2)}=\frac{2/9}{61/90}=\frac{20}{61}$。

5.已知一个家庭有 3 个小孩，且其中一个为女孩，求至少有一个男孩的概率（小孩为男为女是等可能的）。

【解题思路】考查条件概率的运用。题目中“其中一个为女孩”意思是其他两个孩子的性别不确定，可能有 1 个女孩，可能有 2 个女孩，也可能有 3 个女孩。在其中一个为女孩的条件下，至少有一个男孩的情况有两种，一是 2 个女孩，一个男孩，另一种情况是 1 个女孩，2 个男孩。

【解题过程】设 A 表示“其中一个为女孩”， B 表示“至少有一个男孩”.故

$$P(A)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}\quad P(AB)=C_3^1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{6}{8},$$

那么在其中一个为女孩的条件下至少有一个男孩的概率为：

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{6}{7}.$$

6.将两信息分别编码为 A 和 B 传递出来，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01.信息 A 与 B 传递的频繁程度为 $2:1$，若接收站收到的信息是 A，试问原发信息是 A 的概率是多少？

【解题思路】考查全概率公式和贝叶斯公式。

【解题过程】设 A_1, A_2 分别表示发出 A, B。B_1, B_2 分别表示接收到 A, B。则所求概率为

$$P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1B_1)}{P(B_1)}=\frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)}=\frac{\frac{2}{3}\times 0.98}{\frac{2}{3}\times 0.98+\frac{1}{3}\times 0.01}=0.9949$$

7. 猎人在距离动物 100 米处射击这只动物，击中动物的概率为 0.6；如果第一次未击中，再进行第二次射击，由于动物的逃跑而使距离变为 150 米；如果第二次未击中，又进行第三次射击，此时猎人与动物的距离变为 200 米。假定猎人击中动物的概率与猎人和动物的距离成反比，求猎人最多射击三次就可以击中动物的概率。

【解题思路】考查乘法公式、条件概率的应用。首先应根据猎人击中动物的概率与猎人和动物的距离成反比的条件求出第二、三次击中动物的概率。猎人最多三次击中动物包括第一次射中，第一次没中第二次射中，第一、二次没中第三次射中，根据题意运用条件概率求解即可。

【解题过程】因击中的概率与距离成反比，设第 i 次击中的概率为 p_i，距离为 d_i，

则 $p_i=\dfrac{k}{d_i}, d_1=100, p_1=0.6, \therefore k=60.\ p_2=0.4,\ p_3=0.3$。

A 表示“猎人击中动物”， A_i 表示“在第 i 次击中” $(i=1,2,3)$，

则由题得 $A=A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$， $P(A_1)=0.6,\ P(A_2/\overline{A_1})=p_2=0.4,$

$P(\overline{A_2}/\overline{A_1})=1-0.4=0.6,\ P(A_3/\overline{A_1}\,\overline{A_2})=p_3=0.3,$

由乘法公式得猎人最多三次就可以击中动物的概率为：

$$P(A)=P(A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$

$$=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2/\overline{A_1})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}/\overline{A_1})P(A_3/\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$=0.6+0.4\times0.4+0.4\times0.6\times0.3=0.832$$

3 事件的独立性

1.三人独立地破译一个密码，他们能破译的概率分别为$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，求将此密码破译出的概率。

【解题思路】考查事件的独立性，设A,B是两件事，如果满足等式$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A,B相互独立。若事件A,B相互独立，则下列各对事件也相互独立：A与$\overline{B}, \overline{A}$与$B, \overline{A}$与$\overline{B}$.

【解题过程】设A表示“密码能破译”，A_i表示“第i个人破译出密码”，

则$A=A_1\cup A_2\cup A_3$，故所求概率为$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)$

$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{5}$$

2. 设事件A与B相互独立，且已知$P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.8$，试求概率$P(\overline{B}/A)$。

【解题思路】考查事件的独立性，设A,B是两件事，如果满足等式$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A,B相互独立。若事件A,B相互独立，则下列各对事件也相互独立：A与$\overline{B}, \overline{A}$与$B, \overline{A}$与$\overline{B}$.

【解题过程】由于A,B相互独立则

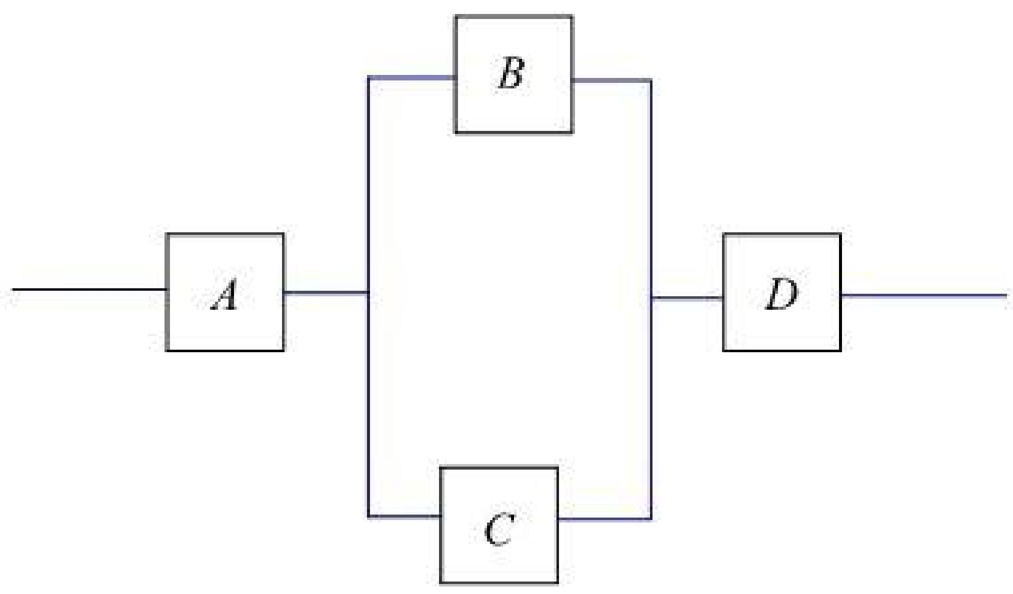
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.4+P(B)-0.4P(B)=0.8$$

解得 $P(B)=\frac{2}{3}$，那么 $P(\bar{B})=\frac{1}{3}$。

根据独立性的定理，A,B 相互独立，那么 $A,\bar{B}$ 也相互独立，则

$$P(\bar{B}/A)=\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}=\frac{P(A)P(\bar{B})}{P(A)}=P(\bar{B})=\frac{1}{3}$$

3.用 4 个整流二极管组成如图所示的示意系统。设系统各元件能正常工作是相互独立的，且每个整流二极管的可靠度（即能保持正常工作的概率）为 0.4，试求该系统的可靠度。



【解题思路】考查事件的独立性，在此系统中并联的元件至少有一个正常工作，串联的元件都必须正常工作，系统才能正常工作。

【解题过程】元件依次为 A,B,C,D，每个整流二极管的可靠度为 p，则系统的可靠度为

$$\begin{aligned}&P(A\cup B)P(C)P(D)\\&=\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]P(C)P(D)\\&=p^3(2-p)=0.4^3\times\left(2-0.4\right)=0.1024\end{aligned}$$

4. 设一枚深水炸弹击沉一潜水艇的概率为 $\frac{1}{3}$，击伤的概率为 $\frac{1}{2}$，击不中的概率为 $\frac{1}{6}$。

并设击伤两次也会导致潜水艇下沉。求施放 4 枚深水炸弹能击沉潜水艇的概率。（提示：

先求出击不沉的概率。）

【解题思路】 考查逆事件（对立事件），若直接求施放 4 枚深水炸弹能击沉潜水艇的概率不好求的话，逆向思考，先求出未被击沉的概率，再求解即可。

【解题过程】设 A 为"潜艇未被击沉"，等价于"炸弹未击中潜艇或仅一枚炸弹击伤潜艇"，

则 $P(A)=\left(\frac{1}{6}\right)^4+C_4^1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{13}{1296}$，故击沉的概率为: $p=1-P(A)=\frac{1283}{1296}$。

5.某智囊团由 9 名顾问组成，每名顾问的意见正确率都是 0.7，现以简单多数意见作决策，则决策的正确率为多少？

【解题思路】以简单多数意见做决策，所做决策正确的情况有 5 种，一是 5 个人意见正确，4 个人意见错误；二是 6 个人意见正确，3 个人意见错误；三是 7 个人意见正确，2 个人意见错误；四是 8 个人意见正确，1 个人意见错误；五是 9 个人意见都正确。由此即可计算决策的正确率。

【解题过程】设 A_i 为"i 个人意见正确" $(i=1,2,\cdots,9)$， B 表示"决策正确"。那么决策真确率为

$$P(B)=P(A_5)+P(A_6)+P(A_7)+P(A_8)+P(A_9)$$

$$=C_9^5 0.7^5\times 0.3^4+C_9^6 0.7^6\times 0.3^3+C_9^7 0.7^7\times 0.3^2+C_9^8 0.7^8\times 0.3+0.7^9=0.9$$

6.一个学生想借一本书，决定到 3 个图书馆去借，每个图书馆有无此书是等可能的。如有，是否借出也是等可能的。设 3 个图书馆有无此书，是否借出是相互独立的，试求此学生借到此书的概率。

【解题思路】考查对事件的独立性的应用。3 个图书馆中至少有一个图书馆有此书且没有被借出去，该学生才能借到此书。故先求出可从每个图书馆借到书的概率，再求解该

学生可借到书的概率即可。或者先求出该生借不到此书的概率，再求解借到的概率即可。

【解题过程】设 A 表示"该生能借到此书"， B_i 表示"从第 i 馆借到此书" $(i=1,2,3)$，

则 $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。

由于 3 个图书馆有无此书，是否借出是相互独立的，故

$$P(B_1B_2)=P\left(B_1B_3\right)=P(B_2B_3)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16},$$

$P(B_1B_2B_3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$.于是

$$P(A)=P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)-P(B_1B_2)$$

$$-P\left(B_1B_3\right)-P\left(B_2B_3\right)+P\left(B_1B_2B_3\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{37}{64}。$$

或者 $P(A)=1-P(\overline{A})$

$$=1-P(\overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3})=1-(1-\frac{1}{4})^3=\frac{37}{64}$$

7.有 3 架飞机，一架长机，两架僚机。一同飞往某目的地进行轰炸，但要到达目的地一定要无线导航，而只有长机有此设备，一旦到达目的地，各机将独立进行轰炸，且每架飞机炸毁目标的概率均为 0.3.在到达目的地之前，必须经过高射炮阵地上上空，此时任一架飞机被击落的概率为 0.2，求目标被炸毁的概率。

【解题思路】考查事件的独立性。

【解题过程】将长机和两架僚机分别编号为1,2,3.设 A_i =“有 i 架飞机进行轰炸“，B_i 表示”第 i 架飞机被高射炮击中“，C 表示”目标被炸毁“则所求概率为

$$P(C)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(C|A_i)$$

其中，$P(C|A_1)=0.3$，

$$P(C|A_2)=P\{\text{两架飞机进行轰炸，至少有一架击中}\}=1-0.7^2=0.51$$

$$P(C|A_3)$$

$$=P\{\text{三架飞机进行轰炸，至少有一架击中}\}$$
$$=1-0.7^3=0.657$$

$$P(A_1)=P(\bar{B}_1B_2B_3)$$
$$=P(\bar{B}_1)P(B_2)P(B_3)$$
$$=0.8\times 0.2\times 0.2=0.032$$

$$P(A_2)=P(\bar{B}_1\bar{B}_2B_3\cup\bar{B}_1B_2\bar{B}_3)$$
$$=P(\bar{B}_1\bar{B}_2B_3)+P(\bar{B}_1B_2\bar{B}_3)$$
$$=P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2)P(B_3)+P(\bar{B}_1)P(B_2)P(\bar{B}_3)$$

$$=0.8\times 0.8\times 0.2+0.8\times 0.2\times 0.8=0.256$$

$$P(A_3)=P(\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3)$$
$$=P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2)P(\bar{B}_3)$$
$$=0.8\times 0.8\times 0.8=0.512$$

故 $P(C)=0.032\times 0.3+0.256\times 0.51$

$+0.512\times 0.657=0.4765$。

4 离散型随机变量

1. 有 3 只球，4 只盒子，盒子的编号为 1，2，3，4.将球逐个独立的、随机的放入 4 只盒子中去。以 X 表示其中至少有一只球的盒子最小号码（例如 $X=3$ 表示第 1 号、第 2 号盒子是空的，第 3 号盒子至少有一只球），试求 X 的分布律与分布函数。

【解题思路】考查离散型随机变量的分布律和分布函数。设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 $x_k\left(k=1,2,\cdots\right)$，$X$ 取各个可能值得概率，即事件$\left\{X=x_k\right\}$的概率为

$P\left\{X=x_k\right\}=p_k,k=1,2,\cdots$。此式为离散型随机变量 X 的分布律。

设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数 $F(x)=P(X\le x),-\infty<x<\infty$ 称为 X 的分布函数。

【解题过程】 $X=1,2,3,4$，当 $X=4$ 时即 4 个小球都在 4 号盒子中

故 $P(X=4)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{1}{64}$；

当 $X=3$ 时即至少有一个球在 3 号盒子中，其他球在 4 号盒子中，也就是小球都在 3，4 号中的概率减去小球只在 4 号盒子中的概率，故 $P(X=3)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-\dfrac{1}{64}=\dfrac{7}{64}$；

当 $X=2$ 时即至少有一只球在 2 号盒子中，其他球在 3，4 号盒子中，其概率为小球都在 2，3，4 号盒子中的概率减去球只在 3，4 号盒子中的概率，故

$P(X=2)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{19}{64}$；

当 $X=1$ 时 $P(X=1)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{3}=\frac{37}{64}$。

所以分布律为

$P(X=1)=\frac{37}{64}$，$P(X=2)=\frac{19}{64}$，

$P(X=3)=\frac{7}{64}$，$P(X=4)=\frac{1}{64}$；

分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, x<1\\ \frac{37}{64}, 1\le x<2\\ \frac{7}{8}, 2\le x<3\\ \frac{63}{64}, 3\le x<4\\ 1, x\ge 4\end{cases}$。

2.一枚均匀骰子掷两次，用 X 表示两次中较大的点数，则 $P(X=4)=$（　　）。

① $\frac{7}{36}$　② $\frac{8}{36}$　③ $\frac{12}{36}$　④ $\frac{16}{36}$

若随机变量 X 的概率函数为

$P(X=k)=\frac{\lambda^{K}}{c\cdot k!}$，（$\lambda>0; k=1,2,3,\cdots$），则 $c=$（　　）。

① $e^{-\lambda}$　② e^{λ}　③ $e^{-\lambda}-1$　④ $e^{\lambda}-1$

【解题思路】考查离散型随机变量的分布律及其性质$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$。

【解题过程】（1）最大点数为 4，即两次中有 1 次点数为 4，另一次不超过 4，

$$P(X=4)=\frac{2C_4^1C_1^1-1}{C_6^1C_6^1}=\frac{7}{36}$$ 选①。

（2）由泰勒展开式知

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

故由随机变量性质得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{c\cdot k!}=\frac{1}{c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}e^{\lambda}-\frac{1}{c}=1$$

解得$c=e^{\lambda}-1$，选④。

3.某教科书出版了 2000 册，因装订等原因造成错误的概率为 0.001，试求在这 2000 册书中恰有 5 册错误的概率。

【解题思路】考查泊松逼近定理，若$X \sim B(n,p)$，而n很大，p很小时，近似有

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$ 。

【解题过程】设这 2000 册书中错误的册数为X，则$X \sim B(2000, 0.001)$，由于n很大，p很小，可以用泊松定理来近似计算，令$\lambda = np = 2$，这 2000 册书中恰有 5 册错误的概率即

$P\{X=5\}=C_{2000}^{5}0.001^{5}0.999^{1995}$

$\approx\dfrac{2^{5}e^{-2}}{5!}=0.0018$。

4.在区间$[0,a]$上任意投掷一个质点，以X表示这个质点的坐标。设这个质点落在中$[0,a]$中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比例。试求X的分布函数。

【解题思路】考查分布函数的定义，设X是一个随机变量，x是任意实数，函数$F(x)=P(X\le x),-\infty<x<\infty$称为$X$的分布函数。

【解题过程】

（1）当$x<0$时，$F(x)=P(X\le x)=0$；（2）当$0\le x\le a$时，

$F(x)=P(X\le x)=kx^{3}$；（3）当$x>a$时，$F(x)=P(X\le x)=1$。由右连续性可得：

$k=a^{-3}$。

所以X的分布函数$F(x)$为

$$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\a^{-3}x^{3},0\le x\le a\\1,x>a\end{cases}。$$

5.设某机场每天有 200 架飞机在此降落，任一飞机在某一时刻降落的概率设为 0.02，且设各飞机降落是相互独立的。试问该机场需配备多少条跑道，才能保证某一时刻飞机需立即降落而没有空闲跑道的概率小于 0.01（每条跑道只能允许一架飞机降落）？

【解题思路】考查泊松逼近定理，若

$X \sim B(n,p)$，而n很大，p很小时，近似有$P\left\{X=k\right\}=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k\left(1-p\right)^{n-k} \approx \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$。

【解题过程】设X为某一时刻需立即降落的飞机数，则$X \sim B(200,0.02)$，设机场需配备N条跑道，则有$P(X>N)<0.01$。利用泊松近似定理有$\lambda = np = 200\times 0.02 = 4$。

$P(X \geq N) = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \dfrac{e^{-4}4^k}{k!} < 0.01$，查表得$N \geq 9$，故机场至少应配备 9 条跑道。

6.将一枚硬币接连抛 5 次，假设 5 次中至少有一次国徽不出现，试求国徽出现的次数与不出现次数之比Y的概率分布。

【解题思路】考查离散型随机变量的分布律与条件概率的综合应用。

【解题过程】令X表示 5 次中至少有一次不出现国徽不出现的次数，$X=1,2,3,4,5$。

令A_i表示 5 次中国徽不出现i次，$i=0,1,2,3,4,5$。

5 次中至少有一次不出现的概率为

$$p(A=0)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{31}{32}$$

$$P\left(Y=4\right)=P(X=1)=P(A_1 \mid A_0)$$
$$=\frac{P(A_1A_0)}{P(A_0)}=\frac{5}{31}$$

$$P\left(Y=\frac{3}{2}\right)=P(X=2)=P(A_2 \mid A_0)$$
$$=\frac{P(A_2A_0)}{P(A_0)}=\frac{10}{31}$$

$$P\left(Y=\frac{2}{3}\right)=P(X=3)=P(A_3|A_0)=\frac{P(A_3A_0)}{P(A_0)}=\frac{10}{31}$$

$$P\left(Y=\frac{1}{4}\right)=P(X=4)=P(A_4|A_0)$$

$$=\frac{P(A_4A_0)}{P(A_0)}=\frac{5}{31}$$

$$P(Y=0)=P(X=5)=P(A_5|A_0)$$

$$=\frac{P(A_5A_0)}{P(A_0)}=\frac{1}{31}$$

故 Y 的概率分布为

$$Y\sim\begin{pmatrix} 4 & 3/2 & 2/3 & 1/4 & 0 \\ 5/31 & 10/31 & 10/31 & 5/31 & 1/31 \end{pmatrix}$$。

5 连续型随机变量

1.设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} k\sin x, 0<x<\pi \\ 0, others \end{cases}$，试求：

（1）k 的值；

（2）$P\left\{-\frac{\pi}{2}<X<\frac{\pi}{2}\right\}$；

（3）X 的分布函数。

【解题思路】考查连续型随机变量的分布函数及概率密度函数的性质。设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，如果存在非负可积函数 $f(x)$，使得对任意实数 x，均有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，则称 X 为连续型随机变量，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数。

（1）非负性：$f(x)\geq 0$，$x\in(-\infty,+\infty)$（2）归一性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$。

【解题过程】

（1）由归一性可得：$\int_0^{\pi} k\sin x dx=1$

即 $k=\frac{1}{2}$；

（2）由（1）得 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, 0<x<\pi \\ 0, others \end{cases}$，故 $P\left\{-\frac{\pi}{2}<X<\frac{\pi}{2}\right\}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin x dx=\frac{1}{2}$

（3）X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$=\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \int_0^x \frac{1}{2}\sin x dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x, 0 < x < \pi \\ 1, x \ge \pi \end{cases}$$

2.（1）若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2},(-\infty < x < +\infty),$$

则 $a=$________；$P(X>0)=$____________；$P(X=0)=$__________。

（2）若随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ Ax^2, 0 \le x < 1 \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$ 则 $A=$ ________；

$P(0.3<X<0.7)=$_____________；

X 的概率密度为 $f(x)=$_____________。

【解题思路】考查连续型随机变量的概率密度函数及其性质。

【解题过程】

（1）由归一性可得 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{1+x^2}dx=1$

解得 $a=\frac{1}{\pi}$；

$$P(X>0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}；$$

$P(X=0)=0$。

（2）由分布函数的连续性可得 $A=1$；

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ x^2, 0\le x<1\\ 1, x\ge 1\end{cases},$$

$$f(x)=\begin{cases}2x, 0\le x<1\\ 0, others\end{cases}；$$

$P(0.3<X<0.7)=F(0.7)-F(0.3)$

$=0.7^2-0.3^2=0.4$。

3.设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且关于未知数 y 的一元二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 μ 的值为多少。

【解题思路】考查正态分布的标准化。若随机变量 X □ $N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$。

【解题过程】

一元二次方程 $y^2+4y+X=0$

无实根即 $\Delta=16-4X<0$， $X>4$。

故 $P\left(X>4\right)=\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{4-\mu}{\sigma}=0$，

所以 $\mu=4$。

4. 某种电子元件在电源电压不超过 $200V$，$200V$～$240V$ 及超过 $240V$ 的 3 种情况下，损坏率依次为 0.1，0.001，0.2，设电源电压 $X\sim N(220,25^2)$，试求：（1）此种电子元件的损坏率；（2）此种电子元件损坏时，电源电压在 $200V$～$240V$ 的概率。

【解题思路】考查正态分布与全概率公式和贝叶斯公式的综合应用。

【解题过程】

设 $A_1=\{\text{电源电压不超过}200V\}$,

$A_2=\{\text{电源电压在}200～240V\}$,

$A_3=\{\text{电源电压超过}240V\}$,

$B=\{\text{电子元件损坏}\}$。

由 $\dfrac{X-220}{25}\sim N(0,1)$ 可得

$$P(A_1)=P\{X\le 200\}$$
$$=P\left\{\frac{X-220}{25}\le\frac{200\text{-}220}{25}\right\}$$
$$=\Phi(-0.8)=1-\Phi(0.8)=0.2119$$

$$P(A_2)=P\{200\le X\le 240\}$$
$$=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.5762$$

$$P(A_3)=P\{X>240\}=1-P(X\le 240)$$
$$=1-\Phi(\frac{240-220}{25})=1-\Phi(0.8)=0.2119$$

(1)由全概率公式得:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B/A_i)$$
$$=0.2119\times 0.1+0.5762\times 0.001+0.2119\times 0.2$$
$$=0.06415$$

(2)由贝叶斯公式得:

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}$$
$$=\frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)}$$
$$=\frac{0.5762\times 0.001}{0.06415}=0.00898$$

5.设我国某城市男子的身高（以 cm 计）服从 $N(168,36)$ 的正态分布，试求：

（1）该市男子身高在 170cm 以上的概率。（2）为使 99%以上的男子上公共汽车不致在车门上碰头，当地的公共汽车门框应设计成多少厘米的高度？

【解题思路】考查正态分布的标准化。若随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$。

【解题过程】

（1） $P(X>170)=1-P(X\le 170)$

$$=1-\phi\left(\frac{170-168}{6}\right)=0.3694$$

（2）设门框高度为h，

$$P(X<h)=\phi\left(\frac{h-168}{6}\right)=0.99,$$

$\frac{h-168}{6}=2.3263$，故$h=181.9581$。

所以门框高度应设计成1.82米。

6. 对某地抽样的结果表明，考生的外语成绩X（按百分之计）近似服从正态分布，平均72分，96分以上的考生占2.38%。求考生外语成绩在60以上的概率。

【解题思路】考查正态分布在实际问题中的应用，把正态分布变形为标准正态分布求解即可。

【解题过程】设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，

由题知$\mu=72$，

且$P(X>96)=1-P(X\le 96)$

$$=1-\Phi\left(\frac{96-72}{\sigma}\right)=0.0238,$$

则$\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.9762,\ \frac{24}{\sigma}=1.98$，$\sigma\approx 12$。

所以$P(X>60)=1-P(X\le 60)$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{60-72}{12}\right) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1)$$

$$= 0.8413$$

6 随机变量的函数的分布

1. 设 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，

则 $Y=3-2X\sim$____________。

若随机变量 X 的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1\end{pmatrix},$$

记 $Y=2X+1$，$Z=X^2-1$，则随机变量 Y 与 Z 的概率分布列分别为：_______；_______。

【解题思路】设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$。还考查了离散型随机变量的函数的分布。

【解题过程】（1）$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，故 $Y=3-2X\sim N(-2\mu+3,4\sigma^2)$。

（2）$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1\end{pmatrix}$,

则 $Y=2X+1\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3 & 5\\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1\end{pmatrix}$,

$Z=X^2-1\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0.3 & 0.6 & 0.1\end{pmatrix}$。

2. 设随机变量 X 具有分布律为：

X	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$
p_k	0.3	0.2	0.5

试求$Y=\frac{3}{4}X$和$Z=\cos X$的分布律及分布函数。

【解题思路】考查离散型随机变量的函数的分布，对于离散型随机变量X，确定其函数$Y=g(X)$的概率分布分为两步：(1)将X的可能取值代入$g(X)$，确定Y的所有可能取值。（2）根据X取各个值得概率即可确定Y取相应值的概率。

【解题过程】（1）Y是离散型随机变量，其可能取值为$-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4}$，

且$P(Y=-\frac{\pi}{4})=P(X=-\frac{\pi}{3})=0.3$，

$P(Y=0)=P(X=0)=0.2$，

$P(Y=\frac{\pi}{4})=P(X=\frac{\pi}{3})=0.5$，

即Y的分布律为

Y	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
p	0.3	0.2	0.5

Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, y<-\dfrac{\pi}{4}\\ 0.3, -\dfrac{\pi}{4}\le y<0\\ 0.5, 0\le y<\dfrac{\pi}{4}\\ 1, y\ge\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$。

（2）Z 是离散型随机变量，其可能取值为 $\dfrac{1}{2},1$，

且 $P(Z=\dfrac{1}{2})=P(X=-\dfrac{\pi}{3})+P(X=\dfrac{\pi}{3})$

$=0.3+0.5=0.8$，

$P(Z=1)=P(X=0)=0.2$，即 Z 的分布律为

Z	$\dfrac{1}{2}$	1
p	0.8	0.2

Z 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}0, z<\dfrac{1}{2}\\ 0.8, \dfrac{1}{2}\le z<1\\ 1, z\ge 1\end{cases}$。

3.设在一段时间内进入某一商店的顾客人数 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，每个顾客购买某种物品的概率为 p，并且各个顾客是否购买该种物品相互独立，求进入商店的顾客购买这

种物品的人数Y的分布律。

【解题思路】考查条件分布结合泊松分布的应用。明确进入商场的顾客人数服从泊松分布，而在进入商场的人数一定的条件下购买此物品的人数服从二项分布，再通过全概率公式求解进入商店的顾客购买此物品的人数的分布律即可。

【解题过程】

由题知$P(X=m)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!},m=0,1,2,\cdots$，购买某种物品的人数为$Y$，在进入商店的人数$X=m$的条件下，$Y\sim B(m,p)$

即$P(Y=k/X=m)$

$=C_m^k p^k(1-p)^{m-k},k=0,1,2,\cdots$

由全概率公式有

$$P(Y=k)=\sum_{m=k}^{\infty}P(X=m)P(Y=k/X=m)$$

$$=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}\bullet C_m^k p^k(1-p)^{m-k}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\lambda^m}{k!(m-k)!}p^k(1-p)^{m-k}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!},$$

$k=0,1,2,\cdots$

所以Y服从泊松分布，$Y\sim P(\lambda p)$。

4.设随机变量X服从标准正态分布$N(0,1)$。试求：

（1）$Y=e^X$ 的概率密度

（2）$Z=2X^2+1$的概率密度。

（3）$W=\left|X\right|$ 的概率密度。

【解题思路】考查随机变量的函数的分布。（1）一种方法可通过下述定理求得，即设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$，

$-\infty<x<\infty$，又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g(x)'>0$（或恒有 $g(x)'<0$），则 $Y=g(X)$是连续型随机变量，其概率密度为$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0,其他 \end{cases}$，

其中$\alpha=\min\left\{g(-\infty),g(\infty)\right\}$，

$\beta=\max\left\{g(-\infty),g(\infty)\right\}$，$h(y)$是$g(x)$的反函数。

（2）另一种方法则是根据分布函数的定义求得。

【解题过程】

（1）因 X 的概率密度是

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty,$$

$Y=g(X)=e^X$ 是单调增函数，

又 $X=h(Y)=\ln Y$，反函数存在，

且$\alpha=\min\left\{g(-\infty),g(\infty)\right\}$

$= \min\{0, +\infty\} = 0$，

$\beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}$

$= \max\{0, +\infty\} = +\infty$，

所以Y的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} \cdot \dfrac{1}{y}, 0 < y < +\infty \\ 0, 其他 \end{cases}$$

（2）$Z = 2X^2 + 1$的分布函数为

$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(2X^2 + 1 \le z)$，

当$z < 1$时，$F_Z(z) = 0$；当$z \ge 1$时，

$F_Z(z) = P(2X^2 + 1 \le z)$

$= P(-\sqrt{\dfrac{z-1}{2}} \le X \le \sqrt{\dfrac{z-1}{2}})$

$= F(\sqrt{\dfrac{z-1}{2}}) - F(-\sqrt{\dfrac{z-1}{2}})$。

所以Z的概率密度为：

当$z < 1$时，$f_Z(z) = [F_Z(z)]' = 0' = 0$；

当$z \ge 1$时，

$$f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\left(F(\sqrt{\frac{z-1}{2}})-F(-\sqrt{\frac{z-1}{2}})\right)'$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{z-1}}\left(f\left(\sqrt{\frac{z-1}{2}}\right)+f\left(-\sqrt{\frac{z-1}{2}}\right)\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(z-1)}}e^{-\frac{z-1}{4}}\text{。}$$

（3）因 W 的分布函数为

$$F_W(w)=P(W\le w)=P(|X|\le w),$$

当 $w<0$ 时，$F_W(w)=0$；

当 $w\ge 0$ 时，$F_W(w)=P(|X|\le w)$

$$=P(-w\le X\le w)=\int_{-w}^{w}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\text{。}$$

所以 W 的概率密度为：当 $w<0$ 时，$f_W(w)=[F_W(w)]'=0'=0$；

当 $w\ge 0$ 时，

$$f_W(w)=[F_W(w)]'=\left(\int_{-w}^{w}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{w^2}{2}}\text{。}$$

5.设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2},x>0\\0,x\le 0\end{cases},$$

试求 $Y=X^2$ 的概率密度。

【解题思路】考查随机变量的函数的分布，根据分布函数的定义求解即可。

【解题过程】由分布函数的定义可得

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=\begin{cases}0, y\le 0\\ P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}}2xe^{-x^2}dx=1-e^{-y}, y>0\end{cases}$$

故 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0, y\le 0\\ -2e^{-y}, y>0\end{cases}$。

7 多维随机变量

1.将一枚硬币独立地抛 3 次，以 X 表示 3 次中出现正面的次数，以 Y 表示 3 次中出现的正面次数与反面次数之差的绝对值。试求：（1） X 和 Y 的联合分布律；

（2）分别关于 X 和 Y 的边缘分布律；

（3） $P\left(e^X \geq Y+2\right)$。（提示：先确定 X 和 Y 的所有可能取值）

【解题思路】考查离散型二维随机变量的联合分布律。设二维随机变量 (X,Y) 所有可能取值为 (x_i, y_j)， $i, j = 1, 2, \cdots$，

记 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$， $i, j = 1, 2, \cdots$

称上式为 (X,Y) 的二维概率分布或分布率，或称为 X 与 Y 的联合概率分布。

而 $p_{i\cdot} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\left\{X = x_i\right\}, i = 1, 2, \cdots$,

$p_{\cdot j} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\left\{Y = y_j\right\}, j = 1, 2, \cdots$ 为

(X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律。

【解题过程】（1） X 和 Y 的联合分布律为

Y \ X	1	3

0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

（2）X 和 Y 的边缘分布律为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix},\quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

（3）$P\left(e^{X} \geq Y+2\right) = P(X=2, Y=1)$

$$+P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=1) + P(X=3, Y=3) = \frac{1}{2}$$

2.若二维随机变量 (X,Y) 的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.08	a	0.12
1	0.12	b	0.18

且 X 与 Y 相互独立，则 $a=$____； $b=$___。

【解题思路】考查离散性随机变量的独立性。X 与 Y 相互独立的条件为：对于 (X,Y) 的所有可能取的值 (x_i, y_j) 有

$$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j)。$$

【解题过程】由题知

$0.08+a+0.12+0.12+b+0.18=1$

$P(X=-1,Y=-1)=P(X=-1)P(Y=-1)=0.08=\left(0.2+a\right)\cdot 0.2$

故解得 $a=0.2, b=0.4$。

3.设区域 $D:|x|\leq 1,|y|\leq 1$，二维随机变量 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布，则它的联合密度函数 $f(x,y)=$________________；$P\left(|x|+|y|\leq 1\right)=$________________。

【解题思路】考查二维连续型随机变量及其联合概率密度及性质。设 G 是平面 xOy 上的区域，点 (X,Y) 落在 G 内的概率为 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$。

【解题过程】联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4},-1\leq x\leq 1,-1\leq y\leq 1\\ 0,others\end{cases}$$

$P\left(|x|+|y|\leq 1\right)=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{4}dy=\frac{1}{2}$。

4. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-x-2y},x\geq 0,y\geq 0\\ 0,其他\end{cases}$，试求：

（1）常数 A；

（2）Y 的边缘概率密度；

（3）$P(X<Y)$。

【解题思路】考查二维连续型随机变量及其联合概率密度及边缘概率密度。考查

（1）规范性 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$；

（2）(X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$（3）设 G 是平面 xOy 上的区域，点 (X,Y) 落在 G 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy。$$

【解题过程】

（1）由规范性可得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1,$$

$$A\int_0^{+\infty} e^{-x}dx\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy=1,$$

$$(-Ae^{-x})\Big|_0^{+\infty}(-\frac{1}{2}e^{-2y})\Big|_0^{+\infty}=1，\quad A=2。$$

（2）当 $y\geq 0$ 时，有

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^{+\infty} e^{-x-2y}dx=2e^{-2y}$ 当 $y<0$ 时，有 $f_Y(y)=0$。所以 Y 的边缘概率密度为: $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, y\geq 0\\ 0, y<0\end{cases}$。

（3）$P(X<Y)=\int_0^{+\infty} dx\int_x^{+\infty} 2e^{-x-2y}dy$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot(-e^{-2y})\Big|_x^{+\infty}dx=\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx=\frac{1}{3}。$$

5.某班车起点站上车人数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$。且每位乘客中途下车与否相互独立。计中途下车的人数为 Y。

（1）求在发车时车上有 n 个乘客的条件下，中途有 m 个人下车的概率；

（2）求 (X,Y) 的联合概率分布。

【解题思路】考查离散型二维随机变量的联合概率分布以及二项分布的综合应用。

【解题过程】

(1) 在发车时车上有 n 个乘客的条件下，中途有 m 个人下车的概率为：

$$P\left\{Y=m/X=n\right\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots$$

（2）(X,Y) 的联合概率分布为：

$$P\left\{X=n,Y=m\right\}=P\left\{Y=m/X=n\right\}P\left\{X=n\right\}$$

$$=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots$$

6.设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N\left(0,3,2,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$，试写出其边缘概率密度函数。

【解题思路】考查二维正态分布，若二维连续型随机变量 (X,Y) 具有概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^{\ 2}}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^{\ 2}}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}$$

则称 (X,Y) 服从二维正态分布，

记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,{\sigma_1}^2,{\sigma_2}^2,\rho)$。

若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,{\sigma_1}^2,{\sigma_2}^2,\rho)$，

则$X\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2)$，$Y\sim N(\mu_2,{\sigma_2}^2)$。

即二维正态分布的边缘分布仍然是正态分布。

【解题过程】因为二维正态分布的边缘分布仍然是正态分布，

所以$X\sim N(0,2)$，$Y\sim N(3,\frac{1}{3})$。

即$f_X(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}},-\infty<x<+\infty$，

$f_Y(y)=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{3(y-3)^2}{2}},-\infty<y<+\infty$。

8 条件分布与独立性

1. 设离散型随机变量 X 和 Y 的联合分布律为：

X \ Y	1	2	3
1	0.2	0	0.2
2	0.2	0.2	0.2

试求：

（1）当 $Y=1$ 时， X 的条件分布律；

（2）当 $X=2$ 条件时， Y 的条件分布律；

（3） $P(Y=3/X=1)$ 。

【解题思路】考查离散型随机变量的条件分布。设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j ，若 $P\left\{Y=y_j\right\}>0$ ，

则称 $P\left\{X=x_i/Y=y_j\right\}$

$=\dfrac{P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}}{P\left\{Y=y_j\right\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, i=1,2,\cdots$ 为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律。

【解题过程】

（1）当 $Y=1$ 时， X 的条件分布律为：

$$P\left\{X=1/Y=1\right\}=\frac{P\left\{X=1,Y=1\right\}}{P\left\{Y=1\right\}}=\frac{0.2}{0.2+0.2}=0.5,$$

$$P\{X=2/Y=1\}=\frac{P\{X=2,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{0.2}{0.2+0.2}=0.5。$$

（2） 当$X=2$条件时，Y的条件分布律为：

$$P\{Y=1/X=2\}=\frac{P\{X=2,Y=1\}}{P\{X=2\}}=\frac{0.2}{0.2+0.2+0.2}=\frac{1}{3},$$

$$P\{Y=2/X=2\}=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{X=2\}}=\frac{0.2}{0.2+0.2+0.2}=\frac{1}{3},$$

$$P\{Y=3/X=2\}=\frac{P\{X=2,Y=3\}}{P\{X=2\}}=\frac{0.2}{0.2+0.2+0.2}=\frac{1}{3}。$$

（3）$P\{Y=3/X=1\}$

$$=\frac{P\{X=1,Y=3\}}{P\{X=2\}}=\frac{0.2}{0.2+0.2}=0.5。$$

2.设离散型随机变量X和Y的联合分布律为：

X \ Y	0	1
0	0.4	b
1	a	0.1

若随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，试求a、b。

【解题思路】考查概率的规范性，独立的随机变量。

【解题过程】 由题可得：

$P\{X=0\}=0.4+b$，

$P\{X+Y=1\}=b+a$，

又随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，故$P\{X=0,X+Y=1\}$

$=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$，

即$\begin{cases} b=(0.4+b)(b+a) \\ a+b+0.4+0.1=1 \end{cases}$，

解得$a=0.1,b=0.4$。

3.设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases} 3x, 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0, 其他 \end{cases}$

试求：

（1）条件概率密度函数$f_{X/Y}(x/y)$及

$f_{Y/X}(y/x)$；

（2）$P(Y<X^2)$。

【解题思路】考查连续型随机变量的条件分布，设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$f(x,y)$，(X,Y)关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$。若对于固定的y，$f_Y(y)>0$，则

称$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在$Y=y$的条件下X的条件概率密度，记为$f_{X/Y}(x/y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$。

【解题过程】

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 3x\mathrm{d}y \\ 0\end{cases}=\begin{cases}3x^2, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 3x\mathrm{d}x \\ 0,\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}(1-y^2), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以 $f_{X/Y}(x/y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$$=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2}, y\le x\le 1\\ 0,\text{其他}\end{cases},$$

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0\le y\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）$P(Y<X^2)=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} 3xdy=\dfrac{3}{4}$。

4.若二维随机变量 (X,Y) 的联合概论密度为 $f(x,y)=\begin{cases}kx, 0\le x\le 1, |y|\le x\\ 0, others\end{cases}$

（1）求 k 值；

（2）求两个边缘概率密度 $f_X(x)$ 及 $f_Y(y)$；（3）讨论随机变量 X 与 Y 的相互独立性；

（4）求概率 $P(X\le 0.5)$ 及 $P(X+Y\ge 1)$。

【解题思路】考查二维连续型随机变量及其联合概率密度及边缘概率密度。考查

（1）规范性$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$；

（2）(X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy, f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$（3）设 G 是平面 xOy 上的区域，点 (X,Y) 落在 G 内的概率为

$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$。

（4）考查相互独立的随机变量，设$\left(X,Y\right)$是连续型随机变量，$f(x,y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别为$\left(X,Y\right)$的概率密度和边缘概率密度，则 X 、Y 相互独立的条件等价于

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。

【解题过程】（1）由规范性可得

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1 kxdx\int_{-x}^{x}dy=1$，解得 $k=\dfrac{3}{2}$

（2）边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\int_{-x}^{x}xdy=3x^2, 0\le x\le 1\\ 0, others\end{cases}$，

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1\dfrac{3}{2}xdx+\int_{-y}^{1}\dfrac{3}{2}xdx=\dfrac{3}{2}(1-y^2), -1\le y\le 1\\ 0, others\end{cases}$；

（3）因 $f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以随机变量 X 与 Y 不独立；

（4）$P\left(X\le 0.5\right)=\int_0^{0.5}\dfrac{3}{2}xdx\int_{-x}^{x}dy=\dfrac{1}{8}$；

$P(X+Y\geq 1)=\int_{0.5}^{1}\frac{3}{2}xdx\int_{1-x}^{x}dy=\frac{5}{16}$。

5.设二维连续型随机变量(X,Y)关于Y的边缘概率密度及在$Y=y(0<y<1)$条件下的条件概率密度函数分别为：$f_Y(y)=\begin{cases}5y^4,0<y<1\\0,其他\end{cases}$ $f_{X/Y}(x/y)=\begin{cases}\frac{3x^2}{y^3},0<x<y<1\\0,其他\end{cases}$

试求：$P(X>0.5)$。

【解题思路】考查由边缘概率密度和条件概率密度求解联合概率密度。

【解题过程】

因为$f_{X/Y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$,

故$f(x,y)=f_{X/Y}(x/y)\cdot f_Y(y)$

$=\begin{cases}15x^2y,0<x<y<1\\0,其他\end{cases}$,

所以$P(X>0.5)=\int_0^{0.5}dx\int_x^1 15x^2ydy=\frac{17}{64}$。

6.设X与Y是相互独立的随机变量，$X\sim U(0,1)$，$Y\sim E(2)$。写出二维随机变量(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)$，并求t的二次方程$t^2+2Xt+Y^2=0$有实根的概率。

【解题思路】考查相互独立的随机变量，设(X,Y)是连续型随机变量，$f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$分别为(X,Y)的概率密度和边缘概率密度，则X、Y相互独立的条件等价于

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。

【解题过程】

（1）由题知：$f_X(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\ 0, 其他\end{cases}$，

$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, y>0\\ 0, 其他\end{cases}$，故

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, 0<x<1, y>0\\ 0, 其他\end{cases}$（2）要使二次方程 $t^2+2Xt+Y^2=0$ 有实根，则 $4X^2-4Y^2\ge 0$,

即 $(X+Y)(X-Y)\ge 0$.

则 $P\{(X+Y)(X-Y)\ge 0\}$

$=P\{X+Y\ge 0，X-Y\ge 0\}+P\{X+Y\le 0, X-Y\le 0\}$

$=\int_0^1 dx\int_0^x 2e^{-2y}dy+0=\frac{1}{2}(e^{-2}+1)$

7.在打靶训练中，设弹着点 $A(X,Y)$ 的坐标 X 和 Y 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，规定点 A 落在区域

$D_1=\left\{(x,y)/x^2+y^2>4\right\}$ 内得 0 分，点 A 落在区域 $D_2=\left\{(x,y)/1<x^2+y^2\le 4\right\}$ 内得 1分，点 A 落在区域

$D_3=\left\{(x,y)/x^2+y^2\le 1\right\}$ 得 2 分。以 Z 记打靶的得分。

（1）写出 X,Y 的联合概率密度函数；

（2）求随机变量 Z 的分布律。

【解题思路】 考查独立的随机变量。设 $\left(X,Y\right)$ 是连续型随机变量，$f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别为 $\left(X,Y\right)$ 的概率密度和边缘概率密度，则 X、Y 相互独立的条件等价于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。

【解题过程】

（1）由题知：$f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，

$f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$，$X$ 和 Y 相互独立，

所以 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$。

（2）随机变量 Z 的分布律为：

$$P\left\{Z=2\right\}=P\left\{(X,Y)\in D_3\right\}=\iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho d\rho=-\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d(-\frac{1}{2}\rho^2)=1-e^{-\frac{1}{2}}；$$

同理得：$P\left\{Z=1\right\}=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2}$；

$P\left\{Z=0\right\}=1-P\left\{Z=2\right\}-P\left\{Z=1\right\}=e^{-2}$

8.若二维随机变量(ξ,η)的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+y)}, x>0, y>0 \\ 0, others \end{cases}$试求：

（1）常数A；

（2）$P\{\xi<2,\eta<1\}$；

（3）ξ的边际分布；

（4）$P\{\xi+\eta<2\}$；

（5）$P\{\xi<2|\eta<1\}$；

（6）ξ与η是否独立。

【解题思路】考查二维连续型随机变量及其联合概率密度及边缘概率密度。考查

（1）规范性$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$；

（2）(X,Y)关于X和Y的边缘概率密度分别为

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$（3）设$G$是平面$xOy$上的区域，点$(X,Y)$落在$G$内的概率为

$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$。

（4）考查相互独立的随机变量，设(X,Y)是连续型随机变量，$f(x,y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$分别为(X,Y)的概率密度和边缘概率密度，则X、Y相互独立的条件等价于

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。

【解题过程】

（1）由规范性可得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1,$$

$$A\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx\int_0^{+\infty} e^{-y}dy = 1，\quad A = 2。$$

（2）$P\left\{\xi < 2,\eta < 1\right\}$

$$= 2\int_0^2 e^{-2x}dx\int_0^1 e^{-y}dy = \left(1-e^{-1}\right)\left(1-e^{-4}\right)$$

（3）ξ 的边缘概率密度函数为

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dy = 2e^{-2x}, x > 0 \\ 0, others \end{cases}$$

其边际分布为 $F_\xi(x) = \begin{cases} 1-e^{-2x}, x > 0 \\ 0, others \end{cases}$

（4）$P\left\{\xi + \eta < 2\right\}$

$$= 2\int_0^2 e^{-2x}dx\int_0^{2-x} e^{-y}dy = 1 + e^{-4} - 2e^{-2}$$

（5）$P\left\{\xi < 2 \middle| \eta < 1\right\} = \dfrac{P\left\{\xi < 2,\eta < 1\right\}}{P\left\{\eta < 1\right\}}$

$$= \frac{\left(1-e^{-1}\right)\left(1-e^{-4}\right)}{2\int_0^{\infty} e^{-2x}dx\int_0^1 e^{-y}dy} = \frac{\left(1-e^{-1}\right)\left(1-e^{-4}\right)}{1-e^{-1}} = 1-e^{-4}$$

（6）因 $f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, x > 0, y > 0 \\ 0, others \end{cases}$，$f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, x > 0 \\ 0, others \end{cases}$，

$$f_\eta(y)=\begin{cases} e^{-y}, y>0 \\ 0, others \end{cases}$$

故 $f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$，所以ξ与η相互独立。

习题三（A）

一、选择题

1.设 X 与 Y 是定义在同一样本空间上的两个随机变量，且

$P(X \geq 0, Y \geq 0)=\frac{3}{7}$， $P(X \geq 0)=P(Y \geq 0)=\frac{4}{7}$，

则 $P\big((X \geq 0) \cup (Y \geq 0)\big)=$（）。

（A）$\frac{16}{49}$（B）$\frac{5}{7}$（C）$\frac{3}{7}$（D）$\frac{40}{49}$

【解题思路】考查概率的和公式。

【解题过程】

$$P\big((X \geq 0) \cup (Y \geq 0)\big)=P(X \geq 0)+P(Y \geq 0)-P(X \geq 0)P(Y \geq 0)$$

$=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$。故选 B。

2.设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，其二维概率

分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0.2	0	0.1
0	0	0.4	0
1	0.1	0	0.2

则 $F(0,1)=$（）。

（A）0.2（B）0.4（C）0.6（D）0.8

【解题思路】考查二维离散型随机变量分布函数的定义，设 (X,Y) 是二维随机变量，对于任意实数 x,y，二元函数：

$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\xrightarrow{\text{记成}}P\{X\le x,Y\le y\}$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数。

【解题过程】由二维随机变量的分布函数的定义得：

$$F(0,1)=P\{X\le 0,Y\le 1\}=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)$$

$$+P(X=-1,Y=1)+$$

$P(X=-1,Y=0)=0.6$，故选 C。

3.设二维随机变量 (X,Y) 的边沿分布函数为 $F_1(x)$ 和 $F_2(y)$，则（）。

（A）$F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

（B）$F_1(x)-F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

（C）$\frac{1}{2}\left[F_1(x)+2F_2(x)\right]$ 必为某一随机变量的分布函数

（D）$F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

【解题思路】考查分布函数的性质，$F(+\infty)=1$。

【解题过程】（A）、（B）$F_1(+\infty)-F_2(+\infty)=0$，（$C$）$\frac{1}{2}\left(F_1(+\infty)+2F_2(+\infty)\right)=\frac{3}{2}$，（$D$）

$F_1(+\infty)F_2(+\infty)=1$。故选$D$。

4.设二维连续型随机变量(X,Y)的边缘密度分别为$f_1(x)$和$f_2(x)$，则（）。

（A）$f_1(x)+f_2(x)$必为某一连续随机变量的密度函数

（B）$\frac{1}{2}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]$必为某一连续型随机变量的密度函数

（C）$f_1(x)-f_2(x)$必为某一连续型随机变量的密度函数

（D）$f_1(x)f_2(x)$必为某一连续型随机变量的密度函数

【解题思路】考查概率密度函数的性质：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$。

【解题过程】（A）$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx=2$，（$B$）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx=1$，

（C）$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx=0$，（$D$）不确定。故选$B$。

5．设(X,Y)在单位圆内服从均匀分布，则X与Y是（）的随机变量。

（A）独立同分布（B）独立不同分布

（C）不独立但同分布（D）不独立也不同分布

【解题思路】（1）(X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy, f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$；

（2）考查相互独立的随机变量，设$\left(X,Y\right)$是连续型随机变量，

$f(x,y),\ f_X(x),\ f_Y(y)$ 分别为$\left(X,Y\right)$的概率密度和边缘概率

密度，则 X 、Y 相互独立的条件等价于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 。

首先，将 (X,Y) 的联合概率密度求出来，然后根据边缘概率密

度的定义求出边缘密度函数。

【解题过程】由于单位圆的面积 $S=\pi$ ，所以二维随机变量

(X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi},-1\leq x\leq 1,-1\leq y\leq 1\\ 0,others\end{cases}$ ，

由边缘概率密度的定义，

得 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{1}{\pi}dy=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ ，

$-1\leq x\leq 1$；

同理得 $f_Y(y)=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},-1\leq y\leq 1$ ，

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ ，故 X 与 Y 不独立但同分布。选

C 。

二、填空题

1.设(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，

在$P(a<X\le b,Y\le c)=$________________。

【解题思路】考查二维随机变量分布函数的定义，设(X,Y)是二维随机变量，对于任意实数x,y，二元函数：$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\xrightarrow{\text{记成}}P\{X\le x,Y\le y\}$称为二维随机变量$(X,Y)$的分布函数，或称为随机变量$X$和$Y$的联合分布函数。

【解题过程】根据二维随机变量的分布函数得：$P(a<X\le b,Y\le c)=F(b,c)-F(a,c)$。

2.设(X,Y)有密度函数$f(x,y)=\begin{cases}Ay,0<y<1,0<x<y\\0,others\end{cases}$则

$A=$____________。

【解题思路】考查概率密度函数的性质：规范性

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$。

【解题过程】由规范性可得：

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1dy\int_0^yAydx=1$，解得：$A=3$。

3.设 X 与 Y 服从同一分布，且 X 的分布律为 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，

若已知 $P(XY=0)=1$，则 $P(X=Y)=$______________。

【解题思路】考查离散型随机变量的联合分布律和边缘分布律。

【解题过程】由于 $P\{XY=0\}=1$，故可得 X 与 Y 的联合分布律：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0	1/2	1/2
1	1/2	0	1/2
$p_{\cdot j}$	1/2	1/2	

故 $P(X=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=0$。

4.设 X，Y 独立同服从于 $B(1,0.3)$ 分布，令 $Z=\min\{X,Y\}$，

则 $P(Z=0)=$______________。

【解题思路】考查独立同分布的二维离散型随机变量的概率计算。

【解题过程】

$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)$

$=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=0)+P(X=0)P(Y=1)$

$=0.7\times 0.7+0.7\times 0.3+0.3\times 0.7=0.91$。

5.设 X， Y 独立同服从于 $B(1,p)$ 分布，又设

$Z=\begin{cases}1, X+Y\text{为偶数}\\0, X+Y\text{为奇数}\end{cases}$，则 $P(Z=1)=$________。

【解题思路】考查独立同分布的二维离散型随机变量的概率计算。

【解题过程】

$P(Z=1)=P(X+Y\text{为偶数})=P(X=1,Y=1)+P(X=0,Y=0)=$

$P(X=1)P(Y=1)+P(X=0)P(Y=0)=p^2+(1-p)^2$。

三、解答题和证明题

1.随机变量 Y 服从指数分布 $e(1)$，令随机变量 $X_k=\begin{cases}0, Y\le k\\1, Y>k\end{cases}$，

$k=1,2$ 求 X_1 与 X_2 的联合分布律。

【解题思路】考查二维随机变量的联合分布律。设二维随机变量 (X,Y) 所有可能取值为 (x_i,y_j)， $i,j=1,2,\cdots$，

记 $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$，$i,j=1,2,\cdots$ 称上式为 (X,Y) 的二

维概率分布或分布率，或称为X与Y的联合概率分布。

【解题过程】X_1，X_2的取值为$0,1$，且

$$P(X_1=0,X_2=0)=P(Y\le 1,Y\le 2)=P(Y\le 1)=F_Y(1)=1-e^{-1}$$

$$P(X_1=0,X_2=1)=P(Y\le 1,Y>2)=P(\varnothing)=0,$$

$$P(X_1=1,X_2=0)=P(Y>1,Y\le 2)=P(1<Y\le 2)=F_Y(2)-F_Y(1)$$

$$P(X_1=1,X_2=1)=P(Y>1,Y>2)=P(Y>2)=e^{-2}\text{。}$$

故X_1，X_2的联合分布律为：

X \ Y	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

2.掷一枚均匀硬币三次，X表示正面出现次数，Y表示正、反面出现次数差的绝对值，求(X,Y)的概率分布。

【解题思路】考查离散型二维随机变量的联合分布律。设二维随机变量(X,Y)所有可能取值为(x_i,y_j)，$i,j=1,2,\cdots$，记$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$，$i,j=1,2,\cdots$称上式为(X,Y)的二维概率分布或分布率，或称为X与Y的联合概率分布。

【解题过程】 X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$； Y 的可能取值为 $1,3$。

$P(X=0,Y=1)=0$， $P(X=0,Y=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，

$P(X=1,Y=1)=C_3^1\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，

$P(X=1,Y=3)=0$ ， $P(X=2,Y=1)=C_3^1\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$ ，

$P(X=2,Y=3)=0$，

$P(X=3,Y=1)=0$，$P(X=3,Y=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$。故 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	1	3
0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	0
2	$\frac{3}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$

3.一签筒中有 7 支签，其中 3 支上签，2 支中签，2 支下签。4 人依次不放回各取一签。X 表示 4 人中取得上签的支数。Y 表示 4 人中取得中签的支数。求 (X,Y) 的概率分布。

【解题思路】考查离散型二维随机变量的联合分布律。

【解题过程】由题知 X 可能的取值为 $0,1,2,3$，Y 的可能取值为 $0,1,2$，且

$P(X=0,Y=0)=P(\varnothing)=0$，$P(X=0,Y=1)=P(\varnothing)=0$，

$$P(X=0,Y=2)=\frac{C_3^0C_2^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{1}{35},$$

$$P(X=1,Y=0)=P(\varnothing)=0,$$

$$P(X=1,Y=1)=\frac{C_3^1C_2^1C_2^2}{C_7^4}=\frac{6}{35},$$

$$P(X=1,Y=2)=\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35},$$

$$P(X=2,Y=0)=\frac{C_3^2C_2^0C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35},$$

$$P(X=2,Y=1)=\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}=\frac{12}{35},$$

$$P(X=2,Y=2)=\frac{C_3^2C_2^2C_2^0}{C_7^4}=\frac{3}{35},$$

$$P(X=3,Y=0)=\frac{C_3^3C_2^0C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35},$$

$$P(X=3,Y=1)=\frac{C_3^3C_2^1C_2^0}{C_7^4}=\frac{2}{35},$$

$$P(X=3,Y=2)=P(\varnothing)=0。$$

故 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0	$1/35$
1	0	$6/35$	$6/35$
2	$3/35$	$12/35$	$3/35$
3	$2/35$	$2/35$	0

4.二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ce^{-(2x+4y)}, x>0, y>0 \\ 0, others \end{cases}$$ 求（1）常数 C；（2）概率

$P(X>2)$， $P(X>Y)$ 及 $P(X+Y<1)$；（3）分布函数

$F(x,y)$。

【解题思路】 考查二维连续型随机变量及其联合概率密度及边缘概率密度。考查（1）规范性 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$；（2）设 G 是平面 xOy 上的区域，点 (X,Y) 落在 G 内的概率为 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy$。（3）对二维随机变量 (X,Y)，如果存在二元非负函数 $f(x,y)$，使得对任意实数 x,y，有 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$ 则称 (X,Y) 是二维连续型随机变量。

【解题过程】 (1) 由规范性可得：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}dx\int_{0}^{+\infty} ce^{-(2x+4y)}dy=\frac{c}{8}=1$$

解得 $c=8$。

（2）$P(X>2)=P(X>2,Y<+\infty)=$

$$\int_{2}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=8\int_{2}^{+\infty}dx\int_{0}^{+\infty} e^{-(2x+4y)}dy=e^{-4},$$

$$P(X>Y)=\int_{0}^{+\infty}2e^{-2x}dx\int_{0}^{x}4e^{-4y}dy=\int_{0}^{+\infty}(1-e^{-4x})2e^{-2x}dx=\frac{2}{3}$$

$$P(X+Y<1)=\int_{0}^{1}2e^{-2x}dx\int_{0}^{1-x}4e^{-4y}dy=1-2e^{-2}+e^{-4};$$

（3）显然，当 $x\le 0$ 或 $y\le 0$ 时，

必有 $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=0$，

当$x>0$， $y>0$时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dt\int_{-\infty}^{y}f(t,s)ds=\int_{0}^{x}2e^{-2t}dt\int_{0}^{y}4e^{-4s}ds=\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-4y}\right)$$

故$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-4y}\right),x>0,y>0\\0,其他\end{cases}$。

5.在第 3 题中，求X及Y的边缘分布律，并判断X与Y是否独立。

【解题思路】考查离散型随机变量的联合分布律与边缘分布律。离散型随机变量X与Y独立$\Leftrightarrow p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，

$i,j=1,2,\cdots$。

【解题过程】由于(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	0	0	$1/35$
1	0	$6/35$	$6/35$
2	$3/35$	$12/35$	$3/35$
3	$2/35$	$2/35$	0

故 $P(X=0)=\dfrac{1}{35}$ ， $P(X=1)=\dfrac{12}{35}$ ， $P(X=2)=\dfrac{18}{35}$ ， $P(X=3)=\dfrac{4}{35}$ ； $P(Y=0)=\dfrac{5}{35}=\dfrac{1}{7}$ ， $P(Y=1)=\dfrac{20}{35}=\dfrac{4}{7}$ ， $P(Y=2)=\dfrac{10}{35}=\dfrac{2}{7}$ 。所以 X 及 Y 的边缘分布律为

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1/35 & 12/35 & 18/35 & 4/35\end{pmatrix},\ Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1/7 & 4/7 & 2/7\end{pmatrix}。$$

因 $P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0)$ 即 $p_{ij}\neq p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ ，故不独立。

6.设随机变量 X 与 Y 相互独立。下表列出 X 与 Y 的联合分布律及边缘分布律的部分数值，请完成此表。

X \ Y	y_1 y_2 y_3	$P(X=x_i)=p_{i\cdot}$
x_1 x_2	$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$	
$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	1

【解题思路】 考查离散型随机变量的联合分布律与边缘分布律。离散型随机变量 X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ ，

$i, j = 1, 2, \cdots$。

【解题过程】 由于 X 与 Y 相互独立，故 $p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，

$$P(X = x_2, Y = y_1) = P(X = x_2)P(Y = y_1) = P(X = x_2)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

解得 $P(X = x_2) = \frac{3}{4}$，

$$P(X = x_1) = 1 - P(X = x_2) = \frac{1}{4},$$

$$P(X = x_1, Y = y_1) = P(Y = y_1) - P(X = x_2, Y = y_1) = \frac{1}{24}$$

故

$X \backslash Y$	y_1 y_2 y_3	$P(X = x_i) = p_{j\bullet}$
x_1 x_2	$1/24$ $1/8$ $1/12$ $1/8$ $3/8$ $1/24$	$1/4$ $3/4$
$P(Y = y_j) = p_{\bullet j}$	$1/6$ $1/2$ $1/3$	1

7. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 有密度函数 $f(x)=\begin{cases}2x,0<x<1\\0,others\end{cases}$ 记事件 $A=(X\le a)$，$B=(Y>a)$。已知 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{3}{4}$，求常数 a。

【解题思路】考查概率的和公式与随机变量概率的计算的综合应用。

【解题过程】由题知 $P(A)=P(X\le a)=\int_0^a 2xdx=a^2$，

$P(B)=P(Y>a)=\int_a^1 2ydy=1-a^2$，故 $P(\overline{A})=1-a^2$，

$P(\overline{B})=a^2$，又

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-a^2+a^2-a^2(1-a^2)=$$

，解得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

8. (X,Y) 有密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}A\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},0<x<\frac{\pi}{2},0<y<1\\0,others\end{cases}$$ （1）求 A；

（2）求边缘密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；（3）X 与 Y 是否独立；（4）求 $P(X\le\frac{\pi}{3})$，$P(Y\ge\frac{1}{2})$。

【解题思路】考查二维连续型随机变量及其联合概率密度及边

缘概率密度。考查（1）规范性$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$；（2）$(X,Y)$关于$X$和$Y$的边缘概率密度分别为$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy,f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$；（3）设$G$是平面$xOy$上的区域，点$(X,Y)$落在$G$内的概率为$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$。（4）考查相互独立的随机变量，设$\left(X,Y\right)$是连续型随机变量，$f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$分别为$\left(X,Y\right)$的概率密度和边缘概率密度，则X、Y相互独立的条件等价于$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。

【解题过程】（1）由规范性可得：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^1\frac{A\cos x}{\sqrt{1-y^2}}dy=A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$$

解得$A=\dfrac{2}{\pi}$；

（2）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos x\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy,0<x<\dfrac{\pi}{2}\\0,\text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\cos x,0<x<\dfrac{\pi}{2}\\0,\text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\pi/2}\cos xdy, 0<y<1\\ 0,其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, 0<y<1\\ 0,其他\end{cases}$$

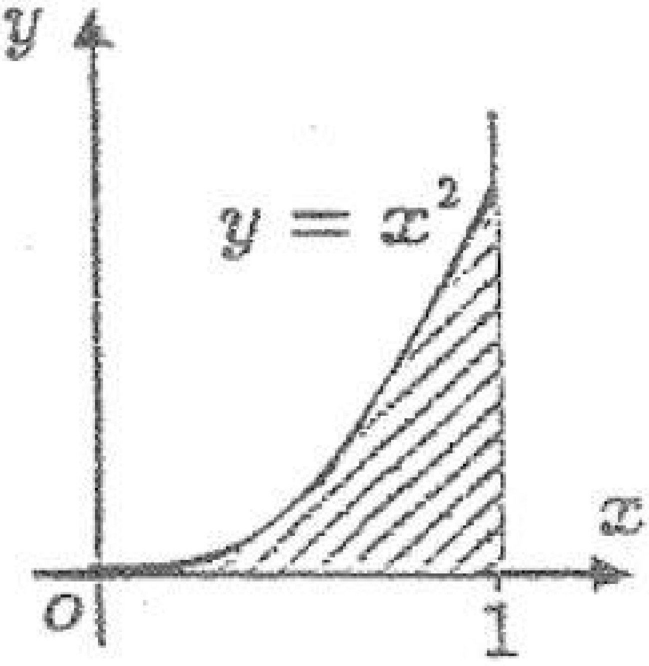
（3）$P(X\le\frac{\pi}{3})=\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{3}}f_X(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos xdx=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$P(Y\ge\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f_Y(y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy=\frac{2}{3}$$

（4）因为$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 故 X 与 Y 相互独立。

9.二维随机变量在曲线$y=x^2$，及直线$x=1$，$y=0$所围成的区域G上均匀分布。（1）求(X,Y)的概率密度函数；（2）求边缘密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$；（3）X 与 Y 是否相互独立。

【解题思路】考查二维连续型随机变量的联合概率密度和边缘概率密度及独立性。



【解题过程】如图，密度函数不为零的区域即图中阴影部分，

$\Omega=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,0<y<x^2\right\}$ 其面积为

$m(\Omega)=\int_0^1 x^2dx=\dfrac{1}{3}$，所以

（1）$f(x,y)=\begin{cases}3,0<x<1,0<y<x^2\\0,\text{其他}\end{cases}$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{x^2}3dy=3x^2,0<x<1\\0,\text{其他}\end{cases}$，

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\sqrt{y}}^{1}3dx=3(1-\sqrt{y}),0<y<1\\0,\text{其他}\end{cases}$

（3）在公共连续点$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{8}\right)$处，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以

X 与 Y 不相互独立。

10.第 3 题中：（1）求条件概率 $P(X=1|Y=2)$，$P(Y=1|X=2)$

及 $P(Y=1|X\neq 2)$；（2）写出 $Y=2$ 条件下 X 的分布律。

【解题思路】考查离散型二维随机变量的边缘分布律，条件分布律：设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j，若

$P\left\{Y=y_j\right\}>0$，则称

$$P\{X=x_i/Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},i=1,2,\cdots$$ 为

在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律。

【解题过程】由于 X 与 Y 的联合分布律为：

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0	$1/35$
1	0	$6/35$	$6/35$
2	$3/35$	$12/35$	$3/35$
3	$2/35$	$2/35$	0

（1）X 与 Y 的边缘分布律为：

$$X\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1/35 & 12/35 & 18/35 & 4/35\end{bmatrix}$$

$$Y\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 5/35 & 20/35 & 10/35\end{bmatrix}$$

$$P(X=1|Y=2)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{6/35}{10/35}=\frac{3}{5},$$

$$P(Y=1|X=2)=\frac{P(X=2,Y=1)}{P(X=2)}=\frac{12/35}{18/35}=\frac{2}{3},$$

$$P(Y=1|X\neq 2)=\frac{P(X\neq 2,Y=1)}{P(X\neq 2)}=\frac{P(Y=1)-P(X=2,Y=1)}{1-P(X=2)}=$$

（2）$X/Y=2\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1/10 & 6/10 & 3/10 & 0\end{bmatrix}$

11.在第 9 题中，求：（1）条件密度 $f_{X|Y}(x|y)$，$f_{Y|X}(y|x)$；（2）条件概率 $P\left(X\leq\frac{2}{3}\middle|Y=\frac{1}{4}\right)$及 $P\left(X\leq\frac{2}{3}\middle|Y>\frac{1}{4}\right)$。

【解题思路】考查连续型二维随机变量的条件密度函数，以及条件概率。设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$，(X,Y)关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$。若对于固定的 y，$f_Y(y)>0$，则称 $\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度，记为 $f_{X/Y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$。

【解题过程】（1）当$0<y<1$时，

$$f_{X/Y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{3}{3(1-\sqrt{y})}=\frac{1}{1-\sqrt{y}},\sqrt{y}<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

当$0<x<1$时，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{3}{3x^2}=\dfrac{1}{x^2},0<y<x^2\\0,其他\end{cases}$

（2）$f_{X/Y}(x|{}^1\!/_4)=\dfrac{f(x,{}^1\!/_4)}{f_Y({}^1\!/_4)}=\begin{cases}\dfrac{3}{3(1-\sqrt{{}^1\!/_4})}=2,{}^1\!/_2<x<1\\0,其他\end{cases}$，

所以

$$P(X<\frac{2}{3}\Big|Y=\frac{1}{4})=\int_{-\infty}^{{}^2\!/_3}f_{X|Y}(x|{}^1\!/_4)dx=\int_{{}^1\!/_2}^{{}^2\!/_3}2dx=\frac{1}{3}$$

$$P(X<\frac{2}{3}\Big|Y>\frac{1}{4})=\frac{P(X<\frac{2}{3},Y>\frac{1}{4})}{P(Y>\frac{1}{4})}=\frac{\int_{-\infty}^{{}^2\!/_3}dx\int_{{}^1\!/_4}^{+\infty}f(x,y)dy}{\int_{{}^1\!/_4}^{+\infty}f_Y(y)dy}=\frac{\int_{{}^1\!/_2}^{{}^2\!/_3}}{\int_{{}^1\!/_4}^{1}3}$$

12.设随机变量X有密度$f_X(x)=\begin{cases}3x^2,0<x<1\\0,others\end{cases}$当$X$取值为$x$，且$0<x<1$时，$U\sim U(0,x)$，求概率$P\left(Y<\dfrac{1}{2}\right)$。

【解题思路】考查条件概率密度函数、边缘概率密度函数，设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，(X,Y)关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$。若对于固定的y，$f_Y(y)>0$，则称$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在$Y=y$的条件下X的条件概率密度，记为

$f_{X/Y}(x/y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$。

(X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy, f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$。

【解题过程】 由题知当 $0<x<1$ 时，

$$f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},0<y<x\\0,\text{其他}\end{cases}$$，从而有

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}3x,0<x<1,0<y<x\\0,\text{其他}\end{cases}$$

故有 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 3xdx=\dfrac{3}{2}(1-y^2),0<y<1\\0,\text{其他}\end{cases}$，

于是有 $P(Y<\dfrac{1}{2})=\int_{-\infty}^{1/2}f_Y(y)dy=\int_0^{1/2}\dfrac{3}{2}(1-y^2)dy=\dfrac{11}{16}$。

13. 在第 3 题中，令 $Z=X+Y$，$U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$ 求出 Z，U，V 的分布律。

【解题思路】 考查离散型二维随机变量的函数的分布。

【解题过程】 由于 X 与 Y 的联合分布律为:

X \ Y	0	1	2
0	0	0	$1/35$
1	0	$6/35$	$6/35$
2	$3/35$	$12/35$	$3/35$
3	$2/35$	$2/35$	0

所以

(X,Y)	$(0,2)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,0)$	$(3,1)$
p_{ij}	$1/35$	$6/35$	$6/35$	$3/35$	$12/35$	$3/35$	$2/35$	$2/35$
$Z=X+Y$	2	2	3	2	3	4	3	4
U=max(X,Y)	2	1	2	2	2	2	3	3
V=min(X,Y)	0	1	1	0	1	2	0	1

故Z，U及V的分布律分别为:

$$Z\sim\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 10/35 & 20/35 & 5/35 \end{bmatrix},\quad U\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6/35 & 25/35 & 4/35 \end{bmatrix},$$

$$V\sim\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6/35 & 26/35 & 3/35 \end{bmatrix}。$$

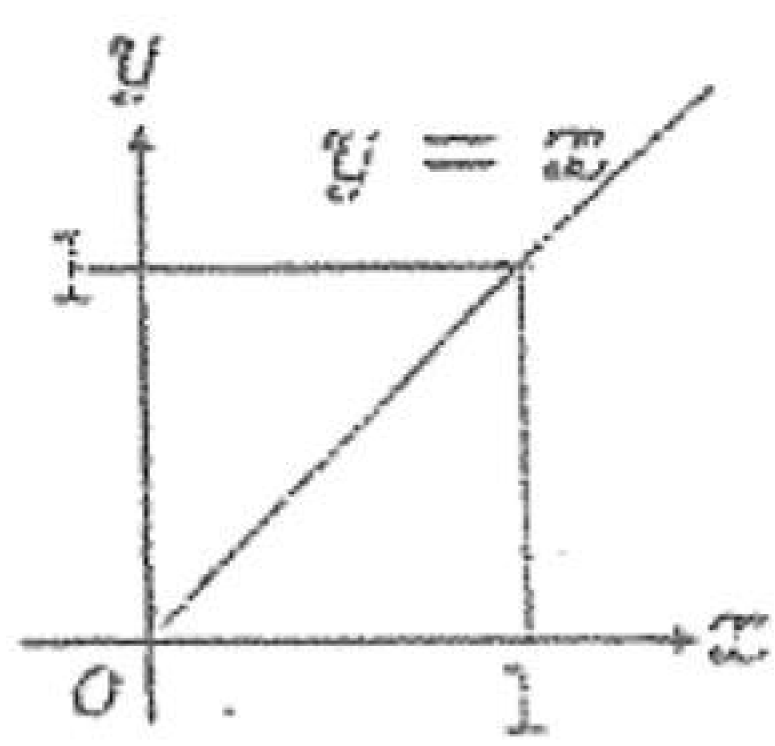
14.设(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}3y,0<x<y<1\\0,others\end{cases}$求（1）$X$及$Y$的边缘密度并判断$X$与$Y$是否独立;（2）$X$关于$Y$，$Y$关于$X$的条件密度;（3）$Z=Y-X$的密度函数。

【解题思路】考查二维连续型随机变量的边缘密度函数的求解、其独立性，及条件密度函数。（1）(X,Y)关于X和Y的边缘概率密度分别为

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$；考查相互独立的随机变量，设 (X,Y) 是连续型随机变量，$f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别为 (X,Y) 的概率密度和边缘概率密度，则 X 、Y 相互独立的条件等价于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。（2）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$。若对于固定的 y，$f_Y(y)>0$，则称 $\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度，记为 $f_{X/Y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$。

（3）考查二维随机变量的函数的分布，利用随机变量的函数分布的定义求解即可。已知 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$，求 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度 $f_Z(z)$。首先求分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=P\{(X,Y)\in D_Z\}=\iint\limits_{D_Z} f(x,y)dxdy$，其中

$D_Z=\{(X,Y)/g(X,Y)\le z\}$；然后根据 $F_Z(z)'=f_Z(z)$ 求出密度函数。



【解题过程】（1）如图，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 3ydy=\frac{3}{2}(1-x^2), 0<x<1\\ 0, 其他\end{cases},$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 3ydx=3y^2, 0<y<1\\ 0, 其他\end{cases},$$