第一章 行列式

第一节 行列式的概念

1. 填空题

（1）排列 6427531 的逆序数为____，此排列为____排列。

【知识点】此题主要考查逆序及排列的奇偶性。所谓逆序是指一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个逆序。一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数。如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为偶排列，否则称为奇排列。

【解题思路】本题中，从左向右依次看去，在这个排列中，有逆序 64，62，65，63，61，42，43，41，21，75，73，71，52，51，31，总共 15 个，所以此排列逆序数为 15 个，故此排列为奇排列。

（2）当 $i=$ _____，$j=$ _____时，排列 $1274i56j9$ 为偶排列。

【知识点】此题主要考查偶排列的定义，在上题中已经给出逆序及排列奇偶性的定义。在这里还需注意排列的定义，所谓排列是指从 1 到 n 个不同的元素排成一列。所以，在这里 i, j 只能从 3，8 中进行取值。

【解题思路】进行分类讨论：

①当 $i=3, j=8$ 时，此排列为 127435689，有逆序 74，73，75，76，43，有逆序 5 个，为奇排列，不合题意；

②当 $i=8, j=3$ 时，此排列为 127485639，有逆序 74，75，76，73，43，85，86，83，53，63，总共为 10 个，为偶排列，符合题意。

2. 用行列式的定义计算下列行列式的值。

（1）$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

【知识点】本题主要考查行列式的定义和应用。所谓 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的定义是指所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots$n 的一个排列。当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项的前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项的前面带符号，既

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

该式称为 n 阶行列式的完全展开式。

【解题思路】所以原题中不同行不同列的组合有：$a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{11}a_{23}a_{32}$，$00a_{33}$，$00a_{32}$，$0a_{22}0$，$0a_{23}0$，含零的项不用考虑，其中 $a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{11}a_{23}a_{32}$，123 的逆序为 0，为偶数，所以前面符号为正，132 的逆序数为 1，所以前面符号为负。

所以，$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

（2）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$

【知识点】本题主要考查n阶行列式的定义和应用。其定义在上题中给出。

【解题思路】观察行列式的特点，第一行只有一个不为零的项，只有当取这一样项时，乘积才不会为零，所以第一行只能取a_{1n}，第二行只有$a_{2,n-1},a_{2n}$不为零，但取值与第一行不能同列所以只能去取$a_{2,n-1}$，以此类推第三行取$a_{3,n-2}$，$\cdots$第n行取a_{n1}，做乘积得$a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}$，且$n,n-1\cdots1$的逆序数为$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

注意，本题中为下对角线行列式的形式，其值即为对角线元素的乘积，符号为逆序数的-1 次幂。

如果为上对角线行列式，则其值只为对角线元素的乘积，这两个规律以后会经常用到故要掌握。

3.证明：在全部 n 元排列中，奇排列与偶排列数相等。

【知识点】本题主要考查一个概念和一个定理：（1）对换的概念，所谓对换指的是一个排列中任意两个元素对换，其余两个元素不动，将相邻两个元素对换叫作相邻对换；（2）一个排列中任意两个元素对换，排列改变奇

偶性。

【解题过程】方法一：

证明：设 n 元排列为 $i_1, i_2, \cdots i_n$，

其中奇排列有 p 个，偶排列有 q 个，

设其中奇排列为 $A_1, A_2, A_3 \cdots A_n$，

对该奇排列作一次对换，变为偶排列

$A_1', A_2', A_3' \cdots A_n'$，

且 $A_1' \neq A_1, A_2' \neq A_2$，

即偶排列都可由即排列经过对换得来，即

$q \leq p$ ①，

同理可知 $q \geq p$ ②，

由①②知 $q = p$，

证毕。

4.在 n 阶行列式中，若负项的个数为偶数，试求 n 的最小值。

【知识点】本题主要考查n阶行列式负项的含义和n阶行列式定义。n阶行列式中，负项的出现是由于出现奇排列，对于n阶行列式，其排列的逆序数是由$1,2,3,\cdots$n 自然数的一个排列决定的，这样的排列共有$n!$个（相当于将n个数按不同排列有多少种排列方式），由上题给出的证明结论可知其中这里面的奇排列共有$\frac{n!}{2}$个。

【解题思路】由题知负项为偶数个，对n进行讨论，当$n=1,2,3$时，奇排列个数分别为$\frac{1}{2},1,3$，均不符合题意，当$n=4$时，奇排列个数为12 个，为偶数，符合题意，所以n的最小值为 4。

5.若一个n阶行列式中等于0的元素个数比n^2-n多，则此行列式为0。为什么？

【知识点】本题主要考查用行列式的定义进行计算。其定义在前面已经给出。

【解题思路】假设n阶行列式中0元素的个数为m个，

由题意可知$m>n^2-n$，而n阶行列式中总共有个n^2元素，

记非零元素的个数为t个，即$t<n$，

$\therefore$该行列式至少有一行或一列全部为0，

$\therefore$此行列式为0。

6.利用对角线法则计算三阶行列式。

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$。

【知识点】本题主要考查三阶行列式的对

角线法则：设有三阶行列

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

其值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

【解题过程】

原式 $= 2\times(-4)\times3+1\times8\times1+0\times(-1)\times1$

$-(-1)\times(-4)\times1-0\times1\times3-(-1)\times8\times2$

$= -4$

（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$。

【解题过程】本题与上题考查一样，由题

意

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 1\times b\times c^2 + a\times b^2\times 1 + 1\times c\times a^2$$

$$-1\times b\times a^2 - 1\times a\times c^2 - 1\times b^2\times c$$

$$= bc^2 + ab^2 + ca^2 - a^2b - ac^2 - cb^2$$

第二节 行列式的性质

1. 利用行列式的性质计算下列行列式。

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

【知识点】本题主要考查行列式的性质。所谓行列式的性质主要有一下几点：

（1） 行列式与它转置行列式相等，记为 $\left|A^T\right| = \left|A\right|$；

（2） 互换行列式的两行（列），行列式变号；

（3） 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零；

（4） 行列式的某一行（列）所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以此行

列式；

（5） 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面；

（6） 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零；

（7） 把行列式的某一行（列）元素乘以同一数然后加到某一行（列）对应的元素上去，行列式不变；

【解题思路】

由题意，利用行列式性质（7）可做如下变形

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$，在根据

行列式的性质（3）可得 $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$，

原式值为0。

（2）$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$。

【解题思路】

根据性质（7）采用如下变换

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1+ar_2} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

根据性质（2）交换第一行和第二行

$$\begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1+ab & a & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

将式子化成下三角形式，继续利用性质（2），（7）变形：

$$\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1+ab & a & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2+(1+ab)r_3} \begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+(1+ab)c & 1+ab \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & a+c+abc & 1+ab \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & a+c+abc & 1+ab \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+(a+c+abc)r_3} \begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1+ab+cd+ad+abcd \end{vmatrix}$$

所以原式

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1+ab+cd+ad+abcd \end{vmatrix}$$

根据下三角计算方式得：

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = (-1)^4 (1+ab+cd+ad+abcd)$$

$$= 1+ab+cd+ad+abcd$$

（3）$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$。

【解题思路】根据性质（5），可得

$$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix},$$

根据性质(7)变换得

$$adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ 0 & 0 & 2e \\ 0 & 2c & 0 \end{vmatrix},$$

根据性质（2）得

$$adf\begin{vmatrix}-b & c & e\\ 0 & 0 & 2e\\ 0 & 2c & 0\end{vmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}-adf\begin{vmatrix}-b & c & e\\ 0 & 2c & 0\\ 0 & 0 & 2e\end{vmatrix}$$

由下三角行列式的计算得

$$\begin{vmatrix}-ab & ac & ae\\ bd & -cd & de\\ bf & cf & -ef\end{vmatrix}=4abcdef$$ 。

2.证明下列恒等式。

$$(1)\begin{vmatrix}ax+by & ay+bz & az+bx\\ ay+bz & az+bx & ax+by\\ az+bx & ax+by & ay+bz\end{vmatrix}=\left(a^3+b^3\right)\begin{vmatrix}x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

（提示：将行列式按第一列分解称为两个行列式之和，再利用性质证明）

【知识点】除上题所提到的行列式基本性质外，计算中的还有一些常用性质：

（1）若行列式的某一行（列）的元素都是两个数之和，

如：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \left(a_{1i}+a_{1i}^{'}\right) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \left(a_{2i}+a_{2i}^{'}\right) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \left(a_{ni}+a_{ni}^{'}\right) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则其等于下列两个子行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n3} & \cdots & a_{n4} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}^{'} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}^{'} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}^{'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【解题思路】

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

其中：

$$\begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ax & ay & az+bx \\ ay & az & ax+by \\ az & ax & ay+bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax & bz & az+bx \\ ay & bx & ax+by \\ az & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax & ay & bx \\ ay & az & by \\ az & ax & bz \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} ax & bz & az \\ ay & bx & ax \\ az & by & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax & bz & bx \\ ay & bx & by \\ az & by & bz \end{vmatrix}$$

而有上一题中的性质（5）（6）：

$$\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax & ay & bx \\ ay & az & by \\ az & ax & bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax & bz & az \\ ay & bx & ax \\ az & by & ay \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} ax & bz & bx \\ ay & bx & by \\ az & by & bz \end{vmatrix}=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

同理可得：

$$\begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = b^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix},$$

∴原式

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \left(a^3+b^3\right) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

（2）$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

【解题思路】观察该行列式，利用第一小题的性质（7）

从第 2 列开始，将行列式的每一列都减去自己前面的一列，

得$\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$，

再进行如下变形：

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4-c_3,\,c_3-c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

最后两列成比例，故：

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

（3）$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

【知识点】本题考查行列式的计算，行列式的计算除上述的对角线法外以及教材中介绍的克莱姆法则，还有按某一行（列）展开的方法。

具体定理内容为：

设 D 为 n 阶行列式，A_{ij} 为行列式的第 i 行第 j 列元素的代数余子式，计算方法为：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，其中 M_{ij} 为 D 的余子式，

为去掉第i行所有元素，以及第j列所有元素后的子式的值。

那么对任意的$i \neq j$，有如下四个等式：

$$(1)a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=D$$
$$(2)a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=D$$
$$(3)a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$$
$$(4)a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0$$

【解题思路】

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+xc_2}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+xa_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

同理继续变形：

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+xc_2}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+xa_{n-1}+x^2a_{n-2}+\cdots x^{n-1}a_1+x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

将此行列式按照第一列展开：

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+xa_{n-1}+x^2a_{n-2}+\cdots+x^{n-1}a_1+x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}\left(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_1\right)$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_1$$

得证。

3.已知四阶行列式D的第三行元素分别为$-1,0,2,4$；第四行元素对应的余子式依次是$2,10,a,4$。试求a的值。

【知识点】本题考查代数余子式与对应元

素的关系。在上一题中我们已经给出，行列式的某一行（列）元素与非对应的代数余子式乘积之和为零。但本题中我们从两种方法进行求解以加深理解。

【解题思路】

法一：根据题意来创建一个行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

根据代数余子式的定义，A_{ij} 与元素 a_{ij} 的大小无关，构建特殊行列式

$$D\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，

可知

$$D=(-1)\times(-1)^{4+1}\times 2+0+2\times(-1)^{4+3}\times a$$
$$+4\times(-1)^{4+4}\times 4=0$$

$\therefore a=9$。

法二：由推论可知：

$$a_{31}A_{41}+a_{32}A_{42}+a_{33}A_{43}+a_{34}A_{44}=0,$$

又$\because A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,

$$\therefore (-1)^{3+1}\times(-1)\times 2+0+2\times(-1)^{3+3}\times a$$

$$+4\times(-1)^{3+4}\times 4=0$$

可得$a=9$。

4.已知 1356，2743，4056，6695，5356 均能被 13 整除，证明$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$**也能**

被 13 整除。

【知识点】本题考查行列式的性质，前面已经详细介绍本题不加赘述。

【解题思路】观察行列式最后四列，可以发现题中给出的 1356，2743，4056，6695，5356 均是由最后四列的元素组成，对行列式进行如下变形：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4+1000c_2+100c_3+10c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 & 1365 \\ 2 & 2 & 7 & 4 & 2743 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 4056 \\ 4 & 6 & 6 & 9 & 6695 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5356 \end{vmatrix}$$

可以得到理想行列式。

【解题过程】

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4+1000c_2+100c_3+10c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 & 1365 \\ 2 & 2 & 7 & 4 & 2743 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 4056 \\ 4 & 6 & 6 & 9 & 6695 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5356 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 & 1365 \\ 2 & 2 & 7 & 4 & 2743 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 4056 \\ 4 & 6 & 6 & 9 & 6695 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1365 \bullet (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 9 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+2743 \bullet (-1)^{2+5} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 9 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 4056 \bullet (-1)^{3+5} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 9 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+6695 \bullet (-1)^{4+5} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 5356 \bullet (-1)^{5+5} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$\because$ 1356，2743，4056，6695，5356 能被 13 整除

$\therefore$ 上述展开式的每一部分均能被 13 整除，

$\therefore$ 其和也能被 13 整除。

5.已知行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$，

试求下列各式的值：

（1）$3A_{12}+2A_{22}+2A_{32}+A_{42}+5A_{52}$；

（2）$A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$；

【知识点】本题考查行列式的性质，前面已经介绍了如何按行（列）展开求行列式的值，根据此性质对本题进行求解。

【解题思路】

（1）**方法一：**由题意可知 $A_{12},A_{22},A_{32},A_{42},A_{52}$ 是第二列的代数余子式，由于第二列的代数余子式的大小与第二列上的元素无关（某行某列的代数余子式是指划去该行该列剩下元素的行列式），所以我们考虑构造行列式如下：$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$，

$3A_{12}+2A_{22}+2A_{32}+A_{42}+5A_{52}$ 则表示第

二列元素与第二列元素对应代数余子式的代数和，根据行列式的展开定理可知，其值实际就为该行列式的值。

方法二：观察带求式

$3A_{12}+2A_{22}+2A_{32}+A_{42}+5A_{52}$ 的数字项为3，2，2，1，5，，刚好是行列式的第三列的元素，所以这个式子可以理解成为第三列的元素乘以第二列对应元素的代数余子式的代数和，根据行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和为零，所以

$3A_{12}+2A_{22}+2A_{32}+A_{42}+5A_{52}=0$ 。

（2）此题可以将 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$ 看成一个整体，分别按照第 2 行和第 4 行进行展开可得

$2\left(A_{41}+A_{42}+A_{43}\right)+\left(A_{44}+A_{45}\right)=0$ 和

$\left(A_{41}+A_{42}+A_{43}\right)+2\left(A_{44}+A_{45}\right)=27$，联立求解，可得 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9$，

$A_{44}+A_{45}=18$。

总结，这类题往往方法找对会减小计算量，如果第二问按一问中法一将大大增加计算，所以在计算行列式时我们应该多观察行列式，待求式的类型，再进行计算，最后得出结果。

【解题过程】（1）将行列式按第三列展开可知：

$$D=3A_{13}+2A_{23}+2A_{33}+A_{43}+5A_{53}=27$$

故：

$$3A_{12}+2A_{22}+2A_{32}+A_{42}+5A_{52}=0$$

（2）由性质可知，取行列式第二行元素：

$$2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}+A_{45}=0 \quad ①$$

取第四行元素：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+2A_{44}+2A_{45}=27 \quad ②$$

综合①②可知

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9$$
$$A_{44}+A_{45}=18$$

6.已知函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$**，试求** $f(x)=0$ **的根。**

【知识点】本题主要考查行列式的性质。

【解题思路】此题实质是将行列式求出后，构造一个含有的方程式 x，最后求出 x。观察行列式可以发现，将二，三，四

列全部加到第一行，则一列的所有元素均为$a+b+c+x$，可以作为公因数提出，从而简化行列式。

【解题过程】

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & b & c \\ x+a+b+c & b & x & c \\ x+a+b+c & b & c & x \end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & b & x & c \\ 1 & b & c & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & x-b & 0 \\ 0 & b-a & c-b & x-c \end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c)$$

所以$f(x)=0$的根为：

$$x_1=a, x_2=b, x_3=c, x_4=-(a+b+c)。$$

第三节 行列式的计算

1.利用三角行列式的结果计算下列行列式。

（1）$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$；

【知识点】本题利用行列式的性质进行计算，在上一节我们已经详细介绍过各类性质，故不再加以赘。

【解题思路】

因为此行列式每行（列）的零元素足够多，采取先展开的方式，若按第一行展开：$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

$$= x\bullet(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + y\bullet(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

其中

$$x\bullet(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x^n,$$

再将第二项中行列式按第一列展开：

$$y\bullet(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= y\bullet(-1)^{3}\bullet(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+3}y^n=(-1)^{n+1}y^n$$

所以 $D_n = x^n + (-1)^{n+1}y^n$。

（2） $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$

$\left(a_i\neq 0,i=1,2,3\cdots,n\right)$

【解题思路】法一：在计算行列式时，如果考虑上下三角形式，一般要把尽可能多的项化成零，化成零后可以按零多的项进行行列式的展开使计算简便。

$$\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\xrightarrow[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots}}\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

此时得到一个爪型行列式（这类行列式的一般步骤是把第一行（列）除第一个元素外全部化成零，然后按行（列）进行展开计算），因为$\left(a_i\neq 0.i=1,2,3,\cdots,n\right)$，所以

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[]{\substack{r_1-\frac{1}{a_2}r_2 \\ r_1-\frac{1}{a_3}r_3 \\ \vdots \\ r_1-\frac{1}{a_n}r_n}}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+a_1\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ -a_1 & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

按第一行展开得

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+a_1\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ -a_1 & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left[1+a_1\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\right]\begin{vmatrix} a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_2a_3\cdots a_n\left[1+a_1\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\right]$$

所以原式

$$=a_2a_3\cdots a_n\left[1+a_1\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\right]。$$

法二：构造如下的行列式：

$$M_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

观察可得 $M_{n+1}=D_n$，进行如下计算：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\xrightarrow[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

又得到一个爪型行列式，再因为

$\left(a_i\neq 0.i=1,2,3,\cdots,n\right)$，所以将第一行除

第一个元素全部化成零：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1-\frac{1}{a_1}r_2 \\ r_1-\frac{1}{a_2}r_3 \\ \vdots \\ r_1-\frac{1}{a_n}r_{n+1}}]{} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

接着按第一行展开，最终可求得：

$$M_{n+1}=D_n=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)。$$

说明：两种方法求得结果实质为同一结果，只是法一中没有化简；在计算行列式时，先把行（列）的倍数加到其他的行（列），或者先把其他行（列）均加至同一行（列），或者用逐行（列）的手法化简会简化计算；有时，对特别的行列式可采用补充一行一列使其值不变的方法进行计算；最后注意所谓的爪型行列式的处理过程。

【解题过程】解：由题可得

$$D_n\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\xrightarrow[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots}}\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-\frac{1}{a_n}r_n]{\substack{r_1-\frac{1}{a_2}r_2\\ r_1-\frac{1}{a_3}r_3\\ \vdots}}\begin{vmatrix}1+a_1+a_1\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) & 0 & \cdots & 0\\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0\\ -a_1 & \vdots & & \vdots\\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$=a_2a_3\cdots a_n[1+a_1+a_1\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)]$$

2.用递推法计算下列行列式。

$$(1)D_n=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}。$$

【知识点】本题考查行列式的递推算法。所谓递推是指，利用所给行列式的特点，建立 n 阶行列式与 $n-1$ 阶行列式之间的关系，由此逐级递推得出行列式的结果。

【解题思路】要得到低阶行列式，就必须对原来行列式进行展开，因为第一行（列）都有足够多的零，所以我们选择按第一(列）展开，在此我们选择按第一列展开。下面书写过程：

$$D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&0&\cdots&0&0&0\\1&2&1&0&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1&2&1\\0&0&0&0&\cdots&0&1&2\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1&2\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0\\0&1&2&1&\cdots&0&0\\0&0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&0&1&2\end{vmatrix}$$

$$=2D_{n-1}-D_{n-2}$$

逐级递推有

$$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}\cdots=D_2-D_1$$

（$D_2=3,D_1=2$），由题意$D_2-D_1=1$，采用累加法得$D_n-D_1=n-1$，所以

$D_n = n+1$。

【解题过程】解：由已知：

$D_1 = 2,$

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$

$$D_n = 2D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

$\rightarrow D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \cdots = D_2 - D_1 = 1$

累加各项得：

$D_n - D_1 = n-1$

$\therefore D_n = n+1$

$$(2)\, D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} (a \neq b)$$

【解题思路】此题解法和上题一样，故在此只做简单计算。这一题我们采用按第一

行展开，会得到

$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$，所以

$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-bD_{n-2})$，做递推得

$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})\cdots=b(D_2-aD_1)$

所以 $D_n-aD_{n-1}=b^n$，同理可得

$D_n-aD_{n-1}=a^n$，因为 $a\neq b$，所以

$$D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}。$$

【解题过程】

解： 由已知可得

$D_1=a+b$

$D_2=(a+b)^2-ab$

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-ab\begin{vmatrix}1 & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a+b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b\end{vmatrix}$$

$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$

可得：

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = \cdots = a^n(D_2 - bD_1) = a^n$$

同理可得：$D_n - aD_{n-1} = b^n$

$$\therefore\ D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

3.计算下列行列式。

$$(1)\ D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$(a \neq 0,1,2,\cdots,n)$

【知识点】本题考查范德蒙行列式。范德蒙行列式的形式以及计算方法为：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

即：第二行元素，前一元素依次减后一元素后的所有差的乘积。

【解题思路】首先把该式子换成符合范德蒙的形式，所以采用交换行的形式，变形如下：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

这里是逐步换行，对于第一行要换到$n+1$行，要交换n次，第二行换到第n行，共交换$n+(n-1)+\cdots+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$次。

【解题过程】依次换行，可化为范德蒙行列式：

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a & a-1 & \cdots & a-n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\,n!\times(n-1)!\times\cdots\times 1$$

$$(2)\,D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n\\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n\end{vmatrix}$$

$(a_i\neq 0)$

【解题思路】观察行列式可以看到每一列之间才成比例，所以这里要用到一个行列式的性：$\left|A^T\right|=\left|A\right|$，所以

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n+1}^n\\ a_1^{n-1}b_1 & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_1^n & b_2^n & \cdots & b_{n+1}^n\end{vmatrix}$$，将

每一列提出一个 a_i^n，

可得：$\begin{vmatrix} a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n+1}^n \\ a_1^{n-1}b_1 & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^n & b_2^n & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$

$$= a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{b_2}{a_2} & \cdots & \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^n & \left(\dfrac{b_2}{a_2}\right)^n & \cdots & \left(\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

再根据范德蒙行列式的公式进行计算即可。

【解题过程】

$$D_{n+1} = D_{n+1}^T = \begin{vmatrix} a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n+1}^n \\ a_1^{n-1}b_1 & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^n & b_2^n & \cdots & b_2^n \end{vmatrix}$$

$$= a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{b_2}{a_2} & \cdots & \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^n & \left(\dfrac{b_2}{a_2}\right)^n & \cdots & \left(\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

$$= a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \prod_{1 \le j < i \le n} \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_j}{a_j} \right)$$

$$(3)\, D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$$

$(a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0)$

【知识点】本题考查按行（列）展开的方法对行列式进行计算。

【解题思路】对行列式进行如下变形：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[r_n - n r_1]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ \vdots}} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -na_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

类似爪型行列式，所以将第一行除第一个元素外，每个元素化成零：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -na_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1-\frac{1}{a_2}r_2 \\ r_1-\frac{1}{a_3}r_3 \\ \vdots \\ r_1-\frac{1}{a_n}r_n}]{} \begin{vmatrix} a_1+a_1\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i} & 0 & \cdots & 0 \\ -2a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -na_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

按第一行展开即可。

【解题过程】

解：由已知可得：

$$D_n \xrightarrow[\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ \vdots \\ r_n-nr_1}]{} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -na_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-\frac{1}{a_i}r_i,(i=2,3,\cdots,n)} \begin{vmatrix} a_1+a_1\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i} & 0 & \cdots & 0 \\ -2a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

按第一行展开：

$$\therefore D_n = \begin{vmatrix} a_1 + a_1\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i} & 0 & \cdots & 0 \\ -2a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_1 + a_1\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i} \right) a_2 a_3 \cdots a_n = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i} \right)$$

4. $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}, (n-1)a + x \neq 0$，

求 $A_{n1} + A_{n2} + \cdots + A_{nn}$。

【知识点】本题考查行列式的代数余子式的性质。前面已经介绍过，此处做为复习：

A_{ij} 为行列式的第 i 行第 j 列元素的代数余子式，计算方法为：$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$，其中 M_{ij} 为 D 的余子式，为去掉第 i 行所有元素，

以及第 j 列所有元素后的子式的值。

那么对任意的 $i \neq j$，有如下四个等式：

$$(1) a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = D$$

$$(2) a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = D$$

$$(3) a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$$

$$(4) a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0$$

【解题思路】 $A_{n1} + A_{n2} + \cdots + A_{nn}$ 是该行列式第 n 行的所有元素的代数余子式之和，观察行列式，如把各行均加至某一行，则该行元素均相同为 $(n-1)a + x$，根据行列式的性质可以将其提出行列式，对行列式进行简化，此题是要求 $A_{n1} + A_{n2} + \cdots + A_{nn}$，所以我们考虑将每一行均加至最后一行。

【解题过程】

解：

$$D_n \xrightarrow{r_n+r_i,(i=1,2,\cdots,n-1)} \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)a+x & (n-1)a+x & (n-1)a+x & \cdots & (n-1)a+x \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ D_n = \left[(n-1)a+x\right]\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

按最后一行展开有：

$$D_n = \left(A_{n1}+A_{n2}+\cdots+A_{nn}\right)\left[(n-1)a+x\right]$$

而：

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2-ar_n \\ \vdots \\ r_{n-1}-nr_n}]{r_1-ar_n} \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

按第 n 列展开：

$$\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1}。$$

因为$\left[(n-1)+x\right] \neq 0$，

所以$A_{n1}+A_{n2}+\cdots+A_{nn}=(x-a)^{n-1}$。

第四节 克拉默法则

1.用克拉默法则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}.$$

【知识点】本题考查克拉姆法则计算线性方程组。

所谓克拉默法则是指：若 n 个方程 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$ 的系数行

列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$，

则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中

$$D_j=\sum_{i=1}^{n}b_iA_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

而对于线性方程组则有：

推论 1：若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$ 的系数行列

式不为零，则方程组只有零解。

推论 2：若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$ 有非零解，

则其系数矩阵为零。

故在计算线性方程组之前，往往要先判断系数行列式的值是否为零，再进行求解计算。

【解题思路】首先写出方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=60\neq 0,$$

由克拉默法则知方程有唯一解。

由题意 $D_1=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 11 & 4 & -2\\ 11 & -2 & 4\end{vmatrix}=180$，

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 11 & -2\\ 3 & 11 & 4\end{vmatrix}=60,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 11\\ 3 & -2 & 11\end{vmatrix}=60,$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3, x_2=\dfrac{D_2}{D}=1, x_3=\dfrac{D_3}{D}=1$。

2.设方程组$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+kx_2-x_2=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$**，讨论当**$k$**取何值时，此方程有非零解？当**$k$**取何值时，此方程只有零解？**

【知识点】这里主要考查两个推论的内容，由推论内容可知，方程组解的性质是由系数矩阵的行列式决定的。

【解题思路】

记系数矩阵行列式为$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$，

则：$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix}=(k+1)(k-4)$，

当$k=-1$或$k=4$时，$|A|=0$，此时方程有非零解；

当$k \neq -1$且$k \neq 4$时，$|A| \neq 0$，此时方程只有零解。

行列式自测题

一、单项选择题。

1.方程$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & -8 & 8 & x^3 \end{vmatrix}=0$的根为（　）。

$(A)1,2,3$；　　$(B)1,2,-2$；

$(C)0,-1,2$；　　$(D)1,-1,2$。

【解题思路】观察发现此行列式符合范德蒙行列式，所以可以直接由范德蒙行列式的结果进行计算，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & -8 & 8 & x^3 \end{vmatrix}$$
$$=(-2-1)(2-1)(2+2)(x-1)(x+2)(x-2)$$

令其为零，所以

$$(-2-1)(2-1)(2+2)(x-1)(x+2)(x-2)=0$$

所以$x_1=1, x_2=2, x_3=-2$。所以选B。

2.已知 3 阶行列式$|a_{ij}|$，若$b_{ij}=|a_{ij}|(i,j=1,2,3)$，则行列式$|b_{ij}|=$（ ）。

$(A)|a_{ij}|$；　　$(B)0$；

$(C)|a_{ij}|$的绝对值；　　$(D)-|a_{ij}|$。

【解题思路】此题主要考查行列式表示和性质，这里不详细解答，选B。

3.若齐次线性方程$\begin{cases}\lambda x+y+z=0\\ \lambda x+3y-z=0\\ -y+\lambda z=0\end{cases}$**仅有零解，则（ ）。**

$(A)\lambda\neq 0$且$\lambda\neq 1$；　　$(B)\lambda=0$且$\lambda\neq 1$；

$(C)\lambda=0$；　　$(D)\lambda=1$。

【解题思路】由齐次线性方程仅有零解，可以得出：$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ \lambda & 3 & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}\neq 0$，

计算得$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ \lambda & 3 & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=2\lambda(\lambda-1)$，　所以

$2\lambda(\lambda-1)\neq 0$，故应该选$A$。

4.如果线性方程$\begin{cases}x+y+z=a\\ x+y-z=b\\ x-y+z=c\end{cases}$**有唯一解，且**

$x=1$，**那么**$\begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=$（　）。

$(A)0$；　　$(B)1$；

$(C)-4$；　　$(D)4$。

【解题思路】此题考查克拉默法则，下面

详细写解题过程：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$，

由克拉默法则可知 $x = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & -1 \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$，

所以 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & -1 \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$，所以

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

再由于 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$，

所以$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$。故选$D$。

5. n **阶行列式** $D = \left|a_{ij}\right|$**，则展开式中项** $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ **的符号为（　）。**

$(A)0$；　　$(B)+$；

$(C)(-1)^n$；　　$(D)(-1)^{n-1}$。

【解题思路】所求项实质是不同行不同列n个元素的乘积，根据n阶行列式的定义，其符号取决于属于奇排列还是偶排列，故是求$2,3,4\cdots n,1$属于什么排列，这个排列的逆序数为$n-1$，所以符号为$(-1)^{n-1}$。故选D。

二、填空题。

1.排列 1347892695 的逆序数为_____。

【解题思路】根据逆序数的定义，此排列有逆序数 32，42，72，76，75，82，86，85，65，95.所以共 10 个。

2.如果 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 2 \end{vmatrix}$ **的代余子式** $A_{12}=0$，**那么代数余子式** $A_{21}=$_____。

【解题思路】由代数余子式的定义知

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=0$，所以 $x=2$，再由代数余子式定义

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ x & 2 \end{vmatrix}=2x=4$。

3.如果排列 $1274i56i9$ **为偶排列，那么** $(i,j)=$_____。

【解题思路】所谓排列是指从 1 到 n 个不同

的元素排成一列。而是奇排列还是偶排列则根据逆序数的总数定义，所以，在这里i, j只能从3，8中进行取值。进行讨论：

①当$i=3, j=8$时，此排列为127435689，有逆序74，73，75，76，43，有5个，为奇排列，不合题意；

②当$i=8, j=3$时，此排列为127485639，有逆序74，75，76，73，43，85，86，83，53，63，总共为10个，为偶排列，符合题意。

4.行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 0 & 12 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} =$ _____。

【解题思路】此题可以一直瞄准零多的项按照行列式的展开定义进行展开，我们这里首先按第一行展开，对展开中的行列式

按第二行展开，再对展开中行列式按第三行展开，下面书写计算步骤：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 0 & 12 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 \\ 4 & 11 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\bullet$$

设行列式 $D=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$**，则** D **的展开式中** x^3 **的系数为_____。**

【解题思路】此题可以直接展开来看，但是计算相当复杂，我们这里不采用这种方式。在这里我们采用行列式的定义进行计算，要使展开项中出现待求的 x^3，我们只需把不同项不同列 4 个元素的乘积中含有 x^3 的所有

组合找出，并且确定其排列的奇偶性，便可确定每个x^3的系数，相加即可得x^3的系数，在这里，只有一种情况即满足定义又能出现x^3，第一列取 1，第二列取第一行上的x，第三，四列均取x，排列 2143 的逆序数为 1，所以排列为奇排列，所以x^3的系数为-1。

三、判断题。（正确填√，错误的填×）

1.n阶行列式$\left|a_{ij}\right|$的展开式中含有a_{11}的项数为n。　　（　）

【解题思路】错误，因为展开式是不同行不同列n个元素乘积的代数和，所以按照排列组合，含有a_{11}且满足定义的项共有$(n-1)(n-2)\cdots 1=(n-1)!$。所以此题错误。

2.若 n 阶行列式 $\left|a_{ij}\right|$ 的每行元素之和均为零，则 $\left|a_{ij}\right|$ 等于零。　　（　）

【解题思路】正确。

方法一：设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，由

$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，所以齐次线性方程 $Ax=0$ 有非零解，所以由克拉默法则推论可得出系数矩阵行列式为零，即 $\left|A\right|=0$。

方法二：由已知，系数行列式

$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$ 的第 2 至 n 列元素依次加至

第 1 列，则可变换可到：$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = 0$

3.若 V 为范德蒙行列式，A_{ij} 是代数余子式，

则 $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = V$ 。　　（　）

【解题思路】正确。

设任意范德蒙行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

而 $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} A_{1j} + \sum_{j=1}^{n} A_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} A_{nj}$，

其中可以看成第一行元素与其元素对应的代数余子式乘积代数和，根据行列式展开式的定义有 $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = V$ 。其余

$\sum_{j=1}^{n} A_{2j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} A_{nj}$ 的均看做第一行元素分别与其他行元素对应的代数余子式的乘积和，根据展开式的性质有

$\sum_{j=1}^{n} A_{2j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} A_{nj} = 0$。所以

$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = V$。故命题正确。

4.若 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 满足 $a_{ij} = A_{ij}(i, j = 1,2,3,\cdots,n)$，则 $|a_{ij}| > 0$。

（　）

【解题思路】错误。由题意可知

$a_{11} = A_{11}, a_{12} = A_{12}, \cdots, a_{1n} = A_{1n}$，将行列式按第一行展开得

$|a_{ij}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$，所以

$|a_{ij}| = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2$，故 $|a_{ij}| \geq 0$。故

命题错误。

5.若 n 阶行列式 $\left|a_{ij}\right|$ 的展开式中每一项都不为零，则 $\left|a_{ij}\right| \neq 0$。 （　）

【解题思路】错误。将行列式按 i 行展开得 $\left|a_{ij}\right| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$，就算展开式中每一项都不为零，但是代数和的形式可能为零，比如当出现 $a_{i1}A_{i1} = -\left(a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}\right)$ 时，行列式为零。所以命题错误。

四、已知行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$**，试计算** $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$。

【解题思路】此题是求第四行元素对应的代数余子式的和，根据前面所讲的某行元素的

代数余子式与该行元素大小无关，所以我们构造行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$。由题可知

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$，所以实质转化为求构造行列式的值，

【解题过程】构造行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&5\\0&0&-1&-7\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-1$$

所以 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=-1$.

五、计算行列式 $\begin{vmatrix}103&100&204\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix}$。

【解题思路】此题若直接计算因为数字较大，计算量会相当复杂，所以我们不采用这种方式。观察行列式，第一列和第三列的数字基本接近整数所以我们可以将这些数看作整数和另一个数的和差形式，再考虑将行列式变成多个行列式的和进行计算。注意，再化为多个子行列式后，会有些字行列式的对应列成比例，故可大大简化计算。

【解题过程】

$$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 100+3 & 100 & 200+4 \\ 200+(-1) & 200 & 400+(-5) \\ 300+1 & 300 & 600+0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 100 & 100 & 200 \\ 200 & 200 & 400 \\ 300 & 300 & 600 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 100 & 100 & 4 \\ 200 & 200 & -5 \\ 300 & 300 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 100 & 200 \\ -1 & 200 & 400 \\ 1 & 300 & 600 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix} = 100 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2000$$

六、计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}。$$

【解题思路】此题属于含有未知数的一个行列式，所以我们考虑把某一行或者某一列尽可能的化成零，化法很多，下面给出其中一种。

【解题过程】

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x & -x & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\xrightarrow{c_3+c_4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & x-1 \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 1 & x-1 & 0 & -1 \\ x & -x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

按第三列展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x & x-1 \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 1 & x-1 & 0 & -1 \\ x & -x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}x\begin{vmatrix} 0 & 0 & -x \\ 1 & x-1 & -1 \\ x & -x & 0 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 0 & 0 & -x \\ 1 & x-1 & -1 \\ x & -x & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}x(-x)\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ x & -x \end{vmatrix}$$

$$=(-x^2)[-x-x(x-1)]$$

$$=x^4$$

所以$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x^4$。

七、计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & b & c \\ 0 & -1 & 1-b & c \\ 0 & 0 & -1 & 1-c \end{vmatrix}$。

【解题思路】此题比较简单，主要是行列式计算基本，努力化成三角式，直接计算。

【解题过程】

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & b & c \\ 0 & -1 & 1-b & c \\ 0 & 0 & -1 & 1-c \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & -1 & 1-b & c \\ 0 & 0 & -1 & 1-c \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 & 1-c \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & b & c\\ 0 & 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

八、计算下列行列式$\begin{vmatrix}1 & -3 & 2 & 2\\ -3 & 4 & 0 & 9\\ 2 & -2 & 6 & 2\\ 3 & -3 & 8 & 3\end{vmatrix}$。

【解题思路】此题也是考查行列式的计算，再次重复基本方法是化成三角式和将某行（列）尽可能多的化成零按定义展开。

【解题过程】

$$\begin{vmatrix}1 & -3 & 2 & 2\\ -3 & 4 & 0 & 9\\ 2 & -2 & 6 & 2\\ 3 & -3 & 8 & 3\end{vmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2+3r_1\\ r_3-2r_1}}\begin{vmatrix}1 & -3 & 2 & 2\\ 0 & -5 & 6 & 15\\ 0 & 4 & 2 & -2\\ 0 & 6 & 2 & -3\end{vmatrix}$$

按第一列展开

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 6 & 15 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 6 & 15 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 6 & 15 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left[15+60-36-90+36-10\right] = -50$$

九、计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}。$$

【解题思路】多阶行列式一般在计算时需要先观察，找出行列式的特点，观察此行列式，如果把每一列的元素都加至第一列，则第一列所有元素都为$b+\sum_{i=1}^{n} a_i$，将其提出行列式会得到第一列元素都为 1 的行列式，此题由于的值不定，所以我们需要分来讨论。

【解题过程】:

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$=\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

① $b\neq 0$ 时，

$$\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots}}\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=b^{n-1}\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

②当$b=0$时，其值为零。

十、计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$。

【解题思路】对于多阶行列式，重在找到合理的化简方法，化为对角行列式最好。

【解题过程】

由已知：$n=1$时，$D=1$，$n\geq 2$时：

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ \vdots \\ r_n-2r_1}]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 \\ 0 & -2 & -1 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & n-4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4-r_2 \\ \vdots \\ r_n-r_2}]{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

第二章 矩阵

第一节 矩阵的概念及运算

1.判断题。（正确填√，错误的填×）

（1）设 A 与 B 为 n 阶方阵，λ 为实数，则 $\left|(\lambda)AB\right|=\left|\lambda\right|\bullet\left|A\right|\bullet\left|B\right|$。（ ）

【知识点】本题主要考查如下基本公式：①若 A 是 n 阶矩阵，则 $\left|kA\right|=k^n\left|A\right|$。②若 A,B 是 n 阶矩阵，则 $\left|AB\right|=\left|A\right|\left|B\right|$。所以 $\left|(\lambda A)B\right|=\lambda^n\left|A\right|\left|B\right|$，故命题错误。

（2）设 A 与 B 为 n 阶方阵，则 $\left(AB\right)^K=A^KB^K$。（ ）

【知识点】本题主要考查矩阵一般不满足交换律，$\left(AB\right)^K=\left(AB\right)\cdots\left(AB\right)\neq A^KB^K$，所以命题错误。

（3）设 A 与 B 为 n 阶方阵，则 $(A\pm B)^2=$

$A^2\pm 2AB+B^2$。　（　）

【知识点】本题主要考查结合律和不满足交换律，

$$(A\pm B)^2=(A\pm B)(A\pm B)$$
$$=A^2\pm AB\pm BA+B^2\neq A^2\pm 2AB+B^2,$$

所以命题错误。

（4）设 A 为 n 阶方阵，则 $(A\pm E)^2=$

$A^2\pm 2A+E$。　（　）

【知识点】本题主要考查矩阵基本公式，

$$(A\pm E)^2=(A\pm E)(A\pm E)$$
$$=A^2\pm AE\pm EA+E^2=A^2\pm 2A+E$$

所以命题正确。

（5）设 A 与 B 为 n 阶方阵，则 $(A+B)(A-B)$

$=A^2-B^2$　（　）

【知识点】本题主要考查结合律和不满足交换律，

$$(A+B)(A-B)$$
$$=A^2-AB+BA+B^2\neq A^2-B^2$$

所以命题错误。

（6）设 A 与 B 为 n 阶方阵，则 $\left|A^T+B^T\right|=\left|A+B\right|$。（　）

【知识点】主要考查矩阵和转置矩阵的公式，$\left|A^T+B^T\right|=\left|(A+B)^T\right|=\left|A+B\right|$，所以命题正确。

（7）设 A 与 B 为 n 阶方阵，则 $\left|A^TB^T\right|=\left|AB\right|$（　）

【知识点】主要考查矩阵和转置矩阵的公式，$\left|A^TB^T\right|=\left|(BA)^T\right|=\left|BA\right|=\left|B\right|\left|A\right|=\left|A\right|\left|B\right|$，所以命题正确。

2. 选择题。

（1）设 A,B,C 均为 n 阶方阵，$AB=BA$,

$\mathrm{AC}=\mathrm{CA}$,**则 $ABC=$（　　）。**

（A）ACB　　（B）CBA

（C）BCA　　（D）CAB

【解题思路】由题可得：

$ABC=BAC=BCA$，所以选 C 。

（2）若 A 为实对称矩阵，则 $\left|A^T A\right|$ 的值为

（　）。

（A）≤ 0　　（B）≥ 0

（C）$=0$　　（D）不能确定

【解题思路】$\left|A^T A\right|=\left|A^T\right|\left|A\right|=\left|A\right|^2\geq 0$，所以选 B 。

（3）设 A 为方阵，$f(x)=x^2-x-2$, 则 $f(\mathrm{A})$ 为（　）。

（A）A^2-A-2

（B）A^2-A-2E

（C）$(A+2E)(A-E)$

（D）不能确定

【解题思路】实质考查矩阵方程，将矩阵代入 $f(A)=A^2-A-2E$，这里容易错误选择第一个，注意第一个不是矩阵，所以选 B 。

3.设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，**计算：**

（1）$\frac{1}{2}A-3B$；（2）AB^T；（3）A^TB。

【知识点】考查矩阵的基本计算，在这里首先给出矩阵基本计算的公式：

①矩阵乘法：设 $A=\left[a_{ij}\right]$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=\left[b_{ij}\right]$ 是 $n\times s$ 矩阵，那么 $m\times s$ 矩阵

$C=\left[c_{ij}\right]$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\text{。}$$

称为 A 与 B 的乘积，记为 $C=AB$ 。

②矩阵的加减法，简单说就是两个矩阵对应元素的加和为矩阵加法，减法看成加负的。

【解题过程】

（1）$\frac{1}{2}A-3B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{13}{2} & 1\\ -\frac{7}{2} & 3\\ 4 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

（2）$AB^T=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\2&-1&1\\-4&-1&1\end{pmatrix}$

（3）$A^TB=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-5&3\\-7&3\end{pmatrix}$

3.已知 $A=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$，计算 $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}^n$。

【解题思路】因为待求行列式的次方太高，直接计算比较复杂，所以先计算两个进行观察，再进行递推。

【解题过程】

由已知：$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\lambda & 1\end{pmatrix}$，

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3\lambda & 1\end{pmatrix},$$

递推可得：

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n\lambda & 1\end{pmatrix}$$

设 A 为实对称矩阵，若 $A^2=0$，证明 $A=O$。

【知识点】本题考查实对称矩阵。若 A 为实对称矩阵，则 $A^T=A$。

【解题过程】

设：$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$，

则 $A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{n1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$，

由已知可得 $a_{ij}=a_{ji}\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$，

因为 $A^2=AA^T$，令 $C=A^2$，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}{a_{ik}}^2=0\Rightarrow a_{ik}=0$$
$$\left(k=1,2,\cdots,n\right)$$

所以 $a_{ij}=0\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$，即 $A=O$

5．设 A 为奇数阶反对称矩阵，证明 $\left|A\right|=0$。

【知识点】本题考查反对称矩阵，若 A 为反对称矩阵，则 $A^T=-A$。并注意到矩阵计算的性质：若 A 是 n 阶矩阵，则 $\left|kA\right|=k^n\left|A\right|$。

【解题过程】

由已知：

$$\left|A\right|=\left|-A^T\right|=\left(-1\right)^n\left|A^T\right|=\left(-1\right)^n\left|A\right|,$$

因 n 为奇数阶，所以 $\left|A\right|=-\left|A\right|$，即 $\left|A\right|=0$。

6．设 A 为 n 阶方阵，且满足 $AA^T=E$，若 $|A|<0$，求 $|E+A|$。

【知识点】本题考查矩阵运算。主要掌握：若 A,B 是 n 阶矩阵，则 $|AB|=|A||B|$；A^T 是 A 的转置矩阵，则 $|A^T|=|A|$，并有 $|E|=1$。以及矩阵计算的分配率：

$$A(B+C)=AB+AC$$

【解题过程】

由已知：$|AA^T|=|A||A^T|=|A|^2=|E|=1$，

因为 $|A|<0$，所以 $|A|=-1$

对已知两边加上 A 得：$AA^T+A=E+A$，

两边取行列式

$$|AA^T+A|=|A(A^T+E)|=-|A^T+E|=|A+E|$$

所以$|A+E|=0$。

7．试证明：设A为奇数阶方阵，且满足$AA^T=E$，$|A|=1$，则$|E-A|=0$。

【解题过程】

证明：由已知可得：

$$|AA^T-A^T|=|(A-E)A^T|=|A-E||A^T|$$
$$=|A-E|=(-1)^n|E-A|$$

因n为奇数阶，

所以$-|E-A|=|E-A|$，

即$|E-A|=0$。

8．设A，B均为实对称矩阵，证明：AB为对称矩阵的充要条件是$AB=BA$。

【知识点】本题考查充要条件的证明，注意在证明充要条件时，要分别从充分性以及必要性两方面进行证明，缺一不可。

【解题过程】

证明： 充分性：由题意 $A=A^T, B=B^T$，

$AB=(AB)^T=B^TA^T$，

所以 $AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$。

必要性：由题意 $A=A^T, B=B^T$，$AB=BA$，

所以 $AB=BA=B^TA^T=(AB)^T$，

即 AB 为对称矩阵。

所以 AB 为对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$ 得证。

9．设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，且 A 与 B 的各行元素之和为1。若 α 是 $n\times1$ 矩阵，且每个元素都为1，求证：

（1）$A\alpha=\alpha$；

（2）AB 的各行元素之和都等于1；

（3）若 A，B 各行元素之和分别为 k，t，试求 AB 各行元素之和。

【解题过程】

证明：（1)由题意设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

所以 $A\alpha=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n} \\ a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\alpha$$，得证。

（2）由（1）问可知，$B\alpha=\alpha$，

所以 $AB\alpha=A\alpha=\alpha$，

故 AB 的各行元素之和都等于 1。

（3）由题意设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

所以

$$A\alpha=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n} \\ a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn} \end{pmatrix}$$

因为 A 与 B 的各行元素之和分别为 k，t，

所以 $A\alpha=\begin{pmatrix} k \\ \vdots \\ k \end{pmatrix}$；$B\alpha=\begin{pmatrix} t \\ \vdots \\ t \end{pmatrix}$，

$$AB\alpha=A\begin{pmatrix} t \\ \vdots \\ t \end{pmatrix}=tA\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=tk\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

故 AB 各行元素之和为 kt。

第二节 逆矩阵

1.判断题。（正确填√，错误的填×）

以下设A，B，C，均为n阶方阵，

（1）$AB=\mathrm{O}\Rightarrow A=\mathrm{O}$或$B=\mathrm{O}$（　）

【知识点】本题考查零矩阵。矩阵O为内部所有元素都为0的矩阵，称为零矩阵，两个零矩阵相乘，结果一定为零矩阵，但反之则不一定，举个反例$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$，$AB=O$，但$A\neq O$且$B\neq O$。所以命题错误。

（2）若$AB=AC$，则$B=C$（　　）。

【知识点】本题考查矩阵的乘法。此处若$A=O$，则$AB=AC=O$，但B,C未必相等

（3）若$A^2=A\Rightarrow A=E$或$A=\mathrm{O}$(　　)。

【知识点】本题依旧考查零矩阵相关性质，

举个反例 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，说明此命题错误。

（4）$A^{*}\left(A^{*}\right)^{*}=\left|A^{*}\right|E$（　　）。

【知识点】本题考查伴随矩阵的相关性质。

伴随矩阵的定义为：设 $A=\left[a_{ij}\right]$ 是 n 阶矩阵，行列式 $|A|$ 的每个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^{*}=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵。

常用的伴随矩阵公式有：

$$AA^{*}=A^{*}A=|A|E, A^{*}=|A|A^{-1}, \left(A^{*}\right)^{-1}$$

$$=\left(A^{-1}\right)^{*}=\frac{1}{|A|}A,\left(A^{*}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{*}$$

本题中，推导过程为：

$A^{*}\left(A^{*}\right)^{*}=A^{*}\left(A^{*}\right)^{-1}\left|A^{*}\right|=\left|A^{*}\right|E$。所以此命题正确。

2. 填空题。

(1)设 $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $|A|=$ _____，

$A^{*}=$ _____，$A^{-1}=$ _____。

【知识点】本题考查矩阵行列式、伴随矩阵以及逆矩阵的计算，前面已经介绍了伴随矩阵的计算方法，这里重申逆矩阵定义：

设 A 为 n 阶矩阵，如果存在 n 阶矩阵 B 使得 $AB=BA=E$，成立，则称 A 是可逆矩阵，记作 $A=B^{-1}$。

逆矩阵常用计算方法为：（1）伴随矩阵法 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$；（2）初等变换法：构造矩阵 (A,E)，利用初等行变换变为形式为 (E,B) 的矩阵形式，则矩阵 $B=A^{-1}$。

【解题思路】:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&3\\0&1&2\\1&0&1\end{vmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_1}-\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&1&1\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}-\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&-1\end{vmatrix}=1$$

下面开始介绍逆矩阵的求法：用初等变换进行求**解**：

$$(A,E)=\begin{pmatrix}2&1&3&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$。

$$A^* = |A| A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}。$$

本题反过来先计算伴随矩阵，再计算逆矩阵也是可以的，请读者自行练习。

（2）设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=4$，则 $|A^{-1}|=$ _____，$|(4A)^{-1}|=$ _____，

$\left|\frac{1}{3}A^{*}-4A^{-1}\right|=$ _____，$|(A^{*})^{T}|=$ _____。

【知识点】本题依旧考查矩阵的相关性质，在这里注意逆矩阵的一些常用性质：

$(1)\left(A^{-1}\right)^{-1}=A;$

$(2)(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}(k\neq 0);$

$(3)(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1};$

$(4)\left(A^{-1}\right)^{n}=\left(A^{n}\right)^{-1};$

$(5)\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1};(6)\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}.$

【解题思路】直接利用相关公式进行计算。

$$\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{4},$$

$$\left|(4A)^{-1}\right|=\left|\frac{1}{4}(A)^{-1}\right|=\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{64}\bullet\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$$

$$\left|\frac{1}{3}A^{*}-4A^{-1}\right|=\left|\frac{1}{3}|A|A^{-1}-4A^{-1}\right|=\left|\frac{4}{3}A^{-1}-4A^{-1}\right|$$

$$=\left|\left(-\frac{8}{3}\right)A^{-1}\right|=\left(-\frac{8}{3}\right)^{3}\bullet\frac{1}{4}=-\frac{128}{27}$$

$$\left|\left(A^{*}\right)^{T}\right|=\left|A^{*}\right|=|A|^{3-1}=16。$$

（4）已知 $A^{*}BA=2BA-12E$，

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $B=$ _____。

【解题思路】根据前面介绍的相关性质，本题直接进行计算。

先将要求的矩阵整理到一边得：

$12E = 2BA - A^*BA = \left(2E - A^*\right)BA$，所以

$12A^{-1} = \left(2E - A^*\right)B$，计算可知：

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = -2,$$

所以 $A^* = |A|A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$$2E - A^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

所以 $\left(2E - A^*\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$。

由题意 $B = 12\left(2E - A^*\right)A^{-1}$，将计算结果

全部代入 $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & -6 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$。

（4）设 $\begin{pmatrix}1 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$，则 $X=$ ____。

【知识点】本题考查逆矩阵计算。在这里注意到另一个常用性质，即 2 阶矩阵的伴随矩阵求法，是可以直接写出的，若 $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$，则 $A^*=\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$。

【解题思路】由题意 $X=\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}^{-1}$

利用上述性质计算：

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & 1\end{pmatrix}}{2+4}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

将逆矩阵代入得

$$X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

3.设 $A^k=0$，证明：

$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$。

【解题思路】证明实质是证明等式后面的是否为等式前面矩阵的逆矩阵，所以转化为证明$\left(E-A\right)\left(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\right)=E$，

【解题过程】

证明：因为$\left(E-A\right)\left(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\right)$

$=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$
$-\left(A+A^2+\cdots+A^{k-1}+A^k\right)$

而 $A^k=0$，

所以 $\left(E-A\right)\left(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\right)=E$。

故 $(E-A)$ 与 $E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$ 互为逆矩阵，

即 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$。

4.设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明：A 及 $A+2E$ 都可逆，并求其逆矩阵。

【解题思路】此类问题一般是瞄准待求目标，使目标与一个矩阵的乘积为单位矩阵，这样说明可逆，同时也能求出其逆矩阵。希望读者从这里可以明白，求谁就构造谁的逆矩阵等式。

【解题过程】

证明：由已知： $A^2-A-2E=O$，

$$\Rightarrow A^2-A=2E\Rightarrow A\left(A-E\right)$$

$$=2E\Rightarrow A\frac{\left(A-E\right)}{2}=E$$

所以A可逆，其逆矩阵为$\frac{(A-E)}{2}$。

同理，由题中等式可得

$(A+2E)(A-3E)+4E=0$。

所以$(A+2E)\left[-\frac{(A-3E)}{4}\right]=E$，

所以$A+2E$可逆，其逆矩阵为$-\frac{(A-3E)}{4}$。

5. 设A为n阶方阵，并证明：

(1)若$|A|=0$，则$|A^*|=0$；

(2)$|A^*|=|A|^{n-1}$；

(3) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$，$(|A|\neq 0)$。

【解题思路】这里可以用伴随矩阵的相关公式分析。常见的伴随矩阵公式在这里再次复习：

$(1)AA^*=A^*A=|A|E;(2)A^*=|A|A^{-1};(3)\left(A^*\right)^{-1}$

$=\left(A^{-1}\right)^*=\dfrac{1}{|A|}A;(4)\left(A^*\right)^T=\left(A^T\right)^*$

对于第一问，最简单的是用秩进行证明，需要用到如下公式：矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

$\Leftrightarrow r(A)=n$；

并且，$r\left(A^*\right)=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)<n-1 \end{cases}$

有关于矩阵的秩将在后面学到，此处做为了解即可。

【解题过程】

(1)方法一：

证明： $|A|=0\Rightarrow r(A)<n$

$\Rightarrow r\left(A^*\right)<n\Rightarrow \left|A^*\right|=0$。

方法二：

证明：假设$\left|A^*\right|\neq 0$，

则A^*可逆，则有$AA^*(A^*)^{-1}=A\neq O$

而$AA^*\left(A^*\right)^{-1}=\left|A\right|\left(A^*\right)^{-1}=O$，与上述假设矛盾，故$\left|A^*\right|=0$。

（2）$\left|A^*\right|=\left|A^{-1}\left|A\right|\right|=\left|A\right|^{n-1}$。在前面的公式中已经提到，请直接记忆。

(3)$\left(A^*\right)^*=\left(A^*\right)^{-1}\left|A^*\right|$

$=\left(A^{-1}\right)^*\left|A^*\right|=\left(A^{-1}\right)^{-1}\left|\left(A\right)^{-1}\right|\left|A^*\right|$

$=A\bullet\left|A\right|^{-1}\left|A\right|^{n-1}=A\left|A\right|^{n-2}$

6.设n阶非零方阵A的伴随矩阵为A^*，且$A^*=A^T$，求证：$\left|A\right|\neq 0$。

【解题思路】本题注意理解矩阵元素的特点，对于题中条件$A^*=A^T$，要能够立即联想到

公式 $AA^* = AA^T = |A|E$，而对于非零矩阵有 $AA^T \neq O$，这在以后的学习中将是常用性质，在这里我们进行详细证明。

【解题过程】

方法一：证明：设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，

因为 $A^* = A^T$，所以 $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，

又因为 $AA^* = |A|E$，

令 $C = AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

因为 $c_{11} = {a_{11}}^2 + {a_{12}}^2 + \cdots + a_{1n}^2 \neq 0$，

所以 C 为非零矩阵，所以 $|A| \neq 0$。

方法二：

因为 $A^* = A^T$，所以 $a_{ij} = A_{ij}$，

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
$$= a_{i1}{}^2 + a_{i2}{}^2 + \cdots + a_{in}{}^2$$

因为 A 为非零矩阵，所以总有一行某个元素会不为零，所以 $|A| \neq 0$。

7.设 A 是 n 阶方阵，证明：若存在非零矩阵 B 使 $AB = O$，则 $|A| = 0$。

【解题思路】本题中要联想到线性方程组 $Ax = 0$ 的解与系数矩阵行列式的关系，进行证明，即 $|A| = 0$，方程组有非零解，反之方程组无解。

【解题过程】

方法一：

假设 $|A| \neq 0$，则 $Ax = 0$ 只有零解，

若 $AB=O$，则 $B=O$，

与已知非零矩阵 B 矛盾，

所以假设不成立，即 $|A|=0$ 。

方法二：

设列向量矩阵 $B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_s\end{pmatrix}$

由已知，存在非零向量 β_i，使得 $A\beta_i=0$，

即齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解，

则 $|A|=0$。

第三节 分块矩阵

1. 设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

利用分块矩阵计算 AB **。**

【知识点】此题考查分块矩阵的一个重要应用，通过分块矩阵使计算简便，分块矩阵的计算法则：

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix};$$

对于分块矩阵的计算，只要合理对矩阵进行分块即可。

【解题思路】

通过观察两个矩阵，我们进行如下分块：

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{和} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right),$$

所以可以看成 $AB=\begin{pmatrix} C & D \\ 3E & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & H \\ I & O \end{pmatrix}$，

由此进行计算。

【解题过程】

$$AB=\left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} C & D \\ 3E & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & H \\ I & O \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} DI & CH \\ O & 3EH \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$a_{1\ldots}a_n \neq 0$，**利用分块矩阵求** A^{-1} 。

【知识点】这里要用到分块矩阵另一常用性质：若 B,C 分别是 m 阶与 s 阶可逆矩阵，则

$$\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} B^{1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix};$$

若 B,C 分别是 m 阶与 s 阶可逆矩阵，则

$$\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix};$$

【解题过程】

解：

$$A=\left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ \hline a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$,

$$C^{-1}=\left(\frac{1}{a_n}\right),$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} \end{pmatrix},$$

将其代入得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}。$$

3. 设 A 为4阶矩阵，且 $|A|=2$，将 A 按列分块 $A=(A_1,A_2,A_3,A_4)$，其中 $A_j\,(j=1,2,3,4)$ 是 A 的第 j 列，求 $|A_3-2A_1,3A_2,-A_4,-A_1|$。

【解题思路】此题是将行列式的性质，分块矩阵，抽象行列式相结合进行考查，所以做题时三个要进行结合，直接根据行列式的性质和分块矩阵特点进行计算即可。注意到本

题所分的四个分块子矩阵中，第 2～3 个子矩阵都是可以按行列式的性质将前边系数提出，第 1 个子矩阵则按分块矩阵的加法性质进行计算。

【解题过程】

$$\left|A_3-2A_1,3A_2,-A_4,-A_1\right|$$
$$=3\left|A_3-2A_1,A_2,A_4,A_{1,}\right|$$
$$=3\left|A_3,A_2,A_4,A_1\right|+3\left|-2A_1,A_2,A_4,A_1\right|$$
$$=3\left|A_1,A_2,A_3,A_4\right|=3\left|A\right|=6\text{。}$$

4. 设 A，B 均为 n 阶方阵，令 $Q=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$。

(1)**证明：** Q 可逆的充要条件为 A,B 均可逆。

(2)设 $P=\begin{pmatrix}U & V\\ W & X\end{pmatrix}$，且满足 $PQ=$

$\begin{pmatrix}E & O\\ O & E\end{pmatrix}$，试求 U,V,W,X；

(3)当Q可逆时，求Q^{-1}。

【解题思路】本题注意充要条件的证明，要分别从充分性及必要性两方面进行证明，再合理运用分块矩阵性质即可。而可逆矩阵的常用证明方法有：①$|A|\neq 0$，则可逆。②$r(A)=n$，则可逆。③能找到另外一个矩阵与其乘积为单位矩阵，则可逆。④特征值之乘积不为零则可逆。⑤必要时用反证法。

【解题过程】

（1）**证明：**

充分条件：已知A,B是可逆的，

则$Q^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$存在，$Q$可逆。

必要条件：已知Q可逆，

则$|Q| \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow (-1)^{n^2} |A||B| \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0, |B| \neq 0$，

所以A, B是可逆的。

（2）由题意可得

$$\begin{pmatrix} U & V \\ W & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} VB & UA \\ XB & WA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

所以$VB = E, UA = O, XB = O,$

$WA = E \Rightarrow V = B^{-1}, U = O, X = O, W = A^{-1}$

由第（2）可知$Q^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$。

5.已知A为n阶可逆矩阵，A_1为$n \times 1$矩阵，

b为常数，

$$P=\begin{pmatrix} E & O \\ -A_1^T A^* & |A| \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} A & A_1 \\ A_1^T & b \end{pmatrix}。$$

(1)计算 PQ **。**

(2)证明： Q **可逆的充要条件为** $A_1^T A^{-1} A_1 \neq b$ **。**

【解题过程】

（1） $PQ=\begin{pmatrix} E & O \\ -A_1^T A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A_1 \\ A_1^T & b \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} A & A_1 \\ -A_1^T A^* A_1 + A_1^T |A| & b|A| - A_1^T A^* A_1 \end{pmatrix},$$

其中 $-A_1^T A^* A_1 = -A_1^T |A| A^{-1} A = -A_1^T |A|$，

所以 $PQ=\begin{pmatrix} A & A_1 \\ O & b|A| - A_1^T A^* A_1 \end{pmatrix}$。

（2）**证明：** 充分条件，已知 $A_1^T A^{-1} A_1 \neq b$，

则 $b|A| - A_1^T A^* A_1$，

所以 $|PQ| = |P||Q| = \left|b|A| - A_1^T A^* A_1\right||A|$

$$=\left(b|A|-A_1^T A^* A_1\right)|A|\neq 0$$

所以$|Q|\neq 0$，故Q可逆。

必要条件，已知Q可逆，所以$|Q|\neq 0$，即

$$|PQ|=|P||Q|=\left|b|A|-A_1^T A^* A_1\right||A|$$
$$=\left(b|A|-A_1^T A^* A_1\right)|A|\neq 0$$

所以$\left(b|A|-A_1^T A^* A_1\right)\neq 0$，故$A_1^T A^{-1} A_1\neq b$。

第四节 矩阵的初等变换

1.把矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **化为阶梯矩阵和简单矩阵。**

【知识点】初等变换的形式：（1）用非零常数乘矩阵的某一行（列）；（2）互换矩阵某两行（列）的位置；（3）把某行（列）的 k 倍加之另一行（列）。这种变换称为矩阵的行（列）变换。而简单矩阵即指简单阶梯矩阵，它满足：

（1）它是阶梯的；

（2）每一个非零行的第一个非零元素均是 1；

（3）每个非零行的第一个非零元素所在列的其它元素都是零。

例如$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，当然次矩阵可以继续化为最简。

【解题思路】对于利用矩阵的初等变换化为简单矩阵，通常先将第一行元素确定好，通常是第一个元素为 1，这样方便将第一列下面的元素都化为 0，再将第二行元素确定好，通常此时第一列元素除第一行的之外其余行已经全是 0，此时再将第二列元素第二行向下的元素全化为 0，再依次向下化。这样变换出来的矩阵将直接是最简阶梯形。

【解题过程】

解：

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - \frac{1}{2}r_2]{r_3 - 2r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - \frac{1}{5}r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \xrightarrow{-4r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}(r_3-3r_4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(r_2-2r_3-r_4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2+3r_3+2r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&0&1&2\\1&1&0&-1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$**，试用初等变换求其逆矩阵。**

【解题思路】在前面的章节中我们介绍过逆矩阵的初等变换求法，即构造矩阵(A,E)，通过初等变换，变换成(E,B)的形式，则$A^{-1}=B$。

【解题过程】

$$\begin{pmatrix}1&2&0&0&1&0&0&0\\2&0&1&2&0&1&0&0\\1&1&0&-1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4\leftrightarrow r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&1\\2&0&1&2&0&1&0&0\\1&1&0&-1&0&0&1&0\\1&2&0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-r_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - 2r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$。

3.利用初等变换求解下列方程。

（1）$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$。

【解题思路】将题中等式写成 $AX=B$ 形式，显然 $X=A^{-1}B$，在此构造矩阵 (A,B)，则有 $A^{-1}(A,B)=(E,A^{-1}B)=(E,X)$，根据矩

阵初等变换的意义，矩阵左乘另一矩阵，相当于对其进行初等行变换，故在此我们只需对 (A,B) 进行初等行变换，使之成为 (E,X) 即可。

【解题过程】

解：构造矩阵：

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

所以 $X=\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$。

（2）$X\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$。

【解题思路】方法同上，不过此题是右乘矩阵，所以要变成列形式，用列变换解决。

【解题过程】

解：

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 \quad c_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+c_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \quad 2c_3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3+c_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+2c_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-2c_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1 \leftrightarrow c_3]{-c_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

所以 $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$。

4.已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$**，用初等变换求其逆矩阵，并计算** A **的所有代数余子式之和** $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$ **。**

【解题思路】利用初等变换求逆矩阵不再赘述，在这里注意，所有的代数余子式记为伴随矩阵的所有元素，故求出伴随矩阵，即可得到结果。

【解题过程】

解：

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_{n-1}-r_n;\,r_1-2r_2]{\substack{r_2-r_3\\ r_3-r_4\\ \vdots}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

由题意$|A|=2$，其所有代数余子式可以构成伴随矩阵的元素，由$A^*=A^{-1}|A|$，所以

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

故$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}=1-2+2=1$。

第五节 矩阵的秩

1.判断题（正确画√，错误画×）。

（1）若 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r\left(A\right)<r$，则 $r\le\min\left(m,n\right)$。（　）

【知识点】矩阵秩的概念：在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行与 k 列（$k\le m,k\le n$），位与这些行与列的交叉点上的 k^2 个元素按其在原来矩阵 A 中的次序可以构成一个 k 阶行列式，称其为矩阵 A 的一个 k 阶子式。矩阵 A 的非零子式的最高阶数称为矩阵 A 的秩，记为 $r\left(A\right)$。零矩阵的秩规定为零。

根据若 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $r\left(A\right)\le\min\left(m,n\right)$。可知此命题正确。

（2）若 $r(A)=r$，则 A 的所有 r 阶子式都不为零。　（　）

【知识点】由秩的定义知道，是存在 r 阶子式不为零，所以此命题错误。

（3）若矩阵存在一个不为零的 r 阶子式，则 $r(A)\geq r$。　（　）

【知识点】秩的理**解：**

（1）$r(A)=r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为零，任何 $r+1$ 阶子式必全为零。

（2）$r(A)<r \Leftrightarrow A$ 中每一个 r 阶子式全为零。

（3）$r(A)\geq r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为零。

（4）$r(A)=0 \Leftrightarrow A=O$。

（5）$A\neq O \Leftrightarrow r(A)\geq 1$。

（6）若 A 是 n 阶矩阵，

$r(A)=n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆。

（7）若 A 是 n 阶矩阵，

$r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow A$ 不可逆。

（8）若 A 是 $m \times n$ 矩阵，

则 $r(A) \leq \min(m,n)$。

$r(A) \geq r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为零。可知此命题正确。

（4）任何一个可逆矩阵都可以分解称为初等方程的乘积。（　）

【知识点】因为初等矩阵均可逆，可逆矩阵可以看成一个初等矩阵经过行列变换得到，所以此命题正确。这里补充一个记忆性的定理：若 A 可逆，则 $A=P_1P_2\ldots P_s$，P_i 是初等方阵。

2.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1&2\\0&2&-2&-2&0\\0&-1&-1&1&1\\1&1&0&1&-1\end{pmatrix}$**，求** $r(A)$。

【知识点】此题考查一个求矩阵秩的方法：对于行阶梯矩阵，它的秩就等于非零行的行数，所以一般在计算时，将矩阵化成行阶梯即可。

【解题思路】

$$\begin{pmatrix}0&1&1&-1&2\\0&2&-2&-2&0\\0&-1&-1&1&1\\1&1&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&-1&2\\0&0&-4&0&-4\\0&0&0&0&1\\1&1&0&1&-1\end{pmatrix}$$

交换行之间顺序

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以此时根据定理可知$r(A)=4$。

3.设矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$**，问：**

（1）λ为何值时，$r(A)$最大?

（2）λ为何值时，$r(A)$最小?

【解题思路】此题矩阵中含有参数，一般的处理方法是将矩阵化成行阶梯，再去讨论参

数。

【解题过程】:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_3]{\substack{r_1-3r_3 \\ r_2-\lambda r_3}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & 4-7\lambda & 10-17\lambda & 1-3\lambda \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}r_4]{-\frac{1}{5}r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & 4-7\lambda & 10-17\lambda & 1-3\lambda \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -4 & -10 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & 4-7\lambda & 10-17\lambda & 1-3\lambda \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & -7\lambda & -17\lambda & -3\lambda \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

①当 $\lambda = 0$ 时，

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & -7\lambda & -17\lambda & -3\lambda \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时 $r(A) = 2$。

②当时 $\lambda \neq 0$，

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & -7\lambda & -17\lambda & -3\lambda \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{\lambda}r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & -7 & -17 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，此时 $r(A)=3$ 。

4.讨论 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$ 的秩。

【解题思路】此题是 n 阶方阵秩的讨论，方法是先分成行列式是否为零讨论，对为零的部分再化成行阶梯进行讨论。

【解题过程】

解： $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a+(n-1) & a+(n-1) & a+(n-1) & \cdots & a+(n-1) \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}=\left[a+(n-1)\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)\right](a-1)^{n-1},$$

当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -(n-1)$ 时，行列式不为零，所以此时秩为n 。

当 $a=1$ 时，带入矩阵中得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ 显然秩为 1。

当 $a=-(n-1)$ 时，带入

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+(n-1) & a+(n-1) & a+(n-1) & \cdots & a+(n-1) \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{pmatrix}$$，所以秩为$n-1$。

5.设 $a_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$ 不全为零，

$b_j\left(j=1,2,\cdots,\mathrm{n}\right)$ 不全为零，求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix}$$ 的秩。

【解题思路】这里介绍用证明方法来求解秩。

【解题过程】

解： 因为 $a_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$ 不全为零，

$b_j\left(j=1,2,\cdots,\mathrm{n}\right)$ 不全为零，

所以中至少一个元素不为零，即 $r\left(A\right)\geq 1$。

从原矩阵中任意取其二阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{i1}b_{j1} & a_{i1}b_{j2} \\ a_{i2}b_{j1} & a_{i2}b_{j2} \end{vmatrix}=a_{i1}a_{i2}b_{j1}b_{j2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0\text{。}$$

所以 $r\left(A\right)\leq 1$，故 $r\left(A\right)=1$。

6.设 A,B 均为 n 阶方阵，证明：

（1）若 $r(A)=n$，则 $r(AB)=r(B)$。

（2）若 $r(B)=n$，则 $r(AB)=r(A)$。

3.**【解题思路】**这里复习矩阵秩的相关公式：

$r(A)=r(A^T)$；$r(A^TA)=r(A)$；

$r(A+B)\le r(A)+r(B)$；

$r(AB)\le \min[r(A),r(B)]$；

若 A 可逆，则

$r(AB)=r(B),r(BA)=r(B)$。

若 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，

$AB=O$，则 $r(A)+r(B)\le n$。

以上这些公式在以后的证明或是计算中，是可以直接使用的，这里我们从基本定义入手证明，加以理解。

【解题过程】

证明：

（1）因为$r\left(A\right)=n$，所以为A可逆矩阵，根据定理：若A可逆，则$A=P_1P_2\ldots P_s$，P_i是初等矩阵。所以$AB=P_1P_2\ldots P_sB$，所以AB可以看成B经过一系列行变换的到，由初等变换中的定理：初等变换不改变矩阵的秩，所以$r\left(AB\right)=r\left(B\right)$。

（2）证明方法与上述（1）完全一样，请读者自己证明。

矩阵自测题

一、单项选择题。

1.若 A 为 n 阶可逆矩阵，则下列结论不正确的是（　　）

$(A)\left(A^{-1}\right)^{k}=\left(A^{k}\right)^{-1}$，$(B)\left(A^{T}\right)^{k}=\left(A^{k}\right)^{T}$，

$(C)\left(A^{k}\right)^{*}=\left(A^{*}\right)^{k}$，$(D)(kA)^{*}=kA^{*}$。

【解题思路】 本题考查矩阵相关计算性质。本题中的前三个选项都是以后可以直接用到的性质，此处加以简单解释。

对于 A，

$(A^{-1})^{k}A^{k}=A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}A\cdots AA=E$，

根据逆矩阵定义 $(A^{-1})^{k}=(A^{k})^{-1}$

对于 B，在前面的性质中我们曾学到

$(ABC)^{T}=C^{T}B^{T}A^{T}$，同理可证。

对于 C，参考 A 选项性质，

$$(A^*)^k=(A^{-1}|A|)^k=|A|^k(A^{-1})^k=|A|^k(A^k)^{-1}$$

$$=|A|^k\frac{(A^k)^*}{|A^k|}=(A^k)^*$$

$$(kA)^*=|kA|(kA)^{-1}=k^{n-1}|A|(A)^{-1}=k^{n-1}A^*$$

所以不正确，故选 D 。

2.若 A,B 均为三阶行列式，则下列等式成立的是　（　）

$(A)\left|(AB)^{-1}\right|=|A|^{-1}|B|^{-1}$,

$(B)|-A|=|A|$,

$(C)\left|A^2-B^2\right|=|A+B||A-B|$,

$(D)|2A|=2|A|$。

【解题思路】因为均为三阶行列式，所以

$|-A|=(-1)^3|A|=-|A|$,

$\left|A^2-B^2\right|\neq\left|(A-B)(A+B)\right|\neq|A-B||A+B|$

$|2A|=(-2)^3|A|=-8|A|$，所以最后三项均错误，对第一个选项$\left|(AB)^{-1}\right|=\left|B^{-1}A^{-1}\right|=\left|B^{-1}\right|\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}|B|^{-1}$，所以选 A。

3.设 $R(A_{3\times5})=3$，那么 $A_{3\times5}$ 必须满足（　）

(A)三阶子式全为零

(B)至少一个四阶子式不为零，

(C)二阶子式全为零

(D)至少一个二阶子式不为零。

【解题思路】因为$R(A_{3\times5})=3$可知有一个三阶子式不为零，但题中没有这个选项，对第一个选项与结论不同，所以错误；第二个

选项这个矩阵不可能有四阶子式，所以错误；对第三个选项，若二阶子式全为零，则三阶子式必定全为零，下面证明下：设任意三阶行列式可以展开为多个二阶行列式的代数和，因为二阶行列式全为零，所以三阶也为零，所以此选项错误。故选 D 。

4.设 $A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$ **且** $a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_n \neq 0$ **则** A **的秩为（　　）**

$(A)0$　　$(B)1$

$(C)2$　　$(D)n$

【解题思路】进行初等变换即可，由题意知

道$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换不改变秩可以知道选 B 。

5.设 A,B 为 n 阶矩阵， A^*,B^* 为伴随矩阵，

$C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$**则** $C^*=$（　　）

$(A)\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$

$(B)\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$,

$(C)\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

$(D)\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$。

【解题思路】本题参考分块矩阵相关性质进行分析即可。

$$C^* = |C|C^{-1} = |A||B|\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A||B|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

所以选 C 。

二、填空题。

1.如果 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，**那么**

$P^{2003}AP^{2004} =$ _____。

【解题思路】本题虽然矩阵的次数较大，但我们注意到，P 是初等矩阵，即单位矩阵 E 经过一次初等变换得来。故解题中存在技巧。

另外注意，一个矩阵左乘或右乘初等矩阵的意义：

对于一个 $m\times n$ 矩阵 A 作一次初等“行”变换，就相当于在 A 的左边乘上相应的 m 阶初等矩阵；对 A 作一次初等列变换就相当于在 A 的右边乘上相应的 n 阶初等矩阵，故，对应初等矩阵的形式，我们可以直接写出矩阵 A 的变换结果。

例如本题，若左乘 P，则相当于将 A 的两行互换；若右乘 P，则相当于将 A 的两列互换。

由题意 $P^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,

$$P^3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

可得：

$$P^{2003}AP^{2004}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$$

设 A,B 为三阶矩阵，且 $|A|=-1,|B|=2$，则 $\left|2\left(A^{T}B^{-1}\right)^{2}\right|=$_____。

【解题思路】类似题目要合理运用公式进行化简计算。在这里注意行列式中的常数，在提出时要带有幂次。

即：$\left|2\left(A^{T}B^{-1}\right)^{2}\right|=\left|2A^{T}B^{-1}A^{T}B^{-1}\right|$

$=2^{3}\left|A^{T}\right|\left|B^{-1}\right|\left|A^{T}\right|\left|B^{-1}\right|=8\times1\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=2$

已知 $f(x)=x^{2}-3x+5$，$A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$，则 $f(A)=$_____。

【解题思路】本题主要练习矩阵乘法及加法性质，矩阵的加法即对应元素相加即可。由题意可知 $f(A)=A^{2}-3A+5E$，代入矩阵得 $f(x)=A^{2}-3A+5E$

$$=\begin{pmatrix} 5-3a+a^2 & 0 \\ 0 & 5-3b+b^2 \end{pmatrix}。$$

4.若 A,B,C 均为 n 阶矩阵，且 $AB=BC$

$=CA=E$,则 $A^2+B^2+C^2=$ _____。

【解题思路】因为 $AB=E$，所以两个矩阵互为可逆矩阵，又因 $BC=E$，所以 C 也为 B 的逆矩阵，同一个矩阵逆矩阵唯一，所以 $A=C$。同理可得 $A=B$，故 $A=B=C$。所以 $A^2+B^2+C^2=3E$。

5.设 α 是三维列向量，且

$$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\text{,则 }\alpha^T\alpha=\underline{\qquad\qquad}。$$

【解题思路】令 $\alpha=(a,b,c)^T$，$\alpha^T\alpha=a^2+b^2+c^2$，由题意

$$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & cb & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

所以$a^2=b^2=c^2=1$，

故$\alpha^T\alpha=a^2+b^2+c^2=3$。

三、判断题。（正确填√，错误×）。

1.矩阵 $A=A^*$ 的充分必要条件是 $A=|A|A^{-1}$。 （ ）

【解题思路】通过分别讨论充分性与必要性进行讨论。

充分性：已知$A=|A|A^{-1}$，根据公式

$A^*=|A|A^{-1}$，所以$A^*=A$。

必要性，已知$A=A^*$，$AA^*=A^2$，

$AA^*-A^2=O\Rightarrow A\left(A^*-A\right)=0$，

此时得不出$A=O$或$A^*-A=O$。故得不

出 $A^{*}=A$。所以错误。

2.矩阵 $A_{3\times2}B_{2\times3}$ 不可逆。　（　）

【解题思路】根据公式

$$r(AB)\le\min\left[r(A),r(B)\right]\le\min(2,3)=2<3$$

AB 为三阶矩阵，所以 $|AB|=O$，所以不可逆，此命题正确。

3.如果方阵 A,B 矩阵满足 $AB=E$，则 $B=A^{-1}$。　（　）

【解题思路】根据逆矩阵的定义和性质可知，此命题正确。

4.设 A,B 为 n 阶非零矩阵，若 $AB=O$，则 $|A|=|B|=0$。　（　）

【解题思路】熟记性质：

$AB=O\Rightarrow r(A)+r(B)\le n$，因为 A,B 都

是非零矩阵，所以$r(A)\geq 1, r(B)\geq 1$，所以$r(A)<n, r(B)<n$，所以$|A|=|B|=0$。或者本题通过反证法讨论，同学们可以自行分析。

5.设$A=(a_{ij})$为n阶可逆矩阵，若A的每行元素之和为a，则A^{-1}的每行元素之和为a^{-1}。（ ）

【解题思路】因为矩阵A的每行元素之和为a，所以$A(1,1,\cdots 1)^T=(a,a,\cdots a)^T$，两边同时乘以$A^{-1}$得$A^{-1}A(1,1,\cdots 1)^T=A^{-1}(a,a,\cdots a)^T$，即$(1,1,\cdots 1)^T=aA^{-1}(1,1,\cdots 1)^T$所以$\frac{1}{a}(1,1,\cdots 1)^T=A^{-1}(1,1,\cdots 1)^T$，故$A^{-1}$的每行元素之和为$a^{-1}$。所以此命题正确。

四、用初等变换求矩阵

$A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 2\\ -2 & 11 & -3\\ 1 & -5 & 1\end{pmatrix}$**的逆矩阵。**

【解题思路】利用初等变换即先构造矩阵(A,E)，再进行初等行变换，变换成(E,B)即可，初等变换法是在目标矩阵的伴随矩阵计算较复杂时常用的方法。

【解题过程】

解：构造矩阵$\begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 11 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

对其进行行变换：

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 11 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_3]{r_2+r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+5r_2-2r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

五、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^n。

【解题思路】对于求类似计算，常可通过递归算法找到规律，得出结果，本题中还可以利用初等矩阵的意义，及矩阵右乘初等矩阵相当于对矩阵进行初等列变换。

【解题过程】

方法一：（递推法）

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&2&1\end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\3&3&1\end{pmatrix},$$

$$A^4=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\6&4&1\end{pmatrix}\cdots A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\\frac{n(n-1)}{2}&n&1\end{pmatrix}$$

六、设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&a\\2&2&6&8\\3&6&9&6\end{pmatrix}$**，试讨论参数** a **的取值，并求矩阵** A **的秩。**

【解题思路】此题是含参数的矩阵，方法在第五节中给出，下面书写做题方法。

【解题过程】

对矩阵进行初等变换有：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -2 & 0 & 8-2a \\ 0 & 0 & 0 & 6-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-\frac{2}{3}r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6-3a \end{pmatrix}$$

当 $a=2$ 时，$r(A)=2$；

当 $a\neq 2$ 时，$r(A)=3$。

七、证明：n 阶矩阵 A 对称的充分必要条件是 $A-A^T$ 对称。

【解题思路】首先明确对称矩阵定义：$A^T=A$，再从充分性以及必要性进行求解。

【解题过程】

证明：

充分性：已知 $A-A^T$ 对称，则 $A-A^T=\left(A-A^T\right)^T=A^T-A$，所以 $A^T-A=0$

$\Rightarrow A=A^T$。

必要性：已知 n 阶矩阵 A 对称，则 $A=A^T$，

则 $A-A^T=A^T-A=\left(A-A^T\right)^T$，

所以 $A-A^T$ 对称。

八、设 A,B 为三阶可逆矩阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4E$，若 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，试求矩阵 A。

【解题思路】本题可以通过已知条件直接进行计算，但也可通过化简进行计算，我们发

现在题中等式两端如果左乘矩阵 A，则可得到新等式 $2B = AB - 4A = A(B-4E)$，显然 $B-4E$ 是可逆的，等式两端再右乘故可得到 $A = 2B(B-4E)^{-1}$，大大简化了直接计算的工作量。

【解题过程】

方法一：

解：根据已知条件 $2A^{-1} = E - 4B^{-1}$，先求 B 的可逆矩阵，

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所以 $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

所以 $2A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$。

构造矩阵：

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-2r_3 \\ 2r_3}]{r_1+r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_1]{-r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

所以 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$。

方法二：

解： 等式两端左乘矩阵 A，

可得 $2B=AB-4A=A(B-4E)$，

显然 $B-4E$ 可逆，

等式两端再右乘 $(B-4E)^{-1}$，

得 $A=2B(B-4E)^{-1}$

得：

$$A=2\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=2\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\frac{\begin{pmatrix}4 & -4 & 0\\ 2 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}}{-2\times 8}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

第三章 向量的线性相关性

第一节 向量的线性相关与线性无关

1、用定义判断下列向量组的线性相关性。

（1）$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

（2）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

【知识点】向量组线性相关的定义。

向量的定义为：n 个数 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 组成的有序数组 $a=\left[a_1,a_2,\cdots a_n\right]^T$ 或 $a=\left[a_1,a_2,\cdots a_n\right]$ 叫做 n 维向量。前面一个称为列向量，后面一个称为行向量。

向量组线性相关的定义为：对 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，如果存在不全为零的实数使

得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，否则称为线性无关。

【解题思路】通常，向量组是否线性相关可以通过定义法进行假设证明，找出是否存在不全为零的一组实数。但也可以利用相关定理，直接证明。

如定理：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $r\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right]<s$。

推论一：n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关的充分必要条件是 $\left|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right|=0$。

推论二：$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关。

推论三：n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关的充分必要条件是 $\left|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right|=0$。

所以构造行列式$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，计算得

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$，所以向量组线性相关。

（2）**【解题思路】**方法同上，

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以向量组线性无关

2、设向量

$$\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

若将β表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合，问此线性组合的表示方法是否唯一。

【知识点】考查向量组线性相关定义。即：

对 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 β，如果存在实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\beta$，则称 β 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，或者说 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示。

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$，线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，且表示方法唯一。

【解题思路】

由题意 $\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&2\\1&0&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，由上一题提到的定理推论可以知道 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；再由 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关可知 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且表示方法唯一。

3、设向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\t\end{pmatrix}$**，问：**

（1）当t为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关?当$t$为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关?

（2）当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关时，将$\alpha_3$表示成$\alpha_1,\alpha_2$的线性组合。

【解题思路】（1）此题解法和第一题相同，均转化为用行列式是否为零进行判断。对于线性组合的表示，

【解题过程】

解：由$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&t-5\end{vmatrix}=t-5$，

所以当$t=5$时，$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix}=0$，

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；

当$t\neq 5$时，$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix}\neq 0$，

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

（2）由（1）可知，$t=5$，

设$\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

可得方程组：$\begin{cases} k_1+k_2=1 \\ k_1+2k_2=3 \\ k_1+3k_2=5 \end{cases}$

解得$\begin{cases} k_1=-1 \\ k_2=2 \end{cases}$，

$\alpha_3=2\alpha_2-\alpha_1$。

4、证明，若向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中含有零向量，则此向量组一定线性相关。

【知识点】定义：对n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，如果存在不全为零的实数使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，否则称为线性无关。

【解题思路】证明向量组线性相关一般用定义法和或相关性质，例如前面的行列式的值是否为零，以及矩阵的秩等，在这里题中的向量组的所有元素均未知，故我们采用定义法。

【解题过程】

证明：设$\alpha_i=0$，则必有

$$0\bullet\alpha_1+0\bullet\alpha_2+\cdots+k\alpha_i+\cdots+0\bullet\alpha_s=0\left(k\neq 0\right)$$

所以必有一组不全为零的实数使得

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$ 成立，

即此向量组一定线性相关。

5、已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，

$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3,$

$\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 - \alpha_1$，

试用定义证明：向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关。

【解题思路】此题明确说明要用定义证明，前面已经详细介绍并练习过定义证明法，下面书写证明步骤。

【解题过程】

证明：

方法一：假设向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性相关，

则存在一组不全为零的实数使

$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 + k_4\beta_4 = 0$，

由已知可得

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_4)$$

$$+k_4(\alpha_4-\alpha_1),$$

得 $(k_1-k_4)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3$

$$+(k_3+k_4)\alpha_4=0,$$

因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，

所以$\begin{cases}(k_1-k_4)=0\\(k_1+k_2)=0\\(k_2+k_3)=0\\(k_3+k_4)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\\k_4=0\end{cases}$

假设不成立，故根据定义可知$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$

线性无关。

方法二：

令矩阵$A=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4)$

则由已知可得：$R(A)=4$

令 $B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=AC$$

由已知 $|A|\neq 0$,由上式可知$|C|\neq 0$，

则$|B|=|A||C|\neq 0$，,即 $R(B)=4$，

可知$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关。

6、若向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示出，则此表示方法唯一的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关。

【解题思路】根据已知条件，从定义入手，从充分性以及必要性两方面进行证明即可。

【解题过程】

证明：充分性：

已知向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示出，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，

故有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\beta$，

假设表示方法不唯一，

则还有$\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_s\alpha_s$，

两个式子相减得

$$0=(k_1-b_1)\alpha_1+(k_2-b_2)\alpha_2+\cdots+(k_s-b_s)\alpha_s$$

由已知条件得$k_1=b_1,\cdots,k_s=b_s$，

与已知的表示不唯一矛盾，所以表示方法唯一。

必要性：

已知向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示出且此表示方法唯一。

假设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，

则存在不全为零实数使

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0$，

由题意可得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\beta$，

两式相加

$$(\lambda_1+k_1)\alpha_1+(\lambda_2+k_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_s+k_s)\alpha_s=\beta$$

与已知的表示唯一相矛盾，所以得

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，

得证。（说明，在证明线性相关与否的问题时常常还采用反证法，使证明得到简化。）

7、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，问常数$l,m$满足什么条件时，向量组$l\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3,m\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

【解题思路】本题我们同样采用定义法进行分析。同时结合线性方程组的相关知识。

【解题过程】

设存在实数使得

$$k_1\left(l\alpha_1+\alpha_2\right)+k_2\left(\alpha_2+\alpha_3\right)+k_3\left(m\alpha_3+\alpha_1\right)=0$$

得

$$\left(lk_1+k_3\right)\alpha_1+\left(k_1+k_2\right)\alpha_2+\left(k_2+mk_3\right)\alpha_3=0$$

因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，

所以$\begin{cases}\left(lk_1+k_3\right)=0\\ \left(k_1+k_2\right)=0\\ \left(k_2+mk_3\right)=0\end{cases}$，

为以k_1,k_2,k_3为未知量的齐次线性方程，

要使得待求向量组线性无关则此线性方程

只能有零解，

所以其系数矩阵的行列式不为零，

故$\begin{vmatrix} l & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & m\end{vmatrix}=lm+1\neq 0$，所以$lm\neq -1$。

8、判断题。

（1）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则任一向量$\alpha_i\left(1\le i\le m\right)$可由其余向量线性表

【知识点】若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，其中必有一个向量可以用其余向量线性表示；若有一个向量可以用其余$s-1$个向量线性表示，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关。

【解题思路】此命题错误，由定理可知，应该是存在一个向量可以由其余向量线性表出。

（2）若对任意一组不全为零的实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关。（　　）

【知识点】本题考查向量组线性相关定义。

【解题思路】此命题正确。题目即为定义内

容。

（3）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$也线性相关，则有不全为零的

实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，

$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$同时成立。(　)

【解题思路】此命题错误，因为线性相关的定义中是存在不全为零的实数，不是对每一组实数均成立，所以错误。举个简单反例：

$1,0,-1$和$1,-1,0$，

由题知$1\times1+2\times0+-1\times1=0$，

但是$1\times1+2\times(-1)+0\times1=-1\neq0$ 。

（4）若有不全为零的实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使

得$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2$

$+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$ **成立，则** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ **线性相关，** $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ **也线性相关。（　　）**

【解题思路】此命题错误。若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，但 $\beta_i=-\alpha_i\left(1\le i\le m\right)$，此时 $\beta_i+\alpha_i=0\left(1\le i\le m\right)$，故对任意组实数均有

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_m\beta_m=0,$$

所以可以知道命题错误。

9、选择题。

（1） n **维向量** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\left(3\le s\le n\right)$ **线性无关的充分必要条件是（　　）**

$\left(A\right)$ 存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s\ne0$。

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量线性无关。

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 存在一个向量，它不能用其余向量线性表出。

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 任意一个向量都不能用其余向量线性表出。

【解题思路】对选项 A，它既不是充分条件也不是必要条件。若线性无关，则所有不全为零的实数均使得 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s \neq 0$。对于选项 B，若整体线性无关，则每一个部分均线性无关，所以结论可以推出条件。但部分线性无关不能推出整体线性无关，举个简单的例子：

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中任意两

个不成比例所以线性无关，但三个构成一个向量组时线性相关。所以是必要而非充分条件。对于选项C，既不是充分条件也不是必要条件。对于选项D，根据定理五知道此命题正确。定理如下：若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，其中必有一个向量可以用其余向量线性表示；若有一个向量可以用其余$s-1$个向量线性表示，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关。

（2）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$均为$n$维向量，那么下列结论正确的是。（　　）

(A) 若$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，那么$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关。

(B) 对任意组不全为零的实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m\neq 0$，则向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则对任意组不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$。

(D) 因为 $0\bullet\alpha_1+0\bullet\alpha_2+\cdots+0\bullet\alpha_m=0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

【解题思路】此题主要考查线性相关的定义，其定义如下：对 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，如果存在不全为零的实数使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，否则称为线性无关。根据定义选 B。

（3）设任意两个 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，若存在两组不全为零的实数

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$(\lambda_1+k_1)\alpha_1+(\lambda_2+k_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m+$$

$$(\lambda_1-k_1)\beta_1+(\lambda_2-k_2)\beta_2+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=0$$

则（　　）

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都线性相关。

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都线性无关。

(C) $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1$ $\alpha_2-\beta_2,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性无关。

(D) $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,$ $\alpha_2-\beta_2,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关。

【解题思路】对已知进行整理得

$$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+\lambda_m(\alpha_m+\beta_m)+$$

$$k_1(\alpha_1-\beta_1)+k_2(\alpha_2-\beta_2)+\cdots+k_m(\alpha_m-\beta_m)=0$$

所以根据线性相关的定义，

$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,$

$\alpha_2-\beta_2,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关。故选 D 。

（4）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是。（　　）

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 。

(B) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 。

(C) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 。

(D) $\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_3$ 。

【解题思路】对于选项 C ，

$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)=\alpha_3-\alpha_1$ ，所以必定

线性相关，下面对选项B说明其线性无关：

$$\left(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)$$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

因为$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的秩为三，所以该矩阵可逆，

故

$$r\left(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)=r\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=3$$

所以线性无关。其余两个选项用同样方法进行证明。

（5）若向量组α,β,γ线性相关，α,β,δ线性无关，则（　　）

(A) α一定能由β,γ,δ线性表出。

(B) β 一定不能由 α,γ,δ 线性表出。

(C) δ 一定能由 α,β,γ 线性表出。

(D) δ 一定不能由 α,β,γ 线性表出。

【解题思路】由题意知道 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 线性相关，因为一部分线性相关，那么整体一定线性相关。因为 α,β,δ 线性无关，所以根据若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$，线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，且表示方法唯一可知 δ 一定能由 α,β,γ 线性表出且表示方法唯一。故选 C。

第二节 向量组的秩

1. 求下列向量组的秩及一个最大无关组，并将其余向量用最大无关组线性表示。

（1）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},$

$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\6\end{pmatrix}$

【知识点】本题考查向量组的秩以及最大无关组。其定义分别为：

1. 在向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中，如果存在$r$个向量$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$线性无关，再加进一个向量$\alpha_j\left(j=1,2,\cdots,\mathrm{s}\right)$向量组$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,$

α_{ir},α_j 就线性相关，则称 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组。

2. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数称为这个向量组的秩。值得注意的是极大线性无关组一般不唯一。

【解题思路】同求矩阵的秩类似，求向量组的秩也常用初等变换法，但是在构造矩阵的时候，注意构造的是行向量矩阵还是列向量矩阵。

例如本题中，所给向量均为列向量，如果构成列向量矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则在进行初等变换的时候只能采用初等“列”变换，因为这样才能保持向量组的线性关系。同理，如果构造的是行向量矩阵 $(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)$ 则只能进行初等“行”变换。否则容易造成结果

错误。

另外，对于最大无关组的选择，通常在变换为简单阶梯形矩阵后，选择代表矩阵秩的那几个向量即可，或者在变换的过程中标记线性变换过程，也可看出最大无关组，这一步对于要求写出向量之间的线性关系很是方便。

【解题过程】

解：构成矩阵化成行最简形式：

$$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)^T=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&-1&1&1\\1&3&3&5\\4&-2&5&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&-2&-1&-2\\0&2&1&2\\0&-6&-3&-6\end{pmatrix}\begin{matrix}\alpha_1\\\alpha_2-\alpha_1\\\alpha_3-\alpha_1\\\alpha_4-4\alpha_1\end{matrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&-2&-1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\alpha_1\\\alpha_2-\alpha_1\\\alpha_3-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1\\\alpha_4-4\alpha_1-3(\alpha_2-\alpha_1)\end{matrix}$$

所以α_1,α_2为其极大线性无关组，矩阵的秩为2，

直接在行最简中观察得知：

$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2$。

（2）$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix},$

$\beta_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\\-2\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$。

【解题思路】方法同上。只是此处我们利用列变换来求得。

【解题过程】

解：令矩阵

$$B=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\right)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}c_3]{\substack{c_2+c_1\\ c_1+c_4}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+c_3}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

所以β_2,β_3,β_4是其一个极大线性无关组，该向量组的秩为3。

观察得知：

$$\beta_1+\beta_4+\frac{1}{2}\beta_3=0\to\beta_1=-\frac{1}{2}\beta_3-\beta_4$$

2．设向量组$\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\b\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$**的秩为**$2$**，求**$a,b$**。**

【解题思路】构造矩阵，注意是行矩阵还是列矩阵，切勿改变向量本身性质，只能进行线性变换。由于本身习惯于进行初等行变换，化为行阶梯最简形式，故类似题目均构造与初等行变换相对应的矩阵。

【解题过程】

解：构造矩阵并进行初等变换

$$A=\begin{pmatrix}a&3&1\\2&b&3\\1&2&1\\2&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & b & 3 \\ a & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-ar_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & b-4 & 1 \\ 0 & 3-2a & 1-a \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_4]{r_2+r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3-2a & 1-a \\ 0 & b-5 & 0 \end{pmatrix}$$

当$b \neq 5$时，$R(A) > 2$

故 $b=5$，此时，当 $3-2a=1-a$ 时，

$R(A)=2$，

故可知$a=2, b=5$

3.设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$n$个$n$维向量，若标准基向量$e_1,e_2,\cdots,e_n$能由它们线性表出，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。

【知识点】本题考查向量的标准基。n维向量的标准基即n个长度为1且线性无关的单位向量组。

【解题思路】

由题意，令$E=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，设

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$$

令

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$$

所以$E=AK$，

$n=r(E)=r(AK)\le\min\left[r(A),r(K)\right]$，

所以$n=r(E)=r(AK)\le r(A)\le n$，所以

$r(A)=n$。所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。

4.证明：$n+1$个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，

α_{n+1}必定线性相关。

【解题思路】本题我们根据向量组的线性相关性与向量组的秩的关系进行分析。

【解题过程】

证明：

因为$n+1$个n维向量可以构成一个$n+1$列，

n行的矩阵，我们记为A，

由矩阵秩的性质可以知道$r(A)\le n<n+1$，

秩小于向量个数，

所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,a_{n+1}$必定线性相关。

5. 设向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，即

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n\\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_n\\ \qquad\vdots\\ \beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}\end{cases},$$

试证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$等价。

【知识点】本题考查向量组的等价。向量组等价的定义为：设有两个n维向量组（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$；（2）$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$；如果（1）中每个向量都可以由（2）中的向量线性表示出，则称向量组（1）可由向量组（2）线性表示出。如果两种可以互相线性表示出，则称两个向量组等价。

向量组等价的常用性质有：

（1）若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表出，而且$s>t$，那么$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关。

推论、如$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关，且其可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表出，则$s\le t$。

（2）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出，则$r\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\right]\le r\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\right]$

【解题思路】根据向量组等价定义我们可以知道，若两个向量组能够互相线性表示，则两向量组等价。本题中已经知道$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示出，则只需再证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$可以由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性表示即可。

【解题过程】

由题意可知

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=(n-1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$$

所以

$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n-1},$$

故 $\alpha_1=\dfrac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n-1}-\beta_1$，

$$\alpha_2=\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n-1}-\beta_2,\cdots,$$

$$\alpha_n=\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n-1}-\beta_n,$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 能由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表示，因为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，故两个可以相互线性表示，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 等价， 得证。

6. 设向量组 $a_i=\left(t_i,t_i^2,\cdots,t_i^n\right)\left(i=1,2,\cdots,m;m\le n\right)$，试证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，其中 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 为 m 个互不相等且不为零的常数。

【解题思路】此题如果考虑用秩做，计算量会很大，一般对于抽象矩阵，我们通常采用的方式是定义法和反证法，这里采用两者结合的方式。

【解题过程】

证明：

方法一：

假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，

则存在不全为零的实数使得

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0,$$

故其中一项 $\lambda_1t_1^2+\lambda_2t_2^2+\cdots+\lambda_mt_m^2=0$ 一定

成立，

所以如果存在几项$\lambda \neq 0$，则一定有几项中的$t=0$，

与已知的$t_1,t_2,\cdots,t_m$为m个互不相等且不为零的常数这个条件项矛盾，

所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

方法二：

构造矩阵$A=\begin{pmatrix} t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}$

则有范德蒙行列式可知

$$|A|=|A^T|=\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^n & t_2^n & \cdots & t_n^n \end{vmatrix}$$

$$=t_1t_2\cdots t_n\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ t_1^n & t_2^n & \cdots & t_{n-1}^n\end{vmatrix}$$

$$=t_1t_2\cdots t_n\prod_{1\le i\le j\le n}(t_i-t_j)$$

因$t_i\neq t_j$，且$t_i\cdot t_j\neq 0$，其中$1\le i\le j\le n$，

故$|A|\neq 0$，即向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关。

7.若设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩为$r_1$，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$的秩为$r_2$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$的秩为$r_3$，试证明：$\max(r_1,r_2)\le r_3\le r_1+r_2$。

【解题思路】本题要充分理解向量组的秩的概念。并且知道，最大无关组的个数即为向量组的秩。

【解题过程】

证明：若$r_1=0$或$r_2=0$，结论显然成立。

设$r_1\neq 0$且$r_2\neq 0$，

分别设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r1}$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r2}$，

$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{r3}$为三个向量组的极大线性无关组，

由题意可知$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{r3}$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,$

α_{r1}和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r2}$线性表示出来，且其线

性无关，

根据定理：如$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关，且其

可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表出，则$s\leq t$。

可知$r_3\leq r_1+r_2$。

同理可得$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r1}$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r2}$

可由$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{r3}$线性表示出来，

且线性无关，

所以$r_1 \le r_3$， $r_2 \le r_3$，

故$\max\left(r_1, r_2\right) \le r_3$。

所以$\max\left(r_1, r_2\right) \le r_3 \le r_1 + r_2$。

8.设A, B均为$m \times n$矩阵，试证明：

（1）$r\left(A+B\right) \le r\left(A\right) + r\left(B\right)$；

（2）$r\left(A-B\right) \le r\left(A\right) + r\left(B\right)$。

【知识点】设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$可由$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性表出，$r\left[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t\right] \le r\left[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\right]$。

【解题思路】本题的结论也是以后可以常用的两个重要性质，请同学们注意理解。

【解题过程】

证明：

（1） 设$C=(A,B)$，

$$A+B=(A,B)\begin{pmatrix}E_n\\E_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}E_n\\E_n\end{pmatrix},$$

所以$A+B$可以由C线性表示，

根据定理：设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出

则$r[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t]\le r[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]$。

所以$r(A+B)\le r(C)$，

由因为$r(C)\le r(A)+r(B)$。

所以$r(A+B)\le r(A)+r(B)$。

（2） 设$C=(A,B)$，

$$A-B=(A,B)\begin{pmatrix}E_n\\-E_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}E_n\\-E_n\end{pmatrix},$$

同理可得$r(A-B)\le r(A)+r(B)$。

9.设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times p$ 矩阵，试证明：$r(AB)\le \min\left[r(A),r(B)\right]$。

【解题思路】

记 $AB=C$,并对 A,C 按列分块，

有

$$\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right]\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}=\left[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s\right]$$

即 C 可以由 A 的列向量线性表示出来，

根据定理：如 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，且其

可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表出，则 $s\le t$ 。

所以

$$r(AB)=r\left[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s\right]\le r\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right]=r(A)$$

同理，将 B,C 按行分块，可以证明

$r(AB) \le r(B)$。

综上：$r(AB) \le \min\left[r(A), r(B)\right]$。

10.证明：n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \ne 0 \text{。}$$

【解题思路】该行列式可以看成

$$D = \left| \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \right|$$

记 $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$，所以 $D = \left|A^T A\right|$.

【解题过程】

证明：

记行列式为：$D=\left|\begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\right|$，令

矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

必要性：已知 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，

所以 $r(A)=n$，所以 $|A|\neq 0$，

故 $D=\left|A^T A\right|=|A|^2\neq 0$。

充分性，已知 $D=\left|A^T A\right|=|A|^2\neq 0$，

所以 $|A|\neq 0$，故 $r(A)=n$，

所以 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。

得证。

11.选择题。

（1）设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A|=0$,则矩阵中（　　）

(A) 必有一列元素全部为零。

(B) 必有一列向量是其余列向量的线性组合。

(C) 必有两列元素对应成比例。

(D) 任一列向量都是其余列向量的线性组合。

【解题思路】 选项 A,举出反例 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$；选项 C,举出反例 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$。对于选项 B，$|A| = 0 \Rightarrow A$ 列秩 $< n \Rightarrow A$ 的列向量线性相关，根据定理知道必有一列向量是其余列向量的线性组合。所以选 B。

（2）设向量 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s \ (s > 1)$，**而**

$\beta_1=\alpha-\alpha_1,\beta_2=\alpha-\alpha_2,\cdots,\beta_s=\alpha-\alpha_s$ ，

则下列结论正确的是（　　）

$(A)\ r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

$(B)\ r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)>r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

$(C)\ r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

(D)不能确定

【解题思路】由题意可以看到$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$可以相互线性表示，其中$\alpha_j=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i-\beta_i$，$\beta_j=\sum_{i=1,i\neq j}^{s}a_i$，所以两个向量组等价，故秩相同，所以选$A$。

（3）若存在矩阵P,Q,使得$A=PB,B=QA$

则（　　）

$(A)\ r(A)=r(B)$

$(B)\ r(A) > r(B)$

$(C)\ r(A) < r(B)$

(D)不能确定

【解题思路】此题直接由矩阵秩的公式可得

$r(A) = r(PB) \le r(B), r(B) = r(QA) \le r(A)$

,两边夹逼得$r(A) = r(B)$。所以选A。

第三节 n 维向量空间

1. 试证明：

$V=\{(x,y,z)\mid x+2y+3z=0\}$ 是 R^3 的子空间。

【知识点】此题考查向量空间以及子空间的定义。

（1）全体 n 维向量连同向量的加法和数乘运算合称为 n 维向量空间。

（2）设 W 是 n 维向量的非空集合，如果满足 1）$\forall\alpha,\beta\in W$ 必有 $\alpha+\beta\in W$；2）$\forall\alpha\in W$ 及任一实数 k 必有 $\forall k\alpha\in W$；则称 W 是 n 维向量空间的子空间。

【解题思路】对于子空间的判定，实质就是子空间满足的两个条件。

【解题过程】

证明： 设 $\alpha=(x,y,z),\beta=(a,b,c)\in V$ ，

$\alpha+\beta=(x+a,y+b,z+c)$，

计算可知其也是方程的一个解，

所以 $\alpha+\beta\in V$ 。

对任意实数 k ，

将 $k\alpha$ 代入方程 $x+2y+3z=0$ 得

$k(x+2y+3z)=0$ ，成立，

所以 $k\alpha$ 也是方程的解，

根据定义知道

$V=\{(x,y,z)\mid x+2y+3z=0\}$ 是 R^3 的子空间。

2. 设

$$V_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in R,x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$$

$$V_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in R,x_1+x_2+\cdots+x_n\neq 0\}$$

问V_1,V_2是不是向量空间，为什么？

【解题思路】即是否满足可加性与齐次行的两个条件。

用上题中的证明方式可以知道V_1是向量空间。

对于V_2，假设$\alpha \in V_2$,一定有$-\alpha \in V_2$，但是它们的和却不属于V_2，所以V_2不是向量空间。

3.证明：向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$ **构成R^3的**

一个基，并求$\beta=\begin{pmatrix}5\\9\\-2\end{pmatrix}$**在这个基下的坐标。**

【知识点】本题考查基与坐标的概念。

如果向量空间V 中的m 个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,$

α_m满足

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关；

（2）对于V 中任意向量β 均可由向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$

$+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$，称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为向量

空间V 的一个基底（或基），基中所含向量的

个数m 称为向量空间V 的维数，记为

$\dim V=m$，并称V 是m 维向量空间。向量

β 的表示系数称为向量β 在基底

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$下的坐标。

【解题思路】求向量在一组基下的坐标，即

求满足$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T=\beta$

的列向量$\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^T$。并且主要证明的是基满足的条件。而坐标的求解方法，也可以采用非齐次线性方程组求解的方法。这部分知识将在后面学到。

【解题过程】

证明： 构造行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6$，

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关。

对于任意向量γ，由$n+1$个n维向量线性相关知道$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma$线性相关，

所以γ可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，

故$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$构成$R^3$的一个基。

计算：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{31}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

所以基下坐标为$\left(-\frac{2}{3},\frac{31}{6},\frac{1}{2}\right)$。

4.设向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

且，$V_1 = span\{\alpha_1, \alpha_2\}$，$V_2 = span\{\beta_1, \beta_2\}$，

试证： $V_1 = V_2$。

【解题思路】 $span$ 代表的是 n 维向量空间。证明两个空间相等即证明这两个空间有同样的基，并且可以互相线性表示。此题如果

两个空间中的向量组等价，那么这两个基肯定相同。所以转化为求向量组的等价问题。

【解题过程】

证明：

$$(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}$$

所以$r(\alpha_1,\alpha_2)=2$。

同理可得$r(\beta_1,\beta_2)=2$。

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&0&-1&1\\0&1&3&-1\\0&1&3&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&3&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

所以$r\left(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\right)=2$。

故$r\left(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\right)=r\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=r\left(\beta_1,\beta_2\right)$

所以α_1,α_2和β_1,β_2可以分别看成

$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$两个极大线性无关组，

所以必定可以相互表示，所以等价。

结论成立。

第四节 内积与正交向量

1. 试用施密特法将向量组

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$ **化成正交向量组。**

【分析】主要考查施密特正交化。即：如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，令

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

那么β_1,β_2,β_3正交。

将其单位化

$\gamma_i = \dfrac{\beta_i}{\|\beta_i\|}(i=1,2,3)$，这个过程叫做单位化，

上述全部过程叫 Schmidt 正交化。

【解题思路】相互正交的向量即满足 $\alpha\beta^T = 0$，本题中由于只要求求出正交向量，故可以省去单位化的步骤。

【解题过程】

解：由 schmidt 正交化公式：

设 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

2. 设α,β是n维向量，且$\alpha\perp\beta$，证明：

$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2.$$

【知识点】本题考查向量组的模，内积的公式性质进行证明。

向量的内积：

$$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n$$

向量的长度：$\|\alpha\|=\sqrt{\alpha^T\alpha}=(\alpha,\alpha)$。

内积的齐次性及可加性：

$$(\alpha+\lambda\beta,\alpha+\lambda\beta)=(\alpha,\alpha)+2\lambda(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$$

【解题思路】

证明： 由题意可知

$$\|\alpha+\beta\|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta),$$

因为$\alpha\perp\beta$，所以$(\alpha,\beta)=0$，

$$\|\alpha+\beta\|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)$$

$$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$$

3. **证明：**

$$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\forall\lambda\in R,\|\alpha+\lambda\beta\|=\|\alpha-\lambda\beta\|。$$

【解题思路】

因为$\alpha\perp\beta$，所以$(\alpha,\beta)=0$，有上题中补充的公式知

$$\|\alpha+\lambda\beta\|^2=(\alpha+\lambda\beta,\alpha+\lambda\beta)$$

$$=(\alpha,\alpha)+2\lambda(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$$

所以$\|\alpha+\lambda\beta\|=\sqrt{\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2}$，

同理$\|\alpha-\lambda\beta\|=\sqrt{\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2}$，

所以

$\alpha\perp\beta\Rightarrow\forall\lambda\in R,\|\alpha-\lambda\beta\|=\|\alpha+\lambda\beta\|$。

反着证明，因为$\|\alpha-\lambda\beta\|=\|\alpha+\lambda\beta\|$，

所以$\|\alpha-\lambda\beta\|^2=\|\alpha+\lambda\beta\|^2$，

所以$(\alpha+\lambda\beta,\alpha+\lambda\beta)=(\alpha-\lambda\beta,\alpha-\lambda\beta)$，

所以$2\lambda(\alpha,\beta)=-2\lambda(\alpha,\beta)$对与一切实数

λ均成立，

所以$(\alpha,\beta)=0$，故$\alpha\perp\beta$。

即 $\alpha\perp\beta\Leftarrow\forall\lambda\in R,\|\alpha-\lambda\beta\|=\|\alpha+\lambda\beta\|$ 。

综上

$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\forall\lambda\in R,\|\alpha+\lambda\beta\|=\|\alpha-\lambda\beta\|$。

一、选择题。

1.设向量组（1）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组（2）$\beta_1,\beta_2$等价，则（　　）

(A) 向量组（1）线性相关。

(B) 向量组（2）线性无关。

(C) 向量组（1）线性无关。

(D) 向量组（2）线性相关。

【解题思路】由题意可知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可由$\beta_1,\beta_2$线性表示，所以$r(1)\le r(2)\le 2$，所以向量组(1)线性相关。也可以直接由定理，多数向量能用少数向量线性表示出，那么多数向量一定线性相关。所以选A。

2.设n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，则（　　）

(A) 在向量中增加一个向量仍然线性无关。

(B) 在向量中减去一个向量仍然线性无关。

(C) 将向量组中每个向量都减掉第一个分量后仍线性无关。

(D) 将向量组中每个向量任意增加一个分量后仍线性无关。

【解题思路】 对于选项 A，举反例：$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 线性无关，增加一个 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 后线性相关，所以不正确。对于 B 选项，若减去一个后线性相关，则说明部分线性相关，那么整体必然线性相关，会与已知矛盾，所以减去一个向量后仍然线性无关，故正确。对于

选项 C，举反例说明：$(3,0,\cdots,0)^T$，$(0,-3,0,\cdots,0)^T$，本身线性无关，但减掉第一个分量后线性相关，所以错误。对于选项 D，举反例说明：$(3,1,0,\cdots,0)^T$，$(9,21,0,\cdots,0)^T$，这两个向量线性无关，任意增加一个分量变为 $(3,1,7,0,\cdots,0)^T$，$(9,3,21,0,\cdots,0)^T$ 线性相关。所以选 B。

3.设三阶行列式 $D=\left|a_{ij}\right|=0$，则（　　）

(A) D 中至少有一行向量是其余行向量的线性组合。

(B) D 每一行向量都是其余航行量的线性组合。

(C) D 中至少有两行向量线性相关。

(D) D 中每一行向量都是线性相关的。

【解题思路】 $D=\left|a_{ij}\right|=0 \Rightarrow r\left(a_{ij}\right)<3 \Rightarrow$ 行秩<3，所以行向量线性相关，故存在一行向量可由其余行向量线性表出，所以选 A 。

4.设 A ：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是一组 n 维向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则（　　）

(A) A 的秩等于 4 。

(B) A 的秩等于 n 。

(C) A 的秩等于 1 。

(D) A 的秩小于等于 3 。

【解题思路】 由题意 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，所以其秩小于等于 3 ，所以选 D 。

5.设向量β不能由非零向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，则（　　）

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关。

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关。

(C) β与某个α_i线性相关。

(D) β与任意α_i线性无关。

【解题思路】对于选项A，只能是不确定。对于第二个选项，很明显错误，如果选项成立，那么向量β能由非零向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示。对于第三个选项，如果选项成立，

$$\beta=0\bullet\alpha_1+0\bullet\alpha_2+\cdots+\lambda\alpha_i+\cdots+0\bullet\alpha_s,$$

与已知矛盾，所以错误。故选D。

二、填空题。

1. 设n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则向量组$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$的秩$r=$____

【解题思路】向量组$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，所以$r\left(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1\right)\le r\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$因为$r\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\le 2$，所以$r\left(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1\right)=2$或者$3$。

2. 向量组α,β,γ线性相关的充分必要条件_____。

【解题思路】可以根据定义填一个，α,β,γ中至少有一个可由另外两个线性表示出来。只是要注意这里是充分必要条件，要看看可不可以反推。

3. 设向量组α_1,α_2线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则$\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3$的极大无关组为_____。

【解题思路】因为向量组α_1,α_2线性无关，所以$\alpha_1,2\alpha_2$也线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，而$(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)$可以经过初等行变换变成$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，所以$r(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则$\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3$线性相关，所以极大无关组为$\alpha_1,2\alpha_2$。

4. 已知向量$\alpha_1=(1,3,2,4),\alpha_2=(2,6,k,8)$，且$\alpha_1,\alpha_2$线性相关，则$k=$_____。

【解题思路】两个向量线性相关，则两个向量的对应元素成比例，这是判断两个向量线

性相关的条件，所以$k=4$。

5. 已知向量组α,β,γ线性相关，而β,γ,δ线性无关，则向量组α,β,γ的秩为_____。

【解题思路】因为α,β,γ线性相关，所以$r(\alpha,\beta,\gamma)\le 2$，又因为$\beta,\gamma,\delta$线性无关，所以任何一部分必定线性无关，所以$\beta,\gamma$线性无关，所以$r(\alpha,\beta,\gamma)\ge 2$，故$r(\alpha,\beta,\gamma)=2$。

三、判断题。

1.如果向量组α,β,γ只有一个极大无关组，则α,β,γ一定线性无关。（　　）

【解题思路】错误，举反例

$\alpha=(1,0,0)^T,\beta=(0,1,0)^T,\gamma=(0,0,0)^T$，虽然只有一个极大线性无关组，但线性相关。

2.设向量组α,β线性相关，$\gamma\neq 0$，则$\alpha+\gamma,\beta+\gamma$也线性相关。（　　）

【解题思路】错误，举反例$\alpha=(1,0)^T,\beta=(2,0)^T,\gamma=(1,1)^T$，虽然向量组$\alpha,\beta$线性相关，但$\alpha+\gamma,\beta+\gamma$线性无关。

3.如果$\alpha-\beta+2\gamma\neq 0$，则$\alpha,\beta,\gamma$线性无关。（　　）

【解题思路】错误，线性相关的定义是存在一组不全为零的实数，而不是规定必须是那组，也不是每一组都必须成立。

4.　向量组的秩就是其极大线性无关组的个数。　（　　）

【解题思路】错误，向量组的秩是极大线性无关组中含有的向量的个数。

5.如果向量组$a_1=(a,b)$，$a_2=(c,d)$线性无关，那么向量组$\beta_1=(a,c),\beta_2=(b,d)$一定线性无关。（　　）

【解题思路】构成矩阵$\begin{pmatrix} a,b \\ c,d \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} a,\mathrm{c} \\ \mathrm{b},d \end{pmatrix}$，可以看到两个矩阵互为转置矩阵，故秩相同，因为向量组$a_1=(a,b)$，$a_2=(c,d)$线性无关，所以$r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=2$，所以向量组$\beta_1=(a,c),\beta_2=(b,d)$一定线性无关。故正确。

四、已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一组基，证明向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

【解题思路】根据已知条件，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组基，根据基的性质，可知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，再由相关性质证明。本题也可以直接用定义进行证明，即证明是否有不全为零的实数使得向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的线性组合为零。本题采用相关性质证明。

【解题过程】

证明：由已知：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，由

$$\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1\right)$$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

其中$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$，所以$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$可逆，

根据秩的公式

$$r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关

五、已知向量组β_1,β_2,β_3能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，即

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 \\ \beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3 \end{cases}$$

证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价。

【解题思路】明确向量组等价，是指向量组之间可以互相线性表示。据此对本题进行分析。

【解题过程】

证明：由题意可知向量组β_1,β_2,β_3能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，

根据等式可得

$\alpha_3=\beta_2-\beta_1,\alpha_1=\beta_1-2\beta_2+\beta_3,$

$\alpha_1=\beta_1+\beta_2-\beta_3$，

所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示，即可以互相线性表示，所以等价

六、设n维向量组

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩为$r_1$；

（2）$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$的秩为$r_2$；

（3）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$的秩为$r_3$；

试证明：$r_1+r_2\geq r_3$。

【解题思路】向量组的秩的性质在前面已经多次练习，重在理解其定义及相关定理。

【解题过程】

证明： 若 $r_1=0$ 或 $r_2=0$， $r_1+r_2=r_3=0$。

设 $r_1\neq 0$ 且 $r_2\neq 0$ ， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r1}$ ，

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r2}$，$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{r3}$ 为三个向量组

的极大线性无关组，

由题意可知 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{r3}$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,$

α_{r1} 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r2}$ 线性表示出来，

且其线性无关，

根据定理：如 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，且其

可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表出，则 $s\leq t$ 。

可知 $r_3\leq r_1+r_2$ 。

同理可得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r1}$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r2}$ 可

由 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{r3}$ 线性表示出来，且线性无关，

所以$r_1 \le r_3$， $r_2 \le r_3$， 故$\max\left(r_1, r_2\right) \le r_3$。

所以$\max\left(r_1, r_2\right) \le r_3 \le r_1 + r_2$。

七、判断下列向量组的线性相关性，并说明理由。

（1）$\alpha_1 = \left(2,4,7\right), \alpha_2 = \left(0,2,5\right), \alpha_3 = \left(1,1,1\right)$

【解题思路】同初等变换，求向量组秩。也可以通过求行列式的值等方法，具体方法视情况而定。

【解题过程】

由 $A = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

所以$r\left(A\right) = r\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = 2$，

所以向量组线性相关。

（2） $\beta_1=(x,y,z),\beta_2=(x,z,y),$

$\beta_3=(y,z,x),\beta_4=(z,x,y)$

【解题思路】可以看出，这是一个含有 4 个向量的 3 维向量组，根据性质知其必线性相关。

（3）$\gamma_1=(1,2,3),\gamma_2=(0,2,3),\gamma_3=(1,3,2)$

【解题思路】

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\0&0&5\end{pmatrix},$$

所以$r(A)=3$，

故向量组向量个数与秩的个数相等，所以向量组线性无关。

八、已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$及$\beta$都是$n$维向量，且满足$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$，试证明：向量

组 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

【解题过程】

证明：

充分性：已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 及 β 都是 n 维向量，

且满足 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$，令

$$l_1(\beta-\alpha_1)+l_2(\beta-\alpha_2)+\cdots+l_s(\beta-\alpha_s)=0$$

整理

$$(l_2+l_3+\cdots+l_s)\alpha_1+(l_1+l_3+\cdots+l_s)\alpha_2$$

$$+\cdots+(l_1+l_2+\cdots+l_{s\ 1})\alpha_s=0,$$

所以

$$(l_2+l_3+\cdots+l_s)=0,(l_1+l_3+\cdots+l_s)=0,\cdots,$$

$$\left(l_1+l_2+\cdots+l_{s-1}\right)=0$$

所以$l_1=l_2=\cdots=l_s=0$。

故$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_s$线性无关。

必要性：已知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$及$\beta$都是$n$维

向量，且满足$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$，

$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_s$线性无关，

由题意

$$l_1\left(\beta-\alpha_1\right)+l_2\left(\beta-\alpha_2\right)+\cdots+l_s\left(\beta-\alpha_s\right)=0$$

当且仅当$l_1=l_2=\cdots=l_s=0$时才会成立，

展开得

$$\left(l_2+l_3+\cdots+l_s\right)\alpha_1+\left(l_1+l_3+\cdots+l_s\right)\alpha_2$$

$$+\cdots+\left(l_1+l_2+\cdots+l_{s-1}\right)\alpha_s=0,$$

所以

$(l_2+l_3+\cdots+l_s)=0,(l_1+l_3+\cdots+l_s)=0,$

$,\cdots,(l_1+l_2+\cdots+l_{s-1})=0$,

故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关。

九、已知β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，但不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示，证明$\alpha_s$能由量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$线性表示，不能用向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示。

【解题过程】

证明：由题意，设

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_{s-1}+k_s\alpha_s=\beta$,

已知β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示，

所以$k_s\neq 0$,

可得

$$\alpha_s=\frac{1}{k_s}\left(\beta-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}\right)。$$

假设α_s可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示，

记为$\alpha_s=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{s-1}\alpha_{s-1}$，

可得：

$$\left(k_1+k_s\lambda_1\right)\alpha_1+\left(k_2+k_s\lambda_2\right)\alpha_2$$

$$+\cdots+\left(k_{s-1}+k_s\lambda_{s-1}\right)\alpha_{s-1}=\beta,$$

所以β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示，

与已知矛盾，故不成立，

即α_s不能用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示。

综上所述α_s能由量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$线性表示，不能用向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示。

十、证明：对任意实数a,b,c，向量组

$$\alpha_1=(1,a,1,1),\alpha_2=(1,b,1,0),\alpha_3=(1,c,0,0)$$

均线性无关。

【解题过程】

证明：

设存在实数使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，

得到$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ ak_1+bk_2+ck_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_1=0 \end{cases}$，解之$\begin{cases} k_1=0 \\ k_2=0 \\ k_3=0 \end{cases}$，

所以无论a,b,c取什么值，向量组均线性无关。

第四章 线性方程组

第一节 线性方程组的一般理论

1.选择题。

(1) 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，齐次线性方程 $Ax=0$ 有无数个解，则必有 （　　）

(A) $m<n$ (B) $R(A)<m$ (C) A 中有两列对应元素成比例 (D) A 的列向量线性相关

【知识点】考查齐次方程组及其解的性质。

线性方程组的定义：

$$\text{方程组}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

称为 n 个未知数 m 个方程的非齐次线性方程组，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代表 n 个未知量，m 是方程的个数，a_{ij} 构成方程的系数。若

$b_i = 0\left(\forall i = 1,2,\cdots,m\right)$，则称方程组为齐次线性方程组。把

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做其系数矩阵。

方程组还可以用矩阵表示为如下形式：

$Ax = b$，其中 $x = \left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]^T$，

$b = \left[b_1, b_2, \cdots, b_n\right]^T$。

齐次方程组解的判定：当 $r(A) < n$ 时，方程组有无穷多解；当 $r(A) = n$，方程组有唯一解。

【解题思路】因为 A 是 $m \times n$ 阶矩阵，齐次线性方程 $Ax = 0$ 有无数个解 $\Leftrightarrow r\left(A\right) < n$，又根据矩阵秩自身的性质有 $r\left(A\right) \le m$，

$r(A)=$其自身的行秩和列秩序。对于选项A，若$r(A)<n\le m$，结论也成立，对于选项B，若$r(A)=m<n$结论也成立，对于选项D， A的列向量线性相关$\Rightarrow r(A)<n$，所以与题意相符，正确。而对于选项C，列向量线性相关不一定只有两列元素成比例，所以错误。所以此题选D。

（2）设A是$m\times n$阶矩阵，非齐次线性方程$Ax=b$的解不唯一，则下列结论正确的有（　　）

(A) $m<n$ (B) $R(A)<m$ (C) A为零矩阵(D) $Ax=0$的解不唯一

【知识点】本题考查非齐次方程组。前面已经介绍了齐次以及非齐次方程组的区别。对于非齐次方程组$Ax=b$解的判定方法：首先

要构造增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

若 $r(A)=r(\overline{A})=n$，则方程组有唯一解；

若 $r(A)=r(\overline{A})<n$，则方程组有无穷多解；

若 $r(A)<r(\overline{A})$，则方程组无解。

【解题思路】因为 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，非齐次线性方程 $Ax=b$ 的解不唯一 $\Leftrightarrow r\left(A\right)=r\left(\overline{A}\right)<n$ $\Leftrightarrow$ 齐次方程有非零解 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 的解不唯一，所以此题选 D 。

(1)已知 β_1,β_2 是非齐次线性方程 $Ax=b$ 的两个不同解，α_1,α_2 是齐次方程 $Ax=0$ 导出的方程组的基础解系，$k_1,k_2\in R$，则方程组

$Ax=b$ 的通解必是

（　　）

$(A)\ k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$

$(B)\ k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

$(C)\ k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$

$(D)\ k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

【知识点】本题考查线性方程组的通解。首先明确基础解系的定义：

向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 称为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，如果：（1）$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的解；（2）$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关；

（3）$Ax=0$ 的任意解都可以由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表出。即基础解系是系数矩阵 A 的一个最大无关组。

若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，那么齐次方程组通解为：

$x=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_t\eta_t$，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_t$ 是不全为零的常数。

非齐次方程组 $Ax=b$，通常我们要先判断其是否有解，再求通解，其通解形式为：

$x=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_t\eta_t+\xi$，其中 ξ 为 $Ax=b$ 的任意一个特解。

【解题思路】此题首先我们观察，只有 B 和 D 选项中 $\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$ 才是非齐次方程的特解，而 $\alpha_1,(\alpha_1-\alpha_2)$ 都是齐次方程的解，且

$\alpha_1,(\alpha_1-\alpha_2)$线性无关，这里我们可以用反证法证明，假设$\alpha_1,(\alpha_1-\alpha_2)$线性相关，则存在不全为零的实数$k_1,k_2$，使得$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)=0$，整理$(k_1+k_2)\alpha_1-k_2\alpha_2=0$，则可知$\alpha_1,\alpha_2$线性相关，因为$\alpha_1,\alpha_2$是齐次方程基础解系，所以线性无关，所以假设错误，故$\alpha_1,(\alpha_1-\alpha_2)$线性无关，所以$\alpha_1,(\alpha_1-\alpha_2)$是齐次方程的一个基础解系，所以$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)$是齐次方程的一个通解，所以选项$B$正确，对于最后一个选项，不能说明$\alpha_1,(\beta_1-\beta_2)$线性无关所以错误，所以选$B$。

（4）若设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是四元非齐次线性方程

$Ax=b$ 的三个解向量，而且 $r(A)=3$，

$\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，$c$ 表示任意常数，则线性方程 $Ax=b$ 的通解为（　）

$(A)\ (1,2,3,4)^T+c(1,1,1,1)^T$

$(B)\ (1,2,3,3)^T+c(0,1,2,3)^T$

$(C)\ (1,2,3,4)^T+c(2,3,4,5)^T$

$(D)\ (1,2,3,4)^T+c(3,4,5,6)^T$

【知识点】对于 n 维线性方程组，基础解系的个数 $t=n-r(A)$。

【解题思路】因为 $r(A)=3$，所以 $Ax=0$ 基础解系中向量个数为 $4-3=1$，又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程 $Ax=b$ 的三个解向量，所以 $\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1$ 是 $Ax=0$

的一个解，所以其通解为

$$c\left(\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1\right)=c\left(-2,-3,-4,-5\right)^T$$

$$=c\left(2,3,4,5\right)^T$$

而 α_1 是非齐次方程的一个特解，所以

$Ax=b$ 的通解为 $\left(1,2,3,4\right)^T+c\left(2,3,4,5\right)^T$，

故选 C 。

（5）设 n 元 m 个方程的非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 r，则（　　）

$\left(A\right)$ $r=m$ 时，$Ax=b$ 必有解

$\left(B\right)$ $r=n$，$Ax=b$ 有唯一解

$\left(C\right)$ $m=n$ 时，$Ax=b$ 有唯一解

$\left(D\right)$ $r<n$，$Ax=b$ 有无穷多解

【解题思路】对于非齐次方程有无解主要看 $r\left(A\right)=r\left(\overline{A}\right)$ 是否成立，对于选项 A，当

$r=m$时，$r(A)=r=m$，根据矩阵秩序的性质 $r(A)\le r(\overline{A})\le m$ ，所以 $r(A)=r(\overline{A})=m$，所以必有解，故此题选A。其余选项均不能得出此结论，证明过程较为简单，这里不再详述。

2.填空题。

（1）方程组$\begin{cases} x_1+x_2=-a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=-a_3 \\ x_4+x_1=a_4 \end{cases}$**有解的充分必要条件是_____。**

【解题思路】此题可以看成一个非齐次线性方程，设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$b=(-a_1,a_2,-a_3,a_4)^T$，

$x=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^T$,其有解的充分必要条件是$r\left(A\right)=r\left(\overline{A}\right)$,

所以进行如下处理：

$$\overline{A}=\left(A,b\right)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\1&0&0&1&a_4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4-r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&-1&0&1&a_4+a_1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&0&1&1&a_4+a_1+a_2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&0&0&0&a_4+a_1+a_2+a_3\end{array}\right)$$

要使$r(A)=r(\overline{A})$，故$a_1+a_2+a_3+a_4=0$。

（2）设n阶矩阵A的各行元素之和均为0，且$r(A)=n-1$，则方程组$Ax=0$的通解为____。

【解题思路】由题意可知设$x=(1,1,\cdots,1)^T$，则$Ax=0$，所以$(1,1,\cdots,1)^T$为$Ax=0$的一个解，又因为$r(A)=n-1$，所以$Ax=0$的基础解系中向量个数为一个，故其通解为$x=k(1,1,\cdots,1)^T$，$k\in R$。

（3）设A为n阶方阵，那么对于任何n维向量b，方程$Ax=b$都有解的充要条件是_____。

【解题思路】由题意对于任何n维向量b，方程$Ax=b$都有解，则其可理解为对于任

何 n 维向量 b，$r(A)=r(\overline{A})$，由矩阵秩的特性知 $r(A)\le r(\overline{A})\le n$，当 $r(A)=n$ 时，$r(A)=r(\overline{A})$，反正当 $r(A)=r(\overline{A})$ 恒成立时，$r(A)=n$。所以此题填 $r(A)=n$。

（4）若 n 齐次线性方程组 $Ax=0$ 有 n 个线性无关的解向量，则矩阵 $A=$_____。

【解题思路】由题意 $Ax=0$ 的基础解系中含有 n 个向量，所以 $r(A)=0$，所以 $A=0$。

1. 判定齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-2x_4=0 \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=0 \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=0 \\ 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$$ **是否有非零解。**

【解题思路】对于方阵 A，$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0$。当不需要求具体

解时，我们通常可以通过判断矩阵行列式是否为零。

【解题过程】

解：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&3&5&-2\\1&5&-9&8\\5&18&4&5\\2&7&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&5&-2\\0&1&-7&5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}=0$$

所以有非零解。

2. 当 λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda\end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷多解？

【解题思路】本题的系数矩阵明显含有未知数，故需要进行讨论，此时通过构造增广矩阵进行初等“行”变换来判断。

【解题过程】

解： 令

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},b=(1,\lambda,\lambda)^T,x=(x_1,x_2,x_3)^T$$

则增广矩阵

$$\overline{A}=(A,b)=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & \lambda\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & 1-\lambda\end{array}\right)$$

当 $\lambda=1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=1<3$，所以此

时有无穷多解；

当 $\lambda=-2$ 时，此时 $r(A)\neq r(\overline{A})$，此时无解；

当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=3$，此时有唯一解。

3. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1{}^2x_3=a_1^3 \\ x_1+a_2x_2+a_2{}^2x_3=a_2^3 \\ x_1+a_3x_2+a_3{}^2x_3=a_3^3 \\ x_1+a_4x_2+a_4{}^2x_3=a_4^3 \end{cases}$$

，试证明：若 a_1,a_2,a_3,a_4 互不相等，则方程组无解。

【解题思路】类似题目都通过对增广矩阵的秩以及系数矩阵的秩进行讨论即可。

【解题过程】

证明：设

$$A=\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_1^2\\ 1 & a_2 & a_2^2\\ 1 & a_3 & a_3^2\\ 1 & a_4 & a_4^2\end{pmatrix}, b=\left(a_1^3,a_2^3,a_3^3,a_4^3\right)^T,$$

$$x=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3\\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3\\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3\\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3\\ 0 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 & a_2^3-a_1^3\\ 0 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1^2 & a_3^3-a_1^3\\ 0 & a_4-a_1 & a_4^2-a_1^2 & a_4^3-a_1^3\end{array}\right),$$

因为a_1,a_2,a_3,a_4互不相等，所以任意两个的差均不等于零。所以：

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 0 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 & a_2^3-a_1^3 \\ 0 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1^2 & a_3^3-a_1^3 \\ 0 & a_4-a_1 & a_4^2-a_1^2 & a_4^3-a_1^3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 0 & 1 & a_2+a_1 & a_2^2+a_1a_2+a_1^2 \\ 0 & 1 & a_3+a_1 & a_3^2+a_1a_3+a_1^2 \\ 0 & 1 & a_4+a_1 & a_4^2+a_1a_4+a_1^2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 0 & 1 & a_2+a_1 & a_2^2+a_1a_2+a_1^2 \\ 0 & 0 & a_3-a_2 & (a_3-a_2)(a_3+a_2+a_1) \\ 0 & 0 & a_4-a_2 & (a_4-a_2)(a_1+a_2+a_4) \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 0 & 1 & a_2+a_1 & a_2^2+a_1a_2+a_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3+a_2+a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_1+a_2+a_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 0 & 1 & a_2+a_1 & a_2^2+a_1a_2+a_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3+a_2+a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_4-a_3 \end{array}\right)$$

由此可知$r(A)=3\neq r(\overline{A})=4$，所以方程组无解。

4. 设有三维向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},$$

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$$**，试问λ取何值时，**

（1）向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示？

（2）向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$多种线性表示？

（3）向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？

【解题过程】解：构造线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2\end{cases}$$

增广矩阵

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-(1+\lambda)r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & -\lambda & -2\lambda-\lambda^2 & -\lambda^2(1+\lambda)\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & -3\lambda-\lambda^2 & -\lambda(\lambda^2+2\lambda-1)\end{array}\right)$$

当$\lambda=0$时，上述矩阵变化为

$\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$，此时$r(A)=r(\overline{A})=1<3$，

方程有无数个解，向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$多种线性表示；

当$\lambda\neq 0$时，

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & -3\lambda-\lambda^2 & -\lambda\left(\lambda^2+2\lambda-1\right) \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & (1-\lambda) \\ 0 & 0 & 3+\lambda & \left(\lambda^2+2\lambda-1\right) \end{array}\right)$$

当$\lambda\neq -3$时，此时$r(A)=r(\overline{A})=3$，方程有唯一解，向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示；当$\lambda=-3$时，$r(A)\neq r(\overline{A})$，所以方程无解，此时不能线性表示。

第二节 齐次线性方程组

1. 求解下列齐次线性方程组。

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$。

【知识点】齐次方程组通解的求解方式：

1.对系数矩阵做初等行变换化为阶梯矩阵；

2.由秩$r(A)$确定自由变量的个数$n-r(A)$；

3.找出一个秩为$r(A)$的矩阵，则其余的$n-r(A)$列对应的就是自由变量；

4.每次都给一个自由变量赋值为1，自由变量赋值为0；

对阶梯方程组由下往上一次求解，就可得到方程组的解。

【解题思路】

解： 令系数矩阵 $A=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$R(A)=3$，所以自由变量的个数为1个，

根据阶梯行列式有 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ -x_2-3x_3+x_4=0 \\ -3x_3+4x_4=0 \end{cases}$，

选第四列为其自由变量，对 x_4 进行合理赋值

令 $x_4=3$，那么 $x_3=4, x_2=-9, x_1=4$，

所以此方程的解为

$x=k\left(4,-9,4,3\right)^T, k\in R$。

（2）$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$。

【解题过程】

解： 令 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 3 & 6 & -1 & -3\\ 5 & 10 & 1 & -5\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可知 $R(A)=2$，方程组含有 2 个基础解系，

此时方程可以写成 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ x_3=0\end{cases}$，

选择 x_1,x_2 为其自由变量，

令 $x_1=1,x_2=0$，则 $x_4=1$；

令 $x_1=0,x_2=1$，则 $x_4=2$；

所以此方程的解为

$$x = k_1(1,0,0,1)^T + k_2(0,1,0,2)^T, (k_1, k_2 \in R)$$

（3）$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$。

【解题过程】

令 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 11 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_4 - 3r_1]{\substack{r_2 - 5r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 2$，基础解系的个数为 2 个

令 x_3, x_4 为自由变量

将方程化为 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 14x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

令 $x_3 = 1, x_4 = 0$，则 $x_2 = \dfrac{3}{14}, x_1 = -\dfrac{5}{14}$

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$，则 $x_2 = -\dfrac{1}{2}, x_1 = \dfrac{1}{2}$

所以方程组的解为

$$x = k_1\left(-\frac{5}{14}, \frac{3}{14}, 1, 0\right)^T + k_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right),$$

$\left(k_1, k_2 \in R\right)$。

2. **设** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$**，求一个** 4×2 **矩阵** B**，使** $AB = O$**，且** $r(B) = 2$**。**

【解题思路】令 $x = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^T$，设

$Ax=0$，求其解，解出来的向量用来构造一个矩阵即可。所以关键是求解齐次线性方程组的解。

【解题过程】

由已知 $A=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$R(A)=2$，方程组含有 2 个基础解系

令 x_3, x_4 为自由变量，由阶梯矩阵得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ \quad x_2+2x_3+3x_4=0 \end{cases}$$

令 $x_3=1, x_4=0$，则 $x_2=-2, x_1=1$

令 $x_3=0, x_4=1$，$x_2=-3, x_1=2$

所以我们构造矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

满足$r(B)=2$，且$AB=O$

3. 设A是秩为2的5×4矩阵，

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\-1\\-12\\9\end{pmatrix}$$

是线性方程组$Ax=0$的解向量，求$Ax=0$的解空间S的一个规范正交基。

【知识点】规范正交基：设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是向量空间的一组基，如果它满足彼此之间内积$(e_i,e_j)=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$，则称$e_1,e_2,\cdots,e_n$为规范正交基。

【解题思路】规范正交基可以由任意线性方程组的基础解系通过施密特正交化求得。需要注意的是单位正交基，在进行施密特正交化后，一定要接着进行单位化。

【解题过程】

因为$r(A)=2$，所以基础解系的向量个数为两个

又因α_1,α_2不成比例，即线性无关，是解空间的一组基。将其规范正交化

令$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\dfrac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1$，

带入数据$\beta_2=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-6\\5\\18\\-9\end{pmatrix}$

将其单位化得

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{\sqrt{2}}{10}\begin{pmatrix}-2\\1\\6\\-3\end{pmatrix}$$

4. 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}$

【解题思路】根据基础解系求其次方程组 $Ax=0$.显然这是一个 4 维线性方程组，且基础解系的个数至少为 2 个，那个其系数矩阵的秩应满足 $R(A)\le 2$，即本题的答案其实是不唯一的。故通过转换线性方程，求得满足系数矩阵的两组向量即可。

【解题过程】

设：所求方程组为 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)X=0$

代入两个解得 $\begin{cases}\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4=0\\3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$

得新系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

解此线性方程，得特解为$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以方程组可表示为$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

5. 设 A, B 都是 n 阶方阵，且满足 $AB = O$，试证明：

（1）$r(A) + r(B) \le n$；

（2）若 $A^2 = A$，则 $r(A) + r(A - E) = n$。

【解题思路】明确，若 $AB = O$，则 B 的列向量均为齐次方程组 $Ax = 0$ 的解。然后通过基础解系个数与系数矩阵秩的关系进行分析。

【解题过程】

证明：（1）因为 $AB=O$，

所以 B 的列向量均为齐次方程组 $Ax=0$ 的解，

所以基础解系个数 $S=n-r(A)\geq r(B)$，

故 $r(A)+r(B)\leq n$。

（2）因为 $A^2=A$，

可得 $A(A-E)=O$，

由（1）可知 $r(A)+r(A-E)\leq n$，

又因 $r(A)+r(A-E)=r(A)+r(E-A)$

$\geq r(A+E-A)=r(E)=n$，

所以 $r(A)+r(A-E)=n$。

6. 设 A 是 n 阶方阵 $(n\geq 2)$，且 A^* 是 A 的伴随矩阵，试证明：

$$r\left(A^*\right)=\begin{cases} n, & r\left(A\right)=n \\ 1, & r\left(A\right)=n-1 \\ 0, & r\left(A\right)\le n-2 \end{cases}。$$

【解题思路】本题结论在以后的应用中也很重要，同学们请详加理解。

【解题过程】

证明：当$r\left(A\right)=n$时：$A^*A=\left|A\right|E\rightarrow$

$\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$，

因为$\left|A\right|\neq 0$，所以$\left|A^*\right|\neq 0$，所以$r\left(A^*\right)=n$；

当$r\left(A\right)=n-1$时：$A^*A=AA^*=\left|A\right|E=0$，

所以矩阵A的列向量都是$A^*x=0$的解集，

所以$n-r\left(A^*\right)\ge r\left(A\right)$，所以$1\ge r\left(A^*\right)$，

又因$r\left(A\right)=n-1$时，存在$n-1$子式不为零，

所以$r\left(A^*\right)\ge 1$,故$r\left(A^*\right)=1$；

当$r(A)\le n-2$：故所有$n-1$子式均为零，

所以$A^*=0$，故$r(A^*)=0$。

7.已知三阶方阵$B\ne O$，且B的每个列向量

都是方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$的解，

（1）　求λ的值；

（2）　证明$|B|=0$。

【解题思路】由题意可知，方程组存在非零解，则说明其系数矩阵的行列式为零。由此我们可以求出λ的值。

【解题过程】

（1）由题意知方程组存在非零解，

所以$\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=0$，

故$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & \lambda+4 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0$，

所以$\lambda+4=5 \Rightarrow \lambda=1$。

（2）设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，

$x=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T$，

因为B的每个列向量都是方程组$Ax=0$的解，

所以$3-r\left(A\right)\geq r\left(B\right)$，

因为$r\left(A\right)=2$，

所以$1\geq r\left(B\right)$，故$\left|B\right|=0$。

8．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，证明向量组

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ **也是它的基础解系。**

【解题思路】这就是要逐步验证基础解系需要满足的特征。即基础解系之间的线性无关性，并且都是方程的解这两个条件。

【解题过程】

证明：首先因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，

所以其任意线性组合是方程组的解，故$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$是方程组的三个解。

假设$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性相关，

则存在不全为零实数使得

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

整理

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$$

已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，可得$\begin{cases} k_1=0 \\ k_2=0 \\ k_3=0 \end{cases}$

所以假设错误，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

由题意知基础解系中含有的向量个数为三个，

所以$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也是方程的一个基础解系。

9.设A为n阶矩阵，若存在正整数k，使得方程组$A^k x=0$有解向量α，且$A^{k-1}\alpha\neq 0$，试证明：向量组$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$线性无关。

【解题思路】考虑用定义法或者反证法进行证明。

证明：设向量组$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$线性相关

则存在实数使得$l_1\alpha + l_2 A\alpha + \cdots + l_k A^{k-1}\alpha = 0$

两边同时乘以A^{k-1}，

因为$A^k\alpha = 0$，所以$A^m\alpha = 0, (m \geq k)$，

所以式子化为$l_1 A^{k-1}\alpha = 0$，

因为$A^{k-1}\alpha \neq 0$，所以$l_1 = 0$，

同理以此类推得$l_2 = l_3 = \cdots = l_k = 0$，

所以假设不成立，向量组$\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$线性无关。

10.设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$是方程组$Ax = 0$的基础解系，且存在向量$\beta$使$A\beta \neq 0$，试证明：向量组$\beta, \beta + \alpha_1, \cdots, \beta + \alpha_t$线性无关。

【解题思路】此题是抽象的，由题意我们得出这样两个结论$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$线性无关，$\beta$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$线性表示，这里我们采

用定义法进行证明。

【解题过程】

证明：假设 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_t$ 象形相关，

则存在实数使得

$$k\beta+l_1\left(\beta+\alpha_1\right)+\cdots+l_t\left(\beta+\alpha_t\right)=0,$$

整理得

$$\left(k+l_1+\cdots+l_t\right)\beta+l_1\alpha_1+\cdots+l_t\alpha_t=0,$$

两边乘以矩阵 A 得

$$\left(k+l_1+\cdots+l_t\right)A\beta+l_1A\alpha_1+\cdots+l_tA\alpha_t=0$$

因为 $A\alpha_i=0,\left(i=1,2,\cdots,t\right)$，

所以 $\left(k+l_1+\cdots+l_t\right)A\beta=0$，

因为 $A\beta\neq 0$，

所以 $\left(k+l_1+\cdots+l_t\right)=0$，

代入 $\left(k+l_1+\cdots+l_t\right)\beta+l_1\alpha_1+\cdots+l_t\alpha_t=0$

得 $l_1\alpha_1+\cdots+l_t\alpha_t=0$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性无关，

所以 $l_1=l_2=\cdots=l_t=0$，

所以 $k=0$，故 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关。

第三节 非齐次线性方程

1.判断下列方程组是否有解，若有解求其解。

（1）$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2 \\ 3x_1-x_2+2x_3=10 \\ 11x_1+3x_2=8 \end{cases}$。

【知识点】本题考查非齐次方程组的解。在上两节，我们已经已经介绍过线性方程通解的求法，并反复练习了齐次方程组解的求法。这里再次对非齐次方程组的求解进行复习：首先要构造增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

若 $r(A)=r(\overline{A})=n$，则方程组有唯一解；

若 $r(A)=r(\overline{A})<n$，则方程组有无穷多解；

若 $r(A)<r(\overline{A})$，则方程组无解。

再求通解，其通解形式为：

$x=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_t\eta_t+\xi$，

其中 ξ 为 $Ax=b$ 的任意一个特解，$\eta_1,\eta_2,$

$\cdots,\eta_t$ 为齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系

【解题过程】

增广矩阵：

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc:c} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 0 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-11r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & -30 & 33 & 96 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & -3 & -8\\ 0 & -10 & 11 & 34\\ 0 & 0 & 0 & -6\end{array}\right),$$

因为$r(A)\neq r(A,b)$，所以无解。

（2）$\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2\\ x_1+x_2+2x_3+x_4=3\end{cases}$。

【解题过程】

解：构造增广矩阵

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc:c}2 & 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1\end{array}\right).$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & -2 & -1 & -5\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

因为$r(A)=r(A,b)<4$，所以方程组有无穷多解

先求齐次方程的通解为

$x=k_1(0,-1,1,-1)^T, k_1\in R$。

再寻求一个特解$\overline{x}=(-2,1,2,0)^T$，

所以通解为

$x=k_1(0,-1,1,-1)^T+(-2,1,2,0)^T, k_1\in R$ 。

2.讨论a,b为何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+ax_2+x_3=3 \\ x_1+2ax_2+x_3=4 \\ bx_1+x_2+x_3=4 \end{cases}$$

有唯一解？有无穷多解？无解？有解时求其通解。

【解题思路】构造增广矩阵并进行初等“行“变换，判断解是否存在，再求齐次方程组通解，后求非齐次方程组特解，相加即为非齐次方程组通解。

【解题过程】

解：构造增广矩阵：

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & 2a & 1 & 4 \\ b & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-br_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-b & 4-3b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+br_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & a & 1 & 3\\ 0 & a & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1-b & 4-2b\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & a & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1-b & 4-2b\\ 0 & a & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-ar_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1 & a & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1-b & 4-2b\\ 0 & 0 & a(b-1) & 1-a(4-2b)\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & a & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & a(b-1) & 1-a(4-2b)\end{array}\right),$$

当 $a=0$ 时，无论 b 取何值，$r(A)\neq r(A,b)$，

所以方 程组无解；

当 $b=1,a\neq\dfrac{1}{2}$ 时，$r(A)\neq r(A,b)$，也无解；

当 $b=1, a=\frac{1}{2}$ 时， $R(A)=R(\overline{A})=2<3$ ，

通解为

$$x=k(1,0,-1)^T+\left(3,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^T, k\in R;$$

当 $a\neq\frac{1}{2}$ 且 $b\neq 1$ 时， $R(A)=R(\overline{A})=3$ 。

有唯一解，其解为

$$x=\left(2-\frac{1}{a(1-b)}\left[1-a(4-2b)\right],(4-2b)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a}\left[1-a(4-2b)\right],\frac{1}{a(b-1)}\left[1-a(4-2b)\right]\right)^T$$

3.设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$

$b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，其中 $a_i \neq a_j\left(i \neq j\right)$，求方程组

$A^T x=b$ 的解。

【解题思路】本题是一个求非齐次线性方程组解的问题，通过观察，我们发现其系数矩阵 A 的行列式为标准的范德蒙行列式，故在此，可利用范德蒙行列式求得 $|A|$，发现 $|A|>0$，即 $r(A)=n$，从而可分析得到 $r(A)=r(\overline{A})=n$，从而知道非齐次方程组有唯一解。

【解题过程】

因为 $\left|A^T\right|=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1}\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$

$$=|A|=\prod_{1\le i<j\le n}\left(a_j-a_i\right)\neq 0,$$

所 $r\left(A^T\right)=r\left(A^T,b\right)=n$，

所以方程有唯一解，观察得知解为

$x=\left(1,0,0,\cdots,0\right)^T$。

4.设四元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为3，已知 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，其中

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\5\\-1\end{pmatrix},\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\9\\8\\8\end{pmatrix}$$

，求方程组的通解。

【解题思路】题中已经给出非齐次方程组的三个特解，故对求其通解重点在于找出齐次方程组 $Ax=0$ 的特解。首先因为系数矩阵的

秩为 3，所以其齐次方程基础解系中向量的个数为一个，因为η_1,η_2,η_3是非齐次线性方程三个解向量，即都满足$Ax=b$，但我们可以发现，构造向量$2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)$，则

$$A[2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)]=2A\eta_1-A\eta_2-A\eta_3$$
$$=2b-b-b=0$$

即$2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)$是齐次方程$Ax=0$的基础解系。

【解题过程】

由已知可得：

$$A[2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)]=2A\eta_1-A\eta_2-A\eta_3$$
$$=2b-b-b=0$$

即$2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)$是齐次方程$Ax=0$的解，

而$Ax=0$的基础解系个数$t=4-r(A)=1$

故齐次方程组通**解：**

$$k[2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)],k\in R$$

任取非齐次方程组特解，

得非齐次方程的通解是

$k\left[2\eta_1-\left(\eta_2+\eta_3\right)\right]+\eta_1, k\in R$，

得通解 $x^T=k\begin{pmatrix}3\\-9\\2\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\5\\-1\end{pmatrix}, k\in R$。

5.设 η 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应齐次方程 $Ax=0$ 的基础解系，证明：

（1）$\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；

（2）$\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 线性无关。

【解题思路】本题考查线性方程组解的性质。首先，齐次线性方程组的基础解系是线性无关的。对于其它的证明过程，利用定义进行反证即可。

【解题过程】

证明:（1）假设$\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性相关，

则存在实数使得

$k\eta+l_1\xi_1+l_2\xi_2+\cdots+l_{n-r}\xi_{n-r}=0$，

两边同时乘以矩阵A，

得 $kA\eta+l_1A\xi_1+l_2A\xi_2+\cdots+l_{n-r}A\xi_{n-r}=0$ ，

由题意$A\xi_i=0,(i=1,2,\cdots,n-r)$，

所以得$kA\eta=0\Rightarrow kb=0$，所以$k=0$，

将其代入$k\eta+l_1\xi_1+l_2\xi_2+\cdots+l_{n-r}\xi_{n-r}=0$中

得$l_1\xi_1+l_2\xi_2+\cdots+l_{n-r}\xi_{n-r}=0$，

因为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关，

所以$l_1=l_2=\cdots=l_{n-r}=0$，假设不成立，

所以$\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关。

（2）设存在实数使得

$$k\eta+l_1(\eta+\xi_1)+l_2(\eta+\xi_2)+\cdots+l_{n-r}(\eta+\xi_{n-r})=0$$

整理得

$$(k+l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})\eta+l_1\xi_1+l_2\xi_2$$

$$+\cdots+l_{n-r}\xi_{n-r}=0,$$

两边乘以矩阵 A，

$$(k+l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})A\eta+l_1A\xi_1+l_2A\xi_2$$

$$+\cdots+l_{n-r}A\xi_{n-r}=0,$$

所以 $(k+l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})A\eta=0$，

所以 $(k+l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})=0$，

代入 $(k+l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})\eta+l_1\xi_1+l_2\xi_2$

$+\cdots+l_{n-r}\xi_{n-r}=0$ 中

得 $l_1\xi_1+l_2\xi_2+\cdots+l_{n-r}\xi_{n-r}=0$，

因为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关，

所以$l_1=l_2=\cdots=l_{n-r}=0$，

故$\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$线性无关。

6．设矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，向量$b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求解方程组$Ax=b$的通解。

【解题思路】根据条件逐步分析，找到非齐次方程组特解以及齐次方程组通解。

【解题过程】

由题意$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，

所以$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是矩阵的一个极大线性无关组，$r(A)=3$，

所以矩阵对应的齐次方程的基础解系中含有一个向量，

因为$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$，

整理$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)(1,-2,1,0)^T = 0$

所以$(1,-2,1,0)^T$是其齐次方程的一个解，

也是其基础解系，

又因$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)(1,1,1,1)^T = b$，

所以$(1,1,1,1)^T$是其非齐次线性方程的一个特解，所以通解为

$x = k(1,-2,1,0)^T + (1,1,1,1)^T, k \in R$。

7. 设$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$是非齐次线性方程组$Ax = b$的$s$个解，$k_1, k_2, \cdots, k_s$为实数，且满

足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，证明：$x=k_1\xi_1+$

$k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$ 也是它的解。

【解题思路】只需证明

$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$ 也满足非齐次方

程 $Ax=b$ 即可。

【解题过程】

证明：由题意知 $A\xi_i=b,\left(i=1,2,\cdots,s\right)$，则

$k_1A\xi_1+k_2A\xi_2+\cdots+k_sA\xi_S$

$=A\left(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s\right)$

$=k_1b+k_2b+\cdots+k_sb=\left(k_1+k_2+\cdots+k_s\right)b=b$

所以 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$ 也是其解。

8.设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵

的秩为 r，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$ 是 $n-r+1$ 个线

性无关的解，试证明：它的任意解可表示为

$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$ ， 其 中

$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$。

【解题思路】

证明：非齐次方程解的集合构成解向量空间，

当 $r(A) = r$ 且有解时期通解可以表示为

$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta$，

可得

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta$$

$$= k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$$

$$+ (k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-r-1})\eta$$

$$= k_1(\xi_1 + \eta) + k_2(\xi_2 + \eta) + \cdots$$

$$+ k_{n-r}(\xi_{n-r} + \eta) + k_{n-r+1}\eta,$$

在第 5 题中已经证明了 $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2$,

$,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 是 $Ax=b$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解，设 $\eta_i=\eta+\xi_i\ (i=1,2,\cdots,n-r)$，代入得 $x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$，最后那个直接换下即可，因为表示的是代数形式。

9.设向量组 $B:b_1,b_2,\cdots,b_r$ 能由向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示：$(b_1,b_2,\cdots,b_r)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)K$，其中 K 为 $s\times r$ 矩阵，且向量组 A 线性无关，证明：向量组 B 线性无关的充分必要条件是矩阵 K 的秩 $r(K)=r$。

【解题思路】

证明：必要性：已知 B 线性无关，A 线性无关，$(b_1,b_2,\cdots,b_r)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)K$，

根据秩的性质 $r=r(B)\le r(K)$，

又因其中K为$s\times r$矩阵，

所以$r(K)\le r$，故$r(K)=r$。

充分性：已知$r(K)=r$，其中K为$s\times r$矩阵，

所以$r\le s$，

构造齐次线性方程$Bx=0$和$Akx=0$，

由已知条件，两个齐次方程同解，

因为A的向量组线性无关，

所以对于$Ax=0$只有零解，

所以要使$Akx=0$，则必须满足$kx=0$，

因为$r(K)=r$，所以只有零解，

故$Akx=0$只有零解，

所以$Bx=0$只有零解，故$r(B)=r$。

线性方程组自测题

一、单项选择题。

1.设 A 为 $n\ (n\geq 2)$ 阶方阵，且 $r(A)=n-1$，α_1,α_2 是方程组 $Ax=0$ 的两个不同的解向量，k 为任意常数，则 $Ax=0$ 的通解为（　　）

$(A)\ k\alpha_1$　　$(B)\ k\alpha_2$

$(C)\ k(\alpha_1-\alpha_2)$　　$(D)\ k(\alpha_1+\alpha_2)$

【解题思路】因为 A 为 $n\ (n\geq 2)$ 阶方阵，且 $r(A)=n-1$，所以 $Ax=0$ 的基础解系中含有向量个数为一个，所有选项中的答案都是 $Ax=0$ 的解，但只有不为零时才能是其基础解系，对于 A,B，若 α_1,α_2 分别在对应选项中为零向量则错误；对于 D，若 $\alpha_1=-\alpha_2$ 则错误，所以只能选 C。

2.当（　）时，齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$一定有非零解。

$(A)\ m\neq n$　　$(B)\ m=n$

$(C)\ m>n$　　$(D)\ m<n$

【解题思路】齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$一定有非零解$\Leftrightarrow r(A)<n$，根据秩的性质$r(A)\leq m$，所以当$m<n$时，$r(A)\leq m<n\Leftrightarrow$齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$一定有非零解。所以选$D$。

3. 方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$**的系数矩阵记为$A$，若存在三阶方阵$B\neq 0$，使得$AB=0$,则（　　）**

(A) $\lambda=1$且$|B|=0$

(B) $\lambda\neq1$且$|B|\neq0$

(C) $\lambda\neq1$且$|B|=0$

(D) $\lambda=1$且$|B|\neq0$

【解题思路】因为存在三阶方阵$B\neq0$，使得$AB=0$，所以方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$$ 一定有非零实数解，

所以$|A|=0$，所以

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\left(1-\lambda^2\right)=0\Rightarrow\lambda=1,$$

将$\lambda=1$代入得$r(A)=1$，因为$AB=0$，所以$r(A)+r(B)\leq3$，所以$1\leq r(B)\leq2$，所

以$|B|=0$。所以选A。

4.设A为$n\ (n\geq 2)$阶奇异方阵，A中有一元素a_{ij}的代数余子式$A_{ij}\neq 0$，则方程组$Ax=0$的基础解系所含向量个数为（　　）

$(A)\ i$　　$(B)\ 1$

$(C)\ j$　　$(D)\ n$

【解题思路】因为矩阵为奇异矩阵，所以有$|A|=0$，所以$r(A)\leq n-1$，又因A中有一元素a_{ij}的代数余子式$A_{ij}\neq 0$，所以存在$n-1$阶子式不为零，所以$r(A)\geq n-1$，所以$r(A)=n-1$，所以其齐次方程基础解系中向量个数为一个，选B。

5.设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是方程组$Ax=b$的三个解向

量，$r(A)=3$，$\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，$k$ 为任意常数，则 $Ax=b$ 的通解为（　　）

$(A)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$　　$(B)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$

$(C)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$　　$(D)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

【解题思路】由题意 $Ax=0$ 的基础解系中包含一个向量，$2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=(2,3,4,5)^T$ 是齐次方程的解，同时也是其基础解系，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组 $Ax=b$ 的三

个解向量，所以$Ax=b$的通解为选项C 。

二、填空题。

1. 设四阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，且 $\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，则方程组 $Ax=\beta$ 的一个解向量为_____。

【解题思路】因为$\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$可以看作$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\beta$，

所以$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$是其一个解。

2.方程 $x_1+x_2+\cdots+x_{100}=1$ 的通解为____。

【解题思路】先求$x_1+x_2+\cdots+x_{100}=0$的

通解，此题较为简单，直接观察得知

$$x=k_1(-1,1,\cdots,0)^T+k_2(-1,0,1,\cdots,0)^T$$

$$+\cdots+k_{99}(-1,0,\cdots,0,1)^T \quad ,$$

$(k_i\in R,[i=1,2,\cdots,99])$，而$(1,0,\cdots,0)^T$是非齐次方程的一个特解，所以原方程通解为

$$x=k_1(-1,1,\cdots,0)^T+k_2(-1,0,1,\cdots,0)^T$$

$$+\cdots+k_{99}(-1,0,\cdots,0,1)^T+(1,0,\cdots,0)^T$$

$(k_i\in R,[i=1,2,\cdots,99])$。

3.设方程组$A_{(n+1)\times n}x=b$有解，则其增广矩阵的行列式$|Ab|$=__。

【解题思路】因为方程组$A_{(n+1)\times n}x=b$有解，所以$r(A)=r(A,b)$，又因$r(A)\le n$，所以$r(A,b)\le n$，又因(A,b)是$n+1$阶方阵，所

以其行列式为零。

4.若方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=-a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=-a_3 \\ x_4+x_1=a_4 \end{cases}$ **有解，则常数** a_1,a_2,a_3,a_4 **应满足的条件是条件是__。**

【解题思路】此题请参照本章第一节填空题第一小题。$a_1+a_2+a_3+a_4=0$。

5.若方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ **无解，则** $a=$**__。**

【解题思路】无解说明系数矩阵的行列式与增广矩阵的行列式不相同，从这里入手进行计算。

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-3&a-3&0\end{array}\right)$$

当$a=-1$时，化成$\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&-4&-4&0\end{array}\right)$，此时系数矩阵的秩为$2$，增广矩阵的秩为$3$，两者不相等，方程无解。

三、判断题。

1.若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$都是方程组$Ax=b$的解，则$\alpha_1+4\alpha_2-3\alpha_3+6\alpha_4-8\alpha_5$是方程组

$Ax=0$ **的解。（　　）**

【解题思路】

$A\left(\alpha_1+4\alpha_2-3\alpha_3+6\alpha_4-8\alpha_5\right)$

$=A\alpha_1+4A\alpha_2-3A\alpha_3+6A\alpha_4-8A\alpha_5$

$=b+4b-3b+6b-8b=0$，所以此命题正确。

2.方程组 $A_{m\times n}x=0$ **的基础解系的个数等于**

$n-r\left(A_{m\times n}\right)$**。（　　）**

【解题思路】这里不应该是基础解系的个数，而应该是基础解系中所包含的向量个数，基础解系的个数与秩无关，所以此命题错误。

3.若方程组 $Ax=0$ **有非零解，则方程组**

$Ax=b$ **必有无穷多解。（　　）**

【解题思路】设矩阵为 $m\times n$ 阶，方程组

$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r\left(A\right)<n$，但是方程组

$Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)$，

$r(A)<n \not\Rightarrow r(A)=r(A,b)$，所以此命题错误。

4.方程组 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 为同解方程。

（　　）

【解题思路】此命题正确，下面我们来证明。

证明：若 $Ax=0$，则 $A^TAx=0$ 成立，说明 $Ax=0$ 的解都是 $A^TAx=0$ 的解；若 $A^TAx=0$，两边乘以 x^T,得 $x^TA^TAx=0$，所以 $(Ax)^T Ax=0$，又因为根据内积的性质当且仅当 $Ax=0$ 时，$(Ax)^T Ax=0$，所以 $A^TAx=0$ 的解也是 $Ax=0$ 的解，所以两者同解。

5.方程组 $Ax=b$ 有无穷多个解的充分必要

条件是方程组$Ax=b$有两个不同解。（　　）

【解题思路】此命题正确。对于非齐次线性方程，只肯能有三种情况，无解，解唯一和无穷多个解，只要超过一个解必有无穷多个，只要有无穷多个，必有不相等的两个。

四、求齐次线性方程$\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$的一个基础解系。

【解题过程】由已知系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

此系数矩阵的秩为3，

所以基础解系中向量个数为 2 个，

设 x_2, x_4 为自由变量，

令 $x_2 = 1, x_4 = 0$，则 $x = (-1,1,0,0,0)^T$，

令 $x_2 = 0, x_4 = 1$，则 $x = (1,0,0,1,-1)^T$。

即为方程组的基础解系。

五、 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，如果 $\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + t\alpha_1$，试讨论当实数 t 满足什么条件时，$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系。

【解题思路】证明一组解线性无关，且都满

足齐次方程组等式，并且向量个数=$n-r(A)$即可。

【解题过程】由题意可知$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$均是方程$Ax=0$的解，若存在实数使得

$$k_1(\alpha_1+t\alpha_2)+k_2(\alpha_2+t\alpha_3)+k_3(\alpha_3+t\alpha_4)$$

$$+k_4(\alpha_4+t\alpha_1)=0,$$

整理$(k_1+k_4t)\alpha_1+(k_1t+k_2)\alpha_2$

$$+(k_2t+k_3)\alpha_3+(k_3t+k_4)\alpha_4=0,$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是方程的一个基础解系，

所以线性无关，所以$\begin{cases}k_1+k_4t=0\\k_1t+k_2=0\\k_2t+k_3=0\\k_3t+k_4=0\end{cases}$，

要使得$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关，方程只能有零解，故系数矩阵的行列式不能为零，

所以$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^4 \neq 0$，所以$t \neq \pm 1$。

六、求方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$与$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$的非零公共解。

【解题思路】求公共解常用的两种方法，一种是非别求出两个的通解，再去寻找公共解，这种方法就是单一的解方程，寻找相同项；另一种是联立求解，下面我们用这种方法计算此题。

【解题过程】

联立方程$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$，

得系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

取 x_4 为自由变量，令 $x_4 = 1$，

则 $x_3 = 2, x_2 = 1, x_1 = -1$，

所以通解为 $x = k\left(-1,1,2,1\right)^T, k \in R$，

即为两方程组公共解。

七、若齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$ 的解均为齐次线性方程组 $B_{l\times n}x = 0$ 的解，试证明 $r\left(A\right) \geq r\left(B\right)$。

【解题过程】

证明：因为齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$ 的解均为齐次线性方程组 $B_{l\times n}x = 0$ 的解，

所以 $B_{l\times n}x=0$ 的解包含了 $A_{m\times n}x=0$ 的解，

所以其解的秩要大于等于 $A_{m\times n}x=0$ 解的秩，

所以 $n-r(B)\geq n-r(A)$，故 $r(A)\geq r(B)$。

八、设非齐次线性方程 $A_{m\times n}x=b$ 的系数矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 r，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $A_{m\times n}x=0$ 的一个基础解系，η 是 $A_{m\times n}x=b$ 的一个解，试证明方程组 $A_{m\times n}x=b$ 的任一解可以表示为 $x=k_1(\xi_1+\eta)+k_2(\xi_2+\eta)+\cdots+k_{n-r}(\xi_{n-r}+\eta)+k_{n-r+1}\eta$ 其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$，且 $\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 线性无关。

【解题思路】此题参照第三节第 8 题进行证明。这里不再重复说明。

九、解矩阵方程$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

【解题思路】本题其实就是求非齐次方程组解的过程。

【解题过程】

设$X = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$，则$\begin{cases} a+2b+3c=1 \\ d+2e+3f=0 \\ 2a+3b+c=0 \\ 2d+3e+f=1 \end{cases}$，

将其看成线性方程组进行求解得

$\begin{cases} a=-3+7k \\ b=2+7e \\ c=2-5k \\ d=-1-5e \\ e=k \\ f=e \end{cases}$，再组成矩阵即可。

十、 已知向量$\alpha_1 = (a,2,10)^T$，$\alpha_2 =$

$(-2,1,5)^T$，$\alpha_3=(-1,1,4)^T$，$\beta=(1,b,c)^T$，

讨论当a,b,c满足什么条件时，

（1）向量β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

（2）向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示方法唯一；

（3）向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示方法不唯一。

【解题过程】

设$x=(x_1,x_2,x_3)^T$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

构造非齐次线性方程$Ax=\beta$，

当无解时，向量β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

$$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array}\right)\xrightarrow{r_3-5r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}ar_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & -2-\frac{1}{2}a & -1-\frac{1}{2}a & 1-\frac{1}{2}ab \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{array}\right) \xrightarrow{2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & -4-a & -2-a & 2-ab \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{array}\right) \xrightarrow[-r_2]{r_2\leftrightarrow r}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 4+a & 2+a & ab-2 \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 4+a & 0 & ab-2+(2+a)(c-5b) \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{array}\right)$$

若 $4+a=0$ 且

$ab-2+(2+a)(c-5b)\neq 0$ 时，

即 $3b-1\neq c$， $a=-4$ 时，不能线性表示；

当 $3b-1\neq c$， $a\neq -4$ 时，能线性表示且表示方法唯一；

当 $a=-4,3b-1=c$ 时，能表示且表示方法不唯一。

第五章 特征值与特征向量

第一节 特征值与特征向量

1. 填空题。

（1）已知方阵 A 的一个特征值为 λ，其对应的一个特征向量为 α，则 kA 的一个特征值为_____，A^2 的一个特征值为_____，A^2-2A+E 的一个特征值为_____。

【知识点】本题考查矩阵的特征值与特征向量。定义如下：

设 A 是 n 阶矩阵，如果存在一个数 λ 及非零的 n 维列向量 α，使得 $A\alpha=\lambda\alpha$，成立，则称 λ 是矩阵 A 的一个特征值，称非零向量 α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的一个特征向量。

通常，特征值与特征方程，都是根据特征向

量求出：

设 $A=\left[a_{ij}\right]$ 为一个 n 阶矩阵，则行列式 $\left|\lambda E-A\right|$ 为矩阵 A 的特征多项式，$\left|\lambda E-A\right|=0$ 称为 A 的特征方程。根据特征多项式为零，可以求出矩阵的所有特征值。由 $A\alpha=\lambda\alpha$，$\alpha\neq 0$，则 $\left(\lambda E-A\right)\alpha=0$，$\alpha\neq 0$，$\alpha$ 是齐次方程组 $\left(\lambda E-A\right)\alpha=0$ 的非零解，将特征值代入求 $\left(\lambda E-A\right)x=0$ 的基础解系，便是对应特征值的特征向量。

【解题思路】

由特征值定义知 $A\alpha=\lambda\alpha$，$\alpha\neq 0$，两边乘以常数 k，则 $kA\alpha=k\lambda\alpha$，所以 kA 的一个特征值为 $k\lambda$，对 $A\alpha=\lambda\alpha$ 两边同时乘以矩阵 A，$A^2\alpha=\lambda A\alpha=\lambda\bullet\lambda\alpha=\lambda^2\alpha$，所以

其特征值为λ^2，用A^2-2A+E乘以α，别且进行变形整理得：

$$\left(A^2-2A+E\right)\alpha=A^2\alpha-2A\alpha+\alpha$$
$$=\lambda^2\alpha-2\lambda\alpha+\alpha=\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)\alpha$$

所以其特征值为$\lambda^2-2\lambda+1$。

（2）已知可逆矩阵A的一个特征值为λ，其对应的一个特征向量为α，则其逆矩阵A^{-1}的一个特征值为__，其伴随矩阵A^*的一个特征值为 _____。

【知识点】

设A是n阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是矩阵$A$的特征值，则

<1>$\sum\lambda_i=\sum a_{ii}$；（即矩阵对角线元素的和）

<2>$|A|=\prod\lambda_i$。

【解题思路】由特征值的定义：$A\alpha=\lambda\alpha$，$\alpha\neq 0$，两边乘以 A^{-1}，$A^{-1}A\alpha=A^{-1}\lambda\alpha$，这里因为矩阵可逆所以$|A|\neq 0$，$|A|=\prod\lambda_i$，所以特征值不可能有为零的，所以$A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$，所以其特征值为$\frac{1}{\lambda}$。对 $A\alpha=\lambda\alpha$ 两边乘以 A^*，$A^*A\alpha=A^*\lambda\alpha$，所以$|A|\alpha=A^*\lambda\alpha$，故$\frac{|A|}{\lambda}\alpha=A^*\alpha$，所以其特征值为$\frac{|A|}{\lambda}$。

（3）若三阶矩阵 A 的特征值分别为$2,3,5$，则$|A|=$_____，$|A^*|=$_____。

【知识点】考查特征值与矩阵行列式的关系。

在上一题已经给出。另外，由 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，两边取行列式可得$|A^*|=|A|^{n-1}$。

【解题思路】 $|A|=\prod\lambda_i$，所以$|A|=2\times 3\times 5=30$，$|A^*|=|A|^{n-1}=|A|^2=900$。

2. 求下列方阵的特征值与特征向量。

（1） $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$。

【知识点】如果A是n阶矩阵，那么它一定有n个特征值，因为特征多项式一定是n次的，只是可能存在重根。另外，如果λ_i是A的m重特征值，则属于λ_i的线性无关的特征向量个数不超过m个。

【解题思路】前面已经给出了求特征值以及特征矩阵的方法，此次加以练习说明，特征值与特征向量的求法步骤其实一定的，请大家多多练习体会。

【解题过程】

矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-1)$$

所以矩阵 A 的特征值为

$\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$。

当 $\lambda_1=1$ 时，由 $(E-A)x=0$，

即 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

解得基础解系 $x_1=(0,1,0)^T,x_2=(1,0,1)^T$，

当 $\lambda=-1$ 时，

即 $\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

解得基础解系为 $x_3=(-1,0,1)^T$。

所以 A 的特征值为 $1,1,-1$，特征向量分别是

k_1x_1,k_2x_2,k_3x_3，其中 k_1,k_2,k_3 全不为零。

（2）$B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}$。

【解题过程】

由矩阵 B 的特征多项式

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 0\\ 4 & \lambda+1 & 0\\ -4 & 8 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

所以矩阵 B 的特征值为

$\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=1$，

当 $\lambda=-2$ 时，由 $(E-B)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}-5 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -4 & 8 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-5 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

解得基础解系 $\alpha_1=(0,0,1)^T$；

当$\lambda=1$时，由$(E-B)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ -4 & 8 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 3\end{pmatrix}$$，解得基础

解系.$\alpha_2=(3,-6,20)^T$。

所以矩阵B特征值对应的特征向量为$k_1\alpha_1$，

$k_2\alpha_2$。其中k_1,k_2不全为零。

3. 设$A=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & 7-1\\ -4 & -4 & a\end{pmatrix}$，已知它的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=12$，求$a$。

【解题思路】根据前面介绍的，矩阵对角线元素之和等于矩阵特征值之和。

【解题过程】

$\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$，所以$7+7+a=3+3+12$，

所以$a=4$。

4.　设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$**，已知**$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$**，**$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$**，**$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$**为**$A$**的特征向量，求**$a,b,c,d,e,f$**。**

【解题思路】本题中已知矩阵的三个特征向量，则根据定义$A\alpha=\lambda\alpha$，列出方程进行求解即可。

【解题过程】

设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，并且$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$分别是其对应的特征向量，由定义可知

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\lambda_3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

所以得方程$\begin{cases}3=\lambda_1\\a+b+c=\lambda_1\\d+e+f=\lambda_1\end{cases}$，

$\begin{cases}0=\lambda_2\\a-c=0\\d-f=-\lambda_2\end{cases}$，$\begin{cases}0=\lambda_3\\a-b=-\lambda_3\\d-e=0\end{cases}$

解之$a=b=c=d=e=f=1$。

5. 证明：若$A^2=E$，则方阵A的特征值只能为1或-1。

【知识点】本题考查特征值的性质。如果矩阵A的特征值为λ_A，则矩阵A^2的特征值为

λ_A^2。另外补充一点，如果矩阵 B 的特征值为 λ_B，则 $A+B$ 的特征值为 $\lambda_A+\lambda_B$。这些性质都可以根据定义 $A\alpha=\lambda\alpha$ 证明出来。

【解题思路】根据定义进行证明。

【解题过程】证明：设 A 的特征值为 λ，其对应的特征向量为 α，

由定义 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 $A^2\alpha=\lambda^2\alpha$，

因为 $A^2=E$，所以 $\alpha=\lambda^2\alpha$，

故 $\left(\lambda^2-1\right)\alpha=0$，

因为特征向量为 α 为非零向量，

所以 $\lambda^2-1=0$，所以 $\lambda=\pm1$。

6. 设 p_1,p_2 是方阵 A 对应于两个不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，讨论 $\lambda_1p_1+\lambda_2p_2$ 是否为方阵 A 的特征向量。

【解题思路】根据定义进行分析。

【解题过程】假设 $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ 是方阵 A 的特征向量，并设其对应的特征值为 λ_3，

根据特征值定义 $Ap_1 = \lambda_1 p_1$， $Ap_2 = \lambda_2 p_2$，

$$A(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = \lambda_3 (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)$$
$$= \lambda_3 \lambda_1 p_1 + \lambda_3 \lambda_2 p_2$$

再由

$$A(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = A\lambda_1 p_1 + A\lambda_2 p_2 = \lambda_1^2 p_1 + \lambda_2^2 p_2$$

所以 $\lambda_3 \lambda_1 p_1 + \lambda_3 \lambda_2 p_2 = \lambda_1^2 p_1 + \lambda_2^2 p_2$，

$$\left(\lambda_3 \lambda_1 - \lambda_1^2\right) p_1 + \left(\lambda_3 \lambda_2 - \lambda_2^2\right) p_2 = 0,$$

因为 p_1, p_2 是不同特征值对应的特征向量，

所以它们线性无关，

故 $\lambda_3 \lambda_1 - \lambda_1^2 = \lambda_3 \lambda_2 - \lambda_2^2 = 0,$

所以 $\lambda_1 (\lambda_3 - \lambda_1) = 0, \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_2) = 0,$

当两个特征值均不为零时，

$\lambda_3 = \lambda_1 = \lambda_2$，这与已知矛盾，故假设不成立，

所以$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$不是方阵的特征向量。

若已知两个特征值中有一个为零，

当$\lambda_1 = 0$时，$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \lambda_2 p_2$，

因为$Ap_2 = \lambda_2 p_2$，则$A\lambda_2 p_2 = \lambda_2\left(\lambda_2 p_2\right)$，

因为$\lambda_2 \neq \lambda_1 = 0$，所以$\lambda_2 p_2 \neq 0$，

所以$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$是其特征向量，同理可证

$\lambda_2 = 0$。

7. 证明：A^T与A有相同的特征值。

【解题思路】我们一般求特征值都是根据特征多项式进行求解得，通过证明特征多项式的表达式相同，即证明两者具有相同的特征值。在这里复习矩阵的转置的几个性质：

$(A+B)^T = A^T + B^T, \left|A^T\right| = |A|, E^T = E$。

【解题过程】

证明： A^T 的特征多项式为$\left|\lambda E - A^T\right|$，而 A 的特征多项式为$|\lambda E - A|$，

由$\left|\lambda E - A^T\right| = \left|\left(\lambda E - A^T\right)^T\right| = |\lambda E - A|$，所以它们的特征多项式相同，故它们有相同的特征值。

8. 证明：若 $A^T A = E$，$|A| = -1$，则 -1 是方阵 A 的特征值。

【解题思路】若要证明 -1 是方阵 A 的特征值，一种是从定义入手，但此题为告知特征向量，所以是从特征多项式入手。若 -1 是方阵 A 的特征值，则必定有$|A+E| = 0$，所以只需证明$|A+E| = 0$。

【解题过程】证明：

$$\left|A+E\right|=\left|A+A^{T}A\right|=\left|\left(E+A^{T}\right)A\right|$$
$$=\left|E+A^{T}\right|\left|A\right|=-\left|E+A^{T}\right|=-\left|E+A\right|$$

所以$\left|A+E\right|=0$。

所以-1是方阵A的特征值。

9. 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$ **的特征值与特征向量。**

【解题思路】此题可以直接按定义进行求解，但是过于繁琐，这里补充一个定理，用于处理这类问题。对于n方阵A，若$r\left(A\right)=1$，则其特征值为$\lambda_1=\sum a_{ii},\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n$
$=0$

【解题过程】观察得知$r\left(A\right)=1$，

所以其特征值我们可以直接写出

$$\lambda_1=\sum a_{ii}=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0,$$

当$\lambda=0$时，由$Ax=0$，

即$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$

求得基础解系为

$$\alpha_2=\left(-1,1,0,\cdots,0\right)^T,\alpha_3=\left(-1,0,1,0,\cdots 0\right)^T,\cdots,$$
$$\alpha_n=\left(-1,0,\cdots,0,1\right)^T$$

这就是对应于特征值$\lambda=0$的特征向量。

当$\lambda=n$时，同理$\left(A-nE\right)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}1-n&1&\cdots&1\\1&1-n&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&1\\1&1&\cdots&1-n\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1-n&1&\cdots&1\\1&1-n&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & -n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

求得基础解系 $\alpha_1=(1,1,\cdots,1)^T$，这是对应于 $\lambda=n$ 的特征向量。

第二节 相似矩阵

1. **设方阵** $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ **和**

$B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$ **相似，则** $x=$ _____，

$y=$ _____。

【知识点】设 A 和 B 都是 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则称 A 和 B 相似，记作 $A\sim B$。

特别的若 A 与对角矩阵相似，则称其可以相似对角化。

相似矩阵特征多项式相同，特征值相同，秩相同

【解题思路】因为两个矩阵相似，所以其特征值相同，所以特征值得和与乘积一定相同。根据$\sum\lambda_i=\sum a_{ii},\prod\lambda_i=|A|$得：

$2+x=1+y,|A|=|B|$，其中

$|A|=-15\bullet\left(x+\frac{8}{3}\right)$，$|B|=-20y$，联立上述方程解得$x=4,y=5$。

2. 设n阶方阵A的特征值为$0,1,2,\cdots,n-1$,方阵B和A相似，则$|B+E|=$__。

【解题思路】因为方阵B和A相似，所以它们的特征值相同，所以$0,1,2,\cdots,n-1$,也是方阵B的特征值，设λ是B的特征值，α是其对应于特征值 λ的特征向量，由定义$B\alpha=\lambda\alpha$，变形得$(B+E)\alpha=(\lambda+1)\alpha$，所以$\lambda+1$是$B+E$的特征值，故$1,2,\cdots,n$

是 $B+E$ 的特征值，其行列式等于所有特征证值的乘积，故 $|B+E|=n!$。

3. **设三阶方阵 A 的特征值分别为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$，对应的特征向量为**

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

，求 A，A^m

【解题思路】这是反求矩阵，首先我们由定义可以得到 $Ap_i=\lambda_i p_i\left(i=1,2,3\right)$。列出线性方程求得结果。

【解题过程】

解：由已知

$$Ap_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},Ap_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},Ap_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

，所以

$$\left(Ap_1, Ap_2, Ap_3\right) = A\left(p_1, p_2, p_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

因为 p_1, p_2, p_3 是不同特征值对应的特征向量，所以线性无关，

故 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\left(p_1, p_2, p_3\right)^{-1}$，

$$\left(p_1, p_2, p_3\right)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

所以 $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$，

且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,

则 $\left(P^{-1}AP\right)^m=P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP$

$=P^{-1}A^mP$,

所以

$$P^{-1}A^mP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&(-1)^m\end{pmatrix}$$

所以 $A^m=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&(-1)^m\end{pmatrix}P^{-1}$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1+4(-1)^m&2+2(-1)^m&2+4(-1)^{m+1}\\2+2(-1)^m&4+(-1)^m&4+2(-1)^{m+1}\\2+4(-1)^{m+1}&4+2(-1)^m&4+4(-1)^m\end{pmatrix}$$

4. **若三阶方阵 A 的特征值分别为 $\lambda_1=1,$**

$\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应的特征向量为

$p_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。已知向量

$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，求 $A^m\beta$。

【解题思路】此题实质与上一题完全类似，大家可以看到按上一题进行求解会比较复杂，这里我们首先对题目进行观察，不难发现 $\beta=p_1+p_2+p_3$，所以 $A^m\beta=A^mp_1+$

$A^mp_2+A^mp_3$，即

$$A^m\beta=A^mp_1+A^mp_2+A^mp_3$$
$$=\lambda_1{}^mp_1+\lambda_2^mp_2+\lambda_3^mp_3$$

代入数据得 $A^m\beta=\begin{pmatrix}1-2^m+3^m\\-1+2^m+3^m\\2^m+2\bullet 3^m\end{pmatrix}$。

5. 若二阶矩阵 A 的特征值为 -1 和 1，求 A^{2004}。

【解题思路】此题具体知识点讲解放在下一节。

【解题过程】

解：因为二阶矩阵 A 的特征值为 -1 和 1，

所以矩阵 A 必可相似对角化。

存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，

所以 $\left(P^{-1}AP\right)^m=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，

$A^{2004}=P\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}=E$。

6. 设方阵 A 与 B 相似，证明 A^T 与 B^T 相似。

【解题思路】根据定义，证明两矩阵相似，即证明是否存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，若存在，则两矩阵相似。

【解题过程】因为方阵 A 与 B 相似，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，所以

$$\left(P^{-1}AP\right)^T=B^T \Rightarrow P^TA^T\left(P^{-1}\right)^T=B^T$$

$$\Rightarrow P^TA^T\left(P^T\right)^{-1}=B^T \Rightarrow \left(\left(P^T\right)^{-1}\right)^{-1}A^T\left(P^T\right)^{-1}$$

$$=B^T$$

令 $\left(P^T\right)^{-1}=Q$，则 $Q^{-1}A^TQ=B^T$，

所以 A^T 与 B^T 相似。

7. 设 A,B 为 n 阶方阵，$|A|\neq 0$，证明 AB 与 BA 相似。

【解题过程】

证明：因为$|A| \neq 0$，所以A可逆，

由$A^{-1}ABA = BA$，存在可逆矩阵A，使得

$A^{-1}ABA = BA$，所以AB与BA相似。

第三节 实对称矩阵的相似对角化

1. 判断题。

（1）设 A,B 是实对称矩阵，且它们的特征多项式相同，则 A,B 相似。（　　）

【知识点】本题考查实对称矩阵的相关性质，实对称矩阵即指 $A=A^T$，且实对称矩阵必可相似对角化。

【解题思路】因为 A,B 是实对称矩阵，所以它们一定可以相似对角化，所以它们都相似与以自己的特征值为主对角元素的对角矩阵，又因它们的特征多项式相同，所以特征值相同，故它们相似与同一个对角矩阵，根据矩阵相似的传递性，A,B 相似。所以命题正确。

（2）实对称矩阵 A 的非零特征值的个数等于它的秩。（　　）

【解题思路】因为实对称矩阵必相似与由特征值为主对角线的对角矩阵，所以它和对角矩阵的秩相同，对角矩阵的秩可以通过阶数减去主对角线上为零的元素进行计算，即为非零特征值的个数，所以命题正确。

（3）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 都是 A 的特征向量，则将它们先正交化，再单位化后仍为 A 的特征向量。（　　）

【解题思路】正交单位化只是改变向量之间的正交性和向量的模，并不改变向量自身的性质，所以此命题正确。

2.　设 x 是 n 维列向量，$\|x\|=1$，证明：$H=E-2xx^T$ 为对称的正交矩阵。

【知识点】本题考查正交矩阵。所谓正交阵，其定义如下，若 A 为正交阵，则 $A^TA=AA^T=E$。

【解题思路】首先，正交矩阵一定是实对称

矩阵，故在证明一个矩阵正交时。要先证明其对称再证明其满足 $A^T A = AA^T = E$ 。

【解题过程】证明： 由题知

$$H^T = \left(E - 2xx^T\right)^T = E^T - 2\left(x^T\right)^T x^T$$
$$= E - 2xx^T = H$$

所以此矩阵对称。

$$H^T H = \left(E - 2xx^T\right)^2$$
$$= E - 2xx^T - 2xx^T + 4xx^T xx^T$$

因为 $\|x\| = 1$，所以 $x^T x = 1$，

所以 $H^T H = E - 2xx^T - 2xx^T + 4xx^T = E$，

所以 $H = E - 2xx^T$ 为对称的正交矩阵。

3. 设方阵 A, B 正交，证明 A^T, AB, A^* 都是正交矩阵。

【解题思路】 由正交的定义结合题意分析。本题已知 A, B 均正交，即省略了证明对称的

过程。

【解题过程】证明：由已知

$A^T A = AA^T = E, B^T B = BB^T E$，所以 A^T 是正交阵。

$(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T EB = E$，所以 AB 正交。

$$A^*(A^*)^T = EA^*(A^*)^T = A^T AA^*(A^*)^T$$
$$= A^T |A| E(A^*)^T = |A|(A^* A)^T = |A|^2 E$$

因为 $AA^T = E$，所以 $|AA^T| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1$，

所以 $A^*(A^*)^T = E$，所以 A^* 正交。

4. 求正交矩阵 P，将矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$ **对角化。**

【解题思路】对于求正交矩阵的题目，其方

法步骤一般都是一定的，请大家多多练习体会。即先求特征值，再求特征向量，再将特征向量进行施密特正交化，最后进行单位化。这里需要注意的是，对于不同特征值的特征向量，本身就是相互正交的，故不需要进行施密特正交化，施密特变换只用在同一特征值的不同特征向量之间。切记最后勿忘单位化即可。

【解题过程】解：由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4 & 2\\ -2 & \lambda-9 & 4\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

所以特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$，

当$\lambda=1$时，由$(E-A)x=0$，即

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求出基础解系

$$\alpha_1=(-2,1,0)^T, \alpha_2=(2,0,1)^T,$$

将其正交化令$\beta_1=\alpha_1$，

$$\beta_1=\alpha_1=(-2,1,0)^T, \beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1,$$

所以$\beta_2=\frac{1}{5}(2,4,5)^T$，

单位化$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^T$，

$$\gamma_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^T。$$

当$\lambda=10$时，$(10E-A)x=0$，即

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 9 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求得基础解系 $\alpha_3 = (-1,-2,2)^T$，

单位化 $\gamma_3 = \frac{1}{3}(-1,-2,2)^T$。

所以 $P = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}。$$

5.　三阶实对称方阵 A 的特征值为 $6,3,3$，若对应于 6 的特征向量为 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，求方阵 A。

【解题思路】设对应于 3 的特征向量为

$(x,y,z)^T$，因为不同特征值对应的特征向量正交，所以得到方程$x+y+z=0$，

求其基础解系

$$p_2=(-1,1,0)^T, p_3=(-1,0,1)^T,$$

这就是对应于特征值为3的特征向量，

将其正交化设$\beta_2=p_2$，

$$\beta_3=p_3-\frac{[\beta_2,p_3]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2,$$

所以$\beta_2=\frac{1}{2}(-1,-1,2)^T$，

将所有向量单位化

$$\gamma_1=\frac{p_1}{\|p_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, \gamma_2=\frac{p_2}{\|p_2\|}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T, \gamma_3=\frac{p_3}{\|p_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^T$$

令$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，

因为是实对称矩阵所以

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}，故 A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}。$$

第六章 二次型

第一节 二次型及其矩阵

1. 用矩阵记号表示下列二次型。

（1）$f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$；

【知识点】本题考查二次型矩阵。含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

$$f\left(x_1, x_2, \cdots x_n\right) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n +$$

$$2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为 n 元二次型。如规定 $a_{ij} = a_{ji}$，$\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$，则二次型有矩阵表示为 $f\left(x_1, x_2, \cdots x_n\right) = x^T Ax$，其中

$x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T, A=\left[a_{ij}\right]$ 且 $A^T=A$ 是对称矩阵，称 A 为二次型的矩阵，秩 $r\left(A\right)$ 称为二次型的秩，记为 $r\left(f\right)$。

【解题思路】对于二次型的问题，重点就在于写出二次型矩阵。而且二次型矩阵一定是实对称矩阵。一般给出二次型的表达式，二次型矩阵就可直接写出来，在下面的练习我们逐步体会。

【解题过程】

由题意写出二次型矩阵，注意对应关系

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix},$$

故 $f=x^TAx, x=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T$。

（2）$f=8x_1x_4+2x_2x_3+8x_2x_4+2x_3x_4$；

【解题过程】由题意写出二次型矩阵，注意

对应关系 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

故 $f=x^T Ax, x=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^T$。

（3）$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$。

【解题过程】由题意写出二次型矩阵，注意

对应关系 $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$,

故 $f=x^T Ax, x=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T$。

2. 写出下列矩阵所对应的二次型。

（1）$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$；

【解题思路】将上面小题反过来思考，这是有矩阵写二次型，根据定义一一对应即可，所以 $f=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$。

（2）$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & -3 & -3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$。

【解题思路】根据定义，一一对应，即 $f=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$。

第二节 用正交变换化二次型为标准型

1. 判断题。

（1）二次型 $f=\left(x_1,x_2,\cdots x_n\right)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Py$ 下一定为标准型。（　　）

【知识点】本题考查二次型的标准型。如果二次型中只含变量的平方项，所有混合项目 $x_ix_j\left(i\neq j\right)$ 的系数全为零，即 $x^TAx=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 这样的二次型称为标准型。在标准型中，如平方系数 d_j 为 $1,-1,0$，$x^TAx=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-x_{p+q}^2$，称为二次型的规范性。

【解题思路】此命题定理：对任一个 n 元二次型 x^TAx，其中 A 是 n 阶实对称矩阵，必存在正交变换 $x=Qy$，其中 Q 是正交矩阵，

使得 $x^T Ax$ 化成标准型 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$，这里平方前面系数表示 A 的 n 个特征值。可以知道正确，下面我们再证明一下。

因为 $x = Py$，所以 $x^T Ax = (Py)^T APy = y^T P^T APy$，因为是正交变化，$A$ 又是实对称矩阵，所以 $P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，代入

$$y^T P^T APy = y^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} y$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

所以命题正确。

（2）已知 A 为 n 阶矩阵，x 为 n 维列向量，如果 A 不对称，则 $x^T Ax$ 不是二次型。（　　）

【解题思路】此命题正确。二次型的定义中

有一点是二次型矩阵 A 中 $a_{ij}=a_{ji}$，说明其一定是对称矩阵，所以若不对称，一定不能构成二次型。

（3）二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1x_2-ax_3x_4$ 的秩为2，则 $a=3$。（　　）

【解题思路】因为二次型的秩等于其二次型矩阵的秩，所以我们写出二次型矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}a & 0 \end{pmatrix}$$

，若要是其秩为2，则可以直接看出 $a=0$，所以命题错误。

2.　用正交变化把二次型 $f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 化成标准型，并求正交变换的矩阵。

【解题思路】第一步，写出二次型所对应的

矩阵：$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$；

第二步，求矩阵 A 的特征值：根据特征多项

式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)$

$(\lambda-4)(\lambda+2)$，所以特征值为 $\lambda_1=1,$

$\lambda_2=4,\lambda_3=-2$；

第三步求解对应的特征向量，

当 $\lambda=1$ 时，由 $(E-A)x=0$，

即 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

所以基础解系 $\alpha_1=(-2,-1,2)^T$；

当$\lambda=4$时，由$(4E-A)x=0$，

即$\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，

解得基础解系$\alpha_2=(2,-2,1)^T$；

当$\lambda=-2$时，由$(-2E-A)x=0$，

即$\begin{pmatrix}-4&2&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

解得基础解系$\alpha_3=(1,2,2)^T$；

第四步 将所得的基础解系正交单位化，因为此题的基础解系是不同特征值所对应的基础解系所以正交，故只需单位化，分别单位化后

$$\eta_1=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)^T,\eta_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^T,$$

$$\eta_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$$

故所求的正交矩阵 $P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$。

第五步 改写为标准型。经坐标变换 $x = Py$，

得 $x^T Ax = y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$。

第三节 用配方法化二次型为标准型

1. 用配方法化二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3$ **化成标准型，并写出所用的变换矩阵。**

【解题思路】此类题是含有平方项，处理方法通常是先将所有含有公共项目的配出一个完全平方。此题我们先将所有含 x_1 的配出完全平方，再把所有含 x_3 的配出一个完全平方，最后把所有含 x_2 的配出一个完全平方。

【解题过程】

$$f=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3+4x_2x_3$$

$$=\left(x_1-2x_2+x_3\right)^2+x_3^2+4x_2x_3$$

$$=\left(x_1-2x_2+x_3\right)^2+x_3^2+4x_2x_3+4x_2^2-4x_2^2$$

$$=\left(x_1-2x_2+x_3\right)^2-4x_2^2+\left(2x_2+x_3\right)^2,$$

令$\begin{cases} y_1=x_1-2x_2+x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=2x_2+x_3 \end{cases}$，$Y=CX$，

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad f=y_1^2-4y_2^2+y_3^2。$$

2. 用配方法化二次型$f=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$化为标准型，并写出所用的变换矩阵。

【解题思路】此题不含平方项，所以我们首先要考虑作出平方项。

【解题过程】

令$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，得$\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{2}\left(x_1+x_2\right) \\ y_2=\dfrac{1}{2}\left(x_1-x_2\right) \\ y_3=x_3 \end{cases}$，

记为$Y=C_1X$，$C_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

此时$f=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3$，故

$$f=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3=\left(y_1+y_3\right)^2-y_2^2-y_3^2$$

令$\begin{cases}z_1=y_1+y_2\\ z_2=y_2\\ z_3=y_3\end{cases}$，$Z=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Y$，

$C_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

标准型为$f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$，$Z=C_2C_1X$。

注意：无论是标准型还是规范性，二次型的正负惯性指数一定是不变的。即平方向的正负个数永远不变。

第四节 正定二次型

1. 判断题。

（1）若 A 为 n 阶是对称矩阵，且二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$ 正定，则 A 的特征值全为正。（　　）

【知识点】本题考查正定矩阵。对二次型 x^TAx，如果对于任何 $x\neq 0$，恒有 $x^TAx>0$，则称二次型 x^TAx 是正定二次型。实对称矩阵 A 为正定矩阵。

【解题思路】此命题正确。因为对于实对称矩阵，存在正交阵变换 $x=Qy$ 将二次型化成 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中平方项前面系数为 A 的特征值，对于任意 $x\neq 0$，可知 $y\neq 0$，若二次型正定，假设特征值中存在一个 $\lambda_i\leq 0$，则取 $y=\left(0,0,\cdots 1,\cdots,0\right)^T$，

其中不为零的项目对应λ_i，此时$f=\lambda_i\le 0$，与正定的定义矛盾，所以假设不成立，故A的特征值全为正。

（2）若A为n阶是对称矩阵，且二次型$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$正定，则$A$的一切顺序主子式全部为正。（　　）

【知识点】定理：n元二次型x^TAx正定的充分必要条件：

（1）A的正惯性指数为n。

（2）A与E合同。

（3）A的所有特征值均为整数。

（4）A的顺序主子式均大于零。

正定的必要条件：（1）$a_{ii}>0$；（2）$\left|A\right|>0$。

【解题思路】此命题正确。根据定理判断。

（3）若A为n阶是对称矩阵，且二次型

$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$ **正定，则** A **的主对角线上的元素全为正。（　　）**

【解题思路】此命题正确。根据上题介绍定理进行判断。

（4）若 A **为** n **阶是对称矩阵，且二次型** $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$ **正定，则对一切** n **维列向量** x**，** x^TAx **全为正。（　　）**

【解题思路】错误，根据正定二次型的定义知，是对于一切不为零的 n 维列向量。

2. 判断下列二次型的正定性。

（1） $f=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$

【解题思路】主要用到的是正定的充分必要条件。

首先写出二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$，

这里矩阵比较简单我们考虑采用顺序主子式全部大于零进行验证，

$$\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

因为顺序主子式全部大于零所以正定。

（2）$f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$

【解题思路】此题我们考虑用定义法验证。

$$f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$
$$= \left(2x_1 + x_2 - 2x_3\right)^2 + x_1^2 + x_3^2$$

对于任意 $x \neq 0$， $f > 0$，所以正定。

3．求 t 的取值范围，使得二次型 $f = t\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + 2x_1x_2$ 为（1）正定；（2）负定

【解题思路】写出二次型矩阵

$A=\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$，我们根据顺序主子式判定，

若要正定，顺序主子式全部大于零。

【解题过程】

解：由已知的二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$

若其正定，其顺序主子式满足

$$\Delta_1=t>0,\Delta_2=t^2-1>0,\Delta_3=t\left(t^2-1\right)>0$$

解得 $t>1$。

若要负定，奇数顺序主子式小于零，偶数大于零，所以

$$\Delta_1=t<0,\Delta_2=t^2-1>0,\Delta_3=t\left(t^2-1\right)<0$$

故 $t<-1$。

4.设 A 为 n 阶实对称矩阵，A 的全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则当 t 的取值范围为多少时，$A+tE$ 正定，说明原因。

【解题思路】由题意知，$A+tE$ 的特征值为 $\lambda_1+t,\lambda_2+t,\cdots,\lambda_n+t$，正定的充要条件是二次型矩阵的特征值全部大于零，所以当 $\lambda_1+t>0,\lambda_2+t>0,\cdots,\lambda_n+t>0$ 时，$A+tE$ 正定，解得 $t>\max\left(-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_n\right)$。

5.证明：设 A 为 n 阶正定阵，则 $\left|A+E\right|>1$。

【解题思路】因为 A 为 n 阶正定阵，所以 A 的特征值全部大于零，

设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $A+E$ 的特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$，

且 $\lambda_1+1>1,\lambda_2+1>1,\cdots,\lambda_n+1>1$，

所以$|A+E|=\prod(\lambda_i+1)>1$，证明完毕。

6.设A为n阶实对称矩阵，如果对于任意n维向量x，有$x^TAx=0$，则$A=0$。

【解题思路】因为A为n阶实对称矩阵，因为对于任意n维向量x，有$x^TAx=0$，由二次型的性质，必存在正交变换，使得$x^TAx=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中平方项前面的常数为$A$的特征值，对于任意$x$，$y$取值也任意，因为对于任意$y$，$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=0$，所以$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，所以$A$相似与零矩阵，$r(A)=0$，故$A=0$。

7.设U为可逆方阵，$A=U^TU$，证明$f=x^TAx$为正定二次型。

【解题思路】因为$A=U^TU$，所以

$f = x^T Ax = x^T U^T Ux = (Ux)^T Ux$，因为$U$为可逆方阵，$Ux = 0$只有零解，对于任意$x \neq 0$，$Ux \neq 0$，所以对于任意$x \neq 0$，$f = (Ux)^T Ux > 0$，故对于任意$x \neq 0$，$f = x^T Ax > 0$，所以$f = x^T Ax$为正定二次型

8.设A为n阶正定矩阵，证明存在可逆矩阵U，使得$A = U^T U$。

【解题思路】

因为A为n阶正定矩阵，所以存在正交阵P，

使得$A = P^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$A$的特征值，且$\lambda_1 > 0$，$\lambda_2 > 0, \cdots, \lambda_n > 0$，

再根据 $A=P^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P$

$$=P^T\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P$$

令 $U=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P$，则 $A=U^TU$，

因为 P 可逆 $r(U)=r\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}=n$

所以可逆。

9.若二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2tx_2x_3$

$(t<0)$通过正交变换化成 $f=2y_1^2+y_2^2+5y_3^2$

（1）求 t；

（2）证明：当 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 时，f 的最

大值是5。

【解题思路】

（1） 根据题意写出二次型矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&t\\0&t&3\end{pmatrix},$$

因为规范形 $f=2y_1^2+y_2^2+5y_3^2$，所以矩阵的特征值为$2,1,5$，

故$|A|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&t\\0&t&3\end{vmatrix}=2\left(9-t^2\right)=10$，

所以$t^2=4$，

因为$t<0,$，所以$t=-2$。

（2）$f=2y_1^2+y_2^2+5y_3^2$

$=5\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)-3y_1^2-4y_2^2\le 5$，

所以最大值为5。