西南交通大学2012年硕士研究生入学考试

试题解析

考试科目：运筹学

一.（20分）（答在试卷上的内容无效）

考虑下列线性规划问题，假定（1）、（2）都有可行解，证明若其中一个最优解，则另外一个也有最优解：若其中一个无界，则另一个也无界；在都有最优解的条件下，若 $\overline{X}$ 和 $\overline{U}$ 分别为（1）、（2）的可行解，则 $C\overline{X} \geq C\overline{U}$

$$(1)\begin{cases} \min z_1 = CX \\ AX \geq b \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \min z_2 = CU \\ AU \geq b \end{cases}$$

证明：（1）和（2）的对偶问题分别为：

$$(1)\begin{cases} \min z_1 = CX \\ AX \geq b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \max z_1' = bY \\ YA = C \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$(2)\begin{cases} \min z_2 = CU \\ AU \le b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \max z_2' = bV \\ VA = C \\ V \ge 0 \end{cases} \quad (4)$$

问题 1：（1）和（2）都有可行解，假设（1）有最优解，证明（2）也有最优解。

由于（1）有最优解，则（3）有可行解，（3）与（4）约束相同，则（4）也有可行解，由于（2）和（4）互为对偶，且都有可行解，根据(若 X 为原问题的任意可行解，则 CX 为其对偶问题的一个下界；若 Y 为对偶问题任一可行解，则 Yb 为原问题的一个上界)（2）、（4）都有最优解，得证。

问题 2：（1）和（2）都有可行解，假设（1）无界，证（2）也无界。

由于（1）有可行解，但无界，其对偶问题（3）无可行解，（3）和（4）约束相同，则（4）也无可行解。（2）和（4）互为对偶，

(2)有可行解，（4）无可行解，则知(2)无界，得证。

问题 3：（1）和（2）都有最优解，则若 $\overline{X}$、$\overline{U}$ 分别为（1）、（2）的可行解，则（3）和（4）也都有可行解。设 $\overline{Y}$ 为（3）、（4）的可行解。则可得 $C\overline{X} \geq b\overline{Y}$、$b\overline{Y} \geq C\overline{U}$，因此 $C\overline{X} \geq C\overline{U}$。

二.（25 分，共 4 小题）（答在试卷上的内容无效）

Sostel 公司是经营南美洲 Bray 河上三个水坝上的水力发电公司，用 B1、B2、B3 分别表示这三个水坝（B1 在上游、B2 在中游、B3 在下游），由于三个水坝的高度不同，其水量转化电量的效率也不同，已知 B1 的水电转化为 12 立方米/秒转化电 4 兆瓦；B2 的水

电转化为 5 立方米/秒转化电 1.2 兆瓦； B3 的水电转化为 3 立方米/秒转化电 1 兆瓦，水坝的现有库存水量、最低库存水量、最大库存水量如表 1 所示。每年头三个月三个水坝的自然入水量（包括降雨和从支流进入该水坝的水量，但不包括上游水坝放出的水量）如表 2 所示；各水坝在每个月的最大发电用水量如表 3 所示。另外，环保部门为保护鱼类资源，要求在每条坝旁建有导流明渠，其流量不低于 0.5 立方米/秒；为保持电力供应量的均衡，管理层要求相邻两个月该公司的发电量变化不超过 15%；由于该地区主要降雨季节是春季，为保证全年其他用水量，要求三月底各水坝库存水量不能低于最大库存水量的 90%，试建立发电站总量最大的数学规划模型。

表 1　基本数据表　　单位：$10^6 m^3$

水坝	现有库存水量	最低库存水量	最大库存水量
B1	900	750	1460
B2	800	600	1300
B3	650	550	900

表 2　自然入水来量数据表单位：$10^6 m^3$

水坝	一月份	二月份	三月份
B1	450	350	390
B2	360	400	420
B3	400	460	460

表 3 每个月的最大发电用水量单位：$10^6 m^3$

水坝	一月份	二月份	三月份
B1	550	360	450
B2	300	420	460
B3	350	500	400

解： 设水坝 B1 一月份、二月份和三月份发电量分别为 x_1、x_2、x_3，一、二、三月分通过明渠的水量为 w_1、w_2、w_3，同理设水坝 B2 相应的参数 y_1、y_2、y_3，w_4、w_5、w_6，水坝 B3 相应的参数

z_1、z_2、z_3, w_7、w_8、w_9。

目标函数：$\max =$

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 + z_1 + z_2 + z_3$$

约束条件:

$$B1\begin{cases}
900*10^6 + 450*10^6 - w_1 - 3x_1 \geq 750*10^6 \\
900*10^6 + 450*10^6 - w_1 - 3x_1 \leq 1460*10^6 \\
900*10^6 + 450*10^6 - w_1 - 3x_1 + 350*10^6 \\
-w_2 + 3x_2 \leq 1460*10^6 \\
900*10^6 + 450*10^6 - w_1 - 3x_1 + 350*10^6 \\
-w_2 + 3x_2 \geq 750*10^6 \\
900*10^6 + 450*10^6 - w_1 - 3x_1 + 350*10^6 \\
-w_2 + 3x_2 + 390*10^6 \\
-w_3 - 3x_3 \geq 1460*10^6*0.9 \\
900*10^6 + 450*10^6 - w_1 - 3x_1 + 350*10^6 \\
-w_2 + 3x_2 \leq 1460*10^6
\end{cases}$$

$$
B2\begin{cases}
800*10^6+360*10^6+w_1+3x_1-w_4-\frac{25}{6}y_1\le 1300*10^6 \\
800*10^6+360*10^6+w_1+3x_1-w_4-\frac{25}{6}y_1\ge 600*10^6 \\
800*10^6+360*10^6+w_1+3x_1-w_4-\frac{25}{6}y_1+400*10^6 \\
+w_2+3x_2-w_5-\frac{25}{6}y_2\ge 600*10^6 \\
800*10^6+360*10^6+w_1+3x_1-w_4-\frac{25}{6}y_1+400*10^6 \\
+w_2+3x_2-w_5-\frac{25}{6}y_2\le 1300*10^6 \\
800*10^6+360*10^6+w_1+3x_1-w_4-\frac{25}{6}y_1+400*10^6 \\
+w_2+3x_2-w_5-\frac{25}{6}y_2+420*10^6 \\
+w_3+3x_3-w_6-\frac{25}{6}y_3\ge 0.9*1300*10^6 \\
800*10^6+360*10^6+w_1+3x_1-w_4-\frac{25}{6}y_1 \\
+400*10^6+w_2+3x_2-w_5-\frac{25}{6}y_2+420*10^6 \\
+w_3+3x_3-w_6-\frac{25}{6}y_3\le 1300*10^6
\end{cases}
$$

$$B3\begin{cases}550*10^6 \le 650*10^6+400*10^6+w_1+3x_1 \\ +w_4+\dfrac{25}{6}y_1\text{-}w_7\text{-}3z_1 \le 900*10^6 \\ 550*10^6 \le 650*10^6+400*10^6+w_1+3x_1 \\ +w_4+\dfrac{25}{6}y_1\text{-}w_7\text{-}3z_1+460*10^6 \\ +w_5+\dfrac{25}{6}y_2\text{-}w_8\text{-}3z_2 \le 900*10^6 \\ 900*10^6*0.9 \le 650*10^6+400*10^6+w_1 \\ +3x_1+w_4+\dfrac{25}{6}y_1\text{-}w_7\text{-}3z_1+460*10^6 \\ +w_5+\dfrac{25}{6}y_2\text{-}w_8\text{-}3z_2+460*10^6+w_6\text{-}\dfrac{25}{6}y_3 \\ \text{-}w_9\text{-}3z_3 \le 900*10^6\end{cases}$$

导流渠流量为 0.5*3600*24*30=1296000，

$w_1 \ge 1296000 \qquad w_2 \ge 1296000$

$w_3 \ge 1296000 \qquad w_4 \ge 1296000$

$w_5 \ge 1296000 \qquad w_6 \ge 1296000$

$w_7 \ge 1296000 \qquad w_8 \ge 1296000$

$w_9 \ge 1296000$

$$x_2+y_2+z_2 \ge 0.85*(x_1+y_1+z_1)$$

$$x_2+y_2+z_2 \le 1.15*(x_1+y_1+z_1)$$

$$x_3+y_3+z_3 \geq 0.85*(x_2+y_2+z_2)$$
$$x_2+y_2+z_2 \leq 1.15*(x_2+y_2+z_2)。$$

三.（25 分，共 4 小题）（答在试卷上的内容无效）

某工厂与客户签订合同，当月起连续三个月每月末向客户提供某种产品。该厂三个月的生产能力、单位产品生产成本及客户需求如表 4 所示。已知单位产品每积压一个月需支付存储费 2 元。在签订合同时，工厂有该产品的库存量 5 个，工厂希望在完成该任务 3 个月末完成合同后还能储存该产品 10 个。问工厂应如何安排生产计划，使在满足上述条件的情况下总的费用最少？用表上作业法求解。

表 4

月份	正常生产能力	加班生产能力	需求量	单位产品正常生产成本	单位产品正常生产成本
1	30	15	30	50	55
2	40	15	30	60	65
3	20	10	30	55	62

解：用 x_{ij} 表示第 i 月生产用于第 j 月交货的产品数。根据题意列出产销平衡表如下，其中增加虚拟营销地 4，销量为

（5+30+15+40+15+20+10）-（30+30+40）=5。

表　1

产＼销	1	2	3	4	产量
I_0	2	4	6	0	5
I_1	50	52	54	0	30
I_2	55	57	59	0	15
II_1	M	60	62	0	40
II_2	M	65	67	0	15

III_1	M	M	55	0	20
III_2	M	M	62	0	10
销量	30	30	40	35	

利用伏格尔求初始基可行解，得：

表　2

产 销	1	2	3	4
I_0	5			
I_1	25	5		
I_2		15		
II_1		10	20	10
II_2				15
III_1			20	
III_2				10

利用为位势法进行检验：

表　3

销　产	1	2	3	4	u_i
I_0	2	0 $\boxed{4}$	0 $\boxed{6}$	56 $\boxed{0}$	0
I_1	50	52	0 $\boxed{54}$	8 $\boxed{0}$	48
I_2	0 $\boxed{55}$	57	0 $\boxed{59}$	3 $\boxed{0}$	53
II_1	$\boxed{M}$	60	62	0	56
II_2	$\boxed{M}$	5 $\boxed{65}$	5 $\boxed{67}$	0	56
III_1	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	55	7 $\boxed{0}$	49
III_2	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	0 $\boxed{62}$	0	56
V_j	2	4	6	-56	

由表 3 可知，所得非基变量的检验数都为非

负。

所以，表 2 中的解即为最优解。

四.（20 分）（答在试卷上的内容无效）

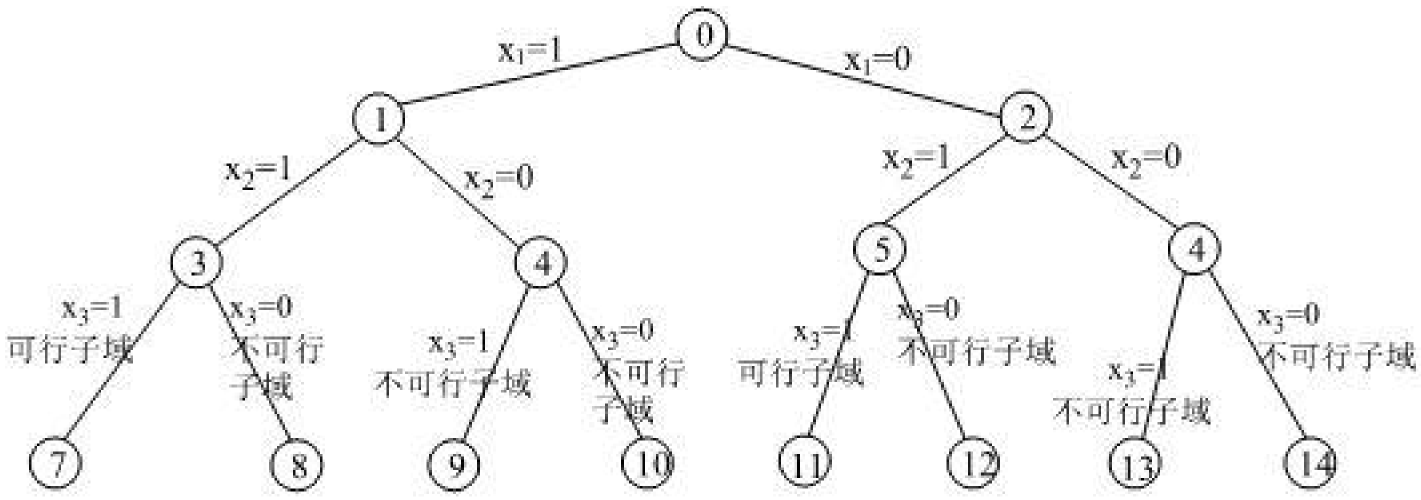
用隐枚举法求解下列 **0-1** 线性规划问题:

$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + x_5 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_2 + x_4 - x_5 \geq 2 \\ -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 \geq 0 \\ -2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \geq 1 \end{cases}$$

解: 原问题可化为以下形式:

$$\min z_1 = 5x_1 + 7x_2 + 10\mathrm{x}_3 + 3\mathrm{x}_4 + \mathrm{x}_5$$

$$s.t\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5\mathrm{x}_3 - 3\mathrm{x}_4 + 4\mathrm{x}_5 \leq 5 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3\mathrm{x}_3 + 2\mathrm{x}_4 - 2\mathrm{x}_5 \leq -2 \\ x_2 - 2\mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_4 + \mathrm{x}_5 \leq 1 \\ x_{\mathrm{j}} = 0\text{或}1\text{，对一切}\mathrm{j}\text{。} \end{cases}$$



所有子域都停止分枝，问题的最优解为（0,1,1,0,0），z=17。

五．（20 分）（答在试卷上的内容无效）

一种科研小组研制的某个装置由 3 各部件串联组成，装置的总可靠度等于每个部件的可靠度相乘。现距交付总体实验还有 5 个工作日，根据分析，对部件 i 再做天的调试，可使可靠度达到 $R_i\left(X_i\right)$，具体数值见表 5。若同一工作日只能对一个部件进行调试，那么如何分配 5 个工作日用于各部件的调试，使装置的可靠度最大？用动态规划方法求解。

表 5

X_i	$R_1(x_1)$	$R_2(x_2)$	$R_3(x_3)$
0	0.88	0.82	0.9
1	0.9	0.85	0.92
2	0.92	0.9	0.95
3	0.93	0.93	0.97
4	0.94	0.94	0.98

解: 状态变量 S_k 表示第 k 个部件分配调试时时拥有的调试天数，决策变量 X_k 表示第 k 个部件分配的调试天数，状态转移方程:

$$S_{k+1} = S_k - X_k$$

基本方程为:

$$f_k(S_k) = \max_{0 \le X_k \le S_k} \left\{ (S_k, X_k) \times f_{k+1}(S_{k+1}) \right\},$$

$f_4(\mathbf{S_4})=1$;

当 k=3 时，$f_3(\mathbf{0})=0.9$，$f_3(\mathbf{1})=0.92$，$f_3(\mathbf{2})=0.95$，

$f_3(\mathbf{3})=0.97$，$f_3(\mathbf{4})=0.98$，$f_3(\mathbf{5})=0.99$；

当 k=2 时，

$$f_2(0)=\max_{0\le X_2\le 0}\left\{R_2(X_2)\times f_3(0-X_2)\right\}$$
$$=0.82\times 0.9=0.738$$

$$f_2(1)=\max_{0\le X_2\le 1}\left\{R_2(X_2)\times f_3(1-X_2)\right\}$$
$$=\max\left\{0.82\times 0.92, 0.85\times 0.9\right\}$$
$$=\max\left\{0.7544, 0.765\right\}=0.765$$

$$f_2(2)=\max_{0\le X_2\le 2}\left\{R_2(X_2)\times f_3(2-X_2)\right\}$$
$$=\max_{0\le X_2\le 2}\left\{0.82\times 0.95, 0.85\times 0.92, 0.9\times 0.9\right\}$$
$$=\max_{0\le X_2\le 2}\left\{0.779, 0.782, 0.81\right\}=0.81$$

$$f_2(3)=\max_{0\le X_2\le 3}\left\{R_2(X_2)\times f_3(3-X_2)\right\}$$
$$=\max_{0\le X_2\le 3}\left\{0.82\times 0.97, 0.85\times 0.95, 0.9\times 0.92, 0.93\times 0.9\right\}$$
$$=\max_{0\le X_2\le 3}\left\{0.7954, 0.8075, 0.828, 0.837\right\}=0.837$$

$$f_2(4)=\max_{0\le X_2\le 3}\left\{R_2(X_2)\times f_3(4-X_2)\right\}$$
$$=\max_{0\le X_2\le 3}\left\{\begin{matrix}0.82\times 0.98, 0.85\times 0.97,\\ 0.9\times 0.95, 0.93\times 0.92, 0.94\times 0.9\end{matrix}\right\}$$
$$=\max_{0\le X_2\le 3}\left\{0.8036, 0.8245, 0.855, 0.8556, 0.846\right\}$$
$$=0.8556$$

$$f_2(5)=\max_{0\le X_2\le 5}\left\{R_2(X_2)\times f_3(5-X_2)\right\}$$

$$=\max_{0\le X_2\le 5}\begin{Bmatrix}0.82\times 0.99, 0.85\times 0.98, 0.9\times 0.97,\\ 0.93\times 0.95, 0.94\times 0.92, 0.96\times 0.9\end{Bmatrix}$$

$$=\max_{0\le X_2\le 5}\left\{0.8118, 0.833, 0.873, 0.8835, 0.8648, 0.864\right\}$$

$$=0.8835$$

当 k=1 时，

$$f_1(5)=\max_{0\le X_1\le 5}\left\{R_1(X_1)\times f_2(5-X_1)\right\}$$

$$=\max_{0\le X_1\le 5}\begin{Bmatrix}0.88\times 0.8835, 0.9\times 0.8556, 0.92\times 0.837,\\ 0.93\times 0.81, 0.94\times 0.765, 0.95\times 0.738\end{Bmatrix}$$

$$=\max_{0\le X_1\le 5}\left\{0.77748, 0.77004, 0.77004, 0.7533, 0.7191, 0.7011\right\}$$

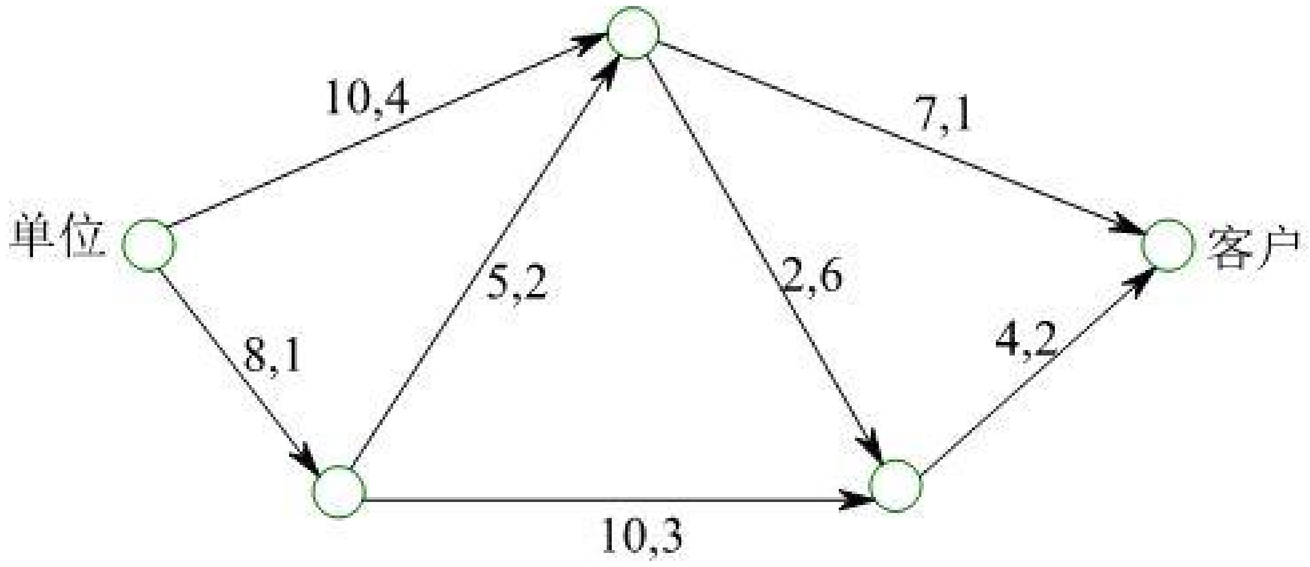
$$=0.77748$$

此时 $X_1=0$，$X_2=3$，$X_3=\mathbf{2}$。

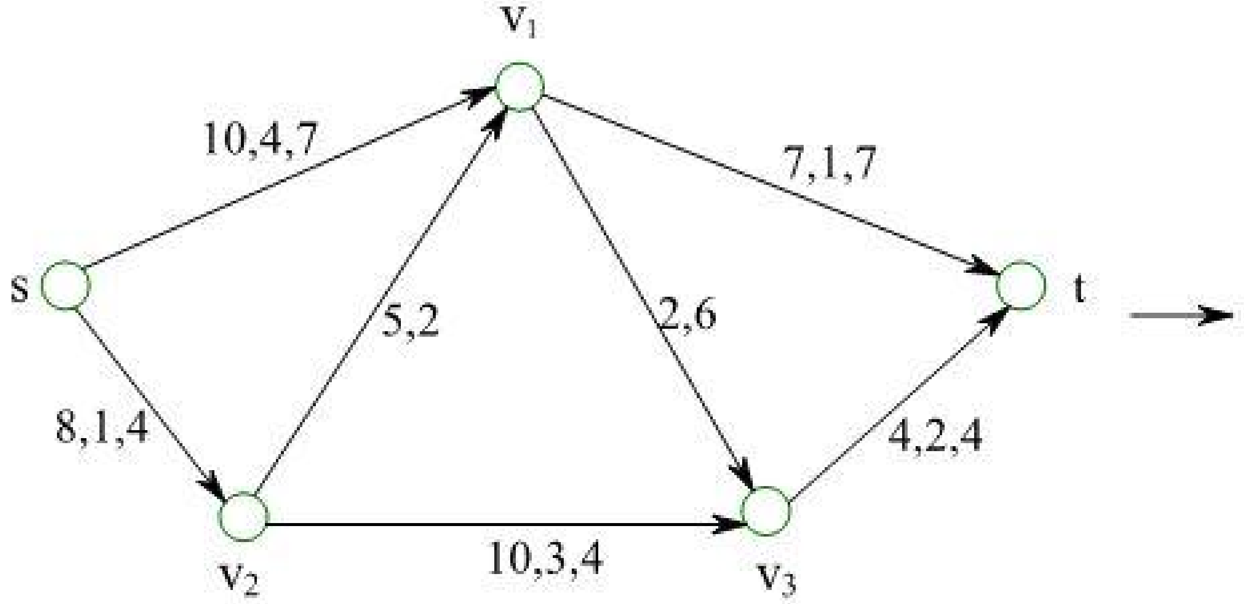
六.（25 分，共 4 小题）（答在试卷上的内容无效）

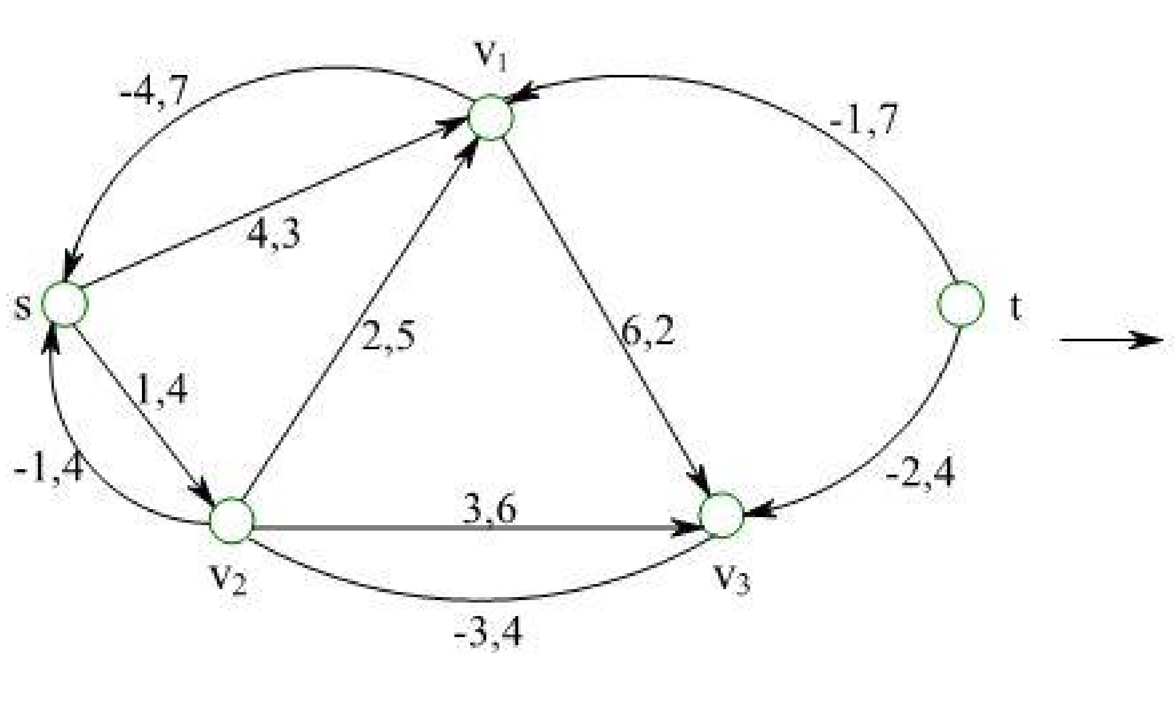
本单位有一批商品要运送给客户，可能运送的路线如下图所示，各个路线运送能力和运送费用单价已标注在图上（路线运输能力、运送费用单价），应如何组织运送才能使该

单位运送成本最少。

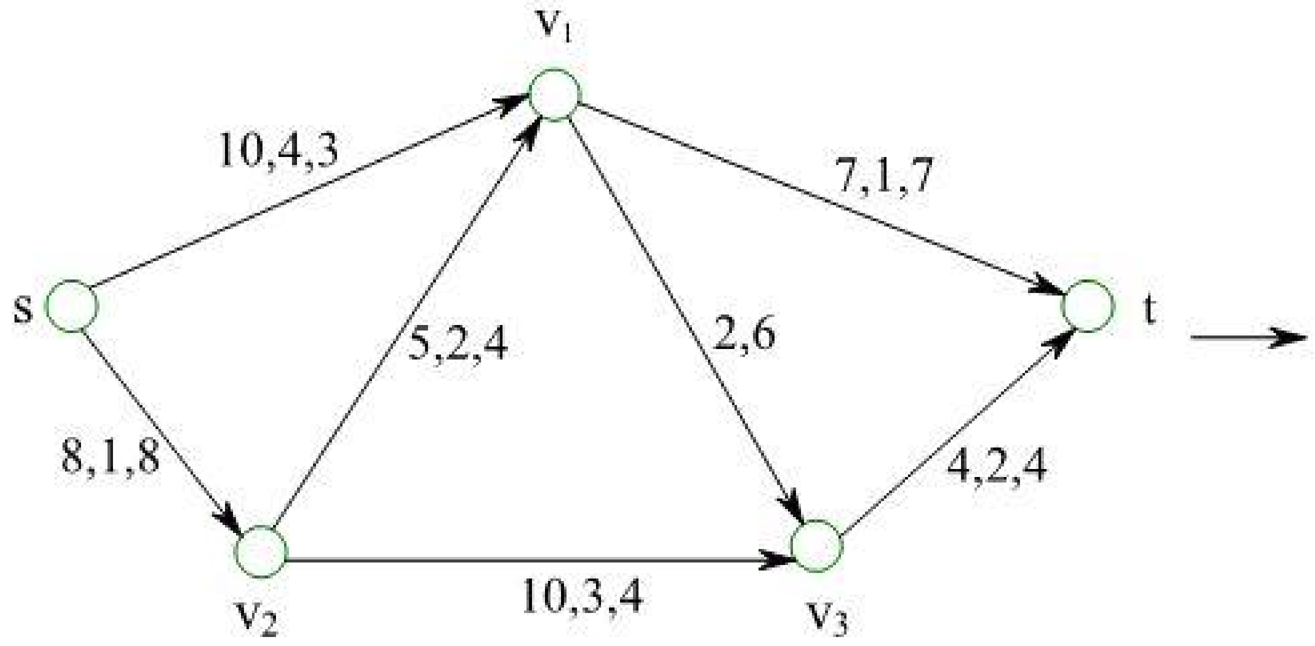


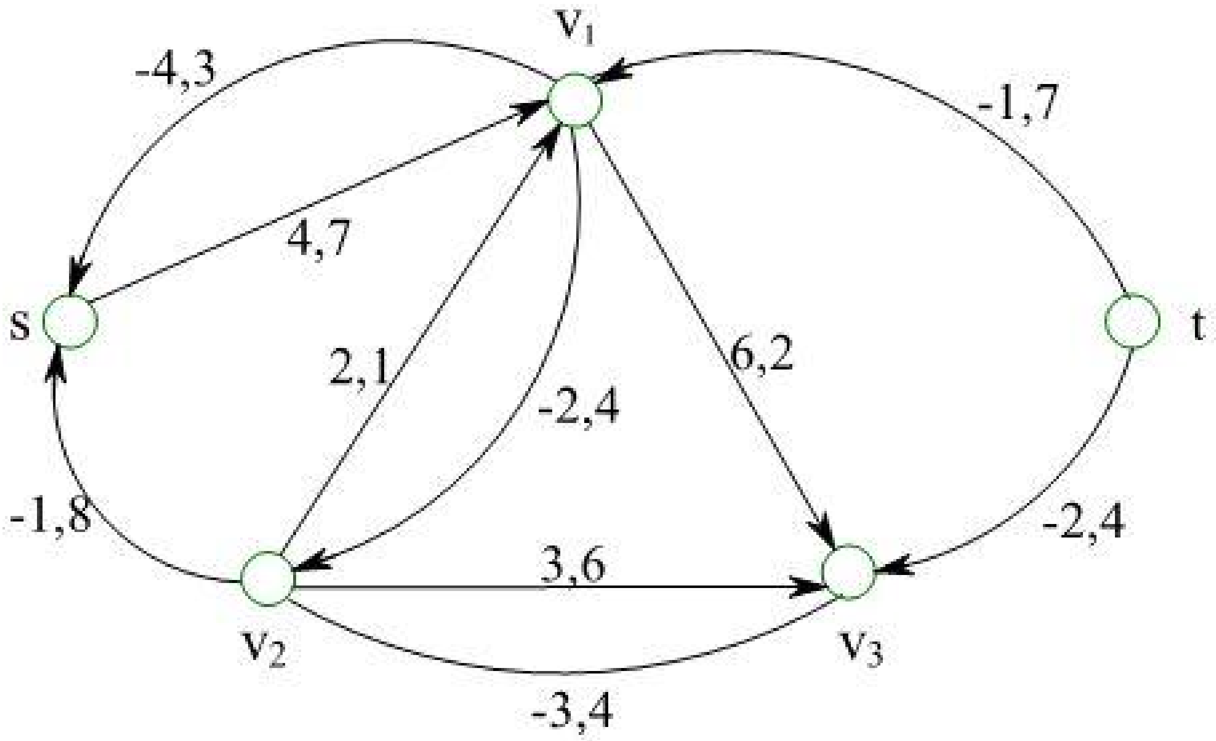
解：此为最小费用最大流问题，先求出其最大流，再在最大流情况下求最小费用：





$v_1sv_2v_1$ 为负，min(7,4,)=4





此时已达到最优，应按图 2 运输。

七．选择题（15 分，共 3 小题）（答在试卷上的内容无效）

1.下列叙述中正确的是____B____

A. 如果线性规划问题存在最优解，则最优解一定对应可行域的一个顶点；

B. 单纯形法计算中，如不按最小比值原则选取换出变量，则在下一个解中至少有一个基变量的值为负；

C. 单纯形法计算中，选取最大检验数 Y_k 对应的变量 X_k 作为换入变量，将使目标函数值得到最快的增长；

D. 若 $X^{(1)}$ 、$X^{(2)}$ 分别是某一线性规划问题的最优解，则 $X=\lambda_1 X^{(1)}+\lambda_2 X^{(2)}$ 也是该线性规划问题的最优解，其中 λ_1、λ_2 为正的实数；

E. 对一个有 n 个变量、m 个约束的标准形线性规划问题，其可行域顶点恰有 C_n^m 个。

2. 求解整数规划常用的算法有____BC____，求解 1-0 规划常用的算法有____D____

求解指派问题常用的算法有____F____。

A. 单纯形法　　　B.分枝定界法

C.割平面法　　　D.完全枚举法

E.隐枚举法　　　F. 匈牙利法

G .表上作业法

3. 动态规划方法是解决____B____，它是在明确____CL____条件的基础上，建立____FGHI____，最终求出____K____。

A．动态问题

B. 多阶段决策过程问题

C. 阶段和阶段数

D. 无后效性

E. 最优性原理

F. 基本方程

G. 决策变量与允许变量结合

H. 阶段指标与指标函数

I. 状态转移方程

J. 逆序解法

K. 最优决策序列和最优目标值

L. 状态与状态变量