西南交大 2008-2009II（2）期末试卷

1、设空间区域

$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0$；

$\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$，

则（C）

$$(A)\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_1} xdxdydz;$$

$$(B)\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_1} ydxdydz;$$

$$(C)\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_1} zdxdydz;$$

$$(D)\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdxdydz;$$

解： 本题考查的是积分的对称性。

Ω 是上半球 $x^2+y^2+z^2=R^2$（$z \ge 0$），积分区域关于 yoz， xoz 平面对称。

所以当被积函数是关于 x，y 的奇函数时积分为 0，（A）、（B）、（D）左边结果=0，当被积函数是关于x，y的偶函数时积分为单一卦限的倍数，故（C）正确。

2、设二元函数 $f(x,y)$ 满足 $f_x'(0,0)=1, f_y'(0,0)=2$，则（A）

(A) $f(x,y)$在点（0, 0）连续

$(B)\, df(x,y)\big|_{(0,0)} = dx + 2dy;$

$(C)\, \left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)} = \cos\alpha + 2\cos\beta,$

其中$\cos\alpha, \cos\beta$为l 的方向余弦；

$(D)\, f(x,y)$在点（0, 0）沿x轴负方向的方向导数为-1；

解： 二元函数 $f(x,y)$ 满足 $f_x'(0,0)=1,$

$f'_y(0,0)=2$，这是题目唯一的已知条件，

偏导数存在，不能推出二元函数可微，

它只能推出函数在此点处连续。

3、下列级数中发散的级数是（C）。

$(A)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$;　　$(B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$;

$(C)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;　　$(D)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$;

解： 已知 p 级数的性质，对于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$;

$p>1$时，级数收敛；$0<p\le 1$时，级数发散。

所以，（C）是发散的。

此题已有选项，但是我们看完所有选项。

由比较审敛法，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$(收敛)，

故$(A)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$是收敛的；

由莱布尼茨定理，$(B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 是收敛的；

由比值审敛法，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}\right| = \frac{1}{2} < 1$，所以

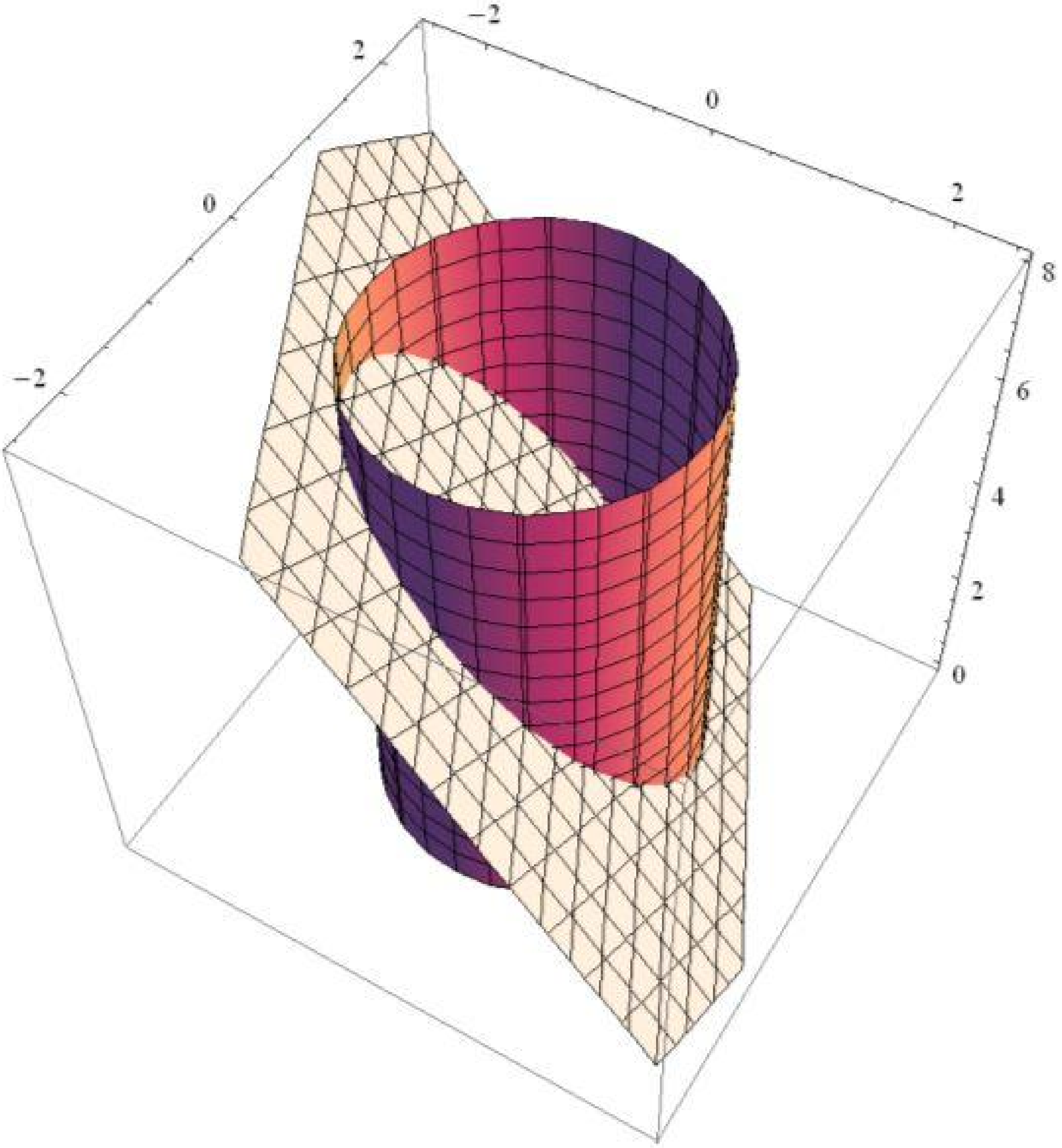
$(D)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$；收敛。

4、Σ 为平面 $z = 4 - 2x - y$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2$ 所截的部分，则曲面积分 $I = \iint_{\Sigma}(2\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z})dS$ 的值为 （C）。

(A)8π; $(B)16\pi$;

$(C)8\sqrt{6}\pi$;　　　　　$(D)16\sqrt{6}\pi$;

解： 积分区域为空间中一平面，如下图所示：



Σ 为平面 $z=4-2x-y$ 被柱面 $x^2+y^2=2$ 所截的部分，即图中椭圆区域。

$$I=\iint_{\Sigma}(2x+y+z)dS=\iint_{\Sigma}4dS=4S_t$$

S_t 是所截椭圆的面积，只要求出平面的法向量，就可以求出该面积。

平面法向量为（2,1,1），$\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$$S_t=\frac{S_y}{\cos\gamma}=\frac{2\pi}{\frac{\sqrt{6}}{6}}=2\sqrt{6}\pi$$

$$\therefore\ I=4S_t=8\sqrt{6}\pi$$

二、填空题

5、设函数 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，

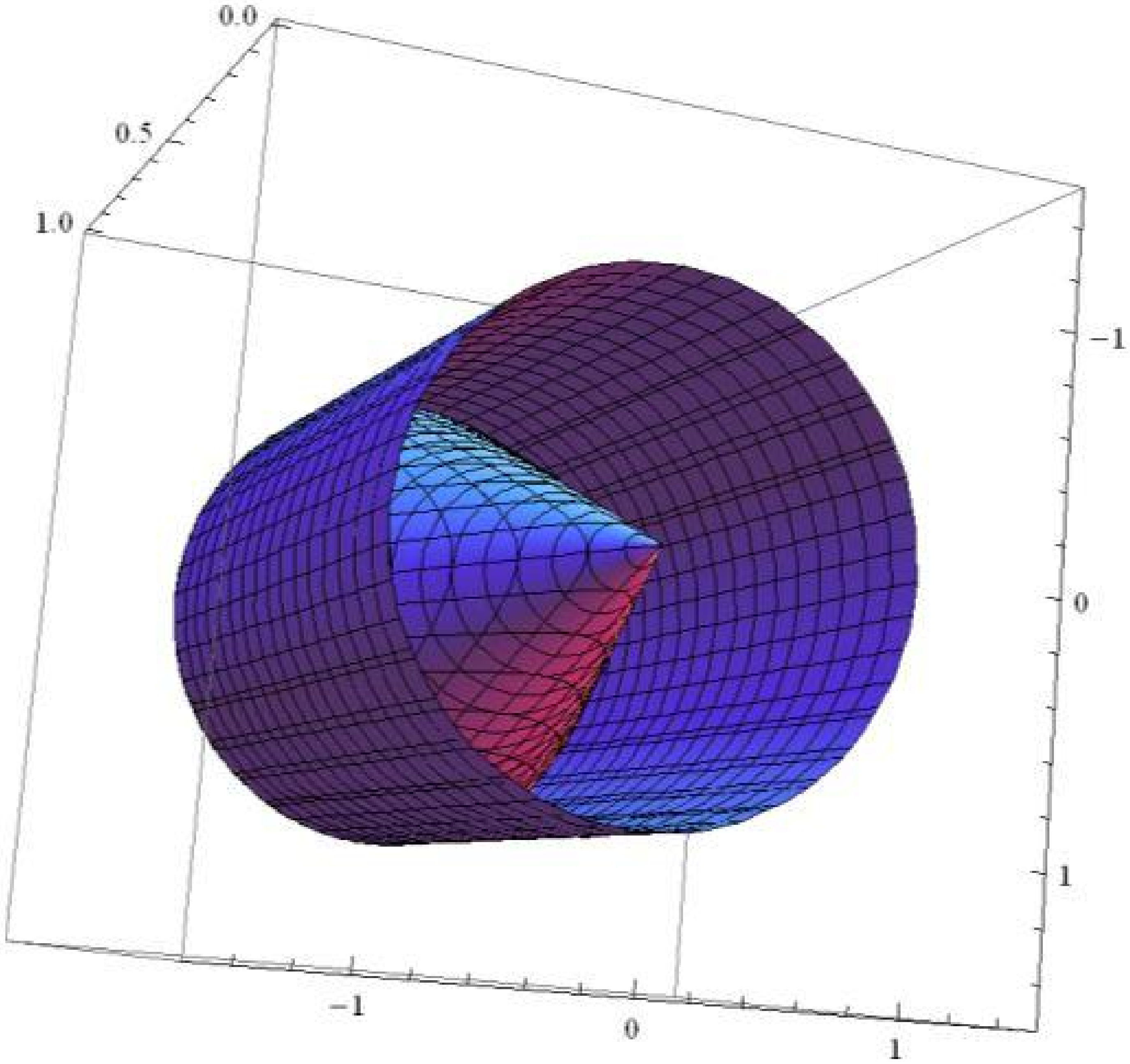
则 $f'_x(x,1)=$____1____。

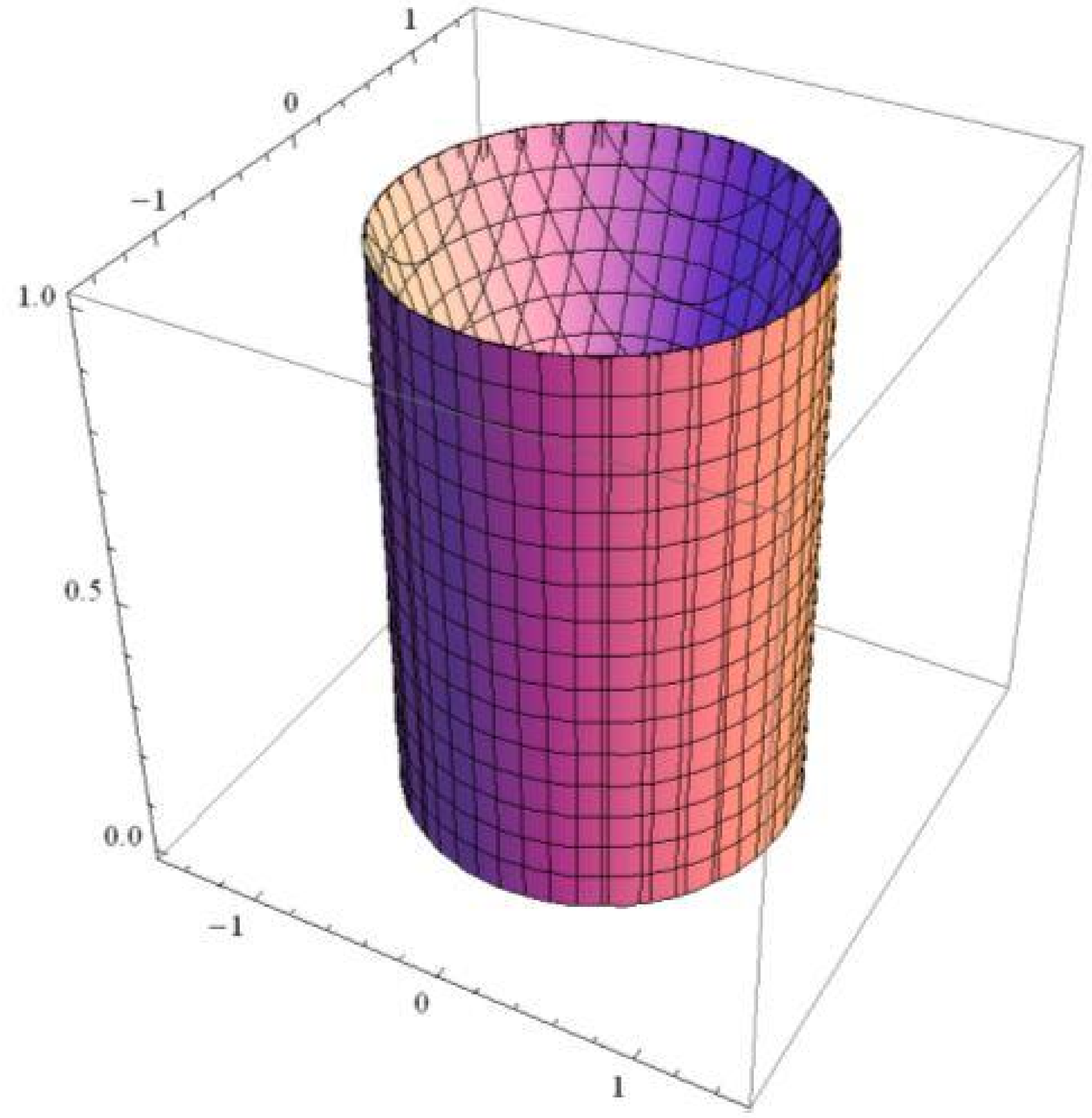
解题思路：此题直接算肯定行不通，仔细读题，发现求 x 的偏导，那么 y 看成常数，可以求导前就代入。

解： $f'_x(x,1)=\dfrac{\partial f(x,1)}{\partial x}=\dfrac{\partial x}{\partial x}=1$

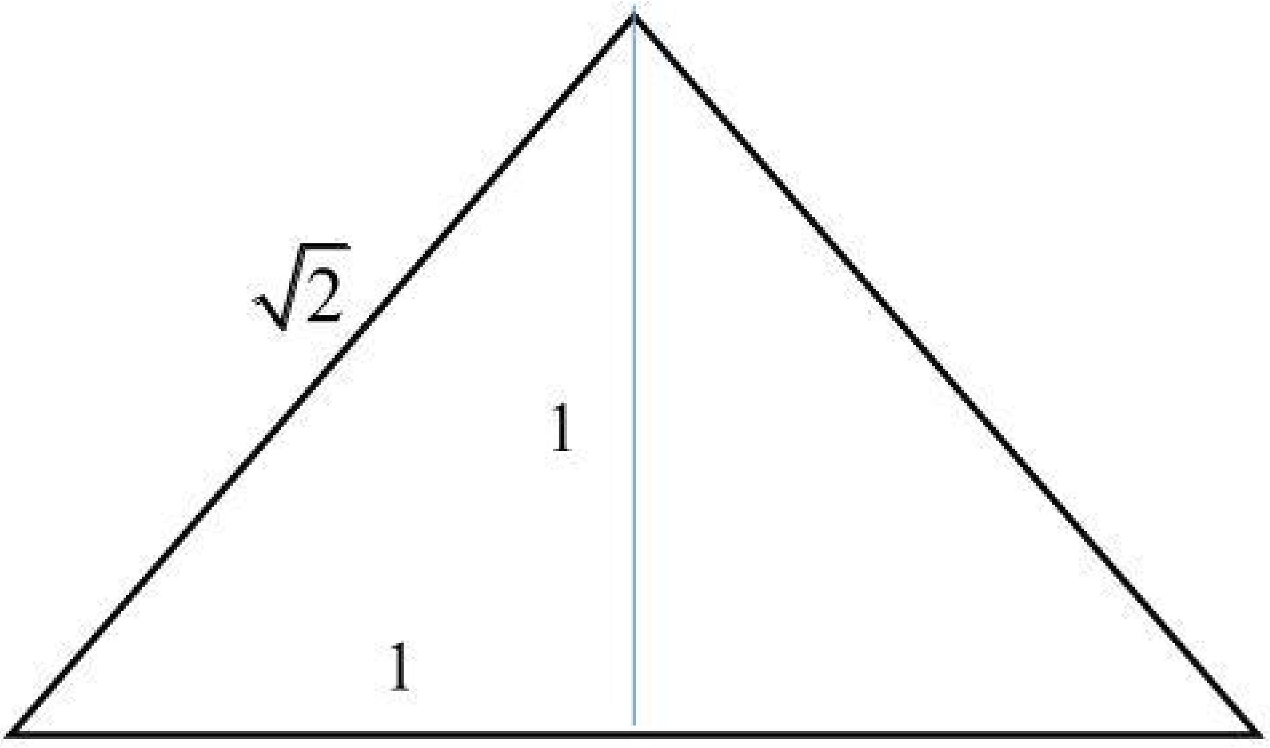
6、曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 所割下部分的面积为 $\underline{\sqrt{2}\pi}$ 。

解： 其实所割下部分就是一个圆锥面，底面为单位圆。





如上图所示，利用小学所学锥面面积计算公式便可求出结果：



圆锥展开弧长为底面圆周2π，母线长为$\sqrt{2}$

$\therefore S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\pi$

7、周期为2π的函数$f(x)=2-x(-\pi\le x<\pi)$的傅里叶级数的和函数为$s(x)$，则其在$x=-5\pi$处的值$s(-5\pi)$等于$\underline{2+\pi}$。

解：周期为2π的函数$f(x)=2-x(-\pi\le x<\pi)$的傅里叶级数的和函数为$s(x)$，这就表明$s(x)$在$-\pi\le x<\pi$上等于$f(x)=2-x(-\pi\le x<\pi)$，且$s(x)$是周期为2π的函数。

$\therefore s(-5\pi)=s(-\pi)$

而 $s(-\pi)=f(-\pi)=2+\pi$ 。

8、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n}x^n$ 的收敛域（要考查端点）为 $\underline{[-3,3)}$。

解： 用比值求收敛半径的方法：

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n n}}{\frac{1}{3^{n+1}(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{n}=3\text{ 。}$$

所以，收敛半径为（-3,3）。

考查端点 $x=3$，此时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n}x^n$

变为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散

考查端点 $x=-3$，此时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n}x^n$

变为级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，满足交错级数的莱布尼茨定理，故收敛。

综上所述，收敛域为$\left[-3,3\right)$。

三、解答题。

9、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(xy,z-2x)=0$ 确定的隐函数，$F(u,v)$ 可微，计算$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：对方程$F(xy,z-2x)=0$分别对 x,y 求偏导，得到下面两个方程组

$$\begin{cases} yF_1'+(\frac{\partial z}{\partial x}-2)F_2'=0 \\ xF_1'+\frac{\partial z}{\partial y}F_2'=0 \end{cases}$$

由$F(u,v)$可微，F_1' ,F_2'必存在。

（1）F_2'不为0；

由$F_2'\neq 0$可知，$F_1'\neq 0$也成立。那么由上述方程组**解得：**

$$\frac{y}{x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}-2}{\frac{\partial z}{\partial y}}\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}-2x=y\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=2x$$。

（2）F_1',F_2'均为0；

此时方程组恒成立，原式无穷多解。

（3）$F_2'=0,F_1'$不为0；

此情况矛盾，不成立。

10、在曲面$z=xy$上求一点，使该点处的法线垂直于平面$x+3y+z+9=0$。

解：令$f(x,y,z)=z-xy$。三元函数曲

面的法向量为$(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$

求出法向量$(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=$ $(-y,-x,1)$；

要使得该点处的法线垂直于平面$x+3y+z+9=0$，即$(-y,-x,1)$与向量（1,3,1）平行。

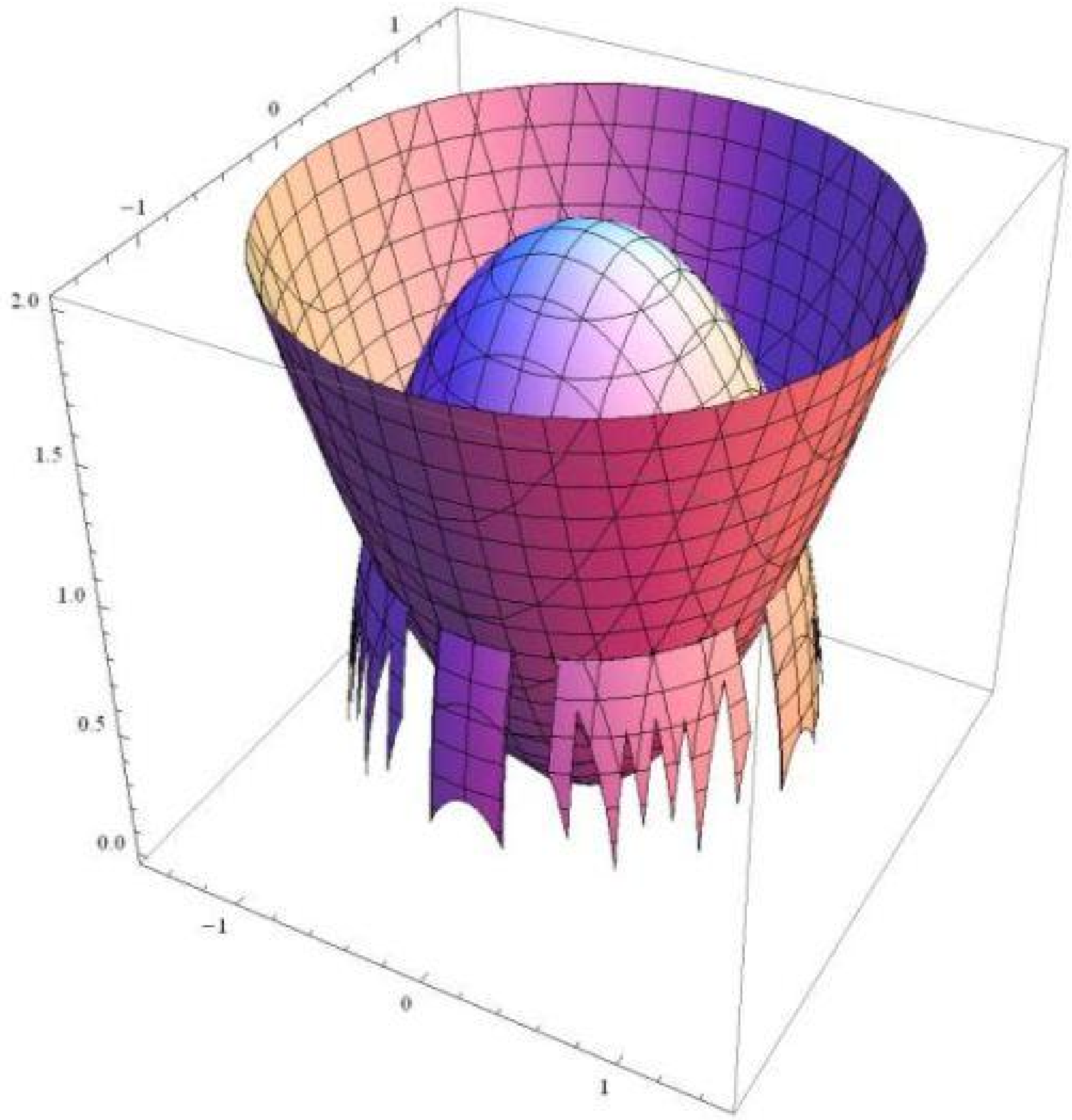
$$\frac{-y}{1}=\frac{-x}{3}=\frac{1}{1}$$

解得： $x=-3, y=-1$

所以，要求的点坐标是（-3，-1,3）.

11、计算$I=\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{4-3(x^2+y^2)}$及$z=x^2+y^2$所围成的闭区域。

解： 该积分区域如下图所示：



采用先一后二积分法比较好，因为，两曲面的交线在 xoy 平面上的投影是一个单位圆。

$$I=\iiint_{\Omega} z\,dxdydz$$

$$=\iint_{D} dxdy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{4-3(x^2+y^2)}} z\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D}\left[4-3(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

以下采用极坐标变换求**解**：

令$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$,

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[4-3(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(4-3r^2-r^4\right)rdr$$

$$=\frac{13}{12}\pi$$

12、计算积分$\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 为圆周$(x-1)^2+y^2=R^2(R\neq1)$（按逆时针方向）。

解：由题中式子有，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}$$

当$R<1$时，

$$I=\oint_{L}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\iint_{D}0dxdy=0$$

当$R>1$时，

$$I=\oint_{L+\overline{BA}-l+\overline{AB}}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}+\oint_{l}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

（l是包含原点且在L里面的任意一个闭曲线，不妨就取$4x^2+y^2=\varepsilon^2$，其中ε任意小，使得l满足条件）

此时，

$$I=\oint_{L+\overline{BA}-l+\overline{AB}}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}+\oint_{l}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

$$=\oint_{\Omega}0d\sigma+\oint_{l}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

$$=\oint_{l}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{l}xdy-ydx$$

通过换元法计算$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\varepsilon\cos\theta \\ y=\varepsilon\sin\theta \end{cases}$，

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_l xdy-ydx \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\varepsilon^2 d\theta \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

综上所述，若 $R<1$，$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0$

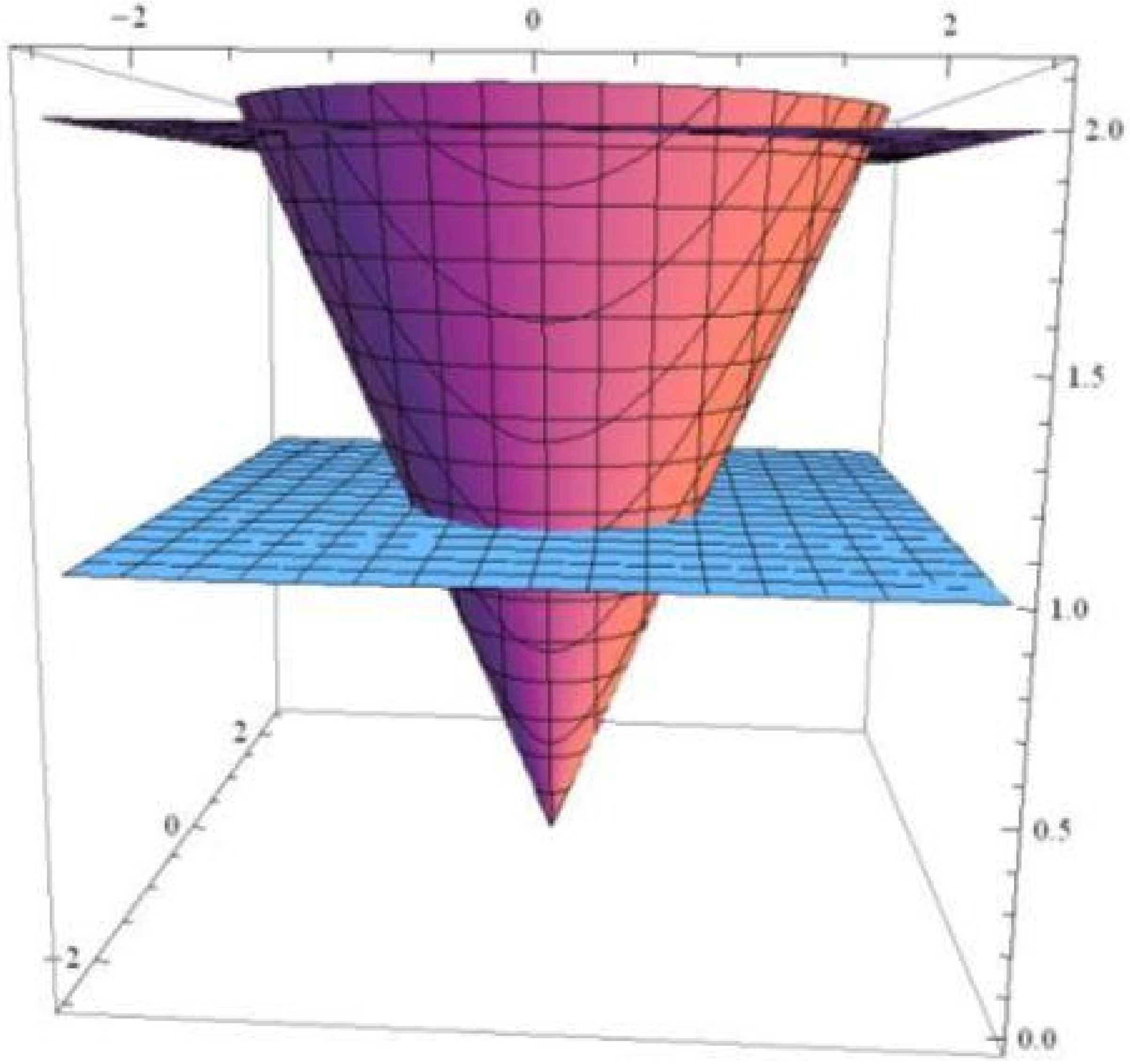
若 $R>1$，

$$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\pi$$

13、计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} ydydz-xdxdz+z^2dxdy$，

其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1,z=2$ 所截部分的外侧。

解： Σ 的图像如下图所示：



本题适合用 Guass 公式，补全曲面为闭曲面。Σ_1 表示 z=1，Σ_2 表示 z=2.

$$I=\iint_{\Sigma} ydydz-xdxdz+z^2dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} ydydz-xdxdz+z^2dxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} ydydz-xdxdz+z^2dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega} 2zdV-\iint_{\Sigma_1} z^2dxdy-\iint_{\Sigma_2} z^2dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega} 2z dV - \iint_{\Sigma_1} 1 dxdy - \iint_{\Sigma_2} 4 dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega} 2z dV - \pi - 16\pi$$

$$=\int_1^2 \pi z^2 dz - 17\pi$$

$$=-\frac{44}{3}\pi$$

14、在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $l=(1,-1,0)$ 的方向导数最大，并求出最大值。

解题思路： 此题为条件极值问题，用 lagrange 方法求解即可。

解： 首先求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在 (x,y,z) 点处沿方向 $l=(1,-1,0)$ 的方向导数，

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \frac{\partial f}{\partial y}=2y, \frac{\partial f}{\partial z}=2z$，

方向 $l=(1,-1,0)$ 的方向余弦为

$(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$。

所以，沿方向 $l=(1,-1,0)$ 的方向导数为

$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y$。

构造 lagrange 函数

$$F(x,y,\lambda)=\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=\sqrt{2}+4\lambda x=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}=-\sqrt{2}+4\lambda y=0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}=2\lambda z=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=2x^2+2y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \\ z=0 \\ \lambda=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} or \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=0 \\ \lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

上述两组解，一个为方向导数最大值，一个为最小值。

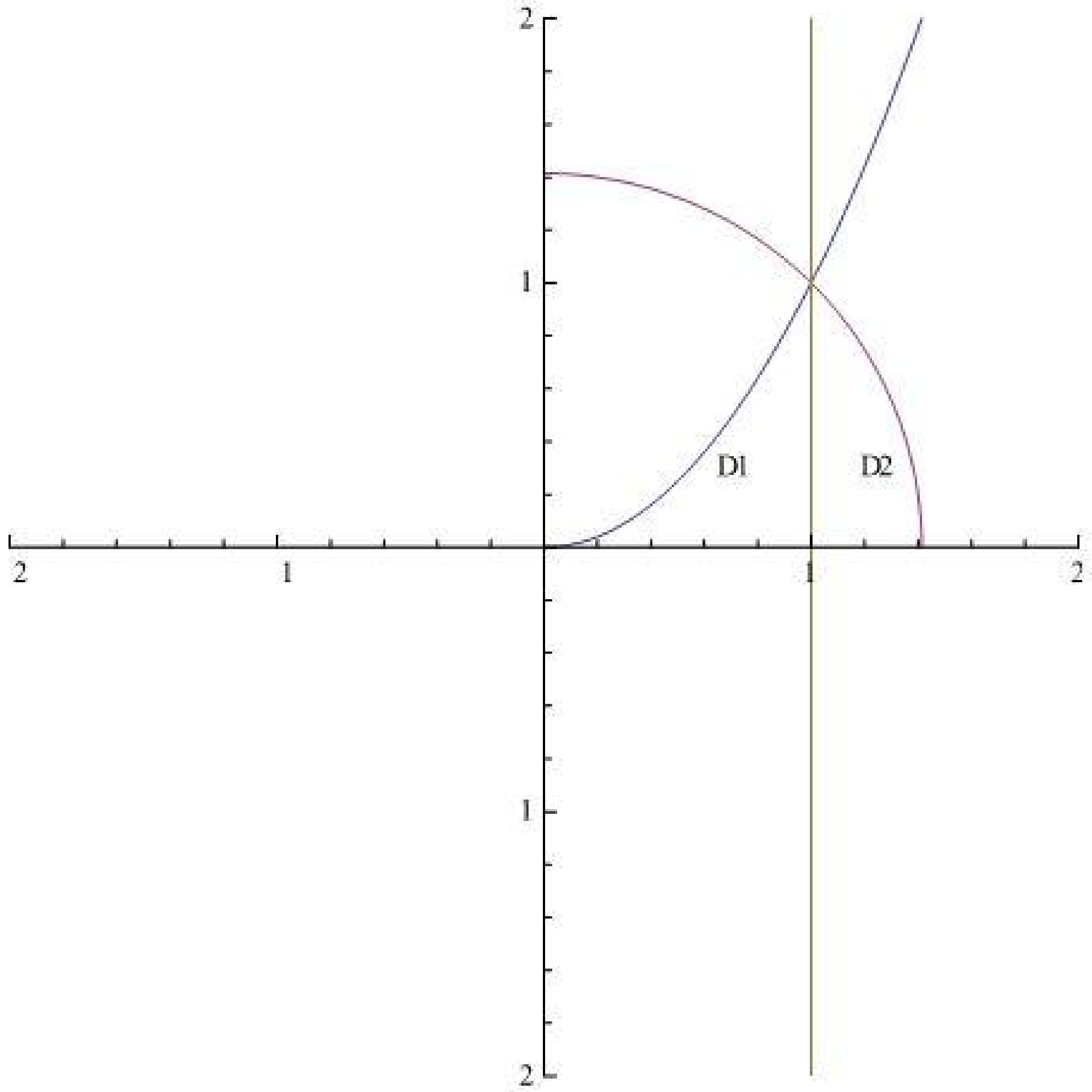
可得，方向导数最大的点是 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$，最大值是 $\sqrt{2}$。

四、综合题。

15、交换积分次序

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

解：积分区域如下图所示：



交换积分次序，题干中的是先 y 后 x，所以我们换成先 x 后 y 就行。

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$

16、将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ 展开为 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

解题思路： 若是直接用泰勒公式展开，

求导过程十分繁琐。所以应该利用幂级数的性质，先求导，再展开，最后积分还原。

解： 函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$，对原函数求导，得

$$f'(x)=\left(\arctan\frac{1-x}{1+x}\right)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

将 $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$ 作幂级数展开，得

$$f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}$$

然后对 $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}$ 进行逐项积分，可求出函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ 的关于 x 的幂级数：

$$f(x)=\arctan\frac{1-x}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\int x^{2n}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}。$$

要求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和，只需将

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 中的 x 代为-1即可。

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=f(-1)=\frac{\pi}{2}$