

# Algoritmos y computabilidad

Exploratorio Computación 1'2021

Profesor Denis Parra

Invitado: Juan Reutter

# ¿qué es un algoritmo?

## Algorithm

---

From Wikipedia, the free encyclopedia

*"In mathematics and computer science, an algorithm is a sequence of instructions, typically to solve a class of problems or perform a computation. [...]"*

*As an effective method, an algorithm can be expressed within a finite amount of space and time and in a well-defined formal language for calculating a function. Starting from an initial state and initial input (perhaps empty), the instructions describe a computation that, when executed, proceeds through a finite number of well-defined successive states, eventually producing output and terminating at a final ending state. [...]"*

# ¿qué es un algoritmo?

## Algorithm

---

From Wikipedia, the free encyclopedia

*"In mathematics and computer science, an algorithm is a sequence of instructions, typically to solve a class of problems or perform a computation. [...]"*

As an *effective method*, an algorithm can be expressed within a finite amount of space and time and in a well-defined formal language for calculating a function. Starting from an *initial state* and *initial input* (perhaps empty), the *instructions* describe a computation that, when executed, proceeds through a finite number of well-defined *successive states*, *eventually* producing *output* and terminating at a *final ending state*. [...]"

# ¿qué es un algoritmo?

## Ejemplo

```
10  INPUT INT A > 0, INT B > 0
20  IF B=0 THEN GOTO 80
30  IF A > B THEN GOTO 60
40  LET B=B-A
50  GOTO 20
60  LET A=A-B
70  GOTO 20
80  PRINT A
90  END
```

### ■ Algoritmo de Euclides

*"... one of the oldest algorithms still in common use."*

Wikipedia.

# ¿qué es un algoritmo?

## Ejemplo

```
t := 3
while TRUE do
  for n = 3 to t do
    for x = 1 to t do
      for y = 1 to t do
        for z = 1 to t do
          if  $x^n + y^n = z^n$  then
            return TRUE
        t := t + 1
```

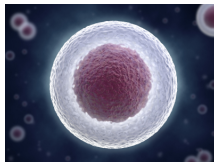
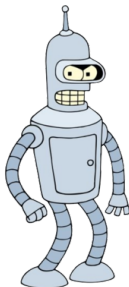
# ¿qué es un algoritmo?

La definición deja varias preguntas sin resolver:

- ¿cuáles son los posibles “estados”?
- ¿cuáles son los posibles “inputs”?
- ¿cuáles son las posibles “instrucciones”?

¿cómo puedo saber si mi algoritmo “termina”?

¿qué significa computar?



# Interludio

## Definición

Un **quine** es un programa que se imprime a si mismo.

## Ejemplo

Imprime lo siguiente dos veces, la segunda vez con comillas  
“Imprime lo siguiente dos veces, la segunda vez con comillas”

```
s = 's = %r \n print(s%%s)'\nprint(s%s)
```

¿conocen algún “quine”?



# ¿qué significa computar?

Veamos dos historias paralelas:

- Historia 1: los inicios del computador.
- Historia 2: los inicios de la ciencia de la computación.

# Historia 1: los inicios del computador

- 1599    Sistemas de conteo, ábacos, ....
- 1600 – 1799    Primera aparición de la palabra “computador”.



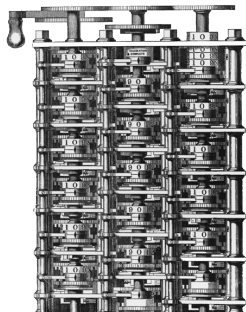
# Historia 1: los inicios del computador

- 1599    Sistemas de conteo, ábacos, . . . .
- 1600 - 1799    Primera aparición de la palabra "computador".  
Primeros sistemas mecánicos de conteo (Pascal, Leibniz, . . . ).



# Historia 1: los inicios del computador

- 1599    Sistemas de conteo, ábacos, . . . .
- 1600 – 1799    Primera aparición de la palabra “computador”.  
Primeros sistemas mecánicos de conteo (Pascal, Leibniz, . . . ).
- 1800 – 1850    La máquina diferencial de C. Babbage.



(ver video)

# Historia 1: los inicios del computador

- 1599    Sistemas de conteo, ábacos, . . . .
- 1600 – 1799    Primera aparición de la palabra “computador”.  
Primeros sistemas mecánicos de conteo (Pascal, Leibniz, . . . ).
- 1800 – 1850    La máquina diferencial de C. Babbage.  
La máquina analítica de C. Babbage y A. Lovelace.



# Historia 1: los inicios del computador

- 1599    Sistemas de conteo, ábacos, . . . .
- 1600 – 1799    Primera aparición de la palabra “computador”.  
Primeros sistemas mecánicos de conteo (Pascal, Leibniz, . . . ).
- 1800 – 1850    La máquina diferencial de C. Babbage.  
La máquina analítica de C. Babbage y A. Lovelace.
- 1940 –    la **era moderna** de los computadores comienza . . .

# Historia 2: los inicios de la ciencia de la computación

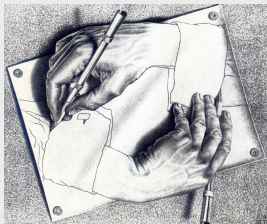
Finales del siglo XIX.

- Grandes contradicciones en los “cimientos” de las matemáticas.

## Ejemplo

Paradoja de Russell: ¿es posible definir el siguiente conjunto?

$$R = \{S \text{ es un conjunto} \mid S \notin S\}$$



¿cómo formalizar los “cimientos” de las matemáticas sin contradicciones?

# ( parentesis diofántico en nuestra historia )

## Definición

Sea  $p(x_1, \dots, x_n)$  un **polinomio** con coeficientes en los **números enteros**  $\mathbb{Z}$ .

Una **ecuación diofántica** es una ecuación de la forma  $p(x_1, \dots, x_k) = 0$  donde las soluciones están restringidas a los **números enteros**  $\mathbb{Z}$ .

## Ejemplo

Las siguientes son ecuaciones diofánticas.

- $3x + 7y - 1 = 0$

- $x^2 + x - 2 = 0$

- $x^3 + y^3 - z^3 = 0$

¿cuál de ellas tienen alguna solución entera?



# Historia 2: los inicios de la ciencia de la computación

Principios del Siglo XX.

- David Hilbert, en la conferencia internacional de matemáticas (1900):

*“Problema 10: Dada una **ecuación diofántica** con cualquier número de incógnitas y con coeficientes numéricos racionales enteros:*

*Idear un **proceso efectivo** de acuerdo con el cual pueda determinarse, en un número finito de operaciones, si la ecuación es resoluble en números racionales enteros.”*

¿cómo formalizamos la idea de “**proceso efectivo**”?

## Historia 2: los inicios de la ciencia de la computación

Desde 1900 hasta 1930 vinieron muchas propuestas



*Funciones parcialmente recursivas*  
por K. Gödel, J. Herbrand, S. Kleene.

*$\lambda$ -calculus*  
por Alonso Church.



*Máquinas de Turing*  
por Alan Turing.

...

¿cuál de todas ellas definen la idea de “**proceso efectivo**”?

# Máquinas de Turing

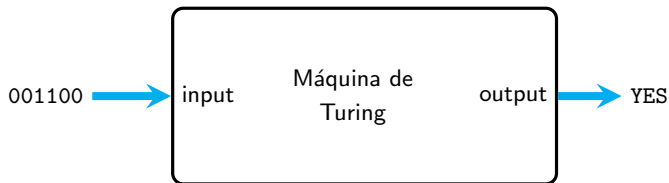
Inventadas en 1936, por **Alan Turing** (“el padre de la computación”).



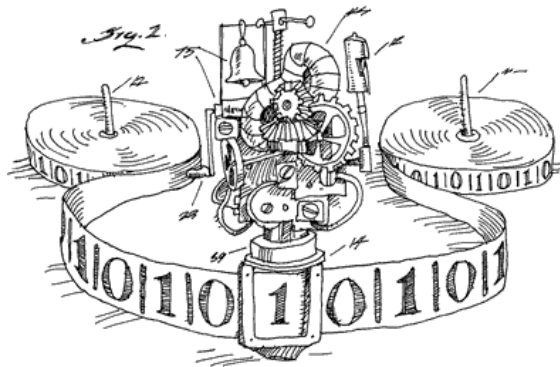
Inventadas mucho antes que existiera los **computadores modernos**.

# Máquinas de Turing

- Modelo abstracto de una máquina.
- Recibe como **input** una secuencia de símbolos.
  - Ejemplo: 001100.
- Responde como **output**:  
YES   o   NO   o    $\emptyset$  (no detenerse)



# Máquinas de Turing



# Componentes de una máquina de Turing

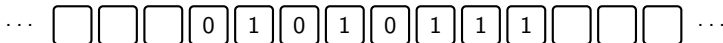
1. **Símbolos:** Un conjunto finito de símbolos predefinidos.

## Ejemplos

- Binario:  $\{0, 1\}$ .
- Numérico:  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ .
- Alfabeto:  $\{a, b, \dots, z, A, B, \dots, Z\}$ .
- ASCII:  $\{a, b, \dots, z, A, B, \dots, Z, !, \#, \$, \dots\}$ .

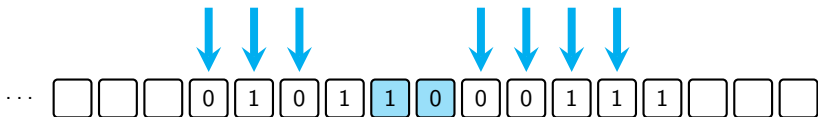
# Componentes de una máquina de Turing

1. **Símbolos:** Un conjunto finito de símbolos predefinidos.
2. **Memoria:** Un arreglo o **cinta infinita** de celdas contiguas que en cada posición almacena un símbolo o está vacío.



# Componentes de una máquina de Turing

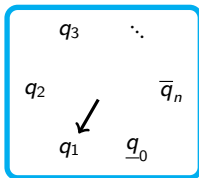
1. **Símbolos:** Un conjunto finito de símbolos predefinidos.
2. **Memoria:** Un arreglo o **cinta infinita** de celdas contiguas que en cada posición almacena un símbolo o está vacío.
3. **Cabeza Lectora:** Un **cabezal** sobre la cinta que se mueve en ambas direcciones y lee y modifica las celdas.





# Componentes de una máquina de Turing

1. **Símbolos:** Un conjunto finito de símbolos predefinidos.
2. **Memoria:** Un arreglo o **cinta infinita** de celdas contiguas que en cada posición almacena un símbolo o está vacío.
3. **Cabeza Lectora:** Un **cabezal** sobre la cinta que se mueve en ambas direcciones y lee y modifica las celdas.
4. **Control:** Un conjunto finito de **estados** o “memoria finita” junto con un estado **inicial** y un estado **final**.

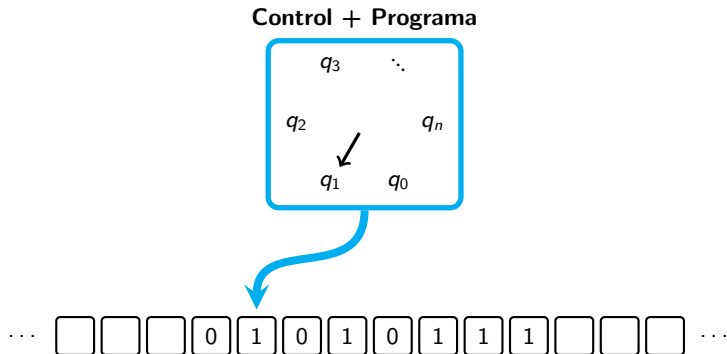


# Componentes de una máquina de Turing

1. **Símbolos:** Un conjunto finito de símbolos predefinidos.
2. **Memoria:** Un arreglo o **cinta infinita** de celdas contiguas que en cada posición almacena un símbolo o está vacío.
3. **Cabeza Lectora:** Un **cabezal** sobre la cinta que se mueve en ambas direcciones y lee y modifica las celdas.
4. **Control:** Un conjunto finito de **estados** o “memoria finita” junto con un estado **inicial** y un estado **final**.
5. **Programa:** Conjunto de instrucciones.

*“Si estoy en el estado  $q$  y la cabeza lectora lee un 0, entonces cambio al estado  $p$ , modifico el 0 por un 1 y muevo la cabeza lectora a la derecha.”*

# Componentes de una máquina de Turing



# Programación de una máquina de Turing

Para programar una Máquina de Turing el usuario debe entregar:

- El conjunto de **símbolos**.

- *Ejemplo:*  $\{0, 1, \sqcup\}$  donde  $\sqcup$  significa vacío.

- El conjunto de **estados**.

- *Ejemplo:*  $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

- La tabla de **transiciones**:

$E_{actual}$	$S_{actual}$	$E_{sgte}$	$S_{nuevo}$	$D$
$q_0$	0	$q_1$	0	$\rightarrow$
$q_0$	1	$q_2$	1	$\leftarrow$
$q_0$	$\sqcup$	$q_2$	0	$\downarrow$
$q_1$	0	$q_3$	1	$\rightarrow$

- Estado **inicial** y estado **final**.

- *Ejemplo:* estado inicial es  $q_0$  y el estado final es  $q_3$ .

# Programación de una máquina de Turing

## Definición formal

Un **máquina de Turing** es una estructura:

$$\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, q_f)$$

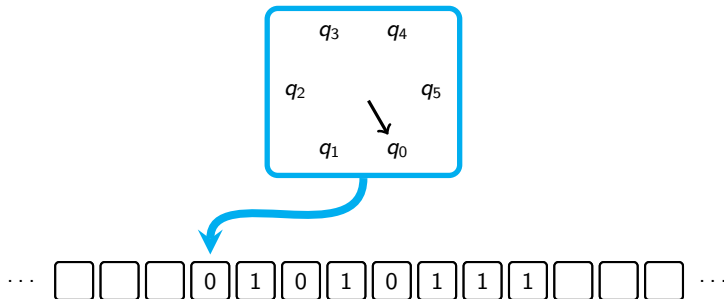
- $\Sigma$  es el conjunto de **símbolos**.
- $Q$  es un conjunto finito de **estados**.
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow, \downarrow\}$  es la **función parcial de transición**.
- $q_0$  es el estado **inicial**.
- $q_f$  es el estado **final**.

# Funcionamiento de una máquina de Turing

## Configuración inicial

Para un input  $w$ , la máquina inicialmente:

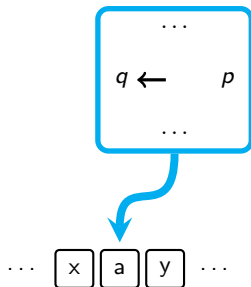
- Coloca  $w$  en alguna parte de la cinta.
- La cabeza lectora se posiciona en la primera celda del input.
- La máquina queda en el estado inicial  $q_0$ .



# Funcionamiento de una máquina de Turing

En cada paso

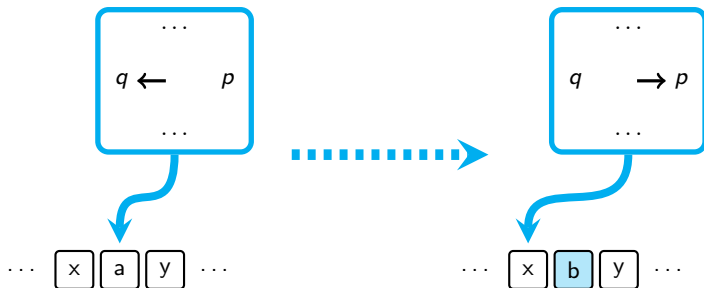
- La máquina lee el símbolo **a** en la celda apuntada por la cabeza lectora y determina en que estado **q** se encuentra.
- Busca en el programa una instrucción para **(q, a)**. Si esta instrucción no existe, entonces la máquina se detiene.



# Funcionamiento de una máquina de Turing

En cada paso

- Si la instrucción  $(q, a) \rightarrow (p, b, d)$  existe, entonces la ejecuta:
  - Pasa al nuevo estado  $p$ ,
  - Escribe el símbolo  $b$  apuntado por la cabeza lectora,
  - Mueve la cabeza lectora según la dirección  $d$ .





# Funcionamiento de una máquina de Turing

## Configuración final

- Si la máquina se **detiene** en un estado **final**, entonces responde **YES**.
- Si la máquina se **detiene** en un estado **NO final**, entonces responde **NO**.

La máquina puede NO detenerse!

# Ejemplo de una máquina de Turing

Problema a resolver:

Verificar si el input tiene una cantidad par de 0's.

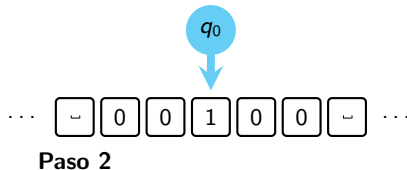
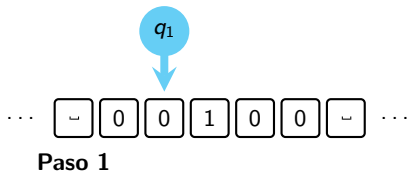
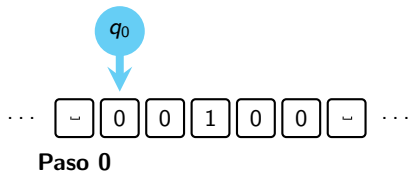
Solución:

- Símbolos:  $\Sigma = \{0, 1\}$ .
- Estados:  $Q = \{q_0, q_1, q_f\}$
- Instrucciones:

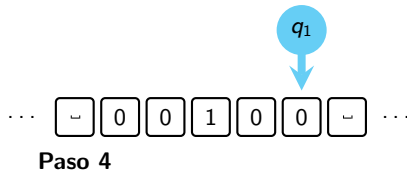
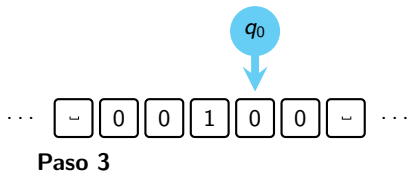
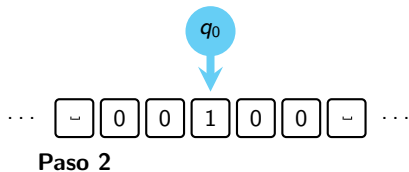
$E_{actual}$	$S_{actual}$	$E_{sgte}$	$S_{nuevo}$	$D$
$q_0$	0	$q_1$	0	$\rightarrow$
$q_0$	1	$q_0$	1	$\rightarrow$
$q_1$	0	$q_0$	0	$\rightarrow$
$q_1$	1	$q_1$	1	$\rightarrow$
$q_0$	$\sqcup$	$q_f$	$\sqcup$	$\downarrow$

- Estado inicial:  $q_0$ .
- Estado final:  $q_f$ .

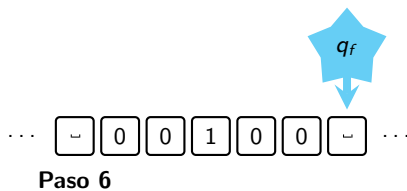
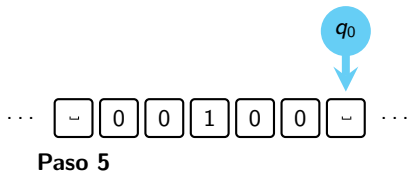
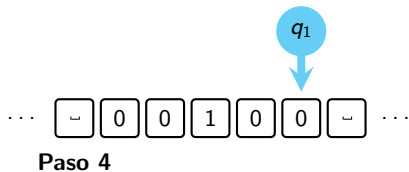
## Ejecución con input 00100



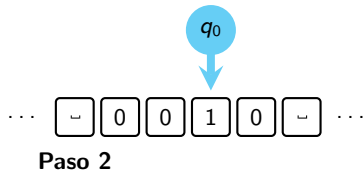
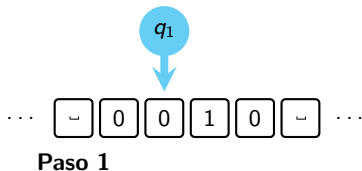
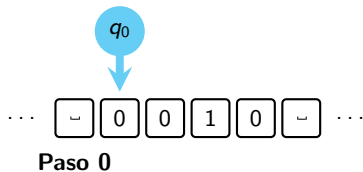
## Ejecución con input 00100



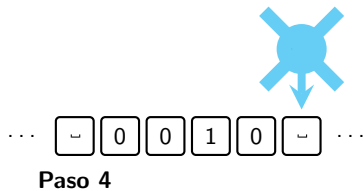
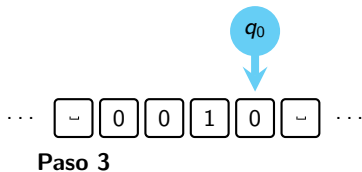
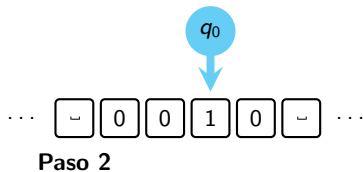
## Ejecución con input 00100



## Ejecución con input **0010**



## Ejecución con input **0010**



# Simulador de máquinas de Turing

# TURING MACHINE

<https://turingmachinesimulator.com/>

- Creado y mantenido por **Martin Ugarte** (Ex-alumno doctorado, DCC)
- Simulador online de Máquinas de Turing.



## Historia 2: los inicios de la ciencia de la computación

Desde 1900 hasta 1930 vinieron muchas propuestas:



*Funciones parcialmente recursivas*  
por K. Gödel, J. Herbrand, S. Kleene.

*$\lambda$ -calculus*  
por Alonso Church.



**Máquinas de Turing**  
por Alan Turing.

...

¿cuál de todas ellas definen la idea de “proceso efectivo”?

# Todas definen el mismo fenómeno

Funciones parcialmente recursivas	≡	
$\lambda$ -calculus	≡	
Máquinas de Turing	≡	
...	≡	
Computador (moderno)	≡	Todos pueden “computar” los mismos problemas

## Tesis de Church-Turing

Todo proceso efectivo (“computable”) es equivalente a una máquina de Turing.

Es posible ejecutar cualquier algoritmo en una máquina de Turing!

# Todas definen el mismo fenómeno

Implicación mas importante de la Tesis de Church-Turing:

*"Existen problemas para el cual NO existe  
proceso efectivo (algoritmo) que entregue su solución."*

¿cuáles son estos **problemas sin solución?**

# Detención de una función en python

Dada una función en python:

```
def mifuncion( arg1 ):  
    ...  
    return;
```

¿se detiene mifunción en algún momento si la ejecuto con el input 10?

**Problema**    Detención de una función en python

**Input:**        - código de una función en python  $f$   
                  - input  $w$

**Output:**        si al ejecutar  $f$  con  $w$  la ejecución termina.

¿existe algún algoritmo que resuelva este problema?

# Detención de una función en python

Supongamos que **existe** un programa en python:

```
def haltingChecker( func, arg ):
```

Responde true si, y solo si, al ejecutar func(arg)  
el computador se detendrá.

Construyamos la siguiente función:

```
def invertAnswer( func ):  
    if haltingChecker( func, func ) == True:  
        while True:  
            print 'loop';  
    else:  
        return;
```

¿qué ocurre si ejecuto invertAnswer( invertAnswer )?

# Detención de una función en python

```
def invertAnswer( func ):  
    if haltingChecker( func, func ) == True:  
        while True:  
            print 'loop';  
    else:  
        return;
```

¿qué ocurre si ejecuto `invertAnswer( invertAnswer )`?

Supongamos que `invertAnswer` **se detiene** con su propio código:

- `haltingChecker(invertAnswer, invertAnswer)` responde True
- `invertAnswer` se queda en el while (**NO se detiene**).



Supongamos que `invertAnswer` **NO se detiene** con su propio código:

- `haltingChecker(invertAnswer, invertAnswer)` responde False.
- `invertAnswer` retorna (**se detiene**).



# Detención de una función en python

Como llegamos a una **contradicción**, el error fue suponer que existe:

```
def haltingChecker( func, arg ):
```

Por lo tanto, **NO** existe un algoritmo para el problema:

**Algoritmo**    Detención de una función en python

**Input:**        código de una función en python  $f$   
                  input  $w$

**Output:**        si al ejecutar  $f$  con  $w$  la ejecución termina.

Decimos que el problema de la detención de un programa es **indecidable**.

## Historia 2: los inicios de la ciencia de la computación

Implicación mas importante de la Tesis de Church-Turing:

*"Existen problemas para el cual NO existe proceso efectivo (algoritmo) que entregue su solución."*

¿existen más problemas sin solución?

### Un problema de nuestra historia

*"Problema 10: Dada una **ecuación diofántica** con cualquier número de incógnitas y con coeficientes numéricos racionales enteros:*

*Idear un proceso efectivo de acuerdo con el cual pueda determinarse, en un número finito de operaciones, si la ecuación es resoluble en números racionales enteros."*

...FIN!



# ¿qué significa computar?

Algunas conclusiones de estas dos historias . . .

1. Es posible entender la computación sin conocer los computadores.
2. La computabilidad es un fenómeno intrínseco del universo.
3. Entender el “computar” nos entrega resultados inesperados.

*“Computer science is not about machines,  
in the same way that astronomy is not about telescopes.”*

Edsger Dijkstra