1.4 课后练习

A 组

练习 1. 已知函数 $y = f(x+1)$ 的图像关于直线 $x = -3$ 对称, 且对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x) + f(-x) = 2$. 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = x + 2$, 求 $f(2022)$.

练习 2. 利用定义求函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 的导数, 并验证其是否与我们所记的公式相等.

练习 3. 已知函数 $f(x) = \dfrac{2}{x} + a\ln x$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线垂直于直线 $y = x + 2$, 求 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \mathrm{e}]$ 上的最小值.

练习 4. 当 $x \geqslant 0$ 时, 证明不等式 $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$, 并指出其与 $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ 的关系.

B 组

练习 5. 证明以下结论:

(1) 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上可导的奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上可导的偶函数, 则 $f'(x)$ 是奇函数.

练习 6. 给定抛物线 $y^2 = 2px$, 求其上面一点 (x_0, y_0) 处的切线方程.

练习 7. 设函数 $f(x) = x^x$, 求 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$.

练习 8. 设函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, 其中 $x > 0$, 求 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 与单调递增区间.

2.4 课后练习

我觉得可以证明下
令 $t=\ln x$. T_2 与 T_1 实际上相同

A 组

练习 1. 若当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 不等式 $\mathrm{e}^x \geqslant ax+1$ 恒成立, 求 a. (请注意本题和例题的区别!)

练习 2. 若当 $x>0$ 时, 不等式 $ax-a-\ln x \geqslant 0$ 恒成立, 求 a.

练习 3. 若当 $x \geqslant 0$ 时, 不等式 $ax \geqslant \sin x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

练习 4. 分别尝试分类讨论与分离变量, 讨论函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$ 的零点个数.

练习 5. (2017 年 I 卷理数) 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

练习 6. (2023 年乙卷理数) 已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+a\right)\ln(1+x)$.

(1) 当 $a=-1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 是否存在 a,b, 使得曲线 $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x=b$ 对称, 若存在, 求 a,b 的值, 若不存在, 说明理由;

(3) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在极值, 求 a 的取值范围.

B 组

练习 7. 当 $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ 时, 证明 $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$.

练习 8. 使用洛必达法则求解:

(1) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)};$$

(2) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

3.5 课后练习

A 组

练习 1. 证明当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $1 < \dfrac{x-1}{\ln x} < x$.

练习 2. (2016 年 Ⅱ 卷文数) 已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$, 若当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 求 a 的取值范围.

B 组

练习 3. 证明对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}$, 都有 $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^{x_0}x + (1 - x_0)\mathrm{e}^{x_0}$, 并指出不等式右边的函数与左边的函数有什么关系. 其中, 可以尝试用构造函数的方式证明, 也可以尝试用基本不等式 $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ 作替换证明.

练习 4. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(1) 证明 $\{a_n\}$ 单调递增;

(2) 数学分析中有一个重要的定理, 该定理指出, 如果一个数列单调递增, 且有上界, 那么这个数列的极限一定存在. 试说明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

"基本"
我师兄管这个叫
黄金不等式

4.4　课后练习

A 组

练习 1. 证明关于 a 和 b 的二元不等式: $\mathrm{e}^a + b\ln b \geqslant ab + b$.

练习 2. 已知函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+1) - ax$.

(1) 若 $a = 2$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $a \leqslant -2$, $-1 < x < 0$, 求证：$f(x) > 2x(1-\mathrm{e}^{-x})$.

练习 3. 已知函数 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, 若 $x_1 > x_2 > 0$, 证明: $[x_1f(x_1) - x_2f(x_2)](x_1^2 + x_2^2) > 2x_2(x_1 - x_2)$.

练习 4. 已知函数 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - (b+1)x + \ln x - 2$, 设 $x_1 < x_2$ 是 $f(x)$ 的两个极值点, 若 $b \geqslant \dfrac{3}{2}$, 且 $f(x_1) - f(x_2) \geqslant k$ 恒成立, 求实数 k 的最大值.

练习 5. 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x$, 设 $a > b$, 证明: $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} \leqslant 2\mathrm{e}^{2a} - 2$.

B 组

练习 6. 给出例 4.9 的新解法: 设 a, b 是正数, 且 $a + b = 1$, 求 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{4}{b}$ 的最小值.

练习 7. 应用拉格朗日乘子法或者其他方法, 求解以下问题: 设 a, b, c 是正数, 且 $a+b+c = 1$, 求 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{4}{b} + \dfrac{9}{c}$ 的最小值.

5.4　课后练习

A 组

练习 1. 设函数 $f(x)=x-\ln x$, $f(x_1)=f(x_2)$, 且 $x_1\neq x_2$, 尝试应用本讲的尽可能多的方法, 证明: $x_1+x_2>2$.

练习 2. (2010 年天津卷理数) 已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 已知函数 $y=g(x)$ 的图像与函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称, 证明: 当 $x>1$ 时, $f(x)>g(x)$;

(3) 如果 $x_1\neq x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 证明: $x_1+x_2>2$.

练习 3. (2021 年新高考 I 卷) 已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a,b 为两个不相等的正数, 且 $b\ln a-a\ln b=a-b$, 证明: $2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\mathrm{e}$.

练习 4. 设函数 $f(x)=(x-a)\ln x-bx+1$, 曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x+1$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内的零点为 $x=x_0$, 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,0)$ 处的切线方程为 $y=g(x)$, 证明: $f(x)\geqslant g(x)$;

(3) 设方程 $f(x)=m$ 的两个根分别为 x_1,x_2, 且 $x_1<x_2$, 证明:

$$x_2-x_1\leqslant\frac{2\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1}m+\mathrm{e}-1.$$

练习 5. 设函数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\mathrm{e}^x}$, 其中 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设互异实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)=f(x_2)$, 证明: $-\dfrac{\pi}{2}<x_1+x_2<0$.

B 组

练习 6. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{(1+\lambda)(x-1)}{x+\lambda}$, $g(x)=x-\ln x$, 其中 $\lambda>0$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $\lambda>1$, 正实数 x_1,x_2 满足 $g(x_1)=g(x_2)$, 且 $1<\dfrac{x_2}{x_1}<\lambda^2$, 证明: $2<\lambda x_1+x_2<\lambda+1$.

练习 7. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x}$, $g(x)=\dfrac{\cos x}{\mathrm{e}^x}$, 其中 $0\leqslant x\leqslant\pi$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设互异实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)=f(x_2)=a$, 证明: $g(x_1)+g(x_2)>2a$.

练习 8. 设函数 $f(x)=x\ln x-ax+1$ 有两个不同的零点 x_1,x_2, 且 $x_1<x_2$.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: $x_1 + x_2 > 2$;

(3) 证明: $x_1 + x_2 > 2a$;

(4) 证明: $x_1 + x_2 > 2\mathrm{e}^{a-1}$;

(5) 证明: $x_1 x_2 > 1$;

(6) 证明: $x_1 + x_2 > 2x_1 x_2$.

6.4　课后练习

练习 1. 证明: 当 $x>0$ 时, $\mathrm{e}^x>4\ln x+8-8\ln 2$.

练习 2. 若函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x-\dfrac{a}{2}x^2+2x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 求 a 能取到的最大整数值.

练习 3. 已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x-a\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=2(\mathrm{e}-1)x+b$, 其中 a、b 均为实数.

(1) 求 $a-b$ 的值;

(2) 若 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, 证明: $f(x_0)<\dfrac{41}{15}$. (注: $\ln 2<\dfrac{7}{10}$)

练习 4. (2020 年新高考 I 卷) 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{x-1}-\ln x+\ln a$.

(1) 当 $a=\mathrm{e}$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 若不等式 $f(x)\geqslant 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

练习 5. (2019 年 Ⅱ 卷理数) 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性, 并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点;

(2) 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点, 证明: 曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线.

练习 6. 当 $x>0$ 时, 若不等式 $2x\mathrm{e}^x\geqslant kx+\ln x+1+\ln 2$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

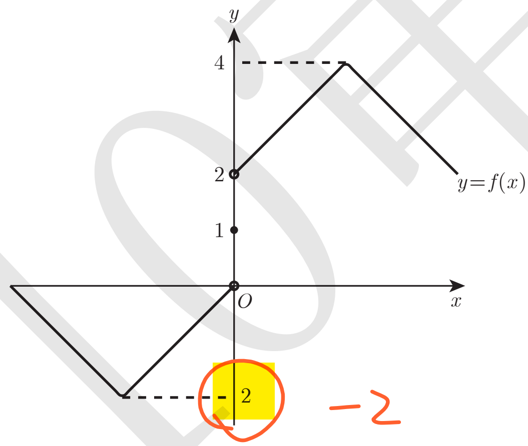
课后练习参考答案

第 1 讲

A 组

练习 1 解答 首先, 根据函数 $y=f(x+1)$ 的图像关于直线 $x=-3$ 对称, 知函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=-2$ 对称. 接下来, 根据 $f(x)+f(-x)=2$, 知函数 $y=f(x)$ 的图像关于 $(0,1)$ 对称. 根据以上结论, 可知 $f(x)$ 以 $T=8$ 为周期, 因此

$$f(2022)=f(253\times 8-2)=f(-2)=-2.$$



练习 2 解答 设 $x_0\neq 0$, 当 $\Delta x\to 0$ 时, 计算得

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}&=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}\right)\\&=-\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}\\&\to-\frac{1}{x_0^2},\end{aligned}$$

因此 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

练习 3 解答 (1) 计算得

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{a}{x}=\frac{ax-2}{x^2},$$

令 $f'(1)=a-2=-1$, 解得 $a=1$.

(2) 令 $ax-2=0$, 解得 $x=\dfrac{2}{a}$, 以下进行分类讨论.

(i) 若 $a\leqslant 0$, 则 $f'(x)<0$, $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}]$ 内单调递减, 从而

$$f(x)_{\min}=f(\mathrm{e})=a+\frac{2}{\mathrm{e}};$$

(ii) 若 $0<a<\dfrac{2}{\mathrm{e}}$, 则 $\dfrac{2}{a}>\mathrm{e}$, $f'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{a}\right)$ 内单调递减, 从而

$$f(x)_{\min}=f(\mathrm{e})=a+\frac{2}{\mathrm{e}};$$

(iii) 若 $a\geqslant\dfrac{2}{\mathrm{e}}$, 则 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{a}\right)$ 内单调递减, 在 $\left(\dfrac{2}{a},+\infty\right)$ 内单调递减, 因此

$$f(x)_{\min}=f\left(\frac{2}{a}\right)=a+a\ln\frac{2}{a}.$$

综上, 当 $a<\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ 时, $f(x)_{\min}=a+\dfrac{2}{\mathrm{e}}$; 当 $a\geqslant\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ 时, $f(x)_{\min}=a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

练习 4 解答 令 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x-\dfrac{1}{2}x^2$, 其中 $x\geqslant 0$, 则

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-1-x\geqslant 0,$$

因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增, 从而

$$f(x)\geqslant f(0)=0;$$

另外一种证明方法是, 当 $x\geqslant 0$ 时有 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1\geqslant 0$, 则

$$\mathrm{e}^x=\int_0^x\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\geqslant\int_0^x(1+t)\mathrm{d}t=1+x+\frac{1}{2}x^2,$$

这便指出了该不等式与不等式 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$ 之间的关系.

B 组

练习 5 解答 (1) 对 $f(-x)=-f(x)$ 两边求导得

$$-f'(-x)=-f'(x)\iff f'(-x)=f'(x),$$

因此 $f'(x)$ 是偶函数.

(2) 对 $f(-x)=f(x)$ 两边求导得

$$-f'(-x)=f'(x)\iff f'(-x)=-f'(x),$$

因此 $f'(x)$ 是奇函数.

练习 6 解答 求导得 $2yy' = 2p$, 因此 $y' = \dfrac{p}{y}$, 于是 (x_0, y_0) 处的切线斜率为 $\dfrac{p}{y_0}$, 从而可以写出切线方程为

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \iff y_0 y = p(x + x_0).$$

练习 7 解答 本题的解法同本讲例 1.4 的解法.

练习 8 解答 两边取对数得

$$\ln f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

两边对 x 求导得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

因此

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x} - 2}(1 - \ln x).$$

令 $1 - \ln x > 0$, 解得 $0 < x < \mathrm{e}$, 因此 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \mathrm{e})$.

第 2 讲

A 组

练习 1 解答 令 $f(x) = \mathrm{e}^x - ax - 1$, $x \in \mathbb{R}$, 计算得 $f(0) = 0$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - a$.

(1) 若 $a < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 对于任意的 $x \in (-\infty, 0)$, 都有

$$f(x) < f(0) = 0,$$

矛盾;

(2) 若 $a > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 内单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 内单调递增. 若 $0 < a < 1$, 则 $f(x)$ 在 $(\ln a, 0)$ 内单调递增, 对于任意的 $x \in (\ln a, 0)$, 都有

换行会不会好点

$$f(x) < f(0) = 0,$$

矛盾; 若 $a > 1$, 则 $f(x)$ 在 $(0, \ln a)$ 内单调递减, 对于任意的 $x \in (0, \ln a)$, 都有

$$f(x) < f(0) = 0,$$

矛盾; 若 $a = 1$, 则 $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.

综上, $a = 1$.

另外一种做法是, 当 $a > 0$ 时, 令 $f(\ln a) = a - a\ln a - 1 > 0$, 只需要构造函数 $g(a) = a - a\ln a - 1$, 再进一步分析即可.

我个人可能更prefer分参

练习 2 解答 令 $f(x) = ax - a - \ln x$, $x > 0$, 计算得 $f(1) = 0$, $f'(x) = \dfrac{ax - 1}{x}$.

$e^x - ax - 1 \geqslant 0$

$ax \leqslant e^x - 1$

$$\begin{cases} x \leqslant 0, & a \geqslant \dfrac{e^x - 1}{x} \Rightarrow a \geqslant 1 \\ x \geqslant 0, & a \leqslant \dfrac{e^x - 1}{x} \Rightarrow a \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

(1) $a<0$
(2) $a>0$
(2-i) $0<a<1$
(2-ii) $a>1$

(1) 若 $a<0$, 则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减, 对于任意的 $x\in(1,+\infty)$, 都有

分路

$$f(x)<f(1)=0,$$

结构不当

矛盾, 若 $a>0$, 则 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 内单调递减, 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 内单调递增.

(2) 若 $0<a<1$, 则 $f(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$ 单调递减, 对于任意的 $x\in\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$, 都有

$$f(x)<f(1)=0,$$

矛盾; 若 $a>1$, 则 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},1\right)$ 单调递增, 对于任意的 $x\in\left(\dfrac{1}{a},1\right)$, 都有

$$f(x)<f(1)=0,$$

矛盾; 若 $a=1$, 则 $x-1\geqslant\ln x$.

综上, $a=1$. 这里没问题 !!

练习 3 解答 令 $f(x)=ax-\sin x$, $x\geqslant 0$, 计算得 $f(0)=0$, $f'(x)=a-\cos x$, $f'(0)=a-1$.

(1) 若 $a<0$, 则 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减, 对于任意的 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 都有

$$f(x)<f(0)=0,$$

矛盾;

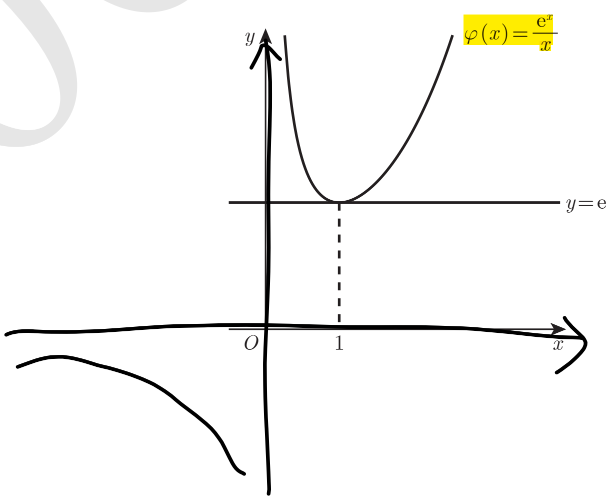
(2) 若 $0<a<1$, 则 $f'(0)=a-1<0$, 又 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a>0$, 故由零点定理知, 存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得 $f'(x_0)=0$, $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递减, 在 $\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增. 对于任意的 $x\in(0,x_0)$, 都有

$$f(x)<f(0)=0,$$

矛盾;

(3) 若 $a\geqslant 1$, 则 $ax\geqslant x\geqslant\sin x$.

综上, $a\geqslant 1$.



练习 4 解答 首先, 尝试分离变量, $f(x)=0$ 等价于 $a=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, 令 $\varphi(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, 计算得

$$\varphi'(x)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2},$$

补充上图图示(?)

则 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增, 又 $\varphi(1)=\mathrm{e}$. 当 $a>\mathrm{e}$ 时, $f(x)$ 有两个零点; 当 $a=\mathrm{e}$ 或 $a<0$ 时, $f(x)$ 有一个零点; 当 $0\leqslant a<\mathrm{e}$ 时, $f(x)$ 没有零点.

其次, 尝试分类讨论, 计算得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$.

(1) 若 $a<0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增, 又 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-1<0$, $f(0)=1-a>0$, 从而存在 $x_0\in\left(\dfrac{1}{a},1\right)$, 使得 $f(x_0)=0$. 此时 $f(x)$ 有一个零点;

(2) 若 $a=0$, 则 $f(x)=\mathrm{e}^x$, 此时 $f(x)$ 没有零点;

(3) 若 $a>0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 内单调递减, 在 $(\ln a,+\infty)$ 内单调递增, 从而

$$f(x)\geqslant f(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a).$$

此时, 若 $0<a<\mathrm{e}$, 则 $f(x)\geqslant f(\ln a)>0$, 此时 $f(x)$ 没有零点; 若 $a=\mathrm{e}$, 则 $f(x)$ 的零点是 $x=1$; 若 $a>\mathrm{e}$, 则 $f(\ln a)<0$, 又 $f(a)=\mathrm{e}^a-a^2>0$, $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-1>0$, 从而存在 $x_1\in\left(\dfrac{1}{a},\ln a\right)$ 和 $x_2\in(\ln a,a)$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$, 此时 $f(x)$ 有两个零点.

综上, 当 $a>\mathrm{e}$ 时, $f(x)$ 有两个零点; 当 $a=\mathrm{e}$ 或 $a<0$ 时, $f(x)$ 有一个零点; 当 $0\leqslant a<\mathrm{e}$ 时, $f(x)$ 没有零点.

练习 5 解答 (1) 该小问的解法同本讲例题的解法. 计算得

$$f'(x)=2a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-1=(a\mathrm{e}^x-1)(2\mathrm{e}^x+1).$$

若 $a\leqslant 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递减; 若 $a>0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 内单调递减, 在 $(-\ln a,+\infty)$ 内单调递增.

(2) 根据 (1) 知 $a>0$, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 内单调递减, 在 $(-\ln a,+\infty)$ 内单调递增. 计算得

$$f(-\ln a)=1-\frac{1}{a}+\ln a.$$

令 $g(a)=1-\dfrac{1}{a}+\ln a$, 则 $g(a)$ 单调递增, 注意到 $g(1)=0$, 因此当 $g(a)\leqslant 0$ 时, $a\in(0,1)$. 又当 $x\to-\infty$ 时, $f(x)\to-\infty$, 而当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)\to+\infty$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 和 $(-\ln a,+\infty)$ 内各有一零点. 于是, a 的取值范围是 $(0,1)$.

练习 6 解答 (1) 当 $a=-1$ 时, $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(x+1)$, 计算得

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)\frac{1}{x+1},$$

根据 $f(1)=0$, $f'(1)=-\ln 2$, 可以得到切线方程为 $y=-\ln 2(x-1)$.

(2) 令 $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=(x+a)\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$, 由 $\dfrac{1}{x}+1>0$, 解得 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$. 考虑到函数的定义域关于直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 对称, 取 $b=-\dfrac{1}{2}$. 接下来, 令 $g(1)=g(-2)$, 即

$$(a+1)\ln 2=(a-2)\ln\frac{1}{2}=(2-a)\ln 2 \implies a=\frac{1}{2}.$$

经检验 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$ 满足题意.

(3) 计算得 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)\dfrac{1}{1+x}$, 其中 $x>0$, 由 $f'(x)=0$, 可得

$$ax^2+x-(x+1)\ln(x+1)=0.$$

令 $h(x)=ax^2+x-(x+1)\ln(x+1)$, 其中 $x>0$, 则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在变号零点. 计算得

$$h'(x)=2ax-\ln(x+1),\quad h''(x)=2a-\frac{1}{x+1}.$$

(i) 当 $a\leqslant 0$ 时, $h''(x)<0$, $h'(x)$ 单调递减, 进一步有 $h'(x)<h'(0)=0$, 因此 $h(x)$ 单调递减, 从而 $h(x)<h(0)=0$, 此与 $h(x)$ 存在零点矛盾;

(ii) 当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时, $h''(x)>h''(0)=2a-1>0$, 因此 $h'(x)$ 单调递增, 进一步有 $h'(x)>h'(0)=0$, 因此 $h(x)$ 单调递增, 从而 $h(x)>h(0)=0$, 此与 $h(x)$ 存在零点矛盾;

(iii) 当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时, 令 $h''(x)=0$, 可得 $x=\dfrac{1}{2a}-1>0$. 因此 $h'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2a}-1\right)$ 内单调递减, 在 $\left(\dfrac{1}{2a}-1,+\infty\right)$ 内单调递增, 故

$$h'\left(\frac{1}{2a}-1\right)<h'(0)=0.$$

又当 $x\to+\infty$ 时, $h'(x)\to+\infty$, 因此存在 $x_0\in(0,+\infty)$, 使得 $h'(x_0)=0$. $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递减, 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递增, 故

$$h(x_0)<h(0)=0,$$

又当 $x\to+\infty$ 时, $h(x)\to+\infty$, 因此存在 $x_1\in(0,+\infty)$, 使得 $h(x_1)=0$, 且 x_1 是 $h(x)$ 的变号零点.

综上, 实数 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

B 组

练习 7 解答 记 $f_n(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - \cdots - \dfrac{x^n}{n!}$, $x \geqslant 0$, 当 $x = 0$ 时, 有 $f_1(x) = \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$; 假设当 $n = k$ 时, $f_k(x) \geqslant 0$, 则对于函数 $f_{k+1}(x)$, 计算得

$$\begin{aligned} f_{k+1}'(x) &= \left(\mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)' \\ &= \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^k}{k!} \\ &= f_k(x) \geqslant 0, \end{aligned}$$

从而 $f_{k+1}(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 因此

$$f_{k+1}(x) \geqslant f_{k+1}(0) = 0.$$

综上, 根据数学归纳法原理知, 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $f_{n+1}(x) \geqslant 0$.

练习 8 解答 (1) 计算得

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\dfrac{1}{x+1}} = 1.$$

(2) 计算得

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

第 3 讲

A 组

练习 1 解答 根据不等式 $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$ 整理即可得该不等式.

练习 2 解答 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 令 $g(x) = \ln x - \dfrac{a(x-1)}{x+1}$, 则 $g(x)$ 和 $f(x)$ 同正负, 且 $g(1) = f(1) = 0$. 计算得 $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2a}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + (2-2a)x + 1}{x(x+1)^2}$, 接下来, 只需要考虑 $g'(x)$ 的分母, 即考虑二次函数 $h(x) = x^2 + (2-2a)x + 1$. 计算得 $h(1) = 2(2-a)$, 对称轴 $x = a - 1$. 分子

(1) 若 $a \leqslant 2$, 则 $h(x) > h(1) \geqslant 0$, 从而 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增, 故

$$g(x) > g(1) = 0 \implies f(x) > 0;$$

(2) 若 $a > 2$, 则根据二次函数的性质知, 存在 $x_0 > 1$, 使得 $h(x_0) = 0$, 此时 $g(x)$ 在 $(1, x_0)$ 内单调递减, 对于任意的 $x \in (1, x_0)$, 都有

$$g(x) < g(1) = 0 \implies f(x) < 0.$$

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

B 组

练习 3 解答 在不等式 $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ 中, 用 $x-x_0$ 代替 x 即可.

练习 4 解答 (1) 根据均值不等式, 有

$$a_n=\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{项}}\cdot 1<\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1},$$

从而数列 $\{a_n\}$ 单调递增.

(2) 根据不等式 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$, 知数列 $\{a_n\}$ 有上界, 因此数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

第 4 讲

A 组

练习 1 解答 令 $f(a)=\mathrm{e}^a+b\ln b-ab-b$, 求导得 $f'(a)=\mathrm{e}^a-b$, 其中 $b>0$, 从而 $f(a)$ 在 $(-\infty,\ln b)$ 内单调递减, 在 $(\ln b,+\infty)$ 内单调递增, 故

$$f(a)\geqslant f(\ln b)=b+b\ln b-b\ln b-b=0,$$

因此原不等式成立. 或者在不等式 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$ 中, 取 $x=a-\ln b$.

练习 2 解答 (1) 此时 $f(x)=(x+2)\ln(x+1)-2x$, 计算得

$$f'(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\geqslant 1-\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x+1}=0,$$

因此 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 内单调递增. 在上面应用了不等式 $\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$.

(2) 令 $g(a)=(x+a)\ln(x+1)-ax$, $g'(a)=\ln(x+1)-x\leqslant 0$, 因此 $g(a)$ 单调递减, 进而

$$g(a)\geqslant g(-2)=(x-2)\ln(x+1)+2x.$$

只需证明 $(x-2)\ln(x+1)+2x\mathrm{e}^{-x}>0$, 其中 $-1<x<0$. 首先由 (1) 知当 $-1<x\leqslant 0$ 时, 有 $\ln(x+1)\leqslant\dfrac{2x}{x+2}$. 再用 e^x-1 代替 x, 可得 $\mathrm{e}^x\geqslant\dfrac{2+x}{2-x}$, 因此

$$(2-x)\mathrm{e}^x\geqslant x+2\geqslant\frac{2x}{\ln(x+1)}\iff(x-2)\ln(x+1)+\frac{2x}{\mathrm{e}^x}\geqslant 0,$$

当且仅当 $x=0$ 时取等.

练习 3 解答 代入 $f(x)$, 只需证明

$$\ln x_1-\ln x_2=\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2x_2(x_1-x_2)}{x_1^2+x_2^2}=\frac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2+1},$$

作换元 $t=\dfrac{x_1}{x_2}>1$, 只需证明 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t^2+1}$, 该不等式的证明请参照例题.

练习 4 解答 计算得

$$f'(x)=x-(b+1)+\frac{1}{x}=\frac{x^2-(b+1)x+1}{x},$$

从而 x_1,x_2 满足方程 $x^2-(b+1)x+1=0$. 由韦达定理知

$$\begin{cases} x_1+x_2=b+1,\\ x_1x_2=1,\end{cases}$$

从而 $x_2=\dfrac{1}{x_1}$, 并且由 $x_1+\dfrac{1}{x_1}=b+1\geqslant\dfrac{5}{2}$, 解得 $x_1\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$. 计算得

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)-f\left(\frac{1}{x_1}\right)=2\ln x_1-\frac{1}{2}\left(x_1^2-\frac{1}{x_1^2}\right)=\ln x_1^2-\frac{1}{2}\left(x_1^2-\frac{1}{x_1^2}\right).$$

记 $t=x_1^2\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$, 构造函数 $g(t)=\ln t-\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$, 计算得

$$g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2}=-\frac{(t-1)^2}{2t^2}<0,$$

从而 $g(t)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$ 内单调递减, 计算得

$$g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}-2\ln 2,$$

因此实数 k 的最大值是 $\dfrac{15}{8}-2\ln 2$.

练习 5 解答 要证明 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\leqslant 2\mathrm{e}^{2a}-2$, 只需证明

$$\frac{\mathrm{e}^{2a}-\mathrm{e}^{2b}}{a-b}\leqslant 2\mathrm{e}^{2a}\iff \mathrm{e}^{2b-2a}\geqslant 1+(2b-2a).$$

应用不等式 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$ 即可. 另外, 如果应用拉格朗日中值定理, 可知存在 $\xi\in(b,a)$, 使得

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(\xi)=2\mathrm{e}^{2\xi}-2<2\mathrm{e}^{2a}-2.$$

B 组

练习 6 解答 在这里给出 4 种解法.

(1) 考虑进行齐次化, 计算得到

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)=5+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=9,$$

当且仅当 $\dfrac{4a}{b}=\dfrac{b}{a}\iff b=2a$ 时取等, 代入 $a+b=1$ 得 $a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{2}{3}$.

(2) 考虑消元, 注意到 $a=1-b$, 代入得

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\frac{1}{1-b}+\frac{4}{b}=\frac{4-3b}{b(1-b)}.$$

令 $t=4-3b\in(1,4)$, 则

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\frac{9t}{(4-t)(t-1)}=\frac{9}{5-t-\dfrac{4}{t}}\geqslant\frac{9}{5-4}=9,$$

其中 $t+\dfrac{4}{t}\geqslant 2\sqrt{t\cdot\dfrac{4}{t}}=4$, 当且仅当 $t=\dfrac{4}{t}$ 时取等, 解得 $t=2$, 此时 $b=\dfrac{2}{3}$, $a=\dfrac{1}{3}$.

(3) 在 (2) 的基础上, 也可以构造函数. 设 $0<x<1$, 令

$$f(x)=\frac{4-3x}{x(1-x)},\quad f'(x)=\frac{-3x^2+8x-4}{(x^2-x)^2}=\frac{(3x-2)(2-x)}{(x^2-x)^2},$$

因此 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 内单调递减, 在 $\left(\dfrac{2}{3},1\right)$ 内单调递增, 进而有

$$f(x)_{\min}=f\left(\frac{2}{3}\right)=9,$$

取等时 $b=\dfrac{2}{3}$, 此时 $a=1-b=\dfrac{1}{3}$.

(4) 应用柯西不等式①, 有

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)\geqslant(1+2)^2=9,$$

当且仅当 $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{4}{b^2}\iff b=2a$ 时取等, 代入 $a+b=1$ 得 $a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{2}{3}$.

练习 7 解答 考虑函数 $f(a,b,c)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c}$, $\varphi(a,b,c)=a+b+c-1$, 则有拉格朗日函数

$$L(a,b,c,\lambda)=\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}+\lambda(a+b+c-1).$$

① 二元形式的柯西不等式为 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$, 其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 当且仅当 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ 时取等.

分别令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(a,b,c,\lambda)}{\partial a} = -\dfrac{1}{a^2} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L(a,b,c,\lambda)}{\partial b} = -\dfrac{4}{b^2} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L(a,b,c,\lambda)}{\partial c} = -\dfrac{9}{c^2} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L(a,b,c,\lambda)}{\partial \lambda} = a+b+c-1 = 0, \end{cases}$$

得到 $\lambda = \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{b^2} = \dfrac{9}{c^2}$, 代入 $a+b+c=1$ 解得 $(a,b,c) = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$, 经过验证得

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c}\right)_{\min} = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = 36.$$

第 5 讲

A 组

练习 1 解答 $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, 从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增.

(1) 考虑对称化构造. 不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 则 $2 - x_1 > 1$. 要证明 $x_1 + x_2 > 2$, 只需证明 $x_2 > 2 - x_1$. 因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增, 所以只需证明 $f(x_1) = f(x_2) > f(2-x_1)$. 构造函数 $\varphi(x) = f(x) - f(2-x)$, 其中 $0 < x < 1$, $\varphi(1) = f(1) - f(1) = 0$, 计算得

$$\varphi'(x) = f'(x) + f'(2-x) = 2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2-x} = -\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)} < 0,$$

从而 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减, $\varphi(x) > \varphi(1) = 0$, 再取 $x = x_1$ 即可.

(2) 考虑使用对数平均不等式. 根据 $x_1 - \ln x_1 = x_2 - \ln x_2$, 可得

$$1 = \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2} \implies x_1 + x_2 > 2.$$

(3) 考虑进行换元. 不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 设 $t = \dfrac{x_2}{x_1} > 1$, 则 $x_2 = tx_1$, 代入得

$$x_1 - \ln x_1 = x_2 - \ln x_2 = tx_1 - \ln x_1 - \ln t,$$

解得 $x_1 = \dfrac{\ln t}{t-1}$, $x_2 = tx_1 = \dfrac{t\ln t}{t-1}$. 应用不等式 $\ln t > \dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$, 可得

$$x_1 + x_2 = \frac{(t+1)\ln t}{t-1} > \frac{t+1}{t-1} \cdot \frac{2(t-1)}{t+1} = 2.$$

同样地, 也可以进行换元 $t = x_2 - x_1$.

练习 2 解答 (1) 计算得 $f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$, 因此 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,1)$, 单调递减区间是 $(1,+\infty)$, 极大值 $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(2) $g(x)=f(2-x)$, 只需证明 $f(x)>f(2-x)$. 构造函数 $\varphi(x)=f(x)-f(2-x)$, 其中 $x>1$, $\varphi(1)=f(1)-f(1)=0$, 计算得

$$\varphi'(x)=f'(x)+f'(2-x)=\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}+\frac{x-1}{\mathrm{e}^{2-x}}=\mathrm{e}^{-x}(x-1)(\mathrm{e}^{2(x-1)}-1)>0,$$

从而 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增, $\varphi(x)>\varphi(1)=0$.

(3) 不妨设 $x_1<1<x_2$, 则 $2-x_2<1$, 在上述不等式中取 $x=x_2$, 可得

$$f(x_2)=f(x_1)>f(2-x_2),$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调递增, 因此 $x_1>2-x_2$, 这便证明了 $x_1+x_2>2$.

练习 3 解答 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 计算得 $f'(x)=-\ln x$, 从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减.

$b\ln a-a\ln b=a-b$

$\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$

(2) 令 $x_1=\dfrac{1}{\mathrm{e}a},x_2=\dfrac{1}{\mathrm{e}b}$, 则 $x_1\ln x_1=x_2\ln x_2$, 只需证明 $\dfrac{2}{\mathrm{e}}<x_1+x_2<1$, 右边的证明类似于例 5.8, 左边的证明采用基本的方法即可. 在这里给出用对数平均不等式的方法. 注意到

$\frac{1}{a}+\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{b}+\frac{\ln b}{b}$

$$-1=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{\ln\ln x_1-\ln\ln x_2}<\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}\implies x_1x_2>\frac{1}{\mathrm{e}^2},$$

感觉有点突兀(?)

$\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{b}-\frac{1}{b}\ln\left(\frac{1}{b}\right)$

进一步应用均值不等式得 $x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$, 这便完成了证明. 感觉更好懂 一丢丢

$f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$

练习 4 解答 (1) 首先, 根据 $f(1)=1-b=0$, 解得 $b=1$. 接下来, 计算得 $f'(x)=\ln x-\dfrac{a}{x}$, 根据 $f'(1)=-a=-1$, 解得 $a=1$.

(2) 由 (1) 知 $f(x)=(x-1)\ln x-x+1=(x-1)(\ln x-1)$, 故 $x_0=\mathrm{e}$. 计算得 $f'(\mathrm{e})=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 因此

$$g(x)=\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)(x-\mathrm{e})=\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)x-\mathrm{e}+1.$$

要证明 $f(x)\geqslant g(x)$, 构造函数 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$, $\varphi(\mathrm{e})=0$, 计算得 $\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)$, $\varphi'(\mathrm{e})=0$, $\varphi''(x)=f''(x)=\dfrac{x+1}{x^2}>0$, 因此 $\varphi'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增, 进一步有 $\varphi(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 内单调递减, 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内单调递增, $\varphi(x)\geqslant\varphi(\mathrm{e})=0$, 这便证明了 $f(x)\geqslant g(x)$.

(3) 首先, 说明 $f(x)\geqslant 1-x$, 可以用 (2) 中类似的方法证明, 或者利用

$$f(x)+x-1=(x-1)\ln x\geqslant 0.$$

建议补图，不然此处突兀

接下来, 设方程 $f(x)=m$ 的两个根分别为 x_1,x_2, 其中 $x_1<x_2$, 根据 $1-x_1'=m$ 解得 $x_1'=1-m$, 并且

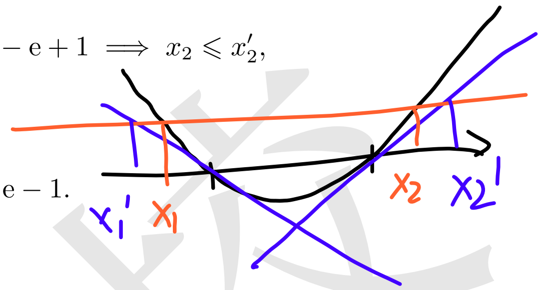
$$1-x_1'=m=f(x_1)\geqslant 1-x_1\implies x_1\geqslant x_1';$$

双切线 放缩

P.S. 我感觉这题不属于极值点偏移

另外, 根据 $\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)x_2'-\mathrm{e}+1=m$ 解得 $x_2'=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\cdot m+\mathrm{e}$, 并且

$$\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)x_2'-\mathrm{e}+1=m=f(x_2)\geqslant\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)x_2-\mathrm{e}+1\implies x_2\leqslant x_2',$$



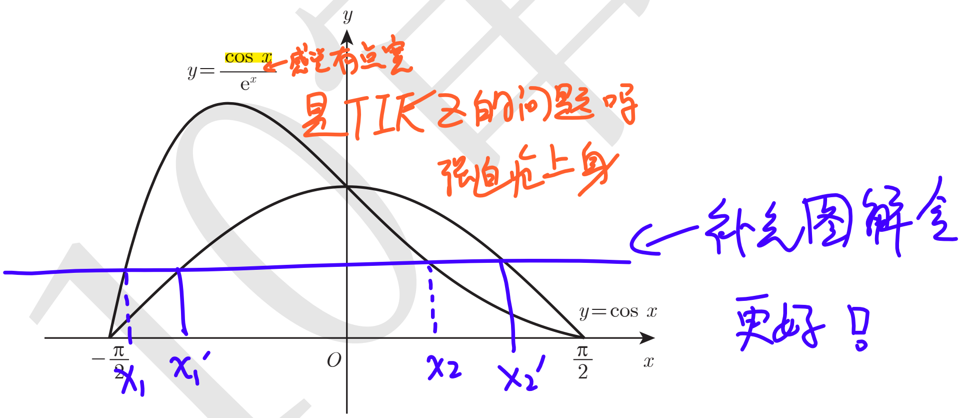
根据以上结果, 有

$$x_2-x_1\leqslant x_2'-x_1'=\frac{2\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1}m+\mathrm{e}-1.$$

练习 5 解答 (1) 计算得

$$f'(x)=\frac{-\sin x-\cos x}{\mathrm{e}^x}=-\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{e}^x},$$

因此 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 内单调递增, 在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减.



(2) 不妨设 $-\dfrac{\pi}{2}<x_1<-\dfrac{\pi}{4}<x_2<\dfrac{\pi}{2}$.

首先, 要证明 $x_1+x_2>-\dfrac{\pi}{2}$, 只需证明 $x_2>-\dfrac{\pi}{2}-x_1$, 其中 $x_2\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $-\dfrac{\pi}{2}-x_1\in\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$. 注意到函数 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减, 因此只需证明 $f(x_2)=f(x_1)<f\left(-\dfrac{\pi}{2}-x_1\right)$, 其中 $-\dfrac{\pi}{2}<x_1<-\dfrac{\pi}{4}$. 构造函数

$$g(x)=f(x)-f\left(-\frac{\pi}{2}-x\right),\quad -\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{4},$$

注意到 $g\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)-f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, 并且计算得

$$g'(x)=f'(x)+f'\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=(\sin x+\cos x)\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}-x}}-\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right),$$

其中 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<0$, $-\dfrac{\pi}{2}-x>x$, $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}-x}>\mathrm{e}^{x}$, 因此 $g'(x)>0$, 从而 $g(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 内单调递增, $g(x)<g\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, 再取 $x=x_1$, 这便证明了 $x_1+x_2>-\dfrac{\pi}{2}$.

感觉要说明原因

接下来, 证明 $x_1+x_2<0$. 若 $x_2<0$, 则该式一定成立, 假设 $x_2>0$, 当 $x<0$ 时, 有 $f(x)>\cos x$, 而当 $x>0$ 时, 有 $f(x)<\cos x$. 设 $f(x_1)=f(x_2)=a$, 并设直线 $y=a$ 与曲线 $y=\cos x$ 交于 x_1', x_2', 其中 $x_1'<0<x_2'$. 一方面, 根据

和 $f''(x)$ 有关吧

凹凸性

$$a=\cos x_1'=f(x_1)>\cos x_1,$$

以及 $\cos x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 内单调递增, 知 $x_1<x_1'$; 另一方面, 根据

$$a=\cos x_2'=f(x_2)<\cos x_2,$$

以及 $\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减, 知 $x_2<x_2'$, 注意到 $x_1'+x_2'=0$, 因此

$$x_1+x_2<x_1'+x_2'=0.$$

B 组

练习 6 解答 (1) 此时 $x>0$, 计算得

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{(\lambda+1)^2}{(x+\lambda)^2}=\frac{(x-1)(x-\lambda^2)}{x(x+\lambda)^2}.$$

(i) 若 $0<\lambda<1$, 则 $f(x)$ 在 $(0,\lambda^2)$ 内单调递增, 在 $(\lambda^2,1)$ 内单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增;

(ii) 若 $\lambda=1$, 则 $f'(x)\geqslant 0$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增;

(iii) 若 $\lambda>1$, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增, 在 $(1,\lambda^2)$ 内单调递减, 在 $(\lambda^2,+\infty)$ 内单调递增.

(2) 此时 $\lambda>1$, 记 $t=\dfrac{x_2}{x_1}\in(1,\lambda^2)$, 则 $x_2=tx_1$, 代入得

$$x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2=tx_1-\ln t-\ln x_1,$$

解得 $x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}$, $x_2=tx_1=\dfrac{t\ln t}{t-1}$. 首先, 根据

$$\lambda x_1+x_2>x_1+x_2>2\iff\frac{(t+1)\ln t}{t-1}>2,$$

这是已经证明的不等式; 接下来, 计算得

$$\lambda x_1+x_2=\frac{(k+\lambda)\ln k}{k-1}<\lambda+1\iff\ln x<\frac{(1+\lambda)(x-1)}{x+\lambda}.$$

notation 应用 t 而非 k.

在 (1) 中, 取 $\lambda > 1$, $1 < x < \lambda^2$, 则 $f(x)$ 在 $(1, \lambda^2)$ 内单调递减, 故 $f(x) < f(1) = 0$, 这便证明了该不等式.

练习 7 解答 (1) 计算得

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\mathrm{e}^x} = \frac{\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{e}^x},$$

因此 $f(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 内单调递增, 在 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \pi\right)$ 内单调递减.

(2) 不妨设 $0 < x_1 < \dfrac{\pi}{4} < x_2 < \pi$, 根据 $a = \dfrac{\sin x_1}{\mathrm{e}^{x_1}} = \dfrac{\sin x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}$, 只需证明

$$\frac{1}{\tan x_1} + \frac{1}{\tan x_2} > 2.$$

记 $t = x_2 - x_1 > 0$, 则 $x_2 = x_1 + t$, 代入得

$$a = \frac{\sin x_1}{\mathrm{e}^{x_1}} = \frac{\sin x_2}{\mathrm{e}^{x_2}} = \frac{\sin(x_1 + t)}{\mathrm{e}^{x_1 + t}} = \frac{\sin x_1 \cos t + \cos x_1 \sin t}{\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^t},$$

解得 $\tan x_1 = \dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^t - \cos t}$, 并且

$$\tan x_2 = \tan(x_1 + t) = \frac{\tan x_1 + \tan t}{1 - \tan x_1 \tan t} = \frac{\sin t}{\cos t - \mathrm{e}^{-t}},$$

因此

$$\frac{1}{\tan x_1} + \frac{1}{\tan x_2} = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\sin t} > \frac{2t}{t} = 2,$$

应为 $e^t - e^{-t}$

其中应用了不等式: 当 $t > 0$ 时, 有 $\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} > 2t$, 以及 $\sin t < t$.

练习 8 解答 (1) 计算得 $f'(x) = \ln x + 1 - a$, 从而 $f(x)$ 在 $(0, \mathrm{e}^{a-1})$ 内单调递减, 在 $(\mathrm{e}^{a-1}, +\infty)$ 内单调递增. 令

$$f(x)_{\min} = f(\mathrm{e}^{a-1}) = 1 - \mathrm{e}^{a-1} < 0,$$

解得 $a > 1$, 又当 $x \to 0$ 时, $f(x) \to 1 > 0$, 且 $f(\mathrm{e}^a) = 1 > 0$, 故存在 $x_1 \in (0, \mathrm{e}^{a-1})$, $x_2 \in (\mathrm{e}^{a-1}, \mathrm{e}^a)$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

(2) 由 $f(x) = 0$ 得 $a = \ln x + \dfrac{1}{x}$. 令 $\varphi(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$, 计算得 $\varphi'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$, 从而 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增. $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 等价于 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, 此时 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 则 $2 - x_1 > 1$. 要证明 $x_1 + x_2 > 2$, 只需证明 $x_2 > 2 - x_1$, 考虑到 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增, 只需证明 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) > \varphi(2 - x_1)$. 构造函数 $g(x) = \varphi(x) - \varphi(2 - x)$, 其中 $0 < x < 1$, $g(1) = \varphi(1) - \varphi(1) = 0$. 计算得

$$g'(x) = \varphi'(x) + \varphi'(2 - x) = \frac{x-1}{x^2} + \frac{1-x}{(2-x)^2} = -\frac{4(x-1)^2}{x^2(2-x)^2} < 0,$$

从而 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减, $g(x)>g(1)=0$, 再取 $x=x_1$ 即可.

(3) 注意到 $\ln x \geqslant \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ $(0<x\leqslant 1)$ 以及 $\ln x \leqslant \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ $(x\geqslant 1)$, 代入得

$$\begin{cases} 0=x_1\ln x_1-ax_1+1>\dfrac{1}{2}x_1^2-ax_1+\dfrac{1}{2}, \\ 0=x_2\ln x_2-ax_2+1<\dfrac{1}{2}x_2^2-ax_2+\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

上面两式相减得

$$0>\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2-a(x_1-x_2)=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{2}-a\right) \implies x_1+x_2>2a.$$

当然, 也可以在 (4) 的基础上, 利用 $\mathrm{e}^{a-1}>a$ 即可.

(4) 此时 $0<x_1<\mathrm{e}^{a-1}<x_2$, 则 $2\mathrm{e}^{a-1}-x_1>\mathrm{e}^{a-1}$. 要证明 $x_1+x_2>2\mathrm{e}^{a-1}$, 只需证明 $x_2>2\mathrm{e}^{a-1}-x_1$, 考虑到 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e}^{a-1},+\infty)$ 内单调递增, 只需证明 $f(x_1)=f(x_2)>f(2\mathrm{e}^{a-1}-x_1)$. 构造函数 $h(x)=f(x)-f(2\mathrm{e}^{a-1}-x)$, 其中 $0<x<\mathrm{e}^{a-1}$, $h(\mathrm{e}^{a-1})=f(\mathrm{e}^{a-1})-f(\mathrm{e}^{a-1})=0$, 计算得

$$h'(x)=f'(x)+f'(2\mathrm{e}^{a-1}-x)=\ln x(2\mathrm{e}^{a-1}-x)+2-2a\leqslant 2a-2+2-2a=0,$$

因此 $h(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}^{a-1})$ 内单调递减, $h(x)>h(\mathrm{e}^{a-1})=0$, 再取 $x=x_1$ 即可.

(5) 根据对数平均不等式得

感觉可以类似(3)补上

$$x_1x_2=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2} \implies x_1x_2>1.$$

迷糊

$$\begin{cases} x_1\ln x_1-ax_1+1=0 & ① \\ x_2\ln x_2-ax_2+1=0 & ② \end{cases}$$

也可以采用对称化构造的方法.

(6) 根据对数平均不等式得

$$\begin{cases} \ln x_1 = a-\dfrac{1}{x_1} \\ \ln x_2 = a-\dfrac{1}{x_2} \end{cases}$$

$$x_1x_2=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2} \implies x_1+x_2>2x_1x_2.$$

也可以对 $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2}$ 进行换元.

$$\ln x_1-\ln x_2=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_2x_1}$$

第 6 讲

练习 1 解答 构造函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-4\ln x-8+8\ln 2$, 其中 $x>0$, 计算得

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{4}{x}=\frac{x\mathrm{e}^x-4}{x},$$

构造函数 $g(x)=x\mathrm{e}^x-4$, 其中 $x>0$, 计算得 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x>0$, 因此 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增. 由于 $g(1)=\mathrm{e}-4<0$, $g(2)=2\mathrm{e}^2-4>0$, 因此存在 $x_0\in(1,2)$, 使得

$f'(x_0)=g(x_0)=0$, 即 $x_0\mathrm{e}^{x_0}=4$, 取对数得 $x_0+\ln x_0=2\ln 2$. $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递减, 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递增, 因此

$$f(x)\geqslant f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-4\ln x_0-8+8\ln 2=\frac{4}{x_0}+4x_0-8>8-8=0,$$

最后一个不等号应用了均值不等式.

练习 2 解答　此时 $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-ax+2\geqslant 0$, 取 $x=1$ 得 $a\leqslant 2$.

(1) 若 $a=2$, 代入得 $f'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^x-2)$, 从而对任意的 $x\in(\ln 2,1)$, 有 $f'(x)<0$, 此与题意矛盾;

(2) 若 $a=1$, 则 $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-x+2$, $f''(x)=x\mathrm{e}^x-1$, 记 x_0 满足 $x_0\mathrm{e}^{x_0}=1$, 则 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, $f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递减, 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递增,

$$f'(x)\geqslant f'(x_0)=3-x_0-\frac{1}{x_0}>0.$$

因此整数 a 的最大值是 1.

练习 3 解答　(1) 计算得

$$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\frac{a}{x},$$

令 $f'(1)=2\mathrm{e}-a=2(\mathrm{e}-1)$, 解得 $a=2$; 计算得 $b=f(1)-f'(1)=2-\mathrm{e}$, 因此 $a-b=\mathrm{e}$.

(2) 由 (1) 得 $f(x)=x\mathrm{e}^x-2\ln x$, 其中 $x>0$, 计算得

$$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\frac{2}{x},\quad f''(x)=(x+2)\mathrm{e}^x+\frac{2}{x^2}>0,$$

因此 $f'(x)$ 单调递增. 因为

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\mathrm{e}}-8}{2}<0,\quad f'(1)=2\mathrm{e}-2>0,$$

所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得 $f'(x_0)=0$, 且 $(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}=\frac{2}{x_0}$. $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递减, 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递增, $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点. 一方面, 计算得

$$f(x_0)=x_0\mathrm{e}^{x_0}-2\ln x_0=2\left(\frac{1}{x_0+1}-\ln x_0\right),$$

构造函数 $\varphi(x)=2\left(\frac{1}{1+x}-\ln x\right)$, 其中 $\frac{1}{2}<x<1$, 计算得

$$\varphi'(x)=-\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{x}<0,$$

因此 $\varphi(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内单调递减, 进而得到

$$f(x_0)=\varphi(x_0)<\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}+2\ln 2<\frac{4}{3}+\frac{7}{5}=\frac{41}{15}.$$

练习 4 解答 (1) 此时 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x+1$, $f(1)=\mathrm{e}+1$, $f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$, $f'(1)=\mathrm{e}-1$. 从而 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

$$y-(\mathrm{e}+1)=(\mathrm{e}-1)(x-1),$$

令 $x=0$ 得 $y=2$, 令 $y=0$ 得 $x=-\dfrac{2}{\mathrm{e}-1}$, 因此

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2}{\mathrm{e}-1}=\frac{2}{\mathrm{e}-1}.$$

(2) 此时 $a>0$, $f'(x)=a\mathrm{e}^{x-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax\mathrm{e}^{x-1}-1}{x}$, 令

$$g(x)=ax\mathrm{e}^{x-1}-1,\quad g'(x)=a(x+1)\mathrm{e}^{x-1}>0,$$

从而 $g(x)$ 单调递增, 又 $g(0)=-1<0$, $g\left(\dfrac{1}{a}+1\right)=(1+a)\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-1>0$, 因此存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{a}+1\right)$, 使得 $g(x_0)=0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递减, 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递增, 其中 x_0 满足 $a=\dfrac{1}{x_0\mathrm{e}^{x_0-1}}$, 因此

$$f(x)\geqslant f(x_0)=\frac{1}{x_0}-x_0-2\ln x_0+1\geqslant 1.$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}-x-2\ln x$, 注意到 $\varphi(1)=0$, 且 $\varphi'(x)=-\dfrac{(x+1)^2}{x^2}<0$, 从而 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减, 从而当且仅当 $0<x_0\leqslant 1$ 时 $\varphi(x_0)\geqslant 0$. 代入得

$$a=\frac{1}{x_0\mathrm{e}^{x_0-1}}\in[1,+\infty),$$

这便得到了 a 的取值范围. 另一种做法是采用换元的方法, 将在下一讲中介绍.

练习 5 解答 (1) 第 (1) 问的解法同本讲题目 1.

(2) 对于曲线 $y=\ln x$, 求导得 $y'=\dfrac{1}{x}$, 从而其在 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程

$$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)\iff y=\frac{1}{x_0}x+\ln x_0-1.$$

同样, 对于曲线 $y=\mathrm{e}^x$, 可以求得其在 (x_1,e^{x_1}) 处的切线方程

$$y=\mathrm{e}^{x_1}x+(1-x_1)\mathrm{e}^{x_1}.$$

分别令 $\dfrac{1}{x_0}=\mathrm{e}^{x_1}$, $\ln x_0-1=(1-x_1)\mathrm{e}^{x_1}$, 消去 x_1 得

$$f(x_0)=\ln x_0-\frac{x_0+1}{x_0-1}=0.$$

从而原结论得证.

练习 6 解答 首先, 说明方程 $2x\mathrm{e}^x=1$ 的解的存在性. 构造函数 $\varphi(x)=2x\mathrm{e}^x-1$, 其中 $x>0$, 计算得 $\varphi'(x)=2(x+1)\mathrm{e}^x>0$, 从而 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增, 又

$$\varphi(0)=-1<0,\quad \varphi(1)=2\mathrm{e}-1>0,$$

故存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $\varphi(x_0)=0$, 即 $2x_0\mathrm{e}^{x_0}=1$, 同时有 $x_0+\ln x_0+\ln 2=0$.

接下来, 处理原问题. 先进行必要性探路: 代入 $x=x_0$ 得

$$(k-1)x_0\leqslant 0\implies k\leqslant 1.$$

设 $k\leqslant 1$, 因为 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$, 所以

$$2x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x+\ln x+\ln 2}\geqslant x+\ln x+\ln 2+1\geqslant kx+\ln x+\ln 2+1.$$

综上, 实数 k 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

第 7 讲

练习 1 解答 原不等式等价于

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x}=\mathrm{e}^{x-\ln x}\geqslant x-\ln x+1,$$

只需应用不等式 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$ 即可.

练习 2 解答 (1) 同上一讲的课后练习 4.

(2) 因为 $a\mathrm{e}^{x-1}=\mathrm{e}^{x-1+\ln a}$, 所以原不等式等价于

$$\mathrm{e}^{x+\ln a-1}+x+\ln a-1\geqslant x+\ln x=\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x.$$

构造函数 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x+x$, 则其在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增, 原不等式即 $\varphi(x+\ln a-1)\geqslant\varphi(\ln x)$, 从而等价于

$$x+\ln a-1\geqslant\ln x.$$

考虑到不等式 $x-1\geqslant\ln x$, 可知 $\ln a\geqslant 0$, 解得 $a\geqslant 1$.