



IEL – protokol k projektu

Michal Novák
xnovak3g

21. prosince 2021

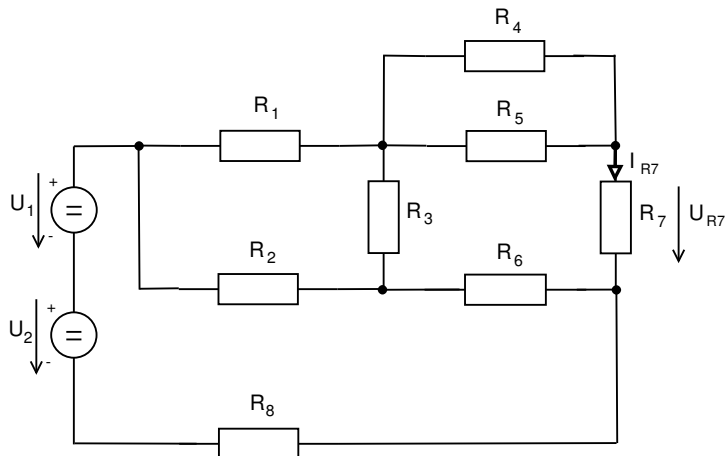
Obsah

1	Příklad 1	2
2	Příklad 2	5
3	Příklad 3	7
4	Příklad 4	11
5	Příklad 5	14
6	Shrnutí výsledků	17

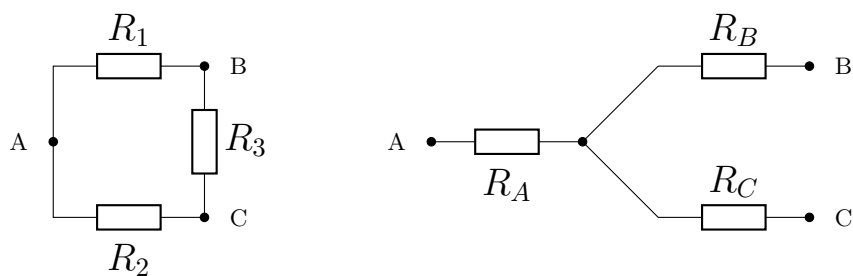
Příklad 1

Stanovte napětí U_{R7} a proud I_{R7} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
E	115	55	485	660	100	340	575	815	255	225



Transformace trojúhelník - hvězda:

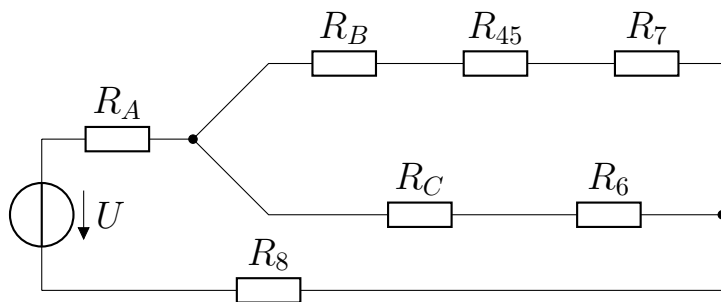


$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad R_A = \frac{485 \cdot 660}{485 + 660 + 100} \doteq 257,1084 \, \Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad R_B = \frac{485 \cdot 100}{485 + 660 + 100} \doteq 38,9558 \, \Omega$$

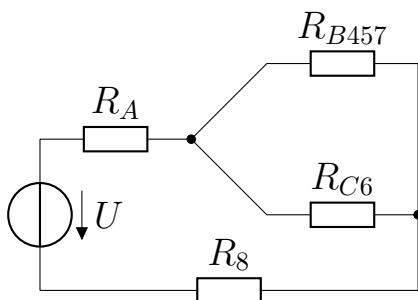
$$R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad R_C = \frac{660 \cdot 100}{485 + 660 + 100} \doteq 53,0120 \, \Omega$$

Postupné zjednodušování:



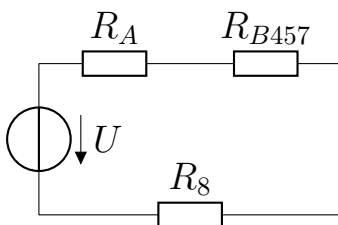
$$U = U_1 + U_2 \quad U = 115 + 55 = 170 \text{ V}$$

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \quad R_{45} = \frac{340 \cdot 575}{340 + 575} \doteq 213,6612 \text{ } \Omega$$

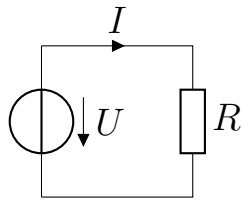


$$R_{B457} = R_B + R_{45} + R_7 \quad R_{B457} = 38,9558 + 213,6612 + 255 \doteq 507,6170 \text{ } \Omega$$

$$R_{C6} = R_C + R_6 \quad R_{C6} = 53,0120 + 815 \doteq 868,0120 \text{ } \Omega$$



$$R_{BC4567} = \frac{R_{B457} R_{C67}}{R_{B457} + R_{C6}} \quad R_{BC4567} = \frac{508,6170 \cdot 868,0120}{508,6170 + 868,0120} \doteq 320,3027 \text{ } \Omega$$



$$R = R_A + R_{BC4567} + R_8 \quad R = 257,1084 + 320,3027 + 225 \doteq 802,4111 \, \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} \quad I = \frac{170}{802,4111} \doteq 0,2119 \, A$$

Získávání hodnot pro odpor č. 7:

$$U = U_A + U_{RBC4567} + U_8 = I(R_A + R_{BC4567} + R_8)$$

$$U_{RBC4567} = IR_{BC4567} \quad U_{RBC4567} = 0,2119 \cdot 320,3027 \doteq 67,8721 \, V$$

$$U_{RBC4567} = U_{RB457} = U_{RC6}$$

$$I_{RB} = I_{R45} = I_{R7}$$

$$I_{R7} = \frac{U_{RBC4567}}{R_{B457}} \quad I_{R7} = \frac{67,8721}{507,6170} \doteq \underline{0,1337 \, A}$$

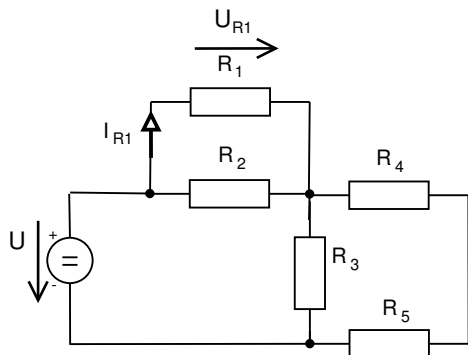
$$U_{R7} = I_{R7}R_7 \quad U_{R7} = 0,1337 \cdot 255 \doteq \underline{34,0935 \, V}$$

Ověření ve falstadu: OBVOD

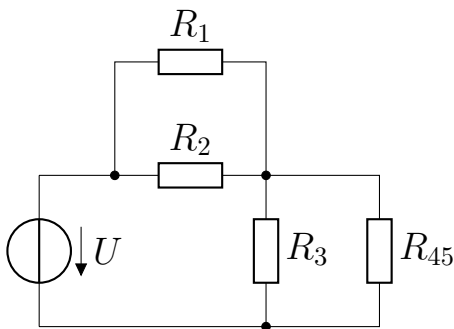
Příklad 2

Stanovte napětí U_{R1} a proud I_{R1} . Použijte metodu Théveninovy věty.

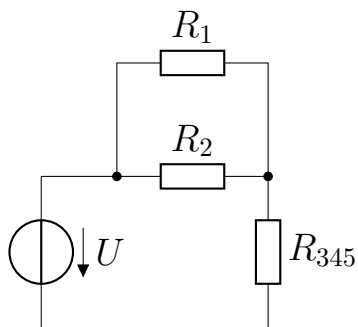
sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
C	200	70	220	630	240	450



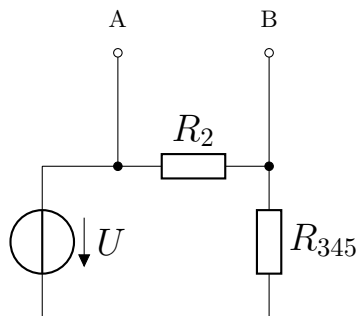
Zjednodušení obvodu:



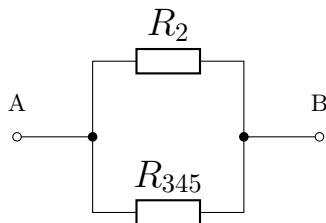
$$R_{45} = R_4 + R_5 \quad R_{45} = 240 + 450 = 690 \, \Omega$$



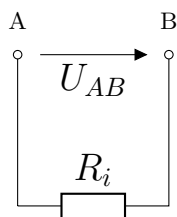
$$R_{345} = \frac{R_3 R_{45}}{R_3 + R_{45}} \quad R_{345} = \frac{630 \cdot 690}{630 + 690} \doteq 329,3182 \, \Omega$$



Pro zkratovaný zdroj:



$$I_0 = \frac{U}{R_2 + R_{345}} \quad I_0 = \frac{200}{220 + 329,3182} \doteq 0,3641 \text{ A}$$



$$R_i = \frac{R_2 R_{345}}{R_2 + R_{345}} \quad R_i = \frac{220 \cdot 329,3182}{220 + 329,3182} \doteq 131,8908 \Omega$$

$$U_{R2} = I_0 R_2 \quad U_{R345} = I_0 R_{345}$$

$$U_{AB} = U_{R2} = U - U_{R345} \quad U_{AB} = 0,3641 \cdot 220 \doteq 80,0993 \text{ V}$$

$$I_{R1} = \frac{U_{AB}}{R_i + R_1} \quad I_{R1} = \frac{80,0993}{131,8908 + 70} \doteq 0,3967 \text{ A}$$

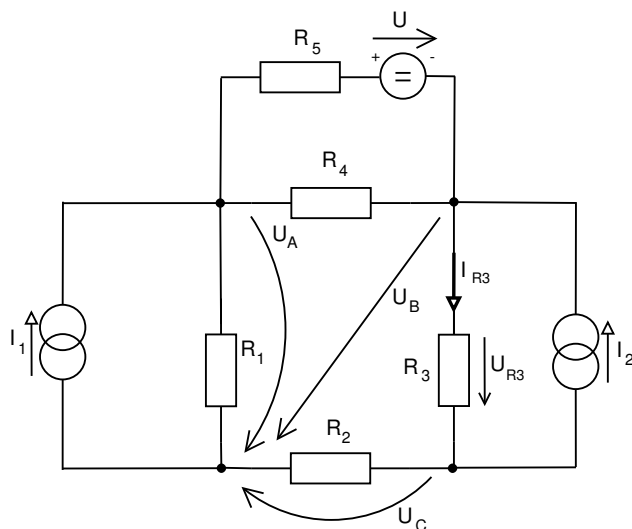
$$U_{R1} = R_1 I_{R1} \quad U_{R1} = 70 \cdot 0,3967 \doteq \underline{\underline{27,7722 \text{ V}}}$$

Ověření ve falstadu: OBVOD

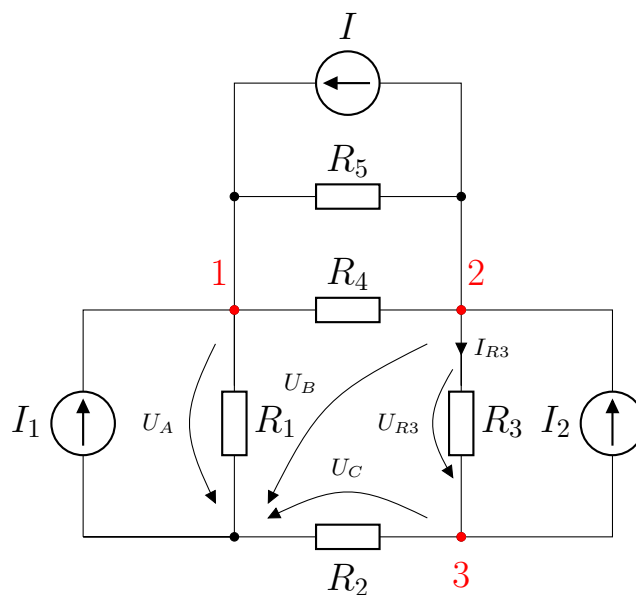
Příklad 3

Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
A	120	0.9	0.7	53	49	65	39	32

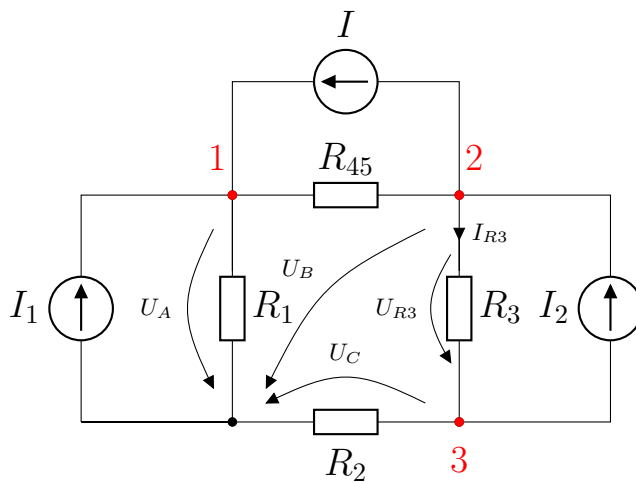


Převědeme si napěťový zdroj na proudový



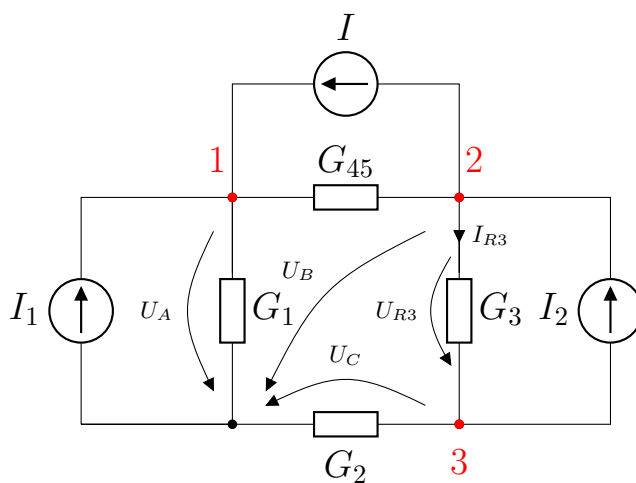
$$I = \frac{U}{R_5} \quad I = \frac{120}{32} = 3,75 \text{ A}$$

Zjednodušení pro rezistory:



$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \quad R_{45} = \frac{39 \cdot 32}{39 + 32} = \frac{1247}{71} \Omega$$

Převod rezistorů na vodivosti:



$$G_1 = \frac{1}{R_1} \quad G_1 = \frac{1}{53} S$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} \quad G_2 = \frac{1}{49} S$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} \quad G_3 = \frac{1}{65} S$$

$$G_{45} = \frac{1}{R_{45}} \quad G_{45} = \frac{71}{1248} S$$

Sestavení a úprava rovnic pro uzlová napětí:

$$\begin{aligned} 1) \quad & I + I_1 - G_1 U_A + G_{45}(U_B - U_A) = 0 \\ 2) \quad & -I - G_{45}(U_B - U_A) + I_2 - G_3(U_B - U_C) = 0 \\ 3) \quad & -I_2 + G_3(U_B - U_C) - G_2 U_C = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad & -U_A(G_1 + G_{45}) + U_B G_{45} + 0 = -I - I_1 \\ 2) \quad & U_A G_{45} - U_B(G_3 + G_{45}) + U_C G_3 = I - I_2 \\ 3) \quad & 0 + U_B G_3 - U_C(G_2 + G_3) = I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -G_1 - G_{45} & G_{45} & 0 \\ G_{45} & -G_3 - G_{45} & G_3 \\ 0 & G_3 & -G_2 - G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I - I_1 \\ I - I_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Dosazení a výpočet determinantů pomocí Cramerova a Sarrusova pravidla:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3891}{6784} & \frac{71}{1248} & 0 \\ \frac{71}{1248} & -\frac{4743}{8320} & \frac{1}{65} \\ 0 & \frac{1}{65} & -\frac{114}{3185} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{93}{20} \\ \frac{61}{20} \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = [(-\frac{3891}{6784}) \cdot (-\frac{4743}{8320}) \cdot (-\frac{114}{3185})] - [\frac{71}{1248} \cdot \frac{71}{1248} \cdot (-\frac{114}{3185})] - [(-\frac{3891}{6784}) \cdot \frac{1}{65} \cdot \frac{1}{65}]$$

$$\Delta_{UB} = [(-\frac{3891}{6784}) \cdot \frac{61}{20} \cdot (-\frac{114}{3185})] - [\frac{71}{1248} \cdot (-\frac{93}{20}) \cdot (-\frac{114}{3185})] - [(-\frac{3891}{6784}) \cdot 0,7 \cdot \frac{1}{65}]$$

$$\Delta_{UC} = [(-\frac{3891}{6784}) \cdot (-\frac{4743}{8320}) \cdot 0,7] + [\frac{71}{1248} \cdot \frac{1}{65} \cdot (-\frac{93}{20})] - [\frac{71}{1248} \cdot \frac{71}{1248} \cdot 0,7] - [(-\frac{3891}{6784}) \cdot \frac{1}{65} \cdot \frac{61}{20}]$$

Výpočet potřebných uzlových napětí:

$$U_B = \frac{\Delta_{UB}}{\Delta} \quad U_B \doteq 6,1476 \text{ V}$$

$$U_C = \frac{\Delta_{UC}}{\Delta} \quad U_C \doteq -16,9146 \text{ V}$$

Napětí a proud na rezistoru R_7 :

$$U_{R3} = U_B - U_C \quad U_{R3} = 6,1476 - (-16,9146) \quad U_{R3} \doteq \underline{23,0622 \text{ V}}$$

$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3} \quad I_{R3} = \frac{69,4873}{65} \quad I_{R3} \doteq \underline{0,3548 \text{ A}}$$

Ověření ve falstadu: OBVOD

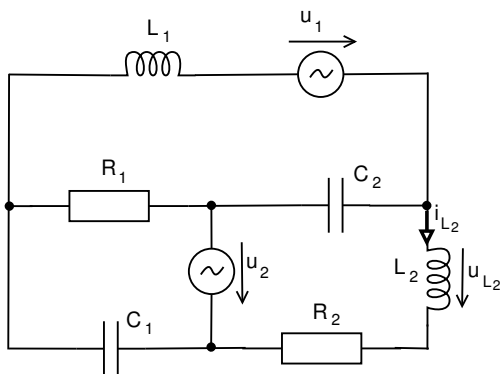
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

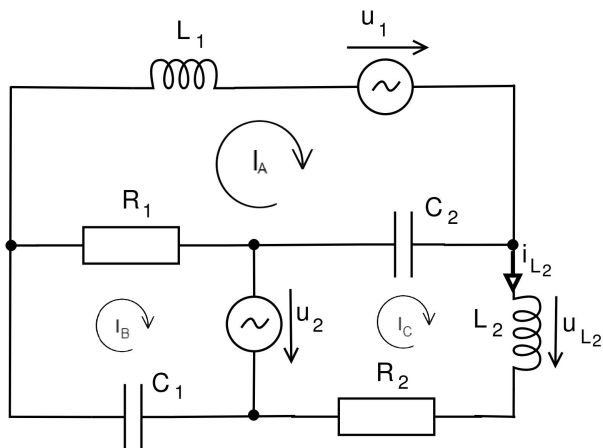
Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
E	5	3	14	13	130	60	100	65	90



Do obvodu si znázorníme smyčkové proudy:



Vyjádříme si úhlovou rychlost ω :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 90 = 180\pi \text{ rad/s}$$

Sestavíme rovnice pro jednotlivé smyčky:

$$I_A) \quad L_1\omega i I_A + U_1 + \frac{1}{C_1\omega i}(I_A - I_C) + R_1(I_A - I_B) = 0$$

$$I_B) \quad R_1(I_B - I_A) + U_2 + \frac{1}{C_1\omega i}I_B = 0$$

$$I_C) \quad \frac{1}{\omega C_2 i}(I_C - I_A) + L_2\omega i I_C + R_2 I_C - U_2 = 0$$

Upravíme a sestavíme matici:

$$\begin{pmatrix} R_1 - \frac{1}{\omega C_2}i + \omega L_1 i & -R_1 & \frac{1}{\omega C_2}i \\ -R_1 & R_1 - \frac{1}{\omega C_1}i & 0 \\ \frac{1}{\omega C_2}i & 0 & R_2 - \frac{1}{\omega C_2}i + \omega L_2 i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ -U_2 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 + 46,3073i & -14 & 27,2060i \\ -14 & 14 - 17,6839i & 0 \\ 27,2060i & 0 & 13 + 6,7232i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Uplatníme Cramerovo a Sarusovo pravidlo pro výpočet determinantů a získáme hodnotu I_C :

$$\Delta \doteq 18313,7316 - 2373,9271i$$

$$\Delta_C \doteq 4862,2145 + 4249,2523i$$

$$I_C = \frac{\Delta_C}{\Delta} \quad I_C \doteq \frac{4862,2145 + 4249,2523i}{18313,7316 - 2373,9271i} \doteq 0,2315 + 0,2620i \text{ A}$$

$$I_{L2} \equiv I_C$$

Vypočítáme napětí na cívce U_{L2} :

$$Z_{L2} = \omega L_2 i \quad Z_{L2} = 180\pi \cdot 60 \cdot 10^{-3} i = \frac{54\pi}{5} i \, \Omega$$

$$U_{L2} = I_{L2} Z_{L2} \quad U_{L2} = (0,2315 + 0,2620i) \cdot \frac{54}{5} i = -8,8907 + 7,8556i \, V$$

Dopočítáme $|U_{L2}|$ a φ_{L2} :

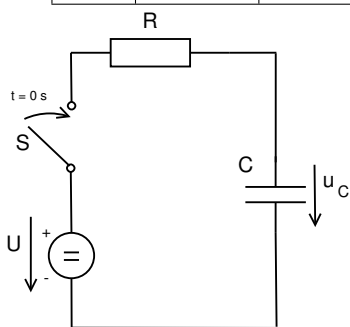
$$|U_{L2}| = \sqrt{Re(U_{L2})^2 + Im(U_{L2})^2} \quad |U_{L2}| = \sqrt{(-8,8907)^2 + 7,8556^2} \doteq \underline{\underline{11,8640V}}$$

$$\varphi_{L2} = \arctan \frac{Im(U_{L2})}{Re(U_{L2})} \quad \varphi_{L2} = \arctan \frac{7,8556}{-8,8907} \doteq \underline{\underline{-0,7237 \, rad}}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_C = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	R [Ω]	C [F]	$u_C(0)$ [V]
C	45	5	30	12



Sestavení rovnic pro sériový RC obvod:

$$U = u_R + u_C$$

$$u_R = Ri$$

$$u'_C = \frac{i}{C}$$

Úprava rovnic:

$$U = Ri + u_C$$

$$U = RCu'_C + u_C$$

Rovnice $U = RCu'_C + u_C$ je diferenciální rovnice popisující chování obvodu.

Pro řešení nehomogenní diferenciální rovnice prvního řádu použijeme úpravu:

$$RC\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

Dosadíme do očekávaného řešení a derivujeme:

$$u_C = C(t)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u'_C = C'(t)e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{1}{RC}C(t)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$C(t)$ je pro nás neznámá proměnná.

Spolu s očekávaným řešením dosadíme do počáteční rovnice a následně upravíme:

$$RC[C'(t)e^{-\frac{1}{RC}t} + (-\frac{1}{RC})C(t)e^{-\frac{1}{RC}t}] + C(t)e^{-\frac{1}{RC}t} = U$$

$$RC \cdot C'(t)e^{-\frac{1}{RC}t} - RC \cdot \frac{1}{RC}C(t)e^{-\frac{1}{RC}t} + C(t)e^{-\frac{1}{RC}t} = U$$

$$RC \cdot C'(t)e^{-\frac{1}{RC}t} = U$$

Neznámou $C(t)$ vypočítáme pomocí derivace:

$$RC \cdot C'(t)e^{-\frac{1}{RC}t} = U$$

$$C'(t) = \frac{U}{RCe^{-\frac{1}{RC}t}}$$

$$\int C'(t) = \int \frac{U}{RC}e^{\frac{1}{RC}t}$$

$$C(t) = Ue^{\frac{1}{RC}t} + k$$

Vyjádřené $C(t)$ dosadíme opět do očekávaného řešení:

$$u_C = (Ue^{\frac{1}{RC}t} + k)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_C = U + ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

K výpočtu parametru k dosadíme do rovnice počáteční podmínku $t = 0$ a zadané hodnoty pro prvky obvodu:

$$12 = 45 + ke^{-\frac{1}{5 \cdot 30} \cdot 0}$$

$$12 = 45 + k$$

$$k = -33$$

Analytické řešení pro zadaný obvod tedy bude:

$$\underline{u_C = 45 - 33e^{-\frac{1}{150}t}}$$

Ověření výsledku:

Pro $t = 0$:

$$u_C = 45 - 33e^{-\frac{1}{150} \cdot 0}$$

$$u_C = 45 - 33$$

$$u_C = 12 \text{ V}$$

Pro $t = \infty$:

$$u_C = 45 - 33e^{-\frac{1}{150} \cdot \infty}$$

$$u_C = 45 - \frac{33}{\infty}$$

u_C se bude nekonečně blížit hodnotě 45 V.

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	E	$U_{R7} = 34,0935 \text{ V}$ $I_{R7} = 0,1337 \text{ A}$
2	C	$U_{R1} = 27,7722 \text{ V}$ $I_{R1} = 0,3967 \text{ A}$
3	A	$U_{R3} = 23,0622 \text{ V}$ $I_{R3} = 0,3548 \text{ A}$
4	E	$ U_{L_2} = 11,8640 \text{ V}$ $\varphi_{L_2} = -0,7237 \text{ rad}$
5	C	$u_C = 45 - 33e^{-\frac{1}{150}t}$