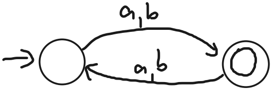
1. Uvažujme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$ a jazyk $L_1 = \{w \in \Sigma^* : |w| \bmod 2 = 1\}$. Sestrojte relaci pravé kongruence $\sim$, která splňuje následující tři podmínky: (1) L_1 je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^*_{/\sim}$, (2) index $\sim$ je konečný a soudělný s indexem $\sim_{L_1}$ a (3) jedna ze tříd rozkladu $\Sigma^*_{/\sim}$ má právě dva prvky.

a) Zjištění indexu $\sim_{L_1}$,

- index můžeme zjistit sestrojením úplného minimálního DKA M

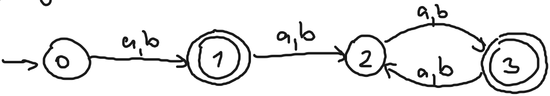
$L(M) = L_1$



$\boxed{|\Sigma^*_{/\sim_{L_1}}| = 2}$

$\Rightarrow$ hledáme $\sim$ se sudým indexem

b) Vytvoření nového neminimálního DKA



$C_0 = \{\varepsilon\}$ $\quad C_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 2 \wedge |w| \bmod 2 = 0\}$

$C_1 = \{a, b\}$ $\quad C_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 3 \wedge |w| \bmod 2 = 1\}$

$u \sim v \iff (u \in C_0 \wedge v \in C_0) \vee (u \in C_1 \wedge v \in C_1) \vee$
$(u \in C_2 \wedge u \in C_2) \vee (u \in C_3 \wedge v \in C_3)$

$\Sigma^*/\sim = \{C_0, C_1, C_2, C_3\}$

---

① $L_1 = C_1 \cup C_3$

② $|\Sigma^*/\sim| = 4$ $\quad |\Sigma^*/\sim_{L_1}| = 2$ $\quad 4 \bmod 2 = 0$

③ $|C_1| = 2$ $\left(|C_0| = 1\ ;\ |C_2| = |C_3| = \infty\right)$

2. Uvažte následující operaci na jazycích nad abecedou Σ:

$$\square L = \{w \in L \mid \forall u, v \in \Sigma^* : w = uv \Rightarrow u \in L\},$$

Rozhodněte a dokažte, zda jsou následující třídy jazyků uzavřeny na operaci $\square$:

(a) třída regulárních jazyků a

(b) třída rekurzivně vyčíslitelných jazyků.

Operace $\square$:

„slovo w náleží do jazyka, pokud i všechny možné prefixy slova w náleží do jazyka"

- z definice operace $\square$ jistě musí platit $\square L \subseteq L$

a) $L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \square L \in \mathcal{L}_3$

Třída $\mathcal{L}_3$ je uzavřena na operaci $\square$

- jelikož $L \in \mathcal{L}_3$, poté musí existovat i DKA M, který přijímá jazyk L
- operaci $\square$ jsme schopni „použít" na transformaci DKA M na DKA M', který přijímá $\square L$

$M = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$ $\quad$ $M' = (S', \Sigma, \delta', s_0, F')$

- Pokud $s_0 \notin F$, poté bude M' přijímat prázdný jazyk
- pro $s_0 \in F$:

$S' \subseteq F \wedge F' \subseteq F \wedge \delta' \subseteq \delta$

$s_j \in \delta'(s_i, x) \overset{def}{\iff} s_j \in \delta(s_i, x) \wedge s_i, s_j \in F \wedge x \in \Sigma$

b) $L \in \mathcal{L}_{RE} \Rightarrow \Box L \in \mathcal{L}_{RE}$

Třída $\mathcal{L}_{RE}$ je uzavřena na operaci $\Box$

- Pokud $L \in \mathcal{L}_{RE}$, potom existuje TS M taký, že $L(M) = L$
- Obecný popis konstrukce TS T, pro který $L(T) = \Box L$:

1. TS T má na svém vstupu řetězec $w \in \Sigma^*$, kde Σ je abeceda stroje M
2. TS T si na svou pomocnou pásku vypíše veškeré prefixy řetězce w, kterých je konečně mnoho
3. TS T střídavě po 1 kroku spouští simulace stroje M na všech těchto řetězcích
4. Pokud všechny simulace skončí akceptováním, TS T akceptuje řetězec w
5. Pokud některá simulace skončí odmítnutím, odmítne i TS T
6. Pokud některá simulace cyklí, cyklí i TS T

3. Uvažujte následující jazyk nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L_3 = \{a^k b^\ell \mid \ell = k^2\}$$

Dokažte, že jazyk L_3 není bezkontextový.

PL: $[\forall p > 0 : \exists z \in \Sigma^{*}: z \in L_3 \land |z| \geq p \land (\forall u, v, w, x, y \in \Sigma^{*}: uvwxy = z \land |vx| > 0 \land |vwx| \leq p \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} : uv^i wx^i y \notin L_3)] \Rightarrow L_3 \notin \mathcal{L}_2$

$$\boxed{w = a^p b^{p^2}}$$

a) vwx obsahuje 1 typ znaku

- pokud vwx obsahuje jen 1 typ znaku, potom se při i jiném než 1 nutně změní počet a slovo již nebude náležet do jazyka

b) vwx obsahuje znaky a a b

$$\boxed{v = a^\alpha \quad w = \varepsilon \quad x = b^\beta \quad u = a^{p-\alpha} \quad y = b^{p^2-\beta}}$$

$p > \alpha \geq 1 \qquad p > \beta \geq 1 \qquad \alpha + \beta \leq p$

- aby takové slovo patřilo do jazyka, muselo by pro $i = 0$ platit:

$$a^{p-\alpha} b^{p^2-\beta} \in L$$

$$(p-\alpha)^2 = p^2 - \beta \quad / \approx [\#_a(w)]^2 = \#_b(w)$$

$$p^2 - 2p\alpha + \alpha^2 = p^2 - \beta \quad | -p^2$$

$$-2p\alpha + \alpha^2 = -\beta \quad | \cdot (-1)$$

$$\boxed{\alpha(2p - \alpha) = \beta}$$

Rozbor rovnice: $\alpha(2p-\alpha) = \beta$

→ Víme: $1 \leq \alpha < p \ \wedge \ 1 \leq \beta < p \ \wedge \ \alpha + \beta \leq p$

- Z podmínek pro α a β můžeme usoudit, že rovnice $\alpha(2p-\alpha) = \beta$ nemůže platit pro $p > 2$

$$\boxed{\underbrace{(2p-\alpha > p)}_{\alpha < p \Rightarrow 2p-\alpha > p} \Rightarrow \underbrace{(\alpha(2p-\alpha) > p)}_{\alpha > 1 \Rightarrow \alpha(2p-\alpha) > p} \Rightarrow \underbrace{\alpha(2p-\alpha) \neq \beta}_{\beta < p}}$$

- $\alpha(2p-\alpha) \neq \beta$ je v rozporu s předpokladem $(p-\alpha)^2 = p^2 - \beta$, což je spor $\Rightarrow L_3 \notin \mathcal{L}_2$

Doplnění:

- pokud bychom zvolili $w \neq \varepsilon$, pouze by se snížil počet znaků, které bychom mohli vypumpovat a nerovnost by se ještě více umocnila

- stačí nám ukázat rozdělení, ve kterém části v a x obsahují pouze 1 typ znaku, protože pro $w = \varepsilon$ a $i=0$ nezáleží v jaké části se znaky nacházejí

(např: $v = a^\alpha b^\beta \quad w = \varepsilon \quad x = \varepsilon \quad u = a^{p-\alpha} \quad y = b^{p-\beta} b^p$)

$$L_3 \notin \mathcal{L}_2$$

4. Navrhněte algoritmus, který pro bezkontextovou gramatiku $G = (N, \Sigma, P, S)$ spočítá množinu

$$N_{abc} = \{A \in N \mid \exists u, v \in \Sigma^* \colon A \Rightarrow_G^* uabcv\}.$$

V algoritmu můžete využít množiny $N_\epsilon = \{A \in N \mid A \Rightarrow_G^+ \epsilon\}$ a $N_t = \{A \in N \mid \exists w \in \Sigma^* \colon A \Rightarrow_G^+ w\}$. Doporučujeme nadefinovat si další vhodné množiny neterminálů a algoritmicky popsat jejich výpočet (u N_ϵ a N_t popis výpočtu není potřeba).

Ilustrujte použití algoritmu na příkladě gramatiky nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ s pravidly

$S \to V \mid caUca \mid RTcU \qquad V \to Vabc \qquad U \to b \mid \epsilon \qquad R \to Uca \qquad T \to W \mid aU \qquad W \to UbU$

Uvažujme možná rozdělení slova „abc":

$\boxed{\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}}$ $\quad \boxed{\underline{ab}\ \underline{c}}$ $\quad \boxed{\underline{a}\ \underline{bc}}$ $\quad \boxed{\underline{abc}}$

Dále uvažujme, že neterminály je možné přepsat na neterminály nebo neterminály vytvářejí taková rozdělení

a) N_a ... neterminály, které generují řetězce končící znakem „a"

$N_a^0 \leftarrow \{A \in N_t \mid \exists (A \to way) \in P : w \in (N_t \cup \Sigma)^* \wedge y \in (N_\varepsilon^* \cup \{\varepsilon\})\}$

$i \leftarrow 1$

repeat:

$\quad N_a^i \leftarrow \{A \in N_t \mid \exists (A \to vwy) \in P : v \in (N_t \cup \Sigma)^* \wedge w \in N_a^{i-1} \wedge y \in (N_\varepsilon^+ \cup \{\varepsilon\})\} \cup N_a^{i-1}$

$\quad i \leftarrow i+1$

until $N_a^i = N_a^{i-1}$

b) N_b ... neterminály generující řetězec „b"

$N_b^0 \leftarrow \{A \in N_t \mid \exists (A \to wby) \in P : w, y \in (N_\varepsilon^* \cup \{\varepsilon\})\}$

$i \leftarrow 1$

repeat:

$\quad N_b^i \leftarrow \{A \in N_t \mid \exists (A \to vwy) \in P : v, y \in (N_\varepsilon^* \cup \{\varepsilon\}) \wedge w \in N_b^{i-1}\} \cup N_b^{i-1}$

$\quad i \leftarrow i+1$

until $N_b^i = N_b^{i-1}$

c) **Nc** ... neterminály generující řetězce začínající znakem „c"

$N_c^0 \leftarrow \{A \in N_T \mid \exists (A \to wcy) \in P : w \in (N_\varepsilon^* \cup \{\varepsilon\}) \land y \in (N_T \cup \Sigma)^*\}$

$i \leftarrow 1$

repeat:

$\quad N_a^i \leftarrow \{A \in N_T \mid \exists (A \to vwy) \in P : v \in (N_\varepsilon^* \cup \{\varepsilon\}) \land w \in N_c^{i-1} \land y \in (N_T \cup \Sigma)^*\} \cup N_c^{i-1}$

$\quad i \leftarrow i+1$

until $N_c^i = N_c^{i-1}$

d) **Nab** ... neterminály generující řetězce končící znaky „ab"

$N_{ab}^0 \leftarrow \{A \in N_T \mid \exists (A \to waxby) \in P : w \in (N_T \cup \Sigma)^* \land x, y \in (N_\varepsilon \cup \{\varepsilon\})^*\}$

$N_{ab}^0 \leftarrow \{A \in N_T \mid \exists (A \to wax) \in P ; w \in (N_T \cup \Sigma)^* \land x \in (N_\varepsilon \cup \{\varepsilon\})^* N_b (N_\varepsilon \cup \{\varepsilon\})^*\} \cup N_{ab}^0$

$i \leftarrow 1$

repeat:

$\quad N_{ab}^i \leftarrow \{A \in N_T \mid \exists (A \to vwy) \in P : v \in (N_T \cup \Sigma)^* \land w \in N_{ab}^{i-1} \land y \in (N_\varepsilon \cup \{\varepsilon\})^*\} \cup N_{ab}^{i-1}$

$\quad i \leftarrow i+1$

until $N_{ab}^i = N_{ab}^{i-1}$

e) **Nbc** ... neterminály generující řetězce začínající znaky „bc"

$N_{bc}^0 \leftarrow \{A \in N_T \mid \exists (A \to wbxcy) \in P : w \in (N_\varepsilon^* \cup \varepsilon) \land x, y \in (N_T \cup \Sigma)^*\}$

$N_{bc}^0 \leftarrow \{A \in N_T \mid \exists (A \to wcx) \in P : w \in w \in (N_\varepsilon^* \cup \varepsilon) N_b w \in (N_\varepsilon^* \cup \varepsilon) \land x \in (N_T \cup \Sigma)^*\} \cup N_{bc}^0$

$i \leftarrow 1$

repeat:

$\quad N_a^i \leftarrow \{A \in N_T \mid \exists (A \to vwy) \in P : v \in (N_\varepsilon^* \cup \{\varepsilon\}) \land w \in N_{bc}^{i-1} \land y \in (N_T \cup \Sigma)^*\} \cup N_{bc}^{i-1}$

$\quad i \leftarrow i+1$

until $N_{bc}^i = N_{bc}^{i-1}$

f, N_{abc}

// přímá generace řetězce „abc"

$N^0_{abc} \leftarrow \{A \in N_T \mid \exists (A \to vawbxcy) \in P : v, y \in (N_T \cup \Sigma)^* \wedge w, x \in (N^*_\varepsilon \cup \{\varepsilon\})\}$

// skládání neterminálů

$N^0_{abc} \leftarrow \{B \in N_T \mid \exists (B \to vabwx) \in P : v, x \in (N_T \cup \Sigma)^* \wedge w \in N_c\} \cup N^0_{abc}$

$N^0_{abc} \leftarrow \{C \in N_T \mid \exists (C \to vawcx) \in P : v, x \in (N_T \cup \Sigma)^* \wedge w \in (N^*_\varepsilon \cup \{\varepsilon\}) N_b (N^*_\varepsilon \cup \{\varepsilon\})\} \cup N^0_{abc}$

$N^0_{abc} \leftarrow \{D \in N_T \mid \exists (D \to vbcw) \in P : v \in (N_T \cup \Sigma)^* N_a (N^*_\varepsilon \cup \{\varepsilon\}) \wedge w \in (N_T \cup \Sigma)^*\} \cup N^0_{abc}$

$N^0_{abc} \leftarrow \{E \in N_T \mid \exists (E \to w) \in P : w \in (N_T \cup \Sigma)^* N_a (N^*_\varepsilon \cup \{\varepsilon\}) N_b (N^*_\varepsilon \cup \{\varepsilon\}) N_c (N_T \cup \Sigma)^*\} \cup N^0_{abc}$

$i \leftarrow 1$

repeat:

$\quad N^i_{abc} \leftarrow \{A \in N_T \mid \exists (A \to vwy) \in P : v, y \in (N_T \cup \Sigma)^* \wedge w \in N^{i-1}_{abc}\} \cup N^{i-1}_{abc}$

$\quad i \leftarrow i+$

until $\ _{abc} = N^{i-}_{abc}$

Příklad: $N_\varepsilon = \{U\}$ $\quad N_T = \{S, U, R, T, W\}$

$N^0_a = \{S, R, T\}$ $\quad N^1_a = \{S, R, T\}$

$N^0_b = \{U, W\}$ $\quad N^1_b = \{U, W, T\}$ $\quad N^2_b = \{U, W, T\}$

$N^0_c = \{S, R\}$ $\quad N^1_c = \{S, R\}$

$N^0_{ab} = \{T\}$ $\quad N^1_{ab} = \{T\}$

$N^0_{bc} = \{R\}$ $\quad N^1_{bc} = \{R, S\}$ $\quad N^2_{bc} = \{R, S\}$

$N^{\cdot}_{abc} = \{S\}$ $\quad N^1_{abc} = \{S\}$

5. Doplňte do rámečků v přechodovém diagramu Turingova stroje M_5 s páskovou abecedou $\Gamma = \{a, \#, \square, \Delta\}$ v Obrázku 1 chybějící popisky přechodů tak, aby platilo, že $L(M_5) = \{a^{\ell_1}\#a^{\ell_2}\#a^{\ell_3} \mid 1 \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq \ell_3 \wedge \ell_2 - \ell_1 = \ell_3 - \ell_2\}$. V jednom popisku může být i více operací. Nic jiného nepřidávejte.