Formulario de Probabilidad y Estadística

Expresso

March 11, 2025

Tablas de Distribución de Frecuencia para Datos Cualitativos

Frecuencia (f)

Fórmula:

$$f_i = \text{Número de veces que aparece la categoría } i$$

Ejemplo Práctico: En una encuesta, se registraron las preferencias de 50 personas por 3 sabores de helado: Vainilla, Chocolate y Fresa. Supongamos que Vainilla fue elegido 20 veces, Chocolate 15 veces y Fresa 15 veces.

$$f_{\text{Vainilla}} = 20, \quad f_{\text{Chocolate}} = 15, \quad f_{\text{Fresa}} = 15$$

Frecuencia Relativa (f_r)

Fórmula:

$$f_r = \frac{f_i}{N}$$

donde N es el tamaño total de la muestra.

Ejemplo Práctico: Con $N = 50$:

$$f_r(\text{Vainilla}) = \frac{20}{50} = 0.4$$

$$f_r(\text{Chocolate}) = \frac{15}{50} = 0.3$$

$$f_r(\text{Fresa}) = \frac{15}{50} = 0.3$$

Frecuencia Porcentual (f_p)

Fórmula:

$$f_p = f_r \times 100\%$$

Ejemplo Práctico:

$$\begin{aligned} f_p(\text{Vainilla}) &= 0.4 \times 100\% = 40\%, \\ f_p(\text{Chocolate}) &= 0.3 \times 100\% = 30\%, \\ f_p(\text{Fresa}) &= 0.3 \times 100\% = 30\% \end{aligned}$$

Frecuencia Acumulada (F)

Fórmula:

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$$

Ejemplo Práctico:

$$\begin{aligned} F(\text{Vainilla}) &= 20 \\ F(\text{Chocolate}) &= 20 + 15 = 35 \\ F(\text{Fresa}) &= 35 + 15 = 50 \end{aligned}$$

Frecuencia Acumulada Relativa (F_r)

Fórmula:

$$F_r = \frac{F_i}{N}$$

Ejemplo Práctico:

$$\begin{aligned} F_r(\text{Vainilla}) &= \frac{20}{50} = 0.4 \\ F_r(\text{Chocolate}) &= \frac{35}{50} = 0.7 \\ F_r(\text{Fresa}) &= \frac{50}{50} = 1.0 \end{aligned}$$

Frecuencia Acumulada Porcentual (F_p)

Fórmula:

$$F_p = F_r \times 100\%$$

Ejemplo Práctico:

$$\begin{aligned} F_p(\text{Vainilla}) &= 0.4 \times 100\% = 40\%, \\ F_p(\text{Chocolate}) &= 0.7 \times 100\% = 70\% \\ F_p(\text{Fresa}) &= 1.0 \times 100\% = 100\% \end{aligned}$$

Grados

Fórmula:

$$\text{Grados} = \frac{360^\circ}{N}$$

donde N es el tamaño total de la muestra. **Ejemplo Práctico:** Para $N = 50$:

$$\text{Grados} = \frac{360^\circ}{50} = 7.2^\circ \text{ por persona}$$

Tablas de Distribución de Frecuencia para Datos Cuantitativos

Intervalo de Clase

Fórmula:

$$\text{Intervalo de Clase} = [a, b)$$

donde a es el límite inferior y b el límite superior de la clase. **Ejemplo Práctico:** Si las edades de un grupo de personas van de 20 a 40 años, un intervalo de clase podría ser $[20, 30)$.

Frecuencia (f)

Fórmula:

$$f_i = \text{Número de observaciones en la clase } i$$

Ejemplo Práctico: En el intervalo $[20, 30)$ hay 15 personas.

Frecuencia Relativa (f_r)

Fórmula:

$$f_r = \frac{f_i}{N}$$

Ejemplo Práctico: Con $N = 50$:

$$f_r = \frac{15}{50} = 0.3$$

Frecuencia Porcentual (f_p)

Fórmula:

$$f_p = f_r \times 100\%$$

Ejemplo Práctico:

$$f_p = 0.3 \times 100\% = 30\%$$

Frecuencia Acumulada (F)

Fórmula:

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$$

Ejemplo Práctico: Si el siguiente intervalo $[30, 40)$ tiene 10 personas:

$$F(\text{Hasta } 30) = 15, \quad F(\text{Hasta } 40) = 15 + 10 = 25$$

Frecuencia Acumulada Relativa (F_r)

Fórmula:

$$F_r = \frac{F_i}{N}$$

Ejemplo Práctico:

$$F_r(\text{Hasta } 40) = \frac{25}{50} = 0.5$$

Frecuencia Acumulada Porcentual (F_p)

Fórmula:

$$F_p = F_r \times 100\%$$

Ejemplo Práctico:

$$F_p(\text{Hasta } 40) = 0.5 \times 100\% = 50\%$$

Marca de Clase ($\overline{x}$)

Fórmula:

$$\overline{x}_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Ejemplo Práctico: Para el intervalo $[20, 30)$:

$$\overline{x} = \frac{20 + 30}{2} = 25$$

Medidas de Tendencia Central

Media ($\bar{x}$)

Fórmula:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

donde x_i son los valores individuales y N es el número total de observaciones. **Ejemplo Práctico:** Valores: 5, 7, 3, 8, 6

$$\bar{x} = \frac{5 + 7 + 3 + 8 + 6}{5} = \frac{29}{5} = 5.8$$

Mediana

Definición: Valor que divide al conjunto de datos ordenados en dos partes iguales. **Ejemplo Práctico:** Valores ordenados: 3, 5, 7, 8, 9

$$\text{Mediana} = 7 \quad (\text{valor central})$$

Para un conjunto con número par de observaciones: Valores ordenados: 3, 5, 7, 8

$$\text{Mediana} = \frac{5 + 7}{2} = 6$$

Moda

Definición: Valor que aparece con mayor frecuencia en el conjunto de datos. **Ejemplo Práctico:** Valores: 2, 4, 4, 5, 6

$$\text{Moda} = 4 \quad (\text{aparece dos veces})$$

Medidas de Dispersión y Variación

Rango (R)

Fórmula:

$$R = X_{\text{máx}} - X_{\text{mín}}$$

donde $X_{\text{máx}}$ es el valor máximo y $X_{\text{mín}}$ es el valor mínimo. **Ejemplo Práctico:** Valores: 3, 5, 7, 8, 9

$$R = 9 - 3 = 6$$

Desviación Estándar

Poblacional (σ)

Fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Ejemplo Práctico:

$$\sigma = \sqrt{1.76} \approx 1.33$$

Muestral (s)

Fórmula:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Ejemplo Práctico:

$$s = \sqrt{2.2} \approx 1.48$$

Coeficiente de Variación (CV)

Fórmula:

$$CV = \left(\frac{\sigma}{\mu}\right) \times 100\%$$

donde μ es la media poblacional. **Ejemplo Práctico:** Con $\sigma = 1.33$ y $\mu = 4.2$:

$$CV = \left(\frac{1.33}{4.2}\right) \times 100\% \approx 31.67\%$$

Medidas de Localización

Percentiles (P_k)

Fórmula Aproximada:

$$P_k = \frac{k}{100} \times (N + 1)$$

donde k es el percentil deseado. **Ejemplo Práctico:** Para el 25º percentil (P_{25}) en un conjunto de 5 datos:

$$P_{25} = \frac{25}{100} \times (5 + 1) = 0.25 \times 6 = 1.5$$

Esto significa que P_{25} está entre el primer y segundo valor de los datos ordenados.

Cuartiles

- **Primer Cuartil (Q1)**: 25º percentil.
- **Segundo Cuartil (Q2)**: 50º percentil (Mediana).
- **Tercer Cuartil (Q3)**: 75º percentil.

Ejemplo Práctico: Con los datos ordenados: 3, 5, 7, 8, 9

$$Q1 = 5, \quad Q2 = 7, \quad Q3 = 8$$

Rango Intercuartílico (RIC)

Fórmula:

$$RIC = Q3 - Q1$$

Ejemplo Práctico:

$$RIC = 8 - 5 = 3$$

Varianza

Poblacional (σ^2)

Fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$$

donde μ es la media poblacional. **Ejemplo Práctico:** Valores: 2, 4, 4, 5, 6

$$\mu = \frac{2+4+4+5+6}{5} = 4.2$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-4.2)^2 + (4-4.2)^2 + (4-4.2)^2 + (5-4.2)^2 + (6-4.2)^2}{5} = \frac{4.84 + 0.04 + 0.04 + 0.64 + 3.24}{5} = \frac{8.8}{5} = 1.76$$

Muestral (s^2)

Fórmula:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

donde $\bar{x}$ es la media muestral. **Ejemplo Práctico:** Valores: 2, 4, 4, 5, 6

$$\bar{x} = 4.2$$

$$s^2 = \frac{(2-4.2)^2 + (4-4.2)^2 + (4-4.2)^2 + (5-4.2)^2 + (6-4.2)^2}{5-1} = \frac{4.84 + 0.04 + 0.04 + 0.64 + 3.24}{4} = \frac{8.8}{4} = 2.2$$

Complemento de un Evento

Fórmula

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Ejemplo Práctico: Si la probabilidad de que llueva mañana es $P(\text{lluvia}) = 0.3$, entonces la probabilidad de que no llueva es:

$$P(\text{no lluvia}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

Ley Aditiva

Fórmula

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo Práctico: En una clase, el 40% de los estudiantes son hombres ($P(H) = 0.4$) y el 30% son mayores de 18 años ($P(M) = 0.3$). Si el 10% son hombres mayores de 18 años ($P(H \cap M) = 0.1$), entonces la probabilidad de que un estudiante sea hombre o mayor de 18 años es:

$$P(H \cup M) = 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.6$$

Eventos Mutuamente Excluyentes

Definición y Fórmula

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, $P(A \cap B) = 0$. En este caso, la ley aditiva se simplifica a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ejemplo Práctico: Al lanzar un dado, los eventos "obtener un 2" y "obtener un 5" son mutuamente excluyentes.

$$P(2 \cup 5) = P(2) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad Condicional

Fórmula

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo Práctico: En una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que una carta sea un as dado que ya sabemos que es una figura (rey, reina o sota)?

$$P(\text{As}|\text{Figura}) = \frac{P(\text{As} \cap \text{Figura})}{P(\text{Figura})} = \frac{0}{\frac{12}{52}} = 0$$

(Nota: No hay cartas que sean simultáneamente un as y una figura, por lo que la probabilidad es 0).

Ley Multiplicativa

Fórmula

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Ejemplo Práctico: Supongamos que la probabilidad de que una persona sea fumadora es $P(F) = 0.2$ y la probabilidad de que una fumadora desarrolle cáncer de pulmón es $P(C|F) = 0.3$. Entonces, la probabilidad de que una persona sea fumadora y desarrolle cáncer de pulmón es:

$$P(F \cap C) = 0.2 \times 0.3 = 0.06$$

Eventos Independientes

Definición y Fórmula

Dos eventos A y B son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad del otro, es decir, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Ejemplo Práctico: Al lanzar dos monedas, la probabilidad de que ambas salgan cara:

$$P(\text{Cara}_1 \cap \text{Cara}_2) = P(\text{Cara}_1) \times P(\text{Cara}_2) =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Reglas de Conteo (Principio Multiplicativo)

Fórmula

Si hay m maneras de realizar una primera acción y n maneras de realizar una segunda acción, entonces hay $m \times n$ maneras de realizar ambas acciones.

Ejemplo Práctico: Una persona tiene 3 camisas y 4 pantalones. ¿Cuántos conjuntos diferentes de camisa y pantalón puede formar?

$$\text{Total de conjuntos} = 3 \times 4 = 12$$

Combinaciones

Fórmula

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

donde $n!$ es el factorial de n.

Ejemplo Práctico: ¿Cuántas formas hay de elegir 2 estudiantes de un grupo de 5 para formar un comité?

$$C(5, 2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{120}{2 \times 6} = 10$$

Permutaciones

Fórmula

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

donde $n!$ es el factorial de n.

Ejemplo Práctico: ¿Cuántas formas hay de ordenar 3 libros diferentes de una estantería que contiene 5 libros?

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

Teorema de Bayes

Fórmula

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Ejemplo Práctico: Supongamos que en una población, el 1% tiene una cierta enfermedad ($P(E) = 0.01$). Se realiza una prueba que es positiva el 99% de las veces que una persona está enferma ($P(T|E) = 0.99$) y da un falso positivo el 5% de las veces cuando una persona no está enferma ($P(T|\neg E) = 0.05$). ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté enferma dado que la prueba es positiva ($P(E|T)$)?

Primero, calculamos $P(T)$:

$$P(T) = P(T|E)P(E) + P(T|\neg E)P(\neg E) =$$

$$(0.99 \times 0.01) + (0.05 \times 0.99) = 0.0099 + 0.0495 = 0.0594$$

Luego, aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(E|T) = \frac{0.99 \times 0.01}{0.0594} \approx \frac{0.0099}{0.0594} \approx 0.1667\,(16.67\%)$$

Variables aleatorias

Ejemplo: Si lanzas un dado, la variable aleatoria X puede ser el número que aparece en la cara superior. Aquí $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y cada valor tiene la misma probabilidad $\frac{1}{6}$.

Distribución Bernoulli

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Ejemplo: Considera lanzar una moneda cargada con prob. $p = 0.3$ de salir cara (éxito). Si definimos éxito = cara, entonces: - $P(X = 1) = 0.3$ - $P(X = 0) = 0.7$

Distribución Binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Ejemplo: Supón que haces 5 tiros al aro de baloncesto, cada uno con prob. de encestar $p = 0.4$. La prob. de encestar exactamente $k = 2$ veces es:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} (0.4)^2 (0.6)^3$$

Distribución de Poisson

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Ejemplo: Si en promedio llegan $\lambda = 3$ clientes por minuto a una tienda, la probabilidad de que lleguen exactamente $k = 5$ clientes en el próximo minuto es:

$$P(X = 5) = \frac{3^5 e^{-3}}{5!}$$

Aproximación Poisson a Binomial

Ejemplo: Si se tiene $n = 1000$ artículos y cada uno tiene una prob. $p = 0.001$ de ser defectuoso, entonces $np = \lambda = 1$. La prob. de que exactamente 2 sean defectuosos se aproxima con Poisson:

$$P(X = 2) \approx \frac{1^2 e^{-1}}{2!}$$

Distribución Binomial Negativa

$$P(X = k) = \binom{k + r - 1}{k} p^r (1 - p)^k$$

Ejemplo: Si esperas obtener $r = 3$ éxitos en una serie de ensayos con $p = 0.5$, la prob. de tener exactamente $k = 4$ fracasos antes del 3er éxito es:

$$P(X = 4) = \binom{4 + 3 - 1}{4} (0.5)^3 (0.5)^4 = \binom{6}{4} (0.5)^7$$

Función de Densidad (continua)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Ejemplo: Si X es uniforme entre 0 y 10, su densidad es $f_X(x) = \frac{1}{10-0} = 0.1$. La prob. de que X esté entre 2 y 5 es:

$$\int_2^5 0.1 dx = 0.1 \times (5 - 2) = 0.3.$$

Distribución Exponencial

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

Ejemplo: Si el tiempo entre llegadas de autobuses tiene $\lambda = 0.5$ (tiempo medio 2 min), la prob. de que el próximo autobús llegue en menos de 3 min es:

$$P(X < 3) = \int_0^3 0.5 e^{-0.5x} dx = 1 - e^{-0.5 \times 3} = 1 - e^{-1.5}$$

Distribución Uniforme

$$f_X(x) = \frac{1}{b - a}, a \leq x \leq b$$

Ejemplo: Si X está uniformemente distribuida entre 0 y 20, la prob. de que X esté entre 5 y 10 es:

$$\int_5^{10} \frac{1}{20} dx = \frac{10 - 5}{20} = 0.25$$

Distribución Normal

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Ejemplo: Si $X \sim N(\mu = 100, \sigma = 15)$, la prob. de que $X < 110$ se calcula convirtiendo a puntaje Z:

$$Z = \frac{110 - 100}{15} = \frac{10}{15} \approx 0.6667$$

Usando tablas $P(Z < 0.6667) \approx 0.75$ (aprox.).