Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Численные методы линейной алгебры

Студент: Лю Кай

Группа：СМ1И-75б

Преподаватель: Чередниченко А.В.

Вариант 3

Москва
2024

Домашнее задание
по курсу "Численные методы линейной алгебры"
СМ1 (бакалавры)
Осень 2024

Дана система линейных уравнений (матрица A и вектор правой части **b**). Численно решить исходную и возмущенную систему следующими методами:

1. Методом Гаусса;
2. QR-разложением матрицы A;
3. Итерационным методом Гаусса-Зейделя.

Для получения возмущенной системы необходимо изменить элементы A(4,1) и A(1,4) в матрице A на 0,01 (в любую сторону). Сравнить полученные **решения. Показать, что все найденные решения верны. Объяснить полученные результаты.** Все вычисления проводить на числах с плавающей запятой типа double.

Для исходной и возмущенной матриц найти наибольшее и наименьшее собственные числа и соответствующие им собственные векторы. **Показать, что все найденные решения верны. Объяснить полученные результаты.**

Все, что успею рассказать — реализовать, что не успею рассказать — не делать.

Условия даны в формате MATLAB. Даны матрица системы и вектор правой части. Выполнять домашнее можно в любой системе (MATLAB, Wolfram Mathematica, Maple, SciLab, Maxima, Exel итд) (кроме Маткада) или писать свои программы на любом языке программирования.

При использовании систем компьютерной алгебры методы можно реализовывать и в алгоритмическом поэлементном виде, и в матричном виде. В любом случае не использовать «ручные» вычисления, а реализовать алгоритм. Нельзя использовать встроенные функции (например lu, qr, inv итд).

Титульный лист обязателен. В начале должно быть приведено это условие и конкретные матрицы, соответствующие варианту. В конце обязательно наличие выводов по проделанной работе. Страницы должны быть пронумерованы. Заголовки не должны быть и сами висячими строками, и после них не должно быть висячих строк.

! Сдача работ с кодом, текстом, выводами и другими одинаковыми элементами, представленными кем-то ранее, рассматривается как полное неуважение к Университету!

```
% Вариант 03
A=[ 2.0000    1.1100    0.6667    0.5000    0.4000 ;
    1.1100    0.6667    0.5000    0.4000    0.3333 ;
    0.6667    0.5000    0.4000    0.3333    0.2857 ;
    0.5000    0.4000    0.3333    0.2857    0.2500 ;
    0.4000    0.3333    0.2857    0.2500    0.2222 ]

b=[ 3.1167    2.0333    1.5429    1.2512    1.0552  ]
```

Решение

1. Методом Гаусса:

3-ие элеменнарные преобразования:

A → прямой преобразование → U → обратное преобразование → D → 3-ое преобразование→I

Для невозмущенной системы:

Реализация кода Matlab：

```
%% Метод Гаусса
AB=[A b] %% Матрица расширения
n = length(b) %% Размерность матрицы

for j =1:n-1 %% прямой преобразование U
for i =j+1:n
k = AB(i,j)/AB(j,j)
AB(i,:)=AB(i,:)-k*AB(j,:)
end
end
AB

for y =1:n-1 %% обратное преобразование D
z = n-y+1
for x=1:n-y
k = AB(x,z)/AB(z,z)
AB(x,:)=AB(x,:)-k*AB(z,:)
end
end
AB

for l=1:n %% 3-ое преобразование I
AB(l,:) = AB(l,:)/AB(l,l)
End
```

Результат:

$$U=\begin{bmatrix} 2.0000 & 1.1100 & 0.6667 & 0.5000 & 0.4000 & 3.1167 \\ 0 & 0.0506 & 0.1300 & 0.1225 & 0.1113 & 0.3035 \\ 0 & 0 & -0.1558 & -0.1477 & -0.1333 & -0.2750 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0045 & 0.0072 & -0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0.0022 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 2.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1640 \\ 0 & 0.0506 & 0 & 0 & 0 & 0.0596 \\ 0 & 0 & -0.1558 & 0 & 0 & -1.4155 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0045 & 0 & -0.0789 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0.0022 \end{bmatrix}$$

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0820 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1.1776 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9.0848 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -17.4720 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10.8118 \end{bmatrix}$$

Показать, что все найденные решения верны.

```
x = AB(:,6)
q = A*x-b
delta = norm(q)
```

В результате получаем вектор:

$$x=\begin{bmatrix} 0.0820 \\ 1.1776 \\ 9.0848 \\ -17.4720 \\ 10.8118 \end{bmatrix}$$

Для проверки решения найдем невязку:

$$Ax-b=\begin{bmatrix}-0.5329\\-0.2665\\-0.3109\\-0.1554\\-0.1554\end{bmatrix}\cdot 10^{-14}$$

$$\Delta(Ax-b)=7.0706\cdot 10^{-15}$$

Получаем невязку равную $7.0706\cdot 10^{-15}$, что значит СЛАУ была решена верна с погрешностью в $\varepsilon = 10^{-15}$

Для возмущенной системы:

```
A_disturbed = A
A_disturbed(4, 1) = A(4, 1) + 0.01
A_disturbed(1, 4) = A(1, 4) + 0.01

Ab=[A_disturbed b] %% Матрица расширения
n = length(b) %% Размерность матрицы

for j =1:n-1 %% прямой преобразование U
for i =j+1:n
k = Ab(i,j)/Ab(j,j)
Ab(i,:)=Ab(i,:)-k*Ab(j,:)
end
end
AB

for y =1:n-1 %% обратное преобразование D
z = n-y+1
for x=1:n-y
k = Ab(x,z)/Ab(z,z)
Ab(x,:)=Ab(x,:)-k*Ab(z,:)
end
end
AB
```

```
for l=1:n %% 3-ое преобразование I
Ab(l,:) = Ab(l,:)/Ab(l,l)
End
```

$$I\_disturbed=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0372\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2.2279\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5.8345\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -14.2731\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9.8971\end{bmatrix}$$

```
x_disturbed = Ab(:,6)
q_disturbed = A_disturbed*x_disturbed-b
delta_disturbed = norm(q_disturbed)
```

В результате получаем вектор:

$$x\_disturbed=\begin{bmatrix}0.0372\\ 2.2279\\ 5.8345\\ -14.2731\\ 9.8971\end{bmatrix}$$

Для проверки решения найдем невязку:

$$Ax-b=\begin{bmatrix}0.0888\\ 0.1332\\ 0.1332\\ 0.0222\\ 0.0222\end{bmatrix}\cdot 10^{-14}$$

$$\Delta(Ax-b)=2.1065\cdot 10^{-15}$$

Получаем невязку равную $2{,}1065\cdot 10^{-15}$, что значит СЛАУ была решена верна с погрешностью в $\varepsilon=10^{-15}$

Проверяем решение невозмущенного и возмущенного:

```
delta_relative = abs(delta_disturbed-delta)/abs(delta)
```

Относительная погрешность решения:

$$\Delta_{relative\,error} = 0.7021 = 70.21\%$$

В результате получим, что решение оказалось **полностью искаженным** при возмущении системы

2. Для исходной и возмущенной матриц найти наибольшее и наименьшее собственные числа и соответствующие им собственные векторы.

```
%% наибольшее и наименьшее собственные числа
eig(A)
max(eig(A))
min(eig(A))

eig(A_disturbed)
max(eig(A_disturbed))
min(eig(A_disturbed))

%% собственные векторы
[L,A_eigenvector] = eig(A)
[V,A_disturbed_eigenvector] = eig(A_disturbed)
```

$$\textbf{исходное собственное число} = \begin{bmatrix} -0.0329 \\ 0.0001 \\ 0.0069 \\ 0.3899 \\ 3.2106 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{возмущенное собственное число} = \begin{bmatrix} -0.0318 \\ 0.0001 \\ 0.0073 \\ 0.3846 \\ 3.2144 \end{bmatrix}$$

	наибольшее	наименьшее	Cond（A）
исходной	3.2106	-0.0329	97.5866
возмущенной	3.2144	-0.0318	101.0818

```
[V,D] = eig(A)
[V_disturbed,D_disturbed] = eig(A_disturbed)
V
V_disturbed
```

$$\textbf{собственный вектор исходной матриц}=\begin{bmatrix} -0{,}3027 & 0{,}0035 & 0{,}0977 & -0{,}5594 & 0{,}7654 \\ 0{,}8723 & 0{,}0128 & -0{,}0648 & 0{,}1479 & 0{,}4613 \\ -0{,}2914 & -0{,}3349 & -0{,}7005 & 0{,}4624 & 0{,}3137 \\ -0{,}2142 & 0{,}8009 & 0{,}1357 & 0{,}4829 & 0{,}2472 \\ -0{,}1288 & -0{,}4962 & 0{,}6908 & 0{,}4671 & 0{,}2046 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{возмущенной вектор исходной матриц}=\begin{bmatrix} -0.3005 & -0.0066 & -0.1027 & -0.5599 & 0.7652 \\ 0.8703 & 0.0431 & 0.0829 & 0.1469 & 0.4608 \\ -0.3250 & 0.2243 & 0.7266 & 0.4668 & 0.3134 \\ -0.1502 & -0.7982 & -0.2324 & 0.4733 & 0.2493 \\ -0.1553 & 0.5573 & -0.6329 & 0.4722 & 0.2044 \end{bmatrix}$$

3. QR-разложение (Gram-Schmidt process)

```
clear
clc

%% Исходные данные
% матрица A
A=[ 2.0000 1.1100 0.6667 0.5000 0.4000 ;
1.1100 0.6667 0.5000 0.4000 0.3333 ;
0.6667 0.5000 0.4000 0.3333 0.2857 ;
0.5000 0.4000 0.3333 0.2857 0.2500 ;
0.4000 0.3333 0.2857 0.2500 0.2222 ]

% вектор правой части b
b=[ 3.1167
2.0333
1.5429
1.2512
1.0552 ]

% Векторы-столбцы матрицы A Инициализация
A1 = A(:,1)
A2 = A(:,2)
A3 = A(:,3)
A4 = A(:,4)
A5 = A(:,5)

% Проекция и вычитание
Q1 = A1

C1 = sum(A2.*Q1)/sum(Q1.*Q1)
Q2 = A2-C1*Q1

C1 = sum(A3.*Q1)/sum(Q1.*Q1)
C2 = sum(A3.*Q2)/sum(Q2.*Q2)
Q3 = A3-C1*Q1-C2*Q2

C1 = sum(A4.*Q1)/sum(Q1.*Q1)
C2 = sum(A4.*Q2)/sum(Q2.*Q2)
C3 = sum(A4.*Q3)/sum(Q3.*Q3)
Q4 = A4-C1*Q1-C2*Q2-C3*Q3

C1 = sum(A5.*Q1)/sum(Q1.*Q1)
C2 = sum(A5.*Q2)/sum(Q2.*Q2)
C3 = sum(A5.*Q3)/sum(Q3.*Q3)
C4 = sum(A5.*Q4)/sum(Q4.*Q4)
Q5 = A5-C1*Q1-C2*Q2-C3*Q3-C4*Q4

% Q матрица Нормализация
```

```
Q(:,1) = Q1/norm(Q1)
Q(:,2) = Q2/norm(Q2)
Q(:,3) = Q3/norm(Q3)
Q(:,4) = Q4/norm(Q4)
Q(:,5) = Q5/norm(Q5)

R = Q'*A
y = Q'*b
x = R\y
A*x-b
delta = norm(A*x-b)
```

Получил:

```
Q =

    0.8107   -0.4265   -0.3955    0.0670   -0.0027
    0.4499    0.0277    0.8925    0.0003   -0.0131
    0.2702    0.5364   -0.1478   -0.7142    0.3277
    0.2027    0.5328   -0.1305    0.1370   -0.7995
    0.1621    0.4957   -0.0900    0.6831    0.5032

R =

    2.4671    1.4700    0.9874    0.7738    0.6381
   -0.0000    0.1916    0.2632    0.2527    0.2352
    0.0000    0.0000    0.0543    0.0502    0.0445
    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0055    0.0089
   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000    0.0001
```

В результате получаем вектор:

$$x = \begin{bmatrix} 0.0820 \\ 1.1776 \\ 9.0848 \\ -17.4720 \\ 10.8118 \end{bmatrix}$$

Для проверки решения найдем невязку:

$$Ax - b = \begin{bmatrix} -0,2665 \\ -0,1776 \\ -0,0444 \\ -0,0666 \\ -0,0666 \end{bmatrix} \cdot 10^{-14}$$

$$\Delta(Ax - b) = 3,3675 \cdot 10^{-15}$$

Получаем невязку равную $3,3675 \cdot 10^{-15}$, что значит СЛАУ была решена верна с погрешностью в $\varepsilon = 10^{-15}$

Для возмущенной системой:

```
% Для возмущенной системой:
A_disturbed = A
A_disturbed(4, 1) = A(4, 1) + 0.01
A_disturbed(1, 4) = A(1, 4) + 0.01

A1 = A_disturbed(:,1)
A2 = A_disturbed(:,2)
A3 = A_disturbed(:,3)
A4 = A_disturbed(:,4)
A5 = A_disturbed(:,5)

% Проекция и вычитание
Q1 = A1

C1 = sum(A2.*Q1)/sum(Q1.*Q1)
Q2 = A2-C1*Q1

C1 = sum(A3.*Q1)/sum(Q1.*Q1)
C2 = sum(A3.*Q2)/sum(Q2.*Q2)
Q3 = A3-C1*Q1-C2*Q2

C1 = sum(A4.*Q1)/sum(Q1.*Q1)
C2 = sum(A4.*Q2)/sum(Q2.*Q2)
C3 = sum(A4.*Q3)/sum(Q3.*Q3)
Q4 = A4-C1*Q1-C2*Q2-C3*Q3

C1 = sum(A5.*Q1)/sum(Q1.*Q1)
C2 = sum(A5.*Q2)/sum(Q2.*Q2)
C3 = sum(A5.*Q3)/sum(Q3.*Q3)
C4 = sum(A5.*Q4)/sum(Q4.*Q4)
Q5 = A5-C1*Q1-C2*Q2-C3*Q3-C4*Q4

% Q матрица Нормализация
Q(:,1) = Q1/norm(Q1)
Q(:,2) = Q2/norm(Q2)
Q(:,3) = Q3/norm(Q3)
Q(:,4) = Q4/norm(Q4)
Q(:,5) = Q5/norm(Q5)

R = Q'*A
y = Q'*b
x = R\y
A*x-b
delta = norm(A*x-b)
```

Получил:

```
Q =
   0.8100   -0.4300   -0.3925    0.0702   -0.0050
   0.4495    0.0301    0.8916   -0.0152    0.0424
```

0.2700	0.5464	-0.1772	-0.7440	0.2090
0.2065	0.5109	-0.0794	0.2462	-0.7933
0.1620	0.5046	-0.1154	0.6170	0.5702

R =

2.4691	1.4704	0.9879	0.7824	0.6386
-0.0000	0.1885	0.2613	0.2469	0.2340
0.0000	0.0000	0.0539	0.0459	0.0441
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0064	0.0091
-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0002

В результате получаем вектор:

$$x = \begin{bmatrix} 0,0372 \\ 2,2279 \\ 5,8345 \\ -14,2731 \\ 9,8971 \end{bmatrix}$$

Для проверки решения найдем невязку:

$$Ax - b = \begin{bmatrix} -0,2220 \\ -0,0888 \\ 0 \\ -0,0222 \\ -0,0222 \end{bmatrix} \cdot 10^{-14}$$

$$\Delta(Ax - b) = 2,4120 \cdot 10^{-15}$$

Получаем невязку равную $1,9610 \cdot 10^{-15}$, что значит СЛАУ была решена верна с погрешностью в $\varepsilon = 10^{-15}$

Относительная погрешность решения:

$$\Delta_{relative\ error} = 0.6046 = 60,46\%$$

В результате получим, что решение оказалось полностью искаженным при возмущении системы