

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Кафедра СМ-1

Елисеев В.Н.

Лекции по курсу

**"Тепловые режимы
летательных аппаратов"**

Москва, 2009

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Особенности теплообмена в космосе и методы вычисления тепловых нагрузок на элементы конструкции космических аппаратов	5
1. Характеристика условий теплообмена аппарата и способы обеспечения его теплового режима	5
2. Поток прямого солнечного излучения	13
3. Потоки собственного и отраженного излучения планет	14
4. Потоки собственного излучения планет, падающие на КА и поглощаемые его поверхностью	17
5. Потоки тепла за счет соударения с молекулами и атомами атмосферы	23
6. Методы расчета теплообмена излучением между элементами конструкции	24
6.1. Метод многократных отражений	24
6.2. Метод, основанный на использовании потоков падающего излучения	27
6.3. Определение результирующего потока излучения на основе понятия об эффективном излучении	30
6.3.1. Лучистый теплообмен в замкнутой системе тел	30
6.3.2. Частные случаи лучистого теплообмена двух тел	35
7. Определение угловых коэффициентов	40
7.1. Определение диффузных коэффициентов	40
7.2. Метод лучевой алгебры для расчета средних угловых коэффициентов	42
Глава 2. Проектирование пассивной тепловой защиты КА	51
8. Определение числа экранов, обеспечивающих тепловой режим лунного модуля	51
9. Выбор оптимального числа теплоизолирующих экранов бака с криогенным компонентом топлива	59

Глава 3. Внешние тепловые нагрузки на участках выведения и спуска аппарата (атмосферные участки полета)	65
10. Теоретический способ решения задачи определения конвективных потоков	65
11. Упрощенный способ определения конвективных потоков, основанный на использовании аналогии между трением и теплообменом	68
11.1. Конвективный поток тепла к плоскому элементу конструкции при ламинарном режиме обтекания	70
11.2. Конвективный поток тепла к плоскому элементу конструкции при турбулентном режиме течения	73
12. Экспериментальный способ определения конвективных потоков	74
13. Основные соотношения и особенности теплообмена в сжимаемом потоке	83
14. Теплообмен на плоском элементе конструкции при ламинарном режиме с учетом сжимаемости потока	89
15. Расчет теплообмена при произвольном продольном распределении давления и ламинарном режиме течения (метод эффективной длины)	91
16. Теплообмен на плоском элементе конструкции при турбулентном режиме с учетом сжимаемости потока	98
17. Расчет теплообмена при произвольном продольном распределении давления и турбулентном режиме течения	100
Глава 4. Основные понятия теории теплопроводности	106
18. Температурное поле и градиент	106
19. Тепловой поток, закон Фурье	107
20. Уравнение переноса субстанции	109
21. Уравнение теплопроводности	111
22. Уравнение теплопроводности для одномерных задач	113

23. Условия однозначности	119
Глава 5. Численные методы решения задач теплопроводности	125
24. Метод конечных разностей (метод сеток)	125
25. Решение системы конечно-разностных уравнений методом прогонки	132
26. Метод элементарной балансов	135
Глава 6. Аналитические методы решения задач теплопроводности	143
27. Метод конечных интегральных преобразований	143
28. Температурное поле в плоской пластине с объемными источниками теплоты	153
ЛИТЕРАТУРА	165

ГЛАВА 1. Особенности теплообмена в космосе и методы вычисления тепловых нагрузок на элементы конструкции космических аппаратов

1. Характеристика условий теплообмена аппарата и способы обеспечения его теплового режима

Одной из основных особенностей космического аппарата (КА) является его автономное функционирование в условиях, когда температура различных участков поверхности может принимать значения от -150 до $+150^{\circ}\text{C}$ в один и тот же момент времени. Следует иметь в виду, что на поверхности Земли условия эксплуатации техники в диапазоне температур от -70 до $+50^{\circ}\text{C}$ считаются достаточно тяжелыми, хотя весовые характеристики применяемых при этом систем терморегулирования не являются лимитирующими.

Тепловой режим КА формируется под воздействием внешнего и внутреннего теплообмена в специфических условиях космического пространства.

Внешняя поверхность КА нагревается за счет поглощения энергии, излучаемой Солнцем, планетами, и фоновой радиации, создаваемой излучением галактик, звезд и других объектов Вселенной. Помимо этого, определенная доля энергии поступает к поверхности аппарата вблизи планет в результате столкновения с атомами и молекулами верхних разреженных слоев атмосферы.

В околосолнечном пространстве основным генератором излучения является Солнце. На расстоянии, соответствующем орбите Земли ($\sim 150 \cdot 10^6$ км), плотность потока солнечного излучения составляет $1396 \text{ Вт}/\text{м}^2$, изменяясь в пределах 2% в связи с колебаниями солнечной активности и на $\pm 3,5\%$ за счет эллиптичности орбиты. В январе она составляет $1444 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}$, а в июле — $1349 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}$. Среднее значение плотности солнечного излучения у Земли $1400 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}$ принято называть

солнечной постоянной. С изменением расстояния от Солнца плотность солнечного излучения изменяется обратно пропорционально квадрату этого расстояния.

Приходящие к планетам солнечные лучи характеризуются некоторой непараллельностью. Например, при взгляде на Солнце со стороны Земли солнечный диск виден под углом $32'$.

Основное влияние на тепловой режим КА оказывает поглощение солнечной энергии в диапазоне длин волн от 0,38 до 3,0 мкм, где сосредоточено 86% всей энергии излучения Солнца. На область от 0,3 до 0,38 мкм приходится около 6% и на область от 0,2 до 0,3 мкм — 1,4% энергии излучения.

Следует отметить, что ультрафиолетовый диапазон спектра (от 0,2 до 0,38 мкм) играет особую роль в теплообмене аппарата, хотя и составляет малую долю энергии излучения Солнца. Под действием излучения в этом диапазоне и рентгеновского излучения происходит наиболее интенсивное изменение оптических и ряда других характеристик теплозащитных покрытий. Это, в свою очередь, сильно отражается на тепловом режиме аппаратов, длительно работающих в космическом пространстве.

Излучение, поступающее к КА со стороны планеты, состоит из отраженного солнечного излучения и собственного излучения планеты. Общее количество энергии, уходящее от планеты в космическое пространство, практически равно падающей на нее солнечной энергии. Количество отраженной планетой энергии определяется отражательной способностью поверхности (альбедо планеты).

Энергия, излучаемая Солнцем и планетами, имеет различный спектральный состав. Отношение материала конструкции (его поверхности) к этому излучению характеризуется различной поглощательной способностью. Поглощательную способность поверхности КА по отношению к солнечным лучам принято обозначать A_S , а поглощение ею излучения планет определяется поглощательной способностью A , которая обычно

принимается равной степени черноты поверхности ε .

Рассмотрим эти понятия более подробно. В общем случае излучение, падающее на поверхность плоской пластины из прозрачного материала, частично отражается от нее, проникает вглубь и выходит через противоположную поверхность (рис. 1.1)

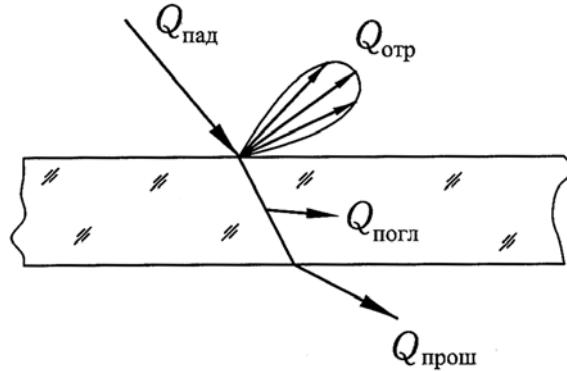


Рис. 1.1. Схема взаимодействия падающего излучения с пластиной из полупрозрачного материала

Из выражения для падающего излучения

$$Q_{\text{пад}} = Q_{\text{отр}} + Q_{\text{погл}} + Q_{\text{прош}}$$

получим

$$1 = R + A + D,$$

где R, A и D — отражательная, поглощающая и пропускательная способности пластины, соответственно.

В зависимости от соотношения величины неровностей фронтальной поверхности (ее шероховатости) и длины волн падающего излучения отражение может иметь либо зеркальный характер, либо диффузный. В первом случае длина волны падающего излучения должна быть намного больше величины неровностей на поверхности. Кроме этого, отражение излучения может происходить частицами в объеме полупрозрачного материала и на тыльной поверхности пластины.

При расчетах лучистого теплообмена широко используют различные модели тел. Например, в зависимости от оптических свойств все тела

разделяют на абсолютно черные, серые и селективные. При использовании модели абсолютно черного (или просто черного) тела предполагается, что вся падающая на него луцистая энергия полностью поглощается им во всем диапазоне длин волн ($A = 1, R = D = 0$). Реальных конструкционных материалов с такими свойствами не существует.

Зависимость энергии излучения черного тела в вакууме от длины волны и температуры описывается законом Планка

$$q_0(\Lambda, T) = \frac{c_1}{\Lambda^5 (e^{c_2/\Lambda T} - 1)}, \quad (1.1)$$

где $c_1 = 0,374 \cdot 10^{-15}$ Вт·м²; $c_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$ м·К; Λ — длина волны. Функция $q_0(\Lambda, T) = f(\Lambda, T)$ представлена на рис. 1.2. Длина волны, соответствующая максимуму излучения при фиксированной температуре тела, находится из закона Вина: $\Lambda_{max} \cdot T = 2898$ мкм·К.

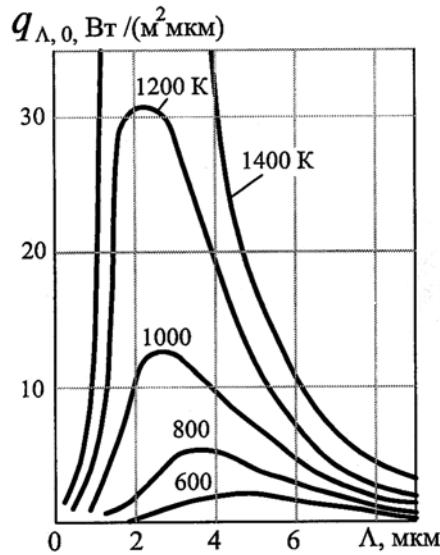


Рис. 1.2. Энергия излучения абсолютно черного тела при разных температурах

Интегрируя спектральную плотность излучения черного тела во всем диапазоне длин волн от 0 до ∞ , получают интегральную плотность энергии излучения черного тела (закон Стефана–Больцмана)

$$q_0 = \sigma T^4, \quad (1.2)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт· м⁻²· К⁻⁴.

Для серых тел характерно постоянное отношение энергии их излучения к энергии излучения черного тела во всем диапазоне длин волн:

$$q_\Lambda/q_{\Lambda,0} = \varepsilon_\Lambda = \text{const} = \varepsilon, \quad (1.3)$$

где $\varepsilon < 1$ — излучательная способность тела.

У селективно излучающих тел спектральная энергия излучения при любой фиксированной температуре также меньше, чем у черного тела, а их излучательная способность зависит от длины волны, рис. 1.3. Сравнительная картина распределения энергии по длинам волн в спектре излучения Солнца и Земли показана на рис. 1.4.

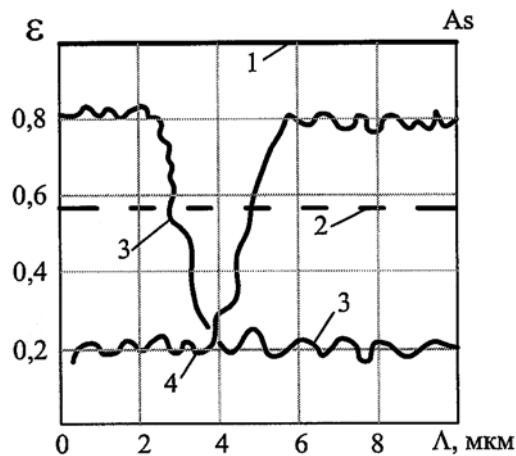


Рис. 1.3. Зависимость излучательной способности тел от длины волны:

1 — абсолютно черное тело; 2 — серое тело; 3,4 — селективно

излучающее тело

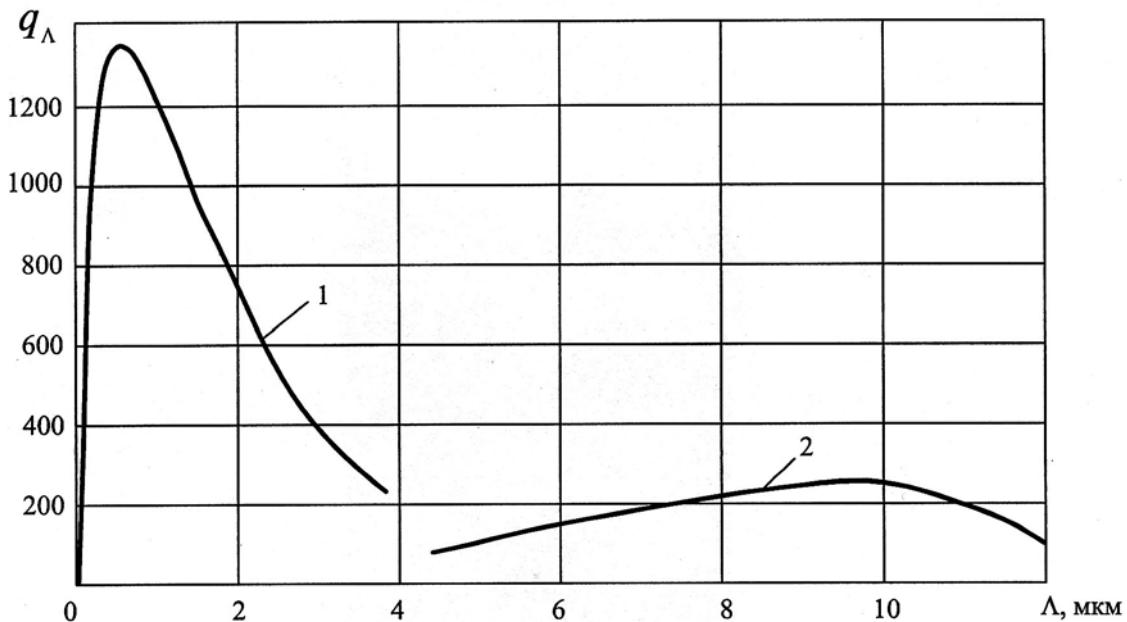


Рис. 1.4. 1 — спектральная плотность потока солнечного излучения; 2 — спектральная плотность потока излучения Земли

Между поглощательной и излучательной способностями тела существует определенная связь, описываемая законом Кирхгофа (1859 г.). В соответствии с этим законом отношение спектральной плотности энергии излучения $q(\Lambda, T)$ тел к их поглощательной способности $A(\Lambda, T)$ не зависит от природы излучающего тела. Оно равно спектральной энергии излучения абсолютно черного тела $q_0(\Lambda, T)$ (т.к. его поглощательная способность равна 1) и зависит от длины волны и абсолютной температуры

$$\frac{q(\Lambda, T)}{A(\Lambda, T)} = q_0(\Lambda, T). \quad (1.4)$$

Закон Кирхгофа является одним из основных законов теплового излучения и не распространяется на другие виды излучения. Функция $q_0(\Lambda, T)$ определяется законом Планка. Из (1.4), в частности, следует, что для серого тела

$$\frac{q(\Lambda, T)}{A(T)} = \frac{\varepsilon(T)q_0(\Lambda, T)}{A(T)} = q_0(\Lambda, T) \quad (1.5)$$

и, как следствие этого, $A(T) = \varepsilon(T)$. Таким образом поглощательную способность серой поверхности можно считать равной ее излучательной способности.

Для селективных поверхностей из (1.4) получается

$$A(\Lambda, T) = \varepsilon(\Lambda, T). \quad (1.6)$$

Все приведенные выше рассуждения относительно закона Кирхгофа и следствий из него ограничены допущением о том, что рассматриваемые поверхности являются диффузными, а оптические характеристики полусферическими (спектральными или интегральными).

При расчетах теплового режима КА поглощательную способность по отношению к собственному излучению планеты принимают, как правило, равной излучательной способности его поверхности (ε).

Для иллюстрации влияния отдельных составляющих теплового воздействия на элемент конструкции КА удобно использовать уравнение баланса энергии, записав его в виде

$$mc \frac{dT}{d\tau} = q_S A_S + q_{\text{отр}} A_S + q_{\text{соб}} \varepsilon + q_{\text{мол}} + q_{\text{вн}} - \varepsilon \sigma T^4, \quad (1.7)$$

где q_S , $q_{\text{отр}}$, $q_{\text{соб}}$ — соответственно плотности потоков прямого солнечного излучения, отраженного от планеты излучения Солнца и собственного излучения планеты; $q_{\text{мол}}$ и $q_{\text{вн}}$ — плотности потоков тепла за счет соударения с молекулами и атомами атмосферы и от внутренних источников; m — масса единицы поверхности элемента ($\text{кг}/\text{м}^2$); c и T — его теплоемкость и температура.

Из выражения (1.7) видно, что при прочих равных условиях температурное состояние оболочки КА во многом определяется оптическими свойствами ее поверхности.

При эксплуатации аппарата в условиях космоса оптические свойства поверхности (A_S и ε) несколько изменяются (деградируют), особенно под действием ультрафиолетового излучения Солнца.

12

В дальнейшем в этом курсе будет часто использоваться термин "тепловой режим". Он широко применяется в литературе, например, в таких словосочетаниях: "обеспечение теплового режима", "анализ теплового режима", "нарушение теплового режима", "проектирование систем обеспечения теплового режима" и в др. Отсутствие четкого определения этого термина затрудняет восприятие соответствующего текста.

Не претендуя на всеобъемлющий характер формулировки, примем следующее определение теплового режима: тепловой режим представляет собой организованный энергомассообмен между средой и конструкцией, обеспечивающий заданное температурное состояние всех ее частей, а также требуемую влажность и подвижность самой среды.

Тепловой режим конструкции может быть реализован различными способами. Для обеспечения теплового режима КА с малым временем пребывания в космосе и небольшими внутренними нагрузками (ватты или десятки ватт) используют, как правило, пассивные средства: экранно-вакуумную теплоизоляцию (ЭВТИ), тепловую защиту, применение соответствующих покрытий внешней поверхности и др.

В пилотируемых экипажем КА применяют более гибкие системы регулирования теплового режима, в состав которых входят устройства для принудительного перемещения масс теплоносителя в замкнутых контурах — активные системы обеспечения теплового режима (СОТР). Эти системы могут входить в состав систем обеспечения жизнедеятельности (СОЖ) или рассматриваться как самостоятельные. Одна из основных задач СОТР современных КА — обеспечение потребного энергомассообмена между всеми элементами корабля, включая операторов, и отвод излишков тепла в окружающую среду.

Опыт показывает, что чрезмерно комфортные условия для экипажа ослабляют адаптационные реакции организма. Поэтому основная задача СОТР — обеспечение не комфортных условий, а нормального функционирования и работоспособности операторов. В этом смысле СОТР

должна выступать в роли тренажера для системы терморегуляции человеческого организма.

Все КА, длительно работающие в космосе, имеют излучательные радиаторы. В качестве такого радиатора может использоваться часть поверхности аппарата или специальная конструкция, закрепленная на его корпусе.

2. Поток прямого солнечного излучения

На поверхность КА, в общем случае, падает прямое и отраженное от планеты солнечное излучение, а также собственное излучение планеты. Спектр прямого и отраженного солнечного излучения сосредоточен, в основном, в коротковолновой области, а спектр собственного излучения планет находится в области более длинных волн. Поскольку отношение поверхности к указанным составляющим излучения неодинаково, то при расчете эффектов его взаимодействия с поверхностью необходимо использовать различные оптические характеристики поверхности. Если поглощение прямого солнечного излучения характеризуется средней по спектру поглощающей способностью A_S , то поток этого излучения, поглощенный участком поверхности КА размером F , составит

$$Q = A_S q_S \cos \varphi F,$$

где φ — угол между направлением на Солнце и внешней нормалью к поверхности F .

3. Потоки собственного и отраженного излучения планет

Все планеты солнечной системы не только получают энергию от Солнца, но и переизлучают ее обратно в космическое пространство. При этом в зависимости от особенностей той или иной планеты, связанных с оптическими свойствами ее поверхности и плотностью атмосферы, принято выделять три типа планет.

Первый тип планет обладает плотной атмосферой, поглощает солнечную энергию своей освещенной частью и разносит ее с помощью атмосферы по всей остальной поверхности. Типичными представителями планет этого типа являются Земля и Венера. Их собственное излучение происходит с полной поверхности и может быть определено из следующего уравнения баланса

$$\pi \bar{R}^2 (1 - A_{\text{cp}}) q_S = 4\pi \bar{R}^2 q_{\pi,1}^{\text{соб}}, \quad (3.1)$$

где $\bar{R} = (R_0 + H_a)$ — эффективный радиус планеты; R_0 — средний радиус планеты; H_a — высота верхней границы эффективно излучающего слоя атмосферы; A_{cp} — средняя по спектру отражательная способность (среднее альбедо) планеты; $q_{\pi,1}^{\text{соб}}$ — плотность потока собственного излучения планеты первого типа, Вт/м².

Из выражения (3.1) видно, что плотность потока собственного излучения планет первого типа равна

$$q_{\pi,1}^{\text{соб}} = \frac{1 - A_{\text{cp}}}{4} q_S. \quad (3.2)$$

Планеты второго типа — планеты, лишенные атмосферы (Меркурий, Луна). Плотность потока их собственного излучения может быть описана соотношением

$$q_{\pi,2}^{\text{соб}} = (1 - A_{\text{cp}}) q_S \frac{\cos \psi_0 + |\cos \psi_0|}{2}, \quad (3.3)$$

где ψ_0 — угол между направлением на Солнце и внешней нормалью к участку поверхности планеты.

Для планет третьего типа характерно наличие разреженной атмосферы (например, Марс). У этих планет плотность потока собственного излучения определяется зависимостью

$$q_{\pi,3}^{\text{соб}} = c_1 + c_2 \frac{\cos \psi_0 + |\cos \psi_0|}{2}, \quad (3.4)$$

из которой, в частности, могут быть получены две предыдущие формулы: при $c_2 = 0$ и $c_1 = (1 - A_{\text{cp}})q_S/4$ — формула (3.2) и при $c_1 = 0$ и $c_2 = (1 - A_{\text{cp}})q_S$ — формула (3.3).

Плотность потока отраженного от поверхности планет солнечного излучения оценивают по формуле

$$q_{\pi,i}^{\text{отр}} = A_{\text{cp}} q_S \frac{\cos \psi_0 + |\cos \psi_0|}{2}. \quad (3.5)$$

Предполагается, что спектр отраженного и прямого солнечного излучения одинаков. В таблице 3.1 приведены некоторые характеристики планет Солнечной системы.

Таблица 3.1. Характеристики планет и их излучения

Характеристика	Меркурий	Венера	Земля	Луна	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
Относительная масса (в мас сах Земли)	0,055	0,815	1,00	0,0123	0,108	317,81	95,17	14,56	17,24	0,18
Средний диаметр, км	4860	12200	12700	3476	6780	140000	120000	49000	47000	6000
Среднее расстояние от Солнца, млн. км	58	108	150	150	228	778	1428	2872	4498	5910
Расстояние от Солнца, среднее, а.е.	0,387	0,723	1,000	1,000	1,524	5,203	9,539	19,20	30,09	39,06
Период обращения во- круг Солнца, год	0,24	0,62	1,00	—	1,88	11,9	29,46	84	165	25,06
Эксцентриситет орби- ты	0,206	0,007	0,017	0,055	0,093	0,048	0,056	0,047	0,009	0,253
Средняя интенсив- ность солнечного потока, Вт/м ²	9400	2700	1396	1396	620	52,8	15,7	3,88	1,57	0,94
Сезонные изме- ния интенсивности солнечного потока, Вт/м ²	±3160	±36	±49	±49	±117	—	—	—	—	±0,567
Среднее альбедо	0,07-	0,06	0,73-0,80	0,37-0,39	0,073	0,15-0,17	0,67-0,51	0,69-0,42	0,93	0,84
Средняя плотность по- тока отраженного из- лучения, Вт/м ²	330	940	265	49	50	14	5	1	0,55	0,07
Средняя плотность по- тока собственного из- лучения, Вт/м ²	2200	170-200	220	326	130	6,5	1,6	0,5	0,12	0,2

4. Потоки собственного излучения планет, падающие на КА и поглощаемые его поверхностью

Приведенные выше формулы (3.2)-(3.5) позволяют определить потоки собственного и отраженного излучения, которые уходят с единицы поверхности планеты в космическое пространство. Большая часть этой энергии проходит мимо аппарата, расположенного в космосе, а на его поверхность падает сравнительно малая ее доля.

Поставим задачу определить указанную составляющую теплового баланса аппарата и рассмотрим с этой целью две площадки, одна из которых находится на планете (излучающая площадка $dF_{\text{изл}}$), а вторая — на поверхности аппарата, рис. 4.1.

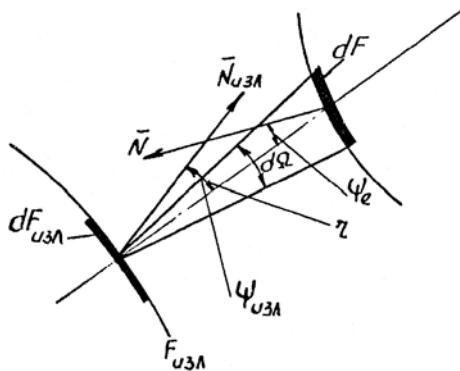


Рис. 4.1. Схема расположения площадок $dF_{\text{изл}}$ и dF

Будем считать, что излучение, уходящее с поверхности планеты, имеет диффузный характер.

В соответствии с законом Ламберта поток излучения элементарной площадки $dF_{\text{изл}}$ на площадку dF пропорционален интенсивности излучения J , площади $dF_{\text{изл}}$ и телесному углу $d\Omega$, в пределах которого из центра $dF_{\text{изл}}$ видна площадка dF

$$d^2Q = J \cdot \cos \psi_{\text{изл}} dF_{\text{изл}} \cdot d\Omega, \quad (4.1)$$

где J — интенсивность энергии излучения в нормальном направлении, которая для диффузного излучения сохраняется одинаковой во всех направлениях, Вт/(м²ср).

В случае, когда площадка dF расположена на поверхности полусферы радиуса r , телесный угол $d\Omega$ можно считать равным

$$d\Omega = \frac{dF}{r^2}. \quad (4.2)$$

Из рисунка 4.2 видно, что

$$dF = (r \cdot d\psi_{изл})(r^* \cdot d\gamma) = r^2 \sin \psi_{изл} d\psi_{изл} \cdot d\gamma. \quad (4.3)$$

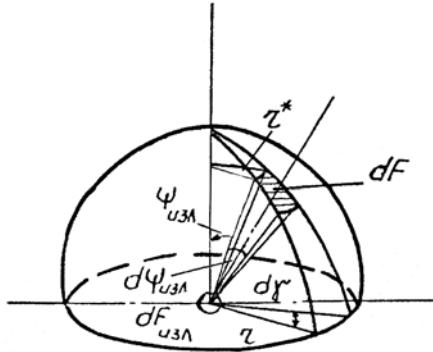


Рис. 4.2. К расчету потока излучения, падающего на площадку dF с площадки $dF_{изл}$

И тогда

$$d\Omega = \sin \psi_{изл} \cdot d\psi_{изл} \cdot d\gamma, \quad (4.4)$$

Подставив $d\Omega$ из выражения (4.4) в формулу (4.1) и выполнив интегрирование, получим поток излучения площадки $dF_{изл}$ в полусферу радиуса r

$$dQ = J \left[\int_0^{\pi/2} (\sin \psi_{изл} \cdot \cos \psi_{изл} \cdot d\psi_{изл}) \int_0^{2\pi} d\gamma \right] dF_{изл} = J \cdot \pi \cdot dF_{изл}. \quad (4.5)$$

Поделив dQ на $dF_{изл}$, найдем плотность потока излучения элементарной площадки $dF_{изл}$,

$$q_{изл} = \frac{dQ}{dF_{изл}}, \quad (4.6)$$

которая связана с интенсивностью излучения J соотношением

$$q_{изл} = J \cdot \pi. \quad (4.7)$$

Используя последнее выражение, представим закон Ламберта в виде

$$d^2Q = q_{изл} \frac{1}{\pi} \cos \psi_{изл} \cdot dF_{изл} d\Omega. \quad (4.8)$$

В общем случае площадка dF может находиться вне полусферы (рис. 4.2) и тогда в пределах телесного угла $d\Omega$ будет видна ее проекция

$$d\Omega = \frac{dF \cos \psi_e}{r^2}. \quad (4.9)$$

Подставим выражение для $d\Omega$ из (4.9) в формулу (4.8) и найдем

$$d^2Q = q_{изл} \frac{\cos \psi_{изл} \cdot \cos \psi_e}{\pi r^2} dF \cdot dF_{изл}. \quad (4.10)$$

Обозначим телесный угол, в пределах которого из центра площадки dF видна площадка $dF_{изл}$

$$d\omega = \frac{dF_{изл} \cos \psi_{изл}}{r^2} \quad (4.11)$$

и запишем формулу (4.10) в виде

$$d^2Q = q_{изл} \frac{1}{\pi} \cos \psi_e dF d\omega. \quad (4.12)$$

Формула (4.12) служит основой для вычисления потоков собственно-го излучения планет, падающих на поверхность космического аппарата. Для получения соответствующих выражений в формулу (4.12) необходимо подставить вместо $q_{изл}$ соотношения для плотности потока собствен-ного излучения планет 1,2 и 3 типов и выполнить интегрирование.

Используя для планет первого типа вместо $q_{изл}$ выражение (3.2), получим

$$Q = (Q_{п,1}^{соб})_{пад} = \frac{1 - A_{cp}}{4} q_S \int_F \varphi_1 dF,$$

где φ_1 — локальный угловой коэффициент, который с учетом формулы (4.11) равен

$$\varphi_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\omega} \cos \psi_e d\omega = \int_{F_{изл}} \frac{\cos \psi_e \cdot \cos \psi_{изл}}{\pi r^2} dF_{изл}.$$

Для плоского элемента поверхности аппарата, незатененного другими элементами конструкции $\varphi_1 = \text{const}$ и плотность потока собственного излучения, падающего на поверхность аппарата со стороны планеты первого типа, составит

$$(q_{\pi,1}^{\text{соб}})_{\text{пад}} = \frac{Q}{F} = \frac{1 - A_{\text{cp}}}{4} q_S \varphi_1. \quad (4.13)$$

Используя формулу (4.12) совместно с формулой (3.3), найдем выражение для потока собственного излучения, падающего на поверхность КА со стороны планеты второго типа

$$(Q_{\pi,2}^{\text{соб}})_{\text{пад}} = (1 - A_{\text{cp}}) q_S \int_F dF \frac{1}{\pi} \int_{\omega} \cos \psi_e \frac{\cos \psi_0 + |\cos \psi_0|}{2} d\omega. \quad (4.14)$$

Если на поверхность аппарата падает собственное излучение только с освещенной части поверхности планеты второго типа, то $\cos \psi_0 = |\cos \psi_0|$ и

$$(Q_{\pi,2}^{\text{соб}})_{\text{пад}} = (1 - A_{\text{cp}}) q_S \int_F dF \frac{1}{\pi} \int_{\omega^*} \cos \psi_e \cos \psi_0 d\omega, \quad (4.15)$$

где ω^* — телесный угол, внутри которого с участка поверхности аппарата F видна только освещенная часть планеты.

Обозначая

$$\varphi_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\omega^*} \cos \psi_e \cos \psi_0 d\omega,$$

формулу (4.15) записывают в более компактном виде

$$(Q_{\pi,2}^{\text{соб}})_{\text{пад}} = (1 - A_{\text{cp}}) q_S \int_F \varphi_2 dF.$$

В случае, когда рассматриваемый элемент поверхности КА является плоским и не находится в тени других элементов конструкции, плотность падающего на него потока собственного излучения от планеты второго типа равна

$$(q_{\pi,2}^{\text{соб}})_{\text{пад}} = \frac{(Q_{\pi,2}^{\text{соб}})_{\text{пад}}}{F} = (1 - A_{\text{cp}}) q_S \varphi_2.$$

Выражение для потока излучения, падающего на поверхность КА в виде собственного излучения планеты третьего типа, получается аналогично после подстановки зависимости (3.4) в формулу (4.12)

$$(Q_{\pi,3}^{\text{соб}})_{\text{пад}} = c_1 \int_F \varphi_1 dF + c_2 \int_F \varphi_2 dF. \quad (4.16)$$

Для случая плоского незатененного участка поверхности КА из формулы (4.16) следует, что плотность потока излучения, падающего на него со стороны планеты третьего типа, составляет

$$(q_{\pi,3}^{\text{соб}})_{\text{пад}} = \frac{(Q_{\pi,3}^{\text{соб}})_{\text{пад}}}{F} = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2.$$

Помимо собственного излучения планет на поверхность КА падает поток диффузно отраженного от них солнечного излучения. Плотность потока отраженного излучения принимается одинаковой для планет различного типа и определяется формулой (3.5). Использование указанной формулы совместно с выражением (4.12) дает

$$Q_{\text{пад}}^{\text{отр}} = A_{\text{cp}} q_S \int_F dF \frac{1}{\pi} \int_{\omega} \cos \psi_e \frac{\cos \psi_0 + |\cos \psi_0|}{2} d\omega. \quad (4.17)$$

При интегрировании только по освещенной части поверхности планеты из формулы (4.17) следует, что

$$Q_{\text{пад}}^{\text{отр}} = A_{\text{cp}} q_S \int_F \varphi_2 dF,$$

а плотность диффузно отраженного планетой солнечного излучения, падающего на поверхность КА, равна

$$q_{\text{пад}}^{\text{отр}} = A_{\text{cp}} q_S \varphi_2.$$

Плотность потока прямого солнечного излучения, падающего на поверхность аппарата, определяют по формуле

$$q_{S,\text{пад}} = q_S \cos \varphi,$$

где φ — угол между внешней нормалью к поверхности аппарата F и направлением на Солнце.

Выше (см. п. 1 и 2) отмечено существенное отличие спектров солнечного и собственного излучения планет. Указанное отличие спектров необходимо учитывать при расчете потоков излучения, поглощаемого поверхностью аппарата.

Допуская, что поверхность аппарата является "серой", примем ее среднюю интегральную поглощательную способность по отношению к потоку собственного излучения планет равной ее излучательной способности $\varepsilon(T)$. Поглощение прямого и отраженного излучений Солнца этой поверхностью будем характеризовать средней интегральной способностью A_S . В этом случае плотность потока излучения, поглощаемого плоским незатененным участком поверхности аппарата, составит

$$q_{\text{погл}} = A_S(q_{S,\text{пад}} + q_{\text{пад}}^{\text{отр}}) + \varepsilon(T)(q_{\pi,i}^{\text{соб}})_{\text{пад}}, \quad (4.18)$$

где $i = 1, 2, 3$.

Кроме указанных выше потоков солнечного и планетного излучений, поглощаемых поверхностью аппарата, между отдельными элементами его конструкции, которые "видят" друг друга, происходит взаимный обмен излучением. В результате такого обмена возникает дополнительный поток энергии, проникающей через поверхность рассматриваемого участка аппарата (либо покидающей ее в зависимости от знака потока). Методы расчета отмеченного дополнительного потока излучения, зависящего от многих факторов, подробно обсуждаются в п. 6 и 7.

5. Потоки тепла за счет соударения с молекулами и атомами атмосферы

Нагрев корпуса аппарата при взаимодействии с атомами и молекулами атмосферы становится заметным при движении его на участках орбиты, расположенных на небольшом расстоянии от планеты. Тепловой эффект взаимодействия проявляется в результате перехода части или всей кинетической энергии частиц в тепловую энергию, а также за счет возможных реакций рекомбинации атомов и диссоциированных молекул, при которых на поверхности аппарата выделяется дополнительное количество тепла.

Если считать, что при соударении вся кинетическая энергия частиц переходит в тепловую энергию, то плотность потока тепла, передаваемого поверхности аппарата, можно определить по формуле

$$q_{\text{мол}} = n \frac{mV^2}{2}, \quad \text{Вт/м}^2, \quad (5.1)$$

где $n = NV \sin \beta$ — число частиц, ударяющихся о единицу площади поверхности в одну секунду; N — число частиц в единице объема; m — масса частицы; V — скорость полета аппарата; β — угол между плоскостью участка поверхности (пластиинки) и направлением полета.

Расчет плотности потока тепла, взаимодействующего с поверхностью при рекомбинации частиц, удобно связать с числом столкновений, приводящих к рекомбинации n_p и ее эффективностью σ

$$q_{\text{рек}} = n\sigma E = n_p E, \quad (5.2)$$

где n — полное число столкновений и E — энергия рекомбинации, отнесенная к одной частице, измеряемые соответственно в $\text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ и Дж.

Зависимость плотности потоков тепла $q_{\text{мол}}$ и $q_{\text{рек}}$ от высоты полета над Землей представлена на рис. 5.1. Видно, что величина этих потоков уменьшается с возрастанием высоты и лишь на малых высотах полета оказывается соизмеримой с плотностью потоков прямого солнечного и собственного излучений Земли.

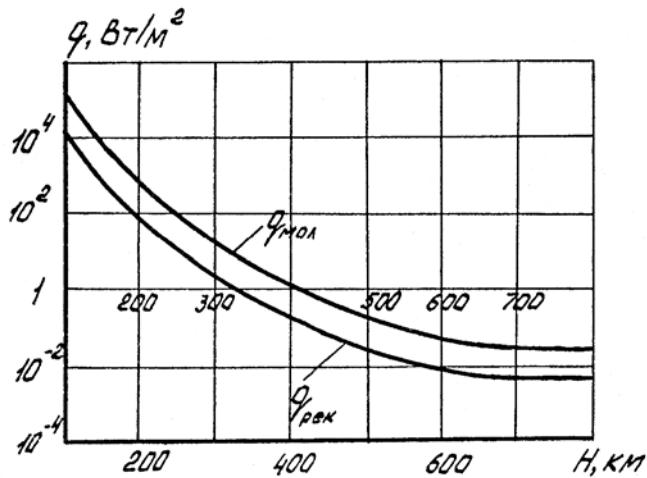


Рис. 5.1

6. Методы расчета теплообмена излучением между элементами конструкции

Рассмотрим основные методы расчета потоков результирующего излучения между плоскими поверхностями, постепенно усложняя задачу.

6.1. Метод многократных отражений

Пусть имеется два плоских элемента конструкции, расположенных параллельно на конечном расстоянии и имеющих бесконечную протяженность в других направлениях. В этом случае все излучение с одной поверхности полностью попадает на вторую, рис. 6.1.

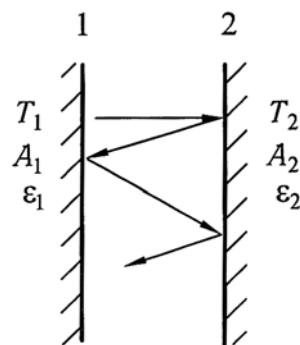


Рис. 6.1. Схема теплообмена излучением между двумя параллельными поверхностями

Поверхности с температурами T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$) разделены непоглощающей средой и имеют оптические характеристики $A_1 = \varepsilon_1$ и $A_2 = \varepsilon_2$ соответственно.

Для определения результирующего потока излучения воспользуемся следующими рассуждениями.

Первая пластина излучает в направлении второй поток собственного излучения плотностью q_1 . Из этого излучения вторая поглощает $A_2 q_1$ и отражает на первую пластину $(1 - A_2)q_1$. Вернувшееся на первую пластину излучение поглощается ею в количестве $A_1(1 - A_2)q_1$. Отраженное первой поверхностью излучение $(1 - A_1)(1 - A_2)q_1$, упав на вторую поверхность, отразится ею в количестве $(1 - A_1)(1 - A_2)^2q_1$ и снова поглотится первой поверхностью — $A_1(1 - A_1)(1 - A_2)^2q_1$ и т.д.

В результате многократных отражений энергия, поглощенная первой поверхностью в виде ее собственной энергии излучения, составит

$$\begin{aligned} q_1^{\text{погл}} &= A_1(1 - A_2)q_1 + A_1(1 - A_1)(1 - A_2)^2q_1 + \dots = \\ &= A_1(1 - A_2)q_1(1 + p + p^2 + \dots) = \frac{A_1(1 - A_2)q_1}{1 - p}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

поскольку $p = (1 - A_1)(1 - A_2) = 1 - A_1 - A_2 + A_1 A_2 < 1$ а выражение $(1 + p + p^2 + \dots)$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма которой равна $(1 - p)^{-1}$.

Используя аналогичные рассуждения относительно собственного излучения второй поверхности, можно получить выражение для плотности потока излучения, поглощенного первой поверхностью из излучения второй в виде

$$\begin{aligned} q_2^{\text{погл}} &= A_1 q_2 + A_1(1 - A_1)(1 - A_2)q_2 + \dots = \\ &= A_1 q_2(1 + p + p^2 + \dots) = \frac{A_1 q_2}{1 - p}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Плотность потока результирующего излучения $q_{1,2}$ с учетом выражений (6.1) и (6.2) оказывается равной

$$q_{1,2} = q_1 - q_1^{\text{погл}} - q_2^{\text{погл}} = \frac{A_2 q_1 - A_1 q_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (6.3)$$

Рассматривая обе поверхности как "серые" излучатели на основании закона Стефана–Больцмана, можно записать

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1 \sigma T_1^4; \\ q_2 &= A_2 \sigma T_2^4. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Подставляя (6.4) в (6.3), находим

$$q_{1,2} = A_{\text{пр}} \sigma (T_1^4 - T_2^4), \quad (6.5)$$

где

$$A_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{2}\right)}. \quad (6.6)$$

Усложним эту задачу, полагая, что между поверхностями 1 и 2 расположен параллельно им тонкий экран. "Тонкий" означает, что его термическое сопротивление $h_{\text{эк}}/\lambda_{\text{эк}} \rightarrow 0$ и $T_{1,\text{эк}} = T_{2,\text{эк}} = T_{\text{эк}}$. Но оптические свойства двух поверхностей экрана примем различными $A_{\text{эк},1}$ и $A_{\text{эк},2}$. Тогда соответствующие плотности потоков результирующего излучения можно записать в виде

$$q_{1,\text{эк}} = A_{\text{пр},1} \sigma (T_1^4 - T_{\text{эк}}^4), \quad (6.7)$$

$$q_{\text{эк},2} = A_{\text{пр},2} \sigma (T_{\text{эк}}^4 - T_2^4), \quad (6.8)$$

где

$$A_{\text{пр},1} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_{\text{эк},1}} - 1}, \quad A_{\text{пр},2} = \frac{1}{\frac{1}{A_{\text{эк},2}} + \frac{1}{A_2} - 1}.$$

Так как в условиях установившегося теплообмена

$$q_{1,\text{эк}} = q_{\text{эк},2} = q_{1,2}, \quad (6.9)$$

то можно написать

$$A_{\text{пр},1} (T_1^4 - T_{\text{эк}}^4) = A_{\text{пр},2} (T_{\text{эк}}^4 - T_2^4). \quad (6.10)$$

Отсюда находят неизвестное значение температуры экрана

$$T_{\text{эк}}^4 = \frac{A_{\text{пр},1} T_1^4 + A_{\text{пр},2} T_2^4}{A_{\text{пр},1} + A_{\text{пр},2}}, \quad (6.11)$$

и

$$T_{\varTheta} = \sqrt[4]{\frac{A_{\text{пр},1} T_1^4 + A_{\text{пр},2} T_2^4}{A_{\text{пр},1} + A_{\text{пр},2}}}. \quad (6.12)$$

Подставив (6.11) в (6.7), получим

$$q_{1,\varTheta} = q_{\varTheta,2} = q_{1,2} = \frac{A_{\text{пр},1} \cdot A_{\text{пр},2}}{A_{\text{пр},1} + A_{\text{пр},2}} \sigma (T_1^4 - T_2^4). \quad (6.13)$$

Последнее выражение представим в виде

$$q_{1,2} = A_{\text{пр},\varTheta} \sigma (T_1^4 - T_2^4), \quad (6.14)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\text{пр},\varTheta} &= \frac{A_{\text{пр},1} \cdot A_{\text{пр},2}}{A_{\text{пр},1} + A_{\text{пр},2}} = \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{A_{\varTheta,1}} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{A_{\varTheta,2}} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

6.2. Метод, основанный на использовании потоков падающего излучения

В этом методе поток результирующего излучения некоторой i -ой площадки связан с потоками ее собственного и падающего на нее излучения соотношением

$$Q_{\text{рез},i} = A_i Q_{0i} - A_i Q_{\text{пад},i}, \quad (6.16)$$

где Q_{0i} — поток собственного излучения i -ой площадки, рассматриваемой как "черное" тело; A_i — поглощательная способность i -ой площадки и $Q_{\text{пад},i}$ — поток излучения, падающий на ее поверхность.

В соотношении (6.16) неизвестной величиной является падающий поток. Рассмотрим замкнутую систему диффузно излучающих плоских поверхностей, для каждой из которых требуется найти поток результирующего излучения, рис. 6.2.

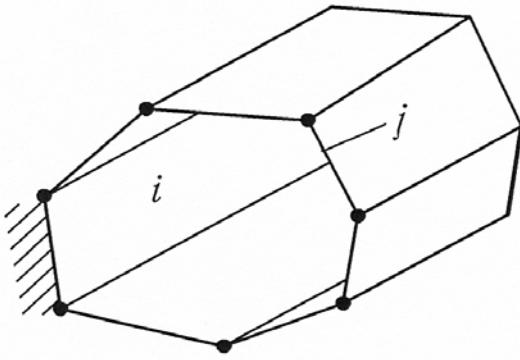


Рис. 6.2. К расчету потока результирующего излучения в замкнутой системе поверхностей

В качестве известных величин считаются заданными оптические характеристики всех поверхностей (их поглощательные и излучательные способности) и температуры, постоянные в пределах каждой поверхности.

Для любой из n поверхностей рассматриваемой системы можно записать выражение для падающего на нее потока в виде

$$Q_{\text{пад},i} = \sum_{j=1}^n A_j Q_{0j} \varphi_{j,i} + \sum_{j=1}^n R_j Q_{\text{пад},j} \varphi_{j,i}, \quad (6.17)$$

где A_j и R_j — поглощательная и отражательная способности j -ой поверхности ($A_j + R_j = 1$); Q_{0j} — собственное излучение j -ой поверхности, рассматриваемой как абсолютно черное тело; $Q_{\text{пад},j}$ — энергия излучения, падающая на j -ю поверхность со всех остальных поверхностей системы; $\varphi_{j,i}$ — доля энергии излучения, падающей на i -ю площадку со стороны j -ой.

Система уравнений (6.17) — замкнутая относительно неизвестных значений $Q_{\text{пад},j}$, позволяет определить падающие потоки на все поверхности системы.

После определения $Q_{\text{пад},i}$ поток результирующего излучения на площадку i может быть определен по формуле (6.16).

Пример расчета

Пусть имеются две параллельные пластины и требуется определить результирующий поток тепла между ними. В этом случае можно принять $\varphi_{1,2} = \varphi_{2,1} = 1$.

Тогда

$$Q_{\text{пад1}} = A_2 Q_{02} + (1 - A_2) Q_{\text{пад2}}, \quad (6.18)$$

$$Q_{\text{пад2}} = A_1 Q_{01} + (1 - A_1) Q_{\text{пад1}}. \quad (6.19)$$

Подставим (6.19) в (6.18) и найдем

$$Q_{\text{пад1}} = A_2 Q_{02} + A_1(1 - A_2) Q_{01} + (1 - A_1)(1 - A_2) Q_{\text{пад1}}.$$

Откуда получаем

$$Q_{\text{пад1}} = \frac{A_2 Q_{02} + A_1(1 - A_2) Q_{01}}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (6.20)$$

Подставим $Q_{\text{пад1}}$ из (6.20) в (6.16) и найдем

$$Q_{\text{рез,1}} = Q_{1,2} = A_1 Q_{01} - \frac{A_1 A_2 Q_{02} + A_1^2 (1 - A_2) Q_{01}}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (6.21)$$

Приводя к общему знаменателю правую часть (6.21), получим

$$\begin{aligned} Q_{1,2} &= \frac{A_1^2 Q_{01} + A_1 A_2 Q_{01} - A_1^2 A_2 Q_{01} - A_1 A_2 Q_{02} - A_1^2 Q_{01} + A_1^2 A_2 Q_{01}}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} = \\ &= \frac{A_1 A_2 (Q_{01} - Q_{02})}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} Q_{01} &= \sigma T_1^4 F \\ Q_{02} &= \sigma T_2^4 F \end{aligned} \right\}, \quad (6.23)$$

из (6.22) и (6.23) найдем

$$q_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{F} = A_{\text{пп}} \sigma (T_1^4 - T_2^4). \quad (6.24)$$

Из сопоставления выражений (6.5) и (6.24) видно, что оба они, полученные различными методами, совпадают.

6.3. Определение результирующего потока излучения на основе понятия об эффективном излучении

6.3.1. Лучистый теплообмен в замкнутой системе тел

Рассмотрим лучистый теплообмен в системе тел, пространство между которыми заполнено лучепрозрачной средой, а сами тела непрозрачны для теплового излучения. Предположим, что свойства тел, участвующих в лучистом обмене энергией, подчиняются закону Ламберта, процесс стационарен и температура во всех точках каждого тела одинакова и поддерживается неизменной во времени. Примем также, что поглощающая и излучательная способности тел не зависят от длины волны излучения и составляют некоторую долю поглощения и излучения абсолютно черного тела, т.е. тела предполагаются "серыми".

В условиях отсутствия у рассматриваемых тел вогнутых поверхностей, в которых может происходить внутренний обмен излучением, для любого тела в системе суммарный поток энергии излучения равен потоку, называемому эффективным излучением

$$Q_{\text{эфф}} = \varepsilon(T) \sigma T^4 F + Q_{\text{отр}}, \quad (6.25)$$

где первое слагаемое в правой части выражения (6.25) представляет собой поток собственного излучения поверхности F , а второе слагаемое — отраженный от нее поток.

Важную роль в формировании температурного состояния тела играет поток результирующего излучения, который можно представить в виде разности потоков собственного и поглощенного падающего излучений

$$Q_{\text{рез}} = \varepsilon(T) \sigma T^4 F - A(T) Q_{\text{пад}}. \quad (6.26)$$

Результирующее излучение можно выразить как разность потоков эффективного и падающего излучений. Представим с этой целью поток поглощенного падающего излучения в следующем виде

$$A(T) Q_{\text{пад}} = Q_{\text{пад}} - Q_{\text{отр}}. \quad (6.27)$$

Используя (6.27) совместно с (6.26), получим

$$Q_{\text{рез}} = \varepsilon(T) \sigma T^4 F - Q_{\text{пад}} + Q_{\text{отр}} = Q_{\text{эф}} - Q_{\text{пад}}. \quad (6.28)$$

Если из формул (6.26) и (6.28) найти выражения для $Q_{\text{пад}}$

$$Q_{\text{пад}} = \frac{\varepsilon(T)}{A(T)} \sigma T^4 F - \frac{1}{A(T)} Q_{\text{рез}},$$

$$Q_{\text{пад}} = Q_{\text{эф}} - Q_{\text{рез}},$$

и приравнять правые части найденных выражений, то можно установить прямую связь между потоками эффективного и результирующего излучений

$$Q_{\text{эф}} = \frac{\varepsilon(T)}{A(T)} \sigma T^4 F - \left[\frac{1}{A(T)} - 1 \right] Q_{\text{рез}}. \quad (6.29)$$

Из формулы (6.29) видно, что в случае, когда температуры всех тел, участвующих в лучистом теплообмене, постоянны во времени и равны, эффективное излучение любого из тел равно излучению абсолютно черного тела

$$Q_{\text{эф}} = \sigma T^4 F, \quad (6.30)$$

поскольку поток результирующего излучения в соответствии с формулой (6.26) равен нулю, а $\varepsilon(T)$ можно считать равной $A(T)$.

Если же температуры тел в рассматриваемой системе различны, то каждое тело будет иметь свое результирующее излучение, которое будет определяться температурой, поглощательной и излучательной способностями тел, площадью их поверхности и взаимным расположением тел в пространстве.

Используем полученные соотношения для решения задачи о лучистом теплообмене двух тел.

Пусть имеются два тела с выпуклыми поверхностями F_1 и F_2 , произвольно расположенные в пространстве, рис. 6.3

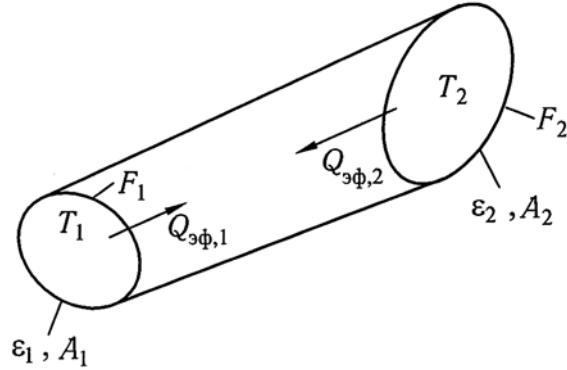


Рис. 6.3. К расчету результирующего потока с использованием эффективного излучения

Определим результирующий тепловой поток между телами 1 и 2, воспользовавшись для этого уравнением (6.29).

Эффективные излучения тел

$$Q_{\text{эфф},1} = \frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma T_1^4 F_1 - \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) Q_1, \quad (6.31)$$

$$Q_{\text{эфф},2} = \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma T_2^4 F_2 - \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) Q_2, \quad (6.32)$$

где Q_1 и Q_2 — результирующие излучения рассматриваемых тел.

Если не учитывать лучистый теплообмен с другими окружающими телами, то можно принять

$$Q_1 \equiv -Q_2 \equiv Q_{1,2}, \quad (6.33)$$

где $Q_{1,2}$ — поток результирующего излучения между телами 1 и 2.

Некоторое количество энергии эффективного излучения первого тела падает на второе и наоборот

$$Q_{\text{пад},1,2} = Q_{\text{эфф},1} \cdot \varphi_{1,2}, \quad (6.34)$$

$$Q_{\text{пад},2,1} = Q_{\text{эфф},2} \cdot \varphi_{2,1}, \quad (6.35)$$

где $\varphi_{1,2}$ и $\varphi_{2,1}$ — представляют собой доли лучистых потоков энергии, падающие с одного тела на другое. Это и есть коэффициенты облученности тел (или угловые коэффициенты), определяемые отношениями:

$$\varphi_{1,2} = \frac{Q_{\text{пад}1,2}}{Q_{\text{эф},1}}, \quad (6.36)$$

$$\varphi_{2,1} = \frac{Q_{\text{пад}2,1}}{Q_{\text{эф},2}}, \quad (6.37)$$

В частном случае при лучевом термодинамическом равновесии тел (для замкнутой системы из двух тел $Q_1 = -Q_2 = 0$) :

$$\left. \begin{array}{l} Q_{\text{пад}1,2} = Q_{\text{пад}2,1}, \\ Q_{\text{эф}1} = \sigma T^4 F_1, \\ Q_{\text{эф}2} = \sigma T^4 F_2. \end{array} \right\} \quad (6.38)$$

В этом случае справедливо равенство

$$Q_{\text{эф}1} \cdot \varphi_{1,2} = Q_{\text{эф}2} \cdot \varphi_{2,1},$$

из которого с учетом уравнений (6.38) получаем соотношение

$$F_1 \cdot \varphi_{1,2} = F_2 \cdot \varphi_{2,1},$$

выражающее геометрическое свойство взаимности облученостей тел:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{1,2} = \varphi_{2,1} \frac{F_2}{F_1}, \\ \varphi_{2,1} = \varphi_{1,2} \frac{F_1}{F_2}. \end{array} \right\} \quad (6.39)$$

При отсутствии термодинамического равновесия тел теплопередача излучением (результатирующее излучение) определяется разностью

$$Q_{1,2} = Q_{\text{эф}1}\varphi_{1,2} - Q_{\text{эф}2}\varphi_{2,1} = Q_{\text{пад}1,2} - Q_{\text{пад}2,1}. \quad (6.40)$$

По-существу, последнее выражение означает следующее. Первое тело излучает в направлении второго энергию в количестве $Q_{\text{эф}1} \cdot \varphi_{1,2}$, а

второе в направлении первого — $Q_{\text{эф}2} \cdot \varphi_{2,1}$; разность этих количеств энергии (а это есть разность падающих энергий) равна результирующему излучению.

Подставим в это уравнение вместо $Q_{\text{эф}1}$ и $Q_{\text{эф}2}$ их выражения из формул (6.31) и (6.32) и получим

$$\begin{aligned} Q_{1,2} = & \frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma T_1^4 F_1 \cdot \varphi_{1,2} - \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) Q_1 \cdot \varphi_{1,2} - \\ & - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma T_2^4 F_2 \cdot \varphi_{2,1} + \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) Q_2 \cdot \varphi_{2,1}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Имея в виду, что

$$Q_1 = Q_{1,2}, \quad \text{а} \quad Q_2 = -Q_{1,2},$$

перепишем уравнение (6.41) так

$$\begin{aligned} Q_{1,2} = & \frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma T_1^4 F_1 \cdot \varphi_{1,2} - \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) Q_{1,2} \cdot \varphi_{1,2} - \\ & - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma T_2^4 F_2 \cdot \varphi_{2,1} - \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) Q_{1,2} \cdot \varphi_{2,1}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Отсюда следует, что

$$Q_{1,2} = \frac{\frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma T_1^4 F_1 \varphi_{1,2} - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma T_2^4 F_2 \cdot \varphi_{2,1}}{1 + \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) \varphi_{1,2} + \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) \varphi_{2,1}}. \quad (6.43)$$

Учитывая, что соотношения (6.39), полученные из условия термодинамического равновесия, выражают только геометрическое свойство тел, можно считать, что они останутся справедливыми и при отсутствии термодинамического равновесия.

Таким образом

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{2,1} \frac{F_2}{F_1}.$$

С учетом последнего равенства из уравнения (6.43) окончательно получим

$$Q_{1,2} = \varphi_{1,2} F_1 \frac{\frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma T_1^4 - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma T_2^4}{1 + \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) \varphi_{1,2} + \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) \varphi_{2,1}}. \quad (6.44)$$

Если в диапазоне температур T_1 и T_2 степени черноты тел не зависят от температуры, то

$$\varepsilon_1 = A_1 \text{ и } \varepsilon_2 = A_2.$$

При этом условии формула (6.44) принимает вид

$$Q_{1,2} = \varphi_{1,2} F_1 \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1 + \varphi_{1,2} \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) + \varphi_{2,1} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right)}. \quad (6.45)$$

6.3.2. Частные случаи лучистого теплообмена двух тел

1. Лучистый теплобмен между двумя параллельными поверхностями.

Если поверхности имеют бесконечно большие размеры или находятся достаточно близко друг к другу, то

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{2,1} = 1$$

и плотность результирующего потока излучения равна

$$q_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{F_1} = \frac{\frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma T_1^4 - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma T_2^4}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}. \quad (6.46)$$

При условии, что $\varepsilon_1 = A_1$ и $\varepsilon_2 = A_2$:

$$q_{1,2} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} = c_n \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (6.47)$$

Последнее выражение для результирующего потока излучения совпадает с выражениями (6.5) и (6.24), полученными другими методами.

2. Уравнения (6.46) и (6.47) позволяют также решить вопрос о роли экранов в защите от излучения. Чтобы ответить на этот вопрос, представим знаменатель в этих уравнениях в следующем виде

$$\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1 = \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{2} \right).$$

Полученное выражение можно рассматривать как сумму термических сопротивлений переносу лучистой энергии. В общем случае любая поверхность, непрозрачная для лучистой энергии, представляет собой термическое сопротивление переносу лучистой энергии, равное

$$\frac{1}{A_i} - \frac{1}{2},$$

где A_i — поглощательная способность этой поверхности.

Пользуясь понятием сопротивления переносу лучистой энергии и пренебрегая термическим сопротивлением тонких листов-экранов, формулу для результирующего потока излучения между параллельными поверхностями запишем в виде

$$q_{1,2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\sum_1^n \left(\frac{1}{A_i} - \frac{1}{2} \right)}, \quad (6.48)$$

где n — число мест сопротивлений переносу лучистой энергии.

Каждый экран, обладающий двумя поверхностями, имеет два сопротивления переносу лучистой энергии.

Например, если имеется всего один экран, то уравнение (6.48) запишется так

$$q_{1,2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{A_{\exists 1}} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{A_{\exists 2}} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{2} \right)}. \quad (6.49)$$

Полученное выражение совпадает с найденным ранее (6.13)

$$q_{1,2} = \frac{A_{\text{пр},1} \cdot A_{\text{пр},2}}{A_{\text{пр},1} + A_{\text{пр},2}} \sigma(T_1^4 - T_2^4). \quad (6.50)$$

В случае, когда все поверхности имеют одну и ту же поглощательную способность

$$A_1 = A_2 = A_{\exists 1} = A_{\exists 2} = A$$

плотность результирующего потока равна

$$q_{1,2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{(N_{\text{экп}} + 1) 2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{2} \right)}, \quad (6.51)$$

где $N_{\text{экр}}$ — число защитных экранов.

Выражение (6.49) более наглядно, по сравнению с (6.50), иллюстрирует роль защитных экранов. Используя понятие сопротивления переносу лучистой энергии, легко показать, что у поверхности, покрытой слоем никеля с $A_{\text{н}} = 0,05$, оно в 26 раз больше, чем у стальной поверхности с $A_{\text{с}} = 0,8$

$$\frac{\frac{1}{A_{\text{н}}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{A_{\text{с}}} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{0,05} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{0,8} - \frac{1}{2}} = \frac{19,5}{0,75} = 26.$$

При наличии между телами одного никелированного экрана теплоизлучение уменьшится в 27 раз

$$\frac{q_{1,2}}{(q_{1,2})_{\text{э}}} = \frac{2 \left(\frac{1}{0,8} - \frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{0,05} - \frac{1}{2} \right)}{2 \left(\frac{1}{0,8} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 19,5}{2 \cdot 0,75} = 27.$$

3. Лучистый теплообмен между двумя телами, расположенными одновнутри другого.

Примером такого теплообмена может служить, например, теплообмен между прибором и корпусом космического корабля, между электродом и поверхностью камеры сгорания в электротермическом двигателе и т.п. Расчетная схема этих задач может быть представлена следующим образом

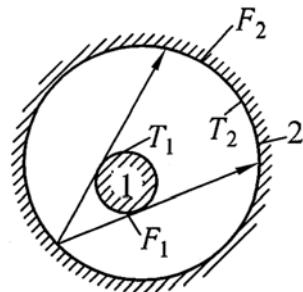


Рис. 6.4. Схема лучистого теплообмена между телом и оболочкой

В рассматриваемой задаче поток эффективного излучения тела 1 полностью падает на поверхность тела 2:

$$Q_{\text{пад}_2} = Q_{\text{эф}_1}.$$

Эффективное излучение второго тела только частично падает на поверхность первого:

$$Q_{\text{пад}_1} = Q_{\text{эф}_2} \cdot \varphi_{2,1}.$$

Остальная часть потока $(1 - \varphi_{2,1})$ падает на само наружное тело и таким образом осуществляется внутренний радиационный теплообмен.

Теплопередача излучением (результатирующий поток) определяется разностью

$$Q_{1,2} = Q_{\text{пад}_2} - Q_{\text{пад}_1} = Q_{\text{эф}_1} - Q_{\text{эф}_2} \cdot \varphi_{2,1}, \quad (6.52)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q_{\text{эф}_1} &= \frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma T_1^4 F_1 - \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) Q_1, \\ Q_{\text{эф}_2} &= \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma_0 T_2^4 F_2 - \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

В условиях стационарного теплообмена

$$Q_1 = Q_{1,2} \quad \text{и} \quad Q_2 = -Q_{1,2}. \quad (6.54)$$

Из уравнений (6.52) и (6.53) с учетом (6.54) получим

$$Q_{1,2} = \frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma T_1^4 F_1 - \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) Q_{1,2} - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma T_2^4 F_2 \varphi_{1,2} - \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) Q_{1,2} \cdot \varphi_{2,1}.$$

Отсюда

$$Q_{1,2} = \frac{\frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma T_1^4 F_1 - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma T_2^4 F_2 \varphi_{2,1}}{1 + \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) + \varphi_{2,1} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right)}. \quad (6.55)$$

Коэффициент облученности второй поверхности со стороны первой равен единице

$$\varphi_{1,2} = 1.$$

Из условия взаимности облученности тел

$$\varphi_{2,1} \cdot F_2 = \varphi_{1,2} \cdot F_1$$

следует, что

$$\varphi_{2,1} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Подставляя выражение для $\varphi_{2,1}$ в уравнение (6.55), получим

$$Q_{1,2} = F_1 \frac{\frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma T_1^4 - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma T_2^4}{\frac{1}{A_1} + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right)}. \quad (6.56)$$

Для случаев, когда

$$F_1 \ll F_2 \text{ и } \varepsilon_1 = A_1, \varepsilon_2 = A_2,$$

из уравнения (6.56) следует

$$Q_{1,2} = F_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4).$$

При $F_1 = F_2$ из того же уравнения получается

$$q_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{F_1} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1},$$

т.е. оно переходит в уравнение (6.47).

Отметим, что уравнение (6.56) может быть получено непосредственно из уравнения (6.44) при $\varphi_{1,2} = \varphi_{2,1} = 1$. Таким образом, рассмотренная задача является частным случаем более общей задачи о лучистом теплообмене двух произвольно расположенных в пространстве поверхностей.

Для замкнутой области, образованной N поверхностями, потоки эффективного излучения каждой из них находят из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$Q_{\text{эф},i} = \varepsilon_i \sigma T_i^4 F_i + (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^N \varphi_{j,i} Q_{\text{эф},j}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.57)$$

По найденным значениям $Q_{\text{эф},i}$ вычисляют потоки результирующего излучения каждой i -ой площадки

$$Q_{\text{рез},i} = \varepsilon_i \sum_{j=1}^N Q_{\text{эф},j} \varphi_{j,i} - \varepsilon_i \sigma T_i^4 F_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.58)$$

7. Определение угловых коэффициентов

7.1. Определение диффузных коэффициентов

Рассмотрим две диффузно излучающие и отражающие поверхности F_1 и F_2 , поддерживаемые при постоянных температурах T_1 и T_2 , рис. 7.1.

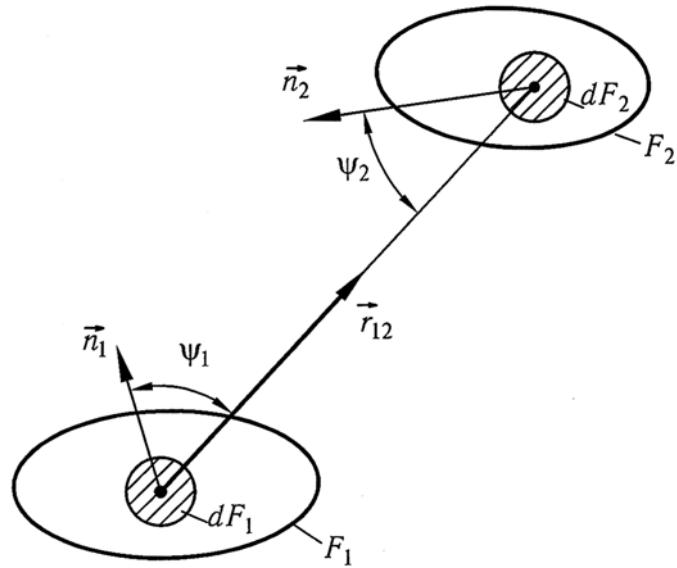


Рис. 7.1. К определению диффузного углового коэффициента: dF_1 и dF_2 — элементарные площадки поверхностей F_1 и F_2 ; n_1 и n_2 — внешние нормали к площадкам dF_1 и dF_2 ; $r_{12} = -r_{21}$ — вектор, соединяющий dF_1 и dF_2 ; r — длина вектора r_{12}

В соответствии с законом Ламберта, количество энергии излучения, испускаемого поверхностью dF_1 и непосредственно (без многократных

отражений) достигающего поверхности dF_2 в единицу времени, можно записать в виде

$$d^2Q_1 = J_1 \cos \psi_1 dF_1 d\Omega_1, \quad (7.1)$$

где

$$d\Omega_1 = \frac{dF_2 \cos \psi_2}{r^2}. \quad (7.2)$$

Подставив $d\Omega_1$ из (7.2) в выражение (7.1), получим

$$d^2Q_1 = J_1 \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{r^2} dF_1 dF_2. \quad (7.3)$$

Энергия излучения, испускаемого dF_1 во все полупространство, получается интегрированием (7.3) и составляет

$$dQ_1 = J_1 \pi dF_1. \quad (7.4)$$

Тогда диффузный элементарный угловой коэффициент можно определить как отношение (7.3) к (7.4)

$$d\varphi_{dF_1, dF_2} = \frac{d^2Q_1}{dQ_1} = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2. \quad (7.5)$$

Угловой коэффициент $d\varphi_{dF_2, dF_1}$ находят, используя соотношение взаимности облученности тел

$$dF_1 \cdot d\varphi_{dF_1, dF_2} = dF_2 \cdot d\varphi_{dF_2, dF_1}, \quad (7.6)$$

из которого с учетом выражения (7.5) получается

$$d\varphi_{dF_2, dF_1} = \frac{dF_1}{dF_2} d\varphi_{dF_1, dF_2} = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_1. \quad (7.7)$$

Диффузный локальный угловой коэффициент между площадками dF_1 и F_2 равен

$$\varphi_{dF_1, F_2} = \int_{F_2} d\varphi_{dF_1, dF_2} = \int_{F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2. \quad (7.8)$$

Из соотношения взаимности облученности dF_1 и F_2

$$dF_1 \cdot \varphi_{dF_1, F_2} = F_2 \cdot \varphi_{F_2, dF_1} \quad (7.9)$$

и из выражения (7.8) получается формула для расчета локального углового коэффициента между площадками F_2 и dF_1

$$\varphi_{F_2, dF_1} = \frac{dF_1}{F_2} \cdot \varphi_{dF_1, F_2} = \frac{dF_1}{F_2} \int_{F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2. \quad (7.10)$$

Диффузный средний угловой коэффициент между площадками F_1 и F_2 определяют в соответствии с выражением

$$\varphi_{F_1, F_2} = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} \varphi_{dF_1, F_2} \cdot dF_1 = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} \left(\int_{F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2 \right) dF_1. \quad (7.11)$$

Соотношение взаимности облученности площадок F_1 и F_2

$$F_1 \varphi_{F_1, F_2} = F_2 \varphi_{F_2, F_1} \quad (7.12)$$

дает возможность найти коэффициент

$$\varphi_{F_2, F_1} = \frac{F_1}{F_2} \varphi_{F_1, F_2} = \frac{1}{F_2} \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2 \cdot dF_1. \quad (7.13)$$

Иногда диффузные средние угловые коэффициенты обозначают так

$$\varphi_{F_2, F_1} = \bar{\varphi}_{1,2} \quad (7.14)$$

Сведения об угловых коэффициентах для тел различной геометрии приведены в книгах, посвященных теплообмену излучением.

7.2. Метод лучевой алгебры для расчета средних угловых коэффициентов

Рассмотрим замкнутую систему непрозрачных поверхностей, бесконечно протяженных в одном направлении, рис. 7.2.

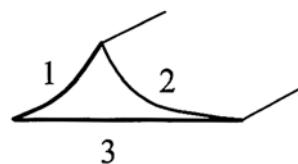


Рис. 7.2. К расчету средних угловых коэффициентов

Введем понятие взаимной поверхности лучевого обмена

$$\left. \begin{array}{l} H_{1,2} = F_1 \bar{\varphi}_{1,2}; \\ H_{1,3} = F_1 \bar{\varphi}_{1,3}; \\ H_{2,1} = F_2 \bar{\varphi}_{2,1}; \\ H_{2,3} = F_2 \bar{\varphi}_{2,3}; \\ H_{3,1} = F_3 \bar{\varphi}_{3,1}; \\ H_{3,2} = F_3 \bar{\varphi}_{3,2}. \end{array} \right\} \quad (7.15)$$

На основе соотношения взаимности облученности тел должны выполняться равенства

$$\left. \begin{array}{l} H_{1,2} = H_{2,1}, \\ H_{1,3} = H_{3,1}, \\ H_{2,3} = H_{3,2}. \end{array} \right\}. \quad (7.16)$$

Из условия замкнутости системы следует также, что

$$\left. \begin{array}{l} H_{1,2} + H_{1,3} = F_1, \\ H_{2,1} + H_{2,3} = F_2, \\ H_{3,1} + H_{3,2} = F_3. \end{array} \right\}. \quad (7.17)$$

Складывая левые и правые части выражений (7.15) с учетом (7.16) и (7.17), получим

$$H_{1,2} + H_{1,3} + H_{2,3} = \frac{1}{2}(F_1 + F_2 + F_3). \quad (7.18)$$

Вычитая из (7.18) поочередно (7.17), найдем

$$\begin{aligned} H_{1,2} &= \frac{F_1 + F_2 - F_3}{2}, \\ H_{1,3} &= \frac{F_1 + F_3 - F_2}{2}, \\ H_{2,3} &= \frac{F_2 + F_3 - F_1}{2}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Из выражений (7.19) совместно с (7.15) получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_{1,2} &= \frac{F_1 + F_2 - F_3}{2F_1}, \\ \bar{\varphi}_{1,3} &= \frac{F_1 + F_3 - F_2}{2F_1}, \\ \bar{\varphi}_{2,3} &= \frac{F_2 + F_3 - F_1}{2F_2}, \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Определим в качестве примера средний угловой коэффициент между двумя поверхностями в следующей постановке, рис. 7.3

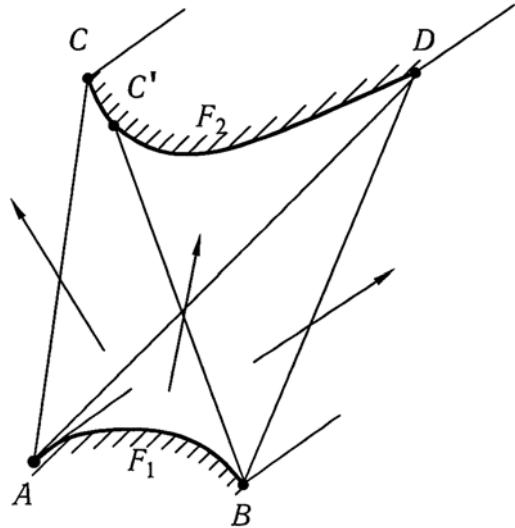


Рис. 7.3. Схема лучистого теплообмена между двумя протяженными полосами

В соответствии со схемой рис. 7.3 коэффициент $\bar{\varphi}_{1,2}$ равен

$$\bar{\varphi}_{1,2} = 1 - \bar{\varphi}_{\overline{AB},\overline{BD}} - \bar{\varphi}_{\overline{AB},\overline{AC}}. \quad (7.21)$$

Найдем коэффициенты $\bar{\varphi}_{\overline{AB}, \overline{BD}}$ и $\bar{\varphi}_{\overline{AB}, \overline{AC}}$ с помощью равенств (7.20)

$$\bar{\varphi}_{\overline{AB}, \overline{BD}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BD} - \overline{AD}}{2\overline{AB}}; \quad \bar{\varphi}_{\overline{AB}, \overline{AC}} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC' C}}{2\overline{AB}}. \quad (7.22)$$

Подставляя выражения (7.22) в формулу (7.21), найдем

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{1,2} &= \frac{2\overline{AB} - \overline{AB} - \overline{BD} + \overline{AD} - \overline{AB} - \overline{AC} + \overline{BC' C}}{2\overline{AB}} = \\ &= \frac{\overline{AD} + \overline{BC' C}}{2\overline{AB}} - \frac{\overline{BD} + \overline{AC}}{2\overline{AB}}.\end{aligned}\quad (7.23)$$

В случае, когда рассматриваемые полосы являются плоскими и расположены параллельно (рис. 7.4), из формулы (7.23) следует, что

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} - \frac{h}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} - \frac{h}{a}.\quad (7.24)$$

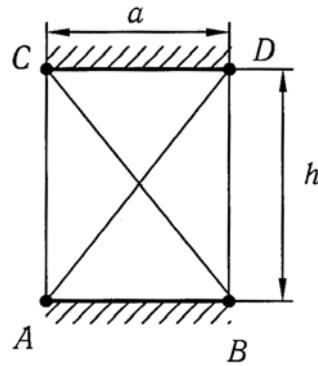


Рис. 7.4. К расчету средних угловых коэффициентов между параллельными поверхностями конечных размеров

Видно, что при $a \rightarrow \infty$ или при $h \rightarrow 0$: $\bar{\varphi}_{1,2} = 1$.

Пример. Для поддержания требуемого теплового режима бака с жидким кислородом в орбитальном комплексе используется ЭВТИ (пассивная система) и радиационный теплообменник, в который перекачивается жидкий кислород и там же охлаждается за счет излучения в космос, рис. 7.5.

Кислород из бака поступает в трубы РТО и, охлаждаясь, возвращается в бак. Трубы закреплены на днище отсека, имеющего температуру T_1 . Температура трубок соответствует температуре жидкого кислорода и равна $T_2 = T_k$; при этом $T_1 > T_2$.

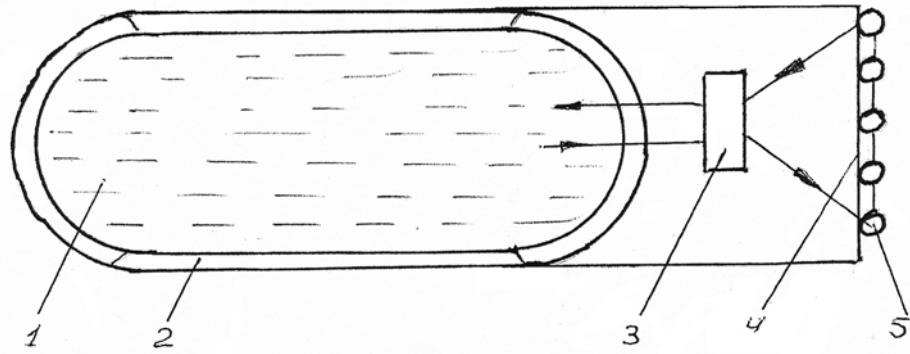


Рис. 7.5. К расчету результирующего потока: 1 – бак с жидким кислородом; 2 – ЭВТИ; 3 – насос; 4 – стенка отсека; 5 – трубы радиационного теплообменника (РТО).

Результирующий поток излучения между парой соседних трубок и днищем отсека может быть определен по формуле

$$Q_{1,2} = \varphi_{1,2} F_1 \frac{\frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma T_1^4 - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma T_2^4}{1 + \varphi_{1,2} \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) + \varphi_{1,2} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right)}. \quad (7.25)$$

Примем $\varepsilon_1 = A_1$ и $\varepsilon_2 = A_2$.

Рассмотрим лучистый теплообмен между двумя соседними трубками и участком поверхности днища между ними, рис. 7.6.

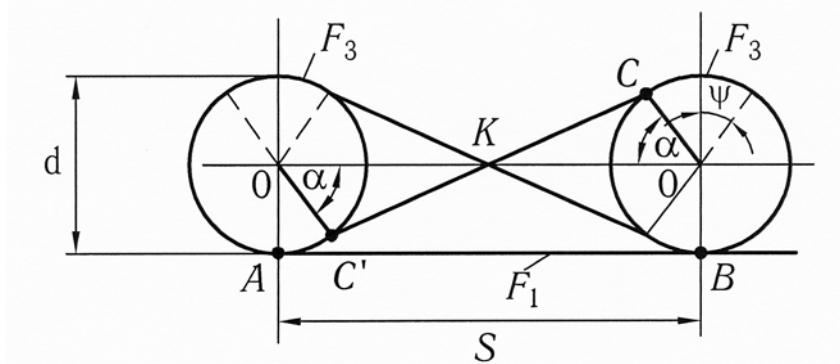


Рис. 7.6. К расчету угловых коэффициентов $\varphi_{1,2}$ и $\varphi_{2,1}$.

Обозначим F_1 — площадь поверхности днища шириной AB ; F_2 — суммарная площадь облучения поверхности двух трубок поверхностью F_1 ; F_3 — свободная от облучения поверхность трубы.

Средний угловой коэффициент, характеризующий количество лучистой энергии, передаваемой поверхностью F_1 на поверхность F_2 , равен

$$\bar{\varphi}_{1,2} = 2\bar{\varphi}_{\overline{AB},\overline{BC}}, \quad (7.26)$$

где

$$\bar{\varphi}_{\overline{AB},\overline{BC}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC'C}}{2\overline{AB}},$$

и

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= S, \quad \overline{BC} = \frac{d}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right), \\ \overline{AC'C} &= \frac{d}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + 2 \frac{d}{2} \operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + d \cdot \operatorname{tg}\alpha. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Тогда

$$\bar{\varphi}_{\overline{AB},\overline{BC}} = \frac{S + \frac{d\pi}{2} + \frac{d}{2}\alpha - \frac{d\pi}{2} + \frac{d}{2}\alpha - d\operatorname{tg}\alpha}{2S} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2S}(d\operatorname{tg}\alpha - \alpha), \quad (7.28)$$

$$\bar{\varphi}_{1,2} = 2\bar{\varphi}_{\overline{AB},\overline{BC}} = 1 - \frac{d}{S}(\operatorname{tg}\alpha - \alpha). \quad (7.29)$$

Из условия взаимности облученности тел следует, что

$$\bar{\varphi}_{2,1} = \bar{\varphi}_{1,2} \frac{F_1}{F_2} = \bar{\varphi}_{1,2} \frac{S}{2\overline{BC} \cdot 1} = \bar{\varphi}_{1,2} \cdot \frac{S}{d \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}. \quad (7.30)$$

Выражая угол α через d и S , найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{KC}{CO} = \frac{\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}{\frac{d}{2}} = \sqrt{\left(\frac{S}{d}\right)^2 - 1} \quad (7.31)$$

и угол

$$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{S}{d}\right)^2 - 1}. \quad (7.32)$$

Подставляя (7.31) и (7.32) в формулу (7.29), получим

$$\bar{\varphi}_{1,2} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{S}\right)^2} + \frac{d}{S} \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{S}{d}\right)^2 - 1}. \quad (7.33)$$

В таблице приведены значения средних угловых коэффициентов, рассчитанных по формуле (7.33) для различных отношений S/d .

S/d	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	10
$\bar{\varphi}_{1,2}$	1,000	0,817	0,658	0,467	0,360	0,294	0,151

Для дальнейшего расчета лучистого теплообмена в рассматриваемой конструкции примем $T_1 = 17^0\text{C} = 290\text{K}$ и $T_2 = -183^0\text{C} = 90\text{K}$; $\varepsilon_1 = A_1$ и $\varepsilon_2 = A_2$; $d = 40$ мм и $S = 60$ мм; $l = 1$ м; $A_1 = 0,8$; $A_2 = 0,8$.

Необходимо определить поток $Q_{1,2}$ и поток, уходящий в открытый космос через свободную поверхность трубок. При необходимости дать рекомендации по изоляции днища.

Выражения для площади поверхности F_3 и потока Q_3 имеют вид

$$F_3 = 2 \cdot \frac{d}{2} \psi l = 2 \frac{d}{2} \cdot 2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) l, \quad (7.34)$$

$$Q_3 = \varepsilon \sigma T_2^4 F_3, \quad (7.35)$$

где $\varepsilon = 0,9$.

Результирующий поток излучения от стенки отсека к суммарной поверхности двух трубок для заданных выше значений величин равен

$$\begin{aligned} Q_{1,2} &= \varphi_{1,2} F_1 \frac{\frac{\varepsilon_1}{A_1} \sigma T_1^4 - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \sigma T_2^4}{1 + \varphi_{1,2} \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) + \varphi_{2,1} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right)} = \\ &= \varphi_{1,2} F_1 \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{1 + \varphi_{1,2} \left[\left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) \right]}, \end{aligned} \quad (7.36)$$

где принято

$$\varphi_{2,1} = \varphi_{1,2} \frac{F_1}{F_2}.$$

Из таблицы для $S/d = 1,5$ выбираем $\varphi_{1,2} = 0,817$. Площади поверхностей F_1 и F_2 составляют: $F_1 = 60 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 60 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ и

$$\begin{aligned} F_2 &= 2\overline{CB} \cdot l = 2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \frac{d}{2} l = 2\left[\frac{\pi}{2} + \arctg\sqrt{1,5^2 - 1}\right] \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2} + \arctg 1,12\right) \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 2(1,58 + 0,842) \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cong 97 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \end{aligned}$$

т.к. $\arctg 1,12 = 48^0 18' = 0,842$.

Подставляя найденные и заданные значения величин в формулу (7.36), найдем

$$Q_{1,2} = 0,817 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \frac{5,67 \cdot 10^{-8} (290^4 - 90^4)}{1 + 0,817(0,25 + 0,619 \cdot 0,25)} = 14,636 \text{ Вт.}$$

Положительный знак потока $Q_{1,2}$ свидетельствует о том, что этот поток поступает к суммарной поверхности двух соседних трубок. Суммарная площадь поверхности этих трубок, через которую поток излучения свободно уходит в космос, равна

$$\begin{aligned} F_3 &= 2\left(\frac{1}{2}\pi dl - \overline{CB} \cdot l\right) = (\pi d - 2\overline{CB})l = \\ &= \pi dl - F_2 = (125,6 - 97)10^{-3} \text{ м}^2 = 28,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Поток через поверхность F_3 составит

$$Q_3 = \varepsilon\sigma T_2^4 F_3 = 0,8 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 90^4 \cdot 28,6 \cdot 10^{-3} = 85,1 \cdot 10^{-3} \text{ Вт.}$$

Сравнение значений $Q_{1,2}$ и Q_3 показывает, что уходящий с поверхности трубок поток существенно меньше потока, поступающего в них за счет переизлучения со стенкой отсека.

Если предположить, что стенка отсека закрыта изнутри слоем изоляции и принять ее температуру равной $4K$, то

$$Q_{1,2} = 0,817 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \frac{5,67 \cdot 10^{-8} (4^4 - 90^4)}{1 + 0,817(0,25 + 0,619 \cdot 0,25)} = -137 \cdot 10^{-3} \text{ Вт.}$$

Знак минус у результирующего потока указывает на то, что этот поток покидает поверхность F_2 . Таким образом, суммарный поток излучения с двух соседних поверхностей трубок составит

$$Q_{\Sigma} = Q_{1,2} + Q_3 \cong 222 \cdot 10^{-3} \text{ Вт.}$$

Дальнейшее изменение величины Q_{Σ} может быть достигнуто за счет изменения диаметра трубок, их количества и расположения в несколько рядов. Эффективной мерой для увеличения величины Q_3 может оказаться использование оребренных труб и изменение оптических свойств поверхностей, участвующих в теплообмене излучением.

ГЛАВА 2. Проектирование пассивной тепловой защиты КА

В качестве пассивной тепловой защиты космических аппаратов и отдельных агрегатов, входящих в их состав, наиболее часто используют экранно-вакуумную теплоизоляцию (ЭВТИ), представляющую собой систему экранов, передача теплового потока через которую осуществляется, в основном, посредством излучения. Обеспечение теплового режима с помощью ЭВТИ применяют, в частности, в конструкции баков с криогенной жидкостью, модулей КА и аппаратов, размещаемых на поверхности Луны и других планет. В этом случае главной задачей теплового проектирования таких конструкций является выбор необходимого числа экранов, обеспечивающих требуемый тепловой режим.

Рассмотрим вопросы теплового проектирования указанных конструкций на следующих примерах.

8. Определение числа экранов, обеспечивающих тепловой режим лунного модуля

Расчет носит поверочный характер. Будем считать заданными: форму аппарата и его размеры; количество членов экипажа и мощность, рассеиваемую приборами внутри аппарата; температуру внутри аппарата и его оболочки T_0 ; оптические свойства внешней поверхности аппарата, экранов и поверхности Луны; закон изменения температуры поверхности Луны и потока излучения Солнца во времени (угол возвышения Солнца); значения соответствующих диффузных угловых коэффициентов.

Примем также в качестве допущений, что днище аппарата идеально теплоизолировано, а поверхность Луны является абсолютно черной.

Изменение температуры поверхности Луны на ее экваторе представлено на рис. 8.1.

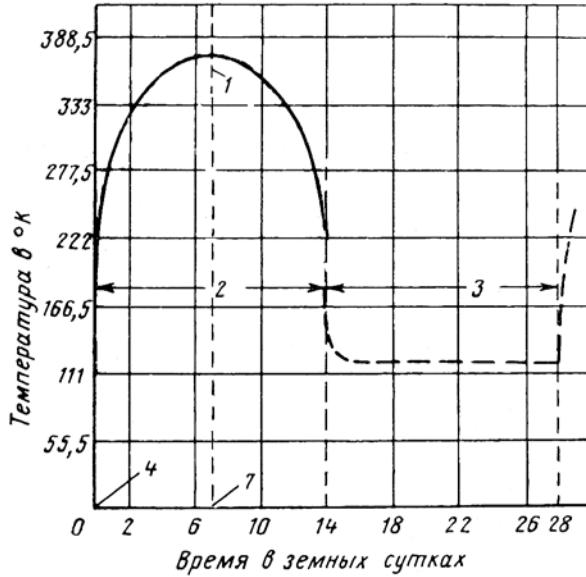


Рис. 8.1. Изменение температуры поверхности Луны во времени (в земных сутках): 1 — полдень, соответствующий 7 суткам после восхода Солнца; 2 — лунный день; 3 — лунная ночь; 4 — момент начала восхода Солнца

В период лунного дня температура лунной поверхности изменяется в соответствии с формулой

$$T_m = 373,5 \sin^{1/6}(\beta_S), \quad (8.1)$$

где β_S — угол между направлением на Солнце и горизонталью (угол возвышения Солнца), равный

$$\beta_S = \frac{90 \cdot \tau_a}{7}. \quad (8.2)$$

В формуле (8.2) τ_a — время, отсчитываемое от восхода Солнца в земных сутках.

В период лунной ночи температура поверхности Луны принимается равной 111 К.

Для участка поверхности лунного модуля, покрытого ЭВТИ с числом слоев n в условиях установившегося теплообмена справедливы следующие выражения для плотности результирующего потока излучения,

рис. 8.2:

$$q_{0,1} = \frac{\sigma(T_0^4 - T_1^4)}{\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon} - 1} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon - \varepsilon_0 \varepsilon} \sigma(T_0^4 - T_1^4); \quad (8.3)$$

$$q_{1,2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - 1} = \frac{\varepsilon \sigma(T_1^4 - T_2^4)}{(2 - \varepsilon)}; \quad (8.4)$$

$$q_{n-1,n} = \frac{\varepsilon \sigma(T_{n-1}^4 - T_n^4)}{2 - \varepsilon}; \quad (8.5)$$

$$q_n = \varepsilon_n \sigma T_n^4 - A_S q_S \cos \Theta_S - \varepsilon_n \sigma T_m^4 \varphi_{m,n}; \quad (8.6)$$

$$q_{0,1} = q_{1,2} = q_{n-1,n} = q_n. \quad (8.7)$$

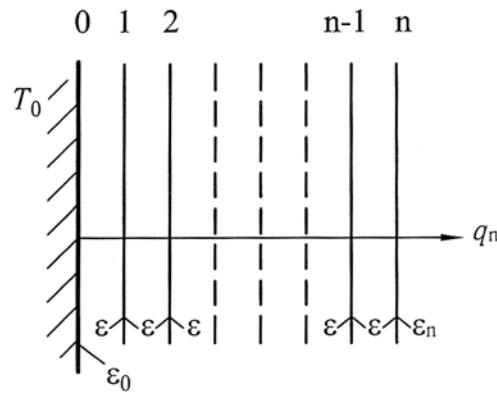
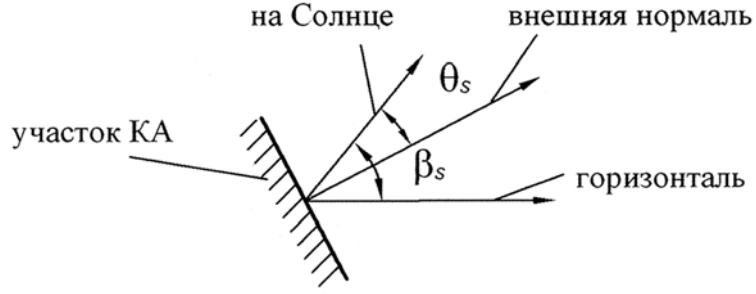


Рис. 8.2. Схема расположения экранов на поверхности лунного модуля с температурой T_0 , равной температуре, поддерживаемой внутри модуля

В формуле (8.6) $\varphi_{m,n}$ — диффузный средний угловой коэффициент, определяющий долю собственного излучения лунной поверхности, падающей на рассматриваемый участок поверхности модуля; Θ_S — угол между направлением на Солнце и внешней нормалью к поверхности участка модуля, рис. 8.3.

Рис. 8.3. К определению углов Θ_S и β_S

В уравнениях (8.3)–(8.6) содержатся четыре неизвестных температуры T_1, T_2, T_{n-1} и T_n . Для дальнейшего расчета необходимо знать лишь температуру внешнего экрана T_n . Выразим ее через известную температуру T_0 , исключив из рассмотрения другие неизвестные температуры.

Из выражений (8.4) и (8.5) с учетом (8.7) следует, что

$$T_1^4 - T_2^4 = T_{n-1}^4 - T_n^4. \quad (8.8)$$

Последнее соотношение означает, что разность четвертых степеней температур двух соседних слоев одинакова для всех слоев, участвующих в теплообмене излучением. Это обстоятельство позволяет написать

$$T_1^4 - T_n^4 = (T_{n-1}^4 - T_n^4)(n - 1). \quad (8.9)$$

Приравнивая правые части выражений (8.3) и (8.5), найдем

$$\frac{\varepsilon_0(T_0^4 - T_1^4)}{\varepsilon_0 + \varepsilon - \varepsilon_0\varepsilon} = \frac{T_{n-1}^4 - T_n^4}{2 - \varepsilon}. \quad (8.10)$$

Выразим из (8.10) в явном виде значение T_0^4

$$T_0^4 = T_1^4 + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon - \varepsilon_0\varepsilon}{\varepsilon_0(2 - \varepsilon)}(T_{n-1}^4 - T_n^4). \quad (8.11)$$

Используя далее совместно уравнения (8.5) и (8.6), получим

$$T_{n-1}^4 - T_n^4 = \frac{(2 - \varepsilon)\varepsilon_n}{\varepsilon} T_n^4 - \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon\sigma} (\varepsilon_n\sigma T_m^4 \varphi_{m,n} + A_{SQS} \cos \Theta_S). \quad (8.12)$$

Представим (8.11), подставив в него вместо T_1^4 выражение из соотношения (8.9), в виде

$$T_0^4 = T_n^4 + (T_{n-1}^4 - T_n^4) \left[\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon - \varepsilon_0 \varepsilon}{\varepsilon_0(2 - \varepsilon)} + (n - 1) \right]. \quad (8.13)$$

Заменим в последнем уравнении разность $(T_{n-1}^4 - T_n^4)$ ее значением из соотношения (8.12) и найдем

$$T_0^4 = T_n^4 + C_1 \cdot C_2 T_n^4 - C_2 C_3, \quad (8.14)$$

где

$$C_1 = \frac{(2 - \varepsilon) \varepsilon_n}{\varepsilon}; \quad (8.15)$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon - \varepsilon_0 \varepsilon}{\varepsilon_0(2 - \varepsilon)} + n - 1; \quad (8.16)$$

$$C_3 = \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon \sigma} (\varepsilon_n \sigma T_m^4 \varphi_{m,n} + A_S q_S \cos \Theta_S). \quad (8.17)$$

Из формулы (8.14) может быть найдена неизвестная температура внешнего экрана

$$T_n = \sqrt[4]{\frac{T_0^4 + C_2 \cdot C_3}{1 + C_1 \cdot C_2}}. \quad (8.18)$$

Подстановка последнего выражения в формулу (8.6) позволяет получить соотношение для расчета плотности результирующего потока излучения внешней поверхности лунного модуля

$$q_n = \varepsilon_n \sigma \left(\frac{T_0^4 + C_2 C_3}{1 + C_1 C_2} \right) - \varepsilon_n \sigma T_m^4 \varphi_{m,n} - A_S q_S \cos \Theta_S. \quad (8.19)$$

Знак результирующего потока в формуле (8.19) может быть как положительным, так и отрицательным. Положительное его значение указывает на то, что излучение покидает рассматриваемый участок поверхности, а отрицательное — наоборот.

Полный поток результирующего излучения стороны аппарата площадью F равен

$$Q = q_n \cdot F. \quad (8.20)$$

Разбивая поверхность лунного модуля на ряд участков и рассчитывая результирующие потоки для каждого из них по формуле (8.20), можно определить суммарный результирующий поток излучения для всего модуля, который либо покидает аппарат, либо проникает в него

$$Q_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N q_{n_i} \cdot F_i - Q_{\text{чел}} \cdot p - Q_{\text{пр}}, \quad (8.21)$$

где $Q_{\text{чел}}$ — мощность, рассеиваемая одним членом экипажа; p — число членов экипажа; $Q_{\text{пр}}$ — мощность, рассеиваемая приборами внутри модуля.

Для обеспечения заданной температуры T_0 в объеме модуля суммарный результирующий поток должен быть равен 0

$$Q_{\Sigma} = 0. \quad (8.22)$$

Достижение этой цели является задачей проектирования системы обеспечения теплового режима (СОТР). Выполнить условие (8.22) можно попытаться, в частности, выбором соответствующего количества экранов, закрывающих внешнюю поверхность модуля или отдельные ее части (величина n в формулах (8.16) и (8.19)). Если этой меры оказывается недостаточно, то внутри модуля следует предусмотреть нагреватель или холодильное устройство в зависимости от знака величины Q_{Σ} . Расчеты теплового режима модуля необходимо выполнить для условий лунного дня и лунной ночи.

Остановимся на некоторых частных случаях использования полученного выше выражения для плотности потока результирующего излучения (8.19). Исключая из уравнения (8.19) член, определяющий поток прямого солнечного излучения, поглощаемый изолированной оболочкой модуля, получим зависимость для расчета плотности потока результирующего излучения между экранированной стенкой и лунной поверхностью

$$q_{\pi} = \varepsilon_n \sigma \left(\frac{T_0^4 + C_2 \cdot C_3}{1 + C_1 \cdot C_2} \right) - \varepsilon_n \sigma T_m^4 \varphi_{m,n}, \quad (8.23)$$

где

$$C_3 = \frac{(2 - \varepsilon)}{\varepsilon} \varepsilon_n T_m^4 \varphi_{m,n}. \quad (8.24)$$

Если в указанных условиях теплообмена ($q_S = 0$) поверхность обращена к Луне, то в двух последних формулах достаточно строго величину углового коэффициента $\varphi_{m,n}$ можно принять равной 1.

Для расчета плотности потока результирующего излучения между плоской пластиной, обращенной к Солнцу, и Солнцем в уравнении (8.19) следует опустить слагаемые, содержащие T_m^4 , и определять q_n по формуле

$$q_n = \varepsilon_n \sigma \left(\frac{T_0^4 + C_2 C_3}{1 + C_1 C_2} \right) - A_S q_S \cos \Theta_S, \quad (8.25)$$

где

$$C_3 = \frac{(2 - \varepsilon)}{\varepsilon \sigma} A_S q_S \cos \Theta_S. \quad (8.26)$$

Плотность результирующего потока излучения, характеризующая потери тепла КА, находящегося в дальнем космосе, когда на него не действует излучение Солнца, Луны и других планет, определяется формулой

$$q_n = \frac{\varepsilon_n \sigma T_0^4}{1 + C_1 C_2}. \quad (8.27)$$

и $C_3 = 0$.

В этом случае, если излучательная способность внешней поверхности последнего экрана $\varepsilon_n = \varepsilon$, то формула (8.27) принимает вид

$$q_n = C_{\varepsilon, \varepsilon_0} \cdot \sigma T_0^4,$$

где

$$C_{\varepsilon, \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0 (1 - \varepsilon) + \varepsilon_0 [2n - 1 - (n - 1)\varepsilon]}. \quad (8.28)$$

Из последнего выражения видно, что при отсутствии экранирования ($n = 0$)

$$q_n = \varepsilon_0 \sigma T_0^4.$$

Значение равновесной температуры внешней поверхности лунного модуля $T_{n,p}$ определяется из уравнения (8.6)

$$T_{n,p} = \sqrt[4]{\frac{A_S q_S \cos \Theta_S}{\varepsilon_n \sigma} + T_m^4 \varphi_{m,n}}$$

и для заданного ее положения относительно Луны и Солнца сильно зависит от отношения поглощательной способности к излучательной A_S/ε_n .

На рис. 8.4, в качестве примера, показана зависимость равновесной температуры горизонтальной поверхности, обращенной к Солнцу ($\varphi_{m,n} = 0$) от времени для трех различных отношений A_S/ε_n .

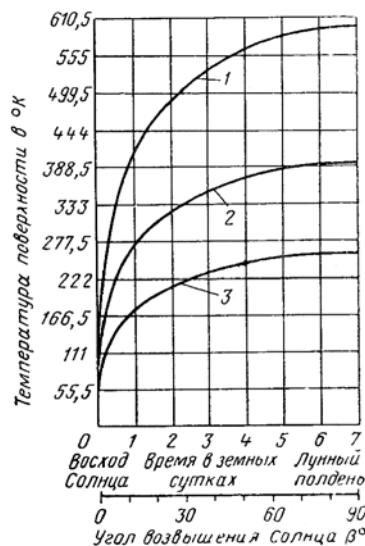


Рис. 8.4. Зависимость равновесной температуры теплоизолированной с внутренней стороны горизонтальной поверхности: 1 — полированный алюминий $\varepsilon = 0,05$, $A_S = 0,26$; 2 — черное тело; 3 — белая краска $\varepsilon = 0,95$, $A_S = 0,18$.

9. Выбор оптимального числа теплоизолирующих экранов бака с криогенным компонентом топлива

Для длительного хранения криогенного топлива в условиях космического пространства используют баки с пассивной системой обеспечения теплового режима (ПСОТР), основой которой служит многослойная экранно-вакуумная тепловая изоляция (ЭВТИ). При увеличении числа слоев ЭВТИ уменьшаются поток тепла в стенку бака и масса испарившейся жидкости, но одновременно возрастает и масса самой тепловой защиты. В этом случае одной из основных задач теплового проектирования ПСОТР является выбор такого числа экранов, которое обеспечивает минимум суммарной массы тепловой защиты $m_{\text{тепл}}$

$$m_{\Sigma} = m_{\text{тепл}} + m_{\text{исп}}.$$

Рассмотрим два варианта решения поставленной задачи, в первом из которых жидкость в баке находится при температуре испарения T_1 , а во втором — в переохлажденном состоянии при температуре $T_{\text{нач}}$.

Запишем выражение для плотности результирующего потока излучения, поступающего в условиях установившегося теплообмена к внешней теплоизолированной поверхности бака, в виде

$$q_{\text{рез}} = \frac{\sigma(T_S^4 - T_1^4)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_S} - \frac{1}{2}\right) + 2N\left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{эк}}} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_{\delta}} - \frac{1}{2}\right)}, \quad (9.2)$$

где T_S — температура внешней поверхности ЭВТИ; T_1 — температура поверхности бака, принимаемая равной средней температуре жидкости в баке; $\varepsilon_S, \varepsilon_{\text{эк}}, \varepsilon_{\delta}$ — степени черноты внешней поверхности ЭВТИ, экранов и стенки бака соответственно; N — число экранов.

В первом варианте расчета, когда все подведенное к жидкости тепло идет на ее испарение (прогрев жидкости до температуры испарения отсутствует) количество испарившейся жидкости вычисляют по формуле

$$m_{\text{исп}} = \frac{q_{\text{рез}} \cdot S \cdot \tau_{\text{исп}}}{r_{\text{исп}}}, \quad (9.3)$$

⁶⁰
где S — нагреваемая поверхность бака; $\tau_{\text{исп}}$ — время испарения; $r_{\text{исп}}$ — теплота парообразования жидкости.

Масса тепловой изоляции ЭВТИ может быть представлена суммой масс экранов $m_{\text{экр}}$ и прокладок (вуали) между ними $m_{\text{пр}}$

$$\begin{aligned} m_{\text{тепл}} &= m_{\text{экр}} + m_{\text{пр}} = NS\delta_{\text{эк}}\rho_{\text{эк}} + (N - 1)S\delta_{\text{пр}}\rho_{\text{пр}} = \\ &= [N\delta_{\text{эк}}\rho_{\text{эк}} + (N - 1)\delta_{\text{пр}}\rho_{\text{пр}}] S, \end{aligned} \quad (9.4)$$

где $\delta_{\text{эк}}, \delta_{\text{пр}}$ — толщины экранов и прокладок, а $\rho_{\text{пр}}, \rho_{\text{эк}}$ — плотности их материалов соответственно.

Подставляя в соотношение (9.3) вместо $q_{\text{рез}}$ его выражение из (9.2) и суммируя полученную зависимость с $m_{\text{тепл}}$ из (9.4), найдем

$$\begin{aligned} m_{\Sigma} &= \frac{\sigma(T_S^4 - T_1^4) S \tau_{\text{исп}}}{\left[\left(\frac{1}{\varepsilon_S} - \frac{1}{2} \right) + 2N \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{эк}}} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_{\delta}} - \frac{1}{2} \right) \right] r_{\text{исп}}} + \\ &+ [N\delta_{\text{эк}}\rho_{\text{эк}} + (N - 1)\delta_{\text{пр}}\rho_{\text{пр}}] S. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Функция m_{Σ} зависит от числа экранов и имеет экстремум. Взяв производную от m_{Σ} по числу экранов N и приравняв ее нулю, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial N} &= \frac{-2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{эк}}} - \frac{1}{2} \right) \sigma(T_S^4 - T_1^4) S \tau_{\text{исп}}}{\left[\left(\frac{1}{\varepsilon_S} - \frac{1}{2} \right) + 2N \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{эк}}} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_{\delta}} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 r_{\text{исп}}} + \\ &+ (\delta_{\text{эк}}\rho_{\text{эк}} + \delta_{\text{пр}}\rho_{\text{пр}}) S = 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{\varepsilon_S} - \frac{1}{2}; & b &= \frac{1}{\varepsilon_{\text{эк}}} - \frac{1}{2}; & c &= \frac{1}{\varepsilon_{\delta}} - \frac{1}{2}; \\ d &= 2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{эк}}} - \frac{1}{2} \right) \sigma(T_S^4 - T_1^4) S \tau_{\text{исп}}, . \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Из формулы (9.6) с учетом обозначений (9.7) следует, что

$$\frac{d}{(a + 2Nb + c)^2 r_{\text{исп}}} = K, \quad (9.8)$$

где

$$K = (\delta_{\text{эк}} \rho_{\text{эк}} + \delta_{\text{пр}} \rho_{\text{пр}}) \cdot S. \quad (9.9)$$

Выражая N из (9.8), найдем

$$N = N_{\text{опт}} = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{d}{K \cdot r_{\text{исп}}}} - \frac{a + c}{2b}. \quad (9.10)$$

После подстановки в формулу (9.10) вместо a, b, c, d и K их выражений из (9.7), (9.8) получим формулу для расчета оптимального числа экранов

$$N_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{\sigma(T_S^4 - T_1^4) \cdot \tau_{\text{исп}}}{2r_{\text{исп}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{эк}}} - \frac{1}{2} \right) (\delta_{\text{эк}} \rho_{\text{эк}} + \delta_{\text{пр}} \rho_{\text{пр}})}} - \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon_S} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_{\delta}} - \frac{1}{2} \right)}{2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{эк}}} - \frac{1}{2} \right)}. \quad (9.11)$$

Во втором варианте расчета жидкость в баке имеет температуру ниже температуры кипения и требуется некоторое время на ее подогрев до этой температуры. Если общее время пребывания аппарата на орбите составляет τ , а время нагрева переохлажденной жидкости от $T_{\text{нач}}$ до температуры кипения $\tau_{\text{н}}$, то

$$\tau_{\text{исп}} = \tau - \tau_{\text{н}}. \quad (9.12)$$

Количество энергии, затрачиваемой на изменение температуры жидкости массой $m_{\text{т}}$ в интервале $\Delta T = T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}$, связано с плотностью результирующего потока излучения соотношением

$$m_{\text{т}} c_{\text{p}} (T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}) = q_{\text{рез}} \cdot S \cdot \tau_{\text{н}}, \quad (9.13)$$

где $q_{\text{рез}}$ определяется по формуле (9.2), в которой вместо температуры T_1 используется температура $T_{\text{нач}}$.

Из формулы (9.13) время, потребное на подогрев массы компонента топлива $m_{\text{т}}$, равно

$$\tau_{\text{н}} = \frac{m_{\text{т}} c_{\text{p}} (T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}})}{q_{\text{рез}} \cdot S}. \quad (9.14)$$

Подставляя $\tau_{\text{н}}$ из (9.14) в формулу (9.12) с учетом выражения (9.2), получим

$$\tau_{\text{исп}} = \tau - \frac{m_{\text{T}} c_{\text{p}} \Delta T \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_S} - \frac{1}{2} \right) + 2N \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{ЭК}}} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_{\delta}} - \frac{1}{2} \right) \right]}{\sigma (T_S^4 - T_{\text{нач}}^4) S}. \quad (9.15)$$

Используя обозначения (9.7), запишем (9.15) в виде

$$\tau_{\text{исп}} = \tau - \frac{p(a + 2Nb + c)}{f \cdot S}, \quad (9.16)$$

где дополнительно обозначено

$$\left. \begin{aligned} p &= m_{\text{T}} c_{\text{p}} \Delta T; \\ f &= \sigma (T_S^4 - T_{\text{нач}}^4). \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

Из формулы (9.3) совместно с выражением (9.16) найдем

$$m_{\text{исп}} = \frac{q_{\text{рез}} S}{r_{\text{исп}}} \left[\tau - \frac{p(a + 2Nb + c)}{f \cdot S} \right]. \quad (9.18)$$

Принимая во внимание соотношения (9.18) и (9.4), представим суммарную массу испарившейся жидкости и тепловой изоляции так

$$m_{\Sigma} = \frac{q_{\text{рез}} \cdot S}{r_{\text{исп}}} \left[\tau - \frac{p(a + 2Nb + c)}{f \cdot S} \right] + [N\delta_{\text{ЭК}}\rho_{\text{ЭК}} + (N-1)\delta_{\text{пр}}\rho_{\text{пр}}] S. \quad (9.19)$$

Записав $q_{\text{рез}}$ в виде выражения

$$q_{\text{рез}} = \frac{f}{a + 2Nb + c},$$

преобразуем формулу (9.19) и найдем

$$m_{\Sigma} = \frac{fS\tau}{r_{\text{исп}}(a + 2Nb + c)} - \frac{p}{r_{\text{исп}}} + [N\delta_{\text{ЭК}}\rho_{\text{пр}} + (N-1)\delta_{\text{пр}}\rho_{\text{пр}}] \cdot S. \quad (9.20)$$

Для определения оптимального числа экранов, при котором масса m_{Σ} имеет минимальное значение, запишем ее производную от N и приравняем ее нулю

$$\frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial N} = -\frac{2bfS\tau}{r_{\text{исп}}(a + 2Nb + c)^2} + (\delta_{\text{ЭК}}\rho_{\text{ЭК}} + \delta_{\text{пр}}\rho_{\text{пр}}) S = 0.$$

Из последнего выражения следует, что

$$a + 2Nb + c = \sqrt{\frac{2bf\tau}{r_{\text{исп}}(\delta_{\text{эк}}\rho_{\text{эк}} + \delta_{\text{пр}}\rho_{\text{пр}})}}. \quad (9.21)$$

После подстановки в (9.21) обозначений из (9.7) и (9.17), выполняя необходимые преобразования, получим

$$N = N_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{\sigma(T_S^4 - T_{\text{нач}}^4) \cdot \tau}{2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{эк}}} - \frac{1}{2} \right) r_{\text{исп}} (\delta_{\text{эк}}\rho_{\text{эк}} + \delta_{\text{пр}}\rho_{\text{пр}})}} - \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon_S} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_{\delta}} - \frac{1}{2} \right)}{2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{эк}}} - \frac{1}{2} \right)}. \quad (9.22)$$

Полученная зависимость для оптимального числа экранов при наличии периода прогрева переохлажденной жидкости до температуры кипения (формула (9.22)) отличается от формулы (9.11) тем, что в формуле (9.22) содержится полное время функционирования бака вместо $\tau_{\text{исп}}$ и температура $T_{\text{нач}}$ вместо температуры T_1 .

Примечательно, что оптимальное число экранов не зависит от массы компонента топлива и его теплоемкости. При заданном времени функционирования бака в заправленном состоянии эти параметры влияют на время прогрева жидкости до $T_{\text{кип}}$ /формула (9.14)/ и время ее испарения /формула (9.15)/.

Через узлы соединения криогенного бака с другими элементами конструкции аппарата от них к баку может передаваться достаточно большое количество тепла путем теплопроводности и излучения, что увеличивает испарение жидкости в баке. Для решения этой проблемы в конструкции узлов соединения с целью уменьшения теплообмена могут быть использованы низкотеплопроводные материалы, экраны и малая площадь контакта деталей на пути передачи тепла теплопроводностью.

Устройства такого типа представляют собой, по-существу, большое термическое сопротивление для радиационно-кондуктивного потока тепла.

Схема одного из возможных вариантов указанного устройства представлена на рис. 9.1.

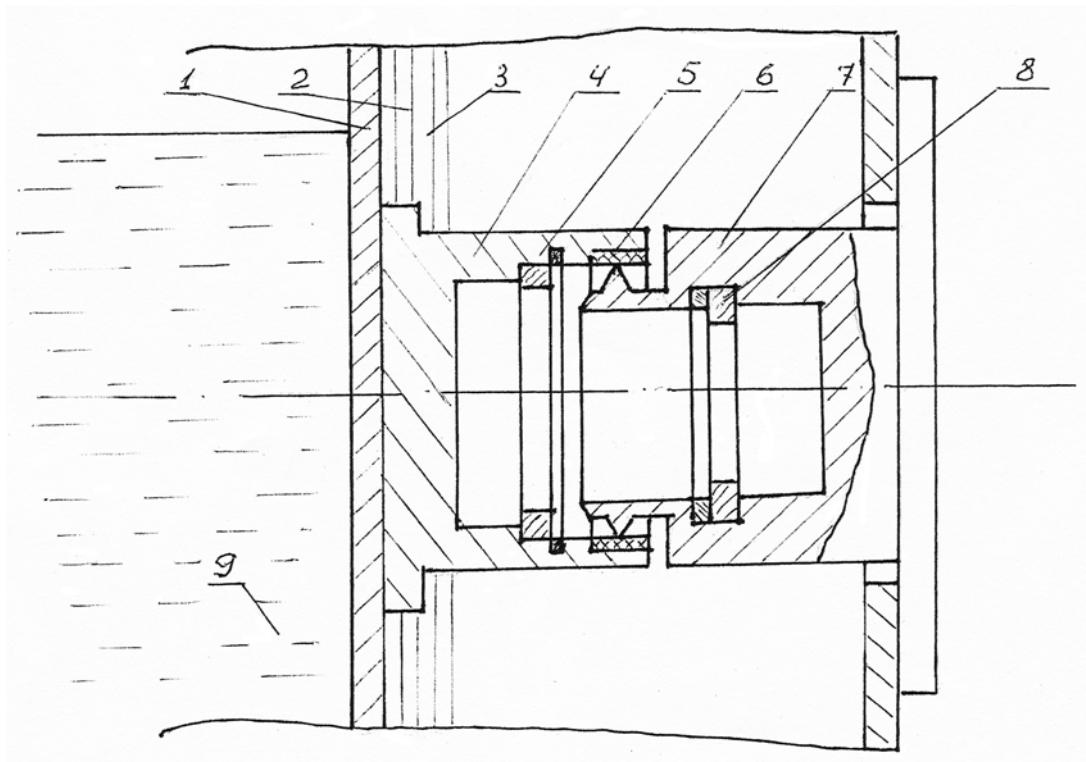


Рис. 9.1. Схема устройства теплового "моста": 1 — стенка бака с криогенным компонентом; 2 — слои экранновакуумной изоляции; 3 — прокладки; 4 — штуцер; 5 и 8 — вставки с двумя экранами каждая; 6 — кольцо из низкотеплопроводного материала; 7 — деталь крепления бака к корпусу; 9 — полость бака, заполненная жидкостью

ГЛАВА 3. Внешние тепловые нагрузки на участках выведения и спуска аппарата (атмосферные участки полета)

Можно выделить три характерных способа решения задачи об определении потоков тепла к конструкции при обтекании ее средой: теоретический; упрощенный способ, основанный на использовании аналогии между трением и теплообменом (аналогии Рейнольдса); экспериментальный способ решения задачи с привлечением теории подобия.

В любом из этих способов широко используют два закона для плотности потока теплоты

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S ,$$

$$q = \alpha(T_n - T_c) ,$$

где n — нормаль к поверхности тела, а индекс " S " означает, что производная относится к поверхности тела.

Приравнивая правые части указанных выражений, получаем дифференциальное уравнение, которое описывает процесс теплообмена на границе тела S :

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_n - T_c} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S .$$

10. Теоретический способ решения задачи определения конвективных потоков

Способ основан на использовании следующей системы уравнений.

В предположении, что теплообмен происходит в однофазной химически однородной изотропной несжимаемой жидкости эти уравнения имеют вид:

Уравнение энергии

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_V + \mu \Phi, \quad (10.1)$$

где u, v, w — проекции скорости на оси x, y, z ; q_V — плотность внутренних источников тепловыделения; Φ — функция рассеяния (диссипации) механической энергии потока

$$\begin{aligned} \Phi = 2 & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где μ — динамическая вязкость среды ($\mu = \nu \rho \rightarrow \text{кг}/\text{м}\cdot\text{с}$).

Уравнения движения в проекциях на оси x, y, z (уравнения Навье–Стокса)

$$\begin{aligned} \rho & \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]; \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} \rho & \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} \rho & \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} \right), \end{aligned} \quad (10.5)$$

где g_x, g_y, g_z — проекции вектора ускорения свободного падения.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (10.6)$$

К этим уравнениям добавляют уравнение состояния для газа

$$\rho = f(p, T) \quad (10.7)$$

и зависимости физических свойств жидкости (среды, обтекающей тело) от температуры и давления

$$c_p = c_p(p, T); \quad \lambda = \lambda(p, T); \quad \mu = \mu(p, T). \quad (10.8)$$

Для однофазных жидкостей c_p, λ, μ практически не зависят от давления. Указанные уравнения записаны для несжимаемой жидкости, но они с хорошей точностью справедливы и для течения сжимаемых жидкостей (газов), если скорость их течения значительно меньше звуковой.

Рассматриваемая задача для получения с ее помощью конкретного решения должна быть дополнена уравнениями однозначности, к которым относятся:

1. Геометрические условия, характеризующие форму и размер тела, обтекаемого жидкостью.

2. Граничные условия, характеризующие распределение скорости, давления, температуры на поверхности тела S и во входном и выходном сечениях канала. При феноменологическом описании процессов теплообмена скорость на поверхности тела S принимается равной нулю (считается, что жидкость прилипает к поверхности), т.е.

$$\vec{v}(S) = 0. \quad (10.9)$$

Для определения температурного поля (уравнение энергии) граничные условия задают в виде граничных условий 1-го, 2-го, 3-го и т.д. рода.

3. Начальные условия, характеризующие распределение скорости и температуры в начальный момент времени при $\tau = 0$:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, 0); \quad T = T(x, y, z, 0); \quad p = p(x, y, z, 0). \quad (10.10)$$

Для стационарного процесса граничные условия по времени не изменяются, а начальные условия не нужны.

Для ламинарного течения система уравнений (10.1)–(10.10) вместе с уравнением теплообмена является замкнутой. При этом в общем случае получить аналитическое решение не удается, в связи с этим задача решается численно и возможности ее решения определяются возможностями современных ЭВМ.

Для турбулентного течения рассматриваемая система уравнений незамкнута, так как для мгновенных значений параметров задача является нестационарной и имеющихся представлений о турбулентном течении недостаточно для задания начальных условий (10.10).

11. Упрощенный способ определения конвективных потоков, основанный на использовании аналогии между трением и теплообменом

Рассмотрим вывод формулы для аналогии Рейнольдса, используя следующие допущения. Примем $\partial p / \partial x = 0$ и $\Pr = \nu/a = 1$. Из второго допущения следует, что

$$\lambda = \mu \cdot c_p. \quad (11.1)$$

Запишем для случая химически однородной несжимаемой среды уравнение движения в форме уравнения Прандтля и уравнение энергии:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (11.2)$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (11.3)$$

Введем две безразмерные переменные

$$\bar{u} = \frac{u}{u_\infty} \quad \text{и} \quad \bar{T} = \frac{T - T_\pi}{T_\infty - T_\pi}.$$

Перепишем (11.2) и (11.3) с учетом этих обозначений в виде

$$\rho u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \mu \right); \quad (11.4)$$

$$\rho u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right), \quad (11.5)$$

где учтено, что $\lambda = \mu \cdot c_p$ и $c_p = \text{const.}$

При $y = 0$: $\bar{u} = \bar{T} = 0$ и при $y = \delta$: $\bar{u} = \bar{T} = 1$.

Примем, что и для всех промежуточных значений y между 0 и δ выполняется равенство $\bar{u} = \bar{T}$. В этом случае уравнения (11.4) и (11.5) оказываются тождественными. Это обстоятельство указывает на то, что механизм передачи тепла и импульса одинаков.

Запишем далее выражение для касательных напряжений, справедливое для ламинарного течения

$$\tau_{\pi} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\pi} = \mu u_{\infty} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{\pi}. \quad (11.6)$$

Подставляя в (11.6) выражение для \bar{u} в виде

$$\bar{u} = \frac{T - T_{\pi}}{T_{\infty} - T_{\pi}},$$

найдем

$$\begin{aligned} \tau_{\pi} &= \frac{\mu u_{\infty}}{T_{\infty} - T_{\pi}} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\pi} = -\lambda \frac{u_{\infty}}{c_p(T_{\pi} - T_{\infty})} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\pi} = \frac{q u_{\infty}}{c_p(T_{\pi} - T_{\infty})} = \\ &= \frac{\alpha u_{\infty} \mu}{\lambda}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Поделив обе части (11.7) на ρu_{∞}^2 , получим

$$\frac{\tau_{\pi}}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{1}{2} c_f = \frac{\alpha x \cdot \nu}{\lambda u_{\infty} x} = \text{Nu}_x \cdot \text{Re}_x^{-1}, \quad (11.8)$$

где c_f — безразмерный коэффициент трения.

Из (11.8) находим

$$\text{Nu}_x = \frac{1}{2} c_f \text{Re}_x. \quad (12.9)$$

Для случая, когда $\text{Pr} \neq 1$ эта связь между α_x и c_f имеет вид

$$\text{Nu}_x = \frac{1}{2} c_f \text{Re}_x \cdot f(\text{Pr}). \quad (11.10)$$

Для ламинарного течения

$$\text{Nu}_x = \frac{1}{2} c_f \text{Re}_x \cdot \text{Pr}^{1/3} \quad (11.11)$$

$$\text{Nu}_x = \frac{1}{2} c_f \text{Re}_x \cdot \text{Pr}^{0,4}. \quad (11.12)$$

Рассмотрим далее определение выражения для $(1/2)c_f$ отдельно для ламинарного и турбулентного течений.

11.1. Конвективный поток тепла к плоскому элементу конструкции при ламинарном режиме обтекания

В области ламинарного течения отсутствуют вихри, характерные для турбулентного режима течения, а передача тепла и импульса по перек потока осуществляется за счет колебания молекул относительно положения равновесия (рис. 11.1).

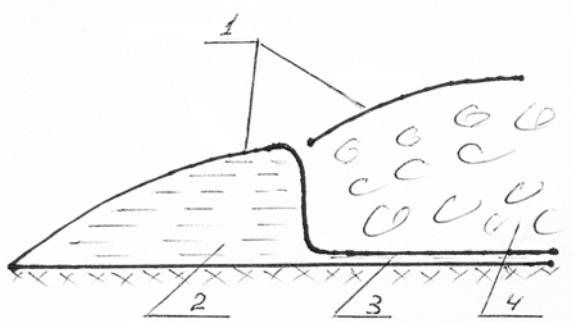


Рис. 11.1. Схема течения в пограничном слое: 1 — граница пограничного слоя; 2 — ламинарный пограничный слой; 3 — тонкий ламинарный подслой; 4 — турбулентный пограничный слой

Запишем уравнение импульсов (уравнение Кармана)

$$\frac{\tau_{\pi}}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx}, \quad (11.13)$$

где δ^{**} — толщина потери импульса

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_{\infty} u_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}} \right) dy. \quad (11.14)$$

Для несжимаемого потока $\rho \approx \rho_\infty$ и

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \bar{u}(1 - \bar{u}) dy = \delta \int_0^1 \bar{u}(1 - \bar{u}) d\eta, \quad (11.15)$$

где $\eta = y/\delta$ — безразмерная координата.

Примем для ламинарного пограничного слоя

$$\bar{u} = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3. \quad (11.16)$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 и a_3 найдем из граничных условий

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \eta = 0 : \bar{u} = 0 \text{ и } \bar{u}'' = 0; \\ \text{при } \eta = 1 : \bar{u} = 1 \text{ и } \bar{u}' = 0. \end{array} \right\} \quad (11.17)$$

Из (11.17) и (11.16) получаем $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 = \frac{3}{2}$ и $a_3 = -\frac{1}{2}$.

Тогда

$$\bar{u} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3. \quad (11.18)$$

Подставляя (11.18) в (11.15), получим

$$\delta^{**} = \delta \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \right) \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3 \right) d\eta = \frac{39}{280} \delta. \quad (11.19)$$

Из выражения

$$\tau_{\Pi} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\Pi} = \frac{\mu u_\infty}{\delta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)_{\Pi} \quad (11.20)$$

и формулы (11.18) следует, что

$$\tau_{\Pi} = \frac{3}{2} \frac{\mu u_\infty}{\delta} \quad \text{или} \quad \frac{\tau_{\Pi}}{\rho u_\infty^2} = \frac{3}{2} \frac{\nu}{u_\infty \delta}. \quad (11.21)$$

Подставим (11.21) и (11.19) в уравнение (11.13) и найдем

$$\frac{3}{2} \frac{\nu}{u_\infty \delta} = \frac{39}{280} \frac{d\delta}{dx}. \quad (11.22)$$

Разделяя в (11.22) переменные x и δ , запишем

$$\frac{140}{13} \frac{\nu dx}{u_\infty} = \delta d\delta. \quad (11.23)$$

После интегрирования (11.23) получаем

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\nu x}{u_\infty} + c.$$

В этом случае при $x = 0$: $\delta = 0$ и $c = 0$ и тогда

$$\delta = 4,64 \frac{x}{\text{Re}_x^{0,5}}. \quad (11.24)$$

Подставим δ из (11.24) в (11.21) и получим

$$\frac{\tau_\pi}{\rho u_\infty^2} = \frac{1}{2} c_f = \frac{1,5\nu \text{Re}_x^{0,5}}{u_\infty \cdot 4,64x} \cong 0,323 \text{Re}_x^{-0,5}. \quad (11.25)$$

Если профиль скорости не задавать в виде полинома (11.16), а определить его из решения уравнения движения (более точное решение задачи), то

$$\frac{1}{2} c_f = 0,332 \text{Re}_x^{-0,5}. \quad (11.26)$$

Подставим последнее выражение для $\frac{1}{2} c_f$ в (11.11) и найдем

$$\text{Nu}_x = 0,332 \text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{1/3}. \quad (11.27)$$

Или так

$$\frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x^{0,5}} = 0,332 \text{Pr}^{1/3}. \quad (11.28)$$

Последняя запись удобна тем, что правая часть ее не зависит от координаты x .

Таким образом,

$$\alpha_x = \text{Nu}_x \frac{\lambda}{x} = 0,332 \text{Re}_x^{0,5} \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot \frac{\lambda}{x}. \quad (11.29)$$

Плотность теплового потока

$$q_x = \alpha_x (T_\pi - T_\infty). \quad (11.30)$$

Средняя плотность потока на участке от 0 до x :

$$\bar{q} = \frac{1}{x} \int_0^x q_x dx = 0,664 \frac{\lambda}{x} \text{Re}_x^{0,5} \cdot \text{Pr}^{1/3} (T_\pi - T_\infty). \quad (11.31)$$

11.2. Конвективный поток тепла к плоскому элементу конструкции при турбулентном режиме течения

Используем выражение для касательных напряжений трения, полученное на основе гидравлических экспериментов в трубах при турбулентном режиме течения жидкости

$$\frac{\tau_{\pi}}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{1}{2} c_f = \frac{0,0225}{\left(\frac{u_{\infty} \cdot \delta}{\nu}\right)^{0,25}}. \quad (11.32)$$

Примем, что безразмерная скорость в пограничном слое в направлении оси x описывается степенным законом

$$\bar{u} = \frac{u}{u_{\infty}} = \eta^{1/7}. \quad (11.33)$$

Для этого случая толщина потери импульса равна

$$\delta^{**} = \delta \int_0^1 \bar{u}(1 - \bar{u}) d\eta = \frac{7}{72} \delta. \quad (11.34)$$

Используя далее уравнение импульсов

$$\frac{\tau_{\pi}}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx}$$

и подставляя в него соотношения (11.32) и (11.34), найдем

$$\frac{0,0225}{\left(\frac{u_{\infty} \delta}{\nu}\right)^{0,25}} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx}. \quad (11.35)$$

Разделив в уравнении (11.35) переменные δ и x и выполняя интегрирование, получим

$$\delta = \frac{0,37x}{\left(\frac{u_{\infty}x}{\nu}\right)^{0,2}} = \frac{0,37x}{\text{Re}_x^{0,2}}. \quad (11.36)$$

При выводе выражения (11.36) предполагается, что интегрирование производится на участке от 0 до x и при $x = 0$: $\delta = 0$, поэтому константа интегрирования в (11.36) равна 0.

После подстановки правой части формулы (11.36) в уравнение (11.32) и выполнения преобразований, найдем

$$\frac{\tau_{\pi}}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{1}{2} c_f = 0,0289 \frac{1}{Re_x^{0,2}}. \quad (11.37)$$

Если вместо задания скорости движения в виде выражения (11.33), определить ее из уравнения движения и использовать в дальнейшем для решения рассматриваемой задачи, то коэффициент в уравнении (11.37) оказывается равным 0,0296, и уравнение преобразуется к виду

$$\frac{1}{2} c_f = 0,0296 Re_x^{-0,2}. \quad (11.38)$$

Подставляя найденное выражение для коэффициента трения в формулу для аналогии Рейнольдса, получим уравнение для расчета коэффициента теплоотдачи на плоском элементе конструкции при турбулентном режиме течения

$$Nu_x = 0,0296 Re_x^{0,8} \cdot Pr_n^{0,4}.$$

12. Экспериментальный способ определения конвективных потоков

В основе этого способа определения потоков тепла лежит эксперимент и теория подобия, позволяющая обобщить результаты единичных опытов по исследованию конвективного теплообмена на широкий класс подобных явлений. Рассмотрим указанный подход на следующем примере.

Пример. Между корпусом ракеты, установленной на стартовом столе, и воздухом, обдувающим ее, происходит теплообмен путем вынужденной конвекции.

Требуется:

1. Написать систему уравнений, описывающих процесс теплообмена, и найти критерии подобия, характеризующие теплообмен.

2. Представить решение указанной системы в виде зависимости между критериями подобия.

3. С помощью опытных данных, полученных на модели (таблица 12.1), определить коэффициенты критериального уравнения c и n .

4. Используя полученное критериальное уравнение, вычислить коэффициент теплоотдачи и определить, на сколько градусов охладится горючее в баке ракеты за 30 минут при следующих дополнительных данных:

горючее — керосин: $\rho = 800 \text{ кг}/\text{м}^3$; $c_p = 2,095 \cdot 10^3 \text{ Дж}/\text{кг}\cdot\text{град}$;
 $T_{\text{нач}} = T_{\text{n}} = 30^\circ\text{C}$;

диаметр ракеты $d_p = 1,6 \text{ м}$;

высота бака горючего $H = 4 \text{ м}$;

температура стенки керосинового бака постоянна $T_{\text{n}} = 20^\circ\text{C}$;

температура воздуха $T_{\text{cp}} = -40^\circ\text{C}$;

скорость воздуха $u = 10 \text{ м}/\text{с}$;

теплопроводность воздуха $\lambda_{-40^\circ\text{C}} = 2,117 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}/\text{м}\cdot\text{град}$;

кинематическая вязкость воздуха $\nu_{-40^\circ\text{C}} = 10,04 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Решение.

1. Процесс теплообмена между корпусом ракеты и окружающей средой происходит в соответствии с уравнением теплообмена

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_{\text{n}} - T_{\infty}} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (12.1)$$

Изменение температуры среды, контактирующей со стенкой корпуса ракеты, показано на рис. 12.1.

Существенное влияние на теплообмен, как это видно из уравнения (12.1), оказывает температурное поле вблизи внешней поверхности корпуса. Для определения профиля температуры используют уравнение энергии, которое для установившегося теплообмена несжимаемой жидкости имеет вид

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (12.2)$$

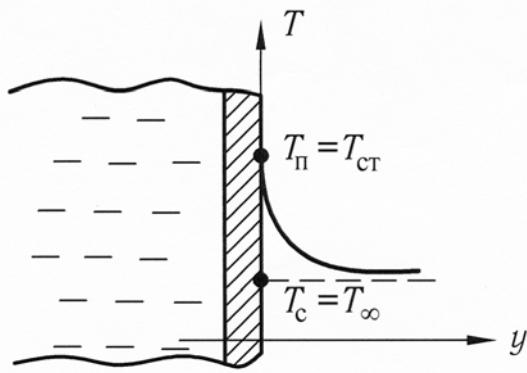


Рис. 12.1. Изменение температуры среды на границе со стенкой корпуса ракеты

При записи уравнения (12.2) принято, что теплофизические свойства среды не зависят от температуры и давления.

Скорости потока u и v в уравнении (12.2) должны быть определены из уравнения движения и уравнения неразрывности среды. Характер движения воздуха вблизи корпуса с достаточно малой погрешностью можно принять таким же, как и при обтекании плоской пластины. В этом случае уравнение движения можно записать в форме уравнения Прандтля

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (12.3)$$

а уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (12.4)$$

Система уравнений содержит четыре неизвестных α, T, u и v и с этой точки зрения является замкнутой, хотя для их определения, конечно, должны быть заданы соответствующие краевые условия. В теории подобия последнее обстоятельство учитывается третьей теоремой подобия, в соответствии с которой для подобия рассматриваемых явлений необходимо подобие условий однозначности.

Используем далее систему уравнений (12.1)–(12.4) для описания процесса теплообмена основного изделия и его модели. Обозначив все параметры, относящиеся к натурному изделию, одним штрихом, а к модели — двумя, запишем

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -\frac{\lambda'}{(\Delta T)'} \cdot \frac{\partial T'}{\partial y'}, \\ u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} &= a' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial T'}{\partial y'} \right), \\ u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y'} \left(\nu' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right), \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha'' &= -\frac{\lambda''}{(\Delta T)''} \cdot \frac{\partial T''}{\partial y''}, \\ u'' \frac{\partial T''}{\partial x''} + v'' \frac{\partial T''}{\partial y''} &= a'' \frac{\partial}{\partial y''} \left(\frac{\partial T''}{\partial y''} \right), \\ u'' \frac{\partial u''}{\partial x''} + v'' \frac{\partial u''}{\partial y''} &= \frac{\partial}{\partial y''} \left(\nu'' \frac{\partial u''}{\partial y''} \right), \\ \frac{\partial u''}{\partial x''} + \frac{\partial v''}{\partial y''} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

Учитывая, что рассматриваемые процессы теплообмена должны быть подобны, а следовательно, должны быть подобны и все величины, характеризующие эти процессы, запишем связь между этими величинами через множители преобразования c_i :

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x' \cdot c_l; \quad y'' = y' \cdot c_l; \quad \lambda'' = \lambda' \cdot c_\lambda; \quad \alpha'' = \alpha' \cdot c_\alpha; \quad T'' = T' \cdot c_T; \\ u'' &= u' \cdot c_u; \quad v'' = v' \cdot c_u; \quad a'' = a' \cdot c_a. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Представим далее систему уравнений, определяющих процесс теплообмена модели (12.6), используя соотношения (12.7), в виде

$$\left. \begin{aligned} \alpha' \cdot c_\alpha &= -\frac{\lambda' \cdot c_\lambda}{\Delta T' c_T} \frac{c_T}{c_l} \frac{\partial T'}{\partial y'}; \\ \frac{c_u \cdot c_T}{c_l} \left(u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) &= \frac{c_a c_T}{c_l^2} a' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial T'}{\partial y'} \right), \\ \frac{c_u^2}{c_l} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) &= \frac{c_\nu \cdot c_u}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial y'} \cdot \left(\nu' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right); \\ \frac{c_u}{c_l} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

Видно, что системы уравнений (12.8) и (12.5) будут тождественны, если множители преобразования будут связаны соотношениями:

$$c_\alpha = \frac{c_\lambda}{c_l}; \quad c_u = \frac{c_\nu}{c_l}; \quad c_u = \frac{c_a}{c_l}; \quad \frac{c_u}{c_l} = \text{const.}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\frac{c_\alpha c_l}{c_\lambda} = 1; \quad \frac{c_u c_l}{c_\nu} = 1; \quad \frac{c_u c_l}{c_a} = 1.$$

Если в последние соотношения вместо множителей преобразования подставить их выражения из (12.7), например,

$$\frac{\alpha'' x'' \lambda'}{\alpha' \cdot x' \lambda''} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{\alpha'' x''}{\lambda''} = \frac{\alpha' x'}{\lambda'} = \frac{\alpha x}{\lambda},$$

то получим следующие критерии подобия*:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda}; \quad \text{Re} = \frac{ul}{\nu}; \quad \text{Pe} = \frac{ul}{a}.$$

Из уравнения сплошности не получаются критерии подобия, поскольку они тождественны при любом значении отношения c_u/c_l .

Критерий Пекле можно представить как произведение двух критериев — Рейнольдса и Прандтля

$$\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr} = \frac{ul}{\nu} \frac{\nu}{a},$$

где $\text{Pr} = \nu/a$.

2. В соответствии со второй теоремой подобия решение системы уравнений (12.1)-(12.4) следует записать в виде функции между определяемым (неопределяющим) критерием Nu и определяющими критериями

$$\text{Nu} = c \cdot \text{Re}^n \cdot \text{Pr}^m. \quad (12.9)$$

Критерий Pr зависит в основном от температуры и в интервале температур воздуха от -40°C до $+30^{\circ}\text{C}$ изменяется незначительно. В связи с этим формулу (12.9) удобно записать в следующем виде

$$\text{Nu} = c\text{Re}^n. \quad (12.10)$$

*Замечание. Принято различать критерии и числа подобия. Критерии подобия — это такие комплексы, которые целиком состоят из параметров, заданных по условию, например, критерии Pr , Bi , Re . Если в состав безразмерного комплекса входит переменная величина, например, время τ ($F_0 = a\tau/h^2$) или коэффициент теплоотдачи α ($\text{Nu} = \alpha l/\lambda$), то такие комплексы принято называть числами подобия.

3. Для определения коэффициентов c и n в формуле (12.10) используем опытные данные, полученные в экспериментах с моделью ракеты диаметром $d_m = 0,12$ м и высотой $H_m = 0,6$ м (ее цилиндрическая часть), таблица 12.1.

Таблица 12.1

№	1	2	3	4	5	6	7	8
U, B	25,0	29,2	34,3	48,7	49,7	49,5	63,3	58,9
I, A	10,6	12,4	14,6	20,7	21,1	21,0	28,0	25,0
$T_{\text{п}}, {}^{\circ}\text{C}$	54	47	42	45	37	34	41	33
$u, \text{м/с}$	7,0	13	25	53	91	118	147	192

Полагая, что количество теплоты, выделяемое в оболочке модели (рис. 12.2), нагреваемой электрическим током

$$Q = IU, \text{ Вт}, \quad (12.11)$$

равно теплоте, отдаваемой оболочкой в окружающую среду путем конвекции

$$Q = \alpha_m (T_{ct} - T_{cp}) F_m, \text{ Вт}, \quad (12.12)$$

найдем

$$\alpha_m = \frac{IU}{(T_n - T_{cp}) F_m}, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град}), \quad (12.13)$$

где F_m — теплоотдающая поверхность модели, равная $\pi d_m H_m$.

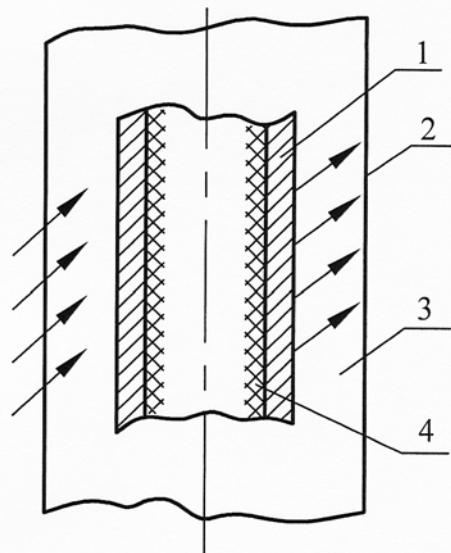


Рис. 12.2. Модель бака ракеты, нагреваемого электрическим током: 1 — стенка бака; 2 — кожух; 3 — зазор, продуваемый воздухом; 4 — изоляция на внутренней поверхности бака

Внутренняя поверхность цилиндрической модели закрыта слоем изолирующего материала.

Температура набегающего потока воздуха и его теплофизические свойства приняты постоянными и равными:

$$T_{cp} = 20^\circ\text{C}; \nu_{20^\circ\text{C}} = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \lambda_{20^\circ\text{C}} = 2,5935 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}).$$

Результаты обработки опытных данных приведены в таблице 12.2, в которой приняты следующие обозначения:

$$\text{Nu}_M = \frac{\alpha_M d_M}{\lambda_{20^\circ\text{C}}}; \quad \text{Re}_M = \frac{u_M \cdot d_M}{\nu_{20^\circ\text{C}}}$$

Таблица 12.2

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$IU, \text{Вт}$	265,0	362,1	500,8	1008,1	1048,7	1039,5	1869,7	1472,5
$(T_\pi - T_{cp}) = \Delta T$	34	27	22	25	17	14	21	13
$IU / \Delta T$	7,794	13,410	22,760	40,320	61,680	74,250	89,030	113,200
$\alpha_M = 4,4232 \frac{IU}{\Delta T}$	34,474	59,315	100,672	178,343	272,823	328,423	393,7979	500,706
Nu_M	159,477	274,391	465,699	825,000	1262,1	1519	1822	2316
$\text{Re}_M \cdot 10^{-6}$	0,05578	0,1036	0,1992	0,4223	0,7251	0,9402	1,1713	1,5189
$\lg \text{Nu}_M$	2,201	2,438	2,668	2,917	3,100	3,182	3,260	3,366
$\lg \text{Re}_M$	4,747	5,015	5,299	5,625	5,860	5,973	6,068	6,182

На рисунке 12.3 представлена зависимость

$$\lg \text{Nu}_M = f(\lg \text{Re}_M),$$

построенная по данным таблицы 12.2.

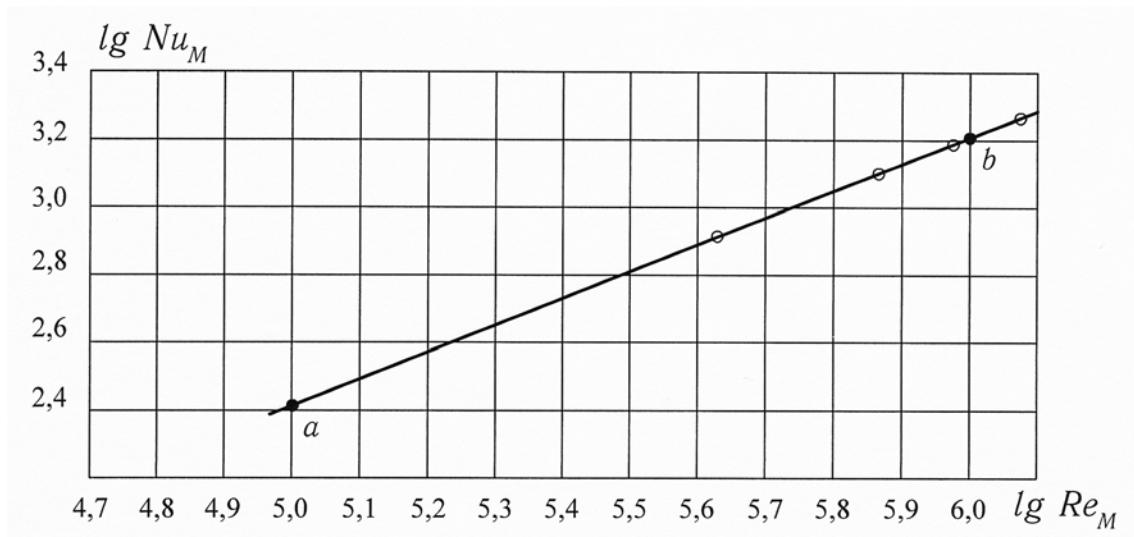


Рис. 12.3. Зависимость безразмерного коэффициента теплоотдачи Nu_M от числа Рейнольдса

Выделяя на прямой линии рис. 12.3 две точки a и b и используя уравнение этой линии в виде

$$\lg \text{Nu}_m = \lg c + n \lg \text{Re}_m,$$

полученное логарифмированием выражения (12.10), находим коэффициенты n и c :

$$n = \frac{\lg \text{Nu}_b - \lg \text{Nu}_a}{\lg \text{Re}_b - \lg \text{Re}_a} = \frac{3,215 - 2,415}{6,000 - 5,000} = 0,8;$$

$$\lg c = \lg \text{Nu}_a - n \lg \text{Re}_a = 2,415 - 0,8 \cdot 5,000 = -1,585 \text{ и}$$

$$c = 0,026.$$

Подстановка найденных значений n и c в формулу (12.10) дает следующую обобщенную зависимость для определения коэффициента теплоотдачи между корпусом ракеты (и модели) и обдувающим ее воздухом

$$\text{Nu} = 0,026 \text{Re}^{0,8} = 0,0296 \text{Re}^{0,8} \cdot \text{Pr}^{0,4}, \quad (12.14)$$

где $\text{Pr} = 0,7$.

В формуле (12.14) за определяющую температуру принята средняя температура набегающего на изделие потока T_{cp} . Формула справедлива при $\text{Re} \geqslant 5 \cdot 10^4$.

4. Коэффициент теплоотдачи от корпуса ракеты к воздуху составляет

$$\alpha = 0,026 \text{Re}^{0,8} \cdot \frac{\lambda}{d_p} = 0,026 \left(\frac{10 \cdot 1,6}{10,04 \cdot 10^{-6}} \right)^{0,8} \frac{2,117 \cdot 10^{-2}}{1,6} = 31,55 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}.$$

Количество тепла, отводимое от корпуса бака ракеты за время 0,5 часа, равно

$$Q = \alpha(T_n - T_{cp})F \cdot \tau = 31,55[20 - (-40)]\pi d_p H \cdot 0,5 \cdot 3600 = 68,489 \cdot 10^6 \text{ Дж},$$

где $d_p = 1,6$ м и $H = 4$ м.

Масса керосина в баке горючего

$$m = V_\delta \cdot \rho = \frac{\pi d_p^2}{4} H \cdot \rho = 0,785 \cdot 1,6^2 \cdot 4 \cdot 0,8 \cdot 10^3 = 6440 \text{ кг}.$$

Изменение температуры горючего в баке вследствие охлаждения

$$\Delta T = \frac{Q}{mc_p} = \frac{68,489 \cdot 10^6}{6440 \cdot 2,095 \cdot 10^3} = 5,3^0 \text{C}.$$

Средняя температура горючего в баке в результате его охлаждения за 0,5 часа составит

$$\bar{T} = T_{\text{h}} - \Delta T = 30 - 5,3 = 24,7^0 \text{C}.$$

13. Основные соотношения и особенности теплообмена в сжимаемом потоке

С возрастанием скорости полета вблизи стенки образуется слой газа с высокой температурой, нагревающий оболочку аппарата. Температура газа может достигать значения, близкого к температуре заторможенного потока (рис. 13.1-13.3)

$$T_{\text{он}} = T_{\text{h}} + \frac{u_{\text{h}}^2}{2c_p} = T_{\text{h}} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_{\text{h}}^2 \right). \quad (13.1)$$

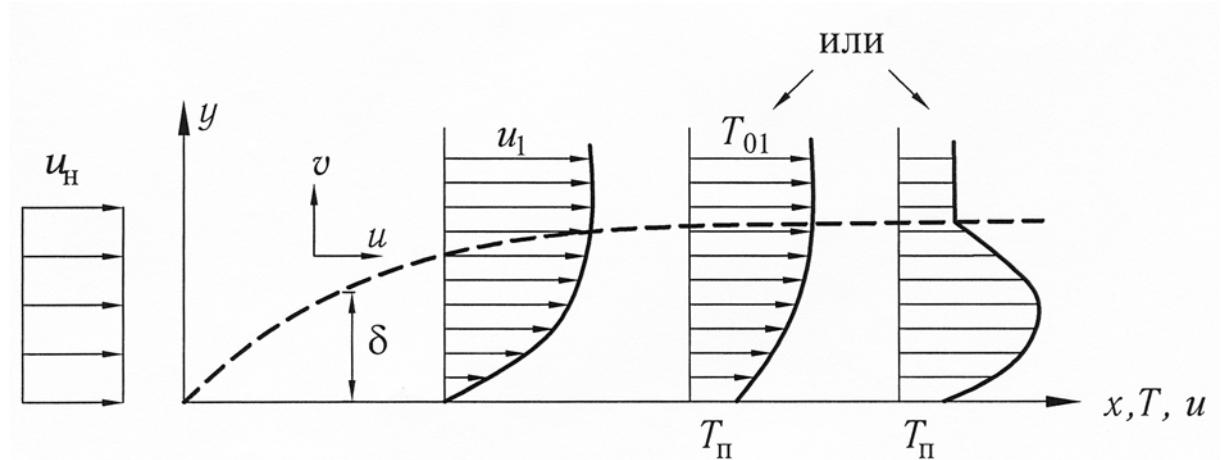


Рис. 13.1. Пояснения к обозначениям параметров потока, используемых при анализе обтекания пластины

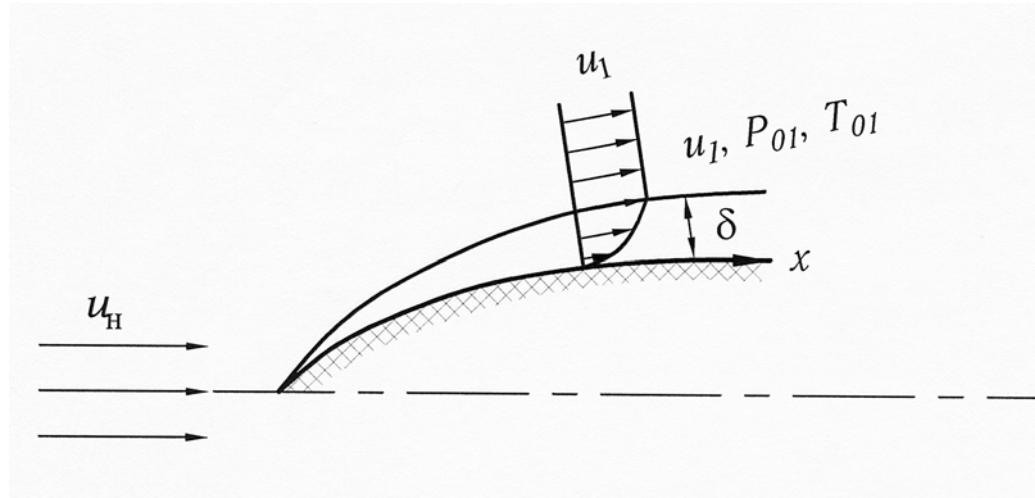


Рис. 13.2. Пояснения к обозначениям параметров потока, используемым при анализе внешнего обтекания тела вращения

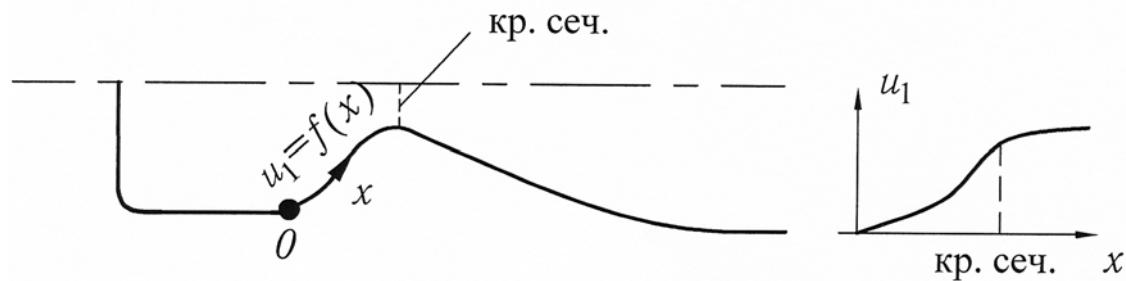


Рис. 13.3. Характер изменения скорости потока при течении в сопловом блоке двигателя

В формуле (13.1) переход от скорости потока u_{H} к числу Маха M_{H} основан на использовании следующих соотношений

$$M_{\text{H}} = \frac{u_{\text{H}}}{a_{\text{H}}}; \quad \frac{c_p}{c_v} = k; \quad c_p - c_v = R \quad \text{и} \quad a_{\text{H}} = \sqrt{kRT_{\text{H}}},$$

где T_{H} — температура набегающего потока; $k = \frac{c_p}{c_v}$, для воздуха $k = 1,4$, M_{H} — число Маха.

Уже при $T_{\text{H}} = 273$ К при $M \geq 2,5$ температура в пристеночном слое газа может достигать значений ~ 600 К. При $M > 5$ требуется специальная защита конструкций, а при $M > 10$ практически не удается создать неохлаждаемую конструкцию.

Расчет плотности потока к поверхности конструкции производится (при $\text{Pr} = 1$) по формуле

$$q_{\pi} = \alpha(T_{01} - T_{\pi}), \quad (13.2)$$

где T_{01} — температура заторможенного потока вне пограничного слоя

$$T_{01} = T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right), \quad (13.3)$$

Температура заторможенного потока внутри пограничного слоя T_0

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right), \quad M = \frac{u}{a}.$$

Коэффициент теплоотдачи α в формуле (13.2) может не совпадать с его значением при малых скоростях и должен быть определен из решения уравнений пограничного слоя. Однако, поскольку главная величина, учитывающая возрастание скорости — T_{01} , выделена в составе перепада температур ($T_{01} - T_{\pi}$), то отличие в α при малых и больших скоростях не очень велико. Если $T_{01} > T_{\pi}$, то $q_{\pi} > 0$ и конструкция нагревается. Формула (13.2) для расчета плотности потока тепла не учитывает все особенности теплообмена в сжимаемом химически пассивном газовом потоке, особенно при $\text{Pr} \neq 1$, поэтому рассмотрим этот вопрос подробнее.

Увеличение скорости полета аппарата приводит к образованию внутри пограничного слоя больших градиентов температуры, а в направлении обтекания поверхности — заметного изменения давления. В этом случае существенно изменяются плотность ρ и другие теплофизические свойства воздуха (c_p, λ, μ). Влияние на конвективный теплообмен сжимаемости воздуха при обтекании плоской или слегка искривленной поверхности рекомендуется учитывать при числе $M \geq 0,7$, а при обтекании притупления даже при более низком значении $M = 0,45$.

Помимо указанных особенностей при обтекании поверхности аппарата сверхзвуковым потоком значительно возрастает роль дополнительного выделения тепла в пограничном слое за счет работы сил трения

$$q_{\tau} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad \text{Вт}/\text{м}^3$$

и за счет работы сил давления

$$q_p = u \frac{\partial p}{\partial x}, \text{ Bt/m}^3.$$

С учетом двух последних выражений уравнение энергии для сжимаемого потока газа принимает вид

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial p}{\partial x}, \text{ Bt/m}^3, \quad (13.4)$$

а уравнение движения —

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x}, \text{ H/m}^3. \quad (13.5)$$

Комбинация двух последних уравнений (см. замечание к выводу уравнения (13.6)) дает новое уравнение энергии

$$\rho c_p u \frac{\partial T_0}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right], \quad (13.6)$$

где T_0 — температура заторможенного потока газа в пограничном слое.

Для критерия Прандтля $Pr = 1$ уравнение энергии (13.6) становится тождественным уравнению движения (13.5) при $\partial P / \partial x = 0$ и распределение температуры торможения в пограничном слое (при $c_p = \text{const}$) становится аналогичным распределению скорости в потоке, т.е.

$$\bar{u} = \frac{u}{u_1} = \frac{T_0 - T_{\pi}}{T_{01} - T_{\pi}}.$$

Плотность потока тепла к поверхности, обтекаемой сжимаемым потоком газа, определяется по формуле

$$q = \alpha(T_e - T_{\pi}), \quad (13.7)$$

где T_e — температура восстановления

$$T_e = T_1 \left(1 + r \frac{k-1}{2} M_1^2 \right). \quad (13.8)$$

В последнем выражении $r = f(\text{Pr})$ — коэффициент восстановления температуры, показывающий, какая доля кинетической энергии внешнего потока затрачена на повышение теплосодержания газа у стенки. При

ламинарном течении вдоль плоской теплоизолированной стенки $r = \sqrt{\text{Pr}} = \sqrt{0.71} \cong 0,84$. Для турбулентного течения $r = \sqrt[3]{\text{Pr}} = \sqrt[3]{0,71} \cong 0,89$.

Для несжимаемого потока при малых скоростях полета различие между температурой T_e , численно совпадающей с температурой теплоизолированной поверхности $T_{\text{п}}$, и температурой торможения вне пограничного слоя T_{01} сравнительно невелико.

При $\text{Pr} = 1$ обе формулы для определения плотности теплового потока

$$q_{\text{п}} = \alpha (T_{01} - T_{\text{п}}), \quad (13.9)$$

$$q_{\text{п}} = \alpha (T_e - T_{\text{п}}). \quad (13.10)$$

дают одинаковый результат, поскольку $\text{Pr} = 1$ означает, что $r = \sqrt[n]{\text{Pr}} = 1$ и $T_e = T_{01}$.

Замечание к выводу уравнения (13.6)

Выполним указанные преобразования более подробно. Умножим с этой целью уравнение (13.5) на u , имея в виду получить его в той же размерности, что и уравнение (13.4). Тогда уравнение (13.5) примет вид

$$\rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u v \frac{\partial u}{\partial y} = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] u - u \frac{\partial p}{\partial x}, \text{ Вт/м}^3. \quad (13.11)$$

Сложим левые и правые части (13.4) и (13.11) и найдем

$$\begin{aligned} & \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} + \rho u v \frac{\partial u}{\partial y} = \\ & = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial p}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Запишем это уравнение еще раз, добавив в правую часть два одинаковых слагаемых с разными знаками:

$$\rho c_p u \left[\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{c_p} u \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \rho c_p v \left[\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{c_p} u \frac{\partial u}{\partial y} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]. \tag{13.13}
\end{aligned}$$

Имея в виду, что:

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p},$$

где $u = u(x, y)$ и

$$\left. \begin{aligned}
\lambda \frac{\partial T_0}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right), \\
\lambda \frac{\partial T_0}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right), \\
u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right), \\
u \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right), \\
\mu &= \text{const},
\end{aligned} \right\} \tag{13.14}$$

представим (13.13) в форме

$$\begin{aligned}
&\rho c_p u \left[\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{c_p} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] + \rho c_p v \left[\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] = \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]. \tag{13.15}
\end{aligned}$$

Сумма двух предпоследних слагаемых в правой части (13.15) равна

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 &= u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \\
&= u \frac{\partial \tau}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\tau \cdot u),
\end{aligned}$$

где

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{13.16}$$

Далее

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tau \cdot u) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]. \quad (13.17)$$

Таким образом, три последних слагаемых в правой части (13.15) можно записать так

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu - \frac{\lambda}{c_p} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13.18)$$

С учетом (13.14) и (13.18) запишем окончательно уравнение (13.15) в виде

$$\rho c_p u \frac{\partial T_0}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]. \quad (13.19)$$

Видно, что уравнения (13.19) и (13.6) тождественны.

14. Теплообмен на плоском элементе конструкции при ламинарном режиме с учетом сжимаемости потока

Для определения коэффициентов теплоотдачи при ламинарном обтекании плоских элементов конструкции с учетом сжимаемости потока используют полученную ранее формулу для несжимаемого потока, вводя в нее дополнительный сомножитель (K —фактор), учитывающий влияние сжимаемости (поправка на переменность физических свойств воздуха, связанная со сжимаемостью потока)

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0,332 Pr_{\pi}^{1/3} \cdot K. \quad (14.1)$$

Существует несколько аппроксимационных зависимостей для множителя K , одна из которых имеет вид

$$K = \left(\frac{\mu^0 \rho^0}{\mu_{\pi} \rho_{\pi}} \right)^{0,5} \cdot \frac{Pr_{\pi}}{Pr^0}, \quad (14.2)$$

где верхний индекс "0" означает, что соответствующие величины (вязкость, плотность и Pr воздуха) взяты при определяющей температуре

$$T^0 = T_1 + 0,5(T_{\text{п}} - T_1) + 0,22\omega, \quad (14.3)$$

$$\omega = \frac{k-1}{2}M_1^2 \quad / \text{в ф-ле для } T_e = T_1 \left(1 + r \frac{k-1}{2}M_1^2 \right), \quad (14.4)$$

где T_1 — температура внешнего набегающего потока ($T_1 = T_{\text{H}}$), u_1 (в M_1) — скорость внешнего набегающего потока ($u_1 = u_{\text{H}}$).

Все величины с индексом "п" взяты при температуре поверхности.

Для вычисления плотности потока тепла к поверхности используем формулу

$$q_{\text{п}} = \alpha(T_e - T_{\text{п}}), \quad (14.5)$$

где α — удобно представить в следующем виде

$$\alpha = \frac{\alpha x}{\lambda_{\text{п}}} \frac{\nu_{\text{п}}^{0,5}}{u_1^{0,5} \cdot x^{0,5}} \frac{\rho_{\text{п}}^{0,5} \rho_{\text{п}}^{0,5} \nu_{\text{п}}^{0,5} u_1^{0,5}}{x^{0,5}} \cdot \frac{\lambda_{\text{п}} c_{\text{p}}}{\nu_{\text{п}} \rho_{\text{п}} c_{\text{p}}} = \frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}} \cdot \sqrt{\frac{\rho_{\text{п}} \mu_{\text{п}} u_1}{x}} \cdot \frac{c_{\text{p}}}{\text{Pr}_{\text{п}}}. \quad (14.6)$$

Тогда

$$q_{\text{п}} = \frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}} \cdot \sqrt{\frac{\rho_{\text{п}} \mu_{\text{п}} u_1}{x}} \cdot \frac{c_{\text{p}}}{\text{Pr}_{\text{п}}} (T_e - T_{\text{п}}). \quad (14.7)$$

Используя (14.7) совместно с (14.1), найдем

$$\begin{aligned} q_{\text{п}} &= 0,332K \sqrt{\frac{\rho_{\text{п}} \mu_{\text{п}} u_1}{x}} c_{\text{p}} \text{Pr}_{\text{п}}^{-2/3} (T_e - T_{\text{п}}) = \\ &= 0,332K \cdot \frac{\rho_{\text{п}} u_1 c_{\text{p}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}} \text{Pr}_{\text{п}}^{-2/3} (T_e - T_{\text{п}}), \end{aligned} \quad (14.8)$$

где $\text{Re}_{\text{п}} = u_1 x / \nu_{\text{п}}$.

Средний тепловой поток на пластине длиной x определяется по формуле

$$q_{\text{cp}} = \frac{1}{x} \int_0^x q_{\text{п}} dx = 2q_{\text{п}}, \quad (14.9)$$

а полное количество тепла, передаваемое стенке шириной, равной единице

$$Q_{\text{п}} = q_{\text{cp}} \cdot x \cdot 1 = 2q_{\text{п}} \cdot x. \quad (14.10)$$

15. Расчет теплообмена при произвольном продольном распределении давления и ламинарном режиме течения (метод эффективной длины)

Будем пока по–прежнему рассматривать ламинарный режим течения в пограничном слое. Если рассматриваемый элемент конструкции представляет собой тело вращения, то при его обтекании в отличие от плоской пластины давление вдоль его образующей может существенно изменяться.

Для расчета потока тепла к криволинейной поверхности можно использовать формулу (14.8) для плоского элемента конструкции, но в этом случае вместо длины плоской пластины x (или Re_{Π}) в нее следует подставлять длину $x_{\text{эфф}}$ (или $Re_{\text{эфф}}$), рассчитанную особым образом. Запишем в связи с этим формулу (14.8) в виде

$$q_{\Pi} = 0,332K \cdot K_1 \sqrt{\frac{\mu_{\Pi}\rho_{\Pi}u_1}{x_{\text{эфф}}}} \cdot c_p \Pr^{-2/3}(T_e - T_{\Pi}), \quad (15.1)$$

где K_1 — поправочный коэффициент на влияние продольного градиента скорости

$$K_1 = f \left(\frac{du_1}{dx} \cdot \frac{x}{u_1} \right) = f(m),$$

определенный на основе газодинамического расчета. Некоторые сведения об этом коэффициенте приведены ниже.

При ламинарном режиме течения в пограничном слое несжимаемой жидкости с градиентом скорости, если скорость на внешней поверхности пограничного слоя изменяется по закону

$$u_1 = c \cdot x^m,$$

показатель степени m связан с углом β (рис. 15.1) и равен

$$m = \frac{\beta/\pi}{2 - \beta/\pi}. \quad (15.2)$$

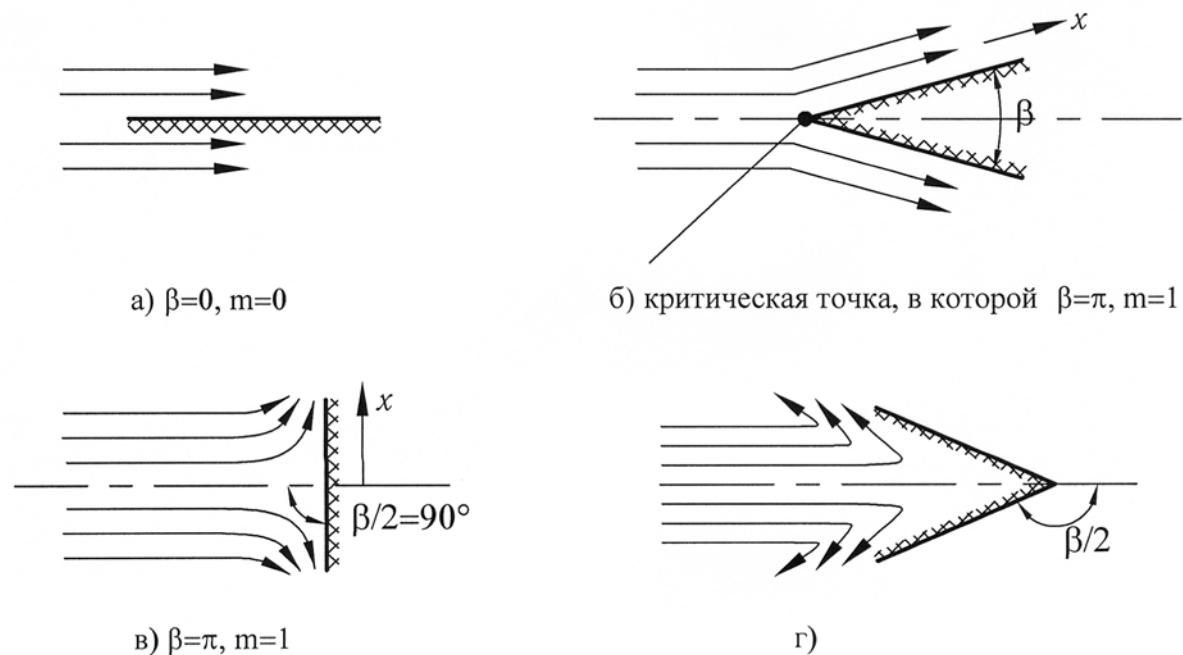


Рис. 15.1. Характер течений при обтекании плоских и клиновидных тел

Результаты расчета значений m для наиболее характерных углов β приведены в таблице 15.1.

Таблица 15.1

β	m	
π	1,000	Критическая точка
1,570	0,333	
0,627	0,111	
0,000	0,000	Плоская пластина
-0,314	-0,0476	
-0,624	-0,091	Отрыв пограничного слоя

Поясним далее физический смысл определения эффективной длины. Тепловой пограничный слой, образующийся при обтекании тела вращения, теряет часть своей энергии за счет отвода ее внутрь этого тела на длине x (рис. 15.2). Можно представить, что такое же количество

энергии будет потеряно пограничным слоем на плоской пластине (или цилиндре достаточно большого радиуса), но на некоторой неизвестной пока ее длине $x_{\text{эфф}}$.

Следовательно, для определения $x_{\text{эфф}}$ можно использовать условие равенства потерь тепла на некоторой условной (эффективной) пластине (или цилиндре) и рассматривающем теле (рис. 15.2).

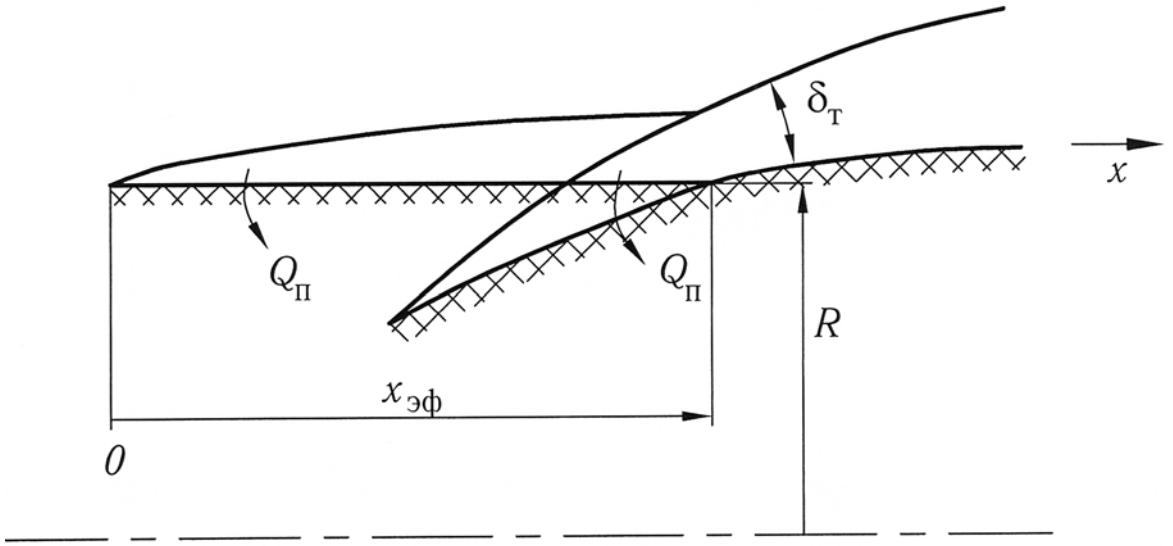


Рис. 15.2. Пояснения к схеме расчета величины $x_{\text{эфф}}$

На цилиндре с радиусом $R = \text{const}$ общее количество тепла, ушедшее из пограничного слоя на длине $x_{\text{эфф}}$ внутрь цилиндрической стенки, составит

$$Q_{\text{п}} = 2\pi R x_{\text{эфф}} q_{\text{ср}} = 4\pi R q_{\text{п}} x_{\text{эфф}}, \quad (15.3)$$

так как на пластине или цилиндре $q_{\text{ср}} = 2q_{\text{п}}$.

На рассматриваемом теле (тело вращения) на длине x отдано количество тепла

$$Q_{\text{п}} = 2\pi \int_0^x R q_{\text{п}} dx. \quad (15.4)$$

Сравнивая выражения (15.3) и (15.4), получаем

$$2R q_{\text{п}} x_{\text{эфф}} = \int_0^x R q_{\text{п}} dx. \quad (15.5)$$

Дифференцируя (15.5) по x , находим уравнение для определения $x_{\text{эфф}}$

$$2 \frac{d}{dx} (Rq_{\text{п}} x_{\text{эфф}}) = Rq_{\text{п}}. \quad (15.6)$$

Обозначив далее в формуле (15.1) по аналогии с выражением (14.1)

$$0,332K \cdot K_1 \cdot \text{Pr}^{1/3} = \frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}}, \quad (15.7)$$

представим ее в виде

$$q_{\text{п}} = \frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}} \sqrt{\frac{\mu_{\text{п}} \rho_{\text{п}} u_1}{x_{\text{эфф}}}} \cdot c_p \text{Pr}^{-1} (T_e - T_{\text{п}}), \quad (15.8)$$

Подставим (15.8) в (15.6) и найдем

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dx} \left[R \frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}} \sqrt{\mu_{\text{п}} \rho_{\text{п}} u_1 x_{\text{эфф}}} c_p (T_e - T_{\text{п}}) \text{Pr}^{-1} \right] &= \\ &= R \frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}} \sqrt{\frac{\mu_{\text{п}} \rho_{\text{п}} u_1}{x_{\text{эфф}}}} c_p (T_e - T_{\text{п}}) \text{Pr}^{-1} \end{aligned} \quad (15.9)$$

Умножая обе части (15.9) на выражение, стоящее в квадратных скобках, получаем в правой части соотношение, не зависящее от $x_{\text{эфф}}$

$$2 \left[\dots \right] \frac{d}{dx} \left[\dots \right] = R^2 \left(\frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}} \right)^2 \mu_{\text{п}} u_1 \rho_{\text{п}} c_p^2 \text{Pr}^{-2} (T_e - T_{\text{п}})^2. \quad (15.10)$$

Интегрируя по x , получим

$$\begin{aligned} 2 \int_0^x \left[\dots \right] \frac{d}{dx} \left[\dots \right] dx &= \int_0^x R^2 \left(\frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}} \right)^2 \mu_{\text{п}} \rho_{\text{п}} u_1 c_p^2 \text{Pr}^{-2} (T_e - T_{\text{п}})^2 dx; \\ 2 \cdot \frac{1}{2} \left[\dots \right]^2 &= \int_0^x \dots dx. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Раскрывая в (15.11) смысл выражения $\left[\dots \right]^2$, найдем

$$\left[R^2 \left(\frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}} \right)^2 \mu_{\text{п}} u_1 \rho_{\text{п}} c_p^2 \text{Pr}^{-2} (T_e - T_{\text{п}})^2 x_{\text{эфф}} \right] = \int_0^x \dots dx.$$

Из последнего выражения следует, что

$$x_{\text{эфф}} = \frac{\int_0^x R^2 \left(\frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}} \right)^2 \mu_{\text{п}} \rho_{\text{п}} u_1 c_p^2 (T_e - T_{\text{п}})^2 \text{Pr}^{-2} dx}{R^2 \left(\frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}} \right)^2 \mu_{\text{п}} \rho_{\text{п}} u_1 c_p^2 \text{Pr}^{-2} (T_e - T_{\text{п}})^2}. \quad (15.12)$$

В числителе (15.12) стоит интеграл от некоторой известной функции от x , а в знаменателе — значение подынтегральной функции в данной точке (соответствующей $x = x_{\text{эфф}}$). В частном случае при $T_{\text{п}} = \text{const}$ можно, пренебрегая зависимостью комплекса

$$\left(\frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\sqrt{\text{Re}_{\text{п}}}} \right)^2 \mu_{\text{п}} c_p^2 \text{Pr}^{-2} (T_e - T_{\text{п}})^2$$

от x , упростить формулу для $x_{\text{эфф}}$

$$x_{\text{эфф}} = \frac{\int_0^x \rho_{\text{п}} u_1 R^2 dx}{\rho_{\text{п}} u_1 R^2}, \quad (15.13)$$

где $\rho_{\text{п}} = \rho_{\text{п}}(x)$, т.к. проявляется эффект сжимаемости потока при $\partial p / \partial x \neq 0$. Подставляя (15.13) в (15.1), получим

$$\begin{aligned} q_x &= 0,332K \cdot K_1 \frac{\rho_{\text{п}} u_1 R c_p \sqrt{\mu_{\text{п}}}}{\sqrt{\int_0^x \rho_{\text{п}} u_1 R^2 dx}} (T_e - T_{\text{п}}) \text{Pr}^{-2/3} = \\ &= 0,332K \cdot K_1 \frac{\rho_{\text{п}} u_1 c_p (T_e - T_{\text{п}})}{\sqrt{R_{\text{эфф}}}} \cdot \text{Pr}^{-2/3}, \end{aligned} \quad (15.14)$$

где

$$\text{Re}_{\text{эфф}} = \frac{1}{\mu_{\text{п}} R^2} \int_0^x R^2 u_1 \rho_{\text{п}} dx. \quad (15.15)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формул (15.13)-(15.15).

- Плоская пластина: $u_1 = \text{const}$; $R = \text{const}$; $m = 0$, $\beta = 0$, $p_1 = \text{const}$ и $\rho_{\text{п}} = \text{const}$. Тогда из формулы (15.13) следует, что $x_{\text{эфф}} = x$ и $\text{Re}_{\text{эфф}} = \text{Re} = \frac{u_1 x}{\nu}$.

2. Конус при сверхзвуковом обтекании с углом атаки, равным нулю. В этом случае $u_1 = \text{const}$, $\rho_\pi = \text{const}$, $K_1 = 1$, но радиус рассматриваемого тела вращения $R = x \cdot \sin \theta_k$, где θ_k — полуугол при вершине конуса.

Тогда

$$x_{\text{эфф}} = \frac{\int_0^x x^2 \sin^2 \theta_k \cdot dx}{x^2 \sin^2 \theta_k} = \frac{1}{3}x. \quad (15.16)$$

Из формулы (15.1) с учетом (15.16) следует, что плотность местного теплового потока на конусе в $\sqrt{3}$ раз больше, чем на пластине той же длины и при тех же параметрах течения вне пограничного слоя. Поскольку значение $x_{\text{эфф}}$ определяет толщину слоя, то на конусе из-за растекания потока толщина пограничного слоя в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем на пластине

$$\frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} \left(\frac{x_{\text{эфф}}}{x} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. Теплообмен в окрестности передней критической точки. Отметим, что при ламинарном режиме течения положение максимального теплового потока зависит от формы притупления конструкции. В случае сферического притупления максимальный поток располагается в центральной точке притупления. Для плоского или слегка искривленного торца максимальный поток находится в зоне перехода скорости в сверхзвуковую скорость (периферия притупления). На цилиндрическом притуплении он занимает промежуточное положение между центром и периферией притупления.

В общем случае зависимость скорости вне пограничного слоя от координаты x связана с конкретной формой тела и условиями его обтекания. В окрестности передней критической точки для дозвукового течения несжимаемой жидкости можно принять, что

$$u_1 = cx^m. \quad (15.17)$$

Для произвольного значения m в формуле (15.17) и плоского течения с учетом сжимаемости потока получено следующее выражение, позволяющее определить коэффициент теплоотдачи

$$\frac{\text{Nu}_{\pi}}{\sqrt{\text{Re}_{\pi}}} = 0,332 (m+1)^{1/2} \cdot \text{Pr}_{\pi}^{1/3} \left(\frac{\mu_1 \rho_1}{\mu_{\pi} \rho_{\pi}} \right)^{1/3} \cdot \left[1 + 0,16 \left(1 + \frac{T_{\pi}}{T_{01}} \right) \left(\frac{2m}{m+1} \right)^{1/3} \right]^{1/2}. \quad (15.18)$$

Используя выражение (15.18) для случая теплообмена в передней критической точке осесимметричного тела ($m = 1$) совместно с формулой (15.8), получим соотношение для расчета плотности конвективного теплового потока в указанной точке (или в ее окрестности)

$$q_{\pi} = 0,470 \left[1 + 0,16 \left(1 + \frac{T_{\pi}}{T_{01}} \right) \right]^{1/2} \left(\frac{\mu_1 \rho_1}{\mu_{\pi} \rho_{\pi}} \right)^{1/3} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{\pi} \rho_{\pi} u_1}{x_{\phi}}} \cdot c_p \text{Pr}^{-2/3} \cdot (T_e - T_{\pi}). \quad (15.19)$$

Из формулы (15.19) могут быть найдены некоторые частные выражения. Например, для осесимметричного течения в окрестности сферического притупления на расстоянии x от передней критической точки имеем: $R \approx x$, $u_1 = c \cdot x$, $m = 1$, $\rho_{\pi} = \text{const}$ и по формуле (15.13)

$$x_{\phi} = \frac{\int_0^x \rho_{\pi} u_1 R^2 dx}{\rho_{\pi} u_1 R^2} = \frac{\int_0^x c x^3 dx}{c \cdot x^3} = \frac{1}{4} x.$$

Подставляя это значение x_{ϕ} и $u_1 = c \cdot x$ в формулу (15.19), находим

$$q_{\pi} = 0,94 \left[1 + 0,16 \left(1 + \frac{T_{\pi}}{T_{01}} \right) \right]^{1/2} \cdot \left(\frac{\mu_1 \rho_1}{\mu_{\pi} \rho_{\pi}} \right)^{1/3} \cdot \sqrt{\mu_{\pi} \rho_{\pi} c} \cdot c_p \cdot (T_e - T_{\pi}) \text{Pr}_{\pi}^{-2/3}.$$

В случае цилиндрического притупления (передняя кромка крыла), принимая $\rho_{\text{п}} = \text{const}$, $R = \text{const}$, получим

$$x_{\text{эф}} = \frac{\int_0^x c \cdot x dx}{cx} = \frac{1}{2} x. \quad (15.20)$$

Подстановка $x_{\text{эф}}$ из (15.20) в формулу (15.19) дает

$$q_{\text{п}} = 0,665 \left[1 + 0,16 \left(1 + \frac{T_{\text{п}}}{T_{01}} \right) \right]^{1/2} \cdot \left(\frac{\mu_1 \rho_1}{\mu_{\text{п}} \cdot \rho_{\text{п}}} \right)^{1/3} \cdot \sqrt{\mu_{\text{п}} \rho_{\text{п}} \cdot c} \cdot c_p (T_e - T_{\text{п}}) \text{Pr}_{\text{п}}^{-2/3}.$$

16. Теплообмен на плоском элементе конструкции при турбулентном режиме с учетом сжимаемости потока

В этом случае коэффициент теплоотдачи определяют по формуле, аналогичной для несжимаемого потока, но с учетом сжимаемости

$$\frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\text{Re}_{\text{п}}^{0,8}} = 0,0296 \text{Pr}_{\text{п}}^{0,43} \cdot K_T, \quad (16.1)$$

где коэффициент K_T учитывает влияние сжимаемости потока

$$K_T = \left(\frac{T_{\text{п}}}{T_e} \right)^{0,4} (1 + r\omega)^{0,11}, \quad (16.2)$$

$$\omega = \frac{k-1}{2} M_1^2.$$

При малой скорости потока и большом перепаде температур (например, при течении в окрестности передней критической точки или в дозвуковой части сопла) хорошие результаты дает формула

$$K_T = \left(\frac{\rho_1}{\rho_{\text{п}}} \right)^{0,6}. \quad (16.3)$$

где ρ_1 — плотность воздуха вне пограничного слоя.

Обобщение формул (16.2) и (16.3) дает выражение для K_T , удовлетворительно согласующееся с опытными данными как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях

$$K_T = \left(\frac{T_{\text{п}}}{T_e} \right)^{0,4+0,2\exp(-\omega r)} \cdot (1 + \omega r)^{0,11}.$$

Вычисление потока тепла к плоскому элементу конструкции при турбулентном режиме течения с учетом сжимаемости производится по указанной выше зависимости (13.7)

$$q_{\text{п}} = \alpha(T_e - T_{\text{п}}), \quad (16.4)$$

которую можно преобразовать к несколько иному виду. Запишем с этой целью для α следующее выражение

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\alpha x}{\lambda_{\text{п}}} \frac{\nu_{\text{п}}^{0,8}}{u_1^{0,8} \cdot x^{0,8}} \cdot \frac{\rho_{\text{п}}^{0,8} \cdot \rho_{\text{п}}^{0,2} \cdot \nu_{\text{п}}^{0,2} \cdot u_1^{0,8}}{x^{0,2}} \cdot \frac{\lambda_{\text{п}} c_p}{\nu_{\text{п}} \rho_{\text{п}} c_p} = \\ &= \frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\text{Re}_{\text{п}}^{0,8}} \cdot \frac{\rho_{\text{п}}^{0,8} \cdot \mu_{\text{п}}^{0,2} \cdot u_1^{0,8}}{x^{0,2}} \cdot \frac{c_p}{\text{Pr}_{\text{п}}}. \end{aligned}$$

Тогда формулу (16.4) можно записать в виде

$$q_{\text{п}} = \frac{\text{Nu}_{\text{п}}}{\text{Re}_{\text{п}}^{0,8}} \cdot \frac{\rho_{\text{п}}^{0,8} \cdot u_1^{0,8} \cdot \mu_{\text{п}}^{0,2}}{x^{0,2}} \cdot \frac{c_p}{\text{Pr}_{\text{п}}} (T_e - T_{\text{п}}), \quad (16.5)$$

где $T_e = T_1(1 + r\omega)$ и $r \simeq 0,88$.

17. Расчет теплообмена при произвольном продольном распределении давления и турбулентном режиме течения

Полученные зависимости для расчета теплообмена на плоской пластине могут быть использованы в расчете теплообмена при произвольном распределении давления вне пограничного слоя. В соответствии с методом эффективной длины предполагается, что тепловой поток в рассматриваемой точке тела (например тела вращения) будет таким же, как в некоторой точке на пластине или цилиндре радиуса R с теми же местными параметрами течения при условии, что в рассматриваемых точках тела и пластины одинаковы толщины потери энергии. Это условие равносильно тому, что на пластине длиной $x_{\text{эфф}}$ (или цилиндре радиусом R) будет отдано в стенку такое же количество тепла, как на рассматривающем теле на длине x .

С учетом сказанного выражение для плотности теплового потока в стенку рассматриваемого тела имеет вид

$$q_{\text{пп}} = \frac{\text{Nu}_{\text{пп}}}{\text{Re}_{\text{пп}}^{0,8}} \cdot \frac{\rho_{\text{пп}}^{0,8} \cdot u_1^{0,8} \cdot \mu_{\text{пп}}^{0,2}}{x_{\text{эфф}}^{0,2}} \cdot \frac{c_p(T_e - T_{\text{пп}})}{\text{Pr}_{\text{пп}}}, \quad (17.1)$$

где в соответствии с (16.1) можно считать, что критерий $\text{Nu}_{\text{пп}}/\text{Re}_{\text{пп}}^{0,8}$ не зависит от x (от $x_{\text{эфф}}$).

На цилиндре радиусом $R = \text{const}$ общее количество тепла, ушедшее из пограничного слоя на длине $x_{\text{эфф}}$, составит

$$Q_{\text{пп}} = 2\pi R \int_0^{x_{\text{эфф}}} q_{\text{пп}} dx_{\text{эфф}}. \quad (17.2)$$

Подставляя в (17.2) выражение (17.1) и выполняя интегрирование с учетом сделанного выше замечания, т.е.

$$\frac{\text{Nu}_{\text{пп}}}{\text{Re}_{\text{пп}}^{0,8}} = \text{const},$$

получим

$$Q_{\text{пп}} = 2,5\pi R q_{\text{пп}} x_{\text{эфф}}. \quad (17.3)$$

На поверхности рассматриваемого тела $R = \text{var}$ и на длине x количество тепла, отданное в тело вращения, составит

$$Q_{\Pi} = 2\pi \int_0^x R q_{\Pi} dx, \quad (17.4)$$

где $R = R(x)$.

Сравнивая (17.3) и (17.4), получаем

$$1,25 R q_{\Pi} x_{\Theta} = \int_0^x R q_{\Pi} dx. \quad (17.5)$$

Продифференцируем (17.5) по x и найдем

$$1,25 \frac{d}{dx} (R q_{\Pi} x_{\Theta}) = R q_{\Pi}. \quad (17.6)$$

Подставив в (17.6) выражение для q_{Π} из (17.1), получим дифференциальное уравнение для определения x_{Θ} :

$$\begin{aligned} 1,25 \frac{d}{dx} \left[R \frac{\text{Nu}_{\Pi}}{\text{Re}_{\Pi}^{0,8}} \rho_{\Pi}^{0,8} \cdot u_1^{0,8} \mu_{\Pi}^{0,2} x_{\Theta}^{0,8} \frac{c_p(T_e - T_{\Pi})}{\text{Pr}_{\Pi}} \right] &= \\ &= R \frac{\text{Nu}_{\Pi}}{\text{Re}_{\Pi}^{0,8}} \frac{\rho_{\Pi}^{0,8} \cdot u_1^{0,8} \cdot \mu_{\Pi}^{0,2}}{x_{\Theta}^{0,2}} \cdot \frac{c_p}{\text{Pr}_{\Pi}} (T_e - T_{\Pi}). \end{aligned} \quad (17.7)$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в формуле (17.7) через z и умножая обе ее части на $z^{1/4}$, получим

$$\frac{5}{4} z^{1/4} \frac{dz}{dx} = f(x), \quad (17.8)$$

где $f(x)$ — известная функция x :

$$f(x) = R^{5/4} \left(\frac{\text{Nu}_{\Pi}}{\text{Re}_{\Pi}^{0,8}} \right)^{5/4} \rho_{\Pi} u_1 \mu_{\Pi}^{1/4} \left(\frac{T_e - T_{\Pi}}{\text{Pr}_{\Pi}} \right)^{5/4} c_p^{5/4}. \quad (17.9)$$

Выполняя интегрирование (17.8)

$$\frac{5}{4} \int_0^{x_{\Theta}} z^{1/4} dz = \int_0^x f(x) dx,$$

$$x_{\text{эфф}} = \frac{\int_0^x R^{5/4} \left(\frac{\text{Nu}_{\text{пп}}}{\text{Re}_{\text{пп}}^{0,8}} \right)^{5/4} \rho_{\text{пп}} u_1 \mu_{\text{пп}}^{0,25} \left(\frac{c_p}{\text{Pr}_{\text{пп}}} \right)^{5/4} (T_e - T_{\text{пп}})^{5/4} dx}{R^{5/4} \left(\frac{\text{Nu}_{\text{пп}}}{\text{Re}_{\text{пп}}^{0,8}} \right)^{5/4} \rho_{\text{пп}} u_1 \mu_{\text{пп}}^{0,25} \left(\frac{c_p}{\text{Pr}_{\text{пп}}} \right)^{5/4} (T_e - T_{\text{пп}})^{5/4}}. \quad (17.10)$$

Последняя формула справедлива при $T_{\text{пп}} = T_{\text{пп}}(x)$. Если $T_{\text{пп}}$ принять постоянной, то она может быть представлена в более простой приближенной форме

$$x_{\text{эфф}} = \frac{\int_0^x R^{5/4} \rho_{\text{пп}} u_1 dx}{R^{5/4} \rho_{\text{пп}} u_1}. \quad (17.11)$$

Используя далее (17.1) совместно с (16.1) и (17.11), найдем

$$\begin{aligned} q_{\text{пп}} &= 0,0296 \text{Pr}_{\text{пп}}^{-0,57} K_{\text{т}} \rho_{\text{пп}} u_1 R^{1/4} \mu_{\text{пп}}^{0,2} \left[\int_0^x R^{5/4} \rho_{\text{пп}} u_1 dx \right]^{-0,2} c_p (T_e - T_{\text{пп}}) = \\ &= 0,0296 \text{Pr}_{\text{пп}}^{-0,57} K_{\text{т}} \rho_{\text{пп}} u_1 c_p (T_e - T_{\text{пп}}) \text{Re}_{\text{эфф}}^{-0,2}, \end{aligned} \quad (17.12)$$

$$\text{Re}_{\text{эфф}} = \frac{1}{R^{5/4} \mu_{\text{пп}}} \int_0^x R^{5/4} \rho_{\text{пп}} u_1 dx, \quad (17.13)$$

где $\text{Re}_{\text{эфф}}$ — среднее значение числа Рейнольдса.

Таким образом, расчет плотности потока тепла для тела с продольным градиентом давления при турбулентном режиме обтекания (так же, как и при ламинарном режиме) производится по формуле для плоской пластины (17.12), но вместо истинного числа Re в нее подставляют некоторое эффективное число Рейнольдса $\text{Re}_{\text{эфф}}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи использования полученного соотношения для $q_{\text{пп}}$.

1. Плоская пластина или цилиндр: $u_1 = \text{const}$; $\rho_{\text{пп}} = \text{const}$; $R = \text{const}$. И из формулы (17.11) следует, что $x_{\text{эфф}} = x$, теплообмен рассчитывают по формуле (16.5).

2. Конус, обтекаемый сверхзвуковым потоком без угла атаки: $u_1 = \text{const}$; $\rho_{\text{п}} = \text{const}$; $R = x \cdot \sin \theta_{\text{k}}$, где θ_{k} — полуугол при вершине конуса. Тогда из (17.11)

$$x_{\text{эф}} = \frac{\int_0^x x^{5/4} (\sin \theta_{\text{k}})^{5/4} dx}{x^{5/4} (\sin \theta_{\text{k}})^{5/4}} = \frac{4}{9} x.$$

Из формулы (17.1) получается, что тепловой поток на конусе при тех же параметрах потока больше, чем на пластине

$$(q_{\text{п}})_{\text{кон}} = (q_{\text{п}})_{\text{пл}} \left(\frac{9}{4} \right)^{0,2} = 1,175 (q_{\text{п}})_{\text{пл}},$$

где $(q_{\text{п}})_{\text{пл}}$ определяется по формуле (16.5).

3. Теплообмен в окрестности передней критической точки. Важно отметить, что речь идет именно об окрестности передней критической точки, поскольку непосредственно в самой критической точке при турбулентном режиме течения тепловой поток равен нулю (т.к. $u_1 = 0$). В этом случае максимальный тепловой поток всегда находится в зоне перехода дозвуковой скорости потока в сверхзвуковую.

Для плоского тела: $R = \text{const}$; $M_1 \simeq 0$; $u_1 = \beta x$; $\beta = \pi$; $p_1 \simeq \text{const}$; $\rho_{\text{п}} = \text{const}$

$$x_{\text{эф}} = \frac{\int_0^x \beta x dx}{\beta x} = \frac{1}{2} x.$$

Для определения плотности потока тепла используется формула (17.12), в которой принимают

$$K_{\text{т}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_{\text{п}}} \right)^{0,6}; \quad T_e = T_{01};$$

$$\text{Re}_{\text{эф}} = \frac{1}{R^{5/4} \mu_{\text{п}}} \int_0^x R^{5/4} \rho_{\text{п}} u_1 dx = \frac{\int_0^x \beta x dx}{\nu_{\text{п}}} = \frac{\beta x^2}{2 \nu_{\text{п}}}.$$

Тогда из формулы (17.12)

$$q_{\text{пп}} = 0,034 \Pr_{\text{пп}}^{-0,57} \cdot \rho_{\text{пп}} u_1 c_p (T_{01} - T_{\text{пп}}) \left(\frac{\beta x^2}{\nu_{\text{пп}}} \right)^{-0,2} \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_{\text{пп}}} \right)^{0,6}, \quad (17.14)$$

где $0,034 = (0,0296) \left(\frac{1}{2} \right)^{-0,2}$.

Для осесимметричного тела: $M_1 \approx 0$; $u_1 \approx \beta x$; $p_1 = \text{const}$; $\rho_{\text{пп}} = \text{const}$; $R \approx x$ и

$$x_{\text{эф}} = \frac{\int_0^x \beta x^{9/4} dx}{\beta x^{9/4}} = \frac{4}{13} x.$$

Из формулы (17.12) с учетом (17.13) следует, что

$$q_{\text{пп}} = 0,0375 \Pr_{\text{пп}}^{-0,57} \cdot \rho_{\text{пп}} u_1 c_p (T_{01} - T_{\text{пп}}) (\beta x^2 / \nu_{\text{пп}})^{-0,2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_{\text{пп}}} \right)^{0,6}, \quad (17.15)$$

где $0,0375 = 0,0296 \cdot \left(\frac{4}{13} \right)^{-0,2}$.

Формулы (17.14) и (17.15) справедливы только в окрестности критической точки, где $\rho_{\text{пп}}$ не зависит от x .

Если дополнительно учесть, что для сферического или цилиндрического затупления можно принять

$$\beta = \frac{a_{\text{кр}}}{R_0} c \sqrt{\frac{k+1}{k}} = \frac{a_0}{R_0} c \sqrt{\frac{2}{k}},$$

так как $a = \sqrt{kRT}$ и $T = T_{\text{кр}} \frac{2}{k+1}$, где $a_{\text{кр}}$ — критическая скорость звука; a_0 — скорость звука в заторможенном газе; R — газовая постоянная;

$$c^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (p_1/p_0)}{\partial (x/R_0)^2} \quad \text{или} \quad c^2 \approx \left(1 - \frac{P_{\text{пп}}}{P_{01}} \right);$$

R_0 — радиус сферы или цилиндра, то вместо формул (17.14) и (17.15) можно записать объединенную формулу для расчета теплового потока в точке поверхности затупления с координатой $\tilde{x} = \frac{x}{R_0}$

$$q_{\text{пп}} = A \cdot \Pr_{\text{пп}}^{-0,57} \frac{\rho_{\text{пп}}^{0,8} \mu_{\text{пп}}^{0,2} a_0^{0,8}}{R_0^{0,2}} \cdot \tilde{x}^{0,6} \cdot c_p (T_{01} - T_{\text{пп}}) \left(\frac{\rho_1}{\rho_{\text{пп}}} \right)^{0,6} \cdot \left(c \sqrt{\frac{2}{k}} \right)^{0,6},$$

где $A = 0,034$ для плоского и $A = 0,0375$ для осесимметричного течений.

При возрастании радиуса затупления тепловой поток в сходственных точках тела уменьшается обратно пропорционально $\sqrt[5]{R_0}$. Это обстоятельство играет важную роль при проектировании донной части спускаемых аппаратов.

18. Конвективный теплообмен при наличии химических реакций

При больших скоростях движения и высоких температурах газа теплообмен конструкции с потоком может сопровождаться химическими реакциями. В случае, когда поверхность непроницаема и ее химическое взаимодействие с потоком отсутствует, такие реакции могут протекать в виде реакций диссоциации и рекомбинации в пограничном слое. В условиях взаимодействия обтекаемой газом поверхности с высокотемпературным потоком может происходить ее частичное разрушение с образованием частиц. Разрушение материала теплозащитного покрытия происходит в результате его плавления, сублимации, механического отрыва частиц или процесса горения. Оторвавшиеся частицы могут вступать в химические реакции с газом внешнего потока или между собой.

При входе тела в атмосферу со скоростями 10–15 км/с и более, что сопровождается повышением температуры газа в потоке до значений, превышающих $(10\text{--}15) \cdot 10^3$ К, может происходить частичная ионизация газа с образованием кроме нейтральных частиц ионов и электронов.

Протекание химических реакций в пограничном слое связано с выделением и поглощением тепловой энергии. Наблюдается также заметная зависимость физических параметров газовой смеси ρ , μ , λ , c_p и других ее свойств от состава, давления и температуры.

Рассмотрим особенности расчета теплообмена при наличии химических реакций для ламинарного режима течения. Основные результаты

этого анализа могут быть использованы и для расчета теплообмена при турбулентном режиме течения газа в пограничном слое.

Запишем уравнение энергии ламинарного пограничного слоя при наличии в нем химических реакций в виде

$$\rho u \frac{\partial I_0}{\partial x} + \rho v \frac{\partial I_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial I_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial (u^2/2)}{\partial y} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{\text{Pr}} \sum_i I_i (\text{Le}_i - 1) \frac{\partial C_i}{\partial y} \right], \quad (18.1)$$

где $I_0 = I + u^2/2$ — полная энталпия торможения; I_i — полная энталпия i -го компонента смеси газов, рассчитываемая по формуле

$$I_i = h_i + \int_{T_0}^T c_{p_i} dT, \quad (18.2)$$

в которой c_{p_i} — теплоемкость i -го компонента, Дж/(кг·К); h_i — теплота образования i -го компонента, равная энергии, затрачиваемой на получение единицы массы данного вещества из стандартных компонентов при стандартной температуре T_0 . Обычно в качестве стандартной температуры выбирают $T_0 = 293$ К, а в качестве стандартных компонентов — наиболее часто встречающиеся в природе стабильные соединения: O_2 , H_2 , N_2 , C — в виде β -графита и др. В формуле (18.1) также обозначены: $C_i = \rho_i/\rho$ — массовая концентрация i -го компонента, равная отношению плотности i -го компонента к плотности смеси; $\text{Le}_i = \rho c_p D_i / \lambda = \text{Pr}/\text{Sc}_i$ — критерий Льюиса; $\text{Pr} = \mu \cdot c_p / \lambda$ — критерий Прандтля; $\text{Sc}_i = \mu / (\rho D_i)$ — критерий Шмидта i -го компонента.

Уравнение (18.1) при $\text{Le}_i = 1$ аналогично уравнению энергии (13.6) при отсутствии химических реакций, но вместо температуры торможения T_0 в него входит полная энталпия торможения I_0 . Это обстоятельство служит основанием использования для химически активных потоков вместо формулы Ньютона

$$q_n = \alpha (T_e - T_\pi)$$

формулы

$$q_n = \frac{\alpha}{c_p} (I_e - I_{\pi}), \quad (18.3)$$

где $I_e = I_1 + r u_1^2 / 2$ и $I_1 = \sum_i (I_i)_1 \cdot (C_i)_1$; $I_{\pi} = \sum_i (I_i)_{\pi} \cdot (C_i)_{\pi}$; r — коэффициент восстановления энталпии, равный \sqrt{Pr} , для ламинарного течения и $\sqrt[3]{Pr}$ для турбулентного течения; I_1 — энталпия воздуха при температуре $T_1 = T_{\infty}$ — вне пограничного слоя; u_1 — скорость потока вне пограничного слоя; $(I_i)_1$ и $(I_i)_{\pi}$ — энталпии i -го компонента смеси газов при температурах T_1 и T_{π} — соответственно; I_e — полная энталпия воздуха при температуре T_e и I_{π} — его энталпия при температуре T_{π} .

Теплоемкость смеси газов c_p в формуле (18.3) изменяется в диапазоне 1200–1300 Дж/(кг К).

Для расчета коэффициента теплоотдачи в выражении для плотности теплового потока (18.3) используют критериальные зависимости, которые в случае теплообмена на непроницаемой поверхности имеют вид:

для ламинарного пограничного слоя

$$\frac{Nu_{\pi}}{\sqrt{Re_{\pi}}} = A Pr_{\pi}^{1/3} \cdot K \cdot K_{\text{хим}}, \quad (18.4)$$

для турбулентного пограничного слоя

$$\frac{Nu_{\pi}}{Re_{\pi}^{0,8}} = 0,0296 Pr_{\pi}^{0,4} \cdot K \cdot K_{\text{хим}}, \quad (18.5)$$

в которых при записи критериев подобия в качестве определяющего размера используют эффективную длину $x_{\text{эфф}}$:

$$Nu_{\pi} = \frac{\alpha x_{\text{эфф}}}{\lambda_{\pi}}; \quad Re_{\pi} = \frac{\rho_{\pi} u_1 x_{\text{эфф}}}{\mu_{\pi}}; \quad Pr_{\pi} = \frac{\mu_{\pi} c_p}{\lambda_{\pi}}. \quad (18.6)$$

Определение значений $x_{\text{эфф}}$ проводится по формулам, аналогичным (15.13) и (17.11):

для ламинарного режима

$$x_{\text{эфф}} = \frac{1}{u_1 \rho_1 R^{2z}} \int_0^x u_1 \rho_1 R^{2z} dx, \quad (18.7)$$

для турбулентного режима

$$x_{\vartheta\Phi} = \frac{1}{u_1 \rho_1 R^{1,25z}} \int_0^x u_1 \rho_1 R^{1,25z} dx, \quad (18.8)$$

где $z = 0$ — для плоского и $z = 1$ — для осесимметричного течений.

В формуле (18.4) для расчета теплообмена на пластине и конусе коэффициент $A = 0,332$. В передней критической точке при обтекании плоского притупления

$$A = 0,358 \left(1 + 0,267 \frac{T_{\text{п}}}{T_{0\text{н}}} \right)^{0,5}; \quad (18.9)$$

для осесимметричного течения

$$A = 0,35 \left(1 + 0,185 \frac{T_{\text{п}}}{T_{0\text{н}}} \right)^{0,5}, \quad (18.10)$$

где $T_{0\text{н}}$ — температура торможения вне пограничного слоя.

Коэффициент K , характеризующий влияние на теплообмен переменности параметра $\mu\rho$, рассчитывают по формулам:

для ламинарного режима

$$K = \left(\frac{\mu^* \rho^*}{\mu_1 \rho_1} \right)^{0,5}, \quad (18.11)$$

где μ^* , ρ^* находят при условной энталпии

$$I^* = 0,5(I_{\text{п}} + I_1) + 0,22\omega, \quad (18.12)$$

где $\omega = u_1^2/(2I_1)$;

для турбулентного режима

$$K = \left(\frac{\mu^*}{\mu_{\text{п}}} \right)^{0,2} \cdot \left(\frac{\rho^*}{\rho_{\text{п}}} \right), \quad (18.13)$$

где μ^* и ρ^* вычисляют при условной энталпии

$$I^* = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3} I_{\text{п}} + \frac{1}{5} \omega r I_1. \quad (18.14)$$

В последнем случае может быть также использована зависимость

$$K = \left(\frac{I_{\pi}}{I_e} \right)^m \cdot (1 + r\omega)^{0,11}, \quad (18.15)$$

где $m = 0,4 + 0,2 \exp(-\omega r)$.

При вычислении коэффициентов теплоотдачи по формулам (18.4) и (18.5) влияние на них процессов диссоциации, ионизации и других химических реакций учитывается коэффициентом $K_{\text{хим}}$ для химически равновесного и замороженного пограничных слоев. Для ламинарного режима течения равновесного пограничного слоя при отсутствии диссоциации на стенке множитель $K_{\text{хим}}$ равен

$$K_{\text{хим}} = 1 + (\text{Le}^{0,52} - 1) \frac{Q}{I_{01} - I_{\pi}}. \quad (18.16)$$

Зависимости критерия Льюиса и приведенного теплового эффекта диссоциации и ионизации

$$Q = 1 - 0,23 I_{O_2} - 0,77 I_{N_2}$$

от параметра I для воздуха представлены на рис. 18.1 и 18.2.

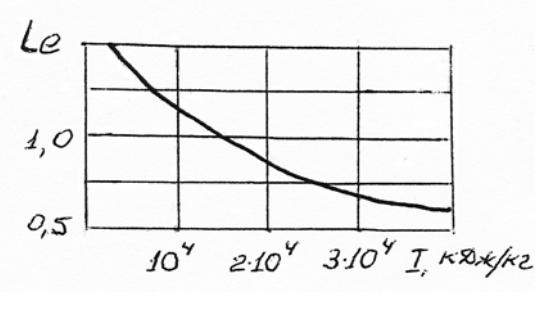


Рис. 18.1. Зависимость критерия Le от энталпии для воздуха

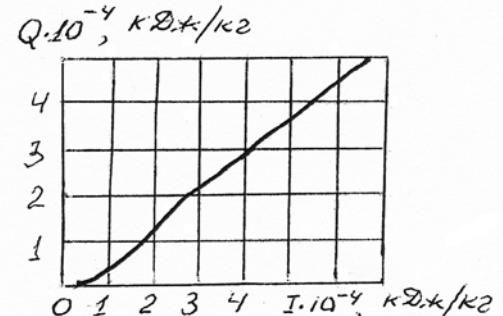


Рис. 18.2. Зависимость приведенного теплового эффекта Q от энталпии для воздуха

Критерий Le и Q в формуле (18.6) находят из рисунков 18.1 и 18.2 по условной энталпии I^* , определяемой по формуле (18.12) для ламинарного режима течения или по формуле (18.14) для турбулентного режима.

Для случая замороженного пограничного слоя коэффициент $K_{\text{хим}}$ находят из выражения

$$K_{\text{хим}} = 1 + (\text{Le}^{0,63} - 1) \frac{Q}{I_{01} - I_{\pi}}, \quad (18.17)$$

где Le и Q определяют, используя рисунки 18.1 и 18.2, но значение энталпии при этом принимают равным I_1 .

Из соотношений (18.16) и (18.17) видно, что при $\text{Le} = 1$ коэффициент $K_{\text{хим}} = 1$ и тепловой поток не зависит от скоростей химических реакций.

При турбулентном режиме течения газа в пограничном слое коэффициент $K_{\text{хим}}$ также определяется по формуле (18.16), но показатель степени при Le изменяется в интервале $0,67 \div 1,0$.

Подставляя найденные значения коэффициентов K и $K_{\text{хим}}$ в выражения (18.4) и (18.5), можно определить далее плотности тепловых потоков, используя для этого формулы:

для ламинарного пограничного слоя

$$q_{\pi} = \frac{\text{Nu}_{\pi}}{\sqrt{\text{Re}_{\pi}}} \sqrt{\frac{\rho_{\pi} u_1 \mu_{\pi}}{x_{\text{эф}}} \frac{(I_e - I_{\pi})}{\text{Pr}_{\pi}}}; \quad (18.18)$$

для турбулентного пограничного слоя

$$q_{\pi} = \frac{\text{Nu}_{\pi}}{\text{Re}_{\pi}^{0,8}} \frac{(\rho_{\pi} u_1)^{0,8} \mu_{\pi}^{0,2}}{x_{\text{эф}}^{0,2}} \frac{(I_e - I_{\pi})}{\text{Pr}_{\pi}}. \quad (18.19)$$

Необходимые для расчета энталпии значения T_1 и $C_{i,1}$ находятся из расчета внешнего обтекания. Значение температуры поверхности T_{π} обычно задают в виде температуры первого приближения (ожидаемой температуры). Это значение T_{π} используют в качестве одного из граничных условий при решении задачи определения температурного состояния конструкции и в дальнейшем расчете уточняют в итерационном процессе

вычисления. Концентрации $C_{i,1}$ для химически равновесного пограничного слоя являются, практически, функциями только T и P . Концентрация компонентов в газовой смеси на поверхности стенки $C_{i,\text{п}}$ связана с концентрацией этих компонентов во внешнем потоке соотношением

$$C_{i,\text{п}} = \frac{C_{i,1}}{1 + \alpha_{\text{п},i} \cdot \text{Sc}_i^{2/3}}, \quad (18.20)$$

где $\alpha_{\text{п},i}$ — параметр каталитической рекомбинации.

Из выражения (18.20) видно, что для абсолютно каталитической стенки ($\alpha_{\text{п},i} \rightarrow \infty$) атомы полностью рекомбинируют, а на абсолютно некаталитической стенке ($\alpha_{\text{п},i} = 0$) $C_{i,\text{п}} = C_{i,1}$.

Для удобства определения значений энталпий I_e и $I_{\text{п}}$ на рисунке 18.3 приведена зависимость энталпии от температуры и давления.

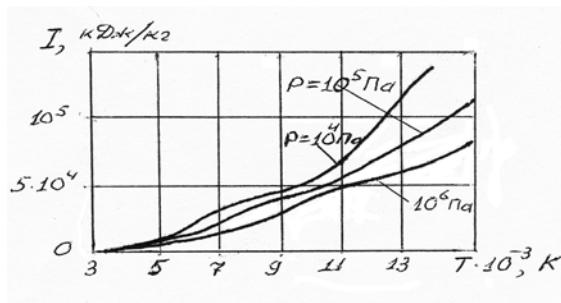


Рис. 18.3. Зависимость полной энталпии воздуха от температуры и давления

19. Конвективный теплообмен на проницаемой поверхности

Термин "проницаемая поверхность" означает, что через поверхность может проникать, просачиваться газ или жидкость. С определенной осторожностью к поверхности такого типа можно отнести и поверхность, на которой происходит разрушение покрытия. Объединяющим фактором в этих случаях является наличие поперечной составляющей скорости потока. От проницаемой или разрушающей поверхностей в основной поток поступает газ (охладитель), скорость которого направлена поперек основного потока, обтекающего тело. На этом принципе построена система

теплозащиты с пористым охлаждением и система теплозащиты с разрушением (уносом) материала — охлаждение за счет физико–химических превращений. Обе эти системы теплозащиты используют массообменный принцип охлаждения.

При использовании пористой системы теплозащиты охладитель, проходя через поры, отбирает тепло у стенки, а попадая на поверхность, оттесняет поток горячего газа и снижает интенсивность теплообмена между горячим потоком газа и стенкой.

В этом случае для оценки влияния вдуваемого газа на теплообмен удобно использовать относительный коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha/c_p}{(\alpha/c_p)_0}, \quad (19.1)$$

где $(\alpha/c_p)_0$ — обобщенный коэффициент теплоотдачи при отсутствии вдува и α/c_p — такой же коэффициент с учетом вдува.

Для расчета коэффициента $\bar{\alpha}$ используют зависимость, единую для всех газов и имеющую вид

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} 1 - \beta \bar{m}, & \text{если } 0,3 < \beta \bar{m} < 0,4; \\ 1,012 - 1,16 (\beta \bar{m}) + 0,325 (\beta \bar{m})^2, & \text{если } 0,4 < \beta \bar{m} < 1,2, \end{cases} \quad (19.2)$$

где β — коэффициент вдува; \bar{m} — относительный расход теплоносителя;

$$\bar{m} = \frac{\rho_\pi v_\pi}{(\alpha/c_p)_0} = \frac{\dot{m}_\text{тепл}}{(\alpha/c_p)_0}; \quad (19.3)$$

ρ_π , v_π — плотность и скорость вдуваемого газа; $\dot{m}_\text{тепл}$ — расход теплоносителя в $\text{кг}/(\text{м}^2\text{с})$.

Влияние природы вдуваемого газа на теплообмен принято выражать через отношение молекулярных масс охладителя и набегающего потока газа, а коэффициент вдува представлять в виде:

для ламинарного потока

$$\beta = a \left(\frac{\mu_e}{\mu_\text{тепл}} \right)^b, \quad (19.4)$$

где $a = 0,6$ (для критической точки тела); $a = 0,8$ (для поверхности пластины или конуса); $b = 0,3$;

для турбулентного потока

$$\beta = 0,19 \left(\frac{\mu_e}{\mu_{\text{тепл}}} \right)^b, \quad (19.5)$$

где $b = 0,35$ при $0,2 < (\mu_e/\mu_{\text{тепл}}) < 1$ и $b = 0,70$ при $1 < (\mu_e/\mu_{\text{тепл}}) < 8$; μ_e и $\mu_{\text{тепл}}$ — молекулярные массы набегающего потока газа и вдуваемого охладителя соответственно.

Для расчета теплового потока к поверхности при наличии вдува остается справедливой формула (18.3), в которой в качестве обобщенного коэффициента теплоотдачи α/c_p необходимо использовать коэффициент, найденный с учетом вдува /формулы (19.1)–(19.5)/.

Приведенные выше соотношения могут быть использованы и для расчета тепломассообмена пористой поверхности конической формы. В этом случае, как показывают расчеты, потребный для охлаждения стенки относительный расход теплоносителя \bar{m} в $\sqrt{3}$ раз больше его значения на пластине:

$$\bar{m} = \sqrt{3} \cdot \bar{m}_{\text{пл}}$$

и

$$q_{\text{пл}} = \sqrt{3} \left(\frac{\alpha}{c_p} \right)_{\text{пл}} \cdot (I_e - I_{\text{пл}}).$$

В отличие от теплозащиты с пористым охлаждением, система тепловой защиты с разрушением (уносом) материала основана на том, что большая часть тепловой энергии, поступающей к поверхности из внешнего потока, расходуется на фазовые и физико-химические превращения в ее материале. Образующиеся продукты разложения материала заметно влияют на интенсивность теплообмена конструкции с набегающим потоком. Возникающие при этом процессы тепломассообмена описываются с помощью сложных математических моделей, учитывающих процессы сублимации, обугливания материала, механический унос, унос жидкой

пленки расплава при наличии таковой на поверхности и другие возможные процессы разрушения материала.

Ограничимся здесь рассмотрением общих требований к материалам системы тепловой защиты и приближенным методом расчета толщины унесенного слоя.

Из общих требований к материалам разрушающейся тепловой защиты отметим следующие:

поглощение большого количества тепла в результате физико-химических превращений и высокие значения объемной теплоемкости;

повышенная прочность при больших температурах, обеспечивающая сравнительно невысокий механический унос массы;

большая степень черноты и высокая температура, при которой происходит разрушение поверхности;

для эффективного снижения конвективного теплового потока желательно, чтобы при разрушении материала образовывались газообразные продукты с малыми молекулярными массами;

в случае образования на разрушающейся поверхности материала жидкой пленки ее вязкость должна быть относительно большой.

Преимуществом системы тепловой защиты с разрушением материала в сравнении с пористым охлаждением является достаточно высокая ее надежность, саморегулирование расхода вещества в зависимости от интенсивности теплового воздействия и отсутствия вспомогательных систем (насосов, трубопроводов, клапанов и пр.).

Начало интенсивного поверхностного уноса у многих теплозащитных материалов (исключение составляют термопласти) связано, как правило, с некоторой мало изменяющейся температурой поверхности. При этом унос зависит от распределения температуры в толще поверхностного слоя $T(x)$.

Рассмотрим приближенный способ оценки уноса и прогрева теплозащитного покрытия, используя для этого модель равновесного процесса.

В этом случае для определения основных параметров тепловой защиты спускаемого аппарата (СА) из многокомпонентных (композиционных) материалов широко используют некоторую обобщающую характеристику материала — эффективную энталпию разрушения

$$i_{\text{эфф}} = \frac{q - \varepsilon \sigma T_{\text{пп}}^4}{\dot{m}_{\text{пп}}} = \frac{(\alpha/c_p)_0 (I_e - I_{\text{пп}}) - \varepsilon \sigma T_{\text{пп}}^4}{\dot{m}_{\text{пп}}}, \quad (19.6)$$

где $\dot{m}_{\text{пп}}$ — суммарный унос массы с единицы поверхности теплозащиты в единицу времени; q — плотность теплового (в данном случае конвективного) потока к поверхности; $i_{\text{эфф}}$ — в Дж/кг.

Температура на разрушающейся поверхности $T_{\text{пп}}$ для заданного состава атмосферы в широком диапазоне скоростей входа СА изменяется в сравнительно узком диапазоне. Принимая ее постоянной, можно для определения величины эффективной энталпии разрушения использовать следующие формулы:

для стеклотекстолита

$$i_{\text{эфф}} \approx 1450 + 0,29 (I_e - I_{\text{пп}}), \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}, \left(T_{\text{пп}} = 2770 \text{ К} \text{ и } c_p = 1,20 \frac{\text{кДж}}{\text{кгК}} \right);$$

для асботекстолита

$$i_{\text{эфф}} \approx 800 + 0,4 (I_e - I_{\text{пп}}), \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}, \left(T_{\text{пп}} = 2470 \text{ К} \text{ и } c_p = 1,25 \frac{\text{кДж}}{\text{кгК}} \right);$$

для материала типа графита (пирографит и др.)

$$i_{\text{эфф}} \approx 10500, \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}, (T_{\text{пп}} = 3770 \text{ К}).$$

Материалы на основе графита обладают высокой температуропроводностью ($a \sim 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$), жаростойкостью и могут быть использованы для изготовления элементов тепловой защиты передних кромок крыльев и носков СА планирующего типа и некоторых узлов двигателей. Материалы типа графита имеют несколько характерных режимов уноса. Следует также обратить внимание на то, что границы режимов работы указанных материалов зависят от конкретных марок материала, давления в пограничном слое, режима течения и некоторых других

факторов. В связи с этим значение температуры на поверхности стенки необходимо определять для заданных конкретных условий.

В дополнение к указанным выше данным о величине эффективной энталпии разрушения в таблице 19.1 приведены сведения о ее зависимости от уровня теплового потока для ряда материалов.

Таблица 19.1

Материал	При $q_0 \text{ кВт/м}^2$		
	2000	6000	12000
	Значение $i_{\text{эф}} \text{ кДж/кг}$		
Стеклотекстолит на фенольной смоле	1200	4800	8800
Асботекстолит на фенольной смоле	3200	6800	8000
Стеклопластик с тканью из кварцевого волокна	5200	10000	—

Условия нагружения космических летательных аппаратов на участке спуска в атмосфере Земли характеризуются рядом параметров теплосилового воздействия на их поверхности, табл. 19.2.

Таблица 19.2

Параметр	Космич. ЛА с экипажем	Головные части баллистич. ракет	Космич. ЛА для полета на Луну
Скорость, км/с	7,95	7,3	11,0
Энталпия входа $\left(I_{\text{вх}} = \frac{v_{\text{вх}}^2}{2} \right)$, МДж/кг	31,5	27,0	60
Скоростной напор, кПа	15	10^4	130
Конвективный тепловой поток, МВт/м ²	1,37	45,5	8
Радиационный тепловой поток, МВт/м ²	—	—	9,1
Касательное напряжение, Н/м ²	49	4900	390
Число M_{∞}	30	25	40
Число Re_{π}	$3,3 \cdot 10^6$	$131 \cdot 10^6$	$16 \cdot 10^6$

На рис. 19.1 в качестве примера показана схема устройства тепловой защиты спускаемого аппарата и головной части ракеты.

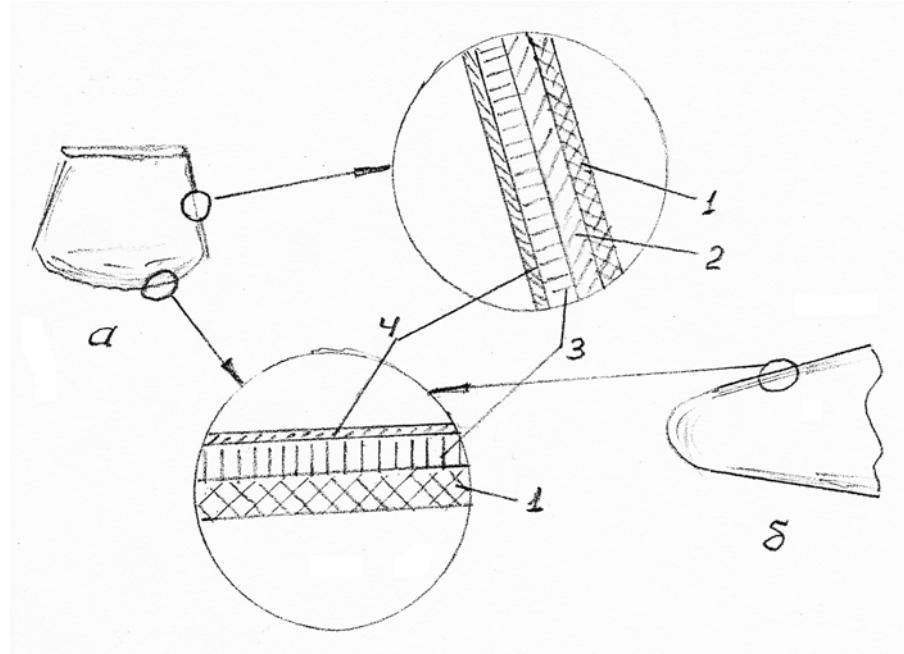


Рис. 19.1. Типичный вид теплозащитных покрытий спускаемого аппарата (а) и головной части (б): 1 — композиционный ТЗМ; 2 — теплоизоляционный материал; 3 — сотовая конструкция; 4 — силовая оболочка

При проектировании разрушаемой тепловой защиты обычно представляется интерес определение толщины уносимого слоя теплозащиты δ_y и толщины слоя материала, внутренняя поверхность которого прогрета до некоторой допустимой температуры, рис. 19.2.

При известном значении эффективной энталпии разрушения материала и температуре разрушающейся поверхности масса теплозащитного слоя, уносимая в единицу времени с единицы поверхности, может быть определена по формуле

$$\dot{m}_y = \frac{q - \varepsilon \sigma T_y^4}{i_{\text{эфф}}}, \quad \text{кг}/(\text{м}^2 \text{с}). \quad (19.7)$$

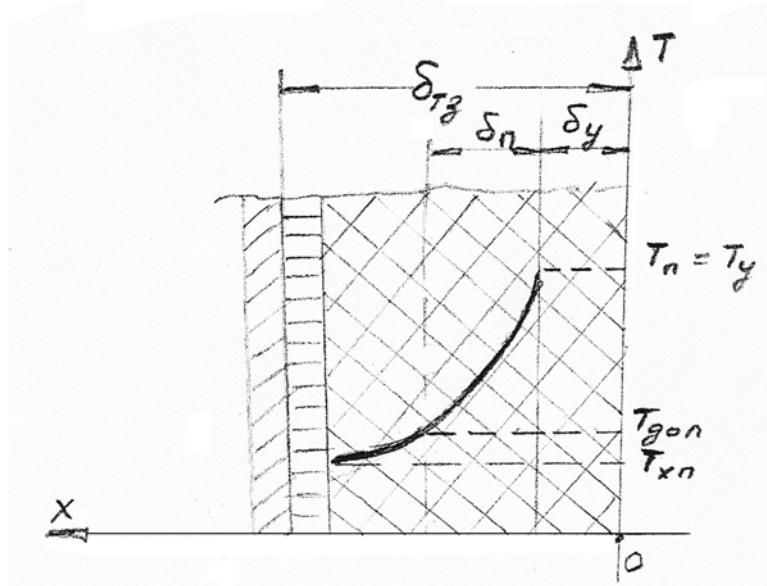


Рис. 19.2. К расчету толщин унесенного δ_y и прогретого до температуры $T_{\text{доп}}$ слоев тепловой защиты: δ_{n} — толщина слоя, прогретого до допустимой температуры $T_{\text{доп}}$; T_y — температура разрушающейся поверхности материала; $T_{x\text{n}}$ — температура холодной поверхности в глубине тепловой защиты; $\delta_{t\text{з}}$ — суммарная толщина тепловой защиты.

Толщина унесенного слоя теплозащиты δ_y за период времени от начала уноса τ_0 до его окончания τ_k составит

$$\delta_y = \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{\dot{m}_y}{\rho} d\tau, \quad (19.8)$$

где ρ — плотность материала уносимого слоя ТЗ.

Распределение температуры по толщине слоя тепловой защиты после окончания процесса уноса можно представить в виде зависимости

$$T(x) = T_y \exp \left(-\frac{\dot{m}_y x}{a \rho} \right), \quad (19.9)$$

где a — температуропроводность материала ТЗ.

Принимая в формуле (19.9) $T(x) = T_{\text{доп}}$ и $x = \delta_{\text{n}}$, найдем

$$\frac{T_y}{T_{\text{доп}}} = \exp \left(-\frac{\dot{m}_y \delta_{\text{n}}}{a \rho} \right).$$

Из последнего выражения после его логарифмирования получим

$$\delta_{\text{п}} = \frac{a \rho}{\dot{m}_y} \ln \frac{T_y}{T_{\text{доп}}} . \quad (19.10)$$

Видно, что толщина слоя, прогретого до $T = T_{\text{доп},23}$ возрастает при использовании материалов с высоким значением теплопроводности ($a = \lambda/(c_p \rho)$) и становится меньше для материалов с большой теплоемкостью.

Расчет уноса ТЗП по формулам (19.7)–(19.10) является приближенным, возможен в предположении равновесности процесса в характерных точках покрытия в характерные моменты времени.

В действительности процесс разрушения ТЗП имеет нестационарный характер и для каждого конкретного материала сопровождается сложными физико–химическими превращениями, что требует для расчета разрушения ТЗП использования математических моделей, описывающих эти процессы.

ГЛАВА 4. Основные понятия теории теплопроводности

20. Температурное поле и градиент

Процесс переноса теплоты в сплошной среде, называемый теплопроводностью, осуществляется в результате непосредственного соприкосновения частиц, имеющих различную скорость, что вызывает обмен энергией между молекулами, атомами или свободными электронами. Этот процесс реализуется при наличии в среде неравномерного распределения температур.

Предположение о сплошности среды при изучении процесса теплопроводности означает, что рассматриваемые размеры дифференциальных объемов среды намного больше размеров молекул и расстояний между ними. Температура среды, в общем случае, зависит от пространственных координат и времени

$$T = T(x, y, z, \tau).$$

Совокупность значений температуры для всех точек пространства в данный момент времени называется температурным полем.

В зависимости от условий протекания процесса теплообмена в теле возникает либо нестационарное (неустановившееся) температурное поле, либо стационарное (установившееся). В первом случае оно зависит от пространственных координат и времени, а во втором — только от координат. Часть точек тела может иметь одинаковую температуру. Поверхность, проходящую через эти точки, называют изотермической.

Пространственное изменение температуры имеет место лишь в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. При этом наибольшее изменение температура претерпевает в направлении нормали к изотермической поверхности (рис. 20.1).

На рисунке прерывистыми стрелками показаны линии теплового тока, касательные к которым совпадают с направлением вектора плотности теплового потока.

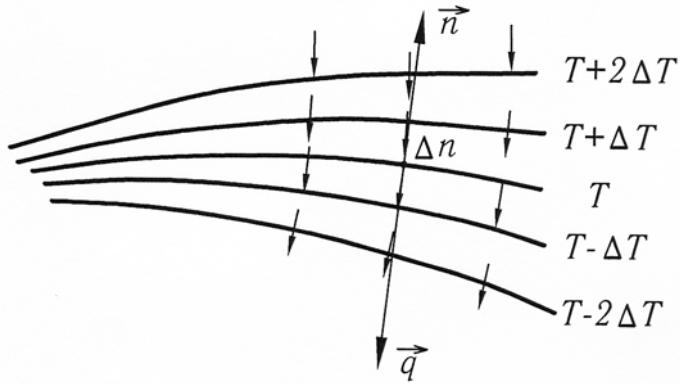


Рис. 20.1. Изотермы температурного поля и линии теплового тока

Предел отношения изменения температуры ΔT к расстоянию Δn между изотермами по нормали, на котором происходит это изменение, есть вектор, называемый градиентом температуры

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} = \operatorname{grad} T,$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали.

За положительное направление градиента температуры принимается направление в сторону ее увеличения. Составляющие вектора градиента температуры по осям прямоугольной системы координат равны частным производным по этим осям

$$\operatorname{grad} T = \nabla T = \frac{\partial t}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k},$$

где \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} — единичные векторы.

21. Тепловой поток, закон Фурье

Необходимым условием переноса теплоты в среде путем теплопроводности является наличие в ней неравномерного распределения температур. Количество теплоты, проходящей в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности dS , определяет интенсивность передачи теплоты и называется плотностью теплового потока (см. рис. 20.1)

$$\vec{q} = (-\vec{n}) \frac{dQ}{d\tau} \frac{1}{dS}, \quad (21.1)$$

где Q — количество теплоты, Дж.

В соответствии с гипотезой Фурье вектор плотности теплового потока \vec{q} пропорционален градиенту температуры

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T. \quad (21.2)$$

Коэффициент пропорциональности λ представляет собой физическую характеристику среды, называется теплопроводностью и зависит от атомно–молекулярного строения, температуры и структуры среды, а для смеси веществ — от их состава.

У изотропных материалов векторы \vec{q} и $\operatorname{grad} T$ расположены на одной прямой, но направлены противоположно.

В современной технике широко используются материалы, обладающие анизотропными свойствами. У таких материалов, в частности, способность передавать теплоту в разных направлениях различна. К ним, например, относятся композиты, состоящие из полимерной матрицы и армирующих элементов в виде волокон, нитей, жгутов или тканей различного строения.

Теплопроводность анизотропных материалов зависит от направления и представляет собой симметричный тензор второго ранга

$$\tilde{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}, \quad (21.3)$$

где $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$, $\lambda_{xz} = \lambda_{zx}$ и $\lambda_{yz} = \lambda_{zy}$.

В этом случае векторы плотности теплового потока и градиент температуры по-прежнему связаны соотношением (21.2), но уже не лежат на одной прямой, а образуют угол $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

22. Уравнение переноса субстанции

Рассмотрим произвольный объем V , ограниченный поверхностью S (рис. 22.1).

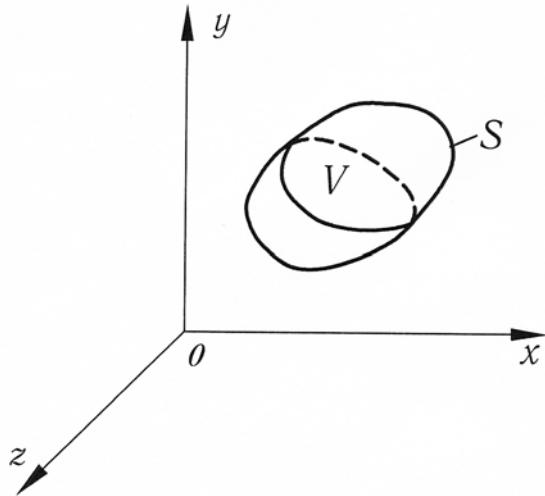


Рис. 22.1. К выводу уравнения переноса субстанции

В выделенном объеме V концентрация субстанции (например, количество энергии в единице объема) равна $\tilde{C} = C$ и действуют источники (или стоки) субстанции мощностью \tilde{I}_V . При этом количество субстанции, образующейся в объеме V в единицу времени, составляет

$$\int_V \tilde{I}_V dV. \quad (22.1)$$

Часть субстанции перемещается через поверхность S путем диффузии

$$\oint_S (\vec{j} \cdot \vec{\delta}_n) dS, \quad (22.2)$$

где \vec{j} — плотность диффузионного (молекулярного) потока субстанции, Вт/м² и $\vec{\delta}_n$ — единичный вектор вдоль нормали \vec{n} к поверхности S .

Полное изменение концентрации субстанции в объеме V равно

$$\frac{d}{d\tau} \left(\int_V \tilde{C} dV \right). \quad (22.3)$$

Из закона сохранения субстанции следует уравнение баланса

$$\frac{d}{d\tau} \left(\int_V \tilde{C} dV \right) + \oint_S (\vec{j} \cdot \vec{\delta}_n) dS = \int_V \tilde{I}_V dV. \quad (22.4)$$

В соответствии с формулой Лейбница для полной производной

$$\frac{d}{d\tau} \left(\int_V \tilde{C} dV \right) = \int_V \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} dV + \oint_S \tilde{C} (\vec{v}_S \cdot \vec{\delta}_n) dS, \quad (22.5)$$

где \vec{v}_S — вектор скорости движения поверхности S , который в рассматриваемом случае может быть принят равным вектору скорости движения субстанции \vec{v} .

Подставляя выражение для полной производной из (22.5) в уравнение (22.4), получим

$$\int_V \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} dV + \oint_S \tilde{C} (\vec{v}_S \cdot \vec{\delta}_n) dS + \oint_S (\vec{j} \cdot \vec{\delta}_n) dS = \int_V \tilde{I}_V dV. \quad (22.6)$$

Используя теорему Гаусса–Остроградского для замены в (22.6) интегралов по поверхности S на интегралы по объему V , запишем уравнение (22.6) в виде

$$\int_V \left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\tilde{C} \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{j} - \tilde{I}_V \right) dV = 0, \quad (22.7)$$

откуда получается дифференциальное уравнение переноса субстанции

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\tilde{C} \vec{v}) = -\operatorname{div} \vec{j} + \tilde{I}_V. \quad (22.8)$$

Слагаемые в левой части уравнения (22.8) определяют локальное изменение переносимой субстанции ($\partial \tilde{C} / \partial \tau$) и ее конвективный перенос ($\operatorname{div}(\tilde{C} \vec{v})$). Слагаемые в правой части характеризуют диффузионный перенос ($\operatorname{div} \vec{j}$) и действие источников (или стоков) субстанции \tilde{I}_V .

23. Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности в прямоугольной системе координат.

Полагая, что в твердом теле можно не учитывать перенос теплоты за счет диффузии, примем $\vec{j} = 0$ и $c_V = c_p$. В случае, когда перенос теплоты через поверхность выделенного объема осуществляется только теплопроводностью, произведение $\tilde{C}\vec{v}$ в уравнении (22.8) представляет собой плотность потока теплоты, которая в соответствии с законом Фурье (21.2) равна

$$\tilde{C}\vec{v} = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad (23.1)$$

где переносимой субстанцией является объемная концентрация внутренней энергии тела

$$\tilde{C} = C = U_V = c_V \rho T. \quad (23.2)$$

Обозначая мощность внутренних источников (стоков) теплоты q_V ($\tilde{I}_V = q_V$) и подставляя соотношения (23.1—23.2) в выражение (22.8), получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(c_V \rho T) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_V. \quad (23.3)$$

Дифференциальное уравнение (23.3) называется уравнением теплопроводности и определяет связь между временным и пространственным изменениями температуры в рассматриваемой точке тела. В общем случае теплоемкость тела c_V , его плотность ρ и мощность внутренних источников теплоты q_V есть функции координат и времени

$$c_V = c_V(x, y, z, \tau), \quad (23.4)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, \tau), \quad (23.5)$$

$$q_V = q_V(x, y, z, \tau), \quad (23.6)$$

а теплопроводность λ представляет собой тензор

$$\tilde{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}, \quad (23.7)$$

Первое слагаемое в правой части (23.3) после подстановки в него λ в виде (23.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) &= \operatorname{div} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \operatorname{grad} T \right) = \\ &= \operatorname{div} \left[\left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \vec{j} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \vec{k} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (23.8) \end{aligned}$$

Используя (23.8) совместно с (23.3), получим уравнение теплопроводности для анизотропных тел

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho c_V T) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_V. \quad (23.9) \end{aligned}$$

В частном случае для изотропного тела

$$\lambda = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и уравнение (23.9) можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho c_V T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_V. \quad (23.10)$$

Для тела с постоянными свойствами ($c_v = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$) уравнение (23.10) упрощается

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_V}{c_V \rho}, \quad (23.11)$$

где $a = \lambda/(c_V\rho)$ — температуропроводность, $\text{м}^2/\text{с}$.

Уравнение теплопроводности в цилиндрической и сферической системах координат. При использовании вместо декартовых координат цилиндрических или сферических координат в уравнении (23.11) изменится вид только первого слагаемого в правой части (рис. 23.1):

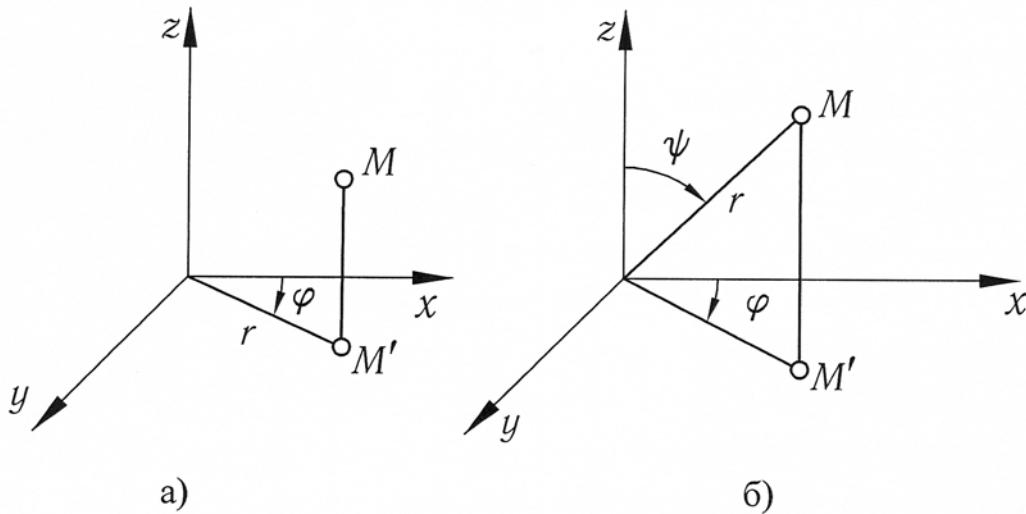


Рис. 23.1. К выводу уравнения теплопроводности в цилиндрических (а) и сферических (б) координатах

в цилиндрической системе координат при $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_V}{c_V \rho}; \quad (23.12)$$

в сферической системе координат при $\lambda = \text{const}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} = a & \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \right] + \frac{q_V}{c_V \rho}. \end{aligned} \quad (23.13)$$

24. Уравнение теплопроводности для одномерных задач

В инженерной практике часто приходится иметь дело с задачами определения температурного поля, когда температура тела зависит только от одной координаты, в направлении которой изменяется и поверхность теплообмена. Это задачи, связанные с переносом теплоты в телах

сферической, цилиндрической формы и в стержнях (ребрах) переменного сечения. В этом случае в уравнении (22.8) целесообразно в качестве произведения $(\tilde{C} \cdot \vec{v})$ использовать не плотность переносимой энергии, а полный ее поток в Вт. Примем $\vec{j} = 0$ и

$$\left. \begin{aligned} \tilde{C} &= CS(r), \\ \tilde{I}_V &= I_V S(r) = q_V S(r) \end{aligned} \right\}. \quad (24.1)$$

Тогда

$$\tilde{C} \cdot \vec{v} = CS(r) \vec{v}, \quad (24.2)$$

где $S(r)$ — площадь поверхности тела, нормальная к направлению переноса энергии r ; C в Дж·м⁻³ и \tilde{C} в Дж·м⁻¹.

Подставим (24.1) и (24.2) в уравнение (22.8) и, учитывая, что $S(r)$ не зависит от времени, найдем

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = q_V - \frac{1}{S(r)} \frac{\partial}{\partial r} [CS(r) \vec{v}]. \quad (24.3)$$

В уравнении (24.3) все члены имеют размерность Вт/м³.

В случае, когда перенос энергии через площадь $S(r)$ осуществляется не только теплопроводностью, во втором слагаемом выражения (24.3) произведение $(C\vec{v})$ следует представить в виде суммы

$$C\vec{v} = \sum_{i=1}^n C_i \vec{v}_i. \quad (24.4)$$

Здесь произведение $C_i \vec{v}_i = q_i$ представляет собой плотность потока, который передается тем или иным механизмом ($n = 1, 2, \dots$) через единицу площади $S(r)$ в единицу времени в направлении r . В связи с этим второе слагаемое в правой части (24.3), характеризующее изменение энергии в единице объема $dV = S(r) dr$ за счет ее переноса, равно

$$\frac{dQ}{dV} = \frac{1}{S(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[S(r) \sum_{i=1}^n C_i \vec{v}_i \right] = \frac{1}{S(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[S(r) \sum_{i=1}^n q_i \right]. \quad (24.5)$$

Например, для пористых тел, охлаждаемых жидкостью, можно указать, по крайней мере, два механизма изменения энергии, вызванного ее

переносом, — вследствие переноса теплоты теплопроводностью и за счет теплообмена между твердым каркасом и протекающей через поры жидкостью:

— изменение энергии, передаваемой теплопроводностью через единицу поверхности $S(r)$ в единицу времени на отрезке dr , составляет

$$\frac{1}{S(r)} \frac{\partial}{\partial r} [S(r) q_1] = \frac{1}{S(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[-\lambda_{\text{ж}} S(r) \frac{\partial T}{\partial r} \right], \quad (24.6)$$

— изменение энергии жидкости, протекающей через единицу поверхности $S(r)$ пористого тела с массовым расходом \dot{m} и теплоемкостью $c_{\text{рж}}$ в единицу времени на отрезке dr , равно

$$\frac{1}{S(r)} \frac{\partial}{\partial r} [S(r) q_2] = \frac{1}{S(r)} \frac{\partial}{\partial r} [\dot{m} c_{\text{рж}} S(r) T]. \quad (24.7)$$

При записи выражений (24.6) и (24.7) принято, что передача тепла через охлаждаемое пористое тело осуществляется одновременно по каркасу с температурой $T(r)$ и через заполняющую поры жидкость с температурой $T_c = T(r)$, а эффективная теплопроводность

$$\lambda_{\text{ж}} = \lambda_c(1 - p) + \lambda_{\text{ж}}, \quad (24.8)$$

где p — пористость, а λ_c и $\lambda_{\text{ж}}$ — теплопроводность каркаса и жидкости соответственно.

В некоторых задачах определения одномерного температурного поля необходимо на внешних поверхностях тела, пересекающих изотермические поверхности, учитывать теплообмен с окружающей средой путем конвекции и излучения. Примером таких задач могут служить задачи расчета температурного состояния стержней (ребер). Связанные с этим потери (притоки) энергии в объеме тела dV с площадью внешней поверхности $d\Phi(r)$ можно представить как дополнительные стоки (источники) теплоты и включить их в слагаемое q_V в уравнении (24.3), записав его в виде

$$q_V = \sum_{j=0}^m q_{V,j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (24.9)$$

где для $j = 0$: $q_{V,0}$ — внутренние источники теплоты, связанные с наличием в теле химических или ядерных реакций, а также с поглощением в нем потока излучения.

При конвективном теплообмене на внешней поверхности $d\Phi(r)$ объема dV

$$q_{V,1} = \alpha(T - T_c) \frac{d\Phi(r)}{dV}. \quad (24.10)$$

Для теплообмена излучением

$$q_{V,2} = q_{\text{рез}} \frac{d\Phi(r)}{dV} = (q_{\text{соб}} - Aq_{\text{пад}}) \frac{d\Phi(r)}{dV}, \quad (24.11)$$

где $q_{\text{соб}}$ — плотность потока собственного излучения, Вт/м²; $q_{\text{пад}}$ — плотность падающего на поверхность потока излучения; A — поглощающая способность поверхности тела.

В случае конвективного теплообмена между пористым каркасом тела с температурой $T = T(r)$ и движущейся в нем жидкостью, температура которой $T_{\text{ж}} = T_{\text{ж}} \neq T(r)$

$$q_{V,3} = \alpha_V(T - T_{\text{ж}}), \quad (24.12)$$

где α_V — объемный коэффициент теплоотдачи, Вт/(м³К).

Используя соотношения (24.5) и (24.9) совместно с (24.3), получим уравнение теплопроводности, описывающее одномерное нестационарное температурное поле в телах плоской, цилиндрической и сферической формы, а также в стержнях (ребрах) переменного сечения монолитной или пористой структуры с внутренними источниками (стоками) теплоты

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \sum_{j=0}^m q_{V,j} - \frac{1}{S(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[S(r) \sum_{i=1}^n q_i \right], \quad (24.13)$$

где $C = c_V \rho T$.

Отметим, что в уравнении (24.13) мощность внутренних источников (стоков) теплоты для $j = 0$ есть функция только координаты или константа, а в слагаемых для $j = 1, 2$ и 3 , как это видно из соотношений (24.10)-(24.12), она зависит от температуры. Если зависимость $q_{V,j}$ от

температуры описывается выражением (24.11), в котором $q_{\text{соб}} = \varepsilon\sigma T^{\frac{131}{4}}$, уравнение (24.13) становится нелинейным. Нелинейность другого рода возникает и тогда, когда теплофизические свойства тела являются функцией температуры.

Если величины c_V, ρ, λ и $c_{\text{рж}}$ постоянны, то из уравнения (24.13) с учетом (24.6) и (24.7) получается

$$c_V \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{S(r)} \left\{ \lambda_3 \frac{\partial}{\partial r} \left[S(r) \frac{\partial T}{\partial r} \right] - \dot{m} c_{\text{рж}} \frac{\partial}{\partial r} [S(r)T] \right\} + \sum_{j=0}^m q_{V,j}. \quad (24.14)$$

Отсюда для стационарного теплообмена, когда $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$, следует

$$\frac{1}{S(r)} \left\{ \lambda_3 \frac{d}{dr} \left[S(r) \frac{dT}{dr} \right] - \dot{m} c_{\text{рж}} \frac{d}{dr} [S(r)T] \right\} + \sum_{j=0}^m q_{V,j} = 0, \quad (24.15)$$

где функция $q_{V,j}$ не зависит от времени или время в ней играет роль параметра.

Запись некоторых частных случаев уравнения (24.15) имеет вид:

1. Монолитная плоская пластина, $\dot{m} = 0$ и $S(r) = S(x) = \text{const.}$

Тогда из (24.15) следует

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q_V(x)}{\lambda} = 0.$$

2. Монолитная цилиндрическая стенка, $\dot{m} = 0$ и $S(r) = 2\pi rl$. Тогда

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_V(r)}{\lambda} = 0.$$

3. Монолитная сферическая стенка, $\dot{m} = 0$ и $S(r) = 4\pi r^2$. Тогда

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_V(r)}{\lambda} = 0.$$

В общем виде эти частные случаи можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_V(r)}{\lambda} = 0, \quad \text{где } \nu = 0, 1, 2.$$

Приведенные выше частные случаи уравнения (24.15) и другие удобно использовать иногда в безразмерной форме. Например, для плоской, цилиндрической и сферической монолитных стенок ($\nu = 0, 1, 2$) соответствующая запись принимает вид

$$\frac{d^2\theta^*}{d\xi^2} + \frac{\nu}{\xi} \frac{d\theta^*}{d\xi} + \text{Po}(\xi) = 0,$$

где $\theta^* = \frac{T}{T_m}$, $\xi = \frac{r}{h}$, $\text{Po}(\xi) = \frac{q_V(r)h^2}{\lambda T_m}$.

4. Плоская пористая стенка с q_V :

$$\frac{d^2\theta^*}{d\xi^2} - K_{\Pi} \frac{d\theta^*}{d\xi} + \text{Po}(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

5. Цилиндрическая пористая стенка с q_V :

$$\frac{d^2\theta^*}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} - K_{\Pi} \right) \frac{d\theta^*}{d\xi} - K_{\Pi} \frac{1}{\xi} \theta^* + \text{Po}(\xi) = 0.$$

6. Сферическая пористая стенка с q_V :

$$\frac{d^2\theta^*}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{\xi} - K_{\Pi} \right) \frac{d\theta^*}{d\xi} - K_{\Pi} \frac{2}{\xi} \theta^* + \text{Po}(\xi) = 0.$$

7. Стержни различной формы:

$$a_{\xi\xi} \frac{d^2\theta^*}{d\xi^2} + b_{\xi} \frac{d\theta^*}{d\xi} + c_{\xi} \theta^* + F(\xi) = 0, \quad (24.16)$$

где $a_{\xi\xi} = \bar{S}(\xi) = \frac{S(\xi)}{S_0}$; $b_{\xi} = a'_{\xi\xi} - a_{\xi\xi} K_{\Pi}$; $K_{\Pi} = \frac{\dot{m}c_{\text{рж}}l}{\lambda_{\vartheta}}$; $\lambda_{\vartheta} \cong \lambda_c(1-p)$;
 $c_{\xi} = -(Bi\bar{\Phi}' + a'_{\xi\xi} K_{\Pi})$; $Bi = \frac{\alpha l}{\lambda_{\vartheta}}$, $F(\xi) = \text{Po}(\xi) \frac{d\bar{V}}{d\xi} + Bi\theta_c^* \frac{d\bar{\Phi}(\xi)}{d\xi}$;
 $\text{Po}(\xi) = \frac{q_{V\Sigma}(\xi)l^2}{\lambda_{\vartheta} T_m}$; $\bar{V} = \frac{V}{S_0 l}$, $\theta_c^* = \frac{T_c}{T_m}$; $\xi = \frac{x}{l}$; l — высота стержня;
 S_0 — площадь поперечного сечения в основании стержня; $\bar{\Phi}(\xi) = \Phi(\xi)/S_0$;
 $\Phi(\xi)$ — внешняя поверхность стержня; $S(\xi)$ — текущее значение площади поперечного сечения стержня, L — его длина; $\theta^* = T/T_m$,
 p — пористость материала; V — текущее значение объема стержня;
 T_c — температура среды, окружающей стержень; T_m — любая температура, выбранная для обезразмеривания, кроме $T_m = 0$ или $T_m = \infty$.
 $F(\xi)$ — неоднородный член в уравнении (24.16).

Таким образом, уравнение (24.15) или в безразмерной форме (24.16) включает в себя, как частные случаи, уравнения теплопроводности для пластины, цилиндра, сферы и стержней различной формы, пористых или монолитных, с внутренними источниками (стоками) теплоты или без них.

25. Условия однозначности

Представленные выше дифференциальные уравнения (23.3), (23.9-23.13) устанавливают связь между пространственными и временными изменениями температуры и описывают перенос теплоты внутри тела. В общем случае эти уравнения имеют множество решений. Для получения решения конкретной задачи к основному дифференциальному уравнению необходимо добавить дополнительные условия (условия однозначности), включающие: геометрические условия, определяющие форму и линейные размеры тела; физические условия, характеризующие свойства тела и среды, закон изменения мощности внутренних источников теплоты; условия теплообмена на границах тела и распределение температуры в нем в начальный момент времени. Совокупность граничных и начальных условий принято называть краевыми условиями.

Физические условия содержат сведения о теплофизических характеристиках тела и среды (теплоемкости c , теплопроводности λ , плотности ρ) и их зависимости от температуры, а также пористости. В некоторых случаях определение закона распределения мощности внутренних источников теплоты связано со способностью тела частично поглощать, пропускать или рассеивать внешнее и внутреннее (собственное) излучение. В этих случаях физические условия следует дополнить информацией об оптических характеристиках тела: излучательной и поглощающей способностях граничных поверхностей, коэффициентах поглощения, пропускания, рассеивания и др.

Начальное условие обычно задают для некоторого момента времени $\tau = \tau_0$ (чаще $\tau_0 = 0$) в виде известной функции пространственных

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z). \quad (25.1)$$

Если в начальный момент времени распределение температуры во всем объеме тела равномерное, то

$$T(x, y, z, 0) = T_0 = \text{const}. \quad (25.2)$$

Границные условия задают различными способами. Принято различать граничные условия I, II, III, IV рода и другие.

Границные условия I рода. В этом случае задают распределение температуры на поверхности тела S в любой момент времени

$$T_S = \varphi(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in S. \quad (25.3)$$

Это условие удобно использовать для решения задач нагрева или охлаждения тел при известном (например, из эксперимента) изменении температуры на границе тела или при интенсивном теплообмене на поверхности, когда температура на ней становится практически равной температуре среды.

Границные условия II рода. В этом случае задают распределение плотности теплового потока на поверхности тела в виде функции координат и времени

$$q_S = \psi(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in S. \quad (25.4)$$

В соответствии с законом Фурье, условие (25.4) может быть записано в виде

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = \psi(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in S. \quad (25.5)$$

Если плотность теплового потока на поверхности тела для любого момента времени постоянна, то

$$q_S = q_0 = \text{const}. \quad (25.6)$$

Рассматриваемые условия теплообмена на поверхности тела реализуются, например, при нагреве их излучением, когда температура тела

существенно меньше температуры излучающих на него поверхностей и $q_S = Aq_{\text{пад}}$, а $q_{\text{соб}} = 0$.

Границные условия III рода. В этом случае для описания конвективного теплообмена между поверхностью твердого тела и окружающей средой используют гипотезу Ньютона–Рихмана, согласно которой при охлаждении тела ($T_{\text{n}} > T_{\text{c}}$) плотность теплового потока через границу тела пропорциональна разности температур поверхности тела и окружающей его среды

$$q_S = \alpha(T_{\text{n}} - T_{\text{c}}), \quad (25.7)$$

где α — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплоотдачи, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$. Для процесса нагревания тела в соотношении (25.7) температуры поверхности T_{n} и среды T_{c} необходимо поменять местами.

На основании закона сохранения энергии плотность теплового потока, поступающего изнутри тела путем теплопроводности к его поверхности, должна быть равна плотности потока, передаваемого ею в окружающую среду путем конвекции (при нагревании — наоборот):

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) = \alpha [T_{\text{n}}(\tau) - T_{\text{c}}(\tau)]. \quad (25.8)$$

Такая формулировка граничного условия широко используется при исследовании теплообмена на границе твердого тела с потоком жидкости или газа.

Коэффициент теплоотдачи α в отличие от теплопроводности λ не является физической характеристикой вещества среды и отражает совокупный механизм теплопередачи конвекцией и теплопроводностью. Полагая закон распределения температуры в слое жидкости на границе с твердым телом линейным, можно получить следующую качественную связь коэффициента теплоотдачи α с теплопроводностью жидкости λ_{j} и условной толщиной пограничного слоя δ :

$$q_S = -\lambda_{\text{j}} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = \frac{\lambda_{\text{j}}(T_{\text{n}} - T_{\text{c}})}{\delta} = \alpha [T_{\text{n}} - T_{\text{c}}].$$

Откуда следует

$$\alpha = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{\delta}. \quad (25.9)$$

Поскольку δ зависит от скорости движения жидкости, ее физических свойств и температуры, то коэффициент теплоотдачи α изменяется вдоль поверхности тела в направлении движения. При нестационарных процессах теплообмена между поверхностью тела и потоком жидкости условная толщина пограничного слоя зависит еще и от времени $\delta = \delta(\tau)$. В связи с этим, строго говоря, условие (25.8) справедливо лишь при стационарном конвективном теплообмене, когда коэффициент α можно считать постоянным. Однако для решения многих частных задач условие (25.8) можно использовать в качестве граничного условия первого приближения.

Отметим два случая, в которых граничное условие (25.8) вырождается в граничные условия I и II рода. При интенсивном конвективном теплообмене или развитом пузырьковом кипении жидкости на поверхности тела ($\alpha \rightarrow \infty, \lambda = \text{const}$) получается

$$T_{\text{п}} - T_{\text{c}} = \lim_{(\alpha/\lambda) \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(\alpha/\lambda)} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S \right] = 0$$

и реализуется граничное условие I рода

$$T_{\text{п}} = T_{\text{c}}.$$

Аналогично при $\alpha \rightarrow 0$ из (25.8) следует граничное условие II рода

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = 0.$$

Граничное условие III рода находит применение и при решении некоторых задач нагревания или охлаждения тел излучением. В соответствии с законом Стефана-Больцмана плотность результирующего потока излучения между двумя достаточно большими параллельными поверхностями, разделенными непоглощающей средой, определяется соотношением

$$q_S(\tau) = Aq_{\text{пад}} - q_{\text{соб}} = \varepsilon_{\text{пр}}\sigma [T_1^4(\tau) - T_2^4], \quad (25.10)$$

где $\varepsilon_{\text{пр}}$ — приведенная степень черноты; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К}^4)$ — постоянная Стефана–Больцмана; $T_1(\tau)$ — температура охлаждаемой поверхности 1; T_2 — температура тепловоспринимающей поверхности 2. При малой разности температур $T_1(\tau) - T_2$ нелинейное соотношение (25.10) может быть линеаризовано

$$\begin{aligned} q_S(\tau) &= \varepsilon_{\text{пр}}\sigma \left\{ (T_1^2(\tau) + T_2^2)[T_1(\tau) + T_2] \right\} [T_1(\tau) - T_2] = \\ &= \alpha_{\text{л}}(T) [T_1(\tau) - T_2], \end{aligned} \quad (25.11)$$

где $\alpha_{\text{л}}(T)$ — коэффициент лучистого теплообмена с той же размерностью, что и коэффициент конвективного теплообмена, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$

$$\alpha_{\text{л}}(T) = \varepsilon_{\text{пр}}\sigma (T_1^2(\tau) + T_2^2)[T_1(\tau) + T_2] = \varepsilon_{\text{пр}}\sigma b(T), \quad (25.12)$$

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}, \quad (25.13)$$

где ε_1 и ε_2 — излучательные способности (степени черноты) поверхностей 1 и 2.

Если поглощательная способность среды между поверхностями 1 и 2 достаточно мала (чистый воздух), а ее температура близка к T_2 , то в выражении (25.11) T_2 можно заменить на T_c . При этом доля конвективного теплового потока от поверхности 1 в среду, составляющая небольшую величину, равна

$$q_{\text{к}} = \alpha_{\text{к}} [T_1(\tau) - T_c]$$

и соотношение (25.7) принимает вид

$$q_S(\tau) = [\alpha_{\text{к}} + \alpha_{\text{л}}(T)] [T_1(\tau) - T_c] = \alpha_{\Sigma} [T_1(\tau) - T_c]. \quad (25.14)$$

Изменение знака в выражениях (25.10), (25.11), (25.14) на противоположный свидетельствует об изменении направления результирующего потока.

И, наконец, полагая α_{Σ} в первом приближении величиной постоянной, а температуру среды $T_c = T_c(\tau)$, запишем по аналогии с выражени-

ем (25.8) граничные условия III рода применительно к задачам нагревания тел излучением для случая малой разности температур $T_1(\tau) - T_c(\tau)$ в виде

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S + \alpha_{\Sigma} [T_1(\tau) - T_c(\tau)] = 0. \quad (25.15)$$

Учитывая, что граничное условие (25.8) характеризует кондуктивно-конвективный теплообмен в связанной области "твёрдое тело — жидкость", более обоснованным является подход к решению таких задач как сопряженных, при котором проблема определения температурных полей в теле и окружающей среде рассматривается как совместная. Указанное обстоятельство приводит к необходимости использования граничных условий IV рода.

Граничные условия IV рода. Этот тип граничного условия используют для решения задач конвективного теплообмена тела с окружающей средой или теплообмена соприкасающихся твердых тел. Его математическая формулировка отражает равенство температур на поверхностях соприкосновения тел при идеальном тепловом контакте (свойство непрерывности температурного поля) и равенство тепловых потоков, передаваемых теплопроводностью через поверхность контакта

$$T_{S1} = T_{S2}, \quad (25.16)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_{S1} = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_{S2}. \quad (25.17)$$

Допущение об идеальности теплового контакта в местах соприкосновения тел может приводить к серьезным погрешностям в определении температурного состояния реальных конструкций. Степень приближения к идеальному во многом зависит от качества обработки поверхностей, технологии их скрепления (силы прижатия), физических свойств соединяемых материалов и других причин.

ГЛАВА 5. Численные методы решения задач теплопроводности

26. Метод конечных разностей (метод сеток)

Особенность метода заключается в том, что решение задачи находят не для непрерывной области, а лишь в конечном множестве точек, образующих сетку. Решение начинается с замены исходного дифференциального уравнения его конечно-разностным аналогом. С этой целью область непрерывного изменения аргумента заменяют дискретной областью, а дифференциальный оператор уравнения — разностным уравнением. В результате такого преобразования решение дифференциального уравнения удается свести к решению системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений (системы конечно-разностных уравнений). Степень приближения (точность) разностного решения к точному зависит от выбора пространственного и временного шага сетки.

Для численного решения нестационарных задач теплопроводности используют, как правило, одну из двух схем записи разностных уравнений: явную или неявную. Рассмотрим особенности использования указанных схем на примере решения одномерной нестационарной задачи теплопроводности в плоской стенке без внутренних источников тепла. Соответствующее дифференциальное уравнение, описывающее температурное поле, имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (26.1)$$

Разобьем стенку с помощью сетки на слои толщиной Δx , рис. 26.1.

Применительно к решению задачи по явной схеме температуры слоев внутри стенки ($i - 1, i, i + 1$) в " k " момент времени (предыдущий момент времени) обозначены на рисунке верхним индексом " k " и считаются известными из начального условия.

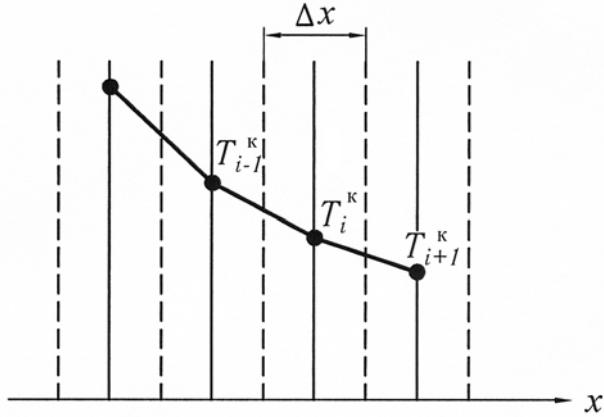


Рис. 26.1. Схема разбиения для внутренних слоев в стенке

Заменим производные в уравнении (26.1) их конечно-разностными аналогами

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} &\approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_1 &\approx \frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta x}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 &\approx \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta x} - \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta x} \right] = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (26.2)$$

Используя производные (26.2) совместно с (26.1), получим систему линейных алгебраических уравнений, число которых $n - 2$ равно числу неизвестных температур во внутренних слоях стенки

$$T_i^{k+1} - T_i^k = \frac{a \Delta \tau}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k). \quad (26.3)$$

Обозначая в (26.3)

$$\frac{a \Delta \tau}{(\Delta x)^2} = \text{Fo},$$

где Fo — число Фурье, найдем

$$T_i^{k+1} = \text{Fo} (T_{i+1}^k + T_{i-1}^k) + (1 - 2\text{Fo}) T_i^k. \quad (26.4)$$

Система уравнений (26.4) позволяет определить значения температур во всех внутренних узлах сетки в $(k+1)$ -ый момент времени, если значения температур в k -ый момент времени заданы. Такой способ численного решения задачи является явным. Каждое из конечно-разностных уравнений (26.4) содержит лишь одну неизвестную температуру T_i^{k+1} в момент времени $\tau + \Delta\tau$. Предполагается, что в каждый момент времени τ распределение температуры в промежутке между соседними точками является линейным.

Рассмотрим далее баланс тепла в граничном слое, рис. 26.2.

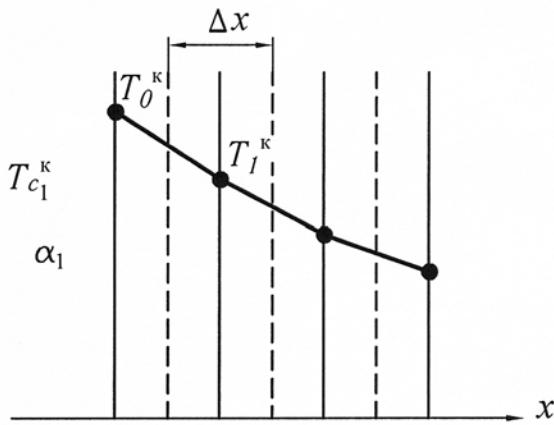


Рис. 26.2. Левый граничный слой стенки

Видно, что в отличие от внутренних узлов поток тепла через левую границу слоя от среды поступает путем конвекции, поэтому для левого граничного слоя можно записать следующее уравнение баланса тепла

$$\alpha_1 F (T_{c1}^k - T_0^k) + \lambda F \frac{T_1^k - T_0^k}{\Delta x} = \frac{1}{2} c \rho F \Delta x \frac{T_0^{k+1} - T_0^k}{\Delta \tau}. \quad (26.5)$$

Выражая из уравнения (26.5) в явном виде температуру на левой поверхности стенки в $k+1$ -ый момент времени, получим

$$T_0^{k+1} = 2Fo (T_1^k + Bi_1 T_{c1}^k) + T_0^k (1 - 2Fo - 2Fo \cdot Bi_1), \quad (26.6)$$

где $Bi = \frac{\alpha_1 \Delta x}{\lambda}$ — число Био.

Используя уравнение (26.6) находят температуру на левой границе стенки и по формуле (26.4) — температуру во всех внутренних слоях. Температура на правой границе стенки должна быть определена из уравнения баланса, аналогичного (26.5), рис. 26.3

$$\alpha_2 F (T_{c_2}^k - T_n^k) + \lambda F \frac{T_{n-1}^k - T_n^k}{\Delta x} = \frac{1}{2} c \rho F \Delta x \frac{T_n^{k+1} - T_n^k}{\Delta \tau},$$

после преобразования которого находим

$$T_n^{k+1} = 2F_o (T_{n-1}^k + Bi_2 T_{c_2}^k) + T_n^k (1 - 2F_o - 2F_o \cdot Bi_2). \quad (26.7)$$

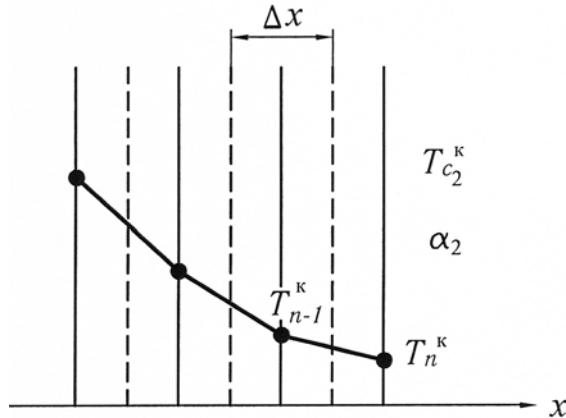


Рис. 26.3. Правый граничный слой стенки

Процесс вычисления температур носит итерационный характер. Вначале по формулам (26.6), (26.4) и (26.7) последовательно находят температуры на левой границе стенки, во внутренних слоях и на ее правой границе в $k+1$ -ый момент времени, полагая, что все другие температуры и параметры теплообмена в предыдущий k -ый момент времени известны. Далее найденные значения температур в $k+1$ -ый момент времени следует подставить в правую часть уравнений (26.6), (26.4), (26.7) и вычислить температуры в $k+2$ -ой момент времени и т.д. Этот процесс повторяется до того момента времени, в который требуется знать температурное поле пластины.

Систему уравнений (26.4) удобно представить в виде

$$T_i^{k+1} = AT_{i+1}^k + BT_i^k + CT_{i-1}^k, \quad (26.8)$$

где $A = C = a\Delta\tau/(\Delta x)^2$, $B = 1 - 2a\Delta\tau/(\Delta x)^2$ и $A + B + C = 1$. 143

Удобство последней записи уравнения для внутренних слоев состоит в том, что при решении двухмерной задачи теплопроводности в правой части уравнения (26.8) должны стоять не три, а пять слагаемых, содержащих известные температуры в слоях (ячейках) в k -ый момент времени. В случае решения трехмерной задачи таких слагаемых должно быть семь.

Решение конечно-разностных уравнений по явной схеме связано в ограничениями на выбор шага по времени, который для внутренних узлов сетки зависит от выбранного шага по координате и температуропроводности материала (число Fo), а для граничных узлов сетки еще и от коэффициента теплоотдачи (число Bi). При некоторых соотношениях шагов $\Delta\tau$ и Δx можно получить результат, противоречащий физическому смыслу решаемой задачи. Анализ этого вопроса показывает, что для обеспечения устойчивого решения задачи и получения результата, отвечающего физическому смыслу, необходимо, чтобы сомножитель в круглых скобках перед T_i^k в правой части уравнения (26.4) был больше или равен нулю

$$(1 - 2Fo) \geq 0. \quad (26.9)$$

Это означает, что

$$Fo \leq 0,5 \quad (26.10)$$

или

$$(\Delta\tau)_{\text{доп}} \leq 0,5 \frac{(\Delta x)^2}{a}.$$

Более жестким критерием выбора шага по времени является условие, получаемое из выражений для температуры граничных слоев (26.6) или (26.7), в которых сомножитель при T_1^k или T_n^k должен быть больше нуля

$$1 - 2Fo - 2Fo \cdot Bi \geq 0. \quad (26.11)$$

Из неравенства (26.11) следует, что

$$(\Delta\tau)_{\text{доп}} \leq 0,5 \frac{(\Delta x)^2}{a(1 + \text{Bi})}. \quad (26.12)$$

Ограничения на выбор шага расчета температуры по явной схеме в виде (26.10) или (26.11) являются ее существенным недостатком.

Рассмотрим далее неявную схему решения конечно-разностных уравнений, которая позволяет избежать ограничений на выбор шага по времени.

В этом случае из уравнения баланса тепловой энергии для внутренних слоев стенки, записанного с использованием неизвестных пока температур в $k+1$ -ый момент времени

$$\lambda F \frac{T_{i-1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{\Delta x} + \lambda F \frac{T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \rho c F \Delta x \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta\tau}$$

получают систему уравнений, аналогичную системе (26.3)

$$T_i^{k+1} - T_i^k = \frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}). \quad (26.13)$$

Используя (26.13), найдем окончательный вид системы уравнений для расчета температур внутренних слоев стенки на $(k+1)$ -ом шаге по времени

$$T_i^{k+1}(1 + 4\text{Fo}) - 2\text{Fo} T_{i+1}^{k+1} - 2\text{Fo} T_{i-1}^{k+1} - T_i^k = 0. \quad (26.14)$$

В отличие от явной схемы расчета, в которой температура T_i^{k+1} выражена явно через известные температуры в соседних слоях в k -ый момент времени, выражение (26.14) содержит неизвестные температуры T_{i+1}^{k+1} и T_{i-1}^{k+1} . В связи с этим обстоятельством необходимо использовать совместное решение всех уравнений системы (26.14) для всех слоев.

Преимуществом неявной схемы решения в сравнении с явной является устойчивость процесса вычисления температуры при любом значении шага по времени.

Из уравнений баланса тепловой энергии для левой и правой границ стенки получают два следующих соотношения

$$[1 + 2\text{Fo} (1 + \text{Bi}_1)] T_0^{k+1} - 2\text{Fo} (T_1^{k+1} + \text{Bi}_1 T_{c_1}^{k+1}) - T_0^k = 0, \quad (26.15)$$

$$[1 + 2\text{Fo} (1 + \text{Bi}_2)] T_n^{k+1} - 2\text{Fo} (T_{n-1}^{k+1} + \text{Bi}_2 T_{c_2}^{k+1}) - T_n^k = 0, \quad (26.16)$$

Представленная выше система уравнений для решения задачи теплопроводности по неявной схеме включает в себя $(n - 2)$ уравнений для внутренних узлов /уравнения (26.14)/ и два уравнения (26.15) и (26.16) для граничных узлов, содержит n неизвестных температур и является замкнутой относительно числа неизвестных величин.

Если уравнение (26.13) представить в виде

$$(T_i^{k+1} - T_i^k)/\Delta\tau = a (T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1})/(\Delta x)^2, \quad (26.17)$$

то явную /формула (26.3)/ и неявную (26.17) системы конечно-разностных уравнений для расчета температур внутренних слоев стенки можно объединить

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta\tau} = a & \left[\frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \sigma + \right. \\ & \left. + \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} (1 - \sigma) \right], \end{aligned} \quad (26.18)$$

где σ — весовой множитель.

Из выражения (26.18) при $\sigma = 0$ получается система явных, а при $\sigma = 1$ — неявных конечно-разностных уравнений. Выбор рационального значения весового множителя для расчетов на ЭВМ с использованием той или иной схемы позволяет экономить машинное время и быстрее получать необходимый результат. Точность решения при использовании обеих схем возрастает с уменьшением Δx при одновременном уменьшении $\Delta\tau$ пропорционально $(\Delta x)^2$.

27. Решение системы конечно-разностных уравнений методом прогонки

Для решения системы неявных уравнений (26.14)-(26.16) удобно использовать метод прогонки. Чтобы показать последовательность применения этого метода к решению указанной задачи, преобразуем вначале уравнения (26.14)-(26.16) к виду (27.1)-(27.3) соответственно

$$\text{Fo} T_{i-1}^{k+1} - (1 + 2\text{Fo}) T_i^{k+1} + \text{Fo} T_{i+1}^{k+1} = -T_i^k, \quad (27.1)$$

$$\begin{aligned} T_0^{k+1} = & \frac{2\text{Fo}}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_1)} T_1^{k+1} + \frac{2\text{Fo} \cdot \text{Bi}_1}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_1)} T_{c_1}^{k+1} + \\ & + \frac{1}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_1)} T_0^k, \end{aligned} \quad (27.2)$$

$$\begin{aligned} T_n^{k+1} = & \frac{2\text{Fo}}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_2)} T_{n-1}^{k+1} + \frac{2\text{Fo} \cdot \text{Bi}_2}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_2)} T_{c_2}^{k+1} + \\ & + \frac{1}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_2)} T_n^k. \end{aligned} \quad (27.3)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= T_0^{k+1}; \quad y_1 = T_1^{k+1}; \quad y_n = T_n^{k+1}; \quad y_{n-1} = T_{n-1}^{k+1}; \quad y_i = T_i^{k+1}; \\ A_i &= B_i = \text{Fo}; \quad C_i = 1 + 2\text{Fo}; \quad F_i = T_i^k; \end{aligned} \right\} \quad (27.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{2\text{Fo}}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_1)}; \quad \kappa_2 = \frac{2\text{Fo}}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_2)}; \\ \mu_1 &= \frac{2\text{Fo} \cdot \text{Bi}_1 T_{c_1}^{k+1} + T_0^k}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_1)}; \quad \mu_2 = \frac{2\text{Fo} \cdot \text{Bi}_2 T_{c_2}^{k+1} + T_n^k}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (27.5)$$

С учетом принятых обозначений уравнения (27.1)-(27.3) можно записать в более компактной форме

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad (27.6)$$

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1; \quad (27.7)$$

$$y_n = \kappa_2 y_{n-1} + \mu_2. \quad (27.8)$$

В соотношении (27.6) индекс $i = 1, 2, \dots, n - 1$ относится к внутренним слоям стенки, для всех значений этого индекса $A_i \neq 0$ и $B_i \neq 0$.

Предположим далее, что температура в узле i линейно связана с температурой в узле $i + 1$ и распространим это предположение на все другие узлы. В связи с этим можно записать

$$y_i = \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1, \quad (27.9)$$

$$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i, \quad (27.10)$$

где α_{i+1} , β_{i+1} , α_i и β_i — коэффициенты, которые предстоит определить.

Используя выражение (27.10) совместно с уравнением (27.6), найдем

$$(A_i \alpha_i - C_i) y_i + A_i \beta_i + B_i y_{i+1} = -F_i. \quad (27.11)$$

Подставляя y_i из соотношения (27.9) в формулу (27.11), получим

$$[(A_i \alpha_i - C_i) \alpha_{i+1} + B_i] y_{i+1} + A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - C_i) \beta_{i+1} = -F_i. \quad (27.12)$$

Полученное уравнение будет выполнено для любых y_{i+1} при условии, что

$$(A_i \alpha_i - C_i) \alpha_{i+1} + B_i = 0 \quad (27.13)$$

и

$$A_i \beta_i + (\alpha_i A_i - C_i) \beta_{i+1} + F_i = 0. \quad (27.14)$$

Из условий (27.13), (27.14) получают две рекуррентные формулы для определения прогоночных коэффициентов

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (27.15)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (27.16)$$

Чтобы найти указанные коэффициенты, необходимо знать их начальные значения $\alpha_i = \alpha_1$ и $\beta_i = \beta_1$. Найдем их, используя для этого граничные условия (27.7) и (27.8) совместно с формулой (27.9). Поскольку формула (27.9) справедлива при $i = 0, 1, \dots, n - 1$, то при $i = 0$

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1, \quad (27.17)$$

а с другой стороны, из граничного условия (27.7) следует, что

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1. \quad (27.18)$$

Сопоставляя выражения (27.17) и (27.18), получим

$$\alpha_1 = \kappa_1 \text{ и } \beta_1 = \mu_1, \quad (27.19)$$

где κ_1 и μ_1 определяются по формулам (27.5).

По найденным значениям α_1 и β_1 , используя формулы (27.15) и (27.16), определяют последовательно все остальные прогоночные коэффициенты от α_2 до α_n и β_2 до β_n соответственно. Выполненная процедура позволяет вычислить далее значения температур во всех узлах сетки, действуя в противоположном направлении.

Для определения температуры в крайнем правом узле сетки воспользуемся уравнениями

$$y_n = \kappa_2 y_{n-1} + \mu_2, \quad (27.20)$$

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n. \quad (27.21)$$

Подставляя y_{n-1} из (27.21) в (27.20) и разрешая полученное выражение относительно y_n , найдем

$$y_n = T_n^{k+1} = \frac{\mu_2 + \kappa_2 \beta_n}{1 - \alpha_n \kappa_2}. \quad (27.22)$$

Понижая в формуле (27.22) значение n , находят температуры T_{n-1}^{k+1} , T_{n-2}^{k+1} и т.д. до T_0^{k+1} в $k+1$ -ый момент времени.

Предполагается, что при расчетах по формуле (27.22) выполняется условие $1 - \alpha_n \kappa_2 \neq 0$.

28. Метод элементарных балансов

В основе этого приближенного метода лежит замена реальной физической системы (тела, области, элемента конструкции) с непрерывно изменяющимися в ней параметрами эквивалентной ей системой с сосредоточенными параметрами. Получаемое в этом случае решение задачи теплопроводности содержит сведения об отдельных значениях температур в дискретно расположенных точках системы. В этом смысле указанный метод имеет много общего с методом конечных разностей.

Суть рассматриваемого метода состоит в следующем. Тело, температурное состояние которого необходимо определить, условно с помощью сетки разбивают на элементарные объемы (ячейки). Каждой центральной точке образовавшегося объема присваивают номер. В пределах элементарного объема температура и теплофизические свойства (ТФС) материала считаются одинаковыми во всех его точках. Чтобы определить температуру в точках, расположенных на поверхности тела, достаточно использовать вспомогательную сетку, с помощью которой точки на поверхности тела окажутся центральными соответствующих объемов, рис. 28.1.

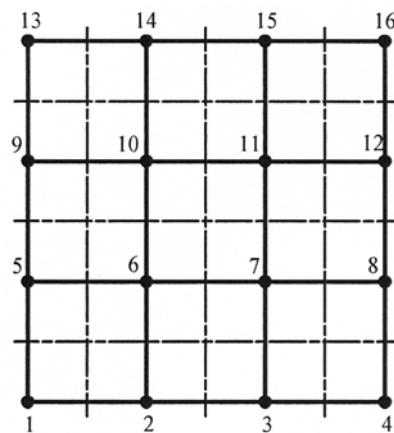


Рис. 28.1. Схема разбиения прямоугольной области с помощью основной и вспомогательной сеток

Тип сеток зависит от геометрической формы рассматриваемой области, рис. 28.1 и 28.2.

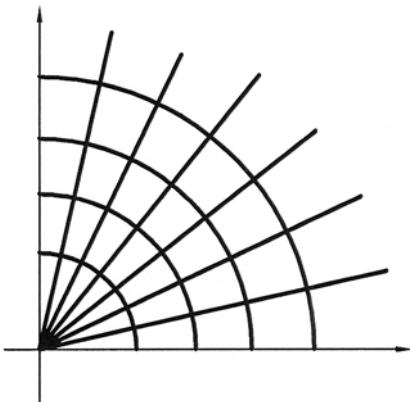


Рис. 28.2. Схема разбиения цилиндрической области с помощью полярной сетки

Шаг разбиения тела в разных направлениях может быть различным. Обычно чаще разбивают область в том направлении, в котором ожидается наиболее заметное изменение температуры.

Далее для каждого элементарного объема (ячейки) записывают уравнение баланса тепловой энергии. Число полученных при этом уравнений равно количеству элементарных объемов (числу их центральных точек).

Рассмотрим основные особенности применения метода к решению задач теплопроводности на примере определения температурного состояния оболочки летательного аппарата, подкрепленной изнутри шпангоутом, рис. 28.3.

На внешней поверхности оболочки происходит теплообмен конвекцией и излучением. Внутренняя поверхность оболочки и шпангоут теплозолированы. Результирующий поток тепла, поступающий к внешней поверхности, передается шпангоуту теплопроводностью. Тепловой контакт между оболочкой и шпангоутом считается идеальным.

При изготовлении подкрепленных оболочек летательных аппаратов обычно используют сравнительно тонкие пластины и профили из высокотеплопроводных материалов.

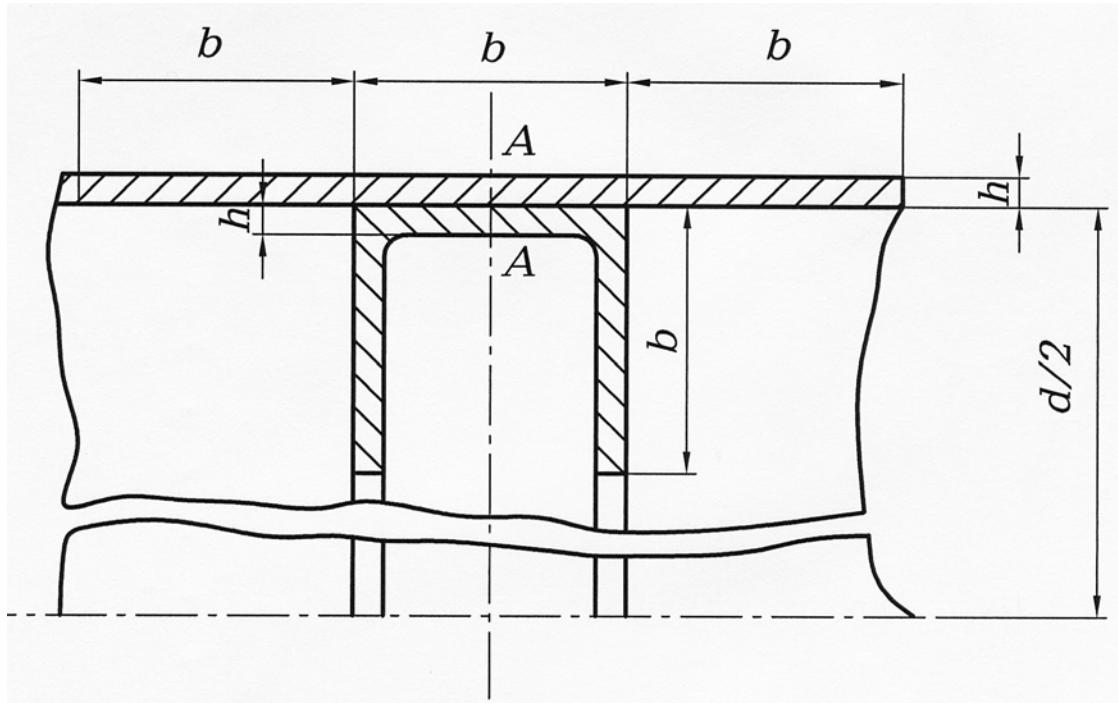


Рис. 28.3. Оболочка, подкрепленная шпангоутом

В этом случае можно принять, что температура элементарных объемов, на которые разбивают конструкцию, изменяется только во времени. Примем также, что $d \gg b > h$, а теплообмен между элементарными объемами оболочки на достаточно большом удалении от шпангоута отсутствует.

Учитывая, что рассматриваемая конструкция симметрична относительно сечения $A - A$ (рис. 28.3), выделим левую ее часть и разобъем на элементарные объемы, как это показано на рис. 28.4.

Принимая во внимание принятые выше допущения, запишем уравнения баланса тепловой энергии для каждого из выделенных объемов:

$$\begin{aligned} \alpha_k(T_{e,k} - T_{1,k}) \frac{b}{4} \pi d + \lambda_{ob} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{2,k} - T_{1,k}) = \varepsilon_{1,k} \sigma \frac{b}{4} \pi d T_{1,k}^4 + \\ + c_{ob} \rho_{ob} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{1,k+1} - T_{1,k}}{\Delta \tau_{k+1}}, \end{aligned} \quad (28.1)$$

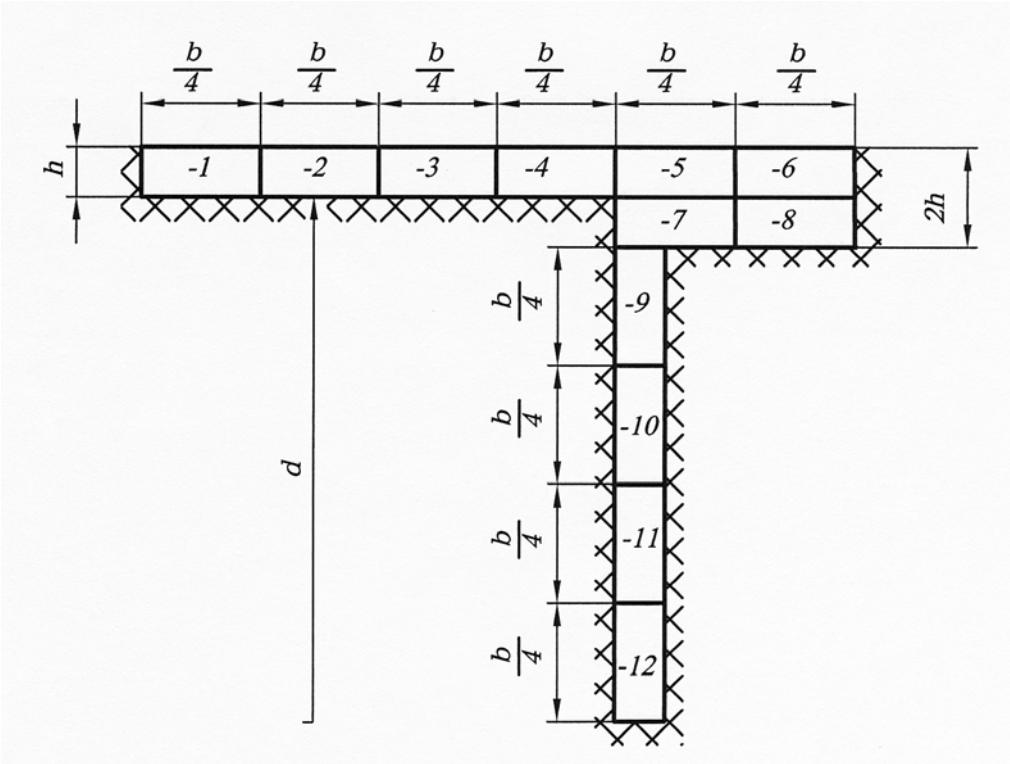


Рис. 28.4. Схема разбиения оболочки, подкрепленной шпангоутом, на элементарные объемы

$$\begin{aligned} \alpha_k(T_{e,k} - T_{2,k}) \frac{b}{4} \pi d + \lambda_{06} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{1,k} - T_{2,k}) + \lambda_{06} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{3,k} - T_{2,k}) = \\ = \varepsilon_{2,k} \sigma \frac{b}{4} \pi d T_{2,k}^4 + c_{06} \rho_{06} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{2,k+1} - T_{2,k}}{\Delta \tau_{k+1}}, \end{aligned} \quad (28.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k(T_{e,k} - T_{3,k}) \frac{b}{4} \pi d + \lambda_{06} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{2,k} - T_{3,k}) + \lambda_{06} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{4,k} - T_{3,k}) = \\ = \varepsilon_{3,k} \sigma \frac{b}{4} \pi d T_{3,k}^4 + c_{06} \rho_{06} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{3,k+1} - T_{3,k}}{\Delta \tau_{k+1}}, \end{aligned} \quad (28.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k(T_{e,k} - T_{4,k}) \frac{b}{4} \pi d + \lambda_{06} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{3,k} - T_{4,k}) + \lambda_{06} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{5,k} - T_{4,k}) = \\ = \varepsilon_{4,k} \sigma \frac{b}{4} \pi d T_{4,k}^4 + c_{06} \rho_{06} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{4,k+1} - T_{4,k}}{\Delta \tau_{k+1}}, \end{aligned} \quad (28.4)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_k(T_{e,k} - T_{5,k}) \frac{b}{4} \pi d + \lambda_{o6} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{4,k} - T_{5,k}) + \lambda_{o6} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{6,k} - T_{5,k}) + \\ & + \lambda_{5,7} \frac{(b/4)\pi d}{h} (T_{7,k} - T_{5,k}) = \varepsilon_{5,k} \sigma \frac{b}{4} \pi d T_{5,k}^4 + c_{o6} \rho_{o6} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{5,k+1} - T_{5,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \end{aligned} \quad (28.5)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_k(T_{e,k} - T_{6,k}) \frac{b}{4} \pi d + \lambda_{o6} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{5,k} - T_{6,k}) + \lambda_{6,8} \frac{(b/4)\pi d}{h} (T_{8,k} - T_{6,k}) = \\ & = \varepsilon_{6,k} \sigma \frac{b}{4} \pi d T_{6,k}^4 + c_{o6} \rho_{o6} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{6,k+1} - T_{6,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \end{aligned} \quad (28.6)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{7,5} \frac{(b/4)\pi d}{h} (T_{5,k} - T_{7,k}) + \lambda_{mmp} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{8,k} - T_{7,k}) + \lambda_{7,9} \frac{h\pi d}{(h/2 + b/8)} (T_{9,k} - T_{7,k}) = \\ & = c_{mmp} \rho_{mmp} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{7,k+1} - T_{7,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \end{aligned} \quad (28.7)$$

$$\lambda_{8,6} \frac{(b/4)\pi d}{h} (T_{6,k} - T_{8,k}) + \lambda_{mmp} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{7,k} - T_{8,k}) = c_{mmp} \rho_{mmp} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{8,k+1} - T_{8,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \quad (28.8)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{9,7} \frac{h\pi d}{(h/2 + b/8)} (T_{7,k} - T_{9,k}) + \lambda_{mmp} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{10,k} - T_{9,k}) = \\ & = c_{mmp} \rho_{mmp} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{9,k+1} - T_{9,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \end{aligned} \quad (28.9)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{mmp} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{9,k} - T_{10,k}) + \lambda_{mmp} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{11,k} - T_{10,k}) = \\ & = c_{mmp} \rho_{mmp} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{10,k+1} - T_{10,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \end{aligned} \quad (28.10)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{mmp} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{10,k} - T_{11,k}) + \lambda_{mmp} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{12,k} - T_{11,k}) = \\ & = c_{mmp} \rho_{mmp} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{11,k+1} - T_{11,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \end{aligned} \quad (28.11)$$

$$\lambda_{\text{шп}} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{11,k} - T_{12,k}) = c_{\text{шп}} \rho_{\text{шп}} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{12,k+1} - T_{12,k}}{\Delta \tau_{k+1}}, \quad (28.12)$$

где

$$\lambda_{5,7} = \lambda_{7,5} = \lambda_{6,8} = \lambda_{8,6} = \frac{2\lambda_{\text{об}} \cdot \lambda_{\text{шп}}}{\lambda_{\text{об}} + \lambda_{\text{шп}}}, \quad (28.13)$$

$$\lambda_{7,9} = \lambda_{9,7} = \frac{(4h + b) \lambda_{\text{об}} \cdot \lambda_{\text{шп}}}{b\lambda_{\text{об}} + 4h\lambda_{\text{шп}}}. \quad (28.14)$$

В рассматриваемом примере в формуле (28.14) для ячейки 7 $\lambda_{\text{об}} = \lambda_{\text{шп}}$ и $\lambda_{7,9} = \lambda_{9,7} = \lambda_{\text{шп}}$.

Общая формула для определения приведенных коэффициентов теплопроводности (28.13) и (28.14) получена из условия равенства суммы двух термических сопротивлений приведенному термическому сопротивлению

$$\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} = \frac{a_1 + a_2}{\lambda_{\text{пр}}},$$

где a_1 и a_2 — отрезки прямой, на которых $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ соответственно.

Неизвестные значения температур выделенных объемов в $k+1$ -ый момент времени могут быть выражены из системы уравнений (28.1)-(28.12) в явном виде

$$T_{1,k+1} = T_{1,k} + \bar{\alpha}_k (T_{e,k} - T_{1,k}) + \bar{a}_{\text{об}} (T_{2,k} - T_{1,k}) - \bar{\varepsilon}_{1,k} T_{1,k}^4; \quad (28.15)$$

$$T_{2,k+1} = T_{2,k} + \bar{\alpha}_k (T_{e,k} - T_{2,k}) + \bar{a}_{\text{об}} (T_{1,k} - 2T_{2,k} + T_{3,k}) - \bar{\varepsilon}_{2,k} T_{2,k}^4; \quad (28.16)$$

$$T_{3,k+1} = T_{3,k} + \bar{\alpha}_k (T_{e,k} - T_{3,k}) + \bar{a}_{\text{об}} (T_{2,k} - 2T_{3,k} + T_{4,k}) - \bar{\varepsilon}_{3,k} T_{3,k}^4; \quad (28.17)$$

$$T_{4,k+1} = T_{4,k} + \bar{\alpha}_k (T_{e,k} - T_{4,k}) + \bar{a}_{\text{об}} (T_{3,k} - 2T_{4,k} + T_{5,k}) - \bar{\varepsilon}_{4,k} T_{4,k}^4; \quad (28.18)$$

$$\begin{aligned} T_{5,k+1} = T_{5,k} + \bar{\alpha}_k (T_{e,k} - T_{5,k}) + \bar{a}_{\text{об}} (T_{4,k} - 2T_{5,k} + T_{6,k}) + \\ + \bar{a}_{5,7} (T_{7,k} - T_{5,k}) - \bar{\varepsilon}_{5,k} T_{5,k}^4; \end{aligned} \quad (28.19)$$

$$\begin{aligned} T_{6,k+1} = T_{6,k} + \bar{\alpha}_k (T_{e,k} - T_{6,k}) + \bar{a}_{\text{об}} (T_{5,k} - T_{6,k}) + \\ + \bar{a}_{6,8} (T_{8,k} - T_{6,k}) - \bar{\varepsilon}_{6,k} T_{6,k}^4; \end{aligned} \quad (28.20)$$

$$T_{7,k+1} = T_{7,k} + \bar{a}_{7,5}(T_{5,k} - T_{7,k}) + \bar{a}_{\text{шп}}(T_{8,k} - T_{7,k}) + \bar{a}_{7,9}(T_{9,k} - T_{7,k}); \quad (28.21) \quad ^{155}$$

$$T_{8,k+1} = T_{8,k} + \bar{a}_{8,6}(T_{6,k} - T_{8,k}) + \bar{a}_{\text{шп}}(T_{7,k} - T_{8,k}); \quad (28.22)$$

$$T_{9,k+1} = T_{9,k} + \bar{a}_{9,7}(T_{7,k} - T_{9,k}) + \bar{a}_{\text{шп}}(T_{10,k} - T_{9,k}); \quad (28.23)$$

$$T_{10,k+1} = T_{10,k} + \bar{a}_{\text{шп}}(T_{9,k} - 2T_{10,k} + T_{11,k}); \quad (28.24)$$

$$T_{11,k+1} = T_{11,k} + \bar{a}_{\text{шп}}(T_{10,k} - 2T_{11,k} + T_{12,k}); \quad (28.25)$$

$$T_{12,k+1} = T_{12,k} + \bar{a}_{\text{шп}}(T_{11,k} - T_{12,k}), \quad (28.26)$$

где для сокращения записи уравнений (28.15)-(28.26) использованы следующие безразмерные коэффициенты:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{\alpha_k \Delta \tau_{k+1}}{c_{\text{o6}} \rho_{\text{o6}} h}; \\ \bar{a}_{\text{o6}} &= \frac{\lambda_{\text{o6}}}{c_{\text{o6}} \rho_{\text{o6}}} \frac{\Delta \tau_{k+1}}{(b/4)^2}; \quad \bar{a}_{\text{шп}} = \frac{\lambda_{\text{шп}}}{c_{\text{шп}} \rho_{\text{шп}}} \frac{\Delta \tau_{k+1}}{(b/4)^2}; \\ \bar{a}_{5,7} &= \frac{\lambda_{5,7}}{c_{\text{o6}} \rho_{\text{o6}}} \frac{\Delta \tau_{k+1}}{h^2} = \bar{a}_{6,8}; \\ \bar{a}_{7,5} &= \frac{\lambda_{7,5}}{c_{\text{шп}} \rho_{\text{шп}}} \frac{\Delta \tau_{k+1}}{h^2} = \bar{a}_{8,6}; \\ \bar{a}_{7,9} &= \frac{\lambda_{7,9}}{c_{\text{шп}} \rho_{\text{шп}}} \frac{\Delta \tau_{k+1}}{\frac{b}{4} (h/2 + b/8)} = \bar{a}_{9,7}; \\ \bar{\varepsilon}_{i,k} &= \frac{\varepsilon_{i,k} \sigma \Delta \tau_{k+1}}{c_{\text{o6}} \rho_{\text{o6}} h}, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \right\} \quad (28.27)$$

В правых частях уравнений (28.15)-(28.26) все температуры с индексом "k" считают известными из начального условия задачи, температуру $T_{e,k}$ определяют, используя зависимость скорости полета аппарата от времени и параметры стандартной атмосферы, по формуле

$$T_{e,k} = T_{\text{H}} \left(1 + r \frac{k-1}{2} M_{\text{H}}^2 \right).$$

Безразмерные коэффициенты (28.27) рассчитывают для интервала времени $\Delta \tau_{\text{доп}}$, найденного из условия устойчивости решения системы уравнений (28.15)-(28.26).

Значение допустимого интервала времени зависит от условий теплообмена выделенного объема с окружающей средой и соседними элементами. Определим этот интервал для элемента № 5 (рис. 28.3), который находится в радиационно-конвективном теплообмене со средой и кондуктивном — с элементами 4, 6 и 7.

Запишем уравнение (28.19) по аналогии с формулой (26.7) в виде

$$T_{5,k+1} = \left[\bar{\alpha}_k T_{e,k} + \bar{a}_{\text{o6}} (T_{4,k} + T_{6,k}) + \bar{a}_{5,7} T_{7,k} \right] + T_{5,k} \left(1 - \bar{\alpha}_k - 2\bar{a}_{\text{o6}} - \bar{a}_{5,7} - \bar{\varepsilon}_{5,k} T_{5,k}^3 \right).$$

Условие устойчивости решения задачи для рассматриваемого случая имеет вид неравенства

$$(1 - \bar{\alpha}_k - 2\bar{a}_{\text{o6}} - \bar{a}_{5,7} - \bar{\varepsilon}_{5,k} T_{5,k}^3) \geq 0. \quad (28.28)$$

Неудобство использования условия (28.28) для определения $\Delta\tau_{k+1}$ заключается в необходимости его расчета в каждый новый момент времени. Примем в связи с этим $\alpha_k = \alpha_{\max}$, $\varepsilon_{5,k} = \varepsilon_{\text{H}}$, $T_{e,k} = T_{e,\text{H}}$ (индекс "H" означает принадлежность параметра к наибольшему его значению).

Выражая $\Delta\tau_{\text{доп}}$ из условия (28.28), найдем

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{\text{доп}} &= \frac{c_{\text{o6}} \rho_{\text{o6}} h}{\alpha_{\max} + 2 \frac{\lambda_{\text{o6}} h}{(b/4)^2} + \frac{\lambda_{7,5}}{h} + \varepsilon_{5,\text{H}} \sigma T_{e,\text{H}}^3} = \\ &= \frac{(b/4)^2}{a_{\text{o6}} \left[2 + \frac{\alpha_{\max}}{\lambda_{\text{o6}}} \frac{(b/4)^2}{h} + \frac{\lambda_{7,5}}{\lambda_{\text{o6}}} \frac{(b/4)^2}{h^2} + \frac{\varepsilon_{5,\text{H}} \sigma}{\lambda_{\text{o6}}} \frac{(b/4)^2}{h} T_{e,\text{H}}^3 \right]} . \end{aligned}$$

ГЛАВА 6. Аналитические методы решения задач теплопроводности

29. Метод конечных интегральных преобразований

Рассматриваемый метод широко применяется для определения температурного поля в телах сравнительно простой геометрической формы в виде пластин, цилиндров, сфер и стержней (ребер) различного поперечного сечения. Решение таких задач представляет интерес в целом ряде случаев. Например, в стационарной постановке задачи при оценке тепловых потоков, теряемых трубопроводами с горячим теплоносителем в установках жидкостных ракетных двигателей или поступающих из внешней среды к трубопроводу с криогенной жидкостью; при расчете температурного поля гладких и оребренных оболочек ЖРД; при вычислении потоков теплоты от горячего газа к ободу турбины; в процессе планирования тепловых испытаний образцов материалов; для анализа температурного состояния элементов конструкции ядерных реакторов с внутренним тепловыделением в их материале; в тепловом проектировании конструкций термостатов, предназначенных для обеспечения различных технологических операций и в других технических приложениях.

Если в указанных выше примерах допустимо считать вклад теплобмена излучением в суммарный теплообмен достаточно малым, то решения соответствующих задач можно проводить в линейной постановке.

Рассмотрим применение метода конечных интегральных преобразований к решению задач теплопроводности на примере определения одномерного температурного поля в элементах конструкции, имеющих форму пластин, цилиндров, сфер или стержней различного сечения, используя для этого следующую обобщенную формулировку краевой задачи

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} = a_{\xi\xi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + b_\xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + c_\xi \theta + F(\xi), \quad (29.1)$$

$$\xi = \xi_1 : \gamma_1 \theta'(\xi_1) + \beta_1 \theta(\xi_1) = f_1(F_0), \quad (29.2)$$

$$\xi = \xi_2 : \quad \gamma_2 \theta'(\xi_2) + \beta_2 \theta(\xi_2) = f_2(F_0), \quad (29.3)$$

$$F_0 = 0 : \quad \theta(\xi, 0) = f(\xi), \quad (29.4)$$

где $F_0 = a\tau/h^2$ — число Фурье; $f(\xi) = T_0(\xi)/T_m$; $T_0(\xi)$ — начальное распределение температуры; T_m — температура, выбранная для приведения системы (29.1)–(29.4) к безразмерному виду; другие использованные здесь обозначения указаны в гл. 4, п. 24.

Для улучшения сходимости решения задачи (29.1)–(29.4) безразмерную температуру целесообразно определять в виде суммы нестационарной $\vartheta = \vartheta(\xi, F_0)$ и квазистационарной $\theta^* = \theta^*(\xi, F_0)$ составляющих

$$\theta = \vartheta + \theta^*. \quad (29.5)$$

Подстановка (29.5) в (29.1)–(29.4) приводит к следующим двум задачам: для определения квазистационарной (или стационарной) составляющей температурного поля:

$$a_{\xi\xi} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \xi^2} + b_3 \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi} + c_\xi \theta^* + F(\xi) = 0, \quad (29.6)$$

$$\gamma_1 \theta^*(\xi_1) + \beta_1 \theta^*(\xi_2) = f_1(F_0), \quad (29.7)$$

$$\gamma_2 \theta^*(\xi_2) + \beta_2 \theta^*(\xi_2) = f_2(F_0) \quad (29.8)$$

и для нестационарной составляющей температурного поля:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial F_0} = a_{\xi\xi} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + b_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + c_\xi \vartheta + f(\theta^*), \quad (29.9)$$

$$\gamma_1 \vartheta'(\xi_1) + \beta_1 \vartheta(\xi_1) = 0, \quad (29.10)$$

$$\gamma_2 \vartheta'(\xi_2) + \beta_2 \vartheta(\xi_2) = 0, \quad (29.11)$$

$$\vartheta(\xi, 0) = f(\xi) - \theta^*(\xi, 0), \quad (29.12)$$

где

$$f(\theta^*) = -\frac{\partial \theta^*}{\partial F_0}.$$

Значение F_0 в (29.7) и (29.8), а в более общем случае и в функции $F(\xi) = F(\xi, F_0)$ используется в качестве параметра.

В граничных условиях (29.2), (29.3) и далее в (29.7), (29.8), (29.10),¹⁵⁹ (29.11) с помощью коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2$ реализуются граничные условия 1–го, 2–го, 3–го родов, а также любая их комбинация. Эти коэффициенты и функции $f_1(F_0), f_2(F_0)$ определяют простым сопоставлением граничных условий (29.2) и (29.3) с граничными условиями конкретной краевой задачи, записанной в безразмерной форме. Указанная процедура становится понятной из приведенного ниже примера.

Решение задачи (29.6)–(29.8) может быть получено в достаточно общей форме. Представим с этой целью решение однородного дифференциального уравнения ($F(\xi) = 0$)

$$a_{\xi\xi} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \xi^2} + b_\xi \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi} + c_\xi \theta^* = 0 \quad (29.13)$$

в виде

$$\theta^* = c_1 \psi(\xi) + c_2 \varphi(\xi), \quad (29.14)$$

где $\psi(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (29.13). Вид этих функций для некоторых частных случаев, встречающихся в задачах теплопроводности, приведен в табл. 29.1.

Для получения общего решения неоднородного уравнения (29.6) воспользуемся методом вариации произвольных постоянных, в соответствии с которым, используя (29.14), запишем

$$\theta^{*\prime} = c_1 \psi'(\xi) + c_2 \varphi'(\xi) + c'_1 \psi(\xi) + c'_2 \varphi(\xi), \quad (29.15)$$

где

$$c'_1 \psi(\xi) + c'_2 \varphi(\xi) = 0 \quad (29.16)$$

и

$$\theta^{*\prime\prime} = c_1 \psi''(\xi) + c_2 \varphi''(\xi) + c'_1 \psi'(\xi) + c'_2 \varphi'(\xi). \quad (29.17)$$

Подставляя (29.15) и (29.17) с учетом (29.16) в уравнение (29.6), найдем

$$\begin{aligned} & a_{\xi\xi} [c_1 \psi''(\xi) + c_2 \varphi''(\xi) + c'_1 \psi'(\xi) + c'_2 \varphi'(\xi)] + \\ & + b_\xi [c_1 \psi'(\xi) + c_2 \varphi'(\xi)] + c_\xi [c_1 \psi(\xi) + c_2 \varphi(\xi)] + F(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (29.18)$$

Таблица 29.1. Выражения для функций

Nº	Форма тела и коэффициенты в уравнении (29.13)	Однородное уравнение теплопроводности	Функция $\psi(\xi)$	Функция $\varphi(\xi)$
1	Пластина: $a_{\xi\xi} = 1, b_\xi = c_\xi = 0$	$\theta^{*\prime\prime} = 0$	ξ	1
2	Пластина пористая, охлаждаемая жидкостью: $a_{\xi\xi} = 1, c_\xi = 0, b_\xi = K = \frac{\dot{m}cl}{\lambda_c(1-p)}$	$\theta^{*\prime\prime} - K\theta^{*\prime} = 0$	$\exp(K\xi)$	1
3	Цилиндр (сплошной или полый): $a_{\xi\xi} = 1, c_\xi = 0, b_\xi = \frac{1}{\xi}$	$\theta^{*\prime\prime} + \frac{1}{\xi}\theta^{*\prime} = 0$	$\ln \xi$	1
4	Шар (сплошной или полый): $a_{\xi\xi} = 1, c_\xi = 0, b_\xi = \frac{2}{\xi}$	$\theta^{*\prime\prime} + \frac{1}{\xi}\theta^{*\prime} = 0$	$\frac{1}{\xi}$	1
5	Прямое ребро переменного поперечного сечения (общий случай): $a_{\xi\xi} = \frac{S(\xi)}{S_0}, b_\xi = \frac{dS(\xi)}{d\xi} \frac{1}{S_0}, K = 0,$ $c_\xi = -Bi \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} \frac{1}{S_0}$	$a_{\xi\xi}\theta^{*\prime\prime} + b_\xi\theta^{*\prime} + c_\xi\theta^* = 0$	$\psi(\xi)$	$\varphi(\xi)$

Продолжение таблицы 29.1

№	Форма тела и коэффициенты в уравнении (29.3)	Однородное уравнение теплопроводности	Функция $\psi(\xi)$	Функция $\varphi(\xi)$
6	Ребро (стержень) постоянного сечения: $a_{\xi\xi} = 1, c_\xi = -(ml)^2, b_\xi = 0,$ $m = \sqrt{\alpha\Pi/(\lambda S_0)}$	$\theta^{**''} - (ml)^2 \theta^{*'} = 0$	$\exp(-ml\xi)$	$\exp(ml\xi)$
7	Ребро треугольного и трапециевидного поперечного сечения с малым углом при вершине: $a_{\xi\xi} = 1, c_\xi = -(ml)^2, b_\xi = 1,$ $m = \sqrt{\alpha/\lambda\delta}$	$\xi\theta^{**''} + \theta^{*'} - (ml)^2 \theta^* = 0$	$I_0(2ml\sqrt{\xi})$	$K_0(2ml\sqrt{\xi})$
8	Круглое ребро постоянной толщины, равной 2δ : $a_{\xi\xi} = 1, c_\xi = -(ml)^2, b_\xi = \frac{1}{\xi},$ $m = \sqrt{\alpha/(\lambda\delta)}$	$\theta^{**''} + \frac{1}{\xi}\theta^{*'} - (ml)^2 \theta^* = 0$	$I_0(ml\xi)$	$K_0(ml\xi)$

Из (29.18) следует, что

$$a_{\xi\xi}[c'_1\psi'(\xi) + c'_2\varphi'(\xi)] + F(\xi) = 0 \quad (29.19)$$

так как сумма остальных слагаемых в (29.18) равна нулю, поскольку она удовлетворяет решению однородного уравнения (29.13).

Совместное решение (29.16) и (29.19) позволяет найти новые значения c_1 и c_2 :

$$c_1 = c_3 - H_1(\xi), \quad (29.20)$$

$$c_2 = c_4 + H_2(\xi), \quad (29.21)$$

где

$$H_1(\xi) = \int \frac{F(\xi)}{a_{\xi\xi}} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\varphi(\xi)\psi'(\xi) - \psi(\xi)\varphi'(\xi)}, \quad (29.22)$$

$$H_2(\xi) = \int \frac{F(\xi)}{a_{\xi\xi}} \frac{\psi(\xi)d\xi}{\varphi(\xi)\psi'(\xi) - \psi(\xi)\varphi'(\xi)}. \quad (29.23)$$

Подстановка c_1 и c_2 в виде соотношений (29.20) и (29.21) в уравнение (29.14) дает общее решение неоднородного уравнения (29.6)

$$\theta^* = c_3\psi(\xi) + c_4\varphi(\xi) - \psi(\xi)H_1(\xi) + \varphi(\xi)H_2(\xi). \quad (29.24)$$

Использование полученного решения (29.24) совместно с граничными условиями (29.7), (29.8) в результате преобразований приводит к следующим выражениям для постоянных интегрирования c_3 и c_4

$$c_3 = \frac{b_2b_3 - b_4}{b_1b_3 - 1}, \quad (29.25)$$

$$c_4 = \frac{b_1b_4 - b_2}{b_1b_3 - 1}, \quad (29.26)$$

где b_1, b_2, b_3 и b_4 связаны только с известными величинами в граничных условиях (29.7) и (29.8)

$$b_1 = \left[\frac{\gamma_2\psi'(\xi) + \beta_2\psi(\xi)}{\gamma_2\varphi'(\xi) + \beta_2\varphi(\xi)} \right]_{\xi=\xi_2}, \quad (29.27)$$

$$b_2 = \left[\frac{f_2(F_0) + [\gamma_2\psi'(\xi) + \beta_2\psi(\xi)]H_1(\xi)}{\gamma_2\varphi'(\xi) + \beta_2\varphi(\xi)} - H_2(\xi) \right]_{\xi=\xi_2}, \quad (29.28)$$

$$b_3 = \left[\frac{\gamma_1 \varphi'(\xi) + \beta_1 \varphi(\xi)}{\gamma_1 \psi'(\xi) + \beta_1 \psi(\xi)} \right]_{\xi=\xi_1}, \quad (29.29)$$

$$b_4 = \left[\frac{f_1(F_0) - [\gamma_1 \varphi'(\xi) + \beta_1 \varphi(\xi)] H_2(\xi)}{\gamma_1 \psi'(\xi) + \beta_1 \psi(\xi)} + H_1(\xi) \right]_{\xi=\xi_1}. \quad (29.30)$$

В случае, когда внутренние источники (стоки) энергии в теле отсутствуют ($F(\xi) = 0$), решение (29.24) упрощается и принимает вид

$$\theta^* = c_3 \psi(\xi) + c_4 \varphi(\xi). \quad (29.31)$$

Формулы (29.25) и (29.26) для определения c_3 и c_4 остаются справедливыми и в этом случае. Величины b_1 и b_3 находятся из (29.27) и (29.29), а b_2 и b_4 определяются из более простых выражений:

$$b_2 = \left[\frac{f_2(F_0)}{\gamma_2 \varphi'(\xi) + \beta_2 \varphi(\xi)} \right]_{\xi=\xi_2}, \quad (29.32)$$

$$b_4 = \left[\frac{f_1(F_0)}{\gamma_1 \psi'(\xi) + \beta_1 \psi(\xi)} \right]_{\xi=\xi_1}. \quad (29.33)$$

Если тепловой поток или температура на поверхности тела (граничные условия (29.2) и (29.3)) не изменяются во времени, то функции $f_1(F_0)$ и $f_2(F_0)$ в формулах (29.28), (29.30) и (29.32), (29.33) являются константами.

Для определения нестационарной составляющей температуры используем метод конечных интегральных преобразований (преобразований в конечных пределах). Применив с этой целью к уравнению (29.9) и начальному условию (29.12) интегральное преобразование вида

$$\bar{\vartheta}(F_0) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) \vartheta(\xi, F_0) \bar{k}(\mu_n, \xi) d\xi,$$

получим

$$\frac{d\bar{\vartheta}(F_0)}{d(F_0)} = -\mu_n^2 \bar{\vartheta}(F_0) + \bar{f}(\theta^*) \quad (29.34)$$

$$\bar{\vartheta}(0) = \bar{f} - \bar{\theta}^*(0), \quad (29.35)$$

$$\bar{f}(\theta^*) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) f(\theta^*) \bar{k}(\mu_n, \xi) d\xi,$$

$$\bar{f} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) f(\xi) \bar{k}(\mu_n, \xi) d\xi,$$

$$\bar{\theta}^*(0) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) \theta^*(\xi, 0) \bar{k}(\mu_n, \xi) d\xi.$$

Весовая функция $\rho(\xi)$ определяется из формулы

$$\rho = \rho(\xi) = \exp \left[- \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{1}{a_{\xi\xi}} (a'_{\xi\xi} - b_{\xi}) d\xi \right].$$

В последнем выражении в качестве нижнего предела интегрирования используется любое число в интервале от ξ_1 до ξ_2 .

Ядро интегрального преобразования находится из решения граничной задачи Штурма–Лиувилля:

$$-(pk')' + (q - \mu^2 \rho) k = 0, \quad (29.36)$$

$$\gamma_1 k'(\xi_1) + \beta_1 k(\xi_1) = 0, \quad (29.37)$$

$$\gamma_2 k'(\xi_2) + \beta_2 k(\xi_2) = 0, \quad (29.38)$$

где $p = a_{\xi\xi} \rho$, $q = -c_{\xi} \rho$.

Представим решение уравнения (29.36) в виде

$$k = k(\mu_n, \xi) = \bar{B}_1 \psi(\mu_n, \xi) + \bar{B}_2 \varphi(\mu_n, \xi), \quad (29.39)$$

где $\psi(\mu_n, \xi)$ и $\varphi(\mu_n, \xi)$ — фундаментальная система решений уравнения (29.36), таблица 29.2.

Таблица 29.2. Выражения для функций $\psi(\mu, \xi)$ и $\varphi(\mu, \xi)$

N_{Φ}	Форма тела и коэффициенты в уравнении (29.6)	Уравнение для ядра преобразования $K(\lambda, \xi)$	Функция $\psi(\mu, \xi)$	Функция $\varphi(\mu, \xi)$	Примечания
1.	Пластина (монолитная или пористая): $\rho = 1, p = 1, q = 0$	$K'' + \mu^2 \cdot K = 0$	$\cos(\mu\xi)$	$\sin(\mu\xi)$	
2.	Цилиндр (сплошной или полый): $\rho = \xi, p = \xi, q = 0$	$K'' + \frac{1}{\xi} \cdot K' + \mu^2 \cdot K = 0$	$J_0(\mu\xi)$	$Y_0(\mu\xi)$	
3.	Шар (сплошной или полый): $\rho = \xi^2, p = \xi^2, q = 0$	$K'' + \frac{2}{\xi} \cdot K' + \mu^2 \cdot K = 0$	$\xi^{-0,5} \cdot J_{0,5}(\mu\xi)$	$\xi^{-0,5} \cdot Y_{0,5}(\mu\xi)$	
4.	Ребро (стержень) постоянного поперечного сечения: $\rho = 1, p = 1, q = (ml)^2, \omega^2 = \mu^2 - (ml)^2$	$K'' + \omega^2 \cdot K = 0$	$\cos(\omega\xi)$	$\sin(\omega\xi)$	$\omega^2 > 0$
			$\operatorname{ch}(\omega\xi)$	$\operatorname{sh}(\omega\xi)$	$\omega^2 < 0$
5.	Ребро треугольного и трапециевидного поперечного сечения с малым углом при вершине: $\rho = 1, p = \xi, q = (ml)^2, \omega^2 = \mu^2 - (ml)^2$	$\xi \cdot K'' + K' + \omega^2 \cdot K = 0$	$J_0(2\omega\sqrt{\xi})$	$Y_0(2\omega\sqrt{\xi})$	$\omega^2 > 0$
			$I_0(2\omega\sqrt{\xi})$	$K_0(2\omega\sqrt{\xi})$	$\omega^2 < 0$
6.	Круглое ребро постоянной толщины: $\rho = \xi, p = \xi, q = \xi(ml)^2, \omega^2 = \mu^2 - (ml)^2$	$K'' + \frac{1}{\xi} K' + \omega^2 \cdot K = 0$	$J_0(\omega\xi)$	$Y_0(\omega\xi)$	$\omega^2 > 0$
			$I_0(\omega\xi)$	$K_0(\omega\xi)$	$\omega^2 < 0$

В выражении (29.39) содержатся две неизвестных постоянных интегрирования \bar{B}_1 и \bar{B}_2 , а также собственные числа μ_n . Для их определения имеются только два граничных условия (29.37) и (29.38). Указанное затруднение может быть устранено, если обе части уравнения (29.39) поделить на одну из постоянных \bar{B}_1 или \bar{B}_2 , определив таким образом ненормированное ядро интегрального преобразования $k(\mu_n, \xi)$ с точностью до постоянной интегрирования. Основанием для такого шага служит то, что в решении рассматриваемой задачи для нестационарной составляющей температурного поля во всех выкладках используется только нормированное ядро, а процедура нормирования позволяет исключить зависимость $\bar{k}(\mu_n, \xi)$ от точности определения $k(\mu_n, \xi)$, связывая их соотношением

$$\bar{k}(\mu_n, \xi) = \frac{k(\mu_n, \xi)}{\sqrt{N}}, \quad (29.40)$$

где норма N находится из выражения

$$N = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) k^2(\mu_n, \xi) d\xi. \quad (29.41)$$

Поделив обе части (29.39) на \bar{B}_1 и использовав условия (29.37) и (29.38), найдем новое значение B_2

$$B_2 = \frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1} = -\frac{\gamma_1 \psi'(\mu_n, \xi_1) + \beta_1 \psi(\mu_n, \xi_1)}{\gamma_1 \varphi'(\mu_n, \xi_1) + \beta_1 \varphi(\mu_n, \xi_1)}, \quad (29.42)$$

а также характеристическое уравнение для определения собственных чисел

$$\gamma_2 \varphi'(\mu_n, \xi_2) + \beta_2 \varphi(\mu_n, \xi_2) = -\frac{1}{B_2} [\beta_2 \psi(\mu_n, \xi_2) + \gamma_2 \psi'(\mu_n, \xi_2)]. \quad (29.43)$$

Деление (29.39) на \bar{B}_2 вместо \bar{B}_1 дает новое значение $B_1 = 1/B_2$, а выражение (29.43) остается неизменным.

Таким образом, соотношение для нахождения ненормированного ядра принимает одну из следующих форм:

$$k(\mu_n, \xi) = \psi(\mu_n, \xi) + B_2 \varphi(\mu_n, \xi), \quad (29.44)$$

или

$$k(\mu_n, \xi) = B_1 \psi(\mu_n, \xi) + \varphi(\mu_n, \xi), \quad (29.45)$$

где B_2 определяется по формуле (29.42), а $B_1 = 1/B_2$.

Решение для изображения нестационарной составляющей температурного поля, удовлетворяющее уравнению (29.34) и начальному условию (29.35), получается в виде

$$\bar{\vartheta}(F_0) = \exp(-\mu_n^2, F_0) \left[\bar{f} - \bar{\theta}^*(0) + \int_0^{F_0} \bar{f}(\theta^*) \exp(\mu_n^2 F_0) dF_0 \right]. \quad (29.46)$$

Для нахождения оригинала этой функции $\vartheta(x, F_0)$ используется формула обращения

$$\vartheta(\xi, F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\vartheta}(F_0) \bar{k}(\mu_n, \xi). \quad (29.47)$$

Решение исходной задачи (29.1)–(29.4) получается в результате суммирования квазистационарной и нестационарной составляющих температурного поля

$$\theta = \theta(\xi, F_0) = \theta^*(\xi) + \vartheta(\xi, F_0), \quad (29.48)$$

где функции в правой части (29.48) вычисляются по формулам (29.24) и (29.47) соответственно.

Полученное решение в обобщенном виде содержит в себе большой класс задач стационарной (29.24) и нестационарной (29.48) теплопроводности для тел канонической формы с постоянными теплофизическими свойствами и заданным законом распределения внутренних источников (стоков) теплоты.

30. Температурное поле в плоской пластине с объемными источниками теплоты

Рассмотрим в качестве примера определение нестационарного температурного состояния плоской пластины, внутри которой имеются равномерно распределенные в ее объеме источники теплоты, а на поверхностях заданы граничные условия третьего рода. Частными случаями

модели такой пластины является ряд важных технических приложений, встречающихся в ракетно-космической, радиоэлектронной и ядерной технике.

Представим математическую модель задачи в виде, рис. 30.1:

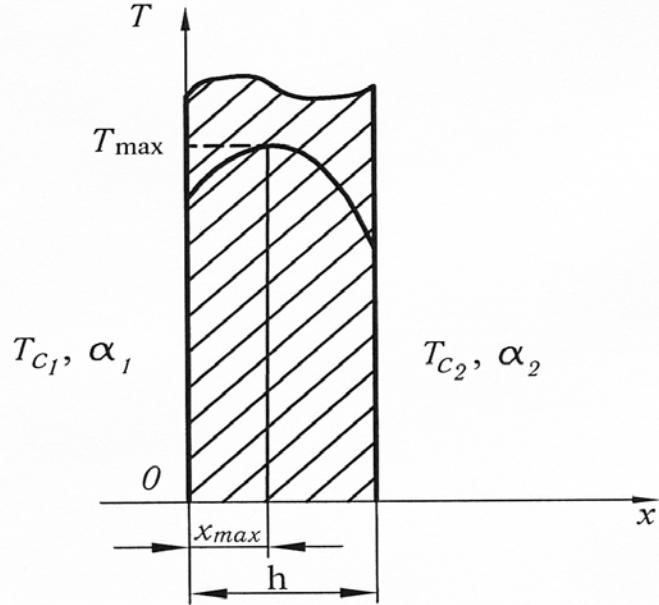


Рис. 30.1. К определению температуры в плоской пластине

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{q_V}{c\rho}, \quad (30.1)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right)_{x=0} = \alpha_1 [T(0, \tau - T_{c_1})], \quad (30.2)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right)_{x=h} = \alpha_2 [T(h, \tau - T_{c_2})], \quad (30.3)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad (30.4)$$

где T_0 — начальная температура пластины, постоянная по ее толщине.

Для решения задачи (30.1)–(30.4) методом конечных интегральных преобразований удобно использовать её безразмерную форму записи:

$$\frac{\partial \theta(\xi, F_0)}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, F_0)}{\partial \xi^2} + P_0, \quad (30.5)$$

$$\theta'(\xi_1, F_0) - Bi_1 \theta(\xi_1, F_0) = -Bi_1 \theta_{c_1}, \quad (30.6)$$

$$\theta'(\xi_2, F_0) + Bi_2 \theta(\xi_2, F_0) = Bi_2 \theta_{c_2}, \quad (30.7)$$

$$\theta(\xi, 0) = f(\xi), \quad (30.8)$$

где $F_0 = a\tau/h^2$ — число Фурье; $P_0 = (q_V h^2)/(\lambda T_m)$ — критерий Померанцева; $\text{Bi} = (\alpha h)/\lambda$ — критерий Био; $f(\xi) = T_0/T_m = \theta_0$.

Представим в соответствии с изложенным в п. 29 методом решения функцию $\theta(\xi, F_0)$ в виде суммы

$$\theta(\xi, F_0) = \theta^*(\xi, F_0) + \vartheta(\xi, F_0), \quad (30.9)$$

а краевую задачу (30.5)–(30.8) в виде двух следующих задач (30.10)–(30.12) и (30.13)–(30.16):

$$\frac{d^2\theta^*(\xi)}{d\xi^2} + P_0 = 0, \quad (30.10)$$

$$(\theta^{*\prime}(\xi_1)) - \text{Bi}_1 \theta^*(\xi_1) = -\text{Bi}_1 \theta_{c_1}^*, \quad (30.11)$$

$$(\theta^{*\prime}(\xi_2)) + \text{Bi}_2 \theta^*(\xi_2) = \text{Bi}_2 \theta_{c_2}^*, \quad (30.12)$$

$$\frac{\partial \vartheta(\xi, F_0)}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 \vartheta(\xi, F_0)}{\partial \xi^2}, \quad (30.13)$$

$$\vartheta'(\xi_1, F_0) - \text{Bi}_1 \vartheta(\xi_1, F_0) = 0, \quad (30.14)$$

$$\vartheta'(\xi_2, F_0) + \text{Bi}_2 \vartheta(\xi_2, F_0) = 0, \quad (30.15)$$

$$\vartheta(\xi, 0) = f(\xi) - \theta^*(\xi, 0). \quad (30.16)$$

Сравнивая математическую модель краевой задачи (30.10)–(30.12) с обобщенной моделью (29.6)–(29.8), видим, что в данном примере

$$a_{\xi\xi} = 1, \quad b_\xi = c_\xi = 0, \quad F(\xi) = P_0,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1, \quad \beta_1 = -\text{Bi}_1, \quad \beta_2 = \text{Bi}_2,$$

$$f_1(F_0) = -\text{Bi}_1 \theta_{c_1}^*, \quad f_2(F_0) = \text{Bi}_2 \theta_{c_2}^*.$$

Используя значения указанных величин, таблицу 29.1, а также формулы (29.22), (29.23) и (29.25)–(29.30), получим

$$\left. \begin{aligned} \psi(\xi) &= \xi, & \varphi(\xi) &= 1, \\ H_1(\xi) &= P_0 \xi, & H_2(\xi) &= P_0 \frac{\xi^2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (30.17)$$

$$b_1 = \frac{1 + \text{Bi}_2}{\text{Bi}_2}, \quad b_2 = \theta_{c_2}^* + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Bi}_2} \right) P_0, \\ b_3 = -\text{Bi}_1, \quad b_4 = -\text{Bi}_1 \theta_{c_1}^*,$$

$$c_3 = \frac{(\theta_{c_2}^* - \theta_{c_1}^*) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Bi}_2} \right) P_0}{\text{Bi}_1 + \text{Bi}_1 \text{Bi}_2 + \text{Bi}_2} \text{Bi}_1 \text{Bi}_2, \quad (30.18)$$

$$c_4 = \theta_{c_1}^* + \frac{(\theta_{c_2}^* - \theta_{c_1}^*) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Bi}_2} \right) P_0}{\text{Bi}_1 + \text{Bi}_1 \text{Bi}_2 + \text{Bi}_2} \text{Bi}_2, \quad (30.19)$$

Подставив выражения (30.18) и (30.19) для постоянных c_3 и c_4 в формулу (29.24) с учетом (30.17), найдем

$$\theta^* = \theta_{c_1}^* + \frac{(\theta_{c_2}^* - \theta_{c_1}^*) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Bi}_2} \right) P_0}{\text{Bi}_1 + \text{Bi}_1 \text{Bi}_2 + \text{Bi}_2} \text{Bi}_2 (1 + \text{Bi}_1 \xi) - P_0 \frac{\xi^2}{2}. \quad (30.20)$$

Умножением левой и правой частей последнего уравнения на T_m его можно преобразовать к виду

$$T = T_{c_1} + \frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \frac{q_V h^2}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Bi}_2} \right)}{\text{Bi}_1 + \text{Bi}_1 \text{Bi}_2 + \text{Bi}_2} \text{Bi}_2 \left(1 + \text{Bi}_1 \frac{x}{h} \right) - \frac{q_V}{2\lambda} x^2. \quad (30.21)$$

Формулы для температур граничных поверхностей пластины T_1 и T_2 в установившемся процессе теплообмена можно получить из уравнения (30.21), если принять в нем $x = 0$ и $x = h$ соответственно.

Зависимость T от x в формуле (30.21) может иметь максимум, расположенный внутри пластины.

Координата x , определяющая положение максимальной температуры пластины, получается из равенства нулю производной от T в формуле (30.21) и имеет вид

$$x_{max} = \frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \frac{q_V h^2}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Bi}_2} \right)}{\text{Bi}_1 + \text{Bi}_1 \text{Bi}_2 + \text{Bi}_2} \text{Bi}_1 \text{Bi}_2 \frac{\lambda}{q_V h}. \quad (30.22)$$

Подстановка значения $x = x_{max}$ в выражение для температурного поля пластины (30.21) позволяет найти $T = T_{max}$.

Плотности потоков теплоты через граничные поверхности пластины $x = 0$ и $x = h$ в установившемся процессе теплообмена определяются по формулам

$$\begin{aligned} q_1 &= -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = \\ &= -\frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \frac{q_V h^2}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{Bi_2} \right)}{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2} Bi_1 Bi_2 \frac{\lambda}{h}, \end{aligned} \quad (30.23)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=h} = \\ &= -\frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \frac{q_V h^2}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{Bi_2} \right)}{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2} Bi_1 Bi_2 \frac{\lambda}{h} + q_V h. \end{aligned} \quad (30.24)$$

Сумма плотностей потоков теплоты, отводимой от левой и правой поверхностей пластины толщиной $h = x_{max} + (h - x_{max})$ (рис. 30.1), равна плотности поглощенной в ней энергии от действия внутренних источников теплоты

$$|q_1| + q_2 = q_V h.$$

Возвращаясь к определению нестационарной составляющей температурного поля $\vartheta(\xi, F_0)$, отметим, что применение интегрального преобразования ($\rho(\xi) = 1$ для пластины)

$$\bar{\vartheta}(F_0) = \int_0^1 \bar{\vartheta}(\xi, F_0) \bar{k}(\mu_n, \xi) d\xi$$

к уравнению (30.13) и начальному условию (30.16) приводит их к виду

$$\frac{d\bar{\vartheta}(F_0)}{dF_0} = -\mu_n^2 \bar{\vartheta}(F_0), \quad (30.25)$$

$$\bar{\vartheta}(0) = \bar{f} - \bar{\theta}^*(0). \quad (30.26)$$

Из таблицы 29.2 видно, что функции, образующие решение краевой задачи Штурма—Лиувилля для ненормированного ядра интегрального преобразования, равны

$$\psi(\mu_n, \xi) = \cos(\mu_n \xi) \text{ и } \varphi(\mu_n, \xi) = \sin(\mu_n \xi). \quad (30.27)$$

172

Из формул (30.42) и (30.44) определяется константа интегрирования $B_2 = \text{Bi}_1/\mu_n$ и выражение для ненормированного ядра интегрального преобразования

$$k(\mu_n, \xi) = \cos(\mu_n \xi) + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \xi). \quad (30.28)$$

Нормированное ядро преобразования находится из формулы (30.40), в которой норма N определяется из (29.41) совместно с (30.28)

$$\begin{aligned} N &= \int_0^1 k^2(\mu_n, \xi) d\xi = \int_0^1 \left[\cos(\mu_n \xi) + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \xi) \right]^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} + \left(\frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \right)^2 \left(1 - \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} + \frac{2}{\text{Bi}_1} \sin^2 \mu_n \right) \right]. \end{aligned} \quad (30.29)$$

Характеристическое уравнение для определения собственных чисел μ_n получается в результате подстановки в выражение (29.43) функций (30.27) и значений указанных выше величин B_2, γ_2, β_2

$$\operatorname{ctg} \mu_n = \frac{\mu_n^2 - \text{Bi}_1 \text{Bi}_2}{\mu_n (\text{Bi}_1 + \text{Bi}_2)}. \quad (30.30)$$

Функции \bar{f} и $\bar{\theta}^*(0)$ в правой части условия (30.26) находят путем интегрирования их оригиналов $f(\xi) = \theta_0$ и $\theta^*(\xi)$ (формула (30.20)), умноженных на нормированное ядро

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \int_0^1 \theta_0 \bar{k}(\mu_n, \xi) d\xi = \frac{\theta_0}{\sqrt{N}} \int_0^1 \left[\cos(\mu_n \xi) + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \xi) \right] d\xi = \\ &= \frac{\theta_0}{\sqrt{N}} \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right), \end{aligned} \quad (30.31)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^*(0) &= \int_0^1 \theta^*(\xi) \bar{k}(\mu_n, \xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ L + L_1 \text{Bi}_1 \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{\text{Bi}_1 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{\text{Bi}_1 \sin \mu_n}{\mu_n^3} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{P_0}{2} \left[-\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n^3} + \right. \\ \left. + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} \left(\cos \mu_n - \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2}{\mu_n^2} \right) \right] \}, \quad (30.32)$$

где

$$L_1 = \frac{(\theta_{c_2} - \theta_{c_1}) + P_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Bi}_2} \right)}{\text{Bi}_1 + \text{Bi}_1 \text{Bi}_2 + \text{Bi}_2} \text{Bi}_2, \quad (30.33)$$

$$L = (\theta_{c_1} + L_1) \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right). \quad (30.34)$$

Подставляя функции \bar{f} и $\bar{\theta}^*(0)$ из формул (30.31) и (30.32) в начальное условие (30.26), последнее преобразуют к виду

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}(0) = & \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ (\theta_0 - \theta_{c_1} - L_1) \left[\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right] - \right. \\ & - L_1 \text{Bi}_1 \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{\text{Bi}_1 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{\text{Bi}_1 \sin \mu_n}{\mu_n^3} \right) - \\ & - \frac{P_0}{2} \left[-\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n^3} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} \left(\cos \mu_n - \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2}{\mu_n^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (30.35)$$

Решая уравнение (30.25) с начальным условием (30.26), получают решение для изображения нестационарной составляющей температурного поля

$$\bar{\vartheta}(F_0) = \bar{\vartheta}(0) \cdot e^{(-\mu_n^2 F_0)}. \quad (30.36)$$

Используя формулу обращения изображения для определения оригинала функции

$$\vartheta(\xi, F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\vartheta}(F_0) \bar{k}(\mu_n, \xi)$$

совместно с формулами (30.28), (30.40), (30.29), а также (30.35), (30.36), получим выражение для нестационарной составляющей температурного поля в виде

$$\vartheta(\xi, F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\theta_0 - \theta_{c_1} - L_1) \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -L_1 \text{Bi}_1 \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{\text{Bi}_1 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{\text{Bi}_1 \sin \mu_n}{\mu_n^3} \right) - \\
& - \frac{P_0}{2} \left[-\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n^3} + \right. \\
& \left. + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} \left(\cos \mu_n - \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2}{\mu_n^2} \right) \right] \cdot \\
& \cdot \frac{1}{N} \left[\cos(\mu_n \xi) + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \xi) \right] e^{(-\mu_n^2 F_0)}. \tag{30.37}
\end{aligned}$$

Общее решение задачи (30.5)–(30.8) в соответствии с формулой (30.9) равно сумме функций $\theta^*(\xi)$ и $\vartheta(\xi, F_0)$. Таким образом, подставляя в (30.9) выражения для $\theta^*(\xi)$ из уравнения (30.20) и для $\vartheta(\xi, F_0)$ из уравнения (30.37), получим

$$\begin{aligned}
\theta(\xi, F_0) = & \theta_{c_1} + L_1(1 + \text{Bi}_1 \xi) - \frac{P_0}{2} \xi^2 + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left\{ (\theta_0 - \theta_{c_1} - L_1) \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right) - \right. \\
& - L_1 \text{Bi}_1 \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{\text{Bi}_1 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{\text{Bi}_1 \sin \mu_n}{\mu_n^3} \right) - \\
& - \frac{P_0}{2} \left[-\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n^3} + \right. \\
& \left. + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} \left(\cos \mu_n - \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2}{\mu_n^2} \right) \right] \cdot \\
& \cdot \left[\cos(\mu_n \xi) + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \xi) \right] e^{(-\mu_n^2 F_0)}. \tag{30.38}
\end{aligned}$$

Подставляя в последнее выражение значение L_1 из уравнения (30.33) и переходя к размерной форме записи температуры, найдем

$$\begin{aligned}
T = & T_{c_1} + \frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \frac{q_V h^2}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Bi}_2} \right)}{\text{Bi}_1 + \text{Bi}_1 \text{Bi}_2 + \text{Bi}_2} \text{Bi}_2 \left(1 + \text{Bi}_1 \frac{x}{h} \right) - \frac{q_V}{2\lambda} x^2 + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-\mu_n^2 F_0)} \frac{1}{N} \left[\left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right) \cdot \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(T_0 - T_{c_1} - \frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \frac{q_V h^2}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{Bi_2} \right)}{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2} Bi_2 \right) - \\
& - \frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \frac{q_V h^2}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{Bi_2} \right)}{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2} Bi_1 Bi_2 \cdot \\
& \cdot \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{Bi_1 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{Bi_1 \sin \mu_n}{\mu_n^3} \right) - \\
& - \frac{q_V h^2}{2\lambda} \left(-\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n^3} + \right. \\
& \left. + \frac{Bi_1}{\mu_n^2} \left(\cos \mu_n - \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2}{\mu_n^2} \right) \right) \Big] \cdot \\
& \cdot \left(\cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) + \frac{Bi_1}{\mu_n} \sin \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) \right), \tag{30.39}
\end{aligned}$$

где N определяется по формуле (30.29).

Из выражения (30.39) можно получить решение некоторых частных задач с другими граничными условиями. Например, для пластины без внутренних источников теплоты, изолированной с одной стороны и нагреваемой горячим газом с другой, можно принять $q_V = 0$, $Bi_1 = 0$ ($\alpha_1 = 0$), $Bi_2 = Bi$, $T_{c_2} = T_r$. В этом случае, используя выражение (30.39), находим

$$\frac{T(x, \tau) - T_r}{T_0 - T_r} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(-\mu_n^2 F_0)} \cdot \cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right), \tag{30.40}$$

где

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}. \tag{30.41}$$

Характеристическое выражение для определения собственных чисел при $Bi = 0$ в соответствии с формулой (30.30) принимает вид (рис. 30.2):

$$\operatorname{ctg} \mu_n = \frac{\mu_n}{Bi}. \tag{30.42}$$

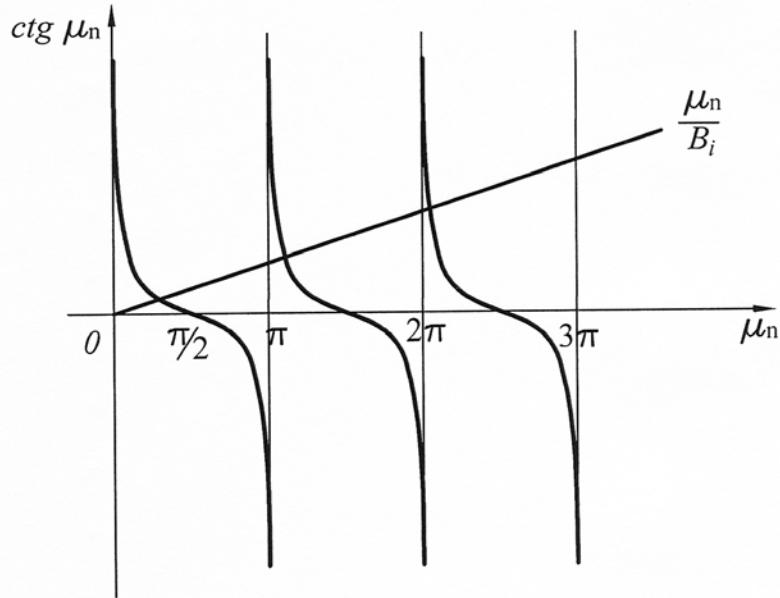


Рис. 30.2. К решению характеристического уравнения (30.42)

Полученное выражение позволяет дать оценку двум широко распространенным допущениям, используемым в расчетах температурного состояния конструкций в рамках принятой выше постановки задачи. Первое из них заключается в том, что в стенке конструкции малой толщины, выполненной из высокотеплопроводного материала, температуру можно считать одинаковой по её толщине — температура не зависит от x и изменяется только во времени.

В рассматриваемом случае термическое сопротивление пластины h/λ мало по сравнению с термическим сопротивлением прилегающего к ней слоя газа $1/\alpha$ и критерий

$$Bi = \frac{\alpha h}{\lambda} = \left(\frac{h}{\lambda}\right) / \left(\frac{1}{\alpha}\right) \rightarrow 0.$$

При этом условии из характеристического уравнения (30.42) получается лишь один корень $\mu_n = \mu_1 = \mu$ малого значения (прямая линия μ_n/Bi на рис. 30.2 стремится прижаться к оси ординат).

Поскольку тангенс малого угла

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin \mu}{\cos \mu} \approx \frac{\mu}{1} = \mu,$$

то из выражения

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{\mu} = \frac{\mu}{\text{Bi}}$$

следует, что $\mu = \sqrt{\text{Bi}}$, а из формулы (30.41)

$$A_n = \frac{2\mu}{\mu + \mu \cdot 1} = 1.$$

В этом случае в решении (30.40) можно ограничиться только первым членом ряда. Учитывая, что $\cos(\mu x/h)$ при $x = 0$ и $x = h$ равен 1 и, полагая сохранение этого равенства внутри интервала x от 0 до h , получим

$$\frac{T_{\Gamma} - T(\tau)}{T_{\Gamma} - T_0} = e^{-\text{Bi}F_0} = e^{-\text{Mi}}, \quad (30.43)$$

где $\text{Mi} = (\alpha\tau)/(c\rho h)$ — критерий Михеева.

Таким образом, из выражения (30.43) видно, что температура пластины не зависит от координаты x и изменяется только с течением времени.

Суть второго допущения состоит в том, что на нагреваемой поверхности пластины из низкотеплопроводного материала вместо граничного условия третьего рода можно задавать граничное условие первого рода, принимая $T_n = T_{\Gamma}$.

Примем в этом случае термическое сопротивление пластины h/λ намного больше термического сопротивления $1/\alpha$, т.е.

$$\frac{h}{\lambda} \gg \frac{1}{\alpha} \text{ или } \text{Bi} \gg 1 \text{ и } \rightarrow \infty.$$

В рассматриваемой ситуации прямая линия μ_n/Bi на рис. 30.2 стремится слиться с осью абсцисс, а в точках её пересечения с линиями котангенса дает значения собственных чисел (корни характеристического уравнения)

$$\mu_n = \frac{2n - 1}{2}\pi.$$

Подставляя найденные значения μ_n в формулу (30.41), получим

$$A_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n - 1)\pi}.$$

Используя формулу (30.40) совместно с этими результатами, находим

$$\frac{T_r - T(x, \tau)}{T_r - T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi \frac{x}{h}\right) e^{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 F_0}.$$

Из последнего выражения видно, что его правая часть при $x = h$ обращается в 0 и на нагреваемой поверхности пластины температура оказывается равной температуре газа

$$T(h, \tau) = T_n = T_r.$$

ЛИТЕРАТУРА

по курсу "Тепловые режимы летательных аппаратов"

1. Авдуевский В.С. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно–космической технике. — М.: Машиностроение, 1992. — 623 с.
2. Беляев Н.М., Рядно А.Л. Методы теории теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1982. — 304 с.
3. Елисеев В.Н. К определению режима охлаждения фильтра теплового излучения. — М.: ИВУЗ, 1969. — С. 87–90.
4. Елисеев В.Н. Обобщенное решение трехмерной задачи теплопроводности для тел с объемным поглощением лучистой энергии / Труды МВТУ. № 205 "Тепловой режим конструкций из полупрозрачных материалов". — М., 1976. — С. 5–43.
5. Залетаев В.М., Капинос Ю.В., Сургучев О.В. Расчет теплообмена космического аппарата. — М.: Машиностроение, 1979. — 208 с.
6. Зарубин В.С. Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1966. — 216 с.
7. Зарубин В.С. Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1987. — Изд. 2-е. — 184 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 544 с.
9. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. — М.: Мир, 1975. — 934 .
10. Карташев Э.М. Метод интегральных преобразований в аналитической теории теплопроводности // Известия АН СССР "Энергетика и транспорт". — 1976. — № 3. — С. 85–105.
11. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. — М. Высшая школа, 1970. — 710 с.

12. Кувыркин Г.Н. Решение задач теплопроводности методом конечных элементов. — М.: ИВУЗ, 1976. — № 8. — С. 179–181.
13. Кутателадзе С.С. Анализ подобия в теплофизике. — Новосибирск: Наука, 1982. — 280 с.
14. Лыков А.В. Тепломассообмен. Справочник. — М.: Энергия, 1972. — 560 с.
15. Малоземов В.В., Рожнов В.Ф., Правецкий В.Н. Системы жизнеобеспечения экипажей ЛА. — М.: Машиностроение, 1986. — 584 с.
16. Моделирование тепловых режимов космического аппарата и окружающей его среды / Под ред. Г.А. Петрова. — М.: Машиностроение, 1971. — 380 с.
17. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен. — М.: Мир, 1976. — 616 с.
18. Панкратов Б.М. Основы теплового проектирования транспортных космических систем. — М.: Машиностроение, 1988. — 304 с.
19. Полежаев Ю.В., Юрьевич Ф.Б. Тепловая защита. — М.: Энергия, 1976. — 392 с.
20. Полежаев Ю.В., Шишков А.А. Газодинамические испытания тепловой защиты / Справочник. — М.: Промедэкс, 1992. — 248 с.
21. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1973. — 552 с.
22. Теория тепломассобмена / Под ред. академика А.И. Леонтьева. — М.: Изд-во МГТУ, 1997. — 683 с.
23. Теплообмен в энергетических установках космических аппаратов / Б.М. Галицкий, Ю.И. Данилов, Г.А. Дрейцер, В.К. Кошкин. — М.: Машиностроение, 1975. — 272 с.
24. Теплообмен и тепловой режим космических аппаратов / Под ред. Дж. Лукаса. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1974. — 543 с.
25. Тимошенко В.П., Фролов Г.А. Деструкция теплозащитных материалов и покрытий при входе тел в плотные слои атмосферы / В кн. Прогнозирование и анализ экстремальных воздействий. — М.: Изд-во

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. — Т. 1. — С. 8-46.

26. Фаворский О.Н., Каданер Я.С. Вопросы теплообмена в космосе. — М.: Высшая школа, 1967. — 240 с.

27. Фахрутдинов И.Х., Котельников А.В. Конструкция и проектирование ракетных двигателей твердого топлива. — М.: Машиностроение, 1971. — 325 с.

28. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. — М.: Мир, 1988. — 544 с.

29. Шленский О.Ф. Тепловые свойства стеклопластиков. — М.: Химия, 1973. — 224 с.

30. Шлыков Ю.П., Ганин Е.А., Царевский С.Н. Контактное термическое сопротивление. — М.: Энергия, 1977. — 112 с.

31. Шорин С.Н. Теплопередача. — М.: Высшая школа, 1964. — 490 с.