2.2. Теория подобия (полуэмпирические математические модели)

Теоремы подобия

1) Первая теорема подобия
   Подобные между собою явления имеют одинаковые критерии подобия[1].
2) Вторая теорема подобия
   Зависимость между переменными, характеризующими явление, может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия K_1, K_2, ..., K_n
   $$f\left(K_1, K_2, \ ..., K_n\right) = 0$$
   Эта зависимость называется критериальным уравнением. Помимо критериев подобия в это уравнение могут входить так называемые симплексы – безразмерные отношения однородных физических величин.
3) Третья теорема подобия
   Подобны те явления, условия однозначности которых подобны, и критерии, составленные из условий однозначности, численно одинаковы.
   Условия однозначности состоят из начальных и граничных условий задачи, или краевых условий. Критерии, полученные из этих условий, называются определяющими.
   Возможна такая формулировка третьей теоремы подобия: явления подобны, если определяющие критерии инвариантны (одинаковы).

Моделирование теплового режима ракеты-носителя, установленной на старте

Между корпусом ракеты и, установленной на стартовом столе, и воздухом, обдувающим её, происходит теплообмен путём вынужденноё конвекции.

Задание:

1) Написать систему уравнений, описывающих процесс теплообмена, и найти критерии подобия, характеризующие теплообмен.
2) Представить решение указанной системы в виде зависимости между критериями подобия – критериального уравнения.
3) С помощью опытных данных, полученных на модели определить коэффициенты критериального уравнения.
4) Используя полученное критериальное уравнение, вычислить коэффициент теплоотдачи и определить, на сколько градусов охладиться горючее в баке ракеты за 30 минут.

Исходные данные:

– Горючее – керосин;
– Плотность: ρ = 800 кг/м^3;
– Теплоёмкость: $c_\text{р}$ = 2.095·10^3 Дж/кг·К;
– Температура заправки: $T_\text{нач}$ = 30°C;
– Диаметр ракеты: $d_\text{р}$ = 1.6 м;
– Высота бака горючего: $H_\text{бака}$ = 4 м
– Температура стенки керосинового бака: $T_\text{п}$ = 20°C;
– Температура воздуха (среды): $T_\text{с}$ = -40°C;
– Скорость воздуха: u = 10 м/с;
– Теплопроводность воздуха: $\lambda_{-40°\text{C}}$ = 2.117·10^{-2} Вт/м·К;
– Кинематическая вязкость воздуха: $\nu_{-40°\text{C}}$ = 10.04·10^{-6} м^2/с.

Уравнение теплообмена

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_\text{п} - T_\infty}\frac{\partial T}{\partial y}, \tag{2.1}$$

[1] Принято различать критерии и числа подобия. Критерии подобия – это такие безразмерные комплексы, которые целиком состоят из параметров, заданных по условию. Если в состав безразмерного комплекса входит переменная величина, то такие комплексы принято называть числами подобия

где α – коэффициент теплоотдачи, λ – коэффициент теплопроводности, T_∞ – температура окружающей среды $T_\infty = T_{\text{ср}}$. Изменение температуры среды , контактирующей со стенкой корпуса ракеты, показано на рис. 2.4.

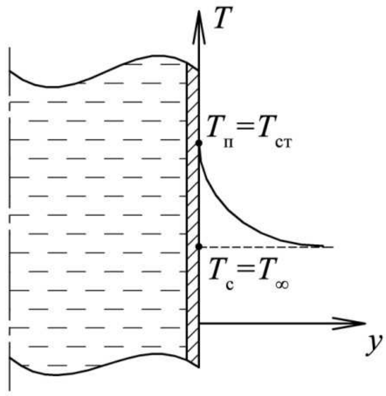

Рис. 2.4. Расчётная схема

Уравнение энергии

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{2.2}$$

где a – коэффициент температуропроводности.

Характер движения воздуха вблизи корпуса с достаточно малой погрешностью можно принять таким же, как и при обтекании плоской пластины.

Уравнение движения в форме Прандтля

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.3}$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.4}$$

Система уравнений (2.1-2.4) содержит четыре неизвестных α, T, u и v, соответственно является замкнутой. Кроме этого в соответствии с третьей теоремой подобия для подобия модельного и моделируемого (натурного) процессов необходимо также подобие условий однозначности.

Используем систему уравнений (2.1-2.4) для описания процесса теплообмена рассматриваемого бака ракеты-носителя и его модели. Обозначим все параметры, относящиеся к натурному изделию, одним штрихом, а к модели – двумя, тогда

$$\begin{cases}\alpha' = -\dfrac{\lambda'}{\Delta T'}\dfrac{\partial T'}{\partial y'},\\[2mm] u'\dfrac{\partial T'}{\partial x'}+v'\dfrac{\partial T'}{\partial y'}=a'\dfrac{\partial^2 T'}{\partial (y')^2},\\[2mm] u'\dfrac{\partial u'}{\partial x'}+v\dfrac{\partial u'}{\partial y'}=\dfrac{\partial}{\partial y'}\left(\upsilon'\dfrac{\partial u'}{\partial y'}\right),\\[2mm] \dfrac{\partial u'}{\partial x'}+\dfrac{\partial v'}{\partial y'}=0.\end{cases} \tag{2.5}$$

$$
\begin{cases}
\alpha'' = -\dfrac{\lambda''}{\Delta T''}\dfrac{\partial T''}{\partial y''}, \\
u''\dfrac{\partial T''}{\partial x''} + v''\dfrac{\partial T''}{\partial y''} = a''\dfrac{\partial^2 T''}{\partial (y'')^2}, \\
u''\dfrac{\partial u''}{\partial x''} + v''\dfrac{\partial u''}{\partial y''} = \dfrac{\partial}{\partial y''}\left(\upsilon''\dfrac{\partial u''}{\partial y''}\right), \\
\dfrac{\partial u''}{\partial x''} + \dfrac{\partial v''}{\partial y''} = 0.
\end{cases} \tag{2.6}
$$

Учитывая, что рассматриваемые процессы теплообмена должны быть подобны, а следовательно, должны быть подобны и все величины, характеризующие эти процессы:

$$
x'' = x'c_l; \quad y'' = y'c_l; \quad \lambda'' = \lambda' c_\lambda; \quad \alpha'' = \alpha' c_\alpha; \quad u'' = uc_u; \quad u' = uc_u; \quad T'' = T'c_T; \quad a'' = a'c_a \tag{2.7}
$$

Тогда с учетом (2.7) система уравнений (2.6):

$$
\begin{cases}
c_\alpha \alpha' = -\dfrac{c_\lambda \lambda'}{c_T T'}\dfrac{c_T}{c_l}\dfrac{\partial T'}{\partial y'}, \\
\dfrac{c_u c_T}{c_l}\left(u'\dfrac{\partial T'}{\partial x'} + v'\dfrac{\partial T'}{\partial y'}\right) = \dfrac{c_a c_T}{c_l^2} a'\dfrac{\partial^2 T'}{\partial (y')^2}, \\
\dfrac{c_u^2}{c_l}\left(u'\dfrac{\partial u'}{\partial x'} + v\dfrac{\partial u'}{\partial y'}\right) = \dfrac{c_\upsilon c_u}{c_l^2}\dfrac{\partial}{\partial y'}\left(\upsilon'\dfrac{\partial u'}{\partial y'}\right), \\
\dfrac{c_u}{c_l}\left(\dfrac{\partial u'}{\partial x'} + \dfrac{\partial v'}{\partial y'}\right) = 0.
\end{cases} \tag{2.8}
$$

Система уравнений (2.8) и (2.5) будут тождественны, если будут выполнятся условия

$$
c_\alpha = \frac{c_\lambda}{c_l}, \quad c_u = \frac{c_a}{c_l}, \quad c_u = \frac{c_\lambda}{c_l}, \quad \frac{c_u}{c_l} = \text{const}.
$$

Тогда

$$
\frac{c_\alpha c_l}{c_\lambda} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha'' x'' \lambda'}{\alpha' x' \lambda''} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha'' x''}{\lambda''} = \frac{\alpha' x'}{\lambda'} = \frac{\alpha x}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha l}{\lambda} = \text{Nu}.
$$

Аналогично

$$
\frac{ul}{\upsilon} = \text{Re}, \quad \frac{ul}{a} = \text{Pe}.
$$

Из уравнения сплошности среды не получается критерия подобия, поскольку оно тождественно при любом значении соотношения c_u / c_l.

Критерий Пекле можно представить как произведение двух критериев – Рейнольдса и Прандтля

$$
\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr},
$$

где

$$
\text{Pr} = \frac{\upsilon}{a}.
$$

В соответствии со второй теоремой подобия

$$
\text{Nu} = c^* \,\text{Re}^n \cdot \text{Pr}^m \tag{2.9}
$$

Критерий Прандтля зависит в основном от температуры среды и для воздуха в интервале от -40°C до +30°C изменяется незначительно, поэтому можно принять его равным 0.7 и временно включить в константу *c*. Тогда

$$\mathrm{Nu} = c\,\mathrm{Re}^n \qquad (2.10)$$

Для определения коэффициентов c и n в формуле (2.9) используются опытные данные, полученные в экспериментах с моделью ракеты диаметром $d_м$ = 0.12 м и высотой $H_м$ = 0.6 м (цилиндрическая часть), таблица 2.1.

Таблица 2.1. Экспериментальные данные

№	1	2	3	4	5	6	7	8
U, В	25.0	29.2	34.3	48.7	49.7	49.5	63.3	58.9
I, А	10.6	12.4	14.6	20.7	21.1	20.0	28.0	25.0
$T_п$, °C	54	47	42	45	37	34	41	33
u, м/с	7.0	13	25	53	91	118	147	192

Полагая, что количество теплоты Q, выделяемое в оболочке модели, нагреваемой электрическим током

$$Q = IU,$$

равное теплоте, отдаваемой оболочкой в окружающую среду путём конвекции

$$Q = \alpha_м \left(T_{ст} - T_{ср}\right) F_м,$$

найдём

$$\alpha_м = \frac{IU}{\left(T_{ст} - T_{ср}\right) F_м}$$

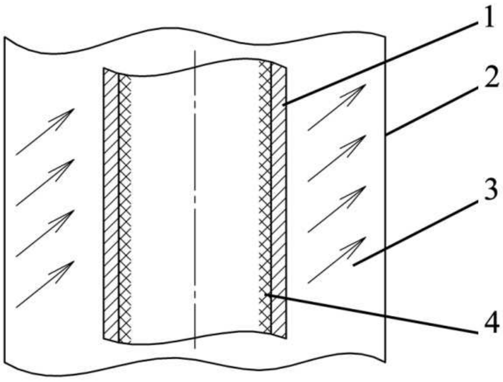

Рис. 2.5. Схема модели бака ракеты, нагреваемого за счёт пропускания электрического тока
1 – стенка бака, 2 – кожух, 3 – зазор, продуваемый воздухом, 4 – изоляция на внутренней поверхности бака

Температура набегающего потока воздуха и его теплофизические свойства приняты постоянными и равными: $T_с$ = 20°C, $\lambda_{20°C} = 2.5935\cdot10^{-2}$ Вт/(м$\cdot$К), $\nu_{20°C} = 15.06\cdot10^{-6}$ м^2/с.

Результаты обработки опытных данных приведены в таблице 2.2, в которой приняты следующие обозначения

$$\mathrm{Nu}_м = \frac{\alpha_м d_м}{\lambda_{20°C}}, \qquad \mathrm{Re}_м = \frac{u_м d_м}{\nu_{20°C}}$$

Таблица 2.2. Результаты обработки экспериментальных данных

№	1	2	3	4	5	6	7	8
IU	265	362	500.8	1008.1	1048.7	1039.5	1869.7	1472.5
($T_п$-$T_с$) =ΔT	34	27	22	25	17	14	21	13
$IU/\Delta T$	7.794	13.410	22.760	40.320	61680	74.250	89.030	113.200

$\alpha_м$=4,423·$IU/\Delta T$	34.474	59.315	100.676	…	…	…	…	…
$Nu_м$	159.477	247.391	…	…	…	…	…	…
$Re_м \cdot 10^{-6}$	0.05578	0.1036	…	…	…	…	…	…
$lgNu_м$	2.201	2.438	…	…	…	…	…	…
$lgRe_м$	4.747	5.015	…	…	…	…	…	…

На рисунке 2.6 представлена зависимость

$$\lg \mathrm{Nu}_м = f\left(\lg \mathrm{Re}_м\right)$$

построенная по данным таблицы 2.2.

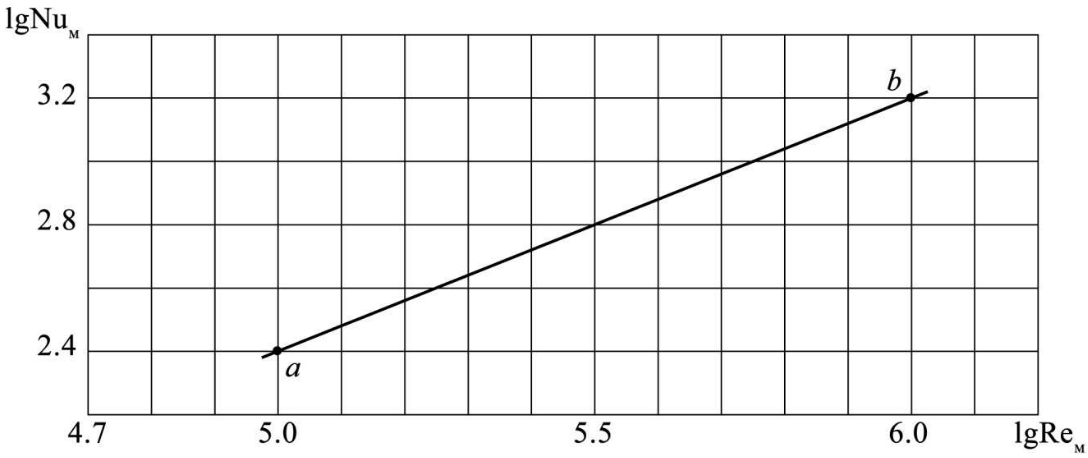

Рис. 2.6. Зависимость $\lg \mathrm{Nu}_м$ от $\lg \mathrm{Re}_м$

Выделяя на прямой линии рис. 2.6 две точки a и b и используя уравнение этой линии в виде:

$$\lg \mathrm{Nu}_м = \lg c + n \lg \mathrm{Re}_м,$$

тогда

$$n = \frac{\lg \mathrm{Nu}_b - \lg \mathrm{Nu}_a}{\lg \mathrm{Re}_b - \lg \mathrm{Re}_a} = 0.8,$$

$$\lg c = \lg \mathrm{Nu}_a + n \lg \mathrm{Re}_a \quad \rightarrow \quad c = 0.026.$$

Подстановка найденных значений коэффициентов n и c в уравнение (2.10) даёт следующую обобщённую зависимость для определения коэффициента теплоотдачи между корпусом ракеты (модели) и обдувающим её воздухом:

$$\mathrm{Nu} = 0.26\,\mathrm{Re}^{0.8} = 0.026\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.4}.$$

В формуле за определяющую температуру принята средняя температура , набегающего на ракету потока $T_{ср}$. Формула справедлива при $\mathrm{Re} \geq 5 \cdot 10^4$.

Коэффициент теплоотдачи от корпуса ракеты к воздуху составляет

$$\alpha = 0.026\,\mathrm{Re}^{0.8}\frac{\lambda}{d_р} = 31.55 \text{ Вт/}\left(\text{м}^2\text{К}\right).$$

Количество тепла, отводимое от корпуса бака ракеты за время 0.5 часа, равно

$$Q = \alpha\left(T_п - T_{ср}\right)F\tau = 68.489 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Масса керосина в баке горючего

$$m = V_б\rho = \frac{\pi d_р^2}{4}H\rho = 6440 \text{ кг}.$$

Изменение температуры горючего в баке в следствии охлаждения

$$\Delta T = \frac{Q}{mc_р} = 5.3\,^\circ\text{C}.$$

Средняя температура горючего в баке в результате его охлаждения за 0.5 часа составит

$$T_н - \Delta T = 24.7\,^\circ\text{C}.$$