

## ГЛАВА 5. Численные методы решения задач теплопроводности

### 26. Метод конечных разностей (метод сеток)

Особенность метода заключается в том, что решение задачи находят не для непрерывной области, а лишь в конечном множестве точек, образующих сетку. Решение начинается с замены исходного дифференциального уравнения его конечно-разностным аналогом. С этой целью область непрерывного изменения аргумента заменяют дискретной областью, а дифференциальный оператор уравнения — разностным уравнением. В результате такого преобразования решение дифференциального уравнения удастся свести к решению системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений (системы конечно-разностных уравнений). Степень приближения (точность) разностного решения к точному зависит от выбора пространственного и временного шага сетки.

Для численного решения нестационарных задач теплопроводности используют, как правило, одну из двух схем записи разностных уравнений: явную или неявную. Рассмотрим особенности использования указанных схем на примере решения одномерной нестационарной задачи теплопроводности в плоской стенке без внутренних источников тепла. Соответствующее дифференциальное уравнение, описывающее температурное поле, имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (26.1)$$

Разобьем стенку с помощью сетки на слои толщиной  $\Delta x$ , рис. 26.1.

Применительно к решению задачи по явной схеме температуры слоев внутри стенки  $(i - 1, i, i + 1)$  в " $k$ " момент времени (предыдущий момент времени) обозначены на рисунке верхним индексом " $k$ " и считаются известными из начального условия.

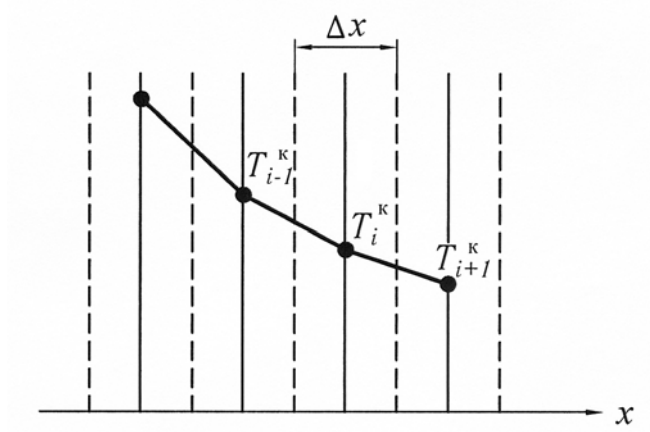


Рис. 26.1. Схема разбиения для внутренних слоев в стенке

Заменяем производные в уравнении (26.1) их конечно-разностными аналогами

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} &\approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau}, \\ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_1 &\approx \frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta x}, \\ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 &\approx \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) &\approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta x} - \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta x} \right] = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (26.2)$$

Используя производные (26.2) совместно с (26.1), получим систему линейных алгебраических уравнений, число которых  $n - 2$  равно числу неизвестных температур во внутренних слоях стенки

$$T_i^{k+1} - T_i^k = \frac{a \Delta \tau}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k). \quad (26.3)$$

Обозначая в (26.3)

$$\frac{a \Delta \tau}{(\Delta x)^2} = \text{Fo},$$

где  $\text{Fo}$  — число Фурье, найдем

$$T_i^{k+1} = \text{Fo} (T_{i+1}^k + T_{i-1}^k) + (1 - 2\text{Fo}) T_i^k. \quad (26.4)$$

Система уравнений (26.4) позволяет определить значения температур во всех внутренних узлах сетки в  $(k + 1)$ -ый момент времени, если значения температур в  $k$ -ый момент времени заданы. Такой способ численного решения задачи является явным. Каждое из конечно-разностных уравнений (26.4) содержит лишь одну неизвестную температуру  $T_i^{k+1}$  в момент времени  $\tau + \Delta\tau$ . Предполагается, что в каждый момент времени  $\tau$  распределение температуры в промежутке между соседними точками является линейным.

Рассмотрим далее баланс тепла в граничном слое, рис. 26.2.

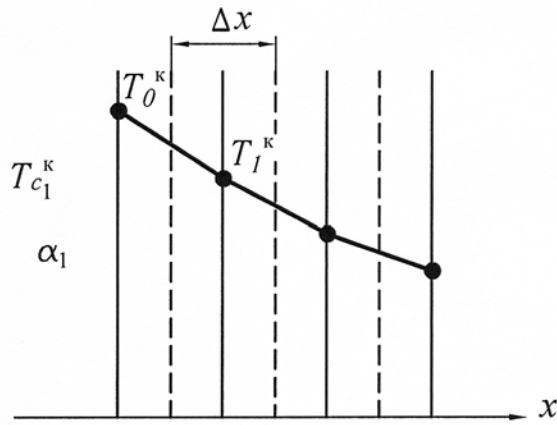


Рис. 26.2. Левый граничный слой стенки

Видно, что в отличие от внутренних узлов поток тепла через левую границу слоя от среды поступает путем конвекции, поэтому для левого граничного слоя можно записать следующее уравнение баланса тепла

$$\alpha_1 F (T_{c_1}^k - T_0^k) + \lambda F \frac{T_1^k - T_0^k}{\Delta x} = \frac{1}{2} c \rho F \Delta x \frac{T_0^{k+1} - T_0^k}{\Delta \tau}. \quad (26.5)$$

Выражая из уравнения (26.5) в явном виде температуру на левой поверхности стенки в  $k + 1$ -ый момент времени, получим

$$T_0^{k+1} = 2\text{Fo} (T_1^k + \text{Bi}_1 T_{c_1}^k) + T_0^k (1 - 2\text{Fo} - 2\text{Fo} \cdot \text{Bi}_1), \quad (26.6)$$

где  $\text{Bi} = \frac{\alpha_1 \Delta x}{\lambda}$  — число Био.

Используя уравнение (26.6) находят температуру на левой границе стенки и по формуле (26.4) — температуру во всех внутренних слоях. Температура на правой границе стенки должна быть определена из уравнения баланса, аналогичного (26.5), рис. 26.3

$$\alpha_2 F (T_{c_2}^k - T_n^k) + \lambda F \frac{T_{n-1}^k - T_n^k}{\Delta x} = \frac{1}{2} c \rho F \Delta x \frac{T_n^{k+1} - T_n^k}{\Delta \tau},$$

после преобразования которого находим

$$T_n^{k+1} = 2\text{Fo} (T_{n-1}^k + \text{Bi}_2 T_{c_2}^k) + T_n^k (1 - 2\text{Fo} - 2\text{Fo} \cdot \text{Bi}_2). \quad (26.7)$$

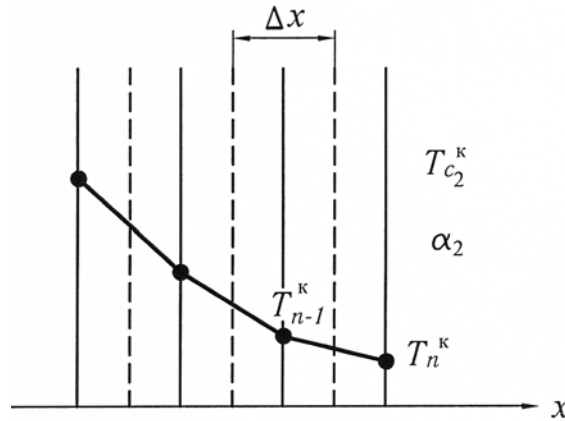


Рис. 26.3. Правый граничный слой стенки

Процесс вычисления температур носит итерационный характер. Вначале по формулам (26.6), (26.4) и (26.7) последовательно находят температуры на левой границе стенки, во внутренних слоях и на ее правой границе в  $k+1$ -ый момент времени, полагая, что все другие температуры и параметры теплообмена в предыдущий  $k$ -ый момент времени известны. Далее найденные значения температур в  $k+1$ -ый момент времени следует подставить в правую часть уравнений (26.6), (26.4), (26.7) и вычислить температуры в  $k+2$ -ой момент времени и т.д. Этот процесс повторяется до того момента времени, в который требуется знать температурное поле пластины.

Систему уравнений (26.4) удобно представить в виде

$$T_i^{k+1} = AT_{i+1}^k + BT_i^k + CT_{i-1}^k, \quad (26.8)$$

где  $A = C = a\Delta\tau/(\Delta x)^2$ ,  $B = 1 - 2a\Delta\tau/(\Delta x)^2$  и  $A + B + C = 1$ .

Удобство последней записи уравнения для внутренних слоев состоит в том, что при решении двухмерной задачи теплопроводности в правой части уравнения (26.8) должны стоять не три, а пять слагаемых, содержащих известные температуры в слоях (ячейках) в  $k$ -ый момент времени. В случае решения трехмерной задачи таких слагаемых должно быть семь.

Решение конечно-разностных уравнений по явной схеме связано в ограничениями на выбор шага по времени, который для внутренних узлов сетки зависит от выбранного шага по координате и температуропроводности материала (число  $Fo$ ), а для граничных узлов сетки еще и от коэффициента теплоотдачи (число  $Bi$ ). При некоторых соотношениях шагов  $\Delta\tau$  и  $\Delta x$  можно получить результат, противоречащий физическому смыслу решаемой задачи. Анализ этого вопроса показывает, что для обеспечения устойчивого решения задачи и получения результата, отвечающего физическому смыслу, необходимо, чтобы сомножитель в круглых скобках перед  $T_i^k$  в правой части уравнения (26.4) был больше или равен нулю

$$(1 - 2Fo) \geq 0. \quad (26.9)$$

Это означает, что

$$Fo \leq 0,5 \quad (26.10)$$

или

$$(\Delta\tau)_{\text{доп}} \leq 0,5 \frac{(\Delta x)^2}{a}.$$

Более жестким критерием выбора шага по времени является условие, получаемое из выражений для температуры граничных слоев (26.6) или (26.7), в которых сомножитель при  $T_1^k$  или  $T_n^k$  должен быть больше нуля

$$1 - 2Fo - 2Fo \cdot Bi \geq 0. \quad (26.11)$$

Из неравенства (26.11) следует, что

$$(\Delta\tau)_{\text{доп}} \leq 0,5 \frac{(\Delta x)^2}{a(1 + \text{Bi})}. \quad (26.12)$$

Ограничения на выбор шага расчета температуры по явной схеме в виде (26.10) или (26.11) являются ее существенным недостатком.

Рассмотрим далее неявную схему решения конечно-разностных уравнений, которая позволяет избежать ограничений на выбор шага по времени.

В этом случае из уравнения баланса тепловой энергии для внутренних слоев стенки, записанного с использованием неизвестных пока температур в  $k + 1$ -ый момент времени

$$\lambda F \frac{T_{i-1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{\Delta x} + \lambda F \frac{T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \rho c F \Delta x \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau}$$

получают систему уравнений, аналогичную системе (26.3)

$$T_i^{k+1} - T_i^k = \frac{a \Delta \tau}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}). \quad (26.13)$$

Используя (26.13), найдем окончательный вид системы уравнений для расчета температур внутренних слоев стенки на  $(k + 1)$ -ом шаге по времени

$$T_i^{k+1}(1 + 4\text{Fo}) - 2\text{Fo} T_{i+1}^{k+1} - 2\text{Fo} T_{i-1}^{k+1} - T_i^k = 0. \quad (26.14)$$

В отличие от явной схемы расчета, в которой температура  $T_i^{k+1}$  выражена явно через известные температуры в соседних слоях в  $k$ -ый момент времени, выражение (26.14) содержит неизвестные температуры  $T_{i+1}^{k+1}$  и  $T_{i-1}^{k+1}$ . В связи с этим обстоятельством необходимо использовать совместное решение всех уравнений системы (26.14) для всех слоев.

Преимуществом неявной схемы решения в сравнении с явной является устойчивость процесса вычисления температуры при любом значении шага по времени.

Из уравнений баланса тепловой энергии для левой и правой границ стенки получают два следующих соотношения

$$[1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_1)] T_0^{k+1} - 2\text{Fo}(T_1^{k+1} + \text{Bi}_1 T_{c_1}^{k+1}) - T_0^k = 0, \quad (26.15)$$

$$[1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_2)] T_n^{k+1} - 2\text{Fo}(T_{n-1}^{k+1} + \text{Bi}_2 T_{c_2}^{k+1}) - T_n^k = 0, \quad (26.16)$$

Представленная выше система уравнений для решения задачи теплопроводности по неявной схеме включает в себя  $(n-2)$  уравнений для внутренних узлов /уравнения (26.14)/ и два уравнения (26.15) и (26.16) для граничных узлов, содержит  $n$  неизвестных температур и является замкнутой относительно числа неизвестных величин.

Если уравнение (26.13) представить в виде

$$(T_i^{k+1} - T_i^k)/\Delta\tau = a(T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1})/(\Delta x)^2, \quad (26.17)$$

то явную /формула (26.3)/ и неявную (26.17) системы конечно-разностных уравнений для расчета температур внутренних слоев стенки можно объединить

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta\tau} = a \left[ \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \sigma + \right. \\ \left. + \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} (1 - \sigma) \right], \end{aligned} \quad (26.18)$$

где  $\sigma$  — весовой множитель.

Из выражения (26.18) при  $\sigma = 0$  получается система явных, а при  $\sigma = 1$  — неявных конечно-разностных уравнений. Выбор рационального значения весового множителя для расчетов на ЭВМ с использованием той или иной схемы позволяет экономить машинное время и быстрее получать необходимый результат. Точность решения при использовании обеих схем возрастает с уменьшением  $\Delta x$  при одновременном уменьшении  $\Delta\tau$  пропорционально  $(\Delta x)^2$ .

## 27. Решение системы конечно-разностных уравнений методом прогонки

Для решения системы неявных уравнений (26.14)-(26.16) удобно использовать метод прогонки. Чтобы показать последовательность применения этого метода к решению указанной задачи, преобразуем вначале уравнения (26.14)-(26.16) к виду (27.1)-(27.3) соответственно

$$\text{Fo} T_{i-1}^{k+1} - (1 + 2\text{Fo}) T_i^{k+1} + \text{Fo} T_{i+1}^{k+1} = -T_i^k, \quad (27.1)$$

$$T_0^{k+1} = \frac{2\text{Fo}}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_1)} T_1^{k+1} + \frac{2\text{Fo} \cdot \text{Bi}_1}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_1)} T_{c_1}^{k+1} + \\ + \frac{1}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_1)} T_0^k, \quad (27.2)$$

$$T_n^{k+1} = \frac{2\text{Fo}}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_2)} T_{n-1}^{k+1} + \frac{2\text{Fo} \cdot \text{Bi}_2}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_2)} T_{c_2}^{k+1} + \\ + \frac{1}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_2)} T_n^k. \quad (27.3)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} y_0 = T_0^{k+1}; \quad y_1 = T_1^{k+1}; \quad y_n = T_n^{k+1}; \quad y_{n-1} = T_{n-1}^{k+1}; \quad y_i = T_i^{k+1}; \\ A_i = B_i = \text{Fo}; \quad C_i = 1 + 2\text{Fo}; \quad F_i = T_i^k; \end{aligned} \right\} \quad (27.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 = \frac{2\text{Fo}}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_1)}; \quad \kappa_2 = \frac{2\text{Fo}}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_2)}; \\ \mu_1 = \frac{2\text{Fo} \cdot \text{Bi}_1 T_{c_1}^{k+1} + T_0^k}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_1)}; \quad \mu_2 = \frac{2\text{Fo} \cdot \text{Bi}_2 T_{c_2}^{k+1} + T_n^k}{1 + 2\text{Fo}(1 + \text{Bi}_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (27.5)$$

С учетом принятых обозначений уравнения (27.1)-(27.3) можно записать в более компактной форме

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad (27.6)$$

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1; \quad (27.7)$$

$$y_n = \kappa_2 y_{n-1} + \mu_2. \quad (27.8)$$



В соотношении (27.6) индекс  $i = 1, 2, \dots, n-1$  относится к внутренним слоям стенки, для всех значений этого индекса  $A_i \neq 0$  и  $B_i \neq 0$ .

Предположим далее, что температура в узле  $i$  линейно связана с температурой в узле  $i+1$  и распространим это предположение на все другие узлы. В связи с этим можно записать

$$y_i = \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (27.9)$$

$$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i, \quad (27.10)$$

где  $\alpha_{i+1}$ ,  $\beta_{i+1}$ ,  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — коэффициенты, которые предстоит определить.

Используя выражение (27.10) совместно с уравнением (27.6), найдем

$$(A_i \alpha_i - C_i) y_i + A_i \beta_i + B_i y_{i+1} = -F_i. \quad (27.11)$$

Подставляя  $y_i$  из соотношения (27.9) в формулу (27.11), получим

$$[(A_i \alpha_i - C_i) \alpha_{i+1} + B_i] y_{i+1} + A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - C_i) \beta_{i+1} = -F_i. \quad (27.12)$$

Полученное уравнение будет выполнено для любых  $y_{i+1}$  при условии, что

$$(A_i \alpha_i - C_i) \alpha_{i+1} + B_i = 0 \quad (27.13)$$

и

$$A_i \beta_i + (\alpha_i A_i - C_i) \beta_{i+1} + F_i = 0. \quad (27.14)$$

Из условий (27.13), (27.14) получают две рекуррентные формулы для определения прогоночных коэффициентов

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (27.15)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (27.16)$$

Чтобы найти указанные коэффициенты, необходимо знать их начальные значения  $\alpha_i = \alpha_1$  и  $\beta_i = \beta_1$ . Найдем их, используя для этого граничные условия (27.7) и (27.8) совместно с формулой (27.9). Поскольку формула (27.9) справедлива при  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , то при  $i = 0$

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1, \quad (27.17)$$

а с другой стороны, из граничного условия (27.7) следует, что

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1. \quad (27.18)$$

Сопоставляя выражения (27.17) и (27.18), получим

$$\alpha_1 = \kappa_1 \text{ и } \beta_1 = \mu_1, \quad (27.19)$$

где  $\kappa_1$  и  $\mu_1$  определяются по формулам (27.5).

По найденным значениям  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ , используя формулы (27.15) и (27.16), определяют последовательно все остальные прогоночные коэффициенты от  $\alpha_2$  до  $\alpha_n$  и  $\beta_2$  до  $\beta_n$  соответственно. Выполненная процедура позволяет вычислить далее значения температур во всех узлах сетки, действуя в противоположном направлении.

Для определения температуры в крайнем правом узле сетки воспользуемся уравнениями

$$y_n = \kappa_2 y_{n-1} + \mu_2, \quad (27.20)$$

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n. \quad (27.21)$$

Подставляя  $y_{n-1}$  из (27.21) в (27.20) и разрешая полученное выражение относительно  $y_n$ , найдем

$$y_n = T_n^{k+1} = \frac{\mu_2 + \kappa_2 \beta_n}{1 - \alpha_n \kappa_2}. \quad (27.22)$$

Понижая в формуле (27.22) значение  $n$ , находят температуры  $T_{n-1}^{k+1}$ ,  $T_{n-2}^{k+1}$  и т.д. до  $T_0^{k+1}$  в  $k+1$ -ый момент времени.

Предполагается, что при расчетах по формуле (27.22) выполняется условие  $1 - \alpha_n \kappa_2 \neq 0$ .

## 28. Метод элементарных балансов

В основе этого приближенного метода лежит замена реальной физической системы (тела, области, элемента конструкции) с непрерывно изменяющимися в ней параметрами эквивалентной ей системой с сосредоточенными параметрами. Получаемое в этом случае решение задачи теплопроводности содержит сведения об отдельных значениях температур в дискретно расположенных точках системы. В этом смысле указанный метод имеет много общего с методом конечных разностей.

Суть рассматриваемого метода состоит в следующем. Тело, температурное состояние которого необходимо определить, условно с помощью сетки разбивают на элементарные объемы (ячейки). Каждой центральной точке образовавшегося объема присваивают номер. В пределах элементарного объема температура и теплофизические свойства (ТФС) материала считаются одинаковыми во всех его точках. Чтобы определить температуру в точках, расположенных на поверхности тела, достаточно использовать вспомогательную сетку, с помощью которой точки на поверхности тела окажутся центральными соответствующих объемов, рис. 28.1.

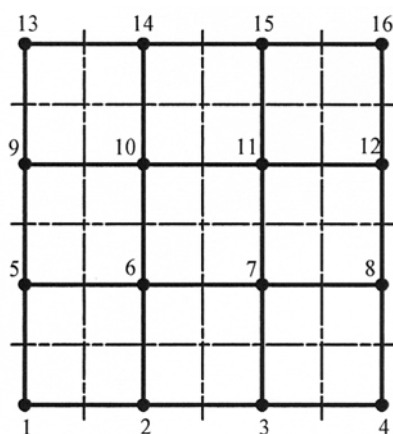


Рис. 28.1. Схема разбиения прямоугольной области с помощью основной и вспомогательной сеток

Тип сеток зависит от геометрической формы рассматриваемой области, рис. 28.1 и 28.2.

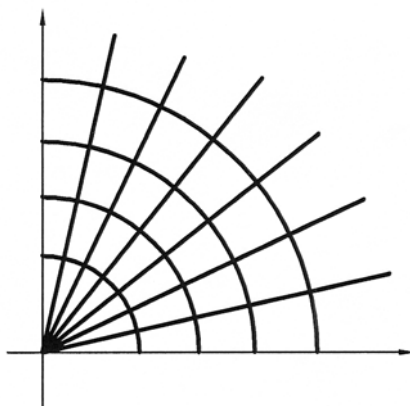


Рис. 28.2. Схема разбиения цилиндрической области с помощью полярной сетки

Шаг разбиения тела в разных направлениях может быть различным. Обычно чаще разбивают область в том направлении, в котором ожидается наиболее заметное изменение температуры.

Далее для каждого элементарного объема (ячейки) записывают уравнение баланса тепловой энергии. Число полученных при этом уравнений равно количеству элементарных объемов (числу их центральных точек).

Рассмотрим основные особенности применения метода к решению задач теплопроводности на примере определения температурного состояния оболочки летательного аппарата, подкрепленной изнутри шпангоутом, рис. 28.3.

На внешней поверхности оболочки происходит теплообмен конвекцией и излучением. Внутренняя поверхность оболочки и шпангоут теплоизолированы. Результирующий поток тепла, поступающий к внешней поверхности, передается шпангоуту теплопроводностью. Тепловой контакт между оболочкой и шпангоутом считается идеальным.

При изготовлении подкрепленных оболочек летательных аппаратов обычно используют сравнительно тонкие пластины и профили из высокотеплопроводных материалов.

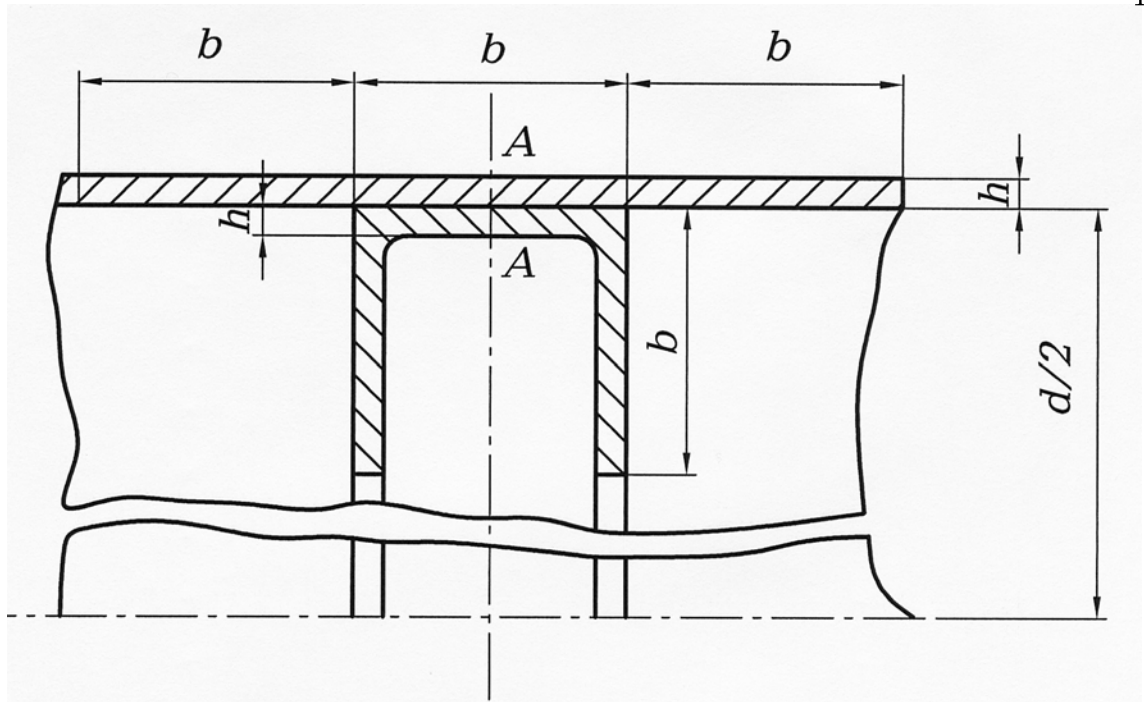


Рис. 28.3. Оболочка, подкрепленная шпангоутом

В этом случае можно принять, что температура элементарных объемов, на которые разбивают конструкцию, изменяется только во времени. Примем также, что  $d \gg b > h$ , а теплообмен между элементарными объемами оболочки на достаточно большом удалении от шпангоута отсутствует.

Учитывая, что рассматриваемая конструкция симметрична относительно сечения  $A - A$  (рис. 28.3), выделим левую ее часть и разобьем на элементарные объемы, как это показано на рис. 28.4.

Принимая во внимание принятые выше допущения, запишем уравнения баланса тепловой энергии для каждого из выделенных объемов:

$$\begin{aligned} \alpha_k(T_{e,k} - T_{1,k}) \frac{b}{4} \pi d + \lambda_{об} \frac{h \pi d}{b/4} (T_{2,k} - T_{1,k}) = \varepsilon_{1,k} \sigma \frac{b}{4} \pi d T_{1,k}^4 + \\ + c_{об} \rho_{об} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{1,k+1} - T_{1,k}}{\Delta \tau_{k+1}}, \end{aligned} \quad (28.1)$$

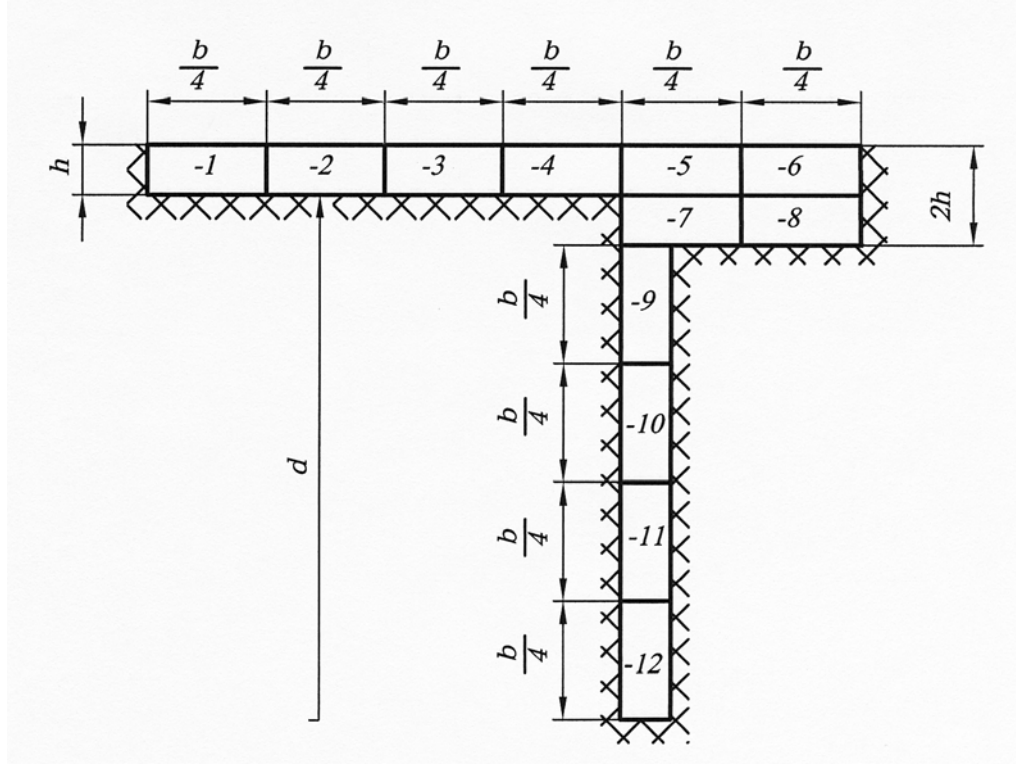


Рис. 28.4. Схема разбиения оболочки, подкрепленной шпангоутом, на элементарные объемы

$$\begin{aligned}
 \alpha_k(T_{e,k} - T_{2,k})\frac{b}{4}\pi d + \lambda_{o6}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{1,k} - T_{2,k}) + \lambda_{o6}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{3,k} - T_{2,k}) = \\
 = \varepsilon_{2,k}\sigma\frac{b}{4}\pi d T_{2,k}^4 + c_{o6}\rho_{o6}h\frac{b}{4}\pi d \frac{T_{2,k+1} - T_{2,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \quad (28.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_k(T_{e,k} - T_{3,k})\frac{b}{4}\pi d + \lambda_{o6}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{2,k} - T_{3,k}) + \lambda_{o6}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{4,k} - T_{3,k}) = \\
 = \varepsilon_{3,k}\sigma\frac{b}{4}\pi d T_{3,k}^4 + c_{o6}\rho_{o6}h\frac{b}{4}\pi d \frac{T_{3,k+1} - T_{3,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \quad (28.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_k(T_{e,k} - T_{4,k})\frac{b}{4}\pi d + \lambda_{o6}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{3,k} - T_{4,k}) + \lambda_{o6}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{5,k} - T_{4,k}) = \\
 = \varepsilon_{4,k}\sigma\frac{b}{4}\pi d T_{4,k}^4 + c_{o6}\rho_{o6}h\frac{b}{4}\pi d \frac{T_{4,k+1} - T_{4,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \quad (28.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_k(T_{e,k} - T_{5,k})\frac{b}{4}\pi d + \lambda_{o6}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{4,k} - T_{5,k}) + \lambda_{o6}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{6,k} - T_{5,k}) + \\
& + \lambda_{5,7}\frac{(b/4)\pi d}{h}(T_{7,k} - T_{5,k}) = \varepsilon_{5,k}\sigma\frac{b}{4}\pi d T_{5,k}^4 + c_{o6}\rho_{o6}h\frac{b}{4}\pi d\frac{T_{5,k+1} - T_{5,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \quad (28.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_k(T_{e,k} - T_{6,k})\frac{b}{4}\pi d + \lambda_{o6}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{5,k} - T_{6,k}) + \lambda_{6,8}\frac{(b/4)\pi d}{h}(T_{8,k} - T_{6,k}) = \\
& = \varepsilon_{6,k}\sigma\frac{b}{4}\pi d T_{6,k}^4 + c_{o6}\rho_{o6}h\frac{b}{4}\pi d\frac{T_{6,k+1} - T_{6,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \quad (28.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{7,5}\frac{(b/4)\pi d}{h}(T_{5,k} - T_{7,k}) + \lambda_{\text{III}}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{8,k} - T_{7,k}) + \lambda_{7,9}\frac{h\pi d}{(h/2 + b/8)}(T_{9,k} - T_{7,k}) = \\
& = c_{\text{III}}\rho_{\text{III}}h\frac{b}{4}\pi d\frac{T_{7,k+1} - T_{7,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \quad (28.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{8,6}\frac{(b/4)\pi d}{h}(T_{6,k} - T_{8,k}) + \lambda_{\text{III}}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{7,k} - T_{8,k}) = c_{\text{III}}\rho_{\text{III}}h\frac{b}{4}\pi d\frac{T_{8,k+1} - T_{8,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \quad (28.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{9,7}\frac{h\pi d}{(h/2 + b/8)}(T_{7,k} - T_{9,k}) + \lambda_{\text{III}}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{10,k} - T_{9,k}) = \\
& = c_{\text{III}}\rho_{\text{III}}h\frac{b}{4}\pi d\frac{T_{9,k+1} - T_{9,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \quad (28.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{\text{III}}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{9,k} - T_{10,k}) + \lambda_{\text{III}}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{11,k} - T_{10,k}) = \\
& = c_{\text{III}}\rho_{\text{III}}h\frac{b}{4}\pi d\frac{T_{10,k+1} - T_{10,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \quad (28.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{\text{III}}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{10,k} - T_{11,k}) + \lambda_{\text{III}}\frac{h\pi d}{b/4}(T_{12,k} - T_{11,k}) = \\
& = c_{\text{III}}\rho_{\text{III}}h\frac{b}{4}\pi d\frac{T_{11,k+1} - T_{11,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \quad (28.11)
\end{aligned}$$

$$\lambda_{\text{шп}} \frac{h\pi d}{b/4} (T_{11,k} - T_{12,k}) = c_{\text{шп}} \rho_{\text{шп}} h \frac{b}{4} \pi d \frac{T_{12,k+1} - T_{12,k}}{\Delta\tau_{k+1}}, \quad (28.12)$$

где

$$\lambda_{5,7} = \lambda_{7,5} = \lambda_{6,8} = \lambda_{8,6} = \frac{2\lambda_{\text{об}} \cdot \lambda_{\text{шп}}}{\lambda_{\text{об}} + \lambda_{\text{шп}}}, \quad (28.13)$$

$$\lambda_{7,9} = \lambda_{9,7} = \frac{(4h + b) \lambda_{\text{об}} \cdot \lambda_{\text{шп}}}{b\lambda_{\text{об}} + 4h\lambda_{\text{шп}}}. \quad (28.14)$$

В рассматриваемом примере в формуле (28.14) для ячейки 7  $\lambda_{\text{об}} = \lambda_{\text{шп}}$  и  $\lambda_{7,9} = \lambda_{9,7} = \lambda_{\text{шп}}$ .

Общая формула для определения приведенных коэффициентов теплопроводности (28.13) и (28.14) получена из условия равенства суммы двух термических сопротивлений приведенному термическому сопротивлению

$$\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} = \frac{a_1 + a_2}{\lambda_{\text{пр}}},$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — отрезки прямой, на которых  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$  соответственно.

Неизвестные значения температур выделенных объемов в  $k + 1$ -ый момент времени могут быть выражены из системы уравнений (28.1)-(28.12) в явном виде

$$T_{1,k+1} = T_{1,k} + \bar{\alpha}_k (T_{e,k} - T_{1,k}) + \bar{a}_{\text{об}}(T_{2,k} - T_{1,k}) - \bar{\varepsilon}_{1,k} T_{1,k}^4; \quad (28.15)$$

$$T_{2,k+1} = T_{2,k} + \bar{\alpha}_k (T_{e,k} - T_{2,k}) + \bar{a}_{\text{об}}(T_{1,k} - 2T_{2,k} + T_{3,k}) - \bar{\varepsilon}_{2,k} T_{2,k}^4; \quad (28.16)$$

$$T_{3,k+1} = T_{3,k} + \bar{\alpha}_k (T_{e,k} - T_{3,k}) + \bar{a}_{\text{об}}(T_{2,k} - 2T_{3,k} + T_{4,k}) - \bar{\varepsilon}_{3,k} T_{3,k}^4; \quad (28.17)$$

$$T_{4,k+1} = T_{4,k} + \bar{\alpha}_k (T_{e,k} - T_{4,k}) + \bar{a}_{\text{об}}(T_{3,k} - 2T_{4,k} + T_{5,k}) - \bar{\varepsilon}_{4,k} T_{4,k}^4; \quad (28.18)$$

$$\begin{aligned} T_{5,k+1} = & T_{5,k} + \bar{\alpha}_k (T_{e,k} - T_{5,k}) + \bar{a}_{\text{об}}(T_{4,k} - 2T_{5,k} + T_{6,k}) + \\ & + \bar{a}_{5,7}(T_{7,k} - T_{5,k}) - \bar{\varepsilon}_{5,k} T_{5,k}^4; \end{aligned} \quad (28.19)$$

$$\begin{aligned} T_{6,k+1} = & T_{6,k} + \bar{\alpha}_k (T_{e,k} - T_{6,k}) + \bar{a}_{\text{об}}(T_{5,k} - T_{6,k}) + \\ & + \bar{a}_{6,8}(T_{8,k} - T_{6,k}) - \bar{\varepsilon}_{6,k} T_{6,k}^4; \end{aligned} \quad (28.20)$$



$$T_{7,k+1} = T_{7,k} + \bar{a}_{7,5} (T_{5,k} - T_{7,k}) + \bar{a}_{\text{шш}} (T_{8,k} - T_{7,k}) + \bar{a}_{7,9} (T_{9,k} - T_{7,k}); \quad (28.21)^{155}$$

$$T_{8,k+1} = T_{8,k} + \bar{a}_{8,6} (T_{6,k} - T_{8,k}) + \bar{a}_{\text{шш}} (T_{7,k} - T_{8,k}); \quad (28.22)$$

$$T_{9,k+1} = T_{9,k} + \bar{a}_{9,7} (T_{7,k} - T_{9,k}) + \bar{a}_{\text{шш}} (T_{10,k} - T_{9,k}); \quad (28.23)$$

$$T_{10,k+1} = T_{10,k} + \bar{a}_{\text{шш}} (T_{9,k} - 2T_{10,k} + T_{11,k}); \quad (28.24)$$

$$T_{11,k+1} = T_{11,k} + \bar{a}_{\text{шш}} (T_{10,k} - 2T_{11,k} + T_{12,k}); \quad (28.25)$$

$$T_{12,k+1} = T_{12,k} + \bar{a}_{\text{шш}} (T_{11,k} - T_{12,k}), \quad (28.26)$$

где для сокращения записи уравнений (28.15)-(28.26) использованы следующие безразмерные коэффициенты:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{\alpha_k \Delta \tau_{k+1}}{c_{\text{об}} \rho_{\text{об}} h}; \\ \bar{a}_{\text{об}} &= \frac{\lambda_{\text{об}}}{c_{\text{об}} \rho_{\text{об}}} \frac{\Delta \tau_{k+1}}{(b/4)^2}; \quad \bar{a}_{\text{шш}} = \frac{\lambda_{\text{шш}}}{c_{\text{шш}} \rho_{\text{шш}}} \frac{\Delta \tau_{k+1}}{(b/4)^2}; \\ \bar{a}_{5,7} &= \frac{\lambda_{5,7}}{c_{\text{об}} \rho_{\text{об}}} \frac{\Delta \tau_{k+1}}{h^2} = \bar{a}_{6,8}; \\ \bar{a}_{7,5} &= \frac{\lambda_{7,5}}{c_{\text{шш}} \rho_{\text{шш}}} \frac{\Delta \tau_{k+1}}{h^2} = \bar{a}_{8,6}; \\ \bar{a}_{7,9} &= \frac{\lambda_{7,9}}{c_{\text{шш}} \rho_{\text{шш}}} \frac{\Delta \tau_{k+1}}{\frac{b}{4} (h/2 + b/8)} = \bar{a}_{9,7}; \\ \bar{\varepsilon}_{i,k} &= \frac{\varepsilon_{i,k} \sigma \Delta \tau_{k+1}}{c_{\text{об}} \rho_{\text{об}} h}, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \right\} \quad (28.27)$$

В правых частях уравнений (28.15)-(28.26) все температуры с индексом "к" считают известными из начального условия задачи, температуру  $T_{e,k}$  определяют, используя зависимость скорости полета аппарата от времени и параметры стандартной атмосферы, по формуле

$$T_{e,k} = T_{\text{н}} \left( 1 + r \frac{k-1}{2} M_{\text{н}}^2 \right).$$

Безразмерные коэффициенты (28.27) рассчитывают для интервала времени  $\Delta \tau_{\text{доп}}$ , найденного из условия устойчивости решения системы уравнений (28.15)-(28.26).

Значение допустимого интервала времени зависит от условий теплообмена выделенного объема с окружающей средой и соседними элементами. Определим этот интервал для элемента № 5 (рис. 28.3), который находится в радиационно-конвективном теплообмене со средой и кондуктивным — с элементами 4, 6 и 7.

Запишем уравнение (28.19) по аналогии с формулой (26.7) в виде

$$T_{5,k+1} = \left[ \bar{\alpha}_k T_{e,k} + \bar{a}_{об} (T_{4,k} + T_{6,k}) + \bar{a}_{5,7} T_{7,k} \right] + T_{5,k} \left( 1 - \bar{\alpha}_k - 2\bar{a}_{об} - \bar{a}_{5,7} - \bar{\varepsilon}_{5,k} T_{5,k}^3 \right).$$

Условие устойчивости решения задачи для рассматриваемого случая имеет вид неравенства

$$(1 - \bar{\alpha}_k - 2\bar{a}_{об} - \bar{a}_{5,7} - \bar{\varepsilon}_{5,k} T_{5,k}^3) \geq 0. \quad (28.28)$$

Неудобство использования условия (28.28) для определения  $\Delta\tau_{k+1}$  заключается в необходимости его расчета в каждый новый момент времени. Примем в связи с этим  $\alpha_k = \alpha_{max}$ ,  $\varepsilon_{5,k} = \varepsilon_{н}$ ,  $T_{e,k} = T_{e,н}$  (индекс "н" означает принадлежность параметра к наибольшему его значению).

Выражая  $\Delta\tau_{доп}$  из условия (28.28), найдем

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{доп} &= \frac{c_{об} \rho_{об} h}{\alpha_{max} + 2 \frac{\lambda_{об} h}{(b/4)^2} + \frac{\lambda_{7,5}}{h} + \varepsilon_{5,н} \sigma T_{e,н}^3} = \\ &= \frac{(b/4)^2}{a_{об} \left[ 2 + \frac{\alpha_{max}}{\lambda_{об}} \frac{(b/4)^2}{h} + \frac{\lambda_{7,5}}{\lambda_{об}} \frac{(b/4)^2}{h^2} + \frac{\varepsilon_{5,н} \sigma}{\lambda_{об}} \frac{(b/4)^2}{h} T_{e,н}^3 \right]}. \end{aligned}$$