ГЛАВА 4. Основные понятия теории теплопроводности

20. Температурное поле и градиент

Процесс переноса теплоты в сплошной среде, называемый теплопроводностью, осуществляется в результате непосредственного соприкосновения частиц, имеющих различную скорость, что вызывает обмен энергией между молекулами, атомами или свободными электронами. Этот процесс реализуется при наличии в среде неравномерного распределения температур.

Предположение о сплошности среды при изучении процесса теплопроводности означает, что рассматриваемые размеры дифференциальных объемов среды намного больше размеров молекул и расстояний между ними. Температура среды, в общем случае, зависит от пространственных координат и времени

$$T = T\,(x, y, z, \tau).$$

Совокупность значений температуры для всех точек пространства в данный момент времени называется температурным полем.

В зависимости от условий протекания процесса теплообмена в теле возникает либо нестационарное (неустановившееся) температурное поле, либо стационарное (установившееся). В первом случае оно зависит от пространственных координат и времени, а во втором — только от координат. Часть точек тела может иметь одинаковую температуру. Поверхность, проходящую через эти точки, называют изотермической.

Пространственное изменение температуры имеет место лишь в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. При этом наибольшее изменение температура претерпевает в направлении нормали к изотермической поверхности (рис. 20.1).

На рисунке прерывистыми стрелками показаны линии теплового тока, касательные к которым совпадают с направлением вектора плотности теплового потока.

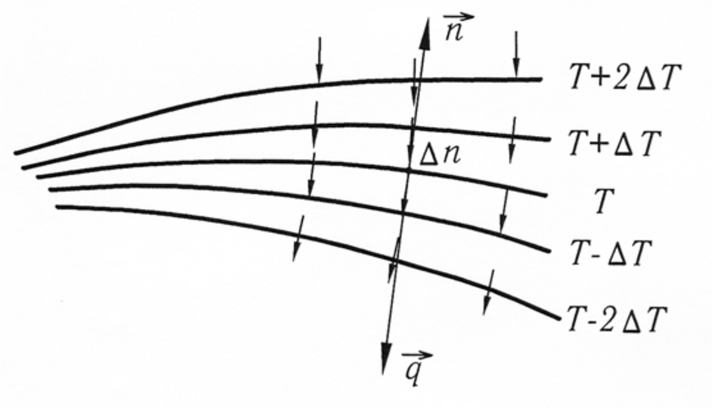

Рис. 20.1. Изотермы температурного поля и линии теплового тока

Предел отношения изменения температуры ΔT к расстоянию Δn между изотермами по нормали, на котором происходит это изменение, есть вектор, называемый градиентом температуры

$$\lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} = \vec{n}\,\frac{\partial T}{\partial n} = \operatorname{grad} T\,,$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали.

За положительное направление градиента температуры принимается направление в сторону ее увеличения. Составляющие вектора градиента температуры по осям прямоугольной системы координат равны частным производным по этим осям

$$\operatorname{grad} T = \nabla T = \frac{\partial t}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\,\vec{k}\,,$$

где $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ — единичные векторы.

21. Тепловой поток, закон Фурье

Необходимым условием переноса теплоты в среде путем теплопроводности является наличие в ней неравномерного распределения температур. Количество теплоты, проходящей в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности dS, определяет интенсивность передачи теплоты и называется плотностью теплового потока (см. рис. 20.1)

$$\vec{q} = \Big(-\vec{n}\Big)\frac{dQ}{d\tau}\,\frac{1}{dS}\,, \tag{21.1}$$

где Q — количество теплоты, Дж.

В соответствии с гипотезой Фурье вектор плотности теплового потока $\vec{q}$ пропорционален градиенту температуры

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T\,. \tag{21.2}$$

Коэффициент пропорциональности λ представляет собой физическую характеристику среды, называется теплопроводностью и зависит от атомно–молекулярного строения, температуры и структуры среды, а для смеси веществ — от их состава.

У изотропных материалов векторы $\vec{q}$ и $\operatorname{grad} T$ расположены на одной прямой, но направлены противоположно.

В современной технике широко используются материалы, обладающие анизотропными свойствами. У таких материалов, в частности, способность передавать теплоту в разных направлениях различна. К ним, например, относятся композиты, состоящие из полимерной матрицы и армирующих элементов в виде волокон, нитей, жгутов или тканей различного строения.

Теплопроводность анизотропных материалов зависит от направления и представляет собой симметричный тензор второго ранга

$$\tilde{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}, \tag{21.3}$$

где $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$, $\lambda_{xz} = \lambda_{zx}$ и $\lambda_{yz} = \lambda_{zy}$.

В этом случае векторы плотности теплового потока и градиент температуры по-прежнему связаны соотношением (21.2), но уже не лежат на одной прямой, а образуют угол $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

22. Уравнение переноса субстанции

Рассмотрим произвольный объем V, ограниченный поверхностью S (рис. 22.1).

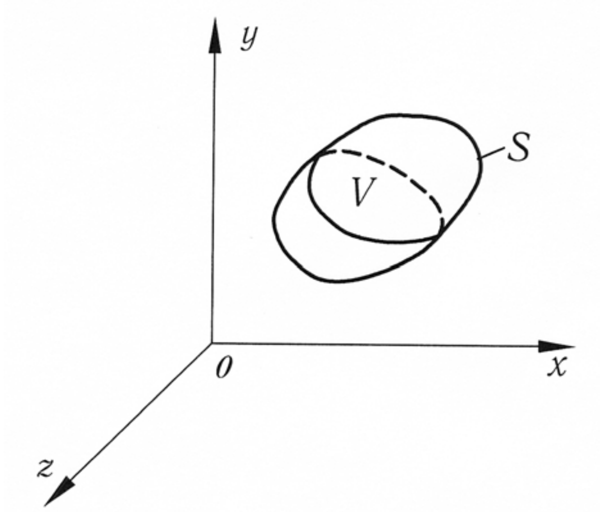

Рис. 22.1. К выводу уравнения переноса субстанции

В выделенном объеме V концентрация субстанции (например, количество энергии в единице объема) равна $\tilde{C} = C$ и действуют источники (или стоки) субстанции мощностью $\tilde{I}_V$. При этом количество субстанции, образующейся в объеме V в единицу времени, составляет

$$\int\limits_V \tilde{I}_V \, dV \,. \tag{22.1}$$

Часть субстанции перемещается через поверхность S путем диффузии

$$\oint\limits_S \left(\vec{j} \cdot \vec{\delta}_n\right) dS \,, \tag{22.2}$$

где $\vec{j}$ — плотность диффузионного (молекулярного) потока субстанции, Вт/м^2 и $\vec{\delta}_n$ — единичный вектор вдоль нормали $\vec{n}$ к поверхности S.

Полное изменение концентрации субстанции в объеме V равно

$$\frac{d}{d\tau}\left(\int\limits_V \tilde{C} \, dV\right) \,. \tag{22.3}$$

Из закона сохранения субстанции следует уравнение баланса

$$\frac{d}{d\tau}\left(\int\limits_V \tilde{C}\,dV\right) + \oint\limits_S \left(\vec{j}\cdot\vec{\delta}_n\right) dS = \int\limits_V \tilde{I}_V\,dV\,. \tag{22.4}$$

В соответствии с формулой Лейбница для полной производной

$$\frac{d}{d\tau}\left(\int\limits_V \tilde{C}\,dV\right) = \int\limits_V \frac{\partial\tilde{C}}{\partial\tau}\,dV + \oint\limits_S \tilde{C}\big(\vec{v}_S\cdot\vec{\delta}_n\big)\,dS\,, \tag{22.5}$$

где $\vec{v}_S$ — вектор скорости движения поверхности S, который в рассматриваемом случае может быть принят равным вектору скорости движения субстанции $\vec{v}$.

Подставляя выражение для полной производной из (22.5) в уравнение (22.4), получим

$$\int\limits_V \frac{\partial\tilde{C}}{\partial\tau}\,dV + \oint\limits_S \tilde{C}\big(\vec{v}_S\cdot\vec{\delta}_n\big)\,dS + \oint\limits_S \big(\vec{j}\cdot\vec{\delta}_n\big)\,dS = \int\limits_V \tilde{I}_V\,dV\,. \tag{22.6}$$

Используя теорему Гаусса–Остроградского для замены в (22.6) интегралов по поверхности S на интегралы по объему V, запишем уравнение (22.6) в виде

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial\tilde{C}}{\partial\tau} + \operatorname{div}(\tilde{C}\,\vec{v}) + \operatorname{div}\vec{j} - \tilde{I}_V\right) dV = 0\,, \tag{22.7}$$

откуда получается дифференциальное уравнение переноса субстанции

$$\frac{\partial\tilde{C}}{\partial\tau} + \operatorname{div}\big(\tilde{C}\vec{v}\big) = -\operatorname{div}\vec{j} + \vec{I}_V\,. \tag{22.8}$$

Слагаемые в левой части уравнения (22.8) определяют локальное изменение переносимой субстанции $\big(\partial\tilde{C}/\partial\tau\big)$ и ее конвективный перенос $\big(\operatorname{div}(\tilde{C}\vec{v})\big)$. Слагаемые в правой части характеризуют диффузионный перенос $\big(\operatorname{div}\vec{j}\big)$ и действие источников (или стоков) субстанции $\tilde{I}_V$.

23. Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности в прямоугольной системе координат. Полагая, что в твердом теле можно не учитывать перенос теплоты за счет диффузии, примем $\vec{j} = 0$ и $c_V = c_p$. В случае, когда перенос теплоты через поверхность выделенного объема осуществляется только теплопроводностью, произведение $\tilde{C}\,\vec{v}$ в уравнении (22.8) представляет собой плотность потока теплоты, которая в соответствии с законом Фурье (21.2) равна

$$\tilde{C}\,\vec{v} = -\lambda\,\mathrm{grad}\,T\,, \tag{23.1}$$

где переносимой субстанцией является объемная концентрация внутренней энергии тела

$$\tilde{C} = C = U_V = c_V \rho\, T\,. \tag{23.2}$$

Обозначая мощность внутренних источников (стоков) теплоты $q_V(\tilde{I}_V = q_V)$ и подставляя соотношения (23.1—23.2) в выражение (22.8), получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\big(c_V\,\rho T\big) = \mathrm{div}\,\big(\lambda\,\mathrm{grad}\,T\big) + q_V\,. \tag{23.3}$$

Дифференциальное уравнение (23.3) называется уравнением теплопроводности и определяет связь между временным и пространственным изменениями температуры в рассматриваемой точке тела. В общем случае теплоемкость тела c_V, его плотность ρ и мощность внутренних источников теплоты q_V есть функции координат и времени

$$c_V = c_V\,(x, y, z, \tau)\,, \tag{23.4}$$

$$\rho = \rho\,(x, y, z, \tau)\,, \tag{23.5}$$

$$q_V = q_V\,(x, y, z, \tau)\,, \tag{23.6}$$

а теплопроводность λ представляет собой тензор

$$\tilde{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}\,, \tag{23.7}$$

Первое слагаемое в правой части (23.3) после подстановки в него λ в виде (23.7) принимает вид

$$\operatorname{div}\big(\lambda \operatorname{grad} T\big) = \operatorname{div}\left(\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \operatorname{grad} T\right) =$$

$$= \operatorname{div}\left[\left(\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\lambda_{yx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\vec{j} +\right.$$

$$\left. + \left(\lambda_{zx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\vec{k}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz}\frac{\partial T}{\partial z}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{yx}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}+\lambda_{yz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zx}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{zy}\frac{\partial T}{\partial y}+\lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\right). \quad (23.8)$$

Используя (23.8) совместно с (23.3), получим уравнение теплопроводности для анизотропных тел

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\big(\rho c_V T\big) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz}\frac{\partial T}{\partial z}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{yx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz}\frac{\partial T}{\partial z}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_V. \quad (23.9)$$

В частном случае для изотропного тела

$$\lambda = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и уравнение (23.9) можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\big(\rho c_V T\big) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_V. \quad (23.10)$$

Для тела с постоянными свойствами ($c_v = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$) уравнение (23.10) упрощается

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + \frac{q_V}{c_V\rho}, \quad (23.11)$$

где $a = \lambda/(c_V\rho)$ — температуропроводность, м^2/с.

Уравнение теплопроводности в цилиндрической и сферической системах координат. При использовании вместо декартовых координат цилиндрических или сферических координат в уравнении (23.11) изменится вид только первого слагаемого в правой части (рис. 23.1):

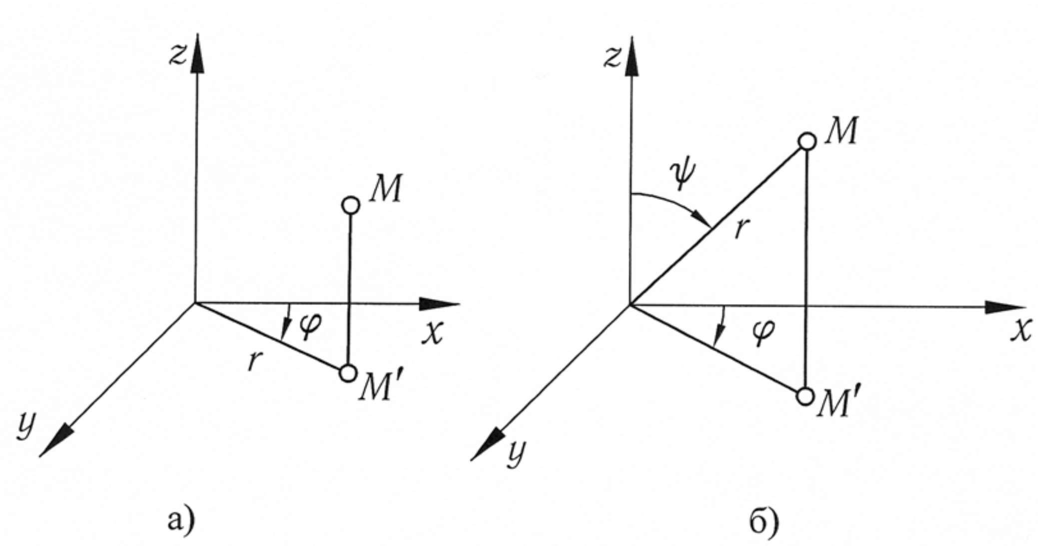

Рис. 23.1. К выводу уравнения теплопроводности в цилиндрических (а) и сферических (б) координатах

в цилиндрической системе координат при $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{q_V}{c_V\rho}\,; \tag{23.12}$$

в сферической системе координат при $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\psi}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2\sin\psi}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sin\psi\frac{\partial T}{\partial \psi}\right)\right] + \frac{q_V}{c_V\rho}\,. \tag{23.13}$$

24. Уравнение теплопроводности для одномерных задач

В инженерной практике часто приходится иметь дело с задачами определения температурного поля, когда температура тела зависит только от одной координаты, в направлении которой изменяется и поверхность теплообмена. Это задачи, связанные с переносом теплоты в телах сферической, цилиндрической формы и в стержнях (ребрах) переменного сечения. В этом случае в уравнении (22.8) целесообразно в качестве произведения $\left(\tilde{C}\cdot\vec{v}\right)$ использовать не плотность переносимой энергии, а полный ее поток в Вт. Примем $\vec{j}=0$ и

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{C} = CS(r)\,,\\ &\tilde{I}_V = I_V S(r) = q_V S(r) \end{aligned}\right\}. \tag{24.1}$$

Тогда

$$\tilde{C}\cdot\vec{v} = CS(r)\,\vec{v}\,, \tag{24.2}$$

где $S(r)$ — площадь поверхности тела, нормальная к направлению переноса энергии r; C в Дж·м$^{-3}$ и $\tilde{C}$ в Дж·м$^{-1}$.

Подставим (24.1) и (24.2) в уравнение (22.8) и, учитывая, что $S(r)$ не зависит от времени, найдем

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = q_V - \frac{1}{S(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[C\,S(r)\,\vec{v}\right]. \tag{24.3}$$

В уравнении (24.3) все члены имеют размерность Вт/м^3.

В случае, когда перенос энергии через площадь $S(r)$ осуществляется не только теплопроводностью, во втором слагаемом выражения (24.3) произведение $\left(C\vec{v}\right)$ следует представить в виде суммы

$$C\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} C_i\,\vec{v}_i\,. \tag{24.4}$$

Здесь произведение $C_i\,\vec{v}_i = q_i$ представляет собой плотность потока, который передается тем или иным механизмом $(n = 1, 2...)$ через единицу площади $S(r)$ в единицу времени в направлении r. В связи с этим второе слагаемое в правой части (24.3), характеризующее изменение энергии в единице объема $dV = S(r)\,dr$ за счет ее переноса, равно

$$\frac{dQ}{dV} = \frac{1}{S(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[S(r)\sum_{i=1}^{n} C_i\vec{v}_i\right] = \frac{1}{S(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[S(r)\sum_{i=1}^{n} q_i\right]. \tag{24.5}$$

Например, для пористых тел, охлаждаемых жидкостью, можно указать, по крайней мере, два механизма изменения энергии, вызванного ее переносом, — вследствие переноса теплоты теплопроводностью и за счет теплообмена между твердым каркасом и протекающей через поры жидкостью:

— изменение энергии, передаваемой теплопроводностью через единицу поверхности $S(r)$ в единицу времени на отрезке dr, составляет

$$\frac{1}{S(r)}\frac{\partial}{\partial r}\Big[S(r)\,q_1\Big] = \frac{1}{S(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[-\lambda_{\text{э}} S(r)\frac{\partial T}{\partial r}\right], \tag{24.6}$$

— изменение энергии жидкости, протекающей через единицу поверхности $S(r)$ пористого тела с массовым расходом $\dot{m}$ и теплоемкостью $c_{\text{рж}}$ в единицу времени на отрезке dr, равно

$$\frac{1}{S(r)}\frac{\partial}{\partial r}\Big[S(r)\,q_2\Big] = \frac{1}{S(r)}\frac{\partial}{\partial r}\Big[\dot{m}c_{\text{рж}}S(r)T\Big]. \tag{24.7}$$

При записи выражений (24.6) и (24.7) принято, что передача тепла через охлаждаемое пористое тело осуществляется одновременно по каркасу с температурой $T(r)$ и через заполняющую поры жидкость с температурой $T_{\text{с}} = T(r)$, а эффективная теплопроводность

$$\lambda_{\text{э}} = \lambda_{\text{с}}(1-p) + \lambda_{\text{ж}}, \tag{24.8}$$

где p — пористость, а $\lambda_{\text{с}}$ и $\lambda_{\text{ж}}$ — теплопроводность каркаса и жидкости сответственно.

В некоторых задачах определения одномерного температурного поля необходимо на внешних поверхностях тела, пересекающих изотермические поверхности, учитывать теплообмен с окружающей средой путем конвекции и излучения. Примером таких задач могут служить задачи расчета температурного состояния стержней (ребер). Связанные с этим потери (притоки) энергии в объеме тела dV с площадью внешней поверхности $d\Phi(r)$ можно представить как дополнительные стоки (источники) теплоты и включить их в слагаемое q_V в уравнении (24.3), записав его в виде

$$q_V = \sum_{j=0}^{m} q_{V,j}\,, \quad j = 0, 1, 2, ..., m\,, \tag{24.9}$$

где для $j = 0$: $q_{V,0}$ — внутренние источники теплоты, связанные с наличием в теле химических или ядерных реакций, а также с поглощением в нем потока излучения.

При конвективном теплообмене на внешней поверхности $d\Phi(r)$ объема dV

$$q_{V,1} = \alpha\,(T - T_{\text{с}})\frac{d\Phi(r)}{dV}\,. \tag{24.10}$$

Для теплообмена излучением

$$q_{V,2} = q_{\text{рез}}\frac{d\Phi(r)}{dV} = \left(q_{\text{соб}} - Aq_{\text{пад}}\right)\frac{d\Phi(r)}{dV}\,, \tag{24.11}$$

где $q_{\text{соб}}$ — плотность потока собственного излучения, Вт/м^2; $q_{\text{пад}}$ — плотность падающего на поверхность потока излучения; A — поглощательная способность поверхности тела.

В случае конвективного теплообмена между пористым каркасом тела с температурой $T = T(r)$ и движущейся в нем жидкостью, температура которой $T_{\text{ж}} = T_{\text{ж}} \neq T(r)$

$$q_{V,3} = \alpha_V(T - T_{\text{ж}})\,, \tag{24.12}$$

где α_V — объемный коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^{3}К).

Используя соотношения (24.5) и (24.9) совместно с (24.3), получим уравнение теплопроводности, описывающее одномерное нестационарное температурное поле в телах плоской, цилиндрической и сферической формы, а также в стержнях (ребрах) переменного сечения монолитной или пористой структуры с внутренними источниками (стоками) теплоты

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \sum_{j=0}^{m} q_{V,j} - \frac{1}{S(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[S(r)\sum_{i=1}^{n} q_i\right]\,, \tag{24.13}$$

где $C = c_V\rho T$.

Отметим, что в уравнении (24.13) мощность внутренних источников (стоков) теплоты для $j = 0$ есть функция только координаты или константа, а в слагаемых для $j = 1, 2$ и 3, как это видно из соотношений (24.10)-(24.12), она зависит от температуры. Если зависимость $q_{V,j}$ от температуры описывается выражением (24.11), в котором $q_{\text{соб}} = \varepsilon\sigma T^4$, уравнение (24.13) становится нелинейным. Нелинейность другого рода возникает и тогда, когда теплофизические свойства тела являются функцией температуры.

Если величины c_V, ρ, λ и $c_{\text{рж}}$ постоянны, то из уравнения (24.13) с учетом (24.6) и (24.7) получается

$$c_V\rho\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{S(r)}\left\{\lambda_{\text{э}}\frac{\partial}{\partial r}\left[S(r)\frac{\partial T}{\partial r}\right] - \dot{m}c_{\text{рж}}\frac{\partial}{\partial r}\big[S(r)T\big]\right\} + \sum_{j=0}^{m} q_{V,j}\,. \quad (24.14)$$

Отсюда для стационарного теплообмена, когда $\dfrac{\partial T}{\partial \tau} = 0$, следует

$$\frac{1}{S(r)}\left\{\lambda_{\text{э}}\frac{d}{dr}\left[S(r)\frac{dT}{dr}\right] - \dot{m}c_{\text{рж}}\frac{d}{dr}\big[S(r)T\big]\right\} + \sum_{j=0}^{m} q_{V,j} = 0\,, \qquad (24.15)$$

где функция $q_{V,j}$ не зависит от времени или время в ней играет роль параметра.

Запись некоторых частных случаев уравнения (24.15) имеет вид:

1. Монолитная плоская пластина, $\dot{m} = 0$ и $S(r) = S(x) = \text{const}$. Тогда из (24.15) следует

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_V(x)}{\lambda} = 0\,.$$

2. Монолитная цилиндрическая стенка, $\dot{m} = 0$ и $S(r) = 2\pi r l$. Тогда

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{q_V(r)}{\lambda} = 0\,.$$

3. Монолитная сферическая стенка, $\dot{m} = 0$ и $S(r) = 4\pi r^2$. Тогда

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{q_V(r)}{\lambda} = 0\,.$$

В общем виде эти частные случаи можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{q_V(r)}{\lambda} = 0\,, \quad \text{где} \ \ \nu = 0, 1, 2\,.$$

Приведенные выше частные случаи уравнения (24.15) и другие удобно использовать иногда в безразмерной форме. Например, для плоской, цилиндрической и сферической монолитных стенок $(\nu = 0, 1, 2)$ соответствующая запись принимает вид

$$\frac{d^2\theta^*}{d\xi^2} + \frac{\nu}{\xi}\frac{d\theta^*}{d\xi} + \mathrm{Po}(\xi) = 0\,,$$

где $\theta^* = \dfrac{T}{T_m}$, $\xi = \dfrac{r}{h}$, $\mathrm{Po}(\xi) = \dfrac{q_V(r)h^2}{\lambda T_m}$.

4. Плоская пористая стенка с q_V :

$$\frac{d^2\theta^*}{d\xi^2} - \mathrm{Кп}\frac{d\theta^*}{d\xi} + \mathrm{Po}(\xi) = 0, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1\,.$$

5. Цилиндрическая пористая стенка с q_V;

$$\frac{d^2\theta^*}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} - \mathrm{Кп}\right)\frac{d\theta^*}{d\xi} - \mathrm{Кп}\frac{1}{\xi}\,\theta^* + \mathrm{Po}(\xi) = 0\,.$$

6. Сферическая пористая стенка с q_V :

$$\frac{d^2\theta^*}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{\xi} - \mathrm{Кп}\right)\frac{d\theta^*}{d\xi} - \mathrm{Кп}\,\frac{2}{\xi}\,\theta^* + \mathrm{Po}(\xi) = 0\,.$$

7. Стержни различной формы:

$$a_{\xi\xi}\frac{d^2\theta^*}{d\xi^2} + b_\xi\frac{d\theta^*}{d\xi} + c_\xi\,\theta^* + F(\xi) = 0\,, \tag{24.16}$$

где $a_{\xi\xi} = \bar{S}(\xi) = \dfrac{S(\xi)}{S_0}$; $b_\xi = a'_{\xi\xi} - a_{\xi\xi}\,\mathrm{Кп}$; $\mathrm{Кп} = \dfrac{\dot{m}c_{\text{рж}}l}{\lambda_\text{э}}$; $\lambda_\text{э} \cong \lambda_\text{с}(1-p)$; $c_\xi = -(\mathrm{Bi}\bar{\Phi}' + a'_{\xi\xi}\,\mathrm{Кп})$; $\mathrm{Bi} = \dfrac{\alpha l}{\lambda_\text{э}}$, $F(\xi) = \mathrm{Po}\,(\xi)\dfrac{d\bar{V}}{d\xi} + \mathrm{Bi}\theta^*_\text{с}\dfrac{d\bar{\Phi}(\xi)}{d\xi}$; $\mathrm{Po}\,(\xi) = \dfrac{q_{V\Sigma}(\xi)l^2}{\lambda_\text{э}T_m}$; $\bar{V} = \dfrac{V}{S_0 l}$, $\theta^*_\text{с} = \dfrac{T_\text{с}}{T_m}$; $\xi = \dfrac{x}{l}$; l — высота стержня; S_0 — площадь поперечного сечения в основании стержня; $\bar{\Phi}(\xi) = \Phi(\xi)/S_0$; $\Phi(\xi)$ — внешняя поверхность стержня; $S(\xi)$ — текущее значение площади поперечного сечения стержня, L — его длина; $\theta^* = T/T_m$, p — пористость материала; V — текущее значение объема стержня; $T_\text{с}$ — температура среды, окружающей стержень; T_m — любая температура, выбранная для обезразмеривания, кроме $T_m = 0$ или $T_m = \infty$. $F(\xi)$ — неоднородный член в уравнении (24.16).

Таким образом, уравнение (24.15) или в безразмерной форме (24.16) включает в себя, как частные случаи, уравнения теплопроводности для пластины, цилиндра, сферы и стержней различной формы, пористых или монолитных, с внутренними источниками (стоками) теплоты или без них.

25. Условия однозначности

Представленные выше дифференциальные уравнения (23.3), (23.9-23.13) устанавливают связь между пространственными и временными изменениями температуры и описывают перенос теплоты внутри тела. В общем случае эти уравнения имеют множество решений. Для получения решения конкретной задачи к основному дифференциальному уравнению необходимо добавить дополнительные условия (условия однозначности), включающие: геометрические условия, определяющие форму и линейные размеры тела; физические условия, характеризующие свойства тела и среды, закон изменения мощности внутренних источников теплоты; условия теплообмена на границах тела и распределение температуры в нем в начальный момент времени. Совокупность граничных и начальных условий принято называть краевыми условиями.

Физические условия содержат сведения о теплофизических характеристиках тела и среды (теплоемкости c, теплопроводности λ, плотности ρ) и их зависимости от температуры, а также пористости. В некоторых случаях определение закона распределения мощности внутренних источников теплоты связано со способностью тела частично поглощать, пропускать или рассеивать внешнее и внутреннее (собственное) излучение. В этих случаях физические условия следует дополнить информацией об оптических характеристиках тела: излучательной и поглощательной способностях граничных поверхностей, коэффициентах поглощения, пропускания, рассеивания и др.

Начальное условие обычно задают для некоторого момента времени $\tau = \tau_0$ (чаще $\tau_0 = 0$) в виде известной функции пространственных координат

$$T\,(x,y,z,0)=f\,(x,y,z)\,. \tag{25.1}$$

Если в начальный момент времени распределение температуры во всем объеме тела равномерное, то

$$T\,(x,y,z,0)=T_0=\mathrm{const}\,. \tag{25.2}$$

Граничные условия задают различными способами. Принято различать граничные условия I, II, III, IV рода и другие.

Граничные условия I рода. В этом случае задают распределение температуры на поверхности тела S в любой момент времени

$$T_S=\varphi\,(x,y,z,\tau)\,,\quad x,y,z\in S\,. \tag{25.3}$$

Это условие удобно использовать для решения задач нагрева или охлаждения тел при известном (например, из эксперимента) изменении температуры на границе тела или при интенсивном теплообмене на поверхности, когда температура на ней становится практически равной температуре среды.

Граничные условия II рода. В этом случае задают распределение плотности теплового потока на поверхности тела в виде функции координат и времени

$$q_S=\psi(x,y,z,\tau)\,,\quad x,y,z\in S\,. \tag{25.4}$$

В соответствии с законом Фурье, условие (25.4) может быть записано в виде

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_S=\psi(x,y,z,\tau)\,,\quad x,y,z\in S\,. \tag{25.5}$$

Если плотность теплового потока на поверхности тела для любого момента времени постоянна, то

$$q_S=q_0=\mathrm{const}\,. \tag{25.6}$$

Рассматриваемые условия теплообмена на поверхности тела реализуются, например, при нагреве их излучением, когда температура тела существенно меньше температуры излучающих на него поверхностей и $q_S = Aq_{\text{пад}}$, а $q_{\text{соб}} = 0$.

Граничные условия III рода. В этом случае для описания конвективного теплообмена между поверхностью твердого тела и окружающей средой используют гипотезу Ньютона–Рихмана, согласно которой при охлаждении тела $(T_{\text{п}} > T_{\text{с}})$ плотность теплового потока через границу тела пропорциональна разности температур поверхности тела и окружающей его среды

$$q_S = \alpha(T_{\text{п}} - T_{\text{с}})\,, \tag{25.7}$$

где α — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплоотдачи, Вт/(м^2 К). Для процесса нагревания тела в соотношении (25.7) температуры поверхности $T_{\text{п}}$ и среды $T_{\text{с}}$ необходимо поменять местами.

На основании закона сохранения энергии плотность теплового потока, поступающего изнутри тела путем теплопроводности к его поверхности, должна быть равна плотности потока, передаваемого ею в окружающую среду путем конвекции (при нагревании — наоборот):

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) = \alpha\Big[T_{\text{п}}(\tau) - T_{\text{с}}(\tau)\Big]\,. \tag{25.8}$$

Такая формулировка граничного условия широко используется при исследовании теплообмена на границе твердого тела с потоком жидкости или газа.

Коэффициент теплоотдачи α в отличие от теплопроводности λ не является физической характеристикой вещества среды и отражает совокупный механизм теплопередачи конвекцией и теплопроводностью. Полагая закон распределения температуры в слое жидкости на границе с твердым телом линейным, можно получить следующую качественную связь коэффициента теплооотдачи α с теплопроводностью жидкости $\lambda_{\text{ж}}$ и условной толщиной пограничного слоя δ :

$$q_S = -\lambda_{\text{ж}}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_S = \frac{\lambda_{\text{ж}}(T_{\text{п}} - T_{\text{с}})}{\delta} = \alpha\left[T_{\text{п}} - T_{\text{с}}\right].$$

Откуда следует

$$\alpha = \frac{\lambda_{ж}}{\delta}\,. \tag{25.9}$$

Поскольку δ зависит от скорости движения жидкости, ее физических свойств и температуры, то коэффициент теплоотдачи α изменяется вдоль поверхности тела в направлении движения. При нестационарных процессах теплообмена между поверхностью тела и потоком жидкости условная толщина пограничного слоя зависит еще и от времени $\delta = \delta(\tau)$. В связи с этим, строго говоря, условие (25.8) справедливо лишь при стационарном конвективном теплообмене, когда коэффициент α можно считать постоянным. Однако для решения многих частных задач условие (25.8) можно использовать в качестве граничного условия первого приближения.

Отметим два случая, в которых граничное условие (25.8) вырождается в граничные условия I и II рода. При интенсивном конвективном теплообмене или развитом пузырьковом кипении жидкости на поверхности тела $(\alpha \to \infty, \;\; \lambda = \text{const})$ получается

$$T_{п} - T_{с} = \lim_{(\alpha/\lambda)\to\infty}\left[\frac{1}{(\alpha/\lambda)}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_S\right] = 0$$

и реализуется граничное условие I рода

$$T_{п} = T_{с}\,.$$

Аналогично при $\alpha \to 0$ из (25.8) следует граничное условие II рода

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_S = 0\,.$$

Граничное условие III рода находит применение и при решении некоторых задач нагревания или охлаждения тел излучением. В соответствии с законом Стефана-Больцмана плотность результирующего потока излучения между двумя достаточно большими параллельными поверхностями, разделенными непоглощающей средой, определяется соотношением

$$q_S(\tau) = Aq_{пад} - q_{соб} = \varepsilon_{пр}\sigma\left[T_1^4(\tau) - T_2^4\right], \tag{25.10}$$

где $\varepsilon_{\text{пр}}$ — приведенная степень черноты; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 К^4) — постоянная Стефана–Больцмана; $T_1(\tau)$ — температура охлаждаемой поверхности 1; T_2 — температура тепловоспринимающей поверхности 2. При малой разности температур $T_1(\tau) - T_2$ нелинейное соотношение (25.10) может быть линеаризовано

$$q_S(\tau) = \varepsilon_{\text{пр}}\sigma\Big\{\big(T_1^2(\tau) + T_2^2\big)\big[T_1(\tau) + T_2\big]\Big\}\big[T_1(\tau) - T_2\big] =$$

$$= \alpha_{\text{л}}\big(T\big)\big[T_1(\tau) - T_2\big]\,, \tag{25.11}$$

где $\alpha_{\text{л}}(T)$ — коэффициент лучистого теплообмена с той же размерностью, что и коэффициент конвективного теплообмена, Вт/$\cdot$(м^2 К)

$$\alpha_{\text{л}}(T) = \varepsilon_{\text{пр}}\sigma\big(T_1^2(\tau) + T_2^2\big)\big[T_1(\tau) + T_2\big] = \varepsilon_{\text{пр}}\sigma b(T)\,, \tag{25.12}$$

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}\,, \tag{25.13}$$

где ε_1 и ε_2 — излучательные способности (степени черноты) поверхностей 1 и 2.

Если поглощательная способность среды между поверхностями 1 и 2 достаточно мала (чистый воздух), а ее температура близка к T_2, то в выражении (25.11) T_2 можно заменить на $T_{\text{с}}$. При этом доля конвективного теплового потока от поверхности 1 в среду, составляющая небольшую величину, равна

$$q_{\text{к}} = \alpha_{\text{к}}\big[T_1(\tau) - T_{\text{с}}\big]$$

и соотношение (25.7) принимает вид

$$q_S(\tau) = \big[\alpha_{\text{к}} + \alpha_{\text{л}}(T)\big]\big[T_1(\tau) - T_{\text{с}}\big] = \alpha_\Sigma\big[T_1(\tau) - T_{\text{с}}\big]\,. \tag{25.14}$$

Изменение знака в выражениях (25.10), (25.11), (25.14) на противоположный свидетельствует об изменении направления результирующего потока.

И, наконец, полагая α_Σ в первом приближении величиной постоянной, а температуру среды $T_{\text{с}} = T_{\text{с}}(\tau)$, запишем по аналогии с выражением (25.8) граничные условия III рода применительно к задачам нагревания тел излучением для случая малой разности температур $T_1(\tau)-T_{\text{c}}(\tau)$ в виде

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_S+\alpha_\Sigma\big[T_1(\tau)-T_{\text{c}}(\tau)\big]=0\,. \tag{25.15}$$

Учитывая, что граничное условие (25.8) характеризует кондуктивно-конвективный теплообмен в связанной области "твердое тело — жидкость", более обоснованным является подход к решению таких задач как сопряженных, при котором проблема определения температурных полей в теле и окружающей среде рассматривается как совместная. Указанное обстоятельство приводит к необходимости использования граничных условий IV рода.

Граничные условия IV рода. Этот тип граничного условия используют для решения задач конвективного теплообмена тела с окружающей средой или теплообмена соприкасающихся твердых тел. Его математическая формулировка отражает равенство температур на поверхностях соприкосновения тел при идеальном тепловом контакте (свойство непрерывности температурного поля) и равенство тепловых потоков, передаваемых теплопроводностью через поверхность контакта

$$T_{S1}=T_{S2}\,, \tag{25.16}$$

$$\lambda_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)_{S1}=\lambda_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial n}\right)_{S2}\,. \tag{25.17}$$

Допущение об идеальности теплового контакта в местах соприкосновения тел может приводить к серьезным погрешностям в определении температурного состояния реальных конструкций. Степень приближения к идеальному во многом зависит от качества обработки поверхностей, технологии их скрепления (силы прижатия), физических свойств соединяемых материалов и других причин.