4.1 Линеаризация дифференциальных уравнений систем автоматического регулирования.

Положим, что динамическое уравнение звена имеет произвольный нелинейный вид:

假设连杆的动力学方程具有任意非线性形式：

$$F(x_1, x_2, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_3, \dot{x}_3, \dot{x}_3) = \phi(f, \dot{f}) \tag{4.1}$$

В общем случае нелинейное уравнение приводится к линейному путем линеаризации.

在一般情况下，非线性方程通过线性化转化为线性方程。

Допустим, что установившийся процесс имеет место при некоторых постоянных значениях

$x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0, f = f^0$.

Тогда уравнение установившегося состояния для данного звена можно записать в виде：

假设在某些常数值 $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0, f = f^0$下存在稳定过程。

那么，该环节稳定状态的方程可以写成如下形式

$$F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0) = \phi(f^0, 0) \tag{4.2}$$

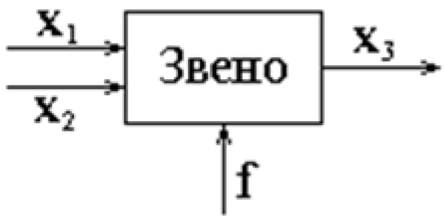


Рис.4.1.

В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит представление о том, что в исследуемом динамическом процессе переменные x_1, x_2, x_3 изменяются так, что их отклонение от установившихся значений x_1^0, x_2^0, x_3^0 остается все время малым. Обозначим указанные отклонения через $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$

非线性方程线性化的基础是这样一种观点，即在研究的动态过程中，变量 x_1, x_2, x_3的变化方式使得它们相对于稳定值x_1^0, x_2^0, x_3^0 的偏差始终保持很小。我们用$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ 来表示这些偏差。

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0 + \Delta x_1, \\
x_2 &= x_2^0 + \Delta x_2, \\
x_3 &= x_3^0 + \Delta x_3, \\
\dot{x}_2 &= \dot{x}_2^0 + \Delta \dot{x}_2, \\
\dot{x}_3 &= \dot{x}_3^0 + \Delta \dot{x}_3, \\
\dot{x}_3 &= \ddot{x}_3^0 + \Delta \ddot{x}_3, \\
\ddot{x}_3 &= \ddot{x}_3^0 + \Delta \ddot{x}_3.
\end{aligned}$$

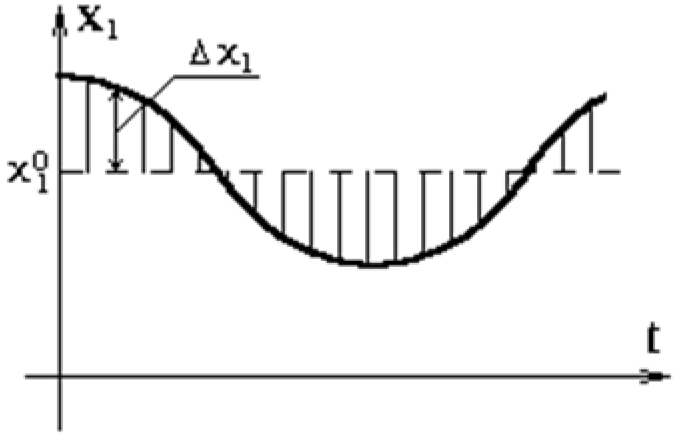


Рис.4.2.

Если установившееся значение не зависит от времени, то

如果设定的值不依赖于时间，那么

$$\dot{x}_2 = \Delta\dot{x}_2, \qquad \dot{x}_3 = \Delta\dot{x}_3, \qquad \ddot{x}_3 = \Delta\ddot{x}_3, \qquad \ddot{x}_3 = \Delta\ddot{x}_3.$$

Условие малости обычно выполняется. **Внешнее воздействие f не зависит от работы автоматической системы, изменение его может быть произвольным, и поэтому правая часть уравнения обычно линеаризации не подлежит** (хотя в отдельных случаях это возможно).

小条件通常是满足的，**外部作用f不依赖于自动系统的运行，其变化可能是任意的，因此线性化方程的右侧通常不适用**（尽管在个别情况下这是可能的）。

Разложим функцию F в ряд и оставим только слагаемые первого порядка малости

将函数F展开为级数，并只保留一阶无穷小项

$$\begin{gathered} F^0 + (\frac{\partial F}{\partial x_1})^0 \cdot \Delta x_1 + (\frac{\partial F}{\partial x_2})^0 \cdot \Delta x_2 + (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2})^0 \cdot \Delta\dot{x}_2 + \\ +(\frac{\partial F}{\partial x_3})^0 \cdot \Delta x_3 + (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3})^0 \cdot \Delta\dot{x}_3 + (\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3})^0 \cdot \Delta\ddot{x}_3 + (\frac{\partial F}{\partial \dddot{x}_3})^0 \cdot \Delta\dddot{x}_3 + \ldots = \phi(f, \dot{f}) \end{gathered} \tag{4.3}$$

$$where \quad \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\right)^0 = \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\right)$$

$$when \qquad q_j = q_j^0 (q_j = x_1, x_2, \ldots) \qquad and \quad F^0 = F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0).$$

Все частные производные в полученном выражении постоянные коэффициенты.

所得表达式中的所有偏导数均为常数系数。

Они будут переменными, если функция *F* содержит в явном виде *t*, или если $x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t)$

如果函数F中明确包含t，或者 $x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t)$, 它们将成为变量

Вычтя из уравнения (4.3) уравнение установившегося состояния и отбросив члены второго и более порядка малости получим линеаризованное уравнение

从方程(4.3)中减去稳态方程，并忽略二阶及更高阶的小量，我们将得到线性化方程。

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \cdot \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \cdot \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 \cdot \Delta \dot{x}_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0 \cdot \Delta x_3 + \\
&+ \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}\right)^0 \cdot \Delta \dot{x}_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 \cdot \Delta \ddot{x}_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dddot{x}_3}\right)^0 \cdot \Delta \dddot{x}_3 + \ldots = \phi(f, \dot{f}) - \phi(f^0, 0)
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Полученное уравнение описывает динамический процесс в системе, но:

1. является приближенным;
2. неизвестными функциями времени являются не полные x_1, x_2, x_3 , а их отклонения $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$;
3. полученное уравнение является линейным относительно $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta \dot{x}_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta \dddot{x}_3$ с постоянными коэффициентами.

得到的方程描述了系统中的动态过程，但是：

1. 该方程是近似的
2. 关于时间的未知函数不是完整的 x_1, x_2, x_3，而是它们的偏差 $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ ；
3. 得到的方程对于$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta \dot{x}_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta \dddot{x}_3$是线性的，且系数为常数。

Уравнение (4.4) называется **дифференциальным уравнением звена** (системы) в отклонениях, или **уравнением в вариациях**. Геометрическая интерпретация **процесса линеаризации** показана на рис.4.3. Видно, что линеаризация эквивалентна переходу начала координат в точку С.

方程(4.4)被称为**环节（系统）的偏差微分方程**，或**变分方程**。线性化过程的几何解释如图4.3所示。可以看出，线性化相当于将坐标原点移动到点C。

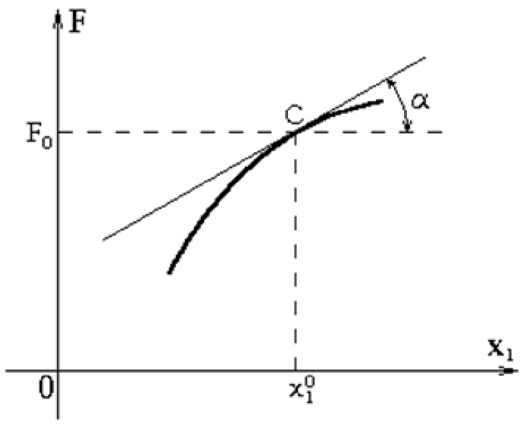


Рис.4.3 а

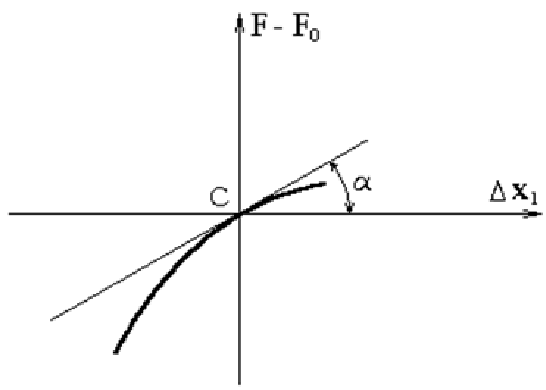


Рис.4.3 *б*

Следует отметить, что линеаризация недопустима в системах со скачкообразными(跳跃式的) зависимостями (релейные системы, сухое трение и др.). Преобразуем линеаризованное уравнение (4.4). Запишем выходную величину и ее производные в левой части, а входную и все остальные - в правой. Разделим обе части преобразованного уравнения на $\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0$ для того, чтобы сама выходящая величина записывалась в уравнении с коэффициентом 1.

需要指出的是，线性化在具有跳跃式依赖关系的系统（继电器系统、干摩擦等）中是不可行的。我们对线性化方程（4.4）进行变换。将输出量及其导数写在方程左边，而输入量及其他所有量写在右边。将变换后的方程两边同时除以$\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0$ ，以便使输出量在方程中的系数为1。

Введем при этом следующие обозначения:

在此我们引入以下符号：

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \dddot{x}_3}\right)^0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0} = T_3^3; \qquad \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0} = T_2^2; \qquad \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}\right)^0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0} = T_1;$$

$$-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0} = K_1; \qquad -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0} = K_2; \qquad -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0} = K_2'; \qquad \frac{f(t)-f^0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0} = \phi_1.$$

Тогда уравнение (4.4.) примет вид:

$$T_3^3\Delta\dddot{x}_3 + T_2^2\Delta\ddot{x}_3 + T_1\Delta\dot{x}_3 + \Delta x_3 = k_1\Delta x_1 + k_2\Delta x_2 + k_2'\Delta\dot{x}_2 + \phi_1$$

или в операторной форме:

$$\left(T_3^3p^3 + T_2^2p^2 + T_1p + 1\right)\Delta x_3 = k_1\Delta x_1 + (k_2'p + k_2)\Delta x_2 + \phi_1 \tag{4.5}$$

Если $\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0$=0,то все члены уравнения (4.4) делят на $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}\right)^0$ и т.д.

Разделим левую и правую части уравнения (4.5) на выражение, стоящее в скобках слева и введем обозначения:

将方程(4.5)的左右两边同时除以左边括号中的表达式，并引入以下符号：

$$W_1(p) = \frac{K_1}{T_3^3p^3 + T_2^2p^2 + T_1p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{K_2'p + K_2}{T_3^3p^3 + T_2^2p^2 + T_1p + 1};$$

$$W_\phi(p) = \frac{\phi_1}{T_3^3p^3 + T_2^2p^2 + T_1p + 1}.$$

Тогда можно записать:

$$\Delta x_3 = W_1(p)\Delta x_1 + W_2(p)\Delta x_2 + W_\phi(p)\phi_1 \tag{4.6}$$

В дальнейшем значок Δ будем опускать, подразумевая под x_1, x_2, x_3малые отклонения величины. В этом случае систему можно представить в соответствии с рис.4.4.

此后，我们将省略符号Δ，认为x_1、x_2、x_3是该量的微小偏差。在这种情况下，系统可以按照图4.4所示来表示。

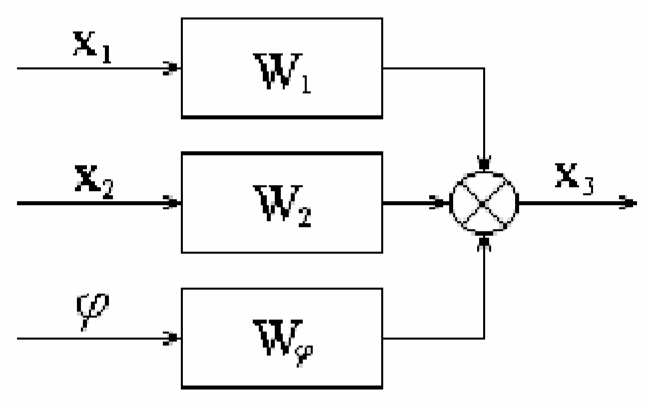


Рис.4.4.

Если обозначить отклонение выходной величины через x_2, а входной через x_1 , то вместо (4.5) можно записать:

如果用 x_2表示输出量的偏差，用 x_1 表示输入量的偏差，那么可以写成（4.5）的形式：

$$\left(\mathrm{T}_3^3 p^3 + T_2^2 p_2 + T_1 p + 1\right)\mathbf{x}_2 =$$
$$= \mathbf{K}_1 y_1 + \left(K_2' + K_2\right)x_1 + \phi_1 \qquad (4.7)$$

В зависимости от вида левой и правой части уравнения (4.7) приняты следующие названия звеньев:

根据方程(4.7)左右两边的形式，采用了以下环节名称：

N	Наименование левой части	Уравнение
1	*Идеальное*	x_2
2	*Апериодическое 1-го порядка*	$(T_1 p + 1)\mathrm{x}_2$
3	*Апериодическое 2-го порядка*	$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)\mathrm{x}_2$; $T_1 \geq 2T_2$
4	*Колебательное*	$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)\mathrm{x}_2$; $T_1 < 2T_2$
5	*Гармоническое колебательное*	$(T_2^2 p^2 + 1)\mathrm{x}_2$
6	*Неустойчивое апериодическое 1-го порядка*	$(T_1 p - 1)\mathrm{x}_2$
7	*Неустойчивое апериодическое 2-го порядка*	$(T_2^2 p^2 - T_1 p + 1)\mathrm{x}_2$; $T_1 \geq 2T_2$

N	Наименование правой части	Уравнение
1	*Простое*	Kx_1
2	*Дифференцирующее*	Kpx_1
3	*Интегрирующее*	$\frac{K}{p}x_1$
4	*С введением производной*	$(K + K'p)x_1$
5	*С введением интеграла*	$\left(K + \frac{K'}{p}\right)x_1$
6	*Суммирующее*	$Kx_1 + K_1 z + K_2 y$
7	*С введением обратной связи*	$K(x_1 - x_{oc})$

Правая часть показывает на что реагирует звено (т.е. что у него на входе), а левая часть показывает, как отрабатывается воздействие в звене.

右侧显示环节对什么做出反应（即其输入是什么），而左侧显示环节中作用是如何实现的。

4.2 Моделирование типовых звеньев САУ(典型自动化控制系统元件的建模)

Типовыми линейными звеньями САУ являются усилительное, суммирующее, дифференцирующее апериодическое , интегро-дифференцирующее и колебательное. Типовыми нелинейными звеньями являются: усилительное с ограничением, релейное, усилительное с зоной нечувствительности, релейное с зоной нечувствительности, усилительное с люфтом, гистерезисное.

自动化控制系统的典型线性环节有放大环节、求和环节、非周期微分环节、积分微分环节和振荡环节。典型非线性环节有：带限幅的放大环节、继电器环节、带不灵敏区的放大环节、带不灵敏区的继电器环节、带死区的放大环节、滞环环节。

Данные необходимые для моделирования типовых звеньев, приведены в таблице 3. Для каждого звена указаны описывающая его функция (т.е. зависимость между входной *X* и выходной *Z* величиной звена), схема модели звена, функция описывающая модель (т.е. зависимость между входным u_0 и выходным u напряжениями модели), и выражения, определяющие параметры модели через параметры звена и масштабы , $K_x = \frac{X}{u_0}$и$K_z = \frac{Z}{u_0}$.

用于模拟典型环节所需的数据见表3。对于每个环节，都给出了描述其的函数（即环节的输入量X与输出量Z之间的关系）、环节的模型示意图、描述模型的函数（即模型的输入电压u_0与输出电压u之间的关系），以及通过环节参数和比例系数 $K_x = \frac{X}{u_0}$和$K_z = \frac{Z}{u_0}$ 来确定模型参数的表达式。

Работа моделей линейных типовых звеньев в пояснениях не нуждается. Работу моделей нелинейных звеньев следует пояснить.

线性典型环节模型的工作原理无需解释。非线性环节模型的工作原理需要进行说明。

В схеме модели усилительного звена с ограничением оба вентиля остаются закрытыми до тех пор, пока выходное напряжение *u* не станет равным +$u_o r$ или -$u_o r$. Когда один из диодов открывается, сопротивление шунтируется цепью, составленной из открывшегося диода и части подключенного к нему потенциометра. Если сопротивление этой цепи мало по сравнению с r_1, то коэффициент усиления модели изменяется от $\frac{r_0}{r_c}$до нуля.

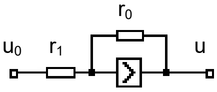
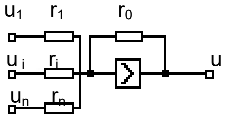
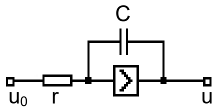
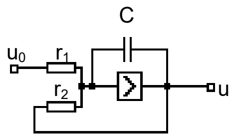
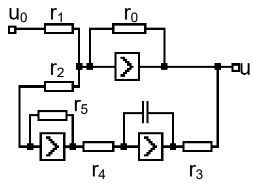
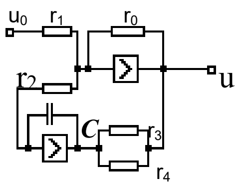
在具有限幅的放大级模型电路中，两个二极管一直保持关闭状态，直到输出电压u等于 +$u_o r$ 或 -$u_o r$ 。当其中一个二极管导通时，分流电阻被由导通二极管及其连接的部分电位器组成的电路所旁路。如果该电路的电阻与r_1 相比很小，那么模型的放大系数将从$\frac{r_0}{r_c}$变化到零。

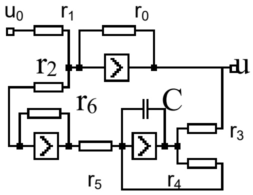
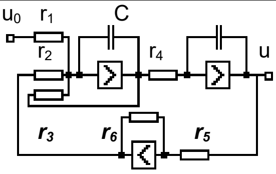
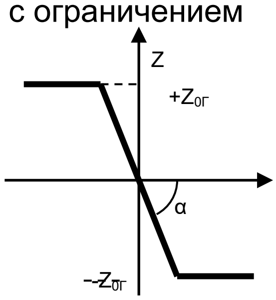
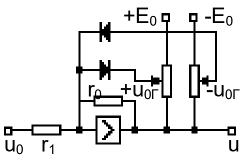
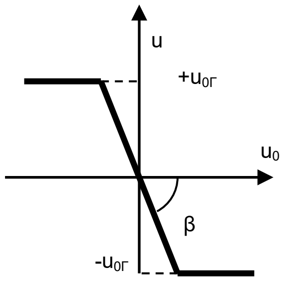
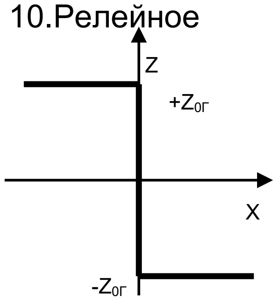
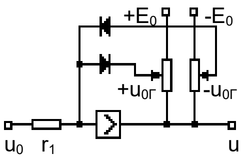
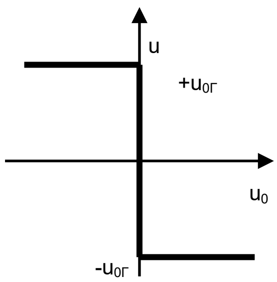
Схема модели релейного звена получается из предыдущей при $r_0 = \infty$. В этом случае до открытия вентилей $u = -ku_0$, где $k \approx 10^5$ — коэффициент усиления усилителя без обратной связи. Абсолютное значение выходного напряжения, равное напряжению запирания вентилей, достигается при $|u_0| = \frac{u_0 r}{k} \approx 0$. Это означает, что практически выходное напряжение достигает предельного значения при малейшем отклонении входного напряжения от нуля.

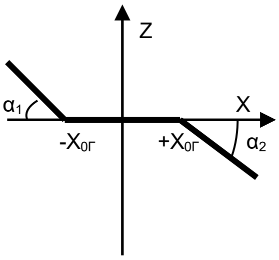
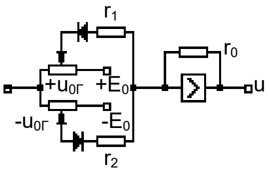
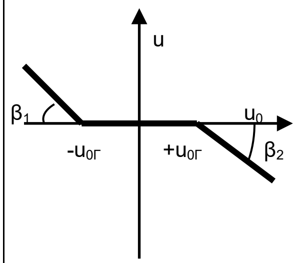
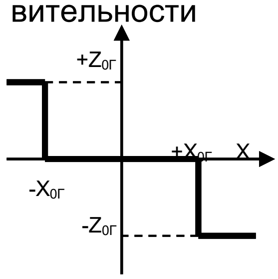
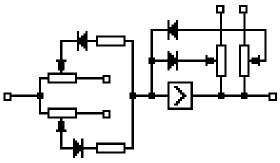
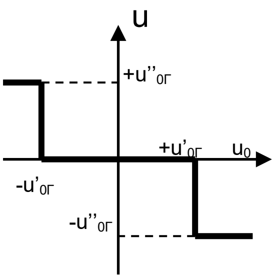
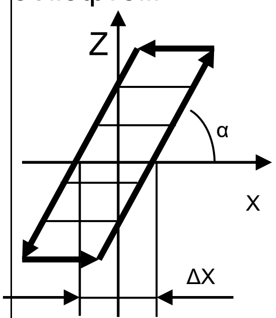
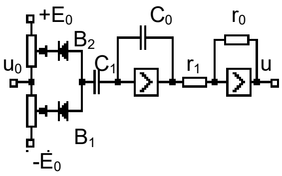
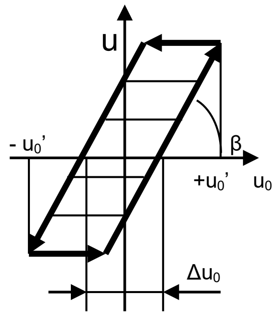
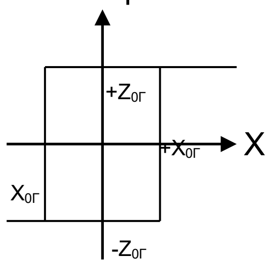
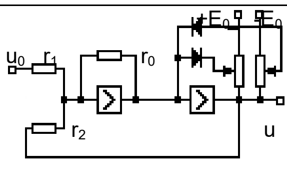
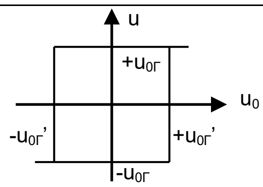
继电器环节模型的方案是由前一个方案在 $r_0 = \infty$ 时得到的。在这种情况下，在阀门打开之前，$u = -ku_0$，其中 $k \approx 10^5$ 是无反馈放大器的放大系数。当 $|u_0| = \frac{u_{0r}}{k} \approx 0$ 时，输出电压的绝对值等于阀门闭锁电压。这意味着，实际上，当输入电压偏离零的程度最小时，输出电压就达到了极限值。

Воспроизведение зоны нечувствительности в моделях усилительного и релейного звеньев с зоной нечувствительности достигается включением во входную цепь операционного усилителя вентильных ограничителей.

在具有死区的放大和继电环节模型中，死区的再现是通过将限幅器接入运算放大器的输入电路来实现的。

1.Усилительное звено: Z=aX		u=-ku0; $k=\frac{r_0}{r_1}$	$k=\frac{aK_X}{K_Z}$
2.Суммирующее $Z=\sum a_i X_i$		$u=-\sum k_i u_i$ $k=\frac{r_0}{r_i}$	$k_i=\frac{a_i K_{X_i}}{K_Z}$
3.Интегрирующее $Z=\frac{a}{p}X$, $p=\frac{d}{dt}$		$u=-\frac{k}{p_M}u_0$ $k=\frac{1}{rC}$; $p_M=\frac{d}{dt_M}$	$k=\frac{aK_t K_X}{K_Z}$
4.Апериодичес-кое $Z=\frac{ap}{Tp+1}$		$u=-\frac{k_1}{p_M+k_2}u_0$ $k_1=\frac{1}{r_1C}$; $k_2=\frac{1}{r_2C}$	$k_1=\frac{K_t}{T}$; $k_2=\frac{ak_2K_X}{K_Z}$
5.Диффференци-рующее апериодическое $Z=\frac{ap}{Tp+1}X$		$u=-\frac{k_1 p_M}{p_M+k_2k_3k_4}u_0$ $k_1=\frac{r_0}{r_1}$; $k_2=\frac{r_0}{r_2}$; $k_3=\frac{1}{r_3C}$; $k_4=\frac{1}{r_4C}$	$k_1=\frac{a\ K_X}{TK_Z}$; $k_2k_3k_4=\frac{K_t}{T}$
6.Интегро-дифференцирующее $Z=a\frac{T_1p\ +1}{T_2p\ +1}X$ T1<T2		$u=-\frac{k_1(p_M+k_4)}{p_M-k_2k_3+k_4}u_0$ $k_1=\frac{r_0}{r_1}$; $k_2=\frac{r_0}{r_2}$; $k_3=\frac{1}{r_3C}$; $k_4=\frac{1}{r_4C}$	$k_1=\frac{aT_1k_X}{T_2K_Z}$; $k_2k_3=$ $=K_t(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2})$ $k_4=\frac{K_t}{T}$

7.Интегро-дифференцирующее $Z = a\frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}X$ $T_1 > T_2$		$u = -\frac{k_1(p_M + k_4)}{p_M + k_2k_3k_5 - k_4}u_0$ $k_1 = \frac{r_0}{r_1}$; $k_2 = \frac{r_0}{r_2}$; $k_3 = \frac{1}{r_3C}; k_4 = \frac{1}{r_4C};$ $k_5 = \frac{r_6}{r_5}$	$k_1 = \frac{aT_1K_X}{T_2K_Z};$ $k_2k_3 =$ $= K_t(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1})$ $k_4 = \frac{K_t}{T}$
8.Колебательное $Z =$ $= \frac{a}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}X$		$u = \frac{k_1}{p_M^2 + k_3p_M + k_2k_5}u_0$ $k_1 = \frac{1}{r_1C}; k_2 = \frac{1}{r_2C};$ $k_3 = \frac{1}{r_3C}; k_4 = \frac{1}{r_4C} = 1$ $k_5 = \frac{r_6}{r_5}$	$k_1 = \frac{aK_t^2K_X}{T_2K_Z};$ $k_3 = \frac{2\xi K_t}{T}$ $k_2k_5 = \frac{K_t^2}{T^2}$
9.Усилительное с ограничением 		 $k_1 = \frac{r_0}{r_1} = tg\beta$	$k_1 = \frac{K_X tg\alpha}{K_Z}$ $u_{0\Gamma} = \frac{Z_{0\Gamma}}{K_Z}$
10.Релейное 		 u=-sign u_0	$u_{0\Gamma} = \frac{Z_{0\Gamma}}{K_Z}$

11.Усилительное с зоной нечувствительности  	 	 $k_1 = \frac{r_0}{r_1} = tg\beta_1$ $k_2 = \frac{r_0}{r_2} = tg\beta_2$	$k_1 = \frac{K_X}{K_Z} tg\alpha_1$; $k_2 = \frac{K_X}{K_Z} tg\alpha_2$; $u_{0\Gamma} = \frac{X_{0\Gamma}}{K_X}$
12.Релейное с зоной нечувствительности  		 	$u'_{0\Gamma} = \frac{X_{0\Gamma}}{K_X}$; $u''_{0\Gamma} = \frac{X_{0\Gamma}}{K_Z}$
13.Усилительное с люфтом  	 	 	$\Delta u_0 = \frac{\Delta X}{K_X}$; $tg\beta = \frac{K_X}{K_Z} tg\alpha$
14.Гистерезисное  	 	 $k_1 = \frac{r_0}{r_1}$; $k_2 = \frac{r_0}{r_2}$ $\frac{u'_{0\Gamma}}{u_{0\Gamma}} = \frac{k_1}{k_2}$	$u_{0\Gamma} = \frac{Z_{0\Gamma}}{K_Z}$; $u'_{0\Gamma} = \frac{X_{0\Gamma}}{K_X}$; $\frac{k_2}{k_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{u'_{0\Gamma}}{u_{0\Gamma}}$