ГЛАВА 6. Аналитические методы решения задач теплопроводности

29. Метод конечных интегральных преобразований

Рассматриваемый метод широко применяется для определения температурного поля в телах сравнительно простой геометрической формы в виде пластин, цилиндров, сфер и стержней (ребер) различного поперечного сечения. Решение таких задач представляет интерес в целом ряде случаев. Например, в стационарной постановке задачи при оценке тепловых потоков, теряемых трубопроводами с горячим теплоносителем в установках жидкостных ракетных двигателей или поступающих из внешней среды к трубопроводу с криогенной жидкостью; при расчете температурного поля гладких и оребренных оболочек ЖРД; при вычислении потоков теплоты от горячего газа к ободу турбины; в процессе планирования тепловых испытаний образцов материалов; для анализа температурного состояния элементов конструкции ядерных реакторов с внутренним тепловыделением в их материале; в тепловом проектировании конструкций термостатов, предназначенных для обеспечения различных технологических операций и в других технических приложениях.

Если в указанных выше примерах допустимо считать вклад теплообмена излучением в суммарный теплообмен достаточно малым, то решения соответствующих задач можно проводить в линейной постановке.

Рассмотрим применение метода конечных интегральных преобразований к решению задач теплопроводности на примере определения одномерного температурного поля в элементах конструкции, имеющих форму пластин, цилиндров, сфер или стержней различного сечения, используя для этого следующую обобщенную формулировку краевой задачи

$$\frac{\partial\theta}{\partial F_0} = a_{\xi\xi}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + b_\xi\,\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + c_\xi\theta + F(\xi)\,, \tag{29.1}$$

$$\xi = \xi_1\ :\quad \gamma_1\theta'(\xi_1) + \beta_1\theta(\xi_1) = f_1(F_0)\,, \tag{29.2}$$

$$\xi = \xi_2 : \quad \gamma_2\theta'(\xi_2) + \beta_2\theta(\xi_2) = f_2(F_0)\,, \tag{29.3}$$

$$F_0 = 0 : \quad \theta\,(\xi, 0) = f\,(\xi)\,, \tag{29.4}$$

где $F_0 = a\tau/h^2$ — число Фурье; $f(\xi) = T_0(\xi)/T_m$; $T_0(\xi)$ — начальное распределение температуры; T_m — температура, выбранная для приведения системы (29.1)–(29.4) к безразмерному виду; другие использованные здесь обозначения указаны в гл. 4, п. 24.

Для улучшения сходимости решения задачи (29.1)–(29.4) безразмерную температуру целесообразно определять в виде суммы нестационарной $\vartheta = \vartheta(\xi, F_0)$ и квазистационарной $\theta^* = \theta^*(\xi, F_0)$ составляющих

$$\theta = \vartheta + \theta^*\,. \tag{29.5}$$

Подстановка (29.5) в (29.1)–(29.4) приводит к следующим двум задачам: для определения квазистационарной (или стационарной) составляющей температурного поля:

$$a_{\xi\xi}\,\frac{\partial^2\theta^*}{\partial\xi^2} + b_3\frac{\partial\theta^*}{\partial\xi} + c_\xi\theta^* + F(\xi) = 0\,, \tag{29.6}$$

$$\gamma_1\theta^*(\xi_1) + \beta_1\theta^*(\xi_2) = f_1(F_0)\,, \tag{29.7}$$

$$\gamma_2\theta^*(\xi_2) + \beta_2\theta^*(\xi_2) = f_2(F_0) \tag{29.8}$$

и для нестационарной составляющей температурного поля:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial F_0} = a_{\xi\xi}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2} + b_3\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} + c_\xi\vartheta + f(\theta^*)\,, \tag{29.9}$$

$$\gamma_1\vartheta'(\xi_1) + \beta_1\vartheta(\xi_1) = 0\,, \tag{29.10}$$

$$\gamma_2\vartheta'(\xi_2) + \beta_2\vartheta(\xi_2) = 0\,, \tag{29.11}$$

$$\vartheta(\xi, 0) = f(\xi) - \theta^*(\xi, 0)\,, \tag{29.12}$$

где

$$f(\theta^*) = -\frac{\partial\theta^*}{\partial F_0}\,.$$

Значение F_0 в (29.7) и (29.8), а в более общем случае и в функции $F(\xi) = F(\xi, F_0)$ используется в качестве параметра.

В граничных условиях (29.2), (29.3) и далее в (29.7), (29.8), (29.10), (29.11) с помощью коэффициентов γ_1, γ_2, β_1, β_2 реализуются граничные условия 1–го, 2–го, 3–го родов, а также любая их комбинация. Эти коэффициенты и функции $f_1(F_0)$, $f_2(F_0)$ определяют простым сопоставлением граничных условий (29.2) и (29.3) с граничными условиями конкретной краевой задачи, записанной в безразмерной форме. Указанная процедура становится понятной из приведенного ниже примера.

Решение задачи (29.6)–(29.8) может быть получено в достаточно общей форме. Представим с этой целью решение однородного дифференциального уравнения ($F(\xi) = 0$)

$$a_{\xi\xi}\frac{\partial^2\theta^*}{\partial\xi^2} + b_\xi\frac{\partial\theta^*}{\partial\xi} + c_\xi\theta^* = 0 \tag{29.13}$$

в виде

$$\theta^* = c_1\psi(\xi) + c_2\varphi(\xi)\,, \tag{29.14}$$

где $\psi(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (29.13). Вид этих функций для некоторых частных случаев, встречающихся в задачах теплопроводности, приведен в табл. 29.1.

Для получения общего решения неоднородного уравнения (29.6) воспользуемся методом вариации произвольных постоянных, в соответствии с которым, используя (29.14), запишем

$$\theta^{*\prime} = c_1\psi'(\xi) + c_2\varphi'(\xi) + c_1'\psi(\xi) + c_2'\varphi(\xi)\,, \tag{29.15}$$

где

$$c_1'\psi(\xi) + c_2'\varphi(\xi) = 0 \tag{29.16}$$

и

$$\theta^{*\prime\prime} = c_1\psi''(\xi) + c_2\varphi''(\xi) + c_1'\psi'(\xi) + c_2'\varphi'(\xi)\,. \tag{29.17}$$

Подставляя (29.15) и (29.17) с учетом (29.16) в уравнение (29.6), найдем

$$\begin{gathered} a_{\xi\xi}[c_1\psi''(\xi) + c_2\varphi''(\xi) + c_1'\psi'(\xi) + c_2'\varphi'(\xi)]+ \\ +b_\xi[c_1\psi'(\xi) + c_2\varphi'(\xi)] + c_\xi[c_1\psi(\xi) + c_2\varphi(\xi)] + F(\xi) = 0\,. \end{gathered} \tag{29.18}$$

Таблица 29.1. Выражения для функций

№	Форма тела и коэффициенты в уравнении (29.13)	Однородное уравнение теплопроводности	Функция $\psi(\xi)$	Функция $\varphi(\xi)$
1	Пластина: $a_{\xi\xi} = 1$, $b_\xi = c_\xi = 0$	$\theta^{*\prime\prime} = 0$	ξ	1
2	Пластина пористая, охлаждаемая жидкостью: $a_{\xi\xi} = 1$, $c_\xi = 0$, $b_\xi = K = \dfrac{\dot{m} c\, l}{\lambda_c (1-p)}$	$\theta^{*\prime\prime} - K\,\theta^{*\prime} = 0$	$\exp{(K\xi)}$	1
3	Цилиндр (сплошной или полый): $a_{\xi\xi} = 1$, $c_\xi = 0$, $b_\xi = \dfrac{1}{\xi}$	$\theta^{*\prime\prime} + \dfrac{1}{\xi}\,\theta^{*\prime} = 0$	$\ln\xi$	1
4	Шар (сплошной или полый): $a_{\xi\xi} = 1$, $c_\xi = 0$, $b_\xi = \dfrac{2}{\xi}$	$\theta^{*\prime\prime} + \dfrac{1}{\xi}\,\theta^{*\prime} = 0$	$\dfrac{1}{\xi}$	1
5	Прямое ребро переменного поперечного сечения (общий случай): $a_{\xi\xi} = \dfrac{S(\xi)}{S_0}$, $b_\xi = \dfrac{dS(\xi)}{d\xi}\,\dfrac{1}{S_0}$, $K = 0$, $c_\xi = -\mathrm{Bi}\,\dfrac{d\Phi(\xi)}{d\xi}\,\dfrac{1}{S_0}$	$a_{\xi\xi}\,\theta^{*\prime\prime} + b_\xi\,\theta^{*\prime} + c_\xi\,\theta^* = 0$	$\psi(\xi)$	$\varphi(\xi)$

Продолжение таблицы 29.1

№	Форма тела и коэффициенты в уравнении (29.3)	Однородное уравнение теплопроводности	Функция $\psi(\xi)$	Функция $\varphi(\xi)$
6	Ребро (стержень) постоянного сечения: $a_{\xi\xi} = 1$, $c_\xi = -(ml)^2$, $b_\xi = 0$, $m = \sqrt{\alpha\Pi/(\lambda S_0)}$	$\theta^{*\prime\prime} - (ml)^2\,\theta^{*\prime} = 0$	$\exp(-ml\xi)$	$\exp(ml\xi)$
7	Ребро треугольного и трапециевидного поперечного сечения с малым углом при вершине: $a_{\xi\xi} = 1$, $c_\xi = -(ml)^2$, $b_\xi = 1$, $m = \sqrt{\alpha/\lambda\delta}$	$\xi\theta^{*\prime\prime} + \theta^{*\prime} - (ml)^2\,\theta^* = 0$	$I_0(2ml\sqrt{\xi})$	$K_0(2ml\sqrt{\xi})$
8	Круглое ребро постоянной толщины, равной 2δ: $a_{\xi\xi} = 1$, $c_\xi = -(ml)^2$, $b_\xi = \dfrac{1}{\xi}$, $m = \sqrt{\alpha/(\lambda\delta)}$	$\theta^{*\prime\prime} + \dfrac{1}{\xi}\,\theta^{*\prime} - (ml)^2\,\theta^* = 0$	$I_0(ml\xi)$	$K_0(ml\xi)$

Из (29.18) следует, что

$$a_{\xi\xi}[c_1'\psi'(\xi) + c_2'\varphi'(\xi)] + F(\xi) = 0 \tag{29.19}$$

так как сумма остальных слагаемых в (29.18) равна нулю, поскольку она удовлетворяет решению однородного уравнения (29.13).

Совместное решение (29.16) и (29.19) позволяет найти новые значения c_1 и c_2:

$$c_1 = c_3 - H_1(\xi)\,, \tag{29.20}$$

$$c_2 = c_4 + H_2(\xi)\,, \tag{29.21}$$

где

$$H_1(\xi) = \int \frac{F(\xi)}{a_{\xi\xi}}\ \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\varphi(\xi)\psi'(\xi) - \psi(\xi)\varphi'(\xi)}\,, \tag{29.22}$$

$$H_2(\xi) = \int \frac{F(\xi)}{a_{\xi\xi}}\ \frac{\psi(\xi)d\xi}{\varphi(\xi)\,\psi'(\xi) - \psi(\xi)\varphi'(\xi)}\,. \tag{29.23}$$

Подстановка c_1 и c_2 в виде соотношений (29.20) и (29.21) в уравнение (29.14) дает общее решение неоднородного уравнения (29.6)

$$\theta^* = c_3\psi(\xi) + c_4\varphi(\xi) - \psi(\xi)H_1(\xi) + \varphi(\xi)H_2(\xi)\,. \tag{29.24}$$

Использование полученного решения (29.24) совместно с граничными условиями (29.7), (29.8) в результате преобразований приводит к следующим выражениям для постоянных интегрирования c_3 и c_4

$$c_3 = \frac{b_2b_3 - b_4}{b_1b_3 - 1}\,, \tag{29.25}$$

$$c_4 = \frac{b_1b_4 - b_2}{b_1b_3 - 1}\,, \tag{29.26}$$

где b_1, b_2, b_3 и b_4 связаны только с известными величинами в граничных условиях (29.7) и (29.8)

$$b_1 = \left[\frac{\gamma_2\psi'(\xi) + \beta_2\psi(\xi)}{\gamma_2\varphi'(\xi) + \beta_2\varphi(\xi)}\right]_{\xi=\xi_2}\,, \tag{29.27}$$

$$b_2 = \left[\frac{f_2(F_0) + [\gamma_2\psi'(\xi) + \beta_2\psi(\xi)]\,H_1(\xi)}{\gamma_2\varphi'(\xi) + \beta_2\varphi(\xi)} - H_2(\xi)\right]_{\xi=\xi_2}\,, \tag{29.28}$$

$$b_3 = \left[\frac{\gamma_1\varphi'(\xi) + \beta_1\varphi(\xi)}{\gamma_1\psi'(\xi) + \beta_1\psi(\xi)}\right]_{\xi=\xi_1}, \tag{29.29}$$

$$b_4 = \left[\frac{f_1(F_0) - [\gamma_1\varphi'(\xi) + \beta_1\varphi(\xi)]\, H_2(\xi)}{\gamma_1\psi'(\xi) + \beta_1\psi(\xi)} + H_1(\xi)\right]_{\xi=\xi_1}. \tag{29.30}$$

В случае, когда внутренние источники (стоки) энергии в теле отсутствуют ($F(\xi) = 0$), решение (29.24) упрощается и принимает вид

$$\theta^* = c_3\psi(\xi) + c_4\varphi(\xi)\,. \tag{29.31}$$

Формулы (29.25) и (29.26) для определения c_3 и c_4 остаются справедливыми и в этом случае. Величины b_1 и b_3 находятся из (29.27) и (29.29), а b_2 и b_4 определяются из более простых выражений:

$$b_2 = \left[\frac{f_2(F_0)}{\gamma_2\varphi'(\xi) + \beta_2\varphi(\xi)}\right]_{\xi=\xi_2}, \tag{29.32}$$

$$b_4 = \left[\frac{f_1(F_0)}{\gamma_1\psi'(\xi) + \beta_1\psi(\xi)}\right]_{\xi=\xi_1}. \tag{29.33}$$

Если тепловой поток или температура на поверхности тела (граничные условия (29.2) и (29.3)) не изменяются во времени, то функции $f_1(F_0)$ и $f_2(F_0)$ в формулах (29.28), (29.30) и (29.32), (29.33) являются константами.

Для определения нестационарной составляющей температуры используем метод конечных интегральных преобразований (преобразований в конечных пределах). Применив с этой целью к уравнению (29.9) и начальному условию (29.12) интегральное преобразование вида

$$\bar{\vartheta}(F_0) = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi)\vartheta(\xi, F_0)\, \bar{k}(\mu_n, \xi)\, d\xi\,,$$

получим

$$\frac{d\bar{\vartheta}(F_0)}{d(F_0)} = -\mu_n^2\, \bar{\vartheta}(F_0) + \bar{f}(\theta^*) \tag{29.34}$$

$$\bar{\vartheta}(0) = \bar{f} - \bar{\theta}^*(0)\,, \tag{29.35}$$

где

$$\bar{f}(\theta^*) = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) f(\theta^*) \bar{k}(\mu_n, \xi)\, d\xi \,,$$

$$\bar{f} = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) f(\xi) \bar{k}(\mu_n, \xi)\, d\xi \,,$$

$$\bar{\theta}^*(0) = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) \theta^*(\xi, 0) \bar{k}(\mu_n, \xi)\, d\xi \,.$$

Весовая функция $\rho(\xi)$ определяется из формулы

$$\rho = \rho(\xi) = \exp\left[-\int\limits^{\xi} \frac{1}{a_{\xi\xi}} (a'_{\xi\xi} - b_\xi)\, d\xi \right] .$$

В последнем выражении в качестве нижнего предела интегрирования используется любое число в интервале от ξ_1 до ξ_2.

Ядро интегрального преобразования находится из решения граничной задачи Штурма–Лиувилля:

$$-(pk')' + (q - \mu^2 \rho)\, k = 0 \,, \tag{29.36}$$

$$\gamma_1 k'(\xi_1) + \beta_1 k(\xi_1) = 0 \,, \tag{29.37}$$

$$\gamma_2 k'(\xi_2) + \beta_2 k(\xi_2) = 0 \,, \tag{29.38}$$

где $p = a_{\xi\xi}\rho$, $q = -c_\xi \rho$.

Представим решение уравнения (29.36) в виде

$$k = k(\mu_n, \xi) = \bar{B}_1 \psi(\mu_n, \xi) + \bar{B}_2 \varphi(\mu_n, \xi) \,, \tag{29.39}$$

где $\psi(\mu_n, \xi)$ и $\varphi(\mu_n, \xi)$ — фундаментальная система решений уравнения (29.36), таблица 29.2.

Таблица 29.2. Выражения для функций $\psi(\mu,\xi)$ и $\varphi(\mu,\xi)$

№	Форма тела и коэффициенты в уравнении (29.6)	Уравнение для ядра преобразования $K(\lambda,\xi)$	Функция $\psi(\mu,\xi)$	Функция $\varphi(\mu,\xi)$	Примечания
1.	Пластина (монолитная или пористая): $\rho=1,\ p=1,\ q=0$	$K''+\mu^2\cdot K=0$	$\cos(\mu\xi)$	$\sin(\mu\ \xi)$	
2.	Цилиндр (сплошной или полый): $\rho=\xi,\ p=\xi,\ q=0$	$K''+\frac{1}{\xi}\cdot K'+\mu^2\cdot K=0$	$J_0(\mu\xi)$	$Y_0(\mu\xi)$	
3.	Шар (сплошной или полый): $\rho=\xi^2,\ p=\xi^2,\ q=0$	$K''+\frac{2}{\xi}\cdot K'+\mu^2\cdot K=0$	$\xi^{-0,5}\cdot J_{0,5}(\mu\xi)$	$\xi^{-0,5}\cdot Y_{0,5}(\mu\xi)$	
4.	Ребро (стержень) постоянного поперечного сечения: $\rho=1,\ p=1,\ q=(ml)^2,\ \omega^2=\mu^2-(ml)^2$	$K''+\omega^2\cdot K=0$	$\cos(\omega\xi)$ $\mathrm{ch}(\omega\xi)$	$\sin(\omega\xi)$ $\mathrm{sh}(\omega\xi)$	$\omega^2>0$ $\omega^2<0$
5.	Ребро треугольного и трапециевидного поперечного сечения с малым углом при вершине: $\rho=1,\ p=\xi,\ q=(ml)^2,\ \omega^2=\mu^2-(ml)^2$	$\xi\cdot K''+K'+\omega^2\cdot K=0$	$J_0(2\omega\sqrt{\xi})$ $I_0(2\omega\sqrt{\xi}$	$Y_0(2\omega\sqrt{\xi})$ $K_0(2\omega\sqrt{\xi})$	$\omega^2>0$ $\omega^2<0$
6.	Круглое ребро постоянной толщины: $\rho=\xi,\ p=\xi,\ q=\xi(ml)^2,\ \omega^2=\mu^2-(ml)^2$	$K''+\frac{1}{\xi}K'+\omega^2\cdot K=0$	$J_0(\omega\xi)$ $I_0(\omega\xi)$	$Y_0(\omega\xi)$ $K_0(\omega\xi)$	$\omega^2>0$ $\omega^2<0$

В выражении (29.39) содержатся две неизвестных постоянных интегрирования $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$, а также собственные числа μ_n. Для их определения имеются только два граничных условия (29.37) и (29.38). Указанное затруднение может быть устранено, если обе части уравнения (29.39) поделить на одну из постоянных $\bar{B}_1$ или $\bar{B}_2$, определив таким образом ненормированное ядро интегрального преобразования $k(\mu_n, \xi)$ с точностью до постоянной интегрирования. Основанием для такого шага служит то, что в решении рассматриваемой задачи для нестационарной составляющей температурного поля во всех выкладках используется только нормированное ядро, а процедура нормирования позволяет исключить зависимость $\bar{k}(\mu_n, \xi)$ от точности определения $k(\mu_n, \xi)$, связывая их соотношением

$$\bar{k}(\mu_n, \xi) = \frac{k(\mu_n, \xi)}{\sqrt{N}}, \tag{29.40}$$

где норма N находится из выражения

$$N = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) k^2(\mu_n, \xi)\, d\xi\,. \tag{29.41}$$

Поделив обе части (29.39) на $\bar{B}_1$ и использовав условия (29.37) и (29.38), найдем новое значение B_2

$$B_2 = \frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1} = -\frac{\gamma_1 \psi'(\mu_n, \xi_1) + \beta_1 \psi(\mu_n, \xi_1)}{\gamma_1 \varphi'(\mu_n, \xi_1) + \beta_1 \varphi(\mu_n, \xi_1)}, \tag{29.42}$$

а также характеристическое уравнение для определения собственных чисел

$$\gamma_2 \varphi'(\mu_n, \xi_2) + \beta_2 \varphi(\mu_n, \xi_2) = -\frac{1}{B_2}\big[\beta_2 \psi(\mu_n, \xi_2) + \gamma_2 \psi'(\mu_n, \xi_2)\big]\,. \tag{29.43}$$

Деление (29.39) на $\bar{B}_2$ вместо $\bar{B}_1$ дает новое значение $B_1 = 1/B_2$, а выражение (29.43) остается неизменным.

Таким образом, соотношение для нахождения ненормированного ядра принимает одну из следующих форм:

$$k(\mu_n, \xi) = \psi(\mu_n, \xi) + B_2 \varphi(\mu_n, \xi)\,, \tag{29.44}$$

или

$$k(\mu_n, \xi) = B_1\psi(\mu_n, \xi) + \varphi(\mu_n, \xi)\,, \tag{29.45}$$

где B_2 определяется по формуле (29.42), а $B_1 = 1/B_2$.

Решение для изображения нестационарной составляющей температурного поля, удовлетворяющее уравнению (29.34) и начальному условию (29.35), получается в виде

$$\bar{\vartheta}(F_0) = \exp\left(-\mu_n^2, F_0\right)\left[\bar{f} - \bar{\theta}^*(0) + \int\limits_0^{F_0} \bar{f}(\theta^*)\exp\left(\mu_n^2 F_0\right) dF_0\right]\,. \tag{29.46}$$

Для нахождения оригинала этой функции $\vartheta(x, F_0)$ используется формула обращения

$$\vartheta(\xi, F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\vartheta}(F_0)\,\bar{k}\,(\mu_n, \xi)\,. \tag{29.47}$$

Решение исходной задачи (29.1)–(29.4) получается в результате суммирования квазистационарной и нестационарной составляющих температурного поля

$$\theta = \theta\,(\xi, F_0) = \theta^*(\xi) + \vartheta\,(\xi, F_0)\,, \tag{29.48}$$

где функции в правой части (29.48) вычисляются по формулам (29.24) и (29.47) соответственно.

Полученное решение в обобщенном виде содержит в себе большой класс задач стационарной (29.24) и нестационарной (29.48) теплопроводности для тел канонической формы с постоянными теплофизическими свойствами и заданным законом распределения внутренних источников (стоков) теплоты.

30. Температурное поле в плоской пластине с объемными источниками теплоты

Рассмотрим в качестве примера определение нестационарного температурного состояния плоской пластины, внутри которой имеются равномерно распределенные в ее объеме источники теплоты, а на поверхностях заданы граничные условия третьего рода. Частными случаями модели такой пластины является ряд важных технических приложений, встречающихся в ракетно–космической, радиоэлектронной и ядерной технике.

Представим математическую модель задачи в виде, рис. 30.1:

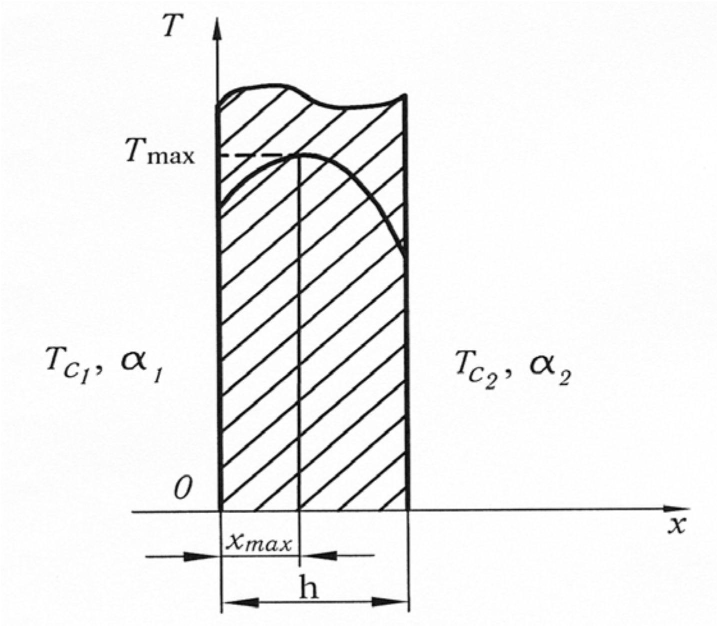

Рис. 30.1. К определению температуры в плоской пластине

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\,\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{q_V}{c\rho}\,, \tag{30.1}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right)_{x=0} = \alpha_1\left[T\left(0,\tau - T_{c_1}\right]\,, \tag{30.2}$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right)_{x=h} = \alpha_2\left[T\left(h,\tau - T_{c_2}\right]\,, \tag{30.3}$$

$$T\left(x,0\right) = T_0\,, \tag{30.4}$$

где T_0 — начальная температура пластины, постоянная по ее толщине.

Для решения задачи (30.1)–(30.4) методом конечных интегральных преобразований удобно использовать её безразмерную форму записи:

$$\frac{\partial \theta(\xi,F_0)}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 \theta(\xi,F_0)}{\partial \xi^2} + P_0\,, \tag{30.5}$$

$$\theta'(\xi_1,F_0) - \mathrm{Bi}_1\theta\left(\xi_1,F_0\right) = -\mathrm{Bi}_1\theta_{c_1}\,, \tag{30.6}$$

$$\theta'(\xi_2,F_0) + \mathrm{Bi}_2\theta\left(\xi_2,F_0\right) = \mathrm{Bi}_2\theta_{c_2}\,, \tag{30.7}$$

$$\theta\left(\xi,0\right)=f\left(\xi\right), \tag{30.8}$$

где $F_0=a\tau/h^2$ — число Фурье; $P_0=(q_V h^2)/(\lambda T_m)$ — критерий Померанцева; $\mathrm{Bi}=(\alpha h)/\lambda$ — критерий Био; $f(\xi)=T_0/T_m=\theta_0$.

Представим в соответствии с изложенным в п. 29 методом решения функцию $\theta\left(\xi,F_0\right)$ в виде суммы

$$\theta\left(\xi,F_0\right)=\theta^*\left(\xi,F_0\right)+\vartheta\left(\xi,F_0\right), \tag{30.9}$$

а краевую задачу (30.5)–(30.8) в виде двух следующих задач (30.10)–(30.12) и (30.13)–(30.16):

$$\frac{d^2\theta^*(\xi)}{d\xi^2}+P_0=0\,, \tag{30.10}$$

$$(\theta^{*\prime}(\xi_1))-\mathrm{Bi}_1\theta^*\left(\xi_1\right)=-\mathrm{Bi}_1\theta^*_{c_1}\,, \tag{30.11}$$

$$(\theta^{*\prime}(\xi_2))+\mathrm{Bi}_2\theta^*\left(\xi_2\right)=\mathrm{Bi}_2\theta^*_{c_2}\,, \tag{30.12}$$

$$\frac{\partial\vartheta\left(\xi,F_0\right)}{\partial F_0}=\frac{\partial^2\vartheta\left(\xi,F_0\right)}{\partial\xi^2}\,, \tag{30.13}$$

$$\vartheta'\left(\xi_1,F_0\right)-\mathrm{Bi}_1\vartheta\left(\xi_1,F_0\right)=0\,, \tag{30.14}$$

$$\vartheta'\left(\xi_2,F_0\right)+\mathrm{Bi}_2\vartheta\left(\xi_2,F_0\right)=0\,, \tag{30.15}$$

$$\vartheta\left(\xi,0\right)=f\left(\xi\right)-\theta^*\left(\xi,0\right). \tag{30.16}$$

Сравнивая математическую модель краевой задачи (30.10)–(30.12) с обобщенной моделью (29.6)–(29.8), видим, что в данном примере

$$a_{\xi\xi}=1\,,\quad b_\xi=c_\xi=0\,,\quad F\left(\xi\right)=P_0\,,$$

$$\gamma_1=\gamma_2=1\,,\quad \beta_1=-\mathrm{Bi}_1\,,\quad \beta_2=\mathrm{Bi}_2\,,$$

$$f_1(F_0)=-\mathrm{Bi}_1\theta^*_{c_1}\,,\quad f_2(F_0)=\mathrm{Bi}_2\theta^*_{c_2}\,.$$

Используя значения указанных величин, таблицу 29.1, а также формулы (29.22), (29.23) и (29.25)–(29.30), получим

$$\left.\begin{aligned}&\psi\left(\xi\right)=\xi\,, \qquad \varphi\left(\xi\right)=1\,,\\ &H_1\left(\xi\right)=P_0\xi\,,\quad H_2\left(\xi\right)=P_0\,\frac{\xi^2}{2}\,,\end{aligned}\right\} \tag{30.17}$$

$$b_1 = \frac{1+\mathrm{Bi}_2}{\mathrm{Bi}_2}\,, \quad b_2 = \theta^*_{c_2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right) P_0\,,$$

$$b_3 = -\mathrm{Bi}_1\,, \quad b_4 = -\mathrm{Bi}_1 \theta^*_{c_1}\,,$$

$$c_3 = \frac{(\theta^*_{c_2} - \theta^*_{c_1}) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right) P_0}{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2\,, \tag{30.18}$$

$$c_4 = \theta^*_{c_1} + \frac{(\theta^*_{c_2} - \theta^*_{c_1}) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right) P_0}{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2\,, \tag{30.19}$$

Подставив выражения (30.18) и (30.19) для постоянных c_3 и c_4 в формулу (29.24) с учетом (30.17), найдем

$$\theta^* = \theta^*_{c_1} + \frac{(\theta^*_{c_2} - \theta^*_{c_1}) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right) P_0}{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2(1 + \mathrm{Bi}_1\xi) - P_0\frac{\xi^2}{2}\,. \tag{30.20}$$

Умножением левой и правой частей последнего уравнения на T_m его можно преобразовать к виду

$$T = T_{c_1} + \frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \frac{q_V h^2}{\lambda}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2\left(1 + \mathrm{Bi}_1\,\frac{x}{h}\right) - \frac{q_V}{2\lambda}\,x^2\,. \tag{30.21}$$

Формулы для температур граничных поверхностей пластины T_1 и T_2 в установившемся процессе теплообмена можно получить из уравнения (30.21), если принять в нем $x = 0$ и $x = h$ соответственно.

Зависимость T от x в формуле (30.21) может иметь максимум, расположенный внутри пластины.

Координата x, определяющая положение максимальной температуры пластины, получается из равенства нулю производной от T в формуле (30.21) и имеет вид

$$x_{max} = \frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \frac{q_V h^2}{\lambda}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2\,\frac{\lambda}{q_V h}\,. \tag{30.22}$$

Подстановка значения $x = x_{max}$ в выражение для температурного поля пластины (30.21) позволяет найти $T = T_{max}$.

Плотности потоков теплоты через граничные поверхности пластины $x = 0$ и $x = h$ в установившемся процессе теплообмена определяются по формулам

$$q_1 = -\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} =$$

$$= -\frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \dfrac{q_V h^2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2\frac{\lambda}{h}\,, \qquad (30.23)$$

$$q_2 = -\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=h} =$$

$$= -\frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \dfrac{q_V h^2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2\frac{\lambda}{h} + q_V h\,. \qquad (30.24)$$

Сумма плотностей потоков теплоты, отводимой от левой и правой поверхностей пластины толщиной $h = x_{max} + (h - x_{max})$ (рис. 30.1), равна плотности поглощенной в ней энергии от действия внутренних источников теплоты

$$|\,q_1\,| + q_2 = q_V h\,.$$

Возвращаясь к определению нестационарной составляющей температурного поля $\vartheta\,(\xi, F_0)$, отметим, что применение интегрального преобразования ($\rho(\xi) = 1$ для пластины)

$$\bar{\vartheta}(F_0) = \int\limits_0^1 \bar{\vartheta}\,(\xi, F_0)\,\bar{k}(\mu_n, \xi)\,d\xi$$

к уравнению (30.13) и начальному условию (30.16) приводит их к виду

$$\frac{d\bar{\vartheta}(F_0)}{dF_0} = -\mu_n^2\bar{\vartheta}(F_0)\,, \qquad (30.25)$$

$$\bar{\vartheta}(0) = \bar{f} - \bar{\theta}^*(0)\,. \qquad (30.26)$$

Из таблицы 29.2 видно, что функции, образующие решение краевой задачи Штурма—Лиувилля для ненормированного ядра интегрального преобразования, равны

$$\psi(\mu_n, \xi) = \cos(\mu_n\xi) \quad \text{и} \quad \varphi(\mu_n, \xi) = \sin(\mu_n\xi)\,. \qquad (30.27)$$

Из формул (30.42) и (30.44) определяется константа интегрирования $B_2 = \mathrm{Bi}_1/\mu_n$ и выражение для ненормированного ядра интегрального преобразования

$$k\left(\mu_n, \xi\right) = \cos\left(\mu_n \xi\right) + \frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n} \sin\left(\mu_n \xi\right). \tag{30.28}$$

Нормированное ядро преобразования находится из формулы (30.40), в которой норма N определяется из (29.41) совместно с (30.28)

$$N = \int_0^1 k^2(\mu_n, \xi)\, d\xi = \int_0^1 \left[\cos\left(\mu_n \xi\right) + \frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n} \sin\left(\mu_n \xi\right)\right]^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} + \left(\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n}\right)^2 \left(1 - \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} + \frac{2}{\mathrm{Bi}_1} \sin^2 \mu_n\right)\right]. \tag{30.29}$$

Характеристическое уравнение для определения собственных чисел μ_n получается в результате подстановки в выражение (29.43) функций (30.27) и значений указанных выше величин B_2, γ_2, β_2

$$\operatorname{ctg} \mu_n = \frac{\mu_n^2 - \mathrm{Bi}_1 \mathrm{Bi}_2}{\mu_n(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2)}. \tag{30.30}$$

Функции $\bar{f}$ и $\bar{\theta}^*(0)$ в правой части условия (30.26) находят путем интегрирования их оригиналов $f\left(\xi\right) = \theta_0$ и $\theta^*(\xi)$ (формула (30.20)), умноженных на нормированное ядро

$$\bar{f} = \int_0^1 \theta_0 \bar{k}\left(\mu_n, \xi\right) d\xi = \frac{\theta_0}{\sqrt{N}} \int_0^1 \left[\cos(\mu_n \xi) + \frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n} \sin\left(\mu_n \xi\right)\right] d\xi =$$

$$= \frac{\theta_0}{\sqrt{N}} \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n^2}\left(1 - \cos \mu_n\right)\right), \tag{30.31}$$

$$\bar{\theta}^*\left(0\right) = \int_0^1 \theta^*\left(\xi\right) \bar{k}\left(\mu_n, \xi\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{L + L_1 \mathrm{Bi}_1 \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{\mathrm{Bi}_1 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{\mathrm{Bi}_1 \sin \mu_n}{\mu_n^3}\right) + \right.$$

$$+\frac{P_0}{2}\left[-\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}-\frac{2\cos\mu_n}{\mu_n^2}+\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n^3}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n^2}\left(\cos\mu_n-\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n}-\frac{2\cos\mu_n}{\mu_n^2}+\frac{2}{\mu_n^2}\right)\right]\right\}, \tag{30.32}$$

где

$$L_1=\frac{(\theta_{c_2}-\theta_{c_1})+P_0\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2+\mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2\,, \tag{30.33}$$

$$L=(\theta_{c_1}+L_1)\left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n^2}(1-\cos\mu_n)\right). \tag{30.34}$$

Подставляя функции $\bar{f}$ и $\bar{\theta}^*(0)$ из формул (30.31) и (30.32) в начальное условие (30.26), последнее преобразуют к виду

$$\bar{\vartheta}(0)=\frac{1}{\sqrt{N}}\left\{(\theta_0-\theta_{c_1}-L_1)\left[\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n^2}(1-\cos\mu_n)\right]-\right.$$

$$-L_1\mathrm{Bi}_1\left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}+\frac{\cos\mu_n}{\mu_n^2}-\frac{1}{\mu_n^2}-\frac{\mathrm{Bi}_1\cos\mu_n}{\mu_n^2}+\frac{\mathrm{Bi}_1\sin\mu_n}{\mu_n^3}\right)-$$

$$-\frac{P_0}{2}\left[-\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}-\frac{2\cos\mu_n}{\mu_n^2}+\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n^3}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n^2}\left(\cos\mu_n-\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n}-\frac{2\cos\mu_n}{\mu_n^2}+\frac{2}{\mu_n^2}\right)\right]\right\}. \tag{30.35}$$

Решая уравнение (30.25) с начальным условием (30.26), получают решение для изображения нестационарной составляющей температурного поля

$$\bar{\vartheta}(F_0)=\bar{\vartheta}(0)\cdot e^{(-\mu_n^2F_0)}\,. \tag{30.36}$$

Используя формулу обращения изображения для определения оригинала функции

$$\vartheta\left(\xi,F_0\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\vartheta}\left(F_0\right)\bar{k}\left(\mu_n,\xi\right)$$

совместно с формулами (30.28), (30.40), (30.29), а также (30.35), (30.36), получим выражение для нестационарной составляющей температурного поля в виде

$$\vartheta\left(\xi,F_0\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\theta_0-\theta_{c_1}-L_1)\left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n^2}(1-\cos\mu_n)\right)-\right.$$

$$-L_1\mathrm{Bi}_1\left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}+\frac{\cos\mu_n}{\mu_n^2}-\frac{1}{\mu_n^2}-\frac{\mathrm{Bi}_1\cos\mu_n}{\mu_n^2}+\frac{\mathrm{Bi}_1\sin\mu_n}{\mu_n^3}\right)-$$

$$-\frac{P_0}{2}\left[-\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}-\frac{2\cos\mu_n}{\mu_n^2}+\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n^3}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n^2}\left(\cos\mu_n-\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n}-\frac{2\cos\mu_n}{\mu_n^2}+\frac{2}{\mu_n^2}\right)\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{N}\left[\cos\left(\mu_n\xi\right)+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\xi\right)\right]e^{(-\mu_n^2F_0)}\,. \qquad (30.37)$$

Общее решение задачи (30.5)–(30.8) в соответствии с формулой (30.9) равно сумме функций $\theta^*(\xi)$ и $\vartheta\,(\xi,F_0)$. Таким образом, подставляя в (30.9) выражения для $\theta^*(\xi)$ из уравнения (30.20) и для $\vartheta(\xi,F_0)$ из уравнения (30.37), получим

$$\theta\,(\xi,F_0)=\theta_{c_1}+L_1(1+\mathrm{Bi}_1\xi)-\frac{P_0}{2}\,\xi^2+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\left\{(\theta_0-\theta_{c_1}-L_1)\left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n^2}(1-\cos\mu_n)\right)-\right.$$

$$-L_1\mathrm{Bi}_1\left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}+\frac{\cos\mu_n}{\mu_n^2}-\frac{1}{\mu_n^2}-\frac{\mathrm{Bi}_1\cos\mu_n}{\mu_n^2}+\frac{\mathrm{Bi}_1\sin\mu_n}{\mu_n^3}\right)-$$

$$-\frac{P_0}{2}\left[-\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}-\frac{2\cos\mu_n}{\mu_n^2}+\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n^3}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n^2}\left(\cos\mu_n-\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n}-\frac{2\cos\mu_n}{\mu_n^2}+\frac{2}{\mu_n^2}\right)\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\left[\cos(\mu_n\xi)+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n}\,\sin\left(\mu_n\xi\right)\right]e^{(-\mu_n^2F_0)}\,. \qquad (30.38)$$

Подставляя в последнее выражение значение L_1 из уравнения (30.33) и переходя к размерной форме записи температуры, найдем

$$T=T_{c_1}+\frac{(T_{c_2}-T_{c_1})+\dfrac{q_Vh^2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2+\mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2\left(1+\mathrm{Bi}_1\frac{x}{h}\right)-\frac{q_V}{2\lambda}\,x^2+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}e^{(-\mu_n^2F_0)}\,\frac{1}{N}\left[\left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n^2}(1-\cos\mu_n)\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\left(T_0 - T_{c_1} - \frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \dfrac{q_V h^2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2\right) -$$

$$-\frac{(T_{c_2} - T_{c_1}) + \dfrac{q_V h^2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\sin\mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos\mu_n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{\mathrm{Bi}_1\cos\mu_n}{\mu_n^2} + \frac{\mathrm{Bi}_1\sin\mu_n}{\mu_n^3}\right) -$$

$$-\frac{q_V h^2}{2\lambda}\left(-\frac{\sin\mu_n}{\mu_n} - \frac{2\cos\mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n^3} +\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n^2}\left(\cos\mu_n - \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n} - \frac{2\cos\mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2}{\mu_n^2}\right)\right)\Bigg]\cdot$$

$$\cdot\left(\cos\left(\mu_n\frac{x}{h}\right) + \frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{x}{h}\right)\right), \tag{30.39}$$

где N определяется по формуле (30.29).

Из выражения (30.39) можно получить решение некоторых частных задач с другими граничными условиями. Например, для пластины без внутренних источников теплоты, изолированной с одной стороны и нагреваемой горячим газом с другой, можно принять $q_V = 0$, $\mathrm{Bi}_1 = 0\,(\alpha_1 = 0)$, $\mathrm{Bi}_2 = \mathrm{Bi}$, $T_{c_2} = T_{\text{г}}$. В этом случае, используя выражение (30.39), находим

$$\frac{T(x,\tau) - T_{\text{г}}}{T_0 - T_{\text{г}}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(-\mu_n^2 F_0)}\cdot\cos\left(\mu_n\frac{x}{h}\right), \tag{30.40}$$

где

$$A_n = \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n\cos\mu_n}. \tag{30.41}$$

Характеристическое выражение для определения собственных чисел при $\mathrm{Bi} = 0$ в соответствии с формулой (30.30) принимает вид (рис. 30.2):

$$\operatorname{ctg}\mu_n = \frac{\mu_n}{\mathrm{Bi}}. \tag{30.42}$$

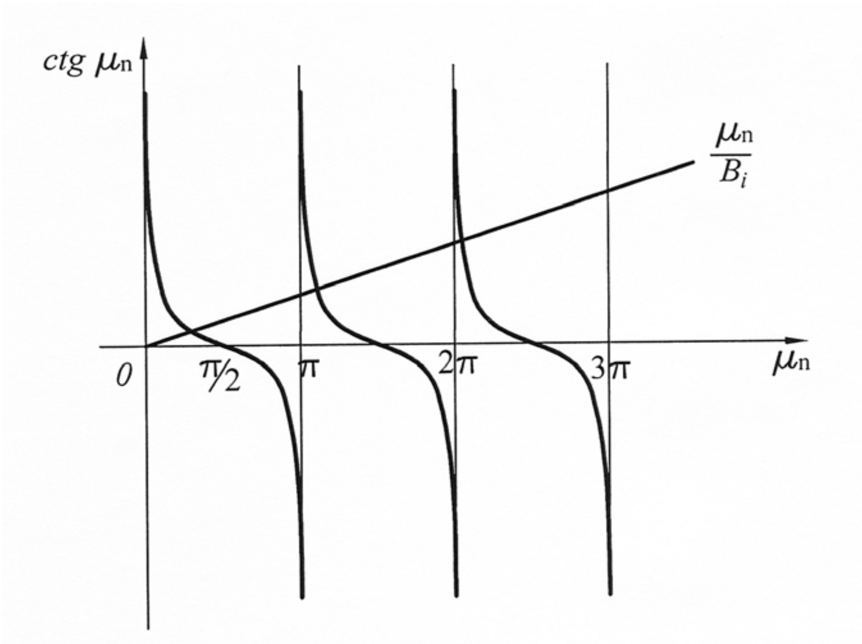

Рис. 30.2. К решению характеристического уравнения (30.42)

Полученное выражение позволяет дать оценку двум широко распространенным допущениям, используемым в расчетах температурного состояния конструкций в рамках принятой выше постановки задачи. Первое из них заключается в том, что в стенке конструкции малой толщины, выполненной из высокотеплопроводного материала, температуру можно считать одинаковой по её толщине — температура не зависит от x и изменяется только во времени.

В рассматриваемом случае термическое сопротивление пластины h/λ мало по сравнению с термическим сопротивлением прилегающего к ней слоя газа $1/\alpha$ и критерий

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha h}{\lambda} = \left(\frac{h}{\lambda}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\alpha}\right) \to 0\,.$$

При этом условии из характеристического уравнения (30.42) получается лишь один корень $\mu_n = \mu_1 = \mu$ малого значения (прямая линия μ_n/Bi на рис. 30.2 стремится прижаться к оси ординат).

Поскольку тангенс малого угла

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\sin\mu}{\cos\mu} \approx \frac{\mu}{1} = \mu\,,$$

то из выражения

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{1}{\mu} = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}}$$

следует, что $\mu = \sqrt{\mathrm{Bi}}$, а из формулы (30.41)

$$A_n = \frac{2\mu}{\mu + \mu \cdot 1} = 1\,.$$

В этом случае в решении (30.40) можно огроаничиться только первым членом ряда. Учитывая, что $\cos(\mu x/h)$ при $x = 0$ и $x = h$ равен 1 и, полагая сохранение этого равенства внутри интервала x от 0 до h, получим

$$\frac{T_{\text{г}} - T(\tau)}{T_{\text{г}} - T_0} = e^{-\mathrm{Bi}F_0} = e^{-\mathrm{Mi}}\,, \tag{30.43}$$

где $\mathrm{Mi} = (\alpha\tau)/(c\rho h)$ — критерий Михеева.

Таким образом, из выражения (30.43) видно, что температура пластины не зависит от координаты x и изменяется только с течением времени.

Суть второго допущения состоит в том, что на нагреваемой поверхности пластины из низкотеплопроводного материала вместо граничного условия третьего рода можно задавать граничное условие первого рода, принимая $T_n = T_{\text{г}}$.

Примем в этом случае термическое сопротивление пластины h/λ намного больше термического сопротивления $1/\alpha$, т.е.

$$\frac{h}{\lambda} \gg \frac{1}{\alpha} \ \text{ или } \ \mathrm{Bi} \gg 1 \ \text{ и } \ \to \infty\,.$$

В рассматриваемой ситуации прямая линия μ_n/Bi на рис. 30.2 стремится слиться с осью абсцисс, а в точках её пересечения с линиями котангенса дает значения собственных чисел (корни характеристического уравнения)

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2}\,\pi\,.$$

Подставляя найденные значения μ_n в формулу (30.41), получим

$$A_n = \frac{4\,(-1)^{n+1}}{(2n-1)\,\pi}\,.$$

Используя формулу (30.40) совместно с этими результатами, находим

$$\frac{T_{\text{г}} - T\,(x,\tau)}{T_{\text{г}} - T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \cos\left(\frac{2n-1}{2}\,\pi\frac{x}{h}\right) e^{\left(\frac{2n-1}{2}\,\pi\right)^2 F_0}.$$

Из последнего выражения видно, что его правая часть при $x = h$ обращается в 0 и на нагреваемой поверхности пластины температура оказывается равной температуре газа

$$T\,(h,\tau) = T_n = T_{\text{г}}\,.$$