把这些方程和 $J(1)=1$ 组合起来，就给出在所有情形下定义 J 的递归式：

$$\begin{aligned} J(1)&=1\,; \\ J(2n)&=2J(n)-1\,,\quad n\geqslant 1\,; \\ J(2n+1)&=2J(n)+1\,,\quad n\geqslant 1\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

找到啦！看来似乎可以按照2的幂将表中的数据分组（在表中用竖线分隔开），在每一组的开始 $J(n)$ 总是等于1，并且组里的数据每次递增2．因此，如果我们将 n 写成 $n=2^m+l$ 的形式，其中 2^m 是不超过 n 的2的最大幂，而 l 则是剩下的数，那么递归式的解看起来是

$$J(2^m+l)=2l+1\,,\quad m\geqslant 0\,,\quad 0\leqslant l<2^m\,. \tag{1.9}$$

（注意，如果 $2^m\leqslant n<2^{m+1}$，则余下来的数 $l=n-2^m$ 满足 $0\leqslant l<2^{m+1}-2^m=2^m$．）

$$n=(b_m b_{m-1}\cdots b_1 b_0)_2\,,$$

也就是说，

$$n=b_m 2^m+b_{m-1}2^{m-1}+\cdots+b_1 2+b_0\,,$$

其中每个 b_i 为0或1，而首位数字 b_m 是1．注意 $n=2^m+l$，我们依次就有

$$\begin{aligned} n&=(1b_{m-1}b_{m-2}\cdots b_1 b_0)_2\,, \\ l&=(0b_{m-1}b_{m-2}\cdots b_1 b_0)_2\,, \\ 2l&=(b_{m-1}b_{m-2}\cdots b_1 b_0 0)_2\,, \\ 2l+1&=(b_{m-1}b_{m-2}\cdots b_1 b_0 1)_2\,, \\ J(n)&=(b_{m-1}b_{m-2}\cdots b_1 b_0 b_m)_2\,. \end{aligned}$$

（最后一步由 $J(n)=2l+1$ 以及 $b_m=1$ 推出．）我们就证明了

$$J\big((b_m b_{m-1}\cdots b_1 b_0)_2\big)=(b_{m-1}\cdots b_1 b_0 b_m)_2\,. \tag{1.10}$$

n循环左移一位就得到了幸存者！

如果我们从 n 开始，并对函数 J 迭代 $m+1$ 次，那么就做了 $m+1$ 次循环移位．由于 n 是一个 $m+1$ 位的数，因此我们或许会期待再次得到 n 来结束循环．但是事实并不一定如此．例如，如果 $n=13$，我们就有 $J\big((1101)_2\big)=(1011)_2$，而此后却有 $J\big((1011)_2\big)=(111)_2$，故而该过程中断．当0成为首位时，它就会消失掉．实际上，根据定义 $J(n)$ 必定总是 $\leqslant n$，这是因为 $J(n)$ 是幸存者的号码；于是，如果 $J(n)<n$，那么继续迭代下去永远也不可能回到 n．