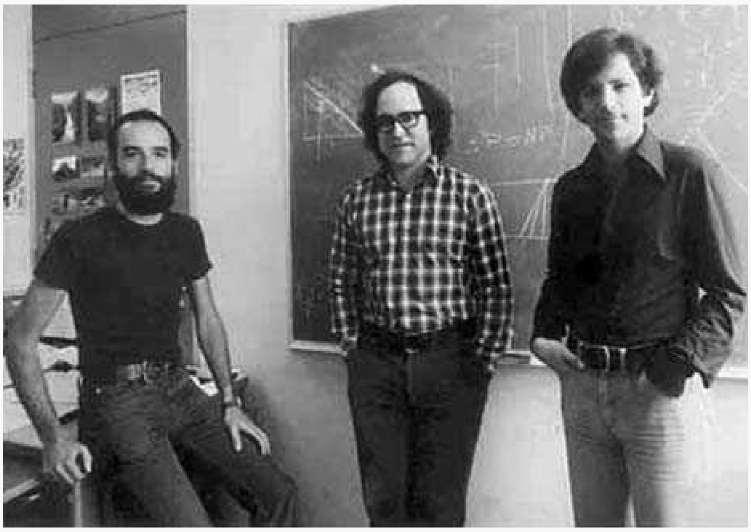
一、RSA历史



1977年，三位数学家Rivest、Shamir 和 Adleman 设计了一种算法，可以实现非对称加密。这种算法用他们三个人的名字命名，叫做RSA算法。从那时直到现在，RSA算法一直是最广为使用的"非对称加密算法"。毫不夸张地说，只要有计算机网络的地方，就有RSA算法。

这种算法非常可靠，密钥越长，它就越难破解。根据已经披露的文献，目前被破解的最长RSA密钥是768个二进制位。也就是说，长度超过768位的密钥，还无法破解（至少没人公开宣布）。因此可以认为，1024位的RSA密钥基本安全，2048位的密钥极其安全。

下面，我就进入正题，解释RSA算法的原理。文章共分成两部分，今天是第一部分，介绍要用到的四个数学概念。你可以看到，RSA算法并不难，只需要一点数论知识就可以理解。

二、互质关系

如果两个正整数，除了1以外，没有其他公因子，我们就称这两个数是互质关系（coprime）。比如，15和32没有公因子，所以它们是互质关系。这说明，不是质数也可以构成互质关系。

关于互质关系，不难得到以下结论：

1. 任意两个质数构成互质关系，比如13和61。
2. 一个数是质数，另一个数只要不是前者的倍数，两者就构成互质关系，比如3和10。
3. 如果两个数之中，较大的那个数是质数，则两者构成互质关系，比如97和57。
4. 1和任意一个自然数是都是互质关系，比如1和99。
5. p是大于1的整数，则p和p-1构成互质关系，比如57和56。
6. p是大于1的奇数，则p和p-2构成互质关系，比如17和15。

三、欧拉函数

请思考以下问题：

> 任意给定正整数n，请问在小于等于n的正整数之中，有多少个与n构成互质关系？（比如，在1到8之中，有多少个数与8构成互质关系？）

计算这个值的方法就叫做欧拉函数，以 $\phi(n)$ 表示。在1到8之中，与8形成互质关系的是1、3、5、7，所以 $\phi(n) = 4$。

$\phi(n)$ 的计算方法并不复杂，但是为了得到最后那个公式，需要一步步讨论。

第一种情况

如果n=1，则 $\phi(1) = 1$ 。因为1与任何数（包括自身）都构成互质关系。

第二种情况

如果n是质数，则 $\phi(n)=n-1$ 。因为质数与小于它的每一个数，都构成互质关系。比如5与1、2、3、4都构成互质关系。

第三种情况

如果n是质数的某一个次方，即 n = p^k (p为质数，k为大于等于1的整数)，则

比如 $\phi(8) = \phi(2^3) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$。

这是因为只有当一个数不包含质数p，才可能与n互质。而包含质数p的数一共有p^(k-1)个，即1×p、2×p、3×p、...、p^(k-1)×p，把它们去除，剩下的就是与n互质的数。

上面的式子还可以写成下面的形式：

可以看出，上面的第二种情况是 k=1 时的特例。

第四种情况

如果n可以分解成两个互质的整数之积，

$$n = p1 \times p2$$

则

$$\phi(n) = \phi(p1p2) = \phi(p1)\phi(p2)$$

即积的欧拉函数等于各个因子的欧拉函数之积。比如，$\phi(56)=\phi(8\times7)=\phi(8)\times\phi(7)=4\times6=24$。

这一条的证明要用到"中国剩余定理"， 这里就不展开了，只简单说一下思路：如果a与p1互质(a<p1)，b与p2互质(b<p2)，c与p1p2互质(c<p1p2)，则 c与数对 (a,b) 是一一对应关系。由于a的值有φ(p1)种可能，b的值有φ(p2)种可能，则数对 (a,b) 有φ(p1)φ(p2)种可能，而c的值有φ(p1p2)种可能，所以φ(p1p2)就等于φ(p1)φ(p2)。

第五种情况

因为任意一个大于1的正整数，都可以写成一系列质数的积。

根据第4条的结论，得到

再根据第3条的结论，得到

也就等于

这就是欧拉函数的通用计算公式。比如，1323的欧拉函数，计算过程如下：

四、欧拉定理

欧拉函数的用处，在于欧拉定理。"欧拉定理"指的是：

> 如果两个正整数a和n互质，则n的欧拉函数 φ(n) 可以让下面的等式成立：

也就是说，a的φ(n)次方被n除的余数为1。或者说，a的φ(n)次方减去1，可以被n整除。比如，3和7互质，而7的欧拉函数φ(7)等于6，所以3的6次方（729）减去1，可以被7整除（728/7=104）。

欧拉定理的证明比较复杂，这里就省略了。我们只要记住它的结论就行了。

欧拉定理可以大大简化某些运算。比如，7和10互质，根据欧拉定理，

已知 φ(10) 等于4，所以马上得到7的4倍数次方的个位数肯定是1。

因此，7的任意次方的个位数（例如7的222次方），心算就可以算出来。

欧拉定理有一个特殊情况。

> 假设正整数a与质数p互质，因为质数p的φ(p)等于p-1，则欧拉定理可以写成

这就是著名的费马小定理。它是欧拉定理的特例。

欧拉定理是RSA算法的核心。理解了这个定理，就可以理解RSA。

五、模反元素

还剩下最后一个概念：

> 如果两个正整数a和n互质，那么一定可以找到整数b，使得 ab-1 被n整除，或者说ab被n除的余数是1。
>
> 这时，b就叫做a的"模反元素"。

比如，3和11互质，那么3的模反元素就是4，因为 (3 × 4)-1 可以被11整除。显然，模反元素不止一个， 4加减11的整数倍都是3的模反元素 {...,-18,-7,4,15,26,...}，即如果b是a的模反元素，则 b+kn 都是a的模反元素。

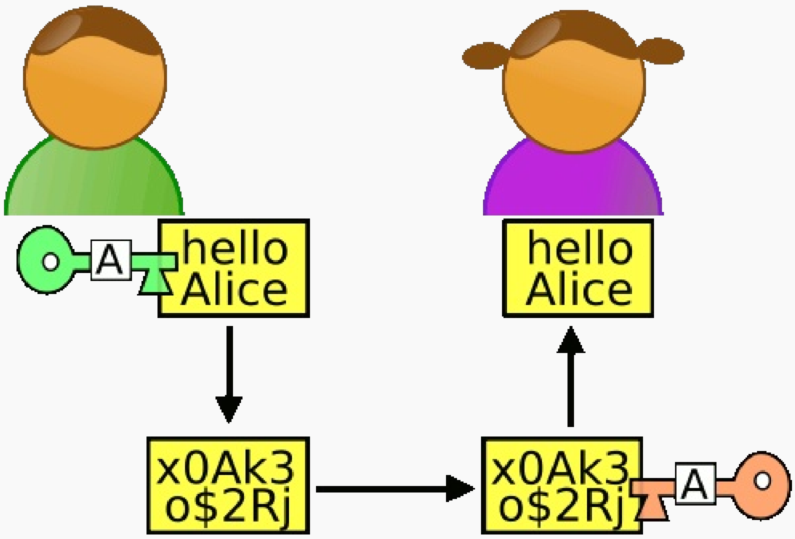
欧拉定理可以用来证明模反元素必然存在。

可以看到，a的 φ(n)-1 次方，就是a的模反元素。

==

六、密钥生成的步骤

我们通过一个例子，来理解RSA算法。假设爱丽丝要与鲍勃进行加密通信，她该怎么生成公钥和私钥？



第一步，随机选择两个不相等的质数p和q。

爱丽丝选择了61和53。（实际应用中，这两个质数越大，就越难破解。）

第二步，计算p和q的乘积n。

爱丽丝就把61和53相乘。

> n = 61×53 = 3233

n的长度就是密钥长度。3233写成二进制是110010100001，一共有12位，所以这个密钥就是12位。实际应用中，RSA密钥一般是1024位，重要场合则为2048位。

第三步，计算n的欧拉函数φ(n)。

根据公式：

> φ(n) = (p-1)(q-1)

爱丽丝算出φ(3233)等于60×52，即3120。

第四步，随机选择一个整数e，条件是1< e < φ(n)，且e与φ(n) 互质。

爱丽丝就在1到3120之间，随机选择了17。（实际应用中，常常选择65537。）

第五步，计算e对于φ(n)的模反元素d。

所谓"模反元素"就是指有一个整数d，可以使得ed被φ(n)除的余数为1。

$$ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$$

这个式子等价于

$$ed - 1 = k\phi(n)$$

于是，找到模反元素d，实质上就是对下面这个二元一次方程求解。

$$ex + \phi(n)y = 1$$

已知 e=17, φ(n)=3120,

$$17x + 3120y = 1$$

这个方程可以用"扩展欧几里得算法"求解，此处省略具体过程。总之，爱丽丝算出一组整数解为 (x,y)=(2753,-15)，即 d=2753。

至此所有计算完成。

第六步，将n和e封装成公钥，n和d封装成私钥。

在爱丽丝的例子中，n=3233，e=17，d=2753，所以公钥就是 (3233,17)，私钥就是（3233, 2753）。

实际应用中，公钥和私钥的数据都采用ASN.1格式表达（实例）。

七、RSA算法的可靠性

回顾上面的密钥生成步骤，一共出现六个数字：

p
q
n
φ(n)
e
d

这六个数字之中，公钥用到了两个（n和e），其余四个数字都是不公开的。其中最关键的是d，因为n和d组成了私钥，一旦d泄漏，就等于私钥泄漏。

那么，有无可能在已知n和e的情况下，推导出d？

（1）ed≡1 (mod φ(n))。只有知道e和φ(n)，才能算出d。

（2）φ(n)=(p-1)(q-1)。只有知道p和q，才能算出φ(n)。

（3）n=pq。只有将n因数分解，才能算出p和q。

结论：如果n可以被因数分解，d就可以算出，也就意味着私钥被破解。

可是，大整数的因数分解，是一件非常困难的事情。目前，除了暴力破解，还没有发现别的有效方法。维基百科这样写道：

> "对极大整数做因数分解的难度决定了RSA算法的可靠性。换言之，对一极大整数做因数分解愈困难，RSA算法愈可靠。
>
> 假如有人找到一种快速因数分解的算法，那么RSA的可靠性就会极度下降。但找到这样的算法的可能性是非常小的。今天只有短的RSA密钥才可能被暴力破解。到2008年为止，世界上还没有任何可靠的攻击RSA算法的方式。
>
> 只要密钥长度足够长，用RSA加密的信息实际上是不能被解破的。"

举例来说，你可以对3233进行因数分解（61×53），但是你没法对下面这个整数进行因数分解。

12301866845301177551304949
58384962720772853569595334
79219732245215172640050726
36575187452021997864693899
56474942774063845925192557
32630345373154826850791702
61221429134616704292143116
02221240479274737794080665
351419597459856902143413

它等于这样两个质数的乘积：

33478071698956898786044169

84821269081770479498371376
85689124313889828837938780
02287614711652531743087737
814467999489
×
36746043666799590428244633
79962795263227915816434308
76426760322838157396665112
79233373417143396810270092
798736308917

事实上，这大概是人类已经分解的最大整数（232个十进制位，768个二进制位）。比它更大的因数分解，还没有被报道过，因此目前被破解的最长RSA密钥就是768位。

八、加密和解密

有了公钥和密钥，就能进行加密和解密了。

（1）加密要用公钥 (n,e)

假设鲍勃要向爱丽丝发送加密信息m，他就要用爱丽丝的公钥 (n,e) 对m进行加密。这里需要注意，m必须是整数（字符串可以取ascii值或unicode值），且m必须小于n。

所谓"加密"，就是算出下式的c：

$$m^e \equiv c \pmod n$$

爱丽丝的公钥是 (3233, 17)，鲍勃的m假设是65，那么可以算出下面的等式：

$$65^{17} \equiv 2790 \pmod{3233}$$

于是，c等于2790，鲍勃就把2790发给了爱丽丝。

（2）解密要用私钥(n,d)

爱丽丝拿到鲍勃发来的2790以后，就用自己的私钥(3233, 2753) 进行解密。可以证明，下面的等式一定成立：

$$c^d \equiv m \pmod n$$

也就是说，c的d次方除以n的余数为m。现在，c等于2790，私钥是(3233, 2753)，那么，爱丽丝算出

$$2790^{2753} \equiv 65 \pmod{3233}$$

因此，爱丽丝知道了鲍勃加密前的原文就是65。

至此，"加密--解密"的整个过程全部完成。

我们可以看到，如果不知道d，就没有办法从c求出m。而前面已经说过，要知道d就必须分解n，这是极难做到的，所以RSA算法保证了通信安全。

你可能会问，公钥(n,e) 只能加密小于n的整数m，那么如果要加密大于n的整数，该怎么办？有两种解决方法：一种是把长信息分割成若干段短消息，每段分别加密；另一种是先选择一种"对称性加密算法"（比如DES），用这种算法的密钥加密信息，再用RSA公钥加密DES密钥。

九、私钥解密的证明

最后，我们来证明，为什么用私钥解密，一定可以正确地得到m。也就是证明下面这个式子：

$$c^d \equiv m \pmod n$$

因为，根据加密规则

$$m^e \equiv c \pmod n$$

于是，c可以写成下面的形式：

$$c = m^e - kn$$

将c代入要我们要证明的那个解密规则：

$$(m^e - kn)^d \equiv m \pmod n$$

它等同于求证

$$m^{ed} \equiv m \pmod n$$

由于

$$ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$$

所以

$$ed = h\phi(n)+1$$

将ed代入：

$$m^{h\phi(n)+1} \equiv m \pmod{n}$$

接下来，分成两种情况证明上面这个式子。

（1）m与n互质。

根据欧拉定理，此时

$$m^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

得到

$$(m^{\phi(n)})^{h} \times m \equiv m \pmod{n}$$

原式得到证明。

（2）m与n不是互质关系。

此时，由于n等于质数p和q的乘积，所以m必然等于kp或kq。

以 m = kp为例，考虑到这时k与q必然互质，则根据欧拉定理，下面的式子成立：

$$(kp)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$$

进一步得到

$$[(kp)^{q-1}]^{h(p-1)} \times kp \equiv kp \pmod{q}$$

即

$$(kp)^{ed} \equiv kp \pmod{q}$$

将它改写成下面的等式

$$(kp)^{ed} = tq + kp$$

这时t必然能被p整除，即 t=t'p

$$(kp)^{ed} = t'pq + kp$$

因为 m=kp，n=pq，所以

$$m^{ed} \equiv m \pmod{n}$$

原式得到证明。

来源： <http://www.ruanyifeng.com/blog/2013/07/rsa_algorithm_part_two.html>