从内积的定义，我们容易得到内积的基本性质：

(1) $(x, ky) = k(x, y)$;

(2) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$;

(3) $(x, 0) = (0, x) = 0$;

(4) $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (x_i, y_j)$. （2.1）

定理2.1　如上定义的长度$\|\alpha\|$满足

(1)　$\|\alpha\| \geq 0$，对$\forall \alpha \in V$，仅当$\alpha = 0$时等号成立；

(2)　$\|k\alpha\| = |k| \|\alpha\|$;

(3)　$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| . \|\beta\|$，等号仅当$\alpha$与$\beta$线性相关时成立；

(4)　$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

这里我们仅证明第(3)点事实上，$\alpha$与$\beta$中有一个是零向量时，结论显然成立.现设$\alpha, \beta$都是非零向量，令$u = \alpha + t\beta, \forall t \in R$，则

令$a_{ij} = (e_i, e_j)$　　$(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，并构造矩阵和列向量：

$$A = \begin{bmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \cdots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \cdots & (e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \cdots & (e_n, e_n) \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \qquad Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T,$$

于是内积 $(x, y) = X^T A Y$　　　　（2.7）

我们把(2.6)式的矩阵$A \in R^{n\times n}$叫做基$e_1, e_2, \cdots, e_n$的度量矩阵，又叫做$Gram$矩阵.

范线性空间

| $\|A\|_1$　$\|A\|_\infty$ | $\|A\|_2$ | $\|A\|_F$ |
|---|---|---|
| 容易计算 | 计算较复杂 | 较少使用 |
| **使用最广泛** | **对矩阵元素的变化比较敏感** | |
| | **性质较好** | |
| | **使用最广泛** | |

015/6/17

设$A \in R^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，称

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|\} \quad \text{--------(9)}$$

为矩阵$A$的谱半径

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

**设A为n阶方阵,则对任意算子范数$\|\cdot\|$有**

$$\rho(A) \le \|A\|$$

**若$A$对称，则有 $\|A\|_2 = \rho(A)$**

奇异值分解

定理5.1.6（Singular Value Decomposition）设$A \in R^{m\times n}, r = rank(A)$，则一定存在正交矩阵$U = [u_1, u_2, \cdots, u_m] \in R^{m\times m}, V = [v_1, v_2, \cdots, v_n] \in R^{n\times n}$和对角矩阵

$$\Sigma_r = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r) \in R^{r\times r}，使得A = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T.$$

这称为$A$的奇异值分解（简称$SVD$），其中$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_r > 0$，$(i = 1, 2, \cdots, r)$称为$A$的非零奇异值.

性质1.$A$的非零奇异值的个数$r$就是$A$的秩；

性质2.如果$A$是$n$阶方阵，则$|\det(A)| = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i$；

性质3.$\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \ge \cdots \ge \sigma_r^2$，是$A^T A$或$AA^T$的特征值的开方；

性质4.设$U = [u_1, u_2, \cdots, u_m], V = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$，则$u_1, u_2, \cdots, u_m$是$AA^T$特征向量，$v_1, v_2, \cdots, v_n$是$A^T A$的特征向量.

性质5.$A$可以表示成$r$个秩1矩阵的和：

$$A = U\Sigma V^T = U_r \Sigma_r V_r^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

这是$A$的奇异值分解的紧凑（廋）形式.

事实上，利用奇异值分解可以得到矩阵$A$的低秩逼近，即$\|A - A_k\|_2 = \min_{B \in R^{m\times n}, rank(B) = k \le r} \|A - B\|_2$

其中$A_k = U_k \Sigma_k V_k^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$

这是一个非常有用的结果，也是矩阵降维的基础，这表明在所有$rank$为$k \le r$的$m \times n$矩阵中，$A_k$使得$\|A - B\|_2$为最小的矩阵.

8. 1 基本概念和基本性质

定义 8.1 设$A=[a_{ij}]\in R^{m\times n}$,如果

$$a_{ij}\geq 0,\forall i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n, \qquad (8.1)$$

即$A$的所有元素是非负的，则称$A$为非负矩阵($nonnegative\ matrix$)记成$A\geq 0$.

如果（8.1）中为严格的不等号，即$A$的所有元素是正数，则称$A$为正矩阵（$positive\ \ matrix$).
记作 $A>0$.

定理8. 2 设$A,B,C,D\in C^{m\times n},\alpha,\beta\in C$,则

(1)$|A|\geq 0$; $|A|=0$当且仅当$A=0$.

(2)$|\alpha A|=|\alpha||A|$.

(3)$|A+B|\leq|A|+|B|$.

(4)若$A\geq 0$且$A\neq 0$,不一定有$A>0$.

(5)若$A\geq 0,B\geq 0$,且$\alpha$，$\beta\geq 0$，则$\alpha A+\beta B\geq 0$.

(6)若$A\geq B,C\geq D$,则$A+C\geq B+D$.

(7)若$A\geq B,B\geq C$,则$A\geq C$.

定理 8.3

(1)$|Ax|\leq|A||x|$.

(2)$|AB|\leq|A||B|$.

(3)$|A^m|\leq|A|^m$ .

(4)如$0\leq A\leq B,0\leq C\leq D$,则$0\leq AC\leq BD$.

(5)如$0\leq A\leq B$,则$0\leq A^m\leq B^m,m=1,2,\ldots..$

(6)若$A\geq 0$,则$A^m\geq 0$;若$A>0$,则$A^m>0,m=1,2,\ldots$

(7)若$A>0,x>0$且$x\neq 0$,则$Ax>0$.

(8)若$A\geq 0,x>0$且$Ax=0$,则$A=0$.

(9)若$|\mathrm{A}|\leq|B|$,则$\|A\|_F\leq\|B\|_F$ .

(10)$\||A|\|_F=\|A\|_F$.