2.2 Demostraciones directas

Como ya se mencionó en la sección anterior, el enunciado de cualquier teorema, cuando se mira apropiadamente, es de la forma $P \to Q$, o una combinación de tales enunciados. Por ejemplo, cada una de las tres partes del Teorema 2.1.3 es de la forma $P \to Q$. Para demostrar teoremas, necesitamos entonces saber como demostrar enunciados de la forma $P \to Q$.

La forma más simple de una demostración, la cual trataremos en esta sección, es la más obvia: asumir que P es verdadera, y producir una serie de pasos, cada uno deducido de los anteriores, para eventualmente llegar a Q. Este tipo de demostración es llamado una *demostración directa*. El que este tipo de demostración tenga nombre, se debe a que hay otras formas de demostración, tal y como veremos en la Sección 2.3. Un ejemplo de una demostración directa es la demostración del Teorema 2.1.3.

¿Como construimos demostraciones directas? No hay una sola respuesta a esta pregunta, pero existen algunas estrategias útiles. Para empezar, es importante reconocer que lo "directo" en una demostración directa es la forma en la que se lee la demostración una vez usted ha finalizado de escribirla. La demostración completa empieza en el principio (el enunciado P) y termina en el final (el enunciado Q), y muestra como llegar lógicamente desde P hasta Q. La manera en la que usted piensa acerca de la demostración es otro asunto completamente distinto. La forma en la que se ve una demostración una vez ha sido terminada puede tener poca relación a la forma en la que fue pensada, especialmente para las demostraciones más difíciles. La escritura de una demostración matemática rigurosa es como la escritura de un artículo literario, para el cual se han de tomar notas, resaltar conceptos importantes, preparar un borrador y revisarlo cierto número de veces.

Cuando se construye una demostración, la primera cosa que se debe de hacer es especificar que se está asumiendo, y que es lo que se está intentando demostrar. Esta observación puede parecer trivial, pero el autor ha visto a muchos estudiantes saltarse este importante paso, en un afán de llegar a los detalles (los cuales usualmente son más interesantes). Luego entonces, se ha de escoger una estrategia para la demostración; una de estas estrategias es la demostración directa. La siguiente etapa es llegar a una demostración, usando la estrategia escogida. Si usted no es capaz de llegar a una demostración usando la estrategia escogida, quizás debería usar otra estrategia. No hay una forma fija de llegar a una demostración; requiere de experimentación, jugar con los conceptos y probar diferentes cosas. Por supuesto, a medida que aumenta la experiencia, algunas formas estándar de construir demostraciones en situaciones familiares empiezan a surgir por si solas.

Aún cuando la estrategia escogida es la demostración directa, hay un cierto número de formas de descubrir los detalles de la demostración. Para encontrar una demostración directa de $P \to Q$, podría intentar asumir P, jugar un poco con el enunciado, y ver hacia donde lo puede llevar. O quizás puede poner su atención en Q, determinando que es lo que se necesita para que Q pueda ser demostrado. O quizás podría hacer una combinación de estos dos enfoques, con la esperanza de llegar a la solución "en el medio". Sea como sea que se esté trabajando con la demostración, una vez que ha llegado a un entendimiento informal, solo se ha completado la etapa del "trabajo exploratorio" en la construcción de la demostración. Sigue entonces la siguiente etapa, la cual es escribir la demostración en su forma final. No importa que tan compleja sea la ruta que se tomó a la hora de pensar la demostración, el manuscrito final debe ser directo y lógico. En una demostración directa, el escrito debe empezar con P e ir paso a paso hasta que se ha llegado a Q. Por lo tanto, este tipo de demostración tiende a tener la siguiente forma.

Demostración. Suponga que P es verdadera. . . . (argumentación) . . . Por lo tanto, Q es verdadera.■

Estamos entonces listos para dar dos ejemplos simples de una demostración directa. Pondremos más detalles aquí de los que normalmente se pondrían, con el objetivo de que cada paso sea tan explícito como sea posible. Empezaremos con una definición que concierne a los enteros.

Definición 2.2.1. Sean a y b enteros. El número a **divide** al número b si existe un entero q tal que $aq = b$. Si a divide a b, escribimos $a|b$, y decimos que a es un **factor** de b, y que b es divisible entre a.

Antes de discutir el contenido de la Definición 2.2.1, necesitamos hacer una observación importante acerca de su estructura lógica. La definición dice que "el número a divide al número b si . . . ", donde . . . describe una cierta condición que involucra a los números a y b. Estrictamente hablando, hubiera sido más apropiado escribir "si y solo si" en lugar de solo "si", ya que ciertamente se quiere decir que si la condición no es verdadera, entonces no decimos que a divide a b. Sin embargo, es una costumbre en las definiciones escribir "si" en lugar de "si y solo si", ya que se asume que si la condición no se cumple, entonces el término siendo definido no puede ser aplicado. Nos apegaremos a esta costumbre, pero es importante pensar en que el significado de las definiciones es "si y solo si".

Para mostrar la validez de un enunciado de la forma "$a|b$", es necesario encontrar un entero q tal que $aq = b$. Por lo tanto, un enunciado de la forma "$a|b$" es un enunciado existencial.

La expresión "$a|b$" no debe ser confundida con la fracción "a/b". La última es un número, mientras que la primera es una forma de escribir el enunciado "el entero a divide al entero b". Por ejemplo, aunque no es sensible escribir la fracción $7/0$, es perfectamente razonable escribir la expresión $7|0$, porque 7 divide a 0, ya que $7 \cdot 0 = 0$. Debido a esta confusión potencial, y también para evitar expresiones ambiguas tales como $1/2 + 3$ (¿es $\frac{1}{2} + 3$ o $\frac{1}{2+3}$?), sugerimos escribir todas las fracciones como $\frac{a}{b}$ en lugar de a/b.

Tenemos ahora dos resultados simples acerca de la divisibilidad. La demostración de cada teorema es precedida por el trabajo exploratorio, para mostrar como podría uno llegar a formular tal demostración.

Teorema 2.2.2. *Sean a, b y c enteros. Si* $a|b$ *y* $b|c$*, entonces* $a|c$*.*

Trabajo exploratorio. Nuestro objetivo es mostrar que $a|c$, por lo que tenemos que encontrar un entero k tal que $ak = c$. Somos libres de escoger cualquier k en el que podamos pensar. Ya que $a|b$ y $b|c$, existen enteros q y r tal que $aq = b$ y $br = c$. Substituyendo la primera ecuación en la segunda parece una buena idea a intentar, y obtenemos $(aq)r = c$. Reordenando el lado izquierdo de esta ecuación, vemos que $k = qr$ es una buena elección.

Demostración. Suponga que $a|b$ y $b|c$. Luego, existen enteros q y r tal que $aq = b$ y $br = c$. Definamos el entero k como $k = qr$. De esto se sigue que $ak = a(qr) = (aq)r = br = c$. Ya que $ak = c$, concluimos que $a|c$. ■

Compare la demostración con el trabajo exploratorio. La demostración puede no parecer substancialmente mejor que el trabajo exploratorio a primera vista, e incluso puede parecer un poco misteriosa para alguien que no ha hecho el trabajo exploratorio. Aún así, la demostración es mejor que el trabajo exploratorio, aunque en un caso tan simple la ventajas pueden no ser aparentes. A diferencia del trabajo exploratorio, la demostración empieza con las hipótesis y llega lógicamente a la conclusión, usando la definición de divisibilidad precisamente, tal y como fue enunciada. Más adelante veremos ejemplos donde el trabajo exploratorio y la demostración son llamativamente distintos.

Teorema 2.2.3. *Cualquier entero divide a cero.*

Trabajo exploratorio. En el enunciado de este teorema no se nos dan variables particulares, en contraste el teorema anterior (el cual fue expresado en términos de a. b y c. Para demostrar algo acerca de cualquier entero posible, escogemos uno arbitrario, digamos, n. Luego, necesitamos mostrar que $n|0$. Ciertamente no bastaría con escoger un número en particular, digamos 5. y entonces mostrar que 5 divide a 0. Una vez hemos escogido un n arbitrario, el resto de los detalles de la demostración son extremadamente simples.

Demostración. Sea n un entero. Observemos que $n \cdot 0 = 0$. Por lo tanto $n|0$. ■.

El primer paso en demostrar un teorema frecuentemente involucra reformularlo en una manera más útil, como escoger n en la demostración anterior. El lector podría pensar que, en comparación al trabajo exploratorio de los dos teoremas anteriores, la forma en la que escribimos las demostraciones involucra “cubrir nuestra pista”. Aunque pueda parecer que estamos haciendo eso, el propósito de la escritura apropiada de demostraciones no es esconder nada, sino estar seguros de que lo que intuitivamente parecía una buena idea, es de hecho lógica. La única forma de verificar que una demostración es realmente válida es escribirla de forma apropiada, y tal escrito no incluye todo lo que usted pensó cuando estaba descubriendo los detalles de la demostración. La demostración debe ser válida por si misma, sin tener referencia alguna a lo que fue escrito en el trabajo exploratorio. Por ejemplo, no todos los argumentos son reversibles, y un argumento que funcionaba hacia atrás durante el trabajo exploratorio puede no funcionar cuando se escribe hacia adelante, y solo escribiendo la demostración apropiadamente podemos verificar si la idea realmente funciona. El pensamiento intuitivo que pudo haber sido útil formulando la demostración debe ser reemplazado por lógica deductiva en la demostración final.

En resumen, hay dos pasos principales en el proceso de producir una demostración rigurosa: formularla y escribirla. Estas dos actividades son relativamente distintas, aunque en algunas demostraciones que son muy simples, usted podría formular a medida que va escribiendo. En la mayoría de los casos, se debe formular la demostración antes de escribirla. Para una demostración dificil la relación entre formular y escribir es esencialmente dialéctica. Se formula una demostración, se intenta escribirla, se encuentran algunas fallas, se vuelve a la etapa de formulación, y así sucesivamente.