Estrategias para demostraciones

El rigor es al matemático lo que la moralidad es al hombre - André Weil (1906 - 1998)

2.1 Demostraciones matemáticas - Que son y por qué las necesitamos

No todas las matemáticas involucran demostraciones. Aprendemos bastante de aritmética en la escuela mucho antes de aprender como demostrar que las leyes de la aritmética son correctas. Las matemáticas se originaron en el mundo antiguo, en varias culturas, antes de la noción de demostración. Fue la contribución de los antiguos griegos (quienes, contrario a la creencia popular, no crearon las matemáticas, ni siquiera la geometría) brindar la noción de demostración en las matemáticas. El primer uso de una demostración es generalmente atribuido a Tales de Mileto, quien vivió en el siglo6 A.C. Euclides, quien vivió en Alexandria en el siglo 3 A.C, trajo la noción de demostraciones basadas en axiomas a su primer punto de éxito. Mirar [Hea21] para una discusión en matemáticas griegas antiguas.

Euclides usó un sistema axiomático -el cual es necesitado para hacer demostraciones- en el campo de la geometría. Hoy, virtualmente todas las ramas de la matemática pura son basadas en sistemas axiomáticos, y el trabajo en la matemática pura involucra la construcción de demostraciones rigurosas para teoremas nuevos. Gran parte de las grandes matemáticas del pasado han sido reformuladas con una precisión no encontrada en su tratamiento original. El álgebra abstracta, por ejemplo, la cual ha recibido su forma moderna solo en los últimos cien años, reconstruye el álgebra elemental estudiada en bachillerato en una forma rigurosa y axiomática. Mucha de la matemática aplicada hoy también tiene bases rigurosas (aunque el trabajo de los matemáticos aplicados, si bien no es menos retador que el de la matemática pura, no siempre está orientado hacia las demostraciones).

De igual forma, la importancia de las demostraciones debe ser puesta en la perspectiva correcta. La intuición, la experimentación el incluso el juego no son menos importantes en el clima matemático de hoy en día que el rigor, porque es solo por nuestra intuición que decidimos que resultados nuevos deberíamos intentar demostrar. La relación entre nuestra intuición y el rigor formal no es algo trivial. Las demostraciones formales y las ideas intuitivas ocupan esencialmente reinos distintos, y no podemos “demostrar” que una idea intuitiva es verdadera. Establecemos sistemas formales que reflejan nuestra intuición lo más cercanamente posible; luego entonces usamos lo que demostramos de forma rigurosa para expandir nuestro entendimiento intuitivo, lo cual apunta a nuevos teoremas, requiriendo más demostraciones rigurosas, y así sucesivamente.

Lás matemáticas se han movido con el tiempo en la dirección del mayor rigor posible, aunque las causas de esto esto se las dejaremos a los historiadores de las matemáticas. Podemos, aún así, articular un número de la razones por las cuales los matemáticos hoy en día usan demostraciones. La razón principal, por supuesto, es asegurarnos de que algo es verdadero. Contrario a la creencia popular, las matemáticas no son un juego formal en el cual derivamos teoreamos de axiomas arbitrariamente escogidos. En lugar de eso, discutimos diversos tipos de objetos matemáticos: algunos geométricos (como por ejemplo, círculos), algunos algebráicos (como por ejemplo, los polinomios), algunos analíticos (como por ejemplo, las derivadas), entre otros. Para entender estos objetos completamente, necesitamos tanto de la intuición como del rigor. Nuestra intuición nos dice lo que es importante, lo que creemos podría ser correcto, lo que deberiamos intentar a continuación, entre otras cosas. Desafortunadamente, los objetos matemáticos son a menudo tan complicados o abstractos que nuestra intuición a veces falla, incluso para los matemáticos más experimentados. Usamos demsotraciones rigurosas para verificar que un enunciado dado, el cual es aparentemente cierto, es en realidad cierto.

Otro uso de las demostraciones matemáticas es poder explicar por que algunas cosas son verdaderas, aunque no todas las demostraciones hacen esto. Algunas demostraciones nos dicen que ciertos enunciados son verdaderos, pero no dan una luz intuitiva sobre sus objetos de estudio. Otras demostraciones pueden ayudar a plicar las ideas que subyacen el resultado que está siendo demostrado; tales demostraciones son preferibles, aunque cualquier demostración, incluso si no es intuitiva, es mejor que ninguna. Una tercera razón para tener demostraciones en las matemáticas es pedagógica. Un estudiante (o incluso un matemático experimentado) podría sentir que entiende un concepto. pero es a menudo solo cuando se intenta construir una demostración, que surge un entendimiento más profundo. Finalmente, una demostración matemática es una forma de comunicar a otra persona una idea que una persona cree de forma intuitiva, pero que otra no.

¿De que consiste una demostración rigurosa? La palabra “demostración” tiene diferentes significados en diferentes búsquedas intelectuales. Una “demostración” en la biología consiste en datos experimentales los cuales confirman una cierta hipótesis; Una “demostración” en sociología o psicología podría consistir en los resultados de una encuesta. Lo que es común para todas las formas de demostraciones es que son argumentos que convencen a los practicantes más experimentados en el campo dado. Es también el caso en las demostraciones matemáticas. Tales demostraciones son, ultimadamente, argumentos convincentes que muestran que las conclusiones deseadas se deducen logicamente de la hipótesis dada.

No hay una definición formal de demostración que los matemáticos usen (excepto para los matemáticos que estudian el campo de la lógica), cuando desarrollan teorías formales de demostraciones, pero estas teorías son distintas a la forma en las que los matemáticos trabajan en el día a día). Aunque ya hemos discutido brevemente las reglas de inferencia y las derivaciones lógicas en la sección 1.4, en lo que estaremos interesados en el resto de este libro es en la forma en la que los matemáticos contemporáneos hacen demostraciones, en pos de prepararlo a usted para los tipos de demostraciones y los conceptos matemáticos básicos que se encontrará en cursos matemáticos más avanzados.

Los matemáticos que no trabajan en el campo de la logíca nunca escriben demostraciones como cadenas de símbolos y reglas de inferencia, por cierto número de razones. La primera y principal, es que las demostraciones matemáticas son a menudo tan largas y complicadas como para ser descompuestas convientemente en formato de dos columnas (enunciado - justificación). Una segunda razón, es que las ideas principales de la demostración, no sus detalles lógicos, son el problema principal en el que deseamos enfocarnos, y por lo tanto ni siquiera mencionaremos las reglas de inferencia lógica que se están utilizando, sino, solo la justificación matemática de cada paso. La tercera razón, es que los matemáticos que no se especializan en el campo de la lógica, es decir, la mayoría de los matemáticos, encuentran las cadenas largas de símbolos lógicos, no solo desagradables a la vista, si no tamibén bastante difíciles de seguir. Mirar [EFT94, pp. 70 - 71] para un ejemplo completo de poner una demostración matemática estándar en teoría de grupos en un formato de dos columnas usando lógica formal. Un vistazo a la diferencia entre la versión "matemática" y la versión "lógica" de la demostración, en términos de tanto longitud como complejidad, debería bastar para convencer al lector del por que los matemáticos hacen las cosas en la forma en la que las hacen.

Hasta cierto punto, los matemáticos relacionan a las demostraciones de la misma forma en la que el público general reacciona a menudo al arte - lo saben cuando lo ven. Pero una demostración no es como un trabajo de arte moderno, donde la auto - expresión y la cretividad son clave, y las reglas están para romperse, sino más bien como el arte clásico, el cual sigue cierto conjunto de reglas formales. (Esta analogía no debe ser vista como una aprobación de la muy común reacción negativa del público ante el arte moderno serio - el arte clásico simplemente provee la analogía que necesitamos aquí). Tambien, similarmente al arte, aprender a reconocer y construir demostraciones matemáticas rigurosas se logra no solo discutiendo la filosofía de lo que constituye una demostración, sino aprendiendo las técnicas básicas, estudiando demostraciones correctas, y lo más importante, haciendo un monton de ellas. Tal y como criticar el arte es una cosa y hacer arte es otra, filosofar acerca de las matemáticas y hacer matemáticas son actividades distintas (aunque, por supuesto, ayuda al practicante de cada una saber algo de la otra). Para una discusión más extense acerca de la naturaleza conceptual del las demostraciones, mirar [Die92, Sección 3.2] o [EC89, Capítulo 5], y para una discusión más general sobre la actividad matemática mirar [Wil65] o [DHM95].

Ultimadamente, una demostración matemática es un argumento convicente que empieza desde las premisas, y logicamente deduce una conclusión deseada. La forma en la que alguien puede haber pensado una demostración es una cosa, pero la prueba en si misma debe proceder de forma lógica de inicio a fin. La distinción entre una demostración matemática válida por si misma, y la forma en la fue pensada es algo muy importante que usted ha de tener en cuenta a la hora de hacer sus propias demostraciones. Cuando se está resolviendo un problema, primero debe intentar todo tipo de enfoques para encontrar algo que funcione, quizás empezando con las hipótesis y trabajando hacia adelante, o empezando con la conclusión y trabando hacia atrás, o quizás una combinación de las dos. Cualesquiera sean las exploraciones, un registro de tal exploración nunca debería ser confundido con una demostración. Confundir la exploración con la demostración es un error muy común para los estudiantes que están empezando a estudiar matemáticas avanzadas. Veremos algunos ejemplos de esta diferencia más adelante.

¿Que es lo que demostramos en las matemáticas? Demostramos enunciados, los cuales son usualmente llamados teoremas, proposiciones, lemas, colorarios y ejercicios. No hay mucha diferencia entre estos tipos de enunciados: todos necesitan demostraciones. Los teoremas tienden a ser resultados importantes; las proposiciones son usualmente un poco menos importantes que los teoremas; los lemas son enunciados que son usados en los resultados de otras demostraciones; los colorarios son enunciados que se deducen facilmente de otros resultados; los ejercicios son enunciados que se dejan al lector para que los demuestre. Cuando se discuten las demostraciones, generalmente nos referiremos a "teoremas" cuando nos refiramos a alguno de los teoremas, proposiciones, etc.

Examinemos el enunciado de un teorema muy famoso.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Pitágoras). Sea ABC un triangulo recto, con lados de longitud a, b y c, donde c es la longitud de la hipotenusa. Entonces $a^2 + b^2 = c^2$.

Cuando se le pregunta a los estudiantes sobre lo que dice el teorema de Pitágoras, estos usualmente contestan "$a^2 + b^2 = c^2$". Esta expresión por si misma no es el enunciado del problema - de hecho, no es ni siquiera un enunciado. A menos de que sepamos que a, b y c son los lados de un triangulo rectángulo, siendo c la hipotenusa, no podemos concluir que $a^2 + b^2 = c^2$. (La fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ nunca es cierta para los lados de un triángulo que no es recto). Es crucial expresar los teoremas con todas sus hipótesis si queremos ser capaces de demostrarlos.

No daremos una demostración del teorema de Pitágoras; see [Loo40] para una variedad de demostraciones. Mas bien, queremos considerar su forma lógica. Aunque las palabras "si ... entonces" no aparecen en el enunciado del problema, es aún así un enunciado condicional (tal y como se vió en la sección 1.2). Si hacemos P = "a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo recto, siendo c la longitud de la hipotenusa", y hacemos Q = "$a^2 + b^2 + c^2$", entonces el teorema tiene la forma $P \to Q$. Muchos (si no todos) de los enunciados de teoremas son esencialmente enunciados condicionales, o combinaciones de ellos, incluso si las palabras "si ... entonces" no aparecen de forma explícita. Una demostración de una teorema es por lo tanto un argumento que muestra que una cosa implica a otra, o una combinación de tales argumentos. Usualmente es mucho más facil formular demostraciones para teoremas cuando reconocemos que tienen la forma $P \to Q$, incluso si se nos son dados en una forma distinta.

Los teoremas no son demostraciones en un vacío. Para demostrar un teorema, usualmente necesitamos usar varias definiciones relevantes, y teoremas que ya han sido demostrados. Si no queremos seguir yendo hacia atrás infinitamente, necesitamos empezar con algunos objetos que usamos sin una definición, además de algunos “hechos” de estos objetos que son asumidos sin una demostración. Tales hechos son llamados axiomas, y un cuerpo de conocimiento que puede ser derivado de un conjunto de axiomas es llamado un sistema axiomático. En las matemáticas abstractas modernas, usamos la teoría de conjuntos como la base para todos los argumentos. En cada rama de las matemáticas, se dan entonces axiomas específicos para los objetos que están siendo estudiados. Por ejemplo, en el álgebra abstracta, usamos construcciones tales como grupos, anillos y campos, cada uno de los cuales está definido por una lista de axiomas; los axiomas de los grupos son dados en la Sección 7.2. En los Capítulos 3 - 6 hablaremos acerca de conjuntos, y varios constructos básicos usando conjuntos, tales como funciones y realaciones, los cuales conjuntos forman la base para gran parte de las matemáticas modernas. Nuestra preocupación en el capítulo presente, en contraste, no es la base sobre la cual nos apoyamos para realizar demostraciones, si no más bien la construcción de demostraciones en si. Podría parecer que estamos haciendo las cosas hacia atrás, en el sentido de que no estamos empezando con lo que decimos son las bases de las matemáticas modernas, pero queremos poder dar demostraciones sobre conjuntos en el capítulo 3, por lo que necesitamos saber como construir demostraciones antes de hablar de teoría de conjuntos. Como una base para nuestro trabajo en el presente capítulo, haremos uso de definiciones estándar y propiedades de sistemas numéricos familiares tales como los enteros, los racionales y los números reales. Vamos a asumir que lector es informalmente familiar con estos números. Mirar el apéndice para una breve lista de algunas de las propiedades estándar de los números reales. Concluiremos están sección con nuestro primer ejemplo de una demostración. Probablemente usted esta familiarizado con el enunciado “la suma dos números pares es par”. Este enunciado puede ser visto en la forma $P \to Q$ si lo miramos apropiadamente, ya que en realidad lo que está diciendo es “si n y m son números pares, entonces $n + m$ es un número par”. Para construir una demostración matemática rigurosa de nuestro enunciado (y también para el resultado correspondiente a los números impares), primero necesitamos definiciones precisas de los términos involucrados.

Nuestro teorema se refiere a los enteros, es decir, los números

$$..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$$

y por lo tanto necesitamos asumir que sabemos que son los números enteros, y que tenemos las operaciones de adición, substración, multiplicación y división, y que estas operaciones satisfacen ciertas propiedades estándar, como lo es por ejemplo la ley distributiva. Usando solo esos hechos estándar sobre los enteros, podemos crear la siguiente definición, la cual es la base de nuestra teorema y su demostración.

Definición 2.1.2. Sea n un entero. El número n es par si existe algún entero k tal que $n = 2k$. El número n es par si existe algún entero j tal que $n = 2j + 1$.

Tal y como el lector sabe intuitivamente, y tal y como vamos a demostrar en el Colorario 5.2.6, todo entero es ya sea par o impar, pero ambos.

Estamos ahora listos para demostrar nuestro teorema. Este resultado puede ser visto como algo trivial, pero nuestro punto aquí es ver una demostración correctamente hecha, no aprender un nuevo resultado increíble acerca de los números.

Teorema 2.1.3. Sean n y m enteros.

1. Si n y m son ambos pares, entonces $n + m$ es par.
2. Si n y m son ambos impares, entonces $n + m$ es par.
3. Si n es par y m es impar, entonces $n + m$ es impar.

Demostración.

(1). Suponga que n y m son ambos pares. Luego, existen enteros k y j tales que $n = 2k$ y $m = 2j$. Por lo tanto $n + m = 2k + 2j = 2(k + j)$.

Dado que k y j son enteros, también lo es $k + j$. En consecuencia, $m + n$ es par.

(2) y (3). Estas son partes son demostradas de forma similar a la parte (1), y los detalles son dejados al lector. ■

Hay un cuarto posible caso que no enunciamos en el Teorema 2.1.3, el cual es, el caso en el que n es impar y m es par, ya que ese caso no es realmente diferente de la parte (3) del teorema, y por lo tanto no nos estária diciendo nada nuevo; no hay diferencia en si llamamos al número par n y el número impar m, o viceversa.

La demostración de la parte (1) del Teorema 2.1.3 es relativamente simple, pero hay algunas características que vale la pena mencionar, porque son atípicas a lo que será encontrando en todas las siguientes demostraciones (y en las demostraciones que usted necesitará escribir). Primero, la demostración se basa completamente en la definición de lo que significa ser par o impar. En un gran número de demostraciones, volver a las demostraciones formales es el paso clave, olvidar hacerlo es una fuente grande de errores por estudiantes que están empezando a aprender acerca de demostraciones.

Segundo, observe que la demostración está escrita en Español, de forma gramaticalmente correcta. Se usan frases completas, con puntuación correcta. Cada frase empieza con una letra en mayúscula y termina con un punto, aún si el final de la frase es expresado com una ecuación. Los símbolos y las fórmulas matemáticas hacen parte de las frases, y no son tratadas de forma diferente de otras palabras. Escribiremos todas nuestras demostraciones en este estilo; El trabajo exploratorio, en contraste, puede ser tan caótico como se desee. El método de dos columnas usado para escribir demostraciones, el cual es usado en nuestra discusión sobre argumentos válidos en la Sección 1.4, y es frecuentemente usado en la geometría del bachillerato, debe ser dejado atrás en este punto. Los textos matemáticos y los artículos investigativos son todos escritos en el estilo del Teorema 2.1.3. Mirar la sección 2.6 para una discusión más profunda acerca de escritura matemática.

Una consideración importante a la hora de escribir una demostración es reconocer lo que se necesita ser demostrado y lo que no. No hay una fórmula precisa para tal determinación, aunque el factor principal es el contexto de la demostración. En un libro avanzado en teoría de números, sería innecesario demostrar el hecho de que la suma de dos enteros es par; sería seguro asumir que el lector de tal libro ya habría visto la demostración de este hecho, o podría demostrarlo si mismo. Para nosotros, sin embargo, dado que estamos apenas aprendiendo como hacer tales demostraciones, es a menudo necesario escribir la demostración de este hecho en detalle, aunque sepamos de nuestra experiencia que el resultado es verdadero. Las razones para demostrar hechos ya sabidos son dos: la primera es que para ganar prácitca escribiendo demostraciones, debemos empezar con resultados simples, para despúes enfocarnos en la escritura y no en las dificultades matemáticas; la segunda es que hay casos donde “hechos” que parecen verdaderos de forma obvia, son en realidad falsos, y la única forma de estar seguros es mediante la construcción de demostraciones válidas.

Aunque las demostraciones matemáticas son argumentos lógicas, observe que en la demostración del teorema 2.1.3 no hicimos uso de los símbolos lógicos discutidos en el capítulo 1. En general, no es apropiado usar símbolos lógicos en la escritura de demostraciones matemáticas. Los símbolos lógicos fueron usados en el capítulo 1 para ayudar a familiarizarnos con la lógica informal. Cuando escribimos demostraciones matemáticas, hacemos uso de esa lógica informal, pero usamos Español estándar (o cualesquiera sea el lenguaje que está siendo utilizado).

Aún así, en la demostración del Teorema 2.1.3 hicimos uso de algunas de las rglas de inferencia discutidas en la sección 1.4, aunque como siempre será el caso, estas reglas no son mencionadas de forma explícita en las demostraciones para evitar un tamaño y bagage innecesario. Por ejemplo, la hipótesis de la parte (1) tiene la forma $P \wedge Q$, donde $P =$ “n es par” y $Q =$ “m es impar”. Las demostración empieza asumiendo que $P \wedge Q$ es verdadero. Luego entonces usamos Simplificación para deducir que cada uno, P y Q, son verdaderos, para poder aplicar la definición de número para cada uno, para después deducir de cada uno de los enunciados “existe un entero k tal que $n = 2k$”, y “existe un entero j tal que $m = 2j$”. Luego entonces aplicamos adjunción para deducir que el enunciado “$n = 2k$ y $m = 2j$” es verdadero, para poder hacer el cálculo que involucra $n + m$. Finalmente, hacemos un uso repetido del Silogismo Hipotético para poner todas las partes de la demostración juntas. Por supuesto, aunque los matemáticos generalmente no hacen uso de las reglas de inferencia lógica usadas en sus demostraciones, se debe tener cuidado de que estas estén siendo usadas de forma correcta, aunque no se expresen de forma explícita

Un comentario final en la escritura de demostraciones: ni conceptualizar demostraciones ni escribirlas es fácil, especialmente a medida que el material a consideración se vuelve más y más abstracto. Las matemáticas no son una actividad de velocidad, y usted no debería esperar poder escribir demostraciones rapidamente. A menudo, tendrá que hacer un trabajo exploratorio primero, antes de escribir la demostración. Como parte del trabajo exploratorio, es muy importante descubrir la estrategia general para el problema a resolver, antes de enfocarse en los detalles. ¿Que tipo de demostración es?, ¿Que definiciones se ven involucradas?. A veces una estrategia puede no funcionar, y por tanto, y por lo tanto cualquier enfoque debe ser entendido solo como una posible forma de demostrar el teorema. Si un enfoque falla, intente otro. Todo matemático tiene alguna que otra vez intentar muchas estrategias distintas a la hora de demostrar un teorema antes de encontrar una que funcione; lo mismo aplica para los estudiantes de las matemáticas.