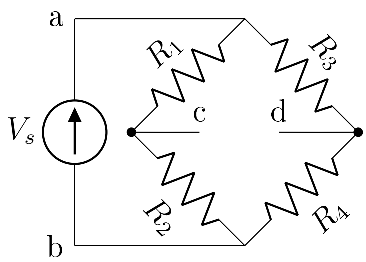
Домашнее задание №1

Есиков Сергей Дмитриевич

07.09.2025

Мостовые цепи.

Задача 1



При каком соотношении сопротивлений резисторов мост Уитстона сбалансирован?

Решение

Будем искать решение через анализ потенциалов во всех узлах

$U_a = 0$

$U_b = U_s$

2. Мост Уитсона сбалансирован, значит напряжение между узлами c и d равно нулю:

$U_{cd} = 0$

$U_{cd} = U_d - U_c$

3. По первому з-ну Кирхгофа:

$0 = I_d = i_{ad} + i_{bd} = \frac{U_{ad}}{R_3} + \frac{U_{bd}}{R_4}$

$0 = \frac{U_d - U_a}{R_3} + \frac{U_d - U_b}{R_4}$

$0 = \frac{U_d}{R_3} + \frac{U_d - U_s}{R_4}$

$\frac{U_s}{R_4} = U_d \cdot \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}\right) = U_d \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_3 R_4}$

$U_d = \frac{U_s R_3 R_4}{R_4(R_3 + R_4)} = U_s \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4}$

4. Аналогично

$U_c = U_s \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

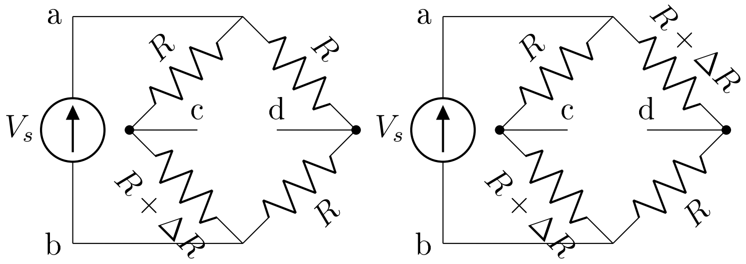
5. Тогда

$U_{cd} = U_s \cdot \left[\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right] = U_s \cdot \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4) \cdot (R_1 + R_2)}$

Получаем

$U_{cd} = 0 \Leftrightarrow R_2 R_3 = R_1 R_4 \Leftrightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$

Задача 2



Мост Уитстона питают стабилизированным напряжением V. Получите и сравните формулы, связывающие напряжение U на диагонали моста с приращением сопротивления ΔR в нижнем плече моста и в другом случае – для моста с одинаковыми приращениями сопротивлений ΔR в нижнем и верхнем плечах моста.

Решение

Пользуясь выводом прошлой задачи, подставим

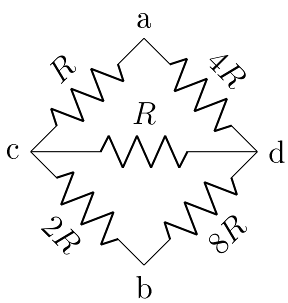
В первом случае:

$U_{cd} = U_s \cdot \frac{(R+\Delta R)R - R^2}{2R\cdot(2R+\Delta R)} = U_s \cdot \frac{R\Delta R}{4R^2+2R\Delta R}$

Во втором случае:

$U_{cd} = U_s \cdot \frac{(R+\Delta R)^2 - R^2}{(2R+\Delta R)^2} = U_s \cdot \left[1 - \left(\frac{R}{2R+\Delta R}\right)^2\right]$

Задача 3



Вычислите сопротивление на входе мостовой схемы.

Решение

Для упрощения вычислений прибегнем к матричной форме законов Кирхгофа

- V — вектор узловых потенциалов относительно выбранного опорного узла (земли);
- A — матрица проводимостей (составленная из сопротивлений сети);
- I — вектор внешних токов, поступающих в узлы от источников.

Элементы матрицы $A = (a_{ij})$ определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{k \neq i} g_{ik}, & \text{если } i = j, \\ -g_{ij}, & \text{если } i \neq j \text{ и узлы } i \text{ и } j \text{ соединены резистором с проводимостью } g_{ij}, \\ 0, & \text{если соединения между } i \text{ и } j \text{ нет.} \end{cases}$$

Закон Кирхгофа для токов (KCL) в узловой форме записывается так:

$$AV = I.$$

Применяя это на вышеизложенную схему, получаем:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_{ac}} + \frac{1}{R_{bc}} + \frac{1}{R_{cd}} & -\frac{1}{R_{cd}} \\ -\frac{1}{R_{cd}} & \frac{1}{R_{ad}} + \frac{1}{R_{bd}} + \frac{1}{R_{cd}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_c \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_a}{R_{ac}} + \frac{V_b}{R_{bc}} \\ \frac{V_a}{R_{ad}} + \frac{V_b}{R_{bd}} \end{bmatrix}.$$

Тогда:

$$V = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_{ad}} + \dfrac{1}{R_{bd}} + \dfrac{1}{R_{cd}} & \dfrac{1}{R_{cd}} \\ \dfrac{1}{R_{cd}} & \dfrac{1}{R_{ac}} + \dfrac{1}{R_{bc}} + \dfrac{1}{R_{cd}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{V_a}{R_{ac}} + \dfrac{V_b}{R_{bc}} \\ \dfrac{V_a}{R_{ad}} + \dfrac{V_b}{R_{bd}} \end{bmatrix}$$

, где

$$\det(A) = \left(\frac{1}{R_{ac}} + \frac{1}{R_{bc}} + \frac{1}{R_{cd}}\right)\left(\frac{1}{R_{ad}} + \frac{1}{R_{bd}} + \frac{1}{R_{cd}}\right) - \left(\frac{1}{R_{cd}}\right)^2.$$

Подставляя все значения, получаем:

$$V = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4R} + \dfrac{1}{8R} + \dfrac{1}{R} & \dfrac{1}{R} \\ \dfrac{1}{R} & \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{V_a}{R} + \dfrac{V_b}{2R} \\ \dfrac{V_a}{4R} + \dfrac{V_b}{8R} \end{bmatrix}$$

,где

$$\det(A) = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{4R} + \frac{1}{8R} + \frac{1}{R}\right) - \left(\frac{1}{R}\right)^2.$$

Упрощаем:

$$\det(A) = \frac{5}{2R} \cdot \frac{11}{8R} - \frac{1}{R^2} = \frac{39}{16R^2}$$

$$V = \frac{16R^2}{39} \begin{bmatrix} \dfrac{11}{8R} & \dfrac{1}{R} \\ \dfrac{1}{R} & \dfrac{5}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{V_a}{R} + \dfrac{V_b}{2R} \\ \dfrac{V_a}{4R} + \dfrac{V_b}{8R} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{V_c = V_d = \frac{2V_a + V_b}{3}}$$

Ток через узел a

$$I_a = \frac{V_a - V_c}{R_{ac}} + \frac{V_a - V_d}{R_{ad}}.$$

$$I_a = \frac{V_a - \frac{2V_a+V_b}{3}}{R} + \frac{V_a - \frac{2V_a+V_b}{3}}{4R}.$$

Упрощая:

$$I_a = \frac{V_a - V_b}{3}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{4R}\right) = \frac{5}{12R}(V_a - V_b).$$

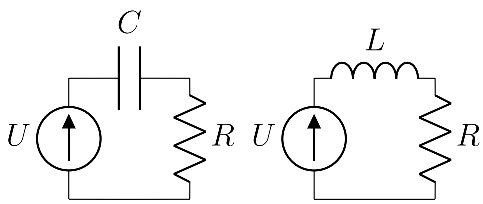
Следовательно, эквивалентное сопротивление:

$$R_{ab} = \frac{V_a - V_b}{I_a} = \frac{12}{5}R.$$

$$\boxed{R_{ab} = 2.4R}$$

Переходной процесс.

Задача 4



К цепям (см. рисунки) в момент t = 0 подключают источник постоянной ЭДС. Начальные условия нулевые: при t < 0 напряжение на емкости, ток через индуктивность равны нулю. Постройте качественно графики поведения во времени токов и напряжений на элементах.

Решение RC-цепь

По з-ну Кирхгофа:

$$U = u_C(t) + i(t)R$$

Ток через конденсатор:

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt}$$

Получаем:

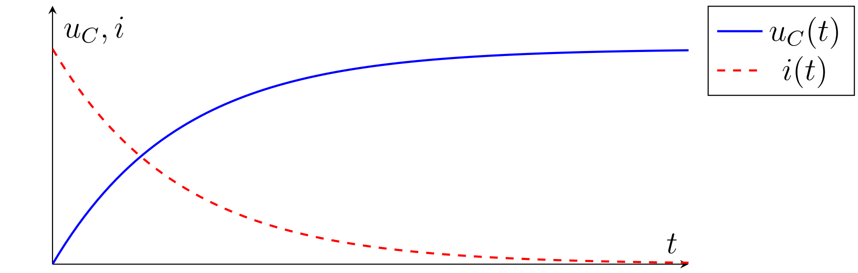
$$U = u_C(t) + RC\frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{RC}$$

Решив диф-ур получаем

$$u(t) = U(1 - e^{-t/RC})$$

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R}e^{-t/RC}$$



RL - цепь

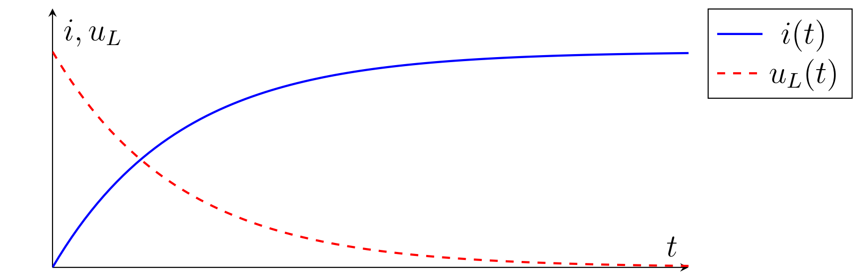
По з-ну Кирхгофа:

$$U = i(t)R + L\frac{i(t)}{dt}$$

Получаем аналогично:

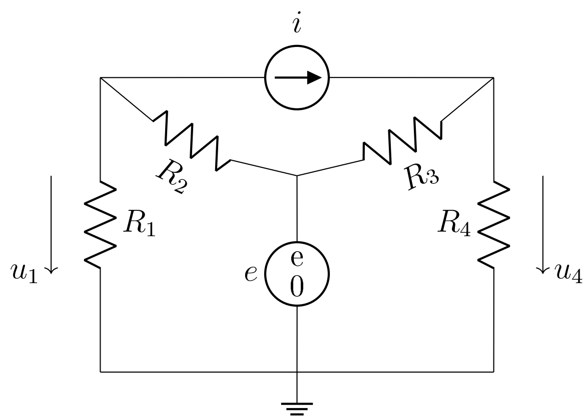
$$i(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

$$u_L(t) = Ue^{-Rt/L}$$



Принцип суперпозиции

Задача 5

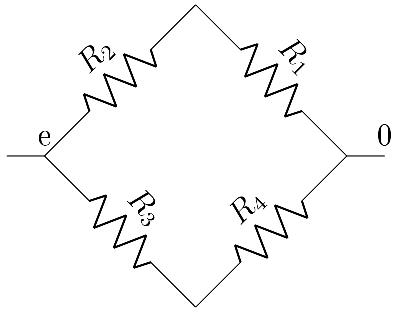


Выведите формулу для напряжения u4, используя принцип суперпозиции

Решение

Рассмотрим вклад каждого источника по отдельности, представив, что второй источник неактивен

Нулевой ток $i = 0$



По закону Ома:

$U^e_{\text{общ}} = e$

$U^e_{12} = U^e_{34} = U^e_{\text{общ}} = e$

$R^e_{34} = R_3 + R_4$

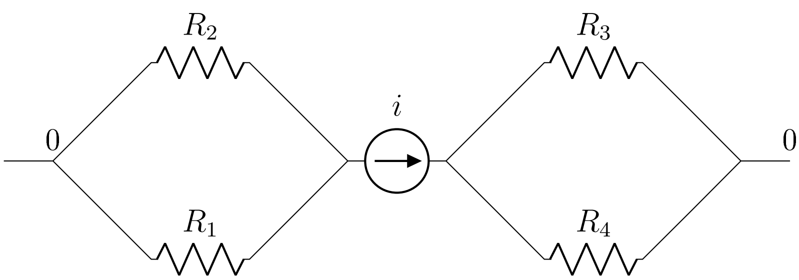
$I^e_{34} = \dfrac{U^e_{34}}{R^e_{34}} = \dfrac{e}{R_3 + R_4}$

$I^e_4 = I^e_3 = I^e_{34}$

$U^e_4 = I^e_4 \cdot R_4 = \dfrac{R_4 \cdot e}{R_3 + R_4}$

$$\boxed{U^e_4 = \frac{R_4 \cdot e}{R_3 + R_4}}$$

Нулевой ЭДС $e = 0$



По закону Кирхгофа:

$I^i_3 + I^i_4 = i$

$\frac{U^i_3}{R_3} + \frac{U^i_4}{R_4} = i$

$i = \frac{U^i_4}{R_3} + \frac{U^i_4}{R_4} = U^i_4 \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_3 R_4}$

$$\boxed{U^i_4 = \frac{i \cdot R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}}$$

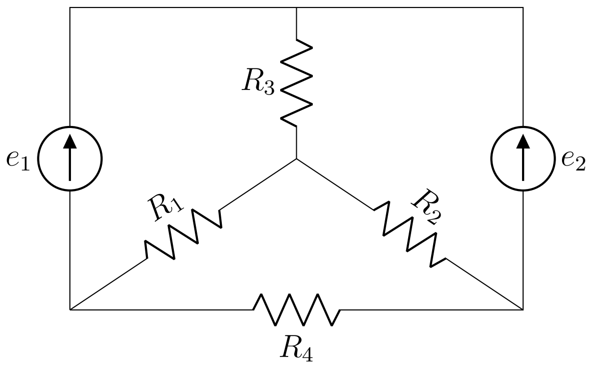
Результат

Суммируя, получаем

$U_4 = U^e_4 + U^i_4 = \dfrac{R_4 \cdot e}{R_3 + R_4} + \dfrac{i \cdot R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$

$$\boxed{U_4 = \frac{R_4 \cdot (e + iR_3)}{R_3 + R_4}}$$

1 Задача 6



В схеме $e_1 = 160$ мВ, $e_2 = 100$ мВ, $R_1 = R_2 = 100$ Ом, $R_3 = R_4 = 400$ Ом.

Выясните:

а. значения токов в ветвях;

б. при каком значении ЭДС e_1 нет тока в ветви с R_4?