1 Определения локальной и глобальной ошибки численного метода. Определение порядка численного метода, связь порядков локальной и глобальной ошибки.

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $x \in (a, b)$

$\Omega_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - сетка

$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$; $\hat{y}_0 \approx y(x_0), \dots, \hat{y}_n \approx y(x_n)$ - проекция $y(x)$ на Ω

$$\hat{y}_{i+1} = \begin{cases} \Phi(x_{i-k+1}, \dots, x_{i-1}, x_i, \hat{y}_{i-k+1}, \dots, \hat{y}_{i-1}, \hat{y}_i) - \text{явная} \\ \Phi(x_{i-k+1}, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i-k+1}, \dots, \hat{y}_{i-1}, \hat{y}_i, \hat{y}_{i+1}) - \text{неявная} \end{cases}$$

Φ - разностная схема

$\varepsilon_{i+1}(h) = \hat{y}_{i+1} - y(x_{i+1})$, $\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_i = y(x_0), \dots, y(x_i)$ - локальн. ошибка

$e_n(h) = \hat{y}_n - y(x_n)$ - глобальная ошибка (накапливает локальные)

p - порядок метода $\Leftrightarrow e_n(h) = O(h^p)$

если $\varepsilon_i(h) = O(h^{p+1})$, то $e_n(h) = O(h^p)$

2 Определения устойчивости и А-устойчивости численного метода.

$y' = \mu y$, $y(0) = 1$, $\mu \in \mathbb{C}$

$\forall \mu, Re(\mu) > 0, \exists h_{кр}: \forall 0 < h < h_{кр} \; \exists C : |e_n(h)| < C$

А-устойчивость: $\forall h, \forall \mu, Re(\mu) > 0 \quad y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

3 Методика построения разностных схем с помощью аппроксимаций производной (в случае регулярного шаблона). Примеры – явный метод Эйлера и метод Эйлера Коши (схема + геометрическая интерпретация, исследовать устойчивость не нужно)

$\Omega_n = \{x_0; x_1, \dots, x_n\}$ $Ш_{2,i} = (x_i, x_{i+1})$ $Ш_{3,i} = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$

$$y'(x_i) = \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h_{i+1}} + O(h_{i+1})$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} \cdot f(x_i, y_i)$$

$$\varepsilon_{i+1} = O(h_{i+1})$$

$$y'(x) = \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_{i-1} + h \cdot f(x_i, \hat{y}_i)$$

$$\varepsilon_{i+1} = O(h^2)$$

4

Интегрально-интерполяционный принцип построения разностных схем на двухточечном шаблоне (описание метода и примеры – вся 268 стр. и до "положительное число" на стр. 269). Интегрируются обе части ДУ вдоль решения на выбранном шаблоне. При этом правая часть уравнения предварительно заменяется интерполяционным многочленом, степень которого должна соответствовать порядку точности схемы. Данный принцип - интегрально-интерполяционный и используется для построения 1-шаговых и к-шаговых явных и неявных схем, в тч схем Адамса.

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx \quad ; \quad f(x, y(x)) = L_{p-1}$$

$p = 1$

$$L_0 = f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) \Rightarrow \boxed{\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} \cdot f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})}$$

$p = 2$

$$L_1 = \frac{(x - x_i)}{h_{i+1}} f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) + \frac{(x - x_{i+1})}{h_{i+1}} f(x_i, \hat{y}_i)$$

$$\boxed{\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2}\left(f(x_i, \hat{y}_i) + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})\right)}$$

$$\hat{y}_{i+1}^0 = \hat{y}_i$$

$$\hat{y}_{i+1}^{k+1} = \Phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_i, \hat{y}_{i+1}^k) \text{ пока } |\hat{y}_{i+1}^{k+1} - \hat{y}_{i+1}^k| > \varepsilon$$

5

Принцип согласования по формуле Тейлора (до формулы 6.41 включительно- Рунге — Кутты четвертого порядка).

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0,\ x \in (a, b),\ \Omega_n,\ Ш_{2,i}$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h_{i+1} y'(x_i) + \frac{1}{2} h_{i+1}^2 y''(x_i) + \ldots + \frac{1}{p!} h_{i+1}^p y^{(p)}(x_i) + O(h_{i+1}^{p+1})$$

$$y' = f(x, y);\ y'' = \frac{d}{dx} f(x, y) = f_x + f_y \cdot y' = f_x + f \cdot f_y$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1}\left[b_1 \cdot K_{1,i} + b_2 \cdot K_{2,i} + \ldots + b_s \cdot K_{s,i}\right],\ \hat{y}_0 = y_0,\ i = \overline{0, n-1}$$

$$K_{1,i} = f(x_i, \hat{y}_i);$$

$$K_{2,i} = f(x_i + c_2 h_{i+1}, \hat{y}_i + h_{i+1} a_{2,1} \cdot K_{1,i});$$

$$K_{3,i} = f(x_i + c_3 h_{i+1}, \hat{y}_i + h_{i+1}(a_{3,1} \cdot K_{1,i} + a_{3,2} K_{2,i}));$$

$$\vdots$$

$$K_{s,i} = f(x_i + c_s h_{i+1}, \hat{y}_i + h_{i+1}(a_{s,1} K_{1,i} + a_{s,2} K_{2,i} + \ldots + a_{s,s-1} K_{s-1,i}));$$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{6}(K_{1,i} + 2K_{2,i} + 2K_{3,i} + K_{4,i}),\ \hat{y}_0 = y_0,\ i = \overline{0, n-1}$$

$$K_{1,i} = f(x_i, \hat{y}_i);\ K_{2,i} = f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} K_{1,i}\right);$$

$$K_{3,i} = f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}; \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} K_{2,i}\right);\ K_{4,i} = f(x_i + h_{i+1}, \hat{y}_i + h_{i+1} \cdot K_{3,i})$$

6. Преимущества и недостатки одношаговых и многошаговых схем + замечание про обеспечение заданной точности у явных одношаговых методов.

	Одношаговые	Многошаговые
+	Простой алгоритм Гибкий шаг	Высокая точность
−	Не учитывает высчитание т-ки	При адаптивном шаге Требует много выч-ий

Замечание для 1-шаг. сх.

1) $h^0 = x^0_{i+1} - x_i$

Выч $\hat{y}^0_{i+1}$

2) $h^1 = h^0/2$

Выч $\hat{y}^1_{i+1}$ в 2 шага

3) Если $|\hat{y}^1_{i+1} - \hat{y}^0_{i+1}| > \varepsilon$

$h^{k+1} = h^k/2$; $\hat{y}^{k+1}_{i+1}$

7. Методика решения задачи Коши методами сеток.

1. Выбрать метод
2. Выбрать сетку Ω_n
3. Найти разгонные точки $x_1, \dots, x_k$
4. Решить задачу Коши в сетке Ω_n
5. Адаптировать шаг

8. Составные схемы - методы прогноза и коррекции (описание + пример А + его геометрическая интерпретация).

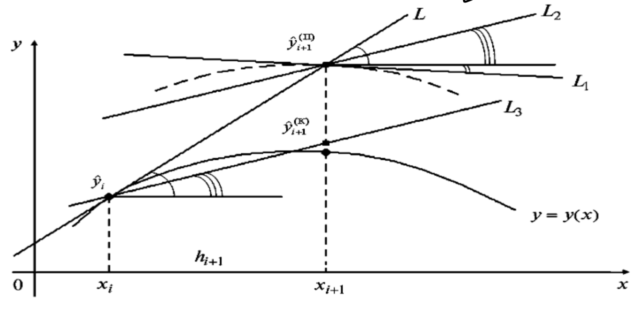
Для каждого $\hat{y}_i$ вычисляется

- $\hat{y}_i^п$ – предсказание (явной схемой)
- $\hat{y}_i^к$ – коррекция (неявной схемой)

Пример (Эйлер/Коши – трапеции)

п: $\hat{y}^п_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} \cdot f(x_i, \hat{y}_i)$ / $\hat{y}^п_{i+1} = \hat{y}_{i-1} + 2h \cdot f(x_i, \hat{y}_i)$

к: $\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h_{i+1}, \hat{y}^п_{i+1})\right]$



L - касательная в x_i

L_1 - касательная в x_{i+1}

L_2 - $(L + L_1)/2$

L_3 - L_2 приложенная к $(x_i, \hat{y}_i)$

9 Конструирование последовательных сплайн методов (весь 6.5.1). 1

1) Решить задачу Коши в сетке Ω_n методом порядка $p=2$ / $p=3$

2) Применить сетку $\{(x_i, \hat{y}_i)\}$ к сплайн-функции

$$\boxed{S_{2,i} = \hat{y}_i + \overline{m}_i \cdot (x - x_i) + \frac{1}{h_{i+1}}\left(\frac{\Delta \hat{y}_i}{h_{i+1}} - \overline{m}_i\right) \cdot (x - x_i)^2, \quad i = \overline{0, n-1}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_{3,i}(x) = \hat{y}_i + \overline{m}_i \cdot (x - x_i) + \left(\frac{3\Delta \hat{y}_i}{h_{i+1}^2} - \frac{3\overline{m}_i}{h_{i+1}} - \frac{\Delta \overline{m}_i}{h_{i+1}}\right)(x - x_i)^2 + \\ + \frac{1}{h_{i+1}^2}\left(-\frac{2}{h_{i+1}} \Delta \hat{y}_i + 2\overline{m}_i + \Delta \overline{m}_i\right)(x - x_i)^3, \quad i = \overline{0, n-1} \end{aligned}}$$

$\overline{m}_i = \hat{y}'(x_i) = f(x_i, \hat{y}_i)$ | $\Delta \hat{y}_i = \hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i$ | $\Delta \overline{m}_i = \overline{m}_{i+1} - \overline{m}_i$

Part 2 | КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

$$\boxed{\begin{aligned} &F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n-1}(x)) = 0, \quad a \le x \le b \\ &\varphi_i(y(a), y'(a), \ldots, y^{n-1}(a)) = 0, \quad i = 1, \ldots, L \\ &\psi_j(y(b), y'(b), \ldots, y^{n-1}(b)) = 0, \quad j = L+1, \ldots, n \end{aligned}}$$

Будем рассматривать $n=2$

$$y'' + p(x)y' - q(x)y = f(x), \quad a \le x \le b$$

$$\begin{array}{l|l} \alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = A & p, q, f \in C^2[a, b] \\ \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = B & \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0 \end{array}$$

Критерий сущ. и единственности решения краевой задачи

$y(x) = 0$ – единственное решение однородной задачи

1) Метод сеток для решения линейной краевой задачи с условиями 1, 2 или 3 рода (подробный алгоритм действий).

2

- Сетка $\Omega_n = \{x_0 + ih,\ i = \overline{0,n}\}$ $\quad h = \dfrac{b-a}{n}$

- Апроксимация производной

$$y'(x_i) \approx \hat{y}'_i = \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_{i-1}}{2h}; \quad y''(x_i) \approx \hat{y}''_i = \frac{\hat{y}_{i-1} - 2\hat{y}_i + \hat{y}_{i+1}}{h^2}$$

$$y(a) \approx \hat{y}_0; \quad y'(a) \approx \hat{y}'_0 = \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h}; \quad y'(b) \approx \hat{y}'_n = \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}}{h}$$

$$y(b) \approx \hat{y}_n;$$

- Подстановка

$$\alpha_0 \hat{y}_0 + \beta_0 \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} = A; \quad \alpha_1 \hat{y}_n + \beta_1 \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}}{h} = B$$

$$\frac{\hat{y}_{i+1} - 2\hat{y}_i + \hat{y}_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_{i-1}}{2h} - q_i \hat{y}_i = f_i, \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)}_{\gamma^i} \hat{y}_{i+1} - \underbrace{\left(\frac{2}{h^2} + q_i\right)}_{\beta^i} \hat{y}_i + \underbrace{\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right)}_{\alpha^i} \hat{y}_{i-1} = \underbrace{f_i}_{\delta^i}$$

- Трехдиагональная система

$$\begin{cases} \left(\alpha_0 + \dfrac{\beta_0}{h}\right) \hat{y}_0 + \dfrac{\beta_0}{h} \hat{y}_1 = A \\ \alpha^i \hat{y}_{i-1} - \beta^i \hat{y}_i + \gamma^i \hat{y}_{i+1} = \delta^i \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dfrac{\beta_1}{h} \hat{y}_{n-1} + \left(\alpha_1 + \dfrac{\beta_1}{h}\right) \hat{y}_n = B \end{cases}$$

② Методы минимизации невязки для линейной краевой задачи (постановка задачи, базисная система функций, определение невязки, алгоритм) 2

$$y'' + p(x)y' - q(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = A \\ \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} p, q, f \in C^2[a,b] \\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0 \end{matrix}$$

Решение ищем в виде

$$\hat{y}_m(x) = \varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x)$$

$\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ – базисные функции

$a_1, \ldots, a_m$ – неопр-ые коэф-ты

- $\varphi_i(x) \in C^2[a,b]$

- $\{\varphi_i\}$ – л.н. на $[a,b]$ сем-во

- $\alpha_0 \varphi_0(a) + \beta_0 \varphi_0'(a) = A$
  $\alpha_1 \varphi_0(b) + \beta_1 \varphi_0'(b) = B$

- $\alpha_0 \varphi_i(a) + \beta_0 \varphi_i'(a) = 0$
  $\alpha_1 \varphi_i(b) + \beta_1 \varphi_i'(b) = 0$ $\quad \Big| \quad i = 1, \ldots, m$

$$\varepsilon(x, a_1, \ldots, a_m) = \hat{y}_m''(x) + p(x)\hat{y}_m' - q(x)\hat{y}_m(x) - f(x)$$ – невязка

$$\varepsilon(x, a_1, \ldots, a_m) = L(\hat{y}_m) - f(x) = L(\varphi_0) + \sum_{i=1}^{m} a_i L(\varphi_i) - f(x)$$

Задача: $\varepsilon \longrightarrow \min(0)$

3 Методы, минимизирующие невязку (коллокации, наименьших квадратов, моментов, Галеркина)

Коллокация:

$\{x_i\}_{i=1}^{m} \in (a, b)$

$$\begin{cases} \varepsilon(x_1; a_1, \dots, a_m) = 0 \\ \vdots \\ \varepsilon(x_m; a_1, \dots, a_m) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 L[\varphi_1(x_1)] + \dots + a_m L[\varphi_m(x_1)] = f(x_1) - L\varphi_0(x_1) \\ \vdots \\ a_1 L[\varphi_1(x_m)] + \dots + a_m L[\varphi_m(x_m)] = f(x_m) - L\varphi_0(x_m) \end{cases}$$

решить систему $m \times m$, если совместна

Наименьших квадратов

$$I = \int_a^b \varepsilon^2(x; a_1, \dots, a_m)\,dx \to \min_{a_1, \dots, a_m}$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 2 \cdot \int_a^b \varepsilon(x; a_1, \dots, a_m) \frac{\partial \varepsilon(x; a_1, \dots, a_m)}{\partial a_j}\,dx = 0$$

Система $m \times m$

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = (f, g)$$

$$\begin{cases} a_1 (L\varphi_1, L\varphi_1) + \dots + a_m (L\varphi_m, L\varphi_1) = (f - L\varphi_0, L\varphi_1) \\ \vdots \\ a_1 (L\varphi_1, L\varphi_m) + \dots + a_m (L\varphi_m, L\varphi_m) = (f - L\varphi_0, L\varphi_m) \end{cases}$$

Моментов

$$I = \int_a^b \varepsilon(x; a_1, \dots, a_m) \cdot \psi_j(x)\,dx = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

- $\psi_j(x) \in C[a, b]$
- $\psi_j \in \{x^\alpha\};\ \{\sin(\alpha x), \cos(\alpha x)\}$

ψ_j - весовые ф-ии

Галёркина

$$\int_a^b \varepsilon(x; a_1, \dots, a_m) \varphi_j(x)\,dx = 0$$

$j = 1, \dots, m$

$$\begin{cases} a_1 (L\varphi_1, \varphi_1) + \dots + a (L\varphi_m, \varphi_1) = (f - L\varphi_0, \varphi_1) \\ \vdots \\ a_1 (L\varphi_1, \varphi_m) + \dots + a (L\varphi_m, \varphi_m) = (f - L\varphi_0, \varphi_m) \end{cases}$$

4

Метод стрельбы для решения краевой задачи (общие соображения + методика решения линейно краевой задачи).

2

5

Метод дифференциальной прогонки (общие соображения + методика решения линейно краевой задачи).

2

Part 3

1. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Примеры каких процессов описывают уравнения тех или иных типов.

$$F\left(x_1, \dots, x_k, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial^{n_i} u}{\partial x_1^{p_1^i} \dots \partial x_k^{p_k^i}}, \dots\right) = 0 \qquad \sum_j^k p_j^i = n_i \qquad p_i^j \in \mathbb{N}_0$$

$n = \max(n_i)$ – порядок

$u(x_1, \dots, x_k) \in C^n(D)$ – классическое р-ие

- Линейное ДУЧП (F – линейна отн. u)
- Квазилинейное ДУЧП (F – линейна отн ∂u)

ЛДУЧП 2-го порядка в канон. форме

$$A(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 2B(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial u} + C(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + E(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + F(x,t)u(x,t) = G(x,t)$$

$x, t \in D$; $A, B, C, D, E, F, G \in C^2(D)$, $u(x,t) \in C^2(D)$

$$|A| + |B| + |C| \neq 0$$

- если $A \dots G$ – const → ур-ие с пост. коэф.
- если $G = 0$ → однородное ур-ие

$$Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G$$

$u_x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$; $u_t = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$; $u_y = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$

$u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$; $u_{tt} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$; $u_{xt} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}$

- Параболическое: $B^2 - AC = 0$
- Гиперболическое: $B^2 - AC > 0$
- Эллиптическое: $B^2 - AC < 0$

в некоторой точке $M(x_0, t_0)$ или на всём D

- $u_t = 0$ – стационарное
- $u_t \neq 0$ – нестационарное

2. Математические постановки задач с дифференциальными уравнениями в частных производных (типы задач, корректная постановка задачи).

Задачи
- Коши
- Краевая
- Смешанная

По кол-ву условий
- Недоопределённая – ∞ реш.
- Переопределённая – 0 реш
- Корректная – 1 ед. реш.

Далее на примере 4-х ур-ий мат. физики рассматриваются примеры построения этих типов задач. Если кратко, ур-ия след.

3. $u_x + u_t = 0$
4. $u_t = a^2 u_{xx}$
5. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$
6. $u_{xx} + u_{yy} = 0$

3. Постановки задач для уравнений первого порядка (на примере уравнения переноса).

3

Начально-краевая задача

$u_x + u_t = 0,\ (x,t) \in (0,L) \times (0,T)$

$u(x,0) = \psi(x),\ x \in [0,L]$ – нач. у.

$u(0,t) = \varphi(t),\ t \in (0,T]$ – кр. у.

Задача Коши

$u_t + u_x = 0,\ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$

$u(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}$ – нач. у.

4. Постановки задач для уравнений параболического типа (на примере уравнения теплопроводности).

Ур-ие теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$0 < x < L;\ 0 < t < T$

$\overline{D} = [0,L] \times [0,T]$

I н-к з.

$u_t = a^2 u_{xx},\ x,t \in D$

$u(x,0) = \psi(x),\ x \in [0,L]$

$u(0,t) = \varphi_1(x),\ t \in (0,T]$

$u(L,t) = \varphi_2(x),\ t \in (0,T]$

II н-к з.

$u_t = a^2 u_{xx},\ (x,t) \in D$

$u(x,0) = \psi(x),\ x \in [0,L]$

$u_x(0,t) = \varphi_1(t)\ t \in (0,T]$

$u_x(L,t) = \varphi_2(t)\ t \in (0,T]$

III н-к з.

$u_t = a^2 u_{xx},\ (x,t) \in D$

$u(x,0) = \psi(x),\ x \in [0,L]$

$\alpha_0 u_x(0,t) + \beta_0 u(0,t) = \varphi_1(t),\ t \in (0,T]$

$\alpha_1 u_x(L,t) + \beta_1 u(L,t) = \varphi_2(t),\ t \in (0,T]$

Зад. Коши

$u_t = a^2 u_{xx},\ x \in \mathbb{R}$

$t \in (0,T)$

$u(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}$

5. Постановки задач для уравнений гиперболического типа (на примере одномерного волнового уравнения).

Волновое ур-ие

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$\overline{D} = [0,L] \times [0,T]$

Н-К з. $(|\alpha_i| + |\beta_i| > 0)$

$u_{tt} = c^2 u_{xx},\ (x,t) \in D$

$u(x,0) = \psi_1(x),\ x \in [0,L]$

$\alpha_0 u_x(0,t) + \beta_0 u(0,t) = \varphi_1(t),\ t \in (0,T]$

$\alpha_1 u_x(L,t) + \beta_1 u(L,t) = \varphi_2(t),\ t \in (0,T]$

Зад. Коши

$u_{tt} = c^2 u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T)$

$u(x,0) = \psi_1(x),\ x \in \mathbb{R}$

$u_t(x,0) = \psi_2(x),\ x \in \mathbb{R}$

6. Постановки задач для уравнений эллиптического типа (на примере уравнения Лапласа).

Ур-ие Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$(x,y) \in \Omega$

Зад. Дирихле

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u|_\Gamma = \varphi(x,y)$

Задача Неймана

$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ (x,y) \in \Omega$

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \varphi(x,y),\ (x,y) \in \Gamma$

III Краевая з.

$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ (x,y) \in \Omega$

$\alpha \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma + \beta u|_\Gamma = \varphi(x,y)$

$(x,y) \in \Gamma$

7 Принципы построения разностных схем (определение разностной схемы(задачи), определения сходимости и аппроксимации для нее, а также порядка сходимости и аппроксимации)

Задача: $L u(x,t) = f,\ (x,t) \in [0,L] \times [0,T]$

Сетка: $\{(x_i; t^n),\ x_i = ih,\ 0 \le i \le I,\ t^n = n\tau,\ 0 \le n \le N\} = D_h$

$h = L/I\ ;\ \tau = T/N \quad |h| = \sqrt{h^2 + \tau^2}$

Сеточная ф-я: $\{u(x_i, t^n),\ 0 \le i \le I,\ 0 \le n \le N\} = u_h$

Приближение: $u_i^n \approx u(x_i, t^n)$; f_h - сеточная f

Разностная сх-ма: $L_h u_h = f_h$, L_h апро-ия L разностными $\frac{\partial}{\partial x}$

Сходимость: $\|\hat{u}_h - u_h\| \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0$

Порядок: $\|\hat{u}_h - u_h\| = O(|h|^p)$

Погрешность апр-ии: $\delta f_h = f_h - L_h \hat{u}_h$

Порядок апр-ии: $\|\delta f_h\| = O(|h|^k)$

8 Принципы построения разностных схем (определение устойчивости разностной схемы, замечания, возможные ситуации с устойчивостью, теорема 8.1.)

Устойчивость:
- $L_h u_h = f_h$ имеет ед-ое реш-ие
- $\|\hat{u}_h\| \le K \|f_h\|$

Устойчивость может быть абсолютной, абсолютной не-, условной

Замечание:

$L_h z_h = \tilde{f}_h$
$\varepsilon_h = u_h - z_h$
$\delta_h = f_h - \tilde{f}_h$
$\Rightarrow \|\varepsilon_h\| \xrightarrow[\|\delta f\| \to 0]{} 0$

Если задача корректна, разн-ая схема устойва и имеет k-й порядок апр-ии, решение разностной зад-чи стремится к решению диф. задачи порядком k

9 Принципы построения разностных схем (формулы для первой и второй производных: 8.20-8.22, 8.26, 8.32 + их погрешности аппроксимации, можно без вывода).

$$\hat{u}_x(x_i, t^n) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \quad \delta = O(h) \qquad \hat{u}_x(x_i, t^n) = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \quad \delta = O(h^2)$$

$$\hat{u}_x(x_i, t^n) = \frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{h} \quad \delta = O(h) \qquad \hat{u}_{xx}(x_i, t^n) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \quad \delta = O(h^2)$$

$$\hat{u}_{xt}(x_i, t^n) = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} - u_{i+1}^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{4h\tau} \quad \delta = O(h^2 + \tau^2)$$

10 Основные этапы решения задач с линейными дифференциальными уравнениями в частных производных разностными методами.

1) Задание сетки
2) Построение разностной схемы
Оценка её порядка
3) Коррекция шага
для достижения устойчивости
4) Решение разностной задачи

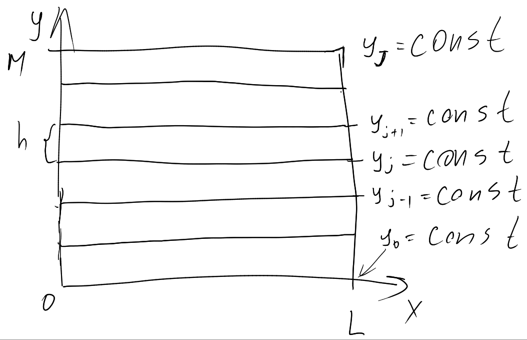
11 Метод прямых (основная идея + замечания)

$u(x,y) \quad (x,y) \in (0,L) \times (0,M) \quad B^2 - AC < 0$

$A u_{xx} + B u_{yx} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G$

$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,M) = \psi(x)$

$u(0,y) = \Phi(y), \quad u(L,y) = \Psi(y)$



$$\hat{u}_y(x, y_j) = \frac{\hat{u}(x, y_{j+1}) - \hat{u}(x, y_{j-1})}{2h}$$

$$\hat{u}_{yy}(x, y_j) = \frac{\hat{u}(x, y_{j+1}) - 2\hat{u}(x, y_j) + \hat{u}(x, y_{j-1})}{h^2}$$

$$\hat{u}_{xy}(x, y_j) = \frac{\hat{u}_x(x, y_{j+1}) - \hat{u}_x(x, y_{j-1})}{2h}$$

$\hat{u}(x, y_j) = \hat{u}_j(x), \quad \hat{u}_x(x, y_j) = \hat{u}_j'(x),$

$\hat{u}_{xx}(x, y_j) = \hat{u}_j''(x), \quad A(x, y_j) = A_j(x)$

$B(x, y_j) = B_j(x), \quad C(x, y_j) = B_j(x), \ldots$

$\hat{u}_0(x) = \varphi(x); \quad \hat{u}_J(x) = \psi(x)$

$\hat{u}_j(0) = \Phi(jh); \quad \hat{u}_j(L) = \Psi(jh)$

Система ур-й метода прямых

$$A_j(x) \cdot \hat{u}_j''(x) + B_j(x) \cdot \frac{\hat{u}_{j+1}'(x) - \hat{u}_{j-1}'(x)}{2h} + C_j(x) \cdot \frac{\hat{u}_{j+1}(x) - 2\hat{u}_j(x) + \hat{u}_{j+1}(x)}{h^2}$$

$$+ D_j(x)\hat{u}_j'(x) + E_j(x)\frac{\hat{u}_{j+1}(x) - u_{j-1}(x)}{2h} + F_j(x)\hat{u}_j(x) = G_j(x), \quad j = 1, \ldots, J$$

Part №4 Задачи

1) Явная и неявная схема

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y, t) \in (0, L) \times (0, M) \times (0, T)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in [0, L] \times [0, M]$$

$$u(x, y, t) = \varphi(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in (0, T]$$

2) Явная схема (расщепление)

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, T)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

3) Неявная схема (расщепление)

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, T)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

4) Метод переменных направлений

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(x, y, t) \quad (x, y, t) \in (0, L) \times (0, M) \times (0, T)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in [0, L] \times [0, M]$$

$$u(x, y, t) = \varphi(x, y, t) \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in (0, T)$$

5) Метод дробных шагов

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, T)$$

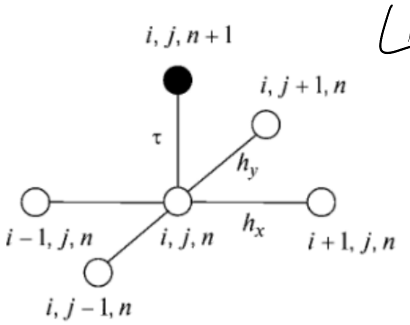
$$u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1 Явная и неявная схема

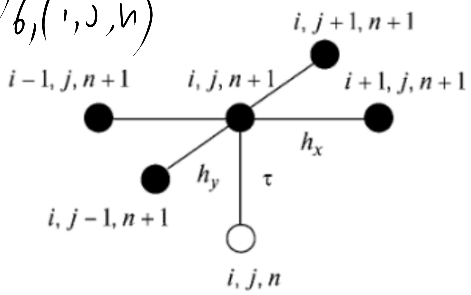
$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y, t) \in (0, L) \times (0, M) \times (0, T)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in [0, L] \times [0, M]$$

$$u(x, y, t) = \varphi(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in (0, T]$$



$Ш_{6,(i,j,n)}$



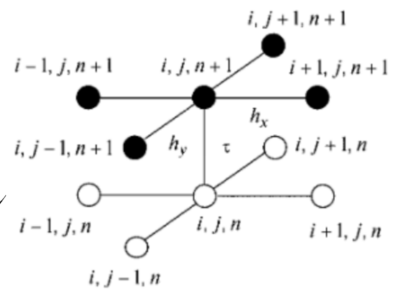
$$\frac{\hat{u}^{n+1}_{i,j} - \hat{u}^{n}_{i,j}}{\tau} = \frac{\hat{u}^{n}_{i+1,j} - 2\hat{u}^{n}_{i,j} + \hat{u}^{n}_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{\hat{u}^{n}_{i,j+1} - 2\hat{u}^{n}_{i,j} + \hat{u}^{n}_{i,j-1}}{h_y^2}$$

$$\hat{u}^{0}_{i,j} = \psi_{i,j}, \quad 0 \le i \le I, \quad 0 \le j \le J$$

$$\hat{u}^{n}_{0,j} = \varphi^{n}_{0,j}, \quad \hat{u}^{n}_{I,j} = \varphi^{n}_{I,j}, \quad 0 \le j \le J, \quad 1 \le n \le N$$

$$\hat{u}^{n}_{i,0} = \hat{\varphi}^{n}_{i,0}, \quad \hat{u}^{n}_{i,J} = \varphi^{n}_{i,J}, \quad 0 \le i \le I, \quad 1 \le n \le N$$

$$\hat{u}^{n+1}_{i,j} = \hat{u}^{n}_{i,j} + \frac{\tau}{h^2}\left[\hat{u}^{n}_{i+1,j} + \hat{u}^{n}_{i-1,j} + \hat{u}^{n}_{i,j-1} + \hat{u}^{n}_{i,j+1} - 4\hat{u}^{n}_{i,j}\right] \quad (h_x = h_y = h)$$



$$\frac{\hat{u}^{n+1}_{i,j} - \hat{u}^{n}_{i,j}}{\tau} = \lambda \cdot \left[\frac{\hat{u}^{n}_{i+1,j} - 2\hat{u}^{n}_{i,j} + \hat{u}^{n}_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{\hat{u}^{n}_{i,j+1} - 2\hat{u}^{n}_{i,j} + \hat{u}^{n}_{i,j-1}}{h_y^2}\right] +$$

$$+ (1 - \lambda) \cdot \left[\frac{\hat{u}^{n}_{i+1,j} - 2\hat{u}^{n}_{i,j} + \hat{u}^{n}_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{\hat{u}^{n}_{i,j+1} - 2\hat{u}^{n}_{i,j} + \hat{u}^{n}_{i,j-1}}{h_y^2}\right]$$

2-3 # Метод расщепления

$$u_t = u_{xx} + u_{yy},\ (x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, T)$$
$$u(x, y, 0) = \psi(x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$Au = u_{xx} + u_{yy}$ $(u_t = Au)$

$A = A_1 + A_2,\ A_1 = u_{xx},\ A_2 = u_{yy}$

$D_h = \{(x_i, y_j, t^n),\ x_i = ih,\ y_j = jh,\ t^n = n\tau\}$

$$u(x, y, t^{n+1}) = u(x, y, t^n + \tau) = u(x, y, t^n) + \tau \frac{\partial u(x, y, t^n)}{\partial t} + O(\tau^2) =$$
$$= u(x, y, t^n) + \tau \cdot Au(x, y, t^n) + O(\tau^2) = (I + \tau A) u(x, y, t^n) + O(\tau^2)$$

• Разобьём задачу на 2 последовательные

З.I: $v_t(x, y, t) = v_{xx}(x, y, t),\ (x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (t^n, t^{n+1})$
$v(x, y, t^n) = u(x, y, t^n),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ n = 1, \ldots, N-1$
$v(x, y, t^0) = \psi(x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$

З.II: $w_t(x, y, t) = w_{yy}(x, y, t),\ (x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (t^n, t^{n+1})$
$w(x, y, t^n) = v(x, y, t^{n+1}),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ n = 0, \ldots, N-1$

$$v(x, y, t^{n+1}) = (I + \tau A_1) u(x, y, t^n) + O(\tau^2),\ n = 1, \ldots, N-1$$

$$w(x, y, t^{n+1}) = (I + \tau A_2) w(x, y, t^n) = (I + \tau A_2) v(x, y, t^{n+1}) + O(\tau^2) =$$
$$= (I + \tau A_2)(I + \tau A_1) u(x, y, t^n) + O(\tau^2) =$$
$$= u(x, y, t^n) + \tau A u(x, y, t^n) + \tau^2 A_1 A_2 u(x, y, t^n) + O(\tau^2) =$$
$$= u(x, y, t^{n+1}) + O(\tau^2)$$

$$\boxed{w_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n+1} + O(\tau^2)}$$

4

Явная схема:

$$\hat{v}^{n+1}_{i,j} = \hat{u}_{i,j} + \tau \frac{\hat{u}^{n}_{i+1,j} - 2\hat{u}^{n}_{i,j} + \hat{u}^{n}_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\hat{u}^{n+1}_{i,j} = \hat{v}^{n+1}_{i,j} + \tau \frac{\hat{v}^{n+1}_{i,j+1} - 2\hat{v}^{n+1}_{i,j} + \hat{v}^{n+1}_{i,j-1}}{h^2}$$

Порядок: $O(\tau^2 + h^2)$

Устойчивость: $\tau \le \frac{h^2}{2}$

Неявная схема:

$$\frac{\hat{v}^{n+1}_{i,j} - \hat{v}^{n}_{i,j}}{\tau} = \frac{\hat{v}^{n+1}_{i+1,j} - 2\hat{v}^{n+1}_{i,j} + \hat{v}^{n+1}_{i-1,j}}{h^2};$$

$$\frac{\hat{\omega}^{n+1}_{i,j} - \hat{\omega}^{n}_{i,j}}{\tau} = \frac{\hat{\omega}^{n+1}_{i,j+1} - 2\hat{\omega}^{n+1}_{i,j} + \hat{\omega}^{n+1}_{i,j-1}}{h^2};$$

$\hat{v}^{0}_{i,j} = \psi_{i,j}$ $\hat{\omega}^{n}_{i,j} = \hat{v}^{n+1}_{i,j}$

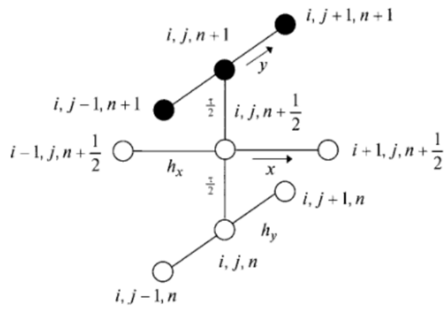
$\hat{v}^{n}_{i,j} = \hat{u}^{n}_{i,j}$ $\hat{u}^{n+1}_{i,j} = \hat{\omega}^{n+1}_{i,j}$

Порядок: $O(\tau^2 + h^2)$

4) Метод переменных направлений

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(x,y,t)$$
$$(x,y,t) \in (0,L) \times (0,M) \times (0,T)$$
$$u(x,y,0) = \psi(x,y)$$
$$(x,y) \in [0,L] \times [0,M]$$
$$u(x,y,t) = \varphi(x,y,t)$$
$$(x,y) \in \Gamma, \quad 0 < t \le T$$

Идея: $t^n - [t^{n+1/2}] \to t^{n+1}$



$t^n \to t^{n+1/2}$

$$\boxed{\frac{\hat{u}^{n+1/2}_{i,j} - \hat{u}^{n}_{i,j}}{\tau/2} = \frac{\hat{u}^{n+1/2}_{i+1,j} - 2\hat{u}^{n+1/2}_{i,j} + \hat{u}^{n+1/2}_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{\hat{u}^{n}_{i,j+1} - 2\hat{u}^{n}_{i,j} + \hat{u}^{n}_{i,j-1}}{h_y^2} + f^{n+1/2}_{i,j}}$$

$$\boxed{\frac{\tau}{2h_x^2} \cdot \hat{u}^{n+1/2}_{i-1,j} - \left(1 + \frac{\tau}{2h_x^2}\right)\hat{u}^{n+1/2}_{i,j} + \frac{\tau}{2h_x^2}\hat{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j} = \frac{\tau}{2} f^{n+1/2}_{i,j} + \frac{\tau}{2h_y^2}\left(\hat{u}^{n}_{i,j+1} - 2\hat{u}^{n}_{i,j} + \hat{u}^{n}_{i,j-1}\right) + \hat{u}^{n}_{i,j}}$$

$t^n \to t^{n+1/2}$

$$\boxed{\frac{\hat{u}^{n+1}_{i,j} - \hat{u}^{n+1/2}_{i,j}}{\tau/2} = \frac{\hat{u}^{n+1/2}_{i+1,j} - 2\hat{u}^{n+1/2}_{i,j} + \hat{u}^{n+1/2}_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{\hat{u}^{n+1}_{i,j+1} - 2\hat{u}^{n+1}_{i,j} + \hat{u}^{n+1}_{i,j-1}}{h_y^2} + f^{n+1}_{i,j}}$$

$$\boxed{\frac{\tau}{2h_y^2} \cdot \hat{u}^{n+1}_{i,j-1} - \left(1 + \frac{\tau}{2h_y^2}\right)\hat{u}^{n+1}_{i,j} + \frac{\tau}{2h_y^2}\hat{u}^{n+1}_{i,j+1} = \frac{\tau}{2} f^{n+1}_{i,j} + \frac{\tau}{2h_x^2}\left(\hat{u}^{n+1/2}_{i-1,j} - 2\hat{u}^{n+1/2}_{i,j} + \hat{u}^{n+1/2}_{i+1,j}\right) + \hat{u}^{n+1/2}_{i,j}}$$

⑤ Метод дробных шагов Ч

$$\boxed{\begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u_{yy},\ (x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(x, y, 0) = \psi(x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}}$$

Расщепление + переменные н-ия

The end

господи

помилуй