2016 届本科生学士学位论文 **学校代码：10269**

本科生毕业论文

题目：对一些组合恒等式的 q-模拟

Title: A q-analogue of Certain Combinatorial Identities

姓　　名：　尹亦达

学　　号：　10121511545

学　　院：　理工学院

专　　业：　数学与应用数学

指导教师：　罗栗

职　　称：　副教授

2016 年 5 月

目　录

摘 要

Wachs[1] 研究了对称群 S_n 上错排列的q计数问题。她采用 maj (major index)作为统计量，在 S_n 上对普通的错排列进行了q模拟，并得出了相应的q-错排列公式。Chow[2] 在Wachs 的基础上研究了B 型Weyl群 B_n 上的错排列问题，采用 $fmaj$ (flag major index) 作为统计量进行了 q 模拟，也得到了相似地公式。本文分成四个部分：序言部分首先介绍了三种平凡的Weyl 群（A型，B/C 型和D型Weyl 群），他们都可以等价成一些满足条件的置换的集合。本文首先介绍了在这三种置换的集合上的一些常用Mahonian统计量，以及他们之间的相互关系。第一部分对Wachs和Chow 的方法做了回顾，并指出了如果想采用他们两人的方法用其他统计量或者在D型Weyl群上继续做一些推广可能会遇到的问题。第二部分给出了基于他们的成果的两个推论，考虑了在A 型和B/C型Weyl群上带有 $k(k \leq n)$ 个不动点的置换的情况，给出了相应的 q 计数公式。第三部分在附录中介绍了一个可以计算各种置换在不同统计量下的q多项式的程序。该程序在关于这类计数问题的研究中起了重要的作用。

关键词： 组合学, 量子化, Mahonian统计量，置换, 不动点，程序模拟

Abstract

Wachs[1] studied the q-enumeration of derangements on the symmetric group S_n . She used maj (major index) as a statistic and obtained a q-analogue of the classical derangement number. Chow[2] also studied the derangements on Type-B Weyl Group and obtained a very similar result. In this paper, I first introduced the Weyl groups of type A, B/C and D which are known as the classical Weyl groups. Note that all these three groups have certain combinatorial interpretations. So I also introduced some combinatorial statistics, which are Mahonian, on these groups. After that, I reviewed the methods which is used by Wachs and Chow and pointed out some limits of their methods if one wants to extend their methods to type D Weyl group. Then, I gave an extension to the derangements on S_n and B_n with k fixed points. Finally, I wrote a computer program to help me calculate q-polynomial based on different statistics. Manual of this program can be found in the appendix.

Key Words: Combinatorics, Q-Analogue, Mahonian Statistics, Permutation, Fixed Points, Computer Simulation

§1 Introduction

通俗来说，所谓对一个定理，等式或者表达式的“量子化”或者叫做“ q 模拟”就是指对现有的公式引入一个额外变量 q ，使得当 $q \to 1$ 时，“量子化”等式又退化到原等式。经典的量子化模拟起始于莱昂哈德·欧拉的研究工作。后来，高斯、柯西、爱德华·海涅的研究成果也为经典量子化模拟做出了贡献。经典量子化模拟从对非负整数的模拟开始，从等式$\lim_{q\to 1} \frac{1-q^n}{1-q} = n$出发，我们可以定义$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$ 为非负整数的量子化。其实,满足极限下“量子化”等式需要退化到原等式的非负整数模拟的定义并不唯一。但上述定义在许多的场合有它的好处。根据上述关于整数量子化的定义，我们很容易想到对于整数阶乘的量子化，比如定义 $[n]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \ldots [n]_q!$ 为非负整数的阶乘的量子化，容易验证，这样的定义是符合量子化要求的。高斯最先研究了形如：

$$\frac{(1-q^{N+M})(1-q^{N+M-1})\ldots(1-q^{M+1})}{(1-q^N)(1-q^{N-1})\ldots(1-q)} = \frac{[N+M]_q!}{[N]_q! \cdot [M]_q!}$$

的多项式[7, P35, 3.3]。其实，上述多项式有许许多多的实际意义，例如说它是一类特定整数划分问题的生成函数。由于高斯率先研究了它，因此我们就称上述 q 多项式为高斯多项式，定义为 $\binom{n}{m}_q = \frac{[n]_q!}{[m]_q! \cdot [n-m]_q!}, 0 \leq m \leq n$ 。

还有个经典的公式为[7, P17, 2.2.1]：

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1})t^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-atq^n)}{(1-tq^n)}, |q| < 1, |t| < 1$$

海涅（1847）首先系统地研究了上述多项式，柯西首先证明了它（Cauchy，1893，P45）。但在这之前，欧拉（1748）已经发现了上述等式的两个推论：

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1-tq^n)^{-1}, |q| < 1, |t| < 1$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1+tq^n), |q| < 1, |t| < 1$$

在很多时候，证明一些q多项式时，上述公式会十分实用。

此外，量子化的结论不仅仅只是对组合恒等式方面有应用。事实上，很多量子化的结论会深刻的反映出数学研究对象的几何或者代数性质。比如我们有如下等式：

$$[n]_q! = \sum_{\sigma \in S_n} q^{inv(\sigma)},$$

其中 S_n 是所有 n 阶全排列的集合，inv 是逆序对的数目。这个n-阶对称群S_n的 inv 值分布函数实际上是一类重要幂零李代数（即 A 型单李代数极大幂零子代数）的Poincare多项式，其中

的每一项系数都是对应的Betti数，即相应的上同调维数。上述关于对称群S_n（即A型Weyl群）以及其上的inv函数（即Weyl群上长度函数）也可以推广到其它 $B \setminus C$ 和 D 类型。但在本文中，我们将不考虑长度函数，而是考虑与之分布函数相同的其它统计量（称为Mahonian统计量）。

本文主要分两部分，第一部分是对典型Weyl群错排列的Mahonian统计量分布进行了综述性概括。第二部分是计算了给定固定点的错排列Mahonian统计量分布函数。

§2 Preliminary

§2.1 Notation

在这一节中首先介绍一些基本的标记。对 $n \in \mathbb{N}$ ，令 $[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$ ($[0] := \emptyset$) 。对 $n, m \in \mathbb{Z}, n \leq m$ ，令 $[n, m] := \{n, n+1, \cdots, m\}$ 。对一个集合 A 记它的势为 $|A|$ 。同时记 $\binom{[n]}{2} := \{S \subseteq [n] : |S| = 2\}$ 。对 $n \in \mathbb{N}^+$ ，令 $[n]_q := 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ $([0]_q = 0)$

§2.2 Weyl Group of Type A

让 S_n 表示有所双射 σ 的集合, $\sigma : [n] \to [n]$ 。对于 $\sigma \in S_n$ 我们可以把它写成如下形式 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ 。通常来说，对于 $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \in \mathbb{Z}^n$ 如果对 $(i, j) \in [n] \times [n]$ 它满足 $i < j$ 且 $\sigma_i > \sigma_j$ 则称它为一个逆序对。我们用 $inv(\sigma)$ 来表示 σ 的逆序对数目。 $\forall \sigma \in S_n$，σ 的所有（A型）降序(descents)集为如下集合：$Des(\sigma) = \{i \in [n-1] : \sigma_i > \sigma_{i+1}\}$ ，记它的势为 $des(\sigma) = |Des(\sigma)|$ 同时，我们定义 $maj(\sigma) := \sum_{i \in Des(\sigma)} i$ ，称它为 σ上的$major\ index$ 。在 S_n 上，有着如下广为人知的等式(MacMahon)：

$$\sum_{\sigma \in S_n} q^{maj(\sigma)} = \sum_{\sigma \in S_n} q^{l(\sigma)} = \sum_{\sigma \in S_n} q^{inv(\sigma)} \tag{0}$$

其中 $l(\sigma)$ 表示置换 σ 的长度。

§2.3 Weyl Group of Type B/C

让 B_n 表示所有从 $[-n, n] \backslash \{0\}$ 到它自身的映射 β 的集合,使得 $\beta(-i) = \beta(i)$ $\forall i \in [-n, n] \backslash \{0\}$ 。它也被称为 $[n]$ 上的有符号置换。相似地，对于 $\beta \in B_n$ 我们可以把它写成 $\beta = \beta_1 \cdots \beta_n$ 的形式。与此同时，还需定义 $Neg(\beta) := \{i \in [n] : \beta_i < 0\}$ 为 β 中的小于零的元素的下标， $N_1(\beta) = |Neg(\beta)|$ 为 β 中的小于零的元素的个数。在 B_n 上，有两个备选的major index 统计量，分别为negative major index ($nmaj$) 和flag major index ($fmaj$) 。Adin[3] 在 B_n 上证明了如下等式：

$$\sum_{\sigma\in B_n} q^{fmaj(\sigma)} = \sum_{\sigma\in B_n} q^{nmaj(\sigma)} = \sum_{\sigma\in B_n} q^{l_B(\sigma)} = [2]_q[4]_q\cdots[2n]_q \tag{1}$$

也即是，在 B_n 上，上述三个统计量是同分布的。其中 $fmaj(\sigma) := 2maj(\sigma) + N_1(\sigma)$ ，$nmaj(\sigma) := maj(\sigma) - \sum_{i\in Neg(\sigma)}\sigma_i$，$l_B(\sigma)$ 为 B_n 上的长度，$l_B(\sigma) = inv(\sigma) - \sum_{i\in Neg(\sigma)}\sigma_i$ 。

例如，取 $\beta = (4,-1,2,7,5,-6,-3) \in B_7$ ，则有 $N_1(\beta) = 3, inv(\beta) = 13, maj(\beta) = 10, fmaj(\beta) = 23, nmaj(\beta) = 20, l(\beta) = 23$

以上讨论都是基于自然序关系进行的，但如果我们采用如下在 $n\in\mathbb{Z}$ 上的偏序

$$-1 \prec -2 \prec \cdots \prec -n \prec \cdots \prec 0 \prec 1 \prec \cdots \prec n \prec \cdots$$

我们可以得到另一套统计量。记在这种序关系下的主因子为 $major(\sigma)$,相应的带符号主因子为 $flag\text{-}major(\sigma) = 2\cdot major(\sigma) + neg(\sigma)$ 在参考文献[3]和[5]中都提到了这种序关系，Adin注意到了在很多情况下 $fmag$ 和 $flag\text{-}major$ 都是同分布的，但他并未给出详细证明。在Chow 的文章中，则是直接采用了第一种自然序关系，用 $fmaj$ 作为他的统计量。

例如，取同样$\beta = (4,-1,2,7,5,-6,-3) \in B_7$，则有$major(\beta) = 16, flag\text{-}major(\beta) = 35$

论述1 (在 B_n 上，maj 与 $flag-major$ 同分布) *考虑如下映射*：

$$\varphi : B_n \to B_n$$
$$\beta \to \beta^{'}$$

任取$\beta = \beta_1\beta_2\cdots\beta_n \in B_n$记$\varphi(\beta) = \beta_1'\beta_2'\cdots\beta_n'$，若$\beta_i > 0$则$\beta_i' = \beta_i$。若$\beta_i < 0$，假设$\beta_i$是$Des(\beta)$中按照自然序关系第 m_i 小的元素，则 $\beta_i^{'}$ 为 $Des(\beta)$ 中第 $neg(\beta) - m_i + 1$ 小的元素。首先 φ 是一个 $B_n \to B_n$ 的双射，且它的逆映射就是他本身。其次，易得$flag-major(\beta) = maj(\varphi(\beta)), \forall\beta \in B_n$

§2.4 Weyl Group of Type D

我们用 D_n 表示 B_n 的所有包含偶数个负数字的置换的子集，记做 D_n ，
$D_n := \{\gamma \in B_n : N_1(\gamma)\ mod\ 2 \equiv 0\}$。对 $\forall\gamma \in D_n$ 定义 $|\gamma|_n := (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, |\gamma_n|)$ 。现对 $\forall\gamma \in D_n$ 定义 $Dmaj(\gamma) = fmaj(|\gamma|_n)$ 同样的，我们可以计算一个 $\gamma \in D_n$ 的长度 $l(\gamma)$ 。从组合的角度我们可以通过如下著名公式计算长度，$l(\gamma) = inv(\gamma) + N_2(\gamma)$。其中$N_2(\gamma) := |\left\{(i,j) \in \binom{[n]}{2} : \gamma_i + \gamma_j < 0\right\}|$

§3 Derangements

§3.1 Derangements in S_n

组合学中有一类问题被称为错排列问题：在一个n个元素组成的排列中，若一个排列的所有元素都不在自己原来的位置上，则这样的排列称为一个错排列。对$n > 1$，记$\mathscr{D}_n := \{\sigma \in S_n : \sigma_i \neq i \ for \ all \ i = 1, 2, \cdots, n\}$ 表示 S_n 中的所有错排列。记 $\mathscr{D}_n$ 中的元素个数为 d_n 表示n 个元素的错排列的个数,则有如下公式:

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \tag{2}$$

如果定义n次对称群 S_n 上的错排列的q模拟（量子化）为 $d_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathscr{D}_n} q^{maj(\sigma)}$ ，则Wachs[1, Thm 4]证明了：

$$d_n(q) = [n]_q! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{[k]_q!} q^{\binom{k}{2}} \tag{3}$$

其中$[n]_q! := [1]_q[2]_q \cdots [n]_q$ 为q-阶乘。巧合的是，注意到当 $q \to 1$ 时，上式退化成了普通型的错排列数公式(2)。

§3.2 Derangements in B_n

同样的，定义 B_n 上的错排列集合为$\mathscr{D}_n^B := \{\sigma \in B_n : \sigma_i \neq i \ for \ all \ i = 1, 2, \cdots, n\}$。注意在集合 $\mathscr{D}_n^B$ 上，上述三个统计量 $fmaj$ ， $nmaj$ 和 l_B 并不是同分布的。CHOK[2, Thm5] 在使用如下定义$d_n^B(q) = \sum_{\sigma \in \mathscr{D}_n^B} q^{fmaj(\sigma)}$的情况下，证明了：

$$d_n^B(q) = [2]_q[4]_q \cdots [2n]_q \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{[2]_q![4]_q! \ldots [2k]_q!} q^{2\binom{k}{2}} \tag{4}$$

其实，如果考虑采用 $flag$-$major$ 代替 maj ，我们的结论是一样的。

论述2 ((在 $\mathscr{D}_n^B$ 上， maj 与 $flag-major$ 同分布) *同样考虑论述(1)中使用的双射* φ *，对于* $\beta = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_n \in \mathscr{D}_n^B$ *，若* $\beta_i < 0$ *则它一定不是一个不动点，而* φ *只会改变* β *中小于0的部分，因而*$\varphi(\beta) \in \mathscr{D}_n^B$*，同样它的逆映射就是他本身，而且*$flag-major(\beta) = maj(\varphi(\beta)), \forall \beta \in \mathscr{D}_n^B$

§3.3 A review of Wachs and Chow's methods

首先先引入一个概念。对于一组给定的置换$\{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n\}$，若它们满足$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \cdots \cap \pi_n = \emptyset$ 且$\pi_1 \cup \pi_2 \cup \cdots \cup \pi_n = [n]$，对$\sigma \in S_n$ 如果 σ 中的元素的相对位置关系与他在对应的π_i中的相对位置关系一致则称σ为$\{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n\}$的一个乱序(Shuffle)，记做$Sh(\pi_1, \cdots, \pi_n)$

例如$Sh([1, 3], [4, 2]) = \{[1, 3, 4, 2], [1, 4, 3, 2], [1, 4, 2, 3], [4, 1, 3, 2], [4, 1, 2, 3], [4, 2, 1, 3]\}$

在Wachs和Chow的证明中，都用到了如下关于$Sh(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n)$ 的定理($Garsia-Gessel$)[4, 定理3.1]

定理1 (Garsia-Gessel) 设$sh(\pi_1, \cdots, \pi_n)$是所有已给置换$\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$的乱序*(Shuffle)*集合，则

$$\sum_{\sigma \in sh(\pi_1, \cdots, \pi_n)} q^{maj(\sigma)} = \binom{n}{n_1, \cdots, n_r}_q q^{maj(\pi_1)+\cdots+maj(\pi_r)}$$

n_i为置换 π_i 的长度$(i \leq i \leq r)$

注意到，在上述定理中，如果$\pi_1, \cdots, \pi_n \in B_n$，Chow指出了该定理对fmaj仍然成立。这是由于$fmaj(\sigma) = 2maj(\sigma) + N(\sigma)$ 而$N(\sigma) = N(\pi_1) + \cdots + N(\pi_n)$，再把 q 用 q^2 替换，则得到了如下推论：

定理2 (推论(Chow)) 设$sh(\pi_1, \cdots, \pi_n)$是所有已给置换$\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$的乱序集合，则

$$\sum_{\sigma \in sh(\pi_1, \cdots, \pi_n)} q^{fmaj(\sigma)} = \binom{n}{n_1, \cdots, n_r}_{q^2} q^{fmaj(\pi_1)+\cdots+fmaj(\pi_r)}$$

n_i为置换 π_i 的长度$(i \leq i \leq r)$

在参考资料[1]中，对于任意一串数列$\alpha = a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$为任意满足 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ 关系的一列数的重排列，Wachs首先定义了 α 的缩减集为把α 中每个a_i用i 替换得到的数列。例如，$(5, 3, 1, 7, 2)$ 的缩减集为 $(4, 3, 1, 5, 2)$ 。对 $\forall \sigma \in S_n$ ，Wachs还定义了 σ 的错排列部分为 σ 中所有不在原位置的数字组成的集合的缩减集，记做 $dp(\sigma)$ 。例如$dp(5, 3, 1, 4, 7, 6, 2) = (5, 3, 1, 7, 2)$ 的缩减集$= (4, 3, 1, 5, 2)$。注意到对于一个置换来说，它的错排列部分仍然是一个错排列。

在介绍了基本定义后，给定 $\alpha \in D_k$ ，Wachs的文章主要引入了一个从$\{\sigma \in S_n | dp(\sigma) = \alpha\}$到$Sh(\alpha, \beta)$ 的保持 Des 不变的双射，其中 $\beta = k+1, k+2, \ldots, n$ 。接下来介绍这个映射：

对于$\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_n \in S_n$，如果有 $\sigma_i > i$ 则定义 σ_i 为 σ 中的一个超越，如果 $\sigma_i < i$ 则定义 σ_i 为 σ 中的一个不足。定义 $s(\sigma)$ 和 $e(\sigma)$ 为 σ 中所有不足和超越的数目。现对于给定的 n ，让 $k \leq n$ ，对于 $\sigma \in S_k$ ，定义 $\tilde{\sigma}$ 为把 σ 中的第 i^{th} 小不足替换为 $i, i = 1, 2, \ldots, s(\sigma)$ ，把它的第 i^{th} 小固定点替换为$s(\sigma) + i, i = 1, 2, \ldots, k - s(\sigma) - e(\sigma)$，并把它的第 i^{th} 大超越替换为$n - i + 1, i = 1, 2, \ldots, e(\sigma)$。注意，由此得到的 $\tilde{\sigma}$ 同时依赖于 σ 和 n 。例如$\sigma = 326541$, n=8,则$\tilde{\sigma} = 638721$。进一步，若有 $k = n$ ，则有$\tilde{\sigma} \in S_n$。若 σ 是一个错排列，则 $\tilde{\sigma}$ 为如下集合A中元素的一个排列,$A = \{1, 2, \ldots, s(\sigma)\} \bigcup \{n - e(\sigma) + 1, n - e(\sigma) + 2, \ldots, n\}$

Wachs证明了如下定理[1, Theorem 2]，

定理3 对于$\alpha \in D_k, k \leq n$，且$\beta = s(\alpha) + 1, s(\alpha) + 2, \ldots, n - e(\alpha)$。定义映射$\varphi$: $\{\sigma \in S_n | dp(\sigma) = \alpha\} \to Sh(\tilde{\alpha}, \beta)$ 为$\varphi(\sigma) = \tilde{\sigma}$，则$\varphi$是一个双射且保持$des$ 不变，即$des(\sigma) =$

$des(\varphi(\sigma))$

有了上述定理，结合Garsia-Gessel定理，我们就可以对$\{\sigma \in S_n | dp(\sigma) = \alpha\}$ 进行 q 计数从而得到 q 错排列公式。

Chow把上述映射作用在 D_n 上，并且证明了$\forall \sigma \in B_k, k \leq n$则$Des(\sigma) = Des(\hat{\sigma}), N_1(\sigma) = N_1(\hat{\sigma})$，再结合Garsia-Gessel定理的推论，Chow 就得到了 D_n 上的错排列公式。

§3.4 Limits of Wachs and Chow's methods

在上面讨论中，我们讨论了在 S_n 上使用 maj 作为统计量以及在 B_n 上使用 $fmaj$ 作为统计量得到的错排列公式。那么，如果我们在 B_n 上使用一个更一般性的"长度"作为统计量会怎么样呢。注意到Chow 用了和Wachs基本一样的一个映射，在保持保持 Des 不变的情况下额外保持了 N_1 ，如此使得Garsia-Gessel定理可以成立。但在 B_n 上，$l(\beta) = inv(\beta) - \sum_{i \in Neg(\beta)} \sigma_i, \forall \beta \in B_n$，Wachs的映射只能保持 inv 不变，Chow 在此基础上保持 N_1 不变也是可以做到的，它们只涉及到置换中数字的序号而不涉及到数字本身的大小，但要同时保持 inv 以及上述 $l(\beta)$ 中的第二项不变则涉及到了数字本身的大小，因此得不到一个好的映射可以使得Garsia-Gessel定理得以使用。

在 D_n 上，由于 D_n 是 B_n 的一个子集，所以上述映射还是可以保持 inv 和 N_1 不变，然而在 D_n 上Garsia-Gessel 定理并没有相应的推论。

§4 Derangements with fixed points

§4.1 Derangements with k fixed points in S_n

接下来，考虑上述两个问题的推论。记$\mathscr{D}_{n,k}$为 D_n 中带有 $k(k \leq n)$ 个不动点的所有错排列组成的集合。若定义$d_{n,k}(q) = \sum_{\sigma \in \mathscr{D}_{n,k}} q^{maj(\sigma)}$, 则有

$$d_{n,k}(q) = [n]! \sum_{j=k}^{n} \frac{(-1)^{j-k}}{[k]![j-k]!} q^{\binom{j-k}{2}} \tag{5}$$

注意到当 $q \to 1$ 时，(5)式也退化成了普通型的带 k 个不动点的错排列数公式：$d_{n,k} = n! \sum_{j=k}^{n} \frac{(-1)^{j-k}}{k!(j-k)!}$。

证明1 等式*(5)*

把*(5)*式改写，

$$\begin{aligned} d_{n,k}(q) &= \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}[n-k]!\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{[j]!}q^{\binom{j}{2}} \\ &= \binom{n}{k}_q [n-k]!\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{[j]!}q^{\binom{j}{2}} \\ &= \binom{n}{k}_q d_{n-k}(q) \end{aligned} \tag{4.1}$$

根据*Wachs[1, Corollary 3]*，有：

$$\begin{aligned} &\forall \alpha \in \mathscr{D}_k, 0 \le k \le n, \\ &\sum_{dp(\sigma)=\alpha, \sigma\in S_n} q^{maj(\sigma)} = q^{maj(\alpha)}\binom{n}{k}_q \end{aligned} \tag{4.2}$$

因此，

$$\begin{aligned} d_{n,n-k}(q) &= \sum_{\forall\alpha\in\mathscr{D}_k}\sum_{dp(\sigma)=\alpha,\sigma\in S_n} q^{maj(\sigma)} \\ &= \sum_{\alpha\in\mathscr{D}_k} q^{maj(\alpha)}\binom{n}{k}_q \\ &= d_k(q)\binom{n}{k}_q \end{aligned} \tag{4.3}$$

把k用$n-k$替换，即得到了*(5)*式

§4.2 Derangements with k fixed points in B_n

记 $\mathscr{D}^B_{n,k}$ 为 B_n 中带有 $k(k \le n)$ 个不动点的所有错排列组成的集合。若定义$d^B_{n,k}(q) = \sum_{\sigma\in\mathscr{D}^B_{n,k}} q^{fmaj(\sigma)}$, 则有

$$d^B_{n,k}(q) = [2]_q[4]_q\cdots[2n]_q\sum_{j=k}^{n}\frac{(-1)^{j-k}}{[2]_q[4]_q\cdots[2k]_q[2]_q[4]_q\cdots[2j-2k]_q}q^{2\binom{j-k}{2}} \tag{6}$$

证明2 等式*(6)*

把（*6*）式改写，

$$
\begin{aligned}
d_{n,k}^B(q) &= \frac{[2]_q[4]_q\cdots[2n]_q}{[2]_q[4]_q\cdots[2k]_q}\cdot\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{[2]_q[4]_q\cdots[2j]_q}q^{2\binom{j}{2}} \\
&= \frac{[2]_q[4]_q\cdots[2n]_q}{[2]_q[4]_q\cdots[2k]_q}\cdot\frac{[2]_q[4]_q\cdots[2n-2k]_q}{[2]_q[4]_q\cdots[2n-2k]_q}\cdot\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{[2]_q[4]_q\cdots[2j]_q}q^{2\binom{j}{2}} \\
&= \binom{n}{k}_{q^2}\cdot d_{n-k}^B(q)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

我们的目标即证明上式。根据*Chow[2, Proposition 4]*，有：

$$
\begin{aligned}
&\forall\alpha\in\mathscr{D}_k^B, 0\le k\le n, \\
&\sum_{dp(\sigma)=\alpha,\sigma\in B_n} q^{fmaj(\sigma)} = q^{fmaj(\alpha)}\binom{n}{k}_{q^2}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

注意此σ为 B_n 中有 $n-k$ 个不动点且 $dp(\sigma)=\alpha$ 的一个元素。因此，

$$
\begin{aligned}
d_{n,n-k}^B(q) &= \sum_{\forall\alpha\in\mathscr{D}_k^B}\sum_{dp(\sigma)=\alpha,\sigma\in B_n} q^{fmaj(\sigma)} \\
&= \sum_{\alpha\in\mathscr{D}_k^B} q^{fmaj(\alpha)}\binom{n}{k}_{q^2} \\
&= d_k^B(q)\binom{n}{k}_{q^2}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

把 k 用 $n-k$ 替换，即得到了*(6)*式

论述3 (在$\mathscr{D}_k^B$ 上，maj 与$flag-major$ 同分布)　证明同之间证明论述*(2)*的完全一致。

Reference

[1] Wachs, Michelle L. *On q-derangement numbers.* Proceedings of the American Mathematical Society 106.1 (1989): 273-278.

[2] Chow, Chak-On. *On derangement polynomials of type B.* Sém. Lothar. Combin 55 (2006).

[3] Adin, Ron M., Francesco Brenti, and Yuval Roichman. *Descent numbers and major indices for the hyperoctahedral group.* Advances in Applied Mathematics 27.2 (2001): 210-224.

[4] Garsia, Adriano M., and Ira Gessel. *Permutation statistics and partitions.* Advances in Mathematics 31.3 (1979): 288-305.

[5] Biagioli, Riccardo. *Signed Mahonian polynomials for classical Weyl groups.* European Journal of Combinatorics 27.2 (2006): 207-217.

[6] Gessel, Ira M. *Symmetric functions and P-recursiveness.* Journal of Combinatorial Theory, Series A 53.2 (1990): 257-285.

[7] Andrews, George E. The theory of partitions. No. 2. Cambridge university press, 1998.

[8] Rakotondrajao, Fanja. *k-fixed-points-permutations.* Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 7.A36 (2007): A36.

§3 Program Manual

§5 Appendix: Manual

程序代码托管在Github网站上，链接如下：https://github.com/ExtraYin/Q-Analogue 注意，程序依赖的SymPy，可以在以下网址获得http://www.sympy.org/zh/

程序结构

- $Q - Analogue$
  - $GeneratePermutations.py$
    - $generatePermutationsWithKFixedPoints(n, k)$
    - $generateSignedPermutationsWithKFixedPoints(n, k)$
    - $generate\_Even\_Signed\_Permutation\_With\_k\_Fixed\_Points(n, k)$
    - $shuffle(l1, l2)$
  - $SomeStatictics.py$
    - $StatisticsOnAn$
      - $des(\sigma); exc(\sigma); inv(\sigma); maj(\sigma)$
    - $StatisticsOnBn$
      - $neg(\sigma); fmaj(\sigma); nmaj(\sigma); length(\sigma)$
    - $StatisticsOnDn$
      - $Dmaj(\sigma); length(\sigma)$
  - $q\_analogue.py$
    - $qNumber(n)$
    - $qFactorial(n)$
    - $qCombination(n, k)$
    - $qExp(n)$
    - $performStatisticsOnq(statistic, generator)$

程序介绍

程序主要分为三个部分，第一个部分用来生成各种置换和一些其他种类的排列，例如n阶

普通型置换，n阶带符号置换，n阶有偶数个负数的带符号置换，以及以上三种置换的带有k个不动点的置换。同时，也可以生成$Sh(\alpha, \beta)$和$R(0^k, 1^(n-k))$这样的0,1串。这一部分的内容在GeneratePermutations.py文件中。使用方法如下：

生成5阶置换：

```
from GeneratePermutations import *   #导入这个文件


for perm in Permutation.generatePermutations(5):
    print perm
```

生成5阶带3个不动点的带符号置换：

```
for perm in Permutation.generateSignedPermutationsWithKFixedPoints(5, 3):
    print perm
```

生成$Sh([1, 3, 4], [2, 5])$

```
for perm in Permutation.shuffle(([1,3,4],[2,5])):
    print perm
```

程序的第二部分用于计算各种统计量，例如在 S_n 上的各种统计量des, exc, inv, maj, Des，在 B_n 上的$neg, Neg, fmaj, major, length$等，以及在 D_n 上的 $Dmaj, length$ 等。由于有像是同样叫做“长度”的统计量，但他们在 B_n 和 D_n 上的表现是不同的。因此，它们被归类在了$StatisticsOnAn$,$StatisticsOnBn$和$StatisticsOnDn$三个目录下。例如：

求$\sigma \in B_n$的 inv 和 $flag_major$ ：

```
StatisticsOnBn.inv([2, -5, -3, -1, 4])
StatisticsOnBn.flag_major([2, -5, -3, -1, 4])
```

或者是求$\sigma \in D_n$的$Dmaj$:

```
StatisticsOnDn.Dmaj([2, -5, -3, -1, -4])
```

程序的第三部分是本程序的主题，首先它可以用于计算类似 $[n]_q$ ， $[n]_q!$ 或者是 $\binom{n}{k}_q!$ 类型的 q 级数。例如：

```
QAnalogue.qNumber(5)
QAnalogue.qCombination(5, 3)
```

其次，它主要用于计算如下$\sum_{\sigma\in group} q^{statistic(\sigma)}$形式的$q$多项式。例如：我想验证，在 B_n 上，三种统计量 $fmaj, nmaj$ 和"长度"是不是同分布的，取 $n = 3$,我们可以看到他们的确是相同的。

```
n = 3
QAnalogue.performStatisticsOnq(StatisticsOnBn.fmaj,
                                Permutation.generateSignedPermutations(n))
QAnalogue.performStatisticsOnq(StatisticsOnBn.nmaj,
                                Permutation.generateSignedPermutations(n))
QAnalogue.performStatisticsOnq(StatisticsOnBn.length,
                                Permutation.generateSignedPermutations(n))
```

Acknowledgment

感谢罗栗老师近半年对我的指导，我们通过几十封电子邮件从选题到具体问题都进行了深入的交流。是他使我确定了这个研究方向，并给出了许多帮助。