Лекция 9
Применение теории рядов в математическом анализе

1. Некоторые методы нахождения сумм числовых и функциональных рядов

1.1. *Нахождение суммы ряда по определению*

Данный метод предполагает нахождение частичной суммы S_n и вычисление $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Использование метода уже было продемонстрировано в главе 1, §1. Рассмотрим еще некоторые задачи.

Пример 1. Найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

Решение. Составим частичную сумму ряда

$$S_n=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+......+(\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})+$$
$$+(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=$$

$$=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}.$$

Здесь воспользовались равенством

$$(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}.$$

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}) = 1-\sqrt{2}$.

Ответ: данный ряд сходится и имеет сумму $S = 1-\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$.

Решение. В данном случае рассматривается убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 1/2$ и первым членом $b = 1/3$. Сумма находится по формуле

$$S=\frac{b}{1-q}=\frac{1/3}{1-1/2}=\frac{2}{3}.$$

Задание. Найти суммы следующих рядов.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$. *Ответ*: $S=\frac{1}{2}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$, ($a$ - любое, отличное от -1, -2, -3,….).

Указание. Представить общий член ряда $a_n=\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$ в виде суммы дробей вида $\frac{A}{a+n}+\frac{B}{a+n+1}$, найти неопределенные коэффициенты A и B. Затем составить частичную сумму S_n и найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. *Ответ*: $S=\frac{1}{a+1}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)(a+n+2)}$. *Указание*. Использовать представление

$a_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}-\frac{1}{(a+n+1)(a+n+2)}\right]$. *Ответ*: $S=\frac{1}{2(a+1)(a+2)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)\ldots.(a+n+p)}$, $p\geq 1$, p – целое. *Ответ*: $S=\frac{1}{p(a+1)\ldots(a+p)}$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8\cdot 5^n}$. *Ответ*: $\frac{5}{32}$.

6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7\cdot\left(x^2+1\right)^n}$. *Ответ*: $\frac{x^2+1}{7x^2}$, если $x\neq 0$; при $x=0$ ряд расходится.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-5n|x|}$. *Ответ*: $\frac{1}{e^{5|x|}-1}$, если $x\neq 0$; при $x=0$ ряд расходится.

1.2. ***Нахождение суммы числового ряда с помощью ряда Тейлора и ряда Фурье.***

Пример 3. Найти сумму числового ряда $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение. Известно представление

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in\left(-1;1\right].$$

Положим $x=1$. Тогда $\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, т.е. сумма ряда $S=\ln 2$.

Ответ: $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

Пример 4. Найти сумму числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Решение. Известно представление

$$arctg\,(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in\left[-1;1\right].$$

Пусть $x=1$, тогда $arctg(1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$. Поскольку $arctg(1)=\frac{\pi}{4}$, то сумма исходного ряда $S=\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

Задание. Найти суммы числовых рядов, используя разложения в ряд Тейлора.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; *b*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$. *Ответ*: *a*) $e-1$; *b*) e^3-1.

Указание. Разложить функцию $f(x)=x^3-x$, $x\in(0,1)$ в ряд Фурье по синусам.

Ответ: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}$

Задача 4. Вычислить сумму числового ряда

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$; *b*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$; *c*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16n^2-1}$.

Указание. Разложить функцию $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ $x\in(0;\pi)$, в ряд Фурье по косинусам

$\sin\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(nx)$, $x\in[0;\pi]$. Положить $x=0$, $x=\pi$, $x=\pi/2$.

Ответ: *a*) $S=1/2$; *b*) $S=1/2-\pi/4$; *c*) $S=1/2-\pi/(4\sqrt{2})$.

2. Вычисление определенных и несобственных интегралов с

помощью рядов

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

Решение. Используя разложение в ряд Тейлора функции $\ln(1+x)$, получим

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - .... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n-1} + \ldots$$

Интегрируя этот ряд почленно, имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Напомним, что последнее равенство вытекает из разложения в ряд Фурье функции $y = x^2$ на $(-\pi,\pi)$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$.

Решение. Заметим, что данный интеграл является несобственным интегралом (особенности при $x = 0$ и $x = 1$). Рассмотрим

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{\ln x}{1-x}dx = \left|\begin{matrix} z = 1-x \\ dz = -dx \end{matrix}\right| = -\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \int\limits_{1-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\ln(1-z)}{z}dz =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{z^{n-1}}{n}\right)dz = -\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_1} \frac{z^{n-1}}{n}dz =$$

$$= -\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_1} z^{n-1}dz = -\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n^2}\Bigg|_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_1}\right) =$$

$$= -\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1-\varepsilon_1)^n - \varepsilon_2^n}{n^2}\right] = \frac{-\pi^2}{6}.$$

В данном примере использовано представление функции $\frac{\ln(1-z)}{z}$ с помощью ряда

$$\frac{\ln(1-z)}{z} = \frac{1}{z}\ln(1-z) = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-z^n}{n}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}.$$

На отрезке $[\varepsilon_2,\ 1-\varepsilon_1]$ этот степенной ряд равномерно сходится и, следовательно, его можно почленно интегрировать.

Ответ: $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx = \frac{-\pi^2}{6}$.

Задание. Вычислить $J = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos(x))}{\cos(x)}dx$, где $|a|<1$.

Указание. Использовать равенства

$$\int_0^{\pi}(\cos x)^{2m-1}dx = 0;\quad \int_0^{\pi}(\cos x)^{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\pi;\quad \arcsin x = x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{x^{2m+1}}{2m+1}.$$

Ответ: $J = \pi\arcsin a$.

Задание. Вычислить несобственный интеграл

$$J = \int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{e^{2\pi x}-1}.$$

Указание. Сделать сначала замену $t = e^{2\pi x}$, потом замену $u = 1/t$, и свести данный интеграл к примеру 2.

Ответ: $J = \frac{1}{24}$.

Задание. Вычислить приближенные значения определенного интеграла с точностью до 10^{-4}.

1) $\int_0^{0.5}\frac{dx}{1+x^4}$; 2) $\int_0^{0.5}\frac{dx}{e^{x^2}}$; 3) $\int_0^1\frac{\sin(x^2)}{x}dx$; 4) $\int_0^1\frac{1-\cos x}{x^2}dx$;

5) $\int\limits_0^{0.3} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$; 6) $\int\limits_0^{0.5} \frac{arctg(x^2)}{x^2}dx$; 7) $\int\limits_0^{0.6} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

Ответ. 1) 0.4940; 2) 0.4613; 3) 0.4730; 4) 0.4864; 5) 0.0956; 6) 0.4980; 7) 0.6225.

3. Вычисление предела последовательности с помощью теории рядов

Рассмотрим полезный прием, который можно использовать при доказательстве того, что предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n > 0$, равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Такую задачу подчас удобно решать с помощью применения достаточных признаков сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. В самом деле, если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ (выполняется необходимое условие сходимости).

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{[(3n)!]} = 0$.

Решение. Составим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{[(3n)!]}$. Для изучения его сходимости применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{(n+1)}[(3n)!]}{[(3(n+1)!]\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3(3n+1)(n+1)(3n+2)} = e\cdot 0 = 0 < 1.$$

По признаку Даламбера ряд сходится и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(3n)!} = 0.$$

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{100}}{3^n} = 0$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{3^n}$. Применяем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{100}3^n}{3^{n+1}n^{100}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Ряд сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{100}}{3^n} = 0.$$

Заметим, что данная задача может быть решена по правилу Лопиталя, требуется только дифференцировать числитель и знаменатель 100 раз.

Задание

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$.

Указание. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ является сходящимся.

Задача 2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n^2}}{[(7n)!]^n} = 0$.

Указание. Сначала применить радикальный признак Коши, далее воспользоваться решением примера 1.

4. Вычисление значения производной функции в точке

Если функция $f(x)$ представима на некотором интервале с центром в точке x_0 степенным рядом: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то этот ряд является рядом

Тейлора этой функции по теореме единственности. При этом $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Тогда для нахождения значения n-ой производной функции в точке x_0 используется формула

$$f^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n!.$$

Пример 1. Найти $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(n)}$ при $x_0 = 0$, $n = 6$ и $n = 99$.

Решение. Разложим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sin x = \frac{1}{x}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Коэффициент $a_6 = -\frac{1}{7!}$, где $f^{(6)}(0) = -\frac{1}{7!}6! = -\frac{1}{7}$. Коэффициенты при нечетных степенях x в данном разложении равны нулю, в частности $a_{99} = 0$ и, тогда $f^{(99)}(0) = 0$.

Пример 2. Найти $\left(\frac{x}{x^2 + 5x + 6}\right)^{(n)}$ при $x_0 = 0$.

Решение. Разложим функцию $f(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}$ на простейшие дроби

$$\frac{x}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x}{(x+2)(x+3)} = \frac{-2}{x+2} + \frac{3}{x+3}.$$

Представим данные слагаемые в виде ряда в окрестности $x_0 = 0$

$$\frac{-2}{x+2} = \frac{-2}{2(1+\frac{x}{2})} = \frac{-1}{1+\frac{x}{2}} = -(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{2^n}, \qquad |x| < 2,$$

$$\frac{3}{x+3} = \frac{3}{3(1+\frac{x}{3})} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{3^n}, \qquad |x| < 3.$$

Тогда

$$\frac{x}{x^2+5x+6} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \left[\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right]$$

при $|x| < 2$.

Отсюда

$$a_n = (-1)^n \left[\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right]$$ и, следовательно,

$$f^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n! = (-1)^n \left[\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right] \cdot n!.$$

В частности при n=3 имеем $f'''(0) = -\left[\frac{1}{27} - \frac{1}{8}\right] \cdot 3! = \frac{19}{36}$.

Задание

Задача 1. Найти выражение для производной n-го порядка функции $f(x) = x^2 e^{3x}$ в точке $x_0 = 0$. Вычислить производную $f^{(6)}(0)$.

Ответ: $f^{(n)}(0) = n(n-1) \cdot 3^{n-2}$; $f^{(6)}(0) = 2430$.

Задача 2. Найти выражение для производной n-го порядка функции $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+7}$ в точке $x_0 = -1$. Найти значения $f^{(10)}(-1)$, $f^{(15)}(-1)$.

Ответ: $f^{(2n)}(-1) = \frac{(2n)!}{6^{n+1}}$, $f^{(2n+1)}(-1) = 0$; $f^{(10)}(-1) = \frac{10!}{6^6}$; $f^{(15)}(-1) = 0$.

Задача 3. Найти выражение для производной функции n-го порядка $f(x) = \frac{x}{x^2+5x+6}$ в точке $x_0 = -1$.

Ответ: $f^{(n)}(-1) = (-1)^n \cdot [-2 + 3/2^{n+1}] \cdot n!$