Математический анализ-3

Лекция 10

Тема 2. Функции комплексного переменного

2.1. Определение функции комплексного переменного

2.2. Элементарные функции комплексного переменного

2.3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

2.1. Определение функции комплексного переменного

Определение 1. $\boldsymbol{\delta}$*-окрестностью* точки $\boldsymbol{z_0}$ называется множество точек $\boldsymbol{z}$, лежащих внутри круга радиуса $\boldsymbol{\delta}$ с центром в точке $\boldsymbol{z_0}$, т. е. множество точек, удовлетворяющих неравенству $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_0}|<\boldsymbol{\delta}$.

Определение 2. *Областью* комплексной плоскости называется множество точек $\boldsymbol{D}$, обладающее следующими свойствами:

1) вместе с каждой точкой из D этому множеству принадлежит и некоторая окрестность этой точки, то есть некоторый круг без границы с центром в этой точке (свойство открытости);

2) две любых точки из D можно соединить ломаной, состоящей из точек D (свойство связности).

Определение 3. Область называется *односвязной*, если любую замкнутую кривую, лежащую в этой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.

Определение 4. *Граничной точкой* области $\boldsymbol{D}$ называют такую точку, которая сама не принадлежит $\boldsymbol{D}$, но в любой окрестности которой лежат точки этой области.

Определение 5. Совокупность граничных точек области $\boldsymbol{D}$ называют *границей* этой области.

Определение 6. Область $\boldsymbol{D}$ с присоединенной к ней границей называется замкнутой областью и обозначается $\overline{\boldsymbol{D}}$.

Определение 7. Замкнутая кривая на комплексной плоскости, не имеющая самопересечений, называется *замкнутым контуром*.

Замечание. Границей области может быть замкнутый контур, не замкнутая кривая или дискретное множество точек, например, D: $|z| \neq 0$, граница – точка $z = 0$.

Определение 8. Говорят, что в области $\boldsymbol{D}$ определена функция $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$, если каждой точке $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{D}$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или целое множество (многозначная функция) значений $\boldsymbol{\omega}$.

Примеры.

1) $\omega = |z|$ – однозначная функция,
2) $\omega = \sqrt[n]{z}$ – n-значная функция, т.к. имеет n корней,
3) $\omega = Argz$ – бесконечнозначная функция, т.к. слагаемое $2\pi k$, входящее в $Argz$, принимает бесконечное число значений при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Геометрически задание функции $\omega = f(z)$ означает задание отображения точек комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости ω.

Пусть $z = x + iy$ и $\omega = f(z)$, тогда $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,

где $u(x, y) = \mathrm{Re} f(z)$ – действительная часть функции, $v(x, y) = \mathrm{Im} f(z)$ – мнимая часть функции.

Пример.

Найти действительную и мнимую части функции $\omega = z^2 + 2\bar{z}$.

Положим $z = x + iy$,

тогда $\omega = (x + iy)^2 + 2(x - iy) = x^2 + 2xyi - y^2 + 2x - 2iy = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy - 2y)$.

$u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ – действительная часть функции,

$v(x, y) = 2xy - 2y$ – мнимая часть функции.

2.2. Элементарные функции комплексного переменного

Основные элементарные функции комплексного переменного определяются следующими формулами ($z = x + iy$)

1. *Дробно-рациональная функция*

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + a_m}.$$

В частности, рациональной функцией является многочлен

$$\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n.$$

2. *Показательная функция* e^z определяется равенством

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (cosy + isiny).$$

В частности, при $z \in R$ ($y = 0$) функция e^z совпадает с обычной экспонентой, а при $x = 0$ получаем формулу Эйлера: $e^{iy} = cosy + isiny$.

Свойства показательной функции:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$, где z_1, z_2 – комплексные числа,
в) $e^{z+2\pi ki} = e^z (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, т.е. e^z – периодическая функция с периодом $2\pi i$.

$$e^{z+2\pi ki} = e^{x+iy+2\pi ki} =$$
$$= e^x \big(\cos(y + 2\pi k) + isin(y + 2\pi k)\big) = e^z$$

3. *Тригонометрические функции*

Из формулы Эйлера $\begin{cases} e^{ix} = cosx + isinx \\ e^{-ix} = cosx - isinx \end{cases}$ следует, что $\forall x \in R$ $cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $sinx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

По аналогии с этими равенствами введем функции комплексного переменного $cosz$ и $sinz$ $\forall z \in C$:

$$cosz = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \; sinz = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Функции $sinz$ и $cosz$ – периодические функции с периодом $T = 2\pi$. Справедливо основное тригонометрическое тождество: $cos^2 z + sin^2 z = 1$.

Уравнение $sinz = 0$ имеет решение $z = k\pi$,

$cosz = 0$ имеет решение $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Функции tgz и $ctgz$ определяются равенствами $tgz = \frac{sinz}{cosz}$, $ctgz = \frac{cosz}{sinz}$. Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все формулы тригонометрии.

4. *Гиперболические функции*.

Гиперболические функции shz, chz, thz, $cthz$ определяются равенствами

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$thz = \frac{shz}{chz}, cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Основное гиперболическое тождество $ch^2 z - sh^2 z = 1$.

5. *Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями*

$$sinz = -ishiz, \quad cosz = chiz, \quad tgz = -ithiz,$$

$$ctgz = icthiz, \quad shz = -isiniz, \quad chz = cosiz,$$
$$thz = -itgiz, \quad cthz = ictgiz.$$

Отсюда получим формулы для вынесения *i* из аргумента:

$$\cos(iz) = chz, \sin(iz) = ishz$$

6. *Логарифмическая функция Ln z*, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\operatorname{Ln} z = ln|z| + iArgz = ln|z| + i(argz + 2\pi k),$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Функция $\omega = \operatorname{Ln} z$ является многозначной.

Определение 9. Главным значением $\operatorname{Ln} \boldsymbol{z}$ называется значение, получаемое при $\boldsymbol{k = 0}$: $\boldsymbol{lnz = ln|z| + iargz}$.

Тогда: $\operatorname{Ln} z = ln|z| + i(argz + 2\pi k) = lnz + 2\pi ki$

<u>Свойства $\omega = Ln\, z$:</u>

$$\text{a) } \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\text{b) } \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

7. *Общая показательная функция* определяется равенством

$$a^z = e^{z\mathrm{Ln}a},$$

где a – любое комплексное число, $a \neq 0$.

8. *Общая степенная функция* $w = z^a$, где a – любое комплексное число, $z \neq 0$ $z^a = e^{a\mathrm{Lnz}}$.

<u>*Примеры*</u> вычисления значений функции:

1) Вычислить $\mathrm{Ln}(-1)$.

$\mathrm{Ln}(-1) = ln|-1| + i(arg(-1) + 2\pi k) = i(\pi + 2\pi k) =$

$= (2k+1)\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) Вычислить $sin(3-i)$.

$sin(3-i) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(3-i)} - e^{-i(3-i)}\right] = -\frac{i}{2}\left[e^{1+3i} - e^{-1-3i}\right] =$

$= -\frac{i}{2}[e(cos3 + isin3) - e^{-1}(cos3 - isin3)] =$

$= -i\left[cos3\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right) + isin3\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)\right] =$

$= sin3ch1 - icos3sh1.$

Можно воспользоваться формулами тригонометрии:

$sin(3-i) = sin3 \cdot cosi - cos3 \cdot sini = sin3 \cdot ch1 - icos3 \cdot sh1$.

3) Вычислить i^{2i}.

$$i^{2i} = e^{2i\mathrm{Ln}i}.$$

Вычислим отдельно $\mathrm{Ln}(i)$. Используя формулу, получим:

$\mathrm{Ln}(i) = ln|i| + i(argi + 2\pi k) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$

$|i| = \sqrt{0 + 1^2} = 1, ln|i| = ln1 = 0, argi = \frac{\pi}{2},$

$i^{2i} = e^{2i \cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = e^{-\pi - 4\pi k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4) Решить уравнение $sinz = 3$, корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Уравнение можно переписать в виде: $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3$

или $e^{2iz}-6ie^{iz}-1=0$ – это квадратное уравнение относительно e^{iz}.

Его корни

$$e^{iz}=3i\pm 2\sqrt{2}i=i\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)$$

Прологарифмируем полученное равенство

$$iz=\mathrm{Ln}\left(i\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)\right)=ln\left|i\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)\right|+i\left(arg\left(i\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)\right)+2\pi k\right),$$

$k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

Вычислим $\left|i\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)\right|=3\pm 2\sqrt{2}$, $arg\left(i\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$

и подставим полученный результат, получим

$$iz=ln\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),$$

отсюда вычислим

$$z=\frac{1}{i}ln\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}+2\pi k-iln\left(3\pm 2\sqrt{2}\right).$$

Получили две серии корней

$$z_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k-iln\left(3+2\sqrt{2}\right),\ z_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k-iln\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Преобразуем z_2.

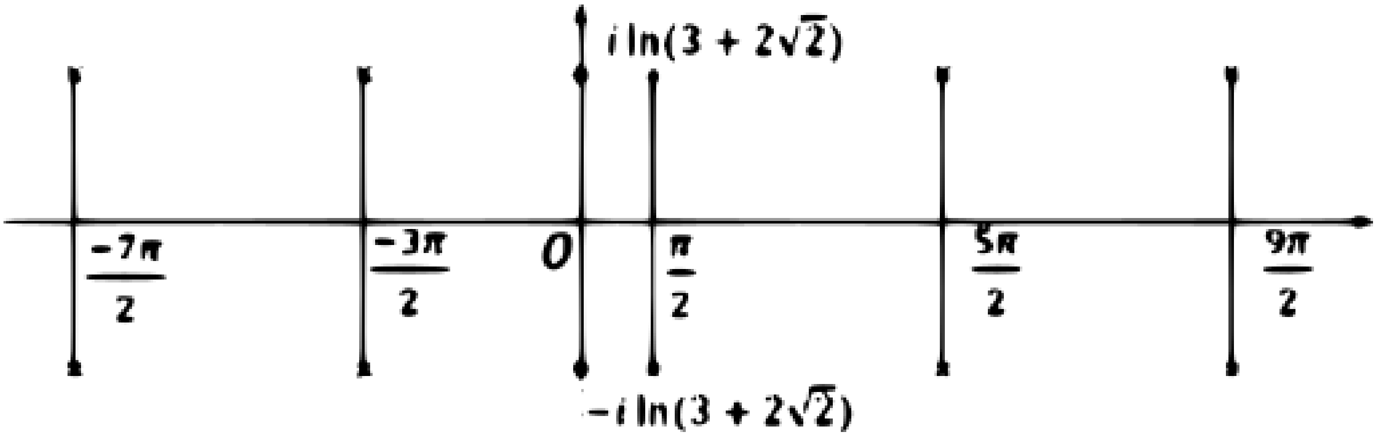
$$ln\left(3-2\sqrt{2}\right)=ln\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}{\left(3+2\sqrt{2}\right)}=ln\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=-ln\left(3+2\sqrt{2}\right),$$

Поэтому окончательно имеем:

$$z_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k-iln\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

$$z_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k+iln\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

Корни находятся на двух прямых, параллельных оси Ox и отстоящих от нее на расстояние $ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$.



2.3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть $f(z)$ определена и однозначна в некоторой окрестности точки z_0, кроме, может быть, самой точки z_0.

Определение 10. Комплексное число A называется пределом однозначной функции $f(z)$ в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z \to z_0} f\,(z) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon): \forall z: 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$. z_0 и A – конечные точки комплексной плоскости.

Геометрически это означает, что для всех точек из δ-окрестности точки z_0 значения функции лежат в ε-окрестности точки A.

Определение 11. Однозначная функция $f(z)$, заданная в области D, называется непрерывной в точке $z_0 \in D$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f\,(z) = f(z_0)$.

Определение 12. Функция, непрерывная в любой внутренней точке области, называется непрерывной в этой области.

Теорема 1. Для того чтобы функция комплексной переменной $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была непрерывна в точке $z_0 = z_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ были непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$ по совокупности переменных x и y.

Таким образом, функция $\omega = f(z)$ непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в этой же точке. Поэтому все свойства непрерывных функций двух действительных переменных переносятся без изменений на функции комплексного переменного.

Замечание. Правила действий с пределами и непрерывными функциями действительной переменной остаются справедливыми и для функции комплексной переменной.

<u>Пример.</u>

Вычислить предел функции $\lim\limits_{z \to -2i} \frac{z^2+iz+2}{z+2i}$.

Непосредственная подстановка в числитель и знаменатель предельного значения аргумента $z = -2i$ обращает их в нуль и приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Разложим числитель и знаменатель на множители, выделяя множитель $(z + 2i)$:

$$\lim_{z \to -2i} \frac{z^2 + iz + 2}{z + 2i} = \lim_{z \to -2i} \frac{(z + 2i)(z - i)}{z + 2i} = \lim_{z \to -2i} (z - i) = -3i.$$