Математический анализ-3

Лекция 11

Тема 2. Функции комплексного переменного

2.4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана
2.5. Связь аналитических и гармонических функций

Тема 3. Интегрирование функций комплексного переменного

3.1. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства

2.4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z. Пусть точки z и $z + \Delta z$ принадлежат области D.

Обозначим

$$\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Определение 13. Однозначная функция $\omega = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz, стремящемся к нулю. Этот предел называется производной функции $f(z)$ в данной точке z и обозначается $f'(z)$ или ω', т.е.

$$\omega' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}.$$

Замечание. Правила дифференцирования остаются справедливыми и для функции комплексной переменной.

Определение 14. Однозначная функция $f(z)$ называется *аналитической* в точке z_0, если она дифференцируема в самой точке z_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она дифференцируема в любой точке области.

Теорема 2. Для того чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (x,y) и чтобы в этой точке имели место равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

называемые условиями Коши-Римана. При этом формулы для производной функции $f'(z)$ имеют вид:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Замечание. Условия Коши-Римана (необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции комплексного переменного) позволяют решать вопрос об аналитичности функции в области.

Примеры. Проверить аналитичность функции.

1). $f(z) = z^2$.

Выделим действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ части функции, подставив вместо $z = x + iy$:

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

т.е. $\mathrm{Re} f(z) = u(x,y) = x^2 - y^2$

$\mathrm{Im} f(z) = v(x,y) = 2xy$.

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы во всех точках (x,y). Проверим условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

Условия выполнены для любых x, y, следовательно, $f(z) = z^2$ аналитична во всей комплексной плоскости.

2) $f(z) = 3\overline{z} + 2$.

Выделим действительную и мнимую части функции, подставим вместо $\overline{z} = x - iy$:

$f(z) = 3(x - iy) + 2 = (3x + 2) - 3yi$,

т.е. $\mathrm{Re}f(z) = u(x,y) = 3x + 2$,

$\mathrm{Im}f(z) = v(x,y) = -3y$.

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы во всех точках (x,y), проверим выполнение условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(3x+2)}{\partial x} = 3, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(-3y)}{\partial y} = -3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(3x+2)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(-3y)}{\partial x} = 0$$

так что $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, т.е. первое условие Коши-Римана не выполнено ни в одной точке комплексной плоскости.

Значит, функция $\omega(z) = 3\overline{z} + 2$ нигде не дифференцируема, а, следовательно, не является аналитической.

3). $f(z) = e^{z}$.

$f(z) = e^{x+iy} = e^{x}(cosy + isiny) = e^{x}cosy + ie^{x}siny$

$$\mathrm{Re}f(z) = u(x,y) = e^{x}cosy$$

$$\mathrm{Im}f(z) = v(x,y) = e^{x}siny$$

$u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы как функции действительных переменных при любых x, y (имеют непрерывные частные производные).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}cosy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{x}cosy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x}siny, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{x}siny$$

Условия Коши-Римана выполнены для любых x, y, следовательно, $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости.

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x cosy + ie^x siny = e^x(cosy + isiny) = e^z$.

4). $f(z) = \overline{z} \cdot z$

$f(z) = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$

$\mathrm{Re} f(z) = u(x, y) = x^2 + y^2$

$\mathrm{Im} f(z) = v(x, y) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\ , \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Условия Коши-Римана выполнены только в точке (*0*;*0*), функция нигде не аналитична.

Свойства аналитических функций.

Если$f_1(z)$, $f_2(z)$ аналитические функции в области D, то

1) $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z) \cdot f_2(z)$ – также аналитические в области D,

2) $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ аналитична во всех точках области D, где $f_2(z) \neq 0$.

При этом имеют место формулы:

$$[f_1(z) \pm f_2(z)]' = f_1'(z) \pm f_2'(z)$$

$$[cf_1(z)]' = cf_1'(z)$$

$$\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \frac{f_1'(z)f_2(z) - f_2'(z)f_1(z)}{f_2^2(z)}$$

$$[f_1(z) \cdot f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z)$$

Справедлива также таблица производных:

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

$$(e^z)' = e^z$$

$$(\mathrm{Ln} z)' = \frac{1}{z}$$

$$(cosz)' = -sinz$$

$$(sinz)' = cosz$$

$$(tgz)' = \frac{1}{cos^2 z}$$

$$(ctgz)' = -\frac{1}{sin^2 z}$$

$$(shz)' = chz$$

$$(chz)' = shz$$

2.5. <u>*Связь аналитических и гармонических функций*</u>

Определение 15. Функция $\varphi(x, y)$ называется *гармонической* в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Теорема 3. Если функция $f(z) = u + iv$ аналитична в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются гармоническими в этой области функциями, т. е. $u(x, y), v(x, y)$ *удовлетворяют уравнению Лапласа:* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$

<u>*Доказательство*</u>.

$f(z) = u + iv$ аналитична, следовательно, выполнены условия Коши-Римана:

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, дифференцируем равенство по x

2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, дифференцируем равенство по y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

и сложим их:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Дифференцируем первое равенство по y, второе по x:

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

вычтем из первого второе:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Теорема доказана.

Определение 16. Две гармонические функции, связанные условиями Коши-Римана, называются *сопряженными*.

Теорема 4. Если в области *D* заданы две гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, то из них можно построить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Замечание. Задание одной (действительной или мнимой) части при условии ее гармоничности определяет аналитическую функцию с точностью до константы.

Примеры. Найти аналитическую функцию по ее заданной действительной или мнимой части.

1). $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2$.

Проверим гармоничность функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0,$$

т. е. $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической.

Функция $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2$ и искомая функция $v(x,y)$ должны удовлетворять условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

интегрируем последнее уравнение по y (считая x постоянной), получаем

$$v(x,y) = \int (3x^2 - 3y^2)\, dy + \varphi(x) = 3x^2y - y^3 + \varphi(x).$$

Из второго условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, -6xy = -(6xy + \varphi'(x))$$

$$\varphi'(x) = 0, \varphi(x) = c = const$$

Итак, $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + \text{c}$.

Следовательно,

$$f(x+iy) = (x^3 - 3xy^2 + 2) + i(3x^2y - y^3 + \text{c})$$

Для того, чтобы записать функцию$f(z)$, можно взять

$y = 0, x = z$

$f(x+iy) = (x^3 - 3xy^2 + 2) + i(3x^2y - y^3 + \text{c})$,

тогда $f(z) = z^3 + 2 + i\text{c}$.

2). Найти аналитическую функцию по ее заданной мнимой части: $v(x, y) = 3x + 2xy$ при условии $f(-i) = 2$.

Проверим гармоничность функции $v(x, y)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3 + 2y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической.

Первое условие Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

интегрируем уравнение по x (считая y постоянной), получаем $u(x, y) = \int 2x\,dx + \varphi(y) = x^2 + \varphi(y)$.

Из второго условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \varphi'(y) = -(3 + 2y)$$

$$\varphi(y) = -3y - y^2 + c$$

Итак, $u(x, y) = x^2 - 3y - y^2 + c$.

$f(x + iy) = (x^2 - 3y - y^2 + c) + i(3x + 2xy)$.

Для того, чтобы записать функцию$f(z)$, можно взять

$y = 0$, $x = z$, тогда $f(z) = z^2 + c + i3\mathrm{z}$.

Подставим начальные условия: $2 = -1 + c + 3; c = 0$

Ответ: $f(z) = z^2 + i3\mathrm{z}$.

3. Интегрирование функций комплексного переменного

3.1. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, определенную и непрерывную в области D и кусочно-гладкую кривую L, лежащую в D. Зададим на этой кривой направление обхода: точка A – начало, точка B – конец.

Введем определение интеграла от функции комплексного переменного.

Разобьем L на n частей точками: $z_0 = A$; z_1; ... $z_n = B$.

На каждом участке $[z_{k-1}; z_k]$ выберем произвольную точку J_k, $k = 1, \dots, n$

Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(J_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(J_k) \cdot \Delta z_k.$$

Определение 1. Предел интегральной суммы при $n \to \infty$ и $\max\limits_k \Delta z_k \to 0$ называется интегралом от функции *f(z)* по кривой L, если он существует и не зависит от способа разбиения кривой точками z_k и от выбора точек J_k.

Обозначается:

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k |z_k - z_{k-1}| \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(J_k)\Delta z_k\,.$$

Теорема 1. Если *f(z)* определена и непрерывна на L, то $\oint_L f(z)dz$ существует.

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u(x,y)$, $v(x,y)$ – действительные функции переменных x и y.

Вычисление интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов от действительной и мнимой частей, а именно:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u+iv)d(x+iy) =$$

$$= \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_L u(x,y)dy + v(x,y)dx$$

Основные свойства криволинейных интегралов переносятся на интеграл от функции комплексного переменного:

1. Линейность

$$\int_L [c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)]\,dz = c_1 \int_L f_1(z)dz \pm c_2 \int_L f_2(z)dz,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

2. Аддитивность

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz,$$

где $L_1 \cup L_2$ – кривая, составленная из кривых L_1 и L_2.

3. $\int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz,$

где L^- – кривая, совпадающая с L, но проходимая в противоположном направлении.

4. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\,\Big|_{z_0}^{z_1},$$

где $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

5. Если кривая L задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

начальная и конечная точки дуги L соответствуют значениям параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int_L f\,(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f\,[z(t)]z'(t)dt,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

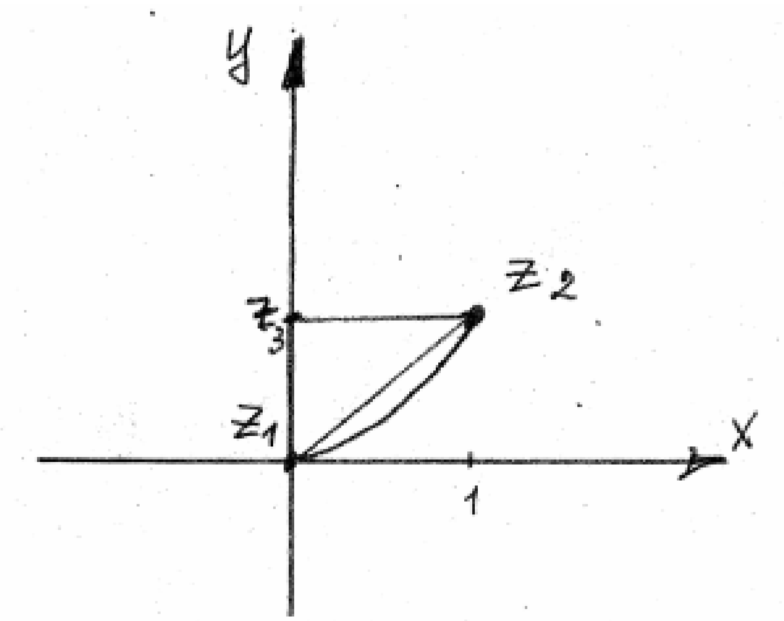
Примеры.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_L (1 + i - 2\bar{z})\,dz$ по линиям, соединяющим точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

а) по прямой

б) параболе $y = x^2$

в) по ломаной $z_1 z_3 z_2, z_3 = 1$.



Перепишем подынтегральную функцию в виде

$1 + i - 2\bar{z} = 1 + i - 2(x - iy) = (1 - 2x) + i(2y + 1)$,

т.е. $u(x, y) = 1 - 2x, v(x, y) = 2y + 1$.

Проверим условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

– первое условие не выполняется, т.е. подынтегральная функция не аналитична.

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})\,dz =$$

$$= \int_C (1-2x)dx - (1+2y)dy + i\int_C (1-2x)\,dy + (1+2y)dx.$$

а) Уравнение прямой, соединяющей точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$:

$y = x, 0 \le x \le 1, dy = dx$

$$\int_C (1-2x)dx - (1+2y)dy + i\int_C (1-2x)\,dy + (1+2y)dx =$$

$$= \int_0^1 (1-2x-1-2x)dx + i\int_0^1 2dx = -2x^2 + i2x|_0^1 =$$

$$= -2+2i$$

б) Для параболы $y = x^2; dy = 2xdx; 0 \le x \le 1.$

$$\int_C (1-2x)dx - (1+2y)dy + i\int_C (1-2x)\,dy + (1+2y)dx =$$

$$= \int_0^1 (1-2x-(1+2x^2)2x)dx +$$

$$+i\int_0^1 (1+2x^2+(1-2x)2x)dx =$$

$$= x - 2x^2 - x^4|_0^1 + i(x + x^2 - 2\frac{x^3}{3})|_0^1 = -2 + \frac{4}{3}i$$

в) $z_1 z_3: y = 0; dy = 0; 0 \le x \le 1.$

$$z_3 z_2: x = 1; dx = 0; 0 \le y \le 1.$$

$\int_C (1-2x)dx - (1+2y)dy + i\int_C (1-2x)\,dy + (1+2y)dx =$

$$\int\limits_{z_1 z_3} \quad + \int\limits_{z_3 z_2} \quad =$$

$$= \int_0^1 (1-2x)dx + i\int_0^1 dx - \int_0^1 (1+2y)dy + i\int_0^1 (1-2)dy =$$

$$= (x - x^2 + ix - y - y^2 - iy)|_0^1 = -2$$

Интеграл зависит от пути интегрирования, так как функция не является аналитической.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^i \cos z \, dz$.

Функция $f(z) = cosz$ аналитична всюду в комплексной плоскости. По свойству 4

$$\int_0^i \cos z \, dz = \sin z|_0^i = \sin i = ish1.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_i^{2i} (3z^2 + 1) \, dz$.

Так как подынтегральная функция аналитична всюду (для проверки достаточно проверить все условия Коши-Римана), то можно применить формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_i^{2i} (3z^2 + 1) \, dz = (z^3 + z) \,|_i^{2i} = (2i)^3 + 2i - i^3 - i =$$

$$= -8i + 2i + i - i = -6i.$$