



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

“SAPIENZA” UNIVERSITÀ DI ROMA
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,
INFORMATICA E STATISTICA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Linguaggi di Programmazione

Author
Simone Bianco

19 ottobre 2023

Indice

Informazioni e Contatti	1
1 Struttura e Rappresentazione	2
1.1 Algebre induttive	2
1.1.1 Lemma di Lambek	8
1.2 Strutture dati induttive	9
1.2.1 Induzione strutturale	11
1.3 Sintassi astratta	12
2 Paradigma funzionale	14
2.1 <i>Exp</i> : un semplice linguaggio funzionale	14
2.2 Valutazione Eager vs Lazy	18
2.3 Scoping Statico vs Dinamico	20
2.4 <i>Fun</i> : un linguaggio con funzioni	23
2.4.1 <i>Fun</i> in Standard ML	28
2.5 Lambda calcolo	29
2.5.1 <i>Fun</i> vs Lambda calcolo	32

Informazioni e Contatti

Appunti e riassunti personali raccolti in ambito del corso di *Linguaggi di Programmazione* offerto dal corso di laurea in Informatica dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".

Ulteriori informazioni ed appunti possono essere trovati al seguente link:

<https://github.com/Exyss/university-notes>. Chiunque si senta libero di segnalare incorrettezze, migliorie o richieste tramite il sistema di Issues fornito da GitHub stesso o contattando in privato l'autore :

- Email: bianco.simone@outlook.it
- LinkedIn: [Simone Bianco](#)

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se le modifiche siano già state apportate nella versione più recente.

Prerequisiti consigliati per lo studio:

Apprendimento del materiale relativo al corso *Algebra*.

Licence:

These documents are distributed under the [GNU Free Documentation License](#), a form of copyleft intended for use on a manual, textbook or other documents. Material licensed under the current version of the license can be used for any purpose, as long as the use meets certain conditions:

- All previous authors of the work must be **attributed**.
- All changes to the work must be **logged**.
- All derivative works must be **licensed under the same license**.
- The full text of the license, unmodified invariant sections as defined by the author if any, and any other added warranty disclaimers (such as a general disclaimer alerting readers that the document may not be accurate for example) and copyright notices from previous versions must be maintained.
- Technical measures such as DRM may not be used to control or obstruct distribution or editing of the document.

1

Struttura e Rappresentazione

1.1 Algebre induttive

Definizione 1: Assiomi di Peano

L'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} è definito secondo i seguenti **assiomi di Peano**:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \implies \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$, dove $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è la funzione successore
3. $\forall n, m \in \mathbb{N}, \text{succ}(n) = \text{succ}(m) \implies n = m$, ossia succ è iniettiva
4. $\nexists n \in \mathbb{N} \mid \text{succ}(n) = 0$
5. $\forall S \subseteq \mathbb{N} \mid (0 \in S \wedge (n \in S \implies \text{succ}(n) \in S)) \implies S = \mathbb{N}$

Proposizione 1: Numeri naturali di Von Neumann

I numeri naturali di Von Neumann, indicati con \mathcal{N} , definiti come:

$$0_{\mathcal{N}} := \{\}$$

$$1_{\mathcal{N}} := \{\{\}\}$$

$$2_{\mathcal{N}} := \{\{\}, \{\{\}\}\}$$

$$3_{\mathcal{N}} := \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}$$

...

dove $\text{succ}_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} : n \mapsto n \cup \{n\}$, soddisfano gli assiomi di Peano

Dimostrazione.

1. $0_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}$ per definizione stessa di \mathcal{N}
2. $n \in \mathcal{N} \implies \text{succ}_{\mathcal{N}}(n) \in \mathcal{N}$ per definizione stessa di $\text{succ}_{\mathcal{N}}$
3. Siano $n, m \in \mathcal{N}$ tali che $n \neq m$. In tal caso, ne segue automaticamente che:

$$n \neq m \implies n \cup \{n\} \neq m \cup \{m\} \iff \text{succ}_{\mathcal{N}}(n) \neq \text{succ}_{\mathcal{N}}(m)$$

Per contro-nominale, dunque, otteniamo che:

$$\text{succ}_{\mathcal{N}}(n) = \text{succ}_{\mathcal{N}}(m) \implies n = m$$

4. Supponiamo per assurdo che $\exists n \in \mathbb{N} \mid \text{succ}_{\mathcal{N}}(n) = 0_{\mathcal{N}}$. In tal caso, avremmo che:

$$\text{succ}(n) = 0_{\mathcal{N}} \iff n \cup \{n\} = 0_{\mathcal{N}} \iff n \cup \{n\} = \{\}$$

ma ciò risulta assurdo poiché implicherebbe che l'insieme $\{\}$ contenga degli elementi. Di conseguenza, l'unica possibilità è che $\nexists n \in \mathbb{N} \mid \text{succ}_{\mathcal{N}}(n) = 0_{\mathcal{N}}$

5. Supponiamo per assurdo che $\exists S \subseteq \mathcal{N} \mid (0_{\mathcal{N}} \in S \wedge (n \in S \implies \text{succ}_{\mathcal{N}}(n) \in S)) \wedge S \neq \mathcal{N}$. Consideriamo quindi $\mathcal{N} - S = \{n_1, \dots, n_k\}$. Per via del secondo assioma, ogni elemento di $\mathcal{N} - S$ deve avere un proprio successore e un proprio predecessore in \mathcal{N} .

Poiché per ipotesi si ha che $n \in S \implies \text{succ}_{\mathcal{N}}(n) \in S$, ne segue che tutti i predecessori degli elementi in $\mathcal{N} - S$ non possano essere in S , poiché altrimenti tali elementi sarebbero in S . Inoltre, poiché $\text{succ}_{\mathcal{N}}$ è iniettiva, ne segue che i successori degli elementi in $\mathcal{N} - S$ non possano essere in S , poiché esiste già un predecessore in S per ogni elemento in S .

Di conseguenza, ogni predecessore ed ogni successore degli elementi di $\mathcal{N} - S$ deve essere in $\mathcal{N} - S$ stesso. Consideriamo quindi (per comodità) la seguente catena di successori in $\mathcal{N} - S$:

$$n_1 \rightarrow n_2 \rightarrow \dots \rightarrow n_k \rightarrow n_1$$

Notiamo a questo punto che:

$$\text{succ}_{\mathcal{N}}^k(n_1) = n_1 \implies n_1 \in n_1$$

contraddicendo gli assiomi insiemistici per cui un insieme non possa essere contenuto in se stesso. Di conseguenza, l'unica possibilità è che $S = \mathcal{N}$

□

Principio 1: Principio di induzione

Sia P una proprietà che vale per $n = 0$. Dato $n \in \mathbb{N}$, se si verifica che la veridicità di P per n implica che P sia vera anche per $n + 1$, allora P vale per tutto \mathbb{N} . In simboli, abbiamo che:

$$\forall P ((P(0) \wedge (P(n) \implies P(n+1)))) \implies \forall m \in \mathbb{N} P(m)$$

Osservazione 1

Il quinto assioma di Peano è equivalente al principio di induzione, poiché basta considerare $S \subseteq \mathbb{N}$ come l'insieme degli elementi per cui vale la proprietà desiderata

Osservazione 2

Dato $k \in \mathbb{N}$, il principio di induzione può essere utilizzato per dimostrare che una proprietà P valga $\forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq k$. In altre parole, non è necessario che il principio valga per tutti i naturali a partire da 0.

Dimostrazione.

- Definendo una proprietà Q tale che $P(n) = Q(n - k)$, si ha che:

$$\forall n - k \in \mathbb{N} \quad Q(n - k) \iff P(n)$$

dunque applicare il principio di induzione per P partendo da k equivale ad applicare il principio di induzione per Q partendo da 0, rispettando quindi il quinto assioma di Peano

□

Definizione 2: Insieme unità

Definiamo come **insieme unità** l'insieme $\mathbb{1} = \{()\}$, ossia l'insieme composto da una zerupla

Definizione 3: Funzione nullaria

Definiamo una funzione $f : \mathbb{1} \rightarrow S$, dunque avente $\mathbb{1}$ come dominio, come **funzione nullaria** (o funzione costante).

Inoltre, per comodità, indichiamo $f(x)$ direttamente con f , poiché $x = ()$

Esempio:

- Data la funzione zero : $\mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto 0$, indichiamo zero(x) direttamente come zero

Osservazione 3

Una funzione nullaria è sempre **iniettiva** in quanto esiste un solo elemento nel dominio.

Definizione 4: Segnatura di una funzione

Data una funzione f definiamo $f : D \rightarrow C$ come **segnatura di f** dove D è il **dominio di f** e C è il **codominio di f**

Definizione 5: Algebra

Definiamo come **algebra** (o struttura algebrica) una n -upla $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ dove A è un insieme non vuoto, detto **dominio**, e $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono delle operazioni definite su A stesso.

Esempi:

- La coppia $(\mathbb{N}, \text{succ})$ è un'algebra
- La coppia $(\mathbb{N}, \text{zero})$ è un'algebra

Definizione 6: Segnatura di un'algebra

Data un'algebra $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$, definiamo come **segnatura dell'algebra** l'insieme delle segnature delle operazioni definite su essa

Definizione 7: Segnature equivalenti

Date due algebre $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ e $(B, \delta_1, \dots, \delta_n)$, definiamo le segnature di tali algebre come **equivalenti** se per ogni operazione γ definita su A esiste un'operazione δ definita su B per cui invertendo B con A all'interno della segnatura di δ si ottiene la segnatura di γ

Esempio:

- Date le due algebre $(\mathbb{N}, \text{zero}, \text{succ})$ e $(\mathcal{N}, \text{zero}_{\mathcal{N}}, \text{succ}_{\mathcal{N}})$, le segnature di tali algebre sono equivalenti poiché:
 - La segnatura di $\text{zero} : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N}$ è equivalente alla segnatura di $\text{zero}_{\mathcal{N}} : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{N}$
 - La segnatura di $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è equivalente alla segnatura di $\text{succ}_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$

Definizione 8: Algebra induttiva e Costruttori

Definiamo l'algebra $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ come **induttiva** (o **iniziale**) se:

- $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono iniettive
- $\forall i \neq j \quad \text{im}(\gamma_i) \cap \text{im}(\gamma_j) = \emptyset$, ossia le immagini delle operazioni sono due a due disgiunte
- $\forall S \subseteq A \quad (\forall i \in [1, n], a_1, \dots, a_k \in S \quad \gamma_i(a_1, \dots, a_k) \in S) \implies S = A$, ossia è soddisfatto il principio di induzione per ogni operazione

Inoltre, definiamo $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ come **costruttori di A** .

Esempi:

- L'algebra $(\mathbb{N}, +)$ non è un'algebra induttiva poiché $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ non è iniettiva
- L'algebra $(\mathbb{N}, \text{succ}, \text{zero})$ è un'algebra induttiva poiché:
 - succ risulta essere iniettiva grazie al secondo assioma di Peano, mentre zero risulta essere iniettiva poiché funzione nullaria
 - $\text{im}(\text{succ}) \cap \text{im}(\text{zero}) = (\mathbb{N} - \{0\}) \cap \{0\} = \emptyset$
 - Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ tale che $\forall x \in S \quad \text{succ}(x) \in S$ e $\text{zero} \in S$. Preso $x \in \mathbb{N}$, possiamo esprimere x come $x = \text{succ}(\text{succ}(\dots(\text{zero})))$.

Di conseguenza, poiché S è chiuso per succ e zero, otteniamo che:

- * $\text{zero} \in S \implies \text{succ}(\text{zero}) \in S$
- * $\text{succ}(\text{zero}) \in S \implies \text{succ}(\text{succ}(\text{zero})) \in S$
- * ...
- * $\text{succ}(\dots(\text{zero})) \in S \implies x = \text{succ}(\text{succ}(\dots(\text{zero}))) \in S$

Di conseguenza, otteniamo che $A \subseteq S$ e dunque che $S = A$

Osservazione 4

Equivalentemente, la terza condizione necessaria delle algebre induttive può essere considerata come

$$\nexists S \subsetneq A \mid (S, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \text{ è algebra induttiva}$$

Definizione 9: Omomorfismo

Date due strutture algebriche $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$ e $(B, \delta_1, \dots, \delta_k)$ dello stesso tipo, definiamo $f: A \rightarrow B$ come **omomorfismo** se

$$\forall a_1, \dots, a_n \in A, i \in [1, k] \quad f(\gamma_i(a_1, \dots, a_k)) = \delta_i(f(a_1), \dots, f(a_k))$$

Esempi:

- Date le due algebre $(\mathbb{N}, \text{succ}, +)$ e $(\mathcal{N}, \text{succ}_{\mathcal{N}}, +_{\mathcal{N}})$, affinché la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{N}$ sia un omomorfismo è necessario che:

$$f(\text{succ}(n)) = \text{succ}_{\mathcal{N}}(f(n)) \quad f(n + m) = f(n) +_{\mathcal{N}} f(m)$$

- Date le due algebre $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, la funzione $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto e^x$ è un omomorfismo:

$$\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x)\exp(y)$$

Definizione 10: Isomorfismo

Definiamo come **isomorfismo** un omomorfismo biiettivo. Inoltre, definiamo due algebre $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $(B, \delta_1, \dots, \delta_n)$ come **isomorfe**, indicato con $A \cong B$, se esiste un isomorfismo tra loro.

Osservazione 5

Data una funzione $f : A \rightarrow B$, si ha che:

$$f \text{ è biettiva} \iff \exists f^{-1} : B \rightarrow A$$

(*dimostrazione omessa*)

Osservazione 6

Data una funzione $f : A \rightarrow B$, si ha che:

$$f \text{ è un isomorfismo} \iff f^{-1} \text{ è un isomorfismo}$$

(*dimostrazione omessa*)

Esempio:

- Date le due algebre $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, la funzione $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto e^x$ è un isomorfismo, poiché:
 - \exp è un omomorfismo
 - $\exists \ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \mid \ln(\exp(x)) = x$, dunque f è biettiva.

1.1.1 Lemma di Lambek

Lemma 1

Data un'algebra induttiva $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$, per ogni algebra $(B, \delta_1, \dots, \delta_n)$ con la stessa segnatura di A si ha che

$$\exists! \text{ omomorfismo } f : A \rightarrow B$$

Nota: l'algebra di B non deve necessariamente essere induttiva

(*dimostrazione omessa*)

Teorema 1: Lemma di Lambek (versione ridotta)

Date due algebre induttive $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ e $(B, \delta_1, \dots, \delta_n)$ con la stessa segnatura, si ha che $A \cong B$

Dimostrazione.

- Per il lemma precedente, si ha che:

$$\exists! \text{ omomorfismo } f : A \rightarrow B$$

$$\exists! \text{ omomorfismo } g : B \rightarrow A$$

- Consideriamo quindi la funzione $g \circ f : A \rightarrow A : x \mapsto g(f(x))$ e verifichiamo che essa sia un omomorfismo

$$g \circ f(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = g \circ f(x) + g \circ f(y)$$

- Notiamo che per ogni algebra esiste sempre l'isomorfismo identità $\text{id} : A \rightarrow A : x \mapsto x$ e poiché per il lemma precedente esiste necessariamente un unico omomorfismo tra A e A , ne segue necessariamente che $g \circ f = \text{id}$
- Di conseguenza, si ha che

$$g \circ f = \text{id} \iff g = f^{-1} \implies g, f \text{ biettive} \implies g, f \text{ isomorfismi} \implies A \cong B$$

□

Esempio:

- Date le due algebre induttive $(\mathbb{N}, \text{zero}, \text{succ})$ e $(\mathcal{N}, \text{zero}_{\mathcal{N}}, \text{succ}_{\mathcal{N}})$ sono isomorfe tra loro poiché aventi la stessa segnatura algebrica
- Difatti, come già dimostrato, \mathbb{N} e \mathcal{N} sono solamente due modi diversi per rappresentare lo stesso identico concetto algebrico

1.2 Strutture dati induttive

Definizione 11: Insieme delle liste finite

Definiamo $\text{List}\langle T \rangle$ come l'insieme delle liste finite di elementi di T

Esempio:

- Dato $\text{List}\langle \text{Int} \rangle$, si ha che $[3 \rightarrow 5 \rightarrow 1] \in \text{List}\langle \text{Int} \rangle$

Proposizione 2: Algebra induttiva delle liste finite

La tripla $(\text{List}\langle T \rangle, \text{empty}, \text{cons})$, dove:

- $\text{empty} : \mathbb{1} \rightarrow \text{List}\langle T \rangle : x \mapsto []$ è la funzione nullaria che restituisce la **lista vuota**
- $\text{cons} : \text{List}\langle T \rangle \times T \rightarrow \text{List}\langle T \rangle : x, ([x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n]) \mapsto [x \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n]$ è la funzione di **costruzione delle liste**

è un'algebra induttiva

Dimostrazione.

1. La funzione empty risulta essere iniettiva poiché nullaria.

Dati $\ell_1, \ell_2 \in \text{List}\langle T \rangle$ e $x_1, x_2 \in T$, supponiamo che:

$$\text{cons}(y_1, \ell_1) = \text{cons}(y_2, \ell_2) = [x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n]$$

Per definizione stessa di cons , si ha che:

$$\text{cons}(y_1, \ell_1) = \text{cons}(y_2, \ell_2) = [x \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n]$$

$$\implies y_1 = y_2 = x, \ell_1 = \ell_2 = [x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n]$$

dunque anche cons risulta iniettiva

2. $\text{im}(\text{empty}) \cap \text{im}(\text{cons}) = \{[]\} \cap (\text{List}\langle T \rangle - \{[]\}) = \emptyset$
3. Sia $S \subseteq \text{List}\langle T \rangle$ tale che $\forall x \in T, \ell \in \text{List}\langle T \rangle \text{ } \text{cons}(x, \ell) \in S$ e $\text{empty} \in S$.

Preso $\ell := [x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n] \in \text{List}\langle T \rangle$, possiamo esprimere ℓ come

$$\ell = \text{cons}(x_1, \text{cons}(x_2, \dots \text{cons}(x_n, \text{empty})))$$

Di conseguenza, poiché S è chiuso per cons e empty e poiché $\text{empty} \in S$, otteniamo che ogni valore della catena sia contenuto in S , implicando che $x \in S$ e quindi che $\text{List}\langle T \rangle \subseteq S$, concludendo che $S = \text{List}\langle T \rangle$

□

Osservazione 7

La tripla $(\text{List}\langle T \rangle_\infty, \text{empty}, \text{cons})$, dove $\text{List}\langle T \rangle_\infty$ è l'insieme delle liste infinite di elementi di T **non è un'algebra induttiva**, poiché $\text{List}\langle T \rangle \subsetneq \text{List}\langle T \rangle_\infty$ e poiché $(\text{List}\langle T \rangle, \text{empty}, \text{cons})$ è un'algebra induttiva

Osservazione 8

Tramite i costruttori di un'algebra induttiva è possibile definire le ulteriori operazioni "aggiuntive" di tale algebra

Esempio:

- Data l'algebra induttiva $(\text{List}\langle T \rangle, \text{empty}, \text{cons})$, definiamo la seguente operazione

$$\text{concat} : \text{List}\langle T \rangle \times \text{List}\langle T \rangle \rightarrow \text{List}\langle T \rangle$$

dove:

$$\begin{cases} \text{concat}(\text{empty}, \ell) = \ell \\ \text{concat}(\text{cons}(n, \ell), \ell') = \text{cons}(n, \text{concat}(\ell, \ell')) \end{cases}$$

- Ad esempio, in $\text{List}\langle \text{Int} \rangle$, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \text{concat}([1 \rightarrow 5], [7 \rightarrow 2]) &= \text{concat}(\text{cons}(1, [5], [7 \rightarrow 2])) = \text{cons}(1, \text{concat}([5], [7 \rightarrow 2])) = \\ &= \text{cons}(1, \text{concat}(\text{cons}(5, \text{empty}), [7 \rightarrow 2])) = \text{cons}(1, \text{cons}(5, \text{concat}(\text{empty}, [7 \rightarrow 2]))) = \\ &= \text{cons}(1, \text{cons}(5, [7 \rightarrow 2])) = \text{cons}(1, [5 \rightarrow 7 \rightarrow 2]) = [1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 2] \end{aligned}$$

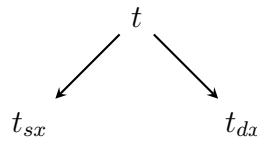
Definizione 12: Insieme degli alberi binari finiti

Definiamo **BinTree** come l'insieme degli alberi binari finiti

Proposizione 3: Algebra induttiva degli alberi binari finiti

La tripla $(\text{BinTree}, \text{leaf}, \text{branch})$, dove:

- $\text{leaf} : \mathbb{1} \rightarrow \text{BinTree} : x \mapsto \circ$ è la funzione nullaria che restituisce una **foglia**
- $\text{branch} : \text{BinTree} \times \text{BinTree} \rightarrow \text{BinTree} : (t_{sx}, t_{dx}) \mapsto t$ è la funzione di **costruzione dei rami**, ossia tale che



è un'algebra induttiva

(*dimostrazione omessa*)

Esempio:

- Il seguente albero



corrisponde a:

$$a = \text{branch}(\text{leaf}, \text{branch}(\text{leaf}, \text{leaf}))$$

1.2.1 Induzione strutturale**Definizione 13: Induzione strutturale**

Definiamo come **induzione strutturale** il metodo dimostrativo generalizzante il principio di induzione e basato sulle proprietà di un'algebra induttiva.

In particolare, viene ipotizzato che una proprietà P valga per ogni argomento di ogni costruttore dell'algebra e tramite il terzo assioma viene dimostrato che tale proprietà valga per tutti gli elementi dell'algebra stessa

Teorema 2: Relazione tra nodi e foglie

Dato $t \in \text{BinTree}$ avente n foglie, il numero di nodi di t è pari a $2n - 1$

Dimostrazione per induzione strutturale.

- Definiamo l'operazione

$$\text{leaves} : \text{BinTree} \rightarrow \mathbb{N} : t \mapsto \text{Numero di foglie in } t$$

dove:

$$\begin{cases} \text{leaves}(\text{leaf}) = 1 \\ \text{leaves}(\text{branch}(b_1, b_2)) = \text{leaves}(b_1) + \text{leaves}(b_2) \end{cases}$$

- Dato $t \in \text{BinTree}$, sia k il numero di nodi di t e sia $n = \text{leaves}(t)$

Caso base. Se $t = \text{leaf}$, allora t è composto da $k = 1$ nodi e $n = \text{leaves}(\text{leaf}) = 1$ foglie. Difatti, si ha che $k = 1 = 2n - 1$

Ipotesi induttiva. Ogni argomento t' di ogni costruttore possiede $k' = 2\text{leaves}(t') - 1$ nodi

Passo induttivo. Se $t \neq \text{leaf}$, allora $\exists t_1, t_2 \in \text{BinTree} \mid t = \text{branch}(t_1, t_2)$ dove t_1 e t_2 possiedono rispettivamente k_1 e k_2 nodi. Inoltre, si ha che $k = k_1 + k_2 + 1$

In quanto t_1 e t_2 sono argomenti del costruttore `branch`, per ipotesi induttiva si ha che:

$$\begin{aligned} k &= k_1 + k_2 + 1 = 2\text{leaves}(t_1) - 1 + 2\text{leaves}(t_2) - 1 + 1 = 2(\text{leaves}(t_1) + \text{leaves}(t_2)) - 1 = \\ &= 2(\text{leaves}(\text{branch}(t_1, t_2))) - 1 = 2(\text{leaves}(t)) - 1 \end{aligned}$$

□

1.3 Sintassi astratta

Definizione 14: Linguaggio

Definiamo come **linguaggio** un insieme di stringhe

Definizione 15: Grammatica

Definiamo come **grammatica** un insieme di regole, dette **termini**, che definiscono come poter manipolare le stringhe di un linguaggio.

La **forma di Backus-Naur** è una notazione utilizzata per descrivere grammatiche ed è definita come:

$$\langle \text{symbol} \rangle ::= _ \text{expression} _$$

dove:

- $\langle \text{symbol} \rangle$ è una simbolo non-terminale espresso dalla grammatica
- L'operatore $::=$ indica che ciò che si trova alla sua sinistra possa essere sostituito con ciò che si trova alla sua destra
- $\langle _ \text{expression} _ \rangle$ consiste in una o più sequenze di simboli terminali o non-terminali dove ogni sequenza è separata da una barra verticale (ossia $|$) indicante una scelta possibile per l'operatore $::=$

Esempio:

- Consideriamo il linguaggio L espresso dalla grammatica:

$$M, N ::= 0 \mid 1 \mid \dots \mid M + N \mid M * N$$

Tale grammatica indica che i simboli non-terminali M e N possono essere sostituiti con:

- Un numero naturale
- Un'espressione $M + N$ o $M * N$ dove M e N sono due ulteriori simboli terminali o non-terminali

- Ad esempio, abbiamo che la stringa "5 + 7" sia ben definita dalla grammatica, mentre la stringa "5 + +" non lo sia

Definizione 16: Sintassi astratta

La **sintassi astratta** di un linguaggio è una definizione induttiva di un insieme T di termini, permettendo di definire strutture algebriche senza dover necessariamente definire concretamente le sue operazioni

Esempio:

- Consideriamo ancora il linguaggio L definito dalla grammatica

$$M, N ::= 0 \mid 1 \mid \dots \mid M + N \mid M * N$$

- Definiamo quindi la funzione $\text{eval} : L \rightarrow \mathbb{N}$ in grado di valutare le espressioni del linguaggio:

$$\text{eval}("0") = 0$$

$$\text{eval}("1") = 1$$

...

$$\text{eval}("M + N") = \text{eval}("M") + \text{eval}("N")$$

$$\text{eval}("M * N") = \text{eval}("M") * \text{eval}("N")$$

- Notiamo quindi che la grammatica definisca in modo astratto (ma concretamente tramite eval) le seguenti operazioni:

$$0 : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto 0$$

$$1 : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto 1$$

...

$$\text{plus} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : (m, n) \mapsto m + n$$

$$\text{times} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : (m, n) \mapsto m \cdot n$$

- Notiamo però che le operazioni plus e times non risultano essere né iniettive né con immagini disgiunte. Di conseguenza, la funzione eval non ci permette di definire un'algebra induttiva.
- Tuttavia, per tale linguaggio è comunque possibile definire (in qualche modo, ad esempio fissando una precedenza per le operazioni rompendo proprietà come l'associatività e la commutatività) una funzione che possa descrivere un'algebra induttiva.

Teorema 3: Algebra induttiva dei termini

Dato un linguaggio L con una sintassi astratta con termini definiti in T , esiste sempre un'algebra induttiva (T, α) . Di conseguenza, **tutte le proprietà** di un linguaggio sono dimostrabili tramite l'induzione strutturale sulla sua algebra dei termini.

(*dimostrazione omessa*)

2

Paradigma funzionale

2.1 *Exp*: un semplice linguaggio funzionale

Definizione 17: Il linguaggio *Exp*

Definiamo come *Exp* il linguaggio rappresentato dalla seguente grammatica:

$$M, N ::= k \mid x \mid M + N \mid \text{let } x = M \text{ in } N$$

dove:

- $k \in \{0, 1, \dots\}$ ossia è una **costante**
- $x \in Var = \{x, y, z, \dots\}$ ossia è una **variabile**
- $+$: $Exp \times Exp \rightarrow Exp$ la quale **somma le due espressioni**
- $\text{let} : Var \times Exp \times Exp \rightarrow Exp$ la quale **assegna** alla variabile x l'espressione M all'interno della **valutazione** di N . Inoltre, x prende il nome di variabile locale all'interno di N .
- $Val = \{0, 1, \dots\}$ è l'**insieme dei valori** in cui un'espressione può essere valutata

Esempi:

- L'espressione $\text{let } x = 3 \text{ in } x + 1$ indica che la variabile x assuma valore 3 all'interno della valutazione di $x + 1$. Di conseguenza, il risultato della valutazione dell'espressione è 4
- L'espressione $\text{let } x = 3 \text{ in } 7$ viene valutata come 7
- L'espressione $\text{let } y = 9 \text{ in } (\text{let } x = (\text{let } y = 2 \text{ in } y + 1) \text{ in } x + y)$ viene valutata come 12 (si consiglia di cercare di capire come le clausole interne sovrascrivano i valori delle clausole esterne. Se ciò risultasse complesso, più avanti verranno forniti strumenti matematici per valutare in modo corretto le clausole *let* annidate)

Definizione 18: Scope di una variabile

Data un'espressione e una variabile x , definiamo come **scope di x** la porzione la porzione dell'espressione all'interno della quale una variabile può essere riferita, ossia per cui ne è definito il valore.

Una variabile il cui valore non è assegnato in una porzione dell'espressione viene detta **variabile libera**

Definizione 19: Variabile libera

Data un'espressione $expr \in Exp$, definiamo $x \in expr$ come **libera** se x non ha un valore assegnato durante la valutazione di $expr$.

Esempio:

- L'espressione $let\ x = (let\ y = 2\ in\ y + 1)\ in\ x + y$ non è coerente con la grammatica di *Exp*, poiché y non è definito durante la valutazione di $x + y$. Di conseguenza, non è possibile valutare tale espressione.

Proposizione 4: Variabili libere in *Exp*

Dato il linguaggio *Exp*, la funzione

$$free : Exp \rightarrow \mathcal{P}(Var)$$

restituisce l'insieme di tutte le **variabili libere** di un'espressione dove:

$$\begin{cases} free(k) = \emptyset \\ free(x) = \{x\} \\ free(M + N) = free(M) \cup free(N) \\ free(let\ x = M\ in\ N) = free(M) \cup (free(N) - \{x\}) \end{cases}$$

Nota: $\mathcal{P}(Var)$ è l'insieme delle parti di Var , ossia l'insieme contenente tutti i suoi sottoinsiemi possibili

Esempio:

- Riprendendo l'esempio precedente, notiamo che:

$$\begin{aligned} & free(let\ x = (let\ y = 2\ in\ y + 1)\ in\ x + y) = \\ & = free(let\ y = 2\ in\ y + 1) \cup (free(x + y) - \{x\}) = \\ & = free(let\ y = 2\ in\ y + 1) \cup ((free(x) \cup free(y)) - \{x\}) = \\ & = free(let\ y = 2\ in\ y + 1) \cup ((\{x\} \cup \{y\}) - \{x\}) = \\ & = free(let\ y = 2\ in\ y + 1) \cup \{y\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\text{free}(2) \cup (\text{free}(y+1) - \{y\})) \cup \{y\} = \\
 &= ((\text{free}(y)) - \{y\}) \cup \{y\} = \\
 &= \{y\}
 \end{aligned}$$

dunque l'espressione è invalutabile

Definizione 20: Insieme degli ambienti

Dato il linguaggio *Exp*, definiamo come **insieme degli ambienti di *Exp***, indicato con *Env*, l'insieme delle funzioni parziali (ossia non necessariamente definite su tutto il dominio) che associano ogni variabile al proprio valore:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Val\}$$

Definizione 21: Concatenazione di ambienti

Dato il linguaggio *Exp*, definiamo l'operazione di **concatenazione di ambienti**, ossia:

$$\cdot : Env \times Env \rightarrow Env$$

dove:

$$(E_1 E_2)(x) = \begin{cases} E_2(x) & \text{se } x \in \text{dom}(E_1) \\ E_1(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nota: tale operazione può essere interpretata come una sovrascrittura in E_1 di tutte le variabili definite in E_2

Esempio:

- Dati gli ambienti $E_1 = \{(x, 4), (y, 3)\}$ e $E_2 = \{(x, 5)\}$, si ha che

$$(E_1 E_2)(x) = 5$$

$$(E_1 E_2)(y) = 3$$

Proposizione 5: Regola di inferenza

Data la proposizione:

$$\text{Premessa 1} \wedge \dots \wedge \text{Premessa n} \implies \text{Conclusione}$$

definiamo come **regola di inferenza** la notazione alternativa:

$$\frac{\text{Premessa 1} \quad \dots \quad \text{Premessa n}}{\text{Conclusione}}$$

Definizione 22: Semantica operativa

Data la seguente relazione detta **semantica operativa**, ossia:

$$\leadsto \subseteq Env \times Exp \times Val$$

definiamo come **giudizio operativo** la tripla $(E, M, v) \in \leadsto$ descritta dalla notazione

$$E \vdash M \leadsto v$$

la quale viene letta come "nell'ambiente E , M viene valutato come v ".

Proposizione 6: Regole operative di *Exp*

Definiamo come **regole operative** le regole di inferenza che dettano le valutazioni effettuate dalla semantica operativa:

- Per le **costanti** si ha che:

$$\forall E \in Env \quad E \vdash k \leadsto k$$

- Dato $E \in Env$, per le **variabili** si ha che:

$$x \in dom(E) \wedge E(x) = v \implies E \vdash x \leadsto v$$

- Dato $E \in Env$, per la **somma** si ha che:

$$u = v + v' \implies \frac{E \vdash M \leadsto v \quad E \vdash N \leadsto v'}{E \vdash M + N \leadsto u}$$

- Per l'espressione **let** si ha che:

$$\frac{E \vdash M \leadsto v \quad E\{(x, v)\} \vdash N \leadsto v'}{E \vdash let \ x = M \ in \ N \leadsto v'}$$

Osservazione 9: Ambiente iniziale

A meno che non vi siano variabili esternamente assegnate, all'interno di un'espressione l'**ambiente iniziale** corrisponde sempre a $\emptyset \subseteq Env$.

Osservazione 10: Variabili invalutabili

Dato un ambiente $E \in Env$, se $x \notin dom(E)$, ossia se x non è definita nell'ambiente E , allora x è una **variabile libera** e dunque è **invalutabile** in E , ossia:

$$\nexists v \in Val \text{ t.c. } E \vdash x \leadsto v$$

Esempio:

- L'espressione $x + 4$ è invalutabile, poiché $x \notin \text{dom}(\emptyset)$, dunque:

$$\nexists v' \in \text{Val t.c. } v = v' + 1 \wedge \frac{\emptyset \vdash x \rightsquigarrow v' \quad \emptyset \vdash 1 \rightsquigarrow 1}{\emptyset \vdash x + 1 \rightsquigarrow v}$$

- L'espressione $\text{let } x = 1 \text{ in } x + 4$ è valutabile, poiché $x \in \text{dom}(\{(x, 1)\})$, dunque:

$$\frac{\emptyset \vdash 1 \rightsquigarrow 1 \quad \frac{\{(x, 1)\} \vdash x \rightsquigarrow 1 \quad \{(x, 1)\} \vdash 4 \rightsquigarrow 4}{\{(x, 1)\} \vdash x + 1 \rightsquigarrow 5}}{\emptyset \vdash \text{let } x = 1 \text{ in } x + 4 \rightsquigarrow 5}$$

Definizione 23: Albero di derivazione

Definiamo come **albero di derivazione** l'albero generato dalla valutazione concatenata di più regole di inferenza.

Esempio:

- L'espressione $\text{let } y = 3 \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } x + y)$ viene valutata dal seguente albero di derivazione:

$$\frac{\emptyset \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{\{y, 3\} \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{\{(y, 3), (x, 7)\} \vdash x \rightsquigarrow 7 \quad \{(y, 3), (x, 7)\} \vdash y \rightsquigarrow 3}{\{(y, 3), (x, 7)\} \vdash x + y \rightsquigarrow 10}}{\{y, 3\} \vdash \text{let } x = 7 \text{ in } x + y \rightsquigarrow 10}}{\emptyset \vdash \text{let } y = 3 \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } x + y) \rightsquigarrow 10}$$

- Notiamo quindi come, per valutare l'intera espressione, ci basti in realtà valutare i termini "più in alto" dell'albero di derivazione

2.2 Valutazione Eager vs Lazy

Consideriamo la seguente espressione per il linguaggio *Exp*:

$$\text{let } x = \sqrt{397^5 + \int_3^{15} y^2 dy} + \log_{\sqrt{37}}(479) \text{ in } 3$$

Notiamo come nonostante l'espressione assegnata ad x sia di grandi dimensioni, richiedendo un enorme albero di derivazione, la valutazione dell'espressione sia totalmente indipendente da tale valutazione in quanto la variabile x non venga neanche utilizzata per la valutazione del secondo termine dell'espressione *let*.

Utilizzando le regole di valutazione previste dalla metodologia di valutazione, detta *eager* (trad: *affrettata*), vista nella sezione precedente, andremmo a valutare delle espressioni del tutto inutili.

Una metodologia di valutazione alternativa, detta *lazy*, è costituita da regole operazionali atte al *ritardare* la valutazione dei termini fino a quando non sia strettamente necessario.

Definizione 24: Valutazione eager

Definiamo una modalità di valutazione come **eager** (o valutazione *call-by-name* o *call-by-value*) se la valutazione di una sua espressione viene effettuata non appena essa viene legata ad una variabile, associandone immediatamente il risultato alla variabile stessa.

Definizione 25: Valutazione lazy

Definiamo una modalità di valutazione come **lazy** (o valutazione *call-by-need*) se la valutazione di una sua espressione viene effettuata solo quando si richiede il valore di un'espressione che da essa dipende.

Proposizione 7: Linguaggio *Exp* lazy

L'uso di una valutazione lazy necessita la ridefinizione dell'insieme *Env* e di alcune regole operazionali definite per la valutazione eager:

- L'insieme *Env* viene ridefinito come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Exp\}$$

- Dato $E \in Env$, per le variabili si ha che:

$$x \in dom(E) \wedge E(x) = M \implies \frac{E \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v}$$

- Per l'espressione *let* si ha che:

$$\frac{E\{(x, M)\} \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash let\ x = M\ in\ N \rightsquigarrow v}$$

Osservazione 11

È necessario puntualizzare che non sempre la valutazione lazy sia più ottimale della eager

Esempio:

- Consideriamo la seguente espressione

$$let\ x = M\ in\ x + x$$

- Utilizzando la valutazione eager otteniamo il seguente albero di derivazione:

$$\frac{\frac{\dots}{\emptyset \vdash M \rightsquigarrow v'} \quad \frac{\{(x, v')\} \vdash x \rightsquigarrow v' \quad \{(x, v')\} \vdash x \rightsquigarrow v'}{\{(x, v')\} \vdash x + x \rightsquigarrow v}}{\emptyset \vdash \text{let } x = M \text{ in } x + x \rightsquigarrow v}$$

dove $v = v' + v'$

- Utilizzando la valutazione lazy, invece, otteniamo il seguente albero di derivazione:

$$\frac{\frac{\dots}{\{(x, M)\} \vdash M \rightsquigarrow v'} \quad \frac{\{(x, M)\} \vdash M \rightsquigarrow v'}{\{(x, M)\} \vdash x \rightsquigarrow v'} \quad \frac{\dots}{\{(x, M)\} \vdash M \rightsquigarrow v'} \quad \frac{\{(x, M)\} \vdash M \rightsquigarrow v'}{\{(x, M)\} \vdash x \rightsquigarrow v'}}{\{(x, M)\} \vdash x + x \rightsquigarrow v} \quad \frac{\dots}{\emptyset \vdash \text{let } x = M \text{ in } x + x \rightsquigarrow v}$$

dove $v = v' + v'$

- Notiamo quindi che l'espressione M venga valutata una sola volta nella valutazione eager ma due volte nella valutazione lazy

2.3 Scoping Statico vs Dinamico

Consideriamo la seguente espressione:

$$\text{let } x = 3 \text{ in } (\text{let } y = x \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } y + x))$$

Prima di tutto, valutiamo tale espressione tramite valutazione eager:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\emptyset \vdash 3 \rightsquigarrow 3}{\{(x, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 3} \quad \frac{\frac{E \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{E\{(x, 7)\} \vdash y \rightsquigarrow 3 \quad E\{(x, 7)\} \vdash x \rightsquigarrow 7}{E\{(x, 7)\} \vdash y + x \rightsquigarrow 10}}{\{(x, 3), (y, 3)\} \vdash \text{let } x = 7 \text{ in } y + x \rightsquigarrow 10}}{\{(x, 3)\} \vdash \text{let } y = x \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } y + x) \rightsquigarrow 10}}{\emptyset \vdash \text{let } x = 3 \text{ in } (\text{let } y = x \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } y + x)) \rightsquigarrow 10}}$$

dove $E := \{(x, 3), (y, 3)\}$

Valutiamo ora invece tale espressione utilizzando una valutazione lazy:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{E\{(x, 7)\} \vdash 7 \rightsquigarrow 7}{E\{(x, 7)\} \vdash x \rightsquigarrow 7} \quad \frac{E\{(x, 7)\} \vdash 7 \rightsquigarrow 7}{E\{(x, 7)\} \vdash y \rightsquigarrow 7}}{\frac{E\{(x, 7)\} \vdash x \rightsquigarrow 7 \quad E\{(x, 7)\} \vdash y \rightsquigarrow 7}{E\{(x, 7)\} \vdash y + x \rightsquigarrow 14}} \quad \frac{\dots}{\{(x, 3), (y, x)\} \vdash \text{let } x = 7 \text{ in } y + x \rightsquigarrow 14}}{\frac{\{(x, 3)\} \vdash \text{let } y = x \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } y + x) \rightsquigarrow 14}{\emptyset \vdash \text{let } x = 3 \text{ in } (\text{let } y = x \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } y + x)) \rightsquigarrow 14}}$$

dove $E := \{(x, 3), (y, x)\}$

Notiamo quindi che le due valutazioni abbiano prodotto un risultato diverso. Tuttavia, vorremmo che le due valutazioni siano differenti solo a livello "*implementativo*", ossia che venga solo ritardata la valutazione dei termini. Difatti, tale problematica non è dovuta alla metodologia di valutazione utilizzata ma bensì dal tipo di *scoping*.

Definizione 26: Scoping statico

Definiamo un linguaggio come linguaggio a **scoping statico** se durante la valutazione di un'espressione viene utilizzato l'ambiente definito al tempo in cui viene interpretata (ma non valutata) l'espressione stessa.

Definizione 27: Scoping dinamico

Definiamo un linguaggio come linguaggio a **scoping dinamico** se durante la valutazione di un'espressione viene utilizzato l'ambiente definito al tempo di valutazione stesso.

Difatti, nell'esempio precedente ci troviamo in due situazioni:

- Nella valutazione eager, la variabile y viene valutata con l'ambiente $\{(x, 3), (y, x)\}$ definito al tempo in cui viene interpretata l'espressione $let\ y = x\ in\ \dots$ (scoping *statico*)
- Nella valutazione lazy, la variabile y viene valutata con l'ambiente $\{(x, 3), (y, x), (x, 7)\}$ definito al tempo della sua valutazione (scoping *dinamico*)

Per tanto, è necessario precisare che le due precedenti versioni viste del linguaggio *Exp* siano rispettivamente la versione **eager statica** e la versione **Exp lazy dinamica**.

Proposizione 8: Linguaggio *Exp* lazy statico

L'uso di una semantica lazy statica necessita la ridefinizione dell'insieme Env e di alcune regole operazionali definite per la semantica lazy dinamica:

- L'insieme Env viene ridefinito come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Exp \times Env\}$$

- Dato $E \in Env$, per le variabili si ha che:

$$x \in dom(E) \wedge E(x) = (M, E') \implies \frac{E' \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v}$$

- Per l'espressione *let* si ha che:

$$\frac{E\{(x, (M, E))\} \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash let\ x = M\ in\ N \rightsquigarrow v}$$

2.4 *Fun*: un linguaggio con funzioni

Definizione 29: Il linguaggio *Fun*

Definiamo come *Fun* il linguaggio rappresentato dalla seguente grammatica:

$$M, N ::= k \mid x \mid M + N \mid \text{let } x = M \text{ in } N \mid \text{fn } x \Rightarrow M \mid MN$$

dove:

- $k \in \{0, 1, \dots\}$ ossia è una **costante**
- $x \in \text{Var} = \{x, y, z, \dots\}$ ossia è una **variabile**
- $+$: $\text{Fun} \times \text{Fun} \rightarrow \text{Fun}$ la quale **somma le due espressioni**
- $\text{let} : \text{Var} \times \text{Fun} \times \text{Fun} \rightarrow \text{Fun}$ la quale **assegna** alla variabile x l'espressione M all'interno della **valutazione** di N . Inoltre, x prende il nome di variabile locale all'interno di N
- $\text{fn} : \text{Var} \times \text{Fun} \rightarrow \text{Fun}$ la quale restituisce una **funzione** avente un parametro il quale influenza l'espressione valutata dalla funzione
- Data l'espressione $\text{fn } x \Rightarrow M$, definiamo la coppia $(x, M) \in \text{Var} \times \text{Fun}$ come **chiusura** di tale espressione
- \cdot : $\text{Fun} \times \text{Fun} \rightarrow \text{Fun}$ la quale **applica** il termine sinistro al termine destro. In particolare, è necessario che il termine sinistro sia una funzione
- $\text{Val} = \{0, 1, \dots\} \cup (\text{Var} \times \text{Fun})$ è l'**insieme dei valori** in cui un'espressione può essere valutata, ossia costanti e chiusure

Esempi:

- L'espressione $(\text{fn } x \Rightarrow x + 1) \ 7$ viene valutata come 8, poiché la funzione sinistra $\text{fn } x \Rightarrow x + 1$ viene applicata al termine destro 7 (dunque 7 viene utilizzato come argomento della funzione per il parametro x)
- L'espressione $(\text{fn } x \Rightarrow x \ 3) \ 7$ è invalutabile, poiché l'argomento 7 viene passato come parametro x della funzione, ma all'interno di quest'ultima non è possibile valutare $x \ 3$ visto che 7 non è applicabile a 3
- L'espressione $(\text{fn } x \Rightarrow x \ 3)(\text{fn } x \Rightarrow x + 1)$ viene valutata come 4, poiché l'argomento $\text{fn } x \Rightarrow x + 1$ viene passato come parametro x della funzione $\text{fn } x \Rightarrow x \ 3$, per poi valutare l'applicazione $x \ 3$ passando l'argomento 3 come parametro per la funzione contenuta in x (ossia $\text{fn } x \Rightarrow x + 1$).

Informalmente, possiamo dire che:

$$(\text{fn } x \Rightarrow x \ 3)(\text{fn } x \Rightarrow x + 1) \longrightarrow (\text{fn } x \Rightarrow x + 1) \ 3 \longrightarrow 4$$

Osservazione 14

Nel caso in cui si abbia un'espressione con doppio operatore di applicazione MNL , essa verrà valutata come $(MN)L$

Esempio:

- Le due espressioni $(fn\ x \Rightarrow x\ 3)(fn\ x \Rightarrow x + 1)\ 7$ e $[(fn\ x \Rightarrow x\ 3)(fn\ x \Rightarrow x + 1)]\ 7$ sono equivalenti

Definizione 30: Curryficazione

Definiamo come **curryficazione** la contrazione sintattica $fn\ x_1 x_2 \dots x_n \Rightarrow M$ equivalente alla seguente espressione:

$$fn\ x_1 \Rightarrow (fn\ x_2 \Rightarrow \dots (fn\ x_n \Rightarrow M) \dots)$$

Esempi:

- L'uncurryficazione dell'espressione $(fn\ xy \Rightarrow yx)\ 7\ (fn\ x \Rightarrow x + 1)$ corrisponde a:

$$(fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow yx)\ 7\ (fn\ x \Rightarrow x + 1)$$

e viene pertanto valutata come 8. Difatti, informalmente, possiamo dire che:

$$(fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow yx)\ 7\ (fn\ x \Rightarrow x + 1) \longrightarrow (fn\ y \Rightarrow y\ 7)(fn\ x \Rightarrow x + 1) \longrightarrow 8$$

Osservazione 15

Trattandosi di un'estensione del linguaggio *Exp*, il linguaggio *Fun* **eredita le regole operazionali** delle semantiche di *Exp*

Proposizione 9: Linguaggio *Fun* eager dinamico

La semantica eager dinamica del linguaggio *Fun* prevede l'aggiunta di alcune regole operazionali:

- L'insieme *Env* viene ridefinito come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Val\}$$

- Dato $E \in Env$, per le funzioni si ha che:

$$E \vdash fn\ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M)$$

- Dato $E \in Env$, per le applicazioni si ha che:

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L) \quad E \vdash N \rightsquigarrow v' \quad E\{(x, v')\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$$

Proposizione 10: Linguaggio *Fun* eager statico

La semantica eager statica del linguaggio *Fun* prevede l'aggiunta di alcune regole operazionali:

- L'insieme *Env* viene ridefinito come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Val \times Env\}$$

- Dato $E \in Env$, per le funzioni si ha che:

$$E \vdash fn\ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M, E)$$

- Dato $E \in Env$, per le applicazioni si ha che:

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L, E') \quad E \vdash N \rightsquigarrow v' \quad E'\{(x, v')\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$$

Lemma 2

A differenza del linguaggio *Exp*, per la sua estensione *Fun* si ha che:

$$Fun\ \text{eager}\ \text{dinamico} \neq Fun\ \text{eager}\ \text{statico}$$

Dimostrazione.

- Consideriamo l'espressione $let\ x = 7\ in\ ((fn\ y \Rightarrow let\ x = 3\ in\ yx)(fn\ z \Rightarrow x))$
- Utilizzando la semantica eager dinamica, l'albero di derivazione corrisponde a:

$$\begin{array}{c}
 (*) \quad \frac{E' \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{E'' \vdash y \rightsquigarrow (z, x) \quad E'' \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad E''\{(z, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 3}{E'' \vdash yx \rightsquigarrow 3}}{E' \vdash let\ x = 3\ in\ yx \rightsquigarrow 3} \\
 \\
 \frac{\emptyset \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{E \vdash fn\ y \Rightarrow let\ x = 3\ in\ yx \rightsquigarrow (y, let\ x = 3\ in\ yx) \quad E \vdash fn\ z \Rightarrow x \rightsquigarrow (z, x) \quad (*)}{E \vdash (fn\ y \Rightarrow let\ x = 3\ in\ yx)(fn\ z \Rightarrow x) \rightsquigarrow 3}}{\emptyset \vdash let\ x = 7\ in\ ((fn\ y \Rightarrow let\ x = 3\ in\ yx)(fn\ z \Rightarrow x)) \rightsquigarrow 3}
 \end{array}$$

dove $E := \{(x, 7)\}$, $E' := E\{(y, (z, x))\}$ e $E'' := E'\{(x, 3)\}$

- Utilizzando la semantica eager statica, invece, l'albero di derivazione corrisponde a:

$$(*) \quad \frac{E' \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{E'' \vdash y \rightsquigarrow (z, x, E) \quad E'' \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad E\{(z, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 7}{E'' \vdash yx \rightsquigarrow 7}}{E' \vdash let\ x = 3\ in\ yx \rightsquigarrow 7}$$

$$\frac{\emptyset \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{E \vdash fn\ y \Rightarrow let\ x = 3\ in\ yx \rightsquigarrow (y, let\ x = 3\ in\ yx, E) \quad E \vdash fn\ z \Rightarrow x \rightsquigarrow (z, x, E) \quad (*)}{E \vdash (fn\ y \Rightarrow let\ x = 3\ in\ yx)(fn\ z \Rightarrow x) \rightsquigarrow 7}}{\emptyset \vdash let\ x = 7\ in\ ((fn\ y \Rightarrow let\ x = 3\ in\ yx)(fn\ z \Rightarrow x)) \rightsquigarrow 7}$$

dove $E := \{(x, 7)\}$, $E' := E\{(y, (z, x, E))\}$ e $E'' := E'\{(x, 3)\}$

- Poiché l'espressione restituisce due valutazioni diverse, le due semantiche non sono equivalenti

□

Proposizione 11: Linguaggio *Fun* lazy dinamico

La semantica lazy dinamica del linguaggio *Fun* prevede l'aggiunta di alcune regole operazionali:

- L'insieme Env viene ridefinito come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Fun\}$$

- Dato $E \in Env$, per le funzioni si ha che:

$$E \vdash fn\ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M)$$

- Dato $E \in Env$, per le applicazioni si ha che:

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L) \quad E'\{(x, N)\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$$

Proposizione 12: Linguaggio *Fun* lazy statico

La semantica lazy statica del linguaggio *Fun* prevede l'aggiunta di alcune regole operazionali:

- L'insieme Env viene ridefinito come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Fun \times Env\}$$

- Dato $E \in Env$, per le funzioni si ha che:

$$E \vdash fn\ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M, E)$$

- Dato $E \in Env$, per le applicazioni si ha che:

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L, E') \quad E'\{(x, N, E)\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$$

Osservazione 16

Come per il linguaggio *Exp*, per la sua estensione *Fun* si ha che:

$$Fun \text{ lazy dinamico} \not\equiv Fun \text{ lazy statico}$$

Definizione 31: Espressione ω

Dato il linguaggio *Fun*, definiamo come **espressione omega**, indicata con ω , la seguente espressione:

$$\omega := (fn\ x \Rightarrow xx)(fn\ x \Rightarrow xx)$$

In particolare, l'espressione ω è **invalutabile per qualsiasi semantica**

Esempio:

- Analizziamo l'albero di derivazione di ω utilizzando una semantica eager statica:

$$\begin{array}{c}
 (*) \quad \emptyset \vdash x \rightsquigarrow (x, xx, \emptyset) \quad \emptyset \vdash x \rightsquigarrow (x, xx, \emptyset) \quad \frac{(*)}{(x, \{(x, xx, \emptyset)\}) \vdash xx \rightsquigarrow v} \\
 \hline
 \emptyset \vdash fn\ x \Rightarrow xx \rightsquigarrow (x, xx, \emptyset) \quad \emptyset \vdash fn\ x \Rightarrow xx \rightsquigarrow (x, xx, \emptyset) \quad \frac{(*)}{(x, \{(x, xx, \emptyset)\}) \vdash xx \rightsquigarrow v} \\
 \hline
 \emptyset \vdash (fn\ x \Rightarrow xx)(fn\ x \Rightarrow xx) \rightsquigarrow v
 \end{array}$$

- Notiamo quindi che affinché la valutazione del termine $(x, \{(x, xx, \emptyset)\}) \vdash xx \rightsquigarrow v$ richieda che esso stesso venga valutato, creando così un albero di derivazione infinito.

Lemma 3

Dato il linguaggio *Fun*, si ha che:

$$Fun \text{ eager statico} \not\equiv Fun \text{ lazy statico}$$

$$Fun \text{ eager dinamico} \not\equiv Fun \text{ lazy dinamico}$$

Dimostrazione.

- Consideriamo l'espressione $let\ x = \omega\ in\ 42$. Utilizzando una semantica eager (statica o dinamica), verrebbe richiesta immediatamente la valutazione del termine ω , il quale tuttavia è invalutabile. Utilizzando una semantica lazy (statica o dinamica), invece, il termine ω non verrà mai valutato, restituendo 42 come risultato.

□

Teorema 5: Equivalenze semantiche di *Fun*

Dato il linguaggio *Fun*, **non esistono due semantiche equivalenti**

Proposizione 13: Variabili libere in *Fun*

Dato il linguaggio *Fun*, la funzione $\text{free} : \text{Fun} \rightarrow \mathcal{P}(\text{Var})$ è definita come:

$$\begin{cases} \text{free}(k) = \emptyset \\ \text{free}(x) = \{x\} \\ \text{free}(M + N) = \text{free}(M) \cup \text{free}(N) \\ \text{free}(\text{let } x = M \text{ in } N) = \text{free}(M) \cup (\text{free}(N) - \{x\}) \\ \text{free}(\text{fn } x \Rightarrow M) = \text{free}(M) - \{x\} \\ \text{free}(MN) = \text{free}(M) \cup \text{free}(N) \end{cases}$$

2.4.1 *Fun* in Standard ML

La grammatica prevista dal linguaggio *Fun* mostrato fino ad ora è utilizzabile all'interno del **linguaggio SML (Standard Model Language)**, il quale prevede una sintassi leggermente diversa:

- L'operatore $\text{let } x = M \text{ in } N$ corrisponde a `let val x = M in N end`
- L'operatore $\text{fn } x \Rightarrow M$ corrisponde a `fn x => M;`
- L'operatore MN corrisponde a `MN` (potrebbe essere necessario introdurre uno spazio tra `M` ed `N` affinché l'interprete riesca a distinguere i due termini)
- La **curryficazione non è prevista**
- L'espressione va terminata da un **punto e virgola**
- La semantica utilizzata è **eager statica**

Ad esempio, l'espressione:

$$\text{let } x = 7 \text{ in } ((\text{fn } y \Rightarrow \text{let } x = 3 \text{ in } yx)(\text{fn } z \Rightarrow x))$$

corrisponde al comando:

```
let val x = 7 in (fn y => let val x = 3 in y x end) end;
```

Inoltre, il linguaggio SML permette di assegnare variabili, alle quali possono essere assegnate anche funzioni. Ad esempio, definendo:

```
val id = fn x => x;
```

il seguente comando restituisce 7:

```
id 7;
```

Per utilizzare il linguaggio SML, si consiglia l'uso del programma `smlnj` o dell'emulatore online `SOSML`.

2.5 Lambda calcolo

Definizione 32: Lambda calcolo

Il **lambda calcolo** è un sistema formale in logica matematica per esprimere il calcolo basato sull'**astrazione** e l'applicazione di **funzioni**.

Nella forma più semplice di lambda calcolo, i termini sono costruiti utilizzando solo le seguenti regole:

- Una **variabile** è rappresentata da un carattere (es: x)
- Una **funzione** è rappresentata da una **lambda astrazione**, ossia una stringa composta dal simbolo λ seguito dai parametri della funzione separati con un punto dal corpo della funzione stessa (es: $\lambda x.M$)
- L'**applicazione** di una funzione M ad un argomento N viene rappresentata come $M N$

Esempi:

- La lambda astrazione $\lambda x.x + 1$ corrisponde alla funzione $f(x) = x + 1$
- La lambda astrazione $\lambda xy.x + y$ corrisponde alla funzione $f(x, y) = x + y$
- La lambda astrazione $(\lambda x.x) 3$ corrisponde all'applicazione della funzione $f(x) = x$ all'argomento 3, restituendo quindi 3
- La lambda astrazione $(\lambda x.x)(\lambda x.x)$ restituisce $\lambda x.x$
- La lambda astrazione $\lambda xy.x(xy)$ applica due volte sull'argomento y la funzione x passata anch'essa come argomento

Osservazione 17: Curryficazione in lambda calcolo

La lambda astrazione $\lambda x_1 \dots x_n.M$ è la contrazione sintattica della seguente lambda astrazione:

$$\lambda x_1. \dots \lambda x_n.M$$

Definizione 33: Sostituzione

Definiamo come **sostituzione**, indicata con $M[N/x]$, l'operazione tramite cui all'interno di un'espressione M tutte le occorrenze di una variabile x vengono rimpiazzate con il termine N

Esempi:

- La sostituzione $(xy)[\lambda z.z/x]$ corrisponde a $((\lambda z.z)y)$
- La sostituzione $(fn\ x \Rightarrow xy)[x/y]$ corrisponde a $(fn\ x \Rightarrow xx)$

Osservazione 18: Cattura di variabili

L'operazione di sostituzione potrebbe legare una variabile precedentemente libera o viceversa. Tale fenomeno viene detto **cattura di variabili** ed è necessario accertarsi che esso non si verifichi affinché la sostituzione sia corretta

Esempio:

- L'espressione $(\lambda y.M)[N/x]$ è equivalente all'espressione $\lambda y.(M[N/x])$ solo se $y \notin \text{free}(N)$. Difatti, la sostituzione $(\lambda y.x)[y/x]$ risulta essere "scorretta" in quanto $(\lambda y.y)$ ha una valutazione differente rispetto all'espressione originale

Definizione 34: Alfa conversione

Definiamo come **alfa conversione**, indicata con \rightarrow_α , la regola secondo cui all'interno di una lambda astrazione $\lambda x.M$ ogni occorrenza della variabile x (incluso il parametro) possa essere rimpiazzata dalla variabile y :

$$\lambda x.M \rightarrow_\alpha \lambda y.(M[y/x])$$

Esempi:

- Data la lambda astrazione $\lambda x.(xy)$, si ha che:

$$\lambda x.xy \rightarrow_\alpha \lambda z.zy$$

- Data la lambda astrazione $\lambda x.x(\lambda z.zw)$, si ha che:

$$\lambda x.x(\lambda z.zw) \rightarrow_\alpha \lambda z.z(\lambda z.zw)$$

Definizione 35: Alfa equivalenza

Due lambda astrazioni $\lambda x.M$ e $\lambda y.N$ vengono dette **alfa equivalenti**, indicato con \equiv_α , se:

$$\lambda x.M \equiv_\alpha \lambda y.N \iff \lambda x.M \rightarrow_\alpha \lambda y.N \wedge \lambda y.N \rightarrow_\alpha \lambda x.M$$

Esempi:

- Date le due lambda astrazioni $\lambda x.(xy)$ e $\lambda z.zy$, si ha che:

$$\lambda x.xy \rightarrow_\alpha \lambda z.zy \wedge \lambda z.zy \rightarrow_\alpha \lambda x.xy \implies \lambda x.xy \equiv_\alpha \lambda z.zy$$

- Date le due lambda astrazioni $\lambda x.x(\lambda z.zw)$ e $\lambda z.z(\lambda z.zw)$, si ha che:

$$\lambda x.x(\lambda z.zw) \rightarrow_\alpha \lambda z.z(\lambda z.zw)$$

$$\lambda z.z(\lambda z.zw) \not\rightarrow_\alpha \lambda x.x(\lambda z.zw)$$

dunque ne concludiamo che:

$$\lambda x.x(\lambda z.zw) \not\equiv_\alpha \lambda z.z(\lambda z.zw)$$

Definizione 36: Beta conversione

Definiamo come **beta conversione** (o *beta riduzione*), indicata con \rightarrow_β , la regola secondo cui all'interno di una lambda espressione $(\lambda x.M)N$ ogni occorrenza della variabile x all'interno di M possa essere rimpiazzata dal termine N :

$$(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M[N/x]$$

Osservazione 19

La beta riduzione corrisponde esattamente ad singolo **passo computazionale**

Esempi:

- Data la lambda espressione $(\lambda x.xy)(\lambda z.z)$, si ha che:

$$(\lambda x.xy)(\lambda z.z) \rightarrow_\beta (\lambda z.z)y \rightarrow_\beta y$$

Definizione 37: Eta conversione

Definiamo come **eta conversione**, indicata con \rightarrow_η , la regola secondo cui la lambda espressione $(\lambda x.Mx)$ possa essere rimpiazzata con il termine M solo se $x \notin \text{free}(M)$:

$$x \notin \text{free}(M) \implies \lambda x.Mx \rightarrow_\eta M$$

Osservazione 20

La eta conversione è applicabile solo se la semantica considerata è **eager**

Esempi:

- Consideriamo la lambda espressione $\lambda x.(\lambda y.y)x$.
- Poiché:

$$\text{free}(\lambda y.y) = \{\text{free}(y) - \{y\}\} = \{y\} - \{y\} = \emptyset \implies x \notin \text{free}(\lambda y.y)$$

è possibile applicare l'eta conversione:

$$\lambda x.(\lambda y.y)x \rightarrow_\eta \lambda y.y$$

Teorema 6: Lambda calcolo turing completo

Il lambda calcolo è **turing completo**, ossia è in grado di simulare una qualsiasi computazione possibile

(*dimostrazione omessa*)

2.5.1 *Fun* vs Lambda calcolo

Avendo trattato le componenti principali del lambda calcolo, possiamo rappresentare quest'ultimo tramite la seguente grammatica:

$$M, N ::= x \mid fn\ x \Rightarrow M \mid MN$$

notiamo come il linguaggio *Fun* corrisponda ad un **sovra-linguaggio** del lambda calcolo stesso. Difatti, essendo il lambda calcolo già **turing completo**, alcuni termini del linguaggio *Fun* risultano "*ridondanti*".

In particolare, le seguenti due espressioni:

$$let\ x = M\ in\ N \qquad (fn\ x \Rightarrow N)M$$

risultano essere **operativamente equivalenti**, ossia vengono sempre valutate nello stesso risultato indipendentemente dalla semantica utilizzata (sebbene esse differiscano in termini di "implementazione" delle loro regole operazionali, dunque non sono effettivamente la stessa espressione).

Osservazione 21

La lambda astrazione $\lambda x_1. \dots \lambda x_n. M$, corrisponde all'espressione:

$$fn\ x_1 \dots x_n \Rightarrow M$$

In modo analogo a Von Neumann, il matematico Church diede una propria definizione alternativa dei **numeri naturali**: il numero $n \in \mathbb{N}$ corrisponde all'applicazione per n volte di un'operazione x su un valore y .

In particolare, notiamo che tale definizione data da Church possa essere espressa in termini di **lambda calcolo**. Ad esempio, il numero naturale 3 corrisponderà alla lambda astrazione $\lambda xy. x(x(xy))$

Proposizione 14: Numeri naturali di Church

I numeri naturali di Church, indicati con \mathcal{N}_λ , definiti come:

$$0_{\mathcal{N}_\lambda} := \lambda xy. y$$

$$1_{\mathcal{N}_\lambda} := \lambda xy. xy$$

$$2_{\mathcal{N}_\lambda} := \lambda xy. x(xy)$$

$$3_{\mathcal{N}_\lambda} := \lambda xy. x(x(xy))$$

...

dove $\text{succ}_{\mathcal{N}_\lambda} : \mathcal{N}_\lambda \rightarrow \mathcal{N}_\lambda : n \mapsto n \cup \{n\}$, soddisfano gli assiomi di Peano

(*dimostrazione omessa*)

Utilizzando la definizione di Church dei numeri naturali, è possibile definire un modello di calcolo **interamente basato sul lambda calcolo** dove ogni operazione possibile è definibile in termini di lambda astrazioni che lavorano sui numeri di Church (i quali a loro volta sono delle lambda astrazioni).

Di conseguenza, potremmo effettivamente ridurre la grammatica dell'intero linguaggio *Fun* in quella del lambda calcolo.

Procediamo quindi definendo i numeri di Church all'interno del linguaggio *Fun*:

- **zero** := $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow y$ oppure $fn\ xy \Rightarrow y$
- **one** := $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow xy$ oppure $fn\ xy \Rightarrow xy$
- **two** := $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x(xy)$ oppure $fn\ xy \Rightarrow x(xy)$
- **three** := $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x(x(xy))$ oppure $fn\ xy \Rightarrow x(x(xy))$
- ...

Definiamo inoltre una funzione **eval** in grado di convertire un numero di Church nel suo equivalente nei numeri naturali:

$$\mathbf{eval} := fn\ z \Rightarrow z(fn\ x \Rightarrow x + 1)\ 0$$

Ad esempio, l'espressione **eval two** viene valutata come:

$$\begin{aligned} \mathbf{eval\ two} &\longrightarrow_{\beta} \\ \{fn\ z \Rightarrow z(fn\ x \Rightarrow x + 1)\ 0\}[fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x(xy)] &\longrightarrow_{\beta} \\ \{[fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x(xy)](fn\ x \Rightarrow x + 1)\ 0\} &\longrightarrow_{\beta} \\ \{[fn\ y \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow x + 1)((fn\ x \Rightarrow x + 1)y)]\ 0\} &\longrightarrow_{\beta} \\ [(fn\ x \Rightarrow x + 1)\{(fn\ x \Rightarrow x + 1)\ 0\}] &\longrightarrow_{\beta} \\ [(fn\ x \Rightarrow x + 1)\ 1] &\longrightarrow_{\beta} \\ 2 \end{aligned}$$

A questo punto, definiamo la funzione **succ** che restituisce il successore del numero di Church dato in input:

$$\mathbf{succ} := fn\ z \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow zx(xy))$$

Ad esempio, l'espressione **succ one** viene valutata come:

$$\begin{aligned} \mathbf{succ\ one} &\longrightarrow_{\beta} \\ [fn\ z \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow zx(xy))](fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow xy) &\longrightarrow_{\beta} \\ [fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow xy)x(xy)] &\longrightarrow_{\beta} \\ [fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow (fn\ y \Rightarrow xy)(xy)] &\longrightarrow_{\beta} \\ fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x(xy) &\longrightarrow_{\beta} \\ \mathbf{two} \end{aligned}$$

Successivamente, definiamo le seguenti ulteriori funzioni matematiche:

- La funzione **sum** che somma due numeri di Church:

$$\text{sum} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow (\lambda x \Rightarrow \lambda y \Rightarrow zx(wxy))$$

oppure:

$$\text{sum} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow z \text{ succ } w$$

- La funzione **prod** che moltiplica due numeri di Church:

$$\text{prod} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow (\lambda x \Rightarrow \lambda y \Rightarrow z(wx)y)$$

oppure:

$$\text{prod} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow z(\text{sum } w) \text{ zero}$$

- La funzione **power** che eleva un numero di Church ad un altro numero di Church:

$$\text{prod} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow wz$$

Oltre ai numeri naturali, il lambda calcolo ci permette di descrivere anche la **logica booleana** di Church, dove i due valori **True** e **False** sono definiti come:

$$\text{True} := \lambda x \Rightarrow \lambda y \Rightarrow x$$

$$\text{False} := \lambda x \Rightarrow \lambda y \Rightarrow y$$

Come per i numeri di Church, definiamo una funzione **evalBool** in grado di convertire un booleano di Church in nel suo equivalente booleano:

$$\text{evalBool} := \lambda z \Rightarrow z \text{ true } \text{false}$$

dove *true* e *false* sono i normali valori booleani

Infine, definiamo i seguenti operatori logici:

- L'operatore **ITE** (abbreviativo di **If-Then-Else**) che dati una condizione *z* e due booleani di Church *u, v*, valuta *u* se *z* è *true* oppure valuta *v* se *z* è *false*:

$$\text{ITE} := \lambda z \Rightarrow \lambda u \Rightarrow \lambda v \Rightarrow z u v$$

- L'operatore **If** che dati una condizione *z* ed un booleano di Church *u*, valuta *u* se *z* è *true*:

$$\text{If} := \lambda z \Rightarrow \lambda u \Rightarrow z u \text{ True}$$

- L'operatore **Not** che restituisce il negato di un booleano di Church:

$$\text{Not} := \lambda z \Rightarrow \lambda x \Rightarrow \lambda y \Rightarrow z y x$$

- L'operatore **Or** che restituisce l'or logico tra due booleani di Church:

$$\text{Or} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow \text{If}(\text{Not } z)w$$

- L'operatore **And** che restituisce l'and logico tra due booleani di Church:

$$\text{And} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow \text{Not}(\text{If } z (\text{Not } w))$$

Di seguito viene fornito il codice SML per poter lavorare con il modello di calcolo appena definito:

```
(* Numeri di Church *)

val zero = fn x => fn y => y;
val one  = fn x => fn y => x y;
val two  = fn x => fn y => x(x y);
val three = fn x => fn y => x(x(x y));

val eval = fn z => z (fn x => x+1) 0;

val succ = fn z => fn x => fn y => z x (x y);
val sum  = fn z => fn w => fn x => fn y => z x (w x y);
val prod = fn z => fn w => fn x => fn y => z (w x) y;
val power = fn z => fn w => w z;

(* Booleani di Church *)

val True  = fn x => fn y => x;
val False = fn x => fn y => y;

val evalBool = fn z => z true false;

val ITE = fn z => fn u => fn v => z u v;
val If  = fn z => fn u => z u True;

val Not = fn z => fn x => fn y => z y x;
val Or  = fn z => fn w => If (Not z) w;
val And = fn z => fn w => Not (If z (Not w));

(* Esempi *)

eval (sum (power two three) (prod two three));
evalBool (And (ITE True False True) False);
```