



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

“SAPIENZA” UNIVERSITÀ DI ROMA  
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,  
INFORMATICA E STATISTICA  
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

---

# Automi, Calcolabilità e Complessità

---

Appunti integrati con il libro "Introduzione alla teoria  
della computazione", Michael Sipser

*Author*  
Simone Bianco

14 ottobre 2023

# Indice

<b>Informazioni e Contatti</b>	<b>1</b>
<b>1 Linguaggi e Automi</b>	<b>2</b>
1.1 Linguaggi . . . . .	2
1.2 Determinismo . . . . .	3
1.3 Non determinismo . . . . .	8
1.3.1 Equivalenza tra NFA e DFA . . . . .	10
1.4 Linguaggi regolari . . . . .	13
1.5 Espressioni regolari . . . . .	18

# Informazioni e Contatti

Appunti e riassunti personali raccolti in ambito del corso di *Automi, Calcolabilità e Complessità* offerto dal corso di laurea in Informatica dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".

Ulteriori informazioni ed appunti possono essere trovati al seguente link:

<https://github.com/Exyss/university-notes>. Chiunque si senta libero di segnalare incorrettezze, migliorie o richieste tramite il sistema di Issues fornito da GitHub stesso o contattando in privato l'autore :

- Email: [bianco.simone@outlook.it](mailto:bianco.simone@outlook.it)
- LinkedIn: [Simone Bianco](#)

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se le modifiche siano già state apportate nella versione più recente.

## Prerequisiti consigliati per lo studio:

Apprendimento del materiale relativo al corso *Progettazione di Algoritmi*.

## Licence:

These documents are distributed under the [GNU Free Documentation License](#), a form of copyleft intended for use on a manual, textbook or other documents. Material licensed under the current version of the license can be used for any purpose, as long as the use meets certain conditions:

- All previous authors of the work must be **attributed**.
- All changes to the work must be **logged**.
- All derivative works must be **licensed under the same license**.
- The full text of the license, unmodified invariant sections as defined by the author if any, and any other added warranty disclaimers (such as a general disclaimer alerting readers that the document may not be accurate for example) and copyright notices from previous versions must be maintained.
- Technical measures such as DRM may not be used to control or obstruct distribution or editing of the document.

# 1

## Linguaggi e Automi

### 1.1 Linguaggi

#### Definizione 1: Alfabeto

Definiamo come **alfabeto** un insieme finito di elementi detti **simboli**

**Esempio:**

- L'insieme  $\Sigma = \{0, 1, x, y, z\}$  è un alfabeto
- L'insieme  $\Sigma = \{0, 1\}$  è un alfabeto. In particolare, tale alfabeto viene detto **alfabeto binario**

#### Definizione 2: Stringa

Dato un alfabeto  $\Sigma$ , definiamo come **stringa di  $\Sigma$**  una sequenza di simboli  $x_1x_2 \dots x_n$  dove  $x_1, \dots, x_n \in \Sigma$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

In particolare, indichiamo come  $\varepsilon$  la **stringa vuota**

**Esempio:**

- Dato l'alfabeto  $\Sigma = \{0, 1, x, y, z\}$ , una stringa di  $\Sigma$  è  $0x1yyy0$

#### Definizione 3: Linguaggio

Dato un alfabeto  $\Sigma$ , definiamo come **linguaggio di  $\Sigma$** , indicato come  $\Sigma^*$ , l'insieme delle stringhe di  $\Sigma$ .

In particolare, notiamo che  $\varepsilon \in \Sigma^*$  per qualsiasi linguaggio  $\Sigma^*$

**Definizione 4: Concatenazione**

Data la stringa  $x := x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$  e la stringa  $y := y_1 \dots y_m \in \Sigma^*$ , definiamo come **concatenazione** la seguente operazione:

$$xy = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$$

**Definizione 5: Potenza**

Data la stringa  $x \in \Sigma^*$  e dato  $n \in \mathbb{N}$ , definiamo come **potenza** la seguente operazione:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } n = 0 \\ xx^{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

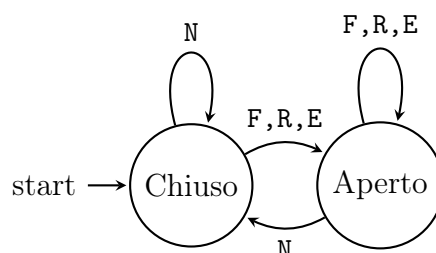
## 1.2 Determinismo

**Definizione 6: Automa**

Un **automa** è un meccanismo di controllo (o macchina) progettato per seguire automaticamente una sequenza di operazioni o rispondere a istruzioni predeterminate, mantenendo informazioni relative allo **stato** attuale dell'automa stesso ed agendo di conseguenza, **passando da uno stato all'altro**.

**Esempio:**

- Un sensore che apre e chiude una porta può essere descritto tramite il seguente automa, dove **Chiuso** e **Aperto** sono gli stati dell'automa e N, F, R e E sono le operazioni di transizione tra i due stati indicanti rispettivamente:
  - N: il sensore non rileva alcuna persona da entrambi i lati della porta
  - F: il sensore rileva qualcuno nel lato frontale della porta
  - R: il sensore rileva qualcuno nel lato retrostante della porta
  - E: il sensore rileva qualcuno da entrambi i lati della porta



- L'automa appena descritto è in grado di interpretare una **stringa in input** che ne descriva la sequenza di operazioni da svolgere (es: la stringa NFNNNFRR terminerà l'esecuzione dell'automa sullo stato Aperto)

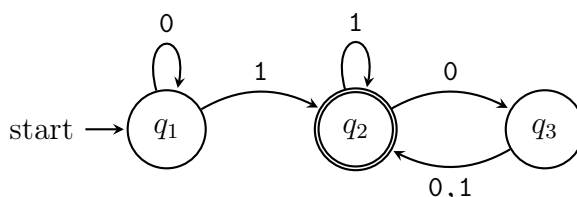
### Definizione 7: Deterministic Finite Automaton (DFA)

Un **Deterministic Finite Automaton (DFA)** (o *Automa Deterministico a Stati Finiti*) è una quintupla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  dove:

- $Q$  è l'**insieme finito degli stati** dell'automa
- $\Sigma$  è l'**alfabeto** dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  è la **funzione di transizione degli stati** dell'automa
- $q_0 \in Q$  è lo **stato iniziale** dell'automa
- $F \subseteq Q$  è l'**insieme degli stati accettanti** dell'automa, ossia l'insieme degli stati su cui, a seguito della lettura di una stringa in input, l'automa accetta la corretta terminazione

#### Esempio:

- Consideriamo il seguente DFA



dove:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$  è l'insieme degli stati dell'automa
- $\Sigma = \{0, 1\}$  è l'alfabeto dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  definita come

$\delta$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
0	$q_1$	$q_3$	$q_2$
1	$q_2$	$q_2$	$q_2$

è la funzione di transizione degli stati dell'automa

- $q_1$  è lo stato iniziale dell'automa
- $F = \{q_2\}$  è l'insieme degli stati accettanti

**Definizione 8: Funzione di transizione estesa**

Sia  $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un DFA. Definiamo  $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$  come **funzione di transizione estesa di  $D$**  la funzione definita ricorsivamente come:

$$\begin{cases} \delta^*(q, \varepsilon) = \delta(q, \varepsilon) = q \\ \delta^*(q, ax) = \delta^*(\delta(q, a), x), \text{ dove } a \in \Sigma, x \in \Sigma^* \end{cases}$$

**Definizione 9: Stringa accettata**

Sia  $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un DFA. Data una stringa  $x \in \Sigma^*$ , diciamo che  $x$  è **accettata da  $D$**  se  $\delta^*(q_0, x) \in F$ , ossia l'interpretazione di tale stringa **termina su uno stato accettante**

**Esempio:**

- Consideriamo ancora il DFA dell'esempio precedente.
- La stringa 0101 è accettata da tale DFA, poiché:

$$\begin{aligned} \delta^*(q_1, 0101) &= \delta^*(\delta(q_1, 0), 101) = \delta^*(q_2, 101) = \delta^*(\delta(q_2, 1), 01) = \delta^*(q_2, 01) = \\ &= \delta^*(\delta(q_2, 0), 1) = \delta^*(q_3, 1) = \delta^*(\delta(q_3, 1), \varepsilon) = \delta^*(q_2, \varepsilon) = q_2 \in F \end{aligned}$$

- La stringa 1010, invece, non è accettata dal DFA, poiché:

$$\delta^*(q_1, 1010) = \delta^*(q_2, 010) = \delta^*(q_3, 10) = \delta^*(q_2, 0) = \delta^*(q_3, \varepsilon) = q_3 \notin F$$

**Definizione 10: Linguaggio di un DFA**

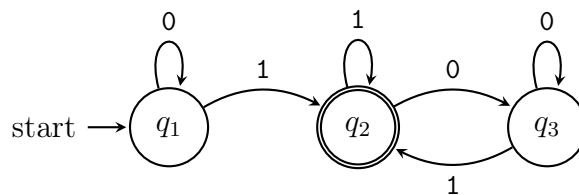
Sia  $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un DFA. Definiamo come **linguaggio di  $D$** , indicato come  $L(D)$ , l'insieme di stringhe accettate da  $D$

$$L(D) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) \in F\}$$

Inoltre, diciamo che  $D$  **riconosce**  $L(D)$

**Esempi:**

- Consideriamo il seguente DFA  $D$



- Il linguaggio riconosciuto da tale DFA corrisponde a

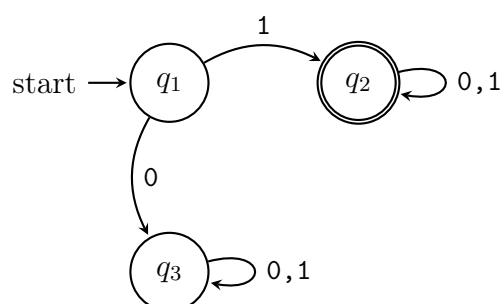
$$L(D) = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x := y1, \exists y \in \{0, 1\}^*\}$$

ossia al linguaggio composto da tutte le stringhe terminanti con 1

- Consideriamo il seguente linguaggio

$$L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid 1y, \exists y \in \{0, 1\}^*\}$$

- Un DFA in grado di riconoscere tale linguaggio corrisponde a

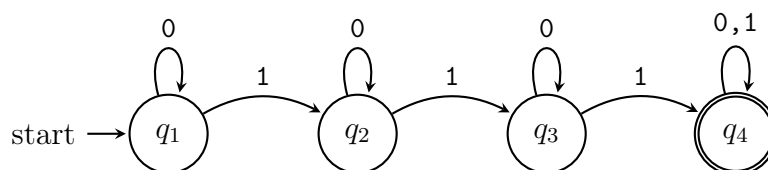


- Consideriamo il seguente linguaggio

$$L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid w_H(x) \geq 3\}$$

dove  $w_H$  è il **peso di Hamming** (ossia  $w_H(x) = \text{numero di "1" in } x$ )

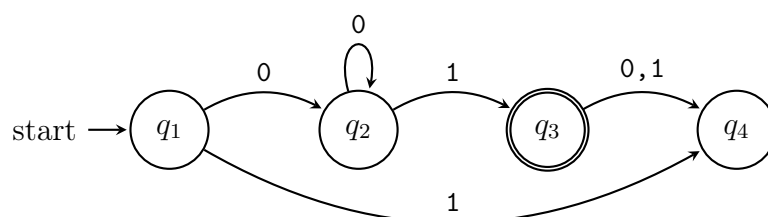
- Un DFA in grado di riconoscere tale linguaggio corrisponde a



- Consideriamo il seguente linguaggio

$$L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid 0^n 1, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

- Un DFA in grado di riconoscere tale linguaggio corrisponde a





**Definizione 11: Configurazione di un DFA**

Sia  $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un DFA. Definiamo la coppia  $(q, x) \in Q \times \Sigma^*$  come **configurazione di  $D$**

**Definizione 12: Passo di computazione**

Definiamo come **passo di computazione** la relazione binaria definita come

$$(p, ax) \vdash_D (q, x) \iff \delta(p, a) = q$$

**Definizione 13: Computazione deterministica**

Definiamo una computazione come **deterministica** se ad ogni passo di computazione segue un'unica configurazione:

$$\forall (q, ax) \exists! (p, x) \mid (q, ax) \vdash_D (p, x)$$

**Proposizione 1: Chiusura del passo di computazione**

Sia  $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un DFA. La **chiusura riflessiva e transitiva** di  $\vdash_D$ , indicata come  $\vdash_D^*$ , gode delle seguenti proprietà:

- $(p, ax) \vdash_D (q, x) \implies (p, ax) \vdash_D^* (q, x)$
- $\forall q \in Q, x \in \Sigma^* \quad (q, x) \vdash_D^* (q, x)$
- $(p, aby) \vdash_D (q, by) \wedge (q, by) \vdash_D (r, y) \implies (p, aby) \vdash_D^* (r, y)$

**Osservazione 1**

Sia  $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un DFA. Dati  $q_i, q_f \in Q, x \in \Sigma^*$ , si ha che

$$\delta^*(q_i, x) = q_f \iff (q_i, x) \vdash_D^* (q_f, \varepsilon)$$

(*dimostrazione omessa*)

## 1.3 Non determinismo

### Definizione 14: Alfabeto epsilon

Dato un alfabeto  $\Sigma$ , definiamo  $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  come **alfabeto epsilon** di  $\Sigma$

### Definizione 15: Non-deterministic Finite Automaton (NFA)

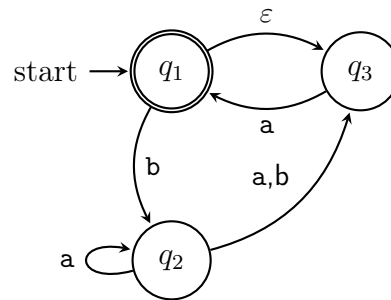
Un **Non-deterministic Finite Automaton (NFA)** (o *Automa Non-deterministico a Stati Finiti*) è una quintupla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  dove:

- $Q$  è l'**insieme finito degli stati** dell'automa
- $\Sigma$  è l'**alfabeto** dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  è la **funzione di transizione degli stati** dell'automa
- $q_0 \in Q$  è lo **stato iniziale** dell'automa
- $F \subseteq Q$  è l'**insieme degli stati accettanti** dell'automa

**Nota:**  $\mathcal{P}(Q)$  è l'insieme delle parti di  $Q$ , ossia l'insieme contenente tutti i suoi sottoinsiemi possibili

### Esempio:

- Consideriamo il seguente NFA



dove:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$  è l'insieme degli stati dell'automa
- $\Sigma_\varepsilon = \{\varepsilon, \}$  è l'alfabeto dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  definita come

$\delta$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\varepsilon$	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
<b>a</b>	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
<b>b</b>	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$

è la funzione di transizione degli stati dell'automa

- $q_1$  è lo stato iniziale dell'automa
- $F = \{q_1\}$  è l'insieme degli stati accettanti

### Proposizione 2: Stringa accettata in un NFA

Sia  $N := (Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F)$  un NFA. Data una stringa  $x := x_0 \dots x_k \in \Sigma_\varepsilon^*$ , diciamo che  $x$  è **accettata** se esiste una sequenza di stati  $r_0, r_1, \dots, r_k \in Q$  tali che:

- $r_0 = q_0$
- $\forall i \in [0, k] \quad r_{i+1} \in \delta(r_i, x_i)$
- $r_m \in F$

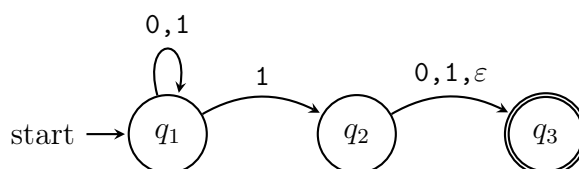
### Osservazione 2: Computazione in un NFA

Sia  $N := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un NFA. Data una stringa  $x \in \Sigma_\varepsilon$  in ingresso, la **computazione** viene eseguita nel seguente modo:

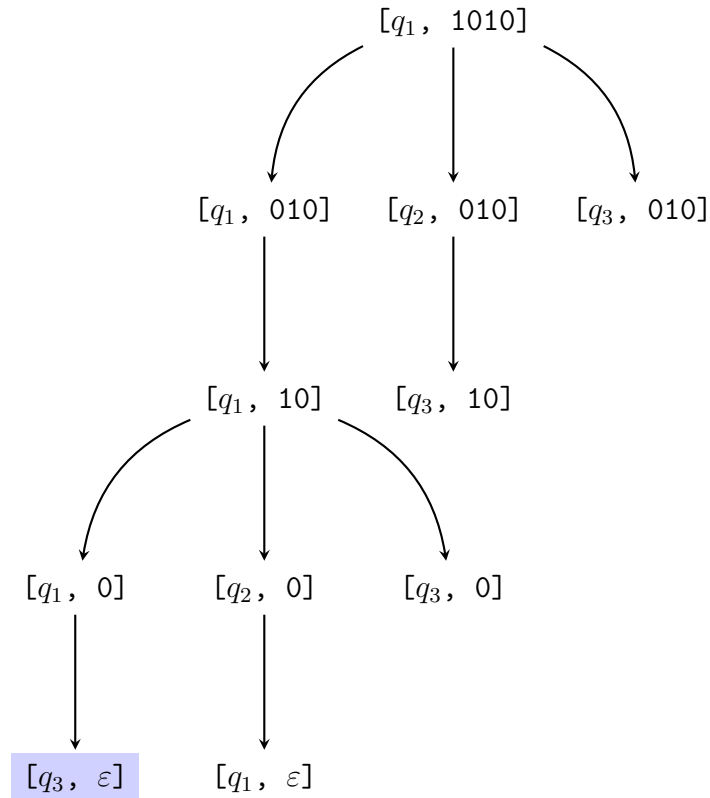
- Tutte le volte che uno stato potrebbe avere più transizioni per diversi simboli dell'alfabeto, l'automa  $N$  si duplica in **più copie**, ognuna delle quali segue il suo corso. Si vengono così a creare più **rami di computazione** indipendenti che sono eseguiti in **parallelo**.
- Se il prossimo simbolo della stringa da computare non si trova su nessuna delle transizioni uscenti dello stato attuale di un ramo di computazione, l'intero ramo **termina la sua computazione** (terminazione incorretta).
- Se almeno una delle copie di  $N$  termina correttamente su uno stato di accettazione, l'automa **accetta la stringa di partenza**.
- Quando a seguito di una computazione ci si ritrova in uno stato che possiede un  $\varepsilon$ -arco in uscita, la macchina si duplica in più copie: quelle che seguono gli  $\varepsilon$ -archi e quella che rimane nello stato raggiunto.

### Esempio:

- Consideriamo il seguente NFA



- Supponiamo che venga computata la stringa  $x = 1010$ :



- Poiché esiste un ramo che termina correttamente, l'NFA descritto accetta la stringa  $x = 1010$

### 1.3.1 Equivalenza tra NFA e DFA

#### Definizione 16: Classe dei linguaggi riconosciuti da un DFA

Dato un alfabeto  $\Sigma$ , definiamo come **classe dei linguaggi di  $\Sigma$  riconosciuti da un DFA** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{DFA } D \text{ t.c. } L = L(D)\}$$

#### Definizione 17: Classe dei linguaggi riconosciuti da un NFA

Dato un alfabeto  $\Sigma$ , definiamo come **classe dei linguaggi di  $\Sigma$  riconosciuti da un NFA** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(\text{NFA}) = \{L \subseteq \Sigma_{\epsilon}^* \mid \exists \text{NFA } N \text{ t.c. } L = L(N)\}$$

**Teorema 1: Equivalenza tra NFA e DFA**

Date le due classi di linguaggi  $\mathcal{L}(\text{DFA})$  e  $\mathcal{L}(\text{NFA})$ , si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) = \mathcal{L}(\text{NFA})$$

*Dimostrazione.*

*Prima implicazione.*

- Dato  $L \in \mathcal{L}(\text{DFA})$ , sia  $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  il DFA tale che  $L = L(D)$
- Poiché il concetto di NFA è una generalizzazione del concetto di DFA, ne segue automaticamente che  $D$  sia anche un NFA, implicando che  $L \in \mathcal{L}(\text{NFA})$  e di conseguenza che:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{NFA})$$

*Seconda implicazione.*

- Dato  $L \in \mathcal{L}(\text{NFA})$ , sia  $N := (Q_N, \Sigma_\varepsilon, \delta_N, q_{0_N}, F_N)$  il NFA tale che  $L = L(N)$
- Consideriamo quindi il DFA  $D := (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{0_D}, F_D)$  costruito tramite  $N$  stesso:
  - $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$
  - Dato  $R \in Q_D$ , definiamo l'estensione di  $R$  come:
 
$$E(R) = \{q \in Q_N \mid q \text{ è raggiungibile in } N \text{ da } q' \in R \text{ tramite } k \geq 0 \text{ } \varepsilon\text{-archi}\}$$
  - $q_{0_D} = E(\{q_{0_N}\})$
  - $F_D = \{R \in Q_D \mid R \cap F_N \neq \emptyset\}$
  - Dati  $R \in Q_D$  e  $a \in \Sigma$ , definiamo  $\delta_D$  come:

$$\delta_D = (R, a) = \bigcup_{r \in R} E(\delta_N(r, a))$$

- A questo punto, per costruzione stessa di  $D$  si ha che:

$$x \in L = L(N) \iff x \in L(D)$$

implicando dunque che  $L \in \mathcal{L}(\text{DFA})$  e di conseguenza che:

$$L \in \mathcal{L}(\text{NFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{DFA})$$

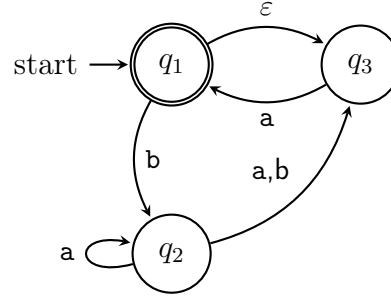
□

**Osservazione 3**

Dato un NFA  $N$ , seguendo i passaggi della dimostrazione precedente è possibile definire un DFA  $D$  equivalente ad  $N$

**Esempio:**

- Consideriamo ancora il seguente NFA



- Definiamo quindi l'insieme degli stati del DFA equivalente a tale NFA:

$$\begin{aligned}
 Q_D &= \{\emptyset, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2\}, \{q_2, q_3\}, \{q_1, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\} = \\
 &= \{\emptyset, q_1, q_2, q_3, q_{1,2}, q_{2,3}, q_{1,3}, q_{1,2,3}\}
 \end{aligned}$$

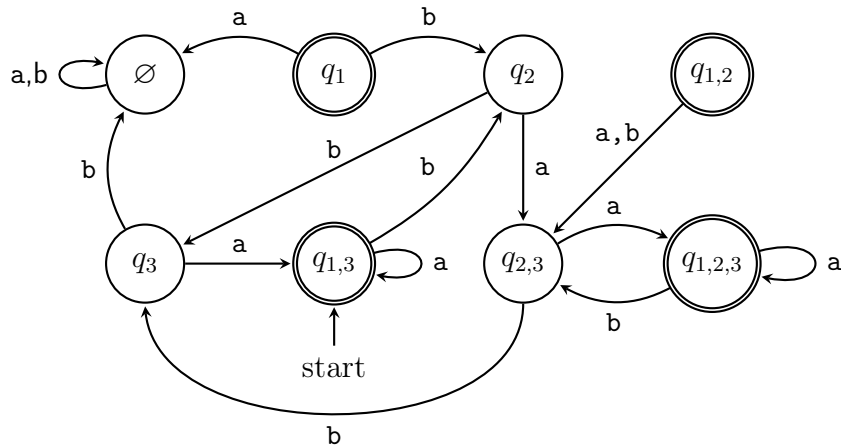
- A questo punto, lo stato iniziale sarà  $q_{0_D} = E(\{q_{0_N}\}) = E(\{q_1\}) = \{q_1, q_3\} = q_{1,3}$ , mentre gli stati accetanti saranno:

$$F_D = \{\{q_1\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\} = \{q_1, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,2,3}\}$$

- Le transizioni del DFA corrisponderanno invece a:

- $\delta_D(\{q_1\}, a) = E(\delta_N(q_1, a)) = \emptyset$
- $\delta_D(\{q_1\}, b) = E(\delta_N(q_1, b)) = \{q_2\} = q_2$
- $\delta_D(\{q_2\}, a) = E(\delta_N(q_2, a)) = \{q_2, q_3\} = q_{2,3}$
- $\delta_D(\{q_2\}, b) = E(\delta_N(q_2, b)) = \{q_2\} = q_2$
- $\delta_D(\{q_1, q_2\}, a) = E(\delta_N(q_1, a)) \cup E(\delta_N(q_2, a)) = \emptyset \cup \{q_2, q_3\} = \{q_2, q_3\} = q_{2,3}$
- $\delta_D(\{q_1, q_2\}, b) = E(\delta_N(q_1, b)) \cup E(\delta_N(q_2, b)) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\} = q_{2,3}$
- ...

- Il DFA equivalente corrisponde dunque a:



## 1.4 Linguaggi regolari

### Definizione 18: Linguaggi regolari

Dato un alfabeto  $\Sigma$ , definiamo come **insieme dei linguaggi regolari di  $\Sigma$** , indicato con REG, l'insieme delle classi dei linguaggi riconosciuti:

$$\text{REG} := \mathcal{L}(\text{DFA}) = \mathcal{L}(\text{NFA})$$

### Proposizione 3: Operazioni sui linguaggi

Dati due linguaggi  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ , definiamo le seguenti operazioni:

- Operatore unione:

$$L_1 \cup L_2 = \{x \in \Sigma^* \mid x \in L_1 \vee x \in L_2\}$$

- Operatore intersezione:

$$L_1 \cap L_2 = \{x \in \Sigma^* \mid x \in L_1 \wedge x \in L_2\}$$

- Operatore complemento:

$$\neg L_1 = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L_1\}$$

- Operatore concatenazione:

$$L_1 \circ L_2 = \{xy \in \Sigma^* \mid x \in L_1, y \in L_2\}$$

- Operatore potenza:

$$L_1^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{se } n = 0 \\ L_1 \circ L_1^{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

- Operatore star:

$$L_1^* = \{x_1 \dots x_k \in \Sigma^* \mid k \geq 0, \forall i \in [1, k] \ x_i \in L_1\} = \bigcup_{n \geq 0} L_1^n$$

### Teorema 2: Chiusura dell'unione in REG

L'operatore unione è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \quad L_1 \cup L_2 \in \text{REG}$$

*Dimostrazione.*

- Dati  $L_1, L_2 \in \text{REG}$ , siano  $D_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$  e  $D_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$  i due DFA tali che  $L_1 = L(D_1)$  e  $L_2 = L(D_2)$
- Definiamo quindi il DFA  $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  tale che:

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2) = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \vee r_2 \in F_2\}$
- $\forall (r_1, r_2) \in Q, a \in \Sigma$  si ha che:

$$\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$$

- A questo punto, per costruzione stessa di  $D$  ne segue che:

$$x \in L_1 \cup L_2 \iff D(x) \in F \iff x \in L(D) \implies L_1 \cup L_2 = L(D) \in \text{REG}$$

□

### Teorema 3: Chiusura dell'intersezione in REG

L'operatore intersezione è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \quad L_1 \cap L_2 \in \text{REG}$$

*Dimostrazione.*

- Dati  $L_1, L_2 \in \text{REG}$ , siano  $D_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$  e  $D_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$  i due DFA tali che  $L_1 = L(D_1)$  e  $L_2 = L(D_2)$
- Definiamo quindi il DFA  $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  tale che:

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = F_1 \times F_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \wedge r_2 \in F_2\}$
- $\forall (r_1, r_2) \in Q, a \in \Sigma$  si ha che:

$$\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$$

- A questo punto, per costruzione stessa di  $D$  ne segue che:

$$x \in L_1 \cap L_2 \iff D(x) \in F \iff x \in L(D) \implies L_1 \cap L_2 = L(D) \in \text{REG}$$

□



**Teorema 4: Chiusura del complemento in REG**

L'operatore complemento è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L \in \text{REG} \quad \neg L \in \text{REG}$$

*Dimostrazione.*

- Dato  $L \in \text{REG}$ , sia  $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  il DFA tale che  $L = L(D)$
- Definiamo quindi il DFA  $D' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$ , dunque il DFA uguale a  $D$  ma i cui stati accettanti sono invertiti
- A questo punto, per costruzione stessa di  $D'$  ne segue che:

$$x \in L \iff D(x) \notin F \iff x \notin L(D) \implies \neg L = L(D') \in \text{REG}$$

□

**Teorema 5: Chiusura della concatenazione in REG**

L'operatore concatenazione è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \quad L_1 \circ L_2 \in \text{REG}$$

*Dimostrazione.*

- Dati  $L_1, L_2 \in \text{REG}$ , siano  $N_1 = (Q_1, \Sigma_\varepsilon, \delta_1, q_1, F_1)$  e  $N_2 = (Q_2, \Sigma_\varepsilon, \delta_2, q_2, F_2)$  i due NFA tali che  $L_1 = L(N_1)$  e  $L_2 = L(N_2)$
- Definiamo quindi il NFA  $N = (Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F)$  tale che:

- $Q = Q_1 \cup Q_2$
- $q_0 = q_1$
- $F = F_2$
- $\forall q \in Q, a \in \Sigma$  si ha che:

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 - F_1 \\ \delta_1(q, a) & \text{se } q \in F_1 \wedge a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_2\} & \text{se } q \in F_1 \wedge a = \varepsilon \\ \delta_2(q, a) & \text{se } q \in Q_2 \end{cases}$$

- A questo punto, per costruzione stessa di  $N$  ne segue che:

$$x \in L_1 \circ L_2 \iff N(x) \in F \iff x \in L(N) \implies L_1 \circ L_2 = L(N) \in \text{REG}$$

□

**Corollario 1: Chiusura della potenza in REG**

L'operatore potenza è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L \in \text{REG}, n \in \mathbb{N} \quad L^n \in \text{REG}$$

*Dimostrazione.*

*Caso base.*

- Dato  $n = 0$ , si ha che  $L^0 = \{\varepsilon\} \in \text{REG}$

*Ipotesi induttiva.*

- Dato  $n \in \mathbb{N}$ , assumiamo che  $L^n \in \text{REG}$

*Passo induttivo.*

- Poiché  $L^{n+1} = L \circ L^n$  e poiché l'operatore concatenazione è chiuso in REG otteniamo che  $L^{n+1} = L \circ L^n \in \text{REG}$

□

**Teorema 6: Chiusura di star in REG**

L'operatore star è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L \in \text{REG} \quad L^* \in \text{REG}$$

*Dimostrazione I.*

- Ricordando che  $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$  procediamo per induzione su  $n \in \mathbb{N}$

*Caso base.*

- Dato  $n = 0$ , si ha che  $\bigcup_{0 \geq 0} L^0 = L^0 \in \text{REG}$

*Ipotesi induttiva.*

- Dato  $n \in \mathbb{N}$ , assumiamo che  $\bigcup_{n \geq 0} L^n \in \text{REG}$

*Passo induttivo.*

- Poiché l'operatore unione è chiuso in REG otteniamo che:

$$\bigcup_{n+1 \geq 0} L^{n+1} = L^{n+1} \cup \left( \bigcup_{n \geq 0} L^n \right) \in \text{REG}$$

□

*Dimostrazione II.*

- Dato  $L \in \text{REG}$ , sia  $N = (Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F)$  il NFA tale che  $L = L(N)$
- Definiamo quindi il DFA  $N' = (Q', \Sigma_\varepsilon, \delta', q_{0*}, F')$  tale che:
  - $q_{0*}$  è un nuovo stato iniziale aggiunto
  - $Q' = Q \cup \{q_{0*}\}$
  - $F' = F \cup \{q_{0*}\}$
  - $\forall q \in Q', a \in \Sigma$  si ha che:

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & \text{se } q \in Q - F \\ \delta(q, a) & \text{se } q \in F \wedge a \neq \varepsilon \\ \delta(q, a) \cup \{q_0\} & \text{se } q \in F \wedge a = \varepsilon \\ \{q_0\} & \text{se } q = q_{0*} \wedge a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_{0*} \wedge a \neq \varepsilon \end{cases}$$

- A questo punto, per costruzione stessa di  $N'$  ne segue che:

$$x \in L^* \iff N(x) \in F' \implies L^* = L(N') \in \text{REG}$$

□

#### Osservazione 4

Seguendo i passaggi delle precedenti dimostrazioni per costruzione, è possibile definire gli automi in grado di riconoscere i linguaggi regolari ottenuti tramite gli operatori di REG

## 1.5 Espressioni regolari

### Definizione 19: Espressione regolare

Dato un alfabeto  $\Sigma$ , definiamo come **espressione regolare di  $\Sigma$**  una stringa  $R$  rappresentante un linguaggio  $L(R) \subseteq \Sigma^*$ . In altre parole, ogni espressione regolare  $R$  rappresenta in realtà il linguaggio  $L(R)$  ad essa associata.

In particolare, definiamo l'**insieme delle espressioni regolari di  $\Sigma$** , indicato con  $\text{re}(\Sigma)$ , come:

- $\emptyset \in \text{re}(\Sigma)$
- $\varepsilon \in \text{re}(\Sigma)$
- $a \in \text{re}(\Sigma)$ , dove  $a \in \Sigma$
- $R_1, R_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies R_1 \cup R_2 \in \text{re}(\Sigma)$
- $R_1, R_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies R_1 \circ R_2 \in \text{re}(\Sigma)$
- $R \in \text{re}(\Sigma) \implies R^* \in \text{re}(\Sigma)$

### Osservazione 5

Data un'espressione regolare  $R \in \text{re}(\Sigma)$ , si ha che:

- $R = \emptyset \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = \emptyset$
- $R = \varepsilon \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = \{\varepsilon\}$
- $R = a \in \text{re}(\Sigma), a \in \Sigma \implies L(R) = \{a\}$
- $R = R_1 \cup R_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = L(R_1) \cup L(R_2)$
- $R = R_1 \circ R_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = L(R_1) \circ L(R_2)$
- $R = R_1^* \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = L(R_1)^*$

### Esempi:

1.  $0 \cup 1$  rappresenta il linguaggio  $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$
2.  $0^*10^*$  rappresenta il linguaggio  $\{0\}^* \circ \{1\} \circ \{0\}^* = \{x1y \mid x, y \in \{0\}^*\}$
3.  $\Sigma^*1\Sigma^*$  rappresenta il linguaggio  $\Sigma^* \circ \{1\} \circ \Sigma^* = \{x1y \mid x, y \in \Sigma^*\}$
4.  $(0 \cup 1000)^*$  rappresenta il linguaggio  $(\{0\} \cup \{1000\})^* = \{0, 1000\}^*$
5.  $\emptyset^*$  rappresenta il linguaggio  $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$  (ricordiamo che per definizione stessa si ha che  $\forall L \subseteq \Sigma^* \quad L^0 = \{\varepsilon\}$ )
6.  $0^*\emptyset$  rappresenta il linguaggio  $\{0\}^* \circ \emptyset = \emptyset$
7.  $(0 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon)$  rappresenta il linguaggio  $\{\emptyset, 0, 1, 01\}$

**Definizione 20: Classe dei linguaggi descritti da esp. reg.**

Dato un alfabeto  $\Sigma$ , definiamo come **classe dei linguaggi di  $\Sigma$  descritti da un'espressione regolare** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(\text{re}) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists R \in \text{re}(\Sigma) \text{ t.c. } L = L(R)\}$$

**Lemma 1**

Dato un alfabeto  $\Sigma$ , per ogni espressione regolare  $R \in \text{re}(\Sigma)$  esiste un DFA tale che  $L(R) = L(D)$ . In altre parole, si ha che:

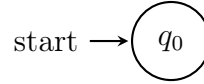
$$\mathcal{L}(\text{re}) \subseteq \text{REG}$$

*Dimostrazione.*

Procediamo per induzione strutturale, ossia dimostrando che se per ogni sotto-componente vale una determinata proprietà allora essa varrà anche per ogni componente formato da tali sotto-componenti

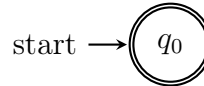
*Caso base.*

- Se  $R = \emptyset \in \text{re}(\Sigma)$ , definiamo il DFA  $D_\emptyset = (\{q_0\}, \Sigma, \delta, q_0, \emptyset)$ , ossia:



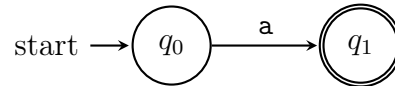
per cui si ha che  $x \in L(R) \iff x \in L(D_\emptyset)$  dunque  $L(R) = L(D_\emptyset) \in \text{REG}$

- Se  $R = \varepsilon \in \text{re}(\Sigma)$ , definiamo il DFA  $D_\varepsilon = (\{q_0\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_0\})$ , ossia:



per cui si ha che  $x \in L(R) \iff x \in L(D_\varepsilon)$  dunque  $L(R) = L(D_\varepsilon) \in \text{REG}$

- Se  $R = a \in \text{re}(\Sigma)$  con  $a \in \Sigma$ , definiamo il DFA  $D_a = (\{q_0, q_1\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1\})$  dove per  $\delta$  è definita solo la coppia  $\delta(q_0, a) = q_1$ , ossia:



per cui si ha che  $x \in L(R) \iff x \in L(D_a)$  dunque  $L(R) = L(D_a) \in \text{REG}$

*Ipotesi induttiva.*

- Dati  $R_1, R_2 \in \text{re}(\Sigma)$ , assumiamo che  $\exists$  DFA  $D_1, D_2 \mid L(R_1) = L(D_1), L(R_2) = L(D_2)$

*Passo induttivo.*

- Se  $R = R_1 \cup R_2$ , tramite la chiusura dell'unione in REG, otteniamo che:

$$L(R) = L(R_1) \cup L(R_2) = L(D_1) \cup L(D_2) \in \text{REG}$$

- Se  $R = R_1 \circ R_2$ , tramite la chiusura della concatenazione in REG, otteniamo che:

$$L(R) = L(R_1) \circ L(R_2) = L(D_1) \circ L(D_2) \in \text{REG}$$

- Se  $R = R_1^*$ , tramite la chiusura di star in REG, otteniamo che:

$$L(R) = L(R_1)^* = L(D_1)^* \in \text{REG}$$

□