



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

“SAPIENZA” UNIVERSITÀ DI ROMA  
INGEGNERIA DELL’INFORMAZIONE,  
INFORMATICA E STATISTICA  
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

---

# Linguaggi di Programmazione

---

Appunti integrati con il libro

*Autore*  
Simone Bianco

16 marzo 2025

# Indice

<b>Informazioni e Contatti</b>	<b>1</b>
<b>1 Algebre e strutture dati induttive</b>	<b>2</b>
1.1 Assiomi di Peano e Principio di induzione . . . . .	2
1.2 Algebre induttive . . . . .	5
1.2.1 Lemma di Lambek . . . . .	9
1.3 Strutture dati induttive . . . . .	11
1.4 Sintassi astratta dei linguaggi . . . . .	16
<b>2 Paradigma funzionale</b>	<b>18</b>
2.1 <i>Exp</i> : un semplice linguaggio funzionale . . . . .	18
2.2 Valutazione Eager vs Lazy . . . . .	22
2.3 Scoping Statico vs Dinamico . . . . .	24
2.4 <i>Fun</i> : un linguaggio con funzioni . . . . .	27
2.4.1 <i>Fun</i> in Standard ML . . . . .	33
2.5 Lambda calcolo . . . . .	34
2.5.1 <i>Fun</i> vs Lambda calcolo . . . . .	37
2.6 Ricorsione nei linguaggi funzionali . . . . .	41
<b>3 Paradigma imperativo</b>	<b>46</b>
3.1 <i>Imp</i> : un semplice linguaggio imperativo . . . . .	46
3.2 <i>All</i> : un linguaggio con procedure . . . . .	50
3.2.1 Semantiche di <i>All</i> . . . . .	52
<b>4 Correttezza dei programmi</b>	<b>55</b>
4.1 Correttezza dei programmi imperativi . . . . .	55
4.1.1 Invarianti di un programma . . . . .	55
4.1.2 Logica di Hoare . . . . .	58
4.2 Correttezza dei programmi funzionali . . . . .	64
<b>5 Sistema dei Tipi</b>	<b>68</b>
5.1 Lambda calcolo tipato semplice . . . . .	68
5.2 Lambda calcolo polimorfo . . . . .	71
5.3 Sistema dei tipi di Hindley-Milner . . . . .	74
5.3.1 Algoritmo $\mathcal{W}$ . . . . .	78
5.4 Isomorfismo di Curry-Howard . . . . .	83

# Informazioni e Contatti

Appunti e riassunti personali raccolti in ambito del corso di *Linguaggi di Programmazione* offerto dal corso di laurea in Informatica dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".

Ulteriori informazioni ed appunti possono essere trovati al seguente link:

<https://github.com/Exyss/university-notes>. Chiunque si senta libero di segnalare incorrettezze, migliorie o richieste tramite il sistema di Issues fornito da GitHub stesso o contattando in privato l'autore :

- Email: [bianco.simone@outlook.it](mailto:bianco.simone@outlook.it)
- LinkedIn: [Simone Bianco](#)

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se le modifiche siano già state apportate nella versione più recente.

## Prerequisiti consigliati per lo studio:

Apprendimento del materiale relativo al corso *Algebra*.

## Licence:

These documents are distributed under the [GNU Free Documentation License](#), a form of copyleft intended for use on a manual, textbook or other documents. Material licensed under the current version of the license can be used for any purpose, as long as the use meets certain conditions:

- All previous authors of the work must be **attributed**.
- All changes to the work must be **logged**.
- All derivative works must be **licensed under the same license**.
- The full text of the license, unmodified invariant sections as defined by the author if any, and any other added warranty disclaimers (such as a general disclaimer alerting readers that the document may not be accurate for example) and copyright notices from previous versions must be maintained.
- Technical measures such as DRM may not be used to control or obstruct distribution or editing of the document.

# Algebre e strutture dati induttive

## 1.1 Assiomi di Peano e Principio di induzione

### Definizione 1: Assiomi di Peano

L'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$  è definito secondo i seguenti **assiomi di Peano**:

1.  $0 \in \mathbb{N}$
2.  $n \in \mathbb{N} \implies \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$ , dove  $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  è la funzione successore
3.  $\forall n, m \in \mathbb{N} \text{ succ}(n) = \text{succ}(m) \implies n = m$ , ossia  $\text{succ}$  è iniettiva
4.  $\nexists n \in \mathbb{N} \mid \text{succ}(n) = 0$
5.  $\forall S \subseteq \mathbb{N} \ 0 \in S \wedge (n \in S \implies \text{succ}(n) \in S) \implies S = \mathbb{N}$

### Principio 1: Principio di induzione

Sia  $P$  una proprietà che vale per  $n = 0$ . Dato  $n \in \mathbb{N}$ , se si verifica che la veridicità di  $P$  per  $n$  implica che  $P$  sia vera anche per  $n + 1$ , allora  $P$  vale per ogni  $m \in \mathbb{N}$ .

In simboli, abbiamo che:

$$P(0) \wedge (P(n) \implies P(n+1)) \implies \forall m \in \mathbb{N} \ P(m)$$

**Proposizione 1: Induzione assiomatizzata**

Il quinto assioma di Peano è equivalente al principio di induzione

*Dimostrazione.*

- Data una proprietà  $P$ , definiamo il seguente insieme:

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ è vera}\}$$

- Affermare che valga il caso base per  $P$  e che assumendo l'ipotesi induttiva si riesca a dimostrare il passo induttivo, equivale a dire che  $0 \in S$  e che  $n \in S \implies n + 1 \in S$
- Di conseguenza, tramite il quinto assioma, ne segue che  $S = \mathbb{N}$ , dunque che  $P$  valga per ogni  $n \in \mathbb{N}$

□

**Osservazione 1**

Dato  $k \in \mathbb{N}$ , il principio di induzione può essere utilizzato per dimostrare che una proprietà  $P$  valga  $\forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq k$

*Dimostrazione.*

- Sia  $P$  la proprietà da voler dimostrare  $\forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq k$
- Definendo la proprietà  $Q$  come  $Q(m - k) = P(n)$ , dimostrare che  $P$  valga  $\forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq k$  equivale a dimostrare che  $Q$  valga  $\forall n \in \mathbb{N}$ , rispettando il quinto assioma di Peano

□

**Proposizione 2: Numeri naturali di Von Neumann**

I numeri naturali di Von Neumann, indicati con  $\mathcal{N}$ , definiti come:

$$0_{\mathcal{N}} := \{\}$$

$$1_{\mathcal{N}} := \{\{\}\}$$

$$2_{\mathcal{N}} := \{\{\}, \{\{\}\}\}$$

$$3_{\mathcal{N}} := \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}$$

...

assieme alla funzione  $\text{succ}_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} : n \mapsto n \cup \{n\}$  soddisfano gli assiomi di Peano

*Dimostrazione.*

1.  $0_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}$  per definizione stessa di  $\mathcal{N}$
2.  $n \in \mathcal{N} \implies \text{succ}_{\mathcal{N}}(n) \in \mathcal{N}$  per definizione stessa di  $\text{succ}_{\mathcal{N}}$
3. Siano  $n, m \in \mathcal{N}$  tali che  $n \neq m$ . In tal caso, ne segue automaticamente che:

$$n \neq m \implies n \cup \{n\} \neq m \cup \{m\} \iff \text{succ}_{\mathcal{N}}(n) \neq \text{succ}_{\mathcal{N}}(m)$$

Per contro-nominale, dunque, otteniamo che:

$$\text{succ}_{\mathcal{N}}(n) = \text{succ}_{\mathcal{N}}(m) \implies n = m$$

4. Supponiamo per assurdo che  $\exists n \in \mathbb{N} \mid \text{succ}_{\mathcal{N}}(n) = 0_{\mathcal{N}}$ . In tal caso, avremmo che:

$$\text{succ}(n) = 0_{\mathcal{N}} \iff n \cup \{n\} = 0_{\mathcal{N}} \iff n \cup \{n\} = \{\}$$

ma ciò risulta assurdo poiché implicherebbe che l'insieme  $\{\}$  contenga degli elementi. Di conseguenza, l'unica possibilità è che  $\nexists n \in \mathbb{N} \mid \text{succ}_{\mathcal{N}}(n) = 0_{\mathcal{N}}$

5. Dato  $S \subseteq \mathcal{N}$ , supponiamo che  $(0_{\mathcal{N}} \in S \wedge (n \in S \implies \text{succ}_{\mathcal{N}}(n) \in S))$

Considerato  $n \in \mathcal{N}$ , possiamo esprimere  $n$  come  $\text{succ}_{\mathcal{N}}(\text{succ}_{\mathcal{N}}(\dots \text{succ}_{\mathcal{N}}(0_{\mathcal{N}}))) = \text{succ}_{\mathcal{N}}^k(0_{\mathcal{N}})$  per qualche  $k \in \mathbb{N}$ . Procediamo quindi per induzione sul numero  $k \in \mathbb{N}$  di applicazioni della funzione  $\text{succ}_{\mathcal{N}}$  per ottenere  $n$

*Caso base* ( $k = 0$ ).

- Se  $k = 0$ , allora  $n = 0_{\mathcal{N}}$ . Poiché per ipotesi si ha che  $0_{\mathcal{N}} \in S$ , ne segue che  $n \in S$

*Ipotesi induttiva.*

- Dato un  $k \in \mathbb{N}$ , preso  $n = \text{succ}_{\mathcal{N}}^k(0_{\mathcal{N}}) \in \mathcal{N}$  si ha che  $n \in S$

*Passo induttivo.*

- Dato  $n = \text{succ}_{\mathcal{N}}^{k+1}(0_{\mathcal{N}}) \in \mathcal{N}$ , si ha che:

$$n = \text{succ}_{\mathcal{N}}^{k+1}(0_{\mathcal{N}}) = \text{succ}_{\mathcal{N}}^{k+1}(\text{succ}_{\mathcal{N}}^k(0_{\mathcal{N}}))$$

- Per ipotesi induttiva, sappiamo che  $\text{succ}_{\mathcal{N}}^k(0_{\mathcal{N}}) \in S$ . Di conseguenza, per ipotesi si ha che:

$$\text{succ}_{\mathcal{N}}^k(0_{\mathcal{N}}) \in S \implies \text{succ}_{\mathcal{N}}^{k+1}(\text{succ}_{\mathcal{N}}^k(0_{\mathcal{N}})) = \text{succ}_{\mathcal{N}}^{k+1}(0_{\mathcal{N}}) = n \in S$$

Di conseguenza, concludiamo che  $n \in \mathcal{N} \implies n \in S$  e dunque che  $S = \mathcal{N}$

□

## 1.2 Algebre induttive

### Definizione 2: Insieme unità

Definiamo come **insieme unità** l'insieme

$$\mathbb{1} = \{()\}$$

ossia l'insieme composto da una zerupla

### Definizione 3: Funzione nullaria

Dato un insieme  $A$  e una funzione  $f$ , definiamo una  $f$  come **funzione nullaria** (o *funzione costante*) se

$$f : \mathbb{1} \rightarrow A : () \mapsto a$$

dove  $a \in A$ .

Inoltre, per comodità, indichiamo  $f(())$  direttamente con  $f$

**Esempio:**

- Data la funzione  $\text{zero} : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N} : () \mapsto 0$ , indichiamo  $\text{zero}()$  direttamente come  $\text{zero}$

### Osservazione 2

Una funzione nullaria è sempre **iniettiva** in quanto esiste un solo elemento nel dominio.

### Definizione 4: Segnatura di una funzione

Data una funzione  $f$  definiamo  $f : D \rightarrow C$  come **segnatura di  $f$**  dove  $D$  è il **dominio di  $f$**  e  $C$  è il **codominio di  $f$**

### Definizione 5: Algebra

Definiamo come **algebra** (o struttura algebrica) una  $n$ -upla  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  dove  $A$  è un insieme non vuoto, detto **dominio**, e  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  sono delle operazioni definite su  $A$ , ossia la cui segnatura contiene  $A$

**Esempi:**

- La coppia  $(\mathbb{N}, \text{succ})$  è un'algebra
- La coppia  $(\mathbb{N}, \text{zero})$  è un'algebra

**Definizione 6: Chiusura di un'operazione**

Sia  $A$  un insieme e sia  $\gamma$  un'operazione definita su  $A$  come:

$$\gamma : A \times \dots \times A \times K_1 \times \dots \times K_m \rightarrow A$$

Dato un sottoinsieme  $S \subseteq A$ , diciamo che  $\gamma$  è **chiusa rispetto ad  $S$**  se:

$$a_1, \dots, a_n \in S \implies \gamma(a_1, \dots, a_n, k_1, \dots, k_m) \in S$$

**Esempi:**

- La funzione  $\text{succ}$  è chiusa per  $A \subseteq \mathbb{N}$  solo se  $A = \mathbb{N}$
- Dato l'insieme dei booleani  $B = \{0, 1\}$ , la funzione  $\text{not} : B \rightarrow B : b \mapsto \bar{b}$  è chiusa su  $B \subseteq B$  ma non su  $\{0\} \subseteq B$  in quanto dato  $0 \in \{0\}$  si ha che  $\text{not}(0) \notin \{0\}$

**Osservazione 3: Chiusura di una funzione nullaria**

Dato un insieme  $A$  e una funzione nullaria  $\gamma : \mathbb{1} \rightarrow B : () \mapsto b$ , tale funzione risulta chiusa rispetto ad  $A$  se e solo se  $b \in A$ , poiché non  $\gamma$  non prende in input alcun parametro di  $A$

**Esempio:**

- La funzione  $\text{zero}$  è chiusa su  $\{0\} \subseteq \mathbb{N}$  poiché non richiede alcun parametro, ma non è chiusa su  $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$  in quanto  $\text{zero} \notin \{1\}$

**Definizione 7: Algebra induttiva**

Definiamo l'algebra  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  come **induttiva** (o **iniziale**) se:

- $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  sono iniettive
- $\forall i \neq j \quad \text{im}(\gamma_i) \cap \text{im}(\gamma_j) = \emptyset$ , ossia le immagini delle operazioni sono due a due disgiunte
- Dato  $S \subseteq A$ , se  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  sono chiuse su  $S$  allora  $S = A$

**Nota:** la terza condizione è equivalente a dire che:

$$\nexists S \subsetneq A \mid (S, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \text{ è algebra induttiva}$$

**Definizione 8: Costruttori di un'algebra induttiva**

Data l'algebra induttiva  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , definiamo  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  come **costruttori** di  $A$ .

In particolare, dato  $\gamma_i$  dove  $i \in [1, n]$ , se  $\gamma_i : \mathbb{1} \rightarrow A$ , ossia è una funzione nullaria, definiamo  $\gamma_i$  come **costruttore base** di  $A$



**Esempio di algebra non induttiva:**

- Dato l'insieme dei Booleani  $B = \{0, 1\}$ , consideriamo l'algebra  $(B, \text{not})$ , dove  $\text{not} : B \rightarrow B : b \mapsto \bar{b}$
- Per definizione stessa, notiamo che  $\text{not}$  sia iniettiva e che, essendo l'unica operazione dell'algebra, la sua immagine sia disgiunta da quelle di tutte le altre operazioni
- Consideriamo quindi il sottoinsieme  $\emptyset \subsetneq B$ . Poiché  $\nexists x \in \emptyset$ , l'implicazione  $x \in \emptyset \implies \text{not}(x) \in \emptyset$  risulta vera a vuoto in quanto l'ipotesi sia falsa.
- Tuttavia, l'implicazione:

$$(x \in \emptyset \implies \text{not}(x) \in \emptyset) \implies \emptyset = B$$

risulta falsa poiché  $\emptyset \neq B$

- Difatti, procedendo analogamente, potremmo dimostrare che  $(\emptyset, \text{not})$  sia un'algebra induttiva, concludendo che  $(B, \text{not})$  non lo sia in quanto  $\emptyset \subsetneq B$

**Teorema 1: Esistenza di un costruttore base**

Se  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  è un'algebra induttiva e  $A \neq \emptyset$ , allora  $\exists i \in [1, n]$  per cui  $\gamma_i$  è un costruttore base di  $A$

*Dimostrazione.*

- Supponiamo che  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  sia un'algebra induttiva
- Considerato il sottoinsieme  $\emptyset \neq A$ , per ogni  $i \in [1, n]$  si ha che:
  - Se  $\gamma_i$  è un costruttore di base, si ha che  $\gamma_i \notin \emptyset$ , implicando che  $(\emptyset, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  non possa essere un'algebra induttiva
  - Se  $\gamma_i$  non è un costruttore di base, l'implicazione:

$$a_1, \dots, a_k \in \emptyset \implies \gamma_i(a_1, \dots, a_k) \in \emptyset$$

risulta vera a vuoto, implicando che  $\gamma_i$  sia chiusa per  $\emptyset$

- Supponiamo quindi per assurdo che  $\exists i \in [1, n]$  per cui  $\gamma_i$  è un costruttore base di  $A$
- In tal caso, dato  $\emptyset \subsetneq A$ , si avrebbe che  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  siano tutte chiuse in  $S$  ma che  $\emptyset \neq A$ , contraddicendo l'ipotesi per cui  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  sia induttiva
- Di conseguenza, ne segue necessariamente che  $\exists i \in [1, n]$  per cui  $\gamma_i$  è un costruttore base di  $A$

□

**Proposizione 3: Algebra induttiva dei naturali**

La tripla  $(\mathbb{N}, \text{zero}, \text{succ})$  è un'algebra induttiva

*Dimostrazione.*

- zero risulta essere iniettiva poiché funzione nullaria, mentre succ risulta essere iniettiva grazie al secondo assioma di Peano
- $\text{im}(\text{zero}) \cap \text{im}(\text{succ}) = \{0\} \cap (\mathbb{N} - \{0\}) = \emptyset$
- Dato  $S \subseteq \mathbb{N}$ , supponiamo che zero e succ siano chiuse su  $S$ , implicando che  $\text{zero} = 0 \in S$  e che  $n \in \mathbb{N} \implies \text{succ}(n) \in S$ . Per il quinto assioma di Peano, segue automaticamente che  $S = \mathbb{N}$

□

**Teorema 2: Algebre induttive finite**

Dato un insieme finito  $A$ , tale insieme è sempre definibile come algebra induttiva

*Dimostrazione.*

- Dato  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , per ogni  $i \in [1, n]$ , definiamo  $\gamma_i : \mathbb{1} \rightarrow A : () \mapsto a_i$
- Considerata l'algebra  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , per costruzione stessa abbiamo che:
  - $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  sono iniettive poiché sono tutte funzioni nullarie
  - $\forall i \neq j \quad \text{im}(\gamma_i) \cap \text{im}(\gamma_j) = \{a_i\} \cap \{a_j\} = \emptyset$ , dunque le immagini sono tutte disgiunte tra loro
  - Dato  $S \subseteq A$ , si ha che:
    - \* Se  $S = A$ , allora per ogni  $i \in [1, n]$  si ha che  $\gamma_i \in S = A$ , soddisfacendo la terza condizione
    - \* Se  $S \subsetneq A$  allora  $\exists a_i \in A - S$  per cui si ha che  $\gamma_i \notin S$ , implicando che  $\gamma_i$  non sia chiusa in  $S$  e quindi che la terza condizione sia soddisfatta a vuoto
- Dunque, concludiamo che  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  sia un'algebra induttiva

□

**Esempio:**

- Dato l'insieme dei Booleani  $B = \{0, 1\}$ , la tupla  $(B, \text{true}, \text{false})$  dove

$$\text{true} : \mathbb{1} \rightarrow B : () \mapsto 1$$

$$\text{false} : \mathbb{1} \rightarrow B : () \mapsto 0$$

è un'algebra induttiva

### 1.2.1 Lemma di Lambek

#### Definizione 9: Omomorfismo

Date due strutture algebriche  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$  e  $(B, \delta_1, \dots, \delta_k)$  dello stesso tipo, definiamo  $f : A \rightarrow B$  come **omomorfismo** se

$$\forall a_1, \dots, a_n \in A, i \in [1, k] \quad f(\gamma_i(a_1, \dots, a_k)) = \delta_i(f(a_1), \dots, f(a_k))$$

#### Esempio:

- Date le due algebre  $(\mathbb{R}, +)$  e  $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ , la funzione  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto e^x$  è un omomorfismo:

$$\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

#### Definizione 10: Isomorfismo

Definiamo come **isomorfismo** un omomorfismo biiettivo. Inoltre, definiamo due algebre  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ,  $(B, \delta_1, \dots, \delta_n)$  come **isomorfe**, indicato con  $A \cong B$ , se esiste un isomorfismo tra loro.

#### Esempio:

- Date le due algebre  $(\mathbb{R}, +)$  e  $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ , sappiamo già che  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto e^x$  sia un omomorfismo
- Poiché  $\exists \ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \mid \ln(\exp(x)) = x$ , ne segue che  $\exp$  sia invertibile, dunque che essa sia biettiva
- Di conseguenza,  $\exp$  risulta essere un isomorfismo, concludendo che  $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}_{>0}$

#### Definizione 11: Segnatura di un'algebra

Data un'algebra  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , definiamo come **segnatura dell'algebra** l'insieme delle segnature delle operazioni definite su essa.

Inoltre, date due algebre  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  e  $(B, \delta_1, \dots, \delta_n)$ , diciamo che tali algebre hanno **segnature equivalenti** se  $\forall i \in [1, n]$  sostituendo  $A$  con  $B$  all'interno della segnatura di  $\gamma_i$  si ottiene la segnatura di  $\delta_i$

#### Esempio:

- Date le due algebre  $(\mathbb{N}, \text{zero}, \text{succ})$  e  $(\mathcal{N}, \text{zero}_{\mathcal{N}}, \text{succ}_{\mathcal{N}})$ , si ha che:
  - La segnatura di  $\text{zero} : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N}$  è equivalente alla segnatura di  $\text{zero}_{\mathcal{N}} : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{N}$
  - La segnatura di  $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  è equivalente alla segnatura di  $\text{succ}_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$
 dunque le segnature di tali algebre sono equivalenti

- Date le due algebre  $(\mathbb{N}, \text{zero}, \text{succ})$  e  $(B, \text{true}, \text{not})$ , dove  $B = \{0, 1\}$  si ha che:
  - La segnatura di  $\text{zero} : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N}$  è equivalente alla segnatura di  $\text{true} : \mathbb{1} \rightarrow B$
  - La segnatura di  $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  è equivalente alla segnatura di  $\text{not} : B \rightarrow B$
 dunque le signature di tali algebre sono equivalenti

**Proposizione 4: Segnatura equivalente ad un'algebra induttiva**

Data un'algebra induttiva  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , per ogni algebra  $(B, \delta_1, \dots, \delta_n)$  con la stessa segnatura di  $A$  si ha che

$$\exists! \text{ omomorfismo } f : A \rightarrow B$$

**Nota:** l'algebra di  $B$  non deve necessariamente essere induttiva  
*(dimostrazione omessa)*

**Esempio:**

- Poiché le due algebre  $(\mathbb{N}, \text{zero}, \text{succ})$  e  $(B, \text{true}, \text{not})$ , dove  $B = \{0, 1\}$ , hanno signature equivalenti ne segue che  $\exists!$  omomorfismo  $f : \mathbb{N} \rightarrow B$  per cui si ha che:

$$f(\text{succ}(n)) = \text{not}(f(n))$$

**Lemma 1: Lemma di Lambek (versione ridotta)**

Date due algebre induttive  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  e  $(B, \delta_1, \dots, \delta_n)$  con la stessa segnatura, si ha che  $A \cong B$

*Dimostrazione.*

- Per la proposizione precedente, si ha che:

$$\exists! \text{ omomorfismo } f : A \rightarrow B \qquad \exists! \text{ omomorfismo } g : B \rightarrow A$$

- Consideriamo quindi la funzione  $g \circ f : A \rightarrow A : x \mapsto g(f(x))$  e verifichiamo che essa sia un omomorfismo

$$g \circ f(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = g \circ f(x) + g \circ f(y)$$

- Notiamo che per ogni algebra esiste sempre l'isomorfismo identità  $\text{id} : A \rightarrow A : x \mapsto x$  e poiché per il lemma precedente esiste necessariamente un unico omomorfismo tra  $A$  e  $A$ , ne segue necessariamente che  $g \circ f = \text{id}$
- Di conseguenza, si ha che

$$g \circ f = \text{id} \iff g = f^{-1} \implies g, f \text{ biettive} \implies g, f \text{ isomorfismi} \implies A \cong B$$

□

**Esempio:**

- Date le due algebre induttive  $(\mathbb{N}, \text{zero}, \text{succ})$  e  $(\mathcal{N}, \text{zero}_{\mathcal{N}}, \text{succ}_{\mathcal{N}})$  sono isomorfe tra loro poiché aventi la stessa segnatura algebrica
- Difatti, come già dimostrato,  $\mathbb{N}$  e  $\mathcal{N}$  sono solamente due modi diversi per rappresentare lo stesso identico concetto algebrico

## 1.3 Strutture dati induttive

### Definizione 12: Insieme delle liste finite

Definiamo  $\text{List}\langle T \rangle$  come l'insieme delle liste finite di elementi di  $T$ :

$$\text{List}\langle T \rangle = \{ \langle a_1, \dots, a_k \rangle \mid a_1, \dots, a_k \in T \}$$

**Esempio:**

- Dato  $\text{List}\langle \text{Int} \rangle$ , si ha che  $\langle 3, 5, 1 \rangle \in \text{List}\langle \text{Int} \rangle$

### Proposizione 5: Algebra induttiva delle liste finite

La tripla  $(\text{List}\langle T \rangle, \text{empty}, \text{cons})$ , dove:

- $\text{empty} : \mathbb{1} \rightarrow \text{List}\langle T \rangle : () \mapsto \langle \rangle$  è la funzione nullaria che restituisce la **lista vuota**
- $\text{cons} : \text{List}\langle T \rangle \times T \rightarrow \text{List}\langle T \rangle : (x, \langle x_1, \dots, x_n \rangle) \mapsto \langle x, x_1, \dots, x_n \rangle$  è la funzione di **costruzione delle liste**

è un'algebra induttiva

*Dimostrazione.*

1. • Poiché  $\text{empty}$  è una funzione nullaria, ne segue che:

$$\forall x, y \in \mathbb{1} \quad f(x) = f(y) \implies \langle \rangle = \langle \rangle$$

poiché  $x = y = ()$  dato che  $\mathbb{1} = \{()\}$

- Date  $(x, \ell), (y, \ell') \in T \times \text{List}\langle T \rangle$ , dove  $\ell = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$  e  $\ell' = \langle y_1, \dots, y_k \rangle$ , supponiamo che  $(x, \ell) \neq (y, \ell')$ .

In tal caso, le uniche possibilità sono:

- Se  $x = y$  ma  $(x, \ell) = (y, \ell')$ , si ha che:

$$\text{cons}(x, \ell) = \langle x, x_1, \dots, x_k \rangle = \langle y, x_1, \dots, x_k \rangle \neq \langle y, y_1, \dots, y_k \rangle = \text{cons}(y, \ell')$$

- Se  $x \neq y$  ma  $\ell = \ell'$ , si ha che:

$$\text{cons}(x, \ell) = \langle x, x_1, \dots, x_k \rangle = \langle x, y_1, \dots, y_k \rangle \neq \langle y, y_1, \dots, y_k \rangle = \text{cons}(y, \ell')$$

- Se  $x \neq y$  e  $\ell \neq \ell'$ , si ha che:

$$\text{cons}(x, \ell) = \langle x, x_1, \dots, x_k \rangle \neq \langle y, y_1, \dots, y_k \rangle = \text{cons}(y, \ell')$$

Di conseguenza, concludiamo che:

$$(x, \ell) \neq (y, \ell') \implies \text{cons}(x, \ell) \neq \text{cons}(y, \ell')$$

e dunque che  $\text{cons}$  sia iniettiva

- Per definizione stessa di  $\text{empty}$  si ha che  $\text{im}(\text{empty}) = \{\langle \rangle\}$ . Inoltre, per definizione stessa di  $\text{cons}$ , si ha che  $\nexists (x, \ell) \in T \times \text{List}\langle T \rangle \mid \text{cons}(x, \ell) = \text{empty}$ , implicando che  $\text{empty} \notin \text{im}(\text{cons})$ . Dunque, otteniamo che  $\text{im}(\text{empty}) \cap \text{im}(\text{cons}) = \emptyset$
- Sia  $S \subseteq \text{List}\langle T \rangle$  tale che  $\text{empty} \in S$  e  $(x, \ell) \in T \times \text{List}\langle T \rangle \implies \text{cons}(x, \ell) \in S$
- Dimostriamo per induzione sulla lunghezza  $n \in \mathbb{N}$  delle liste che  $\ell \in \text{List}\langle T \rangle \implies \ell \in S$

*Caso base* ( $n = 0$ )

- Se  $n = 0$ , allora  $\ell \in \text{List}\langle T \rangle \implies \ell = \langle \rangle \in S$

*Ipotesi induttiva.*

- Per ogni lista  $\ell \in \text{List}\langle T \rangle$  di lunghezza  $n \in \mathbb{N}$ , si ha che  $\ell \in S$

*Passo induttivo.*

- Data una lista  $\ell \in \text{List}\langle T \rangle$  di lunghezza  $n + 1$ , si ha che:

$$\ell = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \text{cons}(x_1, \langle x_2, \dots, x_n \rangle)$$

- Di conseguenza, poiché  $\langle x_2, \dots, x_n \rangle$  ha lunghezza  $n$ , per ipotesi induttiva si ha che  $\langle x_2, \dots, x_n \rangle \in S$
- A questo punto, per chiusura su  $S$  di  $\text{cons}$ , si ha che:

$$(x_1, \langle x_2, \dots, x_n \rangle) \in T \times \text{List}\langle T \rangle \implies \ell = \text{cons}(x_1, \langle x_2, \dots, x_n \rangle) \in S$$

- Dunque, concludiamo che  $\text{List}\langle T \rangle \subseteq S$  e dunque che  $S = \text{List}\langle T \rangle$

□

**Osservazione 4**

Tramite i costruttori di un'algebra induttiva è possibile definire altre operazioni più complesse per l'algebra

**Esempio:**

- Data l'algebra induttiva ( $\text{List}\langle T \rangle$ ,  $\text{empty}$ ,  $\text{cons}$ ), consideriamo l'operazione

$$\text{concat} : \text{List}\langle T \rangle \times \text{List}\langle T \rangle \rightarrow \text{List}\langle T \rangle$$

definita come:

$$\text{concat}(\ell_1, \ell_2) = \begin{cases} \ell_2 & \text{se } \ell_1 = \text{empty} \\ \text{cons}(n, \text{concat}(\ell_3, \ell_2)) & \text{se } \ell_1 = \text{cons}(n, \ell_3) \end{cases}$$

- Ad esempio, in  $\text{List}\langle \text{Int} \rangle$ , abbiamo che:

$$\begin{aligned} \text{concat}(\langle 1, 5 \rangle, \langle 7, 2 \rangle) &= \text{concat}(\text{cons}(1, \langle 5 \rangle), \langle 7, 2 \rangle) = \text{cons}(1, \text{concat}(\langle 5 \rangle, \langle 7, 2 \rangle)) = \\ &= \text{cons}(1, \text{cons}(5, \text{concat}(\langle \rangle, \langle 7, 2 \rangle))) = \text{cons}(1, \text{cons}(5, \langle 7, 2 \rangle)) = \langle 1, 5, 7, 2 \rangle \end{aligned}$$

**Definizione 13: Insieme delle liste infinite**

Definiamo  $\text{List}\langle T \rangle^\infty$  come l'insieme delle liste infinite di elementi di  $T$ :

$$\text{List}\langle T \rangle^\infty = \{ \langle a_1, a_2, \dots \rangle \mid a_1, a_2, \dots \in T \}$$

**Proposizione 6**

L'insieme  $\text{List}\langle T \rangle^\infty$  non è **mai definibile** come algebra induttiva

**Nota:** viene assunto che un'algebra non possa avere infinite operazioni

*Dimostrazione.*

- Supponiamo per assurdo che  $\exists \gamma_1, \dots, \gamma_n$  tali che  $(\text{List}\langle T \rangle^\infty, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  sia un'algebra induttiva. Poiché  $\text{List}\langle T \rangle^\infty \neq \emptyset$ , per l'**Esistenza di un costruttore base** si ha che  $\exists i \in [1, n]$  per cui  $\gamma_i$  sia un costruttore base di  $\text{List}\langle T \rangle^\infty$
- Sia quindi  $\ell = \langle x_1, x_2, \dots \rangle \in \text{List}\langle T \rangle^\infty$  tale che  $\gamma_i = \ell$  e sia  $\ell\text{-List}\langle T \rangle^\infty$  l'insieme delle liste infinite che estendono  $\ell$ :

$$\ell\text{-List}\langle T \rangle^\infty = \{ \langle y_1, \dots, y_k, x_1, x_2, \dots \rangle \mid y_1, \dots, y_k \in T \}$$

- Risulta evidente che  $\ell\text{-List}\langle T \rangle^\infty \subseteq \text{List}\langle T \rangle^\infty$  e che  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  siano chiuse per  $\ell\text{-List}\langle T \rangle^\infty$ , contraddicendo l'ipotesi per cui  $\text{List}\langle T \rangle^\infty$  sia un'algebra induttiva
- Di conseguenza, l'unica possibilità è che  $\nexists \gamma_1, \dots, \gamma_n$

□

**Definizione 14: Insieme degli alberi binari finiti**

Definiamo **BinTree** come l'insieme degli alberi binari finiti:

$$\text{BinTree} = \left\{ t \mid \begin{array}{l} t = \circ \text{ ossia è una foglia oppure} \\ t = \langle t_1, t_2 \rangle \text{ dove } t_1, t_2 \in \text{BinTree} \end{array} \right\}$$

**Proposizione 7: Algebra induttiva degli alberi binari finiti**

La tripla  $(\text{BinTree}, \text{leaf}, \text{branch})$ , dove:

- $\text{leaf} : \mathbb{1} \rightarrow \text{BinTree} : () \mapsto \circ$  è la funzione nullaria che restituisce una **foglia**
- $\text{branch} : \text{BinTree} \times \text{BinTree} \rightarrow \text{BinTree} : (t_{sx}, t_{dx}) \mapsto t$  è la funzione di **costruzione dei rami**, ossia tale che  $t_1$  e  $t_2$  siano i due sottoalberi di  $t$

è un'algebra induttiva

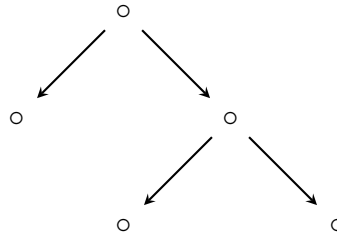
(*dimostrazione omessa*)

**Esempio:**

- Il seguente albero binario

$\text{branch}(\text{leaf}, \text{branch}(\text{leaf}, \text{leaf}))$

può essere rappresentato graficamente come:

**Principio 2: Induzione strutturale**

Definiamo come **induzione strutturale** il metodo dimostrativo generalizzante il principio di induzione e basato sulle proprietà di un'algebra induttiva.

In particolare, viene ipotizzato che una proprietà  $P$  valga per ogni argomento di ogni costruttore dell'algebra e tramite il terzo assioma viene dimostrato che tale proprietà valga per tutti gli elementi dell'algebra stessa



**Teorema 3: Relazione tra nodi e foglie**

Dato  $t \in \text{BinTree}$  avente  $n$  foglie, il numero di nodi di  $t$  è pari a  $2n - 1$

*Dimostrazione per induzione strutturale.*

- Definiamo l'operazione

$$\text{leaves} : \text{BinTree} \rightarrow \mathbb{N} : t \mapsto \text{Numero di foglie in } t$$

dove:

$$\begin{cases} \text{leaves}(\text{leaf}) = 1 \\ \text{leaves}(\text{branch}(b_1, b_2)) = \text{leaves}(b_1) + \text{leaves}(b_2) \end{cases}$$

- Dato  $t \in \text{BinTree}$ , sia  $k$  il numero di nodi di  $t$  e sia  $n = \text{leaves}(t)$

*Caso base.*

- Se  $t = \text{leaf}$ , allora  $t$  è composto da  $k = 1$  nodi e  $n = \text{leaves}(\text{leaf}) = 1$  foglie. Difatti, si ha che  $k = 1 = 2n - 1$

*Ipotesi induttiva.*

- Ogni argomento  $t$  di ogni costruttore possiede  $2 \cdot \text{leaves}(t') - 1$  nodi

*Passo induttivo.*

- Se  $t \neq \text{leaf}$ , allora  $\exists t_1, t_2 \in \text{BinTree} \mid t = \text{branch}(t_1, t_2)$  dove  $t_1$  e  $t_2$  possiedono rispettivamente  $k_1$  e  $k_2$  nodi. Inoltre, si ha che  $k = k_1 + k_2 + 1$
- In quanto  $t_1$  e  $t_2$  sono argomenti del costruttore  $\text{branch}$ , per ipotesi induttiva si ha che:

$$\begin{aligned} k &= k_1 + k_2 + 1 = 2 \cdot \text{leaves}(t_1) - 1 + 2 \cdot \text{leaves}(t_2) - 1 + 1 = 2(\text{leaves}(t_1) + \text{leaves}(t_2)) - 1 \\ &= 2(\text{leaves}(\text{branch}(t_1, t_2))) - 1 = 2 \cdot (\text{leaves}(t)) - 1 \end{aligned}$$

□

## 1.4 Sintassi astratta dei linguaggi

### Definizione 15: Linguaggio

Definiamo come **linguaggio** un insieme di stringhe

### Definizione 16: Grammatica

Definiamo come **grammatica** un insieme di regole, dette **termini**, che definiscono come poter manipolare le stringhe di un linguaggio.

La **forma di Backus-Naur** è una notazione utilizzata per descrivere grammatiche ed è definita come:

$$\langle \text{symbol} \rangle ::= \_ \text{expression} \_$$

dove:

- $\langle \text{symbol} \rangle$  è un simbolo non-terminale espresso dalla grammatica
- L'operatore  $::=$  indica che ciò che si trova alla sua sinistra possa essere sostituito con ciò che si trova alla sua destra
- $\_ \text{expression} \_$  consiste in una o più sequenze di simboli terminali o non-terminali dove ogni sequenza è separata da una barra verticale (ossia  $|$ ) indicante una scelta possibile per l'operatore  $::=$

### Esempio:

- Consideriamo il linguaggio  $L$  espresso dalla grammatica:

$$M, N ::= 0 \mid 1 \mid \dots \mid M + N \mid M * N$$

Tale grammatica indica che i simboli non-terminali  $M$  e  $N$  possono essere sostituiti con:

- Un numero naturale
- Un'espressione  $M + N$  o  $M * N$  dove  $M$  e  $N$  sono due ulteriori simboli terminali o non-terminali
- Ad esempio, abbiamo che la stringa " $5 + 7$ " sia ben definita dalla grammatica, mentre la stringa " $5 + +$ " non lo sia

### Definizione 17: Sintassi astratta

La **sintassi astratta** di un linguaggio è una definizione induttiva di un insieme  $T$  di termini, permettendo di definire strutture algebriche senza dover necessariamente definire concretamente le sue operazioni

**Esempio:**

- Consideriamo ancora il linguaggio  $L$  definito dalla grammatica

$$M, N ::= 0 \mid 1 \mid \dots \mid M + N \mid M * N$$

- Definiamo quindi la funzione  $\text{eval} : L \rightarrow \mathbb{N}$  in grado di valutare le espressioni del linguaggio:

$$\text{eval}("0") = 0$$

$$\text{eval}("1") = 1$$

...

$$\text{eval}("M + N") = \text{eval}("M") + \text{eval}("N")$$

$$\text{eval}("M * N") = \text{eval}("M") * \text{eval}("N")$$

- Notiamo quindi che la grammatica definisca in modo astratto (ma concretamente tramite  $\text{eval}$ ) le seguenti operazioni:

$$0 : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N} : () \mapsto 0$$

$$1 : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N} : () \mapsto 1$$

...

$$\text{plus} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : (m, n) \mapsto m + n$$

$$\text{times} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : (m, n) \mapsto m \cdot n$$

- Notiamo però che le operazioni  $\text{plus}$  e  $\text{times}$  non risultano essere né iniettive né con immagini disgiunte. Di conseguenza, la funzione  $\text{eval}$  non ci permette di definire un'algebra induttiva.
- Tuttavia, per tale linguaggio è comunque possibile definire (in qualche modo, ad esempio fissando una precedenza per le operazioni rompendo proprietà come l'associatività e la commutatività) una funzione che possa descrivere un'algebra induttiva.

**Teorema 4: Algebra induttiva dei termini**

Dato un linguaggio  $L$  con una sintassi astratta con termini definiti in  $T$ , esiste sempre un'algebra induttiva  $(T, \alpha)$ . Di conseguenza, **tutte le proprietà** di un linguaggio sono dimostrabili tramite l'induzione strutturale sulla sua algebra dei termini.

(*dimostrazione omessa*)

# 2

## Paradigma funzionale

### 2.1 *Exp*: un semplice linguaggio funzionale

#### Definizione 18: Il linguaggio *Exp*

Definiamo come *Exp* il linguaggio rappresentato dalla seguente grammatica:

$$M, N ::= k \mid x \mid M + N \mid \text{let } x = M \text{ in } N$$

dove:

- $k \in \{0, 1, \dots\}$  ossia è una **costante**
- $x \in Var = \{x, y, z, \dots\}$  ossia è una **variabile**
- $+$  :  $Exp \times Exp \rightarrow Exp$  la quale **somma le due espressioni**
- $\text{let} : Var \times Exp \times Exp \rightarrow Exp$  la quale **assegna** alla variabile  $x$  l'espressione  $M$  all'interno della **valutazione** di  $N$ . Inoltre,  $x$  prende il nome di variabile locale all'interno di  $N$ .
- $Val = \{0, 1, \dots\}$  è l'**insieme dei valori** in cui un'espressione può essere valutata

#### Esempi:

- L'espressione  $\text{let } x = 3 \text{ in } x + 1$  indica che la variabile  $x$  assuma valore 3 all'interno della valutazione di  $x + 1$ . Di conseguenza, il risultato della valutazione dell'espressione è 4
- L'espressione  $\text{let } x = 3 \text{ in } 7$  viene valutata come 7
- L'espressione  $\text{let } y = 9 \text{ in } (\text{let } x = (\text{let } y = 2 \text{ in } y + 1) \text{ in } x + y)$  viene valutata come 12 (si consiglia di cercare di capire come le clausole interne sovrascrivano i valori delle clausole esterne. Se ciò risultasse complesso, più avanti verranno forniti strumenti matematici per valutare in modo corretto le clausole *let* annidate)

**Definizione 19: Scope di una variabile**

Data un'espressione e una variabile  $x$ , definiamo come **scope di  $x$**  la porzione la porzione dell'espressione all'interno della quale una variabile può essere riferita, ossia per cui ne è definito il valore.

Una variabile il cui valore non è assegnato in una porzione dell'espressione viene detta **variabile libera**

**Definizione 20: Variabile libera**

Data un'espressione  $expr \in Exp$ , definiamo  $x \in expr$  come **libera** se  $x$  non ha un valore assegnato durante la valutazione di  $expr$ .

**Esempio:**

- L'espressione  $let\ x = (let\ y = 2\ in\ y + 1)\ in\ x + y$  non è coerente con la grammatica di *Exp*, poiché  $y$  non è definito durante la valutazione di  $x + y$ . Di conseguenza, non è possibile valutare tale espressione.

**Proposizione 8: Variabili libere in *Exp***

Dato il linguaggio *Exp*, la funzione

$$free : Exp \rightarrow \mathcal{P}(Var)$$

restituisce l'insieme di tutte le **variabili libere** di un'espressione dove:

$$\begin{cases} free(k) = \emptyset \\ free(x) = \{x\} \\ free(M + N) = free(M) \cup free(N) \\ free(let\ x = M\ in\ N) = free(M) \cup (free(N) - \{x\}) \end{cases}$$

**Nota:**  $\mathcal{P}(Var)$  è l'insieme delle parti di  $Var$ , ossia l'insieme contenente tutti i suoi sottoinsiemi possibili

**Esempio:**

- Riprendendo l'esempio precedente, notiamo che:

$$\begin{aligned} & free(let\ x = (let\ y = 2\ in\ y + 1)\ in\ x + y) = \\ & = free(let\ y = 2\ in\ y + 1) \cup (free(x + y) - \{x\}) = \\ & = free(let\ y = 2\ in\ y + 1) \cup ((free(x) \cup free(y)) - \{x\}) = \\ & = free(let\ y = 2\ in\ y + 1) \cup ((\{x\} \cup \{y\}) - \{x\}) = \\ & = free(let\ y = 2\ in\ y + 1) \cup \{y\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\text{free}(2) \cup (\text{free}(y+1) - \{y\})) \cup \{y\} = \\
 &= ((\text{free}(y)) - \{y\}) \cup \{y\} = \\
 &= \{y\}
 \end{aligned}$$

dunque l'espressione è invalutabile

### Definizione 21: Insieme degli ambienti in *Exp*

Dato il linguaggio *Exp*, definiamo come **insieme degli ambienti di *Exp***, indicato con *Env*, l'insieme delle funzioni parziali (ossia non necessariamente definite su tutto il dominio) che associano ogni variabile al proprio valore:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Val\}$$

### Definizione 22: Concatenazione di ambienti

Dato il linguaggio *Exp*, definiamo l'operazione di **concatenazione di ambienti**, ossia:

$$\cdot : Env \times Env \rightarrow Env$$

dove:

$$(E_1 E_2)(x) = \begin{cases} E_2(x) & \text{se } x \in \text{dom}(E_1) \\ E_1(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Nota:** tale operazione può essere interpretata come una sovrascrittura in  $E_1$  di tutte le variabili definite in  $E_2$

**Esempio:**

- Dati gli ambienti  $E_1 = \{(x, 4), (y, 3)\}$  e  $E_2 = \{(x, 5)\}$ , si ha che

$$(E_1 E_2)(x) = 5$$

$$(E_1 E_2)(y) = 3$$

### Proposizione 9: Regola di inferenza

Date delle proposizioni  $P_1, \dots, P_n, C$ , indichiamo la seguente proposizione:

$$P_1 \wedge \dots \wedge P_n \wedge ((P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \implies C)$$

con la seguente notazione alternativa, detta **regola di inferenza**:

$$\frac{P_1 \quad \dots \quad P_n}{C}$$

dove  $P_1, \dots, P_n$  vengono dette **premesse** e  $C$  viene detta conclusione

**Definizione 23: Semantica operativa di *Exp***

Data la seguente relazione detta **semantica operativa**, ossia:

$$\leadsto \subseteq Env \times Exp \times Val$$

definiamo come **giudizio operativo** la tripla  $(E, M, v) \in \leadsto$  descritta dalla notazione

$$E \vdash M \leadsto v$$

la quale viene letta come "nell'ambiente  $E$ ,  $M$  viene valutato come  $v$ ".

**Proposizione 10: Regole operative di *Exp***

Definiamo come **regole operative** le regole di inferenza che dettano le valutazioni effettuate dalla semantica operativa:

- Per le **costanti** si ha che:

$$\forall E \in Env \quad E \vdash k \leadsto k$$

- Dato  $E \in Env$ , per le **variabili** si ha che:

$$E \vdash x \leadsto v \quad (\text{se } E(x) = v)$$

- Dato  $E \in Env$ , per la **somma** si ha che:

$$\frac{E \vdash M \leadsto v \quad E \vdash N \leadsto v'}{E \vdash M + N \leadsto u} \quad (\text{se } u = v + v')$$

- Per l'espressione **let** si ha che:

$$\frac{E \vdash M \leadsto v \quad E\{(x, v)\} \vdash N \leadsto v'}{E \vdash \text{let } x = M \text{ in } N \leadsto v'}$$

**Osservazione 5: Ambiente iniziale**

A meno che non vi siano variabili esternamente assegnate, all'interno di un'espressione l'**ambiente iniziale** corrisponde sempre a  $\emptyset \subseteq Env$ .

**Osservazione 6: Variabili invalutabili**

Dato un ambiente  $E \in Env$ , se  $x \notin \text{dom}(E)$ , ossia se  $x$  non è definita nell'ambiente  $E$ , allora  $x$  è una **variabile libera** e dunque è **invalutabile** in  $E$ , ossia:

$$\nexists v \in Val \text{ t.c. } E \vdash x \leadsto v$$

**Esempio:**

- L'espressione  $x + 4$  è invalutabile, poiché  $x \notin \text{dom}(\emptyset)$ , dunque:

$$\nexists v' \in \text{Val t.c. } v = v' + 1 \wedge \frac{\emptyset \vdash x \rightsquigarrow v' \quad \emptyset \vdash 1 \rightsquigarrow 1}{\emptyset \vdash x + 1 \rightsquigarrow v}$$

- L'espressione  $\text{let } x = 1 \text{ in } x + 4$  è valutabile, poiché  $x \in \text{dom}(\{(x, 1)\})$ , dunque:

$$\frac{\emptyset \vdash 1 \rightsquigarrow 1 \quad \frac{\{(x, 1)\} \vdash x \rightsquigarrow 1 \quad \{(x, 1)\} \vdash 4 \rightsquigarrow 4}{\{(x, 1)\} \vdash x + 1 \rightsquigarrow 5}}{\emptyset \vdash \text{let } x = 1 \text{ in } x + 4 \rightsquigarrow 5}$$

**Definizione 24: Albero di derivazione**

Definiamo come **albero di derivazione** l'albero generato dalla valutazione concatenata di più regole di inferenza.

**Esempio:**

- L'espressione  $\text{let } y = 3 \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } x + y)$  viene valutata dal seguente albero di derivazione:

$$\frac{\emptyset \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{\{y, 3\} \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{\{(y, 3), (x, 7)\} \vdash x \rightsquigarrow 7 \quad \{(y, 3), (x, 7)\} \vdash y \rightsquigarrow 3}{\{(y, 3), (x, 7)\} \vdash x + y \rightsquigarrow 10}}{\{y, 3\} \vdash \text{let } x = 7 \text{ in } x + y \rightsquigarrow 10}}{\emptyset \vdash \text{let } y = 3 \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } x + y) \rightsquigarrow 10}$$

- Notiamo quindi come, per valutare l'intera espressione, ci basti in realtà valutare i termini "più in alto" dell'albero di derivazione

## 2.2 Valutazione Eager vs Lazy

Consideriamo la seguente espressione per il linguaggio *Exp*:

$$\text{let } x = \sqrt{397^5 + \int_3^{15} y^2 dy + \log_{\sqrt{37}}(479)} \text{ in } 3$$

Notiamo come nonostante l'espressione assegnata ad  $x$  sia di grandi dimensioni, richiedendo un enorme albero di derivazione, la valutazione dell'espressione sia totalmente indipendente da tale valutazione in quanto la variabile  $x$  non venga neanche utilizzata per la valutazione del secondo termine dell'espressione *let*.

Utilizzando le regole di valutazione previste dalla metodologia di valutazione, detta **eager** (trad: *affrettata*), vista nella sezione precedente, andremmo a valutare delle espressioni del tutto inutili.



Una metodologia di valutazione alternativa, detta **lazy** (trad: *pigra*), è costituita da regole operazionali atte al *ritardare* la valutazione dei termini fino a quando non sia strettamente necessario.

### Definizione 25: Valutazione eager

Definiamo una modalità di valutazione come **eager** se la valutazione di una sua espressione viene effettuata non appena essa viene legata ad una variabile, associandone immediatamente il risultato alla variabile stessa.

### Definizione 26: Valutazione lazy

Definiamo una modalità di valutazione come **lazy** se la valutazione di una sua espressione viene effettuata solo quando si richiede il valore di un'espressione che da essa dipende.

### Proposizione 11: Linguaggio *Exp* lazy

L'uso di una valutazione lazy necessita la ridefinizione dell'insieme *Env* e di alcune regole operazionali definite per la valutazione eager:

- L'insieme *Env* viene ridefinito come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Exp\}$$

- Dato  $E \in Env$ , per le variabili si ha che:

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v} \quad (\text{se } E(x) = M)$$

- Per l'espressione *let* si ha che:

$$\frac{E\{(x, M)\} \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash \text{let } x = M \text{ in } N \rightsquigarrow v}$$

### Osservazione 7

È necessario puntualizzare che non sempre la valutazione lazy sia più ottimale della eager

**Esempio:**

- Consideriamo la seguente espressione

$$\text{let } x = M \text{ in } x + x$$

- Utilizzando la valutazione eager otteniamo il seguente albero di derivazione:

$$\frac{\frac{\dots}{\emptyset \vdash M \rightsquigarrow v'} \quad \frac{\{(x, v')\} \vdash x \rightsquigarrow v' \quad \{(x, v')\} \vdash x \rightsquigarrow v'}{\{(x, v')\} \vdash x + x \rightsquigarrow v}}{\emptyset \vdash \text{let } x = M \text{ in } x + x \rightsquigarrow v}$$

dove  $v = v' + v'$

- Utilizzando la valutazione lazy, invece, otteniamo il seguente albero di derivazione:

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\{(x, M)\} \vdash M \rightsquigarrow v'}}{\{(x, M)\} \vdash x \rightsquigarrow v'}}{\{(x, M)\} \vdash x + x \rightsquigarrow v}}{\emptyset \vdash \text{let } x = M \text{ in } x + x \rightsquigarrow v}$$

dove  $v = v' + v'$

- Notiamo quindi che l'espressione  $M$  venga valutata una sola volta nella valutazione eager ma due volte nella valutazione lazy

## 2.3 Scoping Statico vs Dinamico

Consideriamo la seguente espressione:

$$\text{let } x = 3 \text{ in } (\text{let } y = x \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } y + x))$$

Prima di tutto, valutiamo tale espressione tramite valutazione eager:

$$\frac{\begin{array}{c} \varnothing \vdash 3 \leadsto 3 \\ \{(x, 3)\} \vdash x \leadsto 3 \\ E \vdash 7 \leadsto 7 \end{array}}{\varnothing \vdash let\ x = 3\ in\ (let\ y = x\ in\ (let\ x = 7\ in\ y + x)) \leadsto 10}$$

dove  $E := \{(x, 3), (y, 3)\}$

Valutiamo ora invece tale espressione utilizzando una valutazione lazy:

$$\frac{\frac{\frac{E\{(x, 7)\} \vdash 7 \leadsto 7}{E\{(x, 7)\} \vdash x \leadsto 7} \quad \frac{E\{(x, 7)\} \vdash 7 \leadsto 7}{E\{(x, 7)\} \vdash x \leadsto 7}}{E\{(x, 7)\} \vdash y + x \leadsto 14}}{\frac{E\{(x, 7)\} \vdash y + x \leadsto 14}{\{(x, 3), (y, x)\} \vdash \text{let } x = 7 \text{ in } y + x \leadsto 14}} \quad \frac{\{(x, 3)\} \vdash \text{let } y = x \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } y + x) \leadsto 14}{\varnothing \vdash \text{let } x = 3 \text{ in } (\text{let } y = x \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } y + x)) \leadsto 14}$$

dove  $E := \{(x, 3), (y, x)\}$

Notiamo quindi che le due valutazioni abbiano prodotto un risultato diverso. Tuttavia, vorremmo che le due valutazioni siano differenti solo a livello "*implementativo*", ossia che venga solo ritardata la valutazione dei termini. Difatti, tale problematica non è dovuta alla metodologia di valutazione utilizzata ma bensì dal tipo di *scoping*.

### Definizione 27: Scoping statico

Definiamo un linguaggio come linguaggio a **scoping statico** se durante la valutazione di un'espressione viene utilizzato l'ambiente definito al tempo in cui viene interpretata (ma non valutata) l'espressione stessa.

### Definizione 28: Scoping dinamico

Definiamo un linguaggio come linguaggio a **scoping dinamico** se durante la valutazione di un'espressione viene utilizzato l'ambiente definito al tempo di valutazione stesso.

Difatti, nell'esempio precedente ci troviamo in due situazioni:

- Nella valutazione eager, la variabile  $y$  viene valutata con l'ambiente  $\{(x, 3), (y, x)\}$  definito al tempo in cui viene interpretata l'espressione  $let\ y = x\ in\ \dots$  (scoping *statico*)
- Nella valutazione lazy, la variabile  $y$  viene valutata con l'ambiente  $\{(x, 3), (y, x), (x, 7)\}$  definito al tempo della sua valutazione (scoping *dinamico*)

Per tanto, è necessario precisare che le due precedenti versioni viste del linguaggio *Exp* siano rispettivamente la versione **eager statica** e la versione **Exp lazy dinamica**.

### Proposizione 12: Linguaggio *Exp* lazy statico

L'uso di una semantica lazy statica necessita la ridefinizione dell'insieme  $Env$  e di alcune regole operazionali definite per la semantica lazy dinamica:

- L'insieme  $Env$  viene ridefinito come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Exp \times Env\}$$

- Dato  $E \in Env$ , per le variabili si ha che:

$$\frac{E' \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v} \quad (\text{se } E(x) = (M, E'))$$

- Per l'espressione  $let$  si ha che:

$$\frac{E\{(x, (M, E))\} \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash let\ x = M\ in\ N \rightsquigarrow v}$$



## 2.4 *Fun*: un linguaggio con funzioni

### Definizione 30: Il linguaggio *Fun*

Definiamo come *Fun* il linguaggio rappresentato dalla seguente grammatica:

$$M, N ::= k \mid x \mid M + N \mid \text{let } x = M \text{ in } N \mid \text{fn } x \Rightarrow M \mid MN$$

dove:

- $k \in \{0, 1, \dots\}$  ossia è una **costante**
- $x \in \text{Var} = \{x, y, z, \dots\}$  ossia è una **variabile**
- $+$  :  $\text{Fun} \times \text{Fun} \rightarrow \text{Fun}$  la quale **somma le due espressioni**
- $\text{let} : \text{Var} \times \text{Fun} \times \text{Fun} \rightarrow \text{Fun}$  la quale **assegna** alla variabile  $x$  l'espressione  $M$  all'interno della **valutazione** di  $N$ . Inoltre,  $x$  prende il nome di variabile locale all'interno di  $N$
- $\text{fn} : \text{Var} \times \text{Fun} \rightarrow \text{Fun}$  la quale restituisce una **funzione** avente un parametro il quale influenza l'espressione valutata dalla funzione
- Data l'espressione  $\text{fn } x \Rightarrow M$ , definiamo la coppia  $(x, M) \in \text{Var} \times \text{Fun}$  come **chiusura** di tale espressione
- $\cdot$  :  $\text{Fun} \times \text{Fun} \rightarrow \text{Fun}$  la quale **applica** il termine sinistro al termine destro. In particolare, è necessario che il termine sinistro sia una funzione
- $\text{Val} = \{0, 1, \dots\} \cup (\text{Var} \times \text{Fun})$  è l'**insieme dei valori** in cui un'espressione può essere valutata, ossia costanti e chiusure

### Esempi:

- L'espressione  $(\text{fn } x \Rightarrow x + 1) 7$  viene valutata come 8, poiché la funzione sinistra  $\text{fn } x \Rightarrow x + 1$  viene applicata al termine destro 7 (dunque 7 viene utilizzato come argomento della funzione per il parametro  $x$ )
- L'espressione  $(\text{fn } x \Rightarrow x 3) 7$  è invalutabile, poiché l'argomento 7 viene passato come parametro  $x$  della funzione, ma all'interno di quest'ultima non è possibile valutare  $x 3$  visto che 7 non è applicabile a 3
- L'espressione  $(\text{fn } x \Rightarrow x 3)(\text{fn } x \Rightarrow x + 1)$  viene valutata come 4, poiché l'argomento  $\text{fn } x \Rightarrow x + 1$  viene passato come parametro  $x$  della funzione  $\text{fn } x \Rightarrow x 3$ , per poi valutare l'applicazione  $x 3$  passando l'argomento 3 come parametro per la funzione contenuta in  $x$  (ossia  $\text{fn } x \Rightarrow x + 1$ ).

Informalmente, possiamo dire che:

$$(\text{fn } x \Rightarrow x 3)(\text{fn } x \Rightarrow x + 1) \longrightarrow (\text{fn } x \Rightarrow x + 1) 3 \longrightarrow 4$$

**Osservazione 10**

Nel caso in cui si abbia un'espressione con doppio operatore di applicazione  $MNL$ , essa verrà valutata come  $(MN)L$

**Esempio:**

- Le due espressioni  $(fn\ x \Rightarrow x\ 3)(fn\ x \Rightarrow x + 1)\ 7$  e  $[(fn\ x \Rightarrow x\ 3)(fn\ x \Rightarrow x + 1)]\ 7$  sono equivalenti

**Definizione 31: Insieme delle funzioni da  $X$  ad  $Y$** 

Dati due insiemi  $X$  e  $Y$ , indichiamo con  $(X \rightarrow Y)$  l'insieme di tutte le funzioni da  $X$  ad  $Y$ :

$$(X \rightarrow Y) = \{f \mid f : X \rightarrow Y\}$$

dove  $|X \rightarrow Y| = |Y|^{|X|}$

**Teorema 6: Curryficazione**

Dati  $X, Y$  e  $Z$ , la seguente funzione risulta essere biettiva:

$$\text{curry} : (X \times Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) : f \mapsto h \mid f(x, y) = h(x)(y)$$

Inoltre, definiamo come **curryficazione** l'applicazione di tale funzione

*Dimostrazione.*

- La funzione risulta essere iniettiva:

$$\varphi(f) = \varphi(f') \implies \forall x \in X, y \in Y \ \varphi(f)(x)(y) = \varphi(f')(x)(y) \implies$$

$$\forall x \in X, y \in Y \ h(x)(y) = h'(x)(y) \implies \forall x \in X, y \in Y \ f(x, y) = f'(x, y) \implies f = f'$$

- Inoltre, abbiamo che:

$$|X \times Y \rightarrow Z| = |Z|^{|X \times Y|} = |Z|^{|X| \cdot |Y|} = (|Z|^{|Y|})^{|X|} =$$

$$|Y \rightarrow Z|^{|X|} = |X \rightarrow (Y \rightarrow Z)|$$

- Di conseguenza,  $\varphi$  risulta essere biettiva

□

**Osservazione 11: Curryficazione in *Fun***

Dato il linguaggio *Fun*, definiamo la seguente contrazione sintattica:

$$fn\ x_1x_2\dots x_n \Rightarrow M \equiv fn\ x_1 \Rightarrow (fn\ x_2 \Rightarrow \dots (fn\ x_n \Rightarrow M) \dots)$$

data dalla curryficazione del primo termine

**Esempi:**

- La curryficazione dell'espressione  $(fn\ xy \Rightarrow yx)\ 7\ (fn\ x \Rightarrow x + 1)$  corrisponde a:

$$(fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow yx)\ 7\ (fn\ x \Rightarrow x + 1)$$

e viene pertanto valutata come 8:

$$(fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow yx)\ 7\ (fn\ x \Rightarrow x + 1) \longrightarrow (fn\ y \Rightarrow y\ 7)(fn\ x \Rightarrow x + 1) \longrightarrow 8$$

**Osservazione 12**

Trattandosi di un'estensione del linguaggio *Exp*, il linguaggio *Fun* **eredita le regole operazionali** delle semantiche di *Exp*

**Proposizione 13: Linguaggio *Fun* eager dinamico**

La semantica eager dinamica del linguaggio *Fun* prevede l'aggiunta di alcune regole operazionali:

- L'insieme *Env* viene ridefinito come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Val\}$$

- Dato  $E \in Env$ , per le funzioni si ha che:

$$E \vdash fn\ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M)$$

- Dato  $E \in Env$ , per le applicazioni si ha che:

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L) \quad E \vdash N \rightsquigarrow v' \quad E\{(x, v')\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$$

**Proposizione 14: Linguaggio *Fun* eager statico**

La semantica eager statica del linguaggio *Fun* prevede l'aggiunta di alcune regole operazionali:

- L'insieme *Env* viene ridefinito come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Val \times Env\}$$

- Dato  $E \in Env$ , per le funzioni si ha che:

$$E \vdash fn\ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M, E)$$

- Dato  $E \in Env$ , per le applicazioni si ha che:

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L, E') \quad E \vdash N \rightsquigarrow v' \quad E'\{(x, v')\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$$

**Lemma 2**

A differenza del linguaggio *Exp*, per la sua estensione *Fun* si ha che:

$$Fun\ eager\ dinamico \not\equiv Fun\ eager\ statico$$

*Dimostrazione.*

- Consideriamo l'espressione  $let\ x = 7\ in\ ((fn\ y \Rightarrow let\ x = 3\ in\ yx)(fn\ z \Rightarrow x))$
- Utilizzando la semantica eager dinamica, l'albero di derivazione corrisponde a:

$$\begin{array}{c} (*) \quad \frac{E' \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{E'' \vdash y \rightsquigarrow (z, x) \quad E'' \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad E''\{(z, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 3}{E'' \vdash yx \rightsquigarrow 3}}{E' \vdash M \rightsquigarrow 3} \\ \frac{\emptyset \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{E \vdash fn\ y \Rightarrow M \rightsquigarrow (y, M) \quad E \vdash fn\ z \Rightarrow x \rightsquigarrow (z, x) \quad (*)}{E \vdash (fn\ y \Rightarrow M)(fn\ z \Rightarrow x) \rightsquigarrow 3}}{\emptyset \vdash let\ x = 7\ in\ ((fn\ y \Rightarrow M)(fn\ z \Rightarrow x)) \rightsquigarrow 3} \end{array}$$

dove  $M := let\ x = 3\ in\ yx$ ,  $E := \{(x, 7)\}$ ,  $E' := E\{(y, (z, x))\}$  e  $E'' := E'\{(x, 3)\}$

- Utilizzando la semantica eager statica, invece, l'albero di derivazione corrisponde a:

$$(*) \quad \frac{E' \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{E'' \vdash y \rightsquigarrow (z, x, E) \quad E'' \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad E\{(z, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 7}{E'' \vdash yx \rightsquigarrow 7}}{E' \vdash M \rightsquigarrow 7}$$



$$\frac{\emptyset \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{E \vdash fn\ y \Rightarrow M \rightsquigarrow (y, M, E) \quad E \vdash fn\ z \Rightarrow x \rightsquigarrow (z, x, E) \quad (*)}{E \vdash (fn\ y \Rightarrow M)(fn\ z \Rightarrow x) \rightsquigarrow 7}}{\emptyset \vdash let\ x = 7\ in\ ((fn\ y \Rightarrow M)(fn\ z \Rightarrow x)) \rightsquigarrow 7}$$

dove  $M := let\ x = 3\ in\ yx$ ,  $E := \{(x, 7)\}$ ,  $E' := E\{(y, (z, x, E))\}$  e  $E'' := E'\{(x, 3)\}$

- Poiché l'espressione restituisce due valutazioni diverse, le due semantiche non sono equivalenti

□

### Proposizione 15: Linguaggio *Fun* lazy dinamico

La semantica lazy dinamica del linguaggio *Fun* prevede l'aggiunta di alcune regole operazionali:

- L'insieme  $Env$  viene ridefinito come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Fun\}$$

- Dato  $E \in Env$ , per le funzioni si ha che:

$$E \vdash fn\ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M)$$

- Dato  $E \in Env$ , per le applicazioni si ha che:

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L) \quad E\{(x, N)\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$$

### Proposizione 16: Linguaggio *Fun* lazy statico

La semantica lazy statica del linguaggio *Fun* prevede l'aggiunta di alcune regole operazionali:

- L'insieme  $Env$  viene ridefinito come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Fun \times Env\}$$

- Dato  $E \in Env$ , per le funzioni si ha che:

$$E \vdash fn\ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, (M, E))$$

- Dato  $E \in Env$ , per le applicazioni si ha che:

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, (L, E')) \quad E'\{(x, (N, E))\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$$

**Osservazione 13**

Come per il linguaggio *Exp*, per la sua estensione *Fun* si ha che:

$$Fun \text{ lazy dinamico} \neq Fun \text{ lazy statico}$$

**Definizione 32: Espressione  $\omega$** 

Dato il linguaggio *Fun*, definiamo come **espressione omega**, indicata con  $\omega$ , la seguente espressione:

$$\omega := (fn\ x \Rightarrow xx)(fn\ x \Rightarrow xx)$$

In particolare, l'espressione  $\omega$  è **invalutabile per qualsiasi semantica**

**Esempio:**

- Analizziamo l'albero di derivazione di  $\omega$  utilizzando una semantica eager statica:

$$\begin{array}{c}
 (*) \quad \emptyset \vdash x \rightsquigarrow (x, xx, \emptyset) \quad \emptyset \vdash x \rightsquigarrow (x, xx, \emptyset) \quad \frac{(*)}{(x, \{(x, xx, \emptyset)\}) \vdash xx \rightsquigarrow v} \\
 \hline
 \emptyset \vdash fn\ x \Rightarrow xx \rightsquigarrow (x, xx, \emptyset) \quad \emptyset \vdash fn\ x \Rightarrow xx \rightsquigarrow (x, xx, \emptyset) \quad \frac{(*)}{(x, \{(x, xx, \emptyset)\}) \vdash xx \rightsquigarrow v} \\
 \hline
 \emptyset \vdash (fn\ x \Rightarrow xx)(fn\ x \Rightarrow xx) \rightsquigarrow v
 \end{array}$$

- Notiamo quindi che affinché la valutazione del termine  $(x, \{(x, xx, \emptyset)\}) \vdash xx \rightsquigarrow v$  richieda che esso stesso venga valutato, creando così un albero di derivazione infinito.

**Lemma 3**

Dato il linguaggio *Fun*, si ha che:

$$Fun \text{ eager statico} \neq Fun \text{ lazy statico}$$

$$Fun \text{ eager dinamico} \neq Fun \text{ lazy dinamico}$$

*Dimostrazione.*

- Consideriamo l'espressione *let*  $x = \omega$  *in* 42. Utilizzando una semantica eager (statica o dinamica), verrebbe richiesta immediatamente la valutazione del termine  $\omega$ , il quale tuttavia è invalutabile. Utilizzando una semantica lazy (statica o dinamica), invece, il termine  $\omega$  non verrà mai valutato, restituendo 42 come risultato.

□

**Teorema 7: Equivalenze semantiche di *Fun***

Dato il linguaggio *Fun*, **non esistono due semantiche equivalenti**

**Proposizione 17: Variabili libere in *Fun***

Dato il linguaggio *Fun*, la funzione  $\text{free} : \text{Fun} \rightarrow \mathcal{P}(\text{Var})$  è definita come:

$$\begin{cases} \text{free}(k) = \emptyset \\ \text{free}(x) = \{x\} \\ \text{free}(M + N) = \text{free}(M) \cup \text{free}(N) \\ \text{free}(\text{let } x = M \text{ in } N) = \text{free}(M) \cup (\text{free}(N) - \{x\}) \\ \text{free}(\text{fn } x \Rightarrow M) = \text{free}(M) - \{x\} \\ \text{free}(MN) = \text{free}(M) \cup \text{free}(N) \end{cases}$$

**2.4.1 *Fun* in Standard ML**

La grammatica prevista dal linguaggio *Fun* mostrato fino ad ora è utilizzabile all'interno del **linguaggio SML (Standard Model Language)**, il quale prevede una sintassi leggermente diversa:

- L'operatore  $\text{let } x = M \text{ in } N$  corrisponde a `let val x = M in N end`
- L'operatore  $\text{fn } x \Rightarrow M$  corrisponde a `fn x => M;`
- L'operatore  $MN$  corrisponde a `MN` (potrebbe essere necessario introdurre uno spazio tra M ed N affinché l'interprete riesca a distinguere i due termini)
- L'espressione va terminata da un **punto e virgola**
- La semantica utilizzata è **eager statica**

Ad esempio, l'espressione:

$$\text{let } x = 7 \text{ in } ((\text{fn } y \Rightarrow \text{let } x = 3 \text{ in } yx)(\text{fn } z \Rightarrow x))$$

corrisponde al comando:

```
let val x = 7 in (fn y => let val x = 3 in y x end) end;
```

Inoltre, il linguaggio SML permette di assegnare variabili, alle quali possono essere assegnate anche funzioni. Ad esempio, definendo:

```
val id = fn x => x;
```

il seguente comando restituisce 7:

```
id 7;
```

Per utilizzare il linguaggio SML, si consiglia l'uso del programma `smlnj` o dell'emulatore online `SOSML`.

## 2.5 Lambda calcolo

### Definizione 33: Lambda calcolo

Il **lambda calcolo** è un sistema formale in logica matematica per esprimere il calcolo basato sull'**astrazione** e l'applicazione di **funzioni**.

Nella forma più semplice di lambda calcolo, i termini sono costruiti utilizzando solo le seguenti regole:

- Una **variabile** è rappresentata da un carattere (es:  $x$ )
- Una **funzione** è rappresentata da una **lambda astrazione**, ossia una stringa composta dal simbolo  $\lambda$  seguito dai parametri della funzione separati con un punto dal corpo della funzione stessa (es:  $\lambda x.M$ )
- L'**applicazione** di una funzione  $M$  ad un argomento  $N$  viene rappresentata come  $M N$

### Esempi:

- La lambda astrazione  $\lambda x.x + 1$  corrisponde alla funzione  $f(x) = x + 1$
- La lambda astrazione  $\lambda xy.x + y$  corrisponde alla funzione  $f(x, y) = x + y$
- La lambda astrazione  $(\lambda x.x) 3$  corrisponde all'applicazione della funzione  $f(x) = x$  all'argomento 3, restituendo quindi 3
- La lambda astrazione  $(\lambda x.x)(\lambda x.x)$  restituisce  $\lambda x.x$
- La lambda astrazione  $\lambda xy.x(xy)$  applica due volte sull'argomento  $y$  la funzione  $x$  passata anch'essa come argomento

### Osservazione 14: Curryficazione in lambda calcolo

La lambda astrazione  $\lambda x_1 \dots x_n.M$  è la contrazione sintattica della seguente lambda astrazione:

$$\lambda x_1. \dots \lambda x_n.M$$

### Definizione 34: Operatore di sostituzione

Definiamo come **operatore di sostituzione**, indicata con  $M[N/x]$ , l'operazione tramite cui all'interno di un'espressione  $M$  tutte le occorrenze di una variabile  $x$  vengono rimpiazzate con il termine  $N$

### Esempi:

- La sostituzione  $(xy)[\lambda z.z/x]$  corrisponde a  $((\lambda z.z)y)$
- La sostituzione  $(fn\ x \Rightarrow xy)[x/y]$  corrisponde a  $(fn\ x \Rightarrow xx)$

**Osservazione 15: Cattura di variabili**

L'operazione di sostituzione potrebbe legare una variabile precedentemente libera o viceversa. Tale fenomeno viene detto **cattura di variabili** ed è necessario accertarsi che esso non si verifichi affinché la sostituzione sia corretta

**Esempio:**

- L'espressione  $(\lambda y.M)[N/x]$  è equivalente all'espressione  $\lambda y.(M[N/x])$  solo se  $y \notin \text{free}(N)$ . Difatti, la sostituzione  $(\lambda y.x)[y/x]$  risulta essere "scorretta" in quanto  $(\lambda y.y)$  ha una valutazione differente rispetto all'espressione originale

**Definizione 35: Alfa conversione**

Definiamo come **alfa conversione**, indicata con  $\xrightarrow{\alpha}$ , la regola secondo cui all'interno di una lambda astrazione  $\lambda x.M$  ogni occorrenza della variabile  $x$  (incluso il parametro) possa essere rimpiazzata dalla variabile  $y$ :

$$\lambda x.M \xrightarrow{\alpha} \lambda y.(M[y/x])$$

**Esempi:**

- Data la lambda astrazione  $\lambda x.(xy)$ , si ha che:

$$\lambda x.xy \xrightarrow{\alpha} \lambda z.zy$$

- Data la lambda astrazione  $\lambda x.x(\lambda z.zw)$ , si ha che:

$$\lambda x.x(\lambda z.zw) \xrightarrow{\alpha} \lambda z.z(\lambda z.zw)$$

**Definizione 36: Alfa equivalenza**

Due lambda astrazioni  $\lambda x.M$  e  $\lambda y.N$  vengono dette **alfa equivalenti**, indicato con  $\equiv$ , se:

$$\lambda x.M \equiv \lambda y.N \iff \lambda x.M \xrightarrow{\alpha} \lambda y.N \wedge \lambda y.N \xrightarrow{\alpha} \lambda x.M$$

**Esempi:**

- Date le due lambda astrazioni  $\lambda x.(xy)$  e  $\lambda z.zy$ , si ha che:

$$\lambda x.xy \xrightarrow{\alpha} \lambda z.zy \wedge \lambda z.zy \xrightarrow{\alpha} \lambda x.xy \implies \lambda x.xy \equiv \lambda z.zy$$

- Date le due lambda astrazioni  $\lambda x.x(\lambda z.zw)$  e  $\lambda z.z(\lambda z.zw)$ , si ha che:

$$\lambda x.x(\lambda z.zw) \xrightarrow{\alpha} \lambda z.z(\lambda z.zw)$$

$$\lambda z.z(\lambda z.zw) \not\xrightarrow{\alpha} \lambda x.x(\lambda z.zw)$$

dunque ne concludiamo che:

$$\lambda x.x(\lambda z.zw) \not\equiv \lambda z.z(\lambda z.zw)$$

**Definizione 37: Beta conversione**

Definiamo come **beta conversione** (o *beta riduzione*), indicata con  $\xrightarrow{\beta}$ , la regola secondo cui all'interno di una lambda espressione  $(\lambda x.M)N$  ogni occorrenza della variabile  $x$  all'interno di  $M$  possa essere rimpiazzata dal termine  $N$ :

$$(\lambda x.M)N \xrightarrow{\beta} M[N/x]$$

**Osservazione 16**

La beta riduzione corrisponde esattamente ad singolo **passo computazionale**

**Esempio:**

- Data la lambda espressione  $(\lambda x.xy)(\lambda z.z)$ , si ha che:

$$(\lambda x.xy)(\lambda z.z) \xrightarrow{\beta} (\lambda z.z)y \xrightarrow{\beta} y$$

**Osservazione 17**

La beta riduzione utilizza implicitamente la **valutazione lazy**

**Esempio:**

- Data la lambda espressione  $(\lambda x.7)\omega$ , si ha che:

$$(\lambda x.7)\omega \xrightarrow{\beta} 7$$

dunque la valutazione è necessariamente lazy, poiché altrimenti il termine  $\omega$  sarebbe stato valutato (il quale ricordiamo essere invalutabile)

**Definizione 38: Eta conversione**

Definiamo come **eta conversione**, indicata con  $\xrightarrow{\eta}$ , la regola secondo cui la lambda espressione  $(\lambda x.Mx)$  possa essere rimpiazzata con il termine  $M$  solo se  $x \notin \text{free}(M)$ :

$$x \notin \text{free}(M) \implies \lambda x.Mx \xrightarrow{\eta} M$$

**Esempi:**

- Consideriamo la lambda espressione  $\lambda x.(\lambda y.y)x$ .
- Poiché:

$$\text{free}(\lambda y.y) = \{\text{free}(y) - \{y\}\} = \{y\} - \{y\} = \emptyset \implies x \notin \text{free}(\lambda y.y)$$

è possibile applicare l'eta conversione:

$$\lambda x.(\lambda y.y)x \xrightarrow{\eta} \lambda y.y$$

### 2.5.1 *Fun* vs Lambda calcolo

Avendo trattato le componenti principali del lambda calcolo, possiamo rappresentare quest'ultimo tramite la seguente grammatica:

$$M, N ::= x \mid fn\ x \Rightarrow M \mid MN$$

notiamo come il linguaggio *Fun* corrisponda ad un **sovra-linguaggio** del lambda calcolo stesso. Difatti, essendo il lambda calcolo già **turing completo**, alcuni termini del linguaggio *Fun* risultano "*ridondanti*".

In particolare, le seguenti due espressioni:

$$let\ x = M\ in\ N \qquad (fn\ x \Rightarrow N)M$$

risultano essere **operativamente equivalenti**, ossia vengono sempre valutate nello stesso risultato indipendentemente dalla semantica utilizzata (sebbene esse differiscano in termini di "implementazione" delle loro regole operazionali, dunque non sono effettivamente la stessa espressione).

#### Osservazione 18

La lambda astrazione  $\lambda x_1. \dots \lambda x_n. M$ , corrisponde all'espressione:

$$fn\ x_1 \dots x_n \Rightarrow M$$

In modo analogo a Von Neumann, il matematico Church diede una propria definizione alternativa dei **numeri naturali**: il numero  $n \in \mathbb{N}$  corrisponde all'applicazione per  $n$  volte di un'operazione  $x$  su un valore  $y$ .

In particolare, notiamo che tale definizione data da Church possa essere espressa in termini di **lambda calcolo**. Ad esempio, il numero naturale 3 corrisponderà alla lambda astrazione  $\lambda xy. x(x(xy))$

#### Proposizione 18: Numeri naturali di Church

I numeri naturali di Church, indicati con  $\mathcal{N}_\lambda$ , definiti come:

$$0_{\mathcal{N}_\lambda} := \lambda xy. y$$

$$1_{\mathcal{N}_\lambda} := \lambda xy. xy$$

$$2_{\mathcal{N}_\lambda} := \lambda xy. x(xy)$$

$$3_{\mathcal{N}_\lambda} := \lambda xy. x(x(xy))$$

...

dove  $\text{succ}_{\mathcal{N}_\lambda} : \mathcal{N}_\lambda \rightarrow \mathcal{N}_\lambda : n \mapsto n \cup \{n\}$ , soddisfano gli assiomi di Peano

(*dimostrazione omessa*)

Utilizzando la definizione di Church dei numeri naturali, è possibile definire un modello di calcolo **interamente basato sul lambda calcolo** dove ogni operazione possibile è definibile in termini di lambda astrazioni che lavorano sui numeri di Church (i quali a loro volta sono delle lambda astrazioni).

Di conseguenza, potremmo effettivamente ridurre la grammatica dell'intero linguaggio *Fun* in quella del lambda calcolo.

Procediamo quindi definendo i numeri di Church all'interno del linguaggio *Fun*:

- **zero** :=  $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow y$  oppure  $fn\ xy \Rightarrow y$
- **one** :=  $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow xy$  oppure  $fn\ xy \Rightarrow xy$
- **two** :=  $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x(xy)$  oppure  $fn\ xy \Rightarrow x(xy)$
- **three** :=  $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x(x(xy))$  oppure  $fn\ xy \Rightarrow x(x(xy))$
- ...

Definiamo inoltre una funzione **eval** in grado di convertire un numero di Church nel suo equivalente nei numeri naturali:

$$\mathbf{eval} := fn\ z \Rightarrow z(fn\ x \Rightarrow x + 1)\ 0$$

Ad esempio, l'espressione **eval two** viene valutata come:

$$\begin{aligned} \mathbf{eval\ two} &\xrightarrow{\beta} \\ \{fn\ z \Rightarrow z(fn\ x \Rightarrow x + 1)\ 0\} [fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x(xy)] &\xrightarrow{\beta} \\ \{[fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x(xy)] (fn\ x \Rightarrow x + 1)\ 0\} &\xrightarrow{\beta} \\ \{[fn\ y \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow x + 1)((fn\ x \Rightarrow x + 1)y)]\ 0\} &\xrightarrow{\beta} \\ [(fn\ x \Rightarrow x + 1)\{(fn\ x \Rightarrow x + 1)\ 0\}] &\xrightarrow{\beta} \\ [(fn\ x \Rightarrow x + 1)\ 1] &\xrightarrow{\beta} \\ 2 \end{aligned}$$

A questo punto, definiamo la funzione **succ** che restituisce il successore del numero di Church dato in input:

$$\mathbf{succ} := fn\ z \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow zx(xy))$$

Ad esempio, l'espressione **succ one** viene valutata come:

$$\begin{aligned} \mathbf{succ\ one} &\xrightarrow{\beta} \\ [fn\ z \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow zx(xy))] (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow xy) &\xrightarrow{\beta} \\ [fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow xy)x(xy)] &\xrightarrow{\beta} \\ [fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow (fn\ y \Rightarrow xy)(xy)] &\xrightarrow{\beta} \\ fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x(xy) &\xrightarrow{\beta} \\ \mathbf{two} \end{aligned}$$



Successivamente, definiamo le seguenti ulteriori funzioni matematiche:

- La funzione **sum** che somma due numeri di Church:

$$\text{sum} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow (\lambda x \Rightarrow \lambda y \Rightarrow zx(wxy))$$

oppure:

$$\text{sum} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow z \text{ succ } w$$

- La funzione **prod** che moltiplica due numeri di Church:

$$\text{prod} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow (\lambda x \Rightarrow \lambda y \Rightarrow z(wx)y)$$

oppure:

$$\text{prod} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow z(\text{sum } w) \text{ zero}$$

- La funzione **power** che eleva un numero di Church ad un altro numero di Church:

$$\text{prod} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow wz$$

Oltre ai numeri naturali, il lambda calcolo ci permette di descrivere anche la **logica booleana** di Church, dove i due valori **True** e **False** sono definiti come:

$$\text{True} := \lambda x \Rightarrow \lambda y \Rightarrow x$$

$$\text{False} := \lambda x \Rightarrow \lambda y \Rightarrow y$$

Come per i numeri di Church, definiamo una funzione **evalBool** in grado di convertire un booleano di Church in nel suo equivalente booleano:

$$\text{evalBool} := \lambda z \Rightarrow z \text{ true } \text{false}$$

dove *true* e *false* sono i normali valori booleani

Infine, definiamo i seguenti operatori logici:

- L'operatore **ITE** (abbreviativo di **If-Then-Else**) che dati una condizione  $z$  e due booleani di Church  $u, v$ , valuta  $u$  se  $z$  è *true* oppure valuta  $v$  se  $z$  è *false*:

$$\text{ITE} := \lambda z \Rightarrow \lambda u \Rightarrow \lambda v \Rightarrow z u v$$

- L'operatore **If** che dati una condizione  $z$  ed un booleano di Church  $u$ , valuta  $u$  se  $z$  è *true*:

$$\text{If} := \lambda z \Rightarrow \lambda u \Rightarrow z u \text{ True}$$

- L'operatore **Not** che restituisce il negato di un booleano di Church:

$$\text{Not} := \lambda z \Rightarrow \lambda x \Rightarrow \lambda y \Rightarrow z y x$$

- L'operatore **Or** che restituisce l'or logico tra due booleani di Church:

$$\text{Or} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow \text{If}(\text{Not } z)w$$

- L'operatore **And** che restituisce l'and logico tra due booleani di Church:

$$\text{And} := \lambda z \Rightarrow \lambda w \Rightarrow \text{Not}(\text{If } z (\text{Not } w))$$

Di seguito viene fornito il codice SML per poter lavorare con il modello di calcolo appena definito:

```
(* Numeri di Church *)

val zero = fn x => fn y => y;
val one  = fn x => fn y => x y;
val two  = fn x => fn y => x(x y);
val three = fn x => fn y => x(x(x y));

val eval = fn z => z (fn x => x+1) 0;

val succ = fn z => fn x => fn y => z x (x y);
val sum  = fn z => fn w => fn x => fn y => z x (w x y);
val prod = fn z => fn w => fn x => fn y => z (w x) y;
val power = fn z => fn w => w z;

(* Booleani di Church *)

val True  = fn x => fn y => x;
val False = fn x => fn y => y;

val evalBool = fn z => z true false;

val ITE = fn z => fn u => fn v => z u v;
val If  = fn z => fn u => z u True;

val Not = fn z => fn x => fn y => z y x;
val Or  = fn z => fn w => If (Not z) w;
val And = fn z => fn w => Not (If z (Not w));

(* Esempi *)

eval (sum (power two three) (prod two three));
evalBool (And (ITE True False True) False);
```

## 2.6 Ricorsione nei linguaggi funzionali

### Definizione 39: Punto fisso

Data una funzione  $f : X \rightarrow X$  e un elemento  $x \in X$ , definiamo  $x$  come **punto fisso di  $f$**  se  $f(x) = x$

### Definizione 40: Combinatore di punto fisso

All'interno del lambda calcolo, definiamo come **combinatore di punto fisso** (o *combinatore Y*) la seguente funzione:

$$Y \equiv \lambda f. (\lambda x. f(xx)) (\lambda x. f(xx))$$

Equivalentemente, nel linguaggio *Fun* il combinator Y corrisponde a:

$$Y \equiv fn\ f \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow f(xx)) (fn\ x \Rightarrow f(xx))$$

### Teorema 8: Ricorsione nel lambda calcolo

Data una funzione  $h$ , l'espressione  $Yh$  applica la funzione  $h$  **ricorsivamente**

*Dimostrazione:*

- Tramite la beta conversione, notiamo facilmente che:

$$\begin{aligned} Yh &\equiv [\lambda f. (\lambda x. f(xx)) (\lambda x. f(xx))] h \xrightarrow{\beta} \\ &(\lambda x. h(xx)) (\lambda x. h(xx)) \xrightarrow{\beta} \\ &h((\lambda x. h(xx)) (\lambda x. h(xx))) \equiv h(Yh) \end{aligned}$$

dunque  $Yh$  è un punto fisso di  $h$

- Di conseguenza, abbiamo che:

$$Yh \equiv h(Yh) \equiv h(h(Yh)) \equiv \dots$$

### Osservazione 19

All'interno dell'espressione  $Yh$ , il combinator  $Y$  genera solo la ricorsione. Di conseguenza, all'interno di  $h$  deve essere (in qualche modo) definito un caso base che possa fermare la ricorsione, poiché altrimenti si otterrebbe una valutazione infinita

**Lemma 4: Ricorsione tramite numeri naturali**

Dato un insieme  $A$ , un elemento  $a \in A$  e una funzione  $h : A \rightarrow A$ , si ha che:

$$\exists! f : \mathbb{N} \rightarrow A \mid f(n) = \begin{cases} a & \text{se } n = 0 \\ h(f(m)) & \text{se } n = \text{succ}(m) \end{cases}$$

Inoltre, definiamo tale insieme  $A$  come un **oggetto su numeri naturali** (da *Natural Numbers Object* in teoria delle categorie)

*Dimostrazione.*

- Sia  $\text{unit} : 1 \rightarrow A$  la funzione nullaria che restituisce sempre  $a$
- L'algebra  $(A, \text{unit}, h)$  possiede la stessa segnatura dell'algebra induttiva  $(\mathbb{N}, \text{zero}, \text{succ})$ , dunque per la [Segnatura equivalente ad un'algebra induttiva](#) ne segue che:

$$\exists! \text{ omomorfismo } f : \mathbb{N} \rightarrow A$$

dove tramite le proprietà degli omomorfismi abbiamo che:

- $f(0) = f(\text{zero}(x)) = \text{unit}(f(x)) = a$
- $f(\text{succ}(m)) = h(f(m))$

□

**Esempio:**

- Siano  $B = \{\text{true}, \text{false}\}$  e  $\text{not} : B \rightarrow B : x \mapsto \bar{x}$
- Dato l'elemento  $\text{true} \in B$ , per il lemma precedente si ha che:

$$\exists! \text{ isEven} : \mathbb{N} \rightarrow A \mid \text{isEven}(n) = \begin{cases} \text{true} & \text{se } n = 0 \\ \text{not}(\text{isEven}(m)) & \text{se } n = \text{succ}(m) \end{cases}$$

- Analogamente, dato l'elemento  $\text{false} \in B$  si ha che:

$$\exists! \text{ isOdd} : \mathbb{N} \rightarrow A \mid \text{isOdd}(n) = \begin{cases} \text{false} & \text{se } n = 0 \\ \text{not}(\text{isOdd}(m)) & \text{se } n = \text{succ}(m) \end{cases}$$

**Definizione 41: Operatore  $\rho$** 

Dato il linguaggio  $\text{Fun}$ , definiamo l'operatore  $\rho M N$  come:

$$(\rho M N) L = \begin{cases} M & \text{se } L = 0 \\ N ((\rho M N) n) & \text{se } L = \text{succ } n \end{cases}$$

In altre parole, se  $M$  è un valore di un insieme  $A$  e  $N$  è una funzione da  $A$  in  $A$ , l'operatore  $\rho M N$  restituisce l'unica funzione dettata dalla [Ricorsione tramite numeri naturali](#)

**Esempio:**

- Dati i booleani di Church, la valutazione di  $(\rho \text{ True Not})$  corrisponde alla funzione  $\text{isEven} : \mathbb{N} \rightarrow A$  definita nell'esempio precedente
- Difatti, abbiamo che:

$$(\rho \text{ True Not}) L \equiv \begin{cases} \text{True} & \text{se } L = 0 \\ \text{Not}((\rho \text{ True Not}) n) & \text{se } L = \text{succ } n \end{cases}$$

**Teorema 9: Unica funzione ricorsiva primitiva**

Dato un insieme  $A$ , un elemento  $a \in A$  e una funzione  $h : A \times \mathbb{N} \rightarrow A$ , si ha che:

$$\exists! f : \mathbb{N} \rightarrow A \mid f(n) = \begin{cases} a & \text{se } n = 0 \\ h(f(m), m) & \text{se } n = \text{succ}(m) \end{cases}$$

Inoltre, definiamo  $f$  come l'**unica funzione ricorsiva primitiva tramite  $h$**

*Dimostrazione.*

- Consideriamo l'elemento  $(a, 0) \in A \times \mathbb{N}$  e la seguente funzione

$$\hat{h} : A \times \mathbb{N} \rightarrow A \times \mathbb{N} : (x, n) \mapsto (h(x, n), \text{succ}(n))$$

- Per il lemma della [Ricorsione tramite numeri naturali](#), si ha che:

$$\exists! \hat{f} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times A \mid \hat{f}(n) = \begin{cases} (a, 0) & \text{se } n = 0 \\ \hat{h}(\hat{f}(m)) & \text{se } n = \text{succ}(m) \end{cases}$$

- Sia  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  la funzione tale che:

$$f(n) = b \implies \exists m \in A \mid \hat{f}(n) = (b, m)$$

- Per induzione (*dio solo sa come*) si ha che  $\forall n \in \mathbb{N} \ \hat{f}(n) = (f(n), n)$
- Di conseguenza, dal risultato precedente e dalla definizione stessa di  $\hat{f}$ , otteniamo che:

$$\begin{aligned} - (f(0), 0) &= \hat{f}(0) = (a, 0) \implies f(0) = a \\ - (f(\text{succ}(n)), \text{succ}(n)) &= \hat{f}(\text{succ}(n)) = (\hat{h}(\hat{f}(n))) = (h(f(n), n), \text{succ}(n)) \implies \\ &f(\text{succ}(n)) = h(f(n), n) \end{aligned}$$

- Supponiamo quindi per assurdo che esista un'altra funzione  $g : \mathbb{N} \rightarrow A$  diversa da  $f$  (dunque  $g \neq f$ ) tale che:

$$g(n) = \begin{cases} a & \text{se } n = 0 \\ h(g(m), m) & \text{se } n = \text{succ}(m) \end{cases}$$

- Poiché  $g(0) = a = f(0)$ , affinché valga  $g \neq f$  ne segue necessariamente che:

$$\exists k \in \mathbb{N} \mid g(\text{succ}(k)) \neq f(\text{succ}(k))$$

- Data la funzione  $\hat{g} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times A : n \mapsto (g(n), n)$ , si ha che:

$$\hat{f}(\text{succ}(k)) = (f(\text{succ}(k)), \text{succ}(k)) \neq (g(\text{succ}(k)), \text{succ}(k)) = \hat{g}(\text{succ}(k)) \implies \hat{g} \neq \hat{f}$$

- Inoltre, tramite la definizione stessa di  $\hat{g}$  abbiamo che:

$$- \hat{g}(0) = (g(0), 0) = (a, 0)$$

$$- \hat{g}(\text{succ}(n)) = (g(\text{succ}(n)), \text{succ}(n)) = (h(g(n), n), \text{succ}(n))$$

contraddicendo la condizione secondo cui  $\hat{f}$  sia l'unica funzione da  $\mathbb{N}$  ad  $A$  godente di tali proprietà

- Di conseguenza, ne segue necessariamente che tale funzione  $g$  non esista e dunque che  $f$  sia l'unica funzione avente tali proprietà

□

### Corollario 1: Unica funzione ricorsiva primitiva curryficata

Dato un insieme  $A$ , un elemento  $a \in A$  e una funzione  $h : A \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow A)$ , tramite la **curryficazione** abbiamo che:

$$\exists! f : \mathbb{N} \rightarrow A \mid f(n) = \begin{cases} a & \text{se } n = 0 \\ h(f(m))(m) & \text{se } n = \text{succ}(m) \end{cases}$$

### Definizione 42: Operatore *rec*

Dato il linguaggio *Fun*, definiamo l'operatore *rec*  $M \ N$  come:

$$(rec \ M \ N) \ L = \begin{cases} M & \text{se } L = 0 \\ N \ ((rec \ M \ N) \ n) \ n & \text{se } L = \text{succ } n \end{cases}$$

In altre parole, se  $M$  è un valore di un insieme  $A$  e  $N$  è una funzione da  $A$  in  $(\mathbb{N} \rightarrow A)$ , l'operatore  $\rho \ M \ N$  restituisce l'**Unica funzione ricorsiva primitiva**

### Osservazione 20

Dato il linguaggio *Fun*, si ha che:

$$rec \ M \ (fn \ x \Rightarrow fn \ y \Rightarrow N \ x) \equiv \rho \ M \ N$$

**Esempio:**

1. • Vogliamo costruire la funzione `fatt` definita come:

$$\text{fatt } M \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } M = 0 \\ (\text{fatt } n) * (\text{succ } n) & \text{se } M = \text{succ } n \end{cases}$$

- Notiamo che:

$$(\text{succ } n) * (\text{fatt } n) \equiv (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x * (\text{succ } y))(\text{fatt } n)\ n$$

- Di conseguenza, posta la funzione:

$$h \equiv (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x * (\text{succ } y))$$

otteniamo che:

$$\text{fatt } M \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } M = 0 \\ h\ (\text{fatt } n)\ n & \text{se } M = \text{succ } n \end{cases}$$

- Poiché  $1 \in \mathbb{N}$  e  $h : \mathbb{N} \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$ , dalla definizione di *rec* concludiamo che:

$$\text{fatt} \equiv \text{rec } 1\ h \equiv \text{rec } 1\ (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x * (\text{succ } y))$$

2. • Vogliamo costruire la funzione `twice` definita come:

$$\text{twice } M \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } M = 0 \\ \text{succ } (\text{succ } (\text{twice } n)) & \text{se } M = \text{succ } n \end{cases}$$

- Notiamo che:

$$\text{succ } (\text{succ } (\text{twice } n)) \equiv (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow \text{succ } (\text{succ } x)) (\text{twice } n)\ n$$

- Di conseguenza, posta la funzione:

$$h \equiv (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow \text{succ } (\text{succ } x))$$

otteniamo che:

$$\text{twice } M \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } M = 0 \\ h\ (\text{twice } n)\ n & \text{se } M = \text{succ } n \end{cases}$$

- Poiché  $0 \in \mathbb{N}$  e  $h : \mathbb{N} \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$ , dalla definizione di *rec* concludiamo che:

$$\text{twice} \equiv \text{rec } 0\ h \equiv \text{rec } 0\ (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow \text{succ } (\text{succ } x))$$

**Definizione 43: Linguaggio  $Fun_\rho$** 

Definiamo come  $Fun_\rho$  il linguaggio rappresentato dalla seguente grammatica:

$$M, N ::= x \mid fn\ x \Rightarrow M \mid M\ N \mid 0 \mid \text{succ } M \mid \text{rec } M\ N$$

# 3

## Paradigma imperativo

### 3.1 *Imp*: un semplice linguaggio imperativo

#### Definizione 44: Il linguaggio *Imp*

Definiamo come *Imp* il linguaggio rappresentato dalle seguenti grammatiche:

$$\begin{aligned} M, N &::= k \mid x \mid M + N \mid M < N \\ P, Q &::= skip \mid P; Q \mid \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q \mid \text{while } M \text{ do } P \mid \\ &\quad \text{var } x = M \text{ in } P \mid x := M \end{aligned}$$

dove:

- La prima grammatica rappresenta l'insieme *Exp* delle **espressioni**
- La seconda grammatica rappresenta l'insieme *Imp* dei **programmi**
- $k \in \{true, false\} \cup \{0, 1, \dots\}$  ossia è una **costante**
- $x \in Var = \{x, y, z, \dots\}$  ossia è una **variabile**
- Il termine *skip* è il programma che **non esegue alcuna operazione**
- Il termine  $P; Q$  esegue prima il programma  $P$  e poi il programma  $Q$
- Il termine *ite* esegue il programma  $P$  se l'espressione  $M$  è vera, altrimenti esegue il programma  $Q$
- Il termine *while* esegue il programma  $P$  finché l'espressione  $M$  è vera
- Il termine *var* **dichiara** la variabile  $x$  e gli **assegna** l'espressione  $M$  all'interno della **valutazione** di  $P$ . Inoltre,  $x$  prende il nome di variabile locale in  $P$
- Il termine  $:=$  **assegna** l'espressione  $M$  alla variabile  $x$  (solo se  $x$  è stata precedentemente dichiarata)



**Esempi:**

- Il programma *var x = 0 in while x < 10 do x := x + 1* è un termine valido di *Imp*
- Il programma *var x = 0 in while x < 10 do y := x + 1* non è un termine valido di *Imp*, poiché la variabile *y* non è stata dichiarata prima dell'assegnamento

**Definizione 45: Insieme delle locazioni**

Dato il linguaggio *Imp*, definiamo come **insieme delle locazioni**, indicato con *Loc*, l'insieme contenente le locazioni di memoria, ossia gli indirizzi di memoria ai quali sono associati dei valori (sostanzialmente, una locazione è un **puntatore**)

**Definizione 46: Insieme degli ambienti in *Imp***

Dato il linguaggio *Imp*, definiamo come **insieme degli ambienti di *Imp***, indicato con *Env*, il seguente insieme:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Loc\}$$

**Definizione 47: Insieme delle memorie in *Imp***

Dato il linguaggio *Imp*, definiamo come **insieme delle memorie di *Imp***, indicato con *Store*, il seguente insieme:

$$Store = \{f \mid f : Loc \xrightarrow{fin} Val\}$$

**Definizione 48: Concatenazione di memorie**

Dato il linguaggio *Imp*, definiamo l'operazione di **concatenazione di memorie**, ossia:

$$\cdot : Store \times Store \rightarrow Store$$

dove:

$$(S_1 S_2)(x) = \begin{cases} S_2(x) & \text{se } x \in dom(S_1) \\ S_1(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Definizione 49: Semantiche operazionali di *Imp***

Dato il linguaggio *Imp*, definiamo su di esso le seguenti due semantiche:

- La semantica delle espressioni

$$\overset{M}{\rightsquigarrow} \subseteq Env \times Exp \times Store \times Val$$

dove  $(E, M, S, v) \in \overset{M}{\rightsquigarrow}$  viene descritta dalla notazione  $E \vdash M, S \rightsquigarrow v$

- La semantica dei programmi

$$\overset{P}{\rightsquigarrow} \subseteq Env \times Imp \times Store \times Store$$

dove  $(E, P, S, S') \in \overset{P}{\rightsquigarrow}$  viene descritta dalla notazione  $E \vdash P, S \rightsquigarrow S'$

Le regole operazionali di tali semantiche sono definite come:

- **Costanti:**

$$E \vdash k, S \rightsquigarrow k$$

- **Variabili:**

$$E \vdash x, S \rightsquigarrow v \quad (\text{se } S(E(x)) = v)$$

- **Somma:**

$$\frac{E \vdash M, S \rightsquigarrow v \quad E \vdash N, S \rightsquigarrow v'}{E \vdash M + N, S \rightsquigarrow u} \quad (\text{se } u = v + v')$$

- **Minorazione:**

$$\frac{E \vdash M, S \rightsquigarrow v \quad E \vdash N, S \rightsquigarrow v'}{E \vdash M < N, S \rightsquigarrow true} \quad (\text{se } v < v')$$

$$\frac{E \vdash M, S \rightsquigarrow v \quad E \vdash N, S \rightsquigarrow v'}{E \vdash M < N, S \rightsquigarrow false} \quad (\text{se } v \geq v')$$

- **Skip:**

$$E \vdash skip, S \rightsquigarrow S$$

- **Esecuzione sequenziale:**

$$\frac{E \vdash P, S \rightsquigarrow S' \quad E \vdash Q, S' \rightsquigarrow S''}{E \vdash P; Q, S \rightsquigarrow S''}$$

- **If-then-else:**

$$\frac{E \vdash M, S \rightsquigarrow true \quad E \vdash P, S \rightsquigarrow S'}{E \vdash if M then P else Q, S \rightsquigarrow S'}$$

$$\frac{E \vdash M, S \rightsquigarrow false \quad E \vdash Q, S \rightsquigarrow S'}{E \vdash if M then P else Q, S \rightsquigarrow S'}$$

- **While:**

$$\frac{E \vdash M, S \rightsquigarrow true \quad E \vdash P, S \rightsquigarrow S' \quad E \vdash while\ M\ do\ P, S' \rightsquigarrow S''}{E \vdash while\ M\ do\ P, S \rightsquigarrow S''}$$

$$\frac{E \vdash M, S \rightsquigarrow false}{E \vdash while\ M\ do\ P, S \rightsquigarrow S}$$

- **Dichiarazione e assegnamento:**

$$\frac{E \vdash M, S \rightsquigarrow v \quad E\{(x, l)\} \vdash P, S\{(l, v)\} \rightsquigarrow S'}{E \vdash var\ x = M\ in\ P, S \rightsquigarrow S'}$$

dove  $l \notin dom(S)$ , ossia è una nuova locazione di memoria

- **Assegnamento:**

$$\frac{E \vdash M, S \rightsquigarrow v}{E \vdash x := M, S \rightsquigarrow S\{(l, v)\}} \quad (\text{se } E(x) = l)$$

### Osservazione 21

Tramite le definizioni date delle due semantiche e delle loro regole operazionali, notiamo che le espressioni vengono valutate in **valori** mentre i programmi vengono valutati in **memorie**.

Di conseguenza, i programmi **propagano "a ritroso"** (ossia scendendo nell'albero di derivazione) le modifiche alla memoria, mentre le espressioni **propagano "in avanti"** (ossia salendo nell'albero di derivazione) le modifiche all'ambiente

## 3.2 *All*: un linguaggio con procedure

### Definizione 50: Il linguaggio *All*

Definiamo come *All* il linguaggio rappresentato dalle seguenti grammatiche:

$$\begin{aligned}
 V &::= x \mid x[M] \\
 M, N &::= k \mid V \mid M + N \mid M < N \\
 P, Q &::= \text{skip} \mid P; Q \mid \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q \mid \text{while } M \text{ do } P \mid \\
 &\quad \text{var } x = M \text{ in } P \mid \text{arr } x = [M_0, \dots, M_n] \text{ in } P \mid V := M \mid \\
 &\quad \text{proc } y(x) \text{ is } P \text{ in } Q \mid \text{call } y(M)
 \end{aligned}$$

dove:

- La prima grammatica rappresenta l'insieme *LExp* (per *left expressions*) delle **espressioni assegnabili**
- La seconda grammatica rappresenta l'insieme *Exp* delle **espressioni valutabili**
- La terza grammatica rappresenta l'insieme *Imp* dei **programmi**
- $k \in \{\text{true}, \text{false}\} \cup \{0, 1, \dots\}$  ossia è una **costante**
- $x \in \text{Var} = \{x, y, z, \dots\}$  ossia è una **variabile**
- I termini già presenti in *Imp* sono definiti ugualmente
- Il termine *arr* **dichiara** l'array  $x$  e gli **assegna** le espressioni  $M_0, \dots, M_n$  all'interno della **valutazione** di  $P$
- Il termine *proc* dichiara una **procedura**  $y$  (ossia una funzione) con parametro  $x$  richiamabile all'interno di  $P$
- Il termine *call* **richiama** la procedura  $y$  passando  $M$  come argomento di essa (solo se  $y$  è stata precedentemente definita)

### Definizione 51: Insieme delle locazioni contigue

Dato l'insieme *Loc* e il linguaggio *All*, definiamo come **insieme delle locazioni contigue**, indicato con  $\text{Loc}^+$ , l'insieme contenente le sequenze di locazioni contigue di memoria

### Proposizione 19: Ridefinizione di *Env* in *All*

Dato il linguaggio *All*, definiamo come **insieme degli ambienti di *All***, indicato con *Env*, il seguente insieme:

$$\text{Env} = \{f \mid f : \text{Var} \xrightarrow{\text{fin}} \text{Loc}^+ \cup (\text{Var} \times \text{All} \times \text{Env})\}$$

**Definizione 52: Semantiche operazionali di *All***

Dato il linguaggio *All*, definiamo su di esso le seguenti due semantiche:

- La semantica delle espressioni assegnabili

$$\overset{V}{\rightsquigarrow} \subseteq Env \times LExp \times Store \times Loc$$

dove  $(E, M, S, l) \in \overset{V}{\rightsquigarrow}$  viene descritta dalla notazione  $E \vdash V, S \overset{V}{\rightsquigarrow} l$

- La semantica delle espressioni valutabili

$$\overset{M}{\rightsquigarrow} \subseteq Env \times Exp \times Store \times Val$$

dove  $(E, M, S, v) \in \overset{M}{\rightsquigarrow}$  viene descritta dalla notazione  $E \vdash M, S \overset{M}{\rightsquigarrow} v$

- La semantica dei programmi

$$\overset{P}{\rightsquigarrow} \subseteq Env \times All \times Store \times Store$$

dove  $(E, P, S, S') \in \overset{P}{\rightsquigarrow}$  viene descritta dalla notazione  $E \vdash P, S \overset{P}{\rightsquigarrow} S'$

Oltre alle regole operazionali già definite in *Imp*, vengono definite le seguenti regole aggiuntive:

- **Locazione:**

$$E \vdash x, S \overset{V}{\rightsquigarrow} l \quad (\text{se } E(x) = l)$$

- **Locazione in array:**

$$\frac{E \vdash M, S \overset{M}{\rightsquigarrow} m}{E \vdash x[M], S \overset{V}{\rightsquigarrow} l_m} \quad (\text{se } E(x) = \langle l_0, \dots, l_n \rangle \wedge m \in [0, n])$$

- **Riferimento:**

$$\frac{E \vdash V, S \overset{V}{\rightsquigarrow} l}{E \vdash V, S \overset{M}{\rightsquigarrow} v} \quad (\text{se } S(l) = v)$$

- **Assegnamento:**

$$\frac{E \vdash M, S \overset{M}{\rightsquigarrow} v \quad E \vdash V, S \overset{V}{\rightsquigarrow} l}{E \vdash V := M, S \overset{P}{\rightsquigarrow} S\{(l, v)\}}$$

- **Dichiarazione array:**

$$\frac{E \vdash M_0, S \overset{M}{\rightsquigarrow} v_0 \quad \dots \quad E \vdash M_n, S \overset{M}{\rightsquigarrow} v_n \quad E\{(x, (l_0, \dots, l_n))\} \vdash P, S\{(l_0, v_0), \dots, (l_n, v_n)\} \overset{P}{\rightsquigarrow} S'}{E \vdash arr \ x = [M_0, \dots, M_n] \text{ in } P, S \overset{P}{\rightsquigarrow} S'}$$

dove  $l_0, \dots, l_n \notin dom(S)$ , ossia sono nuove locazioni di memoria

• **Procedura:**

$$\frac{E\{y, (x, P, E)\} \vdash Q, S \xrightarrow{P} S'}{E \vdash \text{proc } y(x) \text{ is } P \text{ in } Q, S \xrightarrow{P} S'}$$

### 3.2.1 Semantiche di *All*

#### Definizione 53: Semantiche di *All*

Per via della separazione tra i concetti di *ambiente* e *memoria*, i valori degli argomenti delle procedure possono essere richiamati tramite tre semantiche operazionali:

- **Call-by-value**, ossia tramite una **semantica eager statica** in cui come argomento viene passato un termine di *Exp valutato* (passaggio per valore)
- **Call-by-reference**, ossia tramite una **semantica eager statica** in cui come argomento viene passato un termine di *LExp valutato* (passaggio per riferimento)
- **Call-by-name**, ossia tramite una **semantica lazy statica** in cui come argomento viene passato un termine di *LExp non ancora valutato* (passaggio per riferimento)

#### Proposizione 20: Linguaggio *All* call-by-value

La semantica call-by-value del linguaggio *All* prevede l'aggiunta della seguente regola operativa:

• **Richiamo by-value:**

$$\frac{E \vdash M, S \xrightarrow{M} v \quad E'\{(x, l)\} \vdash P, S\{(l, v)\} \rightsquigarrow S'}{E \vdash \text{call } y(M), S \xrightarrow{P} S'} \quad (\text{se } E(y) = (x, P, E'))$$

dove  $l \notin \text{dom}(S)$ , ossia è una nuova locazione di memoria

#### Proposizione 21: Linguaggio *All* call-by-reference

La semantica call-by-reference del linguaggio *All* prevede l'aggiunta della seguente regola operativa:

• **Richiamo by-reference:**

$$\frac{E \vdash V, S \xrightarrow{V} l \quad E'\{(x, l)\} \vdash P, S \rightsquigarrow S'}{E \vdash \text{call } y(V), S \xrightarrow{P} S'} \quad (\text{se } E(y) = (x, P, E'))$$

**Proposizione 22: Linguaggio *All* call-by-name**

La semantica call-by-name del linguaggio *All* prevede la ridefinizione di *Env* come:

$$Env = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Loc^+ \cup (Var \times All \times Env) \cup (LExp \times Env)\}$$

e l'aggiunta delle seguenti regole operazionali:

- **Locazione in variabile:**

$$\frac{E' \vdash V, S \xrightarrow{V} l}{E \vdash x, S \xrightarrow{V} l} \quad (\text{se } E(x) = (V, E'))$$

- **Richiamo by-name:**

$$\frac{E'\{(x, (V, E))\} \vdash P, S \rightsquigarrow S'}{E \vdash \text{call } y(V), S \xrightarrow{P} S'} \quad (\text{se } E(y) = (x, P, E'))$$

**Lemma 5**

Dato il linguaggio *All*, si ha che:

$$All \text{ call-by-value} \not\equiv All \text{ call-by-reference}$$

$$All \text{ call-by-value} \not\equiv All \text{ call-by-name}$$

*Dimostrazione.*

- Consideriamo il programma *proc y(x) is P in Q*
- Nel caso della semantica call-by-value, per la chiamata *call y(M)* verrà sempre creata una nuova locazione per il parametro *x*, portando le operazioni svolte su di *x* stesso ad influenzare tale nuova locazione
- Nel caso delle semantiche call-by-reference e call-by-name, invece, per la chiamata *call y(V)* verrà utilizzata direttamente la locazione associata all'espressione *V*, portando le operazioni svolte su di *x* stesso ad influenzare tale locazione già esistente
- Di conseguenza, risulta evidente come il programma restituisca uno stato diverso in base al tipo di passaggio utilizzato

□

**Esempio:**

- Consideriamo il programma

$$\text{var } x = 5 \text{ in } \text{proc } y(z) \text{ is } z := 1 \text{ in } \text{call } y(x)$$

- Utilizzando la semantica call-by-value, il suo albero di derivazione corrisponde a:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{E' \vdash x, \{(l, 5)\} \xrightarrow{V} l}{E' \vdash x, \{(l, 5)\} \xrightarrow{M} 5} \quad \frac{E'' \vdash 1, S \xrightarrow{M} 1 \quad E'' \vdash z, S \xrightarrow{V} \{(l', 1)\}}{E'' \vdash z := 1, S \rightsquigarrow S\{(l', 1)\}}}{E' \vdash \text{call } y(x), \{(l, 5)\} \rightsquigarrow S\{(l', 1)\}} \\
 \frac{\emptyset \vdash 5, \emptyset \rightsquigarrow 5 \quad E \vdash \text{proc } y(z) \text{ is } z := 1 \text{ in call } y(x), \{(l, 5)\} \rightsquigarrow S\{(l', 1)\}}{\emptyset \vdash \text{var } x = 5 \text{ in proc } y(z) \text{ is } z := 1 \text{ in call } y(x), \emptyset \rightsquigarrow S\{(l', 1)\}}
 \end{array}$$

dove  $E := \{(x, l)\}$ ,  $E' := E\{(y, (z, z := 1, E))\}$ ,  $E'' := E'\{(z, l')\}$  e  $S := \{(l, 5), (l', 5)\}$ , restituendo quindi la memoria  $S\{(l', 1)\} = \{(l, 5), (l', 1)\}$

- Utilizzando la semantica call-by-reference, il suo albero di derivazione corrisponde a:

$$\begin{array}{c}
 \frac{E' \vdash x, \{(l, 5)\} \xrightarrow{V} l \quad \frac{E'' \vdash 1, \{l, 5\} \xrightarrow{M} 1 \quad E'' \vdash z, \{l, 5\} \xrightarrow{V} \{(l, 1)\}}{E'' \vdash z := 1, \{l, 5\} \rightsquigarrow \{(l, 1)\}}}{E' \vdash \text{call } y(x), \{(l, 5)\} \rightsquigarrow \{(l, 1)\}} \\
 \frac{\emptyset \vdash 5, \emptyset \rightsquigarrow 5 \quad E \vdash \text{proc } y(z) \text{ is } z := 1 \text{ in call } y(x), \{(l, 5)\} \rightsquigarrow \{(l, 1)\}}{\emptyset \vdash \text{var } x = 5 \text{ in proc } y(z) \text{ is } z := 1 \text{ in call } y(x), \emptyset \rightsquigarrow \{(l, 1)\}}
 \end{array}$$

dove  $E := \{(x, l)\}$ ,  $E' := E\{(y, (z, z := 1, E))\}$ ,  $E'' := E'\{(z, l)\}$ , restituendo quindi la memoria  $\{(l, 1)\}$

### Lemma 6

Dato il linguaggio *All*, si ha che:

$$\text{All call-by-reference} \not\equiv \text{All call-by-name}$$

*Dimostrazione.*

- Consideriamo il programma

*var*  $x = 0$  *in* *arr*  $z = [3, 7]$  *in* *proc*  $y(w)$  *is*  $x := 1$ ;  $w := 42$  *in* *call*  $y(z[x])$

- Nel caso della semantica call-by-reference, durante la chiamata  $y(z[x])$ , l'espressione  $x$  viene valutata immediatamente, implicando che il parametro  $w$  punterà alla locazione di  $z[x] = z[0]$
- Nel caso della semantica call-by-name, invece, la valutazione dell'espressione  $x$  viene rimandata fino all'espressione  $w := 42$ . Tuttavia, prima di tale valutazione si ha che  $x := 1$ , implicando che la valutazione di  $x$  restituirà 1 e dunque che  $w$  punterà alla locazione di  $z[x] = z[1]$

□

### Teorema 10: Equivalenze semantiche di *All*

Dato il linguaggio *All*, **non esistono due semantiche equivalenti**



# 4

## Correttezza dei programmi

### 4.1 Correttezza dei programmi imperativi

#### 4.1.1 Invarianti di un programma

Nel Papiro di Rhind (circa 1650 a.C), viene descritto, fra molte altre discussioni matematiche, l'algoritmo usato dagli antichi egizi per svolgere la moltiplicazione.

Dati due numeri  $x, y \in \mathbb{N} - \{0\}$  da moltiplicare, l'algoritmo prosegue come tale:

1. Raddoppio  $x$  e se  $y$  è dispari sottraggo 1 ad esso e lo divido per due, altrimenti se  $y$  è pari lo divido direttamente per due
2. Scrivo i due nuovi valori di  $x$  e  $y$  sotto ai valori precedenti
3. Ripeto il passo 1) finché non ottengo che  $y = 1$
4. Tra tutte le coppie di valori scritte, scarto tutte le coppie in cui  $y$  è pari
5. L'output corrisponde alla somma di tutti i valori di  $x$  delle coppie rimanenti

**Esempio:**

- Applichiamo i primi due step sui numeri  $x = 45$  e  $y = 138$ :

45	138
90	69
180	34
360	17
720	8
1440	4
2880	2
5760	1

- Successivamente, scartiamo tutte le coppie per cui  $y$  è pari:

90	69
360	17
5760	1

- A questo punto, sommiamo i valori di  $x$ :

$$5760 + 360 + 90 = 6210$$

ottenendo il risultato del prodotto  $45 \cdot 138$

Definiamo quindi il codice dell'algoritmo egiziano per la moltiplicazione:

```
int AegyptProduct(int a, int b){
    int x = a;
    int y = b;
    int res = 0;

    while(y > 0){
        if(y % 2 == 0){
            x = x + x;
            y = y/2;
        }
        else{
            res = res + x;
            y = y - 1;
        }
    }

    return res;
}
```

A questo punto, vogliamo dimostrare la **correttezza** di tale algoritmo. Consideriamo quindi la seguente espressione:

$$x \cdot y + \text{res} = a \cdot b$$

Notiamo come tale espressione rimanga **sempre vera** sia prima del while, sia per ogni iterazione del while e sia dopo il while.

Siano quindi  $x'$ ,  $y'$  e  $\text{res}'$  i valori finali assunti dalle tre variabili. Poiché tale espressione è sempre vera e poiché la condizione di uscita del while è  $y' = 0$ , abbiamo che:

$$a \cdot b = x' \cdot y' + \text{res}' = x' \cdot 0 + \text{res}' = \text{res}'$$

dunque la funzione restituisce correttamente il prodotto tra  $a$  e  $b$

#### Definizione 54: Invariante

Definiamo come **invariante** di un oggetto una matematico una sua proprietà che rimane valida a seguito di operazioni o trasformazioni applicate sull'oggetto stesso

**Proposizione 23**

La proprietà:

$$x \cdot y + \text{res} = a \cdot b$$

è un'invariante della funzione `AegyptProduct`

*Dimostrazione.*

- Siano  $x_0, \dots, x_f, y_0, \dots, y_f$  e  $\text{res}_0, \dots, \text{res}_f$  i valori delle variabili  $x, y$  e  $\text{res}$  per ogni iterazione del `while`, dove  $f$  è l'iterazione in cui la condizione del `while` risulta falsa.

*Caso base.*

- Prima del ciclo `while`, dunque all'iterazione 0, si ha che:

$$x_0 \cdot y_0 + \text{res}_0 = a \cdot b + 0 = a \cdot b$$

*Ipotesi induttiva.*

- Supponiamo che per l' $i$ -esima iterazione valga che:

$$x_i \cdot y_i + \text{res}_i = a \cdot b$$

*Passo induttivo.*

- Se per l' $i$ -esima iterazione si verifica che  $y_i \equiv 0 \pmod{2}$ , allora:

- $x_{i+1} = 2x_i$
- $y_{i+1} = \frac{y_i}{2}$
- $\text{res}_{i+1} = \text{res}_i$

implicando che:

$$x_{i+1} \cdot y_{i+1} + \text{res}_{i+1} = 2x_i \cdot \frac{y_i}{2} + \text{res}_i = x_i \cdot y_i + \text{res}_i = a \cdot b$$

- Altrimenti, si ha che:

- $x_{i+1} = x_i$
- $y_{i+1} = y_i - 1$
- $\text{res}_{i+1} = \text{res}_i + x_i$

implicando che:

$$x_{i+1} \cdot y_{i+1} + \text{res}_{i+1} = x_i \cdot (y_i - 1) + \text{res}_i + x_i = x_i \cdot y_i + \text{res}_i = a \cdot b$$

□

**Metodo 1: Metodo delle invarianti**

Per dimostrare la correttezza di un algoritmo, è possibile individuare una sua invariante tramite cui dimostrare la sua correttezza, riducendo la dimostrazione della correttezza nella dimostrazione dell'invarianza. Tale invariante viene detta **specifica di correttezza** dell'algoritmo.

**4.1.2 Logica di Hoare**

Avendo trattato i linguaggi imperativi e il metodo delle invarianti, vogliamo definire una grammatica che ci permetta di dimostrare la **correttezza dei programmi imperativi** in modo più diretto.

**Definizione 55: Logica di Hoare**

Definiamo come Logica di Hoare il linguaggio assiomatico rappresentato dalle seguenti grammatiche:

$$\begin{aligned} M, N &::= k \mid x \mid M + N \\ A, B &::= true \mid false \mid A \supset B \mid M < N \mid M = N \\ P, Q &::= skip \mid P; Q \mid if\ B\ then\ P\ else\ Q \mid while\ B\ do\ P \mid x := M \end{aligned}$$

dove:

- La prima grammatica rappresenta l'insieme delle **espressioni numeriche**
- La seconda grammatica rappresenta l'insieme delle **espressioni booleane**
- La terza grammatica rappresenta l'insieme dei **programmi**
- $k \in \{0, 1, \dots\}$  ossia è una **costante**
- $x \in \{x, y, z, \dots\}$  ossia è una **variabile**
- Il simbolo  $\supset$  è l'**implicazione logica** (dunque equivale al simbolo  $\implies$ )

Definiamo inoltre alcune abbreviazioni sintattiche:

- La notazione  $\neg A$  corrisponde al termine  $A \supset false$
- La notazione  $A \vee B$  corrisponde al termine  $\neg A \supset B$
- La notazione  $A \wedge B$  corrisponde al termine  $\neg(\neg A \supset B)$
- La notazione  $A \leq B$  corrisponde al termine  $(A < B) \vee (A = B)$
- La notazione  $A > B$  corrisponde al termine  $\neg((A < B) \vee (A = B))$
- La notazione  $A \geq B$  corrisponde al termine  $\neg(A < B)$

**Definizione 56: Tripla di Hoare**

Data la logica di Hoare, siano  $A$  e  $B$  due espressioni booleane e sia  $P$  un programma. Se **eseguendo**  $P$  in uno stato che **soddisfa**  $A$ , si ottiene uno stato che **soddisfa**  $B$ , definiamo l'espressione

$$\{A\} P \{B\}$$

come **trippla di Hoare**, dove  $A$  viene detta **precondizione** e  $B$  viene detta **postcondizione**

**Definizione 57: Formula**

Data la logica di Hoare, definiamo come **formula** un'espressione appartenente alla seguente grammatica:

$$\varphi ::= A \mid \{A\} P \{B\}$$

**Proposizione 24: Regole di inferenza generali**

Data la logica di Hoare, definiamo le seguenti regole di inferenza:

- **True:**

$$\{A\} P \{true\}$$

- **False:**

$$\{false\} P \{A\}$$

- **Rafforzamento della precondizione (strengthening):**

$$\frac{A \supset B \quad \{B\} P \{C\}}{\{A\} P \{C\}}$$

- **Indebolimento della postcondizione (weakening):**

$$\frac{\{A\} P \{B\} \quad B \supset C}{\{A\} P \{C\}}$$

- **And:**

$$\frac{\{A\} P \{B_1\} \quad \dots \quad \{A\} P \{B_n\}}{\{A\} P \{B_1 \wedge \dots \wedge B_n\}}$$

- **Or:**

$$\frac{\{A_1\} P \{B\} \quad \dots \quad \{A_n\} P \{B\}}{\{A_1 \vee \dots \vee A_n\} P \{B\}}$$

**Proposizione 25: Regole di inferenza dei programmi**

Data la logica di Hoare, definiamo le seguenti regole di inferenza:

- **Skip:**

$$\{A\} \text{ skip } \{A\}$$

- **Esecuzione sequenziale:**

$$\frac{\{A\} P \{B\} \quad \{B\} Q \{C\}}{\{A\} P; Q \{C\}}$$

- **If-then-else:**

$$\frac{\{A \wedge B\} P \{C\} \quad \{A \wedge \neg B\} Q \{C\}}{\{A\} \text{ if } B \text{ then } P \text{ else } Q \{C\}}$$

- **While:**

$$\frac{\{A \wedge B\} P \{A\}}{\{A\} \text{ while } B \text{ do } P \{A \wedge \neg B\}}$$

- **Assegnamento:**

$$\{A[M/x]\} x := M \{A\}$$

dove  $[M/x]$  ricordiamo essere l'operatore di [Operatore di sostituzione](#)

**Esempio:**

- Consideriamo la seguente tripla di Hoare:

$$\{x = 1\} x := x + 1 \{x = 2\}$$

- Possiamo utilizzare lo *strengthening* affinché l'assegnamento possa essere valutato correttamente in quanto  $(x = 2)[x + 1/x]$  venga valutata in  $x + 1 = 2$ :

$$\frac{x = 1 \supset x + 1 = 2 \quad \{x + 1 = 2\} x := x + 1 \{x = 2\}}{\{x = 1\} x := x + 1 \{x = 2\}}$$

**Teorema 11: Invarianti con logica di Hoare**

Dato il programma *while B do Q* ed una proprietà *A*, si ha che:

$$A \text{ invariante} \iff \{A\} \text{ while } B \text{ do } Q \{A \wedge \neg B\}$$

A questo punto, consideriamo la seguente funzione:

```
int EuclideanDivision(int x, int y){
    int b = x;
    int a = 0;

    while(b >= y){
        b = b - y;
        a = a + 1;
    }

    return {a, b};
}
```

Vogliamo dimostrare che tale funzione calcoli effettivamente la divisione con resto euclidea, ossia che i valori  $a$  e  $b$  restituiti siano tali che  $x = ay + b$  e  $0 \leq b < y$  (ossia che  $a$  sia il quoziente della divisione e che  $b$  sia il resto di quest'ultima)

Prima di tutto convertiamo il codice in un programma espresso dalla logica di Hoare:

$$b := x; a := 0; \text{ while } b \geq y \text{ do } b := b - y; a := a + 1$$

A questo punto, cerchiamo di dimostrare che tali proprietà siano un'invariante del programma utilizzando le regole operazionali fornite dalla logica di Hoare.

### Proposizione 26

Se  $x \geq 0$ , la proprietà:

$$x = ay + b \wedge b \geq 0 \wedge b < y$$

è un'invariante della funzione `EuclideanDivision`

*Dimostrazione.*

- Per facilitare la lettura, poniamo:
  - $P \equiv (b := x; a := 0; \text{ while } b \geq y \text{ do } b := b - y; a := a + 1)$
  - $Q \equiv (b := x)$
  - $R \equiv (a := 0)$
  - $S \equiv (\text{ while } b \geq y \text{ do } b := b - y; a := a + 1)$
  - $A \equiv (x = ay + b \wedge b \geq 0 \wedge b < y)$
- Affinché la proprietà  $A$  sia un'invariante di  $P$ , è necessario che trovare una precondizione  $B$  tale che la seguente tripla di Hoare sia valida:

$$\{B\} b := x; a := 0; \text{ while } b \geq y \text{ do } b := b - y; a := a + 1 \{A\}$$

- Tramite le regole operazionali della logica di Hoare, abbiamo che:

$$\frac{\{B\} Q \{C\} \quad \{C\} R \{D\} \quad \{D\} S \{A\}}{\{B\} b := x; a := 0; \text{while } b \geq y \text{ do } b := b - y; a := a + 1 \{A\}}$$

- Consideriamo quindi la tripla  $\{D\} S \{A\}$ . La sua valutazione è data da:

$$\frac{\frac{\{D \wedge b \geq y\} b := b - y \{F\} \quad \{F\} a := a + 1 \{D\}}{\{D \wedge b \geq y\} b := b - y; a := a + 1 \{D\}}}{\{D\} \text{while } b \geq y \text{ do } b := b - y; a := a + 1 \{A\}}$$

- Affinché tale tripla sia valida,  $D$  deve necessariamente essere una condizione tale che

$$x = ay + b \wedge b \geq 0 \wedge b < y \equiv A \equiv D \wedge \neg(b \geq y) \equiv D \wedge b < y$$

dunque otteniamo che  $D \equiv x = ay + b \wedge b \geq 0$

- Una volta trovato  $D$ , consideriamo la tripla  $\{F\} a := a + 1 \{D\}$ . Tramite la regola dell'assegnamento, notiamo facilmente che:

$$\{F\} a := a + 1 \{D\} \implies \{D[a + 1/a]\} a := a + 1 \{D\}$$

dunque otteniamo che  $F \equiv D[a + 1/a] \equiv x = (a + 1)y + b \wedge b \geq 0$

- Una volta trovato  $F$ , consideriamo la tripla  $\{D \wedge b \geq y\} b := b - y \{F\}$ , dove:

$$\{D \wedge b \geq y\} b := b - y \{F\} \iff$$

$$\{x = ay + b \wedge b \geq 0 \wedge b \geq y\} b := b - y \{x = (a + 1)y + b \wedge b \geq 0\}$$

A questo punto, notiamo che:

$$x = ay + b \wedge b \geq 0 \wedge b \geq y \implies x = (a + 1)y + b - y \wedge b - y \geq y$$

Di conseguenza, posto  $E \equiv x = (a + 1)y + b - y \wedge b - y \geq y$ , tramite lo *strengthening*, abbiamo che:

$$\frac{D \wedge b \geq y \supset E \quad \{E\} b := b - y \{x = (a + 1)y + b \wedge b \geq 0\}}{\{x = ay + b \wedge b \geq 0 \wedge b \geq y\} b := b - y \{x = (a + 1)y + b \wedge b \geq 0\}}$$

inoltre, abbiamo che  $E \equiv F[b - y/b] \equiv (D[a + 1/a])[b - y/b]$



- Ricapitolando, dunque, affinché tale tripla sia valida, abbiamo che:

$$(*) \quad \frac{\frac{D \wedge b \geq y \supset E \quad \{E\} \ b = b - y \ \{D[a + 1/a]\}}{\{D \wedge b \geq y\} \ b := b - y \ \{D[a + 1/a]\}} \quad \{D[a + 1/a]\} \ a := a + 1 \ \{D\}}{\frac{\{D \wedge b \geq y\} \ b := b - y; \ a := a + 1 \ \{D\}}{\{D\} \ \text{while } b \geq y \ \text{do } b := b - y; \ a := a + 1 \ \{A\}}}$$

dove:

- $D \equiv x = ay + b \wedge b \geq 0$
- $E \equiv (D[a + 1/a])[b - y/b]$

- Successivamente, consideriamo la tripla  $\{C\} \ R \ \{D\}$ , dove:

$$\{C\} \ R \ \{D\} \iff \{C\} \ a := 0 \ \{D\} \implies \{D[0/a]\} \ a := 0 \ \{D\}$$

dunque otteniamo che  $C \equiv D[0/a] \equiv x = 0 \cdot y + b \wedge b \geq 0$

- Infine, consideriamo la tripla  $\{B\} \ Q \ \{C\}$ , dove:

$$\{B\} \ Q \ \{C\} \iff \{B\} \ b := y \ \{x = 0 \cdot y + b \wedge b \geq 0\}$$

Poiché:

$$x \geq 0 \implies x = 0 \cdot y + x \wedge x \geq 0$$

posto  $G \equiv (D[0/a])[y/b] \equiv C[y/b] \equiv x = 0 \cdot y + x \wedge x \geq 0$ , tramite lo *strengthening* otteniamo facilmente che:

$$\frac{x \geq 0 \supset G \quad \{G\} \ b = x \ \{x = 0 \cdot y + b \wedge b \geq 0\}}{\{x \geq 0\} \ b := y \ \{x = 0 \cdot y + b \wedge b \geq 0\}}$$

dunque concludiamo che  $B \equiv x \geq 0$

- In conclusione, dunque, abbiamo che:

$$\frac{\frac{x \geq 0 \supset (D[0/a])[y/b] \quad \{(D[0/a])[y/b]\} \ b := x \ \{D[0/a]\}}{\{x \geq 0\} \ b := y \ \{D[0/a]\}} \quad \{D[0/a]\} \ a := 0 \ \{D\}}{\{x \geq 0\} \ b := x; \ a := 0; \ \text{while } b \geq y \ \text{do } b := b - y; \ a := a + 1 \ \{A\}} \quad (*)$$

dove:

- $A \equiv x = ay + b \wedge b \geq 0 \wedge b < y$
- $D \equiv x = ay + b \wedge b \geq 0$

□

## 4.2 Correttezza dei programmi funzionali

Similmente alla logica di Hoare per i programmi imperativi, introduciamo un sistema logico equazionale di verifica formale dei programmi.

### Definizione 58: Predicato di uguaglianza di $Fun_\rho$

Dato il linguaggio  $Fun_\rho$ , il predicato di uguaglianza  $M = N$  permette di verificare formalmente l'equivalenza tra termini di  $Fun_\rho$ :

$$M = N \iff M \equiv N$$

Il predicato  $M = N$  è definito dalle seguenti regole:

1. **Regola alfa** ( $\alpha$ ), coincidente con l'alfa equivalenza del lambda calcolo:

$$fn\ x \Rightarrow M = fn\ y \Rightarrow M[y/x]$$

2. **Regola beta** ( $\beta$ ), coincidente con la beta conversione del lambda calcolo:

$$(fn\ x \Rightarrow M)\ N = M[N/x]$$

3. **Regola del caso base:**

$$(rec\ M\ N)\ 0 = M$$

4. **Regola del passo ricorsivo:**

$$(rec\ M\ N)\ (succ\ L) = N\ ((rec\ M\ N)\ L)\ L$$

5. **Regola dell'induzione:**

$$\frac{P(0) \quad P(n) \implies P(succ\ n)}{\forall m\ P(m)}$$

6. **Regola della congruenza:**

$$\frac{M = N \quad M = L}{N = L}$$

7. **Regola del contesto:**

$$\frac{M = M' \quad N = N'}{M\ N = M'\ N'}$$

8. **Regola xi** ( $\xi$ ):

$$\frac{M = N}{fn\ x \Rightarrow M = fn\ x \Rightarrow N}$$

**Osservazione 22**

Il predicato  $M = N$  gode delle seguenti proprietà:

1. **Riflessività:**

$$\frac{M}{M = M}$$

2. **Simmetria:**

$$\frac{M = N}{N = M}$$

3. **Transitività:**

$$\frac{M = N \quad N = L}{M = L}$$

di conseguenza, esso stipula una **relazione di equivalenza**

*Dimostrazione.*

1. Tramite le regole definite su  $rec$  e la regola della congruenza, si ha che:

$$\frac{\frac{M}{(rec\ M\ N)\ 0 = M} \quad (rec\ M\ N)\ 0 = M}{M = M}$$

2. Tramite la riflessività e la regola di congruenza si ha che:

$$\frac{\frac{M = N}{\frac{M = N \quad M}{M = N \quad M = M}}}{N = M}$$

3. Tramite la simmetria e la regola di congruenza si ha che:

$$\frac{\frac{M = N \quad N = L}{N = M \quad N = L}}{M = L}$$

□

**Proposizione 27: Correttezza di plus**

Data la funzione:

$$\text{plus } M\ N \equiv \begin{cases} N & \text{se } M = 0 \\ \text{succ } (\text{plus } n\ N) & \text{se } M = \text{succ } n \end{cases}$$

si ha che:

$$\text{plus} \equiv (\text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow (\text{rec } y\ (\text{fn } w \Rightarrow \text{fn } z \Rightarrow \text{succ } w))\ x)$$

*Dimostrazione.*

- Siano:

$$- h \equiv (fn\ w \Rightarrow fn\ z \Rightarrow succ\ w)$$

$$- P(m) := [\text{plus } m\ N = (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow (rec\ y\ h)\ x)\ m\ N]$$

- Verifichiamo che  $P(0)$  sia valido:

$$\begin{aligned} (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow (rec\ y\ (fn\ w \Rightarrow fn\ z \Rightarrow succ\ w))\ x)\ 0\ N = \\ (rec\ N\ (fn\ w \Rightarrow fn\ z \Rightarrow succ\ w))\ 0 = \\ N = \text{plus } 0\ N \end{aligned}$$

- Assumendo che  $P(n)$  sia valido, verifichiamo che anche  $P(succ\ n)$ :

$$\begin{aligned} (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow (rec\ y\ h)\ x)\ (succ\ n)\ N = \\ (rec\ N\ h)\ (succ\ n) = \\ (fn\ w \Rightarrow fn\ z \Rightarrow succ\ w)((rec\ N\ h)\ n)\ n = \\ (fn\ w \Rightarrow fn\ z \Rightarrow succ\ w)(fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow ((rec\ y\ h)\ x)\ n\ N)\ n \stackrel{P(n)}{=} \\ (fn\ w \Rightarrow fn\ z \Rightarrow succ\ w)(\text{plus } n\ N)\ n = \\ succ\ (\text{plus } n\ N) = \\ \text{plus } (succ\ n)\ N \end{aligned}$$

- Di conseguenza, tramite la regola dell'induzione abbiamo che:

$$\frac{P(0) \quad P(n) \implies P(succ\ n)}{\forall m\ P(m)}$$

da cui concludiamo che:

$$\text{plus} = (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow (rec\ y\ h)\ x)$$

□

### Proposizione 28: Commutatività di plus

Data la funzione **plus**, si ha che:

$$\text{plus } M\ N \equiv \text{plus } N\ M$$

*Dimostrazione.*

- Sia  $P(m) := \forall x\ [\text{plus } m\ x \equiv \text{plus } x\ m]$

- Verifichiamo che  $P(0)$  sia valido:

- Sia  $Q(x) := [\text{plus } 0 \ x \equiv \text{plus } x \ 0]$
- Il predicato  $Q(0)$  risulta valido per identità:

$$\text{plus } 0 \ 0 = \text{plus } 0 \ 0$$

- Assumendo che  $Q(y)$  sia valido, verifichiamo che  $Q(\text{succ } y)$ :

$$\begin{aligned} \text{plus } (\text{succ } y) \ 0 &= \text{succ}(\text{plus } y \ 0) \stackrel{Q(y)}{=} \\ \text{succ}(\text{plus } 0 \ y) &= \text{succ } y = \text{plus } 0 \ (\text{succ } y) \end{aligned}$$

dunque tramite la regola dell'induzione concludiamo che:

$$\frac{\frac{Q(0) \quad Q(y) \implies Q(\text{succ } y)}{\forall x \ Q(x)}}{P(0)}$$

- Assumendo che  $P(n)$  sia valido, verifichiamo che anche  $P(\text{succ } n)$ :

- Sia  $R(x) := [\text{plus } (\text{succ } n) \ x \equiv \text{plus } x \ (\text{succ } n)]$
- Il predicato  $R(0)$  risulta valido per identità:

$$\begin{aligned} \text{plus } 0 \ (\text{succ } n) &= (\text{succ } n) = \\ \text{succ}(\text{plus } 0 \ n) &= \text{succ}(\text{plus } n \ 0) = \text{plus } (\text{succ } n) \ 0 \end{aligned}$$

- Assumendo che  $R(y)$  sia valido, verifichiamo che  $R(\text{succ } y)$ :

$$\begin{aligned} \text{plus } (\text{succ } y) \ (\text{succ } n) &= \text{succ}(\text{plus } y \ (\text{succ } n)) \stackrel{R(y)}{=} \\ \text{succ}(\text{plus } (\text{succ } n) \ y) &= \text{succ}(\text{succ}(\text{plus } n \ y)) \stackrel{P(n)}{=} \\ \text{succ}(\text{succ}(\text{plus } y \ n)) &= \text{succ}(\text{plus } (\text{succ } y) \ n) \stackrel{R(y)}{=} \\ \text{succ}(\text{plus } n \ (\text{succ } y)) &= \text{plus } (\text{succ } n) \ (\text{succ } y) \end{aligned}$$

dunque tramite la regola dell'induzione concludiamo che:

$$\frac{\frac{R(0) \quad R(y) \implies R(\text{succ } y)}{\forall x \ R(x)}}{P(\text{succ } n)}$$

- Infine, otteniamo che:

$$\frac{P(0) \quad P(n) \implies P(\text{succ } n)}{\forall m \ P(m)}$$

da cui concludiamo che:

$$\text{plus } M \ N \equiv \text{plus } N \ M$$

□

# 5

## Sistema dei Tipi

Un **sistema dei tipi** è un sistema logico composto da un insieme di regole che assegna una proprietà detta **tipo** ad ogni **termine** di un linguaggio, dettando le operazioni che possono essere effettuate su di essi (es: il tipo di una variabile determina quali valori possano essere assegnati a tale variabile)

Lo scopo principale dei sistemi dei tipi nei linguaggi di programmazione è la riduzione della possibile presenza di bug o errori di computazione tramite il controllo della presenza di **errori di tipo** (es: impedendo che un intero possa essere sommato ad un booleano).

### 5.1 Lambda calcolo tipato semplice

#### Definizione 59: Lambda calcolo tipato semplice

Definiamo come **lambda calcolo tipato semplice** il sistema dei tipi rappresentato dalla seguente grammatica:

$$\begin{aligned} A, B &::= K \mid A \rightarrow B \\ M, N &::= k \mid x \mid \lambda x : A. M \mid M N \end{aligned}$$

dove:

- La prima grammatica rappresenta l'insieme dei **tipi**, indicato con *Types*
- La seconda grammatica rappresenta l'insieme dei **termini**, indicato con *Terms*
- $k \in \{0, 1, \dots\}$  ossia è una **costante**
- $x \in \{x, y, z, \dots\}$  ossia è una **variabile**
- $K \in \{\text{Int}, \text{Bool}, \text{String}, \dots\}$  ossia è un **tipo base**

**Definizione 60: Insieme dei contesti**

Dato il lambda calcolo tipato semplice, definiamo come **insieme dei contesti**, indicato con  $Ctx$ , l'insieme delle funzioni parziali che associano ogni variabile al proprio tipo:

$$Ctx = \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Val\}$$

Inoltre, dato un contesto  $\Gamma \in Ctx$ , se  $\Gamma(x) = A$  usiamo la notazione infissa  $x : A$

**Definizione 61: Concatenazione di contesti**

Dato il lambda calcolo tipato semplice, definiamo l'operazione di **concatenazione di contesti**, ossia:

$$\cdot : Ctx \times Ctx \rightarrow Ctx$$

dove:

$$(\Gamma_1 \Gamma_2)(x) = \begin{cases} \Gamma_2(x) & \text{se } x \in \text{dom}(\Gamma_2) \\ \Gamma_1(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Definizione 62: Semantica dei tipi**

Data la seguente relazione detta **semantica dei tipi**, ossia:

$$: \subseteq Ctx \times Terms \times Types$$

definiamo come **asserzione di tipo** la tripla  $(\Gamma, M, v) \in :$  descritta dalla notazione

$$\Gamma \vdash M : A$$

la quale viene letta come "nel contesto  $\Gamma$ ,  $M$  è un termine legale di tipo  $A$ ".

All'interno del **lambda calcolo tipato semplice**, i termini vengono valutati tramite le seguenti regole di inferenza:

- **Costanti:**

$$\Gamma \vdash k : K$$

- **Variabili:**

$$\Gamma \vdash x : A \quad (\text{se } \Gamma(x) = A)$$

- **Funzione:**

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A. M : A \rightarrow B}$$

- **Applicazione:**

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M N : B}$$

**Esempio:**

- Consideriamo il seguente termine

$$[\lambda x : (\text{Int} \rightarrow \text{Bool}) . x \{[\lambda y : \text{String} . 7] \text{"ciao"}\}][\lambda z : \text{Int} . \text{true}]$$

- La sua valutazione corrisponde a:

$$\begin{array}{c}
 \text{(*)} \quad \frac{\frac{\Gamma \vdash x : \text{Int} \rightarrow \text{Bool} \quad \frac{\frac{\Gamma, y : \text{String} \vdash 7 : \text{Int}}{\Gamma \vdash \lambda y : \text{String} . 7 : \text{String} \rightarrow \text{Int}} \quad \Gamma \vdash \text{"ciao"} : \text{String}}{\Gamma \vdash [\lambda y : \text{String} . 7] \text{"ciao"} : \text{Int}}}{\Gamma \vdash x \{[\lambda y : \text{String} . 7] \text{"ciao"}\} : \text{Bool}}}{\emptyset \vdash [\lambda x : (\text{Int} \rightarrow \text{Bool}) . x \{[\lambda y : \text{String} . 7] \text{"ciao"}\}] : (\text{Int} \rightarrow \text{Bool}) \rightarrow \text{Bool}} \\
 \\
 \frac{\text{(*)} \quad \frac{z : \text{Int} \vdash \text{true} : \text{Bool}}{\emptyset \vdash \lambda z : \text{Int} . \text{true} : \text{Int} \rightarrow \text{Bool}}}{\emptyset \vdash [\lambda x : (\text{Int} \rightarrow \text{Bool}) . x \{[\lambda y : \text{String} . 7] \text{"ciao"}\}][\lambda z : \text{Int} . \text{true}] : \text{Bool}}
 \end{array}$$

dove  $\Gamma = x : \text{Int} \rightarrow \text{Bool}$

**Proposizione 29: Circolarità non tipabile**

Dato il lambda calcolo tipato semplice, non esiste un tipo  $A$  tale che  $A \equiv A \rightarrow B$  per qualche tipo  $B$ .

Per tanto, qualsiasi termine che dovrebbe assumere tale tipo, detto **circolare**, risulta **non tipabile**.

*Dimostrazione.*

- Supponiamo per assurdo che esista un tipo  $A$  tale che  $A \equiv A \rightarrow B$  per qualche tipo  $B$ .
- Ciò risulta possibile solo se  $A \equiv B \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow \dots$ , implicando che  $A$  appartenga all'insieme dei tipi infiniti, ossia che  $A \in \text{Types}_\infty$
- Essendo tuttavia il tipo  $A$  generato dalla grammatica  $B, C ::= K \mid B \rightarrow C$  del lambda calcolo tipato, ne seguirebbe che tale grammatica generi l'algebra  $(\text{Types}_\infty, K, \rightarrow)$  e che essa sia induttiva, creando una contraddizione in quanto anche  $(\text{Types}, K, \rightarrow)$  sia un'algebra induttiva e  $\text{Types} \subsetneq \text{Types}_\infty$
- Di conseguenza, l'unica possibilità è che tale tipo  $A$  non possa esistere

□



**Esempio:**

- Consideriamo il termine  $\lambda x : A.xx$
- La sua valutazione corrisponde a:

$$\frac{\frac{x : A \vdash x : A \rightarrow B \quad x : A \vdash x : A}{x : A \vdash xx : B}}{\emptyset \vdash \lambda x : A.xx : A \rightarrow B}$$

- Di conseguenza, il tipo del termine  $\lambda x : A.xx$  corrisponde sia a  $A$  che a  $A \rightarrow B$ , implicando che  $A \equiv A \rightarrow B$  e dunque che tale termine sia non tipabile

**Osservazione 23: Precedenza delle parentesi nei tipi**

All'interno del lambda calcolo tipato semplice si ha che:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow \dots \equiv A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (D \rightarrow \dots)))$$

## 5.2 Lambda calcolo polimorfo

Il lambda calcolo tipato semplice viene generalmente considerato un *sistema dei tipi di primo ordine*. Difatti, la sua formalizzazione non risulta essere sufficientemente astratta per poter permettere di tipare termini **generici**, ossia termini in grado di lavorare indipendentemente dal tipo assunto dalle variabili al suo interno.

Consideriamo ad esempio il seguente termine:

$$\lambda x.((x \ 5)((x \ \text{true}) \ \text{false}))$$

Utilizzando le regole di inferenza dettate dal lambda calcolo tipato semplice, notiamo facilmente che tale termine sia illegale in quanto il parametro  $x$  dovrebbe rispettare tutte le seguenti condizioni:

- Deve essere una funzione avente un intero come input
- Deve essere una funzione avente un booleano come input
- Deve essere una funzione che restituisce una funzione  $f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$

All'interno dei *sistemi dei tipi del secondo ordine*, invece, le variabili possono assumere **tipi polimorfi**, ossia quantificati universalmente. Ad esempio, supponiamo all'interno del nostro sistema dei tipi valga il seguente tipo  $\forall X.(X \rightarrow (\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}))$ . Risulta evidente che tale tipo sia perfettamente valido per il termine proposto precedentemente, rendendolo un termine legale all'interno del nostro sistema dei tipi.

A differenza dei sistemi del primo ordine, dunque, i sistemi del secondo ordine introducono **variabili per i tipi** oltre alle normali variabili per i termini.

**Definizione 63: Lambda calcolo polimorfo**

Definiamo come **lambda calcolo polimorfo** (o **System F**) il sistema dei tipi che estende il lambda calcolo tipato semplice, rappresentato dalla seguente grammatica:

$$\begin{aligned} A, B &::= K \mid X \mid A \rightarrow B \mid \forall X. A \\ M, N &::= k \mid x \mid \lambda x : A. M \mid M N \mid \Lambda X. M \mid M A \end{aligned}$$

dove:

- $X \in \{X, Y, Z, \dots\}$  ossia è una **variabile di tipo** (o *tipo generico*)
- $x \in \{x, y, z, \dots\}$  ossia è una **variabile di termine**
- Nel tipo  $\forall X. A$  e nel termine  $\Lambda X. M$ , gli **operatori di generalizzazione**  $\forall X$  (per ogni  $X$ ) e  $\Lambda X$  (per un'arbitraria  $X$ ) legano le occorrenze libere di  $X$  rispettivamente nel tipo  $A$  e nel termine  $M$

Oltre alle regole di inferenza già previste dal lambda calcolo tipato semplice, nel System F vengono aggiunte le seguenti due regole:

- **Generalizzazione dei tipi:**

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash \Lambda X. M : \forall X. A} \quad (\text{se } X \notin \text{free}(\Gamma))$$

- **Specializzazione del tipo:**

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall X. A}{\Gamma \vdash M B : A[B/X]}$$

**Esempio:**

- Valutiamo il tipo dell'*identità polimorfa*, ossia  $\Lambda X. \lambda x : X. x$ :

$$\frac{\frac{x : X \vdash x : X}{\emptyset \vdash \lambda x : X. x : X \rightarrow X}}{\emptyset \vdash \Lambda X. \lambda x : X. x : \forall X. (X \rightarrow X)}$$

- Tale funzione non è tuttavia ancora applicabile, poiché il suo tipo non è un *tipo funzione* (ossia nella forma  $A \rightarrow B$ ), ma bensì un *tipo polimorfo* (ossia nella forma  $\forall X. A$ ). Difatti, è necessario prima specializzarne il suo tipo affinché essa possa essere applicata correttamente

- Specializzarne il tipo **Int** su tale funzione, otteniamo che:

$$\frac{\frac{\frac{x : X \vdash x : X}{\emptyset \vdash \lambda x : X. x : X \rightarrow X}}{\emptyset \vdash \Lambda X. \lambda x : X. x : \forall X. (X \rightarrow X)}}{\emptyset \vdash (\Lambda X. \lambda x : X. x) \text{ Int} : \text{Int} \rightarrow \text{Int}}$$

ottenendo così un termine operativamente equivalente all'identità sugli interi, ossia  $\lambda x : \text{Int}. x$

**Proposizione 30: Variabili libere in System F**

Dato il System F, la funzione:

$$\text{free} : \text{Types} \cup \text{Ctx} \rightarrow \mathcal{P}(\text{Var})$$

restituisce l'insieme di tutte le **variabili di tipo libere**, dove:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{free}(K) = \emptyset \\ \text{free}(X) = \{X\} \\ \text{free}(A \rightarrow B) = \text{free}(A) \cup \text{free}(B) \\ \text{free}(\forall X.A) = \text{free}(A) - \{X\} \\ \text{free}(\Gamma) = \bigcup_{x:A \in \Gamma} \text{free}(A) \end{array} \right.$$

**Esempio:**

- Dato il contesto  $\Gamma = x : X$ , si ha che  $\text{free}(\Gamma) = \{X\}$
- Dato il contesto  $\Gamma = x : \forall X.X$ , si ha che  $\text{free}(\Gamma) = \emptyset$
- Dato il contesto  $\Gamma = x : X \rightarrow (\forall Y.Y)$ , si ha che  $\text{free}(\Gamma) = \{X\}$

**Osservazione 24: Cattura di variabili di tipo**

La condizione laterale  $X \notin \text{free}(\Gamma)$  nella regola della generalizzazione dei tipi risulta fondamentale al fine di impedire la creazione di termini di tipo insensato

**Esempio:**

- Sia  $M \equiv \Lambda X. \lambda x : X. (\Lambda X.x) \text{ Int}$ . Ignorando la condizione laterale della regola della generalizzazione, valutiamo il tipo di  $M$ :

$$\frac{\frac{\frac{x : X \vdash x : X}{x : X \vdash \Lambda X.x : \forall X.X}}{x : X \vdash (\Lambda X.x) \text{ Int} : \text{Int}}}{\emptyset \vdash \lambda x : X. (\Lambda X.x) \text{ Int} : X \rightarrow \text{Int}} \quad \emptyset \vdash \Lambda X. \lambda x : X. (\Lambda X.x) \text{ Int} : \forall X. (X \rightarrow \text{Int})$$

(in rosso viene evidenziato dove si verifica che  $X \in \text{free}(\Gamma)$ )

- A questo punto, consideriamo la valutazione del termine  $M (\text{Int} \rightarrow \text{Int})(M \text{ Int})$ :

$$\frac{\frac{\emptyset \vdash M : \forall X. (X \rightarrow \text{Int})}{\emptyset \vdash M (\text{Int} \rightarrow \text{Int}) : (\text{Int} \rightarrow \text{Int}) \rightarrow \text{Int}} \quad \frac{\emptyset \vdash M : \forall X. (X \rightarrow \text{Int})}{\emptyset \vdash M \text{ Int} : \text{Int} \rightarrow \text{Int}}}{\emptyset \vdash M (\text{Int} \rightarrow \text{Int})(M \text{ Int}) : \text{Int}}$$

- In tal modo, quindi, il termine  $M (\text{Int} \rightarrow \text{Int})(M \text{ Int})$  corrisponderebbe ad un intero, nonostante al suo interno non sia presente alcun numero intero

## 5.3 Sistema dei tipi di Hindley-Milner

Il **sistema dei tipi di Hindley-Milner** (o *sistema HM*), in termini di potenza polimorfismo, è un sistema situato nel mezzo tra il lambda calcolo tipato semplice e il lambda calcolo polimorfo. Tale sistema viene utilizzato anche dal linguaggio **Standard ML**.

A differenza del System F, il sistema HM **restringe** i tipi possibili all'interno del linguaggio, risultando quindi più debole. Ad esempio, il tipo  $(\forall X.X) \rightarrow (\forall Y.Y)$  risulta tipabile nel System F, ma non nel sistema HM.

Tuttavia, tale restrizione permette al sistema dei tipi di **eliminare la regola di specializzazione** in quanto sarà il sistema stesso a specializzare i tipi. In tal modo, l'uso di tale sistema dei tipi risulta più **semplice** e privo di necessità da parte dell'utilizzatore di conoscere a priori i tipi specializzati.

Consideriamo ad esempio la **funzione identità in SML**, ossia `fn x => x`. L'interprete di SML valuta il tipo di tale funzione come `'a -> 'a`, dove `'a` indica un **tipo generico**. In altre parole, il tipo di tale funzione viene valutato in  $\forall A.A \rightarrow A$ . Passando il termine 5 a tale funzione, ossia considerando il termine `(fn x => x) 5`, l'interprete di SML è in grado di specializzare automaticamente il tipo della funzione, per poi applicarla al termine 5. Nel System F, invece, tale risultato sarebbe ottenibile solo tramite il termine  $((\lambda X.\lambda x : X.x) \text{Int}) 5$ .

In particolare, il sistema HM risulta definito sul linguaggio *Fun* visto nei capitoli precedenti.

### Definizione 64: Sistema dei tipi di Hindley-Milner

Definiamo come **sistema dei tipi di Hindley-Milner** (o sistema HM) il sistema dei tipi del linguaggio *Fun*, rappresentato dalla seguente grammatica:

$$\begin{aligned}\tau &::= K \mid X \mid \tau_1 \rightarrow \tau_2 \\ \sigma &::= \tau \mid \forall X.\sigma \\ M, N &::= k \mid x \mid \text{fn } x \Rightarrow M \mid \text{let } x = M \text{ in } N\end{aligned}$$

dove:

- La prima grammatica rappresenta l'insieme dei **tipi primitivi**
- La prima grammatica rappresenta l'insieme degli **schemi di tipo**

### Osservazione 25

Dato il sistema sistema HM, definiamo la seguente contrazione sintattica:

$$\forall X_1, X_2, \dots, X_n.\sigma \equiv \forall X_1.\forall X_2.\dots.\forall X_n.\sigma$$

**Definizione 65: Istanza generica**

Siano  $\sigma = \forall X_1, \dots, X_n. \tau$  e  $\sigma' = \forall Y_1, \dots, Y_m. \tau'$  due schemi di tipo. Definiamo  $\sigma'$  come **istanza generica di  $\sigma$** , indicato con  $\sigma' \sqsubset \sigma$  se:

- $\tau' = \tau[\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n / X_1, X_2, \dots, X_n]$
- $\forall j \in [0, m] \ Y_j \notin \text{free}(\sigma)$

**Nota:** le sostituzioni possono essere effettuate solo sulle variabili quantificate (ossia  $X_1, \dots, X_n$ ). In altre parole, è necessario che  $\forall i \in [0, n] \ X_i \notin \text{free}(\sigma)$

**Esempi:**

1. Dati gli schemi  $\sigma = X$  e  $\sigma' = \forall Y. X$ , poiché  $Y \notin \text{free}(\sigma)$  si ha che  $\sigma' \sqsubset \sigma$
2. Dati gli schemi  $\sigma = \forall X, Y. X \rightarrow Y$  e  $\sigma' = \text{Int} \rightarrow \text{Bool}$ , si ha che:

$$\text{Int} \rightarrow \text{Bool} = (X \rightarrow Y)[\text{Int}, \text{Bool} / X, Y]$$

dunque  $\sigma' \sqsubset \sigma$

3. Dati gli schemi  $\sigma = \forall X, Y. X \rightarrow Y$  e  $\sigma' = \forall Y. \text{Int} \rightarrow Y$ , si ha che:

$$\text{Int} \rightarrow Y = (X \rightarrow Y)[\text{Int}, Y / X, Y]$$

e inoltre  $Y \notin \text{free}(\sigma)$ , dunque  $\sigma' \sqsubset \sigma$

4. Dati gli schemi  $\sigma = X \rightarrow Y$  e  $\sigma' = \text{Int} \rightarrow Y$ , si ha che:

$$\text{Int} \rightarrow Y = (X \rightarrow Y)[\text{Int} / X]$$

ma la sostituzione è inapplicabile in quanto  $X \in \text{free}(\sigma)$ , dunque  $\sigma' \not\sqsubset \sigma$

5. Dati gli schemi  $\sigma = X$  e  $\sigma' = \forall X. X$ , si ha che:

$$X = X[X/X]$$

ma  $X \in \text{free}(\sigma)$  implica sia che la sostituzione sia inapplicabile sia che la generalizzazione tramite  $\forall X$  sia inapplicabile, dunque  $\sigma' \not\sqsubset \sigma$

A questo punto, definiamo le regole di inferenza del sistema HM:

- **Costanti:**

$$\Gamma \vdash k : K$$

- **Variabili:**

$$\Gamma \vdash x : \sigma \quad (\text{se } \Gamma(x) = \sigma)$$

- **Generalizzazione dei tipi:**

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \forall X. \sigma} \quad (\text{se } X \notin \text{free}(\Gamma))$$

- **Specializzazione dei tipi:**

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \sigma'} \quad (\text{se } \sigma' \sqsubset \sigma)$$

- **Let-in:**

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma, x : \sigma \vdash N : \sigma'}{\Gamma \vdash \text{let } x = M \text{ in } N : \sigma'}$$

- **Funzione:**

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \tau'}{\Gamma \vdash \text{fn } x \Rightarrow M : \tau \rightarrow \tau'}$$

- **Applicazione:**

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash M N : \tau'}$$

#### Osservazione 26: Termini polimorfi

Tramite la regola della specializzazione dei tipi del sistema HM, **un termine può avere più tipi**

#### Esempi:

1. • Consideriamo il seguente termine:

$$\text{let } x = (\text{fn } y \Rightarrow y) \text{ in } x(\text{fn } z \Rightarrow z)(x \ 5)$$

- La valutazione del suo tipo corrisponde a:

$$(*) \quad \frac{\Gamma \vdash x : \forall Y. Y \rightarrow Y \quad \frac{\Gamma, z : Z \vdash z : Z}{\Gamma \vdash \text{fn } z \Rightarrow z : Z \rightarrow Z}}{\Gamma \vdash \text{fn } z \Rightarrow z : \forall Z. Z \rightarrow Z} \quad \frac{\Gamma \vdash x : (\text{Int} \rightarrow \text{Int}) \rightarrow (\text{Int} \rightarrow \text{Int}) \quad \Gamma \vdash \text{fn } z \Rightarrow z : \text{Int} \rightarrow \text{Int}}{\Gamma \vdash x(\text{fn } z \Rightarrow z) : \text{Int} \rightarrow \text{Int}}$$

$$\frac{\frac{y : Y \vdash y : Y}{\emptyset \vdash \text{fn } y \Rightarrow y : Y \rightarrow Y} \quad \frac{\Gamma \vdash x : \forall Y. Y \rightarrow Y \quad \Gamma \vdash 5 : \text{Int}}{\Gamma \vdash x : \text{Int} \rightarrow \text{Int}} \quad (*) \quad \frac{\Gamma \vdash x : \text{Int} \rightarrow \text{Int} \quad \Gamma \vdash 5 : \text{Int}}{\Gamma \vdash x \ 5 : \text{Int}}}{\emptyset \vdash \text{let } x = (\text{fn } y \Rightarrow y) \text{ in } x(\text{fn } z \Rightarrow z)(x \ 5) : \text{Int}}$$

dove  $\Gamma = x : \forall Y. Y \rightarrow Y$

2. • Consideriamo il seguente termine:

$$fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x\ (y\ x)$$

- La valutazione del suo tipo corrisponde a:

$$\frac{\Gamma \vdash x : X \rightarrow Y \quad \frac{\Gamma \vdash y : (X \rightarrow Y) \rightarrow X \quad \Gamma \vdash x : X \rightarrow Y}{\Gamma \vdash y x : X}}{\Gamma \vdash x (y x) : Y}$$

$$\frac{x : X \rightarrow Y \vdash fn\ y \Rightarrow x\ (y\ x) : ((X \rightarrow Y) \rightarrow X) \rightarrow Y}{\frac{\emptyset \vdash fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x\ (y\ x) : (X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow X) \rightarrow Y}{\emptyset \vdash fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x\ (y\ x) : (X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow X) \rightarrow Y}}$$

$$\emptyset \vdash fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x\ (y\ x) : \forall X, Y. (X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow X) \rightarrow Y$$

dove  $\Gamma = x : X \rightarrow Y, y : (X \rightarrow Y) \rightarrow X$

3. • Consideriamo il seguente termine:

$$fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow y\ x\ y$$

- La valutazione del suo tipo corrisponde a:

$$\frac{\frac{\frac{x : X, y : Y \vdash y : X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \quad x : X, y : Y \vdash x : X}{x : X, y : Y \vdash y x : Y \rightarrow Z}}{x : X, y : Y \vdash y x y : Z}}{x : X \vdash fn\ y \Rightarrow y x y : Y \rightarrow Z}}{\emptyset \vdash fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow y x y : X \rightarrow Y \rightarrow Z}}{\emptyset \vdash fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow y x y : \forall X, Y, Z. X \rightarrow Y \rightarrow Z}$$

- Tuttavia, tale valutazione risulta possibile solo se  $Y \equiv X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$ , dando vita ad una circolarità
- Di conseguenza, il termine  $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow y\ x\ y$  non è tipabile

### 5.3.1 Algoritmo $\mathcal{W}$

#### Definizione 66: Sostituzione

Definiamo come **sostituzione** una funzione parziale  $V$  che mappa variabili di tipo a dei tipi primitivi

$$V : TypeVar \xrightarrow{fin} PrimTypes$$

#### Proposizione 31

Per induzione strutturale su  $Types$ , data una sostituzione  $V$  si ha che:

$$V(X \rightarrow Y) = V(X) \rightarrow V(Y)$$

(*dimostrazione omessa*)

#### Definizione 67: Unificatore

Definiamo  $V$  **unificatore di due tipi primitivi**  $\tau_1$  e  $\tau_2$  se  $V$  è una sostituzione tale che  $V(\tau_1) = V(\tau_2)$

#### Esempi:

1. • Consideriamo i seguenti due tipi:

$$\tau_1 : A \rightarrow B \rightarrow C$$

$$\tau_2 : (C \rightarrow E) \rightarrow D$$

- Consideriamo quindi una sostituzione  $V$  definita come:

$$V : \begin{array}{l} A \mapsto C \rightarrow E \\ D \mapsto B \rightarrow C \end{array}$$

- Notiamo che::

$$V(\tau_1) = (C \rightarrow E) \rightarrow B \rightarrow C = V(\tau_2)$$

dunque  $V$  unifica  $\tau_1$  e  $\tau_2$

2. • Consideriamo i seguenti due tipi:

$$\tau_1 : A \rightarrow B \rightarrow D$$

$$\tau_2 : (B \rightarrow C) \rightarrow A$$

- Consideriamo quindi una sostituzione  $V$  definita come:

$$V : \begin{array}{l} A \mapsto B \rightarrow D \\ C \mapsto D \end{array}$$



- Notiamo che::

$$V(\tau_1) = (B \rightarrow D) \rightarrow B \rightarrow D = V(\tau_2)$$

dunque  $V$  unifica  $\tau_1$  e  $\tau_2$

3. • Consideriamo i seguenti due tipi:

$$\tau_1 : A \rightarrow (B \rightarrow D) \rightarrow E \rightarrow E$$

$$\tau_2 : (B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow B$$

- Consideriamo quindi una sostituzione  $V$  definita come:

$$\begin{aligned} A &\mapsto B \rightarrow D \\ V : C &\mapsto D \\ E &\mapsto E \rightarrow E \end{aligned}$$

- Notiamo che::

$$V(\tau_1) = ((E \rightarrow E) \rightarrow C) \rightarrow ((E \rightarrow E) \rightarrow C) \rightarrow E \rightarrow E = V(\tau_2)$$

dunque  $V$  unifica  $\tau_1$  e  $\tau_2$

### Osservazione 27: Tipi non unificabili

Esistono alcuni tipi non unificabili tra loro

#### Esempi:

1. • Consideriamo i seguenti due tipi:

$$\tau_1 : A \rightarrow A$$

$$\tau_2 : \text{Int} \rightarrow \text{Bool}$$

- Affinché possa esistere un unificatore di  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , sarebbe necessario che  $A \mapsto \text{Int}$  e  $A \mapsto \text{Bool}$ , implicando che  $\text{Int} \equiv \text{Bool}$ , il che è impossibile

2. • Consideriamo i seguenti due tipi:

$$\tau_1 : A \rightarrow A \rightarrow A$$

$$\tau_2 : B \rightarrow B$$

- Affinché possa esistere un unificatore di  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , sarebbe necessario che  $B \mapsto A$  e  $B \mapsto A \rightarrow A$ , implicando che  $A \equiv A \rightarrow A$ , il che è impossibile

**Definizione 68: Composizione tra sostituzioni**

Date due sostituzioni  $V$  e  $V'$ , si ha che:

$$V \circ V'(\tau) = V(V'(\tau))$$

**Teorema 12: Teorema di unificazione di Robinson**

Esiste un algoritmo  $\mathcal{U}$  che dati due tipi primitivi  $\tau_1$  e  $\tau_2$  **restituisce una sostituzione  $V$  o fallisce**.

Inoltre, si ha che:

- Se  $\mathcal{U}(\tau_1, \tau_2) = V$ , ossia non fallisce, allora:
  - $V(X) \neq X \implies X$  compare in  $\tau_1$  o in  $\tau_2$
  - $V$  **unifica**  $\tau_1$  e  $\tau_2$
- Se esiste un unificatore  $W$  di  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , allora:
  - $\mathcal{U}(\tau_1, \tau_2) = V$ , ossia non  $\mathcal{U}$  **non può fallire**
  - $W = Z \circ V$  per qualche sostituzione  $Z$ , ossia  $V$  è la **sostituzione più "generica" possibile**

(*dimostrazione omessa*)

**Esempio:**

- Consideriamo i seguenti due tipi:

$$\tau_1 : X \rightarrow Y$$

$$\tau_2 : Z \rightarrow Y$$

- Consideriamo quindi le seguenti due sostituzioni:

$$V : X \mapsto Z \qquad W : \begin{array}{l} X \mapsto Z \\ Y \mapsto A \rightarrow B \end{array}$$

- Entrambe le due sostituzioni risultano essere due unificatori:

$$V(\tau_1) = Z \rightarrow Y = V(\tau_2)$$

$$W(\tau_1) = Z \rightarrow (A \rightarrow B) = W(\tau_2)$$

- Tuttavia, data la seguente sostituzione:

$$U : Y \mapsto A \rightarrow B$$

abbiamo che  $W = U \circ V$ , implicando quindi che  $V$  sia "più generica" di  $W$

**Definizione 69: Generalizzazione massima**

Data una variabile  $x$  e un contesto  $\Gamma$ , definiamo la **generalizzazione massima** di  $x$ , indicata con  $\bar{\Gamma}(x)$ , come:

$$\bar{\Gamma}(x) = \forall X_1, \dots, X_n. \tau$$

dove  $\Gamma(x) = \tau$  e  $TypeVar - free(\Gamma) = \{X_1, \dots, X_n\}$

**Teorema 13: Algoritmo  $\mathcal{W}$** 

Esiste un algoritmo  $\mathcal{W}$  che dato un contesto  $\Gamma$  e un termine  $M$  **restituisce una tupla**  $(V, \tau)$  **o fallisce**, dove  $V$  è una sostituzione e  $\tau$  è un tipo.

Inoltre, se  $\mathcal{W}(\Gamma, M) = (V, \tau)$ , ossia non fallisce, allora:

- Se  $M \equiv x$  e  $\Gamma(x) = \forall X_1, \dots, X_n. \tau'$ , allora:
  - $V = \text{id}$ , ossia è l'identità
  - $\tau = \tau'[Y_1, \dots, Y_n / X_1, \dots, X_n]$  dove  $Y_1, \dots, Y_n \in \text{free}(\Gamma(x))$
- Se  $M \equiv M_1 M_2$  e inoltre:
  - $\mathcal{W}(\Gamma, M_1) = (V_1, \tau_1)$
  - $\mathcal{W}(V_1(\Gamma), M_2) = (V_2, \tau_2)$
  - $\mathcal{U}(V_2(\tau_1), \tau_2 \rightarrow Y) = W$ , dove  $Y$  è una nuova variabile
 allora  $V = W \circ V_2 \circ V_1$  e  $\tau = W(Y)$
- Se  $M \equiv fn\ x \Rightarrow N$  e inoltre:
  - $\mathcal{W}((\Gamma, x : X), N) = (V_1, \tau_1)$  dove  $X$  è una nuova variabile
 allora  $V = V_1$  e  $\tau = V_1(X) \rightarrow \tau_1$
- Se  $M \equiv let\ x = N\ in\ L$  e inoltre:
  - $\mathcal{W}((V_1(\Gamma), x : \tau'), L) = (V_2, \tau_2)$  dove  $\bar{V}_1(\Gamma)(x) = \tau'$
 allora  $V = V_2 \circ V_1$  e  $\tau = \tau_2$

**Nota:** L'algoritmo  $\mathcal{W}$  fallisce solo se  $\mathcal{U}$  fallisce

**Definizione 70: Schema principale**

Dato un contesto  $\Gamma$  e un termine  $M$ , definiamo uno schema di tipi  $\sigma$  come **principale per  $\Gamma$  e  $M$**  se:

- $\Gamma \vdash M : \sigma$
- $\forall \sigma' \ \Gamma \vdash M : \sigma' \implies \sigma' \sqsubseteq \sigma$

**Teorema 14: Correttezza e completezza dell'algoritmo  $\mathcal{W}$** 

Se  $\mathcal{W}(\Gamma, M) = (V, \tau)$ , allora:

- $V(\Gamma) \vdash M : \tau$
- $\overline{V(\Gamma)}(\tau)$  è principale per  $V(\Gamma)$  e  $M$

**Esempio:**

- Consideriamo il termine  $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x\ (y\ x)$
- Applicando l'algoritmo  $\mathcal{W}$  abbiamo che:
  - $\mathcal{W}(\emptyset, fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x\ (y\ x)) = (V_1, \tau_1)$ , dove:
    - \*  $V_1 = V_2$
    - \*  $\tau_1 = V_2(A) \rightarrow \tau_2$
  - $\mathcal{W}(x : A, fn\ y \Rightarrow x\ (y\ x)) = (V_2, \tau_2)$ , dove:
    - \*  $V_2 = V_3$
    - \*  $\tau_2 = V_3(B) \rightarrow \tau_3$
  - $\mathcal{W}((x : A, y : B), x\ (y\ x)) = (V_3, \tau_3)$ , dove:
    - \*  $\mathcal{W}((x : A, y : B), x) = (id, A)$
    - \*  $\mathcal{W}(id(x : A, y : B), y\ x) = \mathcal{W}((x : A, y : B), y\ x) = (V_4, \tau_4)$ , dove:
      - $\mathcal{W}((x : A, y : B), y) = (id, B)$
      - $\mathcal{W}(id(x : A, y : B), x) = \mathcal{W}((x : A, y : B), x) = (id, A)$
      - $\mathcal{U}(id(B), A \rightarrow C) = \mathcal{U}(B, A \rightarrow C) = W$ , con  $W : B \mapsto A \rightarrow C$
      - $V_4 = W \circ id \circ id = W$
      - $\tau_4 = W(C) = C$
    - \*  $\mathcal{U}(V_4(A), \tau_4 \rightarrow D) = \mathcal{U}(A, C \rightarrow D) = U$ , con  $U : A \mapsto C \rightarrow D$
    - \*  $V_3 = U \circ V_4 \circ id = U \circ W$ , con  $U \circ W : A \mapsto C \rightarrow D, B \mapsto (C \rightarrow D) \rightarrow C$
    - \*  $\tau_3 = U(D) = D$
- Di conseguenza, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\emptyset, fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x\ (y\ x)) &= (V_1, \tau_1) = \\ (V_2, V_2(A) \rightarrow \tau_2) &= (V_3, V_3(A) \rightarrow V_3(B) \rightarrow \tau_3) = \\ (U \circ W, (C \rightarrow D) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow C) \rightarrow D) \end{aligned}$$

- Dunque, concludiamo che un tipo principale di  $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x\ (y\ x)$  sia:

$$\forall C, D. (C \rightarrow D) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow C) \rightarrow D$$

## 5.4 Isomorfismo di Curry-Howard

Consideriamo la regola di inferenza del **tipo di un'applicazione** descritta nelle sezioni precedenti:

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M N : B}$$

Consideriamo ora una regola fondamentale all'interno della logica del primo ordine, ossia la regola dell'**eliminazione dell'implicazione** (o *modus ponens*), descritta come:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}$$

ossia che "se è vero che  $A$  implica  $B$  e vale  $A$ , allora è vale anche  $B$ ".

In forma più generica, dato un **insieme di proposizioni vere**  $\Gamma$  e il connettivo logico  $\vdash$ , letto come "deduce", possiamo affermare che:

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

ossia che "se da  $\Gamma$  si deduce che  $A$  implica  $B$  e  $A$  siano veri, allora si deduce anche che  $B$  sia vero".

Notiamo quindi che vi sia una **corrispondenza diretta** tra il *modus ponens* e la valutazione del tipo di un'applicazione.

Analogamente, possiamo individuare una corrispondenza diretta tra un'altra regola logica, ossia la regola dell'**introduzione dell'implicazione**, e la valutazione del **tipo di una funzione**:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \text{fn } x \Rightarrow M : A \rightarrow B}$$

Consideriamo ora il seguente termine e il suo tipo principale:

$$\text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow x : \forall X, Y. X \rightarrow Y \rightarrow X$$

In senso improprio, possiamo dire che tale tipo afferma che "indipendentemente dal tipo  $Y$ , verrà restituito un elemento di tipo  $X$ ".

Notiamo che tale tipo corrisponda esattamente al **primo assioma logico**, ossia:

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

il quale descrive che "Se  $A$  è vero allora ne segue che  $A$  sia vero indipendentemente dalla veridicità di  $B$ ".

Tali corrispondenze descritte precedentemente risultano essere frutto di una **corrispondenza diretta tra tipi e proposizioni** dettata dall'**isomorfismo di Curry-Howard**.

**Teorema 15: Isomorfismo di Curry-Howard**

L'**isomorfismo di Curry-Howard** è una corrispondenza tra la **logica** e il **sistema dei tipi**. In particolare, tale corrispondenza si divide in:

- Una **corrispondenza tra formule logiche e tipi**:

Logica	Sistema dei tipi
$A \implies B$	$A \rightarrow B$
$A \wedge B$	$A \times B$
$A \vee B$	$A + B$
$True$	$\mathbb{1}$
$False$	$\emptyset$

dove il tipo  $A + B$  è l'unione disgiunta tra il tipo  $A$  e il tipo  $B$  e  $\emptyset$  è il tipo vuoto

- Una **corrispondenza tra deduzione naturale e il lambda calcolo tipato**:

Logica	Sistema dei tipi
Ipotesi	Variabili libere
Eliminazione dell'implicazione	Applicazione
Introduzione dell'implicazione	Astrazione

**Proposizione 32: Dimostrazioni come programmi**

Dati un tipo  $A$  e la sua proposizione corrispondente  $\varphi_A$ , si ha che:

Esiste un termine di tipo principale  $A \iff \varphi_A$  è una tautologia

**Esempi:**

- Consideriamo il seguente tipo  $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B))$
- Notiamo che la proposizione ad esso equivalente sia una tautologia:

$$(A \implies B) \implies (A \implies (C \implies B)) = \neg(\neg A \vee B) \vee \neg A \vee \neg C \vee B = \\ (A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee \neg C \vee B = A \vee \neg A \vee \neg C \vee B = 1$$

di conseguenza, esiste necessariamente un termine avente tale tipo come principale.

- In particolare, il termine  $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow fn\ z \Rightarrow xy$  possiede tale tipo come principale
- Consideriamo il seguente tipo  $(A \rightarrow B) \rightarrow C$
- Notiamo che la proposizione ad esso equivalente non sia una tautologia:

$$(A \implies B) \implies C = \neg(\neg A \vee B) \vee C = (A \wedge \neg B) \vee C$$

di conseguenza, non esiste un termine avente tale tipo come principale.