"Sapienza" Università di Roma
Ingegneria dell'Informazione,
Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Calcolo delle Probabilità

Appunti integrati con il libro "The Probability Tutoring Book", Carol Ash

Autore
Simone Bianco

25 settembre 2025

Indice

Informazioni e Contatti

Appunti e riassunti personali raccolti in ambito del corso di *Calcolo delle Probabilità* offerto dal corso di laurea in Informatica dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".

Ulteriori informazioni ed appunti possono essere trovati al seguente link: **https://github.com/Exyss/university-notes**. Chiunque si senta libero di segnalare incorrettezze, migliorie o richieste tramite il sistema di Issues fornito da GitHub stesso o contattando in privato l'autore :

- Email: **bianco.simone@outlook.it**
- LinkedIn: **Simone Bianco**

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se le modifiche siano già state apportate nella versione più recente.

Prerequisiti consigliati per lo studio:

Apprendimento del materiale relativo al corso *Metodi Matematici per l'Informatica*

1

Introduzione alla probabilità

1.1 Probabilità classica

Prima di poter parlare di probabilità, è necessario definire ciò di cui essa si occupa. Il calcolo di una probabilità corrisponde allo studio di un fenomeno osservabile esclusivamente dal punto di vista della possibilità o meno del suo verificarsi. La probabilià è uno strumento molto utile per effettuare ragionamenti e prendere decisioni, ma essa può essere *interpretata* in svariati modi.

Supponiamo ad esempio di trovarci in ospedale. Il nostro amico Marco è molto malato ed ogni trattamento sembra fallire. Un dottore ci notifica dell'esistenza di un farmaco che possa *probabilmente* salvargli la vita. Preoccupati, chiediamo al dottore quale sia la probabilità che il farmaco funzioni. Il medico afferma, tramite le sue conoscenze del campo, che "con buona probabilità" il farmaco funzionerà. Volendo utilizzare un approccio più matematico, chiediamo il rateo di successo del farmaco su 100 pazienti, ossia quanti dei 100 pazienti sono guariti dopo la somministrazione. Dopo aver controllato, il medico afferma che il rateo sia 65 casi su 100, rassicurandoci.

L'affermazione iniziale del medico si basa su una probabilità data dal **pensiero soggettivo**, mentre la nostra domanda finale si basa su una probabilità data dalla **frequenza degli esiti**. Di primo occhio, penseremmo che il nostro approccio sia "più matematico" o "più corretto". Uno scettico potrebbe però contestare anche la nostra affermazione:

- E se le condizioni iniziali degli esiti presi in analisi sono diverse?
- E se il farmaco viene somministrato per la prima volta dal medico?
- E se gli esiti registrati sono stati tutti fortuiti?
- E se aumentando il campione il rateo di successo diminuisce?

Con solo questo caso in analisi, concludiamo facilmente che parlare di probabilità è *molto* difficile. L'obiettivo principale di questo capitolo è quindi quello di introdurre concetti elementari che ci permettano di discutere di probabilità. In particolare, ci concentreremo inizialmente sulla **probabilità classica**. Questa tipologia elementare di probabilità si basa sul concetto di **eventi** ed **esiti**.

Consideriamo ad esempio il lancio di una moneta. Tale *evento* può avere solo due *esiti*: testa o croce. Intuitivamente, ci aspettiamo che ciascuno dei due esiti abbia il 50% di probabilità di accadere, ossia "metà e metà". Nella probabilità classica, questi due esiti costituiscono lo **spazio ambiente**, ossia l'insieme di tutti gli esiti possibili per il fenomeno preso in esame. Lo spazio ambiente viene generalmente indicato con il simbolo Ω, mentre gli esiti vengono generalmente indicati con un numero. Ad esempio, in questo caso abbiamo $\Omega = \{0, 1\}$, dove l'esito 0 corrisponde a "croce" e l'esito 1 corrisponde a "testa".

Nella probabilità classica, la probabilità di un evento A viene (solitamente) calcolata utilizzando la frequenza degli esiti positivi nello spazio ambiente, ossia la quantità di esiti dello spazio ambiente che rende vero l'evento A. In questo caso, dunque, abbiamo che:

$$\Pr[\text{il risultato del lancio è testa}] = \frac{\text{numero di esiti testa}}{\text{numero di esiti totali}}$$

Questa tipologia di probabilità può essere comodamente modellata tramite la teoria degli insiemi. In particolare, dato lo spazio ambiente Ω, possiamo definire un **evento** come un semplice sottoinsieme di $A \subseteq \Omega$, dove gli elementi di A corrispondono a tutti gli esiti che rendono vero l'evento A. Ad esempio, l'insieme $T = \{1\}$ corrisponde all'evento "testa". Questo ci permette di calcolare la probabilità dell'esempio precedente nel seguente modo:

$$\Pr[T] = \frac{|T|}{|\Omega|} = \frac{1}{2} = 50\%$$

ottenendo il 50% di probabilità che ci aspettavamo. Tuttavia, notiamo facilmente che questa interpretazione della probabilità non è sempre un corretto modello:

- E se la moneta è stata truccata al fine di rendere uno dei due esiti più probabile?
- E se lo spazio ambiente contiene un numero infinito di esiti?

Per la prima domanda, il modello può essere "spremuto" in modo da forzare un modello corretto. Ad esempio, se la moneta è stata truccata in modo da ottenere il 75% delle volte l'esito "testa", possiamo considerare lo spazio ambiente $\Omega' = \{0, 1, 11, 111\}$ ed imporre che $T' = \{1, 11, 111\}$ e che $C' = \{0\}$, dove C è l'evento descrivente l'esito "croce". In questo modo, otteniamo che:

$$\Pr[T'] = \frac{|T'|}{|\Omega'|} = \frac{3}{4} = 75\%$$

Per il secondo caso, invece, è chiaramente impossibile adattare il modello in quanto non possiamo dividere per una cardinalità infinita. Vedremo nelle sezioni successive un modello **assiomatico** della probabilità che ci permetterà di risolvere entrambe le problematiche (e molte altre) comodamente.

Definizione 1.1: Spazio ambiente ed Evento (prob. classica)

Dato un insieme finito $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ detto spazio ambiente, definiamo un sottoinsieme $A \subseteq \Omega$ come evento su Ω. La probabilità classica dell'evento A è definita come:

$$\Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

1.2 Modelli principali del Calcolo Combinatorio

Dopo aver enunciato le basi della probabilità classica, risulta evidente la necessità di ripassare le basi del **calcolo combinatorio**, ossia la branca della matematica atta a studiare metodi per computare quantità di elementi ed oggetti. Difatti, domande come "qual è la probabilità di pescare un asso da un mazzo di 52 carte francesi?" nella probabilità classica vengono ridotte a due sotto-problemi: calcolare la quantità di assi in un mazzo di 52 carte francesi (ossia 4, 1 per seme) e la quantità di carte in un mazzo di 52 carte francesi (ossia 52, ovviamente).

In questa sezione verranno riassunte le basi del calcolo combinatorio, elencandone i principali principi e modelli. Per appunti più approfonditi sull'argomento (in particolare spiegazioni ed esempi ulteriori delle formule mostrate in seguito), si rimanda agli appunti del corso *Metodi Matematici per l'Informatica* (reperibili qui).

Partiamo con un problema semplice. Supponiamo che in un urna vi siano 3 palline bianche e 2 palline nere. Ci chiediamo quale sia la probabilità che, estraendo due palline, la seconda sia bianca? Formalizziamo il problema secondo il modello della probabilità classica. Prima di tutto, individuiamo l'**evento elementare**, ossia la forma assunta da un singolo esito, come l'estrazione *ordinata* di due palline $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, dove ω_1 è la prima pallina estratta e ω_2 è la seconda pallina estratta.

Possiamo numerare le palline da 1 a 5, dicendo che le palline bianche son quelle da 1 a 3, mentre le restanti sono nere. Detto ciò, possiamo capire che l'insieme degli eventi elementari, ossia lo spazio ambiente, corrisponde a tutte le coppie di numeri naturali compresi fra 1 a 5 senza ripetizioni.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \omega_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{\omega_1\}\}$$

È di facile intuizione capire che $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$ poiché abbiamo 5 possibilità per la prima pallina e 4 possibilità per la seconda pallina (visto che una è stata già pescata), dunque è sufficiente moltiplicare le varie combinazioni tra loro. In questo caso, abbiamo implitamente utilizzato il **principio moltiplicativo**, il quale afferma che dati due insiemi finiti A, B si ha che:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Tornando all'esempio, definiamo come B_2 l'evento "la seconda pallina estratta senza ripetizioni è bianca". Formalmente, abbiamo che:

$$B_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_2 \in \{1, 2, 3\}\}$$

Ancora una volta, tramite il principio moltiplicativo osserviamo facilmente che $|B_2| = 4 \cdot 3 = 12$ poiché per la seconda estrazione abbiamo 3 possibili palline bianche e per la prima estrazione abbiamo tutte le altre rimanenti (non ci interessa il colore essendo la prima estrazione). Possiamo quindi concludere che:

$$\Pr[B_2] = \frac{|B_2|}{|\Omega|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Passiamo adesso al riepilogo di alcuni modelli fondamentali nella quale spesso ricadono i problemi di conteggio. L'idea principale dietro ogni modello viene comunemente metaforizzata secondo il problema delle palline nelle urne.

- **Disposizioni senza ripetizione di classe k per n elementi**. Si hanno n palline numerate dentro un urna e si vogliono fare k estrazioni con *senza rimpiazzo* (ossia ogni pallina pescata viene eliminata dall'urna). L'ordine di estrazione delle palline è di nostro interesse, sequenze come $1, 2, 3$ e $1, 3, 2$ vengono considerate come *diverse*. Per problemi di questo tipo, la quantità $D_{n,k}$ di sequenze possibili estraendo k palline su n totali è data da:
$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$
Quando $k = n$, questo modello viene detto **permutazione**.

- **Disposizioni con ripetizione di classe k per n elementi**. Si hanno n palline numerate dentro un urna e si vogliono fare k estrazioni *con rimpiazzo* (ossia ogni pallina pescata viene subito reinserita nell'urna). L'ordine di estrazione delle palline è di nostro interesse, dunque sequenze come $1, 2, 3$ e $1, 3, 2$ vengono considerate come *diverse*. Per problemi di questo tipo, la quantità $D'_{n,k}$ di sequenze possibili estraendo k palline su n totali è data da:
$$D'_{n,k} = n^k$$

- **Combinazioni di classe k per n elementi**. Si hanno n palline numerate dentro un urna e si vogliono fare k estrazioni *senza rimpiazzo* (ossia ogni pallina pescata viene subito reinserita nell'urna). L'ordine di estrazione delle palline è di nostro interesse, dunque sequenze come $1, 2, 3$ e $1, 3, 2$ vengono considerate come *uguali*. Per problemi di questo tipo, la quantità $C_{n,k}$ di sequenze possibili estraendo k palline su n totali è data da:
$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$
dove $\binom{n}{k}$ è il **coefficiente binomiale**

- **Anagrammi di classi $k_1, \ldots, k_m$ per n elementi**. Si hanno n palline numerate dentro un urna. Le palline sono di m tipologie e per ogni tipologia i vi sono k_i palline (dunque $k_1 + \ldots + k_m = n$). Si vogliono fare n estrazioni *senza rimpiazzo* (ossia ogni pallina pescata viene subito reinserita nell'urna). L'ordine di estrazione delle palline è di nostro interesse, ma le palline della stessa tipologia vengono considerate come uguali tra loro, dunque sequenze come $1_R, 2_R, 3_B$ e $2_R, 3_B, 1_R$ (dove R e B rappresentano la tipologia della pallina) vengono considerate *uguali* mentre sequenze come $1_R, 2_R, 3_R$ e $1_R, 2_R, 3_B$ vengono considerate *diverse*. Per problemi di questo tipo, la quantità $A_{k_1,\dots,k_m}$ di sequenze possibili estraendo n palline su n totali è data da:

$$A_{k_1,\dots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!} = \binom{n}{k_1,\dots,k_m}$$

dove $\binom{n}{k_1,\dots,k_m}$ è il **coefficiente multinomiale**

È opportuno osservare come il coefficiente binomiale sia un caso speciale del coefficiente multinomiale dove vi sono solo due tipologie: quella contenente gli oggetti di nostro interesse e quella che non li contiene. Ricordiamo inoltre l'identità conosciuta come **binomio di Newton**, la quale afferma che:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Vediamo ora alcuni esempi per comprendere come applicare tali modelli combinatori nel calcolo delle probabilitè classiche.

1. Un codice PIN è formato da 4 cifre scelte tra 0 e 9 (quindi 10 cifre totali). Le cifre possono ripetersi (es. 1123 è valido) e l'ordine di digitazione conta (dunque 1234 è diverso da 4321). Supponiamo che un ladro voglia indovinare il PIN di un bancomat inserendo un codice casuale. Vogliamo sapere quale sia la probabilità dell'evento A definito come "il ladro indovina il PIN al primo tentativo".

   Osserviamo come la quantità di esiti totali, ossia la cardinalità dello spazio ambiente, sia data da tutti i PIN possibili, i quali sono modellati da una disposizione con ripetizione di classe 4 per 10 elementi. Concludiamo quindi che $|\Omega| = D'_{10,4} = 10^4$. Inoltre, è evidente che esista un solo esito favorevole all'evento A, ossia il PIN da indovinare. Concludiamo quindi che:

   $$\Pr[A] = \frac{1}{10^4} = 0.01\%$$

2. In una classe di 20 studenti, si devono eleggere una delegazione di 3 rappresentanti con ruoli distinti: presidente, vicepresidente e segretario. Ogni studente può essere eletto per un solo ruolo e (ad esempio vi è distinzione tra il caso in cui Marco viene eletto come presidente e il caso in cui viene eletto come vicepresidente). Vogliamo sapere quale sia la probabilità dell'evento B definito come "Anna, Marco e Luca vengono eletti in questo ordine".

   Osserviamo come la quantità di esiti totali sia data da tutte delegazioni da 3 rappresentanti possibili, le quali sono modellati da una disposizione senza ripetizione di classe 3 per 20 elementi. Concludiamo quindi che $|\Omega| = \frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18$. Inoltre, è evidente che esista un solo esito favorevole all'evento B, ossia la delegazione Anna, Marco e Luca. Concludiamo quindi che:

   $$\Pr[B] = \frac{1}{\frac{20!}{17!}} = \frac{1}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1}{6840} \approx 0.0001\%$$

3. Considerando la stessa situazione del punto precedente, vogliamo ora sapere la probabilità dell'evento C definito come “Anna, Marco e Luca vengono eletti in qualsiasi ordine”.

   La cardinalità dello spazio ambiente rimane chiaramente inalterata, ma la quantità di esiti favorevoli aumenta. In particolare, tali esiti sono modellati da una dispozione senza ripetizione di classe 3 per 3 elementi (ossia una permutazione di 3 elementi), dunque $|C| = \frac{3!}{0!} = 3 \cdot 2 \cdot 1$. Concludiamo quindi che:

$$\Pr[C] = \frac{\frac{3!}{0!}}{\frac{20!}{17!}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1}{1140} \approx 0.0009\%$$

4. Da un mazzo standard di 52 carte francesi, si estraggono 5 carte casualmente, senza rimetterle nel mazzo (come nel poker classico). Vogliamo sapere la probabilità dell'evento D definito come “la mano pescata è composta da esattamente una carta cuori”.

   Osserviamo come la quantità di esiti totali sia data da tutte pescate di 5 carte possibili, le quali sono modellati da una combinazione di classe 5 per 52 elementi, dunque $|\Omega| = \binom{52}{5}$. Per quanto riguarda la quantità di esiti favorevoli, anche essi possono essere modellati dalle combinazioni. In particolare, poiché l'ordine di pescata non conta, gli eventi favorevoli sono modellati dalle pescate in cui viene pescata 1 carta dalle 13 di cuori disponibili e 4 carte dalle 39 rimanenti, senza contare l'ordine di pescata, dunque $|D| = \binom{13}{1}\binom{39}{4}$. Concludiamo quindi che:

$$\Pr[D] = \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{4}}{\binom{52}{5}} = \frac{1069263}{2598960} \approx 0.41\%$$

1.3 Operazioni tra eventi

La definizione data di probabilità classica ci permette di prendere in prestito alcuni concetti della teoria degli insiemi ed applicarli nel calcolo delle probabilità. Ad esempio, consideriamo il lancio di un dado (non truccato) a 6 facce, descritto dallo spazio ambiente $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Consideriamo ora l'evento P descritto dagli esiti in cui la faccia risultante sia un numero pari, ossia $P = \{2, 4, 6\}$. Sia inoltre $F_{\leq 3}$ l'evento descritto dagli esiti in cui la faccia risultate sia un numero minore o uguale a 3, ossia $F_{\leq 3} = \{1, 2, 3\}$.

Consideriamo quindi l'evento “la faccia risultante è un numero pari ed è un numero minore o uguale a 3”. Tramite la teoria degli insiemi, questo evento è facilmente descrivibile tramite l'**intersezione** $P \cap F_{\leq 3} = \{2\}$, ottenendo quindi che:

$$\Pr[P \cap F_{\leq 3}] = \frac{|P \cap F_{\leq 3}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$$

Similmente, l'evento “la faccia risultante è un numero pari o è un numero minore o uguale a 3” è describile come l'**unione** $P \cup F_{\leq 3} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, ottenendo quindi che:

$$\Pr[P \cup F_{\leq 3}] = \frac{|P \cup F_{\leq 3}|}{|\Omega|} = \frac{5}{6}$$

Altre basilari operazioni insiemistiche sono la **differenza** e il **complemento**. Dati due insiemi $A, B \subseteq \Omega$, la differenza insiemistica di A con B corrisponde all'insieme $A - B$ definito come:

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

ossia l'insieme degli elementi di A che non si trovano in B. Osserviamo come tale operazione sia *non commutativa*. Ad esempio, per gli eventi precedenti abbiamo che $P - F_{\leq 3} = \{4, 6\}$ e che $F_{\leq 3} - P = \{1, 3\}$.

Il complemento insiemistico su un insieme $A \subseteq \Omega$, indicato con $\overline{A}$ (oppure A^c), corrisponde al sottoinsieme dello spazio ambiente contenente tutti gli esiti opposti che non rientrano nell'evento A, ossia:

$$\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

In altre parole, abbiamo che $\overline{A} = \Omega - A$. Osserviamo come tale operazione sia un'*involuzione*, ossia un'operazione inversa di se stessa. Difatti, abbiamo che:

$$\overline{\overline{A}} = \Omega - (\Omega - A) = \{x \in \Omega \mid x \notin \Omega - A\} = \{x \in \Omega \mid x \in A\} = A$$

In questi casi, risultano fondamentali le principali proprietà insiemistiche di base di seguito elencate (con le quali si dovrebbe già essere familiari):

- *Proprietà disgiuntiva*:

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

- *Proprietà associativa*:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- *Proprietà distributiva*:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- *Leggi di De Morgan*:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- *Principio di inclusione-esclusione*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

L'uso di questi operatori insiemistici risulta fondamentale nella probabilità classica, poiché esso ci permette di "riscrivere" molti eventi complessi in termini di eventi meno complicati. Di seguito, riportiamo due esempi:

1. Consideriamo ancora l'evento $P \cap F_{\leq 3}$ descritto precedentemente. Consideriamo ora gli eventi $F_{=3}$ e $F_{<3}$, definiti analogamente. Osserviamo facilmente che $F_{\leq 3} = F_{=3} \cup F_{<3}$. Per tanto, abbiamo che:

$$P \cap F_{\leq 3} = P \cap (F_{=3} \cup F_{<3}) = (P \cap F_{=3}) \cup (P \cap F_{<3}) = \varnothing \cup \{2\} = \{2\}$$

   concludendo quindi che:

$$\Pr\left[P \cap F_{\leq 3}\right] = \frac{|P \cap F_{\leq 3}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$$

2. Tramite le *leggi di De Morgan* possiamo riscrivere l'evento "la faccia risultate non è né un numero pari né un numero minore o uguale a 3", ossia l'evento $\overline{P} \cap \overline{F_{\leq 3}}$ come l'evento "la faccia risultante non è un numero pari o un numero minore o uguale a 3", ossia l'evento $\overline{P \cup F_{\leq 3}}$, concludendo che:

$$\Pr\left[\overline{P} \cap \overline{F_{\leq 3}}\right] = \Pr\left[\overline{P \cup F_{\leq 3}}\right] = \frac{\left|\overline{P \cup F_{\leq 3}}\right|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$$

   dove $\overline{P \cup F_{\leq 3}} = \{5\}$.

Osserviamo inoltre come gli eventi complementari ci permettano di derivare una prima fondamentale proprietà della probabilità classica (che verrà estesa anche agli altri tipi di probabilità). Dato un evento $A \subseteq \Omega$, poiché Ω contiene tutti gli elementi di A abbiamo che:

$$\Pr\left[\overline{A}\right] = \frac{|\Omega - A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \Pr[A]$$

In altre parole, la probabilità di un evento complementare è uguale a 1 meno la probabilità dell'evento di partenza.

Teorema 1.1: Probabilità di un evento complementare

Dato un evento $A \subseteq \Omega$, si ha che:

$$\Pr\left[\,\overline{A}\,\right] = 1 - \Pr[A]$$

Similmente, il *principio di inclusione-esclusione* nella probabilità classica ci permette di riscrivere la probabilità di eventi disgiunti (ossia quelli della forma "A o B") tramite somme e differenze. Dati due eventi $A, B \subseteq \Omega$, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\Pr[A \cup B] &= \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} \\
&= \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{|\Omega|} \\
&= \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} + \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \\
&= \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]
\end{aligned}$$

Come per il precedente risultato, estenderemo questa proprietà anche alle altre forme probabilità e non solo a quella classica.

Teorema 1.2: Probabilità di due eventi disgiunti

Dati due eventi $A, B \subseteq \Omega$, si ha che:

$$\Pr\left[A \cup B\right] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$$

Questi teoremi risultano estremamente convenienti in molte situazioni. Ad esempio, consideriamo l'evento A definito come "su 2 pescate da un mazzo di 52 carte francesi almeno una è un asso" (assumendo che la carta venga reinserita nel mazzo). Tale evento può essere riscritto come l'unione di due eventi A_1 e A_2, dove ogni A_i rappresenta l'evento "la pescata i-esima è un asso", dunque $A = A_1 \cup A_2$. Per il principio di inclusione-esclusione, abbiamo che:

$$\Pr[A_1 \cup A_2] = \Pr[A_1] + \Pr[A_2] - \Pr[A_1 \cap A_2]$$

Essendoci solo 4 assi (uno per seme) ed essendo la carta pescata reinserita nel mazzo (dunque non vi è differenza tra le due pescate), otteniamo facilmente che:

$$\Pr[A_1] = \Pr[A_2] = \frac{4}{52}$$

mentre, utilizzando il principio moltiplicativo, la probabilità $\Pr[A_1 \cap A_2]$ può essere calcolata come il rapporto tra il numero di coppie di carte di nostro interesse e il numero totale di coppie di carte, ossia:

$$\Pr[A_1 \cap A_2] = \frac{4 \cdot 4}{52 \cdot 52}$$

Concludiamo quindi che:

$$\begin{aligned}
\Pr[A_1 \cup A_2] &= \Pr[A_1] + \Pr[A_2] - \Pr[A_1 \cap A_2] \\
&= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - \frac{4 \cdot 4}{52 \cdot 52} \\
&= \frac{400}{2704} \\
&\approx 0.148
\end{aligned}$$

Il PIE ci permette quindi di "spezzare" il calcolo in più sotto-calcoli molto immediati. E se l'evento A fosse stato definito su 10 pescate? In tal caso osserviamo che:

$$\begin{aligned}
\Pr[A_1 \cup \ldots \cup A_{10}] &= \Pr[A_1] + \Pr[A_2 \cup \ldots \cup A_{10}] - \Pr[A_1 \cap (A_2 \cup \ldots \cup A_{10})] \\
&= \Pr[A_1] + \Pr[A_2 \cup \ldots \cup A_{10}] - \Pr[(A_1 \cap A_2) \cup \ldots \cup (A_1 \cap A_{10})]
\end{aligned}$$

Notiamo quindi che la scomposizione da vita ad altre probabilità formate da unioni, le quali vanno a loro volta ricorsivamente scomposte utilizzando il PIE, rendendo quindi il calcolo estremamente impegnativo. Il primo teorema, invece, ci permette di "rigirare la frittata" calcolando la probabilità dell'evento opposto, ossia l'evento $\overline{A}$ definito come "su 10 pescate da un mazzo di 52 carte nessuna è un asso". Questo trucco viene comunemente detto *passaggio per il complementare*.

$$\begin{aligned}
\Pr[A_1 \cup \ldots \cup A_{10}] &= 1 - \Pr[\,\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_{10}}\,] \\
&= 1 - \Pr[\,\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{10}}\,] \\
&= 1 - \frac{(52-4)^{10}}{52^{10}} \\
&= 1 - \left(\frac{48}{52}\right)^{10} \\
&\approx 0.55
\end{aligned}$$