"Sapienza" Università di Roma
Ingegneria dell'Informazione,
Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Linguaggi di Programmazione

Author
Simone Bianco

30 settembre 2023

Indice

Informazioni e Contatti

Appunti e riassunti personali raccolti in ambito del corso di *Linguaggi di Programmazione* offerto dal corso di laurea in Informatica dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".

Ulteriori informazioni ed appunti possono essere trovati al seguente link:
https://github.com/Exyss/university-notes. Chiunque si senta libero di segnalare incorrettezze, migliorie o richieste tramite il sistema di Issues fornito da GitHub stesso o contattando in privato l'autore :

- Email: **bianco.simone@outlook.it**
- LinkedIn: **Simone Bianco**

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se le modifiche siano già state apportate nella versione più recente.

Prerequisiti consigliati per lo studio:

Apprendimento del materiale relativo al corso *Algebra*.

1

Induzione strutturale

1.1 Algebre induttive

Definizione 1: Assiomi di Peano

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è definito secondo i seguenti **assiomi di Peano**:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \implies \mathrm{succ}(n) \in \mathbb{N}$, dove $\mathrm{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è la funzione successore
3. $\forall n, m \in \mathbb{N}, \mathrm{succ}(n) = \mathrm{succ}(m) \implies n = m$, ossia succ è iniettiva
4. $\nexists n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{succ}(n) = 0$
5. $\forall S \subseteq \mathbb{N} \mid (0 \in S \wedge (n \in S \implies \mathrm{succ}(n) \in S)) \implies S = \mathbb{N}$

Proposizione 1: Numeri naturali di Von Neumann

I numeri naturali data da Von Neumann, indicati con $\mathcal{N}$, definiti come:

$$0_{\mathcal{N}} := \{\}$$

$$1_{\mathcal{N}} := \{\,\{\}\,\}$$
$$2_{\mathcal{N}} := \{\,\{\}, \{\{\}\}\,\}$$
$$3_{\mathcal{N}} := \{\,\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\,\}$$
$$\ldots$$

dove $\mathrm{succ}_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : n \mapsto n \cup \{n\}$, soddisfano gli assiomi di Peano

Dimostrazione.

1. $0_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}$ per definizione stessa di $\mathcal{N}$
2. $n \in \mathcal{N} \implies \mathrm{succ}_{\mathcal{N}}(n) \in \mathcal{N}$ per definizione stessa di $\mathrm{succ}_{\mathcal{N}}$
3. Siano $n, m \in \mathcal{N}$ tali che $n \neq m$. In tal caso, ne segue automaticamente che:

$$n \neq m \implies n \cup \{n\} \neq m \cup \{m\} \iff \mathrm{succ}_{\mathcal{N}}(n) \neq \mathrm{succ}_{\mathcal{N}}(m)$$

   Per contro-nominale, dunque, otteniamo che:

$$\mathrm{succ}_{\mathcal{N}}(n) = \mathrm{succ}_{\mathcal{N}}(m) \implies n = m$$

4. Supponiamo per assurdo che $\exists n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{succ}_{\mathcal{N}}(n) = 0_{\mathcal{N}}$. In tal caso, avremmo che:

$$succ(n) = 0_{\mathcal{N}} \iff n \cup \{n\} = 0_{\mathcal{N}} \iff n \cup \{n\} = \{\}$$

   ma ciò risulta assurdo poiché implicherebbe che l'insieme $\{\}$ contenga degli elementi. Di conseguenza, l'unica possibilità è che $\nexists n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{succ}_{\mathcal{N}}(n) = 0_{\mathcal{N}}$

5. Supponiamo per assurdo che $\exists S \subseteq \mathcal{N} \mid (0_{\mathcal{N}} \in S \wedge (n \in S \implies \mathrm{succ}_{\mathcal{N}}(n) \in S)) \wedge S \neq \mathcal{N}$. Consideriamo quindi $\mathcal{N} - S = \{n_1, \dots, n_k\}$. Per via del secondo assioma, ogni elemento di $\mathcal{N} - S$ deve avere un proprio successore e un proprio predecessore in $\mathcal{N}$.

   Poiché per ipotesi si ha che $n \in S \implies \mathrm{succ}_{\mathcal{N}}(n) \in S$, ne segue che tutti i predecessori degli elementi in $\mathcal{N} - S$ non possano essere in S, poiché altrimenti tali elementi sarebbero in S. Inoltre, poiché $\mathrm{succ}_{\mathcal{N}}$ è iniettiva, ne segue che i successori degli elementi in $\mathcal{N} - S$ non possano essere in S, poiché esiste già un predecessore in S per ogni elemento in S.

   Di conseguenza, ogni predecessore ed ogni successore degli elementi di $\mathcal{N} - S$ deve essere in $\mathcal{N} - S$ stesso. Consideriamo quindi (per comodità) la seguente catena di successori in $\mathcal{N} - S$:

$$n_1 \to n_2 \to \dots \to n_k \to n_1$$

   Notiamo a questo punto che:

$$\mathrm{succ}_{\mathcal{N}}^{k}(n_1) = n_1 \implies n_1 \in n_1$$

   contraddicendo gli assiomi insiemistici per cui un insieme non possa essere contenuto in se stesso. Di conseguenza, l'unica possibilità è che $S = \mathcal{N}$

$\square$

Principio 1: Principio di induzione

Sia P una proprietà che vale per $n = 0$. Dato $n \in \mathbb{N}$, se si verifica che la veridicità di P per n implica che P sia vera anche per $n+1$, allora P vale per tutto $\mathbb{N}$. In simboli, abbiamo che:

$$\forall P \;\; ((P(0) \wedge (P(n) \implies P(n+1)))) \implies \forall m \in \mathbb{N} \;\; P(m)$$

Osservazione 1

Il quinto assioma di Peano è equivalente al principio di induzione, poiché basta considerare $S \subseteq \mathbb{N}$ come l'insieme degli elementi per cui vale la proprietà desiderata

Definizione 2: Insieme unità

Definiamo come **insieme unità**, indicato con $\mathbb{1}$, un insieme tale che $|\mathbb{1}| = 1$

Definizione 3: Algebra

Definiamo come **algebra** (o struttura algebrica) una n-upla $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ dove A è un insieme non vuoto, detto **dominio**, e $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono delle operazioni definite su A stesso

Esempi:

- La coppia $(\mathbb{N}, \mathrm{succ})$ è un'algebra
- La coppia $(\mathbb{N}, \mathrm{zero})$, dove $\mathrm{zero} : \mathbb{1} \to \mathbb{N} : x \mapsto 0$, è un'algebra

Definizione 4: Algebra induttiva

Definiamo l'algebra $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ come **induttiva** se:

- $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono iniettive
- $\forall i \neq j \quad \mathrm{im}(\gamma_i) \cap \mathrm{im}(\gamma_j) = \varnothing$, ossia le immagini delle operazioni sono due a due disgiunte
- $\forall S \subseteq A \quad (\forall i \in [1, n], a_1, \dots, a_k \in S \quad \gamma_i(a_1, \dots, a_k) \in S) \implies S = A$, ossia è soddisfatto il principio di induzione per ogni operazione

Esempi:

- L'algebra $(\mathbb{N}, +)$ non è un'algebra induttiva poiché $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non è iniettiva
- L'algebra $(\mathbb{N}, \mathrm{succ}, \mathrm{zero})$ è un'algebra induttiva poiché:
  - succ risulta essere iniettiva grazie al secondo assioma di Peano, mentre zero risulta essere iniettiva poiché $|\mathbb{1}| = 1$

- $\mathrm{im}(\mathrm{succ}) \cap \mathrm{im}(\mathrm{zero}) = (\mathbb{N} - \{0\}) \cap \{0\} = \varnothing$
- TODO

Definizione 5: Omomorfismo

Date due strutture algebriche $(A, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ e $(B, \delta_1, \ldots, \delta_k)$ dello stesso tipo, definiamo $f : A \to B$ come **omomorfismo** se

$$\forall a_1, \ldots, a_n \in A, i \in [1, k] \quad f(\gamma_i(a_1, \ldots, a_k)) = \delta_i(f(a_1), \ldots, f(a_k))$$

Esempi:

- Date le due algebre $(\mathbb{N}, \mathrm{succ}, +)$ e $(\mathcal{N}, \mathrm{succ}_{\mathcal{N}}, +_{\mathcal{N}})$, affinché la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ sia un omomorfismo è necessario che:

$$f(\mathbf{succ}(n)) = \mathrm{succ}_{\mathcal{N}}(f(n))$$

$$f(n + m) = f(n) +_{\mathcal{N}} f(m)$$

- Date le due algebre $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, la funzione $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto e^x$ è un omomorfismo:

$$\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x)\exp(y)$$

Definizione 6: Isomorfismo

Definiamo come **isomorfismo** un omomorfismo biettivo

Osservazione 2

Data una funzione $f : A \to B$, si ha che:

$$f \text{ è biettiva } \iff \exists f^{-1} : B \to A$$

(*dimostrazione omessa*)

Osservazione 3

Data una funzione $f : A \to B$, si ha che:

$$f \text{ è un isomorfismo } \iff f^{-1} \text{ è un isomorfismo}$$

(*dimostrazione omessa*)

Esempio:

- Date le due algebre $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, la funzione $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto e^x$ è un isomorfismo, poiché:
  - exp è un omomorfismo
  - $\exists \ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \mid \ln(\exp(x)) = x$, dunque f è biettiva.