SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

"Sapienza" Università di Roma
Ingegneria dell'Informazione,
Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Automi, Calcolabilità e Complessità

Appunti integrati con il libro "Introduzione alla teoria della computazione", Michael Sipser

Author
Simone Bianco

25 ottobre 2023

Indice

Informazioni e Contatti

Appunti e riassunti personali raccolti in ambito del corso di *Automi, Calcolabilità e Complessità* offerto dal corso di laurea in Informatica dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".

Ulteriori informazioni ed appunti possono essere trovati al seguente link: **https://github.com/Exyss/university-notes**. Chiunque si senta libero di segnalare incorrettezze, migliorie o richieste tramite il sistema di Issues fornito da GitHub stesso o contattando in privato l'autore :

- Email: **bianco.simone@outlook.it**
- LinkedIn: **Simone Bianco**

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se le modifiche siano già state apportate nella versione più recente.

Prerequisiti consigliati per lo studio:

Apprendimento del materiale relativo al corso *Progettazione di Algoritmi*.

Licence:

These documents are distributed under the **GNU Free Documentation License**, a form of copyleft intended for use on a manual, textbook or other documents. Material licensed under the current version of the license can be used for any purpose, as long as the use meets certain conditions:

- All previous authors of the work must be **attributed**.
- All changes to the work must be **logged**.
- All derivative works must be **licensed under the same license**.
- The full text of the license, unmodified invariant sections as defined by the author if any, and any other added warranty disclaimers (such as a general disclaimer alerting readers that the document may not be accurate for example) and copyright notices from previous versions must be maintained.
- Technical measures such as DRM may not be used to control or obstruct distribution or editing of the document.

1 Linguaggi e Automi

1.1 Linguaggi

Definizione 1: Alfabeto

Definiamo come **alfabeto** un insieme finito di elementi detti **simboli**

Esempio:

- L'insieme $\Sigma = \{0, 1, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$ è un alfabeto
- L'insieme $\Sigma = \{0, 1\}$ è un alfabeto. In particolare, tale alfabeto viene detto **alfabeto binario**

Definizione 2: Stringa

Dato un alfabeto Σ, definiamo come **stringa di** Σ una sequenza di simboli $x_1 x_2 \dots x_n$ dove $x_1, \dots, x_n \in \Sigma$ e $n \in \mathbb{N}$.

In particolare, indichiamo come ε la **stringa vuota**

Esempio:

- Dato l'alfabeto $\Sigma = \{0, 1, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$, una stringa di Σ è 0x1yyy0

Definizione 3: Linguaggio

Dato un alfabeto Σ, definiamo come **linguaggio di** Σ, indicato come Σ^*, l'insieme delle stringhe di Σ.

In particolare, notiamo che $\varepsilon \in \Sigma^*$ per qualsiasi linguaggio Σ^*

Definizione 4: Concatenazione

Data la stringa $x := x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ e la stringa $y := y_1 \dots y_m \in \Sigma^*$, definiamo come **concatenazione** la seguente operazione:

$$xy = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n$$

Definizione 5: Potenza

Data la stringa $x \in \Sigma^*$ e dato $n \in \mathbb{N}$, definiamo come **potenza** la seguente operazione:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } n = 0 \\ xx^{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

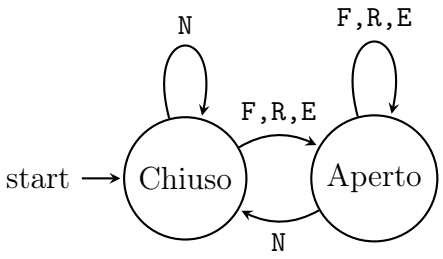
1.2 Determinismo

Definizione 6: Automa

Un **automa** è un meccanismo di controllo (o macchina) progettato per seguire automaticamente una sequenza di operazioni o rispondere a istruzioni predeterminate, mantenendo informazioni relative allo **stato** attuale dell'automa stesso ed agendo di conseguenza, **passando da uno stato all'altro**.

Esempio:

- Un sensore che apre e chiude una porta può essere descritto tramite il seguente automa, dove `Chiuso` e `Aperto` sono gli stati dell'automa e `N`, `F`, `R` e `E` sono le operazioni di transizione tra i due stati indicanti rispettivamente:
  - `N`: il sensore non rileva alcuna persona da entrambi i lati della porta
  - `F`: il sensore rileva qualcuno nel lato frontale della porta
  - `R`: il sensore rileva qualcuno nel lato retrostante della porta
  - `E`: il sensore rileva qualcuno da entrambi i lati della porta



- L'automa appena descritto è in grado di interpretare una **stringa in input** che ne descriva la sequenza di operazioni da svolgere (es: la stringa `NFNNNFRR` terminerà l'esecuzione dell'automa sullo stato `Aperto`)

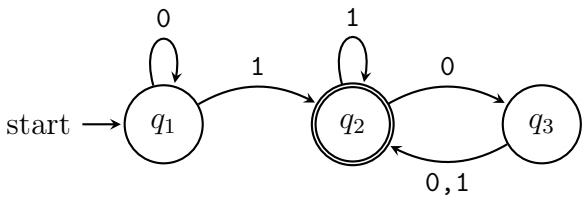
Definizione 7: Deterministic Finite Automaton (DFA)

Un **Deterministic Finite Automaton (DFA)** (o *Automa Deterministico a Stati Finiti*) è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove:

- Q è l'**insieme finito degli stati** dell'automa
- Σ è l'**alfabeto** dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ è la **funzione di transizione degli stati** dell'automa
- $q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale** dell'automa
- $F \subseteq Q$ è l'**insieme degli stati accettanti** dell'automa, ossia l'insieme degli stati su cui, a seguito della lettura di una stringa in input, l'automa accetta la corretta terminazione

Esempio:

- Consideriamo il seguente DFA



  dove:

  - $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ è l'insieme degli stati dell'automa
  - $\Sigma = \{0, 1\}$ è l'alfabeto dell'automa
  - $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ definita come

δ	q_1	q_2	q_3
0	q_1	q_3	q_2
1	q_2	q_2	q_2

    è la funzione di transizione degli stati dell'automa
  - q_1 è lo stato iniziale dell'automa
  - $F = \{q_2\}$ è l'insieme degli stati accettanti

Definizione 8: Funzione di transizione estesa

Sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Definiamo $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ come **funzione di transizione estesa di** D la funzione definita ricorsivamente come:

$$\begin{cases} \delta^*(q, \varepsilon) = \delta(q, \varepsilon) = q \\ \delta^*(q, ax) = \delta^*(\delta(q, a), x), \text{ dove } a \in \Sigma, x \in \Sigma^* \end{cases}$$

Proposizione 1: Stringa accettata in un DFA

Sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Data una stringa $x \in \Sigma^*$, diciamo che x è **accettata da** D se $\delta^*(q_0, x) \in F$, ossia l'interpretazione di tale stringa **termina su uno stato accettante**

Esempio:

- Consideriamo ancora il DFA dell'esempio precedente.
- La stringa 0101 è accettata da tale DFA, poiché:

$$\delta^*(q_1, 0101) = \delta^*(\delta(q_1, 0), 101) = \delta^*(q_2, 101) = \delta^*(\delta(q_2, 1), 01) = \delta^*(q_2, 01) =$$

$$= \delta^*(\delta(q_2, 0), 1) = \delta^*(q_3, 1) == \delta^*(\delta(q_3, 1), \varepsilon) = \delta^*(q_2, \varepsilon) = q_2 \in F$$

- La stringa 1010, invece, non è accettata dal DFA, poiché:

$$\delta^*(q_1, 1010) = \delta^*(q_2, 010) = \delta^*(q_3, 10) = \delta^*(q_2, 0) = \delta^*(q_3, \varepsilon) = q_3 \notin F$$

Definizione 9: Linguaggio di un DFA

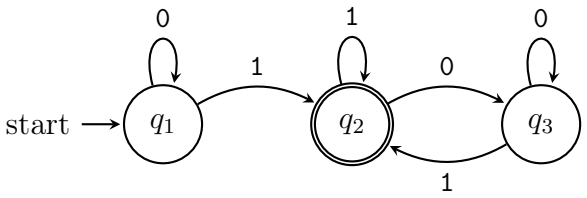
Sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Definiamo come **linguaggio di** D, indicato come $L(D)$, l'insieme di stringhe accettate da D

$$L(D) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) \in F\}$$

Inoltre, diciamo che D **riconosce** $L(D)$

Esempi:

1. - Consideriamo il seguente DFA D



- Il linguaggio riconosciuto da tale DFA corrisponde a

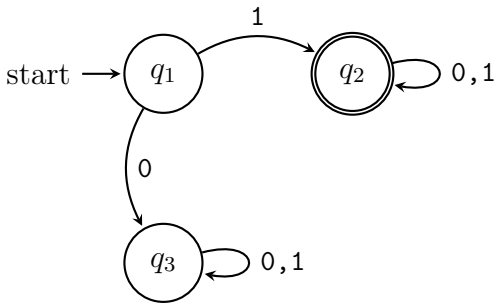
$$L(D) = \{x \in \{0,1\}^* \mid x := y1, \exists y \in \{0,1\}^*\}$$

ossia al linguaggio composto da tutte le stringhe terminanti con 1

2.
- Consideriamo il seguente linguaggio

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid 1y, \exists y \in \{0,1\}^*\}$$

- Un DFA in grado di riconoscere tale linguaggio corrisponde a

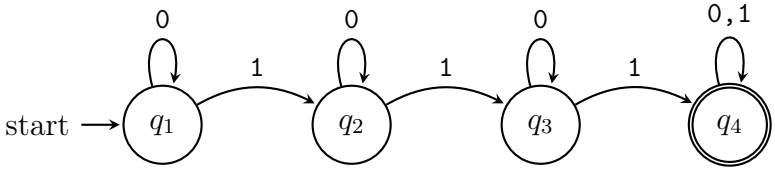


3.
- Consideriamo il seguente linguaggio

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid w_H(x) \geq 3\}$$

dove w_H è il **peso di Hamming** (ossia $w_H(x) =$ `numero di "1" in` x)

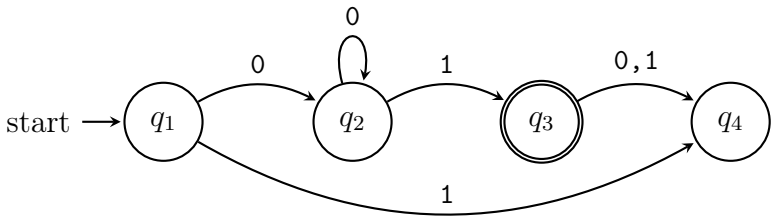
- Un DFA in grado di riconoscere tale linguaggio corrisponde a



4.
- Consideriamo il seguente linguaggio

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid 0^n 1, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

- Un DFA in grado di riconoscere tale linguaggio corrisponde a



Definizione 10: Configurazione di un DFA

Sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Definiamo la coppia $(q, x) \in Q \times \Sigma^*$ come **configurazione di** D

Definizione 11: Passo di computazione

Definiamo come **passo di computazione** la relazione binaria definita come

$$(p, ax) \vdash_D (q, x) \iff \delta(p, a) = q$$

Definizione 12: Computazione deterministica

Definiamo una computazione come **deterministica** se ad ogni passo di computazione segue un'unica configurazione:

$$\forall (q, ax) \;\; \exists! (p, x) \mid (q, ax) \vdash_D (p, x)$$

Proposizione 2: Chiusura del passo di computazione

Sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. La **chiusura riflessiva e transitiva** di $\vdash_D$, indicata come $\vdash_D^*$, gode delle seguenti proprietà:

- $(p, ax) \vdash_D (q, x) \implies (p, ax) \vdash_D^* (q, x)$
- $\forall q \in Q, x \in \Sigma^* \;\; (q, x) \vdash_D^* (q, x)$
- $(p, aby) \vdash_D (q, by) \land (q, by) \vdash_D (r, y) \implies (p, aby) \vdash_D^* (r, y)$

Osservazione 1

Sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Dati $q_i, q_f \in Q, x \in \Sigma^*$, si ha che

$$\delta^*(q_i, x) = q_f \iff (q_i, x) \vdash_D^* (q_f, \varepsilon)$$

(*dimostrazione omessa*)

1.3 Non determinismo

Definizione 13: Alfabeto epsilon

Dato un alfabeto Σ, definiamo $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ come **alfabeto epsilon di** Σ

Definizione 14: Non-deterministic Finite Automaton (NFA)

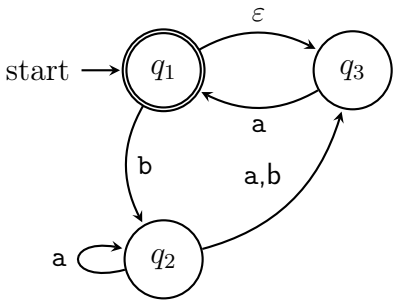
Un **Non-deterministic Finite Automaton (NFA)** (o *Automa Non-deterministico a Stati Finiti*) è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove:

- Q è l'**insieme finito degli stati** dell'automa
- Σ è l'**alfabeto** dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$ è la **funzione di transizione degli stati** dell'automa
- $q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale** dell'automa
- $F \subseteq Q$ è l'**insieme degli stati accettanti** dell'automa

Nota: $\mathcal{P}(Q)$ è l'insieme delle parti di Q, ossia l'insieme contenente tutti i suoi sottoinsiemi possibili

Esempio:

- Consideriamo il seguente NFA



  dove:

  - $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ è l'insieme degli stati dell'automa
  - $\Sigma = \{a, b\}$ è l'alfabeto dell'automa
  - $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ definita come

δ	q_1	q_2	q_3
ε	$\{q_3\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
a	$\varnothing$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\varnothing$

    è la funzione di transizione degli stati dell'automa

- q_1 è lo stato iniziale dell'automa
- $F = \{q_1\}$ è l'insieme degli stati accettanti

Proposizione 3: Stringa accettata in un NFA

Sia $N := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA. Data una stringa $x := x_0 \dots x_k \in \Sigma_\varepsilon^*$, diciamo che x è **accettata da** N se esiste una sequenza di stati $r_0, r_1, \dots, r_{k+1} \in Q$ tali che:

- $r_0 = q_0$
- $\forall i \in [0, k] \;\; r_{i+1} \in \delta(r_i, x_i)$
- $r_{k+1} \in F$

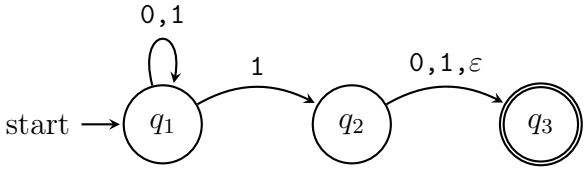
Osservazione 2: Computazione in un NFA

Sia $N := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA. Data una stringa $x \in \Sigma_\varepsilon$ in ingresso, la **computazione** viene eseguita nel seguente modo:

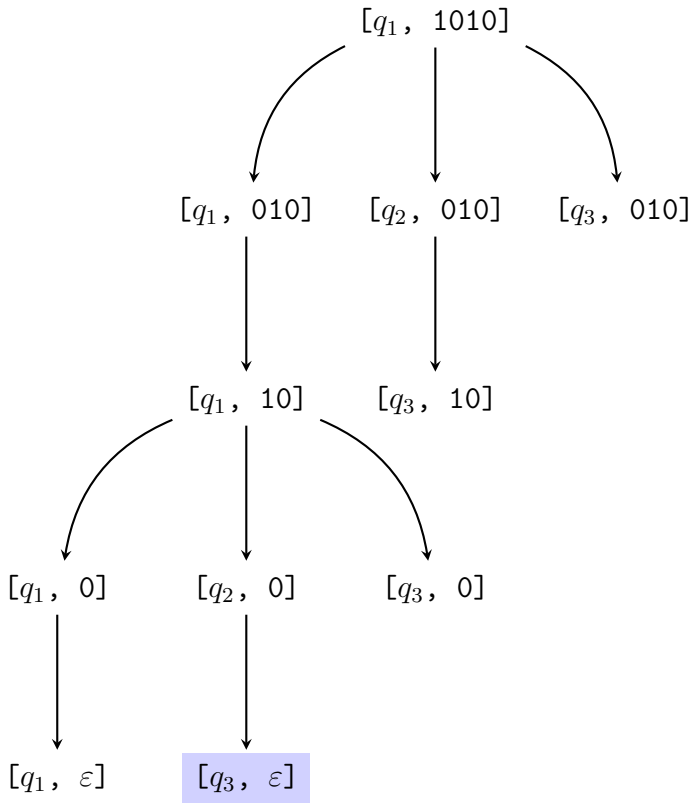
- Tutte le volte che uno stato potrebbe avere più transizioni per diversi simboli dell'alfabeto, l'automa N si duplica in **più copie**, ognuna delle quali segue il suo corso. Si vengono così a creare più **rami di computazione** indipendenti che sono eseguiti in **parallelo**.
- Se il prossimo simbolo della stringa da computare non si trova su nessuna delle transizioni uscenti dello stato attuale di un ramo di computazione, l'intero ramo **termina la sua computazione** (terminazione incorretta).
- Se almeno una delle copie di N termina correttamente su uno stato di accettazione, l'automa **accetta la stringa di partenza**.
- Quando a seguito di una computazione ci si ritrova in uno stato che possiede un **ε-arco** in uscita, la macchina si duplica in più copie: quelle che seguono gli ε-archi e quella che rimane nello stato raggiunto.

Esempio:

- Consideriamo il seguente NFA



- Supponiamo che venga computata la stringa `x = 1010`:



- Poiché esiste un ramo che termina correttamente, l'NFA descritto accetta la stringa `x = 1010`

1.3.1 Equivalenza tra NFA e DFA

Definizione 15: Classe dei linguaggi riconosciuti da un DFA

Dato un alfabeto Σ, definiamo come **classe dei linguaggi di Σ riconosciuti da un DFA** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{DFA } D \text{ t.c } L = L(D)\}$$

Definizione 16: Classe dei linguaggi riconosciuti da un NFA

Dato un alfabeto Σ, definiamo come **classe dei linguaggi di Σ riconosciuti da un NFA** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(\text{NFA}) = \{L \subseteq \Sigma_\varepsilon^* \mid \exists \text{NFA } N \text{ t.c } L = L(N)\}$$

Teorema 1: Equivalenza tra NFA e DFA

Date le due classi di linguaggi $\mathcal{L}(\text{DFA})$ e $\mathcal{L}(\text{NFA})$, si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) = \mathcal{L}(\text{NFA})$$

Dimostrazione.

Prima implicazione.

- Dato $L \in \mathcal{L}(\text{DFA})$, sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il DFA tale che $L = L(D)$
- Poiché il concetto di NFA è una generalizzazione del concetto di DFA, ne segue automaticamente che D sia anche un NFA, implicando che $L \in \mathcal{L}(\text{NFA})$ e di conseguenza che:
$$\mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{NFA})$$

Seconda implicazione.

- Dato $L \in \mathcal{L}(\text{NFA})$, sia $N := (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_{0_N}, F_N)$ il NFA tale che $L = L(N)$
- Consideriamo quindi il DFA $D := (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{0_D}, F_D)$ costruito tramite N stesso:
  - $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$
  - Dato $R \in Q_D$, definiamo l'estensione di R come:
    $$E(R) = \{q \in Q_N \mid \text{q è raggiungibile in } N \text{ da } q' \in R \text{ tramite } k \geq 0 \ \varepsilon\text{-archi}\}$$
  - $q_{0_D} = E(\{q_{0_N}\})$
  - $F_D = \{R \in Q_D \mid R \cap F_N \neq \varnothing\}$
  - Dati $R \in Q_D$ e $a \in \Sigma$, definiamo δ_D come:
    $$\delta_D = (R, a) = \bigcup_{r \in R} E(\delta_N(r, a))$$
- A questo punto, per costruzione stessa di D si ha che:
$$x \in L = L(N) \iff x \in L(D)$$
implicando dunque che $L \in \mathcal{L}(\text{DFA})$ e di conseguenza che:
$$L \in \mathcal{L}(\text{NFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{DFA})$$

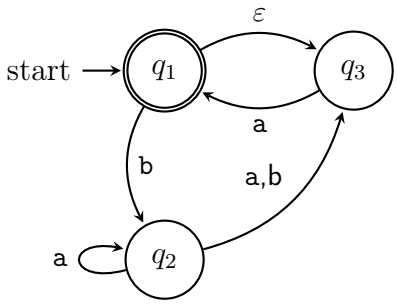
□

Osservazione 3

Dato un NFA N, seguendo i passaggi della dimostrazione precedente è possibile definire un DFA D equivalente ad N

Esempio:

- Consideriamo ancora il seguente NFA



- Definiamo quindi l'insieme degli stati del DFA equivalente a tale NFA:

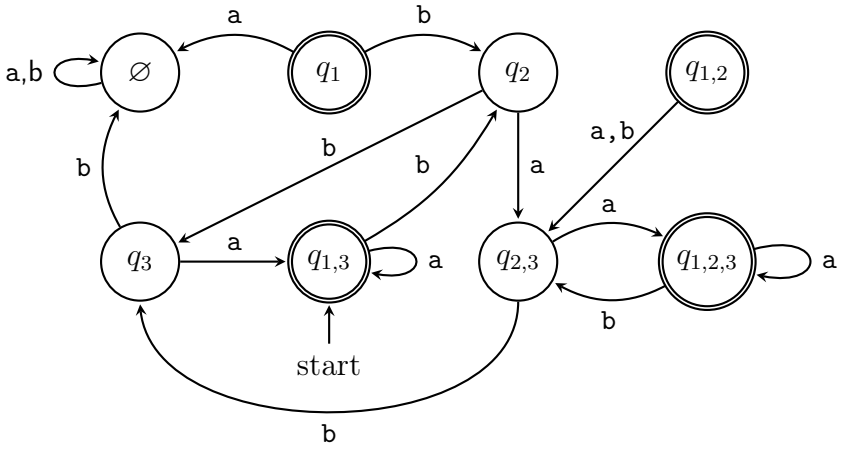
$$Q_D = \{\varnothing, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2\}, \{q_2, q_3\}, \{q_1, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\} =$$
$$= \{\varnothing, q_1, q_2, q_3, q_{1,2}, q_{2,3}, q_{1,3}, q_{1,2,3}\}$$

- A questo punto, lo stato iniziale sarà $q_{0_D} = E(\{q_{0_N}\}) = E(\{q_1\}) = \{q_1, q_3\} = q_{1,3}$, mentre gli stati accentanti saranno:

$$F_D = \{\{q_1\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\} = \{q_1, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,2,3}\}$$

- Le transizioni del DFA corrisponderanno invece a:
  - $\delta_D(\{q_1\}, a) = E(\delta_N(q_1,), a) = \varnothing$
  - $\delta_D(\{q_1\}, b) = E(\delta_N(q_1,), b) = \{q_2\} = q_2$
  - $\delta_D(\{q_2\}, a) = E(\delta_N(q_2,), a) = \{q_2, q_3\} = q_{2,3}$
  - $\delta_D(\{q_2\}, b) = E(\delta_N(q_2,), b) = \{q_2\} = q_2$
  - $\delta_D(\{q_1, q_2\}, a) = E(\delta_N(q_1, a)) \cup E(\delta_N(q_2, a)) = \varnothing \cup \{q_2, q_3\} = \{q_2, q_3\} = q_{2,3}$
  - $\delta_D(\{q_1, q_2\}, b) = E(\delta_N(q_1, b)) \cup E(\delta_N(q_2, b)) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\} = q_{2,3}$
  - ...

- Il DFA equivalente corrisponde dunque a:



1.4 Linguaggi regolari

Definizione 17: Linguaggi regolari

Dato un alfabeto Σ, definiamo come **insieme dei linguaggi regolari di** Σ, indicato con REG, l'insieme delle classi dei linguaggi riconosciuti da un DFA:

$$\text{REG} := \mathcal{L}(\text{DFA})$$

Corollario 1

Tramite il teorema dell'Equivalenza tra NFA e DFA, si ha che:

$$\text{REG} := \mathcal{L}(\text{DFA}) = \mathcal{L}(\text{NFA})$$

Proposizione 4: Operazioni sui linguaggi

Dati due linguaggi $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, definiamo le seguenti operazioni:

- **Operatore unione**:

$$L_1 \cup L_2 = \{x \in \Sigma^* \mid x \in L_1 \vee x \in L_2\}$$

- **Operatore intersezione**:

$$L_1 \cap L_2 = \{x \in \Sigma^* \mid x \in L_1 \wedge x \in L_2\}$$

- **Operatore complemento**:

$$\neg L_1 = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L_1\}$$

- **Operatore concatenazione**:

$$L_1 \circ L_2 = \{xy \in \Sigma^* \mid x \in L_1, x \in L_2\}$$

- **Operatore potenza**:

$$L_1^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{se } n = 0 \\ L_1 \circ L_1^{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

- **Operatore star**:

$$L_1^* = \{x_1 \dots x_k \in \Sigma^* \mid k \geq 0, \forall i \in [1,k] \;\; x_i \in L_1\} = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

Teorema 2: Chiusura dell'unione in REG

L'operatore unione è **chiuso in** REG, ossia:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \;\; L_1 \cup L_2 \in \text{REG}$$

Dimostrazione I.

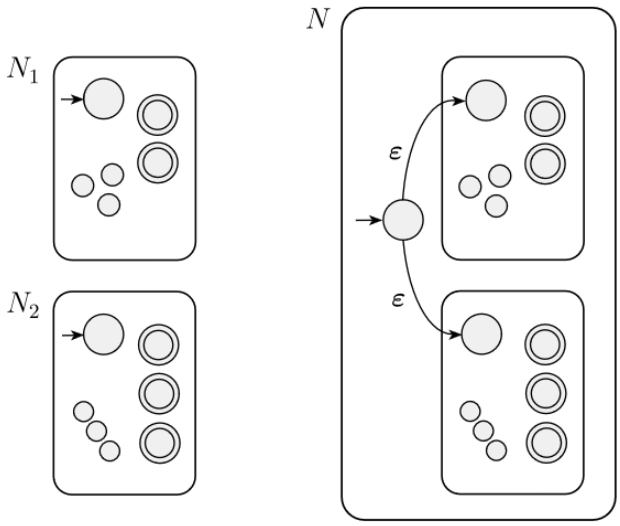
- Dati $L_1, L_2 \in$ REG, siano $D_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $D_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ i due DFA tali che $L_1 = L(D_1)$ e $L_2 = L(D_2)$
- Definiamo quindi il DFA $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che:
  - $q_0 = (q_1, q_2)$
  - $Q = Q_1 \times Q_2$
  - $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2) = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \vee r_2 \in F_2\}$
  - $\forall (r_1, r_2) \in Q, a \in \Sigma$ si ha che:
$$\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$$
- A questo punto, per costruzione stessa di D ne segue che:
$$x \in L_1 \cup L_2 \iff D(x) \in F \iff x \in L(D) \implies L_1 \cup L_2 = L(D) \in \text{REG}$$

□

Dimostrazione II.

- Dati $L_1, L_2 \in$ REG, siano $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ i due NFA tali che $L_1 = L(N_1)$ e $L_2 = L(M_2)$
- Definiamo quindi il NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che:
  - q_0 è un nuovo stato iniziale aggiunto
  - $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$
  - $F = F_1 \cup F_2$
  - $\forall q \in Q, a \in \Sigma$ si ha che:
$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & \text{se } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & \text{se } q = q_0 \wedge a = \varepsilon \\ \varnothing & \text{se } q = q_0 \wedge a \neq \varepsilon \end{cases}$$
- A questo punto, per costruzione stessa di D ne segue che:
$$x \in L_1 \cup L_2 \iff D(x) \in F \iff x \in L(D) \implies L_1 \cup L_2 = L(D) \in \text{REG}$$

□



Interpretazione grafica della dimostrazione precedente

Teorema 3: Chiusura dell'intersezione in REG

L'operatore intersezione è **chiuso in** REG, ossia:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \quad L_1 \cap L_2 \in \text{REG}$$

Dimostrazione.

- Dati $L_1, L_2 \in$ REG, siano $D_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $D_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ i due DFA tali che $L_1 = L(D_1)$ e $L_2 = L(D_2)$
- Definiamo quindi il DFA $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che:
  - $q_0 = (q_1, q_2)$
  - $Q = Q_1 \times Q_2$
  - $F = F_1 \times F_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \wedge r_2 \in F_2\}$
  - $\forall (r_1, r_2) \in Q, a \in \Sigma$ si ha che:

$$\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$$

- A questo punto, per costruzione stessa di D ne segue che:

$$x \in L_1 \cap L_2 \iff N(x) \in F \iff x \in L(N) \implies L_1 \cap L_2 = L(D) \in \text{REG}$$

□

Teorema 4: Chiusura del complemento in REG

L'operatore complemento è **chiuso in** REG, ossia:

$$\forall L \in \text{REG} \;\; \neg L \in \text{REG}$$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \text{REG}$, sia $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il DFA tale che $L = L(D)$
- Definiamo quindi il DFA $D' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$, dunque il DFA uguale a D ma i cui stati accettanti sono invertiti
- A questo punto, per costruzione stessa di D' ne segue che:

$$x \in L \iff D(x) \notin F \iff x \notin L(D) \implies \neg L = L(D') \in \text{REG}$$

□

Teorema 5: Chiusura della concatenazione in REG

L'operatore concatenazione è **chiuso in** REG, ossia:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \;\; L_1 \circ L_2 \in \text{REG}$$

Dimostrazione.

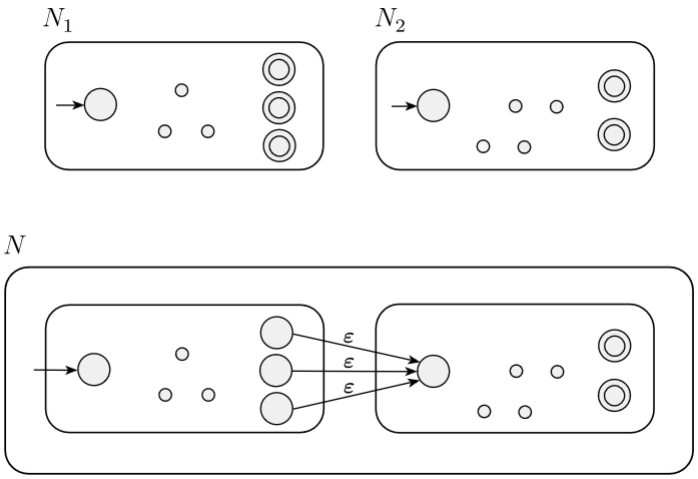
- Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, siano $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ i due NFA tali che $L_1 = L(N_1)$ e $L_2 = L(N_2)$
- Definiamo quindi il NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che:
  - $q_0 = q_1$
  - $Q = Q_1 \cup Q_2$
  - $F = F_2$
  - $\forall q \in Q, a \in \Sigma$ si ha che:

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{se } q \in Q_1 - F_1 \\ \delta_1(q,a) & \text{se } q \in F_1 \wedge a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & \text{se } q \in F_1 \wedge a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & \text{se } q \in Q_2 \end{cases}$$

- A questo punto, per costruzione stessa di N ne segue che:

$$x \in L_1 \circ L_2 \iff N(x) \in F \iff x \in L(N) \implies L_1 \circ L_2 = L(N) \in \text{REG}$$

□



Interpretazione grafica della dimostrazione precedente

Corollario 2: Chiusura della potenza in REG

L'operatore potenza è **chiuso in** REG, ossia:

$$\forall L \in \text{REG}, n \in \mathbb{N} \quad L^n \in \text{REG}$$

Dimostrazione.

Caso base.

- Dato $n = 0$, si ha che $L^0 = \{\varepsilon\} \in \text{REG}$

Ipotesi induttiva.

- Dato $n \in \mathbb{N}$, assumiamo che $L^n \in \text{REG}$

Passo induttivo.

- Tramite la Chiusura della concatenazione in REG otteniamo che

$$L^{n+1} = L \circ L^n \in \text{REG}$$

□

Teorema 6: Chiusura di star in REG

L'operatore star è **chiuso in** REG, ossia:

$$\forall L \in \text{REG} \quad L^* \in \text{REG}$$

Dimostrazione I.

- Ricordando che $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$ procediamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$

  Caso base.

  - Dato $n = 0$, si ha che $\bigcup_{0 \geq 0} L^0 = L^0 \in \text{REG}$

  Ipotesi induttiva.

  - Dato $n \in \mathbb{N}$, assumiamo che $\bigcup_{n \geq 0} L^n \in \text{REG}$

  Passo induttivo.

  - Tramite la Chiusura dell'unione in REG e la Chiusura della potenza in REG otteniamo che:

$$\bigcup_{n+1 \geq 0} L^{n+1} = L^{n+1} \cup \left(\bigcup_{n \geq 0} L^n \right) \in \text{REG}$$

□

Dimostrazione II.

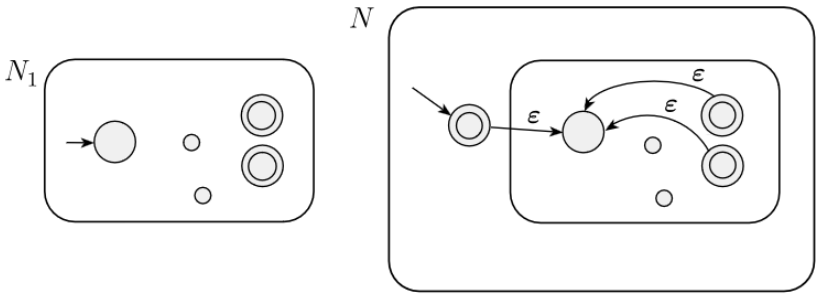
- Dato $L \in \text{REG}$, sia $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il NFA tale che $L = L(N)$
- Definiamo quindi il DFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', q_{0*}, F')$ tale che:
  - q_{0*} è un nuovo stato iniziale aggiunto
  - $Q' = Q \cup \{q_{0*}\}$
  - $F' = F \cup \{q_{0*}\}$
  - $\forall q \in Q', a \in \Sigma$ si ha che:

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{se } q \in Q - F \\ \delta(q,a) & \text{se } q \in F \wedge a \neq \varepsilon \\ \delta(q,a) \cup \{q_0\} & \text{se } q \in F \wedge a = \varepsilon \\ \{q_0\} & \text{se } q = q_{0*} \wedge a = \varepsilon \\ \varnothing & \text{se } q = q_{0*} \wedge a \neq \varepsilon \end{cases}$$

- A questo punto, per costruzione stessa di N' ne segue che:

$$x \in L^* \iff N(x) \in F' \implies L^* = L(N') \in \text{REG}$$

□



Interpretazione grafica della dimostrazione precedente

Teorema 7: Leggi di De Morgan

Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, si ha che:

$$L_1 \cup L_2 = \neg(\neg L_1 \cap \neg L_2)$$

$$L_1 \cap L_2 = \neg(\neg L_1 \cup \neg L_2)$$

(*dimostrazione omessa*)

1.5 Espressioni regolari

Definizione 18: Espressione regolare

Dato un alfabeto Σ, definiamo come **espressione regolare di** Σ una stringa R rappresentante un linguaggio $L(R) \subseteq \Sigma^*$. In altre parole, ogni espressione regolare R rappresenta in realtà il linguaggio $L(R)$ ad essa associata.

In particolare, definiamo l'**insieme delle espressioni regolari di** Σ, indicato con $\text{re}(\Sigma)$, come:

- $\varnothing \in \text{re}(\Sigma)$
- $\varepsilon \in \text{re}(\Sigma)$
- $a \in \text{re}(\Sigma)$, dove $a \in \Sigma$
- $R_1, R_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies R_1 \cup R_2 \in \text{re}(\Sigma)$
- $R_1, R_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies R_1 \circ R_2 \in \text{re}(\Sigma)$
- $R \in \text{re}(\Sigma) \implies R^* \in \text{re}(\Sigma)$

Osservazione 4

Data un'espressione regolare $R \in \text{re}(R)$, si ha che:

- $R = \varnothing \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = \varnothing$
- $R = \varepsilon \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = \{\varepsilon\}$
- $R = a \in \text{re}(\Sigma), a \in \Sigma \implies L(R) = \{a\}$
- $R = R_1 \cup R_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = L(R_1) \cup L(R_2)$
- $R = R_1 \circ R_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = L(R_1) \circ L(R_2)$
- $R = R_1^* \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = L(R_1)^*$

Esempi:

1. $0 \cup 1$ rappresenta il linguaggio $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$
2. 0^*10^* rappresenta il linguaggio $\{0\}^* \circ \{1\} \circ \{0\}^* = \{x1y \mid x, y \in \{0\}^*\}$
3. $\Sigma^*1\Sigma^*$ rappresenta il linguaggio $\Sigma^* \circ \{1\} \circ \Sigma^* = \{x1y \mid x, y \in \Sigma^*\}$
4. $(0 \cup 1000)^*$ rappresenta il linguaggio $(\{0\} \cup \{1000\})^* = \{0, 1000\}^*$
5. $\varnothing^*$ rappresenta il linguaggio $\varnothing^* = \{\varepsilon\}$ (ricordiamo che per definizione stessa si ha che $\forall L \subseteq \Sigma^* \;\; L^0 = \{\varepsilon\}$)
6. $0^*\varnothing$ rappresenta il linguaggio $\{0\}^* \circ \varnothing = \varnothing$
7. $(0 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon)$ rappresenta il linguaggio $\{\varnothing, 0, 1, 01\}$

Definizione 19: Classe dei linguaggi descritti da esp. reg.

Dato un alfabeto Σ, definiamo come **classe dei linguaggi di Σ descritti da un'espressione regolare** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(\text{re}) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists R \in \text{re}(\Sigma) \text{ t.c. } L = L(R)\}$$

Lemma 1: Conversione da espressione regolare a NFA

Date le due classi di linguaggi $\mathcal{L}(\text{re})$ e $\mathcal{L}(\text{NFA})$, si ha che:

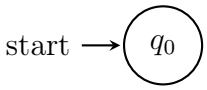
$$\mathcal{L}(\text{re}) \subseteq \mathcal{L}(\text{NFA})$$

Dimostrazione.

Procediamo per induzione strutturale, ossia dimostrando che se per ogni sotto-componente vale una determinata proprietà allora essa varrà anche per ogni componente formato da tali sotto-componenti

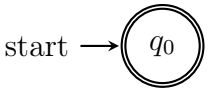
Caso base.

- Se $R = \varnothing \in \text{re}(\Sigma)$, definiamo il NFA $N_\varnothing = (\{q_0\}, \Sigma, \delta, q_0, \varnothing)$, ossia:



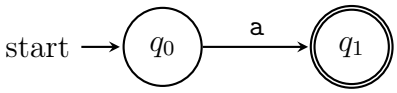
  per cui si ha che $x \in L(R) \iff x \in L(N_\varnothing)$ dunque $L(R) = L(N_\varnothing) \in \mathcal{L}(\text{NFA})$

- Se $R = \varepsilon \in \text{re}(\Sigma)$, definiamo il NFA $N_\varepsilon = (\{q_0\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_0\})$, ossia:



  per cui si ha che $x \in L(R) \iff x \in L(N_\varepsilon)$ dunque $L(R) = L(N_\varepsilon) \in \mathcal{L}(\text{NFA})$

- Se $R = a \in \text{re}(\Sigma)$ con $a \in \Sigma$, definiamo il NFA $N_a = (\{q_0, q_1\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1\})$ dove per δ è definita solo la coppia $\delta(q_0, a) = q_1$, ossia:



  per cui si ha che $x \in L(R) \iff x \in L(N_a)$ dunque $L(R) = L(N_a) \in \mathcal{L}(\text{NFA})$

Ipotesi induttiva.

- Nati $R_1, R_2 \in \text{re}(\Sigma)$, assumiamo che $\exists$ NFA $N_1, N_2 \mid L(R_1) = L(N_1), L(R_2) = L(N_2)$, dunque che $L(R_1), L(R_2) \in \mathcal{L}(\text{NFA})$

Passo induttivo.

- Se $R = R_1 \cup R_2$, tramite la Chiusura dell'unione in REG, otteniamo che:

$$L(R) = L(R_1) \cup L(R_2) = L(N_1) \cup L(N_2) \in \text{REG} = \mathcal{L}(\text{NFA})$$

- Se $R = R_1 \circ R_2$, tramite la Chiusura della concatenazione in REG, otteniamo che:

$$L(R) = L(R_1) \circ L(R_2) = L(N_1) \circ L(N_2) \in \text{REG} = \mathcal{L}(\text{NFA})$$

- Se $R = R_1^*$, tramite la Chiusura di star in REG, otteniamo che:

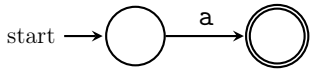
$$L(R) = L(R_1)^* = L(N_1)^* \in \text{REG} = \mathcal{L}(\text{NFA})$$

□

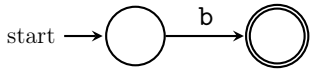
Esempio:

- Consideriamo l'espressione regolare $(a \cup ab)^*$
- Costruiamo il NFA corrispondente a tale espressione partendo dai suoi sotto-componenti

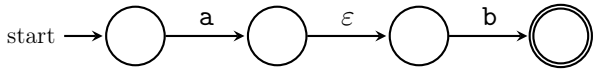
$a \implies$



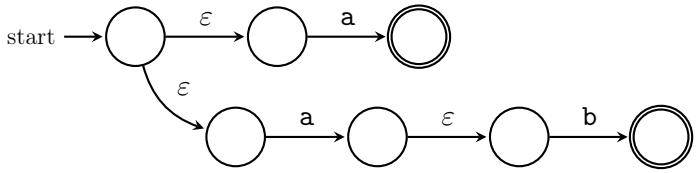
$b \implies$



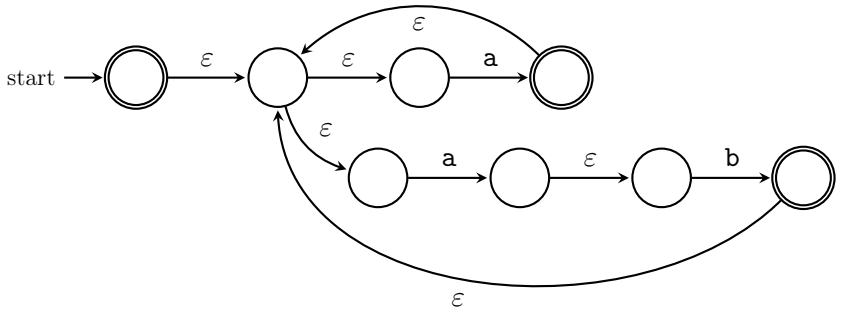
$ab \implies$



$(a \cup ab) \implies$



$(a \cup ab)^* \implies$



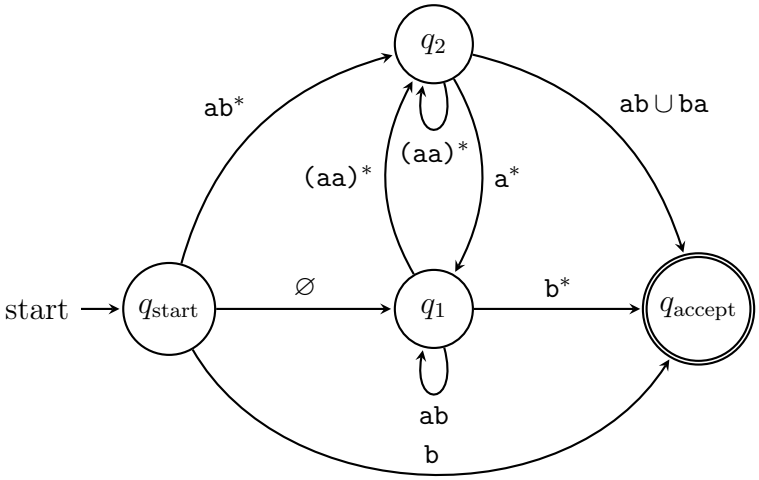
1.5.1 NFA generalizzati

Definizione 20: Generalized NFA (GNFA)

Un **Generalized NFA (GNFA)** è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ dove:

- Q è l'**insieme finito degli stati** dell'automa dove $|Q| \geq 2$
- Σ è l'**alfabeto** dell'automa
- $q_{\text{start}} \in Q$ è lo stato iniziale dell'automa
- $q_{\text{accept}} \in Q$ è l'unico stato accettante dell'automa
- $\delta : (Q - \{q_{\text{accept}}\}) \times (Q - \{q_{\text{start}}\}) \to \text{re}(\Sigma)$ è la **funzione di transizione degli stati** dell'automa, implicando che:
  - Lo stato q_{start} abbia solo transizioni **uscenti**
  - Lo stato q_{accept} abbia solo transizioni **entranti**
  - Tra **tutte le possibili coppie di stati** $q, q' \in Q$ (incluso il caso in cui $q = q'$) vi sia una transizione $q \to q'$ ed una transizione $q' \to q$
  - Le "etichette" delle transizioni sono delle **espressioni regolari**

Esempio:



Osservazione 5

In un GNFA, il risultato $\delta(q, q') = R$ può essere interpretato come "l'espressione regolare che effettua la transizione da q a q' è R". Di conseguenza, possiamo immaginare un GNFA come un NFA che legga la stringa in input **blocco per blocco**

Proposizione 5: Stringa accettata in un GNFA

Sia $G := (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ un GNFA. Data una stringa $x := x_0 \dots x_k \in \Sigma_\varepsilon^*$, dove $x_0, \dots, x_k \in \Sigma_\varepsilon^*$ (ossia sono delle sottostringhe), diciamo che x è **accettata da** G se esiste una sequenza di stati $r_0, r_1, \dots, r_{k+1} \in Q$ tali che:

- $r_0 = q_{\text{start}}$
- $\forall i \in [0, k] \;\; x_i \in L(\delta(r_i, r_{i+1}))$
- $r_{k+1} = q_{\text{accept}}$

Esempio:

- Il GNFA dell'esempio precedente accetta la stringa `ababaaaba`, poiché:
  - $\delta(q_{\text{start}}, q_1) = \texttt{ab}^*$, dunque viene letta in blocco la sottostringa `abab`
  - $\delta(q_1, q_1) = \texttt{aa}^*$, dunque viene letta in blocco la sottostringa `aa`
  - $\delta(q_1, q_{\text{accept}}) = \texttt{ab} \cup \texttt{ba}$, dunque viene letta in blocco la sottostringa `ba`

Corollario 3

Una transizione con "etichetta" pari a $\varnothing$ è una **transizione inutilizzabile** in quanto $L(\varnothing) = \varnothing$

Definizione 21: Classe dei linguaggi riconosciuti da un GNFA

Dato un alfabeto Σ, definiamo come **classe dei linguaggi di Σ riconosciuti da un GNFA** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(\text{GNFA}) = \{L \subseteq \Sigma_\varepsilon^* \mid \exists \text{GNFA } G \text{ t.c } L = L(G)\}$$

Lemma 2: Conversione da DFA a GNFA

Date le due classi di linguaggi $\mathcal{L}(\text{DFA})$ e $\mathcal{L}(\text{GNFA})$, si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{GNFA})$$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \mathcal{L}(\text{DFA})$, sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il DFA tale che $L(D) = L$
- Consideriamo quindi il GNFA $G := (Q', \Sigma, \delta', q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ costruito tramite D stesso:
  - $Q' = Q \cup \{q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}\}$
  - $\delta'(q_{\text{start}}, q_0) = \varepsilon$

- $\forall q \in F \;\; \delta'(q, q_{\text{accept}}) = \varepsilon$
- Per ogni transizione con etichetta multipla in D, in G esiste una transizione equivalente con etichetta corrispondente all'unione di tali etichette multiple
- Per ogni coppia di stati per cui non esiste una transizione entrante o uscente in D, viene aggiunta una transizione con etichetta $\varnothing$

- A questo punto, per costruzione stessa di G si ha che:

$$x \in L = L(D) \implies L(G)$$

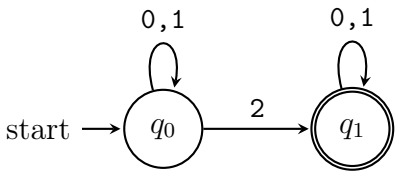
implicando dunque che $L(D) \in \mathcal{L}(\text{DFA})$ e di conseguenza che:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{GNFA})$$

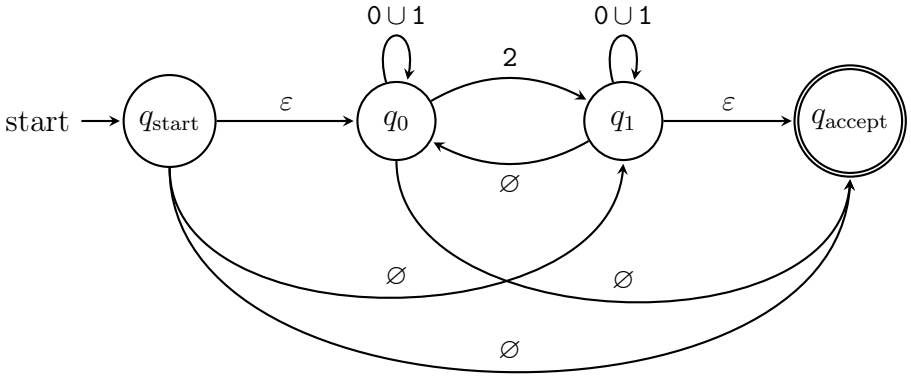
□

Esempio:

- Consideriamo il seguente DFA:



- Il suo GNFA equivalente corrisponde a:



Algoritmo 1: Riduzione minimale di un GNFA

Dato un GNFA $G = (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ in input, il seguente algoritmo restituisce un GNFA G' avente due soli stati ed una sola transizione:

function REDUCEGNFA(G)
  if $|Q| == 2$ **then**
    return G
  else if $|Q| > 2$ **then**
    $q := q \in Q - \{q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}\}$
    $Q' := Q - \{q\}$
    for $q_i \in Q' - \{q_{\text{accept}}\}$ **do**
      for $q_j \in Q' - \{q_{\text{start}}\}$ **do**
        $\delta'(q_i, q_j) := \delta(q_i, q)\delta(q, q)^*\delta(q, q_j) \cup \delta(q_i, q_j)$
      end for
    end for
    $G' := (Q', \Sigma, \delta', q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$
    return `reduceGNFA`(G')
  end if
end function

Dimostrazione.

Siano $G_0, \ldots, G_n$ i vari GNFA prodotti dalla ricorsione dell'algoritmo, implicando che $G_0 = G$ e che G_n sia l'output. Procediamo per induzione sul numero $k \in \mathbb{N}$ di riduzioni effettuate, mostrando che $L(G) = L(G_0) = \ldots = L(G_n)$

Caso base.

- Se $k = 0$, allora $G_0 = G$, dunque $L(G) = L(G_0)$

Ipotesi induttiva.

- Dato $k \in \mathbb{N}$, assumiamo che per il GNFA $G_k := (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ si abbia che $L(G) = L(G_k)$

Passo induttivo.

- Consideriamo quindi il GNFA $G_{k+1} := (Q', \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ ottenuto rimuovendo uno stato $q \in Q$ (dunque $Q' = Q - \{q\}$) e ponendo

  $$\delta'(q_i, q_j) := \delta(q_i, q)\delta(q, q)^*\delta(q, q_j) \cup \delta(q_i, q_j)$$

  per ogni $q_i \in Q' - \{q_{\text{accept}}\}, q_j \in Q' - \{q_{\text{start}}\}$
- Data una stringa $x = x_0 \ldots x_m \in L(G_k)$, dove $x_0, \ldots, x_m \in \Sigma_\varepsilon^*$, esiste una sequenza di stati $q_0, \ldots, q_m \in Q$ tali che:
  - $q_0 = q_{\text{start}}$ e $q_m = q_{\text{accept}}$
  - $\forall i \in [0, m-1] \;\; x_i \in L(\delta(q_i, q_{i+1}))$

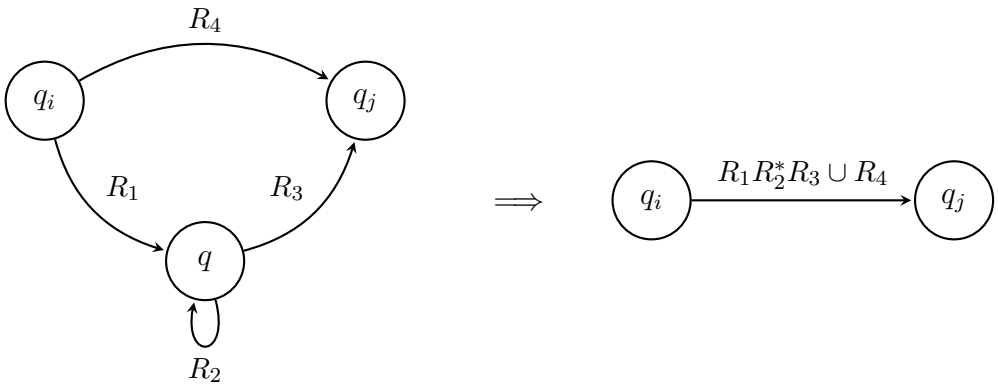
- A questo punto, consideriamo la costruzione della funzione δ':

$$\delta'(q_i, q_j) = \delta(q_i, q)\delta(q, q)^*\delta(q, q_j) \cup \delta(q_i, q_j)$$

  - Se $q \notin \{q_0, \ldots, q_m\}$, allora tramite l'unione si ha che $x_i \in L(\delta(q_i, q_j)) \implies x \in L(\delta'(q_i, q_j))$, dunque tutte le possibili sottostringhe passanti per le transizioni dirette da q_i a q_j vengono riconosciute
  - Se $q \in \{q_0, \ldots, q_m\}$, allora la concatenazione $\delta(q_i, q)\delta(q, q)^*\delta(q, q_j)$ permette il riconoscimento di tutti i cammini da q_i a q_j passanti per q, implicando che $x \in L(\delta'(q_i, q_j))$

- Viceversa, poiché ogni $\delta'(q_i, q_j)$ è definito come la combinazione di tutti i cammini possibili da q_i a q_j (dunque passando per q o non), ne segue automaticamente che $x \in L(G_{k+1}) \implies x \in L(G_k)$

- Esprimendo il tutto graficamente, risulta evidente che le seguenti transizioni siano del tutto equivalenti:

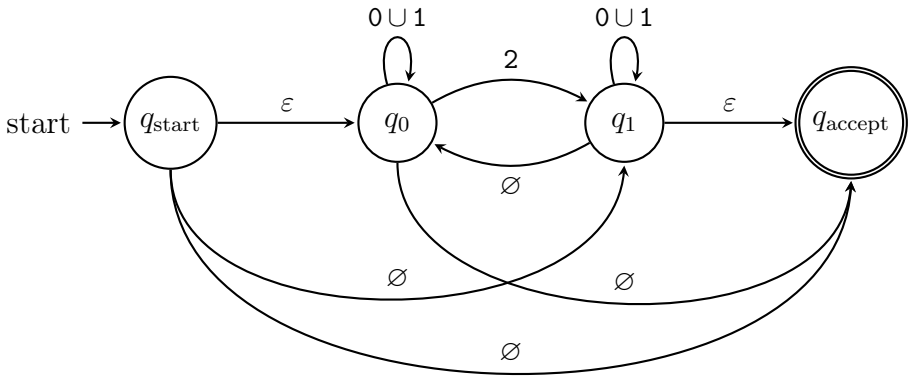


- Di conseguenza, otteniamo che $x \in L(G_k) \iff x \in L(G_{k+1})$, concludendo quindi, per ipotesi induttiva, che $L(G) = L(G_k) = L(G_{k+1})$

□

Esempio:

- Consideriamo nuovamente il seguente GNFA, applicando su esso l'algoritmo `reduceGNFA`:

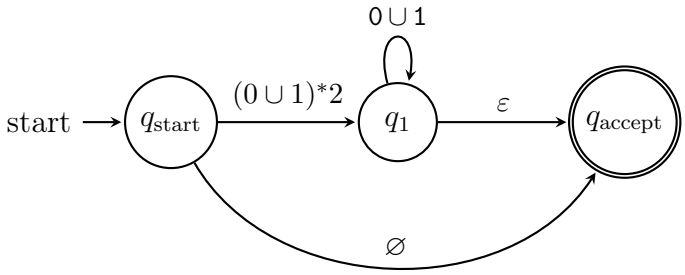


- Rimuoviamo quindi lo stato q_0 calcolando le nuove transizioni:

$$\delta'(q_{\text{start}}, q_1) = \delta(q_{\text{start}}, q_0)\delta(q_0, q_0)^*\delta(q_0, q_1) \cup \delta(q_{\text{start}}, q_1) = \varepsilon(0 \cup 1)^*2 \cup \varnothing = (0 \cup 1)^*2$$

$$\delta'(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}) = \delta(q_{\text{start}}, q_0)\delta(q_0, q_0)^*\delta(q_0, q_{\text{accept}}) \cup \delta(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}) = \varepsilon(0 \cup 1)^*\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

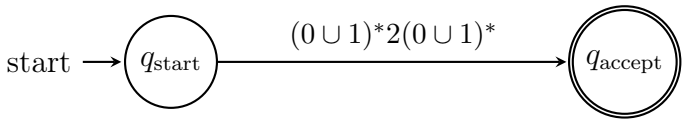
$$\delta'(q_1, q_{\text{accept}}) = \delta(q_1, q_0)\delta(q_0, q_0)^*\delta(q_0, q_{\text{accept}}) \cup \delta(q_1, q_{\text{accept}}) = \varnothing(0 \cup 1)^*\varnothing \cup \varepsilon = \varepsilon$$



- Infine, rimuoviamo lo stato q_1 calcolando le nuove transizioni:

$$\delta''(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}) = \delta'(q_{\text{start}}, q_1)\delta'(q_1, q_1)^*\delta'(q_1, q_{\text{accept}}) \cup \delta'(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}) =$$
$$= (0 \cup 1)^*2(0 \cup 1)^*\varepsilon \cup \varnothing = (0 \cup 1)^*2(0 \cup 1)^*$$

- Il GNFA minimale, dunque, corrisponde a:



Corollario 4: Conversione da GNFA ad espressione regolare

Date le due classi di linguaggi $\mathcal{L}(\text{GNFA})$ e $\mathcal{L}(\text{re})$, si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{GNFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{re})$$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \mathcal{L}(\text{GNFA})$, sia $G := (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ il GNFA tale che $L(G) = L$
- Dato il GNFA G' ottenuto applicando `reduceGNFA`, sia $R \in \text{re}(\Sigma)$ l'espressione regolare tale che $R = \delta'(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$. Essendo l'unica transizione di G' ed essendo G' equivalente a G, ne segue automaticamente che:

$$L = L(G) = L(G') = L(R) \in \text{re}(\Sigma)$$

da cui traiamo che:

$$\mathcal{L}(\text{GNFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{re})$$

□

1.5.2 Equivalenza tra espressioni e linguaggi regolari

Teorema 8: Equivalenza tra espressioni e linguaggi regolari

Data la classe $\mathcal{L}(\text{re})$, si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{re}) = \text{REG}$$

Dimostrazione.

Prima implicazione.

- Tramite la Conversione da espressione regolare a NFA, otteniamo che:

$$\mathcal{L}(\text{re}) \subseteq \mathcal{L}(\text{NFA}) = \text{REG}$$

- Inoltre, in quando un NFA è anche un GNFA, ne segue automaticamente che:

$$\mathcal{L}(\text{NFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{GNFA})$$

Seconda implicazione.

- Tramite la Conversione da DFA a GNFA e Conversione da GNFA ad espressione regolare, otteniamo che:

$$\text{REG} = \mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{GNFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{re})$$

□

Corollario 5: Classi dei linguaggi regolari

Dato un alfabeto Σ, si ha che:

$$\text{REG} := \mathcal{L}(\text{DFA}) = \mathcal{L}(\text{NFA}) = \mathcal{L}(\text{GNFA}) = \mathcal{L}(\text{re})$$

1.6 Linguaggi non regolari

Consideriamo il seguente linguaggio composto dalle stringhe aventi un numero uguale di simboli 0 ed 1:

$$L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Nel provare a costruire un automa che riconosca tale linguaggio, notiamo che sarebbe necessario che l'automa avesse **infiniti stati**, in quanto esso dovrebbe memorizzare la quantità di simboli 0 ed 1 letti. Di conseguenza, non è possibile costruire un **automa a stati finiti** (dunque un DFA, NFA o GNFA) che riconosca tale linguaggio.

Definizione 22: Linguaggio non regolare

Dato un alfabeto Σ, definiamo un linguaggio L di Σ come **non regolare** se $L \notin$ REG, dunque se non è possibile definire un automa a stati finiti che lo riconosce o un'espressione regolare che lo descrive

1.6.1 Pumping lemma per i linguaggi regolari

Definizione 23: Lunghezza di una stringa

Dato un linguaggio L e una stringa $s \in L$, indichiamo con $|s|$ la sua **lunghezza**, ossia la quantità di simboli al suo interno

Lemma 3: Pumping lemma per i linguaggi regolari

Dato un linguaggio L, se $L \in$ REG allora $\exists p \in \mathbb{N}$, detto **lunghezza del pumping**, tale che $\forall s := xyz \in L$, con $|s| \geq p$ e $x, y, z \in L$ (ossia sono sue sottostringhe), si ha che:

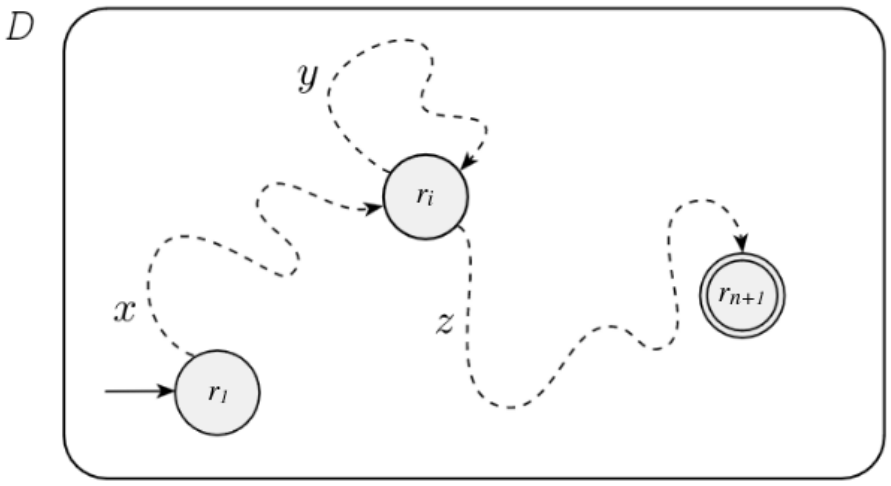
- $\forall i \in \mathbb{N} \;\; xy^i z \in L$, ossia è possibile concatenare y per i volte rimanendo in L
- $|y| > 0$, dunque $y \neq \varepsilon$
- $|xy| \leq p$, ossia y deve trovarsi nei primi p simboli di s

Dimostrazione.

- Poiché $L \in$ REG, sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il DFA tale che $L = L(D)$
- Consideriamo quindi $p := |Q|$. Data la stringa $s := s_1 \dots s_n \in L$ dove $s_1, \dots, s_n \in \Sigma$ e dove $n \geq p$, consideriamo la sequenza di stati $r_1, \dots, r_{n+1}$ tramite cui s viene accettata da D:
$$\forall k \in [1, n] \;\; \delta(r_k, s_k) = r_{k+1}$$
- Notiamo quindi che $|r_1, \dots, r_{n+1}| = n + 1$, ossia che il numero di stati attraversati sia $n + 1$. Inoltre, in quanto $n \geq p$, ne segue automaticamente che $n + 1 \geq p + 1$. Tuttavia, poiché $p := |Q|$ e $n + 1 \geq p + 1$, ne segue necessariamente che $\exists i, j \in [1, n + 1] \mid i < j \leq p + 1 \wedge r_i = r_j$, ossia che tra i primi $p + 1$ stati della sequenza vi sia almeno uno stato ripetuto
- A questo punto, consideriamo le seguenti sottostringhe di s:
  - $x = s_1 \dots s_{i-1}$, tramite cui si ha che $\delta^*(r_1, x) = r_i$
  - $y = s_i \dots s_{j-1}$, tramite cui si ha che $\delta^*(r_i, y) = r_j = r_i$
  - $z = s_j \dots s_n$, tramite cui si ha che $\delta^*(r_j, z) = r_n$

- Poiché $\delta^*(r_i, y) = r_i$, ossia y porta sempre r_i in se stesso, ne segue automaticamente che
$$\forall k \in \mathbb{N} \;\; \delta^*(r_i, y^k) = r_i \implies \delta(r_1, xy^k z) \in F \implies xy^k z \in L(D) = L$$
- Inoltre, ne segue direttamente che $|y| > 0$ in quanto $i < j$ e che $|xy| \leq p$ in quanto $j \leq p + 1$

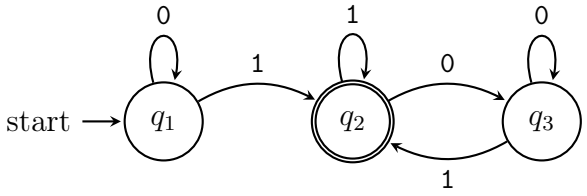
□



Interpretazione grafica della dimostrazione precedente

Esempio:

- Consideriamo il seguente linguaggio $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x := y1, \exists y \in \{0,1\}^*\}$
- Tale linguaggio risulta essere regolare in quanto il seguente DFA è in grado di riconoscerlo:



- Essendo un linguaggio regolare, per esso vale il Pumping lemma per i linguaggi regolari. Ad esempio, preso $p = 5$ e la stringa $s := 0100010101 \in L$, è possibile separare s in tre sottostringhe $x := 010$, $y = 00$ e $z = 10101$ tali che:
  - $xy^0z = 01010101 \in L$
  - $xy^1z = 0100010101 \in L$
  - $xy^2z = 010000010101 \in L$
  - $xy^3z = 01000000010101 \in L$
  - ...

Osservazione 6: Dimostrazione di non regolarità

Il Pumping lemma per i linguaggi regolari può essere utilizzato per dimostrare che un linguaggio **non è regolare**

Esempio:

- Consideriamo il seguente linguaggio $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Supponiamo per assurdo che L sia regolare. In tal caso, ne segue che per esso debba valere il pumping lemma, dove p è la lunghezza del pumping
- Consideriamo quindi la stringa $s := 0^p 1^p \in L$. Poiché $|s| \geq p$, possiamo suddividerla in tre sottostringhe $x, y, z \in L$ tali che $s = xyz$, per poi procedere con uno dei due seguenti approcci:
  1. **Approccio enumerativo**:
     - Se y è composta da soli 0, allora ogni stringa generata dal pumping non sarà in L in quanto il numero di 0 sarà superiore al numero di 1
     - Se y è composta da soli 1, allora ogni stringa generata dal pumping non sarà in L in quanto il numero di 1 sarà superiore al numero di 0
     - Se y è composta sia da 0 che da 1, allora ogni stringa generata dal pumping non sarà in L in quanto esse assumeranno la forma $0000 \ldots 101010 \ldots 1111$
     - Di conseguenza, poiché in ogni caso viene contraddetto il pumping lemma, ne segue necessariamente che L non sia regolare
  2. **Approccio condizionale**:
     - Poiché la terza condizione del pumping lemma impone che $|xy| \leq p$ e poiché $s := 0^p 1^p$, ne segue che $x = 0^m$, $y = 0^k$ e $z = 1^p$, dove $p = m + k$
     - Inoltre, per la seconda condizione, si ha che $|y| > 0$, dunque necessariamente $k > 0$ e dunque $m < p$
     - A questo punto, consideriamo $i = 0$. Notiamo immediatamente che $xy^i z = 0^m \varepsilon 1^p = 0^m 1^p \notin L$, in quanto $m < p$.
     - Di conseguenza, la terza e la seconda condizione contraddicono la prima condizione. Dunque, ne segue necessariamente che L non sia regolare