SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

"Sapienza" Università di Roma
Ingegneria dell'Informazione,
Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Automi, Calcolabilità e Complessità

Appunti integrati con il libro "Introduzione alla teoria della computazione", Michael Sipser

Author
Simone Bianco

29 settembre 2023

Indice

Informazioni e Contatti

Appunti e riassunti personali raccolti in ambito del corso di *Automi, Calcolabilità e Complessità* offerto dal corso di laurea in Informatica dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".

Ulteriori informazioni ed appunti possono essere trovati al seguente link: **https://github.com/Exyss/university-notes**. Chiunque si senta libero di segnalare incorrettezze, migliorie o richieste tramite il sistema di Issues fornito da GitHub stesso o contattando in privato l'autore :

- Email: **bianco.simone@outlook.it**
- LinkedIn: **Simone Bianco**

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se le modifiche siano già state apportate nella versione più recente.

Prerequisiti consigliati per lo studio:

Apprendimento del materiale relativo al corso *Progettazione di Algoritmi*.

Licence:

1 Automi e Linguaggi

Definizione 1: Alfabeto

Definiamo come **alfabeto** un insieme finito di elementi detti **caratteri**

Esempio:

- L'insieme $\Sigma = \{0, 1, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$ è un alfabeto
- L'insieme $\Sigma = \{0, 1\}$ è un alfabeto. In particolare, tale alfabeto viene detto **alfabeto binario**

Definizione 2: Stringa

Dato un alfabeto Σ, definiamo come **stringa di** Σ una sequenza di caratteri $x_1 x_2 \dots x_n$ dove $x_1, \dots, x_n \in \Sigma$ e $n \in \mathbb{N}$.

In particolare, indichiamo come ε la **stringa vuota**

Esempio:

- Dato l'alfabeto $\Sigma = \{0, 1, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$, una stringa di Σ è 0x1yyy0

Definizione 3: Linguaggio

Dato un alfabeto Σ, definiamo come **linguaggio di** Σ, indicato come Σ^*, l'insieme delle stringhe di Σ.

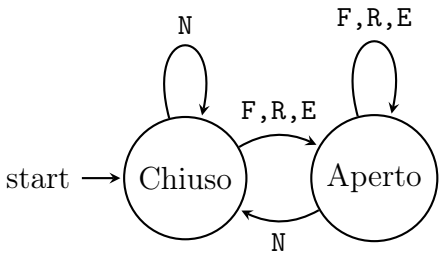
In particolare, notiamo che $\varepsilon \in \Sigma^*$ per qualsiasi linguaggio Σ^*

Definizione 4: Automa

Un **automa** è un meccanismo di controllo (o macchina) progettato per seguire automaticamente una sequenza di operazioni o rispondere a istruzioni predeterminate, mantenendo informazioni relative allo **stato** attuale dell'automa stesso ed agendo di conseguenza, **passando da uno stato all'altro**.

Esempio:

- Un sensore che apre e chiude una porta può essere descritto tramite il seguente automa, dove `Chiuso` e `Aperto` sono gli stati dell'automa e `N`, `F`, `R` e `E` sono le operazioni di transizione tra i due stati indicanti rispettivamente:
  - `N`: il sensore non rileva alcuna persona da entrambi i lati della porta
  - `F`: il sensore rileva qualcuno nel lato frontale della porta
  - `R`: il sensore rileva qualcuno nel lato retrostante della porta
  - `E`: il sensore rileva qualcuno da entrambi i lati della porta



- L'automa appena descritto è in grado di interpretare una **stringa in input** che ne descriva la sequenza di operazioni da svolgere
- Ad esempio, la stringa `NFNNNFRR` terminerà l'esecuzione dell'automa sullo stato `Aperto`

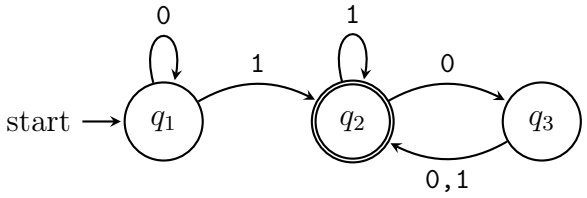
Definizione 5: Deterministic Finite Automaton (DFA)

Un **Deterministic Finite Automaton (DFA)** (o *Automa Deterministico a Stati Finiti*) è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove:

- Q è l'**insieme finito degli stati** dell'automa, ossia l'insieme
- Σ è l'**alfabeto** dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ è la **funzione di transizione degli stati** dell'automa
- $q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale** dell'automa
- $F \subseteq Q$ è l'**insieme degli stati accettanti** dell'automa, ossia l'insieme degli stati su cui, a seguito della lettura di una stringa in input, l'automa accetta la corretta terminazione

Esempio:

- Consideriamo il seguente DFA



  dove:

  - $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ è l'insieme degli stati dell'automa
  - $\Sigma = \{0, 1\}$ è l'alfabeto dell'automa
  - $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ definita come

δ	q_1	q_2	q_3
0	q_1	q_3	q_2
1	q_2	q_2	q_2

    è la funzione di transizione degli stati dell'automa
  - $q_0 := q_1 \in Q$ è lo stato iniziale dell'automa
  - $F = \{q_2\}$ è l'insieme degli stati accettanti

Definizione 6: Funzione di transizione estesa

Sia $M := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Definiamo $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ come **funzione di transizione estesa di** M la funzione definita ricorsivamente come:

- $\delta^*(q, \varepsilon) = \delta(q, \varepsilon) = q$
- $\delta^*(q, ax) = \delta^*(\delta(q, a), x)$, dove $a \in \Sigma, x \in \Sigma^*$

Definizione 7: Stringa accettata

Sia $M := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Data una stringa $x \in \Sigma^*$, diciamo che x è **accettata da** M se $\delta^*(q_0, x) \in F$, ossia l'interpretazione di tale stringa **termina su uno stato accettante**

Esempio:

- Consideriamo ancora il DFA dell'esempio precedente.
- La stringa 0101 è accettata da tale DFA, poiché:

$$\delta^*(q_1, 0101) = \delta^*(\delta(q_1, 0), 101) = \delta^*(q_2, 101) = \delta^*(\delta(q_2, 1), 01) = \delta^*(q_2, 01) =$$

$$= \delta^*(\delta(q_2, 0), 1) = \delta^*(q_3, 1) == \delta^*(\delta(q_3, 1), \varepsilon) = \delta^*(q_2, \varepsilon) = q_2 \in F$$

- La stringa 1010, invece, non è accettata dal DFA, poiché:

$$\delta^*(q_1, 1010) = \delta^*(q_2, 010) = \delta^*(q_3, 10) = \delta^*(q_2, 0) = \delta^*(q_3, \varepsilon) = q_3 \notin F$$

Definizione 8: Linguaggio di un DFA

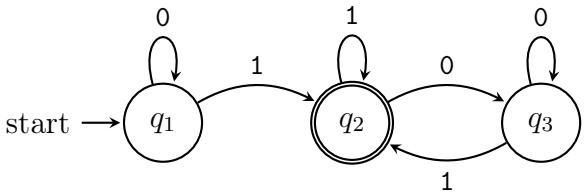
Sia $M := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Definiamo come **linguaggio di** M, indicato come $L(M)$, l'insieme di stringhe accettate da M

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) \in F\}$$

Inoltre, diciamo che M **riconosce** $L(M)$

Esempi:

1. - Consideriamo il seguente DFA M



   - Il linguaggio riconosciuto da tale DFA corrisponde a

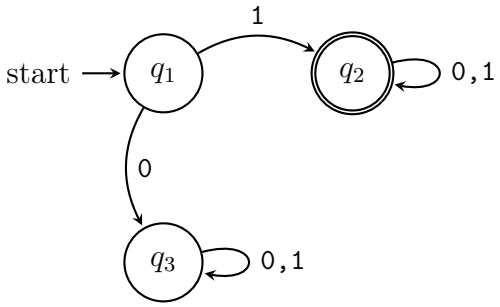
$$L(M) = \{x \in \{0,1\}^* \mid x := y1, \exists y \in \{0,1\}^*\}$$

     ossia al linguaggio composto da tutte le stringhe terminanti con 1

2. - Consideriamo il seguente linguaggio

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid 1y, \exists y \in \{0,1\}^*\}$$

   - Un DFA in grado di riconoscere tale linguaggio corrisponde a

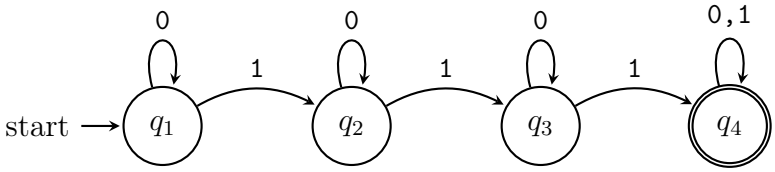


3. • Consideriamo il seguente linguaggio

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid w_H(x) \geq 3\}$$

dove w_H è il **peso di Hamming** (ossia $w_H(x) = \texttt{numero di "1" in } x$)

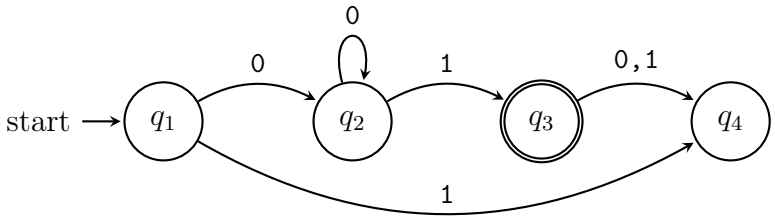
• Un DFA in grado di riconoscere tale linguaggio corrisponde a



4. • Consideriamo il seguente linguaggio

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid 0^n 1, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

• Un DFA in grado di riconoscere tale linguaggio corrisponde a



Definizione 9: Linguaggi regolare

Dato un linguaggio Σ^*, definiamo come **insieme dei linguaggi regolari di** Σ^*, indicato con REG, l'insieme dei sottolinguaggi per cui esiste un DFA che riconosce tale linguaggi

$$REG = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{DFA } M \text{ tale che } L = L(M)\}$$

Definizione 10: Configurazione di un DFA

Sia $M := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Definiamo la coppia $(q, x) \in Q \times \Sigma^*$ come **configurazione di** M

Definizione 11: Passo di computazione

Definiamo come **passo di computazione** la relazione binaria definita come

$$(p, ax) \vdash_M (q, x) \iff \delta(p, a) = q$$

Proposizione 1: Chiusura del passo di computazione

Sia $M := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. La **chiusura riflessiva e transitiva** di $\vdash_M$, indicata come $\vdash_M^*$, gode delle seguenti proprietà:

- $p, ax) \vdash_M (q, x) \implies (p, ax) \vdash_M^* (q, x)$
- $\forall q \in Q, x \in \Sigma^* \ \ (q, x) \vdash_M^* (q, x)$
- $(p, aby) \vdash_M (q, by) \land (q, by) \vdash (r, y) \implies (p, aby) \vdash_M^* (r, y)$

Osservazione 1

Sia $M := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Dati $q_i, q_f \in Qx \in \Sigma^*$, si ha che

$$\delta^*(q_i, x) = q_f \iff (q_i, x) \vdash_M^* (q_f, \varepsilon)$$

(*dimostrazione omessa*)