



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

“SAPIENZA” UNIVERSITÀ DI ROMA
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,
INFORMATICA E STATISTICA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Automi, Calcolabilità e Complessità

Appunti integrati con il libro "Introduzione alla teoria
della computazione", Michael Sipser

Author
Simone Bianco

1 dicembre 2023

Indice

Informazioni e Contatti	1
1 Linguaggi regolari	2
1.1 Linguaggi	2
1.2 Determinismo	5
1.3 Non determinismo	9
1.3.1 Equivalenza tra NFA e DFA	12
1.4 Chiusure dei linguaggi regolari	15
1.5 Espressioni regolari	20
1.5.1 NFA generalizzati	23
1.5.2 Equivalenza tra espressioni e linguaggi regolari	29
1.6 Pumping lemma per i linguaggi regolari	30
1.7 Esercizi svolti	33
2 Linguaggi acontestuali	38
2.1 Grammatiche acontestuali	38
2.2 Linguaggi acontestuali ad estensione dei regolari	42
2.3 Forma normale di Chomsky	44
2.4 Automi a pila	47
2.4.1 Equivalenza tra CFG e PDA	50
2.5 Pumping lemma per i linguaggi acontestuali	55
2.6 Chiusure dei linguaggi acontestuali	60
3 Decidibilità	67
3.1 Macchine di Turing	67
3.1.1 Varianti della macchina di Turing	72
3.2 Tesi di Church-Turing	77
3.3 Problemi decidibili	79
3.4 Problemi indecidibili	85
3.4.1 Argomento diagonale di Cantor	85

Informazioni e Contatti

Appunti e riassunti personali raccolti in ambito del corso di *Automi, Calcolabilità e Complessità* offerto dal corso di laurea in Informatica dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".

Ulteriori informazioni ed appunti possono essere trovati al seguente link:

<https://github.com/Exyss/university-notes>. Chiunque si senta libero di segnalare incorrettezze, migliorie o richieste tramite il sistema di Issues fornito da GitHub stesso o contattando in privato l'autore :

- Email: bianco.simone@outlook.it
- LinkedIn: [Simone Bianco](#)

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se le modifiche siano già state apportate nella versione più recente.

Prerequisiti consigliati per lo studio:

Apprendimento del materiale relativo al corso *Progettazione di Algoritmi*.

Licence:

These documents are distributed under the [GNU Free Documentation License](#), a form of copyleft intended for use on a manual, textbook or other documents. Material licensed under the current version of the license can be used for any purpose, as long as the use meets certain conditions:

- All previous authors of the work must be **attributed**.
- All changes to the work must be **logged**.
- All derivative works must be **licensed under the same license**.
- The full text of the license, unmodified invariant sections as defined by the author if any, and any other added warranty disclaimers (such as a general disclaimer alerting readers that the document may not be accurate for example) and copyright notices from previous versions must be maintained.
- Technical measures such as DRM may not be used to control or obstruct distribution or editing of the document.

1

Linguaggi regolari

1.1 Linguaggi

Definizione 1: Alfabeto

Definiamo come **alfabeto** un insieme finito di elementi detti **simboli**

Esempio:

- L'insieme $\Sigma = \{0, 1, x, y, z\}$ è un alfabeto
- L'insieme $\Sigma = \{0, 1\}$ è un alfabeto. In particolare, tale alfabeto viene detto **alfabeto binario**

Definizione 2: Stringa

Data una sequenza di simboli $w_1, \dots, w_n \in \Sigma$, definiamo:

$$w := w_1 \dots w_n$$

come **stringa** (o **parola**) di Σ

Esempio:

- Dato l'alfabeto $\Sigma = \{0, 1, x, y, z\}$, una stringa di Σ è $0x1yyy0$

Definizione 3: Linguaggio

Dato un alfabeto Σ , definiamo come **linguaggio** di Σ , indicato come Σ^* , l'insieme delle stringhe di Σ

Definizione 4: Lunghezza di una stringa

Data una stringa $w \in \Sigma^*$, definiamo la **lunghezza di** w , indicata come $|w|$, come il numero di simboli presenti in w

Definizione 5: Concatenazione

Data la stringa $x := x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ e la stringa $y := y_1 \dots y_m \in \Sigma^*$, definiamo come **concatenazione di** x **con** y la seguente operazione:

$$xy = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$$

Proposizione 1: Stringa vuota

Indichiamo con ε la **stringa vuota**, ossia l'unica stringa tale che:

- $|\varepsilon| = 0$
- $\forall w \in \Sigma^* \quad w \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w = w$
- $\Sigma^* \neq \emptyset \implies \varepsilon \in \Sigma^*$

Definizione 6: Conteggio

Data una stringa $w \in \Sigma^*$ e un simbolo $a \in \Sigma$ definiamo il **conteggio di** a **in** w , indicato come $|w|_a$, il numero di simboli uguali ad a presenti in w

Esempio:

- Data la stringa $w := 010101000 \in \{0, 1\}^*$, si ha che $|w|_0 = 6$ e $|w|_1 = 3$

Definizione 7: Stringa rovesciata

Data una stringa $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$, dove $a_1 \dots a_n \in \Sigma$, definiamo la sua **stringa rovesciata**, indicata con w^R , come $w^R = a_n \dots a_1$.

Esempio:

- Data la stringa $w := abcdefg \in \Sigma^*$, si ha che $w^R = gfedcba$

Definizione 8: Potenza

Data la stringa $w \in \Sigma^*$ e dato $n \in \mathbb{N}$, definiamo come **potenza** la seguente operazione:

$$w^n = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } n = 0 \\ ww^{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Proposizione 2: Operazioni sui linguaggi

Dati i linguaggi $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, definiamo le seguenti operazioni:

- Operatore unione:

$$L_1 \cup L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$$

- Operatore intersezione:

$$L_1 \cap L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L_1 \wedge w \in L_2\}$$

- Operatore complemento:

$$\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$$

- Operatore concatenazione:

$$L_1 \circ L_2 = \{xy \in \Sigma^* \mid x \in L_1, y \in L_2\}$$

- Operatore potenza:

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{se } n = 0 \\ L \circ L^{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

- Operatore star di Kleene:

$$L^* = \{w_1 \dots w_k \in \Sigma^* \mid k \geq 0, \forall i \in [1, k] \ w_i \in L\} = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

- Operatore plus di Kleene:

$$L^+ = \{w_1 \dots w_k \in \Sigma^* \mid k \geq 1, \forall i \in [1, k] \ w_i \in L\} = \bigcup_{n \geq 1} L^n = L \circ L^*$$

Teorema 1: Leggi di DeMorgan

Dati due linguaggi L_1 e L_2 , si ha che:

$$L_1 \cup L_2 = \overline{\overline{L_1} \cap \overline{L_2}}$$

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

(dimostrazione omessa)

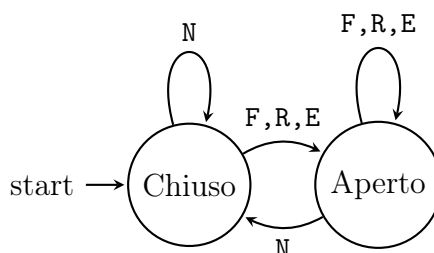
1.2 Determinismo

Definizione 9: Automa

Un **automa** è un meccanismo di controllo (o macchina) progettato per seguire automaticamente una sequenza di operazioni o rispondere a istruzioni predeterminate, mantenendo informazioni relative allo **stato** attuale dell'automa stesso ed agendo di conseguenza, **passando da uno stato all'altro**.

Esempio:

- Un sensore che apre e chiude una porta può essere descritto tramite il seguente automa, dove **Chiuso** e **Aperto** sono gli stati dell'automa e N, F, R e E sono le operazioni di transizione tra i due stati indicanti rispettivamente:
 - N: il sensore non rileva alcuna persona da entrambi i lati della porta
 - F: il sensore rileva qualcuno nel lato frontale della porta
 - R: il sensore rileva qualcuno nel lato retrostante della porta
 - E: il sensore rileva qualcuno da entrambi i lati della porta



- L'automa appena descritto è in grado di interpretare una **stringa in input** che ne descriva la sequenza di operazioni da svolgere (es: la stringa **NFNNNFRR** terminerà l'esecuzione dell'automa sullo stato **Aperto**)

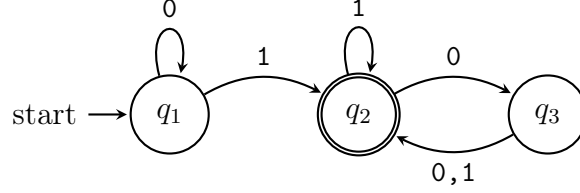
Definizione 10: Deterministic Finite Automaton (DFA)

Un **Deterministic Finite Automaton (DFA)** (o *Automa Deterministico a Stati Finiti*) è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove:

- Q è l'**insieme finito degli stati** dell'automa
- Σ è l'**alfabeto** dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ è la **funzione di transizione degli stati** dell'automa
- $q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale** dell'automa
- $F \subseteq Q$ è l'**insieme degli stati accettanti** dell'automa, ossia l'insieme degli stati su cui, a seguito della lettura di una stringa in input, l'automa accetta la corretta terminazione

Esempio:

- Consideriamo il seguente DFA



dove:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ è l'insieme degli stati dell'automa
- $\Sigma = \{0, 1\}$ è l'alfabeto dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ definita come

δ	q_1	q_2	q_3
0	q_1	q_3	q_2
1	q_2	q_2	q_2

è la funzione di transizione degli stati dell'automa

- q_1 è lo stato iniziale dell'automa
- $F = \{q_2\}$ è l'insieme degli stati accettanti

Definizione 11: Funzione di transizione estesa

Sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Definiamo $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ come **funzione di transizione estesa di D** la funzione definita ricorsivamente come:

$$\begin{cases} \delta^*(q, \varepsilon) = \delta(q, \varepsilon) = q \\ \delta^*(q, aw) = \delta^*(\delta(q, a), w), \text{ dove } a \in \Sigma, w \in \Sigma^* \end{cases}$$

Proposizione 3: Stringa accettata in un DFA

Sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Data una stringa $w \in \Sigma^*$, diciamo che w è **accettata da D** se $\delta^*(q_0, w) \in F$, ossia l'interpretazione di tale stringa **termina su uno stato accettante**

Esempio:

- Consideriamo ancora il DFA dell'esempio precedente.
- La stringa 0101 è accettata da tale DFA, poiché:

$$\begin{aligned} \delta^*(q_1, 0101) &= \delta^*(\delta(q_1, 0), 101) = \delta^*(q_2, 101) = \delta^*(\delta(q_2, 1), 01) = \delta^*(q_2, 01) = \\ &= \delta^*(\delta(q_2, 0), 1) = \delta^*(q_3, 1) = \delta^*(\delta(q_3, 1), \varepsilon) = \delta^*(q_2, \varepsilon) = q_2 \in F \end{aligned}$$

- La stringa 1010, invece, non è accettata dal DFA, poiché:

$$\delta^*(q_1, 1010) = \delta^*(q_2, 010) = \delta^*(q_3, 10) = \delta^*(q_2, 0) = \delta^*(q_3, \varepsilon) = q_3 \notin F$$

Definizione 12: Linguaggio di un automa

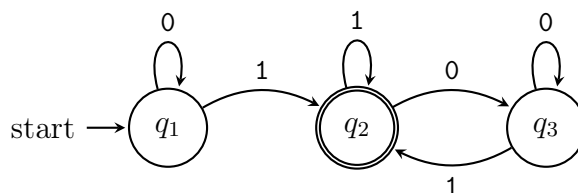
Sia A un automa. Definiamo come **linguaggio di A** , indicato come $L(A)$, l'insieme di stringhe accettate da A

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid A \text{ accetta } w\}$$

Inoltre, diciamo che D **riconosce** $L(A)$

Esempi:

- Consideriamo il seguente DFA D



- Il linguaggio riconosciuto da tale DFA corrisponde a

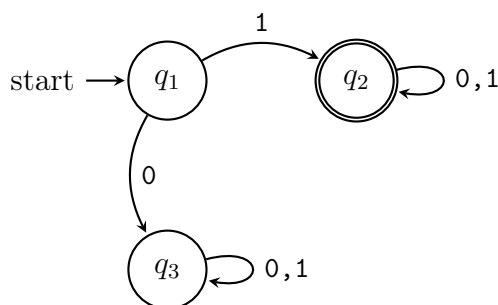
$$L(D) = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x := y1, \exists y \in \{0, 1\}^*\}$$

ossia al linguaggio composto da tutte le stringhe terminanti con 1

- Consideriamo il seguente linguaggio

$$L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid 1y, \exists y \in \{0, 1\}^*\}$$

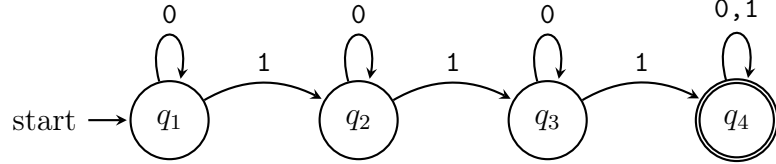
- Un DFA in grado di riconoscere tale linguaggio corrisponde a



3. • Consideriamo il seguente linguaggio

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_1 \geq 3\}$$

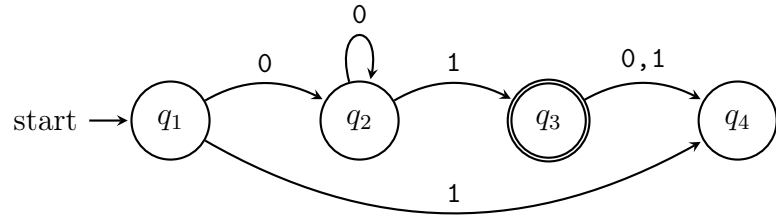
- Un DFA in grado di riconoscere tale linguaggio corrisponde a



4. • Consideriamo il seguente linguaggio

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w := 0^n 1, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

- Un DFA in grado di riconoscere tale linguaggio corrisponde a



Definizione 13: Configurazione di un DFA

Sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Definiamo la coppia $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$ come **configurazione di D**

Definizione 14: Passo di computazione in un DFA

Definiamo come **passo di computazione** la relazione binaria definita come

$$(p, aw) \vdash_D (q, w) \iff \delta(p, a) = q$$

Definizione 15: Computazione deterministica

Definiamo una computazione come **deterministica** se ad ogni passo di computazione segue un'unica configurazione:

$$\forall (q, aw) \exists! (p, w) \mid (q, aw) \vdash_D (p, w)$$

Proposizione 4: Chiusura del passo di computazione

Sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. La **chiusura riflessiva e transitiva** di \vdash_D , indicata come \vdash_D^* , gode delle seguenti proprietà:

- $(p, aw) \vdash_D (q, w) \implies (p, aw) \vdash_D^* (q, w)$
- $\forall q \in Q, w \in \Sigma^* \quad (q, w) \vdash_D^* (q, w)$
- $(p, abw) \vdash_D (q, bw) \wedge (q, bw) \vdash_D (r, w) \implies (p, abw) \vdash_D^* (r, w)$

Osservazione 1

Sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Dati $q_i, q_f \in Q, w \in \Sigma^*$, si ha che

$$\delta^*(q_i, w) = q_f \iff (q_i, w) \vdash_D^* (q_f, \varepsilon)$$

1.3 Non determinismo

Definizione 16: Alfabeto epsilon

Dato un alfabeto Σ , definiamo $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ come **alfabeto epsilon** di Σ

Definizione 17: Non-deterministic Finite Automaton (NFA)

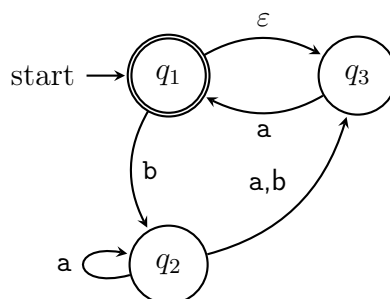
Un **Non-deterministic Finite Automaton (NFA)** (o *Automa Non-deterministico a Stati Finiti*) è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove:

- Q è l'**insieme finito degli stati** dell'automa
- Σ è l'**alfabeto** dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ è la **funzione di transizione degli stati** dell'automa
- $q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale** dell'automa
- $F \subseteq Q$ è l'**insieme degli stati accettanti** dell'automa

Nota: $\mathcal{P}(Q)$ è l'insieme delle parti di Q , ossia l'insieme contenente tutti i suoi sottoinsiemi possibili

Esempio:

- Consideriamo il seguente NFA



dove:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ è l'insieme degli stati dell'automa
- $\Sigma = \{a, b\}$ è l'alfabeto dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ definita come

δ	q_1	q_2	q_3
ε	$\{q_3\}$	\emptyset	\emptyset
a	\emptyset	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	\emptyset

è la funzione di transizione degli stati dell'automa

- q_1 è lo stato iniziale dell'automa
- $F = \{q_1\}$ è l'insieme degli stati accettanti

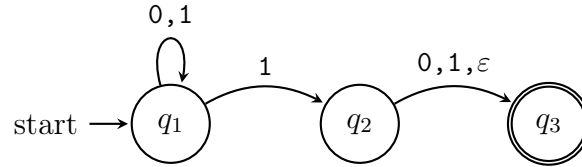
Osservazione 2: Computazione in un NFA

Sia $N := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA. Data una stringa $w \in \Sigma_\varepsilon$ in ingresso, la **computazione** viene eseguita nel seguente modo:

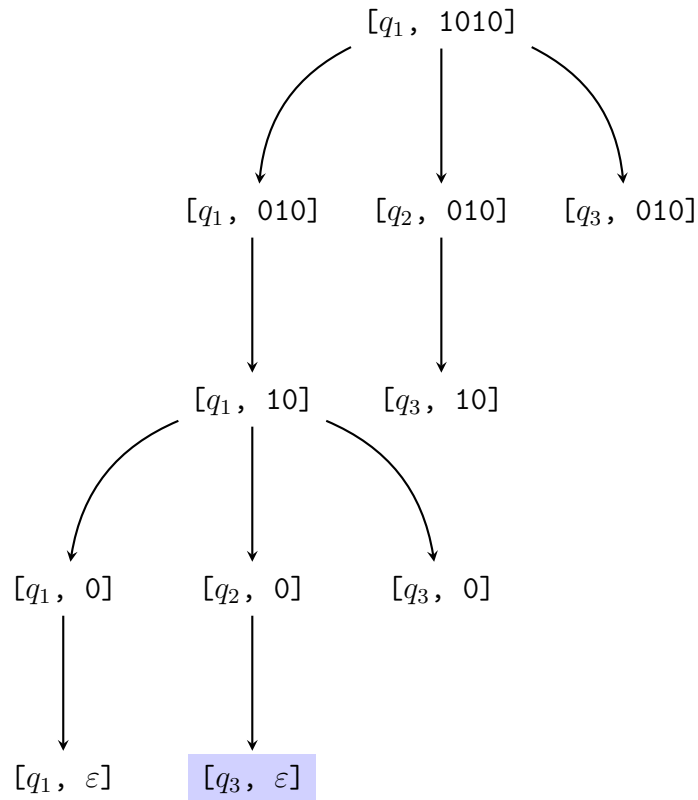
- Tutte le volte che uno stato potrebbe avere più transizioni per diversi simboli dell'alfabeto, l'automa N si duplica in **più copie**, ognuna delle quali segue il suo corso. Si vengono così a creare più **rami di computazione** indipendenti che sono eseguiti in **parallelo**.
- Se il prossimo simbolo della stringa da computare non si trova su nessuna delle transizioni uscenti dello stato attuale di un ramo di computazione, l'intero ramo **termina la sua computazione** (terminazione incorretta).
- Se almeno una delle copie di N termina correttamente su uno stato di accettazione, l'automa **accetta la stringa di partenza**.
- Quando a seguito di una computazione ci si ritrova in uno stato che possiede un ε -arco in uscita, la macchina si duplica in più copie: quelle che seguono gli ε -archi e quella che rimane nello stato raggiunto.

Esempio:

- Consideriamo il seguente NFA



- Supponiamo che venga computata la stringa $w = 1010$:



- Poiché esiste un ramo che termina correttamente, l'NFA descritto accetta la stringa $w = 1010$

Proposizione 5: Stringa accettata in un NFA

Sia $N := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA. Data una stringa $w := w_0 \dots w_k \in \Sigma^*$, dove $w_0, \dots, w_k \in \Sigma_\varepsilon$, diciamo che w è **accettata da** N se esiste una sequenza di stati $r_0, r_1, \dots, r_{k+1} \in Q$ tali che:

- $r_0 = q_0$
- $\forall i \in [0, k] \quad r_{i+1} \in \delta(r_i, w_i)$
- $r_{k+1} \in F$

1.3.1 Equivalenza tra NFA e DFA

Definizione 18: Classe dei linguaggi riconosciuti da un DFA

Dato un alfabeto Σ , definiamo come **classe dei linguaggi di Σ riconosciuti da un DFA** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ DFA } D \text{ t.c. } L = L(D)\}$$

Definizione 19: Classe dei linguaggi riconosciuti da un NFA

Dato un alfabeto Σ , definiamo come **classe dei linguaggi di Σ riconosciuti da un NFA** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(\text{NFA}) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ NFA } N \text{ t.c. } L = L(N)\}$$

Teorema 2: Equivalenza tra NFA e DFA

Date le due classi di linguaggi $\mathcal{L}(\text{DFA})$ e $\mathcal{L}(\text{NFA})$, si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) = \mathcal{L}(\text{NFA})$$

Dimostrazione.

Prima implicazione.

- Dato $L \in \mathcal{L}(\text{DFA})$, sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il DFA tale che $L = L(D)$
- Poiché il concetto di NFA è una generalizzazione del concetto di DFA, ne segue automaticamente che D sia anche un NFA, implicando che $L \in \mathcal{L}(\text{NFA})$ e di conseguenza che:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{NFA})$$

Seconda implicazione.

- Dato $L \in \mathcal{L}(\text{NFA})$, sia $N := (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_{0_N}, F_N)$ il NFA tale che $L = L(N)$
- Consideriamo quindi il DFA $D := (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{0_D}, F_D)$ costruito tramite N stesso:

$$- Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$$

- Dato $R \in Q_D$, definiamo l'estensione di R come:

$$E(R) = \{q \in Q_N \mid q \text{ è raggiungibile in } N \text{ da } q' \in R \text{ tramite } k \geq 0 \text{ } \varepsilon\text{-archi}\}$$

$$- q_{0_D} = E(\{q_{0_N}\})$$

$$- F_D = \{R \in Q_D \mid R \cap F_N \neq \emptyset\}$$

– Dati $R \in Q_D$ e $a \in \Sigma$, definiamo δ_D come:

$$\delta_D = (R, a) = \bigcup_{r \in R} E(\delta_N(r, a))$$

• A questo punto, per costruzione stessa di D si ha che:

$$w \in L = L(N) \iff w \in L(D)$$

implicando dunque che $L \in \mathcal{L}(\text{DFA})$ e di conseguenza che:

$$\mathcal{L}(\text{NFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{DFA})$$

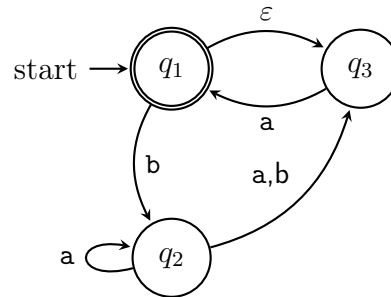
□

Osservazione 3

Dato un NFA N , seguendo i passaggi della dimostrazione precedente è possibile definire un DFA D equivalente ad N

Esempio:

• Consideriamo ancora il seguente NFA



• Definiamo quindi l'insieme degli stati del DFA equivalente a tale NFA:

$$Q_D = \{\emptyset, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2\}, \{q_2, q_3\}, \{q_1, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\} =$$

• Per facilitare la lettura, riscriviamo i vari stati con la seguente notazione

$$Q_D = \{\emptyset, q_1, q_2, q_3, q_{1,2}, q_{2,3}, q_{1,3}, q_{1,2,3}\}$$

• A questo punto, poniamo:

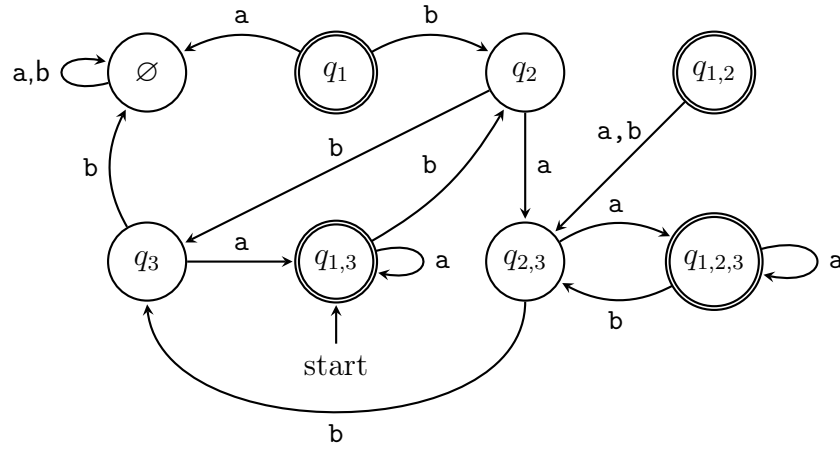
$$- q_{0_D} = E(\{q_{0_N}\}) = E(\{q_1\}) = \{q_1, q_3\} = q_{1,3}$$

$$- F_D = \{q_1, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,2,3}\}$$

- Le transizioni del DFA corrisponderanno invece a:

- $\delta_D(\{q_1\}, a) = E(\delta_N(q_1, a)) = \emptyset$
- $\delta_D(\{q_1\}, b) = E(\delta_N(q_1, b)) = \{q_2\} = q_2$
- $\delta_D(\{q_2\}, a) = E(\delta_N(q_2, a)) = \{q_2, q_3\} = q_{2,3}$
- $\delta_D(\{q_2\}, b) = E(\delta_N(q_2, b)) = \{q_2\} = q_2$
- $\delta_D(\{q_1, q_2\}, a) = E(\delta_N(q_1, a)) \cup E(\delta_N(q_2, a)) = \emptyset \cup \{q_2, q_3\} = \{q_2, q_3\} = q_{2,3}$
- $\delta_D(\{q_1, q_2\}, b) = E(\delta_N(q_1, b)) \cup E(\delta_N(q_2, b)) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\} = q_{2,3}$
- ...

- Il DFA equivalente corrisponde dunque a:



Definizione 20: Linguaggi regolari

Dato un alfabeto Σ , definiamo come **insieme dei linguaggi regolari di Σ** , indicato con REG , l'insieme delle classi dei linguaggi riconosciuti da un DFA:

$$\text{REG} := \mathcal{L}(\text{DFA})$$

Osservazione 4

Tramite il teorema dell'[Equivalenza tra NFA e DFA](#), si ha che:

$$\text{REG} := \mathcal{L}(\text{DFA}) = \mathcal{L}(\text{NFA})$$

1.4 Chiusure dei linguaggi regolari

Teorema 3: Chiusura dell'unione in REG

L'operatore unione è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \quad L_1 \cup L_2 \in \text{REG}$$

Dimostrazione I.

- Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, siano $D_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $D_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ i due DFA tali che $L_1 = L(D_1)$ e $L_2 = L(D_2)$
- Definiamo quindi il DFA $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che:

- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2) = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \vee r_2 \in F_2\}$
- $\forall (r_1, r_2) \in Q, a \in \Sigma$ si ha che:

$$\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$$

- A questo punto, per costruzione stessa di D ne segue che:

$$w \in L_1 \cup L_2 \iff w \in L(D)$$

dunque che $L_1 \cup L_2 = L(D) \in \text{REG}$

□

Dimostrazione II.

- Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, siano $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ i due NFA tali che $L_1 = L(N_1)$ e $L_2 = L(N_2)$
- Definiamo quindi il NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che:

- q_0 è un nuovo stato iniziale aggiunto
- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$
- $F = F_1 \cup F_2$
- $\forall q \in Q, a \in \Sigma$ si ha che:

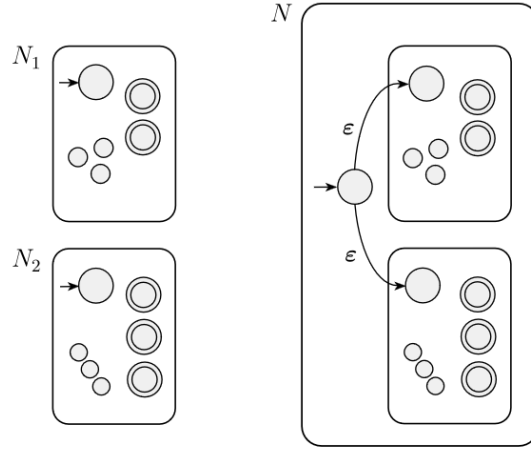
$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & \text{se } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & \text{se } q = q_0 \wedge a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_0 \wedge a \neq \varepsilon \end{cases}$$

- A questo punto, per costruzione stessa di N ne segue che:

$$w \in L_1 \cup L_2 \iff w \in L(N)$$

dunque che $L_1 \cup L_2 = L(N) \in \text{REG}$

□



Rappresentazione grafica della dimostrazione

Teorema 4: Chiusura dell'intersezione in REG

L'operatore intersezione è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \quad L_1 \cap L_2 \in \text{REG}$$

Dimostrazione.

- Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, siano $D_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $D_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ i due DFA tali che $L_1 = L(D_1)$ e $L_2 = L(D_2)$
- Definiamo quindi il DFA $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che:

- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $F = F_1 \times F_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \wedge r_2 \in F_2\}$
- $\forall (r_1, r_2) \in Q, a \in \Sigma$ si ha che:

$$\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$$

- A questo punto, per costruzione stessa di D ne segue che:

$$w \in L_1 \cap L_2 \iff w \in L(D)$$

dunque che $L_1 \cap L_2 = L(D) \in \text{REG}$

□

Teorema 5: Chiusura del complemento in REG

L'operatore complemento è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L \in \text{REG} \quad \bar{L} \in \text{REG}$$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \text{REG}$, sia $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il DFA tale che $L = L(D)$
- Definiamo quindi il DFA $D' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$, dunque il DFA uguale a D ma i cui stati accettanti sono invertiti. Per costruzione stessa di D' ne segue che:

$$w \in L \iff w \notin L(D)$$

dunque che $\bar{L} = L(D') \in \text{REG}$

□

Teorema 6: Chiusura della concatenazione in REG

L'operatore concatenazione è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \quad L_1 \circ L_2 \in \text{REG}$$

Dimostrazione.

- Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, siano $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ i due NFA tali che $L_1 = L(N_1)$ e $L_2 = L(N_2)$
- Definiamo quindi il NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che:
 - $q_0 = q_1$
 - $Q = Q_1 \cup Q_2$
 - $F = F_2$
 - $\forall q \in Q, a \in \Sigma$ si ha che:

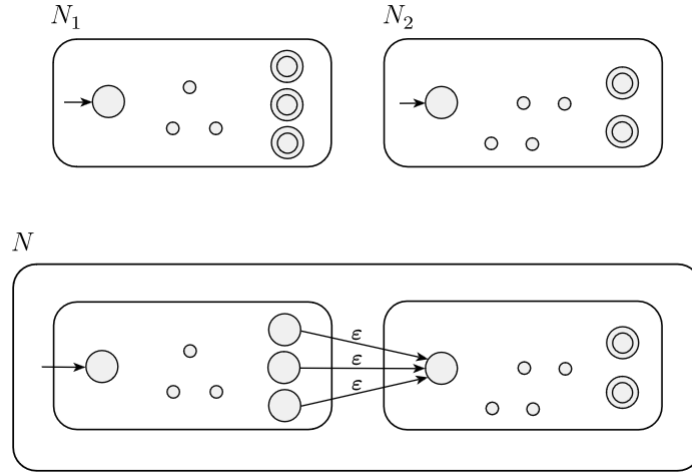
$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 - F_1 \\ \delta_1(q, a) & \text{se } q \in F_1 \wedge a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_2\} & \text{se } q \in F_1 \wedge a = \varepsilon \\ \delta_2(q, a) & \text{se } q \in Q_2 \end{cases}$$

- A questo punto, per costruzione stessa di N ne segue che:

$$w \in L_1 \circ L_2 \iff w \in L(N)$$

dunque che $L_1 \circ L_2 = L(N) \in \text{REG}$

□



Rappresentazione grafica della dimostrazione

Corollario 1: Chiusura della potenza in REG

L'operatore potenza è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L \in \text{REG}, n \in \mathbb{N} \quad L^n \in \text{REG}$$

Teorema 7: Chiusura di star in REG

L'operatore star è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L \in \text{REG} \quad L^* \in \text{REG}$$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \text{REG}$, sia $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il NFA tale che $L = L(N)$
- Definiamo quindi il DFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', q_{0*}, F')$ tale che:
 - q_{0*} è un nuovo stato iniziale aggiunto
 - $Q' = Q \cup \{q_{0*}\}$
 - $F' = F \cup \{q_{0*}\}$
 - $\forall q \in Q', a \in \Sigma$ si ha che:

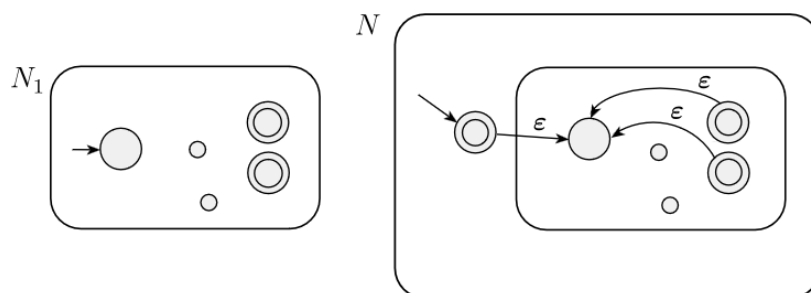
$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & \text{se } q \in Q - F \\ \delta(q, a) & \text{se } q \in F \wedge a \neq \epsilon \\ \delta(q, a) \cup \{q_{0*}\} & \text{se } q \in F \wedge a = \epsilon \\ \{q_{0*}\} & \text{se } q = q_{0*} \wedge a = \epsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_{0*} \wedge a \neq \epsilon \end{cases}$$

- A questo punto, per costruzione stessa di N' ne segue che:

$$w \in L^* \iff w \in L(N')$$

dunque che $L^* = L(N') \in \text{REG}$

□



Rappresentazione grafica della dimostrazione

Corollario 2: Chiusura di plus in REG

L'operatore plus è **chiuso in REG**, ossia:

$$\forall L \in \text{REG} \quad L^+ \in \text{REG}$$

Dimostrazione.

- Analoga a quella dell'operatore star, rimuovendo tuttavia lo stato iniziale dall'insieme degli stati accettanti

□

1.5 Espressioni regolari

Definizione 21: Espressione regolare

Dato un alfabeto Σ , definiamo come **espressione regolare di Σ** una stringa R rappresentante un linguaggio $L(R) \subseteq \Sigma^*$. In altre parole, ogni espressione regolare R rappresenta in realtà il linguaggio $L(R)$ ad essa associata.

In particolare, definiamo l'**insieme delle espressioni regolari di Σ** , indicato con $\text{re}(\Sigma)$, come:

- $\emptyset \in \text{re}(\Sigma)$
- $\varepsilon \in \text{re}(\Sigma)$
- $a \in \text{re}(\Sigma)$, dove $a \in \Sigma$
- $R_1, R_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies R_1 \cup R_2 \in \text{re}(\Sigma)$
- $R_1, R_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies R_1 \circ R_2 \in \text{re}(\Sigma)$
- $R \in \text{re}(\Sigma) \implies R^* \in \text{re}(\Sigma)$
- $R \in \text{re}(\Sigma) \implies R^+ \in \text{re}(\Sigma)$

Osservazione 5

Data un'espressione regolare $R \in \text{re}(\Sigma)$, si ha che:

- $R = \emptyset \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = \emptyset$
- $R = \varepsilon \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = \{\varepsilon\}$
- $R = a \in \text{re}(\Sigma), a \in \Sigma \implies L(R) = \{a\}$
- $R = R_1 \cup R_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = L(R_1) \cup L(R_2)$
- $R = R_1 \circ R_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = L(R_1) \circ L(R_2)$
- $R = R_1^* \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = L(R_1)^*$
- $R = R_1^+ \in \text{re}(\Sigma) \implies L(R) = L(R_1)^+$

Esempi:

1. $0 \cup 1$ rappresenta il linguaggio $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$
2. 0^*10^* rappresenta il linguaggio $\{0\}^* \circ \{1\} \circ \{0\}^* = \{x1y \mid x, y \in \{0\}^*\}$
3. $\Sigma^*1\Sigma^*$ rappresenta il linguaggio $\Sigma^* \circ \{1\} \circ \Sigma^* = \{x1y \mid x, y \in \Sigma^*\}$
4. $(0 \cup 1000)^*$ rappresenta il linguaggio $(\{0\} \cup \{1000\})^* = \{0, 1000\}^*$
5. \emptyset^* rappresenta il linguaggio $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$ (ricordiamo che per definizione stessa si ha che $\forall L \subseteq \Sigma^* \quad L^0 = \{\varepsilon\}$)

6. $0^*\emptyset$ rappresenta il linguaggio $\{0\}^* \circ \emptyset = \emptyset$
7. $(0 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon)$ rappresenta il linguaggio $\{\emptyset, 0, 1, 01\}$
8. Σ^+ equivale all'espressione $\Sigma\Sigma^*$

Definizione 22: Classe dei linguaggi descritti da esp. reg.

Dato un alfabeto Σ , definiamo come **classe dei linguaggi di Σ descritti da un'espressione regolare** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(\text{re}) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists R \in \text{re}(\Sigma) \text{ t.c. } L = L(R)\}$$

Lemma 1: Conversione da espressione regolare a NFA

Date le due classi di linguaggi $\mathcal{L}(\text{re})$ e $\mathcal{L}(\text{NFA})$, si ha che:

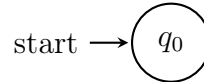
$$\mathcal{L}(\text{re}) \subseteq \mathcal{L}(\text{NFA})$$

Dimostrazione.

Procediamo per induzione strutturale, ossia dimostrando che se per ogni sotto-componente vale una determinata proprietà allora essa varrà anche per ogni componente formato da tali sotto-componenti

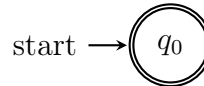
Caso base.

- Se $R = \emptyset \in \text{re}(\Sigma)$, definiamo il NFA $N_\emptyset = (\{q_0\}, \Sigma, \delta, q_0, \emptyset)$, ossia:



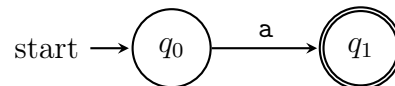
per cui si ha che $w \in L(R) \iff w \in L(N_\emptyset)$ dunque $L(R) = L(N_\emptyset) \in \mathcal{L}(\text{NFA})$

- Se $R = \varepsilon \in \text{re}(\Sigma)$, definiamo il NFA $N_\varepsilon = (\{q_0\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_0\})$, ossia:



per cui si ha che $w \in L(R) \iff w \in L(N_\varepsilon)$ dunque $L(R) = L(N_\varepsilon) \in \mathcal{L}(\text{NFA})$

- Se $R = a \in \text{re}(\Sigma)$ con $a \in \Sigma$, definiamo il NFA $N_a = (\{q_0, q_1\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1\})$ dove per δ è definita solo la coppia $\delta(q_0, a) = q_1$, ossia:



per cui si ha che $w \in L(R) \iff w \in L(N_a)$ dunque $L(R) = L(N_a) \in \mathcal{L}(\text{NFA})$

Ipotesi induttiva.

- Date $R_1, R_2 \in \text{re}(\Sigma)$, assumiamo che $\exists \text{NFAN}_1, N_2 \mid L(R_1) = L(N_1), L(R_2) = L(N_2)$, dunque che $L(R_1), L(R_2) \in \mathcal{L}(\text{NFA})$

Passo induttivo.

- Se $R = R_1 \cup R_2$, tramite la **Chiusura dell'unione in REG**, otteniamo che:

$$L(R) = L(R_1) \cup L(R_2) = L(N_1) \cup L(N_2) \in \text{REG} = \mathcal{L}(\text{NFA})$$

- Se $R = R_1 \circ R_2$, tramite la **Chiusura della concatenazione in REG**, otteniamo che:

$$L(R) = L(R_1) \circ L(R_2) = L(N_1) \circ L(N_2) \in \text{REG} = \mathcal{L}(\text{NFA})$$

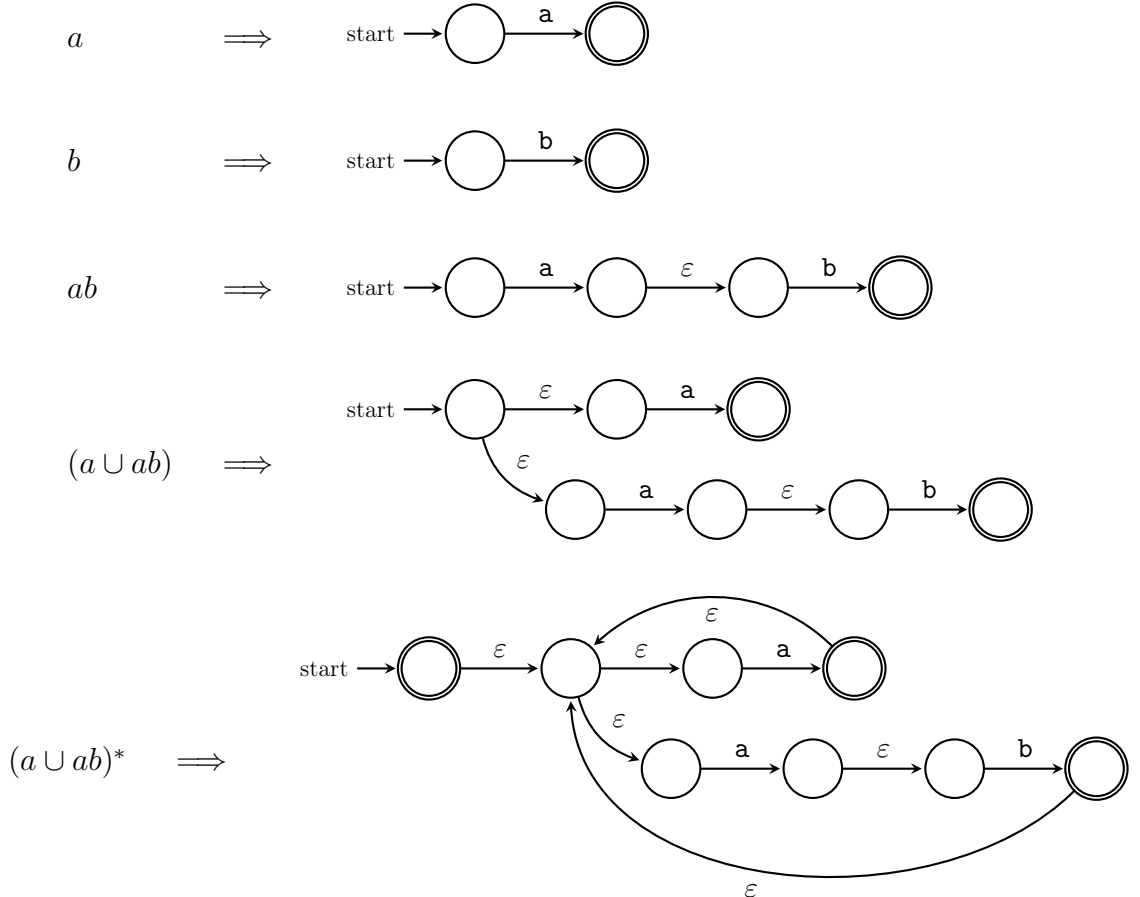
- Se $R = R_1^*$, tramite la **Chiusura di plus in REG**, otteniamo che:

$$L(R) = L(R_1)^* = L(N_1)^* \in \text{REG} = \mathcal{L}(\text{NFA})$$

□

Esempio:

- Consideriamo l'espressione regolare $(a \cup ab)^*$
- Costruiamo il NFA corrispondente a tale espressione partendo dai suoi sotto-componenti



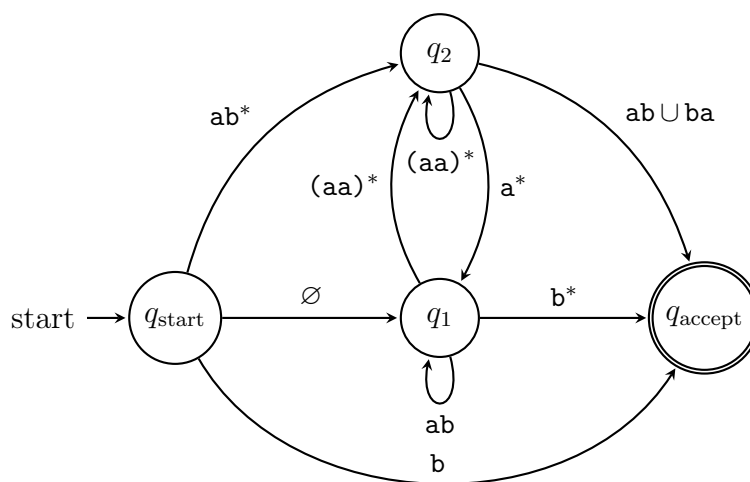
1.5.1 NFA generalizzati

Definizione 23: Generalized NFA (GNFA)

Un **Generalized NFA (GNFA)** è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ dove:

- Q è l'insieme finito degli stati dell'automa dove $|Q| \geq 2$
- Σ è l'alfabeto dell'automa
- $q_{\text{start}} \in Q$ è lo **stato iniziale** dell'automa
- $q_{\text{accept}} \in Q$ è l'**unico stato accettante** dell'automa
- $\delta : (Q - \{q_{\text{accept}}\}) \times (Q - \{q_{\text{start}}\}) \rightarrow \text{re}(\Sigma)$ è la **funzione di transizione degli stati** dell'automa, implicando che:
 - Lo stato q_{start} abbia solo transizioni **uscenti**
 - Lo stato q_{accept} abbia solo transizioni **entranti**
 - Tra **tutte le possibili coppie di stati** $q, q' \in Q$ (incluso il caso in cui $q = q'$) vi sia una transizione $q \rightarrow q'$ ed una transizione $q' \rightarrow q$
 - Le "etichette" delle transizioni sono delle **espressioni regolari**

Esempio:



Osservazione 6

In un GNFA, il risultato $\delta(q, q') = R$ può essere interpretato come "l'espressione regolare che effettua la transizione da q a q' è R ". Di conseguenza, possiamo immaginare un GNFA come un NFA che legga la stringa in input **blocco per blocco**

Proposizione 6: Stringa accettata in un GNFA

Sia $G := (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ un GNFA. Data una stringa $w := w_0 \dots w_k \in \Sigma^*$, dove $w_0, \dots, w_k \in \Sigma^*$ (ossia sono delle sottostringhe), diciamo che w è **accettata da G** se esiste una sequenza di stati $r_0, r_1, \dots, r_{k+1} \in Q$ tali che:

- $r_0 = q_{\text{start}}$
- $\forall i \in [0, k] \quad w_i \in L(\delta(r_i, r_{i+1}))$
- $r_{k+1} = q_{\text{accept}}$

Esempio:

- Il GNFA dell'esempio precedente accetta la stringa **ababaaaba**, poiché:
 - $\delta(q_{\text{start}}, q_1) = \mathbf{ab}^*$, dunque viene letta in blocco la sottostringa **abab**
 - $\delta(q_1, q_1) = \mathbf{aa}^*$, dunque viene letta in blocco la sottostringa **aa**
 - $\delta(q_1, q_{\text{accept}}) = \mathbf{ab} \cup \mathbf{ba}$, dunque viene letta in blocco la sottostringa **ba**

Corollario 3

Una transizione con "etichetta" pari a \emptyset è una **transizione inutilizzabile** in quanto $L(\emptyset) = \emptyset$

Definizione 24: Classe dei linguaggi riconosciuti da un GNFA

Dato un alfabeto Σ , definiamo come **classe dei linguaggi di Σ riconosciuti da un GNFA** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(\text{GNFA}) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ GNFA } G \text{ t.c. } L = L(G)\}$$

Lemma 2: Conversione da DFA a GNFA

Date le due classi di linguaggi $\mathcal{L}(\text{DFA})$ e $\mathcal{L}(\text{GNFA})$, si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{GNFA})$$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \mathcal{L}(\text{DFA})$, sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il DFA tale che $L(D) = L$
- Consideriamo quindi il GNFA $G := (Q', \Sigma, \delta', q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ costruito tramite D stesso:
 - $Q' = Q \cup \{q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}\}$
 - $\delta'(q_{\text{start}}, q_0) = \varepsilon$
 - $\forall q \in F \quad \delta'(q, q_{\text{accept}}) = \varepsilon$

- Per ogni transizione con etichetta multipla in D , in G esiste una transizione equivalente con etichetta corrispondente all'unione di tali etichette multiple
- Per ogni coppia di stati per cui non esiste una transizione entrante o uscente in D , viene aggiunta una transizione con etichetta \emptyset
- A questo punto, per costruzione stessa di G si ha che:

$$w \in L = L(D) \implies L(G)$$

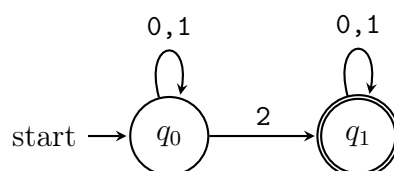
implicando dunque che $L(D) \in \mathcal{L}(\text{DFA})$ e di conseguenza che:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{GNFA})$$

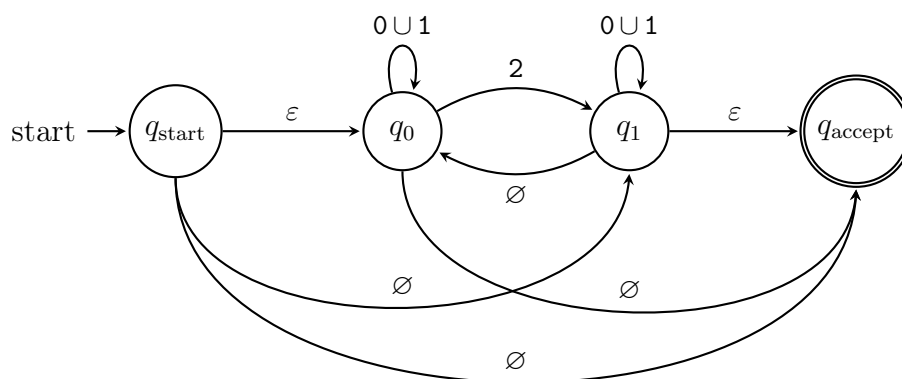
□

Esempio:

- Consideriamo il seguente DFA:



- Il suo GNFA equivalente corrisponde a:



Algoritmo 1: Riduzione minimale di un GNFA

Dato un GNFA $G = (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$, il seguente algoritmo restituisce un GNFA G' avente solo due stati e tale che $L(G) = L(G')$:

```

function REDUCEGNFA( $G$ )
  if  $|Q| == 2$  then
    return  $G$ 
  else if  $|Q| > 2$  then
     $q := q \in Q - \{q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}\}$ 
     $Q' := Q - \{q\}$ 
    for  $q_i \in Q' - \{q_{\text{accept}}\}$  do
      for  $q_j \in Q' - \{q_{\text{start}}\}$  do
         $\delta'(q_i, q_j) := \delta(q_i, q)\delta(q, q)^*\delta(q, q_j) \cup \delta(q_i, q_j)$ 
      end for
    end for
     $G' := (Q', \Sigma, \delta', q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ 
    return reduceGNFA( $G'$ )
  end if
end function

```

Dimostrazione.

Siano G_0, \dots, G_n i vari GNFA prodotti dalla ricorsione dell'algoritmo, implicando che $G_0 = G$ e che G_n sia l'output. Procediamo per induzione sul numero $k \in \mathbb{N}$ di riduzioni effettuate, mostrando che $L(G) = L(G_0) = \dots = L(G_n)$

Caso base.

- Se $k = 0$, allora $G_0 = G$, dunque $L(G) = L(G_0)$

Ipotesi induttiva.

- Dato $k \in \mathbb{N}$, assumiamo che per il GNFA $G_k := (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ si abbia che $L(G) = L(G_k)$

Passo induttivo.

- Consideriamo quindi il GNFA $G_{k+1} := (Q', \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ ottenuto rimuovendo uno stato $q \in Q$ (dunque $Q' = Q - \{q\}$) e ponendo

$$\delta'(q_i, q_j) := \delta(q_i, q)\delta(q, q)^*\delta(q, q_j) \cup \delta(q_i, q_j)$$

per ogni $q_i \in Q' - \{q_{\text{accept}}\}, q_j \in Q' - \{q_{\text{start}}\}$

- Data una stringa $w := w_0 \dots w_m \in L(G_k)$, dove $w_0, \dots, w_m \in \Sigma^*$, esiste una sequenza di stati $q_0, \dots, q_m \in Q$ tali che:

- $q_0 = q_{\text{start}}$ e $q_m = q_{\text{accept}}$
- $\forall i \in [0, m-1] \quad w_i \in L(\delta(q_i, q_{i+1}))$

- A questo punto, consideriamo la costruzione della funzione δ' :

$$\delta'(q_i, q_j) = \delta(q_i, q)\delta(q, q)^*\delta(q, q_j) \cup \delta(q_i, q_j)$$

- Se $q \notin \{q_0, \dots, q_m\}$, allora tramite l'unione si ha che $w_i \in L(\delta(q_i, q_j)) \implies w \in L(\delta'(q_i, q_j))$, dunque tutte le possibili sottostringhe passanti per le transizioni dirette da q_i a q_j vengono riconosciute
- Se $q \in \{q_0, \dots, q_m\}$, allora la concatenazione $\delta(q_i, q)\delta(q, q)^*\delta(q, q_j)$ permette il riconoscimento di tutti i cammini da q_i a q_j passanti per q , implicando che $w \in L(\delta'(q_i, q_j))$
- Viceversa, poiché ogni $\delta'(q_i, q_j)$ è definito come la combinazione di tutti i cammini possibili da q_i a q_j (dunque passando per q o non), ne segue automaticamente che $w \in L(G_{k+1}) \implies w \in L(G_k)$
- Esprimendo il tutto graficamente, risulta evidente che le seguenti transizioni siano del tutto equivalenti:

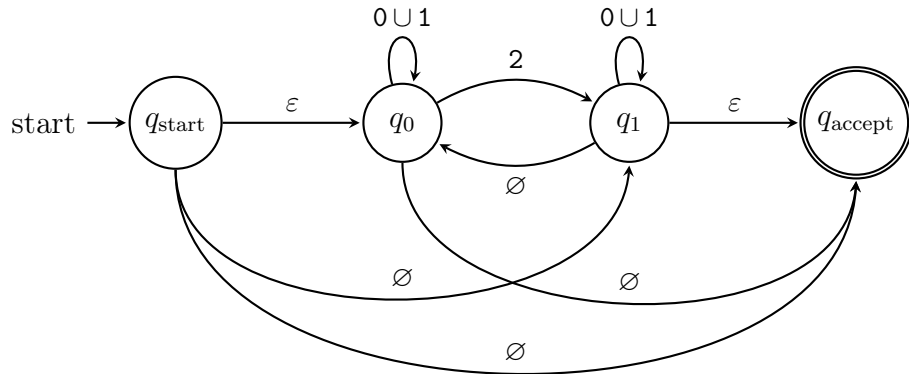


- Di conseguenza, otteniamo che $w \in L(G_k) \iff w \in L(G_{k+1})$, concludendo quindi, per ipotesi induttiva, che $L(G) = L(G_k) = L(G_{k+1})$

□

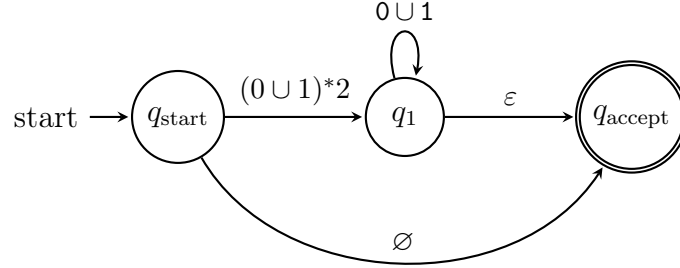
Esempio:

- Consideriamo nuovamente il seguente GNFA, applicando su esso l'algoritmo `reduceGNFA`:



- Rimuoviamo quindi lo stato q_0 calcolando le nuove transizioni:

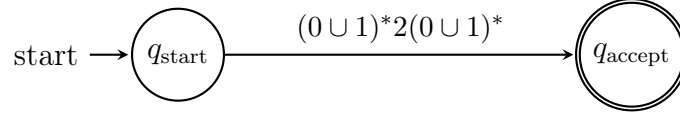
$$\begin{aligned}\delta'(q_{\text{start}}, q_1) &= \delta(q_{\text{start}}, q_0)\delta(q_0, q_0)^*\delta(q_0, q_1) \cup \delta(q_{\text{start}}, q_1) = \varepsilon(0 \cup 1)^*2 \cup \emptyset = (0 \cup 1)^*2 \\ \delta'(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}) &= \delta(q_{\text{start}}, q_0)\delta(q_0, q_0)^*\delta(q_0, q_{\text{accept}}) \cup \delta(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}) = \varepsilon(0 \cup 1)^*\emptyset \cup \emptyset = \emptyset \\ \delta'(q_1, q_1) &= \delta(q_1, q_0)\delta(q_0, q_0)^*\delta(q_0, q_1) \cup \delta(q_1, q_1) = \emptyset(0 \cup 1)^*2 \cup (0 \cup 1) = 0 \cup 1 \\ \delta'(q_1, q_{\text{accept}}) &= \delta(q_1, q_0)\delta(q_0, q_0)^*\delta(q_0, q_{\text{accept}}) \cup \delta(q_1, q_{\text{accept}}) = \emptyset(0 \cup 1)^*\emptyset \cup \varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$



- Infine, rimuoviamo lo stato q_1 calcolando le nuove transizioni:

$$\begin{aligned}\delta''(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}) &= \delta'(q_{\text{start}}, q_1)\delta'(q_1, q_1)^*\delta'(q_1, q_{\text{accept}}) \cup \delta'(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}) = \\ &= (0 \cup 1)^*2(0 \cup 1)^*\varepsilon \cup \emptyset = (0 \cup 1)^*2(0 \cup 1)^*\end{aligned}$$

- Il GNFA minimale, dunque, corrisponde a:



Corollario 4: Conversione da GNFA ad espressione regolare

Date le due classi di linguaggi $\mathcal{L}(\text{GNFA})$ e $\mathcal{L}(\text{re})$, si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{GNFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{re})$$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \mathcal{L}(\text{GNFA})$, sia $G := (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ il GNFA tale che $L(G) = L$
- Dato il GNFA G' ottenuto applicando **reduceGNFA**, sia $R \in \text{re}(\Sigma)$ l'espressione regolare tale che $R = \delta'(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$. Essendo l'unica transizione di G' ed essendo G' equivalente a G , ne segue automaticamente che:

$$L = L(G) = L(G') = L(R) \in \text{re}(\Sigma)$$

da cui traiamo che:

$$\mathcal{L}(\text{GNFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{re})$$

□

1.5.2 Equivalenza tra espressioni e linguaggi regolari

Teorema 8: Equivalenza tra espressioni e linguaggi regolari

Date le due classi di linguaggi $\mathcal{L}(\text{re})$ e REG, si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{re}) = \text{REG}$$

Dimostrazione.

Prima implicazione.

- Tramite la [Conversione da espressione regolare a NFA](#), otteniamo che:

$$\mathcal{L}(\text{re}) \subseteq \mathcal{L}(\text{NFA}) = \text{REG}$$

- Inoltre, in quando un NFA è anche un GNFA, ne segue automaticamente che:

$$\mathcal{L}(\text{NFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{GNFA})$$

Seconda implicazione.

- Tramite la [Conversione da DFA a GNFA](#) e [Conversione da GNFA ad espressione regolare](#), otteniamo che:

$$\text{REG} = \mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{GNFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{re})$$

□

Proposizione 7: Classi dei linguaggi regolari

Dato un alfabeto Σ , si ha che:

$$\text{REG} := \mathcal{L}(\text{DFA}) = \mathcal{L}(\text{NFA}) = \mathcal{L}(\text{GNFA}) = \mathcal{L}(\text{re})$$

In altre parole, per ogni linguaggio regolare L esistono un DFA, un NFA e un GNFA che lo riconoscono e un'espressione regolare che lo descrive

1.6 Pumping lemma per i linguaggi regolari

Consideriamo il seguente linguaggio composto dalle stringhe aventi un numero uguale di simboli 0 ed 1:

$$L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Nel provare a costruire un automa che riconosca tale linguaggio, notiamo che sarebbe necessario che l'automa avesse **infiniti stati**, in quanto esso dovrebbe memorizzare la quantità di simboli 0 ed 1 letti. Di conseguenza, non è possibile costruire un **automa a stati finiti** (dunque un DFA, NFA o GNFA) che riconosca tale linguaggio.

Lemma 3: Pumping lemma per i linguaggi regolari

Dato un linguaggio L , se $L \in \text{REG}$ allora $\exists p \in \mathbb{N}$, detto **lunghezza del pumping**, tale che $\forall w := xyz \in L$, con $|w| \geq p$ e $x, y, z \in \Sigma^*$ (ossia sono sue sottostringhe), si ha che:

- $\forall i \in \mathbb{N} \quad xy^i z \in L$, ossia è possibile concatenare y per i volte rimanendo in L
- $|y| > 0$, dunque $y \neq \varepsilon$
- $|xy| \leq p$, ossia y deve trovarsi nei primi p simboli di w

Dimostrazione.

- Dato $L \in \text{REG}$, sia $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il DFA tale che $L = L(D)$
- Consideriamo quindi $p := |Q|$. Data la stringa $w := w_1 \dots w_n \in L$ dove $w_1, \dots, w_n \in \Sigma$ e dove $n \geq p$, consideriamo la sequenza di stati r_1, \dots, r_{n+1} tramite cui w viene accettata da D :

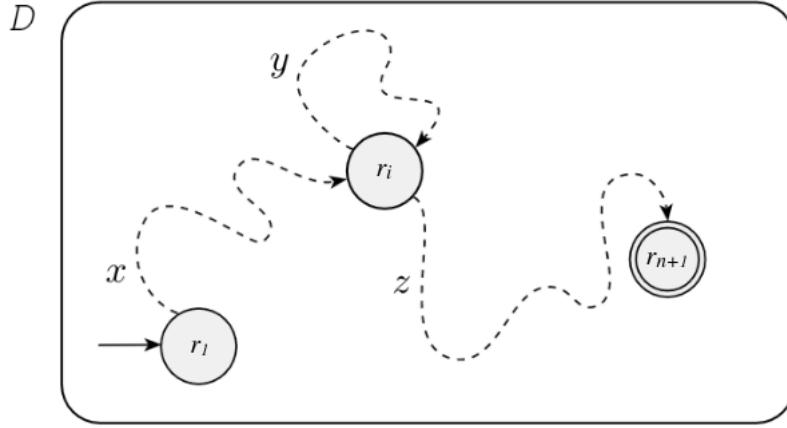
$$\forall k \in [1, n] \quad \delta(r_k, w_k) = r_{k+1}$$

- Notiamo quindi che $|r_1, \dots, r_{n+1}| = n + 1$, ossia che il numero di stati attraversati sia $n + 1$. Inoltre, in quanto $n \geq p$, ne segue automaticamente che $n + 1 \geq p + 1$. Tuttavia, poiché $p := |Q|$ e $n + 1 \geq p + 1$, ne segue necessariamente che $\exists i, j \mid 1 \leq i < j \leq p + 1 \wedge r_i = r_j$, ossia che tra i primi $p + 1$ stati della sequenza vi sia almeno uno stato ripetuto
- A questo punto, consideriamo le seguenti sottostringhe di w :
 - $x = w_1 \dots w_{i-1}$, tramite cui si ha che $\delta^*(r_1, x) = r_i$
 - $y = w_i \dots w_{j-1}$, tramite cui si ha che $\delta^*(r_i, y) = r_j = r_i$
 - $z = w_j \dots w_n$, tramite cui si ha che $\delta^*(r_j, z) = r_n$
- Poiché $\delta^*(r_i, y) = r_i$, ossia y porta sempre r_i in se stesso, ne segue automaticamente che

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \delta^*(r_i, y^k) = r_i \implies \delta(r_1, xy^k z) \in F \implies xy^k z \in L(D) = L$$

- Inoltre, ne segue direttamente che $|y| > 0$ in quanto $i < j$ e che $|xy| \leq p$ in quanto $j \leq p + 1$

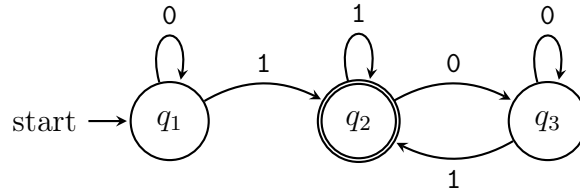
□



Rappresentazione grafica della dimostrazione

Esempio:

- Consideriamo il linguaggio $L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x := y1, \exists y \in \{0, 1\}^*\}$
- Tale linguaggio risulta essere regolare in quanto il seguente DFA è in grado di riconoscerlo:



- Essendo un linguaggio regolare, per esso vale il [Pumping lemma per i linguaggi regolari](#). Ad esempio, preso $p = 5$ e la stringa $w := 0100010101 \in L$, è possibile separare w in tre sottostringhe $x := 010$, $y = 00$ e $z = 10101$ tali che:

- $xy^0z = 01010101 \in L$
- $xy^1z = 0100010101 \in L$
- $xy^2z = 010000010101 \in L$
- $xy^3z = 01000000010101 \in L$
- ...

Osservazione 7: Dimostrazione di non regolarità

Il **Pumping lemma per i linguaggi regolari** può essere utilizzato per dimostrare che un linguaggio **non è regolare**

Esempi:

- Consideriamo il linguaggio $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Supponiamo per assurdo che L sia regolare. In tal caso, ne segue che per esso debba valere il pumping lemma, dove p è la lunghezza del pumping
- Consideriamo quindi la stringa $w := 0^p 1^p \in L$. Poiché $|w| \geq p$, possiamo suddividerla in tre sottostringhe $x, y, z \in \Sigma^*$ tali che $w = xyz$, per poi procedere con uno dei due seguenti approcci:

1. Approccio enumerativo:

- Se y è composta da soli 0, allora ogni stringa generata dal pumping non sarà in L in quanto il numero di 0 sarà superiore al numero di 1
- Se y è composta da soli 1, allora ogni stringa generata dal pumping non sarà in L in quanto il numero di 1 sarà superiore al numero di 0
- Se y è composta sia da 0 che da 1, allora ogni stringa generata dal pumping non sarà in L in quanto esse assumeranno la forma $0000 \dots 101010 \dots 1111$
- Di conseguenza, poiché in ogni caso viene contraddetto il pumping lemma, ne segue necessariamente che L non sia regolare

2. Approccio condizionale:

- Poiché la terza condizione del pumping lemma impone che $|xy| \leq p$ e poiché $w := 0^p 1^p$, ne segue che $xy = 0^m$ e $z = 0^{p-m} 1^p$, dove $m \in [1, p]$
- Inoltre, per la seconda condizione, si ha che $|y| > 0$, dunque necessariamente si ha che $x = 0^{m-k}$ e $y = 0^k$, dove $k \in [1, m]$
- A questo punto, consideriamo la stringa $xy^0 z$. Notiamo immediatamente che

$$xy^0 z = 0^{m-k} (0^k)^0 0^{p-m} 1^p = 0^{m-k} 0^{p-m} 1^p = 0^{p-k} 1^p$$

implicando dunque che $xy^0 z \notin L$, contraddicendo la prima condizione del lemma per cui si ha che $\forall i \in \mathbb{N} \quad xy^i z \in L$

- Dunque, ne segue necessariamente che L non sia regolare

1.7 Esercizi svolti

Problema 1: Linguaggio rovesciato

Dato un linguaggio L e il suo linguaggio rovesciato $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$, dimostrare che

$$L \in \text{REG} \implies L^R \in \text{REG}$$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \text{REG}$, sia $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il DFA tale che $L = L(D)$
- Definiamo quindi un primo NFA $N = (Q', \Sigma, \delta', q_0, \{q_f\})$ tale che:
 - q_f è il nuovo unico stato accettante aggiunto
 - $Q' = Q \cup \{q_f\}$
 - $\forall q \in Q, a \in \Sigma \quad \delta'(q, a) = \delta(q, a)$, ossia tutti gli archi rimangono invariati
 - $\forall q \in F \quad \delta'(q, \varepsilon) = q_f$, ossia tutti gli stati finali precedenti hanno un ε -arco verso q_f
- A questo punto, per costruzione stessa di N ne segue che:

$$w \in L = L(D) \iff w \in L(N)$$

dunque che $L = L(D) = L(N)$

- Definiamo quindi un secondo NFA $N^R = (Q', \Sigma, \delta'', q_f, \{q_0\})$ tale che:

$$\forall p, q \in Q', a \in \Sigma \quad \delta'(p, a) = q \implies \delta''(q, a) = p$$

ossia avente tutti gli archi invertiti rispetto ad N

- A questo punto, per costruzione stessa di N^R ne segue che:

$$w \in L = L(N) \iff w^R \in L(N^R)$$

dunque che $L^R = L(N)^R = L(N^R) \in \text{REG}$

□

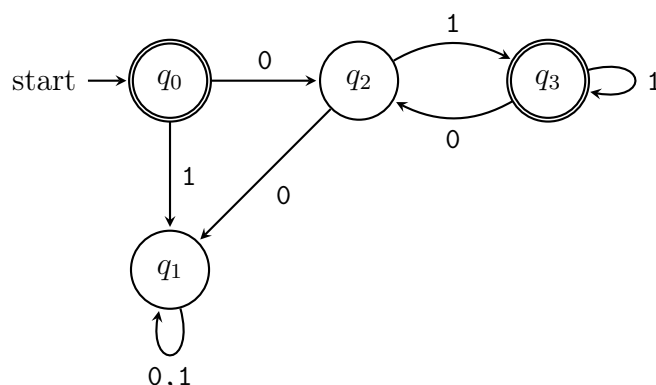
Problema 2: Complemento di un'espressione regolare

Data l'espressione regolare $R = (01^+)^*$, costruire il DFA D tale che:

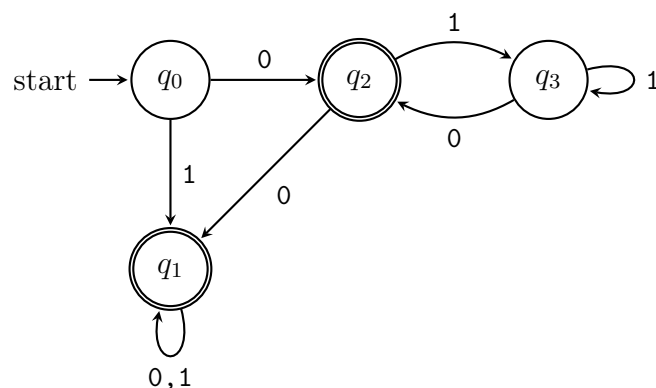
$$L(D) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \notin L(R)\}$$

Soluzione:

- Prima di tutto, costruiamo un DFA D_R tale che $L(D_R) = L(R)$:



- A questo punto, ci basta costruire il DFA D tale che $L(D) = \overline{L(D_R)}$ utilizzando la [Chiusura del complemento in REG](#):

**Problema 3**

Dato il linguaggio $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$, dimostrare che $L \notin \text{REG}$

Dimostrazione.

- Supponiamo per assurdo che L sia regolare, implicando che per esso debba valere il pumping lemma, dove p è la lunghezza del pumping
- Consideriamo quindi la stringa $w := 0^p 1^p \in L$. Poiché $|w| \geq p$, possiamo suddividerla in tre sottostringhe $x, y, z \in \Sigma^*$ tali che $w = xyz$

- Poiché la terza condizione del pumping lemma impone che $|xy| \leq p$ e poiché $w := 0^p 1^p$, ne segue che $xy = 0^m$ e $z = 0^{p-m} 1^p$, dove $m \in [1, p]$
- Inoltre, per la seconda condizione, si ha che $|y| > 0$, dunque necessariamente si ha che $x = 0^{m-k}$ e $y = 0^k$, dove $k \in [1, m]$
- A questo punto, consideriamo la stringa xy^0z . Notiamo immediatamente che

$$xy^0z = 0^{m-k}(0^k)^0 0^{p-m} 1^p = 0^{m-k} 0^{p-m} 1^p = 0^{p-k} 1^p$$

$$\implies |xy^0z|_0 \neq |xy^0z|_1 \implies xy^0z \notin L$$

contraddicendo la prima condizione del lemma per cui si ha che $\forall i \in \mathbb{N} \ xy^i z \in L$

- Dunque, ne segue necessariamente che L non sia regolare

□

Problema 4

Dato il linguaggio $L = \{1^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$, dimostrare che $L \notin \text{REG}$

Dimostrazione.

- Supponiamo per assurdo che L sia regolare, implicando che per esso debba valere il pumping lemma, dove p è la lunghezza del pumping
- Consideriamo quindi la stringa $w := 1^{p^2} \in L$. Poiché $|w| \geq p$, possiamo suddividerla in tre sottostringhe $x, y, z \in \Sigma^*$ tali che $w = xyz$
- Poiché la terza condizione del lemma impone che $|xy| \leq p$ e poiché $w := 1^{p^2}$, ne segue che $xy = 1^m$ e $z = 1^{p^2-m}$, dove $m \in [1, p]$
- Inoltre, per la seconda condizione del lemma, si ha che $|y| > 0$, dunque necessariamente si ha che $x = 1^{m-k}$ e $y = 1^k$, dove $k \in [1, m]$
- A questo punto, consideriamo la stringa xy^0z . Notiamo immediatamente che

$$xy^0z = 1^{m-k}(1^k)^0 1^{p^2-m} = 1^{p^2-k}$$

- Tuttavia, poiché $k \in [1, p]$, ne segue che $\nexists n \in \mathbb{N} \mid n^2 = p^2 - k$, implicando dunque che $xy^0z \notin L$, contraddicendo la prima condizione del lemma per cui si ha che $\forall i \in \mathbb{N} \ xy^i z \in L$
- Dunque, ne segue necessariamente che L non sia regolare

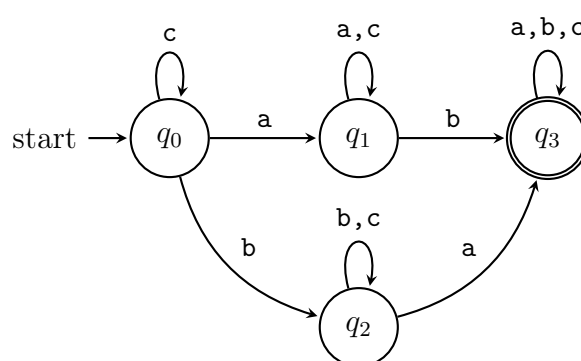
□

Problema 5

Sia $\Sigma = \{a, b, c\}$. Determinare un'espressione regolare $R \in \text{re}(\Sigma)$ descrivente il linguaggio di Σ composto dalle stringhe contenenti almeno una a ed almeno una b . Determinare inoltre un DFA D che riconosca lo stesso linguaggio.

Soluzione:

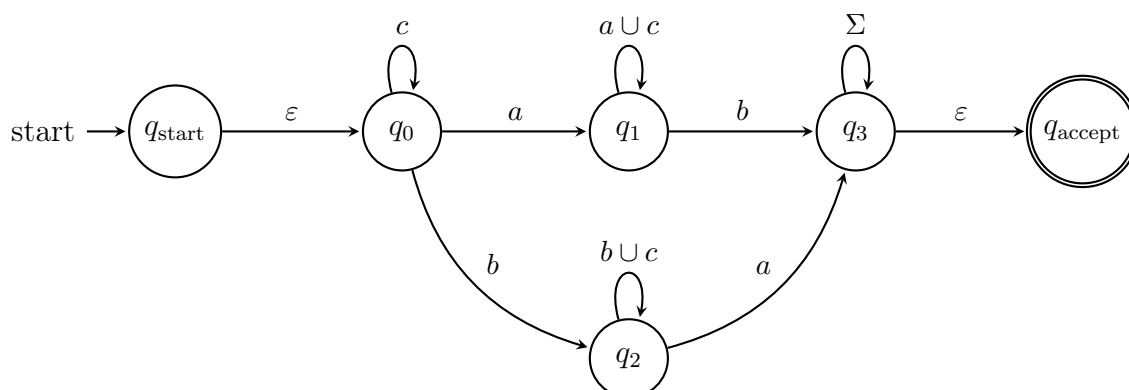
- Nonostante il problema inviti alla determinazione dell'espressione regolare e poi del DFA ad essa equivalente, trovare quest'ultimo risulta molto più rapido
- Difatti, il DFA D in grado di riconoscere il linguaggio richiesto corrisponde a:



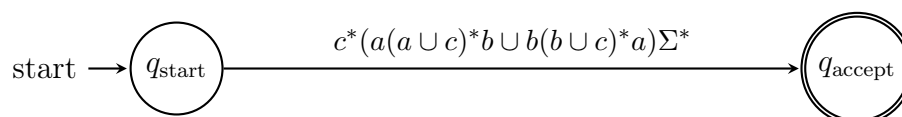
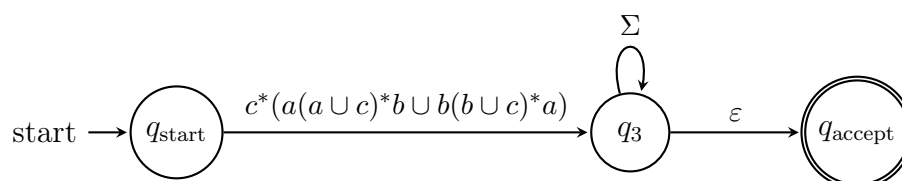
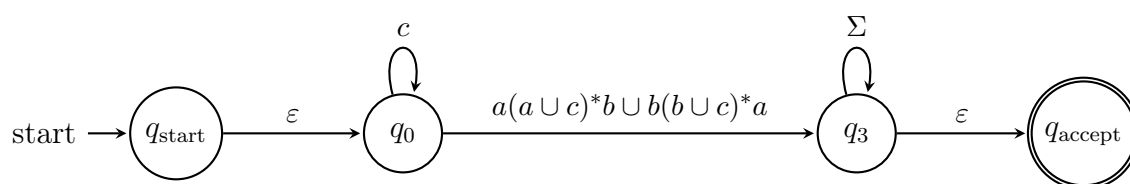
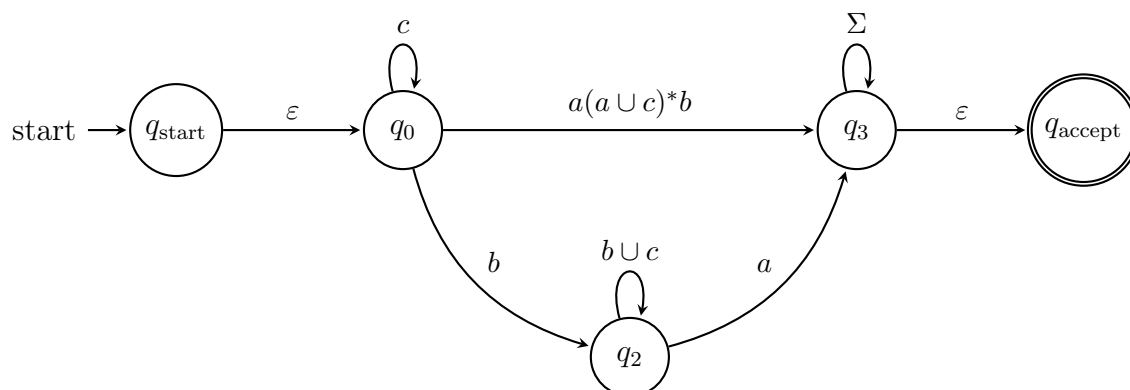
- A questo punto, osservando il DFA possiamo già notare che l'espressione regolare ad esso equivalente corrisponde a:

$$c^*(a(a \cup c)^*b \cup b(a \cup c)^*a)\Sigma^*$$

- Volendo procedere più rigorosamente, possiamo ricavare tale espressione regolare convertendo il DFA costruito nel suo GNFA equivalente, per poi ridurre al minimo tale GNFA, ottenendo l'espressione regolare
- Definiamo quindi il GNFA equivalente (del quale vengono omesse le sue transizioni etichettate con \emptyset):



- Procediamo quindi con la riduzione:



- Come anticipato, l'espressione regolare ottenuta corrisponde a:

$$c^*(a(a \cup c)^*b \cup b(b \cup c)^*a)\Sigma^*$$

Linguaggi acontestuali

2.1 Grammatiche acontestuali

Definizione 25: Context-free Grammar (CFG)

Una **Context-free Grammar (CFG)** (o *Grammatica acontestuale*) è una quadrupla (V, Σ, R, S) dove:

- V è l'insieme delle **variabili** della grammatica
- Σ è l'insieme dei **terminali** della grammatica e
- R è l'insieme delle **regole** o **produzioni** della grammatica
- $S \in V$ è la **variabile iniziale** della grammatica
- $V \cap \Sigma = \emptyset$, ossia variabili e terminali sono tutti distinti tra loro

Le **regole** in R assumono la forma $A \rightarrow X$, dove $A \in V$, ossia è una variabile, e $X \in (V \cup \Sigma_\epsilon)^*$, ossia è una stringa composta da una o più variabili e/o terminali.

Esempio:

- La seguente quadrupla $G = (\{A, B\}, \{0, 1, \#\}, R, A)$ è una CFG dove in R sono definite le seguenti regole:

$$A \rightarrow 0A1$$

$$A \rightarrow B$$

$$B \rightarrow \#$$

Osservazione 8: Acontestualità

Con **acontestualità** intendiamo la condizione secondo cui il lato sinistro delle regole della grammatica è composto sempre e solo da **una singola variabile**.

Esempio:

- La regola $A \rightarrow B$ può appartenere ad una CFG
- La regola $AB \rightarrow B$ non può appartenere ad una CFG

Osservazione 9: Notazione contratta per le regole

Data una CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$, se in R esistono più regole $A \rightarrow X_1, X_2, \dots, A \rightarrow X_n$ definite sulla stessa variabile A , è possibile indicare tali regole con la seguente notazione contratta:

$$A \rightarrow X_1 \mid X_2 \mid \dots \mid X_n$$

Esempio:

- Le regole della CFG dell'esempio precedente possono essere contratte in:

$$A \rightarrow 0A1 \mid B$$

$$B \rightarrow \#$$

Definizione 26: Produzione

Sia $G = (V, \Sigma, R, S)$ una CFG. Se u, v, w sono stringhe di variabili o terminali ed esiste la regola $A \rightarrow w$, allora la stringa uAv **produce** la stringa uwv , denotato come $uAv \Rightarrow uwv$.

$$u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*, A \rightarrow w \in R \implies uAv \Rightarrow uwv$$

Esempio:

- Consideriamo la grammatica $G = (\{A, B\}, \{0, 1, \#\}, R, A)$ dove:

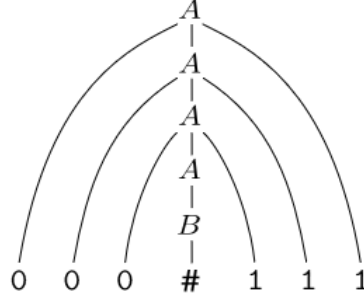
$$A \rightarrow 0A1 \mid B$$

$$B \rightarrow \#$$

- Tramite le regole di G è possibile ottenere la stringa $000\#111$ attraverso la seguente catena di produzioni:

$$A \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 00A11 \Rightarrow 000A111 \Rightarrow 000\#111$$

- Tale catena può anche essere descritta graficamente dal seguente **albero di produzione**:



Definizione 27: Derivazione

Sia $G = (V, \Sigma, R, S)$ un CFG. Date $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$, diciamo che u **deriva** v , denotato come $u \Rightarrow^* v$, se $u = v$ oppure se $\exists u_1, \dots, u_k \in (V \cup \Sigma)^*$ tali che:

$$u \Rightarrow u_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_k \Rightarrow v$$

Definizione 28: Context-free Language (CFL)

Sia $G = (V, \Sigma, R, S)$ una CFG. Definiamo come **Context-free Language (CFL)** (o *Linguaggio acontestuale*) **generato da** G , indicato come $L(G)$, l'insieme di stringhe derivate dalle regole di G tramite la variabile S :

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$

Esempi:

1. Data la CFG $G = (\{S\}, \{a, b\}, R, S)$, dove:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid aSb \mid SS$$

si ha che:

- $S \Rightarrow aSb \Rightarrow a\varepsilon b = ab$, dunque $ab \in L(G)$
- $S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aa\varepsilon bb = aabb$, dunque $aabb \in L(G)$
- $S \Rightarrow SS \xRightarrow{*} aSbaSb \xRightarrow{*} a\varepsilon ba\varepsilon b = abab$, dunque $abab \in L(G)$

2. Data la CFG $G = (\{S, T\}, \{0, 1\}, R, S)$, dove:

$$S \rightarrow T1T1T1T$$

$$T \rightarrow \varepsilon \mid 0T \mid 1T$$

si ha che:

$$L(G) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_1 \geq 3\}$$

3. Data la CFG $G = (\{S\}, \{0, 1\}, R, S)$, dove:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid 0S0 \mid 1S1$$

si ha che:

$$L(G) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R \wedge |w| \equiv 0 \pmod{2}\}$$

4. Data la CFG $G = (\{S, T\}, \{a, b, c\}, R, S)$, dove:

$$S \rightarrow aSc \mid T$$

$$T \rightarrow bTc \mid \varepsilon$$

si ha che:

$$L(G) = \{a^i b^j c^{i+j} \in \Sigma^* \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

Osservazione 10

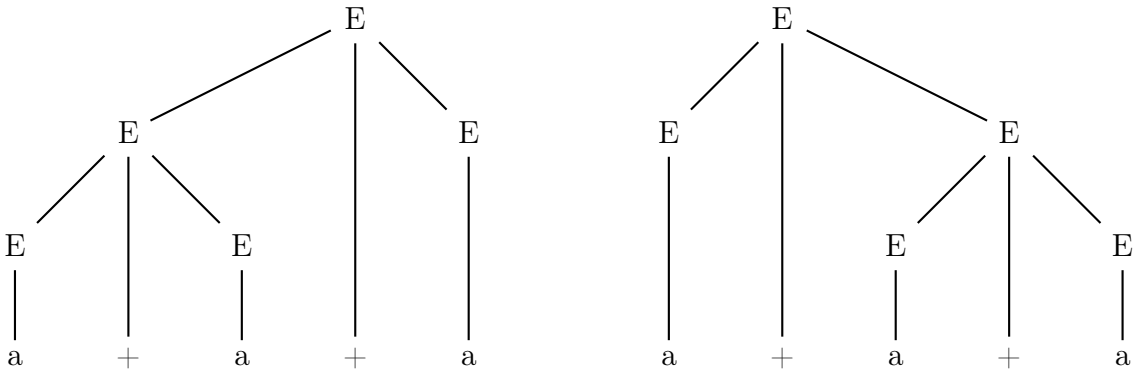
Sia G una CFG. Data la stringa $w \in L(G)$, possono esistere più derivazioni di w

Esempio:

- Data la CFG

$$E \rightarrow E + E \mid E \cdot E \mid (E) \mid a$$

la stringa $a + a + a$ può essere derivata in due modi:



Definizione 29: Derivazione a sinistra

Data una CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$, definiamo la derivazione $S \xRightarrow{*} w$ come **derivazione sinistra** se ad ogni produzione interna alla derivazione viene valutata la variabile più a sinistra

Esempio:

- Riprendiamo la CFG dell'esempio precedente:

$$E \rightarrow E + E \mid E \cdot E \mid (E) \mid a$$

- Per maggior chiarezza, riscriviamo tali regole come:

$$E \rightarrow E + F \mid E \cdot E \mid (E) \mid a$$

$$F \rightarrow E$$

ottenendo una CFG del tutto equivalente alla precedente

- Una derivazione sinistra della stringa $a + a + a$ corrisponde a:

$$E \Rightarrow E + F \Rightarrow E + F + F \Rightarrow a + F + F \Rightarrow a + E + F \Rightarrow a + a + F \Rightarrow a + a + E \Rightarrow a + a + a$$

Osservazione 11

L'uso delle derivazioni a sinistra permette di fissare un "ordine", rimuovendo la maggior parte delle derivazioni multiple per una stessa stringa.

Tuttavia, in alcune grammatiche possono esistere più di una derivazione a sinistra per la stessa stringa.

Definizione 30: Grammatica ambigua

Definiamo una grammatica G come **ambigua** se $\exists w \in L(G)$ tale che esistono almeno due derivazioni a sinistra per w

2.2 Linguaggi acontestuali ad estensione dei regolari

Definizione 31: Classe dei linguaggi acontestuali

Dato un alfabeto Σ , definiamo come **classe dei linguaggi acontestuali di Σ** il seguente insieme:

$$\text{CFL} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ CFG } G \text{ t.c. } L = L(G)\}$$

Lemma 4: Conversione da DFA a CFG

Date le due classi di linguaggi REG e CFL, si ha che:

$$\text{REG} \subseteq \text{CFL}$$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \text{REG}$, sia $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il DFA tale che $L = L(D)$
- Consideriamo quindi la CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ tale che:
 - Esiste una funzione biettiva $\varphi : Q \rightarrow V : q_i \mapsto V_i$

$$- S = \varphi(q_0) = V_0$$

- Dati $q_i, q_j \in Q$ e $a \in \Sigma$, si ha che:

$$\delta(q_i, a) = q_j \implies \varphi(q_i) \rightarrow a\varphi(q_j) \implies V_i \rightarrow aV_j$$

$$- q_f \in F \implies \varphi(q_f) \rightarrow \varepsilon \implies V_f \rightarrow \varepsilon$$

• A questo punto, per costruzione stessa di G si ha che:

$$w \in L(D) \implies w \in L(G)$$

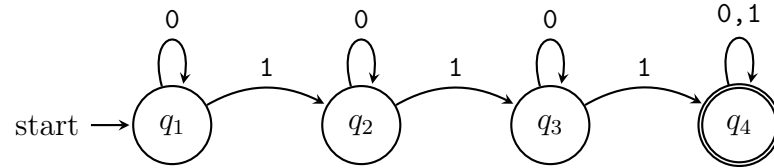
implicando dunque che $L(D) \in \text{CFL}$ e di conseguenza che:

$$\text{REG} \subseteq \text{CFL}$$

□

Esempio:

• Consideriamo il seguente DFA



• Una CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ equivalente è costituita da:

$$- V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$$

$$- S = V_1$$

- R definito come:

$$V_1 \rightarrow 0V_1 \mid 1V_2$$

$$V_2 \rightarrow 0V_2 \mid 1V_3$$

$$V_3 \rightarrow 0V_3 \mid 1V_4$$

$$V_4 \rightarrow 0V_4 \mid 1V_4 \mid \varepsilon$$

• Difatti, sia il DFA sia la CFG descrivono il seguente linguaggio:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \geq 3\}$$

Teorema 9: Ling. acontestuali estensione dei ling. regolari

Date le due classi di linguaggi REG e CFL, si ha che:

$$\text{REG} \subsetneq \text{CFL}$$

Dimostrazione.

- Tramite la [Conversione da DFA a CFG](#), sappiamo che $\text{REG} \subseteq \text{CFL}$
- Consideriamo quindi il linguaggio $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Tale linguaggio è generabile dalla grammatica $G = (\{S\}, \{0, 1\}, R, S)$, dove:

$$S \rightarrow 0S1 \mid \varepsilon$$

dunque abbiamo che $L = L(G) \in \mathcal{L}(\text{CFG})$

- Tuttavia, abbiamo già dimostrato nella sezione 1.6 che L non sia regolare, dunque abbiamo che $L \notin \text{REG}$
- Di conseguenza, concludiamo che:

$$\text{REG} \subsetneq \text{CFL}$$

□

2.3 Forma normale di Chomsky

Definizione 32: Chomsky's Normal Form (CNF)

Una CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ viene detta in **Chomsky's Normal Form (CNF)** (o *Forma Normale di Chomsky*) se tutte le regole in R assumono una delle seguenti tre forme:

$$A \rightarrow BC \qquad A \rightarrow a \qquad S \rightarrow \varepsilon$$

dove $A \in V$, $a \in \Sigma$ e $B, C \in V - \{S\}$

Teorema 10: Conversione in Forma Normale di Chomsky

Per ogni CFG G , si ha che:

$$\exists \text{ CFG } G' \text{ in CNF} \mid L(G) = L(G')$$

Dimostrazione.

- Data una CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$, costruiamo una CFG G' in CNF equivalente a G :
 1. Vengono aggiunte una variabile S_0 e una regola $S_0 \rightarrow S$, dove S_0 è la **nuova variabile iniziale**
 2. Finché in R esiste una ε -**regola** $A \rightarrow \varepsilon$ dove $A \in V - \{S_0\}$, tale regola viene **eliminata** e per ogni regola in R contenente delle occorrenze di A vengono **aggiunte** delle regole in cui vengono eliminate tutte le possibili combinazioni di occorrenze di A

(es: se viene rimossa $A \rightarrow \varepsilon$ e in R esiste $B \rightarrow uAvAw \mid u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$, vengono aggiunte le regole $B \rightarrow uvAw \mid uAvw \mid uvw$)
 3. Ogni regola nella forma $A \rightarrow B$ (dette **regole unitarie**) per cui esiste una regola nella forma $B \rightarrow u \mid u \in (V \cup \Sigma)^*$ viene **sostituita** con la regola $A \rightarrow u$
 4. Per ogni regola $A \rightarrow u_1 \dots u_k$ dove $k \geq 3$ e $u \in (V \cup \Sigma)$, vengono **aggiunte** le variabili A_1, \dots, A_k e le seguenti regole:

$$A \rightarrow u_1 A_1 \quad \dots \quad A_{k-3} \rightarrow u_{k-2} A_{k-2} \quad A_{k-2} \rightarrow u_{k-1} u_k$$

per poi eliminare la regola iniziale $A \rightarrow u_1 u_2 \dots u_k$

5. Per ogni regola rimanente nella forma $A \rightarrow u_1 u_2 \mid u_1, u_2 \in (V \cup \Sigma)$, se $u_1 \in \Sigma$ allora viene aggiunta una variabile U_1 ed una regola $U_1 \rightarrow u_1$, sostituendo la regola $A \rightarrow u_1 u_2$ con la regola $A \rightarrow U_1 u_2$. Analogamente, lo stesso viene svolto se $u_2 \in \Sigma$.
- Poiché le operazioni svolte dall'algoritmo non modificano le stringhe generabili dalla CFG, ne segue automaticamente che $L(G) = L(G')$

□

Esempio:

- Consideriamo la seguente grammatica G non in CNF, dove S è la variabile iniziale:

$$\begin{aligned} G: \quad S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- Aggiungiamo la nuova variabile iniziale S_0 e la regola $S_0 \rightarrow S$:

$$\begin{aligned} G: \quad S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- Eliminiamo la ε -regola $B \rightarrow \varepsilon$:

$$\begin{aligned} G : S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid \mathbf{a} \\ A &\rightarrow B \mid S \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- Eliminiamo la ε -regola $A \rightarrow \varepsilon$:

$$\begin{aligned} G : S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid \mathbf{SA} \mid \mathbf{AS} \mid S \\ A &\rightarrow B \mid S \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

- Eliminiamo la regola unitaria $S \rightarrow S$:

$$\begin{aligned} G : S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \mid S \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

- Eliminiamo la regola unitaria $S_0 \rightarrow S$:

$$\begin{aligned} G : S_0 &\rightarrow S \mid \mathbf{ASA} \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{SA} \mid \mathbf{AS} \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

- Eliminiamo le regole unitarie $A \rightarrow B$ e $A \rightarrow S$:

$$\begin{aligned} G : S_0 &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{ASA} \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{SA} \mid \mathbf{AS} \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

- Separiamo ogni regola con tre o più elementi a destra in regole con massimo due elementi a destra:

$$\begin{aligned} G : S_0 &\rightarrow ASA \mid \mathbf{AA_1} \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid \mathbf{AA_1} \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow b \mid ASA \mid \mathbf{AA_1} \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ \mathbf{A_1} &\rightarrow \mathbf{SA} \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

- Infine, convertiamo tutte le regole aventi due elementi a destra di cui almeno uno è un terminale:

$$\begin{aligned}
G: \quad S_0 &\rightarrow AA_1 \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{UB} \mid a \mid SA \mid AS \\
S &\rightarrow AA_1 \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{UB} \mid a \mid SA \mid AS \\
A &\rightarrow b \mid AA_1 \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{UB} \mid a \mid SA \mid AS \\
A_1 &\rightarrow SA \\
U &\rightarrow \mathbf{a} \\
B &\rightarrow b
\end{aligned}$$

- La grammatica finale ottenuta risulta sia equivalente a quella iniziale sia in forma normale di Chomsky:

$$\begin{aligned}
G: \quad S_0 &\rightarrow AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS \\
S &\rightarrow AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS \\
A &\rightarrow b \mid AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS \\
A_1 &\rightarrow SA \\
U &\rightarrow a \\
B &\rightarrow b
\end{aligned}$$

2.4 Automi a pila

Definizione 33: Pushdown Automaton (PDA)

Un **Pushdown Automaton (PDA)** (o *Automa a pila*) è una sestupla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ dove:

- Q è l'**insieme finito degli stati** dell'automa
- Σ è l'**alfabeto** dell'automa
- Γ è l'**alfabeto** dello stack (o *pila*) dell'automa
- $q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale** dell'automa
- $F \subseteq Q$ è l'**insieme degli stati accettanti** dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\epsilon)$ è la **funzione di transizione** dell'automa, dove se $(q, c) \in \delta(p, a, b)$ si ha che:
 - Viene letto il simbolo a dalla stringa in input e se il simbolo b è in cima allo stack allora l'automa passa dallo stato p allo stato q e il simbolo b viene sostituito dal simbolo c
 - L'etichetta della transizione da p a q viene indicata come $a; b \rightarrow c$

Osservazione 12

Dato $(q, c) \in \delta(p, a, b)$ dove δ è la funzione di transizione di un PDA, si ha che:

- Se $b, c = \varepsilon$ (dunque $a; \varepsilon \rightarrow \varepsilon$) allora l'automa leggerà a dalla stringa e passerà direttamente dallo stato p allo stato q , senza modificare lo stack
- Se $b = \varepsilon$ e $c \neq \varepsilon$ (dunque $a; \varepsilon \rightarrow c$) allora l'automa leggerà a dalla stringa, passerà direttamente dallo stato p allo stato q e in cima allo stack viene aggiunto il simbolo c (**push**)
- Se $b \neq \varepsilon$ e $c = \varepsilon$ (dunque $a; b \rightarrow \varepsilon$) allora l'automa leggerà a e se in cima allo stack vi è b , l'automa passerà dallo stato p allo stato q e rimuoverà b dalla cima dello stack (**pop**)

Esempio:

- Consideriamo il seguente PDA:



- Data la stringa **aab**, uno dei possibili rami di computazione del PDA procede nel seguente ordine:
 1. Viene letta la prima **a** e viene inserita la prima **c** in cima allo stack, rimanendo nello stato q_1 .
 2. Viene letta la seconda **a** e viene inserita la seconda **c** in cima allo stack, rimanendo nello stato q_1 .
 3. Viene letta la **b**, passando da q_1 a q_2 e lasciando lo stack inalterato
 4. Viene "letta" la prima ε , rimuovendo la seconda **c** dallo stack (poiché essa è in cima), rimanendo nello stato q_2 .
 5. Viene "letta" la seconda ε , rimuovendo la prima **c** dallo stack (poiché essa è in cima), rimanendo nello stato q_2 .
 6. Sia la stringa che lo stack sono vuoti, dunque la computazione termina necessariamente poiché non vi sono transizioni percorribili
- Notiamo in particolare che, in tal caso, la stringa verrebbe accettata anche se la computazione si fermasse al terzo passo
- Difatti, lo stack non deve necessariamente esser vuoto affinché la stringa possa essere accettata

Proposizione 8: Stringa accettata in un PDA

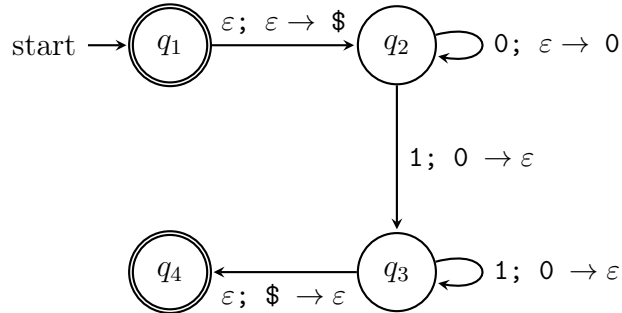
Sia $P := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ un PDA. Data una stringa $w := w_0 \dots w_k \in \Sigma^*$, dove $w_0, \dots, w_k \in \Sigma_\varepsilon$, diciamo che w è **accettata da P** se esiste una sequenza di stati $r_0, r_1, \dots, r_{k+1} \in Q$ ed una sequenza di stringhe $s_1, \dots, s_n \in \Gamma^*$ tali che:

- $r_0 = q_0$
- $r_{k+1} \in F$
- $s_0 = \varepsilon$, dunque lo stack è inizialmente vuoto
- $\forall i \in [0, k]$ si abbia che:
 - $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_i, a)$
 - $s_i = at$
 - $s_{i+1} = bt$

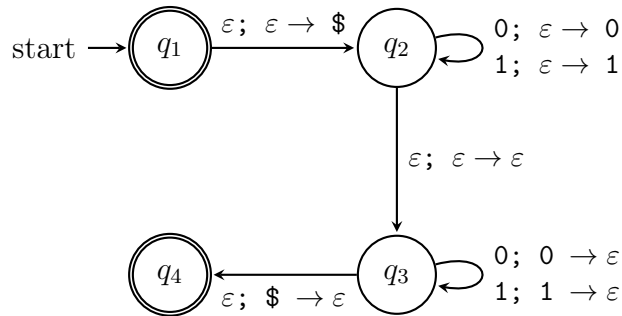
dove $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ e dove $t \in \Gamma^*$ è la stringa composta dai caratteri nello stack

Esempi:

- Il seguente automa riconosce il linguaggio $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$



- Il seguente automa riconosce il linguaggio $L = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$



2.4.1 Equivalenza tra CFG e PDA

Definizione 34: Classe dei linguaggi riconosciuti da un PDA

Dato un alfabeto Σ , definiamo come **classe dei linguaggi di Σ riconosciuti da un PDA** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(\text{PDA}) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ PDA } P \text{ t.c. } L = L(P)\}$$

Proposizione 9: Scrittura di una stringa sullo stack

Sia $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ un PDA. Dati $u_1, \dots, u_k \in \Gamma$, introduciamo una notazione per cui δ possa ammettere la scrittura diretta sullo stack della stringa $u := u_1 \dots u_k$.

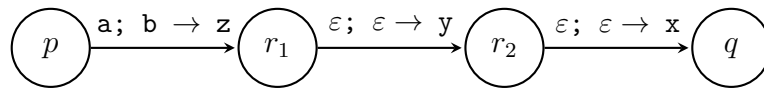
Formalmente, diciamo che:

$$(q, u_1 \dots u_k) \in \delta(p, a, b) \iff \exists r_1, \dots, r_{k-1} \in Q \text{ tali che:}$$

- $\delta(p, a, b) \ni (r_1, u_k)$
- $\delta(r_1, \varepsilon, \varepsilon) = \{(r_2, u_{k-1})\}$
- ...
- $\delta(r_{k-1}, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q, u_1)\}$

Esempio:

- Dato $(q, xyz) \in \delta(p, a, b)$ si ha che:



Lemma 5: Conversione da CFG a PDA

Date le due classi di linguaggi CFL e $\mathcal{L}(\text{PDA})$, si ha che:

$$\text{CFL} \subseteq \mathcal{L}(\text{PDA})$$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \text{CFL}$, sia $G = (V, \Sigma, R, S)$ la CFG tale che $L = L(G)$
- Consideriamo quindi il PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, F)$ tale che:
 - $Q = \{q_{\text{start}}, q_{\text{loop}}, q_{\text{accept}}\} \cup Q_\delta$, dove Q_δ sono i minimi stati aggiunti affinché la sua funzione δ sia ben definita (vedi i punti successivi)
 - $\Gamma = V \cup \Sigma$

– $F = \{q_{\text{accept}}\}$

– Dato $q_{\text{start}} \in Q$ si ha che

$$\delta(q_{\text{start}}, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_{\text{loop}}, S\$)\}$$

– $\forall A \in V$ si ha che

$$\delta(q_{\text{loop}}, \varepsilon, A) = \{(q_{\text{loop}}, u) \mid (A \rightarrow u) \in R, u \in \Gamma^*\}$$

– $\forall a \in \Sigma$ si ha che

$$\delta(q_{\text{loop}}, a, a) = \{(q_{\text{loop}}, \varepsilon)\}$$

– Dato $q_{\text{accept}} \in Q$ si ha che

$$\delta(q_{\text{loop}}, \varepsilon, \$) = \{(q_{\text{accept}}, \varepsilon)\}$$

- A questo punto, per costruzione stessa di P si ha che:

$$w \in L = L(G) \iff w \in L(P)$$

dunque che $L = L(P) \in \mathcal{L}(\text{PDA})$

□

Esempio:

- Consideriamo la seguente grammatica:

$$\begin{aligned} G : \quad S &\rightarrow aTb \mid b \\ T &\rightarrow Ta \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- Il PDA in grado di riconoscere $L(G)$ corrisponde a:



Lemma 6: Conversione da PDA a CFG

Date le due classi di linguaggi $\mathcal{L}(\text{PDA})$ e CFL, si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{PDA}) \subseteq \text{CFL}$$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \mathcal{L}(\text{PDA})$, sia $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ il PDA tale che $L = L(P)$
- Consideriamo il PDA $P' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, \{q_{\text{accept}}\})$ tale che:
 - Ogni transizione effettua solo un'operazione di push o di pop, ma mai una sostituzione diretta:

$$(q, c) \in \delta(p, a, b) \implies \exists r \in Q' \mid (r, \varepsilon) \in \delta'(p, a, b) \wedge \delta'(r, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q, c)\}$$

- $Q' = Q \cup Q_{\delta'} \cup \{q_{\text{accept}}\}$, dove $Q_{\delta'}$ sono gli stati aggiunti per il punto precedente
- $q_{\text{accept}} \in Q'$ è il nuovo unico stato accettante:

$$\forall q \in F \quad (q_{\text{accept}}, \varepsilon) \in \delta'(q, \varepsilon, \varepsilon)$$

- Lo stack deve essere svuotato prima di poter accettare una stringa:

$$\forall q \in F, a \in \Sigma \quad (q, \varepsilon) \in \delta'(q, \varepsilon, a)$$

- A questo punto, per costruzione stessa di P' si ha che:

$$w \in L(P) \iff w \in L(P')$$

dunque che $L = L(P) = L(P')$

- Consideriamo quindi la CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ tale che:
 - $V = \{A_{p,q} \mid p, q \in Q'\}$
 - $S = A_{q_0, q_{\text{accept}}}$
 - Ogni variabile $A_{p,q}$ è grado di derivare tutte le stringhe generabili passando dallo stato p allo stato q :

- * $\forall p \in Q'$ si ha che:

$$(A_{p,p} \rightarrow \varepsilon) \in R$$

- * $\forall p, q, r, s \in Q', u \in \Gamma$ e $a, b \in \Sigma_\varepsilon$ si ha che:

$$(r, u) \in \delta'(p, a, \varepsilon) \wedge (q, \varepsilon) \in \delta(s, b, u) \iff (A_{p,q} \rightarrow aA_{r,s}b) \in R$$

- * $\forall p, q, r \in Q'$ si ha che:

$$(A_{p,q} \rightarrow A_{p,r}A_{r,q}) \in R$$

- **Affermazione:** dati $p, q \in Q'$ e $x \in \Sigma^*$, se $A_{p,q} \xRightarrow{*} x$ allora x porta il PDA P' dallo stato p allo stato q con uno stack vuoto:

Dimostrazione.

Procediamo per induzione sul numero n di produzioni che compongono la derivazione $A_{p,q} \xRightarrow{*} x$

Caso base.

- Per $n = 1$, la derivazione è composta da una sola produzione. Di conseguenza, l'unica regola possibile affinché $A_{p,q} \Rightarrow x$ è la regola $A_{p,q} \rightarrow \varepsilon$, implicando che $p = q$ e che $x = \varepsilon$, dunque la stringa x porta correttamente il PDA P' dallo stato p allo stato q con uno stack vuoto

Ipotesi induttiva forte.

- Assumiamo che per ogni stringa $x \in \Sigma^*$ derivabile da $A_{p,q}$ (dunque tale che $A_{p,q} \xRightarrow{*} x$) tramite $k \leq n$ produzioni, tale stringa x porti il PDA P' da p a q con uno stack vuoto

Passo induttivo.

- Consideriamo la derivazione $A_{p,q} \xRightarrow{*} x$ composta da $n + 1$ produzioni. Poiché tale derivazione è composta da almeno due produzioni, la prima produzione deve essere necessariamente data dalla regola $A_{p,q} \rightarrow aA_{r,s}b$ o dalla regola $A_{p,q} \rightarrow A_{p,r}A_{r,q}$

- (a) Consideriamo il caso in cui $A_{p,q} \Rightarrow aA_{r,s}b \xRightarrow{*} x$.

Sia $x = ayb$, dove $A_{r,s} \xRightarrow{*} y$. Poiché $A_{r,s} \xRightarrow{*} y$ è composta da n produzioni, per ipotesi induttiva la stringa y porta il PDA P' da r ad s con uno stack vuoto.

Inoltre, per costruzione stessa di G , tale regola di derivazione si ha che:

$$(r, u) \in \delta'(p, a, \varepsilon) \wedge (q, \varepsilon) \in \delta(s, b, u) \iff (A_{p,q} \rightarrow aA_{r,s}b) \in R$$

dunque concludiamo che:

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ porta } P' \text{ da } p \text{ in } r \\ y \text{ porta } P' \text{ da } r \text{ in } s \\ b \text{ porta } P' \text{ da } s \text{ in } q \end{array} \right\} \implies x = ayb \text{ porta } P' \text{ da } p \text{ in } q$$

- (b) Consideriamo il caso in cui $A_{p,q} \Rightarrow A_{p,r}A_{r,q} \xRightarrow{*} x$.

Sia $x = yz$, dove $A_{p,r} \xRightarrow{*} y$ e $A_{r,q} \xRightarrow{*} z$. Poiché $A_{p,r} \xRightarrow{*} y$ è composta da $m \leq n$ produzioni e $A_{r,q} \xRightarrow{*} z$ da $n - m \leq n$ produzioni, per ipotesi induttiva le stringhe y e z portano il PDA P' rispettivamente da p ad r e da r a q con uno stack vuoto, dunque concludiamo che:

$$\left. \begin{array}{l} y \text{ porta } P' \text{ da } p \text{ in } r \\ z \text{ porta } P' \text{ da } r \text{ in } q \end{array} \right\} \implies x = yz \text{ porta } P' \text{ da } p \text{ in } q$$

- **Affermazione:** dati $p, q \in Q'$ e $x \in \Sigma^*$, se la stringa x porta il PDA P' dallo stato p allo stato q con uno stack vuoto allora $A_{p,q} \xRightarrow{*} x$

Dimostrazione.

Procediamo per induzione sul numero n di transizioni percorse da P' durante la lettura di x

Caso base.

- Per $n = 0$, il PDA percorre zero transizioni, dunque $x = \varepsilon$ e x porta il PDA da p a p . Pertanto, la regola $A_{p,p} \rightarrow \varepsilon$ soddisfa la derivazione $A_{p,p} \Rightarrow x$

Ipotesi induttiva forte.

- Assumiamo che per ogni stringa $x \in \Sigma^*$ che porta il PDA P' da p a q con uno stack vuoto percorrendo $k \leq n$ transizioni, si abbia che $A_{p,q} \xRightarrow{*} x$

Passo induttivo.

- Consideriamo la stringa $x \in \Sigma^*$ che porta il PDA P' da p a q con uno stack vuoto percorrendo $n + 1$ transizioni. A seconda dell'evolvere dello stack durante la computazione, abbiamo due casi:

- (a) Se lo stack risulta vuoto solo all'inizio e alla fine della computazione, ciò implica che $\exists u \in \Gamma$ inserito nella prima transizione e rimosso solo nell'ultima.

Sia quindi $a \in \Sigma_\varepsilon$ il simbolo letto durante tale prima transizione. In tal caso, $\exists r, s \in Q'$ tali che:

$$(r, u) \in \delta(p, a, \varepsilon) \wedge (q, \varepsilon) \in \delta(s, b, u)$$

Sia quindi $x = ayb$, dove y è una stringa che porta P' da r a s . Affinché la computazione di x termini con lo stack vuoto, è necessario che ciò valga anche per la computazione di y .

Poiché la computazione di y percorre $n - 1$ transizioni, per ipotesi induttiva abbiamo che $A_{r,s} \xRightarrow{*} y$, dunque data la regola $A_{p,q} \rightarrow aA_{r,s}b$ concludiamo che:

$$A_{p,q} \Rightarrow aA_{r,s}b \xRightarrow{*} ayb = x$$

- (b) Se lo stack si svuota durante la computazione, ciò implica che $\exists r \in Q'$ percorso durante la computazione di x in cui ciò accade.

Sia quindi $x = yz$, dove y e z sono due stringhe che portano P' rispettivamente da p a r e da r a q .

Poiché le computazioni di y e z percorrono rispettivamente $m \leq n$ e $n - m \leq n$ transizioni, per ipotesi induttiva abbiamo che $A_{p,r} \xRightarrow{*} y$ e $A_{r,q} \xRightarrow{*} z$, dunque data la regola $A_{p,q} \rightarrow A_{p,r}A_{r,q}$ concludiamo che:

$$A_{p,q} \Rightarrow A_{p,r}A_{r,q} \xRightarrow{*} yz = x$$

- Tramite le due affermazioni, abbiamo che:

$$A_{q_0, q_{\text{accept}}} \xRightarrow{*} x \iff x \text{ porta } P' \text{ da } q_0 \text{ in } q_{\text{accept}} \text{ con uno stack vuoto}$$

da cui concludiamo che:

$$x \in L(G) \iff A_{q_0, q_{\text{accept}}} \iff x \in L(P')$$

dunque che $L = L(P) = L(P') = L(G) \in \text{CFL}$

□

Teorema 11: Equivalenza tra CFG e PDA

Date le due classi di linguaggi $\mathcal{L}(\text{PDA})$ e CFL , si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{PDA}) = \text{CFL}$$

(segue dai due lemmi precedenti)

2.5 Pumping lemma per i linguaggi acontestuali

Proposizione 10: Altezza delle derivazioni in una CFG in CNF

Sia $G = (V, \Sigma, R, S)$ una CFG in CNF. Data $x \in L(G)$ e data l'altezza h dell'albero di derivazione di x , si ha che $|x| \leq 2^{h-1}$

Dimostrazione. Procediamo per induzione sull'altezza h dell'albero della derivazione $S \xRightarrow{*} x$

Caso base.

- Per $h = 1$, la derivazione è composta da una sola produzione. Essendo G in CNF, l'unica regola applicabile è nella forma $S \rightarrow a$, dove $x = a \in \Sigma$, implicando che $|x| = 1 \leq 2^{1-1} = 1$

Ipotesi induttiva forte.

- Assumiamo che data $x \in L(G)$ tale che il suo albero di derivazione abbia altezza $k \leq h$ si abbia che $|x| \leq 2^{k-1}$

Passo induttivo.

- Consideriamo la stringa x il cui albero di derivazione ha altezza $h+1$. Poiché G è in CNF, la prima produzione di tale derivazione deve essere ottenuta tramite una regola nella forma $S \rightarrow AB$.

- Sia quindi $x = yz$, dove $A \xRightarrow{*} y$ e $B \xRightarrow{*} z$. Poiché la derivazione $S \Rightarrow AB \xRightarrow{*} yz = x$ ha altezza $h + 1$, ne segue che l'altezza dei due sottoalberi delle derivazioni $A \xRightarrow{*} y$ e $B \xRightarrow{*} z$ sia h
- Di conseguenza, per ipotesi induttiva si ha che $|y| \leq 2^{h-1}$ e $|z| \leq 2^{h-1}$, implicando che:

$$|x| = |y| + |z| \leq 2^{h-1} + 2^{h-1} = 2^h = 2^{(h+1)-1}$$

□

Lemma 7: Pumping lemma per i linguaggi acontestuali

Dato un linguaggio L , se $L \in \text{CFL}$ allora $\exists p \in \mathbb{N}$, detto **lunghezza del pumping**, tale che $\forall w := uvxyz \in L$, con $|w| \geq p$ e $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ (ossia sono sue sottostringhe), si ha che:

- $\forall i \in \mathbb{N} \quad uv^i xy^i z \in L$
- $|vy| > 0$, dunque $v \neq \varepsilon$ o $y \neq \varepsilon$
- $|vxy| \leq p$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \text{CFL}$, sia $G = (V, \Sigma, R, S)$ la CFG in CNF tale che $L = L(G)$
- Sia $p = 2^{|V|}$. Data una stringa $w \in L$ tale che $|w| \geq p$, per la proposizione precedente l'albero di derivazione di w deve avere un'altezza $h \geq |V| + 1$, poiché altrimenti w non sarebbe generabile da esso
- Consideriamo quindi un cammino di lunghezza h di tale albero, dunque passante per almeno $k \geq |V| + 2$ nodi. Trattandosi di un cammino all'interno di un albero di derivazione, solo l'ultimo nodo del cammino corrisponderà ad un terminale, implicando che in tale cammino vi siano $k - 1 \geq |V| + 1$ variabili.
- Sia quindi A_1, \dots, A_{k-1} la sequenza di variabili del cammino (dove $S = A_1$). Poiché $k - 1 \geq |V| + 1 \geq |V|$, ne segue necessariamente che $\exists i, j \mid k - |V| - 2 \leq i < j \leq k - 1 \wedge A_i = A_j$, ossia che tra le ultime $|V| + 1$ variabili del cammino vi sia almeno una variabile ripetuta
- Consideriamo quindi le cinque sottostringhe $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ tali che:
 - $w = uvxyz$
 - $S \xRightarrow{*} uA_iz$
 - $A_i \xRightarrow{*} vA_jy$
 - $A_j \xRightarrow{*} x$

- Poiché $A_i = A_j$, all'interno di ogni derivazione $A_i \xRightarrow{*} vA_jy$ possiamo sostituire A_j con A_i stesso. Ripetendo tale procedimento $i \in \mathbb{N}$ volte ricorsivamente, otteniamo che:

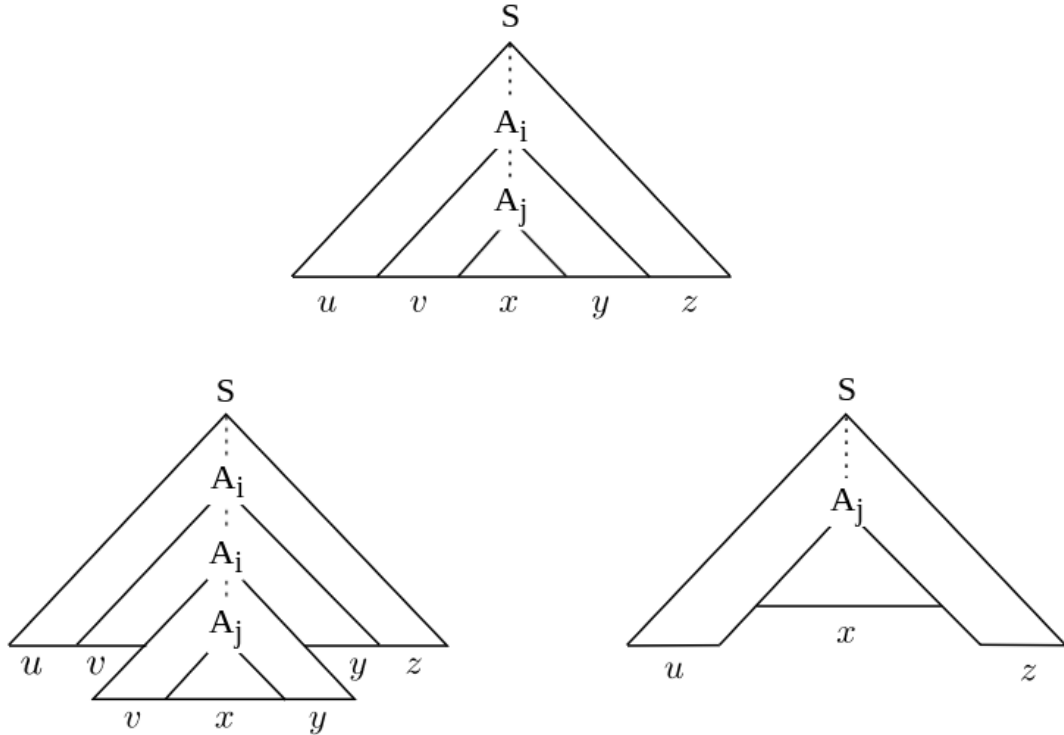
$$A_i \xRightarrow{*} vA_jy = vA_iy \xRightarrow{*} v^iA_jy^i \Rightarrow v^ixy^i$$

implicando dunque che $\forall i \in \mathbb{N} \ S \xRightarrow{*} uv^ixy^iz$ e quindi che $uv^ixy^iz \in L(G) = L$

- Poiché G è in CNF, dunque al suo interno non possono esserci ε -regole o regole unitarie, la derivazione $A_i \xRightarrow{*} vA_jy$ deve necessariamente aver utilizzato una regola del tipo $A_i \rightarrow BC$ dove $B \xRightarrow{*} vA_j$ e $C \xRightarrow{*} y$ oppure $B \xRightarrow{*} v$ e $C \xRightarrow{*} A_jy$. Poiché non vi sono ε -regole, in entrambi i casi si ha che $v \neq \varepsilon$ o $y \neq \varepsilon$, implicando che $|vy| > 0$
- Poiché A_i si trova tra le ultime $|V| + 1$ variabili del cammino, ne segue che il suo sottoalbero abbia altezza $h' \leq |V| + 1$ (contando anche il terminale finale). Per la proposizione precedente, dunque, ne segue che:

$$|vxy| \leq 2^{h'-1} \leq 2^{|V|} = p$$

□



Rappresentazione grafica della dimostrazione

Esempio:

1.
 - Consideriamo il linguaggio $L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
 - Supponiamo per assurdo che $L \in \text{CFL}$. In tal caso, ne segue che per esso debbia valere il pumping lemma, dove p è la lunghezza del pumping
 - Consideriamo quindi la stringa $w := 0^p 1^p 2^p$. Poiché $|w| \geq p$, possiamo suddividerla in cinque sottostringhe $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ tali che $w = uvxyz$.
 - Poiché la terza condizione del pumping lemma impone che $|vxy| \leq p$, le uniche possibilità sono:
 - (a) Se $vxy = 0^m$ con $1 \leq m \leq p$, si ha che $u = 0^h$ e $z = 0^{p-m-h} 1^p 2^p$, dove $1 \leq m+h \leq p$. Inoltre, poiché la seconda condizione impone che $|vy| > 0$, si ha che v e/o y contengono almeno uno 0
 - (b) Se $vxy = 1^m$ con $1 \leq m \leq p$, si ha che $u = 0^p 1^h$ e $z = 1^{p-m-h} 2^p$, dove $1 \leq m+h \leq p$. Inoltre, poiché la seconda condizione impone che $|vy| > 0$, si ha che v e/o y contengono almeno un 1
 - (c) Se $vxy = 2^m$ con $1 \leq m \leq p$, si ha che $u = 0^p 1^p$ e $z = 2^{p-m-h}$, dove $1 \leq m+h \leq p$. Inoltre, poiché la seconda condizione impone che $|vy| > 0$, si ha che v e/o y contengono almeno un 2
 - (d) Se $vxy = 0^m 1^h$ con $1 \leq m+h \leq p$, si ha che $u = 0^{p-m}$ e $z = 1^{p-h} 2^p$. Inoltre, poiché la seconda condizione impone che $|vy| > 0$, si ha che v contiene almeno uno 0 e/o y contiene almeno un 1
 - (e) Se $vxy = 1^m 2^h$ con $1 \leq m+h \leq p$, si ha che $u = 0^p 1^{p-m}$ e $z = 2^{p-h}$. Inoltre, poiché la seconda condizione impone che $|vy| > 0$, si ha che v contiene almeno uno 1 e/o y contiene almeno un 2
 - In tutti i casi possibili descritti, risulta automatico che

$$\nexists n \in \mathbb{N} \mid n = |uv^0xy^0z|_0 = |uv^0xy^0z|_1 = |uv^0xy^0z|_2 \implies uv^0xy^0z \notin L$$

contraddicendo quindi la prima condizione del pumping lemma

- Di conseguenza, ne segue necessariamente che $L \notin \text{CFL}$
2.
 - Consideriamo il linguaggio $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$
 - Supponiamo per assurdo che $L \in \text{CFL}$. In tal caso, ne segue che per esso debbia valere il pumping lemma, dove p è la lunghezza del pumping
 - Consideriamo quindi la stringa $w := 0^p 1^p 0^p 1^p$. Poiché $|w| \geq p$, possiamo suddividerla in cinque sottostringhe $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ tali che $w = uvxyz$.

- Poiché la terza condizione del pumping lemma impone che $|vxy| \leq p$, le uniche possibilità sono:

- (a) Se $u = 0^h$, $vxy = 0^m$ e $z = 0^{p-m-h}1^p0^p1^p$, dove $1 \leq m+h \leq p$, poiché la seconda condizione impone che $|vy| > 0$, si ha che v e/o y contengono almeno uno 0, dunque si ha che:

$$\exists k < m \mid v^0xy^0 = 0^k \implies uv^0xy^0z = 0^h0^k0^{p-m-h}1^p0^p1^p = 0^{p-m+k}1^p0^p1^p$$

dove $k < m \implies p-m-k < p$ e dunque che $uv^0xy^0z \notin L$

- (b) Se $u = 0^p1^p0^h$, $vxy = 0^m$ e $z = 0^{p-m-h}1^p$, dove $1 \leq m+h \leq p$, procedendo analogamente al caso (a) otteniamo che $uv^0xy^0z \notin L$
- (c) Se $u = 0^p1^h$, $vxy = 1^m$ e $z = 1^{p-m-h}0^p1^p$, dove $1 \leq m+h \leq p$, procedendo analogamente al caso (a) otteniamo che $uv^0xy^0z \notin L$
- (d) Se $u = 0^p1^p0^p1^h$, $vxy = 1^m$ e $z = 1^{p-m-h}$, dove $1 \leq m+h \leq p$, procedendo analogamente al caso (a) otteniamo che $uv^0xy^0z \notin L$
- (e) Se $u = 0^{p-h}$, $vxy = 0^h1^m$ e $z = 1^{p-m}0^p1^p$, dove $1 \leq m+h \leq p$, poiché la seconda condizione impone che $|vy| > 0$, si ha che v contiene almeno uno 0 e/o y contiene almeno un 1, dunque si ha che:

$$\exists j < h, j < m \mid v^0xy^0 = 0^j1^k \implies$$

$$uv^0xy^0z = 0^{p-h}0^j1^k1^{p-m}0^p1^p = 0^{p-h+j}1^{p-m+k}0^p1^p$$

dove $j < h, k < m \implies p-h+j, p-m+k < p$ e dunque che $uv^0xy^0z \notin L$

- (f) Se $u = 0^p1^p0^{p-h}$, $vxy = 0^h1^m$ e $z = 1^{p-m}$, dove $1 \leq m+h \leq p$, procedendo analogamente al caso (e) otteniamo che $uv^0xy^0z \notin L$
- (g) Se $u = 0^p1^{p-h}$, $vxy = 1^h0^m$ e $z = 0^{p-m}1^p$, dove $1 \leq m+h \leq p$, poiché la seconda condizione impone che $|vy| > 0$, si ha che v contiene almeno uno 1 e/o y contiene almeno un 0, dunque si ha che:

$$\exists j < h, j < m \mid v^0xy^0 = 1^j0^k \implies$$

$$uv^0xy^0z = 0^p1^{p-h}1^j0^k0^{p-m}1^p = 0^p1^{p-h+j}0^{p-m+k}1^p$$

dove $j < h, k < m \implies p-h+j, p-m+k < p$ e dunque che $uv^0xy^0z \notin L$

- Di conseguenza, poiché il pump down non può essere effettuato nè in un blocco di soli 0 o soli 1 (casi a, b, c, d), nè a cavallo tra degli 0 ed 1 (casi e, f), nè al centro della stringa (caso g), ne segue che la prima condizione del pumping lemma venga contraddetta
- Di conseguenza, ne segue necessariamente che $L \notin \text{CFL}$

2.6 Chiusure dei linguaggi acontestuali

Teorema 12: Chiusura dell'unione in CFL

L'operatore unione è **chiuso in CFL**, ossia:

$$\forall L_1, \dots, L_n \in \text{CFL} \quad L_1 \cup \dots \cup L_n \in \text{CFL}$$

Dimostrazione.

- Dati $L_1, \dots, L_n \in \text{CFL}$, siano G_1, \dots, G_n le tali che $\forall i \in [1, n] \quad G_i = (V_i, \Sigma_i, R_i, S_i) \wedge L_i = L(G_i)$.
- Consideriamo quindi la CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ tale che:
 - S è una nuova variabile iniziale
 - $V = \left(\bigcup_{i=1}^n V_i \right) \cup \{S\}$
 - $\Sigma = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i$
 - $R = \left(\bigcup_{i=1}^n R_i \right) \cup \{S \rightarrow S_j \mid j \in [1, n]\}$
- Data $w \in \bigcup_{i=1}^n L(G_i)$, si ha che $\exists j \in [1, n] \mid w \in L(G_j)$

Di conseguenza, poiché $(S \rightarrow S_j) \in R$, ne segue che

$$w \in L(G_j) \iff S_j \xRightarrow{*} w \implies S \Rightarrow S_j \xRightarrow{*} w \implies w \in L(G)$$

- Data $w \in L(G)$, invece, dove $w \in L(G) \iff S \xRightarrow{*} w$, poiché le uniche regole applicabili su S sono $\{S \rightarrow S_j \mid j \in [1, n]\}$, ne segue necessariamente che:

$$w \in L(G) \implies \exists j \in [1, n] \mid S \Rightarrow S_j \xRightarrow{*} w \implies w \in L(G_j) \subseteq \bigcup_{i=1}^n L(G_i)$$

- Di conseguenza, concludiamo che:

$$L_1 \cup \dots \cup L_n = L(G_1) \cup \dots \cup L(G_n) = L(G) \in \text{CFL}$$

□

Teorema 13: Chiusura della concatenazione in CFL

L'operatore concatenazione è **chiuso in CFL**, ossia:

$$\forall L_1, \dots, L_n \in \text{CFL} \quad L_1 \circ \dots \circ L_n \in \text{CFL}$$

Dimostrazione.

- Dati $L_1, \dots, L_n \in \text{CFL}$, siano G_1, \dots, G_n le tali che $\forall i \in [1, n] \quad G_i = (V_i, \Sigma_i, R_i, S_i) \wedge L_i = L(G_i)$.
- Consideriamo quindi la CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ tale che:

– S è una nuova variabile iniziale

$$– V = \left(\bigcup_{i=1}^n V_i \right) \cup \{S\}$$

$$– \Sigma = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i$$

$$– R = \left(\bigcup_{i=1}^n R_i \right) \cup \{S \rightarrow S_1 \dots S_n\}$$

- Sia $w := w_1 \dots w_n \in L(G_1) \circ \dots \circ L(G_n)$, dove $\forall j \in [1, n] \quad w_j \in L(G_j)$

Poiché $(S \rightarrow S_1 \dots S_n) \in R$, ne segue che

$$\forall j \in [1, n] \quad w_j \in L(G_j) \iff S_j \xRightarrow{*} w_j$$

dunque abbiamo che:

$$S \Rightarrow S_1 \dots S_n \xRightarrow{*} w_1 \dots w_n = w \implies w \in L(G)$$

- Data $w \in L(G)$, invece, dove $w \in L(G) \iff S \xRightarrow{*} w$, poiché l'unica regola applicabile su S è $S \rightarrow S_1 \dots S_n$, ne segue necessariamente che:

$$w \in L(G) \implies S \Rightarrow S_1 \dots S_n \xRightarrow{*} w$$

dunque $\exists w_1 \in L(G_1), \dots, w_n \in L(G_n)$ tali che:

$$S \Rightarrow S_1 \dots S_n \xRightarrow{*} w_1 S_2 \dots S_n \xRightarrow{*} w_1 w_2 \dots w_n = w$$

implicando che:

$$w = w_1 w_2 \dots w_n \in L(G_1) \circ \dots \circ L(G_n)$$

- Di conseguenza, concludiamo che:

$$L_1 \circ \dots \circ L_n = L(G_1) \circ \dots \circ L(G_n) = L(G) \in \text{CFL}$$

□

Esempio:

- Consideriamo i seguenti linguaggi:

$$L_1 = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad L_2 = \{1^m 0^m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

- Consideriamo quindi le due grammatiche:

$$G_1 : A \rightarrow 0A1 \mid \varepsilon$$

$$G_2 : B \rightarrow 1A0 \mid \varepsilon$$

tali che $L_1 = L(G_1)$ e $L_2 = L(G_2)$

- La grammatica G tale che $L(G) = L_1 \cup L_2$, corrisponderà a:

$$\begin{aligned} G : \quad & S \rightarrow A \mid B \\ & A \rightarrow 0A1 \mid \varepsilon \\ & B \rightarrow 0B1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- La grammatica G' tale che $L(G') = L_1 \circ L_2$, corrisponderà a:

$$\begin{aligned} G : \quad & S \rightarrow AB \\ & A \rightarrow 0A1 \mid \varepsilon \\ & B \rightarrow 0B1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Teorema 14: Chiusura di star in CFL

L'operatore star è **chiuso in CFL**, ossia:

$$\forall L \in \text{CFL} \quad L^* \in \text{CFL}$$

Dimostrazione.

- Dato $L \in \text{CFL}$, sia $G = (V, \Sigma, R, S)$ la CFG tale che $L = L(G)$.
- Consideriamo quindi la CFG $G' = (V, \Sigma, R', S_0)$ tale che:
 - S_0 è una nuova variabile iniziale
 - $R' = R \cup \{S_0 \rightarrow \varepsilon, S_0 \rightarrow S, S_0 \rightarrow S_0 S_0\}$
- Data $w := w_1 \dots w_n \in L^*$, abbiamo che:
 - Se $w = \varepsilon$, poiché $(S_0 \rightarrow \varepsilon) \in R$, ne segue che

$$S_0 \Rightarrow \varepsilon = w \implies w = \varepsilon \in L(G')$$

– Se $w \neq \varepsilon$, invece, si ha che $\forall j \in [1, n] \ w_j \in L = L(G) \iff S \xRightarrow{*} w_j$. Dunque si ha che:

* Se $n = 1$, dunque $w = w_1$, tramite la regola $(S_0 \rightarrow S) \in R$ ne segue che:

$$S_0 \Rightarrow S \xRightarrow{*} w_1 = w \implies w \in L(G')$$

* Se invece $n > 1$, tramite $(S_0 \Rightarrow S_0 S_0) \in R$ ne segue che:

$$S_0 \Rightarrow S_0 S_0 \xRightarrow{*} S_0^n \xRightarrow{*} S^n \xRightarrow{*} w_1 \dots w_n = w \implies w \in L(G')$$

• Data $w \in L(G')$, dove $w \in L(G') \iff S_0 \xRightarrow{*} w$, poiché le uniche regole applicabili su S_0 sono $\{S_0 \rightarrow \varepsilon, S_0 \rightarrow S, S_0 \rightarrow SS\}$, ne segue necessariamente che:

- Se $S_0 \Rightarrow \varepsilon = w$, ne segue direttamente che $w = \varepsilon \in L^0$
- Se $S_0 \Rightarrow S \xRightarrow{*} w$, ne segue direttamente che $w \in L(G) = L^1$
- Se $S_0 \Rightarrow S_0 S_0 \xRightarrow{*} w$, dato $n \geq 2$ si ha che:

$$S_0 \Rightarrow S_0 S_0 \xRightarrow{*} S_0^n \xRightarrow{*} S^n$$

Siano quindi $w_1, \dots, w_n \in L(G) = L$. Poiché $\forall j \in [1, n] \ w_j \in L(G) = L \iff S \xRightarrow{*} w_j$, ne segue automaticamente che:

$$S_0 \xRightarrow{*} S^n \xRightarrow{*} w_1 \dots w_n = w \implies w \in L^n$$

Dunque, dato $n \geq 2$, abbiamo che:

$$w \in L^0 \cup L^1 \cup L^n = L^*$$

• Di conseguenza, concludiamo che:

$$L^* = L(G') \in \text{CFL}$$

□

Esempio:

• Consideriamo il seguente linguaggio e la sua grammatica generante:

$$L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad G : A \rightarrow 0A1 \mid \varepsilon$$

• La grammatica G' tale che $L(G) = L(G)^*$, corrisponderà a:

$$\begin{aligned} G' : \quad & S \rightarrow \varepsilon \mid A \mid SS \\ & A \rightarrow 0A1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Teorema 15: Non chiusura dell'intersezione in CFL

L'operatore intersezione **non** è chiuso in CFL, ossia:

$$\exists L_1, L_2 \in \text{CFL} \mid L_1 \cap L_2 \notin \text{CFL}$$

Dimostrazione.

- Consideriamo i seguenti due linguaggi:

$$L_1 = \{a^i b^i c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\} \quad L_2 = \{a^i b^j c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

- Tali linguaggi sono descritti dalle seguenti due grammatiche:

$$\begin{array}{ll} G_1 : & S \rightarrow TV \\ & T \rightarrow aTb \mid \varepsilon \\ & V \rightarrow cV \mid \varepsilon \end{array} \quad \begin{array}{ll} G_2 : & S \rightarrow VT \\ & T \rightarrow bTc \mid \varepsilon \\ & V \rightarrow aV \mid \varepsilon \end{array}$$

dove $L_1 = L(G_1)$ e $L_2 = L(G_2)$

- L'intersezione di tali linguaggi risulta essere:

$$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

il quale abbiamo già dimostrato non essere un linguaggio acontestuale (sezione 2.5)

- Di conseguenza, concludiamo che $L_1, L_2 \in \text{CFL}$ ma $L_1 \cap L_2 \notin \text{CFL}$

□

Teorema 16: Non chiusura del complemento in CFL

L'operatore complemento **non** è chiuso in CFL, ossia:

$$\exists L \in \text{CFL} \mid \bar{L} \notin \text{CFL}$$

Dimostrazione.

- Consideriamo il seguente linguaggio:

$$L = \{a, b\}^* - \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

- Consideriamo quindi la seguente grammatica:

$$\begin{array}{ll} G : & S \rightarrow A \mid B \mid AB \mid BA \\ & A \rightarrow a \mid aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \\ & B \rightarrow b \mid aBa \mid aBb \mid bBa \mid bBb \end{array}$$

- Data $x \in L$ tale che $|x|$ sia dispari, notiamo che:

- Se il simbolo centrale di x è a , allora $S \Rightarrow A \xRightarrow{*} x$
- Se il simbolo centrale di x è b , allora $S \Rightarrow B \xRightarrow{*} x$

dunque ne segue che $x \in L(G)$

- Viceversa, data $x \in L(G)$ tale che $|x|$ sia dispari, ne segue immediatamente che $\nexists w \in \{a, b\}^* \mid x = ww \implies x \in L$
- Sia quindi $x \in L$ tale che $|x|$ sia pari.

Dati $x_1, \dots, x_n \in \{a, b\}$ tali che $x = x_1 \dots x_n$, ne segue che:

$$x \in L \implies \exists i \in [1, n] \mid x_i \neq x_{\frac{n}{2}+i}$$

- Siano quindi $u := x_1 \dots x_{2i-1}$ e $v := x_{2i} \dots x_n$. Notiamo che il simbolo centrale di u corrisponde a $x_{\frac{1+2i-1}{2}} = x_i$, mentre quello di v corrisponde a $x_{\frac{2i+n}{2}} = x_{\frac{n}{2}+i}$, da cui traiamo che:

$$x_i \neq x_{\frac{n}{2}+i} \implies x_{\frac{1+2i-1}{2}} = x_i \neq x_{\frac{n}{2}+i} = x_{\frac{2i+n}{2}} \implies u \neq v$$

- Inoltre, notiamo che $|u|$ e $|v|$ siano dispari, dunque si ha che $u, v \in L(G)$. Di conseguenza, otteniamo che:

$$S \Rightarrow AB \xRightarrow{*} uv = x \text{ oppure } S \Rightarrow BA \xRightarrow{*} uv = x$$

implicando quindi che $x \in L(G)$

- Sia quindi $x \in L(G)$ tale che $|x|$ sia pari.

Poiché $|x|$ è pari, ne segue necessariamente che:

$$S \Rightarrow AB \xRightarrow{*} x \text{ oppure } S \Rightarrow BA \xRightarrow{*} x$$

Poiché i due casi sono analoghi, senza perdita di generalità consideriamo il caso in cui $S \Rightarrow AB \xRightarrow{*} x$

- Siano quindi $u := x_1 \dots x_k$ e $v := x_{k+1} \dots x_n$ tali che $x = uv$, $S \Rightarrow A \xRightarrow{*} u$ e $S \Rightarrow B \xRightarrow{*} v$.
- Poiché $S \Rightarrow A \xRightarrow{*} u$ e $S \Rightarrow B \xRightarrow{*} v$, otteniamo che:
 - $|u| = k$ e $|v| = n - k$ sono dispari
 - $S \Rightarrow A \xRightarrow{*} u$ implica che il simbolo centrale di u sia a , ossia che $x_{\frac{1+k}{2}} = a$
 - $S \Rightarrow B \xRightarrow{*} v$ implica che il simbolo centrale di v sia b , ossia che $x_{\frac{k+1+n}{2}} = b$

- Siano quindi che $w := w_1 \dots w_h$ e $w' := w'_1 \dots w'_h$ tali che $|w| = |w'| = h$ e che $u = ww'$, implicando dunque che $h = \frac{n}{2}$. Per il risultato precedente, ne segue automaticamente che:

$$w_{\frac{1+h}{2}} = x_{\frac{1+k}{2}} = a \neq b = x_{\frac{k+1+n}{2}} = w'_{\frac{1+h}{2}} \implies w \neq w' \implies x = ww' \in L$$

- Dunque, abbiamo ottenuto $L = L(G) \in \text{CFL}$
- Il complemento di tale linguaggio risulta essere:

$$\bar{L} = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

il quale abbiamo già dimostrato non essere un linguaggio acontestuale (sezione 2.5)

- Di conseguenza, concludiamo che $L \in \text{CFL}$, ma $\bar{L} \notin \text{CFL}$

□

3

Decidibilità

3.1 Macchine di Turing

Nel 1936, il pioniere dell'informatica Alan Turing sviluppò un modello di calcolo simile ad un automa a stati finiti ma dotato di una memoria illimitata e senza alcuna restrizione. Sebbene essa richieda una grande mole di tempo, la **macchina di Turing** è in grado di elaborare tutto ciò che un reale computer è in grado di elaborare. Per tanto, essa costituisce un perfetto modello astratto di un reale computer, implicando che ogni problema per essa **irrisolvibile** lo sarà anche per un computer.

Il modello di Turing utilizza un **nastro infinito** come memoria illimitata ed è dotata di una **testina di lettura-scrittura**. Il nastro è formato da celle, le quali, inizialmente, contengono solo una stringa data in input (tutte le altre celle sono vuote). Inoltre, il nastro viene continuamente **spostato** a sinistra e destra, in modo che la testina possa leggere o scrivere sulle varie celle. La macchina continua la sua computazione finché essa non raggiungerà lo stato di **accettazione** o lo stato di **rifiuto** della stringa in input. Se la macchina non è in grado di raggiungere nessuno dei due stati, essa rimarrà in un **loop infinito**, non terminando mai l'esecuzione.

Ad esempio, consideriamo il linguaggio $L = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$. Descriviamo in modo informale una macchina di Turing M in grado di accettare le stringhe di tale linguaggio:

$M =$ "Data la stringa w in input:

1. Muoviti a zig-zag lungo il nastro tra tutte le posizioni corrispondenti su entrambi i lati del simbolo $\#$. Se i due simboli combaciano, cancella entrambi sovrascrivendoli con una x . Se i due simboli non combaciano o se non viene mai trovato il simbolo $\#$, rifiuta la stringa.
2. Quando tutti i simboli a sinistra del simbolo $\#$ sono stati cancellati, controlla se a destra del simbolo $\#$ vi sono simboli diversi da x . Se vi sono, rifiuta la stringa, altrimenti accettala."

Data la stringa in input 011000#011000, l'esecuzione della macchina procede come:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \# & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqcup & \dots & & \\
 & & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & & \\
 x & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \# & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqcup & \dots & & & \\
 & & & & & & & \downarrow & & & & & & & & & & \\
 x & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \# & x & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqcup & \dots & & & \\
 & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 x & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \# & x & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqcup & \dots & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & & \\
 x & x & 1 & 0 & 0 & 0 & \# & x & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqcup & \dots & & & \\
 & & & & & & & \dots & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \\
 x & x & x & x & x & x & \# & x & x & x & x & x & x & \sqcup & \dots & & &
 \end{array}$$

dove il simbolo \sqcup indica una **cella vuota**

Definizione 35: Turing Machine (TM)

Una **Turing Machine (TM)** è una settupla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ dove:

- Q è l'insieme finito degli stati della macchina
- Σ è l'alfabeto della macchina, dove $\sqcup \notin \Sigma$
- Γ è l'alfabeto del nastro, dove $\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$
- $q_{\text{start}} \in Q$ è lo **stato iniziale** dell'automa
- $q_{\text{accept}} \in Q$ è lo **stato accettante** dell'automa
- $q_{\text{reject}} \in Q$ è lo **stato rifiutante** dell'automa, dove $q_{\text{reject}} \neq q_{\text{accept}}$
- $\delta : Q - \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\} \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ è la **funzione di transizione** della macchina, dove se $\delta(p, a) = (q, b, X)$ si ha che:
 - Viene letto il simbolo a dal nastro, sostituendolo con b e la macchina passa dallo stato p allo stato q . Inoltre, in nastro viene spostato a sinistra se $X = L$ e a destra se $X = R$
 - L'etichetta della transizione da p a q viene indicata come $a \rightarrow b; X$

Definizione 36: Configurazione di una TM

Sia $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ una TM. Definiamo la stringa $uqav$ come **configurazione di M** , dove:

- $q \in Q$ è lo stato attuale della macchina
- $a \in \Gamma$ è il simbolo del nastro su cui si trova attualmente la testina della macchina
- $u \in \Gamma^*$ è composta dai simboli precedenti ad a sul nastro
- $v \in \Gamma^*$ è composta dai simboli successivi ad a sul nastro

Definizione 37: Passo di computazione in una TM

Data una TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$, si ha che:

$$uaq_i b v \text{ produce } uq_j a c v \iff \delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$$

$$uaq_i b v \text{ produce } uacq_j v \iff \delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$$

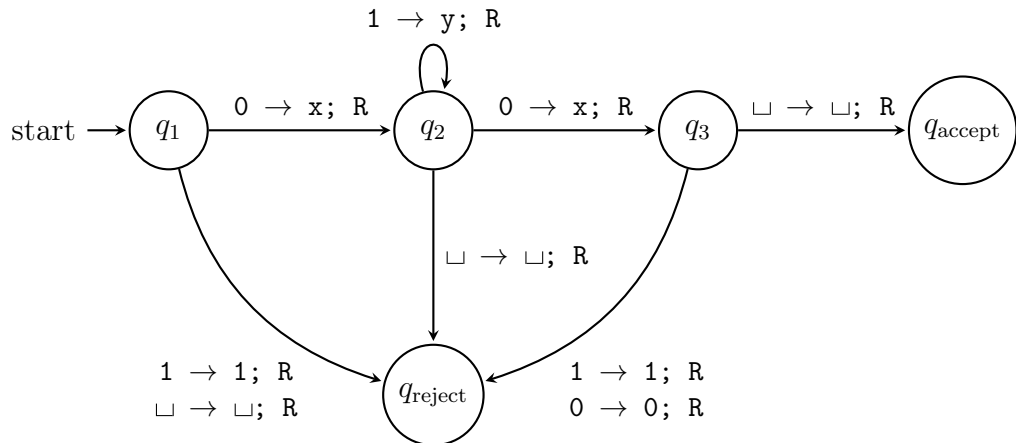
Proposizione 11: Stringa accettata in una TM

Sia $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ una TM. Data una stringa $w \in \Sigma^*$, diciamo che w è **accettata da M** se esiste una sequenza di configurazioni c_1, \dots, c_k tali che:

- $c_1 = q_{\text{start}}w$
- $\forall i \in [1, k-1] \ c_i \text{ produce } c_{i+1}$
- $q_{\text{accept}} \in c_k$

Esempio:

- La seguente TM riconosce il linguaggio $L = \{01^n0 \mid n \in \mathbb{N}\}$:

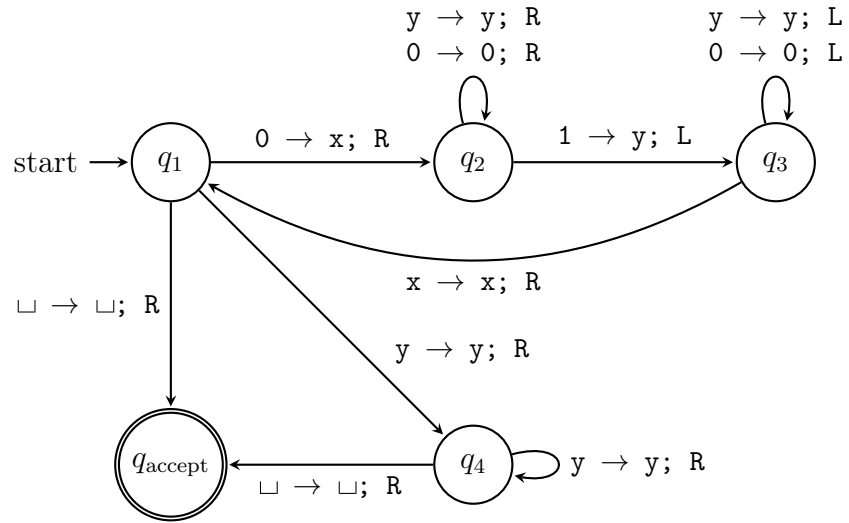


- Difatti, durante la lettura della stringa 01110, la macchina assume le seguenti configurazioni:

```

q1 0 1 1 1 0
x q2 1 1 1 0
x y q2 1 1 0
x y y q2 1 0
x y y y q2 0
x y y y x q3 □
x y y y x □ qaccept □
    
```

2. • La seguente TM riconosce il linguaggio $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:



(tutte le transizioni omesse vanno allo stato q_{reject})

- Difatti, durante la lettura della stringa 000111, la macchina assume le seguenti configurazioni:

q_1 0 0 0 1 1 1	$x q_1 x 0 y 1 1$	$x x q_1 0 y y 1$	
$x q_2 0 0 1 1 1$	$x x q_2 0 y 1 1$	$x x x q_2 y y 1$	$x x x q_3 y y y$
$x 0 q_2 0 1 1 1$	$x x 0 q_2 y 1 1$	$x x x y q_2 y 1$	$x x x y q_4 y y$
$x 0 0 q_2 1 1 1$	$x x 0 y q_2 1 1$	$x x x y y q_2 1$	$x x x y y q_4 y$
$x 0 q_3 0 y 1 1$	$x x 0 q_3 y y 1$	$x x x y q_3 y y$	$x x x y y y q_4 \square$
$x q_3 0 0 y 1 1$	$x x q_3 0 y y 1$	$x x x q_3 y y y$	$x x x y y y \square q_{\text{accept}} \square$
$q_3 x 0 0 y 1 1$	$x q_3 x 0 y y 1$	$x x q_3 x y y y$	

Definizione 38: TM Decisore

Data una TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$, definiamo M come **decisore** se essa termina sempre la sua esecuzione (ossia non può entrare in un loop infinito).

Inoltre, se M è un decisore diciamo che M **decide** $L(M)$

Definizione 39: Classe dei linguaggi Turing riconoscibili

Dato un alfabeto Σ , definiamo come **classe dei linguaggi Turing riconoscibili di Σ** il seguente insieme:

$$\text{REC} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ TM } M \text{ t.c. } L = L(M)\}$$

Definizione 40: Classe dei linguaggi Turing decidibili

Dato un alfabeto Σ , definiamo come **classe dei linguaggi Turing decidibili di Σ** il seguente insieme:

$$\text{DEC} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ TM decisore } M \text{ t.c. } L = L(M)\}$$

Esempio:

- Entrambi i linguaggi dei due esempi precedenti sono Turing decidibili in quanto nessuna delle due TM mostrate è in grado di entrare in un loop infinito

Osservazione 13: Descrizione informale delle TM

Negli esempi e dimostrazioni successive, le TM verranno descritte in modo informale, poiché la loro descrizione formale richiederebbe una grande quantità di stati e transizioni.

Ovviamente, tali descrizioni informali conterranno solo operazioni eseguibili dalle TM

Definizione 41: Codifica di un oggetto

Dato un oggetto O , indichiamo come $\langle O \rangle$ la sua **codifica**, ossia una stringa che ne descriva le caratteristiche

Esempi:

- Dato un polinomio $p = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, possiamo immaginare la sua codifica come una stringa composta dai suoi coefficienti, ossia $\langle p \rangle = \#a_1, a_2, \dots, a_n\#$
- Dato un grafo G , possiamo immaginare la sua codifica $\langle G \rangle$ come una stringa formata da una serie di coppie (x, y) rappresentanti gli archi del grafo

3.1.1 Varianti della macchina di Turing

Definizione 42: Stay-put TM

Una **Stay-put TM** è una TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ la cui **funzione di transizione** è definita come:

$$\delta : Q - \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\} \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$$

dove il simbolo S indica che il nastro possa anche rimanere **immobile**

Teorema 17: Equivalenza tra TM e Stay-put TM

Dato un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ si ha che:

$$L \in \text{REC} \iff \exists \text{ Stay-put TM } M \text{ t.c. } L = L(M)$$

In altre parole, le TM e le Stay-put TM sono equivalenti tra loro

Dimostrazione.

Prima implicazione.

- Dato $L \in \text{REC}$, sia M la TM tale che $L = L(M)$
- Poiché una TM è una particolare Stay-put TM le cui transizioni con non rimangono mai immobili, ne segue automaticamente che essa stessa sia la Stay-put TM in grado di riconoscere $L = L(M)$

Seconda implicazione.

- Sia $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ la Stay-put TM tale che $L = L(M)$
- Consideriamo la TM $M' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ tale che:

$$\delta(p, a) = (q, b, S) \iff \exists r \in Q \mid \forall c \in \Gamma \quad \delta'(p, a) = (r, b, R) \wedge \delta'(r, c) = (q, c, L)$$

- Per costruzione stessa di M' , si ha che:

$$x \in L = L(M) \iff x \in L(M')$$

implicando che $L = L(M) = L(M') \in \text{REC}$

□

Definizione 43: Multitape TM

Una **Multitape TM a k nastri** è una TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ la cui **funzione di transizione** è definita come:

$$\delta : Q - \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\} \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}$$

dove il simbolo S indica che il nastro possa anche rimanere **immobile**

Teorema 18: Equivalenza tra TM e Multitape TM

Dato un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ si ha che:

$$L \in \text{REC} \iff \exists \text{ Multitape TM } M \text{ t.c. } L = L(M)$$

In altre parole, le TM e le Multitape TM sono equivalenti tra loro

Dimostrazione.

Prima implicazione.

- Dato $L \in \text{REC}$, sia M la TM tale che $L = L(M)$
- Poiché una TM è una particolare Multitape TM ad 1 nastro le cui transizioni non rimangono mai immobili, ne segue automaticamente che essa stessa sia la Multitape TM in grado di riconoscere $L = L(M)$

Seconda implicazione.

- Sia M la Multitape TM a k nastri tale che $L = L(M)$
- Consideriamo la Stay-put TM S definita come:

$S =$ "Date in input le stringhe $a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_m, \dots, k_1 \dots k_h$ rappresentati gli input dei k nastri:

1. S pone il nastro uguale a

$$\# \overset{\bullet}{a}_1 \dots a_n \# \overset{\bullet}{b}_1 \dots b_m \# \dots \# \overset{\bullet}{k}_1 \dots k_h \#$$

dove il simbolo $\#$ separa i vari k nastri simulati e il marcatore \bullet indica le testine virtuali di ogni nastro

2. Per simulare una mossa di M , S scansiona il nastro dal primo $\#$ fino al $(k+1)$ -esimo $\#$, ossia dall'estremità sinistra fino all'estremità destra, determinando i simboli puntati dalle testine virtuali. Successivamente, S esegue un secondo passaggio per aggiornare i nastri simulati in base alla funzione di transizione di M

3. Se in qualsiasi momento una delle testine virtuali finisce su un $\#$ durante uno spostamento a destra, S scrive un simbolo \sqcup e sposta di una posizione a destra l'intero contenuto del nastro di S successivo al simbolo scritto, per poi riprendere la normale esecuzione"

- Per costruzione stessa di S , si ha che:

$$x \in L(M) \iff x \in L(S)$$

implicando che $L = L(M) = L(S)$

- Infine, per l'[Equivalenza tra TM e Stay-put TM](#), se segue automaticamente che $L = L(M) = L(S) \in \text{REC}$

□

Definizione 44: Non deterministic TM

Una **Non deterministic TM (NTM)** è una TM $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ la cui **funzione di transizione** è definita come:

$$\delta : Q - \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\} \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$$

Teorema 19: Equivalenza tra TM e NTM

Dato un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ si ha che:

$$L \in \text{REC} \iff \exists \text{ NTM } N \text{ t.c. } L = L(N)$$

In altre parole, le TM e le NTM sono equivalenti tra loro

Dimostrazione.

Prima implicazione.

- Dato $L \in \text{REC}$, sia M la TM tale che $L = L(M)$
- Poiché una TM è una particolare NTM le cui transizioni sono tutte deterministiche, ne segue automaticamente che essa stessa sia la NTM in grado di riconoscere $L = L(M)$

Seconda implicazione.

- Sia $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ la NTM tale che $L = L(N)$
- Consideriamo l'albero di computazione non deterministica di N . Ad ogni nodo di tale albero associamo un indirizzo:
 - Sia b il numero di transizioni uscenti dallo stato di N avente il maggior numero di transizioni uscenti
 - Se il nodo è la radice dell'albero, il suo indirizzo è ε

- Se il nodo non è la radice, il suo indirizzo è xa , dove x è l'indirizzo del padre di tale nodo ed $a \in \{1, \dots, b\}$ è l'identificatore associato a tale nodo tra i figli del suo padre
- Consideriamo quindi la seguente Multitape TM M a 3 nastri, dove:
 - Il nastro 1 contiene la stringa w in input ad N
 - Il nastro 2 è il nastro su cui viene simulata N con w in input
 - Il nastro 3 contiene l'indirizzo del nodo dell'albero di computazione fino a cui simulare N
- M è definita come:

$M = \text{"Data la stringa } w \text{ in input:}"$

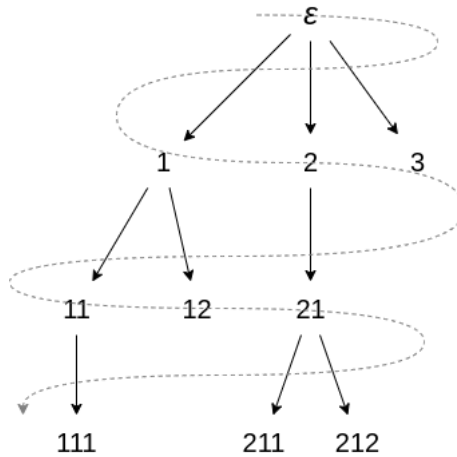
 1. Inizialmente, il nastro 1 di M contiene w , il nastro 3 contiene ε e il nastro 2 è vuoto
 2. Ripeti gli step successivi:
 3. M copia il nastro 1 sul nastro 2
 4. M simula N tramite il nastro 2 eseguendo un suo ramo di computazione. Prima di ogni passo simulato, M consulta il prossimo simbolo sul nastro 3 per poter scegliere su quale ramo proseguire.
 5. Se la simulazione accetta la stringa, anche M la *accetta*.
 6. Se invece non rimangono più simboli sul nastro 3 o se la simulazione rifiuta la stringa, sostituisci la stringa sul nastro 3 con l'indirizzo del nodo direttamente a destra del nodo precedente. Se non vi è un nodo a destra, viene scelto il nodo più a sinistra del livello successivo"
- Per costruzione stessa di M , si ha che:

$$x \in L(N) \iff x \in L(M)$$

implicando che $L = L(N) = L(M)$

- Infine, per l'[Equivalenza tra TM e Multitape TM](#), se segue automaticamente che $L = L(N) = L(M) \in \text{REC}$

□



Rappresentazione grafica della dimostrazione

Definizione 45: Enumeratore

Un **enumeratore** è una TM $E = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ connessa ad una "stampante" (ad esempio un nastro secondario), la quale stampa le stringhe di un linguaggio in ordine casuale e con eventuali ripetizioni.

Inoltre, il nastro di input dell'enumeratore è vuoto e diciamo che E **enumera** $L(E)$

Teorema 20: Equivalenza tra TM e Enumeratori

Dato un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ si ha che:

$$L \in \text{REC} \iff \exists \text{ enumeratore } E \text{ t.c. } L = L(E)$$

In altre parole, le TM e gli enumeratori sono equivalenti tra loro

Dimostrazione.

Prima implicazione.

- Dato $L \in \text{REC}$, sia M la TM tale che $L = L(M)$. Siano inoltre $w_1, w_2, \dots \in \Sigma^*$ tutte le stringhe di Σ^*
- Consideriamo l'enumeratore E definito come:

E = "Dato nulla in input:

1. Ripeti lo step seguente per $i = 1, 2, 3, \dots$:
2. Ripeti lo step seguente per $j = 1, \dots, i$:
3. Simula M per i passi con w_j in input. Se la simulazione accetta w_j , stampa w_j

- Per costruzione stessa di E , si ha che:

$$x \in L(M) \iff x \in L(E)$$

implicando che $L = L(M) = L(E)$

Seconda implicazione.

- Sia E l'enumeratore tale che $L = L(E)$
- Consideriamo la TM M definita come:

$M =$ "Data la stringa w in input:

1. Simula E . Ogni volta che E stampa una stringa, comparala con w .
2. Se w appare almeno una volta nell'output di E , M accetta

- Per costruzione stessa di M , si ha che:

$$x \in L(E) \iff x \in L(M)$$

implicando che $L = L(E) = L(M) \in \text{REC}$

□

3.2 Tesi di Church-Turing

Definizione 46: Funzione calcolabile

Una funzione $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ è detta **calcolabile** se esiste un **algoritmo** che dato in input un elemento $x := (x_1, \dots, x_k) \in A$ restituisce sempre un elemento $y \in B$ tale che $f(x) = y$

Proposizione 12: Tesi di Church-Turing

Data una funzione calcolabile f , si ha che:

$$f \text{ computabile da un algoritmo} \iff f \text{ computabile da una TM}$$

In altre parole, le TM e gli algoritmi sono equivalenti tra loro, implicando che **qualsiasi tipo di computazione possa essere svolto tramite una TM**. Dunque, la tesi di Church-Turing può essere vista come una formalizzazione del concetto di algoritmo.

Teorema 21: Gerarchia dei linguaggi

Date le classi dei linguaggi REG, CFL, DEC e REC, si ha che:

$$\text{REG} \subsetneq \text{CFL} \subsetneq \text{DEC} \subsetneq \text{REC}$$

Dimostrazione.

- Tramite il teorema [Ling. acontestuali estensione dei ling. regolari](#), sappiamo già che $\text{REG} \subsetneq \text{CFL}$. Inoltre, per definizione stessa di DEC e REC, ne segue automaticamente che $\text{DEC} \subsetneq \text{REC}$
- Consideriamo quindi una CFG G . Poiché una derivazione in G corrisponde ad una serie di applicazioni di regole di produzione di G , possiamo definire un algoritmo che applichi tali regole
- Per tanto, possiamo definire una TM M che simuli tutte e sole le regole di G , in modo tale che $L(G) = L(M)$, implicando che $\text{CFL} \subseteq \text{REC}$. Inoltre, poiché le regole di produzioni applicabili sono finite, ne segue che per la TM M sia impossibile andare in loop, implicando dunque che $\text{CFL} \subseteq \text{DEC}$
- Consideriamo quindi il linguaggio $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$. Per dimostrazione precedente, sappiamo che $L \notin \text{CFL}$. Tuttavia, possiamo facilmente definire una TM decisore M per cui $L = L(M) \in \text{DEC}$
- Di conseguenza, concludiamo che:

$$\text{REG} \subsetneq \text{CFL} \subsetneq \text{DEC} \subsetneq \text{REC}$$

□

Definizione 47: TM universale

Una **TM universale** è una TM M in grado di simulare qualsiasi altra TM

Definizione 48: Turing-completezza

Definiamo un modello di calcolo come **Turing-completo** se esso è equivalente ad una TM universale

Esempi:

- Il *lambda calcolo non tipato* è un modello di calcolo Turing-completo
- Tutti i linguaggi di programmazione sono Turing-completi
- Il gioco di carte *Magic: The Gathering* è un modello di calcolo Turing-completo (più info qui: <https://arxiv.org/abs/1904.09828>)

3.3 Problemi decidibili

Teorema 22: Problema dell'accettazione per DFA

Sia A_{DFA} il linguaggio definito come:

$$A_{\text{DFA}} = \{\langle D, w \rangle \mid D \text{ DFA}, w \in L(D)\}$$

Tale linguaggio è **decidibile**, ossia $A_{\text{DFA}} \in \text{DEC}$

Dimostrazione.

- Sia M la TM definita come:

$M = \text{"Data in input la codifica } \langle D, w \rangle, \text{ dove } D \text{ è un DFA e } w \text{ una stringa:}$

 1. Se la codifica in input è errata, M *rifiuta*
 2. M simula D con input w
 3. Se la simulazione termina su uno stato accettante di D , allora M *accetta*.
Altrimenti, M *rifiuta*."
 - Per costruzione stessa di M , si ha che:

$$\langle D, w \rangle \in L(M) \iff w \in L(D) \iff \langle D, w \rangle \in A_{\text{DFA}}$$

implicando che $L(M) = A_{\text{DFA}}$

- Inoltre, poiché un DFA termina sempre, anche la simulazione terminerà sempre, implicando che M sia un decisore, concludendo che $A_{\text{DFA}} = L(M) \in \text{DEC}$.

□

Teorema 23: Problema dell'accettazione per NFA

Sia A_{NFA} il linguaggio definito come:

$$A_{\text{NFA}} = \{\langle N, w \rangle \mid N \text{ NFA}, w \in L(N)\}$$

Tale linguaggio è **decidibile**, ossia $A_{\text{NFA}} \in \text{DEC}$

Dimostrazione.

- Sia M_{DFA} la TM decisore utilizzata nel [Problema dell'accettazione per DFA](#)
- Sia M la TM definita come:

$M = \text{"Data in input la codifica } \langle N, w \rangle, \text{ dove } N \text{ è un NFA e } w \text{ una stringa:}$

 1. Se la codifica in input è errata, M *rifiuta*

2. M converte N in un DFA D tale che $L(N) = L(D)$
 3. M esegue il programma di M_{DFA} con input $\langle D, w \rangle$
 4. Se l'esecuzione accetta, allora M accetta. Altrimenti M rifiuta"
- Per costruzione stessa di M , si ha che:

$$\langle N, w \rangle \in A_{\text{NFA}} \iff \langle D, w \rangle \in A_{\text{DFA}} = L(M_{\text{DFA}}) \iff \langle N, w \rangle \in L(M)$$

implicando che $L(M) = A_{\text{NFA}}$, e inoltre che:

- Inoltre, poiché M_{DFA} è un decisore, dunque la sua esecuzione termina sempre, anche M terminerà sempre, implicando che anche esso sia un decisore, concludendo che $A_{\text{NFA}} = L(M) \in \text{DEC}$.

□

Teorema 24: Problema dell'accettazione per le esp. reg.

Sia A_{REX} il linguaggio definito come:

$$A_{\text{REX}} = \{ \langle R, w \rangle \mid R \in \text{re}(\Sigma), w \in L(R) \}$$

Tale linguaggio è **decidibile**, ossia $A_{\text{REX}} \in \text{DEC}$

Dimostrazione.

- Sia M_{NFA} la TM decisore utilizzata nel [Problema dell'accettazione per NFA](#)
 - Sia M la TM definita come:
- M = "Data in input la codifica $\langle R, w \rangle$, dove $R \in \text{re}(\Sigma)$ e w una stringa:
1. Se la codifica in input è errata, M rifiuta
 2. M converte R in un NFA N tale che $L(R) = L(N)$
 3. M esegue il programma di M_{NFA} con input $\langle N, w \rangle$
 4. Se l'esecuzione accetta, allora M accetta. Altrimenti M rifiuta"
- Per costruzione stessa di M , si ha che:

$$\langle R, w \rangle \in A_{\text{REX}} \iff \langle N, w \rangle \in A_{\text{NFA}} = L(M_{\text{NFA}}) \iff \langle R, w \rangle \in L(M)$$

implicando che $L(M) = A_{\text{REX}}$, e inoltre che:

- Inoltre, poiché M_{NFA} è un decisore, dunque la sua esecuzione termina sempre, anche M terminerà sempre, implicando che anche esso sia un decisore, concludendo che $A_{\text{REX}} = L(M) \in \text{DEC}$.

□

Teorema 25: Problema dell'accettazione per le CFG

Sia A_{CFG} il linguaggio definito come:

$$A_{CFG} = \{\langle G, w \rangle \mid G \text{ CFG}, w \in L(G)\}$$

Tale linguaggio è **decidibile**, ossia $A_{CFG} \in DEC$

Dimostrazione.

- **Affermazione:** Sia $G = (V, \Sigma, R, S)$ una CFG in CNF. Data $w \in L(G)$, se $|w| \geq 1$, la sua derivazione è composta da esattamente $2 \cdot |w| - 1$ produzioni

Dimostrazione.

Procediamo per induzione sulla lunghezza n di w

Caso base.

- Per $n = 1$, si ha che $w = a$, dove $a \in \Sigma$. Di conseguenza la sua derivazione è composta solo dalla regola $S \Rightarrow a = w$, ossia da $2 \cdot 1 - 1 = 1$ produzioni

Ipotesi induttiva forte.

- Assumiamo che per ogni stringa $w \in L(G)$ tale che $1 \leq |w| \leq n$ sia derivabile tramite $2|w| - 1$ produzioni

Passo induttivo.

- Sia $w \in L(G)$ tale che $|w| = n + 1$. Essendo G in CNF, ne segue che la derivazione di w sia nella forma $S \Rightarrow AB \xRightarrow{*} w$.
- Siano quindi $x, y \in \Sigma^*$ tali che $w = xy$, dove $A \xRightarrow{*} x$ e $B \xRightarrow{*} y$.
- Poiché G è in CNF, ne segue che $x, y \neq \varepsilon$, implicando che $1 \leq |x| \leq n$ e $1 \leq |y| \leq n$
- Siano quindi $|x| = k$ e $|y| = n + 1 - k$. Per ipotesi induttiva, x e y sono derivabili tramite esattamente $2k - 1$ produzioni e $2n + 1 - k - 1$ produzioni
- Di conseguenza, poiché $S \Rightarrow AB \xRightarrow{*} xy = w$, ne segue che il numero di produzioni della derivazione di w sia esattamente:

$$1 + (2k - 1) + (2n + 1 - k - 1) = 2n + 2 - 1 = 2(n + 1) - 1 = 2|w| - 1$$

- Sia M la TM definita come:

$M =$ "Data in input la codifica $\langle G, w \rangle$, dove G è un CFG e w una stringa:

1. Se la codifica in input è errata, M rifiuta
2. M converte G in una CFG G' in CNF tale che $L(G) = L(G')$

3. Se $|w| \neq 0$, M lista tutte le derivazioni di G composte da $2n - 1$ produzioni, dove $|w| = n$. Altrimenti, M lista tutte le derivazioni composte da 1 produzione
 4. Se almeno una delle derivazioni genera w , M accetta, altrimenti rifiuta"
- Per costruzione stessa di M , si ha che:

$$\langle G, w \rangle \in L(M) \iff w \in L(G) \iff \langle G, w \rangle \in A_{\text{CFG}}$$

implicando che $L(M) = A_{\text{CFG}}$, e inoltre che:

- Inoltre, poiché la lista utilizzata da M sarà sempre composta da un numero finito di derivazioni, ne segue che M terminerà sempre, concludendo che $A_{\text{CFG}} = L(M) \in \text{DEC}$.

□

Teorema 26: Problema del vuoto per DFA

Sia E_{DFA} il linguaggio definito come:

$$E_{\text{DFA}} = \{\langle D \rangle \mid D \text{ DFA}, L(D) = \emptyset\}$$

Tale linguaggio è **decidibile**, ossia $A_{\text{DFA}} \in \text{DEC}$

Dimostrazione.

- Sia M la TM definita come:

M = "Data in input la codifica $\langle D \rangle$, dove $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ è un DFA:

 1. Se la codifica in input è errata, M rifiuta
 2. Marca lo stato iniziale di D
 3. Ripeti lo step seguente finché vengono marcati dei nuovi stati
 4. Marca ogni stato avente una transizione entrante da uno stato già marcato
 4. Se tra gli stati marcati vi è uno stato accettante di D , allora M rifiuta, altrimenti accetta"
- A questo punto, notiamo che:

$$\langle D \rangle \in E_{\text{DFA}} \iff L(D) = \emptyset \iff \nexists w \in L(D) \iff$$

$$\forall w \in \Sigma^* \quad \delta^*(q_0, w) \notin F \iff \langle D \rangle \in L(M)$$

implicando che $L(M) = E_{\text{DFA}}$

- Inoltre, poiché il numero di stati marcabili da M è finito, ne segue che M termina sempre, concludendo che $E_{\text{DFA}} = L(M) \in \text{DEC}$

□

Teorema 27: Problema del vuoto per CFG

Sia E_{CFG} il linguaggio definito come:

$$E_{\text{CFG}} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ CFG}, L(G) = \emptyset\}$$

Tale linguaggio è **decidibile**, ossia $A_{\text{CFG}} \in \text{DEC}$

Dimostrazione.

- Sia M la TM definita come:

$M =$ "Data in input la codifica $\langle G \rangle$, dove $G = (V, \Sigma, R, S)$ è un DFA:

1. Se la codifica in input è errata, M *rifiuta*
2. Marca tutti i terminali in Σ
3. Ripeti lo step seguente finché vengono marcate delle nuove variabili
 4. Marca ogni variabile $A \in V$ per cui in R esiste una regola $A \rightarrow u_1 \dots u_k$ tale che u_1, \dots, u_k sono variabili o terminali già marcati
4. Se la variabile S è marcata, M *rifiuta*, altrimenti *accetta*."

- A questo punto, notiamo che:

$$\begin{aligned} \langle G \rangle \in E_{\text{CFG}} &\iff L(G) = \emptyset \iff \nexists w \in L(D) \iff \\ &\iff \forall w \in \Sigma^* \quad S \not\stackrel{*}{\Rightarrow} w \iff \langle G \rangle \in L(M) \end{aligned}$$

implicando che $L(M) = E_{\text{CFG}}$

- Inoltre, poiché il numero di variabili marcabili da M è finito, ne segue che M termina sempre, concludendo che $E_{\text{CFG}} = L(M) \in \text{DEC}$

□

Teorema 28: Problema dell'equivalenza tra DFA

Sia EQ_{DFA} il linguaggio definito come:

$$EQ_{\text{DFA}} = \{\langle A, B \rangle \mid A, B \text{ DFA}, L(A) = L(B)\}$$

Tale linguaggio è **decidibile**, ossia $EQ_{\text{DFA}} \in \text{DEC}$

Dimostrazione.

- Consideriamo la *differenza simmetrica* tra $L(A)$ e $L(B)$, definita come:

$$L(A) \Delta L(B) := (L(A) \cap \overline{L(B)}) \cup (L(B) \cap \overline{L(A)})$$

ossia tutti gli elementi presenti in $L(A)$ o $L(B)$, ma non in $L(A) \cap L(B)$

- Poiché le operazioni di unione, intersezione e complemento sono chiuse in REG (Teoremi 3, 4 e 5), ne segue automaticamente che:

$$L(A), L(B) \in \text{REG} \implies L(A) \Delta L(B) \in \text{REG}$$

dunque $\exists C \text{ DFA} \mid L(C) = L(A) \Delta L(B)$

- Inoltre, mostriamo che:

$$\begin{aligned} L(A) \Delta L(B) = \emptyset &\iff \\ (L(A) \cap \overline{L(B)}) \cup (L(B) \cap \overline{L(A)}) &= \emptyset \iff \\ \nexists x \in \Sigma^* \mid (x \in L(A) \wedge x \notin L(B)) \vee (x \in L(B) \wedge x \notin L(A)) &\iff \\ \forall x \in \Sigma^* (x \in L(A) \iff x \in L(B)) &\iff \\ L(A) = L(B) \end{aligned}$$

- Sia M_E la TM decisore utilizzata nel [Problema del vuoto per DFA](#)
- Sia M la TM definita come:

$M =$ "Data in input la codifica $\langle A, B \rangle$, dove A e B sono due DFA:

1. Se la codifica in input è errata, M rifiutante
2. M costruisce il DFA C tale che $L(C) = L(A) \Delta L(B)$ tramite le procedure dei teoremi 2, 3, 4 e 5
3. M esegue il programma di M_E con input $\langle C \rangle$
4. Se l'esecuzione accetta, M accetta, altrimenti rifiuta."

- A questo punto, notiamo che:

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle \in EQ_{\text{DFA}} &\iff L(A) = L(B) \iff L(C) = L(A) \Delta L(B) = \emptyset \iff \\ \langle C \rangle \in L(M_E) &\iff \langle A, B \rangle \in L(M) \end{aligned}$$

implicando che $L(M) = EQ_{\text{DFA}}$

□

3.4 Problemi indecidibili

3.4.1 Argomento diagonale di Cantor

Teorema 29: Insiemi con stessa cardinalità

Dati due insiemi A e B si ha che:

$$\exists f : A \rightarrow B \text{ biettiva} \implies |A| = |B|$$

(*dimostrazione omessa*)

Osservazione 14

Il teorema precedente permette di dimostrare che due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità "infinita".

Esempio:

- Dato l'insieme $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, consideriamo la seguente funzione:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N} : n \mapsto 2n$$

- Tale funzione risulta essere sia iniettiva:

$$f(n) = f(m) \implies 2n = 2m \implies n = m$$

sia suriettiva:

$$\forall 2n \in 2\mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 2n$$

- Di conseguenza, poiché f è biettiva, concludiamo che $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$ nonostante $2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$

Metodo 1: Argomento diagonale di Cantor

L'**argomento diagonale di Cantor** è una tecnica dimostrativa atta a dimostrare l'**esistenza o inesistenza** di una funzione biettiva tra due insiemi A e B disponendo i loro elementi in forma tabellare, per poi concludere la tesi.

Teorema 30: Razionali positivi numerabili

Dato l'insieme $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ dei numeri razionali non negativi, si ha che $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}_{\geq 0}|$

Dimostrazione.

- Siano $\mathbb{N}_{>0}$ e $\mathbb{Q}_{>0}$ gli insiemi dei numeri naturali e razionali positivi

- Consideriamo la matrice A avente righe e colonne infinite le cui entrate sono definite come:

$$a_{i,j} = \frac{i}{j}$$

dove $i, j \in \mathbb{N}$

- Costruiamo una lista di elementi di tale matrice procedendo diagonale per diagonale, partendo dalla diagonale composta dall'entrata $a_{1,1}$ e saltando tutti gli elementi che sono già stati inseriti nella lista (ad esempio, poiché $a_{1,1} = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = a_{2,2}$, l'entrata $a_{2,2}$ non verrà inserita nella lista):

