



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

“SAPIENZA” UNIVERSITÀ DI ROMA  
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,  
INFORMATICA E STATISTICA  
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

---

# Algebra

---

Appunti integrati con il libro "Geometria analitica con elementi di Algebra lineare", M. Abate, C. De Fabritiis

*Author*  
Simone Bianco

30 settembre 2023

# Indice

<b>Informazioni e Contatti</b>	<b>1</b>
<b>1 Strutture algebriche principali</b>	<b>2</b>
1.1 Operazioni binarie e loro proprietà . . . . .	2
1.2 Gruppi, Anelli e Campi . . . . .	5
1.3 Sottogruppi ed Ideali . . . . .	8
<b>2 Numeri Complessi</b>	<b>11</b>
2.1 Il campo dei numeri complessi . . . . .	11
2.2 Forma polare dei numeri complessi . . . . .	14
2.3 Teorema fondamentale dell'algebra . . . . .	18
<b>3 Relazioni e Induzione</b>	<b>20</b>
3.1 Classi di equivalenza . . . . .	22
3.2 Relazione di Divisore . . . . .	25
3.3 Relazione di Congruenza . . . . .	26
3.4 Teorema della divisione con resto euclidea . . . . .	27
3.5 Relazione di Coniugio . . . . .	28
3.6 Induzione matematica . . . . .	29
<b>4 Elementi di Teoria degli Anelli</b>	<b>33</b>
4.1 Classi laterali sinistre . . . . .	33
4.1.1 Teorema di Lagrange . . . . .	35
4.2 L'anello commutativo $\mathbb{Z}_n$ . . . . .	36
4.3 Invertibili e Divisori dello zero . . . . .	38
4.4 Elementi irriducibili e primi . . . . .	42
4.5 Massimo comun divisore . . . . .	45
4.5.1 Algoritmo di Euclide . . . . .	48
4.5.2 Criteri di divisibilità . . . . .	52
4.6 Minimo comune multiplo . . . . .	53
4.7 Teorema fondamentale dell'aritmetica . . . . .	55
4.8 Teorema cinese dei resti . . . . .	58
4.9 Piccolo teorema di Fermat . . . . .	65
4.10 Funzione totiente di Eulero . . . . .	69
4.11 Ordine di un elemento di un gruppo . . . . .	71

<b>5</b>	<b>Gruppo Simmetrico</b>	<b>80</b>
5.1	Ordine di una permutazione . . . . .	83
5.2	Segno delle permutazioni . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Omomorfismi</b>	<b>94</b>
6.1	Isomorfismi, Endomorfismi ed Automorfismi . . . . .	96
6.2	Nucleo ed Immagine di un omomorfismo . . . . .	100
6.3	Primo teorema d'isomorfismo . . . . .	101
6.4	Sottogruppi normali . . . . .	103
6.5	Gruppi diedrali . . . . .	110
6.6	Gruppo di Klein e Teorema di Cauchy . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Polinomi</b>	<b>120</b>
7.1	Divisione con resto di polinomi . . . . .	123
7.2	Proprietà dell'anello polinomiale . . . . .	126
7.3	Polinomi in $\mathbb{Z}_p$ . . . . .	134
<b>8</b>	<b>Spazi vettoriali</b>	<b>137</b>
8.1	Span, Generatori e Indipendenza lineare . . . . .	139
8.2	Base e Dimensione . . . . .	143
8.2.1	Formula di Grassman . . . . .	147
8.3	Trasformazioni lineari . . . . .	149
8.3.1	Teorema del Rango . . . . .	153
8.4	Spazi affini, Sottospazi affini e Giacitura . . . . .	154
8.5	Prodotto scalare e Spazio ortogonale . . . . .	155
<b>9</b>	<b>Matrici</b>	<b>158</b>
9.1	Rango di una matrice . . . . .	162
9.1.1	Riduzione a scala di una matrice . . . . .	164
9.2	Teorema di Rouché-Capelli . . . . .	168
9.2.1	Equazioni parametriche . . . . .	170
9.3	Determinante di una matrice . . . . .	172
9.3.1	Formula di Leibniz e Regola di Sarrus . . . . .	174
9.3.2	Determinante tramite riduzione a scala . . . . .	176
9.3.3	Sviluppo di Laplace . . . . .	178
9.3.4	Regola di Cramer . . . . .	180
9.4	Matrici inverse . . . . .	181
9.5	Teorema degli orlati . . . . .	188
9.6	Matrici simili . . . . .	194
9.6.1	Diagonalizzazione di una matrice . . . . .	200
9.7	Matrice di una trasformazione lineare . . . . .	206
9.8	Matrici ortogonali . . . . .	212
<b>10</b>	<b>Algoritmi di crittografia</b>	<b>216</b>
10.1	Algoritmo RSA . . . . .	216
10.2	Interpolazione di Lagrange e Algoritmo SSS . . . . .	218

# Informazioni e Contatti

Appunti e riassunti personali raccolti in ambito del corso di *Algebra* offerto dal corso di laurea in Informatica dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".

Ulteriori informazioni ed appunti possono essere trovati al seguente link:

<https://github.com/Exyss/university-notes>. Chiunque si senta libero di segnalare incorrettezze, migliorie o richieste tramite il sistema di Issues fornito da GitHub stesso o contattando in privato l'autore :

- Email: [bianco.simone@outlook.it](mailto:bianco.simone@outlook.it)
- LinkedIn: [Simone Bianco](#)

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se le modifiche siano già state apportate nella versione più recente.

## Prerequisiti consigliati per lo studio:

Apprendimento del materiale relativo al corso *Metodi Matematici per l'Informatica*.

## Licence:

These documents are distributed under the [GNU Free Documentation License](#), a form of copyleft intended for use on a manual, textbook or other documents. Material licensed under the current version of the license can be used for any purpose, as long as the use meets certain conditions:

- All previous authors of the work must be **attributed**.
- All changes to the work must be **logged**.
- All derivative works must be **licensed under the same license**.
- The full text of the license, unmodified invariant sections as defined by the author if any, and any other added warranty disclaimers (such as a general disclaimer alerting readers that the document may not be accurate for example) and copyright notices from previous versions must be maintained.
- Technical measures such as DRM may not be used to control or obstruct distribution or editing of the document.

# 1

## Strutture algebriche principali

### 1.1 Operazioni binarie e loro proprietà

#### Definizione 1: Operazione binaria

Dato un insieme  $S$ , definiamo **operazione binaria** una funzione che manda ogni coppia di elementi appartenenti ad  $S$  in  $S$  stesso.

$$m : S \times S \rightarrow S : (x, y) \mapsto m(x, y)$$

Tale proprietà viene anche detta **proprietà di chiusura**.

#### Osservazione 1

Per leggibilità, d'ora in poi indicheremo l'applicazione di un'operazione binaria generica  $m(x, y)$  come  $xy$ .

Tuttavia, tale notazione non corrisponde all'operazione prodotto (a meno che non sia specificato), bensì corrisponde ad un semplice "**segnaposto**" per una qualsiasi operazione binaria.

#### Esempio:

- Sull'insieme  $\mathbb{R}$ , l'**operazione additiva** e l'**operazione moltiplicativa**, ossia:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \cdot y$$

sono entrambe operazioni binarie.

- Sull'insieme  $X = \{f \mid f : S \rightarrow S : x \mapsto y\}$  (dove  $S$  è un insieme qualsiasi) la **composizione tra funzioni**, ossia:

$$\circ : X \times X \rightarrow X : (g, f) \mapsto g \circ f$$

è un'operazione binaria.

- Sull'insieme  $\mathbb{N}$ , l'**operazione sottrazione**, ossia:

$$- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : (x, y) \mapsto x - y$$

non è un'operazione binaria

### Definizione 2: Proprietà associatività

Data un'operazione binaria  $m : S \times S \rightarrow S$ , tale operazione gode di **proprietà associativa** se l'ordine di applicazione di tale operazione binaria non influenza il risultato:

$$\forall x, y, z \in S \quad x(yz) = (xy)z = xyz$$

### Esempi:

- L'operazione additiva  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gode della proprietà associativa:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$

- L'operazione moltiplicativa  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gode della proprietà associativa:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$$

### Definizione 3: Esistenza dell'elemento neutro

Data un'operazione binaria  $m : S \times S \rightarrow S$ , tale operazione gode dell'**esistenza dell'elemento neutro** se

$$\exists! e \in S \mid \forall x \in S \quad xe = ex = x$$

dove  $e$  viene detto **elemento neutro**.

*Dimostrazione unicità:*

- Supponiamo che

$$\exists e_1, e_2 \in S \mid e_1 x = x e_1 = x \wedge e_2 x = x e_2 = x, \forall x \in S$$

- Di conseguenza, si ha che

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2 \iff e_1 = e_2$$

□

**Esempi:**

- Nell'operazione additiva  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'elemento neutro è 0 poiché

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = 0 + x = x$$

- Nell'operazione moltiplicativa  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'elemento neutro è 1 poiché

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

**Definizione 4: Esistenza dell'elemento inverso**

Data un'operazione binaria  $m: S \times S \rightarrow S$ , tale operazione gode dell'**esistenza dell'elemento inverso** se

$$\forall x \in S \quad \exists! x^{-1} \in S \mid xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

*Attenzione:* con la scrittura  $x^{-1}$  indichiamo l'elemento inverso di  $x$  rispetto all'operazione binaria definita, non il "classico" inverso del prodotto (ossia  $\frac{1}{x}$ )

*Dimostrazione unicità:*

- Supponiamo che

$$\exists x_1^{-1}, x_2^{-1} \in S \mid xx_1^{-1} = x_1^{-1}x = e \wedge xx_2^{-1} = x_2^{-1}x = e, \forall x \in S$$

- Di conseguenza, si ha che

$$x_1^{-1}x = e = x_2^{-1}x \iff x_1^{-1}x = x_2^{-1}x \iff x_1^{-1} = x_2^{-1}$$

□

**Esempi:**

- L'operazione additiva  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gode dell'esistenza dell'elemento inverso poiché

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! -x \in \mathbb{R} \mid x + (-x) = (-x) + x = 0$$

- L'operazione moltiplicativa  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gode dell'esistenza dell'elemento inverso poiché

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \mid x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

**Osservazione 2**

Se un'operazione binaria gode dell'**esistenza dell'elemento inverso**, allora essa gode necessariamente anche dell'**esistenza dell'elemento neutro**

**Definizione 5: Proprietà commutativa**

Data un'operazione binaria  $m : S \times S \rightarrow S$ , tale operazione gode di **proprietà commutativa** se l'ordine degli elementi su cui viene applicata tale operazione non influenza il risultato:

$$\forall x, y \in S \quad xy = yx$$

**Esempi:**

- L'operazione additiva  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gode della proprietà commutativa:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + y = y + x$$

- L'operazione moltiplicativa  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gode della proprietà commutativa:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = y \cdot x$$

## 1.2 Gruppi, Anelli e Campi

**Definizione 6: Strutture algebriche semplici**

Data la coppia  $(S, m)$  dove  $S$  è un **insieme** e  $m$  l'**operazione binaria** applicata su di esso, definiamo tale **struttura algebrica** come:

- Un **semigrupp** se in esso vale l'assioma d'associatività
- Un **monoide** se in esso valgono gli assiomi di associatività ed elemento neutro
- Un **gruppo** se in esso valgono gli assiomi di associatività, elemento neutro ed elemento inverso
- Un **gruppo abeliano** (o commutativo) se in esso valgono gli assiomi di associatività, elemento neutro, elemento inverso e commutatività

**Esempi:**

- $(\mathbb{N} - \{0\}, +)$  è un **semigrupp**
- $(\mathbb{N}, +)$  è un **monoide** commutativo
- $(\mathbb{R}, \cdot)$  è un **gruppo abeliano**
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$  è un **monoide** commutativo



- Dato l'insieme  $X$ , definiamo  $X^X$  come l'insieme di tutte le funzioni da  $X$  ad  $X$ , ossia  $X^X := \{f \mid f : X \rightarrow X\}$ .

La struttura algebrica  $(X^X, \circ)$  è un monoide, poiché gode di:

– **Associatività:**

$$f, g, h \in X^X \implies h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

– **Elemento neutro:**

$$\exists! \text{id} \in X^X \mid \forall f \in X^X, f \circ \text{id} = \text{id} \circ f = f$$

dove  $\text{id}$  è la **funzione identità**, ossia tale che  $\forall x \in X$  valga  $\text{id}(x) = x$ .

### Definizione 7: Anello

Definiamo una struttura algebrica  $(A, +, \cdot)$  come **anello** se:

- $(A, +)$  è un **gruppo abeliano**
- $(A, \cdot)$  è un **monoide**
- Gode della **proprietà distributiva**, definita come:

$$\forall a, b, c \in A \quad a(b + c) = ab + ac$$

$$\forall a, b, c \in A \quad (b + c)a = ba + ca$$

In particolare, definiamo un anello come **anello commutativo** se in  $(A, \cdot)$  vale anche l'**assioma di commutatività** (dunque se  $(A, \cdot)$  è un monoide commutativo)

### Proposizione 1

Sia  $A$  un anello. Dato l'elemento neutro della somma  $0 \in A$ , si ha che:

$$\forall a \in A \quad a \cdot 0 = 0$$

*Dimostrazione:*

- Dato un elemento  $a \in A$  si ha che:

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (0 + 1) = a \cdot 0 + a \cdot 1 = a \cdot 0 + a \iff$$

$$\iff a = a \cdot 0 + a \iff a + (-a) = a \cdot 0 + a + (-a) \iff 0 = a \cdot 0$$

□

**Proposizione 2**

Sia  $A$  un anello. Dati due elementi  $x, y \in A$ , si ha che:

$$\forall a \in A \quad (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

*Dimostrazione:*

- Dati due elementi  $x, y \in A$  si ha che:

$$\begin{aligned} (xy)^{-1}(xy) = 1 &\iff (xy)^{-1}xy = 1 \iff (xy)^{-1}xyy^{-1} = y^{-1} \iff \\ &\iff (xy)^{-1}x = y^{-1} \iff (xy)^{-1}xx^{-1} = y^{-1}x^{-1} \iff (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \end{aligned}$$

□

**Corollario 1**

Sia  $A$  un anello commutativo. Dati due elementi  $x, y \in A$ , si ha che:

$$\forall a \in A \quad (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}$$

**Definizione 8: Campo**

Definiamo una struttura algebrica  $(K, +, \cdot)$  come **campo** se:

- $(K, +, \cdot)$  è un **anello commutativo**
- $\forall x \in K - \{0\} \quad \exists! x^{-1} \in K - \{0\} \mid xx^{-1} = x^{-1}x = e$

**Esempi:**

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  è un **anello commutativo**
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un **campo**
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  è un **campo**

## 1.3 Sottogruppi ed Ideali

### Definizione 9: Sottogruppo

Dato un gruppo  $(G, \cdot)$ , definiamo  $(H, \cdot)$  come **sottogruppo** di  $G$ , indicato come  $H \leq G$ , se:

- $H \subseteq G$
- $e \in H$ , dove  $e$  è l'elemento neutro di  $G$
- $x, y \in H \implies xy \in H$
- $x \in H \implies x^{-1} \in H$

**Attenzione:** ricordiamo che con  $\cdot$  intendiamo una qualsiasi operazione binaria

**Esempi:**

- $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$
- $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot) \not\leq (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot) \leq (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$

### Definizione 10: Ideale

Dato un anello  $(A, +, \cdot)$ , definiamo  $(I, +, \cdot)$  come **ideale** di  $A$ , indicato come  $I \triangleleft A$ , se:

- $I \subseteq A$
- $(I, +) \leq (A, +)$
- $AI \subseteq I$ , dove  $AI := \{ax \mid x \in I, a \in A\}$
- $IA \subseteq I$ , dove  $IA := \{yb \mid y \in I, b \in A\}$

**Attenzione:** generalmente, si ha che  $AI \neq IA$

### Osservazione 3

Sia  $A$  un anello e sia  $I \triangleleft A$ . Se  $A$  è **commutativo**, allora  $I$  è **commutativo**

### Definizione 11: Ideale generato da elementi

Sia  $A$  un anello commutativo e siano  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Definiamo  $I(a_1, \dots, a_n) \triangleleft A$  come **ideale generato da**  $a_1, \dots, a_n$ , dove

$$I(a_1, \dots, a_n) := \{a_1b_1 + \dots + a_nb_n \mid b_1, \dots, b_n \in A\}$$

*Dimostrazione:*

- Verifichiamo che l'elemento neutro della somma sia in  $I(a_1, \dots, a_n)$ :

$$0 = a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 \in I(a_1, \dots, a_n)$$

- Verifichiamo che  $I(a_1, \dots, a_n)$  sia chiuso rispetto alla somma:

$$\begin{aligned} x, y \in I(a_1, \dots, a_n) &\iff x = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n, y = a_1 c_1 + \dots + a_n c_n \iff \\ &\iff x + y = a_1(b_1 + c_1) + \dots + a_n(b_n + c_n) \implies x + y \in I(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

- Verifichiamo che  $I(a_1, \dots, a_n)$  sia chiuso rispetto agli inversi della somma:

$$\begin{aligned} x \in I(a_1, \dots, a_n) &\iff x = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \iff \\ &\iff -x = -a_1 b_1 - \dots - a_n b_n = a_1(-b_1) - \dots - a_n(-b_n) \implies -x \in I(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

- Verifichiamo che  $I(a_1, \dots, a_n)$  sia chiuso rispetto al prodotto:

$$\begin{aligned} x \in I(a_1, \dots, a_n) &\iff x = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \implies c \in A \mid cx = c(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \\ &\implies cx = c(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) = a_1(b_1 c) + \dots + a_n(b_n c) \implies cx \in I(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

□

### Definizione 12: Ideale principale

Sia  $A$  un anello commutativo. Definiamo  $I(a) \triangleleft A$  come **ideale principale di  $A$  generato da  $a$** , dove  $I(a)$  ricordiamo essere definito come:

$$I(a) = \{ax \mid x \in A\}$$

### Proposizione 3: Somma tra ideali

Dato un anello commutativo  $A$  e due suoi ideali  $I, J \triangleleft A$ , si ha che  $I + J \triangleleft A$ , dove:

$$I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$$

*Dimostrazione:*

- $I + J \leq A$  poiché:

$$- 0 \in I, 0 \in J \implies 0 = 0 + 0 \in I + J$$

$$- x, y \in I + J \iff x + y = (i_1 + j_1) + (i_2 + j_2) = (i_1 + i_2) + (j_1 + j_2) \implies x + y \in I + J$$

$$- x = i + j \in I + J \iff -x = -(i + j) = (-i) + (-j), -i \in I, -j \in J \implies -x \in I + J$$

- $a \in A, x \in I + J \implies ax \in I + J$ , poiché:

$$a \in A \mid ai \in I, aj \in J \implies ai + aj = a(i + j) \in I + J$$

□

#### Proposizione 4: Intersezione tra ideali

Dato un anello commutativo  $A$  e due suoi ideali  $I, J \triangleleft A$ , si ha che  $I \cap J \triangleleft A$ , dove:

$$I \cap J := \{h \mid h \in I \wedge h \in J\}$$

*Dimostrazione:*

- $I \cap J \leq A$  poiché:

$$- 0 \in I \wedge 0 \in J \implies 0 \in I \cap J$$

$$- x, y \in I \cap J \implies x, y \in I \wedge x, y \in J \implies x + y \in I \wedge x + y \in J \implies x + y \in I \cap J$$

$$- x \in I \wedge x \in J \implies -x \in I \wedge -x \in J \implies -x \in I \cap J$$

- $a \in A, x \in I \cap J \implies ax \in I \cap J$ , poiché:

$$a \in A, x \in I \cap J \implies ax \in I \wedge ax \in J \implies ax \in I \cap J$$

□

#### Proposizione 5: Prodotto tra ideali

Dato un anello commutativo  $A$  e due suoi ideali  $I, J \triangleleft A$ , si ha che  $I \cdot J \triangleleft A$ , dove:

$$I \cdot J := \{i_1 j_1 + i_2 j_2 + \dots + i_n j_n \mid i_k \in I, j_h \in J\}$$

*Dimostrazione:*

- $I \cdot J \leq A$ , poiché:

$$- 0 \in I \wedge 0 \in J \implies 0 = 0 + 0 \in I \cdot J$$

$$- x = i_1 j_1 + i_2 j_2 + \dots + i_n j_n \in I \cdot J, y = i'_1 j'_1 + i'_2 j'_2 + \dots + i'_n j'_n \in I \cdot J \implies \\ x + y = i_1 j_1 + i'_1 j'_1 + \dots + i_n j_n + i'_n j'_n \in I \cdot J$$

$$- x \in I \cdot J \implies -x = x = (-i_1)j_1 + (-i_2)j_2 + \dots + (-i_n)j_n \mid -i_k \in I, j_h \in J \implies -x \in I \cdot J$$

- $a \in A, x \in I \cdot J \implies ax \in I \cdot J$ , poiché:

$$a \in A, x \in I \cdot J \implies ax = (ai_1)j_1 + (ai_2)j_2 + \dots + (ai_n)j_n \implies ax \in I \cdot J$$

□

# 2

## Numeri Complessi

### 2.1 Il campo dei numeri complessi

#### Definizione 13: Numeri complessi

Definiamo l'insieme dei **numeri complessi** come:

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

dove il simbolo  $i$  è l'**unità immaginaria**, per cui si ha che  $i^2 = -1$ .

Inoltre, si ha che  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ .

#### Definizione 14: Parte reale e Parte immaginaria

Dato  $z := a + ib \in \mathbb{C}$ , definiamo:

- $Re(z)$  come **parte reale di  $z$** , dove  $Re(z) = a$
- $Im(z)$  come **parte immaginaria di  $z$** , dove  $Im(z) = b$

Inoltre, definiamo  $z$  come **numero immaginario puro** se  $Re(z) = 0$  e  $Im(z) \neq 0$

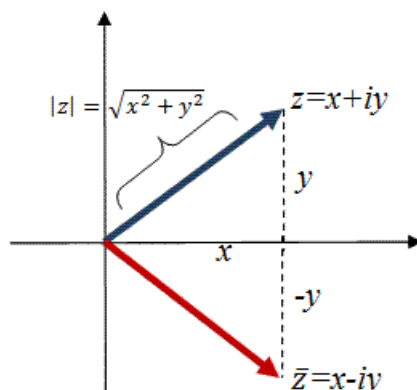
#### Definizione 15: Coniugato di un numero complesso

Dato  $z := a + ib \in \mathbb{C}$ , definiamo  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  come **coniugato di  $z$**  se

$$\bar{z} = a - ib$$

ossia se  $Re(\bar{z}) = Re(z)$  e  $Im(\bar{z}) = -Im(z)$

Poiché un numero complesso è determinato da una **coppia di valori**  $a, b \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{C}, z = a + ib$ , possiamo rappresentare tale numero graficamente attraverso il **piano di Gauss**, avente come ascisse la **parte reale** dei numeri complessi e come ordinate la **parte immaginaria**.



Per tale motivo, dato un elemento  $z \in \mathbb{C}$ , definiamo come suo **valore assoluto** il numero reale corrispondente alla distanza di  $z$  stesso dall'origine, facilmente ricavabile attraverso la **distanza euclidea**:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### Proposizione 6

Dati  $z, w \in \mathbb{C}$ , si ha che:

1.  $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$
2.  $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{zw}$
3.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

*Dimostrazione:*

- Dati  $z := a + ib \in \mathbb{C}$  e  $w := c + id \in \mathbb{C}$ , si ha che
  1.  $\bar{z} + \bar{w} = a - ib + c - id = (a + c) - i(b + d) = \overline{z + w}$
  2.  $\bar{z} \cdot \bar{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc) = \overline{zw}$
  3.  $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

### Proposizione 7

La struttura algebrica  $(C, +, \cdot)$  è un **campo**

*Dimostrazione:*

- Le operazioni binarie di somma e prodotto sono ben definite:

$$z, w \in \mathbb{C} \implies z + w = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d) \implies z + w \in \mathbb{C}$$

$$z, w \in \mathbb{C} \implies zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \implies zw \in \mathbb{C}$$

- Per costruzione di  $\cdot$  e  $+$ , vale la **relazione distributiva**:

$$\forall z, w, q \in \mathbb{C} \mid z(w + q) = zw + zq$$

- Dimostriamo quindi che  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  sia un anello commutativo:

– **Associatività della somma**

$$\begin{aligned} z := a + bi, w := c + di, q := e + fi \in \mathbb{C} &\implies (z + w) + q = (a + bi + c + di) + e + fi \\ &= a + bi + c + di + e + fi = a + bi + (c + di + e + fi) = z + (w + q) \end{aligned}$$

– **Elemento neutro della somma**

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists! 0 \in \mathbb{C} \mid z + 0 = a + bi + 0 = a + bi = z$$

– **Elemento inverso della somma**

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists! -z \in \mathbb{C} \mid z + (-z) = a + bi + (-a - bi) = 0$$

– **Commutatività della somma**

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \quad z + w = a + bi + c + di = c + di + a + bi = w + z$$

– **Associatività del prodotto**

$$\begin{aligned} \forall z := a + bi, w := c + di, q := e + fi \in \mathbb{C} \quad (zw)q &= [(a + bi) \cdot (c + di)] \cdot (e + fi) = \\ &= (a + bi) \cdot (c + di) \cdot (e + fi) = (a + bi) \cdot [(c + di) \cdot (e + fi)] = z(wq) \end{aligned}$$

– **Elemento neutro del prodotto**

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists! 1 \in \mathbb{C} \mid z \cdot 1 = (a + bi) \cdot 1 = a + bi = z$$

– **Commutatività del prodotto**

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \quad z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (c + di)(a + bi) = w \cdot z$$

- Dato  $z := a + ib \in \mathbb{C}$ , consideriamo il suo possibile inverso, ossia l'elemento  $z^{-1} = \frac{1}{a+ib}$ , il quale non appare nella forma  $c + id \mid c, d \in \mathbb{R}$  richiesta dalla definizione di insieme dei numeri complessi.



- Riscriviamo quindi  $z^{-1}$  come:

$$z = a + ib \implies z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

- A questo punto, ponendo  $c := \frac{a}{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$  e  $d := \frac{-b}{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ , otteniamo che  $z^{-1} = c + id \in \mathbb{C}$ , rientrando quindi nella definizione corretta di insieme dei numeri complessi
- Per tanto, si ha che:

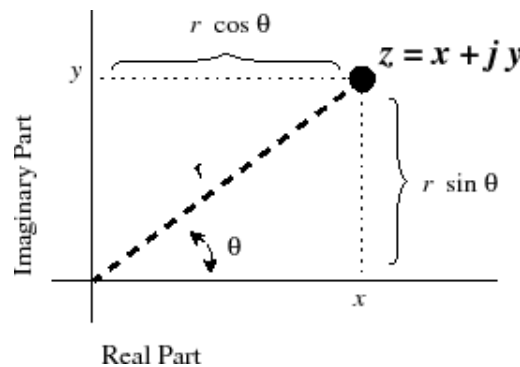
$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \quad \exists! z^{-1} := \frac{a}{a^2 + b^2} + i \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} \mid z \cdot z^{-1} = 1$$

implicando dunque che valga anche l'assioma di elemento inverso del prodotto e di conseguenza che  $\mathbb{C}$  sia un campo. □

## 2.2 Forma polare dei numeri complessi

Abbiamo già trattato di come un numero complesso possa essere espresso come un punto sul piano gaussiano tramite una **coppia di valori**, descrivendo la distanza di tale punto dall'origine del piano  $(0, 0)$  come  $|z|$ .

Possiamo quindi identificare una **circonferenza di raggio**  $r = |z|$  rappresentante tutti i numeri complessi aventi la stessa distanza dall'origine, dove  $\theta$  corrisponde all'**arco in radianti** descritto dal **vettore** costruito attraverso le due coordinate gaussiane rappresentate da  $z$ .



Di conseguenza, dato  $r = |z|$  abbiamo che:

$$r = |z| \implies \begin{cases} a = r \cdot \cos(\theta) \\ b = r \cdot \sin(\theta) \end{cases} \implies \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{r} = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

### Definizione 16: Argomento di un numero complesso

Dato  $z := a + ib \in \mathbb{C}$ , definiamo come **argomento di  $z$** , indicato come  $\arg(z)$ , una qualsiasi soluzione valida al seguente sistema:

$$\begin{cases} \cos(\arg(z)) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\arg(z)) = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

### Osservazione 4

Dato  $z := a + ib \in \mathbb{C}$ , esistono **infiniti argomenti di  $z$** .

*Dimostrazione:*

- Sia  $\theta \in \mathbb{R}$  un argomento di  $z$ , ossia tale che:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

- Essendo le funzioni seno e coseno periodiche,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  si ha che:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\theta + 2k\pi) \\ \sin(\theta) = \sin(\theta + 2k\pi) \end{cases} \implies \begin{cases} \cos(\theta + 2k\pi) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta + 2k\pi) = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

□

### Definizione 17: Argomento principale di un numero complesso

Dato  $z := a + ib \in \mathbb{C}$ , definiamo come **argomento principale di  $z$** , indicato come  $\text{Arg}(z)$ , l'unico argomento di  $z$  tale che  $\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi]$

### Teorema 1: Formula di Eulero

Dato un angolo  $\theta \in \mathbb{R}$ , si ha che

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$$

(*dimostrazione omessa*)

### Corollario 2: Formula di De Moivre

Dato un angolo  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , si ha che

$$(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \cdot \sin(n\theta)$$

*Dimostrazione:*

- Tramite la formula di Eulero, si ha che:

$$(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))^n = (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)} = \cos(n\theta) + i \cdot \sin(n\theta)$$

□

### Proposizione 8: Forma polare di un numero complesso

Dato  $z \in \mathbb{C}$  e posti  $r := |z|$  e  $\theta := \text{Arg}(z)$ , si ha che

$$z = r(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) = re^{i\theta}$$

Inoltre, definiamo tali altre due rappresentazioni di  $z$  come **forma polare di  $z$**

*Dimostrazione:*

- Rappresentando  $z$  sul piano di Gauss, si ha che:

$$r = |z| \implies \begin{cases} a = r \cos(\theta) \\ b = r \sin(\theta) \end{cases} \implies z = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$$

- Infine, per la formula di Eulero si ha che:

$$z = r(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) = re^{i\theta}$$

□

### Osservazione 5: Operazioni in forma polare

Dati  $z, w \in \mathbb{C}$  e posti  $r_1 := |z|$ ,  $\theta_1 := \text{Arg}(z)$  e  $r_2 := |w|$ ,  $\theta_2 := \text{Arg}(w)$ , si ha che:

1.  $z \cdot w = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
2.  $\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
3.  $z^n = r_1^n e^{in\theta_1}$ , dove  $n \in \mathbb{Q}$

**Attenzione:** eccetto rari casi, per calcolare prodotti o divisioni tra numeri complessi risulta essere comunque più comodo calcolare il prodotto tramite la proprietà distributiva e la divisione riscrivendo  $\frac{1}{w}$  come  $\frac{a}{a^2+b^2} + i \cdot \frac{-b}{a^2+b^2}$ , dove  $w := a + ib$

**Esempi:**

1. Dato  $z = -i$ , calcolare  $z^4$ .
  - Calcoliamo l'argomento principale di  $z$ :

$$r := |z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \implies \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{0}{1} = 0 \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases} \implies \text{Arg}(z) = \frac{3}{2}\pi$$

- Di conseguenza, otteniamo che

$$z = re^{\operatorname{Arg}(z) \cdot i} = e^{\frac{3}{2}\pi \cdot i} \implies z^4 = e^{4 \cdot \frac{3}{2}\pi \cdot i} = e^{6\pi \cdot i} = e^{0 \cdot i} = 1$$

2. Dato  $z = 1 - i$ , calcolare  $z^{10}$ .

- Calcoliamo l'argomento principale di  $z$ :

$$r := |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \implies \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \text{Arg}(z) = \frac{7}{4}\pi$$

- Di conseguenza, otteniamo che

$$z = re^{\text{Arg}(z) \cdot i} = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi \cdot i} \implies z^{10} = (\sqrt{2})^{10}e^{10 \cdot \frac{7}{4}\pi \cdot i} = 2^5e^{\frac{35}{2}\pi i} = 2^5e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

- Avendo già visto precedentemente che  $e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$ , otteniamo che:

$$z^{10} = 2^5e^{\frac{3}{2}\pi i} = -2^5i$$

## 2.3 Teorema fondamentale dell'algebra

Dati  $z \in \mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2$ , ci chiediamo quante siano le **soluzioni complesse all'equazione**  $x^n = z$ :

- Se  $z = 0$ , l'unica soluzione risulta essere  $x = 0$
- Consideriamo quindi il caso in cui  $z \neq 0$ . Tramite la formula di De Moivre, possiamo riscrivere tale equazione come:

$$x^n = z \iff x = \sqrt[n]{z} \iff x = z^{\frac{1}{n}} \iff x = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{1}{n}\theta i}$$

ottenendo quindi una soluzione valida all'equazione.

- Tuttavia, ricordando che un numero complesso  $z$  possiede **infiniti argomenti**, riscriviamo  $x$  nella forma più generica:

$$x = r^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$$

- A questo punto, al variare di  $k = 0, 1, \dots, n-1$  è possibile trovare le **uniche  $n$  soluzioni distinte all'equazione**. Difatti, quando  $k = n$ , riotteniamo la prima soluzione dell'equazione, mentre quando  $k = n+1$  otteniamo la seconda, e così via.

**Esempio:**

- Dato  $z = i$ , vogliamo sapere le soluzioni dell'equazione  $x^3 = z$ .

$$x^3 = i \iff x^3 = e^{\frac{1}{2}\pi i} \iff x = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{2k\pi}{3})}$$

– Se  $k = 0$

$$x_1 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi)} = e^{\frac{1}{6}\pi i}$$

– Se  $k = 1$

$$x_2 = e^{i(\frac{1}{2 \cdot 3}\pi + \frac{2\pi}{3})} = e^{\frac{5}{6}\pi i}$$

– Se  $k = 2$

$$x_3 = e^{i(\frac{1}{2 \cdot 3}\pi + \frac{4\pi}{3})} = e^{\frac{9}{6}\pi i} = e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

– Se  $k = 3$

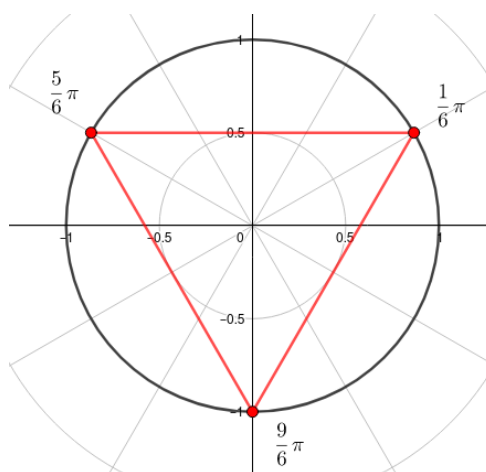
$$x_4 = e^{i(\frac{1}{2 \cdot 3}\pi + \frac{6\pi}{3})} = e^{i(\frac{1}{6}\pi + 2\pi)} = e^{\frac{1}{6}\pi i} \implies x_4 = x_1$$

– Se  $k = 4$

$$x_5 = e^{i(\frac{1}{2 \cdot 3}\pi + \frac{8\pi}{3})} = e^{i(\frac{1}{6}\pi + \frac{2\pi}{3} + 2\pi)} = e^{\frac{5}{6}\pi i} \implies x_5 = x_2$$

– ...

- Notiamo quindi che nonostante esistano **infiniti argomenti di  $z$** , le soluzioni risultano essere cicliche tra di loro, risultando in solo 3 **soluzioni valide**.
- Inoltre, graficando sul piano di Gauss le tre radici soluzioni dell'equazione, notiamo come ognuna di esse corrisponda al vertice di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio 1:



#### Osservazione 6

Le  $n$  radici  $n$ -esime di un numero complesso corrispondono ai vertici di un poligono regolare di  $n$  lati inscritto in una circonferenza di raggio  $|z|^{\frac{1}{n}}$ .

#### Teorema 2: Teorema fondamentale dell'algebra

Dato un polinomio  $p(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$  dove  $a_i \in \mathbb{C}, n \geq 1, a_n \neq 0$ , esistono sempre  $n$  radici complesse di  $p(x)$ :

$$\forall i \in [1, n] \quad \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C} \mid p(x_i) = 0$$

# 3

## Relazioni e Induzione

### Definizione 18: Relazione

Dato un insieme  $X$ , definiamo come **relazione**  $R$  su  $X$  un **sottoinsieme del prodotto cartesiano**  $X \times X$ :

$$R \subseteq X \times X \iff R \subseteq \{(x, y) \mid x, y \in X\}$$

Data una coppia  $(x, y)$ , se essa appartiene alla relazione  $R$  allora affermiamo ciò con la notazione  $x \sim y$  (oppure con  $R(x, y)$ ), altrimenti affermiamo che essa non appartiene alla relazione con la notazione  $x \not\sim y$  (oppure con  $\neg R(x, y)$ ).

$$x \sim y \iff (x, y) \in R \qquad x \not\sim y \iff (x, y) \notin R$$

### Definizione 19: Relazione di equivalenza

Una relazione  $\sim$  viene detta **relazione di equivalenza** se su di essa valgono le seguenti proprietà:

- **Riflessività:**  $\forall x \in X \quad x \sim x$
- **Simmetria:**  $\forall x, y \in X \quad x \sim y \implies y \sim x$
- **Transitività:**  $\forall x, y, z \in X \quad x \sim y, y \sim z \implies x \sim z$

### Esempi:

- La relazione di eguaglianza  $a \sim b \iff a = b$  è una relazione di equivalenza
- Dato l'insieme  $X$  corrispondente ad un insieme di automobili, la relazione  $a \sim b \iff a$  ha lo stesso colore di  $b$  è una relazione di equivalenza

---

### Definizione 20: Relazione d'ordine totale e parziale

Una relazione  $\prec$  viene detta **relazione d'ordine totale** se su di essa valgono le seguenti proprietà:

- **Riflessività:**  $\forall x \in X \quad x \prec x$
- **Anti-simmetria:**  $\forall x, y \in X \quad x \prec y, y \prec x \implies x = y$
- **Transitività:**  $\forall x, y, z \in X \quad x \prec y, y \prec z \implies x \prec z$
- **Totalità:**  $\forall x, y \in X \quad x \prec y \vee y \prec x$

Se  $\prec$  è una relazione che soddisfa la riflessività, l'anti-simmetria, la transitività ma non la totalità, allora tale relazione viene detta **relazione d'ordine parziale**

#### Esempi:

- La relazione di minor-eguaglianza  $a \leq b$  è una relazione d'ordine
- Dato un insieme  $X$ , definiamo come  $\mathcal{P}(X)$  l'insieme contenente tutte le parti di  $X$  (ossia i suoi sottoinsiemi)

$$\mathcal{P}(X) = \{X' \mid X' \subseteq X\}$$

La relazione  $\subseteq$  su  $\mathcal{P}(X)$  risulta essere una relazione d'ordine parziale, poiché:

- Ogni sottoinsieme  $A$  è sottoinsieme di se stesso (riflessività):

$$A \subseteq A, \forall A \in \mathcal{P}(X)$$

- Se un sottoinsieme  $A$  è sottoinsieme di  $B$  e  $B$  è sottoinsieme di  $A$ , allora ciò è possibile solo se  $A$  e  $B$  sono lo stesso sottoinsieme (anti-simmetria):

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$$

- Se un sottoinsieme  $A$  è sottoinsieme di  $B$  e  $B$  è sottoinsieme di  $C$ , allora anche  $A$  è sottoinsieme di  $C$  (transitività):

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$$

- Non tutti i sottoinsiemi sono confrontabili tra loro (ordine non totale). Ad esempio, se  $X = \{a, b, c\}$  si ha che:

$$\{a\}, \{b, c\} \in \mathcal{P}(X) \implies \{a\} \not\subseteq \{b, c\} \wedge \{b, c\} \not\subseteq \{a\}$$



## 3.1 Classi di equivalenza

### Definizione 21: Classe di equivalenza

Sia  $\sim$  relazione d'equivalenza definita su un insieme  $X$ . Dato un elemento  $x \in X$ , denotiamo come  $[x]$  la sua **classe di equivalenza su  $\sim$** , ossia l'insieme di tutti gli elementi in relazione con  $x$ :

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

### Osservazione 7

Sia  $\sim$  relazione d'equivalenza definita su un insieme  $X$ . Dato un elemento  $x \in X$ , per riflessività della relazione  $\sim$  si ha che:

$$x \sim x \iff x \in [x]$$

### Definizione 22: Insieme quoziente

Sia  $\sim$  relazione d'equivalenza definita su un insieme  $X$ . Definiamo come **insieme quoziente di  $X$  su  $\sim$**  l'insieme di tutte le classi di equivalenza indotte dalla relazione:

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$$

### Definizione 23: Partizione di un insieme

Dato un insieme  $X$ , definiamo come **partizione di  $X$**  l'insieme  $\{X_1, \dots, X_n\}$  delle sue **parti**, ossia i suoi sottoinsiemi disgiunti tra loro la cui unione corrisponde ad  $X$ :

$$X = \bigsqcup_{i=1}^n X_i$$

dove  $\bigsqcup$  corrisponde al simbolo di **unione disgiunta**, equivalente a:

$$X = \bigcup_{1 \leq i, j \leq n} X_i \text{ dove } X_i \cap X_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

### Osservazione 8

Data una relazione d'equivalenza  $\sim$  definita su un insieme  $X$ , si verifica che:

$$x \sim y \iff [x] = [y] \qquad x \not\sim y \iff [x] \cap [y] = \emptyset$$

Dunque, **tutte le classi di equivalenza** indotte da  $\sim$  sono **disgiunte tra loro**.

*Dimostrazione:*

- $x \sim y \implies [x] = [y]$

- Se  $x \sim y$ , allora si ha che:

$$z \in [x] \iff z \sim x \implies z \sim x, x \sim y \implies z \sim y \iff z \in [y] \implies [x] \subseteq [y]$$

- Viceversa, siccome  $x \sim y \iff y \sim x$ , si ha che:

$$w \in [y] \iff w \sim y \implies w \sim y, y \sim x \implies w \sim x \iff w \in [x] \implies [y] \subseteq [x]$$

- $[x] = [y] \implies x \sim y$

- Se  $[x] = [y]$ , allora si ha che:

$$z \in [x] = [y] \iff z \sim x, z \sim y \iff x \sim z, z \sim y \implies x \sim y$$

- $x \not\sim y \implies [x] \cap [y] = \emptyset$

- Supponiamo per assurdo che  $x \not\sim y$  e che  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ . Dunque, si ha che:

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \iff \exists z \in [x] \cap [y] \iff z \in [x] \wedge z \in [y] \iff$$

$$\iff z \sim x, z \sim y \iff x \sim z, z \sim y \implies x \sim y$$

contraddicendo l'ipotesi iniziale, dunque  $x \not\sim y \implies [x] \cap [y] = \emptyset$

- $[x] \cap [y] = \emptyset \implies x \not\sim y$

- Supponiamo per assurdo che  $[x] \cap [y] = \emptyset$  e che  $x \sim y$ . Dunque, si ha che:

$$x \sim y \iff x \in [x] = [y] \implies [x] \cap [y] = [x] = [y] \neq \emptyset$$

contraddicendo l'ipotesi iniziale, dunque  $[x] \cap [y] = \emptyset \implies x \not\sim y$

□

### Corollario 3

Data una relazione d'equivalenza  $\sim$  definita su un insieme  $X$ , l'insieme quoziente  $X/\sim$  è una **partizione** di  $X$ :

$$X = \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x]$$

*Dimostrazione:*

- Poiché tutte le classi di equivalenza appartenenti a  $X/\sim$  sono disgiunte tra loro, si ha che:

$$\bigcup_{[x] \in X/\sim} [x] = \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x]$$

- Dato  $x \in X$ , si ha che:

$$x \in X \iff x \sim x \iff x \in [x] \implies x \in \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x]$$

- Viceversa, si ha che:

$$z \in \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x] \implies \exists [x] \in X/\sim \mid z \in [x] \iff z \sim x \implies z \in X$$

□

### Proposizione 9

Dato un insieme  $X$ , una partizione  $P := \{X_1, \dots, X_n\}$  di  $X$  **induce una relazione di equivalenza** sull'insieme  $X$

*Dimostrazione:*

- Definiamo la relazione  $x \sim y \iff x, y \in X_i$ , dove  $X_i \in P$ , indicante che due elementi sono in relazione se e solo se appartengono alla stessa parte della partizione.
- Verifichiamo che si tratti di una relazione di equivalenza:

- Riflessività:

$$\forall x \in X, \exists X_i \in P \mid x \in X_i \implies x \sim x$$

- Simmetria:

$$x \sim y \iff x, y \in X_i, \exists X_i \in P \implies y \sim x$$

- Transitività:

$$x \sim y, y \sim z \iff x, y \in X_i \wedge y, z \in X_j, \exists X_i, X_j \in P \implies y \in X_i \cap X_j$$

Poiché tutte le parti sono per definizione disgiunte tra loro, abbiamo che  $y \in X_i \cap X_j \iff X_i = X_j$ , dunque si ha che:

$$x \sim y, y \sim z \implies x, y \in X_i \wedge y, z \in X_j \iff x, y, z \in X_i = X_j \implies x \sim z$$

□

### Proposizione 10: Proiezione canonica al quoziente

Una relazione di equivalenza  $\sim$  su un insieme  $X$  induce una funzione suriettiva detta **proiezione canonica al quoziente** la quale mappa ogni elemento  $x \in X$  alla propria classe di equivalenza su  $\sim$ :

$$\pi : X \rightarrow X/\sim : x \mapsto [x]$$

*Dimostrazione:*

- Poiché per riflessività si ha che  $x \sim x \iff x \in [x]$ , la funzione di proiezione  $\pi$  risulta essere evidentemente suriettiva:

$$x \in [x] \implies \forall [x] \in X/\sim, \exists x \in X \mid \pi(x) = [x]$$

□

## 3.2 Relazione di Divisore

### Definizione 24: Relazione di divisore

Dati due numeri naturali  $m, n \in \mathbb{Z}$ , definiamo la relazione " $m$  è divisore di  $n$ ", indicato come  $m \mid n$ , se esiste un elemento  $q \in \mathbb{Z} \mid n = mq$ :

$$m \mid n \iff \exists q \in \mathbb{Z} \mid n = mq$$

**Attenzione:**  $m \mid n$  non è il simbolo matematico "tale che"

### Osservazione 9

Dati  $m, n \in \mathbb{Z}$ , la relazione di divisore  $m \mid n$  è una relazione **riflessiva** e **transitiva**

*Dimostrazione:*

- Soddisfa la **riflessività**:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n = n \cdot 1 \iff n \mid n \cdot 1 \iff n \mid n$$

- Soddisfa la **transitività**:

$$m \mid n, n \mid d \iff \exists p, q \in \mathbb{Z} \mid n = mp, d = nq \implies d = (mp)q = m(pq) \implies m \mid d$$

- Non soddisfa l'**anti-simmetria**:

$$m \mid n, n \mid m \iff \exists p, q \in \mathbb{Z} \mid n = mp, m = nq \implies n = mp = (np)q = n(pq)$$

A questo punto, si verificano due casi:

- Se  $n = 0$  allora

$$n = 0 \implies m = nq = 0 \cdot q = 0 \implies m = 0 \implies n = m = 0$$

– Se  $n \neq 0$  allora

$$\begin{aligned} n \neq 0 &\implies n = n(pq) \implies qp = 1 \implies p = q = \pm 1 \implies \\ &\implies \begin{cases} n = m & \text{se } p = q = 1 \\ n = -m & \text{se } p = q = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque, non in tutti i casi la relazione è anti-simmetrica.

□

#### Corollario 4

Dati  $m, n \in \mathbb{N}$ , la relazione di divisore  $m \mid n$  è una **relazione d'ordine**

*Dimostrazione:*

- Ovviamente, poiché  $m, n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ , se segue che la relazione di divisore sia riflessiva e transitiva
- Procedendo analogamente alla dimostrazione precedente, il caso in cui  $p = q = -1$  verrebbe scartato poiché  $-1 \notin \mathbb{N}$ , rendendo quindi  $m = n$  l'unica possibilità

$$m \mid n, n \mid m, m, n \in \mathbb{N} \implies m = n$$

□

## 3.3 Relazione di Congruenza

### Definizione 25: Relazione di congruenza

Dato  $a, b \in \mathbb{Z}$  e dato  $n \geq 2 \in \mathbb{N}$ , definiamo la relazione " $a$  è congruente a  $b$  in modulo  $n$ ", denotata come con  $a \equiv b \pmod{n}$ , se e solo se  $n \mid b - a$

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (b - a)$$

**Esempi:**

- $7 \equiv 22 \pmod{5} \implies n \mid b - a \implies 5 \mid (22 - 7) \implies 5 \mid 15$
- $7 \equiv 2 \pmod{5} \implies n \mid b - a \implies 5 \mid (2 - 7) \implies 5 \mid -5$

### Osservazione 10

La relazione di congruenza  $a \equiv b \pmod{n}$  è una **relazione di equivalenza**.

*Dimostrazione:*

- **Riflessiva:**

$$a = a \iff a = n \cdot 0 + a \iff a - a = n \cdot 0 \iff n \mid a - a \iff a \equiv a \pmod{n}$$

- **Simmetrica:**

$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod{n} &\iff n \mid b - a \iff \exists p \in \mathbb{Z} \mid b - a = np \iff \\ &\iff a - b = n(-p) \iff n \mid a - b \iff b \equiv a \pmod{n} \end{aligned}$$

- **Transitiva:**

$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod{n}, b \equiv c \pmod{n} &\iff \exists p, q \in \mathbb{Z} \mid b - a = np, c - b = nq \implies \\ \implies c - a = (c - b) + (b - a) &= nq + np = n(q + p) \iff n \mid c - a \iff a \equiv c \pmod{n} \end{aligned}$$

## 3.4 Teorema della divisione con resto euclidea

### Teorema 3: Teorema della divisione con resto euclidea

Dati due interi  $m, n \in \mathbb{Z}$  dove  $n > 0$ , si ha che:

$$\exists! q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n \mid m = nq + r$$

dove  $q$  viene definito come **quoziente** e  $r$  come **resto** della divisione

*Dimostrazione dell'esistenza:*

- Dato  $[m] := \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv m \pmod{n}\}$ , si ha che:

$$a \in [m] \iff a \equiv m \pmod{n} \iff n \mid m - a \iff \exists p \in \mathbb{Z} \mid m - a = np \iff a = m - np$$

- Consideriamo quindi  $[m]_{\geq 0} := \{a \in [m] \mid a \in \mathbb{N}\}$ . Poiché  $[m]_{\geq 0} \subseteq \mathbb{N}$ , per il **principio del buon ordinamento** si ha che:

$$\exists r \in [m]_{\geq 0} \mid r = \min([m]_{\geq 0}) \implies \exists q \in \mathbb{Z} \mid r = m - nq$$

- Supponiamo per assurdo che  $r \geq n$ , da cui ne segue che  $r - n \geq 0 \implies r - n \in \mathbb{N}$ . Dunque, abbiamo che:

$$r - n = (m - nq) - n \iff r - n = m - n(q + 1) \iff r - n \in [m]_{\geq 0}$$

- Poiché  $r - n \leq r$ , l'ipotesi per cui  $r$  sia il minimo di  $m_{\geq 0}$  viene contraddetta, dunque l'unica possibilità è che  $r < n$
- Dunque, concludiamo che

$$\exists q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n \mid r = m - nq \implies m = nq + r$$

□

*Dimostrazione dell'unicità:*

- Supponiamo che  $q$  ed  $r$  non siano unici. Allora, ne segue che:

$$\begin{aligned} \exists q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}, 0 \leq r_1, r_2 < n \mid nq_1 + r_1 = m = nq_2 + r_2 &\implies \\ \implies nq_1 + r_1 = nq_2 + r_2 &\implies r_2 - r_1 = n(q_1 - q_2) \iff n \mid r_2 - r_1 \end{aligned}$$

- Siccome  $0 \leq r_1, r_2 < n \implies -n < r_2 - r_1 < n$  e siccome  $n \mid r_2 - r_1$ , allora  $r_2 - r_1$  deve necessariamente essere un multiplo di  $n$  compreso tra  $-n$  ed  $n$  stesso.
- Poiché l'unico numero rispettante tali caratteristiche è 0, ne segue che:

$$\begin{cases} -n < r_2 - r_1 < n \\ n \mid r_2 - r_1 \iff \exists b \in \mathbb{Z} \mid r_2 - r_1 = nb \end{cases} \iff r_2 - r_1 = 0 \iff r_2 = r_1$$

- A questo punto, poiché  $n > 0$ , si ha che:

$$nq_1 + r_1 = nq_2 + r_2 \iff nq_1 + 0 = nq_2 + 0 \iff n(q_1 - q_2) = 0 \iff q_1 = q_2$$

□

## 3.5 Relazione di Coniugio

### Definizione 26: Relazione di coniugio

Dato un gruppo  $G$  e dati  $g, h \in G$ , definiamo la relazione " $g$  è coniugato di  $h$ " se si verifica che:

$$g \sim h \iff \exists a \in G \mid h = aga^{-1}$$

### Osservazione 11

Se  $G$  è un gruppo abeliano, allora si ha che:

$$g \sim h \iff h = aga^{-1} = aa^{-1}g = g$$

**Osservazione 12**

La relazione di coniugio è una **relazione di equivalenza**.

*Dimostrazione:*

- **Riflessività:**

$$g = 1 \cdot g \cdot 1^{-1} \implies g \sim g$$

- **Simmetria:**

$$g \sim h \implies h = aga^{-1} \implies a^{-1}ha = a^{-1}aga^{-1}a \implies a^{-1}ha = g$$

ponendo  $b := a^{-1}$ , si ha che:

$$bhb^{-1} = g \implies h \sim g$$

- **Transitività:**

$$g \sim h \wedge h \sim k \implies h = aga^{-1}, k = bhb^{-1} \implies k = b(aga^{-1})b^{-1} = (ba)g(a^{-1}b^{-1})$$

ponendo  $c := ba$ , si ha che:

$$k = cgc^{-1} \implies g \sim k$$

□

## 3.6 Induzione matematica

Vogliamo dimostrare una successione di  $n$  proposizioni, etichettate come  $p_1), p_2), \dots, p_n)$ . Supponiamo di aver dimostrato la proposizione  $p_1)$ , che denominiamo come **caso base**. Se le prime  $p_1), \dots, p_n)$  sono vere, allora anche la proposizione  $p_{n+1})$  è vera (**passo induttivo**).

Per esprimere tale concetto matematicamente, possiamo dire che:

**Teorema 4: Principio di induzione**

Data una successione di proposizioni  $p_1), \dots, p_n)$ , si ha che:

$$p_1) \implies p_2)$$

$$p_1), p_2) \implies p_3)$$

...

$$p_1), \dots, p_n) \implies p_{n+1})$$



**Esempi:**

1. • Vogliamo verificare che la proposizione seguente proposizione sia vera  $\forall n \geq 1$ :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

- Verifichiamo quindi il **caso base**  $p_1$ ), ossia  $n = 1$

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2} = \frac{2}{2}$$

che risulta essere vero

- A questo punto, assumiamo per **ipotesi induttiva** che  $p_n$ ) sia vera.  
 • Impostiamo quindi il **passo induttivo**, ossia  $p_{n+1}$ ):

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 1 + 1)}{2}$$

- Notiamo come il **passo induttivo contenga al suo interno l'ipotesi induttiva stessa**, che abbiamo affermato essere vera:

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{\text{Ipotesi induttiva}} + (n + 1) &= \frac{(n + 1)(n + 1 + 1)}{2} \iff \\ \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \iff \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \\ &\iff \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \end{aligned}$$

Dunque, anche il passo induttivo risulta essere vero, concludendo che **la proposizione**  $p_n$ ) **sia valida**  $\forall n \geq 1$

□

2. • La funzione di Fibonacci è definita come:

$$\begin{cases} F_0 = 0 & \text{se } n = 0 \\ F_1 = 1 & \text{se } n = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Le costanti  $\varphi$  e  $\psi$ , corrispondenti alle soluzioni dell'equazione  $x^2 = x + 1$ , sono definite come:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

- Vogliamo verificare per induzione che la seguente proposizione sia vera  $\forall n$ :

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

- Verifichiamo quindi  $p_0$ ) e  $p_1$ ):

$$F_0 = \frac{\varphi^0 - \psi^0}{\varphi - \psi} = \frac{1 - 1}{\varphi - \psi} = 0$$

$$F_1 = \frac{\varphi^1 - \psi^1}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi - \psi}{\varphi - \psi} = 1$$

- Assumiamo quindi per ipotesi induttiva che  $p_{n-1}$ ) sia vera e verifichiamo il passo induttivo  $p_n$ , utilizzando però la definizione originale di  $F_n$ :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{n-2} - \psi^{n-2}}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^{n-2}(\varphi + 1) - \psi^{n-2}(\psi + 1)}{\varphi - \psi}$$

- Siccome per definizione stessa  $\varphi^2 = \varphi + 1$  e  $\psi^2 = \psi + 1$ , allora abbiamo che:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{\varphi^{n-2}\varphi^2 - \psi^{n-2}\psi^2}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

verificando quindi la validità del passo induttivo

□

### Proposizione 11: Identità binomiale di Newton

Dati  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , si ha che

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

dove il **coefficiente binomiale** è definito come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

*Dimostrazione:*

- **Caso base:**

$$1 = (a + b)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$$

- **Passo induttivo:**

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} &= (a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \end{aligned}$$

- Trasliamo di -1 l'indice della prima sommatoria e portiamo fuori il suo ultimo termine:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} = \\
& = \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} = \\
& = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

- Nella seconda sommatoria, invece, portiamo fuori il primo termine, in modo che gli indici di entrambe le sommatorie coincidano:

$$\begin{aligned}
& a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n-0+1} = \\
& = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1}
\end{aligned}$$

- A questo punto uniamo nuovamente le due sommatorie:

$$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1}$$

- Per le proprietà dei coefficienti binomiali (facilmente verificabili) si ha che  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ , dunque riscriviamo la sommatoria come:

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

- A questo punto, poiché  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n+1} = 1$ , riscriviamo i due termini esterni alla sommatoria in modo da poterli reinserire in essa, ottenendo il risultato cercato:

$$\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

□

# Elementi di Teoria degli Anelli

## 4.1 Classi laterali sinistre

### Proposizione 12

Sia  $G$  un gruppo e sia  $H \leq G$  sottogruppo. La seguente relazione è una **relazione di equivalenza**:

$$x \sim y \iff x^{-1}y \in H$$

*Dimostrazione:*

- **Riflessività:**

$$x \sim x \implies x^{-1}x = 1 \in H$$

- **Simmetria:**

$$x \sim y \implies h := x^{-1}y \in H \implies h^{-1} := y^{-1}x \in H \implies y \sim x$$

- **Transitività:**

$$\begin{aligned} x \sim y, y \sim z &\implies h := x^{-1}y, k := y^{-1}z \in H \implies \\ &\implies hk = x^{-1}yy^{-1}z = x^{-1}z \implies x^{-1}z \in H \end{aligned}$$

□

**Definizione 27: Classi laterali sinistre**

Sia  $G$  un gruppo e sia  $H \leq G$ . Definiamo come **classi laterali sinistre di  $H$  di  $G$**  le classi d'equivalenza generate dalla relazione d'equivalenza  $x \sim y \iff x^{-1}y \in H$ :

$$x \in G \quad [x] = \{y \in G \mid x \sim y\}$$

Denotiamo come  $G/H$  (letto " $G$  modulo  $H$ ") l'**insieme quoziente di tutte le classi laterali sinistre di  $H$  in  $G$** .

**Proposizione 13: Insieme quoziente  $\mathbb{Z}_n$** 

Dato  $I(n) \leq \mathbb{Z}$ , si ha che:

$$\mathbb{Z}_n := \{[0], \dots, [n-1]\} = \mathbb{Z}/I(n) = \mathbb{Z}/ \equiv$$

*Dimostrazione:*

- Considerando la relazione  $a \sim b \iff (-a) + b \in I(n)$  (poiché  $a^{-1}$  nell'operazione somma corrisponde a  $-a$ ), otteniamo che:

$$\begin{aligned} a \sim b &\iff -a + b = b - a \in I(n) \iff -a + b = nk, \exists k \in \mathbb{Z} \iff \\ &\iff n \mid b - a \iff a \equiv b \pmod{n} \end{aligned}$$

dunque si ha che  $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/I(n) = \mathbb{Z}/ \equiv$

□

**Esempio:**

- Dato  $I(3) \triangleleft \mathbb{Z}$ , si ha che:  $\mathbb{Z}/I(3) = \{[0], [1], [2]\}$ . Difatti, notiamo che:

- $0 \in [0]$ , poiché  $0 \sim 0 \iff -0 + 0 = 0 = 3 \cdot 0 \in I(3)$
- $1 \in [1]$ , poiché  $1 \sim 1 \iff -1 + 1 = 0 = 3 \cdot 0 \in I(3)$
- $2 \in [2]$ , poiché  $2 \sim 2 \iff -2 + 2 = 0 = 3 \cdot 0 \in I(3)$
- $3 \in [0]$ , poiché  $3 \sim 0 \iff -3 + 0 = -3 = 3 \cdot (-1) \in I(3)$
- $4 \in [1]$ , poiché  $4 \sim 1 \iff -4 + 1 = -3 = 3 \cdot (-1) \in I(3)$
- $5 \in [2]$ , poiché  $5 \sim 2 \iff -5 + 2 = -3 = 3 \cdot (-1) \in I(3)$
- $6 \in [0]$ , poiché  $6 \sim 0 \iff -6 + 0 = -6 = 3 \cdot (-2) \in I(3)$
- $7 \in [1]$ , poiché  $7 \sim 1 \iff -7 + 1 = -6 = 3 \cdot (-2) \in I(3)$
- $8 \in [2]$ , poiché  $8 \sim 2 \iff -8 + 2 = -6 = 3 \cdot (-2) \in I(3)$
- $9 \in [0]$ , poiché  $9 \sim 0 \iff -9 + 0 = -9 = 3 \cdot (-3) \in I(3)$
- ...

**Osservazione 13**

Dato un gruppo  $G$  e  $H \leq G$ , per ogni  $[x] \in G/H$  si ha che:

$$[x] = xH := \{xh \mid h \in H\}$$

*Dimostrazione:*

- Dimostriamo che  $[x] = xH$ :

$$\begin{aligned} y \in [x] &\iff x \sim y \iff h := x^{-1}y \in H \iff h = x^{-1}y \iff \\ &\iff xh = xx^{-1}y \iff xh = y \in xH \end{aligned}$$

□

**4.1.1 Teorema di Lagrange****Osservazione 14**

Dato un gruppo  $G$  e  $H \leq G$ , per ogni  $[x] = xH \in G/H$  si ha che:

$$|[x]| = |xH| = |H|$$

*Dimostrazione:*

- Dato  $x \in G$  consideriamo la funzione  $\varphi : H \rightarrow xH : h \mapsto xh$
- La funzione risulta essere iniettiva poiché:

$$h, k \in H \mid \varphi(h) \neq \varphi(k) \iff xh \neq xk \iff h \neq k$$

- La funzione risulta essere suriettiva poiché per costruzione di  $xH$  si ha che:

$$\forall xh \in xH, \exists h \in H \mid \varphi(h) = xh$$

- Poiché esiste una funzione biettiva  $\varphi : H \rightarrow xH$ , ne segue che  $|H| = |xH|$

□

**Teorema 5: Teorema di Lagrange**

Sia  $G$  un **gruppo finito** e sia  $H \leq G$ . In tal caso, si ha che:

$$|G| = |H| \cdot |G/H|$$

Inoltre, definiamo  $[G : H] := |G/H|$  come l'**indice di  $H$  in  $G$**

*Dimostrazione:*

- Poiché  $G/H$  è una partizione di  $G$  e poiché  $\forall [x] \in G/H, |[x]| = |H|$ :

$$G = \bigsqcup_{[x] \in G/H} [x] \implies |G| = |H| \cdot |G/H|$$

□

## 4.2 L'anello commutativo $\mathbb{Z}_n$

### Proposizione 14: Gruppo quoziente $G/H$

Dato il gruppo abeliano  $(G, +)$  e  $H \leq G$ , si ha che  $(G/H, +)$  è un **gruppo abeliano**.

*Dimostrazione:*

- Dimostriamo prima che l'operazione somma intesa come  $[x] + [y] = [x + y]$  sia ben definita, ossia che  $[x] = [x'], [y] = [y'] \implies [x + y] = [x' + y']$ :

$$[x] = [x'], [y] = [y'] \iff x \sim x', y \sim y' \iff x' - x, y' - y \in H$$

Poiché  $h_1 := x' - x, h_2 := y' - y \in H$ , per chiusura nella somma di  $H$  si ha che:

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 \in H &\implies (x' - x) + (y' - y) = x' - x + y' - y = x' + y' - (x + y) \in H \iff \\ &x' + y' \sim x + y \iff [x + y] = [x' + y'] \end{aligned}$$

- Successivamente, verifichiamo gli assiomi di gruppo abeliano:

– **Associatività:**

$$([x] + [y]) + [z] = [x + y] + [z] = [x + y + z] = [x] + [y + z] = [x] + ([y] + [z])$$

– **Elemento neutro:**

$$[x] + [0] = [x + 0] = [x]$$

– **Elemento inverso:**

$$[x] + [-x] = [x + (-x)] = [0]$$

– **Commutatività:**

$$[x] + [y] = [x + y] = [y + x] = [y] + [x]$$

□

**Corollario 5: Gruppo quoziente  $\mathbb{Z}_n$** 

Poiché  $\mathbb{Z}$  è un anello commutativo,  $(\mathbb{Z}_n, +)$  è un **gruppo abeliano**

**Esempi:**

Operando nel gruppo  $\mathbb{Z}_{11}$  si avrà che:

- $[9] + [8] = [17] = [6]$ , poiché  $17 \equiv 6 \pmod{11}$
- $[4] + [3] = [7]$
- $[5] - [6] = [-1] = [10]$ , poiché  $-1 \equiv 10 \pmod{11}$

**Proposizione 15: Anello quoziente  $G/H$** 

Dato l'anello commutativo  $A$  e  $I \triangleleft A$ , si ha che  $(A/I, +, \cdot)$  è un **anello commutativo**.

*Dimostrazione:*

- Poiché  $I \leq A$ , per dimostrazione precedente si ha che  $(A/I, +)$  è gruppo abeliano
- Dimostriamo prima che l'operazione prodotto intesa come  $[x][y] = [xy]$  sia ben definita, ossia che  $[x] = [x'], [y] = [y'] \implies [xy] = [x'y']$ :

$$[x] = [x'], [y] = [y'] \iff x \sim x', y \sim y' \iff x' - x, y' - y \in I$$

Poiché  $i_1 := x' - x, i_2 := y' - y \in I$ , per chiusura nel prodotto di  $I$  si ha che:

$$\begin{aligned} i_1, i_2 \in I &\implies i_1 y', x i_2 \in I \implies i_1 y' + x i_2 \in I \implies \\ i_1 y' + x i_2 &= (x' - x) y' + x (y' - y) = x' y' - x y' + x y' - x y = x' y' - x y \in I \iff \\ &\iff x' y' \sim x y \iff [x' y'] = [x y] \end{aligned}$$

- Successivamente, verifichiamo i rimanenti assiomi di anello commutativo

– **Associatività nel prodotto:**

$$([x][y])[z] = [xy][z] = [xyz] = [x][yz] = [x]([y][z])$$

– **Elemento neutro nel prodotto:**

$$[x][1] = [x \cdot 1] = [x]$$

– **Commutatività nel prodotto:**

$$[x][y] = [xy] = [yx] = [y][x]$$



– **Distributività:**

$$[x]([y] + [z]) = [x][y + z] = [x(y + z)] = [xy + xz] = [xy] + [xz] = [x][y] + [x][z]$$

□

#### Corollario 6: Anello quoziente $\mathbb{Z}_n$

Poiché  $\mathbb{Z}$  è un anello commutativo,  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  è un **anello commutativo**

**Esempi:**

Operando nell'anello  $\mathbb{Z}_4$  avremo che:

- $[2][3] = [6] = [2]$ , poiché  $6 \equiv 2 \pmod{4}$
- $[2][3]^{-1} = [2][3] = [4]$ , poiché  $[3]$  è l'inverso di  $[3]$  in  $\mathbb{Z}_4$  in quanto  $[3][3] = [9] = [1]$

## 4.3 Invertibili e Divisori dello zero

#### Definizione 28: Invertibile e Divisore dello zero

Dato un anello commutativo  $A$  e un elemento  $a \in A$ , definiamo  $a$  come **elemento invertibile** se e solo se

$$\exists a^{-1} \in A \mid aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

Definiamo invece  $a$  come **divisore dello zero** se e solo se:

$$a \mid 0 \iff \exists c \neq 0 \in A \mid 0 = ac$$

#### Definizione 29: Gruppo degli invertibili

Dato un anello commutativo  $(A, +, \cdot)$ , definiamo l'**insieme degli invertibili di  $A$**  come:

$$A^* := \{a \in A \mid \exists a^{-1} \in A\}$$

Inoltre,  $(A^*, \cdot)$  è un **gruppo**

*Dimostrazione:*

• **Chiusura:**

$$x, y \in A^* \implies (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \implies xy \in A^*$$

• **Associatività:**

$$x, y, z \in A^* \implies x(yz) = xyz = (xy)z$$

- **Elemento neutro:**

$$1 = 1^{-1} \in A \mid 1 \cdot 1^{-1} = 1 \cdot 1 = 1 \implies 1 \in A^* \mid a \cdot 1 = a, \forall a \in A^*$$

- **Elemento inverso:**

$$x \in A^* \implies x = (x^{-1})^{-1} \implies x^{-1} \in A^*$$

□

**Osservazione 15**

Dato un anello commutativo  $A$  e un elemento  $a \in A$ , se  $a$  è un **divisore dello zero** allora esso **non è invertibile**:

$$a \mid 0 \implies a \notin A^*$$

Dunque, per contronominale di tale implicazione, se  $a$  è **invertibile** allora esso **non è un divisore dello zero**:

$$a \in A^* \implies a \nmid 0$$

*Dimostrazione per assurdo:*

- Supponiamo che per assurdo che  $a \mid 0$  e che  $a \in A^*$ . Allora, si ha che:

$$a \mid 0 \iff \exists b \neq 0 \in A \mid 0 = ab \implies a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}ab \implies 0 = b$$

contraddicendo quindi l'ipotesi iniziale  $b \neq 0$ , dunque l'unica possibilità è che  $a \notin A^*$

□

**Definizione 30: Dominio di integrità**

Sia  $A$  un anello commutativo. Definiamo  $A$  come **dominio di integrità** se  $0 \in A$  è l'unico divisore dello zero:

$$\nexists a \neq 0 \in A \text{ t.c. } a \mid 0 \iff a \nmid 0, \forall a \neq 0 \in A$$

**Osservazione 16**

Un anello commutativo  $A$  è un dominio di integrità se e solo se vale la **legge di annullamento del prodotto**:

$$\forall x, y \in A \mid xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$$

*Dimostrazione:*

- Supponiamo per assurdo che  $A$  sia un dominio di integrità e che  $\exists x, y \neq 0 \in A \mid xy = 0$ , implicando che non valga la legge di annullamento del prodotto. Dunque, si ha che:

$$xy = 0 \implies x^{-1}xy = x^{-1}0 \implies y = 0$$

contraddicendo l'ipotesi per cui  $y \neq 0$ , dunque l'unica possibilità è che valga la legge di annullamento del prodotto

- Supponiamo ora per assurdo che valga la legge di annullamento del prodotto e che  $A$  non sia un dominio di integrità. Dunque, si ha che:

$$\exists a \neq 0 \in A \text{ t.c. } a \mid 0 \implies ab = 0, \exists b \neq 0$$

Poiché vale la legge di annullamento del prodotto, si ha che

$$ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$$

Tuttavia, poiché  $b \neq 0$ , l'unica possibilità è che  $a = 0$ , contraddicendo l'ipotesi per cui  $a \neq 0$ . Di conseguenza,  $A$  è un dominio di integrità

□

### Corollario 7

L'anello commutativo  $\mathbb{Z}$  è un **dominio di integrità** poiché in esso vale la **legge di annullamento del prodotto**

### Osservazione 17

Se  $K$  è un **campo**, allora esso è un **dominio di integrità** poiché  $K^* = K - \{0\}$

*Dimostrazione:*

- Se  $K$  è un campo, allora

$$\forall a \neq 0 \in K, \exists a^{-1} \in K \mid aa^{-1} = 1 \iff K^* = K - \{0\}$$

- Inoltre, siccome tutti gli elementi di  $K$  escluso zero sono invertibili, si ha che:

$$\forall a \neq 0 \in K, a \in K^* \implies a \nmid 0, \forall a \neq 0 \in K$$

□

### Proposizione 16

Dato un **dominio di integrità**  $A$  e dati  $a, b \in A$ , si ha che:

$$I(a) = I(b) \iff a = bc, \exists c \in A^*$$

*Dimostrazione:*

$$\bullet a = bc, \exists c \in A^* \implies I(a) = I(b)$$

$$a = bc, \exists c \in A^* \implies ac^{-1} = b \implies \begin{cases} a = bc \implies a \in I(b) \implies I(a) \subseteq I(b) \\ b = ac^{-1} \implies b \in I(a) \implies I(b) \subseteq I(a) \end{cases}$$

$$\bullet I(a) = I(b) \implies a = bc, \exists c \in A^*$$

$$I(a) = I(b) \implies \begin{cases} a \in I(a) = I(b) \implies a = bc, \exists c \in A \\ b \in I(b) = I(a) \implies b = ad, \exists d \in A \end{cases}$$

Dunque si verifica che:

$$\begin{aligned} a = bc = adc &\implies a = adc \implies a(1 - dc) = 0 \implies \\ \implies \begin{cases} a = 0 \implies b = ad = 0 \implies a = bc = 0 \\ 1 - dc = 0 \implies dc = 1 \implies c = d^{-1} \implies c \in A^* \end{cases} \end{aligned}$$

□

### Corollario 8

Dato il dominio di integrità  $\mathbb{Z}$  e dati  $a, b \in \mathbb{Z}$ , si verifica che:

$$I(a) = I(b) \iff a = \pm b$$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\mathbb{Z}$  è un dominio di integrità, dati  $a, b \in \mathbb{Z}$  si ha che:

$$I(a) = I(b) \iff a = bc, \exists c \in \mathbb{Z}^*$$

- Tuttavia, siccome  $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ , si ha che:

$$I(a) = I(b) \iff a = bc, c = 1 \vee c = -1 \iff a = \pm b$$

□

## 4.4 Elementi irriducibili e primi

### Definizione 31: Elementi irriducibili e primi

Dato un anello commutativo  $A$  e un elemento  $a \in A$ , definiamo  $a$  come **elemento irriducibile** se e solo se:

$$a \neq 0, a \notin A^*, a = bc \implies b \in A^* \vee c \in A^*$$

Definiamo invece  $a$  come **elemento primo** se e solo se:

$$a \neq 0, a \notin A^*, a \mid bc \implies a \mid b \vee a \mid c$$

**Attenzione:** la definizione di elemento primo non coincide con la "normale" definizione di numero primo

### Definizione 32: Insieme dei numeri interi primi

Definiamo come **insieme dei numeri interi primi** l'insieme:

$$\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N}_{>1} \mid \nexists y \in \mathbb{N} - \{1, p\} \text{ t.c. } y \mid a\}$$

**Attenzione:** gli elementi appartenenti a tale insieme coincidono con la "normale" definizione di **numero primo**

### Osservazione 18

Dati un elemento  $p \in \mathbb{P}$ , si verifica che

$$p \in \mathbb{P} \implies p \text{ elemento primo}$$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ , allora  $p \in \mathbb{P} \implies p \in \mathbb{Z}$
- Supponiamo che  $p \mid ab$ , dove  $ab \in \mathbb{Z}$ , dunque necessariamente  $p$  apparterrà alla fattorizzazione di  $ab$ , implicando che  $p \mid a \vee p \mid b$

□

**Osservazione 19**

Dato un dominio di integrità  $A$  ed un elemento  $a \in A$ , si verifica che

$$a \text{ elemento primo} \implies a \text{ elemento irriducibile}$$

*Dimostrazione:*

- Se  $a \in A$  è primo, allora per definizione si ha che  $a \neq 0, a \notin A^*$ .
- Se  $a = bc$ , allora si ha che  $a \mid a \implies a \mid bc \implies a \mid b \vee a \mid c$
- A questo punto, si ha che:

$$a \mid b \implies b = ad, \exists d \in A \implies a = bc = adc \implies a = adc \implies a(1 - cd) = 0$$

- Siccome  $a \neq 0$ , allora:

$$a(1 - cd) = 0, a \neq 0 \implies 1 - cd = 0 \implies cd = 1 \implies c = d^{-1} \implies c \in A^*$$

- Analogamente, dimostriamo che  $a \mid c \implies b \in A^*$
- Dunque, concludiamo che se  $a$  è primo allora esso è anche irriducibile:

$$a \text{ primo} \mid a = bc \implies a \mid b \vee a \mid c \implies b \in A^* \vee c \in A^*$$

□

**Proposizione 17**

Dato il dominio di integrità  $\mathbb{Z}$  e un elemento  $p \in \mathbb{Z} \mid p \geq 2$ , le seguenti condizioni sono **equivalenti**:

- $p \in \mathbb{P}$
- $p$  è un elemento primo
- $p$  è un elemento irriducibile

*Dimostrazione:*

- Per dimostrazione precedente, sappiamo che

$$p \in \mathbb{P} \implies p \text{ elemento primo} \implies p \text{ elemento irriducibile}$$

- Supponiamo che  $p \geq 2 \in \mathbb{Z}$  sia irriducibile e che esistano  $a, b \in \mathbb{N}$ , tali che:

$$p = ab \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \implies a \in \mathbb{Z}^* \vee b \in \mathbb{Z}^*$$

- Poiché  $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$  e poiché  $a, b \in \mathbb{N}$ , allora ne segue che:

$$a \in \mathbb{Z}^* \vee b \in \mathbb{Z}^* \implies a = 1 \vee b = 1$$

– Se  $a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^*$ , allora

$$a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^* \implies a = 1, b = 1 \implies p = 1$$

contraddicendo l'ipotesi per cui  $p \geq 2$ , dunque si tratta di un caso impossibile

– Se  $a \in \mathbb{Z}^*, b \notin \mathbb{Z}^*$ , allora

$$a \in \mathbb{Z}^* \implies a = 1 \implies p = b \implies b \mid p \vee 1 \mid p, b = p$$

– Se  $a \notin \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^*$ , allora

$$b \in \mathbb{Z}^* \implies b = 1 \implies p = a \implies a \mid p \vee 1 \mid p, a = p$$

• Dunque, in entrambi i casi possibili si ottiene che

$$p \text{ elemento irriducibile} \implies p \in \mathbb{P}$$

□

#### Proposizione 18: Dominio di integrità $\mathbb{Z}_p$

Dato l'anello commutativo  $\mathbb{Z}_n$ , si ha che

$$\mathbb{Z}_n \text{ dominio di integrità} \iff n \in \mathbb{P}$$

Nel caso in cui  $n \in \mathbb{P}$ , per comodità utilizziamo la **notazione**  $\mathbb{Z}_p$ .

*Dimostrazione:*

• Supponiamo per assurdo che  $\mathbb{Z}_n$  sia dominio di integrità e che  $n \notin \mathbb{P}$ , implicando che:

$$\begin{aligned} n \notin \mathbb{P} &\implies ab = n, \exists a, b \notin \mathbb{Z}^*, 0 < a, b < n \implies \\ &\implies [ab] = [n] = [0] \in \mathbb{Z}_n \implies [a][b] = [0] \implies [a] = [0] \vee [b] = [0] \end{aligned}$$

Tuttavia, per ipotesi si ha che  $a, b > 0 \implies [a] \neq 0, [b] \neq 0$ , creando una contraddizione, dunque l'unica possibilità è che  $n \in \mathbb{P}$

• Supponiamo per assurdo che  $n \in \mathbb{P}$  e che  $\mathbb{Z}_n$  non sia dominio di integrità, implicando che:

$$\begin{aligned} \exists [a] \neq [0] \in \mathbb{Z}_n \text{ t.c. } [a] \mid [0] &\implies [0] = [a][b], \exists [b] \neq [0] \in \mathbb{Z}_n \implies \\ &\implies [0] = [ab] \iff ab \equiv 0 \pmod{n} \iff n \mid ab - 0 \end{aligned}$$

Poiché  $n \in \mathbb{P}$ , si ha che:

$$\begin{aligned} n \mid ab &\implies n \mid a \vee n \mid b \implies a \equiv 0 \pmod{n} \vee b \equiv 0 \pmod{n} \implies \\ &\implies [a] = [n] = [0] \vee [b] = [n] = [0] \end{aligned}$$

Tuttavia, per ipotesi si ha che  $a, b \neq 0 \implies [a], [b] \neq [0]$ , creando una contraddizione, dunque l'unica possibilità è che  $\mathbb{Z}_n$  sia dominio di integrità

□

## 4.5 Massimo comun divisore

### Definizione 33: Dominio ad ideali principali

Dato un dominio di integrità  $A$ , definiamo  $A$  come **dominio ad ideali principali** se e solo se considerato un qualsiasi  $I \triangleleft A$  si ha che:

$$\exists d \in I \mid I = I(d)$$

In altre parole, ogni ideale coincide esattamente con un ideale principale

### Proposizione 19

Il dominio di integrità  $\mathbb{Z}$  è un **dominio ad ideali principali**

*Dimostrazione:*

- Supponiamo che esista  $I \triangleleft \mathbb{Z}$  tale che  $I = \{0\}$ . In tal caso, si ha che  $I = I(0)$
- Supponiamo quindi che  $I \neq \{0\}$ , implicando che per definizione stessa di ideale si abbia che:

$$\forall n \in I \implies -n \in I$$

Dunque, possiamo considerare direttamente il sottoinsieme  $I_{>0}$ , poiché per i numeri negativi basterebbe considerare il loro opposto.

- Siccome  $I_{>0} \subseteq \mathbb{N}$ , per il principio del buon ordinamento si ha che

$$\exists d \in I_{>0} \mid d = \min(I_{>0})$$

- Dimostriamo quindi che  $I = I(d)$ :

– Dato  $x \in I(d)$ , si ha che:

$$x \in I(d) \implies \exists y \in \mathbb{Z} \mid x = dy$$

– Siccome  $d \in I_{>0} \subseteq I$ , allora  $x = dy \in I$

– Dato  $x \in I$ , per il teorema della divisione con resto euclidea si ha che:

$$\exists! q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r, d \mid x = dq + r \implies r = x - dq \in I$$



- Assumiamo per assurdo che  $r \neq 0$ , implicando che  $r > 0$  e dunque che  $r \in I_{>0}$ . Tuttavia, poiché  $r < d$ , allora ne seguirebbe che  $d$  non sia il minimo di  $I_{>0}$ .
- Dunque, l'unica possibilità è che  $r = 0$ , implicando che:

$$x = dq + r = dq + 0 = dq \implies x = dq \implies x \in I(d)$$

□

### Definizione 34: Massimo Comun Divisore (MCD)

Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ , definiamo  $d \in \mathbb{N}$  come **massimo comun divisore di**  $a_1, \dots, a_n$ , indicato come  $d := \text{MCD}(a_1, \dots, a_n)$ , se dato  $k \in \mathbb{Z}$  si verifica che

$$k \mid a_1 \wedge \dots \wedge k \mid a_n \iff k \mid d$$

### Proposizione 20: Identità di Bézout

Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  e dato  $d := \text{MCD}(a_1, \dots, a_n)$ , si ha che:

$$I(a_1, \dots, a_n) = I(d)$$

In altre parole, si ha che:

$$\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z} \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = d$$

che definiamo come **identità di Bézout**.

*Dimostrazione:*

- Essendo  $\mathbb{Z}$  un dominio ad ideali principali, si ha che

$$\exists n \in I(a_1, \dots, a_n) \mid I(a_1, \dots, a_n) = I(b)$$

- Dato  $d := \text{MCD}(a_1, \dots, a_n)$ , ovviamente, si ha che

$$d := \text{MCD}(a_1, \dots, a_n) \implies d \mid a_1 \wedge \dots \wedge d \mid a_n \iff \forall i \in [1, n], \exists k_i \in \mathbb{Z} \mid a_i = dk_i$$

- Di conseguenza, otteniamo che

$$b \in I(b) = I(a_1, \dots, a_n) \iff \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z} \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b \iff$$

$$(dk_1)x_1 + \dots + (dk_n)x_n = b \iff d(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n) = b \iff d \mid b$$

- Inoltre,  $\forall i \in [1, n]$  si ha che

$$a_i \in I(a_i) \subseteq I(a_1, \dots, a_n) = I(b) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid a_i = bk \iff b \mid a_i$$

- Dunque, per definizione stessa di massimo comun divisore si ha che

$$b \mid a_1 \wedge \dots \wedge b \mid a_n \iff b \mid d$$

- Poiché  $d \mid b$ ,  $b \mid d$  e  $d \in \mathbb{N}$  necessariamente si ha che  $d = b$

□

### Proposizione 21

Dato l'anello commutativo  $\mathbb{Z}_n$  e dato  $0 < a < n$  si ha che:

$$[a] \in \mathbb{Z}_n^* \iff \text{MCD}(a, n) = 1$$

*Dimostrazione:*

- Se  $[a] \in \mathbb{Z}_n^*$  si ha che:

$$\exists 0 < b < n \mid [a][b] = 1 \iff ab \equiv 1 \pmod{n} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid 1 = ab + nk$$

Posto  $d := \text{MCD}(a, n) > 0$ , si ha che:

$$1 = ab + nk \in I(a, n) = I(d) \implies 1 \in I(d) \implies \exists p \in \mathbb{Z} \mid 1 = dp \implies d = p = \pm 1$$

Poiché  $d > 0$ , l'unico caso possibile è  $d = 1$

- Viceversa, supponendo che  $\text{MCD}(a, n) = 1$  si ha che:

$$\begin{aligned} I(d) = I(a, n) &\implies d \in I(a, n) \implies \exists b, k \in \mathbb{Z} \mid d = ab + nk \implies \\ &\implies [1] = [ab + nk] \in \mathbb{Z}_n \implies [a][b] + [n][k] = [a][b] + [0][k] = [a][b] \\ &\implies [b] = [a]^{-1} \implies [a] \in \mathbb{Z}_n^* \end{aligned}$$

□

### Corollario 9: Campo $\mathbb{Z}_p$

Dato  $p \in \mathbb{P}$ , il dominio di integrità  $\mathbb{Z}_p$  è un **campo**

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\nexists y \in \mathbb{Z} - \{1, p\}$  tale che  $y \mid p$ , allora:

$$\text{MCD}(a, p) = 1, \forall 0 < a < p \iff [a] \in \mathbb{Z}_p^*, \forall 0 < a < p \implies \mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{0\}$$

□

**Teorema 6**

Dato l'anello commutativo  $\mathbb{Z}_n$  e data la seguente equazione:

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

Posto  $d := \text{MCD}(a, n)$  si verifica che:

- Se  $d \nmid b$ , allora  $\nexists x \in \mathbb{Z}_n \mid ax = b \pmod{n}$  (**non esistono soluzioni**)
- Se  $d \mid b$ , allora posti  $p := \frac{a}{d}, q := \frac{b}{d}, m := \frac{n}{d}$ , l'equazione è **equivalente** a:

$$ax \equiv b \pmod{n} \iff px \equiv q \pmod{m}$$

*Dimostrazione:*

- Prima di tutto, affermiamo che se l'equazione ammette una soluzione  $x \in \mathbb{Z}$ , allora

$$ax \equiv b \pmod{n} \iff ax = b + nk, \exists k \in \mathbb{Z} \iff ax - nk = b$$

- Poiché  $d := \text{MCD}(a, n)$ , si ha che

$$d \mid a, d \mid n \implies d \mid ax, d \mid nk \implies d \mid ax - nk = b$$

- Viceversa, ciò dimostra che se  $d \nmid b$ , allora tale equazione non potrebbe ammettere soluzioni.
- Supponiamo quindi che  $d \mid b$  e poniamo  $p := \frac{a}{d}, q := \frac{b}{d}, m := \frac{n}{d}$  (implicando quindi che  $a = pd, b = qd, n = md$ ). Dunque si verifica che:

$$\begin{aligned} ax \equiv b \pmod{n} &\iff pdx \equiv qd \pmod{md} \iff \\ &\iff dp x = dq + dm k, \exists k \in \mathbb{Z} \iff px = q + mk \iff px \equiv q \pmod{m} \end{aligned}$$

□

**4.5.1 Algoritmo di Euclide****Lemma 1**

Dati tre elementi  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , si ha che:

$$a \mid b, a \mid c \implies a \mid z, \forall z \in I(b, c)$$

*Dimostrazione:*

- Se  $a \mid b$  e che  $a \mid c$ , si ha che:

$$z \in I(b, c) \iff z = bx + cy, \exists x, y \in \mathbb{Z} \implies z = (ax)x + (ah)c, \exists k, h \in \mathbb{Z} \implies$$

$$\implies z = a(kx) + a(hc) = a(kx + hc) \implies a \mid z$$

□

### Metodo 1: Algoritmo di Euclide

Siano  $a, b \in \mathbb{Z}$  e sia  $d := \text{MCD}(a, b)$ . Il seguente **algoritmo di Euclide** permette di calcolare  $d$ :

1. Assumiamo  $0 < a \leq b$  poniamo  $r_0 := b$  e  $r_1 := a$
2. Poniamo  $r_{i+1} := r_{i-1}(\bmod r_i)$  ad ogni iterazione, da cui ne segue che  $r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1}$ , ripetendo tale operazione fino a quando  $r_{i+1} = 0$
3. All' $n$ -esima iterazione, ossia quando  $r_{n+1} = 0$ , si ha che  $\text{MCD}(a, b) = r_n$

*Dimostrazione correttezza algoritmo:*

- Poiché  $I(a, b) = I(-a, b) = I(a, -b) = I(-a, -b)$ , assumiamo che  $0 < a, b$ .
- Inoltre, poiché  $I(a, b) = I(b, a)$ ,  $\text{MCD}(0, b) = 0$  e  $\text{MCD}(a, 0) = 0$ , assumiamo che  $0 < a \leq b$ .
- Siccome  $r_0 := b, r_1 := a \in I(a, b)$ , si ha che:

$$r_2 \equiv r_0(\bmod r_1) \iff r_0 = r_1 q_1 + r_2 \iff r_2 = r_0 - r_1 q_1 \in I(a, b) = I(d)$$

- Supponiamo per ipotesi induttiva che  $r_i \in I(a, b) = I(d), \forall i \in [0, n]$ .

Dimostriamo quindi il passo induttivo:

$$r_{i+1} \equiv r_{i-1}(\bmod r_i) \iff r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1} \iff r_{i+1} = r_{i-1} - r_i q_i \in I(a, b) = I(d)$$

- Di conseguenza,  $\forall i \in [0, n]$  si ha che

$$r_i \in I(a, b) = I(d) \iff r_i = dp, \exists p \in \mathbb{Z} \iff d \mid r_i \forall i \in [0, n] \implies d \mid r_n$$

- Poiché l'algoritmo termina quando  $r_{n+1} = 0$ , ne segue che:

$$r_{n+1} \equiv r_{n-1}(\bmod r_n) \iff 0 \equiv r_{n-1}(\bmod r_n) \iff r_{n-1} = r_n q_n \iff r_n \mid r_{n-1}$$

- Siccome  $r_n \mid r_n$  e  $r_n \mid r_{n-1}$ , per il lemma precedente si ha che:

$$r_n \equiv r_{n-2}(\bmod r_{n-1}) \iff r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \in I(r_{n-1}, r_n)$$

- Dunque, poiché  $r_n, r_{n-1}, r_{n-2} \in I(r_{n-1}, r_n) \subseteq \mathbb{Z}$ , per il lemma precedente si ha che:

$$r_n \mid r_n, r_n \mid r_{n-1} \implies r_n \mid r_{n-2}$$

- A questo punto, procedendo analogamente si ha che

$$r_n \mid r_n, r_n \mid r_{n-1} \implies r_n \mid r_{n-2}$$

$$r_n \mid r_{n-1}, r_n \mid r_{n-2} \implies r_n \mid r_{n-3}$$

...

$$r_n \mid r_2, r_n \mid r_1 \implies r_n \mid r_0$$

- Dunque, poiché  $d := \text{MCD}(a, b)$  e dati  $r_1 := a, r_0 := b$ , si ha che:

$$r_n \mid a, r_n \mid b \implies r_n \mid d$$

- Infine, siccome  $d, r_n \in \mathbb{N}$  (sezione 3.2) si ha che:

$$d \mid r_n, r_n \mid d \implies d = r_n$$

□

### Esempi:

- Vogliamo calcolare  $\text{MCD}(448, 216)$ . Poniamo quindi inizialmente  $r_0 = 448$  e  $r_1 = 216$ . Applicando l'algoritmo abbiamo quindi che:

$$r_0 = r_1 \cdot q_1 + r_2$$

$$448 = 216 \cdot 2 + 16$$

$$216 = 16 \cdot 13 + 8$$

$$16 = 8 \cdot 2 + 0$$

Dunque, otteniamo che  $\text{MCD}(448, 216) = 8$

- Vogliamo calcolare l'**identità di Bézout** per  $b = 216$  e  $a = 448$  ossia i due valori  $x$  e  $y$  tali che:

$$x, y \in \mathbb{Z} \mid \text{MCD}(488, 216) = 216x + 448y$$

Tramite l'**algoritmo di Euclide** utilizzato nell'esercizio precedente, sappiamo che  $\text{MCD}(488, 216) = 8$ . Poniamo quindi:

$$216x + 448y = 8$$

A questo punto, riscriviamo il risultato secondo la forma espressa dell'identità di Bézout utilizzando i calcoli dell'algoritmo di Euclide:

$$- 448 = 216 \cdot 2 + 16 \implies 16 = 448 - 216 \cdot 2$$

$$\begin{aligned} - 216 &= 16 \cdot 13 + 8 \implies 8 = 216 - 16 \cdot 13 = 216 - (448 - 216 \cdot 2) \cdot 13 = \\ &= 216 \cdot 27 + 448 \cdot (-13) \end{aligned}$$

Dunque otteniamo che

$$216x + 448y = 8 = 216(27) + 448(-13) \implies x = 27, y = -13$$

- Vogliamo calcolare l'identità di Bézout e MCD per  $a = 1470, b = 8316$  e  $c = 12600$ :

$$\text{MCD}(a, b, c) = \text{MCD}(a, \text{MCD}(b, c)) = \text{MCD}(\text{MCD}(a, b), c)$$

$$- d := \text{MCD}(b, c) = \text{MCD}(8316, 12600)$$

$$12600 = 8316 \cdot 1 + 4284$$

$$8316 = 4284 \cdot 1 + 4032$$

$$4284 = 4032 \cdot 1 + 252$$

$$4032 = 252 \cdot 16 + 0$$

dunque  $d = 252$

- A questo punto, riscriviamo il risultato secondo la forma espressa dell'identità di Bézout utilizzando i calcoli dell'algoritmo di Euclide:

$$* 12600 = 8316 \cdot 1 + 4284 \implies 4284 = 12600 - 8316 \cdot 1$$

$$* 8316 = 4284 \cdot 1 + 4032 \implies 4032 = 8316 - 4284 \cdot 1 = 8316 - (12600 - 8316 \cdot 1) = 8316 \cdot 2 - 12600$$

$$* 4284 = 4032 \cdot 1 + 252 \implies 252 = 4284 - 4032 \cdot 1 = (12600 - 8316 \cdot 1) - (8316 \cdot 2 - 12600) = 12600 \cdot 2 - 8316 \cdot 3$$

Dunque otteniamo che

$$8316x + 12600y = 12600(2) + 8316(-3) \implies x = -3, y = 2$$

$$- p := \text{MCD}(a, d) = \text{MCD}(1470, 252)$$

$$1470 = 252 \cdot 5 + 210$$

$$252 = 210 \cdot 1 + 42$$

$$210 = 42 \cdot 5 + 0$$

dunque  $p = 42$

- A questo punto, riscriviamo il risultato secondo la forma espressa dell'identità di Bézout utilizzando i calcoli dell'algoritmo di Euclide:

$$* 1470 = 252 \cdot 5 + 210 \implies 210 = 1470 - 252 \cdot 5$$

$$* 252 = 210 \cdot 1 + 42 \implies 42 = 252 - 210 \cdot 1 = 252 - (1470 - 252 \cdot 5) = 1470 \cdot (-1) + 252 \cdot 6$$

Dunque otteniamo che

$$1470z + 252w = 1470(-1) + 252(6) \implies x = -1, y = 6$$

- Infine, ricostruiamo l'identità di Bézout richiesta tramite le due precedentemente calcolate:

$$1470x + 8316y + 12600z = 42$$

$$1470x + 8316y + 12600z = 1470 \cdot (-1) + 252 \cdot 6$$

$$1470x + 8316y + 12600z = 1470 \cdot (-1) + (12600 \cdot 2 - 8316 \cdot (-3)) \cdot 6$$

$$1470x + 8316y + 12600z = 1470 \cdot (-1) + 12600 \cdot (12) + 8316 \cdot (-18)$$

dunque  $x = -1, y = -18, z = 12$

### 4.5.2 Criteri di divisibilità

Sia  $a \in \mathbb{Z}$  con la sua **rappresentazione decimale**:

$$a = a_k \cdot 10^k + \dots + a_0 \cdot 10^0 = \sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i \text{ dove } a_i \in \{0, \dots, 9\}$$

Osserviamo che:

- In  $\mathbb{Z}_3$  si ha che

$$a = \sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i \equiv \left[ \sum_{i=0}^k a_i \cdot (1)^i \right] \pmod{3}$$

- In  $\mathbb{Z}_9$  si ha che

$$a = \sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i \equiv \left[ \sum_{i=0}^k a_i \cdot (1)^i \right] \pmod{9}$$

- In  $\mathbb{Z}_{11}$  si ha che

$$a = \sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i \equiv \left[ \sum_{i=0}^k a_i \cdot (-1)^i \right] \pmod{11}$$

Di conseguenza, possiamo stabilire dei criteri di divisibilità utilizzando le precedenti riduzioni e il fatto che  $n \mid m \iff m \equiv 0 \pmod{n}$ .

**Esempi:**

- Vogliamo sapere se  $3 \mid 129383716$ . Siccome siamo in  $\mathbb{Z}_3$  abbiamo che:

$$129383716 \equiv [6 + 1 + 7 + 3 + 8 + 3 + 9 + 2 + 1] \equiv 40 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

dunque  $3 \nmid 129383716$

- Vogliamo sapere se  $11 \mid 129383716$ . Siccome siamo in  $\mathbb{Z}_{11}$  abbiamo che:

$$129383716 \equiv [6 - 1 + 7 - 3 + 8 - 3 + 9 - 2 + 1] \equiv 22 \equiv 0 \pmod{11}$$

dunque  $11 \mid 129383716$

la definizione stessa di congruenza a 0 in modulo

## 4.6 Minimo comune multiplo

### Definizione 35: Minimo Comune Multiplo (mcm)

Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ , definiamo  $m \in \mathbb{N}$  come **minimo comune multiplo di  $a$  e  $b$** , indicato come  $m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$ , se dato  $k \in \mathbb{Z}$  si verifica che

$$a_1 \mid k \wedge a_n \mid k \iff m \mid k$$

### Proposizione 22

Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  e dato  $m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$ , si ha che:

$$I(a_1) \cap \dots \cap I(a_n) = I(m)$$

*Dimostrazione:*

- Essendo  $\mathbb{Z}$  un dominio ad ideali principali, si ha che

$$\exists b \in I(a_1, \dots, a_n) \mid I(a_1) \cap \dots \cap I(a_n) = I(b)$$

- Dato  $m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$ , ovviamente, si ha che

$$\begin{aligned} m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n) &\implies a_1 \mid m \wedge a_n \mid m \iff \forall i \in [1, n], \exists k_i \in \mathbb{Z} \mid m = a_i k_i \\ &\iff m \in I(a_i) \iff m \in I(a_1) \cap \dots \cap I(a_n) = I(b) \iff b \mid m \end{aligned}$$

- Inoltre, si ha che

$$b \in I(b) = I(a_1) \cap I(a_2) \cap \dots \cap I(a_n) \iff b = a_i k_i, \exists k_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in [0, n] \implies a_i \mid b$$

- Dunque, per definizione stessa di minimo comune multiplo si ha che

$$a_i \mid b \wedge \dots \wedge a_n \mid b \iff m \mid b$$

- Poiché  $m \mid b$ ,  $b \mid m$  e  $m \in \mathbb{N}$  necessariamente si ha che  $m = b$

□



**Osservazione 20**

Dato il dominio ad ideali principali  $\mathbb{Z}$  e dati  $I_1, \dots, I_n \triangleleft A$  ideali,  $\exists! a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  tali che :

- $I_1 + \dots + I_n = I(a_1, \dots, a_n) = I(d)$ , dove  $d := \text{MCD}(a_1, \dots, a_n)$
- $I_1 \cdot \dots \cdot I_n = I(a_1) \cdot \dots \cdot I(a_n) = I(a_1 \cdot \dots \cdot a_n)$
- $I_1 \cap \dots \cap I_n = I(a_1) \cap \dots \cap I(a_n) = I(m)$ , dove  $m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\mathbb{Z}$  è un dominio ad ideali principali si ha che

$$I_i = I(a_i), \exists! a_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in [1, n]$$

- Di conseguenza, si ha che:

$$\begin{aligned} I_1 + \dots + I_n &= I(a_1) + \dots + I(a_n) = \{b_1 + \dots + b_n \mid b_i \in I(a_i), \forall i \in [0, 1]\} = \\ &= \{b_1 + \dots + b_n \mid b_i = a_i x_i, \exists x_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in [0, 1]\} = \{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \mid x_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in [0, 1]\} = \\ &= I(a_1, \dots, a_n) = I(d) \end{aligned}$$

dove  $d := \text{MCD}(a_1, \dots, a_n)$

- Preso  $x \in I_1 \cdot \dots \cdot I_n$ , si ha che:

$$\begin{aligned} x \in I_1 \cdot \dots \cdot I_n &= I(a_1) \cdot \dots \cdot I(a_n) \iff \\ \iff \exists b_{j_{a_i}} \in I(a_i), \forall i, j \in [1, 0] \mid x &= a_1 b_{1_{a_1}} \cdot \dots \cdot a_n b_{1_{a_n}} + \dots + a_1 b_{n_{a_1}} \cdot \dots \cdot a_n b_{n_{a_n}} \iff \\ \iff x &= a_1 \cdot \dots \cdot a_n (b_{1_{a_1}} \cdot \dots \cdot b_{1_{a_n}} + \dots + b_{n_{a_1}} \cdot \dots \cdot b_{n_{a_n}}) \iff x \in I(a_1 \cdot \dots \cdot a_n) \end{aligned}$$

dunque, si ha che  $I_1 \cdot \dots \cdot I_n = I(a_1 \cdot \dots \cdot a_n)$

- Infine, per dimostrazione precedente si ha che:

$$I_1 \cap \dots \cap I_n = I(a_1) \cap \dots \cap I(a_n) = I(m)$$

dove  $m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$

□

**Proposizione 23: Infinite soluzioni all'identità di Bézout**

Dati  $a, n \in \mathbb{Z}$  siano  $x_0$  e  $y_0$  due soluzioni particolari della loro identità di Bézout (es: trovate tramite l'algoritmo di Euclide).

Posti  $d := \text{MCD}(a, b)$  e  $m := \text{mcm}(a, b)$ , tale identità ammette **infinite soluzioni** nella seguente forma:

$$x = x_0 + \frac{m}{a}k, \forall k \in \mathbb{Z} \quad y = y_0 - \frac{m}{b}k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

*Dimostrazione:*

- Prima di tutto, verifichiamo che le soluzioni possibili siano effettivamente valide:

$$a(x_0 + \frac{m}{a}k) + b(y_0 - \frac{m}{b}k) = d \iff ax_0 + mk + by_0 - mk = d \iff ax_0 + by_0 = d$$

- A questo punto, verifichiamo che tali soluzioni appaiano solo nella forma indicata:

$$\begin{aligned} \begin{cases} ax_0 + by_0 = d \\ ax_1 + by_1 = d \end{cases} &\implies (ax_1 + by_1) - (ax_0 + by_0) = d - d \implies \\ a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) &= 0 \implies a(x_1 - x_0) = -b(y_1 - y_0) \implies \\ &\implies a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1) \end{aligned}$$

- Posto  $N := a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$ , si ha che  $a \mid N$  e  $b \mid N$ , implicando che  $N$  sia un multiplo di  $m := \text{mcm}(a, b)$ . Dunque si ha che  $\exists k \in \mathbb{Z} \mid N = mk$ :

$$\begin{cases} a(x_1 - x_0) = N = mk \\ b(y_0 - y_1) = N = mk \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - x_0 = \frac{m}{a}k \\ y_0 - y_1 = \frac{m}{b}k \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{m}{a}k \\ y_1 = y_0 - \frac{m}{b}k \end{cases}$$

□

## 4.7 Teorema fondamentale dell'aritmetica

### Teorema 7: Teorema fondamentale dell'aritmetica

Dato  $n \geq 2 \in \mathbb{N}$ , tale  $n$  può essere espresso come un'unica (a meno di riordinamento) **fattorizzazione in numeri interi primi**, ossia:

$$\exists! p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}_{>0} \mid n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$$

*Dimostrazione esistenza:*

- Definiamo  $S := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2 \wedge n \text{ non fattorizzabile in numeri primi}\}$  e supponiamo per assurdo che  $|S| \neq 0$ . Poiché  $S \subseteq \mathbb{N}$ , per il principio del buon ordinamento ne segue che  $\exists m \in S \mid m = \min(S)$
- Supponiamo quindi che  $\exists a, b \neq 0 \in \mathbb{N} - \mathbb{P} \mid m = ab$ , da cui traiamo che:

$$\begin{cases} a \mid m \implies a \leq m \\ b \mid m \implies b \leq m \\ m = \min(S) \end{cases} \implies a, b \notin S \implies \begin{cases} a = 1 \vee a \text{ fatt. in primi} \\ b = 1 \vee b \text{ fatt. in primi} \end{cases}$$

- Consideriamo quindi i vari casi:

- Se  $a = 1 \wedge b = 1$ , allora  $m = ab = 1$ , contraddicendo l'ipotesi per cui  $m \in S \implies m \geq 2$
- Se  $a$  fatt. in primi  $\wedge b = 1$ , allora  $m = a = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ , contraddicendo l'ipotesi per cui  $m \in S \implies m$  non fatt. in primi
- Se  $a = 1 \wedge b$  fatt. in primi, allora  $m = b = q_1^{b_1} \cdot \dots \cdot q_j^{b_j}$ , contraddicendo l'ipotesi per cui  $m \in S \implies m$  non fatt. in primi
- Se  $a$  fatt. in primi  $\wedge b$  fatt. in primi, allora

$$m = ab = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k} \cdot q_1^{b_1} \cdot \dots \cdot q_j^{b_j}$$

contraddicendo l'ipotesi per cui  $m \in S \implies m$  non fatt. in primi

- Di conseguenza, ne segue necessariamente che  $|S| = 0$  e dunque che tale fattorizzazione valga  $\forall n \geq 2 \in \mathbb{N}$

□

*Dimostrazione unicità:*

- Dato  $n \geq 2 \in \mathbb{N}$ , consideriamo le sue due fattorizzazioni:

$$p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k} = n = q_1^{b_1} \cdot \dots \cdot q_j^{b_j}$$

- Dato che  $p_i^{a_i} \mid p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}, \forall i \in [1, k]$  e che  $p_i \in \mathbb{P}$ , ne segue automaticamente che:

$$p_i^{a_i} \mid p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k} \iff p_i^{a_i} \mid q_1^{b_1} \cdot \dots \cdot q_j^{b_j} \implies$$

$$\implies p_i \mid p_i^{a_i} \wedge p_i^{a_i} \mid q_1^{b_1} \cdot \dots \cdot q_j^{b_j} \implies p_i \mid q_1^{b_1} \cdot \dots \cdot q_j^{b_j} \implies p_i \mid q_1^{b_1} \vee \dots \vee p_i \mid q_j^{b_j}$$

- Sia quindi  $q_h \mid h \in [1, j]$  tale che  $p_i \mid q_h^{b_h}$ . Poiché  $q_h \in \mathbb{P}$ , ne segue necessariamente che:

$$p_i \mid q_h^{b_h} \implies p_i \mid q_h \implies p_i = q_h$$

dunque concludiamo che  $\forall i \in [1, k], \exists h \in [1, j]$  tale che  $p_i \mid q_h \implies p_i = q_h \wedge k = j$

□

#### Proposizione 24: Prodotto tra mcm e MCD

Dati  $a, b \in \mathbb{N}$ , si ha che:

$$\text{mcm}(a, b) \cdot \text{MCD}(a, b) = ab$$

*Dimostrazione:*

- Se  $a = 0 \vee b = 0$ , allora:

$$\text{mcm}(a, b) = 0 \implies \text{mcm}(a, b) \cdot \text{MCD}(a, b) = 0 = ab$$

- Se invece  $a = b = 1$ , allora:

$$\text{mcm}(a, b) \cdot \text{MCD}(a, b) = 1 \cdot 1 = 1 = ab$$

- Supponiamo quindi che  $a, b \geq 2$ . Per il teorema fondamentale dell'aritmetica,  $a$  e  $b$  sono esprimibili come una fattorizzazione in numeri interi primi. Poniamo quindi:

$$a := \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} \quad b := \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p}$$

dove  $p \nmid a \implies a_p = 0$  e  $p \nmid b \implies b_p = 0$  (ossia tale numero intero primo non compare nella loro fattorizzazione)

- Poniamo inoltre  $d := \text{MCD}(a, b)$  e  $m := \text{mcm}(a, b)$ , che per loro definizione corrispondono a:

$$d = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(a_p, b_p)} \quad m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(a_p, b_p)}$$

- A questo punto, osserviamo che:

$$\min(a_p, b_p) = a_p \iff \max(a_p, b_p) = b_p$$

- Quindi, il prodotto tra  $d$  e  $m$  corrisponde a:

$$dm = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(a_p, b_p)} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(a_p, b_p)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p + b_p} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p} = ab$$

□

### Osservazione 21

Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  dove  $n > 2 \in \mathbb{N}$ , non è detto che:

$$\text{mcm}(a_1, \dots, a_n) \cdot \text{MCD}(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$$

## 4.8 Teorema cinese dei resti

### Lemma 2: Numeri coprimi ed mcm

Dati  $a_1, \dots, a_n \geq 2 \in \mathbb{N}$ , si ha che:

$$\text{MCD}(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j \in \mathbb{N} \implies \text{mcm}(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$$

Inoltre, due elementi  $a, b \in \mathbb{N} \mid \text{MCD}(a, b) = 1$ , definiamo tali elementi come **coprimi**

*Dimostrazione:*

- Dati  $a_1, \dots, a_n \geq 2 \in \mathbb{N}$ , per il teorema fondamentale dell'aritmetica si ha che:

$$a_1 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{1,p}}, \quad a_2 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{2,p}}, \quad \dots, \quad a_n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{n,p}}$$

- Poiché  $a_1, \dots, a_n$  sono coprimi tra loro, si ha che

$$\text{MCD}(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j \in \mathbb{N} \implies \forall p \in \mathbb{P}, p \mid a_i \implies p \nmid a_j, \forall i \neq j \in \mathbb{N}$$

- Di conseguenza, per ogni esponente  $a_{i,p} > 0$  si ha che  $a_{j,p} = 0, \forall j \neq i$ , da cui ne segue che:

$$\forall p \in \mathbb{P}, \exists! a_{k,p} > 0 \mid a_{1,p} + \dots + a_{n,p} = a_{k,p} = \max(a_{1,p}, \dots, a_{n,p})$$

- Ponendo  $m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$  abbiamo che:

$$m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(a_{1,p}, \dots, a_{n,p})} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{1,p} + \dots + a_{n,p}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_1} \cdot \dots \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_n} = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$$

□

### Lemma 3

Consideriamo la notazione  $x \pmod{q}$ , indicante la classe  $[x] \in \mathbb{Z}_q$ , dove  $q \in \mathbb{N}$ .

Dati  $a_1, \dots, a_n \geq 2$  e posto  $m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$ , la seguente funzione è **ben definita** ed **iniettiva**

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n} : x \pmod{m} \mapsto (x \pmod{a_1}, \dots, x \pmod{a_n})$$

*Dimostrazione:*

$$x \equiv x' \pmod{m} \iff x' - x \in I(m) = I(a_1) \cap \dots \cap I(a_n) \iff$$

$$\Leftrightarrow x' - x \in I(a_i), \forall i \in [1, n] \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x \in I(a_1) \\ x' - x \in I(a_2) \\ \vdots \\ x' - x \in I(a_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv x' \pmod{a_1} \\ x \equiv x' \pmod{a_2} \\ \vdots \\ x \equiv x' \pmod{a_n} \end{cases}$$

□

### Teorema 8: Teorema cinese dei resti

Dati  $a_1, \dots, a_n \geq 2 \in \mathbb{N}$  **coprimi tra loro**, dunque tali che  $\text{MCD}(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j$  e dati  $0 \leq b_i < a_i \in \mathbb{N}, \forall i \in [1, n]$ , il seguente sistema di congruenze (se compatibile) ammette un'unica soluzione

$$\exists! x \pmod{m} \mid \begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{a_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{a_2} \\ \vdots \\ x \equiv b_n \pmod{a_n} \end{cases}$$

dove  $m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$  e dove  $x \pmod{m}$  indica la classe  $[x] \in \mathbb{Z}_m$

*Dimostrazione:*

- Per il lemma precedente, la seguente funzione è ben definita ed iniettiva

$$\varphi : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n} : x \pmod{m} \mapsto (x \pmod{a_1}, \dots, x \pmod{a_n})$$

- Inoltre, posto  $m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$ , per il lemma precedente si ha che:

$$\text{MCD}(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j \implies m = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$$

- A questo punto, notiamo che:

$$|\mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n}| = |\mathbb{Z}_{a_1}| \cdot \dots \cdot |\mathbb{Z}_{a_n}| = a_1 \cdot \dots \cdot a_n = m = |\mathbb{Z}_m|$$

- Di conseguenza, poiché  $|\mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n}| = |\mathbb{Z}_m|$  e poiché  $\varphi$  è iniettiva, ne segue che  $\varphi$  possa essere iniettiva se e solo se è suriettiva.
- Poiché  $\varphi$  è biettiva, concludiamo quindi che  $\exists! x \pmod{m}$  tale che

$$\varphi(x \pmod{m}) = (b_1 \pmod{a_1}, \dots, b_n \pmod{a_n})$$

implicando che  $x \pmod{m}$  sia l'unica soluzione del sistema.

□

**Esempi:**

1. • Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

- Poiché  $x \equiv 2 \pmod{3} \iff x = 2 + 3a, \exists a \in \mathbb{Z}$ , sostituendo  $x = 2 + 3a$  dentro  $x \equiv 3 \pmod{5}$  otteniamo che:

$$2 + 3a \equiv 3 \pmod{5}$$

- Impostiamo la seguente equazione, dove le seguenti classi di congruenza appartengono tutte a  $\mathbb{Z}_5$ :

$$\begin{aligned} [2 + 3a] &= [3] \iff [2] + [3][a] = [3] \iff \\ \iff [3][a] &= [3] - [2] \iff [a] = [1][3]^{-1} \iff \\ \iff [a] &= [1][2] \iff [a] = [2] \end{aligned}$$

- Quindi si ha che  $[a] = [2] \in \mathbb{Z}_5 \iff a \equiv 2 \pmod{5} \iff a = 2 + 5b, \exists b \in \mathbb{Z}$
- Sostituendo  $x = 2 + 3(2 + 5b) = 8 + 15b$  dentro  $x \equiv 2 \pmod{7}$ , otteniamo che:

$$8 + 15b \equiv 2 \pmod{5}$$

- Ripetiamo quindi i passaggi analoghi a prima, stavolta lavorando in  $\mathbb{Z}_7$ :

$$\begin{aligned} [8 + 15b] &= [2] \iff [8] + [15][b] = [2] \iff \\ \iff [15][b] &= [2] - [8] \iff [1][b] = [2] - [1] \iff [b] = [1] \end{aligned}$$

- Quindi si ha che  $[b] = [1] \in \mathbb{Z}_7 \iff b \equiv 1 \pmod{7} \iff b = 1 + 7c, \exists c \in \mathbb{Z}$
- Infine, otteniamo che

$$x = 8 + 15(1 + 7c) = 23 + 105c, \exists c \in \mathbb{Z} \iff x \equiv 23 \pmod{105}$$

- Notiamo come  $\text{mcm}(3, 5, 7) = 105$ . Difatti,  $x \equiv 23 \pmod{105}$  è l'unica soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 23 \equiv 2 \pmod{3} \\ 23 \equiv 3 \pmod{5} \\ 23 \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

2. • Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\text{mod } 15) \\ x \equiv 9(\text{mod } 20) \end{cases}$$

- Poiché 15 e 20 non sono fattori primi, scomponiamo le due congruenze utilizzando il **teorema cinese dei resti**, in particolare la funzione  $\varphi$ :

$$x \equiv 6(\text{mod } 15) \iff \begin{cases} x \equiv 0(\text{mod } 3) \\ x \equiv 1(\text{mod } 5) \end{cases}$$

$$x \equiv 9(\text{mod } 20) \iff \begin{cases} x \equiv 1(\text{mod } 4) \\ x \equiv 4(\text{mod } 5) \end{cases}$$

- Il sistema iniziale, quindi, è equivalente a:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\text{mod } 15) \\ x \equiv 9(\text{mod } 20) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0(\text{mod } 3) \\ x \equiv 1(\text{mod } 5) \\ x \equiv 1(\text{mod } 4) \\ x \equiv 4(\text{mod } 5) \end{cases}$$

- Notiamo come il sistema sia **incompatibile**, poiché

$$x \equiv 1(\text{mod } 5) \iff x \not\equiv 4(\text{mod } 5)$$

dunque il sistema **non ammette alcuna soluzione**

3. • Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\text{mod } 15) \\ x \equiv 11(\text{mod } 20) \\ x \equiv 15(\text{mod } 21) \end{cases}$$

- Scomponendo in fattori primi si ha che:

$$x \equiv 6(\text{mod } 15) \iff \begin{cases} x \equiv 0(\text{mod } 3) \\ x \equiv 1(\text{mod } 5) \end{cases}$$

$$x \equiv 11(\text{mod } 20) \iff \begin{cases} x \equiv 3(\text{mod } 4) \\ x \equiv 1(\text{mod } 5) \end{cases}$$

$$x \equiv 15(\text{mod } 21) \iff \begin{cases} x \equiv 0(\text{mod } 3) \\ x \equiv 1(\text{mod } 7) \end{cases}$$



- Il sistema iniziale, quindi, è equivalente a:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\text{mod } 15) \\ x \equiv 11(\text{mod } 20) \\ x \equiv 15(\text{mod } 21) \end{cases} \implies \begin{cases} x \equiv 0(\text{mod } 3) \\ x \equiv 1(\text{mod } 5) \\ x \equiv 3(\text{mod } 4) \\ x \equiv 1(\text{mod } 7) \end{cases}$$

- Poiché  $x \equiv 0(\text{mod } 3) \iff x = 0 + 3a, \exists a \in \mathbb{Z}$ , sostituendo nella seconda congruenza otteniamo che  $3a \equiv 1(\text{mod } 5)$ . Lavorando in  $\mathbb{Z}_5$  quindi si ha che:

$$[3a] = [1] \iff [3][a] = [1] \iff$$

$$\iff [a] = [1][3]^{-1} \iff [a] = [2]$$

- Dunque  $[a] = [2] \in \mathbb{Z}_5 \iff a \equiv 2(\text{mod } 5) \iff a = 2 + 5b, \exists b \in \mathbb{Z}$ .
- Sostituendo nella terza congruenza otteniamo  $x = 3(2 + 5b) = 6 + 15b \iff 6 + 15b \equiv 3(\text{mod } 4)$ . Lavorando in  $\mathbb{Z}_4$  si ha che:

$$[6 + 15b] = [3] \iff [6] + [15][b] = [3] \iff$$

$$\iff [2] + [3][b] = [3] \iff [3][b] = [3] - [2] \iff$$

$$\iff [b] = [1][3]^{-1} \iff [b] = [3]$$

- Dunque  $[b] = [3] \in \mathbb{Z}_4 \iff b \equiv 3(\text{mod } 4) \iff b = 3 + 4c, \exists c \in \mathbb{Z}$
- Sostituendo nella quarta congruenza otteniamo  $x = 6 + 15(3 + 4c) = 51 + 60c \iff 51 + 60c \equiv 1(\text{mod } 7)$ . Lavorando in  $\mathbb{Z}_7$  quindi si ha che:

$$[51 + 60c] = [1] \iff [2] + [4][c] = [1] \iff [2] + [4][c] = [1] \iff$$

$$\iff [4][c] = [1] - [2] \iff [4][c] = [-1] \iff [c] = [6][4]^{-1} \iff$$

$$\iff [c] = [6][2] \iff [c] = [12] \iff [c] = [5]$$

- Dunque  $[c] = [2] \iff c \equiv 5(\text{mod } 7) \implies c = 5 + 7d, \exists d \in \mathbb{Z}$ .
- Infine, otteniamo che

$$x = 51 + 60(5 + 7d) = 351 + 420d \implies x \equiv 351(\text{mod } 420)$$

che risulta essere l'unica soluzione del sistema. Difatti verifichiamo che:

$$\begin{cases} 351 \equiv 6(\text{mod } 15) \\ 351 \equiv 11(\text{mod } 20) \\ 351 \equiv 15(\text{mod } 21) \end{cases} \implies \begin{cases} 351 \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 351 \equiv 1(\text{mod } 5) \\ 351 \equiv 3(\text{mod } 4) \\ 351 \equiv 1(\text{mod } 7) \end{cases}$$

4. • Vogliamo calcolare le ultime due cifre di  $37^{37}$ . Poniamo quindi  $x := 37^{37}$  e calcoliamo la classe di equivalenza  $x \bmod 100$ .
- Scomponiamo quindi  $100 = 4 \cdot 25$  in modo da poter applicare il teorema cinese dei resti:

– Calcoliamo la classe di equivalenza di  $x$  in  $\mathbb{Z}_4$

$$[x] = [37^{37}] = [37]^{37} = [1]^{37} = [1]$$

– Calcoliamo la classe di equivalenza di  $x$  in  $\mathbb{Z}_{25}$

$$\begin{aligned} [x] &= [37^{37}] = [37]^{37} = [12]^{37} = [12][12]^{36} = [12][(12)^2]^{18} = [12][144]^{18} = \\ &= [12][19]^{18} = [12][-6]^{18} = [12][(-6)^2]^9 = [12][36]^9 = [12][11]^9 = \\ &= [12][11][(11)^2]^4 = [12][11][121]^4 = [12][11][-4]^4 = [12][11][6] = [792] = [17] \end{aligned}$$

- Impostiamo quindi il seguente sistema e procediamo applicando il teorema cinese:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 17 \pmod{25} \end{cases}$$

- Abbiamo quindi che  $x = 1 + 4k \implies 1 + 4k \equiv 17 \pmod{25}$ :

$$\begin{aligned} [1] + [4][k] &= [17] \iff [4][k] = [16] \iff [k] = [16][4]^{-1} \iff \\ &\iff [k] = [16][19] \iff [k] = [304] \iff [k] = [4] \end{aligned}$$

- Dunque  $k \equiv 4 \pmod{25} \implies k = 4 + 25j \implies x = 1 + 4(4 + 25j) = 17 + 100j$
- Quindi concludiamo che  $x \equiv 17 \pmod{100}$  e quindi che le ultime cifre di  $37^{37}$  corrispondono a 17

5. • Vogliamo calcolare l'inverso di 193 in  $\mathbb{Z}_{240}$ . Per definizione, ciò equivale a calcolare  $193x \equiv 1 \pmod{240}$
- Dato che  $240 = 3 \cdot 5 \cdot 16$ , applichiamo il teorema cinese dei resti

$$193x \equiv 1 \pmod{240} \iff \begin{cases} 193x \equiv 1 \pmod{3} \\ 193x \equiv 1 \pmod{5} \\ 193x \equiv 1 \pmod{16} \end{cases}$$

- Riduciamo le classi di equivalenza del sistema:

– Riduciamo  $193x \equiv 1 \pmod{3}$  in:

$$[193][x] = [1] \implies [1][x] = [1] \implies [x] = [1]$$

- Riduciamo  $193x \equiv 1 \pmod{5}$  in:

$$[193][x] = [1] \implies [1][x] = [1] \implies [x] = [3]^{-1} \implies [x] = [2]$$

- Riduciamo  $193x \equiv 1 \pmod{16}$  in:

$$[193][x] = [1] \implies [1][x] = [1] \implies [x] = [1]$$

- Riconduciamo quindi il sistema iniziale ad una versione semplificata sulla quale possiamo applicare il teorema cinese dei resti:

$$\begin{cases} 193x \equiv 1 \pmod{3} \\ 193x \equiv 1 \pmod{5} \\ 193x \equiv 1 \pmod{16} \end{cases} \implies \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{16} \end{cases}$$

- Quindi si ha che  $x = 1 + 16k \implies 1 + 16k \equiv 1 \pmod{3}$ :

$$[1] + [16][k] = [1] \iff [k] = [0][16]^{-1} \iff [k] = [0]$$

- Dunque  $k = 0 + 3j \implies x = 1 + 16(0 + 3j) = 1 + 48j \implies 1 + 48j \equiv 2 \pmod{5}$ :

$$[1] + [48][j] = [2] \iff [j] = [1][3]^{-1} \iff [j] = [2]$$

- Infine  $j = 2 + 5h \implies x = 1 + 48(2 + 5h) = 97 + 240h \implies x \equiv 97 \pmod{240}$

- Dunque  $[197]^{-1} = [97] \in \mathbb{Z}_{240}$ . Difatti, in  $\mathbb{Z}_{240}$  si ha che  $[193][97] = [1]$

### Proposizione 25

Dati  $n, m \in \mathbb{Z}$  tali che  $m \mid n$ , si ha che:

$$x \equiv y \pmod{n} \implies x \equiv y \pmod{m}$$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $m \mid n \iff n = mk, k \in \mathbb{Z}$ , il risultato segue automaticamente dalla definizione di congruenza:

$$x \equiv y \pmod{n} \iff x = y + nh, h \in \mathbb{Z} \implies x = y + mkh \iff x \equiv y \pmod{m}$$

□

**Esempi:**

- Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{12} \\ x \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$$

- Applicando il teorema cinese dei resti otteniamo che

$$\begin{cases} x \equiv 2(\text{mod } 12) \\ x \equiv 4(\text{mod } 8) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 2(\text{mod } 3) \\ x \equiv 2(\text{mod } 4) \\ x \equiv 4(\text{mod } 8) \end{cases}$$

- Poiché  $4 \mid 8$ , per la proposizione precedente si ha che:

$$x \equiv 4(\text{mod } 8) \implies x \equiv 4 \equiv 0(\text{mod } 4)$$

- Di conseguenza, il sistema risulta incompatibile poiché

$$x \equiv 2(\text{mod } 4) \iff x \not\equiv 0(\text{mod } 4)$$

2. • Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 0(\text{mod } 12) \\ x \equiv 4(\text{mod } 8) \end{cases}$$

- Applicando il teorema cinese dei resti otteniamo che

$$\begin{cases} x \equiv 0(\text{mod } 12) \\ x \equiv 4(\text{mod } 8) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0(\text{mod } 3) \\ x \equiv 0(\text{mod } 4) \\ x \equiv 4(\text{mod } 8) \end{cases}$$

- Poiché  $4 \mid 8$ , per la proposizione precedente si ha che:

$$x \equiv 4(\text{mod } 8) \implies x \equiv 4 \equiv 0(\text{mod } 4)$$

- Di conseguenza, il sistema risulta compatibile, implicando che esso possa essere ridotto in

$$\begin{cases} x \equiv 0(\text{mod } 12) \\ x \equiv 4(\text{mod } 8) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0(\text{mod } 3) \\ x \equiv 0(\text{mod } 4) \\ x \equiv 4(\text{mod } 8) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0(\text{mod } 3) \\ x \equiv 4(\text{mod } 8) \end{cases}$$

## 4.9 Piccolo teorema di Fermat

### Lemma 4

Dato  $p \in \mathbb{P}$  e dato  $0 < k < p$  si ha che:

$$p \mid \binom{p}{k}$$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $p \in \mathbb{P}$ , allora esso non potrà essere semplificato dal denominatore, dunque si ha che:

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{k! \cdot (p-k)!} = ph \iff p \mid \binom{p}{k}$$

dove  $\frac{(p-1)!}{k! \cdot (p-k)!} \in \mathbb{Z}$  poiché per definizione di coefficiente binomiale si ha che  $\binom{p}{k} \in \mathbb{N}$

□

**Esempio:**

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 \implies 7 \mid \binom{7}{3}$$

### Corollario 10

Dato  $p \in \mathbb{P}$ , dato dato  $0 < k < p$  e dato  $[a] \in \mathbb{Z}_p$ , si ha che:

$$\binom{p}{k} \cdot [a] = [0]$$

*Dimostrazione:*

- Per il lemma precedente si ha che

$$p \mid \binom{p}{k} \iff \binom{p}{k} = ph, \exists h \in \mathbb{Z}$$

- Di conseguenza, si ha che:

$$\binom{p}{k} \cdot [a] = ph \cdot [a] = [p][h][a] = [0][h][a] = [0], \exists h \in \mathbb{Z}$$

□

### Lemma 5

Dato  $p \in \mathbb{P}$  e dati  $[a], [b] \in \mathbb{Z}_p$  si ha che:

$$([a] + [b])^p = [a]^p + [b]^p$$

*Dimostrazione:*

- Dato il **binomio di Newton** (dimostrato nella sezione 3.6), sappiamo che:

$$([a] + [b])^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} [a]^k [b]^{p-k}$$

- Se  $k = 0 \vee k = p$ , si ha che:

$$\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$$

- Se invece  $0 < k < p$ , per il corollario precedente sappiamo dato  $[x] \in \mathbb{Z}_p$  si ha che:

$$p \mid \binom{p}{k} \implies \binom{p}{k} \cdot [x] = 0$$

- Di conseguenza, ogni termine della sommatoria, escluso il primo e l'ultimo, può essere ricondotto alla classe  $[0]$ :

$$\begin{aligned} ([a] + [b])^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} [a]^k [b]^{p-k} = \binom{p}{0} [b]^p + \binom{p}{p} [a]^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} [a]^k [b]^{p-k} = \\ &= [b]^p + [a]^p + \sum_{k=1}^{p-1} [0] = [b]^p + [a]^p \end{aligned}$$

□

### Corollario 11

Dato  $p \in \mathbb{P}$  e dati  $[a_1], \dots, [a_n] \in \mathbb{Z}_p \mid n \in \mathbb{N}$  si ha che:

$$([a_1] + \dots + [a_n])^p = [a_1]^p + \dots + [a_n]^p$$

*Dimostrazione:*

- Caso base (n=1):

$$[a_1]^p = [a_1]^p$$

- Caso base (n=2):

$$([a_1] + [a_2])^p = [a_1]^p + [a_2]^p$$

- Ipotesi induttiva:

$$([a_1] + \dots + [a_n])^p = [a_1]^p + \dots + [a_n]^p \mid n \in \mathbb{N}$$

- Passo induttivo:

$$\begin{aligned} ([a_1] + \dots + [a_n] + [a_{n+1}])^p &= (([a_1] + \dots + [a_n]) + [a_{n+1}])^p = \\ &= ([a_1] + \dots + [a_n])^p + [a_{n+1}]^p = [a_1]^p + \dots + [a_n]^p + [a_{n+1}]^p \end{aligned}$$

□

### Teorema 9: Piccolo teorema di Fermat

Dato il campo  $\mathbb{Z}_p$  dove  $p \in \mathbb{P}$ , dato  $[a] \in \mathbb{Z}_p$  si ha che:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

*Dimostrazione:*

- Caso base ( $a=0$ ):

$$[0]^p = [0]$$

- Ipotesi induttiva:

$$[a]^p = [a]$$

- Passo induttivo:

$$[a+1]^p = ([a]+[1])^p = [a]^p + [1]^p = [a]^p + [1] = [a] + [1] = [a+1]$$

□

### Corollario 12

Dato il campo  $\mathbb{Z}_p$  dove  $p \in \mathbb{P}$ , dato  $[a] \in \mathbb{Z}_p$  si ha che:

$$a^{p+k} \equiv a^{k+1} \pmod{p}$$

In particolare, se  $k = -2$ , si ha che:

$$a^{p-2} \equiv a^{-1} \pmod{p}$$

dunque è sempre possibile calcolare comodamente  $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p$

*Dimostrazione:*

- Per il piccolo teorema di Fermat, si ha che:

$$\begin{aligned} [a]^p &= [a] \iff [a]^k [a]^p = [a][a]^k \iff [a]^{p+k} = [a][a]^{k+1-1} \iff \\ &\iff [a]^{p+k} = [a][a]^{-1}[a]^{k+1} \iff [a]^{p+k} = [1][a]^{k+1} \iff [a]^{p+k} = [a]^{k+1} \end{aligned}$$

□

**Esempio:**

- Vogliamo trovare  $[4]^{-1} \in \mathbb{Z}_{13}$ . Per il corollario appena mostrato, si ha che:

$$\begin{aligned} 4^{-1} &\equiv 4^{13-2} \pmod{13} \iff [4]^{-1} = [4]^{11} = [4][4]^{10} = [4][4^2]^5 = [4][16]^5 = \\ &= [4][3]^5 = [4][3]^2[3]^3 = [4][9][27] = [4][9][1] = [36] = [10] \end{aligned}$$

## 4.10 Funzione totiente di Eulero

### Definizione 36: Funzione totiente di Eulero

Dato  $n \in \mathbb{N}$ , definiamo come  $\varphi(n)$  come **funzione totiente di Eulero**, dove:

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto |\mathbb{Z}_n^*|$$

### Lemma 6

Dati i due anelli commutativi  $\mathbb{Z}_m$  e  $\mathbb{Z}_n$ , dove  $\text{MCD}(m, n) = 1$ , si ha che:

$$[a] \in \mathbb{Z}_{mn}^* \iff [a] \in \mathbb{Z}_m^*, [a] \in \mathbb{Z}_n^*$$

*Dimostrazione:*

- Supponiamo che  $[a] \in \mathbb{Z}_{mn}^*$ , da cui ricaviamo che:

$$[a] \in \mathbb{Z}_{mn}^* \iff \exists x \in \mathbb{Z}_{mn} \mid ax \equiv 1 \pmod{mn}$$

- Poiché  $\text{MCD}(m, n) = 1 \implies \text{mcm}(m, n) = mn$ , per il teorema cinese dei resti si ha che:

$$ax \equiv 1 \pmod{mn} \iff \begin{cases} ax \equiv 1 \pmod{m} \\ ax \equiv 1 \pmod{n} \end{cases} \iff [a] \in \mathbb{Z}_m^*, [a] \in \mathbb{Z}_n^*$$

□

### Osservazione 22

Dati  $m, n \in \mathbb{N}$  dove  $\text{MCD}(m, n) = 1$ , si ha che:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

*Dimostrazione:*

- Per il lemma precedente, la seguente funzione  $f : \mathbb{Z}_{mn}^* \rightarrow \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^*$  risulta essere biettiva, implicando che:

$$\varphi(mn) = |\mathbb{Z}_{mn}^*| = |\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^*| = |\mathbb{Z}_m^*| \cdot |\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(m)\varphi(n)$$

□

### Osservazione 23

Dati  $p \in \mathbb{P}$  e  $k \neq 0 \in \mathbb{N}$ , si ha che:

$$\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$$



*Dimostrazione:*

- Per dimostrazione precedente, per ogni  $0 < a < p^k$ , si ha che:

$$[a] \in \mathbb{Z}_{p^k}^* \iff \text{MCD}(a, p^k) = 1$$

- Inoltre, poiché  $p \in \mathbb{P}$ , si ha che:

$$\text{MCD}(a, p^k) = 1 \iff p \nmid a \iff \nexists n \in \mathbb{Z} \mid a = np$$

- Simmetricamente, quindi, si ha che:

$$[a] \notin \mathbb{Z}_{p^k}^* \iff \text{MCD}(a, p^k) \neq 1 \iff p \mid a \iff \exists n \in \mathbb{Z} \mid a = np$$

- Consideriamo quindi i multipli di  $p$  compresi tra 0 e  $p^k$  (escluso):

$$0 \leq np < p^k \implies 0 \leq n \leq p^{k-1}$$

da cui traiamo che la cardinalità degli elementi non invertibili in  $\mathbb{Z}_{p^k}$  corrisponde a:

$$H := \{[a] \in \mathbb{Z}_{p^k} \mid [a] \notin \mathbb{Z}_{p^k}^*\} \implies |H| = p^{k-1}$$

- Infine, quindi, concludiamo che:

$$\varphi(p^k) = |\mathbb{Z}_{p^k}| - |H| = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1)$$

□

### Proposizione 26

Dato  $n \geq 2 \in \mathbb{N}$ , si ha che:

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ \text{t.c. } p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

*Dimostrazione:*

- Per il teorema fondamentale dell'aritmetica si ha che:

$$\exists! p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}_{>0} \mid n = p_1^{i_1} \cdot \dots \cdot p_k^{i_k}$$

- Poiché tali fattori sono tutti coprimi tra loro, si ha che:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \varphi(p_1^{i_1}) \cdot \dots \cdot \varphi(p_k^{i_k}) = p_1^{i_1-1}(p_1 - 1) \cdot \dots \cdot p_k^{i_k-1}(p_k - 1) = \\ &= \frac{p_1^{i_1}(p_1 - 1)}{p_1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{i_k}(p_k - 1)}{p_k} = n \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ \text{t.c. } p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

□

## 4.11 Ordine di un elemento di un gruppo

### Definizione 37: Sottogruppo ciclico ed Ideale d'ordine

Sia  $G$  un gruppo. Dato  $g \in G$ , definiamo il **sottogruppo ciclico**  $H(g) \leq G$  e l'**ideale d'ordine**  $I(g) \triangleleft \mathbb{Z}$  come:

$$H(g) := \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$I(g) := \{n \in \mathbb{Z} \mid g^n = e\}$$

*Dimostrazioni:*

- $H \leq G$ 
  - $g^0 = e \implies e \in H(g)$
  - $g^n, g^m \in H(g) \implies g^n \cdot g^m = g^{n+m} \implies g^{n+m} \in H(g)$
  - $g^n \in H(g) \implies (g^n)^{-1} = g^{-n} \implies g^{-n} \in H(g)$
- $I(g) \triangleleft \mathbb{Z}$ 
  - $g^0 = e \implies 0 \in I(g)$
  - $n, m \in I(g) \implies g^n = g^m = e \implies g^{n+m} = g^n \cdot g^m = e \implies n + m \in I(g)$
  - $n \in I(g) \implies g^{-n} = (g^n)^{-1} = e^{-1} = e \implies -n \in I(g)$
  - $n \in I(g), k \in \mathbb{Z} \implies g^{nk} = (g^n)^k = e^k = e \implies kn \in I(g)$

□

### Definizione 38: Ordine di un elemento

Sia  $G$  un gruppo. Dato  $g \in G$ , definiamo l'**ordine di**  $g$  come:

$$o(g) := |H(g)|$$

### Proposizione 27

Sia  $G$  un gruppo. Dato  $g \in G$ , si ha che  $\exists! d \in \mathbb{N} \mid I(g) = I(d)$  tale che

- $d = 0 \implies o(g) = +\infty$
- $d > 0 \implies o(g) = d$

Dunque,  $o(g)$  corrisponde al **più piccolo esponente**  $d$  tale che  $g^d = e$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $I(g) \triangleleft \mathbb{Z}$  e poiché  $\mathbb{Z}$  è un dominio ad ideali principali, si ha che  $\exists! d \in \mathbb{N} \mid I(g) = I(d)$ .
- Di conseguenza, si ha che:

$$\begin{aligned} n, m \in I(g) &\iff g^n = g^m \iff g^{-n} \cdot g^n = g^m \cdot g^{-n} \iff e = g^{m-n} \iff \\ &\iff m - n \in I(g) = I(d) \iff m - n = dh, \exists h \in \mathbb{Z} \iff d \mid m - n \end{aligned}$$

- Consideriamo la funzione  $f : \mathbb{Z} \rightarrow H(g) : n \mapsto g^n$ , la quale risulta essere suriettiva per definizione stessa di  $H(g)$
- Nel caso in cui  $d = 0$ , si ha che:

$$\begin{aligned} g^n = g^m &\iff d \mid m - n \iff 0 \mid m - n \iff \\ &\iff m - n = 0k, \exists k \in \mathbb{Z} \iff m - n = 0 \iff m = n \end{aligned}$$

di conseguenza, si ha che  $f(n) = f(m) \iff m = n, \forall m, n \in \mathbb{Z}$ , implicando che  $f$  sia anche iniettiva. Dunque, siccome  $f$  sarebbe una funzione biettiva, ne segue che

$$o(g) := |H(g)| = |\mathbb{Z}| = +\infty$$

- Nel caso in cui  $d > 0$ , invece, si ha che  $d \in I(d) = I(g) \iff g^d = e$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \exists! q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < d \mid n = dq + r &\implies \\ \implies g^n = g^{dq+r} = g^{dq} g^r = (g^d)^q g^r = e^q g^r = g^r \end{aligned}$$

- Poiché  $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists r \in [0, d) \mid g^n = g^r$  ne segue che possano esistere al massimo  $d$  potenze di  $g$ , implicando che  $|H(g)| \leq d$
- Consideriamo ora invece la seguente restrizione di  $f$ , ossia  $g := \{0, \dots, d-1\} \rightarrow H(g) : n \mapsto g^n$
- Considerando ancora il caso in cui  $d > 0$  e presi  $0 \leq m, n < d$ , da cui traiamo che  $-d < m - n < d$ , si ha che:

$$\begin{aligned} g^n = g^m &\iff g^n g^{-m} = g^m g^{-n} \iff g^{m-n} = e \iff \\ &\iff m - n \in I(g) = I(d) \iff m - n = dp, \exists p \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Tuttavia, poiché  $-d < m - n < d$ , l'unica possibilità è  $m - n = 0$ , implicando che  $m = n$ . Di conseguenza, si ha che  $g(n) = g(m) \iff n = m, \forall 0 \leq m, n < d$ , implicando che  $g$  sia iniettiva, implicando a sua volta che:

$$o(g) := |H(g)| \leq |\{0, \dots, d-1\}| = d$$

- Infine, quindi, otteniamo che  $d \geq |H(g)| \leq d \implies |H(g)| = d$ , implicando quindi che  $g$  possa essere iniettiva se e solo se è suriettiva, da cui concludiamo che  $g(x) = g^x \in H(g), \forall 0 \leq x < d$ :

$$H(g) = \{g^0, \dots, g^{d-1}\}$$

□

#### Osservazione 24

Sia  $G$  un gruppo. Dato  $g \in G \mid o(g) < +\infty$  e dato  $k \in \mathbb{Z}$ , si ha che:

$$g^k = e \implies o(g) \mid k$$

*Dimostrazione:*

- Sia  $d := o(g)$ . Dalla definizione stessa di  $I(d)$ , si ha che:

$$g^k = e \implies k \in I(d) \implies k = dn, n \in \mathbb{Z} \implies d \mid k$$

□

#### Corollario 13

Sia  $G$  un gruppo con cardinalità finita. Dato  $g \in G$  si ha che

$$o(g) := |H(g)| \leq |G| < +\infty \implies o(g) \mid |G| \implies g^{|G|} = e$$

**Attenzione:** se  $o(g) = +\infty$  allora  $o(g) \nmid |G|$

*Dimostrazione:*

- Dato  $d := o(g) := |H(g)| \leq |G| < +\infty$ , per il teorema di Lagrange si ha che:

$$o(g) \mid |G| \implies d \mid |G| \implies |G| = dk, \exists k \in \mathbb{Z} \implies g^{|G|} = g^{dk} = (g^d)^k = e^k = e$$

□

#### Corollario 14: Piccolo teorema di Fermat (II dim.)

Dato il campo  $\mathbb{Z}_p$  dove  $p \in \mathbb{P}$ , dato  $[a] \in \mathbb{Z}_p$  si ha che:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

*Dimostrazione:*

- Se  $[a] = [0]$ , allora abbiamo che  $[a]^p = [0]$
- Poiché  $\mathbb{Z}_p$  è un campo, si ha che  $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{0\}$ , implicando che  $|\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$ .

- Di conseguenza, dato  $[a] \neq [0] \in \mathbb{Z}_p^*$  si ha che:

$$o(a) \mid |\mathbb{Z}_p^*| \implies [a]^{|\mathbb{Z}_p^*|} = [1] \implies [a]^{p-1} = [1] \implies [a]^p [a]^{-1} = [1] \implies [a]^p = [a]$$

□

### Teorema 10: Teorema di Eulero

Dati  $a, n \in \mathbb{N}$  tali che  $\text{MCD}(a, n) = 1$ , si ha che:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

dove  $\varphi(n)$  è la funzione totiente di Eulero

*Dimostrazione:*

- Per dimostrazione precedente, si ha che:

$$\text{MCD}(a, n) = 1 \iff [a] \in \mathbb{Z}_n^*$$

- Di conseguenza, si ha che:

$$o(a) \mid |\mathbb{Z}_n^*| \implies [a]^{|\mathbb{Z}_n^*|} = [1] \implies [a]^{\varphi(n)} = [1]$$

□

### Proposizione 28: Gruppo ciclico

Sia  $G$  un gruppo con cardinalità finita. Dato  $g \in G$  si ha che

$$o(g) := |H(g)| = |G| \iff H(g) = G$$

In tal caso definiamo  $G$  come **gruppo ciclico**

*Dimostrazione:*

- Poiché  $H(g) \leq G \implies H(g) \subseteq G$ , per definizione stessa di insieme improprio si ha

$$|H(g)| = |G| \iff H(g) = G$$

□

### Corollario 15

Sia  $G$  un gruppo. Dato  $g \in G$ , si ha che:

$$g \in G^* \implies g^{o(g)-1} = g^{-1}$$

*Dimostrazione:*

- Siccome  $g \in \mathbb{G}^* \iff \exists g^{-1} \in \mathbb{G}$ , allora:

$$g^{o(g)} = 1 \iff g^{o(g)} g^{-1} = g^{-1} \iff g^{o(g)-1} = g^{-1}$$

□

### Lemma 7

Sia  $G$  un gruppo. Dato  $g \in G$ , si ha che:

$$g \in G^* \implies o(g) = o(g^{-1})$$

*Dimostrazione:*

- Siccome  $g \in \mathbb{G}^* \iff \exists g^{-1} \in \mathbb{G}$ , allora:

$$(g^{-1})^n \in H(g^{-1}) \implies (g^{-1})^n = g^{-n} \in H(g)$$

- Analogamente, si ha che:

$$g^n \in H(g) \implies g^n = (g^{-1})^{-n} \in H(g^{-1})$$

- Di conseguenza, si verifica che  $H(g) = H(g^{-1}) \implies o(g) = o(g^{-1})$

□

### Lemma 8

Sia  $G$  un gruppo finito e  $k \in \mathbb{Z}$ , per ogni  $g \in G$  si verifica che:

$$o(g^k) \mid o(g)$$

*Dimostrazione:*

- Dimostriamo che  $H(g^k) \leq H(g)$

$$- (g^k)^n \in H(g^k) \implies (g^k)^n = g^{kn} \in H(g) \implies H(g^k) \subseteq H(g)$$

$$- (g^k)^0 = g^0 = e \in H(g^k)$$

$$- (g^k)^n, (g^k)^m \in H(g) \implies (g^k)^n (g^k)^m = g^{kn} g^{km} = g^{kn+km} = g^{k(n+m)} = (g^k)^{n+m} \in H(g)$$

$$- (g^k)^n \in H(g^k) \implies ((g^k)^n)^{-1} = (g^k)^{-n} \in H(g^k)$$

- Di conseguenza, per il teorema di Lagrange si ha che

$$|H(g^k)| \mid |H(g)| \iff o(g^k) \mid o(g)$$

□

**Lemma 9**

Sia  $G$  un gruppo finito. Dati  $g, h \in G \mid gh = hg$ , si ha che:

$$\frac{m}{d} \mid o(gh) \quad \text{e} \quad o(gh) \mid m$$

dove  $m := \text{mcm}(o(g), o(h))$  e  $d := \text{MCD}(o(g), o(h))$ .

In particolare, se  $d = 1$ , allora  $o(gh) = o(g)o(h)$ .

*Dimostrazione:*

- Per definizione stessa di  $m := \text{mcm}(o(g), o(h))$ , si ha che

$$o(g) \mid m, o(h) \mid m \iff o(g) \cdot p = m = o(h) \cdot q, \exists p, q \in \mathbb{Z}$$

- Siccome per ipotesi  $gh = hg$ , si ha che:

$$\begin{aligned} (gh)^m &= \underbrace{gh \cdot \dots \cdot gh}_{m \text{ volte}} = g^m h^m = g^{o(g) \cdot p} h^{o(h) \cdot q} = (g^{o(g)})^p (h^{o(h)})^q = e^p e^q = e \implies \\ &\implies m \in I(gh) = I(o(gh)) \implies o(gh) \mid m \end{aligned}$$

- Inoltre, abbiamo che

$$e = (gh)^{o(gh)} = \underbrace{gh \cdot \dots \cdot gh}_{o(gh) \text{ volte}} = g^{o(gh)} h^{o(gh)} \implies e = g^{o(gh)} h^{o(gh)} \iff g^{o(gh)} = h^{-o(gh)}$$

- Per il lemma precedente, abbiamo che

$$o(g^{o(gh)}) \mid o(g), o(h^{-o(gh)}) \mid o(h)$$

e dato che  $g^{o(gh)} = h^{-o(gh)}$ , otteniamo che

$$o(g^{o(gh)}) \mid o(g), o(h^{-o(gh)}) \mid o(h) \iff o(g^{o(gh)}) \mid o(g), o(g^{o(gh)}) \mid o(h) \implies o(g^{o(gh)}) \mid d$$

dove  $d = \text{MCD}(o(g), o(h))$

- A questo punto, notiamo che:

$$\frac{m}{d} \cdot \frac{d}{o(g^{o(gh)})} = \frac{m}{o(g^{o(gh)})} \implies \frac{m}{d} \mid \frac{m}{o(g^{o(gh)})}$$

- Inoltre, ponendo  $k := g^{o(gh)}$  abbiamo che

$$g^{o(g^{o(gh)})o(gh)} = g^{k \cdot o(gh)} = (g^{o(gh)})^k = k^{o(k)} = e \implies o(g) \mid o(g^{o(gh)})o(gh)$$

e analogamente che:

$$\begin{aligned} h^{-o(g^{o(gh)})o(gh)} &= (h^{-o(gh)})^{o(g^{o(gh)})} = (g^{o(gh)})^{o(g^{o(gh)})} = k^{o(k)} = e \implies \\ &\implies o(h) \mid -o(g^{o(gh)})o(gh) \implies o(h) \mid o(g^{o(gh)})o(gh) \end{aligned}$$

di conseguenza si ha che  $m \mid o(g^{o(gh)})o(gh)$

- Quindi,  $\exists j \in \mathbb{Z}$  tale che:

$$o(g^{o(gh)})o(gh) = mj \implies o(gh) = \frac{m}{o(g^{o(gh)})} \cdot j \implies \frac{m}{o(g^{o(gh)})} \mid o(gh)$$

- Infine, per transitività si ha che:

$$\frac{m}{d} \mid \frac{m}{o(g^{o(gh)})}, \frac{m}{o(g^{o(gh)})} \mid o(gh) \implies \frac{m}{d} \mid o(gh)$$

- Per l'ultima affermazione notiamo che se  $d = 1$ , allora:

$$\frac{m}{d} \mid o(gh) \implies m \mid o(gh)$$

di conseguenza, poiché  $m, d \in \mathbb{N}$ , per anti-simmetria (sezione 3.2) si ha che:

$$m \mid o(gh), o(gh) \mid m \iff m = o(gh)$$

- Dunque, per il teorema fondamentale dell'algebra, se  $d = 1$  si ha che:

$$o(gh) = m = o(g)o(h)$$

□

### Proposizione 29

Siano  $n_1, \dots, n_k \neq 0 \in \mathbb{N} \mid \text{MCD}(a_i, a_j) \iff i \neq j$  e sia  $N := \text{mcm}(n_1, \dots, n_k) = n_1 \cdot \dots \cdot n_k$ .

Dato  $[a] \in \mathbb{Z}_m^*$ , dove  $m := \text{mcm}(o_1, \dots, o_k)$  e dove  $o_h := o([a])$  nel gruppo  $\mathbb{Z}_{n_h}^*, \forall 0 < h < k$ , posto  $o := o([a])$  nel gruppo  $\mathbb{Z}_m^*$  si ha che:

$$o = m := \text{mcm}(o_1, \dots, o_k)$$

*Dimostrazione:*

- Per il teorema cinese dei resti, abbiamo che:

$$\begin{aligned} a^o \equiv 1 \pmod{N} &\iff \begin{cases} a^o \equiv 1 \pmod{n_1} \\ \vdots \\ a^o \equiv 1 \pmod{n_k} \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} o_1 \mid o \\ \vdots \\ o_k \mid o \end{cases} \iff m := \text{mcm}(o_1, \dots, o_k) \mid o \end{aligned}$$

- Inoltre, poiché  $m := \text{mcm}(o_1, \dots, o_k)$ , abbiamo che:

$$\begin{cases} o_1 \mid m \\ \vdots \\ o_k \mid m \end{cases} \iff \begin{cases} a^m \equiv 1 \pmod{n_1} \\ \vdots \\ a^m \equiv 1 \pmod{n_k} \end{cases} \iff a^m \equiv 1 \pmod{N} \implies o \mid m$$



- Poiché  $o, m \in \mathbb{N}$ , per anti-simmetria (sezione 3.2) si ha che:

$$o \mid m, m \mid o \iff o = m$$

□

### Proposizione 30

Dato l'anello commutativo  $\mathbb{Z}_n$ , dove  $n > 2$ , si ha che  $o(n-1) = 2$

*Dimostrazione:*

- Dalle proprietà dei moduli ne segue direttamente che:

$$(n-1)^2 \equiv n^2 - 2n + 1 \equiv 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 \equiv 1 \pmod{n}$$

- Di conseguenza, otteniamo che:

$$2 = o(n-1)k, k \in \mathbb{Z} \implies o(n-1) \mid 2 \implies o(n-1) \in \{1, 2\}$$

- Poiché  $(n-1)^1 \equiv n-1 \pmod{n}$  e  $n > 2 \implies n-1 > 1$ , ne segue necessariamente che  $n-1 \not\equiv 1 \pmod{n}$  e di conseguenza che  $o(n-1) \neq 1$ .
- Dunque, l'unica possibilità è che  $o(n-1) = 2$

□

### Corollario 16

Dato l'anello commutativo  $\mathbb{Z}_n$ , dove  $n > 2$ , si ha che  $|\mathbb{Z}_n^*| = 2k, k \in \mathbb{N}$ , ossia che  $|\mathbb{Z}_n^*|$  è sempre pari

*Dimostrazione:*

- Per la proposizione precedente e il teorema di Lagrange, ne segue automaticamente che

$$o(n-1) = 2 \wedge o(n-1) \mid |\mathbb{Z}_n^*| \implies 2 \mid |\mathbb{Z}_n^*| \implies |\mathbb{Z}_n^*| = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

- Poiché la cardinalità di un gruppo non può essere negativa, ne segue necessariamente che  $|\mathbb{Z}_n^*| = 2k, k \in \mathbb{N}$

□

**Esempio:**

- Vogliamo trovare tutti gli inversi di  $\mathbb{Z}_{21}$  e il loro ordine, determinando se  $\mathbb{Z}_{21}$  sia un gruppo ciclico
- Dato  $g \in \mathbb{Z}_{21}$ , sappiamo che  $g \in \mathbb{Z}_{21}^* \iff \text{MCD}(a, 21) = 1$  (sezione 4.5). Dunque abbiamo che:

$$\mathbb{Z}_{21}^* := \{[1], [2], [4], [5], [8], [10], [11], [13], [16], [17], [19], [20]\} \implies |\mathbb{Z}_{21}^*| = 12$$

- Dato  $g \in \mathbb{Z}_{21}^*$ , per Lagrange abbiamo che  $o(g)$  può essere solo un divisore di  $|\mathbb{Z}_{21}^*|$ , riducendo i tentativi necessari a trovare l'ordine di ogni elemento da 21 a 6:

$$o(g) \mid |\mathbb{Z}_{21}^*| \implies o(g) \mid 12 \implies o(g) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

- Ricordando che  $g^{-1} = g^{o(g)-1}$  e che  $o(g) = o(g^{-1})$ , calcoliamo gli ordini dei vari invertibili in  $\mathbb{Z}_{21}$  trovati:

$$- [1]^1 = 1 \implies \begin{cases} o([1]) = 1 \\ [1]^{-1} = [1]^0 = [1] \end{cases}$$

$$- [2]^6 = [64] = [1] \implies \begin{cases} o([2]) = 6 \\ [2]^{-1} = [2]^5 = [11] \end{cases} \implies \begin{cases} o([11]) = 6 \\ [11]^{-1} = [2] \end{cases}$$

$$- [4]^3 = [2]^6 = [64] = [1] \implies \begin{cases} o([4]) = 3 \\ [4]^{-1} = [4]^2 = [16] \end{cases} \implies \begin{cases} o([16]) = 3 \\ [16]^{-1} = [4] \end{cases}$$

$$- [5]^6 = [5^2]^3 = [4]^3 = [1] \implies \begin{cases} o([5]) = 6 \\ [5]^{-1} = [5]^5 = [17] \end{cases} \implies \begin{cases} o([17]) = 6 \\ [17]^{-1} = [5] \end{cases}$$

$$- [8]^2 = [2]^6 = [1] \implies \begin{cases} o([8]) = 2 \\ [8]^{-1} = [8] \end{cases}$$

$$- [10]^6 = [10^3]^2 = [13]^2 = [1] \implies \begin{cases} o([10]) = 6 \\ [10]^{-1} = [10]^5 = [19] \end{cases} \implies \begin{cases} o([19]) = 6 \\ [19]^{-1} = [10] \end{cases}$$

$$- [13]^2 = [1] \implies \begin{cases} o([13]) = 2 \\ [13]^{-1} = [13]^1 = [13] \end{cases}$$

$$- [20]^2 = [1] \implies \begin{cases} o([20]) = 2 \\ [20]^{-1} = [20]^1 = [20] \end{cases}$$

- Poiché  $\nexists g \in \mathbb{Z}_{21}^* \mid o(g) = |\mathbb{Z}_{21}^*| = 12$ , concludiamo che  $\mathbb{Z}_{21}^*$  non è un gruppo ciclico

# 5

## Gruppo Simmetrico

### Osservazione 25

Una funzione  $f : X \rightarrow Y : x \mapsto f(x)$  è invertibile se e solo se  $f$  è biettiva.

$$f \text{ invertibile} \iff f \text{ biettiva}$$

dove l'essere invertibile equivale a dire che  $\exists f^{-1} : Y \rightarrow X : f(x) \mapsto x$

*Dimostrazione:*

- Sia  $f : X \rightarrow Y : x \mapsto f(x)$
- Se  $\exists f^{-1} : Y \rightarrow X : f(x) \mapsto x$ , ossia  $f$  è invertibile, allora

$$f(x) = f(y) \implies f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) \implies x = y$$

dunque  $f$  è iniettiva

- Analogamente, si ha che

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \mid y = f(x) = f(f^{-1}(y))$$

dunque  $f$  è anche suriettiva, implicando che essa sia biettiva

- Inoltre, poiché  $f = (f^{-1})^{-1}$ , anche  $f^{-1}$  è invertibile e di conseguenza biettiva
- Se invece  $f$  è biettiva, allora

$$\forall x \in X, \exists! y \in Y \mid f(x) = y \implies f(f^{-1}(y)) = y$$

di conseguenza,  $f$  è invertibile

□

### Definizione 39: Gruppo simmetrico

Dato un insieme  $X$ , denotiamo come  $\mathcal{S}_X$  l'insieme:

$$\mathcal{S}_X := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ è biettiva}\}$$

Inoltre, si ha che  $(\mathcal{S}_X, \circ)$  è un gruppo.

*Dimostrazione:*

- Per natura stessa della composizione tra funzione si ha che

$$f, g, h \in \mathcal{S}_X \implies h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f$$

- La funzione identità  $\text{id} : X \rightarrow X : x \mapsto x$  è biettiva, dunque

$$\exists \text{id} \in \mathcal{S}_X \mid \forall f \in \mathcal{S}_X, f \circ \text{id} = \text{id} \circ f = f$$

- Poiché una funzione è biettiva se e solo se è invertibile, ne segue che

$$\forall f \in \mathcal{S}_X, \exists f^{-1} \in \mathcal{S}_X \mid f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$$

□

### Osservazione 26

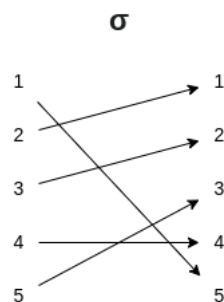
Dato il gruppo simmetrico  $\mathcal{S}_X$ , ogni  $f \in \mathcal{S}_X$  corrisponde ad una **permutazione** del dominio  $X$ , poiché  $f : X \rightarrow X$  è biettiva. Dunque, è possibile definire impropriamente  $\mathcal{S}_X$  come il "**gruppo delle permutazioni di  $X$** ".

In particolare, se  $|X| = n$  dove  $n \in \mathbb{N}$ , ogni  $f \in \mathcal{S}_X$  corrisponderà ad una permutazione di  $n$  elementi. In tal caso, denotiamo come  $\mathcal{S}_n$  il **gruppo simmetrico di ordine  $n$** , la cui cardinalità corrisponde a  $|\mathcal{S}_n| = n!$

**Esempio:**

- Data la permutazione  $\sigma \in \mathcal{S}_5$ , possiamo utilizzare due **notazioni** per poterne descrivere il comportamento:

**Tramite grafo**



**Tramite matrice**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

### Osservazione 27

Per comodità di scrittura, definiamo l'operazione binaria **prodotto tra permutazioni** come:

$$\cdot : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n : (\sigma, \tau) \mapsto \tau \circ \sigma$$

In altre parole, si ha che  $\sigma\tau := \sigma \circ \tau = \sigma(\tau(x)), \forall x$ .

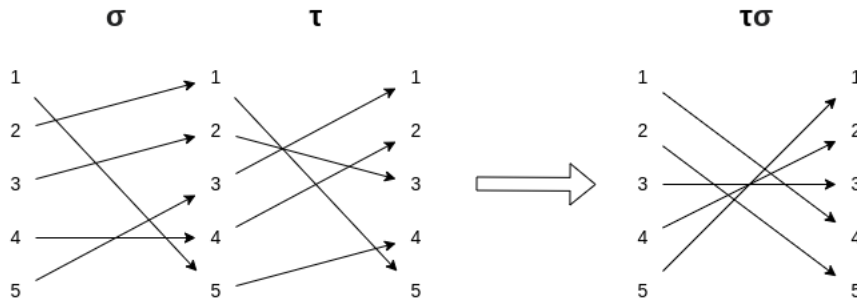
Ovviamente,  $(\mathcal{S}_n, \cdot)$  risulta essere un **gruppo** (non abeliano poiché per natura stessa della composizione si ha che  $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ )

### Esempio:

- Siano  $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_5$  tali che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Per calcolare il prodotto tra le due permutazioni (dunque la loro composizione), utilizziamo due metodi:
  - Tramite **grafo**, considerando la composizione delle frecce rappresentanti le due permutazioni



- Tramite **matrici**, dove ci basta "allineare" gli elementi in input della seconda permutazione con gli elementi in output della seconda. Il risultato del prodotto sarà costituito dagli **elementi in input della prima** e gli **elementi in output della seconda**.

$$\begin{array}{l} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \tau = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

## 5.1 Ordine di una permutazione

### Definizione 40: Ciclo di una permutazione

Sia  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . Definiamo come **ciclo di  $\sigma$**  una sequenza di interi  $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n$  tutti distinti tra loro tali che:

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_n) = i_1$$

Definiamo come **lunghezza del ciclo** il numero di elementi appartenenti al ciclo.

### Esempio:

- Consideriamo la seguente permutazione in  $\sigma \in \mathcal{S}_9$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Notiamo la presenza di tre cicli all'interno di tale permutazione:
  - $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 1$  che abbreviamo come (1527)
  - $3 \rightarrow 6 \rightarrow 3$  che abbreviamo come (36)
  - $4 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 4$  che abbreviamo come (498)

### Definizione 41: Decomposizione in cicli

Data  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  composta da  $k$  cicli, definiamo la sua **decomposizione in cicli** come:

$$\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k$$

dove  $\gamma_i$  è un ciclo di  $\sigma$

### Esempio:

- Considerando ancora l'esempio precedente, possiamo riscrivere  $\sigma$  tramite la sua decomposizione in cicli:

$$\sigma \in \mathcal{S}_9 \mid \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \implies \sigma = (1587)(36)(498)$$

- Ovviamente, tramite una decomposizione in cicli è possibile ricostruire la permutazione associata:

$$\tau \in \mathcal{S}_8 \mid \tau = (235)(1874)(6) \implies \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

**Definizione 42**

Sia  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . Dati  $1 \leq i \leq n$ , definiamo:

$$I(\sigma, i) := \{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n(i) = i\}$$

$$I(\sigma) := \{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n = \text{id}\}$$

dove:

- $\text{id}$  è la permutazione identica, dunque  $\text{id} = (1)(2) \dots (n-1)(n)$
- $(I(\sigma(i)), +) \triangleleft (\mathbb{Z}, +)$
- $(I(\sigma), +) \triangleleft (\mathbb{Z}, +)$

*Dimostrazione:*

- $I(\sigma, i) \triangleleft \mathbb{Z}$ :
  - $\sigma^0(i) = \text{id}(i) = i \implies 0 \in I(\sigma, i)$
  - $m, n \in I(\sigma, i) \implies \sigma^n(i) = i = \sigma^m(i) \implies \sigma^{n+m}(i) = \sigma^n(\sigma^m(i)) = \sigma^n(i) = i \implies m+n \in I(\sigma, i)$
  - $n \in I(\sigma, i) \implies \sigma^{-n}(i) = (\sigma^n)^{-1}(i) = i \implies -n \in I(\sigma, i)$
  - $n \in I(\sigma, i) \implies \sigma^{nk}(i) = (\sigma^n)^k(i) = i, \forall k \in \mathbb{Z} \implies nk \in I(\sigma, i), \forall k \in \mathbb{Z}$
  - Per gli ultimi due punti è necessario osservare che poiché  $\sigma^n(i) = i$ , allora  $(\sigma^n)^k(i) = i, \forall k \in \mathbb{Z}$ , poiché  $i$  viene sempre mandato in se stesso
- Viene omessa la dimostrazione di  $I(\sigma) \triangleleft \mathbb{Z}$  poiché analoga a quella di  $I(\sigma, i) \triangleleft \mathbb{Z}$

□

**Lemma 10**

Sia  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  e sia  $\gamma_1 \dots \gamma_k$  la sua decomposizione in cicli. Dato il dominio ad ideali principali  $\mathbb{Z}$  e dato  $i \in \gamma_j \mid j \in [1, k]$  si ha che:

$$I(\sigma, i) = I(d_j)$$

dove  $d_j$  è la lunghezza di  $\gamma_j$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\mathbb{Z}$  è un dominio ad ideali principali e poiché  $I(\sigma, i) \triangleleft \mathbb{Z}$ , si ha che:

$$\exists! h \in \mathbb{N} \mid I(\sigma, i) = I(h)$$

dove  $h := \min(I(\sigma, i)_{>0})$

- Sia  $i \in (i_1 i_2 \dots i_{d_j})$ , dunque appartenente ad un ciclo di lunghezza  $d_j$ . Per comodità, supponiamo che  $i = i_1$ , poiché scorrere l'ordine degli elementi del ciclo non ne cambia le proprietà (ad esempio:  $(2783) = (7832) = (8327) = \dots$ )

- Se  $0 < h < d_j$ , si ha che:

$$0 < h < d_j \implies \sigma^h(i) = \sigma(\sigma^{h-1}(i)) = \sigma(i_h) = i_{h+1} \implies h \notin I(\sigma, i)$$

- Nel caso in cui invece  $h = d_j$ , si verifica che:

$$h = d_j \implies \sigma^h(i) = \sigma^{d_j}(i) = \sigma(\sigma^{d_j-1}(i)) = \sigma(i_{d_j}) = i_1 = i \implies h \in I(\sigma, i)$$

- Di conseguenza, affinché  $I(\sigma, i) = I(h)$ , ne segue necessariamente che  $h = d_j$

□

### Proposizione 31: Ordine di una permutazione

Sia  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  e sia  $\gamma_1 \dots \gamma_k$  la sua decomposizione in cicli. Dato il dominio ad ideali principali  $\mathbb{Z}$ , si ha che:

$$I(\sigma) = I(m) \implies o(\sigma) = m$$

dove  $m := \text{mcm}(d_1, \dots, d_k)$  e dove  $d_1, \dots, d_k$  sono rispettivamente le lunghezze di  $\gamma_1 \dots \gamma_k$ .

Dunque,  $o(\sigma)$  corrisponde al **minimo comune multiplo delle lunghezze dei cicli di  $\sigma$**

*Dimostrazione:*

- Per definizione stessa di  $I(\sigma)$  e  $I(\sigma, i)$ , si ha che:

$$n \in I(\sigma) \iff \sigma^n = \text{id} \iff \sigma^n(i) = i, \forall i \in [1, n] \iff$$

$$\iff n \in I(\sigma, i), \forall i \in [1, n] \iff n \in I(\sigma, 1) \cap \dots \cap I(\sigma, n)$$

implicando quindi che  $I(\sigma) = I(\sigma, 1) \cap \dots \cap I(\sigma, n)$

- Poiché  $\mathbb{Z}$  è un dominio ad ideali principali e poiché  $I(\sigma) \triangleleft \mathbb{Z}$ , per il lemma precedente si ha che:

$$I(\sigma) = I(\sigma, 1) \cap \dots \cap I(\sigma, n) = I(d_1) \cap \dots \cap I(d_k) = I(m)$$

dove  $m := \text{mcm}(d_1, \dots, d_k)$

□

**Esempi:**

- Data  $\sigma \in S_7$  tale che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (13526)(47)$$



L'ordine di tale permutazione risulta essere:

$$o(\sigma) = \text{mcm}(5, 2) = 10$$

- Data  $\sigma \in S_{15}$  tale che:

$$\sigma = (1\ 2\ 10\ 8\ 3)(11\ 7)(4\ 12\ 14\ 6)(13)(5\ 15\ 9)$$

L'ordine di tale permutazione risulta essere:

$$o(\sigma) = \text{mcm}(5, 2, 4, 1, 3) = 60$$

## 5.2 Segno delle permutazioni

### Definizione 43: Segno di una permutazione

Sia  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . Definiamo il **segno di**  $\sigma$  come:

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{|\text{inv}(\sigma)|} = \begin{cases} +1 & \text{se } |\text{inv}(\sigma)| \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } |\text{inv}(\sigma)| \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dove  $\text{inv}(\sigma)$  è l'**insieme delle sue inversioni**:

$$\text{inv}(\sigma) := \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

Definiamo  $\sigma$  come **pari** se  $\text{sgn}(\sigma) = +1$ , mentre come **dispari**  $\text{sgn}(\sigma) = -1$

**Esempio:**

- Sia  $\sigma \in \mathcal{S}_5$  tale che

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- L'insieme delle sue inversioni sarà:

$$\text{inv}(\sigma) := \{(1, 4), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4)\}$$

da cui otteniamo che  $\text{sgn}(\sigma) = -1$

**Definizione 44: Trasposizione e Trasposizione adiacente**

Definiamo  $\tau_{i,j} \in \mathcal{S}_n$ , dove  $1 \leq i < j \leq n$ , come **trasposizione** se:

$$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} j & \text{se } k = i \\ i & \text{se } k = j \\ k & \text{se } k \neq i, k \neq j \end{cases}$$

In particolare, definiamo come  $\tau_{i,j} \in \mathcal{S}_n$  come **trasposizione adiacente** se  $j = i + 1$ , dunque avente l'effetto di scambiare due elementi adiacenti tra loro.

**Lemma 11**

Data  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , si ha che:

$$\exists 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \mid \sigma = \tau_{i_1, i_1+1} \cdot \dots \cdot \tau_{i_k, i_k+1}$$

In altre parole,  $\sigma$  può essere espressa come il **prodotto di  $k$  trasposizioni adiacenti**

*Dimostrazione tramite esempio:*

- Prima di tutto, osserviamo che dati  $\sigma, \tau_{i,j} \in \mathcal{S}_n$  tali che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

si ha che:

$$\sigma \tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Dunque, data  $\sigma \in \mathcal{S}_3$  tale che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

abbiamo che:

$$\sigma \cdot \tau_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \implies \sigma \cdot \tau_{3,4} \cdot \tau_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \sigma \cdot \tau_{3,4} \cdot \tau_{2,3} \cdot \tau_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \implies \sigma \cdot \tau_{3,4} \cdot \tau_{2,3} \cdot \tau_{1,2} \cdot \tau_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \text{id}$$

- Di conseguenza, si ha che:

$$\begin{aligned} \sigma(\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4}) &= \text{id} \iff \\ \iff \sigma(\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4})(\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4})^{-1} &= \text{id}(\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4})^{-1} \iff \\ \iff \sigma &= (\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4})^{-1} \iff \sigma = \tau_{3,4}\tau_{1,2}\tau_{2,3}\tau_{3,4} \end{aligned}$$

□

### Proposizione 32

Data  $\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k$ , dove  $\tau_i := \tau_{i,i+1} \in \mathcal{S}_n$ , si ha che:

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k$$

dove  $k$  è il numero di trasposizioni adiacenti che compongono  $\sigma$

*Dimostrazione:*

- Sia  $\tau_i = \tau_{i,i+1}$ . Allora si ha che:

$$\sigma\tau_i = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Lo scambio effettuato genera una di due situazioni possibili: viene **creata una nuova inversione** oppure viene **risolta un'inversione pre-esistente**:

$$\text{inv}(\sigma\tau_i) = \begin{cases} \text{inv}(\sigma) \cup \{(i, i+1)\} & \text{se } (i, i+1) \notin \text{inv}(\sigma) \\ \text{inv}(\sigma) - \{(i, i+1)\} & \text{se } (i, i+1) \in \text{inv}(\sigma) \end{cases}$$

- Di conseguenza, si ha che

$$\begin{aligned} |\text{inv}(\sigma\tau_i)| &= |\text{inv}(\sigma)| \pm 1 \implies \text{sgn}(\sigma\tau_i) = \begin{cases} -1 & \text{se } \text{sgn}(\sigma) = +1 \\ +1 & \text{se } \text{sgn}(\sigma) = -1 \end{cases} \implies \\ \implies \text{sgn}(\sigma\tau) &= -\text{sgn}(\sigma) \end{aligned}$$

- Di conseguenza, se  $\sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k$ , si ha che:

$$\sigma(\tau_i \cdot \dots \cdot \tau_k)^{-1} = (\tau_i \cdot \dots \cdot \tau_k)(\tau_i \cdot \dots \cdot \tau_k)^{-1} = \text{id}$$

- Poiché per definizione stessa di id si ha che  $|\text{inv}(\text{id})| = 0 \implies \text{sgn}(\text{id}) = 1$ , ne segue che:

$$\begin{aligned} 1 = \text{sgn}(\text{id}) &= \text{sgn}(\sigma(\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \dots \cdot \tau_k)^{-1}) = \text{sgn}(\sigma \cdot \tau_k \cdot \dots \cdot \tau_3 \cdot \tau_2 \cdot \tau_1) = \\ &= -\text{sgn}(\sigma \cdot \tau_k \cdot \dots \cdot \tau_3 \cdot \tau_2) = \text{sgn}(\sigma \cdot \tau_k \cdot \dots \cdot \tau_3) = \dots = (-1)^k \cdot \text{sgn}(\sigma) \end{aligned}$$

- Quindi, otteniamo che:

$$1 = (-1)^k \cdot \text{sgn}(\sigma) \implies \text{sgn}(\sigma) = (-1)^k$$

□

### Corollario 17

Date  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ , si verifica che:

$$\text{sgn}(\sigma\sigma') = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\sigma')$$

*Dimostrazione:*

- Data  $\sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k$  e  $\sigma' = \tau'_1 \cdot \dots \cdot \tau'_j$ , si ha che:

$$\text{sgn}(\sigma\sigma') = \text{sgn}(\tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k \cdot \tau'_1 \cdot \dots \cdot \tau'_j) = (-1)^{k+j} = (-1)^k (-1)^j = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\sigma')$$

□

### Corollario 18

Date  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , si verifica che:

$$\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$$

*Dimostrazione:*

$$\begin{aligned} 1 = \text{sgn}(\text{id}) &= \text{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\sigma^{-1}) \implies \\ \implies 1 &= \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\sigma^{-1}) \iff \text{sgn}(\sigma) = \pm 1 = \text{sgn}(\sigma^{-1}) \end{aligned}$$

□

### Definizione 45

Dato il gruppo  $\mathcal{S}_n$ , definiamo  $\mathcal{A}_n \leq \mathcal{S}_n$  come il **sottogruppo alterno di ordine  $n$** :

$$\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \text{sgn}(\sigma) = +1\}$$

*Dimostrazione:*

- $\text{sgn}(\text{id}) = 1 \implies \text{id} \in \mathcal{A}_n$

- $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_n \implies \text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau) = 1 \cdot 1 = 1 \implies \sigma\tau \in \mathcal{A}_n$
- $\sigma \in \mathcal{A}_n \implies \text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma) = 1 \implies \sigma^{-1} \in \mathcal{A}_n$

□

### Osservazione 28

Dato  $\mathcal{S}_n$  e  $\mathcal{A}_n \leq \mathcal{S}_n$ , si ha che:

- $|\mathcal{A}_n| = \frac{n!}{2}$
- $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2$

*Dimostrazione:*

- Date  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ , si ha che:

$$\begin{aligned} \sigma \sim \sigma' &\iff \sigma^{-1}\sigma' \in \mathcal{A}_n \iff \text{sgn}(\sigma^{-1}\sigma') = 1 \iff \\ &\iff \text{sgn}(\sigma^{-1})\text{sgn}(\sigma') = 1 \iff \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma') \end{aligned}$$

- Di conseguenza, poiché  $\text{sgn}(\sigma) = \pm 1, \forall \sigma \in \mathcal{S}_n$  e poiché  $\text{sgn}(\text{id}) = +1$ , esistono solo due classi laterali sinistre:

– La classe  $[+1] := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma \sim \text{id}\}$

– La classe  $[-1] := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma \not\sim \text{id}\}$

dunque si ha che  $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2$

- Infine, per il teorema di Lagrange, concludiamo che:

$$|\mathcal{A}_n| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n]} = \frac{n!}{2}$$

□

### Proposizione 33

Sia  $\sim$  la **relazione di coniugio** (sezione 3.5) e siano  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ , tali che:

- $\gamma_1 \dots \gamma_k$  è la decomposizione in cicli di  $\sigma$  e  $d_1, \dots, d_k$  sono le lunghezze rispettive dei cicli
- $\gamma'_1 \dots \gamma'_k$  è la decomposizione in cicli di  $\sigma'$  e  $d'_1, \dots, d'_k$  sono le lunghezze rispettive dei cicli

In tal caso, si ha che:

$$\sigma \sim \sigma' \iff \begin{cases} k = h \\ d_1 = d'_1 \\ \dots \\ d_k = d'_h \end{cases}$$

*Dimostrazione:*

- Supponiamo che  $\sigma \sim \sigma'$ , dunque  $\exists \alpha \in \mathcal{S}_n \mid \sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$
- Sia  $\gamma_j = (i_1 \dots i_d) \mid j \in [1, k]$  un ciclo di  $\sigma$ . Allora,  $\forall i_q \in \gamma_j \mid q \in [1, d]$  si ha che:

$$\begin{aligned} \sigma'(i_q) = \alpha\sigma\alpha^{-1}(i_q) &\iff \sigma'\alpha(i_q) = \alpha\sigma\alpha^{-1}\alpha(i_q) \iff \sigma'\alpha(i_q) = \alpha\sigma(i_q) \implies \\ &\implies \sigma'\alpha(i_q) = \alpha\sigma(i_q) = \begin{cases} \alpha(i_{q+1}) & \text{se } q < d \\ \alpha(i_1) & \text{se } q = d \end{cases} \end{aligned}$$

- Di conseguenza,  $\sigma'$  possiede un ciclo nella forma  $(\alpha(i_1), \dots, \alpha(i_d))$ . Applicando lo stesso ragionamento con gli altri  $\sigma$ , possiamo creare una corrispondenza biunivoca tra i cicli di  $\sigma$  e i cicli di  $\sigma'$ , da cui otteniamo che  $h = k$  e che  $d_p = d'_p, \forall p \in [1, k]$
- Viceversa, supponiamo che  $\sigma$  e  $\sigma'$  abbiano lo stesso numero di cicli e le stesse lunghezze per ogni ciclo, dunque tali che:

$$\sigma = (i_1 \dots i_{d_1}) \dots (j_1 \dots j_{d_k}) \quad \sigma' = (a_1 \dots a_{d_1}) \dots (b_1 \dots b_{d_k})$$

- Presa  $\alpha \in \mathcal{S}_n$  tale che:

$$\alpha(i_1) = a_1, \dots, \alpha(i_{d_1}) = a_{d_1}, \alpha(j_1) = b_1, \dots, \alpha(j_{d_k}) = b_{d_k}$$

dunque tale che:

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma = & (i_1 & \dots & i_{d_1}) & \dots & (j_1 & \dots & j_{d_k}) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \sigma' = & (a_1 & \dots & a_{d_1}) & \dots & (b_1 & \dots & b_{d_k}) \end{array}$$

- Dato  $t \in [1, n]$  e dato  $j \in [1, k]$ , quindi, si ha che:

$$\begin{aligned} \alpha\sigma\alpha^{-1}(a_t) = \alpha\sigma(i_t) &= \begin{cases} \alpha(i_{k+1}) & \text{se } t < d_j \\ \alpha(i_1) & \text{se } t = d_j \end{cases} = \begin{cases} a_{k+1} & \text{se } k < d_j \\ a_1 & \text{se } k = d_j \end{cases} \implies \\ \alpha\sigma\alpha^{-1}(a_t) &= \sigma'(a_t) \implies \sigma \sim \sigma' \end{aligned}$$

□

**Esempi:**

1. Date le seguenti permutazioni  $\sigma, \sigma' \in S_6$ , trovare  $\alpha \in S_6$  tale che  $\sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \sigma &= (13)(254)(876) \\ \sigma' &= (25)(184)(376) \end{aligned} \implies \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 8 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Date le seguenti permutazioni  $\sigma, \sigma' \in S_7$ , trovare  $\alpha \in S_7$  tale che  $\sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (4)(13)(2675) \\ \sigma' &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (7)(56)(1234) \end{aligned} \implies \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 7 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Osservazione 29**

Sia  $\sim$  la relazione di coniugio. Date  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ , si ha che:

$$\sigma \sim \sigma' \implies \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma')$$

*Dimostrazione:*

- Se  $\sigma \sim \sigma'$ , allora

$$\exists \alpha \in \mathbb{S}_n \mid \sigma' = \alpha \sigma \alpha^{-1} \implies \text{sgn}(\sigma') = \text{sgn}(\alpha \sigma \alpha^{-1}) = \text{sgn}(\alpha) \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\alpha^{-1})$$

- Dunque, poiché  $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\alpha^{-1}) = \pm 1 \implies \text{sgn}(\alpha) \text{sgn}(\alpha^{-1}) = 1$ , se segue che:

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma') &= \text{sgn}(\alpha) \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\alpha^{-1}) \implies \\ \implies \text{sgn}(\sigma') &= \begin{cases} 1 \cdot \text{sgn}(\sigma) \cdot 1 = \text{sgn}(\sigma) & \text{se } \text{sgn}(\alpha) = 1 \\ (-1) \cdot \text{sgn}(\sigma) \cdot (-1) = \text{sgn}(\sigma) & \text{se } \text{sgn}(\alpha) = -1 \end{cases} \implies \\ &\implies \text{sgn}(\sigma') = \text{sgn}(\sigma) \end{aligned}$$

□

**Proposizione 34**

Data  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  e data la sua scomposizione in cicli  $\sigma = \gamma_1 \dots \gamma_k$ , si ha che:

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-k}$$

dove  $k$  è il numero di cicli

*Dimostrazione:*

- Sia  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  tale che

$$\sigma = (i_1 \dots i_{d_1})(i_{d_1+1} \dots i_{d_2}) \dots (j_1 \dots j_{d_k})$$

- Consideriamo una permutazione  $\sigma' \in \mathcal{S}_n$  definita come:

$$\begin{aligned} \sigma' &= (1, \dots, d_1)(d_1 + 1, \dots, d_1 + d_2) \dots (n - d_k + 1, n - d_k + 2, \dots, n - 1, n) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d_1 & d_1 + 1 & \dots & d_1 + d_2 & \dots & n - d_k + 1 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 & d_1 + 2 & \dots & d_1 + 1 & \dots & n - d_k + 2 & \dots & n - d_k + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Poiché  $\sigma$  e  $\sigma'$  hanno la stessa quantità di cicli ognuno avente la stessa lunghezza del ciclo corrispondente, ne segue che  $\sigma \sim \sigma'$ . Di conseguenza, si ha che

$$\sigma \sim \sigma' \implies \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma')$$

dunque, ci basterà trovare il segno di  $\sigma'$  per ottenere il segno di  $\sigma$

- A questo punto, le seguenti  $d_1 - 1$  trasposizioni otteniamo che:

$$\begin{aligned}
 & \sigma \cdot \tau_{d_1-1, d_1} \cdot \tau_{d_1-2, d_1-1} \cdot \dots \cdot \tau_{2,3} \cdot \tau_{1,2} = \\
 & = (1)(2) \dots (d_1-1)(d_1)(d_1+1, \dots, d_1+d_2) \dots (n-d_k+1, n-d_k+2, \dots, n-1, n) = \\
 & = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d_1 & d_1+1 & \dots & d_1+d_2 & \dots & \dots & n-(d_k+1) & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & d_1 & d_1+2 & \dots & d_1+1 & \dots & \dots & n-(d_k+1)+1 & \dots & n-(d_k+1) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- Ripetendo tale procedimento per ogni ciclo di  $\sigma'$ , otteniamo la permutazione identica.
- Di conseguenza, il numero di trasposizioni componenti  $\sigma'$  corrisponde a:

$$\sum_{j=1}^k d_j - 1 = \sum_{j=1}^k d_j - \sum_{j=1}^k 1 = n - k$$

poiché la somma di tutte le lunghezze dei cicli corrisponde ad  $n$ .

- Dunque, poiché  $\sigma'$  è composta da  $n - k$  trasposizioni adiacenti, concludiamo che:

$$\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma') = (-1)^{n-k}$$

□



# 6

## Omomorfismi

### Definizione 46: Omomorfismo

Date due strutture algebriche  $(G, \cdot)$  e  $(H, \odot)$  dello stesso tipo (dunque entrambe monoidi, gruppi, anelli, ...), definiamo come **omomorfismo** una funzione  $f : G \rightarrow H$  tale che:

$$f(g \cdot h) = f(g) \odot f(h), \forall g, h \in G$$

**Attenzione:** se le strutture algebriche presentano più operazioni binarie, è necessario che la condizione di omomorfismo sia valida per ognuna di esse

### Esempi:

- Dati i due gruppi  $(G, \cdot)$  e  $(H, \cdot)$ , la funzione  $f : G \rightarrow H$  è un omomorfismo tra gruppi se e solo se:

$$f(gh) = f(g)f(h), \forall g, h \in G$$

- Dati i due gruppi  $(G, \cdot)$  e  $(H, +)$ , la funzione  $f : G \rightarrow H$  è un omomorfismo tra gruppi se e solo se:

$$f(gh) = f(g) + f(h), \forall g, h \in G$$

- Dati i due anelli  $(A, +, \cdot)$  e  $(B, +, \cdot)$ , la funzione  $f : A \rightarrow B$  è un omomorfismo tra anelli se e solo se:

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \forall a, b \in A$$

$$f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in A$$

### Osservazione 30

Dati due gruppi  $G$  ed  $H$  e un omomorfismo  $f : G \rightarrow H$ , si ha che:

1.  $f(1_G) = 1_H$
2.  $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}, \forall g \in G$
3.  $f(g^k) = f(g)^k, \forall g \in G, \forall k \in \mathbb{Z}$

dove  $1_G$  ed  $1_H$  sono rispettivamente l'elemento neutro di  $G$  ed  $H$

*Dimostrazione:*

1. Dato  $g \in G$ , per le proprietà del omomorfismo  $f$  ne segue che:

$$\begin{aligned} f(g) &= f(1_G \cdot g) = f(1_G)f(g) \implies f(g)f(g)^{-1} = f(1_G)f(g)f(g)^{-1} \implies \\ &\implies 1_H = f(1_G) \cdot 1_H \implies f(1_G) = 1_H \end{aligned}$$

2. Dato  $g \in G$ , per le proprietà del omomorfismo  $f$  ne segue che:

$$\begin{aligned} f(1_G) &= 1_H \implies f(g \cdot g^{-1}) = 1_H \implies f(g)f(g^{-1}) = 1_H \implies \\ &\implies f(g^{-1}) = 1_H \cdot f(g)^{-1} \implies f(g^{-1}) = f(g)^{-1} \end{aligned}$$

3. Dato  $g \in G$  e dato  $n \in \mathbb{N}$ , per le proprietà del omomorfismo  $f$  ne segue che:

$$f(g^n) = f(\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ volte}}) = \underbrace{f(g)f(g) \dots f(g)}_{n \text{ volte}} = f(g)^n$$

A questo punto, dato  $k := -n \in \mathbb{Z}$ , tramite il punto 2) e il punto appena dimostrato ne segue automaticamente che:

$$f(g^k) = f(g^{-n}) = f((g^n)^{-1}) = f(g^n)^{-1} = (f(g)^n)^{-1} = f(g)^{-n} = f(g)^k$$

□

### Osservazione 31

Sia  $f : G \rightarrow H$  un omomorfismo tra gruppi. Dato  $g \in G \mid o(g) < +\infty$ , si ha che

$$o(f(g)) \mid o(g)$$

*Dimostrazione:*

- Dalle proprietà degli omomorfismi, ne segue automaticamente che:

$$f(g)^{o(g)} = f(g^{o(g)}) = f(1_G) = 1_H \implies o(f(g)) \mid o(g)$$

□

## 6.1 Isomorfismi, Endomorfismi ed Automorfismi

### Definizione 47: Isomorfismo, Endomorfismo ed Automorfismo

Date due strutture algebriche  $G, H$  ed una funzione  $f : G \rightarrow H$ , definiamo  $f$  come:

- **Isomorfismo** se è un **omomorfismo** ed è **biettiva**
- **Endomorfismo** se è un omomorfismo e  $G = H$ , ossia è un **omomorfismo sullo stesso gruppo**
- **Automorfismo** se è un **isomorfismo** e un **endomorfismo**

**Esempi:**

1. • Dato  $n \in \mathbb{Z}$ , definiamo come **radice n-esima dell'unità**, ossia il numero 1, un elemento  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $z^n = 1$ .  
 • Come già visto nella sezione 2.3, l'equazione  $z^n = 1$  dove  $z \in \mathbb{C}$  ammette  $n$  radici. Di conseguenza, esistono  $n$  radici n-esime  $(z_0, \dots, z_{n-1})$  tali che  $z_k^n = 1$ , dove  $z_k := e^{i \cdot \frac{2\pi k}{n}}$ .  
 • Inoltre, poiché tutte le  $z_k$  differiscono solo di  $k$  all'esponente, denotiamo  $\zeta := e^{i \cdot \frac{2\pi}{n}}$ , ottenendo quindi che  $\zeta^k = z_k$  (tale operazione risulta essere più comoda poiché ci permette di utilizzare le proprietà delle potenze)  
 • Definiamo quindi il seguente insieme:

$$H^n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{\zeta^0, \dots, \zeta^{n-1}\}$$

e dimostriamo che  $(H^n, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$ :

- $1 = \zeta^0 \implies 1 \in H^n$
- $z, w \in H^n \iff z^n = w^n = 1 \implies 1 = z^n w^n = (zw)^n \implies zw \in H^n$
- $z \in H^n \iff z^n = 1 \implies (z^{-1})^n = (z^n)^{-1} = 1^{-1} = 1 \implies z^{-1} \in H^n$
- Definiamo inoltre la funzione  $f : (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow (H^n, \cdot) : [k] \mapsto \zeta^k$ , la quale risulta essere biettiva poiché  $|\mathbb{Z}_n| = |H^n|$ .
- Posto  $[k] := [i] + [j]$  dove  $[i], [j] \in \mathbb{Z}_n$ , si ha che:

$$[k] = [i] + [j] \iff i + j = k + nh, \exists h \in \mathbb{Z} \iff i + j - nh = k$$

- Verifichiamo quindi che  $f$  sia anche un omomorfismo:

$$f([i] + [j]) = f([k]) = \zeta^k = \zeta^{i+j-nh} = \zeta^i \zeta^j \zeta^{-nh} = \zeta^i \zeta^j (\zeta^n)^{-h} = \zeta^i \zeta^j = f([i])f([j])$$

- Dunque,  $f$  risulta essere un isomorfismo tra  $\mathbb{Z}_n$  e  $H^n$

2. • Sia  $G$  un gruppo e sia  $g \in G$ . La funzione  $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (G, \cdot) : n \rightarrow g^n$  è un omomorfismo:

$$f(n+m) = g^{n+m} = g^n g^m = f(n)f(m)$$

- Supponiamo per assurdo che  $f$  non sia iniettiva e che  $o(g) = +\infty$ , implicando che:

$$\begin{aligned} \exists n \neq m \mid f(n) = f(m) &\implies g^n = g^m \implies \\ \implies 1_G = g^0 = g^{n-n} = g^{m-n} &\implies \exists m-n \neq 0 \mid g^{m-n} = 1_G \implies m-n \neq 0 \in I(g) \end{aligned}$$

- Tuttavia, come dimostrato nella sezione 4.11, abbiamo che  $o(g) = +\infty \iff I(g) = I(0)$  e poiché  $m-n \neq 0 \implies m-n \notin I(g) = I(0)$ , siamo giunti ad una contraddizione. Dunque, l'unica possibilità è che  $o(g) < +\infty$
- Dunque, concludiamo che  $f$  non iniettiva  $\implies o(g) = +\infty$  e di conseguenza che  $o(g) < +\infty \implies f$  iniettiva

3. Dato il gruppo  $(G, \cdot)$  e  $g \in G$ , la funzione  $f_g : G \rightarrow G : h \mapsto ghg^{-1}$  è un endomorfismo:

$$f_g(h)f_g(h') = (ghg^{-1})(gh'h^{-1}) = gh'hg^{-1} = f_g(hh')$$

### Osservazione 32

La proiezione canonica al quoziente  $\pi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, +, \cdot) : x \rightarrow [x]$  è un **omomorfismo suriettivo** di anelli

*Dimostrazione:*

- Sappiamo già che  $\pi$  sia suriettiva. Verifichiamo quindi che sia un omomorfismo di anelli:

$$\pi(x+y) = [x+y] = [x] + [y] = \pi(x) + \pi(y)$$

$$\pi(xy) = [xy] = [x][y] = \pi(x)\pi(y)$$

□

### Osservazione 33

Se  $f : G \rightarrow H$  è un isomorfismo, esiste sempre l'isomorfismo inverso  $f^{-1} : H \rightarrow G$

*Dimostrazione:*

- Se  $f : G \rightarrow H$  è un isomorfismo, dunque è biettiva, allora  $\exists f^{-1} : H \rightarrow G$  poiché una funzione è biettiva se e solo se è invertibile. Inoltre, poiché  $(f^{-1})^{-1} = f$ , anche  $f^{-1}$  è invertibile e dunque biettiva

- Dati  $g, h \in H$ , mostriamo che  $f^{-1}$  sia anche un omomorfismo:

$$\begin{aligned} gh &= f(f^{-1}(g))f(f^{-1}(h)) \implies gh = f((f^{-1}(g)(f^{-1}(h))) \implies \\ \implies f^{-1}(gh) &= f^{-1}(f((f^{-1}(g)(f^{-1}(h)))) \implies f^{-1}(gh) = f^{-1}(g)f^{-1}(h) \end{aligned}$$

□

### Osservazione 34

Se  $f : G \rightarrow H$  e  $g : H \rightarrow K$  sono due isomorfismi, la loro composta  $g \circ f : G \rightarrow K$  è un isomorfismo

*Dimostrazione:*

- Poiché la composizione di due funzioni biettive è anch'essa biettiva, si ha che

$$h := g \circ f : G \rightarrow K \text{ biettiva}$$

- Dati  $x, y \in G$ , mostriamo che  $h$  sia anche un omomorfismo:

$$h(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y)) = h(x)h(y)$$

□

### Definizione 48: Relazione di isomorfismo

Date due strutture algebriche  $G$  ed  $H$ , definiamo la **relazione di equivalenza** " $G$  è **isomorfo** ad  $H$ ", indicato come  $G \cong H$ , se e solo se esiste un isomorfismo  $f : G \rightarrow H$ .

$$G \cong H \iff \exists f : G \rightarrow H \text{ isomorfismo}$$

*Dimostrazione:*

- Per ogni gruppo  $G$  esiste l'automorfismo  $\text{id} : G \rightarrow G : g \rightarrow g$

$$\text{id}(gh) = gh = \text{id}(g)\text{id}(h), \forall g, h \in G \implies G \cong G$$

- Se  $G \cong H$  allora:

$$G \cong H \implies \exists f : G \rightarrow H \text{ isomorfismo} \iff$$

$$\iff \exists f^{-1} : H \rightarrow G \text{ isomorfismo inverso} \implies H \cong G$$

- Se  $G \cong H, H \cong K$  allora:

$$G \cong H, H \cong K \implies \exists f : G \rightarrow H \text{ isomorfismo}, \exists g : H \rightarrow K \text{ isomorfismo} \implies$$

$$\implies g \circ f : G \rightarrow K \text{ isomorfismo} \implies G \cong K$$

□

**Lemma 12**

Sia  $f : G \rightarrow G'$  un isomorfismo tra gruppi (dunque  $G \cong G'$ ). Dato  $g \in G \mid o(g) < +\infty$ , si ha che:

$$o(g) = o(f(g))$$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $f$  è un omomorfismo, per dimostrazione precedente ne segue che  $o(f(g)) \mid o(g)$
- Inoltre, poiché  $f$  è un isomorfismo, sappiamo che esiste sempre l'isomorfismo inverso  $f^{-1} : G' \rightarrow G$ .

- A questo punto, ne segue che:

$$g^{o(f(g))} = f^{-1}(f(g^{o(f(g))})) = f^{-1}(f(g)^{o(f(g))}) = f^{-1}(1_{G'}) = 1_G \implies o(g) \mid o(f(g))$$

- A questo punto, per anti-simmetria si ha che:

$$o(f(g)) \mid o(g), o(g) \mid o(f(g)) \implies o(g) = o(f(g))$$

□

**Teorema 11: Isomorfismo tra sottogruppi ciclici**

Sia  $f : G \rightarrow G'$  un isomorfismo tra gruppi (dunque  $G \cong G'$ ). Dato  $g \in G \mid o(g) < +\infty$ , si ha che:

$$H(g) \cong H(f(g))$$

*Dimostrazione:*

- Sia  $h : H(g) \rightarrow H(f(g)) : x \mapsto f(x)$

- Notiamo che:

$$h(xx') = f(xx') = f(x)f(x') = h(x)h(x')$$

dunque  $h$  risulta essere un omomorfismo

- Essendo  $f$  un isomorfismo (dunque iniettivo), ne segue che:

$$\forall x, y \in H(f(g)) \quad h(x) = h(y) \implies f(x) = f(y) \implies x = y$$

dunque  $h$  risulta essere iniettiva

- Per il lemma precedente, si ha che

$$G \cong G' \implies o(g) = o(f(g)) \implies |H(g)| = |H(f(g))|$$

- Di conseguenza, poiché  $h$  è un omomorfismo iniettivo e poiché  $|H(g)| = |H(f(g))|$ , ne segue automaticamente che  $h$  sia un isomorfismo e dunque che  $H(g) \cong H(f(g))$

□

## 6.2 Nucleo ed Immagine di un omomorfismo

### Definizione 49: Nucleo ed Immagine di un omomorfismo

Dato un omomorfismo  $f : G \rightarrow H$  definiamo  $\ker(f)$  come **nucleo di  $f$**  e  $\text{im}(f)$  come **immagine di  $f$** , dove:

$$\ker(f) := \{g \in G \mid f(g) = 1_H\}$$

$$\text{im}(f) := \{y \in H \mid f(x) = y, \exists x \in G\}$$

Inoltre, si ha che  $\ker(f) \leq G$  e  $\text{im}(f) \leq H$

*Dimostrazione:*

- $\ker(f) \leq G$ :
  - $f(1_G) = 1_H \implies 1_G \in \ker(f)$
  - $x, y \in \ker(f) \implies f(x) = f(y) = 1_H \implies f(xy) = f(x)f(y) = 1_H \cdot 1_H = 1_H \implies xy \in \ker(f)$
  - $x \in \ker(f) \implies f(x) = 1_H \implies 1_H = 1_H^{-1} = f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \implies x^{-1} \in \ker(f)$
- $\text{im}(f) \leq H$ :
  - $f(1_G) = 1_H \implies 1_H \in \text{im}(f)$
  - $x, y \in \text{im}(f) \implies x = f(g), y = f(h) \implies xy = f(g)f(h) = f(gh) \implies xy \in \text{im}(f)$
  - $x \in \text{im}(f) \implies x = f(g) \implies x^{-1} = f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \implies x^{-1} \in \text{im}(f)$

□

### Osservazione 35

Un omomorfismo è **iniettivo** se e solo se il nucleo è **semplice**, ossia  $\ker(f) = \{1_G\}$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\ker(f) \leq G \implies 1_G \in \ker(f)$ , supponiamo per assurdo che  $f$  iniettiva e che  $\exists x \neq 1_G \in \ker(f)$ :

$$g \neq 1_G \in \ker(f) \implies f(g) = 1_H = f(1_G)$$

contraddicendo l'ipotesi per cui  $f$  sia iniettiva, dunque l'unica possibilità è che

$$\nexists g \neq 1_G \in \ker(f) \implies \ker(f) = \{1_G\}$$

- Supponiamo invece che  $\ker(f) = \{1_G\}$ . In tal caso, si ha che:

$$\begin{aligned} \forall g, g' \in G, f(g) = f(g') &\iff f(g^{-1})f(g) = f^{-1}(g)f(g') \iff \\ &\iff 1_H = f^{-1}(g)f(g') \iff 1_H = f(g^{-1}g) \end{aligned}$$

Tuttavia, poiché  $\ker(f) = \{1_G\}$ , si ha che  $f(x) = 1_H, \forall x \in G \iff x = 1_G$ , allora

$$1_H = f(g^{-1}g) \iff 1_G = g^{-1}g' \iff g = g'$$

dunque,  $f$  risulta essere iniettiva

□

#### Osservazione 36

Se  $f : A \rightarrow B$  è un omomorfismo di anelli, allora:

$$\ker(f) := \{a \in A \mid f(a) = 0_B\}$$

$$\operatorname{im}(f) := \{b \in B \mid f(a) = b, \exists a \in A\}$$

## 6.3 Primo teorema d'isomorfismo

#### Definizione 50: Sottoanello

Sia  $A$  un anello. Definiamo  $(B, +, \cdot) \leq (A, +, \cdot)$  come **sottoanello** se:

- $(B, +) \leq (A, +)$
- $x, y \in B \implies xy \in B$

#### Osservazione 37

Se  $f : A \rightarrow B$  è un omomorfismo di anelli, allora

- $\ker(f) \triangleleft A$
- $\operatorname{im}(f) \leq B$  sottoanello

*Dimostrazione:*

- Abbiamo già dimostrato che  $\ker(f) \leq G$  e  $\operatorname{im}(f) \leq B$ .
- $x \in \ker(f), y \in A \implies f(xy) = f(x)f(y) = 0_B \cdot f(y) = 0_B \implies xy \in \ker(f)$



- $x, y \in \text{im}(f) \iff x = f(a), y = f(b), \exists a, b \in A \implies xy = f(a)f(b) = f(ab) \implies xy \in \text{im}(f)$

□

### Teorema 12: Primo teorema d'isomorfismo

Se  $f : A \rightarrow B$  è un omomorfismo tra anelli, allora

$$A/\ker(f) \cong \text{im}(f)$$

*Dimostrazione:*

- Mostriamo che esiste  $\varphi : A/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f) : [a] \mapsto f(a)$  e che è **ben definita**, ossia che  $[a], [b] \in A/\ker(f) \mid [a] = [b] \implies f(a) = f(b)$ :

$$\begin{aligned} [a] = [b] &\iff a \equiv b \pmod{\ker(f)} \iff b - a \in \ker(f) \iff \\ &\iff 0_B = f(b - a) = f(b) - f(a) \iff f(a) = f(b) \end{aligned}$$

- Mostriamo che  $\varphi$  è un **omomorfismo** sia un omomorfismo di anelli:

$$\begin{aligned} \varphi([a]) + \varphi([b]) &= f(a) + f(b) = f(a + b) = \varphi([a + b]) \\ \varphi([a])\varphi([b]) &= f(a)f(b) = f(ab) = \varphi([ab]) \end{aligned}$$

- Mostriamo che  $\varphi$  è **iniettiva** poiché il suo nucleo è semplice:

$$\begin{aligned} [x] \in \ker(\varphi) &\iff \varphi([x]) = 0_B \iff f(x) = 0_B \iff \\ &\implies x \in \ker(f) \iff x \in [0_A] \iff [x] = [0_A] \implies \ker(\varphi) = \{[0_A]\} \end{aligned}$$

- Mostriamo che  $\varphi$  è **suriettiva** poiché il suo codominio, ossia  $\text{im}(f)$ , coincide con la sua immagine, ossia  $\text{im}(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} y \in \text{im}(\varphi) &\iff \exists [a] \in A/\ker(f) \mid \varphi([a]) = y \iff \\ &\iff \exists a \in A \mid f(a) = y \iff y \in \text{im}(f) \end{aligned}$$

- Concludiamo quindi che  $\varphi : A/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f)$  è un **isomorfismo** e dunque che

$$A/\ker(f) \cong \text{im}(f)$$

□

## 6.4 Sottogruppi normali

### Definizione 51: Classi laterali sinistre e destre

Dati  $G$  gruppo e  $H \leq G$ , definiamo le seguenti due relazioni di equivalenza:

$$x \sim_{sx} y \iff x^{-1}y \in H \qquad x \sim_{dx} y \iff xy^{-1} \in H$$

Definiamo come **classi laterali sinistre** le classi di equivalenza generate da  $\sim_{sx}$  e come **classi laterali destre** le classi di equivalenza generate da  $\sim_{dx}$ .

$$[x]_{sx} := \{y \in G \mid x \sim_S y\} \qquad [x]_{dx} := \{y \in G \mid x \sim_D y\}$$

(*dimostrazione equivalenza analoga alla sezione 4.1*)

### Definizione 52: Insieme quoziente sinistro e destro

Dati  $G$  gruppo e  $H \leq G$ , denotiamo come  $G/H_{sx}$  l'**insieme quoziente** generato da  $\sim_{sx}$  e come  $G/H_{dx}$  l'**insieme quoziente** generato da  $\sim_{dx}$ .

Nel caso in cui non sia specificato il pedice, ossia  $G/H$ , verrà sottointeso che si tratti di uno qualsiasi dei due insiemi quozienti, poiché irrilevante

### Osservazione 38

Dati  $G$  gruppo,  $H \leq G$  e le due relazioni  $\sim_{sx}$  e  $\sim_{dx}$ , si ha che:

$$[x]_{sx} = xH = \{xh \mid h \in H\} \qquad [x]_{dx} = Hx = \{hx \mid h \in H\}$$

Inoltre, si ha che:

$$|xH| = |H| = |Hx|$$

(*dimostrazioni analoghe alla sezione 4.1*)

### Osservazione 39

Dati  $G$  gruppo finito e  $H \leq G$ , si ha che:

$$[G : H] := |G/H_{sx}| = |G/H_{dx}|$$

*Dimostrazione:*

- Poiché sia  $G/H_{sx}$  sia  $G/H_{dx}$  sono partizioni di  $G$  le cui classi laterali possiedono

tutte la stessa cardinalità di  $H$ , si ha che:

$$|G/H_{sx}| = \frac{|G|}{|H|} = |G/H_{dx}|$$

□

#### Osservazione 40

La **classe neutra**, ossia generata dall'elemento neutro di  $G$ , è sia una classe laterale **sinistra** sia una classe laterale **destra**:

$$[1_G]_{sx} = 1_G \cdot H = H = H \cdot 1_G = [1_G]_{dx}$$

#### Definizione 53: Sottogruppo normale

Sia  $G$  un gruppo. Definiamo  $H$  come **sottogruppo normale** di  $G$ , indicato come  $H \trianglelefteq G$ , se:

- $H \leq G$
- $\forall x \in G$  si ha che  $xH = Hx$ , ossia la classe laterale sinistra di ogni elemento coincide con la classe laterale destra dell'elemento stesso

**Attenzione:** tale condizione non implica che valga la commutatività tra elementi di  $G$  ed elementi di  $H$  (ossia che valga  $gh = hg, \forall g \in G, \forall h \in H$ )

#### Proposizione 35

Sia  $G$  un gruppo. Le seguenti condizioni sono **equivalenti**:

1.  $H \trianglelefteq G$
2.  $\forall g \in G, h \in H$  si ha che  $ghg^{-1} \in H$
3.  $\forall g \in G, h \in H, \exists k \in H \mid gh = kg$

*Dimostrazione:*

- 1)  $\implies$  3)

$$g \in G, h \in G \implies gh \in gH = Hg = \{kg \mid k \in H\} \implies \exists k \in H \mid gh = kg$$

- 3)  $\implies$  2)

$$g \in G, h \in H, \exists k \in H \mid gh = kg \implies ghg^{-1} = kgg^{-1} \implies ghg^{-1} = k \in H$$

- 2)  $\implies$  1)

– Dato  $g \in G$ , si ha che:

$$gh \in gH \implies g \in G, h \in H \implies x := ghg^{-1} \in H \implies$$

$$\implies xg = ghg^{-1}g \in Hg \implies xg = gh \implies gh \in Hg \implies gH \subseteq Hg$$

– Analogamente, si ha che:

$$\begin{aligned} kg \in Hg &\implies g \in G, h \in H \implies \exists g^{-1} \in G \implies y := g^{-1}k(g^{-1})^{-1} = g^{-1}kg \in H \\ &\implies gy = gg^{-1}kg \in gH \implies gy = kg \in gH \implies kg \in gH \implies Hg \subseteq gH \end{aligned}$$

– Dunque, poiché  $\forall g \in G$  si ha che  $gh = Hg$ , ne segue che  $H \trianglelefteq G$

□

#### Osservazione 41

Se  $G$  un **gruppo abeliano** e  $H \leq G$ , allora  $H \trianglelefteq G$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $G$  è abeliano e poiché  $k \in H \implies k \in G$ , ne segue che:

$$\forall g \in G, h \in H, \exists h \in H \mid gh = hg$$

dunque  $H \trianglelefteq G$

□

#### Proposizione 36

Se  $(G, \cdot)$  è un gruppo e  $H \trianglelefteq G$ , allora  $(G/H, \cdot)$  è un **gruppo**

*Dimostrazione:*

- Dimostriamo che il prodotto  $[x][y] = [xy]$  sia ben definito, ossia che  $[x] = [x'], [y] = [y'] \implies [xy] = [x'y']$

– Poiché  $H \trianglelefteq G$  e poiché  $[x] = [x'], [y] = [y']$ , si ha che:

$$xH = Hx = [x] = [x'] = x'H = Hx'$$

$$yH = Hy = [y] = [y'] = y'H = Hy'$$

– Di conseguenza, otteniamo che:

$$\begin{aligned} x'y'h \in x'y'H = [x'y'] &\implies \exists k, j \in H \mid x'y'h = x(ky') = \\ &= (xk)y' = (jx)y = jxy \implies x'y'h \in Hxy = [xy] \end{aligned}$$

e che:

$$\begin{aligned} xyb \in xyH = [xy] &\implies \exists d, q \in H \mid xyb = x(dy') = (xd)y' = \\ &= (qx')y' = qx'y' \implies xyb \in Hx'y' = [x'y'] \end{aligned}$$

dunque il prodotto è ben definito

- Dimostriamo quindi che  $(G/H, \cdot)$  sia un gruppo
  - $([x][y])[z] = [xy][z] = [xyz] = [x][yz] = [x]([y][z])$
  - $\forall [x] \in G/H, \exists [1_G] \in G/H \mid [x][1_G] = [x \cdot 1_G] = [x]$
  - $\forall [x] \in G/H, \exists [x]^{-1} \in G/H \mid [x][x]^{-1} = [x][x^{-1}] = [xx^{-1}][1_G]$

□

**Corollario 19**

Se  $(G, \cdot)$  è un gruppo abeliano e  $H \trianglelefteq G$ , allora  $(G/H, \cdot)$  è un **gruppo abeliano**

*Dimostrazione:*

- Sappiamo già che  $(G/H, \cdot)$  è un gruppo, dunque verifichiamo che valga la commutatività:

$$[x], [y] \in G/H \implies [x][y] = [xy] = [yx] = [y][x]$$

□

**Osservazione 42**

Dato  $G$  gruppo e  $H \leq G$ , si ha che:

$$[G : H] = 2 \implies H \trianglelefteq G$$

*Dimostrazione:*

- Supponiamo che  $[G : H] = 2$ , implicando che esistano solo due classi laterali sinistre e due classi laterali destre. Poiché la classe neutra  $[1_G]_{sx} = H = [1_G]_{dx}$  è condivisa da entrambi gli insiemi quozienti, ne segue che:

$$G/H_{sx} = \{[1_G], [x]\}$$

$$G/H_{dx} = \{[1_G], [y]\}$$

- Poiché  $G/H$  è una partizione di  $G$ , ne segue che:

$$z \in [x] \iff z \notin [1_G]_{sx} = [1_G]_{dx} \iff z \in [y]$$

implicando quindi che  $[x] = [y]$  e di conseguenza che  $H \trianglelefteq G$

- In particolare, si ha che:

$$G/H_{sx} = \{H, G - H\}$$

$$G/H_{dx} = \{H, G - H\}$$

□

**Corollario 20**

Dato  $\mathcal{S}_n$ , si ha che  $\mathcal{A}_n \trianglelefteq \mathcal{S}_n$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\mathcal{A}_n \leq \mathcal{S}_n$  e poiché  $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2$  (sezione 5.2), ne segue che  $\mathcal{A}_n \trianglelefteq \mathcal{S}_n$

□

**Osservazione 43**

Se  $f : G \rightarrow H$  è un omomorfismo di gruppi, allora  $\ker(f) \trianglelefteq G$  e  $\operatorname{im}(f) \leq H$

*Dimostrazione:*

- Sappiamo già che  $\ker(f) \leq G$  e  $\operatorname{im}(f) \leq H$
- Verifichiamo quindi che  $\ker(f) \trianglelefteq G$

$$\begin{aligned} g \in G, h \in \ker(f) &\implies f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1} = f(g) \cdot 1_H \cdot f(g)^{-1} = \\ &= f(g)f(g)^{-1} = 1_H \implies ghg^{-1} \in \ker(f) \implies \ker(f) \trianglelefteq G \end{aligned}$$

□

**Teorema 13: Primo teorema d'isomorfismo**

Se  $f : G \rightarrow H$  è un omomorfismo tra gruppi, allora:

$$G/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f)$$

Teorema fondamentale di

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\ker(f) \trianglelefteq G$ , sappiamo che  $(G/\ker(f), \cdot)$  sia un gruppo con l'operazione di prodotto ben definita. A questo punto, la dimostrazione risulta essere analoga a quella vista nel caso degli anelli (sezione 6.3)

□

**Proposizione 37**

Sia gruppo  $G$  e sia  $g \in G$ . Posto  $d := o(g)$ , si ha che:

$$H(g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } d = 0 \\ \mathbb{Z}_d & \text{se } d > 0 \end{cases}$$

*Dimostrazione:*

- Riprendiamo il seguente omomorfismo di gruppi  $f : \mathbb{Z} \rightarrow G : n \rightarrow g^n$ , già visto negli esempi precedenti

$$f(n+m) = g^{n+m} = g^n g^m = f(n)f(m)$$

- Di conseguenza, per il primo teorema d'isomorfismo si ha che:

$$\mathbb{Z}/\ker(f) \cong \text{im}(f)$$

- Tuttavia, notiamo che:

$$\text{im}(f) = \{f(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = H(g)$$

$$\ker(f) = \{n \in \mathbb{Z} \mid g^n = 1_G\} = I(g)$$

- Dunque, si ha che:

$$\mathbb{Z}/I(g) = \mathbb{Z}/\ker(f) \cong \text{im}(f) = H(g)$$

- Poiché in  $\mathbb{Z}$  si ha che:  $\exists! d \geq 0 \mid I(g) = I(d)$  tale che:

$$- d = 0 \implies o(g) := |H(g)| = +\infty$$

$$- d > 0 \implies o(g) := |H(g)| = d$$

ne segue che:

$$\mathbb{Z}_d := \mathbb{Z}/I(d) = \mathbb{Z}/I(g) = \mathbb{Z}/\ker(f) \cong \text{im}(f) = H(g)$$

- In particolare, se  $d = 0$ , per ogni  $[x] \in \mathbb{Z}_0$ , si ha che:

$$[y] = [x] \iff x \sim y \iff y - x \in I(0) \iff$$

$$\iff x - y = 0k, \exists k \in \mathbb{Z} \iff x - y = 0 \iff x = y$$

- Di conseguenza, ne segue che proiezione canonica al quoziente  $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_0 : x \mapsto [x]$ , la quale sappiamo già essere un omomorfismo suriettivo, sia anche iniettiva, risultando quindi in un isomorfismo

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \mid x \neq y \implies [x] \neq [y] \implies \pi(x) \neq \pi(y)$$

da cui concludiamo che:

$$H(g) \cong \mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_0 \cong \mathbb{Z} \implies H(g) \cong \mathbb{Z}$$

- In definitiva, concludiamo che:

$$H(g) = \text{im}(f) \cong \mathbb{Z}/\ker(f) = \mathbb{Z}/I(g) = \mathbb{Z}/I(d) = \begin{cases} \mathbb{Z}_0 \cong \mathbb{Z} & \text{se } d = 0 \\ \mathbb{Z}_d & \text{se } d > 0 \end{cases}$$

□

**Corollario 21**

Dato  $G$  un gruppo finito dove  $|G| = n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , si ha che:

$$\exists g \in G \mid o(g) = n \implies G \cong \mathbb{Z}_n$$

*Dimostrazione:*

- Supponiamo che  $\exists g \in G \mid o(g) = n$ . In tal caso, per la proposizione precedente, si ha che:

$$o(g) = n \implies H(g) \cong \mathbb{Z}_n$$

- Siccome  $H(g) \leq G \implies H(g) \subseteq G$  e  $|H(g)| = |G|$ , allora ne segue che  $G = H(g)$ , implicando quindi che:

$$G = H(g) \cong \mathbb{Z}_n$$

□

**Corollario 22**

Se  $G$  è un gruppo finito e  $|G| = p$  dove  $p \in \mathbb{P}$ , allora

$$G \cong \mathbb{Z}_p$$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $|G| = p$  ne segue che  $\exists g \in G \mid g \neq 1_G$ .
- Dato  $H(g) \leq G$ , per il teorema di Lagrange, si ha che

$$|H(g)| \mid |G| = p \implies |H(g)| = \begin{cases} 1 \\ p \end{cases}$$

- Poiché  $g \neq 1_G \implies |H(g)| > 1$ , ne segue che l'unica possibilità sia  $o(p) := |H(g)| = p$ .
- Di conseguenza, per il corollario precedente, ne segue che:

$$o(g) = p \implies G = H(g) \cong \mathbb{Z}_p$$

□

**Osservazione 44**

Sia  $G$  un gruppo. Se  $H \leq G$  allora la proiezione canonica al quoziente  $\pi : (G, \cdot) \rightarrow (G/H, \cdot) : x \rightarrow [x]$  è un omomorfismo suriettivo e  $\ker(\pi) = H$

*Dimostrazione:*

- Sappiamo già che  $\pi : (G, \cdot) \rightarrow (G/H, \cdot) : x \rightarrow [x]$  sia un omomorfismo suriettivo



- Verifichiamo quindi che  $\ker(f) = H$ :

$$g \in \ker(\pi) \iff \pi(g) = [1_G] \iff [g] = [1_G] = H \iff g \in [g] = H$$

□

**Esempio:**

- La funzione  $\text{sgn} : \mathcal{S}_n \rightarrow \{+1, -1\}$  è un omomorfismo

$$\text{sgn}(\sigma\sigma') = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma')$$

- Dunque, per il primo teorema d'isomorfismo, si ha che:

$$\mathcal{S}_n / \ker(\text{sgn}) \cong \text{im}(\text{sgn})$$

- Inoltre, si ha che:

$$\begin{aligned} \ker(\text{sgn}) &= \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \text{sgn}(\sigma) = +1\} = \mathcal{A}_n \trianglelefteq \mathcal{S}_n \implies \\ \implies [\mathcal{S}_n : \ker(\text{sgn})] &= [\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2 \implies |\text{im}(\text{sgn})| = 2 \implies \text{im}(\text{sgn}) = \{+1, -1\} \end{aligned}$$

## 6.5 Gruppi diedrali

### Definizione 54: Gruppo diedrale

Definiamo come **gruppo diedrale**  $\mathcal{D}_n$  il gruppo delle **simmetrie di un poligono regolare di  $n$  lati**, dove con simmetrie intendiamo tutte le azioni che mantengono la figura simmetrica, ossia:

- Rotazioni di un angolo giro (ossia  $\frac{2\pi}{n}$ ) in senso antiorario (o orario, vista come l'inverso di una rotazione antioraria)

$$\rho : \text{rotazione antioraria di } \frac{2\pi}{n}$$

- Riflessioni a specchio rispetto agli assi di simmetria del poligono (ogni poligono regolare possiede  $n$  assi di simmetria)

$$\sigma_i : \text{riflessione rispetto all'asse di simmetria } r_i$$

**Attenzione:** il prodotto è dato dalla composizione (dunque viene trattato come nel caso delle permutazioni), ossia  $\rho\sigma(i) = \rho(\sigma(i))$

**Osservazione 45**

Dato  $\mathcal{D}_n$ , effettuare  $n$  volte una rotazione riporta il poligono allo stato iniziale (poiché  $n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi$ ), dunque

$$\rho^n = \rho^0 = 1 \implies \rho^{n+k} = \rho^n \rho^k = \rho^0 \rho^k = \rho^k$$

Analogamente, poiché un poligono regolare di  $n$  lati possiede solo  $n$  assi di simmetria, si ha che:

$$\sigma_n = \sigma_0 \implies \sigma_{n+k} = \sigma_k$$

**Osservazione 46**

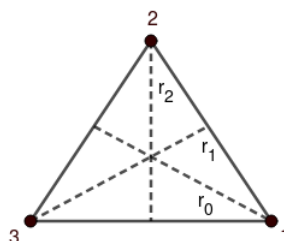
Per definizione stessa, ogni riflessione a specchio è uguale alla sua inversa.

Dunque, riflettere due volte rispetto allo stesso asse corrisponde alla simmetria neutra, ossia  $\rho^0 = 1$

$$\sigma_i = \sigma_i^{-1} \implies \sigma_i^2 = 1$$

**Esempi:**

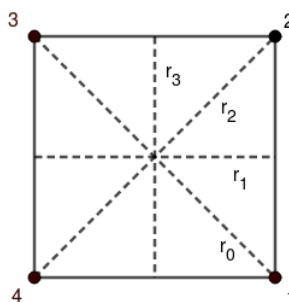
- Consideriamo il gruppo  $\mathcal{D}_3$ , corrispondente alle simmetrie di un triangolo equilatero.



In tal caso, abbiamo che:

$$\mathcal{D}_3 := \{1, \rho, \rho^2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$$

- Consideriamo il gruppo  $\mathcal{D}_4$ , corrispondente alle simmetrie di un quadrato.

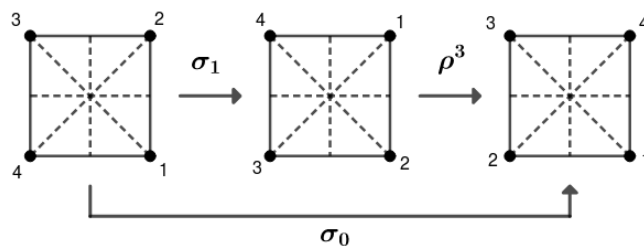


In tal caso, abbiamo che:

$$\mathcal{D}_4 := \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

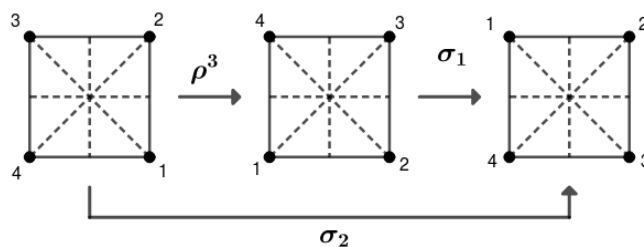
Notiamo inoltre come in  $\mathcal{D}_4$  si ha:

$$\rho^3 \sigma_1 = \sigma_0$$



E che:

$$\sigma_1 \rho^3 = \sigma_2$$



Dunque, concludiamo che il prodotto non sia commutativo:

$$\rho^3 \sigma_1 \neq \sigma_1 \rho^3$$

#### Osservazione 47

Dato il gruppo  $\mathcal{D}_n$ , si ha che:

- $\rho^i \rho^j = \rho^{i+j(\bmod n)}$
- $\sigma_i \sigma_j = \rho^{i-j(\bmod n)}$
- $\rho^i \sigma_j = \sigma_{i+j(\bmod n)}$
- $\sigma_i \rho^j = \sigma_{i-j(\bmod n)}$

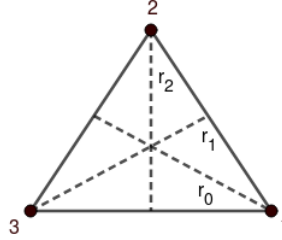
**Proposizione 38**

Numerando i vertici del poligono, ogni simmetria **corrisponde** ad una permutazione dei vertici, dunque si verifica che  $\mathcal{D}_n$  è **isomorfo** ad un sottogruppo **iniettivamente incluso** in  $\mathcal{S}_n$ .

In generale, se  $\alpha \in \mathcal{D}_n$ , ovvero una simmetria del poligono regolare di  $n$  lati, manda il vertice  $i$  nel vertice  $j$ , allora la corrispondente permutazione  $\sigma_\alpha \in \mathcal{S}_n$  manderà anch'essa  $i$  in  $j$

**Esempio:**

- Consideriamo il gruppo  $\mathcal{D}_3$ , numerando i vertici del triangolo corrispondente



In tal caso abbiamo che:

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \rho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \rho^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Corollario 23**

Dato il gruppo  $\mathcal{D}_n$  e dato  $H_n \subseteq \mathcal{S}_n$  dove:

$$H_n := \{\sigma_\alpha \in \mathcal{S}_n \mid \sigma_\alpha = \alpha, \exists \alpha \in \mathcal{D}_n\}$$

si ha che:

$$\mathcal{D}_n \cong H_n \leq \mathcal{S}_n$$

*Dimostrazione:*

- Posto  $H_n := \{\sigma_\alpha \in \mathcal{S}_n \mid \sigma_\alpha = \alpha, \exists \alpha \in \mathcal{D}_n\}$ , ogni simmetria in  $\mathcal{D}_n$  corrisponde ad una permutazione in  $H \leq \mathcal{S}_n$ , dunque si ha che:

$$\begin{cases} \alpha = \sigma_\alpha : i \mapsto j \\ \beta = \sigma_\beta : j \mapsto k \end{cases} \implies \beta\alpha = \sigma_\beta\sigma_\alpha : i \mapsto k$$

- Inoltre, si ha che:

$$\beta\alpha \in \mathcal{D}_n \implies \exists \sigma_{\beta\alpha} \in H_n \mid \sigma_{\beta\alpha} = \beta\alpha = \sigma_\beta\sigma_\alpha$$

- Definiamo quindi la funzione  $f : (\mathcal{D}_n, \cdot) \rightarrow (H_n, \cdot) : \alpha \mapsto \sigma_\alpha$ , la quale risulta essere un omomorfismo poiché:

$$f(\beta\alpha) = \sigma_{\beta\alpha} = \sigma_\beta\sigma_\alpha = f(\beta)f(\alpha)$$

- In particolare,  $f$  risulta essere suriettiva poiché

$$\forall \sigma_\alpha \in H_n, \exists \alpha \in \mathcal{D}_n \mid f(\alpha) = \sigma_\alpha$$

- Infine, poiché  $|\mathcal{D}_n| = |H_n|$ , ne segue che  $f$  possa essere suriettiva se e solo se è anche iniettiva, dunque  $f$  è un isomorfismo

□

## 6.6 Gruppo di Klein e Teorema di Cauchy

### Definizione 55: Gruppo di Klein

Definiamo come **gruppo di Klein** (o gruppo quadrimio) il più piccolo gruppo non ciclico:

$$\mathcal{K}_4 := \{1, a, b, c\}$$

dove si verifica che:

- $a^2 = b^2 = c^2 = 1 \implies o(a) = o(b) = o(c) = 2$
- $ab = ba = c$
- $bc = cb = a$
- $ac = ca = b$

**Esempio:**

- Consideriamo il gruppo  $\mathcal{D}_2 := \{1, \rho, \sigma_0, \sigma_1\}$ . Notiamo come:

$$- \rho^2 = \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = 1$$

$$- \rho\sigma_0 = \sigma_0\rho = \sigma_1$$

$$- \rho\sigma_1 = \sigma_1\rho = \sigma_0$$

$$- \sigma_1\sigma_0 = \sigma_0\sigma_1 = \rho$$

Dunque, concludiamo facilmente che  $\mathcal{D}_2 \cong \mathcal{K}_4$

**Proposizione 39**

Se  $G$  è un gruppo finito dove  $|G| = 4$ , si verifica che:

$$G \cong \mathbb{Z}_4 \text{ oppure } G \cong \mathcal{K}_4$$

*Dimostrazione:*

- Sia  $a \neq 1 \in G$ . Per Lagrange, sappiamo che  $o(a) \mid |G| = 4 \iff o(a) \in \{1, 2, 4\}$
- Come visto nella sezione 6.4, sappiamo che  $G$  è ciclico se:

$$\exists a \in G \mid o(a) = 4 \implies G \cong \mathbb{Z}_4$$

- Ipotizziamo ora che non sia ciclico, dunque che  $\nexists a \in G \mid o(a) = 4$ , implicando quindi che  $G = \{1, a, b, c\}$ , dove  $o(a) = o(b) = o(c) = 2$ . Verifichiamo che in tal caso  $ab = c$ :

- Supponiamo per assurdo che  $ab = 1$

$$ab = 1 \implies b = a^{-1} = a$$

il che è impossibile

- Supponiamo per assurdo che  $ab = a$

$$ab = a \implies a^{-1}ab = a^{-1}a \implies b = 1$$

il che è impossibile

- Supponiamo per assurdo che  $ab = b$

$$ab = b \implies abb^{-1} = bb^{-1} \implies a = 1$$

il che è impossibile

- Siccome  $ab \neq 1$ ,  $ab \neq a$  e  $ab \neq b$ , allora l'unica possibilità affinché valga la chiusura del gruppo è  $ab = c$

- Analogamente, dimostriamo che  $ac = b$  e  $bc = a$ , concludendo quindi che:

$$G \cong \mathcal{K}_4$$

□

**Teorema 14: Teorema di Cauchy**

Sia  $G$  un gruppo finito. Dato un numero primo  $p \in \mathbb{P}$ , si verifica che:

$$p \mid |G| \implies \exists g \in G \mid o(g) = p$$

In particolare, se  $|G| = q \in \mathbb{P}$ , allora  $G$  è ciclico poiché

$$\exists g \in G \mid o(g) = q \implies |G| = o(g) \implies G = H(g)$$

**Proposizione 40**

Se  $G$  è un gruppo finito dove  $|G| = 6$ , si verifica che:

$$G \cong \mathbb{Z}_6 \text{ oppure } G \cong \mathcal{S}_3$$

*Dimostrazione:*

- Come già visto, se  $\exists g \in G \mid o(g) = 6$ , allora  $G \cong \mathbb{Z}_6$
- Ipotizziamo quindi che  $G$  non sia ciclico, dunque che  $\nexists g \in G \mid o(g) = 6$ . Per il teorema di Cauchy sappiamo che

$$- \exists \alpha \in G \mid o(\alpha) = 3 \implies o(\alpha^k) \mid o(\alpha) = 3, k \neq 0 \implies o(\alpha^3) = 3$$

$$- \exists \beta \in G \mid o(\beta) = 2 \implies \beta^{-1} = \beta$$

- Notiamo che:

$$\alpha^i \beta = \alpha^j \beta \iff \alpha^i = \alpha^j \iff 1 = \alpha^j \alpha^{-i} = \alpha^{j-i} \iff 0 = j - i \iff j = i$$

e che

$$\alpha^i = \alpha^j \beta \iff \alpha^{i-j} = \beta$$

- Tuttavia, l'ultima affermazione risulta essere assurda poiché:

$$o(\beta) = 2 \quad o(\alpha^{i-j}) = \begin{cases} o(1) = 1 & \text{se } i = j \\ o(\alpha^k) = 3 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

di conseguenza si ha che  $\beta \neq \alpha^{i-j}$ .

- Mostriamo inoltre che  $\beta\alpha = \alpha^2\beta$ :

- Supponiamo per assurdo che  $\beta\alpha = 1$

$$\beta\alpha = 1 \implies \alpha = \beta^{-1} \implies \alpha = \beta$$

il che è impossibile

- Supponiamo per assurdo che  $\beta\alpha = \alpha$

$$\beta\alpha = \alpha \implies \beta = 1$$

il che è impossibile

- Supponiamo per assurdo che  $\beta\alpha = \alpha^2$

$$\beta\alpha = \alpha^2 \implies \beta = \alpha$$

il che è impossibile

- Supponiamo per assurdo che  $\beta\alpha = \beta$

$$\beta\alpha = \beta \implies \alpha = 1$$

il che è impossibile

– Supponiamo per assurdo che  $\beta\alpha = \alpha\beta$ , implicando che  $o(\beta\alpha) = o(\alpha\beta)$ :

$$* (\alpha\beta)^1 = \alpha\beta$$

$$* (\alpha\beta)^2 = (\beta\alpha)(\beta\alpha) = \beta\beta\alpha\alpha = \beta^2\alpha^2 = \alpha^2$$

$$* (\alpha\beta)^3 = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^2 = (\alpha\beta)\alpha^2 = \alpha^3\beta = \beta$$

$$* (\alpha\beta)^4 = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^3 = (\alpha\beta)\beta = \alpha\beta^2 = \alpha$$

$$* (\alpha\beta)^5 = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^4 = (\alpha\beta)\alpha = \alpha^2\beta$$

$$* (\alpha\beta)^6 = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^5 = (\alpha\beta)\alpha^2\beta = \beta^2\alpha^3 = 1$$

dunque  $o(\alpha\beta) = 6 \implies o(\alpha\beta) = |G| \implies G = H(\beta\alpha)$ , ossia che il gruppo sia ciclico, contro l'ipotesi che invece esso non lo sia.

– Quindi l'unica possibilità è che  $\beta\alpha = \alpha^2\beta$

- Concludiamo quindi che:

$$G = \{1, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$$

- A questo punto, possiamo stendere una **tavola di Cayley**, ossia una tavola moltiplicativa:

	1	$\alpha$	$\alpha^2$	$\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$
1	1	$\alpha$	$\alpha^2$	$\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$
$\alpha$	$\alpha$	$\alpha^2$	1	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$	$\beta$
$\alpha^2$	$\alpha^2$	1	$\alpha$	$\alpha^2\beta$	$\beta$	$\alpha\beta$
$\beta$	$\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	1	$\alpha^2$	$\alpha$
$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha$	1	$\alpha^2$
$\alpha^2\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	$\beta$	$\alpha^2$	$\alpha$	1

- Ricordando le proprietà dei prodotti dei gruppi diedrali (sezione 6.5), si ottiene una mappatura univoca  $\alpha^i \mapsto \rho^i$  e analogamente  $\alpha^i\beta \mapsto \sigma_i$ . Ciò implica quindi che:

$$G \cong \mathcal{D}_3$$

- Inoltre, abbiamo visto che  $\mathcal{D}_3 \cong H_3 \leq \mathcal{S}_3$  dove

$$H_3 := \{\sigma_\alpha \in \mathcal{S}_3 \mid \sigma_\alpha = \alpha, \alpha \in \mathcal{D}_3\}$$

e dove  $|\mathcal{D}_3| = 2 \cdot 3 = 6$  e  $|\mathcal{S}_n| = n! = 6$ .

- Affinché l'isomorfismo esista si ha necessariamente che  $|H| = |\mathcal{D}_3| = 6$ , implicando quindi che

$$H_3 \leq \mathcal{S}_3, |H_3| = |\mathcal{S}_3| \implies G \cong \mathcal{D}_3 \cong H = \mathcal{S}_3$$

□



**Esempio:**

1. • Vogliamo stabilire se  $\mathbb{Z}_9^*$  e  $\mathbb{Z}_{14}^*$  siano isomorfi tra loro.
- Prima di tutto, calcoliamo  $\mathbb{Z}_9^*$  e  $\mathbb{Z}_{14}^*$ :

$$\mathbb{Z}_9^* = \{[1], [2], [4], [5], [7], [8]\}$$

$$\mathbb{Z}_{14}^* = \{[1], [3], [5], [9], [11], [13]\}$$

- Notiamo quindi che  $|\mathbb{Z}_9^*| = |\mathbb{Z}_{14}^*| = 6$ , implicando che essi siano potenzialmente isomorfi tra loro.
- A questo punto, calcoliamo gli ordini degli elementi:

$\mathbb{Z}_9^*$		$\mathbb{Z}_{14}^*$	
Elemento	Ordine	Elemento	Ordine
[1]	1	[1]	1
[2]	6	[3]	6
[4]	3	[5]	6
[5]	6	[9]	3
[7]	3	[11]	3
[8]	2	[13]	2

- Poiché entrambi i gruppi possiedono un elemento di ordine 6, per la proposizione precedente si ha che

$$\mathbb{Z}_9^* \cong \mathbb{Z}_6 \wedge \mathbb{Z}_{14}^* \cong \mathbb{Z}_6 \implies \mathbb{Z}_9^* \cong \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{14}^*$$

dunque i due gruppi sono isomorfi tra loro

- Vogliamo stabilire se  $\mathbb{Z}_{24}^*$  e  $\mathbb{Z}_{30}^*$  siano isomorfi tra loro.
- Prima di tutto, calcoliamo  $\mathbb{Z}_{24}^*$  e  $\mathbb{Z}_{30}^*$ :

$$\mathbb{Z}_{24}^* = \{[1], [5], [7], [11], [13], [17], [19], [23]\}$$

$$\mathbb{Z}_{30}^* = \{[1], [7], [11], [13], [17], [19], [23], [29]\}$$

- Notiamo quindi che  $|\mathbb{Z}_{24}^*| = |\mathbb{Z}_{30}^*| = 8$ , implicando che essi siano potenzialmente isomorfi tra loro.
- A questo punto, calcoliamo gli ordini degli elementi:

$\mathbb{Z}_{24}^*$		$\mathbb{Z}_{30}^*$	
Elemento	Ordine	Elemento	Ordine
[1]	1	[1]	1
[5]	2	[7]	4
[7]	2	[11]	2
[11]	2	[13]	4
[13]	2	[17]	4
[17]	2	[19]	2
[19]	2	[23]	4
[24]	2	[29]	2

- Poiché gli ordini degli elementi sono diversi tra loro, per il teorema di isomorfismo tra sottogruppi ciclici (sezione 6.1) risulta impossibile che  $\mathbb{Z}_{24}^*$  e  $\mathbb{Z}_{30}^*$  siano isomorfi tra loro

# 7

## Polinomi

### Definizione 56: Anello polinomiale

Dato un anello commutativo  $A$ , definiamo l'**insieme dei polinomi** aventi come coefficienti elementi in  $A$  come:

$$A[x] := \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_0, \dots, a_n \in A, a_n \neq 0\}$$

Inoltre,  $A[x]$  risulta essere un **anello commutativo**

*Dimostrazione:*

- Dati due polinomi  $p(x), q(x) \in A[x]$ , dunque definiti come

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$$

abbiamo che:

- Nell'anello la somma è definita come:

$$p(x), q(x) \in A[x] \implies p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i$$

- Nell'anello il prodotto è definita come:

$$p(x), q(x) \in A[x] \implies p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^m a_i b_j x^{i+j} \right)$$

- Gli assiomi di associatività e commutatività possono essere facilmente verificati tramite la definizione stessa della somma

- L'elemento neutro nella somma è il polinomio neutro  $e(x) = 0$ , mentre nel prodotto è il polinomio costante  $d(x) = 1$
- L'elemento inverso nella somma è:

$$\forall p(x) \in A[x], \exists -p(x) \in A[x] \mid p(x) + (-p(x)) = 0$$

- Per via della definizione data di polinomio, non esiste un inverso moltiplicativo.

Si pensi ad esempio a  $p(x) = x + 3$ . Tale polinomio non ammette inverso moltiplicativo poiché  $\frac{1}{x+3} \notin A[x]$ .

Di conseguenza,  $A[x]$  non può essere un campo.

□

#### Osservazione 48

Se  $K$  è un campo, allora  $K[x]$  è un anello commutativo, poiché non ammette comunque l'esistenza dell'inverso nel prodotto

#### Definizione 57: Grado di un polinomio

Dato  $p(x) \in A[x]$  indichiamo il **grado del polinomio** come  $\deg(p(x))$ , dove:

- $p(x) = 0 \iff \deg(p(x)) = -\infty$  (polinomio nullo)
- $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \neq 0, a_n \neq 0 \implies \deg(p(x)) = n$

#### Definizione 58: Coefficienti direttori

Dato  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \neq 0 \in A[x]$ , definiamo  $a_n$  come **coefficiente direttore** del polinomio

#### Proposizione 41

Ogni elemento  $a \in A$  può essere visto come un **polinomio costante**, ossia di grado 0:

$$\forall a \in A, \exists a(x) \in A[x] \mid a(x) = a \iff \deg(a(x)) = 0$$

Dunque, si ha che  $A \leq A[x]$  sottoanello

#### Osservazione 49

Siano  $p(x), q(x) \in A[x]$ . Si verifica che:

$$\deg(p(x)q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$$

---

*Dimostrazione:*

- Poiché il prodotto è definito come

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^m a_i b_j x^{i+j} \right) = a_0 b_0 + a_0 b_1 x^1 + \dots + a_n b_m x^{n+m}$$

$$\text{allora } \deg(p(x)q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x)) = n + m$$

□

### Proposizione 42

Dato l'anello commutativo  $K[x]$ , si ha che:

$$K[x]^* = K^* = K - \{0\}$$

dunque gli unici elementi invertibili di  $K[x]$  sono i **polinomi costanti**

*Dimostrazione:*

- Supponiamo per assurdo che  $\exists a(x) \neq 0 \in K[x] \mid \deg(a(x)) \geq 1$  e che  $\exists a(x)^{-1} \neq 0 \in K[x] \mid \deg(a(x)^{-1}) \geq 0$ , da cui otteniamo che:

$$\deg(1) = \deg(a(x)a(x)^{-1}) = \deg(a(x)) + \deg(a(x)^{-1}) \geq 1$$

giungendo quindi ad una contraddizione, poiché  $1 \in K \implies \deg(1) = 0$ . Dunque, l'unica possibilità è:

$$\deg(a(x)) \geq 1 \implies a(x) \neq 0 \notin K[x]^*$$

da cui ricaviamo che

$$a(x) \neq 0 \in K[x]^* \implies \deg(a(x)) = 0$$

- Supponiamo invece che  $\deg(a(x)) = 0$ , implicando che

$$\exists a_0 \neq 0 \in K \mid a(x) = a_0 \implies \exists a_0^{-1} \in K \mid a_0 a_0^{-1} = 1 \implies$$

da cui concludiamo che:

$$\deg(a(x)) = 0 \implies a(x) \neq 0 \in K[x]^*$$

□

## 7.1 Divisione con resto di polinomi

### Teorema 15: Divisione con resto di polinomi

Dati  $a(x), b(x) \in K[x]$  con  $b(x) \neq 0$  allora

$$\exists! q(x), r(x) \in K[x] \mid a(x) = b(x)q(x) + r(x)$$

dove  $\deg(r(x)) < \deg(b(x))$

*Dimostrazione unicità (esistenza omessa):*

- Supponiamo che

$$b(x)q_1(x) + r_1(x) = a(x) = b(x)q_2(x) + r_2(x)$$

dove  $\deg(r_1(x)), \deg(r_2(x)) < \deg(b(x))$ , da cui otteniamo che:

$$\deg(r_1(x)), \deg(r_2(x)) < \deg(b(x)) \implies \deg(r_1(x) - r_2(x)) < \deg(b(x))$$

- Dunque si ha che:

$$\begin{aligned} b(x)q_1(x) + r_1(x) &= b(x)q_2(x) + r_2(x) \implies b(x)[q_1(x) - q_2(x)] = r_2(x) - r_1(x) \implies \\ &\implies \deg(r_2(x) - r_1(x)) = \deg(b(x)) + \deg(q_1(x) - q_2(x)) \end{aligned}$$

- Nel caso in cui  $\deg(q_1(x) - q_2(x)) \geq 0$ , avremmo  $\deg(r_2(x) - r_1(x)) \geq \deg(b(x))$ , contraddicendo l'ipotesi. Di conseguenza, l'unica possibilità è

$$\deg(q_1(x) - q_2(x)) = -\infty \iff q_1(x) - q_2(x) = 0 \iff q_1(x) = q_2(x)$$

- A questo punto, quindi, si ha che:

$$\begin{aligned} b(x)[q_1(x) - q_2(x)] &= r_2(x) - r_1(x) \implies b(x) \cdot 0 = r_1(x) - r_1(x) \iff \\ &\iff 0 = r_2(x) - r_1(x) \iff r_1(x) = r_2(x) \end{aligned}$$

□

**Esempio:**

- Calcolo della divisione con resto di  $a(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 4$  e  $b(x) = x^2 - x + 1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} +2x^4 & +3x^3 & -2x^2 & +x & -4 & \\ -2x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\ \hline & +5x^3 & -4x^2 & +x & -4 & \\ & -5x^3 & +5x^2 & -5x & & \\ \hline & & x^2 & -4x & -4 & \\ & & -x^2 & +x & -1 & \\ \hline & & & +3x & -5 & \end{array}$$

Quindi concludiamo che:

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 4 = (x^2 - x + 1)(2x^2 + 5x + 1) + 3x - 5$$

### Metodo 2: Regola di Ruffini

Dati  $a(x), b(x) \in K[x]$  dove  $b(x) = x - c, \exists c \in K$ , è facile calcolare il quoziente  $q(x) \in K[x]$  e il resto  $r(x) = r_0 \in K$  della divisione di  $a(x)$  per  $b(x)$ :

1. Sia  $a(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$  con  $a_n \neq 0$
2. Poiché  $\deg(a(x)) = \deg(b(x)) + \deg(q(x)) = 1 + \deg(q(x)) \implies \deg(q(x)) = \deg(a(x)) - 1$ , allora

$$q(x) = q_0 + \dots + q_{n-1} x^{n-1}$$

dove  $q_0, \dots, q_{n-1}$  sono dati da:

- $q_{n-1} = a_n$
- $q_{n-1-k} = cq_{n-k} + a_{n-k}$
- $r_0 = cq_0 + a_0$

3. In formato grafico, riassumiamo tale concetto con:

	$a_n$	$a_{n-1}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$c$		$cq_{n-1}$	$\dots$	$cq_1$	$cq_0$
	$q_{n-1}$	$q_{n-2}$	$\dots$	$q_0$	$r_0$

### Esempio:

- Calcolare la divisione tra  $a(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 5$  e  $b(x) = x + 2$

	1	-3	0	2	-5
-2		-2	10	-20	36
	1	-5	10	-18	31

Dunque si ha che:

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 5 = (x + 2)(x^3 - 5x^2 + 10x - 18) + 31$$

### Teorema 16: Teorema del fattore

Dato  $p(x) \in K[x]$  e dato  $c \in K$

$$p(c) = 0 \iff x - c \mid p(x)$$

in tal caso,  $c$  viene detta **radice (o zero) del polinomio**

*Dimostrazione:*

$$\bullet \quad x - c \mid p(x) \implies p(c) = 0$$

$$x - c \mid p(x) \implies p(x) = (x - c)q(x) \implies p(c) = (c - c)q(c) = 0$$

$$\bullet \quad p(c) = 0 \implies x - c \mid p(x)$$

– Siano  $q(x)$  e  $r(x)$  il quoziente e il resto della divisione di  $p(x)$  per  $(x - c)$

$$p(x) = (x - c)q(x) + r(x)$$

– Poiché per definizione stessa di divisione con resto tra polinomi si ha che  $\deg(r(x)) < \deg(x - c)$ , ne segue che:

$$\deg(r(x)) < \deg(x - c) \implies \deg(r(x)) < 1 \implies r := r(x) \in K$$

– Infine, per ipotesi si ha che

$$\begin{aligned} 0 = p(c) &= (c - c)q(c) + r \implies 0 = (c - c)q(c) + r \implies \\ &\implies 0 = 0 + r \implies r = 0 \end{aligned}$$

dunque, la divisione non ha resto, implicando che:

$$(x - c) \mid p(x)$$

□

### Proposizione 43

Dato  $p(x) \in K[x] \mid \deg(a(x)) = n$ , allora  $a(x)$  ha al massimo  $n$  radici

Inoltre, se  $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ , allora, per il teorema fondamentale dell'algebra, esistono esattamente  $n$  radici

*Dimostrazione:*

- Sia  $\deg(p(x)) = n$  e siano per assurdo  $c_1, \dots, c_m$  dove  $m > n$  e  $c_i \neq c_j \iff i \neq j$  tali che

$$p(c_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq m$$

- Poiché un polinomio può essere scritto come il prodotto di tutte le sue radici, si verifica che:

$$\begin{cases} x - c_1 \mid p(x) \\ \vdots \\ x - c_m \mid p(x) \end{cases} \implies \underbrace{(x - c_1) \cdot \dots \cdot (x - c_m)}_{q(x)} \mid p(x)$$

- Poiché  $\deg(q(x)) = m$ , tale divisione risulta essere impossibile, poiché un polinomio non può dividere un polinomio di grado minore

□



## 7.2 Proprietà dell'anello polinomiale

### Proposizione 44

L'anello commutativo  $K[x]$  è un **dominio di integrità** poiché vale la **legge di annullamento del prodotto**

### Corollario 24

Dato il dominio di integrità  $K[x]$  e dati  $p(x), q(x) \in K[x]$ , si ha che:

$$I(p(x)) = I(q(x)) \iff p(x) = c \cdot q(x), \exists c \in K[x]^*$$

(*dimostrazione nella sezione 4.3*)

### Teorema 17

L'anello commutativo  $K[x]$  è un **dominio ad ideali principali**, dunque

$$\exists! p(x) \in I \mid I = I(p(x))$$

*Dimostrazione esistenza:*

- $I \subseteq I(p(x))$ 
  - Sia  $p(x) \neq 0 \in I$  del più piccolo grado possibile.
  - Dato  $a(x) \in I \mid a(x) = p(x)q(x) + r(x)$  si ha che  $\deg(r(x)) < \deg(p(x))$ , da cui ricaviamo che:

$$a(x) = p(x)q(x) + r(x) \in I \implies r(x) = a(x) - p(x)q(x) \in I$$

- Tuttavia, poiché  $p(x)$  è il polinomio non nullo all'interno dell'ideale del più piccolo grado possibile e poiché  $\deg(r(x)) < \deg(p(x))$ , ne segue necessariamente che  $r(x) = 0$ .
- Dunque, si ha che:

$$a(x) = p(x)q(x) + r(x) \in I \implies a(x) = p(x)q(x) \implies a(x) \in I(p(x))$$

- $I(p(x)) \subseteq I$ 
  - Dato  $p(x) \neq 0 \in I$  del più piccolo grado possibile, si ha che:

$$a(x) \in I(p(x)) \implies a(x) = p(x)b(x), \exists b(x) \in K[x] \implies a(x) \in I$$

poiché  $p(x) \in I$

*Dimostrazione unicità:*

- Se  $I = \{0\}$ , allora  $I = I(0)$
- Sia invece  $p(x) \neq 0 \in I$  del più piccolo grado possibile tale che  $I = I(p(x))$ , implicando che

$$\forall q(x) \in I \mid \deg(q(x)) < \deg(p(x)) \implies q(x) = 0$$

dunque non può esistere un polinomio in  $I$  con grado minore di  $p(x)$

□

### Definizione 59: MCD di polinomi

Dati  $a_1(x), \dots, a_n(x) \in K[x]$ , definiamo  $d(x) \in K[x]$  come **massimo comun divisore** di  $a_1(x), \dots, a_n(x)$ , indicato come  $d(x) := \text{MCD}(a_1(x), \dots, a_n(x))$ , se dato  $k(x) \in K[x]$  si verifica che

$$k(x) \mid a_1(x) \wedge \dots \wedge k(x) \mid a_n(x) \iff k(x) \mid d(x)$$

### Proposizione 45: Identità di Bézout tra polinomi

Dati  $a_1(x), \dots, a_n(x) \in K[x]$  e dato  $d(x) := \text{MCD}(a_1(x), \dots, a_n(x))$ , si ha che:

$$I(a_1(x), \dots, a_n(x)) = I(d(x))$$

In altre parole, si ha che:

$$\exists x_1(x), \dots, x_n(x) \in \mathbb{Z} \mid a_1(x)x_1(x) + \dots + a_n(x)x_n(x) = d(x)$$

che definiamo come **identità di Bézout** tra polinomi.

### Definizione 60: mcm di polinomi

Dati  $a_1(x), \dots, a_n(x) \in K[x]$ , definiamo  $m(x) \in K[x]$  come **minimo comune multiplo** di  $a_1(x), \dots, a_n(x)$ , indicato come  $m(x) := \text{mcm}(a_1(x), \dots, a_n(x))$ , se dato  $k(x) \in K[x]$  si verifica che

$$a_1(x) \mid k(x) \wedge \dots \wedge a_n(x) \mid k(x) \iff m(x) \mid k(x)$$

**Osservazione 50**

Poiché  $K[x]$  è un dominio di integrità, sappiamo che

$$I(p(x)) = I(q(x)) \iff p(x) = c \cdot q(x), \exists c \in K[x]^*$$

Dunque, dati  $a_1(x), \dots, a_n(x) \in K[x]$ , si ha che  $d(x) := \text{MCD}(a_1(x), \dots, a_n(x))$  e  $m(x) := \text{mcm}(a_1(x), \dots, a_n(x))$  possano essere ben definiti solo a meno di una costante moltiplicativa non nulla.

Affinché valga l'unicità, quindi, basta imporre che i polinomi  $d(x)$  e  $m(x)$  abbiano **coefficiente direttore**  $a_n = 1$

**Definizione 61: Polinomio monico**

Dato  $a(x) = a_0 + \dots + a_n x^n \in K[x]$ , definiamo  $a(x)$  come **polinomio monico** se e solo se  $a_n = 1$

**Proposizione 46: Prodotto tra mcm e MCD di polinomi**

Dati  $a(x), b(x) \in K[x]$ , si ha che:

$$\text{mcm}(a(x), b(x)) \cdot \text{MCD}(a(x), b(x)) = a(x)b(x)$$

(*dimostrazione omessa*)

**Teorema 18: Radici comuni tra due polinomi**

Dati  $a_1(x), \dots, a_n(x) \in K[x]$  data  $c \in K$ , si ha che:

$$a_1(c) = \dots = a_n(c) = 0 \iff d(c) = 0$$

dove  $d(x) := \text{MCD}(a_1(x), \dots, a_n(x)) \in K[x]$ .

In altre parole, le uniche radici in comune tra due polinomi sono le radici del loro MCD

*Dimostrazione:*

- Sia  $c \in K$  tale che:

$$a_i(c) = 0, \forall i \in [1, n] \iff (x - c) \mid a_i(x), \forall i \in [1, n]$$

- Poiché  $d(x) := \text{MCD}(a_1(x), \dots, a_n(x))$ , per definizione stessa si ha che:

$$(x - c) \mid a_i(x), \forall i \in [1, n] \implies (x - c) \mid d(x) \iff d(c) = 0$$

- Viceversa, sempre per definizione stessa di  $d(x)$  si ha che:

$$d(c) = 0 \implies (x - c) \mid d(x), d(x) \mid a_i(x), \forall i \in [1, n] \implies (x - c) \mid a_i(x), \forall i \in [1, n]$$

□

### Proposizione 47

Dato  $p(x) \in K[x]$ , si ha che:

$$p(x) \text{ elemento irriducibile} \iff p(x) \text{ elemento primo}$$

*Dimostrazione:*

- Sappiamo già che in un dominio di integrità si ha:

$$p(x) \text{ primo} \implies p(x) \text{ irriducibile}$$

(*dimostrazione nella sezione 4.4*)

- Dati  $a(x), b(x) \in K[x]$ , supponiamo che  $p(x) \mid a(x)b(x)$ :

$$p(x) \mid a(x)b(x) \iff a(x)b(x) = p(x)k(x), \exists k(x) \in K[x]$$

- Se  $p(x) \nmid a(x)$ , si ha che  $d(x) := \text{MCD}(p(x), a(x)) = 1$ . Dunque, tramite l'identità di Bézout otteniamo che:

$$\begin{aligned} \exists f(x), g(x) \in K[x] \mid d(x) = p(x)f(x) + a(x)g(x) &\implies \\ \implies 1 = p(x)f(x) + a(x)g(x) &\implies b(x) = p(x)b(x)f(x) + a(x)b(x)g(x) \implies \\ \implies b(x) = p(x)b(x)f(x) + [a(x)b(x)]g(x) &\implies b(x) = p(x)b(x)f(x) + p(x)k(x)g(x) \implies \\ \implies b(x) = p(x)[q(x)f(x) + g(x)b(x)] &\implies p(x) \mid b(x) \end{aligned}$$

- Analogamente, se  $p(x) \nmid b(x)$  si ha che  $d(x) := \text{MCD}(p(x), b(x)) = 1$ . Dunque, seguendo gli stessi passaggi otteniamo che  $p(x) \mid a(x)$
- Concludiamo quindi che se  $p(x)$  è irriducibile, allora:

$$p(x) \mid a(x)b(x) \implies p(x) \mid a(x) \vee p(x) \mid b(x)$$

□

### Lemma 13

Dato  $p(x) \in K[x]$ , si ha che:

$$\deg(p(x)) = 1 \implies p(x) \text{ irriducibile}$$

*Dimostrazione:*

- Se  $\deg(p(x)) = 1$  allora

$$p(x) = a(x)b(x) \implies \begin{cases} \deg(a(x)) = 0, \deg(b(x)) = 1 \implies a(x) \in \mathbb{C}[x]^* \\ \deg(a(x)) = 1, \deg(b(x)) = 0 \implies b(x) \in \mathbb{C}[x]^* \end{cases}$$

dunque  $p(x)$  è irriducibile

□

### Proposizione 48

Dato  $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ , si ha che:

$$p(x) \in \mathbb{C}[x] \text{ irriducibile} \iff \deg(p(x)) = 1$$

*Dimostrazione:*

- Sappiamo già che  $\deg(p(x)) = 1 \implies p(x)$  irriducibile
- Consideriamo quindi il caso in cui  $\deg(p(x)) = 0$ , allora

$$\deg(p(x)) = 0 \iff p(x) \in \mathbb{C}^*$$

dunque  $p(x)$  non può essere irriducibile per definizione stessa

- Sia invece  $\deg(p(x)) > 1$ . Per il teorema fondamentale dell'algebra si ha che:

$$\exists z \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0 \iff x - z \mid p(x) \iff$$

$$\iff p(x) = (x - z)q(x), \exists q(x) \in \mathbb{C}[x] \implies$$

$$\implies \deg(q(x)) = \deg(p(x)) - 1 > 0 \implies q(x) \notin \mathbb{C}^* = \mathbb{C}[x]^*$$

dunque  $p(x)$  non può essere irriducibile poiché  $\deg((x - z)) = 1 \implies (x - z) \notin \mathbb{C}[x]^*$  e  $q(x) \notin \mathbb{C}[x]^*$ .

- Dunque si ha che

$$\deg(p(x)) \neq 1 \implies p(x) \text{ non irriducibile}$$

che per contronominale implica che

$$p(x) \text{ irriducibile} \implies \deg(p(x)) = 1$$

□

### Proposizione 49

Dato  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ , si ha che:

$$p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ irriducibile} \iff \deg(p(x)) = 1 \text{ oppure } \deg(p(x)) = 2, \Delta < 0$$

dove  $\deg(p(x)) = 2 \implies p(x) = ax^2 + bx + c, \Delta := b^2 - 4ac$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$ , la dimostrazione in entrambi i lati dei casi con  $\deg(p(x)) = 1$  è analoga alla precedente
- Supponiamo quindi per assurdo che  $\deg(p(x)) = 2, \Delta < 0$  e che  $p(x)$  non sia irriducibile, implicando che:

$$\exists a(x)b(x) \in \mathbb{R}[x] - \mathbb{R}[x]^* \mid p(x) = a(x)b(x) \wedge \deg(p(x)) = 2$$

$$\implies \deg(a(x)) = \deg(b(x)) = 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \exists c, d \in \mathbb{R} \mid a(x) = cx + d \implies a(-c^{-1}d) = 0 \iff (x + c^{-1}d) \mid a(x) \\ \exists f, g \in \mathbb{R} \mid b(x) = fx + g \implies b(-f^{-1}g) = 0 \iff (x + f^{-1}g) \mid b(x) \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} (x + c^{-1}d) \mid a(x), a(x) \mid p(x) \implies (x + c^{-1}d) \mid p(x) \iff p(-c^{-1}d) = 0 \\ (x + f^{-1}g) \mid b(x), b(x) \mid p(x) \implies (x + f^{-1}g) \mid p(x) \iff p(-f^{-1}g) = 0 \end{cases}$$

dunque  $x_1 := -c^{-1}d \in \mathbb{R}$  e  $x_2 := -f^{-1}g \in \mathbb{R}$  sarebbero le radici di  $p(x)$ , contraddicendo l'ipotesi per cui  $\Delta < 0 \implies x_1, x_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ .

Dunque, l'unica possibilità è:

$$\deg(p(x)) = 2, \Delta < 0 \implies p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ irriducibile}$$

- Sia quindi  $p(x) := a_0 + \dots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$  irriducibile con  $\deg(p(x)) > 1$ . Per il teorema fondamentale dell'algebra,  $\exists z := c + id \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0 \iff (x - z) \mid p(x)$
- Poiché  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , si ha che:

$$\forall j \in [1, n], \exists d_j \in \mathbb{R} \mid a_j := d_j + i \cdot 0 = d_j - i \cdot 0 =: \overline{a_j} \implies a_j = \overline{a_j}, \forall j \in [1, n]$$

dunque, per le proprietà dei complessi coniugati (sezione 2.1), ne segue che:

$$p(\overline{z}) = a_0 + \dots + a_n \overline{z}^n = a_0 + \dots + a_n \overline{z}^n = \overline{a_0} + \dots + \overline{a_n} \overline{z}^n = \overline{a_0} + \dots + \overline{a_n} \overline{z}^n =$$

$$\overline{a_0 + \dots + a_n z^n} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0 \implies p(\overline{z}) = 0 \iff (x - \overline{z}) \mid p(x)$$

dove per definizione si ha  $\overline{z} = c - id$

- Nel caso in cui  $d = 0$ , ne seguirebbe che  $z = \overline{z}$ , implicando che:

$$(x - z) \mid p \iff p(x) = q(x)(x - z), \exists q(x) \in \mathbb{R}[x] \implies$$

$$\implies \deg(q(x)) + \deg(x - z) = \deg(p(x)) > 1 \implies$$

$$\implies \deg(q(x)) + 1 > 1 \implies \deg(q(x)) > 0 \implies q(x) \notin K^*$$

rendendo quindi tale caso è impossibile, poiché altrimenti si avrebbe che  $p(x)$  non sia irriducibile in quanto  $q(x), (x - z) \notin K^*$

- Sia quindi  $d \neq 0$ , implicando che  $z \neq \bar{z}$ :

$$\begin{aligned} (x - z) \mid p(x), (x - \bar{z}) \mid p(x) &\implies (x - z)(x - \bar{z}) \mid p(x) \implies \\ \implies x^2 - \bar{z}x - zx + z \cdot \bar{z} \mid p(x) &\implies x^2 - (\bar{z} + z)x + z \cdot \bar{z} \mid p(x) \implies \\ \implies x^2 - (c - id + c + id)x + (c + id)(c - id) \mid p(x) &\implies x^2 - 2cx + c^2 + d^2 \mid p(x) \end{aligned}$$

- Poiché  $p(x)$  è irriducibile, l'unica possibilità è:

$$\begin{aligned} x^2 - 2cx + c^2 + d^2 \mid p(x) &\implies p(x) = k(x^2 - 2cx + c^2 + d^2), \exists k \in \mathbb{R}[x]^* = \mathbb{R}^* \implies \\ \implies p(x) = kx^2 - 2kcx + kc^2 + kd^2 &\implies \Delta = (-2kc)^2 - 4k^2(c^2 + d^2) \implies \\ \implies \Delta = 4k^2c^2 - 4k^2c^2 - 4k^2d^2 &\implies \Delta = -4k^2d^2 < 0 \end{aligned}$$

□

### Teorema 19: Fattorizzazione in polinomi irriducibili e monici

Dato  $p(x) \neq 0 \in K[x]$ , si ha che:

$$\exists! q_1(x), \dots, q_k(x) \neq 0 \in K[x], \exists c \in K^* \mid p(x) = c \cdot q_1(x) \cdot \dots \cdot q_k(x)$$

dove  $q_1(x), \dots, q_k(x)$  sono **polinomi monici e irriducibili**

*Dimostrazione esistenza:*

- Supponiamo che  $\deg(p(x)) = 1$ , implicando che  $p(x) = ax + b, \exists a, b \neq 0 \in K$
- Poiché  $a, b \neq 0 \implies a, b \in K^* \implies \exists a^{-1}, b^{-1} \in K^*$ , ne segue che

$$p(x) = ax + b \implies p(x) = a \left( x + \frac{b}{a} \right) \implies p(x) = a(x + ba^{-1})$$

dove  $a$  e  $\deg(x - ba^{-1}) = 1 \implies (x - ba^{-1})$  irriducibile, dunque esiste una fattorizzazione di  $p(x)$  in polinomi monici ed irriducibili

- Sia quindi  $p(x) \in K[x] \mid \deg(p(x)) > 1$  dove

$$\exists a(x), b(x) \in K[x] \mid p(x) = d(x)f(x)$$

e supponiamo per ipotesi induttiva che  $a(x)$  e  $b(x)$  siano fattorizzabili in polinomi monici ed irriducibili:

$$\exists! q_1(x), \dots, q_k(x) \in K[x], \exists c \in K^* \mid d(x) = c \cdot q_1(x) \cdot \dots \cdot q_k(x)$$

$$\exists! q'_1(x), \dots, q'_k(x) \in K[x], \exists c' \in K^* \mid f(x) = c' \cdot q'_1(x) \cdot \dots \cdot q'_k(x)$$

da cui ne segue che:

$$\begin{aligned} p(x) = d(x)f(x) &= c \cdot q_1(x) \cdot \dots \cdot q_k(x) \cdot c' \cdot q'_1(x) \cdot \dots \cdot q'_k(x) = \\ &= (c \cdot c') \cdot q_1(x) \cdot \dots \cdot q_k(x) \cdot q'_1(x) \cdot \dots \cdot q'_k(x) \end{aligned}$$

dunque  $p(x)$  è fattorizzabile in polinomi monici ed irriducibili

*Dimostrazione unicità:*

- Se  $\deg(p(x)) = 0$  allora  $\exists! c \in K^* \mid p(x) = c$
- Sia quindi  $\deg(p(x)) > 0$ . Notiamo inoltre che dato  $p(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , affinché la fattorizzazione possa essere in polinomi monici ed irriducibili ne segue necessariamente che  $c = c' = a_n$ .
- Supponiamo quindi che esistano due fattorizzazioni possibili in polinomi monici ed irriducibili per  $p(x)$ :

$$c \cdot q_1(x) \cdot \dots \cdot q_k(x) = p(x) = c' \cdot q'_1(x) \cdot \dots \cdot q'_j(x) \implies$$

$$c \cdot q_1(x) \cdot \dots \cdot q_k(x) = c' \cdot q'_1(x) \cdot \dots \cdot q'_j(x) \implies q_1(x) \mid q'_1(x) \cdot \dots \cdot q'_j(x)$$

- Tuttavia, poiché  $q_1(x)$  irriducibile se e solo se è primo, ne segue che:

$$q'_1(x) \cdot \dots \cdot q'_j(x) \mid q'_1(x) \vee \dots \vee q_1(x) \mid q'_j(x)$$

- Per comodità, assumiamo che  $q'_1(x)$  il polinomio per cui  $q_1(x) \mid q'_1(x)$ :

$$q_1(x) \mid q'_1(x) \iff q'_1(x) = d \cdot q_1(x), \exists d \in K^* \implies$$

$$c \cdot q_1(x) \cdot \dots \cdot q_k(x) = c' \cdot d \cdot q_1(x) \cdot \dots \cdot q'_j(x) \implies$$

$$\implies c \cdot q_2(x) \cdot \dots \cdot q_k(x) = \frac{p(x)}{q_1(x)} = c' \cdot d \cdot q'_2(x) \cdot \dots \cdot q'_j(x)$$

- Poiché  $\deg\left(\frac{p(x)}{q_1(x)}\right) < \deg(p(x))$  possiamo concludere che  $k = k$  e, a meno di riordinare i fattori, possiamo assumere che  $q_2(x) = q'_2(x), \dots, q_k(x) = q'_j(x)$

□

### Teorema 20

Sia  $p(x) := a_0 + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$  dove  $a_0, a_n \neq 0$ . Se  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  è radice di  $p(x)$  e  $\text{MCD}(a, b) = 1$ , allora

$$p\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \implies a \mid a_0, b \mid a_n$$

e di conseguenza che:

$$a \nmid a_0 \vee b \nmid a_n \implies p\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$$

*Dimostrazione:*

- Supponendo che  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p\left(\frac{a}{b}\right) = 0, \text{MCD}(a, b) = 1$ , ne segue che:

$$0 = p\left(\frac{a}{b}\right) = a_0 + a_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + \dots + a_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n \implies$$

$$\implies b^n \cdot 0 = b^n \left( a_0 + a_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + \dots + a_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n \right) \implies$$



$$\begin{aligned}
&\implies 0 = a_0 b^n + \dots + a_{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot b + a_n a^n \implies \\
&\implies a_n a^n = -a_0 b^n - \dots - a_{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot b \implies \\
&\implies a_n a^n \cdot \frac{1}{b} = -a_0 b^{n-1} - \dots - a_{n-1} \cdot a^{n-1} \implies b \mid a_n a^n
\end{aligned}$$

- Poiché  $\text{MCD}(a, b) = 1 \implies \text{MCD}(a^n, b) = 1$ , allora

$$b \mid a_n a^n \implies b \mid a_n$$

- Analogamente, seguendo gli stessi passaggi arriviamo a dimostrare che  $\text{MCD}(a, b) = 1 \implies \text{MCD}(a, b^n) = 1$  implica che

$$a \mid a_0 b^n \implies a \mid a_0$$

□

### Esempi:

- Dato  $p(x) = x^3 - 19x - 30$ , se  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  fosse soluzione, allora

$$p\left(\frac{a}{b}\right) \implies a \mid 30, b \mid 1$$

quindi le uniche soluzioni possibili di  $p(x)$  possono essere:

$$x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$$

- Dato  $p(x) = 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$ , se  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  fosse soluzione, allora

$$p\left(\frac{a}{b}\right) \implies a \mid -1, b \mid 6$$

quindi le uniche soluzioni possibili di  $p(x)$  possono essere:

$$x = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}$$

## 7.3 Polinomi in $\mathbb{Z}_p$

### Lemma 14

Dato  $p \in \mathbb{P}$ , si ha che:

$$\prod_{0 < a < p} (x - a) \equiv x^{p-1} - 1 \pmod{p}$$

*Dimostrazione:*

- Sia  $q(x) := x^{p-1} - [1] \in \mathbb{Z}_p$ . Per il piccolo teorema di Fermat, dato  $0 < a < p$  si ha che:

$$\begin{aligned} a^{p-1} &\equiv 1 \pmod{p} \implies a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \implies \\ &\implies q([a]) \equiv 0 \pmod{p} \iff x - [a] \mid q(x) \end{aligned}$$

- Dunque, si ha che:

$$\begin{aligned} x - [a] \mid q(x), \forall 0 < a < p &\implies \prod_{0 < a < p} (x - [a]) \mid q(x) \implies \\ &\implies q(x) = k \cdot \prod_{0 < a < p} (x - [a]), \exists k \in \mathbb{Z} \implies \end{aligned}$$

ottenendo quindi una fattorizzazione in polinomi monici ed irriducibili

- Poiché il coefficiente direttore di  $q(x)$  è 1, affinché la fattorizzazione sia valida ne segue necessariamente che  $k = 1$ , concludendo che:

$$\prod_{0 < a < p} (x - a) \equiv x^{p-1} - 1 \pmod{p}$$

□

### Lemma 15

Dato  $d \in \mathbb{N}$  tale che  $d \mid p - 1$ , l'equazione  $x^d \equiv 1 \pmod{p}$  ammette  $d$  soluzioni distinte in  $\mathbb{Z}_p$

*Dimostrazione:*

- Sia  $d \in \mathbb{N}$  tale che  $d \mid p - 1$ . Ne segue che:

$$d \mid p - 1 \implies p - 1 = dk, \exists k \in \mathbb{Z}$$

- Per dimostrazione precedente, si ha che:

$$\begin{aligned} \prod_{0 < a < p} (x - a) &\equiv x^{p-1} - 1 \pmod{p} \implies \prod_{0 < a < p} (x - a) \equiv x^{dk} - 1 \pmod{p} \implies \\ &\implies \prod_{0 < a < p} (x - a) \equiv (x^d)^k - 1^k \pmod{p} \implies \prod_{0 < a < p} (x - a) \equiv (x^d - 1)^k \pmod{p} \implies \\ &\implies \prod_{0 < a < p} (x - a) \equiv (x^d - 1)(x^d - 1)^{k-1} \pmod{p} \end{aligned}$$

- Posto  $q(x) := (x^d - 1)^{n-1}$ , si ha che:

$$\begin{aligned} \prod_{0 < a < p} (x - a) &\equiv (x^d - 1)q(x) \pmod{p} \\ &\implies x - [a] \mid x^d - [1] \vee x - [a] \mid q(x), \forall 0 < a < p \end{aligned}$$

- Dunque, sia  $0 < b < p$  tale che  $x - [b] \mid x^d - [1]$ . Ne segue che:

$$\prod_{0 < a < p, a \neq b} (x - a) \equiv q(x) \pmod{p}$$

- Per motivi di grado, ripetendo tale procedimento su  $q(x)$  e i suoi fattori, otterremo esattamente  $d$  radici di  $x^d - [1]$

□

**Lemma 16**

Dato  $d \in \mathbb{N}$  tale che  $d \mid p - 1$ , allora

$$\exists [a] \in \mathbb{Z}_p \mid o([a]) = d$$

*Dimostrazione:*

- Se  $d = 1$ , allora  $\exists 1 \in \mathbb{Z}_p^* \mid o([1]) = 1$
- Se invece  $d = q^k$  dove  $q \in \mathbb{P}$ , allora per il lemma precedente si ha che:

$$d = q^k \implies q^k \mid p - 1 \implies \begin{cases} x^{q^k} \equiv 1 \pmod{p} \text{ ha } q^k \text{ soluzioni} \\ x^{q^k-1} \equiv 1 \pmod{p} \text{ ha } q^k - 1 \text{ soluzioni} \end{cases}$$

dunque  $\exists [a] \in \mathbb{Z}_p$  che è soluzione di  $x^{q^k} = [1]$  ma non di  $x^{q^k-1} = [1]$ , implicando che:

$$o([a]) \mid q^k, o([a]) \nmid q^{k-1} \implies o([a]) = q^k$$

- Supponiamo per ipotesi induttiva di aver verificato che per tutti gli  $n$  divisori di  $p - 1$  più piccoli di  $d$  che  $\exists [b] \in \mathbb{Z}_p \mid o([b]) = n$
- Sia quindi  $d = nq^k$  dove  $q \in \mathbb{P} \mid \text{MCD}(n, q^k) = 1$ . Per induzione, si ha che:

$$\exists [b], [c] \in \mathbb{Z}_p \mid o([b]) = n, o([c]) = q^k$$

- Infine, come visto nella sezione 4.11, poiché  $\text{MCD}(o([b]), o([c])) = 1$  si ha che:

$$\exists a \in \mathbb{Z}_p \mid [a] = [bc] \implies o([a]) = nq^k = d$$

□

**Proposizione 50**

Il gruppo  $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ , dove  $p \in \mathbb{P}$ , è **sempre ciclico**

*Dimostrazione:*

- Per il lemma precedente, si ha che:

$$p - 1 \mid p - 1 \implies \exists [a] \in \mathbb{Z}_p^* \mid o([a]) = p - 1 = |\mathbb{Z}_p^*| \implies \mathbb{Z}_p^* = H([a])$$

□

# 8

## Spazi vettoriali

### Definizione 62: Spazio vettoriale

Dato un campo  $K$ , definiamo come **spazio vettoriale su  $K$**  una struttura algebrica  $(V, +, \cdot)$ , dove

$$+ : V \times V \rightarrow V : (u, v) \mapsto w$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V : (\lambda, v) \mapsto w$$

soddisfacente i seguenti assiomi:

- $(V, +)$  è un gruppo abeliano
- $\forall s, t \in K, v \in V \implies s(t \cdot v) = stv = (s \cdot t)v$  (**Associatività scalare**)
- $1 \in K, v \in V \implies 1 \cdot v = v$  (**Elemento neutro**)
- $\forall s, t \in K, v \in V \implies (s + t)v = sv + tv$  (**Distributività vettoriale**)
- $\forall s \in K, v, w \in V \implies s(v + w) = sv + sw$  (**Distributività scalare**)

Inoltre, definiamo  $\lambda \in K$  come **scalare** e  $v \in V$  come **vettore**.

### Definizione 63: Insieme di coordinate

Dato un campo  $K$ , definiamo come **insieme di coordinate** un insieme i cui elementi sono tuple di  $n$  elementi appartenenti a  $K$ :

$$K^n = K \times \dots \times K = \{(t_1, \dots, t_n) \mid t_1, \dots, t_n \in K\}$$

### Proposizione 51: Spazio di coordinate

La struttura  $(K^n, +, \cdot)$  è uno **spazio vettoriale**, dove l'**addizione tra vettori** e il **prodotto per scalare** sono definite come:

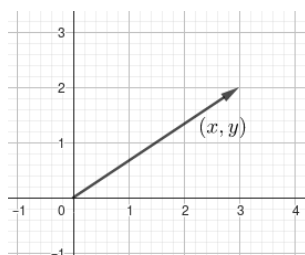
$$\begin{aligned} v &:= (t_1, \dots, t_n) \in K^n \\ w &:= (s_1, \dots, s_n) \in K^n \end{aligned} \implies v + w := (t_1 + s_1, \dots, t_n + s_n) \in K^n$$

$$\lambda \in K, v := (t_1, \dots, t_n) \in K^n \implies \lambda v := (\lambda t_1, \dots, \lambda t_n) \in K^n$$

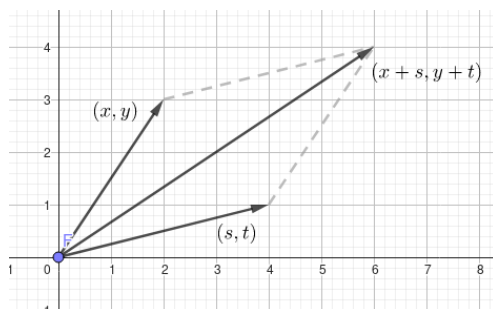
(dimostrazione omessa)

#### Interpretazione geometrica:

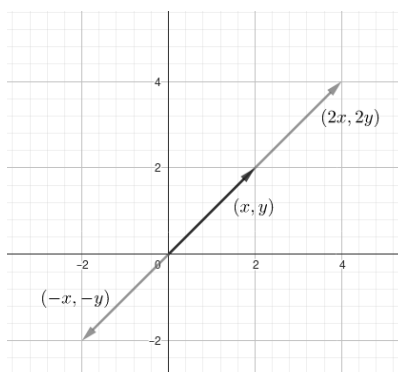
- Dato lo spazio di coordinate  $\mathbb{R}^2$  e un vettore  $v := (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , possiamo rappresentare tale vettore come:



- Preso  $w := (s, t) \in \mathbb{R}^2$ , la somma vettoriale  $v + w$  corrisponde al classico *metodo del parallelogramma* utilizzato in fisica elementare:



- Preso  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il prodotto per scalare  $\lambda \cdot v$  ha la stessa direzione del vettore  $v$ , ma con lunghezza aumentata o diminuita e verso uguale o invertito



**Osservazione 51**

Dato uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $K$ , si ha che:

- $\forall \lambda \in K \implies \lambda \cdot 0_V = 0_V$
- $\forall v \in V \implies 0 \cdot v = 0_V$

Dato  $0_V = (0, \dots, 0) \in V$  è detto **vettore nullo**, ossia l'elemento neutro di  $V$ , e dove  $0$  è l'elemento neutro di  $K$

*Dimostrazione:*

- Dato  $\lambda \in K$ , si ha che:

$$\lambda \cdot 0_V = (\lambda \cdot 0, \dots, \lambda \cdot 0) = (0, \dots, 0) = 0_V$$

- Dato  $v = (t_1, \dots, t_n) \in V$ , si ha che:

$$0 \cdot v = (0 \cdot t_1, \dots, 0 \cdot t_n) = (0, \dots, 0) = 0_V$$

□

**Definizione 64: Sottospazio vettoriale**

Dato un spazio vettoriale  $V$  su  $K$ , definiamo  $W \subseteq V$  come **sottospazio vettoriale** di  $V$  su  $K$  se:

- $(W, +) \leq (V, +)$
- $w \in W, \lambda \in K \implies \lambda w \in W$

**Esempi:**

- $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  non è sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  poiché non vale la seconda condizione
- $\mathbb{R}_{\geq 0}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  non è sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  poiché non vale nessuna delle due condizioni

## 8.1 Span, Generatori e Indipendenza lineare

**Definizione 65: Span**

Dato uno spazio vettoriale  $V$  su  $K$  e dei vettori  $v_1, \dots, v_n \in V$ , definiamo **span** (o **sottospazio generato** da  $v_1, \dots, v_n$ ) l'insieme di tutte le **combinazioni lineari** di tali vettori:

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$$

*Dimostrazione:*

- $0_V = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$
- $v, w \in \text{span}(v_1, \dots, v_n) \implies v + w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)v_n \implies v + w \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$
- $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_n) \implies -v = (-\lambda_1)v_1 + \dots + (-\lambda_n)v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$
- $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_n), c \in K \implies cv = (c\lambda_1)v_1 + \dots + (c\lambda_n)v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$

□

### Definizione 66: Insieme di generatori

Dato uno spazio vettoriale  $V$  su  $K$ , definiamo i vettori  $v_1, \dots, v_n \neq 0_V \in V$  come un **insieme di generatori di  $V$**  se e solo se ogni vettore di  $V$  può essere espresso come una combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_n$ :

$$\forall v \in V, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \mid v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

o analogamente se e solo se:

$$V = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $v_1, \dots, v_n \in V$ , per definizione stessa si ha sempre che  $\text{span}(v_1, \dots, v_n) \subseteq V$
- Dunque, affinché le due definizioni siano equivalenti è sufficiente che:

$$\forall v \in V, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \mid v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \iff V \subseteq \text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

□

### Definizione 67: Indipendenza lineare

Dato uno spazio vettoriale  $V$  su  $K$ , definiamo i vettori  $v_1, \dots, v_n \neq 0_V \in V$  come **linearmente indipendenti** se e solo se:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

In caso contrario, vengono detti **linearmente dipendenti**

### Osservazione 52

Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Dati i vettori  $v_1, \dots, v_n \neq 0_V \in V$ , si ha che:

$$v_1, \dots, v_n \text{ lin. ind.} \iff v_1, \dots, v_{n-1} \text{ lin. ind.} \wedge v_n \notin \text{span}(v_1, \dots, v_{n-1})$$

*Dimostrazione:*

- Nel caso in cui  $v_1, \dots, v_n$  siano linearmente indipendenti, si ha che:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n = 0_V \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$$

da cui ne segue automaticamente che:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0_V \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$$

dunque anche  $v_1, \dots, v_{n-1}$  sono linearmente indipendenti

- Supponiamo quindi che  $v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_{n-1})$ , implicando che:

$$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-1} v_{n-1} = v_n \iff \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0_V \iff$$

$$\iff \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-1} v_{n-1} + (-1)v_n = 0_V$$

dunque  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente dipendenti. Per contronominale, quindi, si ha che:

$$v_1, \dots, v_n \text{ lin. indipendenti} \implies v_n \notin \text{span}(v_1, \dots, v_{n-1})$$

- Viceversa, supponiamo per assurdo che  $v_n \notin \text{span}(v_1, \dots, v_n)$  e che  $\exists \lambda_n \neq 0 \mid \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$ . Ne segue che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \implies \lambda_n v_n = -\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_{n-1} v_{n-1} \implies$$

$$\implies v_n = (-\lambda_n^{-1} \lambda_1) v_1 + \dots + (-\lambda_n^{-1} \lambda_{n-1}) v_{n-1} \implies v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_{n-1})$$

contraddicendo quindi l'ipotesi  $v_n \notin \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ , implicando quindi che l'unica possibilità sia  $\lambda_n = 0$ .

- Di conseguenza, nel caso in cui  $v_1, \dots, v_{n-1}$  siano linearmente indipendenti e  $v_n \notin \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ , otteniamo che:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n = 0_V \iff \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + 0 \cdot v_n = 0_V \iff$$

$$\iff \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0_V \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0 = \lambda_n$$

dunque  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti

□

### Proposizione 52: Estensione a generatore

Dati i vettori **linearmente indipendenti**  $v_1, \dots, v_k \in \text{span}(w_1, \dots, w_n)$ , allora:

- $k \leq n$
- $\exists v_{k+1}, \dots, v_n \in \text{span}(w_1, \dots, w_n) \mid \text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$  dove  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti



*Dimostrazione:*

- Dato  $v_1 \neq 0 \in \text{span}(w_1, \dots, w_n)$ , il quale è ovviamente linearmente indipendente con se stesso, si ha che:

$$\exists \lambda_i \neq 0 \in K, i \in [1, n] \mid v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \neq 0_V$$

- A meno di riordinare i termini, assumiamo che  $\lambda_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n &\implies \lambda_1 w_1 = v - \lambda_2 w_2 - \dots - \lambda_n w_n \implies \\ \implies w_1 &= (\lambda_1^{-1})v + (-\lambda_1^{-1}\lambda_2)w_2 - \dots + (-\lambda_1^{-1}\lambda_n)w_n \implies w_1 \in \text{span}(v_1, w_2, \dots, w_n) \end{aligned}$$

- Poiché  $w_1 = \mu_1 v_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_n w_n \in \text{span}(v_1, w_2, \dots, w_n)$ , ne segue che:

$$\begin{aligned} u \in \text{span}(w_1, \dots, w_n) &\iff u = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = \\ &= \lambda_1(\mu_1 v_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_n w_n) + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = \\ &= (\lambda_1 \mu_1) v_1 + (\lambda_1 \lambda_2 \mu_2) w_2 + \dots + (\lambda_1 \lambda_n \mu_n) w_n \iff u \in \text{span}(v_1, w_2, \dots, w_n) \end{aligned}$$

dunque si ha che  $\text{span}(v_1, w_2, \dots, w_n) = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$

- Supponiamo quindi induttivamente che dati  $v_1, \dots, v_i \in \text{span}(w_1, \dots, w_n)$  linearmente indipendenti, dove  $i \leq n$ , si ha che:

$$\text{span}(v_1, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n) = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$$

- Preso  $v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \dots + \lambda_n w_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n)$ , supponiamo per assurdo che  $\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n = 0$ , implicando che:

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \dots + \lambda_n w_n \implies \\ \implies v_{i+1} &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i + 0 \cdot w_{i+1} + \dots + 0 \cdot w_n \implies \\ \implies v_{i+1} &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i \implies 0_V = (-1)v_{i+1} + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i \end{aligned}$$

contraddicendo l'ipotesi per cui  $v_1, \dots, v_k$  siano linearmente indipendenti, dunque l'unica possibilità è

$$\exists \lambda_j \neq 0, j \in [i+1, n] \mid v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \dots + \lambda_n w_n \neq 0_V \iff$$

- A meno di riordinare i termini, assumiamo che  $\lambda_{i+1} \neq 0$

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \dots + \lambda_n w_n \implies \\ \implies \lambda_{i+1} w_{i+1} &= v_{i+1} - \mu_1 v_1 - \dots - \mu_i v_i - \lambda_{i+2} w_{i+2} - \dots - \lambda_n w_n \implies \\ w_{i+1} &= (\lambda_{i+1}^{-1})v_{i+1} + (-\lambda_{i+1}^{-1}\mu_1)v_1 + \dots + (-\lambda_{i+1}^{-1}\mu_i)v_i + (-\lambda_{i+1}^{-1}\lambda_{i+2})w_{i+2} + \dots + (-\lambda_{i+1}^{-1}\lambda_n)w_n \\ \implies w_{i+1} &\in \text{span}(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_n) \end{aligned}$$

- Poiché  $w_{i+1} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i+1} v_{i+1} + \mu_{i+2} w_{i+2} + \dots + \mu_n w_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_n)$ , procedendo analogamente al caso base si ha che::

$$u \in \text{span}(w_1, \dots, w_n) \iff u \in \text{span}(v_1, \dots, v_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_n)$$

dunque si ha che  $\text{span}(w_1, \dots, w_n) = \text{span}(v_1, \dots, v_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_n)$ , implicando quindi per induzione che

$$\text{span}(w_1, \dots, w_n) = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

- Supponiamo per assurdo che vi possano essere  $k > n$  vettori linearmente indipendenti, dunque che  $\exists v_{n+1} \in \text{span}(w_1, \dots, w_n) \mid v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$  linearmente indipendenti. Poiché  $\text{span}(w_1, \dots, w_n) = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ , ne segue che:

$$v_{n+1} \in \text{span}(w_1, \dots, w_n) = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

contraddicendo l'ipotesi per cui  $v_1, \dots, v_n, v_k$  siano indipendenti, dunque l'unica possibilità è che i vettori linearmente indipendenti siano  $k \leq n$

□

## 8.2 Base e Dimensione

### Definizione 68: Base

Dato uno spazio vettoriale  $V$  su  $K$ , definiamo i vettori  $v_1, \dots, v_n \neq 0_V \in V$  come una **base** se e solo se sono un **insieme di generatori** e **linearmente indipendenti**

### Osservazione 53

Dato uno spazio vettoriale  $V$ , si ha che:

$$v_1, \dots, v_n \text{ base di } V \iff \forall v \in V, \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \mid v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Inoltre, chiamiamo tali unici scalari come **coordinate di  $v$  in base  $v_1, \dots, v_n$**

*Dimostrazione:*

- Nel caso in cui  $\forall v \in V, \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \mid v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ , per definizione stessa di vettori generatori si ha che  $v_1, \dots, v_n$  sono generatori di  $V$
- Inoltre, poiché tali coordinate sono uniche, ne segue naturalmente che:

$$\exists! \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \in K \mid \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$$

dunque  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti

- Viceversa, se  $v_1, \dots, v_n \in V$  sono una base di  $V$ , si ha che:

$$V = \text{span}(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$$

- Dato  $v \in V$ , supponiamo per assurdo che esistano due combinazioni lineari di  $v_1, \dots, v_n$  tali che

$$\begin{aligned} \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n &\implies \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \implies \\ \implies \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n - \lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_n v_n = 0_V &\implies (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0_V \end{aligned}$$

- Poiché  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti, si ha che:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0_V &\iff (\lambda_1 - \mu_1) = \dots = (\lambda_n - \mu_n) = 0 \iff \\ &\iff \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n \end{aligned}$$

□

#### Osservazione 54: Base canonica

Dato uno spazio di coordinate  $K^n$ , definiamo i vettori  $e_1, \dots, e_n \in K^n$  come **base canonica di  $K^n$** , dove:

$$e_i = (a_1, \dots, a_n) \mid \begin{cases} a_j = 0 & \text{se } j \neq i \\ a_j = 1 & \text{se } j = i \end{cases}$$

*Dimostrazione:*

- Dati  $e_1, \dots, e_n \in K^n$  definiti come:

$$\begin{aligned} - e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ - e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0) \\ - &\vdots \\ - e_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

- Si ha che:

$$\begin{aligned} v = (t_1, \dots, t_n) \in K^n &\iff v = (t_1, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, t_n) \\ &\iff v = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n \in \text{span}(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

dunque tali vettori sono generatori poiché  $K^n = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$

- Analogamente, si ha che:

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (0, \dots, 0) &\iff (\lambda_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0) \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0) &\iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

dunque tali vettori sono anche linearmente indipendenti, costituendo quindi una base di  $K^n$

□

**Teorema 21: Teorema della cardinalità delle basi**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Se  $v_1, \dots, v_n$  e  $w_1, \dots, w_m$  sono due basi di  $V$ , si ha necessariamente che  $n = m$ .

Dunque tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno la **stessa cardinalità**

*Dimostrazione:*

- Poiché i due insiemi di vettori sono entrambi base di  $V$ , si ha che

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V = \text{span}(w_1, \dots, w_m)$$

- Di conseguenza, poiché i vettori  $v_1, \dots, v_n \in V = \text{span}(w_1, \dots, w_m)$  sono linearmente indipendenti, ne segue che  $n \leq m$
- Analogamente, poiché i vettori  $w_1, \dots, w_m \in V = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$  sono linearmente indipendenti, ne segue che  $m \leq n$
- Dunque, l'unica possibilità è che  $n = m$

□

**Definizione 69: Dimensione di uno spazio vettoriale**

Dato uno spazio vettoriale  $V$ , definiamo come **dimensione di  $V$** , indicata come  $\dim(V)$  la **cardinalità di una sua qualsiasi base** (poiché ogni base di  $V$  ha la stessa cardinalità).

Nel caso in cui non esista un insieme finito di generatori di  $V$ , definiamo la sua dimensione come **infinita**.

**Esempi:**

- Lo spazio di coordinate  $K^n$  e la sua base canonica  $e_1, \dots, e_n$ , si ha che:

$$\dim(K^n) = n$$

- Lo spazio vettoriale  $K[x]$  non può avere base finita: dati  $p_1(x), \dots, p_n(x) \in V$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  si ha che:

$$\deg(\lambda_1 p_1(x) + \dots + \lambda_n p_n(x)) \leq \max(\deg(p_1(x)), \dots, \deg(p_n(x)))$$

Infatti, in tale esempio la base è data dai monomi  $1, x, x^2, \dots$ , dunque non esiste un insieme finito di generatori di  $K[X]$

- Lo spazio vettoriale  $K^S := \{f : S \rightarrow K\}$  ha dimensione finita se e solo se  $S$  ha cardinalità finita

**Lemma 17: Estensione a base**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale dove  $\dim(V) = n$ . Dati i vettori **linearmente indipendenti**  $v_1, \dots, v_k \in V$ , dove  $k < n$  allora:

$$\exists v_{k+1}, \dots, v_n \in V \mid v_1, \dots, v_n \text{ sono base di } V$$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\dim(V) = n$ , sia  $w_1, \dots, w_n$  una base qualsiasi di  $V$ . Per dimostrazione precedente, dato  $k < n$  si ha che:

$$\exists v_{k+1}, \dots, v_n \in V \mid \text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(w_1, \dots, w_n) = V$$

dove  $v_1, \dots, v_n$  sono anche linearmente indipendenti, dunque costituiscono una base di  $V$

□

**Lemma 18: Riduzione a base**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale dove  $\dim(V) = n$ . Dato l'**insieme di generatori**  $v_1, \dots, v_k$  di  $V$ , dove  $k \geq n$  allora:

$$\exists v_{i_1}, \dots, v_{i_n} \in \{v_1, \dots, v_k\} \mid v_{i_1}, \dots, v_{i_n} \text{ sono base di } V$$

*Dimostrazione:*

- Dati  $v_1, \dots, v_m$  generatori di  $V$ , assumiamo che  $\exists v_{k_1} \neq 0 \in \{v_1, \dots, v_m\}$ , il quale è ovviamente linearmente indipendente con se stesso
- Poiché  $\text{span}(v_{i_1}) \subsetneq \text{span}(v_1, \dots, v_m) = W$ , allora

$$\exists v_{i_2} \in \{v_1, \dots, v_m\} \mid v_{i_2} \notin \text{span}(v_{i_1}) \iff v_{i_1}, v_{i_2} \text{ lin. ind.}$$

- Ripetendo tale procedimento  $n$ , estendiamo l'insieme  $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$  di vettori linearmente indipendenti fino a che essi non siano generatori di  $V$ :

$$\text{span}(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) = \text{span}(v_1, \dots, v_m) = V$$

dunque  $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$  sono una base di  $V$

□

**Proposizione 53**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale dove  $\dim(V) = n$ . Dati i vettori  $v_1, \dots, v_n \in V$ , si ha che:

$$v_1, \dots, v_n \text{ lin. ind.} \iff v_1, \dots, v_n \text{ generatori}$$

*Dimostrazione:*

- Supponiamo per assurdo che  $v_1, \dots, v_n \in V$  siano linearmente indipendenti ma che non siano generatori di  $V$ , dunque  $\text{span}(v_1, \dots, v_n) \subsetneq V$ . Ne segue che:

$$\exists v_{n+1} \in W \mid v_{n+1} \notin \text{span}(v_1, \dots, v_n) \implies v_1, \dots, v_{n+1} \text{ lin. ind.}$$

contraddicendo la condizione per cui  $\dim(V) = n$  implica che non possano esistere più di  $n$  vettori linearmente indipendenti (sezione 8.1), dunque l'unica possibilità è che  $v_1, \dots, v_n$  siano anche generatori di  $V$

- Viceversa, supponiamo per assurdo che  $v_1, \dots, v_n$  siano generatori di  $V$  ma non linearmente indipendenti. Ne segue che:

$$\begin{aligned} \exists \lambda_i \neq 0 \in K, i \in [1, n] \mid \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + \lambda_n v_n = 0_V &\implies \\ v_i = (\lambda_i^{-1} \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda_i^{-1} \lambda_n) v_n = 0_V &\implies v_i \in \text{span}(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n) \end{aligned}$$

dove  $\hat{v}_i$  indica che tale elemento è escluso

- A questo punto, si ha che:

$$u \in \text{span}(v_1, \dots, v_n) \iff u \in \text{span}(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

da cui otteniamo che:

$$W = \text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

contraddicendo la condizione per cui  $\dim(V) = n$  implica che non possano esistere meno di  $n$  generatori di  $V$ , dunque l'unica possibilità è che  $v_1, \dots, v_n$  siano anche linearmente indipendenti

□

### 8.2.1 Formula di Grassman

#### Teorema 22: Formula di Grassmann

Dato uno spazio vettoriale  $W$  su  $K$  e dati due sottospazi  $U, V \subseteq W$ , i seguenti insiemi:

$$U + V := \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

$$U \cap V := \{w \mid w \in U, w \in V\}$$

sono due sottospazi di  $W$ , dove:

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

*Dimostrazione:*

- Dati:  $k := \dim(U \cap V)$ ,  $m := \dim(U)$ ,  $n := \dim(V)$ , siano:

- $w_1, \dots, w_k$  una base di  $U \cap V$
- $\mathcal{B}_1 := w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_m$  una base di  $U$
- $\mathcal{B}_2 := w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$  una base di  $V$

- Consideriamo quindi il seguente insieme di vettori:

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_m, v_{k+1}, \dots, v_n$$

- Dati  $u \in \text{span}(\mathcal{B}_1) = U$  e  $v \in \text{span}(\mathcal{B}_2) = V$ , dove

$$u = \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i + \sum_{j=k+1}^m \lambda_j u_j \quad v = \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j v_j$$

si ha che :

$$\begin{aligned} u + v \in U + V &\iff u + v = \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i + \sum_{j=k+1}^m \lambda_j u_j + \sum_{i=1}^k \mu_i w_i + \sum_{j=k+1}^n \mu_j v_j \iff \\ &\iff u + v = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) w_i + \sum_{j=k+1}^m \lambda_j u_j + \sum_{j=k+1}^n \mu_j v_j \iff u + v \in \text{span}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \end{aligned}$$

dunque  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  sono generatori di  $U + V$

- Consideriamo quindi  $0_W \in U + V$  scritto come combinazione lineare di tale base

$$\sum_{i=1}^k \beta_i w_i + \sum_{j=k+1}^m \gamma_j u_j + \sum_{h=k+1}^n \eta_h v_h = 0_W$$

- Posti:

$$a := \sum_{i=1}^k \beta_i w_i \quad b := \sum_{j=k+1}^m \gamma_j u_j \quad c := \sum_{h=k+1}^n \eta_h v_h$$

si ha che:

$$a + b + c = 0_W \iff b = -a - c \implies b \in \text{span}(\mathcal{B}_2) = V$$

inoltre, poiché  $b \in \text{span}(u_{k+1}, \dots, u_m) \not\subseteq U \implies b \in U$ , ne segue che  $b \in U \cap V$

- Di conseguenza, si ha che:

$$\begin{aligned} \begin{cases} b := \sum_{j=k+1}^m \gamma_j u_j \\ b \in U \cap V \iff b = \sum_{t=0}^k \alpha_t w_t \end{cases} &\implies \sum_{j=k+1}^m \gamma_j u_j = \sum_{t=0}^k \alpha_t w_t \implies \\ &\implies \sum_{t=0}^k \alpha_t w_t - \sum_{j=k+1}^m \gamma_j u_j = 0_W \end{aligned}$$

- Poiché  $\mathcal{B}_1 = w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_m$  è una base di  $U$ , dunque sono vettori linearmente indipendenti, ne segue che:

$$\sum_{t=0}^k \alpha_t w_t - \sum_{j=k+1}^m \gamma_j u_j = 0_W \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_m = 0$$

- In particolare, quindi, otteniamo che  $\gamma_{k+1} = \dots = \gamma_m = 0 \implies b = 0_W$ , da cui traiamo che:

$$a + b + c = 0_W \implies a + 0_W + c = 0_W \implies a + c = 0_W$$

- A questo punto, poiché:

$$a + c = 0_W \implies \sum_{i=1}^k \beta_i w_i + \sum_{h=k+1}^n \eta_h v_h = 0_W$$

e poiché  $\mathcal{B}_2 := w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$  è una base di  $V$ , dunque sono vettori linearmente indipendenti, ne segue che:

$$\sum_{i=1}^k \beta_i w_i + \sum_{h=k+1}^n \eta_h v_h = 0_W \iff \beta_1 = \dots = \beta_k = \eta_{k+1} = \dots = \eta_n = 0$$

concludendo quindi che i vettori  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_m, v_{k+1}, \dots, v_n$  siano anche linearmente indipendenti, costituendo quindi una base di  $U + V$

- Infine, si ha che:

$$\begin{aligned} \dim(U + V) &= \dim(\text{span}(w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_m, v_{k+1}, \dots, v_n)) = \\ &= k + (m - k) + (n - k) = m + n - k = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) \end{aligned}$$

□

## 8.3 Trasformazioni lineari

### Definizione 70: Trasformazione lineare

Dati due spazi vettoriali  $V$  e  $W$  definiti sullo stesso campo  $K$ , la funzione  $f : V \rightarrow W$  viene detta **trasformazione lineare** (o omomorfismo tra spazi vettoriali) se:

- $\forall v, v' \in V, f(v + v') = f(v) + f(v')$
- $\forall \lambda \in K, v \in V, f(\lambda v) = \lambda f(v)$



**Lemma 19**

Dato uno spazio vettoriale  $V$  si ha che:

$$\dim(V) = n \implies V \cong K^n$$

*Dimostrazione:*

- Dato  $\dim(V) = n$ , sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$ . Definiamo la funzione

$$\varphi : K^n \rightarrow V : (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1 v_1 + \dots + t_n v_n)$$

dunque  $\varphi$  mappa ogni vettore di  $K^n$  ad una combinazione lineare di  $V$

- Poiché:

$$v_1, \dots, v_n \text{ base di } V \iff \forall v \in V, \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \mid v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

e poiché  $\dim(K^n) = n$ , la funzione  $\varphi$  risulta essere automaticamente biettiva:

$$\forall v := \varphi(u) \in V, \exists! u := (t_1, \dots, t_n) \in K^n \mid \varphi(u) = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$$

- Dati quindi  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ , si ha che:

$$\varphi(x+y) = (x_1+y_1)v_1 + \dots + (x_n+y_n)v_n = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n + y_1 v_1 + \dots + y_n v_n = \varphi(x) + \varphi(y)$$

- Dato invece  $\lambda \in K$ , si ha che:

$$\varphi(\lambda v) = \lambda x_1 v_1 + \dots + \lambda x_n v_n = \lambda(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \lambda \varphi(x)$$

- Dunque, concludiamo che  $\varphi$  sia un isomorfismo e di conseguenza che:

$$V \cong K^n$$

□

**Teorema 23: Teorema delle dimensioni**

Dati due spazi vettoriali  $V$  e  $W$  definiti sullo stesso  $K$ , si ha che:

$$V \cong W \iff \dim(V) = \dim(W)$$

*Dimostrazione:*

- Nel caso in cui  $\dim(V) = \dim(W) = n$  dove  $n \in \mathbb{N}$ , per il lemma precedente si ha che:

$$\begin{aligned} \dim(V) = n, \dim(W) = n &\implies V \cong K^n, W \cong K^n \implies \\ &\implies V \cong K^n, K^n \cong W \implies V \cong W \end{aligned}$$

- Viceversa, supponiamo che  $V \cong W$ , dove  $f$  è l'isomorfismo che rende  $V$  isomorfo a  $W$ . Sia inoltre  $v_1, \dots, v_n$  la base di  $V$ .
- Poiché  $f$  è un omomorfismo suriettivo, si ha che:

$$\begin{aligned} \forall w \in W, \exists v \in V \mid w = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \\ f(\lambda_1 v_1) + \dots + f(\lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \end{aligned}$$

dunque, poiché anche  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  sono vettori di  $W$ , ne segue che  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  siano generatori di  $W$

- Inoltre, poiché  $f$  è iniettiva se e solo se  $\ker(f) = \{0_V\}$  e poiché ne segue che:

$$\begin{aligned} \mu_1 f(v_1) + \dots + \mu_n f(v_n) = 0_W &\iff f(\mu_1 v_1) + \dots + f(\mu_n v_n) = 0_W \iff \\ \iff f(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = 0_W &\iff \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = 0_V \iff \mu_1 = \dots = 0 \end{aligned}$$

dunque  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  sono anche linearmente indipendenti, costituendo quindi una base di  $W$ , implicando quindi che  $\dim(W) = n = \dim(V)$

□

### Definizione 71: Spazio quoziente

Dato uno spazio vettoriale  $V$  e un sottospazio  $W \subseteq V$ , la struttura  $(V/W, +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale, detto **spazio quoziente**, dove la somma è definita come  $[v] + [v'] = [v + v']$  e il prodotto per scalare è definito come  $\lambda[x] = [\lambda x]$ .

*Dimostrazione:*

- La dimostrazione della buona definizione della somma risulta analoga a quella del normale gruppo quoziente
- Dimostriamo quindi che il prodotto per scalare sia ben definito

$$[v] = [v'] \implies v' - v \in W \implies \lambda(v' - v) \in W \implies [\lambda v] = [\lambda v']$$

- La dimostrazione di  $(V/W, +, \cdot)$  spazio vettoriale viene omessa poiché banale

□

### Teorema 24: Dimensione di uno spazio quoziente

Dato uno spazio vettoriale  $V$  e un sottospazio  $W \subseteq V$ , si verifica che

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

*Dimostrazione:*

- Siano  $n := \dim(V)$ ,  $k := \dim(W)$  e  $w_1, \dots, w_k$  una base di  $W$ .

- Poiché  $k \leq n$ , è possibile estendere con  $n - k$  vettori di  $V$  l'insieme  $w_1, \dots, w_k$  fino a formare una base di  $V$ :

$$\exists v_{k+1}, \dots, v_n \in V \mid w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n \text{ base di } V$$

- Dato  $v \in V = \text{span}(w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ , si ha che:

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n \implies \\ \implies [v] &= \lambda_1 [w_1] + \dots + \lambda_k [w_k] + \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \dots + \lambda_n [v_n] \end{aligned}$$

- Poiché:

$$w_1, \dots, w_k \in W \iff w_1 \sim 0_V, \dots, w_k \sim 0_V \iff [0_V] = [w_1] = \dots = [w_k]$$

si ha che:

$$\begin{aligned} [v] &= \lambda_1 [w_1] + \dots + \lambda_k [w_k] + \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \dots + \lambda_n [v_n] \iff \\ \iff [v] &= \lambda_1 [0_V] + \dots + \lambda_k [0_V] + \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \dots + \lambda_n [v_n] \iff \\ \iff [v] &= \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \dots + \lambda_n [v_n] \end{aligned}$$

dunque,  $[v_{k+1}], \dots, [v_n]$  sono generatori di  $V/W$

- Preso  $[0_V] \in V/W$ , si ha che:

$$\begin{aligned} [0_V] &= \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \dots + \lambda_n [v_n] \iff [0_V] = [\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n] \iff \\ \iff u &:= \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n \in W \end{aligned}$$

- Poiché anche  $w_1, \dots, w_k$  è base di  $W$  e poiché  $u \in W$ , si ha che:

$$\begin{aligned} u &= \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_k w_k \iff \\ \iff \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n &= \mu_1 w_1 + \dots + \mu_k w_k \iff \\ \iff \mu_1 w_1 + \dots + \mu_k w_k - \lambda_{k+1} v_{k+1} - \dots - \lambda_n v_n &= 0_V \iff \\ \iff \mu_1 = \dots = \mu_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

dato che  $w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$  sono base di  $V$ , dunque linearmente indipendenti.

- In particolare, quindi, dati  $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$  ne segue che:

$$[0_V] = \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \dots + \lambda_n [v_n] \iff \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

implicando che anche  $[v_{k+1}], \dots, [v_n]$  siano linearmente indipendenti, costituendo quindi base di  $V/W$ , la cui dimensione risulta essere:

$$\dim(V/W) = \dim(\text{span}([v_{k+1}], \dots, [v_n])) = n - k = \dim(V) - \dim(W)$$

□

### 8.3.1 Teorema del Rango

#### Proposizione 54: Nucleo ed Immagine di una trasformazione lineare

Data una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$ , il nucleo  $\ker(f) \subseteq V$  e l'immagine  $\operatorname{im}(f) \subseteq W$  di  $f$  corrispondono a:

$$\ker(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$$

$$\operatorname{im}(f) := \{w \in W \mid f(v) = w, \exists v \in V\}$$

dove entrambi sono sottospazi vettoriali rispettivamente di  $V$  e  $W$

*Dimostrazione:*

- Sappiamo già  $\ker(f) \leq V$  e che  $\operatorname{im}(f) \leq W$
- Verifichiamo quindi che siano chiusi nel prodotto per scalare

$$v \in \ker(f), \lambda \in K \implies f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda 0_W = 0_W \implies \lambda v \in \ker(f)$$

$$w = f(v) \in \operatorname{im}(f), \lambda \in K \implies \lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v) \implies \lambda w \in \operatorname{im}(f)$$

□

#### Teorema 25: Primo teorema d'isomorfismo

Data una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$ , si ha che

$$V/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f)$$

*(dimostrazione analoga agli altri casi del teorema)*

#### Teorema 26: Teorema del Rango

Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali. Data una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$ , definiamo come **rango di  $f$**  la dimensione della sua immagine, la quale equivale a:

$$\operatorname{rk}(f) := \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(V) - \dim(\ker(f))$$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare, per il primo teorema d'isomorfismo si ha che  $V/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f)$ , da cui ne segue automaticamente che:

$$\begin{aligned} V/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f) &\iff \dim(V/\ker(f)) = \dim(\operatorname{im}(f)) \iff \\ &\iff \dim(V) - \dim(\ker(f)) = \dim(\operatorname{im}(f)) \end{aligned}$$

□

## 8.4 Spazi affini, Sottospazi affini e Giacitura

### Definizione 72: Spazio affine

Dato uno spazio vettoriale  $(V, +, \cdot)$ , definiamo come **spazio affine a  $V$**  la struttura  $(A, V, \phi)$ , dove:

- Gli elementi  $P \in A$  vengono detti **punti**
- La funzione  $\phi : A \times V \rightarrow A$  gode delle seguenti proprietà

– **Associatività mista:**

$$\forall P \in A, \forall v, w \in V, \phi(\phi(P, v), w) = \phi(P, (v + w))$$

– **Elemento nullo destro:**

$$\forall a \in A, \exists 0_V \in V \mid \phi(a, 0_V) = a$$

– **Azione libera e transitiva:**

$$\forall P \in A, \text{ la funzione } \phi_P : V \rightarrow A : v \rightarrow \phi(P, v) \text{ è biettiva}$$

Detto in parole molto povere (e poco esatte) uno spazio affine  $A$  è una **traslazione totale di uno spazio vettoriale  $V$**  dove ogni punto del primo corrisponde biunivocamente ad un punto dell'altro

### Definizione 73: Sottospazio affine e Giacitura

Dato uno spazio vettoriale  $V$ , un suo sottospazio vettoriale  $W \subseteq V$  e un vettore  $v \in V$ , definiamo come **sottospazio affine** l'insieme di **punti** generato da:

$$U = v + W := \{v + w \mid w \in W\}$$

dove  $W$  viene definito **giacitura** di  $U$ , indicato con  $\text{Giac}(U)$  e dove:

$$\dim(U) = \dim(\text{Giac}(U)) = \dim(W)$$

In altre parole, il sottospazio affine  $U$  corrisponde ad una **traslazione** del sottospazio  $W$  tramite il vettore  $v$ . Ogni sottospazio affine può essere visto come una **classe laterale di un sottospazio** (poiché l'operazione primaria è la somma).

## 8.5 Prodotto scalare e Spazio ortogonale

### Definizione 74: Prodotto scalare

Dato lo spazio di coordinate  $K^n$ , definiamo come **prodotto scalare** l'operazione:

$$\cdot : K^n \times K^n \rightarrow K : ((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n)) \mapsto v \cdot v' = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$$

la quale gode delle seguenti proprietà:

- $u, v \in K^n \implies u \cdot v = v \cdot u$  (**Simmetria**)
- $u, v, w \in K^n \implies (v + w)u = u(v + w) = vu + wu$  (**Distributività**)
- $u, v \in K^n, \lambda \in K \implies (\lambda u)v = u(\lambda v) = \lambda uv$  (**Linearità per scalare**)

**Attenzione:** il prodotto scalare differisce dal prodotto **per** scalare

### Definizione 75: Norma di un vettore

Dato  $v \in \mathbb{R}^n$ , definiamo la **norma (o lunghezza)** di tale vettore come

$$\|v\| := \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

### Teorema 27

Dati  $u, v \in \mathbb{R}^n$  e l'angolo  $0 < \theta < \pi$  interno tra  $u$  e  $v$ , si ha che

$$\cos \theta = \frac{uv}{\|u\| \|v\|}$$

Inoltre, si verifica che:

- $\theta < \frac{\pi}{2} \iff uv > 0$
- $\theta = \frac{\pi}{2} \iff uv = 0$
- $\theta > \frac{\pi}{2} \iff uv < 0$

*Dimostrazione:*

- Tramite il [Teorema del Coseno](#) (normalmente utilizzato per calcolare la lunghezza di un lato di un triangolo qualsiasi sapendo la lunghezza degli altri due lati), si ha che:

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \|u\| \|v\| \cos \theta \iff \\ \iff \|v - u\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 &= -2 \|u\| \|v\| \cos \theta \iff \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2 - \sum_{k=1}^n y_k^2 = -2 \|u\| \|v\| \cos \theta \iff \\
&\iff \sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2y_i x_i + x_i^2) - \sum_{j=1}^n x_j^2 - \sum_{k=1}^n y_k^2 = -2 \|u\| \|v\| \cos \theta \iff \\
&\iff \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \sum_{h=1}^n y_h x_h + \sum_{t=1}^n x_t^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2 - \sum_{k=1}^n y_k^2 = -2 \|u\| \|v\| \cos \theta \iff \\
&\iff \sum_{h=1}^n y_h x_h = \|u\| \|v\| \cos \theta \iff \sum_{h=1}^n y_h x_h = \|u\| \|v\| \cos \theta \iff \\
&\iff uv = \|u\| \|v\| \cos \theta \iff \frac{uv}{\|u\| \|v\|} = \cos \theta
\end{aligned}$$

□

### Proposizione 55: Relazione di ortogonalità

Siano  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Il vettore  $u$  viene detto "**ortogonale a  $v$** ", indicato come  $v \perp w$ , se e solo se:

$$u \perp v \iff uv = 0$$

*Nota:* l'ortogonalità è una generalizzazione del concetto di perpendicolarità nell'ambito dell'algebra lineare

*Dimostrazione:*

- Per definizione stessa di perpendicolarità, l'essere perpendicolari implica che vi sia un angolo retto tra due linee. Generalizzando tale concetto all'ortogonalità tra vettori, dato l'angolo  $0 < \theta < \pi$  interno a  $u$  e  $v$ , per il teorema precedente si ha che:

$$uv = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \iff \cos(\theta) = 1 \iff \text{angolo retto tra } u \text{ e } v$$

□

### Definizione 76: Sottospazio ortogonale

Dato il sottospazio vettoriale  $V \subseteq K^n$ , definiamo  $V^\perp$  il **sottospazio ortogonale a  $V$**  come:

$$V^\perp = \{v \in K^n \mid vw = 0, \forall w \in V\}$$

dove in particolare si ha che:

$$\dim(K^n) = \dim(V) + \dim(V^\perp)$$

*Dimostrazione:*

- $V^\perp \leq K^n$ 
  - $\forall v \in V, 0_{K^n} \cdot v = 0 \implies 0_{K^n} \in V^\perp$
  - $\forall v \in V, w_1, w_2 \in V^\perp \implies (w_1 + w_2)v = w_1v + w_2v = 0 + 0 = 0 \implies w_1 + w_2 \in V^\perp$
  - $\forall v \in V, w \in V^\perp \implies (-w)v = -(wv) = 0 \implies -w \in V^\perp$
- $\forall v \in V, w \in V^\perp, \lambda \in K \implies (\lambda w)v = \lambda(wv) = 0 \implies \lambda w \in V^\perp$
- Poiché  $V \cap V^\perp = \{0_{K^n}\} \implies \dim(V \cap V^\perp) = 0$  e poiché  $K^n = V + V^\perp$ , per la formula di Grassman ne segue che:  
$$\dim(K^n) = \dim(V + V^\perp) = \dim(V) + \dim(V^\perp) - \dim(V \cap V^\perp) = \dim(V) + \dim(V^\perp)$$

□



# 9

## Matrici

### Definizione 77: Matrici

Dati  $m, n \neq 0 \in \mathbb{N}$ , una **matrice**  $m \times n$  **a coefficienti in un campo**  $K$  è una griglia con  $m$  righe e  $n$  colonne, le cui entrate sono elementi in  $K$

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}(K) \implies A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

dove  $\text{Mat}_{m \times n}(K) = \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{m \text{ volte}} = \underbrace{K^m \times \dots \times K^m}_{n \text{ volte}}$

**Esempio:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

### Definizione 78: Vettori colonna e Vettori riga

Definiamo una matrice  $1 \times n$  come **vettore riga**

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{1 \times n}(K) = K^n$$

e analogamente definiamo una matrice  $m \times 1$  come **vettore colonna**

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times 1}(K) = K^m$$

### Osservazione 55

Una matrice  $m \times n$  può essere definita come un **vettore di  $m$  vettori riga aventi  $n$  elementi** (che vengono indicati con un pedice)

$$A_1, \dots, A_n \in K^m \implies A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

o come un **vettore di  $n$  vettori colonna aventi  $m$  elementi** (che vengono indicati con un apice)

$$A^1, \dots, A^m \in K^n \implies A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}$$

### Osservazione 56

La struttura  $(\text{Mat}_{m \times n}(K), +, \cdot)$  è uno **spazio vettoriale** di dimensione:

$$\dim(\text{Mat}_{m \times n}(K)) = m \cdot n$$

e la cui **base canonica** è composta dalle matrici:

$$e_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \left| \begin{cases} a_{k,h} = 0 & \text{se } k \neq i \vee h \neq j \\ a_{k,h} = 1 & \text{se } k = i, h = j \end{cases} \right.$$

*Dimostrazione:*

- Date  $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$  e  $\lambda \in K$ , le operazioni di somma e prodotto sono definite come:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- Le dimostrazioni di  $(\text{Mat}_{m \times n}(K), +, \cdot)$  spazio vettoriale e della base canonica vengono omesse poiché analoghe alle dimostrazioni per  $K^n$

□

---

**Esempio:**

- La base canonica di  $\text{Mat}_{2 \times 2}(A)$  corrisponde a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Osservazione 57**

Dato lo spazio  $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ , si ha che:

$$\text{Mat}_{m \times n}(K) \cong K^{m \cdot n}$$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\dim(\text{Mat}_{m \times n}(K)) = m \cdot n$  e  $\dim(K^{m \cdot n}) = m \cdot n$ , per dimostrazione precedente si ha che:

$$\dim(\text{Mat}_{m \times n}(K)) = \dim(K^{m \cdot n}) \iff \text{Mat}_{m \times n}(K) \cong K^{m \cdot n}$$

□

**Definizione 79: Prodotto tra matrici**

Sia  $A = (A_1, \dots, A_h) \in \text{Mat}_{h \times m}(K)$  e sia  $B = (B^1, \dots, B^n) \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ .

Definiamo come **prodotto tra matrici** la trasformazione lineare:

$$\cdot : \text{Mat}_{h \times m}(K) \times \text{Mat}_{m \times n}(K) \rightarrow \text{Mat}_{h \times n}(K) : (A, B) \mapsto AB$$

dove :

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B^1 & \dots & A_1 B^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_h B^1 & \dots & A_h B^n \end{pmatrix}$$

*Attenzione:* affinché il prodotto sia ben definito è **necessario** che la quantità di colonne di  $A$  sia uguale alla quantità di righe di  $B$

**Esempi:**

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 32 & 46 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 \\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) & 4 \cdot 6 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 \end{pmatrix} =$   
 $= \begin{pmatrix} -1 & 6 & 23 \\ 2 & 24 & 68 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \nexists$  poiché la quantità di colonne nella prima non corrisponde a quella delle righe della seconda

### Osservazione 58

Date tre matrici  $A, B, C$  ed uno scalare  $\lambda$ , se i prodotti sono **ben definiti** si ha che:

- $(AB)C = ABC = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

### Corollario 25

Uno spazio vettoriale  $\text{Mat}_{n \times n}(K)$  (anche detto spazio delle matrici quadrate di ordine  $n$ ) è un **anello non commutativo**, dove l'elemento neutro è:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 9.1 Rango di una matrice

### Definizione 80: Trasformazione lineare di una matrice

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , definiamo la **trasformazione lineare associata ad  $A$**  come

$$L_A : K^n \rightarrow K^m : x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow Ax$$

dove:

$$L_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

### Definizione 81: Sistema lineare e Matrice completa

Data una **matrice di coefficienti**  $A$  ed un **vettore di incognite**  $b$ , definiti come:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

l'equazione  $Ax = b$  corrisponde ad un **sistema lineare di equazioni cartesiane** nella forma:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

il quale è rappresentato fedelmente dalla seguente **matrice completa**:

$$A_b = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

*Dimostrazione:*

- Si nota facilmente che:

$$\begin{aligned} Ax = b &\iff \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff \\ &\iff \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_n \end{cases} \end{aligned}$$

□

### Proposizione 56

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , si ha che:

- $\text{im}(L_A) = \text{span}(A^1, \dots, A^n)$
- $\ker(L_A) = \text{span}(A_1, \dots, A_m)^\perp$

*Dimostrazione:*

- Data  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , si ha che:

$$\begin{aligned} L_A(x) \in \text{im}(L_A) &\iff L_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n \iff L_A(x) \in \text{span}(A^1, \dots, A^n) \end{aligned}$$

dunque si ha che  $\text{im}(L_A) = \text{span}(A^1, \dots, A^n)$

- Inoltre, notiamo che:

$$\begin{aligned} \ker(L_A) &= \{x \in K^n \mid L_A(x) = Ax = 0_{K^m}\} = \\ &= \left\{ x \in K^n \mid \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} x = 0_{K^m} \right\} = \text{span}(A_1, \dots, A_m)^\perp \end{aligned}$$

dunque  $\ker(L_A)$  contiene tutte i vettori  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$  che sono soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

□

**Definizione 82: Rango di una matrice**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , definiamo come **rango di  $A$**  il rango della sua trasformazione lineare associata:

$$\text{rk}(A) := \text{rk}(L_A)$$

**Proposizione 57**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , si ha che:

$$\text{rk}(A) = n - \dim(\ker(L_A)) = \dim(\text{span}(A^1, \dots, A^n)) = \dim(\text{span}(A_1, \dots, A_m))$$

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\text{rk}(A) := \text{rk}(L_A)$  e poiché  $L_A : K^n \rightarrow K^m$ , per il teorema del rango si ha che:

$$\text{rk}(A) := \text{rk}(L_A) = \dim(L_A) = \dim(K^n) - \dim(\ker(L_A)) = n - \dim(\ker(L_A))$$

- Inoltre, per dimostrazioni precedenti si ha che:

$$\begin{aligned} \dim(\text{span}(A^1, \dots, A^n)) &= \dim(\text{im}(L_A)) = n - \dim(\ker(L_A)) = \\ &= n - \dim(\text{span}(A_1, \dots, A_m)^\perp) = \dim(\text{span}(A_1, \dots, A_m)) \end{aligned}$$

□

**Corollario 26**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , si ha che:

$$0 \leq \text{rk}(A) \leq \min(m, n)$$

**9.1.1 Riduzione a scala di una matrice****Definizione 83: Operazioni elementari su matrici**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , definiamo come **operazioni elementari** su righe e colonne le seguenti tre operazioni:

1. **Scambiare** due righe (o colonne) tra di loro
2. **Moltiplicare** una riga (o colonna) per  $\lambda \in K^*$
3. **Sommare** ad una riga (o colonna) un multiplo di un'altra riga (o colonna)

**Definizione 84: Matrici equivalenti**

Date due matrici  $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , definiamo tali matrici come **equivalenti** se sono uguali se è possibile ottenere l'una partendo dall'altra utilizzando **solo operazioni elementari**.

In particolare, se vengono utilizzate solo operazioni su righe tali matrici vengono dette **equivalenti per righe**, mentre vengono dette **equivalenti per colonne** se vengono utilizzate solo operazioni su colonne.

**Osservazione 59**

Date due matrici  $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , si ha che:

- Se  $A$  e  $B$  sono **equivalenti per righe**, allora

$$\ker(L_A) = \ker(L_B) \wedge \text{im}(L_A) \neq \text{im}(L_B)$$

- Se  $A$  e  $B$  sono **equivalenti per colonne**, allora

$$\ker(L_A) \neq \ker(L_B) \wedge \text{im}(L_A) = \text{im}(L_B)$$

In entrambi i casi si verifica che:

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(B)$$

*Dimostrazione:*

- Basti pensare che effettuando solo operazioni su righe non si vadano ad alterare i vettori  $x \in \ker(L_A)$  in grado di risolvere il sistema  $Ax = 0$ , dunque  $\ker(L_A) = \ker(L_B)$ , mentre i vettori  $b \in \text{im}(L_A)$  generati dal sistema  $Ax = b$  vanno ad essere modificati, dunque  $\text{im}(L_A) \neq \text{im}(L_B)$
- Analogamente, effettuando solo operazioni su colonne non si vanno ad alterare i vettori  $b \in \text{im}(L_A)$  generati dal sistema  $Ax = b$ , dunque  $\text{im}(L_A) = \text{im}(L_B)$ , mentre i vettori  $x \in \ker(L_A)$  risolvono il sistema  $Ax = b$  vanno ad essere modificati, dunque  $\ker(L_A) \neq \ker(L_B)$
- Nel caso in cui il nucleo non venga alterato, si ha che:

$$\begin{aligned} \text{rk}(A) &= \dim(\text{im}(L_A)) = n - \dim(\ker(L_A)) = \\ &= n - \dim(\ker(L_B)) = \dim(\text{im}(L_B)) = \text{rk}(B) \end{aligned}$$

mentre nel caso in cui l'immagine non venga alterata si ha che:

$$\text{rk}(A) = \dim(\text{im}(L_A)) = \dim(\text{im}(L_B)) = \text{rk}(L_B)$$

□



**Definizione 85: Pivot e Matrice a scala**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , definiamo come **pivot** di una riga il primo elemento non nullo a partire da sinistra di tale riga.

Inoltre, la matrice  $A$  viene detta **matrice a scala** se  $\forall i \in [1, m]$  si verifica che il pivot della riga  $A_i$  è più a sinistra pivot della riga  $A_{i+1}$

**Esempi:**

- Le seguenti matrici sono a scala, i cui pivot sono cerchiati:

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{5} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{7} \end{pmatrix}$$

- Le seguenti matrici non sono a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Algoritmo 1: Algoritmo di Gauss-Jordan**

Ogni matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times m}(K)$  può essere ridotta ad una **matrice a scala**  $S \in \text{Mat}_{n \times m}(K)$  tramite il seguente algoritmo:

1. Sia  $A^j$ , dove  $j \in [1, n]$  la prima colonna a partire da sinistra non nulla, ossia  $\exists i[1, n] \mid c := a_{i,j} \neq 0$
2. Se  $c \notin A_1$ , allora la  $i$ -esima riga contenente  $c$  viene scambiata con  $A_1$
3. Per  $k = 2, \dots, m$ , sottraiamo  $\lambda A_1$  alla riga  $A_k$ , dove  $\lambda$  è uno scalare scelto apposta in modo da annullare l' $i$ -esimo elemento della
4. Se la matrice risultante non è ancora ridotta a scala, allora viene ripetuto ricorsivamente l'algoritmo su  $A_2$ , ignorando le prime  $i$  colonne, e così via

**Teorema 28: Riduzione a scala**

Sia  $A = (A^1, \dots, A^n) \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$  e sia  $S = (S^1, \dots, S^n)$  la sua versione ridotta a scala.

Se  $S^{j_1}, \dots, S^{j_h}$  sono le colonne di  $S$  contenenti i pivot della scala, allora  $A^{j_1}, \dots, A^{j_h}$  sono una base di  $\text{im}(A) = \text{span}(A^1, \dots, A^n)$ , implicando che

$$h = \text{rk}(S) = \text{rk}(A)$$

**Esempio:**

- Consideriamo il seguente sistema e la matrice completa ad essa associata:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} \implies A_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

dove il vettore incognito  $b$  viene omissso dalla matrice completa in quanto  $b = 0_{K^m}$

- Date le righe  $R_1, \dots, R_3$  della matrice, procediamo quindi con l'algoritmo di Gauss-Jordan fino ad ottenere la versione a scala di tale matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-4R_1, R_3-7R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dunque, otteniamo che  $A^1$  e  $A^2$  sono una base di  $\text{im}(L_A) = \text{span}(A^1, A^2, A^3)$  e il rango della matrice corrisponde a  $\text{rk}(A) = 2$
- Riducendo ancora tale matrice (mantenendo la forma a scala), si ha che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dunque, il sistema di partenza risulta essere equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

- Poiché abbiamo svolto solo operazioni per riga, la matrice originale e la sua versione a scala risultano essere equivalenti per righe, implicando che il nucleo non sia stato alterato.
- Di conseguenza, risolvendo tale sistema in funzione di una variabile ausiliaria  $t$ , siamo in grado di ottenere una base di  $\ker(L_A)$ :

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \implies \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Infine, quindi, concludiamo che:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ base di } \text{im}(L_A) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ base di } \ker(L_A)$$

## 9.2 Teorema di Rouché-Capelli

### Teorema 29: Teorema di Rouché-Capelli

Data una matrice di coefficienti  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$  e un vettore di coefficienti  $b \in K^m$ , il sistema  $Ax = b$  **ammette soluzioni** se e solo se  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A_b)$ , dove  $A_b$  è la matrice completa associata al sistema.

$$\exists x \in K^n \mid Ax = b \iff \text{rk}(A) = \text{rk}(A_b)$$

*Dimostrazione:*

- Dato il sistema  $Ax = b$ , si verifica che:

$$\begin{aligned} \exists x \in K^n \mid Ax = b &\iff \exists x_1, \dots, x_n \in K \mid x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = b \iff \\ &\iff b \in \text{span}(A^1, \dots, A^n) \iff \text{span}(A^1, \dots, A^n) = \text{span}(A^1, \dots, A^n, b) \iff \\ &\iff \dim(\text{span}(A^1, \dots, A^n)) = \dim(\text{span}(A^1, \dots, A^n, b)) \iff \text{rk}(A) = \text{rk}(A_b) \end{aligned}$$

□

### Proposizione 58

Dato il sistema  $Ax = b$ , l'insieme delle soluzioni  $V$  (se esistenti) è un **sottospazio affine** di  $\ker(L_A)$  di dimensione  $\dim(V) = n - \text{rk}(A)$ , dove in particolare si ha che:

- Se  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A_b) = n$ , la soluzione al sistema è **unica** e il sistema viene detto **determinato**

$$\exists! x \in K^n \mid Ax = b \iff \text{rk}(A) = \text{rk}(A_b) = n$$

- Se  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A_b) \neq n$ , allora il sistema ammette **infinite soluzioni** e il sistema viene detto **indeterminato**

$$\exists x \in K^n \mid Ax = b \iff \text{rk}(A) = \text{rk}(A_b) \neq n$$

*Dimostrazione:*

- Dato  $V = \{x \in K^n \mid Ax = b\}$  l'insieme delle soluzioni del sistema (ipotizzando che ne esista almeno una), si ha che:

$$x_0, x \in V \iff Ax_0 = b = Ax \iff Ax_0 = Ax \iff A(x - x_0) = 0$$

$$\iff x' - x_0 \in \ker(L_A) \iff x' \in x_0 + \ker(L_A)$$

dunque  $V$  è un sottospazio affine a  $\ker(L_A)$  traslato da una soluzione particolare  $x_0$  del sistema

- In quanto sottospazio affine del nucleo, ne segue che:

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(\ker(L_A)) = \dim(K^n) - \dim(\operatorname{im}(L_A)) = n - \dim(\operatorname{im}(L_A)) \\ &= n - \operatorname{rk}(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } \operatorname{rk}(A) = n \\ > 1 & \text{se } \operatorname{rk}(A) \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

- Dunque, nel caso in cui  $\operatorname{rk}(A) = n$  l'unica soluzione all'interno di  $V$  sarà  $x_0$ , altrimenti esisteranno infinite soluzioni generate dalla traslazione della base di  $\ker(L_A)$

□

### Esempi:

- Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{aligned} \begin{cases} w + 2x + z = 1 \\ 2w + 4x + y = 3 \\ w + 2x + y - z = 2 \end{cases} &\implies A_b = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_1, R_2 - 2R_1} \\ &\xrightarrow{R_3 - R_1, R_2 - 2R_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

- Dunque, poiché  $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A_b) = 2 \neq 4$ , il sistema ammette infinite soluzioni e le colonne  $A^1, A^3$  sono base di  $\operatorname{im}(L_A)$ . Inoltre, il sistema è equivalente a:

$$\begin{aligned} \begin{cases} w + 2x + z = 1 \\ y - 2z = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} w = 1 - 2x - z \\ y = 1 + 2z \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} w = 1 - 2t_1 - t_2 \\ x = t_1 \\ y = 1 + 2t_2 \\ z = t_1 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 5z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \end{cases} &\implies A_b = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + R_1} \\ &\xrightarrow{R_2 + R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

- Poiché  $\operatorname{rk}(A) \neq \operatorname{rk}(A_b)$ , il sistema non ammette soluzioni

3. • Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + ky = 4 - k \\ kx + 4y = 4 \end{cases} \implies A_b = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & k & 4 - k \\ k & 4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - kR_1} \xrightarrow{R_2 - kR_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & k & 4 - k \\ 0 & 4 - k^2 & 4 - 2k + k^2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & k & 4 - k \\ 0 & 4 - k^2 & (2 - k)^2 \end{array} \right)$$

- A questo punto, a seconda del valore di  $k$  si verificano tre casi:
  - Se  $k \neq \pm 2$ , ne segue che  $4 - k^2 \neq 0$  e di conseguenza che  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A_b) = 2$ , implicando che il sistema ammetta un'unica soluzione
  - Se  $k = -2$ , si ha che  $\text{rk}(A) \neq \text{rk}(A_b)$ , dunque il sistema non ammette soluzioni
  - Se  $k = 2$ , si ha che  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A_b) = 1 \neq 2$ , dunque il sistema ammette infinite soluzioni

$$A_b = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \iff \{x + 2y = 2\} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

### 9.2.1 Equazioni parametriche

#### Proposizione 59: Equazioni parametriche

Sia  $V$  un sottospazio e sia  $W$  un sottospazio affine al un sottospazio  $\text{Giac}(W) \subseteq V$ , dunque  $\exists x_0 \in V \mid W = x_0 + \text{Giac}(W)$ .

Data la base  $g_1, \dots, g_n$  di  $\text{Giac}(W)$ , si verifica che:

$$\forall x \in W, \exists! t_1, \dots, t_n \in K \mid x = x_0 + t_1 g_1 + \dots + t_n g_n$$

Definiamo l'insieme di tali equazioni come **equazioni parametriche** di  $W$

*Dimostrazione:*

- Dato  $x_0 \in V \mid W = x_0 + \text{Giac}(W)$  e data la base  $g_1, \dots, g_n$  di  $\text{Giac}(W)$ , si ha che:

$$\begin{aligned} x \in W &\iff x - x_0 \in \text{Giac}(W) \iff \\ &\iff \exists! t_1, \dots, t_n \in K \mid x - x_0 = t_1 g_1 + \dots + t_n g_n \\ &\iff x = x_0 + t_1 g_1 + \dots + t_n g_n \end{aligned}$$

□

**Proposizione 60**

Dato uno spazio vettoriale  $V$  e un sottospazio affine  $W$  espresso come l'insieme delle sue equazioni parametriche:

$$W = \{x_0 + t_1 g_1 + \dots + t_n g_n \mid t_1, \dots, t_n \in K\}$$

dove  $g_1, \dots, g_n$  sono base di  $\text{Giac}(W)$ , si verifica che:

$$x \in W \iff \text{rk}(A_b) = \dim(V)$$

dove  $A_b := (g_1, \dots, g_n, x - x_0) \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$

*Dimostrazione:*

- Data la matrice  $A_b := (g_1, \dots, g_n, x - x_0)$ , per il teorema di Rouché-Capelli, si ha che:

$$\begin{aligned} x \in W &\iff x - x_0 \in \text{Giac}(W) = \text{span}(g_1, \dots, g_n) \iff \\ &\iff \text{span}(g_1, \dots, g_n) = \text{span}(g_1, \dots, g_n, x - x_0) \iff \\ &\iff \dim(\text{span}(g_1, \dots, g_n)) = \dim(\text{span}(g_1, \dots, g_n, x - x_0)) \iff \\ &\iff \dim(\text{Giac}(W)) = \text{rk}(A_b) \iff \dim(W) = \text{rk}(A_b) \end{aligned}$$

□

**Esempio:**

- Consideriamo il seguente insieme di equazioni parametriche corrispondenti ad un sottospazio affine in  $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- Poiché  $\dim(V) = 2$ , si verifica che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 6 & z+1 \end{pmatrix} = 2$$

- Effettuando la riduzione a scala di tale matrice, si ha che:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 6 & z+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 0 & -3 & y-2x+2 \\ 3 & 6 & z+1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 0 & -3 & y-2x+2 \\ 0 & -6 & z-3x+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 0 & -3 & y-2x+2 \\ 0 & 0 & z+x-2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Affinché la riduzione in scala abbia solo 2 pivot, è necessario che l'ultima riga della matrice contenga tutti zeri, implicando quindi che:

$$\text{rk}(A) = 2 \iff z + x - 2y = 0$$

- L'insieme di equazioni parametriche dato, quindi, equivale al seguente sistema di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

corrispondente ad una retta in  $\mathbb{R}^3$

## 9.3 Determinante di una matrice

### Definizione 86: Trasformazione multilineare

Una trasformazione lineare del tipo

$$f : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W : (v_1, \dots, v_k) \rightarrow f(v_1, \dots, v_k)$$

viene detta **multilineare** se  $\forall i \in [1, k]$  dati  $\lambda, \mu \in K$  si verifica che:

$$f(v_1, \dots, \lambda v'_i + \mu v''_i, \dots, v_n) = \lambda f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n) + \mu f(v_1, \dots, v''_i, \dots, v_n)$$

### Definizione 87: Determinante di una matrice

Definiamo come **determinante** di una matrice l'unica trasformazione lineare

$$\det : \text{Mat}_{n \times n}(K) \rightarrow K$$

che verifica le seguenti tre proprietà:

1.  $\det$  è **multilineare** su righe e colonne della matrice
2.  $A_1, \dots, A_n$  e  $A^1, \dots, A^n$  sono **basi** di  $K^n$  se e solo se  $\det(A) \neq 0$
3.  $\det(I_n) = 1$ , dove  $I_n$  è la matrice identità di ordine  $n$

### Osservazione 60

Data una matrice  $A \in M_{n \times n}(K)$ , si ha che:

- $\exists A_i, A_j \in A, i \neq j \mid A_i = A_j \implies \det(A) = 0$
- $\exists A^i, A^j \in A, i \neq j \mid A^i = A^j \implies \det(A) = 0$
- $\exists A_i \in A \mid A_i = 0_{K^n} \implies \det(A) = 0$
- $\exists A^i \in A \mid A^i = 0_{K^n} \implies \det(A) = 0$

*Dimostrazione:*

- Se esistono due righe  $A_i, A_j \in A$  uguali, allora  $\text{span}(A_1, \dots, A_n)$  non è linearmente indipendente, dunque non può costituire base di  $K^n$
- Se esiste una riga  $A_h \in A$  uguale al vettore nullo, allora  $\text{span}(A_1, \dots, A_n)$  non è né linearmente indipendente né generatore di  $K^n$ , dunque non può costituire base di  $K^n$
- Per le colonne vale il ragionamento analogo alle righe

□

### Proposizione 61: Determinante alternante su righe e colonne

Data una matrice  $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , si verifica che:

$$\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -\det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

dunque, scambiando due righe (o colonne) della matrice il **determinante cambia segno**

*Dimostrazione:*

- Data una matrice  $A = (A_1, \dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots, A_n)$ , per la proprietà 2) del determinante si ha che:

$$\det(A_1, \dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots, A_n) = 0$$

- Per multilinearità del determinante, si ha che:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A_1, \dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots, A_n) \implies \\ \implies 0 &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_i + A_j, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i + A_j, \dots, A_n) \implies \\ \implies 0 &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) + \\ &\quad + \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) \implies \\ \implies 0 &= 0 + \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n) + 0 \implies \\ \implies &\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -\det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n) \end{aligned}$$

□

### Teorema 30: Teorema di Binet

Date due matrici  $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , si ha che:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

(dimostrazione omessa)



### 9.3.1 Formula di Leibniz e Regola di Sarrus

#### Definizione 88: Formula di Leibniz

Tramite le sue proprietà 1), 3) e la sua alternanza su righe e colonne, il determinante di una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  può essere definito come:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

(dimostrazione omessa)

#### Corollario 27

Se  $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(K)$ , allora

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \det(A) = ad - bc$$

*Dimostrazione:*

- Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

- Dato  $S_2 = \{(1)(2), (12)\}$ , si verifica che:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = ad - bc$$

□

#### Corollario 28

Se  $A \in \text{Mat}_{3 \times 3}(K)$ , allora

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \implies \det(A) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

*Dimostrazione:*

- Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

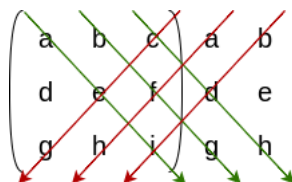
- Dato  $S_3 = \{(1)(2)(3), (12)(3), (1)(23), (13)(2), (123), (321)\}$ , si verifica che:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot a_{3,\sigma(3)} = \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2} - a_{3,1} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} = \\ &= aei - bdi - ceg - afh + bfg + cdh\end{aligned}$$

□

### Metodo 3: Regola di Sarrus

La **Regola di Sarrus** permette di ricordare facilmente il calcolo del determinante di una matrice quadrata di ordine 3, ricopiando a destra della matrice le sue prime due colonne, per poi **sommare le tre diagonali** e **sottrarre le tre anti-diagonali**:



$$A \in \operatorname{Mat}_{3 \times 3}(K) \implies \det(A) = aei + bfg + cdh - afh - dfi - ceg$$

### Esempi:

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

si ha che:

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha che:

$$\det(A) = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 27$$

## 9.3.2 Determinante tramite riduzione a scala

**Definizione 89: Matrice triangolare**

Sia  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ . Definiamo  $A$  come **triangolare superiore** se  $\forall i > j$  si ha che  $a_{i,j} = 0$ , ossia se sotto la diagonale principale vi sono tutti zeri

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

o **triangolare inferiore** se  $\forall i < j$  si ha che  $a_{i,j} = 0$ , ossia se sopra la diagonale principale vi sono tutti zeri

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

**Osservazione 61**

Una **matrice a scala** è sempre **triangolare**.

**Osservazione 62**

Se  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  è una matrice triangolare, allora il suo determinante corrisponde al **prodotto della sua diagonale**

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$$

*(dimostrazione omessa)*

**Metodo 4: Calcolo del determinante tramite riduzione a scala**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , è possibile ricavare il suo determinante tramite la sua riduzione a scala, poiché:

1. Scambiare due righe (o colonne) **inverte il segno del determinante**
2. Moltiplicare una riga (o colonna) per uno scalare  $\lambda \in K^*$  **moltiplica anche il determinante** per tale scalare
3. Sommare ad una riga (o colonna) un multiplo di un'altra riga (o colonna) **non altera il determinante**

Dunque, data la riduzione a scala  $S$  della matrice  $A$ , è possibile calcolare  $\det(A)$  tramite il calcolo di  $\det(S)$ , per poi **invertire gli effetti subiti dal determinante** in base alle operazioni svolte durante la riduzione.

*Dimostrazione:*

- Sia  $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$
- Abbiamo già dimostrato come scambiare due righe o colonne implichi che il determinante cambi segno, dunque

$$\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -\det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

- Data  $A' = (A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , per multilinearità del determinante si ha che:

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = \\ &= \lambda \cdot \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = \lambda \det(A) \end{aligned}$$

- Data  $A'' = (A_1, \dots, A_i + \mu A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , per multilinearità del determinante si ha che:

$$\begin{aligned} \det(A'') &= \det(A_1, \dots, A_i + \mu A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) = \\ &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) + \mu \cdot \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) = \\ &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) + \mu \cdot 0 = \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = \det(A) \end{aligned}$$

□

**Esempio:**

- Riprendiamo la matrice dell'esempio precedente, il cui determinante sappiamo già essere 27:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- Effettuiamo la riduzione a scala di tale matrice:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_2-4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-7R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 \cdot \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+6R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Poiché una matrice a scala è sempre triangolare, si ha che:

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \implies \det(S) = 1 \cdot 1 \cdot (-9) = -9$$

- Tra i vari passaggi effettuati durante la riduzione a scala, l'unico ad influenzare il determinante è il terzo. Dunque, si ha che:

$$\det(S) = -\frac{1}{3} \cdot \det(A) \implies -9 = -\frac{1}{3} \cdot \det(A) \implies \det(A) = 27$$

### 9.3.3 Sviluppo di Laplace

#### Definizione 90: Sottomatrice

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , definiamo come **sottomatrice di  $A$**  una matrice ottenuta cancellando un determinato numero di righe e/o colonne dalla matrice originale

#### Definizione 91: Minore di una matrice

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , definiamo come **minori di  $A$**  tutte le sottomatrici quadrate ottenute da  $A$ .

Denotiamo come  $M_{i,j}$  il minore ottenuto cancellando la riga  $i$  e la colonna  $j$  dalla matrice  $A$ .

**Teorema 31: Sviluppo di Laplace**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , lo **sviluppo di Laplace sulla  $i$ -esima riga di  $A$**  è definito come:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \cdot a_{i,k} \cdot \det(M_{i,k}) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \text{cof}_{i,k}(A)$$

dove  $\text{cof}_{i,k}(A) = (-1)^{i+k} \cdot \det(M_{i,k})$  viene detto il **cofattore (o complemento algebrico)** dell'entrata  $a_{i,k}$ .

Analogamente, lo sviluppo di Laplace sulla  $j$ -esima colonna di  $A$  è definito come:

$$\det(A) = \sum_{h=1}^n (-1)^{h+j} \cdot a_{h,j} \cdot \det(M_{h,j}) = \sum_{h=1}^n a_{h,j} \cdot \text{cof}_{h,j}(A)$$

(dimostrazione omessa)

**Esempi:**

1. • Riprendiamo la matrice già vista in vari esempi precedenti, il cui determinante sappiamo già essere 27:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- Effettuiamo lo sviluppo di Laplace su  $A_3$ :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{3+1} \cdot 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= 7(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - 8(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + 0 = -21 + 48 = 27 \end{aligned}$$

2. • Calcoliamo il determinante della seguente matrice quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- Effettuiamo lo sviluppo di Laplace su  $A^3$ :

$$\det(A) = 0 + (-1)^{2+3} \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} + 0 - 0 = -5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- Il calcolo di  $\det(A)$  viene quindi ridotto al calcolo di  $\det(M_{2,3})$ , il quale può essere facilmente calcolato tramite la regola di Sarrus o tramite un nuovo sviluppo di Laplace
- Utilizzando la regola di Sarrus, abbiamo che:

$$\det(A) = -5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} = -5(48 + 0 + (-7) - 168 - 0 - (-2)) = 625$$

- Utilizzando lo sviluppo di Laplace su  $(M_{2,3})^1$ , invece, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \det(A) = -5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} &= -5 \left[ (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{2+1} \cdot 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \right] = -5[50 - 175] = 625 \end{aligned}$$

### 9.3.4 Regola di Cramer

#### Teorema 32: Regola di Cramer

Dato un sistema lineare  $Ax = b$ :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

dove  $A$  è una matrice di coefficienti tale che  $\det(A) \neq 0$ , allora il sistema ammette la seguente unica soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(b, A^2, \dots, A^{n-1}, A^n) \\ x_2 = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A^1, b, \dots, A^{n-1}, A^n) \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A^1, A^2, \dots, b, A^n) \\ x_n = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A^1, A^2, \dots, A^{n-1}, b) \end{cases}$$

*(dimostrazione omessa)*

**Esempio:**

- Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y = 0 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti corrisponde è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

dove  $\det(A) = 27$

- Per la regola di Cramer, si ha che:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{27} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \\ y = \frac{1}{27} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ z = \frac{1}{27} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{27} \cdot (-48) \\ y = \frac{1}{27} \cdot (42) \\ z = \frac{1}{27} \cdot (-3) \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{16}{9} \\ y = \frac{14}{9} \\ z = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

## 9.4 Matrici inverse

### Definizione 92: Gruppo generale lineare

Definiamo come **gruppo generale lineare** il gruppo  $(GL(n, K), \cdot)$  contenente tutte le matrici invertibili dell'anello  $\text{Mat}_{n \times n}(K)$ :

$$GL(n, K) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(K) \mid \exists A^{-1} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)\}$$

*Dimostrazione:*

- $A, B, C \in GL(n, K), A(BC) = ABC = (AB)C$
- $\forall A \in GL(n, K), \exists I_n \in GL(n, K) \mid AI_n = I_n A = A$



- $\forall A \in GL(n, K), \exists! A^{-1} \in GL(n, K) \mid AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

□

**Teorema 33: Invertibilità di una matrice**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , le seguenti condizioni sono equivalenti tra loro:

1.  $A \in GL(n, K)$
2.  $\text{rk}(A) = n$
3.  $\det(A) \neq 0$
4.  $A^1, \dots, A^n$  sono una base di  $K^n$
5.  $A^1, \dots, A^n$  sono una base di  $K^n$
6.  $A$  è equivalente per righe e colonne a  $I_n$

*Dimostrazione:*

- 3)  $\iff$  4), 5)

– Per definizione stessa di determinante, si ha che:

$$\det(A) \neq 0 \iff \begin{cases} A^1, \dots, A^n \text{ base di } K^n \\ A_1, \dots, A_n \text{ base di } K^n \end{cases}$$

- 2)  $\iff$  3), 4)

– Poiché  $\dim(K^n) = n$  implica che  $n$  vettori possono essere generatori se e solo se sono anche linearmente indipendenti, si ha che:

$$\text{rk}(A) = n \iff \dim(\text{span}(A^1, \dots, A^n)) = \dim(\text{span}(A_1, \dots, A_n)) = n \iff$$

$$\iff \begin{cases} \text{span}(A^1, \dots, A^n) = K^n \iff A^1, \dots, A^n \text{ sono base di } K^n \\ \text{span}(A_1, \dots, A_n) = K^n \iff A_1, \dots, A_n \text{ sono base di } K^n \end{cases}$$

- 1)  $\iff$  2)

– Supponiamo che  $\exists! B = (B^1, \dots, B^n) \in \text{Mat}_{n \times n}(K) \mid A \cdot B = B \cdot A = I_n$ . Per definizione di prodotto tra matrici ne segue che:

$$AB = I_n \iff AB^1 = e_1, AB^2 = e_2, \dots, AB^n = e_n \iff$$

$$\iff L_A(B^1) = e_1, L_A(B^2) = e_2, \dots, L_A(B^n) = e_n \iff$$

$$\iff e_1, e_2, \dots, e_n \in \text{im}(L_A) \iff \text{im}(L_A) = \text{span}(e_1, \dots, e_n) = K^n \iff$$

$$\iff \text{rk}(A) = n$$

- 2)  $\iff$  6)
  - Se  $\text{rk}(A) = n$ , è possibile ridurre a scala  $A$  fino ad ottenere  $I_n$
  - Viceversa, poiché  $\text{rk}(I_n) = n$ , se  $I_n$  è equivalente per righe e colonne ad  $A$  ne segue automaticamente che  $\text{rk}(A) = n$

□

**Corollario 29**

È possibile definire il **gruppo generale lineare** anche come:

$$GL(n, K) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(K) \mid \det(A) \neq 0\}$$

**Osservazione 63**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , si ha che:

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

*Dimostrazione:*

- Per il teorema di Binet, si ha che:

$$1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) \implies \det(A)^{-1} = \det(A^{-1})$$

□

**Definizione 93: Gruppo speciale lineare**

Dato il gruppo  $(GL(n, K), \cdot)$ , definiamo  $SL(n, K) \trianglelefteq GL(n, K)$  come **gruppo speciale lineare**, dove

$$SL(n, K) = \{A \in GL(n, K) \mid \det(A) = 1\}$$

*Dimostrazione:*

- $SL(n, K) \leq GL(n, K)$ 
  - $\det(I_n) = 1 \implies I_n \in SL(n, K)$
  - $A, B \in SL(n, K) \implies \det(AB) = \det(A) \det(B) = 1 \cdot 1 = 1 \implies AB \in SL(n, K)$
  - $A \in SL(n, K) \implies \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = 1 \implies A^{-1} \in SL(n, K)$
- Date le matrici  $A, B \in SL(n, K)$ , si ha che:

$$\begin{aligned} A \sim_L B &\iff A^{-1}B \in SL(n, K) \iff \det(A^{-1}B) = 1 \iff \det(A^{-1}) \det(B) = 1 \iff \\ &\iff \det(A)^{-1} \det(B) = 1 \iff \det(A)^{-1} = \det(B)^{-1} \iff \det(A) = \det(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \sim_R B &\iff AB^{-1} \in SL(n, K) \iff \det(AB^{-1}) = 1 \iff \det(A) \det(B^{-1}) = 1 \iff \\
&\iff \det(A) \det(B)^{-1} = 1 \iff \det(B)^{-1} = \det(A)^{-1} \iff \det(B) = \det(A)
\end{aligned}$$

dunque le classi laterali sinistre e destre coincidono, implicando che  $SL(n, K) \trianglelefteq GL(n, K)$

□

#### Osservazione 64

Data una matrice  $A \in GL(n, K)$ , poiché è  $A$  invertibile se e solo se equivalente per righe e colonne a  $I_n$ , si ha che

$$(A \mid I_n), (I_n \mid B) \text{ equivalenti per righe } \iff B = A^{-1}$$

#### Esempi:

1. • Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

dove  $\det(A) = -2$ , dunque  $A$  è invertibile

- Procedendo con l'algoritmo di Gauss-Jordan, si ha che:

$$\begin{aligned}
(A \mid I_n) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{R_1 + R_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) = (I_n \mid B) \\
&\implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dove  $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}$

2. • Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

dove  $\det(A) = 27$ , dunque  $A$  è invertibile

- Procedendo con l'algoritmo di Gauss-Jordan, si ha che:

$$(A \mid I_N) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 4R_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{R_3+7R_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -21 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{R_2*=-\frac{1}{3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{9}R_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{R_1-2R_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1+R_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{R_2-2R_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \\
& \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dove  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{27}$

#### Definizione 94: Matrice trasposta

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , definiamo come **matrice trasposta** la matrice  $A^T \in \text{Mat}_{n \times m}(K)$  avente come  $i$ -esima riga la  $i$ -esima colonna della matrice  $A$  e come  $j$ -esima colonna la  $j$ -esima colonna di  $A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

#### Esempio:

- Data la seguente matrice  $A$ , la sua trasposta corrisponde a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

**Osservazione 65**

Date due matrici  $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , si verifica che:

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$

(dimostrazioni omessa)

**Definizione 95: Matrice dei cofattori**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , definiamo come **matrice dei cofattori** la matrice  $\text{cof}(A) \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  avente come entrate i cofattori di ogni entrata della matrice  $A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \implies \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} \text{cof}(A)_{1,1} & \cdots & \text{cof}(A)_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cof}(A)_{n,1} & \cdots & \text{cof}(A)_{n,n} \end{pmatrix}$$

dove ricordiamo che

$$\text{cof}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{i,j})$$

**Definizione 96: Matrice aggiunta**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , definiamo come **matrice aggiunta** la trasposta della matrice dei cofattori di  $A$ :

$$\text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^T$$

**Teorema 34: Inversa di una matrice tramite aggiunta**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  dove  $\det(A) \neq 0$ , si verifica che:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

*Dimostrazione:*

- Come conseguenza dello sviluppo di Laplace, si verifica che:

$$\begin{aligned} A \cdot \text{adj}(A) &= \text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n \implies \text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n \implies \\ &\implies \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n \cdot A^{-1} \implies \det(A)^{-1} \text{adj}(A) = A^{-1} \end{aligned}$$

□

**Esempio:**

- Prendiamo ancora una volta la nostra solita matrice esempio, il cui determinante sappiamo essere  $\det(A) = 27$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- La sua matrice dei cofattori corrisponde a:

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} \text{cof}_{1,1}(A) & \text{cof}_{1,2}(A) & \text{cof}_{1,3}(A) \\ \text{cof}_{2,1}(A) & \text{cof}_{2,2}(A) & \text{cof}_{2,3}(A) \\ \text{cof}_{3,1}(A) & \text{cof}_{3,2}(A) & \text{cof}_{3,3}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

mentre la conseguente matrice aggiunta corrisponde a:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

- Dunque, la matrice inversa di  $A$  corrisponde a:

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Corollario 30**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(K)$ , si verifica che:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

*Dimostrazione:*

- Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- La sua matrice aggiunta corrisponde a:

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \implies \text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Di conseguenza, la sua inversa sarà:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

## 9.5 Teorema degli orlati

### Definizione 97: Orlato di un minore

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$  e dati un suo minore  $M$  di ordine  $k$  e un minore  $M'$  di ordine  $k+1$ , definiamo  $M'$  come **orlato di  $M$**  se quest'ultimo è anche un minore di  $M'$

### Esempio:

- Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

e il suo minore  $M$  di ordine 2 ottenuto eliminando le colonne 2 e 4 e la riga 3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

- Gli orlati di  $M$  corrispondono a:

$$M'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad M'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

### Osservazione 66

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$  e un suo minore  $M$  di ordine  $k$ , esistono  $(m-k)(n-k)$  orlati di  $M$  in  $A$

### Teorema 35: Teorema degli orlati (o di Kronecker)

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ , si ha che:

$$\text{rk}(A) = k \iff \exists M \text{ minore di } A \mid \begin{cases} \text{ordine di } M = k \\ \det(M) \neq 0 \\ \det(M') = 0, \forall M' \text{ orlato di } M \end{cases}$$

(dimostrazione omessa)

**Esempi:**

1. • Vogliamo discutere il comportamento di tale sistema al variare dei parametri  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = b \end{cases} \implies A_b = \left( \begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & b \end{array} \right) \implies$$

$$\implies \begin{cases} \text{rk}(A_b) = \text{rk}(A) & \text{se } \dim(A^1, \dots, A^n, b) = \dim(A^1, \dots, A^n) \\ \text{rk}(A_b) = \text{rk}(A) + 1 & \text{se } \dim(A^1, \dots, A^n, b) \neq \dim(A^1, \dots, A^n) \end{cases}$$

- Tramite la regola di Sarrus, otteniamo che il determinante corrisponde a:

$$\det(A) = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 = (a + 2)(a - 1)^2$$

- Se  $a \neq 1$  o  $a \neq -2$  allora  $\det(A) \neq 0$ , implicando che  $\text{rk}(A) = 3$ .

Inoltre, siccome  $\text{rk}(A_b) \leq \min(3, 4) = 3$  e siccome  $\text{rk}(A_b) = \text{rk}(A)$  oppure  $\text{rk}(A_b) = \text{rk}(A) + 1$ , allora ne segue necessariamente che  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A_b) = 3$ .

Per il teorema di Rouché-Capelli, lo spazio affine generato dalle soluzioni ha dimensione pari a 0, dunque il sistema è **determinato** ed esiste un'unica soluzione dipendente dai parametri assunti da  $a$  e  $b$ .

- Se  $a = 1$ , allora  $\det(A) = 0$ , poiché radice del polinomio precedentemente trovato.

Tuttavia, dalla riduzione a scala otteniamo che::

$$A_b = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+=-R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3+=-R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+=-R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3+=b \cdot R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

implicando che  $\text{rk}(A) = 1$  e  $\text{rk}(A_b) = 2$ , dunque il sistema **non ammette soluzioni**.

- Se  $a = -2$ , allora  $\det(A) = 0$ , poiché radice del polinomio precedentemente trovato.



Per il teorema degli orlati, si ha che l'unico orlato del minore  $M_{3,3}$ , dove  $\det(M_{3,3}) = 3$  è la matrice  $A$  stessa, che sappiamo avere determinante nullo, dunque  $\text{rk}(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies \text{rk}(A) = 2$$

Nel caso della matrice  $A_b$ , invece, consideriamo il seguente minore:

$$A_b = \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & b \end{array} \right)$$

Gli unici due orlati di tale minore sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} M'_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = A \implies \det(M'_1) = \det(A) = 0 \\ M'_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \implies \det(M'_2) = 4b + 0 + 1 + 2 - b = 3b + 3 \end{array} \right.$$

Dunque, si ha che:

$$\text{rk}(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = -2, b = -1 \implies \text{rk}(A) = \text{rk}(A_b) \implies \exists \text{ inf. soluzioni} \\ 3 & \text{se } a = -2, b \neq -1 \implies \text{rk}(A) \neq \text{rk}(A_b) \implies \nexists \text{ soluzioni} \end{cases}$$

- In particolare, se  $a = -2$  e  $b = -1$ , possiamo trovare le infinite soluzioni del sistema in funzione di  $x$ :

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} -2y + z = -x \\ y - 2z = 1 - x \end{cases}$$

appliciamo la regola di Cramer per trovare il valore di  $y$  in funzione di  $x$ , per poi sostituire il valore ottenuto nella seconda equazione, trovando il valore di  $z$  in funzione di  $x$ :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3} \cdot \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1-x & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(3x+1) = x + \frac{1}{3} \\ y - 2z = 1 - x \end{cases} \implies \begin{cases} y = x + \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} + x \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema indeterminato, quindi, appaiono nella forma:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dunque generanti una retta (difatti, la dimensione dello spazio affine generato è  $n - \text{rk}(A) = 3 - 2 = 1$ )

2. • Consideriamo il seguente insieme di equazioni parametriche corrispondenti ad un sottospazio affine in  $\mathbb{R}^3$ , già analizzato precedentemente:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- Siccome  $\dim(V) = 2$ , si verifica che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff \text{rk}(A) = \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 6 & z+1 \end{pmatrix} = 2$$

- Considerando il minore  $M_{3,3}$ , si ha che:

$$M_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(M_{3,3}) = 5 - 8 = -3 \neq 0$$

- Siccome la matrice iniziale stessa è l'unico orlato di  $M_{3,3}$ , per il teorema degli orlati si verifica che:

$$\text{rk}(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } \det(A) = 0 \\ 3 & \text{se } \det(A) \neq 0 \end{cases}$$

- Dunque, si ha che:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff \text{rk}(A) = 2 \iff \det(A) = 0$$

- Utilizzando lo sviluppo di Laplace sulla terza colonna, si ha che:

$$\det(A) = 0 \iff (x-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - y \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (z-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -3(x-1) + 6y - 3(z+1) \iff -3x + 6y - 3z = 0 \iff x - 2y + z = 0$$

- L'insieme di equazioni parametriche dato, quindi, equivale al seguente sistema di equazioni cartesiane:

$$\{ x - 2y + z = 0$$

corrispondente ad una retta in  $\mathbb{R}^3$

3. • Dati la seguente retta  $r$  e il seguente piano  $\pi$

$$r = \begin{cases} x = -2 + 3a \\ y = 1 - 2a \\ z = 5a \end{cases} \quad \pi = \begin{cases} x = 4 - 2b + 5c \\ y = 3b - c \\ z = 1 + b - 2c \end{cases}$$

possiamo trovare l'intersezione  $r \cap \pi$  in  $\mathbb{R}^3$  nei seguenti tre modi:

- (a) Troviamo i valori di  $a, b$  e  $c$  unendo i due sistemi:

$$\begin{cases} -2 + 3a = 4 - 2b + 5c \\ 1 - 2a = 3b - c \\ 5a = 1 + b - 2c \end{cases} = \begin{cases} 3a + 2b - 5c = 6 \\ 2a + 3b - c = 1 \\ 5a - b + 2c = 1 \end{cases} \implies A = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Siccome  $\det(A) = 82$  (*calcolo omissso*), possiamo applicare la regola di Cramer per trovare il valore di  $a$ , per poi sostituirlo nel sistema e trovare il valore di  $b$  e  $c$ :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a = \frac{1}{82} \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{82} \cdot 44 = \frac{22}{41} \\ c = 2a + 3b - 1 \\ b = 5a + 2c - 1 \end{cases} \implies \\ & \begin{cases} a = \frac{22}{41} \\ c = \frac{44}{41} + 3b - 1 = 3b + \frac{3}{41} \\ b = \frac{110}{41} + 2c - 1 = 2c + \frac{69}{41} \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{22}{41} \\ c = 3 \left( 2c + \frac{69}{41} \right) + \frac{3}{41} = 6c + \frac{210}{41} \\ b = 2c + \frac{69}{41} \end{cases} \implies \\ & \implies \begin{cases} a = \frac{22}{41} \\ c = -\frac{42}{41} \\ b = 2 \left( -\frac{42}{41} \right) + \frac{69}{41} = -\frac{15}{41} \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2 + 3a \\ y = 1 - 2a \\ z = 5a \end{cases} = \begin{cases} x = -\frac{16}{41} \\ y = -\frac{3}{41} \\ z = \frac{110}{41} \end{cases} \end{aligned}$$

- (b) Troviamo il sistema di equazioni cartesiane descriventi  $\pi$ :

$$\begin{aligned} \pi = \begin{cases} x = 4 - 2b + 5c \\ y = 3b - c \\ z = 1 + b - 2c \end{cases} & \iff \begin{pmatrix} x - 4 \\ y \\ z - 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \\ & \iff \text{rk} \begin{pmatrix} -2 & 5 & x - 4 \\ 3 & -1 & y \\ 1 & -2 & z - 1 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

Siccome  $\det(M_{3,3}) = -13 \neq 0$ , per il teorema degli orlati, si ha che:

$$\begin{aligned} \iff \operatorname{rk} \begin{pmatrix} -2 & 5 & x-4 \\ 3 & -1 & y \\ 1 & -2 & z-1 \end{pmatrix} = 2 &\iff \det \begin{pmatrix} -2 & 5 & x-4 \\ 3 & -1 & y \\ 1 & -2 & z-1 \end{pmatrix} = 0 \iff \\ (x-4)(-5) - y(-1) + (z-1)(-13) = 0 &\iff 5x - y + 13z = 33 \end{aligned}$$

Siccome  $x \in r \cap \pi \iff x \in r \wedge x \in \pi$ , sostituendo i valori assunti da  $x, y$  e  $z$  nell'equazione cartesiana di  $\pi$  otteniamo che:

$$-5x + y - 13z = 33 \iff 5(-2+3a) - (1-2a) + 13(5a) = 33 \iff a = \frac{22}{41}$$

Una volta trovato il valore di  $a$ , procediamo analogamente al metodo precedente, sostituendo  $a$  nell'equazione parametrica di  $\pi$  e ricavando  $b$  e  $c$  per sostituzione.

- (c) Troviamo il sistema di equazioni cartesiane descriventi  $\pi$  e il sistema di equazioni cartesiane descriventi  $r$ .

Sappiamo già che:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi \iff 5x - y + 13z = 33$$

dunque ricaviamo le equazioni cartesiane di  $r$ :

$$\begin{aligned} r = \begin{cases} x = -2 + 3a \\ y = 1 - 2a \\ z = 5a \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \\ &\iff \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ -2 & y-1 \\ 5 & z \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Considerando il minore di ordine 1 corrispondente all'entrata  $a_{1,1} = 3$ , dove quindi  $\det(a_{1,1}) = 3$ , per il teorema degli orlati si ha che:

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ -2 & y-1 \\ 5 & z \end{pmatrix} = 1 &\iff \begin{cases} \det \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ -2 & y-1 \end{pmatrix} = 0 \\ \det \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ 5 & z \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ -5x + 3z - 10 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Possiamo quindi costruire un nuovo sistema di equazioni cartesiane corrispondente a  $r \cap \pi$  utilizzando le due equazioni cartesiane descriventi  $r$  e l'equazione cartesiana descrivente  $\pi$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in r \cap \pi \iff \begin{cases} 5x - y + 13z = 33 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \\ -5x + 3z - 10 = 0 \end{cases}$$

Poiché il determinante della matrice dei coefficienti associata a tale sistema è diverso da 0, è possibile ricavare i valori di  $x, y$  e  $z$  tramite la regola di Cramer, ottenendo una soluzione analoga agli altri due metodi

## 9.6 Matrici simili

### Definizione 98: Matrici simili

Date due matrici  $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , tali matrici vengono dette **simili** se si verifica che:

$$\exists C \in GL(n, K) \mid A = C^{-1}BC$$

**Attenzione:** tale condizione non è equivalente ad affermare che  $A$  è coniugato a  $B$ , poiché nella relazione di coniugio gli elementi  $C, C^{-1}$  dovrebbero essere presi in  $\text{Mat}_{n \times n}(K)$  e non in  $GL(n, K)$ . Inoltre, ricordiamo che  $GL(n, K) \not\subseteq \text{Mat}_{n \times n}(K)$ .

### Proposizione 62: Determinante invariante

Date due matrici  $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , se  $A$  è simile a  $B$ , allora

$$\det(A) = \det(B)$$

*Dimostrazione:*

- Sia  $C \in GL(n, K) \mid B = C^{-1}AC$ . Siccome  $\det(C^{-1}) = \det(C)^{-1}$ , si verifica che:

$$\det(B) = \det(C^{-1}AC) = \det(C^{-1}) \det(A) \det(C) = \det(C)^{-1} \det(A) \det(C) = \det(A)$$

□

**Definizione 99: Traccia di una matrice**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , definiamo come **traccia** di  $A$  la somma delle entrate sulla diagonale principale:

$$\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$$

**Lemma 20**

Date  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$  e  $B \in \text{Mat}_{n \times m}(K)$ , si verifica che:

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

*Dimostrazione:*

- Il risultato segue dalla definizione stessa di prodotto tra matrici:

$$\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n (ab)_{k,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{k,j} b_{j,k} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n b_{j,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n (ba)_{k,k} = \text{tr}(BA)$$

□

**Proposizione 63: Traccia invariante**

Date due matrici  $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , se  $A$  è simile a  $B$ , allora

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$$

*Dimostrazione:*

- Se  $\exists C \in GL(n, K) \mid B = C^{-1}AC$ , allora

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(C^{-1}AC) = \text{tr}(C^{-1}CA) = \text{tr}(A)$$

□

**Definizione 100: Polinomio caratteristico**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , definiamo come **polinomio caratteristico** di  $A$  come:

$$p_A(x) := \det(xI_n - A)$$

**Esempio:**

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$p_A(x) = \det \left( \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{pmatrix} = x^2 - 5x - 2$$

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & +1 \\ -2 & x+3 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-3)(x^2 - 2x + 2)$$

#### Proposizione 64: Polinomio invariante

Date due matrici  $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , se  $A$  è simile a  $B$ , allora

$$p_A(x) = p_B(x)$$

*Dimostrazione:*

- Se  $\exists C \in GL(n, K) \mid B = C^{-1}AC$ , allora

$$\begin{aligned} p_B(x) &= \det(xI_n - B) = \det(xI_n - C^{-1}AC) = \det(xC^{-1}C - C^{-1}AC) = \\ &= \det(C^{-1}xI_nC - C^{-1}AC) = \det(C^{-1}(xI_n - A)C) = \det(C^{-1}) \det(xI_n - A) \det(C) = \\ &= \det(C)^{-1} \det(xI_n - A) \det(C) = \det(xI_n - A) = p_A(x) \end{aligned}$$

□

#### Osservazione 67

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , si verifica che:

$$p_A(x) = x^n - \text{tr}(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

(dimostrazione omessa)

#### Definizione 101: Autovalori ed Autovettori

Data  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  e uno scalare  $\lambda \in K$ , le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $p_A(\lambda) = 0$
2.  $\exists v \neq 0_{K^n} \in K^n \mid Av = \lambda v$

Dove  $\lambda$  viene detto **autovalore di  $A$**  e  $v$  viene detto **autovettore relativo a  $\lambda$**

*Dimostrazione:*

- Supponiamo quindi che esista  $\exists v \neq 0_{K^n} \in K^n \mid Av = \lambda v$ :

$$\begin{aligned} \exists v \neq 0_{K^n} \in K^n \mid (\lambda I_n - A)v = 0 &\iff \ker(L_{(\lambda I_n - A)}) \neq \{0_{K^n}\} \iff \\ \iff \dim(\ker(L_{(\lambda I_n - A)})) > 0 &\iff \operatorname{rk}(\lambda I_n - A) = n - \dim(\ker(L_{(\lambda I_n - A)})) < n \\ \iff \det(\lambda I_n - A) = 0 &\iff p_A(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

□

### Osservazione 68

Data  $A \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(K)$  e uno scalare  $\lambda \in K$ , il vettore  $v \neq 0_{K^n} \in K^n$  è un autovettore relativo a  $\lambda$  se e solo se:

$$(A - \lambda I_n)v = 0$$

o in alternativa

$$0 = (\lambda I_n - A)v$$

*Dimostrazione:*

- Notiamo facilmente che:

$$\exists v \neq 0 \in K^n \mid Av = \lambda v \iff \begin{cases} 0 = \lambda v - Av \iff 0 = (\lambda I_n - A)v \\ Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda I_n)v = 0 \end{cases}$$

□

### Definizione 102: Spettro e Autospazio relativo

Data una matrice  $A \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(K)$ , definiamo come **spettro** di  $A$  l'insieme dei suoi autovalori

$$\operatorname{sp}(A) = \{\lambda \in K \mid p_A(\lambda) = 0\}$$

e come **autospazio relativo a  $\lambda \in \operatorname{sp}(A)$**  il sottospazio di  $K^n$  generato dagli autovettori relativi a  $\lambda$ :

$$E_\lambda(A) = \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}$$

### Proposizione 65: Spettro invariante

Date due matrici  $A, B \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(K)$ , se  $A$  è simile a  $B$ , allora

$$\operatorname{sp}(A) = \operatorname{sp}(B)$$

Inoltre, dato  $\lambda \in \operatorname{sp}(A) = \operatorname{sp}(B)$  si ha che:

$$E_\lambda(A) = E_\lambda(B) \iff A = B$$



*Dimostrazioni:*

- Se  $\exists C \in GL(n, K) \mid B = C^{-1}AC$ , allora  $p_A(x) = p_B(x)$ , dunque si ha che:

$$\mu \in \text{sp}(A) \iff p_A(\mu) = p_B(\mu) = 0 \iff \mu \in \text{sp}(B)$$

- Dato  $\lambda \in \text{sp}(A) = \text{sp}(B)$ , si ha che:

$$E_\lambda(A) = E_\lambda(B) \iff Av = \lambda v = Bv, \forall v \in E_\lambda(A) \iff A = B$$

□

**Esempio:**

- Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -3 \\ -1 & x & 5 \\ 2 & 1 & x-2 \end{pmatrix} = x(x-1)(x-2)$$

dunque otteniamo che  $\text{sp}(A) = \{0, 1, 2\}$

- Gli autovettori dell'autospazio  $E_0(A)$  corrispondono a:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff (0 \cdot I_n - A)v = 0 \iff \begin{cases} -x - y - 3z = 0 \\ -x + 5z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 5t \\ y = -8t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori dell'autospazio  $E_1(A)$  corrispondono a:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff (1 \cdot I_n - A)v = 0 \iff \begin{cases} -y - 3z = 0 \\ -x + y + 5z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori dell'autospazio  $E_2(A)$  corrispondono a:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff (2 \cdot I_n - A)v = 0 \iff \begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### Definizione 103: Molteplicità algebrica e geometrica

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , per ogni autovalore  $\lambda \in \text{sp}(A)$  definiamo la sua:

- **Molteplicità algebrica**  $\mu(\lambda)$ , ossia la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico  $p_A(x)$ , corrispondente al più grande intero tale che:

$$\mu(\lambda) \in \mathbb{N}, (x - \lambda)^{\mu(\lambda)} \mid p_A(x)$$

- **Molteplicità geometrica**  $\nu(\lambda)$ , ossia la dimensione del suo autospazio relativo, corrispondente a:

$$\nu(\lambda) = \dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rk}(\lambda I_n - A)$$

Per ogni  $\lambda \in \text{sp}(A)$ , si verifica che:

$$1 \leq \nu(\lambda) \leq \mu(\lambda)$$

### Proposizione 66: Molteplicità invarianti

Se  $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  sono matrici simili, allora  $\forall \lambda \in \text{sp}(A) = \text{sp}(B)$  si ha che:

$$\mu_A(\lambda) = \mu_B(\lambda) \qquad \nu_A(\lambda) = \nu_B(\lambda)$$

(dimostrazione omessa)

### 9.6.1 Diagonalizzazione di una matrice

#### Definizione 104: Matrice diagonale

Sia  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ . Tale matrice viene detta **diagonale** se  $\forall i \neq j$  si ha che  $a_{i,j} = 0$ , ossia se sopra e sotto la diagonale principale vi sono tutti zeri

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

#### Definizione 105: Matrici triangolarizzabili e diagonalizzabili

Una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  viene detta **triangolarizzabile** se simile ad una matrice triangolare  $T \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , mentre viene detta **diagonalizzabile** se simile ad una matrice diagonale  $D \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$

#### Proposizione 67

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $A$  è triangolarizzabile
2. La somma di tutte le sue molteplicità algebriche è  $n$ :

$$\sum_{\lambda \in \text{sp}(A)} \mu(\lambda) = n = \dim(K^n)$$

3. Il suo polinomio caratteristico è completamente fattorizzabile:

$$p_A(x) = \prod_{\lambda \in \text{sp}(A)} (x - \lambda)^{\mu(\lambda)}$$

*(dimostrazione omessa)*

**Corollario 31**

Per il teorema fondamentale dell'algebra, **ogni matrice**  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)(\mathbb{C})$  è **triangolarizzabile**.

Analogamente, una matrice  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  è **triangolarizzabile** se e solo se

$$\forall \lambda \in \text{sp}(B), \lambda \in \mathbb{R} \iff \text{sp}(B) \subseteq \mathbb{R}$$

**Esempio:**

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

- Siccome  $p_A(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $\deg(p_A(x)) = 2$  e  $\Delta_{p_A(x)} < 0$ , tale polinomio non è fattorizzabile, dunque  $A$  non è triangolarizzabile
- Considerando invece la matrice  $A' \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$  avente entrate coincidenti a quelle di  $A$ , otteniamo che:

$$p_{A'}(x) = (x - i)(x + i) \in \mathbb{C}[x] \implies \text{sp}(A') = \{\pm i\} \subseteq \mathbb{C}$$

dunque  $A'$  è triangolarizzabile

**Proposizione 68**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $A$  è diagonalizzabile
2. La somma di tutte le sue molteplicità geometriche è  $n$ :

$$\sum_{\lambda \in \text{sp}(A)} \nu(\lambda) = n = \dim(K^n)$$

3. Esistono  $B^1, \dots, B^n$  autovettori di  $A$  tali che:

$$B^1, \dots, B^n \text{ base di } K^n$$

4. Il suo spettro contiene  $n$  autovalori diversi tra loro:

$$|\text{sp}(A)| = n$$

**Osservazione 69**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , dati  $\lambda, \mu \in \text{sp}(A) \mid \lambda \neq \mu$  si ha che:

$$E_\lambda(A) \cap E_\mu(A) = \{0_{K^n}\}$$

*Dimostrazione:*

- Ovviamente, essendo sottospazi vettoriali, si ha che:

$$0_{K^n} \in E_\lambda(A), 0_{K^n} \in E_\mu(A) \implies 0_{K^n} \in E_\lambda(A) \cap E_\mu(A)$$

- Supponiamo quindi che  $\exists v \neq 0_{K^n} \in K^n \mid \lambda v = Av = \mu v$ , dunque un autovettore relativo sia  $\lambda$  sia a  $\mu$ , dove  $\lambda \neq \mu$ . Ne segue che:

$$\lambda v = Av = \mu v \implies \lambda v = \mu v \implies (\lambda - \mu)v = 0_{K^n}$$

- Poiché  $\lambda \neq \mu \implies \lambda - \mu \neq 0$ , si ha che:

$$(\lambda - \mu)v = 0_{K^n} \iff v = 0_{K^n}$$

contraddicendo quindi l'ipotesi iniziale, dunque l'unica possibilità è che:

$$\nexists v \neq 0_{K^n} \mid v \in E_\lambda(A), v \in E_\mu(A) \iff E_\lambda(A) \cap E_\mu(A) = \{0_{K^n}\}$$

□

**Corollario 32**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  e dati i vettori  $v_1 \neq 0_{K^n} \in E_{\lambda_1}(A), \dots, v_k \neq 0_{K^n} \in E_{\lambda_k}(A)$ , dove  $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$ , si ha che:

$$v_1, \dots, v_k \text{ linearmente indipendenti}$$

*Dimostrazione:*

- Poiché:

$$\lambda, \mu \in \text{sp}(A) \mid \lambda \neq \mu \implies E_\lambda(A) \cap E_\mu(A) = \{0_{K^n}\}$$

ne segue automaticamente che:

$$v_i \neq 0_{K^n} \in E_{\lambda_i}(A) \implies v_i \neq 0_{K^n} \notin E_{\lambda_j}(A), \forall j \neq i$$

dunque  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente indipendenti

□

**Proposizione 69: Matrice diagonalizzante**

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , se esiste una base  $B^1, \dots, B^i, \dots, B^j, \dots, B^n$  di  $K^n$  tale che:

- $B^1, \dots, B^i$  è base di  $E_{\lambda_1}(A)$
- $\vdots$
- $B^j, \dots, B^n$  è base di  $E_{\lambda_n}(A)$

dove  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \text{sp}(A)$  e dove  $i \neq j$  allora:

$$\exists B = (B^1, \dots, B^i, \dots, B^j, \dots, B^n) \in GL(n, K) \mid D = B^{-1}AB$$

dove  $D \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  è una matrice diagonale e dove  $B$  viene detta **matrice diagonalizzante**.

**Esempio:**

1. • Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 3 \\ 4 & -8 & 4 \\ 5 & -12 & 7 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

- Il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-5 & 8 & -3 \\ -4 & x+8 & -4 \\ -5 & 12 & x-7 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-5) \det \begin{pmatrix} x+8 & -4 \\ 12 & x-7 \end{pmatrix} + 4 \det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 12 & x-7 \end{pmatrix} - 5 \det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ x+8 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-5)(x^2 + x - 8) + 4(8x - 20) - 5(3x - 8) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2$$

dunque sappiamo che  $A$  è triangolarizzabile e che il suo spettro è  $\text{sp}(A) = \{0, 2\}$ .

- Siccome affinché  $A$  sia anche diagonalizzabile è necessario che  $\nu(0) + \nu(2) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ , notiamo come:

$$1 \leq \nu(0) \leq \mu(0) \iff 1 \leq \nu(0) \leq 1 \iff \nu(0) = 1$$

di conseguenza, si ha che:

$$\nu(0) + \nu(2) = 3 \iff 1 + \nu(2) = 3 \iff \nu(2) = 2$$

- Consideriamo quindi il sistema  $(2 \cdot I_n - A)v = 0$ :

$$\begin{cases} -3x + 8y - 3z = 0 \\ -4x + 10y - 4z = 0 \\ -5x + 12y - 5z = 0 \end{cases} \implies (2 \cdot I_n - A) = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -3 \\ -4 & 10 & -4 \\ -5 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Si ha che:

$$\nu(2) = 2 = \dim(E_2(A)) = 3 - \text{rk}(2 \cdot I_n - A) = \iff \text{rk}(2 \cdot I_n - A) = 1$$

- Tuttavia, considerando il minore  $M_{3,3}$ , per il teorema degli orlati si verifica che:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} = -30 + 32 = 2 \neq 0 \implies \text{rk}(2 \cdot I_n - A) \geq 2$$

Dunque si ha che  $\text{rk}(2 \cdot I_n - A) \neq 1$ , implicando quindi che  $A$  non sia diagonalizzabile.

- Difatti, si ha che:

$$1 \leq \nu(2) = 3 - \text{rk}(2 \cdot I_n - A) \leq 3 - 2 = 1 \iff \nu(2) = 1$$

e dunque che:

$$\nu(0) + \nu(2) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

2. • Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & k-1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

- Il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x-1 & -k \\ -2 & x-k-1 \end{pmatrix} = (x-1)(x-k-1) - 2k \\ &= x^2 - kx - k - 1 = (x+1)(x-k-1) \end{aligned}$$

dunque si ha che  $\text{sp}(A) = \{-1, k+1\}$

- Siccome  $p_A(x)$  è completamente fattorizzabile indipendentemente dal valore assunto da  $k$ , allora  $A$  è sempre triangolarizzabile.
- Se  $k = -2$ , si ha che:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \implies p_A(x) = (x+1)^2 \implies \text{sp}(A) = \{-1\}$$

Dunque  $A$  è diagonalizzabile se e solo se  $\nu(-1) = 2$ .

Tuttavia, considerando il sistema  $(-1 \cdot I_n - A)v = 0$ , notiamo che :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \iff \\ \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &\implies \nu(-1) = \dim(E_{-1}(A)) = 1 \end{aligned}$$

Dunque  $A$  non è diagonalizzabile se  $k = -2$

- Se invece  $k \neq -2$ , si ha che:

$$p_A(x) = (x+1)(x-k-1) \implies \text{sp}(A) = \{-1, k+1\}$$

Dunque  $A$  è diagonalizzabile, poiché vi sono 2 autovalori distinti.

- Difatti, notiamo come considerando il sistema  $(-1 \cdot I_n - A)v = 0$  si ha che :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + ky = 0 \\ -2x + ky = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{k}{2} \end{cases} \iff \\ \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k}{2} \end{pmatrix} &\implies \nu(-1) = \dim(E_{-1}(A)) = 1 \end{aligned}$$

mentre per il sistema  $((k+1) \cdot I_n - A)v = 0$  si ha che :

$$\begin{aligned} \begin{cases} kx - ky = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \iff \\ \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &\implies \nu(k+1) = \dim(E_{k+1}(A)) = 1 \end{aligned}$$

dunque si ha che  $\nu(-1) + \nu(k+1) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

- Inoltre, otteniamo che i due vettori trovati sono base della matrice diagonalizzante  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{k}{2} & 1 \end{pmatrix} \implies D = B^{-1}AB \implies D = \begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



## 9.7 Matrice di una trasformazione lineare

### Definizione 106: Matrice di una trasformazione lineare

Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali e sia  $f : V \rightarrow W$  una trasformazione lineare.

Data una base  $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$  di  $V$ , una base  $\mathcal{C} = w_1, \dots, w_m$  di  $W$  e i seguenti due isomorfismi (sezione 8.3):

$$\varphi_{\mathcal{B}} : K^n \rightarrow V : (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1 v_1 + \dots + t_n v_n)$$

$$\varphi_{\mathcal{C}} : K^m \rightarrow W : (s_1, \dots, s_m) \mapsto (s_1 w_1 + \dots + s_m w_m)$$

Definiamo come **matrice di  $f$  nelle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$**  l'unica matrice  $M_f \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$  tale che:

$$\exists! M_f \in \text{Mat}_{m \times n}(K) \mid f = \varphi_{\mathcal{C}} \circ L_{M_f} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \downarrow & & \uparrow \varphi_{\mathcal{C}} \\ K^n & \xrightarrow{L_{M_f}} & K^m \end{array}$$

- Sia  $L_A : K^n \rightarrow K^m$  una trasformazione lineare tale che:

$$f = \varphi_{\mathcal{C}} \circ L_A \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$$

dove per definizione stessa di  $L_A$  è associata ad un'unica matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times m}(K)$

- Data la base canonica  $e_1, \dots, e_n$  di  $K^n$ , per ogni  $i \in [1, n]$  si ha che:

$$\varphi_{\mathcal{B}}(e_i) = 0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n = v_i \implies \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i) = e_i$$

- Inoltre, per ogni  $i \in [1, n]$  si ha che:

$$L_A(e_i) = Ae_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{pmatrix} = A^i$$

- Infine, dato il seguente isomorfismo:

$$\varphi_{\mathcal{C}} : K^m \rightarrow W : (s_1, \dots, s_m) \mapsto (s_1 w_1 + \dots + s_m w_m)$$

per ogni  $i \in [1, n]$  si ha che:

$$\varphi_{\mathcal{C}}(A^i) = a_{1,i}w_1 + \dots + a_{m,i}w_m$$

- A questo punto, per ogni  $i \in [1, n]$  si ha che:

$$\begin{aligned} f(v_i) &= \varphi_{\mathcal{C}}(L_A(\varphi_{\mathcal{B}^{-1}}(v_i))) \iff \\ \iff f(v_i) &= \varphi_{\mathcal{C}}(L_A(e_i)) \iff f(v_i) = \varphi_{\mathcal{C}}(A^i) \iff \\ f(v_i) &= a_{1,i}w_1 + \dots + a_{m,i}w_m \end{aligned}$$

- Dunque, è possibile ricostruire la matrice  $A$  tramite le seguenti combinazioni lineari:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{1,1}w_1 + \dots + a_{m,1}w_m \implies A^1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1,n}w_1 + \dots + a_{m,n}w_m \implies A^n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

### Esempi:

1. • Consideriamo i seguenti due sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}[x]$ :

$$V := \mathbb{R}[x]_{\leq 4} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p(x)) \leq 4\}$$

$$W := \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p(x)) \leq 3\}$$

dove  $\mathcal{B} : x^4, x^3, x^2, x, 1$  è base di  $V$  e  $\mathcal{C} : x^4, x^3, x^2, x, 1$  è base di  $W$ , da cui ne segue che:

$$\dim(V) = 5 = \dim(\mathbb{R}^5) \iff V \cong \mathbb{R}^5$$

$$\dim(W) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4) \iff W \cong \mathbb{R}^4$$

- Sia  $f' : V \rightarrow W : p(x) \mapsto p'(x)$  la trasformazione lineare corrispondente alla derivata di un polinomio. La matrice di  $f'$  nelle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  corrisponde a:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x^4) = 4x^3 = 4x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\ f'(x^3) = 3x^2 = 0x^3 + 3x^2 + 0x + 0 \\ f'(x^2) = 2x = 0x^3 + 0x^2 + 2x + 0 \\ f'(x) = x = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ f'(1) = 0 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \end{array} \right. \implies M_{f'} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Consideriamo quindi i seguenti isomorfismi:

$$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^5 : ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^4 \rightarrow W : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$

- Dato il polinomio  $p(x) := 4x^4 + 2x^3 + x + 5 \in V$ , si ha che:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{B}}^{-1}(p(x)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} &\implies L_{M_f}(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(p(x))) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\implies \varphi_{\mathcal{C}} L_{M_f}(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(p(x))) = 16x^3 + 6x^2 + 1 \end{aligned}$$

- Consideriamo ancora gli spazi  $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$  e  $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ .
  - Sia  $\Delta : V \rightarrow W : p(x) \mapsto p(x+1) - p(x)$  la trasformazione lineare corrispondente all'operatore differenza (anche detta "derivata discreta")
  - La matrice di  $\Delta$  nelle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  corrisponde a:

$$\begin{cases} \Delta(x^4) = (x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ \Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \\ \Delta(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1 \\ \Delta(x) = (x+1) - x = 1 \\ \Delta(1) = (x+1)^0 - x^0 = 0 \end{cases} \implies M_{\Delta} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Siano  $V = W = \mathbb{R}^2$  e sia:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$$

- Siano inoltre

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rispettivamente la base di  $V = \mathbb{R}^2$  e di  $W = \mathbb{R}^2$

- Consideriamo quindi la matrice  $M_f$  di  $f$  nelle basi  $\mathbb{B}$  e  $\mathbb{C}$

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Le coordinate della colonna  $M_f^1$  corrisponderanno a:

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} &= f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a - 2c = 4 \\ 3a + 4c = 6 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{10}R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \\ &\xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{14}{5} \\ c = -\frac{3}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

- Analogamente, le coordinate di  $M_f^2$  saranno:

$$\begin{aligned} b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} &= f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3(-1) \\ 2 + 4(-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b - 2d = -2 \\ 3b + 4d = -2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + (-3)R_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \cdot \frac{1}{10}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 + (-2)R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{6}{5} \\ d = \frac{2}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

- Dunque, concludiamo la matrice di  $f$  nelle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  sia:

$$M_f = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

**Proposizione 70: Matrice di cambiamento di base**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale e siano  $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$  e  $\mathcal{C} = w_1, \dots, w_n$  due basi di  $V$ .

Dato il vettore  $v \in V$  tale che:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$$

e dati i suoi **vettori delle coordinate** in base  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ :

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad v_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Definiamo come **matrice di cambiamento di base** l'unica matrice  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  tale che:

$$\exists! M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) \mid M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{C}}$$

*Dimostrazione:*

- Consideriamo l'automorfismo  $\text{id} : V \rightarrow V : v \mapsto v$  e consideriamo l'endomorfismo  $L_A : K^n \rightarrow K^n$  tale che

$$\text{id} = \varphi_{\mathcal{C}} \circ L_A \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$$

dove

$$\varphi_{\mathcal{B}} : K^n \rightarrow V : (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1 v_1 + \dots + t_n v_n)$$

$$\varphi_{\mathcal{C}} : K^n \rightarrow V : (s_1, \dots, s_n) \mapsto (s_1 w_1 + \dots + s_n w_n)$$

- Le colonne della matrice  $A$  corrisponderanno a:

$$\begin{aligned} \text{id}(v_1) = a_{1,1} w_1 + \dots + a_{m,1} w_n &\implies v_1 = a_{1,1} w_1 + \dots + a_{m,1} w_n \implies A^1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ \text{id}(v_n) = a_{1,n} w_1 + \dots + a_{m,n} w_n &\implies v_n = a_{1,n} w_1 + \dots + a_{m,n} w_n \implies A^n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Dato un vettore  $v \in V$ , poiché l'automorfismo  $\text{id} : V \rightarrow V : v \mapsto v$  ha alcun effetto primario, l'unico effetto secondario ottenuto applicando la matrice di  $\text{id}$  al vettore contenente le coordinate di  $v$  in base  $\mathcal{B}$  sarà quello di restituire le coordinate di  $v$  in base  $\mathcal{C}$

□

**Esempio:**

- Consideriamo le seguenti due basi dello spazio  $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \quad \mathcal{C} = \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$$

- Consideriamo la matrice del cambiamento dalla base  $\mathcal{B}$  alla base  $\mathcal{C}$ :

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Le coordinate della matrice del cambiamento di base corrisponderanno a:

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 5a + 7c = 1 \\ 6a + 8c = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ c = -2 \end{cases} \\ b \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 5b + 7d = 3 \\ 6b + 8d = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} b = 2 \\ d = -1 \end{cases} \\ \implies M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Consideriamo quindi il seguente vettore e le sue coordinate in base  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \\ \implies \begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x + 4y = -4 \end{cases} &\implies \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

- Le sue coordinate in base  $\mathcal{C}$  corrisponderanno a:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 6 \\ -8 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- Difatti, notiamo che:

$$6 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

## 9.8 Matrici ortogonali

### Definizione 107: Base ortogonale

Sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $\mathbb{R}^n$ . Tale base viene detta **ortogonale** se i vettori sono tutti **ortogonali** tra loro, dunque se

$$v_i v_j = 0, \forall i \neq j$$

### Definizione 108: Base ortonormale

Sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $\mathbb{R}^n$ . Tale base è detta **ortonormale** se i vettori sono tutti **ortogonali** tra loro e sono **versori**, ossia aventi norma pari ad 1, dunque se:

$$v_i v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} \|v_i\| = 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

dove  $\delta_{ij}$  viene detto **delta di Kroneker**.

### Osservazione 70

Le basi ortonormali possono essere ottenute da dalla base canonica  $e_1, \dots, e_n$  attraverso **rotazioni** e **riflessioni**

### Osservazione 71

Data una base ortonormale  $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$  di  $\mathbb{R}^n$  e dato un vettore  $w \in \mathbb{R}^n$ , le coordinate di  $w$  nella base  $\mathcal{B}$  corrispondono a:

$$w = (w \cdot v_1) \cdot v_1 + \dots + (w \cdot v_n) \cdot v_n$$

### Proposizione 71: Matrice ortogonale

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , tale matrice viene detta **matrice ortogonale** se si verifica una delle seguenti condizioni equivalenti:

- $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n \iff A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T$
- Le colonne  $A^1, \dots, A^n$  sono base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$
- Le righe  $A_1, \dots, A_n$  sono base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$
- $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è isometria, ossia non cambia la distanza tra i punti del piano

(dimostrazione omessa)

**Definizione 109: Gruppo ortogonale**

Dato il gruppo  $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ , definiamo  $O(n) \leq GL(n, \mathbb{R})$  come **gruppo ortogonale**, dove

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}$$

*Dimostrazione:*

- $I_n^{-1} = I_n = I_n^T \implies I_n \in O(n)$
- $A, B \in O(n) \implies A^{-1} = A^T, B^{-1} = B^T \implies (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T \implies AB \in O(n)$
- $A \in O(n) \implies A^{-1} = A^T \implies (A^{-1})^{-1} = A = (A^T)^T \implies (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^T \implies A^{-1} \in O(n)$

□

**Proposizione 72: Normalizzazione di un vettore**

Dato uno spazio vettoriale  $V$  e un vettore  $v \in V$ , la **normalizzazione di  $v$**  corrisponde a:

$$w = \frac{v}{\|v\|}$$

*Dimostrazione:*

- Poiché la norma di  $v$ , ossia  $\|v\|$ , corrisponde alla lunghezza geometrica di  $v$ , si vede facilmente che il vettore  $w$  ottenuto corrisponde ad un vettore avente la stessa direzione di  $v$  ma norma pari ad 1

□

**Proposizione 73: Proiezione di un vettore**

Dato uno spazio vettoriale  $V$  e due vettori  $v, w \in V$ , la **proiezione di  $v$  su  $w$**  corrisponde a:

$$\text{proj}_w(v) = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w$$

*Dimostrazione:*

- Consideriamo la normalizzazione  $u$  del vettore  $w$ :

$$u = \frac{w}{\|w\|}$$

- Sia  $x := \text{proj}_w(v)$  il vettore corrispondente alla proiezione di  $v$  su  $w$ . Per definizione stessa di proiezione su vettore, tale vettore avrà la stessa direzione del vettore  $w$  e



di conseguenza anche la stessa direzione del vettore  $u$ . Dunque, si ha che:

$$x = \|x\| \cdot u$$

- Consideriamo quindi l'angolo  $\theta$  interno ai vettori  $v$  e  $x$ . Per definizione stessa di coseno, si ha che:

$$\cos(\theta) = \frac{\|x\|}{\|v\|}$$

- Poiché  $w$  ha la stessa direzione di  $x$ , l'angolo interno ai vettori  $v$  e  $w$  coincide con l'angolo  $\theta$ . Come visto nella sezione 8.5, si ha che:

$$\cos(\theta) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|}$$

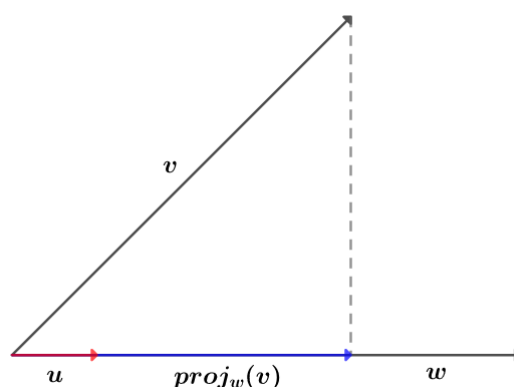
- Dunque, si ha che:

$$\frac{\|x\|}{\|v\|} = \cos(\theta) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} \implies \frac{\|x\|}{\|v\|} = \frac{v \cdot w}{\|w\|}$$

- Infine, concludiamo che:

$$x = \|x\| \cdot u = \frac{v \cdot w}{\|w\|} \cdot \frac{w}{\|w\|} = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w$$

- Di seguito, vi è un'interpretazione grafica dei passaggi effettuati:



□

### Definizione 110: Matrice simmetrica

Data una matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ , tale matrice viene detta **simmetrica** se

$$A = A^T$$

**Teorema 36: Teorema spettrale**

Data una matrice simmetrica  $S \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $\text{sp}(S) \subset \mathbb{R}$
2.  $S$  è diagonalizzabile
3. Esiste una base ortonormale  $\mathcal{B} = B^1, \dots, B^n$  di  $\mathbb{R}^n$  tale che  $B^i, \forall i \in [1, n]$  è autovettore di  $S$
4.  $\exists B \in O(n) \mid D = B^{-1}AB = B^T AB$  dove  $D \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  è una matrice diagonale

(dimostrazione omessa)

**Algoritmo 2: Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale e sia  $v_1, \dots, v_n$  una sua base. Il seguente algoritmo restituisce una base ortogonale  $u_1, \dots, u_n$  di  $V$  e una base ortonormale  $w_1, \dots, w_n$  di  $V$ :

1. Poniamo  $u_1 := v_1$
2. Il vettore  $u_2$  corrisponderà a:  $u_2 = v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2)$
3. Difatti, notiamo che:

$$\begin{aligned} u_1 \cdot u_2 &= u_1(v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2)) = u_1 \left( v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 \right) u_1 = \\ &= u_1 v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{\|u_1\|^2} \|u_1\|^2 = u_1 v_2 - u_1 v_2 = 0 \end{aligned}$$

dunque  $u_1$  risulta essere ortogonale a  $u_2$

4. In generale, il vettore  $u_k$ , dove  $k \in [1, n]$ , corrisponderà a:

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \text{proj}_{u_i}(v_k)$$

5. I vettori  $u_1, \dots, u_k$  costituiscono una base ortogonale di  $V$ .
6. Per ottenere la base ortonormale  $w_1, \dots, w_n$ , basterà normalizzare ogni vettore della base ortogonale:

$$w_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}, \forall k \in [1, n]$$

# 10

## Algoritmi di crittografia

### 10.1 Algoritmo RSA

#### Algoritmo 3: Algoritmo di crittografia RSA

Siano:

- $p, q \in \mathbb{P} \mid p \neq q$  e sufficientemente grandi
- $n := pq$
- $\lambda(n) := \text{mcm}(p-1, q-1)$
- $e \in \mathbb{N} \mid 1 < e < \lambda(n) \wedge \text{MCD}(e, \lambda(n)) = 1$
- $d := e^{-1}(\text{mod } \lambda(n))$

Dato un **messaggio da cifrare**  $m$  tale che  $\text{MCD}(m, n) = 1$ , il **messaggio cifrato**  $c$  ottenuto tramite la **chiave pubblica**  $(e, n)$  corrisponde a:

$$m^e \equiv c(\text{mod } n)$$

Una volta ottenuto il messaggio cifrato, applicando la **chiave privata**  $(d, n)$  è possibile riottenere il messaggio  $m$ :

$$c^d \equiv m(\text{mod } n)$$

Poiché le due chiavi sono **l'una l'inversa dell'altra**, distribuendo la propria chiave pubblica  $(e, n)$  è possibile permettere ad un interlocutore di poterci inviare messaggi cifrati, per poi decifrarli tramite la propria chiave privata  $(d, n)$ , la quale dovrà essere mantenuta **nascosta** al fine di non concedere ad altre persone di poter leggere il contenuto del messaggio  $m$ .

*Dimostrazione:*

- Poiché  $\lambda(n) := \text{mcm}(p, q)$ , si ha che:

$$\begin{cases} (p-1) \mid \lambda(n) \implies \exists k \in \mathbb{Z} \mid \lambda(n) = (p-1)k \\ (q-1) \mid \lambda(n) \implies \exists h \in \mathbb{Z} \mid \lambda(n) = (q-1)h \end{cases}$$

- Per il piccolo teorema di Fermat si ha che:

$$\begin{aligned} m^p &\equiv m \pmod{p} \iff m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \implies \\ \implies m^{(p-1)k} &\equiv 1 \pmod{p} \iff m^{\lambda(n)} \equiv m \pmod{p} \end{aligned}$$

e analogamente:

$$\begin{aligned} m^q &\equiv m \pmod{q} \iff m^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \implies \\ \implies m^{(q-1)h} &\equiv 1 \pmod{q} \iff m^{\lambda(n)} \equiv m \pmod{q} \end{aligned}$$

- Poiché  $\text{MCD}(p, q) = 1$ , per il teorema cinese dei resti si ha che:

$$m^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{p} m^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{q} \iff m^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

- Inoltre, si ha che:

$$\begin{aligned} \text{MCD}(e, \lambda(n)) = 1 &\iff [e] \in \mathbb{Z}_{\lambda(n)}^* \iff \exists [d] := [e]^{-1} \in \mathbb{Z}_{\lambda(n)}^* \iff \\ &\iff ed \equiv 1 \pmod{\lambda(n)} \iff ed = 1 + b\lambda(n), \exists b \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Dunque, concludiamo che:

$$(m^e)^d \equiv m^{ed} \equiv m^{1+\lambda(n)b} \equiv m(m^{\lambda(n)})^b \equiv m(1)^b \equiv m \pmod{n}$$

□

### Osservazione 72

La condizione  $\text{MCD}(m, n) = 1$  è **necessaria** affinché non vi sia una **perdita del messaggio** durante il processo di cifratura e de-cifratura. Difatti, tramite tale condizione si ha che:

$$\text{MCD}(m, n) = 1 \implies \begin{cases} n \nmid m \iff \nexists k \in \mathbb{Z} \mid m = nk \iff m \not\equiv 0 \pmod{n} \\ p \nmid m \iff \nexists h \in \mathbb{Z} \mid m = ph \iff m \not\equiv 0 \pmod{p} \\ q \nmid m \iff \nexists b \in \mathbb{Z} \mid m = qb \iff m \not\equiv 0 \pmod{q} \end{cases}$$

Senza tale condizione, quindi, potrebbe verificarsi che  $n \mid m \vee p \mid m \vee q \mid m$ , portando ad una perdita del messaggio.

**Osservazione 73**

I due primi  $p, q \in \mathbb{P}$  devono essere **sufficientemente grandi** poiché altrimenti sarebbe possibile ricavare gli interi componenti dell'algoritmo tramite essi, ottenendo quindi anche la **chiave privata**  $(d, n)$ .

Difatti, poiché l'intero  $n := pq$  è contenuto nella chiave pubblica  $(e, n)$ , se  $p$  o  $q$  fossero due numeri piccoli si potrebbe ricavare l'uno dall'altro procedendo per **brute-force**:

1. Preso  $k \in \mathbb{P}$ , se  $k \mid n$  allora  $k = p$  e  $q = \frac{n}{k}$
2. Se invece  $k \nmid n$ , allora verrà ripetuto il passo precedente con il numero primo successivo
3. Una volta trovati  $p$  e  $q$ , basterà calcolare  $[d] := [e]^{-1}(\bmod \lambda(n))$  per poter ottenere la chiave privata  $(d, n)$

## 10.2 Interpolazione di Lagrange e Algoritmo SSS

**Definizione 111: Matrice di Vandermonde**

Dati  $x_0, \dots, x_n \in K$ , definiamo la seguente matrice  $V \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  come **matrice di Vandermonde a coefficienti**  $x_0, \dots, x_n$ :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

**Proposizione 74**

Dati  $x_0, \dots, x_n \in K$ , si ha che:

$$\det(V(x_0, \dots, x_n)) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

*Dimostrazione:*

- Consideriamo il determinante di  $V(x_0, \dots, x_n)$ :

$$\det(V(x_0, x_1, \dots, x_n)) = \det \begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

- Poiché sottrarre un multiplo di una riga non ha effetti sul determinante, sottraendo la prima riga a tutte le altre si ha che:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \xrightarrow{R_i - R_1, \forall i > 1} \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

- Eseguendo lo sviluppo di Laplace sulla prima colonna, si ha che:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

- Notiamo che  $\forall i, k \in [1, n]$  si ha che:

$$x_i^k - x_0^k = (x_i - x_0)(x_i^{k-1} + x_i^{k-2}x_0 + \dots + x_i x_0^{k-2} + x_0^{k-1})$$

da cui ne segue che:

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix} = \\ & = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) & \cdots & (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \dots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n + x_0) & \cdots & (x_n - x_0)(x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \dots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Per multilinearità del determinante, si ha che:

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) & \cdots & (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \dots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n + x_0) & \cdots & (x_n - x_0)(x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \dots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \end{pmatrix} = \\ & (x_1 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \dots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \dots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \end{pmatrix} = \\ & = \prod_{j=1}^n (x_j - x_0) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \dots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \dots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Sottraendo ad ogni colonna tutte le colonne precedenti moltiplicate per  $b_0$ , si ha che:

$$\prod_{j=1}^n (x_j - x_0) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \cdots + x_1x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \cdots + x_nx_0^{n-2} + x_0^{n-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{C^i - \sum_{j=1}^{n-1} x_0 C^j, \forall i}$$

$$\prod_{j=1}^n (x_j - x_0) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^n (x_j - x_0) \cdot \det(V(x_1, \dots, x_n))$$

- Effettuando gli stessi passaggi ricorsivamente, concludiamo che:

$$\det(V(x_0, \dots, x_n)) = \prod_{j=1}^n (x_j - x_0) \cdot \det(V(x_1, \dots, x_n)) =$$

$$= \prod_{j=1}^n (x_j - x_0) \cdot \prod_{h=2}^n (x_h - x_1) \cdot \det(V(x_2, \dots, x_n)) = \dots = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

□

### Lemma 21

Dati  $x_0, \dots, x_n \in K$ , si ha che:

$$\det(V(x_0, \dots, x_n)) \neq 0 \iff x_i \neq x_j, \forall i \neq j$$

*Dimostrazione:*

- Poiché

$$\det(V(x_0, \dots, x_n)) = \prod_{0 \leq h < j \leq n} (x_j - x_h)$$

si vede facilmente che:

$$\exists k, h \in [0, n] \mid x_k = x_h \implies x_k - x_h = 0 \implies \det(V(x_0, \dots, x_n)) = 0$$

da cui per contronominale otteniamo che:

$$\det(V(x_0, \dots, x_n)) \neq 0 \implies \nexists k, h \in [0, n] \mid x_k = x_h \implies x_k \neq x_h, \forall k, h \in [0, n]$$

- Viceversa, supponiamo per assurdo che  $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$  e che  $\det(V(x_0, \dots, x_n)) = 0$ .  
Ne segue che:

$$\det(V(x_0, \dots, x_n)) = 0 \iff \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = 0$$

- Per la legge di annullamento del prodotto, ne segue che:

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = 0 \implies (x_1 - x_0) = 0 \vee \dots \vee (x_n - x_{n-1}) = 0 \implies$$

$$x_1 = x_0 \vee \dots \vee x_n = x_{n-1}$$

contraddicendo quindi l'ipotesi per cui  $x_k \neq x_j, \forall i \neq j$ . Dunque, l'unica possibilità è che  $\det(V(x_0, \dots, x_n)) \neq 0$

□

### Proposizione 75

Siano  $x_0, \dots, x_n \in K \mid x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ . Dati  $y_0, \dots, y_n \in K$ , si ha che:

$$\exists! p(x) \in K[x]_{\leq n} \mid \begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ p(x_n) = y_n \end{cases}$$

*Dimostrazione:*

- Posto  $p(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in K[x]_{\leq n}$ , si ha che:

$$\begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ p(x_n) = y_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

- Considerando  $a_0, \dots, a_n$  come le incognite del sistema, la matrice dei coefficienti associata a risulta essere una matrice di Vandermonde nella forma  $V(x_0, \dots, x_n)$ . Di conseguenza, si ha che:

$$x_i \neq x_j, \forall i \neq j \iff \det(V(x_0, \dots, x_n)) \neq 0 \iff \exists! \text{ soluzione}$$

- Dunque, esiste può esistere un'unico polinomio  $p(x) \in K_{\leq n} \mid p(x_0) = y_0, \dots, p(x_n) = y_n$

□

### Corollario 33

Dati  $x_0, \dots, x_n \in K \mid x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ , si ha che:

$$\exists! p_i(x) \in K[x]_{\leq n} \mid p_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

dove  $\delta_{i,j}$  è il **delta di Kroneker** e dove  $p_1, \dots, p_n$  formano una base di  $K[x]_{\leq n}$  detta **base di Lagrange**



*Dimostrazione:*

- Dato  $i \in [0, n]$ , si ha che:

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \iff (x - x_j) \mid p_i(x), \forall j \neq i \in [0, n] \iff \begin{cases} p_i(x_1) = 0 \\ \vdots \\ p_i(x_i) = 1 \\ \vdots \\ p_i(x_n) = 0 \end{cases}$$

- Per la proposizione precedente, l'unica possibilità è che  $p_0(x), \dots, p_n(x) \in K[x]_{\leq n}$  siano unici, poiché:

$$\exists! q(x) \in K[x]_{\leq n} \mid q(x_1) = 0, \dots, q(x_i) = 1, \dots, q(x_n) = 0$$

□

- Di conseguenza, ne segue automaticamente che tali polinomi siano linearmente indipendenti tra loro, poiché nessuno di loro può essere espresso come combinazione lineare degli altri.
- Inoltre, poiché  $\dim(K[x]_{\leq n}) = n + 1$ , sappiamo che  $n + 1$  vettori possono essere linearmente indipendenti se e solo se sono anche generatori, di conseguenza  $p_0, \dots, p_n$  sono una base di  $K[x]_{\leq n}$

□

### Teorema 37: Interpolazione di Lagrange

Dati i seguenti **nodì dell'interpolazione**  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ , dove  $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ , e dati i seguenti polinomi  $p_0, \dots, p_n \in K[x]_{\leq n}$  tali che:

$$p_i(x) = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

L'unico polinomio  $p(x) \in K[x]_{\leq n}$  passante per ogni nodo corrisponde a:

$$p(x) = y_0 p_0(x) + \dots + y_n p_n(x)$$

*Dimostrazione:*

- Consideriamo la base di Lagrange  $p_0, \dots, p_n \in K[x]_{\leq n}$  dello spazio  $K[x]_{\leq n}$  vista nel corollario precedente:

$$\exists! p_i(x) \in K[x]_{\leq n} \mid p_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

- Per ogni polinomio della base si ha che:

$$p_i(x_j) = 0, \forall j \neq i \in [0, n] \iff (x - x_j) \mid p_i(x), \forall j \neq i \in [0, n] \implies$$

$$\begin{aligned} &\implies (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \mid p_i(x) \iff \\ &\iff p_i(x) = c_i(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n), \exists c_i \in K \end{aligned}$$

- Poiché  $p_i(x_i) = 1, \forall i \in [0, n]$ , l'unica possibilità è che  $c_i = 1, \forall i \in [0, n]$ . Inoltre, poiché  $p_i(x_i) = 1$ , ne segue che:

$$\begin{aligned} p_i(x) &= (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \implies \\ p_i(x) &= \frac{(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{1} \implies \\ p_i(x) &= \frac{(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{p_i(x_i)} \implies \\ p_i(x) &= \frac{(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)} = \\ p_i(x) &= \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \end{aligned}$$

- Sia quindi  $p(x) \in K[x]_{\leq n}$  definito come:

$$p(x) := y_0 p_0(x) + \dots + y_n p_n(x)$$

- Dunque,  $\forall k \in [0, n]$  si ha che:

$$\begin{aligned} p(x_k) &= y_0 p_0(x_k) + \dots + y_k p_k(x_k) + \dots + y_n p_n(x_k) \implies \\ p(x_k) &= y_0 \cdot 0 + \dots + y_k \cdot 1 + \dots + y_n \cdot 0 = y_k \implies \begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ p(x_n) = y_n \end{cases} \end{aligned}$$

- Per la proposizione precedente, concludiamo che  $p(x)$  sia l'unico polinomio in  $K[x]_{\leq n}$  tale che  $p(x_0) = y_0, \dots, p(x_n) = y_n$

□

#### Osservazione 74

Dati  $n + 1$  punti del piano cartesiano  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ , è possibile utilizzare l'interpolazione di Lagrange per trovare l'unico polinomio di grado  $n$ , dunque  $p(x) \in K[x]_{\leq n}$ , passante per ognuno di tali punti

**Algoritmo 4: Algoritmo SSS**

Il seguente algoritmo permette di suddividere in  $n + 1$  **partizioni** un **segreto**  $s \in K$ , per poi ricostruire il quest'ultimo tramite le partizioni stesse:

1. Scelti casualmente i coefficienti  $a_1, \dots, a_n \in K$ , definiamo  $p(x) \in K[x]_{\leq n}$  come:

$$p(x) = s + a_1x + \dots + a_nx_n$$

2. Scelti  $n + 1$  valori  $x_0, \dots, x_n \mid x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ , costruiamo i nodi dell' **interpolazione di Lagrange** come  $(x_0, p(x_0)), \dots, (x_n, p(x_n))$
3. Distribuiamo ogni nodo ad eventuali interlocutori
4. Una volta riottenuti gli  $n + 1$  nodi, tramite l'interpolazione di Lagrange è possibile ricostruire  $p(x)$
5. Infine, poiché  $s$  è il termine noto di  $p(x)$ , è possibile riottenere il segreto tramite  $p(0) = s$