

**REPUBLIQUE TUNISIENNE**

\*\*\*\*\*

**Ministère De L'enseignement  
Supérieur Et De La Recherche  
Scientifique**



المعهد العالي للإعلامية وتقنيات  
الاتصال بحمام سوسة

**UNIVERSITE DE SOUSSE**

\*\*\*\*\*

**Institut Supérieur d'Informatique  
Et des Techniques de  
Communication Hammam Sousse**

## **Projet : Analyse Numérique**

Réalisé par

**Ikram BEN SELMA  
Eya KRIFA**

**Interface Graphique : Méthodes d'Intégration  
Numérique**

Enseignant :

**Mr.Khemais Abedallah**

Classe :

**2DNI2**

Année Universitaire : 2020- 2021

## Table de matière

<b>Table de matière .....</b>	<b>I</b>
<b>Introduction Général.....</b>	<b>0</b>
<b>Chapitre I. Méthode de Rectangles.....</b>	<b>2</b>
<b>Chapitre II. Méthode des trapèzes.....</b>	<b>3</b>
<b>Chapitre III. Méthode des points Milieu .....</b>	<b>5</b>
<b>Chapitre IV. Méthode de Simpson.....</b>	<b>6</b>
<b>Chapitre V. Environnement de travail.....</b>	<b>8</b>
<i>II.1.1 Environnement logiciel .....</i>	<i>8</i>
<i>II.1.2 Langages de développement.....</i>	<i>8</i>
<b>Chapitre VI. Réalisation .....</b>	<b>9</b>
<b>Conclusion Général.....</b>	<b>11</b>

# Introduction Général

L'intégration est un des problèmes les plus importants que l'on rencontre en analyse. En effet, on rencontre souvent des intégrales dont le calcul par des méthodes analytiques est très compliqué ou même impossible, car il n'existe pas d'expression analytique d'une primitive de la fonction à intégrer.

Dans ce cadre, Nous avons choisi un projet dans le domaine de l'intégration numérique. Plus précisément, nous avons étudié différentes méthodes qui permettent d'approcher les intégrales sur des intervalles bornés pour le calcul approchée de

$$I = \int_a^b f(x)dx .$$

Dans ce projet nous présentons quelques méthodes pour le cas unidimensionnel, notamment celle du Rectangle, point milieu, du trapèze et de Simpson.

Lorsqu'il s'agit d'une formule simple d'une fonction  $f(x)$ , cet intégrale peut se fait analytiquement et nous n'avons pas besoin d'utiliser les méthodes numériques. Alors que dans les cas où la formule de  $f(x)$  est compliquée où lorsque nous avons juste des mesures discrètes et aucune formule mathématique qui relie ces mesures, on fait recours aux **méthodes numériques**.

Calculer numériquement l'intégrale d'une fonction  $f(x)$  dans l'intervalle  $[a ; b]$  revient à calculer la surface délimitée par l'axe des abscisses, les deux droite  $y = a$  et  $y = b$  et la portion de la courbe de  $f$  délimitée par ces deux droites.

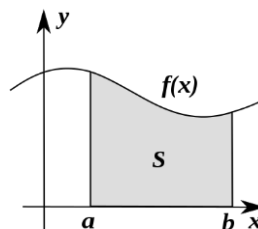


Figure : L'intégrale d'une fonction  $f$

- ➔ L'objectif de ce projet est de réaliser une interface graphique permettant d'étudier quatre méthodes numériques classiques.

# Chapitre I. Méthode de Rectangles

## Introduction

C'est l'application la plus simple de la définition de l'intégrale de Riemann.

On découpe l'intervalle  $[a ; b]$  en  $n$  intervalles équivalents de largeur  $h$ .

## Principe :

On écrit alors :

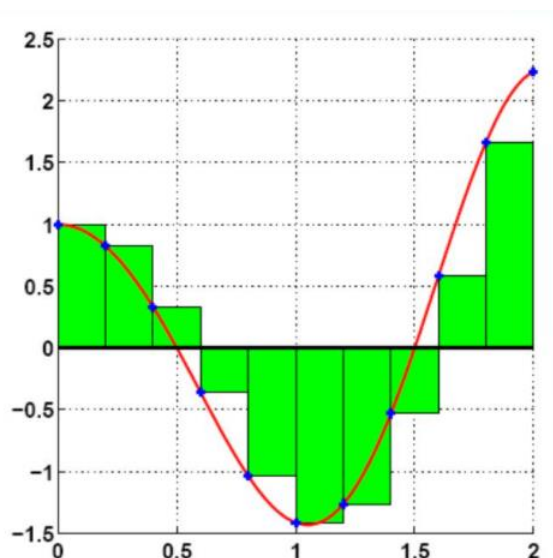
$$I \simeq \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \times h\right) \times h$$

$$\text{Avec } h = \frac{b-a}{n}$$

On commence par couper le gros intervalle  $[a, b]$  en  $N$  plus petits intervalles  $[a_i, a_{i+1}]$ , avec  $a_1=a$  et  $a_{N+1}=b$ . Puis, pour chaque intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  on approche l'intégrale par :

$$I(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

Géométriquement, cela signifie qu'on approche l'intégrale de  $f$  par l'aire des rectangles hachurés en vert.



## Chapitre II. Méthode des trapèzes

### Introduction

La méthode du trapèze est obtenue en remplaçant  $f$  par son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1 aux nœuds  $x_0 = a$  et  $x_1 = b$ , c'est-à-dire  $l(f) = (f(a) + f(b))/2$

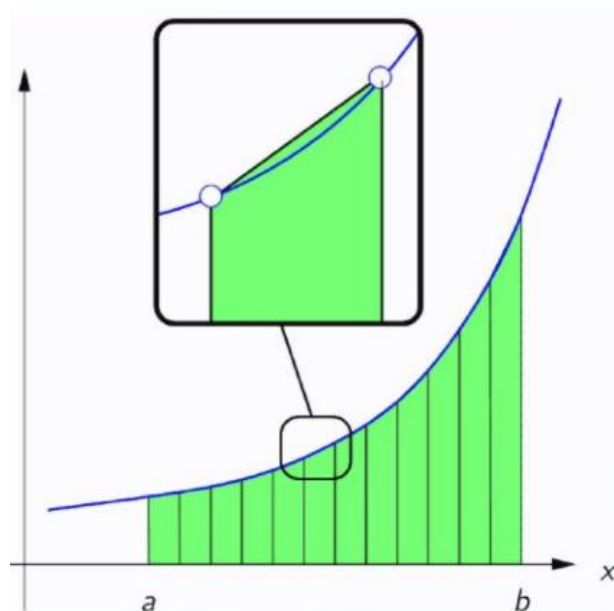
### Principe :

On réalise pour chaque intervalle de largeur  $h$  une approximation linéaire de la fonction à intégrer.

On a alors :

$$I \simeq \left( \frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \times h) \right) \times h$$

Avec  $h = \frac{b-a}{n}$



Elle s'appelle la méthode du trapèze pour des raisons qui sont claires lorsqu'on regarde la figure en dessous. Elle consiste à faire l'approximation :

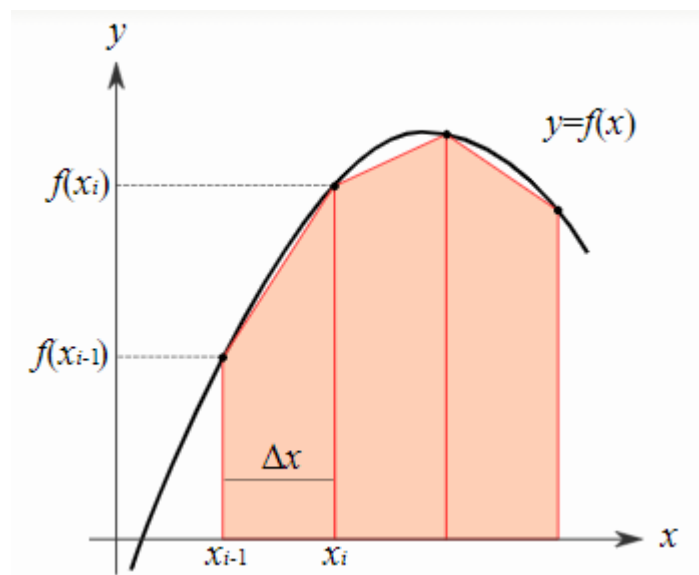
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \Delta x.$$

---

Et elle conduit à la formule :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right].$$

Géométriquement, cela signifie qu'on approche l'intégrale de  $f$  par l'aire des Trapèzes en rouge.



## Chapitre III. Méthode des points Milieu

### Introduction

En analyse numérique, la méthode du point médian est une méthode permettant de réaliser le calcul numérique d'une intégrale.

### Principe :

Cette méthode consiste à choisir le point milieu de chacun des sous-intervalles :

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

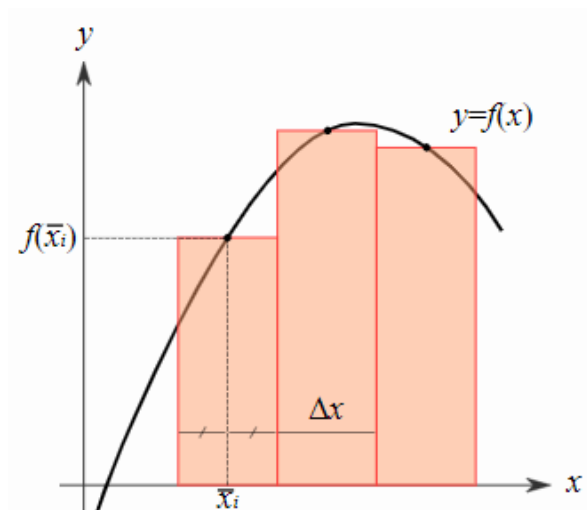
Et à faire l'approximation

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx f(\bar{x}_i) \Delta x,$$

Ce qui conduit à la formule :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i).$$

Cette méthode qui, pour des raisons évidentes s'appelle la méthode du point milieu, est illustrée en bas :



## Chapitre IV. Méthode de Simpson

### Introduction :

La formule de Simpson peut être obtenue en remplaçant  $f$  sur  $[a, b]$  par son polynôme d'interpolation composite de degré 2 aux nœuds  $x_0 = a$ ,  $x_1 = (a + b)/2$  et  $x_2 = b$

### Principe :

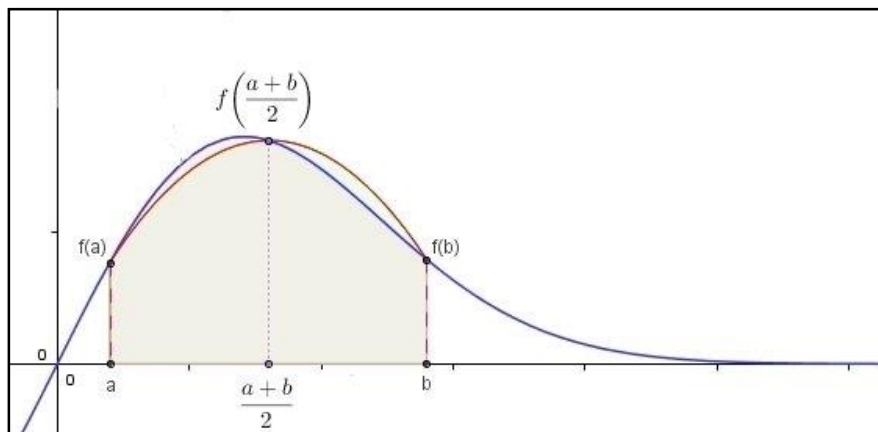
Elle revient à approcher localement la fonction à intégrer sur des intervalles adjacents par une parabole.

On a :

$$\frac{dl(x)}{dx} = f(x)$$

On pose :

$$A = l(x + h) - l(x - h)$$



En développant autour de  $x$  à l'ordre 4, on obtient :

$$A \simeq 2h f(x) + \frac{h^3}{3} f''(x)$$

On utilise la dérivation numérique pour évaluer  $f''(x)$  :

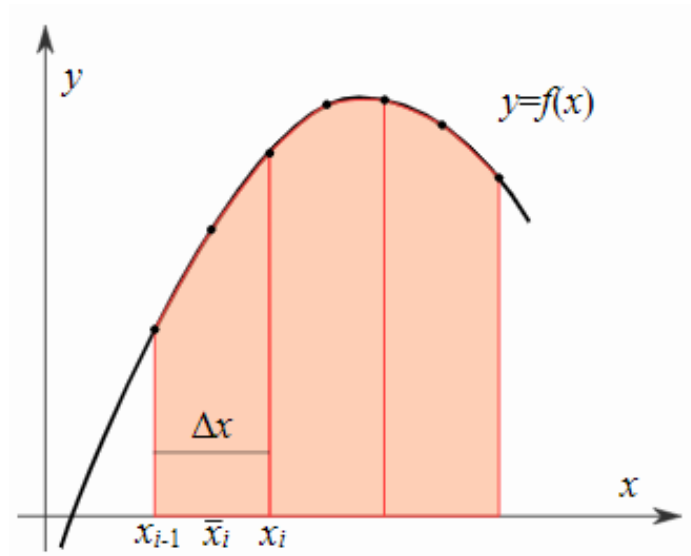
$$f''(x) = \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}$$



On a alors pour n pair :

$$I \simeq \frac{h}{3} \left[ f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1(\text{impair})}^{i=n-1} f(x + i h) + 2 \sum_{i=2(\text{pair})}^{i=n-2} f(x + i h) \right]$$

Cette méthode est illustrée en bas :



## Chapitre V. Environnement de travail

### Environnement logiciel

#### ➤ **visuel studio code**

C'est un éditeur de code multiplateforme édité par Microsoft. Cet outil destiné aux développeurs supporte plusieurs dizaines de langages de programmation comme Python, HTML, C++, PHP, JavaScript, CSS.



### Langages de développement

#### ➤ **Python**

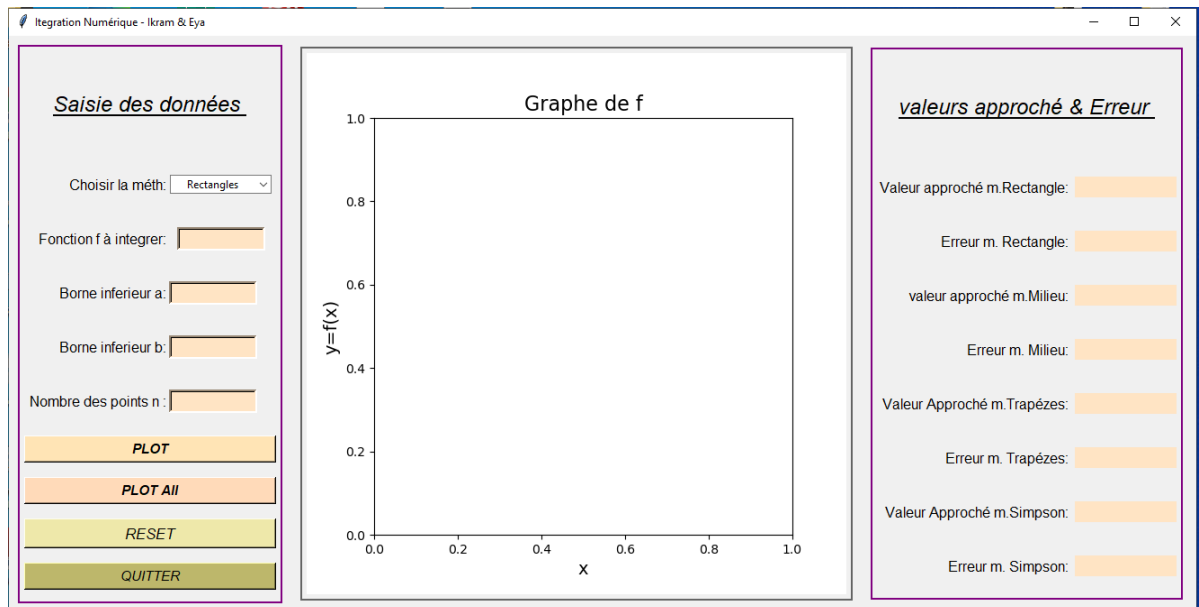
Python est un langage de programmation puissant et facile à apprendre. Il dispose de structures de données de haut niveau et permet une approche simple mais efficace de la programmation orientée objet. Parce que sa syntaxe est élégante, que son typage est dynamique et qu'il est interprété, Python est un langage idéal pour l'écriture de scripts et le développement rapide d'applications dans de nombreux domaines et sur la plupart des plateformes.

#### ➤ **Tkinter**

Tkinter est le module python intégré utilisé pour créer des applications GUI. C'est l'un des modules les plus couramment utilisés pour créer des applications GUI en Python car il est **simple** et **facile** à utiliser.

## Chapitre VI. Réalisation

La figure ci-dessous représente l'interface graphique de l'application en modélisant quatre méthodes d'intégration numériques.

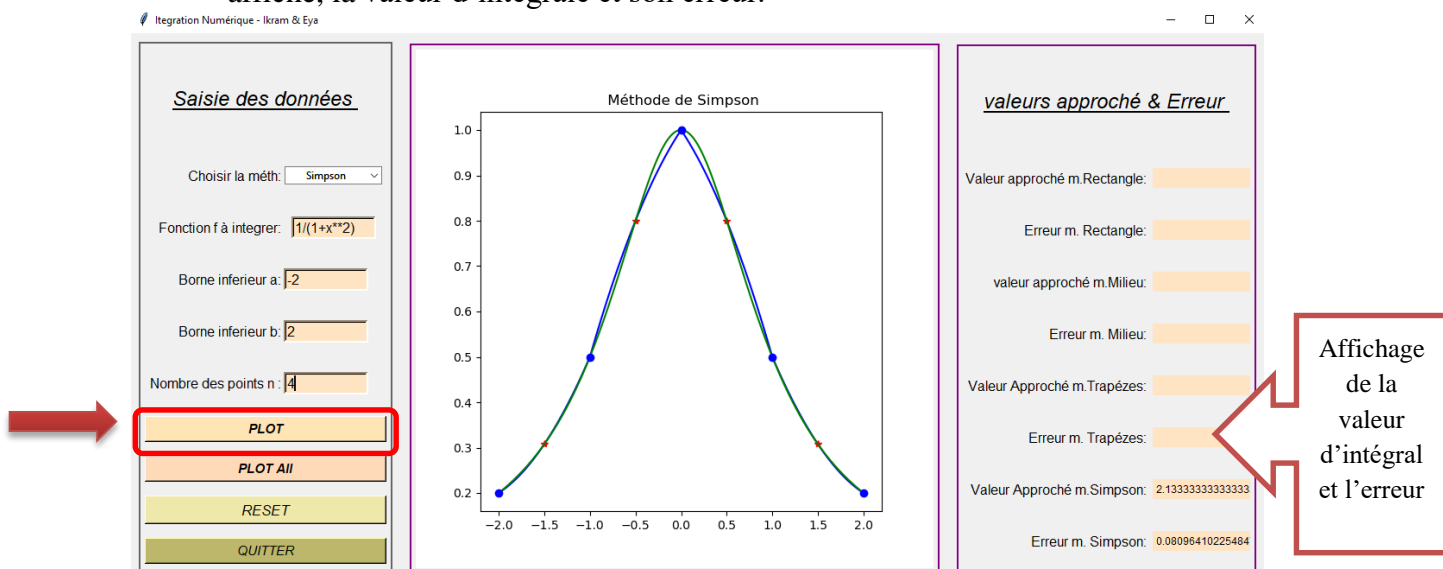


L'interface est composée de 4 boutons :

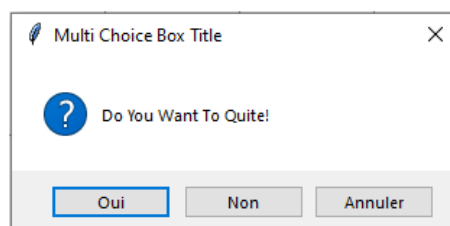
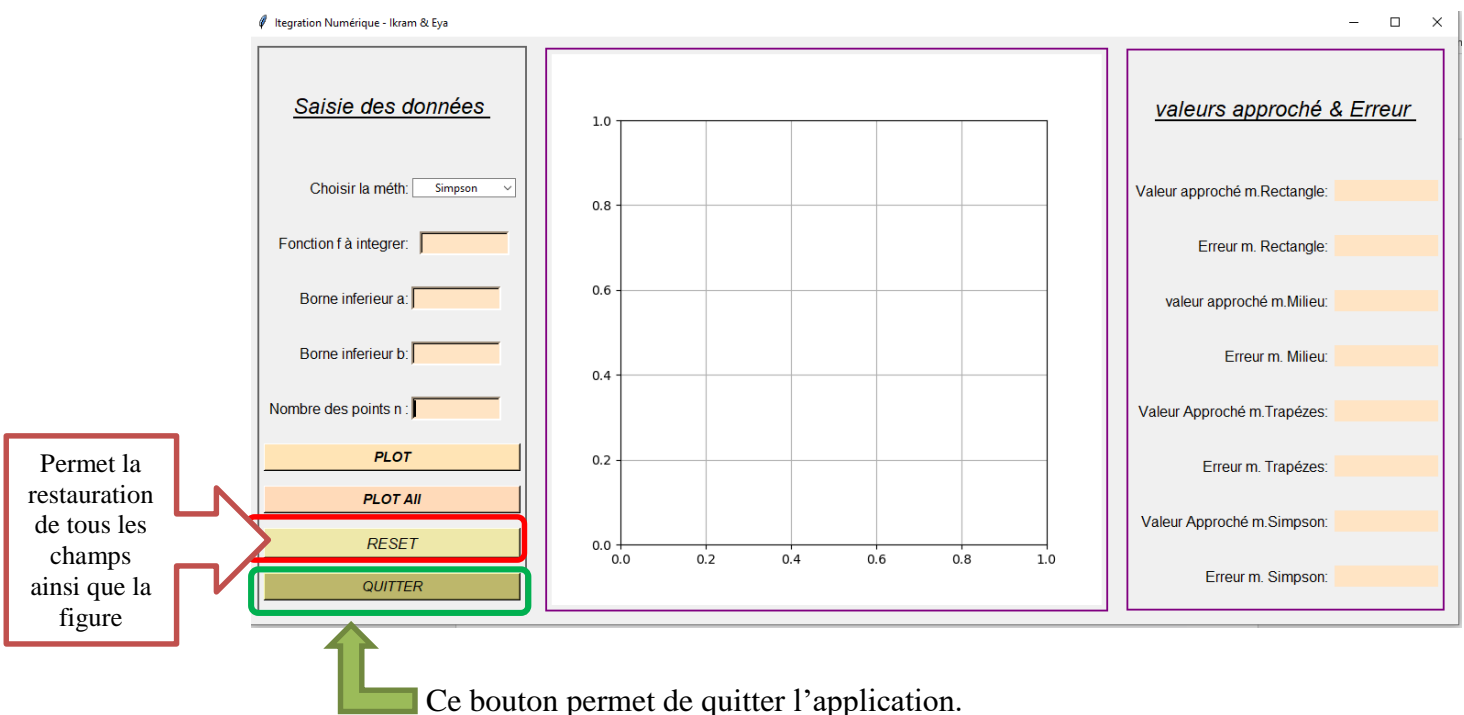
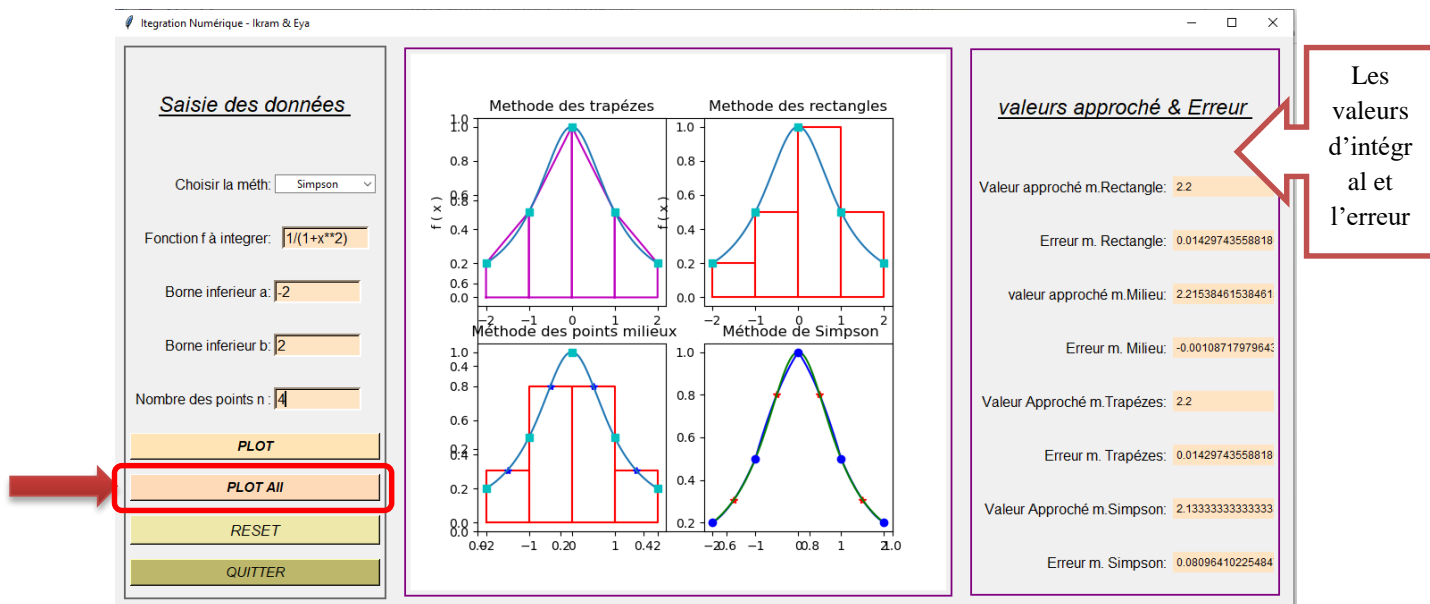
- PLOT
- Plot All
- Reset
- Quitter

D'abord, il faut saisir la fonction à intégrer, puis choisir les bornes d'intégrale (a et b) et fixer le nombre de subdivisions.

- ✓ Finalement, si on appuie sur le bouton **"Plot"** : le graphe de la méthode désirée sera affiché, la valeur d'intégrale et son erreur.



- ✓ Si on appuie sur le bouton **"Plot ALL"** : le graphe des quatre méthodes relié à chaque méthode d'intégration seront affichés, les valeurs approchées d'intégrales et leurs erreur (qui représente la différence entre la valeur exacte de l'intégrale et la valeur approchée donné par chaque méthode)



## Conclusion Général

### Exemple de comparaison entre les Méthodes :

On veut approximer l'intégrale  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$  par trois méthodes Points-milieu, Trapèze et Simpson pour l'intervalle :  $[1, 1.2]$

<b>f(x)</b>	<b><math>x^2</math></b>	<b><math>\frac{1}{1+x}</math></b>	<b><math>\sqrt{1+x^2}</math></b>	<b><math>e^x</math></b>	<b>sin(x)</b>
<b>Valeur exacte</b>	<b>0.24267</b>	<b>0.09531</b>	<b>0.29742</b>	<b>0.60184</b>	<b>0.17794</b>
<b>M.Point Milieu</b>	0.24200	0.09524	0.29732	0.60083	0.17824
<b>M. Trapèze</b>	0.24400	0.09545	0.29626	0.60384	0.17735
<b>M. Simpson</b>	0.24267	0.09531	0.29742	0.60184	0.17794

➔ On constate que la méthode de Simpson donne les meilleurs résultats ! Mais les autres méthodes, en particulier les trapèzes, sont tout à fait convenables pour les besoins courants.

#### ▪ La méthode de Simpson

Fournit des résultats exacts pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. À la fois à cause de sa simplicité de mise en œuvre, et de sa bonne précision, cette méthode est la plus utilisée par les calculatrices pour tous calculs approchés d'intégrales de fonctions explicites.

#### ▪ La méthode des trapèzes :

Est la première des formules de Newton-Cotes, avec deux nœuds par intervalle. Sa rapidité de mise en œuvre en fait une méthode très employée. Cependant, la méthode de Simpson permet une estimation plus précise d'un ordre pour un coût souvent raisonnable.

#### ▪ La méthode du point milieu :

C'est une amélioration de la méthode d'Euler qui a sur cette dernière l'avantage d'être d'ordre 2 : si le pas de temps est divisé par 10, la précision augmente d'un facteur 100.

- **La méthode des rectangles :**

Lorsque la fonction est continue et décroissante sur  $[a;b]$ , les inégalités sont inversées: dans le cas où la fonction est monotone, la méthode des rectangles présente donc le (gros) avantage de donner un encadrement de  $I$ , ce qui permet facilement de donner un sens aux résultats renvoyés.