REPUBLIQUE TUNISIENNE
****

Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

المعهد العالي للإعلامية وتقنيات الاتصال بحمام سوسة

UNIVERSITE DE SOUSSE
****

Institut Supérieur d'Informatique Et des Techniques de Communication Hammam Sousse

Projet : Analyse Numérique

Département Téléinformatique

Réalisé par

Ikram BEN SELMA
Eya KRIFA

Interface Graphique : Méthodes d'Intégration Numérique

Enseignant : **Mr.Khemais Abedallah**

Année Universitaire : 2020- 2021

Table de matière

Introduction Général

L'intégration est un des problèmes les plus importants que l'on rencontre en analyse. En effet, on rencontre souvent des intégrales dont le calcul par des méthodes analytiques est très compliqué ou même impossible, car il n'existe pas d'expression analytique d'une primitive de la fonction à intégrer.

Dans ce cadre, Nous avons choisi un projet dans le domaine de l'intégration numérique.
Plus précisément, nous avons étudié différentes méthodes qui permettent
d'approcher les intégrales sur des intervalles bornés pour le calcul approchée de

$$I = \int_a^b f(x)dx \ .$$

Le calcul d'aires, de surfaces, de volumes et longueurs d'arc était une des préoccupations majeures des scientifiques depuis Euclide et Archimède jusqu'à Kepler.
Dans ce projet nous présentons quelques méthodes pour le cas unidimensionnel, notamment celle du point milieu, du trapèze et de Simpson.
Lorsqu'il s'agit d'une formule simple d'une fonction f(x), cet intégrale peut se fait analytiquement et nous n'avons pas besoin d »utiliser les méthodes numériques. Alors que dans les cas où la formule de f(x)est compliquée où lorsque nous avons juste des mesures discrètes et aucune formule mathématique qui relie ces mesures, on fait recours aux **méthodes numériques**. Autrement dit, les méthodes numériques interviennent lorsque la fonction est compliquée ou dans le cas d'une mesure expérimentale.
Calculer numériquement l'intégrale d'une fonction f(x)dans l'intervalle [a; b] revient à calculer la surface délimitée par l'axe des abscisses, les deux droite y = a et y = b et la portion de la courbe de f délimitée par ces deux droites.

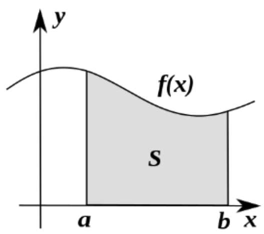


Figure 1: L'intégrale d'une fonction f

L'objectif de ce projet est de réaliser une interface graphique permettant d'étudier quatre méthodes numériques classiques

Dans ce projet en va voir trois chapitres :

Chapitre(1) :

Chapitre(2) :

Chapitre(3) :

Chapitre(4) :

Chapitre I. Méthode de Rectangles

Introduction

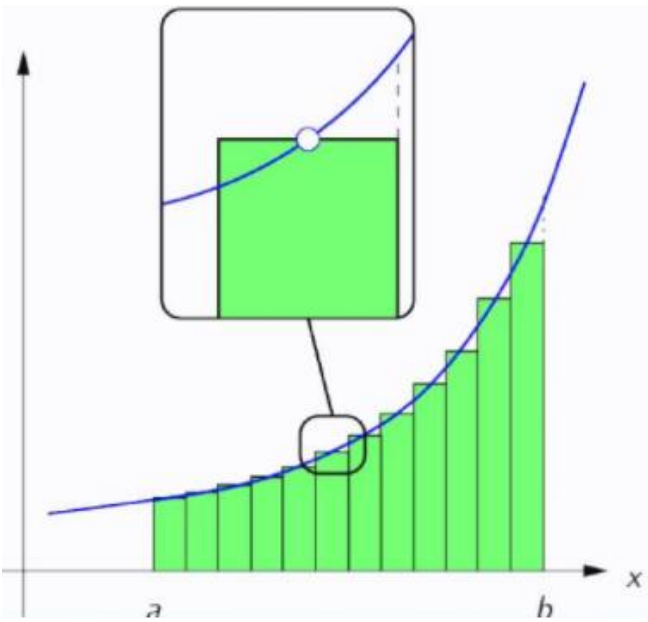
C'est l'application la plus simple de la définition de l'intégrale de Riemann. On découpe l'intervalle [a ; b] en n intervalles équivalents de largeur h.

Principe :

On écrit alors

$$I \simeq \sum_{i=0}^{i=n-1} f(a + (i + \frac{1}{2}) \times h) \times h$$

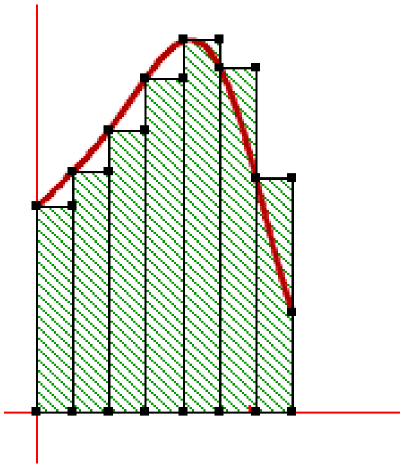
Avec $h = \frac{b-a}{n}$

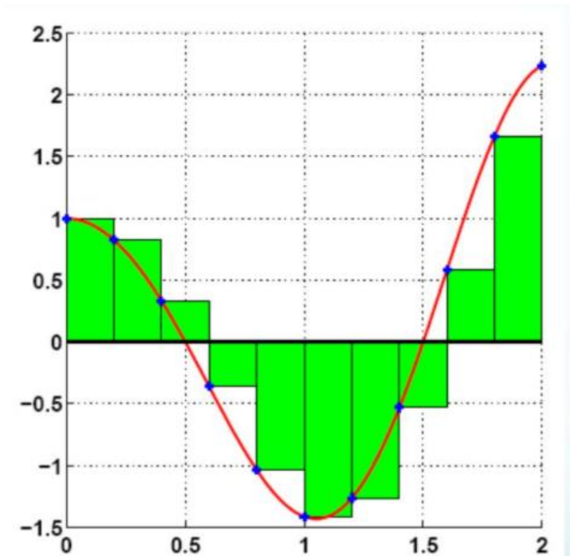


On commence par couper le gros intervalle [a,b] en N plus petits intervalles [ai,ai+1], avec a1=a et aN+1=b. Puis, pour chaque intervalle [ai,ai+1]. La méthode des rectangles à gauche : on approche l'intégrale par :

$$I(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

Géométriquement, cela signifie qu'on approche l'intégrale de f par l'aire des rectangles hachurés en vert.





Chapitre II. Méthode des trapèzes

Introduction

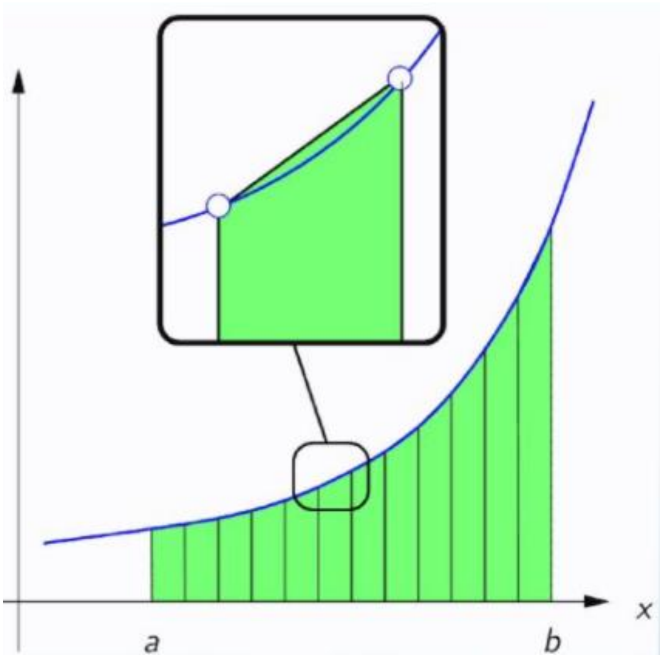
La méthode du trapèze est obtenue en remplaçant f par son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1 aux noeuds xo = a et x1 = b, c'est-à dire 1(f) = (f(a) + f(b))/2

Principe :

On réalise pour chaque intervalle de largeur h une approximation linéaire de la fonction à intégrer.
On a alors :

$$I \simeq \left(\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{i=n-1} f(a + i \times h) \right) \times h$$

Avec $h = \frac{b-a}{n}$



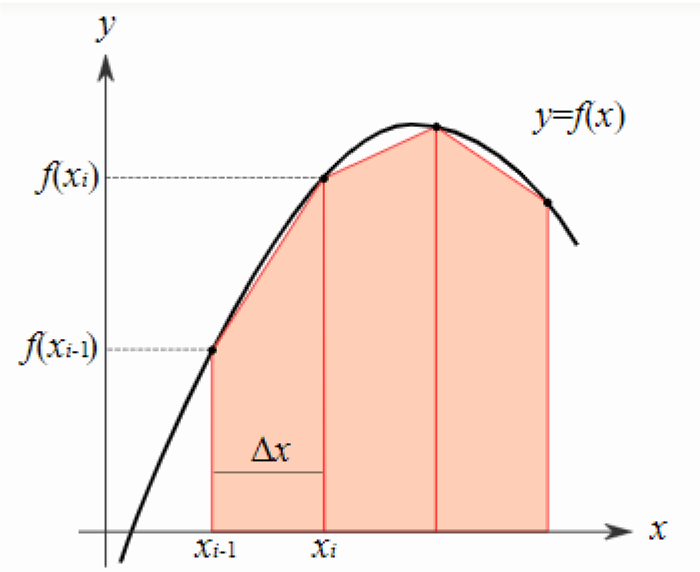
Elle s'appelle la méthode du trapèze pour des raisons qui sont claires lorsqu'on regarde la figure en bas. Elle consiste à faire l'approximation :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \approx \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\, \Delta x.$$

Et elle conduit à la formule :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Géométriquement, cela signifie qu'on approche l'intégrale de f par l'aire des Trapèzes en rouge.



Chapitre III. Méthode des points Milieu

Introduction

En analyse numérique, la méthode du point médian est une méthode permettant de réaliser le calcul numérique d'une intégrale.

Principe :

Cette méthode consiste à choisir le point milieu de chacun des sous-intervalles :

$$\overline{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

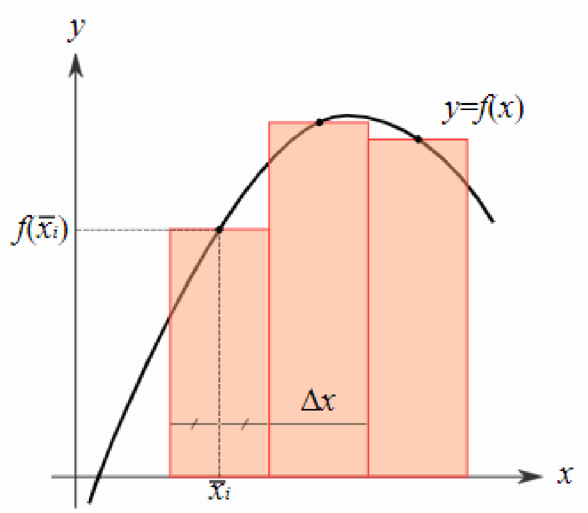
Et à faire l'approximation

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \approx f(\overline{x}_i)\Delta x,$$

Ce qui conduit à la formule

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i).$$

Cette méthode qui, pour des raisons évidentes s'appelle la méthode du point milieu, est illustrée en bas :



Chapitre IV. Méthode de Simpson

Introduction :

La formule de Simpson peut être obtenue en remplaçant f sur [a,b] par son polynôme d'interpolation composite de degré 2 aux nœuds xo = a, x-1 = (a + b)/2 et x2= b

Principe :

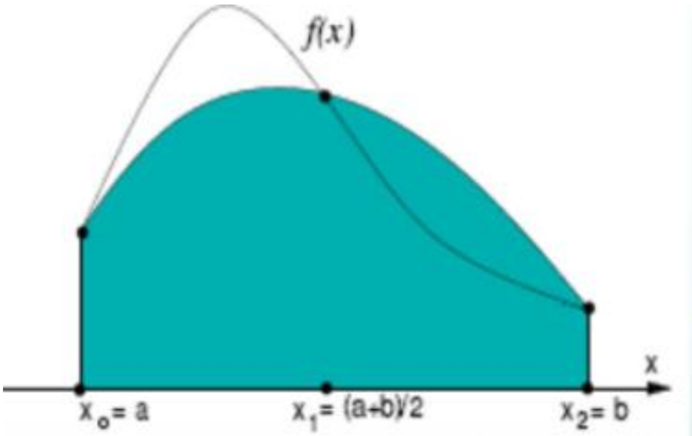
Elle revient à approcher localement la fonction à intégrer sur des intervalles adjacents par une parabole.

On a :

$$\frac{dI(x)}{dx} = f(x)$$

On pose :

$$A = I(x+h) - I(x-h)$$



En développant autour de x à l'ordre 4, on obtient :

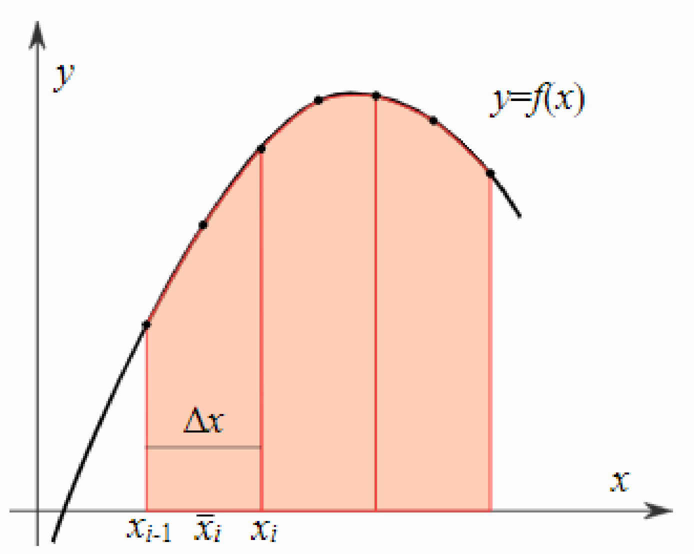
$$A \simeq 2h\, f(x) + \frac{h^3}{3} f''(x)$$

On utilise la dérivation numérique pour évaluer f"(x):

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

On a alors pour n pair :

$$I \simeq \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1(\text{impair})}^{i=n-1} f(x+i\,h)+2\sum_{i=2(\text{pair})}^{i=n-2} f(x+i\,h)\right]$$



Chapitre V. Environnement de travail

II.1 Environnement de travail

II.1.1 Environnement matériel

Notre application a été développée sur une machine ASUS possédant les caractéristiques suivantes :

Processeur: Intel® Core ™ i3-6006U 6éme Génération (2.0 GHz, 3 Mo de mémoire cache)

Mémoire RAM: 4 Go

Disque Dur: 500 Go

Carte graphique: Intel HD Graphics - USB3.0 – HDMI

Et une machine LENOVO possède les caractéristiques suivantes :

Processeur: Intel ® Core™ i5-5200U CPU @ 2,20 GHZ

Mémoire installée(RAM):8,00 Go

Type Système : Système d'exploitation 64 bits, processeur x64

Cartes Graphiques : AMD Radeon™ R5 M330/Intel® HD Graphics 5500

II.1.2 Environnement logiciel

- **visuel studio code**

C’est un éditeur de code multiplateforme édité par Microsoft. Cet outil destiné aux développeurs supporte plusieurs dizaines de langages de programmation comme le HTML, C++, PHP, JavaScript, Markdown, CSS.

II.2 Langages de développement

- **Python**

Python est un langage de programmation puissant et facile à apprendre. Il dispose de structures de données de haut niveau et permet une approche simple mais efficace de la programmation orientée objet. Parce que sa syntaxe est élégante, que son typage est dynamique et qu'il est interprété, Python est un langage idéal pour l'écriture de scripts et le développement rapide d'applications dans de nombreux domaines et sur la plupart des plateformes.

Version :

.

Conclusion Général

Exemple de comparaison entre les Méthodes :

On veut approximer l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ par trois méthodes Points-milieu, Trapèze et Simpson pour l'intervalle : [1 ,1 .2]

f(x)	x^2	$\frac{1}{1+x}$	$\sqrt{1+x^2}$	e^x	sin(x)
Valeur exacte	**0.24267**	**0.09531**	**0.29742**	**0.60184**	**0.17794**
M.Point Milieu	0.24200	0.09524	0.29732	0.60083	0.17824
M.Trapèze	0.24400	0.09545	0.29626	0.60384	0.17735
M.Simpson	0.24267	0.09531	0.29742	0.60184	0.17794

On constate que la méthode de Simpson donne les meilleurs résultats ! Mais les autres méthodes, en particulier les trapèzes, sont tout à fait convenables pour les besoins courants.
Après la simulation de ces 4 méthodes de calcules de l'intégrale, on constate que:

- la méthode de Simpson

fournit des résultats exacts pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. À la fois à cause de sa simplicité de mise en œuvre, et de sa bonne précision, cette méthode est la plus utilisée par les calculatrices pour tous calculs approchés d'intégrales de fonctions explicites.

- la méthode des trapézes:

Est la première des formules de Newton-Cotes, avec deux nœuds par intervalle. Sa rapidité de mise en œuvre en fait une méthode très employée. Cependant, la méthode de Simpson permet une estimation plus précise d'un ordre pour un coût souvent raisonnable.

- la méthode du point milieu:

est une amélioration de la méthode d'Euler qui a sur cette dernière l'avantage d'être d'ordre 2 : si le pas de temps est divisé par 10, la précision augmente d'un facteur 100.

- la méthode des rectangeles:

Lorsque la fonction est continue et décroissante sur [a;b], les inégalités sont inversées: dans le cas où la fonction est monotone, la méthode des rectangles présente donc le (gros) avantage de donner un encadrement de I, ce qui permet facilement de donner un sens aux résultats renvoyés.