One Dollar Each Eliminates Envy

מבוא (Introduction)

המאמר בה בשביל לפתור את הבעיה של החלוקה ההוגנת של m פריטים/סחורה בלתי ניתנים לחלוקה בין קבוצה של n סוכנים, והמטרה היא לחלק אוסף של פריטים בין קבוצה של סוכנים בצורה הוגנת כך שאף סוכן לא יקנא באף אחד אחר, כלומר הערך שיש לכל סוכן עבור החבילה שחולקה לו היא גדולה לפחות כמו הערך שלו עבור החבילה של כל סוכן אחר.
והבעיה הזאת חשובה ומעניינת אותנו כי אנחנו נתקלים בה ביום יום, למשל חלוקת קרקע, חלוקת מעונות לסטודנטים ועוד..
החוקרים D. Foley ו- H. Varian הסבירו כיצד להשיג חלוקה ללא קנאה באמצעות תיאורית שווי המשקל הכללי, פשוט חלקו כל סחורה באופן שווה בין הסוכנים, והפתרון הזה לא מספיק טוב עבור פריטים בלתי ניתנות לחלוקה, למשל אם מספר הסוכנים יותר ממספר הפריטים אזי בכל חלוקה יש סוכן שמקבל חבילה ריקה.
הכלכלן Eric Maskin הציע פתרון לבעיית החלוקה של פריטים בלתי ניתנות לחלוקה של n פריטים בין n סוכנים ע"י הוספת פריט אחד שניתן לחלוקה (כסף).
והמאמר בא בשביל לפתור את הבעיה של החלוקה ההוגנת של m פריטים בלתי ניתנים לחלוקה בין קבוצה של n סוכנים(n לא חייב להיות שווה ל m).

עבודות קודמות (Related work)

חלוקה הוגנת נחקרה בהרחבה במהלך שישה עשורים, והיו הרבה מאמרים שנכתבו לאחרונה על הנושה הזה:

- H. Steinhaus. The problem of fair division – שעסק בבעיית חיתוך עוגה בצורה הוגנת בין קבוצה של סוכנים, כלומר הפריט שעוסק בו הוא פריט שניתן לחלוקה בשונה מהמאמר שלנו.
- N. Alon. Splitting necklaces. Advances in Mathematics – שעסק גם בסחורה הניתנת לחלוקה.

הגדרות (Model / Preliminaries / Notation)

- **חלוקה הוגנת** – חלוקת סחורה בין קבוצת סוכנים באופן ששביעות הרצון של כלל חברי הקבוצה יהיה מרבי, ולא תמצא חלוקה אחרת שתגדיל את שביעות הרצון של לפחות אחד מחברי הקבוצה ולא תפגע בשביעות הרצון של אף אחד משאר חברי הקבוצה.
- **חלוקה הוגנת ללא קנאה** – אם כל אחד מהשחקנים מאמין שאף אחד מהשחקנים האחרים לא קיבל חלק טוב יותר משלו.
- **EF1** – היא חלוקה הוגנת ללא קנאה עד פריט אחד.

אלגוריתם Bounded-Subsidy

המשימה שלנו היא לבנות חלוקה ללא קנאה A עם משקל נתיב מקסימלי 1 בגרף הקנאה G_A.

הגדרות:

A – חלוקה ללא קנאה. G_A – גרף חלוקות ללא קנאה.

H – גרף הערכת השווי הבנוי מקבוצת קודקודים I ו- J וקשתות (i,j) ולכל קשת יש משקל $v_i(j)$.

$h[I\hat{}, J\hat{}]$ – תת גרף של הגרף H כך ש- $I\hat{} \subseteq I$ וגם $J\hat{} \subseteq J$.

$M^t = \{(i, \mu^t_i)\}_{i\in I}$ – פונקציית התאמת משקל מקסימלי

μ^t_i – פריט t

האלגוריתם(**עובד בזמן פולינומי**):

1) לכל קודקוד בקבוצת הקודקודים I בגרף הערכת השווי, לתת לו חלוקה ריקה ($Ai \leftarrow \emptyset$).
2) לסיבוב הראשון נתחיל ב t=1 וגם ל J_1 נכניס בו את קבוצת הקודקודים J שנמצאה בגרף הערכת השווי.
3) כל עוד J_t לא ריק(כלומר עדיין יש פריטים שלא חלקו):
   - רצים על אינדקס t, אנו מוצאים התאמת משקל מקסימלית M^t בגרף $H[I, J_t]$.
   - אם הסוכן i מותאם לפריט $j= \mu^t_i$ אז אנחנו מקצים את הפריט μ^t_i לאותו סוכן.
   - נחזור על הפריטים הנותרים $J_{t+1} \leftarrow J_t \setminus \cup_{i\in I} \mu^t_i$.
   - מקדמים אינדקס t ב 1.

הוכחת נכונות האלגוריתם

נוכיח שהאלגוריתם מוציא חלוקה ללא קנאה A ויתר על כך החוקה A היא EF1 כלומר היא חלוקה הוגנת ללא קנאה עד פריט אחד.
ההקצאה מאוזנת גם בכך (בביטול פריטי דמה נוספים) החבילות שהסוכנים מקבלים שונים בגודלם בפריט אחד לכל היותר. בפרט, כל סוכן מקבל חבילה בגודל $\lfloor m/n \rfloor$ או $\lceil m/n \rceil$.
וגם המאמר הראה שלכל הקצאה A שהיא גם נטולת קנאה וגם EF1 יש משקל נתיב הכבד ביותר בגרף הקנאה של משקל לכל היותר 1 - n.
לפיכך, לפי תצפית 1, האלגוריתם מוציא הקצאה הדורשת סובסידיה של לכל היותר $2*(1 - n)$.
כפי שנטען, משקל הנתיב הכבד ביותר ב-GA הוא למעשה לכל היותר אחד ולכן סך הסובסידיה הדרושה הוא לכל היותר 1 - n.

סיכום המאמר

המאמר חקר את הנושא של איך לחלק m פריטים(בלתי ניתנות לחלוקה) בין n סוחרים בצורה הוגנת ללא קנאה, והראה איך להשיג את זה דרך הוספת כמות מסוימת של כסף.
Halpern ו- Shah הראו שתמיד קיימת חלוקה ללא קנאה הדורשת שלכל היותר $m*(n-1)$ דולר.
והמאמר הוכיח את זה, שמספיק דולר אחד לכל סוכן כדי להבטיח את קיומה של חלוקה ללא קנאה.
ויתר על כך, המאמר הוכיח כי עבור פונקציות הערכה מונוטוניות כלליות קיימת תמיד חלוקה ללא קנאה עם לכל היותר $2*(n-1)$ דולר לסוכן, כלומר אינו תלוי במספר הבריטים.