**One Dollar Each Eliminates Envy**

**מאמר מחקרי – דוגמאות הרצה**

**סיכום:**

1. **מבוא:**

**המאמר בה בשביל לפתור את הבעיה של החלוקה ההוגנת של m פריטים/סחורה בלתי ניתנים לחלוקה בין קבוצה של n סוכנים, באופן ספציפי, אנו רוצים הקצאה שבה אף סוכן לא מקנא באף אחד אחר; כלומר, הערך שיש לכל סוכן עבור החבילה שהוקצה לו הוא גדול לפחות כמו הערך שלו עבור החבילה של כל סוכן אחר. המושג הזה, שנקרא קנאה-חופשיות, הוצג על ידי Foley [8].**

עבור סחורות הניתנות לחלוקה, Varian [20] הסביר כיצד להשיג חלוקה ללא קנאה באמצעות התיאוריה של שיווי משקל כללי: פשוט חלקו כל פריט שווה בשווה בין הסוכנים ואז מצאו שיווי משקל תחרותי. לפיכך קיימות חלוקה ללא קנאה עבור מחלקות של פונקציות הערכה שבהן מובטח שיווי משקל תחרותי.

לרוע המזל עבור סחורות בלתי ניתנות לחלוקה קל לראות שהקצאות ללא קנאה אינן קיימות באופן כללי. לדוגמה, אם מספר הסוכנים עולה על מספר הפריטים, אז בכל הקצאה יש סוכן שמקבל חבילה ריקה. בעבודה קלאסית, שאל Maskin [15] האם ניתן לעקוף את התוצאה הבלתי אפשרית הזו על ידי תוספת של טוב אחד שניתן לחלוקה, כלומר כסף. אם כן, כמה כסף צריך כדי למגר כל קנאה?

הוא שקל את המקרה של שוק עם n סוכנים ו- m = n פריטים שבו ניתן להקצות לכל סוכן סחורה אחת לכל היותר, ויש לו, ללא אובדן כללי, ערך של דולר אחד לכל היותר עבור כל סחורה ספציפית. Maskin [15] אז הראה שקיימת הקצאה נטולת קנאה בתוספת של n - 1 דולר לשוק.

אבל מה קורה במסגרת הכללית שבה מספר הסוכנים ומספר הסחורות עשויים להיות שונים ושבו ניתן להקצות לסוכנים יותר ממוצר אחד? מטרת מאמר זה היא להבין את המקרה הזה של הערכות ביקוש מרובות יחידות.

במסגרת זו, Halpern and Shah [11] הוכיחו ש-m · (n − 1) דולרים מספיקים כדי לתמוך בהקצאה נטולת קנאה כאשר לסוכנים יש פונקציות הערכת שווי מוסיפות. יתרה מכך, הם שיערו שכמו בהגדרת הביקוש ליחידה, תמיד קיימת הקצאה שעבורה מספיק n − 1 דולר.

התוצאה העיקרית במאמר זה היא האימות של השערה זו: עבור פונקציות הערכת שווי מוסיפות, מספיק n − 1 דולר בדיוק כדי להבטיח את קיומה של הקצאה נטולת קנאה.

למעשה, התוצאה שלנו חזקה יותר מכמה מובנים. ראשית, לא רק שהסבסוד הוא לכל היותר n − 1 דולר בסך הכל אלא כל סוכן מקבל לכל היותר דולר אחד בסבסוד. שנית, ההקצאה הזו גם נטולת קנאה עד למוצר אחד (EF1) - זה מיישב השערה שנייה מ-[11]. שלישית, ההקצאה מאוזנת, כלומר, הקרדינליות של החבילות שהוקצו נבדלות בפריט אחד לכל היותר. יתר על כן, ניתן לבנות הקצאה נטולת קנאה זו בזמן פולינומי.

אנו גם חוקרים את המקרה של פונקציות הערכת שווי כלליות. אנו דורשים רק את ההנחה המתונה מאוד שפונקציות הערכת השווי הן מונוטוניות, אנו מוכיחים את התוצאה אולי המפתיעה שפתרונות נטולי קנאה עדיין קיימים עם סכום סובסידיה (دعم مالي)שאינו תלוי במספר הסחורות m. באופן ספציפי, אנו מוכיחים שיש הקצאה נטולת קנאה שבה כל סוכן מקבל סובסידיה של לכל היותר 2(n − 1) דולר, שזהו סבסוד כולל של O(n2). כאן ניתן לבנות את ההקצאה נטולת הקנאה בזמן פולינומי בהינתן אורקל להערכת שווי.

* **עבודות קודמות:**

חלוקה הוגנת נחקרה בהרחבה במהלך ששת העשורים האחרונים. הרעיון של הקצאה הוגנת הוצג רשמית על ידי Steinhaus [16] באמצעות בעיית חיתוך העוגה: כיצד ניתן לחלק עוגה בצורה הוגנת בין קבוצה של סוכנים?

כדי להתייחס לשאלה זו, יש להגדיר תחילה הוגנות. מטרת ההגינות של Steinhaus [16] הייתה מידתיות. הקצאה היא פרופורציונלית אם לכל סוכן מוקצה חבילה (או חתיכת עוגה) בעלת ערך של לפחות n/1 מהערך הכולל שלה עבור החבילה הגדולה (העוגה כולה). עבור חיתוך עוגות ומוצרים הניתנים לחלוקה באופן כללי, כאשר הערכות השווי הן תוספות, חוסר קנאה מרמז על מידתיות.

הסיבה לכך היא שלכל סוכן וכל חלוקה של העוגה ל-n חתיכות, חתיכה כלשהי חייבת להיות שווה לפחות 1/n מכל העוגה לאותו סוכן.

לפיכך חוסר קנאה הוא ערובה להוגנות חזקה יותר מאשר מידתיות.

מדד הוגנות קלאסי נוסף הוא שוויון, שבו כל הסוכנים צריכים לקבל חבילות באותו ערך. במקרה של סחורות הניתנות לחלוקה, Alon [2] הראה עבור פונקציות הערכת שווי רציפה מתווספות כי קיימות הקצאות המקיימות מידתיות, שוויון וחוסר קנאה בו זמנית. ידועות גם שיטות אלגוריתמיות להשגת חלוקות עוגות ללא קנאה עבור כל מספר סוכנים; ראה, למשל, Brams and Taylor [5].

לאחרונה, Budish [6] הציג את ערבות השיתוף המקסימלית בהשראת פרוטוקול החתך ובחר. נניח שסוכן מחלק את הפריטים ל-n חבילות ואז מקבל את חבילת הערך הנמוך ביותר. הערך התואם שהסוכן משיג על ידי בחירת המחיצה האופטימלית שלו נקרא ה-maximin share שלו. מטרת ההגינות אם כן היא למצוא הקצאה שבה כל סוכן מקבל צרור של ערך לפחות את חלקו המקסימלי.

למרבה הצער, עבור סחורות בלתי ניתנות לחלוקה, יש דוגמאות שבהן מידתיות, חוסר קנאה, שוויון והבטחת המניות המקסימלית בלתי אפשריים. כתוצאה מכך, הייתה התמקדות רבה בהבטחות משוערות להוגנות. גישה טבעית אחת היא עיצוב אלגוריתמי קירוב לבעיית השיתוף המקסימלי.

ערבות חלופית היא באמצעות הקצאות EF-k [6], כאשר לסוכן אין קנאה בתנאי ש-k סחורות יוסרו מהצרורות של הסוכנים האחרים. מעניינות מיוחדת הן הקנאה התחום על ידי סחורה אחת, או הקצאות EF1.

Lipton et al. [14] הראה שכאשר פונקציות ההערכה הן מונוטוניות, קיימת הקצאת EF1 וניתן לחשב אותה בזמן פולינומי. חלק גדול מהעבודות האחרונות בנושא הקצאה הוגנת של סחורות בלתי ניתנות לחלוקה התמקד בהשגת סוגים אלה של ערבות קירוב [9, 13, 4, 7].

**קו מחקר מקביל מתייחס לשימוש בכסף בהקצאה הוגנת של סחורות בלתי ניתנות לחלוקה.** **זה מונע על ידי בעיית חלוקת השכירות, כאשר המטרה היא להקצות n סחורה בלתי ניתנת לחלוקה בין n סוכנים ולחלק עלות כוללת קבועה, כלומר שכר הדירה, בין הסוכנים.** **Su [17] הראה כי תחת הנחות מתונות, ניתן להגיע להרמוניה בשכר דירה: ישנה חלוקה נטולת קנאה בין הסחורה לבין דמי השכירות.** **רוב הספרות בתחום זה מחשיבה את ההגדרה עם n סוכני ביקוש ליחידות, m = n פריטים בלתי ניתנים לחלוקה וטוב אחד שניתן לחלוקה, בדומה לכסף.**

**Svensson [18] הראה כי קיימת הקצאה נטולת קנאה ויעילה בפרטו בתנאים מסוימים. Tadenuma and Thomson [19] חוקרים את המבנה של הקצאות נטולות קנאה של מוצר יחיד שאינו ניתן לחלוקה כאשר פיצוי כספי אפשרי. Maskin [15] בוחן מודל דומה לזה של [18] בתנאים מעט שונים; הוא הראה שעם מספיק כסף, הקצאה נטולת קנאה תמיד קיימת. ספציפית, התוצאות שלו מרמזות שאם הסוכנים הם יחידת ביקוש וערכם עבור כל פריט הוא דולר אחד לכל היותר, אז סה"כ n - 1 דולר יספיק לחוסר קנאה. ב-Aragones [3] ו-Klijn [12], המחברים רואים את אותו מודל ונותנים אלגוריתמים של זמן פולינומי לחישוב הקצאה נטולת קנאה עם סבסוד.**

**מבין המסמכים ששוקלים הגדרה עם יותר מ- n פריטים, רובם מצטמצמים למקרה n-item לעיל שבו לכל סוכן מוקצת לכל היותר סחורה אחת. לדוגמה, Alkan et al. [1] שקול את ההגדרה הכללית יותר של m-item ואפשר את האפשרות של אובייקטים לא רצויים, אך הנוהל שלהם מציג "אובייקטים אפסים" או "אנשים פיקטיביים" כדי להשוות את מספר הסוכנים והפריטים לפני הוצאת הקצאה עם חבילות של פריט בודד . Haake et al. [10] קחו בחשבון גם את המקרה m פריטים וספקו נוהל לחישוב הקצאה נטולת קנאה עם תשלומי צד, אך הגישה שלהם מתחילה באגד את הסחורה ל-n סטים.**

**בעבודות אחרונות, Halpern and Shah [11] מרחיבים את המודלים הנ"ל להגדרת ריבוי הביקוש עם כל מספר m של סחורות בלתי ניתנות לחלוקה. באופן ספציפי, הם שוקלים את ההגדרה שבה ל-n סוכנים יש פונקציות הערכת שווי מוסיפות על קבוצה של M פריטים, וללא אובדן כלליות, הערך של כל פריט הוא 1 לכל היותר.**

**הם מאפיינים את ההקצאות הניתנות לקנאה במונחים של מבנה גרף הקנאה (ראה סעיף 2.1), שהצמתים שלו הם הסוכנים ושמשקולי הקשת שלהם מייצגים את הקנאה בין זוגות הסוכנים. לאחר מכן הם חוקרים את הבעיה של מזעור כמות הסובסידיה המספיקה כדי להבטיח חוסר קנאה. קל לראות שהסבסוד המינימלי הזה יכול להיות לפחות n-1 עבור כל ההקצאות הניתנות לקנאה. אכן, שקול את המקרה של פריט בודד שכל סוכן מעריך בדיוק דולר אחד; ברור שכל סוכן שלא מקבל את הפריט חייב לקבל פיצוי בדולר. הם מציגים גבול עליון תואם של n − 1 דולר למקרים מיוחדים של הערכות ערך תוספיות בינאריות וזהות.**

**באופן כללי יותר, הם מוכיחים כי עבור הערכות שווי תוספים, הקצאה נטולת קנאה תמיד קיימת אם סך הסובסידיה לפחות הוא m · (n - 1) דולר. אבל בהתבסס על ניתוח ניסיוני של יותר מ-100,000 מקרים סינתטיים ויותר מ-3,000 מקרים בעולם האמיתי של חלוקה הוגנת, Halpern and Shah [11] השערה שניתן לשפר את הגבול העליון הזה ל-n − 1 דולר. כלומר, עבור סוכנים עם הערכות שווי תוספים קיימת תמיד הקצאה נטולת קנאה הדורשת סובסידיה של n − 1 לכל היותר.**

**בנוסף, הם משערים שקיימת הקצאה שהיא גם נטולת קנאה (עם אולי סובסידיה גדולה בהרבה) וגם EF1 לבעיית החלוקה ההוגנת עם הערכות שווי תוספים.**

**משפט 1.1. [11] להערכות שווי תוספות, קיימת הקצאה נטולת קנאה הדורשת סובסידיה כוללת של n-1 דולר לכל היותר.**

**משפט 1.2. [11] להערכות שווי תוספים, קיימת הקצאה נטולת קנאה שהיא EF1.**

* **התוצאות שלנו:**

בעבודה זו אנו מיישבים הן משפט1.1 והן משפט1.2. למעשה, התוצאה העיקרית שלנו חזקה עוד יותר בכמה דרכים.

למען האמת, אנו מראים שלכל מקרה עם הערכות שווי תוספים, יש

היא הקצאה נטולת קנאה בו זמנית, EF1, מאוזנת ודורשת סובסידיה כוללת של לכל היותר n − 1 דולר.

יתרה מכך, אנו מציגים אלגוריתם שמחשב הקצאה כזו בזמן פולינומי. ההתחייבות שלנו לא חלה רק על סך הסובסידיה, אלא על כל תשלום בודד - התשלום שנעשה לכל סוכן בהקצאה זו הוא לכל היותר דולר אחד! פורמלית, בסעיפים 3 ו-4 אנו מוכיחים את המשפט הבא.

* **משפט 1.3. להערכות שווי תוספים ישנה הקצאה נטולת קנאה כאשר הסובסידיה לכל סוכן היא דולר אחד לכל היותר. (הקצאה זו היא גם EF1, מאוזנת וניתנת לחישוב בזמן פולינומי).**

**קל לראות שכאשר מצמצמים את סך הסבסוד, לפחות סוכן אחד לא יקבל סבסוד. לפיכך משפט 1.3 מרמז שסך הסובסידיה הנדרש הוא אכן n − 1 דולר לכל היותר.**

**בסעיף 5 אנו רואים את ההגדרה הכללית שבה לסוכנים יש פונקציות הערכת שווי מונוטוניות שרירותיות. באופן אנלוגי, ללא אובדן כלליות, אנו עשויים להתאים את הערכות השווי כך שהערך השולי של כל פריט עבור כל סוכן לעולם לא יעלה על דולר אחד. אנו מראים שיש הקצאה נטולת קנאה שבה הסבסוד הנדרש הוא לכל היותר (n−1)\*2 דולר לסוכן. לפיכך, סך הסבסוד הנדרש להבטחת קיומה של הקצאה נטולת קנאה לכל היותר O(n 2). שימו לב שההנחה של מונוטוניות היא מתונה ביותר ולכן הערכות השווי שיש לסוכנים עבור חבילות פריטים עשויות לנוע בין 0 ל- Ω(m) באופן די שרירותי. לפיכך, מפליא במקצת שסך הסובסידיה הנדרשת להבטחת קיומה של הקצאה נטולת קנאה אינו תלוי במספר הפריטים m. בפרט, כאשר m גדול הסבסוד הנדרש הוא זניח במונחים של m ולפיכך, בדרך כלל, זניח גם מבחינת ערכי החבילות שהוקצו.**

**במקרה זה, בהינתן אורקל הערכת שווי עבור כל סוכן, ניתן לחשב את ההקצאה והסבסוד ללא קנאה המתאימים בזמן פולינומי. באופן ספציפי, בסעיף 5 אנו מוכיחים:**

* **משפט 1.4. להערכות שווי מונוטוניות קיימת הקצאה נטולת קנאה כאשר הסובסידיה לכל סוכן היא לכל היותר 2(n - 1) דולר. (בהינתן אורקל להערכת שווי, ניתן לחשב הקצאה זו בזמן פולינומי).**

**למעשה, העבודה שלנו מרמזת שלמעשה קיים קשר חזק הרבה יותר בין ההגדרה הקלאסית של הסחורה הניתנת לחלוקה (חיתוך עוגה) לבין הגדרת הסחורה הבלתי ניתנת לחלוקה ממה שהיה ידוע קודם לכן. בעוד שניתן להשיג את הערבויות הקלאסיות (חופש קנאה ומידתיות) עם סחורות הניתנות לחלוקה, עבור הגדרת הסחורות הבלתי ניתנות לחלוקה, חלק ניכר מהספרות העדכנית מתמקד בהשגת תכונות הוגנות חלשות יותר. אנו מראים שבעצם הכנסת סובסידיה קטנה שתלויה רק במספר הסוכנים, ניתן להשיג את הערבויות הקלאסיות החזקות הרבה יותר במסגרת הסחורה הבלתי ניתנת לחלוקה. יתרה מכך, ניתן למצוא ביעילות הקצאות המעניקות ערבויות קלאסיות אלו עם סבסוד קטן מוגבל.**

1. **החטיבה ההוגנת עם בעיית סבסוד:**

יש קבוצה I = {1, 2, . . . , n} של סוכנים וקבוצה J = {1, 2, . . . , m} של פריטים בלתי ניתנים לחלוקה. לכל סוכן i ∈ I יש פונקציית הערכה vi על קבוצת הפריטים.

כלומר, עבור כל צרור S ⊆ J של פריטים, לסוכן i יש ערך vi(S).

אנו מניחים את ההנחות הסטנדרטיות לפיהן פונקציות ההערכה הן מונוטוניות, כלומר vi(S) ≤ vi(T) כאשר S ⊆ T, וכי vi(∅) = 0.

סוכן i ופונקציית הערכה vi מתווספים אם, עבור כל פריט j ∈ J, לסוכן i יש ערך vi(j) = vi({j}), ולכל אוסף S ⊆ J, לסוכן i יש ערך vi(S) =

נסמן את הווקטור של פונקציות הערכה ב-v = (v1, . . . , vn), ונקרא ל-v פרופיל הערכה. בנוסף, ללא אובדן כלליות אנו מדרגים את פונקציית ההערכה של כל סוכן i כך שהערך השולי המקסימלי של כל פריט j הוא 1 לכל היותר.

באופן ספציפי, עבור הערכות שווי תוספים, זה מרמז על vi(j) ≤ 1 עבור כל סוכן i ופריט j. הקצאה היא מחיצה מסודרת A = {A1, . . . ,An} מקבוצת הפריטים ל-n חבילות. סוכן i מקבל את הצרור (הריק אולי) Ai בהקצאה A. ההקצאה A נטולת קנאה אם vi(Ai) ≥ vi(Ak) ∀i ∈ I, ∀k ∈ I.

**משפט 2.2:** עבור כל הקצאה נטולת קנאה א', סך הסבסוד המינימלי הנדרש הוא לכל היותר (n - 1) · m.

1. **אלגוריתם הקצאה עבור סוכנים תוספים:**

בחלק זה אנו מציגים אלגוריתם הקצאה למקרה של סוכנים תוספים.

נזכיר שהמשימה שלנו היא לבנות הקצאה נטולת קנאה A עם משקל נתיב מקסימלי 1 בגרף הקנאה GA.

אנו עושים זאת באמצעות אלגוריתם הקצאה המוגדר על גרף ההערכה של המופע. גרף הערכת השווי H הוא הגרף הדו-חלקי המלא על קבוצות קודקוד I ו-J, כאשר לקצה (i, j) יש משקל vi(j).

נסמן ב-h[ˆI, Jˆ] את תת-הגרף של H המושרה על-ידי ˆI ⊆ I ו-Jˆ ⊆ J.

לאחר מכן, אלגוריתם ההקצאה ממשיך בסבבים שבהם כל סוכן מותאם לפריט אחד בדיוק בכל סבב.

לסיבוב הראשון, קבענו J1 = J.

בסיבוב t, אנו מוצאים Mt התואם למשקל מקסימלי ב-H[I,Jt].

אם הסוכן i מותאם לפריט j = µti אז אנו מקצים את הפריט µti לאותו סוכן.

לאחר מכן אנו חוזרים על הפריטים הנותרים Jt+1 = Jt \ ∪i∈Iµti.

התהליך מסתיים כאשר כל פריט הוקצה.

נניח שהאלגוריתם מסתיים בסיבובי T. אנו מניחים שכל סוכן מקבל פריט בכל סיבוב. עבור סיבובים 1 עד T − 1 זה ברור מכיוון שניתן להקצות לסוכן i פריט שעבורו יש לו ערך אפס. עבור סיבוב T, אנו מניחים שנותרו בדיוק n פריטים, אולי על ידי הוספת פריטי דמה חסרי ערך לסוכן כלשהו.

לפיכך, לפי תצפית 1, האלגוריתם מוציא הקצאה הדורשת סובסידיה של לכל היותר (n - 1)2.

כפי שנטען, משקל הנתיב הכבד ביותר ב-GA הוא למעשה לכל היותר אחד ולכן סך הסובסידיה הדרושה הוא לכל היותר n-1. אנו דוחים את ההוכחה לעובדה זו, התוצאה העיקרית שלנו, לסעיף 4.

1. **הסובסידיה הנדרשת היא לכל סוכן אחד:**