



מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

מבני נתונים

תרגיל 9 – נוסחאות נסיגה

הגדרות:

שיטת האיטרציות:

- מפתחים את נוסחת הנסיגה עד שמתקבל סכום של איברים התלוי רק ב- m ובתנאי ההתחלה.
- חוסמים את הפתרון באמצעות שיטות למציאת ערכי סכומים.

שיטת עץ הרקורסיה:

- מפתחים את נוסחת הנסיגה בצורת עץ, כאשר הבנים של צומת הם הקריאה הבאה ברקורסיה, עד למקרה לתנאי ההתחלה.
- העומק המינימלי של עלה הוא המקרה הטוב, העומק המקסימלי של עלה (הגובה של העץ) הוא המקרה הרע.
- אם המקרים זהים, אזי קיים חסם הדוק, אחרת אלו הם החסמים.

משפט האב:

בהינתן נוסחת נסיגה מהצורה: $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, כאשר $a \geq 1$ וגם $b > 1$ הם קבועים ו- $f(n)$ פונקציה חיובית עולה.

מקרה 1:

אם $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ עבור קבוע $\epsilon > 0$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

מקרה 2:

אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.

מקרה 3:

אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ עבור קבוע $\epsilon > 0$, וגם קיים קבוע $c < 1$ כך ש: $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ אזי $T(n) = \Theta(f(n))$.

שיטת החלפת המשתנים:

- נסמן את המשתנה n בביטוי שונה השקול לו שתלוי במשתנה m שאיתו יהיה קל יותר לפתור את הנוסחה.
- נשתמש בכלים המוקרים לנו לפתרון הנוסחה שתלויה ב- m .
- נציב בחזרה במקום m את n ונקבל פתרון.

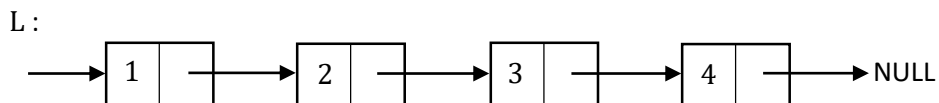
שאלות:

1. נתונה רשימה מקושרת L שהמבנה שלה מכיל מפתח key ומצביע לאיבר הבא next (רשימה L לא בנויה ממבנה נוסף המכיל מצביע לראש הרשימה אלא היא האיבר הראשון ברשימה) ומחסנית ריקה S. ושני האלגוריתמים הבאים:

```
PrintStack(S) :
    while IsEmpty(S) = False do:
        print (Pop(S))
    end while

Alg(L, S) :
    if (L = null) then:
        PrintStack(S)
    else then:
        tmp = L
        while tmp ≠ null do:
            Push(tmp.key, S)
            tmp = tmp.next
        end while
        Alg(L.next, S)
```

א. בהינתן רשימה L הבאה, מה יודפס כאשר מריצים את אלגוריתם Alg עם רשימה L ?



ב. מה היא הפונקציה הרקורסיבית המבטאת את זמן הריצה של אלגוריתם Alg ?
(כפונקציה של אורך הרשימה, n כאשר $n \geq 1$)

ג. מצאו את הנוסחא הסגורה של הפונקציה שהגדרתם בסעיף ב'.

2. הראו בעזרת שיטת האיטרציה או ע"י עץ רקורסיה כי מתקיים:

א. $T(n) = 2T(n-1) + 1$ חסום ע"י $\Theta(2^n)$.

ב. $T(n) = 2T(n/2) + 1$ חסום ע"י $O(n)$.

ג. $T(n) = 2T(n/2) + n^2$ חסום ע"י $O(n^2)$.

ד. $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$ חסום ע"י $O(n \log n)$.

3. בדקו האם ניתן למצוא חסם הדוק לנוסחאות הבאות בעזרת משפט האב.

במידה וכן, יש למצוא חסם הדוק, אחרת יש לנמק מדוע לא ניתן.

א. $T(n) = T(2n/3) + 1$

ב. $T(n) = 2 \cdot T(n/4) + C$

ג. $T(n) = 3 \cdot T(n/2) + n^2$

ד. $T(n) = 2 \cdot T(n/4) + \log_2 n$

ה. $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n/\log n$

ו. $T(n) = 2 \cdot T(n/4) + \sqrt{n}$

ז. $T(n) = 2 \cdot T(n/4) + n^{0.51}$

ח. $T(n) = 0.5 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log_2 n^3$

4. מצאו חסם הדוק ככל הניתן עבור הנוסחאות הבאות בעזרת החלפת משתנים:

א. $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$

ב. $T(n) = 4T(\sqrt{n}) + 1$