

Introduction to Modern Communications

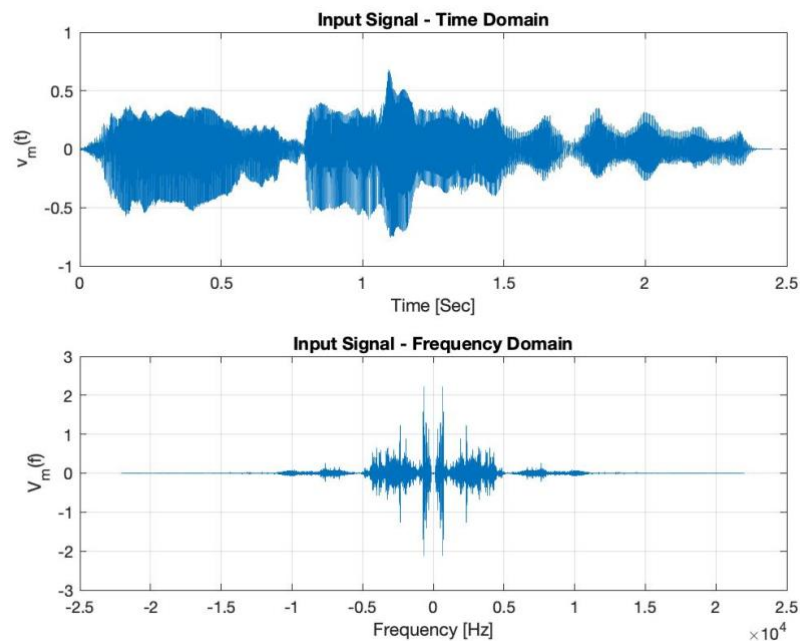
Computer Assignment 1

איל צבי - 319067732

סער בן יוחנה – 313234155

1. AM and FM Modulation - MATLAB

1.1.1. גרף האות $v_m(t)$ והתמרת הפורייה שלו $V_m(f)$:

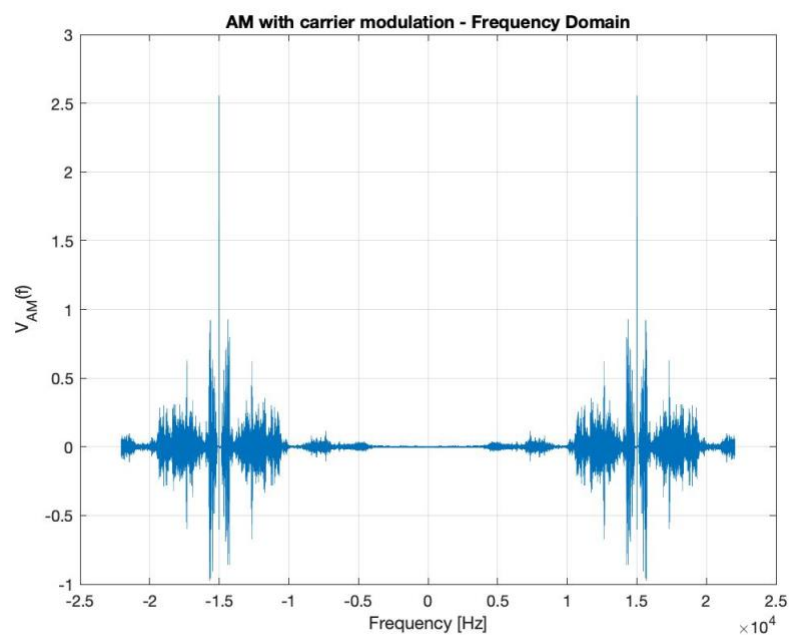


1.1.2. התדר המקסימלי הינו בקירוב $f_m = 11.5 [KHz]$ ולכן:

$$\text{Effective Bandwidth} = \omega_m = 2\pi \cdot 11.5 \cdot 10^3 \approx 72.256 \text{ KHz}$$

1.2.1. נייצג את אות המידע $v_m(t)$ לאחר אפנון AM, נבצע הכפלה בקוסינוס במישור הזמן ונהפוך את אות המידע הנתון לאות bandpass (הזזה ושיקוף) עם תדר גל נושא $f_c = 15 \text{ KHz}$ ואינדקס אפנון $k_{AM} = 0.02$.

1.2.2. גרף אות המידע המאופנן במישור התדר:

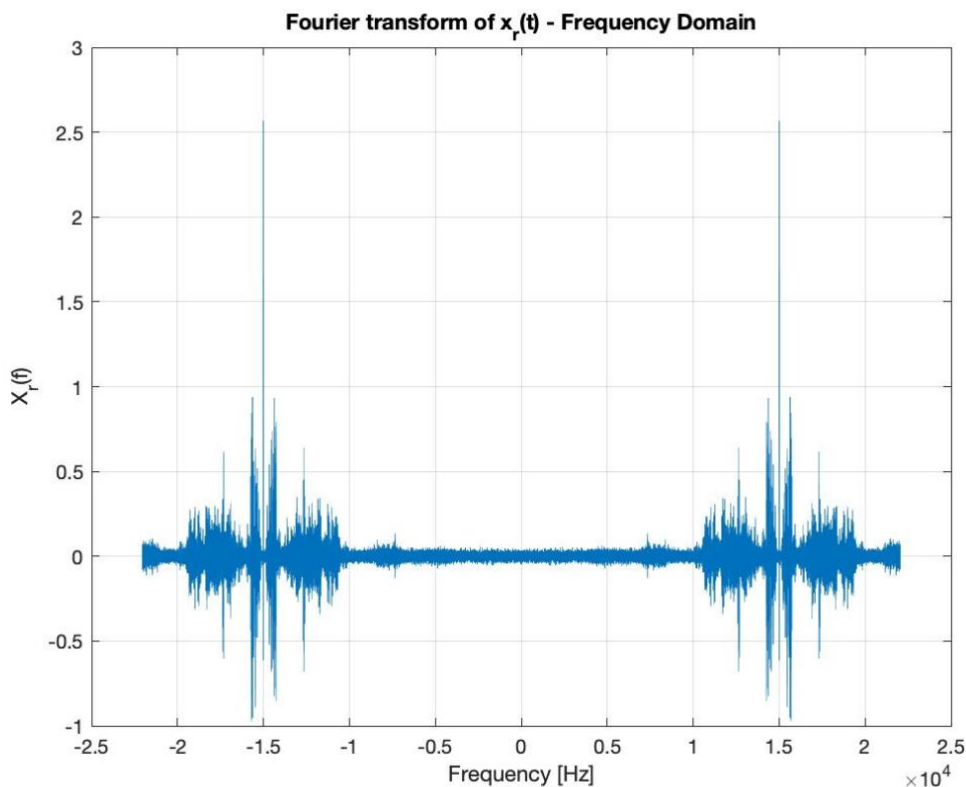


השתמשנו בפונקציה $ammod()$ על מנת לבצע מודולציה מסוג $AM DSB$ ולכן כפי שניתן לראות קיבלנו את האות המקורי מוזז סביב תדר f_c , ללא הולם בתדר עצמו.

1.2.3. במצב הנתון כעת, כאשר האות מיוצג כאות מעבר (Bandpass) שומעים רק צפצוף, כמעט ולא ניתן להצביע על דמיון בין האות המתקבל לאות השמע המקורי, זאת מכיוון שיכולת השמיעה האנושית יכולה לקלוט ולפענח תדרים בתחום בין $300Hz - 3KHz$ ומכיוון שבתהליך האפנון הזזנו את האות המקורי לתדר גבוה – סביב $\pm 15KHz$ איננו מסוגלים לפענח את האות הנקלט במלואו אלא רק את "זנב" האות המתקבל בתחום התדרים הנ"ל.

1.3.1. כעת נייצר ונוסיף למערכת את המייצג רעש $z(t)$ שהוא $AWGN$ (רעש לבן גאוסִי מוסף), הרעש הינו תא"ג $i.i.d$ עם תוחלת 0 ושונות $\frac{N_0}{2} = 0.0004$.
אות המוצא המתקבל ע"י $x_r(t) = v_{AM}(t) + z(t)$ מדמה מעבר של אות המידע המאופנן בערוץ.

1.3.2. גרף אות המוצא המשלב את אות השמע המאופנן יחד עם רעש הלבן במישור התדר:

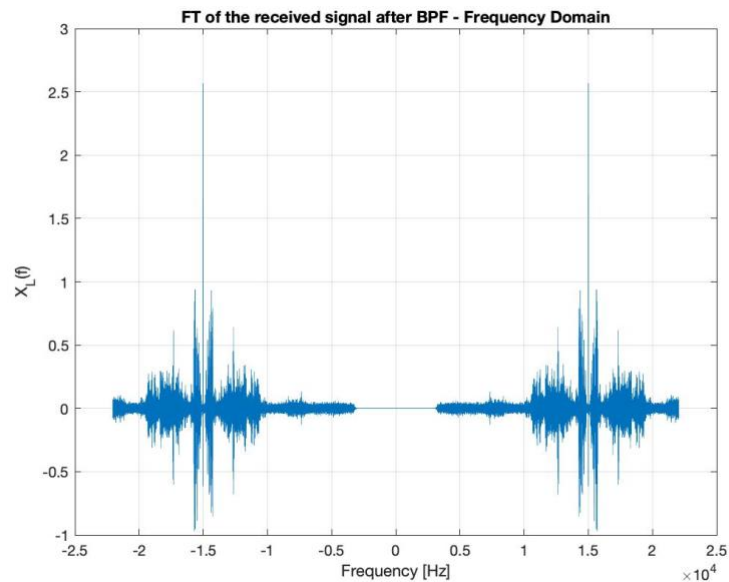


כפי שניתן לראות בגרף, הרעש המוסף גרם לעיבוי האות המתקבל, בפרט בסביבת הנקודה אפס בה עוצמת האות המקורי הייתה זניחה לפני הוספת הרעש, כיוון שהרעש הינו רעש לבן (גאוסִי) עם תוחלת אפס אז עבור תדרים בסביבת אפס נקבל רעש בעוצמה מקסימלית וככל שנתרחק מהאפס עוצמת הרעש תלך ותדעך.

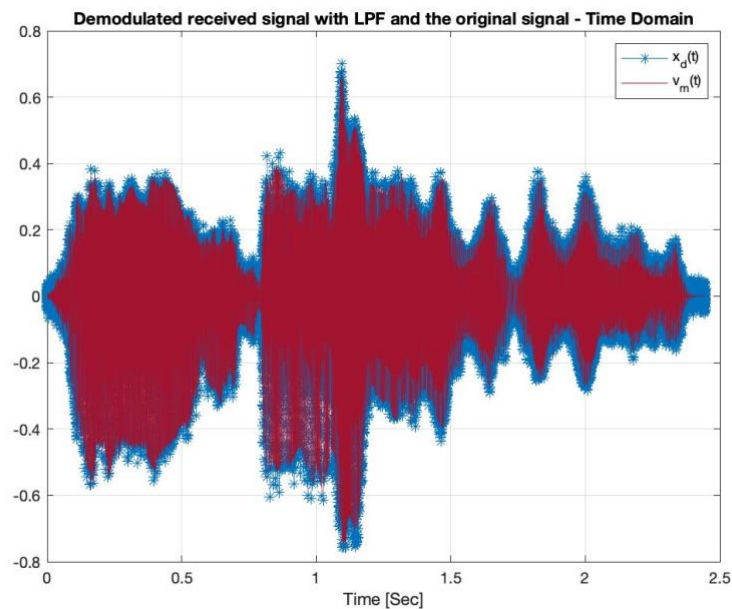
1.4.1. ביצענו אפנון AM With Carrier עבור אות השמע והוספנו לו רעש לבן גאוסִי המדמה מעבר בתווך, נרצה לבצע פענוח (דה-מודולציה) בחזרה לאות המקור.
ראשית, נייצר את האות $x_L(t) -$ מעבר של $x_r(t)$ במסנן LPF על מנת לסנן את הרעש בתדרים הגבוהים – תדרים אשר נמצאים מחוץ לחצי רוחב הפס האפקטיבי של האות.

בחרנו לסנן מחוץ לטווח התדרים $[3.5\text{KHz} - 26.5\text{KHz}]$, כלומר לסנן את תחום התדרים האפקטיבי (של השכפול החיובי בלבד) כאשר גודל הטווח נקבע ע"פ רוחב הפס של אות המידע שחישבנו בסעיף 1.1.2 $(f_c - f_m, f_c + f_m)$.

נציג בגרף את התמרת הפורייה של $x_L(t)$:

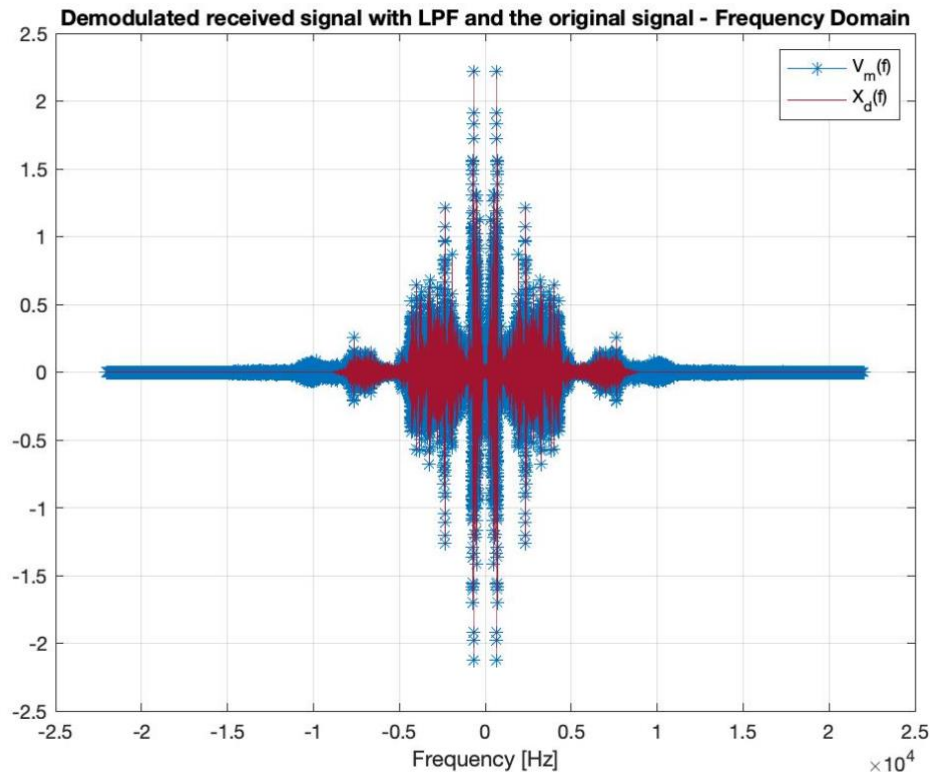


1.4.2. גרף האות המפוענח לצד האות המקורי במישור הזמן:



ע"פ הגרף ניתן לראות כי האות המקורי והאות המפוענח כמעט זהים, הפיענוח לא מתבצע באופן מושלם כי הוספנו רעש שאותו לא ניתן לסנן באופן מלא מבלי לאבד מידע ולכן עדיין קיימים הבדלים בין האותות.

גרף האות המפוענח לצד האות המקורי במישור התדר:



גם בהצגת האותות במישור התדר ניתן לראות כי קיימת התאמה יחסית גבוהה בין האותות ונראה כאילו הם כמעט ומתלכדים.

1.4.3. כעת כאשר מאזינים לאות המתקבל הוא נשמע דומה מאוד לאות המקורי, אך איננו נשמע חד וברור כמו השמע המקורי ומלווה במעין רעש רקע (הרעש הלבן שהוספנו).

הסבר: כפי שניתן לראות בסעיף הקודם הגרפים **כמעט** מתלכדים עם הגרפים שמייצגים את האות המקורי (במישור הזמן והתדר) לכן בהתאמה נקבל שמע עם רזולוציה טובה, כלומר כמעט דמיון גבוה למקור, וזאת משתי סיבות:

הסיבה הראשונה והעיקרית היא שכעת ישנו רעש לבן מוסף שגורם לשינוי באות ויוצר עיוות המתבטא בהגבר יחסי כפי שניתן לראות מתוך הגרפים.

הסיבה השנייה והפחות משמעותית היא שמכיוון שביצענו הנחתה לתדרים הגבוהים של האות המאופנן (לפני הפיענוח) ע"י שימוש ב-LPF גרמנו לאיבוד חלקי של מידע, אך כאמור, המסנן שבחרנו מסנן רק תדרים שאינם נמצאים ברוחב הפס האפקטיבי (תדרים שהאנרגיה בהם נמוכה משמעותית) ולכן איבוד מידע זה פחות משמעותי מאשר העיוות הנגרם כתוצאה מהרעש הלבן – ניתן לראות בבירור את ההבדל הנ"ל בגרף במישור התדר.

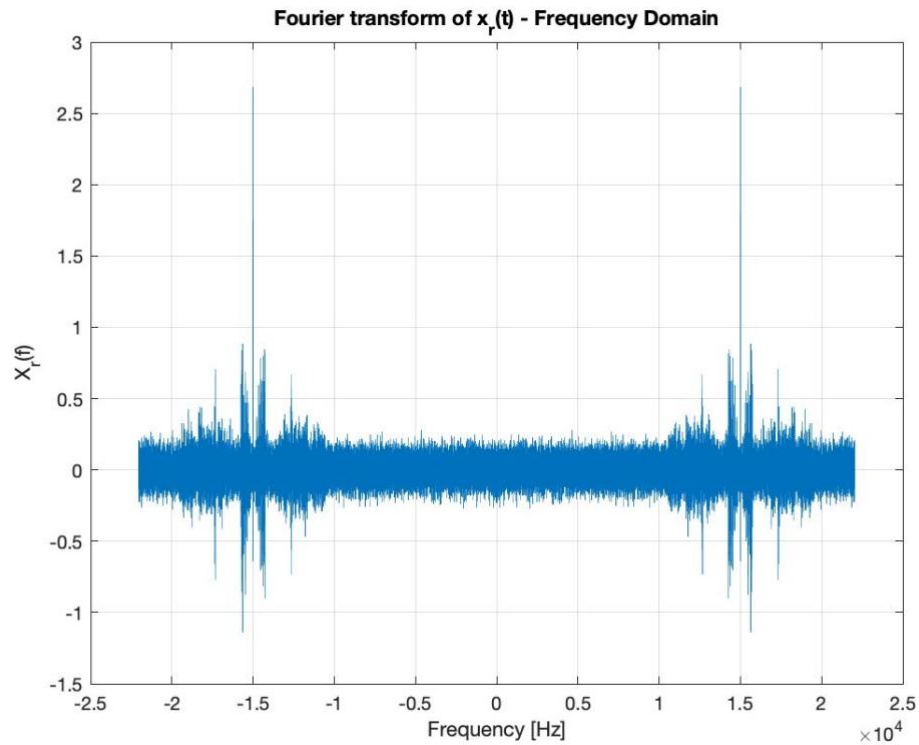
1.4.4. הקורלציה בין האות המקורי $v_m(t)$ והאות המקודד $x_d(t)$:

$$\text{Crosscorrelation}_{AM} \sqrt{\frac{N_0}{2}} = 0.02 \approx 0.9879$$

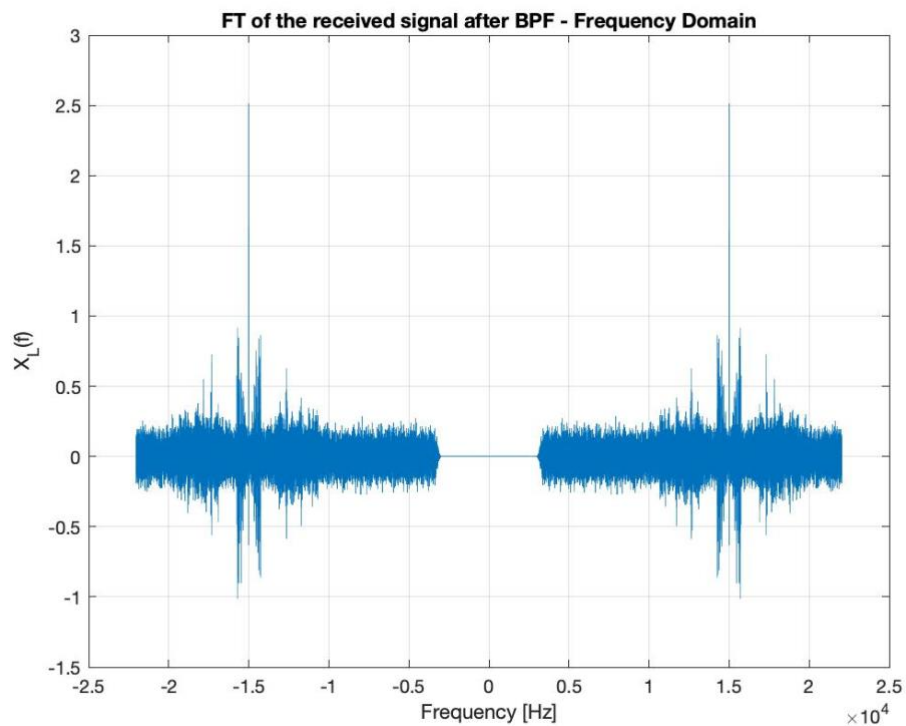
כפי שצפינו מהתבוננות בגרפים, הקורלציה בין האותות אכן גבוהה מאוד.

1.5. שינוי שיטת האפנון ופרמטר הרעש:

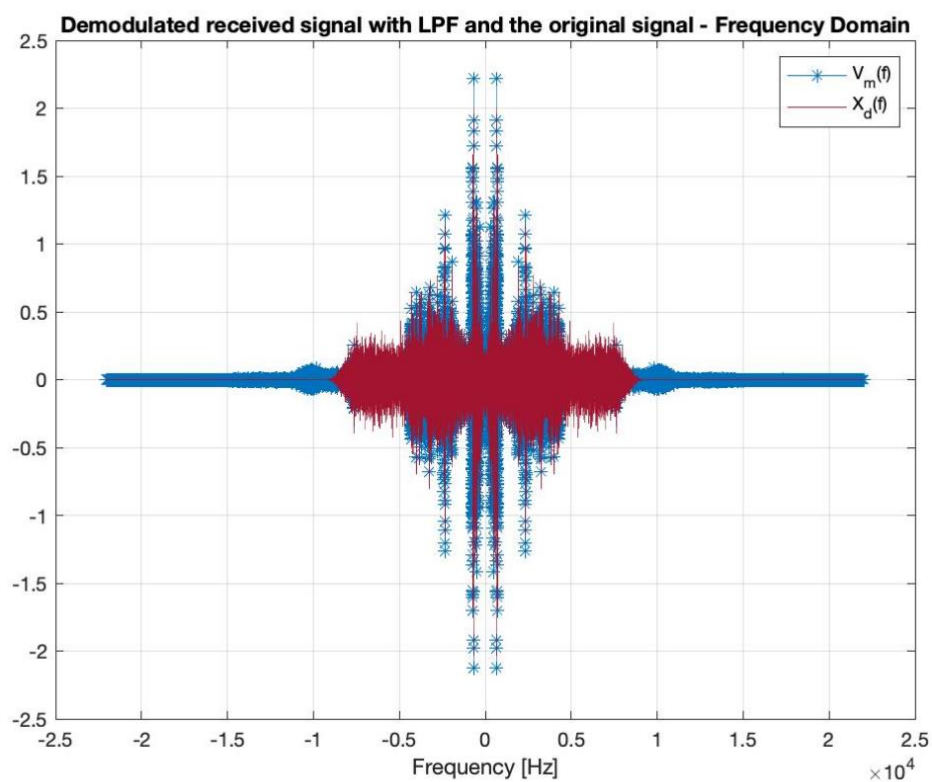
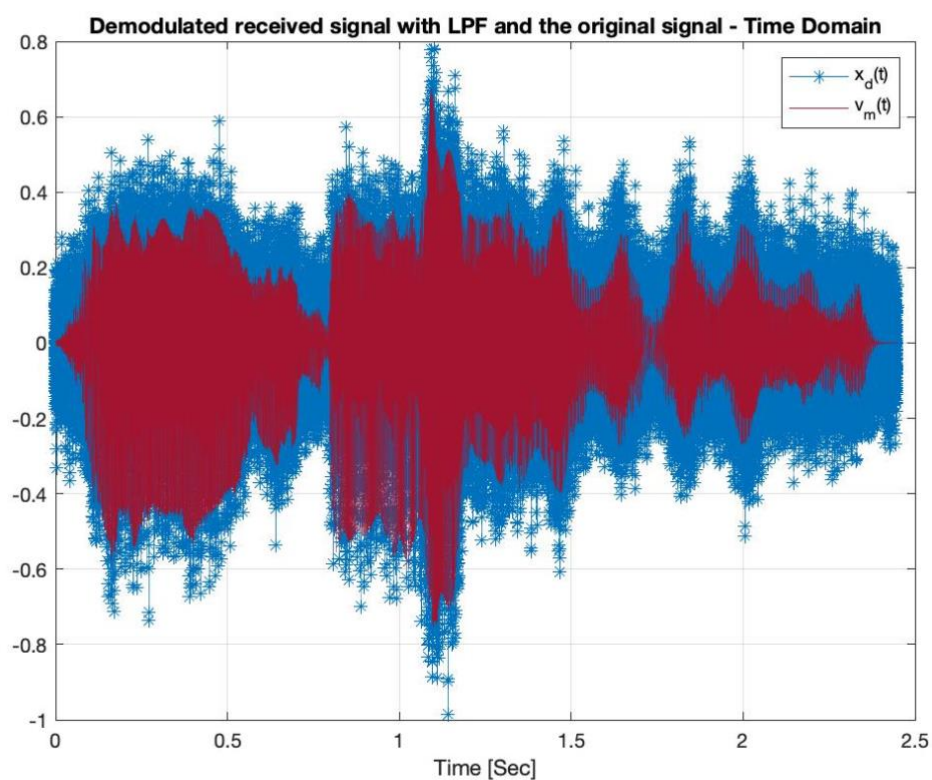
1.5.1. כעת נחזור על חלקים 1.3, 1.4, כאשר סטיית התקן של הרעש הינה: $\sqrt{\frac{N_0}{2}} = 0.1$.
התמרת פורייה של האות המתקבל $x_r(t)$, והאות לאחר מסנן BPF :



אכן ניתן לראות כי עוצמת הרעש גבוהה המתקבלת גבוהה מזו בסעיף 1.3.



האות המפוענח לאחר מסנן LPF במישור הזמן ובמישור התדר:



ע"פ הגרפים מעמוד קודם, ניתן לראות כי גם בזמן וגם בתדר יש הבדל משמעותי בין האות המפוענח לאות המקורי ולכן נצפה שהוא יישמע פחות קרוב למקור ועם יותר רעש.

$$\text{Crosscorrelation}_{AM} \sqrt{\frac{N_0}{2}} = 0.8448$$

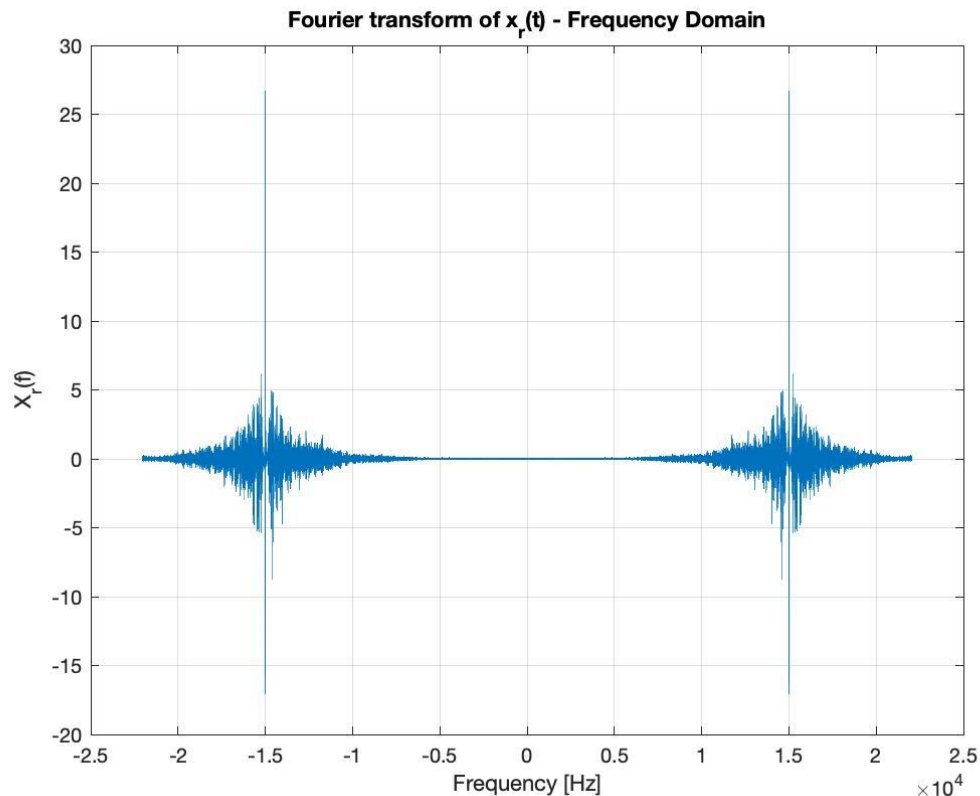
כפי שצפינו מניתוח הגרפים והשמעת האות המתקבל, האות המתקבל כעת דומה פחות לאות המקורי וניתן לראות זאת ע"י הקטנת ערך הקרוס-קורלציה בין האותות.

1.5.2. כעת נחזור על חלקים 1.3 – 1.5.1, כאשר שיטת האפנון הינה FM וסטיית התדר נתונה ע"י:

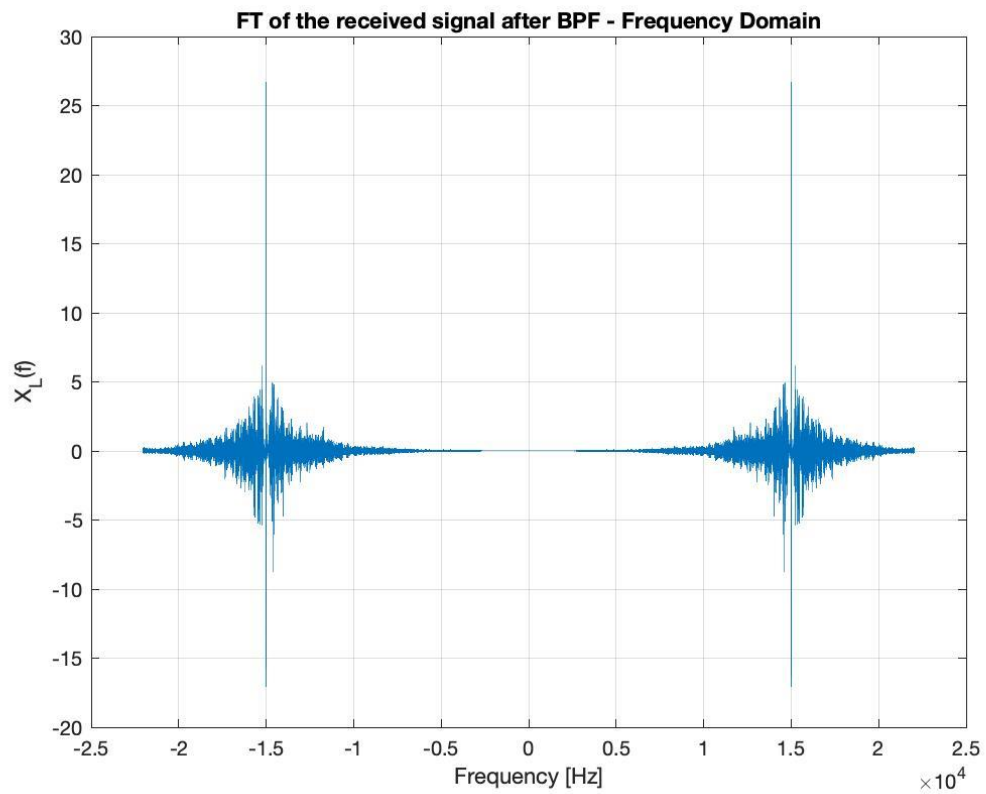
$$\Delta f_d = 10 \text{ KHz}$$

$$\sqrt{\frac{N_0}{2}} = 0.02 \text{ כאשר סטיית התקן של הרעש הינה:}$$

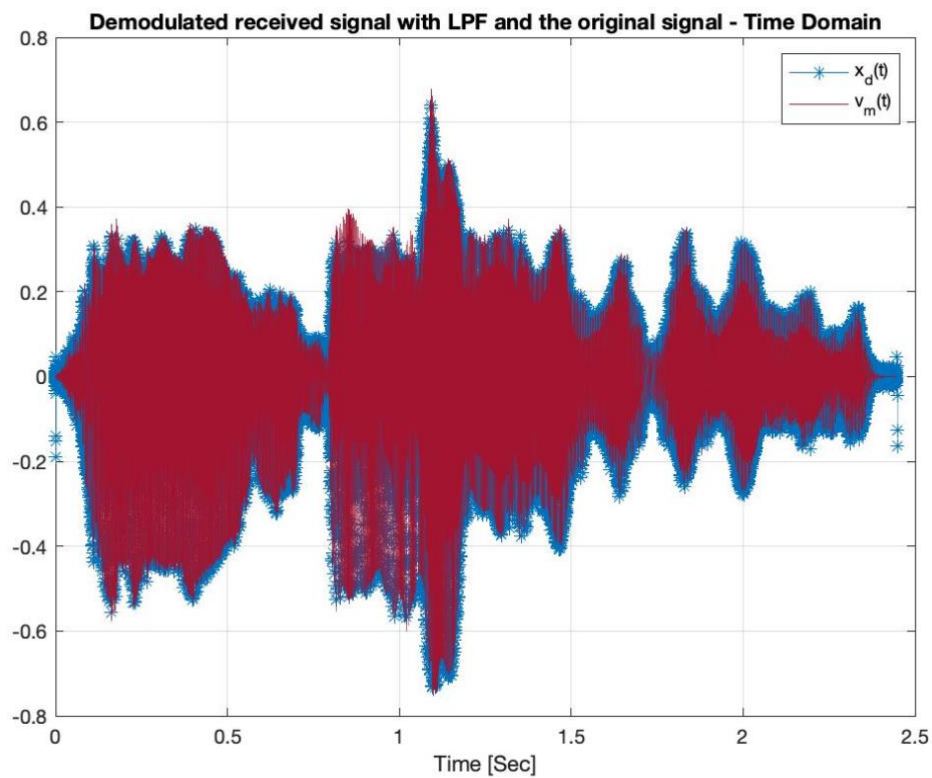
התמרת פורייה של האות המתקבל $x_r(t)$, והאות לאחר מסנן BPF :

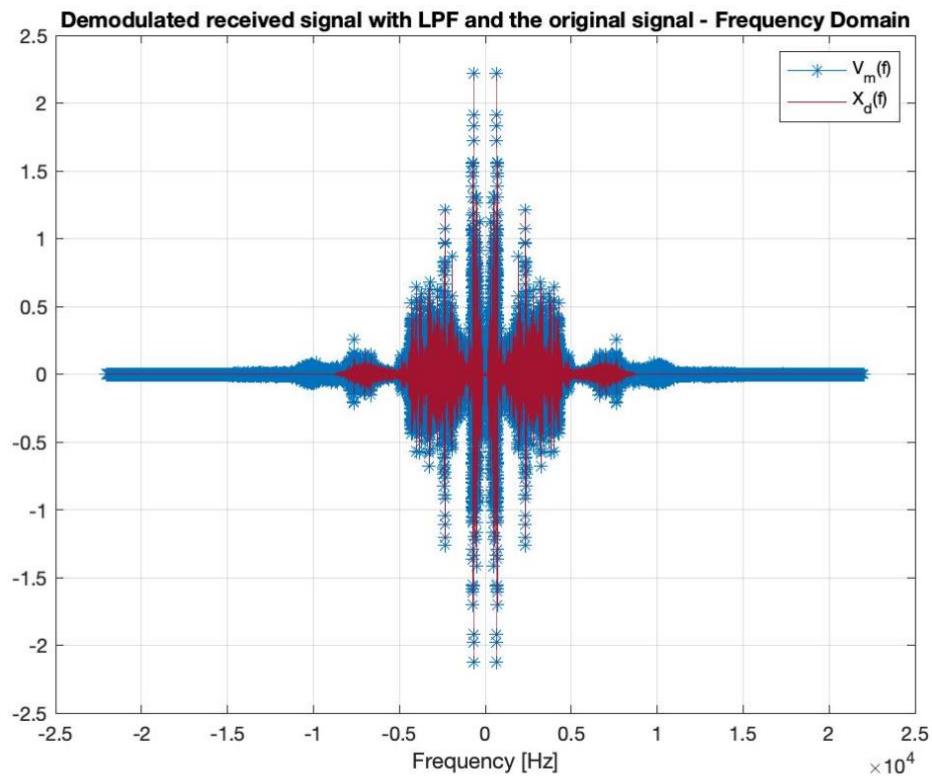


ניתן לראות כי גם לאחר הוספת הרעש, תגובת התדר נשארה יחסית זהה לתגובת התדר של האות המקורי בניגוד לתוצאה שקיבלנו באפנון AM , כלומר תוצאה זו הינה הגיונית שכן שיטת אפנון FM פחות רגישה לרעש.



האות המפוענח לאחר מסנן LPF במישור הזמן ובמישור התדר:





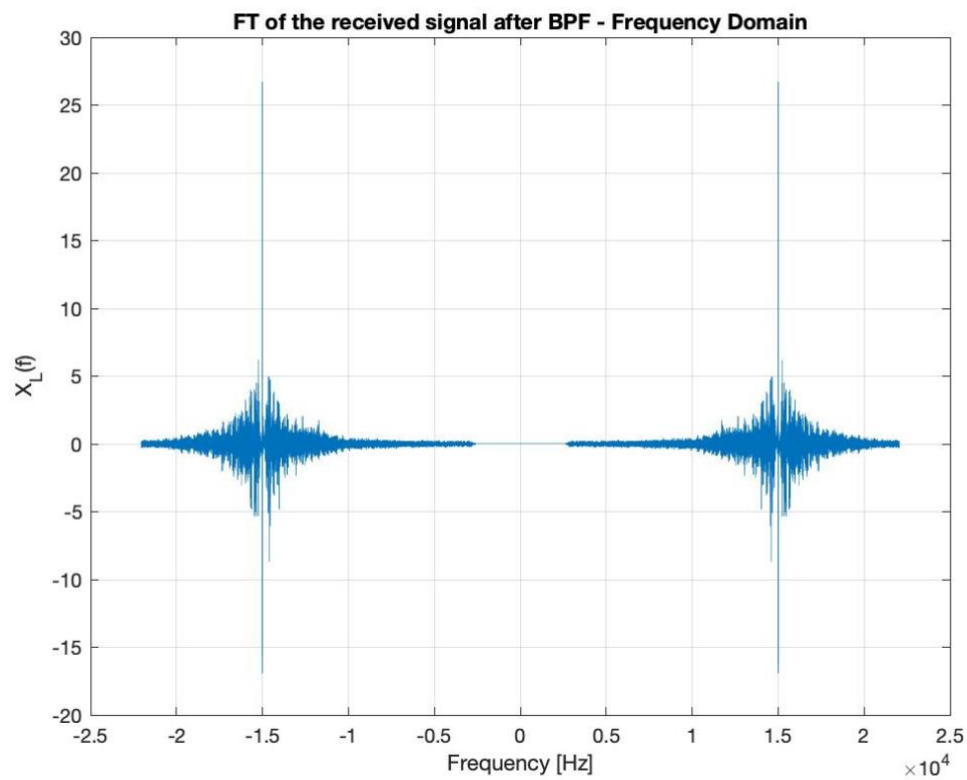
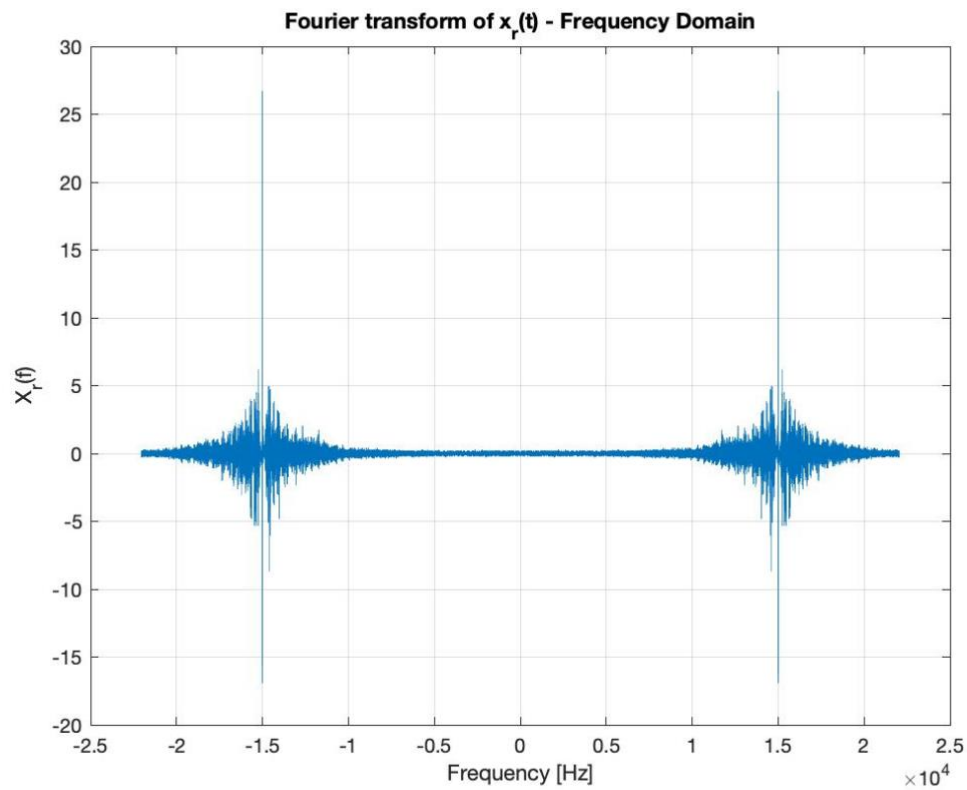
לאחר הקשבה לאות המפוענח באפנון FM עם פרמטר רעש 0.02, האות נשמע קרוב יותר לאות המקורי בהשוואה לאות המפוענח שקיבלנו באפנון AM .

$$\text{Crosscorrelation}_{FM}^{\sqrt{\frac{N_0}{2}}=0.02} \approx 0.9943$$

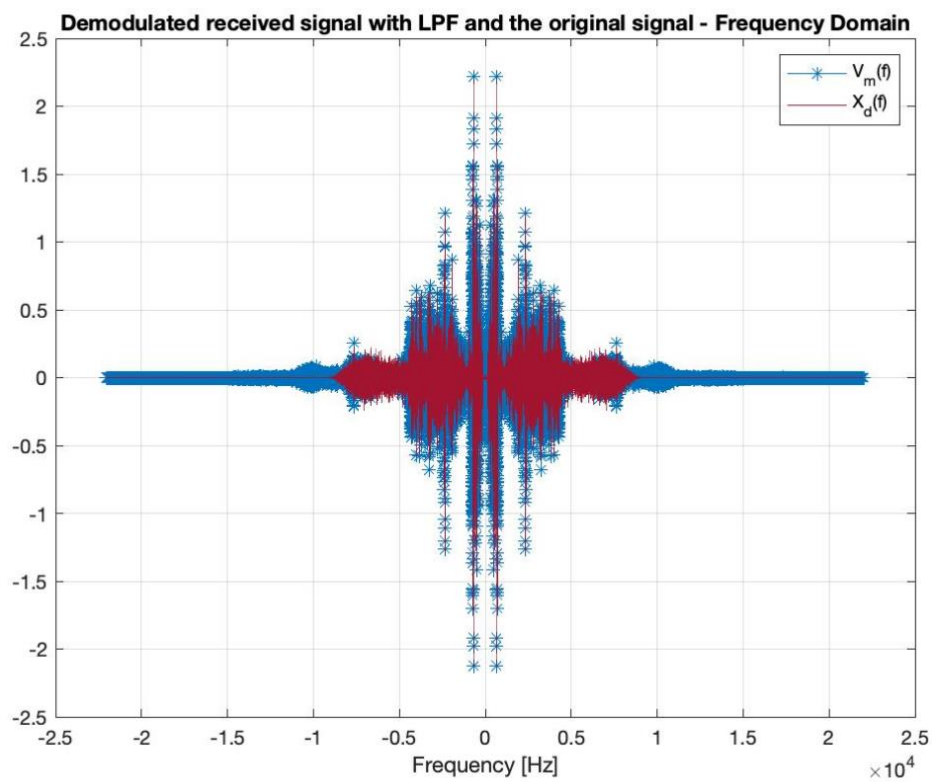
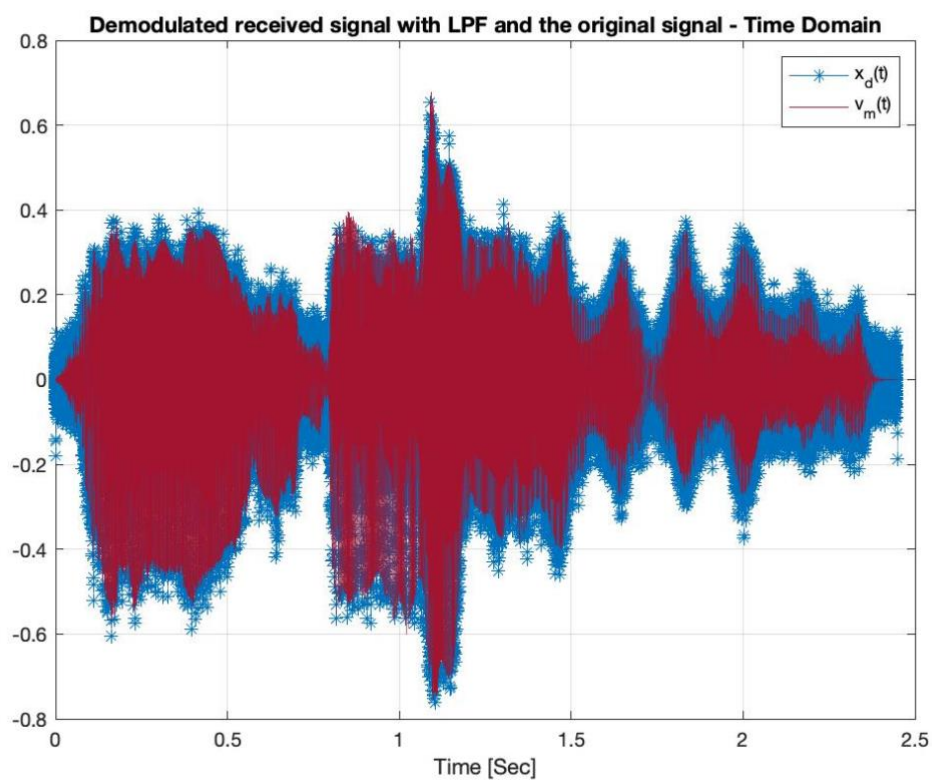
אכן קיבלנו קרוס-קורלציה גבוהה יותר מזו שקיבלנו באפנון AM עבור אותו פרמטר רעש.

כאשר סטיית התקן של הרעש הינה: $\sqrt{\frac{N_0}{2}} = 0.1$

התמרת פורייה של האות המתקבל $x_r(t)$, והאות לאחר מסנן BPF :



האות המפוענח לאחר מסנן LPF במישור הזמן ובמישור התדר:



לאחר השמעת האות המפוענח עבור אפנון FM ערך סטיית תקן של הרעש הגדול יותר, מסקנתנו הינה שאכן האות המתקבל הינו רועש יותר מהאות המקורי אך עדיין התוצאה טובה משמעותית מזו שהתקבלה עבור אפנון AM עם סטיית תקן זהה.

בהתאמה ערך הקרוס-קורלציה שקיבלנו הינו:

$$\text{Crosscorrelation}_{FM} \sqrt{\frac{N_0}{2}}=0.1 \approx 0.9640$$

כלומר, למרות שערך סטיית התקן של הרעש גדול יחסית, קיבלנו ערך קרוס-קורלציה יחסית גבוה ביחס לזה שקיבלנו עבור אפנון AM עם סטיית תקן של רעש זהה.

1.5.3. נרכז בטבלה את תוצאות הקרוס-קורלציה שחישבנו:

שיטת אפנון	ערך סטיית תקן	ערך הקרוס-קורלציה
AM	0.02	0.9879
FM	0.02	0.9943
AM	0.1	0.8448
FM	0.1	0.9640

מתוך הטבלה ניתן לראות בבירור כי ההבדלים נובעים בעיקר משיטת האפנון ועוצמת הרעש:

ניתן לראות בבירור כי כיוון שאפנון FM רגיש פחות לרעש ושתוצאותיו טובות יותר משל אפנון AM אשר מושפע באופן ישיר מעיוותי האמפליטודה הנוצרים עקב הרעש המוסף.

כאשר סטיית התקן של הרעש קטנה (זניחה יחסית), ניתן לראות כי אין הבדל מהותי בין שיטות האפנון בתוצאה המתקבלת, לעומת זאת, כאשר נגדיל את סטיית התקן של הרעש כאן כבר תתרחש פגיעה משמעותית ביכולת השחזור של האות בצד המקבל עבור אפנון AM בעוד שעבור אפנון FM אמנם נחוזה פגיעה מסוימת בקירוב לאות המקורי אך התוצאה שתתקבל עדיין טובה יחסית.

ובכל מקרה המסקנה הסופית שהרעש אכן משפיע על שתי שיטות האפנון, כאשר השפעתו על אפנון AM הינה גדולה יותר ובכל מקרה תחת הפרמטרים הנתונים אפנון FM משיג תוצאות טובות יותר.

הערה: ** קוד ה-MATLAB מצורף בסוף הקובץ **

2. PM Modulations

2.א. יהא אות מחזורי $v_m(t)$ עם זמן מחזור $T_m = \frac{1}{f_m}$ המוגדר ע"י:

$$v_m(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |t| \leq \frac{T_m}{4} \\ 0, & \frac{T_m}{4} < |t| < \frac{T_m}{2} \end{cases}$$

נניח כי $V_M(t)$ הוא אפנון פאזה (PM) עם הפרש פאזות מקסימלי $\Delta\varphi_{\max}$ נראה כי ה- lowpass equivalent של $V_M(t)$ נתון ע"י:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j2\pi f_m n t}$$

ונמצא את $\{C_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ בצורה מפורשת.

פתרון:

לפי נוסחה שפיתחנו בשיעור עבור ה- lowpass equivalent של אות מאופנן באפנון PM נראה כי:

$$V_{m(LPE)}(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{j\varphi(t)}$$

כעת נרצה לבטא את $\varphi(t)$, נראה כי לפי הגדרת אפנון PM מתקיים:

$$\varphi(t) = k_{PM} \cdot v_m(t)$$

k_{PM} מתקבל באופן הבא:

$$k_{PM} = \frac{\Delta\varphi_{\max}}{|v_m(t)|_{\max}} = \frac{\Delta\varphi_{\max}}{1} = \Delta\varphi_{\max}$$

הצבתו בביטוי המקורי:

$$V_{m(LPE)}(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{j\varphi(t)} = \frac{1}{2} \cdot e^{j \cdot \Delta\varphi_{\max} \cdot v_m(t)}$$

נשים לב כי $v_{m(LPE)}(t)$ הינו ביטוי מהצורה של אקספוננט מרוכב וככזה מהווה אות מחזורי אשר ניתן לפיתוח לטור פורייה.

נבטא את $v_m(t)$ כטור פורייה:

$$V_{m(LPE)}(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{j \cdot \Delta\varphi_{\max} \cdot v_m(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j2\pi f_m n t}$$

נראה כי הגענו לצורה הרצויה, נשאר לחשב את מקדמי הפורייה של האות:

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{T_m} \int_{t=-\frac{T_m}{2}}^{\frac{T_m}{2}} V_{m(LPE)}(t) \cdot e^{-j2\pi f_m n t} dt = \\
 &= \frac{1}{2T_m} \int_{t=-\frac{T_m}{4}}^{\frac{T_m}{4}} e^{j \cdot \Delta\varphi_{\max}} \cdot e^{-j2\pi f_m n t} dt + \frac{1}{2T_m} \int_{t=-\frac{T_m}{2}}^{-\frac{T_m}{4}} e^0 \cdot e^{-j2\pi f_m n t} dt \\
 &\quad + \frac{1}{2T_m} \int_{t=\frac{T_m}{4}}^{\frac{T_m}{2}} e^0 \cdot e^{-j2\pi f_m n t} dt = \\
 &= \frac{e^{j \cdot \Delta\varphi_{\max}}}{2T_m \cdot \left(-j2\pi \frac{1}{T_m} n\right)} \left(e^{-j2\pi \frac{1}{T_m} n \cdot \frac{T_m}{4}} - e^{j2\pi \frac{1}{T_m} n \cdot \frac{T_m}{4}} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2T_m \cdot \left(-j2\pi \frac{1}{T_m} n\right)} \left(e^{-j2\pi \frac{1}{T_m} n \cdot \frac{T_m}{2}} - e^{j2\pi \frac{1}{T_m} n \cdot \frac{T_m}{4}} \right. \\
 &\quad \left. + e^{-j2\pi \frac{1}{T_m} n \cdot \left(-\frac{T_m}{4}\right)} - e^{j2\pi \frac{1}{T_m} n \cdot \left(-\frac{T_m}{2}\right)} \right) = \\
 &= \frac{e^{j \cdot \Delta\varphi_{\max}}}{4j\pi n} \left(e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n} \right) + \frac{1}{4j\pi n} \left(e^{j\pi n} - e^{-j\pi n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n} - e^{j\frac{\pi}{2}n} \right) = \\
 &= \frac{e^{j \cdot \Delta\varphi_{\max}}}{4} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\frac{\pi}{2}n} + \frac{e^{-j\pi n}}{4} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\frac{\pi}{2}n} = \frac{(e^{j \cdot \Delta\varphi_{\max}} + e^{-j\pi n})}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} e^{\frac{j \cdot \Delta\varphi_{\max}}{2}} \cdot e^{\frac{-j\pi n}{2}} \cdot \left(e^{\frac{j \cdot (\Delta\varphi_{\max} + \pi n)}{2}} + e^{\frac{-j \cdot (\Delta\varphi_{\max} + \pi n)}{2}} \right) \frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)}{4} = \\
 &= \frac{1}{2} e^{\frac{j \cdot \Delta\varphi_{\max}}{2}} \cdot e^{\frac{-j\pi n}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2} + \frac{\pi n}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)
 \end{aligned}$$

ב. נראה כי מתקיים:

$$|C_n| = \begin{cases} \left| \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \right|, & n = 0 \\ \left| \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \right|, & n \text{ odd} \\ 0, & n \text{ even, } n \neq 0 \end{cases}$$

פתרון:

עבור $n = 0$ נציב בערך מוחלט הביטוי שקיבלנו עבור מקדמי הפורייה של הטור

$$|C_{(n=0)}| = \left| \frac{1}{2} e^{\frac{j \cdot \Delta\varphi_{\max}}{2}} \cdot e^{\frac{-j\pi n}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2} + \frac{\pi n}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \right|_{n=0} =$$

$$|C_0| = \left| \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \right|$$

עבור n זוגי שונה מאפס נציב ונקבל:

$$|C_{(n \text{ is even})}| = \left| \frac{1}{2} e^{\frac{j \cdot \Delta\varphi_{\max}}{2}} \cdot e^{\frac{-j\pi n}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2} + \frac{\pi n}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \right|_{n \text{ is even}}$$

ה- $\operatorname{sinc}(\cdot)$ מתאפס לכל n זוגי (בגלל ה- $\sin(\cdot)$) לכן מתקיים:

$$|C_{\text{even}}| = 0$$

עבור n אי זוגי נציב ונקבל:

$$|C_{(n \text{ is odd})}| = \left| \frac{1}{2} e^{\frac{j \cdot \Delta\varphi_{\max}}{2}} \cdot e^{\frac{-j\pi n}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2} + \frac{\pi n}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \right|_{n \text{ is odd}}$$

נפתח לפי זהות טריגונומטרית ונשתמש בעובדה ש- n אי-זוגי:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2} + \frac{\pi n}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \end{aligned}$$

נציב בחזרה לביטוי:

$$\begin{aligned} |C_{(n \text{ is odd})}| &= \\ \left| \frac{1}{2} e^{\frac{j \cdot \Delta\varphi_{\max}}{2}} \cdot e^{\frac{-j\pi n}{2}} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \right|_{n \text{ is odd}} &= \\ \left| \frac{1}{2} e^{\frac{j \cdot \Delta\varphi_{\max}}{2}} \cdot e^{\frac{-j\pi n}{2}} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi \frac{n}{2}} \right|_{n \text{ is odd}} &= \\ \left| \frac{1}{2} e^{\frac{j \cdot \Delta\varphi_{\max}}{2}} \cdot e^{\frac{-j\pi n}{2}} \cdot \left(\frac{-1}{\pi \frac{n}{2}} \sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) \right|_{n \text{ is odd}} &= \\ \left| \frac{1}{2} e^{\frac{j \cdot \Delta\varphi_{\max}}{2}} \cdot e^{\frac{-j\pi n}{2}} \cdot \left(\frac{-1}{\pi \frac{n}{2}} \sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) (1 - \cos(\pi n))\right) \right|_{n \text{ is odd}} &= \\ \left| \frac{-1}{\pi n} \sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \cdot 1 \right|_{n=\text{odd}} &= \left| \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \right|_{n \text{ is odd}} \end{aligned}$$

כלומר, מתקיים:

$$|C_{\text{odd}}| = \left| \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \right|$$

נסכם את התוצאות:

$$|C_n| = \begin{cases} \left| \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \right|, & n = 0 \\ \left| \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \right|, & n \text{ odd} \\ 0, & n \text{ even}, n \neq 0 \end{cases}$$

ג. נגדיר את אינדקס ה-cut-off להיות $n_c(\varepsilon) \triangleq \min \{n: |C_n| \leq \varepsilon\}$

נמצא את האינדקס כפונקציה של ε עבור:

$$\Delta\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$\Delta\varphi_{\max} \ll 1 \quad (2)$$

פתרון:

(1) נרצה למזער את $n_c(\varepsilon)$ ככל שניתן, לכן נציב את התנאי כאשר n אי זוגי:

$$|C_n| = \left| \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \varepsilon$$

$$|C_n| = \left| \frac{1}{\pi n} \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \leq \varepsilon \rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{2}\pi\varepsilon} \right| \leq n$$

על מנת להבטיח שהערך המינימלי של $n_c(\varepsilon)$ אכן מתקבל, נקבע אותו להיות הערך השלם המינימלי האפשרי עבור n :

$$n_c(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{2}\pi\varepsilon} \right\rceil$$

(2) נרצה למזער את $n_c(\varepsilon)$ ככל שניתן, לכן נציב את התנאי כאשר n אי זוגי:

$$|C_n| = \left| \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \right| \leq \varepsilon, (\Delta\varphi_{\max} \ll 1)$$

** ע"פ תכונת קירוב זוויות קטנות מתקיים: $\sin(x) \approx x$, לכן מתקיים:

$$|C_n| = \left| \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\Delta\varphi_{\max}}{2}\right) \right| \leq \varepsilon, (\Delta\varphi_{\max} \ll 1)$$

$$|C_n| = \left| \frac{\Delta\varphi_{\max}}{2\pi n} \right| \leq \varepsilon \rightarrow \left| \frac{\Delta\varphi_{\max}}{2\pi\varepsilon} \right| \leq n$$

על מנת להבטיח שהערך המינימלי של $n_c(\varepsilon)$ אכן מתקבל, נקבע אותו להיות הערך השלם המינימלי האפשרי עבור n :

$$n_c(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\Delta\varphi_{\max}}{2\pi\varepsilon} \right\rceil$$

3. AM and FM Modulations

3. נניח כי קיים אות מידע $v_m(t) = \cos(2\pi f_m t)$, האות עובר אפנון AM סביב תדר גל נושא $\bar{f} = 2f_m$ והופך לאות $z(t)$, כאשר האות הנושא הוא:

$$v_c(t) = \cos(2\pi \bar{f} t)$$

לאחר מכן האות $z(t)$ עובר אפנון FM והופך לאות $x(t)$ כאשר $f_c \gg f_m$ ומתקיים:

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi \Delta f_d \int_{-\infty}^t z(\tau) d\tau\right)$$

א. נניח כי $z(t)$ הוא אפנון SSB של $v_m(t)$, נמצא את אורך הגל של $x(t)$ ע"י שימוש בחוק קרסון ונתחשב בשתי השיטות ($USSB, LSSB$).

פתרון:

• עבור $USSB$:

לפי נוסחת אפנון $USSB$ שלמדנו בכיתה מתקיים:

$$\begin{aligned} z(t) &= v_m \cdot \cos(2\pi \bar{f} t) - \widehat{v_m} \cdot \sin(2\pi \bar{f} t) = \\ &= v_m \cdot \cos(2\pi \bar{f} t) - H\{v_m\} \cdot \sin(2\pi \bar{f} t) = \\ &= \cos(2\pi f_m t) \cdot \cos(2\pi \bar{f} t) - \cos\left(2\pi f_m t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(2\pi \bar{f} t) = \\ &= \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi \cdot 2f_m \cdot t) - \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi \cdot 2f_m \cdot t) = \\ &= \frac{\cos(2\pi \cdot 3f_m \cdot t) + \cos(2\pi \cdot (-f_m) \cdot t) - \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 3f_m \cdot t)}{2} \\ z(t) &= \cos(2\pi \cdot 3f_m \cdot t) \end{aligned}$$

לפי הפיתוח קיבלנו כי $z(t)$ הינה פונקציית קוסינוס עם תדר של $3f_m$, לפי תנאי השאלה $x(t)$ הינו אות המתקבל כתוצאה מאפנון FM על $z(t)$, לכן, לפי נוסחת קרסון על אות הרמוני נוכל לחשב את רוחב הפס של $x(t)$:

$$\begin{aligned} B_{USSB} &= 2 \cdot f_{Module} \left(1 + \beta_{f_{Module}}\right) = 2 \cdot 3f_m \cdot \left(1 + \frac{\Delta f_d}{3f_m}\right) \\ B_{USSB} &= 6f_m + 2\Delta f_d \end{aligned}$$

• עבור LSSB:

לפי נוסחת אפנון LSSB שלמדנו בכיתה מתקיים:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= v_m \cdot \cos(2\pi \bar{f}t) + \widehat{v_m} \cdot \sin(2\pi \bar{f}t) = \\
 &= v_m \cdot \cos(2\pi \bar{f}t) + H\{v_m\} \cdot \sin(2\pi \bar{f}t) = \\
 &= \cos(2\pi f_m t) \cdot \cos(2\pi \bar{f}t) + \cos\left(2\pi f_m t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(2\pi \bar{f}t) = \\
 &= \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi \cdot 2f_m \cdot t) + \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi \cdot 2f_m \cdot t) = \\
 &= \frac{\cos(2\pi \cdot 3f_m \cdot t) + \cos(2\pi \cdot (-f_m) \cdot t) + \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t) - \cos(2\pi \cdot 3f_m \cdot t)}{2} \\
 z(t) &= \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t)
 \end{aligned}$$

לפי הפיתוח קיבלנו כי $z(t)$ הינה פונקציית קוסינוס עם תדר של f_m , בדומה לסעיף הקודם, $x(t)$ הינו אות המתקבל כתוצאה מאפנון FM על $z(t)$, לכן, לפי נוסחת קרסון על אות הרמוני נוכל לחשב את רוחב הפס של $x(t)$:

$$\begin{aligned}
 B_{LSSB} &= 2 \cdot f_{Module} (1 + \beta_{f_{Module}}) = 2 \cdot f_m \cdot \left(1 + \frac{\Delta f_d}{f_m}\right) \\
 B_{LSSB} &= 2f_m + 2\Delta f_d
 \end{aligned}$$

ב. בסעיף זה נניח כי $z(t)$ הוא אפנון DSB של $v_m(t)$, נמצא ביטוי מפורש לאות של $X(f)$:

לפי נוסחת אפנון DSB שלמדנו בכיתה מתקיים:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= v_m(t) \cdot \cos(2\pi \bar{f}t) = \cos(2\pi f_m t) \cdot \cos(2\pi \cdot 2f_m \cdot t) = \\
 z(t) &= \frac{1}{2} \cos(2\pi \cdot 3f_m \cdot t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t) \\
 x(t) &= \cos\left(2\pi f_c t + \pi \Delta f_d \int_{\tau=-\infty}^t (\cos(2\pi \cdot 3f_m \cdot \tau) + \cos(2\pi \cdot f_m \cdot \tau)) d\tau\right) \\
 &= \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\Delta f_d}{6f_m} \sin(2\pi \cdot 3f_m \cdot t) + \frac{\Delta f_d}{2f_m} \sin(2\pi \cdot f_m \cdot t)\right) \\
 \Rightarrow x(t) &= \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\Delta f_d}{6f_m} \sin(2\pi \cdot 3f_m \cdot t) + \frac{\Delta f_d}{2f_m} \sin(2\pi \cdot f_m \cdot t)\right)
 \end{aligned}$$

לפי נוסחה שפיתחנו בשיעור עבור ה- *lowpass equivalent* של אות מאופק באופן FM, נראה כי:

$$v_{x(LPE)}(t) = e^{j\varphi(t)}$$

נראה כי $x(t)$ הוא אות קוסינוס עם פאזה:

$$\varphi(t) = \frac{\Delta f_d}{6f_m} \sin(2\pi \cdot 3f_m \cdot t) + \frac{\Delta f_d}{2f_m} \sin(2\pi \cdot f_m \cdot t)$$

נציב בנוסחה ונקבל:

$$\begin{aligned} v_{x(LPE)}(t) &= e^{j\left(\frac{\Delta f_d}{6f_m} \sin(2\pi \cdot 3f_m \cdot t) + \frac{\Delta f_d}{2f_m} \sin(2\pi \cdot f_m \cdot t)\right)} = \\ &= e^{j\frac{\Delta f_d}{6f_m} \sin(2\pi \cdot 3f_m \cdot t)} \cdot e^{j\frac{\Delta f_d}{2f_m} \sin(2\pi \cdot f_m \cdot t)} = (*) \end{aligned}$$

נראה כי כל אקספוננט בנפרד הוא פונקציה הרמונית, לכן ניתן לפיתוח לטור פורייה:

$$\begin{aligned} e^{j\frac{\Delta f_d}{2f_m} \sin(2\pi \cdot f_m \cdot t)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j2\pi f_m n t} \\ C_n &= f_m \int_{t=-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} e^{j\frac{\Delta f_d}{2f_m} \sin(2\pi \cdot f_m \cdot t)} e^{-j2\pi f_m n t} dt = \\ (m = 2\pi \cdot f_m \cdot t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} e^{j\frac{\Delta f_d}{2f_m} \sin(m)} e^{-jnm} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} e^{j\left(\frac{\Delta f_d}{2f_m} \sin(m) - nm\right)} dt = J_n\left(\frac{\Delta f_d}{2f_m}\right) \end{aligned}$$

ובאופן דומה:

$$\begin{aligned} e^{j\frac{\Delta f_d}{6f_m} \sin(2\pi \cdot 3f_m \cdot t)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j2\pi \cdot 3f_m n t} \\ C_n &= 3f_m \int_{t=-\frac{1}{6f_m}}^{\frac{1}{6f_m}} e^{j\frac{\Delta f_d}{6f_m} \sin(2\pi \cdot 3f_m \cdot t)} e^{-j2\pi \cdot 3f_m n t} dt = \\ (m = 2\pi \cdot 3f_m \cdot t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\frac{1}{6f_m}}^{\frac{1}{6f_m}} e^{j\frac{\Delta f_d}{6f_m} \sin(m)} e^{-jnm} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\frac{1}{6f_m}}^{\frac{1}{6f_m}} e^{j\left(\frac{\Delta f_d}{6f_m} \sin(m) - nm\right)} dt = J_n\left(\frac{\Delta f_d}{6f_m}\right) \end{aligned}$$

כעת נציב חזרה במשוואה (*) :

$$\begin{aligned}
 v_{x(\text{LPE})}(t) &= e^{j\frac{\Delta f_d}{6f_m} \sin(2\pi \cdot 3f_m \cdot t)} \cdot e^{j\frac{\Delta f_d}{2f_m} \sin(2\pi \cdot f_m \cdot t)} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{\Delta f_d}{2f_m}\right) \cdot J_n\left(\frac{\Delta f_d}{6f_m}\right) \cdot e^{j2\pi f_m k t} \cdot e^{j2\pi 3f_m n t} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{\Delta f_d}{2f_m}\right) \cdot J_n\left(\frac{\Delta f_d}{6f_m}\right) \cdot e^{j2\pi f_m (k+3n)t} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{\Delta f_d}{2f_m}\right) \cdot J_n\left(\frac{\Delta f_d}{6f_m}\right) \cdot e^{j2\pi f_m (k+3n)t} \rightarrow (Fourier)
 \end{aligned}$$

$$V_{x(\text{LPE})}(f) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_m\left(\frac{\Delta f_d}{2f_m}\right) \cdot J_n\left(\frac{\Delta f_d}{6f_m}\right) \cdot \delta(f - f_m(k + 3n))$$

$$X(f) = V_{x(\text{LPE})}(f - f_c) + V_{x(\text{LPE})}^*(-f - f_c) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_m\left(\frac{\Delta f_d}{2f_m}\right) \cdot J_n\left(\frac{\Delta f_d}{6f_m}\right) \cdot \\
 &\cdot \left(\delta\left(f - (f_c + f_m(k + 3n))\right) + \delta\left(f + (f_c + f_m(k + 3n))\right) \right)
 \end{aligned}$$

```
%-----AM and FM Modulation-----
%
[v_m,fs] = audioread('in-the-air.wav');
v_m = v_m(:,1);
%sound(v_m,fs);
Ts = 1/fs;
N = length(v_m);
t = 0:Ts:(N-1)*Ts;
f = linspace(-fs/2,fs/2,N);
V_m = fftshift(fft(v_m))/sqrt(N);
```

```
%-----1.1-----
figure('Name','Question: 1.1.1');
subplot(2,1,1);
plot(t,v_m,color='#0072BD');
grid();
title('Input Signal - Time Domain');
xlabel('Time [Sec]');
ylabel('v_m(t)');
subplot(2,1,2);
plot(f,V_m,color='#0072BD');
grid();
title('Input Signal - Frequency Domain');
xlabel('Frequency [Hz]');
ylabel('V_m(f)');
```

```
%----1.1.2----
f_c = 15*10^3;
fm = 1.15*10^4;
BW = fm;
```

```
%-----1.2-----
% -----|
% Parameters: k_FM = 0.02, noise = 0 |
% -----|
figure('Name','Question: 1.2.2');
title_1_2 = 'AM with carrier modulation - Frequency Domain';
v_AM = mod_with_noise(v_m,1,0,N,f,fs,f_c,0.02,title_1_2,'V_A_M(f)');
```

```
%----1.2.3----
%sound(v_AM,fs);
```

```

%-----1.3-----
% -----|
% Parameters: k_AM = 0.02, noise = 0.02 |
% -----|
figure('Name','Question: 1.3.2');
title_1_3 = 'Fourier transform of x_r(t) - Frequency Domain';
x_r = mod_with_noise(v_m,1,0.02,N,f,fs,f_c,0.02,title_1_3,'X_r(f)');
%sound(x_r,fs);

```

```

%-----1.4-----
%----1.4.1----
x_L = bandpass(x_r,[f_c-fm f_c+fm],fs);
X_L = fftshift(fft(x_L))/sqrt(N);
figure('Name','Question: 1.4.1');
plot(f,X_L,color='#0072BD');
grid();
title('FT of the received signal after BPF - Frequency Domain');
xlabel('Frequency [Hz]');
ylabel('X_L(f)');

```

```

%----1.4.2----
title_time = ['Demodulated received signal with LPF and the original ' ...
'signal - Time Domain'];
title_freq = ['Demodulated received signal with LPF and the original ' ...
'signal - Frequency Domain'];
x_d_LPF = demod_and_compare(x_L,1,v_m,V_m,t,N,f,fs,f_c,0.02,title_time, ...
title_freq,'Question: 1.4.2');

```

```

%----1.4.3----
%sound(x_d_LPF,fs);

```

```

%----1.4.4----
xcorr_AM_z1 = xcorr(x_d_LPF,v_m,0,'coeff');

```

```

%-----1.5-----
% -----|
% Parameters: k_AM = 0.02, noise = 0.1 |
% -----|
%----1.5.1::1.3----
figure('Name','Question: 1.5.1::1.3');
title_1_5_1_1_3 = 'Fourier transform of x_r(t) - Frequency Domain';
x_r = mod_with_noise(v_m,1,0.1,N,f,fs,f_c,0.02,title_1_5_1_1_3,'X_r(f)');

```

```
%----1.5.1::1.4.1----
x_L = bandpass(x_r,[f_c-fm f_c+fm],fs);
X_L = fftshift(fft(x_L))/sqrt(N);
figure('Name','Question: 1.5.1::1.4.1');
plot(f,X_L,color='#0072BD');
grid();
title('FT of the received signal after BPF - Frequency Domain');
xlabel('Frequency [Hz]');
ylabel('X_L(f)');
```

```
%----1.5.1::1.4.2----
title_time = ['Demodulated received signal with LPF and the original ' ...
'signal - Time Domain'];
title_freq = ['Demodulated received signal with LPF and the original ' ...
'signal - Frequency Domain'];
x_d_LPF = demod_and_compare(x_L,1,v_m,V_m,t,N,f,fs,f_c,0.02,title_time, ...
title_freq,"Question: 1.5.1::1.4.2");
```

```
%----1.5.1::1.4.3----
%sound(x_d_LPF,fs);
```

```
%----1.5.1::1.4.4----
xcorr_AM_z2 = xcorr(x_d_LPF,v_m,0,'coeff');
% -----
```

```
% -----|
% Parameters: k_FM = 0.02, noise = 0.02 |
% -----|
%----1.5.2::1.3----
figure('Name','Question: 1.5.2::1.3');
title_1_5_2_1_3 = 'Fourier transform of x_r(t) - Frequency Domain';
x_r = mod_with_noise(v_m,2,0.02,N,f,fs,f_c,0.02,title_1_5_2_1_3,'X_r(f)');
```

```
%----1.5.2::1.4.1----
x_L = bandpass(x_r,[f_c-fm f_c+fm],fs);
X_L = fftshift(fft(x_L))/sqrt(N);
figure('Name','Question: 1.5.2::1.4.1');
plot(f,X_L,color='#0072BD');
grid();
title('FT of the received signal after BPF - Frequency Domain');
xlabel('Frequency [Hz]');
ylabel('X_L(f)');
```



```
%----1.5.2::1.4.2----
title_time = ['Demodulated received signal with LPF and the original ' ...
'signal - Time Domain'];
title_freq = ['Demodulated received signal with LPF and the original ' ...
'signal - Frequency Domain'];
x_d_LPF = demod_and_compare(x_L,2,v_m,V_m,t,N,f,fs,f_c,0.02,title_time, ...
title_freq,"Question: 1.5.2::1.4.2");
```

```
%----1.5.2::1.4.3----
%sound(x_d_LPF,fs);
```

```
%----1.5.2::1.4.4----
xcorr_FM_z1 = xcorr(x_d_LPF,v_m,0,'coeff');
% -----
```

```
% -----
% Parameters: k_FM = 0.02, noise = 0.1 |
% -----
%----1.5.2::1.5.1::1.3----
figure('Name','Question: 1.5.2::1.5.1::1.3');
title_1_5_2_1_3 = 'Fourier transform of x_r(t) - Frequency Domain';
x_r = mod_with_noise(v_m,2,0.1,N,f,fs,f_c,0.02,title_1_5_2_1_3,'X_r(f)');
```

```
%----1.5.2::1.5.1::1.4.1----
x_L = bandpass(x_r,[f_c-fm f_c+fm],fs);
X_L = fftshift(fft(x_L))/sqrt(N);
figure('Name','Question: 1.5.2::1.5.1::1.4.1');
plot(f,X_L,color='#0072BD');
grid();
title('FT of the received signal after BPF - Frequency Domain');
xlabel('Frequency [Hz]');
ylabel('X_L(f)');
```

```
%----1.5.2::1.5.1::1.4.2----
title_time = ['Demodulated received signal with LPF and the original ' ...
'signal - Time Domain'];
title_freq = ['Demodulated received signal with LPF and the original ' ...
'signal - Frequency Domain'];
x_d_LPF = demod_and_compare(x_L,2,v_m,V_m,t,N,f,fs,f_c,0.02,title_time, ...
title_freq,"Question: 1.5.2::1.5.1::1.4.2");
```

```
%----1.5.2::1.5.1::1.4.3----
%sound(x_d_LPF,fs);
```

```
%----1.5.2::1.5.1::1.4.4----
xcorr_FM_z2 = xcorr(x_d_LPF,v_m,0,'coeff');
```

```

%-----
%----- Functions -----
%-----
function x_r = mod_with_noise(v_m,modtype,noise,N,f,fs,f_c,k,plt_title,y_label)
    z_t = noise*randn(1,N).';
    if isequal(modtype,1)
        % AM Modulation - Type 1:
        v_AM = ammod(v_m,f_c,fs,0,k);
        x_r = v_AM + z_t;
    else
        % FM Modulation - Type 2:
        f_d = 10*10^3;
        v_FM = fmmod(v_m,f_c,fs,f_d);
        x_r = v_FM + z_t;
    end
    X_r = fftshift(fft(x_r))/sqrt(N);
    plot(f,X_r, color='#0072BD');
    title(plt_title);
    grid();
    xlabel('Frequency [Hz]');
    ylabel(y_label);
end
function x_d_LPF = demod_and_compare(x_L,demodtype,v_m,V_m,t,N,f,fs,f_c,k, ...
    title_time,title_freq,qnum)
    if isequal(demodtype,1)
        % AM Demodulation - Type 1:
        x_d = amdemod(x_L,f_c,fs,0,k);
        x_d_LPF = lowpass(x_d,0.7*10^4,fs);
    else
        % FM Demodulation - Type 2:
        f_d = 10*10^3;
        x_d = fmdemod(x_L,f_c,fs,f_d);
        x_d_LPF = lowpass(x_d,0.7*10^4,fs);
    end
    figure('Name',qnum+'.1');
    plot(t,x_d_LPF,color='#0072BD',marker='*');
    grid();
    title(title_time);
    xlabel('Time [Sec]');
    hold on;
    plot(t,v_m,color='#A2142F');
    legend('x_d(t)', 'v_m(t)');
    X_d_LPF = fftshift(fft(x_d_LPF))/sqrt(N);
    figure('Name',qnum+'.2');
    plot(f,V_m,color='#0072BD', marker='*');
    grid();
    title(title_freq);
    xlabel('Frequency [Hz]');
    hold on;
    plot(f,X_d_LPF,color='#A2142F');
    legend('V_m(f)', 'X_d(f)');
end

```